Department of Economics
University of Ioannina

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΗ

Η Συμπεριφορά του Επενδυτή με Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Βασιλική Πλεύρη

Επιβλέπων Καθηγητής: Συμεωνίδης Σπυρίδων

Ιωάννινα, Ιανουάριος 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΗ

Η Συμπεριφορά του Επενδυτή με Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Βασιλική Πλεύρη

Επιβλέπων Καθηγητής: Συμεωνίδης Σπυρίδων

Ιωάννινα, Ιανουάριος 2020

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέπων καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κύριο Σπύρο Συμεωνίδη για τις συμβουλές του, την πολύτιμη βοήθειά του και την άψογη συνεργασία.

Επιπλέον, θα ήθελα να δώσω ιδιαίτερες ευχαριστίες στην οικογένειά μου που ήταν δίπλα μου και με στήριξαν με κάθε τρόπο και σε αυτόν τον κύκλο σπουδών.

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή αναλύεται η θεωρία του χαρτοφυλακίου. Παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των χαρτοφυλακίων που είναι κατάλληλα προς επένδυση, καθώς και η συμπεριφορά του επενδυτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας. Η βασική θεωρία του χαρτοφυλακίου οφείλεται στον νομπελίστα οικονομολόγο Harry Markowitz. Κατά τον Harry Markowitz για τους επενδυτές έχει ιδιαίτερη σημασία τόσο ο κίνδυνος όσο και η αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης. Στο άρθρο του "Mean-Variance approximations to expected utility" αναλύεται το προφίλ ενός επενδυτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας χωρίς όμως να δοθούν αναλυτικοί τύποι για τα χαρακτηριστικά των χαρτοφυλακίων αλλά και για το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που θα επιλέξει ο επενδυτής.

Στόχος λοιπόν της εργασίας είναι να υπολογίσει με ακρίβεια το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο και τα χαρακτηριστικά αυτού, τόσο στην περίπτωση που υπάρχουν ακίνδυνες επενδύσεις όσο και στην περίπτωση που δεν υπάρχουν.

Η εργασία είναι δομημένη με τέτοιον τρόπο ώστε αναλύοντας αρχικά τα χαρακτηριστικά ενός γενικού χαρτοφυλακίου, να καταλήξει ειδικότερα στα χαρακτηριστικά του άριστου χαρτοφυλακίου που θα επενδύσει ένα άτομο ή μια επιχείρηση.

Στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα επενδυτικά αγαθά, στα χαρτοφυλάκια καθώς στα χαρακτηριστικά τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθενται οι αποδόσεις και ο κίνδυνος μιας οικονομίας με ακίνδυνες και μη επενδύσεις.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, μέσω της Άλγεβρας, ορίζονται κάποια βαθμωτά γινόμενα και μήτρες που θα βοηθήσουν στον προσδιορισμό των σταθμίσεων των χαρτοφυλακίων.

Στη συνέχεια, το πέμπτο κεφάλαιο, ασχολείται με το Αποτελεσματικό Σύνορο πάνω στο οποίο κινείται ένας επενδυτής και δίνεται ιδιαίτερη σημασία στον υπολογισμό της κλίσης αυτού, ενώ στο έκτο κεφάλαιο δίνονται κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Στο έβδομο κεφάλαιο ορίζονται και επεξεργάζονται κάποιες μορφές ειδικών χαρτοφυλακίων.

Έτσι, το όγδοο κεφάλαιο διαχωρίζει ένα γενικό χαρτοφυλάκιο με βάση τα ειδικά χαρτοφυλάκια του προηγούμενου κεφαλαίου.

Στο επόμενο κομμάτι, αναλύονται οι υποκειμενικοί παράγοντες της συμπεριφοράς του επενδυτή. Το έννατο και δέκατο κεφάλαιο πραγματεύεται την εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή και τις ιδιότητές της καθώς αναφέρονται κάποια ποσοτικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την μέτρηση του κινδύνου που παρουσιάζει μια επένδυση.

Επιπρόσθετα, στο ενδέκατο κεφάλαιο προσδιορίζεται η Καμπύλη Αδιαφορίας του επενδυτή και υπολογίζεται η κλίση της.

Στο επόμενο κεφάλαιο προσδιορίζονται τα χαρτοφυλάκια πάνω στα οποία ισορροπεί ο επενδυτής. Για να βρεθούν τα σημεία αυτά εξισώνεται η κλίση του Αποτελεσματικού Συνόρου με την κλίση της Καμπύλης Αδιαφορίας του επενδυτή.

Ωστόσο, χρειάζεται να οριστεί και το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο πάνω στο οποίο θα πραγματοποιηθεί μια επένδυση. Το χαρτοφυλάκιο αυτό προσδιορίζεται στο δέκατο τρίτο κεφάλαιο και βρίσκεται στο σημείο όπου μεγιστοποιείται η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή και ελαχιστοποιείται ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου που επενδύεται.

Στο δέκατο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο αναλύεται τι συμβαίνει στην περίπτωση που οι ισορροπίες πάνω σε κάποιο από τα Αποτελεσματικά Σύνορα του επενδυτή ταυτίζονται με την ισορροπία στην Αγορά γενικότερα.

Κεφάλαιο 1

Επενδυτικά αγαθά της Αγοράς

Στα χρηματοοικονομικά, επενδυτικό αγαθό (asset) ονομάζεται ένα περιουσιακό στοιχείο μιας επιχείρησης, το οποίο επενδύεται, με σκοπό να επιφέρει κέρδος στην επιχείρηση αυτή. Επίσης, απόδοση (return) μιας επένδυσης ονομάζεται το μέγεθος κατά το οποίο μεταβάλλεται ο πλούτος ενός επενδυτή.

Διακρίνουμε δύο κατηγορίες επενδυτικών αγαθών:

(i)Risk free asset f, με απόδοση $r_f \neq$ τυχαία μεταβλητή (τ.μ.): Είναι τα επενδυτικά αγαθά που δεν περιλαμβάνουν την παράμετρο του κινδύνου της αγοράς.

(ii)Risky assets a_i, (i=1,...,N) με αποδόσεις r_i= τ.μ.: Είναι τα επενδυτικά αγαθά που περιλαμβάνουν την παράμετρο του κινδύνου της αγοράς.

1.1 Στοχαστικές ιδιότητες

Για τις αποδόσεις των επενδυτικών αγαθών ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

$\forall$ i,j=1,...,N ισχύει :

$$E(r_f) = r_f, var(r_f) = 0 \tag{1.1}$$

$$E(r_i) = \mu_i, var(r_i) = \sigma_i^2 \tag{1.2}$$

$$Cov(r_f, r_i) = \sigma_{fi} = 0 \tag{1.3}$$

$$Cov(r_i, r_j) = \sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{1.4}$$

$$\rho_{ij} = corr(r_i, r_j) \tag{1.5}$$

1.2 Λόγος ή αναλογία του Sharpe

Για κάθε επενδυτικό αγαθό a_i,(i=1,...,N) ορίζουμε:

$$\mu_i = E(r_i) \tag{1.6}$$

να είναι η αναμενόμενη απόδοση του αγαθού, με την οποία οι επενδυτές προβλέπουν τι θα αποκομίσουν στο μέλλον από μια επένδυση και

$$\sigma_i = \sqrt{var(r_i)} \tag{1.7}$$

να είναι η τυπική απόκλιση ή αλλιώς ο κίνδυνος της επένδυσης.

Μια μέθοδος μέτρησης του κινδύνου των επενδύσεων είναι η μέτρηση της τυπικής απόκλισης των αγαθών που συμμετέχουν στην επένδυση. Αξιοσημείωτο είναι οτι ο κίνδυνος επένδυσης κάθε ξεχωριστού αγαθού επηρεάζει τον συνολικό κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων κατά το ποσοστό που συμμετέχει το κάθε αγαθό στο επενδυόμενο χαρτοφυλάκιο.

Ο Λόγος του Sharpe συνυπολογίζει την απόδοση ανά μονάδα συνολικού κινδύνου. Επομένως, ως Λόγο του Sharpe ορίζουμε το πηλίκο :

$$SR_i = \frac{\mu_i}{\sigma_i} \tag{1.8}$$

Ένας επενδυτής επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο με υψηλή αναμενόμενη απόδοση και χαμηλή τυπική απόκλιση. Δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο με υψηλό Sharpe Ratio.

Κεφάλαιο 2

Το Χαρτοφυλάκιο

Με δεδομένα τα επενδυτικά αγαθά $f, a_1, \ldots, a_N$, χαρτοφυλάκιο, P, ονομάζεται κάθε συνδυασμός της μορφής:

$$P = w_0 f + w_1 a_1 + \ldots + w_N a_N \tag{2.1}$$

όπου $w_0, w_1, \ldots, w_N$ είναι οι σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή, το ποσοστό του προς επένδυση κεφαλαίου που έχει επενδυθεί στα επενδυτικά αγαθά $f, a_1, \ldots, a_N$, αντίστοιχα.

2.1 Διαμέριση του P

Το χαρτοφυλάκιο P διαμερίζεται ως εξής:

(i) Risk free τμήμα του P:

(Δεν περιλαμβάνεται η παράμετρος του κινδύνου)

$$P_f = w_0 f \tag{2.2}$$

(ii) Risky τμήμα του P:

(Περιλαμβάνεται η παράμετρος του κινδύνου)

$$P_R = w_1 a_1 + \ldots + w_N a_N \tag{2.3}$$

Επομένως,

$$P = P_f + P_R \tag{2.4}$$

2.2 Απόδοση του P

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου P συμβολίζεται με r_P και ορίζεται ως:

$$r_p = w_0 r_f + w_1 r_1 + \ldots + w_N r_N \tag{2.5}$$

όπου

$$r_{PF} = w_0 r_f \tag{2.6}$$

είναι η απόδοση του Risk free τμήματος του P, και

$$r_{PR} = w_1 r_1 + \ldots + w_N r_N \tag{2.7}$$

είναι η απόδοση του Risky τμήματος του P.

Η απόδοση r_P είναι τυχαία μεταβλητή και οι εξισώσεις (1.1),(1.2),(1.3),(1.4),(1.5) και (2.5) υπολογίζουν την αναμενόμενη απόδοση και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου P.

(i) Η αναμενόμενη απόδοση είναι:

$$\begin{aligned} E(r_P) = \mu_P &= E(w_0 r_f + w_1 r_1 + \ldots + w_N r_N) \\ &= w_0 E(r_f) + w_1 E(r_1) + \ldots + w_N E(r_N) \\ &= w_0 r_f + w_1 \mu_1 + \ldots + w_N \mu_N \\ &= \mu_{PF} + \mu_{PR} \end{aligned} \tag{2.8}$$

όπου:

$$\mu_{PF} = E(w_0 r_f) = w_0 E(r_f) = w_0 r_f \tag{2.9}$$

είναι η αναμενόμενη απόδοση του Risk free τμήματος του P, και

$$\begin{aligned} \mu_{PR} = E(r_{PR}) &= E(w_1 r_1 + \ldots + w_N r_N) \\ &= w_1 E(r_1) + \ldots + w_N E(r_N) \\ &= w_1 \mu_1 + \ldots + w_N \mu_N \end{aligned} \tag{2.10}$$

είναι η αναμενόμενη απόδοση του Risky τμήματος του P.

(ii) Η τυπική απόκλιση είναι:

$$
\begin{aligned}
var(r_P) = \sigma_P^2 &= var(w_0 r_f + w_1 r_1 + \dots + w_N r_N) \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 var(r_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Cov(r_i, r_i) \\
&= \sigma_{P_R}^2
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

για το Risky τμήμα του P, και

$$
\sigma_{P_F}^2 = var(r_{PF}) = var(w_0 r_f) = w_0^2 \cdot var(r_f) = w_0^2 \cdot 0 = 0 \tag{2.12}
$$

για το Risk-free τμήμα του P.

Κεφάλαιο 3

Οικονομία

3.1 Οικονομία χωρίς ακίνδυνη επένδυση

Σε μια οικονομία, όταν δεν υπάρχει το ακίνδυνο επενδυτικό αγαθό f, τότε το σύνολο του προς επένδυση κεφαλαίου επενδύεται αποκλειστικά στα επενδυτικά αγαθά $a_1,...,a_N$ που περιλαμβάνουν τον κίνδυνο και για τις σταθμίσεις αυτών ισχύει οτι:

$$w_1 + ... + w_N = 1 \tag{3.1}$$

Από τα παραπάνω αλλά και από την εξίσωση (2.4) παίρνουμε την εξής μορφή του χαρτοφυλακίου:

$$P = P_R \tag{3.2}$$

Οι εξισώσεις (2.5),(2.6),(2.7),(2.8),(2.9),(2.10),(2.11),(2.12) δίνουν την απόδοση,την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο(διακύμανση) για το χαρτοφυλάκιο αυτό:

$$r_P = r_{PR} = w_1 r_1 + ... + w_N r_N \tag{3.3}$$

με αναμενόμενη απόδοση

$$\mu_P = \mu_{PR} = w_1 \mu_1 + ... + w_N \mu_N \tag{3.4}$$

και διακύμανση

$$\sigma_P^2 = \sigma_{PR}^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Cov(r_i, r_j) \tag{3.5}$$

3.2 Οικονομία με ακίνδυνη επένδυση

Από την άλλη,όταν σε μια οικονομία υπάρχει το ακίνδυνο επενδυτικό αγαθό f, τότε το σύνολο του προς επένδυση κεφαλαίου επενδύεται τόσο στο αγαθό f όσο και στα αγαθά a_1,...,a_N που περιλαμβάνουν την παράμετρο του κινδύνου. Για τις σταθμίσεις και των δύο ειδών των παραπάνω αγαθών ισχύει η οτι:

$$w_0 + w_1 + ... + w_N = 1 \tag{3.6}$$

Από τα παραπάνω αλλά και από την εξίσωση (2.4) το χαρτοφυλάκιο θα πάρει την εξής μορφή :

$$P = P_F + P_R \tag{3.7}$$

Οι εξισώσεις (2.5),(2.6),(2.7),(2.8),(2.9),(2.10),(2.11),(2.12) δίνουν την απόδοση, την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο(διακύμανση) για το χαρτοφυλάκιο αυτό:

$$r_P = r_{PF} + r_{PR} = w_0 r_f + w_1 r_1 + ... + w_N r_N \tag{3.8}$$

με αναμενόμενη απόδοση

$$\mu_P = \mu_{PF} + \mu_{PR} = w_0 r_f + w_1 \mu_1 + ... + w_N \mu_N \tag{3.9}$$

και διακύμανση

$$\sigma_P^2 = \sigma_{P_R}^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 var(r_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} W_i w_j Cov(r_i, r_j) \tag{3.10}$$

Εναλλακτικά, για την απόδοση του χαρτοφυλακίου P οι εξισώσεις (3.6) και (3.8) δίνουν :

$$\begin{aligned} r_P &= (1 - w_1 - ... - w_N) r_f + w_1 r_1 + ... + w_N r_N \\ &= r_f + w_1(r_1 - r_f) + ... + w_N(r_N - r_f) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Στην περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη απόδοση του P γίνεται:

$$
\begin{aligned}
E(r_P) = \mu_P &= E[r_f + w_1(r_1 - r_f) + \ldots + w_N(r_N - r_f)] \\
&= E(r_f) + w_1 E(r_1 - r_f) + \ldots + w_N E(r_N - r_f) \\
&= r_f + w_1[E(r_1) - E(r_f)] + \ldots + w_N[E(r_N) - E(r_f)] \\
&= r_f + w_1[\mu_1 - r_f] + \ldots + w_N[\mu_N - r_f] \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 4

Με Συμβολισμό Γραμμικής ΄Αλγεβρας

Επειδή εξετάζουμε την περίπτωση να υπάρχουν N το πλήθος επενδυτικά αγαθά, για την διευκόλυνση των πράξεων, ορίζουμε κάποια διανύσματα-μήτρες με τουλάχιστον την μία τους διάσταση να ισούται με N.
Αρχικά, ορίζουμε τα $N \times 1$ διανύσματα:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{r} = \begin{bmatrix} (r_1 - r_f) \\ \vdots \\ (r_N - r_f) \end{bmatrix} = r - \mathbb{1} r_f \tag{4.1}$$

΄Επειτα, ορίζουμε και το $1 \times N$ διάνυσμα:

$$w^T = \begin{bmatrix} w_1, & \ldots, w_N \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

το οποίο ισούται με την ανάστροφο του διανύσματος w.

Από τις εξισώσεις (2.5),(2.6),(2.7),(3.11),(4.1) και (4.2) παίρνουμε τις απόδόσεις του χαρτοφυλακίου P για τη Risky και για τη Risk-free πρίπτωση, αντίστοιχα:

$$r_{PR} = w_1 r_1 + \ldots + w_N r_N = \begin{bmatrix} w_1, & \ldots, & w_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = w^T r \tag{4.3}$$

Και

$$r_P = w_0 r_f + w_1 r_1 + \ldots + w_N r_N = w_0 r_f + w^T r \tag{4.4}$$

η οποία διαφορετικά θα μπορούσε να γραφεί και ως:

$$\begin{aligned} r_P &= r_f + w_1(r_1 - r_f) + ... + w_N(r_N - r_f) \\ &= r_f + \begin{bmatrix} w_1, & \dots, & w_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (r_1 - r_f) \\ \vdots \\ (r_N - r_f) \end{bmatrix} \\ &= r_f + w^T \tilde{r} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα $N \times 1$ διανύσματα:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}, \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} (\mu_1 - r_f) \\ \vdots \\ (\mu_N - r_f) \end{bmatrix} = \mu - 1 \cdot r_f \tag{4.6}$$

Από τις εξισώσεις (2.8),(2.9),(2.10),(3.12),(4.1),(4.2) και (4.6) παίρνουμε τις αναμενόμενες απόδόσεις του χαρτοφυλακίου για τη Risky και για τη Risk-free πρίπτωση, αντίστοιχα:

$$\mu_{PR} = w_1\mu_1 + ... + w_N\mu_N = \begin{bmatrix} w_1, & \dots, & w_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = w^T \mu \tag{4.7}$$

και

$$\mu_P = w_0 r_f + w_1\mu_1 + ... + w_N\mu_N = w_0 r_f + w^T \mu \tag{4.8}$$

η οποία διαφορετικά γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mu_P &= r_f + w_1(\mu_1 - r_f) + ... + w_N(\mu_N - r_f) \\ &= r_f + \begin{bmatrix} w_1, & \dots, & w_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mu_1 - r_f) \\ \vdots \\ (\mu_N - r_f) \end{bmatrix} \\ &= r_f + w^T \tilde{\mu} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Για να ορίσουμε τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου ορίζουμε και την $N \times N$ μήτρα Σ:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου P στη Risky περίπτωση δίνεται από τις εξισώσεις (2.11),(4.1),(4.2) και (4.10), και είναι:

$$\sigma_{PR}^2 = w^T \Sigma w \tag{4.11}$$

Τέλος, ορίζουμε τα βαθμωτά γινόμενα με τη βοήθεια των διανυσμάτων που ορίσαμε πιο πάνω, ως εξής:

$$b_0 = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \tag{4.12}$$

$$b_1 = \mu^T \Sigma^{-1} 1 = 1^T \Sigma^{-1} \mu, \tag{4.13}$$

$$b_2 = 1^T \Sigma^{-1} 1, \tag{4.14}$$

και

$$b = \tilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \tag{4.15}$$

Από τις εξισώσεις (4.1),(4.6),(4.12),(4.13),(4.14) και (4.15) υπολογίζουμε το βαθμωτό γινόμενο b, συναρτήσει των βαθμωτών γινομένων b_0, b_1, b_2 ως εξής:

$$\begin{aligned} b = \tilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \tilde{\mu} &= (\mu - 1 r_f)^T \Sigma^{-1} (\mu - 1 r_f) \\ &= (\mu^T - 1^T r_f) \Sigma^{-1} (\mu - 1 r_f) \\ &= (\mu^T \Sigma^{-1} \mu) - (\mu^T \Sigma^{-1} 1) r_f - (1^T \Sigma^{-1} \mu) r_f + (1^T \Sigma^{-1} 1) r_f^2 \\ &= (\mu^T \Sigma^{-1} \mu) - (\mu^T \Sigma^{-1} 1) r_f - (\mu^T \Sigma^{-1} 1) r_f + (1^T \Sigma^{-1} 1) r_f^2 \\ &= (\mu^T \Sigma^{-1} \mu) - 2(\mu^T \Sigma^{-1} 1) r_f + (1^T \Sigma^{-1} 1) r_f^2 \\ &= b_0 - 2 b_1 r_f + b_2 r_f^2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Επιπλέον, επειδή ισχύει οτι $\Sigma > 0$, $\Sigma^{-1} > 0$ και $\mu \neq 0$, $\imath \neq 0$ έπεται οτι:

$$b_0 > 0, b_2 > 0, b > 0 \tag{4.17}$$

Κεφάλαιο 5

Το Αποτελεσματικό Σύνορο

Αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο λέγεται εκείνο το χαρτοφυλάκιο το οποίο με δεδομένο κίνδυνο παρέχει τη μεγαλύτερη απόδοση και με δεδομένη απόδοση έχει τον μικρότερο κίνδυνο. ´Ετσι, Αποτελεσματικό Σύνορο ονομάζουμε το σύνολο όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων που περιλαμβάνουν έναν συγκεκριμένο αριθμό επενδυτικών αγαθών.

5.1 Οικονομία χωρίς ακίνδυνη επένδυση

Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε το χαρτοφυλάκιο P ως:

$$P_R = w_1 a_1 + ... + w_N a_N \tag{5.1}$$

με την ανάλογη σχέση για τις σταθμίσεις να είναι:

$$w_1 + ... + w_N = 1 \implies \begin{bmatrix} w_1, & \dots, & w_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \implies w^T \mathbb{1} = 1 \tag{5.2}$$

Η εξίσωση (4.3) μας δίνει την απόδοση του χαρτοφυλακίου P_R.

$$r_{PR} = w_1 r_1 + ... + w_N r_N = w^T r \tag{5.3}$$

όπου από την (4.7) παίρνουμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

$$E(r_{PR}) = \mu_{PR} = w_1 \mu_1 + \cdots + w_N \mu_N = w^T \mu \tag{5.4}$$

και από τη σχέση (4.11) παίρνουμε την διακύμανσή του

$$var(r_{PR}) = \sigma_{P_R}^2 = w^T \Sigma w \tag{5.5}$$

Το πρόβλημα εδώ είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, δηλαδή τη διακύμανσή του, με περιορισμό την αναμενόμενη απόδοσή του. Θα ελαχιστοποιήσουμε λοιπόν ως προς w, την συνάρτηση:

$$\sigma_{P_R}^2 = w^T \Sigma w \tag{5.6}$$

υπό τους περιορισμούς :

$$\mu_{PR} = w^T \mu \tag{5.7}$$

και

$$1 = w^T \mathbf{1} \tag{5.8}$$

Για να επιτύχουμε την ελαχιστοποίηση αυτή χρησιμοποιούμε την μέθοδο του Lagrange . Η εξίσωση Lagrange με πολλαπλασιαστές τα λ_1 και λ_2,είναι:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} w^T \Sigma w + \lambda_1 \left[\mu_{PR} - w^T \mu\right] + \lambda_2 \left[1 - w^T \mathbf{1}\right] \tag{5.9}$$

όπου το κλάσμα $\frac{1}{2}$ χρησιμοποιείται για τη διευκόλυνση των πράξεων.

Στη συνέχεια, παίρνουμε τις Συνθήκες Πρώτης Τάξης της εξίσωσης Lagrange και τις εξισώνουμε με το μηδέν ως εξής:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = \frac{1}{2} 2 \Sigma w + \lambda_1(-\mu) + +\lambda_2(-\mathbf{1}) = 0 \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = \mu_{PR} - w^T \mu = 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_2} = 1 - w^T \mathbf{1} = 0 \tag{5.12}$$

Οι εξισώσεις (5.10),(5.11),(5.12) συνεπάγονται οτι:

$$\Sigma w = \lambda_1 \mu + \lambda_2 \mathbf{1} \tag{5.13}$$

$$\mu_{PR} = w^T \mu \tag{5.14}$$

$$1 = w^T \mathbf{1} \tag{5.15}$$

Επομένως, λόγω της (5.13) το σύνολο των σταθμίσεων w ισούται με:

$$w = \Sigma^{-1}\Sigma w = \lambda_1 \Sigma^{-1}\mu + \lambda_2 \Sigma^{-1}\mathbf{1} \implies w^T = \lambda_1 \mu^T \Sigma^{-1} + \lambda_2 \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \tag{5.16}$$

Με τη σειρά τους αλλάζει και η μορφή των περιορισμών του προβλήματός μας και λόγω των εξισώσεων (4.12),(4.13),(4.14),(4.15),(5.14),(5.15) και (5.16) γίνονται:

$$\mu_{PR} = w^T \mu = \lambda_1(\mu^T \Sigma^{-1} \mu) + \lambda_2(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu) = \lambda_1 b_0 + \lambda_2 b_1 \tag{5.17}$$

και

$$1 = w^T \mathbf{1} = \lambda_1(\mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) + \lambda_2(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \tag{5.18}$$

Τελικά, το σύστημα των εξισώσεων (5.17) και (5.18) γράφεται πιο συγκεντρωμένα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{PR} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Υπό την προυπόθεση οτι η μήτρα του συστήματος (5.19) είναι μη ιδιάζουσα, δηλαδή $b_0 b_2 - b_1^2 \neq 0$ βρίσκουμε οτι

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{PR} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{b_0 b_2 - b_1^2} \cdot \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -b_1 & b_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{PR} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{b_0 b_2 - b_1^2} \cdot \begin{bmatrix} (b_2 \mu_{PR} - b_1) \\ (-b_1 \mu_{PR} + b_0) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Αυτό συνεπάγεται οτι :

$$\lambda_1 = \frac{b_2 \mu_{PR} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} \tag{5.21}$$

και

$$\lambda_2 = \frac{-b_1\mu_{PR} + b_0}{b_0 b_2 - b_1^2} = \frac{b_0 - b_1\mu_{PR}}{b_0 b_2 - b_1^2} \tag{5.22}$$

Οι εξισώσεις (5.5),(5.13),(5.14),(5.15) και (5.21),(5.22) μας δίνουν τον ελαχιστοποιημένο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου:

$$\begin{aligned}
\sigma_{PR}^2 &= w^T(\Sigma w) \\
&= w^T(\lambda_1\mu + \lambda_2 1) \\
&= \lambda_1(w^T\mu) + \lambda_2(w^T 1) \\
&= \lambda_1\mu_{PR} + \lambda_2 1 \\
&= \frac{b_2\mu_{PR} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2}\cdot \mu_{PR} + \frac{b_0 - b_1\mu_{PR}}{b_0 b_2 - b_1^2}\cdot 1 \\
&= \frac{b_2\mu_{PR}^2 - b_1\mu_{PR} - b_1\mu_{PR} + b_0}{b_0 b_2 - b_1^2} \\
&= \frac{b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0}{b_0 b_2 - b_1^2}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Επομένως, στην περίπτωση που δεν υπάρχει ακίνδυνη επένδυση ορίζουμε ως Αποτελεσματικό Σύνορο την Καμπύλη Κινδύνου Απόδοσης,η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\sigma_{PR} = \sqrt{\frac{b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0}{b_0 b_2 - b_1^2}} \tag{5.24}$$

Επιπλέον, για την εξίσωση του Lagrange θα υπολογίσουμε και τις Συνθήκες Δεύτερης Τάξης:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial w \cdot \partial w^T} = \frac{\partial}{\partial w^T}\cdot\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w}\right) = \frac{\partial}{\partial w^T}\cdot \left[\Sigma w + \lambda_1(-\mu) + \lambda_2(-1)\right] = \Sigma > 0 \tag{5.25}$$

όπου το σύμβολο $>$ σημαίνει οτι η μήτρα Σ είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή ο κίνδυνος ελαχιστοποιείται.

Η κλίση της Καμπλύλης Κινδύνου Απόδοσης βρίσκεται εάν παραγωγίσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου ως προς την αναμενόμενη απόδοσή του:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_{PR}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} \cdot (\sigma^2_{PR})^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(\sigma^2_{PR})^{(\frac{-1}{2})} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^2_{PR}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} \\
&= \frac{1}{2}(\sigma^2_{PR})^{(\frac{-1}{2})} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} \left[\frac{b_2\mu^2_{PR} - 2b_1\mu_{PR} + b_0}{b_0 b_2 - b_1^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(\sigma^2_{PR})^{(\frac{-1}{2})} \cdot \left[\frac{2\mu_{PR} b_2 - 2b_1}{b_0 b_2 - b_1^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_{PR}} \cdot \frac{b_2\mu_{PR} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2}
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

5.2 Οικονομία με ακίνδυνη επένδυση

Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε το χαρτοφυλάκιο P να είναι:

$$P = w_0 r_f + w_1 a_1 + ... + w_N a_N \tag{5.27}$$

με την ανάλογη σχέση για τις σταθμίσεις να είναι:

$$w_0 + w_1 + ... + w_N = 1 \implies w_0 + \begin{bmatrix} w_1, & ..., & w_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \implies w_0 + w^T \mathbb{1} = 1 \tag{5.28}$$

Η εξίσωση (4.5) μας δίνει την απόδοση του χαρτοφυλακίου P:

$$r_P = r_f + w_1(r_1 - r_f) + ... + w_N(r_N - r_f) = r_f + w^T \tilde{r} \tag{5.29}$$

όπου από την (4.9) παίρνουμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

$$E(r_P) = \mu_P = r_f + w_1(\mu_1 - r_f) + ... + w_N(\mu_N - r_f) = r_f + w^T \bar{\mu} \tag{5.30}$$

και από τη σχέση (4.11) παίρνουμε τη διακύμανσή του

$$var(r_P) = \sigma^2_P = w^T \Sigma w \tag{5.31}$$

Στο σημείο αυτό θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, δηλαδή τη διακύμανσή του, με περιορισμό την αναμενόμενη απόδοσή του. Θα ελαχιστοποιήσουμε λοιπόν ως προς w, την συνάρτηση:

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w \tag{5.32}$$

με τον περιορισμό :

$$\mu_P = r_f + w^T \bar{\mu} \tag{5.33}$$

Για να επιτύχουμε την ελαχιστοποίηση αυτή χρησιμοποιούμε την μέθοδο του Lagrange . Η συνάρτηση Lagrange με πολλαπλασιαστή το λ είναι:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} w^T \Sigma w + \lambda \left[\mu_P - r_f - w^T \bar{\mu} \right] \tag{5.34}$$

όπου και εδώ το κλάσμα $\frac{1}{2}$ χρησιμοποιείται για τη διευκόλυνση των πράξεων.

Στη συνέχεια, παίρνουμε τις Συνθήκες Πρώτης Τάξης της εξίσωσης Lagrange και τις εξισώνουμε με το μηδέν ως εξής:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = \frac{1}{2} 2\Sigma w + \lambda(-\tilde{\mu}) = 0 \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = \mu_P - r_f - w^T \tilde{\mu} = 0 \tag{5.36}$$

Οι εξισώσεις (5.35),(5.36) συνεπάγονται οτι:

$$\Sigma w = \lambda \tilde{\mu} \tag{5.37}$$

$$w^T \tilde{\mu} = \mu_P - r_f \tag{5.38}$$

Επομένως, λόγω της (5.37) το σύνολο των σταθμίσεων w ισούται με:

$$w = \Sigma^{-1} \Sigma w = \lambda \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \implies w^T = \lambda \tilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \tag{5.39}$$

Με τη σειρά του αλλάζει η μορφή του περιορισμού του προβλήματός μας και από τις εξισώσεις (4.12),(4.13),(4.14),(4.15),(5.38) και (5.39) παίρνουμε τον πολλαπλασιαστή λ.

$$\mu_P - r_f = w^T\tilde{\mu} = \lambda(\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\tilde{\mu}) = \lambda b \implies \lambda = \frac{\mu_P - r_f}{b} \tag{5.40}$$

Οι εξισώσεις (5.31),(5.37),(5.38) και (5.40) μας δίνουν τον ελαχιστοποιημένο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= w^T(\Sigma w) \\ &= w^T(\lambda\tilde{\mu}) \\ &= \lambda(w^T\tilde{\mu}) \\ &= \lambda(\mu_P - r_f) \\ &= \frac{\mu_P - r_f}{b}\cdot(\mu_P - r_f) \\ &= \frac{(\mu_P - r_f)^2}{b} \end{aligned} \tag{5.41}$$

Επομένως, στην περίπτωση που υπάρχει ακίνδυνη επένδυση ορίζουμε ως Αποτελεσματικό Σύνορο την Γραμμή Κεφαλαιαγοράς [Capital Market Line (CML)], η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\sigma_P = \frac{\mu_P - r_f}{\sqrt{b}} \tag{5.42}$$

από όπου έχουμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου με τυπική απόκλιση σ_P :

$$\mu_P = r_f + \sigma_P\sqrt{b} \tag{5.43}$$

και την κλίση της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς:

$$\sqrt{b} = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} \tag{5.44}$$

Επιπλέον, για την εξίσωση του Lagrange θα υπολογίσουμε και τις Συνθήκες Δεύτερης Τάξης:

$$\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial w\cdot\partial w^T} = \frac{\partial}{\partial w^T}\cdot(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial w}) = \frac{\partial}{\partial w^T}\cdot[\Sigma w - \lambda\tilde{\mu}] = \Sigma > 0 \tag{5.45}$$

όπου το σύμβολο > σημαίνει οτι η μήτρα Σ είναι θετικά ορισμένη, επομένως ο κίνδυνος ελαχιστοποιείται.

Επιπλέον, η κλίση της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς βρίσκεται εάν παραγωγίσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου ως προς την αναμενόμενη απόδοσή του :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_P}{\mathrm{d}\mu_P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_P}\cdot \sigma_P^{2\,\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{PR}^2)^{(\frac{-1}{2})}\cdot \frac{\mathrm{d}\sigma_P^2}{\mathrm{d}\mu_P} \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_P^2)^{(\frac{-1}{2})}\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_P}\left[\frac{(\mu_P - r_f)^2}{b}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sigma_P^{2(\frac{-1}{2})}\cdot 2\cdot \frac{1}{b}\cdot(\mu_P - r_f)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_P}\cdot(\mu_P - r_f) \\
&= \frac{1}{\sigma_P}\cdot\frac{1}{b}\cdot(\mu_P - r_f)
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

Κεφάλαιο 6

Ενδιάμεσα αποτελέσματα

Από την εξίσωση (5.24) λαμβάνουμε οτι οι ποσότητες

$$b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0 \tag{6.1}$$

και

$$b_0b_2 - b_1^2 \tag{6.2}$$

είναι ομόσημες.

Επιπλέον, εφόσον η κλίση, $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{PR}}{\mathrm{d}\mu_{PR}}$, της Καμπύλης Κινδύνου Απόδοσης είναι θετική, τότε η εξίσωση (5.26) δίνει οτι οι ποσότητες

$$b_2\mu_{PR} - b_1 \tag{6.3}$$

και

$$b_0b_2 - b_1^2 \tag{6.4}$$

έχουν το ίδιο πρόσημο.

Τέλος, επειδή ο κίνδυνος, σ_{PR}, του χαρτοφυλακίου χωρίς ακίνδυνη επένδυση είναι θετικός, η εξίσωση (5.24) δίνει οτι

$$b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0 \neq 0 \tag{6.5}$$

Κεφάλαιο 7

Ειδικά Χαρτοφυλάκια

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύουμε συγκεκριμένες μορφές χαρτοφυλακίων και βρίσκουμε τα χαρακτηριστικά τους είτε αυτά περιέχουν ακίνδυνη επένδυση, είτε οχι.

7.1 Οικονομία χωρίς ακίνδυνη επένδυση

(i)Global Minimum Variance Portfolio (GMVP ή min).

Το ελάχιστο χαρτοφυλάκιο που μπορεί να επενδυθεί βρίσκεται στο κατώτερο σημείο του Αποτελεσματικού Συνόρου. Βρίσκεται δηλαδή εκεί που η κλίση της Καμπύλης Κινδύνου Απόδοσης ισούται με μηδέν. Επομένως, από την εξίσωση (5.26) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_{PR}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} &= 0 \implies \\
\frac{1}{\sigma_{PR}} \cdot \frac{b_2\mu_{PR} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} &= 0 \implies \\
\frac{b_2\mu_{PR} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} &= 0 \implies \\
b_2\mu_{PR} - b_1 &= 0
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Ας θεωρήσουμε οτι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου P_R είναι η αναμενόμενη απόδοση του ελαχίστου χαρτοφυλακίου. Δηλαδή, έστω οτι $\mu_{min} = \mu_{GMVP} = \mu_{PR}$, τότε από την εξίσωση (7.1) έχουμε:

$$
\mu_{min} = \mu_{GMVP} = \frac{b_1}{b_2} > 0 \tag{7.2}
$$

και εφόσον, $b_2 > 0$,η εξίσωση (7.2) συνεπάγεται οτι

$$
b_1 > 0 \tag{7.3}
$$

Από τις εξισώσεις (5.16),(5.21),(5.22) και (7.2) υπολογίζουμε τους συντελεστές του προβλήματος ελαχιστοποίησης κινδύνου για το ελάχιστο χαρτοφυλάκιο, ως εξής:

$$\lambda_{1min} = \frac{b_2\mu_{min} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} = \frac{b_2 \cdot \frac{b_1}{b_2} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} = 0 \tag{7.4}$$

$$\lambda_{2min} = \frac{b_0 - b_1\mu_{min}}{b_0 b_2 - b_1^2} = \frac{b_0 - b_1 \cdot \frac{b_1}{b_2}}{b_0 b_2 - b_1^2} = \frac{\frac{b_0 b_2 - b_1^2}{b_2}}{b_0 b_2 - b_1^2} = \frac{1}{b_2} \tag{7.5}$$

Άρα, από την (5.16) το σύνολο των σταθμίσεων του ελαχίστου χαρτοφυλακίου είναι:

$$\begin{aligned} w_{min} = w_{GMVP} &= \lambda_{1min}\Sigma^{-1}\mu + \lambda_{2min}\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\ &= 0 \cdot \Sigma^{-1}\mu + \lambda_{2min}\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\ &= 0 + \lambda_{2min}\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\ &= \frac{1}{b_2} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} \end{aligned} \tag{7.6}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου μέσω της τυπικής απόκλισης με δύο τρόπους.

Αρχικά με τη βοήθεια των σχέσεων (4.12),(4.13),(4.14),(4.15),(5.5) και (7.6) ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{min} &= \sigma^2_{GMVP} \\ &= w^T_{min}\Sigma w_{min} \\ &= \left[\frac{1}{b_2} \cdot \mathbf{1}^T \cdot \Sigma^{-1}\right] \cdot \Sigma \cdot \left[\frac{1}{b_2} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}\right] \\ &= \frac{1}{b_2^2}\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\ &= \frac{1}{b_2^2}(\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{b_2^2} b_2 = \frac{1}{b_2} \end{aligned} \tag{7.7}$$

όπου από τη διακύμανση παίρνουμε και την αντίστοιχη τυπική απόκλιση

$$\sigma_{min} = \sigma_{GMVP} = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \tag{7.8}$$

και εναλλακτικά, μέσω των σχέσεων (5.24) και (7.2)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{min} = \sigma_{GMVP} &= \sqrt{\frac{b_2\mu_{min}^2 - 2b_1\mu_{min} + b_0}{b_0b_2 - b_1^2}} \\
&= \sqrt{\frac{b_2 \cdot \dfrac{b_1^2}{b_2^2} - 2b_1 \cdot \dfrac{b_1}{b_2} + b_0}{b_0b_2 - b_1^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{b_1^2}{b_2} - 2\dfrac{b_1^2}{b_2} + b_0}{b_0b_2 - b_1^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{-b_1^2}{b_2} + \dfrac{b_0b_2}{b_2}}{b_0b_2 - b_1^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\dfrac{b_0b_2 - b1^2}{b_2}}{b_0b_2 - b_1^2}} = \sqrt{\frac{1}{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{b_2}}
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

(ii)Tangent Portfolio (T):

Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο βρίσκεται στο σημείο όπου η Καμπύλη Κινδύνου Απόδοσης εφάπτεται στη γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Πάνω στο σημείο αυτό ο Λόγος του Sharpe μεγιστοποιείται και από εκεί θα υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου. Επομένως, από τις εξισώσεις (1.8) και (5.24) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
SR_{PR} = \frac{\mu_{PR}}{\sigma_{PR}} &= \mu_{PR} \cdot \sqrt{\frac{b_0b_2 - b_1^2}{b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0}} \\
&= \sqrt{\frac{(b_0b_2 - b_1^2)\mu_{PR}^2}{b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0}}
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

Στο σημείο αυτό θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον Λόγο του Sharpe. Δηλαδή, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη απόδοση του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου και να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνό του. Επομένως, θα μεγιστοποιήσουμε ως προς μ_{PR} την συνάρτηση:

$$SR_{PR} \tag{7.11}$$

Για την επίτευξη της μεγιστοποίησης υπολογίζουμε τις Συνθήκες Πρώτης Τάξης της συνάρτησης SR_{PR} τις οποίες εξισώνουμε με το μηδέν:

$$\frac{\mathrm{d}(SR_{PR})}{\mathrm{d}\mu_{PR}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} \cdot (SR_{PR}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (SR_{PR}^2)^{(\frac{-1}{2})} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} \cdot (SR_{PR}^2) = 0 \tag{7.12}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} \cdot (SR_{PR}^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} \cdot \left[\frac{(b_0 b_2 - b_1^2)\mu_{PR}^2}{b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0}\right] \\
&= \frac{2(b_0b_2 - b_1^2)\mu_{PR}\left[b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0\right] - (b_0b_2 - b_1^2)\mu_{PR}^2\left[2\mu_{PR}b_2 - 2b_1\right]}{(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)^2} \\
&= \frac{2(b_0b_2 - b_1^2)\left[(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)\mu_{PR} - (b_2\mu_{PR} - b_1)\mu_{PR}^2\right]}{(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)^2} \\
&= \frac{2(b_0b_2 - b_1^2)}{(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)^2} \cdot \left[b_2\mu_{PR}^3 - 2b_1\mu_{PR}^2 + b_0\mu_{PR} - b_2\mu_{PR}^3 + b_1\mu_{PR}^2\right] \\
&= \frac{2(b_0b_2 - b_1^2)}{(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)^2} \cdot (b_0\mu_{PR} - b_1\mu_{PR}^2) \\
&= \frac{2(b_0b_2 - b_1^2)}{(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)^2} \cdot (b_0 - b_1\mu_{PR})\mu_{PR}
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Τελικά οι εξισώσεις (7.12) και (7.13) δίνουν:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_{PR}}(SR_{PR}) = \frac{1}{2}(SR_{PR}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2(b_0b_2 - b_1^2)}{(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)^2} \cdot \mu_{PR}(b_0 - b_1\mu_{PR}) = 0 \tag{7.14}$$

Και επειδή γνωρίζουμε οτι η ποσότητα $\frac{1}{2}(SR_{PR}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2(b_0b_2 - b_1^2)}{(b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0)^2} \cdot \mu_{PR}$ είναι διαφορετική του μηδενός, έπεται οτι:

$$b_0 - b_1\mu_{PR} = 0 \tag{7.15}$$

Υποθέτοντας στη συγκεκριμένη περίπτωση οτι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου P_R ισούται με την αναμενόμενη απόδοση του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου, δηλαδή $\mu_{PR} = \mu_T$ ισχύει οτι:

$$\mu_T = \frac{b_0}{b_1} > 0 \tag{7.16}$$

και εφόσον, $b_0 > 0$, η εξίσωση (7.13) συνεπάγεται

$$b_1 > 0 \tag{7.17}$$

Από τις εξισώσεις (5.16),(5.21),(5.22) και (7.16) υπολογίζουμε τους συντελεστές του προβλήματος ελαχιστοποίησης κινδύνου για το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο, ως εξής:

$$\lambda_{1T} = \frac{b_2\mu_T - b_1}{b_0b_2 - b_1^2} = \frac{b_2 \cdot \frac{b_0}{b_1} - b_1}{b_0b_2 - b_1^2} = \frac{\frac{(b_0b_2 - b_1^2)}{b_1}}{b_0b_2 - b_1^2} = \frac{1}{b_1} \tag{7.18}$$

και

$$\lambda_{2T} = \frac{b_0 - b_1\mu_T}{b_0b_2 - b_1^2} = \frac{b_0 - b_1 \cdot \frac{b_0}{b_1}}{b_0b_2 - b_1^2} = 0 \tag{7.19}$$

Άρα, το σύνολο των σταθμίσεων του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου είναι:

$$w_T = \lambda_{1T}\Sigma^{-1}\mu + \lambda_{2T}\Sigma^{-1}\mathbb{1} = \frac{1}{b_1}\Sigma^{-1}\mu \tag{7.20}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου μέσω της τυπικής απόκλισης με δύο τρόπους.
Αρχικά με τη βοήθεια των εξισώσεων (4.12),(4.13),(4.14),(4.15),(5.5) και (7.20)

$$\sigma_T^2 = w_T^T\Sigma w_T = \frac{1}{b_1}\mu^T\Sigma^{-1}\Sigma \cdot \frac{1}{b_1}\Sigma^{-1}\mu = \frac{1}{b_1^2}(\mu^T\Sigma^{-1}\mu) = \frac{1}{b_1^2}b_0 \tag{7.21}$$

όπου από τη διακύμανση παίρνουμε και την αντίστοιχη τυπική απόκλιση:

$$\sigma_T = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} \tag{7.22}$$

και εναλλακτικά, μέσω των σχέσεων (5.24) και (7.16) ως εξής:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{b_2\mu_T^2 - 2b_1\mu_T + b_0}{b_0b_2 - b_1^2}} = \sqrt{\frac{b_2\cdot\frac{b_0^2}{b_1^2} - 2b_1\cdot\frac{b_0}{b_1} + b_0}{b_0b_2 - b_1^2}} = \sqrt{\frac{b_2\cdot\frac{b_0^2}{b_1^2} - b_0}{b_0b_2 - b_1^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\frac{(b_2b_0^2 - b_0b_1^2)}{b_1^2}}{b_0b_2 - b_1^2}} = \sqrt{\frac{(b_0b_2 - b_1^2)\cdot\frac{b_0}{b_1^2}}{b_0b_2 - b_1^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{b_0}{b_1^2}} = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} \tag{7.23}$$

(iii) Ο Λόγος του Sharpe:

Από τις εξισώσεις (7.2),(7.8),(7.10),(7.16) και (7.22) υπολογίζουμε και τον Λόγο του Sharpe για το ελάχιστο και το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο, αντίστοιχα.

$$SR_{min} = SR_{GMVP} = \frac{\mu_{min}}{\sigma_{min}} = \frac{\frac{b_1}{b_2}}{\frac{1}{\sqrt{b_2}}} = \frac{b_1\sqrt{b_2}}{b_2} = \frac{b_1\sqrt{b_2}\sqrt{b_2}}{b_2\sqrt{b_2}} = \frac{b_1}{\sqrt{b_2}} \tag{7.24}$$

και

$$SR_T = \frac{\mu_T}{\sigma_T} = \frac{\frac{b_0}{b_1}}{\frac{\sqrt{b_0}}{b_1}} = \frac{b_0b_1}{b_1\sqrt{b_0}} = \frac{b_0}{\sqrt{b_0}} = \frac{b_0\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}\sqrt{b_0}} = \sqrt{b_0} \tag{7.25}$$

Αν δεν υπάρχει ακίνδυνη επένδυση τότε το χαρτοφυλάκιο T είναι η Αγορά. Προφανώς, επειδή η αγορά πραγματοποιείται πάντοτε ισχύει οτι:

$$\begin{aligned} SR_{min} < SR_T &\implies \\ \frac{b_1}{\sqrt{b_2}} < \sqrt{b_0} &\implies \\ b_1 < \sqrt{b_0b_2} &\implies \\ b_1^2 < b_0b_2 &\implies \\ b_0b_2 - b_1^2 > 0 & \end{aligned} \tag{7.26}$$

Και λόγω των εξισώσεων (6.1),(6.2),(6.3),(6.4),(6.5) και (7.26) ισχύουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$b_2\mu_{PR}^2 - 2b_1\mu_{PR} + b_0 > 0 \tag{7.27}$$

και

$$b_2\mu_{PR} - b_1 > 0 \tag{7.28}$$

7.2 Οικονομία με ακίνδυνη επένδυση

(i) Το χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο (F):

Ονομάζουμε χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο το χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει ακίνδυνες επενδύσεις και το συμβολίζουμε με F. Εάν δεν υπάρχουν ακίνδυνες επενδύσεις τότε για τις σταθμίσεις αυτών ισχύει οτι $w_1 = ... = w_N = 0$ και επομένως η εξίσωση (3.6) συνεπάγεται οτι:

$$w_F = w_0 = 1 \tag{7.29}$$

Έτσι, από την εξίσωση (2.1) το χαρτοφυλάκιο F θα έχει τη μορφή

$$F = w_F \cdot f = f \tag{7.30}$$

Οι εξισώσεις (1.1),(1.2),(1.3),(1.4),(1.5),(3.8),(3.9) και (7.30) μας δίνουν την απόδοση του χαρτοφυλακίου:

$$r_F = r_f \tag{7.31}$$

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι

$$\mu_F = E(r_f) = r_f \tag{7.32}$$

ενώ η διακύμανσή του είναι

$$\sigma_F^2 = var(r_f) = 0 \tag{7.33}$$

(ii) Το χαρτοφυλάκιο της Αγοράς (M):

Ως χαρτοφυλάκιο της αγοράς ορίζουμε το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων που υπάρχουν στην αγορά γενικότερα και μπορούν να επενδυθούν. Το χαρτοφυλάκιο αυτό βρίσκεται στο σημείο όπου η Καμπύλη Κινδύνου Απόδοσης εφάπτεται στην Γραμμή Κεφαλαιαγοράς και το συμβολίζουμε με M. Εάν για τη στάθμιση της ακίνδυνης επένδυσης ισχύει οτι $w_0 = 0$ τότε από την εξίσωση (3.6) για τις σταθμίσεις των επενδύσεων με κίνδυνο ισχύει οτι:

$$w_{1M} + ... + w_{NM} = 1 \tag{7.34}$$

όπου:

$$w_{1M} = w_1, ..., w_{NM} = w_N \tag{7.35}$$

Έτσι, από την εξίσωση (2.1) το χαρτοφυλάκιο M θα έχει τη μορφή

$$M = w_{1M} \cdot a_1 + ... + w_{NM} \cdot a_N \tag{7.36}$$

Στη συνέχεια, για το λόγο οτι έχουμε N το πλήθος επενδυτικά αγαθά ορίζουμε κάποια διανύσματα με τη μια τους διάσταση να ισούται με N ώστε να υπολογίσουμε την απόδοση, την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου M.
Αρχικά ορίζουμε το $N \times 1$ διάνυσμα:

$$w_M = \begin{bmatrix} w_{1M} \\ \vdots \\ w_{NM} \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

Από τις εξισώσεις (4.1),(7.34) και (7.37) έχουμε οτι:

$$1 = w_{1M} + ... + w_{NM} = \begin{bmatrix} w_{1M}, & \ldots, & w_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = w_M^T \cdot \mathbf{1} \tag{7.38}$$

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται απο τις εξισώσεις (4.1),(4.4),(7.36) και (7.37).Επομένως, έχουμε οτι

$$\begin{aligned} r_M &= w_{1M} r_1 + ... + w_{NM} r_N \\ &= \begin{bmatrix} w_{1M}, & \ldots, & w_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} \\ &= w_M^T \cdot r \end{aligned} \tag{7.39}$$

Εναλλακτικά, λόγω των σχέσεων (4.1),(4.5),(7.36) και(7.37) η απόδοση μπορεί να γραφεί και ως:

$$\begin{aligned} r_M &= r_f + w_{1M}(r_1 - r_f) + ... + w_{NM}(r_N - r_f) \\ &= r_f + \begin{bmatrix} w_{1M}, & \dots, & w_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (r_1 - r_f) \\ \vdots \\ (r_N - r_f) \end{bmatrix} \\ &= r_f + w_M^T \cdot \tilde{r} \end{aligned} \tag{7.40}$$

Οι εξισώσεις (1.1),(1.2),(1.3),(1.4),(4.1),(4.5),(4.8),(4.9),(7.34),(7.37),(7.39) και (7.40) δίνουν την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου χωρίς ακίνδυνη επένδυση:

$$\mu_M = E(r_M) = E(w_M^T \cdot r) = w_M^T \cdot E(r) = w_M^T \cdot \mu \tag{7.41}$$

και με ακίνδυνη επένδυση:

$$\mu_M = E(r_M) = E(r_f + w_M^T \cdot \tilde{r}) = r_f + E(w_M^T \cdot \tilde{r}) = r_f + w_M^T \cdot E(\tilde{r}) = r_f + w_M^T \cdot \tilde{\mu} \tag{7.42}$$

και οι εξισώσεις (4.10),(4.11),(7.35) και (7.37) δίνουν τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου

$$\sigma_M^2 = w_M^T \cdot \Sigma \cdot w_M \tag{7.43}$$

Από τις (5.39) και (7.38) για το σύνολο των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου M ισχύει οτι

$$\begin{aligned} w_M &= \lambda_M \Sigma^{-1} \tilde{\mu} = \frac{\lambda_M \Sigma^{-1} \tilde{\mu}}{1} \\ &= \frac{\lambda_M \Sigma^{-1} \tilde{\mu}}{w_M^T \mathbf{1}} = \frac{\lambda_M \Sigma^{-1} \tilde{\mu}}{(\lambda_M \tilde{\mu}^T \Sigma^{-1}) \mathbf{1}} \\ &= \frac{\Sigma^{-1} \tilde{\mu}}{\tilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned} \tag{7.44}$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε την αναμενόμενη απόδοση και τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου συναρτήσει των βαθμωτών που ορίσαμε στο 4ο Κεφάλαιο.

Από τις εξισώσεις (4.1),(4.6),(4.12),(4.13),(4.14) και (4.15) συνεπάγεται οτι

$$\Sigma^{-1}\tilde{\mu} = \Sigma^{-1}(\mu - \mathbf{1}r_f) \tag{7.45}$$

Άρα,

$$\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mu = (\mu^T - \mathbf{1}^T r_f)\Sigma^{-1}\mu = \mu^T\Sigma^{-1}\mu - (\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mu)r_f = b_0 - b_1 r_f \tag{7.46}$$

και

$$\bar{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} = (\mu^T - \mathbf{1}^T r_f)\Sigma^{-1}\mathbf{1} = \mu^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1})r_f = b_1 - b_2 r_f \tag{7.47}$$

Έτσι, με τη βοήθεια των εξισώσεων (7.41),(7.44),(7.46) και (7.47) ορίζουμε την αναμενόμενη απόδοση ως:

$$\begin{aligned} \mu_M &= w_M^T\mu = \frac{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mu}{\bar{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \\ &= \frac{b_0 - b_1 r_f}{b_1 - b_2 r_f} \end{aligned} \tag{7.48}$$

και από τις (4.12),(4.13),(4.14),(4.15),(7.43),(7.44) και (7.47) ορίζουμε τη διακύμανση ως:

$$\begin{aligned} \sigma_M^2 &= w_M^T\Sigma w_M \\ &= \frac{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\cdot\Sigma\cdot\frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \\ &= \frac{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{(\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1})^2} \\ &= \frac{b}{(b_1 - b_2 r_f)^2} \end{aligned} \tag{7.49}$$

Επομένως, η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\sigma_M = \frac{\sqrt{b}}{b_1 - b_2 r_f} \tag{7.50}$$

Κεφάλαιο 8

Διαχωρισμός χαρτοφυλακίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα διαχωρίσουμε το γενικό χαρτοφυλάκιο P βάσει των ειδικών χαρτοφυλακίων που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

8.1 Οικονομία χωρίς ακίνδυνη επένδυση

Θα διαχωρίσουμε το χαρτοφυλάκιο P_R σε χαρτοφυλάκιο GMVP(min) και σε χαρτοφυλάκιο T.
Οι εξισώσεις (7.6) και (7.20) δίνουν τις σταθμίσεις των χαρτοφυλακίων min και T, αντίστοιχα.

$$w_{min} = \frac{1}{b_2}\Sigma^{-1}\mathbf{1} \tag{8.1}$$

και

$$w_T = \frac{1}{b_1}\Sigma^{-1}\mu \tag{8.2}$$

Επομένως, από τις εξισώσεις (5.16),(5.21) και (5.22) έχουμε οτι το σύνολο των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου P_R είναι :

$$w_{PR} = \frac{b_2\mu_{PR} - b_1}{b_0b_2 - b_1^2}\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mu + \frac{b_0 - b_1\mu_{PR}}{b_0b_2 - b_1^2}\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mathbf{1} \tag{8.3}$$

Οι (8.1),(8.2) και (8.3) αναλυτικότερα γίνονται:

$$\begin{aligned} w_{PR} &= \left[\frac{b_2\mu_{PR} - b_1}{b_0b_2 - b_1^2}\cdot b_1\right]\cdot (\frac{1}{b_1}\Sigma^{-1}\mu) + \left[\frac{b_0 - b_1\mu_{PR}}{b_0b_2 - b_1^2}\cdot b_2\right]\cdot (\frac{1}{b_2}\Sigma^{-1}\mathbf{1}) \\ &= \phi_{1PR}w_T + \phi_{2PR}w_{min} \end{aligned} \tag{8.4}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
\phi_{1PR} + \phi_{2PR} &= \frac{(b_2\mu_{PR} - b_1)b_1}{b_0b_2 - b_1^2} + \frac{(b_0 - b_1\mu_{PR})b_2}{b_0b_2 - b_1^2} \\
&= \frac{b_1b_2\mu_{PR} - b_1^2 + b_0b_2 - b_1b_2\mu_{PR}}{b_0b_2 - b_1^2} \\
&= \frac{b_0b_2 - b_1^2}{b_0b_2 - b_1^2} = 1
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Οι εξισώσεις (4.1),(4.12),(4.13),(4.14),(4.15) και (8.1),(8.2) δίνουν παρακάτω, με τη βοήθεια των βαθμωτών του 4ου Κεφαλαίου, το άθροισμα των σταθμίσεων κάθε ειδικού χαρτοφυλακίου.

$$\begin{aligned}
w_{1min} + ... + w_{Nmin} &= \begin{bmatrix} w_{1min}, & \dots, w_{Nmin} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= w_{min}^T \cdot \mathbf{1} = \left[\frac{1}{b_2} \cdot \mathbf{1}^T \cdot \Sigma^{-1} \right] \cdot \mathbf{1} \\
&= \frac{1}{b_2}(\mathbf{1}^T \cdot \Sigma^{-1}\mathbf{1}) = \frac{1}{b_2} b_2 = 1
\end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
w_{1T} + ... + w_{NT} &= \begin{bmatrix} w_{1T}, & \dots, w_{NT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= w_T^T \cdot \mathbf{1} = \left[\frac{1}{b_1} \cdot \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \right] \cdot \mathbf{1} \\
&= \frac{1}{b_1}(\mu^T \cdot \Sigma^{-1}\mathbf{1}) = \frac{1}{b_1} b_1 = 1
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $0 < \phi_{1PR} < 1$ και $0 < \phi_{2PR} < 1$ τότε το χαρτοφυλάκιο P_R βρίσκεται ανάμεσα στο χαρτοφυλάκιο GMVP και στο χαρτοφυλάκιο T .

Αν $\phi_{1PR} > 0$ και $\phi_{2PR} < 0$ τότε το χαρτοφυλάκιο P_R βρίσκεται δεξιά του χαρτοφυλακίου T.

Άρα, από τη σχέση (8.4) το χαρτοφυλάκιο P_R γράφεται ως:

$$P_R = \phi_1 \cdot T + \phi_2 \cdot min \tag{8.8}$$

Επομένως, η απόδοση του χαρτοφυλακίου ειναι:

$$r_{PR} = \phi_1 \cdot r_T + \phi_2 \cdot r_{min} \tag{8.9}$$

με αναμενόμενη απόδοση

$$\mu_{PR} = E(\phi_1 r_T + \phi_2 r_{min}) = \phi_1 E(r_T) + \phi_2 E(r_{min}) = \phi_1 \cdot \mu_T + \phi_2 \cdot \mu_{min} \tag{8.10}$$

και διακύμανση

$$\begin{aligned} \sigma^2_{PR} &= var(\phi_1 \cdot r_T + \phi_2 \cdot r_{min}) \\ &= \phi_1^2(r_T) + \phi_2^2(r_{min}) + 2\phi_1\phi_2 Cov(r_T, r_{min}) \\ &= \phi_1^2 \cdot \sigma_T^2 + \phi_2^2 \cdot \sigma_{min}^2 + 2\phi_1\phi_2\sigma_{Tmin} \\ &= \phi_1^2 \cdot \sigma_T^2 + \phi_2^2 \cdot \sigma_{min}^2 + 2\phi_1\phi_2\rho_{Tmin}\sigma_T\sigma_{min} \end{aligned} \tag{8.11}$$

8.2 Οικονομία με ακίνδυνη επένδυση

Θα γράψουμε το χαρτοφυλάκιο P αρχικά συναρτήσει του χαρτοφυλακίου M και έπειτα συναρτήσει του χαρτοφυλακίου F.
Οι εξισώσεις (5.40) και (5.42) δίνουν τους συντελεστές των χαρτοφυλακίων P και M, αντίστοιχα.

$$\lambda_P = \frac{\mu_P - r_f}{b} = \frac{\sigma_P\sqrt{b}}{b} = \frac{\sigma_P}{\sqrt{b}} \tag{8.12}$$

και

$$\lambda_M = \frac{\mu_M - r_f}{b} = \frac{\sigma_M\sqrt{b}}{b} = \frac{\sigma_M}{\sqrt{b}} \tag{8.13}$$

Από τις (8.12) και (8.13) παίρνουμε τον λόγο των συντελεστών

$$\frac{\lambda_P}{\lambda_M} = \frac{\frac{\sigma_P}{\sqrt{b}}}{\frac{\sigma_M}{\sqrt{b}}} = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} = \phi \tag{8.14}$$

Οι εξισώσεις (5.39),(7.38),(7.44) και (8.14) υπολογίζουν μέσω των σταθμίσεων το χαρτοφυλάκιο P συναρτήσει του χαρτοφυλακίου M.

$$\begin{aligned} w_P = \lambda_P \Sigma^{-1}\tilde{\mu} &= \frac{\lambda_P \Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{1} \\ &= \frac{\lambda_P \Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{w_M^T \mathbf{1}} = \frac{\lambda_P \Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{(\lambda_M \tilde{\mu}^T \Sigma^{-1})\mathbf{1}} \\ &= \frac{\lambda_P}{\lambda_M} \frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}^T \Sigma^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\lambda_P}{\lambda_M} \cdot w_M \\ &= \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \cdot w_M \end{aligned} \tag{8.15}$$

από όπου συνεπάγεται οτι:

$$w_{1P} = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \cdot w_{1M}, ..., w_{NP} = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \cdot w_{NM} \tag{8.16}$$

Από τις εξισώσεις (5.28),(7.38) και (8.16) υπολογίζουμε τη στάθμιση του χαρτοφυλακίου F:

$$w_0 = 1 - w_1 - ... - w_N = 1 - w_P^T \mathbf{1} = 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M} w_M^T \mathbf{1} = 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \tag{8.17}$$

Οι (7.30) και (7.36) ορίζουν τα χαρτοφυλάκια F και M ως

$$F = f \tag{8.18}$$

και

$$M = w_{1M} a_1 + ... + w_{NM} a_N \tag{8.19}$$

Επομένως, λόγω των (5.27),(8.16),(8.17),(8.18) και (8.19) το χαρτοφυλάκιο P γράφεται συναρτήσει των F και M:

$$\begin{aligned} P &= w_0 f + w_{1P} a_1 + ... + w_{NP} a_N \\ &= (1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M}) f + \left[\frac{\sigma_P}{\sigma_M} w_{1M} a_1 + ... + \frac{\sigma_P}{\sigma_M} w_{NM} a_N \right] \\ &= (1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M}) F + \frac{\sigma_P}{\sigma_M} M \\ &= (1 - \phi) F + \phi M \end{aligned} \tag{8.20}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν $0 < \phi < 1$ τότε το χαρτοφυλάκιο P βρίσκεται ανάμεσα στο χαρτοφυλάκιο F και στο χαρτοφυλάκιο M.

Αν $\phi > 1$ τότε το χαρτοφυλάκιο P βρίσκεται δεξιά του χαρτοφυλακίου M.

Από την εξίσωση (8.20) έχουμε οτι η απόδοση του χαρτοφυλακίου P είναι:

$$r_P = (1-\phi)\cdot r_f + \phi\cdot r_M \tag{8.21}$$

με αναμενόμενη απόδοση:

$$\mu_P = E((1-\phi)\cdot r_f + \phi\cdot r_M) = (1-\phi)\cdot E(r_f) + \phi\cdot E(r_M) = (1-\phi)\cdot r_f + \phi\cdot \mu_M \tag{8.22}$$

και διακύμανση:

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= var((1-\phi)\cdot r_f + \phi\cdot r_M) \\
&= (1-\phi)^2\cdot var(r_f) + \phi^2\cdot var(r_M) + 2(1-\phi)\cdot\phi\cdot Cov(r_f, r_M) \\
&= 0 + \phi^2\cdot var(r_M) + 0 \\
&= \phi^2\cdot \sigma_M^2 \qquad (8.23)
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 9

Η Συνάρτηση Χρησιμότητας του Επενδυτή

Στο Κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε γενικούς τύπους των χαρακτηριστικών ενός χαρτοφυλακίου και υπολογίζουμε τη συνάρτηση οποιασδήποτε αναμενόμενης χρησιμότητας με τη βοήθεια του Θεωρήματος Taylor.

Ορίζουμε:

K_t να είναι το αρχικό κεφάλαιο του επενδυτή, το οποίο επενδύεται ολόκληρο στο χαρτοφυλάκιο P,

K_{t+1} να είναι το τελικό κεφάλαιο του επενδυτή, και

r_P να είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου P, όπου $x = 1 + r_P$

Ισχύει οτι:

$$K_{t+1} = (1 + r_P)K_t \tag{9.1}$$

Επομένως, το τελικό κεφάλαιο ως ποσοστό του αρχικού κεφαλαίου ορίζεται ως:

$$x = (1 + r_P) = \frac{K_{t+1}}{K_t} \tag{9.2}$$

Επίσης,ισχύει οτι

$$K_t > 0 \tag{9.3}$$

και επειδή πρέπει να ισχύει

$$K_{t+1} \geq 0 \tag{9.4}$$

έπεται οτι

$$x = \frac{K_{t+1}}{K_t} \geq 0 \tag{9.5}$$

Θεωρούμε οτι η απόδοση, r_P, του χαρτοφυλακίου είναι τυχαία μεταβλητή, και ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_P και διακύμανση σ_P^2

$$r_P \sim N(\mu_P, \sigma_P^2) \tag{9.6}$$

Άρα, για την μεταβλητή x θα ισχύει οτι ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή

$$x = 1 + r_P \sim N(\mu_x = 1 + \mu_P, \sigma_x^2 = \sigma_P^2) \tag{9.7}$$

με μέση τιμή

$$\mu_x = 1 + \mu_P \tag{9.8}$$

και διακύμανση

$$\sigma_x^2 = \sigma_P^2 \tag{9.9}$$

Στην ανάπτυξη του θεωρήματος Taylor λαμβάνουμε υπόψη τις εξής σχέσεις:

$$E(x - \mu_x) = 0 \tag{9.10}$$

$$E[(x - \mu_x)^2] = \sigma_x^2 \tag{9.11}$$

$$E[(x - \mu_x)^3] = 0 \tag{9.12}$$

$$E[(x - \mu_x)^4] = 3\sigma_x^4 \tag{9.13}$$

$$E[(x - \mu_x)^n] = 0, \forall n > 4 \tag{9.14}$$

9.1 Η Συνάρτηση Αναμενόμενης Χρησιμότητας του Επενδυτή

Ένας τρόπος για να υπολογιστεί η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι το θεώρημα Taylor γύρω από το σημείο μ_x. Η αναμενόμενη χρησιμότητα ορίζεται ως:

$$V(\cdot, \cdot) = E[u(x)] = E[u(1 + r_P)] \tag{9.15}$$

Θα υπολογίσουμε τις έως τετάρτου βαθμού παραγώγους της συνάρτησης χρησιμότητας $u(x)$.

$$u'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot u(x) \tag{9.16}$$

$$u''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \cdot u(x) \tag{9.17}$$

$$u'''(x) = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} \cdot u(x) \tag{9.18}$$

$$u''''(x) = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} \cdot u(x) \tag{9.19}$$

Τότε, λόγω των εξισώσεων (9.10),(9.11),(9.12),(9.13) και (9.14) η συνάρτηση χρησιμότητας $u(x)$ γράφεται:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\mu_x) \\ &\quad +u'(\mu_x)(x-\mu_x) \\ &\quad +\frac{1}{2!}u''(\mu_x)(x-\mu_x)^2 \\ &\quad +\frac{1}{3!}u'''(\mu_x)(x-\mu_x)^3 \\ &\quad +\frac{1}{4!}u''''(\mu_x)(x-\mu_x)^4 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Επομένως, η αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή γίνεται:

$$\begin{aligned} V(\cdot,\cdot) = E[u(x)] &= u(\mu_x) + u'(\mu_x)E[(x-\mu_x)] + \frac{1}{2}u''(\mu_x)E[(x-\mu_x)^2] \\ &\quad +\frac{1}{6}u'''(\mu_x)E[(x-\mu_x)^3] + \frac{1}{24}u''''(\mu_x)E[(x-\mu_x)^4] \\ &= u(\mu_x) + 0 + \frac{1}{2}u''(\mu_x)E[(x-\mu_x)^2] \\ &\quad +0 + \frac{1}{24}u''''(\mu_x)E[(x-\mu_x)^4] \\ &= u(\mu_x) + \frac{1}{2}u''(\mu_x)\sigma_x^2 + \frac{1}{8}u''''(\mu_x)\sigma_x^4 \\ &= V(\mu_x,\sigma_x) \\ &= V(1+\mu_P,\sigma_P) \\ &= V(\mu_P,\sigma_P) \end{aligned} \tag{9.21}$$

Για τη συνάρτηση $V(\mu_P, \sigma_P)$ ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_P} V(\mu_P, \sigma_P) > 0, \frac{\partial}{\partial \sigma_P} V(\mu_P, \sigma_P) < 0 \tag{9.22}$$

και ο Οριακός Λόγος Υποκατάστασης του μ_P με το σ_P είναι:

$$\frac{\mathrm{d}\mu_P}{\mathrm{d}\sigma_P} = \frac{\frac{-\partial V(\mu_P, \sigma_P)}{\partial \sigma_P}}{\frac{\partial V(\mu_P, \sigma_P)}{\partial \mu_P}} > 0 \tag{9.23}$$

Δηλαδή, ο επενδυτής για να αναλάβει περισσότερο κίνδυνο , σ_P, θέλει να αποζημιωθεί με μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση, μ_P, του χαρτοφυλακίου που θα επενδύσει.

Κεφάλαιο 10

Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας του Επενδυτή

Θεωρούμε οτι ο επενδυτής έχει ως συνάρτηση χρησιμότητας την εκθετική συνάρτηση

$$u(x) = x^a, 0 < a < 1 \tag{10.1}$$

Κατά τον Harry Markowitz στο άρθρο του "Mean-Variance approximations to expected utility" η συνάρτηση $u(x)$ μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια του θεωρήματος Taylor γύρω από το σημείο 1 με τον εξής τρόπο:

$$u(x) = u(1) + u'(1)[x-1] + \frac{1}{2!}u''(1)[x-1]^2 \tag{10.2}$$

Επειδή $x = 1 + r_P$, η συνάρτηση χρησιμότητας γίνεται:

$$u(1+r_P) = u(o) + u'(0)[r_P - 0] + \frac{1}{2!}u''(0)[r_P - 0]^2 \implies$$
$$U(r_P) = 1 + a\cdot r_P + \frac{1}{2}\cdot a\cdot (a-1)\cdot r_P^2 \tag{10.3}$$

όπου

$$a_0 = 1 = u(0), a_1 = a = u'(0), a_2 = a\cdot (a-1) = u''(0) \tag{10.4}$$

Από την απόδοση του χαρτοφυλακίου γνωρίζουμε οτι:

$$
\begin{aligned}
r_P > 0 &\implies \\
x = 1 + r_P > 1 &\implies \\
\left|\frac{a_1}{a_2}\right| \geq x > 1 &\implies \\
\left|\frac{a}{a(a-1)}\right| \geq x > 1 &\implies \\
\left|\frac{1}{a-1}\right| \geq x > 1 & \qquad (10.5)
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, ισχύει οτι:

$$a_2 = a(a-1) < 0 \qquad (10.6)$$

$$a_1 = a > 0 \qquad (10.7)$$

και

$$
\begin{aligned}
0 \leq x \leq \left|\frac{a_1}{a_2}\right| &\implies \\
0 \leq 1 + r_P \leq \left|\frac{a}{a(a-1)}\right| &= \left|\frac{1}{a-1}\right| \qquad (10.8)
\end{aligned}
$$

όπου,

$$0 \leq 1 + r_P \implies -1 \leq r_P \qquad (10.9)$$

και

$$1 + r_P \leq |\frac{1}{a-1}| \qquad (10.10)$$

10.1 Μέτρα Αποστροφής Κινδύνου των Arrow-Pratt

Είναι σημαντικό μερικές φορές ο επενδυτής να γνωρίζει πόσο αρνητικός είναι ο κίνδυνος μιας συγκεκριμένης επένδυσης. Για τον λόγο αυτό, υπάρχουν ορισμένα εργαλεία που βοηθούν στη μέτρηση του κινδύνου με ποσοτικό τροπο. Το πιο συνηθισμένο και συχνά χρησιμοποιούμενο μέτρο αποστροφής κινδύνου είναι τα μέτρα των Arrow-Pratt της απόλυτης και σχετικής αποστροφής κινδύνου.

Οι σχέσεις που θα χρειαστούμε από την χρησιμότητα του επενδυτή ώστε να μετρήσουμε τον κίνδυνο είναι:

$$u(x) = x^a, 0 < a < 1 \tag{10.11}$$

$$u'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot u(x) = ax^{a-1} \tag{10.12}$$

$$u''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \cdot u(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot ux\right] = a(a-1)x^{a-2} \tag{10.13}$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά το μέτρο απόλυτης αποστροφής κινδύνου και έπειτα το μέτρο σχετικής αποστροφής κυνδύνου.

(i) Απόλυτη Αποστροφή Κινδύνου:

$$A_{u(x)} = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = -\frac{a(a-1)x^{a-2}}{ax^{a-1}} = -\frac{(a-1)}{x} > 0 \tag{10.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_{u(x)}}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \left[\frac{-(a-1)}{x}\right] = -(a-1) \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{a-1}{x^2} < 0 \tag{10.15}$$

(ii) Σχετική Αποστροφή Κινδύνου:

$$R_{u(x)} = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} = -\frac{xa(a-1)x^{a-2}}{ax^{a-1}} = \frac{-(a-1)x^{a-1}}{x^{a-1}} = -(a-1) > 0 \tag{10.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}R_{u(x)}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot [-(a-1)] = 0 \tag{10.17}$$

Επομένως, για $x = 1 + r_P$, ισχύει:

$$A_{u(1+r_P)} = \frac{-(a-1)}{1+r_P} > 0 \tag{10.18}$$

και

$$R_{u(1+r_P)} = -(a-1) > 0 \tag{10.19}$$

10.2 Μέτρα Ανοχής Κινδύνου των Arrow-Pratt

Μετά τα μέτρα αποστροφής κινδύνου καλό είναι να υπολογιστούν και τα αντίστοιχα μέτρα ανοχής κινδύνου. Το μέτρο ανοχής κινδύνου ορίζεται ως το αντίστροφο του μέτρου αποστροφής κινδύνου.

(i) Απόλυτη Ανοχή Κινδύνου:

$$\frac{1}{A_{u(x)}} = \frac{-x}{a-1} = \frac{-(1+r_P)}{a-1} > 0 \tag{10.20}$$

(ii) Σχετική Ανοχή Κινδύνου:

$$\frac{1}{R_{u(x)}} = \frac{-1}{a-1} > 0 \tag{10.21}$$

10.3 Μέτρα Αποστροφής Κινδύνου της συνάρτησης $U(r_P)$

Η συνάρτηση $U(r_P)$ έχει οριστεί παραπάνω ως εξής:

$$U(r_P) = 1 + a \cdot r_P + \frac{1}{2} \cdot a(a-1) \cdot r_P^2, \tag{10.22}$$

με $a > 0, a(a-1) < 0, -1 \leq r_P \leq \dfrac{a}{a(a-1)} = \dfrac{1}{a-1}$.
Με τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης να είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} U'(r_P) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_P} \cdot [U(r_P)] \\ &= a + \frac{1}{2}a(a-1)2r_P \\ &= a + a(a-1)r_P \end{aligned} \tag{10.23}$$

και

$$
\begin{aligned}
U''(r_P) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_P^2}\cdot[U(r_P)] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_P}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_P}\cdot[U(r_P)]\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_P}[a + a(a-1)r_P] \\
&= a(a-1) \qquad (10.24)
\end{aligned}
$$

Θα υπολογίσουμε λοιπόν το μέτρο απόλυτης και σχετικής αποστροφής κινδύνου για τη συγκεκριμένη συνάρτηση.

(i) Απόλυτη Αποστροφή Κινδύνου:

$$A_{u(r_P)} = \frac{-U''(r_P)}{U'(r_P)} = \frac{-a(a-1)}{a + a(a-1)r_P} = \frac{-(a-1)}{1 + (a-1)r_P} > 0 \qquad (10.25)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A_{u(r_P)}}{\mathrm{d}r_P} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_{PR}}\cdot\left[\frac{-(a-1)}{1 + (a-1)r_P}\right] \\
&= \frac{-(a-1)'[1 + (a-1)r_P] + (a-1)[1 + (a-1)r_P]'}{[1 + (a-1)r_P]^2} \\
&= \frac{(a-1)^2}{[1 + (a-1)r_P]^2} > 0 \qquad (10.26)
\end{aligned}
$$

(ii) Σχετική Αποστροφή Κινδύνου:

$$R_{U(r_P)} = \frac{-r_P\cdot U''(r_P)}{U'(r_P)} = \frac{-r_P\cdot(a-1)a}{a + a(a-1)r_P} = \frac{-r_P\cdot(a-1)}{1 + (a-1)r_P} > 0 \qquad (10.27)$$

αν και μόνο αν $r_P > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R_{U(r_P)}}{\mathrm{d}r_P} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_P}\cdot\left[\frac{-r_P\cdot(a-1)}{1+(a-1)r_P}\right] \\
&= \frac{[-r_P(a-1)]'[1+(a-1)r_P]+r_P(a-1)[1+(a-1)r_P]'}{[1+(a-1)r_P]^2} \\
&= \frac{-(a-1)[1+(a-1)r_P]+r_P(a-1)^2}{[1+(a-1)r_P]^2} \\
&= \frac{-(a-1)-(a-1)^2r_P+(a-1)^2r_P}{[1+(a-1)r_P]^2} \\
&= \frac{-(a-1)}{[1+(a-1)r_P]^2} > 0 \qquad (10.28)
\end{aligned}$$

(iii) Σχετική Αποστροφή Κινδύνου ως προς $(1+r_P)$**:**

$$R_{U(1+r_P)} = \frac{-(1+r_P)U''(r_P)}{U'(r_P)} = \frac{-(1+r_P)a(a-1)}{a+a(a-1)r_P} = \frac{-(1+r_P)(a-1)}{1+(a-1)r_P} > 0 \qquad (10.29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R_{U(1+r_P)}}{\mathrm{d}(1+r_P)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(1+r_P)}\cdot\left[\frac{-(1+r_P)(a-1)}{1+(a-1)r_P}\right] \\
&= \frac{[-(1+r_P)(a-1)]'[1+(a-1)r_P]+(1+r_P)(a-1)[1+(a-1)r_P]'}{[1-(a-1)+(a-1)(1+r_P)]^2} \\
&= \frac{-(a-1)[1+(a-1)r_P]+[(1+r_P)(a-1)](a-1)}{[(2-a)+(a-1)(1+r_P)]^2} \\
&= \frac{-(a-1)[1-(a-1)+(a-1)(1+r_P)]+[(a-1)^2(1+r_P)]}{[(2-a)+(a-1)(1+r_P)]^2} \qquad (10.30)
\end{aligned}$$

10.4 Μέτρα Ανοχής Κινδύνου της συνάρτησης $U(r_P)$

Αντίστοιχα, θα υπολογίσουμε και το απόλυτο και σχετικό μέτρο ανοχής κινδύνου για τη συνάρτηση $U(r_P)$.

(i) Απόλυτη Ανοχή Κινδύνου της $U(r_P)$ **:**

$$\frac{1}{A_{U(r_P)}} = \frac{-[1+(a-1)r_P]}{(a-1)} \qquad (10.31)$$

(ii) Σχετική Ανοχή Κινδύνου της $U(r_P)$**,ως προς** r_P**:**

$$\frac{1}{R_{U(r_P)}} = \frac{-[1+(a-1)r_P]}{(a-1)r_P} \qquad (10.32)$$

(iii) Σχετική Ανοχή Κινδύνου της $U(r_P)$, ως προς $(1 + r_P)$:

$$\frac{1}{R_{U(1+r_P)}} = \frac{-[1 + (a-1)r_P]}{(a-1)(1 + r_P)} \tag{10.33}$$

Κεφάλαιο 11

Αναμενόμενη Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Η εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας έχει τη μορφή:

$$u(r) = (1 + r)^a, a > 0 \tag{11.1}$$

όπου για $x = 1 + r$ γίνεται:

$$u(x) = x^a, a > 0 \tag{11.2}$$

Όπως αναφέρει ο Harry Markowitz στο άρθρο του ”Mean-Variance approximations to expected utility”, η εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας γράφεται για τυχαίο χαρτοφυλάκιο P με μέση τιμή μ_P και διακύμανση σ_P^2 ως εξής:

$$\begin{aligned} Q(r_P) = u(0) + u'(0)[r_P - 0] + \frac{1}{2!}u''(0)[r_P - 0]^2 \implies \\ Q(r_P) = u(0) + u'(0)[r_P] + \frac{1}{2}u''(0)[r_P]^2 \implies \\ Q(r_P) = 1 + a[r_P] + \frac{1}{2}a(a-1)[r_P]^2 \end{aligned} \tag{11.3}$$

όπου για $r_P = 0$ ισχύει οτι:

$$u(r_P) = (1 + r_P)^a \implies u(0) = 1 \tag{11.4}$$

$$u'(r_P) = a(1 + r_P)^{a-1} \implies u'(0) = a \tag{11.5}$$

$$u''(r_P) = a(a-1)(1 + r_P)^{a-2} \implies u''(0) = a(a-1) \tag{11.6}$$

Έτσι, από την εξίσωση (11.3), η εκθετική συνάρτηση γίνεται:

$$Q(r_P) = 1 + a_1[r_P] + \frac{1}{2}a_2[r_P]^2 \tag{11.7}$$

όπου,

$$a_1 = a, a_2 = a(a-1) < 0, -1 \leq r_P \leq \frac{a_1}{a_2} \tag{11.8}$$

Η τυχαία μεταβλητή της απόδοσης r_P ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_P και διακύμανση σ_P^2.΄Οπου,

$$\sigma_P^2 = var(r_P) = E(r_P^2) - [E(r_P)]^2 = E(r_P^2) - \mu_P^2 \implies E(r_P^2) = \sigma_P^2 + \mu_P^2 \tag{11.9}$$

και

$$E(r_P) = \mu_P \tag{11.10}$$

Επομένως, η αναμενόμενη εκθετική χρησιμότητα ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} V(\cdot\,,\cdot) &= V(\mu_P, \sigma_P^2) = E[Q(r_P)] \\ &= E(1 + a_1 r_P + \frac{1}{2}a_2 r_P^2) \\ &= E(1) + a_1 E(r_P) + \frac{1}{2}a_2 E(r_P^2) \\ &= 1 + a_1\mu_P + \frac{1}{2}a_2(\mu_P^2 + \sigma_P^2) \\ &= 1 + a_1\mu_P + \frac{1}{2}a_2\mu_P^2 + \frac{1}{2}a_2\sigma_P^2 \end{aligned} \tag{11.11}$$

11.1 Καμπύλη Αδιαφορίας του επενδυτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας

Η εξίσωση (11.11) μας δίνει την αναμενόμενη εκθετική χρησιμότητα:

$$V(\mu_P, \sigma_P^2) = 1 + a_1\mu_P + \frac{1}{2}a_2\mu_P^2 + \frac{1}{2}a_2\sigma_P^2 \tag{11.12}$$

Θα ορίσουμε την καμπύλη αδιαφορίας της εκθετικής συνάρτησης χρησιμότητας.
Έστω J ένα σύνολο δεικτών και έστω $j \in J$ ένας δείκτης με τιμές $j = I, II, \ldots$
Για κάθε συγκεκριμένη και σταθερή τιμή της σχέσης (11.12), έστω $\bar{\bar{V}}_I$, η (11.12) είναι ο γεωμετρικός τόπος των συνδυασμών ίσης χρησιμότητας των μ_P και σ_P που ισούται με την παρακάτω καμπύλη αδιαφορίας:

$$\bar{\bar{V}}_I \equiv \bar{\bar{V}}_I(\mu_P, \sigma_P^2) = \left[1 + a_1\mu_P + \frac{1}{2}a_2\mu_P^2 + \frac{1}{2}\sigma_P^2\right]_I \tag{11.13}$$

η οποία προσδιορίζεται από τη συγκεκριμένη τιμή I του δείκτη $j \in J$

Η (11.13) μπορεί να λυθεί ως προς σ_P^2 ή/και ως προς μ_P με δεδομένο το σ_P για να βρούμε τον κίνδυνο αλλά και την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου.

(i) Ως προς σ_P:

$$\frac{1}{2}\cdot a_2\sigma_{P(I)}^2 = \bar{\bar{V}}_I - \left[1 + a_1\mu_P + \frac{1}{2}\cdot a_2\mu_P^2\right] \implies$$

$$\sigma_{P(I)}^2 = \frac{2}{a_2}\cdot\left[\bar{\bar{V}}_I - 1 - a_1\mu_P - \frac{1}{2}\cdot a_2\mu_P^2\right] = \frac{2\bar{\bar{V}}_I - 2 - 2a_1\mu_P - a_2\mu_P^2}{a_2} = \frac{2(\bar{\bar{V}}_I - 1) - 2a_1\mu_P - a_2\mu_P^2}{a_2} \implies$$

$$\begin{aligned}\sigma_{P(I)} &= \left[\frac{2(\bar{\bar{V}}_I - 1) - 2a_1\mu_P - a_2\mu_P^2}{a_2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sigma_{P(I)}(\mu_P, \bar{\bar{V}}_I)\end{aligned} \tag{11.14}$$

Το σ_P εκφράζει τον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής με δεδομένο μ_P ώστε να εξασφαλίσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο αναμενόμενης χρησιμότητας, έστω $\bar{\bar{V}}_I$.

(ii) Ως προς μ_P:

$$\frac{1}{2}a_2\mu_{P(I)}^2 + a_1\mu_{P(I)} + \left[-\bar{\bar{V}}_I + \frac{1}{2}a_2\sigma_P^2 + 1\right] = 0 \implies$$

$$a_2\mu_{P(I)}^2 + 2a_1\mu_{P(I)} + \left[2 + a_2\sigma_P^2 - 2\bar{\bar{V}}_I\right] = 0 \implies$$

$$a_2\mu_{P(I)}^2 + 2a_1\mu_{P(I)} + \left[a_2\sigma_P^2 + 2(1 - \bar{\bar{V}}_I)\right] = 0 \tag{11.15}$$

Η λύση του τριωνύμου (11.15) δίνει το

$$\mu_{P(I)} = \mu_{P(I)}(\sigma_P^2, \bar{\bar{V}}_I) \tag{11.16}$$

το οποίο εκφράζει την απαιτούμενη απόδοση ώστε ο επενδυτής που αναλαμβάνει δοσμένο κίνδυνο σ_P^2 να εξασφαλίσει το συγκεκριμένο επίπεδο αναμενόμενης χρησιμότητας, έστω $\bar{\bar{V}}_I$.

11.2 Κλίση της Καμπύλης Αδιαφορίας του επενδυτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (11.14) ως προς την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου υπολογίζουμε την κλίση της Καμπύλης Αδιαφορίας του επενδυτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_{P(I)}}{\mathrm{d}\mu_P} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_P}\cdot[\sigma^2_{P(I)}]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot[\sigma^2_{P(I)}]^{(\frac{-1}{2})}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_P}\cdot[\sigma^2_{P(I)}] \\
&= \frac{1}{2}\cdot[\sigma^2_{P(I)}]^{(\frac{-1}{2})}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot[-2a_1-2a_2\mu_P] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_{P(I)}}\cdot 2\left[\frac{-a_1}{a_2}-\mu_P\right] \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma_{P(I)}}{\mathrm{d}\mu_P} = \frac{1}{\sigma_{P(I)}}\cdot\left[\frac{-a_1}{a_2}-\mu_P\right] = \frac{1}{\sigma_{P(I)}}\cdot\left[\frac{-a_1-a_2\mu_P}{a_2}\right]
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Κεφάλαιο 12

Ισορροπία του επενδυτή

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσδιορίσουμε την κατάσταση ισορροπίας του επενδυτή τόσο στην περίπτωση που υπάρχουν ακίνδυνες επενδύσεις όσο και στην περίπτωση που δεν υπάρχουν.

Το σημείο ισορροπίας υπολογίζεται εάν εξισώσουμε την κλίση της Καμπύλης Αδιαφορίας του επενδυτή με την κλίση του αντίστοιχου Αποτελεσματικού Συνόρου για κάθε περίπτωση.

12.1 Οικονομία χωρίς ακίνδυνη επένδυση και με Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Από την εξίσωση (5.26) έχουμε οτι η κλίση του Αποτελεσματικού Συνόρου (Καμπύλη Κινδύνου Απόδοσης), ως προς μ_P, είναι:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{PR}}{\mathrm{d}\mu_{PR}} = \frac{1}{\sigma_{PR}} \cdot \left[\frac{b_2\mu_{PR} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2}\right] \tag{12.1}$$

Από την εξίσωση (11.18) έχουμε οτι η κλίση της Καμπύλης Αδιαφορίας του επενδυτή, ως προς μ_P, είναι:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{P(I)}}{\mathrm{d}\mu_P} = \frac{1}{\sigma_{P(I)}} \cdot \left[\frac{-a_1 - a_2\mu_P}{a_2}\right] \tag{12.2}$$

Ορίζουμε χαρτοφυλάκιο ισορροπίας να είναι το χαρτοφυλάκιο E_R με αναμενόμενη απόδοση μ_{ER} και τυπική απόκλιση σ_{ER}. Το χαρτοφυλάκιο E_R βρίσκεται στο σημείο όπου η Καμπύλη Αδιαφορίας εφάπτεται της Καμπύλης Κινδύνου Απόδοσης. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_{ER}}\cdot\left[\frac{b_2\mu_{ER}-b_1}{b_0b_2-b_1^2}\right]=\frac{1}{\sigma_{ER}}\cdot\left[\frac{-a_1-a_2\mu_{ER}}{a_2}\right] &\implies\\
\left[\frac{b_2\mu_{ER}-b_1}{b_0b_2-b_1^2}\right]=\left[\frac{-a_1-a_2\mu_{ER}}{a_2}\right] &\implies\\
a_2\cdot[b_2\mu_{ER}-b_1]=[-a_1-a_2\mu_{ER}]\cdot[b_0b_2-b_1^2] &\implies\\
a_2b_2\mu_{ER}-a_2b_1=-a_1(b_0b_2-b_1^2)-a_2\mu_{ER}(b_0b_2-b_1^2) &\implies\\
a_2\mu_{ER}[b_2+b_0b_2-b_1^2]=a_2b_1-a_1(b_0b_2-b_1^2) &\implies\\
\mu_{ER}=\frac{a_2b_1-a_1(b_0b_2-b_1^2)}{a_2[b_2+b_0b_2-b_1^2]} & \qquad (12.3)
\end{aligned}
$$

από όπου βρήκαμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας.

Από την (5.23) υπολογίζουμε τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας σ_{ER}^2 μέσω της Καμπύλης Κινδύνου Απόδοσης, ανεξάρτητα από το $\bar{\bar{V}}_{ER}$:

$$\sigma_{ER}^2=\frac{b_2\mu_{ER}^2-2b_1\mu_{ER}+b_0}{b_0b_2-b_1^2} \qquad (12.4)$$

και από την εξίσωση (11.13) υπολογίζουμε την καμπύλη αδιαφορίας του επενδυτή $\bar{\bar{V}}_{ER}=\bar{\bar{V}}_{ER}(\mu_{ER},\sigma_{ER}^2)$

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{V}}_{ER} &= 1+a_1\mu_{ER}+\frac{1}{2}a_2\mu_{ER}^2+\frac{1}{2}a_2\sigma_{ER}^2\\
&= 1+a_1\mu_{ER}+\frac{1}{2}a_2(\mu_{ER}^2+\sigma_{ER}^2) \qquad (12.5)
\end{aligned}
$$

Οι εξισώσεις (5.21),(5.22) και (12.3) δίνουν ορισμένες σχέσεις μεταξύ των βαθμωτών γινομένων ώστε να υπολογίσουμε και τις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου ισορροπίας. Έτσι, ισχύει οτι:

$$
\begin{aligned}
b_2\mu_{ER} - b_1 &= b_2 \cdot \left[\frac{a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \right] - b_1 \\
&= \frac{a_2 b_1 b_2 - a_1 b_2(b_0 b_2 - b_1^2) - b_1 a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{a_2 b_1 b_2 - a_1 b_2(b_0 b_2 - b_1^2) - a_2 b_1 b_2 - a_2 b_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{-a_1 b_2(b_0 b_2 - b_1^2) - a_2 b_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{(b_0 b_2 - b_1^2)(-a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \qquad (12.6)
\end{aligned}
$$

Από εδώ, ο συντελεστής λ_{1ER} ορίζεται ως:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1ER} &= \frac{b_2\mu_{ER} - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} \\
&= \frac{\frac{(b_0 b_2 - b_1^2)(-a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)}}{b_0 b_2 - b_1^2} \\
&= \frac{(b_0 b_2 - b_1^2)(-a_1 b_2 - a_2 b_1)}{(b_0 b_2 - b_1^2) a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{-a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \qquad (12.7)
\end{aligned}
$$

Επίσης,

$$
\begin{aligned}
b_0 - b_1\mu_{ER} &= b_0 - b_1 \cdot \left[\frac{a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2}\right] \\
&= \frac{b_0 a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2) - a_2 b_1^2 + a_1 b_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{a_2 b_0 b_2 + a_2 b_0(b_0 b_2 - b_1^2) - a_2 b_1^2 + a_1 b_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{a_2(b_0 b_2 - b_1^2) + (a_2 b_0 + a_1 b_1)(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{(a_2 + a_2 b_0 + a_1 b_1)(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \\
&= \frac{[a_2(1 + b_0) + a_1 b_1] \cdot [b_0 b_2 - b_1^2]}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \qquad (12.8)
\end{aligned}
$$

Από εδώ, ο συντελεστής λ_{2ER} ορίζεται ως:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{2ER} &= \frac{b_0 - b_1\mu_{ER}}{b_0 b_2 - b_1^2} \\
&= \frac{\frac{[a_2(1+b_0)+a_1 b_1]\cdot[b_0 b_2 - b_1^2]}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)}}{b_0 b_2 - b_1^2} \\
&= \frac{[a_2(1 + b_0) + a_1 b_1][b_0 b_2 - b_1^2]}{[a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)][b_0 b_2 - b_1^2]} \\
&= \frac{a_2(1 + b_0) + a_1 b_1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \qquad (12.9)
\end{aligned}
$$

Τελικά από τις εξισώσεις (5.16),(12.7) και (12.9) υπολογίζουμε τις σταθμίσεις w_{ER} του χαρτοφυλακίου ισορροπίας:

$$
\begin{aligned}
w_{ER} = \begin{bmatrix} w_{1ER} \\ w_{2ER} \end{bmatrix} &= \lambda_{1ER} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu + \lambda_{2ER} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} \\
&= \frac{-a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu + \frac{a_2(1 + b_0) + a_1 b_1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} \\
&= \frac{1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \cdot \left[(a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu + (a_2(1 + b_0) + a_1 b_1) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}\right] \qquad (12.10)
\end{aligned}
$$

Επομένως, με τη βοήθεια των εξισώσεων (5.13),(12.7) και (12.9) ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου $\sigma^2_{ER} = \sigma^2_{ER}(\lambda_{1ER}, \lambda_{2ER}, \mu_{ER})$ είναι:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{ER} &= \lambda_{1ER} \cdot \mu_{ER} + \lambda_{2ER} \cdot \mathbf{1} \\
&= \frac{(-a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \mu_{ER} + \frac{a_2(1 + b_0) + a_1 b_1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \cdot \mathbf{1} \\
&= \frac{(-a_1 b_2 - a_2 b_1)\mu_{ER} + [a_2(1 + b_0) + a_1 b_1]\mathbf{1}}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \qquad (12.11)
\end{aligned}
$$

12.2 Οικονομία με ακίνδυνη επένδυση και με Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Από την εξίσωση (5.46) έχουμε οτι η κλίση του Αποτελεσματικού Συνόρου (Γραμμή Κεφαλαιαγοράς), ως προς μ_P, είναι:

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma_P}{\mathrm{d}\mu_P} = \frac{1}{\sigma_P} \cdot \frac{1}{b} \cdot (\mu_P - r_f) \qquad (12.12)
$$

Από την εξίσωση (11.18) έχουμε οτι η κλίση της Καμπύλης Αδιαφορίας του επενδυτή, ως προς μ_P, είναι:

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma_P}{\mathrm{d}\mu_P} = \frac{1}{\sigma_P} \cdot \left[\frac{-a_1 - a_2 \mu_P}{a_2} \right] \qquad (12.13)
$$

Ορίζουμε χαρτοφυλάκιο ισορροπίας να είναι το χαρτοφυλάκιο E με αναμενόμενη απόδοση μ_E και τυπική απόκλιση σ_E. Το χαρτοφυλάκιο E βρίσκεται στο σημείο όπου η Καμπύλη Αδιαφορίας εφάπτεται της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_E}\cdot\frac{1}{b}\cdot(\mu_E - r_f) = \frac{1}{\sigma_E}\cdot\left[\frac{-a_1 - a_2\mu_E}{a_2}\right] &\implies \\
\frac{1}{b}\cdot(\mu_E - r_f) = \left[\frac{-a_1 - a_2\mu_E}{a_2}\right] &\implies \\
a_2\cdot(\mu_E - r_f) = b\cdot(-a_1 - a_2\mu_E) &\implies \\
a_2\mu_E - a_2 r_f = -a_1 b - a_2 b\mu_E &\implies \\
a_2\mu_E(1+b) = -a_1 b + a_2 r_f &\implies \\
\mu_E = \frac{a_2 r_f - a_1 b}{a_2(1+b)} &\implies \\
\mu_E = \frac{1}{1+b}\cdot\left[\frac{a_2 r_f - a_1 b}{a_2}\right] &\implies \\
\mu_E = \frac{1}{1+b}\cdot\left[r_f - \frac{a_1}{a_2}b\right] & \qquad (12.14)
\end{aligned}
$$

από όπου βρήκαμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας.

Η εξίσωση (12.14) συνεπάγεται οτι:

$$
\begin{aligned}
\mu_E - r_f &= \frac{1}{1+b}\cdot\left[r_f - \frac{a_1}{a_2}b\right] - r_f \\
&= \frac{1}{1+b}\cdot\left[r_f - \frac{a_1}{a_2}b - (1+b)r_f\right] \\
&= \frac{1}{1+b}\cdot\left[-\frac{a_1}{a_2}b + r_f(1-1-b)\right] \\
&= \frac{1}{1+b}\cdot\left[-\frac{a_1}{a_2}b - b r_f\right] \\
&= \frac{-b}{1+b}\cdot\left[\frac{a_1}{a_2} + r_f\right] \qquad (12.15)
\end{aligned}
$$

Από την (5.42) υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση ή αλλίως τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου ισορροπίας, σ_E, μέσω της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς, ανεξάρτητα από το $\bar{\bar{V}}_E$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_E &= \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot (\mu_E - r_f) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{(-b)}{(1+b)} \cdot \left[\frac{a_1}{a_2} + r_f\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b}{(1+b)} \cdot \left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{(\sqrt{b})^2}{(1+b)} \cdot \left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right] \\
&= \frac{\sqrt{b}}{(1+b)} \cdot \left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right] \qquad (12.16)
\end{aligned}
$$

Έτσι, από την εξίσωση (11.13) υπολογίζουμε την καμπύλη αδιαφορίας του επενδυτή $\bar{\bar{V}}_E = \bar{\bar{V}}_E(\mu_E, \sigma_E^2)$

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{V}}_E &= 1 + a_1\mu_E + \frac{1}{2}a_2\mu_E^2 + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 \\
&= 1 + a_1\mu_E + \frac{1}{2}a_2\left[\mu_E^2 + \sigma_E^2\right] \qquad (12.17)
\end{aligned}
$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (5.39),(5.40) και (12.15) υπολογίζουμε τις σταθμίσεις w_E του χαρτοφυλακίου ισορροπίας Ε:

$$
\begin{aligned}
w_E = \begin{bmatrix} w_{1E} \\ w_{2E} \end{bmatrix} &= \lambda_E \cdot \Sigma^{-1} \cdot \bar{\mu} \\
&= \frac{1}{b}(\mu_E - r_f) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \bar{\mu} \\
&= \frac{1}{b} \cdot \frac{(-b)}{(1+b)} \cdot \left[\frac{a_1}{a_2} + r_f\right] \cdot \Sigma^{-1} \cdot \bar{\mu} \\
&= \frac{1}{1+b} \cdot \left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right] \cdot \Sigma^{-1} \cdot \bar{\mu} \qquad (12.18)
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 13

Μεγιστοποίηση της Αναμενόμενης Χρησιμότητας

Στο κεφάλαιο 11 υπολογίσαμε την αναμενόμενη εκθετική χρησιμότητα ενός επενδυτή. Στο κεφάλαιο αυτό θα πραγματοποιήσουμε την μεγιστοποίηση της αναμενόμενης εκθετικής χρησιμότητας με σκοπό να βρούμε το άριστο χαρτοφυλάκιο. Άριστο είναι το χαρτοφυλάκιο που αποδίδει στον επενδυτή τη μέγιστη χρησιμότητα.

13.1 Οικονομία χωρίς ακίνδυνη επένδυση

Θεωρούμε, E_R το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας με αναμενόμενη απόδοση μ_{ER} και διακύμανση σ^2_{ER}.
Από την εξίσωση (11.12) παίρνουμε την αναμενόμενη εκθετική χρησιμότητα του επενδυτή:

$$V_{ER} = 1 + a_1\mu_{ER} + \frac{1}{2}a_2\mu^2_{ER} + \frac{1}{2}a_2\sigma^2_{ER} \tag{13.1}$$

Αρχικά, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση V_{ER} ως προς το σύνολο των σταθμίσεων, w_{ER} ,του χαρτοφυλακίου E_R, υπό τους περιορισμούς :

$$\mu_{ER} = w^T_{ER}\mu \tag{13.2}$$

και

$$1 = w^T_{ER}\mathbf{1} \tag{13.3}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.4) και (5.5) στη σχέση (13.1), θα έχουμε:

$$V_{ER} = 1 + a_1(w^T_{ER}\mu) + \frac{1}{2}a_2(w^T_{ER}\mu)^2 + \frac{1}{2}a_2(w^T_{ER}\cdot\Sigma\cdot w_{ER}) = V_{ER}(w_{ER}) \tag{13.4}$$

Επομένως, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $V_{ER}(w_{ER})$ ως προς το σύνολο των σταθμίσεων w_{ER}, υπό τον περιορισμό :

$$1 = w_{ER}^{T}\mathbf{1} \tag{13.5}$$

Για την μεγιστοποίηση της αναμενόμενης εκθετικής χρησιμότητας θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του Lagrange με συντελεστή το λ_{*}. Η εξίσωση του Lagrange είναι:

$$\mathscr{L} = V_{ER}(w_{ER}) + \lambda_{*}[w_{ER}^{T}\mathbf{1} - 1] \tag{13.6}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις Συνθήκες Πρώτης Τάξης της εξίσωσης Lagrange και τις εξισώνουμε με το μηδέν ως εξής:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_{ER}} = \frac{\partial V_{ER}(w_{ER})}{\partial w_{ER}} + \lambda_{*} \cdot \mathbf{1} = 0 \tag{13.7}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_{*}} = w_{ER}^{T}\mathbf{1} - 1 = 0 \tag{13.8}$$

Η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης εκθετικής χρησιμότητας ως προς το σύνολο των σταθμίσεων μπορεί να γραφεί και ως:

$$\frac{\partial V_{ER}(w_{ER})}{\partial w_{ER}} = \frac{\partial V_{ER}}{\partial \mu_{ER}} \cdot \frac{\partial \mu_{ER}}{\partial w_{ER}} + \frac{\partial V_{ER}}{\partial \sigma_{ER}^{2}} \cdot \frac{\partial \sigma_{ER}^{2}}{\partial w_{ER}} \tag{13.9}$$

όπου:

$$\frac{\partial V_{ER}(w_{ER})}{\partial \mu_{ER}} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 2\mu_{ER} = a_1 + a_2\mu_{ER} \tag{13.10}$$

$$\frac{\partial V_{ER}(w_{ER})}{\partial \sigma_{ER}^{2}} = \frac{1}{2}a_2 \tag{13.11}$$

$$\frac{\partial \mu_{ER}}{\partial w_{ER}} = \frac{\partial}{\partial w_{ER}} \cdot (w_{ER}^{T}\mu) = \mu \tag{13.12}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ER}^{2}}{\partial w_{ER}} = \frac{\partial}{\partial w_{ER}} \cdot (w_{ER}^{T}\Sigma w_{ER}) = 2\Sigma w_{ER} \tag{13.13}$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (13.7),(13.9),(13.10),(13.11),(13.12) και (13.13) παίρνουμε οτι:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w_{ER}} = (a_1 + a_2\mu_{ER})\cdot \mu + \frac{1}{2}\cdot a_2 2\cdot \Sigma\cdot w_{ER} + \lambda_*\cdot \mathbf{1} = 0 \implies \\
a_2\cdot \Sigma\cdot w_{ER} = \lambda_*\cdot \mathbf{1} - (a_1 + a_2\mu_{ER})\cdot \mu \implies \\
\Sigma\cdot w_{ER} = \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\mathbf{1} - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\mu
\end{aligned} \tag{13.14}
$$

Για το σύνολο των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου ισορροπίας ισχύει οτι:

$$
\begin{aligned}
w_{ER} &= \Sigma^{-1}\cdot \Sigma\cdot w_{ER} \\
&= \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mathbf{1} - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mu \implies \\
w_{ER}^T &= \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot \mathbf{1}^T\cdot \Sigma^{-1} - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot \mu^T\cdot \Sigma^{-1} \\
&= \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot \mathbf{1}^T\cdot \Sigma^{-1} + \frac{1}{A_{U(r_P=\mu_{ER})}}\cdot \mu^T\cdot \Sigma^{-1}
\end{aligned} \tag{13.15}
$$

Έτσι, συμπεραίνουμε οτι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής αποστροφής κινδύνου $A_{U(r_P=\mu_{ER})}$, τόσο λιγότερο επενδύει ο επενδυτής στα επενδυτικά αγαθά που πριλαμβάνουν την παράμετρο του κινδύνου.

Από τις εξισώσεις (4.12),(4.13),(4.14),(4.15),(5.2),(5.4) και (13.15) οι περιορισμοί του προβλήματος μεγιστοποίησης γίνονται:

$$
\begin{aligned}
\mu_{ER} = w_{ER}^T\mu = \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot \mathbf{1}^T\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mu - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot \mu^T\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mu = \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot b_1 - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot b_0 \implies \\
\mu_{ER} = \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot b_1 - \frac{a_1}{a_2}\cdot b_0 - \mu_{ER}\cdot b_0 \implies \\
\mu_{ER}(1 + b_0) = \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot b_1 - \frac{a_1}{a_2}\cdot b_0 \implies \\
\mu_{ER} = \frac{1}{(1 + b_0)}\cdot \left[\lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot b_1 - \frac{a_1}{a_2}\cdot b_0\right] = \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot \frac{b_1}{(1 + b_0)} - \frac{a_1}{a_2}\cdot \frac{b_0}{(1 + b_0)}
\end{aligned} \tag{13.16}
$$

και

$$
\begin{aligned}
1 = w_{ER}^T\cdot \mathbf{1} &= \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot \mathbf{1}^T\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mathbf{1} - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot \mu^T\cdot \Sigma^{-1}\cdot \mathbf{1} \\
&= \lambda_*\cdot \frac{1}{a_2}\cdot b_2 - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot b_1
\end{aligned} \tag{13.17}
$$

Η εξίσωση (13.16) συνεπάγεται τον συντελεστή της εξίσωσης Lagrange:

$$\begin{aligned} \lambda_{*}\cdot \frac{1}{a_2}\cdot \frac{b_1}{(1+b_0)} &= \mu_{ER} + \frac{a_1}{a_2}\cdot \frac{b_0}{(1+b_0)} \implies \\ \lambda_{*} &= \left[\mu_{ER} + \frac{a_1}{a_2}\cdot \frac{b_0}{(1+b_0)}\right]\cdot a_2\cdot \frac{(1+b_0)}{b_1} \end{aligned} \tag{13.18}$$

Και από την εξίσωση (13.17) συνεπάγεται οτι:

$$\begin{aligned} \lambda_{*}\cdot \frac{1}{a_2}\cdot b_2 &= 1 + (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot b_1 \implies \\ \lambda_{*} &= \left[1 + (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot b_1\right]\cdot a_2\cdot \frac{1}{b_2} \end{aligned} \tag{13.19}$$

Τέλος, εξισώνοντας τις σχέσεις (13.18) και (13.19) θα βρούμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας.

$$\begin{aligned} \left[\mu_{ER} + \frac{a_1}{a_2}\cdot \frac{b_0}{(1+b_0)}\right]\cdot a_2\cdot \frac{(1+b_0)}{b_1} &= \left[1 + (\frac{a_1}{a_2} + \mu_{ER})\cdot b_1\right]\cdot a_2\cdot \frac{1}{b_2} \implies \\ \mu_{ER}\cdot \frac{(1+b_0)}{b_1} + \frac{a_1}{a_2}\cdot \frac{b_0}{b_1} &= \frac{1}{b_2} + \frac{a_1}{a_2}\cdot \frac{b_1}{b_2} + \mu_{ER}\cdot \frac{b_1}{b_2} \implies \\ \mu_{ER}\cdot \left[\frac{1+b_0}{b_1} - \frac{b_1}{b_2}\right] &= \frac{a_1}{a_2}\cdot \left[\frac{b_1}{b_2} - \frac{b_0}{b_1}\right] + \frac{1}{b_2} \implies \\ \mu_{ER}\cdot \left[\frac{b_2 + b_0 b_2 - b_1^2}{b_1 b_2}\right] &= \frac{a_1}{a_2}\cdot \left[\frac{b_1^2 - b_0 b_2}{b_1 b_2}\right] + \frac{a_2 b_1}{a_2 b_2 b_1} \implies \\ \mu_{ER}\cdot \left[b_2 + (b_0 b_2 - b_1^2)\right]\cdot \frac{1}{b_1 b_2} &= \frac{1}{a_2}\cdot \left[a_2 b_1 + a_1(b_1^2 - b_0 b_2)\right]\cdot \frac{1}{b_1 b_2} \implies \\ \mu_{ER} &= \frac{a_2 b_1 + a_1(b_1^2 - b_0 b_2)}{a_2\left[b_2 + (b_0 b_2 - b_1^2)\right]} \implies \\ \mu_{ER} &= \frac{a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2\left[b_2 + (b_0 b_2 - b_1^2)\right]} \end{aligned} \tag{13.20}$$

Ο κίνδυνος, η καμπύλη αδιαφορίας και οι σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου ισορροπίας υπολογίζονται από τις εξισώσεις (12.4),(12.5),(12.6),(12.7),(12.8),(12.9) και (12.10) χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας.

13.2 Οικονομία με ακίνδυνη επένδυση

Θεωρούμε, E, το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας με αναμενόμενη απόδοση μ_E και διακύμανση σ_E^2.
Από την εξίσωση (11.12) παίρνουμε την αναμενόμενη εκθετική χρησιμότητα του επενδυτή

$$V_E = 1 + a_1\mu_E + \frac{1}{2}a_2\mu_E^2 + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 \tag{13.21}$$

Αρχικά, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση V_E ως προς το σύνολο των σταθμίσεων, w_E , του χαρτοφυλακίου E, υπό τον περιορισμό :

$$\mu_E = r_f + w_{ER}^T\tilde{\mu} \tag{13.22}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.5) και (5.31) στην εξίσωση (13.21), θα έχουμε:

$$V_E = 1 + a_1(r_f + w_{ER}^T\tilde{\mu}) + \frac{1}{2}a_2(r_f + w_{ER}^T\tilde{\mu})^2 + \frac{1}{2}a_2 w_E^T \Sigma W_E = V_E(w_E) \tag{13.23}$$

Για την μεγιστοποίηση της αναμενόμενης εκθετικής χρησιμότητας ως προς το σύνολο των σταθμίσεων υπολογίζουμε τη Συνθήκη Πρώτης Τάξης της συνάρτησης $V_E(w_E)$ ως προς w_E και την εξισώνουμε με το μηδέν, ως εξής:

$$\frac{\partial V_E(w_E)}{\partial w_E} = 0 \tag{13.24}$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως:

$$\frac{\partial V_E(w_E)}{\partial w_E} = \frac{\partial V_E}{\partial \mu_E}\cdot\frac{\partial \mu_E}{\partial w_E} + \frac{\partial V_E}{\partial \sigma_E^2}\cdot\frac{\partial \sigma_E^2}{\partial w_E} \tag{13.25}$$

όπου:

$$\frac{\partial V_E(w_E)}{\partial \mu_E} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 2\mu_E = a_1 + a_2 2\mu_E \tag{13.26}$$

$$\frac{\partial V_E(w_E)}{\partial \sigma_E^2} = \frac{1}{2}a_2 \tag{13.27}$$

$$\frac{\partial \mu_E}{\partial w_E} = \frac{\partial}{\partial w_E}\cdot(r_f + w_E^T\tilde{\mu}) = \bar{\mu} \tag{13.28}$$

$$\frac{\partial \sigma_E^2}{\partial w_E} = \frac{\partial}{\partial w_E} \cdot (w_E^T \Sigma w_E) = 2\Sigma w_E \tag{13.29}$$

Από τις εξισώσεις (13.24),(13.25),(13.26),(13.27),(13.28) και (13.29) ισχύει για το σύνολο των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου ισορροπίας οτι:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2\mu_E)\tilde{\mu} + \frac{1}{2}a_2 2\Sigma w_E = 0 \implies \\ a_2\Sigma w_E = -(a_1 + a_2\mu_E)\tilde{\mu} \implies \\ \Sigma w_E = -(\frac{a_1}{a_2} + \mu_E)\tilde{\mu} \end{aligned} \tag{13.30}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} w_E = \Sigma^{-1}\Sigma w_E \implies \\ w_E = -(\frac{a_1}{a_2} + \mu_E)\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \implies \\ w_E^T = -(\frac{a_1}{a_2} + \mu_E)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1} = \frac{1}{A_{U(\mu_E)}}\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1} \end{aligned} \tag{13.31}$$

΄Αρα, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής αποστροφής κινδύνου $A_{U(r_P=\mu_{ER})}$ τόσο μικρότερο ποσοστό κεφαλαίου επενδύεται στα επενδυτικά αγαθά που περιλαμβάνουν την παράμετρο του κινδύνου.

Από τις εξισώσεις (4.12),(4.13),(4.14),(4.15),(5.31) και (13.31) ο περιορισμός του προβλήματος μεγιστοποίησης γίνεται:

$$\begin{aligned} \mu_E = r_f + W_E^T\tilde{\mu} = r_f - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_E)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\tilde{\mu} = r_f - (\frac{a_1}{a_2} + \mu_E)b \implies \\ \mu_E = r_f - \frac{a_1}{a_2}b - \mu_E b \implies \\ \mu_E(1+b) = r_f - \frac{a_1}{a_2}b \implies \\ \mu_E = \frac{1}{1+b}\left[r_f - \frac{a_1}{a_2}b\right] \end{aligned} \tag{13.32}$$

Ο κίνδυνος, η καμπύλη αδιαφορίας και οι σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου ισορροπίας υπολογίζονται από τις εξισώσεις (12.4),(12.5),(12.6),(12.7),(12.8),(12.9) και (12.10) χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου ισορροπίας.

Η εξίσωση (5.40) συνεπάγεται το σύνολο σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου ισορροπίας:

$$w_E = \lambda_E \Sigma^{-1} \tilde{\mu} \tag{13.33}$$

και από τις εξισώσεις (5.41),(13.30) και (13.33) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lambda_E &= \frac{\mu_E - r_f}{b} \\
&= \frac{1}{b} \cdot \left[\frac{1}{1+b} r_f - \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b}{1+b} - r_f \right] \\
&= \frac{1}{b} \cdot \left[\frac{1-1-b}{1+b} r_f - \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b}{1+b} \right] \\
&= \frac{-1}{1+b} r_f - \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b}{1+b} \\
&= \frac{1}{1+b} \left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f \right]
\end{aligned} \tag{13.34}$$

Κεφάλαιο 14

Διάφορα αποτελέσματα

14.1 Ανακεφαλαίωση

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν ακίνδυνες επενδύσεις τα χαρτοφυλάκια που επενδύονται βρίσκονται πάνω στο Αποτελεσματικό Σύνορο το οποίο ονομάζεται Καμπύλη Κινδύνου Απόδοσης.Τα χαρτοφυλάκια αυτά χαρακτηρίζονται από την αναμενόμενη απόδοση, μ_K, τον κίνδυνο, σ_K^2, και το σύνολο των σταθμίσεών τους, w_K.

Από την εξίσωση (13.20) έχουμε την αναμενόμενη απόδοση

$$\mu_K = \frac{a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \tag{14.1}$$

Από την εξίσωση (12.4) έχουμε την διακύμανση

$$\sigma_K^2 = \frac{b_2 \mu_K^2 - 2b_1 \mu_K + b_0}{b_0 b_2 - b_1^2} \tag{14.2}$$

και από την (12.10) παίρνουμε το σύνολο των σταθμίσεων:

$$w_K = \frac{1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \cdot \left[(-a_1 b_2 - a_2 b_1)\Sigma^{-1}\mu + [a_2(1 + b_0) + a_1 b_1]\Sigma^{-1}1\right] \tag{14.3}$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν ακίνδυνες επενδύσεις τα χαρτοφυλάκια που επενδύονται βρίσκονται πάνω στο Αποτελεσματικό Σύνορο το οποίο ονομάζεται Γραμμή Κεφαλαιαγοράς. Τα χαρτοφυλάκια αυτά χαρακτηρίζονται από την αναμενόμενη απόδοση, μ_G, τον κίνδυνο, σ_G^2, και το σύνολο των σταθμίσεών τους, w_G.

Από την εξίσωση (13.32) παίρνουμε την αναμενόμενη απόδοση

$$\mu_G = \frac{1}{1+b}\left[r_f - \frac{a_1}{a_2} b\right] \tag{14.4}$$

Επιπλεόν,η εξίσωση (12.10) μας δίνει την διακύμανση

$$\sigma_G^2 = \frac{b}{(1+b)^2}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right]^2 \tag{14.5}$$

και από την εξίσωση (12.18) το σύνολο των σταθμίσεων είναι

$$w_G = \frac{1}{1+b}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right]\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \tag{14.6}$$

Το γενικότερο σύνολο χαρτοφυλακίων που ανήκουν στην αγορά και μπορούν να επενδυθούν το ονομάζουμε Χαρτοφυλάκιο της Αγοράς(Market Portfolio). Το Χαρτοφυλάκιο της Αγοράς χαρακτηρίζεται από την αναμενόμενη απόδοση, μ_M, τον κίνδυνο, σ_M^2, και το σύνολο των σταθμίσεών τους, w_M.

Έτσι,από την εξίσωση (7.42) παίρνουμε την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου

$$\mu_M = r_f + w_M^T\tilde{r} \tag{14.7}$$

Η εξίσωση (7.50) μας δίνει τη διακύμανση

$$\sigma_M^2 = \frac{b}{(b_1 - b_2 r_f)^2} \tag{14.8}$$

και από την εξίσωση (7.44) το σύνολο των σταθμίσεων είναι

$$w_M = \frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \tag{14.9}$$

14.2 Περιπτώσεις

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε την τιμή του λόγου $\frac{a_1}{a_2}$ που εξασφαλίζει οτι:

(1) Η ισορροπία στην Καμπύλη Κινδύνου Απόδοσης ισούται με την ισορροπία στην Γραμμή Κεφαλαιαγοράς.

(2) Η ισορροπία στην Καμπύλη Κινδύνου Απόδοσης ισούται με την ισορροπία στην Αγορά.

(3) Η ισορροπία στην Γραμμή Κεφαλαιαγοράςισούται με την ισορροπία στην Αγορά.

Στην πρώτη περίπτωση τα χαρτοφυλάκια της Καμπύλης Κινδύνου Απόδοσης ταυτίζονται με τα χαρτοφυλάκια της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς και ισχύει οτι:

(i) Οι αναμενόμενες αποδόσεις ταυτίζονται:

$$
\begin{aligned}
\mu_K = \mu_G &\implies \\
\frac{a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} = \frac{1}{1+b}\left[r_f - \frac{a_1}{a_2} b\right] &\implies \\
\frac{a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} = \frac{1}{1+b}\left[\frac{a_2 r_f - a_1 b}{a_2}\right] &\implies \\
\left[a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)\right][1+b] = \left[b_2 + (b_0 b_2 - b_1^2)\right]\left[a_2 r_f - a_1 b\right] &\implies \\
a_2 b_1 + a_2 b_1 b - a_1(b_0 b_2 - b_1^2) - a_1(b_0 b_2 - b_1^2) b = a_2 b_2 r_f - a_1 b_2 b + a_2(b_0 b_2 - b_1^2) r_f - a_1(b_0 b_2 - b_1^2) b &\implies \\
a_1 b_2 b - a_1(b_0 b_2 - b_1^2) = a_2 b_2 r_f + a_2(b_0 b_2 - b_1^2) r_f - a_2 b_1 - a_2 b_1 b &\implies \\
a_1\left[b_2 b - (b_0 b_2 - b_1^2)\right] = a_2\left[b_2 r_f + (b_0 b_2 - b_1^2) r_f - b_1 - b_1 b\right] &\implies \\
a_1\left[b_2 b - (b_0 b_2 - b_1^2)\right] = a_2\left[(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2) r_f - b_1(1+b)\right] &\implies \\
\frac{a_1}{a_2} = \frac{(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2) r_f - b_1(1+b)}{b_2 b - (b_0 b_2 - b_1^2)} & \qquad (14.10)
\end{aligned}
$$

(ii) Οι διακυμάνσεις ταυτίζονται:

$$
\begin{aligned}
\sigma_K^2 = \sigma_G^2 &\implies \\
\frac{b_2 \mu_K^2 - 2 b_1 \mu_K + b_0}{b_0 b_2 - b_1^2} = \frac{b}{(1+b)^2}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right]^2 &\implies \\
\frac{\left[b_2 \mu_K^2 - 2 b_1 \mu_K + b_0\right](1+b)^2}{b\left[b_0 b_2 - b_1^2\right]} = \left[\frac{a_1}{a_2} + r_f\right]^2 &\implies \\
\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{\left[b_2 \mu_K^2 - 2 b_1 \mu_K + b_0\right](1+b)^2}{b\left[b_0 b_2 - b_1^2\right]}} - r_f & \qquad (14.11)
\end{aligned}
$$

(iii) Οι σταθμίσεις ταυτίζονται:

$$
\begin{gathered}
w_K = w_G \implies \\
\frac{1}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} \cdot \left[(-a_1 b_2 - a_2 b_1)\Sigma^{-1}\mu + [a_2(1 + b_0) + a_1 b_1]\Sigma^{-1}\imath\right] = \frac{1}{1+b}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right]\Sigma^{-1}\tilde{\mu} \implies \\
\frac{(-a_1 b_2 - a_2 b_1)\mu + [a_2(1 + b_0) + a_1 b_1]\,\imath}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} = \frac{1}{1+b}\left[\frac{-a_1 - r_f}{a_2}\right]\tilde{\mu} \implies \\
[(-a_1 b_2 - a_2 b_1)\mu + [a_2(1 + b_0) + a_1 b_1]\,\imath]\, a_2(1+b) = (-a_1 - r_f)a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu} \implies \\
-a_1 b_2 \mu(1+b) - a_2 b_1 \mu(1+b) + a_2(1+b_0)(1+b)\imath + a_1 b_1(1+b)\imath \\
= -a_1(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu} - r_f(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu} \implies \\
a_2(1+b_0)(1+b)\imath - a_2 b_1 \mu(1+b) \\
= a_1 b_2(1+b) - a_1 b_1(1+b)\imath - a_1(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu} - r_f(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu} \implies \\
a_2(1+b)\left[(1+b_0)\imath - b_1\mu\right] \\
= a_1\left[(1+b)(b_2 - b_1\imath) - (b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu}\right] - r_f(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu} \implies \\
a_2 = \frac{1}{(1+b)\left[(1+b_0)\imath - b_1\mu\right]} \cdot \left[a_1[(1+b)(b_2 - b_1\imath) - (b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu}] - r_f(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\tilde{\mu}\right]
\end{gathered}
\tag{14.12}
$$

Στη δεύτερη περίπτωση τα χαρτοφυλάκια της Καμπύλης Κινδύνου Απόδοσης ταυτίζονται με τα χαρτοφυλάκια της Αγοράς και ισχύει οτι:

(i) Οι αναμενόμενες αποδόσεις ταυτίζονται:

$$
\begin{gathered}
\mu_K = \mu_M \implies \\
\frac{a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2)}{a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)} = r_f + w_M^T \tilde{r} \implies \\
a_2 b_1 - a_1(b_0 b_2 - b_1^2) = \left[r_f + w_M^T \tilde{r}\right]\left[a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\right] \implies \\
a_2 b_1 - a_2(b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)\left[r_f + w_M^T \tilde{r}\right] = a_1(b_0 b_2 - b_1^2) \implies \\
a_2\left[b_1 - (b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)(r_f + w_M^T \tilde{r})\right] = a_1(b_0 b_2 - b_1^2) \implies \\
\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_0 b_2 - b_1^2}{b_1 - (b_2 + b_0 b_2 - b_1^2)(r_f + w_M^T \tilde{r})}
\end{gathered}
\tag{14.13}
$$

(ii) Οι διακυμάνσεις ταυτίζονται:

$$\begin{aligned}\sigma_K^2 = \sigma_M^2 &\implies \\ \frac{b_2\mu_K^2 - 2b_1\mu_K + b_0}{b_0b_2 - b_1^2} &= \frac{b}{(b_1 - b_2r_f)^2}\end{aligned} \tag{14.14}$$

(iii) Οι σταθμίσεις ταυτίζονται:

$$\begin{aligned}w_K = w_M &\implies \\ \frac{1}{a_2(b_2 + b_0b_2 - b_1^2)} \cdot \left[(-a_1b_2 - a_2b_1)\Sigma^{-1}\mu + [a_2(1 + b_0) + a_1b_1]\Sigma^{-1}\mathbb{1}\right] &= \frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}} \implies \\ \frac{1}{a_2(b_2 + b_0b_2 - b_1^2)} \cdot [(-a_1b_2 - a_2b_1)\mu + [a_2(1 + b_0) + a_1b_1]\mathbb{1}] &= \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}} \implies \\ \tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\left[(-a_1b_2 - a_2b_1)\mu + [a_2(1 + b_0) + a_1b_1]\mathbb{1}\right] &= \tilde{\mu}(b_2 + b_0b_2 - b_1^2)a_2 \implies \\ -a_1b_2\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\mu - a_2b_1\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\mu + a_2(1 + b_0)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}^2 + a_1b_1\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}^2 &= \tilde{\mu}(b_2 + b_0b_2 - b_1^2)a_2 \implies \\ a_2\left[(1 + b_0)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}^2 - b_1\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\mu - (b_2 + b_0b_2 - b_1^2)\tilde{\mu}\right] &= a_1\left[b_2\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\mu - b_1\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}^2\right] \implies \\ \frac{a_2}{a_1} &= \frac{\left[b_2\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\mu - b_1\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}^2\right]}{\left[(1 + b_0)\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}^2 - b_1\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbb{1}\mu - (b_2 + b_0b_2 - b_1^2)\tilde{\mu}\right]}\end{aligned} \tag{14.15}$$

Τέλος,στην τρίτη περίπτωση τα χαρτοφυλάκια της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς ταυτίζονται με τα χαρτοφυλάκια της Αγοράς και ισχύει οτι:

(i) Οι αναμενόμενες αποδόσεις ταυτίζονται:

$$
\begin{aligned}
\mu_G = \mu_M &\implies \\
\frac{1}{1+b}\left[r_f - \frac{a_1}{a_2}b\right] = r_f + w_M^T\bar{r} &\implies \\
\frac{1}{1+b}\cdot r_f - \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b}{1+b} = r_f + w_M^T\tilde{r} &\implies \\
r_f\left[\frac{1}{1+b} - 1\right] - w_M^T\tilde{r} = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b}{1+b} &\implies \\
r_f\left[\frac{1-1-b}{1+b}\right] - w_M^T\tilde{r} = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b}{1+b} &\implies \\
r_f\left[\frac{-b}{1+b}\right] - \frac{(1+b)}{1+b}w_M^T\tilde{r} = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b}{1+b} &\implies \\
r_f(-b) - (1+b)w_M^T\tilde{r} = \frac{a_1}{a_2}b &\implies \\
\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{b}\left[-br_f - (1+b)w_M^T\tilde{r}\right] &\implies \\
\frac{a_2}{a_1} = b\cdot\frac{1}{-br_f - (1+b)w_M^T\tilde{r}} &
\end{aligned}
\tag{14.16}
$$

(ii) Οι διακυμάνσεις ταυτίζονται:

$$
\begin{aligned}
\sigma_G^2 = \sigma_M^2 &\implies \\
\frac{b}{(1+b)^2}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right]^2 = \frac{b}{(b_1 - b_2 r_f)^2} &\implies \\
\frac{1}{(1+b)^2}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right]^2 = \frac{1}{(b_1 - b_2 r_f)^2} &\implies \\
\left[\frac{a_1}{a_2} + r_f\right]^2 (b_1 - b_2 r_f)^2 = (1+b)^2 &\implies \\
\left[\frac{a_1}{a_2} + r_f\right](b_1 - b_2 r_f) = 1+b &\implies \\
\frac{a_1}{a_2} + r_f = \frac{1+b}{b_1 - b_2 r_f} &\implies \\
\frac{a_1}{a_2} = \frac{1+b}{b_1 - b_2 r_f} - r_f &\implies \\
\frac{a_1}{a_2} = \frac{1+b-(b_1 - b_2 r_f)}{b_1 - b_2 r_f} &\implies \\
\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1 - b_2 r_f}{1+b-(b_1 - b_2 r_f)} &
\end{aligned}
\tag{14.17}
$$

(iii) Οι σταθμίσεις ταυτίζονται:

$$
\begin{aligned}
w_G = w_M \implies \\
\frac{1}{1+b}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right]\Sigma^{-1}\tilde{\mu} = \frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \implies \\
\frac{1}{1+b}\left[\frac{-a_1}{a_2} - r_f\right] = \frac{1}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \implies \\
-\left[\frac{a_1}{a_2} + r_f\right] = \frac{1+b}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \implies \\
\frac{a_1}{a_2} + r_f = \frac{-(1+b)}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \implies \\
\frac{a_1}{a_2} = \frac{-(1+b)}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} - r_f \implies \\
\frac{a_1}{a_2} = \frac{-(1+b) - r_f\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \implies \\
\frac{a_2}{a_1} = \frac{\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{-(1+b) - r_f\tilde{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}}
\end{aligned}
\tag{14.18}
$$

Συμπέρασμα

Στην εργασία αυτή προσδιορίστηκαν οι αντικειμενικοί και οι υποκειμενικοί παράγοντες της θεωρίας του χαρτοφυλακίου και των επενδύσεων.

Στους αντικειμενικούς παράγοντες αναφέρθηκαν συγκεκριμένα είδη χαρτοφυλακίων και προσδιορίστηκαν τα χαρακτηριστικά του καθενός. Υπολογίστηκαν δηλαδή οι αποδόσεις τους, οι αναμενόμενες αποδόσεις τους και οι διακυμάνσεις τους ή αλλιώς ο κίνδυνος που εγκυμονεί καθένα από αυτά τα χαρτοφυλάκια σε περίπτωση αποτυχίας της επένδυσης.

Ο Harry Markowitz υποστήριξε οτι ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής έχει ως στόχο να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση με δεδομένο τον κίνδυνο ή να ελαχιστοποίησει τον κίνδυνο της επένδυσής του με δεδομένη την αναμενόμενη απόδοση. Έτσι, στο υποκειμενικό κομμάτι των επενδύσεων δώθηκε έμφαση στη χρησιμότητα του επενδυτή. Τέλος, υπολογίστηκε η αναμενόμενη χρησιμότητα και μέσω της μεγιστοιποίησής της προσδιορίστηκε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο κατά το οποίο ένας επενδυτής αποκομίζει την μέγιστη απόδοση.

Βιβλιογραφία

[1]Harry Markowitz (2014), Mean-Variance approximations to expected utility, *European Journal of Operational Research* 234 p.346-355

[2]Α.Πετραλιάς, Η.Τζαβαλής (2009), Επενδύσεις, *Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών*

[3]http://dione.lib.unipi.gr/xmlui/bitstream/handle/unipi/4414/Atmatsiadi.pdf?sequence=2isAllowed

[4]http://mscinaccounting.teipir.gr/uploads/eef8ffabf2ed75f9896d258ded644a47.pdf

[5]http://www.de.teipat.gr/documents/xeimerino