



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Γρηγόριος Ταχυρίδης

---

ΠΡΟΡΡΥΘΜΙΣΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΖΥΓΩΝ  
ΚΛΙΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΟΕΡΛΙΤΖ

---

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2015



*Αφιερώνεται στους γονείς μου,  
Κωνσταντίνο και  
Σγουράνθη.*



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Υπολογιστικά Μαθηματικά και την Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 15η Δεκεμβρίου 2015 από την εξεταστική επιτροπή:

**Ονοματεπώνυμο    Βαθμίδα**

Νούτσος Δημήτριος    Καθηγητής (Επιβλέπων)

Αχρίβης Γεώργιος    Καθηγητής

Ξένος Μιχαήλ    Επίκουρος Καθηγητής

#### ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Γρηγόριος Ταχυρίδης



---

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημήτριο Νούτσο για την πολύτιμη βοήθεια και τη σωστή καθοδήγηση που μου παρείχε, παρά τις υποχρεώσεις του ως πρόεδρος του τμήματος μαθηματικών του πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω επίσης στα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης κ. Γεώργιο Ακριβη και κ. Μιχαήλ Ξένο για την προθυμία τους, τις χρήσιμες παρατηρήσεις και διορθώσεις που μου υπέδειξαν και την άριστη συνεργασία. Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξη και τη συμπαράσταση που μου προσέφερε.





Στη διατριβή αυτή μελετάμε την αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων Toeplitz, με την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων. Ένας πίνακας Toeplitz έχει τα ίδια στοιχεία κατά μήκος των διαγωνίων του. Γραμμικά συστήματα με συντελεστές αγνώστων πίνακες Toeplitz, εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές, όπως επεξεργασία σήματος, επεξεργασία και ανάκτηση εικόνας, διακριτοποίηση διαφορικών εξισώσεων, χρονοσειρές, μαρκοβιανές αλυσίδες κ.α. Κάθε πίνακας Toeplitz παράγεται από μια γεννήτρια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι 2π-περιοδική. Βασικές ιδιότητες της συνάρτησης, μεταφέρονται σε αντίστοιχες ιδιότητες του πίνακα Toeplitz. Σε πολλές εφαρμογές παρουσιάζονται πίνακες Toeplitz συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι, στις περισσότερες των περιπτώσεων όμως, οι πίνακες αυτοί έχουν κακή κατάσταση. Η χρήση άμεσων μεθόδων δεν ενδείκνυται, λόγω της κακής κατάστασης, αλλά και για το λόγο ότι καταστρέφεται η καλή δομή (τα ίδια στοιχεία στη διαγώνιο) του πίνακα. Επίσης, οι κλασικές επαναληπτικές μέθοδοι δεν είναι τόσο αποτελεσματικές. Οι πιο ενδεδειγμένες μέθοδοι είναι η προρρυθμισμένη μέθοδος συζυγών κλίσεων και η μέθοδος πολυπλεγμάτων (multigrid).

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο της εργασίας, δίνουμε τις βασικές προτάσεις και ιδιότητες των πινάκων Toeplitz, καθώς και ιδιότητες της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε και αναλύουμε τις ιδιότητες μερικών γνωστών προρρυθμιστών που αντιμετωπίζουν συστήματα με καλή κατάσταση. Οι προρρυθμιστές αυτοί ανήκουν σε άλγεβρες, με την έννοια ότι διαγωνιοποιούνται με τον ίδιο πίνακα. Συγκεκριμένα, μελετάμε τους κυκλοειδείς προρρυθμιστές που προτάθηκαν από τους G. Strang και T. Chan, τους προρρυθμιστές που ανήκουν σε  $\tau$  άλγεβρα και προρρυθμιστές που διαγωνοποιούνται από τον πίνακα διακριτού μετασχηματισμού Hartley. Αποδεικνύουμε ότι αυτοί οι προρρυθμιστές οδηγούν στην υπεργραμμική σύγκλιση της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε τεχνικές προρρύθμισης που αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά συστήματα με κακή κατάσταση. Μελετάμε κυρίως ταινιωτούς προρρυθμιστές, που άρουν την κακή κατάσταση του συστήματος και φράσσουν τον δείκτη κατάστασης του προρρυθμισμένου συστήματος. Αναφέρουμε έναν προρρυθμιστή, ο οποίος προκύπτει από το γινόμενο ενός πίνακα  $\tau$  με έναν ταινιωτό πίνακα Toeplitz και οδηγεί στην υπεργραμμική σύγκλιση της μεθόδου. Αριθμητικά αποτελέσματα εμπεριέχονται στο τέταρτο κεφάλαιο της διατριβής.



---

## ABSTRACT

---

In this thesis we study the numerical solution of linear Toeplitz systems with the preconditioned conjugate gradient method. A Toeplitz matrix is a matrix with the same entries over its diagonals. Such kind of systems arise in a variety of fields of applied mathematics such as signal processing, image processing and image restoration, discretization of differential equations, time series, Markov chains etc. The diagonals of a Toeplitz matrix are given by a generating  $2\pi$ -periodic function  $f$ . Basic properties of the generating function correspond to similar kind of properties of the Toeplitz matrix. Symmetric and positive definite Toeplitz matrices appear in a variety of applications but in most cases those matrices are ill-conditioned. Direct methods are not suitable for Toeplitz systems due to ill-conditioning and the fact that they destroy the good structure (same entries over the diagonals) of the matrix. Classical iterative methods are not so effective either. The most suitable methods are the preconditioned conjugate gradient method and the multigrid method.

In the first chapter of this thesis, we present the main propositions and properties of Toeplitz matrices and some properties of the preconditioned conjugate gradient method. In the second chapter, we analyze the properties of some well-known preconditioners that are suitable for well-conditioned systems. Those preconditioners belong to trigonometric matrix algebras, in the sense that they can be diagonalized with the same matrix. More precisely, we study the circulant preconditioners proposed by G. Strang and T. Chan as well as  $\tau$  preconditioners and preconditioners that can be diagonalized by the discrete Hartley transform matrix. We prove that those preconditioners provide superlinear convergence of the preconditioned conjugate gradient method. In the third chapter we study preconditioning techniques that deal with ill-conditioned systems. Mainly we study band preconditioners that eliminate the ill-condition of the system and bound the spectral condition number of the preconditioned system. We also mention a preconditioner constructed by the product of a  $\tau$  matrix and a band Toeplitz matrix that provides superlinear convergence of the preconditioned conjugate gradient method. Numerical results are presented in the fourth chapter of this thesis.



---

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Περίληψη	i
Abstract	iii
<b>1 Εισαγωγικές Έννοιες</b>	<b>1</b>
1.1 Βασικοί Ορισμοί και Προτάσεις . . . . .	1
1.2 Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων . . . . .	2
1.3 Ιδιότητες Πινάκων . . . . .	3
1.4 Δείκτης Κατάστασης Πίνακα . . . . .	10
1.5 Πίνακες Toeplitz . . . . .	10
1.6 Προρρυθμισμένη Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων . . . . .	14
<b>2 Συστήματα με Καλή Κατάσταση</b>	<b>17</b>
2.1 Διάφορες Αποδείξεις . . . . .	17
2.2 Προρρυθμιστής του Strang . . . . .	26
2.3 Προρρυθμιστής του T. Chan . . . . .	36
2.4 $\tau$ Προρρυθμιστές . . . . .	40
2.5 Προρρυθμιστές Βασισμένοι σε Μετασχηματισμό Hartley . . . . .	47
<b>3 Συστήματα με Κακή Κατάσταση</b>	<b>51</b>
3.1 Προρρυθμιστές Toeplitz του R. Chan . . . . .	51
3.2 Βελτιωμένοι Ταινιωτοί Προρρυθμιστές Toeplitz . . . . .	56
3.3 Ταινιωτός Προρρυθμιστής Ρητής Προσέγγισης . . . . .	60
3.4 Συνδυασμός $\tau$ και Ταινιωτού Πίνακα Toeplitz . . . . .	64

<b>4</b>	<b>Αριθμητικά Αποτελέσματα</b>	<b>67</b>
4.1	Πλήθος Επαναλήψεων . . . . .	67
4.2	Συσώρευση Φάσματος Ιδιοτιμών . . . . .	71
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>77</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες και προτάσεις, οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τα επόμενα κεφάλαια της εργασίας, κυρίως παρουσιάζοντας την τυποποίηση που χρησιμοποιούμε για διάφορες μαθηματικές έννοιες. Οι προτάσεις και τα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου θα χρησιμοποιηθούν αργότερα σε διάφορες αποδείξεις.

### 1.1 Βασικοί Ορισμοί και Προτάσεις

**Ορισμός 1.1.1.** Το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $x, y \in \mathbb{C}^n$  (με τη σειρά που αναφέρθηκαν) συμβολίζεται με  $(x, y)_2$  και ορίζεται ως:

$$(x, y)_2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

*Παρατήρηση.* Από τον ορισμό παρατηρούμε ότι  $(y, x)_2 = \overline{(x, y)_2}$ .

**Πρόταση 1.1.2.**  $\forall x \in \mathbb{C}^n$  ισχύει  $(x, x)_2 \geq 0$ .

*Απόδειξη.*

$$(x, x)_2 = \sum_{i=0}^n \bar{x}_i x_i = \sum_{i=0}^n |x_i|^2 \geq 0. \quad \square$$

*Παρατήρηση.*  $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  ισχύει  $(x, x)_2 > 0$ .

**Ορισμός 1.1.3.** Έστω δύο διανύσματα  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . Λέμε ότι τα  $x, y$  είναι ορθογώνια, αν και μόνο αν  $(x, y)_2 = 0$ .

**Ορισμός 1.1.4.** Η Ευκλείδεια (ή  $\ell_2$ ) νόρμα ενός διανύσματος  $x \in \mathbb{C}^n$  συμβολίζεται με  $\|x\|_2$  και ορίζεται ως

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

*Παρατήρηση.*  $\forall x \in \mathbb{C}^n$  ισχύει η ισότητα  $\|x\|_2^2 = (x, x)_2$ .

*Παρατήρηση.* Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε τις  $\ell_1$  και μεγίστη (ή  $\ell_\infty$ ) νόρμες ενός διανύσματος  $x \in \mathbb{C}^n$ , αντίστοιχα, ως

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ και } \|x\|_\infty = \max_{i=1(1)n} |x_i|.$$

**Ορισμός 1.1.5.** Έστω ένα διάνυσμα  $x \in \mathbb{C}^n$ . Το  $x$  καλείται μοναδιαίο, αν και μόνο αν  $\|x\|_2 = 1$ .

**Ορισμός 1.1.6.** Ο μέγιστος αριθμός  $m$  για τον οποίο ισχύει η ανισότητα  $f(x) \geq m$  με εξαίρεση ένα σύνολο μέτρου Lebesgue μηδέν, λέγεται ουσιώδες κάτω φράγμα (*essential lower bound*) της συνάρτησης  $f$ .

**Ορισμός 1.1.7.** Ο ελάχιστος αριθμός  $M$  για τον οποίο ισχύει η ανισότητα  $f(x) \leq M$  με εξαίρεση ένα σύνολο μέτρου Lebesgue μηδέν, λέγεται ουσιώδες άνω φράγμα (*essential upper bound*) της συνάρτησης  $f$ .

**Ορισμός 1.1.8.** Λέμε ότι ένα σημείο  $x_0$  είναι ρίζα τάξεως  $v$ , μιας συνάρτησης  $f$ , αν  $f(x_0) = 0$  και  $v$  είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε  $f^{(v)}(x_0) \neq 0$  και η συνάρτηση  $f^{(v+1)}(x)$  να είναι συνεχής σε μία περιοχή του  $x_0$ .

## 1.2 Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων

**Θεώρημα 1.2.1.** Αν μια συνάρτηση  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ , τότε είναι και ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα  $I$ , δηλαδή υπάρχει ένας αριθμός  $A$  με την ιδιότητα,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |S(P, f, \Xi) - A| < \varepsilon.$$

Ο αριθμός  $A$  λέγεται ολοκλήρωμα του Riemann της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $I$  και συμβολίζεται με  $\int_a^b f(x) dx$ . Με  $S(P, f, \Xi)$  συμβολίζουμε το άθροισμα



του Riemann της  $f$  που αντιστοιχεί στη διαμέριση  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_\nu = b\}$  και στην τυχαία επιλογή ενδιάμεσων σημείων  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu\}$  της  $P$ . Το άθροισμα του Riemann ισούται με  $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)(x_\kappa - x_{\kappa-1})$ . Το όριο του αθροίσματος του Riemann, καθώς η λεπτότητα της διαμέρισης,  $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , τείνει στο μηδέν, ισούται με το ολοκλήρωμα του Riemann [23].

Δηλαδή,  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, f, \Xi) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Πρόταση 1.2.2.** Έστω ότι  $z_1, \dots, z_n$  είναι μιγαδικοί αριθμοί. Ισχύει η ισότητα,

$$\sum_{j=1}^n |z_j|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 d\theta, \text{ όπου } i^2 = -1, \theta \in [-\pi, \pi].$$

Απόδειξη. Θα αναπτύξουμε το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right) \overline{\left( \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right)} d\theta = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^n |z_j|^2 d\theta &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n z_j \bar{z}_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(i-j)\theta} d\theta = \sum_{j=1}^n |z_j|^2, \end{aligned}$$

αφού,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(i-j)\theta} d\theta = \left[ \frac{1}{i(i-j)} e^{i(i-j)\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \forall 1 \leq j, k \leq n. \quad \square$$

### 1.3 Ιδιότητες Πινάκων

**Ορισμός 1.3.1.** Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  καλείται θετικός όταν κάθε στοιχείο του είναι θετικός αριθμός, δηλαδή  $a_{i,j} > 0$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Ορισμός 1.3.2.** Αν η ορίζουσα ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι διάφορη του μηδενός, ο  $A$  καλείται αντιστρέψιμος και τότε ορίζεται ο αντίστροφος αυτού, ο οποίος συμβολίζεται με  $A^{-1}$  και γι αυτόν ισχύει η σχέση  $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$ , όπου  $I_n$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης  $n$ .

Σχόλιο. Ο αντίστροφος ενός πίνακα είναι μοναδικός.

**Ορισμός 1.3.3.** Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  καλείται *ερμιτιανός*, αν ισχύει  $a_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$ , όπου  $a_{i,j}$  είναι το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση  $(i,j)$  του πίνακα  $A$  και  $\bar{a}_{j,i}$  είναι το μιγαδικό συζυγές του στοιχείου που βρίσκεται στη θέση  $(j,i)$  του πίνακα  $A$ .

*Παρατήρηση.* Όταν ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ερμιτιανός, ισχύει  $A = A^H$ , όπου  $A^H = \bar{A}^T$ .

*Παρατήρηση.* Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικά, αφού θέλουμε να είναι ίσα με το μιγαδικό συζυγές τους.

**Ορισμός 1.3.4.** Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  καλείται *ορθομοναδιαίος (unitary)*, αν ικανοποιεί τη σχέση  $A^H A = I_n = A A^H$ .

*Παρατήρηση.* Όταν ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ορθομοναδιαίος, ισχύει η ισότητα  $A^H = A^{-1}$  και, αν συμβολίσουμε με  $a_i$  την  $i$ -οστή στήλη του  $A$ ,  $i = 1, \dots, n$ , έχουμε,

$$(a_i, a_j)_2 = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

*Σχόλιο.* Η παραπάνω σχέση ισχύει και για τις γραμμές του πίνακα  $A$  (αν συμβολίσουμε την  $i$ -οστή γραμμή με  $a_i$ ).

*Παρατήρηση.* Οι στήλες και οι γραμμές ενός ορθομοναδιαίου πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{C}^n$ .

*Παρατήρηση.* Ένας ορθομοναδιαίος πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος αυτού είναι ο  $A^H$ . Μάλιστα, για την ορίζουσα του πίνακα  $A$  ισχύει,  $|\det(A)| = 1$ .

**Ορισμός 1.3.5.** Ένας ερμιτιανός πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι *θετικά ορισμένος*, αν και μόνο αν για κάθε  $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  ισχύει  $(z, Az)_2 > 0$ .

**Ορισμός 1.3.6.** Ένας συμμετρικός πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι *θετικά ορισμένος*, αν και μόνο αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ισχύει  $(x, Ax)_2 > 0$ .

**Πρόταση 1.3.7.** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  και ένα διάνυσμα  $z \in \mathbb{C}^n$ . Ισχύει  $(z, Az)_2 = (A^H z, z)_2$ .

*Απόδειξη.*

$$(z, Az)_2 = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{z}_i z_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{z}_i z_j = (A^H z, z)_2. \quad \square$$

Σχόλιο. Παίρνοντας τους συζυγείς στην προηγούμενη σχέση προκύπτει η ισότητα  $(Az, z)_2 = (z, A^H z)_2$ .

**Πρόταση 1.3.8.** Αν  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ένας ερμιτιανός πίνακας και  $z \in \mathbb{C}^n$ , τότε η ποσότητα  $(z, Az)_2$  είναι πραγματική.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $(z, Az)_2 = \overline{(z, Az)_2}$ . Είναι,

$$(z, Az)_2 = \overline{(Az, z)_2} = \overline{(z, A^H z)_2} = \overline{(z, Az)_2}. \quad \square$$

Για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  υπάρχουν  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  και  $z^i \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα  $Az^i = \lambda_i z^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Οι αριθμοί  $\lambda_i$  καλούνται ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί ένα διάνυσμα  $z^i$ , το οποίο καλείται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$ . Αξίζει να αναφερθεί ότι, αν  $z^i$  είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$ , τότε και το  $cz^i$ ,  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$ .

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αυτού,  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας ένα μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής, βαθμού  $n$  με μιγαδικούς συντελεστές, έχει  $n$  ρίζες (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες). Οπότε, ο πίνακας  $A$  θα έχει  $n$  ιδιοτιμές (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες), αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι βαθμού  $n$ . Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα πρέπει να επιλύσουμε τα γραμμικά συστήματα  $(A - \lambda_i I)z^i = 0 \Leftrightarrow Az^i = \lambda_i z^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Αν τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε αποτελούν βάση του  $\mathbb{C}^n$ .

Σχόλιο. Το φάσμα των ιδιοτιμών ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  θα το συμβολίζουμε με  $\sigma(A)$  και τη μέγιστη απόλυτη τιμή ιδιοτιμής, δηλαδή τη φασματική ακτίνα του πίνακα  $A$ , θα τη συμβολίζουμε με  $\rho(A)$ .

**Ορισμός 1.3.9.** Για έναν πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,m}$ , η νόρμα 1, η φασματική νόρμα (ή νόρμα 2) και η νόρμα μεγίστου, ορίζονται αντίστοιχα ως

$$\|A\|_1 = \max_{j=1(1)n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \rho^{\frac{1}{2}}(A^H A) \quad \text{και} \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1(1)m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Οι νόρμες αυτές λέγονται φυσικές νόρμες επειδή παράγονται από τις αντίστοιχες διανυσματικές νόρμες  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ , αντίστοιχα, ως η ποσότητα

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

**Ορισμός 1.3.10.** Η νόρμα Frobenius ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,m}$  ορίζεται ως

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\text{Tr}(A^H A)},$$

όπου  $\text{Tr}(A^H A)$  είναι το ίχνος του πίνακα  $(A^H A)$ .

Σημειώνεται ότι η νόρμα Frobenius δεν είναι φυσική νόρμα.

**Ορισμός 1.3.11.** Μια νόρμα καλείται ορθομοναδιαία αναλλοίωτη (*unitarily invariant*), αν ισχύει  $\|UAV\| = \|A\|$ , όπου  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι αυθαίρετος πίνακας και  $U, V \in \mathbb{C}^{n,n}$  δύο οποιοδήποτε ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Σχόλιο. Η φασματική νόρμα καθώς και η νόρμα Frobenius ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,m}$  είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτες.

**Πρόταση 1.3.12.** Ένας ερμιτιανός πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι, για τις ιδιοτιμές  $\lambda$  του πίνακα  $A$  ισχύει η ισότητα  $Az = \lambda z$ , με  $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ . Έχουμε,

$$\lambda(z, z)_2 = (z, \lambda z)_2 = (z, Az)_2 = (A^H z, z)_2 = (Az, z)_2 = (\lambda z, z)_2 = \bar{\lambda}(z, z)_2.$$

Η ποσότητα  $(z, z)_2$  είναι θετική, αφού το μιγαδικό διάνυσμα  $z$  δεν είναι το μηδενικό. Διαιρώντας με  $(z, z)_2$  προκύπτει  $\lambda = \bar{\lambda}$ , που είναι και το ζητούμενο.  $\square$

**Θεώρημα 1.3.13** (Αρχή μεγίστου-ελαχίστου των Courant-Fischer). Έστω ένας ερμιτιανός πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  και  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , οι ιδιοτιμές αυτού, διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά. Αν  $\lambda_\kappa$ ,  $\kappa = 1, \dots, n$ , είναι η  $\kappa$ -οστή ιδιοτιμή του  $A$ , ισχύει

$$\lambda_\kappa = \min_{\dim(U)=\kappa} \max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{x^H A x}{x^H x} \text{ και}$$

$$\lambda_\kappa = \max_{\dim(V)=n-\kappa+1} \min_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{x^H A x}{x^H x}.$$

**Θεώρημα 1.3.14** (Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών του Cauchy). Έστω  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  ένας ερμιτιανός πίνακας και  $B$  ένας κύριος υποπίνακας του  $A$ , διάστασης  $n-1$ . Αν  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά και  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$ , τότε ισχύει

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

**Θεώρημα 1.3.15** (Ανισότητα του Weyl). Έστω δύο ερμιτιανοί πίνακες  $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$  και  $\lambda_i(A), \lambda_i(B), \lambda_i(A+B), i = 1, \dots, n$ , οι ιδιοτιμές των πινάκων  $A, B$  και  $A+B$ , αντίστοιχα, διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά. Τότε ισχύει,

$$\lambda_i(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_i(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_n(B).$$

**Ορισμός 1.3.16.** Δύο πίνακες  $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$  λέγονται όμοιοι, αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $C \in \mathbb{C}^{n,n}$  τέτοιος ώστε  $A = CBC^{-1}$ .

**Πρόταση 1.3.17.** Αν δύο πίνακες  $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι όμοιοι, τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Έστω  $C \in \mathbb{C}^{n,n}$  αντιστρέψιμος πίνακας έτσι ώστε να ισχύει  $A = CBC^{-1}$ ,  $\lambda$  μια ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Έχουμε,

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow CBC^{-1}x = \lambda x \Leftrightarrow BC^{-1}x = \lambda C^{-1}x.$$

Αν θέσουμε  $y = C^{-1}x$ , η τελευταία ισότητα γράφεται  $By = \lambda y$ . Άρα,  $\lambda$  είναι ιδιοτιμή και του πίνακα  $B$  και  $y = C^{-1}x$  είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $B$ .  $\square$

**Θεώρημα 1.3.18** (Κανονική μορφή Schur). Για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας  $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$  και ένας άνω τριγωνικός πίνακας  $T \in \mathbb{C}^{n,n}$  τέτοιος ώστε,  $Q^H A Q = T$ .

Παρατήρηση. Ο πίνακας  $Q$  είναι ορθομοναδιαίος, επομένως ισχύει,

$$Q^H A Q = T \Leftrightarrow Q^{-1} A Q = T \Leftrightarrow A Q = Q T \Leftrightarrow A = Q T Q^{-1}.$$

Άρα, οι πίνακες  $A$  και  $T$  είναι όμοιοι, οπότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Σχόλιο. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $T$  είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του, αφού ο  $T$  είναι άνω τριγωνικός.

**Πρόταση 1.3.19.** Ένας ερμιτιανός πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  έχει  $n$  γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τα οποία αποτελούν ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{C}^n$ .

Απόδειξη. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$ , τέτοιος ώστε να ισχύει  $Q^H A Q = T$ , όπου  $T \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Ο πίνακας  $A$  είναι ερμιτιανός κι έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned} Q^H A Q = T &\Leftrightarrow (Q^H A Q)^H = T^H \Leftrightarrow Q^H A^H (Q^H)^H = T^H \Leftrightarrow \\ Q^H A Q = T^H &\Leftrightarrow T = T^H. \end{aligned}$$

Άρα, ο πίνακας  $T$  είναι ερμιτιανός και άνω τριγωνικός. Επομένως είναι διαγώνιος πίνακας με πραγματικά στοιχεία, τα οποία είναι οι ιδιοτιμές του, καθώς και οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Έστω  $x^i, y^i$  ιδιοδιανύσματα των πινάκων  $A$  και  $T$ , αντίστοιχα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Ισχύει

$$\begin{cases} Ax^i = \lambda_i x^i \\ Ty^i = \lambda_i y^i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^i = \lambda_i x^i \\ Q^H A Q y^i = \lambda_i y^i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^i = \lambda_i x^i \\ A Q y^i = \lambda_i Q y^i \end{cases} \Leftrightarrow x^i = Q y^i.$$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$ , που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$ , υπολογίζεται από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα  $Q$  με το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $T$ , το οποίο αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή,  $\lambda_i$ . Όμως, ο πίνακας  $T$  είναι διαγώνιος με πραγματικά στοιχεία και επομένως θα έχει ως ιδιοδιανύσματα τα διανύσματα της κανονικής βάσης, δηλαδή τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα διάστασης  $n$ . Αυτό σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  είναι οι στήλες του πίνακα  $Q$ . Όμως ο πίνακας  $Q$  είναι ορθομοναδιαίος, οπότε τα ιδιοδιανύσματα  $x^i$  του πίνακα  $A$  είναι ορθοκανονικά, αφού οι στήλες ενός ορθομοναδιαίου πίνακα σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{C}^n$ .  $\square$

*Παρατήρηση.* Όταν ο πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ερμιτιανός, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$  τέτοιος ώστε  $Q^H A Q = \Lambda$ , όπου  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι διαγώνιος πίνακας, με στοιχεία της κυρίας διαγωνίου τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Τέλος, ο πίνακας  $Q$  έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .

**Ορισμός 1.3.20.** Αν  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ένας ερμιτιανός και θετικά ορισμένος πίνακας, ορίζουμε τον πίνακα  $A^{\frac{1}{2}} = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^H$ , όπου  $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  και  $\Lambda^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι διαγώνιος πίνακας, που έχει ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του τις θετικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$ .

*Παρατήρηση.* Ισχύει  $A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$ .

**Πρόταση 1.3.21.** Αν  $\lambda \in \mathbb{C}$  είναι μια ιδιοτιμή ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , τότε  $\lambda^2$  είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα  $A^2$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ . Ισχύει,

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^2 x = A \lambda x \Leftrightarrow A^2 x = \lambda A x \Leftrightarrow A^2 x = \lambda^2 x.$$

Επομένως, ο αριθμός  $\lambda^2$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A^2$ .  $\square$

*Παρατήρηση.* Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  συμπίπτουν με αυτά του  $A^2$ .

**Πρόταση 1.3.22.** Αν  $\lambda \in \mathbb{C}$  είναι μια ιδιοτιμή ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , τότε  $\frac{1}{\lambda}$  είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα  $A^{-1}$ .

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι διάφορες του μηδενός. Έστω  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ . Ισχύει

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}Ax = \frac{1}{\lambda}\lambda x \Leftrightarrow A\frac{1}{\lambda}x = x \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x.$$

Επομένως, ο αριθμός  $\frac{1}{\lambda}$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A^{-1}$ . □

**Ορισμός 1.3.23.** Το πηλίκο Rayleigh ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  για ένα διάνυσμα  $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  ορίζεται ως το κλάσμα  $\frac{(z, Az)_2}{(z, z)_2}$ .

*Παρατήρηση.* Αν  $\lambda$  είναι μία ιδιοτιμή ενός πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  και  $z$  το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν, για το πηλίκο Rayleigh ισχύει

$$\frac{(z, Az)_2}{(z, z)_2} = \frac{(z, \lambda z)_2}{(z, z)_2} = \frac{\lambda (z, z)_2}{(z, z)_2} = \lambda.$$

**Ορισμός 1.3.24.** Έστω  $I_n$  ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης  $n$ . Λέμε ότι το φάσμα ιδιοτιμών μιας ακολουθίας πινάκων  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , συσσωρεύεται γύρω από ένα σημείο  $\alpha$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχουν θετικοί ακέραιοι  $n_1, n_2$ , τέτοιοι ώστε για κάθε  $n > n_1$ , το πολύ  $n_2$  ιδιοτιμές του πίνακα  $A_n - \alpha I_n$  να είναι μεγαλύτερες κατ' απόλυτη τιμή του  $\varepsilon$ .

**Ορισμός 1.3.25.** Ως πίνακα του Fourier διάστασης  $n$  ορίζουμε τον πίνακα  $\mathcal{F}_n \in \mathbb{C}^{n,n}$ , του οποίου τα στοιχεία της θέσης  $(j, k)$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ , δίνονται από τη σχέση  $f_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i(j-1)(k-1)/n}$ .

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ο  $n \times n$  πίνακας του Fourier έχει τη μορφή

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix},$$

όπου  $\omega = e^{2\pi i/n}$  είναι νιοστή ρίζα της μονάδας, αφού  $\omega^n = 1$ .

Αναφέρουμε ότι ο πίνακας  $\mathcal{F}_n$  είναι ορθομοναδιαίος (επομένως και αντιστρέψιμος) και συμμετρικός, δηλαδή ισχύει  $\mathcal{F}_n^{-1} = \mathcal{F}_n^H = \overline{\mathcal{F}_n}$  [7, 18, 30, σελ. 1-5].

Σχόλιο. Οι αριθμοί  $\omega^j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , είναι οι διακεκριμένες λύσεις της μιγαδικής εξίσωσης  $z^n - 1 = 0$ , και καλούνται νιοστές ρίζες της μονάδας.

## 1.4 Δείκτης Κατάστασης Πίνακα

**Ορισμός 1.4.1.** Δείκτης κατάστασης ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  ως προς μια φυσική νόρμα  $\|\cdot\|$  καλείται ο αριθμός  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ .

**Πρόταση 1.4.2.** Ο δείκτης κατάστασης  $\kappa_2(A)$  ενός ερμιτιανού και αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  δίνεται από τον τύπο

$$\kappa_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|},$$

όπου  $\lambda_i$  είναι η  $i$ -οστή ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ .

Απόδειξη. Έστω  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Έχουμε,

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho^{\frac{1}{2}}(A^H A) \rho^{\frac{1}{2}}\left((A^{-1})^H A^{-1}\right) = \\ &= \rho^{\frac{1}{2}}(A^2) \rho^{\frac{1}{2}}\left((A^H)^{-1} A^{-1}\right) = \rho^{\frac{1}{2}}(A^2) \rho^{\frac{1}{2}}\left((A^{-1})^2\right) = \\ &= \sqrt{\max_i (\lambda_i)^2} \sqrt{\max_i \frac{1}{(\lambda_i)^2}} = \max_i |\lambda_i| \max_i \left|\frac{1}{\lambda_i}\right| = \\ &= \max_i |\lambda_i| \frac{1}{\min_i |\lambda_i|} = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|}. \quad \square \end{aligned}$$

Σχόλιο. Μια ακολουθία πινάκων  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  με  $A_n \in \mathbb{C}^{n,n}$ , λέμε ότι έχει καλή κατάσταση, όταν ο δείκτης κατάστασης  $\kappa_2(A_n)$  είναι φραγμένος για κάθε  $n$ , από θετική σταθερά η οποία είναι ανεξάρτητη της διάστασης του πίνακα.

## 1.5 Πίνακες Toeplitz

**Ορισμός 1.5.1.** Ένας πίνακας  $T \in \mathbb{C}^{n,n}$  καλείται πίνακας Toeplitz, αν η τιμή του στοιχείου  $t_{j,k}$  που βρίσκεται στη θέση  $(j,k)$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ , εξαρτάται μόνο



από τη διαφορά των δεικτών  $j - k$ , δηλαδή  $t_{j,k} = t_{j-k}$ .

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, τα στοιχεία ενός πίνακα Toeplitz που βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο του πίνακα είναι ίσα. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ένας  $n \times n$  πίνακας Toeplitz, έστω  $T_n = [t_{j,k}; j, k = 1, \dots, n]$ , είναι της μορφής,

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-3)} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-4)} & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n-2} & t_{n-3} & t_{n-4} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Οι πίνακες Toeplitz ανήκουν στην κλάση των περισυμμετρικών (**persymmetric**) πινάκων, δηλαδή των πινάκων που είναι συμμετρικοί ως προς τη δευτερεύουσα διαγώνιο. Έτσι, αν  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ένας περισυμμετρικός πίνακας, για τα στοιχεία αυτού ισχύει,

$$a_{j,k} = a_{n-k+1, n-j+1}, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

ή ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι ο πίνακας  $A$  ικανοποιεί τη σχέση

$$A = EA^T E,$$

όπου  $E$  είναι τετραγωνικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν, εκτός από τα στοιχεία της δευτερεύουσας διαγωνίου, τα οποία είναι ίσα με τη μονάδα.

Τα στοιχεία ενός πίνακα Toeplitz  $T_n$  παράγονται από τους συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης  $f$ , η οποία καλείται γεννήτρια συνάρτηση (**generating function**) του πίνακα αυτού. Δηλαδή ισχύει,

$$t_{j,k} = t_{j-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(j-k)x} dx, \quad i^2 = -1, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Ο πίνακας Toeplitz, που παράγεται από τη γεννήτρια συνάρτηση  $f$ , συμβολίζεται με  $T_n(f)$ . Ανάλογα με τις ιδιότητες της συνάρτησης  $f$  (συνεχής, άρτια, θετική, ...) προκύπτουν πίνακες Toeplitz με συγκεκριμένες ιδιότητες (ερμιτιανός, συμμετρικός, θετικά ορισμένος, ...). Η συνάρτηση  $f$  παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανομή των ιδιοτιμών του πίνακα  $T_n(f)$  και πολλές φορές μας είναι γνωστή εκ των προτέρων.

Πίνακες Toeplitz εμφανίζονται σε πλήθος εφαρμογών, όπως είναι η αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, η επεξεργασία εικόνας, η επεξεργασία σήματος, κα. Έτσι, η κατασκευή μίας γρήγορης και αποτελεσματικής μεθόδου για την επίλυση συστημάτων της μορφής  $T_n x = b$ , μπορούμε να πούμε ότι είναι επιτακτική ανάγκη.

**Ορισμός 1.5.2.** Ένας πίνακας Toeplitz, του οποίου κάθε γραμμή προκύπτει από μια δεξιά κυκλική μετατόπιση της προηγούμενης της, έτσι ώστε να ισχύει  $c_{j,k} = c_{j-k} = c_k = c_{k-n}$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , με  $c_{-n} := c_0$ , ονομάζεται κυκλοειδής (*circulant*) πίνακας.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ένας  $n \times n$  κυκλοειδής πίνακας  $C_n$  είναι της μορφής

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_4 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}.$$

Τα κανονικά ιδιοδιανύσματα ενός κυκλοειδούς πίνακα  $C_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι οι στήλες του ορθομοναδιαίου πίνακα  $\mathcal{F}_n^H$ . Έτσι ισχύει,  $C_n = \mathcal{F}_n^H \Lambda_n \mathcal{F}_n$ , δηλαδή οποιοσδήποτε κυκλοειδής πίνακας διαγωνιοποιείται με τον πίνακα  $\mathcal{F}_n^H$ . Ο πίνακας  $\Lambda_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι διαγώνιος πίνακας διάστασης  $n$ , ο οποίος έχει ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του τις ιδιοτιμές του πίνακα  $C_n$  [19, 30, σελ. 1-5].

**Πρόταση 1.5.3.** Οι ιδιοτιμές ενός κυκλοειδούς πίνακα  $C_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  δίνονται από τη σχέση  $\lambda_j = \sum_{k=1}^n c_{k-1} e^{2\pi i(j-1)(k-1)/n}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

*Απόδειξη.* Ορίζουμε τα διανύσματα  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$  και  $u = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^H \Lambda_n \mathcal{F}_n = C_n &\Leftrightarrow \Lambda_n \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n C_n \Rightarrow \Lambda_n \mathcal{F}_n e_1 = \mathcal{F}_n C_n e_1 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \Lambda_n u &= \mathcal{F}_n C_n e_1 \Leftrightarrow \Lambda_n u = \sqrt{n} \mathcal{F}_n C_n e_1. \end{aligned}$$

Επομένως, τα διαγώνια στοιχεία  $\lambda_j$  του πίνακα  $\Lambda_n$ , που είναι και οι ιδιοτιμές

του πίνακα  $C_n$ , δίνονται από τη σχέση,

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^n c_{k-1} e^{2\pi i(j-1)(k-1)/n}, \quad j = 1, \dots, n. \quad \square$$

Σχόλιο. Η παραπάνω σχέση, γράφεται συνήθως στη βιβλιογραφία, ως

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{2\pi i j k / n}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (1.2)$$

**Ορισμός 1.5.4.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{Z}$ . Λέμε ότι  $f(n) \in O(g(n))$  (ή  $f(n) = O(g(n))$ ) για  $n \rightarrow \infty$ , αν υπάρχει σταθερά  $K$  (ανεξάρτητη του  $n$ ), τέτοια ώστε να ισχύει  $|f(n)| \leq K |g(n)|$ .

Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα Toeplitz  $T_n$  με ένα διάνυσμα  $x$ , μπορεί να γίνει σε  $O(n \log n)$  πράξεις, αφού πρώτα εμβαπτίσουμε τον πίνακα  $T_n$  σε έναν  $2n \times 2n$  κυκλοειδή πίνακα και στη συνέχεια κάνουμε τον πολλαπλασιασμό με τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier (**Fast Fourier Transform**) FFT [13, 16, 19, 26, 28]. Ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιούμε την εμβάπτιση του πίνακα  $T_n$  φαίνεται παρακάτω

$$\begin{bmatrix} T_n & B_n \\ B_n & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_n x \\ B_n x \end{bmatrix},$$

όπου

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & t_{n-1} & \cdots & t_2 & t_1 \\ t_{1-n} & 0 & t_{n-1} & \ddots & t_2 \\ \vdots & t_{1-n} & 0 & \ddots & \vdots \\ t_{-2} & \ddots & \ddots & 0 & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{1-n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Σχόλιο. Για τον πολλαπλασιασμό του  $2n \times 2n$  κυκλοειδούς πίνακα με το διάνυσμα  $(x, 0)^T$ , λαμβάνουμε υπόψη ότι ένας κυκλοειδής πίνακας διαγωνιοποιείται με τον πίνακα του Fourier  $\mathcal{F}_n$ .

**Ορισμός 1.5.5.** Ένας πίνακας, ο οποίος έχει τα ίδια στοιχεία στις αντιδιαγωνίους του, ονομάζεται πίνακας Hankel. Δηλαδή, ένας πίνακας Hankel έχει τη μορφή,

$$H_n = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \ddots & h_{n-1} & h_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-1} & \ddots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \\ h_{n-1} & h_n & \cdots & h_{2n-2} & h_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

## 1.6 Προρρυθμισμένη Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων

Συστήματα της παραπάνω μορφής μπορούν να λυθούν με την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά και με την επιλογή του κατάλληλου προρρυθμιστή μπορούμε να επιτύχουμε την υπεργραμμική σύγκλιση (**superlinear convergence**) της μεθόδου. Έτσι οδηγούμαστε στην αριθμητική λύση του συστήματος πολύ γρήγορα. Για να χαρακτηριστεί καλός ένας προρρυθμιστής  $M$ , θα πρέπει να συσσωρεύει τις ιδιοτιμές του προρρυθμισμένου συστήματος ( $M^{-1}Tx = M^{-1}b$ ) όσο το δυνατόν πιο κοντά τη μια στην άλλη και να κάνει τις ιδιοτιμές που βρίσκονται εκτός της περιοχής συσσώρευσης να φράσσονται από σταθερές διάφορες του μηδενός και ανεξάρτητες της διάστασης  $n$  του πίνακα.

Παρακάτω δίνουμε έναν ψευδοκώδικα για την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων. Τα δεδομένα μας είναι η επιθυμητή ανοχή σφάλματος  $\varepsilon > 0$ , ένας  $n \times n$  πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας  $A$ , ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα  $b$  και ένας  $n \times n$  συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας  $M$  για τον οποίο ισχύει  $\frac{\lambda_{\max}(M^{-1}A)}{\lambda_{\min}(M^{-1}A)} \ll \kappa_2(A)$ , όπου  $\lambda_{\max}$  και  $\lambda_{\min}$  είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα  $M^{-1}A$  και  $\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$  είναι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα  $A$  για τη φασματική νόρμα (νόρμα 2). Η επιθυμητή ανοχή σφάλματος  $\varepsilon$ , οι πίνακες  $A, M$ , όπως και το διάνυσμα  $b$  παίρνουν πραγματικές τιμές.

### Αλγόριθμος Προρρυθμισμένης Μεθόδου Συζυγών Κλίσεων

$$x^{(0)} = 0$$

$$r^{(0)} = b$$

$$Mz^{(0)} = r^{(0)}$$

$$p^{(1)} = z^{(0)}$$

$$a_1 = \frac{(z^{(0)}, r^{(0)})}{(Ap^{(1)}, p^{(1)})}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + a_1 p^{(1)}$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - a_1 Ap^{(1)}$$

$$k = 1$$

**Εφόσον**  $\|r^{(k)}\|_2 > \varepsilon$  και  $k < n$

$$k = k + 1$$

$$Mz^{(k-1)} = r^{(k-1)}$$

$$\beta_k = \frac{(z^{(k-1)}, r^{(k-1)})}{(z^{(k-2)}, r^{(k-2)})}$$

$$p^{(k)} = z^{(k-1)} + \beta_k p^{(k-1)}$$

$$\alpha_k = \frac{(z^{(k-1)}, r^{(k-1)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k)}$$

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k Ap^{(k)}$$

**Τέλος ‘Εφόσον’**

Η προσεγγιστική λύση του συστήματος  $M^{-1}Ax = M^{-1}b$  είναι ίση με  $x = x^{(k)}$ .

Ο παραπάνω αλγόριθμος δόθηκε για πραγματικούς, συμμετρικούς και θετικά ορισμένους πίνακες, μπορεί όμως κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί και για μιγαδικούς, ερμιτιανούς και θετικά ορισμένους πίνακες.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Συστήματα με Καλή Κατάσταση

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά αναφέρουμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει η γεννήτρια συνάρτηση, έτσι ώστε η ακολουθία πινάκων Toeplitz που προκύπτει από αυτή να έχει καλή κατάσταση. Στη συνέχεια, παραθέτουμε κάποιες χρήσιμες προτάσεις που αφορούν τις ιδιοτιμές ενός πίνακα Toeplitz και τέλος παρουσιάζουμε κάποιους γνωστούς προρρυθμιστές για συστήματα με καλή κατάσταση.

### 2.1 Διάφορες Αποδείξεις

Ένα κύριο υποσύνολο της κλάσης των  $2\pi$ -περιοδικών, συνεχών συναρτήσεων είναι η κλάση (συναρτήσεων) Wiener. Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} t_{\kappa} e^{i\kappa x},$$

είναι μία πραγματική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας πινάκων  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ , όπου  $T_n$  είναι της μορφής (1.1) για κάθε  $n$ . Αν η συνάρτηση  $f$  ανήκει στην κλάση Wiener, ισχύει

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |t_{\kappa}| < \infty,$$

δηλαδή οι συντελεστές της συνάρτησης  $f$  μπορούν να αθροιστούν κατ' απόλυτη τιμή (**absolutely summable**). Παραπάνω,  $t_{\kappa}$  είναι οι συντελεστές Fourier της

συνάρτησης  $f$ , δηλαδή  $t_{\kappa} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\kappa x} dx$ .

**Πρόταση 2.1.1.** Όταν η γεννήτρια συνάρτηση  $f$  είναι πραγματική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική, ο πίνακας  $T_n(f)$  είναι ερμιτιανός.

Απόδειξη. Όπως ξέρουμε, η τιμή  $t_{j,k}$  δίνεται από τη σχέση

$$t_{j,k} = t_{j-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(j-k)x} dx.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \bar{t}_{k,j} = \bar{t}_{k-j} &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(k-j)x} dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{-i(k-j)x}} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(j-k)x} dx. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε ότι  $t_{j,k} = \bar{t}_{k,j}$ , δηλαδή ότι ο πίνακας  $T_n(f)$  είναι ερμιτιανός.  $\square$

**Πρόταση 2.1.2.** Όταν η γεννήτρια συνάρτηση  $f$  είναι θετική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική, ο πίνακας  $T_n(f)$  είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος, και η ακολουθία πινάκων  $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$  έχει καλή κατάσταση.

Απόδειξη. Όπως αποδείχτηκε παραπάνω, ο πίνακας είναι ερμιτιανός. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Για απλούστευση του συμβολισμού συμβολίζουμε τον  $T_n(f)$  με  $T_n$ . Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα  $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ . Έχουμε

$$T_n z = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & t_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n t_{1,k} z_k \\ \sum_{k=1}^n t_{2,k} z_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n t_{n,k} z_k \end{bmatrix}.$$

Επομένως για το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο  $(z, T_n z)_2$  έχουμε

$$(z, T_n z)_2 = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j \sum_{k=1}^n t_{j,k} z_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n t_{j-k} \bar{z}_j z_k.$$



Οπότε ,

$$\begin{aligned} (z, T_n z)_2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n t_{j-k} \bar{z}_j z_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-i(j-k)\theta} d\theta \bar{z}_j z_k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) e^{-i(j-k)\theta} \bar{z}_j z_k d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ij\theta} \bar{z}_j \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} z_k f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Όμως για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ , ισχύει η ισότητα  $\bar{z}z = |z|^2$ . Επομένως

$$(z, T_n z)_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 f(\theta) d\theta. \quad (2.1)$$

Είναι  $(z, T_n z)_2 > 0$ , διότι

$$\begin{aligned} (z, T_n z)_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 f(\theta) d\theta \geq \min_{\theta} f(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 d\theta = \\ &= \min_{\theta} f(\theta) \sum_{j=1}^n |z_j|^2 > 0. \end{aligned}$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία πινάκων Toeplitz  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ , έχει καλή κατάσταση. Έστω  $T$  ένας όρος της ακολουθίας  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $z$  ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $T$  και  $\lambda$  η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο  $z$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι θετική, επομένως είναι κάτω φραγμένη από την ελάχιστη τιμή που αυτή μπορεί να πάρει,  $m > 0$ . Επίσης, η  $f$  είναι συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική, οπότε είναι άνω φραγμένη από τη μέγιστη τιμή της  $M$ ,

$$0 < m \leq f(\theta) \leq M, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Για το πηλίκο Rayleigh ισχύει,

$$\frac{(z, Tz)_2}{(z, z)_2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 f(\theta) d\theta}{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει

$$0 < \min_{\theta} f(\theta) = m \leq \lambda \leq M = \max_{\theta} f(\theta), \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ αφού,}$$

$$\frac{m \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 d\theta}{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} \leq \frac{(z, Tz)_2}{(z, z)_2} \leq \frac{M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 d\theta}{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{m \sum_{j=1}^n |z_j|^2}{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} \leq \lambda \leq \frac{M \sum_{j=1}^n |z_j|^2}{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} \Leftrightarrow m \leq \lambda \leq M.$$

Δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $T$  είναι φραγμένες και ανεξάρτητες από τη διάσταση του πίνακα  $n$ , αφού τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  δεν εξαρτώνται από τη διάσταση του πίνακα Toeplitz. Επομένως, η ακολουθία πινάκων  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  έχει καλή κατάσταση.  $\square$

Σχόλιο. Αν επιλέξουμε το ιδιοδιάνυσμα  $z$  να ανήκει σε ορθοκανονική βάση, η παραπάνω απόδειξη γίνεται παρόμοια μόνο που σε αυτήν την περίπτωση οι παρονομαστές είναι ίσοι με τη μονάδα, αφού  $\sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1$ .

Σχόλιο. Όταν  $m < M$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ , βλέπουμε ότι ισχύει,

$$\min f = m < \lambda_i < M = \max f, i = 1, \dots, n.$$

Επομένως, για να είναι ο πίνακας  $T_n(f)$  θετικά ορισμένος, μας αρκεί η συνάρτηση  $f$  να είναι μη αρνητική [6]. Αυτό ισχύει γιατί ο πίνακας Toeplitz  $T_n(f)$  είναι ερμιτιανός και οι ιδιοτιμές του  $\lambda_i$  είναι θετικές.

**Πρόταση 2.1.3.** Όταν η γεννήτρια συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, θετική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική, ο πίνακας  $T_n(f)$  είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και η ακολουθία πινάκων  $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$  έχει καλή κατάσταση.

Απόδειξη. Η συμμετρία του πίνακα μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια των συντελεστών Fourier της γεννήτριας συνάρτησης. Αρκεί να δειχθεί ότι  $t_{-(j-k)} = t_{j-k}$ .

Έχουμε,

$$t_{-(j-k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i(j-k)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(j-k)(-x)} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) e^{-i(j-k)(-x)} dx \Rightarrow t_{-(j-k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) e^{-i(j-k)(-x)} dx.$$

Θέτουμε  $u = -x$ , και έχουμε  $du = -dx$  και όταν  $x = -\pi : u = \pi$  ενώ όταν  $x = \pi : u = -\pi$ . Άρα,

$$t_{-(j-k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) e^{-i(j-k)(-x)} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(u) e^{-i(j-k)(u)} du =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-i(j-k)(u)} du = t_{j-k}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.2, ο πίνακας  $T_n(f)$  θα είναι και ερμιτιανός. Επομένως θα είναι πραγματικός και συμμετρικός. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας  $T_n$  είναι θετικά ορισμένος, κάνοντας μια διαφορετική απόδειξη σε σχέση με αυτή της Πρότασης 2.1.2. Για  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  έχουμε,

$$T_n x = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & t_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n t_{1,k} x_k \\ \sum_{k=1}^n t_{2,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n t_{n,k} x_k \end{bmatrix}.$$

Επομένως, για το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο  $(x, T_n x)_2$  έχουμε

$$(x, T_n x)_2 = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n t_{j,k} x_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n t_{j-k} x_j x_k =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-i(j-k)\theta} d\theta x_j x_k =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) e^{-i(j-k)\theta} x_j x_k d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) \cos((j-k)\theta) x_j x_k d\theta -$$

$$i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) \sin((j-k)\theta) x_j x_k d\theta.$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, όπως και η συνάρτηση του συνημιτόνου. Άρα, η  $f(\theta) \cos((j-k)\theta)$  είναι άρτια συνάρτηση ως γινόμενο αρτίων συναρτήσεων και επομένως η συνάρτηση  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) \cos((j-k)\theta) x_j x_k$  είναι άρτια ως άθροισμα αρτίων συναρτήσεων. Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι περιττή. Άρα, η συνάρτηση  $f(\theta) \sin((j-k)\theta)$  είναι περιττή ως γινόμενο άρτιας συνάρτησης με περιττή. Επομένως,  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) \sin((j-k)\theta) x_j x_k$  είναι περιττή συνάρτηση ως άθροισμα περιττών συναρτήσεων. Το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε συμμετρικό διάστημα ισούται με μηδέν, ενώ το ολοκλήρωμα άρτιας συνάρτησης στο  $[-\pi, \pi]$  ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος της συνάρτησης στο διάστημα  $[0, \pi]$ . Έτσι έχουμε,

$$(x, T_n x)_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) \cos((j-k)\theta) x_j x_k d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\theta) [(\cos(j\theta) \cos(k\theta) + \sin(j\theta) \sin(k\theta)) x_j x_k] d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \cos(j\theta) x_j \cos(k\theta) x_k d\theta +$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sin(j\theta) x_j \sin(k\theta) x_k d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \left( \sum_{j=1}^n \cos(j\theta) x_j \right)^2 d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \left( \sum_{j=1}^n \sin(j\theta) x_j \right)^2 d\theta \geq$$

$$\min_{\theta} f(\theta) \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \cos(j\theta) x_j \right)^2 d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \sin(j\theta) x_j \right)^2 d\theta \right] =$$

$$\min_{\theta} f(\theta) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \cos((j-k)\theta) x_j x_k d\theta = \min_{\theta} f(\theta) \sum_{j=1}^n x_j^2 +$$

$$\min_{\theta} f(\theta) \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_0^{\pi} \cos((j-k)\theta) d\theta x_j x_k = \min_{\theta} f(\theta) \sum_{j=1}^n x_j^2 > 0.$$

Αποδείξαμε ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Όταν ένας πίνακας είναι πραγματικός και συμμετρικός, προφανώς είναι και ερμιτιανός. Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.2 έχουμε

$$(x, T_n x)_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} x_j \right|^2 f(\theta) d\theta.$$

Ομοίως με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.2, αποδεικνύεται ότι η ακολουθία πινάκων  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  έχει καλή κατάσταση.  $\square$

**Ορισμός 2.1.4.** Έστω δύο σύνολα πραγματικών αριθμών  $\{a_j\} = \{a_1, \dots, a_n\}$  και  $\{b_j\} = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Υποθέτουμε ότι για κάθε  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$  ισχύει

$$|a_j| < K, |b_j| < K,$$

όπου  $K$  είναι σταθερά ανεξάρτητη των  $j$  και  $n$ . Λέμε ότι τα σύνολα  $\{a_j\}, \{b_j\}$  είναι ισοκατανεμημένα (*equally distributed*) στο διάστημα  $[-K, K]$  αν ισχύει η ισότητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n [F(a_j) - F(b_j)]}{n} = 0,$$

όπου  $F$  είναι μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[-K, K]$ .

**Θεώρημα 2.1.5.** Ας είναι  $f$  μια πραγματική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι ιδιοτιμές του πίνακα Toeplitz  $T_n$ , που αυτή παράγει. Συμβολίζουμε με  $m$  και  $M$  το ουσιώδες κάτω φράγμα και ουσιώδες άνω φράγμα της συνάρτησης  $f$ , αντίστοιχα. Αν  $F(\lambda)$  είναι μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα  $[m, M]$  ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda_1) + F(\lambda_2) + \dots + F(\lambda_n)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.5, αν επιλέξουμε τη συνάρτηση  $F(x) = x$ , έχουμε  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ . Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος όρος των ιδιοτιμών του πίνακα Toeplitz που παράγεται από τη συνάρτηση  $f$ , συγκλίνει στον μέσο όρο της  $f$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , δηλαδή στον αριθμό  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = t_0$ .

Σχόλιο. Η παραπάνω σχέση ισχύει και χωρίς να θεωρήσουμε το όριο, αφού

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \text{Tr}(T_n) = nt_0 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j}{n} = t_0.$$

**Πρόταση 2.1.6.** Το σύνολο των ιδιοτιμών  $\{\lambda_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ενός πίνακα Toeplitz διάστασης  $n$ , ο οποίος παράγεται από τους συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης  $f$ , και το σύνολο  $\left\{ f\left(-\pi + \frac{2j\pi}{n}\right) \right\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , είναι ισοκατανεμημένα, δηλαδή για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα  $[-K, K]$ , όπου  $K$  είναι μια σταθερά από την οποία φράσσονται τα δύο σύνολα που αναφέραμε, ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \left[ F(\lambda_j) - F\left(f\left(-\pi + \frac{2j\pi}{n}\right)\right) \right]}{n} = 0.$$

Απόδειξη. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $(F \circ f)(x) = F(f(x))$  είναι το σύνολο που περιέχει τα  $x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-K, K]$ , δηλαδή όλο το  $\mathbb{R}$ , αφού για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$-K < \min f \leq f(x) \leq \max f < K.$$

Οι ανισότητες  $-K < \min f$  και  $\max f < K$  ισχύουν γιατί η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική και όπως αναφέραμε η σταθερά  $K$  είναι ένα φράγμα των τιμών  $\{\lambda_j\}$  και  $f\left(-\pi + \frac{2j\pi}{n}\right)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Η  $F \circ f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της ( $\mathbb{R}$ ) ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα  $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$  (είναι συνεχής σε αυτό).

Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n F \left[ f \left( -\pi + \frac{2j\pi}{n} \right) \right]}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx.$$

Επιλέγουμε την ομοιόμορφη διαμέριση  $P = \{x_0 = -\pi < x_1 = -\pi + \frac{2\pi}{n} < \dots < x_n = -\pi + \frac{2n\pi}{n} = \pi\}$  και ως ενδιαμέσα σημεία  $\xi_j$  παίρνουμε τα δεξιά άκρα των διαστημάτων  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Προφανώς, η λεπτότητα της διαμέρισης που επιλέξαμε ισούται με  $\|P\| = \frac{2\pi}{n}$  και  $\|P\| \rightarrow 0$ , όταν  $n \rightarrow \infty$ . Ισχύει,

$$\begin{aligned} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(P, F[f(x)], \Xi) &= \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx \Leftrightarrow \\ \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n F[f(\xi_j)] (x_j - x_{j-1}) &= \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx \Leftrightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n F \left[ f \left( -\pi + \frac{2j\pi}{n} \right) \right] \frac{2\pi}{n} &= \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx \Leftrightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n F \left[ f \left( -\pi + \frac{2j\pi}{n} \right) \right]}{n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow I_0 = \left| \frac{\sum_{j=1}^n F \left[ f \left( -\pi + \frac{2j\pi}{n} \right) \right]}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Η συνάρτηση  $F$  είναι ορισμένη στο διάστημα  $[-K, K] \supset [m, M]$ , όπου  $m, M$  είναι το ουσιώδες κάτω και άνω φράγμα της συνάρτησης  $f$ , αντίστοιχα. Επομένως,

το αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει και ισοδύναμα γράφεται

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow I_1 = \left| \frac{\sum_{j=1}^n F(\lambda_j)}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω ένα  $\varepsilon > 0$ . Επιλέγουμε  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ . Για  $n > n_2$  έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{j=1}^n \left[ F(\lambda_j) - F\left[f\left(-\pi + \frac{2j\pi}{n}\right)\right] \right]}{n} \right| &= \left| \frac{\sum_{j=1}^n F(\lambda_j)}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F[f(x)] dx - \frac{\sum_{j=1}^n F\left[f\left(-\pi + \frac{2j\pi}{n}\right)\right]}{n} \right| \leq I_1 + I_0 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Αποδείξαμε το ζητούμενο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \left[ F(\lambda_j) - F\left[f\left(-\pi + \frac{2j\pi}{n}\right)\right] \right]}{n} = 0. \quad \square$$

## 2.2 Προρρυθμιστής του Strang

Ο πρώτος κυκλοειδής προρρυθμιστής πίνακας, για συστήματα Toeplitz της μορφής  $T_n x = b$ , όπου  $T_n$  δίνεται από τη σχέση (1.1), προτάθηκε από τον Gilbert Strang το 1986. Συμβολίζεται με  $s(T_n)$  και τα διαγώνια στοιχεία αυτού, στην περίπτωση που το  $n$  είναι περιττός αριθμός, δίνονται από τη σχέση

$$s_{\kappa} = \begin{cases} t_{\kappa}, & 0 \leq \kappa \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ t_{\kappa-n}, & \lfloor n/2 \rfloor < \kappa \leq n-1, \\ s_{n+\kappa}, & 0 < -\kappa \leq n-1, \end{cases}$$



όπου  $\kappa = j - k$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , και  $\lfloor n/2 \rfloor$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος  $m$ , για τον οποίο ισχύει  $m \leq n/2$ . Στην περίπτωση που το  $n$  είναι άρτιος αριθμός, τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $s(T_n)$  δίνονται από τη σχέση

$$s_\kappa = \begin{cases} t_\kappa, & 0 \leq \kappa < \lfloor n/2 \rfloor, \\ 0 \text{ ή } \frac{1}{2}(t_\kappa + t_{-\kappa}), & \kappa = \lfloor n/2 \rfloor, \\ t_{\kappa-n}, & \lfloor n/2 \rfloor < \kappa \leq n-1, \\ s_{n+\kappa}, & 0 < -\kappa \leq n-1. \end{cases}$$

Σχόλιο. Μπορούμε να πούμε ότι ο προρρυθμιστής  $s(T_n)$  κατασκευάζεται αντιγράφοντας τις κεντρικές διαγωνίους του πίνακα των συντελεστών  $T_n$ , αφού τις τοποθετεί κάτω από την κύρια διαγώνιο, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, και στη συνέχεια συμπληρώνει τα υπόλοιπα στοιχεία του έτσι ώστε να είναι κυκλοειδής.

**Πρόταση 2.2.1.** Έστω  $T_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  ένας πίνακας Toeplitz και  $s(T_n) \in \mathbb{C}^{n,n}$  ο προρρυθμιστής του Strang, που προκύπτει από τον  $T_n$ . Αν ο πίνακας  $T_n$  είναι ερμιτιανός, τότε και ο  $s(T_n)$  θα είναι ερμιτιανός.

Απόδειξη. Αρχικά, υποθέτουμε ότι το  $n$  είναι περιττός αριθμός. Τότε ισχύει η ισότητα  $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ , και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Για  $\kappa = 0$  ισχύει

$$s_0 = t_0.$$

Για  $0 < \kappa \leq (n-1)/2$  ισχύει

$$s_\kappa = t_\kappa. \text{ Πρέπει να αποδείξουμε ότι } s_{-\kappa} = \overline{t_\kappa} = t_{-\kappa}. \text{ Έχουμε}$$

$$0 < \kappa \leq (n-1)/2 \Leftrightarrow (-n+1)/2 \leq -\kappa < 0 \Leftrightarrow$$

$$(n+1)/2 \leq n-\kappa < n. \text{ Άρα}$$

$$s_{-\kappa} = s_{n-\kappa} = t_{n-\kappa-n} = t_{-\kappa}.$$

Για  $(n-1)/2 < \kappa \leq n-1$  ισχύει

$$s_\kappa = t_{\kappa-n}. \text{ Πρέπει να αποδείξουμε ότι } s_{-\kappa} = \overline{t_{\kappa-n}} = t_{n-\kappa}. \text{ Έχουμε}$$

$$(n-1)/2 < \kappa \leq n-1 \Leftrightarrow -n+1 \leq -\kappa < (-n+1)/2 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq n-\kappa < (n+1)/2 \Leftrightarrow 1 \leq n-\kappa \leq (n-1)/2. \text{ Άρα}$$

$$s_{-\kappa} = s_{n-\kappa} = t_{n-\kappa}.$$

Στην περίπτωση που το  $n$  είναι περιττός αριθμός, αποδείξαμε ότι  $s_\kappa = \overline{s_{-\kappa}}$ ,  $\kappa = 0, \dots, n-1$ , δηλαδή ότι ο προρρυθμιστής του Strang είναι ερμιτιανός πίνακας.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το  $n$  είναι άρτιος αριθμός. Στην περίπτωση αυτή ισχύει  $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$  και εργαζόμαστε ομοίως με πριν. Έτσι, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Για  $\kappa = 0$  ισχύει

$$s_0 = t_0.$$

Για  $0 < \kappa < n/2$  ισχύει

$$s_\kappa = t_\kappa. \text{ Πρέπει να αποδείξουμε ότι } s_{-\kappa} = \overline{t_\kappa} = t_{-\kappa}. \text{ Έχουμε}$$

$$0 < \kappa < n/2 \Leftrightarrow -n/2 < -\kappa < 0 \Leftrightarrow$$

$$n/2 < n - \kappa < n. \text{ Άρα}$$

$$s_{-\kappa} = s_{n-\kappa} = t_{n-\kappa-n} = t_{-\kappa}.$$

Για  $\kappa = n/2$  και επιλέγοντας  $s_{n/2} = 0$  ισχύει

$$s_\kappa = s_{n/2} = 0. \text{ Πρέπει να αποδείξουμε ότι } s_{-\kappa} = s_{-n/2} = 0. \text{ Έχουμε}$$

$$s_{-n/2} = s_{n-n/2} = s_{n/2} = 0.$$

Για  $\kappa = n/2$  και επιλέγοντας  $s_{n/2} = \frac{1}{2}(t_\kappa + t_{-\kappa})$  ισχύει

$$s_\kappa = s_{n/2} = \frac{1}{2}(t_\kappa + \overline{t_\kappa}) = \operatorname{Re}(t_\kappa).$$

$$\text{Πρέπει να αποδείξουμε ότι } s_{-\kappa} = s_{-n/2} = \operatorname{Re}(t_\kappa). \text{ Έχουμε}$$

$$s_{-n/2} = s_{n-n/2} = s_{n/2} = \operatorname{Re}(t_\kappa).$$

Για  $n/2 < \kappa \leq n-1$  ισχύει

$$s_\kappa = t_{\kappa-n}. \text{ Πρέπει να αποδείξουμε ότι } s_{-\kappa} = \overline{t_{\kappa-n}} = t_{n-\kappa}. \text{ Έχουμε}$$

$$n/2 < \kappa \leq n-1 \Leftrightarrow -n+1 \leq -\kappa < -n/2 \Leftrightarrow$$

$$1 \leq n - \kappa < n/2. \text{ Άρα}$$

$$s_{-\kappa} = s_{n-\kappa} = t_{n-\kappa}.$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι,  $s_\kappa = \overline{s_{-\kappa}}$ ,  $\kappa = 0, \dots, n-1$ , δηλαδή ότι ο προρρυθμιστής του Strang είναι ερμιτιανός πίνακας, είτε το  $n$  είναι περιττός αριθμός, είτε άρτιος.  $\square$

**Θεώρημα 2.2.2.** *Αν  $f$  είναι μια θετική συνάρτηση στην κλάση Wiener, τότε (για μεγάλο  $n$ ) η φασματική νόρμα ( $\|\cdot\|_2$ ) των πινάκων  $s(T_n)$  και  $s(T_n)^{-1}$ , είναι ομοιόμορφα φραγμένη.*

*Απόδειξη.* Αρχικά, θα εξετάσουμε την περίπτωση, όπου η διάσταση του πίνακα  $n$  είναι περιττός αριθμός. Από τη σχέση (1.2), γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του

πίνακα  $s(T_n)$  δίνονται από τη σχέση

$$\lambda_j(s(T_n)) = \sum_{k=-m}^m t_k e^{2\pi i j k/n}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad \text{και } m = \lfloor n/2 \rfloor. \quad (2.2)$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν το  $n$  είναι περιττός, ισχύει  $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ . Για  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , η σειρά  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\theta}$  συγκλίνει απόλυτα, αφού η συνάρτηση  $f$  ανήκει στην κλάση Wiener. Επομένως, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $N > 0$ , τέτοιο ώστε για  $\ell > N$ ,

$$\left| \sum_{|k|>\ell} t_k e^{ik\theta} \right| < \varepsilon.$$

Επιλέγουμε μεγάλο  $n$ , ώστε  $m = \lfloor n/2 \rfloor > N$ . Για τις ιδιοτιμές του πίνακα  $s(T_n)$  ισχύει

$$\begin{aligned} \lambda_j(s(T_n)) &= \sum_{k=-m}^m t_k e^{2\pi i j k/n} - f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = \\ &= \sum_{k=-m}^m t_k e^{2\pi i j k/n} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{2\pi i j k/n} + f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \sum_{|k|>m} t_k e^{2\pi i j k/n} \geq \\ &= \min f(\theta) - \left| \sum_{|k|>m} t_k e^{ik\theta} \right| > \min f(\theta) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας  $\varepsilon = \min f(\theta)/2 > 0$  συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $s(T_n)$  είναι θετικές. Επομένως, ο πίνακας  $s(T_n)$  είναι αντιστρέψιμος. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι  $\|s(T_n)\|_2 \leq M_1$  και  $\|s(T_n)^{-1}\|_2 \leq M_2$ , όπου  $M_1, M_2$  είναι θετικοί αριθμοί. Αν λάβουμε υπόψη ότι ο πίνακας  $s(T_n)$  είναι ερμιτιανός, έχουμε

$$\begin{aligned} \|s(T_n)\|_2 &= \rho^{\frac{1}{2}}(s(T_n)^H s(T_n)) = \rho^{\frac{1}{2}}(s(T_n)^2) = \sqrt{\max_j (\lambda_j)^2} = \max_j |\lambda_j|, \\ \|s(T_n)^{-1}\|_2 &= \rho^{\frac{1}{2}}\left((s(T_n)^{-1})^H s(T_n)^{-1}\right) = \rho^{\frac{1}{2}}\left((s(T_n)^{-1})^2\right) = \\ &= \sqrt{\max_j \frac{1}{(\lambda_j)^2}} = \frac{1}{\min_j |\lambda_j|}. \end{aligned}$$

Για τη φασματική νόρμα του πίνακα  $s(T_n)$  ισχύει

$$0 < \min_j |\lambda_j| \leq \|s(T_n)\|_2 = \max_j |\lambda_j| = \max_j \left| \sum_{k=-m}^m t_k e^{2\pi i j k / n} \right| \leq \max_j \sum_{k=-m}^m |t_k| e^{2\pi i j k / n} = \sum_{k=-m}^m |t_k| < \infty. \quad (2.3)$$

Λόγω της σχέσης,  $0 < K = \min_j |\lambda_j| \leq \max_j |\lambda_j| < \infty$ , προκύπτει

$$0 < \frac{1}{\max_j |\lambda_j|} \leq \|s(T_n)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_j |\lambda_j|} = \frac{1}{K} < \infty. \quad (2.4)$$

Από τις σχέσεις (2.3) και (2.4) συμπεραίνουμε ότι η φασματική νόρμα των πινάκων  $s(T_n)$  και  $s(T_n)^{-1}$ , αντίστοιχα, είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Παρακάτω θα εξετάσουμε την περίπτωση, όπου το  $n$  είναι άρτιος αριθμός.

Αν επιλέξουμε  $s_{n/2} = 0$ , οι ιδιοτιμές του πίνακα  $s(T_n)$  δίνονται από τη σχέση (2.2) και η απόδειξη της πρότασης είναι ακριβώς η ίδια, μόνο που στην περιπτωσή μας ισχύει  $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ .

Αν επιλέξουμε  $s_{n/2} = \frac{1}{2}(t_{n/2} + t_{-n/2})$ , οι ιδιοτιμές του πίνακα  $s(T_n)$  δίνονται από τη σχέση

$$\lambda_j(s(T_n)) = \sum_{k=-m}^m t'_k e^{2\pi i j k / n}, \quad j = 0, \dots, n-1 \text{ και } m = \lfloor n/2 \rfloor = n/2.$$

Για τους όρους  $t'_k$  ισχύει

$$t'_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(t_k + t_{-k}), & k = \pm n/2, \\ t_k, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η σειρά  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} t'_k e^{ik\theta}$  συγκλίνει απόλυτα, αφού

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} t'_k e^{ik\theta} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t'_k| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty.$$

Έτσι,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall \ell > N \Rightarrow \left| \sum_{|k|>\ell-1} t'_k e^{ik\theta} \right| < \varepsilon.$$

Εργαζόμαστε ομοίως με την περίπτωση όπου το  $n$  είναι περιττός αριθμός. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_j(s(T_n)) &= \sum_{k=-m}^m t'_k e^{2\pi ijk/n} - f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = \\ &= \sum_{k=-m}^m t'_k e^{2\pi ijk/n} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} t'_k e^{2\pi ijk/n} + f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \sum_{|k|>m-1} t'_k e^{2\pi ijk/n} \geq \\ &= \min f(\theta) - \left| \sum_{|k|>m-1} t'_k e^{ik\theta} \right| > \min f(\theta) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας  $\varepsilon = \min f(\theta)/2 > 0$  συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $s(T_n)$  είναι θετικές. Έτσι έχουμε

$$0 < \min_j |\lambda_j| \leq \|s(T_n)\|_2 = \max_j |\lambda_j| = \max_j \left| \sum_{k=-m}^m t'_k e^{2\pi ijk/n} \right| \leq \sum_{k=-m}^m |t'_k| < \infty.$$

Επειδή η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα  $s(T_n)$  είναι άνω φραγμένη, ισχύει η σχέση (2.4). Αποδείξαμε ότι η φασματική νόρμα των πινάκων  $s(T_n)$  και  $s(T_n)^{-1}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη.  $\square$

*Παρατήρηση.* Αφού οι ιδιοτιμές των πινάκων  $s(T_n)$  και  $s(T_n)^{-1}$  είναι θετικές, και οι πίνακες είναι ερμιτιανοί, θα είναι και θετικά ορισμένοι.

**Θεώρημα 2.2.3.** Έστω  $f$  μια πραγματική συνάρτηση της κλάσης Wiener και  $T_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από την  $f$ . Τότε, το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $s(T_n) - T_n$  συσσωρεύεται γύρω από το μηδέν (για μεγάλο  $n$ ).

*Απόδειξη.* Ορίζουμε τον ερμιτιανό πίνακα Toeplitz  $B_n$ ,  $B_n = s(T_n) - T_n$ , του οποίου τα στοιχεία  $b_{j,k} = b_{j-k}$  δίνονται από τη σχέση

$$b_\kappa = \begin{cases} 0, & 0 \leq \kappa \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ t_{\kappa-n} - t_\kappa, & \lfloor n/2 \rfloor < \kappa < n, \\ \overline{b_{-\kappa}}, & -n < \kappa < 0, \end{cases}$$

όταν το  $n$  είναι περιττός αριθμός, ενώ όταν το  $n$  είναι άρτιος, δίνονται από τη σχέση

$$b_\kappa = \begin{cases} 0, & 0 \leq \kappa < \lfloor n/2 \rfloor, \\ -t_\kappa \text{ ή } \frac{1}{2}(t_{-\kappa} - t_\kappa), & \kappa = \lfloor n/2 \rfloor, \\ t_{\kappa-n} - t_\kappa, & \lfloor n/2 \rfloor < \kappa < n, \\ \overline{b_{-\kappa}}, & -n < \kappa < 0. \end{cases}$$

Χάρην απλούστευσης θέτουμε  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ . Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση, όπου το  $n$  είναι περιττός αριθμός. Η συνάρτηση  $f$  ανήκει στην κλάση Wiener, επομένως

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \sum_{\kappa=N+1}^{\infty} |t_\kappa| < \varepsilon.$$

Ορίζουμε τον  $n \times n$  πίνακα  $U_n^{(N)}$ , ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα  $B_n$ , αν αντικαταστήσουμε τον άνω αριστερά  $(n-N) \times (n-N)$  κύριο υποπίνακα αυτού με τον μηδενικό πίνακα διάστασης  $(n-N)$ . Δηλαδή, τα στοιχεία των  $N$  τελευταίων γραμμών και στηλών του πίνακα  $U_n^{(N)}$  ταυτίζονται με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα  $B_n$ , ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία αυτού, είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, για τη βαθμίδα του πίνακα  $U_n^{(N)}$  ισχύει  $\text{rank}(U_n^{(N)}) \leq 2N$ . Αναφέρουμε ότι, αν  $N \geq m$ , ο πίνακας  $U_n^{(N)}$  ταυτίζεται με τον  $B_n$ .

Ορίζουμε τον πίνακα  $W_n^{(N)} = B_n - U_n^{(N)}$ . Τα στοιχεία του άνω αριστερά  $(n-N) \times (n-N)$  κυρίου υποπίνακα του  $W_n^{(N)}$  ταυτίζονται με τα στοιχεία του άνω αριστερά  $(n-N) \times (n-N)$  κυρίου υποπίνακα του  $B_n$ , ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι ίσα με μηδέν. Καταλαβαίνουμε ότι οι  $n-N$  πρώτες γραμμές και στήλες του πίνακα  $W_n^{(N)}$  σχηματίζουν πίνακα Toeplitz. Επίσης, αφού για  $0 \leq \kappa \leq m$  ισχύει  $b_\kappa = 0$  και τα στοιχεία από την  $n-N+1$  στήλη του πίνακα  $W_n^{(N)}$  και δεξιά, καθώς και τα στοιχεία από την  $n-N+1$  γραμμή του πίνακα  $W_n^{(N)}$  και κάτω, είναι κι αυτά ίσα με μηδέν και ο πίνακας  $W_n^{(N)}$  είναι ερμιτιανός, μπορούμε να λάβουμε τη νόρμα  $\ell_1$  του πίνακα  $W_n^{(N)}$ , από την πρώτη στήλη αυτού. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|W_n^{(N)}\|_1 &= \sum_{\kappa=0}^{n-N-1} |b_\kappa| = \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |b_\kappa| = \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_{\kappa-n} - t_\kappa| \leq \\ &\sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} (|t_{\kappa-n}| + |t_\kappa|) = \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_{\kappa-n}| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| = \sum_{l=m+1-n}^{-(N+1)} |t_l| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| &= \sum_{l=N+1}^{n-(m+1)} |t_l| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| = \sum_{l=N+1}^m |t_l| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| = \\
\sum_{\kappa=N+1}^{n-N-1} |t_\kappa| &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας  $W_n^{(N)}$  είναι ερμιτιανός, ισχύει  $\|W_n^{(N)}\|_\infty = \|W_n^{(N)}\|_1$ . Άρα,

$$\|W_n^{(N)}\|_2 \leq (\|W_n^{(N)}\|_\infty \|W_n^{(N)}\|_1)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Στην περίπτωση όπου το  $n$  είναι άρτιος αριθμός, εργαζόμαστε ομοίως. Αναλυτικότερα, για τη νόρμα ένα του πίνακα  $W_n^{(N)}$  και όταν  $b_m = -t_m$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
\|W_n^{(N)}\|_1 &= \sum_{\kappa=0}^{n-N-1} |b_\kappa| = \sum_{\kappa=m}^{n-N-1} |b_\kappa| = |-t_m| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_{\kappa-n} - t_\kappa| \leq \\
|t_m| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_{\kappa-n}| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| &= |t_m| + \sum_{l=m+1-n}^{-(N+1)} |t_l| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| = \\
|t_m| + \sum_{l=N+1}^{n-(m+1)} |t_l| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| &= |t_m| + \sum_{l=N+1}^{m-1} |t_l| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| = \\
\sum_{\kappa=N+1}^{n-N-1} |t_\kappa| &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Όταν  $b_m = \frac{1}{2}(t_{-m} - t_m)$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
\|W_n^{(N)}\|_1 &= \sum_{\kappa=0}^{n-N-1} |b_\kappa| = \sum_{\kappa=m}^{n-N-1} |b_\kappa| = \frac{1}{2}|t_{-m} - t_m| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_{\kappa-n} - t_\kappa| \leq \\
\frac{1}{2}(|t_{-m}| + |t_m|) + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_{\kappa-n}| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| &= \frac{1}{2}2|t_m| + \sum_{l=m+1-n}^{-(N+1)} |t_l| + \\
\sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| &= |t_m| + \sum_{l=N+1}^{m-1} |t_l| + \sum_{\kappa=m+1}^{n-N-1} |t_\kappa| = \sum_{\kappa=N+1}^{n-N-1} |t_\kappa| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Οπότε, στην περίπτωση όπου το  $n$  είναι άρτιος αριθμός, ομοίως ισχύει

$$\|W_n^{(N)}\|_2 < \varepsilon.$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $W_n^{(N)}$  ανήκουν στο διάστημα  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , αφού ισχύει  $\|W_n^{(N)}\|_2 = \rho(W_n^{(N)})$ . Αναφέρουμε ότι παραπάνω θεωρήσαμε  $0 < N < m$ , αφού αν  $N \geq m$  ο πίνακας  $U_n^{(N)}$  ταυτίζεται με τον  $B_n$  κι έτσι ο πίνακας  $W_n^{(N)}$  είναι ο μηδενικός για τον οποίο προφανώς ισχύει  $\|W_n^{(N)}\|_2 < \varepsilon$ . Από το Θεώρημα του Cauchy 1.3.14 όπως επίσης και από το Θεώρημα του Weyl 1.3.15, βλέπουμε ότι το πολύ  $2N$  ιδιοτιμές του πίνακα  $B_n = s(T_n) - T_n$  υπερβαίνουν το  $\varepsilon$  κατ' απόλυτη τιμή.  $\square$

**Θεώρημα 2.2.4.** Έστω  $f$  μια πραγματική συνάρτηση της κλάσης Wiener και  $T_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από την  $f$ . Τότε, το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $s(T_n)^{-1}T_n$  συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα (για μεγάλο  $n$ ).

Απόδειξη. Οι πίνακες  $s(T_n)^{-1}T_n$  και  $s(T_n)^{-\frac{1}{2}}T_n s(T_n)^{-\frac{1}{2}}$  είναι όμοιοι, αφού ο δεύτερος προκύπτει από τον πρώτο αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με τον αντιστρέψιμο πίνακα  $s(T_n)^{\frac{1}{2}}$  και από δεξιά με  $s(T_n)^{-\frac{1}{2}}$ . Παρατηρούμε ότι

$$s(T_n)^{-\frac{1}{2}}T_n s(T_n)^{-\frac{1}{2}} = I_n + s(T_n)^{-\frac{1}{2}}(T_n - s(T_n))s(T_n)^{-\frac{1}{2}}$$

κι έτσι,  $\sigma\left(s(T_n)^{-\frac{1}{2}}T_n s(T_n)^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \sigma\left(s(T_n)^{-\frac{1}{2}}(T_n - s(T_n))s(T_n)^{-\frac{1}{2}}\right)$ .

Από το Θεώρημα 2.2.3 γνωρίζουμε ότι το πολύ  $2N$  ιδιοτιμές του πίνακα  $T_n - s(T_n)$  βρίσκονται εκτός του διαστήματος  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Για  $N < k < n - N$ , συμβολίζουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων  $T_n - s(T_n)$  και  $s(T_n)^{-\frac{1}{2}}(T_n - s(T_n))s(T_n)^{-\frac{1}{2}}$  με  $\lambda_k$  και  $l_k$ , αντίστοιχα. Τότε  $\lambda_k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  και σύμφωνα με το Θεώρημα Courant-Fischer 1.3.13,

$$\lambda_k = \min_{\substack{\dim(U)=k \\ y \in U \\ y \neq 0}} \max \frac{y^H(T_n - s(T_n))y}{y^H y} = \max_{\substack{y \in V, \dim(V)=k \\ y \neq 0}} \frac{y^H(T_n - s(T_n))y}{y^H y}$$

και

$$\lambda_k = \max_{\dim(U)=n-k+1} \min_{\substack{y \in U \\ y \neq 0}} \frac{y^H(T_n - s(T_n))y}{y^H y} = \min_{\substack{y \in W \\ \dim(W)=n-k+1 \\ y \neq 0}} \frac{y^H(T_n - s(T_n))y}{y^H y},$$

όπου  $V$  είναι ο υπόχωρος διάστασης  $k$ , στον οποίο λαμβάνουμε το ελάχιστο της ποσότητας  $\max_{\substack{y \in U \\ y \neq 0}} \frac{y^H(T_n - s(T_n))y}{y^H y}$  και  $W$  είναι ο υπόχωρος διάστασης  $n - k + 1$ ,

στον οποίο λαμβάνουμε το μέγιστο της ποσότητας  $\min_{\substack{y \in U \\ y \neq 0}} \frac{y^H(T_n - s(T_n))y}{y^H y}$ .



Για τις ιδιοτιμές του πίνακα  $s(T_n)^{-\frac{1}{2}}(T_n - s(T_n))s(T_n)^{-\frac{1}{2}}$  ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
l_k &= \min_{\dim(U)=k} \max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{x^H s(T_n)^{-\frac{1}{2}} (T_n - s(T_n)) s(T_n)^{-\frac{1}{2}} x}{x^H x} \\
&= \min_{\dim(U)=k} \max_{\substack{y \in U \\ y \neq 0}} \frac{y^H (T_n - s(T_n)) y}{y^H s(T_n) y} = \\
&= \min_{\dim(U)=k} \max_{\substack{y \in U \\ y \neq 0}} \frac{y^H (T_n - s(T_n)) y}{y^H y} \frac{y^H y}{y^H s(T_n) y} \leq \\
&= \max_{\substack{y \in V \\ y \neq 0}} \frac{y^H (T_n - s(T_n)) y}{y^H y} \frac{y^H y}{y^H s(T_n) y} \leq \\
&= \max_{\substack{y \in V \\ y \neq 0}} \frac{y^H (T_n - s(T_n)) y}{y^H y} \max_{\substack{y \in V \\ y \neq 0}} \frac{y^H y}{y^H s(T_n) y} \leq \\
&= \lambda_k \|s(T_n)^{-1}\|_2 < \varepsilon \|s(T_n)^{-1}\|_2.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
l_k &= \max_{\dim(U)=n-k+1} \min_{\substack{y \in U \\ y \neq 0}} \frac{y^H (T_n - s(T_n)) y}{y^H y} \frac{y^H y}{y^H s(T_n) y} \geq \\
&= \min_{\substack{y \in W \\ y \neq 0}} \frac{y^H (T_n - s(T_n)) y}{y^H y} \frac{y^H y}{y^H s(T_n) y} \geq \min_{\substack{y \in W \\ y \neq 0}} \frac{y^H (T_n - s(T_n)) y}{y^H y} \min_{\substack{y \in W \\ y \neq 0}} \frac{y^H y}{y^H s(T_n) y} \geq \\
&= \lambda_k l_{\min}(s(T_n)^{-1}) > -\varepsilon \|s(T_n)\|_2.
\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε  $\varepsilon = \varepsilon \max \{\|s(T_n)^{-1}\|_2, \|s(T_n)\|_2\}$ , τότε αποδείχθηκε η συσ-σώρευση των ιδιοτιμών  $l_k$  στο διάστημα  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Άρα, όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $s(T_n)^{-1}T_n$  ανήκουν στο διάστημα  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ , εκτός από το πολύ  $2N$ , οι οποίες βρίσκονται εκτός αυτού.  $\square$

Ο προρρυθμιστής του Strang είναι κυκλοειδής και κατασκευάζεται με  $O(n)$  πράξεις. Επίσης, αν  $T_n$  είναι ένας πίνακας Toeplitz (με καλή κατάσταση), η λύση του προρρυθμισμένου συστήματος  $s(T_n)^{-1}T_n x = s(T_n)^{-1}b$ ,  $x, b \in \mathbb{C}^n$ , λαμβάνεται μετά από  $O(n \log n)$  πράξεις χρησιμοποιώντας την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων, αφού ο πολλαπλασιασμός  $s(T_n)z$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ , γίνεται σε  $O(n \log n)$  πράξεις με τη μέθοδο FFT [13, 19, 26]. Όταν ο πίνακας  $T_n$  είναι ερμιτιανός, ο προρρυθμιστής  $s(T_n)$  ελαχιστοποιεί την τιμή που μπορεί να λάβει

η παράσταση  $\|C_n - T_n\|_1 = \|C_n - T_n\|_\infty$ , όπου  $C_n$  είναι ένας οποιοσδήποτε ερμιτιανός κυκλοειδής πίνακας [19].

## 2.3 Προρρυθμιστής του T. Chan

Το 1988 ο Tony Chan πρότεινε έναν προρρυθμιστή για συστήματα Toeplitz, τον οποίο ονόμασε βέλτιστο κυκλοειδή προρρυθμιστή (**optimal circulant preconditioner**). Αν  $T_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ο πίνακας (Toeplitz) των συντελεστών, του συστήματος που επιθυμούμε να λύσουμε, ο προρρυθμιστής του T. Chan συμβολίζεται με  $c(T_n)$  και τα διαγώνια στοιχεία αυτού δίνονται από τη σχέση,

$$c_\kappa = \begin{cases} \frac{(n - \kappa)t_\kappa + \kappa t_{\kappa-n}}{n}, & 0 \leq \kappa \leq n - 1, \\ c_{n+\kappa}, & 0 < -\kappa \leq n - 1. \end{cases}$$

Ο πίνακας  $c(T_n)$  ελαχιστοποιεί την τιμή που μπορεί να λάβει η παράσταση  $\|C_n - T_n\|_F$ , όπου  $C_n$  είναι ένας οποιοσδήποτε κυκλοειδής πίνακας. Η ιδέα αυτή επεκτάθηκε για ανθιάρετους πίνακες  $A_n \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Γενικότερα, δοθέντος ενός ορθομοναδιαίου πίνακα  $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ , ο προρρυθμιστής του T. Chan για έναν πίνακα  $A_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  ορίζεται ως ο πίνακας που ελαχιστοποιεί την παράσταση  $\|W_n - A_n\|_F$ , για οποιονδήποτε πίνακα  $W_n \in \mathcal{M}_U$ , όπου

$$\mathcal{M}_U = \{U^H A_n U \mid A_n : \text{οποιοσδήποτε διαγώνιος πίνακας διάστασης } n\}.$$

**Πρόταση 2.3.1.** *Ο προρρυθμιστής του T. Chan για έναν τυχαίο πίνακα συντελεστών  $A_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι μοναδικός και ορίζεται από τη σχέση*

$$c(A_n) = U^H \delta(U A_n U^H) U.$$

Παραπάνω, με  $\delta(U A_n U^H)$  συμβολίζουμε τον διαγώνιο πίνακα διάστασης  $n$ , του οποίου τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα με τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα  $U A_n U^H$ .

*Απόδειξη.* Αφού η νόρμα Frobenius είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, έχουμε

$$\|W_n - A_n\|_F = \|U^H A_n U - A_n\|_F = \|A_n - U A_n U^H\|_F.$$

Επομένως, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της παράστασης  $\|W_n - A_n\|_F$ , με  $W_n \in \mathcal{M}_U$ , είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της παράστασης  $\|A_n - U A_n U^H\|_F$ , για οποιονδήποτε διαγώνιο πίνακα. Όμως, ο πίνακας  $A_n$  είναι

διαγώνιος κι έτσι επηρεάζει μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα  $UA_nU^H$ . Άρα το ελάχιστο της παραπάνω παράστασης επιτυγχάνεται όταν  $A_n = \delta(UA_nU^H)$ . Είναι εμφανές ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης  $\|W_n - A_n\|_F$  επιτυγχάνεται όταν  $W_n = U^H \delta(UA_nU^H)U$  και ότι ο προρρυθμιστής του T. Chan ορίζεται μοναδικά για κάθε πίνακα  $A_n$ .  $\square$

*Σχόλιο.* Όταν  $U = \mathcal{F}_n$ , όπου  $\mathcal{F}_n$  είναι ο πίνακας του Fourier, ισχύει  $W_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}_n}$ . Με  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_n}$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των κυκλοειδών πινάκων.

Αν συμβολίσουμε με  $a_{j,k}$  τα στοιχεία ενός πίνακα  $A_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  και επιλέξουμε  $U = \mathcal{F}_n$ , τότε τα στοιχεία του  $c(A_n)$  δίνονται από τη σχέση

$$c_\kappa = \frac{1}{n} \sum_{j-k=\kappa(\bmod n)} a_{j,k}, \quad 1-n \leq \kappa \leq n-1, \quad (2.5)$$

δηλαδή από τον μέσο όρο των στοιχείων του πίνακα  $A_n$ , της αντίστοιχης διαγωνίου αναδιπλωμένης έτσι ώστε, με άλλη μια διαγώνιο (το πολύ), να αποτελείται από ακριβώς  $n$  στοιχεία [19].

**Πρόταση 2.3.2.** *Αν  $A_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  είναι ένας ερμιτιανός πίνακας, τότε και ο προρρυθμιστής του T. Chan (για  $U = \mathcal{F}_n$ ) είναι επίσης ερμιτιανός. Επίσης, οι ιδιοτιμές των δύο πινάκων ικανοποιούν τη σχέση,*

$$\lambda_{\min}(A_n) \leq \lambda_{\min}(c(A_n)) \leq \lambda_{\max}(c(A_n)) \leq \lambda_{\max}(A_n).$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.5) αποδεικνύουμε ότι αν ο πίνακας  $A_n$  είναι ερμιτιανός, τότε και ο πίνακας  $c(A_n)$  είναι ερμιτιανός. Για  $1-n \leq \kappa \leq n-1$  έχουμε

$$c_{-\kappa} = \frac{1}{n} \sum_{j-k=-\kappa(\bmod n)} a_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{k-j=\kappa(\bmod n)} \overline{a_{k,j}} = \overline{c_\kappa}.$$

Ο κυκλοειδής προρρυθμιστής του T. Chan δίνεται από τη σχέση

$$c(A_n) = \mathcal{F}_n^H \delta(\mathcal{F}_n A_n \mathcal{F}_n^H) \mathcal{F}_n,$$

επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα  $c(A_n)$  είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα  $\delta(\mathcal{F}_n A_n \mathcal{F}_n^H)$ , δηλαδή οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\delta(\mathcal{F}_n A_n \mathcal{F}_n^H)$ , αφού αυτός είναι διαγώνιος.

Υποθέτουμε ότι  $\lambda_j = \lambda_{\min}(c(A_n))$  και  $\lambda_k = \lambda_{\max}(c(A_n))$ . Αν συμβολίσουμε με  $e_j, e_k \in \mathbb{R}^n$  το  $j$ -οστό και  $k$ -οστό μοναδιαίο διάνυσμα στήλη της κανονικής βάσης, έχουμε

$$\lambda_{\min}(A_n) = \min_{y \neq 0} \frac{y^H A_n y}{y^H y} = \min_{y \neq 0} \frac{y^H A_n y}{y^H \mathcal{F}_n^{-1} \mathcal{F}_n^{-H} y} \stackrel{x = \mathcal{F}_n^{-H} y}{=} \min_{x \neq 0} \frac{x^H \mathcal{F}_n A_n \mathcal{F}_n^H x}{x^H x} \leq$$

$$\frac{e_j^H \mathcal{F}_n A_n \mathcal{F}_n^H e_j}{e_j^H e_j} = \lambda_{\min}(c(A_n)) \leq \lambda_{\max}(c(A_n)) = \frac{e_k^H \mathcal{F}_n A_n \mathcal{F}_n^H e_k}{e_k^H e_k} \leq$$

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^H \mathcal{F}_n A_n \mathcal{F}_n^H x}{x^H x} \stackrel{y = \mathcal{F}_n^H x}{=} \max_{y \neq 0} \frac{y^H A_n y}{y^H y} = \lambda_{\max}(A_n). \quad \square$$

*Παρατήρηση.* Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι αν ο πίνακας  $A_n$  είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος, τότε και ο πίνακας  $c(A_n)$  είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.

**Θεώρημα 2.3.3.** Έστω  $f$  μια συνεχής, θετική και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, και  $T_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από την  $f$ . Τότε το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $c(T_n)^{-1}T_n$  συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα (για μεγάλο  $n$ ).

*Απόδειξη.* Η συνάρτηση  $f$  είναι πραγματική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Weierstrass [17, 24, σελ. 11-15], για δοσμένο  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει ένα πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$p_M(\theta) = \sum_{k=-M}^M b_k e^{ik\theta}, \text{ με } b_{-k} = \overline{b_k},$$

τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|f - p_M\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Έστω  $\tilde{T}_n$  ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από το πολυώνυμο  $p_M$ . Για  $n > 2M$  έχουμε,

$$c(T_n) - T_n = c(T_n) - c(\tilde{T}_n) - T_n + \tilde{T}_n + c(\tilde{T}_n) - \tilde{T}_n. \quad (2.6)$$

Για τη φασματική νόρμα, των τεσσάρων πρώτων όρων του δεξιού μέλους της ισότητας (2.6) ισχύει

$$\begin{aligned} \|c(T_n) - c(\tilde{T}_n) - T_n + \tilde{T}_n\|_2 &\leq \|c(T_n) - c(\tilde{T}_n)\|_2 + \|T_n - \tilde{T}_n\|_2 = \\ \|c(T_n - \tilde{T}_n)\|_2 + \|T_n - \tilde{T}_n\|_2 &= \rho(c(T_n - \tilde{T}_n)) + \|T_n - \tilde{T}_n\|_2 \leq \\ \rho(T_n - \tilde{T}_n) + \|T_n - \tilde{T}_n\|_2 &= 2\|T_n - \tilde{T}_n\|_2 \leq 2\|f - p_M\|_{\infty} \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Γράφουμε το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων του δεξιού μέλους της ισότητας (2.6) ως

$$c(\tilde{T}_n) - \tilde{T}_n = W_n + U_n,$$

όπου  $W_n$  και  $U_n$  είναι ερμιτιανοί πίνακες Toeplitz, των οποίων τα στοιχεία της πρώτης γραμμής δίνονται από τις σχέσεις

$$\left(0, -\frac{1}{n}b_{-1}, \dots, -\frac{M}{n}b_{-M}, 0, \dots, 0\right) \quad (2.8)$$

και

$$\left(0, \dots, 0, \frac{n-M}{n}b_M, \dots, \frac{n-1}{n}b_1\right), \quad (2.9)$$

αντίστοιχα. Από τη σχέση (2.9), καταλαβαίνουμε ότι ο πίνακας  $U_n$  έχει παντού μηδενικά, εκτός από τα στοιχεία  $2M$  διαγωνίων αυτού (το πολύ), οι οποίες είναι στην άνω δεξιά και κάτω αριστερή «γωνία» του πίνακα. Έτσι, καταλαβαίνουμε ότι για τη βαθμίδα του πίνακα  $U_n$  ισχύει,

$$\text{rank}(U_n) \leq 2M < n. \quad (2.10)$$

Αναφέρουμε ότι για  $-M \leq k \leq M$ , ισχύει

$$\begin{aligned} |b_k| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_M(t) e^{-ikt} dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (p_M(t) - f(t) + f(t)) e^{-ikt} dt \right| \leq \\ &\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (p_M(t) - f(t)) e^{-ikt} dt \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right| \leq \\ &\|f - p_M\|_{\infty} + f_{\max} \leq \varepsilon + f_{\max}. \end{aligned}$$

Αφού ο πίνακας  $W_n$  είναι ερμιτιανός, για τη φασματική νόρμα αυτού ισχύει  $\|W_n\|_2^2 \leq \|W_n\|_1 \|W_n\|_{\infty} \Leftrightarrow \|W_n\|_2^2 \leq \|W_n\|_{\infty}^2$ , επομένως, αν λάβουμε υπόψη και τη σχέση (2.8) για τη φασματική νόρμα του πίνακα  $W_n$ , ισχύει

$$\begin{aligned} \|W_n\|_2 &\leq \|W_n\|_{\infty} = 2 \left( \frac{1}{n}|b_1| + \dots + \frac{M}{n}|b_M| \right) \leq \\ &2 \frac{1}{n} (1 + \dots + M) (\varepsilon + f_{\max}) = \frac{1}{n} M (M + 1) (\varepsilon + f_{\max}). \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε  $n \geq N = M(M+2) \left(1 + \frac{f_{\max}}{\varepsilon}\right)$ , έχουμε

$$\|W_n\|_2 \leq \frac{N}{n} \varepsilon \leq \varepsilon. \quad (2.11)$$

Από τις σχέσεις (2.6), (2.7), (2.10) και (2.11) καταλαβαίνουμε ότι ο πίνακας  $c(T_n) - T_n$  δίνεται από το άθροισμα ενός πίνακα που έχει φασματική νόρμα μικρότερη από  $\epsilon = 3\epsilon$ , με έναν πίνακα βαθμίδας μικρότερης του  $2M$ . Από το Θεώρημα 1.3.15 συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας  $c(T_n) - T_n$  έχει το πολύ  $2M$  ιδιοτιμές μεγαλύτερες κατ' απόλυτη τιμή από  $\epsilon$ , όταν  $n \geq N$ .

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες  $c(T_n)^{-1}T_n$  και  $c(T_n)^{-\frac{1}{2}}T_n c(T_n)^{-\frac{1}{2}}$  είναι όμοιοι. Ομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.4, προκύπτει ότι το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $c(T_n)^{-1}T_n$  συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα (για μεγάλο  $n$ ).  $\square$

Ο προρρυθμιστής  $c(T_n)$  κατασκευάζεται με  $O(n)$  πράξεις. Επίσης, η προρρυθμισμένη μέθοδος συζυγών κλίσεων, χρησιμοποιώντας τον προρρυθμιστή  $c(T_n)$ , μας δίνει τη λύση (του συστήματος), με  $O(n \log n)$  πράξεις, αφού ο πολλαπλασιασμός του προρρυθμιστή με ένα διάνυσμα  $z$  γίνεται σε  $O(n \log n)$  πράξεις με τη μέθοδο FFT [19].

## 2.4 $\tau$ Προρρυθμιστές

Οι πρώτοι που εισήγαγαν την έννοια των  $\tau$  προρρυθμιστών ήταν οι Dario Bini και Milvio Capovani το 1983. Στη συνέχεια με  $\tau$  προρρυθμιστές ασχολήθηκε ερευνητικά και ο Fabio Di Benedetto. Ένας  $\tau$  προρρυθμιστής μπορεί να προκύψει από διακριτό μετασχηματισμό ημιτόνου (**discrete sine transform**) και είναι ιδιαίτερα χρήσιμος όταν ο πίνακας συντελεστών του συστήματος Toeplitz είναι συμμετρικός, αφού τότε το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρότερο σε σχέση με αυτό που προκύπτει από τον κυκλοειδή προρρυθμιστή του Strang [4].

Το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση  $(j, k)$  του πίνακα διακριτού μετασχηματισμού ημιτόνου  $\mathcal{S}_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  δίνεται από τη σχέση

$$s_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{\pi jk}{n+1}\right), \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Αναφέρουμε ότι ο πίνακας  $\mathcal{S}_n$  είναι συμμετρικός και ορθογώνιος [3]. Ορίζουμε την κλάση

$$\mathcal{T}_n = \{P \in \mathbb{R}^{n,n} : \mathcal{S}_n P \mathcal{S}_n \text{ να είναι διαγώνιος πίνακας}\}.$$

Η κλάση  $\mathcal{T}_n$  είναι άλγεβρα συμμετρικών πινάκων, η οποία παράγεται από τον πίνακα

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Πρόταση 2.4.1.** Τα στοιχεία  $\tau_{j,k}$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ , ενός πίνακα  $\tau \in \mathcal{T}_n$  ικανοποιούν τη σχέση

$$\tau_{j-1,k} + \tau_{j+1,k} = \tau_{j,k+1} + \tau_{j,k-1}, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Όταν  $(j, k) \notin \{1, \dots, n\}$ , υποθέτουμε ότι για τα στοιχεία του πίνακα  $\tau$  ισχύει  $\tau_{j,k} = 0$ .

*Παρατήρηση.* Αν γνωρίζουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής (ή στήλης) ενός πίνακα  $\tau \in \mathcal{T}_n$ , μπορούμε να συμπληρώσουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα αυτού, χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση.

*Παρατήρηση.* Ένας πίνακας  $\tau \in \mathcal{T}_n$  είναι συμμετρικός και περισυμμετρικός.

**Ορισμός 2.4.2.** Αν  $T_n$  είναι ένας συμμετρικός πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από μια συνάρτηση  $f$  της κλάσης Wiener και η πρώτη στήλη αυτού είναι ίση με  $[t_0, t_1, \dots, t_{n-1}]^T$ , ο προρρυθμιστής  $\tau(T_n)$  ορίζεται ως  $\tau(T_n) = T_n - H_n$ , όπου  $H_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι ο πίνακας Hankel με πρώτη στήλη  $[t_2, \dots, t_{n-1}, 0, 0]^T$  και τελευταία στήλη  $[0, 0, t_{n-1}, \dots, t_2]^T$ .

*Παρατήρηση.* Τα στοιχεία  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , της πρώτης στήλης του προρρυθμιστή  $\tau(T_n)$  δίνονται από τη σχέση

$$\tau_i = \begin{cases} t_{i-1} - t_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ t_{i-1}, & n-1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (2.12)$$

Αν  $f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\theta}$ ,  $t_k = t_{-k}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , είναι μια πραγματική συνάρτηση της κλάσης Wiener, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\tau(T_n) \in \mathcal{T}_n$  (βλ. [3, 10]) δίνονται κατόπιν κατάλληλης κολόβωσης (**truncation**) από τη σχέση

$$\lambda_j = f\left(\frac{\pi j}{n+1}\right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

**Πρόταση 2.4.3.** Έστω  $T_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  ένας συμμετρικός πίνακας Toeplitz και  $\tau(T_n) \in \mathcal{T}_n$  ο  $\tau$  προρρυθμιστής, που προκύπτει από τον  $T_n$ . Ο πίνακας  $\tau(T_n)$  θα είναι επίσης συμμετρικός.

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει, αφού  $\tau(T_n) = T_n - H_n$  και οι πίνακες  $T_n, H_n$  είναι συμμετρικοί.  $\square$

**Πρόταση 2.4.4.** Αν  $T_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι ένας συμμετρικός πίνακας Toeplitz, ο οποίος προκύπτει από μια άρτια και θετική συνάρτηση  $f$ , που ανήκει στην κλάση Wiener, τότε ο προρρυθμιστής  $\tau(T_n)$  είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη. Ο προρρυθμιστής  $\tau(T_n)$  είναι συμμετρικός πίνακας, αφού ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από την  $f$ , είναι συμμετρικός. Επιπλέον, ο  $\tau(T_n)$  έχει θετικές ιδιοτιμές, αφού η συνάρτηση  $f$  είναι θετική και οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\tau(T_n)$  δίνονται από τη σχέση (2.13). Οπότε, ο προρρυθμιστής  $\tau(T_n)$  είναι θετικά ορισμένος.  $\square$

**Θεώρημα 2.4.5.** Έστω  $f$  μια θετική, συνεχής και άρτια συνάρτηση της κλάσης Wiener, και  $T_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από την  $f$ . Τότε το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $\tau(T_n)^{-1}T_n$ , συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα (για μεγάλο  $n$ ).

Απόδειξη. Ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} \tau(T_n) = T_n - H_n &\Leftrightarrow \tau(T_n)^{-1}\tau(T_n) = \tau(T_n)^{-1}T_n - \tau(T_n)^{-1}H_n \Leftrightarrow \\ \tau(T_n)^{-1}T_n &= I_n + \tau(T_n)^{-1}H_n. \end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $\tau(T_n)^{-1}H_n$  συσσωρεύεται γύρω από το μηδέν.

Συμβολίζουμε με  $t_\kappa$ ,  $\kappa = 0, \dots, n-1$ , τα στοιχεία του πίνακα Toeplitz  $T_n$ . Η συνάρτηση  $f$  ανήκει στην κλάση Wiener, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε  $N > 0$  τέτοιο ώστε

$$\sum_{\kappa > N} |t_\kappa| < \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Εκφράζουμε τον πίνακα  $H_n$  ως άθροισμα δύο πινάκων,  $H_n = \tilde{H}_n + E_n$ , όπου  $\tilde{H}_n$  είναι ο πίνακας με τα στοιχεία του άνω αριστερά και κάτω δεξιά  $(N-1) \times (N-1)$  υποπίνακα αυτού, ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα  $H_n$ , και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με μηδέν. Καταλαβαίνουμε ότι η βαθμίδα αυτού του πίνακα, θα είναι μικρότερη ή ίση του  $2(N-1)$ . Έστω  $\{h_0, \dots, h_{n-1}\}$  και  $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$  τα στοιχεία της πρώτης στήλης των συμμετρικών πινάκων  $H_n$  και  $E_n$  αντίστοιχα. Η φασματική νόρμα του πίνακα  $E_n$  φράσσεται από το  $2\varepsilon$ , αφού

$$\|E_n\|_1 \leq 2 \sum_{\kappa=N-1}^{n-1} |e_\kappa| = 2 \sum_{\kappa=N-1}^{n-1} |h_\kappa| = 2 \sum_{\kappa=N-1}^{n-1} |t_{\kappa+2}| = 2 \sum_{\kappa=N+1}^{n-1} |t_\kappa| < 2\varepsilon.$$



Ο πίνακας  $E_n$  είναι συμμετρικός κι έτσι ισχύει,  $\|E_n\|_\infty = \|E_n\|_1$ . Άρα,

$$\|E_n\|_2 \leq (\|E_n\|_\infty \|E_n\|_1)^{\frac{1}{2}} < 2\varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 1.3.15 βλέπουμε ότι για τις ιδιοτιμές του πίνακα  $H_n$  ισχύει

$$\lambda_i(\tilde{H}_n) + \lambda_1(E_n) \leq \lambda_i(H_n) \leq \lambda_i(\tilde{H}_n) + \lambda_n(E_n). \quad (2.14)$$

Η βαθμίδα του πίνακα  $\tilde{H}_n$  είναι μικρότερη ή ίση του  $2(N-1)$ . Έτσι, από τη σχέση (2.14) συμπεραίνουμε ότι τουλάχιστον  $n - 2(N-1)$  ιδιοτιμές του πίνακα  $H_n$  ανήκουν στο διάστημα  $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \supset [\lambda_1(E_n), \lambda_n(E_n)]$ . Ο πίνακας  $\tau(T_n)^{-\frac{1}{2}} H_n \tau(T_n)^{-\frac{1}{2}}$  είναι όμοιος με τον πίνακα  $\tau(T_n)^{-1} H_n$ . Ομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.4, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\tau(T_n)^{-1} H_n$  συσσωρεύονται γύρω από το μηδέν.  $\square$

Ακολουθώντας τη λογική κατασκευής του βέλτιστου κυκλοειδή προρρυθμιστή, που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον βέλτιστο προρρυθμιστή μετασχηματισμού ημιτόνου  $\tau_o(T_n) \in \mathcal{T}_n$ , ο οποίος προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της νόρμας Frobenius  $\|B_n - A_n\|_F$ , όπου  $A_n \in \mathbb{C}^{n,n}$  και  $B_n \in \mathcal{T}_n$ .

Αφού  $B_n \in \mathcal{T}_n$ , ισχύει

$$\mathcal{S}_n B_n \mathcal{S}_n = A_n \Leftrightarrow B_n = \mathcal{S}_n A_n \mathcal{S}_n,$$

όπου  $A_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι διαγώνιος πίνακας, με στοιχεία της κυρίας διαγωνίου τις ιδιοτιμές του πίνακα  $B_n$ . Έχουμε,

$$\min_{B_n} \|B_n - A_n\|_F = \min_{A_n} \|\mathcal{S}_n A_n \mathcal{S}_n - A_n\|_F = \min_{A_n} \|A_n - \mathcal{S}_n A_n \mathcal{S}_n\|_F.$$

Το ελάχιστο της νόρμας λαμβάνεται όταν  $A_n = \delta(\mathcal{S}_n A_n \mathcal{S}_n)$ . Έτσι, ο προρρυθμιστής  $\tau_o(A_n)$  είναι ίσος με

$$\tau_o(A_n) = \mathcal{S}_n \delta(\mathcal{S}_n A_n \mathcal{S}_n) \mathcal{S}_n. \quad (2.15)$$

Υποθέτουμε ότι  $\tau_1, \dots, \tau_n$  είναι τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα  $\tau_o(T_n) \in \mathcal{T}_n$ , όπου  $T_n$  είναι συμμετρικός πίνακας Toeplitz. Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} \|\tau_o(T_n) - T_n\|_F^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

ως προς  $\tau_1, \dots, \tau_n$ , βρίσκουμε τη λύση

$$\begin{aligned}\tau_1 &= t_0 - \frac{n-2}{n+1}t_2, \quad \tau_2 = t_1 - \frac{n-3}{n+1}t_3, \\ \tau_i &= \frac{n-i+3}{n+1}t_{i-1} - \frac{n-i-1}{n+1}t_{i+1}, \quad i = 3, \dots, n-2, \\ \tau_{n-1} &= \frac{4}{n+1}t_{n-2}, \quad \tau_n = \frac{3}{n+1}t_{n-1},\end{aligned}\tag{2.16}$$

όπου  $t_i, i = 1, \dots, n$ , είναι τα στοιχεία του πίνακα  $T_n$  [4, 19].

**Πρόταση 2.4.6.** *Αν  $T_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας Toeplitz, τότε και ο προρρυθμιστής  $\tau_o(T_n)$  είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Επίσης, οι ιδιοτιμές των δύο πινάκων ικανοποιούν τη σχέση*

$$\lambda_{\min}(T_n) \leq \lambda_{\min}(\tau_o(T_n)) \leq \lambda_{\max}(\tau_o(T_n)) \leq \lambda_{\max}(T_n).$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή της Πρότασης 2.3.2. Παρατηρούμε ότι  $\mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ο προρρυθμιστής  $\tau_o(T_n)$  δίνεται από τη σχέση (2.15), έχουμε

$$\begin{aligned}(\tau_o(T_n))^T &= (\mathcal{S}_n \delta(\mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n) \mathcal{S}_n)^T = (\mathcal{S}_n)^T (\delta(\mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n))^T (\mathcal{S}_n)^T = \\ &\mathcal{S}_n \delta(\mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n) \mathcal{S}_n = \tau_o(T_n).\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι  $\lambda_j = \lambda_{\min}(\tau_o(T_n))$  και  $\lambda_k = \lambda_{\max}(\tau_o(T_n))$ . Αν συμβολίσουμε με  $e_j, e_k \in \mathbb{R}^n$  το  $j$ -οστό και  $k$ -οστό μοναδιαίο διάνυσμα στήλη της κανονικής βάσης, έχουμε

$$\begin{aligned}0 < \lambda_{\min}(T_n) &= \min_{y \neq 0} \frac{y^T T_n y}{y^T y} = \min_{y \neq 0} \frac{y^T T_n y}{y^T \mathcal{S}_n^{-1} \mathcal{S}_n^{-T} y} \stackrel{x = \mathcal{S}_n^{-T} y}{=} \min_{x \neq 0} \frac{x^T \mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n^T x}{x^T x} \leq \\ &\frac{e_j^T \mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n^T e_j}{e_j^T e_j} = \lambda_{\min}(\tau_o(T_n)) \leq \lambda_{\max}(\tau_o(T_n)) = \frac{e_k^T \mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n^T e_k}{e_k^T e_k} \leq \\ &\max_{x \neq 0} \frac{x^T \mathcal{S}_n T_n \mathcal{S}_n^T x}{x^T x} \stackrel{y = \mathcal{S}_n^T x}{=} \max_{y \neq 0} \frac{y^T T_n y}{y^T y} = \lambda_{\max}(T_n). \quad \square\end{aligned}$$

**Πρόταση 2.4.7.** *Το φάσμα ιδιοτιμών του προρρυθμιστή  $\tau_o(T_n)$  είναι ασυμπτωτικά ίσο με αυτό του πίνακα  $\tau(T_n)$ , δηλαδή ισχύει*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\tau_o(T_n) - \tau(T_n)) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι  $W = \tau_o(T_n) - \tau(T_n) \in \mathcal{T}_n$  και  $w_i = \tau_i - \tau_i, i = 1, \dots, n$ , τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα  $W$ . Με  $\tau_i$  συμβολίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του προρρυθμιστή  $\tau_o(T_n)$ , τα οποία δίνονται από τη σχέση (2.16), και με  $\tau_i$  συμβολίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης του προρρυθμιστή  $\tau(T_n)$ , τα οποία δίνονται από τη σχέση (2.12). Επειδή  $W \in \mathcal{T}_n$ , ισχύει  $\mathcal{S}_n W \mathcal{S}_n = \Lambda_n$ , όπου  $\Lambda_n$  είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της κυρίας διαγωνίου τις ιδιοτιμές του πίνακα  $W$ . Για το διάνυσμα  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$  έχουμε

$$\mathcal{S}_n W \mathcal{S}_n = \Lambda_n \Leftrightarrow \mathcal{S}_n W = \Lambda_n \mathcal{S}_n \Rightarrow \mathcal{S}_n W e_1 = \Lambda_n \mathcal{S}_n e_1.$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $W$  δίνονται από τη σχέση

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \sin(i\alpha_j)}{\sin(\alpha_j)}, j = 1, \dots, n \text{ και } \alpha_j = \frac{j\pi}{n+1}. \quad (2.17)$$

Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε τα στοιχεία  $w_i = \tau_i - \tau_i$ :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{3}{n+1}t_2, w_2 = \frac{4}{n+1}t_3, \\ w_i &= \frac{2-i}{n+1}t_{i-1} + \frac{2+i}{n+1}t_{i+1}, i = 3, \dots, n-2, \\ w_{n-1} &= \frac{3-n}{n+1}t_{n-2}, w_n = \frac{2-n}{n+1}t_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Συνδυάζουμε τις σχέσεις (2.17), (2.18) και ομαδοποιούμε ως προς  $t_i$ , οπότε για  $j = 1, \dots, n$ , προκύπτει

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{3 \sin(\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)}t_2 + \frac{4 \sin(2\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)}t_3 + \\ &\frac{\sum_{i=3}^{n-2} (2-i) \sin(i\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)}t_{i-1} + \frac{\sum_{i=3}^{n-2} (2+i) \sin(i\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)}t_{i+1} + \\ &\frac{(3-n) \sin[(n-1)\alpha_j]}{(n+1) \sin(\alpha_j)}t_{n-2} + \frac{(2-n) \sin(n\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)}t_{n-1} \Leftrightarrow \\ \lambda_j &= \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i+1) \sin[(i-1)\alpha_j] - (i-1) \sin[(i+1)\alpha_j]}{(n+1) \sin(\alpha_j)}t_i. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned}
|\lambda_j| &= \left| \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i+1) \sin(i\alpha_j) \cos(\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)} t_i - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i+1) \cos(i\alpha_j) \sin(\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)} t_i - \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i-1) \sin(i\alpha_j) \cos(\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)} t_i - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i-1) \cos(i\alpha_j) \sin(\alpha_j)}{(n+1) \sin(\alpha_j)} t_i \right| = \\
&\left| 2 \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\sin(i\alpha_j) \cot(\alpha_j)}{n+1} t_i - 2 \sum_{i=2}^{n-1} \frac{i \cos(i\alpha_j)}{n+1} t_i \right| \leq 2 \left| \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\sin(i\alpha_j) \cot(\alpha_j)}{n+1} t_i \right| + \\
&2 \left| \sum_{i=2}^{n-1} \frac{i \cos(i\alpha_j)}{n+1} t_i \right| \leq \frac{2 |\cot(\alpha_j)|}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} |\sin(i\alpha_j)| |t_i| + \frac{2}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} i |t_i|.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, για τις ιδιοτιμές του πίνακα  $W$  ισχύει η σχέση

$$|\lambda_j| \leq \frac{2}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} i |t_i| + \frac{2 |\cot(\alpha_j)|}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} |\sin(i\alpha_j)| |t_i|, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Η συνάρτηση  $f$  ανήκει στην κλάση Wiener, επομένως για  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $M$  τέτοιο ώστε  $\sum_{i=M+1}^{n-1} |t_i| < \frac{\varepsilon}{8}$ .

Θα δείξουμε ότι καθώς το  $n$  πηγαίνει στο άπειρο, το πρώτο άθροισμα της σχέσης (2.19) πλησιάζει στο μηδέν. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} i |t_i| &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^M i |t_i| + \frac{1}{n+1} \sum_{i=M+1}^{n-1} i |t_i| \leq \\
\frac{M}{n+1} \sum_{i=2}^M |t_i| + \frac{n-1}{n+1} \sum_{i=M+1}^{n-1} |t_i| &< \frac{M}{n+1} \sum_{i=2}^M |t_i| + \sum_{i=M+1}^{n-1} |t_i| < \frac{M}{n} \sum_{i=2}^M |t_i| + \frac{\varepsilon}{8}.
\end{aligned}$$

Ισχύει  $\frac{2}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} i |t_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ , όταν

$$\frac{M}{n} \sum_{i=2}^M |t_i| < \frac{\varepsilon}{8} \Leftrightarrow n > \frac{8M}{\varepsilon} \sum_{i=2}^M |t_i|.$$

Παρατηρούμε ότι για  $j = 1, \dots, n$  ο όρος  $\sin(\alpha_j)$  είναι διάφορος του μηδενός. Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι  $|\sin(i\alpha_j)| \leq i |\sin(\alpha_j)|$ , όπου  $i \in \mathbb{N}$ . Για το

δεύτερο άθροισμα της σχέσης (2.19) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2|\cot(\alpha_j)|}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} |\sin(i\alpha_j)||t_i| &= \frac{2|\cos(\alpha_j)|}{(n+1)|\sin(\alpha_j)|} \sum_{i=2}^{n-1} |\sin(i\alpha_j)||t_i| \leq \\ \frac{2|\cos(\alpha_j)|}{(n+1)|\sin(\alpha_j)|} \sum_{i=2}^{n-1} i|\sin(\alpha_j)||t_i| &\leq \frac{2}{n+1} \sum_{i=2}^{n-1} i|t_i| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

όταν  $n > \frac{8M}{\varepsilon} \sum_{i=2}^M |t_i|$  (όπως είδαμε παραπάνω).

Επομένως,  $|\lambda_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Αναφέρουμε ότι όσο μικρότερο είναι το  $\varepsilon$ , τόσο μεγαλύτερο γίνεται το  $n$ , και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

Από την παραπάνω πρόταση καταλαβαίνουμε ότι το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $\tau_o^{-1}(T_n)T_n$  συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα για μεγάλο  $n$ .

Ο προρρυθμιστής  $\tau(T_n) = T_n - H_n$  κατασκευάζεται με  $O(n)$  πράξεις, επειδή εξαρτάται μόνο από τον προσδιορισμό των στοιχείων του πίνακα Toeplitz  $T_n$  και οι πίνακες Toeplitz κατασκευάζονται το πολύ σε  $O(n)$  πράξεις [26]. Το ίδιο αποδεικνύεται και για τον προρρυθμιστή  $\tau_o(T_n)$  [19]. Επίσης, η προρρυθμισμένη μέθοδος συζυγών κλίσεων, χρησιμοποιώντας τους προρρυθμιστές  $\tau(T_n)$  και  $\tau_o(T_n)$ , μας δίνει τη λύση (του συστήματος) με  $O(n \log n)$  πράξεις, χρησιμοποιώντας για τους πολλαπλασιασμούς (πίνακα-διανύσματος),  $\tau(T_n)z$  ή  $\tau_o(T_n)z$  (ανάλογα με τον προρρυθμιστή που επιλέξαμε), τη μέθοδο μετασχηματισμού ημιτόνου [4, 19] και για τον πολλαπλασιασμό  $T_n z$  τη μέθοδο FFT.

## 2.5 Προρρυθμιστές Βασισμένοι σε Μετασχηματισμό Hartley

Οι Dario Bini και Paola Favati το 1993 πρότειναν έναν προρρυθμιστή για την επίλυση συμμετρικών και θετικά ορισμένων συστημάτων Toeplitz της μορφής  $T_n x = b$ . Αυτός είναι ο βέλτιστος προρρυθμιστής μετασχηματισμού Hartley, δηλαδή ο πίνακας  $h_o(T_n) \in \mathbb{R}^{n,n}$ , που ελαχιστοποιεί τη νόρμα  $\|H_n - T_n\|_F$ , με  $H_n \in \mathcal{H}_n$ , όπου  $\mathcal{H}_n$  είναι η άλγεβρα που περιέχει τους πίνακες οι οποίοι μπορούν να διαγωνιοποιηθούν από τον πίνακα διακριτού μετασχηματισμού Hartley  $\mathcal{H}_n \in \mathbb{R}^{n,n}$ , ο οποίος είναι συμμετρικός και ορθογώνιος. Το στοιχείο του πίνακα

$\mathcal{H}_n$  που βρίσκεται στη θέση  $(j, k)$ , με  $1 \leq j, k \leq n$ , δίνεται από τη σχέση

$$h_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{2\pi(j-1)(k-1)}{n}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{2\pi(j-1)(k-1)}{n}\right).$$

Ένας πίνακας  $H_n \in \mathcal{H}_n$  μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$H_n = C_n + JS_n, \quad (2.20)$$

όπου  $C_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι συμμετρικός κυκλοειδής πίνακας,  $S_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  αντισυμμετρικός κυκλοειδής και ο πίνακας  $J$  δίνεται παρακάτω,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω  $t_0, t_1, \dots, t_n$  τα στοιχεία της πρώτης στήλης ενός συμμετρικού πίνακα Toeplitz  $T_n \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Αν γράψουμε τον προρρυθμιστή  $h_o(T_n)$  στη μορφή (2.20), τα στοιχεία της πρώτης στήλης των πινάκων  $C_n$  και  $S_n$  είναι ίσα με

$$c_\kappa = \frac{(n-\kappa)t_\kappa + \kappa t_{n-\kappa}}{n}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1,$$

και

$$s_\kappa = \begin{cases} 0, & \kappa = 0, \\ \frac{t_\kappa - t_{n-\kappa}}{n}, & \kappa = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases}$$

αντίστοιχα.

*Παρατήρηση.* Ο κυκλοειδής πίνακας  $C_n$  είναι ίσος με τον προρρυθμιστή του T. Chan  $c(T_n)$ , αφού ο  $T_n$  είναι συμμετρικός πίνακας Toeplitz.

Ομοίως με τις προηγούμενες ενότητες αποδεικνύεται ότι ο βέλτιστος προρρυθμιστής μετασχηματισμού Hartley για έναν συμμετρικό πίνακα Toeplitz  $T_n$  δίνεται από τη σχέση

$$h_o(T_n) = \mathcal{H}_n \delta (\mathcal{H}_n T_n \mathcal{H}_n) \mathcal{H}_n.$$

**Πρόταση 2.5.1.** Αν  $T_n \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας Toeplitz, τότε και ο προρρυθμιστής  $h_o(T_n)$  είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Επίσης, για τις ιδιοτιμές των δύο πινάκων ισχύει

$$\lambda_{\min}(T_n) \leq \lambda_{\min}(h_o(T_n)) \leq \lambda_{\max}(h_o(T_n)) \leq \lambda_{\max}(T_n).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.4.6.  $\square$

Παρατήρηση. Όταν η συνάρτηση  $f$  είναι θετική, η φασματική νόρμα των πινάκων  $h_o(T_n)$  και  $h_o(T_n)^{-1}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

**Λήμμα 2.5.2.** Έστω  $f$  μια άρτια συνάρτηση της κλάσης Wiener και  $T_n$  ο πίνακας Toeplitz, που αυτή παράγει. Τότε, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχουν  $N, M > 0$  τέτοια ώστε, για κάθε  $n > N$ , το πολύ  $M$  ιδιοτιμές του πίνακα  $T_n - h_o(T_n)$  να υπερβαίνουν κατ' απόλυτη τιμή το  $\varepsilon$ .

**Θεώρημα 2.5.3.** Έστω  $f$  μια άρτια, θετική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία παράγει τον πίνακα Toeplitz  $T_n$ . Τότε, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχουν  $N, M > 0$  τέτοια ώστε, για κάθε  $n > N$ , το πολύ  $M$  ιδιοτιμές του πίνακα  $T_n - h_o(T_n)$  να υπερβαίνουν κατ' απόλυτη τιμή το  $\varepsilon$ .

Απόδειξη. Για την απόδειξη [17] αρχικά εργαζόμαστε όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.3. Έστω  $p_M$  το πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο έτσι ώστε να ισχύει

$$\|f - p_M\|_\infty \leq \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Έστω  $\tilde{T}_n$  ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από το πολυώνυμο  $p_M$ . Για  $n > 2M$  έχουμε

$$h_o(T_n) - T_n = h_o(T_n) - h_o(\tilde{T}_n) - T_n + \tilde{T}_n + h_o(\tilde{T}_n) - \tilde{T}_n.$$

Αποδεικνύουμε ότι

$$\|h_o(T_n) - h_o(\tilde{T}_n) - T_n + \tilde{T}_n\|_2 \leq 2\varepsilon.$$

Η συνάρτηση  $p_M$  είναι άρτια και ανήκει στην κλάση Wiener, επομένως από το Λήμμα 2.5.2 γνωρίζουμε ότι το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $h_o(\tilde{T}_n) - \tilde{T}_n$  συσσωρεύεται γύρω από το μηδέν. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.15 η απόδειξη ολοκληρώνεται.  $\square$

Παρατηρούμε ότι  $h_o(T_n)^{-1}T_n = I_n + h_o(T_n)^{-1}(T_n - h_o(T_n))$ . Επομένως, αν  $f$  είναι μια άρτια, θετική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχουν  $N, M > 0$  τέτοια ώστε, για κάθε  $n > N$ , το πολύ  $M$  ιδιοτιμές του πίνακα  $h_o(T_n)^{-1}T_n - I_n$  να υπερβαίνουν κατ' απόλυτη τιμή το  $\varepsilon$ . Δηλαδή, το φάσμα ιδιοτιμών του πίνακα  $h_o(T_n)^{-1}T_n$  συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα.

Σχόλιο. Χρησιμοποιώντας τον προρρυθμιστή  $h_o(T_n)$ , η προρρυθμισμένη μέθοδος συζυγών κλίσεων συγκλίνει υπεργραμμικά, για συνεχείς και  $2\pi$ -περιοδικές συναρτήσεις, χωρίς απαραίτητα αυτές να ανήκουν στην κλάση Wiener.

Αναφέρουμε ότι ο προρρυθμιστής  $h_o(T_n)$  κατασκευάζεται με  $O(n)$  πράξεις και για την επίλυση ενός συστήματος Toeplitz, χρησιμοποιώντας την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων, κάνουμε  $O(n \log n)$  πράξεις, χρησιμοποιώντας για τους πολλαπλασιασμούς της μορφής  $h_o(T_n)z$  τη μέθοδο μετασχηματισμού Hartley και για τον πολλαπλασιασμό  $T_n z$  τη μέθοδο FFT [17, 19].



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Συστήματα με Κακή Κατάσταση

Αν η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα Toeplitz έχει ρίζες, τότε το σύστημα που προκύπτει από αυτή θα έχει κακή κατάσταση, με την έννοια ότι ο δείκτης κατάστασης εξαρτάται από τη διάσταση  $n$  του πίνακα Toeplitz. Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά παραθέτουμε κάποιους γνωστούς ταινιωτούς προρρυθμιστές Toeplitz για συστήματα με κακή κατάσταση και στη συνέχεια αναφέρουμε έναν προρρυθμιστή, ο οποίος οδηγεί στην υπεργραμμική σύγκλιση της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων.

### 3.1 Προρρυθμιστές Toeplitz του R. Chan

Η πρώτη προσπάθεια επίλυσης συστημάτων Toeplitz με κακή κατάσταση έγινε το 1991 από τον Raymond Chan, όπου προτάθηκε ένας ταινιωτός πίνακας Toeplitz ως προρρυθμιστής, με πλάτος ταινίας (**bandwidth**) ανεξάρτητο από τη διάσταση  $n$  (του πίνακα). Η ιδέα του R. Chan ήταν να προσεγγίσει τη συνάρτηση  $f$  με ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο σταθερού βαθμού, το οποίο θα έχει τις ίδιες ρίζες με την  $f$ .

Ξεκινάμε από την απλή περίπτωση, όπου η συνάρτηση  $f$  είναι μη αρνητική, συνεχής,  $2\pi$ -περιοδική και έχει μία ρίζα άρτιας πολλαπλότητας. Τότε, χρησιμοποιούμε ως προρρυθμιστή του συστήματος, τον πίνακα Toeplitz που προκύπτει από τη συνάρτηση,

$$b_\ell(\theta) = (2 - 2 \cos(\theta))^\ell, \ell \geq 1,$$

και τον συμβολίζουμε με  $b(T_n)$ . Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

βλέπουμε ότι ισχύει

$$b_\ell(\theta) = (2 - 2 \cos(\theta))^\ell = \left(2 + 4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\right)^\ell = \left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2\ell}.$$

Επομένως, η συνάρτηση  $b_\ell$  έχει μία ρίζα πολλαπλότητας  $2\ell$  για  $\theta = 0$ .

*Παρατήρηση.* Η συνάρτηση  $b_\ell$  είναι άρτια, πραγματική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική, επομένως ο προρρυθμιστής  $b(T_n) = T_n(b_\ell)$  είναι πάντα πραγματικός και συμμετρικός (βλ. απόδειξη Πρότασης 2.1.3). Επίσης, η συνάρτηση  $b_\ell$  είναι μη αρνητική με  $0 = \min_{\theta} b_\ell(\theta) < \max_{\theta} b_\ell(\theta)$ . Επομένως,

$$0 < \min_j \lambda_j(b(T_n)) < \max_j \lambda_j(b(T_n)) < \max_{\theta} b_\ell(\theta), \quad j = 1, \dots, n,$$

που σημαίνει ότι ο προρρυθμιστής  $b(T_n)$  είναι πάντα θετικά ορισμένος.

Τα στοιχεία ενός πίνακα Toeplitz δίνονται από τη σχέση

$$t_\kappa = t_{j-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-i(j-k)\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\theta_0}^{\pi-\theta_0} f(\theta - \theta_0) e^{-i(j-k)(\theta-\theta_0)} d\theta = e^{ij\theta_0} e^{-ik\theta_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta_0) e^{-i(j-k)\theta} d\theta, \quad i^2 = -1, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Επομένως ισχύει

$$T_n[f(\theta - \theta_0)] = \Omega_n^H T_n[f(\theta)] \Omega_n,$$

όπου  $\Omega_n$  είναι διαγώνιος πίνακας διάστασης  $n$ , με στοιχεία της κυρίας διαγωνίου τις συνιστώσες του διανύσματος  $\omega = (1, e^{i\theta_0}, \dots, e^{i(n-1)\theta_0})^T$ .

Αν η συνάρτηση  $f$  έχει μόνο μία ρίζα, η οποία λαμβάνεται στο σημείο  $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ρίζα λαμβάνεται στην αρχή των αξόνων. Αυτό γίνεται αν επιλύσουμε το σύστημα,

$$T_n[f(\theta - \theta_0)] \Omega_n^H x = \Omega_n^H b,$$

αντί για το αρχικό σύστημα  $T_n[f(\theta)]x = b$ .

**Θεώρημα 3.1.1.** Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι μη αρνητική, συνεχής,  $2\pi$ -περιοδική και έχει μία ρίζα πολλαπλότητας  $2\ell$  στο σημείο  $0$ . Τότε, ο δείκτης κατάστασης του πίνακα  $b(T_n)^{-1}T_n$  είναι φραγμένος για κάθε  $n > 0$ .

Απόδειξη. Η συνάρτηση  $f$  γράφεται ως  $f(\theta) = \theta^{2\ell}h(\theta)$ , όπου  $h(\theta)$  είναι θετική και φραγμένη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F(\theta) = \frac{f(\theta)}{b_\ell(\theta)} = \frac{\theta^{2\ell}h(\theta)}{(2 - 2\cos(\theta))^\ell} = h(\theta) \left( \frac{\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^{2\ell}, \quad \theta \neq 0.$$

Για  $\theta \neq 0$  η συνάρτηση  $F$  είναι συνεχής και θετική. Θα εξετάσουμε το όριο  $\lim_{\theta \rightarrow 0} F(\theta)$ . Έχουμε

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} F(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} h(\theta) \left( \frac{\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^{2\ell} = h(0) > 0.$$

Η συνάρτηση  $F$  έχει θετικό ουσιώδες κάτω φράγμα, στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ . Επίσης, η  $F$  είναι  $2\pi$ -περιοδική, κι έτσι συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2$ , θετικές και ανεξάρτητες του  $n$ , τέτοιες ώστε

$$c_1 \leq F(\theta) \leq c_2 \Leftrightarrow c_1 \leq \frac{f(\theta)}{b_\ell(\theta)} \leq c_2 \Leftrightarrow c_1 b_\ell(\theta) \leq f(\theta) \leq c_2 b_\ell(\theta), \quad (3.1)$$

σχεδόν παντού στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ . Αποδεικνύεται ότι  $c_1$  είναι το ουσιώδες infimum (**ess inf**) και  $c_2$  το ουσιώδες supremum (**ess sup**) της συνάρτησης  $\frac{f}{b_\ell}$  [15, 25]. Θα αποδείξουμε την ανισότητα

$$c_1(z, b(T_n)z)_2 \leq (z, T_n z)_2 \leq c_2(z, b(T_n)z)_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1) και (3.1). Έχουμε

$$\begin{aligned} c_1(z, b(T_n)z)_2 &= c_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 b_\ell(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 c_1 b_\ell(\theta) d\theta \leq \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 f(\theta) d\theta = (z, T_n z)_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 c_2 b_\ell(\theta) d\theta = \\ &c_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n e^{ij\theta} z_j \right|^2 b_\ell(\theta) d\theta = c_2(z, b(T_n)z)_2. \end{aligned}$$

Ο πίνακας  $b(T_n)$  είναι θετικά ορισμένος, οπότε  $(z, b(T_n)z)_2 > 0$ . Έτσι προκύπτει

$$c_1 \leq \frac{(z, T_n z)_2}{(z, b(T_n)z)_2} \leq c_2.$$

Έστω οι όμοιοι πίνακες  $b(T_n)^{-1}T_n$  και  $b(T_n)^{-\frac{1}{2}}T_n b(T_n)^{-\frac{1}{2}}$ , των οποίων τις ιδιοτιμές συμβολίζουμε με  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{z^H T_n z}{z^H b(T_n) z} &\stackrel{z=b(T_n)^{-\frac{1}{2}}y}{=} \frac{y^H b(T_n)^{-\frac{1}{2}} T_n b(T_n)^{-\frac{1}{2}} y}{y^H y} \Rightarrow \\ \min_i \lambda_i &\leq \frac{z^H T_n z}{z^H b(T_n) z} \leq \max_i \lambda_i \Rightarrow c_1 \leq \min_i \lambda_i \leq \frac{z^H T_n z}{z^H b(T_n) z} \leq \max_i \lambda_i \leq c_2. \end{aligned}$$

Από την τελευταία ανισότητα καταλαβαίνουμε ότι  $\kappa_2(b(T_n)^{-1}T_n) \leq \frac{c_2}{c_1}$ , δηλαδή ότι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα  $b(T_n)^{-1}T_n$  είναι φραγμένος από σταθερές ανεξάρτητες του  $n$ .  $\square$

Για τη συνάρτηση  $b_\ell(\theta)$  ισχύει

$$b_\ell(\theta) = (2 - 2 \cos(\theta))^\ell = \left( -\frac{1}{z}(1-z)^2 \right)^\ell = \frac{(-1)^\ell}{z^\ell} (1-z)^{2\ell} = \sum_{j=-\ell}^{\ell} b_j z^j,$$

όπου  $z = e^{i\theta}$  και  $b_j = b_{-j} = (-1)^j \binom{2\ell}{\ell+j}$ .

Ο προρρυθμιστής  $b(T_n)$  είναι πραγματικός, συμμετρικός και ταινιωτός πίνακας Toeplitz με πλάτος ταινίας  $2\ell + 1$ . Τα στοιχεία του πίνακα  $b(T_n)$  υπολογίζονται από το τρίγωνο του Pascal [28].

Όταν η συνάρτηση  $f$  έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών, στα σημεία  $\{\theta_j\}_{j=1}^k$ , με πολλαπλότητα  $2\nu_j$ , αντίστοιχα, χρησιμοποιούμε ως προρρυθμιστή τον πίνακα Toeplitz, που παράγεται από τη συνάρτηση,

$$b_\nu(\theta) = \prod_{j=1}^k [2 - 2 \cos(\theta - \theta_j)]^{\nu_j}, \quad (3.2)$$

και τον συμβολίζουμε με  $b_m(T_n)$ .

*Παρατήρηση.* Ο προρρυθμιστής  $b_m(T_n)$  είναι πάντα ερμιτιανός, αφού η συνάρτηση  $b_\nu$  είναι πραγματική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική (βλ. Πρόταση 2.1.1). Η συνάρτηση

$b_v$  είναι μη αρνητική και ισχύει  $\min_{\theta} b_v(\theta) < \max_{\theta} b_v(\theta)$ . Έτσι, ομοίως με τον προρρυθμιστή  $b(T_n)$ , συμπεραίνουμε ότι ο προρρυθμιστής  $b_m(T_n)$  είναι επίσης θετικά ορισμένος.

**Θεώρημα 3.1.2.** Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι μη αρνητική, συνεχής,  $2\pi$ -περιοδική και έχει  $k$  ρίζες πολλαπλότητας  $2v_j$  στα σημεία  $\theta_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Τότε, υπάρχουν θετικές σταθερές  $c_1, c_2$ , τέτοιες ώστε

$$c_1 \leq \frac{f(\theta)}{b_v(\theta)} \leq c_2, \forall \theta \in [-\pi, \pi),$$

με αποτέλεσμα ο δείκτης κατάστασης του πίνακα  $b_m(T_n)^{-1}T_n$  να είναι φραγμένος για κάθε  $n > 0$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με εκείνη του Θεωρήματος 3.1.1, αν θεωρήσουμε

$$f(\theta) = \prod_{j=1}^k (\theta - \theta_j)^{2v_j} h(\theta), \text{ με } h(\theta) > 0.$$

Για  $\theta \neq \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , έχουμε ότι

$$F(\theta) = \frac{f(\theta)}{\prod_{j=1}^k \left(2 \sin \left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)\right)^{2v_j}} > 0.$$

Για  $\theta \rightarrow \theta_j$ , έχουμε το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_j} F(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\theta - \theta_j)^{2v_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (\theta - \theta_i)^{2v_i} h(\theta)}{\left(2 \sin \left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)\right)^{2v_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left(2 \sin \left(\frac{\theta - \theta_i}{2}\right)\right)^{2v_i}} = \\ &= \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (\theta_j - \theta_i)^{2v_i} h(\theta_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left(2 \sin \left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)\right)^{2v_i}} > 0. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1. □

$$\begin{aligned}
& \text{Έστω } \sum_{j=1}^k v_j = v. \text{ Για τη συνάρτηση } b_v(\theta) \text{ ισχύει} \\
b_v(\theta) &= \prod_{j=1}^k [2 - 2 \cos(\theta - \theta_j)]^{v_j} = \prod_{j=1}^k \left[ \left(1 - e^{i(\theta - \theta_j)}\right) \left(1 - e^{-i(\theta - \theta_j)}\right) \right]^{v_j} = \\
& \prod_{j=1}^k \left[ \left(1 - ze^{-i\theta_j}\right) \left(1 - z^{-1}e^{i\theta_j}\right) \right]^{v_j} = \prod_{j=1}^k \left(2 - z^{-1}e^{i\theta_j} - ze^{-i\theta_j}\right)^{v_j} = \\
& \prod_{j=1}^k \left[ -z^{-1} \left(-2z + e^{i\theta_j} + z^2e^{-i\theta_j}\right) \right]^{v_j} = \frac{(-1)^v}{z^v} \prod_{j=1}^k \left(-2z + e^{i\theta_j} + z^2e^{-i\theta_j}\right)^{v_j} = \\
& \sum_{j=-v}^v b_j z^j,
\end{aligned}$$

όπου  $z = e^{i\theta}$ . Έτσι, ο προρρυθμιστής  $b_m(T_n)$  είναι ταινιωτός πίνακας Toeplitz με πλάτος ταινίας  $2v + 1$  και μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία των διαγωνίων αυτού κάνοντας τις πράξεις της παραπάνω ισότητας.

Αναφέρουμε ότι η λύση συστημάτων Toeplitz, δίνεται με  $O(n \log n)$  πράξεις (για μεγάλο  $n$ ) χρησιμοποιώντας την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων, με προρρυθμιστή είτε τον πίνακα  $b(T_n)$ , είτε τον  $b_m(T_n)$  [6, 19].

Παρατηρούμε ότι για τους δείκτες κατάστασης των προρρυθμιστών  $b(T_n)$  και  $b_m(T_n)$  ισχύει  $\kappa_2(b(T_n)^{-1}T_n) = O(1)$  και  $\kappa_2(b_m(T_n)^{-1}T_n) = O(1)$ , αντίστοιχα. Ωστόσο, αναφέρουμε ότι το φάσμα ιδιοτιμών των πινάκων  $b(T_n)^{-1}T_n$  και  $b_m(T_n)^{-1}T_n$  γενικά δεν συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα. Μάλιστα, όταν η συνάρτηση  $f$  είναι θετική, το προρρυθμισμένο σύστημα συγκλίνει πιο αργά με χρήση του προρρυθμιστή  $b(T_n)$  απ' ό,τι με χρήση κάποιου κυκλοειδή προρρυθμιστή του προηγούμενου κεφαλαίου.

### 3.2 Βελτιωμένοι Ταινιωτοί Προρρυθμιστές Toeplitz

Η αργή σύγκλιση στην περίπτωση όπου η γεννήτρια συνάρτηση  $f$  είναι θετική, οδήγησε τους Raymond Chan και Ping Tak Peter Tang, το 1994, να κατασκευάσουν έναν ταινιωτό προρρυθμιστή Toeplitz, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η συνάρτηση  $f$  έχει ρίζες και επιπλέον συγκλίνει σχεδόν με τον ίδιο ρυθμό που συγκλίνουν και οι κυκλοειδείς προρρυθμιστές των Strang  $s(T_n)$  και T. Chan

$c(T_n)$ , όταν η συνάρτηση  $f$  είναι θετική. Η ιδέα τους ήταν να αυξήσουν το πλάτος ταινίας του προρρυθμιστή, ώστε να έχουν περισσότερους βαθμούς ελευθερίας, κι έτσι, όχι μόνο η γεννήτρια συνάρτηση του προρρυθμιστή να έχει τις ίδιες ρίζες με τη συνάρτηση  $f$ , αλλά και να επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση της ποσότητας  $\left\| \frac{f-g}{f} \right\|_\infty$ , κατά την προσέγγιση της συνάρτησης  $f$  με τριγωνομετρικά πολυώνυμα  $g$ , βαθμού  $\ell$ . Τον προρρυθμιστή που πρότειναν οι R. Chan και Tang, τον συμβολίζουμε με  $b_o(T_n)$  (οptimal ταινιωτός προρρυθμιστής).

**Θεώρημα 3.2.1.** Έστω  $f$  μια μη αρνητική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι η γεννήτρια συνάρτηση ενός πίνακα Toeplitz  $T_n \in \mathbb{C}^{n,n}$ , και

$$g(\theta) = \sum_{j=-(\ell-1)}^{\ell-1} b_j e^{ij\theta}, \quad b_j = \bar{b}_{-j}$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση του προρρυθμιστή  $b_o(T_n)$ . Τότε, αν

$$\left\| \frac{f-g}{f} \right\|_\infty = h < 1,$$

ο προρρυθμιστής  $b_o(T_n)$  είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος. Επίσης, για τον δείκτη κατάστασης του πίνακα  $b_o(T_n)^{-1}T_n$  ισχύει

$$\kappa_2(b_o(T_n)^{-1}T_n) \leq \frac{1+h}{1-h}, \quad \forall n \geq 1.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f-g}{f} \right\|_\infty = h &\Leftrightarrow \max \left| \frac{f-g}{f} \right| = h \Leftrightarrow \max \left| 1 - \frac{g}{f} \right| = h \Leftrightarrow \\ -1-h &\leq -\frac{g}{f} \leq h-1 \Leftrightarrow (1-h)f \leq g \leq (1+h)f. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση  $g$  είναι πραγματική κι έτσι ο προρρυθμιστής  $b_o(T_n)$  είναι ερμιτιανός. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1) έχουμε

$$(1-h)(z, T_n z)_2 \leq (z, b_o(T_n)z)_2 \leq (1+h)(z, T_n z)_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}. \quad (3.3)$$

Αν συμβολίσουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων  $T_n$  και  $b_o(T_n)$  με  $\lambda_i$  και  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.3) έχουμε

$$(1-h)(z, T_n z)_2 \leq (z, b_o(T_n)z)_2 \leq (1+h)(z, T_n z)_2 \Leftrightarrow$$

$$(1-h) \frac{(z, T_n z)_2}{(z, z)_2} \leq \frac{(z, b_o(T_n) z)_2}{(z, z)_2} \leq (1+h) \frac{(z, T_n z)_2}{(z, z)_2} \Rightarrow$$

$$(1-h) \min_i \lambda_i \leq l_i \leq (1+h) \max_i \lambda_i, i = 1, \dots, n.$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι μη αρνητική, επομένως ο πίνακας  $T_n$  είναι θετικά ορισμένος κι έτσι έχει θετικές ιδιοτιμές. Επίσης  $h < 1$ , οπότε ο προρρυθμιστής  $b_o(T_n)$  είναι θετικά ορισμένος και  $(z, b_o(T_n) z)_2 > 0$ . Η σχέση (3.3) γράφεται ισοδύναμα ως,

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{(z, T_n z)_2}{(z, b_o(T_n) z)_2} \leq \frac{1}{1-h}.$$

Από την τελευταία ανισότητα καταλαβαίνουμε ότι  $\kappa_2(b_o(T_n)^{-1} T_n) \leq \frac{1+h}{1-h}$ , δηλαδή ότι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα  $b_o(T_n)^{-1} T_n$  είναι φραγμένος από σταθερές ανεξάρτητες του  $n$ .  $\square$

Η συνάρτηση  $g$  υπολογίζεται με μια παραλλαγή του αλγορίθμου του Remez, που προτάθηκε από τον Ping Tak Peter Tang το 1988 και μπορεί να αντιμετωπίσει την περίπτωση, όπου η συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε έχει ρίζες [9, 27].

*Παρατήρηση.* Στην περίπτωση όπου η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα Toeplitz  $f$  είναι άρτια και πραγματική, η συνάρτηση  $g$  θα είναι της μορφής

$$g(\theta) = b_0 + b_1(2 \cos(\theta)) + b_2(2 \cos(2\theta)) + \dots + b_{\ell-1}(2 \cos((\ell-1)\theta)).$$

Δηλαδή, θα είναι επίσης άρτια και πραγματική. Επομένως ο προρρυθμιστής  $b_o(T_n)$  θα είναι πραγματικός και συμμετρικός [9].

Για  $\varepsilon > 0$  και ανεξάρτητο του  $n$ , η προρρυθμισμένη μέθοδος συζυγών κλίσεων συγκλίνει μετά από  $\frac{1}{2} \left( \frac{1+h}{1-h} \right) \log \frac{1}{\varepsilon} + 1$  επαναλήψεις [2, σελ. 12-15, 9].

Η σταθερά  $h$  βρίσκεται από την προσέγγιση της συνάρτησης  $f$  με τον αλγόριθμο του Remez. Η επίλυση ενός συστήματος Toeplitz με την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων, χρησιμοποιώντας τον προρρυθμιστή  $b_o(T_n)$ , δίνεται με  $O(n \log n + \ell^2 n)$  πράξεις [9].

Το 1997 ο Stefano Serra Capizzano πρότεινε έναν νέο ταινιωτό προρρυθμιστή Toeplitz, του οποίου η γεννήτρια συνάρτηση  $g$  μπορούσε να υπολογιστεί ευκολότερα σε σχέση με τον προρρυθμιστή  $b_o(T_n)$  που πρότειναν οι R. Chan και Tang. Τον προρρυθμιστή του Serra θα τον συμβολίζουμε με  $b_s(T_n)$  και η γεννήτρια συνάρτηση αυτού θα είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού  $\ell$ ,

$$g(\theta) = b_v(\theta) g_{\ell-v}(\theta), \text{ όπου } \ell \geq v,$$



και  $g_{\ell-v}$  είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού  $\ell - v$ , το οποίο δίνεται με έναν από τους παρακάτω τρόπους,

(A') Ως βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης  $\frac{f}{b_v}$ , που σημαίνει ότι ισχύει

$$\left\| \frac{f}{b_v} - g_{\ell-v} \right\|_{\infty} = \min_{g \in \mathcal{P}^{\ell-v}} \left\| \frac{f}{b_v} - g \right\|_{\infty},$$

όπου  $\mathcal{P}^{\ell-v}$  είναι η κλάση όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, βαθμού το πολύ  $\ell - v$ .

(B') Ως το τριγωνομετρικό πολυώνυμο παρεμβολής (βαθμού το πολύ  $\ell - v$ ), της συνάρτησης  $\frac{f}{b_v}$ , με σημεία παρεμβολής τις  $\ell - v + 1$  ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev βαθμού  $\ell - v + 1$ .

Σχόλιο. Αν  $\phi$  είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-1, 1]$  και  $m$  είναι ένας θετικός ακέραιος, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού (το πολύ)  $m$ , το οποίο παρεμβάλλεται στη συνάρτηση  $\phi$ , στις  $m + 1$  ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev πρώτου είδους βαθμού  $m + 1$ , είναι της μορφής

$$p_m(x) = p_0 + \sum_{j=1}^m p_j \cos(jx),$$

με τους συντελεστές  $p_j$ ,  $j = 0, \dots, m$ , να δίνονται από τη σχέση

$$p_j = \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m \phi(\cos(\theta_k)) \cos(j\theta_k), \quad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}. \quad (3.4)$$

Ο προσδιορισμός του πολυωνύμου  $g_{\ell-v}$  στην περίπτωση (A') γίνεται με τον αλγόριθμο του Remez. Για την περίπτωση (B') μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο FFT με τάξη  $\ell - v$  [25].

*Παρατήρηση.* Η γεννήτρια συνάρτηση  $g$  είναι πραγματική, οπότε ο προρρυθμιστής  $b_s(T_n)$  είναι ερμιτιανός. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι μη αρνητική, συνεχής,  $2\pi$ -περιοδική και έχει  $k$  ρίζες πολλαπλότητας  $2v_j$  στα σημεία  $\theta_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2$ , τέτοιες ώστε

$$0 < c_1 < \frac{f}{g} < c_2 < \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι  $r_1 < \frac{g}{f} < r_2 \Leftrightarrow r_1 f < g < r_2 f$ , όπου  $r_1 = \frac{1}{c_2}$  και  $r_2 = \frac{1}{c_1}$ . Έτσι, ο προρρυθμιστής  $b_s(T_n)$  είναι θετικά ορισμένος [25].

Αν υπολογίσουμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο  $g_{\ell-v}$  με τον τρόπο (Α'), ισχύει

$$\kappa_2(b_s(T_n)^{-1}T_n) \leq \frac{1 + \frac{E_A}{m-E_A}}{1 - \frac{E_A}{m+E_A}},$$

όπου  $E_A = \left\| \frac{f}{b_v} - g_{\ell-v} \right\|_{\infty}$  και  $m = \min_{\theta} \frac{f(\theta)}{b_v(\theta)}$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Για αρκούντως μεγάλο  $\ell - v$  λαμβάνουμε  $m > E_A$  και προφανώς  $\frac{E_A}{m + E_A} < 1$ , που εξασφαλίζει το φραγμένο του δείκτη κατάσταση [25].

Αν υπολογίσουμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο  $g_{\ell-v}$  με τον τρόπο (Β'), ισχύει

$$\kappa_2(b_s(T_n)^{-1}T_n) \leq \frac{1 + \frac{E_B}{m-E_B}}{1 - \frac{E_B}{m+E_B}},$$

όπου  $E_B = cE_A \log(\ell - v)$ ,  $c \simeq \frac{2}{\pi}$  και  $m = \min_{\theta} \frac{f(\theta)}{b_v(\theta)}$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  [25].

Η λύση συστημάτων Toeplitz, χρησιμοποιώντας την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων με τον προρρυθμιστή  $b_s(T_n)$ , μπορεί να υπολογισθεί με  $O(n \log n)$  πράξεις για κάθε  $v \leq \ell \leq \ell_{\max}$  [25], όπου  $\ell_{\max} = O(\sqrt{\log n})$  χρησιμοποιώντας κλασικές μεθόδους επίλυσης ταινιωτών συστημάτων [13].

### 3.3 Ταινιωτός Προρρυθμιστής Ρητής Προσέγγισης

Το 2002 οι Δημήτριος Νούτσος και Πάρης Βασσάλος πρότειναν έναν τρόπο κατασκευής ταινιωτού προρρυθμιστή Toeplitz, που βασίζεται στη ρητή προσέγγιση της συνάρτησης  $\sqrt{\frac{f}{z_{\rho}}}$ , όπου  $f$  είναι μια μη αρνητική, άρτια, συνεχής,  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, με πεπερασμένο πλήθος ριζών στα σημεία  $\{\theta_j\}_{j=1}^k$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , πολλαπλότητας  $2v_j$ , αντίστοιχα. Η συνάρτηση  $z_{\rho}$  είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού  $\rho = \sum_{j=1}^k v_j$ , που έχει τις ίδιες ρίζες με τη συνάρτηση  $f$  (και την ίδια πολλαπλότητα ριζών) και δίνεται από τη σχέση

$$z_{\rho} = \prod_{j=1}^k [1 - \cos(\theta - \theta_j)]^{v_j}.$$

Επειδή το  $z_\rho$  έχει τις ίδιες ρίζες με τη συνάρτηση  $f$ , θα είναι άρτιο τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Συμβολίζουμε με  $r_{lm} = \frac{p_l}{q_m}$  τη βέλτιστη ρητή προσέγγιση της συνάρτησης  $\hat{f} = \sqrt{\frac{f}{z_\rho}}$ . Δηλαδή ισχύει

$$\|\hat{f} - r_{lm}\|_\infty = \min_{r \in \mathcal{R}(l,m)} \|\hat{f} - r\|_\infty,$$

όπου  $\mathcal{R}(l, m)$  είναι το σύνολο των μη αναγώγιμων ρητών συναρτήσεων  $r = \frac{p}{q}$  με  $p \in \mathcal{P}^l$  και  $q \in \mathcal{P}^m$ ,  $l, m \in \mathbb{N}$ . Επειδή, η  $\hat{f}$  είναι άρτια συνάρτηση, τέτοια θα είναι και η  $r_{lm} = \frac{p_l}{q_m}$ , και επειδή η  $r_{lm}$  είναι μη αναγώγιμη, τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα  $p_l$  και  $q_m$  θα είναι άρτια.

Αφού η συνάρτηση  $r_{lm}$  είναι η βέλτιστη ρητή προσέγγιση της συνάρτησης  $\hat{f}$ , συμπεραίνουμε ότι η  $r_{lm}^2$  είναι μία καλή προσέγγιση της συνάρτησης  $\hat{f}^2$ . Αυτό σημαίνει, ότι υπάρχει  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε

$$\left\| \frac{f}{z_\rho} - \frac{p_l^2}{q_m^2} \right\|_\infty < \varepsilon,$$

ή ισοδύναμα, ότι υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε

$$\left\| \frac{q_m^2 f}{z_\rho p_l^2} - 1 \right\|_\infty < \delta.$$

Η παραπάνω ανισότητα σημαίνει ότι οι τιμές της συνάρτησης  $\frac{q_m^2 f}{z_\rho p_l^2}$  συσσωρεύονται σε μια μικρή περιοχή κοντά στη μονάδα. Δηλαδή, αν επιλέξουμε ως προρρυθμιστή τον πίνακα Toeplitz, που παράγεται από τη συνάρτηση  $\frac{z_\rho p_l^2}{q_m^2}$ , οι ι-

διοτιμές του πίνακα  $T_n^{-1}\left(\frac{z_\rho p_l^2}{q_m^2}\right)T_n(f)$  θα συσσωρεύονται σε μια περιοχή κοντά στη μονάδα, και τότε η προρρυθμισμένη μέθοδος συζυγών κλίσεων θα συγκλίνει πολύ γρήγορα. Επειδή όμως ο πίνακας  $T_n\left(\frac{z_\rho p_l^2}{q_m^2}\right)$  είναι πλήρης (**full**) πίνακας Toeplitz και η λύση συστημάτων με τον πίνακα αυτό έχει το ίδιο κόστος με το σύστημα  $T_n(f)x = b$ , δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προρρυθμιστής. Ο προρρυθμιστής που προτάθηκε είναι ο πίνακας

$$M_n = B_{nm}^{-1}(q_m)B_{ni}(p_l^2 z_\rho)B_{nm}^{-1}(q_m),$$

όπου  $B_{nm}^{-1}(q_m)$  είναι ο αντίστροφος του ταινιωτού πίνακα Toeplitz, ο οποίος παράγεται από τη συνάρτηση  $q_m$ , είναι διάστασης  $n$  και έχει πλάτος ταινίας  $2m$ .  $B_{n\hat{l}}(p_l^2 z_\rho)$  είναι ο ταινιωτός πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από τη συνάρτηση  $p_l^2 z_\rho$ , είναι διάστασης  $n$  και έχει πλάτος ταινίας  $2\hat{l}$ , όπου  $\hat{l} = 2l + \rho$ . Για απλούστευση του συμβολισμού, θα γράφουμε

$$M_n = B_{nm}^{-1}(q)B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)B_{nm}^{-1}(q). \quad (3.5)$$

**Πρόταση 3.3.1.** *Ο πίνακας  $M_n$  είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος για κάθε  $n > 0$ .*

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.5) προκύπτει

$$M_n^T = (B_{nm}^{-1}(q)B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)B_{nm}^{-1}(q))^T = B_{nm}^{-1}(q)B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)B_{nm}^{-1}(q) = M_n,$$

αφού οι πίνακες  $B_{nm}(q)$  και  $B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)$  είναι συμμετρικοί. Αποδείξαμε ότι ο προρρυθμιστής  $M_n$  είναι συμμετρικός.

Μένει να αποδείξουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)$  ανήκουν στο διάστημα  $(\min(p_l^2 z_\rho), \max(p_l^2 z_\rho))$ .

Όμως, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$0 = \min(p_l^2 z_\rho) < \max(p_l^2 z_\rho) = 2^\rho \max(p_l^2).$$

Οπότε, ο πίνακας  $B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ο πίνακας  $B_{nm}(q)$  είναι συμμετρικός και αντιστρέψιμος, επειδή το πολυώνυμο  $q_m$  προκύπτει από τη ρητή προσέγγιση μιας θετικής συνάρτησης, κι έτσι δεν έχει ρίζες στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  έχουμε

$$\frac{x^T M_n x}{x^T x} = \frac{x^T B_{nm}^{-1}(q)B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)B_{nm}^{-1}(q)x}{x^T x} \underset{y=B_{nm}^{-1}(q)x}{=} \frac{y^T B_{n\hat{l}}(p^2 z_\rho)y}{y^T y} > 0.$$

Άρα, ο προρρυθμιστής  $M_n$  είναι θετικά ορισμένος.  $\square$

Δίνουμε ένα χρήσιμο, για τα παρακάτω, Λήμμα.

**Λήμμα 3.3.2.** *Έστω  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  δύο συμμετρικοί πίνακες, τέτοιοι ώστε να ισχύει*

$$A = B + \varepsilon c c^T, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}^n : c^T c = 1.$$

*Αν  $\varepsilon > 0$ , ισχύει*

$$\lambda_1(B) \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(B) \leq \dots \leq \lambda_n(B) \leq \lambda_n(A).$$

Αν  $\varepsilon \leq 0$ , ισχύει

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_1(B) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(B).$$

Αρκεί να θεωρήσουμε ότι οι ιδιοτιμές ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά. Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(B) + t_k \varepsilon, \text{ με } t_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n \text{ και } \sum_{k=1}^n t_k = 1.$$

**Θεώρημα 3.3.3.** Έστω  $\lambda_i(M_n^{-1}T_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , οι ιδιοτιμές του πίνακα  $M_n^{-1}T_n$  και  $h = \frac{fq_m^2}{p_l^2 z_\rho}$ . Αν  $m$  είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $q_m$ , που είναι ο παρονομαστής της ρητής τριγωνομετρικής συνάρτησης  $r_{lm} = \frac{pl}{q_m}$ , τότε τουλάχιστον  $n - 4m$  ιδιοτιμές του πίνακα  $M_n^{-1}T_n$  ανήκουν στο διάστημα  $(h_{\min}, h_{\max})$ , το πολύ  $2m$  ιδιοτιμές είναι μεγαλύτερες από  $h_{\max}$ , και το πολύ  $2m$  ανήκουν στο διάστημα  $(0, h_{\min})$ .

Απόδειξη. Βλέπουμε ότι ο πίνακας  $M_n^{-1}T_n(f) = B_{nm}(q)B_{ni}^{-1}(p^2 z_\rho)B_{nm}(q)T_n(f)$  είναι όμοιος με τον πίνακα  $E = B_{ni}^{-\frac{1}{2}}(p^2 z_\rho)B_{nm}(q)T_n(f)B_{nm}(q)B_{ni}^{-\frac{1}{2}}(p^2 z_\rho)$ .

Αφού ο πίνακας  $B_{nm}(q)$  είναι ταινιωτός πίνακας Toeplitz, με ημιπλάτος ταινίας (**halfbandwidth**) ίσο με  $m$ , ο πίνακας  $B_{nm}(q)T_n(f)$  διαφέρει από τον πίνακα  $T_n(qf)$  μόνο στις πρώτες και τελευταίες  $m$  γραμμές. Ο  $B_{nm}(q)T_n(f)B_{nm}(q)$  διαφέρει από τον πίνακα  $T_n(q^2 f)$  μόνο στις πρώτες και τελευταίες  $m$  γραμμές και στήλες. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα  $B_{nm}(q)T_n(f)B_{nm}(q)$  ως άθροισμα ενός πίνακα μικρής βαθμίδας με τον πίνακα Toeplitz  $T_n(q^2 f)$ . Δηλαδή,

$$B_{nm}(q)T_n(f)B_{nm}(q) = T_n(q^2 f) + \Delta, \quad (3.6)$$

όπου  $\Delta$  είναι συμμετρικός πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν, εκτός από αυτά των πρώτων και τελευταίων  $m$  γραμμών και στηλών. Έτσι, η βαθμίδα του πίνακα  $\Delta$  είναι ανεξάρτητη της διάστασης του πίνακα και ισχύει  $\text{rank}(\Delta) \leq 4m$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.6), έχουμε

$$E = \tilde{E} + B_{ni}^{-\frac{1}{2}}(p^2 z_\rho)\Delta B_{ni}^{-\frac{1}{2}}(p^2 z_\rho), \text{ όπου } \tilde{E} = B_{ni}^{-\frac{1}{2}}(p^2 z_\rho)T_n(q^2 f)B_{ni}^{-\frac{1}{2}}(p^2 z_\rho).$$

Αφού το γινόμενο πινάκων δεν μπορεί να έχει βαθμίδα μεγαλύτερη από αυτή που έχει κάθε ένας όρος του, η βαθμίδα του πίνακα  $E - \tilde{E}$  είναι το πολύ  $4m$ .

Τότε, ο πίνακας  $E - \tilde{E}$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός το πολύ  $4m$  πινάκων βαθμίδας ένα, της μορφής  $cc^T$ . Έστω  $m_+$  το πλήθος των πινάκων στο γραμμικό συνδυασμό με θετικό συντελεστή και  $m_-$  το αντίστοιχο πλήθος με αρνητικό συντελεστή ( $m_+ + m_- \leq 4m$ ). Τότε, ο πίνακας  $E - \tilde{E}$  γράφεται στη μορφή

$$E - \tilde{E} = \sum_{i=1}^{m_+} \alpha_i c_i c_i^T - \sum_{i=1}^{m_-} \beta_i d_i d_i^T,$$

όπου  $\alpha_i > 0$ ,  $c_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1(1)m_+$ , και  $\beta_i > 0$ ,  $d_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1(1)m_-$ , και όλα τα  $c_i$  και  $d_i$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά  $m_+ + m_-$  φορές το Λήμμα 3.3.2 έχουμε ότι το πολύ  $m_+$  ιδιοτιμές του  $E$  θα είναι μεγαλύτερες ή ίσες της  $\lambda_{\max}(\tilde{E})$  και το πολύ  $m_-$  ιδιοτιμές θα είναι μικρότερες ή ίσες της  $\lambda_{\min}(\tilde{E})$ , οπότε

$$h_{\min} \leq \lambda_{\min}(\tilde{E}) \leq \lambda_i(E) \leq \lambda_{\max}(\tilde{E}) \leq h_{\max}, \quad m_- < i \leq n - m_+.$$

Όμως ο πίνακας  $E$  είναι όμοιος με τον πίνακα  $M_n^{-1}T_n(f)$  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

Η λύση συστημάτων Toeplitz, χρησιμοποιώντας την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων με τον προρρυθμιστή  $M_n$ , μπορεί να δοθεί με  $O(n \log n)$  πράξεις για μεγάλο  $n$  [21].

### 3.4 Συνδυασμός $\tau$ και Ταινιωτού Πίνακα Toeplitz

Το 2008 οι Δημήτριος Νούτσος και Πάρης Βασσάλος πρότειναν έναν προρρυθμιστή, ο οποίος δίνεται ως το γινόμενο ενός ταινιωτού πίνακα Toeplitz με πίνακες που ανήκουν στην κλάση  $\mathcal{T}_n$  (βλ. ενότητα 2.4) για την επίλυση συμμετρικών συστημάτων Toeplitz με κακή κατάσταση. Μάλιστα, αποδείχθηκε ότι αυτός ο προρρυθμιστής οδηγεί στην υπεργραμμική σύγκλιση της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων.

Έστω ότι η  $f$  είναι άρτια, μη αρνητική, συνεχής και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση, με πεπερασμένο πλήθος ριζών στα σημεία  $\{\theta_j\}_{j=1}^k$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , πολλαπλότητας  $2v_j$ , αντίστοιχα και  $\sum_{j=1}^k v_j = v$ . Η  $f$  μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο  $b_v \hat{w}$ , όπου  $b_v$  δίνεται από τη σχέση (3.2) και γνωρίζουμε ότι είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού, που έχει τις ίδιες ρίζες με τη συνάρτηση  $f$  (και

με την ίδια πολλαπλότητα) και  $\hat{w}$  είναι θετική συνάρτηση για κάθε  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Έστω ότι  $w = \sqrt{\hat{w}} = \sqrt{\frac{f}{b_v}}$ . Ο προρρυθμιστής που προτάθηκε είναι ο πίνακας

$$K_n = \tau(w)b_m(T_n)\tau(w), \quad (3.7)$$

όπου  $b_m(T_n)$  είναι ο ταινιωτός προρρυθμιστής Toeplitz, που παράγεται από τη συνάρτηση  $b_v$  (βλ. ενότητα 3.1) και  $\tau(w)$  είναι πίνακας, που ανήκει στην κλάση  $\mathcal{T}_n$  και δίνεται από τη σχέση

$$\tau(w) = \mathcal{S}_n \delta(w(u^n)) \mathcal{S}_n,$$

όπου  $\mathcal{S}_n$  είναι ο πίνακας διακριτού μετασχηματισμού ημιτόνου,  $u^n$  είναι το διάνυσμα με συνιστώσες  $u_i^n = \frac{\pi i}{n+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , και  $\delta(w(u^n))$  είναι διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου να δίνονται από τις τιμές  $w(u_i^n)$ .

Όταν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, η συνάρτηση  $b_v$  είναι επίσης άρτια. Οπότε, ο πίνακας  $b_m(T_n)$  είναι συμμετρικός. Ο πίνακας  $\tau(w)$  είναι επίσης συμμετρικός, αφού ο  $\mathcal{S}_n$  είναι συμμετρικός και ο  $\delta(w(u^n))$  είναι διαγώνιος πίνακας. Από τη σχέση (3.7) έχουμε

$$K_n^T = (\tau(w)b_m(T_n)\tau(w))^T = \tau(w)b_m(T_n)\tau(w) = K_n,$$

δηλαδή ο προρρυθμιστής  $K_n$  είναι συμμετρικός. Ο  $K_n$  είναι και θετικά ορισμένος, αφού  $\forall x \in \mathbb{C}^{n,n} \setminus \{0\}$  ισχύει

$$(x, K_n x)_2 = (x, \tau(w)b_m(T_n)\tau(w)x)_2 = (\tau(w)x, b_m(T_n)\tau(w)x)_2 > 0,$$

επειδή ο πίνακας  $b_m(T_n)$  είναι θετικά ορισμένος (βλ. ενότητα 3.1).

**Θεώρημα 3.4.1.** Έστω  $T_n(f)$  ο πίνακας Toeplitz, ο οποίος παράγεται από μία άρτια, μη αρνητική, συνεχή και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση  $f$  και γράφεται ως  $f = b_v \hat{w}$ , όπου  $\hat{w}$  είναι συνεχής, θετική,  $2\pi$ -περιοδική και άρτια συνάρτηση. Τότε, για  $\varepsilon > 0$ , υπάρχουν  $N, M > 0$ , τέτοια ώστε για κάθε  $n > N$ , το πολύ  $M$  ιδιοτιμές του προρρυθμιστή  $K_n$  δεν ανήκουν στο διάστημα  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ .

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [22]. □

Αποδείχθηκε ότι οι ιδιοτιμές που δεν ανήκουν στο διάστημα  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  βρίσκονται μακριά από το μηδέν και το άπειρο [22], το οποίο εξασφαλίζει την υπεργραμμική σύγκλιση. Αναφέρουμε ότι η λύση ενός συστήματος Toeplitz, με την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων χρησιμοποιώντας τον προρρυθμιστή  $K_n$ , μπορεί να υπολογισθεί με  $O(n \log n)$  πράξεις [22].





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά παραθέτουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας [8, 9, 11, 20, 21, 22, 25]. Σε αυτά αναγράφεται το πλήθος επαναλήψεων της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων για την επίλυση συστημάτων Toeplitz της μορφής  $T_n x = b$ , όπου  $b$  είναι το διάνυσμα που έχει συνιστώσες ίσες με τη μονάδα. Το κριτήριο τερματισμού της μεθόδου είναι  $\frac{\|r^{(k)}\|_2}{\|r^{(0)}\|_2} \leq 10^{-7}$ , όπου  $r^{(k)}$  είναι το διάνυσμα υπόλοιπο που προκύπτει μετά την  $k$  επανάληψη. Ακολουθούν κάποια σχήματα στα οποία φαίνεται η συσσώρευση του φάσματος ιδιοτιμών του προρρυθμισμένου συστήματος γύρω από τη μονάδα, όταν το αρχικό σύστημα έχει καλή κατάσταση, χρησιμοποιώντας τον προρρυθμιστή του T. Chan,  $c(T_n)$ . Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με όμοια σχήματα για συστήματα Toeplitz με κακή κατάσταση στα οποία χρησιμοποιήσαμε τον προρρυθμιστή  $b_m(T_n)$ , ο οποίος προτάθηκε από τον R. Chan. Τα σχήματα αναπαράχθηκαν με χρήση του υπολογιστικού πακέτου *Mathematica*.

### 4.1 Πλήθος Επαναλήψεων

Στον Πίνακα 4.1 δίνεται το πλήθος επαναλήψεων της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων, όταν ο πίνακας Toeplitz  $T_n$  παράγεται από τη συνάρτηση  $f(\theta) = 2 \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\sin(\kappa\theta) + \cos(\kappa\theta)}{(1+\kappa)^{1.1}}$ , με χρήση των κυκλοειδών προρρυθμιστών του Strang και T. Chan για διάφορες τιμές του  $n$ . Με  $s^{(0)}(T_n)$ ,  $s^{(a)}(T_n)$  και  $c(T_n)$  συμβολίζουμε τον προρρυθμιστή του Strang για τον οποίο ισχύει  $s_{\lfloor n/2 \rfloor} = 0$ , τον προρρυθμιστή του Strang για τον οποίο ισχύει  $s_{\lfloor n/2 \rfloor} = \frac{1}{2}(t_{\lfloor n/2 \rfloor} + t_{-\lfloor n/2 \rfloor})$  (βλ. Ενότητα 2.2) και τον προρρυθμιστή του T. Chan, αντίστοιχα. Σε όλους τους πίνακες που ακολουθούν με  $I_n$  δηλώνουμε ότι δεν έχει γίνει προρρύθμιση στο αρχικό σύστημα και η λύση του δίνεται από τη μέθοδο συζυγών κλίσεων.

$n$	$s^{(0)}(T_n)$	$s^{(a)}(T_n)$	$c(T_n)$	$I_n$
32	7	8	6	15
64	7	7	7	18
128	7	7	7	20
256	7	7	7	21
512	8	8	7	22

Πίνακας 4.1:  $f(\theta) = 2 \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\sin(\kappa\theta) + \cos(\kappa\theta)}{(1+\kappa)^{1.1}}$

Τα στοιχεία του πίνακα  $T_n$  που παράγεται από τη συνάρτηση

$$f(\theta) = 2 \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\sin(\kappa\theta) + \cos(\kappa\theta)}{(1+\kappa)^{1.1}}$$

είναι:

$$t_0 = 2, t_\kappa = \frac{1-i}{(\kappa+1)^{1.1}}, t_{-\kappa} = \frac{1+i}{(\kappa+1)^{1.1}}, \kappa = 1, \dots, n-1.$$

Η λύση του συστήματος  $T_n x = b$  στον Πίνακα 4.1, με χρήση των προρρυθμιστών που αναφέρθηκαν δίνεται περίπου με το ίδιο πλήθος επαναλήψεων. Αναφέρουμε ότι το φάσμα ιδιοτιμών του προρρυθμιστή  $s(T_n)$  είναι ασυμπτωτικά ίσο με αυτό του πίνακα  $c(T_n)$  [5].

Στον Πίνακα 4.2 δίνεται το πλήθος επαναλήψεων της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων, όταν ο πίνακας  $T_n$  παράγεται από την άρτια συνάρτηση  $f(\theta) = \theta^4 + 1$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , με χρήση των προρρυθμιστών, του Strang,  $s(T_n)$ , του T. Chan,  $c(T_n)$ , και του βέλτιστου προρρυθμιστή μετασχηματισμού ημιτόνου,  $\tau_o(T_n)$ , για διάφορες τιμές του  $n$ .

Οι τρεις προρρυθμιστές δίνουν τη λύση του συστήματος περίπου με το ίδιο πλήθος επαναλήψεων, ειδικά όταν η διάσταση του πίνακα είναι μεγάλη. Επίσης παρατηρούμε ότι χωρίς τη χρήση κάποιου προρρυθμιστή και όσο αυξάνεται η διάσταση του πίνακα, η λύση του συστήματος δίνεται με περισσότερες επαναλήψεις.

Στον Πίνακα 4.3 δίνεται το πλήθος επαναλήψεων της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων, όταν η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα Toeplitz  $T_n$  είναι η

$n$	$s(T_n)$	$c(T_n)$	$\tau_o(T_n)$	$I_n$
32	7	8	6	19
64	6	5	5	36
128	6	5	5	54
256	6	5	5	66
512	6	5	5	70

Πίνακας 4.2:  $f(\theta) = \theta^4 + 1, \theta \in [-\pi, \pi]$

$f(\theta) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\cos(\kappa\theta)}{2^\kappa}$ , με χρήση του βέλτιστου προρρυθμιστή μετασχηματισμού ημιτόνου,  $\tau_o(T_n)$ , και του βέλτιστου προρρυθμιστή μετασχηματισμού Hartley,  $h_o(T_n)$ , για διάφορες τιμές του  $n$ .

$n$	$\tau_o(T_n)$	$h_o(T_n)$	$I_n$
128	4	5	20
256	3	5	19
512	3	4	19

Πίνακας 4.3:  $f(\theta) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\cos(\kappa\theta)}{2^\kappa}$

Τα στοιχεία του πίνακα  $T_n$  που παράγεται από τη συνάρτηση

$$f(\theta) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\cos(\kappa\theta)}{2^\kappa}$$

είναι:

$$t_{-\kappa} = t_\kappa = \frac{1}{2^\kappa}, \kappa = 0, \dots, n-1.$$

Φαίνεται ότι ο προρρυθμιστής  $\tau_o(T_n)$  δίνει τη λύση του συστήματος λίγο πιο

γρήγορα σε σχέση με τον προρρυθμιστή  $h_o(T_n)$ . Ωστόσο ο βέλτιστος προρρυθμιστής μετασχηματισμού Hartley,  $h_o(T_n)$ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα  $T_n$  δεν ανήκει στην κλάση Wiener. Αυτό φαίνεται στον Πίνακα 4.4, στον οποίο δίνεται το πλήθος επαναλήψεων για συστήματα

Toeplitz, που έχουν ως γεννήτρια συνάρτηση την  $f_1(\theta) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\cos(\kappa\theta)}{\sqrt{\kappa+1}}$  και

$$f_2(\theta) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\cos(\kappa\theta)}{\kappa+1}.$$

Παρατηρούμε ότι με χρήση του προρρυθμιστή  $h_o(T_n)$  το πλήθος επαναλήψεων μένει σταθερό και για τα δύο συστήματα, ενώ χωρίς προρρύθμιση αυξάνεται σημαντικά.

$n$	$f_1(\theta) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\cos(\kappa\theta)}{\sqrt{\kappa+1}}$		$f_2(\theta) = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\cos(\kappa\theta)}{\kappa+1}$	
	$h_o(T_n)$	$I_n$	$h_o(T_n)$	$I_n$
128	7	22	7	18
256	7	28	7	21
512	7	34	7	23

Πίνακας 4.4

Τα στοιχεία του πίνακα  $T_n$  που παράγεται από τη συνάρτηση  $f_1(\theta)$  είναι:

$$t_{-\kappa} = t_{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}, \kappa = 0, \dots, n-1.$$

και τα στοιχεία του πίνακα  $T_n$  που παράγεται από τη συνάρτηση  $f_2(\theta)$  είναι:

$$t_{-\kappa} = t_{\kappa} = \frac{1}{\kappa+1}, \kappa = 0, \dots, n-1.$$

Στον Πίνακα 4.5 δίνεται το πλήθος επαναλήψεων της προρρυθμισμένης μεθόδου συζυγών κλίσεων όταν ο πίνακας  $T_n$  έχει ως γεννήτρια συνάρτηση, τη μη αρνητική και άρτια συνάρτηση  $f(\theta) = \theta^4$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Με  $b_m(T_n)$  συμβολίζουμε τον ταινιωτό προρρυθμιστή του R. Chan. Με  $b_o^{(5)}(T_n)$ ,  $\bar{b}_s^{(3)}(T_n)$  και  $\hat{b}_s^{(3)}(T_n)$  συμβολίζουμε τον ταινιωτό προρρυθμιστή των R. Chan και Tang με ημιπλάτος 5,

τον ταινιωτό προρρυθμιστή που προτάθηκε από τον Serra, κατασκευάζεται με τον τρόπο (A') και το πολυώνυμο προσέγγισης είναι τρίτου βαθμού και τον ταινιωτό προρρυθμιστή που προτάθηκε από τον Serra και κατασκευάζεται με τον τρόπο (B') με το πολυώνυμο προσέγγισης να είναι επίσης τρίτου βαθμού (βλ. Ενότητα 3.2), αντίστοιχα. Οι τρεις προρρυθμιστές που αναφέραμε είναι εντεκαδιαγώνιοι. Τέλος, με  $M_n^{(1,2)}$  και  $K_n$  συμβολίζουμε τον προρρυθμιστή που προκύπτει από τη βέλτιστη ρητή προσέγγιση με το πολυώνυμο του αριθμητή να είναι πρώτου βαθμού και το πολυώνυμο του παρονομαστή δευτέρου και τον προρρυθμιστή που προκύπτει ως γινόμενο ταινιωτού με  $\tau$  πίνακα, αντίστοιχα.

$n$	$I_n$	$b_m(T_n)$	$b_o^{(5)}(T_n)$	$\bar{b}_s^{(3)}(T_n)$	$\hat{b}_s^{(3)}(T_n)$	$M_n^{(1,2)}$	$K_n$
32	34	15	11	11	8	6	5
64	119	20	11	11	10	8	5
128	587	24	12	12	11	10	6
256	>1000	27	12	12	13	11	7
512	>1000	29	13	13	13	11	7

Πίνακας 4.5:  $f(\theta) = \theta^4$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$

Παρατηρούμε ότι με επιλογή του πίνακα  $K_n$  ως προρρυθμιστή η λύση του συστήματος δίνεται με τις λιγότερες επαναλήψεις. Αυτό το αποτέλεσμα είναι φυσιολογικό αφού ο  $K_n$  επιτυγχάνει την υπεργραμμική σύγκλιση της μεθόδου. Ο προρρυθμιστής  $b_m(T_n)$  φαίνεται ότι υστερεί σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προρρυθμιστές οι οποίοι δίνουν τη λύση σχεδόν με το ίδιο πλήθος επαναλήψεων. Αναφέρουμε ότι οι προρρυθμιστές  $b_o^{(5)}(T_n)$  και  $\bar{b}_s^{(3)}(T_n)$  στη συγκεκριμένη περίπτωση ταυτίζονται. Σε περίπτωση που δεν επιλέξουμε κάποιον προρρυθμιστή η μέθοδος δε συγκλίνει, λόγω σφαλμάτων, διότι το πλήθος επαναλήψεων αυτής είναι μεγαλύτερο από τη διάσταση του πίνακα, όμως θεωρούμε χρήσιμο να εμπεριέχεται στον Πίνακα 4.5 για να τονιστεί η σημασία της προρρύθμισης.

## 4.2 Συσσώρευση Φάσματος Ιδιοτιμών

Συμβολίζουμε με  $T_n(f)$  τον πίνακα Toeplitz διάστασης  $n$  που παράγεται από μια συνάρτηση  $f$ . Σε όλα τα σχήματα οι ιδιοτιμές είναι διατεταγμένες σε φθίνουσα

σειρά (από τα αριστερά προς τα δεξιά) και οι τιμές που λαμβάνουν αναγράφονται στον κάθετο άξονα. Με ■ και ★ συμβολίζουμε τις ιδιοτιμές του αρχικού και προρρυθμισμένου συστήματος, αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται η συσσώρευση του φάσματος ιδιοτιμών του αρχικού και προρρυθμισμένου συστήματος, για διάφορες τιμές του  $n$ , με χρήση του προρρυθμιστή του T. Chan,  $c(T_n)$ , όταν η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα Toeplitz είναι η

$$f(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2 \cos(k\theta)}{(k+1)^{1.1}}.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα  $T_n$  είναι θετική, οπότε η ακολουθία πινάκων  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  έχει καλή κατάσταση. Παρατηρούμε ότι το φάσμα ιδιοτιμών του προρρυθμισμένου συστήματος συσσωρεύεται γύρω από τη μονάδα. Η μεταβολή του δείκτη κατάστασης από το αρχικό στο προρρυθμισμένο σύστημα φαίνεται στον Πίνακα 4.6.

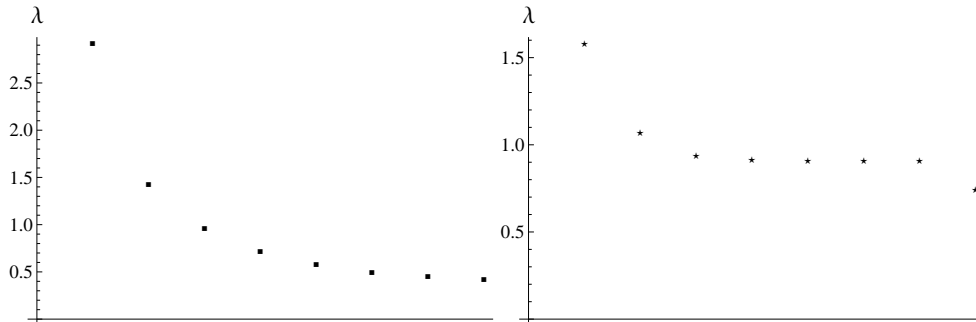
$n$	$\kappa_2(T_n)$	$\kappa_2(c(T_n)^{-1}T_n)$
8	6.87	2.13
16	9.13	2.47
64	13.74	2.86

Πίνακας 4.6

Στο Σχήμα 4.2 φαίνεται η συσσώρευση του φάσματος ιδιοτιμών του αρχικού και προρρυθμισμένου συστήματος, για διάφορες τιμές του  $n$ , με χρήση του προρρυθμιστή του R. Chan,  $b_m(T_n)$ , όταν η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα Toeplitz είναι η

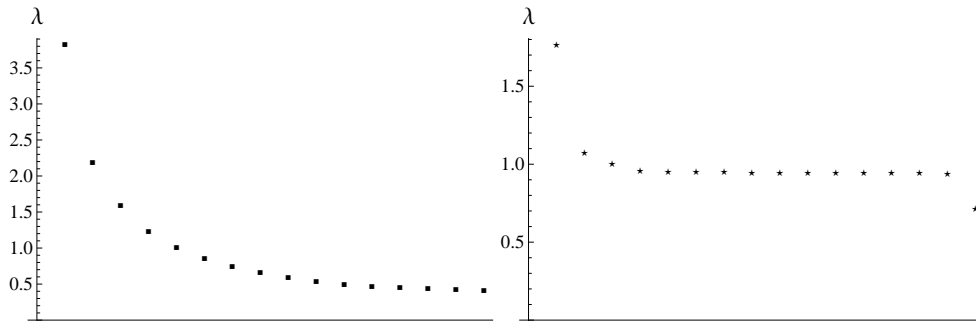
$$f(\theta) = \theta^4, \theta \in [-\pi, \pi].$$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας  $T_n$  έχει κακή κατάσταση και οι ιδιοτιμές του αρχικού συστήματος συγχλίνουν στο μηδέν για μεγάλο  $n$ . Με χρήση του προρρυθμιστή  $b_m(T_n)$  καταφέρνουμε να συσσωρεύσουμε τις ιδιοτιμές (του προρρυθμισμένου συστήματος) σε ένα μικρότερο διάστημα και να αποτρέψουμε τη σύγκλιση αυτών στο μηδέν όταν η διάσταση του πίνακα αυξάνεται. Η μεταβολή του δείκτη κατάστασης από το αρχικό στο προρρυθμισμένο σύστημα φαίνεται στον Πίνακα 4.7.



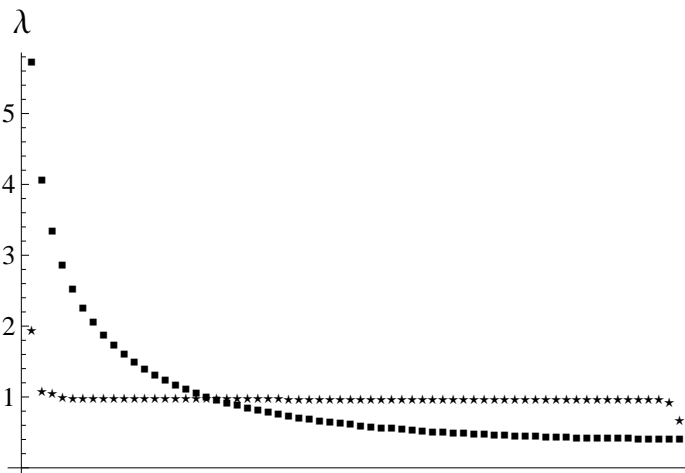
(α) Αρχικό σύστημα για  $n = 8$

(β) Προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 8$



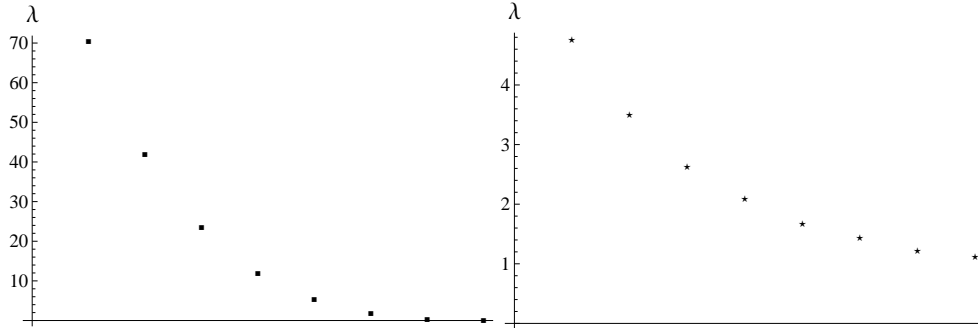
(γ) Αρχικό σύστημα για  $n = 16$

(δ) Προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 16$



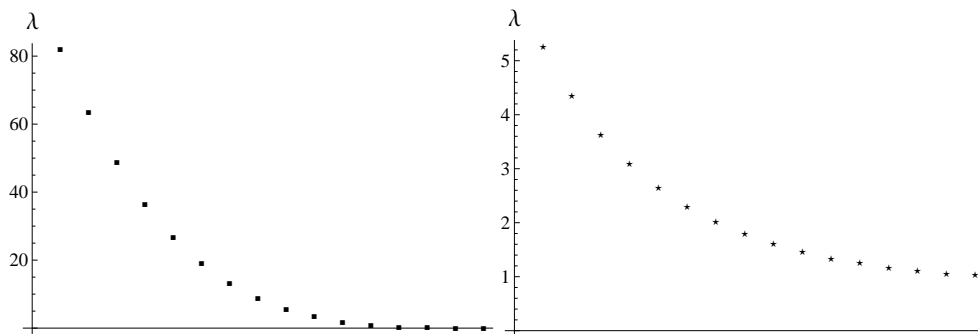
(ε) Αρχικό και προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 64$

Σχήμα 4.1: 
$$f(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2 \cos(k\theta)}{(k+1)^{1.1}}$$



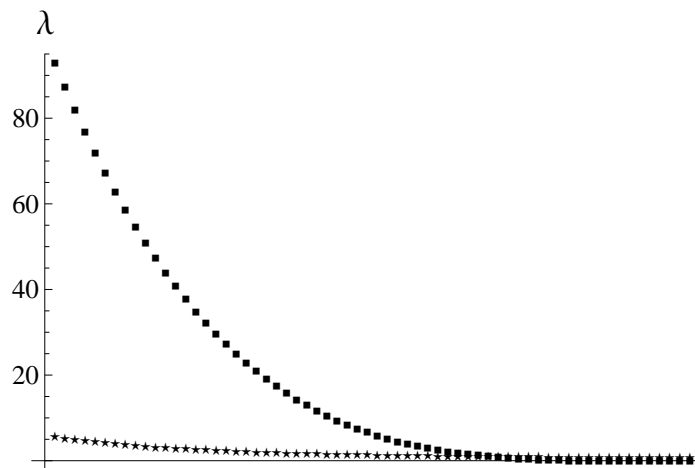
(α) Αρχικό σύστημα για  $n = 8$

(β') Προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 8$



(γ') Αρχικό σύστημα για  $n = 16$

(δ') Προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 16$



(ε') Αρχικό και προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 64$

Σχήμα 4.2:  $f(\theta) = \theta^4, \theta \in [-\pi, \pi]$



$n$	$\kappa_2(T_n)$	$\kappa_2(b_m(T_n)^{-1}T_n)$
8	1119.58	4.22
16	15303.6	5.07
64	3426147.42	5.82

Πίνακας 4.7

Στο Σχήμα 4.3 φαίνεται η συσσώρευση του φάσματος ιδιοτιμών του αρχικού και προρρυθμισμένου συστήματος, για διάφορες τιμές του  $n$ , με χρήση του προρρυθμιστή του R. Chan,  $b_m(T_n)$ , όταν η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα Toeplitz είναι η

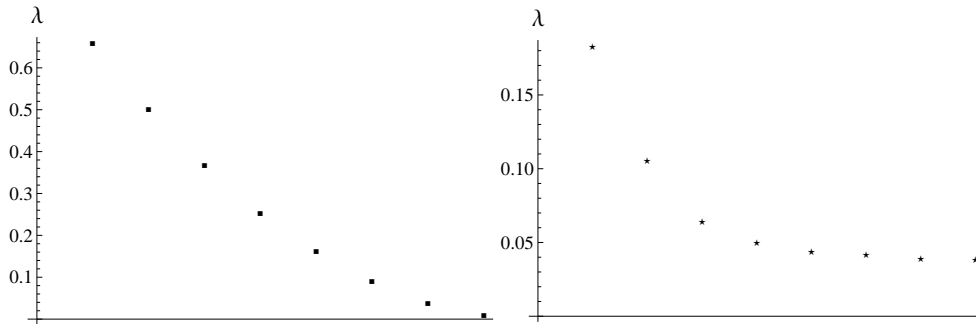
$$f(\theta) = \frac{2\theta^4}{1 + 25\theta^2}.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση του πίνακα  $T_n$  έχει ρίζες, οπότε ο  $T_n$  έχει επίσης κακή κατάσταση και οι ιδιοτιμές του αρχικού συστήματος συγκλίνουν στο μηδέν για μεγάλο  $n$ . Ο προρρυθμιστής  $b_m(T_n)$  αποτρέπει τη σύγκλιση των ιδιοτιμών στο μηδέν όταν η διάσταση του πίνακα αυξάνεται. Η μεταβολή του δείκτη κατάστασης από το αρχικό στο προρρυθμισμένο σύστημα φαίνεται στον Πίνακα 4.8.

$n$	$\kappa_2(T_n)$	$\kappa_2(b_m(T_n)^{-1}T_n)$
8	76.61	4.71
16	399.74	11.57
64	24924.4	38.98

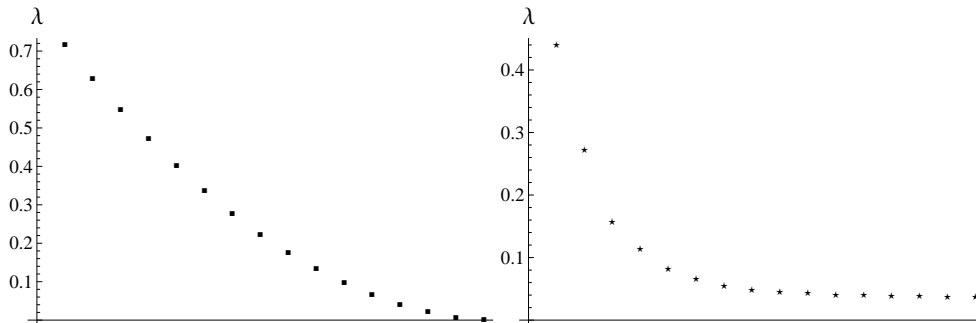
Πίνακας 4.8

Παρά τη συσσώρευση του φάσματος ιδιοτιμών του προρρυθμισμένου συστήματος σε μια περιοχή μακριά από τη μονάδα και κοντά στο μηδέν (βλ. Σχήμα 4.3ε'), η διαφορά μεταξύ των δεικτών κατάστασης των δύο συστημάτων είναι εμφανής, αφού με χρήση του προρρυθμιστή  $b_m(T_n)$  αποτρέπεται η συσσώρευση του φάσματος ιδιοτιμών στο μηδέν.



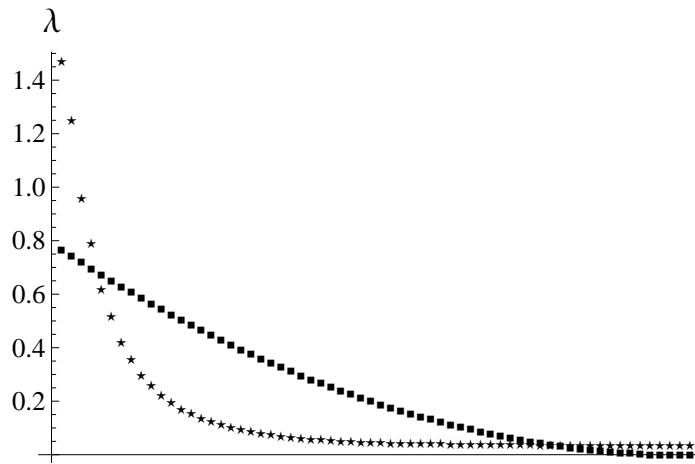
(α) Αρχικό σύστημα για  $n = 8$

(β) Προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 8$



(γ) Αρχικό σύστημα για  $n = 16$

(δ) Προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 16$



(ε) Αρχικό και προρρυθμισμένο σύστημα για  $n = 64$

Σχήμα 4.3:  $f(\theta) = \frac{2\theta^4}{1 + 25\theta^2}$

# Βιβλιογραφία

- [1] **Avron, H., Ng, E., and Toledo, S.** *A generalized Courant-Fischer minimax theorem*. Tech. rep. Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA (US), 2008.
- [2] **Axelsson, O. and Barker, V. A.** *Finite element solution of boundary value problems: theory and computation*. Vol. 35. Classics In Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1984.
- [3] **Bini, D. and Capovani, M.** “Spectral and computational properties of band symmetric Toeplitz matrices”. In: *Linear Algebra and its Applications* **52** (1983), pp. 99–126.
- [4] **Bini, D. and Di Benedetto, F.** “A new preconditioner for the parallel solution of positive definite Toeplitz systems”. In: *Proceedings of the second annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*. ACM. 1990, pp. 220–223.
- [5] **Chan, R.** “The spectrum of a family of circulant preconditioned Toeplitz systems”. In: *SIAM J. Numer. Anal.* **26.2** (1989), pp. 503–506.
- [6] **Chan, R.** “Toeplitz preconditioners for Toeplitz systems with nonnegative generating functions”. In: *IMA Journal of Numerical Analysis* **11.3** (1991), pp. 333–345.
- [7] **Chan, R. and Jin, X.-Q.** *An introduction to iterative Toeplitz solvers*. Fundamentals of Algorithms. SIAM, Philadelphia, 2007.
- [8] **Chan, R., Ng, M., and Wong, CK.** “Sine transform based preconditioners for symmetric Toeplitz systems”. In: *Linear Algebra and its Applications* **232** (1996), pp. 237–259.

- [9] **Chan, R. and Tang, P. T. P.** “Fast band-Toeplitz preconditioners for Hermitian Toeplitz systems”. In: *SIAM J. Sci. Comput.* **15.1** (1994), pp. 164–171.
- [10] **Di Benedetto, F.** “Iterative solution of Toeplitz systems by preconditioning with the discrete sine transform”. In: *SPIE’s 1995 International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics. 1995, pp. 302–312.
- [11] **Di Fiore, C. and Zellini, P.** “Matrix algebras in optimal preconditioning”. In: *Linear Algebra and its Applications* **335.1** (2001), pp. 1–54.
- [12] **Δουγαλής, Β., Νούτσος, Δ. και Χατζηδήμος, Α.** *Αριθμητική γραμμική άλγεβρα*. Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Ιωαννίνων, 2009.
- [13] **Golub, G. and Van Loan, C.** *Matrix computations*. Vol. 3. JHU Press, 2012.
- [14] **Gray, R.** *Toeplitz and circulant matrices: A review*. NOW, the essence of knowledge, Boston-Delft, 2006.
- [15] **Grenander, U. and Szegő, G.** *Toeplitz forms and their applications*. Vol. 321. Univ of California Press, 1958.
- [16] **Higham, N.** *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM, Philadelphia, 2002.
- [17] **Jin, X.-Q.** “Hartley preconditioners for Toeplitz systems generated by positive continuous functions”. In: *BIT Numerical Mathematics* **34.3** (1994), pp. 367–371.
- [18] **Kra, I. and Simanca, S.** “On circulant matrices”. In: *Notices of the AMS* **59.3** (2012), pp. 368–377.
- [19] **Ng, M.** *Iterative methods for Toeplitz systems*. Oxford University Press, 2004.
- [20] **Noschese, S. and Reichel, L.** “Generalized circulant Strang-type preconditioners”. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* **19.1** (2012), pp. 3–17.
- [21] **Noutsos, D. and Vassalos, P.** “New band Toeplitz preconditioners for ill-conditioned symmetric positive definite Toeplitz systems”. In: *SIAM J. Matrix Anal. & Appl.* **23.3** (2002), pp. 728–743.
- [22] **Noutsos, D. and Vassalos, P.** “Superlinear convergence for PCG using band plus algebra preconditioners for Toeplitz systems”. In: *Computers & Mathematics with Applications* **56.5** (2008), pp. 1255–1270.

- [23] **Ντούγιας, Σ.** *Απειροστικός λογισμός II*. Τόμ. β'. Leader books, 2007.
- [24] **Rivlin, T.** *An introduction to the approximation of functions*. Courier Corporation, 2003.
- [25] **Serra, S.** “Optimal, quasi-optimal and superlinear band-Toeplitz preconditioners for asymptotically ill-conditioned positive definite Toeplitz systems”. In: *Mathematics of Computation* **66.218** (1997), pp. 651–665.
- [26] **Strang, G.** “A proposal for Toeplitz matrix calculations”. In: *Studies in Applied Mathematics* **74.2** (1986), pp. 171–176.
- [27] **Tang, P. T. P.** “A fast algorithm for linear complex Chebyshev approximations”. In: *Mathematics of Computation* **51.184** (1988), pp. 721–739.
- [28] **Tang, Z., Duraiswami, R., and Gumerov, N.** “Fast algorithms to compute matrix-vector products for pascal matrices”. In: *Technical Reports from UMIACS* **8** (2004). URL: <http://drum.lib.umd.edu/handle/1903/1338> (visited on 01/11/2015).
- [29] **Wilkinson, J. H.** *The algebraic eigenvalue problem*. Vol. 87. Clarendon Press Oxford, 1965.
- [30] **Zhan, X.** *Matrix theory*. Vol. 147. American Mathematical Society, 2013.