ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΑΣΛΑΝΙΔΟΥ

ΘΕΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2016

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Ανάλυση - Άλγεβρα - Γεωμετρία)”

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την **20η Μαΐου 2016** από την Εξεταστική Επιτροπή:

Κυριάκος Γ. Μαυρίδης (Επιβλέπων)	:	Λέκτορας
Γεώργιος Λ. Καρακώστας	:	Καθηγητής
Ιωάννης Πουρναράς	:	Αναπληρωτής Καθηγητής

Όλα τα μέλη της επιτροπής ανήκουν στο ακαδημαϊκό προσωπικό του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Αφιερώνω αυτή τη διατριβή στους γονείς μου,
Γεώργιο και Χαρίκλεια, για την υποστήριξή τους.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Κυριάκο Μαυρίδη για την ουσιαστική και συνεχή συνδρομή, την αδιάλειπτη επιστημονική καθοδήγηση καθώς και για το πραγματικό ενδιαφέρον που επέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής.

Επίσης, ευχαριστώ τον καθηγητή Γεώργιο Καρακώστα και τον αναπληρωτή καθηγητή Ιωάννη Πουρναρά για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους, οι οποίες συνέβαλαν στην άρτια παρουσίαση την διατριβής.

Τέλος, ευχαριστώ τον Τομέα Μαθηματικής Ανάλυσης του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την δυνατότητα που μου παρείχε για την εκπόνηση αυτής της διατριβής.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες συναρτησιακής ανάλυσης

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε ορισμένες έννοιες από τη Συναρτησιακή Ανάλυση, τις οποίες χρειαζόμαστε στη συνέχεια.

Σημείωση 1.1. Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών. Επιπλέον συμβολίζουμε με (E, d) το μετρικό χώρο που αποτελείται από το σύνολο E και τη μετρική d, με $C(A, B)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το B, με $BC(A, B)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των φραγμένων συναρτήσεων που ανήκουν στο $C(A, B)$, και με $C^2(A, B)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το B. Επίσης, θεωρούμε τη στάθμη $\|\cdot\|_A$, που κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούμε παρακάτω, σύμφωνα με τον τύπο

$$\|x\|_A := \sup_{s\in A} |x(s)|.$$

Ορισμός 1.2 ([89])**.** Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα μετρικό χώρο (E, d) ονομάζεται ***βασική ακολουθία ή ακολουθία του Cauchy*** (Cauchy sequence) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0(\epsilon)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $d(x_n, x_m) < \epsilon$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n, m \geq n_0(\epsilon)$.

Ορισμός 1.3 ([89])**.** Ένας μετρικός χώρος (E, d) ονομάζεται ***πλήρης*** (complete) αν κάθε βασική ακολουθία στοιχείων του E συγκλίνει εντός του E.

Ορισμός 1.4 ([74])**.** Ας είναι (E, d) ένας μετρικός χώρος και $X \subseteq E$. ***Κάλυψη*** (cover) $\mathcal{C}$ του συνόλου X ονομάζεται μια συλλογή υποσυνόλων του E, τέτοια ώστε $X \subseteq \cup\mathcal{C}$.

Ορισμός 1.5 ([74])**.** Μια συλλογή συνόλων $\mathcal{A}$ ονομάζεται ***υποκάλυψη*** (subcover) μιας κάλυψης $\mathcal{C}$ του (E, d) αν η $\mathcal{A}$ είναι κάλυψη του E και επιπλέον $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

Ορισμός 1.6 ([74])**.** Έστω S υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (E, d). Μια κάλυψη $\mathcal{C}$ του S ονομάζεται ***ανοιχτή*** (open) στον E αν κάθε $A \in \mathcal{C}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του E.

Ορισμός 1.7 ([74])**.** Ας είναι (E,d) ένας μετρικός χώρος και $X \subseteq E$. Το σύνολο X ονομάζεται ***συμπαγές*** (compact) αν κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Ορισμός 1.8 ([47])**.** ***Σταθμητός διανυσματικός χώρος*** (normed vector space) $(E, \|\cdot\|)$ ονομάζεται ένας διανυσματικός χώρος E εφοδιασμένος με μια στάθμη $\|\cdot\|$.

Ορισμός 1.9 ([89])**.** Ένας πλήρης σταθμητός διανυσματικός χώρος ονομάζεται ***χώρος Banach*** (Banach space).

Σημείωση 1.10 ([89])**.** Επισημαίνουμε ότι ο χώρος $C(A,\mathbb{R})$ είναι χώρος Banach εφοδιασμένος με τη στάθμη $\|\cdot\|_A$. Ακόμη, ο χώρος $BC([0,+\infty),\mathbb{R})$ είναι ένας χώρος Banach εφοδιασμένος με τη στάθμη $\|\cdot\|_{[0,+\infty)}$.

Ορισμός 1.11 ([89])**.** Υποθέτουμε ότι E είναι ένας μετρικός χώρος και $r : E \to X$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $X \subseteq E$. Η συνάρτηση r καλείται retraction αν και μόνο αν $r(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο X ονομάζεται retract του E.

Ορισμός 1.12 ([89])**.** Ένα υποσύνολο X ενός διανυσματικού χώρου E ονομάζεται ***κυρτό*** (convex) αν για τυχόντα $x, y \in X$ και τυχόν $t \in [0,1]$ ισχύει ότι $tx+(1-t)y \in X$.

Ορισμός 1.13 ([89])**.** Ένα υποσύνολο X ενός μετρικού χώρου E ονομάζεται ***σχετικά συμπαγές*** ή ***προσυμπαγές*** (relatively compact ή precompact) αν η θήκη (closure) $\overline{X}$ του X είναι συμπαγές σύνολο.

Ορισμός 1.14 ([39])**.** Η συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται ***πλήρως συνεχής*** (completely continuous) αν είναι συνεχής και για κάθε φραγμένο υποσύνολο S του X το σύνολο $f(S)$ είναι σχετικά συμπαγές.

Σημείωση 1.15. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$. Αν το σύνολο $f(X)$ είναι σχετικά συμπαγές σύνολο, τότε η εικόνα οποιουδήποτε φραγμένου υποσυνόλου του X είναι επίσης σχετικά συμπαγές σύνολο, επομένως η συνάρτηση f είναι πλήρως συνεχής.

Ορισμός 1.16 ([89])**.** Έστω E ένας χώρος Banach. ***Κώνος*** (cone) εντός του E ονομάζεται ένα μη κενό και κλειστό σύνολο $K \subseteq E$ τέτοιο ώστε

(i) $\kappa u + \lambda v \in K$, για όλα τα $u, v \in K$ και όλα τα $\kappa, \lambda \geq 0$

(ii) $u, -u \in K$ συνεπάγεται $u = 0$.

Ορισμός 1.17 ([67])**.** Έστω E ένας χώρος Banach, K ένας κώνος στο E και $\alpha : K \to [0,+\infty)$ μια απεικόνιση. Η α λέγεται ***κοίλο θετικό συναρτησοειδές*** (concave positive functional) αν

- η α είναι συνεχής, και
- $\alpha(\lambda x+(1-\lambda y)) \geq \lambda\alpha(x)+(1-\lambda)\alpha(y)$, για όλα τα $x, y \in K$ και όλα τα $\lambda \in [0,1]$.

Ομοίως, έστω E ένας χώρος Banach, K ένας κώνος στο E και $\beta : K \to [0, +\infty)$ μια απεικόνιση. Η β λέγεται ***κυρτό θετικό συναρτησοειδές*** (convex positive functional) αν

- η β είναι συνεχής, και
- $\beta(\lambda x + (1-\lambda y)) \leq \lambda\beta(x) + (1-\lambda)\beta(y)$, για όλα τα $x, y \in K$ και όλα τα $\lambda \in [0, 1]$.

Ορισμός 1.18 **([52]).** Έστω (E, d) ένας μετρικός χώρος, $X \subseteq E$, I ένα σύνολο δεικτών και $(f_a)_{a\in I}$ μια οικογένεια συναρτήσεων ορισμένων στο X. Η οικογένεια $(f_a)_{a\in I}$ ονομάζεται ***ομοιόμορφα φραγμένη*** (uniformly bounded) αν υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $|f_a(x)| \leq c$ για όλα τα $x \in X$ και όλα τα $a \in I$.

Ορισμός 1.19 **([52]).** Έστω (E, d) ένας μετρικός χώρος, $X \subseteq E$, I ένα σύνολο δεικτών και $(f_a)_{a\in I}$ μια οικογένεια συναρτήσεων ορισμένων στο X. Η οικογένεια $(f_a)_{a\in I}$ ονομάζεται ***ισοσυνεχής*** (equicontinuous) αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ και όλα τα $a \in I$, ισχύει ότι $|f_a(x) - f_a(y)| < \epsilon$.

Ορισμός 1.20 **([11]).** Έστω U ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων, οι οποίες είναι ορισμένες στο $[0, +\infty)$. Το σύνολο U ονομάζεται ***ισοσυγκλίνον*** (equiconvergent) στο $+\infty$ αν όλες οι συναρτήσεις που ανήκουν στο U συγκλίνουν εντός του $\mathbb{R}$ όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τους τείνει στο $+\infty$ και, επιπλέον, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $T \equiv T(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε, για όλες τις συναρτήσεις u που ανήκουν στο U, ισχύει $|u(t) - lim_{s\to+\infty}u(s)| < \epsilon$ για όλα τα $t \geq T$.

Ορισμός 1.21 **([72]).** Έστω K ένας κώνος σε ένα χώρο Banach E. Ένα συναρτησοειδές $\alpha : K \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ***αύξον*** (increasing) στο K αν $\alpha(x) \leq \alpha(y)$, για κάθε $x, y \in K$ με $x \lesssim y$, όπου με $\lesssim$ συμβολίζουμε τη μερική διάταξη που επάγεται στο χώρο Banach από τον κώνο K, δηλαδή

$$x \lesssim y \ \text{ αν και μόνο αν } \ y - x \in K.$$

Ορισμός 1.22 **([67]).** Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και $f, g \in C(I, \mathbb{R})$. Ορίζουμε τη σχέση $\preceq$ ως

$$f \preceq g \quad \text{αν και μόνο αν} \quad f(t) \leq g(t), \text{ για κάθε } t \in I$$

και τη σχέση $\prec$ ως

$$f \prec g \quad \text{αν και μόνο αν} \quad f(t) < g(t), \text{ για κάθε } t \in I.$$

Ορισμός 1.23 **([67]).** Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και $A \in C(C(I, \mathbb{R}), C(I, \mathbb{R}))$. Λέμε ότι ο τελεστής A ικανοποιεί την

- ιδιότητα $(P1)$ αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in C(I, \mathbb{R})$ και για κάθε $t \in [0, 1]$, ισχύει
$$(1-t)A(x) + tA(y) \preceq A((1-t)x + ty).$$
- ιδιότητα $(P2)$ αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in C(I, \mathbb{R})$ και για κάθε $t \in [0, 1]$, ισχύει
$$A((1-t)x + ty) \preceq (1-t)A(x) + tA(y).$$

- ιδιότητα $(P3)$ αν και μόνο αν

$$Ax(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in C(I, \mathbb{R}) \text{ και για κάθε } t \in [0,1].$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ένας τελεστής είναι πλήρως συνεχής χρησιμοποιούμε κατά περίπτωση τα επόμενα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 1.24 (Arzela-Ascoli [52]). *Ας είναι X, Ω μετρικοί χώροι, Y ένα συμπαγές υποσύνολο του X και $\mathcal{M}$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο Y με τιμές στο Ω, δηλαδή $\mathcal{M} \subseteq C(Y, \Omega)$. Η οικογένεια $\mathcal{M}$ είναι σχετικά συμπαγής στο $C(Y, \Omega)$ αν και μόνο αν η $\mathcal{M}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής.*

Θεώρημα 1.25 (Avramescu [11]). *Ας είναι E ένας χώρος συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι ο E είναι χώρος Banach και επίσης ότι U είναι ένα ισοσυνεχές και ομοιόμορφα φραγμένο υποσύνολο του E. Αν το U είναι ισοσυγκλίνον στο $+\infty$ τότε είναι και σχετικά συμπαγές.*

Σημείωση 1.26. Στα προβλήματα που μελετάμε σε αυτήν την διατριβή, αν το πεδίο ορισμού της ζητούμενης λύσης είναι συμπαγές, τότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Arzela-Ascoli. Στην αντίθετη περίπτωση, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Avramescu.

1.2 Η έννοια της υστερημένης διαφορικής εξίσωσης

Σε ορισμένα από τα επόμενα κεφάλαια αυτής της διατριβής μελετάμε συναρτησιακές διαφορικές εξισώσεις, οπότε στην παρούσα παράγραφο δίνουμε κάποιες σχετικές βασικές έννοιες.

Ας είναι $t \in [0,1]$, $r \in (0, +\infty)$ και χ μια πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη τουλάχιστον στο διάστημα $[t-r, t]$. Με το συμβολισμό χ_t εννοούμε τη συνάρτηση που ανήκει στο σύνολο $C([-r,0], \mathbb{R})$ και για κάθε $t \in [0,1]$, ορίζεται ως

$$\chi_t(s) := \chi(t+s), \quad \text{για κάθε } -r \leq s \leq 0.$$

Μια διαφορική εξίσωση στην οποία εμφανίζεται η ποσότητα χ_t καλείται ***υστερημένη διαφορική εξίσωση*** ή ***διαφορική εξίσωση με υστέρηση***.

Ένα γενικό παράδειγμα υστερημένης διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι η

$$x''(t) + f(t, x_t) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1],$$

όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[0,1] \times C([-r,0], \mathbb{R})$. Με τον όρο **λύση** αυτής της διαφορικής εξίσωσης εννοούμε μια συνάρτηση $x \in C([-r,1], \mathbb{R})$ η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Η διαφορική εξίσωση με υστέρηση συνοδεύεται και από μια αρχική συνθήκη η οποία αναφέρεται όχι σε ένα συγκεκριμένο σημείο της πραγματικής ευθείας αλλά σε ολόκληρο το διάστημα $[-r,0]$. Θεωρούμε, λοιπόν, μια δεδομένη συνάρτηση $\phi \in C([-r,0], \mathbb{R})$ και την αρχική συνθήκη

$$x(t) := \phi(t), \quad \text{για κάθε } -r \leq t \leq 0.$$

Τέτοιας μορφής διαφορικές εξισώσεις θα μελετηθούν σε επόμενα κεφάλαια, παρόλα αυτά για λόγους πληρότητας στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης, συνοδευόμενης από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, είναι της μορφής

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{για κάθε } t \in [-r, 0] \\ x(0) + x'(0)t - \int_0^t \int_0^s f(r, x_r)dr, & \text{για κάθε } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση x είναι συνεχής, αφού $x(0) = \phi(0)$. Στην περίπτωση που το διάστημα ορισμού της λύσης της διαφορικής εξίσωσης είναι το $[0, +\infty)$ προκύπτουν ανάλογα αποτελέσματα.

Για τη βασική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με υστέρηση παραπέμπουμε στα βιβλία των Diekmann, Van Gils, Verduyn Lunel και Walther [25], Driver [26], και Hale και Verduyn Lunel [36].

1.3 Το αντικείμενο της διατριβής

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε το γενικό πρόβλημα που μελετάμε στην παρούσα διατριβή δίνοντας μια συνοπτική περιγραφή των μεθοδολογιών που εφαρμόζονται για την αντιμετώπισή του. Θα ασχοληθούμε συνολικά με τέσσερις μεθοδολογίες κάθε μια από τις οποίες αναπτύσσουμε αναλυτικά σε καθένα από τα επόμενα τέσσερα κεφάλαια.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη ύπαρξης θετικής λύσης για προβλήματα συνοριακών τιμών. Παρότι τα προβλήματα που παρουσιάζονται είναι δεύτερης τάξης, οι μεθοδολογίες μπορούν να εφαρμοστούν με τις κατάλληλες τροποποιήσεις και σε προβλήματα οποιασδήποτε τάξης.

Ασχολούμαστε με διαφορικές εξισώσεις της γενικής μορφής

$$x''(t) + f(t, x_t) = 0 \tag{1.1}$$

ή της γενικής μορφής

$$x''(t) + f(t, x_t, x'(t)) = 0. \tag{1.2}$$

Μαζί με αυτές θεωρούμε συνοριακές συνθήκες, όπως για παράδειγμα

- $x_0 = \phi$ και $ax(1) + bx'(1) = 0$, $a, b \in [0, +\infty)$

ή

- $x_0 = \phi$ και $lim_{t\to+\infty} x'(t) = \xi \in \mathbb{R}$

όπου $\phi : [-r, 0] \to [0, +\infty)$, με $r \in (0, +\infty)$. Στην περίπτωση που $r = 0$, οπότε έχουμε συνήθη διαφορική εξίσωση, οι συνοριακές συνθήκες μπορούν, για παράδειγμα, να είναι της μορφής

- $x(0) = 0$ και $x'(1) = ax'(0)$, $a > 1$

ή

- $x(0) = 0$ και $lim_{t\to+\infty} x'(t) = \xi \in \mathbb{R}$.

Το ζεύγος της διαφορικής εξίσωσης μαζί με τις εκάστοτε θεωρούμενες συνοριακές συνθήκες αποτελεί ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Το σκεπτικό μας για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών είναι να βρούμε έναν τελεστή τα σταθερά σημεία του οποίου είναι ακριβώς οι λύσεις του προβλήματος. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα χώρο Banach, η στάθμη του οποίου καθορίζεται, μεταξύ άλλων, από τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης που έχουμε θεωρήσει.

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία θεωρημάτων σταθερού σημείου τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα πλαίσια της μεθοδολογίας που μόλις περιγράψαμε. Στη συγκεκριμένη διατριβή ασχολούμαστε με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder, το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Krasnoselskii, το Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Avery-Henderson, καθώς και με δύο τροποποιήσεις του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου των Leggett-Williams.

Στη συνέχεια παραθέτουμε αυτά τα τέσσερα θεωρήματα.

Θεώρημα 1.27 (Schauder [69, 80])**.** *Έστω E ένας χώρος Banach και X ένα μη κενό, κυρτό και κλειστό υποσύνολο του E. Αν T είναι μια συνεχής απεικόνιση του X στον εαυτό του και το $T(X)$ είναι σχετικά συμπαγές, τότε η απεικόνιση T έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.*

Θεώρημα 1.28 (Krasnoselskii [46, 68])**.** *Ας είναι E ένας χώρος Banach εφοδιασμένος με μια στάθμη $\|\cdot\|$ και K ένας κώνος εντός του E. Υποθέτουμε ότι Ω_1, Ω_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του E, με $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ και έστω $T : K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right) \to K$ ένας πλήρως συνεχής τελεστής τέτοιος ώστε*

(i) $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *και* $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$

ή

(ii) $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *και* $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$

Τότε ο T έχει ένα σταθερό σημείο εντός του $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$.

Θεώρημα 1.29 (Avery-Henderson [6, 72])**.** *Ας είναι E ένας πραγματικός χώρος Banach εφοδιασμένος με μια στάθμη $\|\cdot\|$ και K ένας κώνος εντός του E. Ορίζουμε το σύνολο*

$$K(\psi, d) := \{x \in K : \psi(x) < d\},$$

όπου ψ είναι ένα μη αρνητικό συναρτησοειδές ορισμένο στον κώνο K και $d > 0$. Θεωρούμε α και γ αύξοντα, μη αρνητικά, συνεχή συναρτησοειδή του K, και θ ένα μη αρνητικό, συνεχές συναρτησοειδές του K με $\theta(0) = 0$ τέτοια ώστε, για κάποιο $c > 0$ και $\Theta > 0$, $\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \alpha(x)$ και $\|x\| \leq \Theta\gamma(x)$, για όλα τα $x \in \overline{K(\gamma, c)}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πλήρως συνεχής τελεστής $T : \overline{K(\gamma, c)} \to K$ και $0 < a < b < c$ τέτοια ώστε

$$\theta(\lambda x) \leq \lambda\theta(x), \ \ \text{για} \ \ 0 \leq \lambda \leq 1 \ \ \text{και} \ \ x \in \partial K(\theta, b),$$

και

(i) $\gamma(Tx) > c$, *για όλα τα* $x \in \partial K(\gamma, c)$,

(ii) $\theta(Tx) < b$, *για όλα τα* $x \in \partial K(\theta, b)$,

(iii) $K(\alpha, a) \neq \emptyset$ *και* $\alpha(Tx) > a$, *για όλα τα* $x \in \partial K(\alpha, a)$,

ή

(iv) $\gamma(Tx) < c$, *για όλα τα* $x \in \partial K(\gamma, c)$,

(v) $\theta(Tx) > b$, *για όλα τα* $x \in \partial K(\theta, b)$,

(vi) $K(\alpha, a) \neq \emptyset$ *και* $\alpha(Tx) < a$, *για όλα τα* $x \in \partial K(\alpha, a)$.

Τότε ο τελεστής T *έχει τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία* x_1 *και* x_2 *που περιέχονται στο* $\overline{K(\gamma, c)}$ *τέτοια ώστε*

$$a < \alpha(x_1) \ \text{ και } \ \theta(x_1) < b,$$

και

$$b < \theta(x_2) \ \text{ και } \ \gamma(x_2) < c.$$

Θεώρημα 1.30 (Leggett-Williams [53, 67])**.** *Ας είναι* E *ένας χώρος Banach εφοδιασμένος με μια στάθμη* $\|\cdot\|$ *και* K *ένας κώνος εντός του* E*. Ορίζουμε τα σύνολα*

$$K_{\epsilon_1} := \{x \in K : \|x\| \leq \epsilon_1\}, \ \text{για } \epsilon_1 > 0$$

και

$$S(\beta, \epsilon_2, \epsilon_3) := \{x \in K : \epsilon_2 \leq \beta(x) \text{ και } \|x\| \leq \epsilon_3\},$$

για $\epsilon_3 > \epsilon_2 > 0$ *και οποιοδήποτε κοίλο θετικό συναρτησοειδές* β *ορισμένο στον κώνο* K, *με* $\beta(x) \leq \|x\|$.

Υποθέτουμε ότι $c \geq b > a > 0$, α *είναι ένα κοίλο θετικό συναρτησοειδές με* $\alpha(x) \leq \|x\|$ *και* $T : K_c \to K$ *είναι ένας πλήρως συνεχής τελεστής, τέτοιος ώστε*

(i) $\{x \in S(\alpha, a, b) : \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$, *και* $\alpha(Tx) > a$ *αν* $x \in S(\alpha, a, b)$,

(ii) $Tx \in K_c$ *αν* $x \in S(\alpha, a, c)$,

(iii) $\alpha(Tx) > a$, *για όλα τα* $x \in S(\alpha, a, c)$ *με* $\|Tx\| > b$.

Τότε ο τελεστής T *έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο* $S(\alpha, a, c)$.

Θεώρημα 1.31 (Πρώτη τροποποίηση του Leggett-Williams [67])**.** *Έστω* $I \subseteq \mathbb{R}$ *και* E *ο χώρος Banach* $BC(I, \mathbb{R})$ *εφοδιασμένος με τη στάθμη*

$$\|x\|_I := sup_{t \in I}|x(t)|, \ \ \text{για κάθε } x \in BC(I, \mathbb{R}).$$

Υποθέτουμε ότι

- K *είναι ένας κώνος στο* E *και για κάθε* $\epsilon > 0$ *θεωρούμε το σύνολο*

$$K_\epsilon := \{x \in K : \|x\|_I \leq \epsilon\}$$

- $0 < a < b < c < d$ *είναι πραγματικοί αριθμοί*
- $T : K_d \to K$ *είναι πλήρως συνεχής*
- α *είναι ένα κοίλο θετικό συναρτησοειδές και* β *είναι ένα κυρτό θετικό συναρτησοειδές τέτοια ώστε* $\alpha(x) \leq \beta(x)$, *για κάθε* $x \in K$

και ορίζουμε

$$K_{\alpha,\beta}(a,b) := \{x \in K : \alpha(x) \geq a \text{ και } \beta(x) \leq b\}.$$

Αν

(i) $\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c) \neq \emptyset$ *(δηλαδή το εσωτερικό του* $K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c$ *όσον αφορά το* K_d *είναι μη κενό) και για κάθε* $x \in K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c$ *ισχύει ότι*

$$\beta(Tx) < b, \quad \alpha(Tx) > a$$

(ii) $Tx \in K_d$ *για κάθε* $x \in \overline{K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d}$

(iii) $\beta(Tx) < b$ *και* $\alpha(Tx) > a$, *για κάθε* $x \in K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d$ *με* $\|Tx\|_I > c$

τότε ο τελεστής T *έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο*

$$y \in \mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d)$$

δηλαδή $\alpha(y) > a$, $\beta(y) < b$ *και* $\|y\|_I \leq d$.

Θεώρημα 1.32 (Δεύτερη τροποποίηση του Leggett-Williams [67]). *Έστω* $I \subseteq \mathbb{R}$ *φραγμένο και* E *ο χώρος Banach* $BC(I,\mathbb{R})$ *εφοδιασμένος με τη στάθμη*

$$\|x\|_I := sup_{t\in I}|x(t)|, \quad \text{για κάθε } x \in BC(I,\mathbb{R}).$$

Υποθέτουμε ότι

- K *είναι ένας κώνος στο* E *και για κάθε* $\epsilon > 0$ *θεωρούμε το σύνολο*

$$K_\epsilon := \{x \in K : \|x\|_I \leq \epsilon\}$$

- $0 < c < d$ *είναι πραγματικοί αριθμοί*
- $T : K_d \to K$ *είναι πλήρως συνεχής*
- A *είναι ένας τελεστής που ικανοποιεί τις ιδιότητες* (P_1) *και* (P_3), *και* B *είναι ένας τελεστής που ικανοποιεί τις ιδιότητες* (P_2) *και* (P_3), *τέτοιοι ώστε* $A(x) \preceq B(x)$, *για κάθε* $x \in K$
- $u, v \in C(I, [0,+\infty))$ *με* $u \prec v$

και ορίζουμε

$$K_{A,B}(u,v) := \{x \in K : u \preceq A(x) \text{ και } B(x) \preceq v\}.$$

Αν

(i) $\mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_c) \neq \emptyset$ *(δηλαδή το εσωτερικό του* $K_{A,B}(u,v) \cap K_c$ *όσον αφορά το* K_d *είναι μη κενό) και για κάθε* $x \in K_{A,B}(u,v) \cap K_c$ *ισχύει ότι*

$$B(Tx) \prec v \quad \textit{και} \quad u \prec A(Tx)$$

(ii) $Tx \in K_d$ *για κάθε* $x \in \overline{K_{A,B}(u,v) \cap K_d}$

(iii) $B(Tx) \prec v$ *και* $u \prec A(Tx)$*, για κάθε* $x \in K_{A,B}(u,v) \cap K_d$ *με* $\|Tx\|_I > c$

τότε ο τελεστής T *έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο*

$$y \in \mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)$$

δηλαδή $u \prec A(y)$*,* $B(y) \prec v$ *και* $\|y\|_I \leq d$*.*

Παρακάτω παρουσιάζουμε χωριστά για το κάθε θεώρημα τη μεθοδολογία που ακολουθούμε.

Όσον αφορά το Θεώρημα του Schauder (Θεώρημα 1.27) είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι

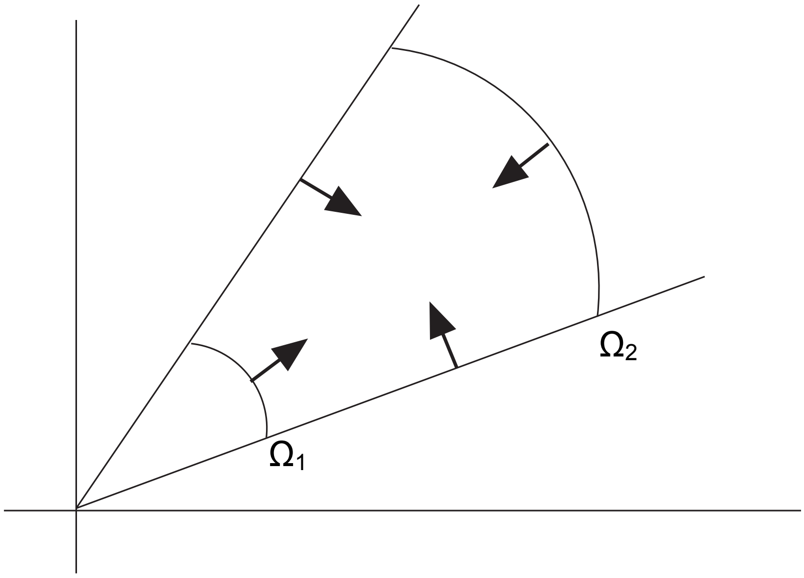
- ο τελεστής T ορίζεται σε ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο X του χώρου Banach,
- η εικόνα του συνόλου X βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο X, δηλαδή για κάθε $x \in X$ πρέπει $Tx \in X$,
- ο τελεστής είναι συνεχής και
- η εικόνα του X μέσω του τελεστή T είναι σχετικά συμπαγές σύνολο.

Για το Θεώρημα του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28) εργαζόμαστε σε ένα κώνο K και είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι

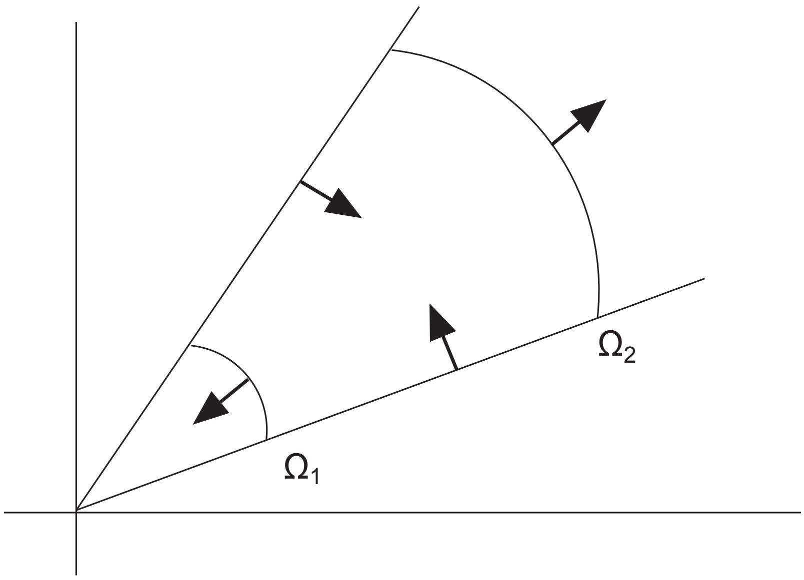
- ο τελεστής T ορίζεται μέσα σε ένα σύνολο της μορφής $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$, όπου Ω_1, Ω_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του E, με $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$,
- η εικόνα του συνόλου $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$ βρίσκεται μέσα στον κώνο K,
- ο τελεστής T είναι πλήρως συνεχής και
- ο τελεστής T ικανοποιεί μια από τις συνθήκες (i) και (ii) που αναφέρθηκαν στο εν λόγω θεώρημα.

Σημείωση 1.33. Οι συνθήκες (i) και (ii) του Θεωρήματος 1.28 στη βιβλιογραφία, (βλέπε [50]), αναφέρονται συχνά ως διασταλτική μορφή (expansive form) και συσταλτική μορφή (compressive form) αντίστοιχα.

Σημείωση 1.34. Αν περιοριστούμε στο χώρο $E = \mathbb{R}^2$, η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 1.28 δίνεται από τα παρακάτω σχήματα.



συσταλτική μορφή



διασταλτική μορφή

Στο Θεώρημα των Avery-Henderson (Θεώρημα 1.29) εργαζόμαστε σε έναν κώνο K ο οποίος βρίσκεται εντός ενός χώρου Banach, και είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι

- ο τελεστής T ορίζεται στο σύνολο $\overline{K(\gamma, c)}$,
- ο τελεστής T στέλνει το σύνολο $\overline{K(\gamma, c)}$ μέσα στον κώνο K και
- ο τελεστής T ικανοποιεί είτε τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) είτε τις συνθήκες (iv), (v) και (vi).

Σημείωση 1.35. Στο Θεώρημα των Avery-Henderson (Θεώρημα 1.29) η στάθμη που εμφανίζεται στα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 1.27 και 1.28 αντικαθίσταται από δύο συναρτησοειδή.

Σημείωση 1.36. Σε αντίθεση με τα Θεωρήματα 1.27 και 1.28, τα οποία μας δίνουν τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, το Θεώρημα των Avery-Henderson (Θεώρημα 1.29) μας δίνει τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία.

Στο Θεώρημα των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30) εργαζόμαστε επίσης σε ένα κώνο K εντός ενός χώρου Banach. Εκτός από το αρχικό θεώρημα, θα ασχοληθούμε και με δύο τροποποιήσεις αυτού του θεωρήματος. Για την εφαρμογή της πρώτης τροποποίησης, είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι

- εργαζόμαστε στο χώρο Banach των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων,
- ο τελεστής T είναι πλήρως συνεχής,
- ο τελεστής T ορίζεται στο σύνολο K_d,
- ο τελεστής T απεικονίζει το K_d μέσα στον κώνο K,
- υπάρχουν ένα α, κοίλο, και ένα β, κυρτό, θετικό συναρτησοειδές τέτοια ώστε να ικανοποιούν τη σχέση $\alpha(x) \leq \beta(x)$, για κάθε $x \in K$ και
- ο τελεστής T ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) που αναφέρονται στο εν λόγω θεώρημα.

Για την εφαρμογή της δεύτερης τροποποίησης, είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι

- εργαζόμαστε στο χώρο Banach των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων,
- το σύνολο I είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$,
- ο τελεστής T είναι πλήρως συνεχής,
- ο τελεστής T ορίζεται στο σύνολο K_d,
- ο τελεστής T απεικονίζει το K_d μέσα στον κώνο K,
- υπάρχει ένας τελεστής A, που να ικανοποιεί τις ιδιότητες (P_1) και (P_3), και ένας τελεστής B, που να ικανοποιεί τις ιδιότητες (P_2) και (P_3), τέτοιοι ώστε $A(x) \preceq B(x)$, για κάθε $x \in K$,
- υπάρχουν $u, v \in C(I, [0, +\infty))$ τέτοια ώστε $u \prec v$ και
- ο τελεστής T ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) που αναφέρονται στο εν λόγω θεώρημα.

Σημείωση 1.37. Στο Θεώρημα 1.31, το συναρτησοειδές β που παίρνει τη θέση της στάθμης του Θεωρήματος 1.30 παρατηρούμε ότι είναι κυρτό όπως και η στάθμη.

Σημείωση 1.38. Παρατηρώντας το Θεώρημα του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28) και το Θεώρημα των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30), διαπιστώνουμε ότι στη θέση της στάθμης που εμφανίζεται στο Θεώρημα 1.28, η οποία είναι ένα κυρτό συναρτησοειδές, στο Θεώρημα 1.30 εμφανίζεται το κοίλο συναρτησοειδές α. Αυτό έχει σαν επακόλουθο, το αποτέλεσμα των Leggett-Williams, και συνεπώς των τροποποιήσεων του, να μην είναι επέκταση του Θεωρήματος του Krasnoselskii, αφού δεν περιλαμβάνει το τελευταίο ως ειδική περίπτωση.

Σημείωση 1.39. Το Θεώρημα 1.31 μπορεί να επεκταθεί και σε θεωρήματα που εξασφαλίζουν την ύπαρξη τουλάχιστον δύο ή και περισσότερων σταθερών σημείων, προσθέτοντας σε αυτό επιπλέον ομάδες συνθηκών, παρόμοιες με τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) του εν λόγω θεωρήματος.

1.4 Εφαρμογές προβλημάτων συνοριακών τιμών

Σε αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζουμε μια ποικιλία προβλημάτων συνοριακών τιμών που συναντώνται σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές.

Παράδειγμα 1.40 ([1, 45])**.** Κατά τη μελέτη της ασταθούς ροής ενός αερίου μέσω ενός πορώδους μέσου,το οποίο είναι αρχικά γεμάτο με αέριο σε ομοιόμορφη πίεση, η πίεση στην επιφάνεια της εκροής ξαφνικά μειώνεται και στη συνέχεια διατηρείται στη νέα χαμηλότερη πίεση. Η ασταθής ισοθερμική ροή του αερίου περιγράφεται από μια μη-γραμμική μερική διαφορική εξίσωση, η οποία τελικά μετασχηματίζεται στο ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$w''(t) + \frac{2t}{(1-\alpha w(t))^{\frac{1}{2}}} w'(t) = 0 \tag{1.3}$$

$$w(0) = 1, \quad w(+\infty) = 0, \tag{1.4}$$

όπου α είναι μια σταθερά που σχετίζεται με τις φυσικές παραμέτρους του προβλήματος.

Παράδειγμα 1.41 ([1, 66])**.** Στην ανάλυση της απόδοσης στερεών προωθητικών ρουκετών, κρίθηκε αναγκαίο να μετρηθεί με ακρίβεια η κατανομή των πυκνοτήτων των τοπικών ηλεκτρονίων και ιόντων στην στήλη καπνού της εξάτμισης. Η αναλυτική διαδικασία για την ερμηνεία των μετρήσεων του καθετήρα οδηγεί στην ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση για την επίλυση της συγκέντρωσης των φορτισμένων ειδών

$$\frac{1+\epsilon}{1+\beta}\frac{N}{R}\frac{d^2N}{d\eta^2} + f\frac{dN}{d\eta} = 0, \tag{1.5}$$

η οποία συνοδεύεται από τις εξής συνοριακές συνθήκες

$$N(0) = 0, \quad N(+\infty) = 1. \tag{1.6}$$

Εδώ N είναι η κανονικοποιημένη πυκνότητα των φορτισμένων ειδών, ϵ, β, R είναι σταθερές που σχετίζονται με τις παραμέτρους του φυσικού προβλήματος και f είναι μια συνάρτηση, η οποία σχετίζεται με τη ροή γύρω από τον καθετήρα. Η συνάρτηση f δίνεται από τη λύση μιας άλλης μη γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2\right] = 0 \tag{1.7}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$f(0) = \frac{df(0)}{d\eta} = 0, \quad \frac{df(+\infty)}{d\eta} = 1. \tag{1.8}$$

Επειδή οι λύσεις του προβλήματος (1.7), (1.8) είναι γνωστές [73], η συνάρτηση f που εμφανίζεται στην εξίσωση (1.5) μπορεί να υπολογισθεί ως μια συνάρτηση του η. Άρα εδώ έχουμε το πρόβλημα απείρου διαστήματος (1.5), (1.6), όπου στην (1.5) ο συντελεστής f υπολογίζεται από το πρόβλημα μη φραγμένου διαστήματος (1.7), (1.8).

Παράδειγμα 1.42 ([1, 76]). Κατά την ανάλυση της μεταφοράς μάζας σε έναν περιστρεφόμενο δίσκο μέσα σε ένα μη-Νευτώνειο ρευστό, εμφανίζεται το ακόλουθο πρόβλημα μη φραγμένου διαστήματος

$$\frac{d^2 C}{ds^2} + \frac{1}{9}\left[\left(\frac{7+5n}{2+2n}\right) + \frac{6}{5}\right]\frac{dC}{ds} = 0, \quad C(0) = 0, \quad C(+\infty) = C_{+\infty} \tag{1.9}$$

όπου n και $C_{+\infty}$ είναι κάποιες φυσικές σταθερές.

Παράδειγμα 1.43 ([1, 76]). Στη μελέτη της μεταφοράς θερμότητας στην ακτινική ροή μεταξύ παράλληλων κυκλικών δίσκων, εμφανίζεται το ακόλουθο πρόβλημα μη φραγμένου διαστήματος

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \eta^2\frac{df}{d\eta} - 3\alpha\eta f = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0 \tag{1.10}$$

όπου α είναι μια φυσική σταθερά.

Παράδειγμα 1.44 ([1, 76]). Στην ανάλυση του προβλήματος αλλαγής φάσης στερεών με θερμοκρασία εξαρτώμενη της θερμικής αγωγιμότητας η, η κατανομή της θερμοκρασίας θ μπορεί να βρεθεί θεωρώντας το ακόλουθο πρόβλημα απείρου διαστήματος

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1+\beta\theta)\frac{d\theta}{d\eta}\right] + 2\eta\frac{d\theta}{d\eta} = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(+\infty) = 1 \tag{1.11}$$

όπου β είναι μια φυσική σταθερά.

Παράδειγμα 1.45 ([1]). Στη μελέτη της φυσικής του πλάσματος εμφανίζεται το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{t}{2}(e^{\frac{u}{t}} - e^{-\frac{u}{t}}) - \frac{t}{\alpha\beta^3}e^{-\frac{t}{\beta}} \\ u(0) = 0, \quad u'(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

όπου α και β είναι θετικοί παράμετροι. Ο Gregus [31] έχει δείξει ότι το πρόβλημα 1.12 έχει μοναδική λύση αν $\beta \le e$.

Παράδειγμα 1.46 ([1]). Θεωρούμε το παραμορφωμένο σχήμα της μεμβράνης ενός καλύμματος το οποίο υποβάλλεται σε μια ομοιόμορφη κατακόρυφη πίεση P και είτε σε μια ακτινική μετατόπιση είτε σε μια ακτινική πίεση στο σύνορο. Υποθέτουμε ότι το κάλυμμα είναι ρηχό, οι εντάσεις είναι μικρές, η πίεση P είναι μικρή και το μη παραμορφωμένο σχήμα της μεμβράνης είναι ακτινικά συμμετρικό και περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες με τη σχέση $z = C(1-r^2)$, όπου η μη παραμορφωμένη ακτίνα είναι $r = 1$ και $C > 0$ είναι το ύψος στο κέντρο του καλύμματος. Το μοντέλο που προτείνεται από τον Dickey [23, 24] προϋποθέτει ότι για κάθε ακτινικά συμμετρική παραμορφωμένη κατάσταση, η (κλιμακωτή) ακτινική πίεση S_r ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$r^2 S_r'' + 3rS_r' = \frac{\lambda^2 r^2}{2} + \frac{\beta \nu r^2}{S_r} - \frac{r^2}{8S_r^2}, \tag{1.13}$$

τη συνθήκη κανονικότητας

$$S_r(r) \text{ φραγμένο όταν } r \to 0^+, \tag{1.14}$$

και τη συνοριακή συνθήκη

$$b_1 S_r'(1) + b_0 S_r(1) = A, \tag{1.15}$$

όπου λ, β, b_0 και b_1 είναι θετικές σταθερές. Το πρόβλημα 1.13, 1.14 και 1.15 μετασχηματίζεται στο ακόλουθο πρόβλημα απείρου διαστήματος

$$\begin{cases} u'' = \frac{1}{t^3}\left[\frac{\lambda^2}{8} - \frac{1}{32u^2} + \frac{\beta\nu}{4u}\right] \\ u(t) \text{ φραγμένη όταν } t \to +\infty \\ a_0 u(1) - a_1 u'(1) = A, \end{cases} \tag{1.16}$$

όπου $a_0 = b_0$ και $a_1 = 2b_1$.

Παράδειγμα 1.47 ([1]). Το 1927, ο Thomas [81] και ο Fermi [30] ανεξάρτητα, εξήγαγαν το ακόλουθο πρόβλημα για τον καθορισμό του ηλεκτρικού δυναμικού σε ένα απομονωμένο ουδέτερο άτομο

$$\begin{cases} x'' - t^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = 0 \\ x(0) = 1, \;\; lim_{t\to+\infty} x(t) = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Παράδειγμα 1.48 ([36]). Κάτω από κατάλληλες υποθέσεις, η εξίσωση

$$x'(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i x(t - T_i)$$

είναι ένα κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή του αποχρωματισμού ενός δείκτη (χρωματισμένο υγρό) κατά την ροή του μέσα σε ένα δίκτυο σωληνώσεων. Μια εφαρμογή στη κυκλοφορία στον ανθρώπινο οργανισμό επισημασμένης λευκωματίνης, όπως κυκλοφορεί από τη ροή του αίματος μέσω των διαμέσων υγρών και πίσω στην κυκλοφορία του αίματος, μελετήθηκε από τους Bailey και Reeve [15, 16]. O Boffi και ο Scozzafava [18, 19] αντιμετώπισαν αυτή την εξίσωση σε προβλήματα μεταφορών.

Παράδειγμα 1.49 ([36]). Σε μια προσπάθεια να περιγράψουν την εξάπλωση της ιλαράς σε μια μητροπολιτική περιοχή, ο London και ο Yorke [62] θεώρησαν την εξίσωση

$$S'(t) = -\beta(t)S(t)[2\gamma + S(t-14) - S(t-12)] + \gamma$$

όπου $S(t)$ είναι ο αριθμός των ευπαθών ατόμων σε χρόνο t, γ είναι το ποσοστό κατά το οποίο τα άτομα εισάγονται στον πληθυσμό, $\beta(t)$ είναι μια συνάρτηση χαρακτηριστική του πληθυσμού και ένα άτομο που εκτίθεται σε χρόνο t είναι μολυσμένο κατά το χρονικό διάστημα $[t-14, t-12]$.

Παράδειγμα 1.50 ([36]). Στην ανάλυση της βλεννόρροιας, ο Cooke και ο Yorke [22] μελέτησαν την εξίσωση

$$I'(t) = g\big(I(t-L_1)\big) - g\big(I(t-L_2)\big)$$

όπου το I αναπαριστά τον αριθμό των μολυσμένων ατόμων και g είναι μια μη αρνητική συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές διάστημα.

Μια πιο γενική εξίσωση που περιγράφει την εξάπλωση της νόσου λαμβάνοντας υπόψη την εξάρτηση από τη ηλικία δόθηκε από τους Cooke [21], Hoppenstadt και Waltman [38]. Άλλες εξισώσεις που εμφανίζονται στη θεωρία των επιδημιών μπορούμε να βρούμε στο Waltman [83]. Για άλλα μοντέλα στις βιοϊατρικές επιστήμες, αναφορές γίνονται στο [17]. Ο Grossberg [32, 33] αντιμετώπισε ενδιαφέρουσες διαφορικές εξισώσεις στη θεωρία της μάθησης.

Παράδειγμα 1.51 ([36]). Η εξίσωση

$$x'(t) = \int_{t-r}^{t} a(t-u)g(x(u))du$$

αντιμετωπίστηκε από τον Ergen [29] στη θεωρία ενός κυκλοφορούντος καυσίμου μέσα σε έναν πυρηνικό αντιδραστήρα, και μελετήθηκε εκτενώς από τους Levin και Nohel [54]. Σε αυτό το μοντέλο, το x είναι η πυκνότητα των νετρονίων. Είναι επίσης ένα καλό μοντέλο για τη μελέτη της έντασης της ιξωδοελαστικότητας x σε μια διάσταση με a τη συνάρτηση χαλάρωσης [36].

Κεφάλαιο 2

Θεώρημα Schauder

2.1 Εισαγωγή

Η ασυμπτωτική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με υστέρηση, αλλά και των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, είναι ένα αντικείμενο που απασχολεί μεγάλο μέρος ερευνητών. Σε αυτή τη θεωρία, ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η μελέτη ύπαρξης λύσεων με προκαθορισμένη ασυμπτωτική συμπεριφορά για διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση καθώς και για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Kusano και Trench [48, 49], Liu [57], Mustafa και Rogovchenko [75], Philos [77], Philos, Sficas και Staikos [78], Philos και Staikos [79], Yan [86], Yan και Liu [87], Yin [88], και Zhao [90]. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η ύπαρξη λύσεων με προκαθορισμένη συμπεριφορά, οι οποίες είναι ορισμένες σε ολόκληρο το διάστημα ορισμού της διαφορικής εξίσωσης. Τα συμπεράσματα των εργασιών [48, 49, 57, 75, 86, 87, 88, 90] αφορούν αυτό το αντικείμενο. Για δεύτερης τάξης μη γραμμικές συνήθεις ή με υστέρηση διαφορικές εξισώσεις, το πρόβλημα ύπαρξης λύσεων σε ολόκληρο το διάστημα ορισμού της διαφορικής εξίσωσης, συνήθως μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα ύπαρξης λύσεων προβλήματος συνοριακών τιμών στην πραγματική ημιευθεία, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στα [57, 86, 87, 88, 90].

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με την ύπαρξη λύσεων ενός προβλήματος συνοριακών τιμών στην ημιευθεία για δεύτερης τάξης, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση. Παρουσιάζουμε επίσης ένα συμπέρασμα για την περίπτωση δεύτερης τάξης, μη γραμμικής, συνήθους διαφορικής εξίσωσης, το οποίο είναι πολύ κοντά στα συμπεράσματα που δίνονται στα [57, 86, 87, 88, 90]. Τα συμπεράσματα του παρόντος κεφαλαίου αντλήθηκαν από την εργασία [69].

Ας είναι $r \geq 0$. Θεωρούμε τη Συνθήκη Συνέχειας (Driver[26], σελ. 290):

$$\begin{array}{l} f(t, \chi_t, \chi'(t)) \text{ είναι συνεχής ως προς τη μεταβλητή } t \in [0, +\infty) \\ \text{για κάθε δοσμένη συνάρτηση } \chi \in C([-r, +\infty), \mathbb{R}) \text{ η οποία} \\ \text{είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα } [0, +\infty). \end{array} \tag{C}$$

Θεωρούμε τη δεύτερης τάξης, υστερημένη και μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x''(t) + f(t, x_t, x'(t)) = 0, \tag{2.1}$$

όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)\times C([-r,0],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη Συνθήκη Συνέχειας (C).

Ενδιαφερόμαστε για λύσεις της (2.1) ορισμένες σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Με τον όρο *λύση στο* $[0,+\infty)$ της (2.1), εννοούμε μια συνάρτηση $x\in C([-r,+\infty),\mathbb{R})$ η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$ και ικανοποιεί την εξίσωση (2.1) για όλα τα $t\geq 0$. Ειδικότερα θα εξετάσουμε την ύπαρξη θετικών λύσεων αυτής της διαφορικής εξίσωσης.

Η διαφορική εξίσωση (2.1) είναι δεύτερης τάξης, συνεπώς χρειαζόμαστε δύο συνθήκες για την επίλυσή της. Θεωρούμε, λοιπόν, την αρχική συνθήκη

$$x_0=\phi \tag{2.2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$x(t)=\phi(t),\quad \text{για όλα τα } -r\leq t\leq 0, \tag{2.3}$$

όπου $\phi\in C([-r,0],\mathbb{R})$ είναι δοσμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ακόμη ότι

$$\phi(0)=0.$$

Επιπλέον, θεωρούμε και τη συνθήκη της μορφής

$$lim_{t\to+\infty}x'(t)=\xi, \tag{2.4}$$

όπου ξ είναι ένας δοσμένος πραγματικός αριθμός. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η (2.4) συνεπάγεται τη σχέση

$$lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{t}=\xi.$$

Οι εξισώσεις (2.1), (2.2), (2.4) συνθέτουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών στην ημιευθεία. Με τον όρο λύση της διαφορικής εξίσωσης με υστέρηση (2.1), στο διάστημα $[0,+\infty)$, που ικανοποιεί τις συνθήκες (2.2) και (2.4) εννοούμε τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.4).

Στην ακόλουθη πρόταση μετασχηματίζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.4) σε πρόβλημα ύπαρξης σταθερού σημείου για έναν ολοκληρωτικό τελεστή.

Πρόταση 2.1. *Μια συνάρτηση $x\in C([-r,+\infty),\mathbb{R})$ η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών* (2.1), (2.2), (2.4) *αν και μόνον αν*

$$x(t)=\begin{cases}\phi(t), & \text{για } -r\leq t\leq 0\\ \xi t+\int_0^{+\infty}min\{t,s\}f(s,x_s,x'(s))ds, & \text{για } t\geq 0.\end{cases} \tag{2.5}$$

Απόδειξη. Έστω x μια συνάρτηση στο $C([-r,+\infty),\mathbb{R})$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η x ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση (2.5). Τότε προφανώς η συνθήκη (2.3) επαληθεύεται. Επίσης, παραγωγίζοντας την (2.5) για $t\geq 0$, έχουμε

$$x'(t)=\xi+\int_t^{+\infty}f(s,x_s,x'(s))ds,\quad \text{για κάθε } t\geq 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $lim_{t\to+\infty}x'(t)=\xi$, δηλαδή, η συνθήκη (2.4) ικανοποιείται. Παραγωγίζοντας ακόμη μία φορά έχουμε

$$x''(t)=-f(t,x_t,x'(t)),\quad \text{για όλα τα } t\geq 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η x είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.1) στο διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα, η x είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.4).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η x είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.4). Από την (2.3) έχουμε ότι $x(t)=\phi(t)$ για όλα τα $-r\leq t\leq 0$. Επιπλέον, ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.1) για $t\geq 0$ παίρνουμε

$$x'(t)=x'(0)-\int_0^t f(s,x_s,x'(s))ds,\quad \text{για όλα τα } t\geq 0,$$

και συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη (2.4), έχουμε

$$\xi=x'(0)-\int_0^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds$$

δηλαδή

$$x'(0)=\xi+\int_0^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds.$$

Άρα, για όλα τα $t\geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}x'(t)&=\left[\xi+\int_0^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds\right]-\int_0^t f(s,x_s,x'(s))ds\\&=\xi+\int_t^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds.\end{aligned}$$

Κάνοντας ακόμα μία ολοκλήρωση για $t\geq 0$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $x(0)=\phi(0)=0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}x(t)&=x(0)+\xi t+\int_0^t\left[\int_\theta^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds\right]d\theta\\&=\xi t+\int_0^t\left[\int_\theta^t f(s,x_s,x'(s))ds+\int_t^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds\right]d\theta\\&=\xi t+\int_0^t\int_\theta^t f(s,x_s,x'(s))dsd\theta+t\int_t^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds\\&=\xi t+\int_0^t sf(s,x_s,x'(s))ds+t\int_t^{+\infty} f(s,x_s,x'(s))ds.\end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση x ικανοποιεί τη σχέση (2.5). □

2.2 Θεώρημα ύπαρξης λύσης για το ΠΣΤ

Το βασικό συμπέρασμα αυτού του κεφαλαίου είναι το ακόλουθο θεώρημα, στο οποίο παρουσιάζονται κατάλληλες συνθήκες τέτοιες ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

(2.1), (2.2), (2.4) να έχει τουλάχιστον μια λύση. Για την απόδειξη του θεωρήματος, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Schauder 1.27.

Σύμφωνα με τη Σημείωση 1.10, ο χώρος $BC([0,+\infty),\mathbb{R})$, εφοδιασμένος με τη στάθμη

$$\|u\|_{[0,+\infty)}, \quad \text{για όλες τις } u \in BC([0,+\infty),\mathbb{R}),$$

είναι ένας χώρος Banach. Δεδομένου ότι εργαζόμαστε για συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,+\infty)$, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Avramescu 1.25.

Θεώρημα 2.2. *Υποθέτουμε ότι*

$$|f(t,\psi,z)| \leq F(t,|\psi|,|z|), \quad \text{για όλα τα } (t,\psi,z) \in [0,+\infty) \times C([-r,0],\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

όπου F είναι μια μη αρνητική, πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο

$$[0,+\infty) \times C([-r,0],[0,+\infty)) \times [0,+\infty),$$

η οποία ικανοποιεί τη Συνθήκη Συνέχειας (C). Υποθέτουμε ότι, για κάθε $t \geq 0$, η συνάρτηση $F(t,\cdot,\cdot)$ είναι αύξουσα στο $C([-r,0],[0,+\infty)) \times [0,+\infty)$ υπό την έννοια ότι $F(t,\psi,z) \leq F(t,\omega,v)$ για κάθε $\psi,\omega \in C([-r,0],[0,+\infty))$ με $\psi \leq \omega$ (δηλαδή $\psi(s) \leq \omega(s)$ για όλα τα $-r \leq s \leq 0$) και για κάθε $z,v \in [0,+\infty)$ με $z \leq v$.

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > |\xi|$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^{+\infty} F(t,\eta_t,c)dt \leq c - |\xi|, \tag{2.7}$$

όπου η συνάρτηση $\eta \in C([-r,+\infty),[0,+\infty))$ εξαρτάται από τα ϕ, c και ορίζεται ως

$$\eta(t) = \begin{cases} |\phi(t)|, & \text{για } -r \leq t \leq 0 \\ ct, & \text{για } t \geq 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.4) *έχει τουλάχιστον μια λύση x τέτοια ώστε*

$$(-c+|\xi|+\xi)t \leq x(t) \leq (c-|\xi|+\xi)t, \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \tag{2.9}$$

και

$$-c+|\xi|+\xi \leq x'(t) \leq c-|\xi|+\xi, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{2.10}$$

Απόδειξη. Έστω E το σύνολο όλων των συναρτήσεων του $C([-r,+\infty),\mathbb{R})$, οι οποίες έχουν φραγμένες συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $[0,+\infty)$. Το σύνολο E είναι ένας χώρος Banach εφοδιασμένος με τη στάθμη $\nparallel \cdot \nparallel$ που ορίζεται ως [36]

$$\nparallel u \nparallel := max\{max_{-r\leq t\leq 0}|u(t)|, sup_{t\geq 0}|u'(t)|\}, \quad \text{για όλα τα } u \in E.$$

Έστω ακόμη X το σύνολο που περιέχει όλες τις συναρτήσεις $x \in E$ τέτοιες ώστε

$$x(t) = \phi(t), \quad \text{για όλα τα } -r \leq t \leq 0 \tag{2.11}$$

και

$$|x'(t)| \leq c, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{2.12}$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το σύνολο X είναι μη κενό, κυρτό και κλειστό υποσύνολο του E.

Θεωρούμε μια αυθαίρετη συνάρτηση $x \in X$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\phi(0) = 0$, οπότε από τη σχέση (2.11) συνεπάγεται ότι $x(0) = 0$. Άρα από τη σχέση (2.12) έχουμε ότι

$$|x(t)| \leq ct, \quad \text{για όλα τα } t \geq 0. \tag{2.13}$$

Από τις σχέσεις (2.8), (2.11) και (2.13), παίρνουμε

$$|x(t)| \leq \eta(t), \quad \text{για κάθε } t \geq -r.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|x_t(s)| = |x(t+s)| \leq \eta(t+s) = \eta_t(s), \quad \text{για κάθε } -r \leq s \leq 0 \text{ και } t \geq 0,$$

επομένως

$$|x_t| \leq \eta_t, \quad \text{για όλα τα } t \geq 0. \tag{2.14}$$

Επιπλέον αν λάβουμε υπόψη μας τις σχέσεις (2.14) και (2.12) και την υπόθεση ότι για κάθε $t \geq 0$ η συνάρτηση $F(t,\cdot,\cdot)$ είναι αύξουσα στο $C([-r,0],[0,+\infty)) \times [0,+\infty)$, παρατηρούμε ότι,

$$F(t,|x_t|,|x'(t)|) \leq F(t,\eta_t,c), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Επιπλέον, η σχέση (2.6) συνεπάγεται ότι

$$|f(t,x_t,x'(t))| \leq F(t,|x_t|,|x'(t)|), \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

άρα

$$|f(t,x_t,x'(t))| \leq F(t,\eta_t,c), \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{2.15}$$

Επίσης από την υπόθεση (2.7) έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} F(t,\eta_t,c)dt < \infty \tag{2.16}$$

και επομένως, από τη σχέση (2.15) παίρνουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} |f(t,x_t,x'(t))|dt < \infty. \tag{2.17}$$

Η σχέση (2.17) ισχύει για κάθε $x \in X$, άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} f(t,x_t,x'(t))dt \ \text{ υπάρχει στο } \mathbb{R}.$$

Άρα η απεικόνιση

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{για } -r \leq t \leq 0 \\ \xi t + \int_0^{+\infty} min\{t,s\} f(s,x_s,x'(s))ds, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$

ορίζει μια απεικόνιση με πεδίο ορισμού το X και πεδίο τιμών το $C([-r,+\infty),\mathbb{R})$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αυτή η απεικόνιση ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Schauder (Θεώρημα 1.27) [80].

Πρώτα δείχνουμε ότι ο τελεστής T απεικονίζει το σύνολο X στον εαυτό του, δηλαδή ότι $TX \subseteq X$. Έστω ένα τυχαίο $x \in X$. Παρατηρούμε ότι

$$(Tx)(t) = \phi(t), \quad \text{για κάθε } -r \le t \le 0. \tag{2.18}$$

Επίσης, για κάθε $t \ge 0$,

$$|(Tx)'(t) - \xi| = \left| \int_t^{+\infty} f(s, x_s, x'(s))ds \right| \le \int_t^{+\infty} |f(s, x_s, x'(s))| ds$$

και επομένως, λόγω της σχέσης (2.15) ισχύει ότι

$$|(Tx)'(t) - \xi| \le \int_t^{+\infty} F(s, \eta_s, c)ds, \quad \text{για κάθε } t \ge 0. \tag{2.19}$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (2.7), από τη σχέση (2.19) παίρνουμε ότι

$$|(Tx)'(t) - \xi| \le c - |\xi|, \quad \text{για κάθε } t \ge 0, \tag{2.20}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$|(Tx)'(t)| \le c, \quad \text{για κάθε } t \ge 0. \tag{2.21}$$

Από τον ορισμό του συνόλου X και τις σχέσεις (2.18) και (2.21) συνεπάγεται ότι $Tx \in X$. Αποδείξαμε δηλαδή ότι για το τυχαίο $x \in X$ ισχύει $Tx \in X$, δηλαδή $TX \subseteq X$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το σύνολο TX είναι σχετικά συμπαγές. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι κάθε συνάρτηση $x \in X$ ικανοποιεί τη σχέση (2.18) καθώς και τον ορισμό της στάθμης $\nparallel \cdot \nparallel$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$U = \{((Tx)'([0,+\infty)) : x \in X\}$$

είναι σχετικά συμπαγές ως προς το χώρο Banach $BC([0,+\infty),\mathbb{R})$. Για κάθε συνάρτηση $x \in X$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.19) παίρνουμε

$$|(Tx)'(t)| \le |\xi| + \int_t^{+\infty} F(s, \eta_s, c)ds \le |\xi| + \int_0^{+\infty} F(s, \eta_s, c)ds, \quad \text{για κάθε } t \ge 0.$$

Άρα, με τη βοήθεια της σχέσης (2.16), έχουμε ότι το σύνολο U είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Σημειώνουμε εδώ ότι, αν στη θέση της σχέσης (2.16) χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.7), τότε από τη σχέση (2.21) καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Επιπλέον, η σχέση (2.19) μαζί με τη σχέση (2.16) δίνουν ότι

$$lim_{t\to+\infty}(Tx)'(t) = \xi.$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τις σχέσεις (2.16) και (2.19), διαπιστώνουμε ότι το σύνολο U είναι ισοσυγκλίνον στο $+\infty$. Ας είναι $\epsilon > 0$. Για κάθε συνάρτηση $x \in X$ και για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ με $0 \leq t_1 \leq t_2$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tx)'(t_1) - (Tx)'(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x_s, x'(s)) ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x_s, x'(s))| ds \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} F(s, \eta_s, c) ds. \end{aligned}$$

Άρα, λόγω της σχέσης (2.16), έχουμε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε για $t_1 \geq r$ και $t_2 \geq r$ ισχύει ότι $| \int_{t_1}^{t_2} F(s, \eta_s, c) ds| < \epsilon$, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $|t_1 - t_2| < \delta$ ισχύει ότι $| \int_{t_1}^{t_2} F(s, \eta_s, c) ds| < \epsilon$. Συνεπώς το σύνολο U είναι ισοσυνεχές. Επομένως, από το Θεώρημα του Avramescu (Θεώρημα 1.25) το σύνολο U είναι σχετικά συμπαγές στο σύνολο $BC([0, +\infty), \mathbb{R})$.

Τώρα, αποδεικνύουμε πως η απεικόνιση T είναι συνεχής. Έστω $x \in X$ μια συνάρτηση και $(x^{[\nu]})_{\nu \geq 1}$ μια ακολουθία συναρτήσεων του X με

$$\nparallel \cdot \nparallel -lim_{\nu \to +\infty} x^{[\nu]} = x.$$

Έχουμε ότι

$$lim_{\nu \to +\infty} x^{[\nu]}(t) = x(t) \text{ ομοιόμορφα για τα } t \in [-r, +\infty)$$

και

$$lim_{\nu \to +\infty} (x^{[\nu]})'(t) = x'(t) \text{ ομοιόμορφα για τα } t \in [0, +\infty).$$

Επιπλέον, η σχέση (2.15) δίνει ότι

$$|f(t, x_t^{[\nu]}, (x^{[\nu]})'(t))| \leq F(t, \eta_t, c), \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \text{ και για όλα τα } \nu \geq 1.$$

Συνεπώς, από την (2.16) και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης του Lebesgue, για $t \geq 0$ έχουμε

$$lim_{\nu \to +\infty} \int_0^{+\infty} min\{t, s\} f(s, x_s^{[\nu]}, (x^{[\nu]})'(s)) ds = \int_0^{+\infty} min\{t, s\} f(s, x_s, x'(s)) ds.$$

Αυτό, μαζί με τη σχέση (2.18) εξασφαλίζουν την κατά σημείο σύγκλιση

$$lim_{\nu \to +\infty} (Tx^{[\nu]})(t) = (Tx)(t), \quad \text{για όλα τα } t \geq -r. \tag{2.22}$$

Αρκεί λοιπόν να εξασφαλίσουμε ότι η σύγκλιση αυτή είναι επίσης $\nparallel \cdot \nparallel$-σύγκλιση, δηλαδή ότι

$$\nparallel \cdot \nparallel -lim_{\nu \to +\infty} Tx^{[\nu]} = Tx.$$

Για να το αποδείξουμε αυτό, θεωρούμε μια τυχαία υπακολουθία $(Tx^{[\mu_\nu]})_{\nu \geq 1}$ της $(Tx^{[\nu]})_{\nu \geq 1}$. Από το γεγονός ότι το σύνολο TX είναι σχετικά συμπαγές συνεπάγεται ότι υπάρχει μια υπακολουθία $(Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]})_{\nu \geq 1}$ της $(Tx^{[\mu_\nu]})_{\nu \geq 1}$ η οποία συγκλίνει προς μια συνάρτηση $u \in E$ ως προς τη στάθμη $\nparallel \cdot \nparallel$, δηλαδή

$$\nparallel \cdot \nparallel -lim_{\nu \to +\infty} Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]} = u.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε και την κατά σημείο σύγκλιση

$$lim_{\nu\to+\infty}(Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]})(t) = u(t), \quad \text{για κάθε } t \geq -r.$$

Όμως από τη σχέση (2.22) έχουμε ότι

$$lim_{\nu\to+\infty}(Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]})(t) = Tx(t), \quad \text{για κάθε } t \geq -r.$$

Άρα από τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι $Tx(t) = u(t)$ για κάθε $t \geq -r$, δηλαδή $Tx = u$. Οπότε

$$\nparallel \cdot \nparallel -lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\mu_\nu]} = \nparallel \cdot \nparallel -lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]} = Tx.$$

Άρα κάθε υπακολουθία της $(Tx^{[\nu]})_{\nu\geq 1}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο Tx. Επομένως

$$\nparallel \cdot \nparallel -lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\nu]} = Tx.$$

Συνεπώς η απεικόνιση T είναι συνεχής.

Τέλος από το Θεώρημα του Schauder (Θεώρημα 1.27) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in X$ τέτοιο ώστε $x = Tx$, δηλαδή

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{για } -r \leq t \leq 0 \\ \xi t + \int_0^{+\infty} min\{t,s\} f(s, x_s, x'(s))ds, & \text{για } t \geq 0. \end{cases}$$

Από την Πρόταση 2.1, η συνάρτηση x είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.4).

Ακόμη, επειδή $x \in X$ και $x = Tx$, από τη σχέση (2.20) έχουμε ότι η λύση x ικανοποιεί την

$$|x'(t) - \xi| \leq c - |\xi|, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η λύση x ικανοποιεί τη σχέση (2.10). Επιπλέον, αφού $x(0) = \phi(0) = 0$, η σχέση (2.9) προκύπτει από τη σχέση (2.10). □

Σημείωση 2.3. Υποθέτουμε ότι $\xi > 0$. Τότε οι σχέσεις (2.9) και (2.10) γίνονται

$$(-c + 2\xi)t \leq x(t) \leq ct, \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \tag{2.23}$$

και

$$-c + 2\xi \leq x'(t) \leq c, \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \tag{2.24}$$

αντίστοιχα. Επιπλέον, μαζί με την υπόθεση ότι $c > \xi$, υποθέτουμε και ότι $c < 2\xi$. Άρα έχουμε ότι $0 < \xi < c < 2\xi$. Τότε η σχέση (2.23) συνεπάγεται ότι η λύση x είναι θετική στο διάστημα $(0, +\infty)$ και τέτοια ώστε $lim_{t\to+\infty}x(t) = +\infty$. Επίσης, από τη σχέση (2.24) συνεπάγεται ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$ και επομένως η λύση x είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Με ανάλογο τρόπο, στην περίπτωση όπου $2\xi < -c < \xi < 0$, παρατηρούμε ότι η λύση x είναι αρνητική στο διάστημα $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε $lim_{t\to+\infty}x(t) = -\infty$, και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

2.3 Εφαρμογές

Σε αυτήν την παράγραφο παραθέτουμε κάποιες εφαρμογές του Θεωρήματος 2.2.

Αρχικά, θεωρούμε τη δεύτερης τάξης, μη γραμμική, συνήθη διαφορική εξίσωση

$$x''(t) + g(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2.25}$$

όπου g είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$.

Ενδιαφερόμαστε για λύσεις της εξίσωσης (2.25) ορισμένες σε ολόκληρο το διάστημα $[0, +\infty)$. Μαζί με την εξίσωση (2.25) θεωρούμε την αρχική συνθήκη

$$x(0) = 0 \tag{2.26}$$

καθώς και τη συνθήκη (2.4). Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.25), (2.26), (2.4), το Θεώρημα 2.2 διαμορφώνεται ως εξής:

Υποθέτουμε ότι

$$|g(t, y, z)| \leq G(t, |y|, |z|), \quad \text{για όλα τα } (t, y, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2,$$

όπου G είναι μια μη αρνητική, συνεχής και πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[0, +\infty) \times [0, +\infty)^2$. Υποθέτουμε πως για κάθε $t \geq 0$ η συνάρτηση $G(t, \cdot, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)^2$ υπό την έννοια ότι $G(t, y, z) \leq G(t, w, v)$ για κάθε $(y, z), (w, v) \in [0, +\infty)^2$ με $y \leq w, z \leq v$. Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > |\xi|$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^{+\infty} G(t, ct, c)dt \leq c - |\xi|.$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.25), (2.26), (2.4) *έχει τουλάχιστον μία λύση x που ικανοποιεί τις σχέσεις* (2.9) *και* (2.10).

Στη συνέχεια, θεωρούμε την ακόλουθη δεύτερης τάξης, μη γραμμική διαφορική εξίσωση με υστέρηση

$$x''(t) + h(t, x(t - T_1(t)), \dots, x(t - T_m(t)), x'(t)) = 0, \tag{2.27}$$

όπου m είναι ένας φυσικός αριθμός, h είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^{m+1}$, και T_j $(j = 1, \dots, m)$ είναι μη αρνητικές, συνεχείς, πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[0, +\infty)$ με

$$max_{j=1,\dots,m} sup_{t\geq 0} T_j(t) = r.$$

Λύση στο διάστημα $[0, +\infty)$, της διαφορικής εξίσωσης με υστέρηση (2.27) είναι μία συνάρτηση $x \in C([-r, +\infty), \mathbb{R})$, η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και ικανοποιεί την εξίσωση (2.27) για όλα τα $t \geq 0$. Μαζί με τη διαφορική εξίσωση (2.27), θεωρούμε την αρχική συνθήκη (2.3) καθώς και τη συνθήκη (2.4).

Θέλοντας να συσχετίσουμε τις διαφορικές εξισώσεις (2.1) και (2.27), για κάθε $(t, \psi, z) \in [0, +\infty) \times C([-r, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$f(t, \psi, z) = h(t, \psi(-T_1(t)), \dots, \psi(-T_m(t)), z)$$

Άρα το Θεώρημα 2.2 στην περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.27), (2.3), (2.4), διαμορφώνεται ως εξής:

Υποθέτουμε ότι, για όλα τα $(t, y_1, \ldots, y_m, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{m+1}$, ισχύει

$$|h(t, y_1, \ldots, y_m, z)| \leq H(t, |y_1|, \ldots, |y_m|, |z|),$$

όπου H είναι μια μη αρνητική, συνεχής και πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[0, +\infty) \times [0, +\infty)^{m+1}$. Υποθέτουμε πως για κάθε $t \geq 0$ η συνάρτηση $H(t, \cdot, \ldots, \cdot, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)^{m+1}$ υπό την έννοια ότι

$$H(t, y_1, \ldots, y_m, z) \leq H(t, w_1, \ldots, w_m, v)$$

για κάθε $(y_1, \ldots, y_m, z), (w_1, \ldots, w_m, v) \in [0, +\infty)^{m+1}$ με $y_1 \leq w_1, \ldots, y_m \leq w_m, z \leq v$. Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > |\xi|$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^{+\infty} H(t, \rho_1(t), \ldots, \rho_m(t), c)dt \leq c - |\xi|,$$

όπου, για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$, η συνάρτηση $\rho_j \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ εξαρτάται από τα ϕ, c και ορίζεται ως

$$\rho_j(t) = \begin{cases} |\phi(t - T_j(t))|, & \text{αν } 0 \leq t \leq T_j(t) \\ c(t - T_j(t)), & \text{αν } t \geq T_j(t). \end{cases}$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.27), (2.3), (2.4) *έχει τουλάχιστον μία λύση x που ικανοποιεί της σχέσεις* (2.9) *και* (2.10).

Ας θεωρήσουμε τώρα τις δεύτερης τάξης, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τύπου Emden-Fowler

$$x''(t) + a(t)|x(t)|^\gamma sgn\big(x(t)\big) + b(t)|x'(t)|^\beta sgn\big(x'(t)\big) = 0 \tag{2.28}$$

και

$$x''(t) + a(t)|x(t-r)|^\gamma sgn\big(x(t-r)\big) + b(t)|x'(t)|^\beta sgn\big(x'(t)\big) = 0, \tag{2.29}$$

όπου a, b είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[0, +\infty)$, και γ, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2 και πιο συγκεκριμένα την πρώτη εφαρμογή που παρουσιάσαμε σε αυτήν την παράγραφο, για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.28), (2.26), (2.4) καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > |\xi|$ τέτοιος ώστε

$$c^\gamma \int_0^{+\infty} t^\gamma |a(t)|dt + c^\beta \int_0^{+\infty} |b(t)|dt \leq c - |\xi|. \tag{2.30}$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.28), (2.26), (2.4) *έχει τουλάχιστον μια λύση που ικανοποιεί τις σχέσεις* (2.9) *και* (2.10).

Επιπλέον, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2, και ειδικότερα τη δεύτερη εφαρμογή που παρουσιάσαμε σε αυτήν την παράγραφο, για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.29), (2.3), (2.4) καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > |\xi|$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^r |\phi(t-r)|^\gamma |a(t)|dt + c^\gamma \int_r^{+\infty} (t-r)^\gamma |a(t)|dt + c^\beta \int_0^{+\infty} |b(t)|dt \leq c - |\xi|. \quad (2.31)$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.29), (2.3), (2.4) *έχει τουλάχιστον μια λύση x που ικανοποιεί τις σχέσεις* (2.9) *και* (2.10).

Θέτουμε $\xi = 1, \gamma = 2, \beta = 1$, $a(t) = \dfrac{1}{3(t+1)^4}$, για κάθε $t \geq 0$, και $b(t) = \dfrac{1}{6(t+1)^2}$, για κάθε $t \geq 0$. Τότε η ανίσωση (2.30) γίνεται

$$c^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{3(t+1)^4} dt + c \int_0^{+\infty} \frac{1}{6(t+1)^2} dt \leq c - 1.$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\frac{3}{2} \leq c \leq 6.$$

Για $c = \frac{3}{2}$, προκύπτει ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{1}{3(t+1)^4}[x(t)]^2 sgn\big(x(t)\big) + \frac{1}{6(t+1)^2} x'(t) = 0 \\ x(0) = 0, \quad lim_{t \to +\infty} x'(t) = 1 \end{cases}$$

έχει τουλάχιστον μια λύση x η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\frac{t}{2} \leq x(t) \leq \frac{3t}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} \leq x'(t) \leq \frac{3}{2}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \quad (2.32)$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $r = 1, \phi(t) = t$, για κάθε $-1 \leq t \leq 0$, $\xi = 1, \gamma = 2, \beta = 1$ $a(t) = \frac{6}{13(t+1)^4}$, για κάθε $t \geq 0$, και $b(t) = \frac{1}{6(t+1)^2}$, για κάθε $t \geq 0$. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση (2.31) γίνεται

$$\int_0^1 \frac{6(t-1)^2}{13(t+1)^4} dt + c^2 \int_1^{+\infty} \frac{6(t-1)^2}{13(t+1)^4} dt + c \int_0^{+\infty} \frac{1}{6(t+1)^2} dt \leq c - 1.$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\frac{3}{2} \leq c \leq \frac{28}{3}.$$

Για $c = \frac{3}{2}$, προκύπτει ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{6}{13(t+1)^4}[x(t-1)]^2 sgn\big(x(t-1)\big) + \frac{1}{6(t+1)^2} x'(t) = 0 \\ x(t) = t \ \text{για καθε} \ -1 \leq t \leq 0, \quad lim_{t \to +\infty} x'(t) = 1 \end{cases}$$

έχει τουλάχιστον μια λύση x η οποία ικανοποιεί τις ανισότητες (2.32).

Κεφάλαιο 3

Θεώρημα Krasnoselskii

3.1 Εισαγωγή

Προβλήματα συνοριακών τιμών σε μη φραγμένα διαστήματα εμφανίζονται συχνά κατά τη μοντελοποίηση φυσικών διεργασιών. Τέτοια προβλήματα προκύπτουν, για παράδειγμα, κατά τη μελέτη της γραμμικής ελαστικότητας, στις ροές υγρών και σε προβλήματα μηχανικής (βλέπε [1, 34, 58] και τις αναφορές που υπάρχουν εκεί). Μια ενδιαφέρουσα επισκόπηση προβλημάτων μη φραγμένου διαστήματος, με αναφορές σε διάφορα παραδείγματα, ιστορική αναδρομή και ποικίλες μεθόδους επίλυσης, έχει γίνει από τους Agarwal και O'Regan [1]. Ειδικότερα για προβλήματα συνοριακών τιμών στην ημιευθεία παραπέμπουμε στις εργασίες [14, 20, 34, 56, 57, 58, 64, 69, 70, 86, 87, 88, 90].

Για τη βασική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με υστέρηση, παραπέμπουμε στα βιβλία των Diekmann [25], και των Hale και Lunel [36]. Όσον αφορά προβλήματα αρχικών τιμών, παραπέμπουμε στη μονογραφία των Lakshmikantham και Leela [51], ενώ όσον αφορά προβλήματα συνοριακών τιμών, παραπέμπουμε στις μονογραφίες των Azbelev, Maksimov και Rakhmatullina [12], και Azbelev και Rakhmatullina [13].

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με την ύπαρξη μη αρνητικών λύσεων προβλημάτων συνοριακών τιμών στην ημιευθεία για δεύτερης τάξης, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση. Επίσης, παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν για την αντίστοιχη συνήθη διαφορική εξίσωση. Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου αντλήθηκαν από την εργασία [68].

Ας είναι $r \geq 0$. Θεωρούμε τη Συνθήκη Συνέχειας (Driver[26], σελ. 290):

$$\begin{aligned} &f(t, \chi_t) \textit{ είναι συνεχής ως προς τη μεταβλητή } t \in [0, +\infty) \\ &\textit{για κάθε δοσμένη συνάρτηση } \chi \in C([-r, +\infty), \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{$\widehat{C}$}$$

Θεωρούμε τη μη γραμμική, υστερημένη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x''(t) + f(t, x_t) = 0, \tag{3.1}$$

όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[0, +\infty) \times C([-r, 0], \mathbb{R})$, η οποία ικανοποιεί τη Συνθήκη Συνέχειας $(\widehat{C})$.

Ενδιαφερόμαστε για λύσεις της διαφορικής εξίσωσης με υστέρηση (3.1) ορισμένες σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Με τον όρο *λύση στο* $[0,+\infty)$ της (3.1), εννοούμε μια συνάρτηση $x \in C([-r,+\infty),\mathbb{R})$ η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$ και ικανοποιεί την εξίσωση (3.1) για όλα τα $t \geq 0$. Ειδικότερα θα εξετάσουμε την ύπαρξη μη–αρνητικών λύσεων αυτής της διαφορικής εξίσωσης.

Η διαφορική εξίσωση με υστέρηση (3.1) είναι δεύτερης τάξης, συνεπώς χρειαζόμαστε δύο συνθήκες για την επίλυσή της. Θεωρούμε, λοιπόν, την αρχική συνθήκη

$$x_0 = \phi \tag{3.2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$x(t) = \phi(t), \quad \text{για όλα τα } -r \leq t \leq 0, \tag{3.3}$$

όπου $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R})$ είναι δοσμένη, και επιπλέον υποθέτουμε ότι

$$\phi(0) = 0.$$

Επίσης, θεωρούμε και τη συνθήκη

$$lim_{t\to+\infty}x'(t) = \xi, \tag{3.4}$$

όπου ξ είναι ένας δοσμένος πραγματικός αριθμός. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η (3.4) συνεπάγεται τη σχέση

$$lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{t} = \xi. \tag{3.5}$$

Οι εξισώσεις (3.1), (3.2), (3.4) συνθέτουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών στην ημιευθεία. Με τον όρο *λύση της διαφορικής εξίσωσης με υστέρηση* (3.1) *στο διάστημα* $[0,+\infty)$, που ικανοποιεί τις συνθήκες (3.2) και (3.4) εννοούμε τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4).

Θεωρούμε τώρα την αντίστοιχη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$x''(t) + g(t,x(t)) = 0, \tag{3.6}$$

όπου g είναι μια συνεχής, πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο σύνολο $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ και εστιάζουμε την προσοχή μας μόνο σε λύσεις της εξίσωσης (3.6) που ορίζονται σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Μαζί με τη διαφορική εξίσωση (3.6), θεωρούμε την αρχική συνθήκη

$$x(0) = 0 \tag{3.7}$$

καθώς και τη συνθήκη (3.4). Σε αυτή την ειδική περίπτωση, το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4) μετασχηματίζεται στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.6), (3.7), (3.4).

Η διαφορική εξίσωση (3.1) είναι μια γενική μορφή διαφορικής εξίσωσης, η οποία περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τη συνήθη διαφορική εξίσωση (3.6), εξισώσεις με πολλές υστερήσεις, καθώς και διάφορους άλλους τύπους ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων με υστέρηση, όπως για παράδειγμα την εξίσωση

$$x''(t) + g\left(t, \int_{-r}^{0} x(t+s)ds\right) = 0.$$

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε την περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης (3.6) καθώς και τη δεύτερης τάξης, μη γραμμική διαφορική εξίσωση με υστέρηση

$$x''(t) + h(t, x(t - T_1(t)), \ldots, x(t - T_m(t))) = 0, \tag{3.8}$$

όπου m είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, h είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^m$, και T_j $(j = 1, \ldots, m)$ είναι μη αρνητικές, συνεχείς, πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[0, +\infty)$ με

$$max_{j=1,\ldots,m} sup_{t \geq 0} T_j(t) = r.$$

Λύση στο διάστημα $[0, +\infty)$ της διαφορικής εξίσωσης με υστέρηση (3.8) είναι μία συνάρτηση $x \in C([-r, +\infty), \mathbb{R})$, η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ και ικανοποιεί την εξίσωση (3.8) για όλα τα $t \geq 0$. Μαζί με τη διαφορική εξίσωση (3.8), θεωρούμε και την αρχική συνθήκη (3.3) καθώς και τη συνθήκη (3.4).

Προκειμένου να συσχετίσουμε τις διαφορικές εξισώσεις (3.1) και (3.8), για κάθε $(t, \psi) \in [0, +\infty) \times C([-r, 0], \mathbb{R})$, επιλέγουμε

$$f(t, \psi) = h(t, \psi(-T_1(t)), \ldots, \psi(-T_m(t))).$$

Στην ακόλουθη πρόταση παρουσιάζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση, τα σταθερά σημεία της οποίας είναι ακριβώς οι λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4).

Πρόταση 3.1. *Μια συνάρτηση* $x \in C([-r, +\infty), \mathbb{R})$ *είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών* (3.1), (3.2), (3.4) *αν και μόνον αν*

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{για } -r \leq t \leq 0 \\ \xi t + \int_0^{+\infty} min\{t, s\} f(s, x_s) ds, & \text{για } t \geq 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Απόδειξη. Έστω x μια συνάρτηση στο $C([-r, +\infty), \mathbb{R})$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η x ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση (3.9). Τότε η συνθήκη (3.3) ή ισοδύναμα η (3.2) επαληθεύονται. Επίσης, παραγωγίζοντας την (3.9) για $t \geq 0$, έχουμε

$$x'(t) = \xi + \int_t^{+\infty} f(s, x_s) ds, \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

από το οποίο έπεται ότι $lim_{t \to +\infty} x'(t) = \xi$, δηλαδή, η συνθήκη (3.4) ικανοποιείται. Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση ακόμη μία φορά έχουμε

$$x''(t) = -f(t, x_t), \quad \text{για όλα τα } t \geq 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η x είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.1) στο διάστημα $[0, +\infty)$. Άρα, η x είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η x είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4). Από την (3.3) έχουμε ότι $x(t) = \phi(t)$ για όλα τα $-r \leq t \leq 0$. Επιπλέον, ολοκληρώνοντας την εξίσωση (3.1) στο $[0, t]$ για $t \geq 0$ παίρνουμε

$$x'(t) = x'(0) - \int_0^t f(s, x_s)ds, \quad \text{για όλα τα } t \geq 0 \tag{3.10}$$

και συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη (3.4), έχουμε

$$\xi = x'(0) - \int_0^{+\infty} f(s, x_s)ds$$

δηλαδή,

$$x'(0) = \xi + \int_0^{+\infty} f(s, x_s)ds.$$

Άρα, για όλα τα $t \geq 0$, από τη σχέση (3.10) έχουμε

$$\begin{aligned} x'(t) &= \left[\xi + \int_0^{+\infty} f(s, x_s)ds\right] - \int_0^t f(s, x_s)ds \\ &= \xi + \int_t^{+\infty} f(s, x_s)ds. \end{aligned}$$

Κάνοντας ακόμα μία ολοκλήρωση για $t \geq 0$ και λαμβάνοντας υπόψη πως $x(0) = \phi(0) = 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \xi t + \int_0^t \left[\int_\theta^{+\infty} f(s, x_s)ds\right] d\theta \\ &= \xi t + \int_0^t \left[\int_\theta^t f(s, x_s)ds + \int_t^{+\infty} f(s, x_s)ds\right] d\theta \\ &= \xi t + \int_0^t \int_\theta^t f(s, x_s)dsd\theta + t\int_t^{+\infty} f(s, x_s)ds \\ &= \xi t + \int_0^t sf(s, x_s)ds + t\int_t^{+\infty} f(s, x_s)ds. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση x ικανοποιεί τη σχέση (3.9).

Επομένως η απόδειξη της πρότασης έχει ολοκληρωθεί. □

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την ύπαρξη λύσεων του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder (Θεώρημα 1.27). Σημειώνουμε ότι στο προηγούμενο κεφάλαιο, η δεύτερης τάξης, μη γραμμική διαφορική εξίσωση με υστέρηση είναι πιο γενική από εκείνη που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο, καθώς ο μη γραμμικός όρος περιλαμβάνει και την παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης. Ακόμη, όπως θα δούμε παρακάτω, τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να εγγυηθούν την ύπαρξη περισσότερων της μίας μη αρνητικών λύσεων.

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μη αρνητικών λύσεων του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4). Υποθέτουμε ότι

$$\phi(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \in [-r, 0], \quad \text{και } \xi \geq 0.$$

Από την Πρόταση 3.1, κάθε λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4) ικανοποιεί τη σχέση (3.9). Επομένως, μπορούμε εύκολα να οδηγηθούμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Υποθέτουμε ότι

$$f(t, \psi) \geq 0, \quad \textit{για κάθε } (t, \psi) \in [0, +\infty) \times C([-r, 0], [0, +\infty)). \tag{3.11}$$

Τότε κάθε μη αρνητική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4) *ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$x(t) \geq \xi t, \quad \textit{για κάθε } t \geq 0 \tag{3.12}$$

και

$$x'(t) \geq \xi, \quad \textit{για κάθε } t \geq 0. \tag{3.13}$$

Το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου εξασφαλίζει κατάλληλες συνθήκες για να έχει το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4) τουλάχιστον μια μη αρνητική λύση. Στην παράγραφο 3.3 παρουσιάζουμε δύο Πορίσματα (Πορίσματα 3.9 και 3.10 του Θεωρήματος 3.2, για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.6), (3.7), (3.4) καθώς και για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.8), (3.3), (3.4). Επιπλέον, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2, αλλά και τα Πορίσματα 3.9 και 3.10, στη δεύτερης τάξης, μη γραμμική (συνήθη ή με υστέρηση) διαφορική εξίσωση τύπου Emden-Fowler. Την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 την παραθέτουμε στην παράγραφο 3.2 και στην τελευταία παράγραφο 3.3 παρουσιάζουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

3.2 Θεώρημα ύπαρξης λύσης για το ΠΣΤ

Θεώρημα 3.2. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση* (3.11). *Επίσης, υποθέτουμε ότι, για κάθε $t \geq 0$, η συνάρτηση $f(t, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $C([-r, 0], [0, +\infty))$ υπό την έννοια ότι $f(t, \psi) \leq f(t, \omega)$ για κάθε $\psi, \omega \in C([-r, 0], [0, +\infty))$ με $\psi \leq \omega$ (δηλαδή $\psi(s) \leq \omega(s)$ για όλα τα $-r \leq s \leq 0$).*

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c \geq \|\phi\|_{[-r,0]}$ και $c > \xi$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^{+\infty} f(t, \eta_t) dt \leq c - \xi, \tag{3.14}$$

όπου η συνάρτηση $\eta \in C([-r, +\infty), [0, +\infty))$ εξαρτάται από το c και ορίζεται ως

$$\eta(t) = \begin{cases} c, & \textit{για } -r \leq t \leq 0 \\ c(t+1), & \textit{για } t \geq 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $b > 0$ με $b \neq c$ τέτοιος ώστε, για κάποιο σταθερό $t_0 > 0$, να ισχύει η σχέση

$$\int_0^{+\infty} min\{t_0, t\} f(t, \zeta_t) dt \geq b(t_0 + 1) - \xi t_0, \tag{3.16}$$

όπου η συνάρτηση $\zeta \in C([-r,+\infty),[0,+\infty))$ *εξαρτάται από τα* ϕ, b *και ορίζεται ως*

$$\zeta(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{για } -r \le t \le 0 \\ bmin\{t,1\}, & \text{για } t \ge 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Επιπλέον, στην περίπτωση όπου $b > c$*, υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση*

$$\int_0^{+\infty} f(t, \epsilon_t)dt < +\infty, \tag{3.18}$$

όπου η συνάρτηση $\epsilon \in C([-r,+\infty),[0,+\infty))$ *εξαρτάται από το* b *και ορίζεται ως*

$$\epsilon(t) = \begin{cases} b, & \text{για } -r \le t \le 0 \\ b(t+1), & \text{για } t \ge 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4) *έχει τουλάχιστον μια μη αρνητική λύση* x *τέτοια ώστε*

$$x(t) \ge \left[sup_{M\ge 0} \frac{x(M)}{M+1} \right] min\{t,1\}, \quad \text{για κάθε } t \ge 0 \tag{3.20}$$

και

$$min\{c,b\} \le sup_{t\ge 0} \frac{x(t)}{t+1} \le max\{c,b\}. \tag{3.21}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 είναι βασισμένη στο Θεώρημα του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28, βλέπε [35, 46]).

Έστω E το σύνολο όλων των συναρτήσεων $y \in C([0,+\infty),\mathbb{R})$ με την ιδιότητα $y(t) = O(t)$ για $t \to +\infty$, δηλαδή υπάρχει ένας θετικός, πραγματικός αριθμός Λ τέτοιος ώστε $|y(t)| \le \Lambda t$ για $t \to +\infty$. Το σύνολο E είναι ένας πραγματικός χώρος Banach εφοδιασμένος με τη στάθμη $\|\cdot\|_*$ που ορίζεται ως

$$\|y\|_* := sup_{t\ge 0} \frac{|y(t)|}{t+1}, \quad \text{για κάθε } y \in E.$$

Επίσης, θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{P} := \{y \in E : y(t) \ge 0, \text{ για κάθε } t \in [0,+\infty), \ y(0) = 0\}.$$

Το σύνολο $\mathbb{P}$ είναι ένας κώνος μέσα στο E. Επιπλέον, για κάθε συνάρτηση $y \in \mathbb{P}$, συμβολίζουμε με x τη συνάρτηση του συνόλου $C([-r,+\infty),[0,+\infty))$ που ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{για } -r \le t \le 0 \\ y(t), & \text{για } t \ge 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2 θα κάνουμε χρήση της ακόλουθης πρόταση.

Πρόταση 3.3. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση* (3.11). *Επίσης, υποθέτουμε ότι, για κάθε* $t \geq 0$, *η συνάρτηση* $f(t, \cdot)$ *είναι αύξουσα στο* $C([-r, 0], [0, +\infty))$.

Έστω d *ένας θετικός, πραγματικός αριθμός με* $d \geq \|\phi\|_{[-r,0]}$ *τέτοιος ώστε*

$$\int_0^{+\infty} f(t, \theta_t)dt < +\infty, \tag{3.23}$$

όπου η συνάρτηση $\theta \in C([-r, +\infty), [0, +\infty))$ *ορίζεται ως*

$$\theta(t) = \begin{cases} d, & \text{για } -r \leq t \leq 0 \\ d(t+1), & \text{για } t \geq 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Ορίζουμε, ακόμη, το σύνολο

$$\Omega := \{y \in E : \|y\|_* < d\}.$$

Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{P} \cap \overline{\Omega} \to C([0, +\infty), [0, +\infty))$ *που για κάθε* $t \geq 0$ *ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} (Ty)(t) &= \xi t + \int_0^{+\infty} min\{t, s\} f(s, x_s)ds \\ &= \xi t + \int_0^t sf(s, x_s)ds + t\int_t^{+\infty} f(s, x_s)ds \end{aligned} \tag{3.25}$$

είναι καλά ορισμένη για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}$, *ορίζει έναν πλήρως συνεχή τελεστή και, επιπλέον, ισχύει ότι* $T(\mathbb{P} \cap \overline{\Omega}) \subseteq \mathbb{P}$.

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}$. Τότε

$$0 \leq y(t) \leq d(t+1), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Επειδή ισχύει ότι $d \geq \|\phi\|_{[-r,0]}$, έχουμε ότι

$$0 \leq \phi(t) \leq d, \quad \text{για κάθε } -r \leq t \leq 0.$$

Άρα, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.22) και (3.24), βρίσκουμε ότι

$$0 \leq x(t) \leq \theta(t), \quad \text{για κάθε } t \geq -r$$

και συνεπώς

$$0 \leq x_t \leq \theta_t, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Σημειώνουμε ότι, αφού $\phi(0) = 0 = y(0)$, η συνάρτηση x είναι συνεχής στο διάστημα $[-r, +\infty)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την υπόθεση (3.11), καθώς και το γεγονός ότι, για κάθε $t \geq 0$, η συνάρτηση $f(t, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $C([-r, 0], [0, +\infty))$, έχουμε ότι

$$0 \leq f(t, x_t) \leq f(t, \theta_t), \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{3.26}$$

Από τις σχέσεις (3.23) και (3.26) συνεπάγεται ότι

$$\int_0^{+\infty} f(t, x_t)dt < +\infty, \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}. \tag{3.27}$$

Επίσης, από τη σχέση (3.27), διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση

$$T : \mathbb{P} \cap \overline{\Omega} \to C([0,+\infty),[0,+\infty)),$$

που ορίζεται από τον τύπο (3.25), είναι καλά ορισμένη για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}$. Θα δείξουμε ότι $T(\mathbb{P} \cap \overline{\Omega}) \subseteq \mathbb{P}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}$, η συνάρτηση Ty είναι μη αρνητική στο διάστημα $[0,+\infty)$ και ότι $(Ty)(0) = 0$. Επίσης από τις σχέσεις (3.23) και (3.26), για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}$ και για κάθε $t \geq 0$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{(Ty)(t)}{t+1} &= \xi \frac{t}{t+1} + \int_0^{+\infty} \frac{min\{t,s\}}{t+1} f(s,x_s)ds \\ &\leq \xi + \int_0^{+\infty} f(s,x_s)ds \leq \xi + \int_0^{+\infty} f(s,\theta_s)ds. \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε ότι

$$\frac{(Ty)(t)}{t+1} \leq N, \quad \text{για κάθε } t \geq 0, \tag{3.28}$$

όπου

$$N = \xi + \int_0^{+\infty} f(s,\theta_s)ds. \tag{3.29}$$

Από τις σχέσεις (3.11) και (3.23) προκύπτει ότι το N είναι ένας μη αρνητικός, πραγματικός αριθμός. Άρα, $(Ty)(t) = O(t)$ για κάθε $t \geq 0$, και επομένως $(Ty)(t) = O(t)$ για $t \to +\infty$. Συνεπώς, για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}$ συνεπάγεται ότι $Ty \in \mathbb{P}$, δηλαδή, $T(\mathbb{P} \cap \overline{\Omega}) \subseteq \mathbb{P}$.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι το σύνολο $T(\mathbb{P} \cap \overline{\Omega})$ είναι σχετικά συμπαγές. Επειδή εργαζόμαστε στο διάστημα $[0,+\infty)$, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Avramescu (Θεώρημα 1.25). Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της στάθμης $\|\cdot\|_*$ αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$U := \left\{ u : \text{υπάρχει } y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega} \text{ τέτοιο ώστε } u(t) = \frac{(Ty)(t)}{t+1} \text{ για } t \geq 0 \right\}$$

είναι σχετικά συμπαγές στο χώρο Banach E. Παρατηρούμε ότι, λόγω της σχέσης (3.28), το σύνολο U είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Επίσης, από τη σχέση (3.26), για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}$ και για κάθε $t \geq 0$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\left[\frac{(Ty)(t)}{t+1}\right]'\right| &= \frac{|(t+1)(Ty)'(t) - (Ty)(t)|}{(t+1)^2} \\
&= \frac{1}{(t+1)^2}\Big|(t+1)\Big[\xi + \int_t^{+\infty} f(s,x_s)ds\Big] \\
&- \Big[\xi t + \int_0^t sf(s,x_s)ds + t\int_t^{+\infty} f(s,x_s)ds\Big]\Big| \\
&= \frac{1}{(t+1)^2}\Big|\xi - \int_0^t sf(s,x_s)ds + \int_t^{+\infty} f(s,x_s)ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{(t+1)^2}\Big[\xi + \int_0^t sf(s,x_s)ds + \int_t^{+\infty} f(s,x_s)ds\Big] \\
&= \frac{\xi}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1}\int_0^t \frac{s}{t+1} f(s,x_s)ds + \frac{1}{(t+1)^2}\int_t^{+\infty} f(s,x_s)ds \\
&\leq \xi + \int_0^t f(s,x_s)ds + \int_t^{+\infty} f(s,x_s)ds \\
&= \xi + \int_0^{+\infty} f(s,x_s)ds \leq \xi + \int_0^{+\infty} f(s,\theta_s)ds
\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\left|\left[\frac{(Ty)(t)}{t+1}\right]'\right| \leq N, \quad \text{για κάθε } t \geq 0, \tag{3.30}$$

όπου η μη αρνητική και πραγματική σταθερά N ορίζεται από τη σχέση (3.29). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.30), εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και καταλήγουμε στο ότι

$$\left|\frac{(Ty)(t_1)}{t_1+1} - \frac{(Ty)(t_2)}{t_2+1}\right| \leq N|t_1 - t_2|, \quad \text{για κάθε } t_1, t_2 \geq 0.$$

Επομένως το σύνολο U είναι ισοσυνεχές. Ακόμη, από τη σχέση (3.26) ξανά έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(Ty)(t)}{t+1} - \xi\right| &= \left|\frac{\xi t + \int_0^{+\infty} min\{t,s\} f(s,x_s)ds}{t+1} - \xi\right| \\
&= \frac{|-\xi + \int_0^{+\infty} min\{t,s\} f(s,x_s)ds|}{t+1} \\
&\leq \frac{\xi + \int_0^{+\infty} min\{t,s\} f(s,x_s)ds}{t+1} \\
&\leq \frac{\xi + \int_0^{+\infty} min\{t,s\} f(s,\theta_s)ds}{t+1},
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\left|\frac{(Ty)(t)}{t+1} - \xi\right| \leq \frac{\xi + \int_0^{+\infty} min\{t,s\} f(s,\theta_s)ds}{t+1}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{3.31}$$

Όμως, από τις σχέσεις (3.4), (3.5) και (3.23), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} lim_{t\to+\infty}\frac{\xi+\int_0^{+\infty}min\{t,s\}f(s,\theta_s)ds}{t+1} &= lim_{t\to+\infty}\Big[\xi+\int_0^{+\infty}min\{t,s\}f(s,\theta_s)ds\Big]' \\ &= lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(s,\theta_s)ds = 0. \end{aligned}$$

Άρα από τη σχέση (3.31), προκύπτει ότι, το σύνολο U είναι ισοσυγκλίνον στο $+\infty$.

Επομένως, από το Θεώρημα του Avramescu (Θεώρημα 1.25) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο U είναι ένα σχετικά συμπαγές σύνολο στο χώρο E. Άρα το σύνολο $T(\mathbb{P}\cap\overline{\Omega})$ είναι σχετικά συμπαγές στο χώρο E. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση T είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$. Έστω $y\in\mathbb{P}\cap\overline{\Omega}$ μια συνάρτηση και $(y^{[\nu]})_{\nu\geq1}$ μια ακολουθία συναρτήσεων του $\mathbb{P}\cap\overline{\Omega}$ με

$$\|\cdot\|_* - lim_{\nu\to+\infty}y^{[\nu]} = y.$$

Έχουμε ότι

$$lim_{\nu\to+\infty}y^{[\nu]}(t) = y(t) \text{ ομοιόμορφα για τα } t\geq 0.$$

Επίσης, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, ορίζουμε

$$x^{[\nu]}(t) = \begin{cases}\phi(t), & \text{για } -r\leq t\leq 0\\ y^{[\nu]}(t), & \text{για } t\geq 0.\end{cases}$$

Ακόμη,

$$\|\cdot\|_{[-r,0]} - lim_{\nu\to+\infty}x_t^{[\nu]} = x_t, \quad \text{για κάθε } t\geq 0.$$

Επιπλέον, από τη σχέση (3.26), έχουμε ότι

$$0\leq f(t,x_t^{[\nu]})\leq f(t,\theta_t), \quad \text{για κάθε } t\geq 0 \text{ και για κάθε } \nu\geq 1.$$

Λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη σχέση, καθώς και τη σχέση (3.23), εφαρμόζουμε το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης του Lebesgue και, για $t\geq 0$, έχουμε,

$$lim_{\nu\to+\infty}\int_0^{+\infty}min\{t,s\}f(s,x_s^{[\nu]})ds = \int_0^{+\infty}min\{t,s\}f(s,x_s)ds.$$

Αυτό εξασφαλίζει την κατά σημείο σύγκλιση

$$lim_{\nu\to+\infty}(Ty^{[\nu]})(t) = (Ty)(t), \quad \text{για όλα τα } t\geq 0. \tag{3.32}$$

Αρκεί λοιπόν να εξασφαλίσουμε ότι η σύγκλιση αυτή είναι επίσης $\|\cdot\|_*$−σύγκλιση, δηλαδή ότι

$$\|\cdot\|_* - lim_{\nu\to+\infty}Ty^{[\nu]} = Ty.$$

Για να το αποδείξουμε αυτό, θεωρούμε μια τυχαία υπακολουθία $(Ty^{[\mu_\nu]})_{\nu\geq1}$ της $(Ty^{[\nu]})_{\nu\geq1}$. Επειδή το σύνολο $T(\mathbb{P}\cap\overline{\Omega})$ είναι σχετικά συμπαγές, υπάρχει μια υπακολουθία $(Ty^{[\mu_{\lambda_\nu}]})_{\nu\geq1}$ της $(Ty^{[\mu_\nu]})_{\nu\geq1}$ η οποία συγκλίνει σε μια συνάρτηση $u\in E$ ως προς τη στάθμη $\|\cdot\|_*$, δηλαδή

$$\|\cdot\|_* - lim_{\nu\to+\infty}Ty^{[\mu_{\lambda_\nu}]} = u.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε και την κατά σημείο σύγκλιση

$$lim_{\nu\to+\infty}(Ty^{[\mu_{\lambda_\nu}]})(t) = u(t), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Όμως από τη σχέση (3.32) έχουμε και ότι

$$lim_{\nu\to+\infty}(Ty^{[\mu_{\lambda_\nu}]})(t) = Ty(t), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Άρα, από τη μοναδικότητα του ορίου, προκύπτει ότι $Ty(t) = u(t)$, για κάθε $t \geq 0$, δηλαδή $Ty = u$. Οπότε

$$\| \cdot \|_*\text{—}lim_{\nu\to+\infty}Ty^{[\mu_\nu]} = \| \cdot \|_*\text{—}lim_{\nu\to+\infty}Ty^{[\mu_{\lambda_\nu}]} = Ty.$$

Άρα κάθε υπακολουθία της $(Ty^{[\nu]})_{\nu\geq1}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο Ty. Επομένως

$$\| \cdot \|_*\text{—}lim_{\nu\to+\infty}Ty^{[\nu]} = Ty.$$

Συνεπώς η απεικόνιση T είναι συνεχής.

Επειδή το σύνολο $T(\mathbb{P} \cap \overline{\Omega})$ είναι σχετικά συμπαγές και η απεικόνιση T είναι συνεχής, από την Παρατήρηση 1.15 έχουμε ότι η απεικόνιση T είναι πλήρως συνεχής. $\square$

Στη συνέχεια παραθέτουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2. Έστω

$$d := max\{c, b\}.$$

Παρατηρούμε ότι το d είναι ένας θετικός, πραγματικός αριθμός με $d \geq \|\phi\|_{[-r,0]}$. Έστω, ακόμη, θ η συνάρτηση μέσα στο σύνολο $C([-r, +\infty), [0, +\infty))$, που ορίζεται από τη σχέση (3.24). Συμπεραίνουμε ότι,

$$\theta = \eta \;\text{ αν } c > b \;\text{ και }\; \theta = \epsilon \;\text{ αν } b > c,$$

όπου οι συναρτήσεις η και ϵ εξαρτώνται από τα c και d, αντίστοιχα, και ορίζονται από τις σχέσεις (3.15) και (3.19), αντίστοιχα. Από τη σχέση (3.14) έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} f(t, \eta_t)dt < +\infty. \tag{3.33}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.33) αν $c > b$, και τη σχέση (3.18) αν $b > c$, καταλήγουμε στο ότι η (3.23) ισχύει. Θέτουμε

$$\Omega_2 := \{y \in E : \|y\|_* < d\}.$$

Το σύνολο Ω_2 είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου E. Από την Πρόταση 3.3, η απεικόνιση T που ορίζεται από τον τύπο (3.25), είναι καλά ορισμένη για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}_2$, και ορίζει μια πλήρως συνεχή απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{P} \cap \overline{\Omega}_2$ μέσα στο σύνολο $\mathbb{P}$.

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι

$$\|Ty\|_* \leq \|y\|_*, \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}_2 \text{ με } \|y\|_* = c. \tag{3.34}$$

Πραγματικά, έστω $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}_2$ με $\|y\|_* = c$. Τότε

$$0 \leq y(t) \leq c(t+1), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Επειδή $c \geq \|\phi\|_{[-r,0]}$ έχουμε, ακόμη, ότι

$$0 \leq \phi(t) \leq c, \quad \text{για κάθε } -r \leq t \leq 0.$$

Άρα, από τις σχέσεις (3.15) και (3.22), έχουμε ότι

$$0 \leq x(t) \leq \eta(t), \quad \text{για κάθε } t \geq -r,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$0 \leq x_t \leq \eta_t, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την υπόθεση (3.11), καθώς και το γεγονός ότι, για κάθε $t \geq 0$, η συνάρτηση $f(t, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $C([-r, 0], [0, +\infty))$, παρατηρούμε ότι

$$0 \leq f(t, x_t) \leq f(t, \eta_t), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Άρα, για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{(Ty)(t)}{t+1} &= \xi\frac{t}{t+1} + \int_0^{+\infty} \frac{min\{t,s\}}{t+1} f(s, x_s)ds \\ &\leq \xi + \int_0^{+\infty} f(s, x_s)ds \leq \xi + \int_0^{+\infty} f(s, \eta_s)ds.\end{aligned}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (3.14), έχουμε ότι

$$\frac{(Ty)(t)}{t+1} \leq c, \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

το οποίο δίνει ότι

$$\|Ty\|_* = sup_{t\geq 0}\frac{(Ty)(t)}{t+1} \leq c = \|y\|_*$$

και επομένως η σχέση (3.34) ισχύει.

Τώρα, ορίζουμε το σύνολο

$$\mathbb{K} := \{y \in E : y(0) = 0 \text{ και } y(t) \geq min\{t, 1\}\|y\|_* \text{ για } t \geq 0\}.$$

Το σύνολο $\mathbb{K}$ είναι ένας κώνος μέσα στο χώρο E με $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{P}$. Πραγματικά, έστω μια ακολουθία συναρτήσεων $(y^{[\nu]})_{\nu\geq 1} \subseteq \mathbb{K}$ και μια συνάρτηση $y \in E$ τέτοια ώστε

$$\|\cdot\|_* - lim_{\nu\to+\infty} y^{[\nu]} = y.$$

Από τη τελευταία σχέση για το κατά σημείο όριο της $(y^{[\nu]})_{\nu\geq 1}$ έχουμε

$$lim_{\nu\to+\infty}y^{[\nu]}(t) = y(t), \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Επειδή $y^{[\nu]} \in \mathbb{K}$ για κάθε $\nu \geq 1$ ισχύει ότι

$$y(t) = lim_{\nu\to+\infty}y^{[\nu]}(t) \geq lim_{\nu\to+\infty}[min\{t,1\}\|y^{[\nu]}\|_*] = min\{t,1\}\|y\|_*$$

για κάθε $t \geq 0$. Ακόμη, αφού $y^{[\nu]}(0) = 0$ συνεπάγεται ότι $y(0) = 0$. Επομένως, η συνάρτηση $y \in \mathbb{K}$ και συνεπώς το σύνολο $\mathbb{K}$ είναι κλειστό στο E. Επίσης, για κάθε $x, y \in \mathbb{K}$ και για κάθε $\kappa, \lambda \geq 0$ έχουμε ότι

$$(\kappa x + \lambda y)(0) = \kappa x(0) + \lambda y(0) = 0.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(\kappa x + \lambda y)(t) &= \kappa x(t) + \lambda y(t) \geq \kappa min\{t,1\}\|x\|_* + \lambda min\{t,1\}\|y\|_* \\ &= min\{t,1\}[\kappa\|x\|_* + \lambda\|y\|_*] \\ &\geq min\{t,1\}[\|\kappa x + \lambda y\|_*]\end{aligned}$$

για κάθε $t \geq 0$. Άρα, $\kappa x + \lambda y \in \mathbb{K}$. Τέλος, αν $y, -y \in \mathbb{K}$ τότε, αφού $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{P}$, έχουμε ότι

$$y(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \quad \text{και} \quad (-y)(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Επομένως, $y(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$, δηλαδή $y = 0$. Συνεπώς, το σύνολο $\mathbb{K}$ είναι ένας κώνος μέσα στο E.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι $T(\mathbb{P} \cap \overline{\Omega}_2) \subseteq \mathbb{K}$. Έστω μια συνάρτηση $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}_2$. Παρατηρούμε ότι $(Ty)(0) = 0$. Ακόμη, για κάθε $t, M \geq 0$, έχουμε ότι,

$$t \geq \begin{cases} \frac{t}{M+1}M, & \text{για } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{M+1}M, & \text{για } t \geq 1. \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι,

$$t \geq \frac{min\{t,1\}}{M+1}M, \quad \text{για κάθε } t, M \geq 0. \tag{3.35}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι, αν $t, M, s \geq 0$, τότε

$$min\{t,s\} \geq \begin{cases} \frac{t}{M+1}min\{M,s\}, & \text{για } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{M+1}min\{M,s\}, & \text{για } t \geq 1. \end{cases}$$

Άρα, ισχύει η σχέση

$$min\{t,s\} \geq \frac{min\{t,1\}}{M+1}min\{M,s\}, \quad \text{για κάθε } t, M, s \geq 0. \tag{3.36}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (3.11) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.35) και (3.36), παρατηρούμε ότι, για κάθε $t, M \geq 0$,

$$\begin{aligned}(Ty)(t) &= \xi t + \int_0^{+\infty} min\{t, s\} f(s, x_s) ds \\ &\geq \xi \frac{min\{t, 1\}}{M+1} M + \frac{min\{t, 1\}}{M+1} \int_0^{+\infty} min\{M, s\} f(s, x_s) ds \\ &= min\{t, 1\} \Big\{ \frac{1}{M+1} \Big[\xi M + \int_0^{+\infty} min\{M, s\} f(s, x_s) ds \Big] \Big\} \\ &= min\{t, 1\} \frac{(Ty)(M)}{M+1}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$(Ty)(t) \geq min\{t, 1\} sup_{M \geq 0} \frac{(Ty)(M)}{M+1}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

δηλαδή,

$$(Ty)(t) \geq min\{t, 1\} \|Ty\|_*, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Συνεπώς, $Ty \in \mathbb{K}$ για κάθε $y \in \mathbb{P} \cap \overline{\Omega}_2$.

Στο επόμενο βήμα αποδεικνύουμε ότι

$$\|Ty\|_* \geq \|y\|_*, \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{K} \cap \overline{\Omega}_2 \text{ με } \|y\|_* = b. \tag{3.37}$$

Πραγματικά, έστω $y \in \mathbb{K} \cap \overline{\Omega}_2$ με $\|y\|_* = b$. Τότε

$$y(t) \geq min\{t, 1\} \|y\|_*, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Συνεπώς, επειδή ισχύει ότι $\|y\|_* = b$, έχουμε ότι,

$$y(t) \geq b min\{t, 1\}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Άρα, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.17) και (3.22), παρατηρούμε ότι,

$$x(t) \geq \zeta(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \geq -r,$$

το οποίο δίνει ότι

$$x_t \geq \zeta_t \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την υπόθεση (3.11), καθώς και το γεγονός ότι, για κάθε $t \geq 0$, η συνάρτηση $f(t, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $C([-r, 0], [0, +\infty))$, έχουμε ότι

$$f(t, x_t) \geq f(t, \zeta_t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Άρα, από την υπόθεση (3.16), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} sup_{t \geq 0} \frac{(Ty)(t)}{t+1} &\geq \frac{(Ty)(t_0)}{t_0+1} \\ &= \frac{1}{t_0+1} \Big[\xi t_0 + \int_0^{+\infty} min\{t_0, s\} f(s, x_s) ds \Big] \\ &\geq \frac{1}{t_0+1} \Big[\xi t_0 + \int_0^{+\infty} min\{t_0, s\} f(s, \zeta_s) ds \Big] \\ &\geq \frac{1}{t_0+1} \big(\xi t_0 + [b(t_0+1) - \xi t_0] \big) = b, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\|Ty\|_* \geq b = \|y\|_*.$$

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (3.37).

Τέλος, έστω ότι,

$$a := min\{c, b\}.$$

Προφανώς ισχύει ότι, $0 < a < d$. Επίσης, θεωρούμε το ανοικτό και φραγμένο σύνολο Ω_1 του χώρου E που ορίζεται ως

$$\Omega_1 := \{y \in E : \|y\|_* < a\}.$$

Είναι προφανές ότι η μηδενική συνάρτηση του χώρου E ανήκει στο σύνολο Ω_1 και ότι, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Από τις σχέσεις (3.34), (3.37) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\Omega_1 \subset \Omega_2$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι,

$$\|Ty\|_* \geq \|y\|_*, \;\; y \in \mathbb{K} \cap \partial\Omega_1, \quad \text{και} \quad \|Ty\|_* \leq \|y\|_*, \;\; u \in \mathbb{P} \cap \partial\Omega_2, \tag{3.38}$$

αν $c > b$, και

$$\|Ty\|_* \leq \|y\|_*, \;\; y \in \mathbb{P} \cap \partial\Omega_1, \quad \text{και} \quad \|Ty\|_* \geq \|y\|_*, \;\; u \in \mathbb{K} \cap \partial\Omega_2, \tag{3.39}$$

αν $b > c$. Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση T ικανοποιεί είτε τη σχέση (3.38) είτε τη σχέση (3.39). Από το Θεώρημα του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28), η απεικόνιση T έχει ένα σταθερό σημείο μέσα στο $\mathbb{K} \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$. Επομένως, υπάρχει ένα $y \in \mathbb{K} \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ τέτοιο ώστε, $y = Ty$, δηλαδή,

$$y(t) = \xi t + \int_0^{+\infty} min\{t, s\} f(s, x_s) ds, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{3.40}$$

Επειδή η συνάρτηση $y \in \mathbb{K}$, έχουμε ότι

$$y(t) \geq min\{t, 1\}\|y\|_*, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{3.41}$$

Επίσης, επειδή $y \in \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1$, ισχύει ότι,

$$a \leq \|y\|_* \leq d. \tag{3.42}$$

Τώρα, από τις σχέσεις (3.22) και (3.40), η συνάρτηση x ικανοποιεί τη σχέση (3.9) και επομένως, από τη Πρόταση 3.1, η x είναι μη αρνητική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4). Επιπλέον, επειδή ισχύει ότι $x(t) = y(t)$ για κάθε $t \geq 0$, παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (3.41) και (3.42) συμπίπτουν με τις σχέσεις (3.20) και (3.21), αντίστοιχα. □

Σημείωση 3.4. Επειδή ισχύει ότι $x(0) = \phi(0) = 0$, η σχέση (3.12) είναι συνέπεια της σχέσης (3.13).

Σημείωση 3.5. Έστω ότι $\xi > 0$. Τότε, κάθε μη αρνητική λύση x του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.1), (3.2), (3.4) είναι θετική στο διάστημα $(0, +\infty)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και ικανοποιεί την $lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

Σημείωση 3.6. Υποθέτουμε ότι $\xi > 0$. Τότε η ανισότητα (3.16) ισχύει αυτόματα αν $b \leq \xi \frac{t_0}{t_0+1}$, γιατί τότε έχουμε ότι $b < \xi$ και επομένως, $b < c$.

Σημείωση 3.7. Η ανισότητα (3.16) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως

$$\int_0^{t_0} t f(t, \zeta_t) dt + t_0 \int_{t_0}^{+\infty} f(t, \zeta_t) dt \geq b(t_0 + 1) - \xi t_0.$$

Σημείωση 3.8. Από τη σχέση (3.20) και από την πρώτη ανισότητα της σχέσης (3.21) συνεπάγεται ότι η λύση x ικανοποιεί τη σχέση

$$x(t) \geq min\{c, b\} min\{t, 1\}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

3.3 Εφαρμογές

Εξειδικεύοντας το Θεώρημα 3.2 στην περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.6), (3.7), (3.4), παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.9. *Υποθέτουμε ότι*

$$g(t, y) \geq 0, \quad \textit{για κάθε } t \geq 0 \textit{ και για κάθε } y \geq 0.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι, για κάθε $t \geq 0$, η συνάρτηση $g(t, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$ υπό την έννοια ότι $g(t, y) \leq g(t, w)$ για κάθε y, w με $0 \leq y \leq w$.

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > \xi$ τέτοιος ώστε

$$\int_0^{+\infty} g(t, c(t+1)) dt \leq c - \xi.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $b > 0$ με $b \neq c$ τέτοιος ώστε, για κάποιο σταθερό $t_0 > 0$, να ισχύει η σχέση

$$\int_0^{+\infty} min\{t_0, t\} g(t, b\, min\{t, 1\}) dt \geq b(t_0 + 1) - \xi t_0.$$

Επιπλέον, στην περίπτωση όπου $b > c$, υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\int_0^{+\infty} g(t, b(t+1)) dt < +\infty.$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.6), (3.7), (3.4) *έχει τουλάχιστον μια μη αρνητική λύση x τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις σχέσεις* (3.20) *και* (3.21).

Ομοίως, εξειδικεύοντας το Θεώρημα 3.2 στην περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.8), (3.3), (3.4), παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.10. *Υποθέτουμε ότι*

$$h(t, y_1, \ldots, y_m) \geq 0, \quad \textit{για κάθε } t \geq 0 \textit{ και για κάθε } y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0.$$

Υποθέτουμε, ακόμη, ότι για κάθε $t \geq 0$, *η συνάρτηση* $h(t, \cdot, \ldots, \cdot)$ *είναι αύξουσα στο* $[0, +\infty)^m$ *υπό την έννοια ότι* $h(t, y_1, \ldots, y_m) \leq h(t, w_1, \ldots, w_m,)$ *για κάθε* $(y_1, \ldots, y_m)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ *με* $0 \leq y_1 \leq w_1, \ldots, 0 \leq y_m \leq w_m$. *Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός* c *με* $c \geq \|\phi\|_{[-r,0]}$ *και* $c > \xi$ *τέτοιος ώστε*

$$\int_0^{+\infty} h(t, \rho_1(t), \ldots, \rho_m(t))dt \leq c - \xi,$$

όπου, για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$, *η συνάρτηση* $\rho_j \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ *εξαρτάται από το* c *και ορίζεται ως*

$$\rho_j(t) = \begin{cases} c, & \text{αν } 0 \leq t \leq T_j(t) \\ c(t - T_j(t) + 1), & \text{αν } t \geq T_j(t). \end{cases}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός b *με* $b > 0$ *και* $b \neq c$ *τέτοιος ώστε, για κάποιο σταθερό* $t_0 > 0$, *να ισχύει η σχέση*

$$\int_0^{+\infty} min\{t_0, t\} h(t, \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t))dt \geq b(t_0 + 1) - \xi t_0,$$

όπου, για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$, *η συνάρτηση* $\sigma_j \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ *εξαρτάται από τα* ϕ, b *και ορίζεται ως*

$$\sigma_j(t) = \begin{cases} \phi(t - T_j(t)), & \text{αν } 0 \leq t \leq T_j(t) \\ b min\{t - T_j(t), 1\}, & \text{αν } t \geq T_j(t). \end{cases}$$

Επιπλέον, στην περίπτωση όπου $b > c$, *υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση*

$$\int_0^{+\infty} h(t, \tau_1(t), \ldots, \tau_m(t))dt < +\infty,$$

όπου, για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$, *η συνάρτηση* $\tau_j \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ *εξαρτάται από το* b *και ορίζεται ως*

$$\tau_j(t) = \begin{cases} b, & \text{αν } 0 \leq t \leq T_j(t) \\ b(t - T_j(t) + 1), & \text{αν } t \geq T_j(t). \end{cases}$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.8), (3.3), (3.4) έχει τουλάχιστον μία λύση x *που ικανοποιεί της σχέσεις (3.20) και (3.21).*

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2, και συγκεκριμένα τα Πορίσματα 3.9 και 3.10, στις δεύτερης τάξης, μη γραμμικές συνήθεις ή με υστέρηση, διαφορικές εξισώσεις τύπου Emden-Fowler.

Θεωρούμε τις δεύτερης τάξης, μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τύπου Emden-Fowler

$$x''(t) + p(t)|x(t)|^\gamma sgn\big(x(t)\big) = 0 \tag{3.43}$$

και

$$x''(t) + p(t)|x(t - r)|^\gamma sgn\big(x(t - r)\big) = 0, \tag{3.44}$$

όπου p είναι μια μη αρνητική, συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$, και γ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.43), (3.7), (3.4), το Θεώρημα 3.2, και συγκεκριμένα το Πόρισμα 3.9, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > \xi$ τέτοιος ώστε

$$c^\gamma \int_0^{+\infty} (t+1)^\gamma p(t)dt \leq c - \xi.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $b > 0$ με $b \neq c$ τέτοιος ώστε, για κάποιο σταθερό $t_0 > 0$, να ισχύει η σχέση

$$b^\gamma \int_0^{+\infty} \min\{t_0, t\}(\min\{t, 1\})^\gamma p(t)dt \geq b(t_0 + 1) - \xi t_0.$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.43), (3.7), (3.4) *έχει τουλάχιστον μια λύση x που ικανοποιεί τις σχέσεις* (3.20) *και* (3.21).

Ομοίως, για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.44), (3.3), (3.4), το Θεώρημα 3.2, και συγκεκριμένα το Πόρισμα 3.10, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c \geq \|\phi\|_{[-r,0]}$ και $c > \xi$ τέτοιος ώστε

$$c^\gamma \left[\int_0^r p(t)dt + \int_r^{+\infty} (t - r + 1)^\gamma p(t)dt \right] \leq c - \xi.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $b > 0$ με $b \neq c$ τέτοιος ώστε, για κάποιο σταθερό $t_0 > 0$, να ισχύει η σχέση

$$\int_0^r \min\{t_0, t\}[\phi(t-r)]^\gamma p(t)dt + b^\gamma \int_r^{\infty} \min\{t_0, t\}(\min\{t-r, 1\})^\gamma p(t)dt \geq b(t_0+1) - \xi t_0.$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.44), (3.3), (3.4) *έχει τουλάχιστον μια λύση x που ικανοποιεί τις σχέσεις* (3.20) *και* (3.21).

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση του τύπου Emden-Fowler

$$x''(t) + p(t)[x(t)]^2 sgn\big(x(t)\big) = 0, \tag{3.45}$$

όπου p είναι μια μη αρνητική, συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 3.9 στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.45), (3.7), (3.4), καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Έστω ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c με $c > \xi$ τέτοιος ώστε

$$c^2 \int_0^{+\infty} (t+1)^2 p(t)dt \leq c - \xi. \tag{3.46}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $b > 0$ με $b \neq c$ τέτοιος ώστε, για κάποιο σταθερό $t_0 > 0$, να ισχύει η σχέση

$$b^2 \int_0^{+\infty} min\{t_0, t\}(min\{t, 1\})^2 p(t)dt \geq b(t_0 + 1) - \xi t_0. \tag{3.47}$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.45), (3.7), (3.4) *έχει τουλάχιστον μια λύση* x *που ικανοποιεί τις σχέσεις* (3.20) *και* (3.21).

Αν θέσουμε

$$\xi := 1,\ p(t) := \frac{1}{36}e^{-t}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0,$$

τότε η σχέση (3.46) ισχύει αν και μόνον αν ισχύει ότι

$$\frac{6}{5} \leq c \leq 6.$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός c πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το $\xi = 1$. Επίσης, παρατηρούμε ότι, αν επιλέξουμε $t_0 := 1$, τότε η σχέση (3.47) ικανοποιείται αν και μόνον αν ισχύει

$$\text{είτε } \ 0 < b \leq \frac{2[6 - \sqrt{15(2 + e^{-1})}]}{2 - 5e^{-1}} \ \text{ ή } \ b \geq \frac{2[6 + \sqrt{15(2 + e^{-1})}]}{2 - 5e^{-1}}.$$

Σημειώνουμε ακόμα ότι ο αριθμός b πρέπει να είναι θετικός. Μπορούμε λοιπόν, για παράδειγμα, να επιλέξουμε είτε

$$c = \frac{6}{5} \ \text{ και } \ b = \frac{2[6 - \sqrt{15(2 + e^{-1})}]}{2 - 5e^{-1}},$$

ή

$$c = 6 \ \text{ και } \ b = \frac{2[6 + \sqrt{15(2 + e^{-1})}]}{2 - 5e^{-1}}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$x''(t) + \frac{1}{36}e^{-t}[x(t)]^2 sgn\big(x(t)\big) = 0, \ \ x(0) = 0, \ \ lim_{t\to+\infty} x'(t) = 1,$$

έχει τουλάχιστον δύο μη αρνητικές λύσεις x_1 και x_2 τέτοιες ώστε

$$x_1(t) \geq \left[sup_{M\geq 0}\frac{x_1(M)}{M+1}\right]\min\{t,1\}, \ \ x_2(t) \geq \left[sup_{M\geq 0}\frac{x_2(M)}{M+1}\right]\min\{t,1\}$$

για κάθε $t \geq 0$, και

$$\frac{2[6 - \sqrt{15(2 + e^{-1})}]}{2 - 5e^{-1}} \leq sup_{t\geq 0}\frac{x_1(t)}{t+1} \leq \frac{6}{5},$$

$$6 \leq sup_{t\geq 0}\frac{x_2(t)}{t+1} \leq \frac{2[6 + \sqrt{15(2 + e^{-1})}]}{2 - 5e^{-1}}.$$

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα Avery–Henderson

4.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, τα τελευταία χρόνια, έχει παρατηρηθεί μεγάλο ενδιαφέρον όσον αφορά την εύρεση συνθηκών οι οποίες μας εγγυώνται την ύπαρξη θετικών λύσεων για προβλήματα συνοριακών τιμών συνήθων διαφορικών εξισώσεων, καθώς και διαφορικών εξισώσεων με υστέρηση. Ειδικά για διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση μπορούμε να αναφέρουμε μεταξύ άλλων τις εργασίες [40, 44, 55, 61, 71]. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28) [35, 46] είναι ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο για την εύρεση τέτοιων συνθηκών, ενώ το ίδιο θεώρημα, με επανειλημμένες εφαρμογές του, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ύπαρξη περισσότερων από μια θετικών λύσεων (βλέπε [27, 28, 40, 43, 63, 84, 85]). Υπάρχουν όμως άλλα θεωρήματα, τα οποία χωρίς να χρειάζονται επανειλημμένες εφαρμογές τους, με μία και μόνο εφαρμογή τους, μας δίνουν συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη περισσοτέρων από μια θετικές λύσεις, για παράδειγμα το Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30) [41, 53] και το Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Avery-Henderson (Θεώρημα 1.29) [6].

Σε αυτό το κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Avery-Henderson (Θεώρημα 1.29) ([6, 60, 61]) για να μελετήσουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Άλλες εργασίες που χρησιμοποιούν αυτό το θεώρημα είναι, για παράδειγμα, οι [5, 37, 59, 60, 61]. Τα συμπεράσματα του παρόντος κεφαλαίου αντλήθηκαν από την εργασία [72].

Θεωρούμε την υστερημένη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(p(t)x'(t))' + f(t, x_t) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1], \tag{4.1}$$

όπου $f : [0,1] \times C([-r,0],[0,+\infty)) \to [0,+\infty)$ και $p : [0,1] \to (0,+\infty)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και η συνάρτηση p είναι αύξουσα και παραγωγίσιμη. Προφανώς $0 < \int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds < +\infty$. Επίσης, θεωρούμε την αρχική συνθήκη

$$x_0 = \phi \tag{4.2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$x(t) = \phi(t), \quad \text{για όλα τα } -r \le t \le 0, \tag{4.3}$$

όπου $\phi \in C([-r,0],[0,+\infty))$ είναι γνωστή συνάρτηση. Υποθέτουμε ακόμη ότι

$$\phi(0) = 0.$$

Μαζί με την εξίσωση (4.1) θεωρούμε και τη συνοριακή συνθήκη

$$ax(1) + bp(1)x'(1) = 0, \tag{4.4}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Οι σχέσεις (4.1), (4.2), (4.4) συνθέτουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών στο διάστημα $[0,1]$. Με τον όρο *λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών* (4.1), (4.2), (4.4) εννοούμε μια συνάρτηση $x \in C([-r,1],\mathbb{R})$ τέτοια ώστε η x'' να υπάρχει στο διάστημα $[0,1]$, η x να ικανοποιεί τη συνθήκη (4.4) και για μια δοσμένη συνάρτηση ϕ να ικανοποιεί την εξίσωση (4.1) και τη συνθήκη (4.2).

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να παρουσιάσουμε ικανές συνθήκες για την ύπαρξη θετικών λύσεων του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.1), (4.2), (4.4), στηριζόμενοι στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Avery-Henderson (Θεώρημα 1.29, βλέπε [6, 60, 61]). Σχετικές είναι και οι εργασίες [3, 40]. Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα, δείχνουμε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.1), (4.2), (4.4) έχει τουλάχιστον δύο θετικές λύσεις, οι οποίες πληρούν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τρεις υποθέσεις, καθώς επίσης και μια σειρά λημμάτων, τα οποία είναι απαραίτητα για τα θεωρήματα που παρουσιάζουμε στην επόμενη παράγραφο.

(H_1) Ορίζουμε $P : [0,1] \to [0,+\infty)$ και $A : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως

$$P(t) := \int_0^t \frac{1}{p(s)} ds, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1]$$

και

$$A(t) := a \int_t^1 \frac{1}{p(s)} ds + b, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1].$$

Υποθέτουμε ότι, για τις σταθερές a, b και τις συναρτήσεις A, P ισχύει

$$A(0) = aP(1) + b \neq 0 \quad \text{και} \quad aA(0) = a(aP(1) + b) \leq 0.$$

Σημείωση 4.1. Η υπόθεση (H_1) είναι ισοδύναμη με τις

$$a \neq -\frac{b}{P(1)} \quad \text{και} \quad min\left\{0, -\frac{b}{P(1)}\right\} \leq a \leq max\left\{0, -\frac{b}{P(1)}\right\}.$$

Τώρα, για κάθε $\phi \in C([-r,0],[0,+\infty))$ με $\phi(0) = 0$, θεωρούμε τον τελεστή $T : C([-r,1],\mathbb{R}) \to C([-r,1],\mathbb{R})$ ο οποίος ορίζεται ως

$$(Tx)(t) := \begin{cases} \phi(t), & \text{για κάθε } -r \leq t \leq 0 \\ \int_0^1 G(t,s) f(s, x_s(\cdot;\phi)) ds, & \text{για κάθε } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

όπου

$$G(t,s) := \frac{1}{A(0)} \begin{cases} P(t)A(s), & 0 \le t \le s \le 1 \\ P(s)A(t), & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

Η συνάρτηση $G(t,s)$, που ορίζουμε παραπάνω, είναι η συνάρτηση Green του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος συνοριακών τιμών, δηλαδή του προβλήματος

$$(p(t)x'(t))' = 0, \quad x(0) = 0, \quad ax(1) + bp(1)x'(1) = 0.$$

Ο τελεστής T είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση αφού προφανώς $Tx \in C([-r,1],\mathbb{R})$ για κάθε $x \in C([-r,1],\mathbb{R})$.

Λήμμα 4.2. *Μια συνάρτηση $x \in C([-r,1],\mathbb{R})$ είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών* (4.1), (4.2), (4.4) *αν και μόνον αν η συνάρτηση x είναι σταθερό σημείο του τελεστή T.*

Απόδειξη. Έστω x μια συνάρτηση στο $C([-r,1],\mathbb{R})$.

Υποθέτουμε, πρώτα, ότι η συνάρτηση x είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.1), (4.2), (4.4). Τότε έχουμε ότι

$$(p(t)x'(t))' = -f(t,x_t), \quad \text{για κάθε } t \in [0,1],$$

και ολοκληρώνοντας στο $[0,t]$ για $t \in [0,1]$ έχουμε,

$$p(t)x'(t) - p(0)x'(0) = -\int_0^t f(s,x_s)ds, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1],$$

άρα και για $t = 1$,

$$p(1)x'(1) - p(0)x'(0) = -\int_0^1 f(s,x_s)ds,$$

οπότε παίρνουμε τη σχέση

$$bp(1)x'(1) = bp(0)x'(0) - \int_0^1 bf(s,x_s)ds. \tag{4.5}$$

Έχουμε,

$$x'(t) = \frac{p(0)x'(0)}{p(t)} - \frac{1}{p(t)}\int_0^t f(s,x_s)ds, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1],$$

οπότε ολοκληρώνοντας στο $[0,t]$ για $t \in [0,1]$ έχουμε,

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{p(0)x'(0)}{p(s)}ds - \int_0^t \frac{1}{p(s)}\int_0^s f(r,x_r)drds, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1],$$

άρα και για $t = 1$,

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 \frac{p(0)x'(0)}{p(s)}ds - \int_0^1 \frac{1}{p(s)}\int_0^s f(r,x_r)drds.$$

Όμως από το γεγονός ότι $\phi(0) = 0$ και ότι η λύση x είναι συνεχής στο μηδέν έπεται ότι $x(0) = 0$. Επομένως η τελευταία σχέση γίνεται,

$$x(1) = \int_0^1 \frac{p(0)x'(0)}{p(s)}ds - \int_0^1 \frac{1}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)drds,$$

από την οποία παίρνουμε τη σχέση

$$ax(1) = ap(0)x'(0) \int_0^1 \frac{1}{p(s)}ds - \int_0^1 \frac{a}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)drds. \tag{4.6}$$

Τώρα,από τις σχέσεις (4.5), (4.6) και τη συνοριακή συνθήκη (4.4) παίρνουμε ότι,

$$(aP(1) + b)p(0)x'(0) = \int_0^1 bf(s, x_s)ds + \int_0^1 \frac{a}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)drds,$$

δηλαδή,

$$x'(0) = \frac{1}{A(0)p(0)}\left(\int_0^1 \left(bf(s, x_s) + \frac{a}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)dr\right) ds\right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} x(t) =& \frac{1}{A(0)}\left(\int_0^1 \left(bf(s, x_s) + \frac{a}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)dr\right) ds\right)P(t) \\ &- \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)drds. \end{aligned}$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{a}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)drds &= \int_0^1 \int_0^s \frac{a}{p(s)} f(r, x_r)drds \\ &= \int_0^1 \int_r^1 \frac{a}{p(s)} f(r, x_r)dsdr \\ &= \int_0^1 \left(\int_r^1 \frac{a}{p(s)}ds\right) f(r, x_r)dr \\ &= \int_0^1 (A(r) - b)f(r, x_r)dr, \end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\int_0^1 bf(s, x_s)ds + \int_0^1 \frac{a}{p(s)} \int_0^s f(r, x_r)drds = \int_0^1 A(r)f(r, x_r)dr.$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{p(s)}\int_0^s f(r,x_r)drds &= \int_0^t\int_0^s \frac{1}{p(s)}f(r,x_r)drds\\ &= \int_0^t\int_r^t \frac{1}{p(s)}f(r,x_r)dsdr\\ &= \int_0^t\left(\int_r^t \frac{1}{p(s)}ds\right)f(r,x_r)dr.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{A(0)}P(t)\int_0^1 A(s)f(s,x_s)ds - \int_0^t\left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right)f(s,x_s)ds\\ &= \frac{1}{A(0)}\int_t^1 P(t)A(s)f(s,x_s)ds + \frac{1}{A(0)}\int_0^t P(t)A(s)f(s,x_s)ds\\ &- \int_0^t\left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right)f(s,x_s)ds.\end{aligned}$$

Επιπρόσθετα,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A(0)}\int_0^t P(t)A(s)f(s,x_s)ds - \int_0^t\left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right)f(s,x_s)ds\\ =&\frac{1}{A(0)}\int_0^t\left(\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr\right)\left(a\int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr+b\right)f(s,x_s)ds\\ &-\frac{1}{A(0)}\int_0^t\left(a\int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr+b\right)\left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right)f(s,x_s)ds\\ =&\frac{1}{A(0)}\int_0^t\left[\left(\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr\right)\left(a\int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr+b\right)\right.\\ &\left.-\left(a\int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr+b\right)\left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right)\right]f(s,x_s)ds.\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr\right)\left(a\int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr+b\right)-\left(a\int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr+b\right)\left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right)\\ =&a\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr\int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr+b\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr-a\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr-b\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\\ =&b\int_0^s \frac{1}{p(r)}dr+a\left(\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr\int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr-\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr\right)\end{aligned}$$

Ακόμη,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr \int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr - \int_s^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr \\
=&\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr \int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr - \int_s^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr \\
&+ \int_0^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^s \frac{1}{p(r)}dr - \int_0^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^s \frac{1}{p(r)}dr \\
=&\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr - \int_s^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr - \int_0^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^s \frac{1}{p(r)}dr \\
=&\int_0^s \frac{1}{p(r)}dr \int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr - \int_0^t \frac{1}{p(r)}dr \int_0^s \frac{1}{p(r)}dr \\
=&\int_0^s \frac{1}{p(r)}dr \int_t^1 \frac{1}{p(r)}dr \\
=&P(s) \int_t^1 \frac{1}{p(r)}dr.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^t \frac{1}{p(r)}dr\right)\left(a\int_s^1 \frac{1}{p(r)}dr + b\right) - \left(a\int_0^1 \frac{1}{p(r)}dr + b\right)\left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right) \\
=&bP(s) + aP(s)\int_t^1 \frac{1}{p(r)}dr \\
=&P(s)A(t).
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A(0)}\int_0^t P(t)A(s)f(s,x_s)ds - \int_0^t \left(\int_s^t \frac{1}{p(r)}dr\right) f(s,x_s)ds \\
=&\frac{1}{A(0)}\int_0^t P(s)A(t)f(s,x_s)ds.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$
x(t) = \frac{1}{A(0)}\int_t^1 P(t)A(s)f(s,x_s)ds + \frac{1}{A(0)}\int_0^t P(s)A(t)f(s,x_s)ds,
$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Δηλαδή $(Tx)(t) = x(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Από τη συνθήκη (4.3) έχουμε ότι $x(t) = \phi(t)$ για κάθε $t \in [-r,0]$. Άρα, $(Tx)(t) = x(t)$ για κάθε $t \in [-r,0]$. Κατά συνέπεια, $(Tx)(t) = x(t)$ για κάθε $t \in [-r,1]$ άρα $Tx = x$. Επομένως, η συνάρτηση x είναι ένα σταθερό σημείο του τελεστή T.

Αντίστροφα, έστω x ένα σταθερό σημείο του τελεστή T. Τότε ισχύει ότι

$$
x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x_s)ds, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1].
$$

Παραγωγίζοντας τη τελευταία σχέση παίρνουμε ότι,

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} G(t,s) f(s,x_s) ds \\
&= \frac{1}{A(0)} \int_0^t P(s) \frac{d}{dt} A(t) f(s,x_s) ds + \frac{1}{A(0)} \int_t^1 A(s) \frac{d}{dt} P(t) f(s,x_s) ds \\
&= \frac{1}{A(0)} \int_0^t -\frac{a}{p(t)} P(s) f(s,x_s) ds + \frac{1}{A(0)} \int_t^1 \frac{1}{p(t)} A(s) f(s,x_s) ds.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
p(t)x'(t) = -\frac{1}{A(0)} \int_0^t aP(s) f(s,x_s) ds + \frac{1}{A(0)} \int_t^1 A(s) f(s,x_s) ds,
$$

και παραγωγίζοντας ξανά παίρνουμε ότι,

$$
\begin{aligned}
(p(t)x'(t))' &= -\frac{aP(t)f(t,x_t)}{A(0)} - \frac{A(t)f(t,x_t)}{A(0)} \\
&= -\frac{(A(t)+aP(t))f(t,x_t)}{A(0)} \\
&= -\frac{A(0)f(t,x_t)}{A(0)} = -f(t,x_t)
\end{aligned}
$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Άρα η συνάρτηση x ικανοποιεί την εξίσωση (4.1). Ακόμη, $x(t) = T(x) = \phi(t)$ για κάθε $t \in [-r,0]$, άρα ικανοποιείται η συνθήκη (4.3), δηλαδή η συνθήκη (4.2). Τέλος, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$
ax(1) + bp(1)x'(1) = 0,
$$

οπότε ικανοποιείται και η συνοριακή συνθήκη (4.4), δηλαδή η συνάρτηση x είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.1), (4.2), (4.4). □

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε το σύνολο

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} := \{x \in C([-r,1],\mathbb{R}) : x(t) \geq 0,\ t \in [-r,1],\ x|_{[0,1]} \text{ είναι} \\
\text{δύο φορές παραγωγίσιμη, αύξουσα και κοίλη}\},
\end{aligned}
$$

το οποίο είναι ένας κώνος στο $C([-r,1],\mathbb{R})$. Πραγματικά, έστω μια ακολουθία συναρτήσεων $(x^{[\nu]})_{\nu\geq 1}$ εντός του $\mathcal{K}$ και μια συνάρτηση $x \in C([-r,1],\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$
\|\cdot\|_{[-r,1]} - lim_{\nu\to+\infty} x^{[\nu]} = x.
$$

Από τη τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι

$$
lim_{\nu\to+\infty} x^{[\nu]}(t) = x(t), \quad \text{για κάθε } t \in [-r,1].
$$

Επειδή $x^{[\nu]} \in \mathcal{K}$ για κάθε $\nu \geq 1$, ισχύει ότι $x^{[\nu]}(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [-r,1]$ και για κάθε $\nu \geq 1$, επομένως $x(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [-r,1]$. Επίσης, ισχύει ότι $(x^{[\nu]})'(t) \geq 0$ και $(x^{[\nu]})''(t) \leq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ αφού $x^{[\nu]} \in \mathcal{K}$ για κάθε $\nu \geq 1$. Ακόμη, ισχύει ότι

$$
lim_{\nu\to+\infty} (x^{[\nu]})'(t) = x'(t), \quad \text{για κάθε } t \in [0,1]
$$

και
$$lim_{\nu\to+\infty}(x^{[\nu]})''(t) = x''(t), \quad \text{για κάθε } t \in [0,1].$$
Επομένως, ισχύει ότι
$$x'(t) \geq 0 \ \text{ για κάθε } t \in [0,1] \quad \text{και} \quad x''(t) \leq 0 \ \text{ για κάθε } t \in [0,1],$$
από το οποίο συνεπάγεται ότι η συνάρτηση x είναι αύξουσα και κοίλη στο διάστημα $[0,1]$, οπότε $x \in \mathcal{K}$ και συνεπώς το σύνολο $\mathcal{K}$ είναι κλειστό στο $C([-r,1],\mathbb{R})$. Τώρα, για κάθε $x, y \in \mathcal{K}$ και για κάθε $\kappa, \lambda \geq 0$, έχουμε ότι
$$\begin{aligned}(\kappa x+\lambda y)(t) = \kappa x(t) + \lambda y(t) \geq 0, &\quad \text{για κάθε } t \in [-r,1],\\ (\kappa x+\lambda y)'(t) = \kappa x'(t) + \lambda y'(t) \geq 0, &\quad \text{για κάθε } t \in [0,1],\\ (\kappa x+\lambda y)''(t) = \kappa x''(t) + \lambda y''(t) \leq 0, &\quad \text{για κάθε } t \in [0,1],\end{aligned}$$
Άρα, $\kappa x + \lambda y \in \mathcal{K}$. Τέλος, αν $x, -x \in \mathcal{K}$ τότε έχουμε ότι
$$x(t) \geq 0, \ \text{ για κάθε } t \in [-r,1], \quad \text{και} \quad (-x)(t) \geq 0, \ \text{ για κάθε } t \in [-r,1].$$
Επομένως, $x(t) = 0$ για κάθε $t \in [-r,1]$, δηλαδή $x = 0$. Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{K}$ είναι ένας κώνος μέσα στο $C([-r,1],\mathbb{R})$.

Λήμμα 4.3 ([44])**.** *Έστω $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια μη αρνητική, αύξουσα και κοίλη συνάρτηση. Τότε, $x(t) \geq t\|x\|_{[0,1]}$, για κάθε $t \in [0,1]$.*

Απόδειξη. Για κάθε $t \in [0,1]$, επειδή η συνάρτηση x είναι μη αρνητική, αύξουσα και κοίλη, έχουμε
$$x(t) = x((1-t)0 + t) \geq (1-t)x(0) + tx(1) \geq tx(1) = t\|x\|_{[0,1]}.$$
□

Θεωρούμε τώρα, $0 < r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq 1$ και τα ακόλουθα συναρτησοειδή
$$\gamma(x) = x(r_1), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{K},$$
$$\theta(x) = x(r_2), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{K},$$
$$\alpha(x) = x(r_3), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{K}.$$
Τα α, γ είναι μη αρνητικά, αύξοντα και συνεχή συναρτησοειδή ως προς τον κώνο $\mathcal{K}$, και το θ είναι μη αρνητικό και συνεχές συναρτησοειδές στο $\mathcal{K}$ με $\theta(0) = 0$. Επίσης, ισχύει ότι
$$\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \alpha(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{K}, \tag{4.7}$$
επειδή κάθε συνάρτηση $x \in \mathcal{K}$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathcal{K}$, από το Λήμμα 4.3 έχουμε ότι $\gamma(x) = x(r_1) \geq r_1\|x\|_{[0,1]}$. Άρα ισχύει η σχέση
$$\|x\|_{[0,1]} \leq \frac{1}{r_1}\gamma(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{K}. \tag{4.8}$$
Από τον ορισμό του συναρτησοειδούς θ παρατηρούμε ότι
$$\theta(\lambda x) = \lambda\theta(x), \quad \text{για κάθε } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ και για κάθε } x \in \mathcal{K}.$$
Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

(H_2) Υπάρχει σταθερά $M > 0$, συνεχής συνάρτηση $u : [0,1] \to [0,+\infty)$ και συνάρτηση $L : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, η οποία είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, M]$, τέτοια ώστε για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $y \in C([-r,0],[0,+\infty))$ να ισχύει

$$f(t,y) \leq u(t)L(\|y\|_{[-r,0]}),$$

και

$$L(M)\int_0^1 G(r_2,s)u(s)ds < Mr_2.$$

(H_3) Υπάρχουν σταθερές $\delta \in (0,1)$, $\eta_1, \eta_3 \in (0,+\infty)$, και συναρτήσεις $\tau : [0,1] \to [0,r]$, συνεχής $v : [0,1] \to [0,+\infty)$ και αύξουσα $w : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ τέτοιες ώστε για κάθε $t \in X$ και για κάθε $y \in C([-r,0],[0,+\infty))$ να ισχύει

$$f(t,y) \geq v(t)w\left(y\left(-\tau(t)\right)\right),$$

όπου

$$X := \{t \in [0,1] : \delta \leq t - \tau(t) \leq 1\},$$
$$sup\{v(t) : t \in X\} > 0,$$
$$w(\eta_i)\int_X G(r_i,s)v(s)ds > \frac{\eta_i}{\delta}, \quad \text{για κάθε } i \in \{1,3\},$$
$$0 < \eta_3 < M\delta r_2 < \eta_1,$$

και M όπως είναι ορισμένο στην υπόθεση (H_2).

Λήμμα 4.4. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η (H_1). Τότε*

(i) $\frac{A(t)}{A(0)} > 0$, *για κάθε* $t \in [0,1]$.

(ii) $\frac{A'(t)}{A(0)} \geq 0$, *για κάθε* $t \in [0,1]$.

(iii) $(Tx)(t) \geq 0$, *για κάθε* $t \in [0,1]$ *και για κάθε* $x \in \mathcal{K}$.

(iv) $(Tx)'(t) \geq 0$, *για κάθε* $t \in [0,1]$ *και για κάθε* $x \in \mathcal{K}$.

(v) $T(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $t \in [0,1]$, λόγω και της σχέσης $aA(0) \leq 0$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{A(t)}{A(0)} &= \frac{a\int_t^1 \frac{1}{p(s)}ds + b}{A(0)}\\ &= \frac{a}{A(0)}\int_t^1 \frac{1}{p(s)}ds + \frac{b}{A(0)}\\ &\geq \frac{a}{A(0)}\int_0^1 \frac{1}{p(s)}ds + \frac{b}{A(0)}\\ &= \frac{a\int_0^1 \frac{1}{p(s)}ds + b}{A(0)} = 1.\end{aligned}$$

Επομένως, $\frac{A(t)}{A(0)} > 0$, για κάθε $t \in [0,1]$.

(ii) Από την υπόθεση (H_1) έχουμε ότι $\frac{a}{A(0)} \leq 0$. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι $p(t) > 0$, για κάθε $t \in [0,1]$, δίνει ότι, για κάθε $t \in [0,1]$, έχουμε

$$\frac{A'(t)}{A(0)} = \frac{-\frac{a}{p(t)}}{A(0)} = -\frac{a}{A(0)}\frac{1}{p(t)} \geq 0.$$

(iii) Από τον ορισμό του τελεστή T, έχουμε

$$(Tx)(t) = \frac{A(t)}{A(0)}\int_0^t P(s)f(s,x_s)ds + P(t)\int_t^1 \frac{A(s)}{A(0)}f(s,x_s)ds, \quad \text{για } t \in [0,1].$$

Επιπλέον, αν $x \in \mathcal{K}$ τότε $x_t \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$, οπότε από τον ορισμό της συνάρτησης f έχουμε ότι $f(t,x_t) \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$. Άρα χρησιμοποιώντας το **(i)** καταλήγουμε στο ότι $(Tx)(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $x \in \mathcal{K}$.

(iv) Από τον ορισμό του τελεστή T, για κάθε $t \in [0,1]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(Tx)'(t) =& A'(t)\int_0^t \frac{1}{A(0)}P(s)f(s,x_s)ds + A(t)\frac{1}{A(0)}P(t)f(t,x_t)\\ &+ P'(t)\int_t^1 \frac{1}{A(0)}A(s)f(s,x_s)ds - P(t)\frac{1}{A(0)}A(t)f(t,x_t)\\ =& \frac{A'(t)}{A(0)}\int_0^t P(s)f(s,x_s)ds + P'(t)\int_t^1 \frac{A(s)}{A(0)}f(s,x_s)ds.\end{aligned}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τα **(i)** και **(ii)**, το ότι $f(t,x_t) \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $x \in \mathcal{K}$, και το ότι $P'(t) = \frac{1}{p(t)} > 0$, για κάθε $t \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $(Tx)'(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $x \in \mathcal{K}$.

(v) Έστω μια συνάρτηση $x \in \mathcal{K}$. Από το **(iii)** και το γεγονός ότι $(Tx)(t) = \phi(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [-r,0]$ συνεπάγεται ότι $(Tx)(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [-r,1]$. Επίσης, από το **(iv)**, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $Tx|_{[0,1]}$ είναι αύξουσα. Τέλος, για $x \in \mathcal{K}$ συνεπάγεται ότι $x_t \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$. Επομένως για κάθε $t \in [0,1]$, από τα **(i)**, **(ii)**, από τον ορισμό της f και από την υπόθεση (H_1) έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}(Tx)''(t) =& \frac{A''(t)}{A(0)}\int_0^t P(s)f(s,x_s)ds + \frac{A'(t)}{A(0)}P(t)f(t,x_t)\\ &+ P''(t)\int_t^1 \frac{A(s)}{A(0)}f(s,x_s)ds - P'(t)\frac{A(t)}{A(0)}f(t,x_t),\end{aligned}$$

όμως,

$$\frac{A''(t)}{A(0)} = \frac{a}{A(0)}\frac{p'(t)}{p^2(t)} \leq 0$$

και

$$P''(t) = -\frac{p'(t)}{p^2(t)} \leq 0,$$

αφού η συνάρτηση p είναι αύξουσα, και επιπλέον, ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} P'(t)A(t) - A'(t)P(t) &= a\frac{1}{p(t)}\int_0^t \frac{1}{p(s)}ds + \left(a\int_t^1 \frac{1}{p(s)}ds + b\right)\frac{1}{p(t)} \\ &= \frac{a}{p(t)}\int_0^1 \frac{1}{p(s)}ds + \frac{b}{p(t)} = \frac{A(0)}{p(t)}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} -\frac{(P'(t)A(t) - A'(t)P(t))}{A(0)}f(t,x_t) &= -\frac{A(0)}{p(t)A(0)}f(t,x_t) \\ &= -\frac{f(t,x_t)}{p(t)} \leq 0. \end{aligned}$$

Επομένως, $(Tx)''(t) \leq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ και συνεπώς η Tx είναι κοίλη. Άρα, $Tx \in \mathcal{K}$, δηλαδή $T(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

$\square$

4.2 Θεώρημα ύπαρξης λύσης για το ΠΣΤ

Θεώρημα 4.5. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(H_1)-(H_3)$ και ότι $\|\phi\|_{[-r,0]} < M$. Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών* (4.1), (4.2), (4.4) *έχει τουλάχιστον δύο λύσεις x_1, x_2, οι οποίες είναι κοίλες και αύξουσες στο διάστημα $[0,1]$, θετικές στο διάστημα $[-r,1]$ και τέτοιες ώστε να ισχύει*

$$x_1(r_3) > \frac{\eta_3}{\delta},\ x_1(r_2) < Mr_2,\ x_2(r_2) > Mr_2 \ \text{ και } \ x_2(r_1) < \frac{\eta_1}{\delta}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής T είναι πλήρως συνεχής. Αρχικά δείχνουμε ότι το σύνολο $T(\mathcal{K})$, είναι σχετικά συμπαγές. Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι κάθε συνάρτηση $x \in \mathcal{K}$, για την οποία $x(t) = \phi(t)$ για κάθε $t \in [-r,0]$, ικανοποιεί τη σχέση $(Tx)(t) = \phi(t)$ για κάθε $t \in [-r,0]$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$U = \{((Tx)([0,1]) : x \in \mathcal{K}\}$$

είναι σχετικά συμπαγές στο χώρο Banach $C([0,1],\mathbb{R})$. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα των Arzela-Ascoli (Θεώρημα 1.24), γιατί δουλεύουμε σε ένα χώρο Banach συναρτήσεων ορισμένων στο συμπαγές σύνολο $[0,1]$. Έστω, λοιπόν, ένα $x \in \mathcal{K}$. Τότε υπάρχει ένα $c_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_{[0,1]} \leq c_1$. Ακόμη, η συνάρτηση ϕ είναι ορισμένη σε συμπαγές σύνολο άρα υπάρχει ένα $c_2 > 0$ τέτοιο ώστε $\|\phi\|_{[-r,0]} \leq c_2$. Επομένως, για τη συνάρτηση $x_t(\cdot,\phi)$ ισχύει ότι, $\|x_t(\cdot,\phi)\|_{[-r,0]} \leq c_3$, όπου $c_3 = max\{c_1,c_2\}$.

Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη (H_2) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t)| &= \int_0^1 G(t,s)f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \\
&= \frac{A(t)}{A(0)}\int_0^t P(s)f(s,x_s(\cdot;\phi))ds + P(t)\int_t^1 \frac{A(s)}{A(0)}f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \\
&\leq \frac{A(0)}{A(0)}\int_0^t P(1)f(s,x_s(\cdot;\phi))ds + P(1)\int_t^1 \frac{A(0)}{A(0)}f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \\
&= P(1)\int_0^1 f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \\
&\leq P(1)L(c_3)\int_0^1 u(s)ds,
\end{aligned}
$$

από όπου συνεπάγεται ότι $\|Tx\|_{[0,1]} \leq P(1)L(c_3)\int_0^1 u(s)ds < +\infty$, αφού η συνάρτηση u είναι συνεχής άρα και ολοκληρώσιμη. Συνεπώς το σύνολο U είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Έστω επίσης $x \in \mathcal{K}$, $\epsilon > 0$ και $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 \leq t_1 \leq t_2$. Ισχύει ότι

$$\int_0^1 f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \leq L(c_3)\int_0^1 u(s)ds < +\infty.$$

Θέτουμε $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{\int_0^1 f(s,x_s(\cdot;\phi))ds}$. Υποθέτουμε ότι $\int_0^1 f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \neq 0$. Η συνάρτηση $G(t,\cdot)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, οπότε για το ϵ_1, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|t_1 - t_2| < \delta$ να έχουμε ότι

$$|G(t_2,\cdot) - G(t_1,\cdot)| < \epsilon_1.$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
|Tx(t_1) - Tx(t_2)| &\leq \int_0^1 |G(t_2,\cdot) - G(t_1,\cdot)|f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \\
&< \int_0^1 \epsilon_1 f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \\
&= \int_0^1 \frac{\epsilon}{\int_0^1 f(s,x_s(\cdot;\phi))ds} f(s,x_s(\cdot;\phi))ds \\
&= \epsilon,
\end{aligned}
$$

δηλαδή το σύνολο U είναι ισοσυνεχές.

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 1.24, το σύνολο U είναι σχετικά συμπαγές, επομένως και το σύνολο $T(\mathcal{K})$ είναι σχετικά συμπαγές.

Στο επόμενο βήμα αποδεικνύουμε πως ο τελεστής T είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$. Έστω $x \in \mathcal{K}$ μια συνάρτηση και $(x^{[\nu]})_{\nu \geq 1}$ μια ακολουθία συναρτήσεων του $\mathcal{K}$ με

$$\|\cdot\|_{[0,1]} - lim_{\nu \to +\infty} x^{[\nu]} = x.$$

Ισχύει ότι

$$lim_{\nu\to+\infty}x^{[\nu]}(t)=x(t) \text{ ομοιόμορφα για τα } t\in[0,1].$$

Επιπλέον, η υπόθεση (H_2) εξασφαλίζει ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f(t,x_t^{[\nu]}(\cdot;\phi))$ είναι φραγμένη από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $t\in[0,1]$. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης του Lebesgue και για $t\in[0,1]$ έχουμε,

$$lim_{\nu\to+\infty}\int_0^1 G(t,s)f(s,x_s^{[\nu]}(\cdot;\phi))ds=\int_0^1 G(t,s)f(s,x_s(\cdot;\phi))ds.$$

Αυτό εξασφαλίζει την κατά σημείο σύγκλιση

$$lim_{\nu\to+\infty}(Tx^{[\nu]})(t)=(Tx)(t),\quad \text{για όλα τα } t\in[0,1]. \tag{4.9}$$

Αρκεί λοιπόν να εξασφαλίσουμε ότι η σύγκλιση αυτή είναι επίσης $\|\cdot\|_{[0,1]}$-σύγκλιση, δηλαδή ότι

$$\|\cdot\|_{[0,1]}-lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\nu]}=Tx.$$

Για να το αποδείξουμε αυτό, θεωρούμε μια τυχαία υπακολουθία $(Tx^{[\mu_\nu]})_{\nu\geq1}$ της $(Tx^{[\nu]})_{\nu\geq1}$. Επειδή το $T(\mathcal{K})$ είναι σχετικά συμπαγές ως προς το χώρο $C([0,1],\mathbb{R})$, συνεπάγεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]})_{\nu\geq1}$ της $(Tx^{[\mu_\nu]})_{\nu\geq1}$ η οποία συγκλίνει σε μια συνάρτηση $m\in C([0,1],\mathbb{R})$ ως προς τη στάθμη $\|\cdot\|_{[0,1]}$, δηλαδή

$$\|\cdot\|_{[0,1]}-lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]}=m.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε και την κατά σημείο σύγκλιση

$$lim_{\nu\to+\infty}(Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]})(t)=m(t),\quad \text{για κάθε } t\in[0,1].$$

Όμως από τη σχέση (4.9) έχουμε και ότι

$$lim_{\nu\to+\infty}(Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]})(t)=Tx(t),\quad \text{για κάθε } t\in[0,1].$$

Άρα από τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι $Tx(t)=m(t)$ για κάθε $t\in[0,1]$, δηλαδή $Tx=m$. Οπότε

$$\|\cdot\|_{[0,1]}-lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\mu_\nu]}=\|\cdot\|_{[0,1]}-lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\mu_{\lambda_\nu}]}=Tx.$$

Άρα κάθε υπακολουθία της $(Tx^{[\nu]})_{\nu\geq1}$ συγκλίνει στο ίδιο Tx. Επομένως

$$\|\cdot\|_{[0,1]}-lim_{\nu\to+\infty}Tx^{[\nu]}=Tx.$$

Συνεπώς η απεικόνιση T είναι συνεχής. Άρα, από την Παρατήρηση 1.15, η απεικόνιση T είναι πλήρως συνεχής.

Τώρα ας είναι a,b,c σταθερές τέτοιες ώστε $c=\frac{\eta_1}{\delta}$, $b=Mr_2$ και $a=\frac{\eta_3}{\delta}$. Από το Λήμμα 4.4 έχουμε ότι $T:\overline{K(\gamma,c)}\to\mathcal{K}$. Έστω, ακόμη, ένα $x\in\partial K(\gamma,c)$. Τότε

$\gamma(x) = x(r_1) = c$ και επομένως $\|x\|_{[0,1]} \geq c$. Από την υπόθεση (H_3) και το γεγονός ότι η συνάρτηση x είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma(Tx) &= (Tx)(r_1)\\ &= \int_0^1 G(r_1,s)f(s,x_s)ds\\ &\geq \int_X G(r_1,s)f(s,x_s)ds\\ &\geq \int_X G(r_1,s)v(s)w\left(x_s\left(-\tau(s)\right)\right)ds\\ &= \int_X G(r_1,s)v(s)w\left(x\left(s-\tau(s)\right)\right)ds\\ &\geq \int_X G(r_1,s)v(s)w(x(\delta))ds.\end{aligned}$$

Επίσης, από την υπόθεση (H_3), τον τρόπο που ορίστηκε ο κώνος $\mathcal{K}$ και το Λήμμα 4.3, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma(Tx) &\geq \int_X G(r_1,s)v(s)w(\delta\|x\|_{[0,1]})ds\\ &\geq w(\delta c)\int_X G(r_1,s)v(s)ds\\ &= w(\eta_1)\int_X G(r_1,s)v(s)ds\\ &> \frac{\eta_1}{\delta} = c.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη (i) του Θεωρήματος 1.29 ικανοποιείται.

Τώρα, έστω ένα $x \in \partial K(\theta,b)$. Τότε $\theta(x) = x(r_2) = b$ και επομένως από το Λήμμα 4.3 έχουμε ότι

$$\|x\|_{[0,1]} \leq \frac{1}{r_2}x(r_2) = \frac{1}{r_2}b = M.$$

Επιπλέον, από την υπόθεση έχουμε ότι $\|\phi\|_{[-r,0]} < M$, άρα ισχύει ότι $\|x\|_{[-r,1]} < M$. Τώρα, από την υπόθεση (H_2), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\theta(Tx) &= (Tx)(r_2)\\ &= \int_0^1 G(r_2,s)f(s,x_s)ds\\ &\leq \int_0^1 G(r_2,s)u(s)L(\|x_s\|_{[-r,0]})ds\\ &< \int_0^1 G(r_2,s)u(s)L(M)ds\\ &= L(M)\int_0^1 G(r_2,s)u(s)ds < Mr_2 = b.\end{aligned}$$

Επομένως, η συνθήκη (ii) του Θεωρήματος 1.29 επίσης ικανοποιείται.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $y : [-r, 1] \to \mathbb{R}$ ως $y(t) = \frac{a}{2}$. Τότε $y \in \mathcal{K}$ ως σταθερή και $\alpha(y) = \frac{a}{2} < a$, άρα $K(\alpha, a) \neq \emptyset$. Επίσης, έστω ένα $x \in \partial K(\alpha, a)$. Τότε έχουμε ότι $\alpha(x) = x(r_3) = a$ και επομένως $\|x\|_{[0,1]} \geq a$. Τώρα, όπως και για το συναρτησοειδές γ, έχουμε ότι

$$\alpha(Tx) \geq w(\eta_3) \int_X G(r_3, s)v(s)ds > \frac{\eta_3}{\delta} = a.$$

Συνεπώς, η συνθήκη (iii) του Θεωρήματος 1.29 ικανοποιείται.

Τέλος, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.29 και έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Σημείωση 4.6. Οι λύσεις x_1, x_2 του Θεωρήματος 4.5 είναι και οι δύο αύξουσες στο διάστημα $[0, 1]$. Άρα, στην ειδική περίπτωση όπου $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, έχουμε ότι $x_i(r_j) = x_i(1) = \|x_i\|_{[0,1]},\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3$.

Με βάση την Παρατήρηση 4.6, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 4.5.

Πόρισμα 4.7. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(H_1) - (H_3)$ για $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ και ότι $\|\phi\|_{[-r,0]} < M$. Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών* (4.1), (4.2), (4.4) *έχει τουλάχιστον δύο λύσεις x_1, x_2, οι οποίες είναι κοίλες και αύξουσες στο διάστημα $[0, 1]$, θετικές στο διάστημα $[-r, 1]$ και τέτοιες ώστε να ισχύει*

$$\frac{\eta_3}{\delta} < \|x_1\|_{[0,1]} < M < \|x_2\|_{[0,1]} < \frac{\eta_1}{\delta}.$$

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο, παραθέτοντας την ειδική μορφή που λαμβάνουν τα παραπάνω συμπεράσματα για το αντίστοιχο σύνηθες πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Υποθέτουμε ότι $r = 0$. Τότε $[-r, 0] = \{0\}$, άρα το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.1), (4.2), (4.4) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$(p(t)x'(t))' + f(t, x(t)) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1], \tag{4.10}$$

$$x(0) = 0, \tag{4.11}$$

$$ax(1) + bp(1)x'(t) = 0, \tag{4.12}$$

όπου $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ και $p : [0, 1] \to (0, +\infty)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, επιπλέον η συνάρτηση p είναι αύξουσα και παραγωγίσιμη και $a, b \in \mathbb{R}$. Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (4.10) είναι ισοδύναμη με την εξής μορφή

$$(p(t)x'(t))' + f(t, x_t(0)) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1].$$

Το Λήμμα 4.2 σε αυτή την περίπτωση, διαμορφώνεται ως εξής

Λήμμα 4.8. *Μια συνάρτηση $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$ είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών* (4.10), (4.11), (4.12) *αν και μόνον αν η συνάρτηση x είναι σταθερό σημείο του τελεστή $\overline{T} : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$, με*

$$(\overline{T}x)(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds, \quad \text{για κάθε } 0 \leq t \leq 1,$$

όπου G είναι ορισμένη στην Παράγραφο 4.1.

Οι υποθέσεις $(H_2), (H_3)$, για την ειδική περίπτωση όπου $r = 0$, διαμορφώνονται ως εξής

(H_2') Υπάρχει αριθμός $M > 0$, συνεχής συνάρτηση $u : [0,1] \to [0,+\infty)$ και μια συνάρτηση $L : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, η οποία είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, M]$, έτσι ώστε

$$f(t,y) \leq u(t)L(y), \quad \text{για κάθε } t \in [0,1] \text{ και για κάθε } y \in [0,+\infty),$$

$$L(M)\int_0^1 G(r_2,s)u(s)ds < Mr_2.$$

(H_3') Υπάρχουν σταθερές $\delta \in (0,1),\ \eta_1, \eta_3 > 0$ και συναρτήσεις $v : [0,1] \to [0,+\infty)$ συνεχής και $w : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ αύξουσα, τέτοιες ώστε

$$f(t,y) \geq v(t)w(y), \quad \text{για κάθε } t \in Z := [\delta, 1] \text{ και για κάθε } y \in [0,+\infty)$$

και

$$w(\eta_i)\int_Z G(r_i,s)v(s)ds > \frac{\eta_i}{\delta}, \quad \text{για κάθε } i \in \{1,3\},$$

όπου $0 < \eta_3 < M\delta r_2 < \eta_1$, και M όπως είναι ορισμένο στην υπόθεση (H_2').

Επομένως, έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα, τα οποία είναι ανάλογα με το Θεώρημα 4.5 και το Πόρισμα 4.7.

Θεώρημα 4.9. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(H_1), (H_2'), (H_3')$. Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών* (4.10), (4.11), (4.12) *έχει τουλάχιστον δύο λύσεις x_1, x_2, οι οποίες είναι κοίλες, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,1]$ και τέτοιες ώστε να ισχύει*

$$x_1(r_3) > \frac{\eta_3}{\delta},\ x_1(r_2) < Mr_2,\ x_2(r_2) > Mr_2 \ \text{ και }\ x_2(r_1) < \frac{\eta_1}{\delta}.$$

Πόρισμα 4.10. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(H_1), (H_2'), (H_3')$ για $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών* (4.10), (4.11), (4.12) *έχει τουλάχιστον δύο λύσεις x_1, x_2, οι οποίες είναι κοίλες, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,1]$ και τέτοιες ώστε να ισχύει*

$$\frac{\eta_3}{\delta} < \|x_1\|_{[0,1]} < M < \|x_2\|_{[0,1]} < \frac{\eta_1}{\delta}.$$

4.3 Εφαρμογές

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(e^t x'(t))' + e^{\frac{t+5}{20}x(t-\frac{1}{2})} = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0,1], \tag{4.13}$$

$$x(t) = \phi(t) := |t|, \quad \text{για κάθε } t \in [-\frac{1}{2}, 0], \tag{4.14}$$

$$x(1) - 2ex'(1) = 0. \tag{4.15}$$

Προφανώς, η συνάρτηση $f(t,y) := e^{\frac{(t+5)y}{20}}$ είναι θετική στο $[0,1]\times C([-\frac{1}{2},0],[0,+\infty))$, η συνάρτηση ϕ είναι θετική στο $[-\frac{1}{2},0]$ και η συνάρτηση $p(t) := e^t$ είναι θετική και αύξουσα στο $[0,1]$. Επίσης έχουμε $a=1$ και $b=-2$ άρα $P(t)=1-e^{-t}$ και $A(t) = e^{-t}-e^{-1}-2$, για κάθε $t\in[0,1]$, $A(0) = -(1+e^{-1}) \neq 0$, $aA(0) = -(1+e^{-1}) \leq 0$, άρα ικανοποιείται η υπόθεση (H_1). Επίσης,

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{(1-e^{-t})(e^{-s}-e^{-1}-2)}{1+e^{-1}}, & 0\leq t\leq s\leq 1\\ -\frac{(1-e^{-s})(e^{-t}-e^{-1}-2)}{1+e^{-1}}, & 0\leq s\leq t\leq 1. \end{cases}$$

Θεωρούμε $r_1=\frac{1}{3}$, $r_2=\frac{1}{2}$ και $r_3=\frac{2}{3}$. Ορίζουμε $L(t)=e^{0.3t}$, για κάθε $t\in[0,+\infty)$ και $u(t)=1$, για κάθε $t\in[0,1]$.

Έχουμε

$$f(t,y) = e^{\frac{(t+5)y}{20}} \leq e^{0.3y} \leq e^{0.3\|y\|_{[-\frac{1}{2},0]}} = u(t)L(\|y\|_{[-\frac{1}{2},0]}),$$

για κάθε $t\in[0,1]$ και για κάθε $y\in C([-\frac{1}{2},0],[0,+\infty))$. Ακόμη, προκειμένου να ικανοποιείται η υπόθεση (H_2) αρκεί να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $M>0$ τέτοιος ώστε

$$L(M)\int_0^1 G(r_2,s)u(s)ds < Mr_2,$$

δηλαδή,

$$e^{0.3M}\frac{e^{-0.5}-e^{-1.5}+2e^{-1}}{1+e^{-1}} < M.$$

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα ισχύει για $M=2$, επομένως ικανοποιείται και η υπόθεση (H_2).

Επίσης, θεωρούμε $\delta=\frac{1}{5}$, $\tau(t)=\frac{1}{2}$ και $v(t)=1$, για κάθε $t\in[0,1]$, και $w(t) = e^{0.25t}$, για κάθε $t\in[0,+\infty)$. Τότε, $X=\left[\frac{7}{10},1\right]$ και οι ανισότητες στην υπόθεση (H_3) παίρνουν τη μορφή

$$e^{0.25\eta_1}\frac{(1-e^{-\frac{1}{3}})(1.3e^{-1}-e^{-0.7}+0.6)}{1+e^{-1}} > 5\eta_1$$

και

$$e^{0.25\eta_3}\frac{(1-e^{-\frac{2}{3}})(1.3e^{-1}-e^{-0.7}+0.6)}{1+e^{-1}} > 5\eta_3$$

αντίστοιχα. Οι δύο τελευταίες σχέσεις ισχύουν για $\eta_1=29$ και $\eta_3=0.004$, επομένως ικανοποιείται και η υπόθεση (H_3).

Τέλος, είναι προφανές ότι $0<\eta_3=0.004<M\delta r_2=0.2<\eta_1=29$ και ότι $\|\phi\|_{[-\frac{1}{2},0]}<2$, και με εφαρμογή του Θεωρήματος 4.5 προκύπτει ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.13), (4.14), (4.15) έχει τουλάχιστον δύο κοίλες και αύξουσες στο διάστημα $[0,1]$ και θετικές στο διάστημα $[-\frac{1}{2},1]$ λύσεις x_1,x_2, τέτοιες ώστε

$$x_1\left(\frac{2}{3}\right) > 0.02,\ x_1\left(\frac{1}{2}\right) < 1,\ x_2\left(\frac{1}{2}\right) > 1,\ x_2\left(\frac{1}{3}\right) < 145.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$x''(t) + \left(x(t)-\frac{4}{5}\right)^5 + 1 = 0, \quad \text{για κάθε } t\in[0,1], \tag{4.16}$$

$$x(0) = 0, \tag{4.17}$$

$$2x'(1) - x(1) = 0. \tag{4.18}$$

Προφανώς, η συνάρτηση $f(t, y) := \left(y - \frac{4}{5}\right)^5 + 1$ είναι θετική συνάρτηση στο σύνολο $[0, 1] \times [0, +\infty)$ και η συνάρτηση $p(t) := 1$ είναι θετική και αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$. Επίσης έχουμε ότι $a = -1$ και $b = 2$ άρα $P(t) = t$ και $A(t) = t + 1$, για κάθε $t \in [0, 1]$, $A(0) = 1 \neq 0$, $aA(0) = -1 \leq 0$, άρα ικανοποιείται η υπόθεση (H_1). Επίσης,

$$G(t, s) = \begin{cases} t(s + 1), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(t + 1), & 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Θεωρούμε $r_1 = \frac{2}{5}$, $r_2 = \frac{3}{5}$ και $r_3 = \frac{4}{5}$. Ορίζουμε $L(t) = \left(t - \frac{4}{5}\right)^5 + 1$, για κάθε $t \in [0, +\infty)$ και $u(t) = 1$, για κάθε $t \in [0, 1]$.

Έχουμε

$$f(t, y) \leq u(t)L(y), \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1] \text{ και για κάθε } y \in [0, +\infty).$$

Ακόμη, προκειμένου να ικανοποιείται η υπόθεση (H_2') αρκεί να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$L(M) \int_0^1 G(r_2, s)u(s)ds < Mr_2,$$

δηλαδή,

$$\left(\left(M - \frac{4}{5}\right)^5 + 1\right) \frac{18}{25} < \frac{3}{5}M.$$

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα ισχύει για $M = 1.5$, επομένως ικανοποιείται και η υπόθεση (H_2').

Θεωρούμε $\delta = \frac{9}{10}$, $v(t) = 1$, για κάθε $t \in [0, 1]$, και $w(t) = \left(t - \frac{4}{5}\right)^5 + 1$, για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Τότε, $Z = \left[\frac{9}{10}, 1\right]$ και οι ανισότητες στην υπόθεση (H_3') παίρνουν τη μορφή

$$\left(\left(\eta_1 - \frac{4}{5}\right)^5 + 1\right) \frac{29}{250} > \frac{10}{9}\eta_1$$

και

$$\left(\left(\eta_3 - \frac{4}{5}\right)^5 + 1\right) \frac{29}{125} > \frac{10}{9}\eta_3.$$

αντίστοιχα. Οι δύο τελευταίες σχέσεις ισχύουν για $\eta_1 = 3$ και $\eta_3 = 0.1$, επομένως ικανοποιείται και η υπόθεση (H_3').

Τέλος, είναι προφανές ότι $0 < \eta_3 = 0.1 < M\delta r_2 = 0.81 < \eta_1 = 3$ και με εφαρμογή του Θεωρήματος 4.9 προκύπτει ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.16), (4.17), (4.18) έχει τουλάχιστον δύο κοίλες, αύξουσες και θετικές στο διάστημα $[0, 1]$ λύσεις x_1, x_2, τέτοιες ώστε

$$x_1\left(\frac{3}{4}\right) > \frac{1}{9},\ x_1\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{9}{10},\ x_2\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{9}{10},\ x_2\left(\frac{1}{4}\right) < \frac{10}{3}.$$

Κεφάλαιο 5

Θεώρημα Leggett–Williams

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε δύο τροποποιήσεις του Θεωρήματος σταθερού σημείου των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30) [53], που δημοσιεύτηκε το 1979, καθώς και δύο εφαρμογές αυτών των αποτελεσμάτων σε ένα πρόβλημα οριακών τιμών και σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η εκδοχή του Θεωρήματος σταθερού σημείου των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30) που χρησιμοποιείται περισσότερο παρέχει συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη τουλάχιστον τριών σταθερών σημείων. Ωστόσο, αυτή η εκδοχή του θεωρήματος είναι μόνο μια επέκταση του αρχικού αποτελέσματος, που παρουσιάζεται στην ίδια εργασία από τους συγγραφείς, το οποίο με τη σειρά του είναι μια τροποποίηση, αλλά όχι μια αληθινή επέκταση, του Θεωρήματος του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28), όπως αναφέραμε και στην Παρατήρηση 1.38. Το αρχικό αποτέλεσμα παρουσιάζει συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν την ύπαρξη τουλάχιστον ενός σταθερού σημείου, όπως και το Θεώρημα του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28). Οι διαφορές μεταξύ των δύο θεωρημάτων έχουν να κάνουν με το σύνολο μέσα στο οποίο βρίσκεται το σταθερό σημείο. Όπως αναφέραμε και στην Παρατήρηση 1.38, στο Θεώρημα του Krasnoselskii (Θεώρημα 1.28), το σύνολο αυτό είναι της μορφής $\{x : a \leq \|x\| \leq b\}$, όπου $a, b \in (0, +\infty)$, ενώ στο Θεώρημα των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30), το σύνολο είναι της μορφής $\{x : a \leq \alpha(x)$ και $\|x\| \leq b\}$, όπου $a, b \in (0, +\infty)$ και α ένα κατάλληλο συναρτησοειδές. Παρόλο που οι δύο αυτές προσεγγίσεις δεν είναι εύκολα συγκρίσιμες, η χρήση του συναρτησοειδούς α, το οποίο από τον ορισμό του δε μπορεί να συμπίπτει με τη στάθμη, επιτρέπει πιο εύκολους υπολογισμούς και πιο ευέλικτα αποτελέσματα. Σε αυτό το γενικό πλαίσιο, παρόλο που η ουσία των δύο αυτών Θεωρημάτων, και πολλών άλλων που βασίζονται σε αυτά, είναι λίγο – πολύ η ίδια, είναι μάλλον προτιμότερο να χρησιμοποιούμε το Θεώρημα των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30).

Σε αυτό το κεφάλαιο, ακολουθώντας τις ιδέες που παρουσιάζονται στα [4, 8, 9, 10], καθώς και στα [2, 50, 89], το σύνολο $\{x : a \leq \alpha(x)$ και $\|x\| \leq b\}$ αντικαθίσταται από το σύνολο $\{x : a \leq \alpha(x)$ και $\beta(x) \leq b\}$, όπου β είναι ένα κατάλληλο συναρτησοειδές. Αυτή η τροποποίηση είναι μια επέκταση του αρχικού Θεωρήματος των Leggett-Williams (Θεώρημα 1.30), επειδή το συναρτησοειδές β μπορεί να συμπίπτει με τη στάθμη. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα μπορούμε να βρούμε στο [7]. Επιπλέον, πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, το σύνολο $\{x : a \le \alpha(x)$ και $\|x\| \le b\}$ αντικαθίσταται από το σύνολο $\{x : u \preceq A(x)$ και $B(x) \preceq v\}$, όπου A, B είναι τελεστές και u, v είναι συναρτήσεις. Για την απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούμε το Fixed Point Index. Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου αντλήθηκαν από την εργασία [67].

Αφού δοθούν τα δυο αυτά αποτελέσματα, παρουσιάζεται η εφαρμογή τους σε ένα πρόβλημα οριακών τιμών και σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, και τα δύο για δεύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις. Αυτά τα προβλήματα εμφανίζονται στη βιβλιογραφία, για παράδειγμα το πρόβλημα οριακών τιμών μελετάται στα [65, 82, 90] και το πρόβλημα συνοριακών τιμών μελετάται στο [42]. Στο πρόβλημα οριακών τιμών, ενδιαφερόμαστε για μη–αρνητικές λύσεις ορισμένες σε ένα μη φραγμένο υποδιάστημα του $[0, +\infty)$, ενώ στο πρόβλημα συνοριακών τιμών ενδιαφερόμαστε για μη–αρνητικές λύσεις στο $[0, 1]$.

5.2 Αποδείξεις των Θεωρημάτων 1.31 και 1.32

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα τυχαίο διάστημα και $S \subseteq \mathbb{R}$ ένα τυχαίο σύνολο.

Λήμμα 5.1 (Fixed Point Index [2, 89]). *Έστω Q μια retract ενός χώρου Banach E. Για κάθε ανοικτό σύνολο U του Q και κάθε πλήρως συνεχή απεικόνιση $A : \overline{U} \to Q$ η οποία δεν έχει σταθερά σημεία στο ∂U (δηλαδή το σύνορο του U), υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός $i(A, U, Q)$ που ικανοποιεί τα ακόλουθα*

(i) αν $A : \overline{U} \to U$ είναι μια σταθερή απεικόνιση, τότε $i(A, U, Q) = 1$.

(ii) αν U_1 και U_2 είναι ξένα και ανοικτά υποσύνολα του U τέτοια ώστε η A να μην έχει σταθερά σημεία στο $\overline{U}\backslash(U_1 \cup U_2)$, τότε $i(A, U, Q) = i(A, U_1, Q) + i(A, U_2, Q)$, όπου $i(A, U_k, Q) = i(A|\overline{U_k}, U_k, Q)$, $k = 1, 2$.

(iii) αν I είναι ένα συμπαγές διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $h : I \times \overline{U} \to Q$ είναι μια συνεχής απεικόνιση με σχετικά συμπαγή εικόνα τέτοια ώστε $h(\lambda, x) \neq x$ για κάθε $(\lambda, x) \in I \times \partial U$, τότε το $i(h(\lambda, \cdot), U, Q)$ είναι καλά ορισμένο και ανεξάρτητο του λ.

(iv) αν $i(A, U, Q) \neq 0$, τότε η A έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο U.

(v) αν η Q_1 είναι μια συστολή στο σύνολο Q και $A(\overline{U}) \subset Q_1$, τότε $i(A, U, Q) = i(A, U \cap Q_1, Q_1)$, όπου $i(A, U \cap Q_1, Q_1) = i(A|\overline{U \cap Q_1}, U \cap Q_1, Q_1)$.

(vi) αν V είναι ένα ανοικτό σύνολο στο U και η A δεν έχει σταθερά σημεία στο $\overline{U}\backslash V$, τότε $i(A, U, Q) = i(A, V, Q)$.

Τώρα, αποδεικνύουμε το Θεώρημα 1.31

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x \in \partial(\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a, b) \cap K_d))$ είναι σταθερό σημείο του τελεστή T. Τότε

$$\alpha(x) = a \quad \text{ή} \quad \beta(x) = b. \tag{5.1}$$

Επίσης, προφανώς είτε ισχύει ότι

$$x \in K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c$$

είτε ισχύει ότι

$$\|x\|_I > c.$$

- Αν $x \in K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c$ τότε σύμφωνα με την υπόθεση (i), έχουμε ότι

  $$\beta(x) = \beta(Tx) < b \quad \text{και} \quad \alpha(x) = \alpha(Tx) > a,$$

  το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (5.1).

- Αν $\|x\|_I > c$ τότε

  $$\|Tx\|_I = \|x\|_I > c,$$

  και σύμφωνα με την υπόθεση (iii), έχουμε ότι

  $$\beta(Tx) < b \quad \text{και} \quad \alpha(Tx) > a,$$

  το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (5.1).

Άρα ο τελεστής T δεν έχει σταθερά σημεία στο $\partial\big(\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d)\big)$.

Επειδή $\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c) \neq \emptyset$, διαλέγουμε $x_0 \in \mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c)$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times \overline{\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d)} \to K_d$$

ως $h(t,x) = (1-t)Tx + tx_0$. Η h είναι συνεχής και το σύνολο

$$h\left([0,1] \times \overline{\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d)}\right)$$

είναι σχετικά συμπαγές.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει

$$(t,x) \in [0,1] \times \partial\big(\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d)\big)$$

τέτοιο ώστε $h(t,x) = x$. Τότε

$$\alpha(x) = a \quad \text{ή} \quad \beta(x) = b.$$

- Αν $\|Tx\|_I > c$ τότε από την υπόθεση (iii) έχουμε ότι

  $$\beta(Tx) < b \quad \text{και} \quad \alpha(Tx) > a,$$

  άρα

  - αν $\alpha(x) = a$ τότε

    $$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha(h(t,x)) = \alpha((1-t)Tx + tx_0) \\ &\geq (1-t)\alpha(Tx) + t\alpha(x_0) > (1-t)a + ta \\ &= a \end{aligned}$$

    το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $\alpha(x) = a$.

– αν $\beta(x) = b$ τότε

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \beta(h(t,x)) = \beta((1-t)Tx + tx_0)\\ &\leq (1-t)\beta(Tx) + t\beta(x_0) < (1-t)b + tb\\ &= b\end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $\beta(x) = b$.

- Αν $\|Tx\|_I \leq c$ τότε

$$\begin{aligned}\|x\|_I &= \|h(t,x)\|_I = \|(1-t)Tx + tx_0\|_I\\ &\leq (1-t)\|Tx\|_I + t\|x_0\|_I < (1-t)c + tc\\ &= c,\end{aligned}$$

επομένως από την υπόθεση (i)

$$\beta(Tx) < b \quad \text{και} \quad \alpha(Tx) > a,$$

άρα

– αν $\alpha(x) = a$ τότε

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \alpha(h(t,x)) = \alpha((1-t)Tx + tx_0)\\ &\geq (1-t)\alpha(Tx) + t\alpha(x_0) > (1-t)a + ta\\ &= a\end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $\alpha(x) = a$.

– αν $\beta(x) = b$ τότε

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \beta(h(t,x)) = \beta((1-t)Tx + tx_0)\\ &\leq (1-t)\beta(Tx) + t\beta(x_0) < (1-t)b + tb\\ &= b\end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $\beta(x) = b$.

Συμπερασματικά, για κάθε

$$(t,x) \in [0,1] \times \partial\left(\mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d)\right)$$

ισχύει ότι $h(t,x) \neq x$. Επομένως, από το Λήμμα 5.1, έχουμε ότι

$$i\left(T, \mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d), K_d\right) = i\left(x_0, \mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d), K_d\right) = 1.$$

Άρα, ο τελεστής T έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο $y \in \mathrm{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d)$, δηλαδή

$$\alpha(y) > a, \quad \beta(y) < b, \quad \|y\|_I \leq d.$$

□

Τώρα, αποδεικνύουμε το Θεώρημα 1.32

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x \in \partial\left(\operatorname{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)\right)$ είναι ένα σταθερό σημείο του τελεστή T. Τότε

$$Ax(t_0) = u(t_0) \quad \text{ή} \quad Bx(t_0) = v(t_0), \quad \text{για κάποιο } t_0 \in I. \tag{5.2}$$

Επίσης, προφανώς είτε ισχύει ότι

$$x \in K_{A,B}(u,v) \cap K_c$$

είτε ισχύει ότι $\|x\|_I > c$.

- Αν $x \in K_{A,B}(u,v) \cap K_c$ τότε σύμφωνα με την υπόθεση (i), έχουμε ότι

  $$B(x) = B(Tx) \prec v \quad \text{και} \quad u \prec A(Tx) = A(x),$$

  το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (5.2).

- Αν $\|x\|_I > c$ τότε

  $$\|Tx\|_I = \|x\|_I > c,$$

  τότε σύμφωνα με την υπόθεση (iii), έχουμε ότι

  $$B(Tx) \prec v \quad \text{και} \quad u \prec A(Tx),$$

  το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (5.2).

Άρα ο τελεστής T δεν έχει σταθερά σημεία στο $\partial\left(\operatorname{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)\right)$.

Επειδή $\operatorname{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_c) \neq \emptyset$, επιλέγουμε ένα $x_0 \in \operatorname{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_c)$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : [0,1] \times \overline{\operatorname{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)} \to K_d$$

ως

$$h(t,x) = (1-t)Tx + tx_0.$$

Η απεικόνιση h είναι συνεχής και το σύνολο

$$h\left([0,1] \times \overline{\operatorname{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)}\right)$$

είναι σχετικά συμπαγές.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει

$$(t,x) \in [0,1] \times \partial\left(\operatorname{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)\right)$$

τέτοιο ώστε $h(t,x) = x$. Τότε

$$Ax(t_0) = u(t_0) \quad \text{ή} \quad Bx(t_0) = v(t_0), \quad \text{για κάποιο } t_0 \in I.$$

- Αν $\|Tx\|_I > c$ τότε από την υπόθεση (iii), έχουμε ότι

$$B(Tx) \prec v \quad \text{και} \quad u \prec A(Tx),$$

άρα

  - αν $Ax(t_0) = u(t_0)$ τότε

$$\begin{aligned} A(x) &= A(h(t,x)) = A((1-t)Tx + tx_0) \\ &\succeq (1-t)A(Tx) + tA(x_0) \succ (1-t)u + tu \\ &= u \end{aligned}$$

    το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $Ax(t_0) = u(t_0)$.

  - αν $Bx(t_0) = v(t_0)$ τότε

$$\begin{aligned} B(x) &= B(h(t,x)) = B((1-t)Tx + tx_0) \\ &\preceq (1-t)B(Tx) + tB(x_0) \prec (1-t)v + tv \\ &= v \end{aligned}$$

    το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $Bx(t_0) = v(t_0)$.

- Αν $\|Tx\|_I \leq c$ τότε

$$\begin{aligned} \|x\|_I &= \|h(t,x)\|_I = \|(1-t)Tx + tx_0\|_I \\ &\leq (1-t)\|Tx\|_I + t\|x_0\|_I < (1-t)c + tc \\ &= c, \end{aligned}$$

επομένως, από την υπόθεση (i) έχουμε ότι

$$B(Tx) \prec v \quad \text{και} \quad u \prec A(Tx),$$

άρα

  - αν $Ax(t_0) = u(t_0)$ τότε

$$\begin{aligned} A(x) &= A(h(t,x)) = A((1-t)Tx + tx_0) \\ &\succeq (1-t)A(Tx) + tA(x_0) \succ (1-t)u + tu \\ &= u \end{aligned}$$

    το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $Ax(t_0) = u(t_0)$.

  - αν $Bx(t_0) = v(t_0)$ τότε

$$\begin{aligned} B(x) &= B(h(t,x)) = B((1-t)Tx + tx_0) \\ &\preceq (1-t)B(Tx) + tB(x_0) \prec (1-t)v + tv \\ &= v \end{aligned}$$

    το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $Bx(t_0) = v(t_0)$.

Συμπερασματικά, για κάθε

$$(t,x) \in [0,1] \times \partial\left(\mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)\right)$$

ισχύει ότι $h(t,x) \neq x$. Επομένως, από το Λήμμα 5.1, έχουμε ότι

$$i\left(T, \mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d), K_d\right) = i\left(x_0, \mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d), K_d\right) = 1.$$

Άρα, ο τελεστής T έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο $y \in \mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_d)$, δηλαδή

$$u \prec A(y), \quad B(y) \prec v, \quad \|y\|_I \leq d.$$

□

5.3 Εφαρμογή του Θεωρήματος 1.31 σε ένα ΠΣΤ

Έστω J ένα μη φραγμένο διάστημα στο $[0,+\infty)$. Το σύνολο

$$BC^2(J,[0,+\infty)) := \{x \in C^2(J,[0,+\infty)) : x \text{ είναι φραγμένη } \}$$

εφοδιασμένο με τη στάθμη $\|x\|_J$, για κάθε $x \in BC^2(J,[0,+\infty))$, είναι ένας χώρος Banach. Ψάχνουμε για συναρτήσεις $x \in BC^2(J,[0,+\infty))$ που ικανοποιούν τη δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση

$$x''(t) + f(t,x(t)) = 0, \quad t \in J \tag{5.3}$$

καθώς και την συνοριακή συνθήκη

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \xi, \tag{5.4}$$

όπου $\xi \in [0,+\infty)$, $f : J \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ είναι συνεχής και

$$\int_t^{+\infty}\int_s^{+\infty} f(\sigma,y(\sigma))\,d\sigma\,ds \leq \xi, \quad \text{για κάθε } t \in J \text{ και για κάθε } y \in BC^2(J,[0,+\infty)).$$

θεωρούμε το σύνολο

$$K := \{x \in BC^2(J,[0,+\infty)) : x(t) \geq 0,\ x'(t) \geq 0 \text{ και } x''(t) \leq 0,\ \text{για κάθε } t \in J\},$$

το οποίο είναι ένας κώνος μέσα στο $BC^2(J,[0,+\infty))$. Πραγματικά, έστω μια ακολουθία συναρτήσεων $(x^{[\nu]})_{\nu\geq 1} \subseteq K$ και μια συνάρτηση $x \in BC^2(J,[0,+\infty))$ τέτοια ώστε

$$\|\cdot\|_J - lim_{\nu\to+\infty} x^{[\nu]} = x.$$

Από τη τελευταία σχέση συνεπάγεται και το κατά σημείο όριο

$$lim_{\nu\to+\infty} x^{[\nu]}(t) = x(t), \quad \text{για κάθε } t \in J.$$

Επειδή $x^{[\nu]} \in K$ για κάθε $\nu \geq 1$ ισχύει ότι $x^{[\nu]}(t) \geq 0$ για κάθε $t \in J$ και για κάθε $\nu \geq 1$, επομένως $x(t) \geq 0$ για κάθε $t \in J$. Επίσης, ισχύει ότι $(x^{[\nu]})'(t) \geq 0$ και $(x^{[\nu]})''(t) \leq 0$ για κάθε $t \in J$ αφού $x^{[\nu]} \in K$ για κάθε $\nu \geq 1$. Ακόμη, ισχύει ότι

$$lim_{\nu \to +\infty}(x^{[\nu]})'(t) = x'(t), \quad \text{για κάθε } t \in J$$

και

$$lim_{\nu \to +\infty}(x^{[\nu]})''(t) = x''(t), \quad \text{για κάθε } t \in J.$$

Επομένως

$$x'(t) \geq 0, \;\; \text{για κάθε } t \in J \quad \text{και} \quad x''(t) \leq 0, \;\; \text{για κάθε } t \in J,$$

δηλαδή, $x \in K$ και συνεπώς το σύνολο K είναι κλειστό στο $BC^2(J, [0, +\infty))$. Τώρα, για κάθε $x, y \in K$ και για κάθε $\kappa, \lambda \geq 0$ έχουμε ότι

$$(\kappa x + \lambda y)(t) = \kappa x(t) + \lambda y(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \in J,$$

$$(\kappa x + \lambda y)'(t) = \kappa x'(t) + \lambda y'(t) \geq 0, \quad \text{για κάθε } t \in J,$$

$$(\kappa x + \lambda y)''(t) = \kappa x''(t) + \lambda y''(t) \leq 0, \quad \text{για κάθε } t \in J,$$

Άρα, $\kappa x + \lambda y \in K$. Τέλος, αν $x, -x \in K$ τότε έχουμε ότι

$$x(t) \geq 0, \;\; \text{για κάθε } t \in J \quad \text{και} \quad (-x)(t) \geq 0, \;\; \text{για κάθε } t \in J.$$

Επομένως, $x(t) = 0$ για κάθε $t \in J$, δηλαδή $x = 0$. Συνεπώς, το σύνολο K είναι ένας κώνος μέσα στο $BC^2(J, [0, +\infty))$.

Λήμμα 5.2. *Έστω $\epsilon > 0$. Μια συνάρτηση $x \in K_\epsilon$ είναι λύση του προβλήματος οριακών τιμών* (5.3), (5.4) *αν και μόνον αν η x είναι ένα σταθερό σημείο του τελεστή $T : K_d \to C(J, [0, +\infty))$ που ορίζεται ως*

$$(Ty)(t) := \xi - \int_t^{+\infty} \int_s^{+\infty} f(\sigma, y(\sigma)) d\sigma ds, \quad t \in J.$$

Λήμμα 5.3. *Έστω $\epsilon > 0$. Ο τελεστής T είναι ένας πλήρως συνεχής τελεστής και απεικονίζει το σύνολο K_ϵ μέσα στον κώνο K.*

Θεώρημα 5.4. *Έστω $r_1, r_2 \in J$, με $r_1 < r_2$, και $0 < a < b < c < d$, με $d \geq \xi$. Επίσης, ορίζουμε τα συναρτησοειδή $\alpha(x) = x'(r_2)$, για κάθε $x \in K$, και $\beta(x) = x'(r_1)$, για κάθε $x \in K$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in K_{\alpha,\beta}(a, b) \cap K_c$ καθώς και για κάθε $x \in K_{\alpha,\beta}(a, b) \cap K_d$ με $\|Tx\|_J > c$, ισχύει ότι,*

$$\int_{r_1}^{+\infty} f(s, x(s)) ds < b \quad \text{και} \quad \int_{r_2}^{+\infty} f(s, x(s)) ds > a.$$

Τότε το πρόβλημα οριακών τιμών (5.3), (5.4), *έχει τουλάχιστον μια λύση y τέτοια ώστε*

$$y'(r_2) > a, \quad y'(r_1) < b, \quad \|y\|_J \leq d.$$

Απόδειξη. Προφανώς το α είναι ένα κοίλο και θετικό συναρτησοειδές και το β είναι ένα κυρτό και θετικό συναρτησοειδές τέτοια ώστε

$$\alpha(x) \leq \beta(x), \quad \text{για κάθε } x \in K.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε συνάρτηση $x \in K$ με

$$x(t) = \lambda t, \quad \text{για κάθε } t \in [r_1, r_2],$$

όπου $\lambda \in (a, b)$, και τέτοια ώστε $\|x\|_J < c$, ανήκει στο σύνολο $\text{int}_{K_d}(K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_c)$, αφού $\alpha(x) = x'(r_2) = \lambda > a$ και $\beta(x) = x'(r_1) = \lambda < b$. Ακόμη,

$$\beta(Tx) = (Tx)'(r_1) = \int_{r_1}^{+\infty} f(s, x(s))ds < b$$

και

$$\alpha(Tx) = (Tx)'(r_2) = \int_{r_2}^{+\infty} f(s, x(s))ds > a,$$

άρα η υπόθεση (i) του Θεωρήματος 1.31 ικανοποιείται. Ομοίως, και η υπόθεση (iii) του Θεωρήματος 1.31 ικανοποιείται. Επιπλέον, από το Λήμμα 5.3 έχουμε ότι $T(K_d) \subseteq K$, επομένως, για να ικανοποιείται και η υπόθεση (ii) του Θεωρήματος 1.31 αρκεί $\|Tx\|_J \leq d$ για κάθε $x \in \overline{K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $d \geq \xi$, άρα ισχύει ότι

$$\|Tx\|_J = sup_{t\in J}|(Tx)(t)| = sup_{t\in J}\left|\xi - \int_t^{+\infty}\int_s^{+\infty} f(\sigma, x(\sigma))d\sigma ds\right| \leq \xi \leq d.$$

Επομένως,

$$Tx \in K_d, \quad \text{για κάθε } x \in \overline{K_{\alpha,\beta}(a,b) \cap K_d}.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.31, το πρόβλημα οριακών τιμών (5.3), (5.4) έχει τουλάχιστον μια λύση y τέτοια ώστε

$$y'(r_2) > a, \quad y'(r_1) < b, \quad \|y\|_J \leq d.$$

□

Πόρισμα 5.5. *Το πρόβλημα οριακών τιμών*

$$x''(t) + \frac{1}{t^3 + x(t)} = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [1, +\infty), \tag{5.5}$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 2. \tag{5.6}$$

έχει τουλάχιστον μια μη αρνητική λύση y τέτοια ώστε

$$y'(3) > \frac{1}{20}, \quad y'(2) < \frac{1}{6}, \quad \|y\|_{[1,+\infty)} \leq 2.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.4, για $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{1}{6}$, $c = 1$, $d = 2$ και $\xi = 2$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in [1, +\infty)$ και $x \in K_d$, ισχύει

$$\int_t^{+\infty}\int_s^{+\infty} \frac{1}{\sigma^3 + x(\sigma)} d\sigma ds \le \int_t^{+\infty}\int_s^{+\infty} \frac{1}{\sigma^3} d\sigma ds = \frac{1}{2t} \le 2 = \xi,$$

και για κάθε $x \in K_d$, έχουμε ότι

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{s^3 + x(s)} ds \le \int_2^{+\infty} \frac{1}{s^3} ds < \frac{1}{6}$$

και

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{s^3 + x(s)} ds \ge \int_3^{+\infty} \frac{1}{s^3 + 2} ds > \frac{1}{20}.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.4, το πρόβλημα οριακών τιμών (5.5), (5.6) έχει τουλάχιστον μια μη αρνητική λύση y τέτοια ώστε

$$y'(3) > \frac{1}{20}, \quad y'(2) < \frac{1}{6}, \quad \|y\|_{[1,+\infty)} \le 2.$$

□

5.4 Εφαρμογή του Θεωρήματος 1.32 σε ένα ΠΣΤ

Θεωρούμε το δεύτερης τάξης πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$x''(t) - f(t, x(t)) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1], \tag{5.7}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(1) = ax'(0) \tag{5.8}$$

όπου $f : [0, 1] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι συνεχής και $a > 1$. Ορίζουμε το σύνολο,

$$K := \{x \in C([0, 1], [0, +\infty)) : x(t) \ge 0, \text{ για } t \in [0, 1], \text{ και } x'(t) \ge 0, \text{ για } t \in [0, 1]\}.$$

το οποίο είναι ένας κώνος μέσα στο $C([0, 1], [0, +\infty))$

Λήμμα 5.6. *Έστω $\epsilon > 0$. Μια συνάρτηση $x \in K_\epsilon$ είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών* (5.7), (5.8) *αν και μόνον αν η x είναι ένα σταθερό σημείο του τελεστή $T : K_\epsilon \to C([0, 1], [0, +\infty))$ που ορίζουμε ως*

$$(Ty)(t) := \frac{t}{a-1}\int_0^1 f(s, y(s)) ds + \int_0^t\int_0^s f(\sigma, y(\sigma)) d\sigma ds, \quad \textit{για κάθε } t \in [0, 1].$$

Λήμμα 5.7. *Έστω $\epsilon > 0$. Ο τελεστής T είναι ένας πλήρως συνεχής τελεστής και απεικονίζει το σύνολο K_ϵ μέσα στον κώνο K.*

Θεώρημα 5.8. *Έστω $u, v \in C([0, 1], [0, +\infty))$ με $u \prec v$, $u'(t) \ge 0$, για κάθε $t \in [0, 1]$, και $v'(t) \ge 0$, για κάθε $t \in [0, 1]$. Επίσης ορίζουμε τους τελεστές A, B ως*

$$A(x) = B(x) = x', \quad \textit{για κάθε } x \in K,$$

και έστω $0 < c < d$*, με*

$$sup_{t\in[0,1]}(Tx)(t) \leq d, \quad \textit{για κάθε } x \in \overline{K_{A,B}(u,v) \cap K_d}. \tag{5.9}$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in K_{A,B}(u,v) \cap K_c$ *καθώς και για κάθε* $x \in K_{A,B}(u,v) \cap K_d$ *με* $\|Tx\|_{[0,1]} > c$*, ισχύει*

$$u(t) < \frac{1}{a-1}\int_0^1 f(s,x(s))ds + \int_0^t f(s,x(s))ds < v(t), \quad \textit{για κάθε } t \in [0,1]. \tag{5.10}$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.7), (5.8) *έχει τουλάχιστον μια λύση* y *τέτοια ώστε*

$$u \prec y', \; y' \prec v \quad \textit{και} \quad \|y\|_{[0,1]} \leq d.$$

Απόδειξη. Η υπόθεση (ii) του Θεωρήματος 1.32 ικανοποιείται λόγω της σχέσης (5.9), και η υπόθεση (iii) του Θεωρήματος 1.32 ικανοποιείται λόγω της σχέσης (5.10). Είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_c) \neq \emptyset$, αφού, κάθε συνάρτηση $x \in K$ με

$$x(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$$

όπου $u(t) < \lambda(t) - \lambda(0) < v(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$, και τέτοια ώστε $\|x\|_{[0,1]} < c$, ανήκει στο σύνολο $\mathrm{int}_{K_d}(K_{A,B}(u,v) \cap K_c)$. Από το γεγονός αυτό και από τη σχέση (5.10) διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται και η υπόθεση (i) του Θεωρήματος 1.32.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.32, έχουμε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.7), (5.8) έχει τουλάχιστον μια λύση y τέτοια ώστε

$$u \prec y', \; y' \prec v \quad \text{και} \quad \|y\|_{[0,1]} \leq d.$$

□

Σημείωση 5.9. Η συνάρτηση λ υπάρχει για το λόγο ότι, από την υπόθεση του Θεωρήματος 5.8, έχουμε τη γνήσια σχέση $u \prec v$, δηλαδή $u(t) < v(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Πόρισμα 5.10. *Το πρόβλημα συνοριακών τιμών*

$$x''(t) - (1 + \sin^2(x(t))) = 0, \quad t \in [0,1], \tag{5.11}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(1) = 2x'(0). \tag{5.12}$$

έχει τουλάχιστον μία μη αρνητική λύση y *τέτοια ώστε*

$$t < y(t) < t^2 + 2t, \quad \textit{για κάθε } t \in [0,1]$$

και

$$\|y\|_{[0,1]} \leq 3.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.8, για $c = 1$, $d = 3$, $u(t) = 1$, $t \in [0, 1]$, και $v(t) = 2(t + 1)$, $t \in [0, 1]$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in [0, 1]$, ισχύει ότι

$$1 < \int_0^1 (1 + \sin^2(x(s)))ds + \int_0^t (1 + \sin^2(x(s)))ds$$

και

$$\int_0^1 (1 + \sin^2(x(s)))ds + \int_0^t (1 + \sin^2(x(s)))ds < 2(t + 1).$$

Επίσης, για κάθε $x \in K_d$, έχουμε ότι

$$\int_0^t \int_0^s (1 + \sin^2(x(\sigma)))d\sigma ds < 2 \int_0^t \int_0^s d\sigma ds = t^2 \le 1, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1],$$

και

$$t \int_0^1 \left(1 + \sin^2(x(s))\right) ds < 2t \int_0^1 ds = 2t \le 2, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1],$$

άρα

$$\sup_{t \in [0,1]} Tx(t) \le 3 = d.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.8, έχουμε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.11), (5.12), έχει τουλάχιστον μία μη αρνητική λύση y τέτοια ώστε

$$t < y(t) < t^2 + 2t, \text{ για κάθε } t \in [0, 1], \quad \text{και} \quad \|y\|_{[0,1]} \le 3.$$

$\square$

Περίληψη

Στη διατριβή αυτή σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την ύπαρξη λύσης προβλημάτων συνοριακών τιμών, αλλά όχι και την επίλυσή τους. Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ή τουλάχιστον ένας αριθμός μη αρνητικών λύσεων.

Υπάρχουν προβλήματα συνοριακών τιμών για τα οποία μπορούμε να βρούμε λύση και άλλα που δεν μπορούν να επιλυθούν και για τα οποία εφαρμόζουμε προσεγγιστικές μεθόδους. Για τα προβλήματα συνοριακών τιμών που δεν μπορούν να επιλυθούν, προκειμένου να εφαρμοστούν οι προσεγγιστικές μέθοδοι, πρέπει πρώτα να έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη λύσης.

Στην παρούσα διατριβή, περιγράφουμε τις τεχνικές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έτσι ώστε με τη χρήση θεωρημάτων σταθερού σημείου να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μη αρνητικών, και κατά περίπτωση θετικών, λύσεων προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Η διατριβή αποτελείται από πέντε κεφάλαια και τη βιβλιογραφία. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρουμε έννοιες από τη Συναρτησιακή Ανάλυση τις οποίες χρειαζόμαστε στη συνέχεια. Επίσης αναφέρονται τα τέσσερα θεωρήματα σταθερού σημείου που επιλέγουμε να εφαρμόσουμε καθώς και οι μεθοδολογίες συνοπτικά, τις οποίες αναπτύσσουμε αναλυτικά σε καθένα από τα επόμενα κεφάλαια. Τέλος παρουσιάζουμε εφαρμογές σε φυσικά προβλήματα.

Το καθένα από τα επόμενα κεφάλαια αναφέρεται αντίστοιχα στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder, στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Krasnoselskii, στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Avery–Henderson και στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου των Leggett–Williams. Σε κάθε ένα κεφάλαιο αναπτύσσεται αναλυτικά η μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε για την εφαρμογή του συγκεκριμένου θεωρήματος και δίνονται συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα που εξασφαλίζουν την εφαρμοσιμότητα των θεωρητικών συμπερασμάτων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην παρουσίαση των συμπερασμάτων με ενιαίο τρόπο σε όλα τα κεφάλαια και στη μεταξύ τους διασύνδεση.

Τέλος παραθέτουμε έναν εκτενή κατάλογο εργασιών και βιβλίων σχετικών με το αντικείμενο της διατριβής, από όπου έχουμε αντλήσει τα συμπεράσματα που παρουσιάζονται εδώ.

Abstract

In this thesis, our goal is to study the existence of solutions for boundary value problems. It should be noted that we are not interested in finding solutions, only in studying their existence. We want to ensure that there is at least one or at least a number of solutions.

There are boundary value problems which can be solved and others which can not be solved, for which we can apply approximation techniques. For those boundary value problems which can not be solved, we must first ensure the existence of solutions.

In this thesis, we describe the techniques which can be used in order to ensure the existence of non–negative, and in certain cases positive, solutions for boundary value problems, using fixed point theorems.

The thesis consists of five chapters and the bibliography. In the first chapter, we mention some concepts in Functional Analysis which we need in the process. We also mention the four fixed point theorems we chose to apply and the methodologies used in the next chapters. Finally, we present some applications of the results in Natural Sciences.

Each one of the remaining chapters, refers respectively to the fixed point theorem of Schauder, the fixed point theorem of Krasnoselskii, the fixed point theorem of Avery–Henderson and the fixed point theorem of Leggett–Williams. In each chapter we present in detail the methodology used in order to apply the specific fixed point theorem and we provide specific numerical applications of the theoretical results. Special attention is paid to presenting the results in a unified way throughout the whole thesis and pointing out the relations between them.

Finally we present a detailed list of the papers and books we used in this thesis.

Βιβλιογραφία

[1] R. P. Agarwal and D. O'Regan; *Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht, 2001.

[2] H. Amann; Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Rev.* 18, (1976), No. 4, 620-709.

[3] V. Anuradha, D.D. Hai and R. Shivaji; Existence results for superlinear semipositone BVP's, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124, (1996), No. 3, 757-763.

[4] R. I. Avery; A generalization of the Leggett-Williams fixed point theorem, *MSR Hot-Line* 2, (1998), 9-14.

[5] R. I. Avery, C. J. Chyan and J. Henderson; Twin solutions of boundary-value problems for ordinary differential equations and finite difference equations, *Comput. Math. Appl.* 42, (2001), 695-704.

[6] R. I. Avery and J. Henderson; Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Comm. *Appl. Nonlinear Anal.* 8, (2001), 27-36.

[7] R. I. Avery, J. Henderson and D. R. Anderson; Existence of a positive solution to a right focal boundary value problem, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2010, No. 5, 6 pp.

[8] R. I Avery, J. Henderson and D. O'Regan; Six functionals fixed point theorem, *Commun. Appl. Anal.* 12, (2008), No. 1, 69-81.

[9] R. I Avery, J. Henderson and D. O'Regan; Functional compression-expansion fixed point theorem, *Electron. J. Differential Equations* 2008, No. 22, 12 pp.

[10] R. I Avery, J. Henderson and D. O'Regan; Four functionals fixed point theorem, *Math. Comput. Modelling* 48, (2008), No. 7-8, 1081-1089.

[11] C. Avramescu; Sur l' existence des solutions convergentes des systems d' equations differentielles non lineaires, *Ann. Mat. Pura Appl.* 81, (1969), 147-168.

[12] N. Azbelev, V. Maksimov and L. Rakhmatullina; *Introduction to the Theory of Linear Functional-Differential Equations*, Adv. Ser. Math. Sci. Engrg. 3, World Federation Publishers Company, Atlanta, GA, 1995.

[13] N. Azbelev and L. Rakhmatullina; Theory of Linear Abstract Functional-Differential Equations and Applications, *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 8, (1996).

[14] C. Bai and J. Fang; On positive solutions of boundary value problems for second-order functional differential equations on infinite intervals, *J. Math. Anal. Appl.* 282, (2003), 711-731.

[15] H. R. Bailey and E. B. Reeve; Mathematical models describing the distribution of I^{131}-albumin in man, *J. Lab Clin. Med.* 60, (1962), 923-943.

[16] H. R. Bailey and M. Z. Williams; Some results on the differential difference equation $x'(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i x(t - T_i)$, *J. Math. Anal. Appl.* 15, (1966), 569-587.

[17] H. T. Banks; *Modeling and Control in the Biomedical Sciences*, Lecture Notes in Biomathematics 6, Springer-Verlag, 1975.

[18] V. Boffi and R. Scozzafava; A first-order linear differential difference equation with N delays, *J. Math. Anal. Appl.* 17, (1967), 577-589.

[19] V. Boffi and R. Scozzafava; Sull'equazione funzionale lineare $f'(x) = -A(x)f(x-1)$, *Rend. Math. e Appl.* (5) 25, (1966), 402-410.

[20] A. Constantin; On the existence of positive solutions of second order differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.* 184, (2005), 131-138.

[21] K. L. Cooke; Functional differential equations: Some models and perturbation problems, *Differential Equations and Dynamical Systems (Proc. Int. Symp. Mayaguez), P. R.* (1965), 167-183, Academic Press, 1967.

[22] K. L. Cooke and J. A. Yorke; *Equations modeling population growth, economic growth, and gonorrhea epidemiology, Ordinary Differential Equations*, L. Weiss, Ed., Academic Press, 1972.

[23] R. W. Dickey; Membrane caps under hydrostatic pressure, *Quart. Appl. Math.* 46, (1988), 95-104.

[24] R. W. Dickey; Rotationally symmetric solutions for shallow membrane caps, *Quart. Appl. Math.* 47, (1989), 571-581.

[25] O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel and H. O. Walther; *Delay Equations: Functional, Complex and Nonlinear Analysis*, New York, 1995.

[26] R. D. Driver; *Ordinary and Delay Differential Equations*, New York, 1977.

[27] L. H. Erbe, S. Hu and H. Wang; Multiple positive solutions of some boundary-value problems, *J. Math. Anal. Appl.* 184, (1994), 640-648.

[28] L. H. Erbe and H. Wang; On the existence of positive solutions of ordinary differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 120, (1994), 743-748.

[29] W. K. Ergen; Kinetics of the circulating fuel nuclear reaction, *J. Appl. Phys.* 25, (1954), 702-711.

[30] E. Fermi; Un methodo statistico par la determinazione di alcune proprieta dell' atoma, *Rend. Accad. Naz. del Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat.* 6, (1927), 602-607.

[31] M. Gregus; On a special boundary value problem, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae* 40, (1982), 161-168.

[32] S. Grossberg; A prediction theory for some nonlinear functional differential equations, I. Learning of lists, *J. Math. Anal. Appl.* 21, (1968), 643-694, II. Learning of patterns, *Ibid.* 22, (1968), 422-490.

[33] S. Grossberg; Learning and energy-entropy dependence in some nonlinear functional differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75, (1969), 1238-1242.

[34] D. Guo; Multiple positive solutions for first order nonlinear impulsive integro-differential equations in a Banach space, *Appl. Math. Comput.* 143, (2003), 233-249.

[35] D. J. Guo and V. Lakshmikantham; *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, San Diego, 1988.

[36] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel; *Introduction to Functional Differential Equations*, New York, 1993.

[37] J. Henderson; Double solutions of three-point boundary-value problems for second-order differential equations, *Electron. J. Diff. Eqns.* 2004, (2004), No. 115, 1-7.

[38] F. Hoppenstadt and P. Waltman; A problem in the theory of epidemics, I and II, *Math. Biosciences* 9, (1970), 71-91, *Ibid.* 12, (1971), 133-145.

[39] A. Jeribi and B. Krichen; *Nonlinear Functional Analysis in Banach Spaces and Banach Algebras, Fixed Point Theory under Weak Topology for Nonlinear Operators and Block Operator Matrices with Applications*, Taylor and Francis Group, LLC, 2016.

[40] G. L. Karakostas, K. G. Mavridis and P. Ch. Tsamatos; Multiple positive solutions for a functional second-order boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.* 282, (2003), No. 2, 567-577.

[41] G. L. Karakostas, K. G. Mavridis and P. Ch. Tsamatos; Triple solutions for a nonlocal functional boundary-value problem by Leggett-Williams theorem, *Appl. Anal.* 83, (2004), No. 9, 957-970.

[42] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos; Positive solutions of a boundary-value problem for second order ordinary differential equations, *Electron. J. Differential Equations* 2000, No. 49, 1-9.

[43] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos; Sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of a nonlocal boundary-value problem, *Appl. Math. Lett.* 15, (2002), No. 4, 401-407.

[44] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos; Positive solutions and nonlinear eigenvalue problems for retarded second order differential equations, *Electron. J. Differential Equations* 2002, No. 59, 1-11.

[45] R. E. Kidder; Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium, *J. Appl. Mech.* 27, (1957), 329-332.

[46] M.A. Krasnoselskii; *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

[47] A. J. Kurdila, M. Zabarankin; *Convex Functional Analysis, Systems and Control: Foundations and Applications*, Birkhauser Verlag, Basel, 2005.

[48] T. Kusano and W. F. Trench; Existence of global solutions with prescribed asymptotic behavior for nonlinear ordinary differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.* 142, (1985), 381-392.

[49] T. Kusano and W. F. Trench; Global existence theorems for solutions of nonlinear differential equations with prescribed asymptotic behavior, *J. London Math. Soc.* 31, (1985), 478-486.

[50] M. K. Kwong; On Krasnoselskii's cone fixed point theorem, *Fixed Point Theory Appl.* 2008, Art. ID 164537, 18 pp.

[51] V. Lakshmikantham and S. Leela; *Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications. Vol. II: Functional, Partial, Abstract, and Complex Differential Equations*, Math. Sci. Engrg. 55-II, Academic Press, New York, 1969.

[52] L. P. Lebedev, I. I. Vorovich and G.M.L.Gladwell; *Functional Analysis, Applications in Mechanics and Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[53] R. W. Leggett and L. R. Williams; Existence of multiple positive fixed points of nonlinear operators in ordered Banach spaces, *Indiana Univ. Math. J.* 28, (1979), No. 4, 673-688.

[54] J. J. Levin and J. Nohel; On a nonlinear delay equation, *J. Math. Anal. Appl.* 8, (1964), 31-44.

[55] Y. Li and L. Zhu; Positive periodic solutions of nonlinear functional differential equations, *Appl. Math. Comp.* 156, (2004), No. 2, 329-339.

[56] Y. Liu; Boundary value problems for second order differential equations on unbounded domains in a Banach space, *Appl. Math. Comput.* 135, (2003), 569-583.

[57] Y. Liu; Existence and unboundedness of positive solutions for singular boundary value problems on half-line, *Appl. Math. Comput.* 144, (2003), 543-556.

[58] Y. Liu; Boundary value problems on half-line for functional differential equations with infinite delay in a Banach space, *Nonlinear Anal.* 52, (2003), 1695-1708.

[59] Y. Liu and W. Ge; Double positive solutions of fourth-order nonlinear boundary-value problems, *Appl. Anal.* 82, (2003), No. 4, 369-380.

[60] Y. Liu and W. Ge; Twin positive solutions of three-point boundary-value problems for finite difference equations, *Sookhow J. Math.* 30, (2004), No. 1, 11-19.

[61] P. Liu and Y. Li; Multiple positive periodic solutions of nonlinear functional differential system with feedback control, *J. Math. Anal. Appl.* 288, (2003), No. 2, 819-832.

[62] W. P. London and J. A. Yorke; Recurrent epidemics of measles, chickenpox, and mumps I: Seasonal variation in contact rates, *Amer. J. Epid.* 98, (1973), 453-468, II: Systematic differences in rates and stochastic effects, *Amer. J. Epid.* 98, (1973), 469-482.

[63] R. Ma; Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problem, *Electron. J. Differential Equations* 1998, (1998), No. 34, 1-8.

[64] R. Ma; Existence of positive solutions for second-order boundary value problems on infinity intervals, *Appl. Math. Lett.* 16, (2003), 33-39.

[65] H. Maagli and S. Masmoudi; Existence theorem of nonlinear singular boundary value problem, *Nonlinear Anal.* 46, (2001), 465-473.

[66] G. Maise and A.J. Sabadell; Electrostatic probe measurements in solid-propellant rocket exhausts, *AIAA J.* 8, (1970), 895-901.

[67] K. G. Mavridis; Two modifications of the Leggett-Williams fixed point theorem and their applications, *Electronic Journal of Differential Equations* 2010, (2010), No. 53, 1-11.

[68] K. G. Mavridis, Ch. G. Philos and P.Ch.Tsamatos; Multiple positive solutions for a second order delay boundary value problem on the half-line, *Annales Polonici Mathematici* 88.2, (2006), 173-191.

[69] K. G. Mavridis, Ch. G. Philos and P. Ch. Tsamatos; Existence of solutions of a boundary value problem on the half-line to second order nonlinear delay differential equations, *Arch. Math.* 86, (2006), 163-175.

[70] K. G. Mavridis and P. Ch. Tsamatos; Positive solutions for first order nonlinear functional boundary value problems on infinite intervals, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2004, No. 8, 18 pp.

[71] K. G. Mavridis and P. Ch. Tsamatos; Positive solutions for a Floquet functional boundary-value problem, *J. Math. Anal. Appl.* 296, (2004), No. 1, 165-182.

[72] K. G. Mavridis and P. Ch. Tsamatos; Two positive solutions for second-order functional and ordinary boundary-value problems, *Electronic Journal of Differential Equations* 2005, (2005), No. 82, 1-11.

[73] F. K. Moore; *Theory of Laminar Flow*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1964.

[74] J. R. Munkres; *Topology, Second Edition, Massachusetts Institute of Technology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2000.

[75] O. G. Mustafa and Y. U. Rogovchenko; Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second-order nonlinear differential equations, *Nonlinear Anal.* 51, (2002), 339-368.

[76] T. Y. Na; *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*, Academic Press, 1979.

[77] Ch. G. Philos; Asymptotic behaviour of a class of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating arguments, *Math. Slovaca* 33, (1983), 409-428.

[78] Ch. G. Philos, Y. G. Sficas and V. A. Staikos; Some results on the asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating arguments, *J. Austral. Math. Soc. Series A* 32, (1982), 295-317.

[79] Ch. G. Philos and V. A. Staikos; A basic asymptotic criterion for differential equations with deviating arguments and its applications to the nonoscillation of linear ordinary equations, *Nonlinear Anal.* 6, (1982), 1095-1113.

[80] J. Schauder; Der Fixpuktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.* 2, (1930), 171-180.

[81] L. H. Thomas; The calculation of atomic fields, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 23, (1927), 542-548.

[82] E. Wahlen; Positive solutions of second-order differential equations, *Nonlinear Anal.* 58, (2004), 359-366.

[83] P. Waltman; *Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics*, Lecture Notes in Biomathematics 1, Springer-Verlag, 1974.

[84] H. Wang; On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in the annulus, *J. Differential Equations* 109, (1994), 1-7.

[85] J. Wang; The existence of positive solutions for one-dimensional p-laplacian, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125, (1997), 2275-2283.

[86] B. Yan; Multiple unbounded solutions of boundary value problems for second-order differential equations on the half-line, *Nonlinear Anal.* 51, (2002), 1031-1044.

[87] B. Yan and Y. Liu; Unbounded solutions of the singular boundary value problems for second order differential equations on the half-line, *Appl. Math. Comput.* 147, (2004), 629-644.

[88] Z. Yin; Monotone positive solutions of second-order nonlinear differential e-quations, *Nonlinear Anal.* 54, (2003), 391-403.

[89] E. Zeidler; *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems. Translated from the German by Peter R. Wadsack*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[90] Z. Zhao; Positive solutions of nonlinear second order ordinary differential equations, *Proc. Amer. Math.Soc.* 121, (1994), No. 2, 465-469.