ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κατηγοριες Ιδιομορφιων

Λιαμπης Κωνσταντινος

Μεταπτυχιακη Διατριβη

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2017

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

Εγκρίθηκε την 13/11/2017 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

1. Μπεληγιαννης Αποστολος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)
2. Αποστολος Θωμα, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
3. Σταυρος Παπαδακης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Λιάμπης Κωνσταντίνος

Αφιερώνεται
στους γονείς μου Λάμπρο και Αγνή
και στον αδερφό μου Αλέξανδρο.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η μελέτη των κατηγοριών αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο των σύγχρονων μαθηματικών το οποίο επιτρέπει την επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιώντας μία «υψηλότερη θεώρηση». Ο πρώτος ορισμός της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μετασχηματισμού, εισήχθηκε στο διάστημα 1942-1945 από τον Samuel Eilenberg και τον Saunders Mac Lane, με σκοπό να χρησιμοποιηθεί στη μελέτη προβλημάτων της αλγεβρικής τοπολογίας.

Έκτοτε, η Θεωρία Κατηγοριών έχει επεκταθεί ραγδαία βρίσκοντας εφαρμογές σε κλάδους των μαθηματικών όπως η ανάλυση (π.χ. συναρτησιακή ανάλυση, διαφορικές εξισώσεις), η άλγεβρα (π.χ. αλγεβρική γεωμετρία, θεωρία αριθμών), η αλγεβρική τοπολογία, η διαφορική γεωμετρία και η μαθηματική φυσική (θεωρία υπερχορδών). Στα πρώτα της βήματα η θεωρία κατηγοριών αναπτύχθηκε από κοινού με την Ομολογική Άλγεβρα εφοδιάζοντας η μία την άλλη με νέες ιδέες, νέα εννοιολογικά πλαίσια, ανοιχτά προβλήματα, και νέα αποτελέσματα. Αποκορύφωμα αυτής της κοινής πορείας θεωρείται η εργασία [26] του Grothendieck στην οποία με χρήση κατηγορικών εργαλείων αποδεικνύεται η ύπαρξη αρκετών ενέσιμων αντικειμένων σε κατηγορίες από sheaves, αποτέλεσμα θεμελιώδους σημασίας στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Από την άλλη πλευρά θεμέλιο της Ομολογικής Άλγεβρας αποτελεί το βιβλίο "Homological Algebra" [18] των Cartan-Eilenberg το οποίο δημοσιεύτηκε το 1956, και στο οποίο αναπτύσσονται με σύγχρονη μορφή τα βασικά στοιχεία και αποτελέσματα της ομολογικής θεωρίας σε κατηγορίες προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου. Με την ανάπτυξη της θεωρίας κατηγοριών η σύγχρονη ομολογική άλγεβρα αναπτύχθηκε περαιτέρω μέσω της έννοιας της παραγόμενης κατηγορίας μιας αβελιανής κατηγορίας, έννοια η οποία εισήχθηκε από τον Grothendieck και αναπτύχθηκε από τον μαθητή του, Verdier.

Οι κατηγορίες προτύπων ή γενικότερα οι αβελιανές κατηγορίες οι οποίες έχουν πεπερασμένη ομολογική διάσταση μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριφέρονται σχετικά ομαλά και τα στοιχεία τους έχουν εύκολα περιγράψιμη ομολογική δομή. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι οι περισσότερες από τις έννοιες που θα αναλυθούν στη συνέχεια της διατριβής είναι τετριμμένες στην περίπτωση κατηγοριών πεπερασμένης ομολογικής διάστασης. Για τον λόγο αυτό θα στρέψουμε το ενδιαφέρον μας στις κατηγορίες με άπειρη ομολογική διάσταση οι οποίες, σ' αυτό το πλαίσιο, παρουσιάζουν περισσότερο ενδιαφέρον και έχουν πλουσιότερη δομή. Η κατηγορία η οποία με κάποιον τρόπο μετράει το κατά πόσον μια αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ απέχει από το να έχει κανονική, και επομένως εύκολα περιγράψιμη, ομολογική συμπεριφορά είναι η λεγόμενη **κατηγορία ιδιομορφιών (singularity category)** $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$. Η ορολογία προέρχεται από τη γεωμετρία, όπου η έννοια του ιδιόμορφου σημείου έχει μεγάλη σημασία. Σε κάθε σημείο p ενός γεωμετρικού αντικειμένου, π.χ. ενός αλγεβρικού πολυπτύγματος, αντιστοιχεί ένας (τοπικός) δακτύλιος R_p του οποίου η ομολογική συμπεριφορά αντανακλά σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες γύρω από το p. Έτσι ένα σημείο είναι κανονικό αν ο δακτύλιος R_p έχει πεπερασμένη ολική ομολογική διάσταση, ισοδύναμα όπως θα δούμε, αν η κατηγορία ιδιομορφιών της κατηγορίας των R_p-προτύπων είναι τετριμμένη.

Κεντρικό πρόβλημα της διατριβής αποτελεί η μελέτη βασικών ιδιοτήτων κατηγοριών ιδιομορφιών. Γενικά η μελέτη κατηγοριών ιδιομορφιών είναι δύσκολη, καθώς οι κατηγορίες αυτές δεν είναι «κανονικές», με την έννοια ότι τα αντικείμενα και οι μορφισμοί αυτών δεν έχουν εύχρηστη περιγραφή, και επομένως η ανάλυση της βαθύτερης δομής τους είναι πολύπλοκη. Σε προσπάθεια προσπέλασης αυτού του προβλήματος, θα δούμε ότι υπό ορισμένες συνθήκες, η κατηγορία ιδιομορφιών είναι ισοδύναμη με μία **ευσταθή** κατηγορία, η περιγραφή της οποίας είναι σχετικά απλή. Με αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα περιγραφής της κατηγορίας ιδιομορφιών ανάγεται σε ένα περισσότερο προσιτό πρόβλημα.

Η διατριβή χωρίζεται σε αδρές γραμμές σε δύο μέρη.

Μέρος Α. Το πρώτο μέρος της διατριβής, το οποίο αποτελείται από τα Κεφάλαια 1-4, είναι αφιερωμένο στην ανάπτυξη των απαραίτητων εργαλείων και την περιγραφή του κατάλληλου υπόβαθρου για τον ορισμό της κατηγορίας ιδιομορφιών ενός δακτυλίου ή γενικότερα μιας αβελιανής κατηγορίας. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει την ανάπτυξη των βασικών στοιχείων της θεωρίας κατηγοριών, ιδιαίτερα της θεωρίας τοπικοποίησης, και της ομολογικής άλγεβρας, ιδιαίτερα των αβελιανών και τριγωνισμένων κατηγοριών. Για τον σκοπό αυτό θα ακολουθήσουμε κυρίως, μεταξύ άλλων, τον D. Milicic στο [39] αλλά και τον C. Weibel στο [53].

Σημείο εκκίνησης αποτελεί μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Οι αβελιανές κατηγορίες αποτελούν μια ευρεία κλάση κατηγοριών η οποία περιλαμβάνει κατηγορίες όπως η κατηγορία των αβελιανών ομάδων Ab, η κατηγορία των δεξιών (ή αριστερών) R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R και η κατηγορία όλων των sheaves αβελιανών ομάδων σε έναν τοπολογικό χώρο X. Χαρακτηριστικό των αβελιανών κατηγοριών είναι ότι επιτρέπουν τη μελέτη ιδιοτήτων ακρίβειας, διαμέσου της έννοιας της ακριβούς ακολουθίας, και ως αποτέλεσμα έχουν πλούσια δομή. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε διαδοχικά τις εξής κατηγορίες:

• Την κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$.

• Την ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$.

• Την **παραγόμενη** κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$, η οποία ορίζεται ως η τοπικοποίηση της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ως προς την κλάση S των ημι-ισομορφισμών συμπλόκων, δηλαδή των μορφισμών συμπλόκων οι οποίοι επάγουν ισομορφισμούς στη συνομολογία. Σχηματικά: $\mathsf{D}(\mathcal{A}) = \mathsf{K}(\mathcal{A})[S^{-1}]$.

Σημειώνουμε ότι η διαδικασία σχηματισμού της ομοτοπικής κατηγορίας συνίσταται στη θεώρηση ότι ένας μορφισμός στην κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ο οποίος είναι ομοτοπικός με τον μηδενικό μετατρέπεται με τυπικό τρόπο (τοπικοποίηση) σε μηδενικό μορφισμό στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, και η διαδικασία σχηματισμού της παραγόμενης κατηγορίας συνίσταται στη θεώρηση ότι ένας ημι-ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ μετατρέπεται με τυπικό τρόπο (τοπικοποίηση) σε ισομορφισμό στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Μία από τις χρησιμότερες δομικές ιδιότητες της ομοτοπικής και της παραγόμενης κατηγορίας συμπλόκων είναι ότι αποτελούν **τριγωνισμένες κατηγορίες**. Η έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας εισήχθηκε από τους Grothendieck και Verdier στις αρχές της δεκαετίας του 1960, ως το κατάλληλο εννοιολογικό πλαίσιο για την ανάπτυξη της Ομολογικής Άλγεβρας και ιδιαίτερα της συνομολογικής θεωρίας σχημάτων στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Έτσι ο Verdier στη διδακτορική του διατριβή, αναπτύσσει την έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας με κύριο παράδειγμα αυτό της παραγόμενης κατηγορίας (βλ. [52]) μιας αβελιανής κατηγορίας. Περίπου την ίδια περίοδο ο Puppe, όρισε μια ασθενέστερη εκδοχή της έννοιας της τριγωνισμένης κατηγορίας, βλέπε [46], ως το κατάλληλο εννοιολογικό πλαίσιο μελέτης της ευσταθούς ομοτοπικής κατηγορίας στην Αλγεβρική Τοπολογία. Η θεωρία των τριγωνισμένων κατηγοριών βρήκε αρχικά εφαρμογή στην αλγεβρική γεωμετρία και στην αλγεβρική τοπολογία, ενώ σήμερα η χρήση της έχει επεκταθεί σε ποικίλους κλάδους των μαθηματικών.

Μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται **τριγωνισμένη**, αν είναι εφοδιασμένη με έναν προσθετικό αυτομορφισμό Σ και μία κλάση διαγραμμάτων της μορφής $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$, τα οποία καλούνται *διακεκριμένα τρίγωνα*, η οποία ικανοποιεί μια σειρά αξιωμάτων, βλέπε τα αξιώματα (TR1)-(TR4) στον Ορισμό 3.1.7. Τα διακεκριμένα τρίγωνα ουσιαστικά παίζουν τον ρόλο των ακριβών ακολουθιών στις τριγωνισμένες κατηγορίες και τα αξιώματα τυποποιούν ανάλογες ιδιότητες ακριβών ακολουθιών σε μια αβελιανή κατηγορία.

Μέρος Β. Το δεύτερο και κύριο μέρος της διατριβής, το οποίο αποτελείται από τα Κεφάλαια 5 και 6, είναι αφιερωμένο στην ανάπτυξη της θεωρίας του Ragnar-Olaf Buchweitz, η οποία παρατίθεται στην (αδημοσίευτη) εργασία [17] και στην οποία ορίζεται η κατηγορία ιδιομορφιών $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ ενός προσεταιριστικού δακτυλίου R ο οποίος είναι αριστερά και δεξιά Noetherian, καθώς και σε κατάλληλες γενικεύσεις της. Θεωρούμε την κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων την οποία και συμβολίζουμε με mod-R. Στη συνέχεια, η κατηγορία ιδιομορφιών $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$

ορίζεται ως η κατηγορία πηλίκο (με την έννοια του Verdier):

$$\underline{\mathsf{D}^b(R)} = \mathsf{D}^b(R)/\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$$

όπου με $\mathsf{D}^b(R)$ συμβολίζουμε τη φραγμένη παραγόμενη κατηγορία της mod-R, ενώ με $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$ η οποία αποτελείται από τα σύμπλοκα τα οποία είναι ημι-ισομορφικά με σύμπλοκα από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα.

Στη θεωρία του Buchweitz σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η έννοια του maximal Cohen-Macaulay R-προτύπου, καθώς, υπό προϋποθέσεις, αυτά ακριβώς τα πρότυπα μπορούν να περιγράψουν πλήρως (με ακρίβεια προβολικής ευστάθειας) την κατηγορία ιδιομορφιών του R. Η μοναδική προϋπόθεση που απαιτείται για τον δακτύλιο R για να είναι ακριβής αυτή η περιγραφή, εκτός από το να είναι αριστερά και δεξιά δακτύλιος της Noether, είναι να έχει πεπερασμένη αριστερά και δεξιά ενέσιμη διάσταση σαν πρότυπο υπεράνω του εαυτού του, μία ιδιότητα που κατά τον Buchweitz καλείται ισχυρά **Gorenstein**. Σε αυτό το πλαίσιο ορίζουμε ένα maximal Cohen-Macaulay πρότυπο ως εξής:

Ορισμός. *Έστω R ένας αριστερά και δεξιά δακτύλιος της Noether ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein με την έννοια του Buchweitz. Τότε ένα πεπερασμένα παραγόμενο δεξιό R-πρότυπο M καλείται* **maximal Cohen-Macaulay** *(MCM εν συντομία) αν-ν $\mathsf{Ext}^n(M,R) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$.*

Η έννοια του maximal Cohen-Macaulay προτύπου αποτελεί γενίκευση της έννοιας του προβολικού προτύπου, γενίκευση η οποία είναι κρίσιμης σημασίας όταν ο δακτύλιος έχει άπειρη ομολογική διάσταση: από την μια πλευρά, κάθε προβολικό πρότυπο είναι maximal Cohen-Macaulay και από την άλλη πλευρά, αν ο δακτύλιος έχει πεπερασμένη ολική ομολογική διάσταση, κάθε maximal Cohen-Macaulay πρότυπο είναι προβολικό.

Συμβολίζουμε με $\mathsf{MCM}(R)$ την κατηγορία των MCM R-προτύπων και με $\mathsf{P}(R)$ την υποκατηγορία της mod-R η οποία αποτελείται από όλα τα προβολικά R-πρότυπα. Η $\mathsf{P}(R)$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$ και μπορούμε έτσι να ορίσουμε την **προβολικά ευσταθή** κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R) = \mathsf{MCM}(R)/\mathsf{P}(R)$, η οποία έχει ως αντικείμενα MCM πρότυπα, και ως μορφισμούς, κλάσεις προβολικής ισοδυναμίας ομομορφισμών MCM προτύπων, όπου δύο ομομορφισμοί καλούνται προβολικά ισοδύναμοι αν η διαφορά τους αναλύεται μέσω ενός προβολικού προτύπου. Εφαρμόζοντας το κύριο θεώρημα ενός άρθρου των Α. Μπεληγιάννη και Ν. Μαρμαρίδη ([11, Theorem 2.12.]), προκύπτει ότι η ευσταθής κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία με μία δομή διακεκριμένων τριγώνων τα οποία επάγονται από ακριβείς ακολουθίες προτύπων τα οποία είναι maximal Cohen-Macaulay.

Συμβολίζοντας, τέλος, με $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ την πλήρη υποκατηγορία της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(R)$ η οποία έχει ως αντικείμενα ακυκλικά (ή ακριβή) σύμπλοκα από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά δεξιά R-πρότυπα αποδεικνύουμε, ως ένα από τα κεντρικά αποτελέσματα της διατριβής το ακόλουθο Θεώρημα του Buchweitz:

Θεώρημα([17, Theorem 4.4.1.]): *Αν R είναι ένας αριστερά και δεξιά δακτύλιος της Noether ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein (κατά τον Buchweitz), τότε υπάρχει ένα μεταθετικό (με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών) διάγραμμα τριγωνισμένων κατηγοριών:*

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[dr, "\iota_R"] & \\ \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[ur, "\Omega_0"] \arrow[rr, "\sigma_{\leqslant 0}"'] & & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \end{tikzcd} \tag{1}$$

στο οποίο όλοι οι εμπλεκόμενοι συναρτητές αποτελούν **ισοδυναμίες** *τριγωνισμένων κατηγοριών.*

Ένα φυσικό ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι αν το παραπάνω διάγραμμα και τα συμπεράσματα του Buchweitz μπορούν να γενικευθούν και αν ναι, σε ποιον βαθμό. Θεωρώντας μία πιο σύγχρονη προσέγγιση στις κατηγορίες ιδιομορφιών μπορούμε να ορίσουμε γενικότερα την κατηγορία ιδιομορφιών μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ η οποία έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα, ως το πηλίκο (κατά Verdier):

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A}) = \mathsf{D}^b(\mathcal{A})/\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A})$$

όπου με $\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A})$ συμβολίζουμε την πλήρη υποκατηγορία των *τέλειων συμπλόκων* της $\mathcal{A}$, δηλαδή την κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα αυτά που βρίσκονται στην εικόνα της σύνθεσης των συναρτητών: $\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(\mathcal{A})$, αλλά και τα ισόμορφά τους. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας ορισμούς και αποτελέσματα κυρίως από το άρθρο των A. Μπεληγιάννη και I. Reiten, βλ. [12], ορίζουμε τα **Gorenstein προβολικά** αντικείμενα της $\mathcal{A}$, ως αυτά ακριβώς τα αντικείμενα που εμφανίζονται σαν συνπυρήνες σε ένα ακριβές σύμπλοκο από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$, το οποίο παραμένει ακριβές αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, P)$ για κάθε προβολικό P.

Συμβολίζουμε με $\underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}}$ την προβολικά ευσταθή κατηγορία των Gorenstein προβολικών αντικειμένων της $\mathcal{A}$ και με $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$ την ομοτοπική κατηγορία ακυκλικών συμπλόκων από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Σ' αυτό το πλαίσιο η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται *κατηγορία Gorenstein*, αν κάθε αντικείμενο της έχει μια πεπερασμένη ανάλυση φραγμένου μήκους από αντικείμενα τα οποία είναι Gorenstein προβολικά. Σημαντικό παράδειγμα κατηγορίας Gorenstein αποτελεί η κατηγορία (πεπερασμένα παραγόμενων) προτύπων υπεράνω ενός ισχυρά Gorenstein δακτυλίου.

Το ακόλουθο Θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος του Buchweitz:

Θεώρημα. *Για κάθε αβελιανή κατηγορία Gorenstein $\mathcal{A}$, υπάρχει ένα μεταθετικό (με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών) διάγραμμα τριγωνισμένων κατηγοριών:*

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}} \arrow[dr, "\iota_{\mathcal{A}}"] & \\ \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A}) \arrow[ur, "\Omega_0"] \arrow[rr, "\sigma_{\leqslant 0}"'] & & \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

και στο οποίο όλοι οι εμπλεκόμενοι συναρτητές αποτελούν ισοδυναμίες τριγωνισμένων κατηγοριών.

Σημειώνουμε ότι, με βάση την τελευταία προσέγγιση, η θεωρία του Buchweitz μπορεί να εφαρμοσθεί σε γενικότερα πλαίσια. Ενδεικτικά αναφέρουμε το ακόλουθο παράδειγμα εμφάνισης κατηγοριών ιδιομορφιών στη Μεταθετική Άλγεβρα και στην Αλγεβρική Γεωμετρία:

Έστω X ένα Noetherian scheme πεπερασμένης διάστασης Krull το οποίο είναι είτε αφφινικό είτε ημι-προβολικό υπεράνω ενός σώματος. Η κατηγορία ιδιομορφιών του X ορίζεται ως το πηλίκο (με την έννοια του Verdier):

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(X) = \mathsf{D}^b(\mathsf{coh}X)/\mathsf{perf}(X)$$

όπου με $\mathsf{perf}(X)$ συμβολίζουμε την τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(\mathsf{coh}X)$ η οποία αποτελείται από σύμπλοκα τα οποία είναι ισόμορφα στην $\mathsf{D}^b(\mathsf{coh}X)$ με ένα κάτω φραγμένο σύμπλοκο από locally free sheaves. Η κατηγορία ιδιομορφιών $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(X)$ περιγράφει τη δομή των ιδιόμορφων σημείων του X, δηλαδή τον ιδιάζοντα τόπο (singular locus) του X, και με βάση τη θεωρία του Buchweitz σε αρκετές περιπτώσεις αυτή η κατηγορία επιδέχεται περιγραφής μέσω maximal Cohen-Macaulay αντικειμένων.

• • •

Η διατριβή είναι συνθετικού χαρακτήρα και έχει ως κύριο στόχο την παρουσίαση του κεντρικού θεωρήματος του άρθρου του R.-O. Buchweitz [17], καθώς και κάποιων γενικεύσεών του. Για τον λόγο αυτό, για τον συμβολισμό και τους ορισμούς των κύριων εννοιών που εμφανίζονται στη διατριβή ακολουθούμε το άρθρο [17]. Επιπλέον, έχουν χρησιμοποιηθεί σημαντικά συμπεράσματα από το άρθρο των Α. Μπεληγιάννη και Ν. Μαρμαρίδη [11] και το άρθρο των M. Auslander και R.-O. Buchweitz [3]. Για τον ορισμό των εισαγωγικών εννοιών αναφορικά με τη θεωρία τριγωνισμένων κατηγοριών κύρια πηγή αποτέλεσε η προσέγγιση του D. Millicic στο [39] αλλά και το βιβλίο του C. Weibel [53] καθώς και το βιβλίο των M. Kashiwara και P. Schapira [33].

Η διατριβή έχει οργανωθεί σε έξι κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, το οποίο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα, αρχικά παραθέτουμε τα βασικά στοιχεία θεωρίας προτύπων υπεράνω ενός προσεταιριστικού δακτυλίου καθώς και τα βασικά στοιχεία θεωρίας κατηγοριών τα οποία θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Ιδιαίτερα ορίζουμε την έννοια της κατηγορίας, του (συναλλοίωτου ή/και αντισυναλλοίωτου) συναρτητή μεταξύ κατηγοριών, και του φυσικού μορφισμού μεταξύ συναρτητών. Κατασκευάζουμε γινόμενα και συν-γινόμενα αντικειμένων και επικεντρωνόμαστε στη σημαντική κλάση των προσθετικών κατηγοριών. Εισάγοντας τον πυρήνα και τον συνπυρήνα ενός μορφισμού, αναλύουμε συνθήκες ακρίβειας σε μια προσθετική κατηγορία οι οποίες μας οδηγούν στην έννοια της αβελιανής κατηγορίας. Εξέχουσα κλάση αβελιανών κατηγοριών αποτελούν οι κατηγορίες προτύπων. Ολοκληρώνουμε ορίζοντας pullbacks και pushouts μορφισμών και μελετώντας τα ενέσιμα και τα προβολικά αντικείμενα μίας αβελιανής κατηγορίας.

Το δεύτερο κεφάλαιο έχει ως στόχο τη μελέτη της τοπικοποίησης μίας κατηγορίας $\mathcal{A}$ ως προς μία κλάση μορφισμών S. Δίνουμε αρχικά τον ορισμό της τοπικοποίησης μέσω μίας καθολικής ιδιότητας και διατυπώνουμε τα απαραίτητα αξιώματα που πρέπει να πληροί μία κλάση μορφισμών για να καλείται τοπικοποιούσα κλάση. Τοπικοποιούσες κλάσεις μορφισμών επιτρέπουν σημαντικά καλύτερη περιγραφή της δομής της κατηγορίας τοπικοποίησης. Ορίζουμε αριστερά και δεξιά roofs μεταξύ αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{A}$ καθώς και μία πράξη σύνθεσης επί αυτών έτσι ώστε με αυτά τα δεδομένα να ορίζεται μια κατηγορία, η κατηγορία κλασμάτων, η οποία αποδεικνύουμε ότι αποτελεί την τοπικοποίηση της $\mathcal{A}$ ως προς την κλάση μορφισμών S. Στη συνέχεια, ορίζουμε την έννοια της τοπικοποιούσας υποκατηγορίας, και ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο μελετώντας την τοπικοποίηση μίας αβελιανής κατηγορίας η οποία και αποδεικνύουμε ότι αποτελεί επίσης μία αβελιανή κατηγορία.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία των τριγωνισμένων κατηγοριών. Αναλύουμε τα αξιώματα που πληροί μία κλάση διακεκριμένων τριγώνων σε μία τριγωνισμένη κατηγορία και ορίζουμε ακριβείς συναρτητές μεταξύ τριγωνισμένων κατηγοριών. Σημειώνουμε τις συνθήκες που απαιτούνται για να καλείται μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον τριγωνισμό και αποδεικνύουμε το κύριο θεώρημα του κεφαλαίου το οποίο εξασφαλίζει ότι η τοπικοποίηση μίας τριγωνισμένης κατηγορίας ως προς μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον τριγωνισμό, είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία. Τέλος, εξετάζουμε εν συντομία την περίπτωση μίας τριγωνισμένης αβελιανής κατηγορίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο κατασκευάζουμε διαδοχικά την κατηγορία συμπλόκων μίας προσθετικής κατηγορίας και στη συνέχεια την αντίστοιχη ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων. Ορίζοντας τον κώνο ενός μορφισμού συμπλόκων, σχηματίζουμε μία κλάση τριγώνων η οποία αποδεικνύουμε ότι εφοδιάζει την ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων με μία τριγωνική δομή. Επιπλέον, δίνουμε τον ορισμό ενός ημι-ισομορφισμού και δείχνουμε ότι η κλάση όλων των ημι-ισομορφισμών στην ομοτοπική κατηγορία είναι μία τοπικοποιούσα κλάση. Θεωρώντας την τοπικοποίηση της ομοτοπικής κατηγορίας συμπλόκων ως προς την κλάση των ημι-ισομορφισμών κατασκευάζουμε την παραγόμενη κατηγορία και μελετάμε την τριγωνική της δομή. Κλείνουμε ορίζοντας ολικά παραγόμενους συναρτητές μεταξύ αβελιανών κατηγοριών.

Το πέμπτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στον ορισμό και στις βασικές ιδιότητες των maximal Cohen-Macaulay προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου, στο πλαίσιο της εργασίας [17] του Buchweitz, δηλαδή στο πλαίσιο των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου της Noether, ο οποίος έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση ως ένα αριστερό και δεξιό πρότυπο υπεράνω του εαυτού του. Κατασκευάζουμε την προβολικά ευσταθή κατηγορία των maximal Cohen Macaulay προτύπων και εφαρμόζοντας τη θεωρία προσέγγισης των Auslander-Buchweitz η οποία αναπτύσσεται στο [3], δείχνουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο μπορεί να προσεγγισθεί από ένα maximal Cohen-Macaulay και από ένα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αναλύοντας την τριγωνική δομή της ευσταθούς κατηγορίας των maximal Cohen Macaulay προτύπων.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το κεντρικό θεώρημα της διατριβής, το θεώρημα του Buchweitz. Ορίζεται η κατηγορία ιδιομορφιών ενός δακτυλίου R και η ομοτοπική κατηγορία των ακυκλικών συμπλόκων από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα. Υπό την προϋπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι ισχυρά Gorenstein, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μία τριγωνική ισοδυναμία μεταξύ των παραπάνω δύο κατηγοριών και της προβολικά ευσταθούς κατηγορίας των maximal Cohen-Macaualay προτύπων. Τέλος, εισάγοντας την έννοια ενός Gorenstein προβολικού αντικειμένου, επιχειρούμε μία γενίκευση των παραπάνω συμπερασμάτων στα πλαίσια μίας αβελιανής κατηγορίας με αρκετά προβολικά αντικείμενα.

Ευχαριστίες:

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που βοήθησαν στην εκπόνηση της παρούσας διατριβής.

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθηγητή κ. Απόστολο Μπεληγιάννη για την πολύτιμη καθοδήγησή του. Καθ' όλην την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, ο ίδιος αποτελούσε κίνητρο και πηγή έμπνευσης για μελέτη θεμάτων μαθηματικού περιεχομένου, αλλά και γενικότερης παιδείας. Πιο συγκεκριμένα, ο κ. Μπεληγιάννης ήταν για μένα ένας εξαιρετικός δάσκαλος ο οποίος μου γνώρισε την Αφηρημένη Άλγεβρα και για τον λόγο αυτόν, τον ευχαριστώ ιδιαιτέρως. Ήταν τιμή μου που συνεργάστηκα μαζί του και τον ευχαριστώ ακόμη μία φορά για το ενδιαφέρον του και για τον χρόνο που διέθετε στις συναντήσεις μας.

Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Σταύρο Παπαδάκη για τη συμβολή τους στη διόρθωση της διατριβής, αλλά και για τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας γύρω από την επιστήμη των μαθηματικών.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και φίλους μου Δημήτρη Μιχαηλίδη και Σωκράτη Ζήκα για τη συμπαράσταση και τη βοήθειά τους στο κοινό μας γραφείο. Δεν θα μπορούσα να μην αναφέρω τους φίλους και συναδέλφους μου Θοδωρή, Βάσω, Σοφία, Τόνια, Κλεάνθη και Χρήστο, τους οποίους και ευχαριστώ για την υποστήριξή τους.

Τέλος, ένα ξεχωριστό και μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, Λάμπρο και Αγνή, οι οποίοι με στηρίζουν όλα αυτά τα χρόνια.

Λιάμπης Κωνσταντίνος

Ιωάννινα, Οκτώβριος 2017

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών

Το παρόν κεφάλαιο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα και ως κύριο στόχο τη θεμελίωση συμβολισμού και την υπενθύμιση ορισμένων βασικών θεωρημάτων και προτάσεων από τη θεωρία κατηγοριών. Για τον λόγο αυτόν, οι αποδείξεις θα παραλειφθούν, ενώ για περισσότερα παραπέμπουμε στο βιβλίο των M. Kashiwara and P. Schapira [33] αλλά και στο βιβλίο του Weibel [53] τα οποία μαζί με το βιβλίο του Bland [14] και των Enochs-Jenda [22], αποτελούν τις κύριες πηγές του κεφαλαίου.

1.1 Πρότυπα

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν συνοπτικά ορισμένα στοιχεία θεωρίας προτύπων. Για εισαγωγικές έννοιες από την θεωρία ομάδων, την θεωρία δακτυλίων και γενικότερα περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά τα ακόλουθα, βλ. [14] και [20]. Αρχικά, παραθέτουμε τον ορισμό ενός δεξιού R-προτύπου:

Ορισμός 1.1.1. *Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος (όχι απαραίτητα μεταθετικός ή με μονάδα). Μία προσθετική αβελιανή ομάδα $(M,+)$ καλείται* **δεξιό R-πρότυπο (right R-module)** *ή ένα δεξιό πρότυπο πάνω από τον R, αν είναι εφοδιασμένη με μία απεικόνιση*

$$M \times R \longrightarrow M$$

$$(m,r) \longmapsto mr$$

η οποία καλείται δεξιά δράση, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

1. *$(m_1+m_2)r = m_1r + m_2r$ για κάθε $m_1, m_2 \in M$ και $r \in R$.*
2. *$m(r_1+r_2) = mr_1 + mr_2$ για κάθε $m \in M$ και $r_1, r_2 \in R$.*
3. *$m(rs) = (mr)s$ για κάθε $m \in M$ και $r, s \in R$.*

Αν ο δακτύλιος R έχει μονάδα, απαιτούμε να ικανοποιείται και η παρακάτω συνθήκη:

4. *$m1_R = m$ για κάθε $m \in M$.*

Σχόλιο 1.1.2. Τα πρότυπα που ικανοποιούν την συνθήκη $4.$ καλούνται πρότυπα με μονάδα (unital modules) και στα πλαίσια της συγκεκριμένης διατριβής όλα τα πρότυπα θα θεωρούνται εκ των προτέρων ότι έχουν μονάδα, εκτός αν δηλωθεί το αντίθετο.

Δυϊκά, ορίζεται και η έννοια ενός αριστερού R-προτύπου:

Ορισμός 1.1.3. *Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος (όχι απαραίτητα μεταθετικός ή με μονάδα). Μία προσθετική αβελιανή ομάδα $(M, +)$ καλείται* **αριστερό R-πρότυπο (left R-module)** *ή ένα αριστερό πρότυπο πάνω από τον R, αν είναι εφοδιασμένη με μία απεικόνιση*

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto rm$$

η οποία καλείται αριστερή δράση, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ *για κάθε* $m_1, m_2 \in M$ *και* $r \in R$.

2. $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$ *για κάθε* $m \in M$ *και* $r_1, r_2 \in R$.

3. $(rs)m = r(sm)$ *για κάθε* $m \in M$ *και* $r, s \in R$.

Αν ο δακτύλιος R έχει μονάδα, απαιτούμε να ικανοποιείται και η παρακάτω συνθήκη:

4. $1_R m = m$ *για κάθε* $m \in M$.

Για αρκετά παραδείγματα αριστερών και δεξιών προτύπων βλ. [20, §10.1] και [14, §1.4].

Σχόλιο 1.1.4. Συχνά θα γράφουμε ${}_R M$ συμβολίζοντας ότι το M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο και δυϊκά, θα γράφουμε M_R συμβολίζοντας ότι το M είναι ένα δεξιό R-πρότυπο.

Στη συνέχεια, με R θα συμβολίζουμε έναν προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση των δεξιών R-προτύπων καθώς οι αντίστοιχοι ορισμοί και τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τα αριστερά R-πρότυπα είναι δυϊκά και συχνά θα καλούμε τα δεξιά πρότυπα απλά ως πρότυπα.

Ορισμός 1.1.5. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο. Ένα μη κενό υποσύνολο N του M καλείται* **υποπρότυπο** *του M αν:*

1. *Το σύνολο N αποτελεί μία υποομάδα της προσθετικής ομάδας M.*

2. *Για κάθε $x \in N$ και για κάθε $r \in R$, ισχύει: $xr \in N$.*

Συχνά θα γράφουμε $N \subseteq M$ για το υποπρότυπο N του M.

Ορισμός 1.1.6. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο, N ένα υποπρότυπο του M και S ένα υποσύνολο του N. Θα λέμε ότι το το S είναι ένα* **σύνολο γεννητόρων** *του N ή ότι το N παράγεται από το S, αν κάθε στοιχείο $x \in N$ μπορεί να γραφεί (όχι απαραίτητα μοναδικά) ως $x = \sum_{i+1}^{n} x_i r_i$, όπου $x_i \in S$ και $r_i \in R$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε $N = \sum_S xR$.*

Το N καλείται **πεπερασμένα παραγόμενο** *αν το S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.*

Σχόλιο 1.1.7. Άμεσα βλέπουμε ότι κάθε R-πρότυπο M έχει τουλάχιστον ένα σύνολο γεννητόρων, το ίδιο το σύνολο M.

Με μία ανάλογη κατασκευή με αυτήν που χρησιμοποιείται για την δημιουργία μίας ομάδας πηλίκο ή ενός δακτυλίου πηλίκο, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πρότυπο πηλίκο.

Ορισμός 1.1.8. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο και N ένα υποπρότυπο του M. Ορίζουμε το* **πρότυπο πηλίκο (quotient module) M/N** *του M ως προς το υποπρότυπό του N, εφοδιάζοντας την ομάδα πηλίκο M/N με μία δεξιά δράση:*

$$M/N \times R \longrightarrow M/N$$

$$(m + N, r) \longmapsto (m + N)r = mr + N$$

Το πρότυπο πηλίκο M/N είναι ένα δεξιό R-πρότυπο.

Για τη μεταφορά πληροφορίας μεταξύ δύο προτύπων απαραίτητο είναι να ορίσουμε την έννοια ενός ομομορφισμού προτύπων.

Ορισμός 1.1.9. *Έστω M και N δύο δεξιά R-πρότυπα. Μία απεικόνιση $f\colon M \longrightarrow N$ καλείται* **ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων** *αν:*

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ *για κάθε* $m_1, m_2 \in M$.
2. $f(mr) = f(m)r$ *για κάθε* $m \in M$ *και για κάθε* $r \in R$.

Ορισμός 1.1.10. *Έστω $f\colon M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων. Τότε:*

- *Ο f καλείται* **μονομορφισμός** *αν-ν η συνάρτηση f είναι $1-1$.*
- *Ο f καλείται* **επιμορφισμός** *αν-ν η συνάρτηση f είναι επί.*
- *Ο f καλείται* **ισομορφισμός** *αν-ν η συνάρτηση f είναι $1-1$ και επί. Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε ότι τα πρότυπα M και N είναι ισόμορφα και θα γράφουμε $M \cong N$.*

Τέλος, ένας ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων $f\colon M \longrightarrow M$ συχνά θα καλείται ένας ενδομορφισμός του M και στην περίπτωση που ο f είναι ισομορφισμός, καλείται ένας αυτομορφισμός του M.

Για παραδείγματα μορφισμών προτύπων βλ. [20, §10.2] και [14, Section 1.5].

Ορίζουμε στη συνέχεια την έννοια ενός δακτυλίου της Noether καθώς αυτού του είδους οι δακτύλιοι θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη της κατηγορίας ιδιομορφιών.

Ορισμός 1.1.11. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο. Θα λέμε ότι το M ικανοποιεί τη* **συνθήκη αύξουσας αλυσίδας (ascending chain condition)** *αν για κάθε ακολουθία υποπροτύπων του M:*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \cdots \subseteq M_{n_0} \subseteq \cdots$$

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $M_n = M_{n_0}$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Ένα R-πρότυπο M το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη αύξουσας αλυσίδας καλείται **πρότυπο της Noether (Noetherian module)**.

Ορισμός 1.1.12. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **αριστερός** *(αντίστοιχα* **δεξιός***)* **δακτύλιος της Noether** *αν ο δακτύλιος R αποτελεί ένα αριστερό (αντίστοιχα δεξιό) πρότυπο της Noether υπεράνω του εαυτού του. Σε αυτήν την περίπτωση συχνά θα λέμε ότι ο R είναι αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) Noetherian.*

Αν ο R είναι αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, θα καλείται απλώς **δακτύλιος της Noether** *(ή* **Noetherian***).*

Σημαντικές κατασκευές στα πλαίσια της θεωρίας προτύπων όπως το ευθύ γινόμενο προτύπων και το ευθύ άθροισμα προτύπων θα παρουσιαστούν στην επόμενη παράγραφο. Ολοκληρώνουμε την ενότητα με τον ορισμό του τανυστικού γινομένου προτύπων. Αρχικά παραθέτουμε μία εισαγωγική έννοια.

Ορισμός 1.1.13. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο και N ένα αριστερό R-πρότυπο. Αν G είναι μία προσθετική αβελιανή ομάδα, μία απεικόνιση (αβελιανών ομάδων) $\rho\colon M \times N \longrightarrow G$ καλείται* **R-ισσόροπη (R-balanced)** *αν:*

1. $\rho(x_1 + x_2, y) = \rho(x_1, y) + \rho(x_2, y)$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in M$, $y \in N$.
2. $\rho(x, y_1 + y + 2) = \rho(x, y_1) + \rho(x, y_2)$ *για κάθε* $x \in M$, $y_1, y_2 \in N$.
3. $\rho(xr, y) = \rho(x, ry)$ *για κάθε* $x \in M$, $y \in N$, $r \in R$.

Ορισμός 1.1.14. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο και N ένα αριστερό R-πρότυπο. Ένα ζεύγος (T, ρ) όπου T είναι μία προσθετική αβελιανή ομάδα και $\rho\colon M \times N \longrightarrow T$ είναι μία R-ισόρροπη απεικόνιση, καλείται ένα* **τανυστικό γινόμενο (tensor product)** *του M_R με το ${}_RN$ αν ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε προσθετική αβελιανή ομάδα G και για κάθε R-ισόρροπη απεικόνιση $\rho'\colon M \times N \longrightarrow G$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $f\colon T \longrightarrow G$ έτσι ώστε $f \circ \rho = \rho'$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\rho'"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists ! f"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Σχόλιο 1.1.15. Αν (T, ρ) και (T', ρ) είναι δύο τανυστικά γινόμενα των R-προτύπων M_R και ${}_RN$, προκύπτει ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων $T \xrightarrow{\sim} T'$ (βλ. [14, Proposition 2.3.2.].)

Για δύο τυχαία R-πρότυπα M_R και ${}_RN$ υπάρχει πάντα ένα τανυστικό γινόμενο του M_R με το ${}_RN$. Για μία κατασκευή του τανυστικού γινομένου βλ. [14, Proposition 2.3.3.]. Στο εξής θα συμβολίζουμε αυτό το τανυστικό γινόμενο με $M \otimes_R N$, ενώ για την R-ισόρροπη απεικόνιση $\rho\colon M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ θα γράφουμε: $\rho((x, y)) = x \otimes y$ για κάθε $x \in M$, $y \in N$.

Παραθέτουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες του τανυστικού γινομένου:

Πρόταση 1.1.16. *Έστω M_R και ${}_RN$ δύο R-πρότυπα και το τανυστικό τους γινόμενο $M \otimes_R N$. Τότε, για την απεικόνιση*

$$\rho\colon M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$$

με

$$(x, y) \longmapsto x \otimes y$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in M$, $y \in N$.
2. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$ *για κάθε* $x \in M$, $y_1, y_2 \in N$.
3. $xr \otimes y = x \otimes ry$ *για κάθε* $x \in M$, $y \in N$, $r \in R$.
4. $x \otimes 0_N = 0_{M \otimes_R N} = 0_M \otimes Y$ *για κάθε* $x \in M$, $y \in N$.
   Επιπλέον: $0_{M \otimes_R N} = 0_M \otimes 0_N$.
5. *Το σύνολο*
   $$J = \{x \otimes y \in M \otimes_R N | x \in M, y \in N\}$$
   αποτελεί ένα σύνολο γεννητόρων του $M \otimes_R N$ και κάθε στοιχείο του $M \otimes_R N$ μπορεί να γραφεί στην μορφή
   $$\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i \otimes y_i)$$
   όπου $n_i \in \mathbb{Z}$ για $i = 1, 2, ..., m$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [14, Proposition 2.3.3.]. ∎

Πρόταση 1.1.17. *Αν το M είναι ένα δεξιό R-πρότυπο, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός δεξιών R-προτύπων $M \otimes_R R \cong M$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [14, Proposition 2.3.3.]. ∎

Για παραδείγματα τανυστικού γινομένου βλ. [14, §2.3].

1.2 Κατηγορίες

Η παρούσα ενότητα αποτελεί μία εισαγωγή στη θεωρία κατηγοριών. Θα οριστούν οι έννοιες της κατηγορίας και ενός συναρτητή κατηγοριών, καθώς και βασικές ιδιότητες και θεωρήματα. Για λόγους συντομίας, θα προσπεραστούν τα συνολοθεωρητικά προβλήματα τα οποία εμφανίζονται στον ορισμό μίας κατηγορίας θεωρώντας εκ των προτέρων ότι βρισκόμαστε σε ένα κατάλληλο σύμπαν (universe). Για μία εισαγωγή στο κατάλληλο συνολοθεωρητικό πλαίσιο βλ. [33, §1.1], ενώ για μία πιο αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της έννοιας του σύμπαντος βλ. [1]. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα που ακολουθούν προέρχονται από τον Bland [14, §3.1], τους Kashiwara και Schapira [33], αλλά και από τους Enochs και Jenda [22, §1.3.]. Αρχικά, λοιπόν, παραθέτουμε τον ορισμό μίας κατηγορίας.

Ορισμός 1.2.1. *Μία* **κατηγορία (category)** $\mathcal{C}$ *αποτελείται από τα ακόλουθα:*

1. *Μία κλάση* $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *η οποία καλείται* **κλάση αντικειμένων**.
2. *Για κάθε* $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *υπάρχει ένα σύνολο* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *το οποίο καλείται το* **σύνολο μορφισμών** $f\colon X \longrightarrow Y$ *από το* X *στο* Y*, έτσι ώστε*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y') = \varnothing$$
για κάθε $X, X', Y, Y' \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *με* $X \neq X'$ *και* $Y \neq Y'$.
3. *Για κάθε* $X, Y, Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *υπάρχει μία απεικόνιση:*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$
$$(f,g) \longrightarrow g \circ f$$
η οποία καλείται η απεικόνιση σύνθεσης ή απλά **σύνθεση***, και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*
   (α') *Η σύνθεση είναι προσεταιριστική, δηλαδή για* $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$ *ισχύει* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
   (β') *Για κάθε* $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *υπάρχει ένας* **ταυτοτικός μορφισμός** $1_X \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ *έτσι ώστε* $f \circ 1_X = f$ *για κάθε* $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *και* $1_X \circ g = g$ *για κάθε* $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

Ένα στοιχείο της κλάσης αντικειμένων $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *καλείται ένα* **αντικείμενο** *της* C *ενώ για* $X, Y \in \mathcal{C}$*, ένα στοιχείο του συνόλου μορφισμών* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *καλείται ένας* **μορφισμός** *(από το* X *στο* Y*) στην* $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 1.2.2. Παραδείγματα κατηγοριών αποτελούν οι κατηγορίες Set , Ab, Top των οποίων τα αντικείμενα είναι αντίστοιχα σύνολα, αβελιανές ομάδες και τοπολογικοί χώροι, ενώ οι μορφισμοί είναι συναρτήσεις, ομομορφισμοί ομάδων και συνεχείς συναρτήσεις.

Παραθέτουμε ως παράδειγμα μία ακόμη επιπλέον κατηγορία η οποία θα αποτελέσει αντικείμενο μελέτης:

Παράδειγμα 1.2.3. Για κάθε δακτύλιο R, συμβολίζουμε με Mod-R την κατηγορία των δεξιών R-προτύπων, η οποία ορίζεται ως εξής:

- Τα αντικείμενα της Mod-R είναι τα δεξιά R-πρότυπα.
- Οι μορφισμοί της Mod-R είναι οι ομομορφισμοί δεξιών R-προτύπων, δηλαδή για τυχόν $A, B \in$ Mod-R θέτουμε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Mod}\text{-}R}(A,B) = \mathsf{Hom}_R(A,B)$.

Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{End}_R(M)$ τον δακτύλιο των ενδομορφισμών R-προτύπων ενός δεξιού R-προτύπου M και με $\mathsf{Aut}_R(M)$ την ομάδα των αυτομορφισμών του M. Τέλος, θα συμβολίζουμε με mod-R την πλήρη υποκατηγορία της Mod-R η οποία αποτελείται από **πεπερασμένα παραγόμενα** δεξιά R-πρότυπα. Δυϊκά, ορίζεται και η κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων τα αντικείμενα της οποίας είναι τα αριστερά R-πρότυπα και οι μορφισμοί αυτής είναι οι ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων.

Ο ακόλουθος ορισμός επιτρέπει έναν χαρακτηρισμό των μορφισμών σε μία κατηγορία.

Ορισμός 1.2.4. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία, $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός από το X στο Y. Τότε:*

1. *Ο f καλείται* **μονομορφισμός** *αν για κάθε ζεύγος μορφισμών $g_1, g_2\colon Z \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ με $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ισχύει $g_1 = g_2$.*

2. *Ο f καλείται* **επιμορφισμός** *αν για κάθε ζεύγος μορφισμών $g_1, g_2\colon Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}$ με $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ισχύει $g_1 = g_2$.*

3. *Ο f καλείται* **ισομορφισμός** *αν υπάρχει ένας μορφισμός $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ έτσι ώστε $f \circ g = 1_Y$ και $g \circ f = 1_X$. Ο μορφισμός g, ο οποίος είναι μοναδικός, καλείται ο* **αντίστροφος** *του f και θα συμβολίζεται με f^{-1}.*

Συχνά, θα συμβολίζουμε έναν ισομορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ ως $f\colon X \xrightarrow{\sim} Y$. Τέλος, αν $X \xrightarrow{\sim} Y$ είναι ένας ισομορφισμός, λέμε ότι τα αντικείμενα X και Y είναι **ισόμορφα** *και γράφουμε $X \cong Y$.*

Σχόλιο 1.2.5. Ένας **ενδομορφισμός** μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ένας μορφισμός $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ όπου $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$. Ένας **αυτομορφισμός** της $\mathcal{C}$ είναι ένας ενδομορφισμός ο οποίος είναι και ισομορφισμός.

Παρατήρηση 1.2.6. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία, μπορούμε να ορίσουμε τη **δυϊκή κατηγορία**, η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, θέτοντας:

$$\mathsf{ob}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}) = \mathsf{ob}(\mathcal{C})$$

και

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μονομορφισμός αν-ν ο f είναι επιμορφισμός στη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Ορισμός 1.2.7. *Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία, τότε μία κατηγορία $\mathcal{D}$ καλείται* **υποκατηγορία (subcategory)** *της $\mathcal{C}$ αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Κάθε αντικείμενο της $\mathcal{D}$ είναι αντικείμενο της $\mathcal{C}$, δηλαδή $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$.*

2. *Για οποιαδήποτε αντικείμενα X, Y της $\mathcal{D}$ ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.*

3. *Η σύνθεση μορφισμών στην $\mathcal{D}$ συμπίπτει με τη σύνθεση μορφισμών στην $\mathcal{C}$.*

4. *Για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{D})$, ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ στην $\mathcal{D}$ είναι ο ίδιος με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X : X \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$.*

Συχνά, θα γράφουμε $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ συμβολίζοντας ότι η $\mathcal{D}$ είναι μία υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.

Ορισμός 1.2.8. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ μία υποκατηγορία αυτής.*

- *Η $\mathcal{D}$ καλείται μία* **πλήρης (full)** *υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ αν για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{D})$ ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.*

- *Η $\mathcal{D}$ καλείται* **κορεσμένη** *ή* **αυστηρά πλήρης (strictly full)** *υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ αν είναι πλήρης και κάθε αντικείμενο $X \in C$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της $\mathcal{D}$ ανήκει στην $\mathcal{D}$.*

Παράδειγμα 1.2.9. Η κατηγορία των αβελιανών ομάδων Ab και η κατηγορία των συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι πλήρεις υποκατηγορίες της κατηγορίας των ομάδων Grp και της κατηγορίας των τοπολογικών χώρων Top αντίστοιχα.

Ορισμός 1.2.10. *Ένα* **διάγραμμα** *σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μία οικογένεια συμβόλων τα οποία αναπαριστούν μορφισμούς της $\mathcal{C}$ και μία οικογένεια βελών μεταξύ αυτών των συμβόλων τα οποία αναπαριστούν μορφισμούς αυτών των αντικειμένων. Η έννοια ενός μεταθετικού διαγράμματος ορίζεται με τον φυσικό τρόπο.*

Για περισσότερα παραδείγματα κατηγοριών βλ. [14, §3.1] και [33, Examples 1.2.4.].

Ορισμός 1.2.11. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία.*

1. *Ένα αντικείμενο $P \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ καλείται* **αρχικό αντικείμενο** *της $\mathcal{C}$, αν για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, το σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X)$ έχει ένα μοναδικό στοιχείο. Συχνά ένα αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$ συμβολίζεται με $\varnothing_{\mathcal{C}}$. Άμεσα προκύπτει ότι αν τα P_1 και P_2 είναι δύο αρχικά αντικείμενα μίας κατηγορίας, υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός $P_1 \cong P_2$.*

2. *Ένα αντικείμενο $P \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ καλείται* **τελικό αντικείμενο** *της $\mathcal{C}$ αν για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, το σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P)$ έχει ένα μοναδικό στοιχείο. Συχνά, ένα τελικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$ συμβολίζεται με $\mathsf{pt}_{\mathcal{C}}$.*

3. *Ένα αντικείμενο $P \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ καλείται* **μηδενικό αντικείμενο** *της $\mathcal{C}$ αν είναι αρχικό και τελικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Ένα μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$ θα συμβολίζεται απλώς με 0 και για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ ο μορφισμός ο οποίος αποκτάται ως η σύνθεση των μορφισμών $X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$ θα συμβολίζεται επίσης με $0\colon X \longrightarrow Y$. Άμεσα, η σύνθεση ενός οποιουδήποτε μορφισμού $f\colon Y \longrightarrow Z$ με τον μηδενικό μορφισμό $0\colon X \longrightarrow Y$ είναι ο μηδενικός μορφισμός $0\colon X \longrightarrow Z$.*

Παράδειγμα 1.2.12. Το μηδενικό πρότυπο 0 είναι ένα μηδενικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathsf{Mod}\text{-}R$. Για περισσότερα παραδείγματα βλ. [33, Examples 1.2.7., 1.2.9.].

Συνεχίζουμε με τον ορισμό συναρτητών μεταξύ κατηγοριών.

Ορισμός 1.2.13. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες. Ένας* **συναλλοίωτος συναρτητής** $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *αποτελείται από μία απεικόνιση $F\colon \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{ob}(\mathcal{D})$ και από απεικονίσεις*

$$F_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ έτσι ώστε:

1. *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ για κάθε $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ όπου $X, Y, Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*
2. *$F(1_X) = 1_{F(X)}$ για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

Συχνά, για λόγους συντομίας θα καλούμε έναν συναλλοίωτο συναρτητή απλά ως συναρτητή.

Παρόμοια, ορίζεται και η έννοια ενός αντισυναλλοίωτου συναρτητή.

Ορισμός 1.2.14. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες. Ένας* **αντισυναλλοίωτος συναρτητής** $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *αποτελείται από μία απεικόνιση $F\colon \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{ob}(\mathcal{D})$ και από απεικονίσεις*

$$F_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$$

για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ έτσι ώστε:

1. *$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ για κάθε $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ όπου $X, Y, Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*
2. *$F(1_X) = 1_{F(X)}$ για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

Σχόλιο 1.2.15. Η σύνθεση συναρτητών ορίζεται κατά τον προφανή τρόπο. Έτσι, για τυχούσες κατηγορίες $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, και $\mathcal{C}''$ και συναρτητές $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$, η σύνθεση $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ο συναρτητής ο οποίως ορίζεται ως $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 1.2.16. Έστω $\mathcal{C}$ μία **μικρή** (δηλαδή η κλάση των αντικειμένων της είναι σύνολο) κατηγορία και ένα αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.

1. Ορίζουμε έναν συναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ως εξής:
   - Στα αντικείμενα: $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)(M) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,M)$ για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.
   - Στους μορφισμούς: Αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, τότε θέτουμε:
   $$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)(f) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f) = f_*\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,N)$$
   όπου f_* ο μορφισμός που δίνεται από: $f_*(\phi) = f \circ \phi$ για κάθε $\phi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,M)$.

2. Δυϊκά, ορίζεται και ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ως εξής:
   - Στα αντικείμενα: $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)(M) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M,X)$ για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.
   - Στους μορφισμούς: Για κάθε μορφισμό $f\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathcal{C}$ θέτουμε:
   $$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)(f) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f,X) = f^*\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(N,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M,X)$$
   όπου f^* ο μορφισμός που δίνεται από: $f^*(\phi) = \phi \circ f$ για κάθε $\phi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(N,X)$.

Παράδειγμα 1.2.17. Παραθέτουμε ορισμένα επιπλέον παραδείγματα συναρτητών, ενώ για περισσότερα βλ. [14, §3.1].

1. Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ υπάρχει ο ταυτοτικός συναρτητής $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.

2. Θεωρούμε την κατηγορία των ομάδων Grp και την κατηγορία των αβελιανών ομάδων Ab. Μπορούμε να ορίσουμε έναν συναρτητή $F\colon \mathsf{Grp} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ θέτοντας $F(G) = G/G'$, όπου με G' συμβολίζουμε την παράγωγο υποομάδα της G, δηλαδή την υποομάδα της G η οποία παράγεται από όλους τους μεταθέτες της G. Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι ο F είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής.

3. Θεωρούμε την κατηγορία των τοπολογικών χώρων Top και την κατηγορία των αβελιανών ομάδων Ab. Ορίζουμε έναν συναρτητή $F\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ θέτοντας $F(X) = H^n(X,G)$, την n-οστή ομάδα συνομολογίας του τοπολογικού χώρου X με συντελεστές στην G. Ο F είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής.

4. Έστω $\mathcal{C}$ η κατηγορία των επεκτάσεων Galois ενός σώματος k που είναι πεπερασμένης διάστασης. Τότε μπορούμε να ορίσουμε έναν συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Grp}$ θέτοντας $F(K) = \mathcal{G}(K/k)$, την ομάδα Galois του K υπεράνω του σώματος k. Προκύπτει ότι ο F είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής.

Ορισμός 1.2.18. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Ο συναρτητής F καλείται* **πιστός (faithful)** *αν η απεικόνιση $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ είναι 1-1.*

2. *Ο συναρτητής F καλείται* **πλήρης (full)** *αν η απεικόνιση $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ είναι επί.*

3. *Ο συναρτητής F καλείται* **πλήρης και πιστός (fully faithful)** *αν η απεικόνιση $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ είναι 1-1 και επί.*

4. *Ο συναρτητής F καλείται* **επί με ακρίβεια ισομορφισμού (essentially surjective)**, *αν για κάθε αντικείμενο $Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{D})$ υπάρχει ένα $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και ένας ισομορφισμός $F(X) \xrightarrow{\sim} Y$.*

Σχόλιο 1.2.19. Οι ιδιότητες που αναφέρονται στον παραπάνω ορισμό διατηρούνται από την σύνθεση συναρτητών.

Συνεχίζουμε ορίζοντας το γινόμενο και την ένωση κατηγοριών:

Ορισμός 1.2.20. *Θεωρούμε μία οικογένεια κατηγοριών $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών.*

1. *Η κατηγορία* **γινόμενο** $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ *ορίζεται ως εξής:*

$$\mathsf{ob}(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i) = \prod_{i\in I}\mathsf{ob}(\mathcal{C}_i)$$

$$\mathsf{Hom}_{\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i}(\{X_i\}_i, \{Y_i\}_i) = \prod_{i\in I}\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i)$$

2. *Η κατηγορία* **ξένη ένωση** $\coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ *ορίζεται ως εξής:*

$$\mathsf{ob}(\coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i) = \{(X,i) \mid i\in I, X\in\mathsf{ob}(\mathcal{C}_i)\}$$

$$\mathsf{Hom}_{\coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i}((X,i),(Y,j)) = \begin{cases}\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X,Y) & \text{αν} \quad i=j\\ \varnothing & \text{αν} \quad i\neq j\end{cases}$$

Αν το I έχει δύο στοιχεία, για παράδειγμα $I=\{1,2\}$ θα συμβολίζουμε την κατηγορία γινόμενο με $\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2$ και την κατηγορία ξένη ένωση $\mathcal{C}_1\sqcup\mathcal{C}_2$.

Σχόλιο 1.2.21. Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\longrightarrow\mathcal{C}_3$ καλείται **δισυναρτητής**. Ισοδύναμα, για $X_1\in\mathsf{ob}(\mathcal{C}_1)$ και $X_2\in\mathsf{ob}(\mathcal{C}_2)$, οι $F(X_1,-)\colon\mathcal{C}_2\longrightarrow\mathcal{C}_3$ και $F(-,X_2)\colon\mathcal{C}_1\longrightarrow\mathcal{C}_3$ είναι συναρτητές. Επιπλέον, αν $f\colon X_1\longrightarrow Y_1$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}_1$ και $g\colon X_2\longrightarrow Y_2$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}_2$, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} F(X_1,X_2) \arrow[r, "F(X_1,g)"] \arrow[d, "F(f,X_2)"'] & F(X_1,Y_2) \arrow[d, "F(f,Y_2)"] \\ F(Y_1,X_2) \arrow[r, "F(Y_1,g)"] & F(Y_1,Y_2) \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 1.2.22. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία, και $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ η αντίστοιχη δυϊκή, τότε υπάρχει ένας δισυναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\colon\mathcal{C}^{\mathsf{op}}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathsf{Set}$. Αν R είναι μία k-άλγεβρα, τότε υπάρχουν οι δισυναρτητές:

$$\mathsf{Hom}_R(-,-)\colon (\mathsf{Mod}\text{-}R)^{\mathsf{op}}\times\mathsf{Mod}\text{-}R\longrightarrow\mathsf{Mod}\text{-}k$$

και

$$(-\otimes_R -)\colon\ \mathsf{Mod}\text{-}R^{\mathsf{op}}\times\mathsf{Mod}\text{-}R\longrightarrow\mathsf{Mod}\text{-}k$$

Ορισμός 1.2.23. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και X, Y, Z αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Δύο μονομορφισμοί $f\colon Y\longrightarrow X$ και $g\colon Z\longrightarrow X$ που καταλήγουν στο X θα καλούνται ισόμορφοι, αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $h\colon Y\longrightarrow Z$ έτσι ώστε $f=g\circ h$. Για κάθε αντικείμενο $X\in\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ η κλάση ισομορφίας ενός μονομορφισμού που καταλήγει στο X καλείται ένα* **υποαντικείμενο** *του X.*

Δυϊκά, δύο επιμορφισμοί $f\colon X\longrightarrow Y$ και $g\colon X\longrightarrow Z$ με αρχή το X θα καλούνται ισόμορφοι, αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $h\colon Y\longrightarrow Z$ έτσι ώστε $g=h\circ f$. Για κάθε αντικείμενο $X\in\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ η κλάση ισομορφίας ενός επιμορφισμού με αρχή το X καλείται ένα **πηλίκο** *του X.*

Θα ορίσουμε στην συνέχεια μορφισμούς μεταξύ συναρτητών.

Ορισμός 1.2.24. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες και $F,G\colon\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ δύο συναρτητές. Ένας* **φυσικός μετασχηματισμός (natural transformation)** $\eta\colon F\longrightarrow G$ *είναι μία οικογένεια μορφισμών*

$$\eta=\{\eta_X: F(X)\longrightarrow G(X)\}_{X\in\mathsf{ob}(\mathcal{C})}$$

έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $f: X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$, το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό, δηλαδή $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$.

Δύο συναρτητές $F, G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ καλούνται **φυσικά ισοδύναμοι (naturally equivalent)** *ή φυσικά ισόμορφοι, αν υπάρχουν φυσικοί μετασχηματισμοί $\eta: F \longrightarrow G$ και $\sigma: G \longrightarrow F$ έτσι ώστε $\sigma \circ \eta = \mathsf{Id}_F$ και $\eta \circ \sigma = \mathsf{Id}_G$ όπου με Id_F και Id_G συμβολίζουμε τους ταυτοτικούς φυσικούς μετασχηματισμούς των συναρτητών F και G αντίστοιχα. Τότε οι φυσικοί μετασχηματισμοί η και σ καλούνται φυσικοί ισομορφισμοί ή φυσική ισοδυναμία (natural equivalence).*

Παρατήρηση 1.2.25. Στη συνέχεια της διατριβής, θα συναντήσουμε συχνά διαγράμματα στα οποία τα σύμβολα θα αναπαριστούν κατηγορίες και τα βέλη θα αναπαριστούν συναρτητές μεταξύ κατηγοριών. Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, θα λέμε ότι το διάγραμμα μετατίθεται, εάν μετατίθεται με ακρίβεια ισομορφισμού συναρτητών.

Σχόλιο 1.2.26. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία, θα συμβολίζουμε με $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ τον ταυτοτικό συναρτητή στην $\mathcal{C}$ και με $\mathsf{End}(\mathsf{Id}_{\mathcal{C}})$ το σύνολο ενδομορφισμών του ταυτοτικού συναρτητή $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$.

Ορισμός 1.2.27. *Ένας συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ καλείται* **ισοδυναμία κατηγοριών**, *αν υπάρχει ένας συναρτητής $G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ και ισομορφισμοί συναρτητών $\alpha: G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$ και $\beta: F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathsf{Id}_{\mathcal{D}}$. Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε ότι οι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι ισοδύναμες κατηγορίες και θα γράφουμε $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$. Επιπλέον, θα γράφουμε $F: \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ και θα λέμε ότι οι συναρτητές F και G είναι ημι-αντίστροφοι (quasi-inverse) και ότι ο G είναι ένας ημι-αντίστροφος του F.*

Σχόλιο 1.2.28. Χάριν σύμβασις, συχνά θα καλούμε έναν ημι-αντίστροφο G του F, απλώς έναν αντίστροφο του F.

Η ακόλουθη πρόταση δίνει ένα σημαντικό κριτήριο το οποίο εξασφαλίζει ότι ένας συναρτητής κατηγοριών αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών.

Πρόταση 1.2.29. *Ένας συναρτητής κατηγοριών $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών αν-ν ο F είναι πλήρης και πιστός και επί με ακρίβεια ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [33, Proposition 1.3.13.]. ■

Το παρακάτω πόρισμα μας επιτρέπει να θεωρούμε την εμβάπτιση μίας κατηγορίας σε μία άλλη, με ακρίβεια ισομορφισμού ως μία πλήρη υποκατηγορία.

Πόρισμα 1.2.30. *Έστω $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας πλήρης και πιστός συναρτητής. Τότε υπάρχει μία πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{D}_0$ της $\mathcal{D}$ και μία ισοδυναμία κατηγοριών $F': \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_0$ έτσι ώστε ο συναρτητής F να είναι ισόμορφος με τον $\iota \circ F'$, όπου $\iota: \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ο συναρτητής εμβάπτισης.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση και θέτοντας ως $\mathcal{D}_0$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$ η οποία έχει ως αντικείμενα εικόνες αντικειμένων της $\mathcal{C}$ μέσω του συναρτητή F. ■

Τέλος, ορίζουμε την έννοια των συζυγών συναρτητών μεταξύ κατηγοριών:

Ορισμός 1.2.31. *Έστω $L: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ και $R: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ δύο συναρτητές. Το ζεύγος (L, R) καλείται ένα* **συζυγές ζεύγος συναρτητών** *αν υπάρχει ένας ισομορφισμός δισυναρτητών: $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Set}$*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(L(-), -) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, R(-))$$

Τότε λέμε ότι ο L είναι ένας **αριστερά συζυγής (left adjoint)** *του συναρτητή R, ή ότι ο R είναι ένας* **δεξιά συζυγής (right adjoint)** *του L. Ο παραπάνω ισομορφισμός καλείται ισομορφισμός συζυγίας.*

Σχόλιο 1.2.32. Προκύπτει ότι (βλ. [33, Theorem 1.5.3.]) αν $L\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ και $R\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι δύο συναρτητές και ο L (αντίστοιχα ο R) έχει έναν δεξιά (αντίστοιχα αριστερά) συζυγή, τότε αυτός ο συζυγής συναρτητής είναι μοναδικός με ακρίβεια (μοναδικού) ισομορφισμού.

1.3 Προσθετικές κατηγορίες

Στόχος της παρούσας ενότητας είναι να αναπτυχθεί το κατάλληλο υπόβαθρο για τον ορισμό μίας προσθετικής κατηγορίας. Αρχικά, θα ορίσουμε την έννοια του γινομένου και του συν-γινομένου αντικειμένων στα πλαίσια της Θεωρίας Κατηγοριών.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\{X_i\}_i \in I$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Τότε, ένα* **γινόμενο (product)** *αυτών των αντικειμένων είναι ένα αντικείμενο*

$$\prod_{i\in I} X_i \in \mathcal{C}$$

εφοδιασμένο με μορφισμούς

$$p_i\colon \left(\prod_{i\in I} X_i\right) \longrightarrow X_i$$

για κάθε $i \in I$, οι οποίοι καλούνται **κανονικές προβολές***, έτσι ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε αντικείμενο $Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ εφοδιασμένο με μορφισμούς $f_i\colon Y \longrightarrow X_i$, για κάθε $i \in I$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός*

$$(f_i)_{i\in I}\colon Y \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$$

έτσι ώστε τα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(f_i)_{i\in I}"] \arrow[dr, dashed, "f_i"'] & X_i \\ & \prod_{i\in I} X_i \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικά για κάθε $i \in I$.

Στην περίπτωση που έχουμε γινόμενο δύο αντικειμένων, ο ορισμός παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Ορισμός 1.3.2. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και X_1, X_2 δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Ένα* **γινόμενο (product)** *των X_1 και X_2 είναι ένα αντικείμενο X το οποίο συμβολίζεται με $X_1 \times X_2$ μαζί με ένα ζεύγος μορφισμών $\pi_1\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ και $\pi_2\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$ τα οποία ικανοποιούν την παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{C}$ και για κάθε ζεύγος μορφισμών $f_1\colon Y \longrightarrow X_1$ και $f_2\colon Y \longrightarrow X_2$ υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f\colon Y \longrightarrow X_1 \times X_2$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

Ο μοναδικός μορφισμός f καλείται το γινόμενο των μορφισμών f_1 και f_2 και συμβολίζεται με $< f_1, f_2 >$, ενώ οι μορφισμοί π_1 και π_2 καλούνται **κανονικές προβολές**.

Παρατήρηση 1.3.3. Από τον ορισμό του, το γινόμενο αν υπάρχει, είναι μοναδικό με ακρίβεια μοναδικού ισομορφισμού και για τον λόγο αυτόν συχνά θα αναφερόμαστε σε ένα γινόμενο γράφοντας «το γινόμενο».

Σχόλιο 1.3.4. Το γινόμενο αντικειμένων αποτελεί εδική περίπτωση ενός ορίου, μία έννοια η οποία δεν θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια της παρούσας διατριβής και για αυτόν τον λόγο ο ορισμός της θα παραλειφθεί. Για περισσότερα παραπέμπουμε στο [33, §2].

Παράδειγμα 1.3.5. Στην κατηγορία Set των συνόλων, το γινόμενο με την παραπάνω έννοια, είναι το γνωστό καρτεσιανό γινόμενο. Δοσμένου μία οικογένεια συνόλων X_i, όπου $i \in I$, το γινόμενο αυτών ορίζεται ως:

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \,|\, x_i \in X_i, \forall i \in I\}$$

με κανονικές προβολές $\pi_j \colon \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ όπου $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$. Αντίστοιχα, για κάθε σύνολο Y εφοδιασμένο με μία οικογένεια συναρτήσεων $f_i \colon Y \longrightarrow X_i$, το γινόμενο αυτών f ορίζεται ως: $f \colon Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ όπου $f(y) = (f_i(y))_{i \in I}$.

Στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων, το γινόμενο μίας οικογένειας τοπολογικών χώρων είναι το καρτεσιανό γινόμενο αυτών, εφοδιασμένο με μία τοπολογία η οποία καλείται τοπολογία γινόμενο και αποτελεί την ασθενέστερη τοπολογία στην οποία όλες οι συναρτήσεις προβολών είναι συνεχείς.

Στην κατηγορία των ομάδων, το γινόμενο είναι το ευθύ γινόμενο ομάδων που δίνεται από το καρτεσιανό γινόμενο αυτών ορίζοντας τον πολλαπλασιασμό κατά επί μέρους στοιχείο.

Ακολουθεί ένα επιπλέον παράδειγμα από την κατηγορία προτύπων:

Παράδειγμα 1.3.6. Έστω Δ ένα σύνολο δεικτών και έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ μία οικογένεια δεξιών R-προτύπων. Αν θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha = \{(x_\alpha) | \alpha \in \Delta,\, x_a \in M_\alpha,\, \forall \alpha \in \Delta\}$$

και ορίσουμε μία πρόσθεση:

$$(x_\alpha) + (y_\alpha) = (x_\alpha + y_\alpha)$$

για κάθε $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ και μία δεξιά δράση:

$$(x_\alpha) r = (x_\alpha r)$$

για κάθε $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha$ και για κάθε $r \in R$, εύκολα βλέπουμε ότι το ζεύγος $(\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα η οποία με την παραπάνω δράση αποκτά δομή δεξιού R-προτύπου. Για κάθε $\beta \in \Delta$ ορίζουμε μία απεικόνιση

$$\pi_\beta \colon \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$$

με

$$\pi_\beta((x_\alpha)) = x_\beta$$

για κάθε $(x_\alpha) \in \prod_\Delta M_\alpha$, η οποία είναι προφανώς ένας επιμορφισμός.

Τότε, το ζεύγος $(\prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, \{\pi_\beta\}_{\beta \in \Delta})$αποτελεί ένα γινόμενο με την κατηγορική έννοια της οικογένειας $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$. Στην περίπτωση των προτύπων το γινόμενο αυτό καλείται **ευθύ γινόμενο**. Λαμβάνοντας υπόψιν την μοναδικότητα του ευθέος γινομένου με ακρίβεια ισομορφισμού, συχνά, θα θεωρούμε ότι το ευθύ γινόμενο μίας οικογένειας προτύπων έχει την παραπάνω μορφή.

Δυϊκά, ορίζεται και η έννοια του συν-γινομένου αντικειμένων:

Ορισμός 1.3.7. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\{X_j\}_j \in J$ ένα σύνολο αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Τότε, ένα* **συν-γινόμενο (coproduct)** *αυτών των αντικειμένων είναι ένα αντικείμενο*

$$\coprod_{j \in J} X_j \in \mathcal{C}$$

εφοδιασμένο με μορφισμούς

$$i_j \colon X_j \longrightarrow \coprod_{j \in J} X_j$$

για κάθε $i \in I$, οι οποίοι καλούνται **κανονικές εγκλείσεις**, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε αντικείμενο $Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ εφοδιασμένο με μορφισμούς $f_j \colon X_j \longrightarrow Y$, για κάθε $j \in J$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός*

$$f = \coprod_{j \in J} f_j \colon \coprod_{j \in J} X_j \longrightarrow Y$$

έτσι ώστε τα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "i_j"'] & Y \\ & \coprod_{j \in J} X_j \arrow[u, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικά για κάθε $j \in J$.

Στην περίπτωση που έχουμε συν-γινόμενο δύο αντικειμένων, ο ορισμός παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Ορισμός 1.3.8. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και X_1, X_2 δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Ένα* **συν-γινόμενο (coproduct)** *των X_1 και X_2 είναι ένα αντικείμενο X το οποίο συμβολίζεται με $X_1 \coprod X_2$ μαζί με ένα ζεύγος μορφισμών $\iota_1 \colon X_1 \longrightarrow X_1 \coprod X_2$ και $\iota_2 \colon X_2 \longrightarrow X_1 \coprod X_2$ τα οποία ικανοποιούν την παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{C}$ και για κάθε ζεύγος μορφισμών $f_1 \colon X_1 \longrightarrow Y$ και $f_2 \colon X_2 \longrightarrow Y$ υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f \colon X_1 \coprod X_2 \longrightarrow Y$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\iota_1"] & X_1 \coprod X_2 \arrow[u, dashed, "f"] & X_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

Οι μορφισμοί ι_1 και ι_2 καλούνται **κανονικές εγκλείσεις**.

Παρατήρηση 1.3.9. Από τον ορισμό του, το συν-γινόμενο αν υπάρχει, είναι μοναδικό με ακρίβεια μοναδικού ισομορφισμού και για τον λόγο αυτόν συχνά θα αναφερόμαστε σε ένα γινόμενο γράφοντας «το συν-γινόμενο».

Σχόλιο 1.3.10. Ανάλογα με το γινόμενο, το συν-γινόμενο αντικειμένων αποτελεί ειδική περίπτωση ενός συν-ορίου (colimit), για περισσότερα παραπέμπουμε στο [33, §2].

Παράδειγμα 1.3.11. Το συν-γινόμενο ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε μπορεί να έχει αρκετά διαφορετικές μορφές:

- Στην κατηγορία των συνόλων Set, το συν-γινόμενο είναι η ξένη ένωση με τις απεικονίσεις i_j να είναι οι απεικονίσεις έγκλεισης.
- Στην κατηγορία των ομάδων, το συν-γινόμενο είναι το ελεύθερο γινόμενο ομάδων.
- Στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων (και στην κατηγορία των προτύπων όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα), το συν-γινόμενο αποτελείται από τα στοιχεία του ευθέος γινομένου τα οποία έχουν μόνο πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς όρους. Ως αποτέλεσμα, ταυτίζεται με το ευθύ γινόμενο στην περίπτωση που έχουμε πεπερασμένους το πλήθος παράγοντες.
- Στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων, τα συν-γινόμενα είναι ξένες ενώσεις χώρων με τοπολογία την τοπολογία ξένης ένωσης, δηλαδή τα ανοιχτά σύνολα είναι αυτά ακριβώς τα σύνολα τα οποία είναι ανοιχτά σε κάθε έναν από τους χώρους.

Στην περίπτωση της κατηγορίας προτύπων το συν-γινόμενο είναι ακριβώς το εξωτερικό ευθύ άθροισμα προτύπων:

Παρατήρηση 1.3.12. Έστω Δ ένα σύνολο δεικτών και έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ μία οικογένεια δεξιών R-προτύπων. Έστω $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ μία οικογένεια R-προτύπων και $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ το ευθύ γινόμενο αυτής. Θέτουμε:

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha = \{(x_\beta) \in \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha | x_\beta = 0,\ \forall\beta\in\Delta, \text{εκτός από πεπερασμένο πλήθος}\}$$

Εύκολα προκύπτει ότι το $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι ένα υποπρότυπο του $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$.

Για κάθε $\beta\in\Delta$, ορίζουμε έναν μονομορφισμό προτύπων

$$i_\beta\colon M_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$$

με $i_\beta(x) = (x_\alpha)$, όπου:

$$x_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{αν}\, \alpha\neq\beta \\ x & \text{αν}\, \alpha=\beta \end{cases}$$

Τότε, το ζεύγος $(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, \{i_\beta\}_{\beta\in\Delta})$ αποτελεί ένα συν-γινόμενο της οικογένειας $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, το οποίο καλείται **εξωτερικό ευθύ άθροισμα**.

Λαμβάνοντας υπόψιν την μοναδικότητα του ευθέος αθροίσματος με ακρίβεια ισομορφισμού, συχνά, θα θεωρούμε ότι το ευθύ άθροισμα μίας οικογένειας προτύπων έχει την παραπάνω μορφή.

Ορισμός 1.3.13. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ θα καλείται* **υποπροσθετική (pre-additive)** *αν για κάθε ζεύγος αντικειμένων $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ το σύνολο μορφισμών $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ είναι μία αβελιανή ομάδα και η σύνθεση μορφισμών*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

είναι διγραμμική. Με άλλα λόγια, για κάθε $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ και για κάθε $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ ισχύει:

$$g\circ(f_1+f_2) = g\circ f_1 + g\circ f_2 \quad \text{και} \quad (g_1+g_2)\circ f = g_1\circ f + g_2\circ f$$

Ορισμός 1.3.14. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ θα καλείται* **προσθετική (additive)** *αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

- *Η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι υποπροσθετική.*
- *Η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει ένα μηδενικό αντικείμενο.*
- *Για κάθε ζεύγος αντικειμένων X, Y στην $\mathcal{C}$ υπάρχει το γινόμενο και το συν-γινόμενο αυτών στην $\mathcal{C}$.*

Σχόλιο 1.3.15. Προκύπτει ότι σε κάθε προσθετική κατηγορία, τα πεπερασμένα γινόμενα και συν-γινόμενα ταυτίζονται. Εφόσον οι κατηγορίες οι οποίες εμφανίζονται στην παρούσα διατριβή θα είναι σχεδόν πάντα προσθετικές, θα καλούμε από δω και στο εξής το συν-γινόμενο μίας οικογένειας αντικειμένων $\{X_i\}_{i \in I}$ **ευθύ άθροισμα** και θα το συμβολίζουμε με:

$$\bigoplus_{i \in I} X_i$$

Οι συναρτητές μεταξύ προσθετικών κατηγοριών συχνά θα έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

Ορισμός 1.3.16. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο προσθετικές κατηγορίες. Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ καλείται **προσθετικός (additive)** αν για κάθε $f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, ισχύει $F(f+g) = F(f) + F(g)$.*

Σχόλιο 1.3.17. Στη συνέχεια της διατριβής, συχνά θα υποθέτουμε εκ των προτέρων ότι ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ μεταξύ δύο προσθετικών κατηγοριών είναι προσθετικός εκτός και αν δηλωθεί το αντίθετο.

1.4 Αβελιανές Κατηγορίες

Ολοκληρώνουμε το εισαγωγικό κεφάλαιο με μία ενότητα η οποία αφιερώνεται στον ορισμό και στη μελέτη βασικών ιδιοτήτων των αβελιανών κατηγοριών. Αρχικά θα οριστεί η έννοια μίας αβελιανής κατηγορίας. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε τα ακόλουθα:

Ορισμός 1.4.1. *Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός σε μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$. Ο **πυρήνας (kernel)** του f είναι ένα αντικείμενο K της $\mathcal{C}$ μαζί με έναν μορφισμό $k\colon K \longrightarrow X$ έτσι ώστε $f \circ k = 0$ και να ικανοποιείται η παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε μορφισμό $u\colon U \longrightarrow X$ με $f \circ u = 0$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $h\colon U \longrightarrow K$ έτσι ώστε $u = k \circ h$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
X \arrow[ur, "f"] & K \arrow[l, "k"'] \arrow[u, "0"] & \\
 & & U \arrow[ull, "u"] \arrow[ul, dashed, "h"'] \arrow[uul, "0"']
\end{tikzcd}$$

Συχνά θα συμβολίζουμε το αντικείμενο πυρήνα ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ με $\mathsf{Ker} f$ και τον αντίστοιχο μορφισμό με $\mathsf{ker} f\colon \mathsf{Ker} f \longrightarrow X$.

Σχόλιο 1.4.2. Από την καθολική ιδιότητα του ορισμού, προκύπτει ότι ο $\mathsf{ker} f$, αν υπάρχει, είναι ένας μοναδικός (με ακρίβεια φυσικής ισοδυναμίας) μονομορφισμός και ο μορφισμός f είναι μονομορφισμός αν-ν $\mathsf{Ker} f = 0$.

Η δυϊκή έννοια είναι αυτή του συνπυρήνα ενός μορφισμού.

Ορισμός 1.4.3. *Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός σε μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$. Ο **συνπυρήνας (cokernel)** του f είναι ένα αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ μαζί με έναν μορφισμό $c\colon Y \longrightarrow C$ έτσι ώστε $c \circ f = 0$ και να ικανοποιείται η παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε μορφισμό $v\colon Y \longrightarrow V$ με $v \circ f = 0$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $h\colon C \longrightarrow V$ έτσι ώστε $v = h \circ c$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "c"] \arrow[ddr, "v"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "0"] \arrow[drr, "0"'] & C \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & V
\end{tikzcd}$$

Συχνά θα συμβολίζουμε το αντικείμενο συνπυρήνα ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ με $\mathsf{Coker}f$ και τον αντίστοιχο μορφισμό με $\mathsf{coker}f\colon Y \longrightarrow \mathsf{Coker}f$.

Σχόλιο 1.4.4. Από την καθολική ιδιότητα του ορισμού, προκύπτει ότι ο $\mathsf{coker}f$, αν υπάρχει είναι ένας μοναδικός (με ακρίβεια φυσικής ισοδυναμίας) επιμορφισμός και ο μορφισμός f είναι επιμορφισμός αν-ν $\mathsf{Coker}f = 0$.

Τέλος, ορίζουμε τις ακόλουθες έννοιες:

Ορισμός 1.4.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

- *Αν ο μορφισμός $\mathsf{coker}f\colon Y \longrightarrow \mathsf{Coker}f$ έχει έναν πυρήνα στην $\mathcal{A}$, αυτός καλείται η* **εικόνα (image)** *του f και συμβολίζεται με $\mathsf{Im}f$. Συμβολίζουμε με $\mathsf{im}f\colon \mathsf{Im}f \longrightarrow Y$ τον μονομορφισμό από την εικόνα.*

- *Αν ο μορφισμός $\mathsf{ker}f\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow X$ έχει έναν συνπυρήνα στην $\mathcal{A}$, αυτός καλείται η* **συνεικόνα (coimage)** *του f και συμβολίζεται με $\mathsf{Coim}f$. Συμβολίζουμε με $\mathsf{coim}f\colon X \longrightarrow \mathsf{Coim}f$ τον επιμορφισμό στην συνεικόνα.*

Παράδειγμα 1.4.6. Θεωρούμε έναν δακτύλιο R και την κατηγορία των δεξιών R-προτύπων $\mathsf{Mod}\text{-}R$. Για έναν ομομορφισμό προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathsf{Mod}\text{-}R$ οι πυρήνες και οι συνπυρήνες (με την κατηγορική έννοια) ορίζονται ως εξής:

- Ο πυρήνας του f είναι το αντικείμενο $\mathsf{Ker}f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$.
- Η εικόνα του f είναι το αντικείμενο $\mathsf{Im}f = \{f(m) \mid m \in M\}$.
- Ο συνπυρήνας του f είναι το πρότυπο πηλίκο $N/\mathsf{Im}f$.

Παρατήρηση 1.4.7. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{C}$ είναι μία προσθετική κατηγορία στην οποία όλοι οι μορφισμοί έχουν πυρήνες και συνπυρήνες. Τότε, κάθε μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ δημιουργεί ένα διάγραμμα $\mathsf{Ker}f \xrightarrow{\mathsf{ker}f} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\mathsf{coker}f} \mathsf{Coker}f$. Αφού $f \circ \mathsf{ker}f = 0$, ο f αναλύεται μέσω του $\mathsf{Coim}f$ με έναν μορφισμό $\phi\colon \mathsf{Coim}f \longrightarrow Y$. Ομοίως, εφόσον $\mathsf{coker}f \circ \phi \circ \mathsf{coim}f = \mathsf{coker}f \circ f = 0$ και ο $\mathsf{coim}f$ ως μορφισμός στον συνπυρήνα είναι επιμορφισμός, θα έχουμε $\mathsf{coker}f \circ \phi = 0$, άρα ο f αναλύεται μέσω του $\mathsf{Im}f$ με έναν μορφισμό $\tilde{f}\colon \mathsf{Coim}f \longrightarrow \mathsf{Im}f$. Προκύπτει δηλαδή το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}f \arrow[r, "\mathsf{ker}f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{coim}f"'] & Y \arrow[r, "\mathsf{coker}f"] & \mathsf{Coker}f \\
 & \mathsf{Coim}f \arrow[ur, dashed, "\phi"] \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & \mathsf{Im}f \arrow[u, "\mathsf{im}f"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το διάγραμμα θα ορίσουμε την έννοια της αβελιανής κατηγορίας.

Ορισμός 1.4.8. *Μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$ θα καλείται* **αβελιανή (abelian)** *αν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Κάθε μορφισμός στην $\mathcal{C}$ έχει έναν πυρήνα και έναν συνπυρήνα.*

2. *Για κάθε μορφισμό f, ο επαγόμενος μορφισμός $\tilde{f}\colon \mathsf{Coim} f \longrightarrow \mathsf{Im} f$ είναι ισομορφισμός.*

Σχόλιο 1.4.9. Συχνά, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία.

Παράδειγμα 1.4.10. Παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα αβελιανών κατηγοριών:

1. Η κατηγορία Ab όλων των αβελιανών ομάδων είναι μία αβελιανή κατηγορία. Η κατηγορία όλων των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων καθώς και η κατηγορία των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων είναι επίσης αβελιανές κατηγορίες.

2. Η υποκατηγορία Ab των ελεύθερων αβελιανών ομάδων δεν είναι αβελιανή κατηγορία.

3. Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε η κατηγορία όλων των sheaves αβελιανών ομάδων στον X είναι μία αβελιανή κατηγορία.

Ακολουθεί ένα ακόμη παράδειγμα στα πλαίσια της θεωρίας προτύπων το οποίο θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια.

Παράδειγμα 1.4.11. Θεωρούμε έναν δακτύλιο R και την κατηγορία των δεξιών R-προτύπων Mod-R. Η κατηγορία Mod-R είναι αβελιανή και η ιδιότητα 2 του παραπάνω ορισμού προκύπτει άμεσα από το θεώρημα ισομορφισμών R-προτύπων.

Από την άλλη πλευρά, η κατηγορία mod-R των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων δεν είναι γενικά αβελιανή, καθώς ο πυρήνας ενός ομομορφισμού μεταξύ δύο πεπερασμένα παραγόμενων πρότυπων δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο. Προκύπτει ωστόσο ότι η mod-R είναι μία αβελιανή κατηγορία αν-ν ο R είναι ένας δακτύλιος της Noether. Οι δακτύλιοι οι οποίοι θα μελετηθούν στη συνέχεια πληρούν αυτήν τη συνθήκη, είναι δηλαδή αριστερά και δεξιά Noetherian.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό μίας αβελιανής κατηγορίας είναι ότι προδίδει νόημα στον ορισμό ακριβών ακολουθιών.

Ορισμός 1.4.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Μία ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} A^n \xrightarrow{f^n} A^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \cdots$$

αντικειμένων και μορφισμών της $\mathcal{A}$ καλείται **ακριβής ακολουθία (exact sequence)** *αν*

$$\mathsf{im} f^{n-1} = \mathsf{ker} f^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ως αποτέλεσμα, η σύνθεση $f^n \circ f^{n-1}\colon A^{n-1} \longrightarrow A^{n+1}$ είναι ο μηδενικός μορφισμός. Μία ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$ καλείται **σύντομη ακριβής ακολουθία (short exact sequence)**.

Στη συνέχεια ορίζουμε την έννοια ενός ακριβή συναρτητή μεταξύ αβελιανών κατηγοριών.

Ορισμός 1.4.13. *Θεωρούμε δύο αβελιανές κατηγορίες $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$. Ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ καλείται* **αριστερά ακριβής (left exact)** *αν για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

η ακολουθία

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$. Δυϊκά, ο F καλείται **δεξιά ακριβής (right exact)** *αν η ακολουθία*

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$.

Από την άλλη πλευρά, αν ο $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής, ο F καλείται αριστερά ακριβής αν για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

η ακολουθία

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$. Δυϊκά, ο F καλείται δεξιά ακριβής αν η ακολουθία

$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$.

Αν ο F είναι αριστερά και δεξιά ακριβής, τότε καλείται **ακριβής (exact)**.

Ως ένα παράδειγμα παραθέτουμε την ακόλουθη χρήσιμη πρόταση:

Παράδειγμα 1.4.14. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία, για κάθε αντικείμενο $\mathcal{A}$ της $\mathcal{C}$ οι συναρτητές $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ και $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A)\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι αριστερά ακριβείς.

Συνεχίζουμε ορίζοντας γενικότερα σε μία τυχαία κατηγορία την έννοια ενός pullback και ενός pushout, σύμφωνα με τους Enochs-Jenda στο [22, Definition 1.3.19.], ενώ θα αναφέρουμε ένα σημαντικό κριτήριο στην περίπτωση που η κατηγορία είναι αβελιανή.

Ορισμός 1.4.15. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία, A, B, C αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon A \longrightarrow C$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Τότε το* **pushout** *των μορφισμών f και g στην $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο D μαζί με μορφισμούς $h\colon B \longrightarrow D$ και $k\colon C \longrightarrow D$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, dashed, "h"] \\ C \arrow[r, dashed, "k"] & D \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

2. *Αν D' είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $k' \colon C \longrightarrow D'$, $h' \colon B \longrightarrow D'$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ έτσι ώστε $k' \circ g = h' \circ f$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u \colon D \longrightarrow D'$ έτσι ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "h'"] & \\ C \arrow[r, "k"'] \arrow[drr, "k'"'] & D \arrow[dr, dashed, "u"] & \\ & & D' \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

να είναι μεταθετικό.

Το διάγραμμα (1.2) καλείται **διάγραμμα pushout**.

Δυϊκά ορίζουμε ένα διάγραμμα pullback.

Ορισμός 1.4.16. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία, A, B, C αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και $f \colon A \longrightarrow C$, $g \colon B \longrightarrow C$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Τότε το* **pullback** *των μορφισμών f και g στην $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο P μαζί με μορφισμούς $h \colon P \longrightarrow A$ και $k \colon P \longrightarrow B$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, dashed, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

2. *Αν P' είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $k' \colon P' \longrightarrow B$, $h' \colon P' \longrightarrow A$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ έτσι ώστε $f \circ h' = g \circ k'$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $v \colon P' \longrightarrow P$ έτσι ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dashed, "v"] \arrow[drr, "h'"] \arrow[ddr, "k'"'] & & \\ & P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

να είναι μεταθετικό.

Το διάγραμμα (1.3) καλείται **διάγραμμα pullback**.

Σχόλιο 1.4.17. Προφανώς, τα διαγράμματα pullback και pushout δεν υπάρχουν πάντα για μία τυχαία κατηγορία $\mathcal{C}$. Από την καθολική ιδιότητα στον ορισμό τους, ωστόσο, προκύπτει ότι αν υπάρχουν, τότε είναι μοναδικά με ακρίβεια ισομορφισμού.

Παράδειγμα 1.4.18. Οι κατασκευές αυτές έχουν σημαντική χρησιμότητα σε ένα μεγάλο εύρος κατηγοριών. Αναφέρουμε ενδεικτικά ότι, στην αλγεβρική τοπολογία, το pushout χρησιμοποιείται στο θεώρημα Seifert-van Kampen για την εύρεση της πρωταρχικής ομάδας ενός τροχιακά συνεκτικού χώρου X, υπό ορισμένες συνθήκες. Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα από pullbacks και pushouts.

1. Στην κατηγορία των συνόλων, ένα pullback των συναρτήσεων συνόλων $f\colon X \longrightarrow Z$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ δίνεται από το σύνολο $X \times_Z Y \subseteq X \times Y$, όπου:
$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$
μαζί με τους περιορισμούς των συναρτητών προβολής $\pi_1\colon X \times Y \longrightarrow X$ και $\pi_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$ στο $X \times_Z Y$.

2. Στην κατηγορία των προτύπων Mod-R, αν οι μορφισμοί $f\colon A \longrightarrow C$ και $g\colon$ του Ορισμού 1.4.16 είναι ομομορφισμοί προτύπων, τότε το πρότυπο
$$P = \{(b, a) \in B \oplus A \mid g(b) = f(a)\}$$
μαζί με τους αντίστοιχους ομομορφισμούς προβολής είναι ένα pullback των f και g.

3. Θεωρώντας πάλι την κατηγορία Mod-R, αν οι μορφισμοί $f\colon A \longrightarrow B$ και $g\colon A \longrightarrow C$ του Ορισμού 1.4.15 είναι ομομορφισμοί προτύπων, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα pushout των f και g θέτοντας $D = (C \oplus B)/K$, όπου $K = \{(g(a) - f(a)) \mid a \in A\}$. Οι μορφισμοί $h\colon B \longrightarrow D$ και $k\colon C \longrightarrow D$ ορίζονται ως $h(b) = (0, b) + K$ και $k(c) = (c, 0) + K$.

Στην περίπτωση των αβελιανών κατηγοριών έχουμε μία πιο εύχρηστη περιγραφή των pullbacks και pushouts:

Πρόταση 1.4.19. *Θεωρούμε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ και ένα μεταθετικό διάγραμμα:*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_b"] \arrow[d, "f_c"'] & B \arrow[d, "g_b"] \\ C \arrow[r, "g_c"] & D \end{tikzcd} \tag{1.4}$$
μορφισμών στην $\mathcal{A}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Το διάγραμμα (1.4) είναι ένα διάγραμμα pullback αν-ν η ακολουθία*
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_b \oplus f_c} B \oplus C \xrightarrow{g_c - g_b} D$$
είναι ακριβής.

2. *Το διάγραμμα (1.4) είναι ένα διάγραμμα pushout αν-ν η ακολουθία*
$$A \xrightarrow{f_b \oplus f_c} B \oplus C \xrightarrow{g_c - g_b} D \longrightarrow 0$$
είναι ακριβής.

3. *Το διάγραμμα (1.4) είναι και ένα διάγραμμα pullback και ένα διάγραμμα pushout αν-ν η ακολουθία*
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_b \oplus f_c} B \oplus C \xrightarrow{g_c - g_b} D \longrightarrow 0$$
είναι ακριβής. Σε αυτήν την περίπτωση το (1.4) θα καλείται **δι-καρτεσιανό τετράγωνο (bicartesian square)**.

Ολοκληρώνουμε το εισαγωγικό κεφάλαιο παραθέτοντας τους ορισμούς ενός ενέσιμου και ενός προβολικού αντικειμένου μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ ακολουθώντας τους [53] και [32]. Άξια αναφοράς είναι η περίπτωση κατά την οποία η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι η mod-R (αντίστοιχα R-mod), δηλαδή η κατηγορία των δεξιών (αντίστοιχα αριστερών) προτύπων πάνω από έναν δακτύλιο R (για περισσότερα βλ. [14]). Τα ενέσιμα αντικείμενα εισήχθηκαν για πρώτη φορά σε αυτό το πλαίσιο από τον R. Baer ο οποίος όρισε την έννοια ενός ενέσιμου προτύπου το 1940, πολύ πριν επινοηθεί η δυϊκή έννοια των προβολικών.

Ορισμός 1.4.20. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένα αντικείμενο I της $\mathcal{A}$ καλείται* **ενέσιμο (injective)** *αν ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε μονομορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ και για κάθε μορφισμό $\alpha\colon X \longrightarrow I$ στην $\mathcal{A}$, υπάρχει ένας μορφισμός $\beta\colon Y \longrightarrow I$ έτσι ώστε $\alpha = \beta \circ f$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists\,\beta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 1.4.21. Ευθύς αμέσως παραθέτουμε δύο παραδείγματα από την θεωρία προτύπων (βλ. [14, §5.2.]).

- Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από έναν δακτύλιο διαίρεσης D, τότε το V αποτελεί ένα ενέσιμο D-πρότυπο.

- Το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι ένα ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο.

Σχόλιο 1.4.22. Προκύπτει ότι αν $\{I_\alpha\}_{\alpha\in I}$ είναι μία οικογένεια ενέσιμων αντικειμένων, τότε το ευθύ γινόμενο $\prod_{\alpha\in I} I_\alpha$ είναι επίσης ένα ενέσιμο αντικείμενο.

Ορισμός 1.4.23. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Θα λέμε ότι η $\mathcal{A}$ έχει* **αρκετά ενέσιμα αντικείμενα** *αν για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{A}$ υπάρχει ένας μονομορφισμός $X \longrightarrow I$, όπου το I είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο.*

Στην συνέχεια της διατριβής, οι κύριες κατηγορίες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή των κεντρικών αποτελεσμάτων θα έχουν αρκετά ενέσιμα αντικείμενα.

Παράδειγμα 1.4.24. Κύρια παραδείγματα κατηγοριών οι οποίες έχουν αρκετά ενέσιμα αντικείμενα αποτελούν οι κατηγορίες mod-R και R-mod των δεξιών και αντίστοιχα αριστερών προτύπων πάνω από έναν δακτύλιο R. Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί και η κατηγορία Sheaves(X) των sheaves σε έναν τοπολογικό χώρο X (βλ. [53, Example 2.3.12]).

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό των ενέσιμων αντικειμένων.

Πρόταση 1.4.25. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και I ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Τότε, το I είναι ενέσιμο αν-ν ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

είναι ακριβής, δηλαδή για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$, η ακολουθία των αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει εύκολα με χρήση της καθολικής ιδιότητας ενός ενέσιμου αντικειμένου. ∎

Ακολουθεί ο ορισμός των προβολικών αντικειμένων σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Η έννοια αυτή εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο [18] όπου εισάγεται ο ορισμός ενός προβολικού προτύπου.

Ορισμός 1.4.26. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένα αντικείμενο P της $\mathcal{A}$ καλείται* **προβολικό (projective)** *αν ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα:*

- *Για κάθε επιμορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ και για κάθε μορφισμό $\alpha\colon P \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{A}$, υπάρχει ένας μορφισμός $\beta\colon P \longrightarrow X$ έτσι ώστε $\alpha = f \circ \beta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\,\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 1.4.27. Στην περίπτωση των προτύπων, τα περισσότερα παραδείγματα προβολικών προτύπων αποτελούν τα ελεύθερα πρότυπα (για περισσότερα βλ. [14, §5.3.]). Συγκεκριμένα, κάθε επίπεδο πρότυπο είναι προβολικό και προκύπτει (βλ. [53, Proposition §2.2.1]) ότι ένα R-πρότυπο είναι προβολικό αν-ν είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου R-προτύπου.

- Όμοια με την περίπτωση των ενέσιμων, αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από έναν δακτύλιο διαίρεσης D, τότε το V είναι ένα προβολικό D-πρότυπο.

- Ο $n \times n$ δακτύλιος πινάκων $\mathbb{M}_n(R)$ είναι προβολικό αντικείμενο σαν ένα $\mathbb{M}_n(R)$-πρότυπο και σαν ένα R-πρότυπο.

Ορισμός 1.4.28. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Θα λέμε ότι η $\mathcal{A}$ έχει* **αρκετά προβολικά αντικείμενα** *αν για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{A}$ υπάρχει ένας επιμορφισμός $P \longrightarrow X$, όπου το P είναι ένα προβολικό αντικείμενο.*

Παράδειγμα 1.4.29. Η κατηγορία $\mathcal{A}$ των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων αποτελεί παράδειγμα κατηγορίας η οποία δεν έχει προβολικά αντικείμενα.

Δυϊκά με την περίπτωση των ενέσιμων υπάρχει ο παρακάτω ισοδύναμος χαρακτηρισμός των προβολικών αντικειμένων:

Πρόταση 1.4.30. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και P ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Τότε, το P είναι προβολικό αν-ν ο συναλλοίωτος συναρτητής*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

είναι ακριβής, δηλαδή για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$, η ακολουθία των αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Z) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [53, Lemma 2.2.3.]. ∎

Το παρακάτω λήμμα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ενός ενέσιμου και ενός προβολικού αντικειμένου

Λήμμα 1.4.31. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και X ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το X είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο της $\mathcal{A}$.*
2. *Το X είναι ένα προβολικό αντικείμενο της δυϊκής κατηγορίας $\mathcal{A}^{\mathsf{op}}$.*

Περισσότερα συμπεράσματα σχετικά με τα ενέσιμα και τα προβολικά αντικείμενα, καθώς και οι ορισμοί ενέσιμων και προβολικών αναλύσεων, θα παρουσιαστούν στο τέταρτο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2

Τοπικοποίηση

2.1 Τοπικοποίηση Κατηγοριών

Η βασική ιδέα της τοπικοποίησης είναι δεδομένης μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μίας κλάσης μορφισμών S, η κατασκευή μίας νέας κατηγορίας $\mathcal{C}[S^{-1}]$ στην οποία οι μορφισμοί της S να είναι αντιστρέψιμοι, αν είναι δυνατόν με καθολικό τρόπο. Αρχικά, παραθέτουμε ένα παράδειγμα από τη μεταθετική άλγεβρα, όπου η τοπικοποίηση παίρνει την ακόλουθη απλούστερη μορφή. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [22, 2.2 Localization].

Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $S \subseteq R$ ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R (δηλαδή, $1 \in S$ και αν $a, b \in S \implies ab \in S$). Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B} = \{(r, s) : r \in R, s \in S\}$ και ορίζουμε μία σχέση επί του $\mathcal{B}$ ως εξής: Θα γράφουμε $(r, s) \sim (r', s')$, αν-ν υπάρχει $u \in S$ με $u(rs' - r's) = 0_R$. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτή η σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathcal{B}$. Τότε, η **τοπικοποίηση** του R ως προς S, η οποία συμβολίζεται με $S^{-1}R$, είναι το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των (r, s) με $r \in R$ και $s \in S$, δηλαδή $S^{-1}R = \mathcal{B}/\sim$.

Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με r/s την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου (r, s), μπορούμε να ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στο $S^{-1}R$ ως εξής:

$$r/s + r'/s' = (rs' + r's)ss'$$

$$(r/s)(r'/s') = (rr'/ss')$$

Προκύπτει ότι αυτές οι πράξεις είναι καλώς ορισμένες και εφοδιάζουν το $S^{-1}R$ με μία δομή μεταθετικού δακτυλίου με μονάδα. Η απεικόνιση

$$f \colon R \longrightarrow S^{-1}R$$

$$r \longmapsto \frac{r}{1}$$

είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων ο οποίος στέλνει στοιχεία του S σε αντιστρέψιμα στοιχεία του $S^{-1}R$ και ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα:

Για κάθε μεταθετικό δακτύλιο R' και για κάθε ομομορφισμό δακτυλίων $g \colon R \longrightarrow R'$ τέτοιον ώστε το στοιχείο $g(s)$ να είναι αντιστρέψιμο για κάθε $s \in S$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $h \colon S^{-1}R \longrightarrow R'$ έτσι ώστε $g = h \circ f$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & S^{-1}R \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"] \\
& R'
\end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 2.1.1. Η ουσιώδης χρησιμότητα της τοπικοποίησης φαίνεται ευθύς αμέσως αν θεωρήσουμε για παράδειγμα τον δακτύλιο $R = \mathbb{Z}$ των ακεραίων και το πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολό του, $S = \mathbb{Z} \setminus \{0_R\}$. Τότε άμεσα βλέπουμε ότι η τοπικοποίηση $S^{-1}\mathbb{Z}$ είναι ισόμορφη με το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

Παράδειγμα 2.1.2. Αν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και P ένα πρώτο ιδεώδες του R, τότε προκύπτει ότι το $S = R \setminus P$ είναι ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Σε αυτήν την περίπτωση, η τοπικοποίηση $S^{-1}R$ συμβολίζεται ως R_P και καλείται η τοπικοποίηση του R στο P.

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και $\mathsf{Mod}\text{-}R$ η κατηγορία των δεξιών R-προτύπων. Αν $S \subseteq R$ είναι ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R, τότε

$$S^{-1}R = \{\, r/s \mid r \in R \text{ και } s \in S \,\}$$

είναι η τοπικοποίηση του R ως προς S. Για κάθε δεξιό R-πρότυπο M η τοπικοποίηση του M ως προς S ορίζεται ως

$$S^{-1}M = \{\, m/s \mid m \in M \text{ και } s \in S \,\}$$

(βλ. [36, 2.9. Example: Localization of modules]). Μέσω του ομομορφισμού δακτυλίων $R \longrightarrow S^{-1}R$ κάθε δεξιό $S^{-1}R$-πρότυπο M μετατρέπεται σε ένα δεξιό R-πρότυπο και η κατηγορία $\mathsf{Mod}\text{-}S^{-1}R$ αποτελεί μία πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{Mod}\text{-}R$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα παραπάνω σαν έναυσμα, είμαστε σε θέση να ορίσουμε την έννοια της τοπικοποίησης για μία τυχούσα κατηγορία ως προς μία κλάση μορφισμών.

Ορισμός 2.1.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία και S μία κλάση μορφισμών στην $\mathcal{A}$. Μία* **τοπικοποίηση** *της $\mathcal{A}$ ως προς S καλείται μία κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ και ένας συναρτητής $Q \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ έτσι ώστε να πληρούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Ο μορφισμός $Q(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $s \in S$.*

2. *Για κάθε κατηγορία $\mathcal{B}$ και για κάθε συναρτητή $F \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ τέτοιον ώστε ο μορφισμός $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $s \in S$, υπάρχει μοναδικός (με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού συναρτητών) συναρτητής $G \colon \mathcal{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{B}$ έτσι ώστε $F = G \circ Q$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα συναρτητών είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{A}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\, G"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Από τον ορισμό της, η τοπικοποίηση είναι μοναδική με την παρακάτω έννοια:

Πρόταση 2.1.5. *Η τοπικοποίηση μίας κατηγορίας $\mathcal{A}$ ως προς μία κλάση μορφισμών S, αν υπάρχει, είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών.*

Απόδειξη. Έστω $(\mathcal{C}, Q)$ και $(\mathcal{C}', Q')$ δύο ζεύγη που ικανοποιούν τις συνθήκες μίας τοπικοποίησης της κατηγορίας $\mathcal{A}$ ως προς την κλάση S. Τότε, λόγω της καθολικής ιδιότητας (ιδιότητα 2 του Ορισμού 2.1.4) υπάρχουν συναρτητές $G \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $H \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ έτσι ώστε $Q' = G \circ Q$ και $Q = H \circ Q'$. Το παρακάτω διάγραμμα συναρτητών, είναι δηλαδή μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q'"'] & \mathcal{C} \arrow[dl, bend left, "G"] \\ \mathcal{C}' \arrow[ur, bend left, "H"] & \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, έχουμε: $Q = H \circ Q' = H \circ (G \circ Q) = (H \circ G) \circ Q$ και αποκτούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{C} \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[ur, bend right, "H \circ G"'] & \end{tikzcd}$$

όπου $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$ είναι ο ταυτοτικός συναρτητής στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Από την ιδιότητα 2 πάλι, θα υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός συναρτητών μεταξύ των $H \circ G$ και $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$, δηλαδή $H \circ G \cong \mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$. Ανάλογα, έχουμε: $Q' = G \circ Q = G \circ (H \circ Q') = (G \circ H) \circ Q'$ και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "Q'"] \arrow[d, "Q'"'] & \mathcal{C}' \\ \mathcal{C}' \arrow[ur, bend left, "\mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}"] \arrow[ur, bend right, "G \circ H"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Άρα, $G \circ H \cong \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$ και οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι ισοδύναμες. ■

Σχόλιο 2.1.6. Στα παρακάτω, όταν θεωρούμε μία κατηγορία $\mathcal{A}$ και την τοπικοποίηση αυτής $\mathcal{A}[S^{-1}]$, με Q συνήθως θα συμβολίζουμε τον συναρτητή $Q \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ του Ορισμού 2.1.4, ο οποίος καλείται **συναρτητής τοπικοποίησης** της $\mathcal{A}$ ως προς S.

Παρατήρηση 2.1.7. Σε αυτό το σημείο, είναι φυσικό κάποιος να αναρωτηθεί για την ύπαρξη της τοπικοποίησης $\mathcal{A}[S^{-1}]$ για μία τυχαία κατηγορία ως προς μία αυθαίρετη κλάση μορφισμών. Το ζήτημα αυτό, το οποίο είναι ουσιαστικά συνολοθεωρητικής φύσεως, δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα καθώς στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι **μικρή** (δηλαδή η κλάση των αντικειμένων της είναι ένα σύνολο) ή όταν η κλάση μορφισμών S είναι σύνολο, η τοπικοποίηση πάντα υπάρχει. Για μία σκιαγράφηση της απόδειξης, βλ. [39, Theorem 1.1.1] ή [25, Chapter III. §2]. Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ ή η κλάση S δεν είναι σύνολα, προκύπτει ένα ευαίσθητο συνολοθεωρητικό ζήτημα, καθώς δεν γνωρίζουμε, για παράδειγμα, αν η κλάση μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(A, B)$ είναι σύνολο (βλ. [53, Set-Theoretic Remark 10.3.3.]).

Όπως αναφέρθηκε, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, η τοπικοποίηση της $\mathcal{A}$ ως προς την κλάση μορφισμών S, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά, πάντοτε θα υποθέτουμε ότι υπάρχει. Ωστόσο, χωρίς επιπλέον πληροφορία, ακόμα και στην περίπτωση που οι $\mathcal{A}$ και S είναι σύνολα, είναι δύσκολο να προβούμε σε περαιτέρω συμπεράσματα για την $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Για τον λόγο αυτό θα επικεντρωθούμε σε ένα συγκεκριμένο είδος κλάσεων μορφισμών οι οποίες επιτρέπουν μία πιο πλουσιότερη περιγραφή της τοπικοποίησης.

Ορισμός 2.1.8. *Μία κλάση μορφισμών S σε μία κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται* **τοπικοποιούσα κλάση (localizing class)** *αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(LC1): *Για κάθε αντικείμενο M στην $\mathcal{A}$, ο ταυτοτικός μορφισμός $1_M \colon M \longrightarrow M$ ανήκει στην S.*

(LC2): *Αν οι s, t είναι δύο μορφισμοί στην S, η σύνθεσή τους $s \circ t$ είναι επίσης στην S.*

(LC3): (a) *Για οποιοδήποτε ζεύγος μορφισμών $f \colon M \longrightarrow N$ και $s \colon L \longrightarrow N$ με $s \in S$, υπάρχουν μορφισμοί $g \colon K \longrightarrow L$ και $t \colon K \longrightarrow M$ με $t \in S$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να* *είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t"'] & L \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

(b) *Για οποιοδήποτε ζεύγος μορφισμών $f\colon N \longrightarrow M$ και $s\colon N \longrightarrow L$ με $s \in S$, υπάρχουν μορφισμοί $g\colon L \longrightarrow K$ και $t\colon M \longrightarrow K$ με $t \in S$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} K & L \arrow[l, dashed, "g"'] \\ M \arrow[u, dashed, "t"] & N \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

(LC4): *Αν $f, g\colon M \longrightarrow N$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{A}$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Υπάρχει μορφισμός $s\colon N \longrightarrow X$ με $s \in S$, έτσι ώστε $s \circ f = s \circ g$.*
2. *Υπάρχει μορφισμός $t\colon Y \longrightarrow M$ με $t \in S$, έτσι ώστε $f \circ t = g \circ t$.*

Οι συνθήκες (LC3a) και (LC3b) καλούνται και Συνθήκες Ore (π.χ. βλ. [31, Lemma 7.11] ή [53, Definition 10.3.4]), από τον Νορβηγό μαθηματικό Øystein Ore, ο οποίος εισήγαγε ανάλογες συνθήκες για δακτυλίους το 1931 (βλ. [45]).

Σχόλιο 2.1.9. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{A}$, συχνά, για να δηλώσουμε ότι ένας μορφισμός $s\colon X \longrightarrow Y$ σε ένα διάγραμμα ανήκει στην S, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sim$ γράφοντας: $X \underset{\sim}{\overset{s}{\longrightarrow}} Y$

Σχόλιο 2.1.10. Βλέπουμε εύκολα, ότι αν η S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$, η S είναι επίσης μία τοπικοποιούσα κλάση στην δυϊκή κατηγορία $\mathcal{A}^{op}$.

Παρατήρηση 2.1.11. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία κατηγορία και S μία οικογένεια ισομορφισμών στην $\mathcal{A}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (LC1) και (LC2), τότε, η S προκύπτει ότι είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$. Πράγματι, ελέγχοντας αν η S ικανοποιεί τις υπόλοιπες συνθήκες του Ορισμού 2.1.8 έχουμε:

(LC3): (a) Έστω οι μορφισμοί $f\colon M \longrightarrow N$ και $s\colon L \longrightarrow N$ με $s \in S$. Θέτοντας $K = M, t = 1_M$ και $g = s^{-1} \circ f$, έχουμε άμεσα ότι ο g είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$ και ακόμη, αφού η S ικανοποιεί την (LC1), έπεται ότι $t \in S$. Έτσι, έχουμε $s \circ g = s \circ s^{-1} \circ f = f = f \circ t$ και η (LC3a) ικανοποιείται.

(b) Έστω τώρα οι μορφισμοί $f\colon N \longrightarrow M$ και $s\colon N \longrightarrow L$. Θέτοντας $K = M, t = 1_M$ και $g = f \circ s^{-1}$, προκύπτει όπως πριν ότι ο g είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$ και $t \in S$ ενώ $g \circ s = f \circ s^{-1} \circ s = f = t \circ f$.

(LC4): Έστω $f, g\colon M \longrightarrow N$ μορφισμοί στην $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μορφισμός $s\colon N \longrightarrow X$ με $s \in S$, έτσι ώστε $s \circ f = s \circ g$. Τότε, αφού ο s είναι ισομορφισμός έχουμε:

$$s^{-1} \circ s \circ f = s^{-1} \circ s \circ g \Longleftrightarrow f = g \Longleftrightarrow f \circ 1_M = g \circ 1_M$$

Ομοίως, αν $t\colon Y \longrightarrow M$ είναι ένας μορφισμός με $t \in S$ έτσι ώστε $f \circ t = g \circ t$, τότε

$$f \circ t \circ t^{-1} = g \circ t \circ t^{-1} \Longleftrightarrow f = g \Longleftrightarrow 1_N \circ f = 1_N \circ g$$

Λόγω της (LC1), οι ταυτοτικοί μορφισμοί 1_M και 1_N ανήκουν στην S και συνεπώς η S πληροί την ιδιότητα (LC4),

Επομένως η S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$.

Η τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών S, ουσιαστικά αποτελεί μία γενίκευση του πολλαπλασιαστικά κλειστού υποσυνόλου S ενός δακτυλίου R που χρησιμοποιήθηκε στην αρχή του κεφαλαίου για την τοπικοποίηση στην μεταθετική περίπτωση. Έτσι, μία τοπικοποιούσα κλάση συχνά καλείται και πολλαπλασιαστικό σύστημα (multiplicative system) (για παράδειγμα βλ. [52, §2.1.1] και [28, §3]). Ακολουθώντας τον Milicic στο [39], στα παρακάτω θα διατηρηθεί η ονομασία «τοπικοποιούσα κλάση» για την S.

2.2 Κλάσματα

Σκοπός της συγκεκριμένης ενότητας είναι δοσμένου μίας κατηγορίας $\mathcal{A}$ και μίας τοπικοποιούσας κλάσης S, η κατασκευή μίας κατηγορίας η οποία θα είναι ισοδύναμη με την τοπικοποίηση $\mathcal{A}[S^{-1}]$ της $\mathcal{A}$ ως προς S και για τους μορφισμούς της οποίας θα έχουμε μία εύχρηστη περιγραφή.

Μία τέτοια κατηγορία, εισάγεται από τους Gabriel και Zisman στο [24] και καλείται κατηγορία κλασμάτων (category of fractions), αν και η ιδέα της αντιστροφής στοιχείων είναι ακόμη παλαιότερη, για παράδειγμα βλ. [45]. Οι μορφισμοί σε αυτήν τη νέα κατηγορία είναι κλάσεις ισοδυναμίας διαγραμμάτων που καλούνται κλάσματα (fractions) και μεταξύ αυτών ορίζονται σχέσεις οι οποίες δημιουργούν έναν «λογισμό κλασμάτων» (calculus of fractions).

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διατριβής, θα χρησιμοποιηθεί μία ελαφρώς διαφορετική ορολογία, σύμφωνα με τους [39] και [25] η οποία και θεμελιώνεται στην συνέχεια.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{A}$. Για $M, N \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$, ένα* **αριστερό roof** *μεταξύ των M και N καλείται ένα διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

όπου $s \in S$, το οποίο και θα συμβολίζεται με (s, f).
Δυϊκά, ορίζουμε ένα **δεξιό roof** *μεταξύ των M και N ως ένα διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd} & L & \\ M \arrow[ur, "g"] & & N \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

όπου $t \in S$, το οποίο και θα συμβολίζουμε με (g, t).

Όπως αναφέρθηκε, ένα αριστερό (αντίστοιχα δεξιό) roof συχνά καλείται και ένα αριστερό (αντίστοιχα δεξιό) κλάσμα, για παράδειγμα βλ. [53].

Παρατήρηση 2.2.2. Βλέπουμε ότι μεταβαίνοντας από την $\mathcal{A}$ στην δυϊκή κατηγορία $\mathcal{A}^{op}$ ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

μεταξύ των M και N, μετατρέπεται σε δεξιό roof μεταξύ των N και M:

$$\begin{tikzcd}
 & L & \\
N \arrow[ur, "f"] & & M \arrow[ul, "s"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Λόγω αυτής της δυϊκότητας, λοιπόν, μπορούμε να επικεντρωθούμε για την ώρα μόνο στη μελέτη των αριστερών roofs.

Ορισμός 2.2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία και:*

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & M & & N
\end{tikzcd}$$

δύο αριστερά roofs μεταξύ των αντικειμένων M και N της $\mathcal{A}$. Τότε, θα λέμε ότι τα δύο παραπάνω roofs είναι **ισοδύναμα** *και θα γράφουμε $(s, f) \sim (t, g)$, αν υπάρχει αντικείμενο $H \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $p\colon H \longrightarrow L$ και $q\colon H \longrightarrow K$ έτσι ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & H \arrow[u, dashed, "p"] \arrow[d, dashed, "q"'] & N \\
 & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και επιπλέον $s \circ p = t \circ q \in S$.

Το ακόλουθο λήμμα δικαιολογεί την ονομασία «σχέση ισοδυναμίας» που δόθηκε στην παραπάνω σχέση.

Λήμμα 2.2.4. *Η σχέση $\sim$ μεταξύ αριστερών roofs που ορίστηκε στον Ορισμό 2.2.3, είναι μία σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε αν η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
<u>Ανακλαστική</u>: Θεωρώντας το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & L \arrow[u, "1_L"] \arrow[d, "1_L"'] & N \\
 & L \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

βλέπουμε άμεσα ότι $(s, f) \sim (s, f)$, δηλαδή κάθε αριστερό roof είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του και η σχέση είναι ανακλαστική.
Συμμετρική: Έστω ότι το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Τότε θα υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & H \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & N \\ & K \arrow[ul, "\sim", "t"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

το οποίο και άμεσα εξασφαλίζει ότι και το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Έτσι, $(s, f) \sim (t, g) \Longrightarrow (t, g) \sim (s, f)$ και η σχέση είναι συμμετρική.
Μεταβατική: Υποθέτουμε ότι τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα, όπως και τα:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Έχουμε δηλαδή $(s, f) \sim (t, g)$ και $(t, g) \sim (u, h)$. Τότε, υπάρχουν αντικείμενα $P, Q \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί

$$p\colon P \longrightarrow L,\ q\colon P \longrightarrow K$$

$$r\colon Q \longrightarrow K,\ v\colon Q \longrightarrow H$$

έτσι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & P \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"'] & N \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{και} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & Q \arrow[u, "r"'] \arrow[d, "v"'] & N \\ & H \arrow[ul, "u", "\sim"'] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικά με $s \circ p = t \circ q \in S$ και $u \circ v = t \circ r \in S$. Θεωρούμε τους μορφισμούς $s \circ p\colon P \longrightarrow M$ και $t \circ r\colon Q \longrightarrow M$. Εφόσον $t \circ r \in S$, από την συνθήκη (LC3a) του Ορισμού 2.1.8, θα υπάρχει $R \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $z\colon R \longrightarrow P$ και $\alpha\colon R \longrightarrow Q$ με $z \in S$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "z"', "\sim"] & Q \arrow[d, "t \circ r", "\sim"'] \\ P \arrow[r, "s \circ p"'] & M \end{tikzcd}$$

Στην συνέχεια, θέτουμε $b = q \circ z\colon R \longrightarrow K$ και $c = r \circ \alpha\colon R \longrightarrow K$. Από την μεταθετικότητα των παραπάνω διαγραμμάτων έχουμε:

$$t \circ b = t \circ q \circ z = s \circ p \circ z = t \circ r \circ a = t \circ c$$

Άρα, από την (LC4), αφού $t \in S$, υπάρχει $T \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ και $w\colon T \longrightarrow R$ στην S έτσι ώστε $b \circ w = c \circ w$. Τώρα, θέτουμε $x = p \circ z \circ w\colon T \longrightarrow L$ και $y = v \circ \alpha \circ w\colon T \longrightarrow H$. Τότε:

$$s \circ x = s \circ p \circ z \circ w = t \circ r \circ \alpha \circ w = u \circ v \circ \alpha \circ w = u \circ y$$

Αφού οι μορφισμοί $s \circ p, z, w$ ανήκουν στην S, έχουμε $s \circ x = u \circ y \in S$. Επιπλέον,

$$h \circ y = h \circ v \circ \alpha \circ w = g \circ r \circ \alpha \circ w = g \circ c \circ w = c \circ b \circ w = g \circ q \circ z \circ w = f \circ p \circ z \circ w = f \circ x$$

δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & T \arrow[u, "x"] \arrow[d, "y"'] & N \\
& H \arrow[ul, "u", "\sim"'] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επομένως τα roofs:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & H \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\
M & & N & M & & N
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα, συνεπώς $(s, f) \sim (u, g)$ και η σχέση είναι μεταβατική. ∎

Σχόλιο 2.2.5. Συχνά θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof (s, f) ως προς την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με f/s.

Παρατήρηση 2.2.6. Χωρίς επιπλέον συνθήκες, η κλάση ισοδυναμίας f/s αριστερών roofs δεν αποτελεί απαραίτητα ένα σύνολο. Σύμφωνα με τον Weibel στο [53], μία συνθήκη για την τοπικοποιούσα κλάση S η οποία εξασφαλίζει ότι η κλάση f/s είναι ένα σύνολο είναι η ακόλουθη:

Μία τοπικοποιούσα κλάση S σε μία κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται «τοπικά μικρή από τα αριστερά» ("locally small on the left"), αν για κάθε αντικείμενο M υπάρχει ένα σύνολο μορφισμών S_M στην S οι οποίοι καταλήγουν στο M, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $M_1 \longrightarrow M$ στην S, υπάρχει ένας μορφισμός $M_2 \longrightarrow M_1$ στην $\mathcal{A}$ έτσι ώστε η σύνθεση $M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M$ να ανήκει στην S_M. Αν η S λοιπόν, είναι τοπικά μικρή από τα αριστερά, τότε η κλάση f/s είναι πάντοτε ένα σύνολο (βλ. [53, 10.3.6]).

Από δω και στο εξής, θα θεωρούμε ότι πληρούνται οι αναγκαίες συνθήκες ώστε η παραπάνω κλάση μορφισμών να αποτελεί πάντοτε ένα σύνολο.

Ανάλογα, ορίζουμε μία σχέση στα δεξιά roofs για την οποία χάριν σύμβασης θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό.

Ορισμός 2.2.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία και:*

$$\begin{tikzcd}
& L & & & K & \\
M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] & M \arrow[ur, "g"] & & N \arrow[ul, "t"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

δύο δεξιά roofs μεταξύ των αντικειμένων M και N της $\mathcal{A}$. Τότε, θα λέμε ότι τα δύο παραπάνω roofs είναι **ισοδύναμα** *και θα γράφουμε $(f, s) \sim (g, t)$, αν υπάρχει αντικείμενο $H \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί*

$p\colon L \longrightarrow H$ και $q\colon K \longrightarrow H$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[d, dashed, "p"] & \\
M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & H & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[dl, "t", "\sim"'] \\
 & K \arrow[u, dashed, "q"] &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και επιπλέον $p \circ s = q \circ t \in S$.

Λήμμα 2.2.8. *Η παραπάνω σχέση μεταξύ δύο δεξιών roofs είναι μία σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 2.2.4. ■

Σχόλιο 2.2.9. Συχνά, θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof (g, t) ως προς την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με t/g.

Παρατήρηση 2.2.10. Παρόμοια με την περίπτωση των αριστερών roofs, δεν είναι απαραίτητο η κλάση ισοδυναμίας t/g δεξιών roofs να είναι σύνολο. Ωστόσο, εισάγοντας μία συνθήκη για την τοπικοποιούσα κλάση S, απαιτώντας η τελευταία να είναι «τοπικά μικρή από τα δεξιά» μπορούμε να παραβλέψουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Η συνθήκη αυτή, είναι δυϊκή της συνθήκης που αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 2.2.6 και εξασφαλίζει ότι η κλάση ισοδυναμίας t/g αποτελεί ένα σύνολο. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [53, 10.3.6].

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε μία σύνθεση στις κλάσεις ισοδυναμίας των roofs αναλύοντας αρχικά μόνο την περίπτωση των αριστερών roofs.

Ορισμός 2.2.11. *Έστω:*

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

ένα αριστερό roof μεταξύ των M και N και:

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
N & & P
\end{tikzcd}$$

ένα αριστερό roof μεταξύ των N και P. Από την συνθήκη (LC3a) *υπάρχει αντικείμενο $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $h\colon U \longrightarrow K$ και $u\colon U \longrightarrow L$ με $u \in S$ έτσι ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, dashed, "u"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \\
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Ως **σύνθεση** *λοιπών των δύο αυτών αριστερών roofs ορίζουμε το παρακάτω αριστερό roof μεταξύ των M και P:*

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ M & & P \end{tikzcd}$$

Πρόταση 2.2.12. *Η κλάση ισοδυναμίας $(g\circ h)/(s\circ u)$ της σύνθεσης δύο αριστερών roofs (s,f) και (t,g), είναι ανεξάρτητη της επιλογής των U, u και h και εξαρτάται μόνο από τις κλάσεις ισοδυναμίας f/s και g/t των δύο roofs.*

Απόδειξη. Αρχικά, θα εξετάσουμε την εξάρτηση στο πρώτο αριστερό roof. Έστω:

$$\begin{tikzcd} & L' \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

ένα ισοδύναμο roof με το:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Τότε θα υπάρχει αντικείμενο $V \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $v\colon V \longrightarrow L$, $v'\colon L \longrightarrow L'$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & V \arrow[u, "v"] \arrow[d, "v'"'] & N \\ & L' \arrow[ul, "s'", "\sim"'] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν την ($\mathsf{LC3a}$), συνθέτοντας τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & M & & N \end{tikzcd}$$

προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, dashed, "u"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \\
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

ενώ συνθέτοντας τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

αποκτούμε το:

$$\begin{tikzcd}
 & & U' \arrow[dl, dashed, "u'"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h'"] & & \\
 & L' \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & & P
\end{tikzcd}$$

Θα δείξουμε ότι τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\
M & & P
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[dl, "s'\circ u'"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ h'"] & \\
M & & P
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα. Εφαρμόζοντας την (LC3a) δύο φορές κατάλληλα, βρίσκουμε αντικείμενα W, W' και καθώς και μορφισμούς $\alpha\colon W \longrightarrow U$, $\alpha'\colon W' \longrightarrow U'$ και $w\colon W \longrightarrow V$, $w'\colon W' \longrightarrow V$ με $w, w' \in S$, έτσι ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "w"', "\sim"] & U \arrow[d, "\sim"', "u"] \\
V \arrow[r, "v"'] & L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, dashed, "\alpha'"] \arrow[d, dashed, "w'"', "\sim"] & U' \arrow[d, "\sim"', "u'"] \\
V \arrow[r, "v"'] & L'
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την ιδιότητα (LC3a), βλέπουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο R και μορφισμοί

$r\colon R \longrightarrow W$, $r'\colon R \longrightarrow W'$ με $r, r' \in S$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dashed, "r"] \arrow[d, dashed, "r'"', "\sim"] & W \arrow[d, "w", "\sim"'] \\ W' \arrow[r, "w'"'] & V \end{tikzcd}$$

να μετατίθεται. Τώρα, αφού $s', u', w', r' \in S$, τότε και ο μορφισμός

$$s \circ u \circ \alpha \circ r = s \circ v \circ w \circ r = s' \circ v' \circ w' \circ r' = s' \circ u' \circ \alpha' \circ r'$$

ανήκει στην S. Επιπλέον,

$$t \circ h \circ \alpha \circ r = f \circ u \circ \alpha \circ r = f \circ v \circ w \circ r = f' \circ v' \circ w' \circ r' = f' \circ u' \circ \alpha' \circ r' = t \circ h' \circ \alpha' \circ r$$

και από την ιδιότητα (LC4), θα υπάρχει ένα αντικείμενο Q και ένας μορφισμός $r\colon Q \longrightarrow R$ με $r \in S$, έτσι ώστε $h \circ \alpha \circ r \circ q = h' \circ \alpha' \circ r' \circ q$. Θέτοντας τώρα $b = \alpha \circ r \circ q\colon Q \longrightarrow U$ και $b' = \alpha' \circ r' \circ q'\colon Q \longrightarrow U'$, έχουμε ότι και ο μορφισμός

$$s \circ u \circ b = s \circ u \circ \alpha r \circ q = s' \circ u' \circ \alpha' \circ r' \circ q = s' \circ u' \circ b'$$

ανήκει στην S και $g \circ h \circ b = g \circ h' \circ b'$, δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ M & Q \arrow[u, "b"] \arrow[d, "b'"'] & P \\ & U' \arrow[ul, "s'\circ u'", "\sim"'] \arrow[ur, "g\circ h'"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Άρα τα αριστερά roofs $s \circ u, g \circ h$ και $s' \circ u', g \circ h'$ είναι ισοδύναμα. Ομοίως, ελέγχουμε την εξάρτηση στο δεύτερο αριστερό roof (βλ. [39, σελ. 14]). Βλέπουμε επομένως ότι η σύνθεση δύο αριστερών roofs είναι καλώς ορισμένη στις κλάσεις ισοδυναμίας και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των U, u και h. ∎

Σχόλιο 2.2.13. Η παραπάνω διαδικασία που περιγράψαμε ουσιαστικά ορίζει μία απεικόνιση στις παρακάτω κλάσεις:

$$\begin{pmatrix} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας αρ.} \\ \\ \text{roofs μεταξύ των } M \text{ και } N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας αρ.} \\ \\ \text{roofs μεταξύ των } N \text{ και } P \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \text{Κλάσεις ισοδυναμίας αρ.} \\ \\ \text{roofs μεταξύ των } M \text{ και } P \end{pmatrix}$$

Η ονομασία λοιπόν «σύνθεση αριστερών roofs» χρησιμοποιείται χάριν σύμβασης και αποτελεί κατάχρηση της γλώσσας. Συνεπώς, μπορούμε να συμβολίσουμε την σύνθεση των αριστερών roofs του Ορισμού 2.2.11 με

$$(g/t) \circ (f/s) = (g \circ h)/(s \circ u)$$

Δυϊκά, ορίζεται και η σύνθεση δύο δεξιών roofs.

Ορισμός 2.2.14. *Έστω:*

$$\begin{tikzcd} & L & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

ένα δεξιό roof μεταξύ των M και N και:

$$\begin{tikzcd} & K & \\ N \arrow[ur, "g"] & & P \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

ένα δεξιό roof μεταξύ των N και P. Από την συνθήκη (LC3b) *υπάρχει αντικείμενο $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $h\colon L \longrightarrow U$ και $u\colon K \longrightarrow U$ με $u \in S$ έτσι ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} & & U & & \\ & L \arrow[ur, dashed, "h"] & & K \arrow[ul, dashed, "u"', "\sim"] & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[ur, "g"] & & P \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Ως **σύνθεση** *λοιπών των δύο αυτών δεξιών roofs ορίζουμε το παρακάτω δεξιό roof μεταξύ των M και P:*

$$\begin{tikzcd} & U & \\ M \arrow[ur, "h \circ f"] & & P \arrow[ul, "u \circ t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

ενώ θα γράφουμε $(t/g) \circ (s/f) = (u \circ t)/(h \circ f)$.

Επιστρέφοντας τώρα στη μελέτη των αριστερών roofs και έχοντας ορίσει μία πράξη σύνθεσης σε αυτά, μπορούμε να ορίσουμε μία κατηγορική δομή με τον εξής τρόπο:

- Τα αντικείμενα της νέας κατηγορίας είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{A}$.
- Ένας μορφισμός μεταξύ δύο αντικειμένων M και N θα είναι η κλάση ισοδυναμίας f/s ενός αριστερού roof της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Αυτό θεμελιώνεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.15. *Τα αντικείμενα της $\mathcal{A}$ με μορφισμούς τις κλάσεις ισοδυναμίας από αριστερά roofs σχηματίζουν μία κατηγορία την οποία και συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_S^l$.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη συζήτηση, έχουμε ορίσει μία πράξη σύνθεσης μεταξύ των αριστερών roofs η οποία και θα δείξουμε ότι είναι προσεταιριστική:
Έστω $M, N, P, Q \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$. Θεωρούμε τα παρακάτω αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ N & & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "v"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ P & & Q \end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας την (LC3a) επανειλημμένα τρεις φορές προκύπτει ένα διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & & & W \arrow[dl, dashed, "w"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "m"] & & & \\ & & X \arrow[dl, dashed, "x"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "k"] & & Y \arrow[dl, dashed, "y"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "l"] & & \\ & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "v"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ M & & N & & P & & Q \end{tikzcd}$$

από το οποίο και βλέπουμε ότι η σύνθεση $(g/u) \circ (f/s)$ αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "s \circ x"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ k"] & \\ M & & P \end{tikzcd}$$

και η σύνθεση $(h/v) \circ ((g/u) \circ (f/s)) = (h/v) \circ ((g \circ k)/(s \circ x))$ αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s \circ x \circ w"', "\sim"] \arrow[dr, "h \circ l \circ m"] & \\ M & & Q \end{tikzcd}$$

Ανάλογα, η συνθεση $(h/v) \circ (g/u)$ αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "u \circ y"', "\sim"] \arrow[dr, "h \circ l"] & \\ N & & Q \end{tikzcd}$$

και η σύνθεση $((h/v) \circ (g/u)) \circ (f/s) = ((h \circ l)/(u \circ y)) \circ (f/s)$ αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s \circ x \circ w"', "\sim"] \arrow[dr, "h \circ l \circ m"] & \\ M & & Q \end{tikzcd}$$

Επομένως έχουμε $(h/v) \circ ((g/u) \circ (f/s)) = ((h/v) \circ (g/u)) \circ (f/s)$ και η σύνθεση είναι προσεταιριστική.

Μένει να ορίσουμε έναν ταυτοτικό μορφισμό στην $\mathcal{A}_S^l$. Θεωρούμε το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\
M & & M
\end{tikzcd}$$

και βλέπουμε ότι για ένα τυχόν αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_L"] & & \\
& M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & M & & N
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Συμπεραίνουμε επομένως ότι $(f/s) \circ (1_M/1_M) = 1_M/1_M$. Ανάλογα, και το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & \\
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & L \arrow[dl, "1_N"', "\sim"] \arrow[dr, "1_N"] & \\
M & & N & & N
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και συνεπώς έχουμε ότι $(1_N/1_N) \circ (f/s) = f/s$. Έτσι, για κάθε στοιχείο $M \in$ ob$(\mathcal{A}_S^l)$, η κλάση ισοδυναμίας $1_M/1_M$ αποτελεί τον ταυτοτικό μορφισμό του M στην $\mathcal{A}_S^l$. ■

Λαμβάνοντας υπόψιν την έννοια της μοναδικότητας που δόθηκε στην τοπικοποίηση από την Πρόταση 2.1.5, το παρακάτω θεώρημα μας επιτρέπει να περιγράψουμε μέσω της $\mathcal{A}_S^l$ την τοπικοποίηση μίας τυχούσας κατηγορίας $\mathcal{A}$ ως προς μία τοπικοποιούσα κλάση S.

Θεώρημα 2.2.16. *Η κατηγορία $\mathcal{A}_S^l$ αποτελεί μία τοπικοποίηση της $\mathcal{A}$ ως προς την κλάση S.*

Απόδειξη. Αρχικά θα ορίσουμε έναν συναρτητή Q από την κατηγορία $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{A}_S^l$ ως εξής:

- Για κάθε $M \in$ ob$(\mathcal{A})$ θέτουμε $Q(M) = M$, δηλαδή ο Q είναι η ταυτότητα στα αντικείμενα.

- Για κάθε μορφισμό $f\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathcal{A}$, θέτουμε ως $Q(f)$ την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

  δηλαδή $Q(f) = f/1_M$.

Ευθύς αμέσως, εξετάζουμε αν ο Q αποτελεί έναν συναρτητή κατηγοριών.

Ο Q διατηρεί τον ταυτοτικό μορφισμό $1_M : M \longrightarrow M$ για κάθε αντικείμενο M, αφού $Q(1_M) = 1_M/1_M$, δηλαδή η εικόνα $Q(1_M)$ του 1_M είναι η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

που αποτελεί τον ταυτοτικό μορφισμό στο M στην $\mathcal{A}^l_S$.

Ο Q διατηρεί τη σύνθεση των μορφισμών, αφού αν θεωρήσουμε δύο μορφισμούς $f\colon M \longrightarrow N$ και $g\colon N \longrightarrow P$ στην $\mathcal{A}$, αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & \\ & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & N \arrow[dl, "1_N"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & & P \end{tikzcd}$$

Δηλαδή η σύνθεση $Q(g) \circ Q(f)$ αναπαριστάται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ M & & P \end{tikzcd}$$

και $Q(g) \circ Q(f) = (g/1_N) \circ (f/1_M) = (g \circ f)/1_M$. Επιπλέον, ο $Q(g \circ f)$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ M & & P \end{tikzcd}$$

δηλαδή $Q(g \circ f) = (g \circ f)/1_M = Q(g) \circ Q(f)$ και ο Q είναι ένας συναρτητής: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^l_S$.

Έστω τώρα ένας μορφισμός $s\colon M \longrightarrow N$ με $s \in S$ και η εικόνα του, $Q(s)$, η οποία αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Από το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & & \\
& M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & & M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\
M & & N & & M
\end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι $(1_M/s) \circ Q(s) = (1_M/s) \circ (s/1_M) = 1_M/1_M$, δηλαδή η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\
N & & M
\end{tikzcd}$$

είναι ένας δεξιός αντίστροφος του $Q(s)$. Συνθέτοντας με την αντίθετη σειρά:

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & & \\
& M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
N & & M & & M
\end{tikzcd}$$

προκύπτει το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
N & & N
\end{tikzcd}$$

Έχουμε δηλαδή ότι $Q(s) \circ (1_M/s) = (s/1_M) \circ (1_M/s) = s/s$. Από το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
N & M \arrow[u, "1_M"'] \arrow[d, "s"'] & N \\
& N \arrow[ul, "1_N", "\sim"'] \arrow[ur, "1_N"'] &
\end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι τα αριστερά roofs (s, s) και $(1_N, 1_N)$ είναι ισοδύναμα, συνεπώς οι κλάσεις ισοδυναμίας τους είναι ίσες και $Q(s) \circ (1_M/s) = 1_N/1_N$. Άρα η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\ N & & M \end{tikzcd}$$

είναι ο αντίστροφος μορφισμός του $Q(s)$ στην $\mathcal{A}_S^l$ και έτσι για κάθε $s \in S$ ο $Q(s)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{A}_S^l$.

Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_S^l$ ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα της τοπικοποίησης της $\mathcal{A}$ ως προς S. Έστω $\mathcal{B}$ μία κατηγορία και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας συναρτητής, ώστε ο $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $s \in S$. Θα κατασκευάσουμε έναν συναρτητή $G\colon \mathcal{A}_S^l \longrightarrow \mathcal{B}$ ο οποίος θα δείξουμε στη συνέχεια πως αποτελεί μοναδική ανάλυση του F μέσω της $\mathcal{A}_S^l$. Ορίζουμε τον G ως εξής:

- Για κάθε αντικείμενο M της $\mathcal{A}_S^l$, θέτουμε $G(M) = F(M)$.
- Για έναν μορφισμό $\phi = f/s\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathcal{A}_S^l$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

  θέτουμε $G(\phi) = F(f) \circ F(s)^{-1}$.

Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να ελέγξουμε αν ο G είναι καλώς ορισμένος, δηλαδή αν διατηρεί τις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs. Για τυχόν $M, N \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ θεωρούμε δύο ισοδύναμα roofs μεταξύ των M και N:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & M & & N \end{tikzcd}$$

Εξ ορισμού, υπάρχει ένα αντικείμενο U και μορφισμοί $u\colon U \longrightarrow L$ και $v\colon U \longrightarrow K$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & U \arrow[u, "u"] \arrow[d, "v"] & N \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

με $s \circ u = t \circ v \in S$. Από το τελευταίο, προκύπτει ότι

$$F(f) \circ F(u) = F(f \circ u) = F(g \circ v) = F(g) \circ F(v) \tag{2.1}$$

και ομοίως

$$F(s) \circ F(u) = F(t) \circ F(v) \tag{2.2}$$

Αφού $s \circ v \in S$, έχουμε ότι ο $F(s) \circ F(u)$ είναι ισομορφισμός από την υπόθεσή για τον F. Για τον ίδιο λόγο και ο $F(s)$ είναι ένας ισομορφισμός. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο $F(u)$ είναι ισομορφισμός. Ανάλογα, ο $F(v)$ είναι ισομορφισμός αφού οι $F(t) \circ F(v)$ και $F(t)$ είναι ισομορφισμοί. Από την (2.2) έτσι, έχουμε $F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} = F(v)^{-1} \circ F(t)^{-1}$ και τελικά χρησιμοποιώντας την (2.1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(f) \circ F(s)^{-1} &= F(f) \circ F(u) \circ F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} \\ &= F(g) \circ F(v) \circ F(v)^{-1} \circ F(t)^{-1} = F(g) \circ F(t)^{-1} \end{aligned}$$

Επομένως ο G, όπως ορίστηκε, διατηρεί τα αριστερά roofs και όπως θα δείξουμε στην συνέχεια, αποτελεί έναν συναρτητή από την $\mathcal{A}_S^l$ στην $\mathcal{B}$.

Αρχικά, ο G απεικονίζει ταυτοτικούς μορφισμούς στην $\mathcal{A}_S^l$ σε ταυτοτικούς μορφισμούς στην $\mathcal{B}$ για κάθε $M \in \mathrm{ob}(\mathcal{A}_S^l)$, διότι η εικόνα της κλάσης του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

μέσω του G είναι $G(1_M/1_M) = F(1_M) \circ F(1_M)^{-1} = 1_M/1_M$.

Έστω $\phi = f/s \colon M \longrightarrow N$ και $\psi = g/t \colon N \longrightarrow P$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{A}_S^l$ οι οποίοι προσδιορίζονται αντίστοιχα από τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & N & & P \end{tikzcd}$$

Συνθέτοντας, αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dl, dashed, "u"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \\ & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N & & P \end{tikzcd}$$

και συμπεραίνουμε ότι η σύνθεση $\psi \circ \phi$ αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s \circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\ M & & P \end{tikzcd}$$

δηλαδή $G(\psi \circ \phi) = F(g \circ h) \circ F(s \circ u)^{-1}$. Ακόμη, από τον ορισμό του G, έχουμε:

$$G(\psi) \circ G(\phi) = F(g) \circ F(t)^{-1} \circ F(f) \circ F(s)^{-1}$$

Από το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα βλέπουμε ότι $F(f) \circ F(u) = F(t) \circ F(h)$ και λόγω του ότι οι $F(t)$ και $F(u)$ είναι ισομορφισμοί θα ισχύει $F(t)^{-1} \circ F(f) = F(h) \circ F(u)^{-1}$. Έτσι, έχουμε:

$$G(\psi) \circ G(\phi) = F(g) \circ F(h) \circ F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} = F(g \circ h) \circ F(s \circ u)^{-1} = G(\psi \circ \phi)$$

Προκύπτει ότι ο G διατηρεί και την σύνθεση μορφισμών, επομένως είναι ένας συναρτητής $\mathcal{A}_S^l \longrightarrow \mathcal{B}$.

Για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$, έχουμε: $(G \circ Q)(M) = G(Q(M)) = G(M) = F(M)$ και αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$, τότε

$$(G \circ Q)(f) = G(Q(f)) = G(f/1_M) = F(f) \circ F(1_M)^{-1} = F(f)$$

άρα $G \circ Q = F$.

Τέλος, θα αποδείξουμε την μοναδικότητα του συναρτητή G. Έστω $H\colon \mathcal{A}_S^l \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας συναρτητής έτσι ώστε $H \circ Q = F$. Τότε, $H(M) = H(Q(M)) = F(M) = G(Q(M)) = G(M)$ για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}_S^l)$. Αν τώρα $\phi\colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}_S^l$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

έχουμε $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$ και

$$\begin{aligned} H(\phi) &= H(Q(f) \circ Q(s)^{-1}) = (H \circ Q)(f) \circ (H \circ Q)(s)^{-1} = F(f) \circ F(s)^{-1} \\ &= G(Q(f)) \circ G(Q(s))^{-1} = G(Q(f) \circ Q(s)^{-1}) = G(\phi) \end{aligned}$$

Συνεπώς ο συναρτητής G είναι μοναδικός. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι το ζεύγος $(\mathcal{A}_S^l, Q)$ είναι η τοπικοποίηση της $\mathcal{A}$ ως προς την τοπικοποιούσα κλάση S. δηλαδή $\mathcal{A}[S^{-1}] = \mathcal{A}_S^l$. ■

Ως τώρα στην κατασκευή της τοπικοποίησης της $\mathcal{A}$ ως προς μία τοπικοποιούσα κλάση S, χρησιμοποιήθηκαν μόνο αριστερά roofs. Ένα εύλογο ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι τι θα συμβεί στην περίπτωση που θεωρήσουμε δεξιά roofs για την δημιουργία της νέας κατηγορίας.

Θεώρημα 2.2.17. *Τα αντικείμενα της $\mathcal{A}$ με μορφισμούς τις κλάσεις ισοδυναμίας από δεξιά roofs, ορίζουν μία κατηγορία την οποία και συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_S^r$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.15. ■

Για την νέα αυτήν κατασκευή, ανάλογα με την $\mathcal{A}_S^l$ μπορούμε επίσης να ορίσουμε έναν συναρτητή $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_S^r$ ο οποίος ορίζεται ως η ταυτότητα στα αντικείμενα και για κάθε μορφισμό $f\colon M \longrightarrow N$, ο μορφισμός $Q(f)$ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof:

$$\begin{tikzcd} & N & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "1_N"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

δηλαδή $Q(f) = 1_N/f$.

Θεώρημα 2.2.18. *Η κατηγορία $\mathcal{A}_S^l$ μαζί με τον συναρτητή $Q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_S^r$ αποτελεί μία τοπικοποίηση της $\mathcal{A}$ ως προς την κλάση S.*

Απόδειξη. Όπως και στην περίπτωση των αριστερών roofs, δυϊκά, ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $s\colon M \longrightarrow N$ στην S. Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_S^r$ ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα της τοπικοποίησης. Η πορεία που θα ακολουθήσουμε είναι ακριβώς ανάλογη με αυτήν στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.16. Έστω $\mathcal{B}$ μία τυχούσα κατηγορία και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας συναρτητής κατηγοριών έτσι ώστε ο $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $s \in S$. Ορίζουμε έναν συναρτητή G από την $\mathcal{A}_S^r$ στην $\mathcal{B}$ ως εξής:

- Για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}_S^r)$, θέτουμε $G(M) = F(M)$.

- Αν $\phi = s/f\colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}_S^r$ ο οποίος αναπαριστάται από το δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd} & L & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

θέτουμε $G(\phi) = F(s)^{-1} \circ F(f)$.

Αρχικά, είναι απαραίτητο να ελέγξουμε αν ο G είναι καλώς ορισμένος, δηλαδή αν διατηρεί τις κλάσεις ισοδυναμίας. Για τον σκοπό αυτόν θεωρούμε δύο ισοδύναμα δεξιά roofs μεταξύ δύο αντικειμένων M και N:

$$\begin{tikzcd} & L & & & K & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] & M \arrow[ur, "g"] & & N \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

Λόγω της ισοδυναμίας, θα υπάρχει ένα αντικείμενο U και μορφισμοί $u\colon L \longrightarrow U$ και $v\colon K \longrightarrow U$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "u"] & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & U & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[dl, "t", "\sim"'] \\ & K \arrow[u, "v"'] & \end{tikzcd}$$

όπου $u \circ s = v \circ t \in S$. Από τη μεταθετικότητα έχουμε:

$$F(u) \circ F(s) = F(u \circ s) = F(v \circ t) = F(v) \circ F(t) \tag{2.3}$$

και παρόμοια:

$$F(u) \circ F(f) = F(v) \circ F(g) \tag{2.4}$$

Λόγω του ότι οι $F(u) \circ F(s)$ και $F(s)$ είναι ισομορφισμοί, ο $F(u)$ είναι ισομορφισμός και ανάλογα, από το ότι οι $F(t) \circ F(v)$ και $F(t)$ είναι ισομορφισμοί συμπεραίνουμε ότι και ο $F(v)$ είναι επίσης ισομορφισμός. Επομένως, από την (2.4), έχουμε $F(s)^{-1} \circ F(u)^{-1} = F(t)^{-1} \circ F(v)^{-1}$ και χρησιμοποιώντας την (2.3):

$$F(s)^{-1} \circ F(f) = F(s)^{-1} \circ F(u)^{-1} \circ F(u) \circ F(f) = F(t)^{-1} \circ F(v)^{-1} \circ F(v) \circ F(t) = F(t)^{-1} \circ F(g)$$

και ο G είναι καλώς ορισμένος.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν ο G είναι πράγματι ένας συναρτητής:

Ο G απεικονίζει ταυτοτικούς μορφισμούς στην $\mathcal{A}_S^r$ σε ταυτοτικούς μορφισμούς στην $\mathcal{B}$, αφού η εικόνα της κλάσης του δεξιού roof:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ M \arrow[ur, "1_M"] & & M \arrow[ul, "1_M"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

είναι $G(1_M/1_M) = F(1_M)^{-1} \circ F(1_M) = 1_M/1_M$.

Έστω $\phi = s/f \colon M \longrightarrow N$ και $\psi = t/g \colon N \longrightarrow P$ δύο μορφισμοί οι οποίοι προσδιορίζονται από τα δεξιά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L & & & K & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] & N \arrow[ur, "g"] & & P \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (LC3b), αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & & U & & \\ & L \arrow[ur, dashed, "h"] & & K \arrow[ul, dashed, "u"', "\sim"] & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[ur, "g"] & & P \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

και επομένως η σύνθεση $\psi \circ \phi$ αναπαριστάται από ένα δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd} & U & \\ M \arrow[ur, "h \circ f"] & & P \arrow[ul, "u \circ t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

Από τον τρόπο που ορίστηκε ο G, έχουμε $G(\psi) \circ G(\phi) = F(t)^{-1} \circ F(g) \circ F(s)^{-1} \circ F(f)$, ενώ από τη μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος, $F(h) \circ F(s) = F(u) \circ F(g)$ και αφού οι $F(u)$ και $F(s)$ είναι ισομορφισμοί έχουμε: $F(g) \circ F(s)^{-1} = F(u)^{-1} \circ F(h)$. Έτσι,

$$G(\psi) \circ G(\phi) = F(t)^{-1} \circ F(u)^{-1} \circ F(h) \circ F(f) = F(u \circ t)^{-1} \circ F(h \circ f) = G(\psi \circ \phi)$$

και ο G διατηρεί τους μορφισμούς, συνεπώς είναι ένας συναρτητής: $\mathcal{A}_S^r \longrightarrow \mathcal{B}$.

Για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}_S^r)$, έχουμε $(G \circ Q)(M) = G(Q(M)) = G(M) = F(M) \Longrightarrow G \circ Q = F$ στα αντικείμενα. Επιπλέον, για κάθε μορφισμό $f \colon M \longrightarrow N$ ο οποίος αναπαριστάται με ένα δεξιό roof της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ N \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "1_N"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

έχουμε $(G \circ Q)(f) = G(Q(f)) = G(1_N/f) = F(1_N)^{-1} \circ F(f) = F(f) \Longrightarrow G \circ Q = F$ και στους μορφισμούς.

Τέλος, θα δείξουμε την μοναδικότητα του συναρτητή G. Έστω $H \colon \mathcal{A}_S^r \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας συναρτητής ώστε $H \circ Q = F$. Τότε, για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}_S^r)$ ισχύει $H(M) = H(Q(M)) = F(M) = G(Q(M)) = G(M)$, ενώ αν $\phi \colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}_S^r$ ο οποίος αναπαριστάται με το δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd} & L & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

έχουμε $\phi = Q(s)^{-1} \circ Q(f)$ και

$$\begin{aligned} H(\phi) &= H(Q(s)^{-1} \circ Q(f)) = (H \circ Q)(s)^{-1} \circ (H \circ Q)(f) = F(s)^{-1} \circ F(f) \\ &= G(Q(s))^{-1} \circ G(Q(f)) = G(Q(s)^{-1} \circ Q(f)) = G(\phi) \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι $H = G$ άρα ο G είναι μοναδικός. ■

Παρατήρηση 2.2.19. Συνοψίζοντας, έχουμε δείξει ότι αν θεωρήσουμε μία κατηγορία $\mathcal{A}$ και μία τοπικοποιούσα κλάση S, χρησιμοποιώντας είτε αριστερά, είτε δεξιά roofs, οι κατηγορίες $\mathcal{A}_S^l$ και $\mathcal{A}_S^r$ αντίστοιχα, αποτελούν μία τοπικοποίηση της $\mathcal{A}$. Συμβολίζοντας με Q^l και Q^r τους συναρτητές τοπικοποίησης των $\mathcal{A}_S^l$ και $\mathcal{A}_S^r$ αντίστοιχα, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.5, υπάρχει ένας μοναδικός συναρτητής $F\colon \mathcal{A}_S^l \longrightarrow \mathcal{A}_S^r$ ο οποίος αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "Q^r"] \arrow[d, "Q^l"'] & \mathcal{A}_S^r \\ \mathcal{A}_S^l \arrow[ur, dashed, "\exists ! F"] & \end{tikzcd}$$

Για την τοπικοποίηση μίας κατηγορίας $\mathcal{A}$ ως προς μία τοπικοποιούσα κλάση S, προκύπτει έτσι ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_S^l \arrow[dr, "\sim", "F"'] & \mathcal{A}[S^{-1}] \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathcal{A}_S^r \end{tikzcd}$$

στο οποίο τα βέλη είναι ισοδυναμίες κατηγοριών. Αν συμβολίσουμε με Q τον συναρτητή τοπικοποίησης της $\mathcal{A}[S^{-1}]$, αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}_S^l \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "Q^l"] \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "Q^r"'] & \mathcal{A}[S^{-1}] \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] \\ & \mathcal{A}_S^l \end{tikzcd}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο διότι μας επιτρέψει να περιγράψουμε την κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ με τη βοήθεια είτε αριστερών είτε δεξιών roofs. Έτσι, ένας μορφισμός $\phi\colon M \longrightarrow N$ στην τοπικοποίηση της $\mathcal{A}$ ως προς S μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

και τότε $\phi = f/s$. Θεωρώντας το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "1_L"] & & \\
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_L"] & & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & L & & N
\end{tikzcd}$$

άμεσα βλέπουμε ότι $\phi = (f/1_L) \circ (1_L/s) = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$ όπου Q ο συναρτητής τοπικοποίησης και τότε λέμε ότι ο ϕ αναπαριστάται με ένα αριστερό κλάσμα. Δυϊκά, αναπαριστώντας τον ϕ με ένα δεξιό roof, για $\phi = s/f$, ανάλογα προκύπτει ότι $\phi = Q(s)^{-1} \circ Q(f)$. Χρησιμοποιώντας, έτσι την κατασκευή των roofs γίνεται πλέον εύκολα ξεκάθαρο ότι κάθε μορφισμός στην τοπικοποίηση μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αριστερό ή ένα δεξιό κλάσμα, δικαιολογώντας έτσι τον συμβολισμό που αναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας ενότητας. Το παρακάτω λήμμα εξασφαλίζει ότι η γραφή αυτή είναι μοναδική, αφού δύο ισοδύναμα roofs «διατηρούν» τα κλάσματα στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$.

Λήμμα 2.2.20. *Έστω: $\mathcal{A}$ μία κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$ και $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ ο συναρτητής τοπικοποίησης της $\mathcal{A}$. Αν $\phi\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ ο οποίος αναπαριστάται με τα ισοδύναμα αριστερά roofs*

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N & M & & N
\end{tikzcd}$$

τότε ισχύει

$$Q(f) \circ Q(s)^{-1} = Q(g) \circ Q(t)^{-1}$$

Απόδειξη. Αφού τα δυο αριστερά roofs είναι ισοδύναμα, θα υπάρχει αντικείμενο H και μορφισμοί $p\colon H \longrightarrow L$ και $q\colon H \longrightarrow K$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & H \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & N \\
& K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και $s \circ p \in S$. Λόγω του τελευταίου, ο μορφισμός $Q(s \circ p) = Q(s) \circ Q(p)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Αφού ο $Q(s)$ είναι επίσης ισομορφισμός, και ο $Q(p)$ θα είναι ισομορφισμός. Ομοίως, αφού οι $Q(t \circ q) = Q(t) \circ Q(q)$ και $Q(t)$ είναι ισομορφισμοί, και ο $Q(q)$ θα είναι ισομορφισμός. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
Q(f) \circ Q(s)^{-1} &= Q(f) \circ Q(p) \circ Q(p)^{-1} \circ Q(s){-}1 \\
&= Q(f \circ p) \circ Q(s \circ p)^{-1} \\
&= Q(g \circ q) \circ Q(t \circ q)^{-1} \\
&= Q(g) \circ Q(q) \circ Q(q)^{-1} \circ Q(t)^{-1} = Q(g) \circ Q(t)^{-1}
\end{aligned}$$

■

Με αυτήν την ορολογία, η κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ καλείται και κατηγορία κλασμάτων (category of fractions) της $\mathcal{A}$ ως προς S (βλ. [24, Chapter I]).

2.3 Υποκατηγορίες και Τοπικοποίηση

Συχνά στη μελέτη της δομής κατηγοριών, είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε την τοπικοποίηση μίας κατηγορίας $\mathcal{A}$ ως προς μία κλάση μορφισμών S, με τις τοπικοποιήσεις υποκατηγοριών της $\mathcal{A}$.

Έστω λοιπόν μία κατηγορία $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ μία υποκατηγορία αυτής. Αν η S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$ και η $S_{\mathcal{B}} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{B})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{B}$, άμεσα προκύπτει ένας φυσικός συναρτητής $i\colon \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:

- Στα αντικείμενα της $\mathcal{B}$ ως ο ταυτοτικός συναρτητής: $i(M) = M$ για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$.

- Για κάθε μορφισμό $\phi = f/s\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

  θέτουμε $i(\phi) = f/s$, δηλαδή την κλάση ισοδυναμίας του ίδιου roof στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$.

Η παρακάτω πρόταση περιγράφει ορισμένες συνθήκες κάτω από τις οποίες ο συναρτητής i εμφυτεύει την $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ ως μία πλήρη υποκατηγορία.

Πρόταση 2.3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

1. *Η $S_{\mathcal{B}} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{B})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{B}$.*

2. *Για κάθε μορφισμό $s\colon N \longrightarrow M$ με $s \in S$ και $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$, υπάρχει $u\colon P \longrightarrow N$ έτσι ώστε $s \circ u \in S$ και $P \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$.*

Τότε ο φυσικός συναρτητής $i\colon \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός.

Απόδειξη. Έστω $M, N \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$. Θα δείξουμε ότι η κανονική απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]}(M,N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M,N)$$

είναι 1-1 και επί. Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι είναι 1-1. Έστω $\phi, \psi\colon M \longrightarrow N$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ οι οποίοι αναπαριστώνται αντίστοιχα από τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ισχύει $i(\phi) = i(\psi)$. Έχουμε έτσι $i(\phi) = i(\psi) \Longrightarrow f/s = g/t$, δηλαδή τα δύο roofs είναι ισοδύναμα στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Θα υπάρχει, επομένως, ένα αντικείμενο U της $\mathcal{A}$ και μορφισμοί

$u\colon U \longrightarrow L$ και $v\colon U \longrightarrow K$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & U \arrow[u, "u"] \arrow[d, "v"'] & N \\
 & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό και $s \circ u = t \circ v \in S$. Από τη συνθήκη 2, θεωρώντας τον μορφισμό $s \circ u = t \circ v\colon U \longrightarrow M$, θα υπάρχει $V \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και μορφισμός $w\colon V \longrightarrow U$ έτσι ώστε $s \circ u \circ w = t \circ v \circ w \in S$. Βλέπουμε επομένως εύκολα, ότι στην $\mathcal{B}$ το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & V \arrow[u, "u \circ w"'] \arrow[d, "v \circ w"] & N \\
 & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και κατά συνέπεια τα δύο παραπάνω αριστερά roofs είναι ισοδύναμα στην $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$. Συνεπώς $f/s = g/t \Longrightarrow \phi = \psi$ και η απεικόνιση είναι 1-1.

Μένει να δειξουμε ότι είναι και επί. Έστω ένας μορφισμός $\phi = f/s\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N)$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

Από τη συνθήκη 2 πάλι, θεωρώντας τον μορφισμό $s\colon L \longrightarrow M$ στην S, προκύπτει η ύπαρξη ενός $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και ενός μορφισμού $u\colon U \longrightarrow L$ στην S έτσι ώστε $s \circ u \in S$. Έχουμε επομένως το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "1_U"] & N \\
 & U \arrow[ul, "s \circ u", "\sim"'] \arrow[ur, "f \circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

από το οποίο βλέπουμε πως το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "f\circ u"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αρχικό, άρα $(f\circ u)/(s\circ u) = f/s = \phi$. Όμως, εφόσον $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$, το παραπάνω roof ορίζει και έναν μορφισμό $(f\circ u)/(s\circ u)$ μεταξύ των M και N στην $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ και $i((f\circ u)/(s\circ u)) = (f\circ u)/(s\circ u) = \phi$. Επομένως η απεικόνιση είναι και επί. ■

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση μπορούμε να θεωρήσουμε την $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ σαν μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}[S^{-1}]$ όταν πληρούνται οι απαραίτητες προϋποθέσεις. Αντίστοιχα προκύπτει και η δυϊκή πρόταση:

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

1. *Η $S_{\mathcal{B}} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{B})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{B}$.*

2. *Για κάθε μορφισμό $s\colon M \longrightarrow N$ με $s \in S$ και $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$, υπάρχει $u\colon N \longrightarrow P$ έτσι ώστε $s\circ u \in S$ και $P \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$.*

Τότε ο φυσικός συναρτητής $i\colon \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 2.3.1. ■

Σχόλιο 2.3.3. Ακολουθώντας την ορολογία του [53, Definition 10.3.12], γενικά, όταν ο φυσικός συναρτητής $i\colon \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ των Προτάσεων 2.3.1 και 2.3.2 είναι πλήρης και πιστός, τότε η $\mathcal{B}$ καλείται **τοπικοποιούσα υποκατηγορία** της $\mathcal{A}$.

Άμεση συνέπεια των τελευταίων δύο προτάσεων αποτελεί το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.3.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ μία τοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ υπάρχει μορφισμός $s\colon A \longrightarrow X$ με $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και $s \in S$, τότε ο φυσικός συναρτητής $i\colon \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών.*

2. *Αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ υπάρχει μορφισμός $t\colon X \longrightarrow A$ με $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και $t \in S$, τότε ο φυσικός συναρτητής $i\colon \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών.*

Απόδειξη. Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι μία τοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, ο φυσικός συναρτητής $i\colon \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός. Θα δείξουμε ότι σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις ο i είναι και επί με ακρίβεια ισομορφισμού, δηλαδή για κάθε $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ υπάρχει ένα $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και ένας ισομορφισμός $i(X) \xrightarrow{\sim} A$.

1. Γνωρίζουμε ότι για κάθε αντικείμενο $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ υπάρχει ένα αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και ένας μορφισμός $s\colon A \longrightarrow X$ με $s \in S$. Τότε, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_A"] & \\ X & & A \end{tikzcd}$$

αναπαριστά έναν μορφισμό $1_A/s\colon X \longrightarrow A$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ ο οποίος, αφού $s \in S$, είναι ισομορφισμός. Εφόσον ο i είναι πλήρης και πιστός και επί με ακρίβεια ισομορφισμού, θα είναι ισοδυναμία κατηγοριών (βλ. [33, Proposition 1.3.13.])

2. Παρόμοια, για κάθε $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ υπάρχει ένα $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$ και ένας μορφισμός $t\colon X \longrightarrow A$ με $t \in S$. Τότε, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ A & & X \end{tikzcd}$$

αναπαριστά έναν ισομορφισμό $1_X/t\colon A \xrightarrow{\sim} X$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ και ο i είναι επί με ακρίβεια ισομορφισμού και συνεπώς ισοδυναμία κατηγοριών.

∎

Η μελέτη της τοπικοποίησης μίας υποκατηγορίας θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε επόμενο κεφάλαιο, όταν αναπτυχθεί η θεωρία της ομοτοπικής και της παραγόμενης κατηγορίας. Προς το παρόν, παραθέτουμε ένα παράδειγμα από τον Weibel στο [53, Example 10.3.16].

Παράδειγμα 2.3.5. Έστω P ένας δακτύλιος και S μία τοπικοποιούσα κλάση στον R. Αν Mod-R είναι η κατηγορία των δεξιών R-προτύπων θεωρούμε την συλλογή Σ όλων των μορφισμών $M \longrightarrow N$ στην Mod-R έτσι ώστε ο μορφισμός $S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$ να είναι ισομορφισμός. Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι η Σ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην Mod-R και η Mod-$S^{-1}R$ (βλ. Παράδειγμα 2.1.3) είναι μία τοπικοποιούσα υποκατηγορία της Mod-R. Αφού για κάθε δεξιό $R-$πρότυπο M ο φυσικός μορφισμός $M \longrightarrow S^{-1}M$ ανήκει στην κλάση Σ, ικανοποιείται η συνθήκη 1 του παραπάνω πορίσματος. Συμβολίζοντας έτσι με Σ_X τον περιορισμό της Σ στην Mod-$S^{-1}R$, αποκτούμε μία ισοδυναμία κατηγοριών Mod-$S^{-1}R[\Sigma_X^{-1}] \cong$ Mod-$R[\Sigma^{-1}]$. Παρατηρώντας ότι κάθε μορφισμός στην Σ_X είναι ισομορφισμός στην Mod-$S^{-1}R$, έχουμε Mod-$S^{-1}R[\Sigma^{-1}] \cong$ Mod-$S^{-1}R$ και συνεπώς:

$$\text{Mod-}S^{-1}R \cong \text{Mod-}R[\Sigma^{-1}]$$

2.4 Τοπικοποίηση Αβελιανών Κατηγοριών

Το τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα αφιερωθεί σε κάποιες σημαντικές εφαρμογές της τοπικοποίησης σε μία αβελιανή κατηγορία. Αρχικά, θα αναφέρουμε συνοπτικά ορισμένα συμπεράσματα από την γενικότερη περίπτωση μίας προσθετικής κατηγορίας για αναλυτικότερη μελέτη των οποίων βλέπε [39, Chapter 1].

Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι μία προσθετική κατηγορία και S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{A}$. Σκοπός μας είναι να δώσουμε στην τοπικοποίηση $\mathcal{A}[S^{-1}]$ μία φυσική δομή προσθετικής κατηγορίας, έτσι ώστε ο συναρτητής τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ να είναι προσθετικός. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας μία διμελή πράξη μεταξύ των μορφισμών της $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Λόγω του ότι οι μορφισμοί αυτοί αποτελούν κλάσματα κατ' αναλογίαν με την πρόσθεση κλασμάτων στο σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη μίας διαδικασίας «εύρεσης κοινού παρονομαστή». Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα για την απόδειξη του οποίου βλ. [39, 1.3.5. LEMMA.].

Λήμμα 2.4.1. *Έστω $\phi_i = f_i/s_i\colon M \longrightarrow N$, $1 \leqslant i \leqslant n$ μορφισμοί στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ οι οποίοι αναπαριστώνται αντιστοιχα από τα αριστερά roofs:*

$$\begin{tikzcd} & L_i \arrow[dl, "s_i"', "\sim"] \arrow[dr, "f_i"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει αντικείμενο $L \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $g_i \colon L \longrightarrow N$ και $s \colon L \longrightarrow M$ με $s \in S$, έτσι ώστε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g_i"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

να αναπαριστά τον μορφισμό ϕ_i για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$, δηλαδή $g_i/s = f_i/s_i$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

Αυτή η κατασκευή είναι ουσιώδης σημασίας στον ορισμό μίας «πρόσθεσης» στα roofs, όπως φαίνεται στη συνέχεια:

Ορισμός 2.4.2. *Έστω M, N δύο αντικείμενα της $\mathcal{A}$ και $\phi, \psi \colon M \longrightarrow N$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Από το Λήμμα 2.4.1, υπάρχουν $L \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $f, g \colon L \longrightarrow N$ και $s \colon L \longrightarrow M$ με $s \in S$ έτσι ώστε οι μορφισμοί αυτοί να αναπαριστώνται αντίστοιχα από τα αριστερά roofs:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\phi = f/s$ και $\psi = g/s$. Τότε, ορίζουμε μία διμελή σχέση στις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N)$$
$$(\phi, \psi) \longrightarrow \phi + \psi$$

όπου με $\phi + \psi$ συμβολίζουμε τον μορφισμό με αντιπρόσωπο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε δηλαδή:

$$(f/s) + (g/s) = (f + g)/s$$

Παρατήρηση 2.4.3. Είναι φυσικά απαραίτητο να ελέγξουμε αν η πρόσθεση η οποία μόλις ορίστηκε είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή ο μορφισμός $\phi + \psi \colon M \longrightarrow N$ είναι ανεξάρτητος των επιλογών των L, s, f και g. Για τον έλεγχο αυτής της ιδιότητας βλ. [39, 2.1.1. LEMMA.].

Πρόταση 2.4.4. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία προσθετική κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση, η τοπικοποίηση $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι επίσης μία προσθετική κατηγορία έτσι ώστε το σύνολο μορφισμών $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N)$ να έχει τη δομή προσθετικής αβελιανής ομάδας με πράξη αυτήν που περιγράφεται στον Ορισμό 2.4.2.*

Απόδειξη. Θα αναφέρουμε περιληπτικά την πορεία που ακολουθούμε για την ολοκλήρωση της απόδειξης, ενώ για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [39, σελ.$28 - 34$].

Αρχικά, δείχνουμε ότι για δύο τυχαία αντικείμενα M, N στην $\mathcal{A}$, το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N)$ με την πράξη πρόσθεσης που ορίστηκε παραπάνω αποκτά δομή προσθετικής αβελιανής ομάδας. Η πράξη αυτή είναι δηλαδή μεταθετική και προσεταιριστική ενώ ως ουδέτερο στοιχείο θέτουμε τον μορφισμό $0/1_M$, ο οποίος αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Θεωρώντας έναν μορφισμό $\phi = f/s \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N)$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι $(f/s) + ((-f)/s) = f - f/s = 0/s$. Έτσι, ο αντίστροφος του f/s είναι ο μορφισμός $(-f)/s$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "-f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

και άρα γράφουμε: $-(f/s) = (-f)/s$. Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι η σύνθεση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, N) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(N, P) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(M, P)$$

είναι διγραμμική, ενώ το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{A}[S^{-1}]$ ταυτίζεται με το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$.

Τέλος, θεωρώντας δύο αντικείμενα M και N στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ ορίζουμε το ευθύ άθροισμά τους $M \oplus N$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ ως το ευθύ άθροισμα αυτών των αντικειμένων στην $\mathcal{A}$.

■

Συνοψίζοντας, όσον αφορά την τοπικοποίηση μίας προσθετικής κατηγορίας ως προς μία τοπικοποιούσα κλάση S, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$. Τότε, υπάρχει μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ και ένας προσθετικός συναρτητής $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ έτσι ώστε:*

1. *Το $Q(s)$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε $s \in S$.*
2. *Για κάθε προσθετική κατηγορία $\mathcal{B}$ και για κάθε προσθετικό συναρτητή $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ τέτοιον ώστε ο μορφισμός $F(s)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $s \in S$, υπάρχει μοναδικός (με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού συναρτητών) προσθετικός συναρτητής $G\colon \mathcal{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{B}$ έτσι ώστε $F = G \circ Q$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα συναρτητών είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{A}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists ! \, G"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Η κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών.

Παραθέτουμε στη συνέχεια ένα λήμμα το οποίο χαρακτηρίζει τους μηδενικούς μορφισμούς στην τοπικοποίηση.

Λήμμα 2.4.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$ και $\phi = f/s\colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο ϕ είναι ο μηδενικός μορφισμός $\phi = 0$.*

2. *Υπάρχει ένας μορφισμός $g \in S$ έτσι ώστε $f \circ g = 0$.*

3. *Υπάρχει ένας μορφισμός $g \in S$ έτσι ώστε $g \circ f = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός ϕ αναπαριστάται με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Αρχικά, υποθέτουμε ότι $\phi = 0$. Τότε, $Q(f) \circ Q(s)^{-1} = \phi = 0$ και αφού ο μορφισμός $Q(s)$ είναι ισομορφισμός, προκύπτει $Q(f) = 0$. Άρα, από τον ορισμό του συναρτητή τοπικοποίησης Q, έχουμε

$$f/1_L = Q(f) = 0/1_L$$

όπου $0 \colon L \longrightarrow N$ το ουδέτερο στοιχείο της προσθετικής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(L, N)$. Τα δύο παρακάτω αριστερά roofs είναι, δηλαδή, ισοδύναμα

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ L & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ L & & N \end{tikzcd}$$

Θα υπάρχει έτσι ένα αντικείμενο U στην $\mathcal{A}$ και ένας μορφισμός $g \colon U \longrightarrow L$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ L & U \arrow[u, "g"] \arrow[d, "g"'] & N \\ & L \arrow[ul, "1_L", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

και $g \circ 1_L = g \in S$. Άμεσα, $f \circ g = 0$ και ο ισχυρισμός 2 ικανοποιείται.

Αντίστροφα, έστω τώρα ότι υπάρχει ένας μορφισμός $g \in S$ έτσι ώστε $f \circ g = 0.$. Τότε, εφαρμόζοντας τον συναρτητή τοπικοποίησης Q, έχουμε $Q(f) \circ Q(g) = 0$ και αφού $g \in S$, ο μορφισμός $Q(g)$ είναι ισομορφισμός. Άρα, $Q(f) = 0$ και συνεπώς $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1} = 0$.

Δείξαμε έτσι ότι οι ισχυρισμοί 1 και 2 είναι ισοδύναμοι. Λόγω της συνθήκης (LC4) εύκολα προκύπτει ότι οι ισχυρισμοί 2 και 3 είναι επίσης ισοδύναμοι, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ■

Παραθέτουμε στη συνέχεια δύο άμεσα πορίσματα.

Πόρισμα 2.4.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$ και $f \colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Ισχύει $Q(f) = 0$.*

2. *Υπάρχει ένας μορφισμός $s \in S$ έτσι ώστε $f \circ s = 0$.*

3. *Υπάρχει ένας μορφισμός $s \in S$ έτσι ώστε $s \circ f = 0$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2.4.6 θέτοντας $\phi = f/1_M$, δηλαδή τον μορφισμό που αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

■

Πόρισμα 2.4.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$ και ένα αντικείμενο $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Ισχύει $Q(M) = 0$.*

2. *Υπάρχει ένα αντικείμενο $N \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ έτσι ώστε ο μηδενικός μορφισμός $N \longrightarrow M$ να ανήκει στην κλάση S.*

3. *Υπάρχει ένα αντικείμενο $N \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ έτσι ώστε ο μηδενικός μορφισμός $M \longrightarrow N$ να ανήκει στην κλάση S.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $Q(M) = 0$. Τότε, αφού το $M = Q(M)$ είναι το μηδενικό στοιχείο της κατηγορίας $\mathcal{A}[S^{-1}]$, θα έχουμε και $Q(1_M) = 0$. Άρα, από το Πόρισμα 2.4.7 υπάρχει ένας μορφισμός $s\colon N \longrightarrow M$ με $s \in S$ έτσι ώστε: $1_M \circ s = 0 \Longrightarrow s = 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι ο μηδενικός μορφισμός $N \longrightarrow M$ ανήκει στην κλάση S. Τότε ο μηδενικός μορφισμός $Q(N) \longrightarrow Q(M)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Αυτό άμεσα συνεπάγεται ότι $Q(N) = Q(M) = 0$.

Δείξαμε επομένως ότι οι ισχυρισμοί 1 και 2 είναι ισοδύναμοι. Ακριβώς ανάλογα αποδεικνύεται και ότι οι ισχυρισμοί 1 και 3 είναι επίσης ισοδύναμοι. ■

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει, τελικώς, το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.4.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$ και $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ ο συναρτητής τοπικοποίησης. Αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν ο μορφισμός f είναι μονομορφισμός, τότε και ο μορφισμός $Q(f)$ είναι μονομορφισμός.*

2. *Αν ο μορφισμός f είναι επιμορφισμός, τότε και ο μορφισμός $Q(f)$ είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός f είναι μονομορφισμός και $\phi\colon L \longrightarrow M$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ έτσι ώστε $Q(f) \circ \phi = 0$. Θα δείξουμε ότι $\phi = 0$. Ο ϕ θα αναπαριστάται με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ L & & M \end{tikzcd}$$

και τότε $\phi = Q(g) \circ Q(s)^{-1}$. Έτσι, έχουμε

$$0 = Q(f) \circ \phi = Q(f) \circ Q(g) \circ Q(s)^{-1} = Q(f \circ g) \circ Q(s)^{-1}$$

και αφού ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός, άμεσα $Q(f \circ g) = 0$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.4.7, θα υπάρχει ένας μορφισμός $s \in S$ έτσι ώστε $f \circ g \circ s = 0$. Εφόσον ο f είναι μονομορφισμός, $g \circ s = 0$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2.4.7 ακόμη μία φορά, προκύπτει ότι $g/1_M = 0$, δηλαδή, $Q(g) = 0$. Έτσι, $\phi = Q(g) \circ Q(s)^{-1} = 0$ και ο $Q(f)$ είναι μονομορφισμός.

Η απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού είναι δυϊκή. ■

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή. Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν, όπως με την προσθετικότητα, η τοπικοποίηση διατηρεί την δομή της αβελιανής κατηγορίας. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

Λήμμα 2.4.10. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$. Κάθε μορφισμός $\phi\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ έχει πυρήνα και συνπυρήνα.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός ϕ αναπαριστάται από ένα δεξιό roof της μορφής

$$\begin{tikzcd} & L & \\ M \arrow[ur, "f"] & & N \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

Έχουμε δηλαδή $\phi = Q(s)^{-1} \circ Q(f)$ και εφόσον ο $Q(s)$ είναι ένας ισομορφισμός, ένας μορφισμός $\mathsf{ker}\phi\colon \mathsf{Ker}\phi \longrightarrow M$ είναι ένας πυρήνας του ϕ αν-ν είναι ένας πυρήνας του $Q(f)$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, ο μορφισμός $f\colon M \longrightarrow L$ έχει έναν πυρήνα $\mathsf{ker}f\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow M$ στην $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι ο $Q(\mathsf{ker}f)\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow M$ είναι ένας πυρήνας του $Q(f)$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Άμεσα έχουμε $Q(f) \circ Q(\mathsf{ker}f) = Q(f \circ \mathsf{ker}f) = 0$. Έστω τώρα $\psi = g/t\colon P \longrightarrow M$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$ έτσι ώστε $Q(f) \circ \psi = 0$. Τότε ο ψ μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ P & & M \end{tikzcd}$$

δηλαδή, $\psi = Q(g) \circ Q(t)^{-1}$. Έχουμε επομένως

$$Q(f) \circ \psi = 0 \Longrightarrow Q(f) \circ Q(g) \circ Q(t)^{-1} = 0 \Longrightarrow Q(f \circ g) \circ Q(t)^{-1} = 0 \Longrightarrow Q(f \circ g) = 0$$

διότι ο $Q(t)$ είναι ισομορφισμός. Τώρα χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.4.7 για τον μορφισμό $f \circ g\colon U \longrightarrow L$, προκύπτει ότι υπάρχει ένας μορφισμός $v\colon V \longrightarrow U$ με $v \in S$ έτσι ώστε $f \circ g \circ v = 0$. Από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα, θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $w\colon V \longrightarrow \mathsf{Ker}f$ έτσι ώστε $\mathsf{ker}f \circ w = g \circ v$ όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "\exists!\, w"'] \arrow[d, "g \circ v"] \\ \mathsf{Ker}f \arrow[r, "\mathsf{ker}f"] & M \end{tikzcd}$$

Αφού το $v \in S$, είναι ισομορφισμός, από την μεταθετικότητα έχουμε:

$$Q(\mathsf{ker}f) \circ Q(w) = Q(g) \circ Q(v) \Longrightarrow Q(g) = Q(\mathsf{ker}f) \circ Q(w) \circ Q(v)^{-1}$$

Επομένως, $\psi = Q(g) \circ Q(t)^{-1} = Q(\mathsf{ker}f) \circ Q(w) \circ Q(v)^{-1} \circ Q(t)^{-1}$, δηλαδή ο μορφισμός ψ αναλύεται μέσω του $Q(\mathsf{ker}f)\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow M$ όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "Q(w) \circ Q(v)^{-1} \circ Q(t)^{-1}"'] \arrow[d, "\psi"] \\ \mathsf{Ker}f \arrow[r, "Q(\mathsf{ker}f)"] & M \end{tikzcd}$$

Μένει να δείξουμε την μοναδικότητα της ανάλυσης. Για τον σκοπό αυτόν υποθέτουμε ότι $\psi = Q(\mathsf{ker}f)\circ\alpha = Q(\mathsf{ker}f)\circ\beta$ για δύο μορφισμούς $\alpha,\beta\colon P \longrightarrow K$. Αφού ο πυρήνας $\mathsf{ker}f\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow M$ είναι μονομορφισμός και ο $Q(\mathsf{ker}f)\colon \mathsf{Ker}f :\longrightarrow M$ είναι επίσης μονομορφισμός (βλέπε Λήμμα 2.4.9). Έτσι:

$$\psi = Q(\mathsf{ker}f)\circ\alpha = Q(\mathsf{ker}f)\circ\beta \Longrightarrow Q(\mathsf{ker}f)\circ(\alpha-\beta) = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta$$

Κατά συνέπεια η παραπάνω ανάλυση του ψ είναι μοναδική και ο $Q(\mathsf{ker}f)$ είναι ένας πυρήνας του $Q(f)$. Θεωρώντας την δυϊκή κατηγορία $\mathcal{A}^{op}$ στην θέση της $\mathcal{A}$, από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει και η ύπαρξη ενός συνπυρήνα για τον ϕ. ∎

Το παραπάνω λήμμα μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την Πρόταση 4.1.14 στην περίπτωση που έχουμε μία αβελιανή κατηγορία.

Θεώρημα 2.4.11. *([39, 2.2.2. THEOREM.]) Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$. Τότε η τοπικοποίηση $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι επίσης μία αβελιανή κατηγορία και ο συναρτητής τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν μορφισμό $\phi\colon M \longrightarrow N$ στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Τότε, από το Λήμμα 2.4.10, ο ϕ θα έχει έναν πυρήνα, έστω $\mathsf{ker}\phi\colon \mathsf{Ker}\phi \longrightarrow M$ και έναν συνπυρήνα, έστω $\mathsf{coker}\phi\colon N \longrightarrow \mathsf{Coker}\phi$. Θα συμβολίζουμε έναν συνπυρήνα του $\mathsf{ker}\phi$ με $\mathsf{coim}\phi\colon M \longrightarrow \mathsf{Coim}\phi$ και αντίστοιχα έναν πυρήνα του $\mathsf{coker}\phi$ με $\mathsf{im}\phi\colon \mathsf{Im}\phi \longrightarrow N$. Αφού $\phi\circ\mathsf{ker}\phi = 0$, ο ϕ θα αναλύεται μέσω του $\mathsf{coim}\phi$ με έναν μορφισμό $\psi\colon \mathsf{Coim}\phi \longrightarrow N$. Ομοίως, εφόσον

$$\mathsf{coker}\phi\circ\phi = \mathsf{coker}\phi\circ\psi\circ\mathsf{coim}\phi = 0$$

και ο $\mathsf{coim}\phi$ ως συνπυρήνας είναι επιμορφισμός, θα έχουμε $\mathsf{coker}\phi\circ\psi = 0$, άρα ο ψ θα αναλύεται μέσω του $\mathsf{im}\phi$ με έναν μορφισμό $\tilde{\phi}\colon \mathsf{Coim}\phi \longrightarrow \mathsf{Im}\phi$. Προκύπτει δηλαδή το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}\phi \arrow[r, "\mathsf{ker}\phi"] & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathsf{coim}\phi"'] & N \arrow[r, "\mathsf{coker}\phi"] & \mathsf{Coker}\phi \\
& \mathsf{Coim}\phi \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, dashed, "\tilde{\phi}"'] & \mathsf{Im}\phi \arrow[u, "\mathsf{im}\phi"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\tilde{\phi}\colon \mathsf{Coim}\phi \longrightarrow \mathsf{Im}\phi$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Έστω ότι ο ϕ αναπαριστάται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $\phi = Q(f)\circ Q(s)^{-1}$. Αφού η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, έχουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}f \arrow[r, "\mathsf{ker}f"] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{coim}f"'] & N \arrow[r, "\mathsf{coker}f"] & \mathsf{Coker}f \\
& \mathsf{Coim}f \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & \mathsf{Im}f \arrow[u, "\mathsf{im}f"'] &
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{A}$, στο οποίο ο $\tilde{f}\colon \mathsf{Coim}f \longrightarrow \mathsf{Im}f$ είναι ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή Q αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ker}f \arrow[r, "Q(\mathsf{ker}f)"] & L \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "Q(\mathsf{coim}f)"'] & N \arrow[r, "Q(\mathsf{coker}f)"] & \mathsf{Coker}f \\ & \mathsf{Coim}f \arrow[r, dashed, "Q(\tilde{f})"'] & \mathsf{Im}f \arrow[u, "Q(\mathsf{im}f)"'] & \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Σύμφωνα με το επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Λήμματος 2.4.10 και το δυϊκό του, προκύπτει ότι ο μορφισμός $Q(\mathsf{ker}f)\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow L$ είναι ένας πυρήνας του $Q(f)$ και ο μορφισμός $Q(\mathsf{coker}f)\colon N \longrightarrow \mathsf{Coker}f$ είναι ένας συνπυρήνας του $Q(f)$. Παρόμοια, ο μορφισμός $Q(\mathsf{coim}f)\colon L \longrightarrow \mathsf{Coim}f$ είναι μία συνεικόνα του $Q(f)$ και ο μορφισμός $Q(\mathsf{im}f)\colon \mathsf{im}f \longrightarrow N$ είναι μία εικόνα του $Q(f)$.

Αφού $\phi = Q(f)\circ Q(s)^{-1}$ και ο $Q(s)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο μορφισμός $Q(\mathsf{coker}f)\colon N \longrightarrow \mathsf{Coker}f$ είναι ένας συνπυρήνας του μορφισμού $\phi\colon M \longrightarrow N$, δηλαδή θέτουμε $\mathsf{Coker}\phi = \mathsf{Coker}f$ και $\mathsf{coker}\phi = Q(\mathsf{coker}f)$. Συνεπώς, ο μορφισμός $Q(\mathsf{im}f)\colon \mathsf{Im}f \longrightarrow N$, θα είναι ένας πυρήνας του $\mathsf{coker}\phi\colon N \longrightarrow \mathsf{Coker}\phi$, δηλαδή θέτουμε $\mathsf{Im}\phi = \mathsf{Im}f$ και $\mathsf{im}\phi = Q(\mathsf{im}f)$.

Τέλος, εφόσον ο $Q(\mathsf{ker}f)\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow L$ είναι ένας πυρήνας του $Q(f)$, και ο $Q(s)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$, ο μορφισμός $Q(s)\circ Q(\mathsf{ker}f)\colon \mathsf{Ker}f \longrightarrow M$ θα είναι ένας πυρήνας του $Q(f)\circ Q(s)^{-1} = \phi$. Μπορούμε έτσι να θέσουμε $\mathsf{Ker}\phi = \mathsf{Ker}f$ και $\mathsf{ker}\phi = Q(s)\circ Q(\mathsf{ker}f)$. Δυϊκά, ο μορφισμός $Q(\mathsf{coim}f)\circ Q(s)^{-1}\colon M \longrightarrow \mathsf{Coim}f$ είναι ένας συνπυρήνας του $\mathsf{ker}\phi$ και μπορούμε να θέσουμε $\mathsf{Coim}\phi = \mathsf{Coim}f$ και $\mathsf{coim}\phi = Q(\mathsf{coim}f)\circ Q(s)^{-1}$.

Από τα παραπάνω και το μεταθετικό διάγραμμα (2.5) βλέπουμε ότι

$$Q(f)\circ Q(s)^{-1} = \phi = \mathsf{im}\phi \circ \tilde{\phi} \circ \mathsf{coim}\phi = Q(\mathsf{im}f)\circ \tilde{\phi} \circ Q(\mathsf{coim}f)\circ Q(s)^{-1}$$

Άρα συνθέτοντας από τα δεξιά με τον μορφισμό $Q(s)$, προκύπτει ότι

$$Q(f) = Q(\mathsf{im}f)\circ \tilde{\phi} \circ Q(\mathsf{coim}f) \tag{2.7}$$

Όμως, από το μεταθετικό διάγραμμα (2.6), έχουμε

$$Q(f) = Q(\mathsf{im}f)\circ Q(\tilde{f}) \circ Q(\mathsf{coim}f) \tag{2.8}$$

Από τις σχέσεις (2.7) και (2.8) άμεσα βλέπουμε ότι

$$Q(\mathsf{im}f)\circ \tilde{\phi} \circ Q(\mathsf{coim}f) = Q(\mathsf{im}f)\circ Q(\tilde{f}) \circ Q(\mathsf{coim}f)$$

Αφού ο μορφισμός $Q(\mathsf{im}f)$ είναι μονομορφισμός έχουμε

$$\tilde{\phi} \circ Q(\mathsf{coim}f) = Q(\tilde{f}) \circ Q(\mathsf{coim}f)$$

και ομοίως, αφού ο $Q(\mathsf{coim}f)$ είναι επιμορφισμός, προκύπτει τελικά ότι

$$\tilde{\phi} = Q(\tilde{f})$$

Αφού ο $\tilde{f}$ είναι ένας ισομορφισμός, και ο $Q(\tilde{f}) = \tilde{\phi}$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός και η κατηγορία $\mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι αβελιανή.

Μένει να δείξουμε την ακρίβεια του συναρτητή $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$. Έστω

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι και η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Q(M) \xrightarrow{Q(f)} Q(N) \xrightarrow{Q(g)} Q(P) \longrightarrow 0 \tag{2.9}$$

είναι ακριβής. Αρχικά, ο f είναι μονομορφισμός και ο g επιμορφισμός, ο $Q(f)$ θα είναι επίσης μονομορφισμός και ο $Q(g)$ ανάλογα επιμορφισμός (βλέπε Λήμμα 2.4.9). Άμεσα, αφού $g \circ f = 0$, έχουμε $Q(g) \circ Q(f) = Q(g \circ f) = 0$ ενώ αν ο $\mathsf{im}f : N \longrightarrow \mathsf{Im}f$ είναι μία εικόνα του μορφισμού f, προκύπτει ότι και ο $Q(\mathsf{im}f) : N \longrightarrow \mathsf{Im}f$ είναι μία εικόνα του μορφισμού $Q(f)$. Ανάλογα, αν ο $\mathsf{ker}g : \mathsf{Ker}g \longrightarrow N$ είναι ένας πυρήνας του μορφισμού g, και ο $Q(\mathsf{ker}g) : \mathsf{Ker}g \longrightarrow N$ είναι ένας πυρήνας του $Q(g)$ και εξασφαλίζεται η ακρίβεια της ακολουθίας (2.9). ∎

Είδαμε ότι η τοπικοποίηση μίας κατηγορίας $\mathcal{A}$ ως προς μία τοπικοποιούσα κλάση S, κατασκευάστηκε από την $\mathcal{A}$ «προσθέτοντας» περισσότερους μορφισμούς (δηλαδή «αντίστροφους» σε αυτούς της κλάσης S). Ωστόσο, στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, μπορούμε να ακολουθήσουμε μία διαφορετική προσέγγιση για την κατασκευή της τοπικοποίησης. Σε αυτήν την περίπτωση, η $\mathcal{A}[S^{-1}]$ αποκτάται θεωρώντας την υποκατηγορία $\mathcal{T}$ των αντικειμένων της $\mathcal{A}$ τα οποία αποτελούν το μηδενικό αντικείμενο στην τοπικοποίηση και δημιουργώντας στην συνέχεια την υποκατηγορία πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{T}$. Στα παρακάτω περιγράφουμε ενδεικτικά αυτήν την διαδικασία, ενώ για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [39, Chapter 1, §2.2] και [7, Chapter 5, §2].

Ξεκινάμε εισάγοντας μία βασική έννοια στο πλαίσιο των αβελιανών κατηγοριών, αυτήν της thick υποκατηγορίας.

Ορισμός 2.4.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{T}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{T}$ καλείται μία* **thick** *(ή Serre) υποκατηγορία, αν για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία:*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$, το M είναι αντικείμενο της $\mathcal{T}$ αν-ν τα M' και M'' είναι αντικείμενα της $\mathcal{T}$.

Συχνά, τα αντικείμενα της $\mathcal{T}$ καλούνται και αντικείμενα στρέψης (torsion objects).

Σχόλιο 2.4.13. Προφανώς, μία thick υποκατηγορία $\mathcal{T}$ περιέχει το μηδενικό στοιχείο, αφού για κάθε αντικείμενο $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{T})$ ο ταυτοτικός μορφισμός $1_M : M \longrightarrow M$ ανήκει στην $\mathcal{T}$ και συνεπώς, από την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

έχουμε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{T}) \Longrightarrow 0 \in \mathsf{ob}(\mathcal{T})$.

Συνεχίζουμε με κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες μίας thick υποκατηγορίας.

Λήμμα 2.4.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία και $\mathcal{T}$ μία thick υποκατηγορία της. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Η $\mathcal{T}$ είναι μία αυστηρά πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$.*

2. *Η $\mathcal{T}$ είναι αβελιανή.*

3. *Κάθε υποαντικείμενο και κάθε πηλίκο ενός αντικειμένου στην $\mathcal{T}$ είναι στην $\mathcal{T}$.*

4. *Οποιαδήποτε επέκταση δύο αντικειμένων στην $\mathcal{T}$ είναι στην $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία και $\mathcal{T}$ μία thick υποκατηγορία της.

1. Θεωρούμε έναν ισομορφισμό $i : N \longrightarrow M$ στην $\mathcal{A}$ με $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{T})$ και τη σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Αφού η $\mathcal{T}$ είναι thick, έχουμε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{T}) \Longrightarrow N \in \mathsf{ob}(\mathcal{T})$. Άρα, η $\mathcal{T}$ είναι αυστηρά πλήρης.

3. Αν $M \in \mathcal{T}$ και M' είναι ένα υποαντικείμενο του M στην $\mathcal{A}$, θεωρώντας τη σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$, αφού η $\mathcal{T}$ είναι thick, θα έχουμε $M' \in \mathcal{T}$. Ομοίως, με την χρήση της παραπάνω ακριβούς ακολουθίας βλέπουμε και ότι $M'' \in \mathcal{T}$ και άρα πηλίκα αντικειμένων της $\mathcal{T}$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$.

4. Άμεσα, αν έχουμε μία σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$ και τα αντικείμενα M' και M'' ανήκουν στην $\mathcal{T}$, τότε και η επέκταση M αυτών εξ ορισμού είναι στην $\mathcal{T}$.

2. Έστω $f\colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}$. Θεωρώντας τον f σαν έναν μορφισμό στην $\mathcal{A}$ η οποία είναι αβελιανή, θα υπάρχουν ο πυρήνας, η εικόνα, ο συνπυρήνας και η συνεικόνα του f στην $\mathcal{A}$. Αφού η $\mathcal{T}$ είναι thick, είναι κλειστή στους πυρήνες και στα πηλίκα, άρα αυτά θα είναι και αντικείμενα της $\mathcal{T}$. Συμπεραίνουμε ότι το παρακάτω ακριβές μεταθετικό διάγραμμα λοιπόν της $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker} f \arrow[r, "\mathsf{ker} f"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{coim} f"'] & N \arrow[r, "\mathsf{coker} f"] & \mathsf{Coker} f \\
& \mathsf{Coim} f \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[ur] & \mathsf{Im} f \arrow[u, "\mathsf{im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι ένα ακριβές μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{T}$ και επειδή ο $\tilde{f}$ είναι ισομορφισμός, η κατηγορία $\mathcal{T}$ έπεται ότι είναι αβελιανή. ■

Ο κύριος λόγος που εισήχθηκε η έννοια της thick υποκατηγορίας θα γίνει εμφανής ευθύς αμέσως, καθώς θα χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία μίας τοπικοποιούσας κλάσης σε μία αβελιανή κατηγορία.

Λήμμα 2.4.15. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{A}$. Θεωρούμε την πλήρη υποκατηγορία $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα M στην $\mathcal{A}$ που είναι ισόμορφα με το 0 στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Τότε η $\mathcal{B}$ είναι thick.*

Απόδειξη. Έστω

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$ με $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$. Αφού ο συναρτητής $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ είναι ακριβής, έπεται ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Q(M') \xrightarrow{i} Q(M) \longrightarrow Q(M'') \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B}) \Longrightarrow Q(M) = 0$, λόγω ακρίβειας άμεσα συμπεραίνουμε ότι $Q(M') = Q(M'') = 0$. Συνεπώς τα αντικείμενα M' και M'' ανήκουν στην $\mathcal{B}$. Από την άλλη πλευρά, αν τα $M', M'' \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$, τότε $Q(M') = Q(M'') = 0$ και επομένως από την παραπάνω σύντομη ακριβή ακολουθία έπεται ότι $Q(M) = 0$, δηλαδή ότι $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$. Άρα, η $\mathcal{B}$ είναι μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. ■

Ορισμός 2.4.16. *Έστω $\mathcal{T}$ μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Θα συμβολίζουμε με $S_{\mathcal{T}}$ την κλάση όλων των μορφισμών $f\colon M \longrightarrow N$ έτσι ώστε τα αντικείμενα $\mathsf{Ker} f$ και $\mathsf{Coker} f$ να είναι αντικείμενα της $\mathcal{T}$.*

Λήμμα 2.4.17. *Η κλάση $S_{\mathcal{T}}$ των μορφισμών στην $\mathcal{A}$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση.*

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $S_{\mathcal{T}}$ πληροί τις συνθήκες (LC1) – (LC4) του ορισμού 2.1.8. Για λεπτομέρειες βλ. [39, 2.2.5. LEMMA.]. ∎

Παρατήρηση 2.4.18. Διατηρώντας τον παραπάνω συμβολισμό, έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{T}$ μία thick υποκατηγορία της. Θεωρούμε ένα αντικείμενο M της $\mathcal{T}$ και τον μορφισμό $M \longrightarrow 0$, ο πυρήνας του οποίου είναι το M και ο συνπυρήνας το 0. Εξ ορισμού δηλαδή, αυτός ο μορφισμός ανήκει στην $S_{\mathcal{T}}$ και αφού η τελευταία είναι μία τοπικοποιούσα κλάση, το M θα είναι ισόμορφο με το 0 στην $\mathcal{A}[S_{\mathcal{T}}^{-1}]$. Αντίστροφα, αν το M είναι ισόμορφο με το 0 στην $\mathcal{A}[S_{\mathcal{T}}^{-1}]$, το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\
M & & M
\end{tikzcd}$$

που αναπαριστά τον ταυτοτικό μορφισμό στο M, πρέπει να είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "0"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\
M & & M
\end{tikzcd}$$

το οποίο αναπαριστά τον μηδενικό μορφισμό στο Μ. Θα υπάρχει, επομένως, αντικείμενο U και μορφισμός $u\colon U \longrightarrow M$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "1_M"] & \\
M & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "u"] & M \\
& M \arrow[ul, "1_M", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον $1_M \circ u = u \in S_{\mathcal{T}}$. Από τη μεταθετικότητα έχουμε: $1_M \circ u = 0 \circ u \Longrightarrow u = 0$. Ο u επομένως είναι ένας μηδενικός μορφισμός και άρα ο συνπυρήνας του είναι το M. Αφού $u \in S_{\mathcal{T}}$, εξ ορισμού ο συνπυρήνας του, $M \in \operatorname{ob}\mathcal{T}$. Καταλήγουμε επομένως ότι ένα αντικείμενο ανήκει στην $\mathcal{T}$ αν-ν είναι ισόμορφο με το 0 στην $\mathcal{A}[S_{\mathcal{T}}^{-1}]$. Αυτό, λαμβάνοντας υπόψιν και το Λήμμα 2.4.15 αποτελεί την αφορμή για τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.4.19. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{T}$ μία thick υποκατηγορία της. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Verdier στο [52, 2.2.10], ονομάζουμε την τοπικοποίηση $\mathcal{A}[S_{\mathcal{T}}^{-1}]$ της $\mathcal{A}$ ως προς την κλάση μορφισμών $S_{\mathcal{T}}$,* **κατηγορία πηλίκο** *της $\mathcal{A}$ ως προς την thick υποκατηγορία $\mathcal{T}$ και θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{A}/\mathcal{T}$:*

$$\mathcal{A}[S_{\mathcal{T}}^{-1}] = \mathcal{A}/\mathcal{T}$$

Ο συναρτητής τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{T}$ σε αυτό το πλαίσιο καλείται και συναρτητής πηλίκο.

Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο με μία πρόταση η οποία προκύπτει ως εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύχθηκε έως τώρα.

Πρόταση 2.4.20. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο thick υποκατηγορίες της. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ είναι μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{A}$.*

2. *Ο φυσικός συναρτητής $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$ είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ και έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ δύο thick υποκατηγορίες της.

1. Έστω μια ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ i\ } M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Αν τα M', M'' είναι αντικείμενα της $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, εφόσον οι υποκατηγορίες $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ είναι thick, έχουμε: $M', M'' \in \mathsf{ob}(\mathcal{B}) \Longrightarrow M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και ομοίως $M', M'' \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \Longrightarrow M \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και συνεπώς το M είναι αντικείμενο της $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Αντίστροφα, αν το M είναι αντικείμενο της $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, έχουμε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{B}) \Longrightarrow M', M'' \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \Longrightarrow M', M'' \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$. Επομένως τα M', M'' είναι αντικείμενα της $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ και η $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ είναι thick υποκατηγορία της $\mathcal{A}$.

2. Έστω f ένας μορφισμός στην $\mathcal{B}$ ο οποίος ανήκει και στην $S_{\mathcal{C}}$. Τότε, αφού ο f είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{B}$ και η τελευταία είναι thick, από το Λήμμα 2.4.14, έπεται ότι τα αντικείμενα $\mathsf{Coker}f$ και $\mathsf{Ker}f$ θα ανήκουν στην $\mathcal{B}$. Όμως, ο f είναι και μορφισμός στην $S_{\mathcal{C}}$, άρα εξ ορισμού τα αντικείμενα $\mathsf{Coker}f$ και $\mathsf{Ker}f$ θα ανήκουν και στην $\mathcal{C}$. Από τις δύο παραπάνω προτάσεις συμπεραίνουμε άμεσα ότι τα αντικείμενα $\mathsf{Coker}f$ και $\mathsf{Ker}f$ ανήκουν στην $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι οποιοσδήποτε μορφισμός στην $\mathcal{B}$ ο οποίος ανήκει και στην $S_{\mathcal{C}}$, ανήκει επίσης και στην $S_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$. Λόγω αυτού, ο φυσικός συναρτητής έγκλεισης $j \colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$ θα αναλύεται μέσω του συναρτητή $i \colon \mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{C}$.

   Θεωρούμε τώρα δύο αντικείμενα M και N στην $\mathcal{B}$ και θα δείξουμε ότι η απεικόνιση:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})}(M, N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, N)$$

   είναι ισομορφισμός.
   Έστω $\phi = f/s \colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ έτσι ώστε $i(\phi) = 0$. Ο ϕ θα αναπαριστάται με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

   όπου $L \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$, $s \colon L \longrightarrow M$ ένας μορφισμός στην $S_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$ και $f \colon L \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{B}$. Λόγω του ότι $i(\phi) = 0$, γνωρίζουμε από το Πόρισμα 2.4.7 ότι υπάρχει ένας μορφισμός $t \colon K \longrightarrow L$ ο οποίος ανήκει στην $S_{\mathcal{C}}$, άρα και στην $S_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$ όπως δείξαμε παραπάνω, έτσι ώστε $f \circ t = 0$. Από τον ορισμό της $S_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$ τότε, προκύπτει ότι το αντικείμενο $\mathsf{Coker}t$ ανήκει στην κατηγορία $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, ενώ η $\mathcal{B}$ ως thick υποκατηγορία, είναι κλειστή στους πυρήνες και το αντικείμενο $\mathsf{Im}t$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Από τον ορισμό, πάλι, έχουμε ότι ο μονομορφισμός $\mathsf{im}t \colon \mathsf{Im}t \longrightarrow L$ ανήκει στην $S_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}}$. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.4.7 ξανά, εφόσον $f \circ u = 0$, συμπεραίνουμε ότι $Q(f) = 0$, άρα $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1} = 0$ και ο μορφισμός:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})}(M, N) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(M, N)$$

   είναι μονομορφισμός.

   Έστω τώρα $\psi = f/s \colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

όπου $L \in \mathcal{A}$, $s \in S_{\mathcal{C}}$ και $f\colon L \longrightarrow N$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Θέτουμε $K = L/(\mathsf{Ker}s \cap \mathsf{Ker}f)$ και έστω $q\colon L \longrightarrow K$ η κανονική προβολή. Αφού ο q είναι επιμορφισμός, θα έχουμε $q = \mathsf{coim}q = \mathsf{coker}(\mathsf{ker}q)$. Τότε, από την καθολική ιδιότητα του συνπυρήνα όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}q \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[r, "q"] \arrow[d, "s"] & K \arrow[dl, dashed, "\exists ! t"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

θα υπάρχει μορφισμός $t\colon K \longrightarrow M$ έτσι ώστε $s = t \circ q$ και ανάλογα θα υπάρχει $g\colon K \longrightarrow N$ με $f = g \circ q$. Έχουμε δηλαδή το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
M & L \arrow[u, "1_L"'] \arrow[d, "q"] & N \\
& K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Από την σχέση $s = t \circ q$, εφόσον ο q είναι επιμορφισμός, εύκολα βλέπουμε ότι $\mathsf{Im}t = \mathsf{Im}s$ και επίσης $\mathsf{Coker}t = \mathsf{Coker}s$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο πυρήνας $\mathsf{Ker}t$ της $t\colon K \longrightarrow M$ είναι ένα πηλίκο του $\mathsf{Ker}s$, έπεται ότι ο μορφισμός t ανήκει επίσης στην $S_{\mathcal{C}}$. Έτσι, ο μορφισμός ψ μπορεί εξαρχής να αναπαρασταθεί με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

και το K μπορεί να ταυτισθεί με το L θεωρώντας ότι $\mathsf{Ker}f \cap \mathsf{Ker}s = 0$. Θεωρούμε τώρα τις κανονικές εγκλείσεις $i\colon M \longrightarrow M \oplus N$ και $j\colon N \longrightarrow M \oplus N$. Μέσω του μονομορφισμού $i \circ s \oplus j \circ f\colon L \longrightarrow M \oplus N$ μπορούμε να θεωρήσουμε το L σαν ένα υποαντικείμενο του $M \oplus N$. Αφού $M, N \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και η υποκατηγορία $\mathcal{B}$ είναι thick, θα ισχύει και $M \oplus N \in \mathsf{ob}(\mathcal{B}) \Longrightarrow L \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$. Το παραπάνω αριστερό roof αναπαριστά, δηλαδή, έναν μορφισμό στην $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ του οποίου η εικόνα μέσω του i είναι ο ψ. Συνεπώς, ο ζητούμενος ομομορφισμός ομάδων είναι ισομορφισμός. ■

Σχόλιο 2.4.21. Με τα δεδομένα της παραπάνω πρότασης, μπορούμε να θεωρήσουμε την κατηγορία πηλίκο $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ ως μία πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{A}/\mathcal{C}$.

Κεφάλαιο 3

Τριγωνισμένες Κατηγορίες

3.1 Τριγωνισμένες Κατηγορίες

Η έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας εισήχθηκε από τους Puppe και Verdier την ίδια περίπου χρονική περίοδο (μέσα του 1960), αλλά σε ανεξάρτητες δημοσιεύσεις. Ο Puppe, ορίζει στο [46] την τριγωνισμένη κατηγορία χρησιμοποιώντας ως κύριο παράδειγμα την ομοτοπική κατηγορία, ενώ ο Verdier στη διδακτορική του διατριβή, η οποία δημοσιεύτηκε αρκετά αργότερα, αναπτύσσει την έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας με κύριο παράδειγμα αυτό μίας παραγόμενης κατηγορίας (βλ. [52]). Οι δύο αυτές έννοιεςθα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο και για τον λόγο αυτόν προς το παρόν θα παραλείψουμε επιπλέον παραδείγματα τριγωνισμένων κατηγοριών.

Η θεωρία των τριγωνισμένων κατηγοριών βρήκε αρχικά εφαρμογή στην αλγεβρική γεωμετρία και στην αλγεβρική τοπολογία, ενώ σήμερα η χρήση της έχει επεκταθεί σε ποικίλους κλάδους των μαθηματικών όπως στη μεταθετική άλγεβρα, στη διαφορική γεωμετρία (κατηγορίες Fukaya), στη θεωρία αναπαραστάσεων (derived and stable module categories), στην ανάλυση (για παράδειγμα βλ. [49]).

Άλλες εφαρμογές αυτής της θεωρίας εμφανίζονται και ιδιαίτερα πρόσφατα σε κλάδους όπως η symplectic geometry και πιο συγκεκριμένα από τον Kontsevich στο [35] για τον ορισμό της mirror symmetry. Τέλος, ενδεικτικά αναφέρουμε και το άρθρο του Keller, βλ. [34], στο οποίο αναπτύσσεται ένα άλλο παράδειγμα τριγωνισμένων κατηγοριών, αυτό των cluster categories, στο πλαίσιο της θεωρίας των cluster algebras, η οποία εισήχθηκε από τους S. Fomin και A. Zelevinsky περίπου το 2000.

Το παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνει αρχικά τον ορισμό και βασικές ιδιότητες μιας τριγωνισμένης κατηγορίας, ενώ στη συνέχεια εξετάζεται η τοπικοποίηση τριγωνισμένων κατηγοριών. Η πορεία που θα ακολουθηθεί βασίζεται στον Milicic στο [39] και είναι σύμφωνη με τον Verdier (βλ. [52]).

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία. Ένας* **συναρτητής μεταφοράς (translation functor ή shift functor)** *στην $\mathcal{C}$ είναι ένας προσθετικός συναρτητής $\Sigma\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ο οποίος αποτελεί έναν αυτομορφισμό της $\mathcal{C}$. Για ένα τυχαίο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, θέτουμε $\Sigma^n X = \Sigma^n(X)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Σχόλιο 3.1.2. Στη βιβλιογραφία, συχνά, για τον συναρτητή μεταφοράς χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $X[n] = \Sigma^n X$.

Ορισμός 3.1.3. *Έστω $\mathcal{C}$ είναι μία προσθετική κατηγορία και $\Sigma\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ένας συναρτητής μεταφοράς. Ένα* **τρίγωνο** *στην $\mathcal{C}$ είναι ένα διάγραμμα μορφισμών στην $\mathcal{C}$ της μορφής*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

Το παραπάνω τρίγωνο θα αναπαριστάται σχηματικά ως

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Σχόλιο 3.1.4. Το $[1]$ στο παραπάνω διάγραμμα συμβολίζει ότι ο μορφισμός από το Z καταλήγει στην εικόνα ΣX του X μέσω του συναρτητή μεταφοράς.

Σχόλιο 3.1.5. Αν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός σε μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$, τότε ένα τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

καλείται τρίγωνο με **βάση** τον μορφισμό f.

Στη συνέχεια ορίζουμε μορφισμούς μεταξύ αυτών των τριγώνων.

Ορισμός 3.1.6. *Έστω*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X' \arrow[rr] & & Y' \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

δύο τρίγωνα σε μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$. Ένας **μορφισμός τριγώνων** *είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

Θα λέμε ότι ο παραπάνω μορφισμός τριγώνων είναι ένας **ισομορφισμός τριγώνων** *αν οι μορφισμοί u, v και w είναι ισομορφισμοί.*

Επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σε μία συγκεκριμένη κλάση τέτοιων τριγώνων.

Ορισμός 3.1.7. *Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία και $\Sigma\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ένας συναρτητής μεταφοράς. Ορίζουμε μία κλάση τριγώνων στην $\mathcal{C}$, τα στοιχεία της οποίας θα χαρακτηρίζονται ως* **διακεκριμένα τρίγωνα**, *και ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:*

(TR1) (a) *Οποιοδήποτε τρίγωνο που είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο τρίγωνο, είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο.*

(b) *Για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, το*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "1_X"] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο.

(c) *Για οποιουδήποτε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

όπου Z είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$.

(TR2) *Αν το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο, τότε και τα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} & \Sigma X \arrow[dl, "-\Sigma f"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "g"', "{[1]}"] & \\ \Sigma^{-1} Z \arrow[rr, "-\Sigma^{-1} h"] & & X \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένα.

(TR3) *Για ένα οποιοδήποτε διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το πρώτο τετράγωνο μεταθετικό, υπάρχει ένας μορφισμός $w\colon Z \longrightarrow Z'$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists\, w"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

να είναι ένας μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων.

(TR4) *Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ και $h = g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Τότε το διάγραμμα*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "c"] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}
$$

όπου οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "b"] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "v"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"'] & Z \arrow[r, "c"] \arrow[d, "b"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "1_{X'}"'] & \Sigma Y \arrow[d, "\Sigma a"'] \\
Z' \arrow[r, dashed, "u"] & Y' \arrow[r, dashed, "v"] & X' \arrow[r, dashed, "w"] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}
$$

όπου όλες οι τέσσερις οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και οι κάθετες στήλες σχηματίζουν μορφισμούς τριγώνων.

Παρατήρηση 3.1.8. Το αξίωμα (TR2) καλείται και αξίωμα της στροφής τριγώνων (turning of triangles axiom) διότι τα δύο νέα διακεκριμένα τρίγωνα προκύπτουν αντίστοιχα με μία δεξιόστροφη και μία αριστερόστροφη «περιστροφή» του αρχικού. Επιπλέον, το αξίωμα (TR4) καλείται και αξίωμα του οκτάεδρου (the octahedral axiom) καθώς αναπαριστάται με το παρακάτω διάγραμμα οκτάεδρο:

$$\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[ddll, "{[1]}"'] \arrow[drr, dashed, "v"] & & \\
 & Z' \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[dl, "{[1]}"] & & & X' \arrow[lll, dashed, "{[1]}", "w"'] \arrow[ddll, "{[1]}"] \\
X \arrow[rrr, "h"] \arrow[drr, "f"'] & & & Z \arrow[uul] \arrow[ur] & \\
 & & Y \arrow[uul] \arrow[ur, "g"] & &
\end{tikzcd}$$

Το αρχικό διάγραμμα αποτελείται από τρία διακεκριμένα τρίγωνα. Το αξίωμα (TR4) εξασφαλίζει την ύπαρξη των μορφισμών u, v και w σχηματίζοντας ένα νέο διακεκριμένο τρίγωνο και ολοκληρώνοντας το οκτάεδρο.

Παρατήρηση 3.1.9. Σύμφωνα με τους Kashiwara και Schapira στο [33, Remark 10.1.8.], ο μορφισμός w στο αξίωμα (TR3) δεν είναι μοναδικός, και για μία προσπάθεια επίλυσης αυτού του προβλήματος βλ. [16].

Παρατήρηση 3.1.10. Η παραπάνω εκδοχή, (TR4), του αξιώματος του οκταέδρου ακολουθεί τους Kashiwara και Schapira, βλ. [33, Definition 10.1.6.] και είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Ωστόσο, στην βιβλιογραφία, υπάρχουν ισοδύναμες εκδοχές αυτού του αξιώματος, για παράδειγμα βλ. [43, Proposition 1.4.6.]. Για λόγους για λόγους πληρότητας, λοιπόν, παραπέμπουμε τον αναγνώστη και σε ένα άρθρο του Jørgensen, βλ. [31, Remark 3.2.], όπου περιγράφονται δύο τέτοιες εκδοχές.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε την έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας στην οποία τα διακεκριμένα τρίγωνα «αντικαθιστούν» κατά κάποιον τρόπο (βλ. [31, §3.]) τις ακριβείς ακολουθίες μίας αβελιανής κατηγορίας. Ωστόσο, υπάρχει μία βασική διαφορά μεταξύ αυτών των δύο κατηγοριών: Ο χαρακτηρισμός μίας κατηγορίας ως αβελιανή βασίζεται μία καθαρά εσωτερική ιδιότητα της κατηγορίας. Από την άλλη πλευρά, για να χαρακτηριστεί μία κατηγορία ως τριγωνισμένη απαιτείται η ύπαρξη ενός συναρτητή μεταφοράς και μία δομή διακεκριμένων τριγώνων η οποία ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα. Πολλές φορές, μία προσθετική κατηγορία, μπορεί να έχει παραπάνω από μία τριγωνισμένες δομές, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, συνεπώς ο χαρακτηρισμός μίας κατηγορίας ως τριγωνισμένη είναι κυρίως εξωτερικός.

Ορισμός 3.1.11. *Μία **τριγωνισμένη** κατηγορία είναι μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$, εφοδιασμένη με έναν προσθετικό αυτομορφισμό Σ και μία κλάση διακεκριμένων τριγώνων η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα* (TR1)-(TR4).

Παρατήρηση 3.1.12. Σύμφωνα με τον Neeman, βλ. [43, Remark 1.1.3.], στον παραπάνω ορισμό δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι προσθετική, αλλά αρκεί να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μία pointed κατηγορία, δηλαδή ότι έχει ένα μηδενικό αντικείμενο και ότι τα σύνολα μορφισμών είναι αβελιανές ομάδες. Σε αυτήν την περίπτωση, οι υπόλοιπες συνθήκες που απαιτούνται για να είναι η $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία, προκύπτουν από τα αξιώματα (TR1)-(TR3).

Όπως αναφέρθηκε, το κυριότερο παράδειγμα τριγωνισμένης κατηγορίας θα αναλυθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Προς το παρόν, παραθέτουμε ένα τέτοιο παράδειγμα, ενώ για περισσότερα βλ. [7, Chapter 6, §1.2].

Παράδειγμα 3.1.13. Έστω $\mathcal{C} = \mathsf{Vec}_k$ η κατηγορία των διανυσματικών χώρων πάνω από ένα σώμα k. Θεωρούμε ότι ο συναρτητής μεταφοράς Σ είναι η ταυτότητα, δηλαδή $\Sigma = 1_{\mathcal{C}}$ και ορίζουμε μια κλάση διακεκριμένων τριγώνων ως εξής:

Ένα τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ καλείται διακεκριμένο αν είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της μορφής

$$\begin{tikzcd}
 & W \oplus U \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
U \oplus V \arrow[rr, "u"] & & V \oplus W \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

όπου οι απεικονίσεις u, v, w δίνονται από τις παρακάτω εγκλείσεις και προβολές:

$$u = U \oplus V \xrightarrow{(0\ 1)} V \xrightarrow{\binom{1}{0}} V \oplus W$$
$$v = V \oplus W \xrightarrow{(0\ 1)} W \xrightarrow{\binom{1}{0}} W \oplus U$$
$$w = W \oplus U \xrightarrow{(0\ 1)} U \xrightarrow{\binom{1}{0}} U \oplus V$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή η κλάση τριγώνων πράγματι ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1)-(TR4) και συνεπώς εφοδιάζει την $\mathcal{C}$ με τη δομή μίας τριγωνισμένης κατηγορίας.

3.2 Συναρτητές σε Τριγωνισμένες Κατηγορίες

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι ο ορισμός συναρτητών οι οποίοι θα είναι συμβατοί με φυσικό τρόπο με τον συναρτητή μεταφοράς μίας τριγωνισμένης κατηγορίας και επίσης θα «διατηρούν» την τριγωνική δομή της κατηγορίας αυτής.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ καλείται* **βαθμωτός (graded)**, *αν οι συναρτητές $\Sigma \circ F$ και $F \circ \Sigma$ είναι φυσικά ισοδύναμοι.*

Σχόλιο 3.2.2. Στον παραπάνω ορισμό χρησιμοποιήσαμε, κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, το σύμβολο Σ και για τους δύο αυτομορφισμούς: $\Sigma_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ και $\Sigma_{\mathcal{D}}\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ των τριγωνισμένων κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια, θα διατηρήσουμε αυτόν τον συμβολισμό χάριν σύμβασης.

Λήμμα 3.2.3. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας βαθμωτός συναρτητής. Τότε ο F απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα της $\mathcal{C}$ σε διακεκριμένα τρίγωνα της $\mathcal{D}$ και μορφισμούς τριγώνων στην $\mathcal{C}$ σε μορφισμούς τριγώνων στην $\mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ και εφαρμόσουμε τον βαθμωτό συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ αποκτούμε ένα διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r, "F(h)"] & F(\Sigma X) \arrow[r, "\eta_X"] & \Sigma F(X) \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $\eta_X\colon F(\Sigma X) \longrightarrow \Sigma F(X)$ είναι ισομορφισμός. Προκύπτει δηλαδή ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & F(Z) \arrow[dl, "\eta_X\circ F(h)"', "{[1]}"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Y) \arrow[ul, "F(g)"'] \end{tikzcd}$$

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

εφαρμόζοντας τον F παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d, "F(u)"'] & F(Y) \arrow[r] \arrow[d, "F(v)"'] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, "F(w)"'] & F(\Sigma X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(\Sigma u)"'] & \Sigma F(X) \arrow[d, "\Sigma F(u)"'] \\ F(X') \arrow[r] & F(Y') \arrow[r] & F(Z') \arrow[r] & F(\Sigma X') \arrow[r, "\eta_{X'}"] & \Sigma F(X') \end{tikzcd}$$

το οποίο χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι η_X και $\eta_{X'}$ είναι ισομορφισμοί αποτελεί έναν μορφισμό τριγώνων. ■

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε έναν συναρτητή ο οποίος διατηρεί την τριγωνική δομή.

Ορισμός 3.2.4. *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας βαθμωτός συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ καλείται* **ακριβής**, *αν απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα σε διακεκριμένα τρίγωνα.*

Ένας ακριβής συναρτητής ο οποίος αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών καλείται ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών και οι κατηγορίες αυτές ισοδύναμες τριγωνισμένες κατηγορίες.

Στον παραπάνω ορισμό διατηρήσαμε την ορολογία του Milicic στο [39]. Αναφέρουμε πληροφοριακά ότι ένας συναρτητής ο οποίος πληροί τις συνθήκες του Ορισμού 3.2.4 καλείται και τριγωνισμένος (βλ. [33, Definition 10.1.9]).

Παραθέτουμε στη συνέχεια δύο παραδείγματα από τους Kashiwara και Schapira (βλ. [33, Remark 10.1.10]).

Παράδειγμα 3.2.5. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία, καλούμε ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ αντι-διακεκριμένο, αν το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "-h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο. Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι αυτή η κλάση αντι-διακεκριμένων τριγώνων ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1)-(TR4) εφοδιάζοντας, έτσι, την κατηγορία $\mathcal{C}$ με μία τριγωνισμένη δομή. Αν συμβολίσουμε αυτήν την τριγωνισμένη κατηγορία με $\mathcal{C}^{\mathsf{ant}}$, προκύπτει ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}^{\mathsf{ant}}$ είσαι ισοδύναμες τριγωνισμένες κατηγορίες.

Παράδειγμα 3.2.6. Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\iota\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ο συναλλοίωτος συναρτητής στην δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Θέτουμε $\Sigma^{\mathsf{op}} = \Sigma^{-1} \circ \iota^{-1}$ και καλούμε ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ διακεκριμένο, αν το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ Z \arrow[rr, "g"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$. Τότε, προκύπτει ότι η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ εφοδιασμένη με αυτήν την κλάση διακεκριμένων τριγώνων αποκτά δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [39, Chapter 1, §1.2.].

Ορισμός 3.2.7. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες και $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ δύο ακριβείς συναρτητές μεταξύ αυτών. Ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών $w\colon F \longrightarrow G$ καλείται* **βαθμωτός**, *αν το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} F(\Sigma X) \arrow[r, "\eta_{F,X}"] \arrow[d, "\omega_{\Sigma X}"'] & \Sigma F(X) \arrow[d, "\Sigma\omega_X"] \\ G(\Sigma X) \arrow[r, "\eta_{G,X}"] & \Sigma G(X) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.

Παρατήρηση 3.2.8. Στην περίπτωση που οι συνθήκες του Ορισμού 3.2.7 ικανοποιούνται, για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

εφαρμόζοντας τους βαθμωτούς συναρτητές F, G, αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_X"'] & F(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_Y"'] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_Z"'] & F(\Sigma X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\omega_{\Sigma X}"'] & \Sigma F(X) \arrow[d, "\Sigma\omega_X"'] \\
G(X) \arrow[r] & G(Y) \arrow[r] & G(Z) \arrow[r] & G(\Sigma X) \arrow[r, "\eta'_X"] & \Sigma G(X)
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας ότι οι μορφισμοί η_X και η'_X είναι ισομορφισμοί, το παραπάνω διάγραμμα αποτελεί έναν μορφισμό τριγώνων. Αφού οι συναρτητές F και G είναι ακριβείς, αυτός ο μορφισμός είναι ένας μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων.

Εφαρμόζοντας τον αυτομορφισμό $\Sigma\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ μίας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{C}$ σε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

προκύπτει μία μεγάλη ακολουθία μορφισμών της μορφής:

$$\cdots \xrightarrow{\Sigma^{-1}h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \cdots$$

Λήμμα 3.2.9. *Έστω*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Τότε η σύνθεση δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών μορφισμών στο τρίγωνο ισούται με 0, δηλαδή

$$g \circ f = f \circ h = \Sigma f \circ h = 0$$

Απόδειξη. Το αξίωμα της στροφής τριγώνου (TR2) του Ορισμού 3.1.7 επιτρέπει ένα είδος «συμμετρίας» μεταξύ των τριών πλευρών ενός διακεκριμένου τρίγωνου, δηλαδή χρησιμοποιώντας την στροφή τριγώνου παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο μόνο για ένα ζεύγος διαδοχικών πλευρών σε ένα τυχόν τρίγωνο. Στην προκειμένη περίπτωση λοιπόν, θα αποδείξουμε ότι $g \circ f = 0$. Στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

βλέπουμε από το αξίωμα (TR1), ότι η πρώτη σειρά είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Εφόσον από υπόθεση η δεύτερη σειρά είναι επίσης ένα διακεκριμένο τρίγωνο, λόγω του αξιώματος (TR3) θα υπάρχει ένας μορφισμός $u\colon 0 \longrightarrow Z$ ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Από τη μεταθετικότητα του μεσαίου τετραγώνου συμπεραίνουμε ότι $g \circ f = 0$. ■

Η παρακάτω παρατήρηση προέρχεται από τον Murfet, βλ. [42, Remark 7.].

Παρατήρηση 3.2.10. Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία, $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία καθώς και ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$. Τότε, για κάθε τρίγωνο της μορφής

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

χρησιμοποιώντας το αξίωμα (TR2) μπορούμε να κατασκευάσουμε την παρακάτω ακολουθία μορφισμών στην $\mathcal{C}$

$$\dots \xrightarrow{\Sigma^{-1}h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \dots \tag{3.1}$$

όπου κάθε διαδοχική τριάδα μορφισμών (με κατάλληλη αλλαγή των προσήμων) αποτελεί ένα τρίγωνο. Εφαρμόζοντας στην συνέχεια τον F αποκτούμε ένα διάγραμμα:

$$\dots \xrightarrow{F(\Sigma^{-1}h)} F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \xrightarrow{F(h)} F(\Sigma X) \xrightarrow{F(\Sigma f)} \dots \tag{3.2}$$

για το οποίο από το Λήμμα 3.2.9 ισχύει $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = 0$ για δύο τυχαίους διαδοχικούς μορφισμούς. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε ότι αυτό το διάγραμμα αποτελεί ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$.

Στους επόμενους δύο ορισμούς ακολουθούμε τον συμβολισμό του Neeman στο [43, Definition 1.1.7] και [43, Remark 1.1.8] αντίστοιχα.

Ορισμός 3.2.11. *Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένας προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ καλείται* **ομολογιακός συναρτητής (homological functor)** *αν για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

η παρακάτω ακολουθία:

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$.

Σχόλιο 3.2.12. Αν ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ της Παρατήρησης 3.2.10 είναι ομολογιακός, το διάγραμμα (3.2) άμεσα αποτελεί μία μεγάλη ακριβή ακολουθία.

Δυϊκά, ορίζεται η έννοια του συνομολογιακού συναρτητή.

Ορισμός 3.2.13. *Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένας προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ καλείται* **συνομολογιακός συναρτητής (cohomological functor)** *αν για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

η παρακάτω ακολουθία:

$$F(Z) \xrightarrow{F(g)} F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$.

3.3 Βασικές Ιδιότητες Τριγωνισμένων Κατηγοριών

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η ανάπτυξη των εργαλείων που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια στην τοπικοποίηση μίας τριγωνισμένης κατηγορίας. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν δεν εξαρτώνται από το αξίωμα του οκτάεδρου (TR4), αλλά απαιτούν μόνο να ικανοποιούνται τα αξιώματα (TR1) – (TR3). Για τον λόγο αυτόν θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε περιπτώσεις όπου θα χρειαστεί να επαληθεύσουμε το (TR4) γνωρίζοντας την ισχύ των υπολοίπων αξιωμάτων.

Γενικά, αν $\mathcal{C}$ είναι μία προσθετική κατηγορία, εφοδιασμένη με έναν συναρτητή μεταφοράς Σ και μία κλάση διακεκριμένων τριγώνων η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1) – (TR3), τότε η $\mathcal{C}$ καλείται μία προ-τριγωνισμένη (pretriangulated) κατηγορία. Παρόμοια με την περίπτωση των τριγωνισμένων κατηγοριών μπορούμε έτσι να ορίσουμε την έννοια ενός ακριβή συναρτητή, ενός ομολογιακού συναρτητή και ενός συνομολογιακού συναρτητή. Η ορολογία αυτή εισάγεται από τον Verdier στο [52, Chapitre III, §2.2.12.]. Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι το αξίωμα (TR4) διαφοροποιείται από τα υπόλοιπα. Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής θα ασχοληθούμε μόνο με τριγωνισμένες κατηγορίες, ενώ για μία προσέγγιση, σύμφωνη με τον παραπάνω διαχωρισμό, βλ. [43].

Βλέπουμε ότι στην Παρατήρηση 3.2.10 αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U, -)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

στην ακολουθία (4.2), προκύπτει ένα διάγραμμα της μορφής

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z) \xrightarrow{h_*} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U, \Sigma X) \xrightarrow{\Sigma f_*} \cdots$$

Η παρακάτω πρόταση δείχνει ότι το διάγραμμα αυτό αποτελεί συγκεκριμένα μία μεγάλη ακριβή ακολουθία.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και Ab η κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Τότε ο συναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U, -)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ένας ομολογιακός συναρτητής.*

Απόδειξη. Έστω

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$. Θα δείξουμε ότι η παρακάτω ακολουθία αβελιανών ομάδων είναι ακριβής

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U,X) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U,Y) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(U,Z)$$

Από το παραπάνω σχόλιο, γνωρίζουμε ότι ισχύει $\mathsf{Im} f_* \subset \mathsf{Ker} g_*$, έτσι μένει να δείξουμε ότι $\mathsf{Ker} g_* \subset \mathsf{Im} f_*$. Έστω $u\colon U \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός με $u \in \mathsf{Ker} g_*$, δηλαδή $g_*(u) = 0 \Longrightarrow g \circ u = 0$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma U \arrow[r, "-1_{\Sigma U}"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma u"'] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma f"'] & \Sigma Y \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Από το αξίωμα (TR0), το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "1_U"] & & U \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο ενώ σύμφωνα με το (TR2) και το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \Sigma U \arrow[dl, "-1_{\Sigma U}"', "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

θα είναι επίσης διακεκριμένο, συνεπώς η πρώτη γραμμή του διαγράμματος (3.3) είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Επιπλέον, πάλι από το (TR2), εφαρμόζοντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων στο αρχικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \Sigma X \arrow[dl, "-\Sigma f"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

που αποτελεί τη δεύτερη γραμμή του διαγράμματος. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το αξίωμα (TR3) προκύπτει η ύπαρξη ενός μορφισμού $v\colon U \longrightarrow X$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma U \arrow[r, "-1_{\Sigma U}"] \arrow[d, "\Sigma v"'] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma u"'] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma f"'] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

να αποτελεί έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Λόγω της μεταθετικότητας του δεξιού τετραγώνου, έχουμε $\Sigma u = \Sigma f \circ \Sigma v \implies u = f \circ v = f_*(v)$, δηλαδή $u \in \mathsf{Im} f_*$ και επομένως $\mathsf{Ker} g_* \subset \mathsf{Im} f_*$. ∎

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, U)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ένας συνομολογιακός συναρτητής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 3.3.1. ∎

Το ακόλουθο λήμμα αποτελεί ένα αντίστοιχο του five lemma για τριγωνισμένες κατηγορίες.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"'] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

ένας μορφισμός διακεκριμένων τριγώνων. Αν δύο από τους τρεις μορφισμούς u, v και w είναι ισομορφισμοί, τότε και ο τρίτος είναι επίσης ισομορφισμός.

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση στην οποία οι u και v είναι ισομορφισμοί καθώς οι υπόλοιπες προκύπτουν από αυτήν χρησιμοποιώντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων.

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', -)$ στο παραπάνω διάγραμμα προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X) \arrow[r] \arrow[d, "u_*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y) \arrow[r] \arrow[d, "v_*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) \arrow[r] \arrow[d, "w_*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \Sigma X) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma u_*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \Sigma Y) \arrow[d, "\Sigma v_*"'] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \Sigma X') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \Sigma Y')
\end{tikzcd}$$

του οποίου οι γραμμές λόγω της Πρότασης 3.3.1 είναι ακριβείς, ενώ από υπόθεση, οι μορφισμοί u_*, v_*, Σu_* και Σv_*, είναι ισομορφισμοί. Από το γνωστό five lemma στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, άμεσα συμπεραίνουμε ότι και ο w_* είναι ένας ισομορφισμός. Θα υπάρχει, επομένως ένας μορφισμός $\alpha\colon Z' \longrightarrow Z$ έτσι ώστε $w_*(\alpha) = w \circ \alpha = 1_{Z'}$.

Παρόμοια, εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ αποκτούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma Y', Z) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma v^*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma X', Z) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma u^*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) \arrow[r] \arrow[d, "w^*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Z) \arrow[r] \arrow[d, "v^*"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Z) \arrow[d, "u^*"'] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma Y, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma X, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)
\end{tikzcd}$$

όπου πάλι όλες οι γραμμές είναι ακριβείς και οι μορφισμοί Σv^*, Σu^*, v^* και u^* είναι ισομορφισμοί. Χρησιμοποιώντας το five lemma ακόμη μία φορά προκύπτει και ότι ο w^* είναι ένας ισομορφισμός. Θα υπάρχει, άρα, ένας μορφισμός $\beta\colon Z' \longrightarrow Z$ έτσι ώστε $w^*(\beta) = \beta \circ w = 1_Z$. Έχουμε έτσι: $\beta = \beta \circ 1_{Z'} = \beta \circ (w \circ \alpha) = (\beta \circ w) \circ \alpha = 1_Z \circ \alpha = \alpha$. Θέτοντας $w' = \alpha = \beta$ βλέπουμε ότι ο μορφισμός w' είναι ένας αριστερός και δεξιός αντίστροφος του w, συνεπώς ο τελευταίος είναι ισομορφισμός. ■

Σχόλιο 3.3.4. Έστω δύο διακεκριμένα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα (TR3), θα υπάρχει ένας μορφισμός $w\colon Z \longrightarrow Z'$ ο οποίος συμπληρώνει το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists w"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα, ο μορφισμός w είναι ισομορφισμός, συνεπώς η τρίτη κορυφή ενός διακεκριμένου τριγώνου είναι μοναδική με ακρίβεια ισομορφισμού. Κατ' αναλογία με την κατηγορία των συμπλόκων όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, θα καλούμε αυτήν την κορυφή έναν **κώνο** του μορφισμού f.

Σε αυτό το σημείο, είναι φυσικό κάποιος να αναρωτηθεί αν ο κώνος αποτελεί έναν συναρτητή: $\mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$, όπου με $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ συμβολίζουμε την κατηγορία των μορφισμών της $\mathcal{C}$. Η απάντηση είναι αρνητική καθώς αν $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ είναι δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}$, η κατασκευή του κώνου δεν είναι συμβατή με τη σύνθεση μορφισμών. Συμβολίζοντας δηλαδή με $\mathsf{cone}(f)$ και $\mathsf{cone}(g)$ τους αντίστοιχους μορφισμούς στον κώνο, δεν ισχύει απαραίτητα $\mathsf{cone}(g \circ f) = \mathsf{cone}(g) \circ \mathsf{cone}(f)$. Για μία ασθενέστερη συνθήκη, βλ. [7, Chapter 6, §2.1].

Λήμμα 3.3.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. *Ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός.*

2. *Για τον κώνο Z του f ισχύει $Z = 0$.*

Απόδειξη. Από το αξίωμα (TR1), το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "1_X"] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{C}$, συνεπώς το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

αποτελεί έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων.

Αν ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός, από το Λήμμα 3.3.3 προκύπτει ότι και ο μορφισμός $0 \longrightarrow Z$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή $Z = 0$.

Αντίστροφα, αν $Z = 0$, ο μορφισμός $0 \longrightarrow Z$ είναι ισομορφισμός, επομένως από το Λήμμα 3.3.3 και ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός. ■

Το παρακάτω λήμμα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, επιτρέπει την «πρόσθεση» διακεκριμένων τριγώνων.

Λήμμα 3.3.6. *Αν*

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[ul, "g'"']
\end{tikzcd}$$

είναι δύο διακεκριμένα τρίγωνα σε μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{C}$, τότε και το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & Z \oplus Z' \arrow[dl, "h \oplus h'"', "{[1]}"] & \\
X \oplus X' \arrow[rr, "f \oplus f'"] & & Y \oplus Y' \arrow[ul, "g \oplus g'"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [39, 1.4.7. LEMMA.]. ■

Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω λήμματος, το οποίο και παραθέτουμε ευθύς αμέσως.

Λήμμα 3.3.7. *Έστω*

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[ul, "g'"']
\end{tikzcd}$$

δύο τρίγωνα σε μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε, αν το τρίγωνο «ευθύ άθροισμα»

$$\begin{tikzcd}
 & Z \oplus Z' \arrow[dl, "h \oplus h'"', "{[1]}"] & \\
X \oplus X' \arrow[rr, "f \oplus f'"] & & Y \oplus Y' \arrow[ul, "g \oplus g'"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο, και τα δύο αρχικά τρίγωνα είναι επίσης διακεκριμένα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [43, Proposition 1.2.3.]. ■

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα, βλέπουμε πως τα ευθέα αθροίσματα αλλά και οι ευθείς αθροιστέοι διακεκριμένων τριγώνων είναι διακεκριμένα τρίγωνα. Ακολουθούν δύο πορίσματα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Πόρισμα 3.3.8. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, $i\colon X \longrightarrow X\oplus Y$ η φυσική έγκλειση και $p\colon X\oplus Y \longrightarrow Y$ η φυσική προβολή. Τότε το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "i"] & & X\oplus Y \arrow[ul, "p"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο.

Απόδειξη. Από το αξίωμα (TR1) τα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "1_X"] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
Y \arrow[rr, "1_Y"] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένα, ενώ από το αξίωμα στροφής τριγώνων, το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
0 \arrow[rr] & & Y \arrow[ul, "1_Y"']
\end{tikzcd}$$

είναι επίσης διακεκριμένο. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.6, προκύπτει το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "i"] & & X\oplus Y \arrow[ul, "p"']
\end{tikzcd}$$

■

Για το παραπάνω πόρισμα, παρατηρούμε ότι ισχύει και το ακόλουθο αντίστροφο:

Πόρισμα 3.3.9. *Έστω (T_1):*

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "u"] & & Z \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd} \tag{T_1}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Τότε, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\phi\colon X \oplus Y \xrightarrow{\sim} Z$ *έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_X"'] & X \oplus Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "\phi"', "\wr"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Y"'] & \Sigma X \arrow[d, "1_{\Sigma X}"'] \\
X \arrow[r, "u"'] & Z \arrow[r, "v"'] & Y \arrow[r, "0"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

να είναι ένας ισομορφισμός διακεκριμένων τριγώνων.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.3.8 προκύπτει ότι και το τρίγωνο (T_2)

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "i"] & & X \oplus Y \arrow[ul, "p"']
\end{tikzcd} \tag{T_2}$$

είναι διακεκριμένο και εφαρμόζοντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& X \oplus Y \arrow[dl, "p"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1} Y \arrow[rr, "0"] & & X \arrow[ul, "i"']
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το αξίωμα της στροφής τριγώνων για το δοθέν διακεκριμένο τρίγωνο (T_1), προκύπτει το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "v"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1} Y \arrow[rr, "0"] & & X \arrow[ul, "u"']
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε έτσι ότι στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1} Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_{\Sigma^{-1} X}"'] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_X"'] & X \oplus Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "\exists"', "\phi"] & Y \arrow[d, "1_Y"'] \\
\Sigma^{-1} Y \arrow[r, "0"'] & X \arrow[r, "u"'] & Z \arrow[r, "v"] & Y
\end{tikzcd}$$

οι δύο οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το αριστερό τετράγωνο μεταθετικό, συνεπώς από το αξίωμα (TR3), θα υπάρχει ένας μορφισμός $\phi\colon X \oplus Y \longrightarrow Z$ έτσι ώστε το παραπάνω διάγραμμα να συμπληρώνεται σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Από το Λήμμα 3.3.3, ο μορφισμός ϕ θα είναι ισομορφισμός. Βλέπουμε συνεπώς ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_X"'] & X \oplus Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"', "\wr"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Y"'] & \Sigma X \arrow[d, "1_{\Sigma X}"'] \\
X \arrow[r, "u"'] & Z \arrow[r, "v"'] & Y \arrow[r, "0"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των διακεκριμένων τριγώνων (T_1) και (T_2), αποδεικνύοντας το ζητούμενο. ■

Σχόλιο 3.3.10. Με αφορμή το παραπάνω πόρισμα και τον ορισμό της διασπάσιμης ακριβούς ακολουθίας που θα δοθεί στη συνέχεια, ένα διακεκριμένο τρίγωνο στο οποίο ένας από τους τρεις μορφισμούς είναι ο μηδενικός καλείται διασπάσιμο.

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα εξετάζοντας τους μονομορφισμούς και τους επιμορφισμούς των τριγωνισμένων κατηγοριών.

Θεωρούμε μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{C}$ και αντικείμενα $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$. Έστω $i\colon X \longrightarrow X \oplus Y$ η κανονική έγκλειση και $p\colon X \oplus Y \longrightarrow X$ η κανονική προβολή. Προφανώς ισχύει $p \circ i = 1_X$ και έτσι αν έχουμε $i \circ \alpha = 0$ για κάποιον μορφισμό $\alpha\colon Z \longrightarrow X$,τότε $\alpha = p \circ i \circ \alpha = 0$ και συνεπώς ο i είναι μονομορφισμός. Ανάλογα, αν $\beta \circ p = 0$ για κάποιον μορφισμό $\beta\colon X \longrightarrow Z'$, θα έχουμε $\beta = \beta \circ p \circ i = 0$ και ο p συνεπώς είναι επιμορφισμός. Η παρακάτω πρόταση θα δείξει ότι όλοι οι μονομορφισμοί και οι επιμορφισμοί αντίστοιχα σε μία τριγωνισμένη κατηγορία είναι ακριβώς αυτής της μορφής.

Πρόταση 3.3.11. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και αντικείμενα $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$. Τότε:*

1. *Αν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μονομορφισμός στην $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και ένας ισομορφισμός $\phi\colon X \oplus Z \xrightarrow{\sim} Y$ έτσι ώστε $f = \phi \circ i$, όπου $i\colon X \longrightarrow X \oplus Z$ η φυσική έγκλειση.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X \oplus Z \arrow[ur, dashed, "\exists\, \phi", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Αν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας επιμορφισμός στην $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και ένας ισομορφισμός $\psi\colon X \xrightarrow{\sim} Y \oplus Z$ έτσι ώστε $f = p \circ \psi$, όπου $p\colon Y \oplus Z \longrightarrow Y$ η φυσική προβολή.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\sim", "\exists\, \psi"'] & Y \\ & Y \oplus Z \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{C}$.

1. Έστω

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο με βάση τον μονομορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Από το Λήμμα 3.2.9, έχουμε $f \circ \Sigma^{-1}h = 0$ και αφού ο f είναι μονομορφισμός, προκύπτει ότι $h = 0$. Τότε, από το Πόρισμα 3.3.9, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\phi\colon X \oplus Z \xrightarrow{\sim} Y$ ο οποίος συμπληρώνει το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_X"'] & X \oplus Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "\phi"', "\wr"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Z"'] & \Sigma X \arrow[d, "1_{\Sigma X}"'] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "0"] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

σε έναν ισομορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος βλέπουμε ότι ισχύει $f = \phi \circ i$.

2. Παρόμοια, αν $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας επιμορφισμός στην $\mathcal{C}$ και

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο με βάση αυτόν, από το Λήμμα 3.2.9, έχουμε $g \circ f = 0$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο f είναι ένας επιμορφισμός προκύπτει $g = 0$. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα στροφής τριγώνου αποκτούμε το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "0"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1}Z \arrow[rr, "-\Sigma^{-1}h"] & & X \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

και από το Πόρισμα 3.3.9 υπάρχει ένας ισομορφισμός $\tilde{\psi} \colon \Sigma^{-1}Z \oplus Y \xrightarrow{\sim} X$ ο οποίος συμπληρώνει το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Sigma^{-1}Z"'] & \Sigma^{-1}Z \oplus Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{\psi}"', "\wr"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[d, "1_Z"'] \\
\Sigma^{-1}Z \arrow[r, "-\Sigma^{-1}h"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "0"] & Z
\end{tikzcd}$$

σε έναν ισομορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Θέτοντας $\psi = \tilde{\psi}^{-1} \colon X \xrightarrow{\sim} \Sigma^{-1}Z \oplus Y$ η απόδειξη ολοκληρώνεται.

■

3.4 Τοπικοποίηση Τριγωνισμένων Κατηγοριών

Πολλές από τις έννοιες που παρουσιάζονται σε αυτήν την ενότητα εισήχθηκαν από τον Verdier ο οποίος στο [52] αναπτύσσει την θεωρία της τοπικοποίησης επικεντρώνοντας στα πλαίσια μίας τριγωνισμένης κατηγορίας. Ακολουθώντας και πάλι τον Milicic στο [39], θα εξειδικεύσουμε ορισμένα αποτελέσματα του πρώτου κεφαλαίου στην περίπτωση που η κατηγορία είναι τριγωνισμένη.

Σκοπός είναι η απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος του κεφαλαίου, το οποίο εξασφαλίζει πότε η τοπικοποίηση μίας τριγωνισμένης κατηγορίας ως προς μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών είναι επίσης τριγωνισμένη κατηγορία. Για την απάντηση σε αυτό το ερώτημα αρκεί να εισάγουμε την παρακάτω συνθήκη για την κλάση μορφισμών.

Ορισμός 3.4.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία. Μία τοπικοποιούσα κλάση S στην $\mathcal{C}$ θα λέμε ότι είναι* **συμβατή με τον τριγωνισμό**, *αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(LT1) *Για κάθε μορφισμό s, ισχύει: $s \in S$, αν-ν $\Sigma s \in S$*

(LT2) *Κάθε μεταθετικό διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma s"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και $s, t \in S$, μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "p"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma s"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

με $p \in S$.

Παρατήρηση 3.4.2. Θεωρούμε τον συναρτητή τοπικοποίησης $Q \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ της $\mathcal{C}$ ως προς S. Από την ιδιότητα (LT1), αφού για οποιονδήποτε μορφισμό $s \in S$, ισχύει $\Sigma s \in S$, ο μορφισμός $(Q \circ \Sigma)(s) = Q(\Sigma s)$ θα είναι ισομορφισμός. Από την καθολική ιδιότητα της τοπικοποίησης (βλ. Ορισμός 2.1.4), ο συναρτητής $Q \circ \Sigma$ θα αναλύεται μέσω του Q, όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\Sigma"] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\Sigma_S"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] & \mathcal{C}[S^{-1}] \end{tikzcd}$$

Στα παρακάτω, κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού θα γράφουμε απλώς Σ για τον αυτομορφισμό Σ_S της $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε μία κλάση διακεκριμένων τριγώνων στην τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς S.

Ορισμός 3.4.3. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$. Ένα τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & {} & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ καλείται **διακεκριμένο** *αν είναι ισόμορφο με την εικόνα ενός διακεκριμένου τρίγωνου της $\mathcal{C}$ μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης $Q \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$. Υπάρχει δηλαδή, ένα διακεκριμένο* *τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w"', "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "u"] & & V \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ και ένας ισομορφισμός τριγώνων

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, "a"', "\wr"] & V \arrow[r, "Q(v)"] \arrow[d, "b"', "\wr"] & W \arrow[r, "Q(w)"] \arrow[d, "c"', "\wr"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma a"', "\wr"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Σχόλιο 3.4.4. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει άμεσα ότι αν θεωρήσουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$, τότε η εικόνα του μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης Q, είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Εφοδιάζοντας την κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ με τα διακεκριμένα τρίγωνα που μόλις ορίστηκαν προκύπτει το κύριο θεώρημα της παρούσας ενότητας:

Θεώρημα 3.4.5. *Αν $\mathcal{C}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό, τότε η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι τριγωνισμένη.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι τριγωνισμένη εξετάζοντας αν η δομή διακεκριμένων τριγώνων που ορίσαμε παραπάνω, πράγματι ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1)−(TR4) του Ορισμού 3.1.7.

(TR1a): Έστω (T_1) ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad (T_1)$$

της $\mathcal{C}[S^{-1}]$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο τρίγωνο (T_2):

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X' \arrow[rr] & & Y' \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad (T_2)$$

της $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Αφού το τρίγωνο (T_2) είναι διακεκριμένο, θα είναι ισόμορφο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ με την εικόνα ενός διακεκριμένου τριγώνου της $\mathcal{C}$. Συνεπώς, και το τρίγωνο (T_1) είναι ισόμορφο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ με την εικόνα ενός διακεκριμένου τριγώνου της $\mathcal{C}$ και άρα εξ ορισμού αποτελεί ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

(TR1b): Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}[S^{-1}])$, το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "1_X"] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{C}$ άρα και η εικόνα του στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "Q(1_X)"] & & X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης Q θα είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο.

(TR1c): Έστω $\phi = f/s \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Όπως έχουμε δείξει, ο ϕ μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Αφού η $\mathcal{C}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία και $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, θα υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ L \arrow[rr, "f"'] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ με βάση τον f. Εφαρμόζουμε τον συναρτητή Q στο παραπάνω τρίγωνο και θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "Q(s)"', "\wr"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "Q(1_Y)"'] & K \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(1_K)"'] & \Sigma L \arrow[d, "\Sigma Q(s)"', "\wr"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & Y \arrow[r, "Q(g)"'] & K \arrow[r, "(\Sigma Q(s)) \circ Q(h)"'] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, το οποίο άμεσα βλέπουμε ότι είναι μεταθετικό και αποτελεί έναν ισομορφισμό τριγώνων. Εξ' ορισμού, λοιπόν, το

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "(\Sigma Q(s)) \circ Q(h)"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "\phi"'] & & Y \arrow[ul, "Q(g)"'] \end{tikzcd}$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ με βάση τον μορφισμό ϕ και το αξίωμα (TR1c) ικανοποιείται.

(TR2): Έστω

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "f"'] & & Z \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Τότε, θα υπάρχει ένας ισομορφισμός τριγώνων

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "Q(\alpha)"] \arrow[d, "a"', "\wr"] & V \arrow[r, "Q(\beta)"] \arrow[d, "b"', "\wr"] & W \arrow[r, "Q(\gamma)"] \arrow[d, "c"', "\wr"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma a"', "\wr"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, όπου το

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\gamma"', "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "\alpha"'] & & V \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$. Αφού η $\mathcal{C}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία, από το αξίωμα (TR2) και τα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} & \Sigma U \arrow[dl, "-\Sigma\alpha"', "{[1]}"] & \\ V \arrow[rr, "\beta"] & & W \arrow[ul, "\gamma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\beta"', "{[1]}"] & \\ \Sigma^{-1}W \arrow[rr, "-\Sigma^{-1}\gamma"] & & U \arrow[ul, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένα στην $\mathcal{C}$. Θεωρώντας τις εικόνες τους στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, προκύπτουν οι ακόλουθοι ισομορφισμοί τριγώνων

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Q(\beta)"] \arrow[d, "b"', "\wr"] & W \arrow[r, "Q(\gamma)"] \arrow[d, "c"', "\wr"] & \Sigma U \arrow[r, "-Q(\Sigma\alpha)"] \arrow[d, "\Sigma a"', "\wr"] & \Sigma V \arrow[d, "\Sigma b"', "\wr"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma f"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{-1}W \arrow[r, "-Q(\Sigma^{-1}\gamma)"] \arrow[d, "\Sigma^{-1}c"', "\wr"] & U \arrow[r, "Q(\alpha)"] \arrow[d, "a"', "\wr"] & V \arrow[r, "Q(\beta)"] \arrow[d, "b"', "\wr"] & W \arrow[d, "c"', "\wr"] \\ \Sigma^{-1}Z \arrow[r, "-\Sigma^{-1}h"] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, από τους οποίους συμπεραίνουμε και ότι τα

$$\begin{tikzcd} & \Sigma X \arrow[dl, "-\Sigma f"', "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "g"', "{[1]}"] & \\ \Sigma^{-1}Z \arrow[rr, "-\Sigma^{-1}h"] & & X \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

(TR3): Θεωρούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ στο οποίο οι οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός: $Z \longrightarrow Z'$ ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων.

Εξ ορισμού, θα υπάρχουν διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "f"] & & V \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\ U' \arrow[rr, "f'"] & & V' \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

και ισομορφισμοί τριγώνων

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Sigma U \arrow[d, "\wr"] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

και

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & V' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & W' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Sigma U' \arrow[d, "\wr"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Χρησιμοποιώντας τους ισομορφισμούς τριγώνων (3.5) και (3.6), από το διάγραμμα (3.4) αποκτούμε στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ ένα διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"'] & W \arrow[r, "Q(h)"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma\phi"'] \\ U' \arrow[r, "Q(f')"] & V' \arrow[r, "Q(g')"] & W' \arrow[r, "Q(h')"] & \Sigma U' \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

στο οποίο το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό. Το πρόβλημα πλέον ανάγεται στην εύρεση ενός μορφισμού $W \longrightarrow W'$ ο οποίος μετατρέπει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό τριγώνων στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Έστω ότι οι μορφισμοί ϕ και ψ αναπαριστώνται αντίστοιχα με τα αριστερά roofs

$$
\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\
U & & U'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "v"] & \\
V & & V'
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή $\phi = u/s$ και $\psi = v/t$. Προκύπτει έτσι ένα διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \\
L \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[d, "u"'] & K \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\
U' \arrow[r, "f'"] & V'
\end{tikzcd}
\tag{3.8}
$$

Θεωρούμε τώρα τους μορφισμούς $f \circ s\colon L \longrightarrow V$ και $t\colon K \longrightarrow V$. Αφού η S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση, από την συνθήκη (LC3a) του Ορισμού 2.1.8, υπάρχει ένα αντικείμενο $L' \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ και μορφισμοί $\alpha\colon L' \longrightarrow K$ και $t'\colon L' \longrightarrow L$ με $t' \in S$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "t'"', "\sim"] & K \arrow[d, "t", "\sim"'] \\
L \arrow[r, "f \circ s"'] & V
\end{tikzcd}
$$

Προκύπτει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\
U & L' \arrow[u, "t'"'] \arrow[d, "1_{L'}"] & U' \\
 & L' \arrow[ul, "s \circ t'", "\sim"'] \arrow[ur, "u \circ t'"'] &
\end{tikzcd}
$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $u/s = (u \circ t')/(s \circ t')$, δηλαδή ο μορφισμός ϕ μπορεί να αναπαρασταθεί με το αριστερό roof

$$
\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[dl, "s \circ t'"', "\sim"] \arrow[dr, "u \circ t'"] & \\
U & & U'
\end{tikzcd}
$$

και την θέση του διαγράμματος (3.8) παίρνει το

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \\ L' \arrow[u, "s\circ t'", "\sim"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u\circ t'"'] & K \arrow[u, "\sim", "t"'] \arrow[d, "v"] \\ U' \arrow[r, "f'"] & V' \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

Μετονομάζοντας λοιπόν τα αντικείμενα και τους μορφισμούς μπορούμε εξ' αρχής να αντικαταστήσουμε το διάγραμμα (3.8) με το

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \\ L \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & K \arrow[u, "\sim", "t"'] \arrow[d, "v"] \\ U' \arrow[r, "f'"] & V' \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

στο οποίο το άνω τετράγωνο είναι μεταθετικό. Έχουμε $\phi = Q(u)\circ Q(s)^{-1}$ και $\psi = Q(v)\circ Q(t)^{-1}$. Από την μεταθετικότητα του πρώτου τετραγώνου στο διάγραμμα (3.7) έχουμε

$$Q(f')\circ\phi = \psi\circ Q(f) \Longrightarrow Q(f')\circ Q(u)\circ Q(s)^{-1} = Q(v)\circ Q(t)^{-1}\circ Q(f)$$

$$\Longrightarrow Q(f')\circ Q(u) = Q(v)\circ Q(t)^{-1}\circ Q(f)\circ Q(s)$$

Επιπλέον, από την μεταθετικότητα του άνω τετραγώνου στο διάγραμμα (3.10) έχουμε

$$Q(f)\circ Q(s) = Q(t)\circ Q(\alpha)$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$Q(f')\circ Q(u) = Q(v)\circ Q(t)^{-1}\circ Q(t)\circ Q(\alpha) = Q(v)\circ Q(\alpha)$$

Για τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f'\circ u"] & \\ L & & V' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "v\circ\alpha"] & \\ L & & V' \end{tikzcd}$$

έχουμε $f'\circ u/1_L = Q(f')\circ Q(u)\circ Q(1_L)^{-1} = Q(v)\circ Q(\alpha)\circ Q(1_L)^{-1} = v\circ\alpha/1_L$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, άρα είναι ισοδύναμα. Θα υπάρχει έτσι ένα αντικείμενο $L'' \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ και ένας μορφισμός $r\colon L'' \longrightarrow L$

έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "1_L"', "\sim"] \arrow[dr, "f'\circ u"] & \\
L & L'' \arrow[u, "r"'] \arrow[d, "r"] & V' \\
 & L \arrow[ul, "1_L", "\sim"'] \arrow[ur, "v\circ\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

και $1_L \circ r = r \in S$. Συνεπώς, $s \circ r \in S$ και βλέπουμε ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\
U & L'' \arrow[u, "r"] \arrow[d, "1_{L''}"] & U' \\
 & L'' \arrow[ul, "s\circ r", "\sim"'] \arrow[ur, "u\circ r"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επομένως ισχύει $\phi = u/s = (u \circ r)/(s \circ r)$ και ο μορφισμός ϕ μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί από το roof

$$\begin{tikzcd}
 & L'' \arrow[dl, "s\circ r"', "\sim"] \arrow[dr, "u\circ r"] & \\
U & & U'
\end{tikzcd}$$

Την θέση του διαγράμματος (3.10) παίρνει αυτήν την φορά το

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \\
L'' \arrow[u, "s\circ r", "\sim"'] \arrow[r, "\alpha\circ r"] \arrow[d, "u\circ r"'] & K \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\
U' \arrow[r, "f'"] & V'
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

στο οποίο από τα παραπάνω και τα δύο τετράγωνα μετατίθενται. Μετονομάζοντας λοιπόν τους μορφισμούς και τα αντικείμενα, σε αυτό το σημείο έχουμε αποδείξει την ύπαρξη ενός μορφισμού

$\alpha\colon L \longrightarrow K$ έτσι ώστε τα δύο τετράγωνα του παρακάτω διαγράμματος να είναι μεταθετικά στην $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \\
L \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & K \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\
U' \arrow[r, "f'"] & V'
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Έστω τώρα ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\gamma"', "{[1]}"] & \\
L \arrow[rr, "\alpha"'] & & K \arrow[ul, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ με βάση τον μορφισμό $\alpha\colon L \longrightarrow K$. Τότε το διάγραμμα (3.12) μπορεί να επεκταθεί στο

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \arrow[r, "h"] & \Sigma U \\
L \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & K \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"'] & M \arrow[r, "\gamma"] & \Sigma L \arrow[u, "\Sigma s", "\sim"'] \arrow[d, "\Sigma u"'] \\
U' \arrow[r, "f'"] & V' \arrow[r, "g'"] & W' \arrow[r, "h'"] & \Sigma U'
\end{tikzcd}$$

του οποίου οι οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}$. Αφού η κλάση S είναι συμβατή με τον τριγωνισμό, από την ιδιότητα (LT2) του Ορισμού 3.4.1 υπάρχει μορφισμός $p\colon W \longrightarrow M$ με $p \in S$ ο οποίος συμπληρώνει τις δύο πρώτες γραμμές του παραπάνω διαγράμματος σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{C}$. Παρόμοια, από το αξίωμα (TR3) υπάρχει μορφισμός $w\colon M \longrightarrow W'$ ο οποίος συμπληρώνει τις δύο τελευταίες γραμμές του διαγράμματος σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{C}$. Συνεπώς έχουμε κατασκευάσει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \arrow[r, "h"] & \Sigma U \\
L \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & K \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"'] & M \arrow[u, "p", "\sim"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "w"'] & \Sigma L \arrow[u, "\Sigma s", "\sim"'] \arrow[d, "\Sigma u"'] \\
U' \arrow[r, "f'"] & V' \arrow[r, "g'"] & W' \arrow[r, "h'"] & \Sigma U'
\end{tikzcd} \tag{3.13}$$

στο οποίο όλα τα τετράγωνα είναι μεταθετικά. Τότε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "p"', "\sim"] \arrow[dr, "w"] & \\ W & & W' \end{tikzcd}$$

αναπαριστά έναν μορφισμό $\chi = w/p\colon W \longrightarrow W'$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ ο οποίος συμπληρώνει το διάγραμμα (3.7) στο

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"] & V \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"] & W \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "\chi"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma\phi"] \\ U' \arrow[r, "Q(f')"] & V' \arrow[r, "Q(g')"] & W' \arrow[r, "Q(h')"] & \Sigma U' \end{tikzcd}$$

Τώρα, από την μεταθετικότητα του διαγράμματος (3.13), έχουμε

$$\chi \circ Q(g) = Q(w) \circ Q(p)^{-1} \circ Q(g) = Q(w) \circ Q(\beta) \circ Q(t)^{-1} = Q(g') \circ Q(v) \circ Q(t)^{-1} = Q(g') \circ \psi$$

και

$$\begin{aligned} Q(h') \circ \chi &= Q(h') \circ Q(w) \circ Q(p)^{-1} \\ &= Q(\Sigma u) \circ Q(\gamma) \circ Q(p)^{-1} \\ &= Q(\Sigma u) \circ Q(\Sigma s)^{-1} \circ Q(h) \\ &= \Sigma\big(Q(u) \circ Q(s)^{-1}\big) \circ Q(h) \\ &= \Sigma\phi \circ Q(h) \end{aligned}$$

Επομένως το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό και συνεπώς αποτελεί έναν μορφισμό διακεκριμένων τριίγώνων στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του αξιώματος (TR3).

(TR4): Έστω $\phi = f/s\colon X \longrightarrow Y$ και $\psi = g/t\colon Y \longrightarrow Z$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ οι οποίοι αναπαριστώνται αντίστοιχα από τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Τότε, από την συνθήκη (LC3a) του Ορισμού 2.1.8, υπάρχει ένα αντικείμενο $W \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ και μορφισμοί $f'\colon W \longrightarrow V$ και $s'\colon W \longrightarrow U$ με $s' \in S$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dl, dashed, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\ & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

Η σύνθεση $\psi \circ \phi$ αναπαριστάται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s\circ s'"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f'"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

και $\psi \circ \phi = g/t \circ f/s = (g \circ f')/(s \circ s')$. Έχουμε ήδη δείξει ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ πληροί το αξίωμα (TR1c), άρα θα υπάρχουν διακεκριμένα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "\phi"'] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ Y \arrow[rr, "\psi"'] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "\psi\circ\phi"'] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ με βάση τους μορφισμούς ϕ, ψ και $\psi \circ \phi$ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\ X \arrow[r, "\psi\circ\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\phi"'] \\ Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma Y \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα διάγραμμα οκτάεδρο.
Θεωρούμε τους μορφισμούς $f' \colon W \longrightarrow V$, $g \colon V \longrightarrow Z$ και $g \circ f' \colon W \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}$. Αφού η $\mathcal{C}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία, από το αξίωμα (TR1a), θα υπάρχουν διακεκριμένα τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} & U' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ W \arrow[rr, "f"'] & & V \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ V \arrow[rr, "g"'] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V' \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ W \arrow[rr, "g\circ f'"'] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$, με βάση τους f', g και $g \circ f'$, αντίστοιχα. Συνεπώς, στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1_W"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & U' \arrow[r] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma 1_W"'] \\ W \arrow[r, "g\circ f'"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & V' \arrow[r] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma f'"'] \\ V \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & W' \arrow[r] & \Sigma V \end{tikzcd}$$

στο οποίο οι οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα, λόγω του αξιώματος (TR4), θα υπάρχουν μορφισμοί $u' \colon U' \longrightarrow V'$, $v' \colon V' \longrightarrow W'$ και $w' \colon W' \longrightarrow \Sigma U'$ έτσι ώστε στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1_W"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & U' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma 1_W"'] \\
W \arrow[r, "g \circ f'"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & V' \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma f'"'] \\
V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[r] \arrow[d, "1_{W'}"'] & \Sigma V \arrow[d] \\
U' \arrow[r, dashed, "u'"] & V' \arrow[r, dashed, "v'"] & W' \arrow[r, dashed, "w'"] & \Sigma U'
\end{tikzcd}$$

όλες οι οριζόντιες γραμμές να είναι διακεκριμένα τρίγωνα και οι κάθετες στήλες να σχηματίζουν μορφισμούς τριγώνων. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή τοπικοποίησης $Q \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ θεωρούμε την εικόνα του παραπάνω διαγράμματος στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "Q(f')"] \arrow[d, "Q(1_W)"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"'] & U' \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"'] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma Q(1_W)"'] \\
W \arrow[r, "Q(g) \circ Q(f')"] \arrow[d, "Q(f')"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "Q(1_Z)"'] & V' \arrow[r] \arrow[d, "Q(v')"'] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma Q(f')"'] \\
V \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[r] \arrow[d, "Q(1_{W'})"'] & \Sigma V \arrow[d] \\
U' \arrow[r, dashed, "Q(u')"] & V' \arrow[r, dashed, "Q(v')"] & W' \arrow[r, dashed, "Q(w')"] & \Sigma U'
\end{tikzcd} \tag{3.16}$$

Το διάγραμμα στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ που αποτελείται από τις δύο πρώτες γραμμές του (3.15):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\
X \arrow[r, "\psi \circ \phi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

χρησιμοποιώντας το διάγραμμα (3.16) επεκτείνεται στο:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \\
W \arrow[u, "Q(s\circ s')", "\wr"'] \arrow[r, "Q(f')"] \arrow[d, "1_W"'] & V \arrow[u, "Q(t)", "\wr"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"'] & U' \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"'] & \Sigma W \arrow[u, "\Sigma Q(s\circ s')", "\wr"'] \arrow[d, "\Sigma 1_W"'] \\
W \arrow[r, "Q(g\circ f')"] \arrow[d, "Q(s\circ s')"', "\wr"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & V' \arrow[r] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma Q(s\circ s')"', "\wr"] \\
X \arrow[r, "\psi\circ\phi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

όπου όλες οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος (3.14) έχουμε:

$$\phi \circ Q(s \circ s') = Q(f) \circ Q(s)^{-1} \circ Q(s) \circ Q(s') = Q(f) \circ Q(s') = Q(t) \circ Q(f')$$

και επίσης, αφού $\psi \circ \phi = g \circ f'/s \circ s'$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\psi \circ \phi \circ Q(s \circ s') = Q(g \circ f') \circ Q(s \circ s')^{-1} \circ Q(s \circ s') = Q(g \circ f')$$

Δηλαδή στο παραπάνω διάγραμμα και τα τρία τετράγωνα της πρώτης κάθετης στήλης είναι μεταθετικά. Εφόσον έχουμε ήδη δείξει ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ πληροί το αξίωμα (TR3), θα υπάρχει μορφισμός $\alpha\colon U' \longrightarrow Z'$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, έτσι ώστε οι δύο πρώτες οριζόντιες γραμμές να συμπληρώνονται σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Παρόμοια, θα υπάρχει ένας μορφισμός $\beta\colon V' \longrightarrow Y'$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, έτσι ώστε οι δύο τελευταίες οριζόντιες γραμμές να συμπληρώνονται σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Εφόσον το Λήμμα 3.3.3, όπως αναφέραμε, είναι ανεξάρτητο του αξιώματος (TR4), προκύπτει ότι οι μορφισμοί α και β είναι ισομορφισμοί.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \\
W \arrow[u, "Q(s\circ s')", "\wr"'] \arrow[r, "Q(f')"] \arrow[d, "1_W"'] & V \arrow[u, "Q(t)", "\wr"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"'] & U' \arrow[u, dashed, "\alpha", "\wr"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"'] & \Sigma W \arrow[u, "\Sigma Q(s\circ s')", "\wr"'] \arrow[d, "\Sigma 1_W"'] \\
W \arrow[r, "Q(g\circ f')"] \arrow[d, "Q(s\circ s')"', "\wr"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & V' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"', "\wr"] & \Sigma W \arrow[d, "\Sigma Q(s\circ s')"', "\wr"] \\
X \arrow[r, "\psi\circ\phi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Παρόμοια, το διάγραμμα στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ που αποτελείται από τις δύο τελευταίες γραμμές του (3.15):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi\circ\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\phi"'] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

χρησιμοποιώντας πάλι το διάγραμμα (3.16) επεκτείνεται στο:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi\circ\phi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \\
W \arrow[u, "Q(s\circ s')", "\wr"'] \arrow[r, "Q(g\circ f')"] \arrow[d, "Q(f')"'] & Z \arrow[u, "1_Z"] \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & V' \arrow[u, "\beta", "\wr"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(v')"'] & \Sigma W \arrow[u, "\Sigma Q(s\circ s')", "\wr"'] \arrow[d, "\Sigma Q(f')"'] \\
V \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "Q(t)"', "\wr"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & W' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"', "\wr"] & \Sigma V \arrow[d, "\Sigma Q(s\circ s')"', "\wr"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

όπου όλες οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Έχουμε

$$\psi \circ Q(t) = Q(g) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(t) = Q(g)$$

άρα από το αξίωμα (TR3), θα υπάρχει μορφισμός $\gamma\colon W' \longrightarrow X'$ ο οποίος συμπληρώνει τις δύο τελευταίες γραμμές του διαγράμματος σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Λόγω του Λήμματος 3.3.3 ο γ είναι ισομορφισμός. Θέτουμε:

$$\begin{aligned}
u &= \beta \circ Q(u') \circ \alpha^{-1}\colon Z' \longrightarrow Y' \\
v &= \gamma \circ Q(v') \circ \beta^{-1}\colon Y' \longrightarrow X' \\
w &= \Sigma\alpha \circ Q(w') \circ \gamma^{-1}\colon X' \longrightarrow \Sigma Z'
\end{aligned}$$

Τότε, από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "Q(u')"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & V' \arrow[r, "Q(v')"] \arrow[d, "\beta"', "\wr"] & W' \arrow[r, "Q(w')"] \arrow[d, "\gamma"', "\wr"] & \Sigma U' \arrow[d, "\Sigma\alpha"', "\wr"] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' \arrow[r, "w"] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ προκύπτει ότι το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "w"'] & \\
Z' \arrow[rr, "u"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y' \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο. Τελικώς, έχουμε κατασκευάσει ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma 1_X"'] \\
X \arrow[r, "\psi\circ\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "v"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\phi"'] \\
Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "1_{Z'}"'] & \Sigma Y \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, dashed, "u"] & Y' \arrow[r, dashed, "v"] & X' \arrow[r, dashed, "w"] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

που συμπληρώνει το (3.15) σε ένα διάγραμμα οκτάεδρο και στο οποίο όλες οι οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και οι κάθετες στήλες μορφισμοί διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. ■

Πόρισμα 3.4.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό. Τότε, ο συναρτητής τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα καθώς από το παραπάνω θεώρημα η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι τριγωνισμένη και όπως αναφέρθηκε στο Σχόλιο 3.4.4, ο Q απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}$ σε διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. ■

Το παρακάτω θεώρημα αποδίδεται στον Verdier ο οποίος στο [52] αναπτύσσει την έννοια της τοπικοποίησης στο πλαίσιο μίας τριγωνισμένης κατηγορίας.

Θεώρημα 3.4.7. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας ακριβής προσθετικός συναρτητής. Αν S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό έτσι ώστε για κάθε $s \in S$ το $F(s)$ να είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{D}$, τότε υπάρχει μοναδικός (με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού συναρτητών) προσθετικός συναρτητής $F_S\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα συναρτητών να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\, F_S"] \\
& \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής $F_S\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ακριβής.

Απόδειξη. Η ύπαρξη ενός προσθετικού συναρτητή F_S έτσι ώστε $F = F_S \circ Q$ καθώς και η μοναδικότητά του με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού συναρτητών προκύπτουν από το Θεώρημα 2.4.5, επομένως παραμένει να δείξουμε ότι ο συναρτητής F_S είναι ακριβής. Αρχικά θα εξετάσουμε αν ο F_S είναι βαθμωτός. Λόγω της μεταθετικότητας, έχουμε

$$\Sigma \circ F_S \circ Q = \Sigma \circ F \tag{3.17}$$

και σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.4.2: $\Sigma \circ Q = Q \circ \Sigma$, άρα

$$F_S \circ \Sigma \circ Q = F_S \circ Q \circ \Sigma = F \circ \Sigma \tag{3.18}$$

Αφού ο F είναι ένας ακριβής συναρτητής, είναι βαθμωτός και άρα εξ ορισμού (Ορισμός 3.2.1) θα υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός συναρτητών $\eta\colon \Sigma \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ \Sigma$. Δηλαδή, για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, η απεικόνιση $\eta_X\colon (F \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ F)(X)$ είναι ισομορφισμός και για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
(F \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "(F\circ\Sigma)(f)"] \arrow[d, "\eta_X"', "\wr"] & (F \circ \Sigma)(Y) \arrow[d, "\eta_Y"', "\wr"] \\
(\Sigma \circ F)(X) \arrow[r, "(\Sigma\circ F)(f)"] & (\Sigma \circ F)(Y)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Εφόσον τα αντικείμενα της $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$, από τις σχέσεις (3.17) και (3.18), ο ισομορφισμός η_X για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ παίρνει την μορφή:

$$\eta_X\colon (F_S \circ \Sigma)(X) \xrightarrow{\sim} (\Sigma \circ F_S)(X)$$

Θεωρούμε τώρα έναν μορφισμό $\phi = f/s\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Για τους μορφισμούς $f\colon U \longrightarrow Y$ και $s\colon U \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$, λόγω του ότι ο η είναι φυσικός ισομορφισμός συναρτητών, προκύπτουν τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
(F \circ \Sigma)(U) \arrow[r, "(F\circ\Sigma)(f)"] \arrow[d, "\eta_U"', "\wr"] & (F \circ \Sigma)(Y) \arrow[d, "\eta_Y"', "\wr"] \\
(\Sigma \circ F)(U) \arrow[r, "(\Sigma\circ F)(f)"] & (\Sigma \circ F)(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(F \circ \Sigma)(U) \arrow[r, "(F\circ\Sigma)(s)"] \arrow[d, "\eta_U"', "\wr"] & (F \circ \Sigma)(X) \arrow[d, "\eta_X"', "\wr"] \\
(\Sigma \circ F)(U) \arrow[r, "(\Sigma\circ F)(s)"] & (\Sigma \circ F)(X)
\end{tikzcd}$$

Έτσι έχουμε

$$(\Sigma \circ F)(f) \circ \eta_U = \eta_Y \circ (F \circ \Sigma)(f) \tag{3.19}$$

και

$$(\Sigma \circ F)(s) \circ \eta_U = \eta_X \circ (F \circ \Sigma)(s) \tag{3.20}$$

Από την (3.19) προκύπτει

$$(\Sigma \circ F_S)(Q(f)) \circ \eta_U = \eta_Y \circ (F_S \circ Q \circ \Sigma)(f) = \eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(f)) \tag{3.21}$$

ενώ από την (3.20)

$$\begin{aligned}
(\Sigma \circ F_S)(Q(s)) \circ \eta_U &= \eta_X \circ (F_S \circ Q \circ \Sigma)(s) = \eta_X \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)) \\
\Longrightarrow \eta_U \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) &= (\Sigma \circ F_S)(Q(s)^{-1}) \circ \eta_X
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
(F_S \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "(F_S\circ\Sigma)(\phi)"] \arrow[d, "\eta_X"', "\wr"] & (F_S \circ \Sigma)(Y) \arrow[d, "\eta_Y"', "\wr"] \\
(\Sigma \circ F_S)(X) \arrow[r, "(\Sigma\circ F_S)(\phi)"] & (\Sigma \circ F_S)(Y)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Αντικαθιστώντας τις (3.21) και (3.22) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(\phi) &= \eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(f) \circ Q(s)^{-1}) \\ &= \eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(f)) \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) \\ &= (\Sigma \circ F_S)(Q(f)) \circ \eta_U \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) \\ &= (\Sigma \circ F_S)(Q(f)) \circ (\Sigma \circ F_S)(Q(s)^{-1}) \circ \eta_X \\ &= (\Sigma \circ F_S)(Q(f) \circ Q(s)^{-1})] \circ \eta_X \\ &= (\Sigma \circ F_S)(\phi) \circ \eta_X\end{aligned}$$

Επομένως η απεικόνιση η επάγει έναν φυσικό ισομορφισμό συναρτητών μεταξύ των $\Sigma \circ F_S$ και $F_S \circ \Sigma$ και άρα ο F_S είναι ένας βαθμωτός συναρτητής. Μένει να δείξουμε ότι είναι και ακριβής. Για τον σκοπό αυτόν, έστω

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Εξ ορισμού, θα υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr] & & V \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ και ένας ισομορφισμός διακεκριμένων τριγώνων

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "a"', "\wr"] & V \arrow[r] \arrow[d, "b"', "\wr"] & W \arrow[r] \arrow[d, "c"', "\wr"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma a"', "\wr"] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Εφαρμόζοντας τον βαθμωτό συναρτητή F_S και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $F_S(Q(X)) = F(X)$ για κάθε αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(a)"', "\wr"] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(b)"', "\wr"] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(c)"', "\wr"] & F(\Sigma U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(\Sigma a)"', "\wr"] & \Sigma F(U) \arrow[d, "\Sigma F_S(a)"', "\wr"] \\ F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \arrow[r] & F_S(\Sigma X) \arrow[r] & \Sigma F_S(X) \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Λόγω του ότι οι οριζόντιοι μορφισμοί στο τελευταίο τετράγωνο είναι ισομορφισμοί, το διάγραμμα μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(a)"', "\wr"] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(b)"', "\wr"] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(c)"', "\wr"] & \Sigma F(U) \arrow[d, "\Sigma F_S(a)"', "\wr"] \\ F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \arrow[r] & \Sigma F_S(X) \end{tikzcd}$$

Εφόσον ο F είναι ένας ακριβής συναρτητής, η πρώτη γραμμή του διαγράμματος αποτελεί ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}$. Ο παραπάνω ισομορφισμός τριγώνων, τότε, συνεπάγεται πως και η κάτω γραμμή του διαγράμματος αποτελεί ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}$. Ο συναρτητής F_S είναι επομένως ακριβής. ∎

Στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή αποκτούμε την ακόλουθη εκδοχή του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 3.4.8. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ ένας ομολογιακός συναρτητής. Αν S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό έτσι ώστε για κάθε $s \in S$ το $F(s)$ να είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{A}$, τότε υπάρχει μοναδικός (με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού συναρτητών) προσθετικός συναρτητής $F_S\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα συναρτητών να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\, F_S"] \\
& \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής $F_S\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι ομολογιακός.

Απόδειξη. Όπως προηγουμένως, η ύπαρξη και η μοναδικότητα ενός προσθετικού συναρτητή F_S έτσι ώστε $F = F_S \circ Q$ προκύπτει από το Θεώρημα 2.4.5 και μένει να δείξουμε ότι ο F_S είναι συνομολογιακός. Έστω

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Τότε, θα υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
U \arrow[rr] & & V \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ και ένας ισομορφισμός διακεκριμένων τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "a", "\wr"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "b", "\wr"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "c", "\wr"'] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma a", "\wr"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F_S αποκτούμε το επίσης μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(a)", "\wr"'] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(b)", "\wr"'] & F(W) \arrow[d, "F_S(c)", "\wr"'] \\
F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z)
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{A}$, στο οποίο τα κάθετα βέλη είναι ισομορφισμοί. Αφού ο συναρτητής F είναι από υπόθεση ομολογιακός, η πάνω σειρά είναι μία ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Επομένως, λόγω ισομορφισμού, η κάτω σειρά θα είναι επίσης ακριβής και ο συναρτητής F_S είναι συνομολογιακός. ■

3.5 Τριγωνισμένες Υποκατηγορίες

Θα εξετάσουμε πότε μια υποκατηγορία μίας τριγωνισμένης κατηγορίας κληρονομεί με φυσικό τρόπο την τριγωνισμένη δομή. Αρχικά, παραθέτουμε έναν ορισμό για τον οποίον βλ. [39, Chapter 2. §1.7.].

Ορισμός 3.5.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{D}$ μία αυστηρά πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Τότε η $\mathcal{D}$ καλείται μία* **πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία** *της $\mathcal{C}$, αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *$\Sigma\mathcal{D} = \mathcal{D}$ δηλαδή ένα αντικείμενο X ανήκει στην $\mathcal{D}$ αν-ν το ΣX ανήκει επίσης στην $\mathcal{D}$.*

2. *Για οποιαδήποτε αντικείμενα $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ και μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{D}$, υπάρχει αντικείμενο $Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ και ένα διακεκριμένο τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

με βάση τον f στην $\mathcal{D}$.

Η συνθήκη 2 του παραπάνω ορισμού έχει την ακόλουθη άμεση συνέπεια (βλ. [42, Definition 16]).

Παρατήρηση 3.5.2. Έστω

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ με βάση τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ όπου $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$. Τότε, αν η συνθήκη 2 του Ορισμού 3.5.1 ισχύει για την υποκατηγορία $\mathcal{D}$, θα υπάρχει ένα αντικείμενο $Z' \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ και ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό f. Σύμφωνα με το Σχόλιο 3.3.4, ο κώνος ενός διακεκριμένου τριγώνου με βάση τον μορφισμό f είναι μοναδικός με ακρίβεια ισομορφισμού. Άρα, το αντικείμενο Z της $\mathcal{C}$ θα είναι ισόμορφο με το αντικείμενο Z' της $\mathcal{D}$ και αφού η $\mathcal{D}$ είναι αυστηρά πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, θα ισχύει και $Z \in \mathcal{D}$. Σε αυτήν την περίπτωση, θα λέμε ότι η κατηγορία $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στους κώνους μορφισμών (mapping cones).

Παρατήρηση 3.5.3. Θεωρούμε μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{C}$ και μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$. Ο συναρτητής έγκλεισης $i : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι προσθετικός και συνεπώς διατηρεί τα ευθέα αθροίσματα. Επομένως η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στα ευθέα αθροίσματα στοιχείων της $\mathcal{C}$.

Από την συνθήκη 1 του παραπάνω ορισμού, ο αυτομορφισμός Σ στην $\mathcal{C}$ περιορίζεται σε έναν αυτομορφισμό στην $\mathcal{D}$. Θα λέμε λοιπόν ότι ένα τρίγωνο είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{D}$ αν η εικόνα του στην $\mathcal{C}$ μέσω του συναρτητή έγκλεισης είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathcal{C}$. Εύκολα βλέπουμε έτσι ότι η $\mathcal{D}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία. Ο συναρτητής i επιπλέον, είναι ακριβής, καθώς εξ ορισμού απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα της $\mathcal{D}$, σε διακεκριμένα τρίγωνα της $\mathcal{C}$.

Παρατήρηση 3.5.4. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων καθώς και την συνθήκη $\Sigma\mathcal{D} = \mathcal{D}$, προκύπτει άμεσα ότι αν

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι ένα διακεκριμένο τριγωνο στην $\mathcal{D}$ και οποιαδήποτε δύο από τα X, Y, Z είναι αντικείμενα της $\mathcal{D}$, τότε και το τρίτο είναι επίσης αντικείμενο της $\mathcal{D}$.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί μία εκδοχή της Πρότασης 2.3.1 στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι τριγωνισμένη.

Πρόταση 3.5.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό και $\mathcal{D}$ μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

- *Η $S_{\mathcal{D}} = S \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{D}$.*
- *Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ και μορφισμό $s\colon Y \longrightarrow X$ με $s \in S$, υπάρχει ένα αντικείμενο $Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ και ένας μορφισμός $u\colon Z \longrightarrow Y$ έτσι ώστε $s \circ u \in S$.*

Τότε η κλάση $S_{\mathcal{D}}$ είναι συμβατή με τον τριγωνισμό της $\mathcal{D}$ και η $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Απόδειξη. Αφού η S είναι συμβατή με τον τριγωνισμό, και η $S_{\mathcal{D}} = S \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ θα είναι επίσης συμβατή με τον τριγωνισμό. Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.4.5, οι κατηγορίες $\mathcal{C}[S^{-1}]$ και $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ είναι τριγωνισμένες. Θεωρούμε τον μορφισμό $Q \circ i\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ όπου $i\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ η φυσική έγκλειση και $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ ο συναρτητής τοπικοποίησης. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.7, θα υπάρχει ένας μοναδικός (με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού συναρτητών) προσθετικός και ακριβής συναρτητής $j\colon \mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}}"] \arrow[dr, "Q\circ i"'] & \mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}] \arrow[d, dashed, "j"'] \\ & \mathcal{C}[S^{-1}] \end{tikzcd}$$

Λόγω μεταθετικότητας για κάθε αντικείμενο $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ ισχύει $j(X) = j(Q_{\mathcal{D}}(X)) = Q(i(X)) = Q(X) = X$, άρα ο j είναι η ταυτότητα στα αντικείμενα, ενώ εφόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες της Πρότασης 2.3.1, ο j θα είναι πλήρης και πιστός. Η $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ είναι επομένως μία πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Μένει να δείξουμε ότι είναι και μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία.

Αφού τα αντικείμενα της $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{D}$ και η $\mathcal{D}$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, έχουμε

$$X \in \mathsf{ob}(\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]) \Leftrightarrow X \in \mathsf{ob}(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \Sigma X \in \mathsf{ob}(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \Sigma X \in \mathsf{ob}(\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}])$$

δηλαδή $\Sigma\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}] = \mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$.

Έστω τώρα δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathsf{ob}\,\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ και $\phi\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}])$ έτσι ώστε το

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X \arrow[rr, "\phi"] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

να είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$. Έστω ότι $\phi = f/s$ και αναπαριστάται από ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Εφόσον η $\mathcal{D}$ είναι μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και $f\colon L \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}$, θα υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
L \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{D}$ με βάση τον f και ο κώνος W ανήκει στην $\mathcal{D}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή τοπικοποίησης $Q_{\mathcal{D}}\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$, αποκτούμε ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}}(f)"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}}(s)"', "\wr"] & Y \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}}(g)"] \arrow[d, "1_Y"', "\wr"] & W \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}}(h)"] \arrow[d, "1_W"', "\wr"] & \Sigma L \arrow[d, "\Sigma Q_{\mathcal{D}}(s)"', "\wr"] \\
X \arrow[r, "\phi"'] & Y \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}}(g)"'] & W \arrow[r, "(\Sigma Q_{\mathcal{D}}(s))\circ Q_{\mathcal{D}}(h)"'] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ το οποίο άμεσα βλέπουμε ότι αποτελεί έναν ισομορφισμό τριγώνων. Συνεπώς το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "(\Sigma Q_{\mathcal{D}}(s))\circ Q_{\mathcal{D}}(h)"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "\phi"] & & Y \arrow[ul, "Q_{\mathcal{D}}(g)"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ και θέτοντας $Z = W$ προκύπτει το ζητούμενο. ■

Ανάλογα, ισχύει και η ακόλουθη δυϊκή πρόταση.

Πρόταση 3.5.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό και $\mathcal{D}$ μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

- *Η $S_{\mathcal{D}} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{D})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{D}$.*
- *Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{D})$ και μορφισμό $s\colon X \longrightarrow Y$ με $s \in S$, υπάρχει ένα αντικείμενο $Z \in ob(\mathcal{D})$ και μορφισμός $u\colon Y \longrightarrow Z$ έτσι ώστε $u \circ s \in S$.*

Τότε η κλάση $S_{\mathcal{D}}$ είναι συμβατή με τον τριγωνισμό της $\mathcal{D}$ και η $\mathcal{D}[S_{\mathcal{D}}^{-1}]$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 3.5.5. ■

Ολοκληρώνουμε την ενότητα ορίζοντας την έννοια του πυρήνα ενός ακριβή συναρτητή τριγωνισμένων κατηγοριών και ορισμένες βασικές ιδιότητες. Για τους ακόλουθους ορισμούς και προτάσεις βλ. [43, Chapter 2.1].

Ορισμός 3.5.7. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών. Ο* **πυρήνας** *του F ορίζεται ως η αυστηρά πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ της $\mathcal{C}$ της οποίας τα αντικείμενα απεικονίζονται στο μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{D}$ μέσω του F. Δηλαδή:*

$$\mathsf{ob}(\mathcal{C}') = \{X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}) | F(X) = 0\}$$

Λήμμα 3.5.8. *Έστω $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας ακριβής συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών. Τότε, ο πυρήνας $\mathcal{C}'$ του F είναι μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}') \Leftrightarrow F(X) = 0 \Leftrightarrow \Sigma F(X) = 0 \Leftrightarrow F(\Sigma X) = 0 \Leftrightarrow \Sigma X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}')$$

δηλαδή η $\mathcal{C}'$ είναι κλειστή στον συναρτητή μεταφοράς Σ.

Έστω τώρα

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ έτσι ώστε $Q, U \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}')$, δηλαδή $F(X) = F(Y) = 0$. Εφόσον το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & F(Z) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ F(X) \arrow[rr] & & F(Y) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην κατηγορία $\mathcal{D}$, έχουμε $F(Z) = 0$ και συνεπώς $Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}')$.

Η $\mathcal{C}'$ είναι επομένως μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. ■

Ο ακόλουθος ορισμός οφείλεται κυρίως στον Verdier (βλ. [52]):

Ορισμός 3.5.9. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία. Μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{D}$ της $\mathcal{C}$ καλείται* **thick** *αν ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: Για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ έτσι ώστε το αντικείμενο $X \oplus Y$ να είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της $\mathcal{D}$, τότε τα X και Y είναι ισόμορφα με αντίστοιχα αντικείμενα της $\mathcal{D}$.*

Στην περίπτωση, δηλαδή, που η $\mathcal{D}$ είναι μία αυστηρά πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, η $\mathcal{D}$ καλείται thick αν περιέχει όλους τους ευθείς αθροιστέους των αντικειμένων της.

Ο παραπάνω ορισμός αποτελεί μία προσέγγιση στην έννοια της thick υποκατηγορίας μίας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{C}$ ανάλογη της περίπτωσης στην οποία η $\mathcal{C}$ είναι αβελιανή (βλ. Ορισμός 2.4.12). Παρατηρούμε ότι η κύρια ιδιότητα της υποκατηγορίας $\mathcal{C}'$, δηλαδή το να είναι «κλειστή στις επεκτάσεις» παραμένει σταθερή στους δύο ορισμούς. Αν η $\mathcal{C}$ είναι μια αβελιανή τριγωνισμένη κατηγορία, ο παραπάνω ορισμός συμφωνεί με τον Ορισμό 2.4.12 και στη συνέχεια δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ αυτών.

Πρόταση 3.5.10. *Έστω $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας ακριβής συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών. Τότε, ο πυρήνας $\mathcal{C}'$ του F είναι μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Έστω $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ έτσι ώστε $X \oplus Y \in \mathcal{C}'$. Αφού ο συναρτητής F είναι προσθετικός, έχουμε

$$F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$$

άρα αν το $F(X \oplus Y)$ είναι ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{D}$, τα $F(X)$ και $F(Y)$ είναι επίσης ισόμορφα με το μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{D}$ ως ευθείς αθροιστέοι του. Ως αποτέλεσμα, η $\mathcal{C}'$ είναι μία thick τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. ■

3.6 S-ενέσιμα και S-προβολικά Αντικείμενα

Η ενότητα αυτή αποτελεί μία εφαρμογή της θεωρίας η οποία αναπτύχθηκε ως τώρα. Στόχος είναι να κατασκευάσουμε δύο πλήρεις υποκατηγορίες της τοπικοποίησης μίας τριγωνισμένης κατηγορίας.

Ορισμός 3.6.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό και $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ ο συναρτητής τοπικοποίησης. Ένα αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$ καλείται* ***S*-μηδενικό (*S*-null)** *αν $Q(X) = 0$.*

Ορισμός 3.6.2. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό.*

- *Ένα αντικείμενο I στην $\mathcal{C}$ καλείται* ***S*-ενέσιμο (*S*-injective)** *αν $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I) = 0$ για κάθε S-μηδενικό αντικείμενο M της $\mathcal{C}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{I}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ που αποτελείται από όλα τα S-ενέσιμα αντικείμενα.*

- *Ένα αντικείμενο P στην $\mathcal{C}$ καλείται* ***S*-προβολικό (*S*-projective)** *αν $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, I) = 0$ για κάθε S-μηδενικό αντικείμενο M της $\mathcal{C}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ που αποτελείται από όλα τα S-προβολικά αντικείμενα.*

Σχόλιο 3.6.3. Προφανώς οι κατηγορίες $\mathcal{I}$ και $\mathcal{P}$ είναι αυστηρά πλήρεις υποκατηγορίες της $\mathcal{C}$.

Παρατηρούμε ότι η S είναι επίσης μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον τριγωνισμό στην δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.4.8 βλέπουμε εύκολα ότι ένα αντικείμενο είναι S-μηδενικό στην $\mathcal{C}$ αν-ν είναι S-μηδενικό στην $\mathcal{C}^{op}$. Έτσι, τα S-ενέσιμα αντικείμενα της $\mathcal{C}$ είναι S-προβολικά στην $\mathcal{C}^{op}$ και αντίστροφα. Αυτή η δυϊκότητα μας επιτρέπει να επικεντρωθούμε μόνο στην μελέτη των S-ενέσιμων αντικείμενων και χρησιμοποιώντας την κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$ να εξάγουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα και για τα S-προβολικά αντικείμενα.

Λήμμα 3.6.4. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό. Τότε:*

- *Η κατηγορία $\mathcal{I}$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.*
- *Η κατηγορία $\mathcal{P}$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα επικεντρωθούμε μόνο στην απόδειξη της S-ενέσιμης περίπτωσης καθώς η S-προβολική προκύπτει δυϊκά.

Αρχικά, δείχνουμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μια προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Άμεσα, το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$ ανήκει στην $\mathcal{I}$ καθώς $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, 0) = 0$ για κάθε S-μηδενικό αντικείμενο M της $\mathcal{C}$. Επιπλέον, για δύο αντικείμενα $I, J \in \mathsf{ob}(\mathcal{I})$, έχουμε:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I \oplus J) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I) + \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, J) = 0$$

για οποιοδήποτε S-μηδενικό αντικείμενο M της $\mathcal{C}$. Επομένως, $I \oplus J \in \mathsf{ob}(\mathcal{I})$ και η $\mathcal{I}$ είναι μία πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.

Γνωρίζουμε ότι το αντικείμενο $Q(\Sigma M)$ είναι ισόμορφο με το $\Sigma Q(M)$, επομένως $Q(\Sigma M) = 0 \Leftrightarrow \Sigma Q(M) = 0 \Leftrightarrow Q(M) = 0$, δηλαδή το M είναι S-μηδενικό αν-ν το ΣM είναι S-μηδενικό. Έτσι, αν $I \in \mathsf{ob}(\mathcal{I})$ είναι ένα S-ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{C}$, έχουμε:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \Sigma I) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma^{-1} M, I) = 0$$

για κάθε S-μηδενικό αντικείμενο M της $\mathcal{C}$. Συνεπώς αν $I \in \mathsf{ob}(\mathcal{I}) \Longrightarrow \Sigma I \in \mathsf{ob}(\mathcal{I})$ και ανάλογα βλέπουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Επομένως η κατηγορία $\mathcal{I}$ είναι κλειστή στον αυτομορφισμό Σ.

Έστω τώρα $f\colon I \longrightarrow J$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{I}$ και

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ I \arrow[rr] & & J \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο με βάση τον f. Τότε, αν M είναι ένα S-μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{C}$, από την Πρόταση 3.3.1 γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ένας ομολογιακός συναρτητής. Έτσι, από την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, J) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, K)$$

αφού $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, J) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, K) = 0$ και το K είναι S-ενέσιμο ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ∎

Στα παρακάτω θέτουμε $S_{\mathcal{I}} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{I})$ και $S_{\mathcal{P}} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{P})$.

Λήμμα 3.6.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό. Τότε:*

- *Οποιοσδήποτε μορφισμός στην $S_{\mathcal{I}}$ είναι ισομορφισμός.*
- *Οποιοσδήποτε μορφισμός στην $S_{\mathcal{P}}$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Όπως προηγουμένως, θα εξετάσουμε μόνο την S-ενέσιμη περίπτωση. Έστω $s\colon I \longrightarrow J$ ένας μορφισμός στην $S_{\mathcal{I}}$. Αφού η $\mathcal{I}$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ θα υπάρχει ένα αντικείμενο $K \in \mathsf{ob}(\mathcal{I})$ και ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ I \arrow[rr, "s"'] & & J \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{I}$ με βάση τον s. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ στο παραπάνω διακεκριμένο τρίγωνο αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Q(K) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ Q(I) \arrow[rr, "Q(s)"'] & & Q(J) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Αφού $s \in S_{\mathcal{I}} = S \cap \mathsf{Mor}(\mathcal{I})$, τότε $s \in S$. Έτσι, ο $Q(s)$ είναι ένας ισομορφισμός και συνεπώς από το Λήμμα 3.3.5 έχουμε $Q(K) = 0$. Εξ ορισμού, λοιπόν, το αντικείμενο K είναι S-μηδενικό και αφού είναι και S-ενέσιμο, θα ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(K, K) = 0$, δηλαδή $K = 0$. Χρησιμοποιώντας άλλη μία φορά το παραπάνω λήμμα προκύπτει ότι ο s είναι ισομορφισμός. ■

Πρόταση 3.6.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό. Τότε:*

- *Η κλάση $S_{\mathcal{I}}$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον αυτομορφισμό μεταφοράς Σ στην $\mathcal{I}$.*
- *Η κλάση $S_{\mathcal{P}}$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον αυτομορφισμό μεταφοράς Σ στην $\mathcal{P}$.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 2.1.11 και το παραπάνω Λήμμα, προκύπτει άμεσα ότι η $S_{\mathcal{I}}$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{I}$ και αντίστοιχα η $S_{\mathcal{P}}$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση στην $\mathcal{P}$. ■

Λήμμα 3.6.7. *Έστω δύο αντικείμενα $M, I \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ με το I να είναι S-ενέσιμο. Τότε, για κάθε μορφισμό $s\colon I \longrightarrow M$ στην S, υπάρχει ένας μορφισμός $t\colon M \longrightarrow I$ έτσι ώστε $t \circ s = 1_I$.*

Απόδειξη. Έστω

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ I \arrow[rr, "s"'] & & M \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathcal{C}$ με βάση τον s. Τότε, εφαρμόζοντας τον συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$, αποκτούμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Q(N) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ Q(I) \arrow[rr, "Q(s)"'] & & Q(M) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Εφόσον ο $Q(s)$ είναι ισομορφισμός, από το Λήμμα 3.3.5,, προκύπτει ότι $Q(N) = 0$ και το N είναι έτσι S-μηδενικό. Από την Πρόταση 3.3.2, ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι συνομολογιακός, άρα υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(N, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I)$$

Αφού $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, I) = 0$, ο μορφισμός

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I)$$

$$f \longmapsto f \circ s$$

είναι ισομορφισμός. Συνεπώς, θα υπάρχει μορφισμός $t\colon M \longrightarrow \mathcal{I}$ έτσι ώστε $t \circ s = 1_I$. ■

Παρατήρηση 3.6.8. Από το παραπάνω Λήμμα, οι συνθήκες της Πρότασης 3.5.6 ικανοποιούνται και ο φυσικός συναρτητής $\mathcal{I}[S_{\mathcal{I}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ ταυτίζει την $\mathcal{I}[S_{\mathcal{I}}^{-1}]$ με μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Αφού, σύμφωνα με το Λήμμα 3.6.5, κάθε μορφισμός στην $S_{\mathcal{I}}$, είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{I}$, η τοπικοποίηση $\mathcal{I}[S_{\mathcal{I}}^{-1}]$ ουσιαστικά ταυτίζεται με την $\mathcal{I}$. Η $\mathcal{I}$, έτσι λοιπόν, μπορεί να θεωρηθεί (με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών) ως μία πλήρης τριγωνισμένη κατηγορία της $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Ακριβώς ανάλογα, η $\mathcal{P}$ μπορεί επίσης να ταυτιστεί με μία πλήρης τριγωνισμένη κατηγορία της $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Θεωρούμε τώρα δύο τριγωνισμένες κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ και $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ένα συζυγές ζεύγος ακριβών συναρτητών. Έχουμε δηλαδή, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(N), M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N, F(M))$ για κάθε $M \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ και για κάθε $N \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$. Έστω S και T δύο τοπικοποιούσες κλάσεις συμβατές με τον τριγωνισμό στην $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ αντίστοιχα. Αν ο συναρτητής G απεικονίζει μορφισμούς της T σε μορφισμούς της S, τότε προκύπτει το ακόλουθο

Λήμμα 3.6.9. *Ο συναρτητής F απεικονίζει S-ενέσιμα αντικείμενα σε T-ενέσιμα αντικείμενα.*

Απόδειξη. Έστω I ένα S-ενέσιμο αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ και N ένα S-μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{D}$. Τότε, από το Πόρισμα 2.4.8, θα υπάρχει αντικείμενο $N' \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ έτσι ώστε ο μηδενικός μορφισμός $N' \longrightarrow N$ να ανήκει στην T. Τότε, από υπόθεση, ο μηδενικός μορφισμός $G(N') \longrightarrow G(N)$ θα ανήκει στην S. Ξανά, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.4.8, προκύπτει ότι και το $G(N)$ είναι S-μηδενικό και συνεπώς $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(N), I) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, F(I)) = 0$, δηλαδή το $F(I)$ είναι S-ενέσιμο. ■

Το δυϊκό συμπέρασμα ισχύει για S-προβολικά αντικείμενα.

3.7 Αβελιανές και Τριγωνισμένες Κατηγορίες

Το τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου αφιερώνεται στην ειδική περίπτωση κατά την οποία η τριγωνισμένη κατηγορία δεν είναι απλά προσθετική, αλλά αβελιανή. Αρχικά, παραθέτουμε έναν ορισμό που αφορά σύντομες ακριβείς ακολουθίες.

Ορισμός 3.7.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και*

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Θα λέμε ότι η παραπάνω σύντομη ακριβής ακολουθία **διασπάται** *(ή είναι* **διασπάσιμη***), αν υπάρχει μορφισμός $g'\colon X'' \longrightarrow X$ έτσι ώστε $g \circ g' = 1_{X''}$.*

Η παρακάτω πρόταση, η οποία εμπλουτίζει τον ορισμό μίας διασπάσιμης σύντομης ακριβούς ακολουθίας προέρχεται από το [33].

Πρόταση 3.7.2. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και*

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. *Υπάρχει μορφισμός $g'\colon X'' \longrightarrow X$ έτσι ώστε $g \circ g' = 1_{X''}$.*

2. *Υπάρχει μορφισμός* $f' \colon X \longrightarrow X'$ *έτσι ώστε* $f' \circ f = 1_{X'}$.

3. *Υπάρχουν μορφισμοί* $f' \colon X \longrightarrow X'$ *και* $g' \colon X'' \longrightarrow X$ *έτσι ώστε* $f \circ f' + g' \circ g = 1_X$.

4. *Υπάρχουν ισομορφισμοί* $\phi \colon X \longrightarrow X' \oplus X''$ *και* $\psi \colon X' \oplus X'' \longrightarrow X$ *με*

$$\phi = \begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \psi = \begin{pmatrix} f' & g \end{pmatrix}$$

   έτσι ώστε $\phi \circ \psi = 1_{X' \oplus X''}$ *και* $\psi \circ \phi = 1_X$.

5. *Για κάθε αντικείμενο* $Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, *η απεικόνιση* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{g\circ} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X'')$ *είναι επί.*

6. *Για κάθε αντικείμενο* $Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, *η απεικόνιση* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\circ f} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$ *είναι επί.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [33, Proposition 8.3.14.] ■

Ορισμός 3.7.3. *Μία αβελιανή κατηγορία* $\mathcal{A}$ *καλείται* **ημιαπλή** *αν οποιαδήποτε σύντομη ακριβής ακολουθία* $\mathcal{A}$ *διασπάται.*

Ευθύς αμέσως δίνουμε ένα παράδειγμα ημιαπλής κατηγορίας (βλ. [31, Example 5.2]).

Παράδειγμα 3.7.4. Έστω R ένας ημιαπλός δακτύλιος, δηλαδή ο R είναι ένα ημιαπλό πρότυπο σαν ένα πρότυπο πάνω από τον εαυτό του. (Ημιαπλό πρότυπο: ένα πρότυπο που ισούται με το ευθύ άθροισμα των μη ανάγωγων υποπροτύπων του). Τότε, οι κατηγορίες προτύπων R-Mod και R-mod είναι ημιαπλές. Πιο συγκεκριμένα, η κατηγορία Vec_k των διανυσματικών χώρων πάνω από ένα σώμα k είναι ημιαπλή.

Από την άλλη πλευρά, η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων δεν είναι ημιαπλή. Για παράδειγμα, η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

δεν είναι διασπάσιμη.

Παρατήρηση 3.7.5. Όπως γνωρίζουμε, αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και $f \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$, τότε υπάρχουν οι σύντομες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker} f \xrightarrow{\mathsf{ker} f} X \xrightarrow{\mathsf{coim} f} \mathsf{Coim} f \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow \mathsf{Im} f \xrightarrow{\mathsf{im} f} Y \xrightarrow{\mathsf{coker} f} \mathsf{Coker} f \longrightarrow 0$$

και ο f αναλύεται μέσω ενός ισομορφισμού $\tilde{f} \colon \mathsf{Coim} f \xrightarrow{\sim} \mathsf{Im} f$ όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker} f \arrow[r, "\mathsf{ker} f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathsf{coim} f"'] & Y \arrow[r, "\mathsf{coker} f"] & \mathsf{Coker} f \\
 & \mathsf{Coim} f \arrow[r, "\sim", "\tilde{f}"'] & \mathsf{Im} f \arrow[u, "\mathsf{im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

Αν η $\mathcal{A}$ είναι ημιαπλή, οι δύο παραπάνω ακριβείς ακολουθίες είναι διασπάσιμες, συνεπώς υπάρχουν ισομορφισμοί $\alpha\colon X \longrightarrow \mathsf{Ker} f \oplus \mathsf{Coim} f$ και $\beta\colon Y \longrightarrow \mathsf{Coker} f \oplus \mathsf{Im} f$ και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & & Y \arrow[d, "\beta"', "\wr"] \\ \mathsf{Ker} f \oplus \mathsf{Coim} f \arrow[rr, "\sim", "0\oplus\tilde{f}"'] & & \mathsf{Coker} f \oplus \mathsf{Im} f \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Πρόταση 3.7.6. *Κάθε τριγωνισμένη αβελιανή κατηγορία είναι ημιαπλή.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη αβελιανή κατηγορία και

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \tag{3.23}$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{C}$. Τότε, από την Πρόταση 3.3.11, αφού ο μορφισμός g είναι επιμορφισμός, θα υπάρχει ένα αντικείμενο $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ και ένας ισομορφισμός $\psi\colon Y \xrightarrow{\sim} Z \oplus U$ έτσι ώστε $g = p \circ \psi$, όπου $p\colon Z \oplus U \longrightarrow Z$ η φυσική προβολή.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[dr, dashed, "\exists\,\psi"', "\wr"] & Z \\ & Z \oplus U \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τον μορφισμό $g' = \psi^{-1} \circ i\colon Z \longrightarrow Y$, όπου $i\colon Z \longrightarrow Z \oplus U$ η φυσική έγκλειση. Τότε έχουμε $g \circ g' = g \circ \psi^{-1} \circ i = p \circ i = 1_Z$ και συνεπώς η (3.23) είναι διασπάσιμη. ∎

Τα διακεκριμένα τρίγωνα σε μία τριγωνισμένη αβελιανή κατηγορία, όπως θα δούμε στην συνέχεια, δέχονται μία πιο εύχρηστη και λεπτομερής περιγραφή.

Πρόταση 3.7.7. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη αβελιανή κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Τότε, κάθε διακεκριμένο τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ με βάση τον μορφισμό f, είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο τρίγωνο της μορφής

$$\begin{tikzcd} & \Sigma\,\mathsf{Ker} f \oplus \mathsf{Coker} f \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Διατηρώντας τον συμβολισμό της Παρατήρησης 3.7.5, αφού η $\mathcal{C}$ είναι ημιαπλή, έχουμε τις παρακάτω διασπάσιμες σύντομες ακριβείς ακολουθίες:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ker}\,f \xrightarrow{\mathsf{ker}\,f} X \xrightarrow{\mathsf{coim}\,f} \mathsf{Coim}\,f \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow \mathsf{Im}\,f \xrightarrow{\mathsf{im}\,f} Y \xrightarrow{\mathsf{coker}\,f} \mathsf{Coker}\,f \longrightarrow 0$$

Θα υπάρχουν μορφισμοί

$$\phi\colon X \longrightarrow \mathsf{Ker}\,f \qquad \text{και} \qquad \psi\colon Y \longrightarrow \mathsf{Im}\,f$$

έτσι ώστε $\phi \circ \mathsf{ker}\,f = 1_{\mathsf{Ker}\,f}$ και $\psi \circ \mathsf{im}\,f = 1_{\mathsf{Im}\,f}$. Επιπλέον, υπάρχουν ισομορφισμοί

$$\tilde{f}\colon\ \mathsf{Coim}\,f \xrightarrow{\sim} \mathsf{Im}\,f$$

$$\alpha\colon X \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ker}\,f \oplus \mathsf{Coim}\,f$$

και

$$\beta\colon Y \xrightarrow{\sim} \mathsf{Coker}\,f \oplus \mathsf{Im}\,f$$

με

$$\alpha = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathsf{coim}\,f \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathsf{coker}\,f \\ \psi \end{pmatrix}$$

και τότε $f = \beta^{-1} \circ (0 \oplus \tilde{f}) \circ \alpha$.

Από την Πρόταση 3.3.8, το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \Sigma\,\mathsf{Ker}\,f \oplus \mathsf{Coker}\,f \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ \mathsf{Ker}\,f \arrow[rr, "0"] & & \mathsf{Coker}\,f \arrow[ul, "i"'] \end{tikzcd}$$

όπου $p = \begin{pmatrix} 1_{\Sigma\,\mathsf{Ker}\,f} & 0 \end{pmatrix}$ και $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{\mathsf{Coker}\,f} \end{pmatrix}$ είναι διακεκριμένο και από το Λήμμα 3.3.5 και το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ \mathsf{Coim}\,f \arrow[rr, "\tilde{f}"] & & \mathsf{Im}\,f \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο, αφού ο $\tilde{f}$ είναι ισομορφισμός. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.6 και το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \Sigma\,\mathsf{Ker}\,f \oplus \mathsf{Coker}\,f \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ \mathsf{Ker}\,f \oplus \mathsf{Coim}\,f \arrow[rr, "0\oplus\tilde{f}"] & & \mathsf{Coker}\,f \oplus \mathsf{Im}\,f \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο, όπου

$$u = \begin{pmatrix} 1_{\Sigma\,\mathsf{Ker}\,f} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{\mathsf{Coker}\,f} & 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"', "\wr"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"', "\wr"] \\
\mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Coim}\, f \arrow[r, "0\oplus\tilde{f}"] & \mathsf{Coker}\, f \oplus \mathsf{Im}\, f \arrow[r, "v"] & \Sigma\, \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Coker}\, f \arrow[r, "u"] & \Sigma\, \mathsf{Ker}\, f \oplus \Sigma\, \mathsf{Coim}\, f
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό. Από το αξίωμα (TR3) μίας τριγωνισμένης κατηγορίας, θα υπάρχει ένας μορφισμός

$$\gamma\colon Z \longrightarrow \Sigma\, \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Coker}\, f$$

ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Αφού οι α, β και $\Sigma\alpha$ είναι ισομορφισμοί, από το Λήμμα 3.3.3 και ο γ θα είναι ισομορφισμός, συνεπώς το παρακάτω διάγραμμα είναι ένας ισομορφισμός διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"', "\wr"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\gamma"', "\wr"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"', "\wr"] \\
\mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Coim}\, f \arrow[r, "0\oplus\tilde{f}"] & \mathsf{Coker}\, f \oplus \mathsf{Im}\, f \arrow[r, "v"] & \Sigma\, \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Coker}\, f \arrow[r, "u"] & \Sigma\, \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Coim}\, f
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"', "\wr"] & \Sigma X \arrow[d, "1_{\Sigma X}"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g'"] & \Sigma\, \mathsf{Ker}\, f \oplus \mathsf{Coker}\, f \arrow[r, "h'"] & \Sigma X
\end{tikzcd} \tag{3.24}$$

όπου

$$g' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{coker}\, f \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad h' = \begin{pmatrix} \Sigma\, \mathsf{ker}\, f & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε:

$$\gamma \circ g = v \circ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{\mathsf{Coker}\, f} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathsf{coker}\, f \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{coker}\, f \end{pmatrix} = g'$$

και επιπλέον

$$\Sigma\alpha \circ h' = \begin{pmatrix} \Sigma\phi \\ \Sigma\, \mathsf{coim}\, f \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \Sigma\, \mathsf{ker}\, f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma\phi \circ \Sigma\, \mathsf{ker}\, f & 0 \\ \Sigma\, \mathsf{coim}\, f \circ \Sigma\, \mathsf{ker}\, f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\Sigma\, \mathsf{Ker}\, f} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = u$$

Συνθέτοντας από τα δεξιά με τον μορφισμό γ, από τον παραπάνω ισομορφισμό διακεκριμένων τριγώνων έχουμε:

$$\Sigma\alpha \circ h' \circ \gamma = u \circ \gamma = \Sigma\alpha \circ h \Longleftrightarrow h' \circ \gamma = h$$

Επομένως το διάγραμμα 3.24 είναι μεταθετικό και αποτελεί έναν ισομορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. ∎

Παρατήρηση 3.7.8. Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε μία ημιαπλή αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ η οποία είναι εκ των προτέρων εφοδιασμένη με έναν αυτομορφισμό Σ, είναι δυνατό να εφοδιάσουμε την κατηγορία $\mathcal{A}$ με μία δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Ορίζουμε ότι ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{A}$ θα είναι διακεκριμένο, αν είναι ισόμορφο στην $\mathcal{A}$ με ένα τρίγωνο της μορφής

$$\begin{tikzcd} & \Sigma U \oplus W \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ U \oplus V \arrow[rr, "\alpha"] & & W \oplus V \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

όπου

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_V \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_W & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1_{\Sigma U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προκύπτει ότι η κλάση αυτή διακεκριμένων τριγώνων επαληθεύει τα αξιώματα $(\mathsf{TR1}) - (\mathsf{TR4})$ και συνεπώς η κατηγορία $\mathcal{A}$ αποτελεί μία τριγωνισμένη κατηγορία.

Κεφάλαιο 4

Παραγόμενες Κατηγορίες

Ο κύριος στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η κατασκευή της παραγόμενης κατηγορίας μίας αβελιανής κατηγορίας χρησιμοποιώντας τη θεωρία που αναπτύχθηκε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Η πορεία που θα ακολουθηθεί είναι σύμφωνη με τον Milicic στο [39, Chapter 3] και αποτελείται αρχικά από τον ορισμό της κατηγορίας των συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ μίας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Μέσω της $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ κατασκευάζεται στη συνέχεια η ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι τριγωνισμένη. Τέλος, ορίζεται η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, η οποία αποτελεί απλώς την τοπικοποίηση της ομοτοπικής κατηγορίας ως προς μία ειδική κλάση μορφισμών.

4.1 Σύμπλοκα

Μία από τις πιο βασικές ίσως έννοιες στην ομολογική άλγεβρα είναι η αντικατάσταση ενός αντικειμένου σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$, με ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{C}$, το οποίο αποτελείται από επί μέρους αντικείμενα και μορφισμούς τα οποία ικανοποιούν ορισμένες «καλές ιδιότητες». Για παράδειγμα, υπάρχουν περιπτώσεις, (όπως όταν θεωρούμε τον παραγόμενο συναρτητή του τανυστικού γινομένου) στις οποίες ένα πρότυπο μπορεί να αντικατασταθεί με μία σύμπλοκο προβολικών (ή επίπεδων) προτύπων. Ευθύς αμέσως παραθέτουμε τον ορισμό ενός συμπλόκου σε μία προσθετική κατηγορία.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Ένα* **(αλυσιδωτό) σύμπλοκο (chain complex)**, $C_\bullet = \{C_n, \partial_n^C\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *στην $\mathcal{A}$, είναι μία ακολουθία αντικειμένων $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και μορφισμών $\partial_n^C \colon C_n \longrightarrow C_{n-1}$ έτσι ώστε $\partial_n^C \circ \partial_{n+1}^C = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Ο μορφισμός ∂_n^C, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καλείται το **διαφορικό (boundary operator)** *του συμπλόκου και ένα σύμπλοκο $\{C_n, \partial_n^C\}$ θα αναπαριστάται ως*

$$C_\bullet\colon \ \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} C_n \xrightarrow{\partial_n^C} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Δυϊκά, ορίζεται και η έννοια του συν-αλυσιδωτού συμπλόκου:

Ορισμός 4.1.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Ένα* **(συν-αλυσιδωτό) σύμπλοκο (cochain complex)**, $C^\bullet = \{C^n, \partial_C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *στην $\mathcal{A}$, είναι μία ακολουθία αντικειμένων $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και μορφισμών $\partial_C^n \colon C^n \longrightarrow C^{n+1}$ έτσι ώστε $\partial_C^{n+1} \circ \partial_C^n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Ο μορφισμός ∂^n, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καλείται το **διαφορικό (boundary operator)** *του συμπλόκου και ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο $\{C^n, \partial_C^n\}$ θα αναπαριστάται ως*

$$C^\bullet\colon \ \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} C^n \xrightarrow{\partial_C^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Σχόλιο 4.1.3. Στα πλαίσια της θεωρίας που θα αναπτυχθεί στη συνέχεια, τα σύμπλοκα που θα χρησιμοποιηθούν θα είναι σχεδόν σε κάθε περίπτωση συν-αλυσιδωτά. Θα επικεντρωθούμε, έτσι, στην ανάλυση μόνο συν-αλυσιδωτών συμπλόκων και για χάριν συντομίας, θα αναφερόμαστε σε ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο απλά ως «σύμπλοκο».

Σχόλιο 4.1.4. Σύμφωνα με τον Milicic, βλ. [39], αν $\mathcal{A}$ είναι μία προσθετική κατηγορία, ένα **βαθμωτό αντικείμενο** C στην $\mathcal{A}$ είναι μία οικογένεια αντικείμενων $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και ο δείκτης n του αντικειμένου C^n καλείται **βαθμός** του αντικειμένου. Ένας **βαθμωτός μορφισμός** f βαθμού p στην $\mathcal{A}$ είναι μία οικογένεια μορφισμών $f = \{f^n \colon C^n \longrightarrow D^{n+p}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με $\mathsf{Hom}^p(C^\bullet, D^\bullet)$ το σύνολο όλων των βαθμωτών μορφισμών βαθμού p μεταξύ των συμπλόκων $C^\bullet$ και $D^\bullet$.

Με τον παραπάνω συμβολισμό, ένα σύμπλοκο $\{C^n, \partial_C^n\}$ είναι ένα ζεύγος που αποτελείται από ένα βαθμωτό αντικείμενο $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και έναν βαθμωτό μορφισμό $\partial_C \in \mathsf{Hom}^1(C^\bullet, C^\bullet)$, έτσι ώστε $\partial_C^{n+1} \circ \partial_C^n = 0$.

Φυσικό επακόλουθο είναι ο ορισμός μορφισμών μεταξύ συμπλόκων.

Ορισμός 4.1.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $C^\bullet = \{C^n, \partial_C^n\}$, $D^\bullet = \{D^n, \partial_D^n\}$ δύο σύμπλοκα στην $\mathcal{A}$. Ένας* **μορφισμός συμπλόκων (chain morphism)** $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ *είναι μία ακολουθία μορφισμών $f = \{f^n \colon C^n \longrightarrow D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] \arrow[d, "f^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial_D^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial_D^n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ισχύει δηλαδή $f^{n+1} \circ \partial_C^n = \partial_D^n \circ f^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ο χαρακτηρισμός ενός μορφισμού ως μονομορφισμός, επιμορφισμός ή ισομορφισμός επεκτείνεται και στους μορφισμούς συμπλόκων κατά βαθμό:

Ορισμός 4.1.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμών συμπλόκων. Τότε:*

- *Ο μορφισμός συμπλόκων f καλείται* **μονομορφισμός συμπλόκων** *αν ο μορφισμός $f^n \colon C^n \longrightarrow D^n$ είναι μονομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

- *Ο μορφισμός συμπλόκων f καλείται* **επιμορφισμός συμπλόκων** *αν ο μορφισμός $f^n \colon C^n \longrightarrow D^n$ είναι επιμορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

- *Ο μορφισμός συμπλόκων f καλείται* **ισομορφισμός συμπλόκων** *αν ο μορφισμός $f^n \colon C^n \longrightarrow D^n$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Παρατήρηση 4.1.7. Βλέπουμε ότι, αν $\mathcal{A}$ είναι μία προσθετική κατηγορία, μπορούμε να σχηματίσουμε μία νέα κατηγορία τα αντικείμενα της οποίας είναι σύμπλοκα αντικειμένων της $\mathcal{A}$ ενώ οι μορφισμοί αυτής είναι οι μορφισμοί συμπλόκων. Η σύνθεση δύο μορφισμών συμπλόκων ορίζεται κατά βαθμό, δηλαδή αν $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ και $g \colon D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ είναι δύο μορφισμοί συμπλόκων, ορίζουμε $g \circ f \colon C^\bullet \longrightarrow E^\bullet = \{g^n \circ f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Ορισμός 4.1.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Η κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα σύμπλοκα αντικειμένων της $\mathcal{A}$ και ως μορφισμούς, μορφισμούς συμπλόκων καλείται η* **κατηγορία συμπλόκων** *αντικειμένων της $\mathcal{A}$ και θα συμβολίζεται με $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$.*

Παράδειγμα 4.1.9. Αν $C^\bullet = \{C^n, \partial_C^n\}$ είναι ένα σύμπλοκο σε μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$, ο ταυτοτικός μορφισμός στην κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ στο $C^\bullet$, ο οποίος θα συμβολίζεται με 1_C, είναι ο μορφισμός συμπλόκων $1_C : C^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ με $1_{C^\bullet} = \{1_{C^n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] \arrow[d, "1_{C^{n-1}}"'] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] \arrow[d, "1_{C^n}"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "1_{C^{n+1}}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] & C^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 4.1.10. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη κατηγορία συμπλόκων. Ορίζουμε έναν συναρτητή $\Sigma\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ο οποίος καλείται* **συναρτητής μεταφοράς (translation fucntor** *ή* **shift functor)** *και αντιστοιχίζει κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$ στο σύμπλοκο $\Sigma C^\bullet$ το οποίο δίνεται από:*

$$\Sigma C^n = C^{n+1}$$
$$\partial_{\Sigma C}^n = -\partial_C^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον, η εικόνα ενός μορφισμού συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ μέσω του Σ, είναι ένας μορφισμός συμπλόκων $\Sigma f\colon \Sigma C^\bullet \longrightarrow \Sigma D^\bullet$ ο οποίος ορίζεται ως $\Sigma f^n = f^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Σχόλιο 4.1.11. Εύκολα βλέπουμε ότι ο συναρτητής Σ είναι ένας αυτομορφισμός της κατηγορίας συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ο οποίος μετατοπίζει ένα σύμπλοκο μία θέση προς τα αριστερά. Συχνά στη βιβλιογραφία, το σύμπλοκο $\Sigma^n C^\bullet$ συμβολίζεται με $C^\bullet[n]$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, το $C^\bullet[n]$ είναι το σύμπλοκο το οποίο ορίζεται ως:

$$(C^\bullet[n])^i = C^{i+n}$$
$$\partial_{C[n]}^i = (-1)^n \partial_C^{i+n}$$

Ορισμός 4.1.12. *Ένα σύμπλοκο $C^\bullet$ λέγεται* **άνω φραγμένο** *(αντίστοιχα* **κάτω φραγμένο***) αν υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $C^n = 0$ για κάθε $n > n_0$ (αντίστοιχα $C^n = 0$ για κάθε $n < n_0$). Ένα σύμπλοκο $C^\bullet$ καλείται* **φραγμένο** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.*

Χρησιμοποιώντας αυτά τα σύμπλοκα μπορούμε να ορίσουμε τις ακόλουθες πλήρεις υποκατηγορίες της κατηγορίας συμπλόκων (βλ. [52, Chapitre III, §1.1]).

Ορισμός 4.1.13. *Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ (αντίστοιχα $\mathsf{Ch}^+(\mathcal{A})$) την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από άνω φραγμένα (αντίστοιχα κάτω φραγμένα) σύμπλοκα και με $\mathsf{Ch}^b(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από φραγμένα σύμπλοκα. Επιπλέον, θα γράφουμε συχνά $\mathsf{Ch}^*(\mathcal{A})$ για οποιαδήποτε από τις παραπάνω κατηγορίες θέτοντας δηλαδή: $* = \{-, +, b\}$.*

Η κατηγορία των συμπλόκων «διατηρεί» την προσθετικότητα, όπως βλέπουμε στην ακόλουθη πρόταση από το [31, Proposition 1.4.].

Πρόταση 4.1.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Τότε και η κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι επίσης προσθετική.*

Απόδειξη. Έστω $C^\bullet, D^\bullet$ δύο σύμπλοκα και $f, g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ δύο μορφισμοί μεταξύ αυτών με $f = \{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $g = \{g^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Αρχικά, ορίζουμε μία πράξη πρόσθεσης στο σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$, θέτοντας:

$$f + g = \{f^n + g^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Χρησιμοποιώντας την προσθετική δομή της κατηγορίας $\mathcal{A}$ προκύπτει εύκολα ότι με αυτήν την πράξη το σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$ αποκτά μία δομή αβελιανής ομάδας και η σύνθεση των μορφισμών

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(D^\bullet, E^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, E^\bullet)$$

είναι διγραμμική για κάθε $C^\bullet, D^\bullet, E^\bullet \in \mathsf{ob}\big(\mathsf{Ch}(\mathcal{A})\big)$.

Το μηδενικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι το σύμπλοκο $(0_\mathcal{A}, \partial_0)$, όπου το $0_\mathcal{A}$ είναι το μηδενικό αντικείμενο της προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$ και το διαφορικό $\partial_0 \colon 0_\mathcal{A} \longrightarrow 0_\mathcal{A}$ είναι ο μορφισμός του μηδενικού αντικειμένου.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Το ευθύ άθροισμα δύο συμπλόκων $C^\bullet = \{C^n, \partial^n_C\}$ και $D^\bullet = \{D^n, \partial^n_D\}$ ορίζεται κατά βαθμό μέσω του ευθέος αθροίσματος της προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Έτσι ορίζουμε

$$C^\bullet \oplus D^\bullet = \{C^n \oplus D^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

όπου το διαφορικό δίνεται από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος στην $\mathcal{A}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& C^{n+1} \oplus D^{n+1} & \\
C^n \arrow[ur, "i_{C^{n+1}} \circ \partial^n_C"] \arrow[r, "i_{C^n}"'] & C^n \oplus D^n \arrow[u, dashed, "\exists \,\partial^n"] & D^n \arrow[ul, "i_{D^{n+1}} \circ \partial^n_D"'] \arrow[l, "i_{D^n}"]
\end{tikzcd}$$

όπου

$$i_{C^n} = \begin{pmatrix} 1_{C^n} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i_{D^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{D^n} \end{pmatrix}, \quad \partial^n = \begin{pmatrix} \partial^n_C & 0 \\ 0 & \partial^n_D \end{pmatrix}$$

Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& C^{n+2} \oplus D^{n+2} & \\
C^n \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "i_{C^n}"'] & C^n \oplus D^n \arrow[u, "\partial^{n+1} \circ \partial^n"'] & D^n \arrow[ul, "0"'] \arrow[l, "i_{D^n}"]
\end{tikzcd}$$

λόγω της μοναδικότητας στην καθολική ιδιότητα προκύπτει ότι $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$, άρα το $\{C^n \oplus D^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα σύμπλοκο στην $\mathcal{A}$. Επιπλέον, το σύμπλοκο αυτό ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός ευθέος αθροίσματος στην κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Έχουμε έτσι τις φυσικές εγκλείσεις:

$$i_C \colon C^\bullet \longrightarrow C^\bullet \oplus D^\bullet \quad \text{με} \quad i_C = \left\{ i_{C^n} = \begin{pmatrix} 1_{C^n} \\ 0 \end{pmatrix} \colon C^n \longrightarrow C^n \oplus D^n \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

και

$$i_D \colon D^\bullet \longrightarrow C^\bullet \oplus D^\bullet \quad \text{με} \quad i_D = \left\{ i_{D^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{D^n} \end{pmatrix} \colon D^n \longrightarrow C^n \oplus D^n \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Αντίστοιχα, έχουμε τις φυσικές προβολές:

$$p_C \colon C^\bullet \oplus D^\bullet \longrightarrow C^\bullet \quad \text{με} \quad p_C = \left\{ p_{C^n} = \begin{pmatrix} 1_{C^n} & 0 \end{pmatrix} \colon C^n \oplus D^n \longrightarrow C^n \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

και

$$p_D \colon C^\bullet \oplus D^\bullet \longrightarrow D^\bullet \quad \text{με} \quad p_D = \left\{ p_{D^n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{D^n} \end{pmatrix} \colon C^n \oplus D^n \longrightarrow D^n \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Οι μορφισμοί αυτοί ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$p_C \circ 1_C = 1_C$$

$$p_D \circ 1_D = 1_D$$

$$1_C \circ p_C + 1_D \circ p_D = 1_{C \oplus D}$$

Τέλος, μένει να ελέγξουμε αν πληρείται η καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος. Έστω $E^\bullet$ ένα σύμπλοκο και μορφισμοί $f_C \colon C^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ και $f_D \colon D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f^n \colon C^n \oplus D^n \longrightarrow E^n$ έτσι ώστε $f^n \circ i_{C^n} = (f_C)^n$ και $f^n \circ i_{D^n} = (f_D)^n$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& E^n & \\
C^n \arrow[ur, "(f_C)^n"] \arrow[r, "i_{C^n}"'] & C^n \oplus D^n \arrow[u, dashed, "\exists ! \, f^n"] & D^n \arrow[ul, "(f_D)^n"'] \arrow[l, "\iota_{D^n}"]
\end{tikzcd}$$

Τότε ο $f = \{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}} \colon C^\bullet \oplus D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ είναι ο μοναδικός μορφισμός συμπλόκων έτσι ώστε $f_C = f \circ i_C$ και $f_D = f \circ i_D$. ■

Παρατήρηση 4.1.15. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία τυχούσα προσθετική κατηγορία και $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη κατηγορία συμπλόκων, ορίζουμε έναν συναρτητή $C \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ως εξής:

- Στα αντικείμενα: Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$, θέτουμε $C(X)^n = \begin{cases} X & , \text{ αν } n = 0 \\ 0 & , \text{ αν } n \neq 0 \end{cases}$

- Στους μορφισμούς: Για κάθε μορφισμό $f \colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{A}$, θέτουμε $C(f)^n = \begin{cases} f & , \text{ αν } n = 0 \\ 0 & , \text{ αν } n \neq 0 \end{cases}$

Το σύμπλοκο $C(X)$ καλείται και stalk complex του X.

Προκύπτει εύκολα ότι ο συναρτητής $f \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός και έτσι η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από σύμπλοκα $C^\bullet$ με $C^n = 0$ για $n \neq 0$.

Κατ' αντιστοιχία με την προσθετικότητα, η κατηγορία συμπλόκων διατηρεί και την αβελιανή δομή μίας κατηγορίας όπως προκύπτει από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1.16. *([31, Proposition 2.5.]) Αν η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, τότε και η κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι επίσης αβελιανή.*

Απόδειξη. Αρχικά, γνωρίζουμε από την Πρόταση 4.1.14 ότι η $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι μία προσθετική κατηγορία. Θα δείξουμε ότι κάθε μορφισμός συμπλόκων $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ έχει πυρήνα και συνπυρήνα. Αφού η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει ένας πυρήνας $\alpha^n = \mathsf{ker} f \colon \mathsf{Ker} f^n \longrightarrow C^n$ του μορφισμού $f^n \colon C^n \longrightarrow D^n$. Από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα, αφού

$$f^{n+1} \circ \partial_C^n \circ \alpha^n = \partial_D^n \circ f^n \circ \alpha^n = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\partial^n \colon \mathsf{Ker} f^n \longrightarrow \mathsf{Ker} f^{n+1}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathsf{Ker} f^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] \arrow[d, "\alpha^{n-1}"'] & \mathsf{Ker} f^n \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\alpha^n"'] & \mathsf{Ker} f^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] \arrow[d, "f^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial_D^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial_D^n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Λόγω της μεταθετικότητας, έχουμε

$$\alpha^{n+1} \circ \partial^n \circ \partial^{n+1} = \partial_C^n \circ \alpha^n \circ \partial^{n-1} = \partial_C^n \circ \partial_C^{n-1} \circ \alpha^{n-1} = 0$$

και αφού ο α^{n+1} είναι μονομορφισμός, έχουμε $\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα η οικογένεια $\{\mathsf{Ker} f^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ σχηματίζει ένα σύμπλοκο στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ και ο μορφισμός συμπλόκων $\alpha = \{\alpha^n \colon \mathsf{Ker} f^n \longrightarrow C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένας πυρήνας του f. Συνεπώς, κάθε μορφισμός στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ έχει πυρήνα και δυϊκά αποδεικνύεται και ότι κάθε μορφισμός στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ έχει συνπυρήνα.

Αν ο μορφισμός συμπλόκων f είναι μονομορφισμός, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο μορφισμός f^n είναι μονομορφισμός και αφού η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, θα είναι ο πυρήνας του συνπυρήνα του. Έτσι, προκύπτει ότι και ο μορφισμός συμπλόκων f είναι ο πυρήνας του συνπυρήνα του.

Τέλος, αν ο μορφισμός συμπλόκων f είναι επιμορφισμός, τότε με ένα δυϊκό επιχείρημα βλέπουμε επίσης ότι ο f είναι ο πυρήνας του συνπυρήνα του, ολοκληρώνοντας την απόδειξη ότι η κατηγορία $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι αβελιανή. ■

4.2 Η Ομοτοπική Κατηγορία

Θα ορίσουμε στη συνέχεια μία σχέση στο σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$ η οποία καλείται σχέση ομοτοπίας και προέρχεται ιστορικά από τον κλάδο της αλγεβρικής τοπολογίας. Σε αυτό το πλαίσιο, δύο συνεχείς απεικονίσεις από έναν χώρο X σε έναν χώρο U καλούνται ομοτοπικές εάν υπάρχει μία συνεχής «παραμόρφωση» από την πρώτη απεικόνιση στη δεύτερη (βλ. [37, Chapter II, §8]).

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία, $C^\bullet$, $D^\bullet$ δύο σύμπλοκα στην $\mathcal{A}$ και $f, g \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ δύο μορφισμοί μεταξύ αυτών. Θα λέμε ότι οι μορφισμοί f και g είναι* **ομοτοπικοί** *και θα γράφουμε $f \approx g$, αν υπάρχει μία ακολουθία μορφισμών $\phi = \{\phi^n \colon C^n \longrightarrow D^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ στην $\mathcal{A}$, έτσι ώστε*

$$f^n - g^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] \arrow[d, shift right, "g^{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] \arrow[dl, dashed, "\phi^n"'] \arrow[d, shift right, "g^n"'] \arrow[d, shift left, "f^n"] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\phi^{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "g^{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial_D^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial_D^n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Η οικογένεια βαθμωτών μορφισμών $\phi \in \mathsf{Hom}^{-1}(C^\bullet, D^\bullet)$ *λέμε ότι αποτελεί μία* **ομοτοπία** *από τον μορφισμό συμπλόκων* f *στον μορφισμό συμπλόκων* g *και θα γράφουμε* $\phi \colon f \rightsquigarrow g$. *Η σχέση* $\approx$ *καλείται* **σχέση ομοτοπίας**.

Παρατήρηση 4.2.2. Στον παραπάνω ορισμό, στην ιδιαίτερη περίπτωση που ο μορφισμός g είναι ο μηδενικός, ο μορφισμός f θα είναι ομοτοπικός με τον μηδενικό μορφισμό, δηλαδή θα υπάρχει μία ακολουθία μορφισμών $\phi = \{\phi^n \colon C^n \longrightarrow D^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ στην $\mathcal{A}$, έτσι ώστε

$$f^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε ότι ο f είναι 0-ομοτοπικός. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$ το υποσύνολο της αβελιανής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$ το οποίο αποτελείται από όλους τους μορφισμούς συμπλόκων $C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ που είναι 0-ομοτοπικοί.

Άμεσα βλέπουμε πως δύο μορφισμοί συμπλόκων $f, g \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ομοτοπικοί αν-ν ο μορφισμός $f - g$ είναι 0-ομοτοπικός.

Λήμμα 4.2.3. *Το υποσύνολο* $\mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$ *είναι μία υποομάδα της* $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$.

Απόδειξη. Ο μηδενικός μορφισμός της $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$ είναι 0-ομοτοπικός, συνεπώς ανήκει στο υποσύνολο $\mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$.

Έστω $f, g \in \mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$ δύο μορφισμοί συμπλόκων ομοτοπικοί με το μηδέν. Τότε θα υπάρχουν ομοτοπίες $h \colon f \rightsquigarrow 0$ και $k \colon g \rightsquigarrow 0$ έτσι ώστε

$$f^n = \partial_D^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \partial_C^n$$

και

$$g^n = \partial_D^{n-1} \circ k^n + k^{n+1} \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Προσθέτοντας, προκύπτει ότι

$$f^n + g^n = \partial_D^{n-1} \circ (h^n + k^n) + (h^{n+1} + k^{n+1}) \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ο μορφισμός $f+g \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι 0-ομοτοπικός και $f+g \in \mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$.

Τέλος, αν $f \in \mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$, τότε θα υπάρχει μία ομοτοπία $h \colon f \rightsquigarrow 0$ έτσι ώστε

$$f^n = \partial_D^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \partial_C^n$$

Όμως τότε έχουμε:

$$-f^n = \partial_D^{n-1} \circ (-h^n) + (-h^{n+1}) \circ \partial_C^n$$

δηλαδή και ο μορφισμός $-f$ είναι 0-ομοτοπικός και $-f \in \mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$. Συνεπώς το υποσύνολο $\mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$ είναι μία υποομάδα της $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$. ∎

Με την ακόλουθη πρόταση θα δούμε ότι η σχέση ομοτοπίας που μόλις ορίστηκε διαμερίζει το σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$ σε κλάσεις ισοδυναμίας οι οποίες καλούνται κλάσεις ομοτοπίας.

Πρόταση 4.2.4. *Η σχέση ομοτοπίας είναι μία σχέση ισοδυναμίας στην αβελιανή ομάδα* $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$, *η οποία διατηρεί την σύνθεση. Αν δηλαδή* $f, g \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ *είναι δύο μορφισμοί συμπλόκων με* $f \approx g$, *τότε για δύο μορφισμούς συμπλόκων* $u \colon U^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ *και* $v \colon D^\bullet \longrightarrow V^\bullet$, *έχουμε* $f \circ u \approx g \circ u$ *και* $v \circ f \approx v \circ g$.

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι η σχέση ομοτοπίας είναι μία σχέση ισοδυναμίας εξετάζοντας αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική.

- Αν $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων τότε από την μηδενική ομοτοπία $0 \colon f \rightsquigarrow f$ άμεσα προκύπτει ότι $f \approx f$ και η σχέση ομοτοπίας είναι αυτοπαθής.

- Αν για τους μορφισμούς $f, g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ισχύει $f \approx g$, τότε υπάρχει μία ομοτοπία $\phi\colon f \rightsquigarrow g$ έτσι ώστε:
$$f^n - g^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άμεσα βλέπουμε ότι η οικογένεια μορφισμών $-\phi = \{-\phi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μία ομοτοπία: $g \rightsquigarrow f$ και ισχύει
$$g^n - f^n = \partial_D^{n-1} \circ (-\phi^n) + (-\phi^{n+1}) \circ \partial_C^n$$
Συνεπώς $g \approx f$ και η σχέση είναι συμμετρική.

- Μένει να δείξουμε ότι η σχέση ομοτοπίας είναι και μεταβατική. Έστω $f, g, h\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ μορφισμοί συμπλόκων με $f \approx g$ και $g \approx h$. Τότε, υπάρχει μία ομοτοπία $\phi\colon f \rightsquigarrow g$ έτσι ώστε
$$f^n - g^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n \tag{4.1}$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καθώς και μία ομοτοπία $\psi\colon g \rightsquigarrow h$ έτσι ώστε
$$g^n - h^n = \partial_D^{n-1} \circ \psi^n + \psi^{n+1} \circ \partial_C^n \tag{4.2}$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Προσθέτοντας τις (4.1) και (4.2) προκύπτει ότι
$$f^n - h^n = \partial_D^{n-1} \circ (\phi^n + \psi^n) + (\phi^{n+1} + \psi^{n+1}) \circ \partial_C^n$$
Αποκτούμε έτσι μία ομοτοπία $\phi + \psi\colon f \rightsquigarrow h$, συνεπώς $f \approx h$ και η σχέση είναι μεταβατική.

Τέλος, αν $f, g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι δύο μορφισμοί συμπλόκων με $f \approx g$, έχουμε
$$f^n - g^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n$$
και τότε για έναν μορφισμό συμπλόκων $u\colon U^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ προκύπτει ότι:
$$\begin{aligned} f^n \circ u^n - g^n \circ u^n &= \partial_D^{n-1} \circ \phi^n \circ u^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n \circ u^n \\ &= \partial_D^{n-1} \circ \phi^n \circ u^n + \phi^{n+1} \circ u^{n+1} \circ \partial_U^n \end{aligned}$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως, η οικογένεια μορφισμών $\{\phi^n \circ u^n : U^n \longrightarrow D^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί μία ομοτοπία $f \circ u \rightsquigarrow g \circ u$ και συνεπώς $f \circ u \approx g \circ u$.

Παρόμοια, για έναν μορφισμό συμπλόκων $v\colon D^\bullet \longrightarrow V^\bullet$, έχουμε
$$\begin{aligned} v^n \circ f^n - v^n \circ g^n &= v^n \circ \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + v^n \circ \phi^{n+1} \circ \partial_C^n \\ &= \partial_V^{n-1} \circ v^{n-1} \circ \phi^n + v^n \circ \phi^{n+1} \circ \partial_C^n \end{aligned}$$
Η οικογένεια μορφισμών $\{v^{n-1} \circ \phi^n : C^n \longrightarrow V^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί έτσι μία ομοτοπία $v \circ f \rightsquigarrow v \circ g$ και άρα $v \circ f \approx v \circ g$. ∎

Λήμμα 4.2.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ και $g\colon D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ δύο μορφισμοί συμπλόκων. Αν ο μορφισμός f ή ο μορφισμός g είναι 0-ομοτοπικός, τότε και ο μορφισμός $g \circ f$ είναι 0-ομοτοπικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός f είναι 0-ομοτοπικός. Τότε υπάρχει μία ομοτοπία $h\colon f \rightsquigarrow 0$ έτσι ώστε:
$$f^n = \partial_D^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \partial_C^n$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως, συνθέτοντας με τον μορφισμό g, θα έχουμε:
$$g^n \circ f^n = g^n \circ \partial_D^{n-1} \circ h^n + g^n \circ h^{n+1} \circ \partial_C^n = \partial_E^{n-1} \circ g^{n+1} \circ h^n + g^n \circ h^{n+1} \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και η οικογένεια μορφισμών $\{g^{n-1} \circ h^n : C^n \longrightarrow E^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ αποτελεί μία ομοτοπία $g \circ f \rightsquigarrow 0$ και άρα $g \circ f \approx 0$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dl, dashed, "h^n"] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial_D^{n-1}"] \arrow[d, "g^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial_D^n"] \arrow[d, "g^n"] \arrow[dl, dashed, "k^n"] & D^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "k^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r, "\partial_E^{n-1}"] & E^n \arrow[r, "\partial_E^n"] & E^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Έστω τώρα ότι ο μορφισμός g είναι 0-ομοτοπικός. Παρόμοια, θα υπάρχει μία ομοτοπία $k : g \rightsquigarrow 0$ έτσι ώστε

$$g^n = \partial_E^{n-1} \circ k^n + k^{n+1} \circ \partial_D^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και έτσι:

$$g^n \circ f^n = \partial_E^{n-1} \circ k^n \circ f^n + k^{n+1} \circ \partial_D^n \circ f^n = \partial_E^{n-1} \circ k^n \circ f^n + k^{n+1} \circ f^{n+1} \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και παρόμοια, η οικογένεια μορφισμών $\{g^{n-1} \circ h^n : C^n \longrightarrow E^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ αποτελεί μία ομοτοπία $g \circ f \rightsquigarrow 0$ και άρα $g \circ f \approx 0$. ∎

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε μία σύνθεση στις κλάσεις ισοδυναμίας των μορφισμών συμπλόκων ως προς την σχέση ομοτοπίας. Από το Λήμμα 4.2.3, η $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)/\mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$ είναι μία αβελιανή ομάδα κλάσεων ομοτοπικών μορφισμών μεταξύ των συμπλόκων $C^\bullet$ και $D^\bullet$. Από το Λήμμα 4.2.5, η απεικόνιση σύνθεσης

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(D^\bullet, E^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, E^\bullet)$$

$$(g, f) \longmapsto g \circ f$$

επάγει μία διγραμμική απεικόνιση στις αντίστοιχες κλάσεις ομοτοπικών μορφισμών:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(D^\bullet, E^\bullet)/\mathsf{H}_t(D^\bullet, E^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)/\mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, E^\bullet)/\mathsf{H}_t(C^\bullet, E^\bullet)$$

η οποία είναι καλώς ορισμένη μέσω της σύνθεσης στους αντιπροσώπους. Καταλήγουμε έτσι στον ορισμό της ομοτοπικής κατηγορίας:

Ορισμός 4.2.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη κατηγορία συμπλόκων. Η* **ομοτοπική κατηγορία** $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ *της $\mathcal{A}$ ορίζεται ως εξής:*

- $\mathsf{ob}(\mathsf{K}(\mathcal{A})) = \mathsf{ob}(\mathsf{Ch}(\mathcal{A}))$
- $\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)/\mathsf{H}_t(C^\bullet, D^\bullet)$, *για δύο τυχαία αντικείμενα $C^\bullet$ και $D^\bullet$ της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.*

Είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς ότι ο κύριος σκοπός εισαγωγής της ομοτοπικής κατηγορίας είναι η μετατροπή των μορφισμών συμπλόκων της $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ οι οποίοι είναι ομοτοπικοί με το μηδέν, σε μορφισμούς οι οποίοι είναι ισόμορφοι με το μηδέν. Προφανώς, ένας μορφισμός 0-ομοτοπικός στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι, όντως, ο μηδενικός μορφισμός της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Σχόλιο 4.2.7. Ένας μορφισμός συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ καλείται **ομοτοπική ισοδυναμία** αν υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $g\colon D^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ έτσι ώστε $f \circ g \approx 1_{D^\bullet}$ και $g \circ f \approx 1_{C^\bullet}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η εικόνα του f στην ομοτοπική κατηγορία είναι ένας ισομορφισμός και αυτοί είναι ακριβώς οι ισομορφισμοί της ομοτοπικής κατηγορίας.

Σχόλιο 4.2.8. Αν $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$, συχνά θα συμβολίζουμε την κλάση ομοτοπίας του f με $\underline{f}$.

Αντίστροφα, αν $u\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας μορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, ο u θα αποτελεί ομοτοπική εικόνα κάποιου μορφισμού της κατηγορίας συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Συμβατικά, όταν θα συμβολίζουμε έναν μορφισμό της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με $\underline{f}\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$, θα θεωρούμε ότι αποτελεί εικόνα ενός μορφισμού $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ της $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$.

Η ομοτοπική κατηγορία διατηρεί την προσθετική δομή:

Πρόταση 4.2.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Τότε η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι μία προσθετική κατηγορία και ο συναρτητής πηλίκο $\pi\colon$ $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι επίσης προσθετικός.*

Απόδειξη. Αρχικά, το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ενώ λόγω του Λήμματος 4.2.5, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως πηλίκο της αβελιανής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$, κληρονομεί μία προσθετική δομή η οποία ορίζεται μέσω της πρόσθεσης στους αντιπροσώπους στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Αυτή η πρόσθεση είναι καλώς ορισμένη και διγραμμική.

Για οποιαδήποτε δύο σύμπλοκα $C^\bullet$ και $D^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, ορίζουμε το ευθύ τους άθροισμα $C^\bullet \oplus D^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ως το ευθύ άθροισμα τους στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ενώ οι μορφισμοί έγκλεισης $\underline{i_C}\colon C^\bullet \longrightarrow C^\bullet \oplus D^\bullet$ και $\underline{i_D}\colon D^\bullet \longrightarrow C^\bullet \oplus D^\bullet$ ορίζονται ως οι κλάσεις ομοτοπίας των αντίστοιχων μορφισμών στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Μένει να δείξουμε ότι η καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος ισχύει και στην ομοτοπική κατηγορία.

Έστω $E^\bullet$ ένα σύμπλοκο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και μορφισμοί $\underline{f_C}\colon C^\bullet \longrightarrow C^\bullet \oplus D^\bullet$ και $\underline{f_D}\colon D^\bullet \longrightarrow C^\bullet \oplus D^\bullet$. Τότε, από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$, υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $f : C^\bullet \oplus D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$. έτσι ώστε $f_C = f \circ i_C$ και $f_D = f \circ i_D$. Θεωρώντας την κλάση ομοτοπίας $\underline{f}$ του μορφισμού f, βλέπουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα στην ομοτοπική κατηγορία είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & E^\bullet & \\
 & & \\
C^\bullet \arrow[uur, "\underline{f_C}"] \arrow[r, "\underline{i_C}"'] & C^\bullet \oplus D^\bullet \arrow[uu, dashed, shift right, "\underline{f}"] \arrow[uu, dashed, shift left, "\underline{g}"'] & D^\bullet \arrow[uul, "\underline{f_D}"'] \arrow[l, "\underline{i_D}"]
\end{tikzcd}$$

Τέλος, θα δείξουμε την μοναδικότητα του μορφισμού $\underline{f}$ στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Έστω $\underline{g}\colon C^\bullet \oplus D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ ένας άλλος μορφισμός έτσι ώστε το παραπάνω διάγραμμα να είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Θα ισχύει δηλαδή ότι $g \circ i_C \approx f_C$ και $g \circ i_D \approx f_D$, ενώ λαμβάνοντας υπόψιν ότι $f_C = f \circ i_C$ και $f_D = f \circ i_D$ έχουμε $g \circ i_C \approx f \circ i_C$ και $g \circ i_D \approx g \circ i_D$. Από την πρώτη σχέση προκύπτει η ύπαρξη μίας ομοτοπίας $h\colon g \circ i_C \rightsquigarrow f \circ i_C$, έτσι ώστε

$$g^n \circ i_C^n - f^n \circ i_C^n = \partial_E^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \partial_C^n$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] \arrow[d, "i_C^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] \arrow[d, "i_C^n"] \arrow[ddl, dashed, "h^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i_C^{n+1}"] \arrow[ddl, dashed, "h^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \oplus D^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f^{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g^{n-1}"] & C^n \oplus D^n \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f^n"'] \arrow[d, shift left, "g^n"] \arrow[dl, dashed, "\phi^n"'] & C^{n+1} \oplus D^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f^{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "\phi^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r, "\partial_E^{n-1}"] & E^n \arrow[r, "\partial_E^n"] & E^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας του ευθέος αθροίσματος στην κατηγορία $\mathcal{A}$, ο μορφισμός $h^n : C^n \longrightarrow E^{n-1}$ αναλύεται μέσω της κανονικής έγκλεισης $i_C^n : C^n \longrightarrow C^n \oplus D^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αποκτούμε έτσι μία οικογένεια μορφισμών $\phi = \{\phi^n : C^n \oplus D^n \longrightarrow E^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ για την οποία ισχύει

$$\begin{aligned}
(\partial_E^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_{C\oplus D}^n) \circ i_C^n &= \partial_E^{n-1} \circ \phi^n \circ i_C^n + \phi^{n+1} \circ \partial_{C\oplus D}^n \circ i^C_{n+1} \\
&= \partial_E^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \partial_C^n \\
&= g^n \circ i_C^n - f^n \circ i_C^n \\
&= (g^n - f^n) \circ i_C^n
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αφού ο μορφισμός κανονικής έγκλεισης i_C είναι μονομορφισμός, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\partial_E^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_{C\oplus D}^n = g^n - f^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως η οικογένεια μορφισμών ϕ αποτελεί μία ομοτοπία $\phi\colon f \rightsquigarrow g$. Άρα, οι μορφισμοί f και g είναι ομοτοπικοί και οι αντίστοιχες κλάσεις ομοτοπίας τους στην ομοτοπική κατηγορία είναι ίσες.

Η προσθετικότητα του συναρτητή πηλίκο $\pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι άμεση. ■

Παράδειγμα 4.2.10. Σε αντίθεση με την κατηγορία συμπλόκων, η ομοτοπική κατηγορία δεν διατηρεί την αβελιανή δομή. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την αβελιανή κατηγορία Ab των Αβελιανών ομάδων και θέσουμε ως $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ τον παρακάτω μορφισμό συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathsf{Ab})$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

αποδεικνύεται ότι, ενώ στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ο μορφισμός f έχει σαν πυρήνα το μηδενικό στοιχείο, στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$, ο μορφισμός f δεν έχει πυρήνα. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [31, Example 2.6.].

Ο συναρτητής μεταφοράς που ορίστηκε στον Ορισμό 4.1.10 διατηρεί την σχέση ομοτοπίας, όπως προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.2.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων. Τότε, ο μορφισμός f είναι 0-ομοτοπικός, αν-ν ο μορφισμός Σf είναι 0-ομοτοπικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο μορφισμός f είναι 0-ομοτοπικός. Τότε,υπάρχει μία ομοτοπία $h\colon f \rightsquigarrow 0$ με $h = \{h^n \colon C^n \longrightarrow D^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, έτσι ώστε

$$f^n = \partial_D^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "\partial_C^n"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dl, dashed, "h^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial_D^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial_D^n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τα σύμπλοκα $\Sigma C^\bullet$ και $\Sigma D^\bullet$ και θέτουμε $k^n = -h^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε, για την οικογένεια μορφισμών $k = \{k^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ισχύει $k \in \mathsf{Hom}^{-1}(\Sigma C^\bullet, \Sigma D^\bullet)$ και:

$$\begin{aligned}
\Sigma f^n = f^{n+1} &= \partial_D^n \circ h^{n+1} + h^{n+2} \circ \partial_C^{n+1} \\
&= (-\partial_{\Sigma D}^{n-1}) \circ (-k^n) + (-k^{n+1}) \circ (-\partial_{\Sigma C}^n) \\
&= \partial_{\Sigma D}^{n-1} \circ k^n + k^{n+1} \circ \partial_{\Sigma C}^n
\end{aligned}$$

Έτσι, η οικογένεια μορφισμών k αποτελεί μία ομοτοπία $k\colon \Sigma f \rightsquigarrow 0$, δηλαδή ο μορφισμός συμπλόκων Σf είναι 0-ομοτοπικός.

Η απόδειξη του αντιστρόφου είναι δυϊκή. ■

Σχόλιο 4.2.12. Με το παραπάνω λήμμα, βλέπουμε ότι ο συναρτητής μεταφοράς Σ εισάγει έναν ισομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet) &\xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\Sigma C^\bullet, \Sigma D^\bullet) \\
f &\longmapsto \Sigma f
\end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι, η ύπαρξη ενός ενδομορφισμού της προσθετικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο οποίος κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού θα καλείται επίσης συναρτητής μεταφοράς και θα συμβολίζεται με Σ.

Παρατήρηση 4.2.13. Έστω $\pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο φυσικός συναρτητής στο πηλίκο ο οποίος ορίζεται ως η ταυτότητα στα αντικείμενα και απεικονίζει μορφισμούς συμπλόκων στις κλάσεις ομοτοπίας τους. Όπως γνωρίζουμε, ο π είναι ένας προσθετικός συναρτητής και άμεσα βλέπουμε ότι για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$ στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ισχύει $\pi(\Sigma C^\bullet) = \Sigma\pi(C^\bullet)$.

Χρησιμοποιώντας τον πλήρη και πιστό συναρτητή $C\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ της Παρατήρησης 4.1.15, ορίζουμε έναν προσθετικό συναρτητή $K = \pi \circ C\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Λήμμα 4.2.14. *Ο συναρτητής $K = \pi \circ C\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Έστω X, Y δύο αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(K(X), K(Y))$$

είναι 1-1 και επί. Γνωρίζουμε ότι τα $K(X)$ και $K(Y)$ είναι σύμπλοκα στην ομοτοπική κατηγορία για τα οποία ισχύει $K(X)^n = K(Y)^n = 0$ για κάθε $n \neq 0$ και επομένως, για οποιονδήποτε μορφισμό $h \in \mathsf{Hom}^{-1}(K(X), K(Y))$ θα έχουμε $h = 0$. Άρα η υποομάδα $\mathsf{H}_t(K(X), K(Y))$ όλων των μορφισμών συμπλόκων $K(X) \longrightarrow K(Y)$ που είναι ομοτοπικοί με το μηδέν, αποτελείται μόνο από τον μηδενικό μορφισμό και

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(K(X), K(Y)) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(K(X), K(Y))/\mathsf{H}_t(K(X), K(Y)) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(K(X), K(Y))$$

Όμως, αφού ο συναρτητής $C\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός, η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A})}(K(X),K(Y))$$

είναι 1-1 και επί και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. ■

Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα, η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με την πλήρη υποκατηγορία της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από σύμπλοκα $C^\bullet$ με $C^n = 0$ για $n \neq 0$. Ολοκληρώνουμε την ενότητα ορίζοντας, κατ' αντιστοιχία με τον Ορισμό 4.1.13, τις αντίστοιχες φραγμένες υποκατηγορίες της ομοτοπικής κατηγορίας.

Ορισμός 4.2.15. *Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ (αντίστοιχα $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$) την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από άνω φραγμένα (αντίστοιχα κάτω φραγμένα) σύμπλοκα και με $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από φραγμένα σύμπλοκα. Ομοίως, συχνά θα γράφουμε $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ συμβολίζοντας οποιαδήποτε από τις παραπάνω κατηγορίες.*

Διατηρώντας τον συμβολισμό $*$ για ένα από τα σύμβολα $\{-,+,b\}$, θα συμβολίζουμε με $\mathsf{K}^{*,-}(\mathcal{A})$ (αντίστοιχα $\mathsf{K}^{*,+}(\mathcal{A})$, αντίστοιχα $\mathsf{K}^{*,b}(\mathcal{A})$) την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από σύμπλοκα $C^\bullet$ τα οποία πληρούν την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $H^n(C^\bullet) = 0$ για κάθε $n > n_0$ (αντίστοιχα $C^n = 0$ για κάθε $n < n_0$, αντίστοιχα $C^n = 0$ για κάθε $|n| > n_0$).

Σχόλιο 4.2.16. Οι κατηγορίες $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ και $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ (καθώς και οι $\mathsf{K}^{*,-}(\mathcal{A})$, $\mathsf{K}^{*,+}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{K}^{*,b}(\mathcal{A})$), κληρονομούν την φυσική δομή μίας προσθετικής κατηγορίας από την κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και διατηρούν τον συναρτητή μεταφοράς Σ.

4.3 Συνομολογία

Αν $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$, τότε επειδή $\partial_C^n \circ \partial_C^{n-1} = 0$, έπεται ότι $\mathsf{Im}\partial^{n-1} \subseteq \mathsf{Ker}\partial^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αυτό μας επιτρέπει τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $C^\bullet = \{C^n, \partial_C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα σύμπλοκο στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Ορίζουμε στην κατηγορία $\mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ το* **n-οστό συνομολογιακό αντικείμενο** *$\mathsf{H}^n(C^\bullet)$ ως*

$$\mathsf{H}^n(C^\bullet) = \mathsf{Ker}\partial_C^n / \mathsf{Im}\partial_C^{n-1}$$

Θέτουμε $\mathsf{H}^\bullet(C^\bullet) = \oplus_n \mathsf{H}^n(C^\bullet)$ και καλούμε το $\mathsf{H}^\bullet(C^\bullet)$ την **συνομολογία** *του συμπλόκου $C^\bullet$.*

Σχόλιο 4.3.2. Ακολουθώντας τον συνήθη συμβολισμό, αν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός σε μία (αβελιανή) κατηγορία $\mathcal{A}$, συμβολίζουμε με Y/X το αντικείμενο που αντιστοιχεί στον συνπυρήνα του f.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία οικογένεια συναρτητών $\mathsf{H}^n\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$.

Ορισμός 4.3.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, λόγω της καθολικής ιδιότητας του συνπυρήνα, προκύπτει (βλ. [41, Lemma 4]) η ύπαρξη ενός μοναδικού μορφισμού $\mathsf{H}^n(f)\colon \mathsf{H}^n(C^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(D^\bullet)$ ο οποίος κάνει το* *παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Im}\partial_C^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathsf{Ker}\partial_C^n \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & \mathsf{H}^n(C^\bullet) \arrow[ddd, dashed, "\mathsf{H}^n(f)"] \\
C^{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d, "f^{n-1}"] & & C^n \arrow[rr] \arrow[d, "f^n"] & & C^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] & \\
D^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & D^n \arrow[rr] & & D^{n+1} & \\
 & \mathsf{Im}\partial_D^{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathsf{Ker}\partial_D^n \arrow[rr] \arrow[ul] & & \mathsf{H}^n(D^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Βλέπουμε ότι ο $\mathsf{H}^n(-)$ *είναι ένας συναλλοίωτος προσθετικός συναρτητής* $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$. *Ο συναρτητής* $\mathsf{H}^n(-)$*καλείται ο* **n-οστός συναρτητής συνομολογίας**.

Παρατήρηση 4.3.4. Για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$, έχουμε

$$\mathsf{H}^n(\Sigma C^\bullet) = \mathsf{Ker}\partial_{\Sigma C}^n / \mathsf{Im}\partial_{\Sigma C}^{n-1} = \mathsf{Ker}\partial_C^{n+1} / \mathsf{Im}\partial_C^n = \mathsf{H}^{n+1}(C^\bullet)$$

και $\mathsf{H}^n(\Sigma f) = \mathsf{H}^{n+1}(f)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς ισχύει $\mathsf{H}^{p+1} = \mathsf{H}^p \circ \Sigma$ και επαγωγικά:

$$\mathsf{H}^n = \mathsf{H}^0 \circ \Sigma^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 4.3.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f, g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ δύο μορφισμοί συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Αν οι μορφισμοί συμπλόκων f και g είναι ομοτοπικοί, τότε $\mathsf{H}^n(f) = \mathsf{H}^n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $h = f - g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$, και αφού οι f και g είναι ομοτοπικοί, άμεσα έχουμε ότι ο μορφισμός συμπλόκων h είναι 0-ομοτοπικός. Θα υπάρχει έτσι μία ομοτοπία $\phi\colon h \rightsquigarrow 0$ έτσι ώστε

$$h^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{Z}$ και έστω $k^n = \mathsf{ker}\partial_C^n\colon \mathsf{Ker}\partial_C^n \longrightarrow C^n$ ο πυρήνας του διαφορικού ∂_C^n. Τότε, συνθέτοντας, έχουμε:

$$h^n \circ k^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n \circ k^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n \circ k^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n \circ k^n$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Im}\partial_C^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathsf{Ker}\partial_C^n \arrow[rr] \arrow[dl, "k^n"] \arrow[ddd] & & \mathsf{H}^n(C^\bullet) \arrow[ddd, "\mathsf{H}^n(h)"] \\
C^{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d, "h^{n-1}"] & & C^n \arrow[rr] \arrow[d, "h^n"] \arrow[dll, "\phi^n"] & & C^{n+1} \arrow[d, "h^{n+1}"] & \\
D^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & D^n \arrow[rr] & & D^{n+1} & \\
 & \mathsf{Im}\partial_D^{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathsf{Ker}\partial_D^n \arrow[rr] \arrow[ul] & & \mathsf{H}^n(D^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός $\mathsf{Ker}\partial_C^n \longrightarrow \mathsf{Ker}\partial_D^n$ στο παραπάνω διάγραμμα, αναλύεται μέσω του $\mathsf{Im}\partial_D^{n-1}$ και συνεπώς η σύνθεση $\mathsf{Ker}\partial_C^n \longrightarrow \mathsf{Ker}\partial_D^n \longrightarrow \mathsf{H}^n(D^\bullet)$ ισούται με τον μηδενικό μορφισμό. Επομένως και ο επαγόμενος μορφισμός $\mathsf{H}^n(h)$ είναι ο μηδενικός και άρα

$$\mathsf{H}^n(h) = 0 \Longrightarrow \mathsf{H}^n(f - g) = 0 \Longrightarrow \mathsf{H}^n(f) - \mathsf{H}^n(g) = 0 \Longrightarrow \mathsf{H}^n(f) = \mathsf{H}^n(g)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. ■

Παρατήρηση 4.3.6. Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης αποτελεί το ότι ο συναρτητής $\mathsf{H}^n(-)\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ επάγει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έναν συναρτητή $\mathsf{H}^n_{\mathsf{K}}(-)\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ από την ομοτοπική κατηγορία όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mathsf{H}^n"'] & \mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\mathsf{H}^n_{\mathsf{K}}"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Συχνά, χάριν σύμβασης, θα συμβολίζουμε τον επαγόμενο συναρτητή $\mathsf{H}^n_{\mathsf{K}}(-)$ με $\mathsf{H}^n(-)$. Προφανώς, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο συναρτητής αυτός είναι προσθετικός και ικανοποιεί την σχέση $\mathsf{H}^n = \mathsf{H}^0 \circ \Sigma^n$.

Ιδιαίτερα χρήσιμες σε ορισμένες περιπτώσεις είναι οι συνθήκες περατότητας στη συνομολογία ενός συμπλόκου:

Ορισμός 4.3.7. *Λέμε ότι ένα σύμπλοκο $C^\bullet$ έχει* **άνω φραγμένη συνομολογία** *(αντίστοιχα* **κάτω φραγμένη συνομολογία***) αν υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $H^n(C^\bullet) = 0$ για κάθε $n > n_0$ (αντίστοιχα $C^n = 0$ για κάθε $n < n_0$). Λέμε ότι ένα σύμπλοκο $C^\bullet$ έχει* **φραγμένη συνομολογία** *αν έχει άνω και κάτω φραγμένη συνομολογία.*

Διατηρώντας τον συμβολισμό $*$ για ένα από τα σύμβολα $\{-,+,b\}$ και ακολουθώντας το [52, Chapitre III, §1.1], θα συμβολίζουμε με $\mathsf{Ch}^{*,-}(\mathcal{A})$ (αντίστοιχα $\mathsf{Ch}^{*,+}(\mathcal{A})$, αντίστοιχα $\mathsf{Ch}^{*,b}(\mathcal{A})$) την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{Ch}^*(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από σύμπλοκα $C^\bullet$ τα οποία έχουν άνω φραγμένη (αντίστοιχα κάτω φραγμένη, αντίστοιχα φραγμένη) συνομολογία.

4.4 Κώνοι Μορφισμών

Η συγκεκριμένη ενότητα θα αφιερωθεί στην κατασκευή και στις βασικές ιδιότητες ενός ιδιαίτερου συμπλόκου, που καλείται κώνος ενός μορφισμού.

Ορισμός 4.4.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Ο* **κώνος** *του μορφισμού f είναι ένα σύμπλοκο $C_f^\bullet$ με*

$$C_f^n = C^{n+1} \oplus D^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και διαφορικό:

$$\partial^n_{C_f} = \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 4.4.2. Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\partial^{n+1}_{C_f} \circ \partial^n_{C_f} = \begin{pmatrix} -\partial^{n+2}_C & 0 \\ f^{n+2} & \partial^{n+1}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ f^{n+1} & \partial^{n+1}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^{n+2}_C \circ \partial^{n+1}_C & 0 \\ -f^{n+2} \circ \partial^{n+2}_C + \partial^{n+1}_D \circ f^{n+1} & \partial^{n+1}_D \partial^n_D \end{pmatrix} = 0$$

Άρα, το αντικείμενο $C_f^\bullet = \{C_f^n, \partial^n_{C_f}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ που μόλις ορίστηκε αποτελεί πράγματι ένα σύμπλοκο στην κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$.

Παρατήρηση 4.4.3. Έστω $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων και $C_f^\bullet$ ο κώνος του f.

Τότε, αν

$$i^n_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{D^n} \end{pmatrix} : D^n \longrightarrow C^{n+1} \oplus D^n$$

είναι ο μορφισμός φυσικής έγκλεισης, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε:

$$\partial^n_{C_f} \circ i^n_f = \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{D^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial^n_D \end{pmatrix} = i^{n+1}_f \circ \partial^n_D$$

Δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}_D"] \arrow[d, "i^{n-1}_f"'] & D^n \arrow[r, "\partial^n_D"] \arrow[d, "i^n_f"'] & D^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i^{n+1}_f"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1}_f \arrow[r, "\partial^{n-1}_{C_f}"] & C^n_f \arrow[r, "\partial^n_{C_f}"] & C^{n+1}_f \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

και αποτελεί ένα φυσικό μορφισμό συμπλόκων $i_f \colon D^\bullet \longrightarrow C^\bullet_f$, όπου $i_f = \{i^n_f\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Παρόμοια, αν

$$p^n_f = \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} : C^{n+1} \oplus D^n \longrightarrow C^{n+1}$$

είναι ο μορφισμός φυσικής προβολής, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, βλέπουμε ότι

$$p^{n+1}_f \circ \partial^n_{C_f} = \begin{pmatrix} 1^{n+2}_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ f^{n+1} & \partial^{n+1}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \end{pmatrix} = \delta^n_{\Sigma C} \circ p^n_f$$

και έτσι η οικογένεια μορφισμών $p_f = \{p^n_f\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί έναν μορφισμό συμπλόκων $p_f \colon C^\bullet_f \longrightarrow \Sigma C^\bullet$.

Λήμμα 4.4.4. *Οι φραγμένες κατηγορίες συμπλόκων* $\mathsf{Ch}^+(\mathcal{A})$, $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$, *και* $\mathsf{Ch}^b(\mathcal{A})$ *είναι κλειστές στους κώνους μορφισμών.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση καθώς αν θεωρήσουμε έναν μορφισμό συμπλόκων $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ μεταξύ δύο κάτω (αντίστοιχα άνω) φραγμένων συμπλόκων, βλέπουμε ότι και ο αντίστοιχος κώνος $C^\bullet_f$ αποτελεί ένα κάτω (αντίστοιχα άνω) φραγμένο σύμπλοκο. ■

Η έννοια της σύντομης ακριβούς ακολουθίας επεκτείνεται στα σύμπλοκα με φυσικό τρόπο:

Ορισμός 4.4.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία. Μία* **σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων** *είναι ένα διάγραμμα της μορφής:*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow 0$$

όπου τα $C^\bullet$, $D^\bullet$ και $E^\bullet$ είναι σύμπλοκα στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ *και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ το διάγραμμα*

$$0 \longrightarrow C^n \longrightarrow D^n \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 4.4.6. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{g} E^\bullet \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ από την ακρίβεια της ακολουθίας

$$0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{f^n} D^n \xrightarrow{g^n} E^n \longrightarrow 0$$

προκύπτει ότι ο f^n είναι μονομορφισμός, ο g^n είναι επιμορφισμός και επιπλέον $\mathsf{Ker} g^n = \mathsf{Im} f^n$. Άρα, ο μορφισμός συμπλόκων f είναι μονομορφισμός, ο μορφισμός συμπλόκων g είναι επιμορφισμός και επίσης $\mathsf{Ker} g = \mathsf{Im} f$ (όπου $\mathsf{Ker} g = \{\mathsf{Ker} g^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathsf{Im} f = \{\mathsf{Im} f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο επιχείρημα, δηλαδή αν ο μορφισμός συμπλόκων f είναι μονομορφισμός, ο μορφισμός συμπλόκων g είναι επιμορφισμός και ισχύει $\mathsf{Ker} g = \mathsf{Im} f$, τότε η ακολουθία συμπλόκων (4.3) είναι ακριβής.

Παράδειγμα 4.4.7. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$, τότε η ακολουθία συμπλόκων

$$0 \longrightarrow D^\bullet \xrightarrow{i_f} C_f^\bullet \xrightarrow{p_f} \Sigma C^\bullet \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Πράγματι, από τον τρόπο που ορίστηκαν οι μορφισμόι συμπλόκων i_f και p_f στην Παρατήρηση 4.4.3, ο μορφισμός $i_f\colon D^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet$ είναι ένας μονομορφισμός συμπλόκων, ο μορφισμός $p_f\colon C_f^\bullet \longrightarrow \Sigma C^\bullet$ είναι ένας επιμορφισμός συμπλόκων και ισχύει $\mathsf{Ker} p_f = \mathsf{Im} i_f$. Συνεπώς η παραπάνω ακολουθία συμπλόκων είναι ακριβής.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα παραθέτοντας δύο λήμματα το οποία θα είναι χρήσιμα στη συνέχεια.

Λήμμα 4.4.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Τότε η ακολουθία*

$$\mathsf{H}(D^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(i_f)} \mathsf{H}^n(C_f^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(p_f)} \mathsf{H}^n(\Sigma C^\bullet)$$

είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [39, Chapter 3, 1.5.2., Lemma]. ∎

Μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων επάγει μία μεγάλη ακριβή ακολουθία συμπλόκων στη συνομολογία:

Λήμμα 4.4.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{g} E^\bullet \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Τότε, υπάρχει μία ακολουθία μορφισμών $\phi^n\colon H^n(E^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(C^\bullet)$ έτσι ώστε η παρακάτω ακολουθία να είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f)} \mathsf{H}^n(D^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(g)} \mathsf{H}^n(E^\bullet) \xrightarrow{\phi^n} \mathsf{H}^{n+1}(C^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Ο μορφισμοί $\phi^n\colon H^n(E^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(C^\bullet)$ καλούνται συνδετικοί μορφισμοί (connecting morphisms).

Απόδειξη. Η απόδειξη παραλείπεται καθώς είναι ακριβώς ανάλογη με τη γενική περίπτωση κατά την οποία έχουμε μία σύντομη ακριβή ακολουθία σε μία αβελιανή κατηγορία και προκύπτει εφαρμόζοντας κατάλληλα το five lemma. Για μία σκιαγράφηση της απόδειξης βλ. [41, Theorem 26]. ∎

4.5 Τριγωνισμός Ομοτοπικής Κατηγορίας

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί ένα από τα κύρια συμπεράσματα του παρόντος κεφαλαίου, ότι η ομοτοπική κατηγορία μπορεί να εφοδιαστεί με μία κλάση διακεκριμένων τριγώνων και έναν συναρτητή μεταφοράς Σ αποκτώντας δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Θα επικεντρωθούμε, όπως προηγουμένως, στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, ενώ αναφέρουμε ενδεικτικά πως στα παρακάτω αποτελέσματα μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ομοτοπική κατηγορία με κάποια από τις πλήρεις υποκατηγορίες της $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ ή $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$.

Αρχικός μας στόχος είναι η εισαγωγή μίας τριγωνικής δομής στην ομοτοπική κατηγορία. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.5.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Το* **τυπικό τρίγωνο (standard triangle)** *με βάση τον μορφισμό f στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι ένα διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd} & C_f^\bullet \arrow[dl, "p_f"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "i_f"'] \end{tikzcd}$$

Σχόλιο 4.5.2. Όπως και στον Ορισμό 3.1.3, στο παραπάνω διάγραμμα το $[1]$ συμβολίζει ότι ο μορφισμός p_f δεν καταλήγει στο σύμπλοκο $C^\bullet$, αλλά στο μετατοπισμένο κατά μία θέση σύμπλοκο $\Sigma C^\bullet$.

Λήμμα 4.5.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και*

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & D^\bullet \arrow[d, "v"] \\ C_1^\bullet \arrow[r, "g"'] & D_1^\bullet \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

ένα διάγραμμα στην αντίστοιχη κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ το οποίο είναι μεταθετικό με ακρίβεια ομοτοπίας. Τότε, υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $w\colon C_f^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & D^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "v"'] & C_f^\bullet \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, dashed, "w"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma u"'] \\ C_1^\bullet \arrow[r, "g"] & D_1^\bullet \arrow[r, "i_g"] & C_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] & \Sigma C_1^\bullet \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

να είναι μεταθετικό με ακρίβεια ομοτοπίας.

Επιπλέον, αν το διάγραμμα (4.4) είναι μεταθετικό στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$, τότε και το διάγραμμα (4.5) είναι μεταθετικό στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από υπόθεση ότι οι μορφισμοί συμπλόκων $v \circ f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ και $g \circ u\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ομοτοπικοί, συνεπώς υπάρχει μία ομοτοπία $\phi\colon g \circ u \rightsquigarrow v \circ f$ έτσι ώστε

$$g^n \circ u^n - v^n \circ f^n = \partial_D^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε μία οικογένεια μορφισμών $w = \{w^n : C_f^n \longrightarrow C_g^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ με

$$w^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -\phi^{n+1} & v^n \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\partial^n_{C_g} \circ w^n &= \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_{C_1} & 0 \\ g^{n+1} & \partial^n_{D_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -\phi^{n+1} & v^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_{C_1} \circ u^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} \circ u^{n+1} - \partial^n_{D_1} \circ \phi^{n+1} & \partial^n_{D_1} \circ v^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -u^{n+2} \circ \partial^{n+1}_C & 0 \\ v^{n+1} \circ f^{n+1} + \phi^{n+2} \circ \partial^{n+1}_C & v^{n+1} \circ \partial^n_D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u^{n+2} & 0 \\ -\phi^{n+2} & v^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix} = w^{n+1} \circ \partial^n_{C_f}
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και επομένως ο w είναι ένας μορφισμός συμπλόκων $C^\bullet_f \longrightarrow C^\bullet_g$.

Ακόμη, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$w^n \circ i^n_f = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -\phi^{n+1} & v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{D^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v^n \end{pmatrix} = i^n_g \circ v^n$$

και συνεπώς $w \circ i_f = i_g \circ v$, δηλαδή το κεντρικό τετράγωνο του διαγράμματος (4.5) είναι μεταθετικό.

Παρόμοια έχουμε:

$$u^{n+1} \circ p^n_f = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{n+1}_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -\phi^{n+1} & v^n \end{pmatrix} = p^n_g \circ w^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, $u \circ p_f = p_g \circ w$ και το δεξιό τετράγωνο του διαγράμματος (4.5) είναι μεταθετικό.

Τέλος, αν το διάγραμμα (4.4) είναι μεταθετικό, το αριστερό τετράγωνο του διαγράμματος (4.5) θα είναι μεταθετικό και θέτοντας στα παραπάνω $\phi = 0$ προκύπτει το ζητούμενο. ■

Ιδιαίτερα χρήσιμη σε ορισμένες περιπτώσεις θα είναι και η παρακάτω κατασκευή:

Ορισμός 4.5.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Θεωρούμε τον κώνο $C^\bullet_f$ του μορφισμού f και τον φυσικό μορφισμό έγκλεισης $i_f \colon D^\bullet \longrightarrow C^\bullet_f$. Τότε, ο κώνος του μορφισμού i_f συμβολίζεται με $D^\bullet_f$ και*

$$D^n_f = D^{n+1} \oplus C^n_f = D^{n+1} \oplus C^{n+1} \oplus D^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Το διαφορικό αυτού του συμπλόκου δίνεται ως

$$\partial^n_{D_f} = \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_D & 0 \\ i^{n+1}_f & \partial^n_{C_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_D & 0 & 0 \\ 0 & -\partial^{n+1}_C & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix}$$

Λήμμα 4.5.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων. Τότε, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\alpha \colon \Sigma C^\bullet \longrightarrow D^\bullet_f$ στην ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αρχικά, ορίζουμε έναν μορφισμό συμπλόκων $\alpha \colon \Sigma C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ με

$$\alpha^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\partial^n_{D_f} \circ \alpha^n &= \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_D & 0 & 0 \\ 0 & -\partial^{n+1}_C & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial^{n+1}_D \circ f^{n+1} \\ -\partial^{n+1}_C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n+2} \circ \partial^{n+1}_C \\ -\partial^{n+1}_C \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f^{n+2} \\ 1_{C^{n+2}} \\ 0 \end{pmatrix} \partial^{n+1}_C = \alpha^{n+1} \circ \partial^n_{\Sigma X}
\end{aligned}$$

δηλαδή ο α είναι πράγματι ένας μορφισμός συμπλόκων. Παρόμοια, ορίζουμε και έναν μορφισμό συμπλόκων $\beta\colon D^\bullet \longrightarrow \Sigma C^\bullet$ με

$$\beta^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ευθύς αμέσως, βλέπουμε ότι ο β αποτελεί πράγματι έναν μορφισμό συμπλόκων, αφού για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\partial^n_{\Sigma C} \circ \beta^n = \begin{pmatrix} 0 & -\partial^{n+1}_C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_D & 0 & 0 \\ 0 & -\partial^{n+1}_C & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix} = \beta^{n+1} \circ \partial^n_{D_f}$$

Θα δείξουμε ότι οι μορφισμοί α και β είναι αντίστροφοι ισομορφισμοί στην ομοτοπική κατηγορία. Αρχικά, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\beta^n \circ \alpha^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1^{n+1}_C \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{C^{n+1}}$$

δηλαδή $\beta \circ \alpha = 1_{\Sigma C^\bullet}$.

Έστω τώρα $\phi = \{\phi^n\colon D^{n+1}_f \longrightarrow D^n_f\}_{n\in\mathbb{Z}}$ μία οικογένεια μορφισμών όπου

$$\phi^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{D^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\partial^{n-1}_{C_f} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial^n_{C_f} &= \begin{pmatrix} -\partial^n_D & 0 & 0 \\ 0 & -\partial^n_C & 0 \\ 1_{D^n} & f^n & \partial^{n-1}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{D^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{D^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_D & 0 & 0 \\ 0 & -\partial^{n+1}_C & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial^n_D \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{D^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & f^{n+1} & \partial^n_D \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{D^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{D^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1_{D^n_f} - \alpha^n \circ \beta^n
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή η οικογένεια μορφισμών h αποτελεί μία ομοτοπία $1_{D^n_f} \rightsquigarrow \alpha^n \circ \beta^n$. Συνεπώς, $\alpha^n \circ \beta^n \approx 1_{D^n_f}$ και οι αντίστοιχες κλάσεις μορφισμών στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι ίσες. ■

Σχόλιο 4.5.6. Οι μορφισμοί συμπλόκων $\alpha\colon \Sigma C^\bullet \longrightarrow D^\bullet_f$ με

$$\alpha^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $\beta\colon D^\bullet_f \longrightarrow \Sigma C^\bullet$ με

$$\beta^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι είναι ισομορφισμοί στην ομοτοπική κατηγορία, θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω με τον ίδιο συμβολισμό.

Λήμμα 4.5.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων. Αν $\alpha = \Sigma C^\bullet \longrightarrow D^\bullet_f$ είναι ο μορφισμός συμπλόκων του Λήμματος 4.5.5, με*

$$\alpha^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} D^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "1_{D^\bullet}"] & C^\bullet_f \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "1_{C^\bullet_f}"] & \Sigma C^\bullet \arrow[r, "-\Sigma f"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma D^\bullet \arrow[d, "1_{\Sigma D^\bullet}"] \\ D^\bullet \arrow[r, "i_f"] & C^\bullet_f \arrow[r, "i_{i_f}"] & D^\bullet_f \arrow[r, "p_{i_f}"] & \Sigma D^\bullet \end{tikzcd}$$

μετατίθεται με ακρίβεια ομοτοπίας.

Απόδειξη. Βλέπουμε ότι:

$$p^n_{i_f} \circ \alpha^n = \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = -f^{n+1} = -\Sigma f^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή, $p_{i_f} \circ \alpha = -\Sigma f$.

Θεωρούμε τον μορφισμό συμπλόκων $\beta\colon D^\bullet_f \longrightarrow \Sigma C^\bullet$ με

$$\beta^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$\beta^n \circ i^n_{i_f} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{D^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} = p^n_f$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή, $\beta \circ i_{i_f} = p_f$. Από το Λήμμα 4.5.5, ο μορφισμός συμπλόκων $\alpha \circ \beta$ είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό στο σύμπλοκο $D^\bullet_f$. Έτσι, αφού η σχέση ομοτοπίας είναι συμβατή με τη σύνθεση (Πρόταση 4.2.4), έχουμε

$$\alpha \circ \beta \approx 1_{D^\bullet_f} \Longrightarrow \alpha \circ \beta \circ i_{i_f} \approx i_{i_f} \Longrightarrow \alpha \circ p_f \approx i_f$$

και άρα το κεντρικό τετράγωνο του διαγράμματος είναι μεταθετικό με ακρίβεια ομοτοπίας. ■

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε διακεκριμένα τρίγωνα στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Ορισμός 4.5.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων. Έστω, επίσης, $\Sigma\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο συναρτητής μεταφοράς στην ομοτοπική κατηγορία. Ένα τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ C^\bullet \arrow[rr] & & D^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ θα καλείται **διακεκριμένο***, αν είναι ισόμορφο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με ένα τυπικό τρίγωνο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.*

Μένει να εξετάσουμε αν η ομοτοπική κατηγορία, εφοδιασμένη με την παραπάνω δομή διακεκριμένων τριγώνων ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1) – (TR4). Για τον σκοπό αυτόν, θα χρειαστούμε τα δύο παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 4.5.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο στην $\mathcal{A}$. Τότε, ο κώνος $C^\bullet_{1_{C^\bullet}}$ του ταυτοτικού μορφισμού $1_{C^\bullet}\colon C^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ είναι ισόμορφος με το μηδενικό αντικείμενο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του κώνου ενός μορφισμού,

$$C^\bullet_{1_{C^\bullet}} = \Sigma C^\bullet \oplus C^\bullet$$

Ορίζουμε μία οικογένεια μορφισμών $\phi = \{\phi^n\colon C^{n+1} \oplus C^n \longrightarrow C^n \oplus C^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ με

$$\phi^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\partial_C^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_C^n &= \begin{pmatrix} -\partial_C^n & 0 \\ 1_{C^n} & \partial_C^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_C^{n+1} & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & \partial_C^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_C^n \\ 0 & 1_{C^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & \partial_C^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{C^n} \end{pmatrix} = 1^n_{\Sigma C \oplus C}
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα, η οικογένεια μορφισμών ϕ αποτελεί μία ομοτοπία $1_{\Sigma C^\bullet \oplus C^\bullet} \rightsquigarrow 0$, δηλαδή ο ταυτοτικός μορφισμός στο $C^\bullet_{1_{C^\bullet}}$ είναι ισόμορφος με τον μηδενικό μορφισμό στην ομοτοπική κατηγορία. Συνεπώς ο κώνος $C^\bullet_{1_{C^\bullet}}$ είναι ισόμορφος με το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. ■

Λήμμα 4.5.10. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηηγορία και $\underline{f}\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο οποίος αποτελεί την κλάση ομοτοπίας του μορφισμού συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$.*

Αν υποθέσουμε ότι η ομοτοπική κατηγορία ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1) – (TR3) μίας τριγωνισμένης κατηγορίας (δηλ. η $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι μία pretriangulated κατηγορία), τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd}
 & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "\underline{f}"] & & D^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

2. *Υπάρχει ένας ισομορφισμός συμπλόκων $\underline{u}\colon E^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet_f$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\underline{1_{C^\bullet}}"'] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\underline{1_{D^\bullet}}"'] & E^\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\underline{u}"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\underline{1_{\Sigma C^\bullet}}"'] \\
C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"'] & D^\bullet \arrow[r, "\underline{i_f}"'] & C^\bullet_f \arrow[r, "\underline{p_f}"'] & \Sigma C^\bullet
\end{tikzcd}$$

να είναι ένας ισομορφισμός τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός 2 συνεπάγεται άμεσα τον ισχυρισμό 1 καθώς εξ ορισμού, αν ένα τρίγωνο είναι ισόμορφο με την εικόνα ενός τυπικού τριγώνου στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, είναι διακεκριμένο.

Έστω τώρα ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "\underline{f}"'] & & D^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Θεωρούμε το τυπικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & C_f^\bullet \arrow[dl, "p_f"', "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "i_f"'] \end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$. Θεωρώντας την εικόνα του στην ομοτοπική κατηγορία, προκύπτει ένα διάγραμμα του οποίου οι γραμμές αποτελούν διακεκριμένα τρίγωνα και το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\underline{1_{C^\bullet}}"'] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\underline{1_{D^\bullet}}"'] & E^\bullet \arrow[r] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\underline{1_{\Sigma C^\bullet}}"'] \\ C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"'] & D^\bullet \arrow[r, "\underline{i_f}"'] & C_f^\bullet \arrow[r, "\underline{p_f}"'] & \Sigma C^\bullet \end{tikzcd}$$

Εφόσον από υπόθεση η κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ικανοποιεί το αξίωμα (TR3), υπάρχει ένας μορφισμός $\underline{u}\colon E^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet$ ο οποίος μετατρέπει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.3 (το οποίο, όπως έχει αναφερθεί, δεν εξαρτάται από το αξίωμα του οκταέδρου), ο μορφισμός $\underline{u}$ είναι ισομορφισμός. ■

Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε ένα από τα κύρια θεωρήματα του παρόντος κεφαλαίου. Η πορεία της απόδειξης ακολουθεί τον Milicic, βλ. [39, Chapter 3, 2.1.1. Theorem].

Θεώρημα 4.5.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ εφοδιασμένη με τον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων Σ και την προαναφερθείσα κλάση διακεκριμένων τριγώνων είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία.*

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε αν η κλάση διακεκριμένων τριγώνων του Ορισμού 4.5.8 ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1) – (TR4) του Ορισμού 3.1.7.

•(TR1a): Προφανώς, αν ένα τρίγωνο T_1 είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο τρίγωνο T_2, στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, το τρίγωνο T_1 είναι ισόμορφο με την εικόνα ενός τυπικού τρίγωνου στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και άρα είναι εξ ορισμού διακεκριμένο.

•(TR1b): Έστω $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο στην $\mathcal{A}$ και $\underline{1_{C^\bullet}}$ η κλάση ομοτοπίας του ταυτοτικού μορφισμού στο $C^\bullet$. Από το Λήμμα 4.5.9, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "\underline{1_{C^\bullet}}"] \arrow[d, "\underline{1_{C^\bullet}}"'] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\underline{1_{C^\bullet}}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\underline{1_{\Sigma C^\bullet}}"'] \\
C^\bullet \arrow[r, "\underline{1_{C^\bullet}}"] & C^\bullet \arrow[r] & C^\bullet_{1_{C^\bullet}} \arrow[r] & \Sigma C^\bullet
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και τα κάθετα βέλη είναι ισομορφισμοί. Το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "\underline{1_{C^\bullet}}"] & & C^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

είναι επομένως ισόμορφο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με την εικόνα ενός τυπικού τριγώνου, άρα είναι διακεκριμένο.

•(TR1c): Έστω $\underline{f}\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Τότε, υπάρχει ένα τυπικό τρίγωνο της μορφής

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_f \arrow[dl, "p_f"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "i_f"']
\end{tikzcd}$$

του οποίου η εικόνα στην ομοτοπική κατηγορία:

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_f \arrow[dl, "\underline{p_f}"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "\underline{f}"] & & D^\bullet \arrow[ul, "\underline{i_f}"']
\end{tikzcd}$$

είναι άμεσα ένα διακεκριμένο τρίγωνο με βάση τον μορφισμό $\underline{f}$.

•(TR2): Έστω

$$\begin{tikzcd}
& E^\bullet \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd} \qquad (T_1)$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Τότε, εξ ορισμού, υπάρχει ένα τυπικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"', "{[1]}"] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "\alpha"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

του οποίου η εικόνα στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφη με το διακεκριμένο τρίγωνο T_1 όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$
\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"', "\wr"] & D^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"', "\wr"] & E^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"', "\wr"] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma u"', "\wr"] \\
X \arrow[r, "\underline{\alpha}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\underline{i_\alpha}"'] & C^\bullet_\alpha \arrow[r, "\underline{p_\alpha}"'] & \Sigma X^\bullet
\end{tikzcd}
\tag{4.6}
$$

Από το Λήμμα 4.5.5 προκύπτει ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός $\Sigma X^\bullet \xrightarrow{\sim} D^\bullet_\alpha$ στην ομοτοπική κατηγορία, όπου, όπως προηγουμένως, με $D^\bullet_\alpha$ συμβολίζουμε τον κώνο του μορφισμού $i_\alpha \colon Y^\bullet \longrightarrow C^\bullet_\alpha$. Ακόμη, από το Λήμμα 4.5.7, η εικόνα του τριγώνου

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma X^\bullet \arrow[dl, "-\Sigma\alpha"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
Y^\bullet \arrow[rr, "i_\alpha"] & & C^\bullet_\alpha \arrow[ul, "p_\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

στην ομοτοπική κατηγορία, είναι ισόμορφη με την εικόνα ενός τυπικού τριγώνου όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα το οποίο αποτελεί, έτσι, έναν ισομορφισμό τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$
\begin{tikzcd}
Y^\bullet \arrow[r, "\underline{i_\alpha}"] \arrow[d, "\wr"] & C^\bullet_\alpha \arrow[r, "\underline{p_\alpha}"] \arrow[d, "\wr"] & \Sigma X^\bullet \arrow[r, "\Sigma\underline{\alpha}"] \arrow[d, "\wr"] & \Sigma Y^\bullet \arrow[d, "\wr"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "\underline{i_\alpha}"'] & C^\bullet_\alpha \arrow[r, "\underline{i_{i_\alpha}}"'] & D^\bullet_\alpha \arrow[r, "\underline{p_{i_\alpha}}"'] & \Sigma Y^\bullet
\end{tikzcd}
$$

Εφόσον η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η πρώτη γραμμή είναι επίσης ένα διακεκριμένο τρίγωνο. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (4.6) προκύπτει έτσι ότι το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
D^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"', "\wr"] & E^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"', "\wr"] & \Sigma C^\bullet \arrow[r, "-\Sigma f"] \arrow[d, "\Sigma u"', "\wr"] & \Sigma D^\bullet \arrow[d, "\Sigma v"', "\wr"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "\underline{i_\alpha}"'] & C^\bullet_\alpha \arrow[r, "\underline{p_\alpha}"] & \Sigma X^\bullet \arrow[r, "-\Sigma\underline{\alpha}"] & \Sigma Y^\bullet
\end{tikzcd}
$$

είναι ένας ισομορφισμός τριγώνων και ομοίως, αφού η δεύτερη γραμμή είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο, το τρίγωνο

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma C^\bullet \arrow[dl, "-\Sigma f"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
D^\bullet \arrow[rr, "g"] & & E^\bullet \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}
$$

είναι διακεκριμένο στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Μένει να δείξουμε ότι και το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & D^\bullet \arrow[dl, "g"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1}E^\bullet \arrow[rr, "-\Sigma^{-1}h"'] & & C^\bullet \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του αξιώματος στροφής τριγώνων. Θεωρούμε τον μορφισμό $\Sigma^{-2}\alpha\colon \Sigma^{-2}X^\bullet \longrightarrow \Sigma^{-2}Y^\bullet$ και το τυπικό τρίγωνο με βάση αυτόν:

$$\begin{tikzcd}
 & C^\bullet_{\Sigma^{-2}\alpha} \arrow[dl, "p_{\Sigma^{-2}\alpha}"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}X^\bullet \arrow[rr, "\Sigma^{-2}\alpha"'] & & \Sigma^{-2}Y^\bullet \arrow[ul, "i_{\Sigma^{-2}\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, για τον κώνο του μορφισμού $\Sigma^{-2}\alpha$ έχουμε:

$$C^n_{\Sigma^{-2}\alpha} = \Sigma^{-1}X^n \oplus \Sigma^{-2}Y^n = X^{n-1} \oplus Y^{n-2} = \Sigma^{-2}C^n_\alpha$$

Το διαφορικό αυτού του συμπλόκου δίνεται από

$$\partial^n_{C_{\Sigma^{-2}\alpha}} = \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_{\Sigma^{-2}X} & 0 \\ (\Sigma^{-2}\alpha)^{n+1} & \partial^n_{\Sigma^{-2}Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial^{n-1}_X & 0 \\ \alpha^{n-1} & \partial^{n-2}_Y \end{pmatrix} = \partial^n_{\Sigma^{-2}C_\alpha}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και άρα, $C^\bullet_{\Sigma^{-2}\alpha} = \Sigma^{-2}C^\bullet_\alpha$. Το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma^{-2}C^\bullet_\alpha \arrow[dl, "\Sigma^{-2}\underline{p_\alpha}"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}X^\bullet \arrow[rr, "\Sigma^{-2}\underline{\alpha}"'] & & \Sigma^{-2}Y^\bullet \arrow[ul, "\Sigma^{-2}\underline{i_\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

είναι επομένως διακεκριμένο στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και εφαρμόζοντας τον αυτομορφισμό Σ^{-2} στον ισομορφισμό διακεκριμένων τριγώνων (4.6), προκύπτει ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-2}C^\bullet \arrow[r, "\Sigma^{-2}f"] \arrow[d, "\Sigma^{-2}u"', "\wr"] & \Sigma^{-2}D^\bullet \arrow[r, "\Sigma^{-2}g"] \arrow[d, "\Sigma^{-2}v"', "\wr"] & \Sigma^{-2}E^\bullet \arrow[r, "\Sigma^{-2}h"] \arrow[d, "\Sigma^{-2}w"', "\wr"] & \Sigma^{-1}C^\bullet \arrow[d, "\Sigma^{-1}u"', "\wr"] \\
\Sigma^{-2}X \arrow[r, "\Sigma^{-2}\underline{\alpha}"'] & \Sigma^{-2}Y^\bullet \arrow[r, "\Sigma^{-2}\underline{i_\alpha}"'] & \Sigma^{-2}C^\bullet_\alpha \arrow[r, "\Sigma^{-2}\underline{p_\alpha}"'] & \Sigma^{-1}X^\bullet
\end{tikzcd}$$

το οποίο επίσης αποτελεί έναν ισομορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην ομοτοπική κατηγορία

$\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Το τρίγωνο

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma^{-2}E^\bullet \arrow[dl, "\Sigma^{-2}h"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}C^\bullet \arrow[rr, "\Sigma^{-2}f"'] & & \Sigma^{-2}D^\bullet \arrow[ul, "\Sigma^{-2}g"']
\end{tikzcd}
$$

είναι επομένως διακεκριμένο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της απόδειξης, προκύπτει ότι και το τρίγωνο

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma^{-1}C^\bullet \arrow[dl, "-\Sigma^{-1}f"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}D^\bullet \arrow[rr, "\Sigma^{-2}g"'] & & \Sigma^{-2}E^\bullet \arrow[ul, "\Sigma^{-2}h"']
\end{tikzcd}
$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Εφαρμόζοντας επανειλημμένα το αξίωμα της στροφής τριγώνων προκύπτουν τα ακόλουθα διακεκριμένα τρίγωνα:

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma^{-1}D^\bullet \arrow[dl, "-\Sigma^{-1}g"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}E^\bullet \arrow[rr, "\Sigma^{-2}h"'] & & \Sigma^{-1}C^\bullet \arrow[ul, "-\Sigma^{-1}f"']
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}
 & \Sigma^{-1}E^\bullet \arrow[dl, "-\Sigma^{-1}h"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1}C^\bullet \arrow[rr, "-\Sigma^{-1}f"'] & & \Sigma^{-1}D^\bullet \arrow[ul, "-\Sigma^{-1}g"']
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}
 & C^\bullet \arrow[dl, "f"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1}D^\bullet \arrow[rr, "-\Sigma^{-1}g"'] & & \Sigma^{-1}E^\bullet \arrow[ul, "-\Sigma^{-1}h"']
\end{tikzcd}
$$

Και τελικά προκύπτει ότι και το τρίγωνο:

$$
\begin{tikzcd}
 & D^\bullet \arrow[dl, "g"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1}E^\bullet \arrow[rr, "-\Sigma^{-1}h"'] & & C^\bullet \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}
$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

•(TR3): Έστω

$$
\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & E^\bullet \arrow[r] & \Sigma C^\bullet \arrow[d] \\
C_1^\bullet \arrow[r] & D_1^\bullet \arrow[r] & E_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma C_1^\bullet
\end{tikzcd}
\tag{4.7}
$$

ένα διάγραμμα στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ του οποίου οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $E^\bullet \longrightarrow E_1^\bullet$ ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Εξ ορισμού, υπάρχουν τυπικά τρίγωνα

$$\begin{tikzcd} & C_a^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "a"] & & V^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_b^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ U_1^\bullet \arrow[rr, "b"] & & V_1^\bullet \arrow[ul, "g'"'] \end{tikzcd}$$

και ισομορφισμοί διακεκριμένων τριγώνων

$$\begin{tikzcd} U^\bullet \arrow[r, "\underline{a}"] \arrow[d, "\wr"] & V^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C_a^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Sigma U^\bullet \arrow[d, "\wr"] \\ C^\bullet \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r] & \Sigma C^\bullet \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

και

$$\begin{tikzcd} U_1{}^\bullet \arrow[r, "\underline{b}"] \arrow[d, "\wr"] & V_1{}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C_b^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Sigma U_1{}^\bullet \arrow[d, "\wr"] \\ C_1^\bullet \arrow[r] & D_1^\bullet \arrow[r] & E_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma C_1^\bullet \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Το τρίγωνο που αποτελεί την πρώτη γραμμή του διαγράμματος (4.7) είναι λόγω του διαγράμματος (4.8) ισόμορφο με το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & C_a^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "\underline{a}"] & & V^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Παρόμοια, το τρίγωνο που αποτελεί την δεύτερη γραμμή του διαγράμματος (4.7) είναι ισόμορφο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & C_b^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ U_1^\bullet \arrow[rr, "\underline{b}"] & & V_1^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

λόγω του διαγράμματος (4.9). Αποκτούμε έτσι στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ένα διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd} U^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & V^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & C_a^\bullet \arrow[r] & \Sigma U^\bullet \arrow[d, "\Sigma u"'] \\ U_1{}^\bullet \arrow[r] & V_1{}^\bullet \arrow[r] & C_b^\bullet \arrow[r] & \Sigma U_1^\bullet \end{tikzcd}$$

στο οποίο το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.5.3, υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $w\colon C_a^\bullet \longrightarrow C_b^\bullet$ έτσι ώστε το παραπάνω διάγραμμα να μετατίθεται στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Συνεπώς, υπάρχει ένας μορφισμός: $E^\bullet \longrightarrow E_1^\bullet$ ο οποίος συμπληρώνει το διάγραμμα (4.7) σε έναν μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & E^\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma C^\bullet \arrow[d] \\
C_1^\bullet \arrow[r] & D_1^\bullet \arrow[r] & E_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma C_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

•(TR4): Έστω $\underline{f}\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ και $\underline{g}\colon D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ δύο μορφισμοί συμπλόκων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Εφόσον η $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1) – (TR3), από το Λήμμα 4.5.10 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα διακεκριμένο τρίγωνο με βάση τον μορφισμό f είναι ένα τρίγωνο της μορφής

$$\begin{tikzcd}
 & C_f^\bullet \arrow[dl, "\underline{p_f}"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "\underline{f}"] & & D_1^\bullet \arrow[ul, "\underline{i_f}"']
\end{tikzcd}$$

Έτσι, θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "1_{C^\bullet}"'] & D^\bullet \arrow[r, "\underline{i_f}"] \arrow[d, "\underline{g}"'] & C_f^\bullet \arrow[r, "\underline{p_f}"] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma 1_{\Sigma C^\bullet}"'] \\
C^\bullet \arrow[r, "\underline{g \circ f}"] \arrow[d, "\underline{f}"'] & E^\bullet \arrow[r, "\underline{i_{g\circ f}}"] \arrow[d, "1_{E^\bullet}"'] & C_{g\circ f}^\bullet \arrow[r, "\underline{p_{g\circ f}}"] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
D^\bullet \arrow[r, "\underline{g}"'] & E^\bullet \arrow[r, "\underline{i_g}"'] & C_g^\bullet \arrow[r, "\underline{p_g}"'] & \Sigma D^\bullet
\end{tikzcd}$$

στο οποίο τα τετράγωνα της πρώτης κάθετης στήλης είναι μεταθετικά και οι οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα. Από την απόδειξη του Λήμματος 4.5.3 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $\underline{w_1}\colon C_f^\bullet \longrightarrow C_{g\circ f}^\bullet$ και $\underline{w_2}\colon C_{g\circ f}^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ με

$$w_1^n = \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & g^n \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad w_2^n = \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι κάνουν το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό. Αποκτούμε έτσι στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$

ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{C^\bullet}"'] & D^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "g"] & C_f^\bullet \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, dashed, "w_1"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma 1_{\Sigma C^\bullet}"'] \\
C^\bullet \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"] & E^\bullet \arrow[r, "i_{g\circ f}"] \arrow[d, "1_{E^\bullet}"'] & C_{g\circ f}^\bullet \arrow[r, "p_{g\circ f}"] \arrow[d, dashed, "w_2"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
D^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_f"] & E^\bullet \arrow[r, "i_g"] \arrow[d, "i_{g\circ f}"] & C_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] \arrow[d, "1_{C_g^\bullet}"'] & \Sigma D^\bullet \arrow[d, "\Sigma i_f"'] \\
C_f^\bullet \arrow[r, dashed, "w_1"'] & C_{g\circ f}^\bullet \arrow[r, dashed, "w_2"'] & C_g^\bullet \arrow[r, "\Sigma i_f \circ p_g"'] & \Sigma C_f^\bullet
\end{tikzcd}$$

Μένει να δείξουμε ότι το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C_g^\bullet \arrow[dl, "\Sigma i_f \circ p_g"', "{[1]}"] & \\
C_f^\bullet \arrow[rr, "w_1"'] & & C_{g\circ f}^\bullet \arrow[ul, "w_2"']
\end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Έχουμε:

$$C_g^\bullet = \Sigma D^\bullet \oplus E^\bullet$$

με διαφορικό:

$$\partial_{C_g}^n = \begin{pmatrix} -\partial_D^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & \partial_E^n \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και επίσης

$$C_{w_1}^\bullet = \Sigma C_f^\bullet \oplus C_{g\circ f}^\bullet = \Sigma^2 C^\bullet \oplus \Sigma D^\bullet \oplus \Sigma C^\bullet \oplus E^\bullet$$

με διαφορικό:

$$\partial_{C_{w_1}}^n = \begin{pmatrix} -\partial_{C_f}^{n+1} & 0 \\ w_1^{n+1} & \partial_{C_{g\circ f}}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_C^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_D^{n+1} & 0 & 0 \\ 1_{C^{n+2}} & 0 & -\partial_C^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1}\circ f^{n+1} & \partial_E^n \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε έτσι έναν μορφισμό συμπλόκων $w\colon C_g^\bullet \longrightarrow C_{w_1}^\bullet$ με

$$w^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άμεσα βλέπουμε ότι

$$
\begin{aligned}
w^{n+1} \circ \partial^n_{C_g} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{D^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_D & 0 \\ g^{n+1} & \partial^n_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\partial^{n+1}_D & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \partial^n_E \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial^{n+2}_C & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d^{n+1}_D & 0 & 0 \\ 1_{C^{n+2}} & 0 & -\partial^{n+1}_C & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & \partial^n_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} = \partial^n_{C_{w_1}} \circ w^n
\end{aligned}
$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα ο w είναι πράγματι ένας μορφισμός συμπλόκων. Θεωρούμε έτσι το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$
\begin{tikzcd}
C^\bullet_f \arrow[r, "\underline{w_1}"] \arrow[d, "1_{C^\bullet_f}"'] & C^\bullet_{g\circ f} \arrow[r, "\underline{w_2}"] \arrow[d, "1_{C^\bullet_{g\circ f}}"'] & C^\bullet_g \arrow[r, "\Sigma\underline{i_f}\circ\underline{p_g}"] \arrow[d, "\underline{w}"'] & \Sigma C^\bullet_f \arrow[d, "1_{\Sigma C^\bullet_f}"] \\
C^\bullet_f \arrow[r, "\underline{w_1}"'] & C^\bullet_{g\circ f} \arrow[r, "\underline{i_{w_1}}"'] & C^\bullet_{w_1} \arrow[r, "\underline{p_{w_1}}"'] & \Sigma C^\bullet_f
\end{tikzcd}
\tag{4.10}
$$

το οποίο θα δείξουμε ότι αποτελεί έναν ισομορφισμό τριγώνων. Έχουμε:

$$
p^n_{w_1} \circ w^n = \begin{pmatrix} 1_{C^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{E^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{D^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} = \Sigma i^n_f \circ p^n_g
$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και άρα $p_{w_1} \circ w = \Sigma i_f \circ p_g \Longrightarrow \underline{p_{w_1}} \circ \underline{w} = \Sigma \underline{i_f} \circ \underline{p_g}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι και το μεσαίο τετράγωνο του παραπάνω διαγράμματος μετατίθεται στην ομοτοπική κατηγορία, δηλαδή ότι οι μορφισμοί συμπλόκων $w \circ w_2$ και i_{w_1} είναι ομοτοπικοί. Ορίζουμε για τον σκοπό αυτόν μία οικογένεια μορφισμών $\phi = \{\phi^n \colon C^n_{g\circ f} \longrightarrow C^{n-1}_{w_1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ με

$$
\phi^n = \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\partial^{n-1}_{C_{w_1}} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial^n_{C_{g\circ f}} &= \begin{pmatrix} \partial^{n+1}_C & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+1} & -d^n_D & 0 & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 & -\partial^n_C & 0 \\ 0 & g^n & g^n \circ f^n & \partial^{n-1}_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{C^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ g^{n+1} \circ f^{n+1} & \partial^n_E \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial^{n_1}_C & 0 \\ -f^{n+1} & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f^{n+1} & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
i_{w_1}^n - w^n \circ w_2^n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 1_{E^n} & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & 1_{E^{n+1}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f^{n+1} & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \partial_{C_{w_1}}^{n-1} \circ \phi^n + \phi^{n+1} \circ \partial_{C_{g \circ f}}^n
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή η οικογένεια μορφισμών ϕ αποτελεί μια ομοτοπία $i_{w_1} \rightsquigarrow w \circ w_2$. Άρα στην ομοτοπική κατηγορία θα ισχύει: $\underline{i_{w_1}} = \underline{w} \circ \underline{w_2}$ και το διάγραμμα (4.10) είναι μεταθετικό.

Θα δείξουμε, τέλος ότι ο μορφισμός συμπλόκων $w \colon C_g^\bullet \longrightarrow C_{w_1}^\bullet$ είναι ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Ορίζουμε μία οικογένεια μορφισμών $v \colon C_{w_1}^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ με

$$v^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_D^{n+1} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
v^{n+1} \circ \partial_{w_1}^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1_D^{n+2} & f^{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_C^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -\partial_D^{n+1} & 0 & 0 \\ 1_{C^{n+2}} & 0 & -\partial_C^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & \partial_E^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_D^{n+1} & -f^{n+2} \circ \partial_C^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & \partial_E^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_D^{n+1} & -\partial_D^{n+1} \circ -f^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & \partial_E^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\partial_D^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & \partial_E^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_D^{n+1} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} = \partial_{C_g}^n \circ v^n
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ο $v \colon C_{w_1}^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων. Άμεσα,

$$v^n \circ w^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_D^{n+1} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} = 1_{C_g^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα $v \circ w = 1_{C_g^\bullet} \Longrightarrow \underline{v} \circ \underline{w} = \underline{1_{C_g^\bullet}}$. Θεωρούμε τώρα μία οικογένεια μορφισμών $\psi = \{\psi^n \colon C_{w_1}^n \longrightarrow C_{w_1}^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ με

$$\psi^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\partial_{w_1}^{n-1} \circ \psi^n + \psi^{n+1} \circ d_{w_1}^n &= \begin{pmatrix} \partial_C^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+1} & -d_D^n & 0 & 0 \\ 1_{C^{n+1}} & 0 & -\partial_C^n & 0 \\ 0 & g^n & g^n \circ f^n & \partial_E^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_C^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_D^{n+1} & 0 & 0 \\ 1_{C^{n+2}} & 0 & -\partial_C^{n+1} & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & \partial_E^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_C^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{C^{n+2}} & 0 & -\partial_C^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{C^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι,

$$
\begin{aligned}
1_{C_{w_1}^n} - w^n \circ v^n &= \begin{pmatrix} 1_{C^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{D^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_D^{n+1} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{C^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{D^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{C^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \partial_{w_1}^{n-1} \circ \psi^n + \psi^{n+1} \circ d_{w_1}^n
\end{aligned}
$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα, η οικογένεια μορφισμών ψ αποτελεί μία ομοτοπία $1_{C_{w_1}^\bullet} \rightsquigarrow w \circ v$ και στην ομοτοπική κατηγορία ισχύει $\underline{w} \circ \underline{v} = \underline{1_{C_{w_1}^\bullet}}$.

Επομένως ο μορφισμός συμπλόκων w είναι ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Το διάγραμμα 4.10, έτσι, αποτελεί έναν ισομορφισμό τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και εφόσον η δεύτερη σειρά αποτελεί ένα διακεκριμένο τρίγωνο, το τρίγωνο

$$
\begin{tikzcd}
 & C_g^\bullet \arrow[dl, "\Sigma \underline{i_f} \circ \underline{p_g}"', "{[1]}"] & \\
C_f^\bullet \arrow[rr, "\underline{w_1}"'] & & C_{g\circ f}^\bullet \arrow[ul, "\underline{w_2}"']
\end{tikzcd}
$$

είναι επίσης διακεκριμένο, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του αξιώματος (TR4). ■

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι φραγμένες κατηγορίες συμπλόκων $\mathsf{Ch}^+(\mathcal{A})$, $\mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$ και $\mathsf{Ch}^b(\mathcal{A})$, είναι κλειστές στους κώνους μορφισμών, προκύπτει άμεσα το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 4.5.12. *Οι κατηγορίες* $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$, $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ *και* $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$, *είναι πλήρεις τριγωνισμένες υποκατηγορίες της* $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα εξετάζοντας την περίπτωση κατά την οποία η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή. Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε τον συναρτητή ομολογίας $\mathsf{H}^n \colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ του Ορισμού 4.3.3 για τον οποίο ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.5.13. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μία αβελιανή κατηγορία. Τότε, για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *ο συναρτητής* $\mathsf{H}^n \colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ *είναι ένας ομολογιακός συναρτητής.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "\underline{h}"', "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "\underline{f}"] & & D^\bullet \arrow[ul, "\underline{g}"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η ακολουθία

$$\mathsf{H}^n(D^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(\underline{g})} \mathsf{H}^n(E^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(\underline{h})} \mathsf{H}^n(\Sigma C^\bullet)$$

είναι ακριβής στην κατηγορία $\mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το τυπικό τρίγωνο με βάση τον μορφισμό f:

$$\begin{tikzcd} & C_f^\bullet \arrow[dl, "p_f"', "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "i_f"'] \end{tikzcd}$$

και τον ισομορφισμό τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\underline{1_{C^\bullet}}"'] & D^\bullet \arrow[r, "\underline{g}"] \arrow[d, "\underline{1_{D^\bullet}}"'] & E^\bullet \arrow[r, "\underline{h}"] \arrow[d, dashed, "\underline{u}"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\underline{1_{\Sigma C^\bullet}}"'] \\ C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"'] & D^\bullet \arrow[r, "\underline{i_f}"'] & C_f^\bullet \arrow[r, "\underline{p_f}"'] & \Sigma C^\bullet \end{tikzcd}$$

ο οποίος προκύπτει από το Λήμμα 4.5.10. Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{Z}$ και εφαρμόζουμε τον συναρτητή H^n αποκτώντας έτσι ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}^n(D^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^n(\underline{g})"] \arrow[d, "1_{\mathsf{H}^n(D^\bullet)}"'] & \mathsf{H}^n(E^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^n(\underline{h})"] \arrow[d, "\mathsf{H}^n(\underline{u})"'] & \mathsf{H}^n(\Sigma C^\bullet) \arrow[d, "1_{\mathsf{H}^n(\Sigma C^\bullet)}"] \\ \mathsf{H}^n(D^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^n(\underline{i_f})"'] & \mathsf{H}^n(C_f^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^n(\underline{p_f})"'] & \mathsf{H}^n(\Sigma C^\bullet) \end{tikzcd}$$

στο οποίο τα κάθετα βέλη είναι ισομορφισμοί. Από το Λήμμα 4.4.8, γνωρίζουμε ότι η δεύτερη γραμμή του διαγράμματος είναι μία ακριβής ακολουθία, επομένως και η πρώτη γραμμή είναι επίσης μία ακριβής ακολουθία στην $\mathcal{A}$ αποδεικνύοντας το ζητούμενο. ∎

Το παραπάνω θεώρημα έχει το ακόλουθο άμεσο πόρισμα:

Πόρισμα 4.5.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και*

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "h"'] \arrow[dl, phantom, "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd} \tag{T_1}$$

ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Τότε η ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f)} \mathsf{H}^n(D^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(g)} \mathsf{H}^n(E^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(h)} \mathsf{H}^{n+1}(C^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$.

Σχόλιο 4.5.15. Η ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f)} \mathsf{H}^n(D^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(g)} \mathsf{H}^n(E^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(h)} \mathsf{H}^{n+1}(C^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

του παραπάνω πορίσματος καλείται η μεγάλη ακριβής ακολουθία συνομολογίας του διακεκριμένου τριγώνου (T_1):

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "h"'] \arrow[dl, phantom, "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd} \tag{T_1}$$

4.6 Ημι-ισομορφισμοί

Στη συγκεκριμένη ενότητα, θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή. Σε αυτό το πλαίσιο θα κατασκευαστεί μία κλάση μορφισμών στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η οποία όπως θα δείξουμε αποτελεί μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον τριγωνισμό. Στα παρακάτω η $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ θα θεωρείται ήδη εφοδιασμένη με μία τριγωνική δομή, αυτήν που κατασκευάστηκε στο Θεώρημα 4.5.11.

Για την κατασκευή αυτής της κλάσης μορφισμών εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.6.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένας μορφισμός συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ θα καλείται* **ημι-ισομορφισμός (quasi-isomorphism)**, *αν ο επαγόμενος μορφισμός*

$$\mathsf{H}^n(f)\colon \mathsf{H}^n(C^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(D^\bullet)$$

είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Σχόλιο 4.6.2. Στον παραπάνω ορισμό, αν ο μορφισμός συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός, και ο μορφισμός συμπλόκων $g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ομοτοπικός με τον f, τότε έχουμε $g \approx f \Longrightarrow \mathsf{H}^n(g) = \mathsf{H}^n(f)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, συνεπώς και ο g είναι ημι-ισομορφισμός. Βλέπουμε δηλαδή έτσι ότι η ιδιότητα ενός μορφισμού συμπλόκων να είναι ημι-ισομορφισμός, είναι ομοτοπικά αναλλοίωτη, δηλαδή δεν αλλάζει αν περάσουμε από έναν μορφισμό σε έναν ομοτοπικό του. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να επεκτείνουμε τον παραπάνω μορφισμό στην ομοτοπική κατηγορία και χάριν σύμβασης, θα λέμε ότι ένας μορφισμός στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι ημι-ισομορφισμός αν όλοι οι αντιπρόσωποί του στην κατηγορία συμπλόκων είναι ημι-ισομορφισμοί.

Στα παρακάτω, συχνά θα συμβολίζουμε με S την κλάση όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και με $\tilde{S}$ την κλάση όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$.

Η κλάση S των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ περιέχει όλους τους ισομορφισμούς της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

Πόρισμα 4.6.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Αν ο f είναι ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, τότε είναι και ένας ημι-ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Εφόσον ο f είναι ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία, θα υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $g\colon D^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ έτσι ώστε $f \circ g \approx 1_{D^\bullet}$ και $g \circ f \approx 1_{C^\bullet}$. Προκύπτει έτσι, ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\mathsf{H}^n(f) \circ \mathsf{H}^n(g) = 1_{D^n} \quad \text{και} \quad \mathsf{H}^n(g) \circ \mathsf{H}^n(f) = 1_{C^n}$$

δηλαδή ο $\mathsf{H}^n(f)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, συνεπώς ο f είναι ημι-ισομορφισμός. ∎

Ορισμός 4.6.4. *Ένα σύμπλοκο $C^\bullet$ καλείται* **ακυκλικό** *ή* **ακριβές** *αν $H^n(C^\bullet) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Ακολουθεί ένα λήμμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη των κύριων προτάσεων της ενότητας.

Λήμμα 4.6.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων της $\mathcal{A}$. Ένας μορφισμός συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός αν-ν ο κώνος $C^\bullet_f$ του μορφισμού f είναι ακυκλικό σύμπλοκο.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού, το παρακάτω τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet_f \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό f, είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Από το Λήμμα 4.5.14 αποκτούμε μία μεγάλη ακριβή ακολουθία στην συνομολογία:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f)} \mathsf{H}^n(D^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet_f) \longrightarrow \mathsf{H}^{n+1}(C^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^{n+1}(f)} \mathsf{H}^{n+1}(D^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Αν ο μορφισμός f είναι ένας ημι-ισομορφισμός, οι μορφισμοί $\mathsf{H}^n(f)$ και $\mathsf{H}^{n+1}(f)$ είναι ισομορφισμοί και άρα $\mathsf{H}^n(C^\bullet_f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή το σύμπλοκο $C^\bullet_f$ είναι ακυκλικό.

Αντίστροφα, αν το σύμπλοκο $C^\bullet_f$ είναι ακυκλικό, από την ίδια μεγάλη ακριβή ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^{n-1}(C^\bullet_f) \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f)} \mathsf{H}^n(D^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet_f) \longrightarrow \cdots$$

αφού $\mathsf{H}^{n-1}(C^\bullet_f) = \mathsf{H}^n(C^\bullet_f) = 0$, προκύπτει ότι ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(f)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ο μορφισμός συμπλόκων f είναι ημι-ισομορφισμός. ∎

Το παραπάνω λήμμα γενικεύεται ως εξής:

Παρατήρηση 4.6.6. Αν έχουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, τότε από το Λήμμα 4.6.5 και το αξίωμα της στροφής τριγώνων προκύπτει ότι ένας από τους μορφισμούς f, g, h είναι ημι-ισομορφισμός αν-ν η απέναντι κορυφή του τριγώνου, δηλαδή το σύμπλοκο $E^\bullet, C^\bullet, D^\bullet$ αντίστοιχα, είναι ακυκλικό.

Πρόταση 4.6.7. *Η κλάση S όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η S είναι μία τοπικοποιούσα κλάση εξετάζοντας αν πληροί τις ιδιότητες (LC1) – (LC4) του Ορισμού 2.1.8. Άμεσα, για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$, ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{C^\bullet}$ είναι ημι-ισομορφισμός και η ιδιότητα (LC1) ικανοποιείται.

Έστω τώρα s, t δύο μορφισμοί συμπλόκων στην S. Αφού οι s και t είναι ημι-ισομορφισμοί, οι μορφισμοί $\mathsf{H}^n(s)$ και $\mathsf{H}^n(t)$ είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, και ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(s \circ t) = \mathsf{H}^n(s) \circ \mathsf{H}^n(t)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα ο μορφισμός συμπλοκών $s \circ t$ είναι ημι-ισομορφισμός. Επομένως έχουμε $s \circ t \in S$ και η ιδιότητα (LC2) ικανοποιείται.

Έστω ένα ζεύγος μορφισμών συμπλόκων $f\colon E^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ και $s\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με $s \in S$. Θεωρούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C_s^\bullet \arrow[dl, "p_s"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "s"] & {} & D^\bullet \arrow[ul, "i_s"']
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με βάση τον μορφισμό s. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων, αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma C^\bullet \arrow[dl, "-\Sigma s"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
D^\bullet \arrow[rr, "i_s"] & {} & C_s^\bullet \arrow[ul, "p_s"']
\end{tikzcd} \tag{T_1}$$

Θέτουμε $g = i_s \circ f\colon E^\bullet \longrightarrow C_s^\bullet$ και θεωρούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C_g^\bullet \arrow[dl, "p_g"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
E^\bullet \arrow[rr, "g"] & {} & C_s^\bullet \arrow[ul, "i_g"']
\end{tikzcd} \tag{T_2}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με βάση τον μορφισμό g. Αποκτούμε έτσι στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
E^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C_s^\bullet \arrow[r, "i_g"] \arrow[d, "1_{C_s^\bullet}"'] & C_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] & \Sigma E^\bullet \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
D^\bullet \arrow[r, "i_s"] & C_s^\bullet \arrow[r, "p_s"] & \Sigma C^\bullet \arrow[r, "-\Sigma s"] & \Sigma D^\bullet
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το αριστερό τετράγωνο μεταθετικό. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα (TR3), υπάρχει ένας μορφισμός $h\colon C_g^\bullet \longrightarrow \Sigma C^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
E^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C_s^\bullet \arrow[r, "i_g"] \arrow[d, "1_{C_s^\bullet}"'] & C_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] \arrow[d, dashed, "h"'] & \Sigma E^\bullet \arrow[d, "\Sigma f"'] \\
D^\bullet \arrow[r, "i_s"] & C_s^\bullet \arrow[r, "p_s"] & \Sigma C^\bullet \arrow[r, "-\Sigma s"] & \Sigma D^\bullet
\end{tikzcd}$$

Από το τρίγωνο (T_1) και το Λήμμα 4.6.5, αφού ο s είναι ημι-ισομορφισμός προκύπτει ότι το σύμπλοκο $C_s^\bullet$ είναι ακυκλικό, ενώ από το τρίγωνο (T_2) και την Παρατήρηση 4.6.6, ο μορφισμός συμπλόκων p_g θα είναι ημι-ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή μεταφοράς Σ^{-1} στο δεξιό μεταθετικό τετράγωνο του παραπάνω διαγράμματος, αποκτούμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1} C_g^\bullet \arrow[r, "\Sigma^{-1} p_g"] \arrow[d, "-\Sigma^{-1} h"'] & E^\bullet \arrow[d, "f"] \\
C^\bullet \arrow[r, "s"'] & D^\bullet
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, στο οποίο οι μορφισμοί $\Sigma^{-1} p_g$ και s ανήκουν στην S.

Παρόμοια, έστω ένα ζεύγος μορφισμών συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ και $s\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με $s \in S$. Όπως πριν, Θεωρούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C_s^\bullet \arrow[dl, "p_s"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "s"] & {} & D^\bullet \arrow[ul, "i_s"']
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με βάση τον μορφισμό s και χρησιμοποιώντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων, αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& D^\bullet \arrow[dl, "i_s"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1} C_s^\bullet \arrow[rr, "-\Sigma p_s"] & {} & C^\bullet \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd} \tag{T_3}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $g = -f \circ \Sigma p_s\colon \Sigma^{-1} C_s^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ και θεωρούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C_g^\bullet \arrow[dl, "p_g"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-1} C_s^\bullet \arrow[rr, "g"] & {} & E^\bullet \arrow[ul, "i_g"']
\end{tikzcd} \tag{T_4}$$

Σύμφωνα με το αξίωμα (TR3), θα υπάρχει ένας μορφισμός $h\colon D^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ ο οποίος μετατρέπει το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}C_s^\bullet \arrow[r, "-\Sigma p_s"] \arrow[d, "1_{\Sigma^{-1}C_s}"'] & C^\bullet \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & D^\bullet \arrow[r, "i_s"] \arrow[d, dashed, "h"] & C_s^\bullet \arrow[d, "1_{C_s^\bullet}"] \\
\Sigma^{-1}C_s^\bullet \arrow[r, "g"] & E^\bullet \arrow[r, "i_g"] & C_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] & C_s^\bullet
\end{tikzcd}$$

σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων. Από την Παρατήρηση 4.6.6, εφόσον στο τρίγωνο (T_3) ο μορφισμός s είναι ημι-ισομορφισμός, το σύμπλοκο $\Sigma^{-1}C_s^\bullet$ είναι ακυκλικό και παρόμοια, στο τρίγωνο (T_4), αφού το σύμπλοκο $\Sigma^{-1}C_g^\bullet$ είναι ακυκλικό, και ο μορφισμός i_g θα είναι ημι-ισομορφισμός. Απομονώνοντας το κεντρικό τετράγωνο του παραπάνω διαγράμματος, αποκτούμε έτσι ένα μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & D^\bullet \arrow[d, "h"] \\
E^\bullet \arrow[r, "i_g"] & C_g^\bullet
\end{tikzcd}$$

όπου $i_g, s \in S$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη της ιδιότητας (LC3).

Για την ιδιότητα (LC4) θεωρούμε έναν τυχαίο μορφισμό συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$. Εύκολα βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε το εξής: Υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $s\colon D^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ με $s \in S$ έτσι ώστε $s \circ f = 0$, αν-ν υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $t\colon X^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ με $t \in S$ έτσι ώστε $f \circ t = 0$. Έστω, λοιπόν, ένας μορφισμός συμπλόκων $s\colon D^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ με $s \in S$ και $s \circ f = 0$ και το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C_s^\bullet \arrow[dl, "p_s"', "{[1]}"] & \\
D^\bullet \arrow[rr, "s"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_s"']
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με βάση τον μορφισμό s. Εφαρμόζοντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων στο διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "1_{C^\bullet}"] & & C^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με βάση τον ταυτοτικό μορφισμό στο $C^\bullet$, προκύπτει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma C^\bullet \arrow[dl, "-1_{\Sigma C^\bullet}"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr] & & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma C^\bullet \arrow[r, "-1_{\Sigma C^\bullet}"] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma f"] \\
D^\bullet \arrow[r, "s"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_s"] & C_s^\bullet \arrow[r, "p_s"] & \Sigma D^\bullet
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ στο οποίο οι δύο οριζόντιες γραμμές είναι διακεκριμένα τρίγωνα και το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό, από το αξίωμα (TR3) υπάρχει ένας μορφισμός $u\colon \Sigma C^\bullet \longrightarrow C_s^\bullet$ ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma C^\bullet \arrow[r, "-1_{\Sigma C^\bullet}"] \arrow[d, dashed, "u"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma f"] \\
D^\bullet \arrow[r, "s"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_s"] & C_s^\bullet \arrow[r, "p_s"] & \Sigma D^\bullet
\end{tikzcd}$$

Από τη μεταθετικότητα προκύπτει ότι

$$f = \Sigma^{-1}p_s \circ \Sigma^{-1}u$$

Αφού ο μορφισμός συμπλόκων s είναι ένας ημι-ισομορφισμός, από το Λήμμα 4.6.5, το σύμπλοκο $C_s^\bullet$ θα είναι ακυκλικό και αν θεωρήσουμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma C_u^\bullet \arrow[dl, "p_u"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "\Sigma^{-1}u"] & \, & C_s^\bullet \arrow[ul, "i_u"']
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με βάση τον μορφισμό $\Sigma^{-1}u$, από την Παρατήρηση 4.6.6 και ο μορφισμός p_u θα είναι ημι-ισομορφισμός. Από το Λήμμα 3.2.9 ισχύει $\Sigma^{-1}u \circ p_u = 0$ και τότε

$$f \circ p_u = \Sigma^{-1}p_s \circ \Sigma^{-1}u \circ p_u = 0$$

Έχουμε αποδείξει επομένως την ύπαρξη ενός μορφισμού $p_u\colon \Sigma C_u^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ με $p_u \in S$ έτσι ώστε $f \circ p_u = 0$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Από την άλλη πλευρά, αν υπάρχει ένας μορφισμός $t\colon X^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ έτσι ώστε $f \circ t = 0$, μπορούμε παρόμοια να θεωρήσουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "t"] \arrow[d] & C^\bullet \arrow[r, "i_t"] \arrow[d, "f"'] & \Sigma C_t^\bullet \arrow[r, "p_t"] & \Sigma C^\bullet \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r, "1_{D^\bullet}"] & D^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, του οποίου η πρώτη γραμμή είναι το διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με βάση τον μορφισμό t και η δεύτερη γραμμή είναι το διακεκριμένο τρίγωνο που αποκτάται εφαρμόζοντας το αξίωμα της στροφής τριγώνων στο διακεκριμένο τρίγωνο της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ το οποίο έχει ως βάση τον ταυτοτικό μορφισμό στο $D^\bullet$. Από το αξίωμα (TR3), υπάρχει ένας μορφισμός $v\colon \Sigma C_t^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο οποίος μετατρέπει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "t"] \arrow[d] & C^\bullet \arrow[r, "i_t"] \arrow[d, "f"] & \Sigma C_t^\bullet \arrow[r, "p_t"] \arrow[d, dashed, "v"] & \Sigma C^\bullet \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r, "1_{D^\bullet}"] & D^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος προκύπτει ότι $f = v \circ i_t$. Αφού ο t είναι ένας ημι-ισομορφισμός, από το Λήμμα 4.6.5, το σύμπλοκο $C_t^\bullet$ είναι ακυκλικό και αν θεωρήσουμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma C_v^\bullet \arrow[dl, "p_v"', "{[1]}"] & \\
C_t^\bullet \arrow[rr, "v"] & & D^\bullet \arrow[ul, "i_v"']
\end{tikzcd}$$

από την Παρατήρηση 4.6.6 άμεσα συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός i_v είναι ημι-ισομορφισμός. Από το Λήμμα 3.2.9 ισχύει $i_v \circ v = 0$ και έτσι

$$i_v \circ f = i_v \circ v \circ i_t = 0$$

Συνεπώς έχουμε αποδείξει την ύπαρξη ενός μορφισμού $i_v\colon D^\bullet \longrightarrow \Sigma C_v^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ με $i_v \in S$ έτσι ώστε $i_v \circ f$ =0, ολοκληρώνοντας την απόδειξη της ιδιότητας (LC4). ∎

Πρόταση 4.6.8. *Η τοπικοποιούσα κλάση S όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι συμβατή με τον τριγωνισμό.*

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε αν η τοπικοποιούσα κλάση S πληροί τις ιδιότητες (LT1) και (LT2) του Ορισμού 3.4.1.

Αρχικά αν ένας μορφισμός $s\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός, τότε ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(s)\colon \mathsf{H}^n(C^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(D^\bullet)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα άμεσα και ο μορφισμός $\Sigma s\colon \Sigma C^\bullet \longrightarrow \Sigma D^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός και αντίστροφα. Επομένως η κλάση S διατηρεί τον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων Σ.

Έστω

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & E^\bullet \arrow[r] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma s"'] \\
C_1^\bullet \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r] & E_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma C_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

ένα διάγραμμα στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ στο οποίο οι δύο οριζόντιες γραμμές αποτελούν διακεκριμένα τρίγωνα, οι μορφισμοί s, t είναι ημι-ισομορφισμοί και το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό. Τότε, από το αξίωμα (TR3), υπάρχει ένας μορφισμός $u\colon E^\bullet \longrightarrow E_1^\bullet$ ο οποίος συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα σε έναν μορφισμό διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & D^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & E^\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma s"'] \\
C_1^\bullet \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r] & E_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma C_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

Μένει να δείξουμε ότι ο μορφισμός u είναι ένας ημι-ισομορφισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{H}^n(-)$ αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}^n(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^n(s)"'] & \mathsf{H}^n(D^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^n(t)"'] & \mathsf{H}^n(E^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^n(u)"'] & \mathsf{H}^{n+1}(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^{n+1}(s)"'] & \mathsf{H}^{n+1}(D^\bullet) \arrow[d, "\mathsf{H}^{n+1}(t)"'] \\
\mathsf{H}^n(C_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^n(D_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^n(E_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^{n+1}(C_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^{n+1}(D_1^\bullet)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι μορφισμοί $\mathsf{H}^n(s)$, $\mathsf{H}^n(t)$, $\mathsf{H}^{n+1}(s)$ και $\mathsf{H}^{n+1}(t)$ είναι ισομορφισμοί. Έτσι, από το five lemma, προκύπτει ότι και ο $\mathsf{H}^n(u)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, συνεπώς ο u είναι ένας ημι-ισομορφισμός. ■

Σχόλιο 4.6.9. Συμβολίζοντας με S^- (αντίστοιχα S^+, αντίστοιχα S^b) την κλάση όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ (αντίστοιχα $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$, αντίστοιχα $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$), μπορούμε να θέσουμε στα παραπάνω στη θέση της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ τη φραγμένη ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ και στη θέση της κλάσης S των ημι-ισομορφισμών, την κλάση S^*, με το σύμβολο $*$ να αντικαθιστά ένα από τα $\{-, +, b\}$. Τότε, ακριβώς ανάλογα, βλέπουμε ότι η κλάση S^* όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον τριγωνισμό.

4.7 Παραγόμενες Κατηγορίες

Λόγω τεχνικών και συνολοθεωρητικών προβλημάτων, η αρχική μελέτη της παραγόμενης κατηγορίας (για παράδειγμα βλ. [52] και [27]) είχε περιοριστεί στη φραγμένη παραγόμενη κατηγορία, δηλαδή αυτή που προέρχεται από φραγμένα σύμπλοκα. Ο Spaltenstein στο [50] ήταν ο πρώτος ο οποίος θεώρησε μη φραγμένα σύμπλοκα. Μέσω της εργασίας του Neeman στη δυϊκότητα Grothendieck (βλ. [44]) έγινε εμφανές το ότι η μελέτη της μη φραγμένης παραγόμενης κατηγορίας μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά συμπεράσματα ακόμη και στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για φραγμένα σύμπλοκα.

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής θα παρακάμψουμε τα συνολοθεωρητικά προβλήματα για την ύπαρξη της παραγόμενης κατηγορίας και θα αναλύσουμε αρχικά τη μη φραγμένη περίπτωση. Μπορούμε με ασφάλεια να κάνουμε αυτήν την παραδοχή, καθώς στην περίπτωση στην οποία θα επικεντρωθούμε στα επόμενα κεφάλαια, κατά την οποία η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι η mod-R, η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ πάντοτε υπάρχει. Πληροφοριακά, αναφέρουμε ότι η ύπαρξη της κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ εξασφαλίζεται και στην περίπτωση όπου η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι η κατηγορία των Sheaves (βλ. [53, Definition 1.6.5.] πάνω από εναν τοπολογικό χώρο X, ή γενικότερα η $\mathcal{A}$ είναι μία κατηγορία Grothendieck.

Αρχικά, θα θεωρήσουμε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$, την κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ και την αντίστοιχη ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5.11 η $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία και από τις Προτάσεις 4.6.7 και 4.6.8, η κλάση S όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι μία τοπικοποιούσα κλάση η οποία είναι συμβατή με τον τριγωνισμό της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Μπορούμε έτσι, να θεωρήσουμε την τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ως προς την κλάση των ημι-ισομορφισμών σχηματίζοντας μία νέα κατηγορία. Τέλος, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.5, η κατηγορία αυτή θα είναι τριγωνισμένη.

Ορισμός 4.7.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη ομοτοπική κατηγορία. Η τοπικοποίηση της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ως προς την τοπικοποιούσα κλάση S των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, συμβολίζεται με $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και καλείται η* **παραγόμενη (derived)** *κατηγορία της $\mathcal{A}$. Θέτουμε δηλαδή:*

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}) = \mathsf{K}(\mathcal{A})[S^{-1}]$$

Σχόλιο 4.7.2. Υπάρχουν και άλλες, πιο γενικές, συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν την ύπαρξη της παραγόμενης κατηγορίας. Για παράδειγμα, στο [50] ο Spaltenstein ορίζει τα K-injective και τα K-projective σύμπλοκα. Χρησιμοποιώντας και το άρθρο των Bökstedt και Neeman, βλ. [15], προκύπτει ότι αν η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα και πληροί την συνθήκη (AB4) του Grothendieck, δηλαδή έχει ευθέα αθροίσματα (coproducts) τα οποία είναι ακριβή, η παραγόμενη κατηγορία είναι ισοδύναμη με την ομοτοπική κατηγορία των K-projective συμπλόκων.

Δυϊκά, αν η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα και πληροί τη συνθήκη (AB4*) του Grothendieck, δηλαδή έχει ευθέα γινόμενα (products) τα οποία είναι ακριβή, η παραγόμενη κατηγορία είναι ισοδύναμη με την ομοτοπική κατηγορία των K-injective συμπλόκων.

Για μία παρόμοια συνθήκη βλ. [53, Remark 10.4.5].

Αν υποθέσουμε ότι η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ υπάρχει, τότε οι πληρεις υποκατηγορίες $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ και $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ικανοποιούν τις συνθήκες των προτάσεων 2.3.1 και 2.3.2 και αποτελούν τοπικοποιούσες υποκατηγορίες της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Συνεπώς, οι τοπικοποιήσεις τους υπάρχουν και είναι αντίστοιχα οι πλήρεις υποκατηγορίες $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, όπως βλέπουμε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.7.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ και $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ οι φραγμένες ομοτοπικές κατηγορίες και S^-, S^+ και S^b οι αντίστοιχες κλάσεις των ημι-ισομορφισμών. Τότε, ορίζουμε τις αντίστοιχες* **φραγμένες παραγόμενες κατηγορίες** *ως εξής:*

$$\begin{aligned}\mathsf{D}^-(\mathcal{A}) &= \mathsf{K}^-(\mathcal{A})[S^{-1}]\\ \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) &= \mathsf{K}^+(\mathcal{A})[S^{-1}]\\ \mathsf{D}^b(\mathcal{A}) &= \mathsf{K}^b(\mathcal{A})[S^{-1}]\end{aligned}$$

Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ οποιαδήποτε από τις παραπάνω παραγόμενες κατηγορίες, θέτοντας δηλαδή $* = \{-,+,b\}$.

Σχόλιο 4.7.4. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, στην περίπτωση των φραγμένων παραγόμενων κατηγοριών, το συνολοθεωρητικό ζήτημα το οποίο προαναφέρθηκε μπορεί να ξεπεραστεί με μία απλή συνθήκη. Αν υποθέσουμε, έτσι, ότι η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα και συμβολίσουμε με $\mathcal{I}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από τα ενέσιμα αντικείμενα, προκύπτει η ύπαρξη μίας ισοδυναμίας κατηγοριών $\mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \cong \mathsf{K}^+(\mathcal{I})$.

Δυϊκά, αν υποθέσουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα και συμβολίσουμε με $\mathcal{P}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από τα προβολικά αντικείμενα, προκύπτει μία ισοδυναμία κατηγοριών $\mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \cong \mathsf{K}^-(\mathcal{P})$. Έτσι, οι φραγμένες παραγόμενες κατηγορίες $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ είναι ισοδύναμες με τις ομοτοπικές κατηγορίες $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$ και $\mathsf{K}^+(\mathcal{P})$ οι οποίες πάντοτε υπάρχουν. Για μία απόδειξη αυτών των επιχειρημάτων βλ. [53, Theorem 10.4.8].

Πρόταση 4.7.5. *Η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι τριγωνισμένη. Οι φραγμένες παραγόμενες κατηγορίες $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ αποτελούν τριγωνισμένες υποκατηγορίες της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε, η κλάση S των ημι-ισομορφισμών στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ αποτελεί μία τοπικοποιούσα κλάση συμβατή με τον τριγωνισμό. Αφού η ομοτοπική κατηγορία είναι τριγωνισμένη, από το Θεώρημα 3.4.5 και η $\mathsf{D}(\mathcal{A}) = \mathsf{K}(\mathcal{A})[S^{-1}]$ είναι επίσης τριγωνισμένη. Η περίπτωση των φραγμένων παραγόμενων κατηγοριών προκύπτει άμεσα. ∎

Ακολουθούν δύο παρατηρήσεις στο πλαίσιο της παραγόμενης κατηγορίας οι οποίες οφείλονται στον [31].

Παρατήρηση 4.7.6. Όπως είδαμε, τα διακεκριμένα τρίγωνα της ομοτοπικής κατηγορίας είναι τα τρίγωνα τα οποία είναι ισόμορφα με την εικόνα ενός τυπικού τριγώνου (βλ. 4.5.1) στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Η τριγωνική δομή, «μεταφέρεται», έτσι, στην παραγόμενη κατηγορία μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$. Δηλαδή, όπως ορίστηκε στον Ορισμό 3.4.3, ένα τρίγωνο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$

θα είναι διακεκριμένο αν είναι ισόμορφο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ με την εικόνα ενός διακεκριμένου τριγώνου της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης. Προφανώς, ο συναρτητής μεταφοράς στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ο συναρτητής μεταφοράς των συμπλόκων στα αντικείμενα, ενώ για έναν μορφισμό $\phi = f/s$ στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ ο οποίος αναπαριστάται με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ D^\bullet & & E^\bullet \end{tikzcd}$$

θέτουμε ως $\Sigma\phi = \Sigma f/\Sigma s$, τον μορφισμό ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & \Sigma C^\bullet \arrow[dl, "\Sigma s"', "\sim"] \arrow[dr, "\Sigma f"] & \\ \Sigma D^\bullet & & \Sigma E^\bullet \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 4.7.7. Εφόσον όλοι οι ημι-ισομορφισμοί μετατρέπονται σε ισομορφισμούς στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, η παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ έχει «περισσότερους» ισομορφισμούς από την $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και έτσι είναι «ευκολότερο» για ένα τρίγωνο να είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Πιο συγκεκριμένα, σε επόμενη ενότητα θα δούμε ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ επάγει ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, κάτι που δεν ισχύει για την $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ (βλ. [31, Remark 6.8.]).

Συνοψίζοντας, αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία, έχουμε κατασκευάσει τις ακόλουθες κατηγορίες από την $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathsf{K}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\ \text{αβελιανή} & & \text{αβελιανή} & & \text{τριγωνισμένη} & & \text{τριγωνισμένη} \end{array}$$

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η δομής της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ ακολουθεί ένα παράδειγμα στο οποίο εξετάζεται πότε η εικόνα ενός μορφισμού συμπλόκων στην παραγόμενη κατηγορία ισούται με τον μηδένικό μορφισμό. Για περισσότερα (βλ. [28, Chapter 1, §4]).

Παράδειγμα 4.7.8. Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη παραγόμενη κατηγορία. Θεωρούμε έναν μορφισμό συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Τότε, αν η εικόνα του f στην παραγόμενη κατηγορία ισούται με τον μηδένικό μορφισμό, υπάρχει ένας ημι-ισομορφισμός $s\colon D^\bullet \longrightarrow D_1^\bullet$ έτσι ώστε ο μορφισμός $s \circ f$ να είναι 0-ομοτοπικός, ή ισοδύναμα, υπάρχει ένας ημι-ισομορφισμός $t\colon C_1^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ έτσι ο μορφισμός $f \circ t$ να είναι 0-ομοτοπικός.

Προφανώς, αν ο μορφισμός συμπλόκων f είναι 0-ομοτοπικός, ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη. Το αντίστροφο, ωστόσο, δεν ισχύει. Θεωρούμε για παράδειγμα το σύμπλοκο

$$C^\bullet\colon \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

και τον ταυτοτικό μορφισμό $1_{C^\bullet}\colon C^\bullet \longrightarrow C^\bullet$. Αν $s\colon C^\bullet \longrightarrow 0$ είναι ο μηδενικός μορφισμός, τότε ο s είναι ένας ημι-ισομορφισμός και $s \circ f = 0$, αλλά εύκολα βλέπουμε ότι ο μορφισμός $1_{C^\bullet}$ δεν είναι 0-ομοτοπικός καθώς σε αυτήν την περίπτωση, η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

θα ήταν διασπάσιμη, κάτι που δεν ισχύει.

Επιπλέον, αν ένας μορφισμός f ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη, τότε ο f επάγει τον μηδενικό μορφισμό στη συνομολογία. Το αντίστροφο δεν ισχύει καθώς θέτοντας ως f τον παρακάτω μορφισμό συμπλόκων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "2"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ημι-ισομορφισμός t έτσι ώστε $f \circ t = 0$. (Για περισσότερες λεπτομέρεις βλ. [28]).

Γενικά, για οποιουσδήποτε δύο μορφισμούς συμπλόκων $f, g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ισχύουν οι ακόλουθες, αυστηρά μίας κατεύθυνσης, συνεπαγωγές:

$f = g \Longrightarrow$ Οι μορφισμοί f και g είναι ομοτοπικοί $\Longrightarrow$ Οι εικόνες των μορφισμών f και g στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ίσες $\Longrightarrow \mathsf{H}^n(f) = \mathsf{H}^n(g)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 4.7.9. Ο συναρτητής $\mathsf{H}^n(-)\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ απεικονίζει ημι-ισομορφισμούς στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, από το Θεώρημα 3.4.8 ο $\mathsf{H}^n(-)$ θα αναλύεται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ μέσω ενός συναρτητή $\mathsf{H}^n_{\mathsf{D}}(-)\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "\mathsf{H}^n"'] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\mathsf{H}^n_{\mathsf{D}}"] \\
& \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Ο επαγόμενος συναρτητής $\mathsf{H}^n_{\mathsf{D}}(-)$ χάριν σύμβασης, συχνά θα συμβολίζεται με $\mathsf{H}^n(-)$.

Έχοντας κατασκευάσει έτσι τους κανονικούς συναρτητές

$$\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\pi} \mathsf{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}(\mathcal{A})$$

όπου $\pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ ο συναρτητής πηλίκο και $Q\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ ο συναρτητής τοπικοποίησης, βλέπουμε το ακόλουθο:

Παρατήρηση 4.7.10. Οποιοσδήποτε μορφισμός συμπλόκων s ο οποίος ανήκει στην κλάση S των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, απεικονίζεται εξ ορισμού μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ σε έναν ισομορφισμό στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Από την καθολική ιδιότητα της τοπικοποίησης, ο συναρτητής $Q \circ \pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ αναλύεται μέσω της τοπικοποίησης $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}]$ της κατηγορίας συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ως προς την κλάση $\tilde{S}$ των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Προκύπτει, δηλαδή ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\tilde{Q}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}] \arrow[d, dashed, "\iota"] \\
\mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] & \mathsf{D}(\mathcal{A})
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

Εξετάζοντας τον επαγόμενο συναρτητή ι του παραπάνω διαγράμματος, οδηγούμαστε στο εξής συμπέρασμα:

Θεώρημα 4.7.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\tilde{S}$ η κλάση των ημι-ισομορφισμών στην κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Τότε, ο συναρτητής $\iota\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}] \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ένας ισομορφισμός κατηγοριών.*

Απόδειξη. Αρχικά, για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet \in \mathsf{ob}(\mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}])$ από τον ορισμό των συναρτητών στο διάγραμμα (4.11) έχουμε:

$$\iota(C^\bullet) = \iota(\tilde{Q}(C^\bullet)) = Q(\pi(C^\bullet)) = Q(C^\bullet) = C^\bullet$$

δηλαδή ο συναρτητής ι είναι η ταυτότητα στα αντικείμενα.

Έστω τώρα $C^\bullet$ και $D^\bullet$ δύο σύμπλοκα στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ και $f, g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ δύο ομοτοπικοί μορφισμοί με μία ομοτοπία $\phi\colon f \rightsquigarrow g$. Αν θεωρήσουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{C^\bullet}"'] & D^\bullet \arrow[d, "1_{D^\bullet}"] \\
C^\bullet \arrow[r, "g"] & D^\bullet
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό στην ομοτοπική κατηγορία, από το Λήμμα 4.5.3 και την απόδειξή του, υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $u\colon C_f^\bullet \longrightarrow C_g^\bullet$ με

$$u^n = \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \\ -\phi^{n+1} & 1_{D^n} \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{C^\bullet}"'] & D^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "1_{D^\bullet}"'] & C_f^\bullet \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, dashed, "u"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "1_{\Sigma C^\bullet}"'] \\
C^\bullet \arrow[r, "g"] & D^\bullet \arrow[r, "i_g"] & C_g^\bullet \arrow[r, "p_g"] & \Sigma C^\bullet
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Παρόμοια, εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα 4.5.3 στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
D^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "1_{D^\bullet}"'] & C_f^\bullet \arrow[d, "u"] \\
D^\bullet \arrow[r, "i_g"] & C_g^\bullet
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, προκύπτει η ύπαρξη ενός μορφισμού $v\colon D_f^\bullet \longrightarrow D_g^\bullet$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
D^\bullet \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "1_{D^\bullet}"'] & C_f^\bullet \arrow[r, "i_{i_f}"] \arrow[d, "u"'] & D_f^\bullet \arrow[r, "p_{i_f}"] \arrow[d, dashed, "v"'] & \Sigma D^\bullet \arrow[d, "1_{\Sigma D^\bullet}"'] \\
D^\bullet \arrow[r, "i_g"] & C_g^\bullet \arrow[r, "i_{i_g}"] & D_g^\bullet \arrow[r, "p_{i_g}"] & \Sigma D^\bullet
\end{tikzcd} \tag{4.12}$$

να είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Από την απόδειξη του ιδίου λήμματος έχουμε ότι

$$v^n = \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & -\phi^{n+1} & 1_{D^n} \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε τον μορφισμό συμπλόκων $\beta_g \colon D_g^\bullet \xrightarrow{\sim} \Sigma C^\bullet$ (βλ. Σχόλιο 4.5.6) με

$$\beta_g^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο οποίος αποτελεί έναν ισομορφισμό στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Τότε, στην κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$, έχουμε:

$$\beta_g^n \circ v^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & -\phi^{n+1} & 1_{D^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} = \beta_f^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $\beta_g \circ v = \beta_f$ στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Εφαρμόζοντας αρχικά τον συναρτητή μεταφοράς Σ^{-1} έχουμε $\Sigma^{-1}\beta_g \circ \Sigma^{-1}v = \Sigma^{-1}\beta_f$ και στη συνέχεια μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης $\tilde{Q}$ προκύπτει ότι

$$\tilde{Q}(\Sigma^{-1}\beta_g) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}v) = \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\beta_f) \tag{4.13}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.5.5, οι μορφισμοί $\Sigma^{-1}\beta_g \colon \Sigma^{-1}D_g^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ και $\Sigma^{-1}\beta_f \colon \Sigma^{-1}D_f^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ είναι ισομορφισμοί στην ομοτοπική κατηγορία και

$$\Sigma^{-1}\beta_g \circ \Sigma^{-1}\alpha_g \approx 1_{C^\bullet} \qquad \text{και} \qquad \Sigma^{-1}\beta_f \circ \Sigma^{-1}\alpha_f \approx 1_{C^\bullet}$$

όπου

$$\alpha_g^n = \begin{pmatrix} -g^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \alpha_f^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, οι f και g, από το Λήμμα 4.6.3, είναι και ημι-ισομορφισμοί και οι μορφισμοί $\tilde{Q}(\Sigma\beta_f)$ και $\tilde{Q}(\Sigma\beta_g)$ είναι ισομορφισμοί στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}]$. Επιπλέον,

$$\tilde{Q}(\Sigma^{-1}\beta_g) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_g) = \tilde{Q}(1_{C^\bullet}) = 1_{C^\bullet} \Longrightarrow \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\beta_g) = \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_g)^{-1}$$

και παρόμοια

$$\tilde{Q}(\Sigma^{-1}\beta_f) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_f) = \tilde{Q}(1_{C^\bullet}) = 1_{C^\bullet} \Longrightarrow \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\beta_f) = \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_f)^{-1}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (4.13) έχουμε:

$$\tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_g)^{-1} \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}v) = \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_f)^{-1} \Longrightarrow \tilde{Q}(\Sigma^{-1}v) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_f) = \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_g) \tag{4.14}$$

Όπως στην απόδειξή του Λήμματος 4.5.7, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$p_{i_f}^n \circ \alpha_f^n = \begin{pmatrix} 1_{D^{n+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{C^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = -f^{n+1} = -\Sigma f^n$$

και εφαρμόζοντας τον συναρτητή Σ^{-1} προκύπτει ότι

$$\Sigma^{-1}p_{i_f}^n \circ \Sigma^{-1}\alpha_f^n = -f^n \Longrightarrow -\Sigma^{-1}p_{i_f}^n \circ \Sigma^{-1}\alpha_f^n = f^n$$

Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Sigma^{-1}a_f"'] & D^\bullet \\
\Sigma^{-1}D_f^\bullet \arrow[ur, "-\Sigma^{-1}p_{i_f}"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ και

$$f = -\Sigma^{-1}p_{i_f} \circ \Sigma^{-1}\alpha_f$$

Παρόμοια προκύπτει και ότι

$$g = -\Sigma^{-1}p_{i_g} \circ \Sigma^{-1}\alpha_g$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή τοπικοποίησης $\tilde{Q}$, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (4.12) και τη σχέση (4.14), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(f) &= -\tilde{Q}(\Sigma^{-1}p_{i_f}) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_f) \\
&= -\tilde{Q}(\Sigma^{-1}p_{i_g}) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}v) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_f) \\
&= -\tilde{Q}(\Sigma^{-1}p_{i_g}) \circ \tilde{Q}(\Sigma^{-1}\alpha_g) = \tilde{Q}(g)
\end{aligned}$$

Αφού για δύο ομοτοπικούς μορφισμούς συμπλόκων f και g ισχύει $\tilde{Q}(f) = \tilde{Q}(g)$, ο συναρτητής τοπικοποίησης $\tilde{Q}\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}]$ αναλύεται μέσω του συναρτητή πηλίκο $\pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$, δηλαδή προκύπτει ένα διάγραμμα συναρτητών

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\tilde{Q}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}] \arrow[d, "\iota"] \\
\mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[ur, dashed, "\phi"] & \mathsf{D}(\mathcal{A})
\end{tikzcd} \tag{4.15}$$

Εφόσον ο συναρτητής $\pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι η ταυτότητα στα αντικείμενα, έχουμε

$$\phi \circ \pi = \tilde{Q} \Longrightarrow \iota \circ \phi \circ \pi = \iota \circ \tilde{Q} = Q \circ \pi \Longrightarrow \iota \circ \phi = Q$$

και το παραπάνω διάγραμμα συναρτητών είναι μεταθετικό. Αφού ο συναρτητής ϕ απεικονίζει ημι-ισομορφισμούς στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ σε ισομορφισμούς στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}]$, αναλύεται μέσω της τοπικοποίσης $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
\mathsf{D}(\mathcal{A}) & \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}] \arrow[l, "\iota"]
\end{tikzcd} \tag{4.16}$$

Λόγω της μοναδικότητας στην καθολική ιδιότητα για την τοπικοποίηση $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "\iota\circ\phi"'] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, shift right, "\mathsf{Id}"'] \arrow[d, shift left, "\iota\circ\psi"] \\
& \mathsf{D}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

προκύπτει ότι $\iota \circ \psi \cong \mathsf{Id}(\mathcal{A})$. Από τα διαγράμματα 4.15 και 4.16 κατασκευάζουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{Q}"] & \mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "Q"] \arrow[dr, "\phi"] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\
\mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}] \arrow[r, "\iota"] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\psi"] & \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}] \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας αυτήν την φορά για την τοπικοποίηση $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}]$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\tilde{Q}"] \arrow[dr, "\phi\circ\pi"'] & \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}] \arrow[d, shift right, "\mathsf{Id}"'] \arrow[d, shift left, "\psi\circ\iota"] \\
& \mathsf{Ch}(\mathcal{A})[\tilde{S}^{-1}]
\end{tikzcd}$$

προκύπτει $\psi \circ i \cong \mathsf{Id}_{\mathsf{Ch}(\mathcal{A}[\tilde{S}^{-1}]}$. Ο συναρτητής ι επομένως είναι ισοδυναμία κατηγοριών. ■

Θα ορίσουμε μία υποκατηγορία της παραγόμενης κατηγορίας η οποία θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Για περισσότερα βλ. [28, Chapter 1, §4] και [53, Exercise 10.4.3].

Ορισμός 4.7.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{B}$ μία thick αβελιανή υποκατηγορία της. Θα συμβολίζουμε με $\mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από όλα τα σύμπλοκα $C^\bullet$ των οποίων τα αντικείμενα συνομολογίας $\mathsf{H}^n(C^\bullet)$ ανήκουν στην $\mathcal{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Παρόμοια, θα συμβολίζουμε με $\mathsf{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ την αντίστοιχη παραγόμενη κατηγορία την οποία ταυτίζουμε (βλ. Πρόταση 2.3.1) με την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ η οποία αποτελείται από όλα τα σύμπλοκα $C^\bullet$ των οποίων τα αντικείμενα συνομολογίας $\mathsf{H}^n(C^\bullet)$ ανήκουν στην $\mathcal{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Οι αντίστοιχες φραγμένες κατηγορίες $\mathsf{K}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ ορίζονται με τον προφανή τρόπο, θεωρώντας κατάλληλα φραγμένα σύμπλοκα.

Πρόταση 4.7.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{B}$ μία thick αβελιανή υποκατηγορία της. Η κατηγορία $\mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Η υποκατηγορία $\mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ είναι κλειστή στον συναρτητή μεταφοράς Σ καθώς αν $C^\bullet \in \mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, εξ ορισμού, $\mathsf{H}^n(C^\bullet) \in \mathcal{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα και $\Sigma C^\bullet \in \mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. Το αντίστροφο συμπέρασμα είναι άμεσο.

Η υποκατηγορία $\mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ είναι επίσης κλειστή στις επεκτάσεις, αφού η $\mathcal{B}$ είναι thick, άρα λαμβάνοντας υπόψιν τον χαρακτηρισμό ενός διακεκριμένου τριγώνου σε μία αβελιανή κατηγορία με τη χρήση ακριβών ακολουθιών (βλ. πχ. Πρόταση 3.7.7), βλέπουμε άμεσα ότι η δεύτερη συνθήκη της Πρότασης 3.5.1 ικανοποιείται και η $\mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ αποτελεί συνεπώς μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. ■

Σχόλιο 4.7.14. Καθώς η $\mathsf{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ είναι μία τοπικοποιούσα υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, η τοπικοποίησή της, $\mathsf{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ θα είναι μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Παρατήρηση 4.7.15. Προκύπτει η ύπαρξη ενός φυσικού συναρτητή $\mathsf{D}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ ο οποίος, γενικά, δεν είναι ούτε πλήρης, ούτε πιστός. Στην περίπτωση όμως που η κατηγορία $\mathcal{B}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, ο παραπάνω συναρτητής αποτελεί μία ισοδυναμία κατηγοριών όπως θα δούμε στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.7.16. *([28, Proposition 4.8.]) Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{B}$ μία thick αβελιανή υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν η $\mathcal{B}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα, ο φυσικός συναρτητής*
$$\mathsf{D}^+(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathsf{D}^+_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$$
είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

2. *Αν η $\mathcal{B}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα, ο φυσικός συναρτητής*
$$\mathsf{D}^-(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathsf{D}^-_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$$
είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [28, Proposition 4.8.]. ∎

Ολοκληρώνουμε με ένα σημαντικό παράδειγμα το οποίο θα αποτελέσει το κύριο αντικείμενο μελέτης του επόμενου κεφαλαίου.

Παράδειγμα 4.7.17. ([53, Exercise 10.4.6]) Έστω R ένας δεξιά και αριστερά δακτύλιος της Noether και mod-R η κατηγορία όλων των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων. Θεωρούμε την κατηγορία $\mathsf{D}_{\text{mod-}R}(\text{Mod-}R)$ η οποία αποτελείται από σύμπλοκα $C^\bullet$ των οποίων τα πρότυπα συνομολογίας $\mathsf{H}^n(C^\bullet)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αφού η mod-R είναι μία thick υποκατηγορία της Mod-R, από την Πρόταση 4.7.13 προκύπτει ότι η $\mathsf{D}_{\text{mod-}R}(\text{Mod-}R)$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία. Άμεσα, εφόσον η mod-R έχει αρκετά ενέσιμα και αρκετά προβολικά αντικείμενα, από την Πρόταση 4.7.16 υπάρχει μία ισοδυναμία κατηγοριών:
$$\mathsf{D}^b_{\text{mod-}R}(\text{Mod-}R) \cong \mathsf{D}^b(\text{mod-}R)$$

Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια μία διαδικασία η οποία δοσμένου ενός συμπλόκου $C^\bullet$ επιτρέπει τη δημιουργία με φυσικό τρόπο ενός νέου, φραγμένου συμπλόκου. Το σύμπλοκο αυτό αποκτάται ως ακολούθως:

Ορισμός 4.7.18. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Αν $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$, ορίζουμε για τυχόν $n \in \mathbb{Z}$ το σύμπλοκο $\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)$ ως το υποαντικείμενο του $C^\bullet$ με*
$$\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)^p = \begin{cases} C^n & , \text{ αν } p < n \\ \mathsf{Ker}\partial^n_C & , \text{ αν } p = n \\ 0 & , \text{ αν } p > n \end{cases}$$
και διαφορικό
$$\partial^p_{\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)} = \begin{cases} \partial^n_C & , \text{ αν } p < n \\ u & , \text{ αν } p = n \\ 0 & , \text{ αν } p > n \end{cases}$$
όπου $u\colon C^{n-1} \longrightarrow \mathsf{Ker}\partial^n_C$ ο επαγόμενος μορφισμός. Έχουμε δηλαδή
$$\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)\colon \cdots \longrightarrow C^{n-2} \xrightarrow{\partial^{n-2}_C} C^{n-1} \xrightarrow{u} \mathsf{Ker}\partial^n_C \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$
Το σύμπλοκο $\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)$ καλείται το **truncation** *$\tau_{\leqslant n}$ του συμπλόκου $C^\bullet$.*

Δυϊκά, ορίζεται και το σύμπλοκο $\tau_{\geqslant n}(C^\bullet)$.

Ορισμός 4.7.19. *Έστω $\mathcal{A}$ μία Αβελιανή κατηγορία. Αν $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$, ορίζουμε για τυχόν $n \in \mathbb{Z}$ το σύμπλοκο $\tau_{\geqslant n}(C^\bullet)$ ως το υποαντικείμενο του $C^\bullet$ με*
$$\tau_{\geqslant n}(C^\bullet)^p = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } p < n \\ \mathsf{Coker}\partial^{n-1}_C & , \text{ αν } p = n \\ C^p & , \text{ αν } p > n \end{cases}$$

και διαφορικό

$$\partial^p_{\tau_{\geqslant n}(C^\bullet)} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } p < n \\ v & , \text{αν } p = n \\ \partial^n_C & , \text{αν } p > n \end{cases}$$

όπου $v\colon \mathsf{Coker}\partial^{n-1}_C \longrightarrow C^{n+1}$ *ο επαγόμενος μορφισμός. Έχουμε δηλαδή*

$$\tau_{\geqslant n}(C^\bullet)\colon \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathsf{Coker}\partial^{n-1}_C \longrightarrow C^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}_C} C^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

Το σύμπλοκο $\tau_{\geqslant n}(C^\bullet)$ *καλείται το* **truncation** $\tau_{\geqslant n}$ *του συμπλόκου* $C^\bullet$.

Πόρισμα 4.7.20. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μία Αβελιανή κατηγορία και* $C^\bullet$ *ένα σύμπλοκο αντικειμένων της* $\mathcal{A}$. *Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν* $i\colon \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \longrightarrow C^\bullet$ *είναι ο μορφισμός φυσικής έγκλεισης συμπλόκων, τότε ο μορφισμός* $\mathsf{H}^p(i)\colon \mathsf{H}^p(\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)) \longrightarrow \mathsf{H}^p(C^\bullet)$ *είναι ισομορφισμός για* $p \leqslant n$ *και ίσος με τον μηδενικό μορφισμό για* $p > n$.

2. *Αν* $q\colon C^\bullet \longrightarrow \tau_{\geqslant n}(C^\bullet)$ *είναι ο μορφισμός φυσικής προβολής συμπλόκων, τότε ο μορφισμός* $\mathsf{H}^p(q)\colon \mathsf{H}^p(C^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^p(\tau_{\geqslant n}(C^\bullet))$ *είναι ισομορφισμός για* $p \geqslant n$ *και ίσος με τον μηδενικό μορφισμό για* $p < n$.

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε μόνο την πρώτη περίπτωση, καθώς η δεύτερη προκύπτει δυϊκά. Ο μορφισμός συμπλόκων i αναπαριστάται με το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)\colon & \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1_{C^{n-1}}"'] & \mathsf{Ker}\partial^n_C \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{ker}\partial^n_C"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
C^\bullet\colon & \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}_C"] & C^n \arrow[r, "\partial^n_C"] & C^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$i^n = \begin{cases} 1^n_C & , \text{αν } p < n \\ \mathsf{ker}\partial^n_C & , \text{αν } p = n \\ 0 & , \text{αν } p > n \end{cases}$$

Ο $\mathsf{H}^p(i)$ ειναι ισομορφισμός για $p \leqslant n$ και ίσος με τον μηδενικό μορφισμό για $p > n$. ∎

Παρατήρηση 4.7.21. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων αντικειμένων της $\mathcal{A}$, τότε ο μορφισμός συμπλόκων f επάγει έναν μορφισμό συμπλόκων $\tau_{\leqslant n}(f)\colon \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \longrightarrow \tau_{\leqslant n}(D^\bullet)$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένας προσθετικός συναρτητής $\tau_{\leqslant n}\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$.

Αν δύο μορφισμοί συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ και $g\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ομοτοπικοί με ομοτοπία $h = \{h^n\colon C^n \longrightarrow D^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, άμεσα βλέπουμε και ότι οι μορφισμοί $\tau_{\leqslant n}(f)$ και $\tau_{\leqslant n}(g)$ είναι ομοτοπικοί με ομοτοπία τον περιορισμό της h. Έτσι, επάγεται ένας προσθετικός συναρτητής: $\mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ για τον οποίο θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό $\tau_{\leqslant n}$.

Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\mathsf{H}^p(\tau_{\leqslant n}(f)) = \begin{cases} \mathsf{H}^p(f) & , \text{αν } p \leqslant n \\ 0 & , \text{αν } p > n \end{cases}$$

δηλαδή αν ο μορφισμός συμπλόκων f είναι ένας ημι-ισομορφισμός, τότε και ο μορφισμός $\tau_{\leqslant n}(f)$ είναι επίσης ένας ημι-ισομορφισμός. Προκύπτει επομένως, ότι ο συναρτητής $\tau_{\leqslant n}$ επάγει έναν προσθετικό συναρτητή: $\mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ για τον οποίον χάριν σύμβασης πάλι θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό. Ο συναρτητής $\tau_{\leqslant n}\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ συχνά θα καλείται ο **truncation functor** $\tau_{\leqslant n}$.

Δυϊκά με την παραπάνω παρατήρηση, ορίζεται ένας προσθετικός συναρτητής $\tau_{\geqslant n}\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}^+(\mathcal{A})$ και με ανάλογα επιχειρήματα και προκύπτει η ύπαρξη ενός επαγόμενου συναρτητή $\tau_{\geqslant n}\colon \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ ο οποίος καλείται ο **truncation fucntor** $\tau_{\geqslant n}$.

Μπορούμε να ορίσουμε και έναν διαφορετικό truncation functor ο οποίος, αν και γενικά δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμος, καθώς δεν διατηρεί αρκετή πληροφορία, θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 4.7.22. *Έστω $\mathcal{A}$ μία Αβελιανή κατηγορία. Αν $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$, ορίζουμε για τυχόν $n \in \mathbb{Z}$ το σύμπλοκο $\sigma_{\geqslant n}(C^\bullet)$ ως το υποαντικείμενο του $C^\bullet$ με*

$$\sigma_{\geqslant n}(C^\bullet)^p = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } p < n \\ C^p & , \text{ αν } p \geqslant n \end{cases}$$

Δυϊκά, ορίζουμε το σύμπλοκο $\sigma_{\leqslant n}(C^\bullet)$ ως το υποαντικείμενο του $C^\bullet$ με

$$\sigma_{\leqslant n}(C^\bullet)^p = \begin{cases} C^p & , \text{ αν } p < n \\ 0 & , \text{ αν } p \geqslant n \end{cases}$$

Όπως προηγουμένως, ορίζονται οι συναρτητές:

$$\sigma_{\geqslant n}\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}^+(\mathcal{A})$$

και

$$\sigma_{\leqslant n}\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}^-(\mathcal{A})$$

οι οποίοι καλούνται **λησμονικοί truncation functors**.

Παρατήρηση 4.7.23. Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ η ομοτοπική κατηγορία και $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη παραγόμενη κατηγορία. Όπως γνωρίζουμε, η κατηγορία $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ είναι μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ και η κατηγορία $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ αποτελεί εξ ορισμού μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Παρατηρούμε ότι λόγω της καθολικής ιδιότητας της τοπικοποίησης (Θεώρημα 3.4.8), υπάρχει ένας μοναδικός συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών $\mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ ο οποίος κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed] \\ \mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συναρτητές προκύπτει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.7.24. *([40, Lemma 37.]) Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Τότε, υπάρχει ένα φυσικό μεταθετικό διάγραμμα τριγωνισμένων κατηγοριών της μορφής*

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[dr] & \\ \mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \\ & \mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

στο οποίο κάθε συναρτητής είναι πλήρης και πιστός.

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι ο φυσικός συναρτητής $\mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός. Άμεσα, η τοπικοποιούσα κλάση S^- αποτελείται από τους μορφισμούς της S οι οποίοι είναι μορφισμοί άνω φραγμένων συμπλόκων, έτσι $S^- = S \cap \mathsf{Mor}(\mathsf{K}^-(\mathcal{A}))$. Έστω τώρα $s\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας ημι-ισομορφισμός όπου το σύμπλοκο $D^\bullet$ είναι άνω φραγμένο, δηλαδή $D^\bullet \in \mathsf{ob}(\mathsf{D}^-(\mathcal{A}))$. Τότε, υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $D^p = 0$ για κάθε $p > n$, άρα και $\mathsf{H}^p(D^\bullet) = 0$ για κάθε $p > n$. Εφόσον για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ ο μορφισμός $\mathsf{H}^p(s)\colon \mathsf{H}^p(C^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^p(D^\bullet)$ είναι ισομορφισμός, θα ισχύει $\mathsf{H}^p(C^\bullet) = 0$ για κάθε $p > n$. Από το Λήμμα 4.7.20, έτσι, ο μορφισμός συμπλόκων $i\colon \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \longrightarrow C^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός, δηλαδή $i \in S$. Συνεπώς, και ο μορφισμός $s \circ i\colon \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός και αφού τα σύμπλοκα $\tau_{\leqslant n}(C^\bullet)$ και $D^\bullet$ είναι άνω φραγμένα, θα ισχύει $s \circ i \in S^-$. Από την Πρόταση 2.3.1 προκύπτει ότι ο φυσικός συναρτητής $\mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.

Δυϊκά, εξ ορισμού $S^+ = S \cap \mathsf{Mor}(\mathsf{K}^+(\mathcal{A}))$, ενώ αν $s\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός όπου το συμπλοκο $C^\bullet$ είναι κάτω φραγμένο, υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $C^p = 0$ για κάθε $p < n$. Άρα $\mathsf{H}^p(C^\bullet) = 0$ για κάθε $p < n$ και αφού ο $\mathsf{H}^p(s)\colon \mathsf{H}^p(C^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^p(D^\bullet)$ είναι ισομορφισμός, ισχύει $\mathsf{H}^p(D^\bullet) = 0$ για κάθε $p < n$. Από το Λήμμα 4.7.20, ο μορφισμός συμπλόκων $q\colon D^\bullet \longrightarrow \tau_{\geqslant n}(D^\bullet)$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός, συνεπώς, ο μορφισμός συμπλόκων $q \circ s\colon C^\bullet \longrightarrow \tau_{\geqslant n}(D^\bullet)$ επίσης είναι ένας ημι-ισομορφισμός και αφού τα σύμπλοκα και είναι κάτω φραγμένα, ισχύει $q \circ w \in S^+$. Από την Πρόταση 2.3.2 προκύπτει ότι ο φυσικός συναρτητής $\mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.

Με τα παραπάνω επιχειρήματα συμπεραίνουμε ανάλογα ότι οι φυσικοί συναρτητές $\mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ είναι επίσης πλήρεις και πιστοί. Συνθέτοντας αποκτούμε δύο πλήρεις και πιστούς συναρτητές $\mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ και από τη μοναδικότητα της καθολικής ιδιότητας της τοπικοποίησης προκύπτει η μεταθετικότητα του διαγράμματος. ■

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα με ένα θεώρημα το οποίο μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την κατηγορία $\mathcal{A}$ ως μία πλήρη υποκατηγορία της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Θεώρημα 4.7.25. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ο φυσικός συναρτητής $D\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ ο οποίος ορίζεται ως η σύνθεση του φυσικού συναρτητή $K\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ με τον συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Έστω X, Y δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι η φυσική απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(X,Y) \tag{4.17}$$

είναι 1-1 και επί.

Αρχικά, έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$ έτσι ώστε $D(f) = 0$ στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα κατηγοριών

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "C"] & \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mathsf{H}^0"'] & \mathsf{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, dashed, "\mathsf{H}^0_{\mathsf{K}}"] & \mathsf{D}(\mathcal{A}) \arrow[dl, dashed, "\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}"] \\
& & \mathcal{A} &
\end{tikzcd} \tag{4.18}$$

όπου $C\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ειναι ο πλήρης και πιστός συναρτητής της Παρατήρησης 4.1.15, ενώ οι συναρτητές $\mathsf{H}^0_{\mathsf{K}}$ και $\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}$ είναι οι επαγόμενοι συναρτητές συνομολογίας των Παρατηρήσεων 4.7.9 και 4.3.6 αντίστοιχα. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος και τον ορισμό του συναρτητή C, έχουμε

$$\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}} \circ \mathsf{D}(f) = \mathsf{H}^0 \circ C(f) = f$$

Συνεπώς
$$\mathsf{D}(f) = 0 \Longrightarrow \mathsf{H}^0_{\mathsf{D}} \circ \mathsf{D}(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$$
η αλλιώς ο $\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}$ είναι ένας αριστερός αντίστροφος του D και η απεικόνιση (4.17) είναι 1-1.

Μένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι και επί. Έστω $\phi\colon D(X) \longrightarrow D(Y)$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Τότε ο ϕ μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & C^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
D(X) & & D(Y)
\end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμοί s και f ανήκουν στην ομοτοπική κατηγορία και ο $s\colon C^\bullet \longrightarrow \mathsf{D}(X)$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός. Λόγω αυτού, έχουμε $\mathsf{H}^p(C^\bullet) = 0$ για κάθε $p \neq 0$ και από το Λήμμα 4.7.20 ο μορφισμός συμπλόκων $i\colon \tau_{\leqslant 0}(C^\bullet) \longrightarrow C^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός. Αποκτούμε έτσι ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & C^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
D(X) & \tau_{\leqslant 0}(C^\bullet) \arrow[u, "i"] \arrow[d, "1"] & D(Y) \\
 & \tau_{\leqslant 0}(C^\bullet) \arrow[ul, "s\circ i", "\sim"'] \arrow[ur, "f\circ i"'] &
\end{tikzcd}$$

Άρα $f \circ i/s \circ i = f/s = \phi$ και μπορούμε εξ αρχής να υποθέσουμε ότι ο μορφισμός ϕ αναπαριστάται με ένα αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & C^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
D(X) & & D(Y)
\end{tikzcd}$$

όπου για το σύμπλοκο $C^\bullet$ ισχύει $C^n = 0$ για κάθε $n > 0$. Έστω $u\colon C^\bullet \longrightarrow D(Y)$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ ο οποίος αποτελεί έναν αντιπρόσωπο της κλάσης ομοτοπίας του μορφισμού f. Τότε θεωρώντας όπως πριν τους συναρτητές $C\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ και $\pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$, έχουμε $f = \pi(u) = \pi(C(u^0))$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{-1} \arrow[r, "\partial_C^{-1}"] \arrow[d] & C^0 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "u_1^0"'] \arrow[d, shift left, "u^0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

αν u_1 είναι ένας άλλος αντιπρόσωπος της κλάσης ομοτοπίας του μορφισμού f, η μόνη ομοτοπία $u \rightsquigarrow u_1$ είναι η μηδενική, και αφού οι u και u_1 είναι ομοτοπικοί, θα έχουμε $u - u_1 = 0 \Longrightarrow u = u_1$. Έτσι, ο αντιπρόσωπος u είναι μοναδικός. Παρόμοια, θεωρούμε έναν μορφισμό συμπλόκων $v\colon C^\bullet \longrightarrow D(X)$ έτσι ώστε $s = \pi(v) = \pi(C(v^0))$ και ανάλογα προκύπτει ότι ο v είναι μοναδικός. Αν $Q\colon\ \mathsf{K}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ είναι ο συναρτητής τοπικοποίησης, έχουμε:
$$\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$$

και εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}} \colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathcal{A}$, από το διάγραμμα 4.18 έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}(\phi) &= \mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}(Q(f)) \circ \mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}(Q(s)^{-1}) \\
&= \mathsf{H}^0_{\mathsf{K}}(f) \circ \mathsf{H}^0_{\mathsf{K}}(s^{-1}) \\
&= \mathsf{H}^0_{\mathsf{K}}(\pi(u)) \circ \mathsf{H}^0_{\mathsf{K}}(\pi(v^{-1})) \\
&= \mathsf{H}^{(}u) \circ \mathsf{H}^0(v)^{-1} \\
&= \mathsf{H}^0(C(u^0)) \circ \mathsf{H}^0(C(v^0))^{-1} = u^0 \circ (v^0)^{-1}
\end{aligned}$$

Επομένως, ο $\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}(\phi) \colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$ και

$$\mathsf{D}(\mathsf{H}^0_{\mathsf{D}}(\phi)) = \mathsf{D}(u^0 \circ (v^0)^{-1}) = (Q \circ \pi \circ C)(u^0 \circ (v^0)^{-1}) = Q(\pi(u) \circ (v)^{-1}) = Q(f) \circ Q(s)^{-1} = \phi$$

δηλαδή η απεικόνιση (4.17) είναι επί, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ■

4.8 Σύντομες Ακριβείς Ακολουθίες και Διακεκριμένα Τρίγωνα

Ολοκληρώνουμε το παρόν κεφάλαιο κάνοντας μία αναφορά στη σχέση μεταξύ σύντομων ακριβών ακολουθιών και διακεκριμένων τριγώνων. Όπως δείξαμε στην Πρόταση 4.1.16, αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία, τότε και η αντίστοιχη κατηγορία συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ είναι επίσης αβελιανή.

Πρόταση 4.8.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{g} E^\bullet \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Τότε, υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $u \colon C^\bullet_f \longrightarrow E^\bullet$ ο οποίος είναι ένας ημι-ισομορφισμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε το τυπικό τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_f \arrow[dl, "p_f"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D^\bullet \arrow[ul, "i_f"']
\end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό συμπλόκων $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ και έναν μορφισμό συμπλόκων $u \colon C^\bullet_f \longrightarrow E^\bullet$ με $u = g \circ q_f$ όπου $q_f \colon C^\bullet_f = \Sigma C^\bullet \oplus D^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ η φυσική προβολή με

$$q^n_f = \begin{pmatrix} 0 & 1_{D^n} \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$u^{n+1} \circ \partial^n_{C_f} = \begin{pmatrix} 0 & g^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{n+1}_C & 0 \\ f^{n+1} & \partial^n_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{n+1} f^{n+1} & g^{n+1} \partial^n_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial^n_E g^n \end{pmatrix} \partial^n_E \circ \begin{pmatrix} 0 & g^n \end{pmatrix} = \partial^n_E \circ u^n$$

Επομένως ο u είναι πράγματι ένας μορφισμός συμπλόκων και αφού ο g είναι επιμορφισμός, ο u θα είναι ένας επιμορφισμός συμπλόκων. Από το Λήμμα 4.5.3 υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $v \colon C^\bullet_{1_C} \longrightarrow C^\bullet_f$ με

$$v^n = \begin{pmatrix} 1_{C^{n+1}} & 0 \\ 0 & f^n \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο οποίος συμπληρώνει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "1_{C^\bullet}"] \arrow[d, "1_{C^\bullet}"'] & D^\bullet \arrow[d, "f"] \\ C^\bullet \arrow[r, "f"'] & D^\bullet \end{tikzcd}$$

σε ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "1_{C^\bullet}"] \arrow[d, "1_{C^\bullet}"'] & C^\bullet \arrow[r, "i_{1_{C^\bullet}}"] \arrow[d, "f"'] & C^\bullet_{1_{C^\bullet}} \arrow[r, "p_{1_{C^\bullet}}"] \arrow[d, dashed, "v"'] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\Sigma 1_{C^\bullet}"'] \\ C^\bullet \arrow[r, "f"'] & D^\bullet \arrow[r, "i_f"] & C^\bullet_f \arrow[r, "p_f"] & \Sigma C^\bullet \end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό με ακρίβεια ομοτοπίας. Ο μορφισμός συμπλόκων v είναι μονομορφισμός, αφού ο f είναι μονομορφισμός και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\mathsf{Im} v^n = C^{n+1} \oplus \mathsf{Im} f^{n+1} = C^{n+1} \oplus \mathsf{Ker} g^n = \mathsf{Ker} u^n$$

Έτσι, η ακολουθία

$$0 \longrightarrow C^\bullet_{1_{C^\bullet}} \xrightarrow{v} C^\bullet_f \xrightarrow{u} E^\bullet \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.5.9, στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ισχύει $C^\bullet_{1_{C^\bullet}} = 0$ και άρα $\mathsf{H}^n(C^\bullet_{1_{C^\bullet}}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θεωρώντας τη μεγάλη ακριβή ακολουθία στη συνομολογία:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(C^\bullet_{1_{C^\bullet}}) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(v)} \mathsf{H}^n(C^\bullet_f) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(u)} \mathsf{H}^n(E^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^{n+1}(C^\bullet_{1_{C^\bullet}}) \longrightarrow \cdots$$

η οποία προκύπτει από την παραπάνω ακριβή ακολουθία, έπεται ότι ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(u)\colon \mathsf{H}^n(C^\bullet_f) \longrightarrow \mathsf{H}^n(E^\bullet)$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ αποδεικνύοντας το ζητούμενο. ∎

Χρησιμοποιώντας τον κώνο $C^\bullet_g$ του μορφισμού g στην παραπάνω πρόταση αποκτούμε την ακόλουθη δυϊκή:

Πρόταση 4.8.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{g} E^\bullet \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Τότε, υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων $v\colon C^\bullet_f \longrightarrow \Sigma^{-1} C^\bullet_g$ με

$$v^n = \begin{pmatrix} f^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο οποίος είναι ένας ημι-ισομορφισμός.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 4.8.1. ∎

Από την Πρόταση 4.8.1 προκύπτει ότι η εικόνα του μορφισμού $u\colon C^\bullet_f \longrightarrow E^\bullet$ είναι ένας ισομορφισμός στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Αυτό επιτρέπει έναν χαρακτηρισμό των διακεκριμένων τριγώνων στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ με χρήση ακριβών ακολουθιών ο οποίος είναι ιδιαίτερα εύχρηστος.

Πρόταση 4.8.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Τότε, κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων*

$$0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{g} E^\bullet \longrightarrow 0$$

προσδιορίζει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ C^\bullet \arrow[rr, "\underline{f}"] & & D^\bullet \arrow[ul, "\underline{g}"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$*, όπου με* $\underline{f}\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ *και* $\underline{g}\colon D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ *συμβολίζουμε τις εικόνες των μορφισμών συμπλόκων* f *και* g *αντίστοιχα μέσω του συναρτητή* $Q \circ \pi\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Από τα παραπάνω, υπάρχει ένας ισομορφισμός τριγώνων

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\underline{1}_{C^\bullet}"', "\wr"] & D^\bullet \arrow[r, "\underline{i}_f"] \arrow[d, "\underline{1}_{D^\bullet}"', "\wr"] & C_f^\bullet \arrow[r, "\underline{p}_f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\wr"] & \Sigma C^\bullet \arrow[d, "\underline{1}_{\Sigma C^\bullet}"', "\wr"] \\ C^\bullet \arrow[r, "\underline{f}"'] & D^\bullet \arrow[r, "\underline{g}"'] & E^\bullet \arrow[r] & \Sigma C^\bullet \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και αφού η πρώτη γραμμή του παραπάνω διαγράμματος είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο, και η δεύτερη γραμμή θα είναι επίσης ένα διακεκριμένο τρίγωνο ■

Παρατήρηση 4.8.4. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να «ανυψώσουμε» τον συνδετικό μορφισμό του Λήμματος 4.4.9 σε έναν μορφισμό στην παραγόμενη κατηγορία. Η παραπάνω πρόταση τονίζει μία ουσιαστική διαφορά της παραγόμενης κατηγορίας από την ομοτοπική, καθώς στην ομοτοπική κατηγορία δεν ισχύει το αντίστοιχο συμπέρασμα. Για παράδειγμα (βλ. [31, Remark 6.8.]), αν θεωρήσουμε την σύντομη ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

και την εικόνα της στην κατηγορία συμπλόκων μέσω του συναρτητή έγκλεισης $C\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathsf{Ab})$ (βλ. Παρατήρηση 4.1.15), προκύπτει μία σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων. Διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό για τα αντίστοιχα stalk complexes, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός $w\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \Sigma(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ στην $\mathsf{K}(\mathsf{Ab})$, έτσι ώστε το ακόλουθο τρίγωνο να είναι διακεκριμένο

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[dl, "w"', "{[1]}"] & \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[rr] & & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}(\mathsf{Ab})$.Τότε, αφού τα παραπάνω σύμπλοκα είναι stalk complexes, δεν υπάρχει μη μηδενικός μορφισμός από το $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ στο αντίστοιχο μετατοπισμένο σύμπλοκο, άρα έχουμε απαραίτητα $w = 0$. Έτσι, από το Πόρισμα 3.3.9, το παραπάνω διακεκριμένο τρίγωνο είναι διασπάσιμο. Υπάρχει, άρα, ένας ισομορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, δηλαδή μία ομοτοπική ισοδυναμία στην $\mathsf{Ch}(\mathsf{Ab})$: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Όπως αναφέρθηκε, δεν υπάρχουν μη μηδενικοί ομοτοπικοί μορφισμοί μεταξύ των παραπάνω συμπλόκων, συνεπώς ο ισομορφισμός αυτός αποτελεί έναν ισομορφισμό αβελιανών ομάδων, κάτι που όπως γνωρίζουμε δεν ισχύει και οδηγούμαστε σε αντίφαση.

Λήμμα 4.8.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $C^\bullet$, $D^\bullet$ δύο σύμπλοκα με $C^p = 0$ για κάθε $p \geqslant n$ και $D^p = 0$ για κάθε $p < n$ όπου $n \in \mathbb{Z}$. Τότε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ένας μορφισμός $\phi = f/s \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet)$ ο οποίος αναπαριστάται με ένα αριστερό roof της μορφής

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ C^\bullet & & D^\bullet \end{tikzcd}$$

όπου οι μορφισμοί f και g ανήκουν στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Εφόσον ο μορφισμός συμπλόκων $s\colon E^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός και $\mathsf{H}^p(C^\bullet) = 0$ για κάθε $p \geqslant n$ θα έχουμε $\mathsf{H}^p(E^\bullet) = 0$ για κάθε $p \geqslant n$. Από το Πόρισμα 4.7.20, ο μορφισμός φυσικής έγκλεισης $i\colon \tau_{\leqslant n-1}(E^\bullet) \longrightarrow E^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός και το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ C^\bullet & \tau_{\leqslant n-1}(E^\bullet) \arrow[u, "i"] \arrow[d, "1"] & D^\bullet \\ & \tau_{\leqslant n-1}(E^\bullet) \arrow[ul, "s\circ i", "\sim"'] \arrow[ur, "f\circ i"'] & \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, $(f \circ i)/(s \circ i) = f/s = \phi$ και ο μορφισμός ϕ μπορεί να αναπαρασταθεί από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\leqslant n-1}(E^\bullet) \arrow[dl, "s\circ i"', "\sim"] \arrow[dr, "f\circ i"] & \\ C^\bullet & & D^\bullet \end{tikzcd}$$

Αφού $D^p = 0$ για κάθε $p < n$, ο μορφισμός $f \circ i\colon \tau_{\leqslant n-1}(C^\bullet) \longrightarrow D^\bullet$ είναι ο μηδενικός και άμεσα, $\phi = 0$. ■

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα, δοσμένου ενός συμπλόκου σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ μπορούμε πάντοτε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο το οποίο να είναι διακεκριμένο στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Διατηρώντας, έτσι τον συμβολισμό της Πρότασης 4.8.3, έχουμε:

Πρόταση 4.8.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη παραγόμενη κατηγορία. Τότε για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός*

$$h\colon \tau_{\geqslant n+1}(C^\bullet) \longrightarrow \Sigma \circ \tau_{\leqslant n}(C^\bullet)$$

στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ έτσι ώστε το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geqslant n+1}(C^\bullet) \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \arrow[rr] & & C^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

να είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το σύμπλοκο $C^\bullet$, κατασκευάζουμε ένα σύμπλοκο $D^\bullet$ στην $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ με

$$D^p = \begin{cases} 0, & \text{αν } p < n \\ \mathsf{Coim}\partial_C^n, & \text{αν } p = n \\ C^p, & \text{αν } p > n \end{cases} \qquad \text{και διαφορικό} \qquad \partial_D^p = \begin{cases} 0, & \text{αν } p < n \\ u, & \text{αν } p = n \\ \partial_C^p, & \text{αν } p > n \end{cases}$$

για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ όπου $u \colon \mathsf{Coim}\partial_C^n \longrightarrow C^{n+1}$ ο επαγόμενος μορφισμός. Τότε, άμεσα βλέπουμε ότι η παρακάτω ακολουθία συμπλόκων είναι ακριβής

$$0 \longrightarrow \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \longrightarrow 0$$

και από την Πρόταση 4.8.3 αποκτούμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & D^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \arrow[rr] & & C^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{T_1}$$

στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$. Προφανώς έχουμε $\mathsf{H}^p(D^\bullet) = 0$ για κάθε $p \leqslant n$ και $\mathsf{H}^p(D^\bullet) = \mathsf{H}^p(C^\bullet)$ για κάθε $p > n$. Θεωρούμε έτσι τον μορφισμό φυσικής προβολής συμπλόκων:

$$D^\bullet \longrightarrow \tau_{\geqslant n+1}(D^\bullet) = \tau_{\geqslant n+1}(C^\bullet)$$

ο οποίος αναπαριστάται με το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Coim}\partial_C^n \arrow[r] \arrow[d] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathsf{Coker}\partial_C^n \arrow[r] & C^{n+2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

και εύκολα προκύπτει ότι είναι ένας ημι-ισομορφισμός. Έτσι, τα σύμπλοκα $D^\bullet$ και $\tau_{\geqslant n+1}(C^\bullet)$ είναι ισόμορφα στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ και από το τρίγωνο (T_1) αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \tau_{\geqslant n+1}(C^\bullet) \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ \tau_{\leqslant n}(C^\bullet) \arrow[rr] & & C^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Τέλος, η μοναδικότητα του μορφισμού h στην $\mathsf{D}(\mathcal{A})$, εξασφαλίζεται από το Λήμμα 4.8.5. ■

4.9 Παραγόμενοι Συναρτητές

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με μία ενότητα η οποία αποτελεί μία σύντομη αναφορά στη θεωρία των παραγόμενων συναρτητών. Σκοπός είναι ο ορισμός της έννοιας ενός παραγόμενου συναρτητή, έτσι ώστε να γίνει πιο κατανοητός ο συναρτητής Ext ο οποίος θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στα επόμενα κεφάλαια. Γενικά ωστόσο, η θεωρία των παραγόμενων συναρτητών, έχει ιδιαίτερο βάθος και ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας διατριβής και για τον λόγο αυτόν οι ορισμοί και τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας θα παρουσιαστούν συνοπτικά. Η πορεία η οποία θα ακολουθηθεί είναι σύμφωνη με τους Milicic, βλ. [39, Chapter 5] και Weibel, βλ. [53, §2, §10.5] στους οποίους και παραπέμπουμε για μία πιο λεπτομερή ανάλυση της θεωρίας των παραγόμενων συναρτητών.

Έστω $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής μεταξύ δύο αβελιανών κατηγοριών. Εφόσον ο F είναι προσθετικός, διατηρεί τις ομοτοπικές ισοδυναμίες και έτσι μπορεί να επεκταθεί σε έναν προσθετικό συναρτητή $\mathsf{Ch}(F)\colon \mathsf{Ch}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{B})$ και στη συνέχεια σε έναν προσθετικό συναρτητή $\mathsf{K}(F)\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{B})$ (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [39, Chapter 5, §1.1, §1.2]). Εφόσον ο $\mathsf{K}(F)$ μετατίθεται με τον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων, αποτελεί έναν συναρτητή τριγωνισμένων κατηγοριών.

Ένα φυσικό ερώτημα το οποίο προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία είναι αν ο $\mathsf{K}(F)$ μπορεί να επεκταθεί σε έναν συναρτητή $\mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{B})$. Αν ο $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ είναι ένας ακριβής συναρτητής, τότε πράγματι αυτό είναι δυνατό. Ωστόσο, γενικότερα, αν ο F δεν είναι ακριβής, ο συναρτητής $\mathsf{K}(F)\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{B})$ δεν θα διατηρεί τους ημι-ισομορφισμούς. Με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε στον ορισμό του παραγόμενου συναρτητή, ο οποίος ικανοποιεί μία ασθενέστερη συνθήκη.

Ορισμός 4.9.1. *([39, Chapter 5, §1.5]) Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Τότε, ο F επάγει έναν ακριβή συναρτητή $\mathsf{K}(F)\colon \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^*(\mathcal{B})$. Θεωρούμε τις αντίστοιχες παραγόμενες κατηγορίες $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ και $\mathsf{D}^*(\mathcal{B})$, καθώς και τους συναρτητές τοπικοποίησης $Q_{\mathcal{A}}\colon \mathsf{K}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ και $Q_{\mathcal{B}}\colon \mathsf{K}^*(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$.*

Ένας (καθολικός) **δεξιά παραγόμενος συναρτητής (right derived functor)** *του F είναι ένα ζεύγος που αποτελείται από έναν ακριβή συναρτητή $\mathsf{R}F\colon \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ και έναν φυσικό μετασχηματισμό συναρτητών $\epsilon_F\colon Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F) \longrightarrow \mathsf{R}F \circ Q_{\mathcal{A}}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Έστω $G\colon \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ ένας συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών και $\epsilon\colon Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F) \longrightarrow G \circ Q_{\mathcal{A}}$ ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών $\eta\colon \mathsf{R}F \longrightarrow G$ έτσι ώστε το διάγραμμα συναρτητών*

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F) \arrow[r, "\epsilon_F"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & \mathsf{R}F \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, dashed, "\eta \circ Q_{\mathcal{A}}"] \\
 & G \circ Q_{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

  να είναι μεταθετικό.

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό, δυϊκά ορίζεται και η έννοια ενός αριστερά παραγόμενου συναρτητή:

Ορισμός 4.9.2. *([39, Chapter 5, §1.5]) Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής.*

Ένας (καθολικός) **αριστερά παραγόμενος συναρτητής (left derived functor)** *του F είναι ένα ζεύγος που αποτελείται από έναν ακριβή συναρτητή $\mathsf{L}F\colon \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ και έναν φυσικό μετασχηματισμό συναρτητών $\epsilon_F\colon \mathsf{L}F \circ Q_{\mathcal{A}} \longrightarrow Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F)$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω καθολική ιδιότητα:*

- *Έστω $G\colon \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ ένας συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών και $\epsilon\colon G \circ Q_{\mathcal{A}} \longrightarrow Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F)$ ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός φυσικός* *μετασχηματισμός συναρτητών* $\eta\colon G \longrightarrow \mathsf{L}F$ *έτσι ώστε το διάγραμμα συναρτητών*

$$\begin{tikzcd}
 & G \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[dl, dashed, "\eta\circ Q_{\mathcal{A}}"'] \arrow[d, "\epsilon"] \\
\mathsf{L}F \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\epsilon_F"] & Q_{\mathcal{B}} \circ F
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Παρατήρηση 4.9.3. Από την καθολική ιδιότητα στον ορισμό ενός δεξιά (αντίστοιχα αριστερά) παραγόμενου συναρτητή, προκύπτει ότι αν ένας δεξιά (αντίστοιχα αριστερά) παραγόμενος συναρτητής υπάρχει, τότε είναι μοναδικός με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού συναρτητών.

Παράδειγμα 4.9.4. Αν $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ είναι ένας ακριβής συναρτητής μεταξύ αβελιανών κατηγοριών, τότε, όπως προαναφέρθηκε, ο F διατηρεί τους ημι-ισομορφισμούς. Έτσι, ο επαγόμενος ακριβής συναρτητής $\mathsf{D}(F)\colon\ \mathsf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^*(\mathcal{B})$ αποτελεί έναν δεξιά παραγόμενο και έναν αριστερά παραγόμενο συναρτητή του F.

Παρατήρηση 4.9.5. Εύκολα προκύπτει (βλ. για παράδειγμα [39, Chapter 3]) ότι η δυϊκή κατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ (αντίστοιχα $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$, αντίστοιχα $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$, αντίστοιχα $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$) είναι ισοδύναμη με την κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A}^{\mathsf{op}})$ (αντίστοιχα $\mathsf{K}^+(\mathcal{A}^{\mathsf{op}})$, αντίστοιχα $\mathsf{K}^-(\mathcal{A}^{\mathsf{op}})$, αντίστοιχα $\mathsf{K}^b(\mathcal{A}^{\mathsf{op}})$). Ανάλογα, υπάρχουν οι αντίστοιχες ισοδυναμίες κατηγοριών για τις παραγόμενες κατηγορίες. Ως αποτέλεσμα, βλέπουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{R}F\colon\ \mathsf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{B})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ είναι ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{L}F\colon\ \mathsf{D}(\mathcal{A}^{\mathsf{op}}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{B}^{\mathsf{op}})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathsf{op}}$.

- Ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{R}F\colon\ \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^+(\mathcal{B})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ είναι ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{L}F\colon\ \mathsf{D}^-(\mathcal{A}^{\mathsf{op}}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{B}^{\mathsf{op}})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathsf{op}}$.

- Ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{R}F\colon\ \mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{B})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ είναι ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{L}F\colon\ \mathsf{D}^+(\mathcal{A}^{\mathsf{op}}) \longrightarrow \mathsf{D}^+(\mathcal{B}^{\mathsf{op}})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathsf{op}}$.

- Ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{R}F\colon\ \mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(\mathcal{B})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ είναι ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{L}F\colon\ \mathsf{D}^b(\mathcal{A}^{\mathsf{op}}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(\mathcal{B}^{\mathsf{op}})$ του συναρτητή $F\colon \mathcal{A}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathsf{op}}$. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι υπάρχει μία δυϊκότητα μεταξύ των δεξιά και αριστερά παραγόμενων συναρτητών, γιαυτό και στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε κυρίως στη μελέτη των δεξιά παραγόμενων συναρτητών.

Ένα εύλογο ερώτημα το οποίο δημιουργείται είναι αν η ύπαρξη των παραγόμενων συναρτητών εξασφαλίζεται πάντοτε. Γενικότερα, αυτό δεν ισχύει και για τον σκοπό αυτόν θα εισάγουμε μία ικανή συνθήκη στην $\mathcal{A}$ και στον συναρτητή F. Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.9.6. *Έστω* $\mathcal{A}$ *και* $\mathcal{B}$ *δύο αβελιανές κατηγορίες και* $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *ένας προσθετικός συναρτητής. Μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία* $\mathcal{D}$ *της* $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ *θα καλείται* **δεξιά προσαρμοσμένη (right adapted)** *για τον* F*, αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Για κάθε αντικείμενο* $C^\bullet \in \mathsf{ob}(\mathsf{K}^*(\mathcal{A}))$*, υπάρχει ένα αντικείμενο* $D^\bullet \in \mathsf{ob}(\mathcal{D})$ *και ένας ημι-ισομορφισμός* $C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$.

2. *Για κάθε ακυκλικό σύμπλοκο* $D^\bullet$ *στην* $\mathcal{D}$*, το σύμπλοκο* $\mathsf{K}(F)(D^\bullet)$ *είναι ακυκλικό στην* $\mathsf{K}^*(\mathcal{B})$.

Θεώρημα 4.9.7. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Αν υπάρχει μία δεξιά προσαρμοσμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^*(\mathcal{A})$ για τον F, τότε υπάρχει ένας δεξιά παραγόμενος συναρτητής $(\mathsf{R}F, \epsilon_F)$ του F από την $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ στην $\mathsf{D}^*(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [39, 1.5.3. THEOREM.]. ■

Σχόλιο 4.9.8. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ο ορισμός των παραγόμενων συναρτητών μπορεί να γίνει και σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Αν θεωρήσουμε έναν ακριβή συναρτητή τριγωνισμένων κατηγοριών $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ και μία τοπικοποιούσα κλάση S στην $\mathcal{C}$ συμβατή με τον τριγωνισμό, είναι δυνατό να ορίσουμε έναν (δεξιά) παραγόμενο συναρτητή $\mathsf{R}F\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}$. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτήν την προσέγγιση βλ. [39, Chapter 5, §1.3, §1.4].

Επιστρέφουμε τώρα στην περίπτωση μίας αβελιανής κατηγορίας. Σύμφωνα με τον Grothendieck, ένας παραγόμενος συναρτητής μεταξύ δύο αβελιανών κατηγοριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αποτελεί έναν δ-συναρτητή αβελιανών κατηγοριών (βλ. [53, 2.1 δ-Functors]). Αρχικά, θα οριστούν οι έννοιες των ενέσιμων και προβολικών αναλύσεων στα πλαίσια της κατηγορίας συμπλόκων.

Όπως είναι γνωστό, αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και X ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$, μία ενέσιμη ανάλυση $X \longrightarrow I^\bullet$ του X είναι ένα ακριβές σύμπλοκο της μορφής

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

όπου το αντικείμενο I^n της $\mathcal{A}$ είναι ενέσιμο για κάθε $n \geqslant 0$.

Η έννοια αυτή μπορεί να ορισθεί γενικά για σύμπλοκα:

Ορισμός 4.9.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Μία* **ενέσιμη ανάλυση** *του $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο $I^\bullet$ μαζί με έναν μορφισμό συμπλόκων $\alpha\colon C^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:*

1. *Το I^n είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο της $\mathcal{A}$ για κάθε $n \geqslant n_0$.*
2. *Ο μορφισμός συμπλόκων $\alpha\colon C^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός.*

Μία ενέσιμη ανάλυση $\alpha\colon C^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ αναπαριστάται με ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{n-1}"'] & C^n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n \arrow[r] & I^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Σχόλιο 4.9.10. Αν $I^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο ενέσιμων αντικειμένων με $I^n = 0$ για κάθε $n < 0$, τότε μία ενέσιμη ανάλυση

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

ενός αντικειμένου X της $\mathcal{A}$ περιέχει ακριβώς την ίδια πληροφορία με τον μορφισμό συμπλόκων $X^\bullet \longrightarrow I^\bullet$, όπου με $X^\bullet$ συμβολίζουμε το αντίστοιχο stalk complex του X.

Δυϊκά, αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και X ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$, μία προβολική ανάλυση $P^\bullet \longrightarrow X$ του X είναι ένα ακριβές σύμπλοκο της μορφής

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

όπου το αντικείμενο P^n της $\mathcal{A}$ είναι προβολικό για κάθε $n \leqslant 0$.

Ο ορισμός επεκτείνεται γενικότερα για σύμπλοκα:

Ορισμός 4.9.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Μία* **προβολική ανάλυση** *του $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο $P^\bullet$ μαζί με έναν μορφισμό συμπλόκων $\alpha\colon P^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:*

1. *Το P^n είναι ένα προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ για κάθε $n \leqslant n_0$.*

2. *Ο μορφισμός συμπλόκων $\alpha\colon P^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ είναι ένας ημι-ισομορφισμός.*

Μία προβολική ανάλυση $\alpha\colon C^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ αναπαριστάται με ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{n-1}"'] & P^n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^n"'] & P^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r] & C^n \arrow[r] & C^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Στο Κεφάλαιο 1 ορίστηκε πότε θα λέμε ότι μία αβελιανή κατηγορία έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα (βλ. Ορισμός 1.4.23) και πότε αρκετά προβολικά αντικείμενα (βλ. Ορισμός 1.4.28). Υπό αυτές τις προϋποθέσεις αντίστοιχα προκύπτουν τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 4.9.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία η οποία έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{A}$ έχει μία ενέσιμη ανάλυση.*

2. *Κάθε κάτω φραγμένο σύμπλοκο $C^\bullet$ έχει μία ενέσιμη ανάλυση $\alpha\colon C^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ και αν $C^n = 0$ για κάθε $n < n_0$, τότε και $I^n = 0$ για κάθε $n < n_0$ και ο μορφισμός $\alpha^n\colon C^n \longrightarrow I^n$ είναι επιμορφισμός για κάθε $n \geqslant n_0$.*

3. *Κάθε σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$ το οποίο έχει κάτω φραγμένη συνομολογία, έχει μία ενέσιμη ανάλυση.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του ισχυρισμού 1 προκύπτει κατασκευαστικά. Αρχικά, επιλέγουμε έναν μονομορφισμό $\epsilon_0\colon X \longrightarrow I^0$ του X σε ένα ενέσιμο αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και θέτουμε $X^0 = \mathsf{Coker}\epsilon_0$. Επαγωγικά, δοσμένου ενός αντικειμένου X^{n-1} επιλέγουμε έναν μονομορφισμό $\epsilon_n\colon X^{n-1} \longrightarrow I^n$ σε ένα ενέσιμο αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Θέτουμε $X^n = \mathsf{coker}\epsilon_n$ και ∂^{n-1} να είναι η σύνθεση των μορφισμών:

$$\partial^{n-1} = \epsilon_n \circ \mathsf{Coker}\epsilon_{n-1}\colon\ I^{n-1} \xrightarrow{\mathsf{coker}\epsilon_{n-1}} X^{n-1} \xrightarrow{\ \epsilon_n\ } I^n$$

Η διαδικασία αυτή απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & X^1 \arrow[dr, "\epsilon_2"] & & & & X^3 \arrow[dr, "\epsilon_4"] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\epsilon_0"] & I^0 \arrow[rr, "\partial^0"] \arrow[dr, "\mathsf{coker}\epsilon_0"'] & & I^1 \arrow[rr, "\partial^1"] \arrow[ur, "\mathsf{coker}\epsilon_1"] & & I^2 \arrow[rr, "\partial^2"] \arrow[dr, "\mathsf{coker}\epsilon_2"'] & & I^3 \arrow[rr, "\partial^3"] \arrow[ur, "\mathsf{coker}\epsilon_3"] & & \cdots \\
 & & & X^0 \arrow[ur, "\epsilon_1"'] & & & & X^2 \arrow[ur, "\epsilon_3"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Τότε, εκ κατασκευής $\mathsf{Im}\partial^{n-1} = \mathsf{Ker}\partial^n = X^n$ για κάθε $n \geqslant 0$, συνεπώς το παραπάνω διάγραμμα αποτελεί μία ενέσιμη ανάλυση του Q.

Η απόδειξη του ισχυρισμού 2 προκύπτει με μία ανάλογη κατασκευή για σύμπλοκα. Για περισσότερα βλ. [32, Chapter I, Theorem 6.1].

Αν $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$ το οποίο έχει κάτω φραγμένη συνομολογία, είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει ένα αρκετά μικρό $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε ο μορφισμός συμπλόκων

$C^\bullet \longrightarrow \tau_{\geqslant n_0}C^\bullet$ να είναι ημι-ισομορφισμός. Τότε, από τον ισχυρισμό 2, εφόσον το σύμπλοκο $\tau_{\geqslant n_0}C^\bullet$ είναι κάτω φραγμένο, θα έχει μία ενέσιμη ανάλυση $\alpha\colon \tau_{\geqslant n_0}C^\bullet \longrightarrow I^\bullet$. Συνθέτοντας αποκτούμε έναν ημι-ισομορφισμό $C^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ ο οποίος αποτελεί μία ενέσιμη ανάλυση του $C^\bullet$. ■

Ένα δυϊκό λήμμα ισχύει και για προβολικές αναλύσεις:

Λήμμα 4.9.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία η οποία έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{A}$ έχει μία προβολική ανάλυση.*
2. *Κάθε άνω φραγμένο σύμπλοκο $C^\bullet$ έχει μία προβολική ανάλυση $\alpha\colon P^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ και αν ισχύει $C^n = 0$ για κάθε $n > n_0$, τότε και $P^n = 0$ για κάθε $n > n_0$ και ο μορφισμός $\alpha^n\colon P^n \longrightarrow C^n$ είναι μονομορφισμός για κάθε $n \leqslant n_0$.*
3. *Κάθε σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$ το οποίο έχει άνω φραγμένη συνομολογία, έχει μία προβολική ανάλυση.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του Λήμματος 4.9.12. ■

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα της ενέσιμης ανάλυσης ενός συμπλόκου για την απόδειξη της οποίας θα παραπέμψουμε στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 4.9.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία, N ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και $N \longrightarrow I^\bullet$ μία ενέσιμη ανάλυση του N. Τότε, αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$, για κάθε ενέσιμη ανάλυση $M \longrightarrow E^\bullet$ υπάρχει ένας μορφισμός (κάτω φραγμένων) συμπλόκων $F\colon E^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ ο οποίος επεκτείνει τον f έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F^0"] & E^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F^1"] & E^2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον, ο παραπάνω μορφισμός συμπλόκων είναι μοναδικός με ακρίβεια ομοτοπικής ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του [53, Porism 2.2.7.]. ■

Ένα αντίστοιχο θεώρημα ισχύει για προβολικές αναλύσεις:

Θεώρημα 4.9.15. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία, M ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και $P^\bullet \longrightarrow M$ μία προβολική ανάλυση του M. Τότε, αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$, για κάθε προβολική ανάλυση $Q^\bullet \longrightarrow N$ του N υπάρχει ένας μορφισμός (άνω φραγμένων) συμπλόκων $F\colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ ο οποίος επεκτείνει τον f έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F^{-2}"] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F^{-1}"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F^0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q^{-2} \arrow[r] & Q^{-1} \arrow[r] & Q^0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον, ο παραπάνω μορφισμός συμπλόκων είναι μοναδικός με ακρίβεια ομοτοπικής ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [53, Porism 2.2.7.]. ■

Άξιο αναφοράς αποτελεί το γεγονός ότι στα παραπάνω θεωρήματα, δεν είναι απαραίτητη η συνθήκη να είναι το σύμπλοκο που σχηματίζει η ενέσιμη ανάλυση $N \longrightarrow I^\bullet$ του N και αντίστοιχα η προβολική ανάλυση $P^\bullet \longrightarrow M$ του M ακριβές.

Τελικός μας στόχος είναι ο ορισμός του παραγόμενου συναρτητή Ext σε μία αβελιανή κατηγορία. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό ο οποίος αποτελεί μία παραλλαγή του Ορισμού 4.9.6.

Ορισμός 4.9.16. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Μία πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{C}$ της $\mathcal{A}$ θα καλείται* **δεξιά προσαρμοσμένη** *για τον F αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Το μηδενικό αντικείμενο $0_{\mathcal{A}}$ ανήκει στην $\mathcal{C}$.*

2. *Αν $M, N \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, τότε και $M \oplus N \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

3. *Για κάθε αντικείμενο $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και ένας μονομορφισμός $i\colon M \longrightarrow C$.*

4. *Αν το $C^\bullet$ είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο στη φραγμένη ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$, τότε το σύμπλοκο $\mathsf{K}(F)(C^\bullet)$ είναι επίσης ακυκλικό.*

Παρατήρηση 4.9.17. Προφανώς, οι δύο πρώτες συνθήκες του ορισμού συνεπάγονται η κατηγορία $\mathcal{C}$ να αποτελεί μία πλήρη προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε την $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ σαν μία πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$. Τότε, από τη συνθήκη 2, για οποιονδήποτε μορφισμό συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ με $C^\bullet, D^\bullet \in \mathsf{K}^+(\mathcal{C})$, ο κώνος $C_f^\bullet$ είναι επίσης ένα αντικείμενο της $\mathsf{K}^+(\mathcal{C}^\bullet)$. Άρα, αν οι συνθήκες του Ορισμού 4.9.16 ικανοποιούνται, η $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη παραγόμενων συναρτητών:

Θεώρημα 4.9.18. *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία δεξιά προσαρμοσμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ για τον F, τότε υπάρχει ένας παραγόμενος συναρτητής $\mathsf{R}F\colon\ \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^+(\mathcal{B})$ του F.*

Απόδειξη. Από τη συνθήκη 3 του Ορισμού 4.9.16, προκύπτει ότι για κάθε αντικείμενο $X^\bullet$ της $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C^\bullet$ της $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$ και ένας ημι-ισομορφισμός $s\colon X^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ (για περισσότερα βλ. [39, Chapter 5, 2.1.1. THEOREM]). Άρα, η $\mathsf{K}^+(R)$ ικανοποιεί την συνθήκη 1 του Ορισμού 4.9.6 και το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 4.9.7. ∎

Θεωρούμε τώρα μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{I}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από όλα τα ενέσιμα αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Τότε, για τις αντίστοιχες κάτω φραγμένες ομοτοπικές κατηγορίες προκύπτει το ακόλουθο:

Λήμμα 4.9.19. *Η $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αφού το ευθύ άθροισμα δύο ενέσιμων αντικειμένων είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο, η $\mathcal{I}$ είναι μία πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε την ομοτοπική κατηγορία των κάτω φραγμένων συμπλόκων $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ και την πλήρη υποκατηγορία αυτής $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$. Εφόσον πάλι το ευθύ άθροισμα δύο ενέσιμων αντικειμένων είναι ενέσιμο, για οποιαδήποτε σύμπλοκα $I^\bullet$ και $J^\bullet$ στην $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$, ο κώνος ενός μορφισμού $f\colon I^\bullet \longrightarrow J^\bullet$ της $C^*(\mathcal{A})$ ανήκει στην $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$. Από την άλλη πλευρά, η η $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$ είναι προφανώς κλειστή στον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων Σ της $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$. Επομένως, η $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$. ∎

Πιο συγκεκριμένα, σε μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά ενέσιμα προκύπτει το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.9.20. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Τότε, κάθε προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{B}$ έχει έναν δεξιά παραγόμενο συναρτητή $\mathsf{R}F\colon\ \mathsf{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^+(\mathcal{B})$.*

Απόδειξη. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$ αποτελεί μία πλήρη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$, συνεπώς οι συνθήκες 1 και 2 του Ορισμού 4.9.16 ικανοποιούνται. Η συνθήκη 3 ικανοποιείται άμεσα εφόσον, από υπόθεση, η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα. Τέλος, προκύπτει ότι αν θεωρήσουμε ένα ακυκλικό σύμπλοκο $I^\bullet$ στην $\mathsf{K}^+(\mathcal{I})$, ο ταυτοτικός μορφισμός συμπλόκων $1_{I^\bullet}\colon I^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ είναι 0-ομοτοπικός (για περισσότερα βλ. [39, Chapter 5, 2.2.2. LEMMA]), δηλαδή το $I^\bullet$ είναι ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο στην $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ και συνεπώς το $\mathsf{K}(F)(I^\bullet)$ θα είναι ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο στην $\mathsf{K}^+(\mathcal{B})$. Ως αποτέλεσμα, η συνθήκη 4 του Ορισμού 4.9.16 ικανοποιείται και η $\mathcal{I}$ αποτελεί μία δεξιά προσαρμοσμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, άρα το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 4.9.18. ■

Είναι δυνατόν να ορίσουμε και παραγόμενους συναρτητές «μεγαλύτερης τάξης»:

Ορισμός 4.9.21. *Έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες και $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία δεξιά προσαρμοσμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ για τον F, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τους προσθετικούς συναρτητές*

$$\mathsf{R}^n F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

θέτοντας:

$$\mathsf{R}^n F = \mathsf{H}^n \circ \mathsf{R}F \circ \mathsf{D}$$

*για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $\mathsf{R}^n F$ θα καλείται ο **n-οστός δεξιά παραγόμενος συναρτητής** του F*

Εφόσον ο $\epsilon_F\colon Q_{\mathcal{B}} \circ \mathsf{K}(F) \longrightarrow \mathsf{R}F \circ Q_{\mathcal{A}}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών, για κάθε $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ αποκτούμε έναν φυσικό μορφισμό:

$$\mathsf{K}(F)(\mathsf{D}(M)) \longrightarrow \mathsf{R}(\mathsf{D}(M))$$

Θεωρώντας τη συνομολογία H^0 του ϵ_F προκύπτει ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$\mathsf{H}^0(\epsilon_F)\colon F \longrightarrow \mathsf{R}^0 F$$

.

Το ακόλουθο λήμμα περιγράφει ορισμένες κύριες ιδιότητες των συναρτητών $\mathsf{R}^n F$.

Λήμμα 4.9.22. *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο αβελιανές κατηγορίες, $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ένας προσθετικός συναρτητής και $\mathcal{C}$ είναι μία δεξιά προσαρμοσμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ για τον F. Τότε, για τους προσθετικούς συναρτητές $\mathsf{R}^n F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε $n < 0$ ισχύει $\mathsf{R}^n F = 0$.*

2. *Ο συναρτητής $\mathsf{R}^0 F$ είναι αριστερά ακριβής.*

3. *Ο φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών $\mathsf{H}^0(\epsilon_F)\colon F \longrightarrow \mathsf{R}^0 F$ είναι ένας ισομορφισμός συναρτητών αν-ν ο F είναι αριστερά ακριβής.*

4. *Για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$ υπάρχει μία μεγάλη ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{R}^0 F(L) \xrightarrow{\mathsf{R}^0 F(f)} \mathsf{R}^0 F(M) \xrightarrow{\mathsf{R}^0 F(g)} \mathsf{R}^0 F(N) \longrightarrow \mathsf{R}^1 F(L) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{R}^n F(L) \xrightarrow{\mathsf{R}^n F(f)} \mathsf{R}^n F(M) \xrightarrow{\mathsf{R}^n F(g)} \mathsf{R}^n F(N) \longrightarrow \mathsf{R}^{n+1} F(L) \longrightarrow \cdots$$

5. *Αν* $M \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ *και*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow \cdots$$

είναι μία ακριβής ακολουθία με $C^n \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *συμβολίζοντας με* $C^\bullet$ *το σύμπλοκο:*

$$C^\bullet\colon\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow \cdots$$

έχουμε:

$$(\mathsf{R}^n F)(M) \cong \mathsf{H}^n(\mathsf{Ch}(F)(C^\bullet))$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [39, Chapter 5, 3.2.1. LEMMA]). ■

Προφανώς τα παραπάνω συμπεράσματα τα οποία αφορούν μια αβελιανή κατηγορία με αρκετά ενέσιμα μπορούν να δυϊκοποιηθούν. Θεωρώντας μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$, συμβολίζουμε με $\mathcal{P}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από τα προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Ανάλογα προκύπτει ότι η $\mathsf{K}^-(\mathcal{P})$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Τότε, ορίζοντας δυϊκά την έννοια της αριστερά προσαρμοσμένης υποκατηγορίας της $\mathcal{A}$ για τον F, προκύπτει ότι αν $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα, κάθε προσθετικός συναρτητής $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ σε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{B}$ έχει έναν αριστερά παραγόμενο συναρτητή $\mathsf{L}F\colon \mathsf{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{B})$. Αντίστοιχα, τέλος ορίζονται και οι n-οστοί αριστερά παραγόμενοι συναρτητές $\mathsf{L}^n F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ με $\mathsf{L}^n F = \mathsf{H}^n \circ \mathsf{L}F \circ \mathsf{D}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ο λόγος που περιοριστήκαμε σε δεξιά παραγόμενους συναρτητές και στην περίπτωση μίας αβελιανής κατηγορίας με αρκετά ενέσιμα αντικείμενα είναι ότι αποτελούν το κατάλληλο πλαίσιο για τον ορισμό των συναρτητών Ext.

Ορισμός 4.9.23. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά ενέσιμα αντικείμενα και* Ab *η κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Αν M είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$, θεωρούμε τον αριστερά ακριβή προσθετικό συναρτητή* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ab}$. *Για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *θέτουμε:*

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,-) = \mathsf{R}^n\,\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$$

Ο $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,-)$ *καλείται ο* ***n-οστός συναρτητής επέκτασης*** *του* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$.

Παρατήρηση 4.9.24. Λόγω του Λήμματος 4.9.22, εφόσον ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$ είναι αριστερά ακριβής, θα υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός συναρτητών $\mathsf{Ext}^0_{\mathcal{A}}(M,-) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$. Επιπλέον, από τη συνθήκη 4, του ιδίου λήμματος, για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$ υπάρχει μία μεγάλη ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,X) \xrightarrow{f\circ} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,Y) \xrightarrow{g\circ} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,Z) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,X) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,X) \xrightarrow{\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,f)} \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,Y) \xrightarrow{\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,g)} \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,Z) \longrightarrow \mathsf{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M,X) \longrightarrow \cdots$$

Παρατήρηση 4.9.25. Ο ορισμός του συναρτητή $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,-)$ ως ένας n-οστός παραγόμενος συναρτητής του $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$ είναι ιδιαίτερα δύσχρηστος ως προς τον υπολογισμό. Μία πιο απλή μέθοδος υπολογισμού του, προκύπτει από τη συνθήκη 5 του Λήμματος 4.9.22 ως εξής:

Θεωρούμε ένα $N \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ και μία ενέσιμη ανάλυση $N \longrightarrow I^\bullet$ του N. Εφαρμόζοντας τον αριστερά ακριβή συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-)$ αποκτούμε ένα σύμπλοκο:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,I^\bullet)\colon\ 0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,I^0) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,I^1) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M,I^2) \longrightarrow \cdots$$

Τότε, από τη συνθήκη 5 του Λήμματος 4.9.22 έχουμε:

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M, N) = \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M, I^\bullet))$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του συναρτητή Ext μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορισθεί απευθείας αυτός ο συναρτητής . Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτήν την προσέγγιση βλ. [53, §2.5.].

Κεφάλαιο 5

Πρότυπα Maximal Cohen-Macaulay

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου αποτελεί η μελέτη των maximal Cohen-Macaulay προτύπων. Παρόλο που η παρακάτω θεωρία είναι δυνατό να αναπτυχθεί γενικότερα, ακολουθώντας την εργασία του R.-O. Buchweitz (βλ. [17]), θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι αριστερά και δεξιά Noetherian και έχει πεπερασμένη αριστερή και δεξιά ενέσιμη διάσταση σαν ένα R-πρότυπο, είναι δηλαδή, όπως θα δούμε στη συνέχεια Gorenstein. Τα maximal Cohen-Macaulay πρότυπα σχηματίζουν μία πλήρη υποκατηγορία της κατηγορίας των πεπερασμένα παραγόμενων R-προτύπων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζει η μελέτη των αντίστοιχων προβολικά ευσταθών κατηγοριών. Αρχικά, πριν εισαχθούν τα maximal Cohen-Macaulay πρότυπα θα παρουσιαστεί το γενικότερο πλαίσιο της προβολικά ευσταθούς κατηγορίας προτύπων.

Οι δακτύλιοι οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν θα είναι προσεταιριστικοί με μονάδα καθώς και αριστερά και δεξιά δακτύλιοι της Noether. Τα πρότυπα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν θα έχουν επίσης μονάδα (unitary), εκτός αν δηλωθεί αυστηρά το αντίθετο.

Διατηρώντας τον συμβολισμό που θεμελιώθηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο (Παράδειγμα 1.2.3), αν R είναι ένας οποιοσδήποτε δακτύλιος, με $\mathsf{Mod}\text{-}R$ συμβολίζουμε την κατηγορία των δεξιών R-προτύπων και με $\mathsf{mod}\text{-}R$ την πλήρη υποκατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων. Επιπλέον, θα συμβολίζουμε με $\mathsf{P}(R)$ την πλήρη υποκατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών R-προτύπων.

5.1 Η Προβολικά Ευσταθής Κατηγορία

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η θεμελίωση της προβολικά ευσταθούς κατηγορίας προτύπων καθώς και ο ορισμός ενός συναρτητή σε αυτήν. Γενικότερα, μία ευσταθής (stabilized) κατηγορία είναι απλά μία κατηγορία πηλίκο $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς μία υποκατηγορία αυτής $\mathcal{D}$. Οι ευσταθείς κατηγορίες που θα μελετηθούν στη συνέχεια, ωστόσο, θα έχουν πιο συγκεκριμένη δομή.

Για τα παραπάνω θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό για τον οποίο βλ. [30, §1].

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Τότε ένα* **αριστερό ιδεώδες** *I της $\mathcal{A}$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου μορφισμών της $\mathcal{A}$ το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. *Για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$, η τομή $I \cap \mathsf{Hom}(X,Y)$ είναι μία υποομάδα της $\mathsf{Hom}(X,Y)$.*

2. *Αν $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ είναι δύο μορφισμοί στην $\mathcal{A}$ με $f \in I$, τότε ισχύει και $g \circ f \in I$.*

Δυϊκά, ορίζεται η έννοια ενός δεξιού ιδεώδους, ενώ ένα ιδεώδες το οποίο είναι και δεξιό και αριστερό, θα καλείται απλώς ιδεώδες.

Σχόλιο 5.1.2. Είναι εύκολο να δούμε ότι η τομή οποιουδήποτε συνόλου ιδεωδών είναι ένα ιδεώδες.

Σχόλιο 5.1.3. Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και I ένα ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Ένα αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ θα λέμε συμβατικά ότι ανήκει στο ιδεώδες I, αν ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ ανήκει στο I.

Ακολουθώντας τον Heller, βλ. [30, §1], μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία πηλίκο μίας κατηγορίας ως προς ένα ιδεώδες:

Ορισμός 5.1.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και I ένα ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Τότε, η* **κατηγορία πηλίκο** *$\mathcal{A}/I$ μπορεί να οριστεί ως ακολούθως:*

- *Τα αντικείμενα της $\mathcal{A}/I$ είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{A}$.*
- *Για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ ισχύει*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/I}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)/I \cap \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$$

Η σύνθεση μορφισμών στην κατηγορία πηλίκο $\mathcal{A}/I$ ορίζεται σύμφωνα με τη σύνθεση στην κατηγορία $\mathcal{A}$, έτσι ώστε η απεικόνιση φυσικής προβολής $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I$ να αποτελεί έναν συναλλοίωτο συναρτητή. Η κατηγορία $\mathcal{A}/I$ καλείται και **ευσταθής (stabilized)** *κατηγορία της $\mathcal{A}$ ως προς το ιδεώδες I.*

Παρατήρηση 5.1.5. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία προσθετική κατηγορία, τότε οποιοδήποτε σύνολο μορφισμών $\mathcal{M}$ στην $\mathcal{A}$ περιέχεται σε ένα ελάχιστο ιδεώδες $I_{\mathcal{M}}$, για παράδειγμα, στην τομή όλων των ιδεωδών που το περιέχουν. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το ιδεώδες $I_{\mathcal{M}}$ παράγεται από το σύνολο μορφισμών $\mathcal{M}$.

Έστω, επιπλέον, ένα σύνολο αντικειμένων $\mathcal{O}$ στην $\mathcal{A}$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathsf{Id}_{\mathcal{O}}$ των ταυτοτικών τους απεικονίσεων και στη συνέχεια το ιδεώδες $I_{\mathcal{O}}$ που παράγεται από αυτό. Τότε, θα λέμε ότι το ιδεώδες $I_{\mathcal{O}}$ παράγεται από το σύνολο αντικειμένων $\mathcal{O}$.

Ορισμός 5.1.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία. Ένα σύνολο αντικειμένων $\mathcal{O}$ στην $\mathcal{A}$ καλείται* **προσθετικό** *αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν $X \in \mathcal{O}$ και Y είναι ένας ευθύς αθροιστέος του X, τότε και $Y \in \mathcal{O}$.*
2. *Αν $X, Y \in \mathcal{O}$ τότε και $X \oplus Y \in \mathcal{O}$.*

Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{A}$ περιέχεται σε ένα ελάχιστο προσθετικό σύνολο, το οποίο αποτελείται από όλους τους ευθείς αθροιστέους και τα ευθέα αθροίσματα στοιχείων του συνόλου.

Πρόταση 5.1.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathcal{O}$ ένα σύνολο αντικειμένων στην $\mathcal{A}$ το οποίο παράγει ένα ιδεώδες I. Συμβολίζουμε με $\mathcal{O}^+$ το ελάχιστο προσθετικό σύνολο που περιέχει το $\mathcal{O}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ένας μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ ανήκει στο I αν-ν μπορεί να αναλυθεί μέσω ενός στοιχείου του $\mathcal{O}^+$, δηλαδή αν υπάρχει ένα αντικείμενο $Z \in \mathcal{O}^+$ και μορφισμοί $g : X \longrightarrow Z$ και $h : Z \longrightarrow Y$ έτσι ώστε $f = h \circ g$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \\ & Z \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

2. *Το σύνολο αντικειμένων $\mathcal{O}^+$ είναι ακριβώς τα αντικείμενα που ανήκουν στο ιδεώδες I.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [30, Proposition 2.1.]. ∎

Πρόταση 5.1.8. *Έστω $\mathcal{O}$ ένα προσθετικό σύνολο αντικειμένων το οποίο παράγει ένα ιδεώδες I σε μία κατηγορία $\mathcal{A}$ στην οποία κάθε διασπάσιμος επιμορφισμός έχει πυρήνα. Θεωρούμε τον συναρτητή κανονικής προβολής $\pi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{A}$. Τότε, ο μορφισμός $\pi \circ f$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{A}/I$ αν-ν υπάρχουν αντικείμενα $X', Y' \in \mathcal{O}$ και ένας ισομορφισμός $f'\colon X \oplus X' \longrightarrow Y \oplus Y'$ στην $\mathcal{A}$ έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \oplus X' \arrow[r, "f'"] & Y \oplus Y' \arrow[d] \\ X \arrow[u] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό στην $\mathcal{A}$, όπου τα κάθετα βέλη είναι αντίστοιχα η κανονική εισαγωγή και η κανονική προβολή στο ευθύ άθροισμα.

Συγκεκριμένα, δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφα στην $\mathcal{A}/I$ αν-ν υπάρχουν αντικείμενα $X', Y' \in \mathcal{O}$ έτσι ώστε να υπάρχει ένας ισομορφισμός $X \oplus X' \cong Y \oplus Y'$ στην $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [30, Theorem 2.2.]. ∎

Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα, και $\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ το ιδεώδες το οποίο παράγεται από τα προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Εφόσον τα προβολικά αντικείμενα σχηματίζουν ένα προσθετικό σύνολο, από την Πρόταση 5.1.7, προκύπτει ότι το ιδεώδες $\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ αποτελείται ακριβώς από τους μορφισμούς της $\mathcal{A}$ οι οποίοι μπορούν να αναλυθούν μέσω ενός προβολικού.

Μέσω αυτού του επιχειρήματος, μπορούμε να ορίσουμε την προβολικά ευσταθή κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων (βλ. για παράδειγμα [30, §3] ή [2, 1.43]).

Ορισμός 5.1.9. *Έστω R ένας δακτύλιος και $\mathsf{mod}\text{-}R$ η κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων. Συμβολίζουμε με P_R το ιδεώδες της $\mathsf{mod}\text{-}R$ το οποίο παράγεται από τα προβολικά R-πρότυπα. Τότε, η* **προβολικά ευσταθής (projectively stable)** *κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων, ορίζεται ως η κατηγορία πηλίκο $\mathsf{mod}\text{-}R/\mathsf{P}_R$ και θα συμβολίζεται με $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$. Εξ ορισμού λοιπόν:*

- *Τα αντικείμενα της $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ είναι τα αντικείμενα της $\mathsf{mod}\text{-}R$, δηλαδή τα πεπερασμένα παραγόμενα δεξιά R-πρότυπα.*
- *Για δύο πεπερασμένα παραγόμενα R-πρότυπα M και N ισχύει*

$$\mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R}(M, N) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{mod}\text{-}R}(M, N)/I$$

όπου

$$I = \{f\colon M \longrightarrow N \mid \text{o } f \text{ αναλύεται μέσω ενός προβολικού προτύπου}\}$$

Οι μορφισμοί, δηλαδή, της ευσταθούς κατηγορίας είναι οι μορφισμοί πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων modulo αυτών που αναλύονται μέσω ενός προβολικού.

Παρατήρηση 5.1.10. Ένας μορφισμός $f\colon M \longrightarrow N$ στην $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ είναι ο μηδενικός μορφισμός, αν-ν υπάρχει ένα προβολικό R-πρότυπο P και μορφισμοί $\pi\colon M \longrightarrow P$ και $\iota\colon P \longrightarrow N$ έτσι ώστε $f = \iota \circ \pi$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & N \\ & P \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Επιπλέον, δύο μορφισμοί $f, g\colon M \longrightarrow N$ στην $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ είναι ίσοι, αν-ν η διαφορά τους αναλύεται μέσω ενός προβολικού R-προτύπου.

Η $\underline{\mathsf{mod}}$-R είναι προφανώς μια προσθετική κατηγορία.

Πρόταση 5.1.11. *Δύο πεπερασμένα παραγόμενα δεξιά R-πρότυπα M και N είναι ισόμορφα στην $\underline{\mathsf{mod}}$-R αν-ν είναι ευσταθώς (προβολικά) ισοδύναμα (stably equivalent) στην mod-R. Δηλαδή, αν-ν υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα P_1 και P_2 έτσι ώστε*

$$M \oplus P_1 \cong N \oplus P_2$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.1.8. ∎

Επιστρέφοντας στη γενική περίπτωση μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ και το ιδεώδες $\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ αυτής το οποίο παράγεται από τα προβολικά αντικείμενα, εύκολα βλέπουμε ότι οι μορφισμοί που ανήκουν στο ιδεώδες ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα:

Λήμμα 5.1.12. *Έστω $\phi\colon Y \longrightarrow Y''$ ένας επιμορφισμός και $f\colon X \longrightarrow Y''$ ένας μορφισμός στο ιδεώδες $\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$. Τότε, υπάρχει ένας μορφισμός $f'\colon X \longrightarrow Y$ ο οποίος ανήκει στο $\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ έτσι ώστε $f = \phi \circ f'$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\phi"] & Y'' \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού, εφόσον ο $f\colon X \longrightarrow Y''$ είναι ένας μορφισμός στο ιδεώδες $\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$, θα υπάρχει ένα προβολικό αντικείμενο P και μορφισμοί $i\colon X \longrightarrow P$ και $p\colon P \longrightarrow Y''$ έτσι ώστε $f = p \circ i$, δηλαδή ο μορφισμός f αναλύεται μέσω του P. Εφόσον ο μορφισμός $\phi\colon Y \longrightarrow Y''$ είναι επιμορφισμός και το P είναι προβολικό, θα υπάρχει ένας μορφισμός $a\colon P \longrightarrow Y$ έτσι ώστε $p = \phi \circ a$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, "p"] & X \arrow[l, "i"] \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\phi"] & Y'' \end{tikzcd}$$

Θέτοντας $f' = a \circ i\colon X \longrightarrow Y$, έχουμε

$$\phi \circ f' = \phi \circ a \circ i = p \circ i = f$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ∎

Σκοπός μας είναι ο ορισμός ενός συναρτητή: $\Omega\colon \mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$. Υποθέτουμε ότι έχει γίνει εκ των προτέρων μία ανάθεση προβολικών αντικειμένων για την κατηγορία $\mathcal{A}$, δηλαδή σε κάθε αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ έχει ανατεθεί μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\omega_X} \mathsf{P}X \xrightarrow{p_X} X \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

όπου το $\mathsf{P}X$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο. Τότε, από το παραπάνω λήμμα, για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{g'} Y \xrightarrow{g''} Y'' \longrightarrow 0$$

και για κάθε μορφισμό $f''\colon X \longrightarrow Y''$, υπάρχει ένας μορφισμός $f\colon \mathsf{P}X \longrightarrow Y$ έτσι ώστε $g'' \circ f = f'' \circ p_X$, άρα και ένας επαγόμενος μορφισμός στους πυρήνες $f'\colon \Omega X \longrightarrow Y'$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega X \arrow[r, "\omega_X"] \arrow[d, dashed, "f'"] & \mathsf{P}X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, dashed, "f"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "g'"] & Y \arrow[r, "g''"] & Y'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Έστω $\tilde{f}\colon \mathsf{P}X \longrightarrow Y$ ένας άλλος μορφισμός έτσι ώστε $g'' \circ \tilde{f} = f'' \circ p_X = g'' \circ f$ και $\tilde{f}'\colon \Omega X \longrightarrow Y'$ ο αντίστοιχος επαγόμενος μορφισμός στους πυρήνες. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega X \arrow[r, "\omega_X"] \arrow[d, "\tilde{f}'-f'"'] & \mathsf{P}X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "\tilde{f}-f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "g'"] & Y \arrow[r, "g''"] & Y'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Εφόσον $g'' \circ (\tilde{f} - f) = 0$, από την καθολική ιδιότητα του πυρήνα, υπάρχει ένας μορφισμός $\alpha\colon \mathsf{P}X \longrightarrow Y'$ έτσι ώστε $g' \circ \alpha = \tilde{f} - f$. Έτσι, έχουμε:

$$g' \circ \alpha \circ \omega_X = \tilde{f} - f' \circ \omega_X = g' \circ \tilde{f}' - f' \Longrightarrow \tilde{f}' - f' = \alpha \circ \omega_X$$

λόγω του ότι ο g' είναι μονομορφισμός. Άρα, η διαφορά $\tilde{f}' - f'$ αναλύεται μέσω του προβολικού αντικειμένου $\mathsf{P}X$, συνεπώς $\tilde{f}' - f' \in \mathsf{P}_{\mathcal{A}}$. Συμπεραίνουμε, ότι για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία της μορφής 5.1 και για κάθε μορφισμό f'', υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο της αβελιανής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}}}(\Omega X, Y')$.

Για λόγους ευκολίας στον συμβολισμό, συχνά θα συμβολίζουμε πάλι με Ωf την εικόνα του μορφισμού $\Omega f\colon \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ μέσω του συναρτητή πηλίκο. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, είναι δυνατό να οριστεί ένας συναλλοίωτος προσθετικός συναρτητής $\Omega\colon \mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ ως εξής:

Ορισμός 5.1.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα και $\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ το ιδεώδες το οποίο παράγεται από τα προβολικά αντικείμενα.*

- *Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ επιλέγουμε έναν επιμορφισμό $p_X\colon \mathsf{P}X \longrightarrow X$ όπου $\mathsf{P}X$ είναι ένα προβολικό αντικείμενο και θέτουμε ΩX το αντικείμενο που αποτελεί τον πυρήνα του επιμορφισμού p_X.*

$$0 \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\omega_X} \mathsf{P}X \xrightarrow{p_X} X \longrightarrow 0$$

- *Για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{A}$, θεωρούμε αντίστοιχους επιμορφισμούς $p_X\colon \mathsf{P}X \longrightarrow X$ και $p_Y\colon \mathsf{P}Y \longrightarrow Y$ και θέτουμε ως $\Omega f\colon \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ τον επαγόμενο μορφισμό στους πυρήνες που κατασκευάστηκε προηγουμένως, θεωρούμενο ως έναν μορφισμό στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega X \arrow[r, "\omega_X"] \arrow[d, dashed, "\Omega f"] & \mathsf{P}X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega Y \arrow[r, "\omega_Y"] & \mathsf{P}Y \arrow[r, "p_Y"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*Ο συναρτητής $\Omega\colon \mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$ θα καλείται ο **loop-space functor** της κατηγορίας $\mathcal{A}/\mathsf{P}_{\mathcal{A}}$.*

Ο loop-space functor ορίστηκε αρχικά από τους Eckmann και Hilton, ενώ για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παραπάνω ανάλυση βλ. [30].

Σχόλιο 5.1.14. Προφανώς, ο loop-space functor εξαρτάται από την ανάθεση προβολικών αντικειμένων που έχει προηγηθεί για την κατηγορία $\mathcal{A}$, ωστόσο, αν θεωρήσουμε δύο διαφορετικές προβολικές αναλύσεις ενός αντικειμένου, προκύπτει μία φυσική ισοδυναμία συναρτητών μεταξύ των δύο αντίστοιχων loop-space functors.

Παρατήρηση 5.1.15. Στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι η κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων R-προτύπων, ο loop-space functor $\Omega_R\colon \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ κατασκευάζεται επιλέγοντας για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο M έναν επιμορφισμό $p_M\colon P_M \longrightarrow M$ από ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο P_M και θέτοντας $\Omega_R M = \mathsf{Ker} P_M$.

5.2 Πρότυπα Maximal Cohen-Macaulay

Αρχικά, θα δοθεί ο ορισμός καθώς και ορισμένες βασικές ιδιότητες των maximal Cohen-Macaulay προτύπων ακολουθώντας το άρθρο του Buchweitz, βλ. [17].

Όπως προαναφέρθηκε, είναι απαραίτητο να εισάγουμε μία επιπλέον συνθήκη για τους δακτυλίους οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν, εκτός από την απαίτηση να είναι αριστερά και δεξιά Noetherian. Θα υποθέτουμε έτσι ότι ένας δακτύλιος R έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση και σαν ένα αριστερό και σαν ένα δεξιό R-πρότυπο.

Η ακόλουθη πρόταση οφείλεται στον A. Zaks (βλ. [54]).

Πρόταση 5.2.1. *Αν η αριστερά ή η δεξιά ενέσιμη διάσταση ενός δακτυλίου της Noether R, είναι πεπερασμένη, τότε οι δύο αυτές διαστάσεις ταυτίζονται και η κοινή τους τιμή θα καλείται η ενέσιμη ή η εικονική (virtual) διάσταση του R ενώ θα συμβολίζεται με $\mathsf{vdim} R$. Ως συνέπεια, θα λέμε ότι ο δακτύλιος R είναι πεπερασμένης ενέσιμης διάστασης αν-ν $\mathsf{vdim} R < \infty$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [54]. ■

Ορισμός 5.2.2. *Ένας δεξιά και αριστερά δακτύλιος της Noether R θα καλείται (ισχυρά)* **δακτύλιος Gorenstein** *αν έχει πεπερασμένη εικονική διάσταση.*

Ακολουθεί στη συνέχεια ένα θεώρημα το οποίο προέρχεται από τη μεταθετική άλγεβρα. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη, παραπέμποντας στη βιβλιογραφία για λεπτομέρειες.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether ο οποίος έχει πεπερασμένη διάσταση Krull . Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Η ενέσιμη διάσταση του R είναι πεπερασμένη.*

2. *Για κάθε πρώτο ιδεώδες P του R, η τοπικοποίηση R_P είναι Gorenstein.*

3. *Ο R επιδέχεται ένα κανονικό πρότυπο το οποίο είναι προβολικό.*

Επιπλέον, κάτω από αυτές τις συνθήκες, η ενέσιμη διάσταση του R ισούται με την διάσταση Krull.

Απόδειξη. Αν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση (όχι απαραίτητα με πεπερασμένη διάσταση Krull), τότε είναι γνωστό ότι για κάθε πρώτο ιδεώδες P του R , η τοπικοποίηση R_P έχει επίσης πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, συνεπώς είναι Gorenstein. Το αντίστροφο ισχύει αν υποθέσουμε στον δακτύλιο R την επιπλέον συνθήκη της πεπερασμένης διάστασης Krull . Για την ισοδυναμία, τέλος, των προτάσεων 2 και 3 βλ. [5, §1.4, Thm. 2] και [23, 5.5, 5.6]. ■

Σχόλιο 5.2.4. Στον Ορισμό 5.2.2 χρησιμοποιήθηκε ο όρος ισχυρά Gorenstein καθώς, στη μεταθετική περίπτωση, ο ορισμός είναι αρκετά περιοριστικός σε σχέση με τον συνήθη ορισμό ενός δακτυλίου Gorenstein ο οποίος απαιτεί μόνο την συνθήκη 2 του παραπάνω θεωρήματος, αλλά όχι την πεπερασμένη διάσταση Krull (για παράδειγμα βλ. [28, pp. 296]).

Από την άλλη πλευρά, ο M. Auslander εισήγαγε την έννοια των δακτυλίων Auslander-Gorenstein (βλ. [23, π.47]) ο οποίοι δεν είναι γενικά ισχυρά Gorenstein. Για παράδειγμα, ο J.-E. Roos, βλ. [48], έδειξε ότι υπάρχουν και δακτύλιοι πεπερασμένης ολικής διάστασης οι οποίοι δεν είναι Gorenstein με την έννοια του M. Auslander.

Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του J.-E. Roos, πολλά ενδιαφέροντα (μη μεταθετικά) παραδείγματα ικανοποιούν και τους δύο ορισμούς, όπως εκείνοι οι δακτύλιοι R οι οποίοι δέχονται μία διήθηση (filtration) έτσι ώστε ο αντίστοιχος βαθμωτός δακτύλιος να είναι μεταθετικός, Gorenstein και πεπερασμένης διάστασης Krull.

Προφανώς, η ιδιότητα ενός δακτυλίου να είναι ισχυρά Gorenstein είναι συμμετρική με την εξής έννοια:

Πρόταση 5.2.5. *Ένας δακτύλιος R είναι ισχυρά Gorenstein αν-ν ο δυϊκός δακτύλιος R^{op} είναι ισχυρά Gorenstein.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ενός δακτυλίου Gorenstein, καθώς ένας δακτύλιος R έχει πεπερασμένη $\mathsf{vdim}R$ αν-ν ο δακτύλιος R^{op} έχει πεπερασμένη $\mathsf{vdim}R$. ■

Είμαστε σε θέση να ορίσουμε το κύριο αντικείμενο μελέτης του παρόντος κεφαλαίου.

Ορισμός 5.2.6. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein. Τότε, ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο M καλείται* **maximal Cohen-Macaulay** *ή* **MCM** *αν-ν*

$$\mathsf{Ext}^n_R(M,R)=0$$

για κάθε $n\neq 0$.

Τα maximal Cohen-Macaulay πρότυπα σχηματίζουν μία πλήρη υποκατηγορία της mod-R *η οποία θα συμβολίζεται με* MCM(R) *και αντίστοιχα, η εικόνα της στην ευσταθή κατηγορία* <u>mod</u>-R *θα συμβολίζεται με* <u>MCM</u>(R).

Σχόλιο 5.2.7. Η ορολογία η οποία χρησιμοποιήθηκε, προέρχεται για άλλη μία φορά από τη μεταθετική άλγεβρα, όπου τα maximal Cohen- Macaulay πρότυπα μπορούν να ταυτιστούν με τα πρότυπα μηδενικής διάστασης Gorenstein. Για περισσότερα βλ. [5, 3.2.2] και [2, Ch. 4]. Όταν λοιπόν, ο δακτύλιος είναι ένας τοπικός, μεταθετικός δακτύλιος Gorenstein, οι δύο αυτοί ορισμοί ενός maximal Cohen-Macaulay προτύπου συμπίπτουν.

Σχόλιο 5.2.8. Εύκολα προκύπτει ότι στον ορισμό ενός MCM προτύπου, το πρότυπο R μπορεί να αντικατασταθεί με ένα οποιοδήποτε πρότυπο P το οποίο έχει την ιδιότητα να είναι πιστά προβολικό (faithfully projective). Λόγω του ότι η έννοια αυτή ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας διατριβής, ο ορισμός της θα παραλειφθεί. Άξια αναφοράς αποτελεί μία συνθήκη η οποία χαρακτηρίζει τα πιστά προβολικά πρότυπα και σύμφωνα με την οποία ένα R-πρότυπο M είναι πιστά προβολικό αν-ν το M είναι ένας πεπερασμένα παραγόμενος προβολικός γεννήτορας της mod-R. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα παραπάνω βλ. [6, II. 1.2.]. Ένα αντικείμενο M της mod-R, λοιπόν, προκύπτει ότι είναι είναι MCM αν-ν

$$\mathsf{Ext}^n_R(M,P)=0$$

για κάθε $n\neq 0$ για κάθε πιστά προβολικό R-πρότυπο P.

Τα συμπεράσματα που θα ακολουθήσουν προέρχονται από το [17, Lemma 4.2.2.] και περιγράφουν ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες των maximal Cohen-Macaulay προτύπων οι οποίες ισχύουν κατ' αναλογίαν με τη μεταθετική περίπτωση. Αρχικά, παραθέτουμε ένα άμεσο πόρισμα του ορισμού των MCM προτύπων:

Πόρισμα 5.2.9. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein. Τότε, κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο είναι MCM, δηλαδή η $\mathsf{P}(R)$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$.*

Απόδειξη. Έστω P ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο. Τότε, γνωρίζουμε ότι $\mathsf{Ext}^n_R(P,X)=0$ για κάθε R-πρότυπο X, και για κάθε ακέραιο $n\geqslant 1$. Επομένως, $\mathsf{Ext}^n_R(P,R)=0$ για κάθε $n\geqslant 1$ και το P είναι εξ ορισμού MCM. ■

Λήμμα 5.2.10. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein. Αν*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

είναι μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην mod-R, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Αν τα M_2 και M_3 ανήκουν στην $\mathsf{MCM}(R)$, τότε το M_1 είναι MCM.*
2. *Αν τα M_1 και M_3 ανήκουν στην $\mathsf{MCM}(R)$, τότε το M_2 είναι MCM.*
3. *Αν τα M_1 και M_2 ανήκουν στην $\mathsf{MCM}(R)$, τότε το M_3 είναι MCM αν-ν ο μορφισμός $\mathsf{Hom}_R(f,R)\colon \mathsf{Hom}_R(M_2,R)\longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_1,R)$ είναι επιμορφισμός προτύπων.*

Απόδειξη. Έστω

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία στην mod-R. Θεωρούμε την μεγάλη ακριβή ακολουθία η οποία προκύπτει εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-,R)$.

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_3,R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_2,R) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_R(f,R)} \mathsf{Hom}_R(M_1,R) \xrightarrow{\Phi}$$

$$\xrightarrow{\Phi} \mathsf{Ext}^1_R(M_3,R) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M_2,R) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M_1,R) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(M_3,R) \longrightarrow \cdots$$

Από την ακρίβεια αυτής της ακολουθίας βλέπουμε ότι αν τα M_2 και M_3 είναι MCM, τότε για κάθε $n\geqslant 1$ έχουμε

$$\mathsf{Ext}^n_R(M_2,R)=\mathsf{Ext}^{n+1}_R(M_3,R)=0$$

συνεπώς και $\mathsf{Ext}^n_R(M_1,R)=0$ για κάθε $n\geqslant 1$, δηλαδή το M_1 είναι επίσης MCM. Ανάλογα, αν τα M_1 και M_3 είναι MCM τότε για κάθε $n\geqslant 1$ έχουμε

$$\mathsf{Ext}^n_R(M_3,R)=\mathsf{Ext}^n_R(M_1,R)=0$$

συνεπώς και $\mathsf{Ext}^n_R(M_2,R)=0$ για κάθε $n\geqslant 1$, δηλαδή το M_2 είναι επίσης MCM. Τέλος, υποθέτουμε ότι τα M_1 και M_2 είναι MCM. Τότε, για κάθε $n\geqslant 1$ έχουμε

$$\mathsf{Ext}^n_R(M_1,R)=\mathsf{Ext}^{n+1}_R(M_2,R)=0$$

επομένως $\mathsf{Ext}^{n+1}_R(M_3,R)=0$ για κάθε $n\geqslant 1$. Μένει να δείξουμε ότι $\mathsf{Ext}^1_R(M_3,R)=0$, κάτι που συμβαίνει αν-ν ο ομομορφισμός $\mathsf{Hom}_R(f,R)\colon \mathsf{Hom}_R(M_2,R)\longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_1,R)$ είναι επιμορφισμός. Πράγματι, λόγω ακρίβειας, ο πυρήνας του συνδετικού ομομορφισμού

$$\Phi\colon \mathsf{Hom}_R(M_1,R)\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M_3,R)$$

ισούται με την εικόνα της απεικόνισης $\mathsf{Hom}_R(f,R)$, η οποία είναι το R-πρότυπο $\mathsf{Hom}_R(M_1,R)$ αν-ν ο $\mathsf{Hom}_R(f,R)$ είναι επιμορφισμός. Σε αυτήν την περίπτωση, ο Φ είναι ο μηδενικός μορφισμός και $\mathsf{Ext}^1_R(M_3,R)=0$, ■

Πόρισμα 5.2.11. *Έστω R ένας δακτύλιος ισχυρά Gorenstein, M ένα maximal Cohen-Macaulay R-πρότυπο και $P^\bullet \longrightarrow M$ μία προβολική ανάλυση του M:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P^{-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P^0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & \Omega^2_M \arrow[ur] & & \Omega^1_M \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

όπου με Ω^i_M συμβολίζουμε τα αντίστοιχα πρότυπα συζυγίας, δηλαδή

$$\Omega^i_M = \mathsf{Coker}(P^{-i-1} \longrightarrow P^{-i})$$

για κάθε $i > 0$. Τότε, για κάθε $i < 0$ το Ω^i_M είναι ένα MCM πρότυπο.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega^1_M \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Από το Πόρισμα 5.2.9, το P^0 είναι ένα MCM πρότυπο, ενώ από την πρόταση 1 του Λήμματος 5.2.10 προκύπτει ότι και το Ω^1_M είναι επίσης ένα MCM πρότυπο. Στη συνέχεια, θεωρούμε την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega^2_M \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow \Omega^1_M \longrightarrow 0$$

και παρόμοια, εφόσον τα P^{-1}, Ω^1_M είναι MCM πρότυπα, το Ω^2_M είναι επίσης MCM. Συνεχίζοντας επαγωγικά προκύπτει το ζητούμενο. ■

Λήμμα 5.2.12. *Έστω R ένας δακτύλιος ισχυρά Gorenstein και*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία R-προτύπων. Τότε, αν το M_3 είναι ένα MCM πρότυπο, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-,R)$ προκύπτει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_3,R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_2,R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_1,R) \longrightarrow 0$$

δηλαδή ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,R)$ είναι ακριβής σε ακριβείς ακολουθίες με δεξιό άκρο ένα MCM πρότυπο.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-,R)$ στην αρχική ακριβή ακολουθία, αποκτούμε μία μεγάλη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_3,R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_2,R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M_1,R) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M_3,R) \longrightarrow \cdots$$

Εφόσον το πρότυπο M_3 είναι maximal Cohen-Macaulay, τότε εξ ορισμού $\mathsf{Ext}^1_R(M_3,R) = 0$ και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. ■

Πρόταση 5.2.13. *[51, Proposition 2.2.] Έστω R ένας δακτύλιος ισχυρά Gorenstein και M ένα R-πρότυπο. Αν το M έχει μία προβολική συν-ανάλυση, τότε είναι maximal Cohen-Macaulay.*

Απόδειξη. Έστω $M \longrightarrow P^\bullet$:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^3 \longrightarrow \cdots$$

μία προβολική συνανάλυση του M. Θέτουμε $\Omega_M^0 = M$ και συμβολίζουμε με Ω_M^i τον συνπυρήνα του μορφισμού $P^i \longrightarrow P^{i+1}$ για κάθε $i > 0$. Εφόσον ο δακτύλιος R έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, θα υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $\mathsf{Ext}_R^{n+1}(N, R) = 0$ για κάθε R-πρότυπο N. Επιπλέον, αφού κάθε P^i είναι προβολικό έχουμε $\mathsf{Ext}_R^n(P^i, R) = 0$ για κάθε $i, n \geqslant 0$, άρα εφαρμόζοντας dimension shifting (βλ. [14, Lemma 12.1.4.]), αποκτούμε φυσικούς ισομορφισμούς:

$$\mathsf{Ext}_R^i(\Omega_M^0, R) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ext}_R^{i+j}(\Omega_M^{-j}, R)$$

για κάθε $i, j \geqslant 0$. Έτσι, για κάθε $i > 0$ θεωρώντας κατάλληλο $j > n - i$ έχουμε $\mathsf{Ext}_R^i(M, R) = 0$ και το Ω_M^0 είναι MCM. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1 του Λήμματος 5.2.10 βλέπουμε ότι και το M είναι επίσης MCM. ■

Σχόλιο 5.2.14. Από την απόδειξη της παραπάνω πρότασης, προκύπτει άμεσα ότι σε μία προβολική συνανάλυση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^3 \longrightarrow \cdots$$

όλα τα πρότυπα συζυγίας, δηλαδή οι συνπυρήνες Ω_M^i των μορφισμών $P^i \longrightarrow P^{i+1}$ για κάθε $i > 0$, είναι MCM πρότυπα.

Θα διατυπώσουμε στη συνέχεια μία πρόταση η οποία χαρακτηρίζει τα MCM πρότυπα και για την οποία θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.2.15. *Ένα δεξιό R-πρότυπο M θα καλείται* **ανακλαστικό (reflexive)** *αν-ν ο κανονικός μορφισμός*

$$d\colon M \longrightarrow M^{**}$$

με

$$d(m)(\phi) = \phi(m)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $m \in M$ και για κάθε $\phi \in M^*$, όπου $M^* = \mathsf{Hom}_R(M, R)$.

Πρόταση 5.2.16. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ένα R-πρότυπο M είναι MCM αν-ν το R^{op}-πρότυπο $M^* = \mathsf{Hom}_R(M, R)$ είναι MCM.*

2. *Τα MCM πρότυπα είναι ανακλαστικά (reflexive), δηλαδή $M \cong M^{**}$.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε προβολικό δεξιό πρότυπο P, το $\mathsf{Hom}_R(P, R)$ είναι επίσης ένα προβολικό αριστερό πρότυπο καθώς ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, R)$ απεικονίζει ευθείς αθροιστέους ελεύθερων προτύπων σε ευθείς αθροιστέους ελεύθερων προτύπων.

Έστω τώρα M ένα maximal Cohen-Macaulay R-πρότυπο και $P^\bullet \longrightarrow M$ μία προβολική ανάλυση του M:

$$\cdots \longrightarrow P^{-3} \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Αφού το M είναι maximal Cohen-Macaulay, από το Πόρισμα 5.2.11 προκύπτει ότι ότι όλοι οι συνπυρήνες

$$\Omega_M^i = \mathsf{Coker}(P^{-i-1} \longrightarrow P^{-i})$$

είναι MCM πρότυπα. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.2.12 στη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega_M^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

προκύπτει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P^0, R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(\Omega_M^{-1}, R) \longrightarrow 0$$

Παρόμοια, θεωρώντας την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega_M^2 \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow \Omega_M^{-1} \longrightarrow 0$$

αποκτούμε μία σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(\Omega_M^1, R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P^{-1}, R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(\Omega_M^2, R) \longrightarrow 0$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βλέπουμε ότι η μεγάλη ακολουθία

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P^0, R) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathsf{Hom}_R(P^{-1}, R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(P^{-2}, R) \longrightarrow \cdots \quad (5.2)$$

είναι ακριβής και όπως προαναφέρθηκε, κάθε πρότυπο $\mathsf{Hom}_R(P^i, R)$ είναι προβολικό. Συνεπώς η (5.2) αποτελεί μία προβολική συνανάλυση $M^* \longrightarrow (P^\bullet)^*$ του R^{op}-προτύπου $\mathsf{Hom}_R(M, R)$. Εφόσον το M^* έχει μία προβολική συν-ανάλυση, από το Λήμμα 5.2.13 προκύπτει ότι είναι επίσης ένα MCM πρότυπο.

Δυϊκοποιώντας ακόμη μία φορά την προβολική συν-ανάλυση του M^*, αποκτούμε έναν φυσικό μορφισμό

$$\sigma_M \colon M \longrightarrow M^{**} = \mathsf{Hom}_R(\mathsf{Hom}_R(M, R), R)$$

ο οποίος ορίζεται ως $\sigma_M(m)(f) = f(m)$. Σύμφωνα με το [2, §2.1.], ο παραπάνω μορφισμός εμφανίζεται σε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ext}_R^1(\Omega_0^*, R) \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma_M} M^{**} \longrightarrow \mathsf{Ext}_R^2(\Omega_0^*, R) \longrightarrow 0$$

όπου $\Omega_0^* = \mathsf{coker}\partial_0^*$, ο συνπυρήνας του μορφισμού ∂_0^* στην ακολουθία (5.2). Όμως, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο συνπυρήνας αυτός είναι ένα MCM πρότυπο και συνεπώς

$$\mathsf{Ext}_R^1(\Omega_0^*, R) = \mathsf{Ext}_R^2(\Omega_0^*, R) = 0$$

δηλαδή ο σ_M είναι ισομορφισμός προτύπων. Ως αποτέλεσμα, το M είναι ανακλαστικό και αν το M^* είναι MCM, τότε και το $M^{**} \cong M$ είναι επίσης MCM ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ∎

Σχόλιο 5.2.17. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μία σύντομη ακολουθία από MCM πρότυπα στην mod-R είναι ακριβής, αν-ν η δυϊκή ακολουθία στην mod-R^{op} είναι ακριβής. Έτσι, ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, R)$ επάγει μία ακριβή δυϊκότητα (exact duality) μεταξύ των κατηγοριών $\mathsf{MCM}(R)$ και $\mathsf{MCM}(R^{\mathsf{op}})$, δηλαδή ο συναρτητής

$$\mathsf{Hom}_R(-, R) \colon \mathsf{MCM}(R) \longrightarrow \mathsf{MCM}(R^{\mathsf{op}})$$

είναι μία αντισυναλλοίωτη ισοδυναμία κατηγοριών.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση μπορούμε να δείξουμε το αντίστροφο της Πρότασης 5.2.13, αποκτώντας τον ακόλουθο χαρακτηρισμό των maximal Cohen-Macaulay προτύπων:

Πρόταση 5.2.18. *Έστω R ένας δακτύλιος ισχυρά Gorenstein. Τότε, ένα R-πρότυπο M είναι MCM αν-ν το M έχει μία προβολική συν-ανάλυση.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει στην Πρόταση 5.2.13 ότι αν το M έχει μία προβολική συν-ανάλυση, τότε το M είναι MCM. Έστω τώρα M ένα MCM πρότυπο και M^* το δυϊκό του. Θεωρούμε μία προβολική ανάλυση $P^\bullet \longrightarrow M^*$. Εφόσον το M είναι MCM, από την Πρόταση 5.2.16, το M^* είναι επίσης MCM, ενώ από την απόδειξη της ίδιας Πρότασης, η $M^{**} \longrightarrow P^*$ αποτελεί μία προβολική συν-ανάλυση του $M^{**} \cong M$. ∎

Παρατήρηση 5.2.19. Από τον ορισμό της vdim$R$ ενός δακτυλίου Gorenstein R και τα παραπάνω συμπεράσματα, βλέπουμε ότι για κάθε πρότυπο στην κατηγορία mod-R υπάρχει μία πεπερασμένη ανάλυση από MCM πρότυπα η οποία έχει μήκος το πολύ ίσο με την vdim$R$. Σε μία τέτοια ανάλυση, όλα τα πρότυπα εκτός του τελευταίου μπορούν να επιλεχθούν να είναι πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά.

Σχόλιο 5.2.20. Οι ιδιότητες «ισχυρά Gorenstein» και «maximal Cohen-Macaulay» διατηρούνται από την ισοδυναμία Morita.

Χρησιμοποιώντας την ορολογία του D. Quillen στο [47, §2], το Λήμμα 5.2.10 μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Παρατήρηση 5.2.21. Η κατηγορία MCM(R) είναι μία ακριβής υποκατηγορία της mod-R στην οποία κάθε επιμορφισμός είναι admissible και στην οποία οι admissible μονομορφισμοί είναι ακριβώς εκείνοι οι μορφισμοί f, οι οποίοι είναι μονομορφισμοί στην mod-R και ο δυϊκός μορφισμός τους f^* είναι επιμορφισμός στην mod-R^{op}.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα με το παρακάτω λήμμα το οποίο έχει σαν άμεση συνέπεια την εξής ιδιότητα των MCM προτύπων:

Υπεράνω ενός δακτυλίου R, ο οποίος είναι Noetherian και πεπερασμένης ενέσιμης διάστασης, τα maximal Cohen-Macaulay πρότυπα και τα πρότυπα πεπερασμένης προβολικής (ή ενέσιμης) διάστασης είναι «ορθογώνια» όσον αφορά το $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}$.

Λήμμα 5.2.22. *([17, Lemma 5.1.1.]) Έστω R ένας δακτύλιος ισχυρά Gorenstein. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ένα R-πρότυπο M είναι MCM αν-ν $\mathrm{Ext}^n_R(M,U)=0$ για κάθε $n\neq 0$ και για κάθε R-πρότυπο U πεπερασμένης προβολικής διάστασης.*

2. *Ένα R-πρότυπο U έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση αν-ν $\mathrm{Ext}^n_R(M,U)=0$ για κάθε $n\neq 0$ και για κάθε MCM R-πρότυπο M.*

3. *Ένα R-πρότυπο U έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση αν-ν έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.*

4. *Ένα R-πρότυπο M είναι MCM και πεπερασμένης προβολικής διάστασης αν-ν είναι προβολικό.*

5. *Κάθε ομομορφισμός R-προτύπων από ένα MCM σε ένα πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης αναλύεται μέσω ενός προβολικού προτύπου.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν δακτύλιο R ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

Αν M είναι ένα R-πρότυπο για το οποίο ισχύει $\mathrm{Ext}^n_R(M,U)=0$ για κάθε $n\neq 0$ και για κάθε R-πρότυπο U πεπερασμένης προβολικής διάστασης, τότε από τον ορισμό των MCM προτύπων προκύπτει άμεσα ότι το M είναι MCM. Έστω τώρα M ένα MCM R-πρότυπο και U ένα R-πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης, έστω $k>0$. Θεωρούμε μία προβολική ανάλυση του U:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^k \arrow[r] & P^{k-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P^{k-2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[r] & P^1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P^0 \arrow[r] & U \arrow[r] & 0 \\
& & & U^{k-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & U^{k-2} \arrow[dr] & & & U^1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

όπου με U^n συμβολίζουμε το αντικείμενο που αποτελεί τον συνπυρήνα του μορφισμού $P^{n+1} \longrightarrow P^n$ για κάθε $0 < n < k$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(M, -)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow P^k \longrightarrow P^{k-1} \longrightarrow U^{k-1} \longrightarrow 0$$

αποκτούμε μία μεγάλη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, P^k) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, P^{k-1}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, U^{k-1}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M, P^k) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M, P^{k-1}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(M, U^{k-1}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_R(M, P^k) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_R(M, P^k) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_R(M, P^{k-1}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_R(M, U^{k-1}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^{n+1}_R(M, P^k) \longrightarrow \cdots$$

Εφόσον το M είναι ένα MCM πρότυπο, άμεσα $\mathsf{Ext}^n_R(M, P^k) = \mathsf{Ext}^n_R(M, P^{k-1}) = \mathsf{Ext}^{n+1}_R(M, P^k) = 0$, για κάθε $n \geqslant 1$ άρα και $\mathsf{Ext}^n_R(M, U^{k-1}) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(M, -)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow U^{k-1} \longrightarrow P^{k-2} \longrightarrow U^{k-1} \longrightarrow 0$$

προκύπτει ότι $\mathsf{Ext}^n_R(M, U^{k-1}) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$ και συνεχίζοντας επαγωγικά, έχουμε $\mathsf{Ext}^n_R(M, U) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού 1.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό 4. Αν M είναι ένα προβολικό R-πρότυπο, τότε το M είναι πεπερασμένης προβολικής διάστασης και MCM (βλ. Πόρισμα 5.2.9). Από την άλλη πλευρά, αν θεωρήσουμε ένα MCM πρότυπο M πεπερασμένης προβολικής διάστασης και μία προβολική ανάλυση αυτού, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη του ισχυρισμού 1, προκύπτει ότι το M εμφανίζεται σε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow P^k \longrightarrow P^{k-1} \longrightarrow U^{k-1} \longrightarrow 0 \tag{5.3}$$

όπου το πρότυπο P^0 είναι προβολικό και επιπλέον $\mathsf{Ext}^1(M, U^1) = 0$, δηλαδή η (5.3) είναι διασπάσιμη. Έτσι, το M είναι προβολικό ως ευθύς αθροιστέος ενός προβολικού προτύπου ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού 4.

Όσον αφορά τον ισχυρισμό 2, όπως είδαμε στην απόδειξη του ισχυρισμού 1, αν U είναι ένα πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης, τότε για κάθε MCM R-πρότυπο M έχουμε $\mathsf{Ext}^n(M, U) = 0$ για κάθε $n \neq 0$. Έστω τώρα U ένα R-πρότυπο για το οποίο ισχύει $\mathsf{Ext}^n(M, U) = 0$ για κάθε $n \neq 0$ και για κάθε MCM R-πρότυπο M. Θα δείξουμε ότι το U έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση. Εφόσον ο δακτύλιος είναι Gorenstein, μπορούμε να θεωρήσουμε μία πεπερασμένη ανάλυση του U στην οποία όλα τα πρότυπα είναι MCM και επιπλέον, όλα εκτός ίσως του τελευταίου, έστω M, είναι προβολικά (βλ. Παρατήρηση 5.2.19). Τότε, το M είναι από υπόθεση MCM και έχει αναγκαστικά πεπερασμένη προβολική διάσταση, άρα σύμφωνα με τον ισχυρισμό 4 είναι προβολικό. Έτσι, το U έχει μία πεπερασμένη ανάλυση από προβολικά πρότυπα, δηλαδή έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση.

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με την απόδειξη του ισχυρισμού 2, προκύπτει ότι οι ίσχυρισμοί 2 και 3 είναι ισοδύναμοι.

Τέλος, ο ισχυρισμός 5 προκύπτει άμεσα από τους ισχυρισμούς 1 και 2. Αν $f\colon M \longrightarrow U$ είναι ένας ομομορφισμός από ένα MCM R-πρότυπο M σε ένα πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης U, επιλέγοντας μία πεπερασμένη προβολική ανάλυση του U, με παρόμοια επιχειρήματα προκύπτει το ζητούμενο. ■

5.3 Θεωρία Προσεγγίσεων

Ένα από τα κυριότερα συμπεράσματα που αφορούν τη μελέτη των maximal Cohen-Macaulay προτύπων στα πλαίσια ενός δακτυλίου ο οποίος είναι αριστερά και δεξιά Noetherian και ισχυρά

Gorenstein είναι το ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο μπορεί να «προσεγγισθεί» από ένα MCM πρότυπο και από ένα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο πεπερασμένης προβολικής ή ενέσιμης διάστασης. Ιδιαίτερα, αυτού του είδους οι αναπαραστάσεις είναι μοναδικές με ακρίβεια προβολικής ισοδυναμίας. Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιαστεί η γενικότερη θεωρία προσεγγίσεων των M. Auslander και R.-O. Buchweitz του [3], με σκοπό να εφαρμοστεί στα πλαίσια της θεωρίας των MCM προτύπων που αναπτύχθηκε παραπάνω.

Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, ενώ θα υποθέτουμε εξ αρχής ότι μία υποκατηγορία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{C}$ είναι πλήρης, προσθετική και κλειστή στους ισομορφισμούς. Με άλλα λόγια, η $\mathcal{A}$ θα είναι κλειστή στα πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C}$ το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}$.

Αρχικά θα κατασκευάσουμε την προσθετικά ευσταθή κατηγορία της $\mathcal{C}$.

Ορισμός 5.3.1. *Μία υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ καλείται* **κλειστή στους ευθείς αθροιστέους** *(ή karoubian σύμφωνα με τα [1] και [47]) αν είναι κλειστή στα ευθέα αθροίσματα αντικειμένων της $\mathcal{C}$.*

Κάθε υποκατηγορία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{C}$ δέχεται μία κλειστή θήκη $\mathsf{add}\mathcal{A}$ στην $\mathcal{C}$ η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα C της $\mathcal{C}$ τα οποία είναι ισόμορφα (στην $\mathcal{C}$) με έναν ευθύ αθροιστέο ενός αντικειμένου της $\mathcal{A}$. Προφανώς, η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στους ευθείς αθροιστέους στην $\mathcal{C}$ αν-ν $\mathcal{A} = \mathsf{add}\mathcal{A}$.

Σχόλιο 5.3.2. Η κλειστή θήκη μπορεί να περιγραφεί πιο γενικά ως εξής:

Για κάθε συλλογή $\{C_i\}_{i\in I}$ αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπάρχει μία μοναδική (με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών) μικρότερη προσθετικά κλειστή υποκατηγορία $\mathsf{add}\{C_i\}_{i\in I}$ της $\mathcal{C}$ η οποία περιέχει κάθε αντικείμενο C_i, όπου $i \in I$. Η κατηγορία αυτή ικανοποιεί την παρακάτω καθολική ιδιότητα: Αν $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας συναρτητής από την $\mathcal{C}$ σε μία άλλη προσθετική κατηγορία $\mathcal{D}$ έτσι ώστε το $F(C_i)$ να είναι το μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{D}$ για κάθε $i \in I$, τότε η $F(\mathsf{add}\{C_i\}_{i\in I})$ αποτελείται μόνο από μηδενικά αντικείμενα.

Θεωρώντας λοιπόν μία προσθετικά κλειστή υποκατηγορία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{C}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ τα αντικείμενα της οποίας είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$ ενώ οι μορφισμοί για δύο αντικείμενα $C_1, C_2 \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ δίνονται ως εξής:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(C_1, C_2) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)/I$$

όπου

$$I = \{f\colon C_1 \longrightarrow C_2 |\text{ ο } f \text{ αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου της } \mathcal{A}\}$$

Προφανώς, παρόλο που η $\mathcal{C}$ είναι εξ υποθέσεως αβελιανή, η $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ δεν είναι απαραίτητα αβελιανή.

Ορισμός 5.3.3. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{A}$ μία προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της. Για κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ ορίζουμε τη* **διάσταση της $\mathcal{A}$-ανάλυσης ($\mathcal{A}$-resolution dimension)** *του C, η οποία θα συμβολίζεται με $\mathcal{A}$-$\mathsf{resol.dim}C$ ως τον μικρότερο μη αρνητικό ακέραιο n για τον οποίο υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

όπου $A_i \in \mathcal{A}$, υπό την προϋπόθεση ότι ένας τέτοιος ακέραιος υπάρχει.

Θα γράφουμε $\mathcal{A}$-$\mathsf{resol.dim}C < \infty$ αν $\mathcal{A}$-$\mathsf{resol.dim}C = n$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ και τότε θα λέμε ότι το C έχει πεπερασμένη $\mathcal{A}$-ανάλυση.

Τέλος, θα συμβολίζουμε με $\widehat{\mathcal{A}}$ την (πλήρη) υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία αποτελείται από όλα τα αντικείμενα C της $\mathcal{C}$ για τα οποία ισχύει $\mathcal{A}$-$\mathsf{resol.dim}C < \infty$.

Σχόλιο 5.3.4. Προφανώς, κάθε $A \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$ έχει μία πεπερασμένη $\mathcal{A}$-ανάλυση και η $\mathcal{A}$ αποτελεί μία (πλήρη) υποκατηγορία της $\widehat{\mathcal{A}}$.

Ορισμός 5.3.5. *Μία υποκατηγορία $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ καλείται* **συν-γεννήτορας (cogenerator)** *της $\mathcal{A}$ αν για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{A}$ υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow A' \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$ όπου το B είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{B}$.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό που προηγήθηκε, στα παρακάτω θα σταθεροποιήσουμε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{C}$ και μία προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της $\mathcal{X}$ η οποία είναι επιπλέον **ακριβής** (με την έννοια του Quillen, βλ. [47]), δηλαδή **κλειστή στις επεκτάσεις**: Αν η ακολουθία

$$0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{C}$ με $C_1, C_3 \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$, τότε και $C_2 \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$. Τέλος, θεωρούμε μία προσθετικά κλειστή υποκατηγορία ω της $\mathcal{X}$ η οποία αποτελεί έναν συν-γεννήτορα της $\mathcal{X}$. Αρχικός μας στόχος είναι η μελέτη της συσχέτισης των κατηγοριών $\mathcal{X}$, ω, $\widehat{\mathcal{X}}$ και $\widehat{\omega}$.

Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 5.3.6. *Έστω*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Y^K \longrightarrow X^K \longrightarrow 0$$

δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες στην $\mathcal{C}$, με $X, X^K \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$ και $Y^K \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$. Συμβολίζοντας με U το pushout των μορφισμών $K \longrightarrow X$ και $K \longrightarrow Y^K$ προκύπτει ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^K \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & X^K \arrow[r] \arrow[d] & X^K \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

από το οποίο αποκτούμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Y^K \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

έτσι ώστε $Y^K \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$ και $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Εφόσον από υπόθεση $Y^K \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$, μένει να δείξουμε ότι $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$. Στο παραπάνω διάγραμμα, θεωρούμε την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow U \longrightarrow X^K \longrightarrow 0$$

Αφού η υποκατηγορία $\mathcal{X}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις και $X, X^K \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$, άμεσα $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ■

Λήμμα 5.3.7. *Έστω*

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow X_C \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες στην $\mathcal{C}$, με $X, X_C \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$, $Y_C \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$ και $W \in \omega$. Συμβολίζοντας με Z το pushout των μορφισμών $X_C \longrightarrow W$ και $X_C \longrightarrow C$ προκύπτει ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y_C \arrow[r] \arrow[d] & Y_C \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_C \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

από το οποίο αποκτούμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

έτσι ώστε $Z \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$ και $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Παρόμοια, αφού από υπόθεση $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$, μένει να δείξουμε ότι $Z \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$. Στο παραπάνω διάγραμμα, θεωρούμε την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Εφόσον πάλι από υπόθεση, $Y_C \in \widehat{\omega}$, εξ ορισμού ω-resol.dim$Y_C < \infty$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι το W είναι ένα αντικείμενο της ω, το Z θα έχει μία πεπερασμένη ω-ανάλυση, δηλαδή ω-resol.dim$Z < \infty$ και $Z \in \widehat{\omega}$. ■

Με τα παραπάνω λήμματα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αποτελεί το κύριο εργαλείο για την εξαγωγή των συμπερασμάτων του κεφαλαίου.

Θεώρημα 5.3.8. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{C}$ μία προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της. Θεωρούμε μία προθετικά κλειστή υποκατηγορία $\mathcal{X}$ της $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή στις επεκτάσεις και μία προσθετικά κλειστή υποκατηγορία ω της $\mathcal{X}$ η οποία αποτελεί έναν συν-γεννήτορα της $\mathcal{X}$. Τότε, για κάθε $C \in \mathsf{ob}(\widehat{\mathcal{X}})$ υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες*

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

και

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

όπου $Y_C, Y^C \in \widehat{\omega}$ και $X_C, X^C \in \mathcal{X}$.

Απόδειξη. Εφόσον $C \in \mathsf{ob}(\widehat{\mathcal{X}})$, εξ ορισμού $\mathcal{X}$-resol.dim$C < \infty$. Έστω $\mathcal{X}$-resol.dim$C = n$ όπου $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Αποκτούμε έτσι μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d} X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

όπου $X_i \in \mathcal{X}$ για κάθε $0 \leqslant i \leqslant n$. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στη διάσταση n.

Αν $n = 0$, τότε $C \in \mathcal{X}$ και αφού η ω είναι ένας συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$, υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{X}$ με $W \in \omega$. Θέτοντας $X = X^C$ και $W = Y^C$ βλέπουμε ότι η παραπάνω σύντομη ακριβής ακολουθία είναι της μορφής (5.5). Από την άλλη πλευρά, μία προφανής ακολουθία της μορφής (5.4) είναι η

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε ένα $n > 0$ και υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $0 \leqslant k < n$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για διάσταση n. Θέτουμε $K = \mathsf{Im}d$ και θεωρούμε τις ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.6}$$

και

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d} K \longrightarrow 0 \tag{5.7}$$

Από την (5.18) βλέπουμε ότι $\mathcal{X}$-resol.dim$K \leqslant n$ συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Y^K \longrightarrow X^K \longrightarrow 0 \tag{5.8}$$

με $Y^K \in \widehat{\omega}$ και $X^K \in \mathcal{X}$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.3.6 στις σύντομες ακριβείς ακολουθίες (5.6) και (5.8) προκύπτει ένα διάγραμμα pushout

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^K \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & X^K \arrow[r] \arrow[d] & X^K \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$. Θεωρώντας λοιπόν την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Y^K \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.9}$$

και θέτοντας $Y^K = Y^C$ και $U = X_C$, έχουμε κατασκευάσει μία σύντομη ακριβή ακολουθία της μορφής (5.4). Εφόσον η ω είναι ένας συν-γεννήτορας της $\mathcal{X}$ και $U \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$, υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow W \longrightarrow U' \longrightarrow 0 \tag{5.10}$$

στην $\mathcal{X}$ με $W \in \omega$. Τέλος, εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.3.7 στις (5.9) και (5.10), προκύπτει ένα διάγραμμα pushout

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y^K \arrow[r] \arrow[d] & Y^K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

και μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Z \longrightarrow U' \longrightarrow 0$$

με $Z \in \widehat{\omega}$ και $U' \in \mathcal{X}$, οπότε μπορούμε να θέσουμε $Z = Y^C$ και $U' = X^C$. ■

Σχόλιο 5.3.9. Συχνά, όταν βρισκόμαστε στο κατάλληλο πλαίσιο, θα καλούμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

στην οποία $X_C \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$ και $Y_C \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$ μία **$\mathcal{X}$-προσέγγιση ($\mathcal{X}$-approximation)** του C. Δυϊκά, θα καλούμε μία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$$

με $Y^C \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$ και $X^C \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$ μία **ω-θήκη (ω-hull)** του C.

Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε μία επιπλέον συνθήκη για την υποκατηγορία $\mathcal{X}$, απαιτώντας όλοι οι επιμορφισμοί στην $\mathcal{C}$ αντικειμένων στην $\mathcal{X}$ να είναι **admissible** (με την έννοια του Quillen, βλ. [47]), δηλαδή η $\mathcal{X}$ είναι κλειστή στους επιμορφισμούς της $\mathcal{C}$. Με άλλα λόγια, αν

$$0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία με $X_1, X_2 \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$, τότε και $X_0 \in \mathcal{X}$. Η υπόθεση ότι η $\mathcal{X}$ είναι μία προσθετικά κλειστή υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή στις επεκτάσεις, διατηρείται επίσης. Το ακόλουθο λήμμα προκύπτει σαν συνέπεια αυτής της επιπλέον συνθήκης.

Λήμμα 5.3.10. *Έστω ότι υπάρχει μία ω-θήκη*

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$$

για το αντικείμενο C της $\mathcal{C}$. Τότε το C δέχεται μία $\mathcal{X}$ -προσέγγιση

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

στην οποία το Y_C, αν δεν ανήκει ήδη στην ω, μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$\omega\text{-}\mathsf{resol.dim} Y_C < \omega\text{-}\mathsf{resol.dim} Y^C$$

Απόδειξη. Εφόσον $Y^C \in \mathrm{ob}(\widehat{\omega})$, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow W_n \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} W_0 \longrightarrow Y^C \longrightarrow 0 \tag{5.11}$$

με $W_i \in \omega$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα pullback

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & W_0 \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Y^C \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

όπου $K = \mathrm{Im} d$. Εφόσον $X^C, W_0 \in \mathrm{ob}(\mathcal{X})$, από την επιπλέον συνθήκη η οποία απαιτεί όλοι οι επιμορφισμοί να είναι admissible, προκύπτει ότι $L \in \mathrm{ob}(\mathcal{X})$. Από την ακριβή ακολουθία 5.13, εξ ορισμού έχουμε $K \in \widehat{\omega}$ και ω-resol.dim$K < \omega$-resol.dimY^C, δηλαδή η

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση του C. Θέτοντας $Y_C = K$ και $X_C = L$ προκύπτει το ζητούμενο. ■

Άμεση συνέπεια αυτού του λήμματος αποτελεί ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των αντικειμένων της $\widehat{\mathcal{X}}$.

Πρόταση 5.3.11. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ στην οποία κάθε επιμορφισμός είναι admissible. Αν ω είναι ένας συν-γεννήτορας της $\mathcal{X}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$:*

1. *Το C είναι ένα αντικείμενο της $\widehat{\mathcal{X}}$.*
2. *Υπάρχει μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση*
$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
του C.
3. *Υπάρχει μία ω-θήκη*
$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$$
του C.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3.8, γνωρίζουμε ότι για κάθε αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$ υπάρχει μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση και μία ω-θήκη του C, δηλαδή $1 \Longrightarrow 2$ και $1 \Longrightarrow 3$. Μένει να δείξουμε ότι $2 \Longrightarrow 1$ και $3 \Longrightarrow 2$.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι η

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

είναι μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση του C και θα δείξουμε ότι $C \in \mathrm{ob}(\widehat{\mathcal{X}})$. Εφόσον $Y_C \in \mathrm{ob}(\widehat{\omega})$, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow W_n \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow 0 \tag{5.12}$$

με $W_i \in \omega$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$. Η ω είναι μία υποκατηγορία της $\mathcal{X}$, άρα από την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow W_n \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_0 \longrightarrow X^C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.13}$$

προκύπτει ότι $C \in \mathrm{ob}(\widehat{\mathcal{X}})$. Το τελευταίο μέρος της απόδειξης, προκύπτει άμεσα από το παραπάνω λήμμα, σύμφωνα με το οποίο αν ένα αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ έχει μία ω-θήκη, τότε το C θα έχει και μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση. ∎

Η πρόταση αυτή έχει άμεση εφαρμογή στη θεωρία των MCM προτύπων η οποία αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι αριστερά και δεξιά Noetherian με την επιπλέον συνθήκη να είναι ισχυρά Gorenstein, δηλαδή η ενέσιμη διάσταση του R σαν ένα δεξιό και σαν ένα αριστερό R-πρότυπο είναι πεπερασμένη. Στην Πρόταση 5.3.11 θέτουμε $\mathcal{C} = \mathsf{mod}\text{-}R$, την κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων και $\mathcal{X}$ ως την υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$ η οποία αποτελείται από όλα τα MCM πρότυπα. Υπενθυμίζουμε ότι ένα R-πρότυπο M ορίστηκε να είναι MCM αν-ν $\mathsf{Ext}^i_R(M,R) = 0$ για κάθε $i \neq 0$.

Με τις παραπάνω υποθέσεις η $\mathcal{X}$ είναι προφανώς προσθετικά κλειστή, κλειστή στις επεκτάσεις και κάθε επιμορφισμός είναι admissible (βλ. Λήμμα 5.2.10). Έτσι, η $\mathcal{X}$ ικανοποιεί τις γενικές υποθέσεις της Πρότασης 5.3.11.

Στη συνέχεια θέτουμε $\omega = \mathsf{P}(R)$, την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{mod}\text{-}R$ η οποία αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Προφανώς η $\mathsf{P}(R)$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$ η οποία είναι προσθετικά κλειστή. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η $\mathsf{P}(R)$ αποτελεί έναν συν-γεννήτορα για την $\mathsf{MCM}(R)$. Θα εξετάσουμε καλύτερα αυτό το επιχείρημα.

Λήμμα 5.3.12. *Η πλήρης υποκατηγορία* $\mathsf{P}(R)$ *της* $\mathsf{mod}\text{-}R$ *η οποία αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά* R*-πρότυπα είναι ένας συνγεννήτορας της* $\mathsf{MCM}(R)$.

Απόδειξη. Έστω M ένα maximal Cohen-Macaulay R-πρότυπο και $M^* = \mathsf{Hom}_R(M,R)$ το αντίστοιχο δυϊκό του. Επιλέγουμε μία εμβάπτιση $p\colon Q^\bullet \longrightarrow M^*$ από ένα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικό R-πρότυπο Q στο M^*. Τότε, θέτοντας $K = \mathsf{Ker}p$ θεωρούμε την ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Q \xrightarrow{p} M^* \longrightarrow 0$$

Από το, Λήμμα 5.2.10 προκύπτει ότι το πρότυπο K είναι MCM, ενώ δυϊκοποιώντας άλλη μία φορά αποκτούμε μία ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M^{**} \longrightarrow Q^* \xrightarrow{p} K^* \longrightarrow 0$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.16 τα πρότυπα Q^* και K^* είναι επίσης MCM, ενώ επίσης από την ίδια πρόταση γνωρίζουμε ότι κάθε MCM πρότυπο είναι ανακλαστικό, δηλαδή $M^{**} \cong M$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ακριβή ακολουθία βλέπουμε ότι κάθε MCM πρότυπο M εμβαπτίζεται σε ένα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο $\mathsf{Hom}_R(Q,R)$ και ο συνπυρήνας, ο οποίος είναι ισόμορφος με το K^*, είναι επίσης MCM. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη ότι η $\mathsf{P}(R)$ αποτελεί έναν συν-γεννήτορα της $\mathsf{MCM}(R)$. ∎

Μένει να εξετάσουμε τις αντίστοιχες κατηγορίες των $\widehat{\mathcal{X}}$ και $\widehat{\omega}$ της Πρότασης 5.3.11 στο συγκεκριμένο πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε. Η $\widehat{\mathsf{P}}(R)$ ορίζεται ως η πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{mod}\text{-}R$ η οποία αποτελείται από όλα τα R-πρότυπα X για τα οποία ισχύει $\mathsf{P}(R)\text{-}\mathsf{resol.dim}X < \infty$, δηλαδή από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα R-πρότυπα τα οποία έχουν πεπερασμένη προβολική διάσταση. Από την άλλη πλευρά, η $\widehat{\mathsf{MCM}}(R)$, είναι η πλήρης υποκατηγορία της mod-R η οποία αποτελείται από όλα τα R-πρότυπα N για τα οποία ισχύει MCM(R)-resol.dim$N < \infty$. Εύκολα βλέπουμε αυτά είναι ακριβώς τα πρότυπα N για τα οποία ισχύει $\mathsf{Ext}^i_R(N, R) = 0$ για αρκετά μεγάλο $i \in \mathbb{Z}$. Σε έναν δακτύλιο Gorenstein αυτά είναι όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα.

Με τις παραπάνω παρατηρήσεις, η Πρόταση 5.3.11 σε αυτό το πλαίσιο διαμορφώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.3.13. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι αριστερά και δεξιά Noetherian και ισχυρά Gorenstein. Τότε, για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο M, υπάρχουν ακριβείς ακολουθίες*

$$0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow X_M \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{5.14}$$

και

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y^M \longrightarrow X^M \longrightarrow 0 \tag{5.15}$$

στις οποίες τα πρότυπα Y_M και Y^M είναι πεπερασμένης προβολικής διάστασης πρότυπα στην mod-R*, ενώ τα X^M και X_M είναι MCM πρότυπα. Η ακολουθία (5.14) θα καλείται μία* **MCM-προσέγγιση** *του M, ενώ η ακολουθία (5.15) μία* **θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης** *του M.*

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη των $\mathcal{X}$-προσεγγίσεων και $\widehat{\omega}$-θηκών για ένα ζεύγος υποκατηγοριών $(\mathcal{X}, \omega)$, μένει να εξετάσουμε την μοναδικότητά τους.

Έστω C ένα αντικείμενο της $\widehat{\mathcal{X}}$ και δύο $\mathcal{X}$-προσεγγίσεις

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.16}$$

και

$$0 \longrightarrow Y'_C \longrightarrow X'_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.17}$$

του C. Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει σχετικά με την σύγκριση των παραπάνω σύντομων ακριβών ακολουθιών είναι η ύπαρξη ενός μορφισμού $\phi\colon X_C \longrightarrow X'_C$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_C \arrow[r] \arrow[d] & X_C \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y'_C \arrow[r] & X'_C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(X_C, -)$ στην (5.17) αποκτούμε μία μεγάλη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X_C, Y'_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X_C, X'_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X_C, C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(X_C, Y'_C) \longrightarrow \cdots$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο ζητούμενος μορφισμός ϕ υπάρχει αν-ν η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_R(X_C, X'_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X_C, C)$$

είναι επί, ή ισοδύναμα $\mathsf{Ext}^1_R(X_C, Y'_C) = 0$.

Το υπόλοιπο μέρος αυτής της ενότητας θα αφιερωθεί στην μελέτη αυτής της συνθήκης. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε τις ακόλουθες έννοιες.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αν $\mathcal{C}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και $A, C \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ τότε μπορούμε να ορίσουμε τις ομάδες $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A, C)$ για κάθε $n \geqslant 0$.

Ορισμός 5.3.14. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία και και $A, C \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

- *Η* **A-ενέσιμη διάσταση** *του C, η οποία συμβολίζεται με A-inj.dim$C$ είναι, εάν υπάρχει, ο μικρότερος ακέραιος $n \geqslant 0$ έτσι ώστε $\mathsf{Ext}^i_{\mathcal{C}}(A, C) = 0$ για κάθε $i > n$. Αν ένας τέτοιος ακέραιος δεν υπάρχει, θέτουμε A-inj.dim$C = \infty$.*

- *Η* ***C*-προβολική διάσταση** *του A, η οποία συμβολίζεται με C-proj.dim$A$ είναι, εάν υπάρχει, ο μικρότερος ακέραιος $n \geqslant 0$ έτσι ώστε $\mathsf{Ext}^i_{\mathcal{C}}(A, C) = 0$ για κάθε $i > n$. Αν ένας τέτοιος ακέραιος δεν υπάρχει, θέτουμε C-proj.dim$A = \infty$.*

Ορισμός 5.3.15. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{B}$ μία υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και $A, C \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

- *Η* ***A*-ενέσιμη διάσταση** *της $\mathcal{B}$, η οποία συμβολίζεται με A-inj.dim$\mathcal{B}$ ορίζεται ως*

$$A\text{-inj.dim}\mathcal{B} = \sup\{A\text{-inj.dim}B \mid B \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})\}$$

- *Η* ***C*-προβολική διάσταση** *της $\mathcal{B}$, η οποία συμβολίζεται με C-proj.dim$\mathcal{B}$ ορίζεται ως*

$$C\text{-proj.dim}\mathcal{B} = \sup\{C\text{-proj.dim}B \mid B \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})\}$$

Σχόλιο 5.3.16. Προφανώς A-inj.dim$\mathcal{B} = \mathcal{B}$-proj.dim$A$.

Ορισμός 5.3.17. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ υποκατηγορίες της $\mathcal{C}$.*

- *Η* ***$\mathcal{A}$*-ενέσιμη διάσταση** *της $\mathcal{B}$, η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{A}$-inj.dim$\mathcal{B}$ ορίζεται ως*

$$\mathcal{A}\text{-inj.dim}\mathcal{B} = \sup\{A\text{-inj.dim}B \mid A \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}), B \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})\}$$

- *Η* ***$\mathcal{A}$*-προβολική διάσταση** *της $\mathcal{B}$, η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{A}$-proj.dim$\mathcal{B}$ ορίζεται ως*

$$\mathcal{A}\text{-proj.dim}\mathcal{B} = \sup\{A\text{-proj.dim}B \mid A \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}), B \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})\}$$

Σχόλιο 5.3.18. Παρόμοια, $\mathcal{A}$-inj.dim$\mathcal{B} = \mathcal{B}$-proj.dim$\mathcal{A}$.

Ο ακόλουθος ορισμός ακολουθεί την ορολογία του Verdier.

Ορισμός 5.3.19. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ υποκατηγορίες της $\mathcal{C}$. Τότε, θα λέμε ότι η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι* **αριστερά ορθογώνια** *στην $\mathcal{B}$ ή ότι η $\mathcal{B}$ είναι* **δεξιά ορθογώνια** *στην $\mathcal{A}$, αν*

$$\mathcal{A}\text{-inj.dim}\mathcal{B} = \mathcal{B}\text{-proj.dim}\mathcal{A} = 0$$

Επιπλέον, αν η κατηγορία $\mathcal{A}$ αποτελείται ακριβώς από τα αντικείμενα A της $\mathcal{C}$ για τα οποία ισχύει A-inj.dim$\mathcal{B} = 0$, η $\mathcal{A}$ θα καλείται το **αριστερό ορθογώνιο συμπλήρωμα** *της $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{C}$, το οποίο και θα συμβολίζεται με ${}^{\perp}\mathcal{B}$.*

Δυϊκά, αν η υποκατηγορία $\mathcal{B}$ αποτελείται ακριβώς από τα αντικείμενα B της $\mathcal{C}$ για τα οποία ισχύει $\mathcal{A}$-inj.dim$B = 0$, η $\mathcal{B}$ θα καλείται το **δεξιό ορθογώνιο συμπλήρωμα** *της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{C}$, και θα συμβολίζεται με $\mathcal{A}^{\perp}$.*

Σχόλιο 5.3.20. Από τους παραπάνω ορισμούς, εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{A} \subseteq {}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp})$ και $\mathcal{A} \subseteq ({}^{\perp}\mathcal{A})^{\perp}$, αλλά γενικά ${}^{\perp}(\mathcal{A}^{\perp}) \neq ({}^{\perp}\mathcal{A})^{\perp}$.

Παρατήρηση 5.3.21. Εξ ορισμού, για μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{C}$, η κατηγορία ${}^{\perp}\mathcal{C}$, η οποία καλείται το **αριστερό ριζικό (left radical)** της $\mathcal{C}$ αποτελείται ακριβώς από όλα τα προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Δυϊκά, η $\mathcal{C}^{\perp}$, καλείται το **δεξιό ριζικό (right radical)** της $\mathcal{C}$ και αποτελείται ακριβώς από όλα τα ενέσιμα αντικείμενα της $\mathcal{C}$.

Λήμμα 5.3.22. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ένα αριστερό ή δεξιό ορθογώνιο συμπλήρωμα της $\mathcal{C}$ μία είναι προσθετικά κλειστή και ακριβή υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Επιπλέον, σε ένα αριστερό ορθογώνιο συμπλήρωμα ${}^{\perp}\mathcal{B}$ της $\mathcal{C}$ όλοι οι επιμορφισμοί είναι admissible. Δυϊκά, σε ένα δεξιό ορθογώνιο συμπλήρωμα $\mathcal{B}^{\perp}$ της $\mathcal{C}$ όλοι οι μονομορφισμοί είναι admissible.*

Απόδειξη. Τα ορθογώνια συμπληρώματα αποτελούν εξ ορισμού προσθετικές υποκατηγορίες. Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση ενός αριστερού ορθογώνιου συμπληρώματος, καθώς δυϊκά συμπεράσματα προκύπτουν ανάλογα και για ένα δεξιό. Έστω τώρα ${}^{\perp}\mathcal{B}$ ένα αριστερό ορθογώνιο συμπλήρωμα της $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{C}$ και

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβή ακολουθία στην $\mathcal{C}$ με $M', M'' \in \mathsf{ob}({}^{\perp}\mathcal{B})$. Θεωρούμε ένα αντικείμενο $B \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και εφαρμόζουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ στην παραπάνω ακριβή ακολουθία αποκτώντας μία μεγάλη ακριβή ακολουθία:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M'', B) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M, B) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M', B) \longrightarrow \cdots \tag{5.18}$$

Εφόσον $M', M'' \in \mathsf{ob}({}^{\perp}\mathcal{B})$, εξ ορισμού $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M', B) = \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M'', B) = 0$ και έτσι από την (5.18) προκύπτει ότι $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M, B) = 0$. Αφού το B επιλέχθηκε ως ένα τυχαίο αντικείμενο της $\mathcal{B}$, εξ ορισμού $M \in \mathsf{ob}({}^{\perp}\mathcal{B})$ και η ${}^{\perp}\mathcal{B}$ είναι μία αυστηρά πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή στις επεκτάσεις, δηλαδή μία ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.

Μένει να εξετάσουμε αν οι επιμορφισμοί στην ${}^{\perp}\mathcal{B}$ είναι admissible. Θεωρούμε μία σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

με $M, M'' \in \mathsf{ob}({}^{\perp}\mathcal{B})$. Παρόμοια, σταθεροποιώντας ένα $B \in \mathsf{ob}(\mathcal{B})$ και εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$, αποκτούμε μία μεγάλη ακριβή ακολουθία:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M, B) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M', B) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_{\mathcal{C}}(M'', B) \longrightarrow \cdots$$

στην οποία $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M, B) = \mathsf{Ext}^2_{\mathcal{C}}(M'', B) = 0$. Συνεπώς, $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(M', B) = 0$ και $M' \in \mathsf{ob}({}^{\perp}\mathcal{B})$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ∎

Σχόλιο 5.3.23. Υπενθυμίζουμε ότι η υποκατηγορία ω της $\mathcal{C}$ καλείται ένας **ενέσιμος συν-γεννήτορας** της $\mathcal{X}$ αν-ν $\mathcal{X}$-inj.dim$\omega = 0$, δηλαδή $\omega \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$. Εύκολα προκύπτει ότι η κατηγορία $\mathcal{X}$ έχει αρκετά ενέσιμα αντικείμενα αν-ν υπάρχει ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας ω της $\mathcal{X}$ με $\omega \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}$.

Στη συνέχεια, θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση, στην οποία δεν απαιτούμε να είναι κάθε επιμορφισμός στην $\mathcal{X}$ admissible.

Πρόταση 5.3.24. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Τότε, αν $C \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.*

1. $\mathcal{X}$-resol.dim$C = n$.
2. C-inj.dim$\omega = n$.
3. C-inj.dim$\widehat{\omega} = n$.
4. $\mathsf{Ext}^{n+1}_{\mathcal{C}}(C, Y) = 0$ *για κάθε* $Y \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [3, Proposition 2.1.]. ∎

Άμεση συνέπεια αυτής της πρότασης αποτελεί το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.3.25. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Τότε $\mathcal{X}$-inj.dim$\widehat{\omega} = 0$.*

Απόδειξη. Εφόσον η ω είναι ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$, έχουμε $\mathcal{X}$-inj.dim$\omega = 0$, συνεπώς από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι $\mathcal{X}$-inj.dim$\widehat{\omega} = 0$. ∎

Θεώρημα 5.3.26. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Αν*

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0 \tag{5.19}$$

είναι μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση για ένα αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$, τότε για κάθε $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{X})$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow 0$$

   είναι ακριβής.

2. *Ο μορφισμός π_C επάγει ισομορφισμούς*

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, X_C) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, C)$$

   για κάθε $n \geqslant 0$.

Απόδειξη. Έστω ένα αντικείμενο X της $\mathcal{X}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ στην (5.19) αποκτούμε μία μεγάλη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^{n+1}_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \cdots$$

Από το προηγούμενο πόρισμα έχουμε $\mathcal{X}$-inj.dim$\widehat{\omega} = 0$, δηλαδή $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, Y_C) = 0$ για κάθε $n > 0$ και από την ακρίβεια της παραπάνω ακολουθίας προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ■

Σχόλιο 5.3.27. Το παραπάνω θεώρημα δικαιολογεί την ονομασία $\mathcal{X}$-προσέγγιση η οποία δόθηκε στην ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow 0$$

καθώς η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής για κάθε $X \in \mathcal{X}$. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα των $\mathcal{X}$-προσεγγίσεων θα επιτρέψει ένα ασθενές είδος μοναδικότητας το οποίο θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Ορισμός 5.3.28. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία. Δύο μορφισμοί $f\colon B \longrightarrow C$ και $f'\colon B' \longrightarrow C'$ στην $\mathcal{C}$ καλούνται* **δεξιά ισοδύναμοι** *στην $\mathcal{C}$, αν υπάρχουν μορφισμοί $g\colon B \longrightarrow B'$ και $h'\colon B' \longrightarrow B$ έτσι ώστε $f = f' \circ g$ και $f' = f \circ h$.*

Επιπλέον, θα λέμε ότι δύο ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{f} C$$

και

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \xrightarrow{f'} C'$$

είναι **δεξιά ισοδύναμες**, *αν οι μορφισμοί f και f' είναι ισοδύναμοι, δηλαδή αν υπάρχουν μορφισμοί $g\colon B \longrightarrow B'$ και $h\colon B' \longrightarrow B$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r, "f'"] & C
\end{tikzcd}$$

Σχόλιο 5.3.29. Στον παραπάνω ορισμό, εύκολα βλέπουμε ότι ο μορφισμός $1_B - h \circ g$ αναλύεται μέσω του A ενώ ο μορφισμός $1_{B'} - g \circ h$ αναλύεται μέσω του A'. Έτσι, οι h και g είναι αντίστροφοι ισομορφισμοί στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathsf{add}\{A, A'\}$.

Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο αφορά την μοναδικότητα των $\mathcal{X}$-προσεγγίσεων και προκύπτει σαν άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 5.3.26.

Θεώρημα 5.3.30. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Αν*

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.20}$$

είναι μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση ενός αντικειμένου C της $\widehat{\mathcal{X}}$, τότε η (5.20) είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας ακολουθιών. Με άλλα λόγια, αν

$$0 \longrightarrow Y'_C \longrightarrow X'_C \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{5.21}$$

είναι μία άλλη $\mathcal{X}$-προσέγγιση του C, τότε οι (5.20) και (5.21) είναι δεξιά ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες.

Ένα δυϊκό αποτέλεσμα ισχύει και για τις $\widehat{\omega}$-θήκες ενός αντικειμένου C της $\widehat{\mathcal{X}}$ και θα παρουσιαστεί στη συνέχεια. Αρχικά, θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.3.31. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Αν*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\iota^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0 \tag{5.22}$$

είναι μία $\widehat{\omega}$-θήκη για ένα αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$, τότε για κάθε $Y \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) \longrightarrow 0$$

   είναι ακριβής.

2. *Ο μορφισμός ι^C επάγει ισομορφισμούς*

$$\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(C, Y)$$

   για κάθε $n \geqslant 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του Θεωρήματος 5.3.26. Θεωρούμε ένα αντικείμενο Y της $\widehat{\omega}$ και εφαρμόζουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ στην (5.22) αποκτώντας μία μεγάλη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C, Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^2_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(C, Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^{n+1}_{\mathcal{C}}(X^C, Y) \longrightarrow \cdots$$

Από το Πόρισμα 5.3.25 έχουμε $\mathcal{X}$-inj.dim$\widehat{\omega} = 0$, δηλαδή $\mathsf{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X^C, Y) = 0$ για κάθε $n > 0$ και από την ακρίβεια της παραπάνω ακολουθίας προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ■

Σχόλιο 5.3.32. Παρόμοια, το παραπάνω θεώρημα δικαιολογεί την ονομασία $\widehat{\omega}$-θήκη η οποία δόθηκε στην ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$$

καθώς η ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^C, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής για κάθε $X \in \mathcal{X}$. Ξανά, αυτή η ιδιότητα των $\widehat{\omega}$-θηκών θα επιτρέψει ένα ασθενές είδος μοναδικότητας το οποίο θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Ορισμός 5.3.33. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία. Δύο μορφισμοί $f\colon C \longrightarrow D$ και $f'\colon C \longrightarrow D'$ στην $\mathcal{C}$ καλούνται* **αριστερά ισοδύναμοι** *στην $\mathcal{C}$, αν υπάρχουν μορφισμοί $g\colon D \longrightarrow D'$ και $h\colon D' \longrightarrow D$ έτσι ώστε $f' = g \circ f$ και $f = h \circ f'$.*

Επιπλέον, λέμε ότι δύο ακριβείς ακολουθίες

$$C \xrightarrow{f} D \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

και

$$C \xrightarrow{f'} D' \longrightarrow E' \longrightarrow 0$$

είναι **αριστερά ισοδύναμες**, *αν οι μορφισμοί f και f' είναι ισοδύναμοι, δηλαδή αν υπάρχουν μορφισμοί $g\colon D \longrightarrow D'$ και $h\colon D' \longrightarrow D$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & D' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & E' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C \arrow[r, "f"] & D \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Σχόλιο 5.3.34. Στον παραπάνω ορισμό, βλέπουμε ότι ο μορφισμός $1_D - h \circ g$ αναλύεται μέσω του E, ενώ ο μορφισμός $1_{D'} - g \circ h$ αναλύεται μέσω του E'. Συνεπώς, οι h και g αποτελούν αντίστροφους ισομορφισμούς στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathsf{add}\{A, A'\}$.

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αφορά τη μοναδικότητα των $\widehat{\omega}$-θηκών, προκύπτει σαν άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.31.

Θεώρημα 5.3.35. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Αν*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\iota^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0 \tag{5.23}$$

είναι μία $\widehat{\omega}$-θήκη για ένα αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$, τότε η (5.23) είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας ακολουθιών. Με άλλα λόγια, αν

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow Y_1^C \longrightarrow X_1^C \longrightarrow 0 \tag{5.24}$$

είναι μία άλλη $\widehat{\omega}$-θήκη του C, τότε οι (5.23) και (5.24) είναι αριστερά ισοδύναμες ακριβείς ακολουθίες.

Λήμμα 5.3.36. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Αν $f\colon X \longrightarrow C$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ με $X \in \mathcal{X}$ και $C \in \widehat{\mathcal{X}}$, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο μορφισμός f αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου της $\widehat{\omega}$.*

2. *Ο μορφισμός f αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου της ω.*

Απόδειξη. Αφού $\omega \subseteq \widehat{\omega}$, αρκεί να δείξουμε ότι αν ο f αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου της $\widehat{\omega}$, τότε αναλύεται και μέσω ενός αντικειμένου της ω. Έστω ότι $f = gh$, όπου οι $h\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon V \longrightarrow C$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ και $Y \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$. Από τον ορισμό της κατηγορίας $\widehat{\omega}$, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow W \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

με $W \in \mathsf{ob}(\omega)$ και $K \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$, από την οποία αποκτούμε μία μεγάλη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,K) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,W) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}_{\mathcal{C}}(X,K) \longrightarrow \cdots$$

Εφόσον η ω είναι ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$, από το Πόρισμα 5.3.25 έχουμε $\mathcal{X}\text{-inj.dim}\widehat{\omega} = 0$ και $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X,K) = 0$. Συνεπώς η απεικόνιση $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,W) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ είναι επιμορφισμός και έτσι, υπάρχει ένας μορφισμός $u\colon X \longrightarrow W$ ώστε $v \circ u = h$. Επομένως, $f = g \circ h = \gamma \circ v \circ w$ και ο f αναλύεται μέσω του αντικειμένου $W \in \mathsf{ob}(\omega)$. ■

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι για κάθε αντικείμενο $C \in \mathsf{ob}(\widehat{\mathcal{X}})$ έχει επιλεχθεί μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση

$$0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0$$

και μία $\widehat{\omega}$-θήκη

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\iota^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$$

Κατ' επέκτασιν, αν $f\colon C \longrightarrow D$ είναι ένας μορφισμός στην $\widehat{\mathcal{X}}$, θα συμβολίζουμε με $f_*\colon X_C \longrightarrow X_D$ και $f^*\colon Y^C \longrightarrow Y^D$ τους επαγόμενους μορφισμούς στις αντίστοιχες $\mathcal{X}$-προσεγγίσεις και $\widehat{\omega}$-θήκες που προκύπτουν από τα παραπάνω. Από τα θεωρήματα μοναδικότητας που διατυπώθηκαν, αν $g\colon D \longrightarrow E$ είναι ένας άλλος μορφισμός στην $\widehat{\mathcal{X}}$, τότε οι διαφορές $g^* \circ f^* - (g \circ f)^*$ και $g_* \circ f_* - (g \circ f)_*$ αναλύονται μέσω αντικειμένων της ω, δηλαδή αποτελούν τον μηδενικό μορφισμό στην $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$. Άμεσα προκύπτει η ύπαρξη των συναρτητών που περιγράφονται στο ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.3.37. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Τότε, υπάρχει ένας επαγόμενος συναρτητής $j^!\colon \widehat{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{X}/\omega$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:*

- *Για κάθε αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$, θέτουμε $j^!(C) = X_C$.*

- *Για κάθε μορφισμό $f\colon C \longrightarrow D$ στην $\widehat{\mathcal{X}}$ θέτουμε $j^!(f) = f_*\colon X_C \longrightarrow X_D$.*

Παρόμοια, υπάρχει ένας επαγόμενος συναρτητής $i^*\colon \widehat{\mathcal{X}} \longrightarrow \widehat{\omega}/\omega$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:

- *Για κάθε αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$, θέτουμε $i^*(C) = Y^C$.*

- *Για κάθε μορφισμό $f\colon C \longrightarrow D$ στην $\widehat{\mathcal{X}}$ θέτουμε $i^*(f) = f^*\colon Y^C \longrightarrow Y^D$.*

Απόδειξη. Από τα παραπάνω, εφόσον οι επαγόμενοι μορφισμοί f_* και f^* είναι μοναδικοί στην κατηγορία $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$, εύκολα βλέπουμε ότι οι συναρτητές $j^!$ και i^* είναι καλώς ορισμένοι. ■

Παρατήρηση 5.3.38. Προφανώς, κάθε αντικείμενο C της ω, απεικονίζεται μέσω των συναρτητών $j^!$ και i^* στο μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{X}/\omega$ και της $\widehat{\omega}/\omega$ αντίστοιχα. Άμεσα, έτσι, υπάρχουν οι επαγόμενοι συναρτητές $\underline{j}^!\colon \widehat{\mathcal{X}}/\omega \longrightarrow \mathcal{X}/\omega$ και $\underline{i}^*\colon \widehat{\mathcal{X}}/\omega \longrightarrow \widehat{\omega}/\omega$, έτσι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{X}} \arrow[r, "j^!"] \arrow[dr] & \mathcal{X}/\omega \\ & \widehat{\mathcal{X}}/\omega \arrow[u, dashed, "\underline{j}^!"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{X}} \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr] & \widehat{\omega}/\omega \\ & \widehat{\mathcal{X}}/\omega \arrow[u, dashed, "\underline{i}^*"'] \end{tikzcd}$$

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στους συναρτητές $\underline{j}^!$ και $\underline{i}^*$ τους οποίους θα συμβολίζουμε με $j^!$ και i^* αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.3.39. *Έστω $\mathcal{C}$ μία αβελιανή κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και ω ένας ενέσιμος συν-γεννήτορας για την $\mathcal{X}$. Θεωρούμε τους συναρτητές φυσικής έγκλεισης $i\colon \widehat{\omega} \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}$ και $j\colon \mathcal{X} \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ο επαγόμενος συναρτητής $j_!\colon \mathcal{X}/\omega \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}/\omega$ είναι πλήρης και πιστός και έχει έναν δεξιά συζυγή $j^!\colon \widehat{\mathcal{X}}/\omega \longrightarrow \mathcal{X}/\omega$ ο οποίος αντιστοιχίζει ένα αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$ στην επιλεγμένη $\mathcal{X}$-προσέγγιση X_C. Ο μορφισμός $j_! \circ j^!(C) \longrightarrow C$ προκύπτει από την κλάση του μορφισμού $\pi_C\colon X_C \longrightarrow C$ στην ευσταθή κατηγορία $\mathsf{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega}(X_C, C)$.*

2. *Ο επαγόμενος συναρτητής $i_*\colon \widehat{\omega}/\omega \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}/\omega$ είναι πλήρης και πιστός και έχει έναν αριστερά συζυγή $i^*\colon \widehat{\mathcal{X}}/\omega \longrightarrow \widehat{\omega}/\omega$ ο οποίος αντιστοιχίζει ένα αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$ στην επιλεγμένη $\widehat{\omega}$-θήκη Y^C. Ο μορφισμός $C \longrightarrow i_* \circ i^*(C)$ προκύπτει από την κλάση του μορφισμού $\iota^C\colon C \longrightarrow Y^C$ στην ευσταθή κατηγορία $\mathsf{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega}(C, Y^C)$.*

3. *Έχουμε $j^! \circ i_* = 0$ και $i^* \circ j_! = 0$.*

4. *Η σύνθεση $\iota \circ \pi$ των μορφισμών συζυγίας*

$$j_! \circ j^! \xrightarrow{\ \pi\ } \mathsf{Id}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega} \longrightarrow \xrightarrow{\ \iota\ } i_* \circ i^*$$

είναι ο μηδενικός μορφισμός της $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$.

Απόδειξη. Στα παραπάνω, έχουμε ήδη επαληθεύσει την ύπαρξη των συναρτητών $j^!$ και i^*. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι ο $j^!$ αποτελεί έναν δεξιά συζυγή του επαγόμενου συναρτητή έγκλεισης $j_!\colon \mathcal{X}/\omega \longrightarrow \widehat{\mathcal{X}}/\omega$. Με άλλα λόγια, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{X})$ και $C \in \mathsf{ob}(\widehat{\mathcal{X}})$, υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί

$$\phi_{X,C}\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, j^!(C)) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathsf{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega}(j_!(X), C) \tag{5.25}$$

Ο μορφισμός $\pi_C\colon X_C \longrightarrow C$ ορίζει μία φυσική απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{X}}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}}(X, C)$$

η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.26 είναι επί. Συμβολίζουμε με $\tilde{\phi}_{X,C}$ την επαγόμενη απεικόνιση

$$\tilde{\phi}_{X,C}\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, X_C) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega}(X, C)$$

η οποία, άμεσα, είναι επίσης επί. Θα δείξουμε ότι η $\tilde{\phi}_{X,C}$, όπως ορίστηκε, είναι και 1-1. Έστω $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, X_C)$ ένας μορφισμός έτσι ώστε ο μορφισμός $\tilde{\phi}_{X,C}(f) = \pi_C \circ f \colon X \longrightarrow C$ να αποτελεί τον μηδενικό μορφισμό της $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$, δηλαδή να αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου της ω. Αποκτούμε έτσι το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα στην C:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_C \arrow[r] & X_C \arrow[r, "\pi_C"] & C \arrow[r] & 0 \\
& & X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"] & W \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "g'"] &
\end{tikzcd}$$

όπου $W \in \mathsf{ob}(\omega)$. Εφόσον το W είναι και αντικείμενο της $\mathcal{X}$ και το Y_C αντικείμενο της $\widehat{\omega}$, εφαρμόζοντας ξανά το Πόρισμα 5.3.25, προκύπτει ότι $\mathsf{Ext}^1_C(W, Y_C) = 0$, και με το σύνηθες επιχείρημα με την μεγάλη ακριβή ακολουθία, εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός μορφισμού $g' \colon W \longrightarrow X_C$ έτσι ώστε $\pi_C \circ g' = g$. Τότε, για τον μορφισμό $f - g' \circ h \colon X \longrightarrow X_C$ έχουμε:

$$\pi_C \circ (f - g' \circ h) = \pi_C \circ f - (\pi_C \circ g') \circ h = g \circ h - g \circ h = 0$$

δηλαδή ο $f - g' \circ h$ αναλύεται μέσω του Y_C. Εφόσον $Y_C \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$, από το Λήμμα 5.3.36, ο μορφισμός $f - g' \circ h$ αναλύεται και μέσω ενός αντικειμένου της ω, δηλαδή αποτελεί τον μηδενικό μορφισμό στην $\mathsf{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, X_C)$. Εφόσον ο μορφισμός $g' \circ h$ αναλύεται μέσω του W στην ω, η κλάση του είναι επίσης ο μηδενικός μορφισμός στην $\mathsf{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, X_C)$. Άμεσα συμπεραίνουμε ότι και ο μορφισμός f αποτελεί τον μηδενικό μορφισμό στην $\mathsf{Hom}_{\mathcal{X}/\omega}(X, X_C)$ και η $\tilde{\phi}_{X,C}$ είναι και 1-1. Λαμβάνοντας, υπόψιν ότι από των ορισμό των συναρτητών $j^!$ και $j_!$ ισχύει $j^!(C) = X_C$ και $j_!(X) = X$, η απεικόνιση $\tilde{\phi}_{X,C}$ είναι η ζητούμενη απεικόνιση (5.25) και είναι ισομορφισμός.

Τέλος, η $\tilde{\phi}_{X,C}$ ορίστηκε φυσικά και στις δύο μεταβλητές, εξασφαλίζοντας την συζυγία των $j_!$ και $j^!$. Εκ κατασκευής, ο μορφισμός π_C επάγει τον μορφισμό $j_! \circ j^!(C) \longrightarrow C$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού 1.

Η απόδειξη του ισχυρισμού 2 είναι δυϊκή και ως εκ τούτου θα παραλειφθεί.

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι για τους παραπάνω συναρτητές ισχύει $j^! \circ i_* = 0$ και $i^* \circ j_! = 0$. Από τον ορισμό της κατηγορίας $\widehat{\omega}$, για κάθε αντικείμενο $Y \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$ υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow W \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

με $W \in \mathsf{ob}(\omega)$ και $K \in \mathsf{ob}(\widehat{\omega})$. Η παραπάνω σύντομη ακριβής ακολουθία αποτελεί μία $\mathcal{X}$-προσέγγιση για το Y, ενώ το αντικείμενο $j^! \circ i_*(Y)$ το οποίο εξ ορισμού αποτελεί την επιλεγμένη $\mathcal{X}$-προσέγγιση του Y θεωρούμενο σαν ένα αντικείμενο της $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$, θα είναι ισόμορφο με το W στην $\mathcal{X}/\omega$, δηλαδή αποτελεί το μηδενικό αντικείμενο. Συνεπώς, $j^! \circ i_* = 0$ και λόγω συζυγίας θα ισχύει και $i^* \circ j_1 = 0$.

Τέλος, θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα μορφισμών μεταξύ συναρτητών:

$$\begin{tikzcd}
j_! \circ j^! \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & 1_{\widehat{\mathcal{X}}/\omega} \arrow[d, "\iota"] \\
i_* \circ i^* \circ j_! \circ j^! \arrow[r] & i_* \circ i^*
\end{tikzcd}$$

Από τον ισχυρισμό 3, έχουμε $i^* \circ j_! = 0$, και λόγω μεταθετικότητας ισχύει και $\iota \circ \pi = 0$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού 4. ■

Σχόλιο 5.3.40. Ο ισχυρισμός 4 του παραπάνω θεωρήματος, με άλλα λόγια, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Για κάθε αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X_C \arrow[r, "\pi_C"] \arrow[d, "j"] & C \arrow[d, "\iota^C"] \\ W \arrow[r] & Y^C \end{tikzcd}$$

όπου $W \in \mathrm{ob}(\omega)$ και σύμφωνα με το Λήμμα 5.3.7 και την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.8, ο μορφισμός ι^C μπορεί να αποκτηθεί ως το pushout των μορφισμών j και π_C.

Ο συμβολισμός ο οποίος χρησιμοποιήθηκε όσον αφορά τους συναρτητές στο παραπάνω θεώρημα είναι σύμφωνος με το [8, 1.4] και τη θεωρία η οποία περιγράφει την «συγκόλληση κατηγοριών». Στη συγκεκριμένη περίπτωση, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι η κατηγορία $\widehat{\mathcal{X}}$ αποκτάται «συγκολλώντας» την «ανοιχτή» υποκατηγορία $\mathcal{X}$ και την «κλειστή» υποκατηγορία $\widehat{\omega}$ κατά μήκος της ω. Ωστόσο, για την ύπαρξη μίας πλήρης συγκόλλησης (βλ. πάλι [8, 1.4]) απαιτείται η ύπαρξη των συζυγών συναρτητών j_* και $i^!$ η οποία δεν εξασφαλίζεται στα πλαίσια της παραπάνω θεωρίας.

Παρατήρηση 5.3.41. Οι ισχυρισμοί 3 και 4 του παραπάνω θεωρήματος δικαιολογούν τον χαρακτηρισμό του Θεωρήματος 5.3.8 ως ένα θεώρημα διάσπασης. Πράγματι, ένα αντικείμενο C της $\widehat{\mathcal{X}}$ διασπάται στην ευσταθή κατηγορία $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$ στην $\mathcal{X}$-προσέγγιση του X_C και στην $\widehat{\omega}$-θήκη του Y^C, αντικείμενα τα οποία ανήκουν σε ορθογώνιες υποκατηγορίες της $\widehat{\mathcal{X}}/\omega$. Προκύπτει (βλ. [3, Proposition 3.6.]) ότι η κοινή τομή των κατηγοριών $\mathcal{X}$ και $\widehat{\omega}$ είναι ακριβώς η κατηγορία ω.

Είμαστε πλέον σε θέση να εφαρμόσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα στα πλαίσια της θεωρίας των MCM προτύπων. Θεωρούμε έναν δακτύλιο R, ο οποίος είναι αριστερά και δεξιά Noetherian και ισχυρά Gorenstein. Θέτουμε, όπως προηγουμένως $\mathcal{C} = \mathsf{mod}\text{-}R$, την κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων και $\mathcal{X} = \mathsf{MCM}(R)$ την πλήρη υποκατηγορία αυτής η οποία αποτελείται από όλα τα MCM πρότυπα. Τέλος, θέτουμε $\omega = \mathsf{P}(R)$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$ η οποία αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Έχουμε ήδη δείξει (βλ. Λήμμα 5.3.12) ότι η $\mathsf{P}(R)$ αποτελεί έναν συνγεννήτορα της $\mathsf{MCM}(R)$, ο οποίος είναι συγκεκριμένα ένας ενέσιμος συνγεννήτορας καθώς εξ ορισμού $\mathsf{MCM}(R) = {}^{\perp}\mathsf{P}(R)$. Όπως έχει αναφερθεί, εφόσον ο R έχει πεπερασμένη αριστερή και δεξιά ενέσιμη διάσταση σαν ένα R-πρότυπο, η κατηγορία $\widehat{\mathcal{X}}$ είναι ολόκληρη η $\mathsf{mod}\text{-}R$, ενώ η $\mathcal{X}/\omega$ είναι η ευσταθής κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, τα παραπάνω συμπεράσματα οδηγούν στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.3.42. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι αριστερά και δεξιά Noetherian και ισχυρά Gorenstein. Αν M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Υπάρχει μία MCM-προσέγγιση*

$$0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow X_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

του M η οποία είναι μοναδική στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$.

2. *Υπάρχει μία θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y^M \longrightarrow X^M \longrightarrow 0$$

του M η οποία είναι μοναδική στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$.

Απόδειξη. Η ύπαρξη μίας MCM-προσέγγισης και μίας θήκης πεπερασμένης προβολικής διάστασης του M έχει ήδη αποδειχθεί στο Θεώρημα 5.3.13, ενώ η μοναδικότητα αυτών στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ οφείλεται στα κύρια συμπεράσματα που διατυπώθηκαν παραπάνω. ∎

5.4 Τριγωνισμός της Ευσταθούς Κατηγορίας

Στόχος αυτής της ενότητας είναι ο ορισμός διακεκριμένων τριγώνων στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ με τα οποία η τελευταία αποκτά δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Παρόλο που είναι δυνατό να ορίσουμε απευθείας διακεκριμένα τρίγωνα στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ και στη συνέχεια με αυτά να επαληθεύσουμε τα αξιώματα (TR1)-(TR4) μίας τριγωνισμένης κατηγορίας, θα ακολουθήσουμε μία γενικότερη προσέγγιση των Α. Μπεληγιάννη και Ν. Μαρμαρίδη στο [11], η οποία αφορά τον τριγωνισμό μίας ευρύτερης κλάσης κατηγοριών στην οποία εντάσσεται η $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$.

Αρχικά, θα εισάγουμε τις έννοιες και τον συμβολισμό που χρησιμοποιούνται στο [11] για τα οποία βλ. επίσης [3]. Στη συνέχεια, θα διατυπώσουμε το κύριο θεώρημα ([11, Theorem 3.1.]) και την εφαρμογή του στην ευσταθή κατηγορία των MCM προτύπων.

Όλες οι κατηγορίες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν, θα είναι εκ των προτέρων προσθετικές, εκτός και αν δηλωθεί το αντίθετο. Αντίστοιχα, οι συναρτητές μεταξύ προσθετικών κατηγοριών θα είναι προσθετικοί.

Ορισμός 5.4.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία κατηγορία και $\mathcal{X}$ μία υποκατηγορία αυτής. Ένας μορφισμός $f_B\colon X_B \longrightarrow B$, όπου το X_B είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{X}$, καλείται μία (δεξιά)* **$\mathcal{X}$-προσέγγιση ($\mathcal{X}$-approximation)** *του B, αν η απεικόνιση*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, f_B)\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X_B) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B)$$

είναι επί για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{X}$.

Η υποκατηγορία $\mathcal{X}$ καλείται μία **αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη (contravariantly finite)** *υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, αν κάθε αντικείμενο B της $\mathcal{A}$ έχει μία δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση.*

Δυϊκά, ορίζεται και η έννοια της αριστερής $\mathcal{X}$-προσέγγισης και της συναλλοίωτα πεπερασμένης (covariantly finite) υποκατηγορίας της $\mathcal{A}$.

Σχόλιο 5.4.2. Η ονομασία του παραπάνω ορισμού προέρχεται από το γεγονός ότι αν $\mathcal{X}$ είναι μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, κάθε αντικείμενο B της $\mathcal{A}$ μπορεί να «προσεγγισθεί» από ένα αντικείμενο X_B της $\mathcal{X}$ με την εξής έννοια: Κάθε μορφισμός $X \longrightarrow B$ από ένα αντικείμενο X της $\mathcal{X}$ αναλύεται μέσω της επιλεγμένης $\mathcal{X}$-προσέγγισης $f_B\colon X_B \longrightarrow B$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & B \\ & X_B \arrow[u, "f_B"'] \end{tikzcd}$$

Αν A και B είναι δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{A}$, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(A,B)$ το σύνολο των μορφισμών: $A \longrightarrow B$ της $\mathcal{A}$ οι οποίοι αναλύονται μέσω ενός αντικειμένου της υποκατηγορίας $\mathcal{X}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η $\mathcal{X}(A,B)$ αποτελεί μία υποομάδα της $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ και όπως έχουμε δει, η οικογένεια αυτών των ομάδων σχηματίζει ένα ιδεώδες της $\mathcal{A}$ το οποίο θα συμβολίζεται με $\mathcal{J}_{\mathcal{X}}$.

Μπορούμε έτσι να σχηματίσουμε την ευσταθή κατηγορία $\mathcal{A}/\mathcal{J}_{\mathcal{X}}$ η οποία θα συμβολίζεται με $\mathcal{A}/\mathcal{X}$. Εξ ορισμού, η $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ θα έχει τα ίδια αντικείμενα με την $\mathcal{A}$ και για κάθε $A, B \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}/\mathcal{X})$:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{X}} = \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)/\mathcal{X}(A,B)$$

Η σύνθεση στην $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ επάγεται φυσικά από τη σύνθεση στην $\mathcal{A}$.

Θα συμβολίζουμε με $\pi_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{X}$ τον συναρτητή κανονικής προβολής ο οποίος επάγεται από τον ταυτοτικό μορφισμό $\mathsf{Id}_{\mathcal{A}}$. Θα συμβολίζουμε, επιπλέον, με $\underline{A}$ την εικόνα $\pi_{\mathcal{X}} A$ ενός αντικειμένου A της $\mathcal{A}$ και αντίστοιχα με $\underline{f}$ την εικόνα $\pi_{\mathcal{X}} f$ ενός μορφισμού f της $\mathcal{A}$.

Αρχικός στόχος είναι η κατασκευή ενός συναλλοίωτου προσθετικού ενδοσυναρτητή της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ ο οποίος είναι εμπνευσμένος από την κατασκευή του loop-space functor που εισήχθηκε από τον

Heller στο [30] και ορίστηκε σε προηγούμενη ενότητα (βλ. Ορισμός 5.1.13). Για τον σκοπό αυτόν, θα χρειαστούν τα ακόλουθα:

Υποθέτουμε ότι κάθε δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση έχει έναν πυρήνα στην $\mathcal{A}$. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{A}$ μία ακολουθία μορφισμών

$$K_A \xrightarrow{\iota_A} X_A \xrightarrow{f_A} A$$

όπου ο μορφισμός f_A είναι μία δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση του A και ο ι_A είναι ο πυρήνας του μορφισμού f_A. Τότε, θα λέμε ότι υπάρχει μία $\mathcal{X}$-αντιστοίχιση ($\mathcal{X}$-assignment) για το A.

Έστω τώρα $g\colon A \longrightarrow B$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Θεωρώντας τις ακολουθίες οι οποίες προσδιορίζονται από την $\mathcal{X}$-αντιστοιχία για την $\mathcal{A}$, αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
K_A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "\kappa_g"] & X_A \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "x_g"] & A \arrow[d, "g"] \\
K_B \arrow[r, "\iota_B"] & X_B \arrow[r, "f_B"] & B
\end{tikzcd}$$

όπου η ύπαρξη του μορφισμού $x_g\colon X_A \longrightarrow X_B$ οφείλεται στο ότι ο f_B αποτελεί μία δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση, ενώ ο $\kappa_g\colon K_A \longrightarrow K_B$ είναι ο επαγόμενος μορφισμός στους πυρήνες. Εύκολα βλέπουμε ότι η εικόνα $\underline{\kappa_g}$ του κ_g στην ευσταθή κατηγορία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του x_g.

Με αυτόν τον τρόπο, για κάθε $\mathcal{X}$-αντιστοίχιση προκύπτει ένας συναλλοίωτος συναρτητής $\Omega_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{A}/\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{X}$ ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο $\underline{A}$ της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ στο $\Omega_{\mathcal{X}}\underline{A} = \underline{K_A}$ και κάθε μορφισμό $\underline{g}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ στον επαγόμενο μορφισμό $\Omega_{\mathcal{X}}\underline{g} = \underline{\kappa_g}$. Ιδιαίτερα, ο loop-space functor είναι ανεξάρτητος από την $\mathcal{X}$-αντιστοιχία για την $\mathcal{A}$ με ακρίβεια ισοδυναμίας συναρτητών (βλ. [11]). Δυϊκά, για μία συναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία $\mathcal{Y}$ της $\mathcal{A}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την ευσταθή κατηγορία $\mathcal{A}/\mathcal{Y}$ της $\mathcal{A}$ ως προς την $\mathcal{Y}$ και υποθέτοντας ότι κάθε αριστερή $\mathcal{Y}$-προσέγγιση έχει συνπυρήνα, ορίζουμε την έννοια της $\mathcal{Y}$-αντιστοίχισης για την $\mathcal{A}$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω οδηγούμαστε στην ακόλουθη πρόταση της οποίας η απόδειξη θα παραλειφθεί (βλ. [11, Proposition 1.2.]).

Πρόταση 5.4.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία προσθετική αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{Y}$ μία προσθετική συναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν κάθε δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση έχει πυρήνα, τότε για κάθε κάθε $\mathcal{X}$-αντιστοίχιση για την $\mathcal{A}$ προκύπτει ένας ενδοσυναρτητής $\Omega_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{A}/\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{X}$ ο οποίος θα καλείται ο loop-space functor της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$. Για οποιεσδήποτε δύο $\mathcal{X}$-αντιστοιχίσεις για την $\mathcal{A}$ προκύπτουν ισοδύναμοι συναρτητές.*

2. *Αν κάθε αριστερή $\mathcal{Y}$-προσέγγιση έχει συνπυρήνα, τότε για κάθε κάθε $\mathcal{Y}$-αντιστοίχιση για την $\mathcal{A}$ προκύπτει ένας ενδοσυναρτητής $\Sigma_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{A}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$ ο οποίος θα καλείται ο suspension functor της $\mathcal{A}/\mathcal{Y}$. Για οποιεσδήποτε δύο $\mathcal{Y}$-αντιστοιχίσεις για την $\mathcal{A}$ προκύπτουν ισοδύναμοι συναρτητές.*

Για να ορίσουμε διακεκριμένα τρίγωνα στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{A}/\mathcal{X}$, θα χρειαστούμε επιπλέον την ακόλουθη έννοια (βλ. [11, Definition 2.6.]):

Ορισμός 5.4.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathcal{X}$ μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$. Ένας μορφισμός $g\colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{A}$ θα καλείται **$\mathcal{X}$-epic**, αν για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{X}$ ο επαγόμενος ομομορφισμός*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, g)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B)$$

είναι επί.

Για μία συναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ ορίζεται η δυϊκή έννοια ενός $\mathcal{X}$-monic μορφισμού.

Σχόλιο 5.4.5. Προφανώς, κάθε $\mathcal{X}$-προσέγγιση είναι $\mathcal{X}$-epic.

Σύμφωνα με τους Α. Μπεληγιάννη και Ν. Μαρμαρίδη στο [11], θα δούμε ότι η ευσταθής κατηγορία $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ μπορεί να εφοδιαστεί με μία αριστερά τριγωνισμένη δομή, υπό την προϋπόθεση ότι κάθε $\mathcal{X}$-epic μορφισμός έχει πυρήνα. Αυτή η αριστερά τριγωνισμένη δομή αποτελεί μία γενίκευση της τριγωνισμένης δομής που ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3 στην περίπτωση που τα τρίγωνα «κατευθύνονται μόνο προς τα αριστερά», καθώς ο συναρτητής μεταφοράς τριγώνων δεν είναι απαραίτητα ισοδυναμία.

Θα ορίσουμε συνοπτικά την έννοια μίας αριστερά τριγωνισμένης κατηγορίας. Για περισσότερα, βλ. [11, Definition 2.1., 2.2.].

Ορισμός 5.4.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\Omega\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ένας συναλλοίωτος προσθετικός ενδοσυναρτητής. Θα ορίσουμε την* ***κατηγορία των αριστερών τριγώνων*** *της $\mathcal{C}$, την οποία και συμβολίζουμε με $\mathcal{LTR}(\mathcal{C},\Omega)$, ως εξής:*

Τα αντικείμενα της $\mathcal{LTR}(\mathcal{C},\Omega)$, τα οποία καλούνται ***αριστερά τρίγωνα*** *της $\mathcal{C}$, είναι διαγράμματα της μορφής*

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

Το σύνολο μορφισμών μεταξύ δύο αντικείμενων

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

και

$$\Omega C' \xrightarrow{f'} A' \xrightarrow{g'} B' \xrightarrow{h'} C'$$

αποτελείται από τις τριάδες μορφισμών (α,β,γ) στην $\mathcal{C}$ από το (A,B,C) στο (A',B',C') οι οποίες κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\Omega C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Omega\gamma"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
\Omega C' \arrow[r, "f'"] & A' \arrow[r, "g'"] & B' \arrow[r, "h'"] & C'
\end{tikzcd}$$

Η σύνθεση μορφισμών στην $\mathcal{LTR}(\mathcal{C},\Omega)$ επάγεται φυσικά με την αντίστοιχη σύνθεση των μορφισμών στην $\mathcal{C}$.

Δυϊκά, θεωρώντας έναν συναλλοίωτο ενδοσυναρτητή $\Sigma\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, ορίζεται και η κατηγορία των δεξιών τριγώνων της $\mathcal{C}$ η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{RTR}(\mathcal{C},\Sigma)$.

Σχόλιο 5.4.7. Συχνά, ένα αριστερό τρίγωνο

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

θα συμβολίζεται ως (A,B,C,f,g,h).

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε τον ορισμό μίας αριστερά τριγωνισμένης κατηγορίας (βλ. [11, Definition 2.2.]).

Ορισμός 5.4.8. *Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία, $\Omega\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ένας συναλλοίωτος ενδοσυναρτητής και $\mathcal{LTR}(\mathcal{C},\Omega)$ η αντίστοιχη κατηγορία των αριστερών τριγώνων της $\mathcal{C}$. Μία πλήρης υποκατηγορία Δ της $\mathcal{LTR}(\mathcal{C},\Omega)$ καλείται ένας* ***αριστερός τριγωνισμός*** *(left triangulation) αν είναι κλειστή στους ισομορφισμούς και ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:*

(LT1i) *Για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$, το αριστερό τρίγωνο*

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{0} 0$$

ανήκει στην Δ.

(LT1ii) *Για κάθε μορφισμό $h\colon B \longrightarrow C$, υπάρχει ένα αριστερό τρίγωνο στην Δ της μορφής*

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

(LT2) *Για κάθε αριστερό τρίγωνο*

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

στην Δ, το αριστερό τρίγωνο

$$\Omega B \xrightarrow{-\Omega h} \Omega C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ανήκει επίσης στην Δ.

(LT3) *Για οποιαδήποτε αριστερά τρίγωνα*

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \qquad (T_1)$$

και

$$\Omega C' \xrightarrow{f'} A' \xrightarrow{g'} B' \xrightarrow{h'} C' \qquad (T_2)$$

στην Δ, και μορφισμούς $\beta\colon B \longrightarrow B'$ και $\gamma\colon C \longrightarrow C'$ της $\mathcal{C}$ με $\gamma \circ h = h' \circ \beta$, υπάρχει ένας μορφισμός $\alpha\colon A \longrightarrow A'$ έτσι ώστε η τριάδα (α, β, γ) να είναι ένας μορφισμός από το τρίγωνο (T_1) στο τρίγωνο (T_2).

(LT4) *Για οποιαδήποτε αριστερά τρίγωνα*

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

και

$$\Omega D \xrightarrow{i} E \xrightarrow{l} C \xrightarrow{k} D$$

υπάρχει ένα αριστερό τρίγωνο

$$\Omega D \xrightarrow{j} F \xrightarrow{m} B \xrightarrow{k \circ h} D$$

στην Δ και μορφισμοί $\alpha\colon A \longrightarrow F$ και $\beta\colon F \longrightarrow E$ στην $\mathcal{C}$ έτσι ώστε στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega E \arrow[d, "f \circ \Omega l"] & & \\
\Omega C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Omega k"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_\beta"] & C \arrow[d, "k"] \\
\Omega D \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_{\Omega D}"] & F \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r, "k \circ h"] \arrow[d, "h"] & D \arrow[d, "1_D"] \\
\Omega D \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "l"] & C \arrow[r, "k"] & D
\end{tikzcd}$$

οι τριάδες $(\alpha, 1_B, k)$ και $(\beta, h, 1_D)$ να είναι μορφισμοί της Δ και το αριστερό τρίγωνο να ανήκει στην Δ.

Η τριάδα (C, Ω, Δ) καλείται μία **αριστερά τριγωνισμένη κατηγορία**.

Τέλος, ορίζουμε την έννοια της τριγωνικής ισοδυναμίας για αριστερά τριγωνισμένες κατηγορίες.

Ορισμός 5.4.9. *Έστω $(\mathcal{C}, \Omega, \Delta)$ και $(\mathcal{C}', \Omega', \Delta')$ δύο αριστερά τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ καλείται* **τριγωνική ισοδυναμία**, *αν είναι μία ισοδυναμία κατηγοριών και υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός*

$$\phi\colon F \circ \Omega \longrightarrow \Omega' \circ F$$

έτσι ώστε αν

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

είναι ένα αριστερό τρίγωνο στην Δ, τότε το

$$\Omega' \circ FC \xrightarrow{Ff \circ \phi_C^{-1}} FA \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Fh} FC$$

είναι ένα αριστερό τρίγωνο στην Δ'.

Σχόλιο 5.4.10. Δυϊκά, ορίζεται και η έννοια μίας δεξιά τριγωνισμένης κατηγορίας $(\mathcal{C}, \Sigma, \Delta')$, όπου $\Sigma\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ένας συναλλοίωτος ενδοσυναρτητής και Δ' είναι μια πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας των δεξιών τριγώνων $\mathcal{RTR}(\mathcal{C}, \Sigma)$ η οποία ικανοποιεί τα δεξιά ανάλογα των αξιωμάτων (LT1)-(LT4).

Παρατήρηση 5.4.11. Προφανώς, αν ο ενδοσυναρτητής $\Omega\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ισοδυναμία, τότε από τις ιδιότητες (LT1)-(LT4) προκύπτει ότι μία αριστερά τριγωνισμένη κατηγορία είναι επίσης μία δεξιά τριγωνισμένη κατηγορία. Με αυτόν τον τρόπο, η $\mathcal{C}$ εφοδιασμένη με την κλάση διακεκριμένων τριγώνων Δ και τον συναρτητή μεταφοράς Ω, ικανοποιεί τα αξιώματα (TR1)-(TR4) του Ορισμού 3.1.7 και αποτελεί με την κλασσική έννοια μία τριγωνισμένη κατηγορία.

Στη συνέχεια της παρούσας ενότητας, θα θεωρούμε ότι για κάθε αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία $\mathcal{X}$ μίας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$ έχει προηγηθεί μία $\mathcal{X}$-αντιστοίχιση για την $\mathcal{A}$ και επιπλέον κάθε $\mathcal{X}$-epic μορφισμός έχει πυρήνα. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ την κατηγορία των αριστερών τριγώνων της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$. Αρχικά, θα κατασκευάσουμε στην $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ δύο είδη αριστερών τριγώνων, τα διακεκριμένα τρίγωνα και τα επαγόμενα τρίγωνα. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 5.4.12. *Έστω $f\colon C \longrightarrow B$ και $g\colon A \longrightarrow B$ δύο μορφισμοί στην A. Αν ο μορφισμός f είναι $\mathcal{X}$-epic, τότε:*

1. *Ο μορφισμός $(g, f)\colon A \oplus C \longrightarrow B$ είναι επίσης $\mathcal{X}$-epic.*

2. *Το pullback*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

των f και g υπάρχει και ο μορφισμός h είναι επίσης $\mathcal{X}$-epic.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [11, Lemma 2.7.]. ■

Μπορούμε έτσι να κατασκευάσουμε τα διακεκριμένα τρίγωνα ως εξής:

Έστω $g\colon A \longrightarrow B$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$ και $f_B\colon X_B \longrightarrow B$ η δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση του B η οποία έχει προσδιοριστεί από την $\mathcal{X}$-αντιστοιχία για την $\mathcal{A}$. Από το παραπάνω λήμμα, ο μορφισμός $(g, f_B)\colon A \oplus X_B \longrightarrow B$ είναι $\mathcal{X}$-epic και το pullback των g και f_B υπάρχει. Εφόσον ο μορφισμός f_B είναι σταθερός, αυτό το pullback προσδιορίζεται μοναδικά με ακρίβεια ισομορφισμού από τον μορφισμό g. Έτσι, για κάθε μορφισμό $g\colon A \longrightarrow B$ αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} K_B \arrow[r, "\zeta_g"] \arrow[d, equal] & \mathsf{Con}(g) \arrow[r, "\eta_g"] \arrow[d, "\theta_g"] & A \arrow[d, "g"] \\ K_B \arrow[r, "\iota_B"] & X_B \arrow[r, "f_B"] & B \end{tikzcd}$$

όπου το $(\mathsf{Con}(g), \eta_g, \theta_g)$ είναι το pullback των f_B και g, ενώ ο μορφισμός $\zeta_g\colon K_B \longrightarrow \mathsf{Con}(g)$ είναι ο πυρήνας του $\mathcal{X}$-epic μορφισμού η_g.

Ορισμός 5.4.13. *Ένα αριστερό τρίγωνο*

$$\Omega_{\mathcal{X}}\underline{G} \xrightarrow{\underline{k}} \underline{D} \xrightarrow{\underline{l}} \underline{F} \xrightarrow{\underline{m}} \underline{G}$$

*της $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ θα καλείται **$\mathcal{X}$-διακεκριμένο**, αν είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της μορφής*

$$\Omega_{\mathcal{X}}\underline{B} \xrightarrow{\underline{\zeta_g}} \underline{\mathsf{Con}}(g) \xrightarrow{-\underline{\eta_g}} \underline{A} \xrightarrow{\underline{g}} \underline{B}$$

όπου ο $g\colon A \longrightarrow B$ είναι ένας μορφισμός της $\mathcal{A}$.

Συχνά, όταν το πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε είναι ξεκάθαρο, θα καλούμε ένα $\mathcal{X}$-διακεκριμένο αριστερό τρίγωνο, απλά ένα διακεκριμένο αριστερό τρίγωνο.

Σχόλιο 5.4.14. Αν $\mathcal{Y}$ είναι μία συναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, δυϊκά, μπορούν να οριστούν τα $\mathcal{Y}$-διακεκριμένα δεξιά τρίγωνα της κατηγορίας $\mathcal{RTR}(\mathcal{A}/\mathcal{Y}, \Sigma^{\mathcal{Y}})$.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τα επαγόμενα τρίγωνα:

Έστω $g\colon A \longrightarrow B$ ένας $\mathcal{X}$-epic μορφισμός της $\mathcal{A}$ και $f_B\colon X_B \longrightarrow B$ μία δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση του B η οποία έχει προσδιοριστεί από την $\mathcal{X}$-αντιστοιχία για την $\mathcal{A}$. Συμβολίζουμε με $\iota_B\colon K_B \longrightarrow X_B$ τον πυρήνα του μορφισμού f_B και με $h\colon C \longrightarrow A$ τον πυρήνα του μορφισμού g. Εφόσον ο μορφισμός g είναι $\mathcal{X}$-epic και το X_B είναι αντικείμενο της $\mathcal{X}$, υπάρχει ένας μορφισμός $\delta\colon X_B \longrightarrow A$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} K_B \arrow[r, "\iota_B"] \arrow[d, "\gamma"] & X_B \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "\delta"] & B \arrow[d, "1_B"] \\ C \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $\gamma\colon K_B \longrightarrow C$ είναι ο επαγόμενος μορφισμός στους πυρήνες. Εύκολα προκύπτει (βλ. [11]) ότι ο μορφισμός $\underline{\gamma}$, δηλαδή η εικόνα του μορφισμού γ στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{A}/\mathcal{X}$, είναι μοναδικά προσδιορισμένος από τον $\mathcal{X}$-epic μορφισμό g. Ο μορφισμός $\underline{\gamma}$ της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ καλείται η χαρακτηριστική κλάση του g και θα συμβολίζεται με $\mathsf{ch}(g)$.

Ορισμός 5.4.15. *Ένα αριστερό τρίγωνο*

$$\Omega_{\mathcal{X}}\underline{G} \xrightarrow{\underline{k}} \underline{D} \xrightarrow{\underline{l}} \underline{F} \xrightarrow{\underline{m}} \underline{G}$$

*της $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ καλείται **$\mathcal{X}$-επαγόμενο**, αν είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της μορφής*

$$\Omega_{\mathcal{X}}\underline{B} \xrightarrow{\mathsf{ch}(g)} \underline{C} \xrightarrow{\underline{h}} \underline{A} \xrightarrow{\underline{g}} \underline{B}$$

όπου ο $g\colon A \longrightarrow B$ είναι ένας $\mathcal{X}$-epic μορφισμός της $\mathcal{A}$.

Συχνά, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα καλούμε ένα $\mathcal{X}$-επαγόμενο αριστερό τρίγωνο, απλά ένα επαγόμενο αριστερό τρίγωνο.

Σχόλιο 5.4.16. Αν $\mathcal{Y}$ είναι μία συναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$, δυϊκά, μπορούν να οριστούν τα $\mathcal{Y}$-επαγόμενα δεξιά τρίγωνα της κατηγορίας $\mathcal{RTR}(\mathcal{A}/\mathcal{Y}, \Sigma^{\mathcal{Y}})$.

Ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα των Α. Μπεληγιάννη και Ν. Μαρμαρίδη στο [11] είναι ότι οι αριστερές τριγωνικές δομές οι οποίες μόλις εισήχθηκαν είναι ισοδύναμες. Αυτό περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση για την οποία βλ. [11, Proposition 2.10.].

Πρόταση 5.4.17. *Κάθε διακεκριμένο αριστερό τρίγωνο είναι ισόμορφο με ένα επαγόμενο και κάθε επαγόμενο αριστερό τρίγωνο είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [11, Proposition 2.10.]. ∎

Έστω τώρα $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ η κατηγορία των αριστερών τριγώνων της $(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ και $\Delta_{\mathcal{X}}$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ η οποία έχει ως αντικείμενα τα διακεκριμένα αριστερά τρίγωνα της $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$. Ο τελικός μας στόχος είναι να δείξουμε ότι η $(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}, \Delta_{\mathcal{X}})$ είναι μία αριστερά τριγωνισμένη κατηγορία. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα για το οποίο βλ. [11, Lemma 2.11.].

Λήμμα 5.4.18. *Έστω $h \colon B \longrightarrow C$ και $k \colon C \longrightarrow D$ δύο $\mathcal{X}$-epic μορφισμοί της κατηγορίας $\mathcal{A}$ με πυρήνες $g \colon A \longrightarrow B$ και $l \colon E \longrightarrow C$ αντίστοιχα. Τότε, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, "k"] \\
F \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r, "k\circ h"] \arrow[d, "h"] & D \arrow[d, equal] \\
E \arrow[r, "l"] & C \arrow[r, "k"] & D
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι μορφισμοί $k \circ h$ και β είναι $\mathcal{X}$-epic με πυρήνες τους μορφισμούς m και α αντίστοιχα.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [11, Lemma 2.11.]. ∎

Παραθέτουμε στη συνέχεια το κεντρικό θεώρημα της ενότητας (βλ. [11, Theorem 2.12]).

Θεώρημα 5.4.19. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία, $\mathcal{X}$ μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία και $\mathcal{Y}$ μία συναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$.*

1. *Αν κάθε $\mathcal{X}$-epic μορφισμός έχει πυρήνα, τότε η πλήρης υποκατηγορία $\Delta_{\mathcal{X}}$ των αριστερά διακεκριμένων τριγώνων της $\mathcal{LTR}(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$ είναι ένας αριστερός τριγωνισμός της $(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}})$.*

2. *Αν κάθε $\mathcal{Y}$-monic μορφισμός έχει συνπυρήνα, τότε η πλήρης υποκατηγορία $\Delta^{\mathcal{Y}}$ των δεξιά διακεκριμένων τριγώνων της $\mathcal{RLTR}(\mathcal{A}/\mathcal{Y}, \Sigma^{\mathcal{Y}})$ είναι ένας δεξιός τριγωνισμός της $(\mathcal{A}/\mathcal{Y}, \Sigma^{\mathcal{Y}})$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [11, Theorem 2.12]. ∎

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναφέρουμε ότι η αριστερή τριγωνική δομή με την οποία εφοδιάστηκε η κατηγορία $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της $\mathcal{X}$-αντιστοίχισης, δηλαδή από δύο διαφορετικές $\mathcal{X}$-αντιστοιχίσεις προκύπτουν ισοδύναμες αριστερές τριγωνικές δομές. Το γεγονός αυτό θεμελιώνεται στο ακόλουθο θεώρημα για το οποίο βλ. [11, Theorem 2.13].

Θεώρημα 5.4.20. *Έστω $\mathcal{A}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathcal{X}$ μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο $\mathcal{X}$-αντιστοιχίσεις για την $\mathcal{A}$ και συμβολίζουμε με $\Omega_{\mathcal{X},1}$ και $\Omega_{\mathcal{X},2}$ τους αντίστοιχους loop-space functors της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$. Έστω $(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X},1})$ και $(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X},2})$ οι δύο αριστερά τριγωνισμένες κατηγορίες οι οποίες επάγονται από τις δύο $\mathcal{X}$-αντιστοιχίες. Τότε, ο ταυτοτικός συναρτητής $\mathsf{Id}_{\mathcal{A}/\mathcal{X}}$ της $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ αποτελεί μία τριγωνική ισοδυναμία από την κατηγορία $(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X},1})$ στην $(\mathcal{A}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X},2})$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. [11, Theorem 2.13]. ■

Η ακόλουθη παρατήρηση (βλ. [11, Remark 2.14]) συνδέει την θεωρία που αναπτύχθηκε σε αυτήν την ενότητα με την ευσταθή κατηγορία προτύπων.

Παρατήρηση 5.4.21. Το Θεώρημα 5.4.19 καλύπτει πολλές γνωστές κατασκευές τριγωνισμένων κατηγοριών. Στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά (αντ. ενέσιμα) αντικείμενα σε σχέση με μία κλάση προβολικών (αντ. ενέσιμων) $\mathcal{E}$ (αντ. $\mathcal{M}$) μορφισμών της $\mathcal{A}$, τότε η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{P}$ (αντ. $\mathcal{I}$ των προβολικών (αντ. ενέσιμων) είναι μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη (αντ. συναλλοίωτα πεπερασμένη) υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ και συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 5.4.19. Πιο συγκεκριμένα, αν $\mathcal{B}$ είναι μία ακριβής κατηγορία (με την έννοια του Quillen) η οποία έχει αρκετά προβολικά, τότε αυτά τα προβολικά σχηματίζουν μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{B}$ και η $\mathcal{B}$ έχει μία αριστερά τριγωνισμένη δομή. Στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{B}$ είναι Frobenius (βλ. [30, §3]), ο αντίστοιχος συναρτητής suspension είναι ισοδυναμία και άρα η $\mathcal{B}$ έχει μία τριγωνισμένη δομή. Η κατάσταση αυτή όπως θα δούμε, περιγράφει την ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ η οποία είναι ακριβής και Frobenius.

Λήμμα 5.4.22. *Η κατηγορία* $\mathsf{MCM}(R)$ *αποτελεί μια ακριβή (κατά Quillen) υποκατηγορία της* $\text{mod-}R$ *η οποία είναι Frobenius, δηλαδή τα προβολικά αντικείμενα της* $\mathsf{MCM}(R)$ *ταυτίζονται με τα ενέσιμα και αποτελούν ακριβώς τα προβολικά* R*-πρότυπα.*

Απόδειξη. Η ακρίβεια της $\mathsf{MCM}(R)$ προκύπτει από το Λήμμα 5.2.10. Από την άλλη πλευρά, όπως έχουμε δει, για κάθε MCM πρότυπο M υπάρχει μία πλήρης ανάλυση του M από προβολικά R-πρότυπα. Ως αποτέλεσμα, το R-πρότυπο R αποτελεί έναν (μικρό και admissible) προβολικό γεννήτορα από τον οποίο κατασκευάζονται με την συνήθη διαδικασία (admissible) προβολικές αναλύσεις. Επιπλέον, όμως, το R αποτελεί και έναν (μικρο και admissible) ενέσιμο συν-γεννήτορα ο οποίος επιτρέπει την κατασκευή (admissible) προβολικών συν-αναλύσεων. ■

Σχόλιο 5.4.23. Σύμφωνα με τον Happel στο [29], οι συνθήκες «ακριβής» και «Frobenius» είναι ικανές έτσι ώστε η $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ να αποτελεί μία τριγωνισμένη κατηγορία. Για έναν αυστηρό ορισμό των παραπάνω εννοιών καθώς και την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού βλ. [28, Chapter I, §2]. Η προσέγγιση η οποία ακολουθήθηκε παραπάνω είναι σαφώς γενικότερη.

Το παρακάτω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα στις κατηγορίες Frobenius, ωστόσο θέλοντας να περιγράψουμε τα διακεκριμένα τρίγωνα στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ θα περιοριστούμε σε αυτήν την περίπτωση.

Πρόταση 5.4.24. *Ο loop-space functor* Ω_R *της* $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ *είναι ισοδυναμία.*

Απόδειξη. Ένας αντίστροφος $\Sigma_R\colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$ του Ω_R ορίζεται με την ακόλουθη διαδικασία:

Έστω $f\colon M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός μεταξύ maximal Cohen-Macaulay R-προτύπων. Όπως είδαμε στο Θεώρημα 5.3.13, είναι δυνατό να επιλέξουμε μία εμβάπτιση $\iota_M\colon M \longrightarrow Q_M$ του M σε ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο Q_M, έτσι ώστε ο συνπυρήνας $\mathsf{Coker}\iota_M$ να είναι επίσης MCM. Αντίστοιχα, επιλέγουμε μία εμβάπτιση $\iota_N\colon N \longrightarrow Q_N$ του N. Προκύπτει έτσι ένα μεταθετικό διάγραμμα στο οποίο οι οριζόντιες γραμμές είναι σύντομες ακριβείς ακολουθίες:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "f"] & Q_M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & \mathsf{Coker}\iota_M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_N"] & Q_N \arrow[r, "p_N"] & \mathsf{Coker}\iota_N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Η ύπαρξη του μορφισμού α οφείλεται στο ότι $\mathsf{Ext}^1(\mathsf{Coker}\iota_M, Q_N) = 0$, αφού το $\mathsf{Coker}\iota_M$ είναι ένα MCM πρότυπο ενώ το Q_M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό (βλ. Λήμμα 5.2.22). Τέλος, ο μορφισμός γ είναι ο επαγόμενος μορφισμός στους συνπυρήνες.

Τότε ορίζουμε τον φυσικό συναρτητή suspension:

$$\Sigma_R\colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$$

ως εξής:

- Στα αντικείμενα, θέτουμε $\Sigma_R M = \mathsf{Coker}\iota_M$ για κάθε MCM πρότυπο M.
- Στους μορφισμούς, θέτοντας $\Sigma_R f = \gamma\colon \mathsf{Coker}\iota_M \longrightarrow \mathsf{Coker}\iota_N$, όπου γ ο επαγόμενος μορφισμός στους συνπυρήνες.

Προκύπτει ότι ο συναρτητής Σ_R είναι καλώς ορισμένος και εκ κατασκευής αποτελεί έναν αντίστροφο του Ω_R, αφού $\Omega_R(\mathsf{Coker}\iota_M) \cong M$ για κάθε $M \in \underline{\mathsf{MCM}}(R)$. ■

Θεωρούμε την κατηγορία των maximal Cohen-Macaulay προτύπων και την πλήρη υποκατηγορία αυτής $\mathcal{P}$ των προβολικών προτύπων. Όπως αναφέρθηκε, η $\mathcal{P}$ είναι μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη (και επίσης μία συναλλοίωτα πεπερασμένη) υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία των αριστερών τριγώνων $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Omega_{\mathcal{R}})$ και την κατηγορία των δεξιών τριγώνων $\mathcal{RTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$ της $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ οι οποίες είναι ισοδύναμες. Ακολουθώντας την κατασκευή των διακεκριμένων και των επαγόμενων τριγώνων η οποία έχει προηγηθεί (βλ. Ορισμός 5.4.13 και Ορισμός 5.4.15), θα περιγράψουμε αντίστοιχα τρίγωνα στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ με τα οποία αυτή η ευσταθής κατηγορία αποκτά μία τριγωνική δομή.

Αρχικά, θα ορίσουμε τα δεξιά διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{RTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$. Θεωρούμε έναν ομομορφισμό maximal Cohen-Macaulay R-προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$. Συμβολίζουμε με $\iota_M\colon M \longrightarrow Q_M$ μία εμβάπτιση του M σε ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο Q_M, έτσι ώστε ο συνπυρήνας να είναι επίσης MCM. Τότε, ορίζουμε τον κώνο C_f του μορφισμού f ως το pushout των f και ι_M. Υπενθυμίζουμε ότι το suspension του M, ορίστηκε ως ο συνπυρήνας $\mathsf{Coker}\iota_M$. Με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα σύντομων ακριβών ακολουθιών R-προτύπων:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "f"] & Q_M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d] & \Sigma_R M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & C_f \arrow[r, dashed, "p"] & \Sigma_R M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 5.4.25. *Ένα δεξιό τρίγωνο*

$$\underline{A} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{B} \xrightarrow{\underline{v}} \underline{C} \xrightarrow{\underline{w}} \Sigma_R \underline{A}$$

της $\mathcal{RTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$ καλείται **διακεκριμένο**, *αν είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της μορφής*

$$\underline{M} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{N} \xrightarrow{\underline{\iota}} \underline{C_f} \xrightarrow{-\underline{p}} \Sigma_R \underline{M}$$

όπου $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός MCM προτύπων.

Δυϊκά, μπορούμε να ορίσουμε τα αριστερά διακεκριμένα τρίγωνα στην $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$. Έστω $f\colon M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός maximal Cohen-Macaulay R-προτύπων. Επιλέγοντας μία προβολική ανάλυση $P_N^\bullet$ του N, αποκτούμε έναν επιμορφισμό $\pi_N\colon P_N \longrightarrow N$ από ένα προβολικό R-πρότυπο στο N του οποίου ο πυρήνας είναι επίσης MCM. Εξ ορισμού, $\mathsf{Ker} p_N = \Omega_R N$.

Τότε, ορίζουμε τον κώνο C_f του μορφισμού f ως το pullback των f και π_N.Με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα σύντομων ακριβών ακολουθιών R-προτύπων:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_R N \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[d, "1_{\Omega_R N}"] & C_f \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_R N \arrow[r, "i_N"] & P_N \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 5.4.26. *Ένα αριστερό τρίγωνο*

$$\Omega_R\underline{C} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{A} \xrightarrow{\underline{v}} \underline{B} \xrightarrow{\underline{w}} \underline{C}$$

της $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$ θα καλείται διακεκριμένο, αν είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της μορφής

$$\Omega_R\underline{N} \xrightarrow{\underline{i}} \underline{C}_f \xrightarrow{\underline{\pi}} \underline{M} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{N}$$

όπου $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός MCM προτύπων.

Τέλος, για λόγους πληρότητας θα ορίσουμε τα επαγόμενα τρίγωνα στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε το ακόλουθο, άμεσο πόρισμα.

Πόρισμα 5.4.27. *Έστω $\mathsf{P}(R)$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$ η οποία αποτελείται από τα προβολικά R-πρότυπα. Όλοι οι επιμορφισμοί (στην mod-R) μεταξύ MCM προτύπων είναι $\mathsf{P}(R)$-epics και αντίστροφα. Επιπλέον, ένας μορφισμός MCM προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$ MCM προτύπων είναι $\mathsf{P}(R)$-monic αν-ν η ακολουθία:*

$$\mathsf{Hom}_R(N,R) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M,R) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Για την κατασκευή των επαγόμενων τριγώνων, θα χρησιμοποιηθούν σύντομες ακριβείς ακολουθίες MCM προτύπων.

Θα κατασκευάσουμε τα αριστερά επαγόμενα τρίγωνα στην $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$. Έστω

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία MCM προτύπων. Έστω $\pi_N\colon P_N \longrightarrow N$ ένας επιμορφισμός από ένα προβολικό R-πρότυπο στο N του οποίου ο πυρήνας είναι επίσης MCM. Τότε αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_R N \arrow[r, "i_N"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & P_N \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, dashed, "\pi"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός π επάγεται διότι ο g είναι ένας επιμορφισμός, ενώ ο μορφισμός γ είναι ο επαγόμενος μορφισμός στους πυρήνες, δηλαδή η χαρακτηριστική κλάση του g, $\mathsf{ch}(g)$.

Ορισμός 5.4.28. *Ένα αριστερό τρίγωνο*

$$\Omega_R\underline{C} \xrightarrow{u} \underline{A} \xrightarrow{v} \underline{B} \xrightarrow{w} \underline{C}$$

της $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$ *θα καλείται επαγόμενο, αν είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της μορφής*

$$\Omega_R\underline{N} \xrightarrow{\mathsf{ch}(g)} \underline{K} \xrightarrow{f} \underline{M} \xrightarrow{g} \underline{N}$$

όπου

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία MCM προτύπων.

Οι αντίστοιχες διακεκριμένες και επαγόμενες τριγωνικές δομές είναι προφανώς ισοδύναμες:

Πόρισμα 5.4.29. *Θεωρούμε την ευσταθή κατηγορία των maximal Cohen-Macaulay προτύπων* $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$*. Τότε, κάθε διακεκριμένο αριστερό τρίγωνο στην* $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$ *είναι ισόμορφο με ένα επαγόμενο αριστερό τρίγωνο και κάθε επαγόμενο αριστερό τρίγωνο στην* $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$ *είναι ισόμορφο με ένα διακεκριμένο αριστερό τρίγωνο.*

Απόδειξη. Η παραπάνω πρόταση αποτελεί άμεσο πόρισμα της Πρότασης 5.4.17 και της δυϊκής της. ■

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα, διατυπώνουμε το κύριο θεώρημα που αποτελεί την εφαρμογή της παραπάνω θεωρίας στην κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$.

Θεώρημα 5.4.30. *Η ευσταθής κατηγορία* $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ *είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία.*

Απόδειξη. Η P_R, η πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$ η οποία αποτελείται από τα προβολικά MCM πρότυπα, αποτελεί μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathsf{MCM}(R)$. Επιπλέον, κάθε P(R)-epic μορφισμός στην $\mathsf{MCM}(R)$ έχει πυρήνα στην $\mathsf{MCM}(R)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4.19, η πλήρης υποκατηγορία των αριστερά διακεκριμένων τριγώνων της $\mathcal{LTR}(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Sigma_R)$ είναι ένας αριστερός τριγωνισμός της $(\underline{\mathsf{MCM}}(R), \Omega_R)$. Όπως είδαμε, επειδή η $\mathsf{P}(R)$ είναι ένας ενέσιμος συνγεννήτορας της $\mathsf{MCM}(R)$, ο loop-space functor $\Omega_R \colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Με αυτόν τον τρόπο η $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ αποτελεί μία τριγωνισμένη κατηγορία με την κλασσική έννοια (βλ. Ορισμός 3.1.7.). ■

Παρατήρηση 5.4.31. Προφανώς, ορίζοντας εξ αρχής τα παραπάνω διακεκριμένα τρίγωνα στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ είναι δυνατό να επαληθεύσουμε άμεσα τα αξιώματα (TR1)-(TR4) μίας τριγωνισμένης κατηγορίας. Ιδιαίτερα, το αξίωμα της στροφής τριγώνων (TR2), αναμένονταν ήδη από τον A. Heller (βλ. [30, Thm. 5.3.]). Ωστόσο, για τον Heller, το αξίωμα αυτό αποτελούσε απλά μία αξιοθαύμαστη ιδιότητα, καθώς η θεωρία των τριγωνισμένων κατηγοριών δεν είχε θεμελιωθεί ακόμη.

Κεφάλαιο 6

Κατηγορίες Ιδιομορφιών

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι, ακολουθώντας τον Buchweitz, βλ. [17], η μελέτη κατηγοριών οι οποίες είναι ισοδύναμες με την ευσταθή κατηγορία των maximal Cohen-Macaulay προτύπων. Αρχικά, εισάγουμε τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάπτυξη της παρακάτω θεωρίας, ο οποίος και θα είναι κατά το κύριο μέρος σύμφωνος με τον [17].

Θεωρούμε την ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}_{\mathsf{mod}\text{-}R}(\mathsf{Mod}\text{-}R)$ (βλ. Ορισμός 4.7.12), η οποία έχει ως αντικείμενα όλα τα σύμπλοκα R-προτύπων με πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα συνομολογίας. Για λόγους συντομίας, θέτουμε $\mathsf{K}(R) = \mathsf{K}_{\mathsf{mod}\text{-}R}(\mathsf{Mod}\text{-}R)$.

Παρόμοια, θα συμβολίζουμε με $\mathsf{D}^*(R)$ τις αντίστοιχες παραγόμενες κατηγορίες, τα αντικείμενα των οποίων είναι τα σύμπλοκα R-προτύπων με πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα συνομολογίας (βλ. Παράδειγμα 4.7.17). Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να τονίσουμε μία διαφορά όσον αφορά τις φραγμένες κατηγορίες $\mathsf{D}^*(R)$ που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια, σε σχέση με τον πως αυτές ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επικεντρώνοντας στη φραγμένη παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(R)$ με την οποία και θα ασχοληθούμε κυρίως, παρατηρούμε ότι η τελευταία ορίστηκε ως η υποκατηγορία της $\mathsf{D}(R)$ η οποία έχει ως αντικείμενα φραγμένα σύμπλοκα. Για τεχνικούς λόγους θα θεωρήσουμε την $\mathsf{D}^b(R)$ ως την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{D}(R)$ με αντικείμενα σύμπλοκα τα οποία είναι ισόμορφα στην παραγόμενη κατηγορία με φραγμένα σύμπλοκα, δηλαδή ακριβώς σύμπλοκα με φραγμένη συνομολογία. Οι δύο αυτές φραγμένες υποκατηγορίες της $\mathsf{D}(R)$ είναι προφανώς ισοδύναμες. Αντίστοιχα ορίζονται και οι κατηγορίες $\mathsf{D}^-(R)$ και $\mathsf{D}^+(R)$.

Κάθε μία από τις κατηγορίες $\mathsf{K}(R)$ ή $\mathsf{D}^*(R)$ θα θεωρείται μία τριγωνισμένη κατηγορία, εφοδιασμένη με τη φυσική τριγωνική της δομή η οποία έχει δοθεί σε προηγούμενα κεφάλαια.

Συχνά, θα ταυτίζουμε ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο με το αντίστοιχο stalk complex, χωρίς δηλαδή να δίνουμε ιδιαίτερο όνομα στον συναρτητή έγκλεισης: $\mathsf{mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{D}^*(R)$.

Στη συνέχεια, όπως αναφέρθηκε, θα επικεντρωθούμε κυρίως στη φραγμένη παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(R)$, την οποία θα ταυτίζουμε συχνά με την πλήρη τριγωνισμένη υποκατηγορία της των «προβολικών αναλύσεων», δηλαδή την $\mathsf{K}^{-,b}(\mathsf{P}((R))$ η οποία είναι η ομοτοπική κατηγορία όλων των άνω φραγμένων συμπλόκων από πεπερασμένα προβολικά R-πρότυπα με φραγμένη συνομολογία. Προφανώς, για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(R)$, μία προβολική ανάλυση του $C^\bullet$, όπως αυτή ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, είναι απλώς ένας ισομορφισμός $P^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(R)$ (δηλ. ένας quasi-isomorphism) από ένα αντικείμενο $P^\bullet$ της $\mathsf{K}^{-,b}(\mathsf{P}(R))$ στο $C^\bullet$.

6.1 Τέλεια Σύμπλοκα

Η παρούσα ενότητα θα αφιερωθεί στη μελέτη των τέλειων συμπλόκων.

Ορισμός 6.1.1. *Ένα σύμπλοκο R-προτύπων $C^\bullet$ καλείται* **τέλειο (perfect)** *αν είναι ισόμορφο στην $\mathsf{D}(R)$ με ένα φραγμένο σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Κατ' επέκτασιν, ένα R-πρότυπο M θα καλείται τέλειο, αν το αντίστοιχο stalk complex του M είναι ένα τέλειο σύμπλοκο στην $\mathsf{D}(R)$.*

Σχόλιο 6.1.2. Η παραπάνω ορολογία προέρχεται από το [13, I, 2.1], σύμφωνα με το οποίο, ένα σύμπλοκο της παραπάνω μορφής καλείται $\mathsf{P}(R)$-perfect.

Ορισμός 6.1.3. *Η πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$ η οποία έχει ως αντικείμενα όλα τα τέλεια σύμπλοκα θα συμβολίζεται με $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$.*

Πρόταση 6.1.4. *Η $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$ είναι μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$ είναι κλειστή στον συναρτητή μεταφοράς Σ και στους κώνους μορφισμών.

Αν $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο R-προτύπων το οποίο αποτελεί ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$, θα υπάρχει ένας ισομορφισμός $C^\bullet \xrightarrow{\sim} P^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(R)$ όπου το $P^\bullet$ είναι ένα φραγμένο σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά. Τότε, το σύμπλοκο $\Sigma C^\bullet$ θα είναι ισόμορφο στην $\mathsf{D}^b(R)$ με το $\Sigma P^\bullet$, το οποίο είναι επίσης ένα σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά, συνεπώς $\Sigma C^\bullet \in \mathsf{ob}(\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R))$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$ είναι κλειστή στον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων.

Αν $f : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων με $C^\bullet, D^\bullet \in \mathsf{ob}(\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R))$, ο κώνος $C^\bullet_f$ του μορφισμού f είναι εξ ορισμού ένα σύμπλοκο με $C^n_f = C^{n+1} \oplus D^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εφόσον το ευθύ άθροισμα προβολικών προτύπων είναι ένα προβολικό πρότυπο, εύκολα βλέπουμε ότι $C^\bullet_f \in \mathsf{ob}(\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R))$. Έτσι, η κατηγορία των τέλειων συμπλόκων αποτελεί μία πλήρη τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$. ■

Σε αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αναφέρουμε μία πιο σύγχρονη προσέγγιση στον ορισμό της κατηγορίας $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε τα ακόλουθα συμπεράσματα η απόδειξη των οποίων θα σκιαγραφηθεί:

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathsf{P}(\mathcal{A})$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από όλα τα προβολικά αντικείμενα. Θεωρούμε την άνω φραγμένη ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^-(\mathsf{P}(\mathcal{A}))$ και την άνω φραγμένη παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$. Τότε, ο φυσικός συναρτητής $\mathsf{K}^-(\mathsf{P}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του [39, Theorem 2.2.4.]. Η κεντρική ιδέα είναι ότι αν θέσουμε S την κλάση όλων των ημι-ισομορφισμών στην $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$, προκύπτει ότι η $\mathsf{K}^-(\mathsf{P}(\mathcal{A}))$ και η S ικανοποιούν τις συνθήκες της Πρότασης 2.3.1 και άρα ο συναρτητής

$$\mathsf{K}^-(\mathsf{P}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathsf{K}^-(\mathcal{A})[S^{-1}] = \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$$

είναι πλήρης και πιστός. ■

Ιδιαίτερα, στην περίπτωση που η ακολουθία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα ισχύει το ακόλουθο:

Πόρισμα 6.1.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Τότε ο φυσικός συναρτητής $\mathsf{K}^-(\mathsf{P}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του [39, Theorem 2.2.4.]. Η πορεία που ακολουθούμε είναι η εξής: Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.5, ο φυσικός συναρτητής $\mathsf{K}^-(\mathsf{P}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός . Προκύπτει ότι για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$ στην $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ υπάρχει ένα σύμπλοκο $P^\bullet$ στην $\mathsf{K}^-(\mathsf{P}(\mathcal{A}))$ και ένας ημι-ισομορφισμός $s : P^\bullet \longrightarrow C^\bullet$. Άμεσα, ο $Q(s)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ και ο συναρτητής είναι επί με ακρίβεια ισομορφισμού, άρα και μία ισοδυναμία κατηγοριών. ■

Η παραπάνω ισοδυναμία κατηγοριών αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 4 (βλ. Σχόλιο 4.7.4), καθώς αποτελεί ένα παράδειγμα στο οποίο η ύπαρξη της παραγόμενης κατηγορίας εξασφαλίζεται.

Θεωρώντας τις αντίστοιχες φραγμένες κατηγορίες, με αυτόν τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει ένα διάγραμμα έγκλεισης κατηγοριών:

$$\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\iota} \mathsf{K}^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \tag{6.1}$$

όπου ι είναι η κανονική εισαγωγή και Q ο συναρτητής τοπικοποίησης ενώ η σύνθεση $Q \circ i$ αποτελεί έναν πλήρη και πιστό συναρτητή.

Εφαρμόζοντας τα συμπεράσματα αυτά στην κατηγορία προτύπων, προκύπτει ένα διάγραμμα κατηγοριών:

$$\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R)) \xrightarrow{\iota} \mathsf{K}^b(R) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}^b(R) \tag{6.2}$$

Παρατηρούμε έτσι, ότι τα τέλεια σύμπλοκα όπως ορίστηκαν παραπάνω, είναι ακριβώς όλα τα αντικείμενα που βρίσκονται στην εικόνα της $\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R))$ μέσω της σύνθεσης $Q \circ i$ καθώς και όλα τα ισόμορφά τους. Με άλλα λόγια, σε συμφωνία με την σημερινή βιβλιογραφία, μπορούμε να διατηρήσουμε τον ίδιο συμβολισμό για την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$ η οποία έχει ως αντικείμενα τις εικόνες των αντικειμένων της $\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R))$ μέσω του συναρτητή $Q \circ i$ καθώς και τα ισόμορφά τους. Τότε $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R) \cong \mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R))$.

Με την παραπάνω διαδικασία, η Πρόταση 6.1.4 προκύπτει άμεσα καθώς η $\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R))$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^b(R)$ (η απόδειξη προκύπτει εφαρμόζοντας το δυϊκό του Λήμματος 4.9.19).

Παραθέτουμε στη συνέχεια έναν ορισμό του συναρτητή Ext στα πλαίσια της θεωρίας του παρόντος Κεφαλαίου:

Ορισμός 6.1.7. *Έστω R ένας δακτύλιος και $\mathsf{D}^b(R)$ η αντίστοιχη φραγμένη παραγόμενη κατηγορία. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε έναν δι-συναρτητή $\mathsf{Ext}^n_R(-,-)\colon \mathsf{D}^b(R) \times \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ως:*

$$\mathsf{Ext}^n_R(C^\bullet, D^\bullet) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(R)}(C^\bullet, \Sigma^n D^\bullet)$$

για κάθε $C^\bullet, D^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(R)$.

Σχόλιο 6.1.8. Ο ορισμός αυτός του συναρτητή Ext είναι σύμφωνος με τον συνήθη ορισμό του ως δεξιά παραγόμενο συναρτητή ή με τον ορισμό του χρησιμοποιώντας κλάσεις ισοδυναμίας επεκτάσεων.

Παρατήρηση 6.1.9. Θεωρούμε έναν δακτύλιο R και σταθεροποιούμε ένα σύμπλοκο $C^\bullet \in \mathsf{ob}(\mathsf{D}^b(R))$. Τότε, αν στον παραπάνω ορισμό θέσουμε $D^\bullet = M$, όπου με M συμβολίζουμε το αντίστοιχο stalk complex στην $\mathsf{D}^b(R)$ ενός πεπερασμένα παραγόμενου R-προτύπου M, αποκτούμε έναν συναρτητή $\mathsf{Ext}^n_R(C^\bullet, -)\colon \text{mod-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ο οποίος ορίζεται ως:

$$\mathsf{Ext}^n_R(C^\bullet, M) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(R)}(C^\bullet, \Sigma^n M)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ο συναρτητής αυτός θα χρησιμοποιηθεί για τον χαρακτηρισμό των τέλειων συμπλόκων.

Πρόταση 6.1.10. *Έστω R ένας δακτύλιος και $C^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

- *Το σύμπλοκο $C^\bullet$ είναι τέλειο.*
- *Υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο M να ισχύει*
$$\mathsf{Ext}^n_R(C^\bullet, \Sigma^n M) = 0$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό ενός τέλειου συμπλόκου, προκύπτει ότι το σύμπλοκο $C^\bullet$ είναι τέλειο, αν-ν για μία προβολική ανάλυση $P^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ υπάρχει ένα «αρκετά μεγάλο» $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε το πρότυπο $\mathsf{Coker}\partial_C^{-n_0}$ να είναι προβολικό. Καθώς το σύμπλοκο $P^\bullet$ έχει εκ των προτέρων φραγμένη συνομολογία, το «επαυξημένο» σύμπλοκο

$$\cdots \longrightarrow P^{-n_0-1} \longrightarrow P^{-n_0} \longrightarrow \mathsf{Coker}\partial_C^{-n_0}$$

είναι ακυκλικό, δηλαδή ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο στην παραγόμενη κατηγορία. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή μετάφοράς στο stalk complex M,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-n_0-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-n_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Coker}\partial_C^{-n_0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει αν-ν για κάθε $n \geqslant n_0$, ισχύει $\mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(R)}(C^\bullet, \Sigma^n M) = 0$, δηλαδή αν-ν $\mathsf{Ext}^i_R(C^\bullet, M) = 0$. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται η ισοδυναμία των δύο προτάσεων. ■

Πρόταση 6.1.11. *Η $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$ είναι μία thick υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας την έγκλειση

$$\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R)) \xrightarrow{\iota} \mathsf{K}^b(R) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}^b(R)$$

αφού η $\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R))$ είναι μία thick τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^b(R)$. ■

Για την επόμενη πρόταση, θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό ο οποίος αφορά τριγωνισμένες κατηγορίες . Τον παραθέτουμε σε αυτό το σημείο για λόγους σαφήνειας:

Ορισμός 6.1.12. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Θα λέμε ότι το αντικείμενο X είναι ένας* **γεννήτορας** *της $\mathcal{D}$ αν η μικρότερη αυστηρά πλήρης, thick και τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία περιέχει το X είναι η $\mathcal{C}$. Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε $\langle X \rangle = \mathcal{C}$.*

Πρόταση 6.1.13. *Έστω R ένας δακτύλιος. Η πλήρης υποκατηγορία $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}(R)}$ της $\mathsf{D}^b(R)$ είναι η μικρότερη αυστηρά πλήρης, thick, τριγωνισμένη υποκατηγορία η οποία περιέχει το stalk complex του δακτυλίου R θεωρούμενο ως δεξιό R-πρότυπο. Δηλαδή, $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}(R)} = \langle R \rangle$ και ο R είναι ένας γεννήτορας της $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}(R)}$.*

Εξετάζοντας τις Προτάσεις 6.1.10 και 6.1.13 μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα στην ακόλουθη πρόταση, η οποία αποτελεί έναν εσωτερικό χαρακτηρισμό των τέλειων συμπλόκων.

Πρόταση 6.1.14. *Έστω R ένας δακτύλιος και $C^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

1. *Το σύμπλοκο $C^\bullet$ είναι τέλειο.*

2. *Υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο M να ισχύει*
$$\mathsf{Ext}^n_R(C^\bullet, \Sigma^n M) = 0$$

3. *Έστω μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{D}$ και ένας ακριβής συναρτητής $F\colon \mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R) \longrightarrow \mathcal{D}$ έτσι ώστε $F(R) = 0$, όπου με R συμβολίζουμε το stalk complex του δακτυλίου R θεωρούμενου ως ένα δεξιό R-πρότυπο. Τότε, για το αντικείμενο $C^\bullet$ της $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$ ισχύει $F(C^\bullet) = 0$.*

Απόδειξη. Όπως ήδη έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 3.5.10, ο πυρήνας

$$\mathsf{Ker}F = \{A \in \mathcal{C} \mid F(A) = 0\}$$

ενός ακριβή συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι πάντα thick. Επομένως, η ιδιότητα 3 χαρακτηρίζει την ελάχιστη thick υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$ η οποία περιέχει το αντικείμενο R και η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 6.1.10 και 6.1.13. ■

Εφόσον η $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}(R)}$ είναι μία thick υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(R)$, το πηλίκο $\mathsf{D}^b(R)/\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}(R)}$ (με την έννοια του Verdier) είναι επίσης μία τριγωνισμένη κατηγορία, μοναδική με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού.

Ορισμός 6.1.15. *Η τριγωνισμένη κατηγορία πηλίκο*

$$\underline{\mathsf{D}^b(R)} = \mathsf{D}^b(R)/\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}(R)}$$

καλείται η **κατηγορία ιδιομορφιών (singularity category)** *ή η* **ευσταθώς παραγόμενη** *κατηγορία του R.*

Ο συναρτητής πηλίκο $\mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ είναι η ταυτότητα στα αντικείμενα, και αντιστοιχίζει έναν μορφισμό συμπλόκων f στην $\mathsf{D}^b(R)$ στην κλάση του $\underline{f}$ στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$.

Σχόλιο 6.1.16. Στη σημερινή βιβλιογραφία, η κατηγορία ιδιομορφιών του R συχνά συμβολίζεται με $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(R)$ και ορίζεται άμεσα ως:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(R) = \mathsf{D}^b(\mathsf{mod}\text{-}R)/\mathsf{K}^b(\mathsf{P}(\mathsf{mod}\text{-}R))$$

Στα παρακάτω, θέλοντας να εξετάσουμε την προσέγγιση του Buchweitz στο [17], θα επιμείνουμε στον συμβολισμό που ακολουθεί ο ίδιος.

Παρατήρηση 6.1.17. Λαμβάνοντας υπόψιν την συνθήκη 3 της Πρότασης 6.1.14, άμεσα βλέπουμε ότι η ευσταθής κατηγορία $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα:

Έστω μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{D}$ και ένας ακριβής συναρτητής $F\colon\ \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \mathcal{D}$ έτσι ώστε $F(R) = 0$, όπου πάλι με R συμβολίζουμε το stalk complex του δακτυλίου R θεωρούμενου ως ένα δεξιό R-πρότυπο. Τότε, ο συναρτητής F αναλύεται εξ ορισμού μέσω της ευσταθούς κατηγορίας πηλίκο, όπως φαίνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}^b(R) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed] & \mathcal{D} \\
& \underline{\mathsf{D}^b(R)} \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

Σχόλιο 6.1.18. Χρησιμοποιώντας πάλι την Πρόταση 6.1.14, βλέπουμε ότι για τους μορφισμούς στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ ισχύει

$$\mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{D}^b(R)}}(C^\bullet, \Sigma^n D^\bullet) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}^b(R)}(C^\bullet, \Sigma^n D^\bullet) = \mathsf{Ext}^n_R(C^\bullet, D^\bullet)$$

για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{Z}$.

Θεωρώντας την κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων R-προτύπων $\mathsf{mod}\text{-}R$ και την ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ η οποία ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτει η ύπαρξη του ακόλουθου συναρτητή:

Λήμμα 6.1.19. *Θεωρούμε τον συναρτητή στην παραγόμενη κατηγορία* $Q\colon \mathsf{mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{D}^b(R)$ *και τον συναρτητή πηλίκο* $\pi\colon \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$*. Τότε, υπάρχει ένας φυσικός συναρτητής*

$$\iota_R\colon \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

έτσι ώστε η σύνθεση $\pi \circ Q\colon \mathsf{mod}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ *αναλύεται μοναδικά μέσω του συναρτητή προβολής* $p\colon \mathsf{mod}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{mod}\text{-}R \arrow[r, "Q"] \arrow[drr, "p"'] & \mathsf{D}^b(R) \arrow[r, "\pi"] & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \\
 & & \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \arrow[u, dashed, "\iota_R"']
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

Επιπλέον, $\iota_R \circ \Omega_R \cong \Sigma^{-1}\iota_R$ *όπου* $\Sigma^{-1}\colon \underline{\mathsf{D}^b(R)} \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ *είναι ο αντίστροφος του συναρτητή μεταφοράς στην* $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$*.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό των παραπάνω κατηγοριών, τα προβολικά πρότυπα της $\mathsf{mod}\text{-}R$, τα οποία αποτελούν το μηδενικό αντικείμενο της $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$, απεικονίζονται μέσω της παραπάνω σύνθεσης συναρτητών σε τέλεια σύμπλοκα, δηλαδή στο μηδενικό αντικείμενο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Κατά συνέπεια, υπάρχει ένας μοναδικός συναρτητής κατηγοριών $\iota_R\colon \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ έτσι ώστε το διάγραμμα συναρτητών (6.3) να είναι μεταθετικό.

Έστω τώρα M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και $P_M \longrightarrow M$ ένας επιμορφισμός από ένα προβολικό R-πρότυπο P_M. Θεωρούμε τον ακόλουθο μορφισμό από stalk complexes:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_R M \arrow[r] \arrow[d, "p_M"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

η εικόνα του οποίου στην παραγόμενη κατηγορία είναι ο μορφισμός

$$\iota_R(p_M)\colon \iota_R(\Omega_R M) \longrightarrow \iota_R(P_M)$$

Ο ακόλουθος μορφισμός συμπλόκων

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_R M \arrow[r] \arrow[d] & P_M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ημι-ισομορφισμός, δηλαδή η εικόνα του είναι ισομορφισμός στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(R)$. Άμεσα συμπεραίνουμε έτσι, ότι η εικόνα του stalk complex M στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$, δηλαδή το αντικείμενο $\iota_R(M)$, είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ με τον κώνο του μορφισμού $\iota_R(p_M)$. Ως αποτέλεσμα, για κάθε σύντομη ακριβή ακολουθία προτύπων της μορφής

$$0 \longrightarrow \Omega_R M \longrightarrow P_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

προκύπτει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
 & \iota_R(M) \arrow[dl, "u"', "{[1]}"] & \\
\iota_R(\Omega_R M) \arrow[rr, "\iota_R(p_M)"] & & \iota_R(P_M) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Το stalk complex $\iota_R(P_M)$ είναι προφανώς τέλειο, άρα αποτελεί το μηδενικό στοιχείο της $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Συνεπώς, ο μορφισμός u είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathsf{D}^b(R)$ (βλ. Λήμμα 3.3.5). ■

Σχόλιο 6.1.20. Ο συναρτητής $\iota_R\colon \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ απεικονίζει κάθε R-πρότυπο M στο αντίστοιχο stalk complex του M

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

θεωρούμενο σαν αντικείμενο της $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$.

Για να εξετάσουμε την συμπεριφορά του συναρτητή i_R στους μορφισμούς, θεωρούμε έναν μορφισμό

$$\underline{f}\colon M \longrightarrow N$$

της ευσταθούς κατηγορίας $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ και έστω $f\colon M \longrightarrow N$ ένας αντιπρόσωπος του $\underline{f}$ στην $\mathsf{mod}\text{-}R$. Δηλαδή, διατηρώντας τον συμβολισμό του διαγράμματος 6.3 ισχύει $\underline{f} = p(f)$. Από το ίδιο μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών, βλέπουμε ότι

$$i_R(\underline{f}) = i_R \circ p(f) = \pi \circ Q(f)$$

Ο συναρτητής $Q\colon \mathsf{mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{D}^b(R)$ εξ ορισμού απεικονίζει τον μορφισμό των stalk complexes $f\colon M \longrightarrow N$ στην κλάση ομοτοπίας του $[f]$ και στη συνέχεια, στον μορφισμό $\phi = [f]/1_M$ της $\mathsf{D}^b(R)$ ο οποίος αναπαριστάται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1_M"', "\sim"] \arrow[dr, "{[f]}"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός ϕ στην συνέχεια απεικονίζεται στην κλάση του στη σταθεροποιημένη κατηγορία $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ μέσω του συναρτητή στο πηλίκο $\pi\colon \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$.

6.2 Η Κατηγορία των Ακυκλικών Προβολικών Συμπλόκων

Θα εισάγουμε στη συνέχεια μία κλασική ορολογία οι οποία αφορά αναλύσεις προτύπων και βασίζεται στους Cartan-Eilenberg, βλ. [18, XII, §3].

Ορισμός 6.2.1. *Έστω M ένα δεξιό R-πρότυπο. Τότε, μία* **πλήρης προβολική ανάλυση (complete projective resolution)** *του M (πάνω από τον δακτύλιο R) είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο $P^\bullet$:*

$$P^\bullet\colon\ \cdots \longrightarrow P^{n-1} \xrightarrow{\partial_P^{n-1}} P^n \xrightarrow{\partial_P^n} P^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα έτσι ώστε

$$\mathsf{Coker}\partial_P^0 = M$$

όπου $\partial_P^0\colon P^{-1} \longrightarrow P^0$. Το σύμπλοκο

$$P_-^\bullet\colon\ \cdots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{\partial_P^{-1}} P^{-1} \xrightarrow{\partial_P^0} P^0 \longrightarrow \mathsf{Coker}\partial_P^0 = M \longrightarrow 0$$

καλείται **προβολική ανάλυση (projective resolution)** *του M, ενώ το σύμπλοκο*

$$P_+^\bullet\colon\ 0 \longrightarrow M = \mathsf{Coker}\partial_P^0 \longrightarrow P^1 \xrightarrow{\partial_P^2} P^2 \xrightarrow{\partial_P^3} P^3 \longrightarrow \cdots$$

καλείται **προβολική συν-ανάλυση (projective co-resolution)** *του M.*

Σχόλιο 6.2.2. Για λόγους συντομίας από δω και στο εξής θα καλούμε μία πλήρης προβολική ανάλυση, απλώς μία πλήρης ανάλυση.

Παρατήρηση 6.2.3. Βλέπουμε ότι, αν ένα R-πρότυπο M δέχεται μία πλήρη ανάλυση, τότε είναι απαραίτητα πεπερασμένα παραγόμενο. Επιπλέον, εφόσον για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο M, μία προβολική ανάλυση υπάρχει πάντοτε, ένα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο δέχεται μία πλήρη ανάλυση αν-ν δέχεται μία προβολική συν-ανάλυση.

Παρατήρηση 6.2.4. Θεωρούμε τον ακόλουθο μορφισμό συμπλόκων

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_P^0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P^{1} \arrow[r] & P^{2} \arrow[r] & P^{3} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

τον οποίο συμβολίζουμε απλά ως ∂. Εύκολα βλέπουμε ότι για τον κώνο αυτού του μορφισμού ισχύει $\Sigma C_\partial^\bullet = P^\bullet$, όπου $P^\bullet$ το σύμπλοκο του Ορισμού 6.2.1. Επομένως, το διαφορικό ∂_P^0 παίζει τον ρόλο του συνδετικού μορφισμού από την επαγόμενη προβολική ανάλυση στην επαγόμενη προβολική συν-ανάλυση.

Σε αυτό το σημείο είναι φυσικό κάποιος να αναρωτηθεί ποια R-πρότυπα δέχονται μία πλήρη ανάλυση. Μία τέτοια ερώτηση όμως είναι γενικά αδύνατο να απαντηθεί και έτσι θα εισάγουμε την «κατηγορία των πλήρων αναλύσεων» σαν μία ανεξάρτητη έννοια.

Ορισμός 6.2.5. *Θα συμβολίζουμε με* $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ *την ομοτοπική κατηγορία των (μη φραγμένων)* **ακυκλικών** *συμπλόκων από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα.*

Σχόλιο 6.2.6. Η κατηγορία $\underline{\mathsf{APC}}(R)$, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του [19] γράφεται και ως $\mathsf{K}^{\infty,\varnothing}(\mathsf{P}(R))$.

Πρόταση 6.2.7. *Η κατηγορία $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(R)$, της ομοτοπικής κατηγορίας συμπλόκων από πεπερασμένα παραγόμενα R-πρότυπα.*

Απόδειξη. Η $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ είναι εκ κατασκευής μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{K}(R)$, άρα μένει να δείξουμε ότι είναι κλειστή στον συναρτητή μεταφοράς και στους κώνους μορφισμών. Άμεσα, το $P^\bullet$ είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα αν-ν το $\Sigma P^\bullet$ είναι επίσης ένα ακυκλικό σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Επιπλέον, αν $P^\bullet, Q^\bullet \in \mathsf{ob}(\underline{\mathsf{APC}}(R))$ και $f\colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$, τότε ο κώνος $C_f^\bullet$ του μορφισμού f είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο με

$$C_f^n = P^{n+1} \oplus Q^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και διαφορικό:

$$\partial_{C_f}^n = \begin{pmatrix} -\partial_P^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & \partial_Q^n \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Καθώς το ευθύ άθροισμα προβολικών προτύπων είναι προβολικό πρότυπο, βλέπουμε ότι και το $C_f^\bullet$ είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. ■

Σκοπός μας στη συνέχεια είναι ορίσουμε μία οικογένεια συναρτητών: $\underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$.

Ορισμός 6.2.8. *Θεωρούμε την ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(R)$. Για κάθε ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$ κατασκευάζουμε αρχικά μία αντιστοιχία $\Omega_n\colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{mod}\text{-}R$ ως εξής:*

1. *Για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$ στην $\mathsf{K}(R)$ με*

$$C^\bullet\colon \ \cdots \longrightarrow C^{-n-1} \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} C^{-n} \xrightarrow{\partial_C^{n}} C^{-n+1} \longrightarrow \cdots$$

θέτουμε:

$$\Omega_n(C^\bullet) = \mathsf{Coker}\partial_C^{-n-1}$$

2. *Για κάθε μορφισμό συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην $\mathsf{K}(R)$ ανάλογα θέτουμε:*

$$\Omega_n(f) = \phi^{-n-1}\colon \ \mathsf{Coker}\partial_C^{-n-1} \longrightarrow \mathsf{Coker}\partial_D^{-n-1}$$

όπου με ϕ^n συμβολίζουμε τον μορφισμό στους συνπυρήνες ο οποίος επάγεται από τον $f^{-n}\colon C^{-n} \longrightarrow D^{-n}$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{-n-1} \arrow[r, "\partial_C^{-n-1}"] \arrow[dd, "f^{-n-1}"] & C^{-n} \arrow[rr, "\partial_C^{-n}"] \arrow[dd, "f^{-n}"] \arrow[dr] & & C^{-n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "f^{-n+1}"] & \cdots \\
& & & \mathsf{Coker}\partial_C^{-n-1} \arrow[dd, dashed, "\phi^n"] & & \\
\cdots \arrow[r] & D^{-n-1} \arrow[r, "\partial_D^{-n-1}"] & D^{-n} \arrow[rr] \arrow[dr] & & D^{-n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & & \mathsf{Coker}\partial_D^{-n-1} & &
\end{tikzcd}$$

Για κάθε σύμπλοκο R-προτύπων $C^\bullet$, το $\Omega_n(C^\bullet)$ καλείται το ***n*-οστό πρότυπο συζυγίας** *του $C^\bullet$.*

Πρόταση 6.2.9. *Έστω $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμών συμπλόκων από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα ο οποίος είναι 0-ομοτοπικός. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο επαγόμενος ομομορφισμός R-προτύπων $\Omega_n(f)\colon \Omega_n(C^\bullet) \longrightarrow \Omega_n(D^\bullet)$ αναλύεται μέσω ενός πεπερασμένα παραγόμενου προβολικού R-προτύπου, συγκεκριμένα μέσω των C^{-n+1} και D^{-n}.*

Απόδειξη. Θεωρώντας τον μορφισμό συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ καθώς και τους επαγόμενους ομομορφισμούς στους συνπυρήνες αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{-n-1} \arrow[r, "\partial_C^{-n-1}"] \arrow[dd, "f^{-n-1}"] & C^{-n} \arrow[rr, "\partial_C^{-n}"] \arrow[dd, "f^{-n}"] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & C^{-n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "f^{-n+1}"] & \cdots \\
& & & \Omega_n(C^\bullet) \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[dd, "\Omega_n(f)"] & & \\
\cdots \arrow[r] & D^{-n-1} \arrow[r, "\partial_D^{-n-1}"] & D^{-n} \arrow[rr] \arrow[dr, "\beta_1"] & & D^{-n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & & \Omega_n(C^\bullet) \arrow[ur, "\beta_2"] & &
\end{tikzcd}$$

Αν ο μορφισμός f είναι 0-ομοτοπικός, υπάρχει μία ομοτοπία $h\colon f \rightsquigarrow 0$ και τότε

$$f^{-n} = \partial_D^{-n-1} \circ h^{-n} + h^{-n+1} \circ \partial_C^{-n}$$

Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε:

$$\Omega_n(f)\circ\alpha_1 = \beta_1\circ f^{-n} = \beta_1\circ(\partial_D^{-n-1}\circ h^{-n} + h^{-n+1}\circ\partial_C^{-n}) = \beta_1\circ h^{-n+1}\circ\partial_C^{-n} = \beta_1\circ h^{-n+1}\circ\alpha_2\circ\alpha_1$$

Εφόσον ο α_1 είναι επιμορφισμός, έχουμε:

$$\Omega_n(f) = \beta_1 \circ h^{-n+1} \circ \alpha_2$$

δηλαδή ο ομομορφισμός $\Omega_n(f)$ αναλύεται μέσω των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων D^{-n} και C^{-n+1} για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. ■

Σχόλιο 6.2.10. Από την παραπάνω πρόταση βλέπουμε ότι κάθε $\Omega_n \colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{mod}\text{-}R$, για $n \in \mathbb{Z}$, επάγει έναν συναρτητή: $\underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ για τον οποίο θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολίσμό Ω_n.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{APC(R)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{mod}\text{-}R \arrow[d] \\
\underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[r, dashed] & \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R
\end{tikzcd}$$

Σχόλιο 6.2.11. Προφανώς ισχύει

$$\Omega_0(\Sigma C^\bullet) = \mathsf{Coker}(-\partial_C^0 \colon C^0 \longrightarrow C^1) \cong \Omega_{-1}(C^\bullet)$$

και γενικότερα:

$$\Omega_n(\Sigma^m C^\bullet) \cong \Omega_{n-m}(C^\bullet)$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$ και για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$.

Ωστόσο, αυτός ο ισομορφισμός συναρτητών δεν είναι «κανονικός», καθώς για περιττό m εξαρτάται από το πρόσημο ± 1 αντίστοιχα σε άρτιους ή περιττούς βαθμούς.

Λήμμα 6.2.12. *Ο συναρτητής*

$$\Omega_n \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$$

στέλνει τον αντίστροφο του συναρτητή μεταφοράς στην κατηγορία $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ στον loop-space functor Ω_R στην $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$, δηλαδή ισχύει

$$\Omega_n \Sigma^{-1} \cong \Omega_R \Omega_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έστω $C^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$. Τότε, (βλ. Σχόλιο 6.2.14) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$(\Omega_n \Sigma^{-1})(C^\bullet) = \mathsf{Coker}(-\partial_C^{-n-2} \colon C^{-n-2} \longrightarrow C^{-n-1}) \cong \Omega_{n+1}(C^\bullet)$$

Από το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{-n-1} \arrow[rr, "\partial_C^{-n-1}"] \arrow[dr] & & C^{-n} \arrow[rr, "\partial_C^{-n}"] \arrow[dr] & & C^{-n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & \Omega_{n+1}(C^\bullet) \arrow[ur] & & \Omega_n(C^\bullet) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

εφόσον το σύμπλοκο $C^\bullet$ είναι ακυκλικό, το αντικείμενο $\Omega_{n+1}(C^\bullet)$ είναι ένας πυρήνας του επιμορφισμού: $C^{-n} \longrightarrow \Omega_n(C^\bullet)$. Εφόσον το C^{-n} είναι ένα προβολικό R-πρότυπο, από τον τρόπο κατασκευής του συναρτητή Ω_R, έχουμε

$$(\Omega_R \Omega_n)(C^\bullet) \cong \Omega_{n+1}(C^\bullet) \cong \Omega_n \Sigma^{-1} C^\bullet$$

για κάθε αντικείμενο $C^\bullet$ της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$. Συνεπώς $\Omega_n \Sigma^{-1} \cong \Omega_R \Omega_n$ στα αντικείμενα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εξετάζοντας ανάλογα την συμπεριφορά των παραπάνω συναρτητών στους μορφισμούς προκύπτει το ζητούμενο. ■

Σχόλιο 6.2.13. Λόγω των ομοιοτήτων που εμφανίζουν, έχουμε χρησιμοποιήσει το ίδιο σύμβολο Ω τόσο για τον loop-space functor $\Omega_R\colon \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ όσο και για τον συναρτητή $\Omega_n\colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ ο οποίος μόλις ορίστηκε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε συναρτητές: $\underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τον λησμονικό συναρτητή truncation $\sigma_{\leqslant n}\colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{K}^-(R)$ (βλ. Ορισμό 4.7.22) στην ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων. Θεωρώντας τον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων $\Sigma\colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{K}(R)$ στην ομοτοπική κατηγορία, άμεσα βλέπουμε ότι για κάθε $k, n \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$\sigma_{\leqslant k} \circ \Sigma^n \cong \Sigma^n \circ \sigma_{\leqslant k+1}$$

Παρατήρηση 6.2.14. Έστω $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(R)$. Τότε, οι λησμονικοί συναρτητές $\sigma_{\leqslant k}\colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{K}^-(R)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, σχηματίζουν μία ακολουθία μορφισμών συμπλόκων

$$\cdots \longrightarrow \sigma_{\leqslant k+1}(C^\bullet) \xrightarrow{\iota^{k+1}} \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \xrightarrow{\iota^{k}} \sigma_{\leqslant k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\iota^{n-1}} \cdots$$

όπου ο μορφισμός συμπλόκων $\iota^{k+1}\colon \sigma_{\leqslant k+1}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ αναπαριστάται με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^k \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r] & C^k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Παραθέτουμε μία πρόταση όσον αφορά τον παραπάνω μορφισμό συμπλόκων, η οποία θα είναι χρήσιμη στη συνέχεια.

Πρόταση 6.2.15. *Αν $C^\bullet$ είναι ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο από προβολικά R-πρότυπα, τότε ο κώνος του μορφισμού συμπλόκων $\iota^{k+1}\colon \sigma_{\leqslant k+1}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ είναι ένα τέλειο σύμπλοκο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον φυσικό μορφισμό $\iota^{k+1}\colon \sigma_{\leqslant k+1}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ ο οποίος αναπαριστάται με το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant k+1}(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^k \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r] & C^k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ενώ ο κώνος του είναι το σύμπλοκο:

$$C^\bullet_{\iota^{k+1}}\colon \cdots \longrightarrow C^{k-1} \oplus C^{k-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\partial_C^{k-1} & 0 \\ 1 & \partial_C^{k-2} \end{pmatrix}} C^k \oplus C^{k-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\partial_C^{k} & 0 \\ 1 & \partial_C^{k-1} \end{pmatrix}} C^{k+1} \oplus C^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Εφόσον ο μορφισμός $\iota^{k+1}\colon \sigma_{\leqslant k+1}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ είναι ημι-ισομορφισμός σε κάθε θέση εκτός από τους βαθμούς k και $k+1$, η ομολογία του συμπλόκου $C^\bullet_{\iota^{k+1}}$ είναι μηδενική σε κάθε θέση εκτός από την θέση k. Λαμβάνοντας αυτό υπόψιν, εύκολα βλέπουμε ότι ο παρακάτω μορφισμός συμπλόκων είναι ένας ημι-ισομορφισμός:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet_{\iota^{k+1}}\colon \cdots \arrow[r] & C^{k-1} \oplus C^{k-2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ 1 & \partial \end{pmatrix}"] \arrow[d] & C^k \oplus C^{k-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ 1 & \partial \end{pmatrix}"] \arrow[d] & C^{k+1} \oplus C^k \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & -\partial \end{pmatrix}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & C^{k+1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Συνεπώς ο κώνος του παραπάνω μορφισμού συμπλόκων είναι ισόμορφος στην παραγόμενη κατηγορία με ένα σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα, άρα είναι ένα τέλειο σύμπλοκο. ∎

Λήμμα 6.2.16. *Έστω $C^\bullet$ ένα ακυκλικό σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, το σύμπλοκο $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ έχει φραγμένη συνομολογία.*

Απόδειξη. Εφόσον το σύμπλοκο $C^\bullet$ είναι ακυκλικό, το $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ έχει μη μηδενική συνομολογία μόνο στον βαθμό k, επομένως το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. ∎

Σχόλιο 6.2.17. Το παραπάνω λήμμα επιτρέπει να θεωρήσουμε την εικόνα ενός ακυκλικού συμπλόκου από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα, μέσω του συναρτητή $\sigma_{\leqslant k}$, ως ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$.

Στο λήμμα που ακολουθεί, συμβολίζουμε πάλι με $\Omega_k(C^\bullet)$ το αντίστοιχο stalk complex του προτύπου $\Omega_k(C^\bullet)$ θεωρούμενο ως ένα αντικείμενο της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}^b(R)$.

Λήμμα 6.2.18. *Έστω $C^\bullet, D^\bullet$ δύο ακυκλικά σύμπλοκα από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων*
$$\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow \Sigma^{-k}\Omega_{-k}(C^\bullet)$$
η κλάση του οποίου είναι ένας ισομορφισμός στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(R)$ ή ισοδύναμα, το σύμπλοκο $\Sigma^k\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ αποτελεί μία προβολική ανάλυση του $\Omega_{-k}(C^\bullet)$.

2. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$ ο φυσικός μορφισμός $\sigma_{\leqslant n}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant m}(C^\bullet)$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή παραγόμενη κατηγορία $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$.*

3. *Αν $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων ο οποίος είναι 0-ομοτοπικός, τότε όλοι οι επαγόμενοι μορφισμοί $\underline{\sigma_{\leqslant k} f}\colon \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(D^\bullet)$ στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ είναι ίσοι με τον μηδενικό μορφισμό.*

Απόδειξη. Έστω $C^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$:

$$C^\bullet\colon\ \cdots \longrightarrow C^{k-1} \xrightarrow{\partial_C^{k-1}} C^k \xrightarrow{\partial_C^k} C^{-k+1} \longrightarrow \cdots$$

Τότε το σύμπλοκο $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ αναπαριστάται ως:

$$\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)\colon\ \cdots \longrightarrow C^{k-1} \xrightarrow{\partial_C^{k-1}} C^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Από την άλλη πλευρά, από την κατασκευή του συναρτητή $\Omega_n\colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ έχουμε:

$$\Omega_k(C^\bullet) = \mathsf{Coker}(-\partial_C^{-k-1}\colon C^{-k-1} \longrightarrow C^{-k})$$

Θεωρώντας το αντίστοιχο stalk complex του R-προτύπου $\Omega_k(C^\bullet)$ και εφαρμόζοντας τον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων Σ^{-k}, αποκτούμε έναν μορφισμό συμπλόκων $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow \Sigma^{-k}\Omega_{-k}(C^\bullet)$ ο οποίος αναπαριστάται με το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & C^{k-2} \arrow[r] \arrow[d] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^k \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\Sigma^{-k}\Omega_{-k}(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Omega_{-k}(C^\bullet) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

όπου $\alpha\colon C^k \longrightarrow \Omega_{-k}(C^\bullet)$ είναι ο επιμορφισμός στον συνπυρήνα. Άμεσα βλέπουμε ότι ο παραπάνω μορφισμός συμπλόκων είναι ένας ημι-ισομορφισμός και συνεπώς η εικόνα του στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(R)$ είναι ένας ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή μεταφοράς Σ^k στον παραπάνω μορφισμό συμπλόκων, προκύπτει ότι το σύμπλοκο $\Sigma^k\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ αποτελεί μία προβολική ανάλυση του $\Omega_{-k}(C^\bullet)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού 1.

Η απόδειξη του ισχυρισμού 2 προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 6.2.15, καθώς για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, ο κώνος του μορφισμού $\sigma_{\leqslant k+1}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ αποτελεί ένα τέλειο σύμπλοκο, δηλαδή το μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Έτσι, ο μορφισμός αυτός είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ (βλ. Λήμμα 3.3.5). Το ζητούμενο έπεται με επαγωγή.

Έστω τώρα $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων ο οποίος είναι 0-ομοτοπικός. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα μορφισμών συμπλόκων:

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{\leqslant k}(f)"'] & \Sigma^{-k}\Omega_{-k}(C^\bullet) \arrow[d, "\Sigma^{-k}\Omega_{-k}(f)"] \\
\sigma_{\leqslant k}(D^\bullet) \arrow[r] & \Sigma^{-k}\Omega_{-k}(D^\bullet)
\end{tikzcd} \tag{6.4}$$

Λόγω του ισχυρισμού 1, οι οριζόντιοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ και όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αν ο f είναι ένας μορφισμός ο οποίος είναι 0-ομοτοπικός, ο μορφισμός $\Omega_{-k}(f)$ αναλύεται μέσω ενός προβολικού προτύπου. Κατά συνέπεια, η κλάση του μορφισμού $\Sigma^{-k}\Omega_{-k}(f)$ είναι ο μηδενικός μορφισμός στην ευσταθή παραγόμενη κατηγορία $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Επομένως και η κλάση του μορφισμού $\sigma_{\leqslant k}(f)$ είναι επίσης ο μηδενικός μορφισμός στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. ∎

Οι παραπάνω προτάσεις οδηγούν στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 6.2.19. *Χρησιμοποιώντας την ακολουθία μορφισμών συμπλόκων της Παρατήρησης 6.2.14, βλέπουμε ότι οι βλησμονικοί συναρτητές truncation $\{\sigma_{\leqslant k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ορίζουν μία ακολουθία συναρτητών*

$$\cdots \longrightarrow \sigma_{\leqslant k+1} \xrightarrow{\iota^{k+1}} \sigma_{\leqslant k} \xrightarrow{\iota^{k}} \sigma_{\leqslant k-1} \xrightarrow{\iota^{k-1}} \cdots$$

από την $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ των οποίων οι μορφισμοί μετάβασης είναι όλοι ισομορφισμοί.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας τους ισχυρισμούς του Λήμματος 6.2.18. Ο ισχυρισμός 1 εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός συναρτητή $\sigma_{\leqslant k}\colon \mathsf{APC(R)} \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Λόγω του ισχυρισμού 3 του ιδίου λήμματος, υπάρχει ένας επαγόμενος συναρτητής $\underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ για τον οποίο θα διατηρηθεί ο ίδιος συμβολισμός. Τέλος, από το Λήμμα 6.2.18 ο μορφισμός $\iota_k\colon \sigma_{\leqslant k} \longrightarrow \sigma_{\leqslant k-1}$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. ∎

Οι συναρτητές $\sigma_{\leqslant n}, \sigma_{\leqslant m}\colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ είναι προφανώς φυσικά ισοδύναμοι για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$.

Σχόλιο 6.2.20. Εφόσον οι συναρτητές στο παραπάνω λήμμα αποτελούν ένα κατευθυνόμενο σύστημα, το αντίστροφο όριο (inverse limit) αυτών

$$\sigma_{\leqslant} = \varprojlim_{k} \sigma_{\leqslant k}$$

υπάρχει και είναι ένας ακριβής συναρτητής τριγωνισμένων κατηγοριών

$$\sigma_{\leqslant}\colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

Για τον ορισμό και ορισμένες βασικές ιδιότητες του αντίστροφου ορίου βλ. [22, §1.5].

Παρατήρηση 6.2.21. Θέλοντας να εξετάσουμε λεπτομερέστερα την συμπεριφορά του συναρτητή

$$\sigma_{\leqslant k} \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

θεωρούμε έναν μορφισμό συμπλόκων $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην ομοτοπική κατηγορία $\underline{\mathsf{APC}}(R)$. Για λόγους σαφήνειας, συμβολίζουμε με $\sigma^*_{\leqslant k}(-) \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{APC}}(R)$ τον συναρτητή truncation ο οποίος απεικονίζει τον f στην κλάση ομοτοπίας του μορφισμού συμπλόκων

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{k-1}"] & C^k \arrow[r] \arrow[d, "f^k"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{k-1} \arrow[r] & D^k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Εξ ορισμού, ο μορφισμός $\sigma_{\leqslant k}(f) \colon \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(D^\bullet)$ θα είναι η εικόνα του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd}
& \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \arrow[dl, "1"', "\sim"] \arrow[dr, "\sigma^*_{\leqslant k}(f)"] & \\
\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) & & \sigma_{\leqslant k}(D^\bullet)
\end{tikzcd}$$

της $\mathsf{D}^b(R)$ στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ μέσω του συναρτητή στο πηλίκο $\mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$.

6.3 Το Θεώρημα του Buchweitz

Κύριος στόχος στην παρούσα ενότητα είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη συναρτητών οι οποίοι αποτελούν ισοδυναμίες κατηγοριών και κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα κατηγοριών μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[rr, "\iota_R"] & & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \\
& \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[ul, "\Omega_0"] \arrow[ur, "\sigma_{\leqslant 0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Τα παρακάτω είναι βασισμένα στην εργασία του Buchweitz, βλ. [17, Theorem 4.4.1.] ενώ έχουν χρησιμοποιηθεί πληροφορίες και από το [51].

Αρχικά, σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{Z}$ και θεωρούμε τον συναρτητή $\Omega_n \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ (βλ. Σχόλιο 6.2.10). Υπενθυμίζουμε ότι ο δακτύλιος R είναι (ισχυρά) Gorenstein, διαφορετικά οι ισχυρισμοί δεν είναι αληθείς.

Πρόταση 6.3.1. *Η εικόνα κάθε στοιχείου της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ μέσω του συναρτητή $\Omega_n \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ είναι ένα MCM πρότυπο.*

Έτσι, θεωρώντας την πλήρη υποκατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ της $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ υπάρχει ένας επαγόμενος συναρτητής

$$\Omega_n \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$$

στην πλήρη υποκατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ της $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$. για τον οποίο διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό.

Απόδειξη. Έστω $P^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$, δηλαδή ένα ακυκλικό σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα.

$$P^\bullet \colon \ \cdots \longrightarrow P^{-n-1} \xrightarrow{\partial_P^{-n+1}} P^{-n} \xrightarrow{\partial_P^{-n}} P^{-n+1} \longrightarrow \cdots$$

Τότε, εξ ορισμού, $\Omega_n(P^\bullet) = \mathsf{Coker}\partial_P^{-n-1}$. Εφόσον το σύμπλοκο $P^\bullet$ είναι ακυκλικό, λόγω ακρίβειας έχουμε: $\mathsf{Coker}\partial_P^{-n-1} = \mathsf{Im}\partial_P^{-n} = \mathsf{Ker}\partial_P^{-n+1}$. Συνεπώς, η παρακάτω ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega_n(P^\bullet) \longrightarrow P^{-n+1} \longrightarrow P^{-n+2} \longrightarrow \cdots$$

αποτελεί μία προβολική συν-ανάλυση του $\Omega_n(P^\bullet)$. Από την Πρόταση 5.2.18, συμπεραίνουμε ότι το $\Omega_n(P^\bullet)$ είναι MCM. ■

Το ακόλουθο λήμμα θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια:

Λήμμα 6.3.2. *Έστω M και N δύο maximal Cohen-Macaulay πρότυπα και $f\colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός αυτών. Τότε, υπάρχουν πλήρεις αναλύσεις $C^\bullet$ και $D^\bullet$ των M και N αντίστοιχα, οι οποίες επεκτείνουν τον μορφισμό f σε έναν μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & C^{-1} \arrow[r] \arrow[dd, "f^{-1}"] & C^0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f^0"] & & C^1 \arrow[r] \arrow[dd, "f^1"] & C^2 \arrow[r] \arrow[dd, "f^2"] & \cdots \\
& & & M \arrow[ur] \arrow[dd, "f"] & & & \\
D^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & D^{-1} \arrow[r] & D^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & D^1 \arrow[r] & D^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & N \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Ιδιαίτερα, ο μορφισμός συμπλόκων $f^\bullet$ είναι μοναδικός με ακρίβεια ομοτοπίας.

Απόδειξη. Θεωρώντας αντίστοιχες προβολικές αναλύσεις $P_M^\bullet \longrightarrow M$ και $P_N^\bullet \longrightarrow N$ γνωρίζουμε (βλ. [14, Lemma 11.2.3] ότι ο ομομορφισμός f επεκτείνεται σε έναν μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet\colon P_M^\bullet \longrightarrow P_N^\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_M^{-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^{-1}"] & P_M^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_N^{-1} \arrow[r] & P_N^0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Η επέκταση αυτή είναι μοναδική με ακρίβεια ομοτοπίας (βλ. [14, Lemma 11.2.4.]). Παρόμοια θεωρούμε τα δυϊκά πρότυπα M^* και N^* και αντίστοιχες προβολικές τους αναλύσεις $P_{M*}^\bullet \longrightarrow M^*$ και $P_{N*}^\bullet \longrightarrow N^*$. Με το ίδιο επιχείρημα, ο ομομορφισμός $f^*\colon M^* \longrightarrow N^*$ επεκτείνεται σε έναν μορφισμό συμπλόκων $(f^*)^\bullet\colon P_{M*}^\bullet \longrightarrow P_{N*}^\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{M*}^{-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "(f^*)^{-1}"] & P_{M*}^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "(f^*)^0"] & M^* \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{N*}^{-1} \arrow[r] & P_{N*}^0 \arrow[r] & N^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ο οποίος είναι επίσης μοναδικός με ακρίβεια ομοτοπίας. Όπως έχουμε δείξει, δυϊκοποιώντας άλλη μία φορά αποκτούμε προβολικές συν-αναλύσεις $M^{**} \longrightarrow (P_{M*}^\bullet)^*$ και $N^{**} \longrightarrow (P_{N*}^\bullet)^*$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] \arrow[d, "(f^*)^*"] & (P_{M*}^0)^* \arrow[r] \arrow[d, "((f^*)^0)^*"] & (P_{M*}^{-1})^* \arrow[r] \arrow[d, "((f^*)^{-1})^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N^{**} \arrow[r] & (P_{N*}^0)^* \arrow[r] & (P_{N*}^{-1})^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Εφόσον τα M και N είναι MCM, από το Λήμμα 5.2.16 θα είναι ανακλαστικά, δηλαδή $M \cong M^{**}$ και $N \cong N^{**}$. Με αυτόν τον τρόπο, αποκτούμε πλήρεις αναλύσεις $C^\bullet$ και $D^\bullet$ των M και N αντίστοιχα, καθώς και έναν μορφισμό μεταξύ αυτών:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & P^{-1}_M \arrow[r] \arrow[dd, "f^{-1}"] & P^0_M \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f^0"] & & (P^0_{M^*})^* \arrow[r] \arrow[dd, "((f^*)^0)^*"] & (P^{-1}_{M^*})^* \arrow[r] \arrow[dd, "((f^*)^{-1})^*"] & \cdots \\
& & & M \arrow[ur] \arrow[dd, "f"] & & & \\
D^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & P^{-1}_N \arrow[r] & P^0_N \arrow[rr] \arrow[dr] & & (P^0_{N^*})^* \arrow[r] & (P^{-1}_{N^*})^* \arrow[r] & \cdots \\
& & & N \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

■

Θεώρημα 6.3.3. *Ο συναρτητής*

$$\Omega_n \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$$

αποτελεί μία ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο Ω_n είναι πλήρης και πιστός, και επί με ακρίβεια ισομορφισμού (essentially surjective) στα αντικείμενα.

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι ο Ω_n είναι επί. Έστω M ένα MCM πρότυπο και $P^\bullet \longrightarrow M$ μία προβολική ανάλυση του M. Εφόσον το M είναι MCM, από την Πρόταση 5.2.18, έχει μία προβολική συνανάλυση $M \longrightarrow Q^\bullet$. Αποκτούμε έτσι μία πλήρη ανάλυση $C^\bullet$ του M η οποία αναπαριστάται με ένα διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "\partial_P^{-1}"] & P^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q^0 \arrow[r, "\partial_Q^0"] & Q^1 \arrow[r] & \cdots \\
& & & M \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

και στην οποία το M αποτελεί τον συνπυρήνα του μορφισμού $\partial_P^{-1} \colon P^{-1} \longrightarrow P^0$, δηλαδή $\Omega_0(C^\bullet) = M$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων Σ^n αποκτούμε ένα αντικείμενο $\Sigma^n C^\bullet$ της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ για το οποίο, (βλ. Σχόλιο 6.2.14) ισχύει:

$$\Omega_n(\Sigma^n C^\bullet) \cong \Omega_{n-n}(C^\bullet) = \Omega_0(C^\bullet) = M$$

Συνεπώς ο Ω_n είναι επί με ακρίβεια ισομορφισμού στα αντικείμενα.

Έστω τώρα M και N δύο αντικείμενα της $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ και $f \colon M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός προτύπων. Εφόσον ο Ω_k είναι επί με ακρίβεια ισομορφισμού στα αντικείμενα, υπάρχουν σύμπλοκα $C^\bullet$ και $D^\bullet$ στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$, έτσι ώστε $M = \Omega_k(C^\bullet)$ και $N = \Omega_k(D^\bullet)$. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 6.3.2 , ο ομομορφισμός προτύπων $f \colon \Omega_k(C^\bullet) \longrightarrow \Omega_k(D^\bullet)$ μπορεί να επεκταθεί σε έναν μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ ο οποίος είναι μοναδικός με ακρίβεια ομοτοπίας. Τότε, εκ κατασκευής $\Omega_k(f^\bullet) = f$ και ο Ω_k είναι πλήρης και πιστός. ■

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής

$$\sigma_{\leqslant k} \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

του Λήμματος 6.2.19 είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 6.3.4. *Για κάθε άνω φραγμένο σύμπλοκο R-προτύπων $C^\bullet$, υπάρχει ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο προβολικών $P^\bullet$ και ένας ημι-ισομορφισμός $f\colon P^\bullet \longrightarrow C^\bullet$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 4.9.13. Για μία πιο λεπτομερή απόδειξη αυτής της συγκεκριμένης πρότασης βλ. [51, Lemma 4.4.] ■

Πρόταση 6.3.5. *Ο συναρτητής*

$$\sigma_{\leqslant k}\colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

είναι επί με ακρίβεια ισομορφισμού (essentially surjective) για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Εφόσον οι συναρτητές $\sigma_{\leqslant n}$ και $\sigma_{\leqslant m}$είναι προφανώς φυσικά ισοδύναμοι για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο μόνο για ένα τυχόν $k \in \mathbb{Z}$. Έστω $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Το $C^\bullet$ έχει εξ ορισμού φραγμένη συνομολογία, είναι δηλαδή ισόμορφο στην παραγόμενη κατηγορία με ένα φραγμένο σύμπλοκο. Από το Λήμμα 6.3.4, έτσι, προκύπτει ότι το $C^\bullet$ είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ με ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο από προβολικά R-πρότυπα. Εφόσον θέλουμε να δείξουμε ότι ο $\sigma_{\leqslant} k$ είναι επί με ακρίβεια ισομορφισμού, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι το σύμπλοκο $C^\bullet$ είναι ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο από προβολικά R-πρότυπα. Εφόσον το $C^\bullet$ έχει φραγμένη συνομολογία, θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $n_0 = \min\{n\colon \mathsf{H}^n(C^\bullet) \neq 0\}$. Εφόσον ο δακτύλιος R είναι Gorenstein, χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με την Πρόταση 5.2.13, το πρότυπο $\mathsf{Coker}\partial_C^{k-1} = \mathsf{Im}\partial_C^k$ είναι MCM για $k \leqslant n_0 - \mathsf{vdim}R$, ενώ ο ακόλουθος μορφισμός συμπλόκων

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathsf{Coker}\partial_C^{k-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι προφανώς ένας ημι-ισομορφισμός, δηλαδή ένας ισομορφισμός στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 6.2.15, προκύπτει ότι το $C^\bullet$ είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ με το $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ το οποίο είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Έτσι, το $\Sigma^k\sigma_{\leqslant k}C^\bullet$ αποτελεί μία προβολική ανάλυση του MCM προτύπου $\mathsf{Coker}\partial_C^{k-1}$ η οποία μπορεί, όπως έχουμε δει, μπορεί να επεκταθεί σε ένα ακυκλικό σύμπλοκο προβολικών, το οποίο συμβολίζουμε με $C_1^\bullet$. Επομένως, εκ κατασκευής, $C_1^\bullet \in \underline{\mathsf{APC}}(R)$ και $\sigma_{\leqslant 0}(C_1^\bullet) = \Sigma^k\sigma_{\leqslant k}C^\bullet \cong \mathsf{Coker}\partial_C^{k-1} \cong C^\bullet$. ■

Για να δείξουμε ότι ο $\sigma_{\leqslant k}$ είναι πλήρης και πιστός θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο κριτήριο του Verdier του οποίου η απόδειξη θα παραλειφθεί. Για περισσότερα βλ. [19, §2, 5.3.].

Λήμμα 6.3.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, $\mathcal{D}$ μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{D}$ ο συναρτητής τοπικοποίησης. Αν X είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$, τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{C}$, η κανονική απεικόνιση*

$$Q\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}(Q(X), Q(Y))$$

   είναι ένας ισομορφισμός.

2. *Κάθε μορφισμός από το X σε ένα αντικείμενο της $\mathcal{D}$ είναι ο μηδενικός.*

Πρόταση 6.3.7. *Ο συναρτητής*

$$\sigma_{\leqslant k}\colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

είναι πλήρης και πιστός για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη πρόταση, εφόσον οι συναρτητές $\sigma_{\leqslant n}$ και $\sigma_{\leqslant m}$ είναι φυσικά ισοδύναμοι για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο μόνο για ένα τυχόν $k \in \mathbb{Z}$. Ο $\sigma_{\leqslant k}$ είναι πλήρης και πιστός αν-ν για κάθε $C^\bullet, D^\bullet \in \underline{\mathsf{APC}}(R)$ η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{APC}}(R)}(C^\bullet, D^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{D}^b(R)}}(\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet), \sigma_{\leqslant k}(D^\bullet))$$

είναι 1-1 και επί. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Verdier, αρκεί να δείξουμε ότι για ένα τέλειο σύμπλοκο $X^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(R)$ και ένα αντικείμενο $C^\bullet$ στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ υπάρχει ένας ακέραιος k έτσι ώστε όλοι οι μορφισμοί: $\sigma_{\leqslant k}C^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(R)$ είναι ίσοι με τον μηδενικό μορφισμό. Εφόσον το $\sigma_{\leqslant k}C^\bullet$ είναι ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο προβολικών προτύπων, οι παραπάνω μορφισμοί στην $\mathsf{D}^b(R)$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις κλάσεις ομοτοπίας μορφισμών συμπλόκων και έτσι αρκεί να δείξουμε ότι οποιοσδήποτε τέτοιος μορφισμός είναι 0-ομοτοπικός.

Εξ ορισμού, ένα σύμπλοκο είναι τέλειο, αν-ν είναι ισόμορφο στην παραγόμενη κατηγορία με ένα φραγμένο σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά. Συνεπώς, είναι αρκετό να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό στην περίπτωση που $X^\bullet = \Sigma^{-i}P$ όπου το P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο και i ένας ακέραιος, καθώς αυτά τα αντικείμενα παράγουν στην $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$ με ακρίβεια ισομορφισμού οποιοδήποτε τέλειο σύμπλοκο, σχηματίζοντας κώνους μορφισμών.

Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρούμε ένα $k > i$, και έστω $f^\bullet\colon \sigma_{\leqslant k}C^\bullet \longrightarrow \Sigma^{-i}P$ ένας μορφισμός συμπλόκων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r, "\partial_C^{i-1}"] \arrow[d] & C^i \arrow[r, "\partial_C^i"] \arrow[d, "f^i"] & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ο ομομορφισμός R-προτύπων f^i αναλύεται έτσι απαραίτητα μέσω του $\mathsf{Coker}\partial_C^{i-1} = \Omega_{-i}(C^\bullet)$ και έστω
$g\colon \Omega_{-i}(C^\bullet) \longrightarrow P$ η επαγόμενη απεικόνιση.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r, "\partial_C^{i-1}"] \arrow[dd] & C^i \arrow[rr, "\partial_C^i"] \arrow[dd, "f^i"] \arrow[dr, "\mathsf{coker}\partial_C^{i-1}"] & & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
& & & \Omega_{-i}(C^\bullet) \arrow[ur] \arrow[dl, dashed, "g"] & & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P \arrow[rr] & & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Μένει να δείξουμε ότι ο μορφισμός g μπορεί να αναλυθεί μέσω της έγκλεισης του

$$\mathsf{Coker}\partial_C^{i-1} = \Omega_{-i}(C^\bullet) \longrightarrow C^{i+1}$$

Θεωρούμε την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega_{-i}(C^\bullet) \longrightarrow C^{i+1} \longrightarrow \Omega_{-i-1}(C^\bullet) \longrightarrow 0$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}(-, P)$, εφόσον το P είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο και το $\Omega_{-i-1}(C^\bullet)$ για κατάλληλο i είναι maximal Cohen-Macaulay (βλ. πχ. Πρόταση 5.2.13), προκύπτει ότι

$$\mathsf{Ext}^1_R(\Omega_{-i-1}(C^\bullet), P) = 0$$

Έτσι, από την μεγάλη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}(\Omega_{-i-1}(C^\bullet), P) \longrightarrow \mathsf{Hom}(C^{i+1}, P) \longrightarrow \mathsf{Hom}(\Omega_{-i}(C^\bullet), P) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_R(\Omega_{-i-1}(C^\bullet), P) \longrightarrow \cdots$$

έπεται το ζητούμενο. ■

Τα παραπάνω συμπεράσματα συγκεντρώνονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.8. *Ο συναρτητής*

$$\sigma_{\leqslant k} \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

είναι ισοδυναμία κατηγοριών για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 6.3.5 και 6.3.7. ■

Τέλος, θεωρούμε τον συναρτητή

$$\iota_R \colon \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

ο οποίος, (βλ. Λήμμα 6.1.19) απεικονίζει κάθε πρότυπο M στο αντίστοιχο stalk complex του

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

θεωρούμενο σαν ένα αντικείμενο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Ο περιορισμός του ι_R στην πλήρη υποκατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ της $\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$ είναι ένας συναρτητής

$$\iota_R \colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

για τον οποίο θα χρησιμοποιείται ο ίδιος συμβολισμός.

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου:

Θεώρημα 6.3.9. *Έστω R ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, ο οποίος έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση σαν ένα αριστερό και δεξιό R-πρότυπο. Θεωρούμε τους ακόλουθους συναρτητές:*

- *Τον συναρτητή συζυγίας*
$$\Omega_0 \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$$
- *Τον συναρτητή truncation*
$$\sigma_{\leqslant 0} \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$
- *Τον συναρτητή έγκλεισης*
$$\iota_R \colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

Κάθε ένας από τους παραπάνω συναρτητές αποτελεί ισοδυναμία κατηγοριών έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα συναρτητών να είναι μεταθετικό με ακρίβεια ισοδυναμίας συναρτητών.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[rr, "\iota_R"] & & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \\
& \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[ul, "\Omega_0"] \arrow[ur, "\sigma_{\leqslant 0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει ότι οι συναρτητές Ω_0 και $\sigma_{\leqslant 0}$ αποτελούν ισοδυναμίες κατηγοριών, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μία ισοδυναμία συναρτητών $\iota_R \circ \Omega_0 \cong \sigma_{\leqslant 0}$.

Έστω $C^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$. Τότε, όπως έχουμε δει, ο ακόλουθος μορφισμός συμπλόκων

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant 0}(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & C^{-2} \arrow[r, "\partial_C^{-2}"] \arrow[d] & C^{-1} \arrow[r, "\partial_C^{-1}"] \arrow[d] & C^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
i_R \circ \Omega_0(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathsf{Coker}\partial_C^{-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ημι-ισομορφισμός, δηλαδή ένας ισομορφισμός στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$.

Έτσι, από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant 0}(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{\leqslant 0}(f)"'] & \iota_R \circ \Omega_0(C^\bullet) \arrow[d, "\iota_R \circ \Omega_0(f)"] \\
\sigma_{\leqslant 0}(D^\bullet) \arrow[r] & \iota_R \circ \Omega_0(D^\bullet)
\end{tikzcd}$$

για το οποίο βλ. επίσης το διάγραμμα (6.4) του Λήμματος 6.2.18, προκύπτει ένας φυσικός ισομορφισμός συναρτητών $\sigma_{\leqslant 0} \xrightarrow{\sim} \iota_R \circ \Omega_0$ στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Εφόσον οι συναρτητές Ω_0 και $\sigma_{\leqslant 0}$ αποτελούν ισοδυναμία κατηγοριών, συμπεραίνουμε ότι και ο ι_R είναι επίσης ισοδυναμία κατηγοριών. ■

Παρατήρηση 6.3.10. Συνοψίζοντας τα παραπάνω, αποκτούμε ένα διάγραμμα κατηγοριών και συναρτητών το οποίο είναι μεταθετικό με ακρίβεια φυσικού ισομορφισμού κατηγοριών ενώ οι οριζόντιες γραμμές του αποτελούν «ακριβείς ακολουθίες» από κατηγορίες.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & \mathsf{P}(R) \arrow[r] \arrow[dl, equal] & \mathsf{MCM}(R) \arrow[r] \arrow[dl] & \underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd, bend left, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{P}(R) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathsf{mod}\text{-}R \arrow[r] \arrow[dr] & \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \arrow[r] \arrow[dr] & 0 & \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& 0 \arrow[r] & \mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R) \arrow[r] & \mathsf{D}^b(R) \arrow[r] & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 6.3.11. Τα επιχειρήματα που έχουν παρουσιαστεί στην παρούσα ενότητα οδηγούν στην εύρεση αντίστροφων στην παραγόμενη κατηγορία, δηλαδή quasi-inverses, των συναρτητών Ω_0 ή ι_R.

Ένας αντίστροφος του συναρτητή Ω_0 μπορεί να κατασκευασθεί με την εξής διαδικασία. Έστω M ένα maximal Cohen-Macaulay R-πρότυπο και $p\colon P(M) \longrightarrow M$ μία προβολική του ανάλυση. Έστω, επίσης $q\colon P(M^*) \longrightarrow M^*$ μία προβολική ανάλυση του δυϊκού προτύπου M^*. Όπως έχουμε ήδη δει, μία πλήρης ανάλυση του M, η οποία θα συμβολίζεται με $\mathsf{CR}(M)$, αποκτάται ως εξής:

Θεωρούμε τον μορφισμό συμπλόκων d_M ο οποίος ορίζεται ως η σύνθεση των μορφισμών:

$$d_M\colon \qquad P(M) \xrightarrow{p} M \xrightarrow{\cong} M^{**} \xrightarrow{q^*} P(M^*)^*$$

και θέτουμε:

$$\mathsf{CR}(M) = \Sigma^{-1} C_{d_M}$$

όπου C_{d_M} είναι ο κώνος του παραπάνω μορφισμού. Τότε, προκύπτει η ύπαρξη ενός συναρτητή

$$\Omega_0' \colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{APC}}(R)$$

ο οποίος απεικονίζει την κλάση κάθε MCM προτύπου M στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$, στην εικόνα του συμπλόκου $\mathsf{CR}(M)$ στην ομοτοπική κατηγορία $\underline{\mathsf{APC}}(R)$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο Ω_0' είναι καλώς ορισμένος και εκ κατασκευής $\Omega_0 \circ \Omega_0' \cong \mathsf{Id}_{\underline{\mathsf{MCM}}(R)}$ και $\Omega_0' \circ \Omega_0 \cong \mathsf{Id}_{\underline{\mathsf{APC}}(R)}$, δηλαδή ο Ω_0' είναι ο αντίστροφος του Ω_0.

Από την άλλη πλευρά, ένας αντίστροφος του ι_R βρίσκεται ως εξής:

- Επιλέγουμε για κάθε σύμπλοκο $C^\bullet$ στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ μία προβολική ανάλυση $P^\bullet \longrightarrow C^\bullet$.
- Εφαρμόζουμε τον συναρτητή truncation $\sigma_{\leqslant k}$ για κάποιο

  $$k \leqslant \min\{i \colon \mathsf{H}^i(C^\bullet) = \mathsf{H}^i(P^\bullet) \neq 0\} - \mathsf{vdim}R$$

  και αποκτούμε ένα σύμπλοκο $\sigma_{\leqslant k}P^\bullet$ για το οποίο όπως έχουμε δει, το πρότυπο $\Omega_k\sigma_{\leqslant k}P^\bullet = \Omega_k P^\bullet$ είναι MCM.
- Επεκτείνουμε το σύμπλοκο $\sigma_{\leqslant k}P^\bullet$ σε ένα ακυκλικό σύμπλοκο $(\sigma_{\leqslant k}P^\bullet)'$ από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα.
- Τέλος, θεωρούμε το $\Omega_0(\sigma_{\leqslant k}P^\bullet)'$, το 0-οστό πρότυπο συζυγίας αυτής της επέκτασης. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να οριστεί ένας συναρτητής

  $$\iota_R' \colon \underline{\mathsf{D}^b(R)} \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$$

  ο οποίος προκύπτει ότι είναι καλώς ορισμένος και για κάθε αντικείμενο $C^\bullet$ της $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$:

  $$\iota_R'(C^\bullet) = \Omega_0(\sigma_{\leqslant k}P^\bullet)'$$

  Τότε, εκ κατασκευής $\iota_R \circ \iota_R' \cong 1_{\underline{\mathsf{D}^b(R)}}$ και $\iota_R' \circ \iota_R \cong 1_{\underline{\mathsf{mod}}\text{-}R}$. Η παραπάνω διαδικασία αναπαριστάται με το παρακάτω διάγραμμα:

  $$C^\bullet \longleftarrow P^\bullet \xrightarrow{\sigma_{\leqslant k}} \sigma_{\leqslant k}P^\bullet \xleftarrow{\sigma_{\leqslant k}} (\sigma_{\leqslant k}P^\bullet)' \xrightarrow{\Omega_0} \iota_R^{-1}(C^\bullet)$$

Σχόλιο 6.3.12. Προφανώς, η εύρεση ενός αντιπροσώπου του $\iota_R^{-1}(C^\bullet)$ με αυτόν τον τρόπο δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην πράξη. Στην επόμενη ενότητα θα δοθεί μία πιο χρήσιμη κατασκευή στην περίπτωση που το σύμπλοκο $C^\bullet$ είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ με ένα R-πρότυπο, χρησιμοποιώντας έναν αριστερά συζυγή της εμβάπτισης $\underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R$.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα θεωρώντας το μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών του Θεωρήματος 6.3.9

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[rr, "\iota_R"] & & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \\
& \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[ul, "\Omega_0"] \arrow[ur, "\sigma_{\leqslant 0}"'] &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο όλοι συναρτητές αποτελούν ισοδυναμίες κατηγοριών. Όπως γνωρίζουμε, η $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ ως μία ομοτοπική κατηγορία συμπλόκων και η $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ ως παραγόμενη κατηγορία, είναι τριγωνισμένες κατηγορίες. Έτσι, ένα εύλογο ερώτημα που δημιουργείται είναι αν οι συναρτητές στο παραπάνω διάγραμμα τριγωνισμένων κατηγοριών διατηρούν τις αντίστοιχες τριγωνικές δομές της κάθε κατηγορίας, αν αποτελούν δηλαδή ακριβείς ισοδυναμίες τριγωνισμένων κατηγοριών. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική (βλ. [17, Theorem 4.4.1.(3)]) και θα προκύψει από τις ακόλουθες προτάσεις.

Αρχικά, περιγράφουμε εν συντομία τα διακεκριμένα τρίγωνα των κατηγοριών $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ και $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$, όπως αυτά προκύπτουν από τον φυσικό τριγωνισμό τους.

Από τον Ορισμό 4.5.8 βλέπουμε ότι ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ C^\bullet \arrow[rr] & & D^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ είναι διακεκριμένο αν είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ με την εικόνα ενός τυπικού τριγώνου

$$\begin{tikzcd} & C_f^\bullet \arrow[dl, "p_f"', "{[1]}"] & \\ C_1^\bullet \arrow[rr, "f"] & & D_1^\bullet \arrow[ul, "i_f"'] \end{tikzcd}$$

της $\mathsf{APC}(R)$.

Από την άλλη πλευρά ένα διακεκριμένο τρίγωνο σε μία ομοτοπική κατηγορία μπορεί να θεωρηθεί ότι επάγεται από μία σύντομη ακριβή ακολουθία συμπλόκων, η οποία είναι διασπάσιμη, αν ξεχάσουμε τα διαφορικά, (βλ. [32, Chapter 1, Proposition 4.15]). Έτσι, ένα τρίγωνο στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ C^\bullet \arrow[rr] & & D^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι διακεκριμένο, αν είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ με την εικόνα ενός τριγώνου

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ C^\bullet \arrow[rr] & & D^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

όπου

$$0 \longrightarrow C_1^\bullet \longrightarrow D_1^\bullet \longrightarrow E_1^\bullet \longrightarrow 0$$

είναι μία διασπάσιμη κατά βαθμό ακολουθία συμπλόκων.

Παρόμοια, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.4.3, ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & E_1^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ C_1^\bullet \arrow[rr] & & D_1^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ είναι διακεκριμένο αν είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ με την εικόνα ενός διακεκριμένου τριγώνου της $\mathsf{K}(R)$ μέσω της σύνθεσης του συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{D}^b(R)$ με τον συναρτητή πηλίκο $\pi\colon \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$.

Πρόταση 6.3.13. *Ο συναρτητής*

$$\iota_R \colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

είναι μία ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει (βλ. Θεώρημα 6.3.9) ότι ο ι_R είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Με ακρίβεια ισομορφισμού, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ είναι της μορφής

$$\Omega_R \underline{N} \xrightarrow{\mathsf{ch}(g)} \underline{K} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{M} \xrightarrow{\underline{g}} \underline{N}$$

όπου

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία στην κατηγορία των MCM προτύπων.

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή ι_R αποκτούμε ένα τρίγωνο

$$\iota_R \circ \Omega_R \underline{N} \xrightarrow{\iota_R \mathsf{ch}(g)} \iota_R \underline{K} \xrightarrow{\iota_R \underline{f}} \iota_R \underline{M} \xrightarrow{\iota_R \underline{g}} \iota_R \underline{N} \tag{T_1}$$

στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Εφόσον ο συναρτητής ι_R στέλνει τον loop-space functor Ω_R στον αντίστροφο του συναρτητή μεταφοράς στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ (βλ. Λήμμα 6.1.19), έχουμε $\iota_R \circ \Omega_R \underline{N} \cong \Sigma \circ \iota_R \underline{N}$ και το τρίγωνο (T_1) είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ με το τρίγωνο

$$\Sigma \circ \iota_R \underline{N} \xrightarrow{\iota_R \mathsf{ch}(g)} \iota_R \underline{K} \xrightarrow{\iota_R \underline{f}} \iota_R \underline{M} \xrightarrow{\iota_R \underline{g}} \iota_R \underline{N} \tag{T_2}$$

Όμως από τον ορισμό του συναρτητή ι_R, η

$$\iota_R \underline{K} \xrightarrow{\iota_R \underline{f}} \iota_R \underline{M} \xrightarrow{\iota_R \underline{g}} \iota_R \underline{N}$$

αποτελεί την εικόνα μίας ακριβούς ακολουθίας από stalk complexes. Συνεπώς το (T_2) είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ και ο συναρτητής ι_R είναι ακριβής. ∎

Πρόταση 6.3.14. *Ο συναρτητής truncation*

$$\sigma_{\leqslant 0} \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

είναι μία ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει (βλ. Θεώρημα 6.3.9) ότι ο $\sigma_{\leqslant 0}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Μένει να δείξουμε ότι είναι και ακριβής. Με ακρίβεια ισομορφισμού, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\underline{C}^\bullet \longrightarrow \underline{D}^\bullet \longrightarrow \underline{E}^\bullet \longrightarrow \Sigma \underline{C}^\bullet \tag{T_1}$$

στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ αποτελεί την εικόνα μίας διασπάσιμης κατά βαθμό ακολουθίας συμπλόκων από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα:

$$0 \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow 0 \tag{6.5}$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\sigma_{\leqslant 0} \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ στο τρίγωνο (T_1) αποκτούμε ένα τρίγωνο

$$\sigma_{\leqslant 0}(\underline{C}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{D}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{E}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\Sigma \underline{C}^\bullet) \tag{T_2}$$

στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$. Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\sigma_{\leqslant 0} \circ \Sigma \cong \Sigma \circ \sigma_{\leqslant 1}$ του λησμονικού συναρτητή truncation και τα αντικείμενα $\sigma_{\leqslant 1}(C^\bullet)$ και $\sigma_{\leqslant 0}(C^\bullet)$ της $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ είναι ισόμορφα (βλ. 6.2.18). Έτσι, $\sigma_{\leqslant 0} \circ \Sigma \cong \Sigma \circ \sigma_{\leqslant 0}$ και το τρίγωνο (T_2) είναι ισόμορφο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ με το τρίγωνο

$$\sigma_{\leqslant 0}(\underline{C}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{D}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{E}^\bullet) \longrightarrow \Sigma\sigma_{\leqslant 0}(\underline{C}^\bullet) \tag{T_3}$$

Το τρίγωνο αυτό, όμως, είναι διακεκριμένο στην $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ καθώς αποτελεί εικόνα της ακριβούς ακολουθία συμπλόκων

$$0 \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(D^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(E^\bullet) \longrightarrow 0$$

η οποία προκύπτει από την (6.5) και είναι προφανώς επίσης διασπάσιμη σε κάθε βαθμό.

Ως αποτέλεσμα, ο συναρτητής

$$\sigma_{\leqslant 0} \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$$

είναι ακριβής. ∎

Πρόταση 6.3.15. *Ο συναρτητής συζυγίας*

$$\Omega_0 \colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$$

είναι μία ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει (βλ. Θεώρημα 6.3.9) ότι ο Ω_0 είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Με ακρίβεια ισομορφισμού μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ είναι της μορφής

$$\Sigma^{-1}\underline{E}^\bullet \longrightarrow \underline{C}^\bullet \longrightarrow \underline{D}^\bullet \longrightarrow \underline{E}^\bullet \tag{T_1}$$

όπου η

$$0 \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow 0 \tag{6.6}$$

είναι μία διασπάσιμη κατά βαθμό ακριβής ακολουθία συμπλόκων από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα.

Έχουμε ήδη δει (βλ. Λήμμα 6.2.12) ότι ο Ω_0 στέλνει τον αντίστροφο του συναρτητή μεταφοράς στην $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ στον loop-space functor Ω_R της $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ ο οποίος αποτελεί τον συναρτητή μεταφοράς (shift) των τριγώνων σε αυτήν την τριγωνισμένη κατηγορία. Υπάρχει, έτσι, μία ισοδυναμία συναρτητών

$$\Omega_0\Sigma^{-1} \cong \Omega_R\Omega_0$$

Εφαρμόζοντας έτσι τον συναρτητή Ω_0 στο τρίγωνο (T_1) αποκτούμε (με ακρίβεια ισομορφισμού) ένα τρίγωνο

$$\Omega_R\Omega_0(\underline{E}^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(\underline{C}^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(\underline{D}^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(\underline{E}^\bullet) \tag{T_2}$$

στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$. Από την ακριβή ακολουθία συμπλόκων (6.6) προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & C^{-1} \arrow[rr] \arrow[d, "\partial_C^{-1}"] & & D^{-1} \arrow[rr] \arrow[d, "\partial_D^{-1}"] & & E^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_E^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[rr] & & C^{0} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\partial_C^{0}"] & & D^{0} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\partial_D^{0}"] & & E^{0} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd, "\partial_E^{0}"] & 0 \\
& \Omega_0(C^\bullet) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \Omega_0(D^\bullet) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \Omega_0(E^\bullet) \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[rr] & & C^{1} \arrow[rr] & & D^{1} \arrow[rr] & & E^{1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

στο οποίο οι οριζόντιες γραμμές είναι διασπάσιμες ακριβείς ακολουθίες πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων. Εύκολα προκύπτει ότι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί στους συνπυρήνες σχηματίζουν μία σύντομη ακριβή ακολουθία MCM προτύπων

$$0 \longrightarrow \Omega_0(C^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(D^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(E^\bullet) \longrightarrow 0$$

και ως αποτέλεσμα το τρίγωνο (T_2) είναι διακεκριμένο στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$. ∎

Οι παραπάνω προτάσεις συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 6.3.16. *([17, Theorem 4.4.1.(3)]) Έστω R ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether, ο οποίος έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση σαν ένα αριστερό και δεξιό R-πρότυπο. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα κατηγοριών είναι μεταθετικό (με ακρίβεια ισοδυναμίας συναρτητών) και επιπλέον κάθε συναρτητής αποτελεί ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.*

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[rr, "\iota_R"] & & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \\
& \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[ul, "\Omega_0"] \arrow[ur, "\sigma_{\leqslant 0}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αποτελεί άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 6.3.9 και των παραπάνω Προτάσεων. ∎

6.4 Συζυγία σε Δακτυλίους Gorenstein

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύχθηκε, ακολουθώντας τους M. Auslander και R.-O. Buchweitz στο [3], η θεωρία των $\mathcal{X}$-προσεγγίσεων και ω-θηκών για μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{C}$ και μία προσθετικά κλειστή και ακριβής υποκατηγορία $\mathcal{X}$ της $\mathcal{C}$ στην οποία κάθε επιμορφισμός είναι admissible. Εφαρμόζοντας αυτό το γενικό αποτέλεσμα στην περίπτωση των MCM προτύπων προκύπτει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο μπορεί να «προσεγγισθεί» από ένα MCM πρότυπο και από ένα πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο προβολικής ανάλυσης. Ο Buchweitz, ωστόσο, στο [17, §5] αναπτύσσει την θεωρία των προσεγγίσεων αποκτώντας άμεσα το παραπάνω αποτέλεσμα για τα MCM πρότυπα. Η συγκεκριμένη ενότητα αφιερώνεται στην παρουσίαση αυτής της προσέγγισης του Buchweitz στο [17] και στα αποτελέσματα που προκύπτουν για τις ισοδύναμες κατηγορίες της $\underline{\mathsf{MCM}}(\mathsf{R})$ που αναπτύχθηκαν στο παρόν κεφάλαιο.

Όπως πριν, εκτός και αν δηλωθεί το αντίθετο, θα θεωρείται ότι τα πρότυπα που εμφανίζονται στη συνέχεια είναι πεπερασμένα παραγόμενα και ότι τα σύμπλοκα από πρότυπα έχουν πεπερασμένα παραγόμενη και φραγμένη συνομολογία.

Θα διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο η υποκατηγορία των maximal Cohen-Macaulay προτύπων εμβαπτίζεται στην κατηγορία όλων των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων. Η διαδικασία που ακολουθεί ο Buchweitz επεκτείνει και είναι σύμφωνη με τα αποτελέσματα των M. Auslander στο [5] και Auslander-Bridger στο [2].

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.22 και τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, στα πλάισια ενός δακτυλίου ισχυρά Gorenstein, ο Buchweitz (βλ. [17, Theorem 5.1.2.]) διατυπώνει και αποδεικνύει το Θεώρημα 5.3.42 το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη και την μοναδικότητα στην $\underline{\text{mod}}\text{-}R$ μίας MCM-προσέγγισης και μίας θήκης πεπερασμένης προβολικής διάστασης για κάθε R-πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης. Πιο συγκεκριμένα, υπενθυμίζουμε ότι:

Αν R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein, τότε για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο N υπάρχει μία ακριβής ακολουθία (ή αλλιώς MCM-προσέγγιση του N):

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \tag{6.7}$$

όπου το R-πρότυπο U έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση και το M είναι maximal Cohen-Macaulay, καθώς και μία ακριβής ακολουθία (ή αλλιώς μία θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης του N):

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} V \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{6.8}$$

όπου το R-πρότυπο V έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση και το L είναι maximal Cohen-Macaulay.

Ιδιαιτερα, οι παραπάνω αναπαραστάσεις είναι μοναδικές με ακρίβεια προβολικής ισοδυναμίας. Με άλλα λόγια, αν

$$0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} V_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow 0$$

είναι μία δεύτερη MCM-προσέγγιση και μία δεύτερη θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης του N, αντίστοιχα, θα υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα P και Q έτσι ώστε $M \oplus P \cong M_1 \oplus Q$ και $U \oplus P \cong U_1 \oplus Q$, καθώς και αντίστοιχα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά πρότυπα P' και Q' έτσι ώστε $V \oplus P' \cong V_1 \oplus Q'$ και $L \oplus P' \cong L_1 \oplus Q'$.

Παρατήρηση 6.4.1. Η μοναδικότητα στο θεώρημα αυτό, το οποίο σύμφωνα με τον Buchweitz καλείται το Θεώρημα Συζυγίας για Δακτυλίους Gorenstein, μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Ο επιμορφισμός $p\colon M \longrightarrow N$ στην MCM-προσέγγιση (6.7) ικανοποιεί την παρακάτω καθολική ιδιότητα: Κάθε ομομορφισμός $f\colon M' \longrightarrow N$ από ένα MCM R-πρότυπο M' στο N αναλύεται μέσω του p και αυτή η ανάλυση είναι μοναδική στην $\underline{\text{mod}}\text{-}R$.

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "p"] & N \end{tikzcd}$$

Δυϊκά, ο μονομορφισμός $i\colon N \longrightarrow V$ στη θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης (6.8) ικανοποιεί την παρακάτω καθολική ιδιότητα: Κάθε ομομορφισμός $j\colon N \longrightarrow V'$ από το N σε ένα MCM R-πρότυπο M' αναλύεται μέσω του i και αυτή η ανάλυση είναι μοναδική στην $\underline{\text{mod}}\text{-}R$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & V \arrow[d, dashed] \\ & V' \end{tikzcd}$$

Η μοναδικότητα αυτή, η οποία έχει ήδη αποδειχθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκύπτει σε αυτό το πλαίσιο άμεσα και από το Λήμμα 5.2.22. Άξια αναφοράς αποτελεί και μία ακόμη διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό της μοναδικότητας, η οποία χρησιμοποιεί το Θεώρημα του Buchweitz (βλ. Θεώρημα 6.3.16).

Παρατήρηση 6.4.2. Θεωρούμε έναν δακτύλιο R ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο N. Έστω

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \tag{6.9}$$

μία MCM-προσέγγιση και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} V \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{6.10}$$

μία θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης του N. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή

$$\iota_R\colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b}(R)$$

στην ακριβή ακολουθία (6.11) αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \iota_R(N) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \iota_R(U) \arrow[rr] & & \iota_R(M) \arrow[ul, "\iota_R(p_M)"'] \end{tikzcd}$$

στην $\underline{\mathsf{D}^b}(R)$. Παρόμοια, εφαρμόζοντας τον ι_R στην (6.12) και στη συνέχεια το αξίωμα της στροφής τριγώνων αποκτούμε το διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \Sigma\iota_R(N) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \iota_R(V) \arrow[rr] & & \iota_R(L) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\underline{\mathsf{D}^b}(R)$. Εφόσον τα U και V είναι πρότυπα πεπερασμένης προβολικής διάστασης, η εικόνα τους στην $\underline{\mathsf{D}^b}(R)$ μέσω του συναρτητή ι_R είναι το μηδενικό αντικείμενο. Ως αποτέλεσμα, οι μορφισμοί $\overline{i_R(M)} \longrightarrow i_R(N)$ και $i_R(L) \longrightarrow \Sigma\iota_R(N)$ στα παραπάνω τρίγωνα, είναι ισομορφισμοί στην $\underline{\mathsf{D}^b}(R)$. Όπως έχουμε δείξει, ο συναρτητής $\iota_R\colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b}(R)$ είναι μία ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών (βλ. Πρόταση 6.3.13), άρα τα πρότυπα $\overline{M}$ και L είναι μοναδικά με ακρίβεια ισομορφισμού στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$. Το M αναπαριστά το $\iota_R^{-1}(N)$ και το L αναπαριστά το $\iota_R^{-1}(\Sigma N) = \Sigma\iota_R^{-1}(N) = \Sigma M$.

Οδηγούμαστε έτσι στο ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 6.4.3. *Θεωρούμε έναν δακτύλιο R ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο N. Έστω*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \tag{6.11}$$

μία MCM-προσέγγιση και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} V \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{6.12}$$

μία θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης του N. Τότε το πρότυπο L είναι ισόμορφο με το ΣM στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$.

Η ύπαρξη μίας MCM-προσέγγισης και μίας θήκης πεπερασμένης προβολικής διάστασης έχει αποδειχθεί γενικότερα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Είναι ενδιαφέρον, ωστόσο, να μελετηθεί πως αυτή μπορεί να προκύψει άμεσα στο πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε.

Παρατήρηση 6.4.4. Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και N ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο. Θεωρούμε μία προβολική ανάλυση $P^\bullet \longrightarrow N$ του N. Εφόσον ο δακτύλιος R έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση, το σύμπλοκο $(P^\bullet)^* = \mathsf{Hom}_R(P, R)$ έχει επίσης φραγμένη συνομολογία. Θεωρούμε στη συνέχεια μία προβολική ανάλυση $\phi\colon Q^\bullet \longrightarrow (P^\bullet)^*$ του συμπλόκου R^{op}-προτύπων $(P^\bullet)^*$. Δυϊκοποιώντας για άλλη μία φορά, αποκτούμε έναν ημι-ισομορφισμό: $\phi^*\colon P^\bullet \cong (P^\bullet)^{**} \longrightarrow (Q^\bullet)^*$ σε ένα κάτω φραγμένο σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα $(Q^\bullet)^*$, ο οποίος αναπαριστάται με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-k-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-k} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & (Q^k)^* \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (Q^1)^* \arrow[r, "\partial^{-1}"] & (Q^0)^* \arrow[r, "\partial^{0}"] & (Q^{-1})^* \arrow[r, "\partial^{1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

όπου $\partial^n = \mathsf{Hom}_R(\partial_Q^{-n-1}, R)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Όπως έχουμε ήδη δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο ελάχιστο n έτσι ώστε $Q^n \neq 0$ θέτοντας:

$$n = \max\{i \mid i \in \mathbb{Z} \,\text{με}\, \mathsf{Ext}^i_R(N, R) \neq 0\}$$

Εφόσον ο ϕ^* είναι ένας ημι-ισομορφισμός, η μόνη μη μηδενική συνομολογία του Q^* είναι το πρότυπο N στο βαθμό μηδέν. Έτσι, θέτουμε:

- $M = \mathsf{Ker}\partial^0$ και $U = \mathsf{Im}\partial^{-1}$, συνεπώς $N = M/U$.
- $V = \mathsf{Coker}\partial^{-1}$ και $L = \mathsf{Im}\partial^0$, συνεπώς $N = \mathsf{Ker}\partial'$ όπου $\partial'\colon V \longrightarrow L$ είναι ο επιμορφισμός ο οποίος επάγεται από τον ∂^0.

$$\begin{tikzcd}
 & & M = \mathsf{Ker}\partial^0 \arrow[dr] & & L = \mathsf{Im}\partial^0 \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[r] & (Q^1)^* \arrow[rr, "\partial^{-1}"] \arrow[dr] & & (Q^0)^* \arrow[rr, "\partial^{0}"] \arrow[ur] \arrow[dr] & & (Q^{-1})^* \arrow[r, "\partial^{1}"] & \cdots \\
 & & U = \mathsf{Im}\partial^{-1} \arrow[ur] & & V = \mathsf{Coker}\partial^{-1} & &
\end{tikzcd}$$

Εκ κατασκευής, τα πρότυπα U και V έχουν πεπερασμένη προβολική διάσταση καθώς τα σύμπλοκα $\sigma_{\leqslant -1}(Q^\bullet)^*$ και $\sigma_{\leqslant 0}(Q^\bullet)^*$ αντίστοιχα αποτελούν μία προβολική ανάλυση αυτών. Από την άλλη πλευρά, τα πρότυπα M και L είναι MCM καθώς τα σύμπλοκα $\sigma_{\geqslant 0}(Q^\bullet)^*$ και $\sigma_{\geqslant 1}(Q^\bullet)^*$ αντίστοιχα αποτελούν μία προβολική συν-ανάλυση αυτών.

Σχόλιο 6.4.5. Η παραπάνω κατασκευή ουσιαστικά δίνει μία άλλη, άμεση απόδειξη του Πορίσματος 6.4.3 καθώς τα πρότυπα M και L εμφανίζονται σε μία σύντομη ακριβή ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M = \mathsf{Ker}\partial^1 \longrightarrow (Q^0)^* \longrightarrow \mathsf{Im}\partial^0 = L \longrightarrow 0 \tag{6.13}$$

Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα διακεκριμένα τρίγωνα στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$, άμεσα προκύπτει ότι $L = \Sigma M$ στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$.

Ακολουθούν ορισμένες παρατηρήσεις οι οποίες οφείλονται στον Buchweitz (βλ. [17, 5.2. Remarks]).

Παρατήρηση 6.4.6. Θεωρούμε έναν δακτύλιο R ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο N. Έστω

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \tag{6.14}$$

μία MCM-προσέγγιση και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} V \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{6.15}$$

μία θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης του N. Χρησιμοποιώντας την κατασκευή της Παρατήρησης 6.4.4 και χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό, παρατηρούμε ότι το πρότυπο U εμφανίζεται σε μία σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow U = \mathsf{Im}\partial^{-1} \longrightarrow (Q^0)^* \longrightarrow \mathsf{Coker}\partial^{-1} = V \longrightarrow 0 \tag{6.16}$$

και αποτελεί το πρώτο πρότυπο συζυγίας του πεπερασμένης διάστασης προτύπου V. Η ιδιότητα αυτό χαρακτηρίζει το U, το οποίο σε μία MCM-προσέγγιση δεν μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης. Τέλος, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Ext}_R(-, R)$ στις 6.14 και 6.15 προκύπτει ότι

$$\mathsf{Ext}^n_R(U, R) = \mathsf{Ext}^{n+1}_R(N, R) = \mathsf{Ext}^{n+1}_R(V, R)$$

για κάθε $n > 0$.

Διατηρώντας τον παραπάνω συμβολίσμό και χρησιμοποιώντας την κατασκευή της Παρατήρησης 6.4.4, βλέπουμε ότι οι ακριβείς ακολουθίες (6.13), (6.14), (6.15) και (6.16) δημιουργούν ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[u] \arrow[r, "i"] & V \arrow[u] \arrow[r, "\partial'"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u, "p"] \arrow[r, "i'"] & (Q^0)^* \arrow[u] \arrow[r] & L \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \\
 & U \arrow[u] \arrow[r, equal] & U \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{6.17}$$

Η εικόνα του παραπάνω διαγράμματος στην τριγωνισμένη κατηγορία $\mathsf{D}^b(R)$ αποτελεί την απεικόνιση του οκτάεδρου που προκύπτει εφαρμόζοντας το αξίωμα του οκταέδρου είτε στη σύνθεση των μορφισμών

$$U = \mathsf{Im}\partial^{-1} \longrightarrow M = \mathsf{Ker}\partial^0 \xrightarrow{i'} (Q^0)^*$$

ή στην σύνθεση των μορφισμών

$$(Q^0)^* \xrightarrow{\quad p' \quad} V = \mathsf{Coker}\partial^{-1} \xrightarrow{\quad \partial' \quad} L = \mathsf{im}\partial^0$$

ενώ τα διακεκριμένα τρίγωνα του οκταέδρου δίνονται από τις τέσσερις παραπάνω ακριβείς ακολουθίες.

Ορισμός 6.4.7. *Το διάγραμμα (6.17) σύμφωνα με τον Buchweitz (βλ. [17, §5.3.]) καλείται η* **κανονική αναπαράσταση**, *ή το επαγόμενο οκτάεδρο ενός πεπερασμένα παραγόμενου N υπεράνω ενός ισχυρά Gorenstein δακτυλίου R.*

Η ακόλουθη πρόταση, προκύπτει άμεσα από τις παραπάνω παρατηρήσεις:

Πρόταση 6.4.8. *([17, Corollary 5.3.3.]) Έστω R ένας ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο N. Αν*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 \tag{6.18}$$

είναι μία MCM-προσέγγιση του N και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} V \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{6.19}$$

είναι μία θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης του N, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό R-πρότυπο Q και μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \oplus Q \longrightarrow V \longrightarrow 0 \tag{6.20}$$

στην οποία το M είναι ένα maximal Cohen-Macaulay πρότυπο και το V είναι ένα πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης.

Επιπλέον, στην $\underline{\mathsf{mod}\text{-}R}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- *Κάθε μορφισμός από ένα MCM πρότυπο στο πρότυπο N αναλύεται μέσω του μονομορφισμού $M \longrightarrow N \oplus Q \cong N$.*

- *Κάθε μορφισμός από το πρότυπο N σε ένα πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης αναλύεται μέσω του επιμορφισμού $N \cong N \oplus Q \longrightarrow V$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω. Εύκολα βλέπουμε ότι το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] & V \\ M \arrow[u, "p"] \arrow[r, "i'"] & (Q^0)^* \arrow[u] \end{tikzcd}$$

στο διάγραμμα 6.17 είναι δι-καρτεσιανό και αποκτούμε έτσι μία σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{p \oplus i'} N \oplus (Q^0)^* \xrightarrow{i - p'} V \longrightarrow 0$$

η οποία αναπαριστά το N (με ακρίβεια πρόσθεσης ενός προβολικού προτύπου) ως μία επέκταση ενός προτύπου πεπερασμένης προβολικής διάστασης με ένα MCM πρότυπο. Θέτοντας $Q = (Q^0)^*$ προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.3.39 του προηγούμενου κεφαλαίου σε αυτό το πλαίσιο, θέτοντας δηλαδή $\mathcal{C} = \mathsf{mod}\text{-}R$, $\mathcal{X} = \mathsf{MCM}R$ και $\omega = \mathsf{P}(\mathsf{R})$ προκύπτει ένας πλήρης και πιστός συναρτητής

$$\mathsf{M}\colon \underline{\mathsf{mod}\text{-}R} \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$$

ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο στην επιλεγμένη MCM-προσέγγισή του. Ο συναρτητής M αποτελεί έναν δεξιά συζυγή της εμβάπτισης $\underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{mod}\text{-}R}$.

Παρόμοια, συμβολίζοντας με $\underline{\mathsf{fpd}}(R)$ την πλήρη υποκατηγορία της $\underline{\mathsf{mod}\text{-}R}$ η οποία αποτελείται από όλα τα πρότυπα πεπερασμένης προβολικής διάστασης, προκύπτει η ύπαρξη ενός συναρτητή

$$\mathsf{H}\colon \underline{\mathsf{mod}\text{-}R} \longrightarrow \underline{\mathsf{fpd}}(R)$$

ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο στην επιλεγμένη θήκη πεπερασμένης προβολικής διάστασης.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, όπως αναφέρθηκε γενικότερα στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η $\mathsf{mod}\text{-}R$ δημιουργείται «σχεδόν» συγκολώντας (με την έννοια των Beilinson, Bernstein και Deligne στο [8, 1.4.3.]) τις κατηγορίες $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ και $\underline{\mathsf{fpd}}(R)$ χρησιμοποιώντας τα ζεύγη των συζυγών συναρτητών:

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[r, shift left, "j_!"] & \underline{\mathsf{mod}\text{-}} \arrow[l, shift left, "\mathsf{M}"] \arrow[r, shift left, "\mathsf{H}"] & \underline{\mathsf{fpd}}(R) \arrow[l, shift left, "i_*"] \end{tikzcd}$$

Σε σύγκριση με την έννοια της «συγκόλησης κατηγοριών» όπως αυτή ορίζεται στο [8, 1.4.3.], και με αυτήν την ορολογία, παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- Οι κατηγορίες $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ και $\underline{\mathsf{fpd}}(R)$ είναι πλήρεις υποκατηγορίες της $\mathsf{mod}\text{-}R$ (αντιστοιχεί στο αξίωμα [8, 1.4.3.5].

- Η κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ είναι αριστερά ορθογώνια στην $\underline{\mathsf{fpd}}(R)$ και η κατηγορία $\underline{\mathsf{fpd}}(R)$ είναι δεξιά ορθογώνια στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ (αντιστοιχεί στο αξίωμα [8, 1.4.3.3.].

- Ο συναρτητής M (αντιστοιχεί στον συναρτητή j^* του αξιώματος [8, 1.4.3.2.]) αποτελεί έναν δεξιά συζυγή της εμβάπτισης της $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ στην $\underline{\mathsf{mod}\text{-}R}$ (αντιστοιχεί στον συναρτητή $j_!$).

- Ο συναρτητής H (αντιστοιχεί στον συναρτητή i^* του αξιώματος [8, 1.4.3.2.]) αποτελεί έναν αριστερά συζυγή της εμβάπτισης της $\underline{\mathsf{fpd}}(R)$ στην $\underline{\mathsf{mod}\text{-}R}$ (αντιστοιχεί στον συναρτητή i_*).

- Η κανονική αναπαράσταση του προτύπου N (βλ. (6.17) περιγράφει την μοναδική διάσπαση ενός αντικειμένου της $\mathsf{mod}\text{-}R$ στα «επί μέρους στοιχεία» του στην $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$ και στην $\underline{\mathsf{fpd}}(R)$. Επιπλέον, η ακριβής ακολουθία (6.20) αντιστοιχεί στο εξής διακεκριμένο τρίγωνο (βλ. [8, 1.4.3.4.]):

$$\begin{tikzcd} & i_* \circ i^* \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ g_! \circ j^* \arrow[rr] & & 1 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτό που λείπει από μία ολοκληρωμένη συγκόληση με την παραπάνω έννοια, είναι η ύπαρξη των συζυγών συναρτητών ($i^!$ και j_*). Γενικά, ακόμη και με ακρίβεια πρόσθεσης προβολικών προτύπων, ένα τυχαίο πρότυπο δεν μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μία επέκταση ενός MCM προτύπου με ένα πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης.

Η ακόλουθη πρόταση δίνει έναν πιο εύχρηστο χαρακτηρισμό μίας MCM-προσέγγισης όταν πληρούται μία επιπλέον συνθήκη.

Πρόταση 6.4.9. *([17, Proposition 5.5.1.]) Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και N ένα R-πρότυπο για το οποίο ισχύει $\mathsf{Ext}_R^n(N,R)=0$ εκτός από μία μοναδική τιμή $n=n_0$. Τότε, μία MCM-προσέγγιση του N δίνεται ως εξής:*

$$\mathsf{M}(N)=\mathsf{Hom}_R(\Omega_n\mathsf{Ext}^n(N,R),R)$$

όπου με $\Omega_n\mathsf{Ext}_R^n(N,S)$ συμβολίζουμε το αντίστοιχο πρότυπο συζυγίας σε μία προβολική ανάλυση του αριστερού R-προτύπου $\mathsf{Ext}_R^n(N,R)$.

Απόδειξη. Η πορεία της απόδειξης είναι παρόμοια με αυτήν που χρησιμοποιεί ο Buchweitz για την ύπαρξη MCM-προσεγγίσεων και θηκών πεπερασμένης προβολικής διάστασης (βλ. Παρατήρηση 6.4.4). Η κεντρική ιδέα είναι ότι, χρησιμοποιώντας την επιπλέον συνθήκη για το πρότυπο N, με τον συμβολισμό της Παρατήρησης 6.4.4, το σύμπλοκο $(P^\bullet)^*$ είναι ημι-ισομορφικό με το $\Sigma^{-n}\,\mathsf{Ext}_R^n(N,R)$ και άρα αποτελεί μία προβολική ανάλυση αυτού του προτύπου. Αλλά τότε εκ κατασκευής, το πρότυπο $\mathsf{M}(N)$ προκύπτει ως

$$\mathsf{Ker}\mathsf{Hom}_R(\partial_Q^0,R)=\mathsf{Hom}_R(\mathsf{Coker}\partial_Q^0,R)=\mathsf{Hom}_R(\Omega_0Q,R)$$

όπου $\Omega_0Q=\Omega_n\,\mathsf{Ext}_R^n(N,R)$. ■

Η κατασκευή της Παρατήρησης 6.4.4 ουσιαστικά αποτελεί μία επέκταση της κατασκευής μίας πλήρης ανάλυσης ενός MCM (βλ. Παρατήρηση 6.3.11), για ένα τυχαίο πεπερασμένα παραγόμενο R- πρότυπο N. Χρησιμοποιώντας ένα παρόμοιο επιχείρημα μπορούμε να αποκτήσουμε με την χρήση συναρτητών τέτοιες πλήρεις αναλύσεις για τυχαία αντικείμενα της $\mathsf{D}^b(R)$. Θα περιγράψουμε στη συνέχεια συνοπτικά μία διαδικασία για την απόκτηση τέτοιων αναλύσεων στην $\mathsf{D}^b(R)$, ενώ για περισσότερα βλ. [17, §5.6.].

Έστω $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο R-προτύπων με φραγμένη και πεπερασμένα παραγόμενη συνομολογία, θεωρούμενο ως ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$. Επιλέγουμε μία προβολική ανάλυση $\mathsf{P}(C^\bullet)\longrightarrow C^\bullet$ του $C^\bullet$ και εφαρμόζουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-,R)$ αποκτώντας το σύμπλοκο $\mathsf{P}(C^\bullet)^*$. Εξ ορισμού, το $\mathsf{P}(C^\bullet)^*$ είναι ένα κάτω φραγμένο σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R^{op}-πρότυπα με φραγμένη συνομολογία, άρα αποτελεί μία «προβολική συν-ανάλυση» του συμπλόκου $\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_R(C^\bullet,R)$ θεωρούμενο ως ένα αντικείμενο της πλήρης τριγωνισμένης υποκατηγορίας $\mathsf{K}^{+,b}(\mathsf{P}(R^{\mathsf{op}},))$ της $\mathsf{D}^b(R^{\mathsf{op}})$. Έτσι, αυτό το αντικείμενο είναι μοναδικό με ακρίβεια ομοτοπικής ισοδυναμίας. Στη συνέχεια, επιλέγουμε μία προβολική ανάλυση $\phi_C\colon\mathsf{P}(\mathsf{P}(C^\bullet)^*)^*\longrightarrow\mathsf{P}(C^\bullet)^*$ αυτής της συν-ανάλυσης η οποία αντιστοιχεί στον ημι-ισομορφισμό ϕ^* που περιγράφεται στην Παρατήρηση 6.4.4. Δυϊκοποιούμε ακόμη μία φορά ως προς το $\mathsf{Hom}_{R^{\mathsf{op}}}(-,R)$ και θεωρούμε την σύνθεση των ακόλουθων μορφισμών:

$$\mathsf{N}(C^\bullet)\colon\mathsf{P}(C^\bullet)\xrightarrow{\ \cong\ }\mathsf{P}(C^\bullet)^{**}\xrightarrow{\ \phi_C\ }\mathsf{P}(\mathsf{P}(C^\bullet)^*)^*$$

Ο μορφισμός σύνθεση καλείται η **Απεικόνιση Νόρμα** του $C^\bullet$ κατ' αναλογίαν με την κλασσική περίπτωση των πεπερασμένων ομάδων (βλ. για παράδειγμα [18, XII, 1.]) και αποτελεί εκ κατασκευής έναν ημι-ισομορφισμό από μία προβολική ανάλυση του $C^\bullet$ σε μία προβολική συνανάλυση του $C^\bullet$. Μάλιστα, ο μορφισμός $\mathsf{N}(C^\bullet)$ αποτελεί μία εκδοχή στην $\mathsf{D}^b(R)$ του ισομορφισμού δυϊκότητας

$$C^\bullet\longrightarrow\mathsf{RHom}_{R^{\mathsf{op}}}((C^\bullet,R),R)$$

για δακτυλίους Gorenstein ο οποίος έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος, κατ' αναλογίαν με την Παρατήρηση 6.3.11, θέτουμε

$$\mathsf{CR}(C^\bullet)=\Sigma^{-1}C^\bullet_{\mathsf{N}(C^\bullet)}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι με $C^\bullet_{\mathsf{N}(C^\bullet)}$ συμβολίζουμε τον κώνο του μορφισμού $\mathsf{N}(C^\bullet)$.

Ορισμός 6.4.10. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και $C^\bullet$ ένα σύμπλοκο R-προτύπων με φραγμένη και πεπερασμένα παραγόμενη συνομολογία, θεωρούμενο ως ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$. Το σύμπλοκο $\mathsf{CR}(C^\bullet)$ θα καλείται μία* **πλήρης ανάλυση** *του αντικειμένου $C^\bullet$.*

Σχόλιο 6.4.11. Στα παρακάτω, χάριν ευκολίας στον συμβολισμό, θέτουμε:

$$\mathsf{C}(-) = \mathsf{P}(\mathsf{P}(-)^*)^*$$

Άμεσα αποκτούμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{P}(R))$, την ομοτοπική κατηγορία όλων των συμπλόκων των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων:

Πρόταση 6.4.12. *([17, §5.6.3]) Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein. Τότε, για κάθε αντικείμενο $C^\bullet$ της $\mathsf{D}^b(R)$, υπάρχει ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathsf{P}(R))$ της μορφής:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{C}(C^\bullet) \arrow[dl, "i(C^\bullet)"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\
\mathsf{CR}(C^\bullet) \arrow[rr, "r(C^\bullet)"] & & \mathsf{P}(C^\bullet) \arrow[ul, "\mathsf{N}(C^\bullet)"']
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός προκύπτει από τον τρόπο που ορίστηκαν τα διακεκριμένα τρίγωνα σε μία ομοτοπική κατηγορία. Το παραπάνω τρίγωνο αποτελεί εξ ορισμού το διακεκριμένο τρίγωνο που επάγεται από τον κώνο του μορφισμού $\mathsf{N}(C^\bullet)$, με μία περιστροφή στα αριστερά. Ο μορφισμός $r(C^\bullet)$ είναι απλά ο περιορισμός της πλήρης ανάλυσης στη δοσμένη προβολική ανάλυση, ενώ ο μορφισμός έγκλεισης $i(C^\bullet)$ είναι ο μορφισμός ο οποίος μετατρέπει την προβολική συν-ανάλυση σε μία πλήρη ανάλυση. ■

Παρατήρηση 6.4.13. Υπενθυμίζουμε ότι η επιλογή προβολικών αναλύσεων για ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συναρτητής

$$\mathsf{P}\colon \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \mathsf{K}^{-,b}(\mathsf{P}(R))$$

ο οποίος είναι αριστερά συζυγής του συναρτητή εμβάπτισης $\mathsf{K}^{-,b}(\mathsf{P}(R)) \longrightarrow \mathsf{D}^b(R)$ (βλ. για παράδειγμα [19, II.1.4.]).

Παρόμοια, σύμφωνα με τα παραπάνω, αποκτούμε έναν συναρτητή

$$\mathsf{C}\colon \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \mathsf{K}^{+,b}(\mathsf{P}(R))$$

όπου $\mathsf{C}(-) = \mathsf{P}(\mathsf{P}(-)^*)^*$. Θεωρούμε στην συνέχεια τους συναρτητές φυσικής έγκλεισης

$$\mathsf{K}^{-,b}(\mathsf{P}(R)) \longrightarrow \mathsf{D}^b(R)$$

και

$$\mathsf{K}^{+,b}(\mathsf{P}(R)) \longrightarrow \mathsf{D}^b(R)$$

καθώς και τις αντίστοιχες συνθέσεις

$$\mathsf{D}^b(R) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{K}^{-,b}(\mathsf{P}(R)) \longrightarrow \mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R))$$

$$\mathsf{D}^b(R) \xrightarrow{\mathsf{C}} \mathsf{K}^{+,b}(\mathsf{P}(R)) \longrightarrow \mathsf{K}^b(\mathsf{P}(R))$$

Με αυτόν τον τρόπο, η νόρμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας φυσικός μετασχηματισμός συναρτητών ο οποίος για κάθε μορφισμό συμπλόκων $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(R)$ αναπαριστάται με το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}(C^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{P}(f)"] \arrow[d, "\mathsf{N}(C^\bullet)"'] & \mathsf{P}(D^\bullet) \arrow[d, "\mathsf{N}(D^\bullet)"] \\ \mathsf{C}(C^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{C}(f)"] & \mathsf{C}(D^\bullet) \end{tikzcd}$$

Έχοντας ορίσει μία πλήρη ανάλυση για κάθε αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$ είναι δυνατό να ορίσουμε και στη συνέχεια μία MCM-προσέγγιση, επεκτείνοντας την παραπάνω θεωρία στην κατηγορία συμπλόκων.

Ορισμός 6.4.14. *Έστω R ένας δακτύλιος ο οποίος είναι ισχυρά Gorenstein και $C^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}^b(R)$. Τότε, το R-πρότυπο*

$$\mathsf{M}(C^\bullet) = \Omega_0\mathsf{CR}(C^\bullet)$$

μαζί με τον επαγόμενο μορφισμό στον πυρήνα

$$\mathsf{M}(C^\bullet) \longrightarrow C^\bullet$$

θα καλείται μία MCM-προσέγγιση του $C^\bullet$.

Παρατήρηση 6.4.15. Συγκρίνοντας τον παραπάνω ορισμό με την περίπτωση των προτύπων, παρατηρούμε ότι λείπει το ανάλογο της θήκης πεπερασμένης προβολικής διάστασης, δηλαδή του συναρτητή $\mathsf{H}\colon \underline{\mathsf{mod}}\text{-}R \longrightarrow \underline{\mathsf{fpd}}(R)$. Στο πλαίσιο της παραγόμενης κατηγορία $\mathsf{D}^b(R)$ ένας τέτοιος συναρτητής θα έστελνε ένα οποιοδήποτε σύμπλοκο στην $\mathsf{D}^b(R)$ στο «κομμάτι» αυτού που αποτελεί ένα τέλειο σύμπλοκο στην $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$. Ωστόσο, αν ένας τέτοιος συναρτητής υπήρχε, η κατηγορία $\mathsf{D}^b(R)$ θα μπορούσε να κατασκευαστεί «συγκολλώντας» τις κατηγορίες $\underline{\mathsf{D}^b(R)}$ και $\mathsf{D}^b_{\mathsf{perf}}(R)$, κάτι που γενικά δεν ισχύει. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [17, §7].

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα το οποίο ολοκληρώνει την εικόνα η οποία δόθηκε στην προηγούμενη ενότητα στο Θεώρημα 6.3.16.

Θεώρημα 6.4.16. *Έστω R ένας αριστερός και δεξιός δακτύλιος της Noether ο οποίος έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση σαν ένα αριστερό και δεξιό R-πρότυπο. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών:*

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{D}^b(R) \arrow[dl, "\mathsf{CR}"'] \arrow[d, "\mathsf{M}"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[r, "\Omega_0", "\cong"'] \arrow[rr, bend right, "\cong", "\sigma_{\leqslant 0}"'] & \underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[r, "\iota_R", "\cong"'] & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \end{tikzcd}$$

Οι συναρτητές ι_R, Ω_0 και $\sigma_{\leqslant 0}$ αποτελούν ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών, ενώ οι συναρτητές CR και M είναι ημι-αντίστροφοι των συναρτητών $\sigma_{\leqslant 0}$ και ι_R αντίστοιχα.

Με άλλα λόγια, ο συναρτητής προβολής $\pi\colon \mathsf{D}^b(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$ αναλύεται φυσικά πάνω από την ισοδυναμία $\sigma_{\leqslant 0}\colon \underline{\mathsf{APC}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{D}^b(R)}$.

6.5 Gorenstein Προβολικά Αντικείμενα και Κατηγορίες Ιδιομορφιών

Ανακεφαλαιώνοντας, ακολουθώντας τον Buchweitz στο [17], ορίσαμε την κατηγορία ιδιομορφιών ενός δακτυλίου της Noether R ως το πηλίκο (με την έννοια του Verdier):

$$\underline{\mathsf{D}^b(R)} = \mathsf{D}^b(R)/\mathsf{D}^n_{\mathsf{perf}}(R)$$

Στη συνέχεια ορίστηκε η έννοια ενός maximal Cohen-Macaulay R-προτύπου και η ευσταθής κατηγορία $\underline{\mathsf{MCM}}(R)$. Τέλος, συμβολίζοντας με $\underline{\mathsf{APC}}(R)$ την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα, αποδείχθηκε ότι το ακόλουθο διάγραμμα αποτελεί μία ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{MCM}}(R) \arrow[rr, "\iota_R"] & & \underline{\mathsf{D}^b(R)} \\
& \underline{\mathsf{APC}}(R) \arrow[ul, "\Omega_0"] \arrow[ur, "\sigma_{\leqslant 0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ισοδυναμία είναι δυνατόν να μελετήσουμε την κατηγορία ιδιομορφιών, μέσω μίας ευσταθούς κατηγορίας πηλίκο η οποία έχει ως αντικείμενα πρότυπα τα οποία, όπως γνωρίζουμε, έχουν πλούσιες ιδιότητες.

Ένα φυσικό ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι αν το παραπάνω διάγραμμα και τα συμπεράσματα του Buchweitz μπορούν να γενικευθούν και αν ναι, σε ποιον βαθμό. Σε αυτήν την παράγραφο θα δώσουμε μία απάντηση σε αυτό το ερώτημα χρησιμοποιώντας μία πιο σύγχρονη προσέγγιση. Θα χρησιμοποιηθούν ορισμοί και αποτελέσματα κυρίως από το άρθρο των Α. Μπεληγιάννη και I. Reiten, βλ. [12] αλλά και από το [10].

Στη θέση της κατηγορίας των πεπερασμένα παραγόμενων R-προτύπων, θεωρούμε μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Συμβολίζοντας με $\mathsf{proj}\mathcal{A}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από τα προβολικά αντικείμενα, θεωρούμε την αντίστοιχη φραγμένη ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A})$ η οποία είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$. Τέλος θεωρούμε την παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$. Με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε ένα διάγραμμα κατηγοριών

$$\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A}) \xrightarrow{\iota} \mathsf{K}^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathsf{D}^b(\mathcal{A})$$

στο οποίο η σύνθεση των συναρτητών είναι ένας πλήρης και πιστός συναρτητής. Θεωρούμε την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ η οποία έχει ως αντικείμενα εικόνες αντικειμένων της $\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A})$ μέσω της σύνθεσης των συναρτητών $Q \circ i$, καθώς και όλα τα ισόμορφά τους. Θα συμβολίζουμε αυτήν την κατηγορία πάλι με $\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A})$. Τότε, όπως έχουμε δει, μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία ιδιομορφιών $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$:

Ορισμός 6.5.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Ορίζουμε την* **κατηγορία ιδιομορφιών (singularity category)** *της $\mathcal{A}$ ως το πηλίκο (με την έννοια του Verdier):*

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A}) = \mathsf{D}^b(\mathcal{A})/\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A})$$

Σχόλιο 6.5.2. Προφανώς, η κατηγορία ιδιομορφιών, εφόσον αποτελεί ένα πηλίκο μίας παραγόμενης κατηγορίας είναι τριγωνισμένη και εφοδιασμένη με μία φυσική τριγωνική δομή όπου τα διακεκριμένα τρίγωνα επάγονται από σύντομες ακριβείς ακολουθίες συμπλόκων.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε σε αυτό το πλαίσιο μία κατηγορία αντίστοιχη της $\underline{\mathsf{APC}}(R)$:

Ορισμός 6.5.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα.. Θα συμβολίζουμε με*

$$\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$$

την ομοτοπική κατηγορία των **ακυκλικών συμπλόκων από προβολικά αντικείμενα** *της $\mathcal{A}$. Η $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\mathcal{A})$, δηλαδή, είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η οποία έχει ως αντικείμενα ακυκλικά σύμπλοκα της μορφής*

$$P^\bullet\colon \cdots \longrightarrow P^{n-1} \longrightarrow P^n \longrightarrow P^{n_1} \longrightarrow \cdots$$

προβολικών όπου το P^n είναι ένα προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 6.5.4. *Η κατηγορία $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\mathcal{A})$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\mathcal{A})$ είναι κλειστή στον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων και στους κώνους μορφισμών ιδιότητες που προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό της $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\mathcal{A})$ καθώς και από το γεγονός ότι η $\mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ είναι κλειστή στα πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα (βλ. για παράδειγμα Πρόταση 6.2.7). ∎

Σχόλιο 6.5.5. Η $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\mathcal{A})$, κληρονομεί την φυσική τριγωνισμένη δομή της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\mathcal{A})$ επάγεται από μία ακριβή ακολουθία συμπλόκων η οποία είναι διασπάσιμη αν ξεχάσουμε τα διαφορικά.

Μένει να ορίσουμε μία κατηγορία η οποία θα είναι αντίστοιχη της ευσταθούς κατηγορίας των maximal Cohen-Macaulay προτύπων. Ωστόσο, όπως είναι φανερό, εφόσον το πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε δεν είναι δακτύλιος, αλλά μία αβελιανή κατηγορία, δεν έχει νόημα η έννοια του προτύπου. Θα χρειαστούμε έναν γενικότερο ορισμό, ο οποίος όμως διατηρεί την ιδιότητα «Cohen-Macaulay». Για τον σκοπό αυτόν, θα ορίσουμε τα Gorenstein προβολικά αντικείμενα της κατηγορίας. Τα ακόλουθα προέρχονται από τους H. Matsui και R. Takahashi στο [38].

Κατ αναλογία με την περίπτωση των προτύπων και τον Ορισμό 6.2.1, ορίζουμε την έννοια μίας πλήρης ανάλυσης ενός αντικειμένου σε μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα:

Ορισμός 6.5.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και M ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Τότε, μία* **πλήρης προβολική ανάλυση (complete projective resolution)** *στην $\mathcal{A}$ είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο $P^\bullet$:*

$$P^\bullet\colon \cdots \longrightarrow P^{n-1} \xrightarrow{\partial_P^{n-1}} P^n \xrightarrow{\partial_P^n} P^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$ το οποίο παραμένει ακριβές αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Q)$ για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\mathcal{A}$.

Σχόλιο 6.5.7. Υπενθυμίζουμε ότι αν $P^\bullet \longrightarrow M$ είναι μία προβολική ανάλυση του M

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

τότε συμβολίζουμε με $\Omega^1 M$ τον πυρήνα του μορφισμού $f\colon P^0 \longrightarrow M$, τον οποίον και καλούμε την **πρώτη συζυγία** του M. Η **n-οστή συζυγία** του M στη συνέχεια ορίζεται επαγωγικά θέτοντας $\Omega^n M = \Omega(\Omega^{n-1}M)$ για κάθε $n \leqslant -1$. Για λόγους ευκολίας στον συμβολισμό θέτουμε επιπλέον $\Omega^0 M = M$.

Δυϊκά, αν

$$M \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^3 \longrightarrow \cdots$$

είναι μία προβολική συνανάλυση του M ορίζουμε την **πρώτη συν-συζυγία** του M ως $\Omega^{-1}M = \mathsf{Coker}M \longrightarrow P^1$ και επαγωγικά την **n-οστή συν-συζυγία** του M θέτοντας $\Omega^{-n}M = \Omega^{-1}(\Omega^{-(n-1)}M)$, για κάθε $n \geqslant 1$.

Παρατήρηση 6.5.8. Εφόσον η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα, για κάθε αντικείμενο M της $\mathcal{A}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει η n-οστή συζυγία του M και μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega^n M \longrightarrow P^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$ με $P^i \in \mathsf{proj}\mathcal{A}$ για κάθε $-n+1 \leqslant i \leqslant 0$. Η η n-οστή συζυγία του M είναι μοναδικώς προσδιορισμένη με ακρίβεια προβολικής ισοδυναμίας, δηλαδή μοναδικώς προσδιορισμένη με ακρίβεια ισομορφισμού στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathsf{proj}\mathcal{A}$.

Ο ακόλουθος ορισμός εισήχθηκε από τους Enochs-Jenda το 1995 στο [21].

Ορισμός 6.5.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και M ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Το M καλείται* **Gorenstein προβολικό** *αντικείμενο αν υπάρχει μία πλήρης προβολική ανάλυση $P^\bullet$ έτσι ώστε $M \cong \mathsf{Im}\partial_P^0 = \mathsf{Ker}\partial_P^1$.*

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "\partial_P^{-1}"] & P^0 \arrow[rr, "\partial_P^0"] \arrow[dr] & & P^1 \arrow[r, "\partial_P^1"] & P^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & M \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Τότε θα λέμε ότι το M έχει μία πλήρης προβολική ανάλυση $P^\bullet$ ή ότι η $P^\bullet$ είναι μία πλήρης προβολική ανάλυση του M. Η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από όλα τα Gorenstein προβολικά αντικείμενα συμβολίζεται με $\mathsf{Gproj}\mathcal{A}$ και καλείται η **κατηγορία των Gorenstein προβολικών** *αντικειμένων της $\mathcal{A}$.*

Σχόλιο 6.5.10. Άμεσα, από τον ορισμό ενός Gorenstein προβολικού αντικειμένου, βλέπουμε ότι κάθε προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ είναι Gorenstein προβολικό, συνεπώς η $\mathsf{proj}\mathcal{A}$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{Gproj}\mathcal{A}$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την ευσταθή κατηγορία:

$$\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} = \mathsf{Gproj}\mathcal{A}/\mathsf{proj}\mathcal{A}$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες των Gorenstein προβολικών αντικειμένων είναι επίσης άμεσες συνέπειες του Ορισμού 6.5.9.

Πρόταση 6.5.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Αν M είναι ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$, τότε για κάθε προβολικό αντικείμενο $Q \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει:*

$$\mathsf{Ext}^n(M, Q) = 0$$

Απόδειξη. Εφόσον το M είναι Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$, θα υπάρχει μία πλήρης ανάλυση $P^\bullet$ του M έτσι ώστε το σύμπλοκο

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P^1, Q) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P^0, Q) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P^{-1}, Q) \longrightarrow \cdots$$

να είναι ακριβές για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$. Παίρνοντας συνομολογία σε αυτό το σύμπλοκο για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, προκύπτει το ζητούμενο. ■

Πρόταση 6.5.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Τότε, αν $P^\bullet$ είναι μία πλήρης προβολική ανάλυση στην $\mathcal{A}$, οι εικόνες $\mathsf{Im}\partial^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ είναι Gorenstein προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Επιπλέον, όλες οι ακριβείς ακολουθίες της μορφής:*

$$\cdots \longrightarrow P^{n-1} \longrightarrow P^n \longrightarrow \mathsf{Im}\partial^n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathsf{Im}\partial^n \longrightarrow P^{n+1} \longrightarrow P^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

και

$$0 \longrightarrow \mathsf{Im}\partial^n \longrightarrow P^{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^m \longrightarrow \mathsf{Im}\partial^m \longrightarrow 0$$

όπου $n, m \in \mathbb{Z}$ με $n < m$, παραμένουν ακριβείς αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Q)$ για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ενός Gorenstein προβολικού αντικειμένου. ■

Λήμμα 6.5.13. *Αν M είναι ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει η n-οστή συζυγία του M.*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^n \longrightarrow \Omega^{-n}M \longrightarrow 0$$

Μάλιστα, αυτή η συν-συζυγία είναι μοναδικώς προσδιορισμένη με ακρίβεια προβολικής ευστάδειας, δηλαδή είναι μοναδική με ακρίβεια ισομορφισμού στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Η ύπαρξη της n-οστής συν-συζυγίας του M προκύπτει από τον ορισμό ενός Gorenstein προβολικού αντικειμένου. Αν $P^\bullet$ και $Q^\bullet$ είναι δύο πλήρεις προβολικές αναλύσεις ενός Gorenstein προβολικού αντικειμένου M, υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & P^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "x"] & \Omega_P^{-1}M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & Q^1 \arrow[r] & \Omega_Q^{-1}M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι οριζόντιες γραμμές είναι σύντομες ακριβείς ακολουθίες. Η ύπαρξη του μορφισμού $x\colon P^1 \longrightarrow Q^1$ οφείλεται στο ότι $\mathsf{Ext}^1(\Omega_P^{-1}M), Q^1) = 0$, ενώ ο γ είναι ο επαγόμενος μορφισμός στους συνπυρήνες. ■

Σχόλιο 6.5.14. Εφόσον η αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα, βλέπουμε ότι ένα αντικείμενο M της $\mathcal{A}$ είναι Gorenstein προβολικό αν-ν $M \in {}^{\perp}\mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ και υπάρχει μία προβολική συν-ανάλυση του M:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^2 \longrightarrow \cdots$$

η οποία παραμένει ακριβής αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Q)$ για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$.

Από την μοναδικότητα των συζυγιών και των συν-συζυγιών στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ προκύπτει η ύπαρξη ενός **loop-space functor**

$$\Omega_G\colon \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \longrightarrow \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$$

ο οποίος αντιστοιχίζει ένα Gorenstein προβολικό M στην πρώτη συζυγία του $\Omega^1 M$ και έναν μορφισμό $f\colon M \longrightarrow N$ της $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ στον επαγόμενο μορφισμό $\Omega_G f\colon \Omega^1 M \longrightarrow \Omega^1 N$. Δυϊκά, ορίζεται ένας **suspension functor**

$$\Sigma_G\colon \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \longrightarrow \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$$

ο οποίος αντιστοιχίζει ένα Gorenstein προβολικό M στην πρώτη συν-συζυγία του $\Omega^{-1}M$ και έναν μορφισμό $f\colon M \longrightarrow N$ της $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ στον επαγόμενο μορφισμό $\Omega^{-1}f\colon \Omega^{-1}M \longrightarrow \Omega^{-1}N$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P_M^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "x"] & \Omega^{-1}M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Omega^{-1}f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & P_N^1 \arrow[r] & \Omega_Q^1 N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Παρόμοια με το παραπάνω λήμμα, ο μορφισμός x υπάρχει αφού $\mathsf{Ext}^1(\Omega^{-1}M, P_N^1) = 0$, ενώ ο $\Omega^{-1}f$ είναι ο επαγόμενος μορφισμός στους συνπυρήνες.

Όπως θα περίμενε κάποιος, ο ενδοσυναρτητής Ω_G, κατ αντιστοιχία με τον loop space functor $\Omega_R \colon \underline{\mathsf{MCM}}(R) \longrightarrow \underline{\mathsf{MCM}}(R)$ αποτελεί όντως ισοδυναμία κατηγοριών, με αντίστροφο τον συναρτητή Σ_G. Το επιχείρημα αυτό μπορεί να αποδειχθεί άμεσα χρησιμοποιώντας τον ορισμό των παραπάνω συναρτητών και η απόδειξή του θα παραλειφθεί προς το παρόν. Ένα παράδειγμα αποτελεί ο Ορισμός 5.4.24, όπου αποδεικνύεται το αντίστοιχο συμπέρασμα για την περίπτωση των προτύπων. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα γενικότερο θεώρημα το οποίο εξασφαλίζει ότι η ευσταθής κατηγορία είναι Frobenius, ιδιότητα που σύμφωνα με τον Happel στο [28] είναι αρκετή σε αυτό το πλαίσιο για να αποτελεί ο συναρτητής Ω_G ισοδυναμία κατηγοριών.

Ένα φυσικό ερώτημα που προκύπτει είναι αν η ευσταθής κατηγορία $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ είναι τριγωνισμένη. Παρόλο που στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάστηκε ένα θεώρημα το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τριγωνισμού σε μία ευσταθή κατηγορία (βλ. Θεώρημα 5.4.19), σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε μία πρόταση του Α. Μπεληγιάννη στο [10], η οποία παρέχει επιπλέον πλούσιες πληροφορίες για την κατηγορία $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$ και την ευσταθή της.

Πριν ξεκινήσουμε, θα επαληθεύσουμε την ακόλουθη ιδιότητα της κατηγορίας των Gorenstein προβολικών αντικειμένων:

Πρόταση 6.5.15. *([38, Remark 3.4.]) Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Η κατηγορία* $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$ *των προβολικών αντικειμένων της $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στους ευθείς αθροιστέους.*

Απόδειξη. Έστω M, N αντικείμενα της $\mathcal{A}$ έτσι ώστε το αντικείμενο $M \oplus N$ να είναι Gorenstein προβολικό. Θα δείξουμε ότι τα M και N είναι επίσης Gorenstein προβολικά. Αφού το $M \oplus N \in \mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$, θα υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \oplus N \xrightarrow{(f,g)} P \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

όπου $P \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ και $L \in \mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$. Προκύπτουν έτσι οι σύντομες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\mathsf{coker} f} \mathsf{Coker} f \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{\mathsf{coker} g} \mathsf{Coker} g \longrightarrow 0$$

καθώς και ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & M \oplus N \arrow[r, "(f,g)"] & P \arrow[u] \arrow[r] & L \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \oplus N \arrow[u, equal] \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}"] & P \oplus P \arrow[u, "(1_P\ 1_P)"'] \arrow[r] & \mathsf{Coker} f \oplus \mathsf{Coker} g \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & & P \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1_P \\ -1_P \end{pmatrix}"'] \arrow[r, equal] & P \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

του οποίου οι οριζόντιες γραμμές και οι κάθετες στήλες είναι σύντομες ακριβείς ακολουθίες. Αφού το L είναι Gorenstein προβολικό, $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L, P) = 0$ και η σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \mathsf{Coker} f \oplus \mathsf{Coker} g \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

διασπάται. Προκύπτει ότι για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ ισχύει $\mathsf{Ext}^1(\mathsf{Coker}f, Q) = 0$. Ως αποτέλεσμα, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

η οποία παραμένει ακριβής αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Q)$ για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$. Τότε, η ακολουθία:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^0 \oplus P^1 \longrightarrow P^0 \oplus P^1 \oplus P^2 \longrightarrow \cdots$$

είναι επίσης ακριβής και παραμένει ακριβής αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Q)$ για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$, συνεπώς το M είναι Gorenstein προβολικό. ∎

Ο Α. Μπεληγιάννης στο [10, Definition 2.12] ορίζει γενικότερα για μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$ και μία πλήρη προσθετική υποκατηγορία $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ την έννοια ενός $\mathcal{X}$-Gorenstein αντικειμένου. Ένα αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ καλείται **$\mathcal{X}$-Gorenstein** αν-ν το $\mathcal{C}$ έχει μία **συναρτησιακά $\mathcal{X}$-ακριβή** ανάλυση και συν-ανάλυση. Δηλαδή, το C καλείται $\mathcal{X}$-Gorenstein αν-ν υπάρχει ένα σύμπλοκο:

$$A^{\bullet}: \qquad \cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{\partial_A^n} A^n \longrightarrow A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

με $C = \mathsf{Im}\partial_A^i$ για κάποιο $i \in \mathbb{Z}$, με το $A^{\bullet}$ να πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το $A^{\bullet}$ παραμένει ακριβές αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ για κάθε $X \in \mathcal{X}$ και τότε το $A^{\bullet}$ καλείται **συναλλοίωτα $\mathcal{X}$-ακριβές**.
- Το $A^{\bullet}$ παραμένει ακριβές αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ για κάθε $X \in \mathcal{X}$ και τότε το $A^{\bullet}$ καλείται **αντισυναλλοίωτα $\mathcal{X}$-ακριβές**.

Θέτοντας τώρα στην θέση της $\mathcal{X}$ την κατηγορία $\mathsf{proj}\,\mathcal{A}$, βλέπουμε ότι αφού ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, -)$ είναι ακριβής για κάθε $Q \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$, τα proj-Gorenstein αντικείμενα της $\mathcal{A}$ είναι ακριβώς τα Gorenstein προβολικά αντικείμενα που ορίσαμε.

Υπενθυμίζουμε εν συντομία τους εξής ορισμούς για μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$ και μία πλήρη προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{X}$ η οποία είναι κλειστή στους ευθείς αθροιστέους και στους ισομορφισμούς (βλ. [10]):

- Ένας μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{C}$ καλείται $\mathcal{X}$-epic αν ο επαγόμενος ομομορφισμός ομάδων $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, f)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B)$ είναι επιμορφισμός για κάθε $X \in \mathcal{X}$.
- Ένας μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{C}$ καλείται $\mathcal{X}$-monic αν ο επαγόμενος ομομορφισμός ομάδων $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(f, X)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ είναι επιμορφισμός για κάθε $X \in \mathcal{X}$.
- Ένας μορφισμός $\chi_A\colon X_A \longrightarrow A$ καλείται μία δεξιά $\mathcal{X}$-προσέγγιση του A, αν ο χ_A είναι $\mathcal{X}$-epic και $X_A \in \mathcal{X}$.
- Ένας μορφισμός $\chi^A\colon A \longrightarrow X^A$ καλείται μία αριστερή $\mathcal{X}$-προσέγγιση του A, αν ο χ^A είναι $\mathcal{X}$-monic και $X^A \in \mathcal{X}$.
- Η υποκατηγορία $\mathcal{X}$ καλείται αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη (αντίστοιχα συναλλοίωτα πεπερασμένη), αν κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C}$ έχει μία δεξιά (αντίστοιχα αριστερή) $\mathcal{X}$-προσέγγιση.

Τέλος, θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.5.16. *([10, Definition 2.10.]) Έστω $\mathcal{C}$ μία προσθετική κατηγορία και $\mathcal{X}$ μία πλήρης προσθετική υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή στους ευθείς αθροιστέους και στους ισομορφισμούς. Έστω, επιπλέον $\mathcal{A}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Αν κάθε $\mathcal{X}$-epic μορφισμός έχει πυρήνα στην $\mathcal{C}$, τότε η $\mathcal{A}$ καλείται **$\mathcal{X}$-επιλύουσα ($\mathcal{X}$-resolving)**, αν $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στους πυρήνες των $\mathcal{X}$-epics μορφισμών. Επιπλέον, αν $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ είναι ένα διάγραμμα στην C στο οποίο ο μορφισμός f είναι $\mathcal{X}$-epic, $g = \mathsf{ker}f$ και $A, C \in \mathcal{A}$, τότε $B \in \mathcal{A}$.*

Λόγω του ότι η θεωρία η οποία αφορά $\mathcal{X}$-Gorenstein αντικείμενα ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας διατριβής, η απόδειξη της παρακάτω πρότασης θα παραλειφθεί, ενώ για περισσότερα παραπέμπουμε στο [10].

Πρόταση 6.5.17. *([10, Proposition 2.13.]) Έστω $\mathcal{C}$ μία ακριβής κατηγορία και $\mathcal{X}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Αν η $\mathcal{X}$ είναι αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη, κάθε $\mathcal{X}$-epic μορφισμός είναι ένας admissible επιμορφισμός και κάθε αριστερή $\mathcal{X}$-προσέγγιση ενός $\mathcal{X}$-Gorenstein αντικειμένου είναι ένας admissible μονομορφισμός, τότε η $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}(\mathcal{C})$ είναι μία $\mathcal{X}$ επιλύουσα Frobenius ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και η ευσταθής κατηγορία $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}(\mathcal{C})/\mathcal{X}$ είναι πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $(\mathcal{C}/\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}, \Delta_{\mathcal{X}})$.*

Στόχος μας είναι να εφαρμόσουμε την Πρόταση 6.5.17 στα πλαίσια της κατηγορίας $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$. Θα ακολουθήσουμε τα ακόλουθα βήματα στα οποία επίσης εξηγούμε την ορολογία που χρησιμοποιείται:

1. Θέτουμε $\mathcal{C} = \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα και θεωρούμε την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{X} = \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$.

2. Όπως αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 5.4.21, εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα, η πλήρης υποκατηγορία της $\mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ είναι μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$.

3. Ένας μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{A}$ είναι proj-epic αν-ν ο f είναι επιμορφισμός. Πράγματι, αν ο $f\colon A \longrightarrow B$ είναι επιμορφισμός, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία της μορφής:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

   στην $\mathcal{A}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ στην παραπάνω σύντομη ακριβή ακολουθία για ένα τυχαίο $P \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$, αφού $\mathsf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(P,K) = 0$, προκύπτει ότι ο ομομορφισμός ομάδων $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,f)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,B)$ είναι επιμορφισμός, δηλαδή ο f είναι proj-epic.

   Έστω τώρα ότι ο $f\colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{A}$ είναι proj-epic. Αφού η $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα μπορούμε να επιλέξουμε έναν επιμορφισμό $\alpha\colon P \longrightarrow B$ από ένα $P \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$. Ο α θα αναλύεται μέσω του f όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα διότι ο f είναι proj-epic.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "u"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & C \end{tikzcd}$$

   Τότε, αν $g_1, g_2\colon B \longrightarrow C$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{A}$ τέτοιοι ώστε $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, έχουμε:

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 \circ f \circ u = g_2 \circ f \circ u \Longrightarrow g_1 \circ \alpha = g_2 \circ \alpha \Longrightarrow g_1 = g_2$$

   και ο f είναι επιμορφισμός.

4. Στην Πρόταση 6.5.17, η έννοια admissible επιμορφισμός χρησιμοποιείται σύμφωνα με τον Quillen (βλ. [47]), κατά τον οποίον υπενθυμίζουμε ότι ένας επιμορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{A}$ θα καλείται admissible, αν υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία της μορφής:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

   με $K \in \mathsf{ob}(\mathcal{A})$. Εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή, κάθε μορφισμός στην $\mathcal{A}$ έχει πυρήνα στην $\mathcal{A}$, άρα κάθε proj-epic μορφισμός, δηλαδή κάθε επιμορφισμός, είναι ένας admissible επιμορφισμός.

5. Κάθε αριστερή proj-προσέγγιση ενός Gorenstein προβολικού αντικειμένου της $\mathcal{A}$ είναι ένας admissible μονομορφισμός. Πράγματι, έστω M ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και $f\colon M \longrightarrow P$ μία αριστερή proj-προσέγγιση του M. Εφόσον το M είναι Gorenstein προβολικό θα εμφανίζεται σε μία σύντομη ακριβή ακολουθία της μορφής $0 \longrightarrow M \longrightarrow Q^1 \longrightarrow \Omega_P^{-1}M \longrightarrow 0$ όπου $Q^\bullet$ είναι μία πλήρης προβολική ανάλυση του M. Αποκτούμε έτσι ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\mathsf{coker} f"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathsf{Coker} f \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] & Q^1 \arrow[r, "\pi"] & \Omega_P^{-1}M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $\alpha\colon P \longrightarrow Q^1$ υπάρχει αφού ο f είναι proj-monic, ενώ ο γ είναι ο επαγόμενος μορφισμός στους συνπυρήνες. Εύκολα βλέπουμε ότι ο f είναι μονομορφισμός: $g_1, g_2\colon C \longrightarrow M$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{A}$ με $f \circ g_1 = f \circ g_2$, τότε:

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Longrightarrow \alpha \circ f \circ g_1 = \alpha \circ f \circ g_2 \Longrightarrow \iota \circ g_1 = \iota \circ g_2 \Longrightarrow g_1 = g_2$$

Συνεπώς ο f θα είναι ένας admissible μονομορφισμός (με την έννοια του Quillen).

6. Η κατηγορία $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}(\mathcal{C})$ της Πρότασης 6.5.17 ορίζεται ως η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία αποτελείται από όλα τα $\mathcal{X}$-Gorenstein αντικείμενα. Στο πλαίσιο στο οποίο βρισκόμαστε επομένως, η $\mathcal{G}_{\mathsf{proj}\,\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ είναι η $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$.

Συνεπώς, η πλήρης υποκατηγορία $\mathsf{proj}\,\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, ικανοποιεί τις συνθήκες τις Πρότασης 6.5.17. Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στις ακόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 6.5.18. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Η πλήρης υποκατηγορία* $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ *η οποία αποτελείται από όλα τα Gorenstein προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$ είναι μία* proj-*επιλύσιμη ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία είναι Frobenius.*

Παρατήρηση 6.5.19. Η ιδιότητα «proj-επιλύσιμη και ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{A}$» έχει τις ακόλουθες συνέπειες για την $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$:

1. Η $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$ είναι κλειστή στους πυρήνες επιμορφισμών, δηλαδή για κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$, αν τα M_2 και M_3 είναι Gorenstein προβολικά, τότε και το M_1 είναι Gorenstein προβολικό.

2. Η $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις επεκτάσεις, δηλαδή για κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

στην $\mathcal{A}$, αν τα M_1 και M_3 είναι Gorenstein προβολικά, τότε και το M_2 είναι Gorenstein προβολικό.

Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε το ακόλουθο συμπέρασμα:

Πόρισμα 6.5.20. *Ο loop-space functor $\Omega_G\colon \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών με αντίστροφο του συναρτητή suspension $\Sigma_G\colon \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}}$.*

Απόδειξη. Εφόσον η κατηγορία $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$ είναι μία ακριβής υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ η οποία είναι Frobenius, το ζητούμενο προκύπτει από τον Happel στο [29]. ■

Τέλος, επαληθεύσαμε το ακόλουθο για την ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}}$:

Πρόταση 6.5.21. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Η ευσταθής κατηγορία $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ είναι μία πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $(\mathcal{A}/\operatorname{proj}\mathcal{A}, \Omega_{\operatorname{proj}\mathcal{A}}, \Delta_{\operatorname{proj}\mathcal{A}})$.*

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η $\operatorname{proj}\mathcal{A}$ είναι μία αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{A}$ και επομένως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.4.19, αποκτούμε έναν αριστερό τριγωνισμό της $(\mathcal{A}/\operatorname{proj}\mathcal{A}, \Omega_{\operatorname{proj}\mathcal{A}})$ με βάση τα proj-διακεκριμένα τρίγωνα (βλ. Ορισμό 5.4.13) ή ισοδύναμα, με βάση τα proj-επαγόμενα (βλ. Ορισμό 5.4.15). Η πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ θα διατηρεί αυτήν την τριγωνική δομή και μπορούμε έτσι να ορίσουμε τα Gproj-διακεκριμένα τρίγωνα και τα Gproj-επαγόμενα τρίγωνα. Επειδή η κατασκευή αυτών των τριγώνων έχει ήδη αναλυθεί, δεν θα αναφερθούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες. Ως παράδειγμα, θα περιγράψουμε μία κατασκευή ενός διακεκριμένου τριγώνου στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$. Το τρίγωνο αυτό θα κατασκευασθεί ως ένα δεξιά διακεκριμένο τρίγωνο, ωστόσο λαμβάνοντας υπόψιν ότι η $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ είναι μία τριγωνισμένη κατηγορία και ότι ο συναρτητής Ω_G είναι ισοδυναμία με αντίστροφο τον Σ_G, η ακόλουθη διαδικασία θα περιγράφει πλήρως τα διακεκριμένα τρίγωνα στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$. Τα επαγόμενα τρίγωνα ορίζονται αντίστοιχα.

Ορίζουμε ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ όπως ακολούθως: Θεωρούμε έναν μορφισμό μεταξύ Gorenstein προβολικών αντικειμένων $f\colon M \longrightarrow N$. Εξ ορισμού, θα υπάρχει μία εμβάπτιση $\iota_M\colon M \longrightarrow Q_M$ σε ένα προβολικό αντικείμενο $Q_M \in \operatorname{proj}\mathcal{A}$, έτσι ώστε ο συνπυρήνας $\Sigma_G M$ να είναι επίσης Gorenstein προβολικό. Ορίζουμε τον κώνο C_f του μορφισμού f ως το pushout των f και ι_M. Με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε ένα μεταθετικό διάγραμμα του οποίου οι οριζόντιες γραμμες είναι σύντομες ακριβείς ακολουθίες:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "f"] & Q_M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d] & \Sigma_G M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & C_f \arrow[r, dashed, "p"] & \Sigma_G M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 6.5.22. *Ένα τρίγωνο*

$$\underline{A} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{B} \xrightarrow{\underline{v}} \underline{C} \xrightarrow{\underline{w}} \Sigma_R \underline{A}$$

στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ καλείται **διακεκριμένο**, *αν είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της μορφής*

$$\underline{M} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{N} \xrightarrow{\underline{\iota}} \underline{C_f} \xrightarrow{-\underline{p}} \Sigma_G \underline{M}$$

όπου $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός Gorenstein αντικειμένων της $\mathcal{A}$.

Σχόλιο 6.5.23. Σύμφωνα με την ορολογία των Α. Μπεληγιάννη και Ι. Reiten στο [12, Definition 3.1.], αν $\mathcal{C}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία και $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ είναι δύο πλήρεις υποκατηγορίες της $\mathcal{C}$ οι οποίες είναι κλειστές στους ισομορφισμούς και στους ευθείς αθροιστέους, το ζεύγος $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ θα καλείται ένα **cotorsion pair** αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

1. $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$.
2. Για κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{f_C} C \longrightarrow 0$ με $Y_C \in \mathcal{Y}$ και $X_C \in \mathcal{X}$.
3. Για κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow C \xrightarrow{G^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0$ με $Y^C \in \mathcal{Y}$ και $X^C \in \mathcal{X}$.

Οι κατηγορίες $\operatorname{Gproj}\mathcal{A}$ και $\operatorname{proj}\mathcal{A}$ ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες και αποτελούν ένα cotorsion pair $(\operatorname{Gproj}\mathcal{A}, \operatorname{proj}\mathcal{A})$.

Παρατήρηση 6.5.24. Έχοντας ολοκληρώσει την μελέτη της κατηγορίας $\mathsf{Gproj}\mathcal{A}$, μένει να εξετάσουμε την σχέση της με την κατηγορία των maximal Cohen-Macaulay προτύπων. Θέτουμε στη θέση της $\mathcal{A}$, την κατηγορία $\mathsf{mod}\text{-}R$, την ευσταθή κατηγορία των πεπερασμένα παραγόμενων δεξιών R-προτύπων, όπου ο R είναι ένας δακτύλιος της Noether. Στην θέση της $\mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ θέτουμε την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{mod}\text{-}R$, η οποία αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα. Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε την $\mathsf{Gproj}\,\mathsf{mod}\text{-}R$, την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{mod}\text{-}R$ η οποία αποτελείται από όλα τα Gorenstein προβολικά R-πρότυπα.

Επιβάλλουμε επιπλέον στον R μία συνθήκη περατότητας, να έχει αριστερά και δεξιά πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση σαν ένα R-πρότυπο, με άλλα λόγια να είναι Gorenstein. Η ιδιότητα αυτή είχε ουσιαστική σημασία στον ορισμό των maximal Cohen-Macaulay R-προτύπων στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι, θεωρούμε την $\mathsf{MCM}(R)$, την κατηγορία των των maximal Cohen-Macaulay προτύπων υπεράνω του δακτυλίου R.

Έστω $M \in \mathsf{MCM}(R)$ ένα MCM πρότυπο. Τότε, όπως έχουμε δει, υπάρχει μία πλήρης ανάλυση του M από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα, η οποία παραμένει ακριβής αν εφαρμόσουμε τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-,R)$. Προκύπτει ότι το M αποτελεί ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathsf{mod}\text{-}R$ με την έννοια του Ορισμού 6.5.9.

Από την άλλη πλευρά, έστω M ένα Gorenstein προβολικό R-πρότυπο. Εξ ορισμού, θα υπάρχει μία προβολική συν-ανάλυση του M, επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.13, το M είναι maximal Cohen-Macaulay.

Συμπεραίνουμε ότι, στα πλαίσια ενός δακτυλίου της Noether με πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση σαν ένα δεξιό και αριστερό R-πρότυπο, οι έννοιες Gorenstein προβολικό και maximal Cohen-Macaulay συμπίπτουν. Η θεωρία που αναπτύχθηκε σε αυτήν την παράγραφο αποτελεί δηλαδή μία γενίκευση της θεωρίας των MCM προτύπων. Ακόμη γενικότερα, στη βιβλιογραφία (βλ. [9]) αν Λ είναι μία άλγεβρα του Artin, δηλαδή μία άλγεβρα Λ υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου του Artin R, ο οποίος είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο τα Gorenstein προβολικά Λ-πρότυπα καλούνται Cohen-Macaulay.

Ανακεφαλαιώνοντας, ως αυτό το σημείο, ξεκινώντας με μία αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$ με αρκετά προβολικά αντικείμενα, έχουμε ορίσει την κατηγορία ιδιομορφιών $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$, την ομοτοπική κατηγορία των ακυκλικών προβολικών συμπλόκων $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$ και την $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$, την ευσταθή κατηγορία των Gorenstein προβολικών αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε τους ακόλουθους συναρτητές μεταξύ αυτών των κατηγοριών. Ο ορισμός τους, αλλά και τα επιχειρήματα που εξασφαλίζουν ότι είναι καλώς ορισμένοι, είναι ανάλογα με τους αντίστοιχους συναρτητές που ορίστηκαν σε προηγούμενη ενότητα, και γιαυτό θα παρουσιαστούν συνοπτικά.

Πρόταση 6.5.25. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα, και $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ η κατηγορία ιδιομορφιών της $\mathcal{A}$. Τότε, υπάρχει ένας φυσικός συναρτητής:*

$$\iota_{\mathcal{A}} \colon \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$$

ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ στο αντίστοιχο stalk complex του θεωρούμενο σαν αντικείμενο της $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$.

Επιπλέον, συμβολίζοντας με $\Sigma_{\mathsf{D}} \colon \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ τον αντίστροφο του συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$, ισχύει

$$\iota_{\mathcal{A}} \circ \Omega_G \cong \Sigma_{\mathsf{D}}^{-1}\iota_{\mathcal{A}}$$

όπου ο Ω_G είναι ο loop-space functor της $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathsf{D} \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ τον συναρτητή στην παραγόμενη κατηγορία και $\pi \colon \mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ τον συναρτητή στο πηλίκο. Συμβολίζουμε επιπλέον με $p \colon \mathcal{A} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}$ τον συναρτητή στην ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\,\mathsf{proj}\,\mathcal{A}$. Κάθε προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ απεικονίζεται μέσω της σύνθεσης $\pi \circ \mathsf{D}$ στο μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Θα υπάρχει επομένως ένας μοναδικός συναρτητής $\iota_{\mathcal{A}} \colon \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα κατηγοριών να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\mathsf{D}"] \arrow[drr, "p"'] & \mathsf{D}^b(\mathcal{A}) \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A}) \\ & & \underline{\mathcal{A}} \arrow[u, dashed, "\iota_{\mathcal{A}}"'] \end{tikzcd} \tag{6.21}$$

Θεωρώντας τον περιορισμό του $i_{\mathcal{A}}$ στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \subseteq \underline{\mathcal{A}}$ και χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό, προκύπτει ένας συναρτητής

$$\iota_{\mathcal{A}} \colon \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$$

Για κάθε Gorenstein προβολικό αντικείμενο M υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega_G M \longrightarrow P_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

η οποία όπως γνωρίζουμε ορίζει ένα διακεκριμένο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \iota_{\mathcal{A}}(M) \arrow[dl, "u"', "{[1]}"] & \\ \iota_{\mathcal{A}}(\Omega_G M) \arrow[rr] & & \iota_{\mathcal{A}}(P_M) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Εφόσον το $\iota_{\mathcal{A}}(P_M)$ αποτελεί το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$, ο μορφισμός u είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ (βλ. Λήμμα 3.3.5). Προκύπτει ότι

$$\Sigma_{\mathsf{D}}\iota_{\mathcal{A}} \circ \Omega_G \cong \iota_{\mathcal{A}} \Longrightarrow \iota_{\mathcal{A}} \circ \Omega_G \cong \Sigma_{\mathsf{D}}^{-1}\iota_{\mathcal{A}}$$

■

Υπενθυμίζουμε ότι αν $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$

$$C^\bullet \colon \ \cdots \longrightarrow C^{-n-1} \xrightarrow{\partial_C^{n-1}} C^{-n} \xrightarrow{\partial_C^{n}} C^{-n+1} \longrightarrow \cdots$$

τότε θέτουμε:

$$\Omega_n(C^\bullet) = \mathsf{Coker}\partial_C^{-n-1}$$

Προσπαθώντας να ορίσουμε έναν φυσικό συναρτητή από την $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$ στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$, μία πρώτη ιδέα η οποία είναι μάλιστα σύμφωνη με τον συναρτητή του Ορισμού 6.2.8 είναι να στείλουμε κάθε ακυκλικό σύμπλοκο από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$ στο αντικείμενο συνπυρήνα Ω_n. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος συναρτητής.

Πρόταση 6.5.26. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας συναρτητής*

$$\Omega_n \colon \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A})) \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}$$

ο οποίος αντιστοιχίζει ένα σύμπλοκο από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά $C^\bullet$ στο αντικείμενο $\Omega_n(C^\bullet)$ της $\mathcal{A}$ και έναν μορφισμό συμπλόκων $f \colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ στον επαγόμενο μορφισμό $\Omega_n(f) \colon \Omega_n(C^\bullet) \longrightarrow \Omega_n(D^\bullet)$ στους συνπυρήνες.

Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με Σ_{K}^{-1} τον αντίστροφο του συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$ και με $\Omega_{\mathcal{A}}$ τον loop space functor στην $\mathcal{A}$, προκύπτει μία φυσική ισοδυναμία συναρτητών:

$$\Omega_n \Sigma_{\mathsf{K}}^{-1} \cong \Omega_{\mathcal{A}} \Omega_n$$

Απόδειξη. Για την ύπαρξη του συναρτητή Ω_n αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μορφισμός συμπλόκων αντικειμένων της $\mathcal{A}$, ο οποίος είναι 0-ομοτοπικός αναλύεται μέσω ενός προβολικού αντικειμένου της $\mathcal{A}$. Το επιχείρημα αυτό έχει ήδη αποδειχθεί στην Πρόταση 6.2.9 για σύμπλοκα προτύπων, και η απόδειξη η οποία παρουσιάστηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί γενικά για σύμπλοκα αντικειμένων μίας αβελιανής κατηγορίας.

Η ισοδυναμία συναρτητών προκύπτει από τον τρόπο που ορίστηκαν οι παραπάνω συναρτητές. Για περισσότερα βλ. Λήμμα 6.2.12. ■

Είδαμε ότι ο συναρτητής Ω_n που μόλις ορίστηκε δεν παίρνει τιμές στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$, αλλά σε όλην την $\underline{\mathcal{A}}$. Η ύπαρξη πλήρης προβολικής ανάλυσης για τα αντικείμενα $\Omega_n(C^\bullet)$ δεν ικανή για να είναι Gorenstein προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Όπως και με την περίπτωση των προτύπων, για να κατασκευάσουμε έναν συναρτητή $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A})) \longrightarrow \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ θα χρειαστεί να επιβάλλουμε κάποιες συνθήκες περατότητας στην κατηγορία $\mathcal{A}$, κάτι που θα γίνει στη συνέχεια.

Από την άλλη πλευρά, είναι εύκολο να κατασκευάσουμε έναν φυσικό συναρτητή ο οποίος θα προκύψει στη συνέχεια ως ο αντίστροφος του Ω_0 και αντιστοιχίζει κάθε Gorenstein προβολικό στην επιλεγμένη πλήρη προβολική ανάλυσή του.

Πρόταση 6.5.27. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Τότε υπάρχει ένας φυσικός συναρτητής:*

$$\Omega_0' \colon \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$$

ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε Gorenstein προβολικό στην επιλεγμένη πλήρη προβολική ανάλυσή του.

Απόδειξη. Έστω M ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Τότε, υπάρχει μία πλήρης ανάλυση $P^\bullet$ του M της μορφής

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "\partial_P^{-1}"] & P^0 \arrow[rr, "\partial_P^0"] \arrow[dr] & & P^1 \arrow[r, "\partial_P^1"] & P^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & M \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

η οποία είναι μάλιστα μοναδική στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$. Αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ Gorenstein αντικειμένων, προκύπτει ένας μορφισμός συμπλόκων από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_M^{-1} \arrow[rr, "\partial_{P_M}^{-1}"] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "f^{-1}"] & & P_M^0 \arrow[rr, "\partial_{P_M}^0"] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "f^0"] & & P_M^1 \arrow[rr, "\partial_{P_M}^1"] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "f^1"] & & P_M^2 \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "f^2"] & \cdots \\
& & \Omega_G M \arrow[ur] \arrow[dd, dashed, "\Omega_G f"] & & M \arrow[ur] \arrow[dd, "f"] & & \Sigma_G M \arrow[ur] \arrow[dd, dashed, "\Sigma_G f"] & & \\
\cdots \arrow[r] & P_N^{-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_N^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_N^1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_N^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & \Omega_G N \arrow[ur] & & N \arrow[ur] & & \Sigma_G N \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Η ύπαρξη των μορφισμών f^n, για $n \leqslant 0$ οι οποίοι επεκτείνουν τον f είναι ήδη γνωστή από το Θεώρημα 4.9.15. Άλλωστε, (βλ. Παρατήρηση 6.5.8) κάθε μορφισμός $f\colon M \longrightarrow N$ μεταξύ Gorenstein αντικειμένων επεκτείνεται σε έναν μορφισμό $\Omega_G f\colon \Omega_G M \longrightarrow \Omega_G N$. Οι μορφισμοί f^n για $n < 0$ προκύπτουν στην συνέχεια επαγωγικά. Αντίστοιχα, στο Λήμμα 6.5.13, δείξαμε ότι ένας μορφισμός $f\colon M \longrightarrow N$ μεταξύ Gorenstein αντικειμένων επεκτείνεται σε έναν μορφισμό $\Sigma_G f\colon \Sigma_G M \longrightarrow \Sigma_G N$, αφού $\mathsf{Ext}^1(\Sigma_G M, P_N^1) = 0$. Η ύπαρξη των μορφισμών f^n για $n > 1$ προκύπτει επαγωγικά. Όπως έχουμε δει αυτοί οι μορφισμοί είναι μοναδικοί στην ευσταθή κατηγορία.

($\star$) Για να δείξουμε ότι ο συναρτητής αυτός είναι καλώς ορισμένος, αρκεί να δείξουμε ότι αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ Gorenstein αντικειμένων ο οποίος αναλύεται μέσω ενός προβολικού, ο επαγόμενος μορφισμός συμπλόκων στις πλήρεις προβολικές αναλύσεις είναι 0-ομοτοπικός. Έστω $f\colon M \longrightarrow N$ ένας μορφισμός μεταξύ Gorenstein αντικειμένων ο οποίος αναλύεται μέσω ενός προβολικού. Τότε, εφόσον ο μορφισμός $P_N^0 \longrightarrow N$ είναι επιμορφισμός, προκύπτει ότι ο f θα αναλύεται μέσω του προβολικού P_N^0. Μπορούμε έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε εξ αρχής ότι ο f αναλύεται μέσω ενός μορφισμού $\alpha^0\colon M \longrightarrow P_N^0$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, P_N^0)$ στη σύντομη ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow M \longrightarrow P_M^1 \longrightarrow \Sigma_G M \longrightarrow 0$, αφού $\mathsf{Ext}^1(\Sigma_G M, P_N^0) = 0$, προκύπτει μία σύντομη ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(\Sigma_G M, P_N^0) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P_M^1, P_N^0) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(M, P_N^0) \longrightarrow 0$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός $\alpha^0\colon M \longrightarrow P_N^0$ αναλύεται μέσω ενός μορφισμού $h^1\colon P_M^1 \longrightarrow P_N^0$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μορφισμούς $h^n\colon P^{n+1} \longrightarrow P^n$ οι οποίοι αποτελούν μία ομοτοπία $f \rightsquigarrow 0$. ■

Παρατήρηση 6.5.28. Για την απόδειξη της ύπαρξης του συναρτητή $\Omega_0'\colon \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}} \longrightarrow \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$ είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε ένα ελαφρώς διαφορετικό επιχείρημα. Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, αφού μία πλήρης ανάλυση ενός προβολικού αντικειμένου είναι μοναδική με ακρίβεια ομοτοπικής ισοδυναμίας, ορίζεται ένας συναρτητής $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$. Εφόσον αυτός ο συναρτητής στέλνει ένα προβολικό αντικείμενο P της $\mathcal{A}$ στο stalk complex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

το οποίο είναι 0-ομοτοπικό, θα υπάρχει ένας επαγόμενος συναρτητής $\Omega_0'\colon \underline{\mathsf{Gproj}} \longrightarrow \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα κατηγοριών

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Gproj}\,\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A})) \\ & \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}} \arrow[u, dashed, "\Omega_0'"'] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Τέλος, κατασκευάζουμε μία οικογένεια συναρτητών $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Συμβολίζουμε με $\sigma_{\leqslant k}$ τον συναρτητή truncation συμπλόκων στην ομοτοπική κατηγορία. Στο ακόλουθο λήμμα, το οποίο αποτελεί μία γενίκευση του Λήμματος 6.2.18, διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό για το αντίστοιχο stalk complex του $\Omega_n(C^\bullet)$ όπου $C^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$.

Λήμμα 6.5.29. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $C^\bullet, D^\bullet$ δύο ακυκλικά σύμπλοκα από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας μορφισμός συμπλόκων*

$$\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow \Sigma^{-k}\Omega_{-k}(C^\bullet)$$

η κλάση του οποίου είναι ένας ισομορφισμός στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ ή ισοδύναμα, το σύμπλοκο $\Sigma^k\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ αποτελεί μία προβολική ανάλυση του $\Omega_{-k}(C^\bullet)$.

2. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$ ο φυσικός μορφισμός $\sigma_{\leqslant n}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant m}(C^\bullet)$ είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία ιδιομορφιών $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$.*

3. *Αν $f\colon C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων ο οποίος είναι 0-ομοτοπικός, τότε όλοι οι επαγόμενοι μορφισμοί $\underline{\sigma_{\leqslant k}f}\colon \sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant k}(D^\bullet)$ στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ είναι ίσοι με τον μηδενικό μορφισμό.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ακριβώς αντίστοιχη με την απόδειξη του Λήμματος 6.2.18 γιαυτό και θα παραλειφθεί. ■

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί άμεση συνέπεια του Λήμματος 6.5.29.

Πρόταση 6.5.30. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Τότε για κάθε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ένας λησμονικός συναρτητής*

$$\sigma_{\leqslant k} \colon \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\operatorname{proj}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$$

Μάλιστα, Οι λησμονικοί συναρτητές truncation $\{\sigma_{\leqslant k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ σχηματίζουν μία ακολουθία συναρτητών

$$\cdots \longrightarrow \sigma_{\leqslant k+1} \xrightarrow{\iota^{k+1}} \sigma_{\leqslant k} \xrightarrow{\iota^{k}} \sigma_{\leqslant k-1} \xrightarrow{\iota^{k-1}} \cdots$$

από την $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\operatorname{proj}\mathcal{A})$ στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\operatorname{proj}\mathcal{A})$ των οποίων οι μορφισμοί μετάβασης είναι όλοι ισομορφισμοί.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι συναρτητές που έχουμε ορίσει ως αυτό το σημείο εμφανίζονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 6.5.31. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα, $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ η singularity κατηγορία της $\mathcal{A}$ και $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\operatorname{proj}\mathcal{A})$ η κατηγορία των ακυκλικών συμπλόκων από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Τέλος, θεωρούμε την κατηγορία $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$, την ευσταθή κατηγορία των Gorenstein αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα κατηγοριών και φυσικών συναρτητών*

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \arrow[dl, "\Omega_0'"'] \arrow[dr, "\iota_{\mathcal{A}}"] & \\ \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\operatorname{proj}\mathcal{A}) \arrow[rr, "\sigma_{\leqslant 0}"'] & & \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A}) \end{tikzcd} \tag{6.22}$$

είναι μεταθετικό με ακρίβεια ισοδυναμίας συναρτητών.

Απόδειξη. Η ύπαρξη των συναρτητών του διαγράμματος έχει αποδειχθεί στις προτάσεις που προηγήθηκαν. Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει μία ισοδυναμία συναρτητών $\sigma_{\leqslant 0}\circ\Omega_0' \cong \iota_{\mathcal{A}}$. Έστω M ένα αντικείμενο της $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$. Η εικόνα του M μέσω του συναρτητή Ω_0' είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο $\Omega_0'(M) = P^{\bullet}$ από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} P^{\bullet}\colon \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "\partial_P^{-1}"] & P^{0} \arrow[rr, "\partial_P^{0}"] \arrow[dr] & & P^{1} \arrow[r, "\partial_P^{1}"] & P^{2} \arrow[r] & \cdots \\ & & & M \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

θεωρούμενο σαν ένα αντικείμενο της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\operatorname{proj}\mathcal{A})$. Από την άλλη πλευρά, το $\iota_{\mathcal{A}}(M)$ είναι η εικόνα του stalk complex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Όπως έχουμε δει, ο μορφισμός συμπλόκων

$$\begin{tikzcd} \sigma_{\leqslant 0}\circ\Omega_0'(M)\colon \cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r, "\partial_P^{-2}"] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r, "\partial_P^{-1}"] \arrow[d] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ i_R(M)\colon \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

είναι ένας ημι-ισομορφισμός, δηλαδή ένας ισομορφισμός στην $\mathsf{D_{sg}}(\mathcal{A})$ και $\sigma_{\leqslant 0} \circ \Omega_0' \cong \iota_{\mathcal{A}}$ στα αντικείμενα. Η συμπεριφορά αυτών των φυσικών συναρτητών στους μορφισμούς είναι ανάλογη. Για κάθε μορφισμό $f\colon M \longrightarrow N$ μεταξύ δύο Gorenstein αντικειμένων, υπάρχει ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant 0} \circ \Omega_0'(M) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{\leqslant 0}\circ\Omega_0'(f)"'] & \iota_{\mathcal{A}}(M) \arrow[d, "\iota_{\mathcal{A}}(f)"] \\
\sigma_{\leqslant 0} \circ \Omega_0'(N) \arrow[r] & \iota_{\mathcal{A}}(N)
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι μεταθετικό στην $\mathsf{D_{sg}}(\mathcal{A})$. Επομένως, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός συναρτητών $\sigma_{\leqslant 0}\Omega_0' \xrightarrow{\sim} \iota_{\mathcal{A}} \circ \Omega_0$ στην $\mathsf{D_{sg}}(\mathcal{A})$. ■

Προφανώς θα θέλαμε οι συναρτητές του παραπάνω διαγράμματος να ισοδυναμία κατηγοριών. Όπως αναφέρθηκε όμως, αυτό είναι αδύνατο χωρίς να επιβάλλουμε επιπλέον συνθήκες για την κατηγορία $\mathcal{A}$. Για τον σκοπό αυτόν θα εισάγουμε την έννοια της Gorenstein-διάστασης ενός αντικειμένου της $\mathcal{A}$ σύμφωνα με τους Α. Μπεληγιάννη και Ι. Reiten στο [12, §"].

Ορισμός 6.5.32. *Έσω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{A}$ ορίζουμε την* **Gorenstein (προβολική) διάσταση του X**, *η οποία θα συμβολίζεται με $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X$ επαγωγικά ως εξής:*

- *Αν $X \in \mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$, τότε θέτουμε $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X = 0$.*
- *Για $n \geqslant 1$, λέμε ότι $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X \leqslant n$ αν υπάρχει μία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

  με $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}M_i = 0$ για κάθε $0 \leqslant i \leqslant n$.
- *Θέτουμε $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X = n$ αν $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X \leqslant n$ και $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X \nleqslant n-1$.*
- *Αν $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X \neq n$ για κάθε $n \geqslant 0$, τότε ορίζουμε $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X = \infty$.*

Δυϊκά ορίζεται και η έννοια της Gorenstein ενέσιμης διάστασης $\mathsf{G\text{-}dim_{inj}}X$ για κάθε $X \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 6.5.33. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Ορίζουμε την* **Gorenstein προβολική διάσταση της $\mathcal{A}$** *την οποία συμβολίζουμε με $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}\mathcal{A}$ ως:*

$$\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}\mathcal{A} = \sup\{\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}X \mid X \in \mathsf{ob}(\mathcal{A}), \}$$

Αν η $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση θα λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι **proj-Gorenstein**. *Δυϊκά, ορίζεται η έννοια της Gorenstein ενέσιμης διάστασης της $\mathcal{A}$.*

Από εδώ και στο εξής θα επιβάλλουμε την επιπλέον συνθήκη να είναι proj-Gorenstein στην $\mathcal{A}$, δηλαδή κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{A}$ να έχει πεπερασμένη ενέσιμη διάσταση.

Εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{A}$ υπάρχει μία προβολική ανάλυση. Αν η $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένη διάσταση Gorenstein, αφού $\mathsf{proj}\,\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$, κάθε αντικείμενο της $\mathcal{A}$ θα έχει μία πεπερασμένη ανάλυση από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$ με μήκος το πολύ ίσο με την διάσταση Gorenstein. Μάλιστα, το τελευταίο αντικείμενο σε αυτήν την ανάλυση θα είναι απαραίτητα Gorenstein προβολικό. Αυτό διατυπώνεται στο ακόλουθο λήμμα:

Πρόταση 6.5.34. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία η οποία είναι proj-Gorenstein με $\mathsf{G\text{-}dim_{proj}}\mathcal{A} = d$. Τότε, για κάθε $P \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ ισχύει $\mathsf{Ext}^{d+1}_{\mathcal{A}}(-, P) = 0$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα προβολικό αντικείμενο $P \in \mathsf{proj}\,\mathcal{A}$. Η απόδειξη προκύπτει με επαγωγή στη φραγμένη Gorenstein προβολική διάσταση ενός αντικειμένου $X \in \mathcal{X}$, αφού $\mathsf{Ext}^n(M,P) = 0$ για κάθε Gorenstein προβολικό M, για κάθε $n \geqslant 1$. ■

Λήμμα 6.5.35. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα και M ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$. Τότε $\mathsf{G\text{-}dim}_{\mathsf{proj}} M \leqslant n$ αν-ν $\Omega^n M \in \mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$, με $n \geqslant 0$.*

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η $\mathsf{Gproj}\,\mathcal{A}$ είναι μία επιλύουσα υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία έχει την $\mathsf{proj}\,\mathcal{A}$ σαν έναν **ενέσιμο προβολικό συγγεννήτορα**.

Χρησιμοποιώντας αυτήν τη συνθήκη περατότητας για την $\mathcal{A}$ αποκτούμε το ακόλουθο:

Πρόταση 6.5.36. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία η οποία είναι proj-Gorenstein. Τότε, η εικόνα κάθε συμπλόκου $C^\bullet \in \mathsf{K_{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$ μέσω του συναρτητή*

$$\Omega_0 \colon \mathsf{K_{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A})) \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}$$

είναι ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο.

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathsf{G\text{-}dim}_{\mathsf{proj}}\mathcal{A} = d$, όπου $d > 0$. Αν $P^\bullet$ είναι ένα ακυκλικό σύμπλοκο από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$, τότε η συζυγία $\Omega_d(P^\bullet)$ του συμπλόκου θα είναι ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet\colon\ 0 \arrow[r] & \Omega_d(P^\bullet) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "\partial_P^{-1}"] & P^0 \arrow[rr, "\partial_P^0"] \arrow[dr] & & P^1 \arrow[r, "\partial_P^1"] & P^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & & & \Omega_0(P^\bullet) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Εξ ορισμού το $\Omega_0(P^\bullet)$ είναι επίσης Gorenstein προβολικό. ■

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση, στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση Gorenstein, μπορούμε να θεωρήσουμε τον συναρτητή Ω_0 ως έναν συναρτητή:

$$\Omega_0 \colon \mathsf{K_{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A})) \longrightarrow \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$$

Ακολουθούν οι προτάσεις στις οποίες αποδεικνύεται ότι οι συναρτητές της Πρότασης 6.5.31 αποτελούν, υπό αυτές τις συνθήκες, ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Πρόταση 6.5.37. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα η οποία είναι proj-Gorenstein. Τότε, ο συναρτητής*

$$\Omega_0 \colon \mathsf{K_{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A})) \longrightarrow \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$$

αποτελεί ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Ένας αντίστροφος του συναρτητή Ω_0 έχει ήδη οριστεί και είναι ο συναρτητής

$$\Omega_0' \colon \underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K_{AC}}(\mathsf{proj}(\mathcal{A}))$$

ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε Gorenstein προβολικό αντικείμενο στην επιλεγμένη πλήρη προβολική ανάλυσή του, θεωρούμενη σαν ένα σύμπλοκο στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K_{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$.

Πράγματι, αν $P^\bullet$ είναι ένα σύμπλοκο στην $\mathsf{K_{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$, η εικόνα του μέσω του Ω_0 είναι ο συνπυρήνας του διαφορικού $\partial_P^{-1} \colon P^{-1} \longrightarrow P^0$:

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet\colon\ \cdots \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "\partial_P^{-1}"] & P^0 \arrow[rr, "\partial_P^0"] \arrow[dr] & & P^1 \arrow[r, "\partial_P^1"] & P^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & & \Omega_0(P^\bullet) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Εφόσον μία πλήρης προβολική ανάλυση ενός αντικειμένου της $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$ είναι μοναδική, μπορούμε να επιλέξουμε το σύμπλοκο $P^\bullet$ σαν την εικόνα του αντικειμένου $\Omega_0(P^\bullet)$ της μέσω του συναρτητή Ω_0'. Συνεπώς, για κάθε $P^\bullet \in$ έχουμε $\Omega_0' \circ \Omega_0(P^\bullet) \cong P^\bullet$ και $\Omega_0' \circ \Omega_0 \cong 1_{\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})}$ στα αντικείμενα. Η συμπεριφορά αυτών των φυσικών μορφισμών στους μορφισμούς είναι ανάλογη.

Από την άλλη πλευρά, αν M είναι ένα Gorenstein προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$, το σύμπλοκο $\Omega_0'(P)$ θα είναι μία πλήρης προβολική ανάλυση $P^\bullet$ του M η οποία είναι μάλιστα μοναδική στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$. Άμεσα $\Omega_0 \circ \Omega_0'(M) \cong \Omega_0(P^\bullet) \cong M$ και $\Omega_0 \circ \Omega_0' = 1_{\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}}$ στα αντικείμενα. Ομοίως προκύπτει το αντίστοιχο συμπέρασμα για τους μορφισμούς. Συμπεραίνουμε ότι ο συναρτητής Ω_0 είναι ισοδυναμία κατηγοριών και $\Omega_0' = \Omega_0^{-1}$.

Συμβολίζοντας με Ω_G τον loop-space functor της κατηγορίας $\underline{\mathsf{Gproj}}\,\mathcal{A}$ και με Σ_{K} τον συναρτητή μεταφοράς συμπλόκων στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$, έχουμε ήδη δει ότι υπάρχει μία φυσική ισοδυναμία συναρτητών

$$\Omega_0 \Sigma_{\mathsf{K}}^{-1} \cong \Omega_G \Omega_0$$

Μένει να δείξουμε ότι ο Ω_0 στέλνει διακεκριμένα τρίγωνα της $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$ σε διακεκριμένα τρίγωνα της $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$. Με ακρίβεια ισομορφισμού μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$ είναι της μορφής

$$\Sigma_{\mathsf{K}}^{-1}\underline{E}^\bullet \longrightarrow \underline{C}^\bullet \longrightarrow \underline{D}^\bullet \longrightarrow \underline{E}^\bullet \tag{T_1}$$

όπου η

$$0 \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow 0 \tag{6.23}$$

είναι μία διασπάσιμη κατά βαθμό ακριβής ακολουθία συμπλόκων από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$.

Εφαρμόζοντας έτσι τον συναρτητή Ω_0 στο τρίγωνο (T_1) αποκτούμε (με ακρίβεια ισομορφισμού) ένα τρίγωνο

$$\Omega_G\Omega_0(\underline{E}^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(\underline{C}^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(\underline{D}^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(\underline{E}^\bullet) \tag{T_2}$$

στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$. Από την ακριβή ακολουθία (6.23) αποκτούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & C^{-1} \arrow[rr] \arrow[d, "\partial_C^{-1}"] & & D^{-1} \arrow[rr] \arrow[d, "\partial_D^{-1}"] & & E^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_E^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[rr] & & C^0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\partial_C^0"] & & D^0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\partial_D^0"] & & E^0 \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd, "\partial_E^0"] & 0 \\
 & \Omega_0(C^\bullet) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \Omega_0(D^\bullet) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \Omega_0(E^\bullet) \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[rr] & & C^1 \arrow[rr] & & D^1 \arrow[rr] & & E^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι οριζόντιες γραμμές είναι διασπάσιμες ακριβείς ακολουθίες προβολικών αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Προκύπτει ότι οι επαγόμενοι ομομορφισμοί στους συνπυρήνες σχηματίζουν μία σύντομη ακριβή ακολουθία Gorenstein προβολικών:

$$0 \longrightarrow \Omega_0(C^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(D^\bullet) \longrightarrow \Omega_0(E^\bullet) \longrightarrow 0$$

και ως αποτέλεσμα το τρίγωνο (T_2) είναι διακεκριμένο στην $\underline{\mathsf{Gproj}}\mathcal{A}$. ■

Συνεχίζοντας με τη μελέτη του συναρτητή truncation $\sigma_{\leqslant k}$, αρχικά θα δείξουμε την εξής πρόταση η οποία είναι ανάλογη του Θεωρήματος 6.3.8.

Πρόταση 6.5.38. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα η οποία είναι* proj*-Gorenstein. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, ο συναρτητής*

$$\sigma_{\leqslant k} \colon \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$$

είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Εφόσον οι συναρτητές $\sigma_{\leqslant n}$ και $\sigma_{\leqslant m}$ είναι φυσικά ισοδύναμοι για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο μόνο για ένα τυχόν $k \in \mathbb{Z}$. Έστω $C^\bullet$ ένα αντικείμενο της $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Από τον ορισμό της $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$, το $C^\bullet$ θα είναι ισόμορφο με ένα φραγμένο σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Αφού η $\mathcal{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα, από το Λήμμα 4.9.13, γνωρίζουμε ότι για κάθε φραγμένο σύμπλοκο αντικειμένων της $\mathcal{A}$ υπάρχει ένας ημι-ισομορφισμός από ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο προβολικών. Το $C^\bullet$ επομένως θα είναι ισόμορφο στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ με ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $C^\bullet$ είναι ένα τέτοιο σύμπλοκο. Επιπλέον, αφού η $\mathcal{A}$ είναι proj-Gorenstein, θα υπάρχει ένα $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε το αντικείμενο $\mathsf{Coker}\partial_C^{k-1}$ να είναι Gorenstein προβολικό. Αποκτούμε έτσι έναν μορφισμό συμπλόκων

$$\begin{tikzcd}
\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)\colon \cdots \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r, "\partial_C^{k-1}"] \arrow[d] & C^k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathsf{Coker}\partial_C^{k-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ο οποίος είναι ημι-ισομορφισμός, δηλαδή ένας ισομορφισμός στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Από τον ισχυρισμό 2 του Λήμματος 6.5.29 προκύπτει ότι το $C^\bullet$ είναι ισόμορφο στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ με το $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$. Έτσι, το $\Sigma^k\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet)$ αποτελεί μία προβολική ανάλυση του Gorenstein προβολικού $\mathsf{Coker}\partial_C^{k-1}$, η οποία μπορεί να επεκταθεί σε μία πλήρη προβολική ανάλυση $C_1^\bullet$. Τότε, εκ κατασκευής $C_1 \in \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$ και $\sigma_{\leqslant 0}(C_1^\bullet) = \Sigma^k\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \cong \mathsf{Coker}\partial_C^{k-1} \cong C^\bullet$ στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Άρα ο $\sigma_{\leqslant 0}$, και γενικά ο $\sigma_{\leqslant k}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, είναι επί με ακρίβεια ισομορφισμού.

Ο συναρτητής $\sigma_{\leqslant k}$ είναι πλήρης και πιστός αν-ν για κάθε $C^\bullet, D^\bullet \in \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$ η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})}(C^\bullet, D^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})}(\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet), \sigma_{\leqslant k}(D^\bullet))$$

είναι 1-1 και επί. Για τον σκοπό αυτόν θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Verdier (βλ. Λήμμα 6.3.6). Θεωρούμε ένα σύμπλοκο $X^\bullet$ στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ το οποίο είναι ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο, δηλαδή ανήκει (με ακρίβεια ισομορφισμού) στην εικόνα της εμβάπτισης

$$\mathsf{K}^b(\mathsf{proj}\mathcal{A}) \xrightarrow{\ \iota\ } \mathsf{K}^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\ Q\ } \mathsf{D}^b(\mathcal{A})$$

Το $X^\bullet$ είναι ένα φραγμένο σύμπλοκο από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Verdier, αρκεί να δείξουμε ότι για ένα τέτοιο σύμπλοκο $X^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ και ένα αντικείμενο $C^\bullet$ στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$ υπάρχει ένας ακέραιος k έτσι ώστε όλοι οι μορφισμοί: $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ στην $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ είναι ίσοι με τον μηδενικό μορφισμό. Αρκεί να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό στην περίπτωση που $X^\bullet = \Sigma^{-i}P$ όπου το P είναι ένα προβολικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και $i \in \mathbb{Z}$, καθώς οποιοδήποτε σύμπλοκο $X^\bullet$ στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ μπορεί να προκύψει (με ακρίβεια ισομορφισμού) σχηματίζοντας κώνους μορφισμών τέτοιων αντικειμένων. Θεωρούμε ένα $k > i$ και έναν μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet \colon \sigma_{\leqslant k}C^\bullet \longrightarrow \Sigma^{-i}P$. Ο μορφισμός f^i αναλύεται μέσω του $\mathsf{Coker}\partial_C^{i-1} = \Omega_{-i}(C^\bullet)$

και έστω $g\colon \Omega_{-i}(C^\bullet) \longrightarrow P$ η επαγόμενη απεικόνιση.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{i-1} \arrow[r, "\partial_C^{i-1}"] \arrow[dd] & C^i \arrow[rr, "\partial_C^i"] \arrow[dr, "\mathsf{coker}\partial_C^{i-1}"] \arrow[dd, "f^i"'] & & C^{i+1} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
& & & \Omega_{-i}(C^\bullet) \arrow[ur] \arrow[dl, dashed, "g"'] & & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P \arrow[rr] & & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Εφόσον η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι proj-Gorenstein, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\Omega_{-i}(C^\bullet)$ είναι Gorenstein προβολικό, άρα $\mathsf{Ext}^1_R(\Omega_{-i-1}(C^\bullet), P) = 0$ και ο μορφισμός g αναλύεται μέσω του C^{i+1}. Θα υπάρχει επομένως ένας μορφισμός $h\colon C^{i+1} \longrightarrow P$ έτσι ώστε

$$f^i = g \circ \mathsf{coker}\partial_C^{i-1} = h \circ \partial_C^i$$

Ο f δηλαδή είναι 0-ομοτοπικός και άρα ο μορφισμός $\sigma_{\leqslant k}(C^\bullet) \longrightarrow X^\bullet$ είναι ο μηδενικός μορφισμός της $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$. Δείξαμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ο $\sigma_{\leqslant k}$ είναι πλήρης και πιστός και επί με ακρίβεια ισομορφισμού συνεπώς θα αποτελεί μία ισοδυναμία κατηγοριών. ∎

Ο συναρτητής αυτός πράγματι απεικονίζει διακεκριμένα τρίγωνα σε διακεκριμένα τρίγωνα.

Πρόταση 6.5.39. *Ο συναρτητής truncation*

$$\sigma_{\leqslant 0}\colon \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$$

είναι ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Με ακρίβεια ισομορφισμού μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A})$ είναι της μορφής

$$\underline{C}^\bullet \longrightarrow \underline{D}^\bullet \longrightarrow \underline{C}^\bullet \longrightarrow \Sigma_{\mathsf{K}}\underline{C}^\bullet \tag{T_1}$$

όπου η

$$0 \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \longrightarrow E^\bullet \longrightarrow 0 \tag{6.24}$$

είναι μία διασπάσιμη κατά βαθμό ακριβής ακολουθία συμπλόκων από προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Υπενθυμίζουμε ότι γενικότερα σε μία αβελιανή κατηγορία υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\sigma_{\leqslant 0} \circ \Sigma \cong \Sigma \circ \sigma_{\leqslant 1}$ όπου $\sigma_{\leqslant}$ είναι ο λησμονικός συναρτητής truncation και Σ είναι ο συναρτητής μεταφοράς συμπλόκων. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\sigma_{\leqslant 0}\colon \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ στο τρίγωνο (T_1) αποκτούμε ένα τρίγωνο

$$\sigma_{\leqslant 0}(\underline{C}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{D}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{E}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\Sigma_{\mathsf{K}}\underline{C}^\bullet) \tag{T_2}$$

στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$. Αφού τα αντικείμενα $\sigma_{\leqslant 1}(C^\bullet)$ και $\sigma_{\leqslant 0}(C^\bullet)$ της $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφα, έχουμε $\Sigma_{\mathsf{D}} \circ \sigma_{\leqslant 1} \cong \Sigma_{\mathsf{D}} \circ \sigma_{\leqslant 0} \cong \sigma_{\leqslant 0} \circ \Sigma_{\mathsf{K}}$ και το τρίγωνο (T_2) είναι ισόμορφο στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ με το τρίγωνο

$$\sigma_{\leqslant 0}(\underline{C}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{D}^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(\underline{E}^\bullet) \longrightarrow \Sigma_{\mathsf{D}}\sigma_{\leqslant 0}(\underline{C}^\bullet) \tag{T_3}$$

Το τρίγωνο αυτό όμως είναι διακεκριμένο στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ καθώς αποτελεί εικόνα της ακριβούς ακολουθία συμπλόκων

$$0 \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(C^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(D^\bullet) \longrightarrow \sigma_{\leqslant 0}(E^\bullet) \longrightarrow 0$$

η οποία προκύπτει από την (6.24) και είναι προφανώς επίσης διασπάσιμη σε κάθε βαθμό. Άρα ο συναρτητής $\sigma_{\leqslant 0}\colon \mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ είναι ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών. ∎

Πρόταση 6.5.40. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα η οποία είναι* proj-*Gorenstein. Τότε, ο συναρτητής*

$$\iota_{\mathcal{A}} \colon \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}} \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$$

αποτελεί ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.

Απόδειξη. Στην Πρόταση 6.5.31 είδαμε ότι υπάρχει μία φυσική ισοδυναμία συναρτητών $\iota_{\mathcal{A}} \cong \Omega_0' \circ \sigma_{\leqslant 0}$. Εφόσον οι συναρτητές $\sigma_{\leqslant 0}$ και Ω_0' είναι ισοδυναμία κατηγοριών, ο $\iota_{\mathcal{A}}$ θα είναι επίσης ισοδυναμία κατηγοριών. Με ακρίβεια ισομορφισμού, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην $\underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}}$ είναι της μορφής

$$\Omega_G\underline{N} \xrightarrow{\mathsf{ch}(g)} \underline{K} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{M} \xrightarrow{\underline{g}} \underline{N}$$

όπου

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία από Gorenstein προβολικά αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\iota_{\mathcal{A}}$ αποκτούμε ένα τρίγωνο

$$\iota_{\mathcal{A}} \circ \Omega_G\underline{N} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\mathsf{ch}(g)} \iota_{\mathcal{A}}\underline{K} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\underline{f}} \iota_{\mathcal{A}}\underline{M} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\underline{g}} \iota_{\mathcal{A}}\underline{N} \tag{T_1}$$

Όπως είδαμε στην Πρόταση 6.5.25, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός συναρτητών $\iota_{\mathcal{A}} \circ \Omega_G \cong \Sigma_{\mathsf{D}}^{-1}\iota_{\mathcal{A}}$ και το τρίγωνο (T_1) είναι ισόμορφο στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ με το τρίγωνο

$$\Sigma \circ \iota_R\underline{N} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\mathsf{ch}(g)} \iota_{\mathcal{A}}\underline{K} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\underline{f}} \iota_{\mathcal{A}}\underline{M} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\underline{g}} \iota_{\mathcal{A}}\underline{N} \tag{T_2}$$

Όμως από τον ορισμό του συναρτητή $\iota_{\mathcal{A}}$, η σύνθεση

$$\iota_{\mathcal{A}}\underline{K} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\underline{f}} \iota_{\mathcal{A}}\underline{M} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}\underline{g}} \iota_{\mathcal{A}}\underline{N}$$

αποτελεί την εικόνα στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ μίας ακριβούς ακολουθίας από stalk complexes. Συνεπώς το (T_2) είναι ένα διακεκριμένο τρίγωνο στην στην $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})$ και ο συναρτητής $\iota_{\mathcal{A}}$ είναι ακριβής. ∎

Οι παραπάνω προτάσεις και τα κεντρικά συμπεράσματα της παρούσας ενότητας συγκεντρώνονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 6.5.41. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία με αρκετά προβολικά αντικείμενα. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι* proj-*Gorenstein, δηλαδή κάθε αντικείμενο της $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένη διάσταση Gorenstein. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα κατηγοριών είναι μεταθετικό (με ακρίβεια ισοδυναμίας συναρτητών) και επιπλέον κάθε συναρτητής αποτελεί ισοδυναμία τριγωνισμένων κατηγοριών.*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathsf{Gproj}\mathcal{A}} \arrow[dr, "\iota_{\mathcal{A}}"] & \\
\mathsf{K}_{\mathsf{AC}}(\mathsf{proj}\,\mathcal{A}) \arrow[ur, "\Omega_0"] \arrow[rr, "\sigma_{\leqslant 0}"'] & & \mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

Παράρτημα Α΄

Περίληψη - Abstract

Περίληψη. Ο κεντρικός στόχος της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη της κατηγορίας ιδιομορφιών ενός δακτυλίου, χρησιμοποιώντας την ευσταθή κατηγορία των maximal Cohen-Macaulay προτύπων, σύμφωνα με τον R.-O. Buchweitz. Η διατριβή αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στα πρώτα δύο κεφάλαια παρουσιάζονται βασικά στοιχεία θεωρίας κατηγοριών και αναλύεται η τοπικοποίηση μίας κατηγορίας. Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε τη θεωρία των τριγωνισμένων κατηγοριών, ενώ στο τέταρτο κατασκευάζουμε την ομοτοπική κατηγορία συμπλοκων και στη συνέχεια την αντίστοιχη παραγόμενη κατηγορία. Το πέμπτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στον ορισμό και στις βασικές ιδιότητες των maximal Cohen-Macaulay προτύπων και της επαγόμενης προβολικά ευσταθούς κατηγορίας. Στο έκτο κεφάλαιο ορίζεται η κατηγορία ιδιομορφιών ενός δακτυλίου και αποδεικνύεται το κεντρικό θεώρημα τριγωνικής ισοδυναμίας του Buchweitz. Τέλος, επιχειρούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιώντας αβελιανές κατηγορίες.

Abstract. The principal aim of this thesis is to study the singularity category of a ring, using the stabilized category of maximal Cohen-Macaulay modules, according to R.-O. Buchweitz. The thesis consists of six chapters. In the first two chapters we present basic elements of category theory and we analyse the localization of a category. In the third chapter we develop the theory of triangulated categories, while in the fourth chapter we construct the homotopic category of complexes and, consequently, the corresponding derived category. The fifth chapter is devoted to the definition and the basic properties of maximal Cohen-Macaulay modules and of the induced projectively stabilized category. In the sixth chapter we define the singularity category of a ring and we prove Buchweitz's main theorem of triangle equivalence. In the end, we attempt to generalise the above results using abelian categories.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] **M. Artin, A. Grothendieck and J.-L. Verdier**. *S-G-A 4, Sém. Géom. Algébrique du Bois Marie(1963-64), Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, (SGA 4).* Lecture Notes in Math. , Springer-Verlag, Berlin, New York, (1972-1973).

[2] **M. Auslander and M. Bridger**. *Stable Module Theory.* Mem. of the AMS **94**, AMS Providence, (1969).

[3] **M. Auslander and R.-O. Buchweitz**. *The Homological Theory of Maximal Cohen-Macaulay Approximations.* Société Mathématique de France, Mémoire №**38**. pp. 5-37, (1989).

[4] **M. Auslander and S. O. Smalø**. *Preprojective modules over artin algebras.* J. of Algebra **66**, 61-122, (1980).

[5] **M. Auslander**. *Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative.* Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 1, (1966-1967).

[6] **H. Bass**. *Algebraic K-Theory. W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam*, (1968).

[7] **Y. Berest**. *Homological Algebra.* Lecture Notes taken by D. Miller and S. Patotski at Cornell University, (Fall 2013-Spring 2014).

[8] **A.A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne**. *Faisceaux pervers. astérisque* **100**, (1984).

[9] **A. Beligiannis**. *Cohen-Macaulay modules, (co)torsion pairs and virtually Gorenstein algebras. J. Algebra* **288**, *137-211*, (2005).

[10] **A. Beligiannis**. *The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories and (co-)stabilization. Communications In Algebra* **28**, *№10, 4547-4596*, (2000).

[11] **A. Beligiannis and N. Marmaridis**. *Left triangulated categories arising from contravariantly finite subcategories. Communications In Algebra,* **22(12)**, *5021-5036*, (1994).

[12] **A. Beligiannis and I. Reiten**. *Homological and Homotopical Aspects of Torsion Theories.* Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. **188**, pp.207, (2007).

[13] **P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie**. *S-G-A 6, Sém. Géom. Algébrique du Bois Marie (1966-67), Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, (SGA 6).* Lecture Notes in Math. , Springer-Verlag Berlin, New York, (1971).

[14] **P. Bland**. *Rings and their Modules. De Gruyter*, (2011).

[15] **M. Bökstedt and A. Neeman**. *Homotopy limits in triangulated categories. Compositio Mathematica,* **86**, *№2, 209-234*, (1993).

[16] **A. I. Bondal and M. Karpanov**. *Enhanced triangulated categories.* Compositio Mathematica **86**, pp. 209-234, (1993).

[17] **R.-O. Buchweitz**. *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology over Gorenstein rings*. University of Hannover, (1986).

[18] **H. Cartan and S. Eilenberg**. *Homological Algebra*. Princeton: Princeton University Press, (1956).

[19] **P.Deligne** avec la collaboration de **J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.L. Verdier**. *S-G-A 4 $\frac{1}{2}$, Sém. Géom. Algébrique du Bois Marie, Cohomologie Étale (SGA 4 $\frac{1}{2}$)*. Lecture Notes in Math. , Springer-Verlag, Berlin, New York pp. 262-311, (1977).

[20] **D. Dummit and R. Foote**. *Abstract Algebra*. Third Edition, John Wiley and Sons,Inc, (2004).

[21] **E. Enochs and M. G. Jenda**. *Gorenstein injective and projective modules*. Math. Z. **220**(4), 611-633, (1995).

[22] **E. Enochs and M. G. Jenda**. *Relative homological algebra*. De Gruyter Expositions in mathematics; **30**, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2000).

[23] **R. Fossum, P. A. Griffith and I. Reiten**. *Trivial Extensions of Abelian Categories*. Lecture Notes; **456**, Springer-Verlag, New York, (1975).

[24] **P. Gabriel and M. Zisman**. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1967).

[25] **S. I. Gelfand, Y. I. Manin**. *Methods of Homological Algebra*. Second edition; Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, (2003).

[26] **A. Grothendieck**. *Sur quelques points d'algébre homologique*. Tohoku Math. J. (2) Volume **9**, Number 2, 119–221., (1957).

[27] **R. Hartshorne**. *Cohomological dimension of algebraic varieties*. Ann. of Math. (2), Vol. **88**, pp. 403-450, (1968).

[28] **R. Hartshorne**. *Residues and Duality*. Lecture Notes **20**, Springer-Verlag, New York, (1966).

[29] **D. Happel**. *Triangulated Categories in Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. Habilitationsschrift, Bielefeld, (1985).

[30] **A. Heller**. *The loop-space functor in homological algebra*. Trans. AMS **96**, pp.382-394, (1960).

[31] **T. Holm and P. Jørgensen**. *Triangulated categories: Definitions, properties and examples*, pp. 1-51 in *Triangulated Categories (edited by T. Holm, P. Jørgensen and R. Rouquier)*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol **375**, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).

[32] **B. Iversen**. *Cohomology of Sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany, (1986).

[33] **M. Kashiwara and P. Schapira**. *Categories and Sheaves*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Vol. **332**, Springer-Verlag, Berlin, (2006).

[34] **B. Keller**. *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories*, pp. 76-160 in *Triangulated Categories (edited by T. Holm, P. Jørgensen and R. Rouquier)*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol **375**, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).

[35] **M. Kontsevich**. *Homological algebra of mirror symmetry*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, pp. 120-139, (Zürich, 1994), Birkhäuser, (1995).

[36] **H. Krause**. *Localization theory for triangulated categories*, pp. 161-235 in *Triangulated Categories (edited by T. Holm, P. Jørgensen and R. Rouquier)*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol **375**, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).

[37] **S. MacLane**. *Homology*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (1963).

[38] **H. Matsui, R. Takahashi**. *Singularity categories and singulare equivalences for resolving subcategories*. arXiv:1412.8061v2[math.AC], (2016).

[39] **D. Milicic**. *Lectures on Derived Categories*. Lecture notes, (1996).

[40] **D. Murfet**. *Derived Categories (Part I)*. Lecture Notes, available at http://therisingsea.org/notes/DerivedCategories.pdf, (October 5, 2006).

[41] **D. Murfet**. *Derived Functors*. Lecture Notes, available at http://therisingsea.org/notes/DerivedFunctors.pdf, (October 5, 2006).

[42] **D. Murfet**. *Triangulated Categories (Part I)*. Lecture Notes, available at http://therisingsea.org/notes/TriangulatedCategories.pdf, (April 11, 2007).

[43] **A. Neeman**. *Triangulated categories*. Annals of Mathematics Studies **148**, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).

[44] **A. Neeman**. *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*. J. Amer. Math. Soc. **9**, №**1**, pp. 205-236, (1996).

[45] **O. Ore**. *Linear equations in non-commutative fields*. Ann. of Math. (2) Vol. **32**, No. **3**, pp. 463-477, (1931).

[46] **D. Puppe**. *On the structure of stable homotopy theory*. Colloquium on algebraic topology, Aarhus Universitet Matematisk Institut pp. 65-71, (1962).

[47] **D. Quillen**. *Higher algebraic K-theory I, in: Alegbraic K-theory I pp. 85-147*. Lecture Notes **341**, Springer-Verlag, New York, (1973).

[48] **J.-E. Roos**. *Compléments a l' étude des quotients primitifs des algèbres de Lie semi-simples*. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **276** 447-450, (1973).

[49] **M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara**. *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*. pp. 265-529 in *Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, (edited by H. Komatsu)*, Lecture Notes in Math. **287**, Springer Verlag, (1973).

[50] **N. Spaltenstein**. *Resolutions of unbounded complexes*. Compositio Mathematica **65**, pp.121-154, (1988).

[51] **J. Stark**. *Buchweitz Theorem*. Lecture Notes available at: https://sites.math.washington.edu/~julia/MF/buchMCM.pdf Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, (2013).

[52] **J.-L. Verdier**. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Astérisque No. **239**, (1996).

[53] **C. Weibel**. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2004).

[54] **A. Zaks**. *Injective Dimension of Semi-Primary Rings*. Journal of Algebra, **13**, pp. 73-86, (1969).

[55] **P. Zhang**. *A brief introduction to Gorenstein projective modules*. Notes, available at: https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/sem/abs/zhangpu4.pdf.