



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ»  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ANNA**

**Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΥΛΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ**

**ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2016**

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην εξειδίκευση:

***Υπολογιστική Επιστήμη & Μοντελοποίηση Υλικών***

που απονέμει το Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την Τρίτη 21 Ιουνίου 2016 από την εξεταστική επιτροπή:

- 1. Καλπακίδης Βασίλειος**, Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Σ.Θ.Ε. του Παν/μίου Ιωαννίνων, **Επιβλέπων.**
- 2. Χατζηγεωργίου Ευάγγελος**, Αναπληρωτής Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Σ.Θ.Ε. του Παν/μίου Ιωαννίνων,
- 3. Γεργίδης Λεωνίδας**, Επίκουρος Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Σ.Θ.Ε. του Παν/μίου Ιωαννίνων.

***ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ***

*"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."*

(Υπογραφή υποψηφίου)

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διατριβή αυτή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών του τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων υπό την επίβλεψη του Καθηγητή, κ. Βασίλειου Καλπακίδη.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα, Καθηγητή κ. Βασίλειο Καλπακίδη, για την υπόδειξη του θέματος της διατριβής, τη συνεχή επιστημονική καθοδήγηση, την υποστήριξη του και τις πολύτιμες συμβουλές του.

Ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ευάγγελο Χατζηγεωργίου και τον Επίκουρο Καθηγητή Λεωνίδα Γεργίδη, οι οποίοι αποτέλεσαν μαζί με τον κ. Καλπακίδη την τριμελή εξεταστική επιτροπή. Τους ευχαριστώ, για τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσαν και την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή της Διπλωματικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ επίσης τους μεταπτυχιακούς συναδέλφους από το Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών για την συνεργασία τους και τη συμπαράσταση τους καθ' όλη τη διάρκεια για την ολοκλήρωση της διατριβής μου.

Ευχαριστώ τους καλούς μου φίλους και συναδέλφους, Κλαούντιο Μπαλλατζία, Κωνσταντίνο Ντάφλο, Καλλιόπη Τριανταφύλλου και Ουρανία Γκόκη για την πολύτιμη βοήθεια τους και την αμέριστη υποστήριξη τους.

Τέλος, ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ στη μητέρα μου που είναι πάντα δίπλα μου και με στηρίζει, σε όλους τους τομείς της ζωής μου και σε όλες μου τις επιλογές.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εξίσωση ορμής αποτελεί την βασική εξίσωση της ελαστικότητας, η οποία στη δυναμική αποκαλείται συνήθως εξίσωση κίνησης ενώ στη στατική εξίσωση ισορροπίας. Οι κλασικές δυνάμεις συνεισφέρουν στη γραμμική εξίσωση ορμής. Οι δυνάμεις αυτές διακρίνονται στις μαζικές και στις επιφανειακές. Τα τελευταία χρόνια όμως, αναπτύχθηκε η έννοια της υλικής δύναμης (*material forces* ή *configurational forces*). Ο *Eshelby* [19] το 1951 υπολόγισε τη δύναμη που ασκείται σε μια ατέλεια σε ένα ελαστικό μέσο και εισήγαγε την έννοια των υλικών δυνάμεων την οποία και επέκτεινε αργότερα. Οι υλικές αυτές δυνάμεις έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης με ενδιαφέροντα αποτελέσματα που έχουν αντίκτυπο σε σημαντικές εφαρμογές. Σε συνδυασμό με τις υλικές δυνάμεις αναπτύχθηκε και ο όρος του υλικού χώρου στον οποίο αυτές οι δυνάμεις δρουν. Ουσιαστικά, πρόκειται για δυνάμεις που ασκούνται σε όλα εκείνα τα υλικά σημεία στα οποία η ελαστική ενέργεια είναι μη-ομογενής και εμφανίζεται μόνο εάν εκφράσει κανείς την εξίσωση της κίνησης στον υλικό χώρο. Οι υλικές δυνάμεις βρίσκουν τη θέση τους σε μια νέα εξίσωση ισορροπίας, που ονομάστηκε εξίσωση της υλικής ορμής. Στη βιβλιογραφία, η εξίσωση αυτή, πολλές φορές απαντάται ως εξίσωση ψευδορμής. Η εξίσωση της υλικής ορμής ή ψευδορμής διέπει την ισορροπία των υλικών δυνάμεων και αφορά στη συνάρτηση της αντίστροφης κίνησης. Η περιγραφή των υλικών δυνάμεων γίνεται με ένα τανυστή, αντίστοιχο με τον τανυστή τάσεων του *Cauchy*, τον λεγόμενο τανυστή του *Eshelby* που είναι ένας τανυστής των υλικών τάσεων.

Η εξίσωση της υλικής ορμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της κατανομής των υλικών δυνάμεων και τον προσδιορισμό της συνάρτησης της αντίστροφης απεικόνισης. Εξαιτίας της δυσκολίας για την επίλυση της εξίσωσης ψευδορμής, έχουν προταθεί κάποιες ιδέες για διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος. Υπάρχουν ήδη, μελέτες για τη λύση του μονοδιάστατου προβλήματος. Ενδεικτικά αναφέρουμε την εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στην εξίσωση της υλικής ορμής σε *Lagrangian* περιγραφή [42]. Επίσης, η χρήση της εξίσωσης της φυσικής ορμής συναρτήσεως της αντίστροφης απεικόνισης της κίνησης [30], έχειδειχθεί ότι μπορεί να υπολογίσει τις υλικές δυνάμεις.

Έχει αποδειχθεί ότι η ισορροπία των υλικών δυνάμεων στη διεπιφάνεια είναι απαραίτητη για την πλήρη μαθηματική περιγραφή ενός προβλήματος αλλαγής φάσης [43,44]. Επιπρόσθετα, η έννοια των υλικών δυνάμεων έχει ήδη εφαρμοστεί στη μη-γραμμική θεωρία κατανεμημένων εξαρθρώσεων [70]. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι η

ελαχιστοποίηση των υλικών δυνάμεων οδηγεί στη βελτιστοποίηση του πλέγματος στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων [42].

Από τα παραπάνω, προκύπτει η αναγκαιότητα της διατύπωσης της εξίσωσης της υλικής ορμής, καθώς και ο προσδιορισμός της συνάρτησης της αντίστροφης παραμόρφωσης. Τα δυο αυτά θέματα αποτέλεσαν το σκοπό αυτής της διατριβής.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια σύντομη εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου καθώς και οι βασικές εξισώσεις στο φυσικό χώρο. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται μια σύντομη αναφορά στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στον τομέα της Υλικής Μηχανικής που απασχολεί τη διατριβή αυτή. Παρατίθεται μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση για τη Μηχανική του Υλικού Χώρου. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της *Eshelbian* Μηχανικής καθώς και οι βασικές εξισώσεις στον Υλικό Χώρο.

Στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώνεται η εξίσωση ισοζυγίου της φυσικής ορμής, χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας στο σχηματισμό αναφοράς. Έπειτα, με τη βοήθεια της συνάρτησης της ενέργειας παραμόρφωσης διατυπωμένης ως προς την αντίστροφη απεικόνιση παραμόρφωσης και κάνοντας χρήση εννοιών της Υλικής Μηχανικής, διατυπώθηκε η εξίσωση της υλικής ορμής ή ψευδοορμής σε *Eulerian* περιγραφή. Η διατύπωση των εξισώσεων έγινε πρωτίστως για γραμμικά ελαστικά υλικά και έπειτα, για μια πιο γενικευμένη αντίληψη, για *Neo-Hookean* υλικά.

Στο τέταρτο κεφάλαιο επιλύθηκε η εξίσωση της φυσικής ορμής διατυπωμένη ως προς την αντίστροφη απεικόνιση της κίνησης με σκοπό την εύρεση της απαράμορφωτης κατάστασης του σώματος. Κατά την εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε, ο τύπος του μητρώου στιβαρότητας περιέχει έναν επιπλέον όρο, αυτόν της κλίσης της αντίστροφης παραμόρφωσης, σε σχέση με το μητρώο στιβαρότητας στα κλασικά προβλήματα Μηχανικής.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων τόσο για γραμμικά όσο και για μη-γραμμικά προβλήματα επίπεδης εντατικής και παραμορφωτικής κατάστασης. Η επίλυση γίνεται με κώδικα *MATLAB* που αναπτύχθηκε στο εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών, που τροποποιήθηκε κατάλληλα σύμφωνα με την παραπάνω θεωρητική ανάλυση.

Εν κατακλείδι, στη διατριβή αυτή, μελετήθηκαν οι εξισώσεις ισορροπίας στον Υλικό Χώρο και διατυπώθηκε η εξίσωση της Υλικής Ορμής στις δύο διαστάσεις για γραμμική και μη γραμμική καταστατική σχέση σε περιγραφή *Euler*, δηλαδή ως προς την αντίστροφη συνάρτηση της παραμόρφωσης. Πρόκειται για μια μερική διαφορική εξίσωση, δεύτερης τάξης ισχυρά μη γραμμική από την οποία θεωρητικά μπορεί να υπολογιστεί η κατανομή των υλικών δυνάμεων και η απαραμόρφωτη κατάσταση του σώματος όταν δίνεται η παραμορφωμένη. Στην εργασία αυτή καταφέραμε να προσδιορίσουμε την απαραμόρφωτη κατάσταση ενός σώματος με δεδομένη την παραμορφωμένη του κατάσταση και τις συνοριακές συνθήκες με τη βοήθεια της εξίσωσης της φυσικής ορμής διατυπωμένης ως προς την αντίστροφη συνάρτηση της παραμόρφωσης.

Είναι προφανές ότι ο χώρος αυτός επιδέχεται περαιτέρω έρευνα. Θέματα που θα μπορούσαν να ερευνηθούν είναι η εφαρμογή των Πεπερασμένων Στοιχείων στην εξίσωση της Υλικής Ορμής που διατυπώσαμε ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα που έχουμε ήδη πετύχει στην παρούσα διατριβή για την εξίσωση της φυσικής ορμής διατυπωμένης ως προς την αντίστροφη απεικόνιση της κίνησης. Επίσης, η διερεύνηση των συνθηκών τύπου *Neumann* για την εξίσωση της υλικής ορμής θα μπορούσε να είναι ένα ενδιαφέρον θέμα για περαιτέρω έρευνα.

## ABSTRACT

In elasticity, the main equation is the momentum equation which is referred to as equation of motion in dynamics or equilibrium equation in statics. The contributors to the linear momentum equation are the classical forces. These are distinguished in body and surface forces. Recently, the concept of *material* or *configurational force* has developed. *Eshelby* [19] in 1951 calculated the force exerted on a defect in an elastic medium and he introduced the concept of material force which generalized by him later. The material forces have been studied with interesting results that have an impact on critical applications. In combination with the material forces, the concept of material space in which these forces act has been developed. Essentially, it is about forces exerted in all those materials points where the elastic energy is non-homogeneous and appears only when the equation of motion is expressed in material space. Material forces find their position in a new balance equation, called the material momentum equation. In literature, this equation is often referred to as pseudomomentum equation. The equation of material momentum (or pseudomomentum) governs the balance of material forces and concerns the inverse motion function. Essentially, the material forces contribute to the material momentum equation. The description of the material forces is done by a tensor, like the *Cauchy* stress tensor, the so-called *Eshelby* material stress tensor.

The material momentum equation can be used for the calculation of the material forces distribution and the determination of the inverse motion function. Because of the difficulty in solving the pseudomomentum equation, some ideas for a different approach to the problem have been proposed. There are already studies for how the one-dimensional problem can be solved. Indicatively we report the application of finite element method in the equation of material momentum in *Lagrangian* description [42]. Also, the use of physical momentum equation expressed with respect to the inverse motion mapping [30] has been shown that can calculate the material forces.

It has been proved that the equilibrium of material forces at the interface is a necessary condition for the full mathematical description of a phase transition problem [43, 44]. Additionally, the concept of material forces has already been applied to non-linear theory of distributed dislocations [70]. Also, it has been proved that the minimization of the material forces leads to the optimization of the mesh at the finite element method [42].

From the above arises the necessity of formulating the equation of material momentum, and the determination of the inverse motion mapping. These two subjects were the objectives of this dissertation.

More specifically, in the first chapter a brief introduction to the Continuum Mechanics and the basic equations in the physical space is presented. This chapter, also, includes a brief reference to the finite element method which has been used to solve the problem.

The second chapter is dedicated to the field of Material Mechanics which concerns this dissertation. A short bibliographic review on the Mechanics of Material Space is given. In addition, the basic concepts of *Eshelbian* Mechanics and the basic equations in the Material Space are presented.

In the third chapter, the balance equation of the physical momentum is formulated, using the conservation principle of energy in the reference configuration. Then, with the aid of the deformation energy function formulated in terms of the inverse deformation mapping and by using concepts of Materials Mechanics, the equation of material momentum or pseudomomentum in *Eulerian* description has been obtained. The formulation of equations was primarily carried out for linear elastic materials as well as for *Neo - Hookean* materials to have a more comprehensive view of the issue.

In the fourth chapter, the equation of physical momentum, formulated with respect to the inverse deformation mapping, has been solved so as to determine the undeformed status of the body. During the implementation of *FEM*, it is important to mention that in the problem under study, the stiffness matrix contains an additional term, which is the inverse deformation gradient, in comparison with the stiffness matrix of the standard case. After that, the application of finite element method is carried out for both linear and non-linear problems under plane stress and plane strain conditions. The numerical procedure is being done with *MATLAB* code that developed in the Laboratory of Mathematical Modeling and Scientific Computing and was suitably modified according to the above theoretical analysis.

In conclusion, in this dissertation, the equilibrium equations in the Material Space has been studied and the equation of material Momentum in two dimensions for both linear and nonlinear constitutive equation in *Euler* description, was formulated, i.e., in terms of the inverse deformation function. It's about a partial differential equation of second order, strongly nonlinear from which theoretically the distribution of material forces and the



undeformed state of the body can be calculated given the deformed one. In this work, we accomplished to determine the undeformed state of a body given the deformed state and the boundary conditions by means of the equation of the physical momentum formulated in terms of the inverse deformation function.

It is obvious that the topic admits further research. Issues that could be explored is the application of *FEM* in the equation of material Momentum we have formulated so as it might be possible to compare with the already obtained results from the equation of physical momentum in terms of the inverse deformation function. Also, the investigation of the *Neumann* type conditions for the equation of the material momentum could be an interesting subject for further research.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

*Πίνακας Συμβολισμών*

*Κατάλογος Σχημάτων*

<b>1.</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	1
1.1	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ	1
1.1.1	Κινηματική	1
1.1.2	Ελαστική ενέργεια και νόμοι ισοζυγίων	7
1.2	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	13
<b>2.</b>	<b>ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ</b>	16
2.1	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ	16
2.2	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ	19
2.3	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΥΛΙΚΟ ΧΩΡΟ	21
<b>3.</b>	<b>ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ <i>EULER</i></b>	27
3.1	ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ	27
3.1.1	Εξίσωση Φυσικής Ορμής	27
3.1.2	Εξίσωση Υλικής Ορμής	28
3.2	ΥΛΙΚΟ ΝΕΟ-HOOKEAN	31
3.2.1	Εξίσωση Φυσικής Ορμής	31
3.2.2	Εξίσωση Υλικής Ορμής	32
<b>4.</b>	<b>Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΥΛΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ</b>	34
4.1	ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	34
4.2	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ <i>MATLAB</i>	40
4.2.1	Πρόβλημα επίπεδης εντατικής κατάστασης: Εφελκυσμός - Θλίψη	40
4.2.2	Πρόβλημα απλής έκτασης	45
4.2.3	Πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης: Παρέμβυσμα-Φλάντζα	48
	<i>Αναφορές</i>	52
	<i>Παράρτημα Α</i>	58
	<i>Παράρτημα Β</i>	68

## **Πίνακας Συμβολισμών**

<b>B</b> .....	Υλικό σώμα
$E^3$ .....	Ευκλείδειος χώρος
$\mathcal{B}$ .....	Σχηματισμός / Διαμόρφωση του σώματος
$\mathcal{B}_R$ .....	Σχηματισμός αναφοράς
$\mathcal{B}_t$ .....	Τρέχων σχηματισμός
$t$ .....	Χρόνος
<b>X</b> .....	Αντίστροφη απεικόνιση παραμόρφωσης
<b>x</b> .....	Ευθεία απεικόνιση παραμόρφωσης
$X_A$ .....	Συντεταγμένες σημείων στο σχηματισμό αναφοράς
$x_i$ .....	Συντεταγμένες υλικών σημείων
<b>F</b> .....	Κλίση της ευθείας απεικόνισης παραμόρφωσης
<b>G</b> .....	Κλίση της αντίστροφης απεικόνισης παραμόρφωσης
$\nabla_R$ .....	Κλίση στο σχηματισμό αναφοράς
$\nabla$ .....	Κλίση στην τρέχουσα διαμόρφωση
<b>I</b> .....	Μοναδιαίος τανυστής στην τρέχουσα διαμόρφωση
$I_R$ .....	Μοναδιαίος τανυστής στο σχηματισμό αναφοράς
Div.....	Απόκλιση στο σχηματισμό αναφοράς
div.....	Απόκλιση στην τρέχουσα διαμόρφωση

- $C$  ..... Δεξιός τανυστής παραμόρφωσης *Cauchy-Green*
- $C^{-1}$  ..... Τανυστής των πεπερασμένων παραμορφώσεων του *Piola*
- $J$  ..... Ιακωβιανή ορίζουσα του  $\mathbf{F}$
- $j$  ..... Ιακωβιανή ορίζουσα του  $\mathbf{G}$
- $\mathbf{u}$  ..... Διάνυσμα μετατόπισης
- $\mathbf{u}$  ..... Διανυσματικό πεδίο στην τρέχουσα διαμόρφωση
- $e$  ..... Τανυστής τρόπων ή παραμορφώσεων
- $\mathbf{R}$  ..... Διάνυσμα τάσεων που συνδέεται με τον πρώτο τανυστή *Piola-Kirchhoff*
- $\omega$  ..... Τανυστής περιστροφής
- $\sigma$  ..... Τανυστής τάσης του *Cauchy*
- $C_{ijkl}$  ..... Τανυστής 4<sup>ης</sup> τάξης που περιγράφει τις ιδιότητες του υλικού
- $\mu, \lambda$  ..... Σταθερές *Lame*
- $\mathbf{T}$  ..... Πρώτος τανυστής τάσης *Piola-Kirchhoff*
- $\mathbf{S}$  ..... Δεύτερος τανυστής τάσης *Piola-Kirchhoff*
- $w$  ..... Ελαστική ενέργεια ανά μονάδα μάζας εκφρασμένη ως προς τις υλικές  
συντεταγμένες
- $W$  ..... Ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου εκφρασμένη ως προς τις υλικές  
συντεταγμένες
- $\varrho_0$  ..... Πυκνότητα μάζας στο σχηματισμό αναφοράς
- $\varrho$  ..... Πυκνότητα μάζας στο σώμα  $\mathbf{B}$

$\tilde{w}$  .....Ελαστική ενέργεια ανά μονάδα μάζας εκφρασμένη ως προς τις χωρικές  
συντεταγμένες

$\tilde{W}(\mathbf{x})$  .....Ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου εκφρασμένη ως προς τις χωρικές  
συντεταγμένες

$D$  .....Υλικός τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης

$d$  .....Χωρικός τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης

$c$  .....Αριστερός τανυστής παραμόρφωσης *Cauchy-Green* ή τανυστής  
παραμόρφωσης *Finger*

$f$  .....Μαζικές δυνάμεις

$V$  .....Υλική ταχύτητα

$v$  .....Χωρική ταχύτητα

$e_{ijk}$  .....Εναλλακτικός τανυστής

$P$  .....Υλική ορμή ή ψευδορμή

$h$  .....Θερμικές πηγές

$q$  .....Ροή θερμότητας

$b$  ..... Τανυστής τάσης του *Eshelby*

$f^{inh}$  .....Υλική δύναμη της ανομοιογένειας

$f^{ext}$  .....Εξωτερικές εφαρμοζόμενες υλικές δυνάμεις

$\Sigma$  .....Τανυστής τάσης του *Eshelby* δύο σημείων

$\delta_{ij}$  .....Δέλτα του *Kronecker*

- $t$  .....Διάνυσμα τάσεων
- $\Omega$  .....Χωρίο
- $\eta_A$  .....Συνάρτηση δοκιμής
- $N_A$  .....Συναρτήσεις σχήματος
- $A_e$  .....Εμβαδό τριγωνικού στοιχείου
- $k^e$  .....Μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου
- $B$  .....Μητρώο που περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος
- $D$  .....Μητρώο που ορίζει τις ιδιότητες του υλικού
- $\tilde{G}$  .....Μητρώο που περιέχει την κλίση της αντίστροφης απεικόνισης.

## **Κατάλογος Σχημάτων**

1.1. Συνάρτηση ευθείας απεικόνισης.	2
4.1. Διακριτοποιημένη πλάκα σε παραμορφωμένη κατάσταση έπειτα από εφελκυστικό ή θλιπτικό φορτίο στη δεξιά πλευρά και πάκτωση στην αριστερή.	41
4.2. Σώμα σε απαραμόρφωτη κατάσταση, πριν την εφαρμογή εφελκυστικού φορτίου.	41
4.3. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση $x$ (οριζόντιος άξονας) κατά τον εφελκυσμό.	42
4.4. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση $y$ (κατακόρυφος άξονας) κατά τον εφελκυσμό.	42
4.5. Παραμορφωμένος και απαραμόρφωτος σχηματισμός κατά τον εφελκυσμό.	43
4.6. Απαραμόρφωτη κατάσταση πριν την επιβολή θλιπτικού φορτίου.	44
4.7. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση $x$ (οριζόντιος άξονας) κατά τη θλίψη.	44
4.8. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση $y$ (κατακόρυφος άξονας) κατά τη θλίψη.	45
4.9. Παραμορφωμένη και απαραμόρφωτη κατάσταση κατά τη θλίψη.	45
4.10. Διακριτοποίηση ορθογώνιας πλάκας, στην παραμορφωμένη κατάσταση, έπειτα από εφελκυστικό φορτίο στις δυο κατακόρυφες επιφάνειες.	46
4.11. Σώμα πριν την επιβολή φορτίου για την περίπτωση της απλής έκτασης.	47

4.12. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα $x$ στην περίπτωση της απλής έκτασης.	47
4.13. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα $y$ κατά την απλή έκταση.	48
4.14. Απεικόνιση παραμορφωμένου και απαραμόρφωτου σχηματισμού στην απλή έκταση.	48
4.15. Διακριτοποίηση παραμορφωμένης εγκάρσιας διατομής (φλάντζας) παρεμβύσματος.	49
4.16. Μη παραμορφωμένος σχηματισμός φλάντζας.	50
4.17. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα $x$ για την περίπτωση της φλάντζας.	50
4.18. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα $y$ για την περίπτωση της φλάντζας.	51
4.19. Απεικόνιση παραμορφωμένου και απαραμόρφωτου σχηματισμού της φλάντζας.	51



## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα δοθούν κάποιες βασικές έννοιες από τη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου που αφορούν, την Κινηματική της Μηχανικής του Συνεχούς, τους νόμους των ισοζυγίων και θα γίνει μια εισαγωγή στα Πεπερασμένα Στοιχεία. Η ενότητα αυτή έχει σκοπό την εισαγωγή με τις βασικές έννοιες ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ευκολία για την κατανόηση του αντικειμένου της παρούσας εργασίας.

#### 1.1.1 Κινηματική

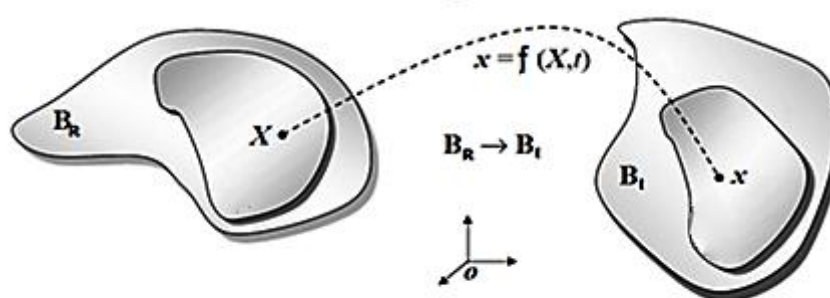
Με τον όρο υλικό σημείο [3,4,5], αναφέρεται ένα γεωμετρικό σημείο με μηδενική μάζα. Το σύνολο απείρων υλικών σημείων ορίζει το υλικό σώμα το οποίο συμβολίζεται με  $\mathbf{B}$ . Το υλικό σώμα καταλαμβάνει τμήμα του Ευκλείδειου χώρου  $E^3$ , συμβολίζεται με  $\mathcal{B}$  και καλείται διαμόρφωση ή σχηματισμός (*configuration*) του  $\mathbf{B}$ . Επισημαίνεται ότι το σώμα  $\mathbf{B}$  αποτελείται από υλικά σημεία και βρίσκεται στο φυσικό χώρο ενώ ο σχηματισμός  $\mathcal{B}$  αποτελείται από γεωμετρικά σημεία και είναι υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου. Έτσι, τα υλικά σημεία μπορούν να απεικονισθούν αμφιμονοσήμαντα στα σημεία σχηματισμού του  $\mathcal{B}$ .

Σε κάθε χρονική στιγμή, κατά την κίνηση ή την παραμόρφωση του σώματος, προκύπτει μια διαμόρφωση. Η οικογένεια των σχηματισμών αυτών, που καταλαμβάνετε από υλικά σημεία στον Ευκλείδειο φυσικό χώρο, αποτελεί την κίνηση ή την παραμόρφωση του υλικού σώματος  $\mathbf{B}$ . Έτσι, σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , θα αντιστοιχεί ο σχηματισμός  $\mathcal{B}_t$ . Ο σχηματισμός της αρχικής χρονικής στιγμής  $t_0$ , καλείται σχηματισμός αναφοράς (*reference configuration*) και συμβολίζεται με  $\mathcal{B}_R$ . Αντίστοιχα, ο σχηματισμός  $\mathcal{B}_t$  ονομάζεται τρέχων σχηματισμός (*current configuration*).

Οι θέσεις των σημείων στο σχηματισμό αναφοράς  $\mathcal{B}_R$  θα συμβολίζονται με  $\mathbf{X}$ , ενώ αντίστοιχα οι θέσεις των σημείων στην τρέχουσα διαμόρφωση  $\mathcal{B}_t$  θα συμβολίζονται με  $\mathbf{x}$ . Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των δεικτών, οι συντεταγμένες  $X_A$  δηλώνουν τη διαμόρφωση αναφοράς και οι  $x_i$  δηλώνουν αντίστοιχα την τρέχουσα διαμόρφωση. Οι δείκτες  $A, i$  παίρνουν τις τιμές 1,2,3.

Η περίπτωση της κίνησης κατά το χρονικό διάστημα  $[t_0, T]$  από το σχηματισμό αναφοράς  $\mathcal{B}_R$  σε έναν τρέχων  $\mathcal{B}_t$  περιγράφεται από μια συνάρτηση της μορφής:

$$x_i = f(X_A, t) \text{ όπου } X_A \in \mathcal{B}_R, t \in [t_0, T]. \quad (1.1)$$



Εικόνα 1.1. Η συνάρτηση της ευθείας απεικόνισης.

Δεδομένου ότι οι διαμορφώσεις  $\mathcal{B}_R$  και  $\mathcal{B}_t$  είναι μοναδικές για συγκεκριμένες τιμές της χρονικής παραμέτρου, η παραπάνω συνάρτηση κίνησης έχει πάντοτε μια μοναδική αντίστροφη συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο:

$$X_A = f^{-1}(x_i, t) = g(x_i, t) \text{ όπου } x_i \in \mathcal{B}_t, t \in [t_0, T]. \quad (1.2)$$

Οι συναρτήσεις  $f(X_A, t)$  και  $g(x_i, t)$  θα πρέπει να είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς τις μεταβλητές θέσεως και χρόνου από τις οποίες εξαρτώνται. Χάρην ευκολίας, θα παραλείπεται στο εξής το όνομα της συνάρτησης  $f$ . Η συνάρτηση κίνησης θα δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$x_i = x_i(X_A, t). \quad (1.3)$$

Αντίστοιχα, η αντίστροφη συνάρτηση θα είναι:

$$X_A = X_A(x_i, t). \quad (1.4)$$

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια φυσική ποσότητα μπορεί να γραφεί είτε ως συνάρτηση του  $\mathbf{X}$  είτε ως συνάρτηση του  $\mathbf{x}$ . Όταν η μεταβλητή της συνάρτησης είναι το  $\mathbf{X}$  αναφερόμαστε σε περιγραφή *Lagrange* ή υλική περιγραφή, ενώ με μεταβλητή το  $\mathbf{x}$  αναφερόμαστε σε περιγραφή *Euler* ή χωρική περιγραφή.

Η μερική παράγωγος της κίνησης ως προς τις συντεταγμένες των υλικών σημείων στην απεικόνιση αναφοράς καλείται κλίση (*gradient*) της κίνησης και ορίζεται ως:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.5)$$

και με τη μορφή δεικτών:

$$F_{iA} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} = x_{i,A}.$$

Υπενθυμίζεται ότι το κόμμα που ακολουθείτε από δείκτη, δηλώνει τη μερική παράγωγο.

Αντίστοιχα για την αντίστροφη συνάρτηση, η κλίση της ορίζεται ως:

$$\mathbf{G} = \nabla \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} = \nabla \mathbf{x}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}^{-1}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.6)$$

και με τη μορφή δεικτών:

$$G_{Ai} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i} = X_{A,i},$$

όπου  $\nabla_{\mathbf{R}}$  και  $\nabla$  χρησιμοποιούνται για να υποδηλώσουν την κλίση που αφορά την υλική  $\mathbf{X}$  και τη χωρική  $\mathbf{x}$  μεταβλητή αντίστοιχα.

Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{F}\mathbf{G} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}\mathbf{F} = \mathbf{I}_R, \quad (1.7)$$

όπου  $\mathbf{I}$  και  $\mathbf{I}_R$  αντιπροσωπεύουν τους μοναδιαίους τανυστές στην τρέχουσα διαμόρφωση και στη διαμόρφωση αναφοράς αντίστοιχα.

Για την απόκλιση (*divergence*) της ευθείας και αντίστροφης απεικόνισης, ομοίως προκύπτουν, με  $\text{Div}$  ή με κόμμα που ακολουθείται από έναν υλικό δείκτη, ο τελεστής

$\partial / \partial X_A$  και με  $\text{div}$  ή με κόμμα το οποίο ακολουθείται από έναν χωρικό δείκτη, ο τελεστής  $\partial / \partial x_i$ , αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$\text{Div} \mathbf{x} = \nabla_R \cdot \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{και} \quad \text{div} \mathbf{X} = \nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (1.8)$$

Αναφέρεται ότι οι  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{G}$  είναι τανυστές πεδίου δυο σημείων γιατί στην πραγματικότητα είναι γεωμετρικά αντικείμενα που ορίζονται σε διαφορετικούς χώρους ταυτόχρονα. Από τους δύο αυτούς τανυστές ορίζεται ο τανυστής παραμόρφωσης του *Cauchy-Green*  $\mathbf{C}$  καθώς και ο τανυστής των πεπερασμένων παραμορφώσεων του *Piola*  $\mathbf{C}^{-1}$  ως εξής:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad (1.9)$$

όπου  $\mathbf{F}^T$  είναι ο ανάστροφος του  $\mathbf{F}$ , και με την μορφή δεικτών:

$$C_{AB} = F_{iA} F_{iB}, \quad C_{AB}^{-1} = G_{Ai} G_{Bi}.$$

Ο  $\mathbf{C}$  περιγράφεται με την βοήθεια της απεικόνισης της ευθείας κίνησης, ενώ ο  $\mathbf{C}^{-1}$  δίνει έμφαση στην περιγραφή με την αντίστροφη απεικόνιση της κίνησης. Να σημειωθεί ότι στις τελευταίες σχέσεις με τους δείκτες χρησιμοποιήθηκε η αθροιστική σύμβαση του *Einstein*.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης της κίνησης συμβολίζεται με  $J$ , δηλαδή:

$$J = \det(\mathbf{F}), \quad (1.10)$$

ενώ αντίστοιχα, η Ιακωβιανή της αντίστροφης  $j$ , είναι:

$$j = \det(\mathbf{G}). \quad (1.11)$$

Οι δύο αυτές ορίζουσες συνδέονται με τον τύπο:

$$j = \det(\mathbf{F}^{-1}) = (J)^{-1}. \quad (1.12)$$

Στη συνέχεια, το διάνυσμα της μετατόπισης ορίζεται ως η διανυσματική διαφορά μεταξύ της θέσης  $\mathbf{x}$  ενός υλικού σημείου στην τρέχουσα διαμόρφωση και της θέσης του ίδιου υλικού σημείου στο σχηματισμό αναφοράς:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (1.13)$$

Επειδή τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{X}$  συνδέονται με την απεικόνιση της κίνησης, προκύπτει ότι το  $\mathbf{u}$  μπορεί να ορίζει είτε ένα διανυσματικό πεδίο στη διαμόρφωση αναφοράς:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_R \quad \text{ή} \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad (1.14)$$

είτε ένα διανυσματικό πεδίο στην τρέχουσα διαμόρφωση:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad \text{ή} \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.15)$$

Αντίστοιχα, η υλική και η χωρική κλίση των παραπάνω μετατοπίσεων δίνουν:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \nabla_R \mathbf{u} \quad \text{και} \quad \mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \nabla \mathbf{u}. \quad (1.16)$$

Έτσι, ορίζονται οι ακόλουθοι τύποι:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad \text{και} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T - \mathbf{h}^T \mathbf{h}). \quad (1.17)$$

Από τη θεωρία των μικρών παραμορφώσεων, όπου τα  $\mathbf{H}$  και  $\mathbf{h}$  [55] είναι αρκετά μικρά, προκύπτει η ακόλουθη προσέγγιση:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} = (\nabla \mathbf{u})_S = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

και

$$\mathbf{R} - \mathbf{I} = \boldsymbol{\omega} = (\nabla \mathbf{u})_A = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T).$$
(1.18)

Οι δείκτες  $S$  και  $A$  δηλώνουν τη διαδικασία της συμμετρικοποίησης και της αντισυμμετρικοποίησης, αντίστοιχα. Οι πραγματικοί τανυστές  $\mathbf{e}$  και  $\boldsymbol{\omega}$  ονομάζονται τανυστές απειροστής παραμόρφωσης (ή τροπών) και περιστροφής, αντίστοιχα. Τα στοιχεία των τανυστών αυτών δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}).$$
(1.19)

Ο τανυστής των τροπών αποτελεί ένα «μέτρο» της παραμόρφωσης του σώματος σε ένα σημείο. Ένας άλλος τανυστής που προσδιορίζει επακριβώς την εντατική κατάσταση (τάσεις) σε ένα σημείο μέσα στο υλικό είναι ο τανυστής τάσεων του *Cauchy*, ο οποίος συμβολίζεται με  $\boldsymbol{\sigma}$ . Ο συμμετρικός τανυστής των τάσεων του *Cauchy* ορίζεται στην τρέχουσα διαμόρφωση  $\mathcal{B}_t$ .

Οι δυο τανυστές, των τάσεων και των τροπών, συνδέονται μεταξύ τους με τη γνωστή καταστατική σχέση, το νόμο του *Hooke*, που αφορά τα γραμμικά ελαστικά σώματα.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}.$$
(1.20)

όπου ο  $C_{ijkl}$  είναι ένας τανυστής 4<sup>ης</sup> τάξης που περιγράφει τις υλικές ιδιότητες του υλικού. Πρόκειται, δηλαδή, για υλικές σταθερές για κάθε υλικό ξεχωριστά. Σε περιπτώσεις υλικής συμμετρίας, και συγκεκριμένα για ένα ισότροπο υλικό, ο νόμος του *Hooke* παίρνει την απλή μορφή:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{kk},$$
(1.21)

όπου  $\lambda$ ,  $\mu$  είναι οι σταθερές που χαρακτηρίζουν το κάθε υλικό και ονομάζονται σταθερές *Lame*.

Ο πρώτος τανυστής τάσης του *Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{T}$  και ο δεύτερος τανυστής του *Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{S}$ , ορίζονται ως η μερική και η πλήρως ανάσχυση (*pull back*) [50] του  $\boldsymbol{\sigma}$  στο  $\mathcal{B}_R$  ως εξής:

$$\mathbf{T} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{S} = \mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T, \quad (1.22)$$

και με τη μορφή δεικτών:

$$T_{Ai} = J\sigma_{ji}F_{Aj}, \quad S_{AB} = T_{Ai}F_{Bi}^{-1}.$$

### 1.1.2 Ελαστική ενέργεια και νόμοι ισοζυγίων

Η απόκριση του υλικού σε εφαρμοζόμενα φορτία μετριέται με τη βοήθεια της συνάρτησης της ελαστικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας, η οποία συμβολίζεται με  $w$ . Με βάση το αξίωμα της τοπικότητας [62] και το αξίωμα της ανισότητας των *Clausius-Duhem* [13], η ελαστική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το  $\mathbf{X}$  και το  $\mathbf{F}$ . Αγνοώντας τις θερμικές επιδράσεις για τη συνάρτηση της ελαστικής ενέργειας, υποθέτουμε ότι:

$$w = w(\mathbf{X}, \mathbf{F}). \quad (1.23)$$

Επομένως, η ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου  $W$  δίδεται από τον τύπο

$$W = \varrho_0 w(\mathbf{X}, \mathbf{F}), \quad (1.24)$$

όπου  $\varrho_0$  η πυκνότητα μάζας στο σώμα  $\mathbf{B}$ , στο σχηματισμό αναφοράς. Δεδομένου ότι η κλίση εξαρτάται από το  $\mathbf{X}$ , χάριν ευκολίας, η ενέργεια θα γράφεται

$$w = w(\mathbf{X}). \quad (1.25)$$

Η ενέργεια ανάμεσα στη διαμόρφωση αναφοράς και στην τρέχουσα διαμόρφωση μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί με δύο τρόπους. Είτε με τις υλικές συντεταγμένες είτε με τις χωρικές συντεταγμένες.

$$w(\mathbf{X}) = \tilde{w}(\mathbf{x}). \quad (1.26)$$

Η ισότητα αυτή μπορεί να γραφεί σε ισότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου

$$W(\mathbf{X}) = \frac{\rho_0}{\rho} \tilde{W}(\mathbf{x}), \quad (1.27)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα μάζας στο σώμα  $\mathbf{B}$  στην τρέχουσα διαμόρφωση και  $\tilde{W}(\mathbf{x})$  είναι η ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου στην τρέχουσα διαμόρφωση. Η ενέργεια αυτή είναι στην πραγματικότητα η έκφραση της ελαστικής ενέργειας χρησιμοποιώντας τις χωρικές συντεταγμένες. Συνηθίζεται να καλείται και ενέργεια της αντίστροφης απεικόνισης γιατί εξαρτάται από την κλίση της αντίστροφης απεικόνισης.

Η εξάρτηση της ελαστικής ενέργειας από την κλίση της απεικόνισης παραμόρφωσης στο σχηματισμό αναφοράς γίνεται μέσω του δεξιού τανυστή παραμόρφωσης *Cauchy-Green C* [63].

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}), \quad (1.28)$$

Η υλική παράγωγος του  $\mathbf{C}$  δίνει τον υλικό τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης  $\mathbf{D}$ .

$$2\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}(\mathbf{X}, t), \quad (1.29)$$

ενώ ο χωρικός τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης ορίζεται ως:

$$2\mathbf{d} = \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, t), \quad (1.30)$$

όπου  $\mathbf{c}$  είναι ο αριστερός τανυστής παραμόρφωσης *Cauchy-Green* ή τανυστής παραμόρφωσης *Finger* και δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (1.31)$$



Για τη γραμμική ελαστικότητα, υποθέτουμε ότι η ελαστική ενέργεια εξαρτάται αποκλειστικά από τον τανυστή των τροπών:

$$W = W(e_{ij}). \quad (1.32)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την καταστατική υπόθεση του *Green* για τα υπερελαστικά υλικά,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad (1.33)$$

τελικά αποδεικνύεται ότι η ελαστική ενέργεια στη γραμμική ελαστικότητα είναι:

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij}. \quad (1.34)$$

Στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων, οι φυσικές εξωτερικές δυνάμεις διακρίνονται σε μαζικές και επιφανειακές. Ένα κλασικό παράδειγμα μαζικής δύναμης, που συμβολίζονται με  $f$ , είναι η βαρυτική δύναμη. Οι επιφανειακές δυνάμεις δρουν σε στοιχεία επιφάνειας, και συμβολίζονται με  $t$ .

Από το θεώρημα του *Cauchy* [5] έχουμε:

$$t(x, t, n) = \sigma(x, t)n, \quad (1.35)$$

όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και  $\sigma$  είναι ο τανυστής του *Cauchy*. Το  $\sigma n$  είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας. Οι δυνάμεις αυτές εμφανίζονται στην αρχή διατήρησης της ορμής που ορίζει ότι ο ρυθμός μεταβολής της φυσικής ορμής ισούται με την ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα. Μαθηματικά διατυπώνεται:

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(u)} \rho v du = \int_{\varphi_t(u)} \rho g du + \int_{\partial \varphi_t(u)} t da, \quad (1.36)$$

για κάθε  $u$  ανοιχτό υποσύνολο του σχηματισμού αναφοράς. Το  $\varphi_t(u)$  είναι το χωρίο που καταλαμβάνει το  $u$  στην τρέχουσα διαμόρφωση. Με το σύμβολο  $\partial$  δηλώνεται το σύνορο ενός συνόλου ενώ με  $dV$  και με  $dA$  συμβολίζονται τα στοιχεία όγκου και επιφάνειας, αντίστοιχα, στην τρέχουσα διαμόρφωση.

Η παραπάνω εξίσωση είναι η καθολική έκφραση της διατήρησης της ορμής. Για να πάρει κανείς την τοπική μορφή πρέπει οι συναρτήσεις μέσα στα ολοκληρώματα να είναι συνεχείς και να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα της απόκλισης για το συνοριακό όρο. Επίσης, η επιλογή του χωρίου  $u$  είναι αυθαίρετη. Έτσι, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση που είναι γνωστή ως εξίσωση *Euler*:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.37)$$

Ο νόμος της διατήρησης της ορμής μπορεί να γραφεί με ισοδύναμο τρόπο στη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \int_u \rho \mathbf{V} dV = \int_u \rho \mathbf{G} dV + \int_{\partial u} \mathbf{P} dA, \quad (1.38)$$

για κάθε  $u$ , ανοιχτό υποσύνολο της διαμόρφωσης αναφοράς, όπου  $\mathbf{V}$  είναι η υλική ταχύτητα,  $\mathbf{G}$  είναι οι μαζικές δυνάμεις και  $dV$ ,  $dA$  είναι στοιχεία όγκου και επιφανείας, αντίστοιχα, στη διαμόρφωση αναφοράς. Στην πραγματικότητα, η τελευταία έκφραση είναι η αρχή διατήρησης της ορμής για ένα παραμορφωμένο σώμα. Η τοπική μορφή της προκύπτει, όπως προηγούμενα,

$$\rho \mathbf{A} = \rho \mathbf{G} + \operatorname{Div} \mathbf{T}, \quad (1.39)$$

όπου  $\mathbf{T}$ , ο πρώτος τανυστής *Piola-Kirchhoff*.

Για τη διατύπωση της τοπικής μορφής από την καθολική χρησιμοποιείται το θεώρημα του *Cauchy* για τον πρώτο τανυστή *Piola-Kirchhoff* που διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}, \quad (1.40)$$

όπου  $\mathbf{N}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα και το  $T\mathbf{N}$  είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας στο σχηματισμό αναφοράς  $\mathcal{B}_R$ .

Η αρχή διατήρησης της μάζας, στην κανονική της μορφή διατυπώνεται ως εξής:

$$\int_{\varphi_t(u)} \varrho(\mathbf{x}, t) du = \int_u \varrho_0(\mathbf{X}) dV, \quad (1.41)$$

για κάθε  $u$  ανοιχτό υποσύνολο της διαμόρφωσης αναφοράς. Για την τοπική μορφή της, απαιτείται η αυθαιρεσία του  $u$  καθώς και οι συναρτήσεις εντός των ολοκληρωμάτων να είναι συνεχείς.

Παρόμοια με το νόμο του ισοζυγίου της ορμής προκύπτει ο νόμος του ισοζυγίου της στροφορμής που αναφέρει ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός υλικού σώματος ισούται με τη συνισταμένη ροπή όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω στο σώμα και προκαλούν αυτήν τη μεταβολή.

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(u)} \mathbf{x} \times \varrho \mathbf{v} du = \int_{\varphi_t(u)} \mathbf{x} \times \varrho \mathbf{g} du + \int_{\partial\varphi_t(u)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da, \quad (1.42)$$

για κάθε  $u$  ανοιχτό υποσύνολο της διαμόρφωσης αναφοράς. Η εξίσωση (1.42) σε τοπική μορφή γράφεται:

$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \quad (1.43)$$

όπου  $e_{ijk}$  είναι ο εναλλακτικός τανυστής.

Τέλος, το ισοζύγιο της ενέργειας (Πρώτος Νόμος της Θερμοδυναμικής) δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας, εσωτερικής και κινητικής, ενός υλικού σώματος ισούται με την ισχύ όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα συν τη θέρμανση ή την ψύξη του σώματος, λόγω των πηγών και της ροής θερμότητας.

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(u)} \varrho \left( w + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) du = \int_{\varphi_t(u)} \varrho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + h) du + \int_{\partial\varphi_t(u)} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) da, \quad (1.44)$$

όπου  $w(\mathbf{x})$  και  $h(\mathbf{x})$  είναι η πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας, και οι θερμικές πηγές ανά μονάδα μάζας αντίστοιχα ενώ  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  είναι η ροή της θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας  $\partial\varphi_i(u)$  ανά μονάδα χρόνου. Η εξίσωση της ενέργειας σε τοπική μορφή γράφεται:

$$\rho\dot{w} = \sigma^T \text{grad} \mathbf{v} + \rho h - \text{div} \mathbf{q} , \quad (1.45)$$

οι όροι στο δεξιό μέρος αντιπροσωπεύουν την εισροή ισχύος ανά μονάδα όγκου που δεν μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια, δηλαδή εκείνη την ισχύ που συμβάλει στο ισοζύγιο της εσωτερικής ενέργειας.

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$J(\mathbf{X}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{\rho(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.46)$$

όπου  $J$  είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα στη διαμόρφωση αναφοράς. Με την έκφραση αυτή για την Ιακωβιανή ορίζουσα, η σχέση (1.24) μεταξύ των ενεργειών παίρνει τη μορφή:

$$W(\mathbf{X}) = J\tilde{W}(\mathbf{x}). \quad (1.47)$$

Η ανισότητα των *Clausius-Duhem* έχει ισχύ εξαιτίας της διατήρησης της μάζας, της ορμής, της στροφορμής, του πρώτου και του δεύτερου θερμοδυναμικού αξιώματος. Η ανισότητα έχει τη μορφή:

$$\rho w - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq 0 \quad (1.48)$$

Το σύμβολο  $:$  σημαίνει συστολή σε 2 δείκτες. Δυο ισοδύναμες υλικές εκφράσεις είναι:

$$\rho W - \mathbf{T} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \leq 0, \quad (1.49)$$

$$\rho W - \mathbf{S} : \mathbf{D} \leq 0. \quad (1.50)$$

Η πρώτη, είναι εκφρασμένη με τον πρώτο τανυστή τάσης *Piola-Kirchhoff*,  $\mathbf{T}$ , ενώ η δεύτερη, με το δεύτερο τανυστή τάσης *Piola-Kirchhoff*,  $\mathbf{S}$ . Οι δύο αυτοί τανυστές συνδέονται με τον τύπο:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}. \quad (1.51)$$

Η ανισότητα των *Clausius-Duhem* είναι σημαντική επειδή μας παρέχει την καταστατική έκφραση του τανυστή τάσης  $\mathbf{T}$ . Οι *Coleman-Noll* έθεσαν ως αξίωμα ότι κάθε κίνηση πρέπει να πληροί την ανισότητα των *Clausius-Duhem* και πήραν την καταστατική έκφραση για τον  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}. \quad (1.52)$$

Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας και των σχέσεων (1.25) και (1.9) προκύπτει η καταστατική έκφραση του δεύτερου τανυστή τάσης *Piola-Kirchhoff*:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}. \quad (1.53)$$

## 1.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (*Finite Element Method*) [5,81] αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την αριθμητική επίλυση ενός μεγάλου φάσματος προβλημάτων μηχανικής. Οι εφαρμογές εκτείνονται από την παραμόρφωση και ανάλυση των τάσεων σε αυτοκίνητα, αεροπλάνα, κτήρια και γέφυρες, μέχρι την ανάλυση πεδίων ροής θερμότητας, ροής υγρών, μαγνητικής ροής και άλλων προβλημάτων ροής. Με τις εξελίξεις στην τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των συστημάτων σχεδίασης (*CAD*), σύνθετα προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν πολύ εύκολα. Όλα αυτά υποδεικνύουν την ανάγκη να διατηρήσουμε την επαφή μας με αυτές τις εξελίξεις, κατανοώντας τη βασική θεωρία, τις τεχνικές μοντελοποίησης και τις υπολογιστικές έννοιες της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Σε αυτή τη μέθοδο ανάλυσης, μια περίπλοκη περιοχή, η

οποία ορίζει ένα συνεχές, διακριτοποιείται σε απλά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία (*elements*). Οι ιδιότητες των υλικών και οι διέπουσες σχέσεις θεωρούνται πάνω σε αυτά τα στοιχεία και εκφράζονται σε όρους των αγνώστων τιμών στις κορυφές των στοιχείων που ονομάζονται κόμβοι (*nodes*). Μια διαδικασία σύνθεσης, η οποία καταλλήλως θεωρεί τα φορτία και τους περιορισμούς, έχει ως αποτέλεσμα ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων. Η λύση αυτών των εξισώσεων δίνει την κατά προσέγγιση συμπεριφορά του συνεχούς.

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων ανήκει στην κατηγορία των μεταβολικών μεθόδων γι' αυτό και είναι προσεγγιστική. Υιοθετεί διάφορες προσεγγίσεις όπως τις προσεγγίσεις δυναμικής ενέργειας και των Σταθμικών Υπολοίπων. Στις προσεγγίσεις δυναμικής ενέργειας, η πιο διαδεδομένη είναι η *Μέθοδος Ritz*, ενώ σε αυτή των Σταθμικών Υπολοίπων, χρησιμοποιείται κυρίως η *Μέθοδος Galerkin*.

Θεωρώντας ένα σώμα που υπόκειται σε εξωτερικές φορτίσεις, η συμπεριφορά του περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση ορισμένη σε ένα χωρίο. Η διαφορική εξίσωση θεωρείται η ισχυρή διατύπωση του προβλήματος. Πολλαπλασιάζοντας τη διαφορική εξίσωση με μια συνάρτηση δοκιμής (*test function*) και ολοκληρώνοντας πάνω στο χωρίο, προκύπτει η ασθενής διατύπωση. Στη συνέχεια, γίνεται διακριτοποίηση του χωρίου σε πεπερασμένα στοιχεία. Με τις προϋποθέσεις καθένα από αυτά να είναι κλειστό και διάφορο του κενού, να μην αλληλοεπικαλύπτονται και η ένωση τους να ισούται με το αρχικό χωρίο. Η επιλογή της γεωμετρίας γίνεται τυχαία. Για παράδειγμα, σε μονοδιάστατο πρόβλημα, το στοιχείο είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Σε δισδιάστατο, η επιλογή της γεωμετρίας του στοιχείου μπορεί να είναι τριγωνική, ορθογωνική κ.α. Τέλος, σε ένα τρισδιάστατο πρόβλημα, μπορεί να επιλεχθεί κυβικό στοιχείο. Με την αύξηση των στοιχείων, επιτυγχάνεται υψηλότερη ακρίβεια στην προσεγγιστική λύση.

Ύστερα από τη διαδικασία της διακριτοποίησης, επιλέγεται η προσεγγιστική λύση ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων σχήματος (*shape functions*). Οι συναρτήσεις σχήματος αποτελούν τη βάση του πεπερασμένου υποχώρου και οι πολλαπλασιαστικοί συντελεστές τους είναι οι τιμές της λύσης σε κάθε κόμβο και θεωρούνται τοπική λύση. Έπειτα, με την εισαγωγή της τοπικής λύσης στην ασθενή διατύπωση, προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων. Το τελικό βήμα είναι η συνάθροιση (*assembly*) των στοιχείων. Επισημαίνεται ότι κάποια στοιχεία θα έχουν κοινούς κόμβους. Η λύση με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων καταλήγει σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που επιλύεται συνήθως, με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων.

Η εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στα κλασικά προβλήματα μηχανικής, κατά το στάδιο της διακριτοποίησης, καταλήγει σε ένα αλγεβρικό σύστημα που αποτελείται από το μητρώο στιβαρότητας (*stiffness matrix*), το άγνωστο διάνυσμα της μετατόπισης και το διάνυσμα των δυνάμεων, μαζικών και επιφανειακών.

Συγκεκριμένα το μητρώο στιβαρότητας, υπολογίζεται από ένα ολοκλήρωμα, με ολοκληρωτέα ποσότητα ένα γινόμενο του ανάστροφου μητρώου  $\mathbf{B}$ , του μητρώου  $\mathbf{D}$  και του μητρώου  $\mathbf{B}$ . Τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{B}$  σχετίζονται με τις συναρτήσεις σχήματος και το μητρώο  $\mathbf{D}$  περιέχει της σταθερές που χαρακτηρίζουν ένα υλικό.

Στην περίπτωση της αντίστροφης απεικόνισης της κίνησης, που αναλύεται στο τέταρτο κεφάλαιο, στο μητρώο στιβαρότητας, η ολοκληρωτέα ποσότητα εμπεριέχει ένα επιπλέον μητρώο που σχετίζεται με την κλίση της αντίστροφης απεικόνισης της κίνησης.

## 2. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Στην ενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε με τη Μηχανική του Υλικού Χώρου. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί συνοπτικά η προγενέστερη έρευνα στον τομέα αυτόν. Επίσης θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τις έννοιες της υλικής δύναμης και τις εξισώσεις ισορροπίας στον υλικό χώρο. Τέλος, γίνεται αναφορά στη φυσική σημασία του τανυστή του *Eshelby*.

### 2.1 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Η Μηχανική του Υλικού Χώρου είναι ένας σχετικά νέος κλάδος της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου που αντιμετωπίζει προβλήματα της συμπεριφοράς των υλικών που παρουσιάζουν ατέλειες, ανομοιογένειες, μεταβολές φάσεων κτλ.

Οι φυσικές δυνάμεις προκύπτουν από μια δυνατή μεταβολή της θέσης  $x$  για ένα δεδομένο υλικό σημείο  $X$ . Αντίθετα, οι υλικές δυνάμεις (*configurational forces*) είναι αυτές που προκύπτουν από μία δυνατή μεταβολή του υλικού σημείου  $X$  με σταθερή τη θέση  $x$ . Οι υλικές δυνάμεις παρέχουν τη βάση για τη μελέτη ανομοιογενειών των συνεχών μέσων και τον υπολογισμό των δυνάμεων σε ατέλειες που εμφανίζονται σε ομογενή σώματα. Τέτοιες ατέλειες μπορούν να θεωρηθούν οι εξαρθρώσεις, οι ρωγμές, τα εγκλείσματα και τα κινούμενα μέτωπα σε προβλήματα μεταβολής φάσης.

Η πρώτη αναφορά για τις υλικές δυνάμεις έγινε από τον *J.D. Eshelby* [19] το 1951. Ο *Eshelby*, σε αυτή τη μελέτη, ασχολήθηκε με τις ελαστικές δυνάμεις στις ιδιοτροπές (*eigenstrain*) και στις ατέλειες. Διαπίστωσε ότι οι δυνάμεις αυτές οφείλονται σε ενεργειακές μεταβολές στη θέση της ατέλειας και είναι ίσες με το αρνητικό ανάδελτα της ολικής δυναμικής ενέργειας ως προς τη θέση της. Για την καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων των υλικών δυνάμεων, ανέφερε την ύπαρξη τους σε ένα σώμα που περιέχει ατέλεια χωρίς να εφαρμόζεται καμία εξωτερική φόρτιση και επισήμανε τη διαφορά των δυνάμεων αυτών σε σχέση με τις επιφανειακές και μαζικές φυσικές δυνάμεις που δρουν σε ένα υλικό μέσο.

Σε άρθρο του, το 1956 [20], ο *Eshelby* υπολόγισε τη δύναμη που ασκείται σε μια ατέλεια σε ένα ελαστικό μέσο και εισήγαγε την ιδέα των υλικών δυνάμεων.

Σε δημοσίευση του *Eshelby* [21], το 1975, που εκπονήθηκε για τη σημασία των υλικών δυνάμεων (τους ρυθμούς απελευθέρωσης της ενέργειας), κατέστησε σαφές ότι η ολική δύναμη που ασκείται σε ατέλειες και μη-ομογένειες που περικλείονται σε μια κλειστή επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί με ένα ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια αυτή με



την υπό ολοκλήρωση ποσότητα να είναι κάθετη συνιστώσα ενός τανυστή που τον ονόμασε "τανυστή ενέργειας-ορμής" και είναι ταυτόσημος με το  $J$ -ολοκλήρωμα του *Rice* [66] στην θραυστομηχανική. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής καλείται και τανυστής της Ελαστικότητας του *Maxwell*, κατ' αναλογία με τον τανυστή του *Maxwell* της ηλεκτροστατικής [53].

Το  $J$ -ολοκλήρωμα ή ολοκλήρωμα *Rice*, εισήχθηκε το 1968 από τον *Rice*, στην προσπάθεια του να βρει ένα μέτρο της συγκέντρωσης των τροπών στην περιοχή της αιχμής μιας εγκοπής και μιας ρωγμής (*tip*). Διαπίστωσε ότι η ολοκλήρωση του  $J$ -ολοκληρώματος στη στατική περίπτωση είχε την ίδια μορφή με τον τανυστή ενέργειας-ορμής που είχε πρωτοεισαγάγει ο *Eshelby*. Πολλοί συγγραφείς ασχολήθηκαν με το ολοκλήρωμα  $J$ , και τη σύνδεση του με τον ρυθμό χαλάρωσης της ενέργειας. Όπως για παράδειγμα οι *A. Golebiewska-Herrmann* το 1982 [28], οι *G. Francfort and A. Golebiewska-Herrmann* το 1986 [24], ο *G. Maugin* το 1994 [54] κ.α. Αποδείχθηκε ότι το  $J$ -ολοκλήρωμα είναι η δύναμη που ασκείται στην αιχμή μιας ρωγμής. Οι δυνάμεις, οι οποίες περιγράφηκαν από τον *Eshelby* αλλά και αυτές που περιγράφονται με το  $J$ -ολοκλήρωμα, είναι οι υλικές δυνάμεις.

Ουσιαστικά, θεμελιωτής της υλικής μηχανικής ήταν ο *Eshelby* [19-21], ο οποίος κατάλαβε τη χρησιμότητα του υλικού χώρου, και στο χώρο αυτό αναζήτησε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ατέλειες στο σώμα. Η ιδέα αυτή ήταν αντίθετη με τη θεωρία που επικρατούσε για τις κλασσικές δυνάμεις, οι οποίες θεωρούνταν στοιχεία του φυσικού χώρου. Εξαιτίας της συνεισφοράς του ως προς τη σημασία του τανυστή ενέργειας-ορμής στις μηχανικές ατέλειες, αναφέρεται από διάφορους σύγχρονους συγγραφείς ως *τανυστής Eshelby*. Ένας από αυτούς είναι ο *G. Maugin* [53] ο οποίος εισήγαγε ακόμη την έννοια της *Eshelbian Μηχανικής* όπου κύριο συστατικό είναι ο τανυστής *Eshelby*. Η *Eshelbian Μηχανική* χαρακτηρίζεται επίσης ως *Μηχανική στον Υλικό χώρο* σε αντίθεση με τη Νευτώνεια μηχανική που ονομάζεται *Μηχανική στο φυσικό χώρο*.

Με την Υλική Μηχανική ασχολήθηκαν πολλοί ερευνητές, όπως οι *Maugin*[52], *Trimarco*[60] *Gurtin*[34], *Epstein* και *Kienzler* [46] και *Podio-Guidugli* [63,64] κ.α.

Πιο αναλυτικά, ο *Rogula* το 1977 [67], παρουσίασε μια εργασία σχετική με αυτή του *Eshelby* βασισμένος στο *θεώρημα Noether*. Εισήγαγε την έννοια της "ημι-Νευτώνειας" δύναμης στον υλικό χώρο και καθόρισε τις δυνάμεις που δρουν σε μια εξάρθρωση, σε μια τοπική ανομοιογένεια και στην αιχμή μιας ρωγμής. Ο *Shield* το 1967 [73], ασχολήθηκε με μια προσέγγιση που χρησιμοποιεί την αντίστροφη περιγραφή της ελαστικότητας.

Ο *Zorski* [82], το 1981, διατύπωσε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

βασιζόμενος στο θεώρημα της *Noether* και ασχολήθηκε με τη δύναμη *Peach-Koehler* σε μια γραμμική ατέλεια. Στις αρχές της δεκαετίας του 80, η *Golebiewska* [27,28], διαχώρισε το Φυσικό και τον Υλικό χώρο και μελέτησε τους νόμους της ισορροπίας. Στην ίδια περίοδο και οι *Marsden, Hughes* [51] είχαν αντιληφθεί το δυισμό του Υλικού και Φυσικού χώρου.

Ο *Maugin*, ένας από τους σημαντικότερους ερευνητές στον τομέα αυτό, με τους συνεργάτες του [15,52,53,57,58], στις αρχές της δεκαετίας του 90, έκαναν γνωστή την έννοια της υλικής μηχανικής και του υλικού χώρου στο ευρύ κοινό. Στη μονογραφία του το 1993 [53], ασχολήθηκε με προβλήματα ηλεκτροελαστικότητας, μαγνητοελαστικότητας και ανελαστικότητας. Σε αντίθεση με το *Maugin*, που θεωρεί ότι οι υλικές εξισώσεις είναι παράγωγες της Μηχανικής στο φυσικό χώρο, ο *Gurtin* [34], το 2000, ισχυρίστηκε ότι είναι ανεξάρτητες από αυτές του φυσικού χώρου και αντιστοιχούν σε νέους φυσικούς νόμους. Μια ακόμα αντιπαράθεση στο χώρο, αφορά τη δύναμη που ασκείται στην ατέλεια. Οι *Eshelby* [19-21], *Rogula* [67], *Maugin* [53] και *Fedelich* [22] ισχυρίζονται ότι πρέπει να θεωρηθεί ως υλική, σε αντίθεση με τον *Ericksen* [17,18] που έχει αντίθετη άποψη.

Ο *Svendsen* [78,79], κοντά στο 2000, παρουσίασε ένα μοντέλο για υλικά που εμφανίζουν ελαστοπλαστικότητα χρησιμοποιώντας έννοιες του υλικού ισομορφισμού και διατύπωσε μια προσέγγιση για τη μοντελοποίηση της συμπεριφοράς ανισότροπων ελαστικών και ανελαστικών υλικών.

Η *Cleja-Tigoiu* στις αρχές του 2002 [11], πρότεινε ένα μοντέλο για τα ελαστοπλαστικά υλικά με συνέχεις κατανεμημένες εξαρθρώσεις και οι εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν αυτά τα υλικά περιλαμβάνουν το μη συμμετρικό τανυστή τάσεων του *Cauchy*. Επίσης, σε μια συνεργασία της με το *Maugin* [12] το 2000, εξέτασαν το ρόλο του τανυστή του *Eshelby* και του τανυστή *Mandel*, οι όποιοι εμφανίζονται ως η οδηγούσα δύναμη στη θερμομηχανική των πεπερασμένων τροπών στην ελαστοπλαστικότητα.

Ο *Steinmann* [74-77] στις αρχές του 2000, αξιοποίησε την έννοια των υλικών δυνάμεων και τις μελέτησε στην υπερελαστικότητα σε προβλήματα θραυστομηχανικής και στη θεωρία εξαρθρώσεων. Επιπρόσθετα, ανέδειξε το δυισμό των χωρικών και υλικών πεδίων στη θερμο-υπερελαστικότητα.

Η Υλική Μηχανική εφαρμόστηκε στον τομέα της συναλλοίωτης ελαστικότητας (*covariant elasticity*), από τους *Yavari, Marsden* και *Ortiz* το 2006 [80] ώστε να εξετάσουν την αναλλοιωσιμότητα της αρχής διατήρησης της ενέργειας με μετασχηματισμούς του υλικού χώρου.

Στον ίδιο τομέα, οι *Lu* και *Papadopoulos* [47] στο ξεκίνημα του 2000 εξέφρασαν τον τανυστή του *Eshelby* τύπου *Doyle-Ericksen* στο πλαίσιο της συναλλοιώτης της μη γραμμικής ελαστικότητας. Επίσης, εξέτασαν το ρόλο της συναλλοιωσιμότητας σε ανισότροπα, μη γραμμικά, ελαστικά στερεά και παρουσίασαν μια συναλλοιώτη θεωρία για ανισότροπα ελαστικά και πλαστικά σώματα όπου η ανισοτροπία εισέρχεται με την βοήθεια τανυστών δομής [48,49].

Όσον αφορά την Ελληνική ερευνητική δραστηριότητα, τη θεωρία της Υλικής Μηχανικής εφάρμοσε και εξέλιξε ο *B. Καλπακίδης* [37-44,69-72]. Ενδεικτικά, διατυπώθηκε η εξίσωση της υλικής ορμής από την αναλλοιωσιμότητα της αρχής διατήρησης της ενέργειας υπό παράλληλες μετατοπίσεις στον υλικό χώρο καθώς και οι νόμοι διατήρησης στην ελαστικότητα, τη θερμοελαστικότητα και την ηλεκτροστατική. Επίσης, αξιοποίησε τις υλικές δυνάμεις για την εύρεση βέλτιστης διακριτοποίησης στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Σε προβλήματα μεταβολής φάσης προσδιόρισε τη θέση της διεπιφάνειας. Στη διδακτορική διατριβή της *Αγιασοφίτου* [1] μελετήθηκε η προσέγγιση της υλικής μηχανικής σε ρηγματωμένα σώματα, επίσης στη διδακτορική διατριβή του *Μπαλασσά* [6] μελετήθηκε η χρήση της αντίστροφης περιγραφής για τη βελτιστοποίηση του πλέγματος σε προβλήματα ελαστικότητας και του *Αρβανιτάκη* [2] σε προβλήματα αλλαγών φάσης καθώς και αριθμητικές εφαρμογές δυναμικών προβλημάτων. Τέλος, στη διδακτορική διατριβή του *Σφυρή* [7], μελετήθηκε η θεωρία των εξαρθρώσεων και η πλαστικότητα υπό το πρίσμα των υλικών δυνάμεων.

## 2.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Με τη Μηχανική του Υλικού Χώρου μπορούν να υπολογιστούν και να εξερευνηθούν οι υλικές δυνάμεις που είναι το αποτέλεσμα μιας σύνθεσης φαινομένων απώλειας και τις περισσότερες φορές τις βρίσκουμε υπολογιστικά παρά αναλυτικά. Ο *Maugin* [59] τονίζει ότι η εξέλιξη μιας ατέλειας σε ένα σώμα προκύπτει με μικρή αλλαγή των εξωτερικών συνθηκών που σχετίζονται με την υλική δύναμη. Με βάση τη θεωρία είναι δυνατόν να υπολογιστεί η δύναμη αυτή χωρίς να είναι αντιληπτή. Μπορούν να γίνουν αντιληπτές μόνο διαμέσου της δυσκολίας με τα θερμοδυναμικά δυνάμεις τους μεγέθη που είναι οι υλικές μετατοπίσεις. Οι υλικές δυνάμεις, χρησιμοποιήθηκαν για να κατασκευαστούν κριτήρια εξέλιξης των ελαττωμάτων σε συμφωνία με το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο.

Η περιγραφή των υλικών δυνάμεων γίνεται με ένα τανυστή, αντίστοιχο με τον τανυστή τάσεων του *Cauchy*, τον λεγόμενο τανυστή του *Eshelby* που είναι ένας τανυστής των υλικών τάσεων. Ο τανυστής του *Eshelby* [35] είναι ένα τανυστικό πεδίο δεύτερης τάξης. Υπάρχει ένας άλλος τανυστής τέταρτης τάξης με σταθερές συνιστώσες, ο οποίος επίσης αναφέρεται ως τανυστής του *Eshelby* και είναι χρήσιμος στη μελέτη των προβλημάτων με εγκλείσματα [60]. Ο τανυστής του *Eshelby* δεν είναι συμμετρικός και η απόκλιση του εξαφανίζεται εάν το υλικό είναι τοπικά ομοιογενές. Οι *Chadwick* [10], *Rogula* [67] και *Golebiewska-Herrmann* [27] έχουν επισημάνει το δυσισμό μεταξύ των τανυστών του *Cauchy* και του *Eshelby*.

Η φυσική ερμηνεία [45] των στοιχείων του τανυστή του *Eshelby*  $b_{ij}$  είναι η εξής: Τα στοιχεία του τανυστή *Eshelby* δηλώνουν την αλλαγή στη ολική πυκνότητα ενέργειας σε ένα σημείο ενός ελαστικού συνεχούς που οφείλεται σε μια υλική μοναδιαία μετατόπιση στη  $x_j$  κατεύθυνση της μοναδιαίας κάθετης επιφάνειας κατά την  $x_i$  κατεύθυνση. Έτσι γίνεται σαφές γιατί ο  $b_{ij}$  δεν είναι ένας συμμετρικός τανυστής.

Ο τανυστής *Eshelby* σε δύο διαστάσεις είναι καθαρά ανισότροπος. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να παίξει ουσιαστικό ρόλο στη διατύπωση της πλαστικότητας, όπως έχει αποδειχθεί πρόσφατα από τους *Epstein* και *Maugin* [16].

Ο τύπος του *Cauchy* στη θεωρία της ελαστικότητας που συσχετίζει το διάνυσμα της τάσης με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $n_i$ , καθορίζει την τάση  $\sigma_{ji}$ , όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Για την υλική ορμή θα πρέπει να εφαρμοστεί ένας ανάλογος με τον τύπο του *Cauchy* στον τανυστή του *Eshelby*  $b_{ij}$ . Στην περίπτωση αυτή, το υλικό διάνυσμα τάσης ορίζεται μέσω του τανυστή του *Eshelby* και όχι το αντίστροφο. Το υλικό διάνυσμα της τάσης είναι πάντα εφαπτομενικό, η ορθή συνιστώσα του εξαφανίζεται και έχει σημαντικό ρόλο στη διερεύνηση ενεργειακών μεταβολών στα όρια και τις διεπιφάνειες.

Οι *Golebiewska-Herrmann* και *Herrmann* [29], έχουν δείξει ότι το υλικό διάνυσμα τάσης ισούται με το ποσοστό της συνολικής μεταβολής της ενέργειας. Ο *Gao* [26] και ο *Freund* [25] θεώρησαν απαραίτητη την ύπαρξη του υλικού διανύσματος τάσης για τη μελέτη της ευστάθειας σε σώματα με επίπεδη παραμόρφωση. Επιπλέον, το υλικό διάνυσμα τάσης χρησιμοποιήθηκε από τους *Schmidt* και *Gross* [68] στη μελέτη του βέλτιστου σχήματος εγκλεισμάτων που συνδέονται με το ελάχιστο της συνολικής ενέργειας.

Κατά τον προσδιορισμό των κυριότερων τιμών του τανυστή Eshelby σε δύο διαστάσεις, διαπιστώθηκε ότι εξαρτάται από τρεις αναλλοίωτες, συγκεκριμένα τις δύο αναλλοίωτες της τάσης (ή παραμόρφωσης) και της περιστροφής. Οι κύριες αυτές τιμές αποδεικνύεται ότι μπορεί να είναι είτε πραγματικές είτε φανταστικές, ανάλογα με το αν η δεύτερη αναλλοίωτη του συμμετρικού μέρους του τανυστή Eshelby είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη δεύτερη αναλλοίωτη του αντισυμμετρικού μέρους του. Επιπλέον, οι σχετικές κύριες διευθύνσεις δεν είναι κάθετες η μια στην άλλη.

### 2.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΥΛΙΚΟ ΧΩΡΟ

Στη Μηχανική του Φυσικού Χώρου, η εξίσωση της φυσικής ορμής περιγράφει την ισορροπία ή την κίνηση του υλικού σώματος. Στην περίπτωση της Μηχανικής του Υλικού Χώρου η αντίστοιχη εξίσωση καλείται εξίσωση ψευδοορμής ή υλικής ορμής και περιγράφει την ισορροπία ή την κίνηση του σώματος στον υλικό χώρο. Η αντίστοιχη ορμή ονομάζεται ψευδοορμή ή υλική ορμή. Στην Μηχανική του Υλικού Χώρου οι υλικές δυνάμεις προέρχονται από την παρουσία ελαττωμάτων ή ανομοιογενειών στο υλικό.

Η εξίσωση της υλικής ορμής είναι δυική της εξίσωσης ορμής. Συνοψίζοντας, στη Μηχανική του Φυσικού Χώρου, η εξίσωση της φυσικής ορμής περιγράφει την ισορροπία ή την κίνηση ενός σώματος και εκφράζει είτε το ισοζύγιο της ορμής στην ελαστοδυναμική είτε την ισορροπία των φυσικών δυνάμεων στην ελαστοστατική. Αντίστοιχα, στην Eshelbian Μηχανική, η εξίσωση της υλικής ορμής περιγράφει το ισοζύγιο της υλικής ορμής, σε προβλήματα με ελαττώματα, ή την ισορροπία των υλικών δυνάμεων στην στατική.

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας [53] στη Μηχανική του Υλικού Χώρου είναι:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

όπου  $\rho_0(\mathbf{X}) = J\rho(\mathbf{x}, t)$ . Γενικά για μη-ομογενή υλικά, ισχύει:

$$\nabla_R \rho_0 \neq 0. \quad (2.2)$$

Η εξίσωση της ψευδορμής μπορεί να παραχθεί με διάφορες μεθόδους. Ο *G.A. Maugin* [53,56] πρότεινε έναν τρόπο για την εξαγωγή της εξίσωσης της υλικής ορμής, πολλαπλασιάζοντας από δεξιά την εξίσωση της φυσικής ορμής με  $\mathbf{J}\mathbf{F}^T$  και χρησιμοποιώντας τις κινηματικές συνθήκες συμβιβασμού. Με τον τρόπο αυτόν επιτυγχάνεται πλήρη ανάσχυση της εξίσωσης της υλικής ορμής. Οι *Maugin* και *Dascalu* χρησιμοποίησαν αυτόν τον τρόπο και στη θερμοελαστικότητα [14].

Πιο αναλυτικά, από το ισοζύγιο της ορμής στη Μηχανική του συνεχούς προκύπτει η εξίσωση (1.37), η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση *Euler*. Για την ισορροπία ενός σώματος στην τρέχουσα διαμόρφωση ισχύει ο τύπος:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}\mathbf{g} = 0. \quad (2.3)$$

Αντίστοιχα η εξίσωση (1.39), η οποία χρησιμοποιεί τον τανυστή τάσεων των *Piola – Kirchhoff* για την ισορροπία, γίνεται:

$$\operatorname{Div}\mathbf{T} + \boldsymbol{\rho}\mathbf{g} = 0. \quad (2.4)$$

Με τον πολλαπλασιασμό της κλίσης της απεικόνισης της κίνησης  $\mathbf{F}$  στον τύπο (2.4) από τα δεξιά, προκύπτει ότι:

$$(\operatorname{Div}\mathbf{T})\mathbf{F} = (\operatorname{Div}\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla_R \mathbf{F})^T = \operatorname{Div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}) - \nabla_R W - \mathbf{f}^{inh}, \quad (2.5)$$

όπου η κλίση της ενέργειας στο σχηματισμό αναφοράς και η μερική παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης της ελαστικής ενέργειας ως προς τις υλικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla_R W = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{F}} (\nabla_R \mathbf{F})^T + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{F} \text{ fixed}} \quad \text{και} \quad \mathbf{f}^{inh} := - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\text{expl}} \equiv - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{F} \text{ fixed}} \quad (2.6)$$

Οπότε, προκύπτει η υλική εξίσωση ισορροπίας:

$$\operatorname{Div}\mathbf{b} + \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{inh} = 0, \quad (2.7)$$

όπου έχουμε θέσει:

$$\mathbf{b} := \mathbf{W}\mathbf{I}_R - \mathbf{T}\mathbf{F} \quad \text{και} \quad \mathbf{f}^{ext} := -\boldsymbol{\rho}_0 \mathbf{f}\mathbf{F}. \quad (2.8)$$

Ο υλικός τανυστής τάσης  $\mathbf{b}$  είναι ο τανυστής τάσης του *Eshelby*.

Οι υλικές δυνάμεις  $\mathbf{f}^{ext}$  και  $\mathbf{f}^{inh}$  είναι οι εξωτερικές εφαρμοζόμενες υλικές δυνάμεις και η υλική δύναμη της ανομοιογένειας, αντίστοιχα. Από τον ορισμό των εξωτερικών εφαρμοζόμενων δυνάμεων,

$$\mathbf{f}^{inh} := -\left. \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\text{expl}} \equiv -\left. \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{F} \text{ fixed}}, \quad (2.9)$$

εξασφαλίζεται η εξάρτηση της συνάρτησης  $W$  από το υλικό. Για όλα τα υλικά σημεία  $\mathbf{X}$ , ο τύπος της υλικής εξίσωσης της ισορροπίας είναι μια ταυτότητα που προκύπτει από το βασικό νόμο ισορροπίας στο φυσικό χώρο.

Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιείται η γενική εξίσωση της κίνησης

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_R \right|_X - \text{Div} \mathbf{T} = \boldsymbol{\rho}_0 \mathbf{g}. \quad (2.10)$$

Πολλαπλασιάζοντας την  $\mathbf{F}$  από τα δεξιά στις δύο πλευρές αυτής της εξίσωσης για ένα ανομοιογενές υλικό, επιτυγχάνεται η ανάσυρση (*pull-back*). Σημειώνεται το αποτέλεσμα στη σχέση:

$$\nabla_R W = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{F}} (\nabla_R \mathbf{F})^T + \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{F} \text{ fixed}}, \quad (2.11)$$

καθώς και το γεγονός ότι ισχύει:

$$\left. \frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} \right|_X \mathbf{F} = -\left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right|_X - \nabla_R \mathbf{K}^R + \frac{\mathbf{K}^R}{\boldsymbol{\rho}_0} \nabla_R \boldsymbol{\rho}_0 \quad (2.12)$$

όπου:

$$\mathbf{P} := -\rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = -\rho_0 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v} \quad \text{και} \quad K^R = \frac{1}{2} \rho_0 (\mathbf{X}) \mathbf{v}^2. \quad (2.13)$$

Το πρώτο από αυτά,  $\mathbf{P}$ , καλείται υλική ορμή ή ψευδορμή. Το υλικό διάνυσμα μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$\mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} \quad \text{από} \quad \mathbf{v} = -\mathbf{F}\mathbf{V}, \quad (2.14)$$

όπου το  $\mathbf{V}$  είναι το πεδίο της υλικής ταχύτητας και  $\mathbf{C}$  είναι ο δεξιός τανυστής παραμόρφωσης *Cauchy-Green*. Ο τανυστής  $\mathbf{C}$  δρα ως μετρική στον υλικό χώρο.

Τελικά, παίρνουμε την εξίσωση της υλικής ορμής ή εξίσωση κίνησης στον υλικό χώρο στη μορφή

$$\left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right|_x - \text{Div} \mathbf{b} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{inh}. \quad (2.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση καλείται εξίσωση της υλικής ορμής ή εξίσωση κίνησης στον υλικό χώρο. Η  $\mathbf{f}^{inh}$  είναι υλική δύναμη ενώ  $\mathbf{P}$  είναι η υλική ορμή ή ψευδορμή. Ο τανυστής  $\mathbf{b}$  καλείται τανυστής τάσης του *Eshelby*.

Για τη διατύπωση της εξίσωσης της υλικής ορμής, στην πραγματικότητα, χρειάζεται ένας άλλος τανυστής, που αναφέρεται ως τανυστής τάσης του *Eshelby* δύο σημείων και συμβολίζεται με  $\Sigma$ . Οι δυο τανυστές του *Eshelby* συνδέονται με τη σχέση

$$\mathbf{b} = J^{-1} \mathbf{F}^{-1} \Sigma. \quad (2.16)$$

Ο τανυστής  $\Sigma$  δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{F}^{-1}} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \Sigma = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{G}}. \quad (2.17)$$



Εύκολα αποδεικνύεται ο τύπος:

$$\text{Div} \mathbf{b} = J \text{div} \Sigma. \quad (2.18)$$

Μια δεύτερη μέθοδος για την παραγωγή της εξίσωσης της ψευδορμής στον υλικό χώρο γίνεται απαιτώντας αναλλοιωσιμότητα του συναρτησιακού δράσης μιας μεταβολικής αρχής. Το θεώρημα της *Noether* για μεταβολικά προβλήματα των οποίων τα συναρτησιακά δράσης είναι αναλλοίωτα κάτω από μια ομάδα απειροστών μετασχηματισμών, χρησιμοποιείται για να παράγει, εκτός από λύσεις ομοιότητας και μια κλάση νόμων διατήρησης [8,23,39]. Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή του Θεωρήματος της *Noether* είναι η ύπαρξη της συνάρτησης *Lagrange* της οποίας έμμεσα απαιτούμε την αναλλοιωσιμότητα. Στην περίπτωση μη-αντιστρεπτών φαινομένων, όπως είναι για παράδειγμα τα θερμικά φαινόμενα, η συνάρτηση *Lagrange* δεν υπάρχει με αποτέλεσμα να αναζητούμε άλλους τρόπους για την παραγωγή των εξισώσεων στον υλικό χώρο.

Εναλλακτικά, με τη διατύπωση ολοκληρωτικών νόμων ισοζυγίου στον υλικό χώρο [8,73] μπορεί να προκύψει η εξίσωση της ψευδορμής.

Ένας ακόμη τρόπος παραγωγής της εξίσωσης, είναι η χρήση μεταβολικών αρχών (*variational principles*) [64]. Στην ελαστικότητα [53,59], αν το συναρτησιακό της ενέργειας διατυπωθεί ως προς την αντίστροφη απεικόνιση της κίνησης, τότε μια αρχή ακροτάτου θα οδηγήσει στην εξίσωση της υλικής ορμής η οποία θα παίζει το ρόλο της εξίσωσης *Euler-Lagrange*. Οι *Maugin* και *Kalpakides* [37] γενικεύοντας αυτήν την ιδέα, διατύπωσαν μια μεταβολική αρχή για τη θερμοελαστικότητα των *Green* και *Naghdi*, η οποία επιδέχεται την συνάρτηση πυκνότητας *Lagrange* και κατά συνέπεια είναι δυνατόν να παραχθούν οι εξισώσεις στον υλικό χώρο για τη θερμοελαστικότητα.

Μια τελευταία μέθοδος, αναπτύχθηκε από τον *Gurtin* [33,34], και διατυπώνει την εξίσωση υλικής ορμής με τη βοήθεια του 2<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Νόμου. Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε προβλήματα με ατέλειες [9,32] και γενικεύτηκε επίσης για τη θερμομηχανική [36].

Τέλος, η εξίσωση της ενέργειας, διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{dW}{dt} - \text{tr}(\mathbf{T}\dot{\mathbf{F}}) = 0, \quad (2.19)$$

όπου με  $tr(\ )$  συμβολίζεται το ίχνος και με  $\mathbf{T}$  ο πρώτος τανυστής τάσης των *Piola-Kirchhoff*. Η εξίσωση αυτή ισχύει για μη γραμμικά, ανισότροπα, μη-ομογενή ελαστικά υλικά στην υπερελαστικότητα.

### 3. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ *EULER*

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξαχθεί η εξίσωση της ισορροπίας στον Υλικό χώρο σε περιγραφή *Euler* με χρήση μεταβολικών αρχών. Για την καλύτερη κατανόηση των σχέσεων θα παρατεθεί αρχικά, η εξίσωση ισορροπίας στο Φυσικό χώρο. Η διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας στον Υλικό καθώς και στο Φυσικό χώρο παράχθηκε τόσο για ελαστικά όσο και για *Neo-Hookean* υλικά.

#### 3.1 ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

Στην ενότητα αυτή θα παραχθεί η εξίσωση ισορροπίας για ελαστικά υλικά. Για διατυπώσουμε πρώτα την εξίσωση στο Φυσικό χώρο και κατόπιν στον Υλικό.

##### 3.1.1 Εξίσωση Φυσικής Ορμής

Για τη διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας στο Φυσικό χώρο (2.4), θα πρέπει να υπολογιστεί αρχικά η ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης. Συνδυάζοντας την ελαστική ενέργεια (1.32) από τη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου και την καταστατική εξίσωση (1.53) που συνδέει τον ταυστή των τροπών και τον ταυστή της τάσης για ένα ισότροπο υλικό, προκύπτει ότι η ενέργεια ισούται με:

$$W = \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{2} e_{kk} e_{ii}. \quad (3.1)$$

Επιπλέον, από τον τύπο των στοιχείων του ταυστή των τροπών (1.19), και τη σχέση για τις μετατοπίσεις (1.13), ο ταυστής των τροπών συναρτήσει της κλίσης της ευθείας απεικόνισης φαίνεται παρακάτω:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (x_{i,j} + x_{j,i}) - \delta_{ij}. \quad (3.2)$$

Πλέον εύκολα υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.1) και (3.2), ο τύπος της ελαστικής ενέργειας σε *Lagrangian* περιγραφή:

$$W = \frac{\mu}{2} x_{i,j}^2 + \frac{\mu}{2} x_{i,j} x_{j,i} + \frac{\lambda}{2} x_{k,k} x_{i,i} - (2\mu + 3\lambda) x_{i,i} + \left( 3\mu + \frac{9\lambda}{2} \right). \quad (3.3)$$

Με παραγωγή του τύπου (3.3) της ενέργειας ως προς την κλίση της συνάρτησης απεικόνισης στη διαμόρφωση αναφοράς, σύμφωνα με τη σχέση (1.50), υπολογίζεται ο τανυστής των *Piola – Kirchhoff*. Η εξίσωση (1.50) με τη μορφή δεικτών:

$$T_{lm} = \frac{\partial W}{\partial F_{lm}}.$$

Καταλήγουμε ότι ο τανυστής των *Piola–Kirchhoff* διατυπώνεται ως εξής:

$$T_{lm} = \mu(x_{l,m} + x_{m,l}) + \lambda x_{i,i} \delta_{lm} - (2\mu + 3\lambda) \delta_{lm}. \quad (3.4)$$

Η διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας στο Φυσικό χώρο, που αναφέρθηκε στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, χρησιμοποιεί την απόκλιση του τανυστή των *Piola–Kirchhoff*, στη διαμόρφωση αναφοράς (1.8α). Η απόκλιση με τη μορφή δεικτών είναι:

$$\text{Div} = \frac{\partial}{\partial X_A}$$

Συνεπώς, θα πρέπει να υπολογιστεί η σχέση,  $\text{Div} T_{lm} = \frac{\partial T_{lm}}{\partial X_m}$ , έτσι προκύπτει

$$\text{Div} T_{lm} = \mu(x_{l,mm} + x_{m,lm}) + \lambda x_{i,il}. \quad (3.5)$$

Τελικά, η εξίσωση ισορροπίας στο φυσικό χώρο ακολουθώντας τη διατύπωση της σχέσης (2.4) διέπεται από τη σχέση:

$$\mu(x_{l,mm} + x_{m,lm}) + \lambda x_{i,il} + \rho g_l = 0. \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Εξίσωση Υλικής Ορμής

Για τη διατύπωση της εξίσωσης της ισορροπίας των φυσικών δυνάμεων χρησιμοποιήθηκε από το 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο η εξίσωση της ισορροπίας που περιέχει τον τανυστή του *Eshelby*

$$\text{Div} \mathbf{b} + \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{inh} = 0.$$

Καθώς και η σχέση (2.18) που συνδέει τους δυο τανυστές του Eshelby

$$\text{Div}b = J\text{div}\Sigma.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον τύπο (2.17), για τον τανυστή του *Eshelby*, που με τη μορφή δεικτών γράφεται:

$$\Sigma_{pn} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial G_{pn}},$$

καταλήγουμε στη σχέση που πρέπει να υπολογιστεί ώστε να διατυπώσουμε την εξίσωση της υλικής ορμής ή όπως αλλιώς αποκαλείται εξίσωση της ψευδορμής:

$$\text{Div}b = J \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial G_{Ai}}. \quad (3.7)$$

Όπως αναφέρθηκε στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, η σχέση που συνδέει την ενέργεια παραμόρφωσης με την ενέργεια της αντίστροφης είναι

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = J\tilde{W}(\mathbf{x}, \mathbf{G}),$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{W} = jW(F_{iA}) \quad \eta \quad \tilde{W} = jW(G_{Ai}^{-1}),$$

αφού ισχύουν οι τύποι

$$j = J^{-1} \quad \text{και} \quad F_{iA} = G_{Ai}^{-1}.$$

Η ενέργεια από τον τύπο (3.3), σε περιγραφή *Euler*, γράφεται:

$$W = \frac{\mu}{2} X_{j,i}^{-2} + \frac{\mu}{2} X_{j,i}^{-1} X_{i,j}^{-1} + \frac{\lambda}{2} X_{k,k}^{-1} X_{i,i}^{-1} - (2\mu + 3\lambda) X_{i,i}^{-1} + 3\mu + \frac{9\lambda}{2}.$$

Προκύπτει λοιπόν, ότι η ενέργεια της αντίστροφης απεικόνισης διατυπώνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\tilde{W} = j \left[ \frac{\mu}{2} X_{j,i}^{-2} + \frac{\mu}{2} X_{j,i}^{-1} X_{i,j}^{-1} + \frac{\lambda}{2} X_{k,k}^{-1} X_{i,i}^{-1} - (2\mu + 3\lambda) X_{i,i}^{-1} + 3\mu + \frac{9\lambda}{2} \right]. \quad (3.8)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω, υπολογίστηκε ο τανυστής *Eshelby*  $\Sigma$ :

$$\Sigma_{pn} = j \left[ \begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \left( X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-2} + X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{i,j}^{-1} - 2X_{j,i}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} - X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} X_{i,j}^{-1} - X_{j,i}^{-1} X_{p,j}^{-1} X_{i,n}^{-1} \right) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \left( X_{p,n}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{i,i}^{-1} - X_{p,k}^{-1} X_{k,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} - X_{k,k}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} \right) - \\ & - (2\mu + 3\lambda) \left( X_{p,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} - X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} \right) + \\ & + \left( 3\mu + \frac{9\lambda}{2} \right) X_{p,n}^{-1} \end{aligned} \right], \quad (3.9)$$

και η απόκλιση του τανυστή *Eshelby*  $\Sigma$  στην τρέχουσα διαμόρφωση είναι

$$\text{div} \Sigma_{pn} = j \left[ \begin{aligned} & -\frac{\mu}{2} \left( \begin{aligned} & X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,i}^{-2} + 2X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} + X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{i,j}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{i,j}^{-1} + \\ & + X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{m,j}^{-1} X_{i,l}^{-1} - 2X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} - 2X_{j,i}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,n}^{-1} - 2X_{j,i}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{j,l}^{-1} - \\ & - X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,n}^{-1} X_{i,j}^{-1} - X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{i,j}^{-1} - X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} X_{m,j}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{p,j}^{-1} X_{i,n}^{-1} - \\ & - X_{j,i}^{-1} X_{m,j}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{j,i}^{-1} X_{p,j}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-2} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{i,j}^{-1} + \\ & + 2X_{m,l}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} X_{i,j}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{p,j}^{-1} X_{i,n}^{-1} \end{aligned} \right) - \\ & -\frac{\lambda}{2} \left( \begin{aligned} & X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{m,k}^{-1} X_{k,l}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{i,l}^{-1} - \\ & - X_{m,k}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{k,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} - X_{p,k}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{k,l}^{-1} X_{i,i}^{-1} - X_{p,k}^{-1} X_{k,n}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{i,l}^{-1} - \\ & - X_{m,k}^{-1} X_{k,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{k,k}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{k,k}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} - \\ & - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{k,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} \end{aligned} \right) + \\ & + (2\mu + 3\lambda) \left( \begin{aligned} & X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} - \\ & - X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} \end{aligned} \right) - \\ & - \left( 3\mu + \frac{9\lambda}{2} \right) \left( X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} \right) \end{aligned} \right] X_{m,in}. \quad (3.10)$$

Τέλος, η απόκλιση του τανυστή *Eshelby*  $\mathbf{b}$  στη διαμόρφωση αναφοράς δίδεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\text{Div} \mathbf{b}_{pn} = \left[ \begin{aligned} & -\frac{\mu}{2} \left( \begin{aligned} & X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,i}^{-2} + 2X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} + X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{i,j}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{i,j}^{-1} + \\ & + X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{m,j}^{-1} X_{i,l}^{-1} - 2X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} - 2X_{j,i}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,n}^{-1} - 2X_{j,i}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{j,l}^{-1} - \\ & - X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{j,n}^{-1} X_{i,j}^{-1} - X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{i,j}^{-1} - X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} X_{m,j}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,i}^{-1} X_{j,l}^{-1} X_{p,j}^{-1} X_{i,n}^{-1} - \\ & - X_{j,i}^{-1} X_{m,j}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{j,i}^{-1} X_{p,j}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-2} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{i,j}^{-1} + \\ & + 2X_{m,l}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{j,n}^{-1} X_{i,j}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{j,i}^{-1} X_{p,j}^{-1} X_{i,n}^{-1} \end{aligned} \right) - \\ & -\frac{\lambda}{2} \left( \begin{aligned} & X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{m,k}^{-1} X_{k,l}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{i,l}^{-1} - \\ & - X_{m,k}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{k,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} - X_{p,k}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{k,l}^{-1} X_{i,i}^{-1} - X_{p,k}^{-1} X_{k,n}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{i,l}^{-1} - \\ & - X_{m,k}^{-1} X_{k,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{k,k}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{k,k}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} - \\ & - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{k,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{k,k}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} \end{aligned} \right) + \\ & + (2\mu + 3\lambda) \left( \begin{aligned} & X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{p,n}^{-1} X_{m,i}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,i}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} - \\ & - X_{p,i}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{i,i}^{-1} + X_{m,l}^{-1} X_{p,i}^{-1} X_{i,n}^{-1} \end{aligned} \right) - \\ & - \left( 3\mu + \frac{9\lambda}{2} \right) \left( X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} - X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} \right) \end{aligned} \right] X_{m,in}. \quad (3.11)$$

Τα γινόμενα των  $\mathbf{X}^{-1}$ , μεταξύ τους, δίνουν σε κάθε περίπτωση τανυστές 4<sup>ης</sup> τάξης. Επίσης, παρατηρούμε ότι η απόκλιση του τανυστή *Eshelby*  $\mathbf{b}$  είναι ένα διάνυσμα, το οποίο προκύπτει από το γινόμενο ενός τανυστή 4<sup>ης</sup> τάξης με δείκτες  $m, l, n, p$  και ενός τανυστή 3<sup>ης</sup> τάξης με δείκτες  $m, l, n$ .

Από τη σχέση (3.11), η εξίσωση της ισορροπίας της υλικής ορμής είναι

$$\left[ (2\mu + \lambda)(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-1}) \otimes (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-1}) \right] \nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{inh} = 0. \quad (3.12)$$

### 3.2 ΥΛΙΚΟ *NEO-HOOKEAN*

Στην ενότητα αυτή θα παραχθεί με ανάλογο τρόπο της ενότητας 3.1, η εξίσωση ισορροπίας στον Υλικό χώρο για *Neo-Hookean* υλικά. Όπως παραπάνω, θα διατυπώσουμε πρώτα την εξίσωση στο Φυσικό χώρο και κατόπιν στον Υλικό.

#### 3.2.1 Εξίσωση Φυσικής Ορμής

Στα συμπιεστά *Neo-Hookean* υλικά, η ενέργεια δίδεται από τον τύπο:

$$W = \frac{\mu}{2}(x_{k,i}^2 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2, \quad (3.13)$$

Στη συνέχεια, υπολογίστηκε ο τανυστής των *Piola-Kirchhoff*, καθώς και η απόκλιση του.

$$T_{lm} = \mu x_{l,m} + (\lambda \ln J - \mu) x_{l,m}^{-1}, \quad (3.14)$$

$$\text{Div} T_{lm} = \mu x_{l,m} + \left[ \lambda x_{q,s}^{-1} x_{l,m}^{-1} + (\mu - \lambda \ln J) x_{m,q} x_{s,l} \right] x_{q,sm}. \quad (3.15)$$

Έτσι, καταλήγουμε στη διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας στο Φυσικό χώρο:

$$\mu x_{l,mm} + \left[ \lambda x_{q,s}^{-1} x_{l,m}^{-1} + (\mu - \lambda \ln J) x_{m,q} x_{s,l} \right] x_{q,sm} + \varrho f_l = 0. \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Εξίσωση Υλικής Ορμής

Η ελαστική ενέργεια (3.13) για τα *Neo-Hookean* συμπιεστά υλικά, μπορεί να γραφτεί σε *Eulerian* περιγραφή:

$$W = \frac{\mu}{2}(X_{i,k}^{-2} - 3) + \mu \ln j + \frac{\lambda}{2}(\ln j)^2. \quad (3.17)$$

Ενώ, η ενέργεια της αντίστροφης απεικόνισης προκύπτει:

$$\tilde{W} = j \left[ \frac{\mu}{2}(X_{i,k}^{-2} - 3) + \mu \ln j + \frac{\lambda}{2}(\ln j)^2 \right]. \quad (3.18)$$

Παραγωγίζοντας την ενέργεια της αντίστροφης απεικόνισης ως προς την κλίση της αντίστροφης απεικόνισης της κίνησης, προκύπτει ο τανυστής δυο σημείων του *Eshelby*  $\Sigma$ :

$$\Sigma_{pn} = j \left[ \frac{\mu}{2} \left[ X_{p,n}^{-1} X_{i,k}^{-2} - 2X_{i,k}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{i,n}^{-1} + (\ln j - 2) X_{p,n}^{-1} \right] + \frac{\lambda}{2} \ln j (\ln j + 2) \right] X_{p,n}^{-1}, \quad (3.19)$$

και η απόκλιση αυτού:

$$\operatorname{div} \Sigma_{pn} = j \left[ \frac{\mu}{2} \left[ \begin{aligned} & X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{i,k}^{-2} - 2X_{m,l}^{-1} X_{i,k}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,k}^{-2} - 2X_{p,n}^{-1} X_{i,k}^{-1} X_{m,k}^{-1} X_{i,l}^{-1} + \\ & + 2X_{m,k}^{-1} X_{i,l}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{i,n}^{-1} + 2X_{i,k}^{-1} X_{m,k}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} + 2X_{i,k}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} + \\ & + (\ln j + 3) X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} - (\ln j - 2) X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} \end{aligned} \right] + \frac{\lambda}{2} \left[ 2(\ln j + 1) X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} + \ln j (\ln j + 2) (X_{p,n}^{-1} X_{m,l}^{-1} + X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1}) \right] \right] X_{m,ln}. \quad (3.20)$$

Με τη σχέση που συνδέει τους δυο τανυστές του *Eshelby*, καταλήγουμε στον υπολογισμό της απόκλισης του τανυστή  $\mathbf{b}$ ,  $\operatorname{Div} \mathbf{b}$ :



$$\text{Div} b_{pn} = \left[ \begin{array}{l} \left[ X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} X_{i,k}^{-2} - 2X_{m,l}^{-1} X_{i,k}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{i,n}^{-1} - X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,k}^{-2} - 2X_{p,n}^{-1} X_{i,k}^{-1} X_{m,k}^{-1} X_{i,l}^{-1} + \right. \\ \frac{\mu}{2} \left[ +2X_{m,k}^{-1} X_{i,l}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{i,n}^{-1} + 2X_{i,k}^{-1} X_{m,k}^{-1} X_{p,l}^{-1} X_{i,n}^{-1} + 2X_{i,k}^{-1} X_{p,k}^{-1} X_{m,n}^{-1} X_{i,l}^{-1} + \right. \\ \left. + (\ln j + 3) X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} - (\ln j - 2) X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1} \right] \\ \left. + \frac{\lambda}{2} \left[ 2(\ln j + 1) X_{m,l}^{-1} X_{p,n}^{-1} + \ln j (\ln j + 2) (X_{p,n}^{-1} X_{m,l}^{-1} + X_{m,n}^{-1} X_{p,l}^{-1}) \right] \right] X_{m,\ln}, \quad (3.21)$$

Επομένως, η εξίσωση της ισορροπίας στον υλικό χώρο για τα *Neo-Hookean* συμπιεστά υλικά, είναι:

$$\left[ \mu (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-1}) \otimes (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-1}) + \left[ \mu + \lambda \left[ (\ln J)^2 + \ln J + 1 \right] \right] \mathbf{G}^{-1} \otimes \mathbf{G}^{-1} \right] \nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{inh} = 0. \quad (3.22)$$

#### 4. Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΥΛΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμοστεί η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων στην εξίσωση της Υλικής Ορμής. Η μελέτη αυτή βασίστηκε σε μια προγενέστερη ιδέα [30]. Η βασική ιδέα τους ήταν η διατύπωση του αντίστροφου προβλήματος, χρησιμοποιώντας την εξίσωση της Φυσικής Ορμής συναρτήσει της αντίστροφης απεικόνισης της κίνησης. Εν ολίγη, θα παρουσιαστούν η διατύπωση των Πεπερασμένων Στοιχείων στο πρόβλημα και μερικά παραδείγματα έτσι ώστε να επιβεβαιωθεί η ιδέα αυτή. Τα παραδείγματα υλοποιήθηκαν με τη χρήση του λογισμικού *Matlab* και αφορούν *Neo-Hookean* υλικά σε δυο διαστάσεις.

##### 4.1 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η εξίσωση της Φυσικής Ορμής, όπως έχει προαναφερθεί στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, δίνεται από τον τύπο (2.3), εκφράζει την ισορροπία ενός σώματος στην τρέχουσα διαμόρφωση και χρησιμοποιεί τον τανυστή τάσεων του *Cauchy*. Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση της Φυσικής Ορμής (2.4) μπορεί να διατυπωθεί με τον τανυστή τάσεων των *Piola–Kirchhoff* η οποία χρησιμοποιήθηκε στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο.

Επομένως, η ισχυρή διατύπωση για το πρόβλημα που θα επιλυθεί είναι:

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} + \rho g_i = 0 \quad \forall x_i \in \Omega, \quad (4.1)$$

όπου  $\Omega$  το χωρίο που καταλαμβάνει το σώμα. Επίσης έστω ότι έχουμε συνοριακές συνθήκες τύπου *Neumann*

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad \forall x_i \in \partial\Omega_N, \quad (4.2)$$

όπου  $t_i$  ένα δεδομένο διάνυσμα τάσης στο τμήμα του συνόρου  $\partial\Omega_N$  και συνοριακές συνθήκες τύπου *Dirichlet* στο υπόλοιπο τμήμα  $\partial\Omega_D$  της συνοριακής επιφάνειας

$$X_B(x_i) = X_B^0(x_i) \quad \forall x_i \in \partial\Omega_D, \quad (4.3)$$

όπου  $X_B^0$  μια γνωστή συνάρτηση της αντίστροφης κίνησης.

Για τα *Neo-Hookean* υλικά η ενέργεια παραμόρφωσης και ο τανυστής τάσης δίδονται, αντιστοίχως, από τους ακόλουθους τύπους:

$$W = \frac{\mu}{4}(\text{tr}[C_{AB}] - 3) - \mu \ln(J) + \frac{\lambda}{2}(\ln(J))^2, \quad (4.4)$$

$$\sigma_{ij} = j\mu(c_{ji}^{-1} - \delta_{ij}) - \lambda j \ln j \delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας με μια συνάρτηση δοκιμής  $\eta_A$ , ολοκληρώνοντας επί του χωρίου  $\Omega$  και λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες (4.2) και (4.3) προκύπτει η ασθενής διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας

$$\Phi(X_A; \eta_A) = \int_{\Omega} \frac{\partial \eta_A}{\partial x_j} \sigma_{ij} \delta_{iA} dx - \int_{\Omega} \eta_A \rho g_i \delta_{iA} dx - \int_{\partial\Omega_N} \eta_A t_i \delta_{iA} dx = 0, \quad \forall \eta_A. \quad (4.6)$$

Για κάθε συνάρτηση  $\eta_A$ , η  $\Phi$  είναι ένα συναρτησιακό με όρισμα την άγνωστη συνάρτηση  $X_A$ . Η εξίσωση (4.6) είναι μη γραμμική λόγω της καταστατικής σχέσης (4.5). Για το λόγο αυτό γίνεται η γραμμικοποίηση της στην περιοχή μιας γνωστής συνάρτησης  $X_B^0$ . Για το σκοπό αυτό, αναπτύσσουμε το συναρτησιακό  $\Phi$  σε σειρά *Taylor* γύρω από τη συνάρτηση  $X_B^0$ :

$$\Phi(X_A; \eta_A) = \Phi(X_B^0; \eta_A) + \frac{d}{d\varepsilon} \Phi(X_B^0 + \varepsilon U_B; \eta_A) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \Phi(X_B^0 + \varepsilon U_B; \eta_A) \Big|_{\varepsilon=0} + \dots$$

Σημειώνουμε ότι το ο δεύτερος όρος της δεξιάς πλευράς του παραπάνω αναπτύγματος είναι το διαφορικό *Gateaux* [50]. Κρατώντας μόνο τον γραμμικό όρο, η εξ. (4.6) παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{L} \Phi(X_B^0; \eta_A)[U_B] = \Phi(X_B^0; \eta_A) + \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Phi(X_B^0 + \varepsilon U_B; \eta_A). \quad (4.7)$$

Με την προϋπόθεση ότι ο συμμετρικός τανυστής τάσεων του *Cauchy* εξαρτάται αποκλειστικά από το  $c_{kl}$  που είναι ο αριστερός τανυστής παραμόρφωσης των *Cauchy-Green*, μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο που βρίσκεται στην εξ. (4.7) ως εξής:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Phi \left( X_B^0 + \varepsilon U_B ; \eta_A \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \frac{\partial \eta_A}{\partial x_j} \delta_{iA} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial c_{kl}} \left( U_{B,k} X_{B,l}^0 + U_{B,l} X_{B,k}^0 \right) dx. \quad (4.8)$$

Ο όρος  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial c_{kl}}$  υπολογίζεται εύκολα

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial c_{lk}} = \frac{1}{2} j \left[ \mu \left( c_{ji}^{-1} c_{lk}^{-1} - c_{ik}^{-1} c_{jl}^{-1} - c_{il}^{-1} c_{jk}^{-1} \right) - \left( \mu + \lambda (1 + \ln J) \right) \delta_{ij} c_{lk}^{-1} \right], \quad (4.9)$$

όπου ο  $c^{-1}$  υπολογίζεται για τη γνώστη συνάρτηση  $\mathbf{X}^0$ . Αναλυτικά οι σχέσεις φαίνονται στο *Παράρτημα Β* (Εξ. (B.4)).

Στη συνέχεια, γίνεται η διακριτοποίηση, όπου επιλέχθηκαν τριγωνικά στοιχεία με τρεις κόμβους ανά στοιχείο. Το κάθε στοιχείο έχει δυο βαθμούς ελευθερίας εφόσον επιλύεται δισδιάστατο πρόβλημα. Το πρώτο βήμα της διακριτοποίησης είναι η εύρεση των συναρτήσεων σχήματος, για τις οποίες θα πρέπει να ισχύει:

$$N_A(x_j^i) = \begin{cases} 1, & A = i \\ 0 & A \neq i \end{cases}.$$

έτσι, οι συναρτήσεις σχήματος έχουν την ακόλουθη μορφή

$$N_1(x_j^1) = \frac{1}{2A_e} \left[ x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3) x_1^1 + (x_3 - x_2) x_2^1 \right], \quad (4.10)$$

$$N_2(x_j^2) = \frac{1}{2A_e} \left[ x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1) x_1^2 + (x_1 - x_3) x_2^2 \right], \quad (4.11)$$

$$N_3(x_j^3) = \frac{1}{2A_e} \left[ x_2 y_1 - x_1 y_2 + (y_1 - y_2) x_1^3 + (x_1 - x_2) x_2^3 \right], \quad (4.12)$$

με  $A_e$  το εμβαδό του τριγωνικού στοιχείου και ισούται με  $A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$  και  $(x_i, y_i)$  οι

συντεταγμένες του κόμβου  $i$ , για  $i=1,2,3$ .

Στο στάδιο της διακριτοποίησης, θα πρέπει να εφαρμόσουμε την ασθενή διατύπωση για ένα τυχαίο στοιχείο, έστω  $\Omega^e$ .

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial \eta_A}{\partial x_j} \delta_{iA} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial c_{kl}} (U_{B,k} X_{B,l}^0 + U_{B,l} X_{B,k}^0) dx = 0. \quad (4.13)$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι η μέθοδος *Galerkin*, οπότε ως συναρτήσεις δοκιμής, επιλέχθηκαν οι συναρτήσεις σχήματος.

$$\eta_A = \sum_{m=1}^3 a_m N_m, \quad (4.14)$$

με  $A=1,2$  αφού βρισκόμαστε στο δισδιάστατο χώρο και  $m=1,2,3$  εφόσον έχουμε τρεις κόμβους ανά στοιχείο και για τους σταθερούς συντελεστές  $a_m$ , θα επιλεγθούν οι πιο απλές τιμές  $(1,0,0)$ . Η προσεγγιστική λύση επιλέγεται ως

$$U_B = \sum_{k=1}^3 u_k^B N_k, \quad (4.15)$$

και προφανώς  $U_{B,q} = \sum_{k=1}^3 u_k^B N_{k,q}$ , με  $B=1,2$  και  $k=1,2,3$ . Για την περίπτωση  $B=1$  θα

χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό  $U_{1,q} = \sum_{k=1}^3 u_k N_{k,q}$ , ενώ για  $B=2$ , το συμβολισμό

$$U_{2,q} = \sum_{k=1}^3 v_k N_{k,q}.$$

Χάριν ευκολίας, από το σημείο αυτό και μετά για  $x_1$  θα χρησιμοποιούμε το  $x$ , ενώ για το  $x_2$  το  $y$ . Τελικά, εισάγοντας την προσεγγιστική λύση (4.15) στην γραμμικοποιημένη εξίσωση (4.7) για  $A=1$  και  $B=1,2$ , προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση:



Στις Εξ.(4.16) και (4.17) με ανάπτυξη των  $m$  και  $k$ , και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα σε κάθε περίπτωση, προσδιορίζουμε το μητρώο στιβαρότητας (*stiffness matrix*)  $\mathbf{k}^e$ , του στοιχείου. Στο Παράρτημα Α φαίνονται αναλυτικά οι σχέσεις που δίδουν το κάθε στοιχείο του μητρώου. Το μητρώο στιβαρότητας έχει τη μορφή:

$$\mathbf{k}^e = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{G}}^T, \quad (4.18)$$

όπου,  $\mathbf{B}$  είναι ένα μητρώο  $3 \times 6$  που σχετίζεται με τις συναρτήσεις σχήματος,  $\mathbf{D}$  είναι ένα μητρώο  $3 \times 3$  που ορίζει τις ιδιότητες του υλικού και  $\tilde{\mathbf{G}}$  είναι ένα μητρώο  $6 \times 6$  που περιέχει την κλίση της αντίστροφης απεικόνισης. Οι σχέσεις που δίδουν τα μητρώα αυτά παρατίθενται στο Παράρτημα Β. Αξίζει να υπενθυμίσουμε, όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο και πλέον είναι φανερό, ότι ο τύπος που προέκυψε για το μητρώο διαφέρει με αυτόν που γνωρίζουμε για την ευθεία απεικόνιση. Στο ολοκλήρωμα, υπάρχει και ένα επιπλέον μητρώο. Το μητρώο  $\tilde{\mathbf{G}}$  που συνδέεται με την κλίση της συνάρτησης της αντίστροφης απεικόνισης.

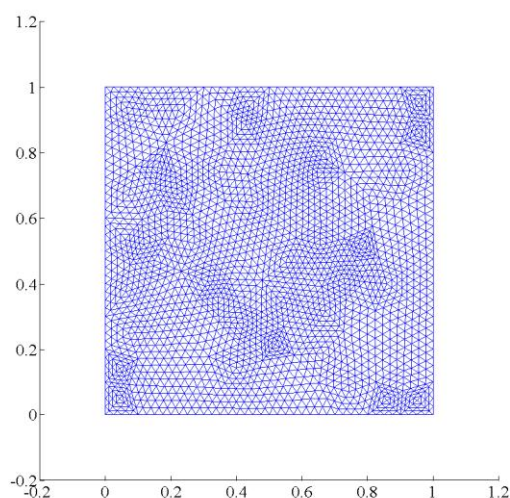
Για να υπολογιστεί το μητρώο στιβαρότητας σε όλο το χωρίο, θα πρέπει να γίνει συνάθροιση (*assembly*). Η συνάθροιση συνήθως γίνεται με χρήση κώδικα, κάτι που έγινε και στην εργασία αυτή. Έτσι, δημιουργήθηκε κώδικας για τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για το αντίστροφο πρόβλημα. Τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

#### 4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ *MATLAB*

Στο λογισμικό της *Matlab* δημιουργήθηκε κώδικας που επιλύει τα Πεπερασμένα Στοιχεία για συμπίεστα *Neo-Hookean* υλικά σε προβλήματα αντίστροφης απεικόνισης δυο διαστάσεων. Ο κώδικας Πεπερασμένων Στοιχείων για αντίστροφα προβλήματα που δημιουργήθηκε, έχει ως βάση, σπάντα κώδικα των Πεπερασμένων Στοιχείων που έχει αναπτυχθεί στο εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών της σχολής Μηχανικών Επιστήμης Υλικών στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Η εφαρμογή του κώδικα έγινε για διαφορετικό τύπο προβλημάτων ανάλογα με τη γεωμετρία και τη φόρτιση που ασκείται. Τα αποτελέσματα δίνουν την απαραμόρφωτη κατάσταση του δοκιμίου σε κάθε περίπτωση.

#### 4.2.1 Πρόβλημα επίπεδης εντατικής κατάστασης: Εφελκυσμός - Θλίψη

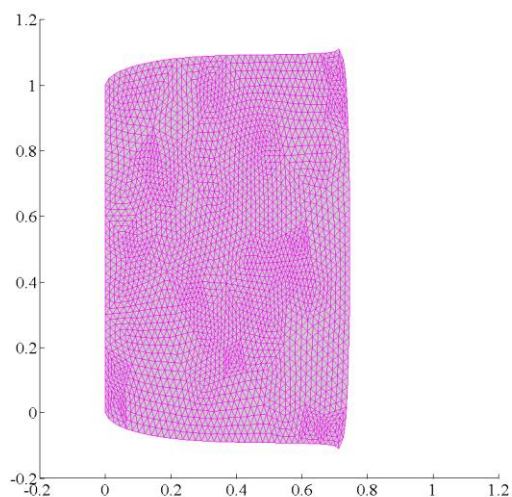
Στο πρόβλημα του εφελκυσμού που εξετάζεται, η παραμορφωμένη πλάκα έχει μήκος  $1m$ , ύψος  $1m$  και πάχος  $0.005m$ . Το υλικό απ' το οποίο είναι κατασκευασμένη η πλάκα έχει σταθερές *Lame*,  $\lambda = 7143Pa$  και  $\mu = 1786Pa$ . Στην αριστερή κατακόρυφη πλευρά, η πλάκα είναι πακτωμένη ενώ στη δεξιά, ασκείται εφελκυστικό φορτίο  $0.1N$ . Η διακριτοποίηση έγινε με το *pdetool* της *Matlab* και ο αριθμός των στοιχείων είναι 4992 ενώ ο αριθμός των κόμβων 2577. Στην Εικ. 4.1 φαίνεται το σώμα στην παραμορφωμένη κατάσταση και η διακριτοποίησή του.



Εικόνα 4.1. Διακριτοποιημένο σώμα σε παραμορφωμένη κατάσταση έπειτα από εφελκυστικό ή θλιπτικό φορτίο στη δεξιά πλευρά και πάκτωση στην αριστερή.

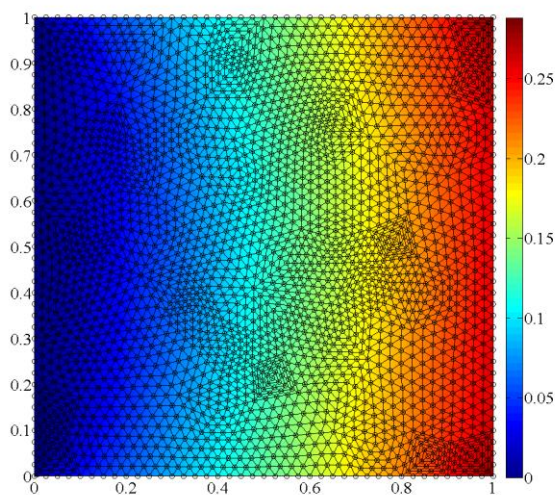
Ο κώδικας που δημιουργήθηκε στη *Matlab*, επιλύει το πρόβλημα της αντίστροφης απεικόνισης της κίνησης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Συγκεκριμένα, το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός του απαραμόρφωτου σχηματισμού. Έπειτα από την εκτέλεσή του προγράμματος για το πρόβλημα του εφελκυσμού, τα αποτελέσματα της λύσης απεικονίζονται στην Εικ.4.2, δίνοντας την απαραμόρφωτη κατάσταση, πριν την εφαρμογή του εφελκυστικού φορτίου.



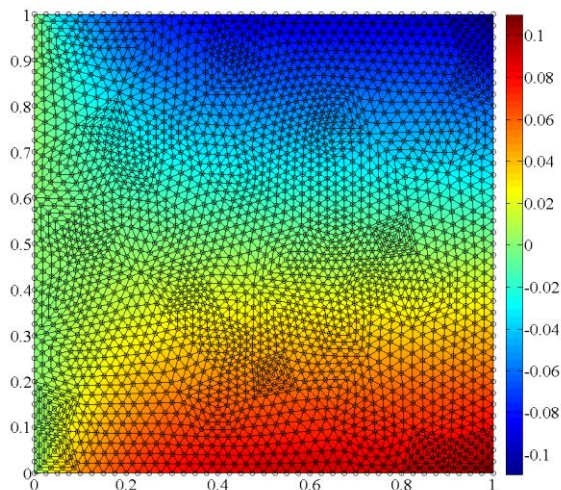


Εικόνα 4.2. Σώμα σε απαραμόρφωτη κατάσταση, πριν την εφαρμογή εφελκυστικού φορτίου.

Επιπρόσθετα, στην Εικ. 4.3 παρουσιάζεται το πεδίο μετατοπίσεων κατά τον οριζόντιο άξονα (κατεύθυνση  $x$ ), ενώ στην Εικ.4.4 απεικονίζεται το πεδίο των μετατοπίσεων κατά τον κάθετο άξονα, δηλαδή στην κατεύθυνση  $y$ .

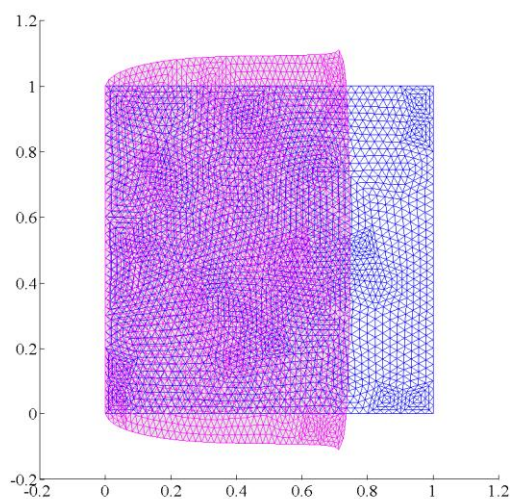


Εικόνα 4.3. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση  $x$  (οριζόντιος άξονας) κατά τον εφελκυσμό.



Εικόνα 4.4. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση  $y$  (κατακόρυφος άξονας) κατά τον εφελκυσμό.

Για την καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων, στην Εικ.4.5 φαίνονται η απαραμόρφωτη και η παραμορφωμένη κατάσταση του σώματος που υπόκειται σε εφελκυσμό. Με λευκό χρώμα εμφανίζεται ο παραμορφωμένος σχηματισμός και τα τριγωνικά στοιχεία της διακριτοποίησης έχουν χρώμα μπλε. Ενώ με γκρι-ροζ, εμφανίζεται το σώμα πριν τον εφελκυσμό, στην αρχική, απαραμόρφωτη κατάσταση.

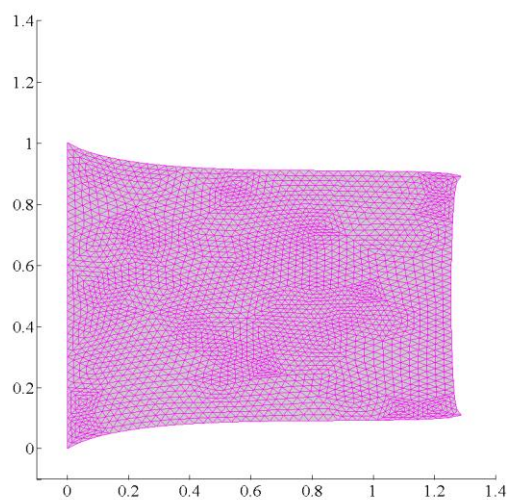


Εικόνα 4.5. Παραμορφωμένος (λευκό-μπλε) και απαραμόρφωτος σχηματισμός (γκρι-ροζ) κατά τον εφελκυσμό.

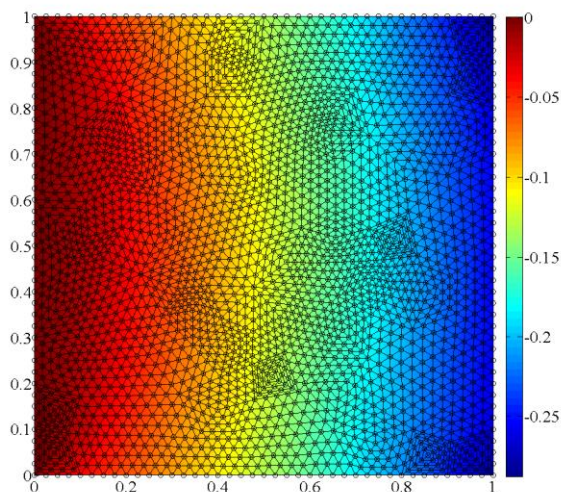
Στο πρόβλημα της θλίψης, οι διαστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και οι ιδιότητες του υλικού είναι όμοιες με αυτές του εφελκυσμού. Άρα, η παραμορφωμένη

κατάσταση απεικονίζεται στην Εικ.4.1. Η διαφορά με το πρόβλημα του εφελκυσμού είναι η φορά της δύναμης, ενώ το μέτρο της παραμένει ίδιο  $0.1N$ . Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχει πάκτωση στην αριστερή πλευρά και θλιπτικό, πλέον, φορτίο στην αριστερή.

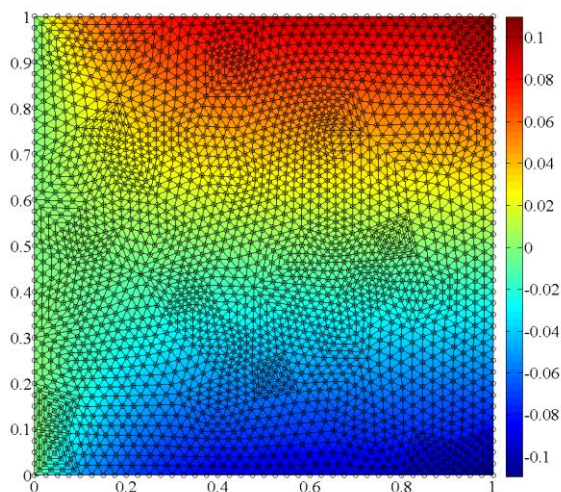
Έπειτα από την εκτέλεση του προγράμματος, η μορφή του απαραμόρφωτου δοκιμίου εμφανίζεται στην Εικ.4.6. Επιπρόσθετα στην Εικ. 4.7 παρουσιάζεται το πεδίο των μετατοπίσεων στον οριζόντιο άξονα  $x$ , ενώ στην Εικ. 4.8 το πεδίο των μετατοπίσεων στον άξονα  $y$ .



Εικόνα 4.6. Απαρμόρφωτη κατάσταση πριν την επιβολή θλιπτικού φορτίου.

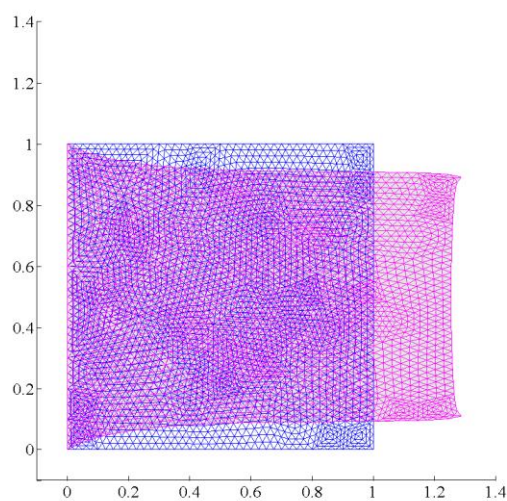


Εικόνα 4.7. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση  $x$  (οριζόντιος άξονας) κατά τη θλίψη.



Εικόνα 4.8. Πεδίο μετατοπίσεων στην κατεύθυνση  $y$  (κατακόρυφος άξονας) κατά τη θλίψη.

Τέλος, και στην περίπτωση της θλίψης, στην Εικ.4.9 παρουσιάζονται οι δυο καταστάσεις, αρχική και παραμορφωμένη, για ευκολότερη σύγκριση των αποτελεσμάτων.

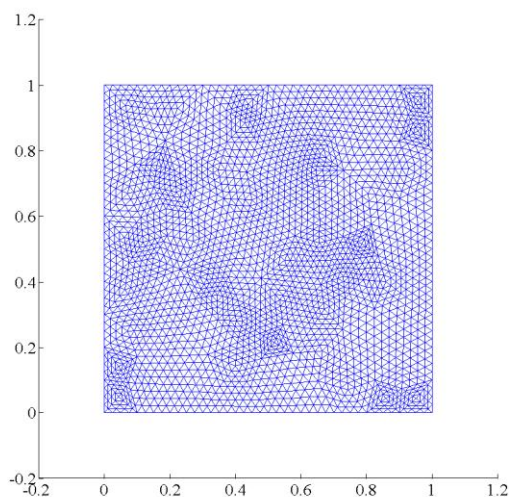


Εικόνα 4.9. Παραμορφωμένη (λευκό-μπλε) και απαραμόρφωτη κατάσταση (γκρι-ροζ) κατά τη θλίψη.

#### 4.2.2 Πρόβλημα απλής έκτασης

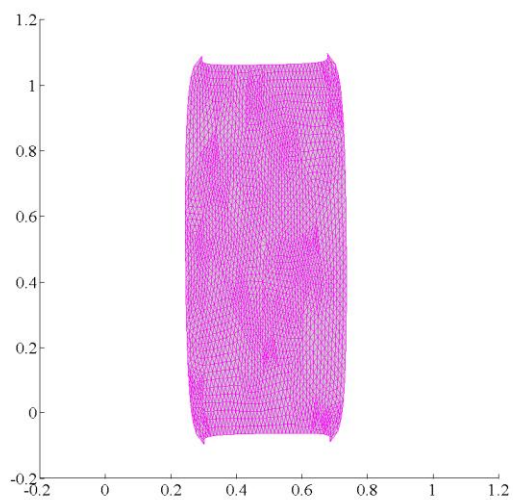
Στο παράδειγμα αυτό, μελετήθηκε ένα πρόβλημα ομοιόμορφης τάσης σε μια ορθογώνια παραμορφωμένη περιοχή, Εικ. 4.10, μήκους  $1m$  και ύψους  $1m$ . Κατά μήκος των κατακόρυφων επιφανειών επιβάλλεται εφελκυστικό φορτίο  $8000 Nm^{-1}$ . Οι ιδιότητες

του υλικού δίνονται από τις σταθερές *Lame*,  $\lambda = \frac{1000}{3} \text{MPa}$  και  $\mu = 500 \text{MPa}$ . Το πλέγμα που δημιουργήθηκε κατά τη διακριτοποίηση για την επίλυση των Πεπερασμένων Στοιχείων, αποτελείται από 2577 κόμβους και 4992 στοιχεία και φαίνεται στην Εικ.4.10.

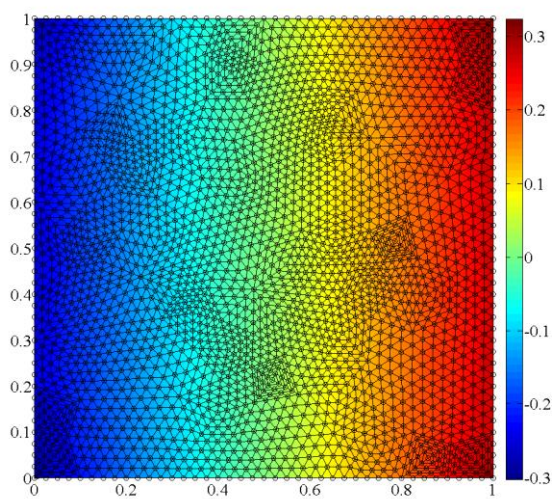


Εικόνα 4.10. Διακριτοποίηση ορθογώνιας πλάκας, στην παραμορφωμένη κατάσταση, έπειτα από εφελκυστικό φορτίο στις δυο κατακόρυφες επιφάνειες.

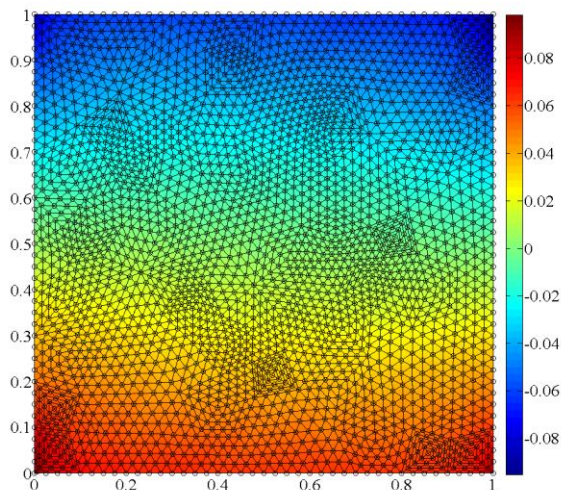
Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα στον κώδικα, προσδιορίστηκε ο απαραμόρφωτος σχηματισμός, όπως φαίνεται στην Εικ.4.11 καθώς και το πεδίο των μετατοπίσεων στους άξονες *x* και *y* στις Εικ. 4.12 και 4.13, αντίστοιχα. Εκτός από τις συνοριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν, επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε συνθήκη *Dirichlet*, ώστε το σώμα να μην μετακινείται στο χώρο. Συγκεκριμένα, σε ένα τριγωνικό στοιχείο στο κέντρο, επιβλήθηκαν μηδενικές μετατοπίσεις.



Εικόνα 4.11 Σώμα πριν την επιβολή φορτίου για την περίπτωση της απλής έκτασης.

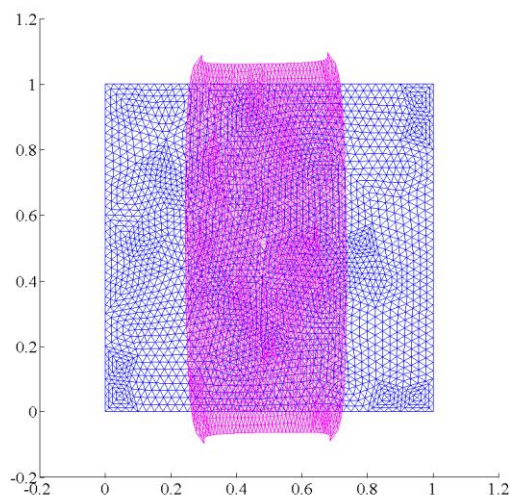


Εικόνα 4.12. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα x στην περίπτωση της απλής έκτασης.



Εικόνα 4.13. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα y κατά την απλή έκταση.

Τέλος, στην Εικ.4.14 απεικονίζονται μαζί οι δυο διαμορφώσεις, της παραμορφωμένης (λευκό-μπλε) και της απαραμόρφωτης (γκρι-ροζ).

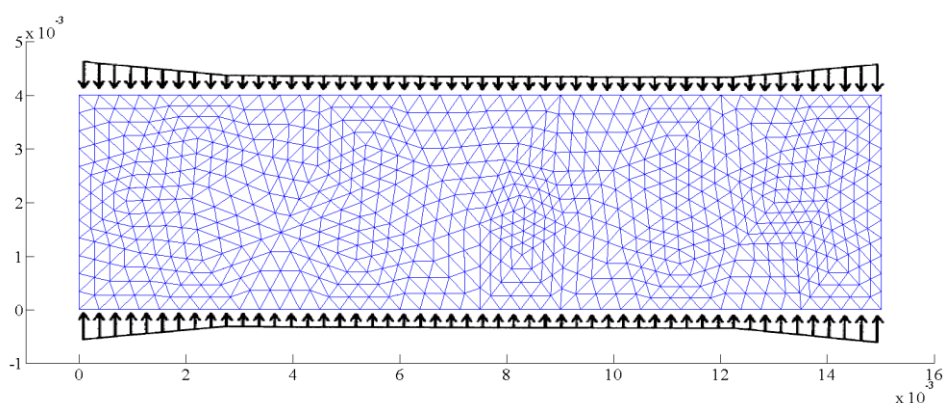


Εικόνα 4.14. Απεικόνιση παραμορφωμένης (λευκό-μπλε) και απαραμόρφωτης κατάστασης (γκρι-ροζ) στην απλή έκταση.

### 4.2.3 Πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης: Παρέμβυσμα-Φλάντζα

Τα προηγούμενα προβλήματα ήταν ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος σε αντίθεση με το πρόβλημα που επιλύεται στην ενότητα αυτή και έχει διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές. Στο παράδειγμα αυτό, εξετάστηκε ο καθορισμός του σχήματος μιας φλάντζας που έχει παραμορφωμένη ορθογώνια εγκάρσια διατομή, Εικ.4.15, μήκους  $0.015m$  και πλάτος

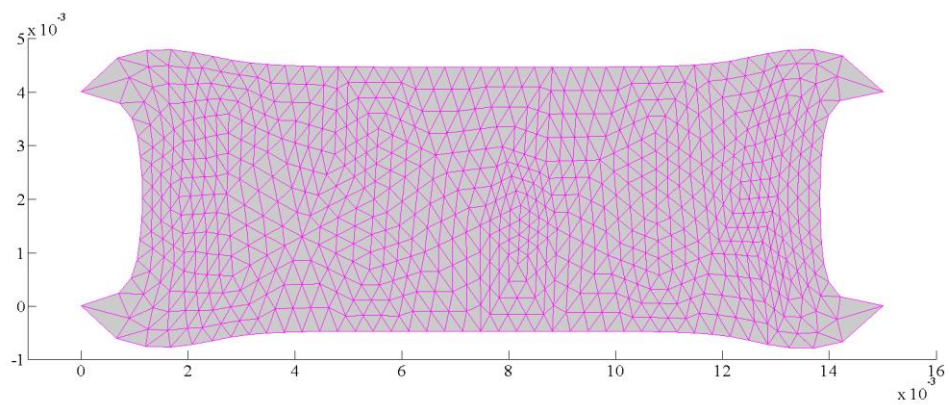
0.004m. Οι ιδιότητες του υλικού είναι  $\lambda = 7.143MPa$  και  $\mu = 1.786MPa$ . Η φλάντζα συγκρατείται κοντά στα άκρα της με μια δύναμη που αυξάνεται γραμμικά, ενώ τα πλευρικά της άκρα είναι ελευθέρων τάσεων. Τέλος, η άνω και κάτω όψη υποβάλλονται σε συνεχή φόρτιση  $0.33Nm^{-1}$  επί του κέντρου τους κατά 70%, ενώ στο 15% εξωτερικά και των δυο πλευρών, το φορτίο αυξάνεται γραμμικά μέχρι  $0.67Nm^{-1}$ . Το φορτίο που έχει επιβληθεί απεικονίζεται στην Εικ.4.15. Χρησιμοποιήθηκε πλέγμα 1440 στοιχείων με 773 κόμβους, Εικ.4.15.



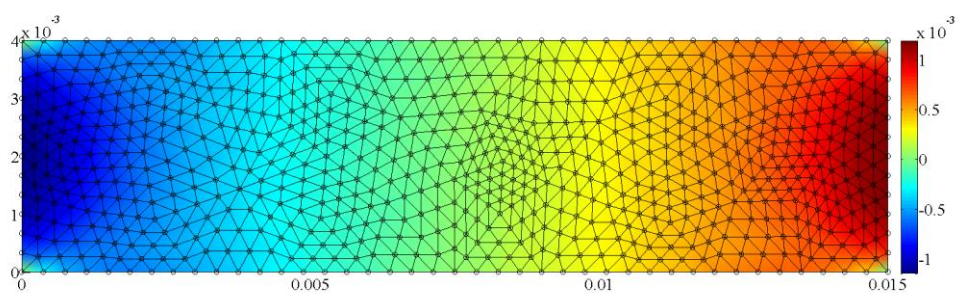
Εικόνα 4.15. Διακριτοποίηση παραμορφωμένης εγκάρσιας διατομής παρεμβύσματος.

Αφού εκτελέστηκε ο κώδικας, προσδιορίστηκε ο απαραμόρφωτος σχηματισμός της φλάντζας, Εικ.4.16, σύμφωνα με τις προδιαγραφές της φόρτισης που ορίστηκαν παραπάνω. Οι μετατοπίσεις στους άξονες  $x$  και  $y$  παρουσιάζονται στην Εικ. 4.17 και Εικ. 4.18, αντίστοιχα.

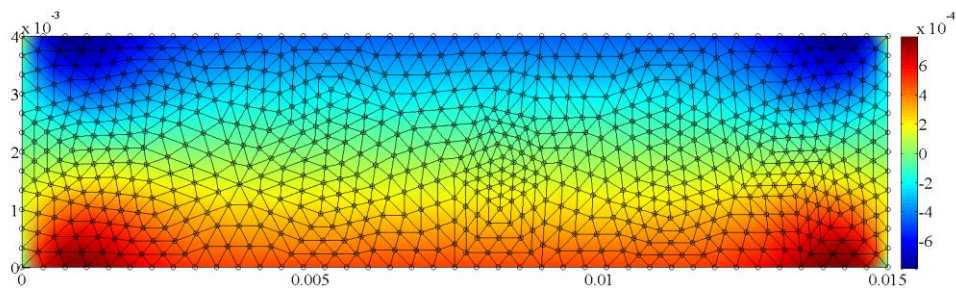




Εικόνα 4.16. Μη παραμορφωμένος σχηματισμός φλάντζας.

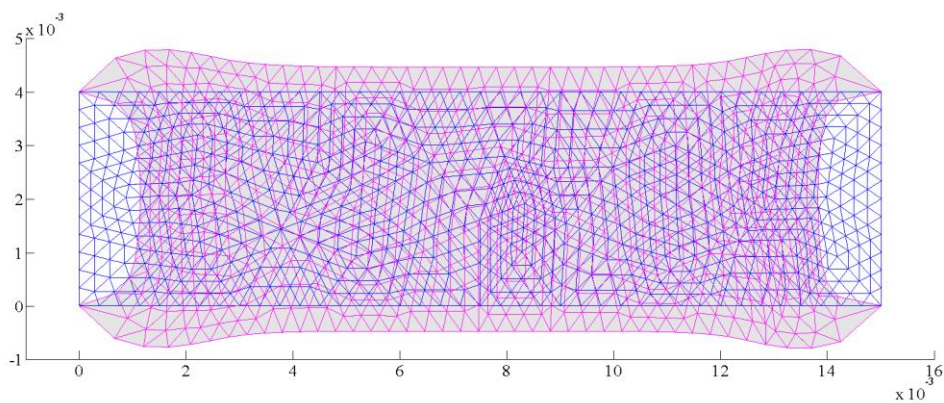


Εικόνα 4.17. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα x για την περίπτωση της φλάντζας.



Εικόνα 4.18. Πεδίο μετατοπίσεων κατά τον άξονα  $y$  για την περίπτωση της φλάντζας.

Κλείνοντας, στην Εικ. 4.19 παρουσιάζονται από κοινού οι δυο διαμορφώσεις, αρχική και παραμορφωμένη, της φλάντζας. Είναι φανερό ότι τα τριγωνικά στοιχεία του αρχικού παραμορφωμένου σχηματισμού (λευκό-μπλε) μετατοπίζονται και δημιουργούν μια καινούρια απεικόνιση (γκρι-ροζ), η οποία στο πρόβλημά μας είναι η απαραμόρφωτη.



Εικόνα 4.19. Απεικόνιση παραμορφωμένου (λευκό-μπλε) και απαραμόρφωτου σχηματισμού (γκρι-ροζ) της φλάντζας.

## Αναφορές

- [1] Αγιασοφίτου, Ε., *Παραγωγή των εξισώσεων της μηχανικής των συνδυασμένων πεδίων στον υλικό χώρο με εφαρμογές στην δυναμική θεωρία θραύσης*, Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, (2004).
- [2] Αρβανιτάκη, Α.Ι., *Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην εξίσωση ψευδορμής*, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών (2006).
- [3] Αϋφαντής, Η.Χ., *Εισαγωγή στην αντοχή των υλικών και στη μηχανική του συνεχούς*, grapholine, (2010).
- [4] Βαρδουλάκης, Ι., *Εισαγωγή στη μηχανική του συνεχούς μέσου*, Συμμετρία, Αθήνα, (2008).
- [5] Καλπακίδης, Β.Κ., *Σημειώσεις "Υπολογιστικές Μέθοδοι του Συνεχούς"*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, (2009)
- [6] Μπαλασά, Κ.Γ., *Αξιοποίηση εννοιών από τη μηχανική του υλικού χώρου για υπολογισμούς στην μηχανική του συνεχούς*, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών (2005).
- [7] Σφυρής, Δ., *Εφαρμογή εννοιών από την υλική μηχανική των Eshelby και Maugin στην μη-γραμμική θεωρία συνεχών κατανεμημένων εξαρθρώσεων*, Διδακτορική διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, (2007).
- [8] Agiasofitou, E.K, Kalpakides, V.K, *The concept of a balance law for a cracked elastic body and the configurational force and moment at the crack tip*, Int. J. Engng.Sci, (2006).
- [9] Ananda, L., Gurtin, M.E., *Thermal effects in the superelasticity of crystalline shape-memory materials*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **51**, 1015–1058, (2003).
- [10] Chadwick, R., *Application of an energy-momentum tensor in non-linear elastostatics*, J. Elasticity, **5**, 249-258, (1975).
- [11] Cleja-Tigoiu, S., *Couple stresses and non-Riwmannian plastic connection in finite elastoplasticity*, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, **53**, 996-1013, (2002).
- [12] Cleja-Tigoiu, S., Maugin, G.A, *Eshelby's stress tensor in finite elastoplasticity*, Acta Mechanica, **139**, 231-249, (2000).
- [13] Coleman, B.D., Noll, W., *The thermodynamics of elastic materials with heat*

- conduction and viscosity*, Archives for Rational Mechanics and Analysis, **13**, 167-178, (1963).
- [14] Dascalu, C., Maguin, G.A., *The Thermoelastic Material-momentum Equation*, *J. Elasticity*, **39**, 201-212, (1995).
- [15] Epstein, M., Maugin, G.A., *Some geometrical aspects of inhomogeneous elasticity*, In: Analysis, Manifolds and Physics. Ed., M. Flato, R. Kerner, A. Lichnerowicz, Amsterdam, (1992).
- [16] Epstein, M., Maugin, G. A., *On the geometrical structure of anelasticity*, *Acta Mech*, **115**, 119-131, (1996).
- [17] Ericksen, J.L., *Remarks concerning forces on line defects*. *Z. Angew. Math. Phys*, **46** (special issue), S247-S271, (1995).
- [18] Ericksen, J.L., *On nonlinear elasticity theory for crystal defects*, *International Journal of Plasticity*, **14**, 9-24, (1998).
- [19] Eshelby, J.D., *The force on an elastic singularity*, *Philosophical Transactions of the Royal Society London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **244**, No. 877, 87-112, (1951).
- [20] Eshelby, J.D., *The continuum theory of lattice defects*, In: *Progress in Solid State Physics, Advances in Research and Applications*, Vol. III. Eds, F. Seitz, D. Turnbull, Academic press, New York, pp. 79-144, (1956).
- [21] Eshelby, J.D., *The elastic energy-momentum tensor*, *Journal of Elasticity*, **5**, 321-335, (1975).
- [22] Fedelich, B., *The glide force on a dislocation in finite elasticity*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **52**, 215-247, (2004).
- [23] Fletcher, D.C., *Conservation Laws in Linear Elastodynamics*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **60**, 329-353, (1976).
- [24] Francfort, G., Golebiewska-Herrmann, A., *A contour Integral and an Energy-release rate in Thermoelasticity*, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, 759-766, (1986).
- [25] Freund, L.B., *On the stability of a biaxially stressed elastic material with a free surface under variations in surface shape*, *ZAMP* 46 S 185-S 200, (1995).
- [26] Gao, H., *Stress concentration at slightly undulating surfaces*, *J. Mech. Phys. Solids*, **39**, 443-458, (1991).
- [27] Golebiewska-Herrmann, A., *On conservation laws of continuum mechanics*, *International Journal of Solids and Structures*, **17**, 1-9, (1981).

- [28] Golebiewska-Herrmann, A., *Material momentum tensor and path-independent integral in material mechanics*, International Journal of Solids and Structures, **18**, 319-326, (1982).
- [29] Golebiewska-Herrmann, A., Herrmann, G., *Influence of boundaries on energy changes in deformable solids*, Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems in Energy Engineering, Argonne National Laboratory, pp. 143-148, (1983).
- [30] Govindjee, S., Mihalic, P.A., *Computational methods for inverse finite elastostatics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng, **136**, 47-57, (1996).
- [31] Gross, D., Kolling, St., Mueller, R., Schmidt I., *Configurational forces and their application in solid mechanics*, European Journal of Mechanics A/Solids, **22**, 669–692, (2003).
- [32] Gurtin, M.E., *On thermomechanical laws for the motion of a phase interphase*, ZAMP 42,370-388, (1991).
- [33] Gurtin, M.E., *On the nature of configurational forces*, Arch. Rational Mech. Anal, **131**, 67-100, (1995).
- [34] Gurtin, M.E., *Configurational forces as basic concepts of continuum physics*, Applied Mathematical Sciences, 137, Springer, (2000).
- [35] Herrmann, G., *Micromechanics: some basic methods and current trends*, In: Micromechanics of concrete and cementitious composites (Huet, C., ed.), pp. 1-18. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes Lausanne, (1993).
- [36] Kalpakides, V.K., Dascalu, C., *On the configurational force balance in thermomechanics*, Proc. R. Soc. Lond. A, **458**, 3023-3039, (2002).
- [37] Kalpakides, V.K., Maugin G.A., *A Hamiltonian formulation for elasticity and thermoelasticity*, Journal Physics A: Mathematics and General, **35**, 10775-10788, (2002).
- [38] Kalpakides, V.K., Agiasofitou E.K., *On material equations in second gradient electroelasticity*, Journal of Elasticity, **67**, 205-227, (2002).
- [39] Kalpakides, V.K., Agiasofitou E.K., *Configurational balance laws for dynamical fracture*, Theor, Appl. Mech, 28-29, 205-219, (2002).
- [40] Kalpakides, V.K., Maugin, G.A., *Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation*, Reports on Mathematical Physics, **53**, 371-391, (2004).
- [41] Kalpakides, V.K., Maugin, G.A., *Configurational Mechanics*, Eds Balkema, Leiden,

- (2004).
- [42] Kalpakides, V.K., Balassas, K.G., *The inverse deformation mapping in the finite element method*, Philosophical Magazine, Vol. 85, Nos. 33–35, 4257–4275, (2005).
  - [43] Kalpakides, V. K., Balassas, K. G., *The equilibrium of material forces in a 1D phase transition problem*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., **196**, 2161–2172, (2006)
  - [44] Kalpakides, V. K., Balassas, K. G., Massalas, C. V., *Material forces and phase transitions in elasticity*, Arch Appl. Mech., **77**, 135–146, (2007).
  - [45] Kienzler, R., Herrmann, G., *On the properties of the Eshelby tensor. Stanford*, Acta Mechanica, **125**, 73-91, (1997).
  - [46] Kienzler, R., Herrmann, G., *Mechanics in material space: with applications to defect and fracture mechanics*, Springer Berlin Heidelberg, Germany, (2000).
  - [47] Lu, J., Papadopoulos, P., *A covariant constitutive description of anisotropic nonlinear elasticity*, Z. Angew. Math. Phys., **51**, 204-217, (2000).
  - [48] Lu, J., Papadopoulos, P., *Referential Doyle-Ericksen formulae for the Eshelby tensor in nonlinear elasticity*, Z. Angew. Math. Phys., **54**, 964-976, (2003).
  - [49] Lu, J., Papadopoulos, P., *A covariant formulation of anisotropic finite plasticity: theoretical developments*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, **193**, 5339-5358, (2004).
  - [50] Luenberger, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Willey, New York, p. 171, (1969).
  - [51] Marsden, J.E., Hughes, T.J.R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, New Jersey, (1983).
  - [52] Maugin, G.A., *Sur la conservation de la pseudo-quantite de mouvement mecanique et electrodynamique des milieux continus*, Comptes Rendus de la Academie Science Paris II-311, 763-768 (1990).
  - [53] Maugin, G.A., *Material inhomogeneities in elasticity*, Applied Mathematics and Mathematical Computation, Chapman and Hall, (1993).
  - [54] Maugin, G.A., *On the J-integral and energy-release rate in dynamical fracture*, Acta Mech, **105**, 33-47, (1994).
  - [55] Maugin, G.A., *Material forces concepts and applications*, Appl. Mech., Rev, **48**, 213-245, (1995).
  - [56] Maugin, G.A., *Configurational Forces*, CRC, Paris, (2010).
  - [57] Maugin, G.A., Trimarco, C., *Pseudo-quantite de mouvement et milieux elastiques*

- inhomogenes*, Comptes Rendus de la Academie Science Paris, II-313, 851-856, (1991).
- [58] Maugin, G.A., Trimarco, C., *Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity: variational formulation and application to brittle fracture*, ActaMechanica **94**, 1-28, (1992).
- [59] Maugin, G.A., Trimarco, C., *Dissipation of configurational forces in defective elastic solids*, Arch. Mech., **47**, 81-99, (1995).
- [60] Maugin G.A., Trimarco C., *Elements of Field Theory in Inhomogeneous and Defective Materials*, Udine, (2000).
- [61] Mura, T., *Micromechanics of defects in solids*, 2nd ed. Dordrecht, Kluwer, (1991).
- [62] Noll, W., *A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media*, Archives for Rational Mechanics and Analysis 2, 197-226, (1958).
- [63] Noll, W., *The foundation of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics*, In: The foundation of Mechanics and thermodynamics: Selected papers by Walter Noll, Springer Verlag, pp., 32-47 ,(1974).
- [64] Podio-Guidugli, P., *Configurational balances via variational arguments*, Interfaces and Free Boundaries, **3**, 223-232, (2001).
- [65] Podio-Guidugli, P., *Configurational forces: are they needed?*, Mechanics Research Communications, **29**, 513–519, (2002).
- [66] Rice, J. R., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks*, ASME J. Appl. Mech., **35**, 379-386, (1968).
- [67] Rogula, D., *Forces in material space*, Archives of Mechanics, **29**, 705-713, (1977).
- [68] Schmidt, I., Gross, D., *A strategy for determining the equilibrium shape of an inclusion*, Arch. Mech., **47**, 379-390, (1995).
- [69] Sfyris, D., Charalambakis, N., Kalpakides, V.K., *Variational Arguments and Noether's Theorem on the Nonlinear Continuum Theory of Dislocations*, International Journal of Engineering Science, **44**, 501-512, (2006).
- [70] Sfyris, D., Charalambakis, N., Kalpakides, V.K., *On the force acting on dislocations within nonlinear elastostatics*, In: Nonsmooth/nonconvex mechanics with applications in engineering, Ed: Baniotopoulos, C.C., Ziti, pp., 29-36, (2006).
- [71] Sfyris, D., Charalambakis, N., Kalpakides, V.K., *Derivation of material momentum equation from energy balance*, Z. angew. Math. Phys., **60**, 575–579, (2009).
- [72] Sfyris, D., Charalambakis, N., Kalpakides, V.K., *On a dynamical theory of*

*dislocations,*

- [73] Shield, R.T., *Inverse deformation results in finite elasticity*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, **18**, 490-500, (1967).
- [74] Steinmann, P., *Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics*, Part I: continuum mechanical setting, International Journal of Solids and Structures, **37**, 7371-7391, (2000).
- [75] Steinmann, P. *On spatial and material settings of hyperelastostatic crystal defects*, Journal of the Mechanics and Physics Solids, **50**, 1743-1766, (2002).
- [76] Steinmann, P., *On spatial and material settings of thermo-hyperelastodynamics*, Journal of Elasticity, **66**, 109-157, (2002).
- [77] Steinmann, P., Ackermann, D., Barth, F.J., *Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics*, Part II: computational setting, International Journal of Solids and Structures, **38**, 5509-5526, (2001).
- [78] Svendsen, B., *A thermodynamic formulation of finite deformation elastoplasticity with hardening based on the concept of material isomorphism*, International Journal of Plasticity, **14**, 473-488, (1998).
- [79] Svendsen, B., *On the modelling of anisotropic elastic and inelastic material behaviour at large deformation*, International Journal of Solids and Structures, **38**, 9579-9599, (2001).
- [80] Yavari, A., Marsden, J.E., Ortiz, M., *On spatial and material covariant balance laws in elasticity*, Journal of Mathematical Physics, **47**, 1-53, (2006).
- [81] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., *Finite Element Method - The Basis*, (1999).
- [82] Zorski, H., *Force on a defect in non-linear elastic medium*. International Journal of Engineering Science. **19**, 1573-1579, (1981).



## Παράρτημα Α

Μητρώο  $\mathbf{k}^e$  όπως προκύπτει από τη διακριτοποίηση με τη μέθοδο *Galerkin*

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

Με τα στοιχεία του μητρώου να υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$k_{11} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] + \quad (\text{A.2.1})$$

$$k_{12} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] + \quad (\text{A.2.2})$$

$$k_{13} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.3})$$

$$k_{14} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.4})$$

$$k_{15} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.5})$$

$$k_{16} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.6})$$

$$k_{21} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & (y_2 - y_3)(x_3 - x_2) \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 + \\ & + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \end{aligned} \right) + \\ & (x_3 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.7})$$

$$k_{22} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & (y_2 - y_3)(x_3 - x_2) \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 + \\ & + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \end{aligned} \right) + \\ & (x_3 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.8})$$

$$k_{23} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.9})$$

$$k_{24} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.10})$$

$$k_{25} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.11})$$

$$k_{26} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.12})$$

$$k_{31} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.13})$$

$$k_{32} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 v_k + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.14})$$

$$k_{33} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.15})$$

$$k_{34} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_3) \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 + \\ & + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \end{aligned} \right) + \\ & + (x_1 - x_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.16})$$

$$k_{35} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.17})$$

$$k_{36} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.18})$$

$$k_{41} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.19})$$

$$k_{42} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.20})$$

$$k_{43} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_3) \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 + \\ & + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \end{aligned} \right) + \\ & + (x_1 - x_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.21})$$

$$k_{44} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_3) \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 + \\ & + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \end{aligned} \right) + \\ & + (x_1 - x_3)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.22})$$

$$k_{45} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.23})$$

$$k_{46} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.24})$$

$$k_{51} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.25})$$



$$k_{52} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.26})$$

$$k_{53} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.27})$$

$$k_{54} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.28})$$

$$k_{55} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_1 - y_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] + \quad (\text{A.2.29})$$

$$k_{56} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_1 - y_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] + \quad (\text{A.2.30})$$

$$k_{61} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] + \quad (\text{A.2.31})$$

$$k_{62} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] + \quad (\text{A.2.32})$$

$$k_{63} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.33})$$

$$k_{64} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) + \\ & + (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.34})$$

$$k_{65} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_1 - y_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{1,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,2}^0 + \\ & + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \end{aligned} \right) + \\ & + (x_1 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{1,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{1,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.35})$$

$$k_{66} = \frac{1}{2A_e} \left[ \begin{aligned} & (y_1 - y_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 \right) + \\ & + (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} X_{2,1}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,2}^0 + \\ & + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \end{aligned} \right) + \\ & + (x_1 - x_2)^2 \left( \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} X_{2,2}^0 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} X_{2,1}^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.2.36})$$

Παράρτημα Β

Για δισδιάστατο πρόβλημα

$$k^e = \int B^T D B \tilde{G}^T$$

Μητρώο  $B$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad (B.1)$$

και οι παράγωγοι των συναρτήσεων σχήματος

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{y_2 - y_3}{2A_e}, & \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{y_3 - y_1}{2A_e}, & \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{y_1 - y_2}{2A_e} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{x_3 - x_2}{2A_e}, & \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{x_1 - x_3}{2A_e}, & \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{x_1 - x_2}{2A_e} \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$B = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_1 - x_2 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Μητρώο } D = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial c_{lk}}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

και τα στοιχεία του αναλυτικά προκύπτουν

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{11}} = -\frac{j}{2}(x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2) \left[ \mu(x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2) + \mu + \lambda(1 + \ln J) \right] \quad (\text{B.4.1})$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{22}} = \frac{j}{2} \left[ \mu \left[ (x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2)(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2) - 2(x_{1,1}x_{2,1} + x_{1,2}x_{2,2})^2 \right] - \left[ \mu + \lambda(1 + \ln J) \right] (x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2) \right] \quad (\text{B.4.2})$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial c_{12}} = -\frac{j}{2}(x_{1,1}x_{2,1} + x_{1,2}x_{2,2}) \left[ \mu(x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2) + \mu + \lambda(1 + \ln J) \right] \quad (\text{B.4.3})$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{11}} = \frac{j}{2} \left[ \mu(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2)(x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2) - 2(x_{1,1}x_{2,1}x_{1,2}x_{2,2})^2 - \left[ \mu + \lambda(1 + \ln J) \right] (x_{1,1}^2x_{1,2}^2) \right] \quad (\text{B.4.4})$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{22}} = -\frac{j}{2}(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2) \left[ \mu(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2) + \mu + \lambda(1 + \ln J) \right] \quad (\text{B.4.5})$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial c_{12}} = -\frac{j}{2}(x_{1,1}x_{2,1} + x_{1,2}x_{2,2}) \left[ \mu(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2) + \mu + \lambda(1 + \ln J) \right] \quad (\text{B.4.6})$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{11}} = -\frac{j}{2} \mu(x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2)(x_{1,1}x_{2,1} + x_{1,2}x_{2,2}) \quad (\text{B.4.7})$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{22}} = -\frac{j}{2} \mu(x_{1,1}x_{2,1} + x_{1,2}x_{2,2})(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2) \quad (\text{B.4.8})$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial c_{12}} = -\frac{j}{2} \mu(x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2)(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2) \quad (\text{B.4.9})$$

$$J = \det \mathbf{F} = x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}, \quad (\text{B.5})$$

$$j = \det \mathbf{G} = \frac{1}{J} = \frac{1}{x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}} = X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1}. \quad (\text{B.6})$$

Μητρώο  $\tilde{\mathbf{G}}$ :

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} X_{1,1}^0 & X_{1,2}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{2,1}^0 & X_{2,2}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{1,1}^0 & X_{1,2}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{2,1}^0 & X_{2,2}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{1,1}^0 & X_{1,2}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{2,1}^0 & X_{2,2}^0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$