Πανεπιστημιο Ιωαννινων

Τμημα Οικονομικων Επιστημων

Σχολη οικονομικων και διοικητικων επιστημων

Η Συμπεριφορά του Επενδυτή με τη Λογαριθμική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Ανδρομάχη Μόσχου

Επιβλέπων: Καθηγητής Συμεωνίδης Σπυρίδων

Ιωάννινα

Ιανουάριος 2020

Πανεπιστημιο Ιωαννινων

Τμημα Οικονομικων Επιστημων

Σχολη οικονομικων και διοικητικων επιστημων

Η Συμπεριφορά του Επενδυτή με τη Λογαριθμική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Ανδρομάχη Μόσχου

Επιβλέπων: Καθηγητής Συμεωνίδης Σπυρίδων

Ιωάννινα

Ιανουάριος 2020

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή, κύριο Σπύρο Συμεωνίδη, της διπλωματικής μεταπτυχιακής μου εργασίας για την πολύτιμη καθοδήγηση του , την υπομονή και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους γονείς μου και τον τον αδερφό μου για την στήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια καθώς και τον Πάνο για την υποστήριξη και την υπομονή του.

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία αναλύεται η θεωρία του χαρτοφυλακίου και η συμπεριφορά του επενδυτή με λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας.

Παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου, περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο (Risk-free asset).

Στόχος της εργασίας είναι να υπολογιστεί το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο στο σημείο ισορροπίας, η βέλτιστη τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας σε αυτό το σημείο, καθώς και η βέλτιστη τιμή της προσεγγιστικής λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας στο σημείο ισορροπίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρατίθενται οι στοχαστικές ιδιότητες και ο λόγος του Sharpe. Το δεύτερο κεφάλαιο αναλύει τα χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου. Έπειτα, στο τρίτο κεφάλαιο προσδιορίζεται η αναμενόμενη απόδοση και η διακύμανση σε μια οικονομία με Risk-free asset. Στο τέταρτο κεφάλαιο με τη συμβολή της γραμμικής άλγεβρας ορίζονται τα βαθμωτά γινόμενα για να βοηθήσουν στον προσδιορισμό των σταθμίσεων. Στη συνέχεια, το πέμπτο κεφάλαιο επικεντρώνεται στην καμπύλη και στην κλίση του αποτελεσματικού συνόρου. Στο έκτο κεφάλαιο παρατίθενται οι ιδιότητες της κανονικής κατανομής. Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο αναλύεται η συμπεριφορά του επενδυτή στην λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας, όπως και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης χρησιμότητας στο σημείο ισορροπίας.

Κεφάλαιο 1

Περιγραφή της Αγοράς

1.1 Στοχαστικές ιδιότητες

Όταν υπάρχουν N επενδυτικά αγαθά $a_1, ..., a_N$ για κάθε $i, j = 1, ..., N$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$E(r_f) = r_f, var(r_f) = 0 \tag{1.1}$$

$$E(r_i) = \mu_i, var(r_i) = \sigma_i^2 \tag{1.2}$$

$$cov(r_f, r_i) = \sigma_{fi} = 0 \tag{1.3}$$

$$cov(r_i, r_j) = \sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{1.4}$$

$$\rho_{ij} = corr(r_i, r_j) \tag{1.5}$$

1.2 Λόγος ή αναλογία Sharpe

Για κάθε επενδυτικό αγαθό a_i (όπου $i = 1, ..., N$) ισχύει:

$$\mu_i = E(r_i) \tag{1.6}$$

που είναι η αναμενόμενη απόδοση και

$$\sigma_i = \sqrt{var(r_i)} \tag{1.7}$$

είναι η τυπική απόκλιση το οποίο είναι μέτρο κινδύνου
$\forall$ a_i ,a_j τα οποία ορίζονται ως αμοιβαία αποκλειόμενες επενδυσείς, επιλέγουμε εκείνη με το μεγαλυτερο Sharpe Ratio:

$$SR_i = \frac{\mu_i}{\sigma_i} \tag{1.8}$$

η αναμενόμενη απόδοση του a_i ανά μονάδα αναλαμβανόμενου κινδύνου.

Συγκεκριμένα, ένας επενδυτής επιλέγει το χαρτοφυλάκιο που έχει υψηλή αναμενόμενη απόδοση και χαμηλή τυπική απόκλιση.

Κεφάλαιο 2

Το χαρτοφυλάκιο

Με δεδομένα τα περιουσιακά στοιχεία (assets) f, a_1 , a_2, χαρτοφυλάκιο P είναι κάθε συνδυασμός της μορφής

$$P = w_0 f + w_1 a_1 + w_2 a_2 \tag{2.1}$$

όπου w_0, w_1 , w_2 είνα το ποσοστό σταθμίσεων που έχουν επενδυθεί στα αγαθά f , a_1 , a_2 αντίστοιχα.

2.1 Διαμέριση του P:

Το χαρτοφυλάκιο P διαμερίζεται ως έξης:

$$P_F = w_0 f \tag{2.2}$$

που είναι το Risk free τμήμα του P.
και

$$P_R = w_1 a_1 + w_2 a_2 \tag{2.3}$$

που είναι το Risky τμήμα του P. ΄Αρα,

$$P = P_F + P_R \tag{2.4}$$

2.2 Απόδοση του P:

Με r_P συμβολίζεται η απόδοση του χαρτοφυλακίου P και ορίζεται ως:

$$r_P = w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 = r_{PF} + r_{PR} \tag{2.5}$$

όπου

$$r_{PF} = w_0 r_f \tag{2.6}$$

είναι η απόδοση με Risk free, και

$$r_{PR} = w_1 r_1 + w_2 r_2 \tag{2.7}$$

είναι η απόδοση με Risky.

Η r_P είναι τυχαία μεταβλητή. Από τις εξισώσεις (1.1) και (2.4) προκύπτει ότι:

1. Η αναμενόμενη απόδοση είναι:

$$\begin{aligned} E[r_P] &= \mu_P = E(w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2) && (2.8)\\ &= w_0 E(r_f) + w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) && (2.9)\\ &= w_0 r_f + w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 && (2.10)\\ &= \mu_{PF} + \mu_{PR} && (2.11) \end{aligned}$$

όπου

$$\mu_{PF} = E(w_0 r_f) = w_0 E(r_f) = w_0 r_f \tag{2.12}$$

είναι η αναμενόμενη απόδοση με Risk free του τμήματος P

και

$$\mu_{PR} = E(w_1 r_1 + w_2 r_2) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 \tag{2.13}$$

είναι η αναμενόμενη απόδοση με Risky του τμήματος P.

2. Η διακύμανση είναι:

$$
\begin{aligned}
var(r_P) &= \sigma_P^2 = var(w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2) &(2.14)\\
&= w_0^2 var(r_f) + w_1^2 var(r_1) + w_2^2 var(r_2) &(2.15)\\
&+ 2w_0 w_1 cov(r_f, r_1) + 2w_0 w_2 cov(r_f, r_2) + 2w_1 w_2 cov(r_1, r_2) &(2.16)\\
&= 0 + w_1^2 var(r_1) + w_2^2 var(r_2) + 0 + 0 + 2w_1 w_2 cov(r_1, r_2) &(2.17)\\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 &(2.18)\\
&= \sigma_{P_R}^2 &(2.19)
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
\sigma_{P_R}^2 &= var(\rho_{PR}) = var(w_1 r_1 + w_2 r_2) &(2.20)\\
&= w_1^2 var(r_1) + w_2^2 var(r_2) + +2w_1 w_2 cov(r_1, r_2) &(2.21)\\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} &(2.22)\\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 &(2.23)
\end{aligned}
$$

είναι η διακύμανση με Risk free.

´Αρα,

η διακύμανση με Risky είναι:

$$\sigma_{P_F}^2 = var((w_0 r_f) = w_0^2 var(r_f) = 0 \tag{2.24}$$

Κεφάλαιο 3

Οικονομία με Risk-free asset

Αν σε μια οικονομία υπάρχει Risk free asset f τότε το σύνολο του προς επένδυση κεφαλαίου επενδύεται στα περιουσιακά στοιχεία f ,a_1,a_2 τότε συνεπάγεται ότι

$$w_0 + w_1 + w_2 = 1 \tag{3.1}$$

Συνδιάζοντας την (2.4) και τις (2.5),(2.6),(2.7),,(2.10),(2.11)(2.12),(2.13),(2.18),(2.19) και (2.23) προκύπτει:

$$r_P = r_{PF} + r_{PR} = w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 \tag{3.2}$$

με αναμενόμενη απόδοση

$$\mu_P = \mu_{PF} + \mu_{PR} = w_0 r_f + w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 \tag{3.3}$$

και διακύμανση

$$\sigma_P^2 = \sigma_{P_R}^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} \tag{3.4}$$

Εναλλακτικά, οι (3.1),(3.2) μπορούν να γραφούν διαφορετικά ως εξής:

$$\begin{aligned} r_P &= (1 - w_1 - w_2) r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 && (3.5) \\ &= r_f + w_1 (r_1 - r_f) + w_2 (r_2 - r_f) && (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(r_P) &= \mu_P = E(r_f + w_1 (r_1 - r_f) + w_2 (r_2 - r_f)) && (3.7) \\ &= r_f + w_1 (\mu_1 - r_f) + w_2 (\mu_2 - r_f) && (3.8) \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4

Χρήση Γραμμικής ΄Αλγεβρας

Για την απλοποίηση των πράξεων ορίζουμε κάποια διανύσματα-μήτρες.

(i) Ορίζουμε τα διανύσματα: w,r και $\tilde{r}$ με διαστάσεις 2×1

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{r} = \begin{bmatrix} (r_1 - r_f) \\ (r_2 - r_f) \end{bmatrix} = r - \mathbb{1} r_f \tag{4.1}$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε και το 1×2 διάνυσμα:

$$w^T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

που είναι ο ανάστροφος της μήτρας w.

Οι (2.5),(2.6),(2.7),(3.6) και (4.1) εξάγουν την απόδοση με Risk free asset

$$r_{PR} = w_1 r_1 + w_2 r_2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = w^T r \tag{4.3}$$

και την απόδοση του χαρτοφυλακίου

$$r_P = w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 = w_0 r_f + w^T r \tag{4.4}$$

Εναλλακτικά, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$r_P = r_f + w_1(r_1 - r_f) + w_2(r_2 - r_f) = r_f + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (r_1 - r_f) \\ (r_2 - r_f) \end{bmatrix} = r_f + w^T \tilde{r} \tag{4.5}$$

Έπειτα, ορίζουμε τα 2×1 διανύσματα:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} (\mu_1 - r_f) \\ (\mu_2 - r_f) \end{bmatrix} = \mu - 1 \cdot r_f \tag{4.6}$$

Από τις (2.10),(2.12),(2.13),(3.8),(4.1) και (4.6) προκύπτει ότι

$$\mu_{PR} = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = w^T \mu \tag{4.7}$$

που είναι η αναμενόμενη απόδοση με Risk free asset

και

$$\mu_P = w_0 r_f + w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = w_0 r_f + w^T \mu \tag{4.8}$$

που είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

$$\mu_P = r_f + w_1(\mu_1 - r_f) + w_2(\mu_2 - r_f) = r_f + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mu_1 - r_f) \\ (\mu_2 - r_f) \end{bmatrix} = r_f + w^T \tilde{\mu} \tag{4.9}$$

Ορίζουμε την 2×2 μήτρα:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Η ορίζουσα της μήτρας Σ ορίζεται $\det(\Sigma)$.

$$\det(\Sigma) \neq 0 \implies \exists \Sigma^{-1} = \frac{1}{det(\Sigma)} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \Sigma^T = \Sigma$$

Παρατηρούμε ότι η μήτρα Σ αντιστρέφεται καθώς και ότι ισούται με τον ανάστροφο της.

Από τις (2.18),(4.1) και (4.10) εξάγουμε

$$\sigma_{P_R}^2 = w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2$$

$$= w_1^2\sigma_1^2 + w_1w_2\sigma_{12} + w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2$$

$$= w_1[w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12}] + w_2[w_1\sigma_{12} + w_2\sigma_2^2] \tag{4.14}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12} \\ w_1\sigma_{12} + w_2\sigma_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$= w^T\Sigma w \tag{4.17}$$

που είναι η διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

(ii) Ορίζουμε τα βαθμωτά γινόμενα συναρτήσει των παραπάνω διανυσμάτων που ορίσαμε:

$$b_0 = \mu^T\Sigma^{-1}\mu, \tag{4.18}$$

$$b_1 = \mu^T\Sigma^{-1}\mathbb{1} = \mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mu, \tag{4.19}$$

$$b_2 = \mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}, \tag{4.20}$$

$$b = \tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \tag{4.21}$$

Με την βοήθεια των (4.1),(4.6),(4.18),(4.19),(4.20) και (4.21) βρίσκουμε το b ως συνάρτηση των b_0, b_1, b_2 ως εξής:

$$\begin{aligned} b = \tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\tilde{\mu} &= (\mu - \mathbb{1}r_f)^T\Sigma^{-1}(\mu - \mathbb{1}r_f) \\ &= (\mu^T - \mathbb{1}^T r_f\Sigma^{-1})(\mu - \mathbb{1}r_f) \\ &= (\mu^T\Sigma^{-1}\mu) - (\mu^T\Sigma^{-1}\mathbb{1})r_f - (\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mu)r_f + (\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1})r_f^2 \\ &= (\mu^T\Sigma^{-1}\mu) - 2(\mu^T\Sigma^{-1}\mathbb{1})r_f + (\mathbb{1}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1})r_f^2 \\ &= b_0 - 2b_1r_f + b_2r_f^2 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Επιπλέον,επειδή $\Sigma > 0, \Sigma^{-1} > 0$ και $\mu \neq 0$, $\imath \neq 0$ συνεπάγεται ότι:

$$b_0 > 0, b_2 > 0, b > 0 \tag{4.23}$$

Κεφάλαιο 5

Αποτελεσματικό Σύνορο

Αποτελεσματικό Σύνορο είναι το σύνολο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων.

Αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο είναι το καλύτερο χατοφυλάκιο από όλα τα αποτελεσματικά , το οποίο θα πρέπει να διατηρεί ένας επενδυτής.

Το χαρτοφυλάκιο είναι

$$P = w_0 f + w_1 a_1 + w_2 a_2 \tag{5.1}$$

με

$$w_0 + w_1 + w_2 = 1 \implies w_0 + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \implies w_0 + w^T \mathbb{1} = 1 \tag{5.2}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.5) παίρνουμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου

$$r_P = r_f + w_1(r_1 - r_f) + w_2(r_2 - r_f) = r_f + w^T \bar{r} \tag{5.3}$$

με τη βοήθεια της σχέσης (4.9) παίρνουμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

$$E(r_P) = \mu_P = r_f + w_1(\mu_1 - r_f) + w_2(\mu_2 - r_f) = r_f + w^T \bar{\mu} \tag{5.4}$$

καθώς και με τη βοήθεια της σχέσης (4.17) παίρνουμε την διακύμανση του χαρτοφυλακίου

$$var(r_P) = \sigma_P^2 = w^T \Sigma w \tag{5.5}$$

΄Αρα, προκύπτει το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Ελαχιστοποιώ την διακύμανση σ_P^2 με περιορισμό την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου .
Δηλαδή,

$$\min_{w}[\sigma_P^2] = w^T \Sigma w \tag{5.6}$$

με περιορισμό

$$\mu_P = r_f + w^T \bar{\mu} \tag{5.7}$$

Η συνάρτηση Lagrange με παράμετρο λ δίνεται:

$$L = \frac{1}{2} w^T \Sigma w + [\mu_P - r_f - w^T \bar{\mu}] \tag{5.8}$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες πρώτης τάξης, για να ελαχιστοποιήσουμε την Lagrange την παραγωγίζουμε ως προς w και ως την παράμετρο λ και τις μηδενίζουμε.

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{1}{2} \cdot 2\Sigma w + \lambda(-\bar{\mu}) = 0 \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mu_P - r_f - w^T \bar{\mu} = 0 \tag{5.10}$$

Από τις εξισώσεις (5.9) και (5.10) συνεπάγεται ότι:

$$\Sigma w = \lambda \bar{\mu} \tag{5.11}$$

και

$$w^T \bar{\mu} = \mu_P - r_f \tag{5.12}$$

Επιπλέον, η (5.11) διαφορετικά γράφεται:

$$w = \Sigma^{-1}\Sigma w = \lambda\Sigma^{-1}\bar{\mu} \implies w^T = \lambda\bar{\mu}^T\Sigma^{-1} \tag{5.13}$$

Με τη βοήθεια των (4.18),(4.19), (4.20), (4.21), (5.12) και (5.13) βρίσκουμε την παράμετρο λ

$$\mu_P - r_f = w^T\bar{\mu} = \lambda(\bar{\mu}^T\Sigma^{-1}\bar{\mu}) = \lambda b \implies \tag{5.14}$$

$$\lambda = \frac{\mu_P - r_f}{b} \tag{5.15}$$

Οι (5.5), (5.11), (5.12) και (5.15) μας δίνουν την ελάχιστη διακύμανση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή τον ελάχιστο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου

$$\sigma_P^2 = w^T(\Sigma w) = w^T(\lambda\bar{\mu}) = (w^T\bar{\mu}) = \lambda(\mu_P - r_f) = \frac{\mu_P - r_f}{b}\cdot(\mu_P - r_f) \tag{5.16}$$

Η εξίσωση αυτή συνεπάγεται ότι:

$$\sigma_P = \frac{\mu_P - r_f}{\sqrt{b}} \tag{5.17}$$

την Γραμμή Κεφαλαιαγοράς (Capital Market Line)

$$\mu_P = r_f + \sigma_P\sqrt{b}\sigma_P \tag{5.18}$$

καθώς και την κλίση της γραμμής Κεφαλαιαγοράς

$$\sqrt{b} = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} \tag{5.19}$$

Επίσης, σύμφωνα με την συνθήκη δεύτερης τάξης έχουμε:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial w^T} = \frac{\partial}{\partial w^T}(\frac{\partial L}{\partial w}) = \frac{\partial}{\partial w^T}[\Sigma w - \lambda \bar{\mu}] \quad = \Sigma > 0 \tag{5.20}$$

Επειδή Σ μεγαλύτερο του μηδενός συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Lagrange ελαχιστοποείται.

Έτσι, βρίσκουμε την κλίση του αποτελεσματικού συνόρου παραγωγίζοντας την τυπική απόκλιση ως προς την αναμενόμμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_P}{\partial \mu_P} &= \frac{\partial}{\partial \mu_P}(\sigma_P^2)^{\frac{1}{2}} && (5.21) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_P^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \mu_P}[\frac{1}{b}(\mu_P - r_f)^2] && (5.22) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_P^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\frac{1}{b}(\mu_P - r_f)\frac{\partial}{\partial \mu_P}(\mu_P - r_f) && (5.23) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial \mu_P} = \frac{1}{\sigma_P} \cdot \frac{1}{b}(\mu_P - r_f) \tag{5.24}$$

Κεφάλαιο 6

Ιδιότητες από την κανονική κατανομή

Έστω r τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2.

$$r \sim N(\mu, \sigma^2) \implies E(r) = \mu, Var(r) = \sigma^2 \tag{6.1}$$

Επειδή παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor λαμβάνουμε υπόψιν μας τις παρακάτω συνθήκες:

$$(6.1) \implies E(r-\mu) = 0, E[(r-\mu)^2] = \sigma^2 \tag{6.2}$$

$$E[(r-\mu)]^3 = 0, E[(r-\mu)^4] = 3\sigma^4 \tag{6.3}$$

$$E[(r-\mu)]^n = 0, \forall n > 4 \tag{6.4}$$

$$var(r) = E(r^2) - [E(r)]^2 \tag{6.5}$$

$$(6.5) \implies \sigma^2 = E(r^2) - \mu^2 \implies E(r^2) = \mu^2 + \sigma^2 \tag{6.6}$$

Θέτουμε την τυχαία μεταβλητή

$$x = 1 + r \tag{6.7}$$

για την οποία σύμφωνα με τις (6.1) και (6.7) συνεπάγεται ότι:

$$\mu_x = E(x) = E(1+r) = 1 + \mu \tag{6.8}$$

και

$$\sigma_x^2 = var(x) = var(1+r) = var(1) + var(r) + 2cov(1,r) = 0 + var(r) + 0 = \sigma^2 \tag{6.9}$$

Επιπλέον, οι (6.8),(6.9) μας δίνουν ότι

$$x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) = N[(1+\mu),\ \sigma^2] \tag{6.10}$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή x ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Κεφάλαιο 7

Λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας

Θεωρούμε τη Λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας

$$u(x) = \ln(x) \tag{7.1}$$

Εναλλακτικά, με τη βοήθεια των (6.7) και (7.1) συνεπάγεται ότι:

$$u(x) = \ln(x) = \ln(1 + r) = U(r) \tag{7.2}$$

Στην συνάρτηση χρησιμότητας (7.1) θα υπολογίσουμε τις συνθήκες πρώτης,δεύτερης τρίτης ,τέταρτης και πέμπτης τάξης .
Για κάθε $x > 0$ συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = u'(x) = \frac{1}{x} \tag{7.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} = u''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \tag{7.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3u(x)}{\mathrm{d}x^3} = u'''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2}{x^3} \tag{7.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4u(x)}{\mathrm{d}x^4} = u''''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}^3u(x)}{\mathrm{d}x^3}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{2}{x^3}) = -\frac{3x^2\cdot 2}{x^6} = -\frac{6}{x^4} \tag{7.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^5u(x)}{\mathrm{d}x^5} = u^{(5)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}^4u(x)}{\mathrm{d}x^4}) == \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{6}{x^4}) = -[\frac{-24x^3}{x^8}] = \frac{24}{x^5} \tag{7.7}$$

Θέτω τη τη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας ως συνάρτηση του r:

$$U(r) = \ln(1 + r) = \ln[f(r)], \tag{7.8}$$

όπου

$$x = f(r) = 1 + r \tag{7.9}$$

Σύμφωνα με τον Κανόνας αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} \tag{7.10}$$

Από τις (7.1),(7.8),(7.9) συνεπάγεται ότι:

$$U(r) = \ln(x) = u(x) \tag{7.11}$$

$$(7.11) \implies \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+r} \tag{7.12}$$

$$(7.9) \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}(1+r)}{\mathrm{d}r} = 1 \tag{7.13}$$

Ακόμη, σύμφωνα με τις (7.10),(7.12) και (7.13) έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{1+r} \cdot 1 = \frac{1}{1+r} \tag{7.14}$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μ_x και γύρω από το 1.

(i) Ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μ_x:

Οι (7.1),(7.3),(7.4),(7.5),(7.6) γίνονται:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\mu_x) + u'(\mu_x)[x-\mu_x] + \frac{1}{2!}u''(\mu_x)[x-\mu_x]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}u'''(\mu_x)[x-\mu_x]^3 + \frac{1}{4!}u''''(\mu_x)[x-\mu_x]^4 + \ldots \end{aligned} \tag{7.15}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(\mu_x) + \frac{1}{\mu_x}[x-\mu_x] + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{\mu_x^2}\right)[x-\mu_x]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{\mu_x^3}\right)[x-\mu_x]^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{6}{\mu_x^4}\right)[x-\mu_x]^4 + \ldots \end{aligned} \tag{7.16}$$

Από την εξίσωση αυτή κάνοντας πράξεις συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(\mu_x) + \frac{1}{\mu_x}[x-\mu_x] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu_x^2}[x-\mu_x]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\mu_x^3}[x-\mu_x]^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\mu_x^4}[x-\mu_x]^4 + \ldots \end{aligned} \tag{7.17}$$

(ii) Ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 1: (Επειδή αν ($r = 0$ $x = 1 + r$=1)

Οι (7.1),(7.3),(7.4),(7.5),(7.6) γίνονται:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(1) + u'(1)[x-1] + \frac{1}{2!}u''(1)[x-1]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}u'''(1)[x-1]^3 + \frac{1}{4!}u''''(1)[x-1]^4 + \ldots \end{aligned} \tag{7.18}$$

Επομένως,

$$u(x) = \ln(1) + \frac{1}{1}[x-1] + \frac{1}{2!} + \left(-\frac{1}{1^2}\right)[x-1]^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{1^3}\right)[x-1]^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{6}{1^4}\right)[x-1]^4 + \dots \quad (7.19)$$

Από την εξίσωση αυτή κάνοντας πράξεις συνεπάγεται:

$$u(x) = 0 + [x-1] - \frac{1}{2}[x-1]^2 + \frac{1}{3}[x-1]^3 - \frac{1}{4}[x-1]^4 + \dots \quad (7.20)$$

Τώρα θα θέλουμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Taylor συναρτήσει του r.
Η σχέση (6.7) συνεπάγεται οτι

$$x = 1 + r \implies \mu_x = 1 + \mu \quad (7.21)$$

Επομένως,

$$[x - \mu_x] = 1 + r - 1 - \mu = [r - \mu] \quad (7.22)$$

και

$$[x-1] = 1 + r - 1 = r = [r - 0] \quad (7.23)$$

Με τη βοήθεια των (7.1),(7.17) και (7.22) έχουμε τη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας:

$$\begin{aligned} u(1+r) &= \ln(1+r) \\ &= \ln(1+\mu) + \frac{1}{(1+\mu)}[r-\mu] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\mu)^2}[r-\mu]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+\mu)}^3[r-\mu]^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+\mu)^4}[r-\mu]^4 + \dots \end{aligned} \quad (7.24)$$

Με τη βοήθεια των (7.1),(7.20)(7.23) έχουμε ότι:

$$u(1+r) = \ln(1+r) = 0 + r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 + \ldots \tag{7.25}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις(6.2),(6.3),(6.8),(6.9) και (7.24), βρίσκουμε την αναμενόμενη τιμή:

$$\begin{aligned} E[\ln(1+r)] &= \ln(1+\mu) + \frac{1}{(1+\mu)}E[r-\mu] - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\mu)^2}E[r-\mu]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+\mu)}^3 E[r-\mu]^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+\mu)^4}E[r-\mu]^4 + 0 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Άρα,

$$E[\ln(1+r)]\ln(1+\mu) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{(1+\mu)^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma^4}{(1+\mu)^4} \tag{7.27}$$

Διαφορετικά γράφεται ως εξής:

$$E[\ln(1+r)] = \ln(1+\mu) - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2(1+\mu)^{-2} - \frac{3}{4}\cdot\sigma^4(1+\mu)^{-4} = V \tag{7.28}$$

Σύμφωνα με το άρθρο του Levy-Markowitz(1979) η αναμενόμενη τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας ισούται με το γεωμετρικό της μέσο.

$$E[\ln(1+r)] = [\ln(1+\mu+\sigma) + \ln(1+\mu-\sigma)]/2 \tag{7.29}$$

Έπειτα, θα υπολογίσουμε βήμα βήμα το άθροισμα των λογαρίθμων.

$$\ln(1+\mu+\sigma) + \ln(1+\mu-\sigma) = \ln[(1+\mu)+\sigma]\cdot\ln[(1+\mu)-\sigma] = \ln[(1+\mu)^2 - \sigma^2] \tag{7.30}$$

Θέτουμε

$$y = 1+\mu+\sigma \implies y-(1+\mu) = \sigma \tag{7.31}$$

και

$$z = 1 + \mu - \sigma \implies z - (1 + \mu) = -\sigma \tag{7.32}$$

Επιπλέον, για την διευκόλυνση μας ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$f(y) = \ln(y), f(z) = \ln(z) \tag{7.33}$$

Οι σχέσεις (7.3),(7.4),(7.5),(7.6),(7.7) και (7.33) μας δίνουν τους παραγώγους πρώτης, δευτερης, τρίτης, τέταρτης και πέμπτης τάξης ως προς y καιz αντίστοιχα:

(i)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = y^{-1}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -y^{-2}, \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}y^3} = 2y^{-3}, \frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}y^4} = -6y^{-4}, \frac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}y^5} = 24y^{-5} \tag{7.34}$$

(ii)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = z^{-1}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = -z^{-2}, \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}z^3} = 2z^{-3}, \frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}z^4} = -6z^{-4}, \frac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}z^5} = 24z^{-5} \tag{7.35}$$

Στη συνέχεια, θα κάνουμε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $(1 + \mu)$ στις συναρτήσεις $f(y)$ και $f(z)$.

(i)

$$\begin{aligned} \ln(1 + \mu + \sigma) &= \ln(y) = f(1 + \mu) + f'(1 + \mu)[\sigma] + \frac{1}{2!}f''(1 + \mu)[\sigma]^2 \\ &+ \frac{1}{3!}f'''(1 + \mu)[\sigma]^3 + \frac{1}{4!}f''''(1 + \mu)[\sigma]^4 + \ldots \end{aligned} \tag{7.36}$$

Αυτή συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \mu + \sigma) &= \ln(1 + \mu) + (1 + \mu)^{-1}\sigma + \frac{1}{2!}[-(1 + \mu)^{-2}]\sigma^2 \\ &+ \frac{1}{3!}2(1 + \mu)^{-3}[\sigma]^3 + \frac{1}{4!}[-6(1 + \mu)^{-4}\sigma^4 + \ldots \end{aligned} \tag{7.37}$$

Άρα, κάνοντας πράξεις έχουμε οτι

$$\begin{aligned}\ln(1+\mu+\sigma) &= \ln(1+\mu)+(1+\mu)^{-1}\sigma-\frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2 \qquad (7.38)\\ &+\frac{1}{3}(1+\mu)^{-3}[\sigma]^3-\frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4+R_y \qquad (7.39)\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\ln(1+\mu-\sigma) &= \ln(z)=f(1+\mu)+f'(1+\mu)[-\sigma]+\frac{1}{2!}f''(1+\mu)[-\sigma]^2\\ &+\frac{1}{3!}f'''(1+\mu)[-\sigma]^3+\frac{1}{4!}f''''(1+\mu)[-\sigma]^4+\ldots \qquad (7.40)\end{aligned}$$

Αυτή συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned}\ln(1+\mu-\sigma) &= \ln(1+\mu)-(1+\mu)^{-1}\sigma+\frac{1}{2!}[-(1+\mu)^{-2}]\sigma^2\\ &-\frac{1}{3!}2(1+\mu)^{-3}[\sigma]^3+\frac{1}{4!}[-6(1+\mu)^{-4}]\sigma^4+\ldots \qquad (7.41)\end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned}\ln(1+\mu+\sigma) &= \ln(1+\mu)-(1+\mu)^{-1}\sigma-\frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2\\ &-\frac{1}{3}(1+\mu)^{-3}[\sigma]^3-\frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4+R_z\end{aligned}$$

Τώρα θα υπολογίσαμε το άθροισμα των παραπάνω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}\ln(1+\mu+\sigma)+\ln(1+\mu-\sigma) &= \ln(1+\mu)+(1+\mu)^{-1}\sigma-\frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2\\ &\quad+\frac{1}{3}(1+\mu)^{-3}[\sigma]^3-\frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4+R_y\ln(1+\mu+\sigma)\\ &= \ln(1+\mu)-(1+\mu)^{-1}\sigma-\frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2\\ &\quad-\frac{1}{3}(1+\mu)^{-3}[\sigma]^3-\frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4+R_z \qquad (7.43)\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\ln(1+\mu+\sigma)+\ln(1+\mu-\sigma) &= 2[\ln(1+\mu)-\frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2\\ &\quad-\frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4]+R_y+R_z \qquad (7.44)\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\ln(1+\mu+\sigma)+\ln(1+\mu-\sigma)] &= \ln(1+\mu)-\frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2\\ &\quad-\frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4+\frac{1}{2}(R_y+R_z) \qquad (7.45)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (7.31),(7.34) $\forall\xi\in((1+\mu-\sigma),(1+\mu+\sigma))$ ισχύει οτι

$$\begin{aligned}R_y &= \frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)[(y-(1+\mu)]^5]\\ &= \frac{1}{5!}24(1+\mu)^{-5}[\sigma]^5\\ &= \frac{1}{5!}24(1+\mu)^{-5}[\sigma]^5\\ &= \frac{1}{5}(1+\mu)^{-5}\sigma^5 \qquad (7.46)\end{aligned}$$

Από τις (7.32),(7.35) έπεται

$$
\begin{aligned}
R_z &= \frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)[(z-(1+\mu)]^5] \\
&= \frac{1}{5!}24(1+\mu)^{-5}[-\sigma]^5 \\
&= \frac{1}{5!}24(1+\mu)^{-5}[-\sigma]^5 \\
&= -\frac{1}{5}(1+\mu)^{-5}\sigma^5 \qquad (7.47)
\end{aligned}
$$

Και από τις (7.46),(7.47) ισχύει οτι

$$
R_y + R_z = \frac{1}{5}(1+\mu)^{-5}\sigma^5 - \frac{1}{5}(1+\mu)^{-5}\sigma^5 = 0 \qquad (7.48)
$$

Συνδυάζοντας την (7.45) με (7.48) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
V^* &= \frac{1}{2}[\ln(1+\mu+\sigma) + \ln(1+\mu-\sigma)] \\
&= \ln(1+\mu) - \frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2 - \frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4 \qquad (7.49)
\end{aligned}
$$

Οι (7.28),(7.49) συνεπάγονται

$$
\begin{aligned}
& E[\ln(1+r)] - \frac{1}{2}[\ln(1+\mu+\sigma) + \ln(1+\mu-\sigma)] \\
& \simeq \ln(1+\mu) - \frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2 - \frac{3}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4 - \ln(1+\mu) + \frac{1}{2}(1+\mu)^{-2}\sigma^2 + \frac{1}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4 \\
& = -\frac{2}{4}(1+\mu)^{-4}\sigma^4 = -\frac{1}{2}(1+\mu)^{-4}\sigma^4 \qquad (7.50)
\end{aligned}
$$

Επομένως, βρήκαμε τη διαφορά των συναρτήσεων V και V_*, όπου V η τιμή του αναπτύγματος Taylor της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας και αντίστοιχα V_* η προσεγγιστική τιμή του αναπτύγματος Taylor της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας σύμφωνα με τον Levy-Markowitz.

$$
(7.29) \implies 1+\mu-\sigma > 0 \implies 1+\mu > \sigma \implies \frac{\sigma}{1+\mu} < 1
$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ανίσωση έχουμε:

$$\sigma^2(1+\mu)^{-2} = \frac{\sigma^2}{(1+\mu)^2} < \frac{\sigma}{1+\mu} < 1 \tag{7.52}$$

και

$$\sigma^4(1+\mu)^{-4} = \frac{\sigma^4}{(1+\mu)^4} < \frac{\sigma^2}{(1+\mu)^2} < 1 \tag{7.53}$$

Όμως, η (7.52) γίνεται:

$$\sigma^2 < (1+\mu)^2 \implies (1+\mu)^2 - \sigma^2 > 0$$

Αφού $(1+\mu)^2 - \sigma^2 > 0$, με τη βοήθεια των (7.29) και (7.30) συνεπάγεται:

$$E[\ln(1+r)] \simeq \frac{1}{2}[\ln(1+\mu)^2 - \sigma^2] \tag{7.55}$$

Έστω E το σημείο ισορροπίας του χαρτοφυλακίου και V_E^* η αναμενόμενη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμόττητας του επενδυτή.

$$V_E^* = E[\ln(1+r)] \approx \frac{1}{2}[\ln(1+\mu_E)^2 - \sigma_E^2] \tag{7.56}$$

όπου

$$\mu_E = r_f + w_E^T\bar{\mu}, \tag{7.57}$$

η αναμενόμενη απόδοση στο σημείο ισορροπίας

$$\sigma_E^2 = w_E^T \Sigma w_E, \tag{7.58}$$

και η διακύμανση στο σημείο ισορροπίας.
Ακόμη,

$$(1 + \mu_E) = 1 + r_f + w_E^T \bar{\mu}, \tag{7.59}$$

΄Ομως, $\sqrt{b}$ είναι η κλίση της γραμμής κεφαλαιαγοράς

$$\mu_E = r_f + \sigma_E \sqrt{b} \implies \tag{7.60}$$

$$(1 + \mu_E) = 1 + r_f + \sigma_E \sqrt{b} \tag{7.61}$$

όπου

$$b = \bar{\mu}^T \Sigma^{-1} \bar{\mu} \tag{7.62}$$

Στη συνέχεια, προκύπτει το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης.
Μεγιστοστοποιώ την αναμενόμενη λογαριθμική συνάρτηση χρησιμόττητας V_E με περιορισμό την αναμενόμενη απόδοση και την διακύμανση στο σημείο ισορροπίας .
Δηλαδή,:

$$max V_E^*$$

με περιορισμό

$$\mu_E = r_f + w_E^T \bar{\mu} \tag{7.63}$$

και

$$\sigma_E^2 = w_E^T \Sigma w_E, \tag{7.64}$$

Για να μεγιστοποιήσουμε το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιούμε τους παρακάτω παραγώγους:

f.o.c :

$$\frac{\mathrm{d}V_E^*}{\mathrm{d}w_E} = \frac{\mathrm{d}V_E^*}{\mathrm{d}\mu_E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu_E}{\mathrm{d}w_E} + \frac{\mathrm{d}V_E^*}{\mathrm{d}\sigma_E^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_E^2}{\mathrm{d}w_E} = 0 \tag{7.65}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_E}{\mathrm{d}w_E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w_E}(r_f + w_E^T\tilde{\mu}) = \tilde{\mu} \tag{7.66}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_E^2}{\mathrm{d}w_E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w_E}(w_E^T\Sigma w_E) = 2\Sigma w_E \tag{7.67}$$

Έστω

$$\psi = (1+\mu_E)^2 - \sigma_E^2 \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_E^*}{\mathrm{d}\mu_E} = \frac{\mathrm{d}V_E^*}{\mathrm{d}\psi}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\mu_E} &= \frac{\mathrm{d}[\frac{1}{2}\ln(\psi)]}{\mathrm{d}\psi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_E}((1+\mu_E)^2 - \sigma_E^2)\\ &= \frac{1}{2}[((1+\mu_E)^2-\sigma_E^2)]^{-1}\cdot 2(1+\mu_E)\cdot 1\\ &= [((1+\mu_E)^2-\sigma^2)]^{-1}(1+\mu_E)\end{aligned} \tag{7.69}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_E^*}{\mathrm{d}\sigma_E^2} &= \frac{\mathrm{d}V_E}{\mathrm{d}\psi}\cdot\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\sigma_E^2}\\ &= \frac{\mathrm{d}[\frac{1}{2}\ln(\psi)]}{\mathrm{d}\psi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma_E^2}((1+\mu_E)^2-\sigma_E^2)\\ &= \frac{1}{2}[((1+\mu_E)^2-\sigma_E^2)]^{-1}\cdot(-1)\\ &= -\frac{1}{2}[((1+\mu_E)^2-\sigma_E^2)]^{-1}\end{aligned} \tag{7.70}$$

Με τη βοήθεια των (7.65),(7.66),(7.67),(7.69) και (7.70) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_E^*}{\mathrm{d}w_E} &= [((1+\mu_E)^2 - \sigma_E^2)]^{-1}(1+\mu_E)\tilde{\mu} - \frac{1}{2}[((1+\mu_E)^2 - \sigma_E^2)]^{-1} \cdot 2\Sigma w_E \\ &= [((1+\mu_E)^2 - \sigma_E^2)]^{-1} \cdot [(1+\mu_E)\tilde{\mu} - \Sigma w_E] = 0 \end{aligned} \tag{7.71}$$

Η (7.53) γίνεται:

$$((1+\mu_E)^2 - \sigma_E^2) \neq 0 \tag{7.72}$$

Συνδυάζοντας τις (7.71) και (7.72) βρίσκουμε ότι:

$$((1+\mu_E)\tilde{\mu} - \Sigma w_E = 0 \tag{7.73}$$

$$\Sigma w_E = (1+\mu_E)\tilde{\mu} \tag{7.74}$$

Επομένως,ισχύει οτι

$$w_E = \Sigma^{-1}\Sigma w_E = (1+\mu_E)\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \tag{7.75}$$

Δηλαδή,

$$w_E^T = (1+\mu_E)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1} \tag{7.76}$$

΄Αρα, συμφωνα με (7.62) , (7.63) και (7.76) συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} \mu_E = r_f + (1+\mu_E)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\tilde{\mu} = r_f + (1+\mu_E)b &\implies \\ \mu_E = r_f + b + mu_E b &\implies \\ \mu_E(1-b) = r_f + b &\implies \\ \mu_E = \frac{1}{1-b}[b + r_f] & \end{aligned} \tag{7.77}$$

που είναι η αναμενόμενη απόδοση του άριστου χαρτοφυλακίου.

Ως άριστο χαρτοφυλακίο ορίζουμε το καλύτερο χαρτοφυλακίο από όλα τα αποοτελεσματικά χαρτοφυλάκια, το οποίο θα πρέπει να διατηρεί ένας επενδυτής καθώς του αποφέρει τη μέγιστη απόδοση.

Επειδή $\mu_E > 0$, $b > 0$ και $r_f > 0$ συνεπάγεται ότι

$$1 - b > 0 \implies b < 1 \implies \sqrt{b} < 1 \tag{7.78}$$

Από τη σχέση (7.77) έπεται οτι

$$\begin{aligned}
\mu_E - r_f &= \frac{1}{1-b}[b + r_f] - \frac{1-b}{1-b}r_f \\
&= \frac{1}{1-b}[b + r_f - (1-b)r_f] \\
&= \frac{1}{1-b}[b + r_f - r_f + br_f] \\
&= \frac{1}{1-b}b(1 + r_f) \\
&= \frac{b}{1-b}(1 + r_f) \qquad (7.79)
\end{aligned}$$

Οι (7.62),(7.64) και (7.76) δίνουν

$$\begin{aligned}
\sigma_E^2 &= [(1+\mu_E)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}]\Sigma[(1+\mu_E)\Sigma^{-1}\tilde{\mu}] \\
&= (1+\mu_E)^2\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \\
&= (1+\mu_E)^2\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \\
&= (1+\mu_E)^2 b \qquad (7.80)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sigma_E = (1 + \mu_E)\sqrt{b} \tag{7.81}$$

Ισοδύναμα, έχουμε:

$$\sigma_E(1 + \mu_E)^{-1} = \sqrt{b} \tag{7.82}$$

Όμως, η (7.80) γίνεται:

$$\sigma_E^2(1+\mu_E)^{-2} = b \tag{7.83}$$

Η (7.77) γίνεται:

$$1+\mu_E = 1+\frac{1}{1-b}[b+r_f] = \frac{1}{1-b}[1-b+b+r_f] = \frac{1}{1-b}[1+r_f] \tag{7.84}$$

Συνδυάζοντας την (7.81) και (7.84) έχουμε:

$$\sigma_E = (1+\mu_E)\sqrt{b} = \frac{\sqrt{b}}{1-b}[1+r_f] \tag{7.85}$$

Τελικά, οι (7.77) και (7.85) δίνουν

$$\begin{aligned} \mu_E &= \frac{1}{1-b}[b+r_f] \\ &= \frac{1}{1-b}[b-br_f+br_f+r_f] \\ &= \frac{1}{1-b}[(1-b)r_f+b+br_f] \\ &= \frac{1}{1-b}(1-b)r_f+\frac{1}{1-b}b(1+r_f) \\ &= r_f+\frac{\sqrt{b}}{1-b}[1+r_f]\sqrt{b} \\ &= r_f+\sigma_E\sqrt{b} \end{aligned} \tag{7.86}$$

Άρα,

$$\mu_E = r_f+\sigma_E\sqrt{b} \tag{7.87}$$

που είναι η Γραμμή Κεφαλαιαγοράς.

Στο σημείο αυτό μεγιστοποιούμε την V_E^* και από τις σχέσεις (7.77) και (7.80) ισχύει ότι

$$(1+\mu_E)-\sigma_E = (1+\mu_E)-(1+\mu_E)\sqrt{b} = (1+\mu_E)[1-\sqrt{b}] \tag{7.88}$$

και

$$(1+\mu_E)+\sigma_E=(1+\mu_E)+(1+\mu_E)\sqrt{b}=(1+\mu_E)[1+\sqrt{b}] \tag{7.89}$$

Άρα, από τις (7.29),(7.88),(7.89) έπεται ότι:

$$maxV_E^* \simeq \frac{1}{2}\left[\ln[(1+\mu_E)(1+\sqrt{b})]+\ln[(1+\mu_E)(1-\sqrt{b})]\right] \tag{7.90}$$

και από τις (7.84) και (7.90) συνεπάγεται:

$$\begin{aligned}
maxV_E^* &\simeq \frac{1}{2}\left[\ln[\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}(1+r_f)]+\ln[\frac{1-\sqrt{b}}{1-b}(1+r_f)]\right]=V_*\\
&= \frac{1}{2}\left[[\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}(1+r_f)]\cdot[\frac{1-\sqrt{b}}{1-b}(1+r_f)]\right]\\
&= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{1-b}(1+r_f)^2\right]
\end{aligned} \tag{7.91}$$

Σύμφωνα με τη ροπογεννήτρια που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ προκύπτουν οι παρακάτω ροπές:

$$M(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

$$M'(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot(\mu+\sigma^2t)$$

$$M''(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot(\mu+\sigma^2t)^2+e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot\sigma^2$$

$$M'''(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot(\mu+\sigma^2t)^3+e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot 2(\mu+\sigma^2t)\cdot(\sigma^2)+e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot(\mu+\sigma^2t)\cdot(\sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
M''''(t) &= e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot(\mu+\sigma^2t)^4+e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot 3(\mu+\sigma^2t)^2\cdot(\sigma^2)\\
&\quad +e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot 2(\mu+\sigma^2t)^2\cdot(\sigma^2)\\
&\quad +e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot 2(\sigma^2)^2+e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot(\mu+\sigma^2t)^2\cdot(\sigma^2)\\
&\quad +e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\cdot(\sigma^2)^2
\end{aligned}$$

Για $t=0$ παίρνουμε ροπές γύρω από το μηδέν:

$$\mu_1' = M'(0) = \mu \tag{7.92}$$

$$\mu_2' = M''(0) = \mu^2 + \sigma^2 \tag{7.93}$$

$$\mu_3' = M'''(0) = \mu^3 + 2\mu\sigma^2 + \mu\sigma^2 = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \tag{7.94}$$

$$\mu_4' = M''''(0) = \mu^4 + 3\mu^2\sigma^2 + 2\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4 + \mu^2\sigma^2 + \sigma^4 = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \tag{7.95}$$

Για κάθε τυχαία μεταβλητή $r \sim N(\mu, \sigma^2)$ ισχύει :

$$E(r) = \mu_1' \tag{7.96}$$

$$E(r^2) = \mu_2' \tag{7.97}$$

$$E(r^3) = \mu_3' \tag{7.98}$$

$$E(r^4) = \mu_4' \tag{7.99}$$

Η (7.20) με τη βοήθεια των (7.96),(7.97) (7.98) και (7.99) μας δίνει:

$$V(x/1) = \mu_1' - \frac{1}{2}\mu_2' + \frac{1}{3}\mu_3' - \frac{1}{4}\mu_4' + \dots \tag{7.100}$$

Η (7.100) με τη βοήθεια των (7.92),(7.93),(7.94) και (7.95) γίνεται:

$$V(x/1) = \mu - \frac{1}{2}(\mu^2 + \sigma^2) + \frac{1}{3}(\mu^3 + 3\mu\sigma^2) - \frac{1}{4}(\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4) + ... \qquad (7.101)$$

η οποία είναι η τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας γύρω από το 1.
Έστω $y = 1 + \mu \implies$ y-1=μ
Η (7.49) γίνεται:

$$V^* = \ln(y) - \frac{1}{2}y^{-2}\sigma^2 - \frac{1}{4}y^{-4}\sigma^4 \qquad (7.102)$$

Τώρα θα κάνουμε Taylor γύρω από το σημείο 1 στις συναρτήσεις $\ln(y)$, y^{-2} και y^{-4} για να βρούμε την προσεγγιστική συνάρτηση χρησιμότητας.
(i) Taylor γύρω από το σημείο 1 στη συναρτήση $\ln(y)$:

$$\begin{aligned}
\ln(y) &= \ln(y)]_1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{y}]_1\cdot[y-1] + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{y^2})]_1\cdot[y-1]^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\frac{2}{y^3}]_1\cdot[y-1]^3 + \frac{1}{4!}(-\frac{6}{y^4})]_1\cdot[y-1]^4 \\
&= \ln(1) + \mu + \frac{1}{2}\cdot(-1)\mu^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1^3}\mu^3 + \frac{1}{24}(120)\cdot[y-1]^4 \\
&= 0 + \mu - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{3}\mu^3 - \frac{1}{4}\mu^4 \qquad (7.103)
\end{aligned}$$

(ii) Taylor γύρω από το σημείο 1 στη συναρτήση y^{-2}:

$$\begin{aligned}
y^{-2} &= y^{-2}]_1 + \frac{1}{1!}(-2y^{-3})]_1\cdot[y-1] + \frac{1}{2!}(6y^{-4})]_1\cdot[y-1]^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}(-24y^{-5})]_1\cdot[y-1]^3 + \frac{1}{4!}(120y^{-6})]_1\cdot[y-1]^4 \\
&= 1 - 2[y-1] + \frac{1}{2}6[y-1]^2 + \frac{1}{6}(-24)[y-1]^3 + \frac{1}{24}(120)[y-1]^4 \\
&= 1 - 2\mu + 3\mu^2 - 4\mu^3 + 5\mu^4 \qquad (7.104)
\end{aligned}$$

(iii) Taylor γύρω από το σημείο 1 στη συναρτήση y^{-4}:

$$
\begin{aligned}
y^{-4} &= (y^{-4})]_1 + \frac{1}{1!}(-4y^{-5})]_1 \cdot [y-1] + \frac{1}{2!}(20y^{-6})]_1 \cdot [y-1]^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}(-120y^{-7})]_1 \cdot [y-1]^3 + \frac{1}{4!}(840y^{-8})]_1 \cdot [y-1]^4 \\
&= 1 - 4\mu + 10\mu^2 - 20\mu^3 + 35\mu^4 \qquad (7.105)
\end{aligned}
$$

Η (7.80) με τη βοήθεια των σχέσεων (7.81), (7.82) και (7.83) προκύπτει η προσεγγιστική συνάρτηση χρησιμότητας:

$$
\begin{aligned}
V^* &= \mu - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{3}\mu^3 - \frac{1}{4}\mu^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}(1 - 2\mu + 3\mu^2 - 4\mu^3 + 5\mu^4)\sigma^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}(1 - 4\mu + 10\mu^2 - 20\mu^3 + 35\mu^4)\sigma^4 \qquad (7.106)
\end{aligned}
$$

Άρα, προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
V^* &= \mu - \frac{1}{2}(\mu^2 + \sigma^2) + \frac{1}{3}(\mu^3 + 3\mu\sigma^2) - \frac{1}{4}(\mu^4 + 3\mu^2\sigma^2 + \sigma^4) \\
&\quad + \frac{1}{2}(4\mu^3 - 5\mu^4)\sigma^2 + \frac{1}{4}(4\mu - 10\mu^2 + 20\mu^3 - 35\mu^4)\sigma^4 \qquad (7.107)
\end{aligned}
$$

Συμπεράσματα

Καταληκτικά, στην εργασία αυτή προσδιορίσαμε τους αντικειμενικούς και τους υποκειμενικούς παράγοντες της θεωρίας του χαρτοφυλακίου.

Αρχικά, ορίσαμε το χαρτοφυλάκιο και το διαχωρίσαμε σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο(Risk-free asset) και χωρίς κίνδυνο(Risky asset).

Επιπλέον, σε μια οικονομία με Risk-free asset προσδιορίσαμε την απόδοση, την αναμενόμενη απόδοση και τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

Έπειτα, ελαχιστοποιώντας την διακύμανση με περιορισμό την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου βρήκαμε τον ελάχιστο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, τη συνάρτηση της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς καθώς και την κλίση της.

Επίσης, ορίσαμε την λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας, υπολογίσαμε το ανάπτυγμα Taylor αυτής γύρω από το μ_x και γύρω από το 1 για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας.

Ο Harry Markowitz στο άρθρο του υποστήριξε ότι η αναμενόμενη τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης ισούται με τον γεωμετρικό μέσο της.

Έτσι, με τη βοήθεια ορισμένων μεταβλητών και συναρτήσεων που ορίσαμε υπολογίσαμε τα αναπτύγματα Taylor των βοηθητικών συναρτήσεων και βρήκαμε την προσεγγιστική αναμενόμενη τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας.

Στη συνέχεια, μεγιστοποιώντας την προσεγγιστική τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας υπολογίσαμε το βέλτιστο σημείο της καθώς και τη βέλτιστη τιμή της.

Τέλος, κάνοντας το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο 1 διαπιστώσαμε ότι η τιμή της αναμενόμενης λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας είναι περίπου ίση με την προσεγγιστική τιμή της αναμενόμενης λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμότητας.

Βιβλιογραφία

[1] Harry Markowitz(2014), Mean-Variance approximations to expected utility, *European Journal of Operational Research* 234 p.346-355

[2] http://mscinaccounting.teipir.gr/uploads/eef8ffabf2ed75f9896d258ded644a47.pdf

[3] Μαθηματική Στατιστική, Δημήτρης Λαμπράκης , Βιβλιοθήκη Πανεπιστημίου Ιωαννίνων ,σελ. 71