



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Αναστάσιος Σιώκης

---

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΟΡΙΑΚΟΥ  
ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΒΑΘΜΙΔΑ ΠΙΕΣΗΣ ΚΑΙ ΘΕΡΜΙΚΗ  
ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

---

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2015



*Αφιερώνεται στους γονείς μου,  
Μενέλαο και Ελένη*



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 10/07/2015 από την εξεταστική επιτροπή:

**Ονοματεπώνυμο    Βαθμίδα**

Μιχαήλ Ξένος            Επίκουρος Καθηγητής

Δημήτριος Νούτσος    Καθηγητής

Ιωάννης Γιαννούλης    Επίκουρος Καθηγητής

#### ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Αναστάσιος Σιώκης



---

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Η παρούσα διατριβή αποτελεί την ολοκλήρωση μιας προσπάθειας κατά τη διάρκεια της οποίας γνώρισα και συνεργάστηκα με τον διδάσκοντα καθηγητή κ. Μ. Ξένο. Τον ευχαριστώ για την σημαντική καθοδήγηση στα πρώτα βήματα αυτής της εργασίας, αλλά κυρίως για το γεγονός ότι καθ' όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στάθηκε δίπλα μου με υπομονή και κατανόηση.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές κ.κ. Δ. Νούτσο, Ι. Γιαννούλη και Θ. Χωρίκη για τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις τους σε θέματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της συγγραφής της διατριβής.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Μενέλαο και Ελένη, για την υπομονή και κατανόηση που έδειξαν απέναντι μου καθώς και για την οικονομική και ηθική υποστήριξη που μου προσέφεραν και μου προσφέρουν. Τέλος, ευχαριστώ το κορίτσι μου, Καλυψώ, για την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξη στην ολοκλήρωση της προσπάθειας αυτής.





---

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Στη μηχανική των ρευστών η βαθμίδα πίεσης και η θερμική ακτινοβολία παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην αποκόλληση του οριακού στρώματος και στη μεταφορά θερμότητας. Σε αυτήν την εργασία, μελετούμε την ασυμπίεστη (αριθμός Mach μικρότερος του 0.3), στρωτή ροή οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη πλάκα, με βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία. Οι αρχικές εξισώσεις συνέχειας, ορμής (Navier-Stokes) και ενέργειας, αδιαστατοποιούνται μέσω του μετασχηματισμού Falkner-Skan. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα μη γραμμικό και συζευγμένο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ).

Το σύστημα ΜΔΕ που προκύπτει είναι παραβολικού τύπου και οι άγνωστες συναρτήσεις της ταχύτητας και της θερμοκρασίας είναι συναρτήσεις των  $x$  και  $\eta$  ανεξάρτητων χωρικών μεταβλητών. Χρησιμοποιώντας μεθόδους διαταραχών για την  $x$  ανεξάρτητη μεταβλητή, σκοπός μας είναι να απαλλάξουμε το σύστημα από αυτήν. Το οριακό στρώμα τώρα περιγράφεται μόνο από την  $\eta$  ανεξάρτητη μεταβλητή. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαταραχών και διατηρώντας όρους μέχρι  $\varepsilon^2$ , το σύστημα των δύο ΜΔΕ μετασχηματίζεται σε σύστημα έξι ΣΔΕ με μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή το  $\eta$ . Στο σύστημα ΣΔΕ εμφανίζεται ως πρόβλημα μηδενικής τάξης η γνωστή εξίσωση Blasius. Για αυτήν την εξίσωση χρησιμοποιούμε τρεις προσεγγιστικές μεθόδους, τη μέθοδο ομοτοπικής ανάλυσης (ΜΟΑ), τη μέθοδο διαφορικού μετασχηματισμού (ΜΔΜ) και τη μέθοδο ανάλυσης του Adomian (ΜΑΑ), και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτών των μεθόδων με την προσεγγιστική λύση που έδωσε ο Blasius και με την αριθμητική λύση της εξίσωσης αυτής με τη μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Όπως φαίνεται σε πίνακες που παρατίθενται, οι τιμές που προκύπτουν από αυτές τις μεθόδους είναι πολύ κοντά σε αυτές που δόθηκαν από τον Blasius και σε αυτές που δίνονται αριθμητικά. Επίσης, γραμμικοποιώντας την εξίσωση Blasius καταλήγουμε σε μια αναλυτική λύση, η οποία είναι πολύ κοντά στις προσεγγιστικές λύσεις και στην αριθμητική λύση. Όπως φαίνεται σε πίνακες που παρατίθενται τα σφάλματα της αναλυτικής λύσης που βρίσκουμε ως προς την αριθμητική λύση είναι πολύ μικρά.

Για την ολική λύση του συστήματος χρησιμοποιήσαμε μια υβριδική τεχνική, όπου η ΜΟΑ εφαρμόζεται στα μηδενικής τάξης προβλήματα και η ΜΔΜ εφαρ-

μόζεται στα πρώτης και δεύτερης τάξης προβλήματα διαταραχών. Επιστρέφοντας στη μέθοδο διαταραχών, οι λύσεις που παίρνουμε περιγράφουν πολύ καλά το υπό μελέτη πρόβλημα. Παρουσιάζονται οι επιδράσεις της βαθμίδας πίεσης (ευνοϊκής και αντίξωσης) και της θερμικής ακτινοβολίας. Συγκρίνονται, επίσης, τα αποτελέσματα των προσεγγιστικών λύσεων με τις αριθμητικές λύσεις.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις προσεγγιστικές μεθόδους είναι πολύ ενδιαφέροντα. Συγκεκριμένα, η αντίξωση βαθμίδα πίεσης επιβραδύνει το οριακό στρώμα, μείωση της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ , κάτι που θα οδηγήσει σε ταχύτερη αποκόλλησή του, ενώ η ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης το επιταχύνει, αύξηση της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ . Επίσης, ο συνδυασμός αντίξωσης βαθμίδας πίεσης και θερμικής ακτινοβολίας αυξάνει την αδιάστατη θερμοκρασία,  $\theta(\eta)$ , του οριακού στρώματος, ενώ ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία οδηγεί σε μείωση της αδιάστατης θερμοκρασίας,  $\theta(\eta)$ , του οριακού στρώματος. Τέλος, η επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας γίνεται εντονότερη όταν υπάρχει μεγαλύτερη θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ πλάκας και ρευστού. Η παρούσα εργασία μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της ροής οριακού στρώματος και στη βελτίωση προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα της μηχανικής των ρευστών.

---

# ABSTRACT

---

In fluid mechanics and aerospace engineering pressure gradient and thermal radiation effects play significant role in boundary layer separation and heat transfer. In this study, we examine the incompressible (Mach number smaller than 0.3), laminar boundary layer flow over a flat plate with pressure gradient and thermal radiation. The partial differential equations (PDEs) of the problem are the continuity, the momentum (Navier-Stokes) and the energy equations. Using the dimensionless Falkner-Skan transformation we obtain a non-linear and coupled system of PDEs.

The PDE system under consideration has a parabolic nature and the unknown functions of the velocity and the temperature are functions of  $x$  and  $\eta$  independent space variables. Utilizing perturbation methods for the  $x$  independent variable, our purpose is to eliminate the  $x$  independent variable from the system. The boundary layer is described only by  $\eta$  independent variable. Utilizing the perturbation technique and keeping terms up to  $\varepsilon^2$ , the system of two PDEs is transformed to a system of six ODEs, with  $\eta$  the only parameter. Researchers have developed approximate techniques for the solution of non-linear ODEs utilizing power series. In this study, we use three approximate techniques, the Homotopy Analysis Method (HAM), the Differential Transformation Method (DTM) and the Adomian Decomposition Method (ADM) to solve the first equation of the ODE system, known as the Blasius equation. We compare the results with the approximate solution given by Blasius and a numerical solution utilizing the explicit fourth order Runge-Kutta method. The results of the approximate solutions are compared with the numerical ones, achieving very good precision. Linearization of the Blasius equation, also generates an analytical solution, which is also compared with the numerical solution. The results are presented in tables, and the errors of the analytical in terms of the numerical solution are very small.

For the solution of the entire system of ODEs, we utilized a hybrid technique, where the HAM is used to solve the zeroth order equations and the DTM is used to solve the rest of the equations (first and second order). The

total solution of the ODE system obtained from the perturbation technique, describe the problem under consideration very well and the results are very interesting leading to direct answers about the physical problem studied.

The approximate techniques produce results, which are in accordance with other numerical and analytical studies. The adverse pressure gradient affects the boundary layer decreasing the dimensionless velocity,  $f'(\eta)$ , while the favourable pressure gradient increases the dimensionless velocity,  $f'(\eta)$ . Radiation parameter has also an impact on the thermal boundary layer. Adverse pressure gradient and thermal radiation increases the dimensionless temperature,  $\theta(\eta)$ , of the boundary layer, while favourable pressure gradient and thermal radiation decreases the dimensionless temperature,  $\theta(\eta)$ . Thermal radiation effects are greater when there is a bigger temperature difference between the flat plate and the fluid in the boundary layer. This study could bring insight into the problem of the boundary layer control and help towards the development of approximate solutions in fluid mechanics.

---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

<b>Περίληψη</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>5</b>
1.1 Αεροδυναμική . . . . .	5
1.2 Οριακό Στρώμα . . . . .	6
1.2.1 Αδιαστατοποίηση των Εξισώσεων . . . . .	8
1.2.2 Ανάλυση της Τάξης Μεγέθους . . . . .	9
1.2.3 Χαρακτηρισμός του Συστήματος των Εξισώσεων . . . . .	12
1.3 Αριθμός Reynolds και Τύποι Ροής . . . . .	14
1.4 Βαθμίδα Πίεσης . . . . .	15
1.5 Αποκόλληση Οριακού Στρώματος . . . . .	17
1.6 Μετασχηματισμός Falkner-Skan . . . . .	19
1.7 Θερμική Ακτινοβολία . . . . .	22
1.7.1 Τύποι Ακτινοβολίας . . . . .	22
1.7.2 Οπτικό βάθος . . . . .	24
1.7.3 Εξίσωση Ενέργειας . . . . .	24
<b>2 Προσεγγιστικές Τεχνικές</b>	<b>27</b>
2.1 Μέθοδοι Διαταραχών . . . . .	27
2.1.1 Εισαγωγή στις Μεθόδους Διαταραχών . . . . .	27
2.1.2 Ποσότητα Διαταραχής . . . . .	28

2.2	Μέθοδος Ομοτοπικής Ανάλυσης . . . . .	30
2.2.1	Εισαγωγή στη MOA . . . . .	30
2.2.2	Συστηματική Περιγραφή της MOA . . . . .	31
2.2.3	Σύγκλιση της Προσεγγιστικής Λύσης . . . . .	35
2.3	Μέθοδος Διαφορικού Μετασχηματισμού . . . . .	37
2.3.1	Εισαγωγή στη ΜΔΜ . . . . .	37
2.3.2	Συστηματική Περιγραφή της ΜΔΜ . . . . .	37
2.3.3	Προσεγγίσεις πολυωνύμων με ρητές συναρτήσεις Padé . . . . .	42
2.4	Μέθοδος Ανάλυσης του Adomian . . . . .	46
2.4.1	Εισαγωγή στη ΜΑΑ . . . . .	46
2.4.2	Συστηματική Περιγραφή της ΜΑΑ . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Ανάλυση Αποτελεσμάτων</b>	<b>51</b>
3.1	Μετασχηματισμός Falkner-Skan . . . . .	51
3.2	Θεωρία Διαταραχών . . . . .	55
3.3	Εξίσωση Blasius . . . . .	57
3.3.1	Μέθοδος Ομοτοπικής Ανάλυσης - MOA . . . . .	58
3.3.2	Μέθοδος Διαφορικού Μετασχηματισμού - ΜΔΜ . . . . .	61
3.3.3	Μέθοδος Ανάλυσης του Adomian . . . . .	63
3.3.4	Γραμμικοποίηση της εξίσωσης Blasius . . . . .	66
3.3.5	Σύγκριση των Προσεγγιστικών Μεθόδων . . . . .	69
3.4	Ολική Λύση της Εξίσωσης Ορμής . . . . .	71
3.4.1	Συμφωνία Προσεγγιστικών - Αριθμητικών Λύσεων . . . . .	75
3.5	Εξίσωση Ενέργειας . . . . .	78
3.5.1	Συμφωνία Προσεγγιστικών - Αριθμητικών Λύσεων . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Συζήτηση των Αποτελεσμάτων</b>	<b>85</b>
4.1	Αναλυτικές Τεχνικές . . . . .	85

*Κεφάλαιο 0*

4.2	Συζήτηση του Φυσικού Προβλήματος . . . . .	87
4.2.1	Βαθμίδα Πίεσης . . . . .	87
4.2.2	Θερμική Ακτινοβολία . . . . .	87
4.2.3	Εφαρμογές και Μελλοντικά Βήματα . . . . .	89
4.3	Συμπεράσματα . . . . .	90
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>91</b>

## Κεφάλαιο 0



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο της διατριβής παρουσιάζονται όλες οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της. Ιδιαίτερη σημασία έχει η έννοια της βαθμίδας πίεσης (αντίζωση ή ευνοϊκή) και η σχέση της με το φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος. Πολύ σημαντικό ρόλο επίσης παίζει η έννοια της θερμικής ακτινοβολίας και η επίδραση της στο οριακό στρώμα.

### 1.1 Αεροδυναμική

Η αεροδυναμική, ως ανεξάρτητη επιστήμη, έχει να επιδείξει μεγάλο έργο. Ειδικά τις τελευταίες δεκαετίες η εξέλιξη της υπήρξε αλματώδης και οι συνέπειες της ανάπτυξης αυτής είναι ορατές στην σύγχρονη αεροπορική και διαστημική τεχνολογία. Η εξέλιξη αυτή οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στην ανάπτυξη της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics-CFD) και των υπολογιστικών μεθόδων, αλλά και στην ανάπτυξη αναλυτικών μεθόδων. Μεγάλο ρόλο στην εξέλιξη της αεροδυναμικής έπαιξε επίσης και η ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (Η/Υ) ως μέσο για την εφαρμογή των υπολογιστικών μεθόδων. Καθοριστικής σημασίας ρόλο στην εξέλιξη της αεροδυναμικής, σε συνδυασμό με τους Η/Υ, έπαιξε επίσης η χρήση των αεροσηράγγων για την πραγματοποίηση πειραμάτων και μετρήσεων διαφόρων αεροδυναμικών μεγεθών.

Ωστόσο, η συνεχής βελτίωση των Η/Υ και των αναλυτικών και υπολογιστικών τεχνικών έχει περιορίσει σε σημαντικό βαθμό τη χρήση πειραμάτων. Η χρήση πειραμάτων κρίνεται πολυέξοδη και αντιοικονομική σε σχέση με την χρήση Η/Υ, που δίνει προσομοιώσεις της ροής πολύ κοντά στην πραγματικότητα. Πλέον, η κατανόηση πολύπλοκων φαινομένων της αεροδυναμικής, που πριν λίγα χρόνια ήταν δύσκολη έως και αδύνατη, είναι εφικτή με την αριθμητική προσομοίωση. Ο συνδυασμός και των δύο όμως κρίνεται, πολλές φορές, ως η καλύτερη λύση για τον αποτελεσματικό σχεδιασμό ενός αγωνιστικού, αεροπορικού ή διαστημικού

οχήματος.

Αρχικά αναφέρονται έννοιες της αεροδυναμικής, ξεκινώντας από τη διατύπωση των Blasius και Prandtl για το οριακό στρώμα, στη συνέχεια αναπτύσσεται η έννοια της βαθμίδας πίεσης, ευνοϊκής ή αντίξοης και τέλος η έννοια της θερμικής ακτινοβολίας. Η αντίξοη βαθμίδα πίεσης οδηγεί γενικά στο ανεπιθύμητο φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος. Με κατάλληλες τεχνικές προλαμβάνεται η αποκόλληση του οριακού στρώματος πάνω από το στερεό όριο ή η μετάπτωση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη. Οι πιο σημαντικές από αυτές τις τεχνικές είναι η απορρόφηση τμήματος του οριακού στρώματος ή η έγχυση ρευστού, μέσω σχισμών, στο οριακό στρώμα [70, 40]. Η ψύξη ή η θέρμανση της επιφάνειας είναι μια άλλη τεχνική που προλαμβάνει την αποκόλληση και διατηρεί το οριακό στρώμα προσκολλημένο πάνω στην πλάκα [41]. Ψύξη ή θέρμανση μπορεί επίσης να συμβεί με τη βοήθεια της θερμικής ακτινοβολίας [32].

## 1.2 Οριακό Στρώμα

Η ροή ρευστού γύρω από στερεό όριο δημιουργεί στην άμεση περιοχή του στερεού μια έντονη μεταβολή της ταχύτητας του ρευστού. Αυτό συμβαίνει γιατί σύμφωνα με τη φυσική οριακή συνθήκη τα ρευστά σωματίδια που βρίσκονται σε επαφή με το στερεό, προσκολλώνται πάνω σ' αυτό και εφ' όσον η επιφάνεια είναι ακίνητη, η ταχύτητα των σωματιδίων είναι μηδενική. Η βαθμίδα της ταχύτητας,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , στην περιοχή του στερεού ορίου, κατά διεύθυνση κάθετη πάνω σ' αυτό, παίρνει πολύ μεγάλες τιμές με αποτέλεσμα όσο μικρό και να είναι το ιξώδες,  $\mu$ , του ρευστού, η διατμητική τάση που δίνεται από τον πειραματικό νόμο του Νεύτωνα,  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , να παίρνει μεγάλες τιμές. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αντίστασης κατά την κίνηση ενός στερεού σώματος μέσα στο ρευστό. Επομένως η επίδραση του ιξώδους στην περιοχή του στερεού ορίου δεν μπορεί να αμεληθεί.

Η περιοχή της ροής, το λεπτό στρώμα γύρω από το στερεό, μέσα στην οποία η ταχύτητα του ρευστού αυξάνει από την τιμή μηδέν, πάνω στην επιφάνεια του ορίου, έως την τιμή της ταχύτητας του ελευθέρου ρεύματος όπου η ροή θεωρείται ιδανική (χωρίς τριβή), ονομάζεται οριακό στρώμα (boundary layer). Η θεωρία του οριακού στρώματος καταδεικνύει ότι όλοι οι όροι των εξισώσεων κίνησης του ρευστού, εξισώσεις Navier-Stokes, δεν έχουν την ίδια βαρύτητα και ορισμένοι από αυτούς μπορούν να παραληφθούν σε σχέση με άλλους. Η εκτίμηση της τάξης μεγέθους κάθε όρου των εξισώσεων Navier-Stokes διαμορφώνει τελικά τις

εξισώσεις οριακού στρώματος. Η έννοια του οριακού στρώματος αναπτύχθηκε από τον Γερμανό καθηγητή της αεροδυναμικής L. Prandtl του Ινστιτούτου αεροδυναμικής της Γερμανίας στο Göttingen. Στην εργασία που παρουσίασε το 1904 στο τρίτο διεθνές Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης στην Χαϊδελβέργη [70] ο L. Prandtl έδειξε πως η ροή γύρω από στερεό όριο είναι δυνατόν να αναλυθεί σε δύο περιοχές. Μια λεπτή στοιβάδα πολύ κοντά στην περιοχή του στερεού ορίου, το γνωστό οριακό στρώμα και μια περιοχή έξω από αυτό όπου η τριβή μπορεί να αγνοηθεί και η ροή εκεί χαρακτηρίζεται ως δυναμική ροή (potential flow).

Το χαρακτηριστικό μέγεθος του οριακού στρώματος είναι το πάχος του,  $\delta$ . Πάχος του οριακού στρώματος,  $\delta$ , καλείται η απόσταση εκείνη, κάθετη στην επιφάνεια του στερεού ορίου, που η ταχύτητα του ρευστού γίνεται ίση με τα 99% της ελεύθερης ρευματικής ταχύτητας  $u_\infty$ . Το πάχος του οριακού στρώματος δίνεται από την σχέση  $\delta \simeq \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}$ , όπου  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  είναι το κινηματικό ιξώδες και  $L$  το χαρακτηριστικό μήκος του στερεού ορίου. Η νοητή γραμμή που σχηματίζεται εκεί που η ταχύτητα είναι μόλις 1% μικρότερη της ελεύθερης ρευματικής ταχύτητας  $u_\infty$ , ονομάζεται ακμή (edge) του οριακού στρώματος και κάθε μέγεθος εκεί συμβολίζεται με τον δείκτη  $e$ .

Άλλη μια σημαντική παράμετρος του οριακού στρώματος, καθοριστικής σημασίας στην αεροδυναμική, είναι η συμπίεστικότητα. Γενικά οι ροές διακρίνονται σε συμπίεστες (ροή αερίων) και σε ασυμπίεστες (ροή υγρών ή βραδείες ροές αερίων). Συμπιεστότητα είναι το μέτρο της μεταβολής του όγκου ή της πυκνότητας, ενός υγρού ή αερίου κάτω από την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων. Η αδιάστατη παράμετρος που περιγράφει τη συμπίεστικότητα του ρευστού είναι ο αριθμός Mach. Ο αριθμός Mach είναι ο λόγος της ταχύτητας της ροής,  $u$ , προς την ταχύτητα του ήχου,  $c$ , δηλαδή:

$$M = \frac{u}{c}. \quad (1.1)$$

Στην περίπτωση του αέρα και για ταχύτητα ροής  $u = 102 \text{ m/sec} = 371 \text{ km/h}$ , με την ταχύτητα του ήχου στην επιφάνεια της θάλασσας να ισούται με  $c = 340 \text{ m/sec} = 1224 \text{ km/h}$ , ο αριθμός Mach είναι  $M = 0.3$ . Αυτή η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ως το ανώτερο όριο που η ροή αερίου είναι ασυμπίεστη. Αντίθετα, για τιμές του αριθμού Mach μεγαλύτερες από 0.3 η ροή θα θεωρείται συμπίεστη για την περίπτωση του αέρα.

### 1.2.1 Αδιαστατοποίηση των Εξισώσεων

Σε αυτή τη διατριβή μελετάται η ασυμπίεστη στρωτή ροή ενός Νευτώνειου ρευστού ιξώδους,  $\mu$ , σε δύο διαστάσεις, πάνω από λεπτή επίπεδη πλάκα. Το πάχος του οριακού στρώματος είναι  $\delta$  και  $L$  είναι το μήκος της επίπεδης πλάκας. Ισχύει ότι  $\delta \ll L$  και ο αριθμός Reynolds είναι  $Re = \frac{u_e L}{\nu}$  (εκτενής αναφορά στην ενότητα 1.3), όπου  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  είναι το κινηματικό ιξώδες (kinematic viscosity) και  $u_e = V_\infty \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)$  είναι η ταχύτητα στην ακμή του οριακού στρώματος, όπου  $V_\infty$  είναι η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος. Η πιο πάνω μαθηματική έκφραση αναπαριστά τη ροή Howarth [31, 70], δηλαδή τη δυναμική ροή κατά μήκος μιας επίπεδης πλάκας, μήκους  $L$ , η οποία ξεκινά από το σημείο  $x_0 = 0$  και καταλήγει σε μια άλλη πλάκα, κάθετη στην πρώτη και κάθετη στη διεύθυνση του ελεύθερου ρεύματος στο σημείο  $x_0 = L$ . Οι ακόλουθες τρεις εξισώσεις περιγράφουν τη ροή του ρευστού και τη μεταβολή της θερμοκρασίας στη γενική περίπτωση.

Εξίσωση Συνέχειας

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_0 = 0, \quad (1.2)$$

Εξισώσεις Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{q}_0}{Dt_0} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p_0 + \nu\vec{\nabla}^2\vec{q}_0, \quad (1.3)$$

Εξίσωση Ενέργειας

$$\rho C_p \frac{DT_0}{Dt_0} - \frac{Dp_0}{Dt_0} = \vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}T_0) + \mu\Phi - \frac{\partial q_r}{\partial y_0}, \quad (1.4)$$

όπου  $\frac{D}{Dt}$  είναι η υλική παράγωγος (ή παράγωγος Stokes),  $\vec{q}_0$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $p_0$  η πίεση του ρευστού,  $T_0$  η θερμοκρασία του ρευστού,  $k$  είναι η θερμική αγωγιμότητα,  $C_p$  είναι η ειδική θερμοκρασία του ρευστού υπό σταθερή πίεση,  $\frac{\partial q_r}{\partial y_0}$  είναι η ροή θερμικής ακτινοβολίας και  $\Phi$  είναι η συνάρτηση σκέδασης, που για δύο διαστάσεις είναι της μορφής:

$$\Phi = -\frac{2}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_0)^2 + 2 \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y_0} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + \frac{\partial u_0}{\partial y_0} \right)^2. \quad (1.5)$$

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων, για τη χρονοανεξάρτητη περίπτωση, δηλαδή  $\frac{\partial q_0}{\partial t_0} = 0$ , εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες [70]:

$$\vec{q} = \frac{\vec{q}_0}{u_e}, \quad \vec{q} = (u, v, w), \quad \vec{q}_0 = (u_0, v_0, w_0), \quad (1.6\alpha')$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_0}{L}, \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad (1.6\beta')$$

$$p = \frac{p_0}{\rho u_e^2}, \quad (1.6\gamma')$$

για την ταχύτητα  $\vec{q}$ , τις χωρικές μεταβλητές  $\vec{r}$  και την πίεση  $p$  του ρευστού. Έτσι, οι αδιάστατες εξισώσεις συνέχειας και ορμής, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, για διδιάστατη χρονοανεξάρτητη ροή λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (1.9)$$

Στην επόμενη ενότητα θα απλοποιήσουμε τις εξισώσεις ορμής για την περίπτωση οριακού στρώματος και θα προχωρήσουμε στην αδιαστατοποίηση της εξίσωσης ενέργειας για να καταλήξουμε στο αδιάστατο σύστημα του προβλήματος.

### 1.2.2 Ανάλυση της Τάξης Μεγέθους

Οι εξισώσεις Navier-Stokes απλοποιούνται με την ανάλυση της τάξης μεγέθους για την περίπτωση του οριακού στρώματος [70], θεωρώντας ότι.

1. Εκτός του οριακού στρώματος δεν υπάρχει βαθμίδα ταχύτητας (δυναμική ροή) και οι διατμητικές τάσεις στη δυναμική ροή είναι μηδέν.
2. Το πάχος του οριακού στρώματος,  $\delta$ , είναι πολύ μικρότερο από το μήκος της επίπεδης πλάκας  $L$ ,  $\delta \ll L$ .
3. Οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$y_0 = 0 : \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0,$$

$$y_0 \rightarrow \delta : \quad u_0 = u_e.$$

4. Στην ακμή του οριακού στρώματος ισχύει  $u \sim u_e$ .

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$u \sim \frac{u_0}{V_\infty} \Rightarrow u \sim 1,$$

$$x \sim \frac{x_0}{L} \Rightarrow x \sim 1,$$

$$y \sim \frac{y_0}{L} \Rightarrow y \sim \frac{\delta}{1} \Rightarrow y \sim \delta.$$

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{\partial v}{\delta} = 0 \Rightarrow v \sim \delta,$$

και

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1.$$

Επίσης

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\delta}{1} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta,$$

και

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim \frac{\partial}{\partial x} 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim 1.$$

Τέλος, για τους υπόλοιπους όρους έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{1}{\delta^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\delta}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\delta}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}.$$

Εισάγοντας αυτούς τους όρους στις εξισώσεις Navier-Stokes, προκύπτει ότι κάποιοι από τους όρους ιξώδους είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τους όρους των δυνάμεων αδράνειας, μόνο αν ο αριθμός  $Re$  (Reynolds) της ροής είναι:

$$Re \sim \frac{1}{\delta^2} \Rightarrow \frac{1}{Re} \sim \delta^2.$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας όλους αυτούς τους όρους, απλοποιούμε την εξίσωση συνέχειας και τις εξισώσεις ορμής στην  $x$  και  $y$ -διεύθυνση και προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (1.12)$$

Για την εξίσωση ενέργειας εισάγουμε επιπλέον την αδιάστατη θερμοκρασία  $\theta$ :

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_e} \Rightarrow T = T_w - \theta(T_w - T_e), \quad (1.13)$$

όπου  $T_w$  η θερμοκρασία πάνω στη πλάκα και  $T_e$  η θερμοκρασία στην ακμή του οριακού στρώματος. Οπότε, η εξίσωση ενέργειας στην αδιάστατη μορφή της, για χρονοανεξάρτητη ροή, μετά τις απλοποιήσεις του οριακού στρώματος που περιγράφηκαν πιο πριν [70], είναι:

$$\begin{aligned} -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{u_e^2 u}{C_p (T_w - T_e)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{Pr u_e L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \\ &+ \frac{\nu L u_e}{\rho C_p (T_w - T_e)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{\rho C_p u_e (T_w - T_e)} \frac{\partial q_r}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

με αδιάστατες συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} y = 0 : u = 0, v = 0, \theta = 0, \\ y \rightarrow \delta : u = 1, \theta = 1, \end{aligned} \quad (1.15)$$

όπου  $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$  είναι ο αριθμός Prandtl και  $-\frac{\partial q_r}{\partial y} = 4\alpha^* \sigma^* (T_e^4 - T^4)$  είναι η παράμετρος της ακτινοβολίας [86], όπου  $\alpha^*$ ,  $0 \leq \alpha^* \leq 1$ , είναι ο συντελεστής απορρόφησης και  $\sigma^*$ ,  $\sigma^* = 5.670373 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ , η σταθερά Stefan-Boltzman

[32]. Οι εξισώσεις (1.10)-(1.12) και (1.14) με τις συνοριακές συνθήκες (1.15), αποτελούν μια αδιάστατη μορφή του προβλήματος που μελετάμε. Στην επόμενη ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την αδιάστατη μορφή για να διευκολύνουμε τις πράξεις που απαιτούνται για το χαρακτηρισμό του συστήματος των εξισώσεων υπό μελέτη.

### 1.2.3 Χαρακτηρισμός του Συστήματος των Εξισώσεων

Συνήθως τα προβλήματα ρεστοδυναμικής προσδιορίζονται από συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Αν το σύστημα υπό μελέτη είναι δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης το ανάγουμε σε σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. Οι συντελεστές των άγνωστων μεταβλητών τοποθετούνται σε έναν πίνακα και υπολογίζεται η ορίζουσα του [37]. Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση αν η ορίζουσα του πίνακα είναι διάφορη του μηδενός. Σε αυτήν την περίπτωση, προκύπτει μια χαρακτηριστική εξίσωση. Λύνοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση έχουμε τις εξής περιπτώσεις, (i) αν δεν υπάρχει λύση τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως ελλειπτικού τύπου, (ii) αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία λύση τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως παραβολικού τύπου και τέλος (iii) αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο λύσεις το σύστημα χαρακτηρίζεται ως υπερβολικού τύπου. Αν η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδενική συμπεραίνουμε ότι το σύστημα υπό μελέτη ή δεν έχει λύση ή έχει απειρία λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούν να προσδιοριστούν οι άγνωστες μεταβλητές [24, 17].

Στο αδιάστατο σύστημα των εξισώσεων που διέπουν τη διδιάστατη χρονοανεξάρτητη ροή στο οριακό στρώμα με την επίδραση βαθμίδας πίεσης και θερμικής ακτινοβολίας, (1.10) – (1.12) και (1.14), οι άγνωστες μεταβλητές είναι οι  $u, v, p, \theta$  [37]. Η εξίσωση ορμής στην  $x$ -διεύθυνση και η εξίσωση ενέργειας είναι δεύτερης τάξης, οπότε θέτουμε  $w = \frac{\partial u}{\partial y}$  και  $z = \frac{\partial \theta}{\partial y}$  αντίστοιχα, για να μετατρέψουμε το σύστημα σε ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης και προκύπτει:

$$u_x + v_y = 0, \quad (1.16\alpha')$$

$$uu_x + vu_y + p_x - \frac{1}{Re}w_y = 0, \quad (1.16\beta')$$

$$p_y = 0, \quad (1.16\gamma')$$

$$u_y = w, \quad (1.16\delta')$$



$$-u\theta_x - v\theta_y - \frac{u_e^2 u}{C_p(T_w - T_e)} p_x - \frac{\nu}{Pr} \frac{1}{u_e L} z_y - \quad (1.16\epsilon')$$

$$\frac{\nu L u_e}{\rho C_p (T_w - T_e)} (u_y)^2 - \frac{1}{\rho C_p u_e (T_w - T_e)} q_{ry} = 0,$$

$$\theta_y = z. \quad (1.16\zeta')$$

Τώρα οι άγνωστες μεταβλητές είναι οι  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\theta$  και  $z$ . Για το χαρακτηρισμό του συστήματος έχουμε συνολικά δώδεκα ποσότητες, τις  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $z_x$ ,  $z_y$ . Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει από το μηδενισμό της  $12 \times 12$  ορίζουσας των συντελεστών των άγνωστων μεταβλητών. Ο πίνακας  $A$ , των συντελεστών των άγνωστων μεταβλητών είναι ο ακόλουθος:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{u_e^2 u}{C_1} & 0 & 0 & -u & -v & 0 & 0 & \frac{\nu}{Pr u_e L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy \end{pmatrix},$$

όπου  $C_1 = C_p(T_w - T_e)$ . Από την ορίζουσα του πίνακα  $A$ , προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση  $\det A = -\frac{\nu}{Pr Re L u_e} (dx)^6$ . Η λύση της αντίστοιχης χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$$-\frac{\nu}{Pr Re L u_e} (dx)^6 = 0 \Rightarrow (dx)^6 = 0 \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow x = c.$$

Οπότε, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μόνο μια λύση. Άρα το σύστημα χαρακτηρίζεται ως παραβολικού τύπου [37].

### 1.3 Αριθμός Reynolds και Τύποι Ροής

Στις αδιαστατοποιημένες εξισώσεις του προβλήματος υπό μελέτη, εξισώσεις (1.10)-(1.12) και (1.14), εμφανίζεται μια παράμετρος που ονομάζεται αριθμός Reynolds. Ο αριθμός Reynolds ( $Re$ ) εισήχθη από τον G. Stokes [75] το 1851 αλλά πήρε το όνομα του από τον O. Reynolds (1842-1912) [68, 69], ο οποίος διέδωσε τη χρήση του το 1883. Ο αριθμός Reynolds καθορίζεται ως ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις ιξώδους [70, 23] και είναι αδιάστατη ποσότητα:

$$Re = \frac{u_e L}{\nu},$$

όπου  $u_e$  είναι η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος,  $L$  είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος του στερεού ορίου και  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες.

Οι δύο βασικότεροι τύποι ροής που χαρακτηρίζονται από τον αριθμό Reynolds είναι οι βραδείες ροές, όπου  $Re \ll 1$  και οι ταχείες ροές, όπου  $Re \gg 1$ . Επιπλέον, όταν  $Re \gg 1$  η ροή μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις κατηγορίες, τη στρωτή ροή (laminar flow), τη μεταβατική ή μεταπτώτικη ροή (transitional flow) και την τυρβώδη ροή (turbulent flow). Κάθε μια από αυτές τις ροές έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά και συμπεριφορά.

Η στρωτή ροή εμφανίζεται σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds (αρκετά μεγαλύτερους της μονάδας), όπου οι δυνάμεις ιξώδους είναι κυρίαρχες. Τα ρευστά σωματίδια κινούνται σε παράλληλες στρώσεις χωρίς μακροσκοπική μίξη μεταξύ των σωματιδίων της μιας στρώσης με τις γειτονικές της. Η τροχιά των σωματιδίων του ρευστού στη στρωτή ροή είναι προβλέψιμη και όχι τυχαία [82].

Στο δεύτερο τύπο ροής, στη μεταβατική ή μεταπτώτικη ροή, τα σωματίδια του ρευστού, λόγω διαφόρων διαταραχών που επιδρούν στη ροή (εξωτερικοί παράγοντες, τραχύτητα της επιφάνειας, θέρμανση λόγω τριβής κ.α.), αλλάζουν κατάσταση μετακινούμενα από τη μια στρώση στην άλλη με ένα ταλαντούμενο τρόπο που συνεχώς αυξάνεται και γρήγορα δημιουργείται ένα ασταθές πεδίο ροής. Η περιοχή της ροής που λαμβάνει χώρα η μεταβατική ροή είναι συνήθως πολύ μικρή, συγκρινόμενη με την περιοχή των άλλων δυο τύπων ροής.

Ο τρίτος και τελευταίος τύπος ροής, η τυρβώδης ροή, εμφανίζεται σε υψηλούς αριθμούς Reynolds, όπου κυριαρχούν οι δυνάμεις αδράνειας. Τα ρευστά σωματίδια κινούνται και στις τρεις διαστάσεις με τελείως ακανόνιστο τρόπο. Η ακανόνιστη αυτή κίνηση των ρευστών σωματιδίων οδηγεί στην εμφάνιση δινών, μέσα σε ολόκληρο το πεδίο ροής, που διαφέρουν σε μέγεθος και κάνουν την ανάλυση του φαινομένου πολύ δύσκολη και απρόβλεπτη. Η ανάλυση τέτοιων ροών δε μπορεί να γίνει με τις γνωστές τεχνικές που εφαρμόζονται στην περίπτωση της

στρωτής ροής και αντιμετωπίζεται κυρίως με τη βοήθεια στατιστικών μεθόδων [15, 82, 70]. Η μελέτη της τυρβώδους ροής αποτελεί δύσκολο εγχείρημα γι' αυτό οι ασχολούμενοι με το θέμα αυτό ερευνητές καταφεύγουν πολλές φορές στο πείραμα. Οι πειραματικές μετρήσεις βοήθησαν στην στατιστική μελέτη του φαινομένου και την εξαγωγή τεχνικών που περιγράφουν ικανοποιητικά την τυρβώδη ροή.

## 1.4 Βαθμίδα Πίεσης

Ως βαθμίδα πίεσης ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής της πίεσης κατά την κύρια διεύθυνση της ροής,  $\frac{\partial p}{\partial x}$ . Εάν  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$  έχουμε αντίξοη βαθμίδα πίεσης (adverse pressure gradient) ενώ αν  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$  έχουμε ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης (favorable pressure gradient).

Η βαθμίδα πίεσης, κατά μήκος του στερεού ορίου, ασκεί σημαντική επίδραση στη ροή επηρεάζοντας τόσο τη θέση του σημείου μετάπτωσης του οριακού στρώματος όσο και την ίδια την ύπαρξή του. Σε περιοχές όπου έχουμε μείωση της πίεσης ( $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ , επιταχυνόμενη ροή), το οριακό στρώμα διατηρείται στρωτό σε μεγαλύτερο μήκος του στερεού ορίου, ενώ αύξηση της πίεσης ( $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ , επιβραδυνόμενη ροή) θα μπορούσε να προκαλέσει τη μετάπτωση του σε τυρβώδες οριακό στρώμα ή την αποκόλλησή του. Μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι, είναι πάντα δυνατόν να μειωθεί η επιδερμική τριβή σε στερεά όρια (στις αεροτομές ή σε επίπεδη πλάκα) με παράλληλη μετατόπιση του σημείου μετάπτωσης όσο το δυνατόν πιο μακριά από την οδηγούσα ακμή κατά τη διεύθυνση της ροής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με μια κατάλληλη επιλογή του σχήματος του στερεού ορίου και της αντίστοιχης κατανομής της πίεσης [82, 70]. Η επιδερμική τριβή και κατ'επέκταση η αντίσταση των σωμάτων με αεροδυναμικό σχήμα, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται στρωτό οριακό στρώμα, μπορεί να είναι πολύ μικρότερη από εκείνη σε ένα σώμα με μη αεροδυναμικό σχήμα. Ροή με αντίξοη βαθμίδα πίεσης οδηγεί κατά κανόνα στην αποκόλληση του οριακού στρώματος από το στερεό όριο, γι' αυτό και η μελέτη της παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Η μελέτη της ροής οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης δείχνει ότι όταν αυτό αποκολλάται από το τοίχωμα του στερεού ορίου συχνά επανέρχεται σε επαφή με το στερεό όριο αφού έχει μετατραπεί όμως σε τυρβώδες.

Ένα απλό μοντέλο ροής που εμφανίζει αντίξοη βαθμίδα πίεσης είναι εκείνο με γραμμικά ελαττούμενη ταχύτητα ή ροή Howarth [31] η οποία αναπαριστά τη

δυναμική ροή, κατά μήκος μιας επίπεδης πλάκας μήκους  $L$ , που ξεκινά από το σημείο  $x = 0$  και καταλήγει σε μια άλλη πλάκα κάθετη στην πρώτη και κάθετη στη διεύθυνση του ρεύματος στο σημείο  $x = L$ . Η ταχύτητα στην ακμή του οριακού στρώματος γι' αυτήν την ροή είναι ανάλογη του  $x$  και ο τύπος της γενικά δίνεται από τη σχέση

$$u_e = u_\infty \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (1.17)$$

όπου  $u_\infty$  η ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος και  $L$  το μήκος της πλάκας. Αυτή η ροή ενώ ξεκινά με σταθερή ταχύτητα  $u_\infty$ , στο  $x = 0$ , λόγω της αντίξοης βαθμίδας πίεσης εμφανίζει τελικά αποκόλληση του οριακού στρώματος η οποία πραγματοποιείται στη θέση  $x_s$ , με  $x_s < L$ .

Η απόδειξη του ότι η βαθμίδα πίεσης σ' αυτήν τη ροή (ροή Howarth) είναι αντίξοη προκύπτει ως εξής. Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση, (1.17), ως προς  $x$ , προκύπτει ότι

$$\frac{du_e}{dx} = -\frac{u_\infty}{L}. \quad (1.18)$$

Επίσης από την εξίσωση του Bernoulli,  $p + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = c$ ,  $c = \text{σταθερά}$ , που ισχύει στη δυναμική ροή προκύπτει:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (1.19)$$

Άρα, αντικαθιστώντας την (1.18) στην (1.19), προκύπτει:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho u_e u_\infty}{L} > 0. \quad (1.20)$$

Εφ' όσον η βαθμίδα πίεσης είναι θετική η πίεση αυξάνει με την απόσταση,  $x$ , με αρνητικές συνέπειες για το οριακό στρώμα.

Με την περίπτωση της αντίξοης βαθμίδας πίεσης έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές. Πειραματικές και θεωρητικές εργασίες υπάρχουν τόσο στην περίπτωση της στρωτής όσο και στην περίπτωση της τυρβώδους ροής οριακού στρώματος. Οι θεωρητικές μελέτες της συμπεριφοράς του στρωτού οριακού στρώματος στην περιοχή του σημείου αποκόλλησης των Goldstein [25] και Stratford και Gadd [76] καθώς και η ανασκόπηση των Brown και Stewartson [13] θεωρούνται από τις πρώτες και κλασικές εργασίες στον τομέα αυτόν. Για περισσότερες πληροφορίες για την περίπτωση της στρωτής ροής με αντίξοη βαθμίδα πίεσης ο αναγνώστης παραπέμπεται στα συγγράμματα των Schlichting [70], Cebeci-Bradshaw [15], White [82] και Lachmann [41]. Πιο σύγχρονες εργασίες είναι αυτές των Vleggaar [80], McCormick [51] και Kafoussias, Karabis και Xenos [39].

Επίσης, υπάρχουν πολλές σύγχρονες εργασίες, πειραματικές ή θεωρητικές, στην περίπτωση της τυρβώδους ροής με αντίζηση βαθμίδα πίεσης. Οι πειραματικές αυτές εργασίες είναι σημαντικές για τη μοντελοποίηση της τυρβώδους ροής με αντίζηση βαθμίδα. Μερικές πειραματικές μελέτες της τυρβώδους ροής με την επίδραση της αντίζησης βαθμίδας πίεσης είναι οι εργασίες των Brown και Joubert [12], Inman και Bradshaw [35], Thompson και Whitelaw [78], Hirt και Thomann [28], Dengel και Frenholz [19], Spalart και Watmuff [72] και Nagano et al. [56].

Μερικές σύγχρονες εργασίες μελέτης στρωτού ή τυρβώδους οριακού στρώματος με τη βοήθεια αριθμητικών τεχνικών είναι αυτές των Hung [33], Wu και Squires [84], Ochs και Wolf [58], Ilinca et al. [34], Spyropoulos και Blaisdell [73], Kafoussias και Xenos [38] και Le et al. [42]. Συγκεκριμένα στις εργασίες τους οι Wu και Squires καθώς και οι Spyropoulos και Blaisdell, χρησιμοποιούν τη θεωρία της προσομοίωσης των μεγάλων δινών (large eddy simulations), που είναι μια πολλά υποσχόμενη τεχνική. Οι Kafoussias και Xenos χρησιμοποιούν αλγεβρικά μοντέλα τύρβης (Cebeci-Smith και Baldwin-Lomax) για να περιγράψουν την τυρβώδη ροή πάνω από επίπεδη πλάκα. Στην εργασία τους οι Ochs και Wolf χρησιμοποιούν μια σειρά από μοντέλα τύρβης, όπως το μοντέλο των Baldwin-Lomax, το  $k - \omega$  και το  $k - \epsilon$  μοντέλο τύρβης. Οι Ilinca et al. χρησιμοποιούν το  $k - \epsilon$  μοντέλο, ενώ οι Le et al. επιλύουν τις εξισώσεις Navier-Stokes χωρίς τη χρήση κάποιου μοντέλου τύρβης (Direct Numerical Simulation-DNS) [42].

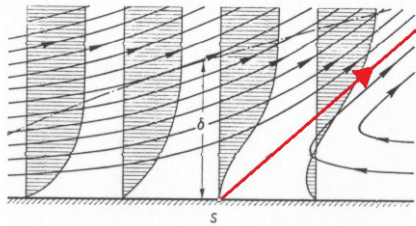
## 1.5 Αποκόλληση Οριακού Στρώματος

Προηγουμένως, αναφερθήκαμε στον όρο αποκόλληση (separation) του οριακού στρώματος, φαινόμενο ανεπιθύμητο αφού προκαλεί πολλά προβλήματα όταν εμφανίζεται στη ροή, όπως την απότομη αύξηση της επιδερμικής τριβής. Κίνδυνος αποκόλλησης του οριακού στρώματος υπάρχει σε περιοχές που εμφανίζεται αρνητική βαθμίδα πίεσης. Τα ρευστά σωματίδια μέσα στο οριακό στρώμα, κοντά στο τοίχωμα του στερεού ορίου, επιβραδύνονται από την τριβή και από την αντίζηση βαθμίδα πίεσης που υπάρχει στη ροή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα ρευστά σωματίδια κοντά στο τοίχωμα που δεν έχουν αρκετή ορμή να συνεχίσουν την κίνησή τους, να ακινητοποιούνται. Το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνει κατά πολύ κατά την κατεύθυνση της κίνησης και η ροή μέσα σε αυτό τελικά αντιστρέφεται. Αυτό αναγκάζει τα επιβραδυνόμενα ρευστά σωματίδια στην επιφάνεια του στερεού ορίου να κινηθούν προς τα έξω και κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας, και να αποκολληθούν από το τοίχωμα. Το παραπάνω φυσικό φαινόμενο ονομάζεται αποκόλληση του οριακού στρώματος και σχετίζεται με το σχηματισμό στροβίλων, με

μεγάλες απώλειες ενέργειας στο πίσω μέρος του στερεού σώματος. Στην περιοχή του σημείου αποκόλλησης η ταχύτητα είναι μηδενική όχι μόνον πάνω στο στερεό όριο, όπως απαιτεί η φυσική οριακή συνθήκη, αλλά και σε κάποιο διάστημα κατά τη διεύθυνση της καθέτου στο στερεό όριο, μέσα στο οριακό στρώμα. Το σημείο διαχωρισμού λοιπόν καθορίζεται από τη συνθήκη ότι η βαθμίδα της ταχύτητας πάνω στο τοίχωμα, μηδενίζεται, δηλαδή

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{wall} = 0, \quad (1.21)$$

που σημαίνει ότι και η διατμητική τάση σε εκείνο το σημείο μηδενίζεται, δηλαδή  $\tau_{wall} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{wall} = 0$ . Το φαινόμενο της αποκόλλησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Αντιστροφή της ροής και αποκόλληση του οριακού στρώματος.

Το φαινόμενο της αποκόλλησης εμφανίζεται κυρίως σε σώματα με κυκλική διατομή (μη αεροδυναμικά) όπως κύλινδροι και σφαίρες. Πάνω σε τέτοια σώματα υπάρχει μια περιοχή που το ρευστό επιβραδύνεται έντονα και η κατανομή της πίεσης αποκλίνει από αυτή των ιδανικών ρευστών. Στα ιδανικά ή τέλεια ρευστά καμία εσωτερική τριβή των μορίων τους δεν αναπτύσσεται κατά τη ροή τους. Όπως επίσης και καμία δύναμη συνάφειας μεταξύ αυτών και των τοιχωμάτων των δοχείων ή αγωγών που περιέχονται. Η μεγάλη αντίσταση σε τέτοια σώματα μπορεί να ερμηνευτεί από την ύπαρξη μεγάλης αντίξοης βαθμίδας πίεσης που έχει ως συνέπεια την αποκόλληση. Κατά τον Prandtl, το σημείο αποκόλλησης καθορίζεται εξ' ολοκλήρου από εξωτερικές συνθήκες [70]. Η λύση των εξισώσεων της μόνιμης, διδιάστατης, στρωτής ροής οριακού στρώματος με εξωτερικά επιβαλλόμενη πίεση ισχύει μόνο μέχρι το σημείο αποκόλλησης. Αυτό είναι γνωστό ως ανωμαλία του Goldstein (1948) προς τιμήν του S. Goldstein, που ήταν ο πρώτος που αναφέρθηκε στην ανώμαλη συμπεριφορά της λύσης κοντά στο σημείο μηδενικής επιδερμικής τριβής [25]. Στο στρωτό οριακό στρώμα αρκεί μικρή τιμή

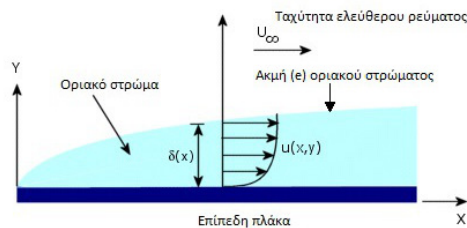
της αντίξοης βαθμίδας πίεσης για την εμφάνιση αποκόλλησης. Στην περίπτωση τυρβώδους ροής ο κίνδυνος της αποκόλλησης πραγματικά μειώνεται, σε σχέση με την στρωτή ροή. Εξ' αιτίας της τυρβώδους ανάμιξης υπάρχει μια συνεχής ανταλλαγή της ορμής από έξω (δυναμική ροή) προς τα μέσα (ροή στο οριακό στρώμα), που ουσιαστικά επανενεργοποιεί το τυρβώδες οριακό στρώμα καθιστώντας το λιγότερο ευάλωτο σε σχέση με το στρωτό οριακό στρώμα [38].

## 1.6 Μετασχηματισμός Falkner-Skan

Θεωρούμε τη μόνιμη διδιάστατη στρωτή ροή, ασυμπίεστου ρευστού (αέρα για μικρό αριθμό Mach) στο οριακό στρώμα που αναπτύσσεται πάνω από μια επίπεδη λεία επιφάνεια (πλάκα) που παρεμβάλλεται παράλληλα στο ρεύμα ρευστού ταχύτητας  $u_\infty$ . Μια σχηματική αναπαράσταση της υπό μελέτη ροής δίνεται στο Σχήμα 1.2. Για την περιγραφή της ροής χρησιμοποιείται σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων,  $Oxyz$ . Σε αυτό το σύστημα η λεία επιφάνεια (πλάκα) προσδιορίζεται από τις χωρικές σχέσεις:

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (1.22)$$

και είναι παράλληλη στο ελεύθερο ρεύμα που κινείται κατά τη θετική φορά του  $x$ -άξονα.



Σχήμα 1.2: Σχηματική αναπαράσταση της ροής.

Με τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, οι εξισώσεις του στρωτού οριακού στρώματος, συνέχειας, ορμής και ενέργειας, μπορούν να γραφούν ως εξής:

Εξίσωση Συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.23)$$

Εξίσωση Ορμής:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.24)$$

Εξίσωση Ενέργειας:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial q_r}{\partial y}. \quad (1.25)$$

Η πίεση λόγω της σχέσης  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , είναι συναρτήσει μόνο της μεταβλητής  $x$ ,  $p = p(x)$ . Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} y = 0 : u = 0, v = 0, T = T_w, \\ y \rightarrow \delta : u = u_e, T = T_e. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις,  $\rho$ , είναι η πυκνότητα του ρευστού,  $u, v$  είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας ως προς τον  $x$  και  $y$ -άξονα, αντίστοιχα,  $p$  είναι η πίεση,  $T$  η θερμοκρασία του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  το κινηματικό ιξώδες, όπου  $\mu$  είναι το ιξώδες,  $k$  είναι ο συντελεστής της θερμικής αγωγιμότητας,  $C_p$  είναι η ειδική θερμότητα υπό σταθερά πίεση,  $\delta$  είναι το πάχος του οριακού στρώματος,  $u_e$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού στην ακμή του οριακού στρώματος, κατά την  $x$ -διεύθυνση,  $T_e$  η θερμοκρασία του ρευστού στην ακμή του οριακού στρώματος,  $T_w$  είναι η θερμοκρασία της πλάκας και τέλος,  $\frac{\partial q_r}{\partial y}$  είναι ο όρος της θερμικής ακτινοβολίας. Στην παρούσα διατριβή θεωρούμε το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων ίσο με μηδέν,  $F_x = 0$ .

Στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, εξισώσεις (1.23)-(1.26), καταλήξαμε σε ένα συζευγμένο και μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου, με κατάλληλες συνοριακές και αρχικές (π.χ.  $x = 0 : u = y^2/2$ ) συνθήκες. Για την επίτευξη λύσης αυτού του προβλήματος είναι απαραίτητη η αδιαστατοποίηση [15] τόσο των εξισώσεων όσο και των συνθηκών που διέπουν το φυσικό πρόβλημα. Όταν οι εξισώσεις ενός φυσικού προβλήματος μετασχηματίζονται σε αδιάστατη μορφή πολλές από τις παραμέτρους του προβλήματος ενσωματώνονται σε μια μόνο παράμετρο (ή και απαλείφονται). Το όλο πρόβλημα αποκτά περισσότερη γενικότητα αλλά και απλότητα στη μαθηματική του αντιμετώπιση.

Αρχικά εισάγεται η ρευματική συνάρτηση  $\Psi(x, y)$  για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (1.27)$$



και αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί ταυτοτικά την εξίσωση συνέχειας, δηλαδή αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.27) στην (1.23) έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0. \quad (1.28)$$

Απαιτώντας, από τη ρευματική συνάρτηση, να ικανοποιεί και τις εξισώσεις (1.24) και (1.25) καταλήγουμε στο νέο μη γραμμικό και συζευγμένο σύστημα:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}, \quad (1.29)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dp}{dx} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{dq_r}{dy}, \quad (1.30)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad & \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad T = T_w \\ y \rightarrow \delta : \quad & \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_e, \quad T = T_e. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον αδιάστατο μετασχηματισμό Falkner-Skan [22], εισάγουμε στο πρόβλημα την αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(x, \eta)$ , και την αδιάστατη  $\eta$ -διεύθυνση:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}, \quad \Psi = \sqrt{u_e \nu x} f(x, \eta). \quad (1.32)$$

Ο τόνος δηλώνει μερική παράγωγο ως προς  $\eta$  και οι συναρτήσεις  $f$  και  $\theta$  είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $\eta$ ,  $f(x, \eta)$  και  $\theta(x, \eta)$ . Τελικά, το σύστημα (1.29)-(1.30) παίρνει τη μορφή:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' + \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} [1 - (f')^2] = x \left[ f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right], \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{1}{2} f \theta' + \frac{16x\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} (1 - \theta) &= x \left( f' \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \theta' \right) + \\ + \frac{x f'}{C_p (T_w - T_e)} u_e \frac{du_e}{dx} - \frac{u_e^2}{C_p (T_w - T_e)} (f'')^2, \end{aligned} \quad (1.34)$$

όπου οι συνοριακές συνθήκες έχουν μετασχηματιστεί στις ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad & f(x, 0) = f'(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0, \\ \eta \rightarrow \infty : \quad & f'(x, \eta) = 1, \quad \theta(x, \eta) = 1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ο μετασχηματισμός των Falkner-Skan μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ροές που δεν επιδέχονται λύσεις ομοιότητας, όπως εδώ, για να διευκολυνθεί η επίλυση του συστήματος. Έτσι περιορίζεται η εξάρτηση των εξισώσεων από το  $x$ , δεν υπεισέρχεται ο αριθμός Reynolds ( $Re$ ) στις τελικές εξισώσεις μας και οι άγνωστες συναρτήσεις,  $f$  και  $\theta$ , ουσιαστικά παίρνουν τιμές στο  $[0, 1]$  [70].

## 1.7 Θερμική Ακτινοβολία

Θερμική ακτινοβολία είναι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που παράγεται από τη θερμική κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων στην ύλη. Όλη η ύλη με θερμοκρασία μεγαλύτερη από το απόλυτο μηδέν ( $0\text{ K}$  ή  $-273.15^\circ\text{C}$ ) εκπέμπει θερμική ακτινοβολία. Όταν η θερμοκρασία του σώματος είναι μεγαλύτερη από το απόλυτο μηδέν, ατομικές συγκρούσεις προκαλούν αλλαγές στην κινητική ενέργεια των ατόμων ή μορίων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή αυτής της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας [32].

Θερμική ακτινοβολία (thermal radiation) είναι η διαδικασία κατά την οποία ενέργεια, σε μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, εκπέμπεται από μια θερμή επιφάνεια, προς όλες τις κατευθύνσεις ταξιδεύοντας με την ταχύτητα του φωτός [32]. Η θερμική ακτινοβολία δεν απαιτεί ενδιάμεσο μέσο για να μεταφερθεί.

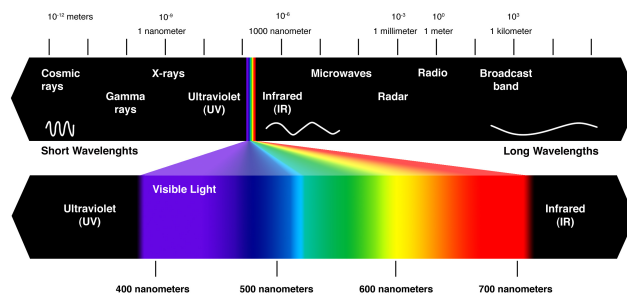
Το μήκος κύματος της θερμικής ακτινοβολίας κυμαίνεται από μεγαλύτερου μήκους κύματος υπέρυθρες ακτίνες (infrared rays), στο ορατό φάσμα του φωτός μέχρι και του μικρότερου μήκους κύματος υπεριώδεις ακτίνες (ultraviolet rays) [32]. Η ένταση και η κατανομή της ακτινοβολούμενης ενέργειας εντός αυτού του εύρους εξαρτάται από τη θερμοκρασία της επιφάνειας εκπομπής. Η συνολική ενέργεια της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας από κάποια επιφάνεια είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της απόλυτης θερμοκρασίας της επιφάνειας (νόμος Stefan-Boltzmann).

Ο ρυθμός με τον οποίο ένα σώμα εκπέμπει ή απορροφά ακτινοβολία εξαρτάται από τη φύση της επιφάνειας του, βάσει του νόμου του Kirchhoff. Για παράδειγμα, ένα μέλαν σώμα (black body) απορροφά όλη τη θερμική ακτινοβολία που πέφτει πάνω του και είναι τέλεια πηγή εκπομπής θερμικής ακτινοβολίας.

### 1.7.1 Τύποι Ακτινοβολίας

Η ακτινοβολία λόγω της κυματικής φύσης της περιγράφεται από το μήκος κύματος της. Έτσι, μικρού μήκους κύματος ακτινοβολία σημαίνει υψηλής ενέργειας

κύματα, π.χ. υπεριώδης (ultraviolet), ακτίνες- $X$  (x-rays) και Γάμμα (Gamma rays), ενώ μεγάλου μήχους κύματος ακτινοβολία σημαίνει χαμηλής ενέργειας κύματα, π.χ. υπέρυθη (infrared) ακτινοβολία [32]. Το Σχήμα 1.3 δίνει μια κατανομή της ακτινοβολίας σε όλο το γνωστό φάσμα. Όλα τα σώματα εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η ακτινοβολία αυτή είναι γνωστή ως ακτινοβολία εκπομπής (radiative emission). Η ένταση της εκπεμπόμενης ενέργειας συσχετίζεται με την ενέργεια του σώματος. Κάθε σώμα που εκπέμπει ακτινοβολία ανταλλάσσει ενέργεια μέσω ακτινοβολίας με άλλα σώματα που είναι κοντά του. Ένα μέρος της ενέργειας που λαμβάνει από άλλα σώματα μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια μέσω του μηχανισμού της απορρόφησης (radiation absorption). Η απορρόφηση εξαρτάται επίσης από την ενέργεια των ατόμων και των μορίων του σώματος που απορροφά την ακτινοβολία. Κατά μήκος της διαδρομής που ακολουθεί η ακτινοβολία, μπορεί να αλλάξει μήκος κύματος και κατεύθυνση εξαιτίας της παρουσίας μορίων, σωματιδίων, ασυνεχειών ή ανομοιογενειών του χώρου, πριν η ενέργεια απορροφηθεί και μετατραπεί σε εσωτερική ενέργεια κάποιου σώματος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται σκέδαση (scattering) της ακτινοβολίας [32].



Σχήμα 1.3: Κατανομή φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Η συστηματική μελέτη της απορρόφησης, της εκπομπής και της σκέδασης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από την ύλη επιτρέπει το σχεδιασμό καλύτερων πειραματικών και τεχνολογικών διεργασιών και εφαρμογών όπου η ένταση της ακτινοβολίας μπορεί να αξιοποιηθεί αποτελεσματικά. Για την πλήρη κατανόηση της ακτινοβολίας μεταφοράς, πρέπει να μελετηθούν τα παρακάτω τρία φαινόμενα. Τα δύο πρώτα είναι η εκπομπή (emission) και η απορρόφηση (absorption) ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας από την ύλη. Το τρίτο είναι η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μεταξύ διαφορετικών αντικειμένων και περιλαμβάνει τη σκέδαση (scattering). Η σκέδαση μπορεί να οφείλεται στη διάθλαση (diffraction), την παρεμβολή (interference), την ανάκλαση (reflection) και τη μετάδοση (transmission) [32]. Η μεταφορά ακτινοβολίας σε κάθε φυσικό σύστημα, από το μικροσκοπικό επί-

πεδο (ατομικό ή μοριακό) μέχρι το μακροσκοπικό επίπεδο (αστέρια, γαλαξίες), διέπεται από τους ίδιους νόμους και απαιτεί εφαρμογή των τριών αρχών, δηλαδή της απορρόφησης, της εκπομπής και της σκέδασης [32]. Στην παρούσα διατριβή ασχολούμαστε μόνο με τη θερμική ακτινοβολία απορρόφησης.

### 1.7.2 Οπτικό βάθος

Το μέσο (ρευστό) μέσα στο οποίο διαδίδεται η ακτινοβολία παίζει σημαντικό ρόλο. Ένα μέτρο της αδιαφάνειας (opacity) του μέσου είναι το οπτικό βάθος (optical thickness). Το οπτικό βάθος ενός μέσου χωρίζεται σε δύο κατηγορίες, το οπτικά λεπτό μέσο (optically thin media) και το οπτικά παχύ μέσο (optically thick media). Αυξάνοντας το οπτικό βάθος όλο και λιγότερη ακτινοβολία μεταφέρεται στο μέσο και το μέσο τελικά γίνεται αδιαφανές (opaque). Αντίθετα, σε ένα οπτικά λεπτό μέσο η ακτινοβολία μεταφέρεται ευκολότερα, δηλαδή η ακτινοβολία μπορεί να ταξιδέψει μακρύτερα εντός του μέσου [32].

### 1.7.3 Εξίσωση Ενέργειας

Η εξίσωση ενέργειας βασίζεται στο πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα:

$$dQ = dE + dW, \quad (1.36)$$

το οποίο λέει ότι αν σε σύστημα μάζας ρευστού προσφέρουμε ποσό θερμότητας,  $dQ$ , τότε, ένα μέρος του ποσού θερμότητας καταναλώνεται για την παραγωγή έργου,  $dW$ , από το ρευστό, και το υπόλοιπο για την μεταβολή της ενέργειας του ρευστού,  $dE$ . Η μεταβολή της ενέργειας, που είναι το άθροισμα της εσωτερικής ενέργειας,  $de$ , και της κινητικής ενέργειας,  $dk$  ( $dE = de + dk$ ), και εξαρτάται από τη θερμοκρασία και την πυκνότητα του ρευστού. Ένα μέρος της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας,  $de$ , του ρευστού μπορεί να επηρεαστεί από την ακτινοβολία και να επιφέρει περαιτέρω αλλαγές στη θερμοκρασία, την πυκνότητα και το ιζώδες του ρευστού.

Έστω το στοιχειώδες ρευστό σωματίδιο όγκου  $dV$ , του Σχήματος 1.4. Η ποσότητα θερμικής ακτινοβολίας που εισέρχεται, π.χ. κατά την  $y$ -διεύθυνση, από την επιφάνεια  $A = dx dz$  είναι  $q_{r_y}$ , και η ποσότητα που εξέρχεται από την επιφάνεια  $B = dx dz$  είναι  $q_{r_y} + \frac{\partial q_{r_y}}{\partial y} dy$ . Η ροή λοιπόν κατά την  $y$ -διεύθυνση, δηλαδή από την επιφάνεια  $dx dz$ , δίνεται από:

$$Q_y = q_{r_y} dx dz - \left( q_{r_y} + \frac{\partial q_{r_y}}{\partial y} dy \right) dx dz = - \frac{\partial q_{r_y}}{\partial y} dy dx dz = - \frac{\partial q_{r_y}}{\partial y} dV, \quad (1.37)$$

όπου  $dV$  είναι ο στοιχειώδης όγκος του ρευστού σωματιδίου. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνουμε ότι  $Q_x = -\frac{\partial q_{rx}}{\partial x} dV$  και  $Q_z = -\frac{\partial q_{rz}}{\partial z} dV$ . Άρα η ολική θερμική ροή λόγω ακτινοβολίας,  $Q_{rad}$ , ανά μονάδα όγκου θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Q_{rad} = (Q'_x, Q'_y, Q'_z). \quad (1.38)$$

Υποθέτοντας ότι για το παρόν πρόβλημα  $Q'_x = Q'_z = 0$ , στην εξίσωση ενέργειας θα παραμείνει μόνο ο όρος  $Q'_y = -\frac{\partial q_{ry}}{\partial y}$ . Αυτός ο όρος δίνει τη θερμική ροή λόγω ακτινοβολίας (radiative heat flux) ανά μονάδα όγκου.

Η θερμική ροή λόγω ακτινοβολίας ή θερμική ακτινοβολία μεταξύ ρευστών (ή οποιωνδήποτε σωμάτων) εξαρτάται από τη διαφορά των τέταρτων δυνάμεων των απόλυτων θερμοκρασιών τους, δηλαδή της θερμοκρασίας,  $T$ , στο οριακό στρώμα και της θερμοκρασίας στην ακμή,  $T_e$  του οριακού στρώματος για την περίπτωση που εξετάζουμε. Ο όρος της θερμικής ροής λόγω ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial y} = 4\alpha^* \sigma^* (T_e^4 - T^4), \quad (1.39)$$

όπου  $\alpha^*$ ,  $0 \leq \alpha^* \leq 1$ , είναι ο συντελεστής απορρόφησης και  $\sigma^*$ ,  $\sigma^* = 5.670373 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$  είναι η σταθερά Stefan-Boltzmann. Ως απορρόφηση,  $\alpha^*$ , ορίζεται η ικανότητα ενός υλικού να απορροφά το φως ή άλλη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

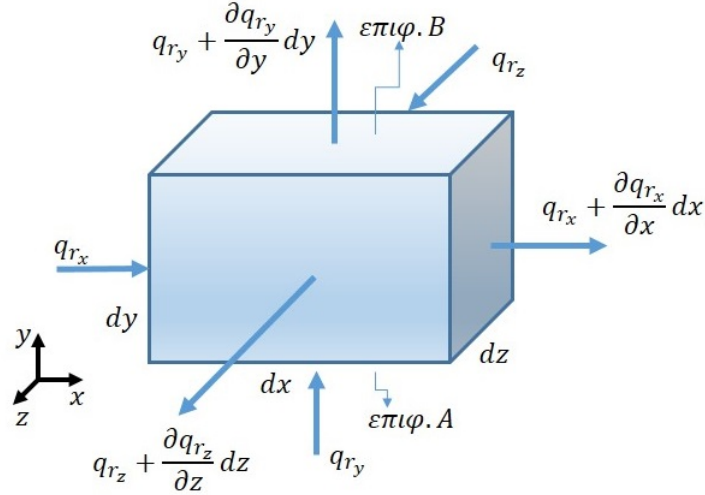
Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor για το  $T^4$ , στη γειτονιά του  $T_e$ , και αμελώντας όρους υψηλότερης τάξης έχουμε:

$$T^4 \simeq 4T_e^3 T - 3T_e^4, \quad (1.40)$$

οπότε, η (1.38), μέσω της (1.39), γίνεται τελικά:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial y} = -16\alpha^* \sigma^* T_e^3 (T_e - T). \quad (1.41)$$

Πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει την επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας στην περίπτωση ενός οπτικά λεπτού ρευστού. Πειραματικές και θεωρητικές εργασίες υπάρχουν τόσο στην περίπτωση της στρωτής όσο και στην περίπτωση της τυρβώδους ροής θερμικού οριακού στρώματος. Κάποιες από τις περισσότερο αναφερόμενες εργασίες είναι αυτή των England και Emery [21] και των Raptis, Perdikis και Leontitsis [65]. Οι επιδράσεις της θερμικής ακτινοβολίας σε ροή



Σχήμα 1.4: Θερμική ροή λόγω ακτινοβολίας σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια  $dx dy$ ,  $dx dz$  και  $dy dz$ , του στοιχειώδους ρευστού σωματιδίου, όγκου  $dV = dx dy dz$ .

Blasius μελετώνται από τους Bataller [8, 9], Mabood, Kahn και Ismail [50], και Arav και Begelman [4]. Εκτεταμένη έρευνα έχει γίνει επίσης στη μαγνητο-υδροδυναμική από τους Bestman και Adjepong [10], Raptis et al. [62, 63, 64], Xenos, Dimas και Raptis [85], Siddheshwar και Mahabaleswar [71], Muthucumaraswamy et al. [54, 55]. Οι Hossain et al. [29, 30] μελετούν την περίπτωση πορώδους πλάκας και οι Elbashbeshy και Dimian [20] μελετούν την περίπτωση μεταβαλλόμενου ιξώδους υπό την επίδραση θερμικής ακτινοβολίας.

Επιπλέον εργασίες είναι αυτές των Raptis [61], Prakash, Bhanumathi, Vijaya Kumar και Varma [60] όπου μελετάται η επίδραση της ακτινοβολίας σε πορώδες υλικό, του Xenos [86] όπου μελετάται η επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας σε πλάκα με ιξώδες εξαρτώμενο από την θερμοκρασία, Deka και Das [18] που μελετούν την περίπτωση απότομης αλλαγής της θερμοκρασίας της πλάκας, Reddy et al. [67] οι οποίοι μελετούν την περίπτωση πηγής και καταβόθρας για επιφάνεια με μεταβαλλόμενη θερμοκρασία λόγω μαγνητικού πεδίου και θερμικής ακτινοβολίας.

Σε αυτή την διατριβή μελετάται η επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας στο οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα με βαθμίδα πίεσης για ένα οπτικά λεπτό ρευστό. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι αναλυτικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων των εξισώσεων οριακού στρώματος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αναλυτικά μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη λύση του φυσικού προβλήματος. Γίνεται εκτενής περιγραφή των μεθόδων διαταραχών (perturbation techniques) για μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs) καθώς επίσης περιγράφονται οι αναλυτικές τεχνικές για την επίλυση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODEs) που διέπουν το πρόβλημα. Οι πιο γνωστές είναι η μέθοδος ομοτοπικής ανάλυσης (homotopy analysis method - HAM), η μέθοδος διαφορικού μετασχηματισμού (differential transformation method - DTM) και η μέθοδος αποσύνθεσης ή ανάλυσης του Adomian (Adomian decomposition method - ADM). Οι υπάρχουσες εργασίες επικεντρώνονται κυρίως στη λύση του προβλήματος του Blasius. Σε αυτή τη διατριβή γίνεται επέκταση των αναλυτικών λύσεων του Blasius με βάση αυτές τις αναλυτικές τεχνικές για την επίλυση ενός συζευγμένου μη γραμμικού συστήματος που περιγράφει το φυσικό πρόβλημα.

### 2.1 Μέθοδοι Διαταραχών

#### 2.1.1 Εισαγωγή στις Μεθόδους Διαταραχών

Στη μηχανική των ρευστών και γενικά στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, σπάνια μπορεί να βρεθεί η ακριβής λύση των προβλημάτων, κυρίως λόγω της μη γραμμικότητας των διαφορικών εξισώσεων (συνήθων και μερικών) και των πολύπλοκων συνοριακών συνθηκών των προβλημάτων. Συνεπώς, είναι αναγκαίο να επιτευχθούν προσεγγιστικές λύσεις αυτών των προβλημάτων. Οι προσεγγιστικές αυτές λύσεις μπορεί να είναι αναλυτικές, αριθμητικές ή συνδυασμός αυτών των δύο.

Παρά την ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών για την επίλυση φυσικών προβλημάτων, οι προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις εξακολουθούν να αναπτύσσονται και

να δίνουν χρήσιμες και αξιόπιστες λύσεις σε μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων της ρευστομηχανικής και της μεταφοράς θερμότητας. Μια τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος διαταραχών (perturbation technique) [36, 57].

### 2.1.2 Ποσότητα Διαταραχής

Το ουσιαστικό σημείο σε μια προσεγγιστική διαδικασία είναι να μεταφραστεί το φυσικό πρόβλημα στο αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο. Για να είναι, αυτό το πρόβλημα, κατάλληλο για εφαρμογή της μεθόδου διαταραχών θα πρέπει να μετασχηματιστεί σε ένα αδιάστατο μοντέλο, έτσι ώστε οι παράμετροι και οι μεταβλητές που διέπουν τη συμπεριφορά του να μπορούν να αναγνωριστούν. Εκτιμώντας την τάξη μεγέθους των ποσοτήτων αυτών θα μπορούμε να αποφανθούμε ποια από αυτές είναι μικρή, έτσι ώστε να την εισάγουμε ως ποσότητα διαταραχής, δίνοντας της τον συμβολισμό  $\varepsilon$ . Συνήθως, σε προβλήματα μηχανικής των ρευστών ο αδιάστατος αριθμός  $\varepsilon$  μπορεί να είναι ο αριθμός Reynolds ( $Re \gg 1$ , δηλαδή  $1/Re \ll 1$ ) ή ο αριθμός Mach ( $M \ll 1$ ) [57].

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η ποσότητα διαταραχής μπορεί να είναι παράμετρος διαταραχής (perturbation parameter). Στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα διαταραχής μπορεί να είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της απόστασης, σε αδιάστατη μορφή,  $x$ , ή του χρόνου,  $t$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις μιλάμε για συντεταγμένη διαταραχής (coordinate perturbation) [57]. Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο διαταραχών μέσω βασικών παραδειγμάτων των μαθηματικών και της ρευστομηχανικής [52, 57, 36].

#### Παράδειγμα

Έστω το πρόβλημα της στρωτής ελεύθερης μεταφορικής ροής γύρω από λεπτό κατακόρυφο κύλινδρο που περιγράφεται από τις αδιάστατες εξισώσεις [52]. Σε αυτό το πρόβλημα η παράμετρος  $\varepsilon$  είναι ουσιαστικά μια συντεταγμένη διαταραχής και συγκεκριμένα η  $x$ -συνιστώσα. Με αυτήν την προσέγγιση μπορούμε να γράψουμε το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ), το οποίο μπορεί να επιλυθεί πιο εύκολα.

$$(1 + \varepsilon)F''' + \varepsilon F'' + 3FF'' + \Theta = \varepsilon \left( F' \frac{\partial F'}{\partial \varepsilon} - F'' \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)$$

$$(1 + \varepsilon)\Theta'' + \varepsilon\Theta' + 3PrF\Theta' = \varepsilon Pr \left( F' \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon} - \Theta' \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)$$

όπου  $Pr$  είναι ο αδιάστατος αριθμός Prandtl,  $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$ , που συνδέει το πάχος



του ιξώδους οριακού στρώματος με το αντίστοιχο του θερμικού και ο τόνος ορίζει παράγωγο ως προς  $\eta$ , με συνοριακές συνθήκες

$$\eta = 0 : F = F' = 0, \Theta = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty : F' = 1, \Theta = 0.$$

Υποθέτουμε αναπτύγματα των  $F$  και  $\Theta$  της μορφής  $F = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n$  και  $\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Theta_n$ . Από τη φύση του προβλήματος είναι φανερό ότι θα χρειαστούμε παράγωγους των  $F$  και  $\Theta$  τόσο ως προς τη μεταβλητή  $\eta$  όσο και ως προς τη μεταβλητή  $\varepsilon$ . Θα πάρουμε δηλαδή αναπτύγματα της μορφής  $F^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n^{(m)}$ ,  $\Theta^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Theta_n^{(m)}$ ,  $\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} n \varepsilon^{n-1} F_n^{(m)}$  και  $\frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial \varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} n \varepsilon^{n-1} \Theta_n^{(m)}$ . Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στις αρχικές εξισώσεις του προβλήματος προκύπτουν τα ακόλουθα συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\varepsilon^0 : F_0''' + 3F_0 F_0'' - 2(F_0')^2 + \Theta_0 = 0$$

$$\Theta_0'' + 3Pr F_0 \Theta_0' = 0$$

$$\varepsilon^1 : F_1''' + 3F_0 F_1'' - 5F_0' F_1' + 4F_0'' F_1 + \Theta_1 + \eta F_0''' + F_0'' = 0$$

$$\Theta_1'' + 3Pr F_0 \Theta_1' - Pr F_0' \Theta_1 + 4Pr F_1 \Theta_0' + \eta \Theta_0'' + \Theta_0' = 0$$

$$\varepsilon^2 : F_2''' + 3F_0 F_2'' - 6F_0' F_2' + 5F_0'' F_2 + \Theta_2 + \eta F_1''' + F_1'' + 4F_1 F_0'' - 3(F_1')^2 = 0$$

$$\Theta_2'' + 3Pr F_0 \Theta_2' - 2Pr F_0' \Theta_2 + 5Pr F_2 \Theta_0' + \eta \Theta_1'' + \Theta_1' + 4Pr F_1 \Theta_1' - Pr F_1' \Theta_1 = 0$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\eta = 0 : F_0 = F_1 = F_2 = 0, F_0' = F_1' = F_2' = 0, \Theta_0 = 1, \Theta_1 = \Theta_2 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : F_0' = F_1' = F_2' = 0, \Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = 0 \quad \blacksquare$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, το μηδενικής προσέγγισης σύστημα  $\varepsilon^0$ , αποτελεί ένα μη γραμμικό, συζευγμένο σύστημα ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις  $F_0$  και  $\Theta_0$ . Τα επόμενα δύο συστήματα, πρώτης,  $\varepsilon^1$ , και δεύτερης,  $\varepsilon^2$ , τάξης, τα οποία περιγράφουν την επίδραση της καμπυλότητας της επιφάνειας στο φυσικό πρόβλημα, είναι γραμμικά [57]. Αυτό το παράδειγμα αποτελεί ένα βασικό κομμάτι της διαδικασίας που θα ακολουθήσουμε για τη μετατροπή του συστήματος ΜΔΕ του φυσικού προβλήματος σε σύστημα ΣΔΕ.

## 2.2 Μέθοδος Ομοτοπικής Ανάλυσης

### 2.2.1 Εισαγωγή στη ΜΟΑ

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναπτύξουμε τη μέθοδο ομοτοπικής ανάλυσης (MOA) (homotopy analysis method, HAM). Η διδιάστατη στρωτή ροή ιξώδους ρευστού πάνω από μία άπειρη πλάκα περιγράφεται από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση Blasius [70]

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) = 0, \quad \eta \in [0, +\infty), \quad (2.1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 1 \quad (2.2)$$

όπου ο τόνος δηλώνει παράγωγο ως προς  $\eta$ . Η μη γραμμική εξίσωση (2.1) είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά. Το 1908, ο Blasius [11] έδωσε μια αναλυτική λύση αυτής σε μορφή δυναμοσειράς

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{A_k \sigma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2}, \quad (2.3)$$

όπου,  $A_0 = A_1 = 1$  και

$$A_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} A_r A_{k-r-1}, \quad (k \geq 2). \quad (2.4)$$

Εδώ, το  $\sigma = f''(0)$ , μπορεί να δοθεί αριθμητικά. Ο Howarth [31] στην εργασία του βρήκε αριθμητικά ότι  $f''(0) = 0.33206$ . Έτσι, η λύση του Blasius είναι συνδυασμός αναλυτικής και αριθμητικής λύσης. Ωστόσο, η λύση αυτή συγκλίνει σε μια πολύ μικρή περιοχή  $|\eta| \leq \rho_0$ , με  $\rho_0 \simeq 5.690$  [11, 44].

Συνήθως, σε μη γραμμικά προβλήματα μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές διαταραχών. Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα όμως, οι τεχνικές διαταραχών χρειάζονται μια μικρή παράμετρο, την παράμετρο διαταραχής. Το πρόβλημα είναι ότι πολλά προβλήματα δεν περιέχουν αυτήν τη μικρή παράμετρο και επίσης οι προσεγγιστικές λύσεις που δίνονται από τις μεθόδους διαταραχών εξαρτώνται ισχυρά από τη παράμετρο διαταραχής. Οπότε, είναι αναγκαία η ανάπτυξη νέων αναλυτικών τεχνικών, που παρέχουν μεγαλύτερη ευελιξία και ελευθερία στη λύση μη γραμμικών εξισώσεων, και επιπλέον, δεν θα εξαρτώνται από το αν ένα πρόβλημα περιέχει παράμετρο διαταραχής ή όχι.

Η μέθοδος ομοτοπικής ανάλυσης (MOA) έχει το πλεονέκτημα ότι η εγκυρότητα της είναι ανεξάρτητη από το αν ένα μη γραμμικό πρόβλημα περιέχει ή όχι μία μικρή παράμετρο  $\varepsilon$ . Έτσι, η MOA είναι εφαρμόσιμη στα περισσότερα μη γραμμικά προβλήματα και ειδικά σε αυτά τα οποία έχουν ισχυρή μη γραμμικότητα [45]. Επιπλέον, η MOA μας δίνει μεγάλη ευελιξία και ελευθερία να διαλέξουμε αρχικές προσεγγίσεις και βοηθητικά γραμμικά υποπροβλήματα για τις αρχικές εξισώσεις [44].

### 2.2.2 Συστηματική Περιγραφή της MOA

Έστω  $p$  μια παράμετρος,  $p \in [0, 1]$ , και  $A(p), B(p) \in C^\infty(D)$ ,  $D$ : πεδίο ορισμού της συναρτήσεων  $A$  και  $B$ , συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους ανώτερης τάξης στην περιοχή  $|p| \leq 1$ , που ικανοποιούν:

$$A(0) = B(0) = 0, \quad A(1) = B(1) = 1. \quad (2.5)$$

Έστω ότι:

$$A(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{1,k} p^k, \quad B(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{1,k} p^k \quad (2.6)$$

είναι οι σειρές Maclaurin των  $A(p)$  και  $B(p)$ . Επειδή  $A(p), B(p) \in C^\infty(D)$ , έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{1,k} = A(1) = 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_{1,k} = B(1) = 1. \quad (2.7)$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις  $A(p)$  και  $B(p)$  λέγονται εμβαπτισμένες συναρτήσεις (embedding functions) και η παράμετρος  $p$  καλείται εμβαπτισμένη παράμετρος (embedding parameter).

Θεωρούμε μια μη γραμμική εξίσωση στη γενική μορφή [45, 44]:

$$\mathcal{N}[u(r)] = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.8)$$

όπου,  $\mathcal{N}$  είναι ένας μη γραμμικός διαφορικός τελεστής και  $u(r)$  μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.8), ορισμένη στο  $r \in \Omega$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  (γενικά  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ). Εφαρμόζοντας τη MOA για να λύσουμε την εξίσωση (2.8), πρώτα κατασκευάζουμε την οικογένεια εξισώσεων συνήθων ή μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ ή ΜΔΕ):

$$[1 - B(p)]\{\mathcal{L}[\theta(r, p)] - \mathcal{L}[u_0(r)]\} = A(p)\mathcal{N}[\theta(r, p)], \quad (2.9)$$

όπου  $\mathcal{L}$  είναι ένας κατάλληλα επιλεγμένος βοηθητικός γραμμικός τελεστής ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση  $\mathcal{L}(0) = 0$ ,  $u_0(r)$  μια αρχική λύση της εξίσωσης,  $A(p)$

και  $B(p)$  είναι οι εμβαπτισμένες συναρτήσεις, όπως ορίστηκαν νωρίτερα, και τέλος,  $p$ , η εμβαπτισμένη παράμετρος. Σύμφωνα με τον ορισμό των εμβαπτισμένων συναρτήσεων  $A(p)$  και  $B(p)$ , για  $p = 0$  η εξίσωση (2.9) δίνει

$$\theta(r, 0) = u_0(r). \quad (2.10)$$

Ομοίως, όταν  $p = 1$ , η εξίσωση (2.9) δίνει

$$\theta(r, 1) = u(r). \quad (2.11)$$

Υποθέτουμε ότι οι  $A(p)$  και  $B(p)$  είναι κατάλληλα επιλεγμένες έτσι ώστε η εξίσωση (2.9) να έχει λύση  $\theta(r, p)$ , για κάθε  $p \in [0, 1]$ , και επιπλέον, στο  $p = 0$ , η λύση  $\theta(r, p)$  έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης:

$$\theta_0^{[k]}(r) = \left. \frac{\partial^k \theta(r, p)}{\partial p^k} \right|_{p=0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

Τότε, καθώς το  $p$  αυξάνει από το μηδέν στο ένα, η λύση  $\theta(r, p)$  της οικογένειας εξισώσεων (2.9) μεταβάλλεται συνεχώς, από την αρχική προσέγγιση  $u_0(r)$  στην λύση  $u(r)$ , της αρχικής εξίσωσης (2.8). Στην τοπολογία, αυτό το είδος συνεχούς μεταβολής καλείται παραμόρφωση (deformation) [45]. Οπότε, ονομάζουμε την οικογένεια εξισώσεων (2.9) μηδενικής τάξης εξισώσεις παραμόρφωσης (zeroth-order deformation equations), και  $\theta_0^{[k]}(r)$ ,  $k$ -τάξης παραγώγους παραμόρφωσης ( $k$ th-order deformation derivatives) [44, 43].

Οι εξισώσεις (2.10) και (2.11) δίνουν μια έμμεση σχέση μεταξύ της αρχικής προσέγγισης  $u_0(r)$  και της λύσης  $u(r)$  της εξίσωσης (2.8). Εξαγάγαμε μία έμμεση σχέση μεταξύ τους, που είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της μεθόδου ομοτοπικής ανάλυσης. Σημειώνεται ότι, η σειρά Maclaurin του  $\theta(r, p)$  γύρω από το  $p$  είναι:

$$\theta(r, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta_0^{[k]}(r)}{k!} p^k. \quad (2.13)$$

Υποθέτοντας ότι οι  $A(p)$ ,  $B(p)$ , η αρχική προσέγγιση,  $u_0(r)$ , και ο βοηθητικός γραμμικός τελεστής,  $\mathcal{L}$ , είναι κατάλληλα επιλεγμένα έτσι ώστε η παραπάνω σειρά Maclaurin, (2.13), να συγκλίνει στο  $p = 1$ , έχουμε από τις εξισώσεις (2.10) και (2.11) τη σχέση:

$$u(r) = u_0(r) + \sum_{k=1}^{+\infty} \phi_k(r) \quad (2.14)$$

όπου,

$$\phi_k(r) = \frac{\theta_0^{[k]}(r)}{k!}, \quad k \geq 1. \quad (2.15)$$

Είναι αναγκαίο να προσδιοριστούν οι εξισώσεις που ορίζουν τις  $\phi_k(r)$ . Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις παραμόρφωσης μηδενικής τάξης (2.9),  $m$ -φορές ως προς  $p$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k [1 - B(p)]}{dp^k} \frac{d^{m-k}}{dp^{m-k}} \{ \mathcal{L}[\theta(r, p)] - \mathcal{L}[u_0(r)] \} = \\ = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k A(p)}{dp^k} \frac{d^{m-k} \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^{m-k}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Στη συνέχεια διαιρώντας με  $m!$  και τέλος θέτοντας  $p = 0$  προκύπτουν οι  $m$ -τάξης εξισώσεις παραμόρφωσης ( $m$ th-order deformation equations)

$$\mathcal{L} \left[ \phi_m(r) - \sum_{k=1}^{m-1} b_{1,k} \phi_{m-k}(r) \right] = R_m(r), \quad (2.17)$$

όπου

$$R_m(r) = \sum_{k=1}^m a_{1,k} \delta_{m-k}(r) \quad (2.18)$$

και

$$\delta_k(r) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^k} \right|_{p=0}. \quad (2.19)$$

Τονίζεται ότι οι  $m$ -τάξης ( $m \geq 1$ ) εξισώσεις παραμόρφωσης (2.16) είναι γραμμικές. Επίσης, το δεξιό μέλος της (2.17),  $R_m(r)$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), είναι γνωστό όταν ληφθούν οι πρώτες  $m - 1$  προσεγγίσεις. Έτσι, χρησιμοποιώντας την αρχική προσέγγιση,  $u_0(r)$ , παίρνουμε τις  $\phi_1(r)$ ,  $\phi_2(r)$ ,  $\phi_3(r)$ ,  $\dots$ , τη μία μετά την άλλη. Οπότε, σύμφωνα με τη (2.14), το αρχικό μη γραμμικό πρόβλημα (2.8) μετατρέπεται σε μια άπειρη ακολουθία γραμμικών υποπροβλημάτων τα οποία διέπονται από την εξίσωση (2.17).

Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι η MOA μας δίνει μεγάλη ελευθερία και ευελιξία στην επιλογή των εμβαπτισμένων συναρτήσεων  $A(p)$  και  $B(p)$ , της αρχικής προσέγγισης,  $u_0(r)$ , και του βοηθητικού γραμμικού τελεστή,  $\mathcal{L}$  [43]. Η MOA είναι έγκυρη τόσο για προβλήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ) όσο και για προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ).

**Παρατήρηση I:**

Η ανάλυση της MOA μπορεί εύκολα να γίνει στο μιγαδικό επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή, οι εμβαπτισμένες συναρτήσεις  $A(p)$  και  $B(p)$ , είναι αναλυτικές στην περιοχή  $|p| \leq 1$ .

**Παρατήρηση II:**

Εισάγοντας μια μη μηδενική παράμετρο,  $h$ ,  $h \neq 0$ , στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.9), προκύπτει:

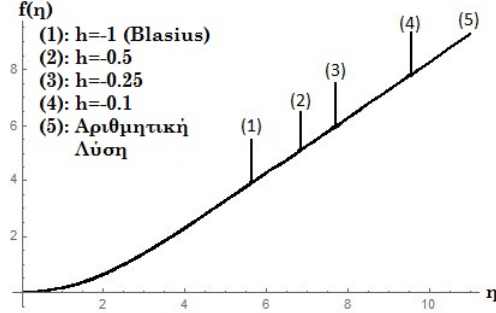
$$[1 - B(p)]\{\mathcal{L}[\theta(r, p)] - \mathcal{L}[u_0(r)]\} = hA(p)\mathcal{N}[\theta(r, p)],$$

και η εξίσωση (2.16) γίνεται:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k [1 - B(p)]}{dp^k} \frac{d^{m-k}}{dp^{m-k}} \{\mathcal{L}[\theta(r, p)] - \mathcal{L}[u_0(r)]\} = \\ = h \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k A(p)}{dp^k} \frac{d^{m-k} \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^{m-k}}. \end{aligned}$$

Η παράμετρος  $h$  καλείται παράμετρος ελέγχου σύγκλισης (convergence-control parameter) και, όπως αναφέρει το όνομα της, ελέγχει τη σύγκλιση της προσεγγιστικής λύσης. Δηλαδή, για συγκεκριμένη τιμή του  $h$ , η λύση που παίρνουμε συγκλίνει ταχύτερα από τη λύση για κάποια άλλη τιμή του  $h$ .

Σε αυτήν την εργασία, χρησιμοποιούμε τη MOA με την παράμετρο ελέγχου σύγκλισης,  $h$ . Στο κεφάλαιο 3 γίνεται αναλυτική συζήτηση για το σύστημα των εξισώσεων. Επίσης, μελετάται εκτεταμένα η εξίσωση Blasius με τις τρεις προσεγγιστικές τεχνικές που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο. Εδώ αναφέρουμε ότι για την εξίσωση Blasius, έχουμε τις εξής περιπτώσεις. Αν  $h = -1$ , τότε η προσεγγιστική λύση που παίρνουμε από τη MOA είναι η ίδια με τη λύση που έδωσε ο Blasius [11], η οποία αποκλίνει στο  $\eta = 5.69$ . Καθώς το  $h$  αυξάνεται,  $h = -\frac{1}{2}$ ,  $h = -\frac{1}{4}$ ,  $h = -\frac{1}{10}$ , η λύση αποκλίνει για μεγαλύτερο  $\eta$ . Στο ακόλουθο Σχήμα 2.1, παρουσιάζεται αυτή η συμπεριφορά.



Σχήμα 2.1: Αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ , της εξίσωσης Blasius, για διάφορες τιμές του  $h$ .

### 2.2.3 Σύγκλιση της Προσεγγιστικής Λύσης

Στην παράγραφο αυτή, αποδεικνύεται ότι, αν η ακολουθία προσεγγίσεων που δίνεται από τη ΜΟΑ είναι συγκλίνουσα, τότε πρέπει να είναι λύση του υπό μελέτη μη γραμμικού προβλήματος.

#### Θεώρημα I

Αν η σειρά  $\theta(r, 1) = u_0(r) + \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_m(r)$  είναι συγκλίνουσα, τότε πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης (2.8),  $\mathcal{N}[u(r)] = 0$ ,  $r \in \Omega$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ . Το θεώρημα και η απόδειξη εισήχθησαν από τον Liao [44].

#### Απόδειξη:

Από την εξίσωση (2.17) έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(r) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L} \left[ \phi_m(r) - \sum_{k=1}^{m-1} b_{1,k} \phi_{m-k}(r) \right] \\
 &= \mathcal{L} \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_m(r) - \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{m-1} b_{1,k} \phi_{m-k}(r) \right] \\
 &= \mathcal{L} \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_m(r) - \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{m=k+1}^{+\infty} b_{1,k} \phi_{m-k}(r) \right] \\
 &= \mathcal{L} \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_m(r) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_{1,k} \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_m(r) \right] \\
 &= \mathcal{L} \left[ \left( 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_{1,k} \right) \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_m(r) \right],
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

η οποία, από την εξίσωση (2.7) και από τη συνθήκη  $\mathcal{L}(0) = 0$ , δίνει

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(r) = 0. \quad (2.21)$$

Από τις εξισώσεις (2.18)-(2.19) λαμβάνοντας υπ' όψιν και τη παράμετρο ελέγχου σύγκλισης  $h$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(r) &= \sum_{m=1}^{+\infty} h \sum_{k=1}^m a_{1,k} \delta_{m-k}(r) = h \sum_{k=1}^{+\infty} a_{1,k} \sum_{m=k}^{+\infty} \delta_{m-k}(r) \\ &= h \sum_{k=1}^{+\infty} a_{1,k} \sum_{m=0}^{+\infty} \delta_m(r) = h \sum_{k=1}^{+\infty} a_{1,k} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^m} \right|_{p=0}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.7) έχουμε ότι  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{1,k} = 1$ . Οπότε, η (2.22) γίνεται

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(r) = h \sum_{m=0}^{+\infty} \delta_m(r) = h \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^m} \right|_{p=0}. \quad (2.23)$$

Επιπλέον,  $h \neq 0$ . Οπότε, από τις εξισώσεις (2.21) και (2.23), προκύπτει

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^m} \right|_{p=0} = 0. \quad (2.24)$$

Έστω  $\Delta(r, p) = \mathcal{N}(r, p)$ . Το  $\Delta(r, p)$  συμβολίζει το υπολειπόμενο σφάλμα της εξίσωσης (2.8). Η σειρά Maclaurin του υπολειπόμενου σφάλματος γύρω από το  $p$  είναι:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \Delta[\theta(r, p)]}{dp^m} \right|_{p=0} p^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^m} \right|_{p=0} p^m. \quad (2.25)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.24), η σειρά Maclaurin είναι συγκλίνουσα στο  $p = 1$ , δηλαδή

$$\Delta(r, 1) = \mathcal{N}[\theta(r, 1)] = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \mathcal{N}[\theta(r, p)]}{dp^m} \right|_{p=0} = 0. \quad (2.26)$$

Αυτό σημαίνει ότι η

$$\theta(r, 1) = u_0(r) + \sum_{m=0}^{+\infty} \phi_m(r), \quad (2.27)$$



πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης (2.8), αφού αφήνει μηδενικό υπολειπόμενο σφάλμα  $\Delta(r, 1)$ . Άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

#### Παρατήρηση:

Σημειώνουμε ότι, γενικά η  $\theta(r, p)$  δεν είναι λύση της εξίσωσης (2.8) όταν  $p \neq 1$ .

Η εγκυρότητα της μεθόδου έχει αποδειχθεί από τον Liao [46]. Αποδείξεις για τις  $k$ -τάξης παραγώγους παραμόρφωσης υπάρχουν στην εργασία του Turkyilmazoglu [79] όπως και στην εργασία των Molabahrani και Khani, όπου στην τελευταία αποδεικνύεται επιπλέον ότι αν η σειρά συγκλίνει, τότε είναι λύση του μη γραμμικού προβλήματος [53].

## 2.3 Μέθοδος Διαφορικού Μετασχηματισμού

### 2.3.1 Εισαγωγή στη ΜΔΜ

Η πολυπλοκότητα και η ισχυρή μη γραμμικότητα πολλών προβλημάτων έκανε αναγκαία τη δημιουργία και άλλων αναλυτικών τεχνικών. Μια τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος διαφορικού μετασχηματισμού, ΜΔΜ (differential transformation method, DTM). Η μέθοδος αυτή, μετασχηματίζει το πρόβλημα υπό μελέτη σε ένα νέο πρόβλημα, σε χωρίο όπου είναι ευκολότερο να αντιμετωπιστεί η μη γραμμικότητα. Στη συνέχεια, με τον αντίστροφο μετασχηματισμό η λύση του προβλήματος υπό μελέτη δίνεται από μια άπειρη σειρά με κατάλληλες συνοριακές και αρχικές συνθήκες.

### 2.3.2 Συστηματική Περιγραφή της ΜΔΜ

Έστω η αναλυτική συνάρτηση,  $u(x)$ , στην περιοχή  $T \subset \mathbb{C}$  και έστω  $x = x_0$  κάποιο σημείο στο  $T$ , τότε, η συνάρτηση,  $u(x)$ , παριστάνεται από μια δυναμοσειρά με κέντρο το  $x_0$ . Ο διαφορικός μετασχηματισμός της συνάρτησης,  $u(x)$ , δίνεται από την έκφραση [77, 14]:

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}, \quad (2.28)$$

όπου  $u(x)$ , είναι η αρχική συνάρτηση και  $U(k)$ , είναι η μετασχηματισμένη συνάρτηση. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται ως εξής:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k U(k). \quad (2.29)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.28) και (2.29), προκύπτει:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}. \quad (2.30)$$

Η εξέταση της σχέσης (2.30), δείχνει ότι ο διαφορικός μετασχηματισμός εξάγεται από τις σειρές Taylor. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος δεν υπολογίζει τις παραγώγους συμβολικά αλλά ουσιαστικά και μέσω αναδρομικών σχέσεων τις ανάγει σε γινόμενα μονωνύμων [77]. Για μη γραμμικά προβλήματα η μέθοδος ανάγει τις παραγώγους σε αθροίσματα γινομένων μονωνύμων. Σε πραγματικές εφαρμογές, η συνάρτηση  $u(x)$  δίνεται από πεπερασμένες σειρές και η σχέση (2.29) ξαναγράφεται ως

$$u(x) \simeq \sum_{k=0}^m \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0}, \quad (2.31)$$

που σημαίνει ότι η  $u_c(x) \simeq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \rightarrow 0$ . Συνήθως η τιμή του  $m$  επιλέγεται ώστε η σειρά (2.31) να συγκλίνει.

Στην συνέχεια παρατίθενται κάποια χρήσιμα θεωρήματα [16, 5] για τη μέθοδο διαφορικού μετασχηματισμού.

### Θεώρημα I

Αν  $f(\eta) = g(\eta) \pm h(\eta)$ , τότε  $F(k) = G(k) \pm H(k)$ .

### Απόδειξη:

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού, σχέση (2.29), ισχύει ότι

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k F(k),$$

$$g(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k G(k)$$

και

$$h(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k H(k),$$

οπότε έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k F(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k G(k) \pm \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k H(k). \quad (2.32)$$

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα επαγωγικά.

Για  $k = 0$  έχουμε:

$$F(0) = G(0) \pm H(0). \quad (2.33)$$

Για  $k = 1$  έχουμε:

$$F(0) + (\eta - \eta_0)F(1) = G(0) + (\eta - \eta_0)G(1) \pm [H(0) + (\eta - \eta_0)H(1)] \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(2.33)} (\eta - \eta_0)F(1) = (\eta - \eta_0)[G(1) \pm H(1)] \Rightarrow F(1) = G(1) \pm H(1).$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $k = m$ , δηλαδή:

$$\sum_{k=0}^m (\eta - \eta_0)^k F(k) = \sum_{k=0}^m (\eta - \eta_0)^k G(k) \pm \sum_{k=0}^m (\eta - \eta_0)^k H(k). \quad (2.34)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για  $k = m + 1$ .

$$\sum_{k=0}^{m+1} (\eta - \eta_0)^k F(k) = \sum_{k=0}^{m+1} (\eta - \eta_0)^k G(k) \pm \sum_{k=0}^{m+1} (\eta - \eta_0)^k H(k) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^m (\eta - \eta_0)^k F(k) + (\eta - \eta_0)^{m+1} F(m+1) = \sum_{k=0}^m (\eta - \eta_0)^k G(k) +$$

$$+ (\eta - \eta_0)^{m+1} G(m+1) \pm \left[ \sum_{k=0}^m (\eta - \eta_0)^k H(k) + (\eta - \eta_0)^{m+1} H(m+1) \right] \xrightarrow{(2.34)}$$

$$(\eta - \eta_0)^{m+1} F(m+1) = (\eta - \eta_0)^{m+1} G(m+1) \pm (\eta - \eta_0)^{m+1} H(m+1) \Rightarrow$$

$$F(m+1) = G(m+1) \pm H(m+1), \forall m \in \mathbb{N}.$$

Άρα, ισχύει το θεώρημα, δηλαδή

$$f(\eta) = g(\eta) \pm h(\eta) \Rightarrow F(k) = G(k) \pm H(k) \quad \blacksquare$$

**Θεώρημα II**

Αν  $f(\eta) = c g(\eta)$ , τότε  $F(k) = c G(k)$  όπου  $c$  είναι μια σταθερά.

**Απόδειξη:**

Εργαζόμενοι όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος I, εύκολα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα III**

Αν  $f(\eta) = \frac{d^m g(\eta)}{d\eta^m}$ , τότε  $F(k) = \frac{(k+m)!}{k!} G(k+m)$ .

**Απόδειξη:**

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού, σχέση (2.29), ισχύει ότι

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k F(k)$$

και

$$g(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k G(k).$$

Επίσης, ισχύει

$$\frac{dg(\eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k G(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\eta - \eta_0)^{k-1} G(k) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\eta - \eta_0)^k G(k+1),$$

$$\frac{d^2 g(\eta)}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta} \frac{dg(\eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\eta - \eta_0)^k G(k+1) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k(\eta - \eta_0)^{k-1} G(k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)(\eta - \eta_0)^k G(k+2)$$

⋮

$$\frac{d^m g(\eta)}{d\eta^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} (\eta - \eta_0)^k G(k+m).$$

Άρα, έχουμε  $\sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k F(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)(\eta - \eta_0)^k G(k+2)$ . Εργαζόμενοι επαγωγικά όπως και στο Θεώρημα I, καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$F(k) = \frac{(k+m)!}{k!} G(k+m) \quad \blacksquare$$

#### Θεώρημα IV

Αν  $f(\eta) = g(\eta)h(\eta)$ , τότε  $F(k) = \sum_{m=0}^k G(m)H(k-m)$ .

#### Απόδειξη:

Από τον ορισμό του διαφορικού μετασχηματισμού προκύπτει:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k F(k) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k G(k) \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\eta - \eta_0)^k H(k) \right).$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι το γινόμενο Cauchy των δύο δυναμοσειρών,  $g(\eta)$  και  $h(\eta)$ . Άρα, από τον ορισμό του γινομένου Cauchy, το  $F(k)$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$F(k) = \sum_{m=0}^k G(m)H(k-m). \quad \blacksquare$$

#### Θεώρημα V

Αν  $f(\eta) = \eta^k$ , τότε  $F(k) = \delta(k-n)$ , όπου  $\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = n \\ 0, & \text{αν } k \neq n \end{cases}$ .

#### Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ορίζουμε  $\eta_0 = 0$ . Η  $f(\eta)$  μπορεί να γραφεί ως:

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-n)\eta^k, \quad \delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases},$$

όπου  $\delta(k-n)$  η συνάρτηση  $\delta$ -Dirac. Από τον ορισμό της ΜΔΜ για την  $f(\eta)$ , έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta^k F(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-n)\eta^k \Rightarrow F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = n \\ 0, & \text{αν } k \neq n \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Οι βασικοί μετασχηματισμοί της ΜΔΜ δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 2.1. Η μέθοδος διαφορικού μετασχηματισμού κατασκευάζει μια αναλυτική λύση σε

μορφή δυναμοσειρών. Ωστόσο, οι δυναμοσειρές μπορεί να μην περιγράφουν καλά τη λύση για μεγάλες τιμές του  $\eta$ ,  $\eta \rightarrow +\infty$ . Είναι γνωστό από τους Baker [6], Baker και Grave-Morris [7], ότι οι προσεγγίσεις Padé έχουν το πλεονέκτημα να μετατρέπουν ένα πολυώνυμο σε ρητή συνάρτηση. Είναι λοιπόν, ουσιώδες να συνδυάσουμε τη λύση σε μορφή δυναμοσειρών, που δόθηκε από τη μέθοδο διαφορικού μετασχηματισμού, με προσεγγίσεις Padé οι οποίες παρέχουν ένα αποτελεσματικό εργαλείο για τη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών σε άπειρα χωρία [59, 66].

Αρχική Συνάρτηση	Μετασχηματισμένη Συνάρτηση
$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
$w(x) = \lambda u(x)$	$W(k) = \lambda U(k)$ , $\lambda = \text{σταθερά}$
$w(x) = x^r$	$W(k) = \delta(k - r)$ , $\delta(k - r) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = r \\ 0, & \text{αν } k \neq r \end{cases}$
$w(x) = \frac{du(x)}{dx}$	$W(k) = (k + 1)U(k + 1)$
$w(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$W(k) = (k + 1)(k + 2) \cdots (k + r)U(k + r)$
$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k - r)$
$w(x) = \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx}$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (r + 1)(k - r + 1)U(r + 1)V(k - r + 1)$
$w(x) = u(x) \frac{dv(x)}{dx}$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (k - r + 1)U(r)V(k - r + 1)$

Πίνακας 2.1: Βασικοί μετασχηματισμοί της μεθόδου διαφορικού μετασχηματισμού.

### 2.3.3 Προσεγγίσεις πολυωνύμων με ρητές συναρτήσεις Padé

Οι προσεγγίσεις Padé είναι ένας συγκεκριμένος τύπος ρητής προσέγγισης της τιμής μιας συνάρτησης. Η βασική ιδέα είναι να συμπίπτουν αυτές οι προσεγγίσεις όσο το δυνατόν περισσότερο με τα αναπτύγματα των συναρτήσεων σε σειρές Taylor.

**Ορισμός I**

Συμβολίζουμε την  $L$ ,  $M$  προσέγγιση Padé της  $A(x)$  με

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad (2.35)$$

όπου  $P_L(x)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $L$  και  $Q_M(x)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $M$ . Η δυναμοσειρά:

$$A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (2.36)$$

καθορίζει τις σταθερές των  $P_L(x)$  και  $Q_M(x)$  από την εξίσωση:

$$A(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}). \quad (2.37)$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με κάποια τυχαία σταθερά και η προσέγγιση  $[L/M]$  να μείνει ανεπηρέαστη. Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$$Q_M(0) = 1. \quad (2.38)$$

Τέλος, απαιτούμε τα  $P_L(x)$  και  $Q_M(x)$  να μην έχουν κοινούς παράγοντες.  $\square$

Αν γράψουμε τους συντελεστές των  $P_L(x)$  και  $Q_M(x)$  ως

$$\begin{aligned} P_L(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_L x^L, \\ Q_M(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_M x^M, \end{aligned} \quad (2.39)$$

τότε, από τη (2.38), μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τη (2.37) με  $Q_M(x)$  η οποία γραμμικοποιεί τις εξισώσεις συντελεστών. Γράφουμε την (2.37) ως

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0, \\ a_1 + a_0 q_1 &= p_1, \\ a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 &= p_2, \\ &\vdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \cdots + a_0 q_L &= p_L, \\ a_{L+1} + a_L q_1 + \cdots + a_{L-M+1} q_M &= 0, \\ &\vdots \\ a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \cdots + a_L q_M &= 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

όπου ορίζουμε  $a_n \equiv 0$ , αν  $n < 0$  και  $q_j \equiv 0$  αν  $j > M$ .

### Θεώρημα I

Όταν υπάρχει η  $[L/M]$  προσέγγιση Padé μιας δυναμοσειράς  $A(x)$ , τότε είναι μοναδική.

### Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχουν δυο προσεγγίσεις Padé, οι  $X(x)/Y(x)$  και  $U(x)/V(x)$ , όπου τα  $X$  και  $U$  έχουν βαθμό το πολύ  $L$  και τα  $Y$  και  $V$  έχουν βαθμό το πολύ  $M$ . Τότε, από την (2.37), πρέπει να έχουμε:

$$\frac{X(x)}{Y(x)} - \frac{U(x)}{V(x)} = O(x^{L+M+1}), \quad (2.41)$$

αφού και τα δύο προσεγγίζουν την ίδια σειρά. Αν πολλαπλασιάσουμε τη (2.41) με  $Y(x)V(x)$ , προκύπτει

$$X(x)V(x) - U(x)Y(x) = O(x^{L+M+1}). \quad (2.42)$$

Όμως, το  $X(x)V(x) - U(x)Y(x)$  είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $L+M$ , έτσι  $X(x)V(x) - U(x)Y(x) \equiv 0$ . Εφόσον κανένα από τα  $Y$  και  $V$  δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{X}{Y} = \frac{U}{V}. \quad (2.43)$$

Επίσης, εξ' ορισμού,  $U(0) = V(0) = 1$ . Άρα, δείξαμε ότι, όταν μια προσέγγιση Padé υπάρχει, τότε είναι μοναδική. ■

Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει είτε οι λύσεις των εκάστοτε εξισώσεων έχουν ιδιάζοντα (singular) σημεία (πεπερασμένο πλήθος) είτε όχι. Αν δεν έχουν ιδιάζοντα σημεία, τότε μπορούν να λυθούν άμεσα και προκύπτει [6]:

$$[L/M] = \frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^L a_{j-M}x^j & \sum_{j=M-1}^L a_{j-M+1}x^j & \cdots & \sum_{j=0}^L a_jx^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} + \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M+1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}, \quad (2.44)$$



όπου ισχύει  $a_n \equiv 0$ , αν  $n < 0$  και  $q_j \equiv 0$  αν  $j > M$ .

### Παρατήρηση:

Αν το κάτω όριο ενός αθροίσματος ξεπερνάει το πάνω, τότε το άθροισμα αντικαθίσταται με μηδέν.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα απλό παράδειγμα για την κατανόηση της προσέγγισης Padé.

### Παράδειγμα I:

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x$ . Να βρεθούν οι  $[1/1]$  και  $[2/2]$  προσεγγίσεις Padé.

### Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της  $f(x)$  είναι:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5).$$

Από τη σχέση (2.37), έχουμε:

$$f(x)Q_M(x) - P_L(x) = O(x^{L+M+1}).$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών  $p_i$  και  $q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , της  $[L/M]$  προσέγγισης Padé χρειαζόμαστε  $L + M + 1$  όρους του αναπτύγματος Taylor. Οπότε για την  $[1/1]$  προσέγγιση χρειαζόμαστε τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor, δηλαδή όρους μέχρι  $x^2$ .

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(1 + q_1 x) - p_0 - p_1 x = 0 \Rightarrow$$

$$(1 - p_0) + (1 + q_1 - p_1)x + \left(q_1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + O(x^3) = 0$$

Άρα, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$1 - p_0 = 0 \Rightarrow p_0 = 1,$$

$$q_1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow q_1 = -\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} + 1 - p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}.$$

Τελικά, η  $[1/1]$  προσέγγιση Padé του  $e^x$  είναι:

$$[1/1] = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x} = \frac{2 + x}{2 - x}.$$

Εργαζόμαστε όμοια και για την  $[2/2]$  προσέγγιση Padé. Τώρα όμως θα χρειαστούν οι πέντε πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor, δηλαδή όροι τάξης έως  $x^4$ . Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) (1 + q_1 x + q_2 x^2) - p_0 - p_1 x - p_2 x^2 = 0 \Rightarrow \\ & (1 - p_0) + (1 + q_1 - p_1)x + \left(q_2 + q_1 + \frac{1}{2} - p_2\right) x^2 + \left(q_2 + \frac{q_1}{2} + \frac{1}{6}\right) x^3 + \\ & + \left(\frac{1}{24} + \frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{2}\right) x^4 + O(x^5) = 0. \end{aligned}$$

Η λύση του προηγούμενου συστήματος δίνει:

$$\begin{aligned} 1 - p_0 = 0 & \Rightarrow p_0 = 1, \\ \frac{1}{6} + \frac{q_1}{2} + q_2 = 0 & \Rightarrow q_2 = -\frac{1}{6} - \frac{q_1}{2}, \\ \frac{1}{24} + \frac{q_1}{6} + \frac{q_2}{2} = 0 & \Rightarrow q_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{12}, \\ 1 + q_1 - p_1 = 0 & \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + q_2 + q_1 - p_2 = 0 & \Rightarrow p_2 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Άρα, η  $[2/2]$  προσέγγιση Padé του  $e^x$  είναι:

$$[2/2] = \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2} = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2}. \quad \blacksquare$$

## 2.4 Μέθοδος Ανάλυσης του Adomian

### 2.4.1 Εισαγωγή στη ΜΑΑ

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου ανάλυσης ή αποσύνθεσης του Adomian - MAA (Adomian decomposition method - ADM) είναι ότι μπορεί να παρέχει αναλυτικές προσεγγίσεις σε μεγάλο εύρος μη γραμμικών εξισώσεων χωρίς να χρειάζεται μεθόδους γραμμικοποίησης, διαταραχών ή διακριτοποίησης οι οποίες μπορεί να έχουν ως αποτέλεσμα εκτεταμένους αριθμητικούς υπολογισμούς [1]. Οι επιθυμητές λύσεις σε κλειστές μορφές μη γραμμικών προβλημάτων απαιτούν

συνήθως απλουστεύσεις και περιοριστικές υποθέσεις προκειμένου το πρόβλημα να καταστεί επιλύσιμο. Το αποτέλεσμα ωστόσο μπορεί να μην είναι καθόλου ρεαλιστικό. Δηλαδή, η λύση ενός απλουστευμένου προβλήματος μπορεί να μην είναι καλή προσέγγιση για την επίλυση του αρχικού φυσικού προβλήματος. Ασθενής μη γραμμικότητα και μικρές διαταραχές είναι κοινές παραδοχές για την απλούστευση του φυσικού προβλήματος. Ωστόσο, η φύση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε είναι ισχυρά μη γραμμική. Η γραμμικότητα μπορεί να θεωρηθεί ως περιοριστική περίπτωση καθώς επίσης και περιπτώσεις όπου η θεωρία διαταραχών είναι επαρκής [2].

Η λύση αποσύνθεσης ή ανάλυσης είναι μια προσέγγιση που δεν αλλάζει τη φύση του προβλήματος. Ως εκ τούτου, είναι πιο ρεαλιστική. Η λύση που λαμβάνεται με τη μέθοδο αποσύνθεσης είναι μια άπειρη σειρά. Μια προσέγγιση  $n$ -όρων,  $\phi_n$ , συνήθως είναι μια καλή προσέγγιση της λύσης. Πολλές φορές μάλιστα, μια τέτοια λύση μπορεί να επιτευχθεί για πολύ μικρό  $n$  [1].

#### 2.4.2 Συστηματική Περιγραφή της ΜΑΑ

Έστω η εξίσωση  $Fu(t) = g(t)$ , όπου  $F$  ένας γενικός μη γραμμικός διαφορικός τελεστής που περιέχει γραμμικούς και μη γραμμικούς όρους. Οι γραμμικοί όροι αποδομούνται σε  $L + R$ , όπου  $L$  είναι ένας εύκολα αντιστρέψιμος τελεστής και  $R$  είναι το υπόλοιπο του γραμμικού τελεστή. Για λόγους ευκολίας, υποθέτουμε ότι το  $L$  είναι η υψηλότερη παράγωγος έτσι ώστε να αποφευχθούν δύσκολες ολοκληρώσεις που συνεπάγονται από πολύπλοκες συναρτήσεις Green [1]. Έτσι, η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (2.45)$$

όπου  $Nu$  είναι οι μη γραμμικοί όροι. Λύνοντας ως προς  $Lu$  έχουμε:

$$Lu = g - Ru - Nu. \quad (2.46)$$

Επειδή ο  $L$  είναι αντιστρέψιμος, μια ισοδύναμη έκφραση είναι:

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (2.47)$$

Για προβλήματα συνοριακών τιμών, χρησιμοποιούνται άοριστες ολοκληρώσεις και οι σταθερές υπολογίζονται από τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες. Λύνοντας τη (2.46) ως προς  $u$ , προκύπτει:

$$u = A + Bt + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (2.48)$$

Ο μη γραμμικός όρος  $Nu$  εξισώνεται με  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ , όπου τα  $A_n$  είναι τα πολυώνυμα του Adomian, και το  $u$  αποδομείται σε  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ , με το  $u_0$  να προσδιορίζεται από το  $A + Bt + L^{-1}g$ . Οπότε έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.49)$$

Τα πολυώνυμα  $A_n$  κατασκευάζονται έτσι ώστε το  $A_0$  να εξαρτάται μόνο από το  $u_0$ , το  $A_1$  να εξαρτάται μόνο από τα  $u_0$  και  $u_1$ , το  $A_2$  από τα  $u_0, u_1$  και  $u_2$ , κ.ο.κ. [1]. Όλα τα  $u_n$  υπολογίζονται, και η λύση τελικά είναι  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ . Αν η σειρά συγκλίνει, τότε το  $n$ -οστό μερικό άθροισμα  $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ , θα είναι η προσεγγιστική λύση, καθώς εξ' ορισμού:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u. \quad (2.50)$$

Για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου αποδόμησης του Adomian χρησιμοποιείται ένα προβλήματα της μορφής:

$$u = v + Nu, \quad (2.51)$$

όπου  $N : X \rightarrow X$  είναι μια μη γραμμική απεικόνιση από ένα χώρο συναρτήσεων,  $X$ , στον εαυτό του, και  $v \in X$  είναι γνωστή συνάρτηση του χώρου. Εφόσον η μέθοδος δε χρειάζεται γραμμικοποίηση ή υποθέσεις ασθενούς μη γραμμικότητας, οι μη γραμμικότητες που μπορούν να περιγραφούν είναι αρκετά γενικές. Η παραγόμενη λύση μπορεί να είναι πιο ρεαλιστική από αυτές που επιτυγχάνονται απλοποιώντας το μοντέλο του φυσικού προβλήματος [1].

Η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι η λύση,  $u$ , μπορεί να αναπτυχθεί σε μια άπειρη σειρά:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (2.52)$$

με  $u_n \in X, \forall n \in \mathbb{N}$ . Η απεικόνιση  $Nu$ , έχει ανάπτυγμα:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (2.53)$$

με  $A_n \in X$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Τα  $A_n$  καλούνται πολυώνυμα του Adomian. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.52) και (2.53) στην εξίσωση (2.51) προκύπτει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = v + \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (2.54)$$

η οποία ικανοποιείται αν θέσουμε:

$$u_0 = v, \quad (2.55)$$

$$u_{n+1} = A_n. \quad (2.56)$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογισθούν τα πολυώνυμα του Adomian,  $A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Για να υπολογισθούν τα  $A_n$ , εισάγεται μια βαθμωτή παράμετρος,  $\lambda$ , τέτοια ώστε:

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n, \quad (2.57)$$

και

$$Nu_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n. \quad (2.58)$$

Οπότε, τα  $A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  δίνονται από την ακόλουθη σχέση [2, 1]:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} Nu_\lambda \Big|_{\lambda=0}. \quad (2.59)$$

Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} A_0 &= Nu_\lambda \Big|_{\lambda=0}, \\ A_1 &= \frac{d}{d\lambda} Nu_\lambda \Big|_{\lambda=0} = (DN)(u_0)u_1, \\ A_2 &= \frac{d^2}{d\lambda^2} Nu_\lambda \Big|_{\lambda=0} = (DN)(u_0)u_2 + \frac{1}{2!} (D^2N)(u_0)u_1^2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.60)$$

όπου  $D^i N(u_0)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  είναι η  $i$ -οστές παράγωγοι του Fréchet του  $N$  στο  $u_0 \in X$  [81, 3, 14].

Αναφέρουμε ότι τα  $A_n$ , είναι πολυώνυμα των  $u_0, u_1, u_2, \dots$ . Η εξάρτησή τους από το  $u_0$ , εξαρτάται από τη μορφή του  $N$ , και τις παραγώγους του. Ωστόσο, τα

$A_n$ , εξαρτώνται μόνο από τα  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ , έτσι ώστε οι εξισώσεις (2.55) και (2.56) να επιτρέπουν διαδοχικούς υπολογισμούς των  $u_n, n = 0, 1, 2, \dots$ . Σε κάθε στάδιο, η λύση μπορεί να προσεγγισθεί από το μερικό άθροισμα:

$$S_k = \sum_{j=0}^{k-1} u_j, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.61)$$

και τελικά η λύση μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_{j=0}^{k-1} u_j = v + \sum_{j=0}^{k-1} A_j, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.62)$$

Στο επόμενο κεφάλαιο εφαρμόζονται οι παραπάνω αναλυτικές τεχνικές στις εξισώσεις του οριακού στρώματος και ενέργειας. Η μέθοδος διαταραχών εφαρμόζεται στο σύστημα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) που προκύπτει από το μετασχηματισμό Falkner-Skan και το μετασχηματίζει σε ένα νέο σύστημα μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ). Αυτό το μη γραμμικό σύστημα ΣΔΕ λύνεται αναλυτικά με συνδυασμό των τριών αναλυτικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, MOA, ΜΔΜ και ΜΑΑ.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Falkner-Skan στις εξισώσεις που προκύπτουν από τις απλοποιήσεις του οριακού στρώματος. Στο μη γραμμικό και συζευγμένο σύστημα ΜΔΕ που προκύπτει, γίνεται χρήση της μεθόδου διαταραχών. Από τη μέθοδο διαταραχών προκύπτει ένα νέο μη γραμμικό σύστημα ΣΔΕ. Στη συνέχεια εφαρμόζονται οι αναλυτικές τεχνικές, που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 2, στο μη γραμμικό σύστημα ΣΔΕ. Συγκρίνονται οι τρεις αναλυτικές μέθοδοι, ΜΟΑ, ΜΔΜ και ΜΑΑ, για τη μη γραμμική εξίσωση Blasius και παρατίθενται αναλυτικά γραφήματα των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος ΣΔΕ. Στο κεφάλαιο παρατίθενται προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις, σε μορφή δυναμοσειρών, για το σύστημα ΜΔΕ υπό μελέτη και για μικρές τιμές του  $x$ , αφού χρησιμοποιούμε τη μέθοδο διαταραχών.

### 3.1 Μετασχηματισμός Falkner-Skan

Το ακόλουθο σύστημα προέκυψε από την αδιαστοποίηση των αρχικών εξισώσεων του οριακού στρώματος, πάνω από επίπεδη πλάκα υπό την επίδραση βαθμίδας πίεσης και θερμικής ακτινοβολίας, στην παράγραφο 1.2.1. Το σύστημα αποτελείται από την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

την εξίσωση ορμής στη  $x$ -διεύθυνση μετά τις απλοποιήσεις του οριακού στρώματος:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.2)$$

και την εξίσωση ενέργειας:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial q_r}{\partial y}. \quad (3.3)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του συστήματος ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w, \\ y \rightarrow \delta : \quad u = u_e, \quad T = T_e, \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου  $T_w$  είναι η θερμοκρασία στο τοίχωμα της επίπεδης πλάκας,  $T_e$  είναι η θερμοκρασία στην ακμή του οριακού στρώματος και

$$-\frac{\partial q_r}{\partial y} = 4\alpha^* \sigma^* (T_e^4 - T^4) \quad (3.5)$$

είναι η τοπική απορρόφηση της θερμικής ακτινοβολίας, όπου  $\alpha^*$  είναι ο συντελεστής απορρόφησης και  $\sigma^*$  είναι η σταθερά Stefan-Boltzmann [32]. Υποθέτουμε ότι οι διαφορές της θερμοκρασίας εντός της ροής είναι επαρκώς μικρές έτσι ώστε ο όρος  $T^4$  να μπορεί να εκφραστεί ως μια γραμμική συνάρτηση της θερμοκρασίας [86]. Αυτό επιτυγχάνεται αναπτύσσοντας το  $T^4$  σε σειρά Taylor στη γειτονιά του  $T_e$  και παραμελώντας όρους μεγαλύτερης τάξης, οπότε προκύπτει [86]:

$$T^4 \approx 4T_e^3 T - 3T_e^4 \quad (3.6)$$

Η εξίσωση (3.5) μέσω της (3.6) παίρνει τη μορφή:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial y} = 16\alpha\sigma T_e^3 (T_e - T). \quad (3.7)$$

Εισάγουμε τη ρευματική συνάρτηση  $\Psi(x, y)$ . Η ρευματική συνάρτηση ικανοποιεί τις σχέσεις  $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  και  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ , και η εξίσωση συνέχειας γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0, \quad (3.8)$$

η οποία ικανοποιείται ταυτοτικά. Εισάγουμε τη ρευματική συνάρτηση και στις εξισώσεις ορμής και ενέργειας:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dp}{dx} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{\partial q_r}{\partial y}, \quad (3.10)$$



με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad T = T_w, \\ y \rightarrow \delta : \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_e, \quad T = T_e. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον αδιάστατο μετασχηματισμό Falkner-Skan που εισάγει στο πρόβλημα την αδιάστατη  $\eta$ -διεύθυνση [22, 15]:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}, \quad (3.12)$$

και την αδιάστατη ρευματική συνάρτηση  $f(x, \eta)$  [22, 15]:

$$\Psi = \sqrt{u_e \nu x} f(x, \eta). \quad (3.13)$$

Υποθέτουμε την ύπαρξη αντίξοης βαθμίδας πίεσης και στην ακμή του οριακού στρώματος η ταχύτητα ορίζεται ως:

$$u_e(x) = V_\infty(1 - x), \quad (3.14)$$

όπου  $V_\infty$  είναι η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος. Η ταχύτητα του οριακού στρώματος μπορεί να συσχετιστεί με την πίεση κατά μήκος της ακμής του οριακού στρώματος, μέσω της εξίσωσης Bernoulli που ισχύει στη δυναμική ροή, εκτός του οριακού στρώματος:

$$p + \frac{\rho u_e^2}{2} = c \Rightarrow \frac{dp}{dx} + \rho u_e \frac{du_e}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}, \quad c = \text{σταθ.} \quad (3.15)$$

Ως  $(\cdot)'$  ορίζουμε τη μερική παράγωγο ως προς  $\eta$ ,  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta}$ . Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους των ταχυτήτων και των παραγώγων τους:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{u_e \nu x} f(\eta) \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} \Rightarrow u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_e f', \quad (3.16)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_e \nu}{x}} f - \sqrt{u_e \nu x} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{du_e}{dx} f' + u_e \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = u_e \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} f'', \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{u_e^2}{\nu x} f''', \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} T', \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{u_e}{\nu x} T''. \quad (3.22)$$

Αντικαθιστώντας αυτά τα αποτελέσματα στις εξισώσεις (3.9) και (3.10), και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση Bernoulli (3.15), προκύπτει:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' + \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} [1 - (f')^2] = x \left[ f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right], \quad (3.23)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} T'' + \frac{1}{2} f T' + \frac{16x\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} (T_e - T) &= x \left( f' \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} T' \right) + \\ \frac{x f'}{C_p} u_e \frac{du_e}{dx} - \frac{u_e^2}{C_p} (f'')^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Θέτοντας

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_e} \Rightarrow T = T_w - \theta(T_w - T_e) \quad (3.25)$$

στην εξίσωση (3.24), προκύπτει το ακόλουθο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων:

$$f'''(x, \eta) + \frac{1}{2} f(x, \eta) f''(x, \eta) + \frac{x}{u_e(x)} \frac{du_e(x)}{dx} [1 - (f'(x, \eta))^2] = \quad (3.26)$$

$$x \left[ f'(x, \eta) \frac{\partial f'(x, \eta)}{\partial x} - f''(x, \eta) \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial x} \right],$$

$$\frac{1}{Pr} \theta''(x, \eta) + \frac{1}{2} f(x, \eta) \theta'(x, \eta) + \frac{16x\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e(x)} (1 - \theta) =$$

$$\begin{aligned} x \left( f'(x, \eta) \frac{\partial \theta(x, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial x} \theta'(x, \eta) \right) + \\ \frac{x f'(x, \eta)}{C_p (T_w - T_e)} u_e(x) \frac{du_e(x)}{dx} - \frac{u_e(x)^2}{C_p (T_w - T_e)} (f''(x, \eta))^2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad f(x, 0) = f'(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0, \\ \eta \rightarrow \infty : \quad f'(x, \eta) = 1, \quad \theta(x, \eta) = 1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

και κατάλληλες αρχικές συνθήκες, οι οποίες θα συζητηθούν στις επόμενες ενότητες, 3.3.1, 3.3.2 και 3.3.3, αυτού του κεφαλαίου.

### 3.2 Θεωρία Διαταραχών

Όπως προέκυψε στην προηγούμενη ενότητα, 3.1, έχουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' + \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} [1 - (f')^2] = x \left[ f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right], \quad (3.29)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{1}{2}f\theta' + \frac{16x\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} (1 - \theta) = x \left( f' \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \theta' \right) + \\ \frac{x f'}{C_p (T_w - T_e)} u_e \frac{du_e}{dx} - \frac{u_e^2}{C_p (T_w - T_e)} (f'')^2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad f(x, 0) = f'(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0, \\ \eta \rightarrow \infty : \quad f'(x, \eta) = 1, \quad \theta(x, \eta) = 1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

και αρχικές οι οποίες, προς το παρόν, δεν περιγράφονται αλλά συζητούνται στις ακόλουθες ενότητες αυτού του κεφαλαίου.

Σκοπός μας είναι το σύστημα ΜΔΕ να μετατραπεί σε σύστημα ΣΔΕ. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να απαλλαγούμε από τη μια εκ των δύο μεταβλητών. Στη μηχανική των ρευστών, η αδιάστατη μεταβλητή  $\eta$  περιγράφει το οριακό στρώμα, το οποίο μελετάμε σε αυτήν την εργασία. Οπότε, θα ήταν καταλληλότερο να κάνουμε διαταραχές έτσι ώστε να απαλλαγούμε από τη μεταβλητή  $x$ .

Υποθέτοντας ότι ο σχηματισμός του οριακού στρώματος είναι στην αρχή του, γνωρίζουμε ότι το  $x$  είναι μικρό,  $x \leq 1$ , οπότε αυτό το  $x$  μπορεί να είναι η παράμετρος διαταραχής γύρω από το οποίο θα αναπτυχθεί η μέθοδος διαταραχών για το σύστημα (3.29) – (3.31). Άρα υποθέτουμε ότι το  $x$  είναι η παράμετρος διαταραχής,  $\varepsilon$ , του προβλήματος. Στη συνέχεια εισάγουμε τα ακόλουθα αναπτύγματα σειρών για τις  $f$  και  $\theta$ :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n, \quad (3.32)$$

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \theta_n. \quad (3.33)$$

Από την φύση των εξισώσεων υπό μελέτη, είναι προφανές ότι θα χρειαστούμε παραγώγους των  $f$  και  $\theta$ , ως προς  $\eta$  και ως προς  $\varepsilon$ . Οπότε, θα χρειαστούμε και τα ακόλουθα αναπτύγματα σε σειρές:

$$f^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n^{(m)}, \quad (3.34)$$

$$\theta^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \theta_n^{(m)}, \quad (3.35)$$

και

$$\frac{\partial f^{(m)}}{\partial \varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} n \varepsilon^{n-1} f_n^{(m)}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \theta^{(m)}}{\partial \varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} n \varepsilon^{n-1} \theta_n^{(m)}. \quad (3.37)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (3.32) – (3.37) στο σύστημα (3.29) – (3.30) και χωρίζοντας όρους τάξης  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$  και  $\varepsilon^2$ , προκύπτει [52]:

$$\varepsilon^0 : \quad f_0''' + \frac{1}{2} f_0 f_0'' = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_0'' + \frac{1}{2} f_0 \theta_0' + \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} (f_0'')^2 = 0, \quad (3.39)$$

$$\varepsilon^1 : \quad f_1''' + \frac{1}{2} f_0 f_1'' - f_0' f_1' + \frac{3}{2} f_1 f_0'' + \frac{1}{u_e} p_g (1 - (f_0')^2) = 0, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \theta_1'' + \frac{1}{2} f_0 \theta_1' - \theta_1 f_0' + \frac{16\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} (1 - \theta_0) - \frac{u_e}{C_p(T_w - T_e)} p_g f_0' + \\ + \frac{3}{2} f_1 \theta_0' + 2 \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_0'' f_1'' = 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\varepsilon^2 : \quad f_2''' + \frac{1}{2} f_0 f_2'' + \frac{5}{2} f_2 f_0'' - 2f_0' f_2' + \frac{3}{2} f_1 f_1'' - (f_1')^2 - \frac{2}{u_e} p_g f_0' f_1' = 0, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \theta_2'' + \frac{1}{2} f_0 \theta_2' - 2\theta_2 f_0' - \theta_1 f_1' + \frac{3}{2} f_1 \theta_1' - \frac{16\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} \theta_1 - \\ - \frac{u_e}{C_p(T_w - T_e)} p_g f_1' + \frac{5}{2} f_2 \theta_0' + \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_1'' + \\ + 2 \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_0'' f_2'' = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

όπου  $p_g = \frac{du_e}{dx}$  η βαθμίδα πίεσης, όπου τώρα  $x = \varepsilon$  η μικρή παράμετρος, με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : f_0 = f_1 = f_2 = 0, f'_0 = f'_1 = f'_2 = 0, \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0, \\ \eta \rightarrow \infty : f'_0 = 1, f'_1 = f'_2 = 0, \theta_0 = 1, \theta_1 = \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, θα χρησιμοποιηθούν κατάλληλες αρχικές συνθήκες που περιγράφονται στη συνέχεια. Οι πιο πάνω συναρτήσεις είναι συναρτήσεις μόνο ως προς  $\eta$ , δηλαδή  $f(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$ , με τους κατάλληλους δείκτες. Επίσης, το  $(\cdot)'$  ορίζει παράγωγο ως προς το  $\eta$ . Στο νέο σύστημα ΣΔΕ, μόνο η μηδενικής τάξης εξίσωση ορμής είναι μη γραμμική.

Το αρχικό μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (3.29)–(3.30) με συνοριακές συνθήκες (3.31), μετασχηματίζεται στο νέο σύστημα μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η εξίσωση (3.38) είναι γνωστή ως πρόβλημα Blasius. Λύνοντας την εξίσωση (3.38) μπορούμε να υπολογίσουμε το  $f_0$ . Εισάγοντας το  $f_0$  στην εξίσωση (3.39) υπολογίζουμε το  $\theta_0$ . Συνεχίζοντας όμοια τελικά μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις για τα  $f_1$ ,  $\theta_1$ ,  $f_2$  και  $\theta_2$ . Η δυσκολία έγκειται στη μη γραμμικότητα και τη σύζευξη του συστήματος των εξισώσεων αυτών. Οπότε δεν μπορούν να λυθούν εύκολα αναλυτικά με τις γνωστές μεθόδους για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στις επόμενες παραγράφους, για τη λύση του συστήματος (3.38) – (3.43) με συνοριακές συνθήκες (3.44), χρησιμοποιούμε τις προσεγγιστικές μεθόδους που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 2.

### 3.3 Εξίσωση Blasius

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται οι τρεις μέθοδοι, MOA, ΜΔΜ και ΜΑ-Α. Γίνεται, επίσης, μια προσπάθεια να βρούμε μια αναλυτική λύση της εξίσωσης Blasius, γραμμικοποιώντας την εξίσωση αυτή και χρησιμοποιώντας μεθόδους βελτιστοποίησης για την εύρεση των άγνωστων παραμέτρων. Για την εξίσωση του Blasius, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των τριών προσεγγιστικών μεθόδων με τη λύση που έδωσε ο Blasius, με αριθμητικά αποτελέσματα και με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση..

### 3.3.1 Μέθοδος Ομοτοπικής Ανάλυσης - MOA

Για την λύση της εξίσωσης Blasius, όπως προέκυψε στην ενότητα 3.2, εξίσωση (3.38), και παραλείποντας τους δείκτες για λόγους ευκολίας, έχουμε:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0. \quad (3.45)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ομοτοπικής ανάλυσης όπως αυτή αναπτύχθηκε στην ενότητα 2.2.2 του κεφαλαίου 2. Θα θεωρήσουμε ότι η άγνωστη συνάρτηση  $f \in C^3(D)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Αυτή η θεώρηση ισχύει για όλες τις μεθόδους και για όλες τις άγνωστες συναρτήσεις,  $f_0, f_1, f_2$ , που περιγράφονται παρακάτω. Αρχικά, εισάγουμε ένα γραμμικό τελεστή της μορφής  $\mathcal{L} = \frac{\partial^3}{\partial \eta^3}$ . Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε μια οικογένεια λύσεων, η οποία καλείται μηδενικής τάξης εξίσωση παραμόρφωσης (zeroth-order deformation equation):

$$(1-p)[F'''(\eta, h, p) - f_0'''(\eta)] = \quad (3.46)$$

$$ph [F'''(\eta, h, p) + \frac{1}{2}F(\eta, h, p)F''(\eta, h, p)],$$

όπου  $p \in [0, 1]$  είναι η εμβλαπτισμένη παράμετρος,  $h \neq 0$  είναι η παράμετρος ελέγχου σύγκλισης,  $\eta \in [0, +\infty)$  και  $f_0(\eta)$  μια αρχική προσέγγιση, με συνοριακές συνθήκες στο  $\eta = 0$ :

$$F[0, h, p] = F'[0, h, p] = 0, \quad F''[0, h, p] = \sigma \neq 0, \quad (3.47)$$

όπου και πάλι ο τόνος ορίζει παράγωγο ως προς  $\eta$ .

Για να βρούμε την αρχική προσέγγιση αντιμετωπίζουμε την εξίσωση (3.45) με τη μέθοδο διαταραχών. Έστω,  $\varepsilon$  μια μικρή παράμετρος. Υποθέτουμε το μη γραμμικό πρόβλημα:

$$f''' + \frac{\varepsilon}{2}ff'' = 0, \quad (3.48)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = \sigma. \quad (3.49)$$

Έστω ότι η  $f(\eta)$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \tilde{f}_k(\eta). \quad (3.50)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.50) στις εξισώσεις (3.48) και (3.49) προκύπτει μια σειρά από γραμμικές εξισώσεις, μηδενικής, πρώτης και δεύτερης τάξης, δηλαδή  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$  και  $\varepsilon^2$ .

Μηδενικής τάξης:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0''' &= 0, \\ \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_0'(0) &= 0, \quad \tilde{f}_0''(0) = \sigma. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1''' &= -\frac{1}{2}\tilde{f}_0\tilde{f}_0'', \\ \tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_1'(0) &= \tilde{f}_1''(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2''' &= -\frac{1}{2}(\tilde{f}_0\tilde{f}_1'' + \tilde{f}_1\tilde{f}_0''), \\ \tilde{f}_2(0) = \tilde{f}_2'(0) &= \tilde{f}_2''(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$\tilde{f}_0(\eta) = \frac{\sigma}{2}\eta^2, \quad (3.54\alpha')$$

$$\tilde{f}_1(\eta) = -\frac{\sigma^2}{240}\eta^5, \quad (3.54\beta')$$

$$\tilde{f}_2(\eta) = \frac{11\sigma^3}{161280}\eta^8. \quad (3.54\gamma')$$

Άρα ως αρχική προσέγγιση παίρνουμε  $f_0(\eta) = \frac{\sigma}{2}\eta^2$ .

Τώρα επίσης υποθέτουμε ότι  $F \in C^\infty(D)$  ως προς  $p$ . Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (3.46) και (3.47) μια φορά ως προς  $p$  και στη συνέχεια μελετώντας τις παραγώγους στην περιοχή του μηδενός,  $p = 0$ , προκύπτει:

$$\frac{\partial F'''}{\partial p} = (1+h)F''' + \frac{1}{2}hFF'' \quad (3.55)$$

Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά τις εξισώσεις (3.46) και (3.47) ως προς  $p$  και στη συνέχεια μελετώντας τις παραγώγους στην περιοχή του μηδενός,  $p = 0$ , προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 F'''}{\partial p^2} = 2(1+h)\frac{\partial F'''}{\partial p} + h\left(\frac{\partial F}{\partial p}F'' + F\frac{\partial F''}{\partial p}\right) \quad (3.56)$$

Στην εξίσωση (3.55), αντικαθιστούμε το  $F$  με  $f_0 = \frac{\sigma\eta^2}{2}$  και παίρνουμε:

$$\frac{\partial F'''}{\partial p} = \frac{1}{2}h\frac{\sigma\eta^2}{2}. \quad (3.57)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς  $\eta$  την εξίσωση (3.57) με συνοριακές συνθήκες,

$$\frac{\partial f_0}{\partial p}(0, h) = \frac{\partial f'_0}{\partial p}(0, h) = \frac{\partial f''_0}{\partial p}(0, h) = 0,$$

έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2}h \frac{\sigma^2 \eta^5}{5!}. \quad (3.58)$$

Στη συνέχεια, εισάγουμε την εξίσωση (3.58) στην (3.56), ολοκληρώνουμε τρεις φορές ως προς  $\eta$  χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial p^2}(0, h) = \frac{\partial^2 f'_0}{\partial p^2}(0, h) = \frac{\partial^2 f''_0}{\partial p^2}(0, h) = 0,$$

και προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = (h + h^2) \frac{\sigma^2 \eta^5}{5!} + \frac{11h^2}{2} \frac{\sigma^3 \eta^8}{8!}. \quad (3.59)$$

Γνωρίζουμε ότι η  $m$ -τάξης προσέγγιση του  $f(\eta)$  είναι:

$$f_m(\eta, h) = f_0(\eta) + \sum_{k=1}^m \frac{f_k(\eta, h)}{k!}, \quad \eta \in [0, +\infty), \quad h \neq 0. \quad (3.60)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές αυτής της σειράς Taylor με τους συντελεστές των όρων  $\frac{\partial F}{\partial p}$  και  $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ , προκύπτει:

$$f_2(\eta, h) = \frac{\sigma \eta^2}{2} + (h + h^2) \frac{\sigma^2 \eta^5}{5!} + \frac{11h^2}{4} \frac{\sigma^2 \eta^8}{8!}, \quad (3.61)$$

η οποία είναι η δεύτερη προσέγγιση της  $f(\eta)$ . Γενικεύοντας την προηγούμενη διαδικασία, η  $m$ -τάξης προσέγγιση της  $f(\eta)$  περιγράφεται από την:

$$f_m(\eta, h) = \sum_{k=0}^m \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{A_k \sigma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2} \Phi_{m,k}(h), \quad (3.62)$$

όπου  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = 1$  και τα  $A_k$  δίνονται από:

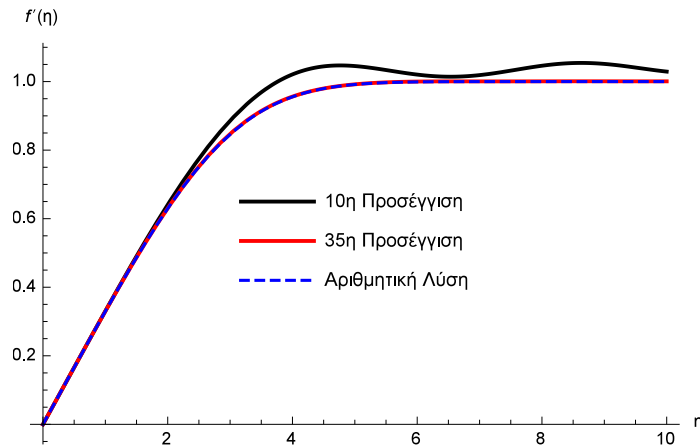
$$A_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} A_r A_{k-r-1} \quad (k \geq 2), \quad (3.63)$$

με  $\Phi_{m,n}(h) = 0$  για  $n > m$ ,  $\Phi_{m,n}(h) = 1$  για  $n \leq 0$  και

$$\Phi_{m,n}(h) = (-h)^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m}{m-n-k} \binom{n+k-1}{k} h^k, \quad 1 \leq n \leq m. \quad (3.64)$$



Η  $\Phi_{m,n}(h)$  καλείται προσεγγιστική συνάρτηση (approaching function) [47]. Αυτή η συνάρτηση μας δίνει τους συνδυασμούς των  $h$ , μπροστά από κάθε όρο της προσέγγισης. Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζονται η 10η και η 35η προσέγγιση της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ . Επίσης, η 35η προσέγγιση συμπίπτει με την αριθμητική λύση του προβλήματος Blasius. Εδώ, χρησιμοποιήσαμε,  $\sigma = 0.33206$ , όπως δόθηκε αριθμητικά από τον Howarth [31], και  $h = -0.1$ , η παράμετρος ελέγχου σύγκλισης, που δόθηκε από τον Liao [44, 43]. Όπως είναι φανερό από το Σχήμα 3.1, όσο αυξάνουμε την προσέγγιση πλησιάζουμε όλο και πιο κοντά στα αριθμητικά αποτελέσματα [70, 31].



Σχήμα 3.1: Προσεγγίσεις της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ , της εξίσωσης Blasius, με τη βοήθεια της MOA, και αριθμητική λύση της.

### 3.3.2 Μέθοδος Διαφορικού Μετασχηματισμού - ΜΔΜ

Για την εξίσωση Blasius μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικές λύσεις και με τη ΜΔΜ. Έστω η εξίσωση:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, \quad (3.65)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : f(0) = f'(0) = 0, \\ \eta \rightarrow \infty : f'(\eta) = 1. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1 της ενότητας 2.3.2, οι όροι της εξίσωσης (3.65) μετασχηματίζονται στους ακόλουθους [5]:

$$f'''(\eta) \rightarrow (k+1)(k+2)(k+3)F(k+3), \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) \rightarrow \frac{1}{2}\sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)F(r)F(k-r+2). \quad (3.68)$$

Άρα, η (3.65) με τη βοήθεια των (3.67) και (3.68), γίνεται:

$$F(k+3) = -\frac{\sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)F(r)F(k-r+2)}{2(k+1)(k+3)(k+3)}, \quad (3.69)$$

και οι συνοριακές συνθήκες μετασχηματίζονται στις ακόλουθες:

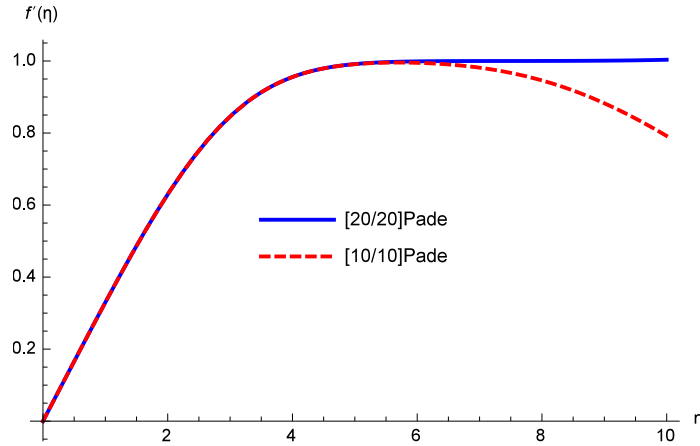
$$F(0) = 0, F'(0) = 0, F(2) = a. \quad (3.70)$$

Η σταθερά,  $a$ , έχει υπολογιστεί από τους Arikoglu και Ozkol ότι είναι  $a = \frac{\sigma}{2} = 0.16603$  [5], όπου,  $\sigma$ , είναι η σταθερά που προέκυψε από την αριθμητική λύση του Howarth [31].

Η αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ , θα δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό της εξίσωσης (3.69), δηλαδή:

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^m F(k)\eta^k. \quad (3.71)$$

Όπως όμως αναφέραμε στην ενότητα 2.3.1 του κεφαλαίου 2, για μεγάλες τιμές του  $\eta$  η σειρά (3.71) δεν είναι καλή προσέγγιση. Οπότε, για την βελτίωση της λύσης, χρησιμοποιούμε τις  $[L/M]$  προσεγγίσεις ρητών συναρτήσεων Padé. Στο Σχήμα 3.2 βλέπουμε την 35η προσέγγιση της αδιάστατης ταχύτητας,  $f(\eta)$ , με  $[20/20]$  και  $[10/10]$  προσέγγιση Padé.



Σχήμα 3.2: 35η προσέγγιση της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ , με τη βοήθεια της ΜΔΜ, για [20/20] και [10/10] προσεγγίσεις ρητών πολυωνύμων Padé.

### 3.3.3 Μέθοδος Ανάλυσης του Adomian

Σε αυτή την ενότητα επιλύουμε αναλυτικά το πρόβλημα του Blasius με τη μέθοδο ανάλυσης του Adomian. Έστω λοιπόν η εξίσωση:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0, \quad (3.72)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\eta = 0 : f(0) = f'(0) = 0, \quad (3.73)$$

$$\eta \rightarrow \infty : f'(\eta) = 1.$$

Αρχικά ορίζουμε το γραμμικό τελεστή,  $\mathcal{L} = \frac{d^3}{d\eta^3}$ . Η εξίσωση (3.72) γίνεται:

$$\mathcal{L}f = -\frac{1}{2}ff''. \quad (3.74)$$

Ο αντίστροφος τελεστής,  $\mathcal{L}^{-1}$ , δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{L}^{-1}(\cdot) = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (\cdot) d\tau d\tau d\tau. \quad (3.75)$$

Αντικαθιστώντας τον τελεστή,  $\mathcal{L}^{-1}$ , στην εξίσωση (3.72), προκύπτει:

$$\int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta f'''(\tau) d\tau d\tau d\tau + \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \frac{1}{2}f(\tau)f''(\tau) d\tau d\tau d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta f'''(\tau) d\tau d\tau d\tau = - \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \frac{1}{2} f(\tau) f''(\tau) d\tau d\tau d\tau. \quad (3.76)$$

Ολοκληρώνοντας το αριστερό μέρος της (3.76), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^\eta f'''(\tau) d\tau &= f''(\eta) - f''(0) \Rightarrow \\ \int_0^\eta [f''(\tau) - f''(0)] d\tau &= f'(\eta) - f'(0) - \eta f''(0) \Rightarrow \\ \int_0^\eta [f'(\tau) - f'(0) - \tau f''(0)] d\tau &= f(\eta) - f(0) - \eta f'(0) - \frac{\eta^2}{2} f''(0). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε τις σχέσεις  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 0$ . Επίσης, υποθέτουμε ότι η άγνωστη,  $f''(0)$ , ισούται με  $a$ ,  $f''(0) = a$ . Άρα, η (3.76) μέσω της (3.77), μας δίνει:

$$f(\eta) = \frac{\eta^2}{2} a + \mathcal{L}^{-1} \left( -\frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) \right). \quad (3.78)$$

Η μέθοδος ανάλυσης του Adomian εισάγει την ακόλουθη σχέση στη λύση  $f(\eta)$  της (3.72):

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta). \quad (3.79)$$

Επιπλέον η MAA ορίζει μια μη γραμμική συνάρτηση,  $\mathcal{F}[f(\eta)]$ , από μια άπειρη σειρά πολυωνύμων του Adomian,  $A_m$ , ως:

$$\mathcal{F}[f(\eta)] = \sum_{m=0}^{\infty} A_m. \quad (3.80)$$

Δηλαδή, στην περίπτωση της εξίσωσης Blasius που εξετάζουμε, έχουμε:

$$-\frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m. \quad (3.81)$$

Η εξίσωση (3.78) μέσω των (3.80) και (3.81) δίνει:

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta) = \frac{\eta^2}{2} a + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m \right\}. \quad (3.82)$$

Για τον υπολογισμό των  $f_m(\eta)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , πρώτα υπολογίζουμε τη μηδενική προσέγγιση,  $f_0(\eta)$ , από τους όρους που προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες στο  $\eta = 0$ . Δηλαδή, ολοκληρώνοντας δύο φορές την  $f''(0) = a$ , έχουμε:

$$f''(0) = a \Rightarrow f'(0) = a\eta + C_1 \Rightarrow f(0) = a\frac{\eta^2}{2} + C_1\eta + C_2,$$

όπου από τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει ότι  $C_1 = C_2 = 0$ . Άρα, έχουμε:

$$f_0(\eta) = a\frac{\eta^2}{2}. \quad (3.83)$$

Στη συνέχεια, οι υπόλοιποι όροι,  $f_m(\eta)$ ,  $m \geq 1$ , υπολογίζονται από την αναδρομική σχέση:

$$f_{m+1}(\eta) = \mathcal{L}^{-1}(A_m), \quad (3.84)$$

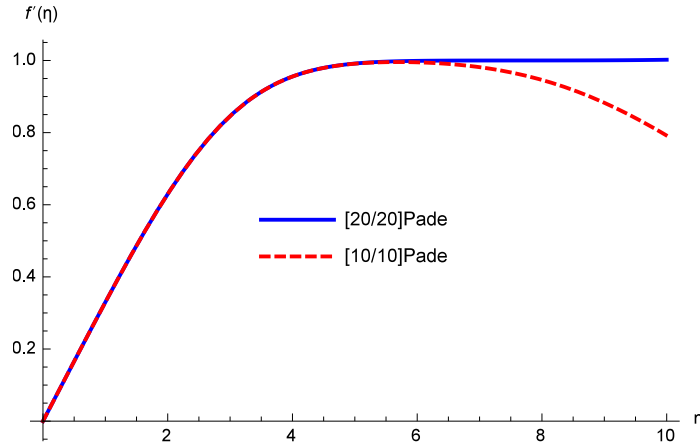
όπου

$$A_m = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2} f_k''(\eta) f_{m-k}(\eta). \quad (3.85)$$

Η  $f(\eta)$ , θα δίνεται από τη σχέση:

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta). \quad (3.86)$$

Για να βελτιώσουμε τη προσέγγιση της  $f(\eta)$ , χρησιμοποιούμε και πάλι προσεγγίσεις ρητών πολυωνύμων Padé. Η σταθερά,  $a$ , αντικαθίσταται από τη σταθερά του Howarth,  $a = 0.33206$  [31]. Στο Σχήμα 3.3, βλέπουμε την 35η προσέγγιση της εξίσωσης της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ , με τη μέθοδο ανάλυσης του Adomian, με [20/20] και [10/10] προσέγγιση πολυωνύμων Padé, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.3: 35η προσέγγιση της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ , με τη βοήθεια της ΜΑΑ και χρήση των  $[20/20]$  και  $[10/10]$  ρητών πολυωνύμων Padé.

### 3.3.4 Γραμμικοποίηση της εξίσωσης Blasius

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές εργασίες για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης της εξίσωσης Blasius. Πέρα από τις τρεις προσεγγιστικές μεθόδους που αναπτύξαμε στις ενότητες 3.3.1, 3.3.2 και 3.3.3 αυτού του κεφαλαίου, υπάρχουν και άλλες, με πιο γνωστή τη μέθοδο μεταβολικής επανάληψης (MME, variational iteration method, VIM). Η μέθοδος αυτή, κατασκευάζει ένα συναρτησοειδές διόρθωσης (correction functional), σε συνδυασμό με ένα γενικό πολλαπλασιαστή Lagrange, και με διαδοχικές επαναλήψεις καταλήγει σε μια δυναμοσειρά που περιγράφει τη λύση της εξίσωσης [27, 49]. Ωστόσο, συγκρίνοντας αυτή τη μέθοδο με την αριθμητική λύση της εξίσωσης Blasius, τα σφάλματα είναι αρκετά μεγάλα και η μέθοδος αποτυγχάνει να περιγράψει το φυσικό πρόβλημα, τόσο καλά όσο οι άλλες τρεις προσεγγιστικές μέθοδοι.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να λυθεί αναλυτικά μια γραμμική ΣΔΕ. Για το λόγο αυτό, υποθέσαμε ότι γραμμικοποιώντας την εξίσωση Blasius, θα μπορούσαμε να βρούμε μια λύση κοντά στην αριθμητική. Ξεκινώντας από την εξίσωση:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, \quad (3.87)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : f(0) = f'(0) = 0, \\ \eta \rightarrow \infty : f'(\eta) = 1, \end{aligned} \quad (3.88)$$

υποθέτουμε ότι η  $f$  θα είναι γραμμική συνάρτηση, έστω δηλαδή:

$$f = \alpha + \beta\eta. \quad (3.89)$$

Εισάγουμε την παραπάνω σχέση, (3.89), στην (3.87), και προκύπτει:

$$f''' + \frac{1}{2}(\alpha + \beta\eta)f'' = 0. \quad (3.90)$$

Με τη γνωστή διαδικασία του χωρισμού μεταβλητών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, έχουμε:

$$\frac{f'''}{f''} = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta\eta) \Rightarrow f'' = e^{-(2\alpha\eta + \beta\eta^2)/4}. \quad (3.91)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς  $\eta$ , προκύπτει:

$$f(\eta) = \left\{ e^{-(\alpha + \beta\eta)^2/4\beta} \left[ 2\sqrt{\beta} \left( -1 + e^{(2\alpha\eta + \beta\eta^2)/4} \right) \right] + \right. \\ \left. 2\sqrt{\beta\pi}(\alpha + \beta\eta) \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha + \beta\eta}{\sqrt{\beta\pi}} \right) \right] \right\} / \left\{ \beta\sqrt{\pi} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha + \delta\beta}{2\sqrt{b}} \right) \right] \right\}, \quad (3.92)$$

όπου  $\operatorname{erf}$ , είναι η συνάρτηση σφάλματος που ορίζεται ως  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε μεθόδους βελτιστοποίησης για να βρούμε τις κατάλληλες τιμές των άγνωστων σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$ . Από τη βελτιστοποίηση προέκυψαν οι ακόλουθες τιμές των σταθερών,  $\alpha = -0.43610$  και  $\beta = 0.60162$ . Συγκρίνοντας την αναλυτική αυτή μέθοδο με την αριθμητική λύση της εξίσωσης Blasius, είναι φανερό ότι η αριθμητική λύση είναι πολύ κοντά στην αναλυτική λύση τόσο για την αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ , όσο και για την αδιάστατη ταχύτητα,  $f'(\eta)$ , όπως φαίνεται στους ακόλουθους Πίνακες 3.1 και 3.2, αντίστοιχα. Επίσης, υπολογίζουμε το σφάλμα της αναλυτικής λύσης ως προς την αριθμητική λύση. Η αναλυτική λύση που βρίσκουμε δουλεύει καλά για τις  $f(\eta)$  και  $f'(\eta)$ , ωστόσο οι λύσεις παρουσιάζουν μεγαλύτερα σφάλματα για την αδιάστατη επιτάχυνση,  $f''(\eta)$ , κυρίως στο διάστημα  $\eta \in [0, 1]$ . Η λύση που βρίσκουμε με αυτόν τον τρόπο, δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδο μεταβολικής επανάληψης, και είναι πολύ κοντά στις υπόλοιπες τρεις προσεγγιστικές μεθόδους.

$f(\eta)$			
$\eta$	Αναλυτική	Αριθμητική	Σφάλμα %
0.5	0.0397977	0.0414928	4.085
1.0	0.1620282	0.1655717	2.140
1.5	0.3663845	0.3701385	1.014
2.0	0.6467042	0.6500244	0.510
2.5	0.9922579	0.9963111	0.406
3.0	1.3898217	1.3968082	0.500
3.5	1.8258841	1.8376986	0.642
4.0	2.2884039	2.3057464	0.752
4.5	2.7678044	2.7901344	0.800
5.0	3.2572042	3.2832737	0.794
5.5	3.7521032	3.7805719	0.753
6.0	4.2498099	4.2796209	0.696

Πίνακας 3.1: Αναλυτική και αριθμητική λύση της εξίσωσης Blasius για την αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ , από  $\eta = 0$  έως  $\eta = 6$ , και σφάλματα της αναλυτικής ως προς την αριθμητική λύση.

$f'(\eta)$			
$\eta$	Αναλυτική	Αριθμητική	Σφάλμα %
0.5	0.1611035	0.1658852	2.882
1.0	0.3277139	0.3297800	0.626
1.5	0.4876120	0.4867893	0.169
2.0	0.6300179	0.6297657	0.040
2.5	0.7477123	0.7512596	0.472
3.0	0.8379788	0.8460444	0.953
3.5	0.9022240	0.9130404	1.184
4.0	0.9446563	0.9555182	1.136
4.5	0.9706636	0.9795142	0.903
5.0	0.9854558	0.9915418	0.613
5.5	0.9932633	0.9968787	0.362
6.0	0.9970874	0.9989728	0.188

Πίνακας 3.2: Αναλυτική και αριθμητική λύση της εξίσωσης Blasius για την αδιάστατη ταχύτητα,  $f'(\eta)$ , από  $\eta = 0$  έως  $\eta = 6$ , και σφάλματα της αναλυτικής ως προς την αριθμητική λύση.



### 3.3.5 Σύγκριση των Προσεγγιστικών Μεθόδων

Οι τρεις προσεγγιστικές μέθοδοι που μελετήθηκαν πιο πάνω για την εξίσωση Blasius, δίνουν αναλυτικές λύσεις πολύ κοντά η μία στην άλλη. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.3, για την αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ , οι προσεγγιστικές λύσεις που δόθηκαν από την λύση του Blasius [11], από τις MOA, ΜΔΜ και ΜΑΑ, αλλά και από αυτές που δόθηκαν αριθμητικά διαφέρουν ελάχιστα. Οι διαφορές αυτές συνήθως βρίσκονται μετά το τέταρτο δεκαδικό ψηφίο, διαφορές που θεωρούνται σχεδόν αμελητέες. Ο Πίνακας 3.3 δίνει τις αναλυτικές τιμές της  $f(\eta)$  για διάφορες τιμές της αδιάστατης παραμέτρου,  $\eta$ . Οι τιμές που δίνονται από τη μέθοδο ανάλυσης του Adomian είναι πάντα μεταξύ των τιμών της μεθόδου ομοτοπικής ανάλυσης και της μεθόδου διαφορικού μετασχηματισμού. Επίσης, οι τιμές που προκύπτουν από την προσεγγιστική λύση που έδωσε ο Blasius, είναι ίδιες, μέχρι το  $\eta = 5$ , με τις τιμές που προκύπτουν από τη ΜΑΑ. Οι τιμές που βρίσκουμε αριθμητικά, είναι ίδιες (διαφέρουν στο έβδομο δεκαδικό ψηφίο κάποιες από αυτές) με τις τιμές που προκύπτουν από τη ΜΔΜ.

$\eta$	$f(\eta)$				
	Blasius	MOA	ΜΔΜ	ΜΑΑ	Αριθμητικά
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.0414932	0.0414935	0.0414928	0.0414932	0.0414928
1.0	0.1655730	0.1655842	0.1655717	0.1655730	0.1655717
1.5	0.3701414	0.3702221	0.3701385	0.3701414	0.3701385
2.0	0.6500294	0.6503275	0.6500243	0.6500229	0.6500244
2.5	0.9963187	0.9970955	0.9963111	0.9963187	0.9963111
3.0	1.3968187	1.3982137	1.3968082	1.3968187	1.3968082
3.5	1.8377120	1.8397702	1.8376986	1.8377120	1.8376986
4.0	2.3057628	2.3082820	2.3057464	2.3057628	2.3057464
4.5	2.7901536	2.7928886	2.7901343	2.7901536	2.7901344
5.0	3.2832957	3.2861882	3.2832736	3.2832957	3.2832737
5.5	3.7806493	3.7838006	3.7805719	3.7805966	3.7805719
6.0	$10^7$	4.2833528	4.2796210	4.2796484	4.2796209

Πίνακας 3.3: Προσεγγιστικές λύσεις της αδιάστατης ρευματικής συνάρτησης,  $f(\eta)$ , με τις τρεις προσεγγιστικές μεθόδους MOA, ΜΔΜ και ΜΑΑ, τη λύση του Blasius και την αριθμητική λύση.

Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και για την αδιάστατη ταχύτητα,  $f'(\eta)$ . Στον Πίνακα 3.4, παρουσιάζονται οι τρεις προσεγγιστικές αναλυτικές μέθοδοι, MOA, ΜΔΜ και ΜΑΑ, η λύση που δόθηκε από τον Blasius [11], και τέλος, η αριθμητική

λύση. Η λύση που δόθηκε από τον Blasius είναι ίδια με την λύση που βρίσκουμε χρησιμοποιώντας τη MAA, μέχρι το  $\eta = 5$ . Για  $\eta > 6$  η λύση του Blasius αποκλίνει στο άπειρο, ενώ τόσο οι τρεις προσεγγιστικές αναλυτικές μέθοδοι, όσο και η αριθμητική λύση της εξίσωσης Blasius ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη στο άπειρο, δηλαδή  $f'(\eta) = 1$ , για  $\eta \rightarrow \infty$ . Και πάλι, οι τιμές που προκύπτουν από τη ΜΔΜ είναι ίδιες με αυτές που προκύπτουν αριθμητικά, παρά μόνο με ελάχιστες διαφορές μετά το έκτο δεκαδικό ψηφίο.

Άρα, η ΜΔΜ είναι πιο κοντά στην αριθμητική λύση και η MAA πιο κοντά στη λύση που δόθηκε από τον Blasius, με τη διαφορά ότι η λύση του Blasius πηγαίνει στο άπειρο πολύ πιο γρήγορα καθώς το  $\eta$  τείνει στο άπειρο,  $\eta \rightarrow \infty$ . Επίσης, φαίνεται ότι η MOA υπερεκτιμά τις τιμές. Οπότε, μπορούμε να πούμε ότι οι αναλυτικές λύσεις που βρίσκουμε ικανοποιούν μια σχέση ανισοτήτων όσων αφορά τις τιμές της  $f(\eta)$ , δηλαδή  $MΔΜ \leq MAA \leq MOA$ .

Οι τιμές της  $f(\eta)$  τείνουν στο άπειρο,  $f(\eta) \rightarrow \infty$ , όσο το  $\eta \rightarrow \infty$  και για τις τρεις αναλυτικές μεθόδους. Οι τιμές της  $f'(\eta)$  τείνουν στο ένα,  $f'(\eta) \rightarrow 1$ , καθώς  $\eta \rightarrow \infty$  δηλαδή και οι τρεις αναλυτικές μέθοδοι ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη της εξίσωσης Blasius,  $f'(\infty) = 1$ .

$\eta$	$f'(\eta)$				
	Blasius	MOA	ΜΔΜ	MAA	Αριθμητικά
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.1658865	0.1658901	0.1658852	0.1658865	0.1658852
1.0	0.3297826	0.3298377	0.3297800	0.3297826	0.3297800
1.5	0.4867931	0.4870451	0.4867893	0.4867705	0.4867893
2.0	0.6297705	0.6304222	0.6297657	0.6297705	0.6297657
2.5	0.7512651	0.7523999	0.7512597	0.7512651	0.7512596
3.0	0.8460502	0.8474424	0.8460444	0.8460502	0.8460444
3.5	0.9130462	0.9142262	0.9130403	0.9130462	0.9130404
4.0	0.9555240	0.9561711	0.9555182	0.9555240	0.9555182
4.5	0.9795199	0.9798064	0.9795142	0.9795199	0.9795142
5.0	0.9915474	0.9919728	0.9915419	0.9915474	0.9915418
5.5	0.9997910	0.9977319	0.9968789	0.9968842	0.9968787
6.0	$10^8$	1.0000458	0.9989734	0.9989783	0.9989728

Πίνακας 3.4: Προσεγγιστικές λύσεις της αδιάστατης ταχύτητας,  $f'(\eta)$ , με τις τρεις προσεγγιστικές αναλυτικές μεθόδους MOA, ΜΔΜ και MAA, τη λύση του Blasius και την αριθμητική λύση.

Τέλος, αναφέρουμε ότι η αναλυτική λύση που βρήκαμε γραμμικοποιώντας την εξίσωση Blasius, είναι πολύ κοντά και στις τρεις μεθόδους, MOA, ΜΔΜ και ΜΑΑ, υποεκτιμώντας τις τιμές των  $f(\eta)$  και  $f'(\eta)$ . Παρόλα αυτά, περιγράφει πολύ καλά το φυσικό πρόβλημα και τα σφάλματα παραμένουν ιδιαίτερα χαμηλά, όπως φαίνεται στους Πίνακες 3.1 και 3.2.

### 3.4 Ολική Λύση της Εξίσωσης Ορμής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα βρούμε την προσεγγιστική αναλυτική λύση του μη γραμμικού συστήματος της εξίσωσης ορμής, εξισώσεις (3.38), (3.40) και (3.42). Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα συνδυασμό των αναλυτικών μεθόδων που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 2. Η εξίσωση μηδενικής τάξης (Blasius),  $f_0(\eta)$ , λύθηκε στις ενότητες 3.3.1, 3.3.2 και 3.3.3 του κεφαλαίου 3 με τις MOA, ΜΔΜ και ΜΑΑ.

Έχοντας βρει πλέον την  $f_0(\eta)$ , χρησιμοποιούμε και πάλι τη μέθοδο ομοτοπικής ανάλυσης για την  $f_1(\eta)$  στην εξίσωση (3.40). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την  $f_{0,1}(\eta, h) = \frac{\sigma\eta^2}{2} + \frac{1}{2}h\frac{\sigma^2\eta^5}{5!}$ , ως αρχική προσέγγιση για την  $f_1(\eta)$  θα πάρουμε  $f_{1,0}(\eta) = \frac{1}{6}\alpha(6\eta^2 - \eta^3)$ , όπου  $\alpha = \frac{1}{u_e} \frac{d u_e}{d x} (1 - (f'_{0,1})^2)$  είναι ο συντελεστής της βαθμίδας πίεσης. Κατασκευάζουμε τη μηδενικής τάξης εξίσωση παραμόρφωσης:

$$(1-p)[F'''(\eta, h, p) - f'''_{1,0}(\eta)] = ph [F'''(\eta, h, p) + \frac{1}{2}f_{0,1}(\eta)F''(\eta, h, p) - f'_{0,1}(\eta)F'(\eta, h, p) + \frac{3}{2}f''_{0,1}(\eta)F(\eta, h, p) + \alpha] \quad (3.93)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.93) ως προς  $p$ , και στη συνέχεια θέτοντας  $p = 0$ , προκύπτει:

$$\frac{\partial F'''}{\partial p} = \frac{7}{80}\alpha h^2 \sigma^2 \eta^5 - \frac{1}{80}\alpha h^2 \sigma^2 \eta^6. \quad (3.94)$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη εξίσωση, (3.88), προκύπτει:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{80}\alpha h^2 \sigma^2 \left( \frac{7 \cdot 5!}{8!} \eta^8 - \frac{6!}{9!} \eta^9 \right). \quad (3.95)$$

Όμοια βρίσκουμε τα  $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$  και  $\frac{\partial^3 F}{\partial p^3}$ , και εξισώνοντας με τους όρους της σειράς Taylor,

$$f_{1,2}(\eta, h) = f_{1,0} + \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial p^3}$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
f_{1,3}(\eta, h) &= \frac{1}{6}\alpha(6\eta^2 - \eta^3) + \frac{1}{80}\alpha h^2 \sigma^2 \left\{ (3 + 3h + 3h^2) \frac{7.5!}{8!} \eta^8 - \right. \\
&\quad - \left( 3 + \frac{3}{2}h - h^2 \right) \frac{6!}{9!} \eta^9 + 7.5! h \sigma \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2.6!} - \frac{2}{7!} + \frac{3}{8!} \right) + \frac{1}{6} \left[ \frac{3}{28.5!} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3 \left( \frac{1}{2.6!} - \frac{2}{7!} + \frac{3}{8!} \right) - \frac{9}{8!} \right] (1+h) \right] \frac{8!}{11!} \eta^{11} - 6! h \sigma \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2.7!} - \frac{2}{8!} + \frac{3}{9!} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \left[ \frac{3}{28.6!} + 3 \left( \frac{1}{2.7!} - \frac{2}{8!} + \frac{3}{9!} \right) + \frac{9}{9!} \right] (1+h) \right] \frac{9!}{12!} \eta^{12} + \dots \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left. - \frac{6!}{6} h^4 \sigma^4 \left[ \frac{3}{52.5!} - \frac{3}{364.4!} \left( \frac{1}{2.5!7!} - \frac{2}{2.4!8!} + \frac{3}{2.3!9!} \right) + \frac{9.12!}{4!15!} \right] \frac{18!}{21!} \eta^{21} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Αυτή είναι η τρίτης τάξης προσέγγιση της  $f_1(\eta)$ . Η πολυπλοκότητα της  $f_{1,3}(\eta)$  δεν μας επιτρέπει να βρούμε το γενικό της τύπο σε κλειστή μορφή, όπως για την  $f_0(\eta)$ , έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε μεγαλύτερης τάξης προσεγγίσεις. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ανάλυσης του Adomian, και πάλι η εύρεση λύσης θα ήταν αρκετά δύσκολη, λόγω της πολυπλοκότητας της  $f_1(\eta)$ . Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα καταφεύγουμε στη μέθοδο διαφορικού μετασχηματισμού, η οποία είναι ευκολότερη στην εφαρμογή της, καταλήγοντας και πάλι σε δυναμοσειρές. Επειδή αυτές οι δυναμοσειρές δεν είναι κατάλληλες για μεγάλες τιμές του  $\eta$  ( $\eta \rightarrow \infty$ ), θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγίσεις ρητών πολυωνύμων Padé για καλύτερη σύγκλιση αυτών των δυναμοσειρών, όταν το  $\eta \rightarrow \infty$ . Μια εναλλακτική τεχνική είναι αυτή του υπολογισμού μιας εσωτερικής (inner) και μιας εξωτερικής (outer) λύσης, όπου ο συνδυασμός τους δίνει την λύση του υπό μελέτη προβλήματος [5, 14].

Χρησιμοποιώντας τους βασικούς μαθηματικούς μετασχηματισμούς, όπως αυτοί περιγράφηκαν στον πίνακα 2.1 του κεφαλαίου 2, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο διαφορικού μετασχηματισμού για τις εξισώσεις (3.40) και (3.42). Η εξίσωση (3.40) είναι η ακόλουθη:

$$f_1''' + \frac{1}{2} f_0 f_1'' - f_0' f_1' + \frac{3}{2} f_1 f_0'' + \frac{1}{u_e} p_g [1 - (f_0')^2] = 0,$$

όπου  $p_g$  η βαθμίδα πίεσης και η  $f_0(\eta)$  είναι γνωστή από τη μέθοδο ομοτοπικής

ανάλυσης. Βασιζόμενοι στον Πίνακα 2.1 και στα θεωρήματα του κεφαλαίου 2.3, προκύπτουν οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί:

$$f_1'''(\eta) \rightarrow (k+1)(k+2)(k+3)F_1(k+3), \quad (3.97\alpha')$$

$$f_1''(\eta) \rightarrow (k+1)(k+2)F_1(k+2), \quad (3.97\beta')$$

$$f_1'(\eta) \rightarrow (k+1)F_1(k+1), \quad (3.97\gamma')$$

$$f_1(\eta) \rightarrow F_1(k). \quad (3.97\delta')$$

Εισάγωντας τις εξισώσεις (3.97α') – (3.97δ') στην εξίσωση (3.40), και λύνοντας ως προς  $F_1(k+3)$ , έχουμε:

$$F_1(k+3) = \left( -\frac{1}{2}f_0(\eta)(k+1)(k+2)F_1(k+2) + f_0'(\eta)(k+1)F_1(k+1) - \right. \\ \left. -\frac{3}{2}f_0''(\eta)F_1(k) - \frac{1}{u_e}p_g[(f_0')^2 - 1] \right) / (k+1)(k+2)(k+3), \quad (3.98)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$F_1(0) = 0, F_1(1) = 0, F_1(2) = b_1. \quad (3.99)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα δίνει την  $f_1(\eta)$  ως:

$$f_1(\eta) = \sum_{k=0}^m \frac{F_1(k)\eta^k}{k!}. \quad (3.100)$$

Γνωρίζουμε ότι  $f_1(\infty) = 0$ . Οπότε, για να βρούμε την άγνωστη συνοριακή συνθήκη,  $b_1$ , εξισώνουμε το όριο της  $f_1(\eta)$  με μηδέν καθώς  $\eta \rightarrow \infty$ , δηλαδή:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_1(\eta) = 0.$$

Άρα, βρίσκουμε το  $b_1$ . Όπως όμως αναφέραμε στην ενότητα 2.3.1 του κεφαλαίου 2, για μεγάλες τιμές του  $\eta$  ( $\eta \rightarrow \infty$ ) η σειρά (3.100) δεν δίνει καλές προσεγγίσεις. Οπότε, χρησιμοποιούμε τις  $[L/M]$  προσεγγίσεις ρητών συναρτήσεων Padé της  $f_1(\eta)$ . Στην περίπτωση αυτή θα βρούμε την  $[10/10]$  προσέγγιση Padé της  $f_1(\eta)$  με τη βοήθεια του συμβολικού πακέτου Mathematica [83].

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο για την εξίσωση (3.42):

$$f_2''' + \frac{1}{2}f_0f_2'' + \frac{5}{2}f_2f_0'' - 2f_0'f_2' + \frac{3}{2}f_1f_1'' - (f_1')^2 - \frac{2}{u_e}p_gf_0'f_1' = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους μετασχηματισμούς, (3.97α')–(3.97δ'), με την προηγούμενη εξίσωση, έχουμε:

$$F_2(k+3) = \left( -\frac{1}{2}f_0(\eta)(k+1)(k+2)F_2(k+2) + 2f_0'(\eta)(k+1)F_2(k+1) - \frac{5}{2}f_0''(\eta)F_2(k) + B(\eta) \right) / (k+1)(k+2)(k+3), \quad (3.101)$$

όπου

$$B(\eta) = -\frac{3}{2}f_1(\eta)f_1''(\eta) + (f_1'(\eta))^2 - \frac{2}{u_e}p_g f_0'(\eta)f_1'(\eta), \quad (3.102)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$F_2(0) = 0, F_2(1) = 0, F_2(2) = b_2. \quad (3.103)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα δίνει την  $f_2(\eta)$  ως:

$$f_2(\eta) = \sum_{k=0}^m \frac{F_2(k)\eta^k}{k!}. \quad (3.104)$$

Για την άγνωστη συνοριακή συνθήκη,  $b_2$ , εργαζόμαστε όμοια με πριν. Παίρνουμε το όριο της  $f_2(\eta)$  ίσο με μηδέν, καθώς το  $\eta$  πηγαίνει στο άπειρο ( $\eta \rightarrow \infty$ ), δηλαδή έχουμε:

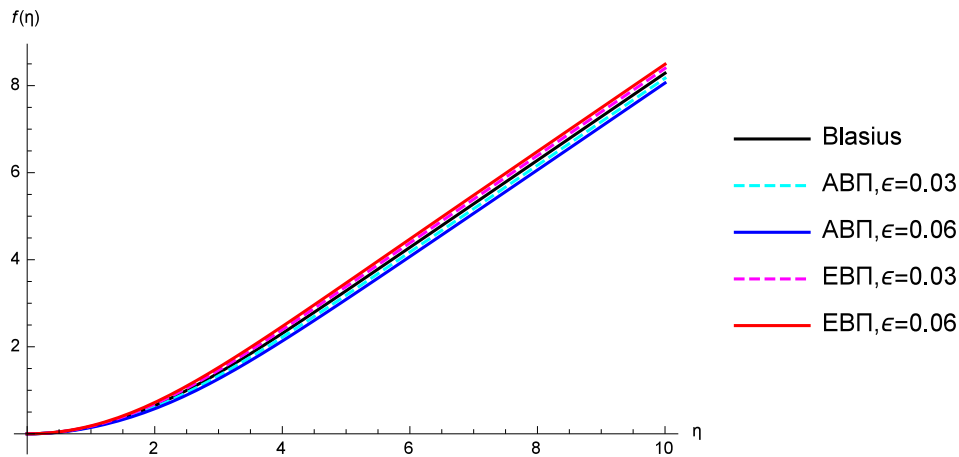
$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_2(\eta) = 0,$$

και βρίσκουμε το  $b_2$ . Όμοια με πριν, προσεγγίζουμε τη λύση αυτή με την [10/10] προσέγγιση Padé.

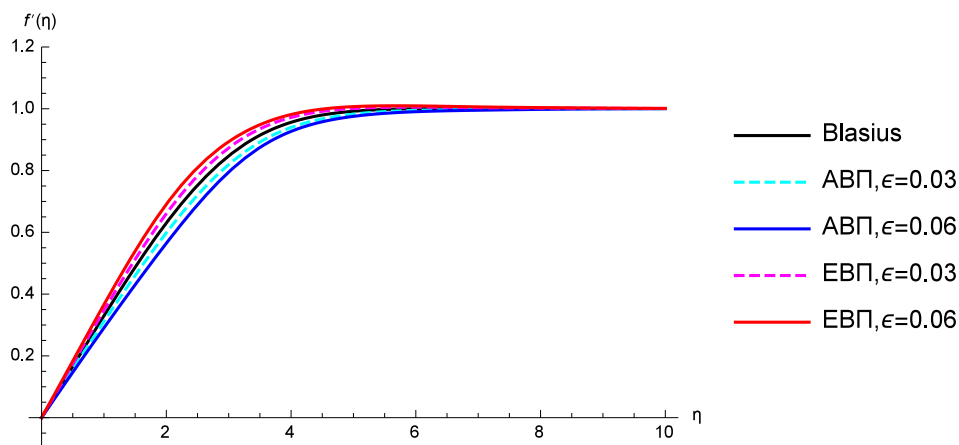
Τέλος, επιστρέφουμε στη μέθοδο διαταραχών και από εκεί μπορούμε να βρούμε την  $f(\eta)$  από την εξίσωση:

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \varepsilon f_1(\eta) + \varepsilon^2 f_2(\eta). \quad (3.105)$$

Στο Σχήμα 3.4 φαίνεται η επίδραση της βαθμίδας πίεσης στην αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ . Στο Σχήμα 3.5, βλέπουμε την επίδραση της βαθμίδας πίεσης στην αδιάστατη ταχύτητα,  $f'(\eta)$ , του ρευστού. Η αντίξοχη βαθμίδα πίεσης επιβραδύνει τη ροή ενώ η ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης την επιταχύνει. Τα αποτελέσματα αυτά συμβαδίζουν με τα αριθμητικά αποτελέσματα που έχουν δοθεί στο βιβλίο του Schlichting [70], καθώς και από τους Stewartson [74], Hartree [26], και Li και Nagamatsu [48].



Σχήμα 3.4: Αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ , χωρίς αντίξοη βαθμίδα πίεσης (πρόβλημα Blasius), με αντίξοη (ΑΒΠ) και ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης (ΕΒΠ) για  $\varepsilon = 0.06$  και  $\varepsilon = 0.03$ .



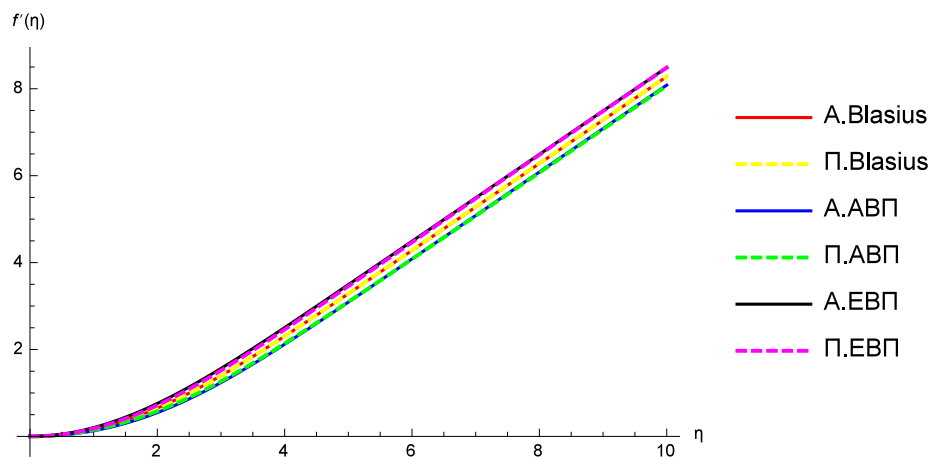
Σχήμα 3.5: Αδιάστατη ταχύτητα,  $f'(\eta)$ , χωρίς αντίξοη βαθμίδα πίεσης (πρόβλημα Blasius), με αντίξοη (ΑΒΠ) και ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης (ΕΒΠ) για  $\varepsilon = 0.06$  και  $\varepsilon = 0.03$ .

### 3.4.1 Συμφωνία Προσεγγιστικών - Αριθμητικών Λύσεων

Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων που εξάγουμε, λύνουμε αριθμητικά το σύστημα που προέκυψε από τη μέθοδο διαταραχών. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι η άμεση μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης σε συνδυα-

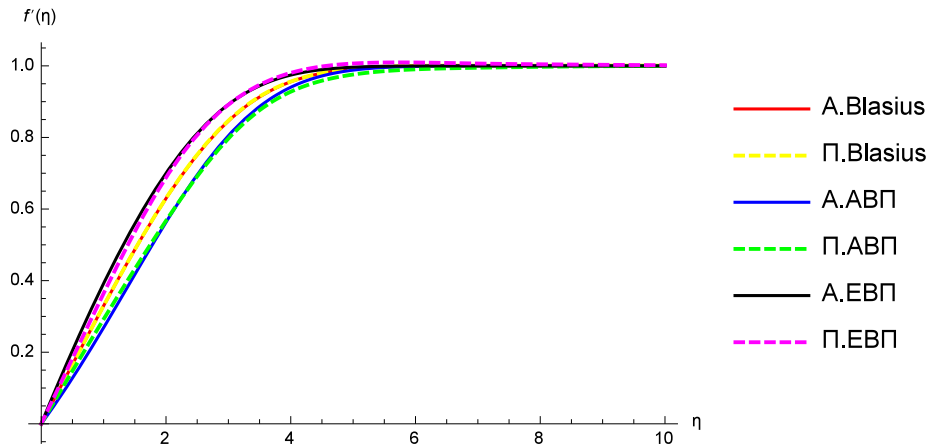
σμό με μια shooting τεχνική και με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica [83]. Είναι φανερό, ότι η αριθμητική λύση του συστήματος είναι πολύ κοντά στις προσεγγιστικές λύσεις που βρήκαμε, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.6 και 3.7, για την αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(\eta)$ , και την αδιάστατη ταχύτητα,  $f'(\eta)$ , αντίστοιχα. Το πρώτο γράμμα στις λεζάντες των σχημάτων, συμβολίζει αν η λύση δόθηκε από την “Αριθμητική (Α.)” ή την “Προσεγγιστική (Π.)” επίλυση του συστήματος.

Όπως φαίνεται σε αυτά τα σχήματα, σε κάποιες περιοχές του  $\eta$ , η προσεγγιστική λύση κάνει μια υπερεκτίμηση των αποτελεσμάτων, κυρίως στο διάστημα  $\eta \in [2, 4]$ . Αυτό συμβαίνει λόγω της MOA, που τείνει να υπερεκτιμά την λύση της εξίσωσης Blasius. Ωστόσο, καθώς το  $\eta$  τείνει στο άπειρο,  $\eta \rightarrow \infty$ , οι προσεγγιστικές λύσεις συμπίπτουν με τις αριθμητικές. Στον Πίνακα 3.5, συγκρίνονται οι τιμές της προσεγγιστικής με την αριθμητική λύση του συστήματος. Τα σφάλματα μετά το  $\eta = 1$ , παραμένουν πολύ μικρά.



Σχήμα 3.6: Αδιάστατη ρευματική συνάρτηση  $f(\eta)$ , χωρίς αντίξοη βαθμίδα πίεσης (πρόβλημα Blasius), με αντίξοη (ABΠ) και ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης (EBΠ) για  $\varepsilon = 0.06$ .





Σχήμα 3.7: Αδιάστατη ταχύτητα  $f'(\eta)$ , χωρίς αντίζωση βαθμίδα πίεσης (πρόβλημα Blasius), με αντίζωση (ΑΒΠ) και ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης (ΕΒΠ) για  $\varepsilon = 0.06$ .

$f'(\eta) = f'_0(\eta) + \varepsilon f'_1(\eta) + \varepsilon^2 f'_2(\eta), \varepsilon = 0.06$			
$\eta$	Προσεγγιστική	Αριθμητική	Σφάλμα %
0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.1573318	0.1472349	6.857
1.0	0.3120108	0.2999781	4.011
1.5	0.4609632	0.4526817	1.829
2.0	0.5994947	0.5970037	0.417
2.5	0.7215306	0.7237476	0.306
3.0	0.8206348	0.8256130	0.602
3.5	0.8929787	0.8995961	0.735
4.0	0.9400546	0.9476863	0.805
4.5	0.9677283	0.9754799	0.794
5.0	0.9828953	0.9897055	0.688
5.5	0.9908735	0.9961404	0.528
6.0	0.9948568	0.9987106	0.385

Πίνακας 3.5: Σύγκριση της προσεγγιστικής και αριθμητικής λύσης του συστήματος εξισώσεων ορμής, για την αδιάστατη ταχύτητα,  $f'(\eta)$ . Σφάλματα της προσεγγιστικής ως προς την αριθμητική λύση.

### 3.5 Εξίσωση Ενέργειας

Για την εξίσωση (3.39), μηδενικής τάξης προσέγγιση της εξίσωσης ενέργειας:

$$\frac{1}{Pr}\theta_0'' + \frac{1}{2}f_0\theta_0' + \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)}(f_0'')^2 = 0,$$

εργαζόμαστε και πάλι με τη μέθοδο ομοτοπικής ανάλυσης, όπως και για την  $f_0(\eta)$ , στην ενότητα 3.3.1. Θα θεωρήσουμε ότι η άγνωστη συνάρτηση  $\theta \in C^2(D)$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Αυτή η θεώρηση ισχύει για όλες τις μεθόδους και για όλες τις άγνωστες συναρτήσεις,  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ , που περιγράφονται παρακάτω. Υποθέτουμε αρχική προσέγγιση,  $\theta_{0,0}(0) = b\eta$ , όπου  $b$  είναι μια άγνωστη σταθερά. Στη συνέχεια εισάγουμε το γραμμικό τελεστή,  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ , και κατασκευάζουμε την οικογένεια εξισώσεων που ονομάζεται μηδενικής-τάξης εξίσωση παραμόρφωσης:

$$(1-p)[\Theta''(\eta, h, p) - \theta_{0,0}(\eta)] = ph \left[ \Theta''(\eta, h, p) + \frac{Pr}{2}f_0(\eta)\Theta'(\eta, h, p) \right], \quad (3.106)$$

όπου  $Pr$ , είναι ο αριθμός Prandtl,  $p \in [0, 1]$  είναι η εμβαπτισμένη παράμετρος,  $h \neq 0$  είναι η παράμετρος ελέγχου σύγκλισης,  $\eta \in [0, +\infty)$  και  $\theta_{0,0}(\eta) = b\eta$  η αρχική προσέγγιση, με συνοριακές συνθήκες στο  $\eta = 0$ :

$$\Theta(0, h, p) = 0, \quad \Theta'(0, h, p) = b \neq 0. \quad (3.107)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι  $\Theta \in C^\infty(D)$  ως προς  $p$ . Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.39) ως προς  $p$  και θέτοντας  $p = 0$ , προκύπτει:

$$\frac{\partial \Theta''}{\partial p} = (1+h)\Theta'' + h\frac{Pr}{2}f_0\Theta', \quad (3.108)$$

όπου,  $f_0(\eta) = \sum_{k=0}^m \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{A_k \sigma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2} \Phi_{m,k}(h)$ , η προσέγγιση που δόθηκε στην εξίσωση (3.62) με τη MOA. Στην εξίσωση (3.108), θέτουμε  $\Theta = \theta_{0,0} = b\eta$  και ολοκληρώνοντας (δύο φορές) ως προς  $\eta$  έχουμε:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p} = h\frac{Pr}{2}b \int \int f_0(\eta) d\eta d\eta + c_1\eta + c_2. \quad (3.109)$$

Οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial^m}{\partial p^m} \theta_{0,0}(0, h) = \frac{\partial^m}{\partial p^m} \theta'_{0,0}(0, h) = 0,$$

οπότε, παίρνουμε  $c_1 = c_2 = 0$ . Παραγωγίζοντας δύο φορές την εξίσωση (3.39) ως προς  $p$ , και θέτοντας  $p = 0$  παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 \Theta''}{\partial p^2} = 2(1+h) \frac{\partial \Theta''}{\partial p} + 2h \frac{Pr}{2} f_0 \frac{\partial \Theta'}{\partial p}. \quad (3.110)$$

Εισάγουμε την  $\frac{\partial \Theta}{\partial p}$  από την εξίσωση (3.109) και ολοκληρώνουμε (δύο φορές) ως προς  $\eta$ . Οπότε, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta''}{\partial p^2} &= 2(h+h^2) \frac{Pr}{2} b \int \int f_0(\eta) d\eta d\eta + \\ &2h^2 \frac{Pr^2}{4} b \int \int f_0(\eta) \left( \int f_0(\eta) d\eta \right) d\eta d\eta, \end{aligned} \quad (3.111)$$

όπου και πάλι οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι μηδέν. Γνωρίζουμε ότι η  $m$ -τάξης προσέγγιση της  $\theta_0(\eta)$ , δίνεται από:

$$\theta_{0,m}(\eta, h) = \theta_{0,0}(\eta) + \sum_{k=1}^m \frac{\theta_{0,k}}{k!}, \quad \eta \in [0, +\infty), \quad h \neq 0. \quad (3.112)$$

Εξισώνοντας τους όρους αυτής της σειράς Taylor με τους όρους  $\frac{\partial \Theta}{\partial p}, \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2}, \dots$ , προκύπτει η γενικευμένη μορφή της προσέγγισης:

$$\begin{aligned} \theta_{0,m}(\eta, h) &= b\eta + \\ &\sum_{k=1}^m b \left( \frac{Pr}{2} \right)^k \int \int f_0(\eta) \left[ \frac{1}{(k-1)!} \left( \int f_0(\eta) d\eta \right)^k \right] d\eta d\eta \Psi_{m,k}(h), \end{aligned} \quad (3.113)$$

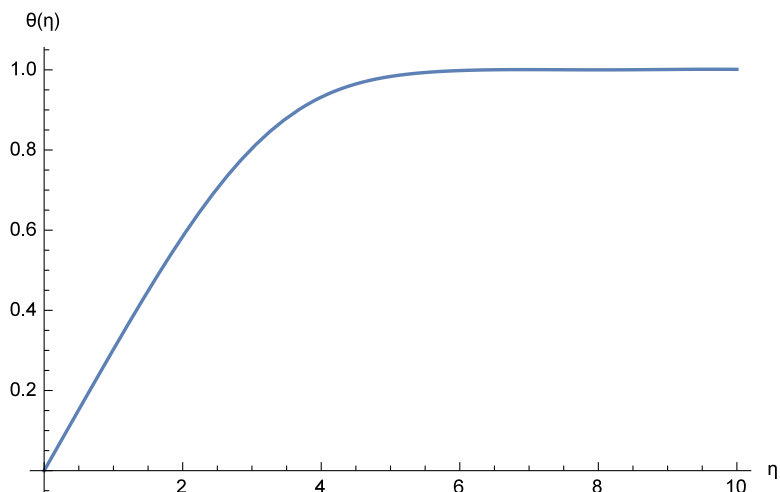
όπου  $\Psi_{m,n}(h)$  είναι η προσεγγιστική συνάρτηση [47], με  $\Psi_{m,n}(h) = 0$  για  $n > m$ ,  $\Psi_{m,n}(h) = 1$  για  $n \leq 0$  και

$$\Psi_{m,n}(h) = (h)^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m}{m-n-k} \binom{n+k-1}{k} h^k, \quad 1 \leq n \leq m. \quad (3.114)$$

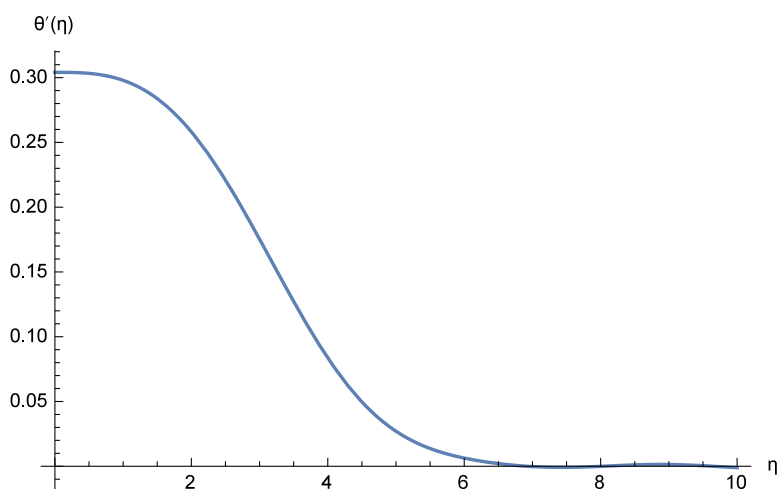
Η σταθερά  $b$  είναι άγνωστη. Γνωρίζουμε από τις συνοριακές συνθήκες ότι  $\theta_{0,m}(\infty, h) = 1$ . Υποθέτοντας, λόγω της συνοριακής συνθήκης  $\theta(\infty) = 1$ , ότι το όριο του  $\theta_{0,m}(\eta, h)$  στο άπειρο είναι ένα:

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \theta_{0,m}(\eta, h) = 1, \quad (3.115)$$

βρίσκουμε ότι  $b = 0.30406$ . Στο Σχήμα 3.8, βλέπουμε την  $40\eta$  προσέγγιση της  $\theta_0(\eta)$ , χρησιμοποιώντας την  $5\eta$  προσέγγιση της  $f_0(\eta)$ , και στο Σχήμα 3.9, την παροχή θερμότητας,  $\theta'_0(\eta)$ .



Σχήμα 3.8: Αδιάστατη θερμοότητα,  $\theta_0(\eta)$ , της μηδενικής τάξης εξίσωσης ενέργειας.



Σχήμα 3.9: Αδιάστατη παροχή θερμότητας,  $\theta'_0(\eta)$ , της μηδενικής τάξης εξίσωσης ενέργειας.

Η πολυπλοκότητα των εξισώσεων (3.41) και (3.43) είναι απαγορευτική για τη χρήση της μεθόδου ομοτοπικής ανάλυσης. Εργαζόμενοι, λοιπόν, όπως και στις περιπτώσεις των  $f_1(\eta)$  και  $f_2(\eta)$ , θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο διαφορικού μετασχηματισμού. Οι βασικοί μετασχηματισμοί δόθηκαν στον Πίνακα 2.1 του κεφαλαίου 2.

Εξετάζουμε τις εξισώσεις (3.41) και (3.43) αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \theta_1'' + \frac{1}{2} f_0 \theta_1' - \theta_1 f_0' + \frac{16\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} (1 - \theta_0) - \frac{u_e}{C_p(T_w - T_e)} p_g f_0' + \\ + \frac{3}{2} f_1 \theta_0' + 2 \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_0'' f_1'' = 0, \\ \frac{1}{Pr} \theta_2'' + \frac{1}{2} f_0 \theta_2' - 2\theta_2 f_0' - \theta_1 f_1' + \frac{3}{2} f_1 \theta_1' - \frac{16\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} \theta_1 - \\ - \frac{u_e}{C_p(T_w - T_e)} p_g f_1' + \frac{5}{2} f_2 \theta_0' + \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_1'' + \\ + 2 \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_0'' f_2'' = 0. \end{aligned}$$

Βάσει του Πίνακα 2.1 του κεφαλαίου 2, έχουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

$$\theta_1''(\eta) = (k+1)(k+2)\Theta_1(k+2), \quad \theta_2''(\eta) = (k+1)(k+2)\Theta_2(k+2), \quad (3.116\alpha')$$

$$\theta_1'(\eta) = (k+1)\Theta_1(k+1), \quad \theta_2'(\eta) = (k+1)\Theta_2(k+1), \quad (3.116\beta')$$

$$\theta_1(\eta) = \Theta_1(k), \quad \theta_2(\eta) = \Theta_2(k). \quad (3.116\gamma')$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς, (3.116α') – (3.116γ'), στην εξίσωση (3.41) και λύνοντας ως προς  $\Theta_1(K+2)$ , προκύπτει:

$$\Theta_1(K+2) = \frac{Pr \left( -\frac{1}{2} f_0(\eta)(k+1)\Theta_1(k+1) + f_0'(\eta)\Theta_1(k) - C_1(\eta) \right)}{(k+1)(k+2)}, \quad (3.117)$$

όπου

$$\begin{aligned} C_1(\eta) = \frac{16\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} (1 - \theta_0) - \frac{u_e}{C_p(T_w - T_e)} p_g f_0' + \\ + \frac{3}{2} f_1 \theta_0' + 2 \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_0'' f_1'', \end{aligned} \quad (3.118)$$

είναι ο μη ομογενής όρος της διαφορικής εξίσωσης,  $\theta_1(\eta)$ , που περιγράφει την επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας και της βαθμίδας πίεσης στη θερμοκρασία του ρευστού. Οι συνοριακές συνθήκες μετασχηματίζονται στις ακόλουθες:

$$\Theta_1(0) = 0, \quad \Theta_1(1) = b_3. \quad (3.119)$$

Έτσι, η  $\theta_1(\eta)$  δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$\theta_1(\eta) = \sum_{k=0}^m \frac{\Theta_1(k)\eta^k}{k!}. \quad (3.120)$$

Ομοίως, η εξίσωση (3.43), γίνεται:

$$\Theta_2(K+2) = \frac{Pr \left( -\frac{1}{2}f_0(\eta)(k+1)\Theta_2(k+1) + f_0'(\eta)\Theta_2(k) - C_2(\eta) \right)}{(k+1)(k+2)}, \quad (3.121)$$

όπου

$$\begin{aligned} C_2(\eta) = & -\frac{16\alpha\sigma T_e^3}{\rho C_p u_e} \theta_1 - \theta_1 f_1' + \frac{3}{2} f_1 \theta_1' - \frac{u_e}{C_p(T_w - T_e)} p_g f_1' + \\ & + \frac{5}{2} f_2 \theta_1' + \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_1'' + 2 \frac{u_e^2}{C_p(T_w - T_e)} f_0'' f_2'' = 0, \end{aligned} \quad (3.122)$$

είναι ο μη ομογενής όρος της διαφορικής εξίσωσης,  $\theta_2(\eta)$ , που περιγράφει την επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας και της βαθμίδας πίεσης στη θερμοκρασία του ρευστού. Οι συνοριακές συνθήκες μετασχηματίζονται στις ακόλουθες:

$$\Theta_2(0) = 0, \quad \Theta_2(1) = b_4. \quad (3.123)$$

Άρα, η  $\theta_2(\eta)$  θα δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$\theta_2(\eta) = \sum_{k=0}^m \frac{\Theta_2(k)\eta^k}{k!}. \quad (3.124)$$

Για τις άγνωστες συνοριακές συνθήκες  $b_3$  και  $b_4$ , εργαζόμαστε όπως και στις περιπτώσεις των  $f_1(\eta)$  και  $f_2(\eta)$ . Δηλαδή, παίρνουμε τα όρια των  $\theta_1(\eta)$  και  $\theta_2(\eta)$ , καθώς το  $\eta$  τείνει στο άπειρο, ίσα με μηδέν, αφού, από τη μέθοδο διαταραχών, οι συνοριακές συνθήκες των  $\theta_1(\eta)$  και  $\theta_2(\eta)$  για  $\eta \rightarrow \infty$  είναι:

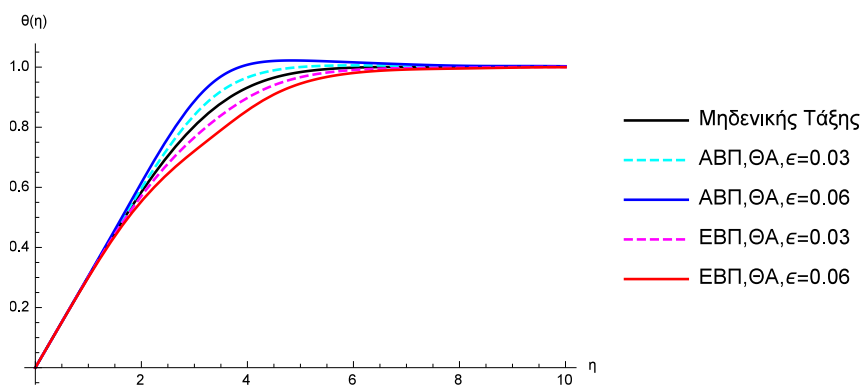
$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta_1(\eta) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta_2(\eta) = 0.$$

Τελικά, επιστρέφοντας στη μέθοδο διαταραχών, η  $\theta(\eta)$  θα δίνεται από τη σχέση:

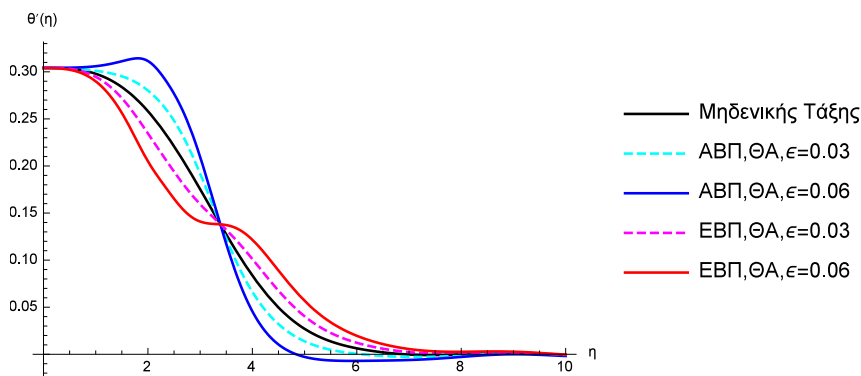
$$\theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \varepsilon \theta_1(\eta) + \varepsilon^2 \theta_2(\eta). \quad (3.125)$$

Στο Σχήμα 3.10, έχουμε την επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας και της βαθμίδας πίεσης στην αδιάστατη θερμοκρασία του φυσικού προβλήματος,  $\theta(\eta)$ . Η

αντίξοι βαθμίδα πίεσης σε συνδυασμό με τη θερμική ακτινοβολία αυξάνουν τη θερμοκρασία εντός του οριακού στρώματος, το οποίο συμβαδίζει με τις αριθμητικές λύσεις που έχουν δοθεί [70, 15] καθώς και με τη φύση του προβλήματος. Στο Σχήμα 3.11, παρουσιάζεται η ροή θερμότητας στο οριακό στρώμα,  $\theta'(\eta)$ . Όσο προχωρούμε κατά μήκος του οριακού στρώματος, η θερμοκρασία εντός του οριακού στρώματος γίνεται ίση με τη θερμοκρασία του ελεύθερου ρεύματος, και άρα η ροή θερμότητας τείνει στο μηδέν. Και πάλι οι αριθμητικές λύσεις έχουν δείξει παρόμοια αποτελέσματα [70, 8, 9, 15].



Σχήμα 3.10: Αδιάστατη θερμοότητα,  $\theta(\eta)$ , χωρίς βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία, με αντίξοι (ΑΒΠ) και ευνοϊκή (ΕΒΠ) βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία ( $\Theta A$ ), για  $\varepsilon = 0.06$  και  $\varepsilon = 0.03$ .



Σχήμα 3.11: Αδιάστατη παροχή θερμότητας,  $\theta'(\eta)$ , χωρίς βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία, με αντίξοι (ΑΒΠ) και ευνοϊκή (ΕΒΠ) βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία ( $\Theta A$ ), για  $\varepsilon = 0.06$  και  $\varepsilon = 0.03$ .

### 3.5.1 Συμφωνία Προσεγγιστικών - Αριθμητικών Λύσεων

Οι προσεγγιστικές λύσεις που βρέθηκαν χρησιμοποιώντας τις μεθόδους MOA και ΜΔΜ, συγκρίθηκαν με την αριθμητική λύση του συστήματος των εξισώσεων ενέργειας. Η αριθμητική λύση βρέθηκε χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης σε συνδυασμό με μια shooting τεχνική και με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica [83]. Οι προσεγγιστικές λύσεις υπερεκτιμούν σε κάποια διαστήματα του  $\eta$  τη λύση σε σύγκριση με την αριθμητική λύση, λόγω της MOA. Τα σφάλματα παραμένουν μικρά, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.6.

$\theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \varepsilon\theta_1(\eta) + \varepsilon^2\theta_2(\eta), \varepsilon = 0.03$			
$\eta$	Προσεγγιστική	Αριθμητική	Σφάλμα %
0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.1521036	0.1549216	1.819
1.0	0.3035827	0.3081596	1.485
1.5	0.4529625	0.4557061	0.602
2.0	0.5972717	0.5918522	0.915
2.5	0.7304469	0.7106039	2.792
3.0	0.8418044	0.8073880	4.262
3.5	0.9206946	0.8804197	4.574
4.0	0.9669564	0.9311014	3.850
4.5	0.9904395	0.9633034	2.816
5.0	1.0010844	0.9819859	1.944
5.5	1.0052037	0.9918682	1.344
6.0	1.0062189	0.9966304	0.962

Πίνακας 3.6: Σύγκριση της προσεγγιστικής και αριθμητικής λύσης του συστήματος εξισώσεων ενέργειας, για την αδιάστατη θερμοκρασία  $\theta(\eta)$ . Σφάλματα της προσεγγιστικής ως προς την αριθμητική λύση.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται περαιτέρω συζήτηση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις προσεγγιστικές τεχνικές που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο. Τέλος, γίνεται μια πιο λεπτομερής συζήτηση των αποτελεσμάτων του υπό μελέτη φυσικού προβλήματος.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις ημίανλυτικές μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν στη διατριβή. Επίσης, γίνεται λεπτομερής συζήτηση του φυσικού προβλήματος. Παραθέτουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη της επίδρασης της βαθμίδας πίεσης και της θερμικής ακτινοβολίας, για περιοχές του οριακού στρώματος κοντά στην οδηγούσα ακμή.

### 4.1 Αναλυτικές Τεχνικές

Σκοπός της διατριβής είναι η εύρεση προσεγγιστικών λύσεων για τις εξισώσεις του οριακού στρώματος. Μετά τις απλοποιήσεις του οριακού στρώματος [70], εισαγάγαμε το μετασχηματισμό Falkner-Skan, ο οποίος αδιαστατοποιεί το αρχικό σύστημα και εισάγει την αδιάστατη ρευματική συνάρτηση,  $f(x, \eta)$ , και την αδιάστατη παράμετρο,  $\eta$ . Ο μετασχηματισμός αυτός, μας οδηγεί σε ένα μη γραμμικό και συζευγμένο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στη μηχανική των ρευστών, είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται η μέθοδος διαταραχών για την απλοποίηση του πολύπλοκου συστήματος εξισώσεων που προκύπτει από την αδιαστατοποίησή του [52]. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαταραχών στο μη γραμμικό και συζευγμένο σύστημα ΜΔΕ, προκύπτει ένα νέο συζευγμένο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, όπου η  $x$  ανεξάρτητη μεταβλητή είναι τώρα η παράμετρος διαταραχής,  $\varepsilon$ . Το μηδενικής τάξης πρόβλημα για την  $f(\eta)$  είναι η γνωστή εξίσωση Blasius. Η εξίσωση Blasius είναι μη γραμμική ΣΔΕ, για την οποία έχουν αναπτυχθεί αρκετές προσεγγιστικές μέθοδοι που οδηγούν στην εύρεση προσεγγιστικών λύσεων. Για να λύσουμε το σύστημα ΣΔΕ που προκύπτει, χρησιμοποιούμε τρεις προσεγγιστικές μεθόδους.

Οι τρεις προσεγγιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν είναι η μέθοδος ομοιοτικής ανάλυσης (MOA), η μέθοδος διαφορικού μετασχηματισμού (ΜΔΜ) και η μέθοδος ανάλυσης ή αποσύνθεσης του Adomian (MAA). Αυτές οι μέθοδοι

έχουν μεγάλο εύρος εφαρμογών, καθώς είναι αρκετά απλές στην εφαρμογή τους σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Μπορούν, επίσης, να εφαρμοστούν τόσο σε γραμμικά όσο και μη γραμμικά προβλήματα. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα και των τριών μεθόδων είναι ότι δίνουν λύσεις σε μορφή δυναμοσειρών.

Και οι τρεις αυτές μέθοδοι εφαρμόστηκαν στην εξίσωση Blasius. Τα αποτελέσματα των μεθόδων, για τις  $f(\eta)$  και  $f'(\eta)$ , αναλύθηκαν στους Πίνακες 3.1 και 3.2 της ενότητας 3.3.4 του προηγούμενου κεφαλαίου. Συγκρίνοντας τις μεθόδους με αριθμητικά αποτελέσματα, προκύπτει ότι η MOA προσεγγίζει γρηγορότερα τη λύση του φυσικού προβλήματος, ακολουθεί η MAA και τέλος η ΜΔΜ. Αυτό σημαίνει ότι για τη λύση της εξίσωσης Blasius, χρειάστηκε μικρότερη προσέγγιση, άρα και λιγότερο υπολογιστικό κόστος, χρησιμοποιώντας τη MOA. Ωστόσο, η MOA και MAA εφαρμόζονται δύσκολα σε μη γραμμικές εξισώσεις με μη ομογενείς όρους. Αυτό συμβαίνει διότι είναι δύσκολο να βρεθούν οι γραμμικοί και μη γραμμικοί τελεστές που να περιγράφουν πλήρως το φυσικό πρόβλημα. Σε αυτή τη περίπτωση η ΜΔΜ εφαρμόζεται ευκολότερα, χρησιμοποιώντας τους βασικούς μετασχηματισμούς που δόθηκαν στον Πίνακα 2.1 της ενότητας 2.3.2 του 2ου κεφαλαίου.

Παρόλα αυτά, η MOA είναι πιο άμεση μέθοδος. Η λύση της εκάστοτε εξίσωσης συγκλίνει γρηγορότερα χρησιμοποιώντας τη MOA, σε σχέση με τις ΜΔΜ και MAA. Οι άλλες δύο μέθοδοι χρειάζονται μεγαλύτερη προσέγγιση για να συγκλίνουν στη λύση των εξισώσεων υπό μελέτη, και άλλοτε αποτυγχάνουν να ικανοποιήσουν κάποια συνοριακή συνθήκη του προβλήματος. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις πολυωνύμων με ρητές συναρτήσεις Padé. Αυτές οι ρητές συναρτήσεις βελτιώνουν τις προσεγγίσεις των ΜΔΜ και MAA και βοηθούν στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος.

Γενικά, και οι τρεις προσεγγιστικές μέθοδοι που μελετήθηκαν παρέχουν καλά αποτελέσματα για τη μη γραμμική εξίσωση Blasius. Σε συνδυασμό με αυτές τις τεχνικές, έγινε μια προσπάθεια να βρεθεί μια λύση της εξίσωσης Blasius θεωρώντας μια γραμμικοποιημένη μορφή της και εφαρμόζοντας βελτιστοποίηση για την εύρεση των παραμέτρων. Η λύση είναι αρκετά κοντά στις λύσεις των προσεγγιστικών τεχνικών και έχει πολύ καλύτερη συμπεριφορά από προτεινόμενες λύσεις με τη μέθοδο μεταβολικής επανάληψης (MME, variational iteration method, VIM).

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν πιο πάνω, χρησιμοποιήσαμε μια υβριδική μέθοδο, όπου συνδυάζουμε τις MOA και ΜΔΜ για την περιγραφή του συστήματος μη γραμμικών και συζευγμένων εξισώσεων που προέκυψε από τη μέθοδο διαταραχών για τη μελέτη του φυσικού προβλήματος. Η MOA χρησιμοποιείται για τις μη γραμμικές εξισώσεις ορμής και ενέργειας μηδενικής τάξης και η ΜΔΜ, με τη βοήθεια πολυωνύμων Padé, για τις υπόλοιπες τέσσερις γραμμικές και μη ομο-

γενείς εξισώσεις. Τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων που βρήκαμε είναι σε απόλυτη αντιστοιχία με αριθμητικά αποτελέσματα.

## 4.2 Συζήτηση του Φυσικού Προβλήματος

Σε αυτή τη διατριβή μελετήσαμε το φυσικό πρόβλημα της ασυμπίεστης, υποηχητικής ( $M < 0.3$ ), στρωτής ροής οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη πλάκα. Στη ροή αυτή μελετώνται τα φαινόμενα της βαθμίδας πίεσης και της θερμικής ακτινοβολίας, και πως αυτά επιδρούν στην ροή, σε μικρό μήκος από την οδηγούσα ακμή.

### 4.2.1 Βαθμίδα Πίεσης

Το αρχικό μη γραμμικό σύστημα ΜΔΕ που προέκυψε από το μετασχηματισμό Falkner-Skan μετασχηματίστηκε σε μη γραμμικό σύστημα ΣΔΕ με τη βοήθεια της μεθόδου διαταραχών. Η μέθοδος διαταραχών που χρησιμοποιήσαμε, παρέχει λύσεις κοντά στην οδηγούσα ακμή του οριακού στρώματος, δηλαδή για μικρές τιμές του  $x$ , οπότε δεν μπορούμε να περιγράψουμε τη ροή σε όλο το μήκος της. Παρόλα αυτά, οι λύσεις που παίρνουμε κοντά στην οδηγούσα ακμή της πλάκας είναι ίδιες με τις λύσεις που έχουν δοθεί αριθμητικά για την ίδια περιοχή της ροής.

Στην εξίσωση ορμής, βασικό ρόλο παίζει η βαθμίδα πίεσης, ευνοϊκή ή αντίξοη. Όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.4 και 3.5, η ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης επιταχύνει τη ροή. Αντίθετα, η αντίξοη βαθμίδα πίεσης επιβραδύνει τη ροή κάτι που οδηγεί τελικά στην αποκόλληση του οριακού στρώματος με ανεπιθύμητα αποτελέσματα για τη ροή πάνω από την πλάκα. Αυξάνοντας την συντεταγμένη διαταραχής,  $\varepsilon$ , δηλαδή προχωρώντας κατά μήκος της ροής του οριακού στρώματος, η επίδραση της βαθμίδας πίεσης γίνεται όλο και πιο έντονη. Η αντίξοη βαθμίδα επιβραδύνει περισσότερο τη ροή του ρευστού, ενώ η ευνοϊκή βαθμίδα την επιταχύνει.

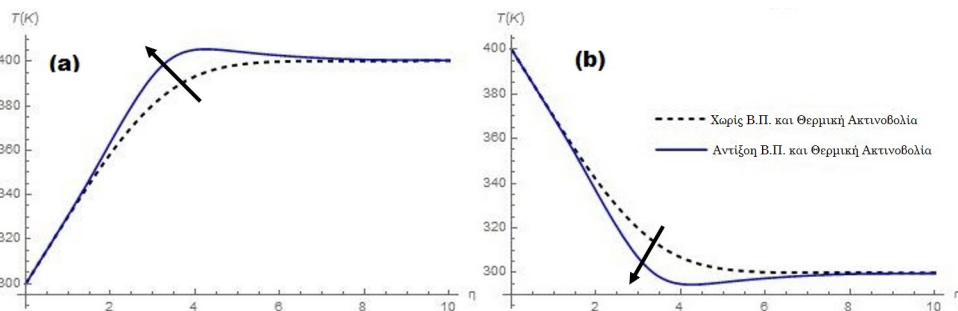
### 4.2.2 Θερμική Ακτινοβολία

Η μελέτη της εξίσωσης ενέργειας με τον όρο της θερμικής ακτινοβολίας, έδειξε ότι ο συνδυασμός θερμικής ακτινοβολίας και αντίξοης βαθμίδας πίεσης αυξάνει τη θερμοκρασία του ρευστού πάνω από την πλάκα. Αυτό συμβαίνει λόγω των δυνάμεων τριβής που αναπτύσσονται από την επίδραση της αντίξοης βαθμίδας πίεσης και της θερμικής ακτινοβολίας στη θερμοκρασία του ρευστού. Επίσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.11 η ροή θερμότητας εντός του οριακού στρώματος αυξάνεται

όταν συνδυάζουμε θερμική ακτινοβολία και αντίξοη βαθμίδα πίεσης. Αντίθετα, η ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης μειώνει τη θερμοκρασία του οριακού στρώματος.

Εξετάζοντας την επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η θερμοκρασιακή διαφορά πλάκας - ρευστού,  $T_w - T_e$ , όπου  $T_w$  η θερμοκρασία της πλάκας και  $T_e$ , η θερμοκρασία στην ακμή του οριακού στρώματος, τόσο μεγαλύτερη και η επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας. Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η επίδραση της θερμικής ακτινοβολίας, εξετάζουμε δύο περιπτώσεις. Την περίπτωση θερμαινόμενης πλάκας,  $T_w > T_e$ , δηλαδή η πλάκα έχει μεγαλύτερη θερμοκρασία από το ρευστό, και την περίπτωση ψυχόμενης πλάκας,  $T_w < T_e$ , όπου η πλάκα έχει χαμηλότερη θερμοκρασία από το ρευστό. Θα παρουσιάσουμε τη θερμοκρασία  $T$ , πάνω στη πλάκα με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού της αδιάστατης θερμοκρασίας,  $\theta$ , δηλαδή  $T = T_w - \theta(T_w - T_e)$ .

Ως μέτρο σύγκρισης χρησιμοποιούμε τη θερμοκρασία  $T$ , χωρίς αντίξοη βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία. Και στις δύο περιπτώσεις, θερμαινόμενης και ψυχόμενης πλάκας, εξετάζουμε θερμοκρασιακές μεταβολές  $T_w - T_e = 100\text{ K}$ . Στην περίπτωση της ψυχόμενης πλάκας υπάρχει αύξηση της θερμοκρασίας στο οριακό στρώμα όταν υπάρχει αντίξοη βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία, συγκρινόμενη με την περίπτωση όπου δεν υπάρχει βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία. Στη θερμαινόμενη πλάκα, η θερμοκρασία μειώνεται στο οριακό στρώμα όταν υπάρχει αντίξοη βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Επίδραση της αντίξοης βαθμίδας πίεσης και της θερμικής ακτινοβολίας στο οριακό στρώμα για θερμοκρασιακές διαφορές μεταξύ πλάκας και ρευστού,  $\Delta T = T_w - T_e = 100\text{ K}$ . (a) ψυχόμενη πλάκα και (b) θερμαινόμενη πλάκα.

### 4.2.3 Εφαρμογές και Μελλοντικά Βήματα

Αυτή η εργασία θα μπορούσε να βοηθήσει στη καλύτερη κατανόηση της ροής οριακού στρώματος με βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία. Είναι μια αρχική προσπάθεια για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων για το μη γραμμικό πρόβλημα της ροής στο οριακό στρώμα και το πώς επηρεάζεται το θερμικό οριακό στρώμα. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές περιοχές της επιστήμης, των μαθηματικών αλλά και της μηχανικής γενικότερα. Για παράδειγμα εφαρμογές στην αεροδιαστημική όπως και στην τεχνολογία των εμπορικών και ερευνητικών αεροσκαφών που πετούν σε πολύ μεγάλα ύψη, όπου η ακτινοβολία παίζει σημαντικό ρόλο. Επίσης, στην αποδοτικότερη λειτουργία ηλιακών συλλεκτών, δημιουργώντας συλλέκτες που απορροφούν περισσότερη ενέργεια, η οποία φτάνει στη γη με την ηλιακή ακτινοβολία. Τέλος, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί τόσο στα επιβατικά όσο και στα αγωνιστικά αυτοκίνητα, χρησιμοποιώντας τη θερμική ακτινοβολία που εκπέμπεται από την καύση των κινητήρων, για τη δημιουργία αποδοτικότερων μηχανών, κάτι που έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται στην κορωνίδα του μηχανοκίνητου αθλητισμού, τη Φόρμουλα Ένα (Formula 1).

Στο μέλλον, σκοπός μας είναι να αποσυνδεθούμε από τη μέθοδο διαταραχών που μας αναγκάζει να εξετάσουμε τη ροή πολύ κοντά στην αρχή του σχηματισμού του οριακού στρώματος. Να μπορέσουμε, δηλαδή, να λύσουμε αναλυτικά το σύστημα μη γραμμικών και συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού του οριακού στρώματος μέχρι την αποκόλληση του.

Επειδή στη φύση παρουσιάζονται κυρίως τυρβώδης ροές, θα ήταν σκόπιμο να μεταβούμε από τη στρωτή στη τυρβώδη ροή οριακού στρώματος. Οι εξισώσεις τυρβώδους ροής είναι πιο πολύπλοκες από αυτές της στρωτής ροής αλλά με βάση τις αναφερόμενες μεθόδους θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε στην αναλυτική μελέτη τους.

Όσον αφορά την επίπεδη πλάκα, ο μετασχηματισμός Falkner-Skan είναι ιδιαίτερα απλός και εύχρηστος. Αυτός ο μετασχηματισμός εύκολα μπορεί να διαφοροποιηθεί ώστε να είμαστε σε θέση να μελετήσουμε ροή σε σφήνα (wedge), όπου η γωνία της θα καθορίζεται από μια σταθερά. Υποθέτοντας ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή εξαρτώνται από τη θέση που βρισκόμαστε πάνω στη σφήνα, δηλαδή η σταθερά γίνεται μεταβλητή, θα μπορούσαμε να μετασχηματίσουμε τη σφήνα σε πτέρυγα. Έτσι, θα είμαστε σε θέση να βρούμε προσεγγιστικές λύσεις για τις εξισώσεις οριακού στρώματος πάνω από διδιάστατη διατομή πτέρυγας.

Τέλος, στη διατριβή αυτή υποθέσαμε ότι το ιξώδες του ρευστού δε μεταβάλλεται. Αν υποθέσουμε μεταβαλλόμενο ιξώδες με τη θερμοκρασία, τότε η θερμοκρα-

σία θα μεταβάλλεται λόγω των τριβών εντός του οριακού στρώματος. Επομένως, η εξίσωση ορμής θα εξαρτάται από τη θερμοκρασία του ρευστού και το σύστημα θα είναι ισχυρά συζευγμένο.

### 4.3 Συμπεράσματα

Στη διατριβή αυτή μελετήσαμε την ασυμπίεστη ροή οριακού στρώματος, πάνω από επίπεδη πλάκα, με βαθμίδα πίεσης και θερμική ακτινοβολία. Το αρχικό σύστημα των εξισώσεων συνέχειας, ορμής και ενέργειας αδιαστατοποιείται με το μετασχηματισμό Falkner-Skan. Το σύστημα ΜΔΕ που προκύπτει μετατρέπεται σε σύστημα ΣΔΕ, απαλείφοντας τη μια ανεξάρτητη μεταβλητή μέσω της μεθόδου διαταραχών. Στο σύστημα αυτό εμφανίζεται η εξίσωση Blasius, η οποία λύνεται με τρεις προσεγγιστικές μεθόδους και τα αποτελέσματα αυτών συγκρίνονται με την αριθμητική λύση της εξίσωσης. Όπως προέκυψε, οι προσεγγιστικές αυτές λύσεις, περιγράφουν πολύ καλά το πρόβλημα υπό μελέτη. Επίσης, γραμμικοποιώντας την εξίσωση Blasius, τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι πολύ κοντά στα αριθμητικά και προσεγγιστικά αποτελέσματα.

Για τη λύση ολόκληρου του συστήματος χρησιμοποιήσαμε μια υβριδική τεχνική, όπου συνδυάζουμε τις ΜΟΑ και ΜΔΜ. Τα αποτελέσματα είναι σε απόλυτη αντιστοιχία με αριθμητικά αποτελέσματα. Η βαθμίδα πίεσης μεταβάλλει την ταχύτητα του οριακού στρώματος. Αντίξοη βαθμίδα πίεσης μειώνει την ταχύτητα, ενώ ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης την αυξάνει. Επίσης, ο συνδυασμός αντίξοης βαθμίδας πίεσης και θερμικής ακτινοβολίας, αυξάνει τη θερμοκρασία του οριακού στρώματος ενώ ευνοϊκή βαθμίδα πίεσης σε συνδυασμό με θερμική ακτινοβολία μειώνει τη θερμοκρασία του οριακού στρώματος. Τέλος, ο συνδυασμός βαθμίδας πίεσης και θερμικής ακτινοβολίας επιφέρει μεγαλύτερες μεταβολές στη θερμοκρασία του οριακού στρώματος όταν η διαφορά θερμοκρασίας πλάκας και ρευστού είναι μεγαλύτερη.

Τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας είναι σε απόλυτη συμφωνία με αριθμητικές λύσεις και προσεγγιστικές λύσεις που αναπτύχθηκαν από πολλούς ερευνητές. Επίσης εισάγεται μια αναλυτική λύση για την εξίσωση Blasius που βασίζεται σε μεθόδους βελτιστοποίησης. Αυτή η εργασία θα μπορούσε να βοηθήσει στη καλύτερη κατανόηση της επίδρασης της βαθμίδας πίεσης και της θερμικής ακτινοβολίας στο οριακό στρώμα. Θα μπορούσε επίσης να βοηθήσει στην ανάπτυξη νέων προσεγγιστικών τεχνικών για τη μελέτη περίπλοκων προβλημάτων της ρευστομηχανικής.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135(2):501–544, 1988.
- [2] Adomian G. *Solving frontier problems of physics the decomposition method*. Springer, 1994.
- [3] Adomou A., Codo F.P. and Adanhounmè V. Analytical solution of Blasius problem. *Advances in Natural & Applied Sciences*, 6(6):841–846, 2012.
- [4] Arav N. and Begelman M.C. Radiation-viscous boundary layer. *The Astrophysical Journal*, 401(1):125–136, 1992.
- [5] Arikoglu A. and Ozkol I. Inner-outer matching solution of Blasius equation by DTM. *International Journal of Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 77(4):298–301, 2005.
- [6] Baker G.A. *Essentials of Padé approximants*. Academic Press, London, 1975.
- [7] Baker G.A. and Graves-Morris P.R. *Padé Approximants*. Cambridge University Press, 1996.
- [8] Bataller R.C. Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2):832–840, 2008.
- [9] Bataller R.C. Radiation effects in the Blasius flow. *Applied Mathematics and Computation*, 198(1):333–338, 2008.

- [10] Bestman A.R. and Adjepong S.K. Unsteady hydromagnetic free-convection flow with radiative heat transfer in a rotating fluid. *Astrophysics and Space Science*, 143(1):73–80, 1988.
- [11] Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 56(1):1–37, 1908.
- [12] Brown K.C. and Joubert P.N. The measurement of skin friction in turbulent boundary layers with adverse pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 35(4):737–757, 1969.
- [13] Brown S.N. and Stewartson K. Laminar separation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1(1):45–72, 1969.
- [14] Catal S. Some of Semi Analytical Methods for Blasius Problem. *Applied Mathematics*, 3(7):724–728, 2012.
- [15] Cebeci T. and Bradshaw P. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*. Springer-Verlag, 1984.
- [16] Chen C.K. and Ho S.H. Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation*, 79(2):173–188, 1996.
- [17] Chester C.R. *Techniques in partial differential equations*. McGraw-Hill, 1971.
- [18] Deka, R.K. and Das S.K. Radiation Effects on Free Convection Flow Near a Vertical Plate with Ramped Wall Temperature. *Engineering*, 3(12):1197–1206, 2011.
- [19] Dengel P. and Fernholz H.H. An experimental investigation of an incompressible turbulent boundary layer in the vicinity of separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 212:615–636, 1990.
- [20] Elbashbeshy E.M.A. and Dimian M.F. Effect of radiation on the flow and heat transfer over a wedge with variable viscosity. *Applied Mathematics and Computation*, 132(2):445–454, 2002.
- [21] England W.G. and Emery A.F. Thermal radiation effects on the laminar free convection boundary layer of an absorbing gas. *Journal of Heat transfer*, 91(1):37–44, 1969.



- [22] Falkner V.M. and Skan S.W. Solutions of the boundary-layer equations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 12(80):865–896, 1931.
- [23] Falkovich G. *Fluid mechanics: A short course for physicists*. Cambridge University Press, 2011.
- [24] Fletcher C. *Computational techniques for fluid dynamics 1: Vol. 1*. Springer Science & Business Media, 1991.
- [25] Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1(1):43–69, 1948.
- [26] Hartree D.R. On an equation occurring in Falkner and Skan’s approximate treatment of the equations of the boundary layer. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 33(Part II):223–239, 1937.
- [27] He J. Approximate analytical solution of Blasius’ equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 3(4):260–263, 1998.
- [28] Hirt F. and Thomann H. Measurement of wall shear stress in turbulent boundary layers subject to strong pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 171:547–562, 1986.
- [29] Hossain M.A., Alim M.A. and Rees D.A.S. The effect of radiation on free convection from a porous vertical plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(1):181–191, 1999.
- [30] Hossain M.A., Khanafer K. and Vafai K. The effect of radiation on free convection flow of fluid with variable viscosity from a porous vertical plate. *International Journal of Thermal Sciences*, 40(2):115–124, 2001.
- [31] Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 164(919):547–579, 1938.
- [32] Howell J.R., Siegel R. and Mengüç M.P. *Thermal Radiation Heat Transfer*. CRC press, 2011.
- [33] Hung C.M. Computation of Navier-Stokes equations for three-dimensional flow separation. *AIAA Journal*, 29(10):1659–1667, 1991.

- [34] Ilinca F., Pelletier D. and Ignat L. Adaptive finite element solution of compressible turbulent flows. *AIAA Journal*, 36(12):2187–2194, 1998.
- [35] Inman P.N. and Bradshaw P. Mixing length in low Reynolds number turbulent boundary layers. *AIAA Journal*, 19(5):653–655, 1981.
- [36] Kafoussias N. *Μέθοδοι Διαταραχών στη Μηχανική των Ρευστών*. Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1998.
- [37] Kafoussias N. *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική II*. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2001.
- [38] Kafoussias N. and Xenos M. Numerical investigation of two-dimensional turbulent boundary layer compressible flow with adverse pressure gradient and heat and mass transfer. *Acta Mechanica*, 141:201–223, 2000.
- [39] Kafoussias N., Karabis A. and Xenos M. Numerical study of two dimensional laminar boundary layer compressible flow with pressure gradient and heat and mass transfer. *International Journal of Engineering Science*, 37(14):1795–1812, 1999.
- [40] Karabis A., Kafoussias N. and Xenos M. Numerical study of the combined free-forced convective boundary layer flow through a highly permeable porous medium. *Mechanics Research Communications*, 22(5):503–510, 1995.
- [41] Lachmann G.V. *Boundary layer and flow control: its principles and application*. Elsevier, 2014.
- [42] Le H., Moin P, and Kim J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 330:349–374, 1997.
- [43] Liao S.J. An approximate solution technique not depending on small parameters Part2: an application in fluid mechanics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(3):815–822, 1997.
- [44] Liao S.J. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius’ viscous flow problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4):759–778, 1999.
- [45] Liao S.J. *Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method*. CRC press, 2003.

- [46] Liao S.J. Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4):983–997, 2009.
- [47] Liao S.J. and Campo A. Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 453:411–425, 2002.
- [48] Li T.Y. and Nagamatsu H.T. Similar solutions of compressible boundary layer equations. *Journal of Aeronautical Sciences*, 22:607–616, 1955.
- [49] Liu Y. and Kurra S.N. Solution of Blasius equation by variational iteration. *Applied Mathematics*, 1(1):24–27, 2011.
- [50] Mabood F., Khan W.A. and Ismail A.I.Md. Analytical solution for radiation effects on heat transfer in blasius flow. *International Journal of Engineering Science*, 2(2):63–72, 2013.
- [51] McCormick D.C. Boundary layer separation control with directed synthetic jets. *AIAA Paper*, 519:2000, 2000.
- [52] Minkowycz W.J. and Sparrow E.M. Local nonsimilar solutions for natural convection on a vertical cylinder. *Journal of Heat Transfer*, 96(2):178–183, 1974.
- [53] Molabahrami A. and Khani F. The homotopy analysis method to solve the Burgers–Huxley equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(2):589–600, 2009.
- [54] Muthucumaraswamy R. The interaction of thermal radiation on vertical oscillating plate with variable temperature and mass diffusion. *Theoretical and Applied Mechanics*, 33(2):107–121, 2006.
- [55] Muthucumaraswamy R. and Chandrakala P. Effects of thermal radiation on moving vertical plate in the presence of an optically thin gray gas. *Forschung im Ingenieurwesen*, 69(4):205–208, 2005.
- [56] Nagano Y., Tagawa M. and Tsuji T. Effects of adverse pressure gradients on mean flows and turbulence statistics in a boundary layer. *Turbulent Shear Flows*, 8:7–21, 1993.
- [57] Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008.

- [58] Ochs S.S. and Wolfe W.P. CFD calculations of S809 aerodynamic characteristics. *AIAA Paper, Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 35th, Reno*, 1997.
- [59] Peker H.A., Karaoglu O. and Oturanç G. The differential transformation method and Pade approximant for a form of Blasius equation. *Mathematical and Computational Applications*, 16(2):507, 2011.
- [60] Prakash J., Bhanumathi D., Kumar, A.G.V. and Varma, S.V.K. Diffusion-Thermo and Radiation Effects on Unsteady MHD Flow Through Porous Medium Past an Impulsively Started Infinite Vertical Plate with Variable Temperature and Mass Diffusion. *Transport in Porous Media*, 96(1):135–151, 2013.
- [61] Raptis A. Free convective oscillatory flow and mass transfer past a porous plate in the presence of radiation for an optically thin fluid. *Thermal Science*, 15(3):849–857, 2011.
- [62] Raptis A. and Perdikis C. Thermal radiation of an optically thin gray gas. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 8(1):131–134, 2003.
- [63] Raptis A. and Toki C.J. Thermal radiation in the presence of free convective flow past a moving vertical porous plate-an analytical solution. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 14(4):1115–1126, 2009.
- [64] Raptis A. and Toki C.J. Exact solution to unsteady flow over a moving plate in the presence thermal radiation. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 17(4):1357–1365, 2012.
- [65] Raptis A., Perdikis C. and Leontitsis A. Effects of radiation in an optically thin gray gas flowing past a vertical infinite plate in the presence of a magnetic field. *Heat and Mass Transfer*, 39(8-9):771–773, 2003.
- [66] Rashidi M.M. and Erfani E. A new analytical study of MHD stagnation-point flow in porous media with heat transfer. *Computers & Fluids*, 40(1):172–178, 2011.
- [67] Reddy P.B.A., Reddy N.B. and Palani G. Convective flow past a vertical plate under the influence of magnetic field and thermal radiation subjected to a variable surface temperature in the presence of heat source/sink. *Thermophysics and Aeromechanics*, 19(3):489–501, 2012.

- [68] Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the Royal Society of London*, 35(224-226):84–99, 1883.
- [69] Rott N. Note on the history of the Reynolds number. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22(1):1–12, 1990.
- [70] Schlichting H. *Boundary Layer Theory, Seventh Edition*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [71] Siddheshwar P.G. and Mahabaleswar U.S. Effects of radiation and heat source on MHD flow of a viscoelastic liquid and heat transfer over a stretching sheet. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(6):807–820, 2005.
- [72] Spalart P.R. and Watmuff J.H. Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 249:337–371, 1993.
- [73] Spyropoulos E.T. and Blaisdell G.A. Large-eddy simulation of a spatially evolving supersonic turbulent boundary-layer flow. *AIAA Journal*, 36(11):1983–1990, 1998.
- [74] Stewartson K. Further solutions of the Falkner-Skan equation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 50(3):454–465, 1954.
- [75] Stokes G.G. *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*. Pitt Press, 1851.
- [76] Stratford B.S. and Gadd G.E. *Flow in the laminar boundary layer near separation*. HM Stationery Office, 1957.
- [77] Thiagarajan M. and Senthilkumar K. DTM-Padé Approximants for MHD Flow with Suction/Blowing. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 6(4):724–728, 2012.
- [78] Thompson B.E. and Whitelaw J.H. Characteristics of a trailing-edge flow with turbulent boundary-layer separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 157:305–326, 1985.
- [79] Turkyilmazoglu M. A note on the homotopy analysis method. *Applied Mathematics Letters*, 23(10):1226–1230, 2010.

- [80] Vlegaar J. Laminar boundary-layer behaviour on continuous, accelerating surfaces. *Chemical Engineering Science*, 32(12):1517–1525, 1977.
- [81] Wang L. A new algorithm for solving classical Blasius equation. *Applied Mathematics and Computation*, 157(1):1–9, 2004.
- [82] White F.M. and Corfield I. *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill New York, 2006.
- [83] Wolfram-Research. Wolfram Mathematica: Edition 10. <http://www.wolfram.com/mathematica>.
- [84] Wu X. and Squires K.D. Large eddy simulation of an equilibrium three-dimensional turbulent boundary layer. *AIAA Journal*, 35(1):67–74, 1997.
- [85] Xenos M., Dimas S. and Raptis A. MHD and Thermal Radiation of an Optically Thin Gray Fluid in the Presence of an Induced Magnetic Field. *Advances and Applications in Fluid Mechanics*, 11(2):73–85, 2012.
- [86] Xenos M. Radiation Effects on Flow past a Stretching Plate with Temperature Dependent Viscosity. *Applied Mathematics*, 4(9):1–5, 2013.