ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

ΜΙΧΑΗΛ ΤΣΙΡΩΝΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2020

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

Εγκρίθηκε την 14/11/2019 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

1. Μπεληγιαννης Αποστολος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)
2. Αποστολος Θωμα, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
3. Σταυρος Παπαδακης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Μιχαήλ Τσιρώνης

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η γλώσσα των Μαθηματικών, αλλά και η εσωτερική δομή και ο τρόπος προσέγγισης των Μαθηματικών εννοιών άλλαξαν στα μέσα του Εικοστού αιώνα, ακολουθώντας μια φυσική εξελικτική διαδικασία. Αρχικά οι S. Eilenberg και S. Mac Lane, εμπνεόμενοι από διάφορα προβλήματα της Αλγεβρικής Τοπολογίας και της Θεωρίας Αναπαραστάσεων, εισήγαγαν την έννοια της κατηγορίας το 1945, αλλά ήταν οι ιδέες του Grothendieck, οι οποίες κατέδειξαν για πρώτη φορά τη σπουδαιότητα της Θεωρίας Κατηγοριών είτε αυτόνομα είτε σε διάφορα πλαίσια. Η Θεωρία Κατηγοριών, αποτελεί σε ένα πρώτο επίπεδο μία γλώσσα ομογενοποίησης ορισμένων φαινομενικά εντελώς διαφορετικών μαθηματικών δομών. Σε ένα δεύτερο επίπεδο η έννοια της κατηγορίας μας βοηθάει στον εντοπισμό «κρυμμένων» πληροφοριών σε διάφορες μαθηματικές δομές καθώς και στην επινόηση του κατάλληλου εννοιολογικού πλαισίου τυποποίησης ενός Μαθηματικού προβλήματος με σκοπό την επίλυσή του. Από την άλλη πλευρά η κατηγορική θεώρηση πολλών μαθηματικών εννοιών απετέλεσε το σημαντικότερο βήμα για την επινόηση και ανάπτυξη σπουδαίων θεωριών, όπως για παράδειγμα η Ομολογική Άλγεβρα, οι οποίες συνέβαλαν αποφασιστικά στην επίλυση σημαντικών προβλημάτων. Αλλάζοντας κανείς λίγο την προοπτική με την οποία μελετάει κάποια δομή, όπως για παράδειγμα έναν τοπολογικό χώρο, ή ακόμα και ένα γράφημα, μπορεί να παρατηρήσει πολλές ομοιότητες μεταξύ αυτών των δομών. Για παράδειγμα, πολλές φορές δεν είναι σημαντική η μελέτη ενός αντικειμένου αυτού καθ' αυτού, αλλά η μελέτη των αλληλεπιδράσεών του (μορφισμών) με άλλα αντικείμενα. Οι παραπάνω διαδικασίες είναι πολύ σημαντικές για την κατανόηση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών, από την Αλγεβρική Τοπολογία και τη Θεωρία Αναπαραστάσεων μέχρι την Θεωρία Αριθμών και Αλγεβρική Γεωμετρία.

Ωστόσο για την ανάπτυξη μίας ουσιώδους θεωρίας είναι σημαντικό να εστιάζουμε και στις εφαρμογές της. Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε ότι κατηγορίες ειδικού τύπου, όπως για παράδειγμα οι αβελιανές κατηγορίες, αποτελούν σημαντικό πεδίο μελέτης, καθώς πολλές βασικές μαθηματικές δομές μπορούμε να τις δούμε ως αβελιανές κατηγορίες ή ως μέρη μιας αβελιανής κατηγορίας από τη μια πλευρά και από την άλλη πλευρά οι αβελιανές κατηγορίες συνιστούν το καταλληλότερο εννοιολογικό πλαίσιο για την ανάπτυξη άλλων θεωριών, όπως για παράδειγμα η Ομολογικής Άλγεβρα. Τη σπουδαιότητα αυτών των κατηγοριών υπέδειξε ο Grothendieck σε ένα διάσημο άρθρο του το 1957, βλέπε [7], το οποίο έμεινε γνωστό ως Tohoku paper, και στο οποίο, με σκοπό την ανάπτυξη της συνομολογικής θεωρίας σχημάτων στην Αλγεβρική Γεωμετρία, τυποποίησε τα βασικά αξιώματα τα οποία μία κατηγορία οφείλει να ικανοποιεί για να έχει «καλή συμπεριφορά». Δύο από τα σημαντικότερα παραδείγματα αβελιανών κατηγοριών είναι τα εξής:

- Εάν R είναι ένας δακτύλιος, τότε η κατηγορία των αριστερών R-προτύπων είναι αβελιανή κατηγορία, ιδιαίτερα η κατηγορία όλων των αβελιανών ομάδων είναι αβελιανή κατηγορία.

- Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε η κατηγορία όλων των sheaves αβελιανών ομάδων επί του X, αποτελεί μία αβελιανή κατηγορία.

Οι παραπάνω αβελιανές κατηορίες, όπως απέδειξε ο Grothendieck, έχουν την επιπρόσθετη ιδιότητα ότι έχουν αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, γεγονός καθοριστικής σημασίας για τη μελέτη τους. Ωστόσο όπως μπορεί κανείς να δει μελετώντας βαθύτερα προβλήματα Ομολογικής Άλγεβρας με ρίζες στην Αλγεβρική Γεωμετρία και στην Ευσταθή Αλγεβρική Τοπολογία, σε πολλές περιπτώσεις η έννοια της αβελιανής κατηγορίας είναι σχετικά περιορισμένη και υπάρχει ανάγκη επέκτασης της μελέτης ενός προβλήματος σε γενικότερο πλαίσιο. Με βάση την ανάγκη θεμελίωσης της δυϊκότητας που φέρει το όνομά του στην Αλγεβρική Γεωμετρία, ο Grothendieck περιέγραψε το κατάλληλο πλαίσιο ανάπτυξής της: την έννοια της παραγόμενης κατηγορίας η οποία αποτελεί το σημαντικότερο παράδειγμα τριγωνισμένης κατηγορίας. Η υλοποίηση του προγράμματος του Grothendieck ανατέθηκε στον μαθητή του J.L. Verdier, ο εισήγαγε την έννοια των τριγωνισμένων κατηγοριών στην διδακτορική του διατριβή. Ουσιαστικά μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι μία προσθετική κατηγορία, μαζί με έναν αυτομορφισμό $\Sigma\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, ο οποίος ονομάζεται translation συναρτητής, και μία συλλογή διαγραμμάτων της μορφής

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$

τα οποία ονομάζονται διακεκριμένα τρίγωνα και ικανοποιούν κάποια αξιώματα. Αυτά τα διακεκριμένα τρίγωνα, μαζί με τα αξιώματά τους, αποτελούν ουσιαστικά το ανάλογο των σύντομων ακριβών ακολουθιών σε μια αβελιανή κατηγορία.

Μετά το 1990 παρατηρήθηκε ωστόσο, ότι διάφορες κλάσεις τριγωνισμένων κατηγοριών, όπως για παράδειγμα οι συμπαγώς παραγόμενες κατηγορίες, είναι ιδιαίτερα χρήσιμες, καθώς τότε, για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα, το Θεωρήματα Αναπαραστασιμότητας του Brown και το Θεώρημα τοπικοποίησης του Thomason, τα οποία αποδείχτηκαν από τον Neeman, βλέπε [17]. Με την έννοια συμπαγώς παραγόμενη κατηγορία, εννοούμε μία τριγωνισμένη κατηγορία, η οποία έχει άπειρα συνγινόμενα (coproducts) και ένα σύνολο από συμπαγείς γεννήτορες. Θυμίζουμε ότι συμπαγή αντικείμενα σε μία κατηγορία $\mathcal{T}$ η οποία έχει άπειρα συνγινόμενα είναι εκείνα τα αντικείμενα X, για τα οποία κάθε μορφισμός $X \to \coprod_{i\in I} Y_i$, αναλύεται μέσω ενός πεπερασμένου συνγινομένου. Επίσης θα λέμε ότι ένα σύνολο αντικειμένων S της $\mathcal{T}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων της $\mathcal{T}$ αν ένα αντικείμενο X είναι το μηδενικό αν δεν υπάρχει μη-μηδενικό μορφισμός από ένα αντικείμενο του συνόλου S στο X. Μερικά σημαντικά ικά παραδείγματα συμπαγών παραγόμενων κατηγοριών είναι τα εξής:

- Η ευσταθής ομοτοπική κατηγορία των spectra στην Αλγεβρική Τοπολογία.
- Η παραγόμενη κατηγορία ενός δακτυλίου.
- Η ευσταθής κατηγορία ενός Quasi-Frobenius δακτυλίου, για παράδειγμα της ομάδας άλγεβρας μιας πεπερασμένης ομάδας.
- Η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$, όπου $\mathbb{X}$ είναι ένα seperated noetherian scheme, και με $\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}$ υποδηλώνουμε την κατηγορία των quasi-coherent sheaves υπεράνω του $\mathbb{X}$.

Ωστόσο στη μελέτη των παραπάνω κατηγοριών, εκτός της τελευταίας, γίνεται συνήθως εκτεταμένη χρήση προβολικών αναλύσεων, καθώς μελετώνται κατηγορίες οι οποίες έχουν αρκετά προβολικά αντικείμενα. Ο Krause ωστόσο παρατήρησε ότι η ομοτοπική κατηγορία των ενέσιμων αξίζει μεγαλύτερης προσοχής. Ο λόγος που έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα, είναι το γεγονός ότι στις εφαρμογές εμφανίζονται συχνότερα αβελιανές κατηγορίες με αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, αλλά όχι κατ' ανάγκην με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Ένα από τα κύρια αποτελέσματα της θεμελιώδους εργασίας [7] του Grothendieck πιστοποιεί ότι η κατηγορία $\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Ιδιαίτερα ο Grothendieck έδειξε ότι κάθε αβελιανή κατηγορία με ακριβή ευθέα όρια και ένα σύνολο γεννητόρων έχει αρκετά ενέσμαι αντικείμενα και μάλιστα με έναν οικονομικό τρόπο (injective envelopes). Έκτοτε οι κατηγορίες αυτές είναι γνωστές ως κατηγορίες Grothendieck. Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες ο Krause δημοσίευσε ένα σημαντικό άρθρο, βλέπε [13], στο οποίο εισήγαγε την έννοια της μη φραγμένης ευσταθούς παραγόμενης κατηγορίας μιας τοπικά Noetherian κατηγορίας του Grothendieck, με σκοπό νε μελετήσει την ομολογική συμπεριφορά και πολυπλοκότητα σχημάτων της Noether $\mathbb{X}$ με βάση την κατηγορία $\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}$ των quasi-coherent sheaves υπεράνω του $\mathbb{X}$ η οποία είναι τοπικά Noetherian κατηγορία του Grothendieck. Σημειώνουμε ότι η κατηγορία αυτή δεν έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα και μελέτη παραγόμενων κατηγοριών που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση του $\mathbb{X}$ ήταν εφικτή μόνο στο φραγμένο επίπεδο και μόνο για κάποιες υποκατηγορίες της $\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}$.

Ο βασικός στόχος της διατριβής είναι η παρουσίαση των βασικών αποτελεσμάτων της εργασίας του Krause, τα οποία αποτελούν και τα κύρια αποτελέσματα της παρούσης διατριβής. Τα αποτελέσματα του Krause δείχνουν ότι η κατάλληλη κατηγορία για τη μελέτη γεωμετρικών ιδιοτήτων ενός σχήματος της Noether $\mathbb{X}$ δεν είναι η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$, αλλά η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X})$ συμπλόκων ενέσιμων αντικειμένων της $\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}$, καθώς και η πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{S}(\mathbb{X})$ η οποία αποτελείται από τα ακυκλικά σύμπλοκα Ιδιαίτερα αποδεικνύεται ότι η τριγωνισμένη κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη και η πλήρης υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων της ταυτίζεται με την φραγμένη παραγόμενη κατηγορία των coherent sheaves υπεράνω του $\mathbb{X}$. Επιπρόσθετα η τριγωνισμένη κατηγορία $\mathsf{S}(\mathbb{X})$ είναι επίσης συμπαγώς παραγόμενη και η πλήρης υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων της ταυτίζεται με την κατηγορία ιδιομορφιών του σχήματος $\mathbb{X}$, η τελευταία, η οποία περιγράφεται ως η κατηγορία πηλίκο με την έννοια του Verdier της φραγμένης παραγόμενης κατηγορίας των coherent sheaves ως προς την κατηγορία των τέλειων (perfect) συμπλόκων, καθορίζει την (γεωμετρική) πολυπλοκότητα των ιδιομορφιών του σχήματος $\mathbb{X}$. Για τους παραπάνω λόγους η κατηγορία $\mathsf{S}(\mathbb{X})$ καλείται η **ευσταθής παραγόμενη κατηγορία** του σχήματος της Noether, και η μελέτη της αποτελεί κεντρικό στόχο της διατριβής. Επίσης δίνονται εφαρμογές στην μελέτη της δυϊκότητας του Grothendieck και στην μελέτη των προσεγγίσεων Gorenstein.

Αναλυτικότερα, τα παραπάνω κύρια αποτελέσματα αποτελέσματα αποδεικνύονται στο γενικότερο πλαίσιο των τοπικά Noetherian κατηγοριών του Grothendieck και έχουν ως εξής:

Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά Noetherian κατηγορία του Grothendieck και $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$ η πλήρης υποκατηγορία της, η οποία αποτελείται από όλα τα ενέσιμα αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Με $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ συμβολίζουμε την ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων ενέσιμων αντικειμένων. Το πρώτο βασικό Θεώρημα του Krause, το οποίο παίζει ουσιώδη ρόλο στην απόδειξη των επόμενων αποτελεσμάτων του είναι το εξής.

Θεώρημα 0.0.1. *Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία τοπικά Noetherian κατηγορία του Grothendieck, τότε η τριγωνισμένη κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη και επάγεται μία ισοδυναμία $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$, όπου $\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, η οποία αποτελείται από τα noetherian αντικείμενα.*

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας δείχνει ότι μπορούμε να σκεφτόμαστε την κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, ως την «συμπαγώς παραγόμεμη ολοκλήρωση» της κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$.

Η **ευσταθής παραγόμενη κατηγορία** $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ ορίστηκε από τον Krause ως η πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα ακυκλικά σύμπλοκα.

Η Πρόταση 3.5.7 μας δίνει την ύπαρξη μίας localization ακολουθίας

$$\mathsf{S}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}),$$

και επομένως έχουμε μία ισοδυναμία

$$\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})/\mathsf{S}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}(\mathcal{A}).$$

Στη συνέχεια μπορεί κανείς να πάρει μερικά πολύ σημαντικά αποτελέσματα, εάν υποθέσει ότι η κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Αυτή η υπόθεση δεν θα πρέπει να θεωρείται περιοριστική, όπως μπορεί κανείς να δει και από το Λήμμα 3.6.6. Ένα σημαντικό παράδειγμα τέτοιας συμπαγούς παραγόμενης κατηγορίας, είναι η $\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$, όπου $\mathbb{X}$ είναι ένα seperated noetherian scheme, βλέπε [17].

Το δεύτερο βασικό αποτέλεσμα της εργασίας του Krause, και της παρούσης διατριβής, είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 0.0.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά Noetherian κατηγορία του Grothendieck, για την οποία ισχύει ότι η κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη.*

1. *Για την ακολουθία:*

$$\mathsf{S}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}),$$

έχουμε ότι οι κανονικοί συναρτητές I, Q έχουν αριστερούς συζυγείς I_λ, Q_λ και δεξιούς συζυγείς I_ρ, Q_ρ αντίστοιχα. Επομένως η παραπάνω ακολουθία, επάγει ένα recollement:

$$\mathsf{S}(\mathcal{A}) \leftrightarrows \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \leftrightarrows \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

2. *Η ακολουθία*

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q_\lambda} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda} \mathsf{S}(\mathcal{A}),$$

είναι μία localization ακολουθία. Επομένως η $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη και ο συναρτητής $I_\lambda \circ Q_\rho$ επάγει (με ακρίβεια προς ευθέων αθροιστέων) μία ισοδυναμία:

$$\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})/\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{S}^c(\mathcal{A}).$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα οδηγεί σε διάφορες σημαντικές εφαρμογές, μία από τις οποίες αφορά την δυϊκότητα Grothendieck. Ουσιαστικά το συζυγές ζευγάρι συναρτητών Rf_* και $f^!$, οι οποίοι εγκαθιστούν την δυϊκότητα Grothendieck για έναν μορφισμό $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, μεταξύ δύο schemes, μπορεί να επεκταθεί σε ένα ζευγάρι συζυγών συναρτητών μεταξύ των $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X})$ και $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$.

Θεώρημα 0.0.3. *Έστω $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ένας μορφισμός μεταξύ δύο seperated noetherian schemes. Συμβολίζουμε με $Rf_*\colon \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \to \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$ τον δεξιό παραγόμενο συναρτητή ευθέας εικόνας και με $f^!$ τον δεξιό συζυγή του. Τότε υπάρχει ένα συζυγές ζευγάρι συναρτητών $(\hat{R}f_*, \hat{f}^!)$, οι οποίοι κάνουν τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \arrow[r, "Rf_*"] \arrow[d, "Q_\lambda"] & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \\
\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \arrow[r, "\hat{R}f_*"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \arrow[r, "f^!"] \arrow[d, "Q_\rho"] & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \\
\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \arrow[r, "\hat{f}^!"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

Το παραπάνω Θεώρημα είναι πιο γενικό, και δεν οφείλεται στο γεγονός ότι ο συναρτητής f_* προέρχεται από τον μορφισμό $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Αυτό που ουσιαστικά χρειαζόμαστε, είναι οι συναρτητές f_*, και ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής Rf_* να διατηρούν τα συνγινόμενα.

Μία δεύτερη σημαντική εφαρμογή, αφορά Gorrenstein ενέσιμες προσεγγίσεις και συνομολογία Tate. Αρχικά εάν υποθέσουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία, και η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη, τότε το recollement

$$\mathsf{S}(\mathcal{A}) \leftrightarrows \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \leftrightarrows \mathsf{D}(\mathcal{A}) \ ,$$

επάγει τον **συναρτητή Gorenstein ενέσιμης ανάλυσης**:

$$T\colon \mathcal{A} \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda \circ Q_\rho} \mathsf{S}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Z^0} \underline{\mathcal{A}}$$

όπου $\underline{\mathcal{A}}$ συμβολίζει την ευσταθή κατηγορία πηλίκο τα ενέσιμα αντικείμενα. Για κάθε αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$, η Gorenstein ενέσιμη ανάλυση $A \to TA$, είναι η δυική έννοια των maximal Cohen-Macaulay αναλύσεων, οι οποίες βασίζονται στις προβολικές αναλύσεις.

Στη συνέχεια αφού ορίσουμε την Tate συνομολογία, κάνοντας χρήση ενέσιμων αναλύσεων μπορούμε με τη βοήθεια ενός Θεωρήματος να παρατηρήσουμε την σύνδεση των Gorenstein ενέσιμων αναλύσεων με τηνTate συνομολογία. Για να οριστεί η συνομολογία Tate χρειάζονται κάποιες βοηθητικές έννοιες. Ξανά υποθέτουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία , και η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Καταρχάς περνάμε από την ευσταθή κατηγορία $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ στην πλήρη υποκτηγορία της $T(\mathcal{A})$ η οποία περιέχει όλα tatotally ακυκλικά σύμπλοκα. Ένα αντικείμενο στην $\mathcal{A}$ καλείται εξ ορισμού **Gorenstein ενέσιμο**, εάν είναι της μορφής $\mathsf{Ker}(X^0 \to X^1)$ για κάποιο X της $T(\mathcal{A})$. Τότε υπάρχει ένας αριστερός συζυγής G_λ της κανονικής έγκλισης $G\colon T(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, και επομένως μπορούμε να θεωρούμε το αντικείμενο $G_\lambda iA$, ως την πλήρη ενέσιμη ανάλυση του $\mathcal{A}$. Επομένως είμαστε σε θέση τώρα να ορίσουμε τις **ομάδες Tate συνομολογίας**

$$\widehat{\mathsf{Ext}}(A, B) = \mathsf{H}^n \operatorname{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, G_\lambda iB),$$

για κάθε δύο αντικείμενα A, B στην $\mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{Z}$.

Για να γίνει αντιληπτή και η προαναφερθέντα σύνδεση, ορίζουμε ως $\mathcal{X}$ την κλάση όλων των αντικείμενων A της $\mathcal{A}$ για τα οποία το $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(A, \text{-})$ μηδενίζεται, και με $\mathcal{Y}$ την κλάση όλως των Gorenstein ενέσιμων αντικειμένων στην $\mathcal{A}$. Τότε παίρνουμε το παρακάτω σημαντικό Θεώρημα.

Θεώρημα 0.0.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά Noetherian κατηγορία του Grothendieck και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

1. $\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{A} |\ \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B) = 0 \text{ για κάθε } B \in \mathcal{Y}\}$.
2. $\mathcal{Y} = \{B \in \mathcal{A} |\ \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B) = 0 \text{ για κάθε } A \in \mathcal{X}\}$.
3. *Για κάθε αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$ υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες*

$$0 \longrightarrow Y_A \longrightarrow X_A \longrightarrow A \longrightarrow 0 \qquad \text{και} \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow Y^A \longrightarrow X^A \longrightarrow 0$$

   στην $\mathcal{A}$, όπου τα X_A, X^A ανήκουν στην $\mathcal{X}$ και τα Y_A, Y^A ανήκουν στην $\mathcal{Y}$.
4. $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$.

• • •

Η διατριβή είναι συνθετικού χαρακτήρα και οι βασικές πηγές στις οποίες βασίστηκε το κείμενο που ακολουθεί είναι το βασικό άρθρο του Krause [13], τα αποτελέσματα του Yao στο άρθρο του [25], καθώς και κάποια αποτελέσματα των Bökstedt και Neeman στο άρθρο τους [2].

Η διατριβή έχει οργανωθεί σε τέσσερα κεφάλαια και σε αδρές γραμμές είναι χωρισμένη σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, το οποίο αποτελείται από τα κεφάλαια 1 και 2, αναπτύσσεται η βασική θεωρία αβελιανών κατηγοριών και τοπικοποίησης, δίνοντας έμφαση στην ανάπτυξη της θεωρίας τριγωνισμένων και παραγόμενων κατηγοριών. Στο δεύτερο μέρος, το οποία από τα κεφάλαια 3 και 4, αναφέρονται κάποια μη τετριμμένα αποτελέσματα των Bökstedt, Neeman και Yao και κυρίως αναπτύσσονται τα αποτελέσματα του Krause σχετικά με την ευσταθή παραγόμενη κατηγορία μίας τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορίας, καθώς και αναφέρονται δύο πολύ σημαντικές εφαρμογές αυτών. Στο τέλος του κειμένου παρατίθεται περίληψη, βιβλιογραφία και ευρετήριο.

Κεφάλαιο 1: Το πρώτο κεφάλαιο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα και δίνονται οι ορισμοί των εννοιών της κατηγορίας, του συναρτητή μεταξύ δύο κατηγοριών καθώς και της βασικής έννοια της συζυγίας δύο συναρτητών. Περιγράφεται επίσης η κατασκευή της τοπικοποίησης μια κατηγορίας ως προς μία κλάση μορφισμών. Στη συνέχεια αναλύονται μερικά βασικά χαρακτηριστικά των αβελιανών κατηγοριών, καθώς και ειδικότερα των κατηγοριών Grothendieck. Κλείνοντας το κεφάλαιο, μελετούμε πιο εξειδικευμένα την τοπικοποίηση μίας αβελιανής κατηγορίας.

Κεφάλαιο 2: Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε τη βασική έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας και παραθέτουμε μερικές βασικές ιδιότητές του. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η τοπικοποίηση μίας τριγωνιοσμένης κατηγορίας είναι και αυτή τριγωνισμένη κατηγορία και δίνουμε την έννοια της τοπικοποίησης Verdier. Στη συνέχεια με ορίζουμε την πολύ βασική έννοια της ομοτοπικής κατηγορίας των συμπλόκων, η οποία αποτελεί βασικό παράδειγμα τριγωνισμένης κατηγορίας καθώς και την έννοια των παραγόμενων κατηγοριών, οι οποίες είναι ουσιαστικά μια τοπικοποίηση της ομοτοπικής κατηγορίας των συμπλόκων, ως προς την λεγόμενη κλάση των ψευδο-ισομορφισμών.

Κεφάλαιο 3: Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε αρχικά την έννοια της Bousfield τοπικοποίησης και αποδεικνύουμε μερικές βασικές χρήσιμες Προτάσεις, οι οποίες είναι απαραίτητες για τις localization ακολουθίες οι οποίες θα αναφερθούν στη συνέχεια. Επίσης παρουσιάζουμε ένα μη τετριμμένο αποτέλεσμα το οποίο μας δείχνει ότι μπορούμε να ορίζουμε δεξιά παραγόμενους συναρτητές, μεταξύ των μη φραγμένων παραγόμενων κατηγοριών εάν η αρχικές μας κατηγορίες είναι κατηγορίες Grothendieck. Γίνεται επίσης η απόδειξη μίας σημαντικής ισοδυναμίας παραγόμενων κατηγοριών, την οποία χρειαζόμαστε για μια ειδικότερη περίπτωση κατηγοριών στη συνέχεια. Τέλος κλείνουμε το κεφάλαιο παραθέτοντας ένα βασικό αποτέλεσμα, το οποίο μας λέει ότι η υπό κάποιες προϋποθέσεις η ομοτοπική κατηγορία των ενέσιμων είναι συμπαγώς παραγόμενη, και αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός recollement.

Κεφάλαιο 4: Στο τέταρτο κεφάλαιο, κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου είμαστε σε θέση να ορίσουμε την ευσταθή παραγόμενη κατηγορία μίας τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορίας και αποδεικνύουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο ισχύει με την προϋπόθεση ότι η παραγόμενη κατηγορία είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τέλος αναλύουμε δύο πολύ σημαντικές εφαρμογές. Η πρώτη αφορά την κατασκευή παραγόμενων συναρτητών μεταξύ των ομοτοπικών κατηγοριών των ενέσιμων αντικειμένων, και σχολιάζεται περεταίρω μία ειδική περίπτωση από την Αλγεβρική Γεωμετρία. Η δεύτερη αφορά τον ορισμό των εννοιών των Gorenstein ενέσιμων αναλύσεων και των ομάδων συνομολογίας Tate και δίνεται έμφαση στον τρόπο σύνδεσης αυτών των δύο εννοιών.

Ευχαριστίες:

Η πορεία ενός μεταπτυχιακού είναι αρκετές φορές επίπονη και υπάρχουν πάντα άνθρωποι που με τον τρόπο τους σε βοηθούν να ξεπεράσεις τα εμπόδια που συναντάς. Θα ήθελα γι' αυτό το λόγο με το πέρας των μεταπτυχιακών μου σπουδών να ευχαριστήσω όσους με στήριξαν και με βοήθησαν να αναταπεξέλθω στις δυσκολίες που συνάντησα.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθηγητή κ. Απόστολο Μπεληγιάννη, για τη συνεργασία και τη βοήθεια που μου παρείχε όχι μόνο στη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας, αλλά και κατά την αναζήτηση του επόμενου βήματος. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τον τρόπο που μου έμαθε να χειρίζομαι τα προβλήματα, καθώς είχα την τύχη να δω από κοντά πως κανείς πρέπει να προσεγγίζει ορισμένα ζητήματα.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά, ο οποίος με βοήθησε στα πρώτα μου βήματα στον τομέα της Άλγεβρας και ο οποίος μου έμαθε ότι πρέπει να αγαπάς αυτό που κάνεις. Οι συμβουλές του και το ενδιαφέρον του καθ' όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού μου ήταν ιδιαίτερα βοηθητικές και ορισμένες φορές καίριας σημασίας.

Θα ήθελα να δώσω ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ στον καθηγητή κ. Σταύρο Παπαδάκη, ο οποίος έδειχνε πάντα το ενδιαφέρον του και ήταν έτοιμος να μοιραστεί τις γνώσεις του, οποιαδήποτε στιγμή της χρειάστηκα, πέρνωντας πολλές φορές όμορφες πρωτοβουλίες και δείχνοντάς μου έτσι ότι η επικοινωνία και η συνεργασία είναι πολύ σημαντική στον κόσμο των μαθηματικών.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, η οποία πάντα πίστευε σε εμένα και στήριζε τις αποφάσεις μου, επιτρέποντας μου να ακολουθήσω αυτό που μου αρέσει χωρίς να σκέφτομαι κάποιους περιορισμούς. Ήταν πάντα δίπλα μου στην προπτυχιακή και μεταπτυχιακή μου πορεία, διακριτική βοηθώντας με όταν το είχα ανάγκη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους μεταπτυχιακούς μου συναδέλφους, οι οποίοι ο καθένας ξεχωριστά μου έμαθε καινούρια πράγματα και ένα διαφορετικό τρόπο σκέψης, κάνοντας με να έρθω πιο κοντά στα μαθηματικά και να απολαύσω αυτό το έως τώρα πολύ όμορφο ταξίδι.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την Ιωάννα, η οποία ήταν πάντα δίπλα μου, στις εύκολες αλλά κυρίως και στις δύσκολες στιγμές και οι συμβουλές της και οι παροτρύνσεις της ήταν που με κράτησαν πολλές φορές δυνατό, καθώς και μου έδωσαν κουράγιο για τη συνέχεια.

Μιχαήλ Τσιρώνης

Ιωάννινα, Σεπτέμβριος 2019

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Αβελιανών Κατηγοριών

Στο παρόν κεφάλαιο θα εισαγάγουμε τη βασική έννοια των κατηγοριών και ιδιαιτέρως των αβελιανών κατηγοριών οι οποίες αποτελούν ένα καλύτερο έναυσμα για ανάπτυξη μίας βαθύτερης θεωρίας. Θα δώσουμε επίσης την έννοια των κατηγοριών Grothendieck, οι οποίες θα μας απασχολήσουν ιδιαιτέρως σε όλη τη διάρκεια της εργασίας, καθώς και την βασική έννοια της τοπικοποίησης, και τον τρόπο κατασκευής της.

1.1 Κατηγορίες

Η Θεωρία κατηγοριών είναι ένας σύγχρονος κλάδος των μαθηματικών ο οποίος προσπαθεί να γενικεύσει όλα τα μαθηματικά σε όρους κατηγοριών.Κάνοντας το αυτό προσπαθεί να αποκαλύψει βαθύτερα αποτελέσματα καθώς και να βρει ομοιότητες σε φαινομενικά διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών.Η απαρχή της Θεωρίας Κατηγοριών έγινε από τους Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane το 1945, στο επιστημονικό τους άρθρο με τίτλο, General theory of natural equivalences, δες [4] .

Ορισμός 1.1.1. *Μια* **κατηγορία(category)** $\mathcal{C}$ *αποτελείται από τα εξής:*

(i) *Μία κλάση* $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ *αντικειμένων της* $\mathcal{C}$

(ii) *Ένα σύνολο* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, *του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται μορφισμοί* $f\colon X \longrightarrow Y$ *από το* X *στο* Y *για κάθε διατεταγμένο ζεύγος* (X,Y) *αντικειμένων της* $\mathcal{C}$

(iii) *Μία σύνθεση*

$$\circ\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), \quad (f,g) \longmapsto g \circ f$$

για κάθε διατεταγμένη τριάδα (X,Y,Z) *αντικειμένων της* $\mathcal{C}$

έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

(C1)

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \bigcap \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y') = \varnothing, \text{όταν } (X,Y) \neq (X',Y').$$

(C2) *Εάν* $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ *και* $h\colon Z \longrightarrow W$ *μορφισμοί, τότε ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(C3) *Για κάθε αντικείμενο* X *υπάρχει ο* **ταυτοτικός μορφισμός (identity morphism)**

$$1_X\colon X \longrightarrow X$$

τέτοιος ώστε $f \circ 1_X = f$ *και* $1_X \circ g = g$ *για όλους τους μορφισμούς* $f\colon X \longrightarrow Y$ *και* $g\colon Z \longrightarrow X$

Σχόλιο 1.1.2. Ο ταυτοτικός μορφισμός ενός αντικειμένου X θα συμβολίζεται επίσης και id_X.

Σχόλιο 1.1.3. Εάν X είναι ένα αντικείμενο μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ τότε πολλές φορές αντί να γράφουμε $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ θα γράφουμε απλά $X \in \mathcal{C}$.

Παράδειγμα 1.1.4.

1. Η κατηγορία Set. Τα αντικείμενα της κατηγορίας Set είναι τα σύνολα. Άν X και Y είναι δύο σύνολα τότε ορίζουμε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$ να είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων που ορίζονται στο σύνολο X και παίρνουν τιμές στο σύνολο Y. Η σύνθεση μορφισμών είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

2. Η κατηγορία Top. Τα αντικείμενα της κατηγορίας Top είναι οι τοπολογικοί χώροι. Άν X και Y είναι δύο τοπολογικοί χώροι τότε ορίζουμε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, Y)$ να είναι το σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων που ορίζονται στο χώρο X και παίρνουν τιμές στο χώρο Y. Η σύνθεση μορφισμών είναι η συνήθης σύνθεση συνεχών απεικονίσεων.

3. Η κατηγορία Grp. Τα αντικείμενα της κατηγορίας Grp είναι οι ομάδες. Άν X και Y είναι δύο ομάδες τότε ορίζουμε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Grp}}(X, Y)$ να είναι το σύνολο όλων των ομομορφισμών της ομάδας X στην ομάδα Y. Η σύνθεση μορφισμών είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφισμών.

4. Η κατηγορία Ab. Τα αντικείμενα της κατηγορίας Ab είναι οι αβελιανές ομάδες. Άν X και Y είναι δύο αβελιανές ομάδες τότε ορίζουμε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ab}}(X, Y)$ να είναι το σύνολο όλων των ομομορφισμών της ομάδας X στην ομάδα Y. Η σύνθεση μορφισμών είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφισμών.

5. Η κατηγορία Ring. Τα αντικείμενα της κατηγορίας Ring είναι οι δακτύλιοι. Άν X και Y είναι δύο δακτύλιοι τότε ορίζουμε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ring}}(X, Y)$ να είναι το σύνολο όλων των ομομορφισμών του δακτυλίου X στην δακτύλιο Y. Η σύνθεση μορφισμών είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφισμών δακτυλίων.

6. Η κατηγορία R-Mod. Τα αντικείμενα της κατηγορίας R-Mod είναι τα αριστερά πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου R. Άν X και Y είναι δύο αριστερά R-πρότυπα τότε ορίζουμε $\mathsf{Hom}_{R\text{-}\mathsf{Mod}}(X, Y)$ να είναι το σύνολο όλων των ομομορφισμών R-προτύπων από το αριστερό R-πρότυπο X στο αριστερό R-πρότυπο Y. Η σύνθεση μορφισμών είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων.

Συνεχίζουμε δίνοντας τον ορισμό της δυϊκής κατηγορίας μίας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$

Ορισμός 1.1.5. *Δοθέντος μίας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ ορίζουμε την* **δυϊκή της κατηγορία (opposite category)** $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ *ως εξής:*

(i) *Τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ταυτίζονται με τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$, δηλαδή* $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}) = \mathsf{Ob}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}})$

(ii) *Το σύνολο των μορφισμών* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}}(X, Y)$ *ταυτίζεται με το* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$

(iii) *Η σύνθεση δύο μορφισμών $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$, $g \circ^{\mathsf{op}} f$ ορίζεται ως η σύνθεση $f \circ g$ στην $\mathcal{C}$*

Σχόλιο 1.1.6. Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι $(\mathcal{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} = \mathcal{C}$

Σχόλιο 1.1.7. Η δυνατότητα να σχετίζουμε σε κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ την δυϊκή της κατηγορία $\mathcal{C}$ μας επιτρέπει να δυϊκοποιούμε κάθε έννοια ή πρόταση στην κατηγορία $\mathcal{C}$ σε μία αντίστοιχη έννοια η πρόταση στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Ορισμός 1.1.8. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}'$ καλείται* **υποκατηγορία (subcategory)** *μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ όταν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}') \subset \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$

(ii) $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$

(iii) *Η σύνθεση μορφισμών στην $\mathcal{C}'$ είναι η επαγόμενη από την $\mathcal{C}$*

(iv) *Οι ταυτοτικοί μορφισμοί μεταξύ των αντικειμένων της $\mathcal{C}'$ είναι επίσης ταυτοτικοί μορφισμοί στην $\mathcal{C}$*

Σχόλιο 1.1.9. Όταν η $\mathcal{C}'$ είναι υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, συμβολίζουμε $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$.

Ορισμός 1.1.10. *Μια υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται* **πλήρης (full)** *αν για κάθε ζευγάρι (X,Y) αντικειμένων της $\mathcal{C}'$ έχουμε $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.*

Παράδειγμα 1.1.11. 1. Η κατηγορία Ab είναι μία πλήρης υποκατηγορία της κατηγοριας Grp.

2. Αν $\mathcal{C}$ είναι η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα σύνολα και μορφισμούς τις «1-1» απεικονίσεις μεταξύ συνόλων τότε η $\mathcal{C}$ είναι υποκατηγορία της Set αλλά δεν είναι πλήρης υποκατηγορία της.

Ορισμός 1.1.12. *Μία κατηγορία θα καλείται* **μικρή (small)**, *όταν η κλάση των αντικειμένων της και των μορφισμών της είναι στην πραγματικότητα σύνολο.*

Σε μια κατηγορία υπάρχουν κάποια ειδικά αντικείμενα τα οποία έχουν κάποιες επιπλέον ιδιότητες.Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αντικείμενα που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 1.1.13. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και έστω ένα αντικείμενο της X*

1. *Το αντικείμενο X θα καλείται* **αρχικό αντικείμενο (initial object)**, *εάν το σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ έχει μόνο ένα στοιχείο για κάθε αντικείμενο Y.*

2. *Το αντικείμενο X θα καλείται* **τελικό αντικείμενο (terminal object)**, *εάν το σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ έχει μόνο ένα στοιχείο για κάθε αντικείμενο Y.*

3. *Το αντικείμενο X θα καλείται* **μηδενικό αντικείμενο (zero object)**, *εάν το X είναι ταυτόχρονα και αρχικό και τελικό αντικείμενο.*

1.1.1 Συναρτητές

Εώς τώρα έχουμε δώσει κάποιους βασικούς ορισμούς για το τι είναι μια κατηγορία και κάποια βασικά στοιχεία της που θα τα χρειαστούμε αργότερα. Ωστόσο όπως αναφέρουν οι Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane στο επιστημονικό τους άρθρο με τίτλο, General theory of natural equivalences όταν κάποιος δημιουργεί ένα νέο αφηρημένο αντικείμενο με ένα συγκεκριμένο τρόπο από ήδη υπάρχοντα αντικείμενα, είναι θεμιτό να σκέφτεσαι την κατασκευή των αντίστοιχων απεικονίσεων μεταξύ αυτών των αντικειμένων ως αδιαίρετο μέρος του ορισμού τους. Γι' αυτό το λόγο προχωράμε στον ορισμό ενός **συναρτητή(functor)** μεταξύ δύο κατηγοριών.

Ορισμός 1.1.14. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες. Ένας* **συναλλοίωτος συναρτητής (covariant functor)**
(αντίστοιχα **αντισυναλλοίωτος συναρτητής (contravariant functor)***) $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ αποτελείται από τα ακόλουθα:*

(α) *Μία απεικόνιση $F\colon \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Ob}(\mathcal{C}')$*

(β) *Μία απεικόνιση $F\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$ για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{C}$*
(Αντίστοιχα $F\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Y),F(X))$)

έτσι ώστε να ισχύουν:

1. *$F(1_X) = 1_{F(X)}$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$*
2. *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ για αντικείμενα X, Y και Z στην $\mathcal{C}$ και μορφισμούς $f \colon X \longrightarrow Y$, $g \colon Y \longrightarrow Z$ (αντίστοιχα $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$)*

Σχόλιο 1.1.15. Από εδώ και πέρα όταν θα αναφέρουμε έναν συναρτητή θα εννοούμε συνναλλοίωτο συναρτητή.

Παράδειγμα 1.1.16. 1. Ο **ταυτοτικός συναρτητής(identity functor)**: Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή

$$1_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

που ορίζεται ως η ταυτότητα στα αντικείμενα και στους μορφισμούς της $\mathcal{C}$, δηλαδή

$$1_{\mathcal{C}}(X) = X \ \text{ και } \ 1_{\mathcal{C}}(f) = f$$

για κάθε αντικείμενο X και κάθε μορφισμό $f \colon X \longrightarrow Y$.

2. Ο **συναρτητής έγκλισης(inclusion functor)**: Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{C}'$ μία υποκατηγορία της. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή

$$i \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$$

που ορίζεται ως

$$i(X) = X \ \text{ και } \ i(f) = f$$

για κάθε αντικείμενο X και κάθε μορφισμό $f \colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}'$.

3. Ο **λησμονικός συναρτητής (forgetful functor)**: Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και Set η κατηγορία των συνόλων. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή

$$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

που στέλνει κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ στον εαυτό του, «ξεχνόντας» όμως την υπάρχουσα δομή του και κάθε μορφισμό μεταξύ δύο αντικειμένων της κατηγορίας στην επαγόμενη απεικόνιση μεταξύ συνόλων.
Για παράδειγμα έστω $F \colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ο συναρτητής ο οποίος στέλνει κάθε τοπολογικό χώρο στο υποκείμενο σύνολό του, και κάθε συνεχή απεικόνιση στην αντίστοιχη απεικόνιση συνόλων. Τότε ο F είναι όντως όπως ορίστηκε παραπάνω ένας λησμονικός συναρτητής.

4. Ο **συναρτητής** $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{-})$: Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και X ένα αντικείμενό της. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{-}) \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

που ορίζεται ως

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{-})(Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \ \text{ και } \ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{-})(f) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f) = f_\star^X$$

όπου

$$f_\star^X \colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y') \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y''), \ \ f_\star^X(h) = f \circ h$$

για κάθε αντικείμενο Y , Y' , Y'' και μορφισμό $f \colon Y' \longrightarrow Y''$.
Ο παραπάνω συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{-})$ είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

5. Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε τον **συναρτητή** $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)$: Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και X ένα αντικείμενό της. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$$
που ορίζεται ως
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)(Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \;\text{ και }\; \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)(f) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) = f_X^{\star}$$
όπου
$$f_X^{\star}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y'', X), \;\; f_X^{\star}(h) = h \circ f$$
για κάθε αντικείμενο Y , Y' , Y'' και μορφισμό $f\colon Y' \longrightarrow Y''$
Ο παραπάνω συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)$ είναι αντισυναλλοίωτος συναρτητής.

Ορισμός 1.1.17. *Έστω $\mathcal{I}$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο το οποίο είναι κατευθυνόμενο (δηλαδή κάθε ζεύγος αντικειμένων του έχει άνω φράγμα), και θεωρούμε το I σαν μια κατηγορία $\mathcal{I}$ η οποία έχει ως αντικείμενα τα αντικείμενα του συνόλου I και ως μορφισμούς εκείνους που επάγονται από τη σχέση διάταξης στο I. Έστω επιπλέον $\mathcal{C}$ μία τυχαία κατηγορία. Τότε ένας συναρτητής $T\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ θα καλείται* **ευθύ σύστημα(direct system)** *στην $\mathcal{C}$, ενώ ένας συναρτητής $T'\colon \mathcal{I}^{op} \to \mathcal{C}$ θα καλείται* **αντίστροφο σύστημα(inverse system)** *στην $\mathcal{C}$.*

Ορισμός 1.1.18. *Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.14 έχουμε μία απεικόνιση*
$$F\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$
για κάθε ζευγάρι X,Y αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$

1. *Ο F καλείται* **πιστός (faithful)** *αν η παραπάνω απεικόνιση είναι «1-1».*
2. *Ο F καλείται* **πλήρης (full)** *αν η παραπάνω απεικόνιση είναι «επί».*
3. *Ο F καλείται* **πλήρης και πιστός (fully faithful)** *αν η παραπάνω απεικόνιση είναι «1-1» και «επί».*

1.1.2 Φυσικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 1.1.19. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες και $S, T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ δύο συναρτητές. Υποθέτουμε ότι για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ υπάρχει ένας μορφισμός $\eta_X\colon S(X) \longrightarrow T(X)$ στην $\mathcal{C}'$, τέτοιος ώστε για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow X'$ στην $\mathcal{C}$ το διάγραμμα*
$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ S(X') \arrow[r, "\eta_{X'}"] & T(X') \end{tikzcd}$$
είναι μεταθετικό. Τότε η κλάση των μορφισμών $\eta = \{\eta_X\colon S(X) \longrightarrow T(X)\}$ που παίρνει τιμές πάνω από τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$, καλείται **φυσικός μετασχηματισμός (natural transformation)** *από τον T στον S.*

Ορισμός 1.1.20. *Εάν στον παραπάνω ορισμό 1.1.19 οι μορφισμοί $\eta_X\colon S(X) \longrightarrow T(X)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$, τότε η $\eta\colon S \longrightarrow T$ καλείται* **φυσικός ισομορφισμός (natural isomorphism)**, *και οι συναρτητές S και T καλούνται* **φυσικά ισόμορφοι συναρτητές (naturally isomorphic functors)**, *και θα τους συμβολίζουμε ως $T \simeq S$.*

Σχόλιο 1.1.21. Υπάρχει η έννοια του ισομορφισμού δύο κατηγοριών. Ένας συναρτητής $S\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ είναι ισομορφισμός κατηγοριών αν υπάρχει $T\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $S \circ T(X) = X$ και $T \circ S(Y) = Y$ για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$ και $Y \in \mathcal{C}'$, και ομοίως για τους μορφισμούς. Παρόλ' αυτά στην εφαρμογή κάτι τέτοιο σπάνια συμβαίνει και αυτή η έννοια ισομορφισμού είναι πολύ περιοριστική. Στην πραγματικότητα υπάρχουν πολλαπλά παραδείγματα κατηγοριών οι οποίες έχουν ουσιαστικά την ίδια δομή, αλλά υπάρχει μία «1-1» αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας των αντικειμένων αντί μεταξύ των ίδιων των αντικειμένων. Γι' αυτό εισάγουμε την παρακάτω σημαντική ηπιότερη έννοια.

Ορισμός 1.1.22. *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες. Ένας συναρτητής $S\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ καλείται* **ισοδυναμία κατηγοριών (equivalence of categories)** *αν υπάρχει συναρτητής $T\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ και φυσικοί ισομορφισμοί $\alpha\colon S \circ T \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$, $\beta\colon T \circ S \longrightarrow 1_{\mathcal{C}'}$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $S\colon \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}'$ και λέμε ότι ο συναρτητής S είναι* **ψευδο-αντίστροφος (quasi-inverse)** *του T.*

Συχνά η παρακάτω περιγραφή της ισοδυναμίας είναι πιο χρήσιμη:

Πρόταση 1.1.23. *Ένας συναρτητής $S\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών αν και μόνο αν είναι πλήρης και πιστός και κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της μορφής $S(X)$ όπου $X \in \mathcal{C}$*

Παράδειγμα 1.1.24. Έστω $R_1, \ldots, R_n$ δακτύλιοι και $R_1 \times \cdots \times R_n$ το ευθύ γινόμενο δακτυλίων. Τότε υπάρχει μία ισοδυναμία

$$\mathsf{Mod}\text{-}R_1 \times \cdots \times ModR_n \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}R_1 \times \cdots \times R_n,$$

η οποία δίνεται από τον τύπο $(M_1, \ldots, M_n) \mapsto M_1 \times \cdots \times M_n$.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των συζυγών συναρτητών. Οι συζυγείς συναρτητές παίζουν ένα μεγάλο ρόλο στην Θεωρία Κατηγοριών και η συζυγία μεταξύ δύο κατηγοριών είναι κατά κάποιο τρόπο «συγγενής» με την ισοδυναμία κατηγοριών που αναφέρθηκε παραπάνω 1.1.22.

Ορισμός 1.1.25. *Έστω δύο κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ και δύο συναρτητές $L\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ και $R\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$. Λέμε ότι ο R είναι* **δεξιά συζυγής (right adjoint)** *του L (και αντίστοιχα ο L* **αριστερά συζυγής (left adjoint)** *του T) εάν υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\eta\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, R(\text{-})) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(\text{-}), \text{-})$$

συναρτητών $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, δηλαδή για κάθε ζεύγος αντικειμένων $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$ υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\eta_{C,D}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D) \tag{1.1}$$

ο οποίος είναι φυσικός στο C και στο D, δηλαδή για κάθε μορφισμό $f\colon C \to C'$ στην $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό $g\colon D \to D'$ στην $\mathcal{D}$ τα παρακάτω διαγράμματα είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C', R(D)) \arrow[r, "\eta_{C',D}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f,R(D))"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C'), D) \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(f),D)"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \arrow[r, "\eta_{C,D}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \arrow[r, "\eta_{C,D}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C,R(g))"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D) \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C),g)"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D')) \arrow[r, "\eta_{C,D'}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D')
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 1.1.26. *Εάν οι R και R' είναι και οι δύο δεξιά συζυγείς ενός συναρτητή $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, τότε οι R και R' είναι φυσικά ισόμορφοι. (Ομοίως εάν οι L και L' είναι και οι δύο αριστερά συζυγείς ενός συναρτητή $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, τότε οι L και L' είναι φυσικά ισόμορφοι.)*

Με λίγα λόγια από την παραπάνω πρόταση 1.1.26, έχουμε ότι ένας δεξιά συζυγής (και αντίστοιχα ένας αριστερά συζυγής), ορίζονται ως προς φυσική ισομορφία κατά μοναδικό τρόπο.

Σχόλιο 1.1.27. Θέτοντας στη σχέση 1.1 όπου $C = R(D)$ πέρνουμε ένα μορφισμό

$$\xi_D = \eta_{R(D),D}(1_{R(D)})\colon L \circ T(D) \to D$$

και από τη φυσικότητα στο D συνεπάγεται ότι παίρνουμε έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\xi\colon L \circ R \to 1_{\mathcal{D}} \tag{1.2}$$

Κατά δυϊκό τρόπο υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\zeta\colon 1_{\mathcal{C}} \to R \circ L \tag{1.3}$$

ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$\zeta_C = \eta^{-1}_{C,L(C)}(1_{L(C)})\colon C \to R \circ L(C)$$

Σχόλιο 1.1.28. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί ξ και ζ χαρακτηρίζουν τη συζυγία δύο συναρτητών R, L καθώς ο φυσικός μετασχηματισμός η της 1.1.25 μπορεί να κατασκευαστεί από οποιονδήποτε από τους δύο.Αυτό γίνεται ως εξής:

$$\eta_{C,D}(\alpha) = \xi_D \circ S(\alpha) \text{ για } \alpha\colon C \to T(D), \tag{1.4}$$

$$\eta^{-1}_{C,D}(\beta) = T(B) \circ \zeta_C \text{ για } \beta\colon S(C) \to D. \tag{1.5}$$

Η παρακάτω Πρόταση μας δείχνει πως κατασκευάζεται ο η δοθέντος του φυσικού μετασχηματισμού ξ πιο αναλυτικά.

Πρόταση 1.1.29. *Έστω $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ δύο συναρτητές, και έστω ότι δίνεται ένας φυσικός ισομορφισμός $\xi\colon S \circ T \to 1_{\mathcal{D}}$. Ορίζουμε*

$$\eta_{C,D}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D)$$

ώς $\eta_{C,D}(\alpha) = \xi_D \circ S(\alpha)$. Εάν ο $\eta_{C,D}$ είναι ισομορφισμός για κάθε $C \in \mathcal{C}$ και $D \in \mathcal{D}$, τότε ο η κάνει τον R δεξί συζυγή του L.

Απόδειξη. Αρκεί να δειχτεί ότι ο η είναι φυσικός στο C και στο D. Έστω $f\colon C \to C'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Τότε έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C', R(D)) \arrow[r, "\eta_{C',D}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f,R(D))"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C'), D) \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(f),D)"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \arrow[r, "\eta_{C,D}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, καθώς αν έχουμε το μορφισμό $\alpha\colon C' \to T(D)$ από τη μία κατεύθυνση το απεικονίζει στο $\eta_{C,D} \circ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f, R(D))(\alpha) = \eta_{C,D}(\alpha \circ f) = \xi_D \circ S(\alpha \circ f)$, και απ την άλλη στο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(f), D) \circ \eta_{C',D}(\alpha) = \eta_{C',D}(\alpha) \circ S(f) = \xi_D \circ S(\alpha) \circ S(f) = \xi_D \circ S(\alpha \circ f)$. Άρα ο η είναι φυσικός στο C.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο η είναι φυσικός και στο D. Έστω ένας μορφισμός $\beta\colon D \to D'$ στην $\mathcal{D}$. Τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)) \arrow[r, "S(\cdot)"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C,R(\beta))"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), L(R(D))) \arrow[r, "\xi_D"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C),L(R(\beta)))"] & \mathsf{Hom}(L(C), D) \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(S(C),\beta)"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D')) \arrow[r, "S(\cdot)"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), L(R(D'))) \arrow[r, "\xi_{D'}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D')
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό καθώς το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό εύκολα ενώ το δεύτερο είναι μεταθετικό λόγω της υπόθεσης ότι ο ξ είναι φυσικός ισομορφισμός.Άρα ο η είναι φυσικός και στο D. ■

Βάζοντας στην 1.4 όπου $\alpha = \zeta_C$ και στην 1.5 όπου $\beta = \xi_D$ παίρνουμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 1.1.30. *Έστω R δεξί συζυγής του $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Τότε*

$$\xi_{S(C)} \circ S(\zeta_C) = 1_{S(C)} T(\xi_D) \circ \zeta_{T(D)} = 1_{T(D)}. \tag{1.6}$$

Ορισμός 1.1.31. *Οι φυσικοί μετασχηματισμοί ξ, ζ των σχέσεων 1.2 και 1.3 ονομάζονται* **συνμονάδα (counit)** *και* **μονάδα (unit)** *του συζυγούς ζεύγους L, R, αντίστοιχα*

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον και χρησιμότητα για τα επόμενα κεφάλαια παρουσιάζουν κατηγορίες οι οποίες έχουν ως αντικείμενα συναρτητές και ως μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός 1.1.32. *Έστω $\mathcal{I}$ μία μικρή κατηγορία και $\mathcal{C}$ μία τυχαία κατηγορία. Μπορούμε να ορίσουμε μία νέα κατηγορία η οποία θα συμβολίζεται με $\mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ και θα καλείται* **κατηγορία συναρτητών(functor category)**, *η οποία θα έχει ως αντικείμενα τους συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{I}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών ων συναρτητών.*

Παρατήρηση 1.1.33. Εύκολα φαίνεται ότι οι κατηγορίες συναρτητών είανι όντως κατηγορίες καθώς είναι φανερό πως συνθέτουμε δύο φυσικούς μετασχηματισμούς και ότι αυτή η σύνθεση είναι προσεταιρστική, καθώς και ότι για κάθε συναρτητή $T\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ υπάρχει επίσης ο ταυτοτικός μετασχηματισμός $1_T\colon T \to T$.

Σχόλιο 1.1.34. Το σύνολο όλων των φυσικών μετασχηματισμών $S \to T$ θα συμβολίζεται $\mathsf{Nat}(S, T)$ και η υπόθεση ότι η $\mathcal{I}$ είναι μικρή είναι ουσιώδης έτσι ώστε το παραπάνω να είναι όντως σύνολο. Είναι γενικός κανόνας ότι μία κατηγορία συναρτητών $\mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ κληρονομεί όλες τις «καλές» ιδιότητες της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και αυτό είναι μεγάλης σημασίας όπως θα δούμε.

Τελειώνοντας τη συγκεκριμένη παράγραφο θα δώσουμε έναν πολύ σημαντικό ορισμό. Θα δώσουμε την έννοια του αναπαραστάσιμου συναρτητή. Αυτή η έννοια είναι πολύ σημαντική καθώς μας επιτρέπει να δίνουμε αναπαραστάσεις μίας αφηρημένης κατηγορίας σε ποιο γνωστές δομές, όπως είναι αυτή της κατηγορίας όλων τον συνόλων, με σκοπό να αποκωδικοποιήσουμε όσο περισσότερη πληροφορία αυτής της αφηρημένης κατηγορίας.

Ορισμός 1.1.35. *Έστω C μία τοπικά μικρή κατηγορία και $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Ab}$ ένας συναρτητής. Θα λέμε ότι ο συναρτητής F είναι* **αναπαριστάσιμος (representable)** *, αν και μόνο αν ο F είναι φυσικά ισόμορφος με έναν συναρτητή $\mathsf{Hom}(X, \text{-})$, όπου X είναι ένα αντικείμενο της C.*

1.1.3 Τοπικοποίηση κατηγοριών

Η έννοια της τοπικοποίησης πηγάζει από διάφορα προβλήματα, ένα από τα οποία είναι η τοπικοποίηση σε ένα πρώτο ιδεώδες ενός μεταθετικού δακτυλίου. Στην τοπολογία υπάρχει ακόμα ένα παράδειγμα τοπικοποίησης μέσω της μελέτης των sheaves αβελιανών ομάδων πάνω από έναν

τοπολογικό χώρο. Στην πραγματικότητα μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω μιλώντας για τοπικοποίηση μια κατηγορίας ως προς μια κλάση μορφισμών της.
Καταρχάς θα αναφέρουμε τι εννοούμε λέγοντας ότι θέλουμε να τοπικοποιήσουμε μία κατηγορία ως προς μία κλάση μορφισμών της.

Ορισμός 1.1.36. *Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και S μία τυχαία κλάση μορφισμών της. Θα καλούμε* **τοπικοποίηση(localization)** *της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση μορφισμών S μία κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ μαζί με έναν συναρτητή $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s \in S$*

2. *για κάθε κατηγορία $\mathcal{B}$ και συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε ο $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s \in S$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{B}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 1.1.37. *Η παραπάνω κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ εφόσον υπάρχει είναι μοναδική ως προς ισοδυναμία κατηγοριών.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν δύο ζευγάρια $(\mathcal{A}, Q)$ και $(\mathcal{A}', Q')$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις του ορισμού 1.1.36. Τότε λόγω της οικουμενικής ιδιότητας θα υπήρχαν συναρτητές $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ και $H\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικο:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q'"'] & \mathcal{A} \arrow[dl, bend right, "G"'] \\
\mathcal{A}' \arrow[ur, bend right, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι $Q' = (G \circ H) \circ Q'$ καθώς και $Q = (H \circ G) \circ Q$. Επομένως παίρνουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{A} \arrow[dl, bend right, "id_{\mathcal{A}}"'] \\
\mathcal{A} \arrow[ur, bend right, "H \circ G"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου $id_{\mathcal{A}}$ είναι ο ταυτοτικός συναρτητής στην $\mathcal{A}$. Από τη μοναδικότητα της παραγοντοποίησης έχουμε ότι $H \circ G = id_{\mathcal{A}}$. Ανάλογα παίρνουμε και $G \circ H = id_{\mathcal{A}'}$. Άρα οι H και G είναι ισομορφισμοί κατηγοριών. ■

Η ύπαρξη μιας τέτοιας κατηγορίας εξασφαλίζεται ακόμα και όταν η κλάση μορφισμών S είναι τυχαία, δες [14] (Θεώρημα 1.1.1.). Ωστόσο όταν είναι τυχαία αυτή η κλάση μορφισμών είναι πολύ δύσκολο να πούμε οτιδήποτε για την $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Γι' αυτό το λόγω θα συγκεντρωθούμε από εδώ και πέρα σε ειδικού τύπου κλάσεις μορφισμών, έτσι ώστε να μπορούμε να δώσουμε μία πιο ξεκάθαρη περιγραφή των μορφισμών της κατηγορίας $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Ορισμός 1.1.38. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και S μία κλάση μορφισμών της. Η S θα καλείται* **τοπικοποιούσα κλάση(localizing classs)**, *εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες*

(LC1) *Για κάθε αντικείμενο M της $\mathcal{C}$, ο ταυτοτικός μορφισμός 1_M του M ανήκει στην S.*

(LC2) *Εάν s, t είναι μορφισμοί στην S, τότε η σύνθεση είναι επίσης στην S.*

(LC3) (LC3a) *Για κάθε ζεύγος $f\colon M \to N$ και $s\colon L \to N$ με $s \in S$, υπάρχει μορφισμός $g\colon K \to L$ και $t\colon K \to M$ με $t \in S$ έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t"'] & L \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

(LC3b) *Για κάθε ζεύγος $f\colon N \to M$ και $s\colon N \to L$ με $s \in S$, υπάρχει μορφισμός $g\colon L \to K$ και $t\colon M \to K$ με $t \in S$ έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} K & L \arrow[l, dashed, "g"'] \\ M \arrow[u, dashed, "t"] & N \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

(LC4) *Έστω $f, g\colon M \to N$ δύο μορφισμοί. Τότε υπάρχει μορφισμός $s \in S$ τέτοιος ώστε $s \circ f = s \circ g$ αν και μόνο αν υπάρχει μορφισμός $t \in S$ τέτοιος ώστε $f \circ t = g \circ t$.*

Η παρακάτω Πρόταση θα δοθεί χωρίς απόδειξη, καθώς είναι σχετικά τετριμένη και οφείλεται στις ιδιότητες μιας τοπικοποιούσας κλάσης, δες [14](Παράδειγμα 1.3.1.).

Πρόταση 1.1.39. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της. Τότε αν $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι η τοποκοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την S τότε κάθε μορφισμός στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\mathcal{Q}(s)^{-1} \circ \mathcal{Q}(f)$ όπου $s \in S$.*

Σκοπός μας όταν ορίσαμε την τοπικοποιούσα κλάση ήταν να καταφέρουμε να δώσουμε μία προσιτή περιγραφή των μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ έτσι ώστε να μπορούμε να κάνουμε πιο εύκολα ορισμένους υπολογισμούς. Η παρακάτω έννοια επιτυγχάνει ακριβώς αυτό τον σκοπό μας.

Ορισμός 1.1.40. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της. Ένα* **αριστερό roof(left roof)** *μεταξύ δύο αντικειμένων της M και N είναι ένα διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

όπου $s \in S$. (Το σύμβολο $\sim$ δηλώνει ότι ο μορφισμός ανήκει στην S).

Ορισμός 1.1.41. *Αν*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

είναι δύο αριστερά roofs, λέμε ότι αυτά είναι **ισοδύναμα (equivalent left roofs)** *αν υπάρχει ένα αντικείμενο H στην $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon H \to L$ και $q\colon H \to N$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & H \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & N \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και $s \circ p = t \circ q \in S$.

Σχόλιο 1.1.42. Ο λόγος που η ισοδυναμία αριστερών roof ορίστηκε έτσι στον ορισμό 1.1.41 είναι ο παρακάτω:
Εάν

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & M & & N
\end{tikzcd}$$

είναι δύο ισοδύναμα αριστερά roofs τότε $Q(p \circ s) = Q(p) \circ Q(s)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Εφόσον επίσης $Q(s)$ είναι ισομορφισμός, έχουμε και ότι $Q(s)$ είναι ισομορφισμός. Ομοίως και ο $Q(q)$ είναι ισομορφισμός. Άρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
Q(f) \circ Q(s)^{-1} &= Q(f) \circ Q(p) \circ Q(p)^{-1} \circ Q(s)^{-1} = Q(f \circ p) \circ Q(s \circ p)^{-1} \\
&= Q(g \circ q) \circ Q(t \circ q)^{-1} = Q(g) \circ Q(q) \circ Q(q)^{-1} \circ Q(t)^{-1} = Q(g) \circ Q(t)^{-1}
\end{aligned}$$

Λήμμα 1.1.43. *Η παραπάνω σχέση του ορισμού 1.1.41 είναι μία σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη.

- (Ανακλαστική)
  Προφανώς το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & L \arrow[u, "\mathrm{id}_L"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_L"] & N \\
 & L \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

  είναι μεταθετικό. Αυτό μας δείχνει ότι το αριστερό roof είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του.

- (Συμμετρική)
  Εάν τα αριστερά roof

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & M & & N
\end{tikzcd}$$

  είναι ισοδύναμα τότε από τον ορισμό 1.1.41 παίρνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & H \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & N \\
 & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

  όπου $s \circ p = t \circ q \in S$. Τότε προφανώς και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & H \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & N \\
 & L \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ισχύει $t \circ q = s \circ p \in S$.
Επομένως και το

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

- (Μεταβατική)
Έστω ότι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

και το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Τότε παίρνουμε τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & H \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & N \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & Q \arrow[u, "r"'] \arrow[d, "v"] & N \\ & H \arrow[ul, "u", "\sim"'] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

όπου $s \circ p = t \circ q \in S$ και $u \circ v = t \circ r \in S$. Θεωρώντας τους μορφισμούς $s \circ p \colon P \to M$ και $t \circ r \colon Q \to M$ εφόσον $t \circ r \in S$ παίρνουμε από την (LC3a) ότι υπάρχει ένα αντικείμενο R και μορφισμοί $z \colon R \to P$ και $a \colon R \to Q$ όπου $z \in S$ και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "a"] \arrow[d, "z"', "\sim"] & Q \arrow[d, "t \circ r"] \\ P \arrow[r, "s \circ p"'] & M \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Τώρα θεωρούμε τους μορφισμούς $b = q \circ z\colon R \to K$ και $c = r \circ a\colon R \to K$. Προφανώς έχουμε ότι

$$t \circ b = t \circ q \circ z = t \circ r \circ a = t \circ c$$

Άρα από την (LC4) παίρνουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο T και μορφισμός $w\colon T \to R$ στην S έτσι ώστε $b \circ w = c \circ w$.
Ορίζουμε τώρα $x = p \circ z \circ w$ και $y = v \circ a \circ w$.
Θα δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & T \arrow[u, "x"'] \arrow[d, "y"] & N \\
& H \arrow[ul, "u", "\sim"'] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Καταρχάς έχουμε ότι:

$$s \circ x = s \circ p \circ z \circ w = t \circ q \circ z \circ w = t \circ b \circ w = t \circ c \circ w = t \circ r \circ a \circ w = u \circ v \circ a \circ w = u \circ y$$

Επίσης:

$$h \circ y = h \circ v \circ a \circ w = g \circ r \circ a \circ w = g \circ c \circ w = g \circ b \circ w = g \circ q \circ z \circ w = f \circ p \circ z \circ w = f \circ x$$

Τέλος ο μορφισμός $s \circ x = u \circ y$ ανήκει στην S καθώς οι μορφισμοί $s \circ p, z, w$ ανήκουν στην S. Άρα δείξαμε ότι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{tikzcd}
& H \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

■

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε την σύνθεση δύο αριστερών roof.

Πρόταση 1.1.44. *Έστω ότι έχουμε τα παρακάτω αριστερά roof μεταξύ των αντικειμένων M και N, καθώς και μεταξύ των N και P αντίστοιχα:*

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & N & & P
\end{tikzcd}$$

Τότε λόγω του (LC3a) υπάρχει ένα αντικείμενο U και μορφισμοί $u\colon U \to L$ και $h\colon U \to K$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & U \arrow[dl, dashed, "u"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \\
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Από το παραπάνω διάγραμμα παίρνουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\
M & & P
\end{tikzcd}$$

Τότε η κλάση ισοδυναμίας του παραπάνω αριστερού roof ισχυριζόμαστε ότι είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των U, u και h.Επιπλέον, αυτή η κλάση ισοδυναμίας εξαρτάται μόνο από τις κλάσεις ισοδυναμίας του πρώτου και του δεύτερου αριστερού roof.

Απόδειξη. Αρχικά θα ελέγξουμε την εξάρτηση ως προς το πρώτο αριστερό roof. Έστω ότι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το πρώτο αριστερό roof, δηλαδή υπάρχει ένα αντικείμενο V και μορφισμοί $v\colon V \to L$ και $v'\colon V \to L'$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & V \arrow[u, "v"] \arrow[d, "v'"] & N \\
 & L' \arrow[ul, "s'", "\sim"'] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και $s \circ v = s' \circ v' \in S$. Τότε υπάρχει ένα αντικείμενο U' και μορφισμοί $u'\colon U' \to L'$ και $h'\colon U' \to K$ όπου ο u' ανήκει στην S έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & U' \arrow[dl, dashed, "u'"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h'"] & & \\
 & L' \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Από αυτό παίρνουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[dl, "s'\circ u'"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ h'"] & \\
M & & P
\end{tikzcd}$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω αριστερό roof είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο αριστερό roof όπως ορίστηκε στην υπόθεση.
χρησιμοποιώντας την (LC3a) δύο φορές παίρνουμε ότι υπάρχουν αντικείμενα W και W' και μορφισμοί $w\colon W \to V$ και $w'\colon W' \to V$ που ανήκουν στην S και μορφισμοί $a\colon W \to U$ και $a'\colon W' \to U'$ έτσι ώστε τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[d, dashed, "w"', "\sim"] & U \arrow[d, "u", "\sim"'] \\
V \arrow[r, "v"'] & L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, dashed, "a'"] \arrow[d, dashed, "w'"', "\sim"] & U' \arrow[d, "u'", "\sim"'] \\
V \arrow[r, "v'"'] & L'
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικά. Αν χρησιμοποιήσουμε την (LC3a) άλλη μία φορά βλέπουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο R και μορφισμοί $r\colon R \to W$ και $r'\colon R \to W'$ που ανήκουν στην S έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dashed, "r", "\sim"'] \arrow[d, dashed, "r'"', "\sim"] & W \arrow[d, "w", "\sim"'] \\
W' \arrow[r, "\sim", "w'"'] & V
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$t \circ h \circ a \circ r = f \circ u \circ a \circ r = f \circ v \circ w \circ r = f' \circ v' \circ w' \circ r' = f' \circ u' \circ a' \circ r' = t \circ h' \circ a' \circ r'$$

Άρα από την (LC4) έχουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο Q και μορφισμός $q\colon Q \to R$ στην S τέτοιος ώστε:

$$h \circ a \circ r \circ q = h' \circ a' \circ r' \circ q$$

Ορίζουμε τώρα $b = a \circ r \circ q\colon Q \to U$ και $b' = a' \circ r' \circ q\colon Q \to U'$. Θα δείξουμε τότε ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s o u"', "\sim"] \arrow[dr, "g o h"] & \\
M & Q \arrow[u, "b"'] \arrow[d, "b'"] & P \\
 & U' \arrow[ul, "s o u'", "\sim"'] \arrow[ur, "g o h'"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.
Καταρχάς:

$$\begin{aligned}
s \circ u \circ b = s \circ u \circ a \circ r \circ q = s \circ v \circ w \circ r \circ q &= s' \circ v' \circ w' \circ r' \circ q \\
&= s' \circ u' \circ a' \circ r' \circ q = s' \circ u' \circ b'
\end{aligned}$$

και ανήκει στην S καθώς οι $s' \circ v', w'$ και r' ανήκουν στην S.
Επίσης $g \circ h \circ b = g \circ h' \circ b'$ λόγω του τρόπου ορισμού του q και κατά συνέπεια των b και b'. Δείξαμε δηλαδή ότι τα παραπάνω αριστερά roofs είναι ισοδύναμα.
Τώρα θα θα ελέγξουμε την εξάρτηση ως προς το δεύτερο αριστερό roof.
Έστω το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & K' \arrow[dl, "t'"', "\sim"] \arrow[dr, "g'"] & \\
N & & P
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το δεύτερο αριστερό roof, δηλαδή υπάρχει ένα αντικείμενο V και μορφισμοί $v\colon V \to K$ και $v'\colon V \to K'$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
N & V \arrow[u, "v"'] \arrow[d, "v'"] & P \\
 & K' \arrow[ul, "t'", "\sim"'] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και $t \circ v = t' \circ v'$ να ανήκει στην S.
Από την (LC3a) παίρνουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο U και μορφισμοί $u\colon U \to L$ στην S και $a\colon U \to V$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[d, dashed, "u"', "\sim"] & V \arrow[d, "tov", "\sim"'] \\
L \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Επομένως το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "v\circ a"] & & \\
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και από αυτό παίρνουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ v\circ a"] & \\
L & & P
\end{tikzcd}$$

Ομοίως και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "v'\circ a"] & & \\
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K' \arrow[dl, "t'"', "\sim"] \arrow[dr, "g'"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και από αυτό παίρνουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g'\circ v'\circ a"] & \\
L & & P
\end{tikzcd}$$

το οποίο παρατηρούμε ότι είναι το ίδιο με το παραπάνω αριστερό roof καθώς $g\circ v = g'\circ v'$ λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος 1.1.3.
Άρα η κλάση ισοδυναμίας της «σύνθεσης» αριστερών roof είναι ανεξάρτητη της επιλογής του δεύτερου roof. ■

Σχόλιο 1.1.45. Από την παραπάνω πρόταση 1.1.44 έπεται ότι μπορούμε να ορίσουμε καλά μία απεικόνιση από το γινόμενο του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roof μεταξύ του M και του N, με το συνόλο των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roof μεταξύ του N και του P στο συνόλο των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roof μεταξύ του M και του P. Αυτόν τον χάρτη θα τον ονομάζουμε **σύνθεση αριστερών roofs(composition of left roofs)**.

Πρόταση 1.1.46. *Η σύνθεση αριστερών roof όπως ορίστηκε στο σχόλιο 1.1.45 είναι προσεταιριστική.*

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
N & & P
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "v"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\
P & & Q
\end{tikzcd}$$

Τότε με επαναλαμβανόμενη χρήση του (LC3a) παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & & W \arrow[dl, dashed, "w"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "m"] & & & \\
 & & X \arrow[dl, dashed, "x"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "k"] & & Y \arrow[dl, dashed, "y"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "l"] & & \\
 & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "v"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\
M & & N & & P & & Q
\end{tikzcd}$$

Τότε από τη μία η σύνθεση των δύο πρώτων αριστερών roof αναπαρίσταται από το

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "s \circ x"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ k"] & \\
M & & P
\end{tikzcd}$$

και στη συνέχεια η σύνθεσή του με το τρίτο αναπαρίσταται από το

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "s \circ x \circ w"', "\sim"] \arrow[dr, "h \circ l \circ m"] & \\
M & & Q
\end{tikzcd}$$

Από την άλλη αν συνθέσουμε πρώτα τα δύο τελευταία αριστερά roofs, η σύνθεση αναπαρίσταται από το

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "u \circ y"', "\sim"] \arrow[dr, "h \circ l"] & \\
N & & Q
\end{tikzcd}$$

και στη συνέχεια η σύνθεσή του με το πρώτο αναπαρίσταται από το

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "s \circ x \circ w"', "\sim"] \arrow[dr, "h \circ l \circ m"] & \\
M & & Q
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι με όποια σειρά και αν συνθέσουμε παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα οπότε η σύνθεση είναι προσεταιριστική. ∎

Για κάθε αντικείμενο M της κατηγορίας $\mathcal{C}$ θα συμβολίζουμε με id_M την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & \\
M & & M
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 1.1.47. *Εάν έχουμε ένα αριστερό roof της μορφής*

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

και ϕ είναι η κλάση ισοδυναμίας του, τότε η σύνθεση της ϕ με την id_M ισούται με ϕ και η σύνθεση της id_N με την ϕ ισούται με ϕ.

Απόδειξη. Καταρχάς η id_M εκπροσωπείται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

Τότε από τη μία, συνθέτοντας με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "id_L"] & & \\ & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & M & & N \end{tikzcd}$$

το οποίο με τη σειρά του μας δίνει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "id_M \circ s"', "\sim"] \arrow[dr, "f \circ id_L"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

το οποίο ανήκει στην ϕ
. Από την άλλη συνθέτοντας με το id_N παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & L \arrow[dl, "id_N"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & \\ & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & N \arrow[dl, "id_N"', "\sim"] \arrow[dr, "id_N"] & \\ M & & N & & N \end{tikzcd}$$

το οποίο μας δίνει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s \circ id_N"', "\sim"] \arrow[dr, "id_N \circ f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

το οποίο ανήκει και αυτό στην ϕ. ■

Πόρισμα 1.1.48. *Τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ με τις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs ως μορφισμούς σχηματίζουν μία κατηγορία την οποία θα τη συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_S$.*

Σκοπός μας στη συνέχεια θα είναι να ορίσουμε έναν κατάλληλο συναρτητή Q και να αποδείξουμε ότι η παραπάνω κατηγορία $\mathcal{C}_S$ μαζί με τον συναρτητή Q αποτελούν την τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την τοπικοποιούσα κλάση S. Ξεκινάμε ορίζοντας τον Q:

Πρόταση 1.1.49. *Εάν ορίσουμε μία διαδικασία Q από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}_S$ η οποία στέλνει κάθε αντικείμενο στον εαυτό του και κάθε μορφισμό $f\colon M \to N$ στην κλάση ισοδυναμίας των αριστερών roof τα οποία εκπροσωπούνται από το*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

τότε η Q είναι ένας συναρτητής από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}_S$.

Απόδειξη. Καταρχάς προφανώς $Q(id_M) = id_M$ για κάθε αντικείμενο M. Έστω ένας άλλος μορφισμός $g\colon N \to P$. Η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των $Q(g)$ και $Q(f)$ αντιστοιχεί στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & \\ & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & N \arrow[dl, "id_N"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & & P \end{tikzcd}$$

το οποίο μας δίνει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ M & & P \end{tikzcd}$$

είναι δηλαδή ίσο με το $Q(g \circ f)$. ∎

Πρόταση 1.1.50. *Ο συναρτητής Q όπως ορίστηκε στην 1.1.49 στέλνει μορφισμούς της κατηγορίας $\mathcal{C}$ που ανήκουν στην κλάση S σε ισομορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}_S$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός $s\colon M \to N$ ανήκει στην S. Τότε η κλάση ισοδυναμίας του αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & \\ N & & M \end{tikzcd}$$

είναι δεξί αντίστροφος του $Q(s)$ καθώς η σύνθεσή τους δίνεται από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & & \\ & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & & M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & \\ M & & N & & M \end{tikzcd}$$

το οποίο μας δίνει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

δηλαδή τον ταυτοτικό μορφισμό στο M.
Από την άλλη η κλάση ισοδυναμίας αυτού του αριστερού roof είναι και αριστερός του αντίστροφος καθώς αρχικά παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & & \\
& M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
N & & M & & N
\end{tikzcd}$$

το οποίο μας δίνει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
N & & N
\end{tikzcd}$$

Αυτό όμως ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με τον ταυτικό μορφισμό του M καθώς το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
N & M \arrow[u, "id_M"'] \arrow[d, "s"] & N \\
& N \arrow[ul, "id_N", "\sim"'] \arrow[ur, "id_N"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ο μορφισμός $id_N \circ s = s \circ id_M$ ανήκει στην S.
Άρα ο μορφισμός $Q(s)$ είναι ισομορφισμός. ■

Πρόταση 1.1.51. *Για κάθε κατηγορία $\mathcal{B}$ και συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε ο $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s \in S$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G\colon \mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{B}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{C}_S \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε μια διαδικασία G που στέλνει κάθε αντικείμενο M της $\mathcal{C}_S$ στο αντικείμενο $F(M)$ της $\mathcal{B}$ και σε κάθε μορφισμό ϕ ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

στο μορφισμό $G(\phi) = F(f) \circ F(s)^{-1}$.
Αρχικά θα δείξουμε ότι αυτή η διαδικασία είναι καλά ορισμένη.
Έστω δύο ισοδύναμα αριστερά roof μεταξύ των αντικειμένων M και N

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & M & & N
\end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει ένα αντικείμενο U της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u\colon U \to L$ και $v\colon U \to K$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] & N \\
 & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και $s \circ u = t \circ v \in S$. Άρα έχουμε επίσης ότι $F(f) \circ F(u) = F(g) \circ F(v)$ και $F(s) \circ F(u) = F(t) \circ F(v)$. Εφόσον $s \circ u \in S$, ο $F(s) \circ F(u)$ είναι ισομορφισμός από υπόθεση. Επίσης και ο $F(s)$ είναι ισομορφισμός. Άρα παίρνουμε ότι και ο $F(u)$ είναι ισομορφισμός. Ομοίως παίρνουμε ότι και ο $F(v)$ είναι ισομορφισμός. Άρα:

$$F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} = F(v)^{-1} \circ F(t)^{-1}$$

και τέλος έχουμε:

$$\begin{aligned}
F(f) \circ F(s)^{-1} &= F(f) \circ F(u) \circ F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} \\
&= F(g) \circ F(v) \circ F(v)^{-1} \circ F(t)^{-1} = F(g) \circ F(t)^{-1}
\end{aligned}$$

Επομένως ξεκινώντας από αριστερά roof τα οποία ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας καταλήγουμε στον ίδιο μορφισμό στην κατηγορία $\mathcal{B}$. Οπότε ο G είναι καλά ορισμένος.
Τώρα θα δείξουμε ότι ο G είναι στην πραγματικότητα συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{C}_S$ στην κατηγορία $\mathcal{B}$.
Καταρχάς εύκολα έχουμε ότι $G(id_M) = F(id_M) \circ F(id_M)^{-1} = F(id_M) = id_{F(M)}$.
Έστω τώρα δύο μορφισμοί $\phi\colon M \to N$ και $\psi\colon N \to P$ οι οποίοι αναπαριστάνονται από τα αριστερά roof

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & N & & P
\end{tikzcd}$$

Τότε παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

και άρα η σύνθεση $\psi \circ \phi$ αναπαρίσταται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s \circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\
M & & P
\end{tikzcd}$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$G(\psi) \circ G(\phi) = F(g) \circ F(t)^{-1} \circ F(f) \circ F(s)^{-1}$$

Αλλά από το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα παίρνουμε ότι $F(f) \circ F(u) = F(t) \circ F(h)$, δηλαδή $F(t)^{-1} \circ F(f) = F(h) \circ F(u)^{-1}$. Άρα έχουμε ότι:

$$G(\psi) \circ G(\phi) = F(g) \circ F(h) \circ F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} = F(g \circ h) \circ F(s \circ u)^{-1} = G(\psi \circ \phi)$$

Άρα όντως ο G είναι ένας συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{C}_S$ στην κατηγορία $\mathcal{B}$.
Προφανώς από τον ορισμό του συναρτητή G παίρνουμε ότι $G \circ Q = F$.
Απομένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα του συναρτητή G. Έστω ένας ακόμα σναρτητής $H\colon \mathcal{C}_S \to \mathcal{B}$ για τον οποίο ισχύει $H \circ Q = F$. Τότε προφανώς $H(M) = F(M) = G(M)$ για κάθε αντικείμενο $M \in \mathcal{C}_S$.
Επίσης αν $\phi\colon M \to N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}_S$ ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

δηλαδή έχουμε ότι $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$. Τότε:

$$H(\phi) = H(Q(f)) \circ H(Q(s))^{-1} = F(f) \circ F(s)^{-1} = G(Q(f)) \circ G(Q(s))^{-1} = G(\phi).$$

Άρα $H = G$ και ο $G\colon \mathcal{C}_S \to \mathcal{B}$ είναι ο μοναδικός συναρτητής για τον οποίο ισχύει ότι $G \circ Q = F$. ■

Πόρισμα 1.1.52. *Η κατηγορία $\mathcal{C}_S$ μαζί με τον συναρτητή Q αποτελούν την τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών S, δηλαδή $\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathcal{C}_S$*

Τώρα θα δώσουμε ένα χρήσιμο λήμμα το οποίο μας βοηθά να έχουμε μία καλύτερη αναπαράσταση κάποιων μορφισμών ως προς ένα κοινό μορφισμό s της κλάσης μορφισμών S. Αυτό το λήμμα είναι το ανάλογο της αναγωγής κλασμάτων σε κοινό παρανομαστή.

Λήμμα 1.1.53. *Έστω*

$$\begin{tikzcd} & L_i \arrow[dl, "s_i"', "\sim"] \arrow[dr, "f_i"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

αριστερά roofs που αναπαριστούν μορφισμούς $\phi_i\colon M \to N$, $1 \leqslant i \leqslant n$, στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Τότε υπάρχει ένα αντικείμενο L στην $\mathcal{C}$, ένας μορρφισμός s στην S και μορφισμοί $g_i\colon L \to N$ στην $\mathcal{C}$ έτσι ώστε τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g_i"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν τους ϕ_i για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Εάν $n = 1$. δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι . Έστω $n > 1$ και ότι υπάρχει αντικείμενο K, μορφισμός $t \in S$ και h_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, τέτοιοι ώστε τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "h_i"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν του ϕ_i για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Λόγω του (LC3) υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed, "u'"] \arrow[d, dashed, "u"', "\sim"] & L_n \arrow[d, "s_n", "\sim"'] \\ K \arrow[r, "\sim", "t"'] & M \end{tikzcd}$$

όπου ο u ανήκει στην S. Τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "h_i"] & \\
M & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "id_U"] & N \\
& U \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "h_i \circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και άρα τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "h_i \circ u"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

αναπαριστούν τον ϕ_i για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Επίσης και το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L_n \arrow[dl, "s_n"', "\sim"] \arrow[dr, "f_n"] & \\
M & U \arrow[u, "u'"'] \arrow[d, "id_U"] & N \\
& U \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "f_n \circ u'"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, και άρα το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f_n \circ u'"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

αναπαριστά τον μορφισμό ϕ_n. Άρα για $L = U$, $g_i = h_i \circ u$ για $1 \leqslant i \leqslant n-1$, και $g_n = h_n \circ u'$ έχουμε το συμπέρασμα. ■

Σχόλιο 1.1.54. Σε αυτή την παράγραφο μιλήσαμε για το τι είναι τα αριστερά roof και βγάλαμε κάποια αποτελέσματα με βάση αυτά. Ωστόσο ο λόγος που τα ονομάσαμε αριστερά roof και όχι απλά roof είναι ότι υπάρχει και μία άλλη έννοια, η έννοια των δεξιών roof. Αυτή η έννοια είναι δυϊκή των αριστερών roof και πηγαίνοντας από μια κατηγορία στη δυϊκή της απεικονίζονται αριστερά roof σε δεξιά roof και αντίστροφα. Τα αποτελέσματα που βγάλαμε ισχύουν κατά δυϊκό τρόπο και για τα δεξιά roof.

Ορισμός 1.1.55. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της. Ένα* **δεξιό roof(right roof)** *μεταξύ δύο αντικειμένων της M και N είναι ένα διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
& L & \\
M \arrow[ur, "g"] & & N \arrow[ul, "t"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

όπου $t \in S$.

1.1.4 Τοπικοποίηση υποκατηγοριών

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα δείξουμε ότι ξεκινώντας από μία υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ και παίρνοντας κάποια κατάλληλη κλάση μορφισμών της η οποία είναι τοπικοποιούσα, τότε

μπορούμε να «δούμε» τοπικοποίηση της $\mathcal{C}'$ ως υποκατηγορία τη τοπικοίησης της $\mathcal{C}$. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με τη σειρά:
Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\mathcal{C}'$ μία υποκατηγορία της. Έστω επίσης S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε τότε ότι $S_{\mathcal{C}'} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{C}')$, ($\mathsf{Mor}(\mathcal{C}')$ είναι όλοι οι μορφισμοί της υποκαρηγορίας $\mathcal{C}'$), σχηματίζει μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}'$. Τότε έχουμε έναν φυσικό συναρτητή $\mathcal{C}'[S_{\mathcal{C}'}^{-1}] \to \mathcal{C}[S^{-1}]$. Αυτός ο συναρτητής απεικονίζει ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}'$ στον εαυτό του, και έναν μορφισμός της $\mathcal{C}'[S_{\mathcal{C}'}^{-1}]$, ο οποίος αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

στην κλάση ισοδυναμίας του ίδιου roof στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Πρόταση 1.1.56. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση μρφισμών της και $\mathcal{C}'$ μία πλήρης υποκατηγορία της. Υποθέτουμε επίσης ότι τα ακόλουθα ικανοποιούνται:*

(i) Η $S_{\mathcal{C}'} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{C}')$, είναι μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}'$.

(ii) Για κάθε μορφισμό $s\colon M \to N$, όπου $s \in S$ και M είναι αντικείμενο της $\mathcal{C}'$, υπάρχει μορφισμός $u\colon P \to N$, τέτοιος ώστε να ισχύει $s \circ u \in S$ και το P είναι αντικείμενο της $\mathcal{C}'$.

Τότε ο φυσικός συναρτητής $\mathcal{C}'[S_{\mathcal{C}'}^{-1}] \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός.

Απόδειξη. Έστω M και N δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}'$. Πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'[S_{\mathcal{C}'}^{-1}]}(M,N) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(M,N)$$

είναι «1-1» και «επί».
Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι «1-1». Έστω δύο αριστερά roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & M & & N \end{tikzcd}$$

τα οποία αναπαριστούν μορφισμούς στην $\mathcal{C}'[S_{\mathcal{C}'}^{-1}]$ τα οποία ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αριστερών roof στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Άρα έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα αριστερών roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] & N \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

όπου το U ανήκει στην $\mathcal{C}$ και $s \circ u = v \circ t \in S$. Λόγω της ιδιότητας (ii) της υπόθεσης, υπάρχει αντικείμενο V της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ και μορφισμός $w\colon V \to U$, τέτοιος ώστε να ισχύει $s \circ u \circ w = t \circ v \circ w$. Άρα παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & V \arrow[u, "u \circ w"'] \arrow[d, "v \circ w"] & N \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Συνεπώς τα παραπάνω αριστερά roofs ανήκουν και στην ίδια κλάση ισοδυναμίας στην $\mathcal{C}'[S_{\mathcal{C}'}^{-1}]$. Τώρα θα δείξουμε ότι είναι και «επί». Έστω

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

ένα αριστερό roof, το οποίο αναπαριστά έναν μορφισμό ϕ στο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(M, N)$. Λόγω της (ii) πάλι, έχουμε ότι υπάρχει αντικείμενο U της υποκατηγορίας $\mathcal{C}'$ και μορφισμός $u\colon U \to L$ στην S, τέτοιος ώστε $s \circ u \in S$. Άρα έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "id_U"] & N \\ & U \arrow[ul, "s \circ u", "\sim"'] \arrow[ur, "f \circ u"'] & \end{tikzcd}$$

το οποίο μας δείχνει ότι το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s \circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "f \circ u"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

επίσης αναπαριστά τον μορφισμό ϕ. Από την άλλη όμως, ορίζει επίσης και έναν μορφισμό μεταξύ του M και του N στην $\mathcal{C}'[S_{\mathcal{C}'}^{-1}]$, ο οποίος απεικονίζεται στον ϕ. Άρα η παραπάνω απεικόνιση είναι και «επί». ■

1.2 Αβελιανές Κατηγορίες

Έως τώρα έχουμε δώσει την έννοια της κατηγορίας χωρίς να έχουμε υποθέσει κάποιες επιπλέον συνθήκες να ισχύουν. Αυτό δε μας έχει επιτρέψει να βγάλουμε έως τώρα κάποια ιδιαίτερα αποτελέσματα. Στην πραγματικότητα πάντως οι περισσότερες κατηγορίες τις οποίες κανείς συναντά στα πλαίσια της θεωρίας δακτυλίων είναι αβελιανές κατηγορίες. Πολλά αποτελέσματα και κατασκευές στην κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R, έχουν τα αντίστοιχά τους και σε άλλες περιοχές. Το πλαίσιο των αβελιανων κατηγοριών είναι το κατάλληλο έτσι ώστε να μπορέσουμε να γενικεύσουμε πολλά από αυτά τα αποτελέσματα και τις κατασκευές που έχουμε από τη θεωρία προτύπων.

Ορισμός 1.2.1. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ ονομάζεται* **προπροσθετική (preadditive)** *εάν κάθε σύνολο* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ *έχει τη δομή αβελιανής ομάδας και η σύνθεση*

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (f, g) \longmapsto g \circ f$$

είναι διγραμμική. Δηλαδή αν $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *και* $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ *τότε ισχύει:*

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$$

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

Ορισμός 1.2.2. *Εάν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι δύο προπροσθετικές κατηγορίες, τότε ένας συναρτητής* $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *καλείται* **προσθετικός(additive)** *εάν για κάθε μορφισμό* $f, f'\colon X \to Y$ *ισχύει:*

$$T(f + f') = T(f) + T(f')$$

Παράδειγμα 1.2.3. 1. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων είναι προπροσθετική κατηγορία καθώς το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ μπορεί να πάρει κανονικά δομή προσθετικής ομάδας: για $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ θέτουμε ως $f+g\colon X \to Y$ τον ομομορφισμό ομάδων που ορίζεται ως $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Εύκολα βλέπουμε ότι η σύνθεση μορφισμών είναι διγραμμική.

2. Εάν A είναι ένας δακτύλιος τότε η κατηγορία $\mathcal{C}$ η οποία έχει ένα στοιχείο $*$ και $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*)$ είναι προπροσθετική κατηγορία καθώς η σύνθεση μορφισμών είναι ο πολλαπλασιασμός στοιχείων του A και η δομή ομάδας του $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*)$ είναι αυτή της αντίστοιχης προσθετικής ομάδας του A.

3. Εάν $\mathcal{C}$ είναι μία προπροσθετική κατηγορία και $\mathcal{C}'$ είναι μία υποκατηγορία της, τότε η $\mathcal{C}'$ είναι και αυτή προπροσθετική εάν για κάθε δύο αντικείμενο $X,Y \in \mathcal{C}'$ το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y)$ είναι υποομάδα του $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Σχόλιο 1.2.4. Στη συνέχεια της παραγράφου όπου θα αναφέρουμε μία κατηγορία θα εννοούμε προπροσθετική κατηγορία για την οποία θα υπάρχει μηδενικό αντικείμενο.

Ορισμός 1.2.5. *Έστω μία κατηγορία $\mathcal{C}$ και ένας μορφσιμός $f\colon A \to B$ μεταξύ δύο αντικειμένων της.*

- *Ο f θα καλείται* **μονομορφισμός(monomorphism)** *εάν για κάθε μορφισμό $\xi\colon X \to A$ για το οποίο ισχύει $f \circ \xi = 0$ συνεπάγεται ότι $\xi = 0$.*
- *Ο f θα καλείται* **επιμορφισμός (epimorphism)** *εάν για κάθε μορφισμό $\eta\colon B \to X$ για το οποίο ισχύει $\eta \circ f = 0$ συνεπάγεται ότι $\eta = 0$.*
- *Ο f θα καλείται* **ισομορφισμός (isomorphism)** *εάν υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon B \to A$ έτσι ώστε να ισχύει $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$.*

Εύκολα βλέπουμε από τον παραπάνω ορισμό ότι:

Πρόταση 1.2.6. *Κάθε ισομορφισμός είναι ταυτόχρονα και μονομορφισμός και επιμορφισμός.*

Ορισμός 1.2.7. *Μία υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ μίας κατηγορία $\mathcal{C}$, θα καλείται* **αυστηρά πλήρης (strictly full)**, *εάν είναι πλήρης και επιπλέον ισχύει, ότι αν ένα αντικείμενο ανήκει στην $\mathcal{C}'$ και αυτό είναι ισόμορφο με κάποιο άλλο αντικείμενο, τότε και το άλλο αντικείμενο θα ανήκει στην $\mathcal{C}'$.*

Ορισμός 1.2.8. *Δύο μονομορφισμοί θα είναι* **ισοδύναμοι (equivalent)** *εάν υπάρχει ισομορφισμός $\gamma\colon A \to A'$ τέτοιος ώστε $\alpha' \circ \gamma = \alpha$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \\ A' \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

Ορισμός 1.2.9. *Μία κλάση ισοδυναμίας μονομορφισμών στο αντικείμενο B θα καλείται* **υποαντικείμενο (subobject)** *του B και θα συμβολίζουμε ένα υποαντικείμενο μέσω κάποιου αναπαριστάσιμου μονομορφισμού της κλάσης ισοδυναμίας.*

Ορισμός 1.2.10. *Μία οικογένεια $(C_i)_I$ υποαντικειμένων ενός αντικειμένου C θα καλείται* **ευθέα (direct)**, *εάν το I γίνεται κατευυνόμενο σύνολο αν κανείς ορίσει $i \leqslant j$ όταν $C_i \subset C_j$.*

Ορισμός 1.2.11. *Εάν $\alpha\colon A \to B$ και $\alpha\colon A' \to B$ είναι δύο υποαντικείμενα του B, τότε γράφουμε $A \subset A'$ εάν υπάρχει μορφισμός $\gamma\colon A \to A'$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha' \circ \gamma = \alpha$ δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \\ A' \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

Σχόλιο 1.2.12. Παρατηρούμε ότι στον ορισμό 1.2.11 ο μορφσιμός γ είανι στην πραγματικότητα μονομορφισμός.

Σχόλιο 1.2.13. Κατά δυικό τρόπο ορίζονται τα αντικείμενα πηλίκα.

Ορισμός 1.2.14. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ θα καλείται* **τοπικά μικρή (locally small)**, *εάν η κλάση των υποαντικειμένων κάθε αντικειμένου είναι στην πραγματικότητα σύνολο.*

Ορισμός 1.2.15. *Ένας* **πυρήνας (kernel)** *ενός μορφισμού $\alpha\colon A \to B$ είναι ένας μορφισμός $\kappa\colon K \to A$ τέτοιος ώστε:*

1. $\alpha \circ \kappa = 0$

2. *για κάθε μορφισμό $\xi\colon X \to A$ με $\alpha\colon \xi = 0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\gamma\colon X \to K$ τέτοιος ώστε $\xi = \kappa \circ \gamma$*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\alpha"] & \\
 & K \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "0"'] & B \\
X \arrow[uur, bend left, "\xi"] \arrow[ur, dashed, "\gamma"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

η απόδειξη της παρακάτω Πρότασης είναι απλή και θα την παραλείψουμε, δες [23] (Πρόταση 2.2.).

Πρόταση 1.2.16. *Οποιοιδήποτε δύο πυρήνες ενός μορφισμού αναπαριστούν το ίδιο υποαντικείμενο.*

Ορισμός 1.2.17. *Ένας* **συνπυρήνας (cokernel)** *ενός μορφισμού $\alpha\colon A \to B$ είναι ένας μορφισμός $\kappa'\colon B \to K'$ τέτοιος ώστε:*

1. $\kappa' \circ \alpha = 0$

2. *για κάθε $\xi\colon B \to X$ με $\xi \circ \alpha = 0$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\gamma\colon K' \to X$ τέτοιος ώστε $\xi = \gamma \circ \kappa'$*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "\kappa'"'] \arrow[ddr, bend left, "\xi"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & K' \arrow[dr, dashed, "\gamma"'] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 1.2.18. *Οποιοιδήποτε δύο συνπυρήνες ενός μορφισμού αναπαριστούν το ίδιο αντικείμενο πηλίκο.*

Παρατήρηση 1.2.19. Από τους ορισμούς 1.2.15 και 1.2.17 φαίνεται απευθείας ότι κάθε πυρήνας είναι μονομορφισμός και κάθε συνπυρήνας είναι επιμορφισμός.Επίσης από τις προτάσεις 1.2.16 και 1.2.18 βλέπουμε την μοναδικότητα του πυρήνα και του συνπυρήνα (όποτε υπάρχουν), οπότε μπορούμε να γράφουμε $\kappa = \ker \alpha$ και $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \alpha$ για έναν πυρήνα $\kappa\colon \mathcal{K} \to A$ ενός μορφισμού α και $\kappa' = \operatorname{coker} \alpha$ και $\mathcal{K} = \operatorname{Coker} \alpha$ για έναν συνπυρήνα $\kappa'\colon B \to \mathcal{K}'$ ενός μορφισμού α.

Οι επόμενη πρόταση αποδεικνύεται άμεσα και μας δείχνει έναν πιο εύκολο τρόπο να ελέγχουμε πότε ένας μορφισμός είναι μονομορφισμός ή επιμορφισμός.

Πρόταση 1.2.20. *Ένας μορφισμός α είναι μονομορφισμό αν και μόνο αν $\operatorname{Ker} \alpha = 0$ και επιμορφισμός αν και μόνο αν $\operatorname{Coker} \alpha = 0$.*

Πρόταση 1.2.21. *Εάν ο α είναι ο πυρήνας ενός μορφισμού και ο* $\mathsf{Coker}\,\alpha$ *υπάρχει, τότε* $\alpha = \ker(\mathrm{coker}\,\alpha)$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο $\alpha\colon A \to B$ είναι ο πυρήνας του $\gamma\colon B \to C$. Τότε παίρνουμε ότι $\gamma \circ \alpha = 0$. Αλλά επειδή από τον ορισμό του συνπηρήνα κάθε άλλος μορφισμός που μηδενίζει τον α αναλύεται μοναδικά μέσω του συνπηρήνα,υπάρχει μοναδικός β τέτοιος ώστε $\beta \circ \mathrm{coker}\,\alpha = \gamma$. Έστω τώρα ένας μορφισμός $\xi\colon X \to B$ τέτοιος ώστε $\mathrm{coker}\,\alpha \circ \xi = 0$. Τότε θα ισχύει και $\beta \circ \mathrm{coker}\,\alpha \circ \xi = 0$. Άρα $\gamma \circ \xi = 0$. Όμως ο α είναι πυρήνας του γ. Άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\zeta\colon X \to A$ τέτοιος ώστε $\alpha \circ \zeta = \xi$. Με λίγα λόγια αποδείξαμε ότι $\alpha = \ker(\mathrm{coker}\,\alpha)$. ∎

Αφού δώσαμε του ορισμούς του πυρήνα και του συνπυρήνα καθώς και κάποιες βασικές προτάσεις θα προχωρήσουμε δίνοντας τους ορισμούς δύο πολύ βασικών εννοιών. Του γινομένου και του συνγινομένου, οι οποίες αποτελούν γενικεύσεις των ήδη γνωστών εννοιών από τη μελέτη της θεωρίας προτύπων.

Ορισμός 1.2.22. *Έστω $(C_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια αντικειμένων μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ένα* **γινόμενο (product)** *αυτής της οικογένειας είναι ένα αντικείμενο C μαζί με κάποιους μορφισμούς $\pi_i\colon C \to C_i (i \in I)$, έτσι ώστε για κάθε αντικείμενο X και μορφισμούς $\xi_i\colon X \to C_i (i \in I)$ να υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\xi\colon X \to C$ για τον οποίο να ισχύει $\pi_i \circ \xi = \xi_i$ για κάθε $i \in I$.*

Ορισμός 1.2.23. *Έστω $(C_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια αντικειμένων μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ένα* **συνγινόμενο (coproduct)** *αυτής της οικογένειας είναι ένα αντικείμενο C μαζί με κάποιους μορφισμούς $\iota_i\colon C_i \to C (i \in I)$, έτσι ώστε για κάθε αντικείμενο X και μορφισμούς $\zeta_i\colon C_i \to X (i \in I)$ να υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\zeta\colon C \to X$ για τον οποίο να ισχύει $\iota_i \circ \zeta = \zeta_i$ για κάθε $i \in I$.*

Παρατήρηση 1.2.24. Το γινόμενο και το συνγινόμενο εφόσον ικανοποιούν μία οικουμενική ιδιότητα, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι είναι μοναδικά (όταν υπάρχουν) ως προς ισομορφισμό. Το γινόμενο θα συμβολίζεται ως $\prod_{i\in I} C_i$ και το συνγινόμενο ως $\coprod_{i\in I} C_i$ (ή ως $\oplus_{i\in I} C_i$). Οι κανονικοί μορφισμοί $\pi_i\colon C \to C_i$ θα ονομάζονται **προβολές(projections)** και οι κανονικοί μορφισμοί $\iota_i\colon C_i \to C$ θα ονομάζονται **ενέσεις(injections)**.

Παρατήρηση 1.2.25. Από τους ορισμούς 1.2.22 και 1.2.23 μπορούμε να πάρουμε τις παρακάτω σχέσεις για το γινόμενο και το συνγινόμενο μίας οικογένειας αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Hom}(X, \prod_{i\in I} C_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X, C_i), \tag{1.7}$$

$$\mathrm{Hom}(\coprod_{i\in I} C_i, X) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(C_i, X) \tag{1.8}$$

Σχόλιο 1.2.26. Όταν έχουμε μία οικογένεια $(C_i)_{i\in I}$ για την οποία ισχύει $C_i = C$ για κάθε $i \in I$, όπου C είναι ένα συγκεκριμένο αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$, τότε το γινόμενο της οικογένειας (αν υπάρχει) θα το συμβολίζουμε C^I και το συνγινόμενο αντίστοιχα $C^{(I)}$.

Πρόταση 1.2.27. *Κάθε γινόμενο μονομορφισμών είναι μονομορφισμός και κάθε συνγινόμενο επιμορφισμών είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Δες [23] (Πρόταση 3.1.). ∎

Θεώρημα 1.2.28. *Έστω $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ μία πεπερασμένη οικογένεια αντικειμένων μίας προπροσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το δοθέν σύνολο αντικειμένων έχει ένα συνγινόμενο.*

2. *Το δοθέν σύνολο αντικειμένων έχει ένα γινόμενο.*

3. *Υπάρχει ένα αντικείμενο C της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $\iota_i\colon C_i \to C$, $\pi_i\colon C \to C_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν :*

(α') $\sum_{i=1}^{n} \iota_i \circ \pi_i = 1_X$,

(β') $\pi_i \circ \iota_j = \begin{cases} 0 \text{ εάν } i \neq j \\ 1_{X_i} \text{ εάν } i = j \end{cases}$

Επίσης το γινόμενο και το συνγινόμενο της παραπάνω οικογένειας είναι κανονικά ισομορφικά.

Απόδειξη. Δες [20] (Θεώρημα 1.2.). ∎

Ορισμός 1.2.29. *Μία προπροσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$ θα ονομάζεται* **προσθετική (additive)** *όταν για κάθε ζεύγος αντικειμένων της X, Y υπάρχει το συνγινόμενο $X \oplus Y$.*

Σχόλιο 1.2.30. Από το θεώρημα 1.2.28 έχουμε ότι μία προσθετική κατηγορία είναι μία προπροσθετική κατηγορία στην οποία υπάρχουν τα πεπερασμένα γινόμενα και συνγινόμενα.

Παράδειγμα 1.2.31.

1. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων είναι μία προσθετική κατηγορία. Πράγματι αν X, Y είναι δύο αντικείμενά της τότε αν θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $X \prod Y$ όπου η πρόσθεση είναι κατά συντεταγμένη και $p\colon X \prod Y \to X$ και $q\colon X \prod Y \to Y$ οι φυσικές προβολές, τότε παρατηρούμε ότι τα $X \prod Y$, p και q ορίζουν ένα γινόμενο των X και Y.

2. Η κατηγορία R-Mod είναι μία προσθετική κατηγορία καθώς από τη θεωρία προτύπων γνωρίζουμε ότι υπάρχει το γινόμενο και το συνγινόμενο μίας οικογένειας αριστερών R-προτύπων.

Πριν προχωρήσουμε, δίνοντας των ορισμό της Αβελιανής κατηγορίας, θα δώσουμε τον ορισμό των συμπαγών αντικειμένων τα οποία παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη Θεωρία κατηγοριών, καθώς αποτελούν ένα χρήσιμο και βοηθητικό εργαλείο για την ανάπτυξη εκτενούς θεωρίας.

Ορισμός 1.2.32. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία η οποία είναι συνπλήρης. Θα λέμε ότι ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ είναι* **συμπαγές (compact)**, *εάν κάθε μορφισμός $X \to \coprod_{i\in I} Y_i$, όπου $(Y_i)_{i\in I}$ είναι μία τυχαία οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{C}$, αναλύεται μέσω ενός πεπερασμένου γινομένου. Δηλαδή υπάρχουν μορφισμοί $X \to \coprod_{k\in K} Y_k$ και $\coprod_{k\in K} Y_k \to \coprod_{i\in I} Y_i$, όπου K πεπερασμένο υποσύνολο του I, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{i\in I} Y_i \\ \coprod_{k\in K} Y_k \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 1.2.33. Ένας ισοδύναμος Ορισμός των συμπαγών αντικειμένων είναι ο εξής: Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία η οποία είναι συνπλήρης. Το αντικείμενο X θα είναι συμπαγές αν και μόνο αν ο συναρτητής $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ διατηρεί τα συνγινόμενα.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ορισμό μίας Αβελιανής κατηγορίας. Στη συνέχεια τις διατριβής θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα τέτοιου είδους κατηγορίες καθώς όπως θα δούμε έχουν πολλές καλές ιδιότητες και ισχύουν γι αυτές πολλές γενικεύσεις γνωστών ιδιοτήτων από τη θεωρία προτύπων.

Ορισμός 1.2.34. *Μία κατηγορία $\mathcal{A}$ θα είναι* **αβελιανή (abelian)** *εάν ισχύουν τα παρακάτω:*

A1. Η $\mathcal{A}$ είναι προπροσθετική.

A2. Κάθε πεπερασμένη οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{A}$ έχει ένα γινόμενο (και συνγινόμενο).

A3. Κάθε μορφισμός έχει έναν πυρήνα και έναν συνπυρήνα.

A4. Κάθε μορφισμός α έχει μία ανάλυση $\alpha = \gamma \circ \beta$, όπου ο β είναι ένας συνπυρήνας και ο γ είναι ένας πυρήνας

Σχόλιο 1.2.35. Το αξίωμα A4 μπορεί να αντικατασταθεί από ένα άλλο αξίωμα A4'.
Έστω καταρχάς μία κατηγορία $\mathcal{A}$ η οποία ικανοποιεί τα A1, A2, A3. Έστω τώρα ένας μορφισμός $\alpha\colon B \to C$. Υπάρχει τότε μία κανονική ανάλυση του μορφισμού όπως φαίνεται απο το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ker}\,\alpha \arrow[r, "\mathsf{ker}\,\alpha"] & B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"'] & & C \arrow[r, "\mathsf{coker}\,\alpha"] & \mathsf{Coker}\,\alpha \\ & \mathsf{Coker}\,(\mathsf{ker}\,\alpha) \arrow[rr, "\alpha'"'] & & \mathsf{Ker}\,(\mathsf{coker}\,\alpha) \arrow[u, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός α' παίρνεταιως εξής: $\alpha \circ \mathsf{ker}\,\alpha = 0$ άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\beta\colon \mathsf{Coker}\,(\mathsf{ker}\,\alpha) \to C$ έτσι ώστε $\alpha = \beta \circ \lambda$. Τότε παίρνουμε ότι $\mathsf{coker}\,\alpha \circ \beta \circ \lambda = 0$. Όμως ο λ είναι επιμορφισμός. Άρα $\mathsf{coker}\,\alpha \circ \beta = 0$. Άρα υπάρχει μοναδικό μορφισμός $\alpha'\colon \mathsf{Coker}\,(\mathsf{ker}\,\alpha) \to \mathsf{Ker}\,(\mathsf{coker}\,\alpha)$ τέτοιος ώστε $\beta = \alpha \circ \mu$.
Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το αντίστοιχο αξίωμα:
A4'. Ο μορφισμός $\alpha'\colon \mathsf{Coker}\,(\mathsf{ker}\,\alpha) \to \mathsf{Ker}\,(\mathsf{coker}\,\alpha)$ είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό α.

Θα δείξουμε τώρα την ισοδυναμία των αξιωμάτων A4 και A4'. Καταρχάς είναι προφανές ότι το αξίωμα A4 επάγεται άμεσα από το A4'. Έστω τώρα ότι ισχύουν τα αξιώματα A1, A2, A3 και το A4. Τότε από την πρόταση 1.2.21 έχουμε ότι $\beta = \mathsf{coker}\,(\mathsf{ker}\,\beta)$ και $\gamma = \mathsf{ker}\,(\mathsf{coker}\,\gamma)$. Επίσης έχουμε ότι καθώς ο γ είναι μονομορφισμός ότι $\mathsf{ker}\,\beta = \mathsf{ker}\,\alpha$ και επειδή ο β είναι επιμορφισμός ότι $\mathsf{coker}\,\gamma = \mathsf{coker}\,\alpha$. Άρα συνολικά παίρνουμε ότι $\mathsf{Coker}\,(\mathsf{ker}\,\alpha) = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{coker}\,\alpha)$.

Πρόταση 1.2.36. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και α ένας μορφισμός της. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Εάν ο α είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός τότε ο α είναι ισομορφισμός.*
2. *Εάν ο α είναι μονομορφισμός τότε* $\alpha = \mathsf{ker}\,(\mathsf{coker}\,a)$.
3. *Εάν ο α είναι επιμορφισμός τότε* $\alpha = \mathsf{coker}\,(\mathsf{ker}\,a)$.

Απόδειξη. Καταρχάς για το 1. εφόσον ο α είναι μονοομορφισμός και επιμορφισμός παίρνομε ότι $\mathsf{ker}\,\alpha = 0$ και $\mathsf{coker}\,\alpha = 0$. Άρα έχουμε και ότι $\mathsf{ker}\,\beta = 0$ και $\mathsf{coker}\,\gamma = 0$ από την παραπάνω συζήτηση. Τότε $\beta = \mathsf{coker}\,0$ και $\gamma = \mathsf{ker}\,0$. Άρα ο β και ο γ είναι ισομορφισμοί και επειδή $\alpha = \gamma \circ \beta$ και ο α είναι ισομορφισμός.
Για το 2. εφόσον ο α είναι μονομορφισμός $\mathsf{ker}\,\alpha = 0$ και άρα $\beta = \mathsf{coker}\,0$. Άρα ο β είναι ισομορφισμός και επειδή $\alpha = \gamma \circ \beta$ με τον γ να είναι ένας πυρήνας παίρνουμε ότι και ο α είναι ένας πυρήνας. Άρα από την πρόταση 1.2.21 έχουμε το ζητούμενο. Ομοίως αποδεικνύεται και το 3. ■

Ορισμός 1.2.37. *Για κάθε μορφισμό $\alpha\colon A \to B$ ορίζουμε την* **εικόνα (image)** *του α ως* $\mathsf{Im}\,\alpha = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{coker}\,a)$ *και την* **συνεικόνα (coimage)** *του α ως* $\mathsf{Coim}\,\alpha = \mathsf{Coker}\,(\mathsf{ker}\,a)$.

Σχόλιο 1.2.38. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.2.37 η (A4') είναι ισοδύναμη με το να πούμε ότι ο $\alpha'\colon \mathsf{Coim}\,\alpha \to \mathsf{Im}\,\alpha$ είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό α.

Παρατήρηση 1.2.39. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό 1.2.37 κάθε μορφισμός α έχει μία ανάλυση της μορφής

$$A \xrightarrow{\alpha'} \mathsf{Im}\,\alpha \xrightarrow{\gamma} B$$

όπου ο α' είναι επιμορφισμός και ο γ είναι μονομορφισμός.

Παρατήρηση 1.2.40. Έστω C ένα αντικείμενο της κατηγορία $\mathcal{C}$ και $(C_i)_I$ μία οικογένεια υποαντικειμένων του. Οι μονομορφισμοί $C_i \to C$ μας δίνουν έναν μορφισμό $\alpha\colon \coprod_I C_i \to C$. Η εικόνα του α καλείται **άθροισμα** των υποαντικειμένων (C_i) και συμβολίζεται με $\sum_I C_i$ (ή $C_1 + \cdots + C_n$ εάν η οικογένεια είναι πεπερασμένη). Εάν ο α είναι μονομορφισμός το άθροισμα καλείται **ευθύ** και η οικογένεια των υποαντικειμένων (C_i) ονομάζεται ανεξάρτητη. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πάρουμε έναν ισομορφισμό $\coprod_I C_i \cong \sum_I C_i$.

Σχόλιο 1.2.41. Όταν το A' είναι ένα υποαντικείμενο του A θα συμβολίζουμε A/A' το αντικείμενο πηλίκο $\mathsf{Coker}\,(A' \to A)$ του A. Αν A' είναι ένα υποαντικείμενο του A θα συμβολίζουμε με $\alpha(A')$ την εικόνα του μορφισμού $A' \to A \xrightarrow{\alpha} B$. Επίσης αν B' είναι ένα υποαντικείμενο του B θα συμβολίζουμε με $\alpha^{-1}(B')$ τον πυρήνα του μορφισμού $A \xrightarrow{\alpha} B \to B/B'$.

Ένας από τα προτερήματα των αβελιανών κατηγοριών είναι ότι κανείς μπορεί να δουλέψει με ακριβείς ακολουθίες σχεδόν με τον ίδιο τρόπο που δουλεύει κανείς και στη θεωρία προτύπων.

Ορισμός 1.2.42. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $(C_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια αντικειμένων της. Μία ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow C_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} C_i \xrightarrow{\alpha_i} C_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

θα λέγεται **ακριβής (exact)** *στο C_i όταν $\mathsf{Im}\,\alpha_{i-1} = \mathsf{Ker}\,\alpha_i$ και συνολικά θα λέγεται ακριβής ακολουθία αν αυτό ισχύει για κάθε C_i με $i \in I$.*

Ορισμός 1.2.43. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και M, L, N αντικείμενά της. Η ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

θα ονομάζεται **σύντομη ακριβής ακολουθία (short exact sequence)**.

Ορισμός 1.2.44. *Σε μία κατηγορία όπου υπάρχει η έννοια της σύντομης ακριβής ακολουθίας ένα* **extension** *ενός αντικειμένου N κατά ένα αντικείμενο L θα λέγεται οποιοδήποτε αντικείμενο M «χωράει» σε μία σύντομη ακριβή ακολουθία:*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Ορισμός 1.2.45. *Αν έχουμε δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} N' \longrightarrow 0$$

θα λέμε ότι υπάρχει ένας **ισομορφισμός ακολουθιών (isomorphism of sequences)** *εάν υπάρχουν ισομορφισμοί f, g, h έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\alpha'"'] & M' \arrow[r, "\beta'"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 1.2.46. *Μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

θα ονομάζεται **ακριβής διασπάσιμη ακολουθία (split exact sequence)**, *εάν ισχύει οποιαδήποτε από τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Υπάρχει ένας μορφισμός $\phi\colon M \to L$ τέτοιος ώστε $\phi \circ \alpha = 1_L$.*

2. *Υπάρχει ένας μορφισμός $\psi\colon N \to M$ τέτοιος ώστε $\beta \circ \psi = 1_N$.*

3. *Υπάρχει ένας ισομορφισμός ακολουθιών με την ακολουθία*
$$0 \to L \xrightarrow{\iota} L \oplus N \xrightarrow{\pi} N \to 0$$
όπου ι *και* π *είναι οι κανονική ένεση και προβολή αντίστοιχα του συγγινομένου* $L \coprod N$.

Πρόταση 1.2.47. *Οι ιδιότητες του ορισμού 1.2.46 είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Καταρχάς εύκολα βλέπουμε ότι η ιδιότητα 3) συνεπάγεται τις άλλες δύο. Από την 3) έχουμε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός g τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_L"'] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\iota"'] & L \oplus N \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Έχουμε το αποτέλεσμα απλά παίρνοντας $\phi = \pi \circ g$ και $\psi = \iota \circ g$ όπου π και ι είναι οι αντίστοιχες προβολές και ενέσεις.
Τώρα θα δείξουμε ότι η 1) συνεπάγεται την 3). Έστω ότι υπάρχει μορφισμός $\phi\colon M \to L$ τέτοιος ώστε $\phi \circ \alpha = 1_L$. Από του μορφισμούς $\phi\colon M \to L$ και $\beta\colon M \to N$ μπορούμε να κατασκευάζουμε έναν μορφισμό $g\colon M \to L \coprod N$ λόγω του 1.2.22. Θα δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_L"'] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\iota"'] & L \oplus N \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Για το πρώτο τετράγωνο έχουμε ότι: από την κατασκευή του g έχουμε ότι $\pi_L \circ g = \phi$. Αλλά τότε:

$$\pi_L \circ g \circ \alpha = \phi \circ \alpha \Longrightarrow \pi_L \circ g \circ \alpha = 1_L$$
$$\Longrightarrow \iota_L \circ \pi_L \circ g \circ \alpha = \iota_L \circ 1_L \Longrightarrow g \circ \alpha = \iota_L$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η μεταθετικότητα του δευτέρου τετραγώνου.
Τέλος ο g είναι ισομορφισμός καθώς είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός:
Έστω $f\colon X \to M$ τέτοιος ώστε $g \circ f = 0$. Τότε έχουμε ότι $\pi_N \circ g \circ f = 0$ και από τη μεταθετικότητα του δεύτερου τετραγώνου έχουμε ότι $1_N \circ \beta \circ f = 0$. Αλλά ο 1_N είναι μονομορφισμός. Άρα $\beta \circ f = 0$. Επίσης από την ακρίβεια της πρώτης σύντομης ακολουθίας έχουμε ότι ο β είναι επιμορφισμός. Άρα $f = 0$. Άρα όντως ο g είναι μονομορφισμός. Όμοια αποδεικνύεται και ότι ο g είναι επιμορφισμός.
Άρα αποδείχτηκε η ιδιότητα 3).
Όμοια αποδεικνύεται και ότι η 2) συνεπάγεται την 3). ∎

Ορισμός 1.2.48. *Έστω* $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής μεταξύ αβελιανών κατηγοριών. Ο* T *θα λέγεται* **αριστερά ακριβής (left exact)**, *όταν ξεκινώντας από την σύντομη ακριβής ακολουθία*
$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$
στην κατηγορία $\mathcal{A}$, *παίρνουμε την ακριβής ακολουθία*
$$0 \longrightarrow T(L) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M) \xrightarrow{T(\beta)} T(N)$$
στην κατηγορία $\mathcal{B}$. *Αντίστοιχα θα λέγεται* **δεξιά ακριβής (right exact)**, *όταν παίρνουμε την ακριβή ακολουθία*
$$T(L) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M) \xrightarrow{T(\beta)} T(N) \longrightarrow 0$$
Τέλος θα λέγεται **ακριβής (exact)**, *όταν παίρνουμε την ακριβή ακολουθία*
$$0 \longrightarrow T(L) \xrightarrow{T(\alpha)} T(M) \xrightarrow{T(\beta)} T(N) \longrightarrow 0$$

Ορισμός 1.2.49. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και. Ένα αντικείμενο C θα καλείται* **προβολικό (projective)** *εάν ο συναρτητής $\mathsf{Hom}(C, \text{-})\colon \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ είναι ακριβής, και θα καλείται* **ενέσιμο (injective)** *εάν ο συναρτητής $\mathsf{Hom}(\text{-}, C)\colon \mathcal{A}^{op} \to \mathsf{Ab}$ είναι ακριβής.*

Ορισμός 1.2.50. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ θα λέμε ότι έχει* **αρκετά ενέσιμα (enough injectives)**, *όταν κάθε αντικείμενό της είναι υποαντικείμενο ενός ενέσιμου αντικειμένου της. Θα λέμε επίσης ότι έχει* **αρκετά προβολικά (enough projectives)**, *όταν κάθε αντικείμενό της είναι αντικείμενο πηλίκο ενός προβολικού αντικειμένου της.*

Παράδειγμα 1.2.51.

1. Το αντικείμενο $\prod_{i \in I} C_i$ είναι ενέσιμο αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο $C_i, i \in I$ είναι ενέσιμο . Αυτό μπορεί να φανεί από τη σχέση 1.7.

2. Το αντικείμενο $\coprod_{i \in I} C_i$ είναι προβολικό αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο $C_i, i \in I$ είναι προβολικό. Αυτό μπορεί να φανεί από τη σχέση 1.8.

Σχόλιο 1.2.52. Στη συνέχεια της παραγράφου οι κατηγορίες στις οποίες θα αναφερόμαστε θα είναι αβελιανές.

Ορισμός 1.2.53. *Έστω δύο μορφισμοί της κατηγορίας $\mathcal{A}$, $\alpha_1\colon C_1 \to C$ και $\alpha_2\colon C_2 \to C$. Ένα* **pullback** *των μορφισμών α_1 και α_2 θα είναι ένα αντικείμενο P μαζί με μορφισμούς $\pi_1\colon P \to C_1$ και $\pi_2\colon P \to C_2$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\alpha_1 \circ \pi_1 = \alpha_2 \circ \pi_2$,

2. *Για κάθε αντικείμενο X και μορφισμούς $\xi_1\colon X \to C_1$ και $\xi_2\colon X \to C_2$ με $\alpha_1 \circ \xi_1 = \alpha_2 \circ \xi_2$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\gamma\colon X \to P$ τέτοιος ώστε $\pi_1 \circ \gamma = \xi_1$ και $\pi_2 \circ \gamma = \xi_2$.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\xi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\xi_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & C_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& C_1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

Επίσης Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & C_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
C_1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

καλείται **pullback διάγραμμα(pullback diagramm)**.

Ορισμός 1.2.54. *Έστω δύο μορφισμοί της κατηγορίας $\mathcal{A}$, $\beta_1\colon C \to C_1$ και $\beta_2\colon C \to C_2$. Ένα* **pushout** *των μορφισμών β_1 και β_2 θα είναι ένα αντικείμενο Q μαζί με μορφισμούς $\iota_1\colon C_1 \to Q$ και $\iota_2\colon C_2 \to Q$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\iota_1 \circ \beta_1 = \iota_2 \circ \beta_2$,

2. *Για κάθε αντικείμενο X και μορφισμούς $\zeta_1\colon C_1 \to X$ και $\zeta_2\colon C_2 \to X$ με $\zeta_1 \circ \beta_1 = \zeta_2 \circ \beta_2$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\delta\colon Q \to X$ τέτοιος ώστε $\delta \circ \iota_1 = \zeta_1$ και $\delta \circ \iota_2 = \zeta_2$.*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C_1 \arrow[d, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend left, "\zeta_1"] & \\
C_2 \arrow[r, "\iota_2"'] \arrow[drr, bend right, "\zeta_2"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\delta"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Επίσης το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C_1 \arrow[d, "\iota_1"] \\ C_2 \arrow[r, "\iota_2"'] & Q \end{tikzcd}$$

καλείται **pushout διάγραμμα(pushout diagramm)**.

Η απόδειξη της επόμενης Πρότασης είναι άμεση και παραλείπεται, καθώς το pullback και το pushout ικανοποιούν μία οικουμενική ιδιότητα.

Πρόταση 1.2.55. *Το pullback και το pushout είναι μοναδικά ως προς ισομορφισμό.*

Παράδειγμα 1.2.56. 1. Οι πυρήνες είναι ειδικές περιπτώσεις pullback και οι συνπυρήνες είναι ειδικές περιπτώσεις pushout. Εάν έχουμε έναν μορφισμό $\alpha\colon A \to B$ τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

είναι διάγραμμα pullback αν και μόνο αν $P = \mathsf{Ker}\,\alpha$. Και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\iota"] \\ 0 \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

είναι διάγραμμα pushout αν και μόνο αν $Q = \mathsf{Coker}\,\alpha$.

2. Τα πεπερασμένα γινόμενα είναι περιπτώσεις pullback καθώς το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C_1 \prod C_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & C_2 \arrow[d] \\ C_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

είναι διάγραμμα pullback.

Πρόταση 1.2.57. *Έστω ένα διάγραμμα pullback όπως στον ορισμό 1.2.53*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & C_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & C \end{tikzcd}$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. *Αν ο α_1 είναι μονομορφισμός, τότε είναι μονομορφισμός και ο π_2.*

2. *Αν ο α_1 είναι επιμορφισμός, τότε είναι επιμορφισμός και ο π_2.*

3. *Αν ο α_1 είναι πυρήνας του μορφισμού $\beta\colon B \to C$, τότε ο π_2 είναι πυρήνας του $\beta \circ \alpha_2$.*

Απόδειξη. Δες [23] (Πρόταση 5.1.). ■

1.2.1 Generators και Cogenerators

Σε αυτή την υποενότητα θα μιλήσουμε για generators και cogenerators οι οποίοι θα παίξουν μεγάλο ρόλο στη συνέχεια της διατριβής καθώς και γενικότερα στη θεωρία κατηγοριών καθώς με τη βοήθειά τους θα οριστούν οι κατηγορίες Grothendieck για τις οποίες θα γίνει πιο λεπτομερής συζήτηση στην επόμενη ενότητα.

Πρόταση 1.2.58. *Έστω δύο αβελιανές κατηγορίες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$ και ένας προσθετικός ακριβής συναρτητής $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. Ο T είναι πιστός αν και μόνο αν $T(C) \neq 0$ για κάθε μη μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι ο T είναι πιστός και $T(C) = 0$. Τότε $T(1_C) = 1_{T(C)} = 0$. Αλλά λόγω του ορισμού 1.1.18 έχουμε ότι $1_C = 0$. Άρα $C = 0$
Έστω τώρα ότι $T(C) = 0$ συνεπάγεται ότι $C = 0$. Εφόσον ο T είναι προσθετικός αρκεί να δειχτεί ότι αν ένας μορφισμός α της κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι μη μηδενικός τότε και $T(\alpha) \neq 0$. Έστω δηλαδή ένας τέτοιος $\alpha \neq 0$. Τότε $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$ και άρα και $T(\operatorname{Im}\alpha) \neq 0$. Αλλά ο T είναι ακριβής. Άρα $T(\Im\alpha) = \operatorname{Im} T(\alpha)$. Άρα $T(\alpha) \neq 0$. ■

Ορισμός 1.2.59. *Ένα αντικείμενο C της κατηγορίας $\mathcal{C}$ θα λέμε ότι είναι* **γεννήτορας** *της $\mathcal{C}$ εάν ο συναρτητής $\operatorname{Hom}(C,\text{-})$ είναι πιστός, και θα λέμε ότι είναι* **συνγεννήτορας** *της $\mathcal{C}$ εάν ο συναρτητής $\operatorname{Hom}(\text{-},C)$ είναι πιστός.*

Πρόταση 1.2.60. *Έστω ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει συνγινόμενα. Εάν ο U είναι ένας γεννήτορας, τότε για κάθε αντικείμενο C υπάρχει ένας επιμορφισμός $U^{(I)} \to C$ όπου I ένα σύνολο δεικτών.*

Απόδειξη. Θέτουμε $I = \operatorname{Hom}(U, C)$ και ορίζουμε $\phi\colon U^{(I)} = \coprod_{\alpha\in I} U_\alpha \to C$ να είναι ο μορφισμός τον οποίο παίρνουμε από την καθολική ιδιότητα του συνγινομένου όπου $\alpha\colon U_\alpha \to C$ για κάθε $\alpha \in I$. Θα δείξουμε ότι ο ϕ είναι επιμορφισμός. Έστω ένας μη μηδενικό μορφισμός $\gamma\colon C \to C'$. Εφόσον ο U είναι generator $\operatorname{Hom}(U,\gamma) \neq 0$. Άρα υπάρχει μομρφισμός $\alpha\colon U \to C$ τέτοιος ώστε $\gamma \circ \alpha \neq 0$. Άρα $\gamma \circ \phi \neq 0$. Δηλαδή ο ϕ είναι επιμορφισμός. ■

Πρόταση 1.2.61. *Έστω ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει γινόμενα. Εάν ο V είναι ένας συνγεννήτορας, τότε για κάθε αντικείμενο C υπάρχει ένας μονομορφισμός $C \to V^I$ όπου I ένα σύνολο δεικτών.*

Απόδειξη. Δυϊκή της απόδειξη της πρότασης 1.2.60. ■

Ως αποτέλεσμα της πρότασης 1.2.58 παίρνουμε εύκολα τις παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1.2.62. *Ένα προβολικό αντικείμενο P θα είναι γεννήτορας αν και μόνο αν υπάρχει ένας μη μηδενικό μορφισμός $P \to C$ για κάθε αντικείμενο $C \neq 0$.*

Πρόταση 1.2.63. *Ένα ενέσιμο αντικείμενο E θα είναι συνγεννήτορας αν και μόνο αν υπάρχει ένας μη μηδενικό μορφισμός $C \to E$ για κάθε αντικείμενο $C \neq 0$.*

Πρόταση 1.2.64. *Εάν η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει έναν γεννήτορα, τότε η $\mathcal{C}$ είναι τοπικά μικρή.*

Απόδειξη. Δες [23] (Πρόταση 6.6.). ■

Παράδειγμα 1.2.65. Έστω η κατηγορία των δεξιών A προτύπων Mod-A. Ένα πρότυπο M είναι γεννήτορας της Mod-A αν και μόνο αν ο A είναι ευθύς αθροιστής κάποιου ευθέους αθροίσματος αντιγράφων του M, όπως εύκολα φαίνεται από την πρόταση 1.2.60.

Εκτός από το να μιλάμε για έναν γεννήτορα μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ μπορούμε να μιλήσουμε και για μία οικογένεια από γεννήτορες. Παρ' όλα αυτά θα δούμε ότι σε κάποιες κατηγορίες υπάρχουν οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 1.2.66. *Μία οικογένεια $(U_i)_I$ αντικειμένων της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ θα λέμε ότι είναι μία* **οικογένεια γεννητόρων(family of generators)** *της A, εάν για κάθε μη μηδενικός μορφισμό $\alpha\colon B \to C$ στην $\mathcal{A}$, υπάρχει μορφισμός $\beta\colon U_i \to B$ για κάθε $i \in I$, τέτοιος ώστε $\alpha\colon \beta \neq 0$.*

Παρατήρηση 1.2.67. Εάν η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει συνγινόμενα τότε ο παραπάνω ορισμός 1.2.66 είναι προφανώς ισοδύναμος με το να πούμε ότι το αντικείμενο $\coprod_I U_i$ είναι γεννήτορας.

Παρατήρηση 1.2.68. Από τα παραπάνω εύκολα βλέπουμε ότι αν εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μίας οικογένειας προβολικών γεννητόρων για μία κατηγορία $\mathcal{C}$ παίρνουμε και ότι η $\mathcal{C}$ έχει αρκετά προβολικά.

Σχόλιο 1.2.69. Η παραπάνω συζήτηση που έγινε για τους γεννήτορες μπορεί κατά δυϊκό τρόπο να γίνει και για συνγεννήτορες και να πάρουμε τα δυϊκά αποτελέσματα.

1.2.2 Όρια και Συνόρια

Τα όρια και τα συνόρια βρίσκονται στην καρδιά της θεωρίας κατηγοριών και είναι ένα βασικό εργαλείο για την κατασκευή νέων αντικειμένων και νέων συναρτητών.

Ορισμός 1.2.70. *Έστω $\mathcal{C}$ μία προπροσθετική κατηγορία και $\mathcal{I}$ μία μικρή κατηγορία. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε το «όριο» ενός συναρτητή $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Εάν X είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και αν έχουμε ένα μορφισμό $\alpha_i\colon X \to F$ για κάθε $i \in \mathsf{Ob}(\mathcal{I})$, τότε η οικογένεια (α_i) θα καλείται* **συμβατή (complatible)**, *αν για κάθε μορφισμό $\lambda\colon i \to j$ στην κατηγορία $\mathcal{I}$ έχουμε ότι $\alpha_j = F(\lambda) \circ \alpha_i$.*

$$\begin{tikzcd} & F(i) \arrow[d, "F(\lambda)"] \\ X \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[r, "\alpha_j"'] & F(j) \end{tikzcd}$$

Ορισμός 1.2.71. *Ένα* **όριο (limit)**, *του συναρτητή $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $\varprojlim F$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ μαζί με μία συμβατή οικογένεια μορφισμών $\pi_i\colon \varprojlim F \to F(i)$, τέτοια ώστε για κάθε άλλη συμβατή οικογένεια μορφισμών $\xi_i\colon X \to F(i)$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\xi\colon X \to \varprojlim F(i)$ με $\pi_i \circ \xi = \xi_i$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\xi"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & \varprojlim F \arrow[d, "\pi_i"] \\ & F(i) \end{tikzcd}$$

Ορισμός 1.2.72. *Ένα* **συνόριο (colimit)**, *του συναρτητή $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $\varinjlim F$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ μαζί με μία συμβατή οικογένεια μορφισμών $\psi_i\colon F(i) \to \varinjlim F$, τέτοια ώστε για κάθε άλλη συμβατή οικογένεια μορφισμών $\zeta_i\colon F(i) \to Y$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\zeta\colon \varinjlim F(i) \to Y$ με $\xi \circ \psi_i = \zeta_i$.*

$$\begin{tikzcd} \varinjlim F \arrow[r, dashed, "\zeta"] & Y \\ F(i) \arrow[u, "\psi_i"] \arrow[ur, "\zeta_i"'] & \end{tikzcd}$$

Ορισμός 1.2.73. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ θα καλείται* **πλήρης (complete)**, *εάν το όριο $\varprojlim F$ υπάρχει για κάθε συναρτητή $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ με $\mathcal{I}$ μικρή κατηγορία, και θα λέγεται* **συνπλήρης (cocomplete)**, *εάν το συνόριο $\varinjlim F$ υπάρχει για κάθε συναρτητή $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ με $\mathcal{I}$ μικρή κατηγορία.*

Πρόταση 1.2.74. *Εάν μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι πλήρης, τότε το όριο $\varprojlim$ μπορεί να θεωρηθεί ως συναρτητής $\mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ για κάθε μικρή κατηγορία $\mathcal{I}$.*

Απόδειξη. Έστω δύο συναρτητές $F, G\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, και $\eta\colon F \to G$ ένας φυσικός μετασχηματισμός. Τότε παίρνουμε μία συμαβατή οικογένεια μορφισμών $\varprojlim F \to F(i) \to G(i)$. Από τον ορισμό όμως του ορίου για το $\varprojlim G$ έχουμε ότι η παραπάνω οικογένεια αναλύεται μέσω ενός μοναδικού μορφισμού $\varprojlim F \to \varprojlim G$. Αυτόν τον μορφισμό τον συμβολίζουμε ως $\varprojlim \eta$. Εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι οι απεικονίσεις $F \to \varprojlim F$ και $\eta \to \varprojlim \eta$ δίνουν έναν συναρτητή $\mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. ∎

Ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε και για τα συνόρια:

Πρόταση 1.2.75. *Εάν μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι συνπλήρης, τότε το συνόριο $\varinjlim$ μπορεί να θεωρηθεί ως συναρτητής $\mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ για κάθε μικρή κατηγορία $\mathcal{I}$.*

Ορισμός 1.2.76. *Έστω $\mathcal{I}$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Το συνόριο του ευθέους συστήματος $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ καλείται* **ευθύ όριο (direct limit)**, *ενώ το όριο του αντίστροφου συστήματος $F\colon \mathcal{I}^{op} \to \mathcal{C}$ καλείται* **αντίστροφο όριο (inverse limit)**.

Παράδειγμα 1.2.77.
1. Έστω ότι $\mathcal{I}$ είναι μια μικρή κατηγορία η οποία έχει ως μορφισμούς μόνο του ταυτοτικούς. Τότε δεν υπάρχουν περιοριστικές συνθήκες έτσι ώστε μία οικογένεια μορφισμών να είναι συμβατή. Άρα εύκολα βλέπουμε ότι $\varprojlim F = \prod_{i\in I} F(i)$ και $\varinjlim F = \coprod_{i \in I} F(i)$.

2. Τα pullbacks και τα pushouts είναι και αυτά ειδικές περιπτώσεις ορίων και συνορίων αντίστοιχα. Έστω κατηγορία $\mathcal{I}$ η οποία έχει τρία αντικείμενα i, j, k και από μορφισμούς τους ταυτοτικούς καθώς και τους μορφισμούς που φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr] & \\ & k \\ j \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Έστω επίσης και ο συναρτητής $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Τότε έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F & \longrightarrow & F(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(j) & \longrightarrow & F(k) \end{array}$$

το οποίο στην πραγματικότητα είναι ένα διάγραμμα pullback. Ομοίως μπορούμε να δούμε και τα pushout σαν συνόρια.

Σχόλιο 1.2.78. Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε τα όρια και τα συνόρια από γινόμενα και πυρήνες καθώς και από συνγινόμενα και συνπυρήνες αντίστοιχα. Ως αποτέλεσμα έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1.2.79. *Μία αβελιανή κατηγορία είναι πλήρης αν και μόνο αν έχει γινόμενα και είναι συνπλήρης αν και μόνο αν έχει συνγινόμενα.*

Πρόταση 1.2.80. *Έστω $\mathcal{C}$ μια συνπλήρης αβελιανή κατηγορία και $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ένας συναρτητής. Εάν $\alpha_i\colon F(i) \to C$ είναι μία συμβατή οικογένεια μορφισμών που μας δίνει $\alpha\colon \varinjlim F \to C$ τότε $\mathsf{Im}\,\alpha = \sum \mathsf{Im}\,\alpha_i$.*

Απόδειξη. Δες Stenstrom (Πόρισμα 8.5.). ■

Ορισμός 1.2.81. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο προπροσθετικές κατηγορίες. Ένας συναρτητής $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ λέμε ότι* **διατηρεί όρια (preserves limits)**, *εάν για κάθε συναρτητή $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, όπου η $\mathcal{I}$ είναι μικρή κατηγορία και το $\varprojlim F$ υπάρχει, έχουμε ότι $T(\varprojlim F) = \varprojlim (T \circ F)$ και ο T μεταφέρει τους κανονικούς μορφισμούς $\varprojlim F \to F(i)$ σε κανονικούς μορφσιμούς $\varprojlim (T \circ F) \to T \circ F(i)$. Αντίστοιχα λέμε ότι ένας συναρτητής $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$* **διατηρεί συνόρια (preserves colimits)**, *εάν ο συναρτητής $T^{op}\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}'^{op}$ το διατηρεί ως όριο του $F^{op}\colon \mathcal{I}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$.*

Παράδειγμα 1.2.82. Οι συναρτητές $\mathsf{Hom}(C, \text{-})\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Ab}$ και $\mathsf{Hom}(\text{-}, C')\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Ab}$ διατηρούν τα όρια. Εύκολα από τον ορισμό του ορίου και του συνορίου έχουμε:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \varprojlim D_i) \cong \varprojlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D_i)$$

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim C_i, D) \cong \varprojlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i, D)$$

Σχόλιο 1.2.83. Λόγω του σχολίου 1.2.78, έχουμε εύκολα και ότι ο T διατηρεί όρια αν και μόνο αν διατηρεί γινόμενα και πυρήνες.

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε μία σημαντική πρόταση σχετικά με τους συζυγείς συναρτητές:

Πρόταση 1.2.84. *Ένας δεξί συζυγής συναρτητής διατηρεί τα όρια, ενώ ένας αριστερά συζυγής διατηρεί τα συνόρια.*

Απόδειξη. Έστω ο συναρτητής R ο οποίος είναι δεξής συζυγής του συανρτητή $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, και $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής για τον οποίο υπάρχει το $\varprojlim F$ στην $\mathcal{D}$. Επειδή ο R είναι δεξί συζυγής του L, έχουμε ότι για ένα τυχαίο αντικείμενο C της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ισχύει:

$$\mathsf{Hom}(C, R(\varprojlim F)) \cong \mathsf{Hom}(L(C), \varprojlim F)$$

Αλλά επιπλέον ένας μορφισμός $L(C) \to \varprojlim F$ αντιστοιχεί σε μία συμβατή οικογένεια μορφισμών $L(C) \to F(i)$.Τότε λόγω της φυσικότητας της συζυγίας αντιστοιχεί και σε μία οικογένεια μορφισμών $C \to R(F(i))$. Άρα το $R(\varprojlim F)$ έχει την οικουμενική ιδιότητα που ορίζει το $\varprojlim RF$. Και άρα έχουμε το ζητούμενο $R(\varprojlim F) = \varprojlim RF$.
Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ένας αριστερά συζυγής συναρτητής διατηρεί τα συνόρια. ∎

Λόγω της παραπάνω πρότασης και 1.2.84 και από το 1. του παραδείγματος 1.2.77 απευθείας παίρνουμε και τη παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.2.85. *Ένας δεξί συζυγής συναρτητής διατηρεί τα γινόμενα, ενώ ένας αριστερά συζυγής διατηρεί τα συνγινόμενα.*

Ο παρακάτω ορισμός είναι απαραίτητος καθώς θα χρησιμοποιηθεί στον ορισμό των κατηγοριών Grothendieck.

Ορισμός 1.2.86. *Θα λέμε ότι το όριο του συναρτητή $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ είναι* **πεπερασμένο (finite)**, *εάν η κατηγορία $\mathcal{I}$ έχει μόνο πεπερασμένα αντικείμενα και μορφισμούς.*

Πρόταση 1.2.87. *Έστω $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ένας προσθετικός συναρτητής μεταξύ δύο αβελιανών κατηγοριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$. Οι ακόλουθες ιδιότητες του T είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο T είναι αριστερά ακριβής.*
2. *Ο T διατηρεί τους πυρήνες.*
3. *Ο T διατηρεί τα πεπερασμένα όρια.*

Απόδειξη. Δες [23] (Πρόταση 8.6.). ∎

Πρόταση 1.2.88. *Έστω $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ένας προσθετικός συναρτητής μεταξύ δύο αβελιανών κατηγοριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$. Οι ακόλουθες ιδιότητες του T είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο T είναι δεξιά ακριβής.*
2. *Ο T διατηρεί τους συνπυρήνες.*
3. *Ο T διατηρεί τα πεπερασμένα συνόρια.*

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα όρια και τα συνόρια σε κατηγορίες συναρτητών. Σκοπός μας είναι να δούμε τι συμβαίνει όταν έχουμε μία τέτοια κατηγορία και αν φτάσουμε σε ένα σημαντικό αποτέλεσμα για το πότε τα όρια και τα συνόρια θεωρούμενα ως συναρτητές όπως είδαμε στις προτάσεις 1.2.74 και 1.2.75.

Πρόταση 1.2.89. *Έστω $\mathcal{C}$ μία πλήρης κατηγορία και J μία μικρή κατηγορία. Τότε η κατηγορία* $\mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ *είναι επίσης πλήρης και αν $F\colon \mathcal{I} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ είναι ένας συναρτητής, τότε το $\varprojlim F$ είναι μία σύνθεση συναρτητων:*

$$\mathcal{J} \xrightarrow{F'} \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\varprojlim} \mathcal{C}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{I}$ μία μικρή κατηγορία και $F\colon \mathcal{I} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ ένας συναρτητής. Για κάθε αντικείμενο j της κατηγορίας $\mathcal{J}$ ορίζουμε έναν συναρτητή $F_j\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} F_j(i) &= F(i)(j) \\ F_j(\lambda) &= F(\lambda)_j \end{aligned}$$

όπου λ μορφισμός της κατηγορίας $\mathcal{I}$.
Ένας μορφισμός $\mu\colon j \to j'$ μας δίνει έναν φυσικό μετασχηματισμό $\mu'\colon F_j \to F_{j'}$, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\mu'_i = F(i)(\mu)\colon F_j(i) \to F_{j'}(i)$$

Τότε το όριο $\varprojlim F$ είναι ένας συναρτητής $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ο οποίος δίνετα από

$$\begin{aligned} (\varprojlim F)(j) &= \varprojlim F_j \\ (\varprojlim F)(\mu) &= \varprojlim \mu' \end{aligned}$$

Από αυτή την κατασκευή μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο συναρτητή $F\colon \mathcal{I} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ έναν νέο συναρτητή $F'\colon \mathcal{J} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} F'(j) &= F_j \\ F'(\mu) &= \mu' \end{aligned}$$

∎

Παρατήρηση 1.2.90. Δουλεύοντας όπως στην πρόταση 1.2.89, εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί κατηγοριών :

$$\mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C})) \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{C}) \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}))$$

Επίσης αν ο συναρτητής $F''\colon \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ αντιστοιχεί στον F (όπως αντιστοιχεί ο F'), εύκολα παίρνουμε και ότι:

$$\varprojlim_{\mathcal{J}} (\varprojlim_{\mathcal{I}} F) = \varprojlim_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} F'' = \varprojlim_{\mathcal{I}} (\varprojlim_{\mathcal{J}} F')$$

Κάνοντας χρήση της πρότασης 1.2.89 και της παρατήρησης 1.2.90 εύκολα παίρνουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.2.91. *Ο συναρτητής $\varprojlim\colon \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ διατηρεί τα όρια.*

Την παραπάνω διαδικασία την οποία την κάναμε για όρια, μπορούμε κατά δυϊκό τρόπο να την κάνουμε και για τα συνόρια και να πάρουμε το παρακάτω δυϊκό αποτέλεσμα της πρότασης 1.2.91 το οποίο θα το χρειαστούμε ιδιαίτερα όταν θα μιλήσουμε για κατηγορίες Grothendieck.

Πρόταση 1.2.92. *Ο συναρτητής $\varinjlim\colon (\mathcal{J}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ διατηρεί τα συνόρια.*

Σχόλιο 1.2.93. Λόγω των παραπάνω προτάσεων 1.2.91 και 1.2.92, και επειδή τα γινόμενα και τα συγγινόμενα μπορούν να κατασκευαστούν από όρια και συνόρια αντίστοιχα, όπως είδαμε στο παράδειγμα 1.2.77, βλέπουμε ότι οι συναρτητές $\varprojlim$ και $\varinjlim$ διατηρούν τα γινόμενα και τα συγγινόμενα αντίστοιχα.

Ορισμός 1.2.94. *Έστω $\mathcal{A}$ μία συνπλήρης αβελιανή κατηγορία και C ένα αντικείμενό της. Μία οικογένεια $(C_i)_{i\in I}$ υποαντικειμένων του C λέμε ότι είναι* **ευθύς (direct)**, *εάν το I γίνεται διατεταγμένο σύνολο εάν κανείς ορίσει $i \leqslant j$ όταν $C_i \subseteq C_j$.*

Σχόλιο 1.2.95. Το ευθύ όριο $\varinjlim C_i$ μίας ευθέας οικογένειας (C_i) υποαντικειμένων του C δεν είναι γενικά υποαντικείμενο του C, εκτός και αν τα ευθέα όρια διατηρούν τους μονομορφισμούς. Υπάρχει ωστόσο ένας κανονικός μορφισμός $\alpha\colon \varinjlim C_i \to C$, και $\mathsf{Im}\,\alpha = \sum C_i$ λόγω της πρότασης 1.2.80. Ισχύει επίσης και η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.96. *Εάν $(C_i)_I$ είναι μία ευθέα οικογένεια υποαντικεμένων του C, τότε το ευθύ όριο του ευθέους συστήματος (C/C_i) αντικειμένων πηλίκων είνιαι $C/\sum C_i$.*

Απόδειξη. Η ακριβής ακολουθία $0 \to C_i \to C \to C/C_i \to 0$ μας δίνει στο ευθύ όριο μία ακριβή ακολουθία

$$\varinjlim C_i \xrightarrow{\alpha} C \longrightarrow \varinjlim C/C_i$$

λόγω της πρότασης 1.2.92. Άρα $\varinjlim C/C_i = C/\,\mathsf{Im}\,\alpha = C/\sum C_i$. ■

1.3 Κατηγορίες Grothendieck

Ορισμός 1.3.1. *Μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **κατηγορία Grothendieck (Grothendieck category)**, *όταν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Η $\mathcal{C}$ είναι συνπλήρης.*

2. *Τα ευθέα όρια είναι ακριβή στην $\mathcal{C}$ με την παρακάτω έννοια:*
   Αν
   $$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$
   είναι ακριβής ακολουθία για κάθε $i \in I$ τότε η ακολουθία:
   $$0 \longrightarrow \varinjlim A_i \longrightarrow \varinjlim B_i \longrightarrow \varinjlim C_i \longrightarrow 0$$
   είναι επίσης ακριβής.

3. *Η $\mathcal{C}$ έχει έναν γεννήτορα.*

Σχόλιο 1.3.2. Σύμφωνα με την πρόταση 1.2.92 τα συνόρια είναι δεξιά ακριβή. Οπότε τα ευθέα όρια είναι ακριβή εάν και μόνο αν διατηρούν τους μονομορφισμούς.

Παράδειγμα 1.3.3.
1. Εάν R είναι ένας δακτύλιος τότε η $\mathsf{Mod}\text{-}R$ είναι κατηγορία Grothendieck.

2. Εάν $\mathcal{I}$ είναι μία μικρή προπροσθετική κατηγορία, τότε η κατηγορία συναρτητών $\mathcal{C} = \mathsf{Hom}(\mathcal{I}^{op}, \mathsf{Ab})$ είναι κατηγορία Grothendieck, καθώς τα συνόρια στην κατηγορία $\mathcal{C}$ μπορούν να υπολογιστούν «κατά σημείο», οπότε η ακρίβεια των ευθέων ορίων στην Ab μας δίνει την ακρίβεια στην $\mathcal{C}$.

1.3.1 Ενέσιμα envelopes

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας όλες μας οι κατηγορίες θα είναι αβελιανές. Σκοπός μας θα είναι να δείξουμε ότι αν ένα αντικείμενο μπορούμε να το εγκλίσουμε σε ένα ενέσιμο αντικείμενο, τότε αυτό μπορούμε να το κάνουμε με έναν ελαχιστικό κατά μία έννοια τρόπο.

Λήμμα 1.3.4. *Έστω $\alpha\colon X \to X'$ ένας μορφισμός. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Για κάθε υποαντικείμενο Y του X,αν ισχύει $\alpha^{-1}(Y) = 0$ τότε $Y = 0$.*
2. *Εάν $f\colon X \to Z$ είναι ένας μορφισμός τέτοιος ώστε $\ker(f \circ \alpha) = \ker \alpha$, τότε ο f είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι ισχύει το 1). Έστω Y ένα υποαντικείμενο του X τέτοιο ώστε $\alpha^{-1}(Y) = 0$. Εάν $Y \neq 0$, τότε ο κανονικός μορφισμός $p\colon X \to X/Y$ δεν είναι μονομορφισμός. Όμως $\ker(p \circ \alpha) = \ker \alpha$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης.
Ότι το 2) συνεπάγεται το 1) είναι προφανές. ∎

Ορισμός 1.3.5. *Θα λέμε ότι ένας μονομορφισμός $\alpha\colon X' \to X$ είναι ένα* **ουσιώδες extension(essential extension)**, *του αντικειμένου X' εάν ο μορφισμός α ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις δύο ισοδύναμες ιδιότητες του λήμματος 1.3.4.*

Ορισμός 1.3.6. *Έστω μία κατηγορία $\mathcal{C}$. Θα λέμε ότι ένα υποαντικείμενο X' του αντικειμένου X είναι* **ουσιώδες (essential)**, *εάν η κανονική έγκλιση $X' \to X$ είναι ουσιώδες extension του X'.*

Παρατήρηση 1.3.7. Ένας άλλος ισοδύναμος ορισμός για το τι είναι ένα ουσιώδες υποαντικείμενο είναι ο εξής:
Το υποαντικείμενο X' του αντικειμένου X είναι ουσιώδες εάν $X' \cap X'' = 0$ για κάθε μη μηδενικό υποαντικείμενο X'' του X.
Επίσης παίρνουμε και ισοδύναμα ότι ένας μονομορφισμός $\alpha\colon X \to Y$ είναι ουσιώδες extension εάν $\operatorname{Im}\alpha$ είναι ουσιώδες υποαντικείμενο του Y.

Απόδειξη. Προφανής από τον ορισμό του ουσιώδους υποαντικειμένου. ∎

Σχόλιο 1.3.8. Ένα ουσιώδες extension θα καλείται μερικές φορές και ουσιώδης μονομορφισμός. Ένα ουσιώδες υποαντικείμενο καλείται συχνά και **μεγάλο(large)**.

Πρόταση 1.3.9. *Έστω δύο μονομορφισμοί $u\colon X \to Y$ και $v\colon Y \to Z$. Τότε ο $v \circ u$ είναι ουσιώδης μονομορφισμός αν και μόνο αν και ο u και ο v είναι ουσιώδης μονομορφισμοί.*

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι ο u και ο v είναι ουσιώδης μονομορφισμοί και $f\colon Z \to T$ ένας μορφισμός τέτοιος ώστε ο $f \circ v \circ u$ να είναι μονομορφισμός. Τότε επειδή ο u είναι ουσιώδης και λόγω του λήμματος 1.3.4 έχουμε ότι ο $f \circ v$ ειναι μονομορφισμός. Πάλι επειδή ο v είναι μονομορφισμός και λόγω του λήμματος 1.3.4 έχουμε ότι ο f μονομορφισμός. Άρα ο $v \circ u$ είναι ουσιώδης μονομορφισμός.
Έστω τώρα ότι ο $v \circ u$ ουσιώδης μονομορφισμός και έστω $f\colon Z \to T$ ένας μορφισμός τέτοιος ώστε $f \circ v$ να είναι μονομορφισμός. Τότε ο $f \circ v \circ u$ είναι μονομορφισμός. Και επειδή ο $v \circ u$ ουσιώδης μονομορφισμός και λόγω του λήμματος 1.3.4 παίρνουμε ότι ο f είναι μονομορφισμός. Άρα και ο v είναι ουσιώδης μονομορφισμός. Μένει να δείξουμε ότι και ο u είναι ουσιώδης μονομορφισμός. Έστω Y' υποαντικείμενο του Y τέτοιο ώστε $u^{-1}(Y') = 0$ και $h\colon Z \to Z/v(Y')$ ο κανονικός επιμορφισμός. Τότε ο $h \circ v \circ u$ είναι μονομορφισμός και άρα ο h είναι μονομορφισμός. Άρα $v(Y') = 0$, δηλαδή και $Y' = 0$. Άρα λόγω του λήμματος 1.3.4 και ο u είναι ουσιώδης μονομορφισμός. ∎

Ορισμός 1.3.10. *Έστω X' ένα υποαντικείμενο ενός αντικειμένου X. Ένα αντικείμενο X'' θα καλείται ένα* **συμπλήρωμα(complement)** *του X' εάν $X' \cap X'' = 0$ και το $X' + X''$ είναι ουσιώδες υποαντικείμενο του X. Τότε θα λέμε επίσης ότι και το X είναι* **συμπληρώσιμο(complemented)**.

Λήμμα 1.3.11. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία Grothendieck. Τότε κάθε υποαντικείμενο X' ενός αντικειμένου X είναι συμπληρώσιμο. Επίσης κάθε συμπλήρωμα του X' περιέχεται σε ένα μέγιστο.*

Απόδειξη. Δες [20] (Λήμμα 10.5.). ■

Ορισμός 1.3.12. *Ένας* **ενέσιμος φάκελος (injective envelope)** *ενός αντικειμένου X είναι ένας ουσιώδης μονομορφισμός $X \to E$ όπου το E είναι ενέσιμο αντικείμενο.*

Λήμμα 1.3.13. *Εάν $\alpha\colon X \to E$ είναι ένας μονομορφισμός και E είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο, τότε για κάθε ουσιώδη μονομορφισμό $\beta\colon X \to Y$ υπάρχει ένας μονομορφισμός $\gamma\colon Y \to E$ τέτοιος ώστε $\gamma \circ \beta = \alpha$.*

Απόδειξη. Εφόσον το E είναι ενέσιμο αντικείμενο υπάρχει μορφισμός $\gamma\colon Y \to E$ με $\gamma \circ \beta = \alpha$. Αρκεί να δειχτεί ότι ο γ είναι μονομορρφισμός. $\mathsf{Ker}\,\gamma \cap \mathsf{Im}\,\beta = \mathsf{Ker}\,\gamma \circ \beta = \mathsf{Ker}\,\alpha = 0$. Άρα επειδή ο β είναι ουσιώδης $\ker \gamma = 0$ και ο γ είναι μονομορφισμός. ■

Τώρα θα δείξουμε ότι ένας ενέσιμος φάκελος ενός αντικειμένου ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο ως προς ισομορφισμό. Οπότε από εδώ και πέρα θα είναι λογικό να μιλάμε για τον ενέσιμο φάκελο ενός αντικειμένου όταν αυτός υπάρχει. Αυτόν τον ενέσιμο φάκελο του αντικειμένου X θα τον συμβολίζουμε με $E(X)$. Προφανώς το αντικείμενο X θα το θεωρούμε υποαντικείμενο του αντικειμένου $E(X)$.

Πρόταση 1.3.14. *Εάν $\alpha\colon X \to E$ και $\alpha'\colon X \to E'$ είναι ενέσιμοι φάκελοι του X, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $\gamma\colon E \to E'$ τέτοιος ώστε $\gamma \circ \alpha = \alpha'$.*

Απόδειξη. Λόγω του λήμματος 1.3.13 υπάρχει ένας μονομορφισμός $\gamma \circ E \to E'$ τέτοιος ώστε $\gamma \circ \alpha = \alpha'$ και ο γ είναι ουσιώδης λόγω του λήμματος 1.3.9. Ο γ είναι μάλιστα ισομορφισμός καθώς και το αντικείμενο E' είναι ενέσιμο (καθώς ο $1_{E'}\colon E' \to E'$ είναι μονομορφισμός και άρα υπάρχει $\gamma'\colon E \to E'$ τέτοιος ώστε $\gamma' \circ \gamma = 1_{E'}$). ■

Πρόταση 1.3.15. *Ένα αντικείμενο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν κάθε ουσιώδης μονομορφισμός του E είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Δες [23] (Πρόταση 2.4., Κεφάλαιο 5). ■

Πρόταση 1.3.16. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία Grothendieck. Εάν το X είναι υποαντικείμενο κάποιου ενέσιμου αντικειμένου E, τότε το X έχει έναν ενέσιμο φάκελο.*

Απόδειξη. Έστω Y ένα μέγιστο συμπλήρωμα του X στο E και E' ένα μέγιστο συμπλήρωμα του Y, το οποίο περιέχει το X. Θα δείξουμε ότι το X είναι ουσιώδης υποαντικείμενο του E' και το E' είναι ενέσιμο.
Καταρχάς θα δείξουμε ότι όντως το X είναι ουσιώδης υποαντικείμενο του E'. Έστω X' ένα μη μηδενικό υποαντικείμενο του E' τέτοιο ώστε $X' \cap X = 0$. Τότε $X' \cap Y = 0$ καθώς X' υποαντικείμενο του E' και άρα έχουμε ότι το $X' + Y$ είναι ένα συμπλήρωμα του X το οποίο είναι μεγαλύτερο από το Y, πράγμα άτοπο. Άρα το X είναι ουσιώδης υποαντικείμενο του E'.
Τώρα θα δείξουμε ότι το E' είναι ενέσιμο. Έστω $f\colon E' \to T$ ένας ουσιώδης μονομορφισμός. Τότε καθώς του E είναι ενέσιμο, υπάρχει μορφισμός $g\colon T \to E$ τέτοιος ώστε ο $g \circ f$ να είναι μονομορφισμός. Τότε λόγω του λήμματος 1.3.4 έχουμε ότι ο g είναι μονομορφισμός. Άρα το $g(T)$ είναι ένα υποαντικείμενο του E το οποίο περιέχει το E' και το E' είναι ουσιώδης υποαντικείμενο του $g(T)$. Τότε όμως εύκολα παίρνουμε ότι $g(T) \cap Y = 0$. Επειδή όμως το E' είναι ένα E' ένα μέγιστο συμπλήρωμα του Y έχουμε ότι $g(T) = E'$. Άρα ο f είναι ισομορφισμός. Άρα λόγω της πρότασης 1.3.15 το E' είναι ενέσιμο. ■

Γνωρίζουμε από τη θεωρία προτύπων ότι ένα αριστερό R-πρότυπο E είναι ένα ενέσιμο αν και μόνο αν κάθε ομομορφισμός $A \to E$, όπου A είναι ένα δεξί ιδεώδες του R, μπορεί να επεκταθεί στον R. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για τα ενέσιμα αντικείμενα σε μία κατηγορία Grothendieck.

Πρόταση 1.3.17. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία Grothendieck και μία οικογένεια γεννητόρων της $(U_i)_I$. Ένα αντικείμενο της E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν για κάθε μονομορφισμό $\alpha\colon C \to U_i$ και μορφισμό $\phi\colon C \to E$, υπάρχει $\phi'\colon U_i \to E$ τέτοιος ώστε $\phi' \circ \alpha = \phi$.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ένα πολύ σημαντικό θεώρημα στη θεωρία των αβελιανών κατηγοριών και γενικότερα στην ομολογική άλγεβρα.

Θεώρημα 1.3.18. *Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία Grothendieck τότε η $\mathcal{C}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα και άρα κάθε αντικείμενό της έχει έναν ενέσιμο φάκελο.*

1.3.2 Πεπερασμένα παραγόμενα αντικείμενα

Ορισμός 1.3.19. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία Grothendieck. Ένα αντικείμενο της C θα καλείται* **πεπερασμένα παραγόμενο (finitely generated)***, εάν ισχύει το παρακάτω: Όποτε $C = \sum C_i$ για μία ευθέα οικογένεια υποαντικειμένων (C_i) του C, τότε υπάρχει i_0 τέτοιο ώστε $C = C_{i_0}$.*

Λήμμα 1.3.20. *Έστω $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ μία ακριβής ακολουθίας σε μία κατηγορία Grothendieck. Τότε:*

1. *Εάν το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε είναι και το C''.*
2. *Εάν τα C' και C'' είναι πεπερασμένα παραγόμενα, τότε είναι και το C.*

Απόδειξη. 1) Έστω ότι το C'' γράφεται ως ευθέα ένωση $C'' = \sum C''_i$. Κάθε C''_i μπορεί να γραφεί ως $C''_i = C_i/C'$ για κάποιο μοναδικό υποαντικείμενο C' του C με $C' \subset C_i$. Τότε η οικογένεια C_i είναι επίσης ευθέα, άρα $C = C_{i_0}$ για κάποιο i_0. Άρα $C'' = C_{i_0}/C' = C''_{i_0}$.
2) Έστω ότι το C γράφεται ως ευθέα ένωση $C = \sum C_i$. Τότε το γεγονός ότι το C' είναι πεπερασμένα παραγόμενο μας δίνει λόγω του 1) ότι $C' \subset C_{i_0}$ για κάποιο i_0. Άρα $C'' = \sum_{i \geqslant i_0} (C_i/C')$, και επειδή το C'' είναι πεπερασμένα παραγόμενο έχουμε ότι $C'' = C_{i_1}/C'$ για κάποιο i_1.. Εύκολα από το 5-λήμμα παίρνουμε ότι $C = C_{i_1}$. ∎

Ως άμεση συνέπεια του παραπάνω λήμματος παίρνουμε κατευθείαν το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 1.3.21. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία Grothendieck. Τότε:*

1. *Κάθε πεπερασμένο ευθύ άθροισμα πεπερασμένα παραγόμενων αντικειμένων είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*
2. *Κάθε πεπερασμένο άθροισμα πεπερασμένα παραγόμενων υποαντικειμένων είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Παραπάνω αναφέραμε στη απόδειξη του 2) στο λήμμα 1.3.20 ότι επειδή το C' είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε $C' \subset C_{i_0}$ για κάποιο i_0. Πιο γενικά ισχύει το παρακάτω:

Λήμμα 1.3.22. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία Grothendieck. Ένα αντικείμενο C είναι πεπερασμένα παραγόμενο αν για κάθε οικογένεια υποαντικειμένων D_i ενός αντικειμένου D, κάθε μορφισμός $C \to \sum D_i$ αναλύεται μέσω κάποιου D_k.*

Απόδειξη. Έστω ότι το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Τότε αν $\alpha\colon C \to \sum D_i$, $\operatorname{Im}\alpha$ είναι πεπεαρσμένα παραγόμενα λόγω του 1) του λήμματος 1.3.20. Τότε όμως:

$$\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\alpha \cap \sum D_i = \sum \operatorname{Im}\alpha \cap D_i$$

και άρα η $\operatorname{Im}\alpha$ περιέχεται σε κάποιο D_k.
Το αντίστροφο είναι προφανές. ∎

Πρόταση 1.3.23. *Ένα αντικείμενο C είναι πεπερασμένα παραγόμενο αν και μόνο αν ο συναρτητής $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Ab}$ διατηρεί τις ευθύς ενώσεις.*

Απόδειξη. Ακριβέστερα η πρόταση μας λέει ότι το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο αν και μόνο αν ο κανονικός ομομορφισμός

$$\Phi\colon \varinjlim \mathsf{Hom}(C, D_i) \to \mathsf{Hom}(C, \sum D_i)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε ευθέα οικογένεια D_i υποαντικειμένων κάθε αντικειμένου D. Εφόσον ο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\text{-})$ διατηρεί τους μονομορφισμούς και τα ευθέα όρια είναι ακριβή, ο Φ είναι μονομορφισμός. Αν λάβουμε υπόψιν τον ορισμό τον ευθέων ορίων στην Ab, βλέπουμε ότι ο Φ είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν κάθε μορφισμός $C \to \sum D_i$ αναλύεται μέσω κάποιου D_k, το οποίο όμως από το λήμμα 1.3.22 ισχύει αν και μόνο αν το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο. ■

Ορισμός 1.3.24. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ θα λέμε ότι είναι* **τοπικά πεπερασμένα παραγόμενη (locally finitely generated)** *εάν έχει μία οικογένεια πεπερασμένων παραγόμενων generators.*

Λήμμα 1.3.25. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τοπικά πεπερασμένα παραγόμενη κατηγορία. Εάν $\alpha\colon B \to C$ είναι ένας επιμορφισμός και το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο υποαντικείμενο B' του B τέτοιο ώστε $\alpha(B') = C$.*

Πρόταση 1.3.26. *Μία κατηγορία Grothendieck $\mathcal{C}$ είναι τοπικά πεπερασμένα παραγόμενη αν και μόνο αν κάθε αντικείμενο της είναι ένωση πεπερασμένων παραγόμενων υποαντικειμένων του.*

Απόδειξη. Έστω $G_{i i \in I}$ ένα σύνολο γεννητόρων πεπερασμένων παραγόμενων αντικειμένων. Τότε για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ έχουμε $C = \sum \mathsf{Im}\,(\alpha)$ όπου το α τρέχει πάνω από όλους τους $\alpha\colon G_i \to C$ για $i \in I$, καθώς αν δεν ίσχυε, ο κανονικός μορφισμός $\phi\colon C \to C/\sum \mathsf{Im}\,(\alpha)$ θα ήταν ένας μη μηδενικός μορφισμός για τον οποίο δε θα υπήρχε $\alpha\colon G_i \to C$ με $\phi\colon \alpha \neq 0$, πράγμα άτοπο. Από το λήμμα 1.3.20 έχουμε και ότι κάθε $\mathsf{Im}\,(\alpha)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο αντικείμενο.
Αντίστροφα έστω U ένας τυχαίος γεννήτορας της $\mathcal{C}$. Τότε το U μπορεί να γραφεί ως ένωση πεπερασμένα παραγόμενων αντικειμένων $U = \sum_i V_i$ και εύκολα βλέπουμε ότι τα V_i αποτελούν μία οικογένεια γεννητόρων της $\mathcal{C}$. ■

Ορισμός 1.3.27. *Ένα αντικείμενο C της κατηγορία $\mathcal{C}$ θα λέγεται* **τοπικά αναπαριστάσιμο (locally presented)**, *εάν είναι πεπερασμένα παραγόμενο και κάθε επιμορφισμός $B \to C$, όπου το B είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έχει έναν πεπερασμένα παραγόμενο πυρήνα.*

Πρόταση 1.3.28. *Έστω ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι τοπικά πεπερασμένα παραγόμενη. Ένα αντικείμενο C είναι πεπερασμένα αναπαριστάσιμο αν και μόνο αν ο συναρτητής $\mathsf{Hom}(C,\text{-})$ διατηρεί τα ευθέα όρια.*

Απόδειξη. Δες [23] (Πρόταση 3.4., Κεφάλαιο 5). ■

1.3.3 Τοπικά Noetherian κατηγορίες

Ορισμός 1.3.29. *Ένα* **lattice** *είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο οποίο κάθε ζεύγος αντικειμένων έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα και ένα μέγιστο κάτω φράγμα.*

Σχόλιο 1.3.30. Εάν έχουμε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ και ένα αντικείμενό της τότε μπορούμε να μιλάμε για το lattice $L(C)$ των υποαντικειμένων της, όπου η διάταξη θα είναι η προφανής που επάγεται από την σχέση υποαντικειμένων.

Στη συνέχεια της παραγράφου όταν μιλάμε για μια κατηγορία $\mathcal{C}$ θα θεωρούμε ότι είναι κατηγορία Grothendieck.

Ορισμός 1.3.31. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία Grothendieck. Ένα αντικείμενο της C θα καλείται* **noetherian** *εάν το latice $L(C)$ των υποαντικειμένων του είναι noetherian.*

Σχόλιο 1.3.32. Ένα lattice λέγεται noetherian εάν δεν υπάρχει άπειρη αυστηρώς αύξουσα αλυσίδα στοιχείων του. Δηλαδή ο παραπάνω ορισμός 1.3.31 είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι αν

$$\cdots \subset C_{n-1} \subset C_n \subset C_{n+1} \subset \ldots$$

είναι μία αλυσίδα υποαντικειμένων του C τότε υπάρχει n_0 έτσι ώστε $C_k = C$ για κάθε $k \geqslant n_0$.

Πρόταση 1.3.33. *Έστω $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ μία ακριβής ακολουθία στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε το αντικείμενο C είναι noetherian αν και μόνο αν τα C' και C'' είναι noetherian.*

Πρόταση 1.3.34. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένα αντικείμενο C είναι noetherian αν και μόνο αν κάθε υποαντικείμενό του είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι κάθε noetherian αντικείμενο είναι πεπερασμένα παραγόμενο, καθώς εάν ισχύει $C = \sum_{i\in I} C_i$ για μία ευθέα οικογένεια υποαντικειμένων C_i , τότε αυτή η ευθέα οικογένεια έχει μέγιστο στοιχείο C_{i_0}. Άρα $C = C_{i_0}$ και το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Από την πρόταση 1.3.33 παίρνουμε τότε ότι εφόσον το C είναι notherian τότε και κάθε υποαντικείμενο του είναι notherian, άρα και πεπερασμένα παραγόμενο.
Αντίστροφα, έστω ότι κάθε υποαντικείμενο του C είναι πεπερασμένα παραγόμενο και

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots$$

μία αυστηρώς αύξουσα άπειρη αλυσίδα υποαντικειμένων του. Αυτή είναι μία ευθέα οικογένεια υποαντικειμέων της ένωσης $\sum_i C_i$, η οποία αφού είναι πεπερασμένα παραγόμενη ως υποαντικείμενο του C θα ισούται με κάποιο C_k. Καταλήξαμε σε άτοπο άρα το C πρέπει αν είναι noetherian. ∎

Ορισμός 1.3.35. *Η κατηγορία $\mathcal{C}$ θα ονομάζεται* **τοπικά noetherian (locally noetherian)** *αν έχει μία οικογένεια noetherian γεννητόρων.*

Σχόλιο 1.3.36. Όταν η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει μία οικογένεια noetherian γεννητόρων τότε κάθε αντικείμενο της είναι μία ευθέα ένωση noetherian υποαντικειμένων, και κάθε πεπερασμένα παραγόμενα αντικείμενο είναι noetherian.

Πρόταση 1.3.37. *Έστω ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι τοπικά πεπερασμένα παραγόμενη και έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Τότε η $\mathcal{C}$ είναι τοπικά noetherian αν και μόνο αν κάθε συνγινόμενο ενέσιμων αντικειμένων είναι ενέσιμο αντικείμενο.*

Απόδειξη. Έστω ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι τοπικά noetherian, και έστω $(E_i)_I$ μία οικογένεια ενέσιμων αντικειμένων. Τότε λόγω της πρότασης 1.3.17 για να δείξουμε ότι το αντικείμενο $\coprod_I E_i$ αρκεί να θεωρήσουμε ένα μονομορφισμό $\alpha\colon B \to C$ noetherian αντικειμένων και να επεκτείνουμε κάθε μορφισμό $\phi\colon B \to \coprod_I E_i$ στο C. Αλλά εφόσον το B είναι πεπερασμένα παραγόμενο, η εικόνα του ϕ είναι και αυτή πεπερασμένα παραγόμενη και άρα περιέχεται σε ένα συνγινόμενο $\coprod_J E_i$ όπου το J είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I. Αλλά ένα πεπερασμένο συνγινόμενο ενέσιμων είναι πάντα ενέσιμο, και άρα μπορούμε να επεκτείνουμε τον ϕ σε έναν μορφισμό $C\colon \coprod_J E_i$. Άρα μπορούμε να τον επεκτείνουμε και σε έναν μορφισμό $C\colon \coprod_J E_i\colon \coprod_I E_i$.
Έστω τώρα ότι κάθε συνγινόμενο ενέσιμων αντικειμένων είναι ενέσιμο. Θα δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αντικείμενο είναι noetherian. Έστω

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$$

μία αύξουσα αλυσίδα υποαντικειμένων του C, και θέτουμε $E_i = E(C/C_i)$. Για κάθε C_n και $j \leqslant n$ θέτουμε $\phi_{nj}\colon C_n \to E_j$ να συμβολίζει τη σύνθεση των κανονικών μορφισμών $C_n \to C \to C/C_j \to E_j$. Για κάθε n , αυτοί οι ϕ_{nj} μας δίνουν έναν μορφισμό $\phi_n\colon C_n \to \coprod_1^\infty E_j$. Η οικογένεια (ϕ_n) είναι συμβατή και επομένως μας δίνει έναν μορφισμό $\phi\colon \sum_n C_n \to \coprod_1^\infty E_j$. Από υπόθεση το αντικείμενο $\coprod_1^\infty E_j$ είναι ενέσιμο. Άρα ο ϕ επεκτείνεται σε έναν μορφισμό $\phi'\colon C \to \coprod_1^\infty E_j$. Αλλά εφόσον το C είναι πεπερασμένα παραγόμενο, ο ϕ' αναλύεται μέσω ενός πεπερασμένου συνγινομένου $E_1 \coprod \cdots \coprod E_m$. Άρα $C_n = C_m$ για $n \geqslant m$. ∎

Κάνοντάς ένα παρόμοιο επιχείρημα όπως το πρώτο σκέλος της παραπάνω απόδειξης παίρνουμε και το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 1.3.38. *Εάν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι τοπικά noetherian, τότε κάθε ευθέα ένωση ενέσιμων αντικειμένων είναι ενέσιμη.*

Σχόλιο 1.3.39. Μπορεί να δειχτεί ακόμη πιο γενικά ότι κάθε ευθύ όριο ενέσιμων αντικειμένων είναι ενέσιμο σε μία τοπικά noetherian κατηγορία.

1.4 Τοπικοποίηση αβελιανών κατηγοριών

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δείξουμε ότι αν ξεκινήσουμε με μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ και θεωρήσουμε μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της S, τότε η κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ θα είναι και αυτή αβελιανή. Αρχικά θα δείξουμε ότι αν η $\mathcal{A}$ είναι προσθετική κατηγορία τότε και η $\mathcal{A}[S^{-1}]$ έχει φυσική δομή προσθετικής κατηγορία έτσι ώστε ο συναρτητής τοπικοποίησης $\mathcal{Q}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$ να είναι προσθετικό συναρτητής.
Καταρχάς εφόσον είμαστε σε προσθετική κατηγορία μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (LC4) ιδιότητα μιας τοπικοπιούσας κλάσης με τη ακόλουθη ιδιότητα:

(LC4') Έστω $f\colon M \to N$ ένας μορφισμός . Τότε υπάρχει μορφισμός s στην S έτσι ώστε $s \circ f = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει t στην S τέτοιος ώστε $f \circ t = 0$

Λήμμα 1.4.1. *Έστω M, N δύο αντικείμενα της προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$ και ϕ,ψ δύο μορφισμοί που ανήκουν στον $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,N)$. Τότε λόγω του λήμματος 1.1.53 υπάρχουν ένα αντικείμενο L στην $\mathcal{A}$, ένας μορφισμός $s \in S$ και μορφισμοί $f, g\colon M \to N$ τέτοιοι ώστε οι μορφισμοί ϕ καιψ να αναπαριστούνται από τα αριστερά roofs*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα. Τότε ο μορφισμός $M \to N$ που καθορίζεται απο το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

εξαρτάται μόνο από τους ϕ καιψ, δηλαδή είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των L, s, f και g.

Απόδειξη. Δες [14] (Λήμμα 2.1.1.). ∎

Επομένως μπορούμε να συμβολίσουμε τον μορφισμό που καθορίζει από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

ως $\phi + \psi$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ,εργαζόμενοι όπως στην παράγραφο της Τοπικοποίησης Κατηγοριών, ότι αν ορίσουμε μια διαδικασία που αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος μορφισμών $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,N)$ τον μορφισμό $\phi + \psi$, όπως ορίστηκε παραπάνω, τότε αυτή η πράξη μας είναι μεταθετική. Επίσης εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι αν συμβολίσουμε με 0 τον μορφισμό εκείνο στον $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,N)$ που αναπαρίσταται από το αριστερό roof :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

τότε το 0 είναι ουδέτερο στοιχείο στον $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,N)$.Είναι προφανές ότι αν ένα μορφισμός ϕ αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

τότε ο αντίστροφος μορφισμός του ϕ αναπαρίσταται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "-f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Άρα έχουμε δώσει έως τώρα στον $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,N)$ δομή αβελιανής ομάδας.
Επιπλέον αν M,N,P τρία αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}$, τότε εύκολα μπορεί αν δειχτεί ότι η σύνθεση :

$$\circ\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,N)\times \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(N,P)\longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,P),\quad (f,g)\longmapsto g\circ f$$

είναι διγραμμική. Άρα έχουμε ως τώρα δώσει την κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ δομή προπροσθετικής κατηγορίας. Για να δείξουμε ότι η κατηγορία αυτή έχει δομή προσθετικής ομάδας μένει να δείξουμε ότι έχει μηδενικό στοιχείο και ότι υπάρχουν τα πεπερασμένα συνγινόμενα.
Αρχικά το μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι το μηδενικό αντικείμενο 0 της $\mathcal{A}$. Αυτό φαίνεται θεωρώντας έναν ενδομορφισμό του 0 στην στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Αυτός θα αναπαριστάται τότε από ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 & & 0 \end{tikzcd}$$

Τότε επειδή το παρακάτω διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 & M \arrow[u, "id_M"] \arrow[d, "s"] & 0 \\ & 0 \arrow[ul, "id_0", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό αυτός ο μορφισμός αναπαρίσταται επίσης από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "id_0"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 & & 0 \end{tikzcd}$$

Αυτό το αριστερό roof επίσης αναπαριστά τον μηδενικό μορφισμό. Άρα ο μόνος ενδομορφισμός του 0 στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι ο μηδενικό μορφισμός και άρα το 0 είναι το μηδενικό στοιχείο στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$.
Τέλος αν M,N είναι δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}[S^{-1}]$, ορίζουμε το ευθύ του άθροισμα $M\coprod N$ ως το ευθύ άθροισμα αυτών των αντικειμένων στην $\mathcal{A}$. Οι κανονικές προβολές και ενέσεις στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ θα είναι οι μορφισμοί που αντιστοιχούν στους ανάλογους μορφισμούς στην $\mathcal{A}$.
Από τα παραπάνω είναι ξεκάθαρο ότι η $\mathcal{A}[S^{-1}]$ παίρνει δομή προσθετικής κατηγορίας.

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της. Τότε υπάρχει μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ και ένας προσθετικός συναρτητής $Q\colon \mathcal{A}\longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s \in S$*

2. *για κάθε κατηγορία προσθετική κατηγορία $\mathcal{B}$ και προσθετικό συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε ο $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s \in S$ υπάρχει μοναδικός προσθετικός συναρτητής $G\colon \mathcal{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{B}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}[S^{-1}] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Λόγω της προηγούμενης συζήτησης σε αυτή την παράγραφο μένει μόνο να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός προσθετικού συναρτητή $\mathcal{Q}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ καθώς και την ύπαρξη ενός μοναδικού $G\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{B}$ που να μας κάνει το διάγραμμα του θεωρήματος μεταθετικό.
Έστω $f, g\colon M \to N$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{A}$. Τότε οι μορφισμοί που αντιστοιχούν σε αυτούς, $Q(f)$ και $Q(g)$, στην κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ αναπαρίστανται από αριστερά roof :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & M & & N \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα. Άρα ο μορφισμός $Q(f) + Q(g)$ αναπαρίσταται από το αριστερό roof :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Άρα $Q(f) + Q(g) = Q(f+g)$. Άρα ο συναρτητής πηλίκο $\mathcal{Q}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι προσθετικός.
Έστω τώρα ότι $\mathcal{B}$ μία προσθετική κατηγορία και $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής έτσι ώστε ο $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $s \in S$. Τότε γνωρίζουμε την ύπαρξη ενός συναρτητή $G\colon \mathcal{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{B}$ για τον οποίο να ισχύει $F = G \circ Q$, από την παράγραφο για την Τοπικοποίηση κατηγοριών. Αρκεί να δειχτεί ότι ο G είναι και προσθετικός. Καταρχάς $G(M) = F(M)$ για κάθε αντικείμενο M της $\mathcal{A}$. Επίσης αν ϕ είναι ένας μορφισμός από το M στο N ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

έχουμε ότι $G(\phi) = F(f) \circ F(s)^{-1}$.
Εάν τώρα ϕ και ψ είναι δύο μορφισμοί στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ μεταξύ των M και N από το λήμμα 1.1.53 αυτοί αναπαρίστανται από αριστερά roofs :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & M & & N \end{tikzcd}$$

Το άθροισμα τους $\phi + \psi$ αναπαρίσταται τότε από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Άρα έχουμε ότι :

$$G(\phi+\psi) = F(f+g)\circ F(s)^{-1} = F(f)\circ F(s)^{-1} + F(g)\circ F(s)^{-1} = G(\phi)+G(\phi)$$

Άρα ο G είναι προσθετικός.
Η απόδειξη της μοναδικότητας είναι ίδια με την απόδειξη της μοναδικότητας σε μία τυχαία κατηγορία $\mathcal{C}$. ■

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους χαρακτηρισμούς των μηδενικών μορφισμών στις τοπικοποιήσεις.

Λήμμα 1.4.3. *Έστω $\phi\colon M \to N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof :*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\phi = 0$.

(ii) Υπάρχει $t \in S$ τέτοιο ώστε $f \circ t = 0$.

(iii) Υπάρχει $t \in S$ τέτοιο ώστε $t \circ f = 0$.

Απόδειξη. Καταρχάς λόγω της (LC4') οι συνθήκες (ii) και (iii) είναι ισοδύναμες.
Έστω ότι ισχύει η συνθήκη (i). Τότε $0 = Q(f)\circ Q(s)^{-1}$, και άρα $Q(f) = 0$. Άρα το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "id_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ L & & N \end{tikzcd}$$

αναπαριστά τον μηδενικό μορφισμό στο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(L,N)$. Ο μηδενικός μορφισμός ανάμεσα στο L και στο N όμως αναπαρίσταται και απο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "id_L"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ L & & N \end{tikzcd}$$

Άρα αυτά τα αριστερά roof είναι ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει αντικείμενο U στην $\mathcal{A}$ και μορφισμός $t\colon U \to L$ τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό και $t \in S$:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "id_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ L & U \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "t"] & N \\ & L \arrow[ul, "id_L", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Αυτό σημαίνει όμως ότι $f \circ t = 0$. Αντίστροφα αν ισχύει η συνθήκη (ii), έχουμε ότι $f\circ t = 0$ και άρα $Q(f)\circ Q(t) = 0$. Άρα επειδή $t \in S$, $Q(f) = 0$ και $\phi = Q(f)\circ Q(s)^{-1} = 0$. ■

Πόρισμα 1.4.4. *Έστω $f\colon M \to N$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $Q(f) = 0$.

(ii) Υπάρχει $t \in S$ τέτοιο ώστε $t \circ f = 0$.

(iii) Υπάρχει $t \in S$ τέτοιο ώστε $f \circ t = 0$.

Απόδειξη. Ο μορφισμός $Q(f)$ αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Και άρα το συμπέρασμά έπεται άμεσα από το λήμμα 1.4.3. ■

Πόρισμα 1.4.5. *Έστω M ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{A}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $Q(M) = 0$.

(ii) Υπάρχει ένα αντικείμενο N της κατηγορίας $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε ο μηδενικό μορφισμός από το N στο M να ανήκει στην S.

(iii) Υπάρχει ένα αντικείμενο N της κατηγορίας $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε ο μηδενικό μορφισμός από το M στο N να ανήκει στην S.

Απόδειξη. Καταρχάς βλέπουμε ότι οι συνθήκες (ii) και (iii) είναι ισοδύναμες απλά περνώντας στην δυϊκή κατηγορία.
Έστω ότι $Q(M) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $Q(id_M) = 0$. Άρα από το πόρισμα 1.4.4 έχουμε ότι υπάρχει μορφισμός $s \in S$, $s \colon N \to M$ τέτοιος ώστε $s = id_M \circ s = 0$. Άρα ισχύει η συνθήκη (ii).
Έστω τώρα αντίστροφα ότι ισχύει η συνθήκη (ii) και άρα ο μηδενικός μορφισμός $Q(N) \to Q(M)$ είναι ισομορφισμός. Άρα θα πρέπει $Q(M) = Q(N) = 0$. ■

Τέλος λόγω των παραπάνω αποτελεσμάτων παίρνουμε το παρακάτω χρήσιμο λήμμα:

Λήμμα 1.4.6. *Έστω $f \colon M \to N$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Τότε:*

(i) Εάν ο f είναι μονομορφισμός, τότε και ο $Q(f)$ είναι μονομορφισμός.

(ii) Εάν ο f είναι επιμορφισμός, τότε και ο $Q(f)$ είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Καταρχάς περνώντας στην δυϊκή κατηγορία βλέπουμε ότι οι (i) και (ii) είναι ισοδύναμες. Άρα αρκεί να αποδείξουμε την (i). Έστω $\phi \colon L \to N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ τέτοιος ώστε $Q(f) \circ \phi = 0$. Τότε ο μορφισμός ϕ αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ L & & M \end{tikzcd}$$

και άρα έχουμε ότι $\phi = Q(g) \circ Q(s)^{-1}$. Αυτό μας δίνει ότι:

$$0 = Q(f) \circ \phi = Q(f) \circ Q(g) \circ Q(s)^{-1} = Q(f \circ g) \circ Q(s)^{-1}$$

Δηλαδή έχουμε ότι $Q(f \circ g) = 0$. Από το πόρισμα 1.4.4 όμως τότε έχουμε ότι υπάρχει $t \in S$ τέτοιο ώστε $f \circ g \circ t = 0$. Εφόσον όμως από την υπόθεση ο f είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $g \circ t = 0$. Λόγω του πορίσματος 1.4.4 πάλι, παίρνουμε ότι $Q(g) = 0$. Άρα $\phi = Q(g) \circ Q(s)^{-1} = 0$ και ο $Q(f)$ είναι μονομορφισμός. ■

Στη συνέχεια της παραγράφου θα δείξουμε ότι εάν η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή τότε και η $\mathcal{A}[S^{-1}]$ θα είναι αβελιανή.

Λήμμα 1.4.7. *Έστω $\phi\colon M \to N$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Τότε ο ϕ έχει έναν πυρήνα και έναν συνπυρήνα.*

Απόδειξη. Καταρχάς ο μορφισμός ϕ αναπαρίσταται από ένα δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd} & L & \\ M \arrow[ur, "f"'] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

Άρα $\phi = Q(s)^{-1} \circ Q(f)$. Εφόσον ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός ο $\alpha \circ K \to M$ είναι πυρήνας του ϕ αν και μόνο αν είναι πυρήνας του $Q(f)$. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, ο μορφισμός $f\colon M \to N$ έχει έναν πυρήνα $k\colon K \to M$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι ο $\alpha = Q(k)\colon K \to M$ είναι ένας πυρήνας του $Q(f)$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$.
Έστω $\psi\colon P \to M$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ τέτοιος ώστε $Q(f) \circ \psi = 0$. Τότε ο ψ μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ P & & M \end{tikzcd}$$

και $\psi = Q(g) \circ Q(t)^{-1}$. Άρα :

$$0 = Q(f) \circ \psi = Q(f) \circ Q(g) \circ Q(t)^{-1} = Q(f \circ g) \circ Q(t)^{-1}$$

και άρα $Q(f \circ g) = 0$. Από το πόρισμα 1.4.4 έχουμε ότι υπάρχει μορφισμός $v\colon V \to U$, με $v \in S$ τέτοιος ώστε $f \circ g \circ v = 0$. Άρα λόγω της ιδιότητας των πυρήνων ο μορφισμός $g \circ v$ μπορεί να αναλυθεί μοναδικά μέσω του πυρήνα. Άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $w\colon W \to k$ τέτοιος ώστε $k \circ w = g \circ v$. Άρα έχουμε ότι $Q(k) \circ Q(w) = Q(g) \circ Q(v)$, και $Q(g) = Q(k) \circ Q(w) \circ Q(v)^{-1}$. Άρα:

$$\psi = Q(g) \circ Q(t)^{-1} = Q(k) \circ Q(w) \circ Q(v)^{-1} \circ Q(t)^{-1} = \alpha \circ Q(w) \circ Q(v)^{-1} \circ Q(t)^{-1}$$

Άρα ο ψ αναλύεται μέσω του $\alpha\colon K \to M$.
Μένει να δείξουμε ότι αυτή η ανάλυση είναι μοναδική. Έστω ότι ο ψ έχει δύο αναλύσεις, δηλαδή $\psi = \alpha \circ h = \alpha \circ h'$. Τότε έχουμε ότι $\alpha \circ (h - h') = 0$. Εφόσον ο πυρήνας $k\colon K \to M$ είναι μονομορφισμός έχουμε από το λήμμα 1.4.6 ότι και ο α είναι μονομορφισμός. Άρα $h = h'$ και η ανάλυση είναι μοναδική.
Άρα ο $\alpha\colon K \to M$ είναι ο πυρήνας του $Q(f)$.
Παιρνόντας στη δυϊκή κατηγορία παίρνουμε ανάλογα την ύπαρξη ενός συνπυρήνα. ∎

Για να αποδείξουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι αβελιανή μένει να δείξουμε ότι αν έχουμε έναν μορφισμό της, $\phi\colon M \to N$, και πάρουμε την κανονική του ανάλυση:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ker}\,\phi \arrow[r, "\chi"] & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "\rho"] & \mathsf{Coker}\,\phi \\ & \mathsf{Coim}\,\phi \arrow[r, "\phi'"'] & \mathsf{Im}\,\phi \arrow[u, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

τότε ο μορφισμός $\phi'\colon \mathsf{Coim}\,\phi \to \mathsf{Im}\,\phi$ θα πρέπει αν είναι ισομορφισμός.
Έστω ότι ο ϕ αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ P & & M \end{tikzcd}$$

Δηλαδή έχουμε ότι $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$. Εφόσον όμως η $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "k"] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & N \arrow[r, "c"] & \operatorname{Coker} f \\
 & \operatorname{Coim} f \arrow[r, "f'"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου ο $f' \colon \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ είναι ισομορφισμός. Αν σε αυτό το μεταθετικό διάγραμμα δράσει ο Q τότε παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "Q(k)"] & L \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "Q(a)"'] & N \arrow[r, "Q(c)"] & \operatorname{Coker} f \\
 & \operatorname{Coim} f \arrow[r, "Q(f')"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "Q(b)"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου ο $Q(f')$ είναι ισομορφισμός. Λόγω της απόδειξης του λήμματος 1.4.7 βλέπουμε ότι ο $Q(k) \colon \operatorname{Ker} f \to L$ είναι ένας πυρήνας του $Q(f)$ και ο $Q(c) \colon N \to \operatorname{Coker} f$ είναι ένας συνπυρήνας του $Q(f)$. Άρα και ο $Q(a) \colon L \to \operatorname{Coim} f$ είναι μία συνεικόνα του $Q(f)$, και ο $Q(b) \colon \operatorname{Im} f \to N$ είναι μία εικόνα του $Q(f)$.
Εφόσον $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$, και $s \in S$ προφανώς έχουμε ότι ο $Q(c) \colon N \to \operatorname{Coker} f$ είναι ένας συνπυρήνας του $\phi \colon M \to N$. Άρα μπορούμε να γράφουμε $\operatorname{Coker} \phi = \operatorname{Coker} f$ και $\rho = Q(c)$. Αυτό με τη σειρά του μας δίνει ότι ο $Q(b) \colon \operatorname{Im} f \to N$ είναι ένας πυρήνας του $\rho \colon N \to \operatorname{Coker} \phi$, και άρα μπορούμε να γράφουμε $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Im} f$ και $\beta = Q(b)$. Τέλος εφόσον $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$, ο μορφισμός $Q(s) \circ Q(k) \colon \operatorname{Ker} f \to M$ είναι ένας πυρήνας του ϕ , και άρα μπορούμε να γράφουμε $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Ker} f$ και $\chi = Q(s) \circ Q(k)$. Ανάλογα πάλι έχουμε ότι ο $Q(a) \circ Q(s)^{-1} \colon M \to \operatorname{Coim} f$ είναι ένας συνπυρήνας του χ, και άρα μπορούμε να γράφουμε ότι $\operatorname{Coim} \phi = \operatorname{Coim} f$ και $\alpha = Q(a) \circ Q(s)^{-1}$. Το παραπάνω μας δίνει τότε ότι:

$$Q(f) \circ Q(s)^{-1} = \phi = \beta \circ \phi' \circ \alpha = Q(b) \circ \phi' \circ Q(a) \circ Q(s)^{-1}$$

και άρα:

$$Q(b) \circ \phi' \circ Q(a) = Q(f) = Q(b) \circ Q(f') \circ Q(a)$$

Όμως ο $Q(b)$ είναι μονομορφισμός και ο $Q(a)$ είναι επιμορφισμός. Άρα $\phi' = Q(f')$, και ο ϕ' είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα 1.4.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της. Τότε η τοπικοποίηση $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι μία αβελιανή κατηγορία επίσης και ο συναρτητής τοπικοποίησης $Q \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. λόγω της προηγούμενης συζήτησης έχουμε ότι όντως η $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι αβελιανή κατηγορία. Οπότε μας μένει μόνο να δείξουμε ότι ο συναρτητής Q είναι ακριβής.
Έστω

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

μία ακριβής ακολουθία στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι και η ακολουθία

$$Q(L) \xrightarrow{Q(f)} Q(M) \xrightarrow{Q(g)} Q(N)$$

είναι ακριβής. Καταρχάς προφανώς $Q(g) \circ Q(f) = 0$. Έστω ότι $i \colon \operatorname{Im} f \to N$ είναι μία εικόνα του f και $k \colon \operatorname{Ker} g \to N$ ένας πυρήνας του g. Λόγω της συζήτησης που προηγήθηκε, για να δείξουμε ότι ο ϕ' είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι και ο $Q(i) \colon \operatorname{Im} f \to N$ είναι μία εικόνα του $Q(f)$ και ότι ο $Q(k) \colon \operatorname{Ker} g \to N$ ένας πυρήνας του $Q(g)$. Άρα η ακρίβεια της πρώτης ακολουθίας μας δίνει απευθείας την ακρίβεια της δεύτερης ακολουθίας. ■

1.4.1 Thick υποκατηγορίες

Ορισμός 1.4.9. *Μία μη τετριμμένη πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{B}$, μίας αβελιανής κατηγορία $\mathcal{A}$ θα καλείται* **thick** *, εάν για κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία:*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

της κατηγορίας $\mathcal{A}$, το αντικείμενο M ανήκει στην κατηγορία $\mathcal{B}$ αν και μόνο αν και το M' και το M'' είναι αντικείμενα της $\mathcal{B}$.

Λήμμα 1.4.10. *Έστω $\mathcal{B}$ μία thick υποκατηγορία της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Τότε:*

(i) Η $\mathcal{B}$ είναι μία αυστηρά πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$.

(ii) Η $\mathcal{B}$ είναι αβελιανή.

(iii) Κάθε υποαντικείμενο και κάθε αντικείμενο πηλίκο ενός αντικειμένου της κατηγορίας $\mathcal{B}$, ανήκει επίσης στην $\mathcal{B}$.

(iv) Κάθε extension οποιοδήποτε δύο αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{B}$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{B}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη των (i), (iii) και (iv) είναι προφανής.
Για το (ii), έστω M και N δύο αντικείμενα της υποκατηγορίας $\mathcal{B}$. Τότε έχουμε την σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Άρα το $M \coprod N$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{B}$ από την υπόθεση. Επίσης αν $f: M \to N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{B}$, είναι προφανώς και ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ όμως είναι αβελιανή και άρα ο πυρήνας του, ο συνπυρήνας του, η εικόνα του και η συνεικόνα του υπάρχουν στην $\mathcal{A}$, και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι thick υποκατηγορία της, εύκολα βλέπουμε ότι αυτά τα αντικείμενα ανήκουν και στην $\mathcal{B}$. Άρα αναπαριστούν τις ίδιες έννοιες σχετικά με τον μορφισμό f και στην $\mathcal{B}$. Άρα έχει την ίδια κανονική ανάλυση ο f στην $\mathcal{B}$ και άρα όντως τελικά η $\mathcal{B}$ είναι αβελιανή. ∎

Λήμμα 1.4.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της. Τότε η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$, η οποία περιέχει όλα τα αντικείμενα M της $\mathcal{A}$ τα οποία είναι ισόμορφα με το 0 στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$, είναι thick.*

Απόδειξη. Έστω

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Τότε εφόσον ο $Q: \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι ακριβής, τότε και η ακολουθία:

$$0 \longrightarrow Q(M') \longrightarrow Q(M) \longrightarrow Q(M'') \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Έστω ότι το αντικείμενο M ανήκει στην $\mathcal{B}$. Τότε $Q(M) = 0$ και άρα λόγω ακρίβειας της παραπάνω ακολουθίας έχουμε ότι και $Q(M') = 0$ και $Q(M'') = 0$, και άρα τα M' και M'' ανήκουν στην $\mathcal{B}$.
Αντίστροφα εάν τα M' και M'' ανήκουν στην $\mathcal{B}$, έχουμε ότι $Q(M') = 0$ και $Q(M'') = 0$, και άρα πάλι λόγω ακρίβειας της ακολουθίας έχουμε ότι $Q(M) = 0$, και άρα το αντικείμενο M ανήκει στην $\mathcal{B}$. Άρα η $\mathcal{B}$ είναι thick υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. ∎

Σχόλιο 1.4.12. Έως τώρα είδαμε ότι αν έχουμε μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών μίας αβελιανής κατηγορίας τότε μπορούμε να βρούμε μία thick υποκατηγορία της. Ωστόσο αυτό που θα μας απασχολήσει περισσότερο και στα επόμενα κεφάλαια και η σημασία των thick υποκατηγοριών θα φανεί στο επόμενο λήμμα, καθώς ξεκινώντας από μία thick υποκατηγορία, μπορούμε να βρούμε μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών. Έστω $\mathcal{B}$ μία thick υποκατηγορία της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Θα συμβολίζουμε με $S_{\mathcal{B}}$ την κλάση όλων των μορφισμών $f: M \to N$ για τους οποίους ο $\operatorname{Ker} f$ και ο $\operatorname{Coker} f$ ανήκουν στην $\mathcal{B}$.

Λήμμα 1.4.13. *Η κλάση $S_{\mathcal{B}}$ μορφισμών της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών.*

Απόδειξη. Καταρχάς εάν $\mathcal{A}^{op}$ είναι η δυϊκή κατηγορία της $\mathcal{A}$, η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}^{op}$ η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα της$\mathcal{B}$ είναι ισομορφική με την δυϊκή κατηγορία της $\mathcal{B}$, οπότε μπορούμε να τη συμβολίζουμε με $\mathcal{B}^{op}$. Άρα μπορούμε να επιχειρηματολογούμε κατά δυϊκό τρόπο.
Θα ελέγξουμε τώρα τις ιδιότητες που πρέπει αν ισχύουν ώστε μία κλάση μορφισμών να είναι τοπικοποιούσα.
Προφανώς η (LC1) ισχύει για την κλάση μορφισμών $S_{\mathcal{B}}$.
Θα δείξουμε τώρα ότι η (LC2) ισχύει. Έστω s και t δύο μορφισμοί στην $S_{\mathcal{B}}$ για του οποίους ορίζεται η σύνθεση $s \circ t$. Ισχύει όμως ότι $\operatorname{Ker} s \circ t = t^{-1}(\operatorname{Im} t \cap \operatorname{Ker} s)$, και άρα παίρνουμε την εξής σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \to \operatorname{Ker} t \to \operatorname{Ker} s \circ t \to \operatorname{Im} t \cap \operatorname{Ker} s \to 0$$

Από τον ορισμό όμως της $S_{\mathcal{B}}$, ο $\operatorname{Ker} s$ ανήκει στη $\mathcal{B}$. Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι thick, από το (iii) του λήμματος 1.4.10 παίρνουμε ότι $\operatorname{Im} t \cap \operatorname{Ker} s$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι thick έχουμε ότι $\operatorname{Ker} s \circ t$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Κατά δυϊκό τρόπο παίρνουμε ότι ο $\operatorname{Coker} s \circ t)$ ανήκει στην $\mathcal{B}$ και άρα ο $s \circ t$ ανήκει στην $S_{\mathcal{B}}$.
Τώρα θα δείξουμε ότι ισχύει η (LC3a). Έστω $f \colon M \to N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$ και $s \colon P \to N$ ένας μορφισμός στην $S_{\mathcal{B}}$. Έστω επίσης p και q οι φυσικές προβολές του $M \oplus N$ στον πρώτο και δεύτερο παράγοντα αντίστοιχα. Έστω επίσης $i \colon M \to M \oplus P$ και $j \colon P \to M \oplus P$ οι κανονικοί μονομορφισμοί. Τότε κατασκευάζουμε το διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{g} & P \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

όπου Q είναι το pullback των M και P υπεράνω του N, δηλαδή ο πυρήνας του μορφισμού $f \circ p - s \circ q \colon M \oplus P \to N$. Έστω $m \colon Q \to M \oplus P$ η κανονική έγκλιση. Ισχυριζόμαστε ότι ο t ανήκει στην $S_{\mathcal{B}}$. Καταρχάς $t = p \circ m$ και άρα $\operatorname{Ker} t = 0 \oplus P \cap \operatorname{Ker} f \circ p - s \circ q$, δηλαδή $\operatorname{Ker} t = 0 \oplus \operatorname{Ker} s$. Όμως επειδή η $\mathcal{B}$ είναι thick και το $0 \oplus \operatorname{Ker} s$ είναι ισόμορφο με το $\operatorname{Ker} s$, παίρνουμε ότι ο $\operatorname{Ker} t$ ανήκει στην $\mathcal{B}$.
Έστω τώρα $L = \operatorname{Im}(f \circ p - s \circ q)$. Εφόσον $f = (f \circ p - s \circ q) \circ i$ και $s = (f \circ p - s \circ q) \circ j$ έχουμε ότι $\operatorname{Im} f \subset L$ και $\operatorname{Im} s \subset L$. Άρα το παραπάνω διάγραμμα μπορεί αν αντικατασταθεί από το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{g} & P \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ M & \xrightarrow[f]{} & L \end{array}$$

Προφανώς επειδή η $\mathcal{B}$ είναι thick και $L \subset N$, ο συνπυρήνας του μορφισμού $s \circ P \to L$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Έστω ότι $r \colon M \to \operatorname{Coker} t$ ο φυσικός μορφισμός. Τότε $r \circ t = 0$ και άρα $r \circ p \circ m = 0$. Άρα ο μορφισμός $r \circ p$ θα πρέπει να αναλύεται μέσω του συνπυρήνα του m ο οποίος είναι ο L καθώς είμαστε σε αβελιανή κατηγορία. Άρα υπάρχει μορφισμός $r' \colon L \to \operatorname{Coker} t$ τέτοιος ώστε να ισχύει $r \circ p = r' \circ (f \circ p - s \circ q)$. Επίσης επειδή και ο p και ο r είναι επιμορφισμοί, είναι και ο r' επιμορφισμός. Λόγω της μεταθετικότητας των ανάλογων διαγραμμάτων έχουμε ότι:

$$0 = r \circ p \circ j = r' \circ f \circ p - s \circ q) \circ j = r' \circ s$$

Άρα ο r' θα πρέπει αν αναλύεται μέσω του $\operatorname{Coker} s$ και από εκεί βλέπουμε ότι ο $\operatorname{Coker} t$ είναι αντικείμενο πηλίκο του $\operatorname{Coker} s$. Άρα επειδή ο $\operatorname{Coker} s$ ανήκει στην $\mathcal{B}$ και η $\mathcal{B}$ είναιthick, έχουμε

και ότι ο $\mathrm{Coker}\, t$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Συνόλικά δηλαδή έχουμε ότι ο t ανήκει στην $S_{\mathcal{B}}$ και άρα αποδείχτηκε η (LC3a). Περνώντας στην δυϊκή κατηγορία παίρνουμε ότι ισχύει και η (LC3b).
Τέλος θα δείξουμε ότι ισχύει και η (LC4'). Έστω πρώτα ένας μορφισμός t στην $S_{\mathcal{B}}$ έτσι ώστε να ισχύει $t \circ f = 0$. Άρα $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, t$. Άρα επειδή $\mathrm{Ker}\, t$ ανήκει στην $\mathcal{B}$ και η $\mathcal{B}$ είναι thick, έχουμε ότι $\mathrm{Im}\, f$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Αλλά η $\mathrm{Im}\, f$ είναι ισόμορφη με το $M/\mathrm{Ker}\, f$, και άρα $M/\mathrm{Ker}\, f$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Άρα βρήκαμε έναν μορφισμό s, την κανονική έγκλιση $\mathrm{Ker}\, f \to M$, η οποία ανήκει στην $S_{\mathcal{B}}$ λόγω του ότι το $M/\mathrm{Ker}\, f$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, για τον οποίο ισχύει ότι $f \circ s = 0$. Κατά δυϊκό τρόπο παίρνουμε και το γεγονός ότι αν υπάρχει $s \in S_{\mathcal{B}}$ τέτοιος ώστε $f \circ s = 0$, θα υπάρχει $t \in S_{\mathcal{B}}$ τέτοιος ώστε $t \circ f = 0$. Άρα ισχύει και η (LC4'). ■

Πρόταση 1.4.14. *Έστω $\mathcal{B}$ μία thick υποκατηγορία της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{B}$ τότε είναι η thick κατηγορία όλων των αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{A}$ τα οποία είναι ισόμορφα με το 0 στην κατηγορία $\mathcal{A}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$.*

Απόδειξη. Έστω M αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{B}$. Τότε ο μορφισμός $M \to 0$ έχει πυρήνα ίσο με M και συνπυρήνα 0. Άρα θα ανήκει στην $S_{\mathcal{B}}$, και άρα παιρνόντας στην κατηγορία $\mathcal{A}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ αυτός γίνεται ισομορφισμός. Άρα το M είναι ισόμορφο με το 0 στην κατηγορία $\mathcal{A}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$.
Έστω τώρα ένα αντικείμενο M το οποίο είανι ισόμορφο με το 0 στην κατηγορία $\mathcal{A}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$. Άρα ο ταυτοτικός μορφισμός του M ο οποίος αναπαρίσταται στην από ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

θα πρέπει να ίσο με το μηδενικό μορφισμό ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

Άρα υπάρχει μορφισμός $u \colon U \to M$ με $u \in S_{\mathcal{B}}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "id_M"', "\sim"] \arrow[dr, "id_M"] & \\ M & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "u"] & M \\ & M \arrow[ul, "id_M", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Άρα ο u είναι ο μηδενικός μορφισμός, και επειδή ο συνπυρήνας του είναι το M, έχουμε ότι το M ανήκει στη $\mathcal{B}$. ■

Σχόλιο 1.4.15. Λόγω της παραπάνω πρότασης, θα μπορούμε να συμβολίζουμε την κατηγορία $\mathcal{A}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ και ως $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ και θα την καλούμε την κατηγορία πηλίκο της $\mathcal{A}$ ως προς την thick υποκατηγορία $\mathcal{B}$.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Τριγωνισμένων Κατηγοριών

2.1 Τριγωνισμένες κατηγορίες

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μία προσθετική κατηγορία και $\Sigma\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ ένας προσθετικός συναρτητής, ο οποίος είναι αυτομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{T}$. Θα καλούμε τον Σ* **tanslation συναρτητή** *στην $\mathcal{T}$. Θα κάνουμε επίσης χρήση του συμβολισμού $\Sigma^n(X) = X[n]$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Ορισμός 2.1.2. *Ένα* **τρίγωνο (triangle)** *στην κατηγορία $\mathcal{T}$ θα είναι ένα διάγραμμα:*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$

Σχηματικά ένα τρίγωνο αναπαρίσταται ως:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Ορισμός 2.1.3. *Ένας* **μορφισμός** *μεταξύ τριγώνων είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X') \end{tikzcd}$$

Ένας μορφισμός τριγώνων θα είναι **ισομορφισμός τριγώνων** *αν και μόνο αν οι u, v και w είναι ισομορφισμοί.*

Ορισμός 2.1.4. *Μία* **τριγωνισμένη κατηγορία (triangulated category)**, *είναι μία προσθετική κατηγορία μαζί με έναν translation συναρτητή Σ, η οποία εφοδιάζεται με μία οικογένεια τριγώνων, τα οποία θα καλούνται* **διακεκριμένα (distinguished)** *τρίγωνα, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(TR1.a) *Κάθε τρίγωνο το οποίο είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο τρίγωνο, είναι και αυτό διακεκριμένο.*

(TR1.b) *Για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{T}$, το τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "id_X"] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο.

(TR1.c) *Για κάθε μορφισμό $f\colon M \to N$ στην $\mathcal{T}$, υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

(TR2) *Το τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο αν και μόνο αν και το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma(X) \arrow[dl, "-\Sigma(f)"', "{[1]}"] & \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο.

(TR3) *Έστω ένα διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X')
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Τότε υπάρχει μορφισμός $w\colon Z \to Z'$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X')
\end{tikzcd}$$

να είναι μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων.

(TR4) *Έστω f, g και $h = g \circ f$ μορφισμοί στην $\mathcal{T}$. Τότε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(id_X)"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "b"] \arrow[d, "id_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "c"] & X' \arrow[r] & \Sigma(Y)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα, μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(id_X)"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "b"] \arrow[d, "id_Z"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"'] & Z \arrow[r, "c"] \arrow[d, "b"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id_{X'}"'] & \Sigma(Y) \arrow[d, "\Sigma(a)"] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' \arrow[r, "w"] & \Sigma(Z')
\end{tikzcd}$$

στο οποίο και οι τέσσερις γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και τα κάθετα βέλη είναι μορφισμοί τριγώνων.

Σχόλιο 2.1.5. Η ιδιότητα **(TR2)** καλείται αξίωμα στροφής τριγώνων, και η ιδιότητα **(TR4)** καλείται οκταεδρικό αξίωμα.

Ορισμός 2.1.6. *Έστω δύο τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$. Ένα προσθετικό συναρτητής $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ θα καλείται* **βαθμωτός (graded)***, εάν οι συναρτητές $\Sigma \circ F$ και $F \circ \Sigma$ είναι ισόμορφοι.*

Έστω $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ ένας βαθμωτός συναρτητής και η ο ισομορφισμός από τον συναρτητή $F \circ \Sigma$ στον $\Sigma \circ F$. Εάν έχουμε ένα τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "h"'] & \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $\mathcal{T}$, τότε εφαρμόζοντας τον F, παίρνουμε ένα διάγραμμα:

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \xrightarrow{F(h)} F(\Sigma(X)) \xrightarrow{\eta_X} \Sigma(F(X))$$

και άρα ένα τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & F(Z) \arrow[dl, "\eta_X \circ F(h)"'] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & F(Y) \arrow[ul, "F(g)"']
\end{tikzcd}$$

Θα λέμε ότι ο F απεικονίζει το πρώτο τρίγωνο στο δεύτερο.
Εάν είχαμε ένα μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X')
\end{tikzcd}$$

εφαρμόζοντας τον F παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d, "F(u)"'] & F(Y) \arrow[r] \arrow[d, "F(v)"'] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, "F(w)"] & F(\Sigma(X)) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(\Sigma(u))"] & \Sigma(F(X)) \arrow[d, "\Sigma(F(u))"] \\
F(X') \arrow[r] & F(Y') \arrow[r] & F(Z') \arrow[r] & F(\Sigma(X')) \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \Sigma(F(X'))
\end{tikzcd}$$

και γράφοντας τα δύο τελευταία τετράγωνα ως ένα, παίρνουμε ένα μορφισμό τριγώνων.

Ορισμός 2.1.7. *Έστω δύο τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$. Ένας βαθμωτός συναρτητής $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ θα καλείται* **ακριβής (exact)**, *εάν ο F απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα σε διακεκριμένα τρίγωνα.*

Ορισμός 2.1.8. *Έστω δύο τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$. Έστω επίσης δύο ακριβείς συναρτητές F και G μεταξύ των $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$. Ένα φυσικός μετασχηματισμός $\omega\colon F \to G$ θα καλείται* **βαθμωτός (graded)**, *εάν το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma(X)) \arrow[r, "\eta_{F,X}"] \arrow[d, "\omega_{\Sigma(X)}"'] & T(\Sigma(X)) \arrow[d, "T(\omega_X)"] \\
G(\Sigma(X)) \arrow[r, "\eta_{G,X}"] & G(\Sigma(X))
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{T}$. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

παίρνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_X"'] & F(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_Y"'] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_Z"] & F(\Sigma(X)) \arrow[r, "\eta_{F,X}"] \arrow[d, "\omega_{\Sigma(X)}"] & \Sigma(F(X)) \arrow[d, "\Sigma(\omega_X)"] \\
G(X) \arrow[r] & G(Y) \arrow[r] & G(Z) \arrow[r] & G(\Sigma(X)) \arrow[r, "\eta_{G,X}"'] & \Sigma(G(X))
\end{tikzcd}$$

και γράφοντας τα δύο τελευταία τετράγωνα ως ένα, παίρνουμε έναν μορφισμό τριγώνων. Επειδή οι συναρτητές F και G είναι ακριβείς, ο μορφισμός είναι μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων.

Αρχικά θα αναφέρουμε μία σημαντική ιδιότητα του συναρτητή translation.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε ο συναρτητής translation Σ διατηρεί τα γινόμενα και τα συγγινόμενα*

Απόδειξη. Ο λόγος που ο Σ διατηρεί τα γινόμενα και τα συγγινόμενα είναι ουσιαστικά το γεγονός ότι ο Σ έχει αντίστροφο τον Σ^{-1}. Άρα έχει έναν δεξί και έναν αριστερό συζυγή, τον Σ^{-1}. Άρα υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί

$$\mathsf{Hom}(\Sigma X, Y) \cong \mathsf{Hom}(X, \Sigma^{-1} Y)$$

και

$$\mathsf{Hom}(X, \Sigma Y) \cong \mathsf{Hom}(\Sigma^{-1} X, Y)$$

Ένας συναρτητής όμως που έχει έναν αριστερό συζυγή, διατηρεί τα γινόμενα, και ένας συναρτητής που έχει έναν δεξί συζυγή, διατηρεί τα συγγινόμενα, λόγω της πρότασης 1.2.85. Ο Σ εφόσον έχει και τα δύο, διατηρεί και τα γινόμενα και τα συγγινόμενα. ∎

Παρατήρηση 2.1.10. Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε και η δυϊκή της κατηγορία $\mathcal{T}^{op}$ μπορεί να πάρει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας ορίζοντας τον συναρτητή translation στην $\mathcal{T}^{op}$ να είναι ο αντίστροφος του Σ, δηλαδή ο Σ^{-1}. Εάν το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{T}$, τότε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Sigma^{-1}(h)"', "{[1]}"] & \\ Z \arrow[rr, "g"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

θα είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{T}^{op}$.

Απόδειξη. Δες [14] (Λήμμα 1.2.2. Κεφάλαιο 2). ∎

Ορισμός 2.1.11. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και H ένας συναρτητής από την $\mathcal{T}$ σε κάποια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Ο συναρτητής H θα καλείται* **ομολογικός (homological)**, *εάν για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

η ακολουθία:

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z)$$

είναι ακριβής στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.1.12. Λόγω του αξιώματος (TR2) ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

μας δίνει ένα άπειρο διάγραμμα:

$$\cdots \xrightarrow{\Sigma^{-1}(h)} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X) \xrightarrow{\Sigma(f)} \cdots$$

όπου η σύνθεση δύο οποιονδήποτε συνεχόμενων μορφισμών είναι ίση με 0, καθώς:
Εάν έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "id_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

λόγω της (TR2) οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα, και άρα λόγω του (TR3) υπάρχει $u\colon 0 \to Z$ τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "id_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \Sigma X \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Τότε επειδή ο u πρέπει να είναι ο μηδενικός μορφισμός, λόγω της μεταθετικότητας του δευτέρου τετραγώνου έχουμε ότι $g \circ f = 0$. Λόγω της (TR2) παίρνουμε ότι και οποιοιδήποτε άλλη σύνθεση διαδοχικών μορφισμών θα είναι ίση με 0.

Άρα αν ο $H\colon \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ είναι ένας ομολογικός συναρτητής, τότε παίρνουμε μία άπειρη ακριβή ακολουθία αντικειμένων της $\mathcal{A}$:

$$\cdots \xrightarrow{H(\Sigma^{-1}(h))} H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z) \xrightarrow{H(h)} H(\Sigma(X)) \xrightarrow{H(\Sigma(f))} \cdots$$

Παρατήρηση 2.1.13. Ένας ομολογικός συναρτητής της τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}^{op}$ καλείται **συνομολογικός (cohomological)** της $\mathcal{T}$. Άρα, ένας συνομολογικός συναρτητής είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής $H\colon \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

η ακολοθία:

$$H(Z) \xrightarrow{H(g)} H(Y) \xrightarrow{H(f)} H(X)$$

είναι ακριβής στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$.

Λήμμα 2.1.14. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και U ένα αντικείμενό της.Τότε ισχύουν τα εξής:*

- *Ο συναρτητής* $\mathsf{Hom}(U, \text{-})$ *είναι ομολογικός.*
- *Ο συναρτητής* $\mathsf{Hom}(\text{-}, U)$ *είναι συνομολογικός.*

Απόδειξη. Για το 1):
Έστω ένα διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία:

$$\mathsf{Hom}(U, X) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Hom}(U, Y) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}(U, Z)$$

είναι ακριβής. Ξέρουμε ότι $g_* \circ f_* = 0$
Έστω μορφισμός $u \in \mathsf{Hom}(U, Y)$, ο οποίος απεικονίζεται στο μηδενικό μορφισμό του $\mathsf{Hom}(U, Z)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
U & \xrightarrow{id_U} & U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma U \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & \Sigma X
\end{array}$$

όπου το μεσαίο τετράγωνο είναι μεταθετικό και οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα. Λόγω του αξιώματος (TR2), κάνοντας στροφή και στα δύο τρίγωνα παίρνουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma U & \xrightarrow{-id_U} & \Sigma U \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle 0}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma u} \\
Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma f} & \Sigma(Y)
\end{array}$$

όπου οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα, και λόγω του (TR3), μπορούμε να το συμπληρώσουμε σε μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων :

$$\begin{array}{ccccccc}
U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma U & \xrightarrow{-id_U} & \Sigma U \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma v} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma u} \\
Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma f} & \Sigma(Y)
\end{array}$$

Κάνοντας πάλι αντίθετη στροφή στα τρίγωνα παίρνουμε το μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{array}{ccccccc}
U & \xrightarrow{id_U} & U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma \\
\downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma v} \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & \Sigma X
\end{array}$$

Άρα επειδή το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό, ισχύει ότι $u = f \circ v = f_*(v)$. Άρα κατασκευάσαμε έναν μορφισμό $v \in \mathsf{Hom}(U, X)$ ο οποίος απεικονίζεται στον $u \in \mathsf{Hom}(U, Y)$.
Η απόδειξη του 2) γίνεται προφανώς κατά δυϊκό τρόπο. ■

Λήμμα 2.1.15. *Έστω ένας μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων:*

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma(X) \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma(u)} \\
X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \Sigma(X')
\end{array}$$

Τότε εάν δύο από τους μορφισμούς u, v και w είναι ισομορφισμοί, τότε είναι και ο τρίτος.

Απόδειξη. Κάνοντας στροφή των τριγώνων μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο u και ο v είναι ισομορφισμοί. Μπορούμε τότε να παρουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}(Z', \text{-})$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathsf{Hom}(Z', X) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', Y) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', Z) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', \Sigma X) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', \Sigma Y) \\
{\scriptstyle u_*}\downarrow & & {\scriptstyle v_*}\downarrow & & {\scriptstyle w_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma(u)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma(v)_*} \\
\mathsf{Hom}(Z', X') & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', Y') & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', Z') & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', \Sigma X') & \longrightarrow & \mathsf{Hom}(Z', \Sigma Y')
\end{array}$$

στο οποίο και οι δύο γραμμές είναι ακριβείς και οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί, εκτός ίσως από τον w_*. Από το 5-λήμμα παίρνουμε όμως ότι και αυτός είναι ισομορφισμός. Άρα υπάρχει $\alpha\colon Z' \to Z$ τέτοιος ώστε $w_*(\alpha) = w \circ \alpha = id_{Z'}$.
Ομοίως εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}(\text{-}, Z)$ στον αρχικό μορφισμό τριγώνων, παίρνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(\Sigma(Y'), Z) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma(v)^*"'] & \mathsf{Hom}(\Sigma(X'), Z) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma(u)^*"'] & \mathsf{Hom}(Z', Z) \arrow[r] \arrow[d, "w^*"'] & \mathsf{Hom}(Y', Z) \arrow[r] \arrow[d, "v^*"] & \mathsf{Hom}(X', Z) \arrow[d, "u^*"] \\
\mathsf{Hom}(Si(Y), Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}(\Sigma(X), Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}(Z, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}(Y, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}(X, Z)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο και οι δύο γραμμές είναι ακριβείς και όλοι οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί, εκτός ίσως από τον μορφισμό w^*. Από το 5-λήμμα όμως, και αυτός είναι ισομορφισμός. Άρα υπάρχει $\beta\colon Z' \to Z$ τέτοιος ώστε $w^*(\beta) = \beta \circ w = id_Z$. Συνολικά τότε έχουμε ότι:

$$\beta = \beta \circ (w \circ \alpha) = (\beta \circ w) \circ \alpha = \alpha$$

Άρα ο w είναι ισομορφισμός. ■

Παρατήρηση 2.1.16. Λόγω του λήμματος 2.1.15 έχουμε ότι στον ακόλουθο μοορφισμό διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "id_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(id_X)"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

τα οποία έχουν βάση τον μορφισμό $f\colon X \to Y$, ο μορφισμός $w\colon Z \to Z'$ είναι ισομορφισμός. Άρα η τρίτη πλευρά του τριγώνου καθορίζεται με ακρίβεια ισομορφισμού, χωρίς όμως αυτός ο ισομορφισμός να είναι μοναδικός. Θα την καλούμε έναν **κώνο (cone)** του f.

Λήμμα 2.1.17. *Έστω ένα διακεκριμένο τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο f είναι ισομορφισμός.

(ii) $Z = 0$.

Απόδειξη. θεωρούμε τον ακόλουθο μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "id_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

Εάν $Z = 0$, τότε ο πρώτος και ο τρίτος κάθετος μορφισμός είναι ισομορφισμοί. Άρα και ο δεύτερος, ο f, είναι ισομορφισμός.
Αντίστροφα εάν ο $f\colon X \to Y$ είναι ισομορφισμός, ο πρώτος και ο δεύτερος κάθετος μορφισμός είναι ισομορφισμοί. Άρα και ο τρίτος είναι ισομορφισμός. Δηλαδή το Z είναι ισόμορφο με το 0, δηλαδή $Z = 0$ ■

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα ο κώνος ενός μορφισμού είναι μοναδικός ως προς ισομορφισμό, αλλά εν γένει ο ισομορφισμός αυτός δεν είναι μοναδικός, κάτι που δημιουργεί κάποια προβλήματα στην ανάπτυξη της θεωρίας των τριγωνισμένων κατηγοριών. Ωστόσο στη συνέχεια θα αναφέρουμε κάποιες περιπτώσεις στις οποίες αυτός ο ισομορφισμός είναι μοναδικός. Η επόμενη πρόταση είναι στην πραγματικότητα μία «βελτίωση» του αξιώματος (TR3).

Πρόταση 2.1.18. *Έστω*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X)$$

και

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} \Sigma(X')$$

δύο διακεκριμένα τρίγωνα και $v\colon Y \to Y'$ ένας μορφισμός. Τότε έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "w"'] & \Sigma(X) \arrow[d, dashed, "\Sigma(u)"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma(X') \end{tikzcd}$$

και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $g' \circ v \circ f = 0$.

(ii) Υπάρχει μορφισμός u έτσι ώστε το πρώτο τετράγωνο του διαγράμματος να είναι μεταθετικό.

(iii) Υπάρχει μορφισμός w έτσι ώστε το δεύτερο τετράγωνο του διαγράμματος να είναι μεταθετικό.

(iv) Υπάρχουν μορφισμοί u και w έτσι ώστε το διάγραμμα να είναι μορφισμός τριγώνων.

Εάν οι παραπάνω ιδιότητες ικανοποιούνται και επίσης ισχύει ότι $\mathsf{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$, τότε ο μορφισμός u είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Επειδή ο συναρτητής $\mathsf{Hom}(X, \text{-})$ είναι ομολογικός παίρνουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία:

$$\mathsf{Hom}(X, Z'[-1]) \longrightarrow \mathsf{Hom}(X, X') \xrightarrow{f'_*} \mathsf{Hom}(X, Y') \xrightarrow{g'_*} \mathsf{Hom}(X, Z')$$

Άρα εάν $g' \circ v \circ f = 0$ παίρνουμε και ότι:

$$g'_* \circ (v \circ f) = 0g' \circ v \circ f = 0$$

Άρα $v \circ f \in \mathsf{Ker}\, g'_* = \mathsf{Im}\, f'_*$ και υπάρχει $u\colon X \to X'$ τέτοιος ώστε:

$$v \circ f = f'_*(u) = f' \circ u$$

Άρα η ιδιότητα (i) συνεπάγεται την (ii).
Επίσης λόγω της ακρίβειας της παραπάνω ακολουθίας, εάν $\mathsf{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$, τότε ο u είναι μοναδικός.
Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (ii), τότε:

$$g' \circ v \circ f = g' \circ f' \circ u = 0$$

καθώς $g' \circ f' = 0$. Άρα η (ii) συνεπάγεται την (i).
Η ισοδυναμία της ιδιότητας (i) με την (iii) αποδεικνύεται ανάλογα. Τέλος η (iv) προφανώς συνεπάγεται την (ii), ενώ η (ii) συνεπάγεται την (iv) λόγω του (TR3). ■

Πόρισμα 2.1.19. *Έστω:*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X)$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο για το οποίο ισχύει $\mathsf{Hom}(X, Z[-1]) = 0$. *Τότε:*

(i) Εάν:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} \Sigma(X)$$

είναι ένα άλλο διακεκριμένο τρίγωνο με βάση τον μορφισμό $f\colon X \to Y$, *τότε υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός* $u\colon Z \to Z'$ *τέτοιος ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u"] & \Sigma(X) \arrow[d, "id_{\Sigma(X)}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

να είναι ισομορφισμός τριγώνων.

(ii) Εάν:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h'} \Sigma(X)$$

είναι ένα άλλο διακεκριμένο τρίγωνο, τότε $h' = h$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_Y"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "id_{\Sigma X}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

όπου το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. λόγω της (TR3) έχουμε τότε ότι μπορούμε να το συμπληρώσουμε σε ένα μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_Y"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "id_{\Sigma X}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Λόγω του λήμματος 2.1.15 έχουμε όμως ότι ο w είναι ισομορφισμός. Επίσης εφόσον έχουμε ότι $\mathsf{Hom}(X, Z[-1]) = 0$, παίρνουμε ότι $\mathsf{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$. Άρα λόγω της πρότασης 2.1.18 ο w είναι μοναδικός.

(ii) Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Ο ταυτοτικός μορφισμός $id_X\colon X \to X$ ικανοποιεί τότε την ιδιότητα (ii) της πρότασης 2.1.18. Άρα, λόγω της 2.1.18, έχουμε έναν μορφισμο τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Λόγω της μοναδικότητας που παίρνουμε πάλι από την πρόταση 2.1.18, πρέπει να ισχύει $u = id_X$ και $w = id_Z$. Άρα $h = h'$. ■

2.1.1 Τοπικοποίηση τριγωνισμένων κατηγοριών

Ορισμός 2.1.20. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της. Η S θα είναι* **συμβατή με την τριγωνική δομή (compatible with triangulation)**, *εάν ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(LT1) *Για κάθε μορφισμό s, ο s ανήκει στην S αν και μόνο αν ο $\Sigma(s)$ ανήκει στη S.*

(LT2) *το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(s)"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X')
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα, το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό και οι μορφισμοί s και t ανήκουν στην S, μπορεί να συνμπληρωθεί σε έναν μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(s)"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X')
\end{tikzcd}$$

με τον μορφισμό p να ανήκει στην S.

Σχόλιο 2.1.21. Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της συμβατή με την τριγωνική δομή. Έστω επίσης $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ ον συναρτητής πηλίκο. Τότε για κάθε μορφισμό $s \in S$, ο μοορφισμός $(Q \circ \Sigma)(s) = Q(\Sigma(s))$ είναι ισομορφισμός. Άρα ο συναρτητής $Q \circ \Sigma$ αναλύεται μέσω του $\mathcal{T}[S^{-1}]$, και άρα μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "Q"'] \\
\mathcal{T}[S^{-1}] \arrow[r, "\Sigma_S"'] & \mathcal{T}[S^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Προφανώς ο Σ_S είναι έναν αυτομορφισμός της κατηγορίας $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Στη συνέχεια κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού θα γράφουμε τον συναρτητή Σ_S απλά ως Σ.

Σχόλιο 2.1.22. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$ μπορεί να πάρει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Για να μιλήσουμε για τριγωνισμένη κατηγορία πρέπει προφανώς πρώρα να αναφέρουμε ποιος θα είναι ο συναρτητής translation, ποια θα είναι τα διακεκριμένα τρίγωνα και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι όντως η κατηγορία μας εφοδιασμένη με αυτά λαμβάνει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας.
Ο συναρτητής translation θα είναι ο παραπάνω συναρτητής Σ_S, ενώ ένα τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

της κατηγορίας $\mathcal{T}[S^{-1}]$ θα είναι διακεκριμένο αν υπάρχει διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
U \arrow[rr] & & V \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

της κατηγορίας $\mathcal{T}$, και ένας ισομορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(a)"] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$.

Θεώρημα 2.1.23. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της, η οποία είναι συμβατή με την τριγωνική δομή. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$ έχει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας και ο φυσικός συναρτητής $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η κατηγορία $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ μαζί με τον συναρτητή Σ_S και διακεκριμένα τρίγωνα όπως αυτά ορίστηκαν στο σχόλιο 2.1.22 είναι τριγωνισμένη.
Προφανώς από τον τρόπον που ορίστηκαν τα διακεκριμένα τρίγωνα κάθε τρίγωνο ισόμορφο με ένα διακεκριμένο τρίγωνο είναι διακεκριμένο και άρα ισχύει η (TR1a).
Επίσης προφανώς και το τρίγωνο:

$$X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ καθώς είναι ισόμορφο με τον εαυτό του σαν διακεκριμένο τρίγωνο της κατηγορίας $\mathcal{T}$, και άρα ισχύει η (TR1b). Έστω $f\colon X \to Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Τότε ο f μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός s ανήκει στη S. Εφόσον η $\mathcal{T}$ είναι τριγωνσμένη κατηγορία, υπάρχει διακεκριμένο τρίγωνο:

$$U \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{v} U \xrightarrow{w} \Sigma U$$

με βάση τον μορφισμό $g\colon U \to Y$. Θεωρούμε τότε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "Q(s)"'] & Y \arrow[r, "Q(v)"] \arrow[d, "id_Y"'] & V \arrow[r, "Q(w)"] \arrow[d, "id_V"'] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(Q(s))"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "Q(v)"'] & V \arrow[r, "\Sigma(Q(s))\circ Q(w)"'] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

Αυτό είναι προφανώς ισομορφισμός τριγώνων στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Άρα το τρίγωνο:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Q(v)} V \xrightarrow{\Sigma(Q(s))\circ Q(w)} \Sigma X$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ με βάση τον μορφισμό $f\colon X \to Y$, και η (TR1c) ικανοποιείται.
Η ιδιότητα (TR2) έπεται άμεσα από τον τρόπο ορισμού των διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$.
Για την (TR3), μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο διακεκριμένα τρίγωνα προέρχονται από διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{T}$, δηλαδή ότι στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"'] & Z \arrow[r, "Q(h)"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\ X' \arrow[r, "Q(f')"] & Y' \arrow[r, "Q(g')"] & Z' \arrow[r, "Q(h')"] & \Sigma(X') \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ και το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Οι μορφισμοί ϕ και ψ μπορούν να αναπαρασταθούν από τα αριστερά roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\ X & & X' \end{tikzcd}$$

και:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "v"] & \\ Y & & Y' \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα. Άρα έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\sim", "s"'] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "\sim", "t"'] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Θεωρούμε τώρα τους μορφισμούς $f \circ s \colon U \to Y$ και $t \colon V \to Y$. Εφόσον η S είναι τοπικοποιούσα κλάση, οι παραπάνω μορφισμοί μπορούν να συμπληρωθούν σε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "t'"', "\sim"] & V \arrow[d, "\sim"', "t"] \\ U \arrow[r, "f\circ s"] & Y \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Από την άλλη, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\ X & U' \arrow[u, "t'", "\sim"'] \arrow[d, "id_{U'}"] & X' \\ & U' \arrow[ul, "\sim", "s\circ t'"'] \arrow[ur, "u\circ t'"'] & \end{tikzcd}$$

και άρα το πάνω roof είναι ισοδύναμο με το κάτω. Άρα μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον ϕ με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U' \arrow[dl, "s\circ t'"', "\sim"] \arrow[dr, "u\circ t'"] & \\ X & & X' \end{tikzcd}$$

και το ανάλογο του παραπάνω διαγράμματος 2.2 είναι το:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U' \arrow[u, "\sim", "s\circ t'"'] \arrow[d, "u\circ t'"'] \arrow[r, "a"] & V \arrow[u, "\sim", "t"'] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

όπου $f \circ s \circ t' = a \circ t$, και άρα το πάνω τετράγωνο είναι μεταθετικό. Αλλάζοντας τα ονόματα των αντικειμένων και των μορφισμών, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είχαμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U' \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

από την αρχή με το πάνω τετράγωνο να είναι μεταθετικό στην $\mathcal{T}$.
Λόγω της αναπαράστασης των μορφισμών ϕ και ψ, έχουμε ότι $\phi = Q(u) \circ Q(s)^{-1}$ και $\psi = Q(v) \circ Q(t)^{-1}$. Εφόσον το πρώτο τετράγωνο στο αρχικό μας διάγραμμα 2.1 ήταν μεταθετικό, έχουμε ότι $\psi \circ Q(f) = Q(f') \circ \psi$ και άρα:

$$Q(v) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(f) = Q(f') \circ Q(u) \circ Q(s)^{-1}$$

δηλαδή:

$$Q(v) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(f) \circ Q(s) = Q(f') \circ Q(u)$$

Από την άλλη, η μεταθετικότητα του πάνω τετραγώνου του διαγράμματος 2.3 μας δίνει ότι $Q(f) \circ Q(s) = Q(f \circ s) = Q(t \circ a) = Q(t) \circ Q(a)$, και άρα:

$$Q(v) \circ Q(a) = Q(f') \circ Q(u)$$

και άρα το κάτω τετράγωνο του διαγράμματος 2.3 είναι μεταθετικό στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει μορφισμός $r \colon U'' \to U$, με $r \in S$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "id_U"', "\sim"] \arrow[dr, "v \circ a"] & \\
U & U'' \arrow[u, "r"', "\sim"] \arrow[d, "r", "\sim"'] & Y' \\
& U \arrow[ul, "id_U", "\sim"'] \arrow[ur, "f' \circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

Λόγω της μεταθετικότητας έχουμε πιο συγκεκριμένα ότι:

$$v \circ a \circ r = f' \circ u \circ r$$

Επίσης το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\
X & U'' \arrow[u, "r"', "\sim"] \arrow[d, "id_{U''}"] & X' \\
& U'' \arrow[ul, "s \circ r", "\sim"'] \arrow[ur, "u \circ r"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στη $\mathcal{T}$, οπότε ο ϕ μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& U'' \arrow[dl, "s \circ r"', "\sim"] \arrow[dr, "u \circ r"] & \\
X & & X'
\end{tikzcd}$$

και μπορούμε να αντικαταστήσουμε το παραπάνω διάγραμμα 2.3, με το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U'' \arrow[u, "s\circ r", "\sim"'] \arrow[r, "a\circ r"] \arrow[d, "u\circ r"'] & V \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

στο οποίο και τα δύο τετράγωνα είναι μεταθετικά στην $\mathcal{T}$.
Αλλάζοντας ονόματα στα αντικείμενα και στους μορφισμούς όπως πριν, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είχαμε το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο και τα δύο τετράγωνα είναι μεταθετικά στην $\mathcal{T}$, από την αρχή:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Έστω τώρα ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{T}$ με βάση τον μορφισμό $a\colon U \to V$:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
U \arrow[rr, "f"] & & V \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Τότε το διάγραμμα 2.4 μπορεί να θεωρηθεί ως μέρος του μεγαλύτερου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma(X) \\
U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"] & W \arrow[r] & \Sigma(U) \arrow[u, "\Sigma(s)", "\sim"'] \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & \Sigma(X')
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

όπου οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{T}$. λόγω της (LT2), υπάρχει μορφισμός $p\colon W \to Z$, με $a \in S$, ο οποίο συμπληρώνει το πάνω μέρος του διαγράμματος 2.5 σε ένα μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{T}$. Επίσης λόγω του (TR3), υπάρχει μορφισμός $w\colon W \to Z'$, ο οποίος συμπληρώνει το κάτω μέρος του διαγράμματος 2.5 σε έναμορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{T}$. Άρα παίρνουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma(X) \\
U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"] & W \arrow[u, "p", "\sim"'] \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \Sigma(U) \arrow[u, "\Sigma(s)", "\sim"'] \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & \Sigma(X')
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

στο οποίο όλα τα τετράγωνα είναι μεταθετικά. Έστω $\chi\colon Z \to Z'$, ένας μορφισμός ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p"', "\sim"] \arrow[dr, "w"] & \\ Z & & Z' \end{tikzcd}$$

Τότε το διάγραμμα 2.6 μπορούμε να το δούμε ως έναν μορφισμό:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"'] & Z \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "\chi"'] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\ X' \arrow[r, "Q(f')"] & Y' \arrow[r, "Q(g')"] & Z' \arrow[r, "Q(h')"] & \Sigma(X') \end{tikzcd}$$

διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Άρα αποδείξαμε την (TR3).
Μένει να δειχτεί ότι ικανοποιείται το οκταεδρικό αξίωμα (TR4). Έστω ένας μορφισμός $\phi\colon X \to Y$ ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και $\psi\colon Y \to Z$ ένας μορφισμός ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Τότε η σύνθεσή τους αναπαρίσταται από το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dl, dashed, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\ & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

ή πιο απλά από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s\circ s'"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f'"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Από το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & W \arrow[u, "s'"', "\sim"] \arrow[d, "id_W"] & Y \\ & W \arrow[ul, "s\circ s'", "\sim"'] \arrow[ur, "f\circ s'"'] & \end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι το πάνω roof είναι ισοδύναμο με το κάτω, και άρα ο ϕ αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s\circ s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f\circ s'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Άρα αφού αλλάξουμε ονόματα στα αντικείμενα και στου μορφισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

(i) Ο μορφισμός $\phi\colon X \to Y$ αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

(ii) Ο μορφισμός $\psi\colon Y \to Z$ αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

(iii) Ο μορφισμός $\chi = \psi \circ \phi\colon X \to Z$ αναπαρίσταται από το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dl, dashed, "id_U"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\ & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

ή πιο απλά από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f'"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Θέτουμε $h = g \circ f'$ και $W = Z$. Εφόσον η $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα οκταεδρικό διάγραμμα το οποίο καθορίζεται από τους μορφισμούς f', g και h:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "id_U"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & W' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(id_U)"] \\ U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & V' \arrow[r] \arrow[d, "v'"] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(f')"] \\ V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] \arrow[d, "id_{U'}"'] & \Sigma(V) \arrow[d] \\ W' \arrow[r, "u'"] & V' \arrow[r, "v'"] & U' \arrow[r, "w"] & \Sigma(W') \end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $\mathcal{T}$. Η εικόνα αυτού του οκταεδρικού διαγράμματος στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι της ίδιας μορφής.

Τώρα θεωρούμε το αρχικό μέρος του οκταεδρικού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(id_X)"] \\
X \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma(Y)
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Τότε πάνω μέρος του:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(id_X)"] \\
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

μπορούμε να το επεκτείνουμε σε ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X) \\
U \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[r, "Q(f')"] \arrow[d, "id_U"'] & V \arrow[u, "Q(t)"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"'] & W' \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"] & \Sigma(U) \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"'] \arrow[d, "id_{\Sigma(U)}"] \\
U \arrow[r, "Q(h)"'] \arrow[d, "Q(s)"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & V' \arrow[r] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(Q(s))"] \\
X \arrow[r, "\chi"'] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο το πάνω και το κάτω τετράγωνο της πρώτης στήλης είναι μεταθετικά στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ λόγω της κατασκευής μας. Η μεσσαία γραμμή είναι ο μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων ο οποίος προέρχεται από το παραπάνω οκτάεδρο. Εφόσον ήδη αποδείξαμε ότι ισχύει η ιδιότητα (TR3) στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$, μπορούμε να συμπληρώσουμε την πάνω και την κάτω γραμμή με μορφισμούς $\alpha\colon W' \to Z'$ και $\beta\colon V' \to Y'$ και να πάρουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X) \\
U \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[r, "Q(f')"] \arrow[d, "id_U"'] & V \arrow[u, "Q(t)"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"'] & W' \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"'] & \Sigma(U) \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"'] \arrow[d, "id_{\Sigma(U)}"] \\
U \arrow[r, "Q(h)"'] \arrow[d, "Q(s)"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & V' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(Q(s))"] \\
X \arrow[r, "\chi"'] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$, στο οποίο και οι τρεις γραμμές είναι μορφισμοί διακεκριμένων τριγώνων. Τώρα παρατηρούμε ότι στην απόδειξη του λήμματος 2.1.15 δεν χρησιμοποιήθηκε το οκταεδρικό αξίωμα, οπότε μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στο παραπάνω διάγραμμα και να πάρουμε ότι οι μορφισμοί α και β είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$.

Ομοίως μπορούμε να επεκτείνουμε το κάτω μέρος του διαγράμματος 2.7:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma(Y)
\end{tikzcd}$$

στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X) \\
U \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(f')"'] & Z \arrow[u, "id_Z"'] \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & V' \arrow[u, "\beta"] \arrow[r] \arrow[d, "Q(v')"'] & \Sigma(U) \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"] \arrow[d, "\Sigma(f')"] \\
V \arrow[r, "Q(g)"'] \arrow[d, "Q(t)"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & U' \arrow[r] & \Sigma(V) \arrow[d, "\Sigma(Q(t))"] \\
Y \arrow[r, "\psi"'] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma(Y)
\end{tikzcd}$$

Όπως προηγουμένως , υπάρχει $\gamma\colon X' \to U'$ ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα στο:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma(X) \\
U \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(f')"'] & Z \arrow[u, "id_Z"'] \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & V' \arrow[u, "\beta"] \arrow[r] \arrow[d, "Q(v')"] & \Sigma(U) \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"] \arrow[d, "\Sigma(f')"] \\
V \arrow[r, "Q(g)"'] \arrow[d, "Q(t)"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & U' \arrow[r] & \Sigma(V) \arrow[d, "\Sigma(Q(t))"] \\
Y \arrow[r, "\psi"'] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"] & \Sigma(Y)
\end{tikzcd}$$

και ο γ είναι ισομορφισμός. Ορίζουμε τώρα:

$$u = \beta \circ Q(u') \circ \alpha^{-1} v = \gamma \circ Q(v') \circ \beta^{-1} w = T(\alpha) \circ Q(w') \circ \gamma^{-1}$$

Τότε η μεταθετικότητα του διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "Q(u')"] \arrow[d, "\alpha"'] & V' \arrow[r, "Q(v')"] \arrow[d, "\beta"'] & U' \arrow[r, "Q(w')"] \arrow[d, "\gamma"'] & \Sigma(W') \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' \arrow[r, "w"] & \Sigma(Z')
\end{tikzcd}$$

μας δείχνει ότι η δεύτερη γραμμή είναι διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Τέλος αν συνοψίσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, παίρνουμε το οκταεδρικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(id_X)"] \\
X \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id_{X'}"'] & \Sigma(Y) \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, "u"'] & Y' \arrow[r, "v"'] & X' \arrow[r, "w"'] & \Sigma(Z')
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Άρα αποδείχτηκε και η ιδιότητα (TR4) στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$.
Άρα η $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία.
Τέλος μένει να δείξουμε ότι ο συναρτητής $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι ακριβής. Είδαμε ότι ο συναρτητής $Q \circ \Sigma$ αναλύεται μέσω της $\mathcal{T}[S^{-1}]$ και έχουμε ότι $Q \circ \Sigma = \Sigma \circ Q$. Άρα ο Q είναι βαθμωτός. Το γεγονός ότι ο ο Q απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα σε διακεκριμένα τρίγωνα, έπεται απευθείας από τον τρόπο ορισμού των διακεκριμένων τριγώνων στη $\mathcal{T}[S^{-1}]$.
Άρα ο Q είναι ακριβής. ∎

Θεώρημα 2.1.24. *Έστω $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες και $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ ένας ακριβής συναρτητής. Έστω S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της $\mathcal{T}$, η οποία είναι συμβατή με την τριγωνική δομή τέτοια ώστε να ισχύει ότι ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s \in S$. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός συναρτητής $F_S\colon \mathcal{T}[S^{-1}] \to \mathcal{T}'$ έτσι ώστε το διάγραμμα συναρτητών:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{T}[S^{-1}] \arrow[r, "F_S"'] & \mathcal{T}' \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Ο συναρτητής $F_S\colon \mathcal{T}[S^{-1}] \to \mathcal{T}'$ είναι επίσης ακριβής.

Απόδειξη. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα του συναρτητή F_S έπεται από το θεώρημα 1.4.2. Μένει να αποδείξουμε ότι ο F_S είναι ακριβής.
Καταρχάς θα δείξουμε ότι ο F_S είναι βαθμωτός. Έχουμε ότι:

$$\Sigma \circ F_S \circ Q = \Sigma \circ F \text{ και } F_S \circ \Sigma \circ Q = F_S \circ Q \circ \Sigma = F \circ \Sigma$$

και άρα οι συναρτητές $\Sigma \circ F_S \circ Q$ και $F_S \circ \Sigma \circ Q$ είναι ισόμορφοι καθώς ο F είναι ακριβής. Έστω η ο ισομορφισμός από τον $F \circ \Sigma$ στον $\Sigma \circ F$. τότε για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{T}$ ο μορφισμός $\eta_X\colon (F \circ \Sigma)(X) \to (\Sigma \circ F)(X)$ είναι ισομορφισμός. Επίσης, για κάθε μορφισμό $f\colon X \to Y$ της κατγηγορίας $\mathcal{T}$, το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} (F \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "(F\circ\Sigma)(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & (F \circ \Sigma)(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ (\Sigma \circ F)(X) \arrow[r, "(\Sigma\circ F)(f)"] & (\Sigma \circ F)(Y) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Εφόσον τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι τα ίδια με τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{T}$, για κάθε αντικέιμενο X, έχουμε τον ισομορφισμό $\eta_X\colon (F_S \circ \Sigma)(X) \to (\Sigma \circ F_S)(X)$. Επίσης εάν $\phi\colon X \to Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

έχουμε, λόγω της μεταθετικότητας του παραπάνω διαγράμματος, ότι:

$$(\Sigma \circ F)(s) \circ \eta_U = \eta_X \circ (F \circ \Sigma)(s)$$

και ότι:

$$(\Sigma \circ F)(g) \circ \eta_U = \eta_Y \circ (F \circ \Sigma)(g)$$

Η πρώτη σχέση μας δίνει ότι:

$$(\Sigma \circ F_S)(Q(s)) \circ \eta_U = \eta_X \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s))$$

και επειδή ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός, παίρνουμε ότι:

$$\eta_U \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) = (\Sigma \circ F_S)(Q(s)^{-1}) \circ \eta_X$$

Συνολικά από τα παραπάνω παίρνουμε ότι:

$$\eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(\phi) = \eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(g) \circ Q(S)^{-1}) = \eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(g)) \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) =$$
$$(\Sigma \circ F_S)(Q(g)) \circ \eta_U \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) = (\Sigma \circ F_S)(Q(g)) \circ (\Sigma \circ F_S)(Q(s)^{-1}) \circ \eta_X =$$
$$(\Sigma \circ F_S)(Q(g) \circ Q(s)^{-1}) \circ \eta_X = (\Sigma \circ F_S)(\phi) \circ \eta_X$$

δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
(F_S \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "(F_S\circ\Sigma)(\phi)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & (F_S \circ \Sigma)(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
(\Sigma \circ F_S)(X) \arrow[r, "(\Sigma\circ F_S)(\phi)"] & (\Sigma \circ F_S)(Y)
\end{tikzcd}$$

Άρα ο η μας δίνει έναν ισομορφισμό από τον $F_S \circ \Sigma$ στον $\Sigma \circ F_S$, και άρα ο συναρτητής F_S είναι βαθμωτός.

Τώρα θα δείξουμε ότι απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα σε διακεκριμένα τρίγωνα. Έστω ένα διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathcal{T}[S^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Από τον ορισμός των διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ υπάρχει διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathcal{T}$:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
U \arrow[rr] & & V \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

και ισομορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(a)"] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma(X)
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Εφαρμόζοντας τον F_S σε αυτό το μεταθετικό διάγραμμα, παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
F_S(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(a)"'] & F_S(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(b)"'] & F_S(W) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(c)"'] & F_S(\Sigma(U)) \arrow[d, "F_S(\Sigma(a))"] \\
F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \arrow[r] & F_S(\Sigma(X))
\end{tikzcd}$$

Επειδή όμως αποδείξαμε ότι ο F_S είναι βαθμωτός, μπορούμε να επεκτείνουμε το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα, στο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(a)"'] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(b)"'] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(c)"'] & F(\Sigma(U)) \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "F_S(\Sigma(a))"] & \Sigma(F(U)) \arrow[d, "\Sigma(F_S(a))"] \\
F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \arrow[r] & F_S(\Sigma(X)) \arrow[r] & \Sigma(F_S(X))
\end{tikzcd}$$

και ενώνοντας τα δύο τελευταία τετράγωνα παίρνουμε το ισομορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(a)"'] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(b)"'] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(c)"'] & \Sigma(F(U)) \arrow[d, "\Sigma(F_S(a))"] \\ F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \arrow[r] & \Sigma(F_S(X)) \end{tikzcd}$$

Επειδή όμως ο F είναι ακριβής, το πάνω τρίγωνο είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{T}'$. Άρα και το κάτω είναι διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{T}'$. Άρα ο F_S είναι ακριβής συναρτητής. ■

Ανάλογο αποτέλεσμα με το παραπάνω ισχύει και για ομολογικούς και συνομολογικούς συναρτητές συναρτητές.

Θεώρημα 2.1.25. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ ένας ομολογικός συναρτητής. Έστω S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της $\mathcal{T}$, η οποία είναι συμβατή με την τριγωνική δομή τέτοια ώστε να ισχύει ότι ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s \in S$. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός συναρτητής $F_S\colon \mathcal{T}[S^{-1}] \to \mathcal{A}$ έτσι ώστε το διάγραμμα συναρτητών:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{T}[S^{-1}] \arrow[r, "F_S"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Ο συναρτητής $F_S\colon \mathcal{T}[S^{-1}] \to \mathcal{A}$ είναι επίσης ομολογικός.

Απόδειξη. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα του συναρτητή F_S έπεται από το θεώρημα 1.4.2. Μένει να αποδείξουμε ότι ο F_S είναι ομολογικός.
Έστω ένα διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathcal{T}[S^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr] & & V \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Από τον ορισμό των διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ έχουμε ότι υπάρχει διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathcal{T}$:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr] & & V \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

και ισομορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & \Sigma(U) \arrow[d, "\Sigma(a)"] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Εφαρμόζοντας τον F_S σε αυτό το μεταθετικό διάγραμμα, παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(a)"'] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(b)"'] & F_S(W) \arrow[d, "F_S(c)"'] \\ F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \end{tikzcd}$$

Επειδή ο F είναι ομολογικός, η πάνω σειρά είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$. Άρα λόγω της μεταθετικότητας, και η κάτω σειρά είναι ακριβής. Άρα ο F_S είναι ομολογικός. ■

2.1.2 Τριγωνισμένες υποκατηγορίες

Ορισμός 2.1.26. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{T}'$ μία πλήρη υποκατηγορίας της για την οποία ισχύουν τα εξής:*

(TS1) *Το μηδενικό αντικείμενο ανήκει στην $\mathcal{T}'$.*

(TS2) *Εάν X, Y είναι δύο αντικείμενα της $\mathcal{T}'$, τότε και το $X \oplus Y$ ανήκει στην $\mathcal{T}'$.*

(TS3) *Ένα αντικείμενο X ανήκει στην $\mathcal{T}'$ αν και μόνο αν το ΣX ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}'$.*

(TS4) *Για κάθε δύο αντικείμενα X και Y στην $\mathcal{T}'$ και μορφισμό $f\colon X \to Y$, υπάρχει αντικείμενο Z της $\mathcal{T}'$, έτσι ώστε το τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

να είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{T}$.

Τότε η $\mathcal{T}'$ θα καλείται **πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία (full triangulated subcategory)** *της $\mathcal{T}$.*

Πρόταση 2.1.27. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της συμβατή με την τριγωνική δομή και $\mathcal{T}'$ μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Έστω επίσης ότι ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Η $S_{\mathcal{T}'} = S \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{T})$ είναι τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της $\mathcal{T}'$.

(ii) Για κάθε μορφισμό $s\colon X \to Y$, όπου $s \in S$ και X αντικείμενο της $\mathcal{T}'$, υπάρχει μορφισμός $u\colon Z \to Y$ τέτοιος ώστε $s \circ u \in S$ και το αντικείμενο Z να ανήκει στην $\mathcal{T}'$.

Τότε η $S_{\mathcal{T}'}$ είναι συμβατή με την τριγωνική δομή της $\mathcal{T}'$, και η $\mathcal{T}'[S_{\mathcal{T}'}^{-1}]$ είναι πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}[S^{-1}]$.

Απόδειξη. Προφανώς η $S_{\mathcal{T}'}$ είναι συμβατή με την τριγωνική δομή. Άρα λόγω του θεωρήματος 2.1.24 η φυσική ένθεση της $\mathcal{T}'$ στην $\mathcal{T}$ μας δίνει έναν ακριβή συναρτητή ι από την τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}'[S_{\mathcal{T}'}^{-1}]$ στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Προφανώς ο ι είναι ταυτότητα ως προς τα αντικείμενα, και λόγω της πρότασης 1.1.56, είναι επίσης πλήρης και πιστός. Άρα η $\mathcal{T}'[S_{\mathcal{T}'}^{-1}]$ είναι μία πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{T}[S^{-1}]$.
Μένει να δείξουμε μόνο ότι η $\mathcal{T}'[S_{\mathcal{T}'}^{-1}]$ είναι πλήρης τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω ένα διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}'[S_{\mathcal{T}'}^{-1}]$. Τότε είναι επίσης και διακεκριμένο τρίγωνο στην κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$, καθώς ο ι είναι ακριβής. Αντίστροφα εάν έχουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$, με όλες τις κορυφές του να ανήκουν στην $\mathcal{T}'[S^{-1}_{\mathcal{T}'}]$, τότε υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}'[S^{-1}_{\mathcal{T}'}]$. Άρα έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "id_Y"'] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "id_{\Sigma(X)}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

το οποίο μπορεί να συμπληρωθεί στον ισομορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "id_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X) \arrow[d, "id_{\Sigma(X)}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ λόγω του λήμματος 2.1.15. Εφόσον η $\mathcal{T}'[S^{-1}_{\mathcal{T}'}]$ είναι πλήρης υποκατηγορία, ο παραπάνω είναι ισομορφισμός τριγώνων στην $\mathcal{T}'[S^{-1}_{\mathcal{T}'}]$. Άρα το πάνω τρίγωνο είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{T}'[S^{-1}_{\mathcal{T}'}]$. ■

Τώρα θα δώσουμε έναν πολύ σημαντικό Ορισμό, τον ορισμό των thick υποκατηγοριών τριγωνισμένων κατηγοριών, οι οποίες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην κατασκευή τοπικοποιήσεων. Οπότε, από εδώ και πέρα όταν θα μιλάμε για thick υποκατηγορία μίας τριγωνισμένης κατηγορίας, θα έχουμε στο πίσω μέρος του μυαλού μας τον παρακάτω ορισμό, και όχι τον Ορισμό 1.4.9.

Ορισμός 2.1.28. *Μία υποκατηγορία $\mathcal{T}'$ μία τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, θα καλείται* **thick** *, εάν η $\mathcal{T}'$ είναι τριγωνισμένη και περιέχει όλα τους ευθείς αθροιστές των αντικειμένων της.*

Παρατήρηση 2.1.29. Είναι δυνατόν κανείς να κάνει και μία διαφορετική τοπικοποίηση τριγωνισμένων κατηγοριών η οποία ονομάζεται **Verdier τοπικοποίηση** . Για το πως γίνεται ακριβώς αυτή η κατασκευή, μπορεί κανείς να δει το δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου του Neeman [18]. Εμείς τώρα θα δώσουμε μία σύντομη αναφορά μερικών αποτελεσμάτων και εννοιών, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, χωρίς να δώσουμε συγκεκριμένες αποδείξεις τις οποίες κανείς μπορεί εύκολα να βρει στο προαναφερθέν βιβλίο του Neeman.

Ορισμός 2.1.30. *Έστω $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{T}$ ένας τριγωνισμένος συναρτητής. Ο* **πυρήνας (kernel)** *του F ορίζεται να είναι η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{C}$ της $\mathcal{D}$, της οποίας τα αντικείμενα απεικονίζονται μέσω του F σε αντικείμενα τα οποία είναι ισόμορφα με το 0 στην $\mathcal{T}$.*

Θεώρημα 2.1.31. *(Verdier) Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της (όχι αναγκαστικά thick). Τότε υπάρχει ένα οικουμενικός συναρτητής $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, με $\mathcal{S} \subset \ker(F)$. Με άλλα λόγια, υπάρχει μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, και ένας τριγωνισμένος συναρτητής $F_{univ}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$, έτσι ώστε η $\mathcal{S}$ να είναι ο πυρήνας του F_{univ}, και ο F_{univ} να είναι οικουμενικός ως προς αυτή την ιδιότητα. Δηλαδή, αν ο $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ είναι τριγωνισμένος και ο πυρήνας του περιέχει την $\mathcal{S}$, τότε αναλύεται μοναδικά ως:*

$$\mathcal{T} \xrightarrow{F_{univ}} \mathcal{T}/\mathcal{S} \to \mathcal{T}'.$$

Η κατηγορία πηλίκο $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, καλείται το **πηλίκο Verdier (Verdier quotient)***, της $\mathcal{T}$ ως προς την $\mathcal{S}$.*

Παρατήρηση 2.1.32. Στο Θεώρημα 2.1.31 παρόλο που δεν υποθέτουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι thick, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο πυρήνας του F είναι η πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, η οποία αποτελείται από ευθύς αθροιστέους στην $\mathcal{T}$, αντικειμένων της $\mathcal{S}$.

Παρατήρηση 2.1.33. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.31 γίνεται σε πολλά μικρά βήματα και η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτής την οποία ακολουθήσαμε όταν κατασκευάσαμε τον συναρτητή τοπικοποίησης. Στην περίπτωση της Verdier τοπικοποίησης αυτό που κάνει κανείς αρχικά είναι να θέσει αρχικά μία κατηγορία $Mor_{\mathcal{S}}$ για την οποία εξ ορισμού ισχύει ότι ένας μορφισμός $f\colon X \to Y$ ανήκει σε αυτήν, αν και μόνο αν στο διακεκριμένο τρίγωνο της κατηγορίας $\mathcal{T}$:

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to \Sigma X,$$

το αντικείμενο Z ανήκει στην $\mathcal{S}$.
Μπορεί κανείς να δει επίσης, ότι ένας τριγωνισμένος συναρτητής F στέλνει ένα αντικείμενο Z στο μηδενικό αντικείμενο αν και μόνο αν στέλνει το διακεκριμένο τρίγωνο

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to \Sigma X,$$

σε ένα τρίγωνο ισόμορφο με την εικόνα του διακεκριμένου τριγώνου

$$X \xrightarrow{1} X \to 0 \to \Sigma X,$$

στην $\mathcal{T}'$.

2.2 Η κατηγορία των συμπλόκων

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Ένα* **βαθμωτό (graded)** *$\mathcal{A}$-αντικείμενο είναι μία οικογένεια $X^\bullet = (X^n, n \in \mathbb{Z})$ αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{A}$. Το αντικείμενο X^n καλείται* **ομογενής συνιστώσα (homogeneous componenent)** *βαθμού n του $X^\bullet$.*

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $X^\bullet$ και $X^\bullet$ δύο βαθμωτά αντικείμενα μίας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Τότε η συλλογή μορφισμών $f^\bullet = \{f^n\colon X^n \to Y^{n+p}, n \in \mathbb{Z})\}$ θα καλείται* **βαθμωτός μορφισμός (graded morphism)** *βαθμού p. Το σύνολο όλων των βαθμωτών μορφισμών βαθμού p θα συμβολίζεται με* $\mathrm{Hom}^p(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Αφού δώσαμε αυτούς του δύο βασικούς ορισμούς θα προχωρήσουμε ορίζοντας το ποια θα αποκαλούμε συναλυσιδωτά σύμπλοκα και ποιοι θα είναι οι μορφισμοί μεταξύ των συμπλόκων με απώτερο σκοπό να ορίσουμε την κατηγορία των συμπλόκων.

Ορισμός 2.2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία.*

1. *Ένα ζεύγος $(X_\bullet, d_\bullet)$ ενός βαθμωτού αντικειμένου $X_\bullet$ και ενός βαθμωτού μορφισμού $d_\bullet^X \in \mathrm{Hom}^{-1}(X_\bullet, X_\bullet)$, τέτοιου ώστε $d_{n-1}^X \circ d_n^X = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$, καλείται* **αλυσιδωτό σύμπλοκο (chain complex)** *αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Ο μορφισμός d_n^X καλείται* **διαφορικό (differential)** *του συμπλόκου.*

2. *Ένα ζεύγος $(X^\bullet, d^\bullet)$ ενός βαθμωτού αντικειμένου $X^\bullet$ και ενός βαθμωτού μορφισμού $d_X^\bullet \in \mathrm{Hom}^1(X^\bullet, X^\bullet)$, τέτοιου ώστε $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$, καλείται* **συναλυσιδωτό σύμπλοκο (cochain complex)** *αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Ο μορφισμός d_X^n καλείται* **διαφορικό (differential)** *του συμπλόκου.*

Παρατήρηση 2.2.4. Ένα αλυσιδωτό σύμπλοκο $X_\bullet$ παριστάνεται από ένα διάγραμμα της μορφής:

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

ενώ ένα συναλυσιδωτό σύμπλοκο $X^\bullet$ παριστάνεται από ένα διάγραμμα της μορφής:

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Σχόλιο 2.2.5. Στη συνέχεια της διατριβής όταν θα μιλάμε για ένα σύμπλοκο θα εννοούμε ένα συναλυσιδωτό σύμπλοκο, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

Ορισμός 2.2.6. *Έστω δύο σύμπλοκα $(X^\bullet, d_X^\bullet)$ και $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$, $\mathcal{A}$-αντικειμένων. Ένας* **μορφισμός συμπλόκων (morphism of complexes)** *$f^\bullet\colon (X^\bullet, d_X^\bullet) \to (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$, είναι ένας βαθμωτός μορφισμός $f^\bullet \in \mathsf{Hom}^0(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:*

$$f^\bullet \circ d_X^\bullet = d_Y^\bullet \circ f^\bullet$$

δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{n-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^n} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Σχόλιο 2.2.7. Στη συνέχεια της διατριβής όταν το διαφορικό ενός συμπλόκου, εάν εννοείται πιο είναι θα παραλείπεται στο συμβολισμό ενός μορφισμού συμπλόκων. Δηλαδή θα γράφουμε απλούστερα $f^\bullet\colon X^\bullet \to Y^\bullet$.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την κατηγορία των συμπλόκων.

Ορισμός 2.2.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Καλούμε* **κατηγορία των συμπλόκων (category of complexes)** *και συμβολίζουμε με $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ την κατηγορία που ορίζεται ως εξής:*

(i) Τα αντικείμενα της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι σύμπλοκα από αντικείμενα της $\mathcal{A}$.

(ii) Οι μορφισμοί της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι οι μορφισμοί συμπλόκων όπως ορίστηκαν στον ορισμό 2.2.6 και συμβολίζουμε με $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ την κλάση μορφισμών ανάμεσα σε δύο αντικείμενα $X^\bullet$, $Y^\bullet$.

(iii) Για δύο μορφισμούς συμπλόκων $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, $g^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$, ορίζεται η σύνθεση:

$$\circ\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet),\ \ (f^\bullet, g^\bullet) \longmapsto g^\bullet \circ f^\bullet$$

να είναι ο βαθμωτός μορφισμός $g^\bullet \circ f^\bullet = \{g^n \circ f^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Παρατήρηση 2.2.9. Εύκολα φαίνεται ότι όντως η $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ όπως ορίστηκε στον 2.2.8 είναι κατηγορία. Πιο συγκεκριμένα για κάθε αντικείμενο $X^\bullet$ ο ταυτοτικός μορφισμός $id_{X^\bullet} : X^\bullet \to X^\bullet$ είναι ο βαθμωτός μορφισμός $1_{X^\bullet} = \{id_{X^n} : X^n \to X^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ έχει δομή προσθετικής κατηγορίας. Καταρχάς μπορούμε πού εύκολα να δούμε ότι η $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ έχει δομή προπροσθετικής κατηγορίας, δηλαδή ότι κάθε σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας. Γι' αυτό, αρκεί να ορίσουμε για δύο βαθμωτούς μορφισμούς $f_1^\bullet, f_2^\bullet \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$,

$$f_1^\bullet + f_2^\bullet = \{f_1^n + f_2^n, n \in Z\}$$

και πολύ εύκολα αποδεικνύεται ότι η σύνθεση είναι διγραμμική.
Επίσης προφανώς το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι το σύμπλοκο:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Τέλος εάν έχουμε δύο σύμπλοκα $X^\bullet$ και $U^\bullet$ ορίζουμε το σύμπλοκο $X^\bullet \oplus U^\bullet$, όπου

$$(X^\bullet \oplus U^\bullet)^n = X^n \oplus U^n \text{ και } d_{X\oplus U}^n = d_X^n \oplus d_Y^n\colon X^n \oplus U^n \to X^{n+1} \oplus U^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$
Το $X^\bullet \oplus U^\bullet$ είναι όντως το ευθύ άθροισμα των αντικειμένων $X^\bullet$ και $Y^\bullet$, μαζί με τους φυσικούς μορφισμούς $i_X : X^\bullet \to X^\bullet \oplus U^\bullet$, $i_Y : Y^\bullet \to X^\bullet \oplus U^\bullet$, $p_X : X^\bullet \oplus U^\bullet \to X^\bullet$ και $p_Y : X^\bullet \oplus U^\bullet \to Y^\bullet$, οι οποίοι ικανοποιούν τα εξής:

$$p_X \circ i_X = id_X,\ p_Y \circ i_Y = id_Y \text{ και } i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y = id_{X^\bullet \oplus U^\bullet}$$

Άρα έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 2.2.10. *Η κατηγορία* $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ *είναι προσθετική κατηγορία.*

Σχόλιο 2.2.11. Εφόσον έχουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι προσθετική, και η $\mathcal{A}$ είναι επίσης προσθετική, θα ορίζουμε μεταξύ τους έναν προσθετικό συναρτητή C
Ορίζουμε τον συναρτητή $\mathsf{C} : \mathcal{A} \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$ ως εξής:

$$\mathsf{C}(X)^n = \begin{cases} X & \text{εάν } n = 0 \\ 0 & \text{εάν } n \neq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad d_{\mathsf{C}(X)} = 0$$

για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{A}$, και:

$$\mathsf{C}(f)^n = \begin{cases} f & \text{εάν } n = 0 \\ 0 & \text{εάν } n \neq 0 \end{cases}$$

για κάθε μορφισμό $f : X \to Y$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$.
Το επόμενο λήμμα θα μας δείξει ότι αυτός ο συναρτητής είναι πλήρης και πιστός. Οπότε θα μπορούμε να «δούμε» την $\mathcal{A}$ ως πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα σύμπλοκα $X^\bullet$, για τα οποία $X^k = 0$ για κάθε $k \neq 0$.

Λήμμα 2.2.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Ο συναρτητής $\mathsf{C} : \mathcal{A} \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο συναρτητής C είναι πλήρης και πιστός, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση:

$$F : \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(Y))$$

για κάθε αντικείμενο X και Y είναι «1-1» και «επί».
Καταρχάς από τον τρόπο ορισμού του C προφανώς η F είναι «επί», καθώς ένας μορφισμός $f^\bullet$, από το $\mathsf{C}(X)$ στο $\mathsf{C}(Y)$ θα είναι της μορφής:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f^{-1}"] & X^0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f^0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & Y^0 \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Όμως ο μοναδικός μορφισμός $0 \to 0$ είναι ο μηδενικός, και άρα $f^k = 0$ για κάθε $k \neq 0$. Άρα προφανώς αυτός ο μορφισμός $f^\bullet$ είναι εικόνα του $f^0 : X^0 \to Y^0$.
Επίσης, και εφόσον έχουμε δείξει ότι ο F είναι επί, για δύο μορφισμούς $\mathsf{C}(f), \mathsf{C}(g) : \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(Y)$, με $\mathsf{C}(f) = \mathsf{C}(g)$, πάλι λόγω της παραπάνω αναπαράστασης ενός μορφισμού θα πρέπει να ισχύει $f^0 = g^0$. Όμως $f^0 = f$ και $g^0 = g$, άρα είναι ο F και «1-1».
Άρα ο C είναι πλήρης και πιστός. ∎

Γενικότερα θα μας απασχολήσουμε σύμπλοκα τα οποία είναι κάποιου ειδικού τύπου. Παραδείγματος χάρη θα θέλουμε να μιλάμε για σύμπλοκα τα οποία είναι φραγμένα κατά μία έννοια. Γι' αυτό το λόγω προχωράμε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ η κατηγορία των συμπλόκων η οποία αντιστοιχεί στην $\mathcal{A}$. Θα λέμε για ένα σύμπλοκο $X^\bullet$ ότι:*

1. *Είναι* **άνω φραγμένο (bounded from above)**, *εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $X^n = 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα παραπάνω σύμπλοκα.*

2. *Είναι* **κάτω φραγμένο (bounded from below)**, *εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $X^n = 0$ για κάθε $n \leqslant n_0$. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{C}^-(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα παραπάνω σύμπλοκα.*

3. *Είναι* **φραγμένο (bounded)**, *εάν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω φραγμένο. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{C}^b(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα παραπάνω σύμπλοκα.*

Σχόλιο 2.2.14. Προφανώς οι πλήρεις υποκατηγορίες $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$,$\mathsf{C}^-(\mathcal{A})$ και $\mathsf{C}^b(\mathcal{A})$, όπως αυτές ορίστηκαν στον ορισμό 2.2.13, είναι προσθετικές. Εάν δε μας ενδιαφέρει για ποια από αυτές ακριβώς θέλουμε να μιλήσουμε θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$.

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε έναν translation συναρτητή στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, τον οποίο θα αναφέρουμε και στην επόμενη παράγραφο στην οποία σκοπός μας θα είναι να δείξουμε ότι η λεγόμενη ομοτοπική κατηγορίας των συμπλόκων είναι τριγωνισμένη.

Ορισμός 2.2.15. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ η κατηγορία των συμπλόκων. Ορίζουμε τον translation συναρτητή $\Sigma \colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$, ως τον συναρτητή ο οποίος δρα ως εξής:*

- *Σε κάθε σύμπλοκο $X^\bullet$ αντιστοιχεί το σύμπλοκο $\Sigma(X^\bullet)$ για το οποίο:*
$$\Sigma(X^\bullet)^n = X^{n+1} \text{ και } d^n_{\Sigma(X^\bullet)} = -d^{n+1}_X$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

- *Σε κάθε μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ αντιστοιχεί τον μορφισμό $\Sigma(f^\bullet) \colon \Sigma(X^\bullet) \to \Sigma(Y^\bullet)$ ο οποίος δίνεται από τον τύπο:*
$$\Sigma(f^\bullet)^n = f^{n+1}$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Σχόλιο 2.2.16. Προφανώς ο συναρτητής $\Sigma \colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$, όπως ορίστηκε στον ορισμό 2.2.15 είναι αυτομορφισμός της κατηγορίας $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Συχνά θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Sigma^p(X^\bullet) = X^\bullet[p]$, όπου $X^\bullet[p]$ είναι το σύμπλοκο $X^\bullet$, το οποίο έχει «μετατεθεί» προς τα αριστερά p φορές.

2.3 Η ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων

Μία από τις πιο βασικές έννοιες της Ομολογικής Άλγεβρας είναι η ομοτοπία. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων, καθώς όπως θα δούμε αυτή η κατηγορία μπορεί να πάρει τη δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Αυτό που θα κάνουμε στη συνέχεια, θα είναι να ξεκινάμε από μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$, να περνάμε τότε στην κατηγορία των συμπλόκων, όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, και στη συνέχεια να περνάμε στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων, όπως αυτή θα αποκαλείται.
Στη συνέχεια της παραγράφου θεωρούμε δεδομένο ότι έχουμε μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ και έχουμε κατασκευάσει την κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.Καταρχάς δίνουμε τον ορισμό της έννοιας της ομοτοπίας.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός της κατηγορίας $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Τότε θα λέμε ότι ο $f^\bullet$ είναι* **ομοτοπικός με το μηδέν (homotopic to zero)**, *εάν υπάρχει μορφισμός $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοιος ώστε:*

$$f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$$

Διαγραμματικά:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dl, dashed, "h^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση $h^\bullet$ καλείται τότε **ομοτοπία (homotopy)**.

Σχόλιο 2.3.2. Το σύνολο όλων των μορφισμών στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$, οι οποίοι είναι ομοτοπικοί με το μηδέν θα το συμβολίζουμε με $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Λήμμα 2.3.3. *Για κάθε δύο σύμπλοκα $X^\bullet, Y^\bullet$ της κατηγορίας $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, το υποσύνολο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι μία υποομάδα της αβελιανής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.*

Απόδειξη. Προφανώς καταρχάς, ο μηδενικός μορφισμός ανήκει στο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Έστω $f^\bullet, g^\bullet \in \mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Άρα υπάρχουν ομοτοπίες $h^\bullet, k^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$, τέτοιες ώστε να ισχύει $f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$ και $g^\bullet = d_Y^\bullet \circ k^\bullet + k^\bullet \circ d_X^\bullet$. Άρα προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$f^\bullet + g^\bullet = d_Y^\bullet \circ (h^\bullet + k^\bullet) + (h^\bullet + k^\bullet) \circ d_X^\bullet$$

Δηλαδή ο μορφισμός $f^\bullet + g^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν. Άρα το $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
Επίσης, για κάθε μορφισμό $f^\bullet \in \mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$, έχουμε ότι:

$$-f^\bullet = d_Y^\bullet \circ (-h^\bullet) + (-h^\bullet) \circ d_X^\bullet$$

και άρα ο $-f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν.
Άρα $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι μία υποομάδα της αβελιανής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. ■

Ορισμός 2.3.4. *Θα λέμε ότι δύο μορφισμοί $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ είναι* **ομοτοπικοί (homotopic)**, *εάν ο μορφισμός $f^\bullet - g^\bullet \in \mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ και θα γράφουμε $f \sim g$.*

Σχόλιο 2.3.5. Προφανώς η σχέση $\sim$, όπως ορίστηκε στον ορισμό 2.3.4, είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Λήμμα 2.3.6. *Έστω $X^\bullet$, $Y^\bullet$ και $Z^\bullet$ τρία σύμπλοκα $\mathcal{A}$-αντικειμένων και $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ και $g^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ δύο μορφισμοί συμπλόκων. Εάν ένας εκ των δύο μορφισμών $f^\bullet$, $g^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν, τότε και ο $g^\bullet \circ f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν.*

Απόδειξη. Έστω ένας μορφισμός $f^\bullet \in \mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$, δηλαδή ομοτοπικός με το μηδέν. Τότε υπάρχει μία ομοτοπία $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοια ώστε $f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$. Άρα:

$$g^\bullet \circ f^\bullet = g^\bullet \circ d_{Y^\bullet} \circ h^\bullet + g^\bullet \circ h^\bullet \circ d_{X^\bullet} = d_{Z^\bullet} \circ g^\bullet \circ h^\bullet + g^\bullet \circ h^\bullet \circ d_{X^\bullet}$$

όπου $g^\bullet \circ h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Z^\bullet)$. Άρα ο $g^\bullet \circ h^\bullet$ ομοτοπία και άρα ο $g^\bullet \circ f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν.
Ομοίως αποδεικνύεται και αν υποθέσουμε ότι ο $g^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν. ■

Με βάση τα παραπάνω, είμαστε σε θέση τώρα να ορίσουμε την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων, μίας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$.

Ορισμός 2.3.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Καλούμε* **ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων (homotopic category of complexes)** *και συμβολίζουμε με $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ την κατηγορία που ορίζεται ως εξής:*

(i) Τα αντικείμενα της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι σύμπλοκα από αντικείμενα της $\mathcal{A}$.

(ii) Για δύο αντικείμενα $X^\bullet$, $Y^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, το σύνολο των μορφισμών από το $X^\bullet$ στο $Y^\bullet$ είναι η αβελιανή ομάδα:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\,\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

(iii) Για δύο μορφισμούς συμπλόκων $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, $g^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, ορίζεται η σύνθεση:

$$\circ\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet), \quad (f^\bullet, g^\bullet) \longmapsto g^\bullet \circ f^\bullet$$

η οποία επάγεται κατά φυσικό τρόπο από την απεικόνιση σύνθεσης στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

Παρατήρηση 2.3.8. Η κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, όπως ορίστηκε στον ορισμό 2.3.7 είναι καλά ορισμένη καθώς:

1. Η απεικόνιση σύνθεσης είναι καλά ορισμένη λόγω του λήμματος 2.3.6.

2. Προφανώς οι ιδιότητες (C1) και (C2) ικανοποιούνται. Επίσης ικανοποιείται και η (C3) καθώς για κάθε αντικείμενο $X^\bullet$, ο ταυτοτικός μορφισμός $id_{X^\bullet}\colon X^\bullet \to X^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, είναι η κλάση ισοδυναμίας του ταυτοτικού μορφισμού $id_{X^\bullet}\colon X^\bullet \to X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

Σχόλιο 2.3.9. Για τη κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ έχουμε επίσης τα ακόλουθα:

1. Η $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι προπροσθετική, καθώς για κάθε δύο αντικείμενά της $X^\bullet$ και $Y^\bullet$, το σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι αβελιανή ομάδα και η σύνθεση είναι διγραμμική ,καθώς: αν $X^\bullet, Y^\bullet$ και $Z^\bullet$ είναι τρία σύμπλοκα $\mathcal{A}$-αντικειμένων, από το λήμμα 2.3.6 η απεικόνιση σύνθεσης $(g^\bullet, f^\bullet) \longmapsto g \circ f$ από το $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet)$ στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet)$, μας δίνει μία διγραμμική απεικόνιση από το $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet)$ στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet)$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet) \arrow[d] \\
\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet)
\end{tikzcd}$$

2. Υπάρχει μηδενικό αντικείμενο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και είναι το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, δηλαδή το σύμπλοκο:
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

3. Για κάθε δύο αντικείμενα της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, ορίζουμε το ευθύ τους άθροισμα, όπως στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Επίσης οι κανονικές προβολές και ενέσεις είναι απλά οι κλάσεις ομοτοπίας των αντίστοιχων μορφισμών στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

Άρα λόγω του παραπάνω σχολίου, έχουμε απευθείας το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.3.10. *Η κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι μία προσθετική κατηγορία.*

Στην προηγούμενη παράγραφο και ειδικότερα στον ορισμό 2.2.15 ορίσαμε έναν συναρτητή translation $\Sigma\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι αυτός ο συναρτητής μας δίνει έναν translation συναρτητή στην προσθετική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Για να συμβεί αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι αυτός ο συναρτητής μας δίνει έναν ισομορφισμό από τον $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ στον

$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\Sigma(X^\bullet), \Sigma(Y^\bullet))$. Δηλαδή πρέπει για κάθε μορφισμό $f^\bullet$, ο οποίος είναι ομοτοπικός με το μηδέν, και ο $\Sigma(f^\bullet)$ να είναι ομοτοπικός με το μηδέν. Με λίγα λόγια αποδεικνύοντας το παρακάτω λήμμα έχουμε κατασκευάσει έναν translation συναρτητή στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, το οποίο κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού θα τον συμβολίζουμε και αυτόν με Σ.

Λήμμα 2.3.11. *Έστω $f^\bullet\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο μορφισμός $f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν.*

2. *Ο μορφισμός $\Sigma(f^\bullet)$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός $f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν. Τότε υπάρχει ομοτοπία $h \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοια ώστε $f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$. Η ομοτοπία h όμως δίνεται από μία οικογένεια μορφισμών $h^p\colon X^p \to Y^{p-1}$, και μπορεί να ερμηνευτεί επίσης ως ένας μορφισμός $k \in \mathsf{Hom}^{-1}(\Sigma(X^\bullet), \Sigma(Y^\bullet))$. Άρα παίρνουμε ότι:

$$\Sigma(f^\bullet)^p = f^{(p+1)} = d_Y^p \circ h^{p+1} + h^{p+2} \circ d_X^{p+1} = -d_{\Sigma(Y)}^{p-1} \circ k^p + k^{p+1} \circ d_{\Sigma(X)}^p$$

για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Άρα ο $\Sigma(f^\bullet)$ είναι ομοτοπικός με το μηδέν, με ομοτοπία $-k$.
Το αντίστροφο αποδεικνύεται ανάλογα. ∎

Όπως είχαμε τις έννοιες των πλήρων υποκατηγοριών της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ των φραγμένων συμπλόκων, έτσι έχουμε και στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ τις ανάλογες έννοιες:

Ορισμός 2.3.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων η οποία αντιστοιχεί στην $\mathcal{A}$. Θα λέμε για ένα σύμπλοκο $X^\bullet$ ότι:*

1. *Είναι* **άνω φραγμένο (bounded from above)**, *εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $X^n = 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα παραπάνω σύμπλοκα.*

2. *Είναι* **κάτω φραγμένο (bounded from below)**, *εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $X^n = 0$ για κάθε $n \leqslant n_0$. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα παραπάνω σύμπλοκα.*

3. *Είναι* **φραγμένο (bounded)**, *εάν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω φραγμένο. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελείται από τα παραπάνω σύμπλοκα.*

Σχόλιο 2.3.13. Προφανώς οι παραπάνω πλήρης υποκατηγορίες της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, είναι προσθετικές και αμετάβλητες ως προς τον συναρτητή Σ.

Παρατήρηση 2.3.14. Όπως είχαμε τον πλήρη και πιστό συναρτητή $\mathsf{C}\colon \mathcal{A} \to \mathsf{C}(\mathcal{A})$, έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε και έναν πλήρη και πιστό συναρτητή $\mathsf{K}\colon \mathcal{A} \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$. Και άρα θα μπορούμε να «δούμε» την $\mathcal{A}$ ως μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η οποία όπως θα δούμε θα περιέχει όλα τα σύμπλοκα $X^\bullet$ για τα οποία θα ισχύει $X^p = 0$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$.
Έστω $H\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο φυσικός συναρτητής, ο οποίος είναι ταυτότητα στα αντικείμενα και αντιστοιχεί μορφισμούς συμπλόκων στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, στις κλάσεις ομοτοπίας τους στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Προφανώς ο H είναι ένας προσθετικός συναρτητής , ο οποίος μετατίθεται με τους συναρτητές translation. Ορίζουμε τώρα τον K ως τον προσθετικό συναρτητή:

$$\mathsf{K} = H \circ \mathsf{C}\colon \mathcal{A} \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$$

Λήμμα 2.3.15. *Ο συναρτητής $\mathsf{K}\colon \mathcal{A} \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Έστω X και Y δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}$. Τότε τα $\mathsf{K}(X)$ και $\mathsf{K}(Y)$ είναι σύμπλοκα για τα οποία ισχύει $\mathsf{K}(X)^p = \mathsf{K}(Y)^p = 0$ για κάθε $p \neq 0$. Άρα κάθε μορφισμός που ανήκει στο $\mathsf{Hom}^{-1}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))$ πρέπει να είναι ο μηδενικός. Άρα $\mathsf{Ht}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y)) = 0$ και άρα $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y)) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))$. Άρα το αποτέλεσμα ακολουθεί απευθείας από το λήμμα 2.2.12. ■

Σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας, όταν η κατηγορία $\mathcal{A}$ για την οποία μιλάμε είναι αβελιανή, παίζουν οι συναρτητές συνομολογίας από την κατηγορία των συμπλόκων με αντικείμενα της $\mathcal{A}$ στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Αυτοί οι συναρτητές είναι το ανάλογων των αντίστοιχων συναρτητών, τους οποίους συναντά κανείς και στη μελέτη της θεωρίας προτύπων. Προχωράμε δίνοντας τον ορισμό τους:

Ορισμός 2.3.16. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Για κάθε $p \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε έναν συναρτητή $\mathsf{H}^p \colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ως εξής:*

- *Για κάθε σύμπλοκο $X^\bullet$ της κατηγορίας $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ ορίζουμε:*

$$\mathsf{H}^p(X^\bullet) = \mathsf{Ker}\, d_X^p / \mathsf{Im}\, d_X^{p-1}$$

- *Εάν $f^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων επειδή $f^\bullet \circ d_X^\bullet = d_Y^\bullet \circ f^\bullet$, παίρνουμε ότι $f^p(\mathsf{Ker}\, d_X^p) \subset \mathsf{Ker}\, d_Y^p$ καθώς και ότι $f^p(\mathsf{Im}\, d_X^{p-1}) \subset \mathsf{Im}\, d_Y^{p-1}$. Άρα ο $f^\bullet$ επάγει έναν μορφισμό:*

$$\mathsf{H}(f^\bullet) \colon \mathsf{H}(X^\bullet) \to \mathsf{H}(Y^\bullet)$$

Οι συναρτητές $\mathsf{H}^p, p \in \mathbb{Z}$ καλούνται **συναρτητές συνομολογίας (cohomology functors)**.

Παρατήρηση 2.3.17. Οι συναρτητές συνομολογίας από τον τρόπο ορισμό τους, εύκολα είναι προσθετικοί. Επίσης :

$$\mathsf{H}^p(\Sigma(X^\bullet)) = \mathsf{Ker}\, d_{\Sigma(X)}^p / \mathsf{Im}\, d_{\Sigma(X)}^{p-1} = \mathsf{Ker}\, d_X^{p-1} / \mathsf{Im}\, d_X^p = \mathsf{H}^{p+1}(X^\bullet)$$

και $\mathsf{H}^p(\Sigma(f)) = \mathsf{H}^{p+1}(f)$. Άρα:

$$\mathsf{H}^p = \mathsf{H}^0 \circ \Sigma^p$$

για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Οπότε θα είναι αρκετό να μελετήσουμε το συναρτητή $\mathsf{H}^0 \colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Λήμμα 2.3.18. *Έστω $f^\bullet, g^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ δύο ομοτοπικοί μορφισμοί συμπλόκων.Τότε $\mathsf{H}^p(f^\bullet) = \mathsf{H}^p(g)$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Λόγω της παρατήρησης 2.3.17, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\mathsf{H}^0(f^\bullet) = \mathsf{H}^0(g^\bullet)$. Έστω h η ομοτοπία για την οποία έχουμε:

$$f^0 - g^0 = d_Y^{-1} \circ h^0 + h^1 \circ d_X^0$$

Αυτή η σχέση μας δίνει ότι αν περιορίσουμε τον $f^0 - g^0$ στον $\mathsf{Ker}\, d_X^0$, τότε ισούται με $d_Y^{-1} \circ h^0$. Άρα η εικόνα του $f^0 - g^0 \colon \mathsf{Ker}\, d_X^0 \to Y^0$ περιέχεται στην εικόνα του d_Y^{-1}. Άρα ο μορφισμός $\mathsf{H}^0(f^\bullet - g^\bullet) \colon \mathsf{H}^0(X^\bullet) \to \mathsf{H}^0(Y^\bullet)$ είναι ο μηδενικός. Άρα επειδή ο H^0 είναι προσθετικός έχουμε ότι $\mathsf{H}^0(f^\bullet) = \mathsf{H}^0(g^\bullet)$. ■

Παρατήρηση 2.3.19. Λόγω του παραπάνω λήμματος 2.3.18, έχουμε ότι οι συναρτητές $\mathsf{H}^p \circ \mathsf{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ μας δίνουν συναρτητές $\mathsf{H}^p \circ \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, οι οποίοι είναι προσθετικοί και για τους οποίους επίσης ισχύει ότι $\mathsf{H}^p = \mathsf{H}^0 \circ \Sigma^p$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$.

Σχόλιο 2.3.20. Στη συνέχεια όταν μιλάμε για έναν μορφισμό $f^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$, θα τον συμβολίζουμε πολλές φορές απλά ως f, χωρίς να υπάρχει σύγχυση για το αν είναι μορφισμός αντικειμένων ή συμπλόκων.

Σκοπός μας είναι, όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, να δώσουμε στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Για να καταφέρουμε να ορίσουμε ποια θα είναι τα διακεκριμένα μας τρίγωνα είναι απαραίτητο πρώτα να μιλήσουμε για τον κώνο ενός μορφισμού.

Παρατήρηση 2.3.21. Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Έστω επίσης $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$. Ορίζουμε ένα βαθμωτό αντικείμενο $\mathsf{C}_f^\bullet$ ως εξής:

$$\mathsf{C}_f^n = X^{n+1} \oplus Y^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επίσης ορίζουμε $d_{\mathsf{C}_f}^n : \mathsf{C}_f^n \to \mathsf{C}_f^{n+1}$ ως εξής:

$$d_{\mathsf{C}_f}^n = \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα έχουμε:

$$d_{\mathsf{C}_f}^{n+1} \circ d_{\mathsf{C}_f}^n = \begin{bmatrix} -d_X^{n+2} & 0 \\ f^{n+2} & d_Y^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_X^{n+2} d_X^{n+1} & 0 \\ -f^{n+2} d_X^{n+1} + d_Y^{n+1} f^{n+1} & d_Y^{n+1} d_Y^n \end{bmatrix} = 0$$

Άρα το d_{C_f} είναι ένα διαφορικό και το $(\mathsf{C}_f^\bullet, d_{\mathsf{C}_f})$ είναι ένα σύμπλοκο στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$.

Ορισμός 2.3.22. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και επίσης $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$. Τότε το σύμπλοκο $(\mathsf{C}_f^\bullet, d_{\mathsf{C}_f})$ όπως ορίστηκε στην παρατήρηση 2.3.21, καλείται* **κώνος του μορφισμού (cone of the morphism)** *f.*

Παρατήρηση 2.3.23. Έστω $\mathsf{C}_f^\bullet$ ο κώνος του μορφισμού $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$.

- Θεωρούμε τον βαθμωτό μορφισμό $i_f\colon Y^\bullet \to \mathsf{C}_f^\bullet$ ο οποίος δίνεται από τους $i_f^n = i_{Y^n}\colon Y^n \to \mathsf{C}_f^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$d_{\mathsf{C}_f}^n \circ i_f^n = \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_Y^n \end{bmatrix} = i_f^{n+1} \circ d_Y^n$$

  για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή ο $i_f\colon Y^\bullet \to \mathsf{C}_f^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$.

- Θεωρούμε τον βαθμωτό μορφισμό $p_f\colon \mathsf{C}_f^\bullet \to \Sigma(X^\bullet)$ ο οποίος δίνεται από τους $p_f^n = p_{X^{n+1}}\colon \mathsf{C}_f^n \to X^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$p_f^{n+1} \circ d_{\mathsf{C}_f}^n = \begin{bmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \end{bmatrix} = d_{\Sigma(X^\bullet)}^n \circ p_f^n$$

  για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή ο $p_f^n\colon \mathsf{C}_f^n \to X^{n+1}$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$.

Αφού δώσαμε και τους ορισμούς των μορφισμών συμπλόκων i_f και p_f, είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε μία σημαντική κλάση τριγώνων στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$, η οποία θα μας βοηθήσει να ορίσουμε στη συνέχεια τα διακεκριμένα τρίγωνα στην κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.

Ορισμός 2.3.24. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Έστω επίσης $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$. Τότε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{C}_f^\bullet \arrow[dl, "p_f"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "f"'] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_f"']
\end{tikzcd}$$

καλείται το **standard τρίγωνο (standard trinagle)** *στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$, το οποίο αντιστοιχεί στον f.*

Λήμμα 2.3.25. *Έστω ένα διάγραμμα στην κατηγορία* $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y^\bullet \arrow[d, "v"] \\ X_1^\bullet \arrow[r, "g"'] & Y_1^\bullet \end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός $w\colon \mathsf{C}_f^\bullet \to \mathsf{C}_g^\bullet$ *τέτοιος ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "v"'] & \mathsf{C}_f^\bullet \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "w"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ X_1^\bullet \arrow[r, "f"] & Y_1^\bullet \arrow[r, "i_g"] & \mathsf{C}_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία.
Επίσης αν το πρώτο διάγραμμα είναι μεταθετικό στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$, *τότε και το δεύτερο είναι μεταθετικό στην* $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Λόγω της υπόθεσης, έχουμε ότι ο μορφισμός $v \circ f\colon X^\bullet \to Y_1^\bullet$ είναι ομοτοπικός με τον μορφισμό $g \circ u\colon X^\bullet \to Y_1^\bullet$. Άρα υπάρχει βαθμωτός μορφισμός $h\colon X^\bullet \to Y_1^\bullet$ βαθμού -1, τέτοιος ώστε:

$$g \circ u + v \circ f = d_{Y_1} \circ h + h \circ d_X$$

Ορίζουμε τώρα $w\colon \mathsf{C}_f^\bullet \to \mathsf{C}_g^\bullet$ ως εξής:

$$w^n = \begin{bmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & v^n \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι ο w είναι μορφισμός συμπλόκων και ότι κάνει το ζητούμενο διάγραμμα μεταθετικό ως προς ομοτοπία.
Αρχικά έχουμε:

$$d^n_{\mathsf{C}_g} \circ w^n = \begin{bmatrix} -d^{n+1}_{X_1} & 0 \\ g^{n+1} & d^n_{Y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & v^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d^{n+1}_{X_1} u^{n+1} & 0 \\ g^{n+1}u^{n+1} - d^n_{Y_1} h^{n+1} & d^n_{Y_1} v^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -u^{n+2} d^{n+1}_X & 0 \\ v^{n+1} f^{n+1} + h^{n+2} d^{n+1}_X & v^{n+1} d^n_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{n+2} & 0 \\ -h^{n+2} & v^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix} = w^{n+1} \circ d^n_{\mathsf{C}_f}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $d_{\mathsf{C}_g} \circ w = w \circ d_{\mathsf{C}_f}$, και ο w είναι μορφισμός συμπλόκων.
Επίσης έχουμε ότι:

$$w^n \circ i_f^n = \begin{bmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & v^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v^n \end{bmatrix} = i_g^n \circ v^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $w \circ i_f = i_g \circ v$, και το δεύτερο τετράγωνο είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία.
Τέλος έχουμε ότι:

$$u^{n+1} \circ p_f^n = \begin{bmatrix} u^{n+1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & v^n \end{bmatrix} = p_g^n \circ w^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $u \circ p_f = p_g \circ w$, και το τελευταίο τετράγωνο είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία.
Τέλος αν το πρώτο διάγραμμα είναι μεταθετικό, τότε έχουμε ότι $h = 0$ και το αποτέλεσμα έπεται όπως παραπάνω. ■

Σκοπός της επόμενης παρατήρησης και του λήμματος που ακολουθεί, είναι να καταλάβουμε καλύτερα το αντικείμενο $\Sigma(X^\bullet)$ βλέποντας ουσιαστικά με τι είναι ισόμορφο. Αυτό θα μας βοηθήσει αργότερα στην απόδειξη του ότι η ομοτοπική κατηγορία, έχει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας.

Παρατήρηση 2.3.26. • Έστω $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων. Τότε όπως είδαμε παραπάνω έχουμε τον μορφισμό $i_f\colon Y^\bullet \to \mathsf{C}_f^\bullet$. Έστω τώρα $\mathsf{D}_f^\bullet$ ο κώνος του μορφισμού i_f. Τότε:

$$\mathsf{D}_f^n = Y^{n+1} \oplus \mathsf{C}_f^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και το διαφορικό του είναι:

$$d_{\mathsf{D}_f}^n = \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ i_f^{n+1} & d_{\mathsf{C}_f}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix}$$

• ορίζουμε ένα βαθμωτό μορφισμό $\alpha\colon \Sigma(X^\bullet) \to \mathsf{D}_f^\bullet$ ως εξής:

$$\alpha^n = \begin{bmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ο α είναι μορφισμός συμπλόκων καθώς:

$$d_{\mathsf{D}_f}^n \circ \alpha^n = \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_Y^{n+1} f^{n+1} \\ -d_X^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f^{n+2} d_X^{n+1} \\ -d_X^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -f^{n+2} \\ id_{X^{n+2}} \\ 0 \end{bmatrix} d_X^{n+1} = \alpha^{n+1} \circ d_{\Sigma(X^\bullet)}^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

• Ορίζουμε έναν βαθμωτό μορφισμό $\beta\colon D_f^\bullet \to \Sigma(X^\bullet)$ ως εξής:

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε ο β είναι μορφισμός συμπλόκων καθώς:

$$d_{\Sigma(X^\bullet)}^n \circ \beta^n = -d_X^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d_X^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} = \beta^{n+1} \circ d_{\mathsf{D}_f}^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση 2.3.26 θα αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.3.27. *Ο μορφισμός $\alpha\colon \Sigma(X^\bullet) \to \mathsf{D}_f^\bullet$, όπως ορίστηκε στην παρατήρηση 2.3.26, είναι ένας ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων.*

Απόδειξη. Για να δειχτεί ότι ο α είναι ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων, είναι αρκετό να δειχτεί ότι υπάρχει μορφισμός $\beta\colon \mathsf{D}_f^\bullet \to \Sigma(X^\bullet)$, έτσι ώστε οι συνθέσεις $\alpha \circ \beta$ και $\beta \circ \alpha$ να είναι ομοτοπικές με τον αντίστοιχο ταυτοτικό μορφισμό.
Θα δείξουμε ο μορφισμός $\beta\colon \mathsf{D}_f^\bullet \to \Sigma(X^\bullet)$, όπως ορίστηκε στην παρατήρηση 2.3.26 ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες.
Καταρχάς:

$$\beta^n \circ \alpha^n = \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{bmatrix} = id_{X^{n+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $\beta \circ \alpha = id_{\Sigma(X^\bullet)}$.
Από την άλλη ορίζουμε τον βαθμωτό μορφισμό $h \colon \mathsf{D}_f^\bullet \to \mathsf{D}_f^\bullet$, βαθμού -1 ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & id_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι $d_{\mathsf{D}_f} \circ h + h \circ d_{\mathsf{D}_f} = id_{\mathsf{D}_f^\bullet} - \alpha \circ \beta$ και άρα ο $\alpha \circ \beta \colon \mathsf{D}_f^\bullet \to \mathsf{D}_f^\bullet$, θα είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό του $\mathsf{D}_f^\bullet$. Άρα θα έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.
Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & d_{\mathsf{D}_f}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_{\mathsf{D}_f}^n \\ = & \begin{bmatrix} -d_Y^n & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^n & 0 \\ id_{Y^n} & f^n & d_Y^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & id_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & id_{Y^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d_Y^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_{Y^n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_{Y^n} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & id_{Y^n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = id_{\mathsf{D}_f^n} - \alpha^n \circ \beta^n \end{aligned}$$

■

Τέλος από τα παραπάνω παίρνουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.3.28. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων. Τότε το διάγραμμα:*

$$\begin{array}{ccccccc} Y^\bullet & \xrightarrow{i_f} & \mathsf{C}_f^\bullet & \xrightarrow{p_f} & \Sigma(X^\bullet) & \xrightarrow{-\Sigma(f)} & \Sigma(Y^\bullet) \\ {\scriptstyle id_{Y^\bullet}}\downarrow & & {\scriptstyle id_{\mathsf{C}_f^\bullet}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle id_{\Sigma(Y^\bullet)}} \\ Y^\bullet & \xrightarrow{i_f} & \mathsf{C}_f^\bullet & \xrightarrow{i_{i_f}} & \mathsf{D}_f^\bullet & \xrightarrow{p_{i_f}} & \Sigma(Y^\bullet) \end{array}$$

είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία.

Απόδειξη. Καταρχάς, το τρίτο τετράγωνο είναι μεταθετικό καθώς:

$$p_{i_f}^n \circ a^n = \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{bmatrix} = -f^{n+1} = -\Sigma(f)^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Από την άλλη:

$$\beta^n \circ i_{i_f}^n = \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & id_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} = p_f^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $\beta \circ i_{i_f} = p_f$. Όμως από το λήμμα 2.3.27 ο μορφισμός $\alpha \circ p_f = \alpha \circ \beta \circ i_{i_f}$ είναι ομτοπικός με τον i_{i_f}, και άρα και το δεύτερο τετράγωνο είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία. ■

Τώρα αφού έχουμε ορίσει έναν transalation συναρτητή Σ στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων όπως είδαμε στο λήμμα 2.3.11, είμαστε σε θέση να και μία κλάση διακεκριμένων τριγώνων τα οποία μαζί με τον συναρτητή Σ θα δίνουν στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Προχωράμε απευθείας δίνοντας τον ορισμό τους:

Ορισμός 2.3.29. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων. Έστω Σ ο αντίστοιχος συναρτητής translation. Θα λέμε •τοι ένα τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι διακεκριμένο αν είναι ισόμορφο με την εικόνα ενός standard στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.

Πρώτα δίνουμε ένα απαραίτητο λήμμα:

Λήμμα 2.3.30. *Έστω $X^\bullet$ ένα σύμπλοκο αντικειμένων της προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Τότε ο κώνος $\mathsf{C}^\bullet_{id_{X^\bullet}}$ του ταυτοτικού μορφισμού $id_{X^\bullet}$, είναι ισόμορφος με το 0 στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Καταρχάς $\mathsf{C}^\bullet_{id_{X^\bullet}} = \Sigma(X^\bullet) \oplus X^\bullet$. Θα δείξουμε ότι για τον μορφισμό $h \colon \mathsf{C}^\bullet_{id_{X^\bullet}} \to \mathsf{C}^\bullet_{id_{X^\bullet}}$ βαθμού -1, ο οποίος ορίζεται ως :

$$h^n = \begin{bmatrix} 0 & id_{X^n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ισχύει $d_{\mathsf{C}^\bullet} \circ h + h \circ d_{\mathsf{C}^\bullet} = id_{\mathsf{C}^\bullet}$ (όπου $\mathsf{C}^\bullet = \mathsf{C}^\bullet_{id_{X^\bullet}}$). Άρα θα έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.
Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} d_{\mathsf{C}}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_{\mathsf{C}}^n &= \begin{bmatrix} -d_X^n & 0 \\ id_{X^n} & d_X^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & id_{X^n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ id_{X^{n+1}} & d_X^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -d_X^n \\ 0 & id_{X^n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & d_X^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & \\ 0 & id_{X^n} \end{bmatrix} = id_{\mathsf{C}}^n \end{aligned}$$

■

Η απόδειξη ότι όντως η $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία, θα γίνει σταδιακά αποδεικνύοντας στα επόμενα λήμματα την ισχύ των αξιωμάτων (TR1) - (TR4).

Λήμμα 2.3.31. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Για την κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, μαζί με τον translation συναρτητή Σ και την κλάση διακεκριμένων τριγώνων, όπως αυτά ορίστηκαν στον ορισμό 2.3.29, ισχύουν τα αξιώματα (TR1a), (TR1b) και (TR1c).*

Απόδειξη. Καταρχάς το αξίωμα (TR1a), προφανώς ισχύει απευθείας από τον τρόπο ορισμού των διακεκριμένων τριγώνων.
Για το (TR1b), λόγω του λήμματος 2.3.30, το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "id_{X^\bullet}"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "id_{X^\bullet}"] & X^\bullet \arrow[r] & \mathsf{C}^\bullet_{id_{X^\bullet}} \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ και οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί. Εφόσον η κάτω γραμμή είναι η εικόνα ενός standard τριγώνου και επειδή ισχύει η (TR1a), και η πάνω γραμμή είναι διακεκριμένο τρίγωνο.
Τέλος η (TR1c) προφανώς ισχύει, καθώς αν έχουμε έναν μορφισμό συμπλόκων $f \colon X^\bullet \to Y^\bullet$, αρκεί να πάρουμε τον κώνο του στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$ και στην συνέχεια την εικόνα του επαγώμενου standard τριγώνου. Προφανώς αυτή η εικόνα μας δίνει ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ με βάση τον μορφισμό f. ■

Σχόλιο 2.3.32. Στη συνέχεια, όταν θα έχουμε ένα μορφισμό $\alpha\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$, τότε την εικόνα αυτού του μορφισμού στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, δηλαδή την κλάση ομοτοπίας αυτού του μορφισμού, θα την συμβολίζουμε με $[\alpha]$.

Λήμμα 2.3.33. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Για την κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, μαζί με τον translation συναρτητή Σ και την κλάση διακεκριμένων τριγώνων, όπως αυτά ορίστηκαν στον ορισμό 2.3.29, ισχύει το αξιώμα (TR2).*

Απόδειξη. Έστω ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Από των ορισμό των διακεκριμένων τριγώνων, υπάρχει ένα standard τρίγωνο στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "\alpha"] & & V^\bullet \arrow[ul, "i_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

του οποίου η εικόνα στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφη με το αρχικό μας τρίγωνο, δηλαδή υπάρχει ένας ισομορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ U^\bullet \arrow[r, "{[\alpha]}"] & V^\bullet \arrow[r, "{[i_\alpha]}"] & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[r, "{[p_\alpha]}"] & \Sigma(U^\bullet) \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Λόγω των λημμάτων 2.3.27 και 2.3.28, η εικόνα του τριγώνου:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(U^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(\alpha)"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ V^\bullet \arrow[rr, "i_\alpha"] & & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[ul, "p_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

είναι ισόμορφη με την εικόνα ενός standard τριγώνου στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Άρα είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Άρα το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-\Sigma(f)"] \arrow[d, "\Sigma(u)"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(v)"] \\ V^\bullet \arrow[r, "{[i_\alpha]}"] & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[r, "{[p_\alpha]}"] & \Sigma(U^\bullet) \arrow[r, "{-\Sigma([\alpha])}"] & \Sigma(V^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι στην πραγματικότητα ισομορφισμός τριγώνων στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ και άρα, εφόσον το κάτω τρίγωνο είναι διακεκριμένο, από το (TR1a) και το πάνω τρίγωνο είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.
Μένει τώρα να αποδείξουμε και το αντίστροφο. Έστω δηλαδή ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(f)"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ Y^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Z^\bullet \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Από τον ορισμό τότε, έχουμε ότι υπάρχει ένα standard τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"', "{[1]}"] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "\alpha"] & & V^\bullet \arrow[ul, "i_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε η εικόνα του να είναι ισόμορφη με το παραπάνω τρίγωνο. Άρα υπάρχει ένας ισομορφισμός τριγώνων στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "v"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-\Sigma(f)"] \arrow[d, "w"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ U^\bullet \arrow[r, "{[\alpha]}"] & V^\bullet \arrow[r, "{[i_\alpha]}"] & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[r, "{[p_\alpha]}"] & \Sigma(U^\bullet) \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τώρα τον μορφισμό $\Sigma^{-2}(\alpha)\colon \Sigma^{-2}(U^\bullet) \to \Sigma^{-2}(V^\bullet)$ και το επαγόμενο διακεκριμένο τρίγωνο αυτού του μορφισμού, λόγω της (TR2b):

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}^\bullet_{\Sigma^{-2}(\alpha)} \arrow[dl, "p_{\Sigma^{-2}(\alpha)}"', "{[1]}"] & \\ \Sigma^{-2}(U^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma^{-2}(\alpha)"] & & \Sigma^{-2}(V^\bullet) \arrow[ul, "i_{\Sigma^{-2}(\alpha)}"'] \end{tikzcd}$$

Στην πραγματικότητα ο κώνος $\mathsf{C}^\bullet_{\Sigma^{-2}(\alpha)}$, του μορφισμού $\Sigma^{-2}(\alpha)$, είναι ο $\Sigma^{-2}(\mathsf{C}^\bullet_\alpha)$ καθώς από τη μία:

$$\mathsf{C}^n_{\Sigma^{-2}(\alpha)} = \Sigma^{-1}(U^\bullet)^n \oplus \Sigma^{-2}(V^\bullet)^n = U^{n-1} \oplus V^{n+2} = \Sigma^{-2}(\mathsf{C}^\bullet_\alpha)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και απ την άλλη:

$$d^n_{\mathsf{C}_{\Sigma^{-2}(\alpha)}} = \begin{bmatrix} -d^{n+1}_{\Sigma^{-2}(U^\bullet)} & 0 \\ \Sigma^{-2}(\alpha)^{n+1} & d^n_{\Sigma^{-2}(V^\bullet)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d^{n-1}_U & 0 \\ \alpha^{n-1} & d^{n-2}_V \end{bmatrix} = d^n_{\Sigma^{-2}(\mathsf{C}^\bullet_\alpha)}$$

Άρα το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma^{-2}(\mathsf{C}^\bullet_\alpha) \arrow[dl, "\Sigma^{-2}({[p_\alpha]})"', "{[1]}"] & \\ \Sigma^{-2}(U^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma^{-2}(\alpha)"] & & \Sigma^{-2}(V^\bullet) \arrow[ul, "\Sigma^{-2}({[i_\alpha]})"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Εφαρμόζοντας τον Σ^{-2} στον παραπάνω ισομορφισμό τριγώνων, βλέπουμε ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma^{-2}(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma^{-1}(f)"', "{[1]}"] & \\ \Sigma^{-2}(Y^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma^{-2}(g)"] & & \Sigma^{-2}(Z^\bullet) \arrow[ul, "\Sigma^{-2}(h)"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Άρα λόγω του πρώτου μέρους της απόδειξης και το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma^{-1}(Y^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma^{-1}(g)"'] & \\ \Sigma^{-2}(Z^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma^{-2}(h)"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & \Sigma^{-1}(X^\bullet) \arrow[ul, "\Sigma^{-1}(f)"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο. Κάνοντας στροφή του τριγώνου άλλες τέσσερις φορές παίρνουμε με το ίδιο επιχείρημα, ότι και το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.
Άρα αποδείχτηκε το αξίωμα (TR2) ■

Λήμμα 2.3.34. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Για την κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, μαζί με τον translation συναρτητή Σ και την κλάση διακεκριμένων τριγώνων, όπως αυτά ορίστηκαν στον ορισμό 2.3.29, ισχύει το αξιώμα (TR3).*

Απόδειξη. Έστω ένα διάγραμμα στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Z^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\ X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

του οποίου οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Τότε επειδή οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα, υπάρχουν standard τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}_\alpha^\bullet \arrow[dl] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & V^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}_\beta^\bullet \arrow[dl] & \\ U_1^\bullet \arrow[rr, "\beta"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & V_1^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

τέτοια ώστε η εικόνα τους στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ να είναι ισόμορφη με τα αντίστοιχα παραπάνω διακεκριμένα τρίγωνα. Άρα υπάρχουν μορφισμοί συμπλόκων $u\colon U^\bullet \to U_1^\bullet$ και $v\colon V^\bullet \to V_1^\bullet$ έτσι ώστε η εικόνα του διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} U^\bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & V^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & \mathsf{C}_\alpha^\bullet \arrow[r] & \Sigma(U^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ U_1^\bullet \arrow[r, "\beta"] & V_1^\bullet \arrow[r] & \mathsf{C}_\beta^\bullet \arrow[r] & \Sigma(U_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ να είναι ισόμορφη με το παραπάνω διάγραμμα. Λόγω του λήμματος 2.3.25, υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $w\colon \mathsf{C}^\bullet_\alpha \to \mathsf{C}^\bullet_\beta$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
U^\bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & V^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \Sigma(U^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\
U_1^\bullet \arrow[r, "\beta"] & V_1^\bullet \arrow[r] & \mathsf{C}^\bullet_\beta \arrow[r] & \Sigma(U_1^\bullet)
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία. Επειδή όμως όπως αναφέραμε η εικόνα του δεύτερου διαγράμματος στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφη με το πρώτο διάγραμμα, θα υπάρχει και μορφισμός $Z^\bullet \to Z_1^\bullet$ ο οποίος συμπληρώνει το πρώτο διάγραμμα σε ένα μορφισμό τριγώνων στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\
X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Άρα ισχύει το αξίωμα (TR3). ■

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της ισχύς του οκταεδρικού αξιώματος, θα δώσουμε μία διαφορετική περιγραφή των διακεκριμένων τριγώνων, όπως αυτά ορίστηκαν στον ορισμό 2.3.29, καθώς θα μας χρειαστεί για την απόδειξή του.

Λήμμα 2.3.35. *Έστω $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ και $\alpha\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων, ο οποίος αναπαριστά τον f. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Y^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο.

(ii) Υπάρχει ένας ισομορφισμός $u\colon Z^\bullet \to \mathsf{C}^\bullet_\alpha$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "id_{Y^\bullet}"'] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "f"'] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_\alpha]}"'] & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[r, "{[p_\alpha]}"'] & \Sigma(X^\bullet)
\end{tikzcd}$$

να είναι ισομορφισμός τριγώνων.

Απόδειξη. Καταρχάς προφανώς το (ii) συνεπάγεται το (i), εξ ορισμού των διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει το (i). Η εικόνα του τριγώνου:

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "\alpha"] & & Y^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

εξ ορισμού είναι διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Άρα έχουμε ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "id_{Y^\bullet}"] & Z^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_\alpha]}"] & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[r, "{[p_\alpha]}"] & \Sigma(X^\bullet)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο και οι δύο γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Εφόσον όμως έχουμε ήδη αποδείξει το (TR3), το παραπάνω διάγραμμα μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "id_{Y^\bullet}"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_\alpha]}"] & \mathsf{C}^\bullet_\alpha \arrow[r, "{[p_\alpha]}"] & \Sigma(X^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Επειδή επίσης το λήμμα 2.1.15 δεν εξαρτάται από το αξίωμα (TR4), ο παραπάνω μορφισμός τριγώνων είναι στην πραγματικότητα ισομορφισμός τριγώνων. ■

Λήμμα 2.3.36. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Για την κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, μαζί με τον translation συναρτητή Σ και την κλάση διακεκριμένων τριγώνων, όπως αυτά ορίστηκαν στον ορισμό 2.3.29, ισχύει το αξίωμα (TR4).*

Απόδειξη. Έστω $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$, $g\colon Y^\bullet \to Z^\bullet$ και $h = g \circ f$ τρεις μορφισμοί στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "id_{Z^\bullet}"'] & Y_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "g"] & Z^\bullet \arrow[r] & X_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και τα τετράγωνα στην πρώτη σειρά είναι μεταθετικά. Λόγω του λήμματος 2.3.35, υπάρχουν μορφισμοί συμπλόκων $a\colon X^\bullet \to Y^\bullet$, $b\colon Y^\bullet \to Z^\bullet$ και $c = b \circ a$, οι οποίοι αναπαριστούν τους f, g και h αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε τα παρακάτω τρία τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Y^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X_1^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
Y^\bullet \arrow[rr, "g"] & & Z^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y_1^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "h"] & & Z^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

να είναι ισόμορφα με τις εικόνες των αντίστοιχων standard τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "a"] & & Y^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{C}_b^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
Y^\bullet \arrow[rr, "b"] & & Z^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{C}_c^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "c"] & & Z^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

και οι ισομορφισμοί δίνονται από τους ταυτοτικούς μορφισμούς των $X^\bullet$, $Y^\bullet$ και $Z^\bullet$. Άρα το παραπάνω διάγραμμα είναι ισόμορφο με την εικόνα του διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "b"'] & \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[r, "p_a"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_c"] \arrow[d, "id_{Z^\bullet}"'] & \mathsf{C}_c^\bullet \arrow[r, "p_c"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "b"] & Z^\bullet \arrow[r, "i_b"] & \mathsf{C}_b^\bullet \arrow[r, "p_b"] & \Sigma(Y^\bullet) \end{tikzcd}$$

του οποίου τα τετράγωνα στην πρώτη σειρά είναι μεταθετικά.
Στην απόδειξη του λήμματος 2.3.25, κατασκευάσαμε μορφισμούς $u\colon \mathsf{C}_a^\bullet \to \mathsf{C}_c^\bullet$ και $v\colon \mathsf{C}_c^\bullet \to \mathsf{C}_b^\bullet$ οι οποίοι δίνονται από τους τύπους:

$$u^n = \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}, v^n = \begin{bmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι συμπληρώνουν το διάγραμμα μας, σε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "b"'] & \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[r, "p_a"] \arrow[d, "u"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_c"] \arrow[d, "id_{Z^\bullet}"'] & \mathsf{C}_c^\bullet \arrow[r, "p_c"] \arrow[d, "v"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "b"] & Z^\bullet \arrow[r, "i_b"] & \mathsf{C}_b^\bullet \arrow[r, "p_b"] & \Sigma(Y^\bullet) \end{tikzcd}$$

Αρκεί να δειχτεί τώρα ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}_b^\bullet \arrow[dl, "{\Sigma([i_a])\circ[p_b]}"', "{[1]}"] & \\ \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[rr, "{[u]}"] & & \mathsf{C}_c^\bullet \arrow[ul, "{[v]}"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, καθώς αν πάρουμε την εικόνα στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ του μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "b"'] & \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[r, "p_a"] \arrow[d, "u"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_c"] \arrow[d, "id_{Z^\bullet}"'] & \mathsf{C}_c^\bullet \arrow[r, "p_c"] \arrow[d, "v"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "b"] \arrow[d, "i_a"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_b"] \arrow[d, "i_c"] & \mathsf{C}_b^\bullet \arrow[r, "p_b"] \arrow[d, "id_{\mathsf{C}_b^\bullet}"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(i_a)"] \\ \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[r, "u"'] & \mathsf{C}_c^\bullet \arrow[r, "v"'] & \mathsf{C}_b^\bullet \arrow[r, "\Sigma(i_a)\circ p_b"'] & \Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet) \end{tikzcd}$$

όλες οι γραμμές θα είναι διακεκριμένα τρίγωνα και οι κάθετοι μορφισμοί, μορφισμοί τριγώνων. Οπότε θα έχει αποδειχτεί το (TR4).
Για να αποδείξουμε ότι όντως είναι διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, είναι αρκετό να συμπλη-

ρώσουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathsf{C}_a^\bullet & \xrightarrow{u} & \mathsf{C}_c^\bullet & \xrightarrow{v} & \mathsf{C}_b^\bullet & \xrightarrow{\Sigma(i_a)\circ p_b} & \Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet) \\
{\scriptstyle id_{\mathsf{C}_a^\bullet}}\downarrow & & {\scriptstyle id_{\mathsf{C}_c^\bullet}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle id_{\Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet)}} \\
\mathsf{C}_a^\bullet & \xrightarrow[u]{} & \mathsf{C}_c^\bullet & \xrightarrow[i_u]{} & \mathsf{C}_u^\bullet & \xrightarrow[p_u]{} & \Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet)
\end{array}$$

σε ένα διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathsf{C}_a^\bullet & \xrightarrow{u} & \mathsf{C}_c^\bullet & \xrightarrow{v} & \mathsf{C}_b^\bullet & \xrightarrow{\Sigma(i_a)\circ p_b} & \Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet) \\
{\scriptstyle id_{\mathsf{C}_a^\bullet}}\downarrow & & {\scriptstyle id_{\mathsf{C}_c^\bullet}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} & & \downarrow{\scriptstyle id_{\Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet)}} \\
\mathsf{C}_a^\bullet & \xrightarrow[u]{} & \mathsf{C}_c^\bullet & \xrightarrow[i_u]{} & \mathsf{C}_u^\bullet & \xrightarrow[p_u]{} & \Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet)
\end{array}$$

το οποίο να είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία και ο ω να μας δίνει έναν ισομορφισμό στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, καθώς τότε θα είχαμε ότι η εικόνα της πάνω γραμμής στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι εάν τρίγωνο ισόμορφο με την εικόνα ενός standard τριγώνου στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, και άρα εξ ορισμού θα είναι διακεκριμένο τρίγωνο.
Σκοπός μας είναι να ορίσουμε έναν κατάλληλο μορφισμό συμπλόκων $\omega\colon \mathsf{C}_b^\bullet \to \mathsf{C}_u^\bullet$. Καταρχάς θα δούμε μια ακριβέστερη περιγραφή των συμπλόκων $\mathsf{C}_b^\bullet$ και $\mathsf{C}_u^\bullet$ και των διαφορικών τους, έτσι ώστε να ορίσουμε τον ω.
$\mathsf{C}_b^\bullet = \Sigma(Y^\bullet) \oplus Z^\bullet$ και έχει διαφορικό:

$$d^n_{\mathsf{C}_b} = \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ b^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Επίσης $\mathsf{C}_u^\bullet = \Sigma(\mathsf{C}_a^\bullet) \oplus \mathsf{C}_c^\bullet = \Sigma^2(X^\bullet) \oplus \Sigma(Y^\bullet) \oplus \Sigma(Y^\bullet) \oplus Z^\bullet$ και έχει διαφορικό:

$$d^n_{\mathsf{C}_u} = \begin{bmatrix} -d^{n+1}_{\mathsf{C}_a} & 0 \\ u^{n+1} & d^n_{\mathsf{C}_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} & c^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τώρα τον μορφισμό συμπλόκων $\omega\colon \mathsf{C}_b^\bullet \to \mathsf{C}_u^\bullet$ ως:

$$\omega^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι όντως ο ω είναι μορφισμός συμπλόκων:

$$\omega^{n+1} \circ d^n_{\mathsf{C}_b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ b^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -d_Y^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ b^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} & c^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix} = d^n_{\mathsf{C}_u} \circ \omega^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Τώρα θα δείξουμε ότι για αυτόν τον μορφισμό ω το δεύτερο και το τρίτο τετράγωνο του διαγράμματος είναι μεταθετικά ως προς ομοτοπία.

Το τρίτο τετράγωνο είναι μεταθετικό καθώς:

$$p_u^n \circ \omega^n = \begin{bmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & id_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ id_{Y^{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} = \Sigma(i_a)^n \circ p_b^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Τώρα θα δείξουμε ότι το δεύτερο τετράγωνο είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία και θα έχουμε τελειώσει την απόδειξη. Ορίζουμε έναν βαθμωτό μορφισμό $h \colon \mathsf{C}_c^\bullet \to \mathsf{C}_u^\bullet$ βαθμού -1 ως εξής:

$$\begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{Z}$$

Τότε από τη μία έχουμε:

$$\omega^n \circ v^n - i_u^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a^{n+1} & 0 \\ -id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από την άλλη:

$$d_{\mathsf{C}_u}^{n-1} h^n + h^{n+1} d_{\mathsf{C}_c}^n$$
$$= \begin{bmatrix} d_X^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{n+1} & -d_Y^n & 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 & -d_X^n & 0 \\ 0 & b^n & c^n & d_Z^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ c^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ -a^{n+1} & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a^{n+1} & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $\omega^n \circ v^n - i_u^n = d_{\mathsf{C}_u}^{n-1} h^n + h^{n+1} d_{\mathsf{C}_c}^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $\omega \circ v - i_u = d_{\mathsf{C}_u^\bullet} h + h d_{\mathsf{C}_c^\bullet}$. Άρα όπως θέλαμε ο μορφισμός $\omega \circ v$ είναι ομοτοπικός με τον i_u, και άρα το δεύτερο τετράγωνο είναι μεταθετικό ως προς ομοτοπία.
Τέλος μας μένει να δείξουμε ότι ο μορφισμός $\omega \colon \mathsf{C}_b^\bullet \to \mathsf{C}_u^\bullet$ είναι ισομορφισμός στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Θα ορίσουμε γι αυτό το λόγο ένα βαθμωτό μορφισμό $\theta \colon \mathsf{C}_u^\bullet \to \mathsf{C}_b^\bullet$ βαθμού 0, ως εξής:

$$\theta^n = \begin{bmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z^n \end{bmatrix}, n \in \mathbb{Z}$$

Τότε ο θ είναι μορφισμός συμπλόκων καθώς:

$$\theta^{n+1} \circ d^n_{\mathsf{C}_u} = \begin{bmatrix} 0 & id_{Y^{n+2}} & a^{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} & c^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -d_Y^{n+1} & -a^{n+2}d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} & c^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d_Y^{n+1} & -d_Y^{n+1}a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} & b^{n+1}a^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ b^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z^n \end{bmatrix} = d^n_{\mathsf{C}_b} \circ \theta^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επίσης ισχύει ότι:

$$\theta^n \circ \omega^n = \begin{bmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix} = id^n_{\mathsf{C}_b}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $\theta \circ \omega = id_{\mathsf{C}_b}$.
Επίσης ισχύει και ότι:

$$\omega^n \circ \theta^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & id_{Y^{n+1}} & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z^n \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο $\omega \circ \theta$ είναι ομοτοπικός τον id_{C_u}, καθώς τότε ο θ θα ναι ισομορφισμός στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Γι αυτό το λόγο, ορίζουμε έναν βαθμωτό μορφισμό $\chi \colon C_u^\bullet \to C_u^\bullet$ βαθμού -1 ως εξής:

$$\chi^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{Z}$$

Τότε παίρνουμε ότι:

$$d^{n-1}_{\mathsf{C}_u} \circ \chi^n + \chi^n \circ d^n_{\mathsf{C}_u} = \begin{bmatrix} d_X^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{n+1} & -d_Y^n & 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 & -d_X^n & 0 \\ 0 & b^n & c^n & d_Z^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -a^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} & c^{n+1} & d_Z^n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & -a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 & -id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $d_{\mathsf{C}_u} \circ \chi + \chi \circ d_{\mathsf{C}_u} = id_{\mathsf{C}_u} - \omega \circ \theta$. Δηλαδή ο $\omega \circ \theta$ είναι ομοτοπικός με τον id_{C_u} και το αξίωμα (TR4) αποδείχηκε. ■

Από τα παραπάνω λήμματα 2.3.31, 2.3.33 2.3.34 και 2.3.36, παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο ήταν και ο στόχος αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 2.3.37. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Η προσθετική κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, εφοδιασμένη με τον translation συναρτητή Σ και την κλάση διακεκριμένων τριγώνων, όπως αυτά ορίστηκαν στον ορισμό 2.3.29, είναι τριγωνισμένη κατηγορία.*

Τέλος θα δώσουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην περίπτωση που η αρχική κατηγορία μας $\mathcal{A}$ δεν είναι απλώς προσθετική, αλλά είναι αβελιανή.

Θεώρημα 2.3.38. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Τότε ο συναρτητής $H^0\colon \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ είναι ένας συνομολογικός συναρτητής.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχτεί ότι για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, η ακολουθία:

$$\mathsf{H}^0(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(g)} \mathsf{H}^0(Z^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(h)} \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet))$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$. Έστω $a\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων, ο οποίος αναπαριστά τον f και έστω:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[dl, "p_a"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "a"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_a"'] \end{tikzcd}$$

το αντίστοιχο standard τρίγωνο. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός τριγώνων στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_{Y^\bullet}"'] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_a]}"] & \mathsf{C}_a^\bullet \arrow[r, "{[p_a]}"] & \Sigma(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

όπου το κάτω τρίγωνο είναι η εικόνα του παραπάνω standard τριγώνου στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή H^0 παίρνουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}^0(Y^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(g)"] \arrow[d, "id_{\mathsf{H}^0(Y^\bullet)}"'] & \mathsf{H}^0(Z^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(h)"] \arrow[d, "\mathsf{H}^0(u)"] & \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet)) \arrow[d, "id_{\mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet))}"] \\ \mathsf{H}^0(Y^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(i_a)"] & \mathsf{H}^0(\mathsf{C}_a^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(p_a)"] & \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet)) \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{A}$, στο οποίο οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{H}^0(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(i_a)} \mathsf{H}^0(\mathsf{C}_a^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(p_a)} \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet))$$

είναι ακριβής.
Θεωρούμε το αντικείμενο $\mathsf{C}_a^0 = X^1 \oplus Y^0$ και το υποαντικείμενό του $\operatorname{Im} d_X^0 \oplus Y^0$. Προφανώς καταρχάς το $\operatorname{Im} d_{\mathsf{C}_a}^{-1}$ είναι υποαντικείμενο του $\operatorname{Im} d_X^0 \oplus Y^0$. Θεωρούμε τον μορφισμό $\chi\colon X^0 \oplus Y^0 \to \operatorname{Im} d_X^0 \oplus Y^0$ που ορίζεται ως:

$$\chi = \begin{bmatrix} d_X^0 & 0 \\ -a^0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_X^0 & 0 \\ 0 & id_{Y^0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a^0 & id_{Y^0} \end{bmatrix}$$

Εάν επίσης έχουμε τον μορφισμό $\psi\colon X^0 \oplus Y^0 \to X^0 \oplus Y^{-1}$ που ορίζεται ως:

$$\psi = \begin{bmatrix} id_{X^0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

εύκολα βλέπουμε ότι $\chi = d^{-1}_{\mathsf{C}_a} \circ \psi$. Άρα ο χ επάγει τον μηδενικό μορφισμό από το $X^0 \oplus Y^0$ στο πηλίκο $\operatorname{Im} d^0_X \oplus Y^0 / \operatorname{Im} d^{-1}_{\mathsf{C}_a}$. Άρα οι μορφισμοί:

$$\begin{bmatrix} d^0_X & 0 \\ 0 & id_{Y^0} \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a^0 & id_{Y^0} \end{bmatrix}$$

επάγουν τον ίδιο μορφισμό από το $X^0 \oplus Y^0$ στο $\operatorname{Im} d^0_X \oplus Y^0 / \operatorname{Im} d^{-1}_{\mathsf{C}_a}$. Άρα:

$$(0 \oplus Y^0) + \operatorname{Im} d^{-1}_{\mathsf{C}_a} = \operatorname{Im} d^0_X \oplus Y^0$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης παίρνουμε ότι:

$$\operatorname{Ker} d^0_{\mathsf{C}_a} \cap (\operatorname{Im} d^0_X \oplus Y^0) = \operatorname{Ker} d^0_{\mathsf{C}_a} \cap ((0 \oplus Y^0) + \operatorname{Im} d^{-1}_{\mathsf{C}_a}) = (0 \oplus \operatorname{Ker} d^0_Y) + \operatorname{Im} d^{-1}_{\mathsf{C}_a}$$

Όμως $\operatorname{Ker} d^0_{\mathsf{C}_a} \cap (\operatorname{Im} d^0_X \oplus Y^0)$ είναι ακριβώς ο πυρήνας του $\mathsf{H}^0(p_a)$, και $(0 \oplus \operatorname{Ker} d^0_Y) + \operatorname{Im} d^{-1}_{\mathsf{C}_a}$ είναι η εικόνα του $\mathsf{H}^0(i_a)$. Άρα αποδείξαμε ότι είναι ίσα και άρα η ακολουθία μας είναι ακριβής. ■

Ως πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος παίρνουμε το ακόλουθο:

Πόρισμα 2.3.39. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία, και ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$:*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Τότε η ακολουθία:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^p(X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^p(f)} \mathsf{H}^p(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^p(g)} \mathsf{H}^p(Z^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^p(h)} \mathsf{H}^{p+1}(X^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβή στην $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.3.40. Η παραπάνω ακριβής ακολουθία καλείται **μακρά ακριβής ακολουθία της συνομολογίας (long exact sequence of cohomology)**, του διακεκριμένου τριγώνου:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

2.4 Παραγόμενες κατηγορίες

Η έννοια των παραγόμενων κατηγοριών μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι μία κατασκευή της ομολογικής άλγεβρας, και εισήχθηκε από του Alexander Grothendieck και τον μαθητή του Jean Louis Verdier λίγο μετά το 1960. Η βασική θεωρία αναπτύχθηκε στην εργασία του Jean Louis Verdier και δημοσιεύτηκε τελικά το 1996. Απαραίτητα στοιχεία για την ανάπτυξη της θεωρίας,

αποτελούν οι έννοιες των τριγωνισμένων κατηγοριών, καθώς και της τοπικοποίησης μιας κατηγορίας. Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε αυτή την κατασκευή καθώς και μερικές βασικές ισότητες.
Σκοπός μας θα είναι, ξεκινώντας από μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$, αφού θεωρήσουμε την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ η οποία όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, με κατάλληλο τρόπο, μπορεί να αποκτήσει τη δομή τριγωνισμένης κατηγορίας, να κάνουμε τοπικοποίηση ως προς μία συγκεκριμένη κλάση μορφισμών. Άρα θα πρέπει πρώτα να «δούμε» ποιους μορφισμούς της $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, θέλουμε να «κάνουμε» ισομορφισμούς.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένας μορφισμός συμπλόκων $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ θα καλείται* **ψευδο-ισομορφισμός (quasi-isomorphism)**, *εάν οι μορφισμοί $\mathsf{H}^p(f)\colon \mathsf{H}^p(X^\bullet) \to \mathsf{H}^p(Y^\bullet)$, είναι ισομορφισμοί για κάθε $p \in \mathbb{Z}$.*

Παρατήρηση 2.4.2.
1. Καταρχάς λόγω του λήμματος 2.3.18 εάν ένας μορφισμός $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ είναι ψευδο-ισομορφισμός, και ο μορφισμός $g\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ είναι ομοτοπικός με τον f, ο g θα είναι επίσης ψευδο-ισομορφισμός. Άρα κάνοντας κατάχρηση της γλώσσας, θα λέμε ότι ένας μορφισμός στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι ψευδο-ισομορφισμός, εάν όλοι οι εκπρόσωποί του είναι ψευδο-ισομορφισμοί.
2. Θα συμβολίζουμε τη κλάση όλων των ψευδο-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, ως S^*

Πριν αποδείξουμε ότι η κλάση μορφισμών S^* των ψευδο-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι συμβατή με την τριγωνική δομή της $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, είναι απαραίτητο να δώσουμε ένα βασικό ορισμό και ένα λήμμα:

Ορισμός 2.4.3. *Ένα αντικείμενο $X^\bullet$ της κατηγορίας $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ θα καλείται* **ακυκλικό (acyclic)**, *εάν $\mathsf{H}^p(X^\bullet) = 0$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$.*

Λήμμα 2.4.4. *Έστω ένα μορφισμός $f\colon X^\bullet \to Y^\bullet$ στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο μορφισμός f είναι ψευδο-ισομορφισμός.*
2. *Ο κώνος $\mathsf{C}_f^\bullet$ του μορφισμού f είναι ακυκλικός.*

Απόδειξη. Έστω καταρχάς ένα διακεκριμένο τρίγωνο με βάση τον f:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f"] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Τότε λόγω του πορίσμας τος 2.3.39, παίρνουμε μία μακρά ακριβή ακολουθία της συνομολογίας:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^p(X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^p(f)} \mathsf{H}^p(Y^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^p(Z^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^{p+1}(X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^{p+1}(f)} \mathsf{H}^{p+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Εάν ο f είναι ψευδο-ισομορφισμός, οι μορφισμοί $\mathsf{H}^p(f)$ και $\mathsf{H}^{p+1}(f)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $p \in \mathbb{Z}$, και άρα $\mathsf{H}^p(Z^\bullet) = 0$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Άρα το σύμπλοκο $Z^\bullet$ είναι ακυκλικό. Αντίστροφα, εάν το σύμπλοκο $Z^\bullet$ είναι ακυκλικό, έχουμε ότι $\mathsf{H}^p(Z^\bullet) = 0$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Άρα, ο $\mathsf{H}^p(f)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή ο f είναι ψευδο-ισομορφισμός. ■

Πρόταση 2.4.5. *Η κλάση S^*, όλων των ψευδο-ισομορφισμών στη $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$, είναι μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμώς συμβατή με την τριγωνική δομή της $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η κλάση S^* είναι μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών. Πρέπει γι αυτό το λόγο να ελέγξουμε τη ισχύ των ιδιοτήτων (LC1)-(LC4).
Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε σύμπλοκο $X^\bullet$, ο μορφισμός $id_{X^\bullet}$ είναι ψευδο-ισομορφισμός, καθώς το $0^\bullet$ είναι κώνος του ταυτοτικού μορφισμού, και αυτό είναι προφανώς ακυκλικό. Άρα το συμπέρασμα έπεται από το λήμμα 2.4.4. Άρα ικανοποιείται η (LC1).

Εάν s και t είναι δύο ψευδο-ισομορφισμοί,τότε οι $\mathsf{H}^p(s)$ και $\mathsf{H}^p(t)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Άρα οι μορφισμοί $\mathsf{H}^p(s \circ t) = \mathsf{H}^p(s) \circ \mathsf{H}^p(t)$ είναι επίσης ισομορφισμοί για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Άρα ο $s \circ t$ ανήκει στην κλάση S^*, και αποδείξαμε ότι ικανοποιείται και η (LC2).

Θεωρούμε τώρα δύο μορφισμούς $s^\bullet\colon X^\bullet \to Y\bullet$ και $f^\bullet\colon Z^\bullet \to Y^\bullet$, όπου ο μορφισμός $s^\bullet$ ανήκει στην κλάση S^*. Επομένως έχουμε ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[d, "f"'] \\ X^\bullet \arrow[r, "s"] & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & U^\bullet \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "s"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i"'] \end{tikzcd}$$

με βάση τον ψευδο-ισομορφισμό $s^\bullet$. Επειδή ο s είναι ψευδο-ισομορφισμός, από το λήμμα 2.4.4 έχουμε ότι το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό και από το αξίωμα (TR2), κάνοντας στροφή του παραπάνω διακεκριμένου τριγώνου, παίρνουμε το διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(s)"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ Y^\bullet \arrow[rr, "i"] & & U^\bullet \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο με βάση τον μορφισμό $i \circ f$:

$$\begin{tikzcd} & V^\bullet \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ Z^\bullet \arrow[rr, "i\circ f"] & & U^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Από τα παραπάνω φτιάχνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Z^\bullet \arrow[r, "i\circ f"] \arrow[d, "f"'] & U^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "id_{U^\bullet}"] & V^\bullet \arrow[r, "u"] & \Sigma(Z^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(v)"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "i"'] & U^\bullet \arrow[r, "p"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-\Sigma(s)"'] & \Sigma(Y^\bullet) \end{tikzcd}$$

Λόγω της (TR3), μπορούμε να το συμπληρώσουμε το παραπάνω διάγραμμα, σε ένα μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
Z^\bullet \arrow[r, "i\circ f"] \arrow[d, "f"'] & U^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "id_{U^\bullet}"] & V^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & \Sigma(Z^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(v)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "i"'] & U^\bullet \arrow[r, "p"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-\Sigma(s)"'] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Εφόσον το $U^\bullet$ είναι ακυκλικό, λόγω του λήμματος 2.4.4, ο u είναι ψευδο-ισομορφισμός. Άρα εάν εφαρμόσουμε τον Σ^{-1} στο τελευταίο μεταθετικό τετράγωνο και θέσουμε:

$$W^\bullet = V^\bullet[-1],\ t = u[-1] \text{ και } g = -v[-1]$$

τότε παίρνουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
W^\bullet \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & Z^\bullet \arrow[d, "f"'] \\
X^\bullet \arrow[r, "s"] & Y^\bullet
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι μορφισμοί s και t ανήκουν στην S^*. Άρα αποδείξαμε την (LC3a). Κατά δυικό τρόπο μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι ισχύει και η (LC3b).

Τώρα θα δειχτεί ότι ισχύει και η (LC4'). Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι αν $f \circ X^\bullet \to Y^\bullet$ είναι ένας μορφισμός, τότε ισχύει ότι $s \circ f = 0$ για κάποιον ψευδο-ισομορφισμό s, αν και μόνο αν υπάρχει ψευδο-ισομορφισμός t, έτσι ώστε $f \circ t = 0$.

Έστω ότι $s \circ f = 0$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-id_{\Sigma(X^\bullet)}"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "s"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i"'] & U^\bullet \arrow[r, "p"'] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

όπου η πρώτη γραμμή είναι το διακεκριμένο τρίγωνο που προκύπτει κάνοντας στροφή του διακεκριμένου τριγώνου που έχει ως βάση τον $id_{X^\bullet}$, και η δεύτερη γραμμή, είναι το διακεκριμένο τρίγωνο που έχει ως βάση τον s. Λόγω του (TR3), αυτό το διάγραμμα μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-id_{\Sigma(X^\bullet)}"] \arrow[d, "-v"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "s"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i"'] & U^\bullet \arrow[r, "p"'] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Άρα λόγω της μεταθετικότητας παίρνουμε ότι $f = p[-1] \circ v[-1]$. Εφόσον ο s είναι ψευδο-ισομορφισμός, το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό. Άρα αν θεωρήσουμε το διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & V^\bullet \arrow[dl, "t"', "{[1]}"] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "{v[-1]}"] & & U^\bullet[-1] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό $v[-1]$, βλέπουμε ότι ο t είναι ψευδο-ισομορφισμός λόγω του λήμματος 2.4.4. Επίσης λόγω της παρατήρησης 2.1.12 ισχύει και ότι $v[-1] \circ t = 0$. Άρα δείξαμε ότι υπάρχει μορφισμός $t \in S^*$, τέτοιος ώστε :

$$f \circ t = p[-1] \circ v[-1] \circ t = 0$$

Αντίστροφα, εάν $f \circ t = 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & Y^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & U^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z^\bullet \arrow[r, "id_{Z^\bullet}"'] & Z^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου η πρώτη γραμμή είναι το διακεκριμένο τρίγωνο με βάση τον μορφισμό t, και η δεύτερη γραμμή είναι το διακεκριμένο τρίγωνο που προκύπτει κάνοντας στροφή του διακεκριμένου τριγώνου με βάση τον ταυτοτικό μορφισμό $id_{Z^\bullet}$. Λόγω της (TR3) μπορούμε να συμπληρώσουμε το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & Y^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & U^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z^\bullet \arrow[r, "id_{Z^\bullet}"'] & Z^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Άρα λόγω της μεταθετικότητας έχουμε ότι $f = v \circ u$. Εφόσον ο t είναι ψευδο-ισομορφισμός, το $V^\bullet$ είναι ακυκλικό. Άρα αν θεωρήσουμε το διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & W^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ V^\bullet \arrow[rr, "v"] & & Z^\bullet \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

το οποίο έχει βάση τον μορφισμό v, βλέπουμε πάλι λόγω του λήμματος 2.4.4, ότι s είναι ψευδο-ισομορφισμός. Επίσης ισχύει και εδώ $s \circ v = 0$. Άρα βρήκαμε μορφισμό $s \in S^*$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$s \circ f = s \circ v \circ u = 0$$

Άρα αποδείχτηκε και η ισχύ της (LC4), και άρα δείξαμε ότι όντως η κλάση μορφισμών S^* είναι τοπικοποιούσα.
Μένει να δείξουμε ότι είναι συμβατή και με την τριγωνική δομή. Προφανώς καταρχάς, αν $s \in S^*$, δηλαδή ο s είναι ψευδο-ισομορφισμός, τότε και ο $\Sigma(s)$ είναι ψευδο-ισομορφισμός, και άρα ανήκει στην S^*. Άρα ισχύει η (LT1).
Από την άλλη, έστω ένας μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(s)"] \\ X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

όπου οι μορφισμοί s και t είναι ψευδο-ισομορφισμοί. Άρα τότε εφαρμόζοντας τον H, πάιρνουμε για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}^p(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^p(s)"'] & \mathsf{H}^p(Y^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^p(t)"'] & \mathsf{H}^p(Z^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^p(u)"'] & \mathsf{H}^{p+1}(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^{p+1}(s)"] & \mathsf{H}^{p+1}(Y^\bullet) \arrow[d, "\mathsf{H}^{p+1}(t)"] \\ \mathsf{H}^p(X_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^p(Y_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^p(Z_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^{p+1}(X_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^{p+1}(Y_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

όπου οι $\mathsf{H}^p(s), \mathsf{H}^p(t), \mathsf{H}^{p+1}(s)$ και $\mathsf{H}^{p+1}(t)$ είναι ισομορφισμοί. Άρα από το five lemma, και ο $\mathsf{H}^p(u)$ είναι ισομορφισμός. Εφόσον $p \in \mathbb{Z}$ είναι τυχάιο, ο u είναι ψευδο-ισομορφισμός. Άρα ισχύει και η (LT2), και αποδείχτηκε το ζητούμενο. ■

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την παραγόμενη κατηγορία μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$.

Ορισμός 2.4.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορίας και $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων η οποία αντιστοιχεί στην $\mathcal{A}$. Τότε η τοπικοποίηση της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ως προς την κλάση μορφισμών S^*, όλων των ψευδο-ισομορφισμών, καλείται* **παραγόμενη κατηγορία (derived category)** *της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.*

Παρατήρηση 2.4.7.

1. Η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ μιας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία. Όπως είδαμε η ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι τριγωνισμένη, και επίσης δείξαμε ότι η κλάση μορφισμών S^* είναι συμβατή με την τριγωνική δομή της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Άρα λόγω του θεωρήματος 2.1.23 παίρνουμε το παραπάνω.

2. Έστω όπως είπαμε $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ η παραγόμενη κατηγορία μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Τότε θα συμβολίζουμε με $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορίας της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από τα σύμπλοκα τα οποία είναι φραγμένα από πάνω. Αντίστοιχα θα συμβολίζουμε με $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορίας της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από τα σύμπλοκα τα οποία είναι φραγμένα από κάτω, και με $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορίας της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από τα φραγμένα σύμπλοκα. Θα χρησιμοποιούμε και για τις παραγόμενες κατηγορίες, τον συμβολισμό $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$, εάν δεν μας ενδιαφέρει για ποια από τις τρεις παραπάνω υποκατηγορίες συγκεκριμένα μιλάμε.

3. Εξ ορισμού ο συνομολογικός συναρτητής $\mathsf{H}^0 \colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, απεικονίζει ψευδο-ισομορφισμούς της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ σε ισομορφισμούς της κατηγορίας $\mathcal{A}$. Άρα λόγω του δυϊκού του θεωρήματος 2.1.25, επάγεται και ένας συνομολογικός συναρτητής από την $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ στην $\mathcal{A}$, ο οποίος επίσης θα συμβολίζεται με H^0.

Σχόλιο 2.4.8. Την κλάση όλων των ψευδο-ισομορφισμών στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ θα την συμβολίζουμε με $\tilde{S}^*$.

Προφανώς, ανάμεσα στις κατηγορίες $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$, $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ υπάρχουν οι κανονικούς συναρτητές:

$$\mathsf{C}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$$

Επίσης, κάθε ψευδο-ισομορφισμό s της κατηγορίας $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$, επάγει έναν ισομορφισμό στην $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$. Άρα από τον ορισμό 1.1.36 έχουμε ότι η παραπάνω σύνθεση συναρτητών αναλύεται μέσω της τοποικοποίησης $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}]$. Δηλαδή έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^*(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{Q}"'] & \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \arrow[d, "Q"] \\
\mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}] \arrow[r, "\iota"'] & \mathsf{D}^*(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

Θεώρημα 2.4.9. *Ο συναρτητής $\iota \colon \mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}] \to \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ είναι ισομορφισμός κατηγοριών.*

Απόδειξη. Καταρχάς προφανώς ο ι είναι ταυτότητα στα αντικείμενα.
Έστω $X^\bullet$ και $Y^\bullet$ δύο αντικείμενα της $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$ και $f, g \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ δύο ομοτοπικοί μορφισμοί. Θα δείξουμε ότι $\tilde{Q}(f) = \tilde{Q}(g)$.
Καταρχάς έχουμε ένα μεταθετικό ως προς ομοτοπία διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[d, "id_{Y^\bullet}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "g"'] & Y^\bullet
\end{tikzcd}$$

Από την απόδειξη του λήμματος 2.3.25, έχουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός $u\colon \mathsf{C}^b_f ul \to \mathsf{C}^b_g ul$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "i_g"'] & \mathsf{C}^b_f ul \arrow[dl, "u"] \\ \mathsf{C}^b_g ul & \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$ και:

$$u^n = \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ -h^{n+1} & id_{Y^n} \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Λόγω πάλι του λήμματος 2.3.25, για το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "id_{Y^\bullet}"'] & \mathsf{C}^\bullet_f \arrow[d, "u"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "i_g"'] & \mathsf{C}^\bullet_g \end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός $v\colon \mathsf{D}^b_f ul \to \mathsf{D}^b_g ul$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}^b_f ul \arrow[r, "P_{i_f}"] \arrow[d, "v"'] & Y^b ul \\ \mathsf{D}^b_g ul \arrow[ur, "p_{i_g}"] & \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$ και

$$v^n = \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & -h^{n+1} & id_{Y^n} \end{bmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα αν α και β οι μορφισμοί που ορίστηκαν στην παρατήρησα 2.3.26 παίρνουμε τα παρακάτω:

$$\beta^n_g \circ v^n = \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} id_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & -h^{n+1} & id_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix} = \beta^n_f$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $\beta_g \circ v = \beta_f$ στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$. Αυτό με τη σειρά του μας δίνει ότι $\beta_g[-1] \circ v[-1] = \beta_f[-1]$ και:

$$\tilde{Q}(\beta_g[-1]) \circ \tilde{Q}(v[-1]) = \tilde{Q}(\beta_f[-1])$$

Λόγω του λήμματος 2.3.27, οι μορφισμοί $\beta_f[-1]\colon \mathsf{D}^\bullet_f[-1] \to X^\bullet$ και $\beta_g[-1]\colon \mathsf{D}^\bullet_g[-1] \to X^\bullet$ είναι ισομορφισμοί στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων. Άρα είναι και ψευδο-ισομορφισμοί. Άρα οι μορφισμοί $\tilde{Q}(\beta_f[-1])$ και $\tilde{Q}(\beta_g[-1])$ είναι ισομορφισμοί στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}]$. Από την απόδειξη του λήμματος 2.3.27, έχουμε ότι $\beta_f[-1] \circ \alpha_f[-1] = id_{X^\bullet}$ και $\beta_g[-1] \circ \alpha_g[-1] = id_{X^\bullet}$. Άρα:

$$\tilde{Q}(\beta_f[-1]) \circ \tilde{Q}(\alpha_f[-1]) = id_{X^\bullet} \text{ και } \tilde{Q}(\beta_g[-1]) \circ \tilde{Q}(\alpha_g[-1]) = id_{X^\bullet}$$

οπότε:

$$\tilde{Q}(\alpha_f[-1]) = \tilde{Q}(\beta_f[-1])^{-1} \text{ και } \tilde{Q}(\alpha_g[-1]) = \tilde{Q}(\beta_g[-1])^{-1}$$

Άρα από τα παραπάνω καταλήσουμε στο ότι:

$$\tilde{Q}(v[-1]) \circ \tilde{Q}(\alpha_f[-1]) = \tilde{Q}(\alpha_g[-1])$$

Επίσης, από το λήμμα 2.3.28 το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-\Sigma(f)"] \arrow[d, "\alpha_f"'] & \Sigma(Y^\bullet) \\
\mathsf{D}_f^\bullet \arrow[ur, "p_{i_f}"] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$. Εφαρμόζοντας τον Σ^{-1} και αλλάζοντας τα πρόσημα των μορφισμών, παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_f[-1]"'] & Y^\bullet \\
\mathsf{D}_f^\bullet[-1] \arrow[ur, "-p_{i_f}[-1]"] &
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})$. Άρα $f = -p_{i_f}[-1] \circ \alpha_f[-1]$.
Ομοίως παίρνουμε και ότι $g = -p_{i_g}[-1] \circ \alpha_g[-1]$. Άρα συνολικά:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(f) &= -\tilde{Q}(p_{i_f}[-1]) \circ \tilde{Q}(\alpha_f[-1]) \\
&= -\tilde{Q}(p_{i_g}[-1]) \circ \tilde{Q}(v[-1]) \circ \tilde{Q}(\alpha_f[-1]) = -\tilde{Q}(p_{i_g}[-1]) \circ \tilde{Q}(\alpha_g[-1]) = \tilde{Q}(g)
\end{aligned}$$

Εφόσον $\tilde{Q}(f) = \tilde{Q}(g)$, ο φυσικός συναρτητής πηλίκο $\tilde{Q} \colon \mathsf{C}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}]$ αναλύεται μέσω της κατηγορίας $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$. Άρα παίρνουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^*(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{Q}"'] & \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \arrow[d, "Q"] \arrow[dl, "\phi"'] \\
\mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}] \arrow[r, "\iota"'] & \mathsf{D}^*(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

στο οποίο το τετράγωνο και το πάνω αριστερά τρίγωνο είναι μεταθετικά. Όμως εφόσον ο πάνω συναρτητής $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι ταυτότητα στα αντικέιμενα και «επί» στους μορφισμούς, αναγκαστικά και το κάτω δεξιά τρίγωνο θα είναι μεταθετικό. Επίσης εφόσον ο συναρτητής ϕ απεικονίζει ψευδο-ισομορφισμούς σε ισομορφισμούς, λόγω της οικουμενικής ιδιότητας της τοπικοποίησης, θα αναλύεται μέσω της κατηγορίας $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$. Άρα θα έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \\
\mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\psi"'] & \mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}] \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Άρα $Q = \iota \circ \psi \circ Q$ και από την οικουμενική ιδιότητα της τοπικοποίησης παίρνουμε ότι $\iota \circ \psi = id_{\mathsf{D}^*(\mathcal{A})}$. Ενώνοντας τα παραπάνω δύο διαγράμματα, παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^*(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{Q}"'] & \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q"] \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \\
\mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}] \arrow[r, "\iota"'] & \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\psi"'] & \mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}] \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Λόγω της οικουμενικής ιδιότητας της τοπικοποίησης ξανά. αυτή τη φορά για την $\mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}]$, παίρνουμε ότι $\psi \circ \iota = id_{\mathsf{C}^*(\mathcal{A})[\tilde{S}^{*-1}]}$. Άρα ο ι είναι ισομορφισμός κατηγοριών. ■

Κεφάλαιο 3

Τοπικοποίηση Bousfield και Recollements

3.1 Τοπικοποίηση Bousfield

Έως τώρα έχουμε ασχοληθεί με την κατασκευή της τοπικοποίησης μίας κατηγορίας ως προς ένα σύνολο. Όταν κάνουμε αυτήν την κατασκευή δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βεβαιότητα το κατά πόσο «μεγάλη» είναι η καινούρια μας κατηγορία. Ωστόσο όπως θα δούμε και σε αυτήν την παράγραφο εάν υπάρχει ένας δεξιός συζυγής του κανονικού συναρτητή τοπικοποίησης, τότε η καινούρια κατηγορία μπορεί κατά φυσιολογικό τρόπο να θεωρηθεί ως υποκατηγορία της αρχικής μας κατηγορίας. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις συνέπειες της ύπαρξης αυτού του δεξιού συζυγή και τα αποτελέσματα τα οποία θα αναφέρουμε μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο του Neeman [18].
Ξεκινάμε λοιπόν δίνοντας τον πρώτο βασικό Ορισμό, όπου ορίζουμε την έννοια της Bousfield τοπικοποίησης.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία με μικρά* Hom*-σύνολα. Έστω επίσης $\mathcal{S}$ μία thick υποκατηγορία της. Θα λέμε ότι υπάρχει ένας* **Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης (Bousfield localisation functor)** *για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, όταν υπάρχει ένας δεξιός συζυγής του κανονικού συναρτητή*

$$F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}.$$

Καλούμε αυτόν τον συζυγή συναρτητή, Bousfield συναρτητή τοπικοποίησης και τον συμβολίζουμε με $G\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$.

Λήμμα 3.1.2. *Έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Έστω s ένα αντικείμενο στην S, και t ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, δηλαδή αντικείμενο και της κατηγορίας $\mathcal{T}$. Όλοι οι μορφισμοί $s \to Gt$ είναι μηδενικοί.*

Απόδειξη. Λόγω της συζυγίας των συναρτητών F, G έχουμε έναν ισομορφισμό

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(s, Gt) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fs, t),$$

για κάθε αντικείμενο t στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ και s στην $\mathcal{S}$. Αλλά εφόσον $s \in \mathcal{S}$, έχουμε ότι $Fs = 0$, και άρα το συμπέρασμα είναι άμεσο από τον παραπάνω ισομορφισμό. ∎

Συνεχίζουμε δίνοντας ακόμη δύο βασικούς ορισμούς οι οποίοι χαρακτηρίζουν ορισμένα αντικείμενα.

Ορισμός 3.1.3. *Έστω $\mathcal{S}$ μία κλάση αντικειμένων στην κατηγορία $\mathcal{T}$. Ένα αντικείμενο t της $\mathcal{T}$ θα καλείται* **$\mathcal{S}$-τοπικό ($\mathcal{S}$-local)** *, εάν για κάθε αντικείμενο s στην $\mathcal{S}$, ο μορφισμός $s \to t$*

είναι ο μηδενικός. Εάν επιπλέον η $\mathcal{S}$ δεν είναι απλώς μία κλάση αντικειμένων, αλλά μία thick υποκατηγορία, και αν υπάρχει ένας Bousfield συναρτητή τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, τότε ουσιαστικά το Λήμμα 3.1.2, αποδεικνύει ότι για κάθε $t \in \mathcal{T}$, το αντικείμενο Gt είναι $\mathcal{S}$-τοπικό.

Κατά δυικό τρόπο ορίζονται και τα $\mathcal{S}$-συντοπικά αντικείμενα.

Ορισμός 3.1.4. *Έστω $\mathcal{S}$ μία κλάση αντικειμένων σε μία τριγωνιμένη κατηγορία $\mathcal{T}$. Ένα αντικείμενο t της $\mathcal{T}$ θα καλείται* $\mathcal{S}$-**συντοπικό** ($\mathcal{S}$-**colocal)** , *εάν για κάθε αντικείμενο s στην $\mathcal{S}$, ο μορφισμός $t \to s$ είναι ο μηδενικός.*

Λήμμα 3.1.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη υποκατηγροία της. Έστω t ένα $\mathcal{S}$-τοπικό αντικείμενο στην $\mathcal{T}$. Τότε ο φυσικός χάρτης*

$$\phi\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x,t) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fx, Ft),$$

είναι ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο x στην $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Ένας μορφισμός $Fx \to Ft$ στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$, αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & x' \arrow[dl, "\alpha"', "\sim"] \arrow[dr] & \\ x & & t \end{tikzcd}$$

όπου $a \in Mor_{\mathcal{S}}$, (δες 2.1.33 και [18]). Για να δείξουμε ότι ο ϕ είναι Επί, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός $x \to t$ στην $\mathcal{T}$, ο οποίος ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας του παραπάνω αριστερού roof. Εφόσον ο $a \in Mor_{\mathcal{S}}$ υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$s \to x' \xrightarrow{\alpha} x \to \Sigma s$$

όπου το αντικείμενο s είναι στην $\mathcal{S}$. Εφαρμόζοντας σε αυτό το διακεκριμένο τρίγωνο τον συνομολογικό συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{-}, t)$, παίρνουμε μία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma s, t) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, t) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\alpha, t)} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x', t) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(s, t).$$

Εφόσον και το s και το Σs ανήσουν στην $\mathcal{S}$, και το t είναι $\mathcal{S}$-τοπικό, οι ομάδες $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(s,t)$ και $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma s, t)$ είναι μηδενικές. Άρα ο χάρτης $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\alpha, t)$ είναι ισομορφισμός, και άρα υπάρχει ένας μορφισμός $x \to t$ στην $\mathcal{T}$, ο οποίος κάνει το παρακάτω τετράγωνο μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & t \arrow[d, "1"'] \\ x \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

Επομένως έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & x' \arrow[dl, "\alpha"', "\sim"] \arrow[dr] & \\ x & x' \arrow[u, "1"'] \arrow[d, "\alpha"] & t \\ & x \arrow[ul, "1", "\sim"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

το οποίο μας δείχνει ότι ο παραπάνω μορφισμός $x \to t$ ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & x' \arrow[dl, "\alpha"', "\sim"] \arrow[dr] & \\ x & & t \end{tikzcd}$$

και άρα ο ϕ είναι Επί.
Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι ο ϕ είναι και 1-1. Έστω ένας μορφισμός $x \to t$ στον πυρήνα του ϕ, δηλαδή ο μορφισμός αυτός γίνεται μηδενικός στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Επομένως υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "1"', "\sim"] \arrow[dr] & \\
x & w \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha"] & t \\
& x \arrow[ul, "1", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Άρα υπάρχει μορφισμός $\alpha\colon w \to x$, ο οποίος ανήκει στο $Mor_{\mathcal{S}}$, τέτοιος ώστε η σύνθεσή του με τον $x \to t$ να είναι ο μηδενικός μορφισμός. Άρα εφαρμόζωντας στο διακεκριμένο τρίγωνο

$$w \xrightarrow{\alpha} x \to z \xrightarrow{\Sigma} w,$$

τον συνομολογικό συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{-}, t)$, βλέπουμε ότι εφόσον η σύνθεση $w \to x \to t$ είναι ο μηδενικό μορφισμός, θα πρέπει ο $x \to t$ να αναλύεται μέσω του z. Το z όμως ανήκει στην $\mathcal{S}$, εφόσον ο α ανήκει στο $Mor_{\mathcal{S}}$. Άρα ο μορφισμός $x \to t$ γράφεται και ως

$$x \to z \to t.$$

Αλλά το t είναι $\mathcal{S}$-τοπικό και άρα η παραπάνω σύνθεση είναι ο μηδενικός μορφισμός. ■

Παρατήρηση 3.1.6. Εάν υποθέσουμε την υπάρξη ένας Bousfield συναρτητή τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, τότε έχουμε μία συζυγία συναρτητών (F, G) . Εφόσον ο τα αντικείμενα της $\mathcal{T}$ και της $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι ουσιαστικά τα ίδια, ένα αντικείμενο t της T, θα το θεωρούμε και αντικείμενο της $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ και δε θα γράφουμε Ft.

Λήμμα 3.1.7. *Έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, και t ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$. Τότε ο κανονικός χάρτης της μονάδας της συζυγίας $\eta_t\colon t \to Gt$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$.*

Απόδειξη. Καταρχάς θα διατυπώσουμε πιο λεπτομερώς αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε. Από τη συζυγία των συναρτητών (F, G), έχουμε έναν φυσικό μετασχηματισμό, την μονάδα της συζυγίας

$$\eta\colon 1 \to GF.$$

Για κάθε αντικείμενο t στην $\mathcal{T}$, η μονάδα της συζυγίας μας δίνει έναν μορφισμό στην $\mathcal{T}$, $t \to GFt$. Εμείς θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτός ο μορφισμός γίνεται ισομορφισμός στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να δείξουμε ότι ο

$$F\eta\colon F \to FGF,$$

είναι ισομορφισμός. Επιπλέον έχουμε και τη συνμονάδα της συζυγίας

$$\varepsilon\colon FG \to 1.$$

Είναι γνωστό ότι η σύνθεση

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F, \tag{3.1}$$

είναι πάντα η ταυτότητα. Δηλαδή ο $F\eta$ έχει πάντα έναν αριστερό αντίτροφο. Εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι ο αριστερός του αντίστροφος, είναι και δεξιός του αντίστροφος.
Έστω αντικείμενα x, t στην $\mathcal{T}$. Από τη συζυγία έχουμε ότι ισχύει:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fx, Ft) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, GFt).$$

Ο φυσικός χάρτης που οφείλεται στην μονάδα, στέλνει τον μορφισμό $f\colon Fx \to Ft$ στη σύνθεση

$$x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{Gf} GFt.$$

Από την άλλη όμως, έχουμε ότι το GFt είναι $\mathcal{S}$-τοπικό, λόγω του Λήμματος 3.1.2. Άρα λόγω του Λήμματος 3.1.5, έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fx, FGt) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, GFt).$$

Από τους παραπάνω ισομορφισμούς έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fx, Ft) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fx, FGt),$$

και αυτός ο ισομορφισμός επάγεται στέλνοντας τον μορφισμό $f\colon Fx \to Ft$ στην σύνθεση

$$Fx \xrightarrow{F\eta_x} FGFx \xrightarrow{FGf} FGFt.$$

Από την φυσικότητα της συνμονάδας $\varepsilon\colon FG \to 1$ έχουμε τώρα ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} FGFx \arrow[r, "FGf"] \arrow[d, "\varepsilon_{Fx}"] & FGFt \arrow[d, "\varepsilon_{Ft}"] \\ Fx \arrow[r, "f"] & Ft \end{tikzcd}.$$

Επομένως η σύνθεση

$$Fx \xrightarrow{F_{\eta_x}} FGFx \xrightarrow{FGf} FGFt \xrightarrow{\varepsilon_{Ft}},$$

είναι ίση με τη σύνθεση

$$Fx \xrightarrow{F_{\eta_x}} FGFx \xrightarrow{\varepsilon_{Fx}} FGFt \xrightarrow{f}.$$

Καθώς όμως η σύνθεση 3.1 είναι ο ταυτοτικός μορφισμός, η δεύτερη σύνθεση παραπάνω είναι απλά ο μορφισμός $f\colon Fx \to Ft$. Επομένως, συνθέτωντας με τον $\varepsilon_{Ft}\colon FGFt \to Ft$ παίρνουμε τον αντίστροφο του ισομορφισμού

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fx, Ft) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(Fx, FGt).$$

Επομένως ο ε_{Ft} είναι ισομορφισμός. Αλλά, από τη σύνθεση 3.1, $\varepsilon_{Ft} \circ F_{\eta_t} = 1$, και άρα ο F_{η_t} θα πρέπει είναι το αμφίπλευρο αντίστροφο του ε_{Ft}. Άρα και ο F_{η_t} είναι ισομορφισμός. ■

Πρόταση 3.1.8. *Έστω ότι η $\mathcal{S}$ είναι μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, και έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Έστω επίσης ένα αντικείμενο t στην $\mathcal{T}$. Τότε στο διακεκριμένο τρίγωνο*

$$t_{\mathcal{S}} \to t \xrightarrow{\eta_t} Gt \to \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

το αντικείμενο Gt είναι $\mathcal{S}$-τοπικό, ενώ το αντικείμενο $t_{\mathcal{S}}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$.

Απόδειξη. Καταρχάς το γεγονός ότι το Gt είναι $\mathcal{S}$-τοπικό το αποδείξαμε στο Λήμμα 3.1.2. Επίσης από το Λήμμα 3.1.7, ο μορφισμός η_t είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Τότε όμως από την Πρόταση 2.1.35 στο βιβλίο του Neeman [18], η τρίτη κορυφή του τριγώνου θα πρέπει να είναι ευθύς αθροιστέος ενός αντικειμένου της $\mathcal{S}$. Αλλά η $\mathcal{S}$ είνα thick, οπότε περιέχει όλους τους ευθύς αθροιστέους των αντικειμένων της, και άρα το $t_{\mathcal{S}}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$. ■

Πόρισμα 3.1.9. *Έστω ότι η $\mathcal{S}$ είναι μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, και έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Έστω επίσης ένα αντικείμενο t στην $\mathcal{T}$ το οποίο είναι $\mathcal{S}$-τοπικό. Τότε ο μορφισμός $t \to Gt$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη. Έστω t ένα $\mathcal{S}$-τοπικό αντικείμενο. Από την Πρόταση 3.1.8, στο διακεκριμένο τρίγωνο

$$t_{\mathcal{S}} \to t \xrightarrow{\eta_t} Gt \to \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

το αντικείμενο $t_{\mathcal{S}}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$. Επομένως ο μορφισμός $t_{\mathcal{S}} \to t$ πρέπει να είναι ο μηδενικός, καθώς το t είναι $\mathcal{S}$-τοπικό. Αλλά τότε πρέπει να ισχύει $Gt \cong t \oplus \Sigma t_{\mathcal{S}}$. Από το Λήμμα 3.1.2 έχουμε όμως ότι και το Gt είναι $\mathcal{S}$-τοπικό. Άρα ο μορφισμός

$$\Sigma t_{\mathcal{S}} \to Gt \cong t \oplus \Sigma t_{\mathcal{S}}$$

είναι ένας μορφισμός από ένα αντικείμενο της $\mathcal{S}$ σε ένα $\mathcal{S}$-τοπικό αντικείμενο. Άρα πρέπει να είναι ο μηδενικός μορφισμός. Αλλά αυτός είναι η κανονική έγκλιση ενός ευθέως αθροίσματος, οπότε το $t_{\mathcal{S}}$ θα πρέπει να είναι ισόμορφο με το 0, και άρα ο $\eta_t : t \to Gt$ είναι ισομορφισμός. ■

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω οφείλουμε να δώσουμε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1.10. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S}$ μία κλάση αντικειμένων στην $\mathcal{T}$. Τότε η κατηγορία ${}^{\perp}\mathcal{S}$ ορίζεται να είναι η πλήρης υποκατηγορία όλων των $\mathcal{S}$-τοπικών αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Δηλαδή*

$${}^{\perp}\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{T} | \forall s \in \mathcal{S}, \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(s, x)\}.$$

Κατά δυικό τρόπο ορίζουμε και την πλήρη υποκατηγορία όλων των $\mathcal{S}$-συντοπικών αντικειμένων της $\mathcal{T}$.

Ορισμός 3.1.11. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S}$ μία κλάση αντικειμένων στην $\mathcal{T}$. Τότε η κατηγορία $\mathcal{S}^{\perp}$ ορίζεται να είναι η πλήρης υποκατηγορία όλων των $\mathcal{S}$-συντοπικών αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Δηλαδή*

$$\mathcal{S}^{\perp} = \{x \in \mathcal{T} | \forall s \in \mathcal{S}, \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, s)\}.$$

Το επόμενο Λήμμα είναι προφανές, αλλά απαραίτητο, καθώς θέλουμε να δουλεύουμε σε thick υποκατηγορίες μίας τριγωνισμένης κατηγορίας.

Λήμμα 3.1.12. *Έστω $\mathcal{S}$ μία κλάση αντικειμένων μίας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$. Τότε και οι δύο υποκατηγορίες ${}^{\perp}\mathcal{S}$ και $\mathcal{S}^{\perp}$, είναι thick υποκατηγορίες της $\mathcal{T}$. Εάν επιπλέον η $\mathcal{T}$ είναι συνπλήρης, τότε η ${}^{\perp}\mathcal{S}$ είναι τοπικοποιούσα , ενώ εάν η $\mathcal{T}$ είναι πλήρης, τότε η $\mathcal{S}^{\perp}$ είναι συντοπικοποιούσα.*

Θεώρημα 3.1.13. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S}$ μία thick υποκατηγορία της. Τότε ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης υπάρχει για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ αν και μόνο αν, για κάθε αντικείμενο t στην $\mathcal{T}$, υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{T}$*

$$t_{\mathcal{S}} \longrightarrow t \longrightarrow_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}} t \longrightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

όπου το $t_{\mathcal{S}}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$ και το ${}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t$ ανήκει στην ${}^{\perp}\mathcal{S}$.

Απόδειξη. Έστω καταρχάς ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης υπάρχει για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Τότε από την Πρόταση 3.1.8, έχουμε απευθείας το ζητούμενο.
Έστω τώρα ότι για κάθε αντικείμενο t στην $\mathcal{T}$, υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$t_{\mathcal{S}} \to t \xrightarrow{\alpha}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}} t \to \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

όπου το $t_{\mathcal{S}}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$ και το ${}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t$ ανήκει στην ${}^{\perp}\mathcal{S}$. Εφόσον $t_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$, ο μορφισμός α ανήκει στο $Mor_{\mathcal{S}}$ και άρα γίνεται ισομορφισμός στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Άρα

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(x, t) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(x, {}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t).$$

Από την άλλη, το αντικείμενο ${}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t$ είναι $\mathcal{S}$-τοπικό και άρα από το Λήμμα 3.1.5 έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(x, {}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, {}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο ισοδυναμίες έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(x, t) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, {}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t).$$

Επομένως εάν ορίσουμε το αντικείμενο Gt να είναι το ${}_{\{^\perp\mathcal{S}\}}t$, έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(\text{-}, t) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{-}, Gt).$$

Επομένως το αντικείμενο $Gt =_{\{^\perp\mathcal{S}\}} t$ είναι μοναδικό ως προς κανονικό ισομορφισμό, και ο G επεκτείνεται σε έναν συναρτητή, ο οποίος είναι δεξιός συζυγής του F. ∎

Πόρισμα 3.1.14. *Έστω $\mathcal{S}$ μία thick υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, και έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Τότε υπάρχει επίσης ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\{^\perp\mathcal{S}\}^{op} \subset \mathcal{T}^{op}$, και*

$$\{^\perp\mathcal{S}\}^\perp = \mathcal{S}.$$

Απόδειξη. Εφόσον υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, το Θεώρημα 3.1.13 μας λέει ότι για κάθε $t \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$t_{\mathcal{S}} \longrightarrow t \longrightarrow_{\{^\perp\mathcal{S}\}} t \longrightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

όπου $t_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ και ${}_{\{^\perp\mathcal{S}\}}t \in^\perp \mathcal{S}$. Αλλά εφόσον η $\mathcal{S}$ κατά προφανές λόγο εμπεριέχεται στην $\{^\perp\mathcal{S}\}^\perp$, μπορούμε να δούμε το $t_{\mathcal{S}}$ ως αντικείμενο της $\{^\perp\mathcal{S}\}^\perp$, και το δυικό του Θεωρήματος 3.1.13, μας λέει ότι υπάρχει ένας αριστερός συζυγής για τον κανονικό συναρτητή

$$U \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/^\perp\mathcal{S}.$$

Δηλαδή υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\{^\perp\mathcal{S}\}^{op} \subset \mathcal{T}^{op}$. Συμβολίζουμε αυτόν τον συναρτητή ως

$$L \colon \mathcal{T}/^\perp\mathcal{S} \to \mathcal{T}.$$

Τώρα για κάθε αντικείμενο t στην $\mathcal{T}$, έχουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{T}$

$$LUt \longrightarrow t \longrightarrow c \longrightarrow \Sigma LUt,$$

όπου $c \in^\perp \mathcal{S}$ και $LUt \in \{^\perp\mathcal{S}\}^\perp$. Αλλά παραπάνω το ταυτίσαμε αυτό το διακεκριμένο τρίγωνο, με το διακεκριμένο τρίγωνο

$$t_{\mathcal{S}} \longrightarrow t \longrightarrow_{\{^\perp\mathcal{S}\}} t \longrightarrow \Sigma t_{\mathcal{S}}.$$

Επομένως έχουμε ότι το $LUt = t_{\mathcal{S}}$ ανήκει στην $\mathcal{S} \subset \{^\perp\mathcal{S}\}^\perp$, για κάθε t.
Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε ότι ισχύει και $\{^\perp\mathcal{S}\}^\perp \subset \mathcal{S}$. Έστω $t \in \{^\perp\mathcal{S}\}^\perp$, δηλαδή το t είναι $^\perp\mathcal{S}$-συνοτπικό. Από το δυικό του Πορίσματος 3.1.9 έχουμε ότι ο μορφισμός $LUt \to t$ είναι ισομορφισμός. Άρα λόγω των παραπάνω $t \in \mathcal{S}$ και συνολικά $\{^\perp\mathcal{S}\}^\perp = \mathcal{S}$. ∎

Θεώρημα 3.1.15. *Έστω $\mathcal{S}$ μία thick υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, και έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Τότε η υποκατηγορία $^\perp\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ είναι ισοδύναμη με την $\mathcal{T}/\mathcal{S}$. Ακριβέστερα, η σύνθεση*

$$^\perp\mathcal{S} \xrightarrow{inc} \mathcal{T} \xrightarrow{F} \mathcal{T}/\mathcal{S},$$

είναι μία ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Καταρχάς το γεγονός ότι η σύνθεση των

$$^\perp\mathcal{S} \xrightarrow{inc} \mathcal{T} \xrightarrow{F} \mathcal{T}/\mathcal{S},$$

είναι πλήρης και πιστός συναρτητής, οφείλεται απευθείας στο Λήμμα 3.1.5, καθώς εκεί αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{T}$ και $y \in^\perp \mathcal{S}$,

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(x, y) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(x, y)$$

και προφανώς το ίδιο ισχύει και όταν $x \in^{\perp} \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$. Οπότε οι μορφισμοί μεταξύ των $\mathcal{S}$-τοπικών αντικειμένων, είναι οι ίδιοι στην $\mathcal{T}$ και στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$.
Επίσης κάθε αντικείμενο t της $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο στην ${}^{\perp}\mathcal{S}$, καθώς στο Λήμμα 3.1.7, αποδείξαμε ότι ο $\eta_t\colon t \to Gt$ είναι πάντα ισομορφισμός στην $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ και στο Λήμμα 3.1.2 αποδείξαμε ότι $Gt \in^{\perp} \mathcal{S}$. ■

Παρατήρηση 3.1.16. Έστω $\mathcal{S}$ μία thick υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, και έστω ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Τότε το Θεώρημα 3.1.15 μας δείχνει ότι η κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ μπορεί αν εμφυτευθεί ως μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, γεγονός που είναι πολύ σημαντικό. Η σημασία αυτής της παρατήρησης έγκειται στο γεγονός ότι εάν οι κατηγορία $\mathcal{T}$ έχει μικρά Hom-σύνολα, τότε θα πρέπει το ίδιο να ισχύει και για την $\mathcal{T}/\mathcal{S}$.

Πρόταση 3.1.17. *Έστω $\mathcal{S}$ μία thick υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$.Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{T}$ έχει μικρά* Hom*-σύνολα. Ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης υπάρχει για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ αν και μόνο αν η κανονική έγκλιση $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή.*

Απόδειξη. Εάν ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης υπάρχει για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, τότε από το Πόρισμα 3.1.14, η κανονική προβολή $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/{}^{\perp}\mathcal{S}$ έχει έναν αριστερό συζυγή, ο οποίος εμφυτεύει την $\mathcal{T}/{}^{\perp}\mathcal{S}$ ως $\mathcal{S} = \{{}^{\perp}\mathcal{S}\}^{\perp} \subset \mathcal{T}$. Δηλαδή η εμφύτευση $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/{}^{\perp}\mathcal{S}$.
Υποθέτουμε τώρα ότι η κανονική έγκλιση $I\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζυγή $J\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$. Για κάθε αντικείμενο t στην $\mathcal{T}$, θεωρούμε την μονάδα της συζυγίας $IJt \to t$ και συμπληρώουμε αυτόν τον μορφισμό σε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$IJt \longrightarrow t \longrightarrow z \longrightarrow \Sigma IJt.$$

Προφανώς καταρχάς $IJt \in \mathcal{S}$. Τώρα λόγω της συζυγία έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, t) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(x, Jt) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, IJt),$$

όπου η ισότητα $\mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(x, Jt) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, IJt)$ έπεται από το γεγονός ότι η $\mathcal{S}$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, και άρα ο I είναι πλήρης και πιστός. Εφαρμόζοντας τώρα στο παραπάνω διακεκριμένο τρίγωνο τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, \text{-})$, παίρνουμε μία μακρά ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, Ijt) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, t) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, z) \longrightarrow \cdots.$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathcal{S}$ θα πρέπει να ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Ix, z) = 0$. Δηλαδή $z \in^{\perp} \mathcal{S}$. Επομένως έχουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$t_{\mathcal{S}} \to t \to_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}} t \to \Sigma t_{\mathcal{S}},$$

όπου $t_{\mathcal{S}} = Ijt \in \mathcal{S}$ και ${}_{\{{}^{\perp}\mathcal{S}\}}t = z \in^{\perp} \mathcal{S}$. Άρα από το Θεώρημα 3.1.13 παίρνουμε ότι υπάρχει ένας Bousfield συναρτητής τοπικοποίησης για το ζευγάρι $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. ■

Παρατήρηση 3.1.18. Η σημασία των αποτελεσμάτων αυτής της παραγράφου θα φανεί αργότερα, όταν θα εισάγουμε τις έννοιες της localization ακολουθίας και του recollement, καθώς η ύπαρξη ενός Bousfield συναρτητή τοπικοποίησης και ενός Bousfield συναρτητή συντοπικοποίησης οδηγεί σε μία εκτενής θεωρία.

3.2 Παραγόμενοι συναρτητές

Η ύπαρξη παραγόμενων συναρτητών και η μελέτη αυτών, αποτελεί ένα κεντρικό θέμα της ομολογικής Άλγεβρας. Όταν κανείς δουλεύει για παράδειγμα στην Κατηγορία των προτύπων πάνω από ένα δακτύλιο, τότε κανείς μπορεί να αναπτύξει αριστερούς και δεξιούς παραγόμενους συναρτητές

από τους συναρτητές Hom και $\bigotimes$ στην πρώτη ή στην δεύτερη μεταβλητή. Για το πως γίνεται αυτή η κατασκευή μπορεί κανείς να δει το βιβλίο του Bland [1]. Οι παραγόμενοι συναρτητές παίζουν όμως και ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη Θεωρία κατηγοριών, καθώς πολλά αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν σε τυχαίες κατηγορίες. Σκοπός αυτής της παραγράφου, δεν είναι να δοθεί μία εκτενής παρουσίαση των παραγόμενων συναρτητών και σημαντικά μεν, βασικά δε, αποτελέσματα τα οποία μπορεί κανείς να συναντήσει σε βιβλία ή σημειώσεις που αναφέρουν κατηγορίες και παραγόμενους συναρτητές. Σκοπός μας πάντως είναι να αποδείξουμε ένα πιο μοντέρνο και όχι τόσο τετριμμένο αποτέλεσμα, το οποίο μας λέει ότι υπό κάποιες προϋποθέσεις μπορούμε να ορίσουμε τον παραγόμενο συναρτητή ενός συναρτητή F στις μη φραγμένες παραγόμενες κατηγορίες.
Θα ξεκινήσουμε λοιπόν δίνοντας μερικούς βασικούς ορισμούς, αλλά και μερικά βασικά αποτελέσματα, των οποίων η απόδειξη θα παραλειφθεί καθώς μπορεί να βρεθεί στις σημειώσεις του Milisic [14].

Πρόταση 3.2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και έστω $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Τότε κατά φυσικό τρόπο, υπάρχει ένας συναρτητής $\mathsf{K}(F)\colon \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^*(\mathcal{B})$, ο οποίος είναι ακριβής συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών.*

Στη συνέχεια της παραγράφου θα συμβολίζουμε με $Q\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ τον κανονικό συναρτητή τοπικοποίησης, από την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων στην παραγόμενη κατηγορία.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας ακριβής συναρτητής μεταξύ αβελιανών κατηγοριών. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός ακριβής συναρτητής $\mathsf{D}(F)\colon \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ μεταξύ τριγωνισμένων κατηγοριών, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{K}(F)"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"'] & \mathsf{K}^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\ \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{D}(F)"'] & \mathsf{D}^*(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

Επίσης ο $\mathsf{D}(f)$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\Sigma \circ \mathsf{D}(F) = \mathsf{D}(F) \circ \Sigma,$$

όπου Σ είναι οι ανάλογοι translation.

Ορισμός 3.2.3. *Έστω $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας ακριβής συναρτητής μεταξύ αβελιανών κατηγοριών. Ένας* **δεξιός παραγόμενος συναρτητής (right derived functor)** *του F αποτελείται από έναν ακριβή συναρτητή $RF\colon \mathcal{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ και έναν βαθμωτό μορφισμό συναρτητών $\varepsilon_F\colon Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F) \to RF \circ Q_{\mathcal{A}}$ με την ακόλουθη οικουμενική ιδιότητα:*

(RD1) Έστω $G\colon \mathcal{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ ένας ακριβλης συναρτητής και $\varepsilon\colon Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F) \to G \circ Q_{\mathcal{A}}$ ένας βαθμωτός μορφισμός συναρτητών. Τότε υπάρχει μοναδικός βαθμωτός μορφισμός συναρτητών $\eta\colon RF \to G$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & RF \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[dd, "\eta \circ Q_{\mathcal{A}}"] \\ Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F) \arrow[ur, "\varepsilon_F"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\ & G \circ Q_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

Ορισμός 3.2.4. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και έστω $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Μία πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{R}$ της $\mathcal{A}$ θα καλείται* **right adapted** *για τον F, εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(AR1) *Το μηδενικό αντικείμενο ανήκει στην $\mathcal{R}$.*

(AR2) *Εάν τα αντικείμενα M και N ανήκουν στην $\mathcal{R}$, τότε και το $M \oplus N$ ανήκει στην $\mathcal{R}$.*

(AR3) *Για κάθε αντικείμενο M στην $\mathcal{A}$, υπάρχει ένα αντικείμενο R στην $\mathcal{R}$, και ένας μονομορφισμός $i\colon M \to R$.*

(AR4) *Εάν το R είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο στην $\mathsf{K}^+(\mathcal{R})$, τότε το $\mathsf{K}(F)(R)$ είναι επίσης ακυκλικό.*

Παρατήρηση 3.2.5. Προφανώς οι δύο πρώτες συνθήκες του Ορισμού 3.2.4, υποδηλώνουν ότι η $\mathcal{R}$ είναι μία πλήρης προσθετική κατηγορία της $\mathcal{A}$

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής μεταξύ αβελιανών κατηγοριών. Έστω ότι υπάρχει μία υποκατηγορία $\mathcal{R}$ της $\mathcal{A}$, η οποία είναι right adapted για τον F. Τότε υπάρχει ένας παραγόμενος συναρτητής $RF\colon \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{B})$ του F.*

Το επόμενο Θεώρημα είναι γνωστό εδώ και πολλά χρόνια, αλλά όπως θα δούμε και στη συνέχεια, υπάρχει μία καλύτερη μορφή του.

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία η οποία έχει αρκετά ενέσιμα. Τότε ο προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ έχει έναν δεξιό παραγόμενο συναρτητή $RF\colon \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{B})$.*

Σχόλιο 3.2.8. Σε αυτή την παράγραφο μιλήσαμε για δεξιούς παραγόμενους συναρτητές. Ωστόσο παρόμοια πράγματα ισχύουν και για αριστερούς παραγόμενους συναρτητές, οι οποίοι ορίζονται κατά δυικό τρόπο.

3.2.1 Παραγόμενοι συναρτητές μεταξύ μη φραγμένων παραγόμενων κατηγοριών

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε μερικά γενικά στοιχεία παραγόμενων συναρτητών, τα οποία για πολλά χρόνια ήταν γνωστά στους μαθηματικούς. Ωστόσο στο Θεώρημα 3.2.7 είδαμε την ύπαρξη ενός δεξιού παραγόμενου συναρτητή στα πλαίσια των κάτω φραγμένων παραγόμενων κατηγοριών. Ωστόσο ο Spaltenstein [22] και ξεχωριστά οι Marcel Bokstedt και Amnon Neeman [2] απέδειξαν την ύπαρξη παραγόμενων συναρτητών σε μη φραγμένες παραγόμενες κατηγορίες κάτω από κάποιες σχετικά ασθενής υποθέσεις. Σε αυτή την παράγραφο θα ακολουθήσουμε την πορεία της απόδειξης των Bokstedt και Neeman, οι οποίοι δεν γνώρισαν την ύπαρξη του ίδιου αποτελέσματος από τον Spaltenstein πέντε χρόνια νωρίτερα από την δημοσίευση του δικού τους άρθρου. Όταν το έμαθαν, το άρθρο τους ήταν έτοιμο να δημοσιευθεί και με κάποιες αμφιβολίες αποφάσισαν τελικά να το εκδώσουν, καθώς η πορεία της απόδειξης είναι διαφορετική και σχετικά πιο εύκολη. Η ευκολία της οφείλεται στο γεγονός ότι κοιτούσαν το πρόβλημα από την σκοπιά της αλγεβρικής τοπολογίας και η μελέτη των ομοτοπικών συνορίων και ορίων στην παραγόμενη κατηγορία ήταν καθοριστική.

Παρατήρηση 3.2.9. Έστω $\mathcal{T}$ μια πλήρης τριγωνισμένη κατηγορία και έστω μία ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{T}$

$$\cdots \to X_3 \xrightarrow{\mu_3} X_2 \xrightarrow{\mu_2} X_1 \xrightarrow{\mu_1} X_0 \tag{3.2}$$

Έστω επίσης $\nu\colon \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ να είναι ο μορφισμός ο οποίος επάγεται στο δεύτερο γινόμενο από τους μορφισμούς $\mu_{i+1}\colon X_{i+1} \to X_i$. Δηλαδή ισχύει $p_i \circ \nu = \mu_{i+1} \circ p_{i+1}$, όπου p_i είναι η κανονική προβολή του γινομένου στο X_i. Τον μορφισμό $1-\nu$ θα τον ονομάζουμε $1-shift$. Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό του ομοτοπικού ορίου

Ορισμός 3.2.10. *Έστω $\mathcal{T}$ μία πλήρης τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ μία ακολουθία αντικειμένων στην $\mathcal{T}$ όπως ορίστηκε στην Παρατήρηση 3.2.9. Το* **ομοτοπικό όριο (homotopy**

limit) *της παραπάνω ακολουθίας ορίζεται να είναι η μοναδική, ως προς μη μοναδικό ισομορφισμό, τρίτη κορυφή του διακεκριμένου τριγώνου*

$$\mathrm{holim}(X_i) \xrightarrow{\beta} \prod_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{1-shift} \prod_{i\in\mathbb{N}} \to \Sigma(\mathrm{holim}(X_i)).$$

Παρατήρηση 3.2.11. Έστω $\mathcal{A}$ μία πλήρης αβελιανή κατηγορία για την οποία ισχύει ότι κάθε οικογένεια επιμορφισμών της επάγει έναν επιμορφισμό στο γινόμενο. Έστω X ένα αντικείμενο της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Έστω επίσης όπως και στην παρατήρηση 3.2.9 μία ακολουθία συμπλόκων στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$

$$\cdots \to X_3 \xrightarrow{\mu_3} X_2 \xrightarrow{\mu_2} X_1 \xrightarrow{\mu_1} X_0,$$

μαζί με μια οικογένεια μορφισμών $X \to X_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, οι οποίοι είναι συμβατοί με τους μορφισμούς της ακολουθίας. Τότε αυτή η οικογένεια συμβατών μορφισμών ορίζει έναν μορφισμό $\alpha\colon X \to \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, τον οποίο όταν τον συνθέσουμε με τον $1 - shift$ μας δίνει τον μηδενικό μορφισμό. Επομένως υπάρχει ένας μορφισμός $\gamma\colon X \to \mathrm{holim}(X_i)$ με $\beta \circ \gamma = \alpha$. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(X) \to \mathsf{H}^n(X_i)$ είναι τελικά ισομορφισμός. Τότε ο $\gamma\colon X \to \mathrm{holim}(X_i)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathsf{D}(A)$. Για να δούμε γιατί ισχύει αυτό εργαζόμαστε ως εξής: Υποστηρίζουμε αρχικά ότι η ακόλουθη ακολουθία είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

$$0 \to \mathsf{H}^n(X) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(\alpha)} \mathsf{H}^n(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(1-shift)} \mathsf{H}^n(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to 0.$$

Λόγω των υποθέσεων για την $\mathcal{A}$, η συνομολογία μετατίθεται με τα γινόμενα και επομένως ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(\alpha)$ είναι ένας μορφισμός στο γινόμενο $\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}^n(X_i)$, ο οποίος επάγεται από τους μορφισμού $\mathsf{H}^n(X) \to \mathsf{H}^n(X_i)$. Όμως μόνο πεπερασμένοι από αυτούς τους μορφισμούς δεν είναι ισομορφισμοί, επομένως ο $\mathsf{H}^n(\alpha)$ είναι μονομορφισμός.
Θεωρούμε τώρα ένα αντίστροφο σύστημα

$$\cdots \to \mathsf{H}^n(X_3) \to \mathsf{H}^n(X_2) \to \mathsf{H}^n(X_1) \to \mathsf{H}^n(X_0).$$

Λόγω της υπόθεσης μας, ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(X) \to \mathsf{H}^n(X_i)$ είναι τελικά ισομορφισμός, παίρνουμε ότι τελικά αυτή ακολουθία σταθεροποιείται στα αριστερά στο $\mathsf{H}^n(X)$. Οπότε οι μορφισμοί $\mathsf{H}^n(X) \to \mathsf{H}^n(X_i)$ αποτελούν ένα αντίστροφο όριο για το παραπάνω αντίστροφο σύστημα. Επομένως η εικόνα του $\mathsf{H}^n(\mathcal{A})$ είναι ο πυρήνας του $\mathsf{H}^n(1 - shift)$.
Τέλος επειδή όπως αναφέραμε, η παραπάνω ακολουθία σταθεροποιείται στα αριστερά στο $\mathsf{H}^n(X)$, έχουμε ότι τελικά οι μορφισμοί του αντίστροφου συστήματος είναι τελικά επιμορφισμοί. Τότε κάνοντας χρήση του Λήμματος 66 στο βιβλίο του Murfet Derived categories, έχουμε ότι ο $\mathsf{H}^n(1 - shift)$ είναι επιμορφισμός. Οπότε πράγματι η παραπάνω ακολουθία είναι ακριβής.
Παίρνοντας την μακρά ακριβή ακολουθία στη συνομολογία για το αρχικό μας διακεκριμένο τρίγωνο, σύμφωνα με το οποίο ορίστηκε το ομοτοπικό όριο, καθώς και από το γεγονός ότι ο $\mathsf{H}^n(1-shift)$ είναι επιμορφισμός, βλέπουμε απευθείας, λόγω της ακρίβειας της παραπάνω ακολουθίας, ότι $\mathsf{H}^n(X) \cong \mathsf{H}^n(\mathrm{holim}(X_i))$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Οπότε επειδή είμαστε στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ ο μορφισμός γ είναι ισομορφισμός.

Πρόταση 3.2.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία πλήρης αβελιανή κατηγορία με ακριβή γινόμενα και αρκετά ενέσιμα. Τότε κάθε αντικείμενο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ψευδο-ισομορφικό με ένα σύμπλοκο ενέσιμων αντικειμένων.*

Απόδειξη. Έστω ένα τυχαίο αντικείμενο X στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Τότε είναι γνωστό ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ έχει μία φυσική t-stucture, όπως μπορεί κανείς να δει και στις σημειώσεις του Milisic. Συμβολίζουμε με $X^{\geqslant n}$ τον truncation του X πάνω από διάσταση n, ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$\cdots \to 0 \to \mathsf{Coker}(d_X^{n-1}) \to X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \to \cdots .$$

Οπότε υπάρχει ένας φυσικός μορφισμός $X \to X^{\geqslant n}$, ο οποίος είναι ισομορφισμός στην συνομολογία στις θέσεις μεγαλύτερες του n, και το $X^{\geqslant n}$ μηδενίζεται στις θέσεις $\leqslant n$. Επομένως, εφόσον η $\mathcal{A}$ έχει αρκετά ενέσιμα και το σύμπλοκο $X^{\geqslant n}$ είναι κάτω φραγμένο, υπάρχει ένας ψευδο-ισομορφισμός $X^{\geqslant n} \to I_n$, όπου το I_n είναι ένα σύμπλοκο ενέσιμων αντικειμένων, το οποίο είναι κάτω φραγμένο. Επομένως για κάθε $n \leqslant 0$ έχουμε ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^{\geqslant n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{\geqslant n} \arrow[d] \\ I_{n-1} & I_n \end{tikzcd}$$

Επομένως από αυτό το διάγραμμα επάγεται ένας μορφισμός $I_{n-1} \to I_n$ στην παραγόμενη κατηγορία. Όμως καθώς τα I_n είναι κάτω φραγμένα σύμπλοκα ενέσιμων αντικειμένων, μπορούμε να πάρουμε έναν chain map, ο οποίος επάγει τον παραπάνω μορφισμό $I_{n-1} \to I_n$ στην παραγόμενη κατηγορία. Οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα συμπλόκων:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X^{\geqslant n} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X^{\geqslant -2} \arrow[r] \arrow[d] & X^{\geqslant -1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{\geqslant 0} \arrow[d] \\ \cdots \arrow[r] & I_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I_{-2} \arrow[r] & I_{-1} \arrow[r] & I_0 \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει ένα επαγόμενος μορφισμός στα ομοτοπικά όρια $\mathrm{holim}(X^{\geqslant n}) \to \mathrm{holim}(I_n)$, λόγω του παρακάτω μορφισμού δικαεκριμένων τριγώνων

$$\begin{tikzcd} \mathrm{holim}(X^{\geqslant n}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \prod_{n\leqslant 0} X^{\geqslant n} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d] & \prod_{n\leqslant 0} X^{\geqslant n} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(\mathrm{holim}(X^{\geqslant n})) \arrow[d] \\ \mathrm{holim}(I_n) \arrow[r] & \prod_{n\leqslant 0} I_n \arrow[r, "1-shift"'] & \prod_{n\leqslant 0} I_n \arrow[r] & \Sigma(\mathrm{holim}(I_n)) \end{tikzcd}$$

Παίρνοντας την μακρά ακολουθία στη συνομολογία, και λόγω των υποθέσεων της κατηγορίας $\mathcal{A}$, έχουμε ότι ο β είναι ψευδο-ισομορφισμός. Επιπλέον από την Παρατήρηση 3.2.11 έχουμε και ότι ο μορφισμός $\alpha\colon X = \varprojlim X^{\geqslant n} \to \mathrm{holim}(X^{\geqslant n})$ είναι ψευδο-ισομορφισμός. Άρα και η σύνθεση $\beta\circ\alpha$ είναι ψευδο-ισομορφισμός, και αποδείξαμε το ζητούμενο καθώς το $\mathrm{holim}(I_n)$ είναι εκ κατασκευής ένα σύμπλοκο ενέσιμων αντικειμένων. ■

Σχόλιο 3.2.13. Η παραπάνω πρόταση είναι πολύ σημαντική γιατί πριν τη δημοσιευση αυτού του αποτελέσματος, ήταν γνωστό ότι κανείς μπορούσε να κατασκευάσει για κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ έναν ψευδο-ισομορφισμό προς ένα σύμπλοκο ενέσιμων αντικειμένων, αλλά μπορούσε να το κάνει αυτό μόνο κάτω από αυστηρές προϋποθέσεις για την κατηγορία $\mathcal{A}$, όπως μπορείς να δει κανείς και στο άρθρο του Hartshorne [9].

Παρατήρηση 3.2.14. Αν κανείς παρατηρήσει την πορεία της απόδειξης της Πρότασης 3.2.12 θα δει ότι ισχύει κάτι περισσότερο από αυτό που ξεκινήσαμε να αποδεικνύουμε. Στην πραγματικότητα λοιπόν ισχύει το εξής.
Εάν K είναι μία συντοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, η οποία παράγεται από τα κάτω φραγμένα σύμπλοκα ενέσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Δηλαδή η K είναι μία πλήρης υποκατηγορία , η οποία περιέχει τα κάτω φραγμένα σύμπλοκα ενέσιμων αντικειμένων, και είναι κλειστή ως προς τα ευθέα γινόμενα και τον σχηματισμό τριγώνων. Τότε κάθε αντικείμενο της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ψευδο-ισομορφικο με ένα αντικείμενο της K.

Κάνοντας χρήση της παραπάνω Παρατήρησης 3.2.14 και μερικών αποτελεσμάτων τα οποία παρατέθηκαν στην παράγραφο της τοπικοποίησης Bousfield, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε μία πολύ σημαντική Πρόταση, η οποία βοηθά στην κατασκευή παραγόμενων συναρτητών.

Πρόταση 3.2.15. *Έστω $\mathcal{A}$ μία πλήρης αβελιανή κατηγορία με ακριβή γινόμενα και αρκετά ενέσιμα. Τότε εάν $\mathsf{K}(I)$ συμβολίζει την μικρότερη συντοπικοποιούσα κατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η οποία περιέχει τα κάτω φραγμένα σύμπλοκα ενέσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$, έχουμε ότι η σύνθεση συνατητών*

$$\mathsf{K}(I) \xrightarrow{inc} \mathsf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

είναι μία ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Καταρχάς θέλουμε να δείξουμε για κάθε αντικείμενο X και Y της $\mathsf{K}(i)$, ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(I)}(X,Y) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}((can \circ inc)X, (can \circ inc)Y).$$

Αυτόν τον ισομορφισμό τον παίρνουμε απευθείας από το Λήμμα 3.1.5, εάν θέσουμε S την πλήρη υποκατηγορία των ακυκλικών συμπλόκων, και αιτιολογήσουμε γιατί τα αντικείμενα της $\mathsf{K}(I)$ είναι S-τοπικά. Στην πραγματικότητα η $\mathsf{K}(I)$ αποτελέιται από όλα τα S-τοπικά αντικείμενα, καθώς τα κάτω φραγμένα σύμπλοκα είναι S-τοπικά, και κάνοντας χρήση του Λήμματος 3.1.12 έχουμε το ζητούμενο λόγο του τρόπου ορισμού της $\mathsf{K}(I)$. Επομένως μένει να αποδείξουμε ότι κάθε σύμπλοκο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ψευδο-ισομορφικό με ένα αντικείμενο της $\mathsf{K}(I)$. Αυτό όμως είναι ακριβώς η δήλωση της Παρατήρησης 3.2.14, και άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο. ∎

Παρατήρηση 3.2.16. Η σπουδαιότητα της πρότασης 3.2.15, έγκειται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε παραγόμενους συναρτητές κάτω από σχετικά ελαφρές προϋποθέσεις για την κατηγορία $\mathcal{A}$. Αυτό συμβαίνει καθώς μπορούμε να κοιτάμε την $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ ως υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, και εκεί τα πράγματα είναι πολύ πιο διαχειρίσιμα. Ένα σημαντικό Θεώρημα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και στη συνέχεια είναι το παρακάτω καθώς μιλάει για Grothendieck κατηγορίες τις οποίες θα χρησιμοποιούμε κατά κόρων στη συνέχεια της εργασίας. Η ισχύς του, οφείλεται στο γεγονός ότι οι κατηγορίες Grothendieck έχουν αρκετά ενέσιμα.

Θεώρημα 3.2.17. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία Grothendieck και $\mathcal{B}$ μία αβελιανή κατηγορία. Τότε κάθε προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ έχει έναν δεξιά παραγόμενο συναρτητή.*

3.3 Μία ισοδυναμία παραγόμενων κατηγοριών

Το αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου οφείλεται στον Donguyan Yao στο επιστημονικό του άρθρο [25]. Κύριος στόχος του άρθρου ήταν να μελετήσει την παρακάτω ερώτηση:
Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{B}$ μία thick υποκατηγορία της. Έστω $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$ να συμβολίζει την παραγόμενη κατηγορία των συνομολογικά φραγμένων συμπλόκων αντικειμένων της κατηγορία $\mathcal{B}$, και $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ να συμβολίζει την παραγόμενη κατηγορία των συνομολογικά φραγμένων συμπλόκων αντικειμένων της κατηγορία $\mathcal{A}$ με συνομολογία στην $\mathcal{B}$. Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι το εάν η έγκλιση της κατηγορία $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{A}$, παράγει μία ισοδυναμία κατηγοριών από την $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$ στην $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.
Για το εν λόγω ερώτημα υπάρχουν δύο συνθήκες που μας δίνουν θετική απάντηση, με την κύρια διαφορά της δεύτερης από την πρώτη συνθήκη, να είναι η υπόθεση ύπαρξης αρκετών ενέσιμων στην κατηγορία $\mathcal{A}$.
Αρχικά θα δώσουμε κάποιους ορισμούς μερικών βασικών εννοιών για την διατύπωση του πρώτου θεωρήματος.

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $\mathcal{A}$, μία αβελιανή κατηγορία και A, B δύο αντικείμενά της. Μία n-**extension** από το αντικείμενο B στο A είναι μία ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$:*

$$E := \;\; 0 \longrightarrow B \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow A \longrightarrow 0 \; .$$

Ένας μορφισμός μεταξύ δύο n-extension από το αντικείμενο B στο A, είναι ένας μορφισμός συμπλόκων, στον οποίο οι μορφισμοί στα αντικείμενα B και A είναι οι ταυτοτικοί.

Έστω E και F δύο n-extension από το B στο A. Τα E, F θα καλούνται παρόμοια, εάν υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "id_B"] & E^1 \arrow[r] \arrow[d] & E^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "id_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & F^1 \arrow[r] & F^2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^n \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

. Έστω E και F δύο n-extension από το B στο A. Τα E, F θα καλούνται ισοδύναμα εάν υπάρχουν n-extension $G_0 = E, G_1, G_r, G_{r+1} = F$, για κάποιο ακέραιο $r \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε τα G_i, G_{i+1} να είναι παρόμοια για κάθε $0 \leqslant i \leqslant r$. Αυτή η σχέση είναι μία σχέση ισοδυναμίας και η **Yoneda** *n-***extension**, *που συμβολίζεται ως $y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A,B)$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των n-extension από το B στο A, πηλίκο την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας.*

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στην διατύπωση ενός πρώτου κριτηρίου, το οποίο θα μας δώσει μία απάντηση για το ερώτημα που τέθηκε στην αρχή της παραγράφου.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{B}$ μία τηιςκ υποκατηγορία της. Έστω επίσης $i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, να συμβολίζει την κανονική έγκλιση. Τότε ο i μας δίνει μία ισοδυναμία παραγόμενων κατηγοριών $\mathsf{D}^b(\mathcal{B}) \to \mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενα A, B της $\mathcal{B}$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ισχύει:*

$$y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A,B) \cong y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(iA,iB).$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος 3.3.2, θα χρειαστούμε πρώτα ένα λήμμα. Εάν A είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{A}$, τότε θα συμβολίζουμε με $A[k]$, το αλυσιδωτό σύμπλοκο:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

με το αντικείμενο A να βρίσκεται στην θέση k.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{B}$ μία τηιςκ υποκατηγορία της. Έστω επίσης δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{B}$, A και B, και δύο ακέραιοι $k, l \in \mathbb{Z}$.*

(ι) Εάν $k < l$, τότε
$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k], B[l]) \cong 0 \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[k], B[l]).$$

(ιι) Εάν $k = l$ τότε

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k], B[l]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(A,B) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[k], B[l]).$$

(ιιι) Εάν $k > l$ τότε
$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k], B[l]) \cong \mathsf{Ext}^{k-l}_{\mathcal{B}}(A,B),$$
και
$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[k], B[l]) \cong \mathsf{Ext}^{k-l}_{\mathcal{A}}(A,B).$$

Απόδειξη. Έστω ένας μορφισμός $f\colon A[k] \to B[l]$ στην $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. Εφόσον είμαστε στην παραγόμενη κατηγορία μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο f αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\
A[k] & & B[l]
\end{tikzcd} .$$

Έστω ο truncation:

$$\tau^{\leqslant k} E \coloneqq \ \cdots \longrightarrow E^{k-1} \longrightarrow \ker d^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Τότε ο κανονικός μορφισμός $\tau^{\leqslant k}E \to E$ είναι ψευδο-ισομορφισμός. Άρα ο f μπορεί να αναπαρασταθεί και από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\leqslant k}E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[l] \end{tikzcd}.$$

Άρα όταν αναπαριστούμε έναν μορφισμό f με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[l] \end{tikzcd}.$$

μπορούμε να υποθέτουμε ότι $E^i = 0$ για κάθε $i > k$.

(ι) Έστω $k < l$. Τότε ένας μορφισμός $f\colon A[k] \to B[l]$, αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[l] \end{tikzcd}.$$

με $E^i = 0$ για κάθε $i > k$. Άρα ο μορφισμός $E \to B[l]$ είναι ο μηδενικός και άρα ο f είναι ο μηδενικό μορφισμός.

(ιι) Έστω $k \geqslant l$ και ότι μορφισμός $f\colon A[k] \to B[l]$ αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[l] \end{tikzcd}.$$

με $E^i = 0$ για κάθε $i > k$. Έστω επίσης:

$$\tau^{\geqslant l}E \coloneqq \ \cdots \longrightarrow E^l/\mathsf{Im}(d^{l-1}) \longrightarrow E^{l+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Τότε ο μορφισμός $E \to \tau^{\geqslant l}E$ είναι ένας ψευδο-ισομορφισμός και οι μορφισμοί συμπλόκων $E \to A[k]$ και $E \to B[l]$ αναλύονται μέσω του $E \to \tau^{\geqslant l}E$. Άρα ο f μπορεί να αναπαρασταθεί από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & \tau^{\geqslant l}E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[l] \end{tikzcd}.$$

Άρα για ένα μορφισμό f από το $A[k]$ στο $B[l]$ στην κατηγορία $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}$ (ή στην $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}$) με $k \geqslant l$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ότι ο f αναπαρίσταται από ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[l] \end{tikzcd}.$$

με $E^i = 0$ όταν $i \notin [l, k]$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέτουμε ότι $l = 0$.

Τώρα στην περίπτωση που ισχύει $k = l$, ένας μορφισμός $f \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[0], B[0])$, μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$\begin{tikzcd} & E[0] \arrow[dl, "a"', "\sim"] \arrow[dr, "b"] & \\ A[0] & & B[0] \end{tikzcd}.$$

Και άρα ο f αντιστοιχεί στον μορφισμό $b \circ a^{-1} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$. Εάν ο f έχει μία άλλη αναπαράσταση:

$$\begin{tikzcd} & E'[0] \arrow[dl, "a'"', "\sim"] \arrow[dr, "b'"] & \\ A[0] & & B[0] \end{tikzcd}.$$

τότε θα υπάρχει σύμπλοκο F και ένα μεταθετικό ως προς ομοτοπία διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & E[0] \arrow[dl, "a"', "\sim"] \arrow[dr, "b"] & \\ A[0] & F \arrow[u, "c"] \arrow[d, "c'"] & B[0] \\ & E'[0] \arrow[ul, "a'", "\sim"'] \arrow[ur, "b'"'] & \end{tikzcd}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα όπως παραπάνω, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F = F[0]$ για κάποια αντικείμενο F. Άρα η μεταθετικότητα ως προς ομοτοπία του παραπάνω διαγράμματος γίνεται αυστηρή μεταθετικότητα, και άρα έχουμε $b \circ a^{-1} = b' \circ (a')^{-1}$. Άρα η παραπάνω αντιστοίχιση του f σε έναν μορφισμό $b \circ a^{-1} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$, μας δίνει έναν καλά ορισμένο συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{B})}(A[0], B[0]) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$, ο οποίος προφανώς έχει τον συναρτητή έγκλισης $\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[0], B[0])$ ως αντίστροφο. Άρα έχουμε ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[0], B[0]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B).$$

Ομοίως παίρνουμε και ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[0], B[0]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B).$$

(ιιι) Έστω $k > l$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $l = 0$. Έστω ότι ο μορφισμός $f \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k], B[0])$ αναπαρίσταται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[0] \end{tikzcd}.$$

με $E^i = 0$ εάν $i \notin [0, k]$. Έστω F^1 να είναι το pushout του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} E^1 \arrow[r] & F^1 \\ E^0 \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

Καθώς το F^1 είναι το pushout του παραπάνω διαγράμματος μπορούμε να πάρουμε ένα καινούριο σύμπλοκο $E' \coloneqq B \longrightarrow F^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^k$ και έναν ψευδο-ισομορφισμό $E \xrightarrow{\sim} E'$. Εφόσον οι μορφισμοί $A[k] \longleftarrow E$ και $E \longrightarrow B[0]$ μπορούν να αναλυθούν μέσω του $E \longrightarrow E'$, παίρνουμε ότι ο μορφισμός f μπορεί να αναπαρασταθεί και από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[0] \end{tikzcd}$$

Άρα εφόσον ο μορφισμός $E' \longrightarrow \sim A[k]$ είναι ψευδο-ισομορφισμός, κατασκευάσαμε ένα extension

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow F^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^k \longrightarrow A \longrightarrow 0 \ .$$

Υποθέτουμε τώρα ότι δύο extension

$$E \coloneqq \ 0 \longrightarrow B \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^k \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$F \coloneqq \ 0 \longrightarrow B \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^k \longrightarrow A \longrightarrow 0 \ .$$

τα οποία προέρχονται από τον f με την παραπάνω διαδικασία.
Εφόσον ο f αναπαρίσταται από τα αριστερά roof

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[0] \end{tikzcd} .$$

και

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[0] \end{tikzcd} .$$

υπάρχει σύμπλοκο G και μεταθετικό διάγραμμα ως προς ομοτοπία

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & G \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & B[0] \\ & F \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Και εδώ πέρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G^i = 0$ αν $i \notin [0, k]$. Η αυστηρή μεταθετικότητα του αριστερού μέρους του παραπάνω διαγράμματος είναι προφανής. Μένει να κάνουμε και το δεξί μέρος του παραπάνω διαγράμματος αυστηρή μεταθετικότητα, τροποποιώντας κατάλληλα τον μορφισμό q.
Λόγω της ομοτοπικής μεταθετικότητας του δεξιού μέρους, έχουμε μία οποτοπία από το G στο $B[0]$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ένα μορφισμό $D\colon G^1 \to B$, τέτοιον ώστε $D \circ d^0 = p^0 - q^0$.
Ορίζουμε τώρα τον μορφισμό συμλόκων $q'\colon G \to F$ ως εξής:

$$\begin{tikzcd} G^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "p^0"'] & G^1 \arrow[r] \arrow[d, "q^1+\delta^0\circ D"] & G^2 \arrow[r] \arrow[d, "q^2"] & \cdots \arrow[r] & G^k \arrow[d, "q^k"] \\ B \arrow[r, "\delta^0"] & F^1 \arrow[r] & F^2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^k \end{tikzcd} .$$

Το παραπάνω διάγραμμα είναι όντως μορφισμός συμπλόκων καθώς:

$$(q^1 + \delta^0 \circ D) \circ \delta^0 = q^1 \circ \delta^0 + \delta^0 \circ D \circ \delta^0 = \delta^0 \circ q^0 + \delta^0 \circ (p^0 - q^0) = \delta^0 \circ p^0.$$

Ο q' επιπλέον όπως ορίστηκε είναι και ψευδο-ισομορφισμός. Άρα αν αντικαταστήσουμε τον μορφισμό q με τον q', έχουμε ακόμα ομοτοπική μεταθετικότητα στο παραπάνω διάγραμμα. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p^0 = q^0$ και άρα το παραπάνω διάγραμμα γίνεται αυστηρά μεταθετικό.
Έστω τώρα H^1 το pushout του διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} G^1 \arrow[r] & H^1 \\ G^0 \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

Τότε παίρνουμε ένα νέο σύμπλοκο:

$$G' \coloneqq B \longrightarrow H^1 \longrightarrow G^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G^k,$$

και έναν ψευδο-ισομορφισμό $G \xrightarrow{\sim} G'$ μέσω του οποίου μπορούν να αναλυθούν οι μορφισμοί p και q. Άρα έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & G' \arrow[u] \arrow[d] & B[0] \\ & F \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur] & \end{tikzcd},$$

το οποίο μας δίνει δύο μορφισμούς extension:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & E^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^k \arrow[r] & A \\ B \arrow[u, "id_B"] \arrow[d, "id_B"'] \arrow[r] & H^1 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G^k \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & A \arrow[u, "id_A"'] \arrow[d, "id_A"] \\ B \arrow[r] & F^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^k \arrow[r] & A \end{tikzcd}.$$

Άρα καταφέραμε να αντιστοιχίσουμε καλώς ένα extension για κάθε μορφισμό f. Άρα παίρνουμε έναν καλά ορισμένο συναρτητή $\Phi\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k], B[0]) \to y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B)$.
Έστω τώρα ένα extension $0 \longrightarrow B \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^k \longrightarrow A \longrightarrow 0$. Μπορούμε τότε να πάρουμε έναν μορφισμό $f\colon A[k] \to B[0]$, ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr] & \\ A[k] & & B[0] \end{tikzcd},$$

όπου $E \coloneqq 0 \longrightarrow B \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^k$. Άρα εύκολα πήραμε και τον αντίστροφο συναρτητή του Φ και έτσι κατασκευάσαμε έναν ισομορφισμό:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k], B[0]) \cong y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B).$$

Ομοίως παίρνουμε και ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[k], B[0]) \cong y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B).$$

■

Είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος 3.3.2.

Απόδειξη. Έστω καταρχάς ότι ο $i\colon \mathsf{D}^b(\mathcal{B}) \to \mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Τότε ο i θα είναι πλήρης και πιστός. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A,B) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k],B[0]) \longrightarrow \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[k],B[0]) \cong y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{B}}(A,B).$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{B}$, τα A και B και για $k \geqslant 0$, έχουμε ότι $y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{B}}(A,B) \cong y\,\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A,B)$.•
Για να δείξουμε ο $i\colon \mathsf{D}^b(\mathcal{B}) \to \mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ είναι ισοδυναμία, πρέπει να δείξουμε ότι:

(1) για κάθε δύο αντικείμενα E και F της κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$

$$i\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(E,F) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(E,F)$$

(2) για κάθε αντικείμενο E της κατηγορίας $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, υπάρχει ένα αντικείμενο F της κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$, και ένας ισομορφισμός στην $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ μεταξύ των E και F.

Για την απόδειξη του (1), εφόσον η κατηγορία $\mathcal{B}$ είναι αβελιανή, κάθε συνομολογικά φραγμένο σύμπλοκο είναι ψευδο-ισομορφικό με ένα αυστηρά φραγμένο σύμπλοκο, και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα E και F είναι αυστηρά φραγμένα.
Καταρχάς για το (1), πρέπει απλά να δείξουμε ότι όταν $E = A[k]$ για κάποιο αντικείμενο A της κατηγορίας $\mathcal{B}$, και το F είναι τυχαίο, έχουμε ότι:

$$i\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k],F) \longrightarrow \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[k],F).$$

Για να δείξουμε γιατί η παραπάνω δήλωσή μας ισχύει θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το μήκος του E. Υποθέτουμε ότι $E^i = 0$ για $i \notin [k,l]$. Τότε έχουμε ένα τρίγωνο στην $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$ και $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ ομοίως, το: $\sigma^{\geqslant k+1}E \longrightarrow E \longrightarrow E^k[k]$, όπου :

$$\sigma^{\geqslant k+1} \coloneqq \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E^{k+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^l \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Άρα για κάθε αντικείμενο F της κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, όπου οι γραμμές είναι ακριβείς:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(E^k[k],F) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(E,F) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(\sigma^{\geqslant k+1}E,F) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(E^k[k],F) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(E,F) & \longrightarrow & \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(\sigma^{\geqslant k+1}E,F) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Τότε το συμπέρασμα βγαίνει άμεσα με χρήση του five-lemma και της επαγωγής.
Με ανάλογο τρόπο, απλά αυτή τη φορά κάνοντας την παραπάνω διαδικασία για το αντικείμενο F, βλέπουμε ότι για την συνθήκη (1), αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαία αντικείμενα A, B της κατηγορίας $\mathcal{B}$ και ακεραίους $k, l \in \mathbb{Z}$, έχουμε έναν ισομορφισμό:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(A[k],B[l]) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(A[k],B[l]).$$

Το οποίο όμως ισχύει λόγω της υπόθεσης αλλά και του λήμματος 3.3.3.
Για να αποδείξουμε τώρα την υπόθεση (2), έστω E ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. Πάλι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το E είναι αυστηρά φραγμένο καθώς η $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή. Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ επαγωγή ως προς το μήκος του E.
Έστω $E = A[k]$, για κάποιο αντικείμενο A της κατηγορίας $\mathcal{A}$. Εφόσον $\mathsf{H}^k(E) = A \in \mathcal{B}$, έχουμε απευθείας ότι $E \in \mathsf{D}^b(\mathcal{B})$. Έστω τώρα ότι το αντικείμενο E έχει μήκος δύο, δηλαδή είναι της μορφής:

$$E = \cdots \longrightarrow E^k \longrightarrow dE^{k+1} \longrightarrow \cdots .$$

Τότε τα αντικείμενα $\mathsf{H}^k(E) = \mathsf{Ker}(d)$ και $\mathsf{H}^{k+1}(E) = \mathsf{Coker}(d)$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{B}$. Έστω ότι το αντικείμενο E' είναι ο κώνος του μορφισμού $\mathsf{Ker}(d)[k] \to E$. Τότε έχουμε ένα τρίγωνο στην κατηγορία $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$:

$$E'[-1] \longrightarrow \mathsf{Ker}(d)[k] \longrightarrow E.$$

Εφόσον $\mathsf{H}^{k+1}(E) = \mathsf{Coker}(d)$, έχουμε έναν ψευδο-ισομορφισμό $q\colon E' \to \mathsf{Coker}(d)[k+1]$, και μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Coker}(d)[k] \arrow[r, "j\circ q^{-1}"] \arrow[d, "q^{-1}"', "\cong"] & \mathsf{Ker}(d)[k] \arrow[r] \arrow[d, "="] & cone(j\circ q^{-1}) \arrow[d, "\cong"] \\
E'[-1] \arrow[r, "j"] & \mathsf{Ker}(d)[k] \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

Από το (1), καθώς ο συναρτητής:

$$i\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{B})}(\mathsf{Coker}(d)[k], \mathsf{Ker}(d)[k]) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})}(\mathsf{Coker}(d)[k], \mathsf{Ker}(d)[k])$$

είναι πλήρης και άρα ο μορφισμός $j\circ q^{-1}$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$. Άρα το αντικείμενο $cone(j\circ q^{-1})$ είναι στην $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$, και άρα και το E καθώς είναι ισόμορφα.
Υποθέτουμε τώρα ότι αν ένα αντικείμενο E της κατηγορίας $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ είναι τέτοιο ώστε $E^i = 0$ όταν $i \in [k,l]$ και $l-k \leqslant n$, τότε το E θα είναι ισόμορφο στην κατηγορία $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ με σύμπλοκο στην $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$. Έστω F αντικείμενο της $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, με $F^i = 0$ όταν $i \in [k,l]$ και $l-k = n+1$. Συμβολίζουμε με

$$F' \coloneqq \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow F^k \longrightarrow \mathsf{Ker}(d^{k+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

, όπου d^{k+1} είναι το boundary map του F, και $F'' = F/F'$. Τότε έχουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$:

$$F' \longrightarrow F \longrightarrow F''.$$

με τα F' και F'' να είναι ισόμορφα με σύμπλοκα της κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$, καθώς έχουν μήκος γνήσια μικρότερο του n, και λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με παραπάνω, λόγω του (1), έχουμε ότι και το F είναι ισόμορφο στην κατηγορία $\mathsf{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ με κάποιο σύμπλοκο στην $\mathsf{D}^b(\mathcal{B})$. ■

3.4 Βασικές ιδιότητες της ομοτοπικής κατηγορίας των ενέσιμων

Στη συνέχεια της εργασίας θα ασχοληθούμε με μία συγκεκριμένη μορφή κατηγορίας. Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία. Με λίγα λόγια η $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή Grothendieck κατηγορία και έχει ένα σύνολο $\mathcal{A}_0$ noetherian αντικειμένων τα οποία παράγουν την $\mathcal{A}$. Αυτό σημαίνει, και λόγω της Πρότασης 1.2.60, ότι κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι πηλίκο ενός συνγινομένου αντικειμένων του συνόλου γεννητόρων $\mathcal{A}_0$. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}$, την πλήρη υποκατηγορία των noetherian αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{A}$, και με $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$ την πλήρη υποκατηγορία των ενέσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$.
Επίσης όπως είδαμε και στην προηγούμενη υποενότητα, η κανονική έγκλιση $\mathsf{noeth}\,\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ μας δίνει έναν πλήρη και πιστό συναρτητή

$$\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

ο οποίος ταυτίζει την $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$, με την πλήρη υποκατηγορία αντικειμένων X της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, για τα οποία ισχύει ότι το $\mathsf{H}^n X$ είναι noetherian για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και$\mathsf{H}^n X = 0$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$.
Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να μελετήσει μερικές από τις βασικές ιδιότητες της κατηγορίας ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, οι οποίες μας είναι απαραίτητες για τη συνέχεια. Ξεκινάμε

λοιπόν με κάποιες βασικές παρατηρήσεις, οι οποίες θα μας βοηθήσουν για την απόδειξη του τελευταίας πρότασης αυτής της παραγράφου, η οποίο μας δίνει μια σημαντική ισοδυναμία κατηγοριών.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω A ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{A}$ και θα συμβολίζουμε με iA μία ενέσιμη ανάλυσή του. Τότε ο κανονικός χάρτης:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(iA, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A, X) \tag{3.3}$$

είναι ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Επίσης, το αντικείμενο iA είναι συμπαγές στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ εάν το A είναι noetherian.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε καταρχάς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, με $\sigma^{\geqslant n}X$ τον truncation

$$(\sigma^{\geqslant n}X)^p = \begin{cases} X^p, & \text{εάν } p \geqslant n. \\ 0, & \text{εάν } p < n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Συμπληρώνουμε τον μορφισμό $A \to iA$ σε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$aA \longrightarrow A \longrightarrow iA \longrightarrow \Sigma(aA)$$

Το αντικείμενο aA είναι ακυκλικό καθώς είναι κώνος του μορφισμού, ο οποίος είναι ψευδοισομορφισμός, εξ ορισμού της ενέσιμης ανάλυσης. Επίσης έχουμε ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(aA, X) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(aA, \sigma^{\geqslant -1}X)$$

καθώς το aA είναι συγκεντρωμένο σε δείκτες $\geqslant -1$, αφού είναι κώνος του μορφισμού $A \to iA$. Όμως από γνωστό θεώρημα, όταν ένα σύμπλοκο είναι ακυκλικό και συγκεντρωμένο σε μη αρνητικούς βαθμούς, τότε οποιοσδήποτε μορφισμός προς ένα ενέσιμο αντικείμενο είναι ομοτοπικός με το 0. Άρα

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(aA, X) = 0$$

Άρα αφήνοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(-, X)$ να δράσει στο διακεκριμένο μας τρίγωνο, βλέπουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(iA, X) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A, X).$$

Τέλος υποθέτουμε ότι το A είναι noetherian. Τότε το A είναι συμπαγές αντικείκενο στην $\mathcal{A}$ καθώς η $\mathcal{A}$ είναι τοπικά noetherian, και άρα συμπαγές και σαν σύμπλοκο συγκεντρωμένο στη θέση μηδέν στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Τέλος ο ισομορφισμός 3.3 μας δείχνει απευθείας εξ ορισμού των συμπαγών αντικειμένων ότι το iA είναι συμπαγές αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. ∎

Λήμμα 3.4.2. *Έστω X ένα μη μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Τότε υπάρχει ένα noetherian αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A, \Sigma^n X) \neq 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mathsf{H}^n X \neq 0$ για κάποιο n. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα noetherian αντικείμενο A και έναν μορφισμό $A \to Z^n X$ ο οποίος μας δίνει ένα μη μηδενικό μορφισμό $A \to \mathsf{H}^n X$. Αυτό ισχύει καθώς έχουμε υποθέσει ότι έχουμε ένα σύνολο noetherian γεννητόρων και λόγω της Πρότασης 1.2.60. Άρα βρήκαμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στον $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A, \Sigma^n X)$. Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathsf{H}^n X = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εφόσον υποθέσαμε ότι το σύμπλοκο X είναι ακυκλικό, είναι γνωστό ότι μπορούμε να επιλέξουμε $n \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε ο πυρήνας $Z^n X$ να μην είναι ενέσιμος. Τότε από την Πρόταση 1.3.17, μπορούμε να επιλέξουμε ένα noetherian αντικείμενο A, έτσι ώστε $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, Z^n X) \neq 0$, καθώς αν δεν ίσχυει αυτό το αντικείμενο $Z^n X$ θα ταν ενέσιμο. Όμως από της σημειώσεις του Milisic [14] (Πρόταση 2.11 , Κεφάλαιο 5) ισχύει ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(A)}(A, \Sigma^{n+1} Z^n X) \cong \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, Z^n X).$$

Άρα $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(A)}(A, \Sigma^{n+1} X) \neq 0$. ∎

Ορισμός 3.4.3. *Μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ θα καλείται* **συμπαγώς παραγόμενη compactly generated** *, εάν υπάρχει ένα σύνολο $\mathcal{T}_0$ συμπαγών αντικειμένων, τέτοιο ώστε αν ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \Sigma^n Y) = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{T}_0$ και $n \in \mathbb{Z}$, να συνεπάγεται ότι $Y = 0$ για κάθε αντικείμενο Y στην $\mathcal{T}$.*

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε την βασική Πρόταση αυτής της παραγράφου, η οποία μας δίνει μία πολύ σημαντική ισοδυναμία της ομοτοπικής κατηγορίας των συμπαγών ενέσιμων αντικειμένων και την φραγμένη παραγόμενη κατηγορία των noetherian.

Πρόταση 3.4.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία, και έστω $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ να συμβολίζει την πλήρη υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Τότε έχουμε ότι:*

(1) η τριγωνισμένη κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη,

(2) ο κανονικός συναρτητής $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ μας δίνει μία ισοδυναμία

$$\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}). \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.4.2 έχουμε ότι για κάθε μη μηδενικό αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, υπάρχει ένα noetherian αντικείμενο A της κατηγορίας $\mathcal{A}$ και ένα $n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A, \Sigma^n X) \neq 0$. Τότε όμως λόγω του ισομορφισμού 3.3, έχουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο iA της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, καθώς το iA είναι η ενέσιμη ανάλυση του A, τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(iA, \Sigma^n X) \neq 0$. Επίσης από το Λήμμα 3.4.1 έχουμε ότι εφόσον το A είναι noertherian, το iA είναι συμπαγές στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Άρα αποδείξαμε ότι η $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη και έχει ουσιαστικά ως γεννήτορες το σύνολο που παράγεται παίρνοντας τις ενέσιμες αναλύσεις των noetherian γεννητόρων της κατηγορίας $\mathcal{A}$.
Είναι γνωστό ότι όταν έχουμε μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά ενέσιμα, όπως δηλαδή και στην περιπτωσή μας, υπάρχει μία ισοδυναμία $\mathsf{K}^+(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^+(\mathcal{A})$. Αυτή η ισοδυναμία καταρχάς περιορίζεται σε μια ισοδυναμία των αντίστοιχων φραγμένων υποκατηγοριων $\mathsf{K}^b(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^b(\mathcal{A})$. Θέλουμε τώρα να δούμε η παραπάνω ισοδυναμία τι μας δίνει όταν περιοριστούμε στην υποκατηγορία $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$. Εφόσον περιοριζόμαστε στα noetherian αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}$, παρατηρούμε ότι η κατηγορία $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$ ταυτίζεται με τη thick υποκατηγορία της $\mathsf{K}^b(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, που παράγεται από τις ενέσιμες αναλύσεις των noetherian αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Όμως λόγω του Λήμματος 2.2 στο άρθρο του A. Neeman [16] έχουμε ότι αυτή η κατηγορία είναι η $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Άρα αποδείξαμε την ισοδυναμία των $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$. ■

Τελειώνοντας αυτή την παράγραφο, αξίζει να αναφερθεί κάτι ακόμα. Από την παραπάνω ισοδυναμία 3.5 βλέπουμε ότι έχουμε έναν συναρτητή $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, ο οποίος ταυτίζει την $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$ με την πλήρη υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων. Με άλλα λόγια, βλέπουμε ότι η κατασκευή της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, λύνει ένα πρόβλημα ολοκλήρωσης της κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$, το οποίο θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε με μία αναλογία.
Η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι μία ολοκλήρωση της κατηγορίας $\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}$, με την ακόλουθη έννοια:

- Η $\mathcal{A}$ είναι μία προσθετική κατηγορία με filtered colimits.
- Η κανονική έγκλιση $\mathsf{noeth}\,\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ταυτίζει την $\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}$ με την πλήρη υποκατηγορία των πεπερασμένα αναπαριστώμενων αντικειμένων.
- Η $\mathcal{A}$ είναι η μικρότερη υποκατηγορία που περιέχει όλα τα πεπερασμένα αναπαριστώμενα αντικείμενα και είναι κλειστή ως προς τον σχηματισμό των filtered colimits.

Ανάλογα έχουμε τα ακόλουθα για την $\mathcal{T} = \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$:

- Η $\mathcal{T}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία με συνγινόμενα.
- Ο συναρτητής $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$ ταυτίζει την $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$ με την πλήρη υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων.
- Η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη υποκατηγορία που περιέχει όλα τα συμπαγή αντικείμενα και είναι κλειστή ως προς τον σχηματισμό τριγώνων και συνγινομένων.

3.5 Localization sequences

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δωθεί ο ορισμός και να παρουσιαστούν κάποια βασικά στοιχεία των localization ακολουθιών. Αυτές οι ακολουθίες και τα βασικά τους χαρακτηριστικά είχαν μελετηθεί ήδη από τον J.L. Verdier, στην εργασία του [24] το 1996. Με τη βοήθειά τους θα ορίσουμε την έννοια των recollement στην επόμενη παράγραφο. Επίσης σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούν ορισμένες πολύ χρήσιμες προτάσεις για την μελέτη συζηγών συναρτητών και θα κλείσουμε την παράγραφο αποδεικνύοντας την ύπαρξη μία σημαντικής localization ακολουθίας.

Ξεκινάμε λοιπόν σταθεροποιώντας όπως και στην προηγούμενη παράγραφο μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία $\mathcal{A}$. ΘΑ συμβολίζουμε με $\mathsf{K}_{ac}(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία όλων των ακυκλικών συμπλόκων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και ορίζουμε:

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) = \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \cap \mathsf{K}_{ac}(\mathcal{A})$$

Η βασική μας πρόταση σε αυτή την παράγραφο όπως ήδη αναφέραμε, μας λέει ότι οι κανονικοί συναρτητές:

$$I\colon \mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{inc} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})\text{και} Q\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{inc} \mathsf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A}),$$

σχηματίζουν μία localization ακολουθία:

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}). \tag{3.6}$$

Ας αρχίσουμε λοιπόν δίνοντας τον ορισμό των localization ακολουθιών.

Ορισμός 3.5.1. *Θα λέμε ότι μια ακολουθία*

$$T' \xrightarrow{F} T \xrightarrow{G} T''$$

ακριβών συναρτητών μεταξύ τριγωνισμένων κατηγοριών είναι μία **localization ακολουθία (localization sequence)**, *εάν ισχύουν τα ακόλουθα.*

(L1) Ο συναρτητής F έχει έναν δεξί συζηγή $F_p\colon T \to T'$, και ικανοποιεί τη συνθήκη: $F_p \circ F \cong Id_{T'}$.

(L2) Ο συναρτητής G έχει έναν δεξί συζηγή $F_p\colon T'' \to T$, και ικανοποιεί τη συνθήκη: $G \circ G_p \cong Id_{T''}$.

(L3) Έστω X ένα αντικείμενο στην T. Τότε $GX = 0$ αν και μόνο αν $X \cong FX'$ για κάποιο αντικείμενο X' στην T'.

Αντίστοιχα η ακολουθία (F, G) συναρτητών καλείται **colocalization ακολουθία (colocalization sequence)**, *εάν η ακολουθία (F^{op}, G^{op}) των αντίθετων συναρτητών είναι localization ακολουθία.*

Το επόμενο Λήμμα που θα δώσουμε είναι ευρέως γνωστό και το μεγαλύτερο μέρος της απόδειξης μπορεί κανείς να το βρει στο βιβλίο του A. Neeman με τίτλο Triangulated categories στο κεφάλαιο 9 με τίτλο Bousfield localization.

Λήμμα 3.5.2. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S}$ μία thick υποκατηγορία της. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η ακολουθία $\mathcal{S} \xrightarrow{inc} \mathcal{T} \xrightarrow{can} \mathcal{T}/\mathcal{S}$ είναι μία localization ακολουθία.

(2) Ο συναρτητής έγκλισης $\mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{T}}$ έχει ένα δεξί συζηγή.

(3) Ο συναρτητής πηλίκο $\mathcal{T} \xrightarrow{\mathcal{T}} /\mathcal{S}$ έχει ένα δεξί συζηγή.

Απόδειξη. Καταρχάς η συνθήκη (1) συνεπάγεται απευθείας τις συνθήκες (2) και (3) εξ ορισμού της localization ακολουθίας. Από την άλλη οι συνθήκες (2) και (3) συνεπάγονται την συνθήκη (1). Αυτό ισχύει καθώς ο συναρτητής inc είναι πλήρης και πιστός, αφού η $\mathcal{S}$ είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{T}$, και άρα η μονάδα της συζηγίας (inc, inc_ρ) είναι φυσικός ισομορφισμός, $\epsilon\colon Id_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\cong} inc_\rho \circ inc$, και άρα ικανοποιείται η (L1). Επίσης ο συναρτητής can_p είναι πλήρης και πιστός, λόγω της Παρατήρησης 3.1.16. Άρα η συνμονάδα της συζηγίας (can, can_ρ) είναι φυσικός ισομορφισμός, $\eta\colon can \circ can_\rho \xrightarrow{\cong} Id_{\mathcal{T}}/\mathcal{S}$, και άρα ικανοποιείται η (L2). Τέλος η συνθήκη (L3) ικανοποιείται, απευθείας από την κατασκευή της κατηγορίας $\mathcal{T}/\mathcal{S}$.
Λόγω των παραπάνω μένει μόνο να δείξουμε ότι οι συνθήκες (1) και (2) είναι ισοδύναμες, το οποίο όμως ισχύει από την Πρόταση 3.1.17. ∎

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε αριστερούς και δεξιούς συζηγείς για συναρτητές οι οποίοι ξεκινάνε από μία συμπαγώς παραγόμενη αβελιανή κατηγορία. Βασικό μας εργαλείο θα είναι η επόμενη πολύ βασική Πρόταση, που οφείλεται στον Neeman. Ωστόσο θεωρούμε σκόπιμο εδώ πέρα να αναφέρουμε ένα πολύ σημαντικό Θεώρημα το οποίο οφείλεται στον Neeman, το Θεώρημα αναπαραστασιμότητας του Brown.

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μία συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία. Έστω επίσης $H\colon \mathcal{T}^{op} \to \mathsf{Ab}$ ένας αντισυνομολογικός συναρτητής. Υποθέτουμε ότι ο φυσικός χάρτης:*

$$H(\coprod_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda) \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} H(t_\lambda)$$

είναι ισομορφισμός για όλα τα μικρά συνγινόμενα στην $\mathcal{T}$. Τότε ο H είναι αναπαριστάσιμος.

Απόδειξη. Δες [17] (Θεώρημα 3.1). ∎

Πρόταση 3.5.4. *Έστω $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ ένας ακριβής συναρτητής μεταξύ τριγωνισμένων κατηγοριών, και έστω ότι η κατηγορία $\mathcal{S}$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε έχουμε:*

(1) Υπάρχει ένας δεξιός συζηγής $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$ αν και μόνο αν ο F διατηρεί όλα τα συνγινόμενα.

(2) Υπάρχει ένας αριστερός συζηγής $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$ αν και μόνο αν ο F διατηρεί όλα τα γινόμενα.

Απόδειξη. Για το (1) έχουμε: Έστω t ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$, και θεωρούμε τον συναρτητή στην $\mathcal{S}$:

$$s \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(F(s), t)$$

Αυτός ο συναρτητής είναι αντισυνομολογικός και στέλνει συνγινόμενα σε γινόμενα. Άρα έχουμε:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(F(\coprod_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda), t) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} F(s_\lambda), t) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(F(s_\lambda), t).$$

καθώς η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης και η δεύτερη λόγω του ότι ο συναρτητής στέλνει συνγινόμενα σε γινόμενα. Άρα από το Θεώρημα αναπαράστασης του Brown 3.5.3, έχουμε ότι ο συναρτητής F είναι αναπαριστάσιμος. Άρα υπάρχει ένα αντικείμενο $G(t)$ της κατηγορίας $\mathcal{S}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(F(s), t) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(s, G(t)).$$

Αυτός ο συναρτητής $G\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ είναι ο δεξιός συζηγής του F. Το αντίστροφο ισχύει λόγω της Πρότασης 1.2.84.
Για το (2) η διαδικασία της απόδειξης είναι παρόμοια και γίνεται χρήση του δεύτερου Θεωρήματος αναπαραστασιμότητας του Brown το οποίο βρίσκεται στο βιβλίο του Neeman [18], Θεώρημα 8.6.1. ∎

Προχωράμε δίνοντας ακόμα ένα χρήσιμο αποτέλεσμα το οποί θα το χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια

Πρόταση 3.5.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μία συμπαγώς παραγόμενη τριγωνισμένη κατηγορία και S_0 ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{T}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{U}$ την πλήρη υποκατηγορία αντικειμένων Y στην $\mathcal{T}$ για τα οποία ισχύει $\mathsf{Hom}\,\mathcal{T}(\Sigma^n X, Y) = 0$ για όλα τα αντικείμενα X του συνόλου S_0 και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε ο συναρτητής έγκλισης $\mathcal{U} \to \mathcal{T}$ έχει έναν αριστερό συζυγή.*

Απόδειξη. Εφόσον η κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι συμπαγώς παραγόμενη, η τοπικοποιούσα υποκατηγορία $\mathcal{S}$ η οποία παράγεται από το σύνολο S_0 είναι καλά παραγόμενη. Από τον Neeman όμως και το βιβλίο του Triangulated categogories έχουμε ότι εφόσον η $\mathcal{S}$ είναι καλά παραγόμενη, ικανοποιούνται η υποθέσεις του Θεωρήματος αναπαραστασιμότητας του Brown και παίρνουμε ότι ο συναρτητή έγκλισης $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ έχει έναν δεξιό συζηγή. Τότε από το Λήμμα 3.5.2 παίρνουμε μία localization ακολουθία $\mathcal{S} \xrightarrow{inc} \mathcal{T} \xrightarrow{can} \mathcal{T}/\mathcal{S}$. Τότε κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 9.1.16 στο βιβλίο του Neeman Triangulated categogories, βλέπουμε ότι ο δεξιός συζηγής του κανονικού συναρτητή $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$, ταυτίζει την κατηγορία $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ με την $\mathcal{U}$. ■

Υπάρχει ακόμα ένα χρήσιμο κριτήριο για το τι συμβαίνει όταν ένας αριστερός συζηγής διατηρεί τη συμπάγεια και οφείλεται στον Neeman στο άρθρο του [17].

Λήμμα 3.5.6. *Έστω $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ ένας ακριβής συναρτητής μεταξύ συμπαγών παραγόμενων τριγωνισμένων κατηγορών, ο οποίος έχει έναν δεξί συζηγή G. Τότε ο F διατηρεί τη συμπάγεια αν και μόνο αν ο G διατηρεί τα συνγινόμενα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι ο G διατηρεί τα συνγινόμενα. Έστω ένα συμπαγές αντικείμενο s στην $\mathcal{S}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}\,\mathcal{T}(F(s), \coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda) &= \mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(s, G(\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda)) \\
&= \mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(s, \coprod_{\lambda\in\Lambda} G(x_\lambda)) \text{ καθώς ο } G \text{ διατηρεί τα συνγινόμενα} \\
&= \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(s, G(x_\lambda)) \text{ επειδή το } s \text{ είναι συμπαγές} \\
&= \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(F(s), x_\lambda),
\end{aligned}$$

και άρα το $F(s)$ είναι συμπαγές στην $\mathcal{T}$.
Αντίστροφα, εφόσον η $\mathcal{S}$ είναι συμπαγώς παραγόμενη, υπάρχει ένα σύνολο $\mathcal{S}_0$ συμπαγών γεννητόρων, και υποθέτουμε ότι για κάθε αντικείμενο s του $\mathcal{S}_0$, το αντικείμενο $F(s)$ είναι συμπαγές. Έστω $\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ ένα συνγινόμενο στην $\mathcal{T}$. Τότε για κάθε αντικείμενο s του $\mathcal{S}_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}(s, G(\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda)) &= \mathsf{Hom}(F(s), \coprod_{\lambda\in\Lambda} x_l) \text{ λόγω συζηγίας} \\
&= \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}(F(s), x_\lambda) \text{ καθώς το } F(s) \text{ είναι συμπαγές} \\
&= \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{Hom}(s, G(x_\lambda)) \text{ λόγω συζηγίας} \\
&= \mathsf{Hom}(s, \coprod_{\lambda\in\Lambda} G(x_\lambda)) \text{ καθώς το } s \text{ είναι συμπαγές.}
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, ο φυσικός χάρτης

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} G(x_\lambda) \to G(\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda)$$

μας δίνει έναν φυσικό μετασχηματισμό

$$\phi\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(\text{-}, \coprod_{\lambda\in\Lambda} G(x_\lambda)) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{S}}(\text{-}, G(\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda)),$$

και ο $\phi(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο s του συνόλου $\mathcal{S}_0$. Αλλά τότε αν πάρουμε το διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} G(x_\lambda) \to G(\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda) \to Z \to \Sigma(\coprod_{\lambda\in\Lambda} G(x_\lambda))$$

για το αντικείμενο Z θα έχουμε ότι $\mathsf{Hom}(s,Z) = 0$ για κάθε αντικείμενο s του $\mathcal{S}_0$. Εφόσον όμως το $\mathcal{S}_0$ είναι σύνολο γεννητόρων, θα πρέπει να ισχύει $Z = 0$ και άρα παίρνουμε ότι ο μορφισμός

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} G(x_\lambda) \to G(\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda)$$

είναι ισομορφισμός, δηλαδή ο G διατηρεί τα συνγινόμενα. ∎

Προχωράμε τώρα στην κύρια Πρόταση αυτής της παραγράφου, η οποία θα μας δώσει την localization ακολουθία, για την ομοτοπική κατηγορία των ενέσιμων.

Πρόταση 3.5.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία. Τότε οι κανονικοί συναρτητές* $\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ *και* $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ *σχηματίζουν μία localization ακολουθία:*

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}). \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε καταρχάς από την Πρόταση 3.4.4, ότι η κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Αυτή την ιδιότητα της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, την χρειαζόμαστε καθώς θα κάνουμε χρήση της Πρότασης 3.5.4. Η έγκλιση $J\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$ διατηρεί τα γινόμενα, και άρα από την Πρόταση 3.5.4, έχει έναν αριστερό συζηγή J_λ και ισχύει ότι $J_\lambda \circ J \cong Id_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}$, καθώς η κανονική έγκλιση J είναι πλήρης και πιστός συναρτητής. Από το Λήμμα 3.5.2, παίρνουμε μία localization ακολουθία:

$$\mathcal{K} \xrightarrow{inc} \mathsf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{J_\lambda} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}),$$

όπου $\mathcal{K}$ συμβολίζει τον πυρήνα του συναρτητή J_λ. Άρα

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})(X,Y)=0} \text{ για κάθε } X \text{ στην } \mathcal{K} \text{ και } Y \text{ στην } \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}).$$

Άρα η $\mathcal{K}$ είναι υποκατηγορία της $\mathsf{K}_{ac}\mathcal{A}$ και παίρνουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα ακριβών συναρτητών:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "inc"] & \mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "J_\lambda"] \arrow[d, "Id_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[d, "F"] \\
\mathsf{K}_{ac}(\mathcal{A}) \arrow[r, "inc"] & \mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "can"] & \mathsf{D}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

όπου ο συναρτητής F επάγεται από τον κανονικό συναρτητή $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$. Επίσης ισχύει ότι $F \cong Q$ καθώς:

$$Q = can \circ J = F \circ J_\lambda \circ J \cong F \circ Id_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}.$$

Ο F διατηρεί τα συνγινόμενα και άρα πάλι λόγω της Πρότασης 3.5.4, έχει έναν δεξί συζηγή F_p. Εφόσον ο J είναι δεξιός συζηγής για τον J_λ και ο F_p είναι δεξιός συζηγής του F, παίρνουμε ότι ο συναρτητής $J \circ F_p$ είναι δεξιός συζηγής του κανονικού συναρτητή $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$. Άρα ο $J \circ F_p$, από την Πρόταση 3.1.17, είναι πλήρης και πιστός και άρα έχουμε $(F\circ J_\lambda)\circ(J\circ F_p) = Id_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}$. Άρα και επειδή $J_\lambda \circ J \cong Id_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}$, παίρνουμε ότι $F \circ F_p \cong Id_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}$. Από την άλλη, ο $\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι ο πυρήνας του F, και άρα από το Λήμμα 3.5.2 έχουμε ότι ο η 3.7 είναι localization ακολουθία. ∎

Κλείνοντας την Παράγραφο, παραθέτουμε ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια και είναι άμεσες συνέπειες της Πρότασης 3.5.7.

Παρατήρηση 3.5.8. Έστω $J_\lambda\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, να είναι ο αριστερός συζυγής της κανονικής έγκλισης $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathcal{A})$. Τότε η σύνθεση $Q \circ J_\lambda$ είναι φυσικά ισόμορφη με τον κανονικό συναρτητή $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Παρατήρηση 3.5.9. Ο δεξιός συζυγής Q_ρ του συναρτητή Q, επάγει μία ισοδυναμία

$$\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}),$$

η οποία είναι ένα quasi-inverse για την ισοδυναμία $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$, η οποία επάγεται από τον Q.

3.6 Ένα recollement

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε ότι η ακολουθία

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}) \tag{3.8}$$

είναι μία localization ακολουθία. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δοθεί ένα κριτήριο έτσι ώστε από την παραπάνω ακολουθία να επάγεται ένα recollement

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \mathrel{\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \mathrel{\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}} \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

Οφείλουμε όμως αρχικά να δώσουμε τον ορισμό της έννοιας του recollement, πριν προχωρήσουμε στο κύριο μέρος αυτής της παραγράφου.

Ορισμός 3.6.1. *Θα λέμε ότι μια ακολουθία*

$$\mathcal{T}' \to \mathcal{T} \to \mathcal{T}'' \tag{3.9}$$

ακριβών συναρτητών μεταξύ τριγωνισμένων κατηγοριών επάγει ένα **recollement** *:*

$$\mathcal{T}' \mathrel{\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}} \mathcal{T} \mathrel{\substack{\longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}} \mathcal{T}''$$

εάν η ακολουθία 3.9 είναι ταυτόχρονα μία localization και colocalization ακολουθία.

Στην προηγούμενη παράγραφο στην Πρόταση 3.5.7, αποδείξαμε ότι η ακολουθία 3.8 είναι μία localization ακολουθία. Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι αυτή η ακολουθία επάγει ένα recollement υπό κάποιες συνθήκες, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε το πότε αυτή η ακολουθία είναι και μία colocalization ακολουθία. Προχωράμε δίνοντας ένα απαραίτητο Λήμμα, το οποίο θα χρειαστεί για την απόδειξη του βασικού θεωρήματος αυτής της παραγράφου.

Λήμμα 3.6.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία. Τότε ένα συμπαγές αντικείμενο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, ανήκει και στην $\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το αντικείμενο X είναι συμπαγές στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Χρειάζεται να δείξουμε ότι το αντικείμενο $\mathsf{H}^n X$ είναι noetherian για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και ότι $\mathsf{H}^n X = 0$ σχεδόν παντού.
Καταρχάς για κάθε ενέσιμο αντικείμενο E στην $\mathcal{A}$, έχουμε έναν ισομορφισμό:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X, E) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0 X, E).$$

Άρα επειδή υποθέσαμε ότι το X είναι συμπαγές στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, παίρνουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0 X, \text{-})$ διατηρεί τα συνγινόμενα στην $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$. Άρα το $H^0 X$ είναι συμπαγές στην $\mathcal{A}$ και άρα και noetherian καθώς η $\mathcal{A}$ είναι τοπικά noetherian.
Τώρα σταθεροποιούμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έναν ενέσιμο φάκελο $\mathsf{H}^n X \to E(\mathsf{H}^n X)$, και θεωρούμε τον επαγόμενο μορφισμό, εξ ορισμού του γινομένου μίας οικογένεια αντικειμένων, :

$$a\colon X \to \prod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^{-n} E(\mathsf{H}^n X)$$

στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Όμως ο κανονικός μορφισμός

$$\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^{-n} E(\mathsf{H}^n X) \to \prod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^{-n} E(\mathsf{H}^n X),$$

είναι ισομορφισμός στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, και άρα ο μορφισμός a αναλύεται μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού παραγόντων του γινομένου $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^{-n} E(\mathsf{H}^n X)$. Άρα, $\mathsf{H}^n X = 0$ σχεδόν παντού. ∎

Θεώρημα 3.6.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian grothendieck κατηγορία, και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε ο κανονικός συναρτητής $Q\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ έχει έναν αριστερό συζηγή, και άρα η ακολουθία*

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

είναι μία colocalization ακολουθία.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{K}$ η τοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, η οποία παράγεται από όλα τα συμπαγή αντικείμενα X της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ για τα οποία ισχύει ότι το QX είναι συμπαγές στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Ισχυριζόμαστε ότι ο $Q|_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{K} \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ισοδυναμία. Καταρχάς παρατηρούμε ότι και η $\mathcal{K}$ και η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, είναι συμπαγώς παραγόμενες. Επίσης από το Λήμμα 3.6.2, έχουμε ότι:

$$\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}),$$

όπου $\mathsf{D}^c(\mathcal{A})$ συμβολίζει την πλήρη υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, και από την Πρόταση 3.4.4, έχουμε ότι ο συναρτητής Q επάγει μία ισοδυναμία:

$$\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}).$$

Άρα ο Q επάγει μία ισοδυναμία μεταξύ των υποκατηγοριών των συμπαγών αντικειμένων στην $\mathcal{K}$ και στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, καθώς υποθέσαμε ότι το QX είναι συμπαγές στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, όταν το X ανήκει στο σύνολο που παράγει την $\mathcal{K}$. Επειδή όμως η κατηγορίες $\mathcal{K}$ και $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενες, και αποδείξαμε την ισοδυναμία των αντίστοιχων υποκατηγοριών τους που αποτελούνται από συμπαγή αντικείμενα, παίρνουμε ότι ο $Q|_{\mathcal{K}}$ είναι ισοδυναμία, καθώς ο Q διατηρεί τα συνγινόμενα.
Επομένως μπορούμε να σταθεροποιήσουμε έναν αριστερό συζηγή $L\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}$ του συναρτητή $Q|_{\mathcal{K}}$. υποστηρίζουμε τώρα ότι η σύνθεση:

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{L} \mathcal{K} \xrightarrow{inc} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}),$$

είναι ένας αριστερός συζηγής του Q. Για να αιτιολογήσουμε τον ισχυρισμό μας, θεωρούμε για κάθε αντικείμενο X της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και κάθε αντικείμενο Y της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, το φυσικό χάρτη:

$$\alpha_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}(LX,Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(QLX,Y) \xrightarrow{sim} \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X,QY),$$

ο οποίος επάγεται από τον Q. Τότε ξέρουμε καταρχάς από την Πρόταση 3.4.4, ότι όταν τα αντικείμενα X, Y είναι συμπαγή, τότε ο παραπάνω φυσικό χάρτης είναι ισομορφισμός. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός και για τυχαία X, Y. Σταθεροποιούμε καταρχάς ένα συμπαγές αντικείμενο X. Τότε τα αντικείμενα Y, για τα οποία ο χάρτης $a_{X,Y}$ είναι ισομορφισμός, σχηματίζουν μία τριγωνισμένη κατηγορία, για την οποία ισχύει ότι είναι κλειστή κάτω από των σχηματισμό συνγινομένων, καθώς το X είναι συμπαγές, και περιέχει όλα τα συμπαγή αντικείμενα Y, λόγω της Πρότασης 3.4.4. Άρα ο $a_{X,Y}$ είναι ισομορφισμός για όλα τα Y, καθώς η $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Με ανάλογο τρόπο και σταθεροποιώντας ένα συμπαγές αντικείμενο Y στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, παίρνουμε ότι ο χάρτης $a_{X,Y}$ είναι ισομορφισμός για όλα τα X, καθώς και η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Άρα ο Q έχει έναν αριστερό συζυγή, και από το Λήμμα 3.5.2, έχουμε ότι οι συναρτητές I και Q σχηματίζουν μία colocalization ακολουθία. ■

Ως άμεσο αποτέλεσμα του παραπάνω Θεωρήματος 3.6.3, αλλά και της Πρότασης 3.5.7, παίρνουμε το παρακάτω Πόρισμα, το οποία μας δίνει την ύπαρξη ενός recollement.

Πόρισμα 3.6.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε η ακολουθία:*

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}),$$

επάγει ένα recollement:

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \mathsf{D}(\mathcal{A})\ .$$

Ένα άμεσο αποτέλεσμα της ύπαρξης του συγκεκριμένου recollement είναι το παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 3.6.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε το γινόμενο ακυκλικών συμπλόκων ενέσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$ είναι ακυκλικό.*

Απόδειξη. Το γεγονός ότι το γινόμενο ακυκλικών συμπλόκων ενέσιμων αντικειμένων της $\mathcal{A}$ είναι ακυκλικό, οφείλεται στην ύπαρξη ενός δεξιού συζυγή του συναρτητή $I\colon \mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Καθώς η $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη, και λόγω της Πρότασης 3.5.4, αυτός ο δεξιός συζυγής θα διατηρεί τα γινόμενα, οπότε παίρνουμε και το ζητούμενο. ■

Τελειώνοντας αυτή την παράγραφο, και για να δείξουμε ότι η απαίτηση της κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ να είναι συμπαγώς παραγόμενη δεν είναι υπερβολική, θα δώσουμε ένα Κριτήριο για την κατηγορία $\mathcal{A}$, έτσι ώστε η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ να είναι η συμπαγώς παραγόμενη.

Λήμμα 3.6.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο $\mathcal{A}_0$ αντικειμένων της $\mathcal{A}$, τα οποία είναι συμπαγή, εάν θεωρηθούν ως αντικείμενα της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Εάν το $\mathcal{A}_0$ παράγει την $\mathcal{A}$, τότε η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη από το $\mathcal{A}_0$.*

Η απόδειξη του παραπάνω Λήμματος 3.6.6, είναι άμεση με χρήση του παρακάτω Λήμματος.

Λήμμα 3.6.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και σταθεροποιούμε ένα σύνολο γεννητόρων $\mathcal{A}_0$. Έστω X ένα σύμπλοκο στην $\mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $\mathsf{H}^0X \neq 0$. Τότε υπάρχει κάποιο αντικείμενο A του συνόλου $\mathcal{A}_0$ τέτοιο ώστε να ισχύει:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})(A,X)\neq 0} \ \textit{και}\ \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})(A,X)\neq 0}\,.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα αντικείμενο A του συνόλου $\mathcal{A}_0$ και ένα μορφισμό $A \to Z^0X$, τέτοιο ώστε η σύνθεσή του με τον μορφισμό $Z^nX \to \mathsf{H}^nX$ να είναι μη μηδενική. Αυτό μας δίνει ένα μη μηδενικό στοιχείο στην

$$\mathsf{H}^0(\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A,X).$$

Το δεύτερο συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του πρώτου, καθώς για κάθε αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(A,X) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A,iX),$$

και $\mathsf{H}^0(iX) \cong H^0X$. ■

Κεφάλαιο 4

Η Ευσταθής Παραγόμενη Κατηγορία και Εφαρμογές

4.1 Η ευσταθής παραγόμενη κατηγορία

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι ο Ορισμός της ευσταθούς παραγόμενης κατηγορίας μίας τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορίας και η απόδειξη του γεγονότος ότι αυτή η κατηγορία είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τα αποτελέσματα αυτά οφείλονται στον Krause [13] και είναι η βάση πολλών εφαρμογών που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.
Ξεκινάμε λοιπόν σταθεροποιώντας μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία $\mathcal{A}$ και υποθέτοντας ότι η κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Δίνουμε λοιπόν τονΟρισμό της σταθερούς παραγόμενης κατηγορίας.

Ορισμός 4.1.1. *Η* **ευσταθής παραγόμενη κατηγορία (stable derived category)** $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ *είναι εξ ορισμού η πλήρης υποκατηγορία της* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$*, η οποία σχηματίζεται από όλα τα ακυκλικά σύμπλοκα των ενέσιμων αντικειμένων στην* $\mathcal{A}$*. Η πλήρης υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων συμβολίζεται με* $\mathsf{S}^c(\mathcal{A})$*.*

Βασικό μας εργαλείο σε αυτή την παράγραφο θα είναι η localization (colocalization) ακολουθία :

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}).$$

Επομένως θα κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι οι συναρτητές I, Q έχουν αριστερούς συζυγείς I_ρ, Q_ρ και δεξιούς συζηγείς I_λ, Q_λ, καθώς όπως αποδείξαμε στο Πόρισμα 3.6.4, η παραπάνω ακολουθία επάγει ένα recollement. Επίσης ορίζουμε και τον συναρτητή σταθεροποίησης με τη βοήθεια των παραπάνω συναρτητών.

Ορισμός 4.1.2. *Ο* **συναρτητής ευστάθειας (stabilization functor)***, είναι εξ ορισμού η σύνθεση :*

$$S\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda \circ Q_\rho} \mathsf{S}(\mathcal{A}).$$

Ξεκινάμε λοιπόν δίνοντας το παρακάτω χρήσιμο Λήμμα.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε οι συναρτητές $Q_\lambda, Q_\rho\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ εισάγουν έναν φυσικό μετασχηματισμό $\eta\colon Q_\lambda \to Q_\rho$, και ο η είναι ισομορφισμός όταν περιοριστεί στα συμπαγή αντικείμενα της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Εφόσον η ακολουθία

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}),$$

είναι colocalization ακολουθία, έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό $\mu\colon Id_{\mathsf{D}(\mathcal{A})} \xrightarrow{\sim} Q \circ Q_\lambda$. Ο φυσικός μετασχηματισμός

$$Q_\lambda \circ Q \longrightarrow Id_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})} \longrightarrow Q_\rho \circ Q,$$

επάγει για κάθε αντικείμενο X στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, έναν φυσικό χάρτη

$$\eta_X : Q_\lambda X \xrightarrow{Q_\lambda(\mu_X)} Q_\lambda \circ (Q \circ Q_\lambda)X \to (Q_\rho \circ Q) \circ Q_\lambda X \xrightarrow{Q_\rho(\mu_X^{-1})} Q_\rho X.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο φυσικός μετασχηματισμός $Q(\eta)$ επάγει έναν ισομορφισμό:

$$Q \circ Q_\lambda \xrightarrow{\sim} Q \circ Q_\rho,$$

καθώς η αρχική μας ακολουθία είναι και localization ακολουθία, και δηλαδή έχουμε έναν ισομορφισμό $Q \circ Q_\rho \cong Id_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}$.
Θα δείξουμε τώρα ότι ο η, όταν περιοριστεί στην κατηγορία $\mathsf{D}^c(\mathcal{A})$ είναι ισομορφισμός. Ξέρουμε από την Πρόταση 3.4.4, ότι ο Q επάγει μία ισοδυναμία

$$\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}).$$

Από την άλλη έχουμε ότι

$$Q_\lambda(\mathsf{D}^c(\mathcal{A})) \subseteq \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}),$$

καθώς ένας αριστερός συζυγής διατηρεί τη συμπάγεια εάν ο δεξιός συζυγής διατηρεί τα συνγινόμενα λόγω του Λήμματος 3.5.6. Επίσης ισχύει ότι

$$Q_\rho(\mathsf{D}^c(\mathcal{A})) \subseteq \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}),$$

εφόσον $\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$, λόγω του Λήμματος 3.6.2, και

$$Q_\rho(\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})) = \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}),$$

λόγω της Παρατήρησης 3.5.9. Επομένως ο φυσικός μετασχηματισμός $\eta|_{\mathsf{D}^c(\mathcal{A})}$ είναι ισομορφισμός. ∎

Πρόταση 4.1.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία, και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε έχουμε μία localization ακολουθία*

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q_\lambda} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda} \mathsf{S}(\mathcal{A}), \tag{4.1}$$

η οποία επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \arrow[r, "inc"] \arrow[d, equal] & \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \arrow[r, "can"] \arrow[d, "Q_\rho|_{\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})}", "\sim"'] & \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})/\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \arrow[d, "F"] \\
\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "inc"] & \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "inc"] & \mathsf{S}^c(\mathcal{A}) \arrow[d, "inc"] \\
\mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q_\lambda"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[r, "I_\lambda"] & \mathsf{S}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Καταρχάς έχουμε από το Θεώρημα 3.6.3, ότι η ακολουθία 4.1 είναι μία localization ακολουθία.
Απομένει να αιτιολογήσουμε , γιατί το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Καταρχάς ξέρουμε από το Λήμμα 3.5.6, ότι ένας αριστερός συζυγής διατηρεί τη συμπάγεια αν και μόνο αν ο δεξιός του συζυγής διατηρεί τα συνγινόμενα. Γνωρίζουμε όμως ότι οι κανονικοί συναρτητές Q, I διατηρούν τα συνγινόμενα, οπότε οι συναρτητές Q_λ, I_λ διατηρούν τη συμπάγεια, και αυτό εξηγεί την μεταθετικότητα των κάτω τετραγώνων του διαγράμματος.
Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}),$$

λόγω του Λήμματος 3.6.2, και ότι ο $Q_\rho|_{\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})}$ είναι $quasi-inverse$ του $Q|_{\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}$, λόγω της Παρατήρησης 3.5.9. Η μεταθετικότητα του πάνω αριστερά τετραγώνου οφείλεται στο Λήμμα 4.1.3, καθώς δείξαμε ότι όταν περιοριζόμαστε στα συμπαγή αντικείμενα της κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, οι συναρτητές Q_λ και Q_ρ είναι φυσικά ισόμορφοι.
Τέλος, καθώς η 4.1 είναι μία localization ακολουθία, έχουμε ότι $I_\lambda \circ Q_\lambda = 0$. Επομένως λόγω της μεταθετικότητας των τετραγώνων που ήδη έχουμε αιτιολογήσει, παίρνουμε ότι η σύνθεση:

$$\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \xrightarrow{inc} \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{S}^c(\mathcal{A}) \xrightarrow{inc} \mathsf{S}(\mathcal{A})$$

είναι ίση με 0, και άρα και η σύνθεση:

$$\mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{S}^c(\mathcal{A})$$

είναι ίση με 0. Επομένως ο F ο οποίος αναγράφεται στο διάγραμμα είναι εξ ορισμού ο μοναδικός, ως προς ισομορφισμό, συναρτητής, ο οποίος οφείλεται στις ιδιότητες της τοπικοποίησης, ο οποίος κάνει το πάνω δεξιά τετράγωνο μεταθετικό. ■

Με τη βοήθεια της Πρότασης 4.1.4, βλέπουμε ότι η ευσταθής παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ είναι μία τοπικοποίηση της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Το γεγονός αυτό έχει μερικές ενδιαφέρουσες συνέπειες τις οποίες αναφέρουμε παρακάτω.

Πριν προχωρήσουμε στις εν λόγω συνέπειες είναι απαραίτητο να αναφέρουμε ένα Θεώρημα το οποίο οφείλεται στη δουλειά των Neeman, Ravenel, Thomason, Trobaugh, Yao, το παίζει μεγάλο ρόλο στην K-θεωρία και πρόκειται ουσιαστικά για ένα Θεώρημα τοπικοποίησης. Το Θεώρημα δημοσιευτηκε στο άρθρο του Neeman [16].

Θεώρημα 4.1.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία η οποία είναι κλειστή ως προς τον σχηματισμό μικρών συνγινομένων. Έστω $\mathcal{C}^c$ η πλήρης υποκατηγορία των συμπαγών αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{C}^c$ είναι μικρή κατηγορία, και ότι η μικρότερη τοπικοποιούσα κατηγορία της $\mathcal{C}$, η οποία περιέχει την $\mathcal{C}^c$, είναι ολόκληρη η $\mathcal{C}$. Έστω R να είναι ένα υποσύνολο αντικειμένων της $\mathcal{C}^c$, κλειστό ως προς τον suspension συναρτητή. Έστω R, η μικρότερη τοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, η οποία περιέχει το R. Τέλος έστω $\mathcal{T} = \mathcal{C}/R$. Τότε η ακολουθία των ακριβών συναρτητών*

$$R \to \mathcal{C} \to \mathcal{T},$$

επάγει, όταν περιοριστούμε στα συμπαγή αντικείμενα, μία ακολουθία συναρτητών

$$R^c \to \mathcal{C}^c \to \mathcal{T}^c.$$

Υπάρχει δηλαδή ένας επαγόμενος συναρτητής

$$\mathcal{C}^c/R^c \xrightarrow{F} \mathcal{T}^c.$$

Ο συναρτητής F είναι πλήρης και πιστός, και ταυτίζει την $\mathcal{C}^c/R^c$ με την υποκατηγορία της $\mathcal{T}^c$, της οποία η epaisse κλειστότητα είναι όλη η $\mathcal{T}^c$. Με άλλα λόγια, κάθε αντικείμενο στην $\mathcal{T}^c$ είναι ένας ευθύς αθροιστέος κάποιου αντικειμένου στην $\mathcal{C}^c/R^c$.

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος παραλείπεται και μπορεί να βρεθεί στο παραπάνω αναφερόμενο άρθρο του Neeman. Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε δύο Πορίσματα της Πρότασης 4.1.4.

Πόρισμα 4.1.6. *Η ευσταθής παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη, και ο συναρτητής ευστάθειας $I_\lambda \circ Q_\rho \colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{S}(A)$ επάγει μία ισοδυναμία:*

$$F\colon \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})/\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{S}^c(\mathcal{A}).$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε καταρχάς από την Πρόταση 3.4.4, ότι η $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Αυτή η ιδιότητα μεταφέρεται και στην κατηγορία $\mathsf{S}(\mathcal{A})$, καθώς ο συναρτητής I_λ διατηρεί τη συμπάγεια, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, και διατηρεί τα συγγινόμενα ως αριστερός συζηγής. Επομένως μεταφέρει ένα σύνολο συμπαγών γεννητόρων της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ σε ένα σύνολο συμπαγών γεννητόρων στην κατηγορία $\mathsf{S}(\mathcal{A})$.
Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισοδυναμία, θα κάνουμε χρήση του παραπάνω θεωρήματος 4.1.5. Καταρχάς αν θέσουμε όπου $\mathcal{C} = \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, βλέπουμε ότι οι σχετικές υποθέσεις του Θεωρήματος ικανοποιούνται. Σκοπός μας είναι να θέσουμε ένα κατάλληλο σύνολο R αντικειμένων της $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, έτσι ώστε η μικρότερη τοπικοποιούσα υποκατηγορία που παράγεται από το R να είναι μια υποκατηγορία της $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, η οποία θα είναι ισοδύναμη με την $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Αρκεί γι αυτό το λόγο να θεωρήσουμε ότι το σύνολο R αποτελείται από τα συμπαγή αντικείμενα της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, τα οποία ανήκουν στην εικόνα του συναρτητή Q_λ. Τότε εφόσον ο Q_λ διατηρεί τη συμπάγεια και τα συγγινόμενα ,όπως είδαμε και στην απόδειξη της Πρότασης 4.1.4, αλλά και το γεγονός ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη, μας δείχνουν ότι ο Q_λ ταυτίζει την $\mathsf{D}(A)$ με την τοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ η οποία παράγεται από τα αντικείμενα του συνόλου R, όπως αυτό ηή το έχουμε θέσει. Επομένως οι απαιτήσεις του Θεωρήματος 4.1.5 ικανοποιούνται, και άρα η ακολουθία

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{S}(\mathcal{A})$$

μας δίνει μία ακολουθία

$$\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \to \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{S}^c(\mathcal{A})$$

και άρα και μία ισοδυναμία, ως προς ευθύς παράγοντες,

$$\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})/\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \xrightarrow{sim} \mathsf{S}^c(\mathcal{A})$$

. Από την Πρόταση 3.4.4 ξέρουμε όμως ότι $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \cong \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})$, και άρα πήραμε την ζητούμενη ισοδυναμία. Για να είμαστε και ακόμη πιο ακριβής, ο συναρτητής F είναι πλήρης και πιστός, και κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{S}^c(\mathcal{A})$ είναι ευθύς παράγοντας ενός αντικειμένου στην εικόνα του F. ■

Το δεύτερο Πόρισμα οφείλεται κατά μεγάλο ρόλο στην μεταθετικότητα του διαγράμματος της Πρότασης 4.1.4 και μας δίνει ουσιαστικά μία ιδιότητα του συναρτητή ευστάθειας $I_\lambda \circ Q_\rho$

Πόρισμα 4.1.7. *Η σύνθεση*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda \circ Q_\rho} \mathsf{S}\mathcal{A},$$

διατηρεί όλα τα συγγινόμενα και μηδενίζει τα αντικείμενα της $\mathcal{A} \cap \mathsf{D}^c(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Καταρχάς το γεγονός ότι η σύνθεση της υπόθεσης μηδενίζει όλα τα αντικείμενα στο $\mathcal{A} \cap \mathsf{D}^c(\mathcal{A})$, οφείλεται απευθείας στην μεταθετικότητα του διαγράμματος της Πρότασης 4.1.4, καθώς και στο γεγονός ότι $I\lambda \circ Q_\lambda = 0$. Θα δείξουμε τώρα ότι ο συναρτητής $I_\lambda \circ Q_\rho$ διατηρεί όλα τα συγγινόμενα. Καταρχάς παρατηρούμε ότι ο συναρτητής Q_ρ στέλνει ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{A}$ σε μια ενέσιμη ανάλυση. Αυτό ισχύει καθώς ο συναρτητής $Q \circ Q_\rho$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον συναρτητή $Id_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}$. Ένα συγγινόμενο ενέσιμων αναλύσεων είναι και πάλι ενέσιμη ανάλυση, και ο $\mathcal{I}_\lambda$ ως αριστερός συζηγής διατηρεί τα συγγινόμενα, οπότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό της ευσταθούς συνομολογιακής ομάδας, ο οποίος γίνεται με τη βοήθεια του συναρτητή σταθεροποιήσης.

Ορισμός 4.1.8. *Έστω $S\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{A})$,ο συναρτητής ευστάθειας. Τότε ορίζουμε για δύο αντικείμενα X, Y της κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, την* **ευσταθή συνομολογιακή ομάδα (stable derived group)***:*

$$\underline{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(SX, \Sigma^n(SY)).$$

4.2 Επεκτείνοντας παραγόμενους συναρτητές

Όπως είδαμε και στο Θεώρημα 3.2.17, ένας προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ δύο τοπικά noetherian Grothendieck κατηγοριών μας δίνει ένα δεξί παραγόμενο συναρτητή $RF\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{B})$. Σε αυτή την παράγραφο θα επεκτείνουμε αυτόν τον συναρτητή σε έναν συναρτητή $\hat{R}F\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B})$ και θα μελετήσουμε τον δεξιό και αριστερό του συζυγή. Ως εφαρμογή αυτών, θα θεωρήσουμε ως F, την ευθέα εικόνα ενός συναρτητή $f_*\colon \mathsf{Qcoh}\mathbb{X} \to \mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}$, ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα μορφισμό $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ μεταξύ noetherian schemes.
Στην υπόλοιπη παράγραφο θα κάνουμε χρήση των παραπάνω δύο συναρτητών:

$$J\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{inc} \mathsf{K}(\mathcal{A}) \text{ και } Q\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{inc} \mathsf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A}),$$

και δε θα αλλάζουμε τον συμβολισμό ακόμη και όταν μιλάμε για τους αντίστοιχους συναρτητές που αντιστοιχούν στην κατηγορία $\mathcal{B}$. Επίσης θα κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι και οι δύο συναρτητές έχουν αριστερό και δεξιό συζηγή, όπως αποδείξαμε και στις προηγούμενες παραγράφους. Επιπλέον στοιχεία Αλγεβρικής Γεωμετρίας μέρος των οποίων θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη μπορεί κανείς να βρει στο βιβλίο του Hartshorne [8].
Ξεκινάμε λοιπόν διατυπώνοντας το παρακάτω βασικό Θεώρημα:

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής μεταξύ δύο τοπικά noetherian Grothendieck κατηγοριών. Υποθέτουμε επίσης ότι οι κατηγορίες $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}(\mathcal{B})$ είναι συμπαγώς παραγόμενες. Τότε η σύνθεση*

$$\hat{R}F\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{J} \mathsf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathsf{K}(F)} \mathsf{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{J_\lambda} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}),$$

κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RF} & \mathsf{D}(\mathcal{B}) \\ \downarrow{\scriptstyle Q_\rho} & & {\scriptstyle Q}\uparrow \\ \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) & \xrightarrow{\hat{R}F} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \end{array}$$

Επιπλέον ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Εάν ο F διατηρεί τα συνγινόμενα, τότε ο $\hat{R}F$ διατηρεί τα συνγινόμενα και άρα έχει έναν δεξιό συζυγή$(\hat{R}F)_\rho$.

(2) Εάν οι συναρτητές F και RF διατηρούν τα συνγινόμενα, τότε ο RF έχει έναν δεξιό συζυγή $(RF)_\rho$, ο οποίος κάνει τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά.

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RF} & \mathsf{D}(\mathcal{B}) \\ \downarrow{\scriptstyle Q_\lambda} & & {\scriptstyle Q}\uparrow \\ \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) & \xrightarrow{\hat{R}F} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{D}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{(RF)_\rho} & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle Q_\rho} & & {\scriptstyle Q}\uparrow \\ \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) & \xrightarrow{(\hat{R}F)_\rho} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \end{array}$$

Απόδειξη. Καταρχάς η σύνθεση

$$\mathsf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{J_\lambda} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}),$$

είναι φυσικά ισόμορφη με τον κανονικό συναρτητή $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{A})$, από την Παρατήρηση 3.5.8. Προφανώς, ο συναρτητής $J \circ Q_\rho$ είναι ο δεξιός του συζυγής. Αν συμβολίσουμε με RF τον δεξί παραγόμενο συναρτητή του F, έχουμε ότι

$$RF = Q \circ J_\lambda \circ \mathsf{K}(F) \circ J \circ Q_\rho.$$

Εφόσον όμως ορίσαμε τον $\hat{R}F$ ως $\hat{R}F = J_\lambda \circ \mathsf{K}(F) \circ J$, παίρνουμε ότι $RF = Q \circ \hat{R}F \circ Q_\rho$, και άρα δείξαμε τη μεταθετικότητα του πρώτου διαγράμματος.

(1) Έστω ότι ο F διατηρεί τα συνγινόμενα. Τότε και ο $\mathsf{K}(F)$ διατηρεί τα συνγινόμενα. Ο J ως συναρτητής έγκλισης και ο J_λ ως αριστερός συζυγής, διατηρούν και αυτοί τα συνγινόμενα, οπότε έχουμε και ότι ο $\hat{R}F$ διατηρει τα συνγινόμενα. Τέλος, έφοσον ο $\hat{R}F$ διατηρεί τα συνγινόμενα και η $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη, παίρνουμε από την Πρόταση 3.5.4, ότι ο $\hat{R}F$ έχει έναν δεξιό συζυγή $(\hat{R}F)_\rho$.

(2) Έστω ότι οι συναρτητές F και RF διατηρούν τα συνγινόμενα. τότε ξανά λόγω της Πρότασης 3.5.4 έχουμε ότι ο RF έχει έναν δεξιό συζυγή. Τώρα θα δείξουμε το αριστερό διάγραμμα της υπόθεσης είναι μεταθετικό. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι

$$Q \circ \hat{R}F \circ Q_\lambda \cong Q \circ \hat{R}F \circ Q_\rho.$$

Τότε από το Λήμμα 4.1.3, έχουμε έναν φυσικό μετασχηματισμό $Q_\lambda \to Q_\rho$, ο οποίος επάγεται από τον φυσικό μετασχηματισμό $Q_\lambda \circ Q \to Q_\rho \circ Q$. Τώρα εφαρμόζουμε τον συναρτητή $Q \circ \hat{R}F$ και παίρνουμε ένα φυσικό μετασχηματισμό

$$\mu\colon Q \circ \hat{R}F \circ Q_\lambda \to Q \circ \hat{R}F \circ Q_\rho.$$

Στο Λήμμα 4.1.3, δείξαμε επίσης ότι ο φυσικός μετασχηματισμός $Q_\lambda \to Q_\rho$ είναι ισομορφισμός όταν περιοριζόμαστε στα συμπαγή αντικείμενα της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Εφόσον ο F διατηρεί τα συνγινόμενα, από το (1) έχουμε ότι ο $\hat{R}F$ διατηρεί και αυτός τα συνγινόμενα. Άρα επειδή και ο κανονικός συναρτητής Q και ο Q_λ, ως αριστερός συζυγής, διατηρούν τα σινγινόμενα, έχουμε ότι ο $Q \circ \hat{R}F \circ Q_\lambda$ διατηρεί τα συνγινόμενα. Επειδή αποδείξαμε την μεταθετικότητα του πρώτου διαγράμματος και υποθέσαμε ότι και ο RF διατηρεί τα συνγινόμενα, παίρνουμε και ότι ο $\circ\hat{R}F \circ Q_\rho$, διατηρεί τα συνγινόμενα. Επομένως έχουμε δύο συναρτητές οι οποίοι διατηρούν τα συνγινόμενα, είναι ισόμορφοι όταν περιοριζόμαστε στα συμπαγή αντικείμενα, και η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Άρα παίρνουμε ότι ο μ είναι ισομορφισμός. Προφανώς ο συναρτητής $Q \circ (\hat{R}F)_\rho \circ Q_\rho$ είναι ένας δεξιός συζυγής του $Q \circ \hat{R}F \circ Q_\lambda \cong RF$. Γι αυτό το λόγω και το δεξιά διάγραμμα είναι μεταθετικό.

■

Στη συνέχεια, θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) & \xrightarrow{\hat{R}F} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \\ \downarrow{\scriptstyle Q} & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\ \mathsf{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RF} & \mathsf{D}(\mathcal{B}) \end{array}$$

και αναρωτιόμαστε κάτω υπό ποιες προϋποθέσεις είναι μεταθετικο. Το παρακάτω Λήμμα μας δίνει μια ξεκάθαρη εικόνα για το πότε παίρνουμε τη ζητούμενη μεταθετικότητα.

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής μεταξύ δύο τοπικά noetherian Grothendieck κατηγοριών. Υποθέτουμε επίσης ότι οι κατηγορίες $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}(\mathcal{B})$ είναι συμπαγώς παραγόμενες. Τότε υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $Q \circ \hat{R}F \to RF \circ Q$, ο οποίος είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο συναρτητής $\mathsf{K}(F)$ στέλνει κάθε ακυκλικό σύμπλοκο ενέσιμων αντικειμένων σε ένα ακυκλικό σύμπλοκο.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.5.7, έχουμε μία localization ακολουθία

$$\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{I} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A}).$$

Έστω X ένα αντικείμενο στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ και θεωρούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$(I \circ I_\rho)X \longrightarrow X \longrightarrow (Q_\rho \circ Q)X \longrightarrow \Sigma(I \circ I_\rho)X,$$

στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $Q \circ \hat{R}F$ στο παραπάνω διακεκριμένο τρίγωνο, και επειδή ισχύει ότι $Q \circ \hat{R}F \circ Q_\rho \cong RF$, από το Θεώρημα 4.2.1, παίρνουμε έναν χάρτη

$$(Q \circ \hat{R}F)X \to (RF \circ Q)X.$$

Προφανώς αυτός ο χάρτης είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο συναρτητής $Q \circ \hat{R}F$ μηδενίζει το αντικείμενο $(I \circ I_\rho)X$. Με λίγα λόγια είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $(Q \circ \hat{R}F \circ I \circ I_\rho)X = 0$ για κάθε X στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Εάν το X δεν είναι ακυκλικό, τότε το παραπάνω προφανώς ισχύει καθώς $(I \circ I_\rho)X = 0$. Εάν είναι ακυκλικό, τότε εφόσον θα πρέπει να ισχύει $Q \circ (\hat{R}F \circ I \circ I_\rho)X = 0$, παίρνουμε ότι το αντικέιμενο $(\hat{R}F \circ I \circ I_\rho)X$ θα πρέπει να είναι ακυκλικό στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B})$. Άρα θα πρέπει ο $\mathsf{K}(F)$ να στέλνει ακυκλικά σύμπλοκα ενέσιμων σε ακυκλικά σύμπλοκα. ∎

Ένα απλό παράδειγμα το οποίο διευκρινίζει καλύτερα το παραπάνω Λήμμα, είναι το εξής:

Παράδειγμα 4.2.3. Θεωρούμε k ένα σώμα και $\Lambda = k[t]/(t^2)$. Αν πάρουμε τον συναρτητή

$$F\colon \mathsf{Mod}\text{-}\Lambda \to \mathsf{Mod}\text{-}k, X \mapsto \mathsf{Hom}_\Lambda(k, X),$$

παρατηρούμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda) & \xrightarrow{\hat{R}F} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}k) \\ \downarrow{\scriptstyle Q} & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle Q} \\ \mathsf{D}(\mathsf{Mod}\text{-}\Lambda) & \xrightarrow{RF} & \mathsf{D}(\mathsf{Mod}\text{-}k) \end{array}$$

δεν είναι μεταθετικό, καθώς αν πάρουμε ως X το ακυκλικό σύμπλοκο

$$X \coloneqq \cdots \xrightarrow{t} \Lambda \xrightarrow{t} \Lambda \xrightarrow{t} \Lambda \xrightarrow{t} \cdots$$

στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\Lambda)$, έχουμε ότι $QX = 0$ και $(\hat{R}F)X \neq 0$.

Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου τώρα θα ειδικευτούμε σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα από την Αλγεβρική Γεωμετρία. Θεωρούμε γι αυτό το λόγω έναν μορφισμό $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ μεταξύ seperated noetherian schemes. Έστω τότε $f_*\colon \mathsf{Qcoh}\mathbb{X} \to \mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}$ τον συναρτητή της ευθέας εικόνας. Θεωρούμε γνωστό ότι ο δεξιός παραγόμενος συναρτητής $Rf_*\colon \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \to \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$ διατηρεί τα συνγινόμενα, το οποίο μπορεί κανείς να δει στο άρθρο του A. Neeman [17] (Λήμμα 1.4). Επομένως από το Θεώρημα 4.2.1, βλέπουμε ότι ο συναρτητής Rf_* καθώς και ο δεξιός του συζυγής Grothendieck δυικότητας $f^!$, επεκτείνονται σε συναρτητές μεταξύ των κατηγοριών $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X})$ και $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$. Μεταφράζοντας το Θεώρημα 4.2.1 σε όρους Αλγεβρικής Γεωμετρίας παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ένας μορφισμός μεταξύ δύο seperated noetherian schemes. Συμβολίζουμε με $Rf_*\colon \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \to \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$ τον δεξιό παραγόμενο συναρτητή ευθέας εικόνας και με $f^!$ τον δεξιό συζυγή του. Τότε υπάρχει ένα συζυγές ζευγάρι συναρτητών $(\hat{R}f_*, \hat{f}^!)$, οι οποίοι κάνουν τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά.*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) & \xrightarrow{Rf_*} & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \\ \downarrow{\scriptstyle Q_\lambda} & & {\scriptstyle Q}\uparrow \\ \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\hat{R}f_*} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) & \xrightarrow{f^!} & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \\ \downarrow{\scriptstyle Q_\rho} & & {\scriptstyle Q}\uparrow \\ \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\hat{f}^!} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) \end{array}$$

Στην πραγματικότητα όμως, έχουμε για την παραπάνω περίπτωση μορφισμών ένα καλύτερο αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στον Neeman και το παραθέτουμε παρακάτω.

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ένας μορφισμός μεταξύ δύο seperated noetherian schemes. Τότε ο συναρτητής $\hat{R}f_*$ στέλνει ακυκλικά σύμπλοκα σε ακυκλικά σύμπλοκα. Επομένως έχουμε ένα συζυγές ζευγάρι συναρτητών μεταξύ των κατηγοριών $\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$ και $\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$, οι οποίοι κάνουν τα ακόλουθα διαγράμματα μεταθετικά.*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) & \xrightarrow{I} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) & \xrightarrow{Q} & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}f_*} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{R}f_*} & & \downarrow{\scriptstyle Rf_*} \\
\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) & \xrightarrow{I} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) & \xrightarrow{Q} & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) & \xleftarrow[I_\rho]{} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) & \xleftarrow[Q_\rho]{} & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}f^!} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}^!} & & \downarrow{\scriptstyle f^!} \\
\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) & \xleftarrow[I_\rho]{} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) & \xleftarrow[Q_\rho]{} & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})
\end{array}$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε τη μεταθετικότητα του πάνω διαγράμματος, καθώς τότε θα έπεται και η μεταθετικότητα του κάτω διαγράμματος, καθώς το κάτω διάγραμμα δημιουργείται παίρνοντας δεξιούς συζυγείς.

Καταρχάς ο συναρτητής $\hat{R}f_*$ στέλνει ακυκλικά σύμπλοκα σε ακυκλικά σύμπλοκα, και άρα η μεταθετικότητα του αριστερού τετραγώνου είναι τετριμμένη από τον τρόπο ορισμού του $\mathcal{S}f_*$. Το γεγονός ότι ο $\hat{R}f_*$ στέλνει ακυκλικά σύμπλοκα σε ακυκλικά σύμπλοκα, οφείλεται στην μεταθετικότητα του αριστερού διαγράμματος του Θεωρήματος 4.2.4. Καθώς αν δεν ίσχυε θα υπήρχε ακυκλικό σύμπλοκο στην $\mathsf{K}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$, δηλαδή σύμπλοκο το οποίο στην $\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$ θα ήταν ισόμορφο με το μηδενικό σύμπλοκο, Το οποίο από τη μία ο συναρτητής Rf_* θα το έστελνε στο μηδενικό σύμπλοκο της $\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$, και απ την άλλη η σύνθεση $Q \circ \hat{R}f_* \circ Q$ θα το έστελνε σε ένα μη μηδενικό σύμπλοκο.

Οπότε μένει να αποδειχτεί η μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) & \xrightarrow{\hat{R}f_*} & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \\
\downarrow{\scriptstyle Q} & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\
\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) & \xrightarrow{Rf_*} & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})
\end{array}$$

Θα αποδειχτεί η μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος κάνοντας χρήση του Λήμματος 4.2.2. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο f_* στέλνει ένα ακυκλικό σύμπλοκο X ενέσιμων αντικειμένων σε ένα ακυκλικό σύμπλοκο. Η ερώτησή μας είναι τοπική στο $\mathbb{Y}$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\mathbb{Y}$ είναι affine. Καλύπτουμε καταρχάς το $\mathbb{X}$ με ένα πεπερασμένο αριθμό από affines. Τότε ο f_* μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση της Cech συνομολογίας στο κάλυμμα. Εάν υπάρχουν n ανοιχτά σύνολα στο κάλυμμα, τότε για κάθε quasi-coherent sheaf A έχουμε ότι

$$R^{n+1}f_*A = 0.$$

Τώρα θεωρούμε X ένα ακυκλικό σύμπλοκο ενέσιμων sehaves στο $\mathbb{X}$. Τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \cdots$$

είναι μία ενέσιμη ανάλυση του πυρήνα A του μορφισμού $X^0 \to X^1$. Αν εφαρμόζουμε τον f_*, η ακολουθία υπολογίζει το R^if_*A για εμάς, το οποίο μηδενίζει όταν $i \geqslant n+1$. Άρα το f_*X είναι ακυκλικό σε βαθμού μεγαλύτερους του n, αλλά κάνοντας shifting βλέπουμε ότι είναι ακυκλικό παντού. Οπότε καλύπτετε η υπόθεση του λήμματος 4.2.2 και παίρνουμε την επιθυμητή μεταθετικότητα του διαγράμματος. ∎

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου θα μελετήσουμε για έναν ακριβή συναρτητή $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, μία επέκταση $\hat{L}F$ του αριστερού παραγόμενου συναρτητή $LF\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}(\mathcal{B})$. Για να το καταφέρουμε αυτό χρειαζόμαστε κάποιες υποθέσεις. Όπως και νωρίτερα υποθέτουμε ότι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$

είναι τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορίες. Έστω $f\colon \mathsf{noeth}\,\mathcal{A} \to \mathsf{noeth}\,\mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Τότε υπάρχει, ως προς ισομορφισμό , ένας μοναδικός συναρτητής $f^*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, ο οποίος επεκτείνει τον f και διατηρεί τα filtered συνόρια. Αυτός ο συναρτητής έχει έναν δεξιό συζυγή $f_*\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ αν και μόνο αν ο f είναι δεξιά ακριβής. Παρατηρούμε ότι ο f είναι ακριβής αν και μόνο αν ο f^* είναι ακριβής και δηλαδή αν και μόνο αν ο f_* στέλνει ενέσιμα αντικείμενα σε ενέσιμα αντικείμενα.

Θεώρημα 4.2.6. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορίες έτσι ώστε να ισχύει επιπλέον ότι οι $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}(\mathcal{B})$ είναι συμπαγώς παραγόμενες. Έστω επίσης $f\colon \mathsf{noeth}\,\mathcal{A} \to \mathsf{noeth}\,\mathcal{B}$ ένας ακριβής συναρτητής. Τότε ο συναρτητής $\hat{R}f_*$ έχει έναν αριστερό συζυγή $\hat{L}f_*$, ο οποίος επάγει έναν συναρτητή Sf_*, ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \arrow[dl] \arrow[dd, "\mathsf{D}^b(f)"] \\
\mathsf{S}(\mathcal{A}) \arrow[r, "I"] \arrow[dd, "\mathsf{S}f^*"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dd, "\hat{L}f^*"] & & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[dd, "Lf^*"] & \\
 & & \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dl] & & \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{B}) \arrow[dl] \\
\mathsf{S}(\mathcal{B}) \arrow[r, "I"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \arrow[rr, "Q"] & & \mathsf{D}(\mathcal{B}) &
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Εάν ο Rf_* διατηρεί τα συνγινόμενα, τότε, επιπλέον, και το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})/\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \arrow[dl, "F_{\mathcal{A}}"'] \arrow[dd, "\overline{\mathsf{D}^b(f)}"] & & \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathsf{S}(\mathcal{A}) \arrow[dd, "\mathsf{S}f^*"] & & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[ll, "I_\lambda"'] \arrow[dd, "\hat{L}f^*"] & & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[ll, "Q_\lambda"'] \arrow[dd, "Lf^*"] & \\
 & \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{B})/\mathsf{D}^c(\mathcal{B}) \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}}"] & & \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \arrow[ll] \arrow[dl] & & \mathsf{D}^c(\mathcal{B}) \arrow[ll] \arrow[dl] \\
\mathsf{S}(\mathcal{B}) & & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \arrow[ll, "I_\lambda"] & & \mathsf{D}(\mathcal{B}) \arrow[ll, "Q_\lambda"] &
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Παρατηρούμε και ότι οι συναρτητές $F_{\mathcal{A}}$ και $F_{\mathcal{B}}$ επάγουν, ως προς ευθείς παράγοντες, ισοδυναμίες στις πλήρης υποκατηγορίες των συμπαγών αντικειμένων στην $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{S}(\mathcal{B})$ αντίστοιχα. Επομένως, ο συναρτητής $\overline{\mathsf{D}^b(f)}$ καθορίζει τον συναρτητή $\mathsf{S}f^*$.

Απόδειξη. Καταρχάς η ακρίβεια του f συνεπάγεται την ακρίβεια του f^*. Επομένως επειδή, όπως είναι γνωστό, όταν αριστερός συζυγής είναι ακριβής, τότε ο δεξιός του συζυγής διατηρεί τα ενέσιμα αντικείμενα, παίρνουμε ότι ο f_* στέλνει ενέσιμα αντικείμενα σε ενέσιμα αντικείμενα. Επομένως παίρνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\hat{R}f_*"] & \mathsf{K}(\mathcal{B}) \arrow[d, "\mathsf{K}(f_*)"] \\
\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[r, "J"] & \mathsf{K}(\mathcal{A})
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Αυτό το διάγραμμα είναι μεταθετικό καθώς για ένα αντικείμενο X στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B})$ έχουμε ότι το $(\mathsf{K}(f_*) \circ J)X$ ανήκει στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Επομένως $(J \circ J_\lambda)((\mathsf{K}(f_*) \circ J)X) = (\mathsf{K}(f_*) \circ J)X$, και άρα $(J \circ \hat{R}f_*)X = (\mathsf{K}(f_*) \circ J)X$.
Επίσης επειδή ο f_* ως δεξιός συζυγής διατηρεί τα γινόμενα, έχουμε και ότι ο $\hat{R}f_*$ διατηρεί τα

γινόμενα και άρα παίρνουμε από την Πρόταση 3.5.4 έναν αριστερό του συζυγή, τον οποίο τον συμβολίζουμε με $\hat{L}f^*$. Παίρνουμε τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "J_\lambda"] \arrow[d, "\mathsf{K}(f^*)"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\hat{L}f^*"] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, "Lf^*"] \\
\mathsf{K}(\mathcal{B}) \arrow[r, "J_\lambda"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \arrow[r, "Q"] & \mathsf{D}(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

το οποίο ισχυριζόμαστε ότι είναι μεταθετικό. Καταρχάς το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό, καθώς προκύπτει από το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα (4.4) , παίρνοντας αριστερούς συζυγείς. Το εξωτερικό τετράγωνο είναι μεταθετικό, καθώς η σύνθεση $Q \circ J_\lambda$ είναι φυσικά ισόμορφη με τον κανονικό συναρτητή $\mathsf{K}(\mathcal{A})\mathsf{D}(\mathcal{A})$, λόγω της παρατήρησης 3.5.8, και ο Lf^* είναι ο αριστερός παραγόμενος συναρτητής του f^*.

Μένει να αποδείξουμε τη μεταθετικότητα του δεξιού τετραγώνου. Γι αυτό το λόγο θα κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι $J_\lambda \circ J \cong Id_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}$. Συμβολίζουμε με can τους κανονικούς συναρτητές από την ομοτοπική κατηγορία στην παραγόμενη, τόσο για την $\mathcal{A}$ όσο και για την $\mathcal{B}$ χωρίς να υπάρχει σύγχυση. Θέλουμε με λίγα λόγια να δείξουμε ότι $can \circ J \circ \hat{L}f^* = Lf^* \circ can \circ J$. Δουλεύοντας στο πρώτο μέρος και κάνοντας χρήση της μεταθετικότητας του αριστερού και του εξωτερικού τετραγώνου παίρνουμε:

$$\begin{aligned} can \circ J \circ \hat{L}f^* &= can \circ J \circ \hat{L}f^* \circ J_\lambda \circ J = can \circ J \circ J_\lambda \circ \mathsf{K}(f^*) \circ J \\ &= Lf^* \circ can \circ J \circ J_\lambda \circ J = Lf^* \circ can \circ J \end{aligned}$$

Λόγω της μεταθετικότητας του δεξιού τετραγώνου εύκολα βλέπουμε τώρα ότι ο $\hat{L}f^*$ στέλνει ακυκλικά σύμπλοκα σε ακυκλικά, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή $\mathsf{S}f^*$, ο οποίος κάνει το ανάλογο τετράγωνο στο διάγραμμα (4.4) μεταθετικό. Τέλος από το Λήμμα 3.5.6, παρατηρούμε ότι ο $\hat{L}f^*$ διατηρεί τη συμπάγεια καθώς ο δεξιός του συζυγής $\hat{R}f_*$ διατηρεί τα συνγινόμενα. Επομένως κάθε τετράγωνο του διαγράμματος (4.4) είναι μεταθετικό.

Υποθέτουμε τώρα επιπλέον ότι ο Rf_* διατηρεί τα συνγινόμενα. Κάνουμε χρήση ξανά του γεγονότος ότι ένας ένας αριστερός συζυγής διατηρεί τη συμπάγεια αν και μόνο αν ο δεξιός του συζυγής διατηρεί τη συνγινόμενα από το Λήμμα 3.5.6. Επομένως, οι συναρτητές Lf^* και $\hat{L}f^*$ διατηρούν τη συμπάγεια. Παρατηρούμε επίσης ότι ο Q_λ ταυτίζει την $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ με την τοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ η οποία παράγεται από

$$\mathsf{D}^c(\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A}) \cong \mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$$

όπως είδαμε και στην απόδειξη του Πορίσματος 4.1.6. Φυσικά το ίδιο συμβαίνει και για την κατηγορία $\mathcal{B}$. Επίσης παίρνουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{S}(\mathcal{A}) \arrow[d, "S"] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \arrow[l, "I_\lambda"'] \arrow[d, "\hat{L}f^*"] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[l, "Q_\lambda"'] \arrow[d, "Lf^*"] \\
\mathsf{S}(\mathcal{B}) & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{B}) \arrow[l, "I_\lambda"] & \mathsf{D}(\mathcal{B}) \arrow[l, "Q_\lambda"]
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

του οποίου το δεξιό τετράγωνο είναι μεταθετικό καθώς ισχύουν οι προυποθέσεις του Λήμματος 4.2.2 και αν πάρουμε σε αυτό το διάγραμμα τους αριστερούς συζυγείς, παίρνουμε την επιθυμητή μεταθετικότητα. Ως τώρα με λίγα λόγια έχουμε καταφέρει να αποδείξουμε τη μεταθετικότητα του δεξιού κύβου στο διάγραμμα(4.3).

Επιστρέφοντας στο διάγραμμα (4.5), οι οριζόντιες ακολουθίες είναι localization ακολουθίες λόγω του Θεωρήματος 3.6.3, και ο $\hat{L}f^*$ επάγει έναν συναρτητή $S\colon \mathsf{S}(\mathcal{A}) \to \mathsf{S}(\mathcal{B})$, ο οποίος κάνει το αριστερό τετράγωνο μεταθετικό. Επίσης ισχύει ότι:

$$S = S \circ I_\lambda \circ I = I_\lambda \circ \hat{L}f^* \circ I = I_\lambda \circ I \circ \mathsf{S}f^* = \mathsf{S}f^*.$$

Οι συναρτητές $F_{\mathcal{A}}$ και $F_{\mathcal{B}}$ επάγονται από τον ανάλογο συναρτητή I_λ, έτσι ώστε να κάνουν την πάνω και κάτω έδρα του αριστερού κύβου του διαγράμματος (4.3) μεταθετικές, και η μεταθετικότητα $\mathsf{S}f^* \circ F_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{B}} \circ \overline{\mathsf{D}^b(f)}$ βγαίνει εύκολα κάνοντας χρήση του γεγονότος οι υπόλοιπες έδρες του διαγράμματος είναι μεταθετικές, και ότι ο συναρτητής $\mathsf{K}^c(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^b(\mathsf{noeth}\,\mathcal{A})/\mathsf{D}^c(\mathcal{A})$ είναι συναρτητής τοπικοποίησης. Επομένως το διάγραμμα (4.3) είναι μεταθετικό. ■

Παρατήρηση 4.2.7. Έστω $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ένας μορφισμός μεταξύ noetherian schemes και υποθέτουμε ότι ο f^* είναι ακριβής. Τότε ο $\mathsf{S}f^*$ είναι ο αριστερός συζυγής του $\mathsf{S}f_*$, ο οποίος εμφανίζεται στο Θεώρημα 4.2.5. Στην πραγματικότητα το συγκεκριμένο Θεώρημα μας δείχνει ότι ορισμένα κομμάτια του Θεωρήματος 4.2.6 μπορούν να γενικευτούν. Για παράδειγμα, το δεξιό τετράγωνο στο διάγραμμα (4.5) δεν χρειάζεται κάποια υπόθεση για τον μορφισμό f, έτσι ώστε να είναι μεταθετικό, καθώς είναι απλώς ο αριστερός συζυγής ενός διαγράμματος του Θεωρήματος 4.2.5.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την έγκλιση $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ενός ανοιχτού subscheme. Σε αυτή την περίπτωση, το συζυγές ζευγάρι συναρτητών f_* και f^* μεταξύ των $\mathsf{Qcoh}(\mathbb{X})$ και $\mathsf{Qcoh}(\mathbb{Y})$, περιορίζεται σε ένα συζυγές ζευγάρι συναρτητών μεταξύ των $\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}$ και $\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}$, όπως κανείς μπορεί να δει στην εργασία του P. Gabriel [6] Κεφάλαιο (VI). Επίσης ισχύει ότι $f^* \circ f_* = Id_{\mathsf{Qcoh}(\mathbb{X}}$. Επομένως μπορούμε να ταυτίσουμε τους συναρτητές $\hat{R}f_* = f_*$ και $\hat{L}f^* = f^*$. Παρατηρούμε εδώ, ότι και οι δύο συναρτητές στέλνουν ακυκλικά σύμπλοκα σε ακυκλικά σύμπλοκα. Αυτό είναι προφανές για τον συναρτητή f^*, καθώς είναι ακριβής, ενώ την ιδιότητα αυτή του συναρτητή f_* τη βλέπουμε είτε από το Θεώρημα 4.2.5, είτε κοιτάζοντας τον δεξιό συζυγή του δεξιού τετραγώνου του διαγράμματος (4.5). Για κάθε sheaf A στην $\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}$, θα συμβολίζουμε με $\mathsf{Supp}\, A$ το support του A. Παρατηρούμε ότι ο f^* μηδενίζει το A αν και μόνο αν το $\mathsf{Supp}\, A$ περιέχεται στο $\mathbb{Y}/\mathbb{X}$. Στην πραγματικότητα ο φυσικός χάρτης $A \to (f_* \circ f^*)A$ επάγει μία split ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow (f_* \circ f^*)A \longrightarrow 0,$$

εάν το A είναι ενέσιμο. Πιο συγκεκριμένα το support του A' περιέχεται στο $\mathbb{Y}/\mathbb{X}$ ενώ το support του $(f_* \circ f^*)A$ στο $\mathbb{X}$.
Στη συνέχεια σταθεροποιούμε ένα σύμπλοκο X στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$. Το support του X είναι εξ ορισμού:

$$\mathsf{Supp}\, X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Supp}\, X^n,$$

όπου το X υποθέτουμε ότι είναι ομοτοπικά ελάχιστο. Θα συμβολίζουμε $X_{\mathbb{X}} = (f_* \circ f^*)X$, και τότε ο φυσικός χάρτης $X \to X_{\mathbb{X}}$ επάγει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$X_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \longrightarrow X \longrightarrow X_{\mathbb{X}} \longrightarrow \Sigma(X_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}), \tag{4.6}$$

στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$, όπου το support του $X_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ περιέχεται στο $\mathbb{Y}/\mathbb{X}$.

Λήμμα 4.2.8. *Έστω $\mathbb{Y}$ ένα seperated noetherian scheme και $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ η κανονική έγκλιση ενός ανοιχτού subscheme. Εάν X είναι ένα σύμπλοκο στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$, τότε $f^*X = 0$ αν και μόνο αν το support του X περιέχεται στο $\mathbb{Y}/\mathbb{Y}$.*

Απόδειξη. Λόγω της συζήτησης που προηγήθηκε έχουμε ότι $f^*(X_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}) = 0$. Επομένως $f^*X = 0$ αν και μόνο αν ο πρώτος μορφισμός του τριγώνου (4.6) είναι ισομορφισμός. Αυτό δηλαδή συμβαίνει αν και μόνο αν το support του X περιέχεται στο $\mathbb{Y}/\mathbb{Y}$, καθώς το support του $X_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ περιέχεται στο $\mathbb{Y}/\mathbb{Y}$. ■

Είναι γνωστό ότι ο f^* επάγει μία ισοδυναμία:

$$\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})/\mathsf{D}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}),$$

όπου $\mathsf{D}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$ συμβολίζει την πλήρη υποκατηγορία όλως των συμπλόκων στην $\mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$, των οποίων το support της συνομολογίας περιέχεται στο $\mathbb{Y}/\mathbb{X}$. Μπορούμε να πάρουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα για τις $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$ και $\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$ εάν ορίσουμε:

$$\mathsf{K}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) = \{X \in \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \,|\, \mathsf{Supp}\, X \subseteq \mathbb{Y}/\mathbb{X}\},$$

$$\mathsf{S}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) = \{X \in \mathsf{Qcoh}\mathbb{Y} \,|\, \mathsf{Supp}\, X \subseteq \mathbb{Y}/\mathbb{X}\}.$$

Πρόταση 4.2.9. *Έστω $\mathbb{Y}$ ένα seperated noetherian scheme και $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ η κανονική έγκλιση ενός ανοιχτού subscheme. Τότε ο f^* επάγει τις ισοδυναμίες:*

$$\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})/\mathsf{K}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}),$$

$$\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})/\mathsf{S}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $f^* \circ f_* = Id_{\mathsf{Qcoh}(\mathbb{X}}$, και η συγκεκριμένη ισοδυναμία κατά προφανή τρόπο μεταφέρεται και στα σύμπλοκα ενέσιμων αντικειμένων. Από την άλλη, έχουμε για κάθε X στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$ έναν φυσικό χάρτη $X \to (f_* \circ f^*)X$, ο οποίος επάγει έναν ισομορφισμό στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})/\mathsf{K}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$, λόγω του Λήμματος 4.2.8. Αυτός ο ισομορφισμός μας δίνει την πρώτη ισοδυναμία.
Η δεύτερη ισοδυναμία έπεται από την πρώτη, καθώς οι συναρτητές f^* και f_* περιορίζονται σε συναρτητές μεταξύ των $\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y})$ και $\mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X})$. Αυτό ισχύει για τον f^* απευθείας, καθώς είναι ακριβής, ενώ ισχύει για τον f_* λόγω του Θεωρήματος 4.2.5. ■

Θα δώσουμε τώρα έναν πιο λεπτομερή σχηματισμό της Πρότασης 4.2.9 . Ο συναρτητής $\hat{R}f_* = f_*\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y})$ έχει έναν αριστερό και έναν δεξιό συζυγή. Επομένως ο $\hat{R}f_*$ μας δίνει ένα recollement

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & \mathsf{K}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \end{tikzcd} .$$

Αυτό το recollement είναι συμβατό με το recollement

$$\begin{tikzcd} \mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \end{tikzcd} ,$$

και παίρνουμε το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] \arrow[d, shift left=2, leftarrow] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2, leftarrow] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{X}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2, leftarrow] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2, leftarrow] & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}) \arrow[d, shift left=2, leftarrow] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2, leftarrow] \\ \mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] \arrow[d, shift left=2, leftarrow] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2, leftarrow] & \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2, leftarrow] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2, leftarrow] & \mathsf{D}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \arrow[d, shift left=2, leftarrow] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2, leftarrow] \\ \mathsf{S}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] & \mathsf{K}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathbb{Y}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & \mathsf{D}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) \end{tikzcd}$$

Σε αυτό το διάγραμμα, κάθε γραμμή και κάθε στήλη είναι ένα recollement. Επίσης, το διάγραμμα είναι μεταθετικό αν κανείς περιοριστεί στα βέλη που κοιτούν αριστερά και δεξιά. Όλες οι υπόλοιπες σχέσεις μεταθετικότητας προκύπτουν παίρνοντας αριστερούς και δεξιούς συζυγείς.
Η πρόταση 4.2.9 μας λέει ακριβώς το πότε η έγκλιση ενός subscheme επάγει μία ισοδυναμία στην ευσταθή παραγόμενη κατηγορία. Κλείνοντας αυτή την παράγραφο δίνουμε ακόμη δύο αποτελέσματα. Ο Orlov στο άρθρο του [19], παρατήρησε ότι η ευσταθής παραγόμενη κατηγορία ενός noetherian scheme εξαρτάται μόνο στα σημεία ιδιομορφίας. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί στην μη φραγμένη ευσταθή παραγόμενη κατηγορία, κάνοντας μία εντελώς διαφορετική απόδειξη.

Πόρισμα 4.2.10. *Έστω $\mathbb{Y}$ ένα seperated noetherian scheme πεπερασμένης διάστασης Krull. Εάν $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ συμβολίζει την κανονική έγκλιση ενός ανοιχτού subsceme το οποίο περιέχει όλα τα σημεία ιδιομορφίας του $\mathbb{Y}$, τότε ο $\mathsf{S}f^*\colon \mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y} \to \mathsf{S}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{X}))$ είναι μάι ισοδυναμία κατηγοριών.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.2.9, αρκεί να δειχτεί ότι $\mathsf{S}_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}(\mathsf{Qcoh}\mathbb{Y}) = 0$. Αυτό όμως είναι προφανές από τις υποθέσεις του Πορίσματος. ■

Τέλος αναφέρουμε το προαναφερθέν αποτέλεσμα του Orlov το οποίο είναι η Πρόταση 1.14 στο ανάλογο άρθρο του [19], το οποίο όμως μπορεί να έρθει ως άμεση συνέπεια, αν κανείς περιορίσει την ισοδυναμία $\mathsf{S}f^*$ στα συμπαγή αντικείμενα λόγω του Θεωρήματος 4.2.6.

Πόρισμα 4.2.11. *Έστω $\mathbb{Y}$ ένα seperated noetherian scheme πεπερασμένης διάστασης Krull. Εάν $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ συμβολίζει την κανονική έγκλιση ενός ανοιχτού subsceme το οποίο περιέχει όλα τα σημεία ιδιομορφίας του $\mathbb{Y}$, τότε ο $\mathsf{S}f^*$ επάγει (ως προς ευθείς παράγοντες) μία ισοδυναμία*

$$\mathsf{D}^b(\mathsf{coh}\mathbb{Y})/\mathsf{D}^{perf}(\mathsf{coh}\mathbb{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^b(\mathsf{coh}\mathbb{X})/\mathsf{D}^{perf}(\mathsf{coh}\mathbb{X}).$$

4.3 Gorenstein ενέσιμες προσεγγίσεις και συνομολογία Tate

Σταθεροποιούμαι καταρχάς σε αυτή την παράγραφο μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία $\mathcal{A}$, και υποθέτουμε ότι η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να μελετήσουμε την κατηγορία των πλήρη ενέσιμων αναλύσεων. Γι αυτό το λόγο θα αναθέτουμε σε κάθε σύμπλοκο ενέσιμων μία πλήρη ανάλυση. Αυτή η διαδικασία αποδίδει Gorenstein ενέσιμες προσεγγίσεις και ομάδες Tate συνομολογίας για τα αντικειμενα στην $\mathcal{A}$. Ενώ ο κλασσικός ορισμός της συνομολογίας Tate βασίζεται στις πλήρης προβολικές αναλύσεις η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε θα χρησιμοποιεί αναλύσεις από ενέσιμα , αλλά θα είναι ουσιαστικά η ίδια με την κλασσική περίπτωση. Μία άλλη πτυχή αυτής της παραγράφου θα είναι η σύνδεση της ευσταθούς παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ με την ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathcal{A}}$ πηλικό τα ενέσιμα αντικείμενα, η οποία θα δούμε αργότερα πως ακριβώς ορίζεται.
Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου οφείλονται στον Krause [13], και όπως αναφέρει ο ίδιος, παρόλο που τα περισσότερα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι κλασσικά, φαίνονται να είναι καινούρια κάτω από τη συγκεκριμένη τοποθέτηση και τη συγκεκριμένη γενικότητα. Ξεκινάμε λοιπόν δίνοντας μερικούς βασικούς ορισμούς, οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια της παραγράφου.

Ορισμός 4.3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία, όπως αυτή ορίστηκε στην αρχή της παραγράφου. Η* **ευσταθή κατηγορία (stable category)** *$\underline{\mathcal{A}}$, ορίζεται ως η κατηγορία που προκύπτει από την $\mathcal{A}$ ταυτίζοντας δύο μορφισμούς όταν η διαφορά τους αναλύεται μέσω ενός ενέσιμου αντικειμένου. Δοθέντων δύο αντικειμένων A, B στην $\mathcal{A}$ θα γράφουμε:*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A,B) = \mathsf{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(A,B).$$

Παρατήρηση 4.3.2. Ο συναρτητής

$$\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \underline{\mathcal{A}}, X \mapsto Z^0X = \mathsf{Ker}(X^0 \to X^1),$$

μας παρέχει μία σύνδεση μεταξύ των σταθερών κατηγοριών $\mathsf{S}(\mathcal{A})$ και $\underline{\mathcal{A}}$. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να πάρουμε μία σαφής περιγραφή του συναρτητή ευστάθειας

$$S\colon \mathcal{A} \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda \circ Q_\rho} \mathsf{S}(\mathcal{A})$$

εφόσον η $\mathcal{A}$ ικανοποιεί κάποια κατάλληλη Gornestein συνθήκη.

Ορισμός 4.3.3. *Ένα σύμπλοκο X στην $\mathcal{A}$ θα καλείται* **πλήρως ακυκλικό (totally acyclic)***, εάν οι $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)$ και $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,A)$ είναι ακυκλικά σύμπλοκα αβελιανών ομάδων για κάθε αντικείμενο A στην $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία των totally ακυκλικών συμπλοκών στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$.*

Ο επόμενος ορισμός οφείλεται στους E. E. Enochs και O. M. G. Jenda και στο άρθρο τους [5].

Ορισμός 4.3.4. *Θα καλούμε ένα αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$* **Gorenstein ενέσιμο (Gorenstein injective)***, εάν είναι της μορφής Z^0X, όπου X είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$ την πλήρη υποκατηγορία όλων των Gorenstein ενέσιμων αντικειμένων.*

Λήμμα 4.3.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και X, Y δύο αντικείμενα στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι $\mathsf{H}^n(X) = 0$ για κάθε $n > 0$ και ότι το Y totally ακυκλικό. Τότε ο κανονικός χάρτης*

$$\sigma_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}(X,Y) \to \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(Z^0X, Z^0Y),$$

είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμαι καταρχάς έναν μορφισμό $\alpha\colon Z^0X \to Z^0Y$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε αυτόν τον μορφισμό σε ένα μορφισμό συμπλόκων $\alpha'\colon X \to Y$. Το να επεκτείνουμε αυτόν τον μορφισμό όμως στους θετικούς βαθμούς είναι εύκολο με κλασσική ομολογική άλγεβρα, καθώς το $\mathcal{X}$ είναι σύμπλοκο ενέσιμων και έχει συνομολογία 0 σε θετικούς βαθμούς. Από την άλλη μπορούμε να επεκτείνουμε τον μορφισμό και σε αρνητικούς βαθμούς καθώς το Y είναι totally ακυκλικό και επομένως το $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X^0, Y)$ είναι ακυκλικό σύμπλοκο. Οπότε μπορεί να επεκταθεί ο μορφισμός στο βαθμό -1, και επαγωγικά κατασκευάζουμε τον μορφισμό συμπλόκων α'. Επομένως ο $\sigma_{X,Y}$ είναι Επί. Έστω τώρα $\phi\colon X \to Y$ ένας μορφισμός συμπλόκων τέτοιος ώστε ο $Z^0\phi$ να αναλύεται μέσω ενός ενέσιμου αντικειμένου, δηλαδή να είναι μηδενικός στην $\underline{\mathcal{A}}$. Με παρόμοιο επιχείρημα μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ομοτοπία $X \to Y$ και επομένως ο ϕ είναι μηδενοτοπικός. Επομένως είναι και 1-1, άρα είναι πλήρης και πιστός. ■

Συμβολίζουμε με $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\underline{\mathcal{A}}$, η οποία αποτελείται από τα αντικείμενα της $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$. Είναι γνωστό ότι η $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$ είναι μία Frobenius κατηγορία, ως προς την κλάσητων ακριβών ακολουθιών από την $\mathcal{A}$. Με σεβασμό ως προς αυτή την δομή ακρίβειας, ένα αντικείμενα A στην $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$ είναι προβολικό αν και μόνο αν είναι ενέσιμο αν και μόνο αν ανήκει στην $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$. Επομένως και η $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$ έχει μία τριγωνισμένη δομή. Η στροφή στέλνει ένα αντικείμενο A στον συνπυρήνα ΣA ενός μονομορφισμού $A \to E$, όπου το E είναι ενέσιμο αντικείμενο. Τα διακεκριμένα τρίγωνα επάγονται από τις ακριβές ακολουθίες στην $\mathcal{A}$.

Πρόταση 4.3.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία . Τότε ο συναρτητής*

$$\mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}, X \mapsto Z^0X,$$

είναι μία ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε καταρχάς ότι ο συναρτητής είναι πλήρης και πιστός και επί ως προς την κλάση ισομορφισμών των αντικειμένων. Προφανώς όμως είναι επί ως προς την κλάση ισομορφισμών των αντικειμένων από τον Ορισμό της $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$. Επίσης είναι πλήρης και πιστός από το Λήμμα 4.3.5. Τέλος πρέπει να δείξουμε ότι απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα, σε διακεκριμένα τρίγωνα. Ένα διακεκριμένο τρίγωνο συμπλόκων, προέρχεται όμως, με ακρίβεια ισομορφισμού, από μία ακολουθία συμπλόκων, η οποία είναι split exact σε κάθε βαθμό. Επομένως όταν εφαρμόσουμε τον Z^0, παίρνουμε μία ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και άρα ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\underline{\mathcal{A}}$. ■

Το επόμενο Λήμμα που θα δώσουμε είναι πολύ σημαντικό καθώς μας παρέχει την ύπαρξη των πλήρων ενέσιμων αναλύσεων, όπως θα τις ορίσουμε παρακάτω.

Λήμμα 4.3.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε ο συναρτητής έγκλισης*

$$G\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}),$$

έχει έναν αριστερό συζυγή:

$$G_\lambda\colon \mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}).$$

Απόδειξη. Καταρχάς η κανονική έγκλιση $I\colon \mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$, έχει έναν αριστερό συζυγή I_λ από το Θεώρημα 3.6.3. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η κανονική έγκλιση $\mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ έχει έναν αριστερό συζυγή. Έστω E το συνγινόμενο ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου που περιέχει όλα τα indecomposable ενέσιμα αντικείμενα στην A. Εξ ορισμού τότε, η $\mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ αποτελείται από όλα τα αντικείμενα X στην $\mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ για τα οποία ο

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}\,\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}(\Sigma^n E, X) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}_{ac}\,\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}(I_\lambda(\Sigma^n E), X)$$

μηδενίζει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Η κατηγορία $\mathsf{K}_{ac}\,\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη λόγω του Πορίσματος 4.1.6, και μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.5.5, και να πάρουμε έναν αριστερό συζυγή της έγκλισης $\mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \mathsf{K}_{ac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. ■

Δίνουμε τώρα τον Ορισμό των πλήρων ενέσιμων αναλύσεων.

Ορισμός 4.3.8. *Έστω ένα αντικείμενο A στη $\mathcal{A}$ και iA μία ενέσιμη ανάλυσή του. Καλούμε τον φυσικό χάρτη*

$$iA \to G_\lambda iA$$

μία **πλήρη ενέσιμη ανάλυση (complete injective resolution)** *του A. Εάν εφαρμόσουμε τον συναρτητή Z^0 σε αυτό τον χάρτη, τότε παίρνουμε μία Gorenstein ενέσιμη προσέγγιση του A.*

Θεώρημα 4.3.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε η έγκλιση $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{A}}$ έχει έναν αριστερό συζυγή*

$$T\colon \underline{\mathcal{A}} \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}.$$

Επομένως για κάθε αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$ έχουμε ένα φυσικό χάρτη $A \to TA$, ο οποίος επάγει έναν ισομορφισμό

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(TA, B) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, B) \text{ για κάθε } B \in \mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$ και επιλέγουμε μία ενέσιμη ανάλυσή του iA. Θέτουμε επίσης

$$TA = Z^0(G_\lambda iA),$$

και αυτό επάγει έναν συναρτητή $T\colon \underline{\mathcal{A}} \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$. Έστω επίσης ένα αντικείμενο B στην $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$ και σταθεροποιούμε ένα tottaly ακυκλικό σύμπλοκο tB για το οποίο ισχύει $Z^0tB = B$. Ο φυσικός χάρτης $iA \to G_\lambda iA$ επάγει έναν χάρτη $A \to TA$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}(G_\lambda iA, tB) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "Z^0"] & \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}(iA, tB) \arrow[d, "Z^0"] \\
\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(TA, B) \arrow[r] & \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, B)
\end{tikzcd}$$

Οι κάθετοι χάρτες είναι ισομορφισμοί λόγω του Λήμματος 4.3.5, και άρα συμπεραίνουμε ότι ο T είναι ο αριστερός συζυγής της έγκλισης $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{A}}$. ∎

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις πλήρης ενέσιμες αναλύσεις για να ορίσουμε Tate συνομολογικές ομάδες για τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}$.

Ορισμός 4.3.10. *Δοθέντων αντικειμένων A, B στην $\mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε την* **Tate συνομολογική ομάδα (Tate cohomology group)**, *ως:*

$$\widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B) = \mathsf{H}^n\,\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G_\lambda iB).$$

Παρατήρηση 4.3.11. Εφόσον η συνηθισμένη συνομολογία Tate ορίζεται μέσω πλήρων προβολικών αναλύσεων θα ήταν πιο σωστό να ονομάσουμε αυτή τη συνομολογιακή θεωρία ως ενέσιμη Tate συνομολογία, αλλά εφόσον στην συγκεκριμένη εργασία δε θα αναφερθούμε ιδιαιτέρως στην πιο κλασσική προβολική Tate συνομολογία, δεν θα υπάρχει σύγχυση.

Παρατηρούμε ότι η Tate συνομολογία είναι φυσική και στο A και στο B, καθώς οι πλήρεις ενέσιμες αναλύσεις είναι functorial. Επίσης ο φυσικός μορφισμός $iB \to G_\lambda iB$ επάγει έναν μορφισμό σύγκρισης:

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B).$$

Όπως θα δούμε και στην παρακάτω Πρόταση, υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής της Tate συνομολογίας, ο οποίος βασίζεται στον αριστερό συζυγή $T\colon \underline{\mathcal{A}} \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$.

Πρόταση 4.3.12. *Δοθέντων αντικειμένων A, B στην $\mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B) \cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma^n(TB)).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathsf{H}^n \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G_\lambda iB) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(A, \Sigma^n(G_\lambda iB)) \\ &\cong Hom_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(iA, \Sigma^n(G_\lambda iB)) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma^n(TB)),\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία ισχύει λόγω του Λήμματος 3.4.1, ενώ η τρίτη λόγω του Λήμματος 4.3.5. ■

Παρατήρηση 4.3.13. Επίσης υπάρχει ένας πιο κατανοητός τρόπος ορισμού της Tate συνομολογίας σε αντικείμενα της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, ο οποίος κάνει χρήση της σύνθεσης

$$U\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{G_\lambda \circ Q_\rho} \mathsf{K}_{tac}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}).$$

Οπότε, ορίζουμε για αντικείμενα X, Y της κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\operatorname{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(UX, \Sigma^n(UY)).$$

Παρατηρούμε καταρχάς ότι αυτός ο ορισμός μας είναι συμβατός με τον αρχικό ορισμό της Tate συνομολογίας 4.3.10. Όταν λέμε συμβατός εννοούμε ότι, αν πάρουμε ένα αντικείμενο στην $\mathcal{A}$ και το δούμε ως σύμπλοκο συγκεντρωμένο στη θέση 0, η Tate συνομολογία του θα είναι η ίδια. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι το αντικείμενο $Q_r X$ είναι απλά μία ενέσιμη ανάλυση του αντικειμένου X^0, όταν το X είναι συγκεντρωμένο στη θέση 0. Οπότε στη συνέχεια, εάν μας είναι πιο βολικό, θα χρησιμοποιούμε έναν από τους εναλλακτικούς ορισμούς της Tate συνομολογίας.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μία ακριβής ακολουθία στην κατηγορία $\mathcal{A}$, επάγει μία μακρά ακριβή ακολουθία στην Tate συνομολογία. Γι αυτό το λόγω αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο βοηθητικό Λήμμα.

Λήμμα 4.3.14. *Ο αριστερός συζυγής $T\colon \underline{\mathcal{A}} \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) *Μία ακριβής ακολουθία $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ στην $\mathcal{A}$ επάγει ένα διακεκριμένο τρίγωνο*

$$TA' \to TA \to TA'' \to \Sigma(TA') \text{ στην } \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}.$$

(2) *Έστω A, B δύο αντικείμενα της $\mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{Z}$. Τότε ο φυσικός χάρτης $A \to TA$ επάγει έναν ισομορφισμό*

$$\widehat{\operatorname{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(TA, B) \cong \widehat{\operatorname{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B).$$

Απόδειξη. (1) Εφόσον η ακολουθία $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$, παίρνουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο $A' \to A \to A'' \to \Sigma(A')$ στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Όμως όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.9, ο ακριβής συναρτητής $Z^0 \circ G_\lambda \circ Q_\rho$ μας υπολογίζει τον T, οπότε αν εφαρμόσουμε αυτόν τον ακριβή συναρτητή στο παραπάνω διακεκριμένο τρίγωνο, παίρνουμε το διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$

$$(Z^0 \circ G_\lambda \circ Q_\rho)A' \to (Z^0 \circ G_\lambda \circ Q_\rho)A \to (Z^0 \circ G_\lambda \circ Q_\rho)A'' \to \Sigma((Z^0 \circ G_\lambda \circ Q_\rho)A').$$

(2) Εφόσον ο T είναι αριστερός συζυγής της κανονικής έγκλισης $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{A}}$ έχουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{A}}(TA, TB) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, TB),$$

η οποία μας δίνει και το ζητούμενο.

■

Πρόταση 4.3.15. *Έστω $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ μία ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Τότε για κάθε αντικείμενο A και C στην $\mathcal{A}$, έχουμε τις ακόλουθες μακριές ακριβείς ακολουθίες*

$$\begin{aligned} \cdots \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B') \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B'') \\ \to \widehat{\mathsf{Ext}}^{n+1}_{\mathcal{A}}(A, B') \to \widehat{\mathsf{Ext}}^{n+1}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^{n+1}_{\mathcal{A}}(A, B'') \to \cdots \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \cdots \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(B'', C) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(B, C) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(B', C) \\ \to \widehat{\mathsf{Ext}}^{n+1}_{\mathcal{A}}(B'', C) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^{n+1}_{\mathcal{A}}(B, C) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^{n+1}_{\mathcal{A}}(B', C) \to \cdots . \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμόζοντας του συνομολογιακούς συναρτητές $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(TA, \text{-})$ και $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(\text{-} .TC)$ στο διακεκριμένο τρίγωνο του (1) στο Λήμμα 4.3.14, και στη συνέχεια κάνοντας χρήση του (2) του ίδιου Λήμματος. ■

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την Tate συνομολογία των Gorenstein ενέσιμων αντικειμένων.

Πρόταση 4.3.16. *Έστω A, B δύο αντικείμενα στην $\mathcal{A}$ και υποθέτουμε ότι το B είναι Gorenstein ενέσιμο. Τότε ο χάρτης σύγκρισης*

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B) \to \widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B)$$

είναι ισομορφισμός για $n > 0$ και επάγει έναν ισομορφισμό

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, B) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathsf{Ext}}^0_{\mathcal{A}}(A, B) \text{ για } n = 0.$$

Απόδειξη. Καταρχάς, εφόσον το B είναι Gorenstein ενέσιμο, έχουμε ότι $TB = B$. Για $n = 0$ το συμπέρασμα είναι προφανές καθώς ισχύει η ισοδυναμία

$$\widehat{\mathsf{Ext}}^n_{\mathcal{A}}(A, B) \cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma^n(TB)).$$

Για $n = 1$, επιλέγουμε μία ακριβή ακολουθία $0 \to B \to E \to \Sigma B \to 0$, με το E να είναι ενέσιμο και εφαρμόζουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \text{-})$. Τότε παίρνουμε την μακριά ακριβή ακολουθία

$$\begin{aligned} 0 \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, E) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma B) \\ \to \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, E) \to \cdots \end{aligned}$$

Όμως επειδή το E είναι ενέσιμο $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, E) = 0$, και άρα ο $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B)$ είναι ισόμορφος με τον συνπυρήνα του $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, E) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma B)$. Αλλά ο συνπυρήνας του παραπάνω μορφισμού είναι ακριβώς ο $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma B)$, λόγω του τρόπου ορισμού της ευσταθούς κατηγορίας $\underline{\mathcal{A}}$. Όμως $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma B) \cong \widehat{\mathsf{Ext}}^1_{\mathcal{A}}(A, B)$ καθώς το B είναι Gorenstein ενέσιμο. Για $n > 1$ απλώς κάνουμε dimension shift. ■

Στη συνέχεια θέλουμε να περιγράψουμε τα αντικείμενα A της κατηγορία $\mathcal{A}$ για τα οποία ο $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(A, \text{-})$ μηδενίζει.

Πρόταση 4.3.17. *Για ένα αντικείμενο A στη $\mathcal{A}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(A, \text{-}) = 0.$

(2) $\widehat{\mathsf{Ext}}^0_{\mathcal{A}}(A, A) = 0.$

(3) $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(\text{-}, A) = 0.$

(4) $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B) = 0$ *για κάθε* $B \in \mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$.

(5) $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, B) = 0$ *για κάθε* $B \in \mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Καταρχάς το γεγονός ότι τα (1) και (3) είναι ισοδύναμα με το (2) είναι προφανές. Επίσης το (1) συνεπάγεται το (4) καθώς για B Gorenstein ενέσιμο από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι ο $\widehat{\mathsf{Ext}}^1_{\mathcal{A}}(\text{-}, B)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\text{-}, B)$. Επομένως η συνεπαγωγή βγαίνει απευθείας.
Το (4) συνεπάγεται το (5) καθώς από τον εναλλακτικό Ορισμό της Tate συνομολογίας έχουμε ότι $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, \Sigma B) = 0$ για κάθε $B \in \mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$, και άρα $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A, B) = 0$ για κάθε $B \in \mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$.
Τέλος το (5) συνεπάγεται το (1) καθώς $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(\text{-}, \text{-}) \cong \mathsf{H}^* \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(T\text{-}, T\text{-})$, και επομένως εάν ισχύει η ιδιότητα (5) θα έχουμε σε κάθε θέση του συμπλόκου 0, και άρα θα έχουμε και παντού συνομολογία 0, επομένως $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(A, \text{-}) = 0$. ■

Ορίζουμε

$$\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{A} |\ \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, B) = 0 \text{ για κάθε } B \in \mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}\} \text{ και } \mathcal{Y} = \mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$$

Θεώρημα 4.3.18. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendiec κατηγορία και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

(1) Κάθε αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$ ανήκει σε ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to Y_A \to X_A \to A \to 0 \textit{ και } 0 \to A \to Y^A \to X^A \to 0$$

της κατηγορίας $\mathcal{A}$, όπου τα X_A, X^A ανήκουν στην $\mathcal{X}$ και τα Y_A, Y^A ανήκουν στην $\mathcal{Y}$.

(2) Ο χάρτης $A \mapsto X_A$ επάγει έναν δεξιό συζυγή της έγκλισης $\underline{\mathcal{X}} \to \underline{\mathcal{A}}$.

(3) Ο χάρτης $A \mapsto Y^A$ επάγει έναν αριστερό συζυγή της έγκλισης $\underline{\mathcal{Y}} \to \underline{\mathcal{A}}$.

(4) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$.

Απόδειξη. (1) Σταθεροποιούμε ένα αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$ και μία πλήρη ενέσιμη ανάλυση

$$iA \to G_\lambda iA = yA.$$

Συμπληρώνουμε αυτόν τον μορφισμό τότε, σε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$iA \to yA \to xA \to \Sigma(iA), \tag{4.7}$$

στην $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ και επομένως έχουμε μία ακολουθία $0 \to iA \to yA \to xA \to 0$ συμπλόκων, η οποία είναι split exact σε κάθε βαθμό. Εφαρμόζοντας τώρα τον $Z^0\colon \mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}) \to \underline{\mathcal{A}}$ παίρνουμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} Y^A \xrightarrow{\beta} X^A \to 0$$

στην $\mathcal{A}$. Προφανώς το Y^A ως ο πυρήνας ενός totally ακυκλικού συμπλοκου είναι Gornestein ενέσιμο αντικείμενο. Από την άλλη όμως ο $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(\alpha, \text{-})$ είναι ισομορφισμός και άρα ο $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(X^A, \text{-})$ είναι μηδενικός. Άρα λόγω της Πρότασης 4.3.17 το X^A ανήκει στην $\mathcal{X}$. Η άλλη ακριβής ακολουθία του Θεωρήματος, προκύπτει κάνοντας στροφή του τριγώνου 4.7 με παρόμοια επιχειρηματολογία.

(2) Θεωρούμε την ακριβής ακολουθία

$$0 \to Y_A \xrightarrow{\mu} X_A \xrightarrow{\nu} A \to 0,$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι ο $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,\nu)$ είναι 1-1 και Επί για κάθε X στην $\mathcal{X}$. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε $\phi\colon X \to A$ έναν μορφισμό με το X να ανήκει στην $\mathcal{X}$. Αυτός ο μορφισμός αναλύεται μέσω του ν καθώς $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y_A) = 0$. Επομένως ο $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,\nu)$ είναι Επί. Για να δείξουμε τώρα ότι ο $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,\nu)$ είναι 1-1, θεωρούμε έναν μορφισμό $\psi X \to X_A$, για τον οποί υπάρχει μία ανάλυση $X \xrightarrow{\phi'} E \xrightarrow{\phi''} A$ με το E να είναι ενέσιμο. Εφόσον το E ανήκει στην $\mathcal{X}$ ως ενέσιμο, υπάρχει μία ανάλυση $\phi'' = \nu\circ\chi$. Επομένως έχουμε $\nu\circ(\psi - \chi\circ\phi') = 0$, και άρα ο $\psi-\chi\circ\phi'$ πρέπει να αναλύεται μέσω του μ. Επομένως, ο $\psi-\chi\circ\phi'$ αναλύεται μέσω ενός ενέσιμου αντικειμένου καθώς $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,Y_A) = 0$. Άρα ο ψ αναλύεται μέσω ενός ενέσιμου αντικειμένου και επομένως η εικόνα του μέσω του $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,\nu)$ είναι ο μηδενικό μορφισμός. Άρα ο $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(X,\nu)$ είναι και 1-1.

(3) Θεωρούμε την ακριβής ακολουθία

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} Y^A \xrightarrow{\beta} X^A \to 0,$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι ο $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(\alpha,Y)$ είναι 1-1 και Επί για κάθε Y στην $\mathcal{Y}$. Αυτό όμως είναι προφανές κοιτάζοντας την μακριά ακριβή ακολουθία στην Tate συνομολογία, καθώς $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(\text{-},Y) \cong \widehat{\mathsf{Ext}}^0_{\mathcal{A}}(\text{-},Y)$ και ο $\widehat{\mathsf{Ext}}^*_{\mathcal{A}}(X^A,\text{-})$ είναι ο μηδενικός.

(4) Προφανώς η $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$ περιέχεται στην $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$. Έστω τώρα A ένα αντικείμενο στην $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$. Επομένως

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(A,A) \cong \widehat{\mathsf{Ext}}^0_{\mathcal{A}}(A,A) = 0.$$

Άρα ο ταυτοτικός μορφισμός $A \to A$ αναλύεται μέσω ενός ενέσιμου αντικειμένου, και άρα το A είναι ενέσιμο.

■

Παρατήρηση 4.3.19. Οι δακτύλιοι και τα schemes Gorenstein, παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές και έχουν πολλές ενδιαφέρουσες ομολογικές ιδιότητες. Επομένως είναι σημαντικό να σχηματίσουμε μία ιδιότητα Gorenstein για μία τοπικά locally noetherian κατηγορία $\mathcal{A}$. Γι αυτό το λόγο ξεκινάμε δίνοντας κάποιο βοηθητικό συμβολισμό. Θα συμβολίζουμε με $\Sigma^\infty\mathcal{A}$ την πλήρη υποκατηγορία των αντικείμένων A στην $\mathcal{A}$ τα οποία ανήκουν σε μία ακριβή ακολουθία

$$\cdots \to E_2 \to E_1 \to E_0 \to A \to 0,$$

όπου τα E_n είναι ενέσιμα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 4.3.20. *Θα λέμε ότι ένα αντικείμενο A έχει την* **ενέσιμη Gorenestein ιδιότητα (injective Gorenstein property)**, *εάν οι ισοδύναμες συνθήκες της επόμενης Πρότασης 4.3.21 ικανοποιούνται.*

Πρόταση 4.3.21. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A,B) = 0$ *για κάθε* $A \in \mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$ *και* $B \in \Sigma^\infty\mathcal{A}$.

(2) Κάθε ακυκλικό σύμπλοκο στην $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$ *είναιtotally ακυκλικό.*

(3) $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A} = \Sigma^\infty\mathcal{A}$.

(4) Ο $S\colon \mathcal{A} \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda\circ Q_\rho} \mathsf{S}(\mathcal{A})$ *μηδενίζει όλα τα ενέσιμα αντικείμενα.*

(5) Ο S επάγει μία ισοδυναμία $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}} \to \mathsf{S}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Καταρχάς, οι ιδιότητες (1)-(3) είναι μία προς μία ισοδύναμες, καθώς ισχύει ότι

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, Z^0Y) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(A)}(A, \Sigma^n Y) \cong \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Y)),$$

όπου A αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και Y είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο ενέσιμων αντικειμένων. (Ο πρώτος ισομορφισμός ισχύει μόνο για $n \geqslant 1$).
Τώρα θα δείξουμε ότι οι σχέσεις (1)-(3) είναι ισοδύναμες με την (4). Καταρχάς παρατηρούμε ότι ο συναρτητής I_λ μηδενίζει ακριβώς εκείνα τα αντικείμενα X της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$ για τα οποία ισχύει ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})}(X, Y) = 0,$$

για κάθε ακυκλικό σύμπλοκο Y της $\mathsf{K}(\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A})$. Ισχύει όμως ότι οι συναρτητές can και I_λ είναι πιστοί , οπότε παίρνουμε την ισοδυναμία των συνθηκών.
Το γεγονός ότι η (5) συνεπάγεται την (4) είναι προφανές, οπότε μένει να αποδείξουμε ότι οι συνθήκες (1)-(4) συνεπάγονται την (5).
Στην Πρόταστη 4.3.6 ήδη είδαμε ότι η

$$\mathsf{S}(\mathcal{A}) \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}, X \mapsto Z^0X,$$

είναι μία ισοδυναμία καθώς από την (2) κάθε ακυκλικό σύμπλοκο στην $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{A}$ είναι πλήρως α-κυκλικό. Όμως από την (4) ο S μηδενίζει όλα τα ενέσιμα και άρα επάγει έναν συναρτητή $\underline{\mathcal{A}} \to \mathsf{S}(\mathcal{A})$. Η σύνθεσή του με τον συναρτητή $Z^0 \colon \mathsf{S}(\mathcal{A}) \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$ είναι ο δεξιός συζυγής της έγκλισης $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{A}}$ την οποία κατασκευάσαμε στο Θεώρημα 4.3.9. Επομένως έχουμε ότι $(Z^0 \circ S)A \cong A$ για κάθε αντικείμενο A στην $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A}$. ■

Πόρισμα 4.3.22. *Έστω $\mathcal{A}$ μία τοπικά noetherian Grothendieck κατηγορία και υποθέτουμε ότι η $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγώς παραγόμενη. Εάν η $\mathcal{A}$ έχει την ενέσιμη Gorenstein ιδιότητα, τότε η σύνθεση*

$$\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A} \xrightarrow{inc} \mathcal{A} \xrightarrow{can} \mathsf{D}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I_\lambda \circ Q_\rho} \mathsf{S}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Z^0} \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}},$$

είναι φυσικά ισόμορφη με την κανονική προβολή $\mathsf{GInj}\text{-}\mathcal{A} \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$.

Παρατήρηση 4.3.23. Είμαστε τώρα σε θέση να περιγράψουμε τον σταθεροποιητή συναρτητή $S \colon \mathcal{A} \to \mathsf{S}(\mathcal{A})$, όταν η $\mathcal{A}$ έχει την ενέσιμη Gorenstein ιδιότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε γι αυτό τον αριστερό συζυγή $T \colon \underline{\mathcal{A}} \to \mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}}$ της έγκλισης $\mathsf{GInj}\text{-}\underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{A}}$. Για κάθε αντικείμενο A στην $\mathcal{A}$, επιλέγουμε ένα ακυκλικό σύμπλοκο X ενέσιμων αντικειμένων τέτοιο ώστε $Z^0X \cong TA$. Τότε $SA \cong X$.

Παράρτημα Α΄

Περίληψη - Abstract

Περίληψη. Ο κεντρικός στόχος της παρούσης Διατριβής είναι η παρουσίαση της κατασκευής της μη φραγμένης ευσταθούς παραγόμενης κατηγορίας μία τοπικά Noetherian κατηγορίας του Grothendieck και η ανάλυση μερικών εφαρμογών αυτής της κατασκευής στην Αλγεβρική Γεωμετρία και την Θεωρία Αναπαραστάσεων. Η Διατριβή αποτελείται από τέσσερα Κεφάλαια. Στο πρώτο Κεφάλαιο αναλύουμε μερικά βασικά στοιχεία από τη Θεωρία Αβελιανών Κατηγοριών, δίνοντας έμφαση στην Θεωρία τοπικοποίησης τέτοιων κατηγοριών. Στο δεύτερο Κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια των τριγωνισμένων κατηγοριών, και αναλύσουμε τη βασική θεωρία των ομοτοπικών και παραγόμενων κατηγοριών. Το τρίτο Κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην παρουσίαση ορισμένων μη τετριμμένων αποτελεσμάτων, τα οποία θα χρειαστούμε στη συνέχεια, και ειδικότερα εισάγουμε τις έννοιες των localization sequences και του recollement. Στο τελευταίο Κεφάλαιο της διατριβής παρουσιάζουμε την κατασκευή της ευσταθούς παραγόμενης κατηγορίας, αναλύοντας περαιτέρω μία εφαρμογή στην Αλγεβρική Γεωμετρία και περιγράφοντας μία κατασκευή Gorenstein ενέσιμων προσεγγίσεων και συνομολογίας Tate.

Abstract. The principal aim of this thesis is to present the construction of the unbounded stable derived category of a locally noetherian Grothendieck category and to analyse some applications in Algebraic Geometry and Representation Theory. The thesis consists of four chapters. In the first chapter we analyse some basic elements of Abelian Categories, emphasizing on the Localization Theory of such categories. In the second chapter we introduce the notion of trinagulated categories, and we analyse the basic theory of homotopical and derived categories. The third chapter is devoted to the presentation of some non-trivial results about Category Theory that we shall need in the sequel and more specifically we introduce the important concepts of localization sequences and recollement. In the last chapter we present the constuction of the stable derived category, analysing further an application from Algebraic Geometry and describing a consruction of Gorenstein injective approximations and Tate cohomology.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] **P. Bland**, *Rings and their Modules*, De Gruyter, (2011).

[2] **M. Bökstedt and A. Neeman**. *Homotopy limits in triangulated categories*. Compositio Mathematica, **86**, no. 2 (1993), 209–234.

[3] **D. Dummit and R. Foote**, *Abstract Algebra*, Third Edition, John Wiley and Sons,Inc, (2004).

[4] **S. Eilenberg and S. MacLane**, *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **58**, (1945).

[5] **E. E. Enochs and O. M. G. Jenda**, *Gorenstein injective and projective modules*, Math. Z. **220** (1995), 611-633.

[6] **P. Gabriel**, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448.

[7] **A. Grothendieck**, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. **9**, No. 2, (1957), 119-221.

[8] **R. Hartshorne**, *Algebraic Geometry*, Springer, (1977).

[9] **R. Hartshorne**, *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **20** (Springer, Berlin, 1966).

[10] **M. Kashiwara and P. Schapira**, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Vol. **332**, Springer-Verlag, Berlin, (2006).

[11] **H. Krause**, *Derived categories, resolutions, and Brown representability,* in *Interactions between homotopy theory and algebra*, Contemp. Math., **436** Amer. Math. Soc., Providence, (2007), 101-139.

[12] **H. Krause**, *Localization theory for triangulated categories*, from: "Triangulated categories", (T Holm, P Jørgensen, R Rouquier, editors), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **375**, Cambridge Univ. Press (2010), 161-235

[13] **H. Krause**, *The stable derived category of a noetherian scheme*, Compositio Math. **141** (2005), 1128-1162.

[14] **D. Milicic**, *Lectures on Derived Categories*, Lecture notes, (1996).

[15] **D. Murfet**, *Abelian Categories*, Mathematics Notes, (2006).

[16] **A. Neeman**, *The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), 547-566.

[17] **A. Neeman**, *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 205-236.

[18] **A. Neeman**, *Triangulated Categories*, Annals of Mathematics Studies **148**, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).

[19] **D. Orlov**, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, Proc. Steklov Inst. Math. **3** (246) (2004), 227-248.

[20] **N. Popescu**, *Abelian categories with applications to rings and modules*, London Math. Soc. Monographs **3**, Academic Press (1973)

[21] **E. Riehl**, *Category theory in context*, Courier Dover Publications, (2016)

[22] **N. Spaltenstein**, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Mathematica, **65**, no. 2 (1988), 121–154.

[23] **B. Stenstrom**, *Rings of Quotients. An introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, Vol. **217**, (1975).

[24] **J. L. Verdier**, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes* Astérisque **239** (1996).

[25] **D. Yao**, *On equivalence of derived categories*, K-theory **10** (1996), no. 3, 307-322.