ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙΠΡΩΤΟΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

«Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης: Η περίπτωση των κλασμάτων»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΣΕ ΕΛΕΑΝΑ (Α.Μ.: 119)

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2020

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ «ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

Κατεύθυνση: Θετικές επιστήμες και Τεχνολογίες της Πληροφορικής και των Επικοινωνιών στην Προσχολική και Πρωτοσχολική Εκπαίδευση

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης: Η περίπτωση των κλασμάτων»

της φοιτήτριας

ΕΛΕΑΝΑΣ ΤΣΕ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: ΒΑΜΒΑΚΟΥΣΗ ΞΕΝΙΑ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Βαμβακούση Ξένια
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Π.Τ.Ν

Καλδρυμίδου Μαρία
Καθηγήτρια Π.Τ.Ν

Τάτσης Κωνσταντίνος
Επίκουρος Καθητητής Π.Τ.Δ.Ε

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα της διπλωματικής εργασίας κα Ξένια Βαμβακούση, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Π.Τ.Ν του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, η οποία αφιέρωσε πολύτιμο χρόνο, γνώσεις και καθοδήγηση, χωρίς τα οποία δε θα είχε πραγματοποιηθεί η παρούσα εργασία.

Επίσης, ευχαριστώ ιδιαιτέρως την κα Μαρία Καλδρυμίδου, Καθηγήτρια του Π.Τ.Ν του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τις γνώσεις που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών, καθώς και τον κο Κωνσταντίνο Τάτση, Επίκουρο Καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, ένα μεγάλο και εγκάρδιο ευχαριστώ στους εκπαιδευτικούς που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα και στους γονείς μου για όσα ανεκτίμητα μου έχουν προσφέρει σε όλη μου τη ζωή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια του κλάσματος είναι μια από τις πιο σημαντικές στα σχολικά μαθηματικά, όμως προκαλεί μεγάλη δυσκολία σε πολλούς μαθητές, αλλά και σε εκπαιδευτικούς. Οι εκπαιδευτικοί, πέρα από την κατανόηση των κλασμάτων, πρέπει να κατέχουν και την απαιτούμενη γνώση, ώστε να είναι σε θέση να τα διδάξουν αποτελεσματικά. Σκοπός της έρευνας ήταν να μελετήσει πτυχές της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης για τα κλάσματα. Για τη συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν ημι-δομημένες συνεντεύξεις, με 12 εν ενεργεία εκπαιδευτικούς, βασισμένες σε έργα. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν α) να αξιολογήσουν τις απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε έργα σχετικά με τα κλάσματα, β) να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης μαθητών που έδωσαν λανθασμένη απάντηση και γ) να δώσουν την απαραίτητη ανατροφοδότηση. Οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν λανθασμένα απαντήσεις μαθητών σε έργα πέραν των συνήθων ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων και δυσκολεύτηκαν στη διατύπωση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Επιπλέον, σε μεγάλο βαθμό, οι εκπαιδευτικοί έδωσαν ουσιαστικές εξηγήσεις για συνήθη λάθη των μαθητών στα κλάσματα. Όσον αφορά την ανατροφοδότηση, ένα κεντρικό εύρημα ήταν ότι οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί κατέφυγαν στην παρουσίαση μια σωστής απάντησης, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη συγκεκριμένη απάντηση που δόθηκε από το μαθητή. Για παράδειγμα, σε καμία περίπτωση δεν αναφέρθηκε ότι ο μαθητής θα έπρεπε να εξηγήσει πώς σκέφτηκε. Τέλος, για την παρουσίαση της σωστής απάντησης, οι συμμετέχοντες βασίστηκαν σε μεγάλο βαθμό στην υπενθύμιση ορισμών, κανόνων και διαδικασιών για τα κλάσματα. Τα αποτελέσματα αυτά δεν μπορούν να γενικευθούν, ωστόσο εγείρουν ερωτήματα σχετικά με την επάρκεια της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία των εν ενεργεία εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Λέξεις κλειδιά: κλάσματα, μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία, εν ενεργεία εκπαιδευτικοί

ABSTRACT

Fractions constitute one of the most important mathematical concepts in school mathematics. Nevertheless, many students and teachers are facing difficulties in understanding them. It is of essential importance that teachers possess the proper content knowledge and pedagogical content knowledge in order to teach fractions effectively. The aim of this study was to investigate elementary teachers' mathematical knowledge for the teaching of fractions. For data collection, task-based, semi-structured interviews of 12 in service teachers were conducted. Results showed that teachers are facing difficulties in properly evaluating students' answers to non-typical tasks targeting elementary, albeit fundamental knowledge of fractions. Formulating multiplication and division mathematical problems that are solved with certain operations also posed difficulties to teachers. Finally, it was observed that teachers rely heavily on rules and procedures in order to provide feedback to students.

Key words: fractions, mathematical knowledge, in service teachers

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα από τα βασικότερα διδακτικά αντικείμενα της εκπαίδευσης σε όλο τον κόσμο (Tapp, 2016). Το μάθημα των μαθηματικών αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του προγράμματος σπουδών στα σχολεία όλων των χωρών, οι οποίες επενδύουν τεράστιους πόρους για την υποστήριξη της διδασκαλίας αυτού του αντικειμένου (Unesco, 1996). Το ενδιαφέρον για το μάθημα των μαθηματικών απορρέει από το γεγονός ότι τα μαθηματικά θεωρούνται ως καταλυτικός παράγοντας για την οικονομική και τεχνολογική ανάπτυξη των εθνών (Unesco, 1996).

Ένα από τα πιο σημαντικά μαθηματικά αντικείμενα είναι οι ρητοί αριθμοί. Η εκμάθησή τους βοηθάει στην κατανόηση άλλων μαθηματικών πεδίων αλλά και στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης[1] που είναι απαραίτητη για μαθηματικά ανώτερου επιπέδου (Moss, 2005). Μια από τις συμβολικές μορφές των ρητών αριθμών είναι αυτή του κλάσματος. Η διδασκαλία του κλάσματος ξεκινά ήδη από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση και συνεχίζεται μέχρι και το Γυμνάσιο.

Παρότι η διδασκαλία των κλασμάτων ξεκινά από νωρίς, οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες. Αρκετές έρευνες καταδεικνύουν μια πληθώρα παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές στα κλάσματα (Aksu, 1997; Gabriel et al, 2013; Ndalichako, 2013). Η δυσκολία της κατανόησης των κλασμάτων συνδέεται αφενός με τις διαφορετικές εκφράσεις - όψεις που έχουν τα κλάσματα (Kieren, 1976) καθώς και με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις τους (Van de Walle, 2007), αφετέρου με τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Ωστόσο τα τελευταία 30 χρόνια, πολλοί ερευνητές συνδέουν τη δυσκολία κατανόησης των κλασμάτων και με τον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί τα διδάσκουν (Tirosh, 2000; Shin & Bryant, 2015; Şahin, Gökkurt, Soylu, 2016). Πρώτος ο Shulman (1986) τόνισε ότι οι μαθητές για να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση του περιεχομένου προϋποθέτει οι εκπαιδευτικοί να έχουν τόσο γνώση περιεχομένου, όσο και ισχυρή παιδαγωγική γνώση

[1] Με τον όρο «αναλογική σκέψη» αποδίδουμε τον αγγλικό όρο «proportional reasoning» και όχι τον όρο «analogical reasoning» «σκέψη κατ'αναλογία».

περιεχομένου για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου. Επίσης αναφέρει ότι για να διδάξει ένας εκπαιδευτικός θαπρέπει να διαθέτει συγκεκριμένα είδη γνώσεων (Shulman, 1999).

Αρκετοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης βασιζόμενοι στο έργο του Shulman, αναπτύσσουν τα είδη γνώσεων που οφείλουν να έχουν οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματικά, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές τους να κατανοήσουν τη μαθηματική έννοια (Ma, 1999; Cuoco, 2001; Ball, Thames, Phelps, 2008; Burgess, 2009; Baumert & Kunter, 2013). Oλες οι έρευνες περιγράφουν μια μεγάλη ποικιλία γνώσεων που οφείλουν να κατέχουν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Δεν υπάρχει όμως ένα πλαίσιο κοινά αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα. Σε αυτό που όλοι συμφωνούν είναι ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να έχουν επάρκεια στη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

Το ακαδημαϊκό ενδιαφέρον πλέον επικεντρώνεται στον έλεγχο της γνώσης του περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Young & Zientek, 2011; Lo & Luo, 2012; Olanoff, Lo & Tobias, 2014; Kar & Işık, 2014; Kilic, 2015; Thanheiser et al, 2016; İskenderoğlu, 2017). Οι διεθνείς έρευνες κατέδειξαν έλλειμμα στη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για την αποτελεσματική διδασκαλία των κλασμάτων (Ball, 1990; Tirosh, 2000).

Η παρούσα εργασία θα προσπαθήσει να εμπλουτίσει τη βιβλιογραφία διερευνώντας τη μαθηματική γνώση για διδασκαλία των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην περίπτωση των κλασμάτων. Οι ερευνητικοί στόχοι που μελετώνται αφορούν στην ικανότητα των εκπαιδευτικών να αξιολογούν τις απαντήσεις των μαθητών, να σχηματίζουν προβλήματα κλασμάτων, να ερμηνεύουν τις παρανοήσεις των μαθητών και να διαχειρίζονται τις παρανοήσεις των μαθητών.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο βασίζεται η έρευνα. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αρχικά τα δυο βασικά στοιχεία της έννοιας του κλάσματος, οι όψεις και οι αναπαραστάσεις του κλάσματος, που βοηθούν στην κατανόησή του. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα λάθη που κάνουν οι μαθητές στα κλάσματα αλλά και τους λόγους για τους οποίους τα κλάσματα είναι δύσκολα. Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετικά με τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία της παρούσας έρευνας, ξεκινώντας με το ερευνητικό πρόβλημα και τα ερευνητικά ερωτήματα.

Στη συνέχεια αναφέρουμε το ερευνητικό εργαλείο καθώς και τους συμμετέχοντες της έρευνας. Ακολουθεί η εγκυρότητα και η αξιοπιστία της ερευνητικής διαδικασίας, η διαδικασία διενέργειας της έρευνας και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τον τρόπο ανάλυσης των δεδομένων. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας και στο έκτο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα συμπεράσματα της έρευνας. Στο τέλος η εργασία συνοδεύεται από το παράρτημα, το οποίο περιλαμβάνει τις απομαγνητοφωνήσεις και το πρωτόκολλο συνέντευξης.

2 ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε θεωρητικές προσεγγίσεις σχετικά με τις πτυχές της γνώσης που οφείλουν να έχουν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία και, πιο συγκεκριμένα, για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ο Shulman (1986) ήταν ο πρώτος που αποπειράθηκε να προσδιορίσει τις συνιστώσες της γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία, ξεκινώντας από τη διαπίστωση ότι το να γνωρίζει κανείς το αντικείμενο που πρέπει να διδάξει (γνώση περιεχομένου), είναι αναγκαία μεν, αλλά όχι ικανή συνθήκη για την αποτελεσματική διδασκαλία. Ανέδειξε διαφορετικές πτυχές της γνώσης που είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία, με πιο γνωστές τη «γνώση περιεχομένου» και την «παιδαγωγική γνώση περιεχομένου». Η πρόταση το Shulman είχε μεγάλη επίδραση στον ευρύτερο χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας, αλλά δέχθηκε και κριτική. Στη συνέχεια, οι Ball et al. (2008), ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, βασιζόμενοι στο έργο του Shulman, έδωσαν στην επιστημονική κοινότητα τη δική τους προσέγγιση σχετικά με τα είδη γνώσης του εκπαιδευτικού για τη διδασκαλία των μαθηματικών και εισήγαγαν τον όρο «μαθηματική γνώση για διδασκαλία». Η παρούσα έρευνα θα υιοθετήσει αυτή την προσέγγιση για να εξετάσει τημαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των κλασμάτων.

2.2 Είδη γνώσης των εκπαιδευτικών για διδασκαλία

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν το αντικείμενο της διδασκαλίας (Κωνσταντίνου, 2015). Προκειμένου, όμως, να ανταποκριθεί επιτυχώς στον ρόλο του, είναι αναγκαίο να γνωρίζει εις βάθος το αντικείμενο που πρόκειται να διδάξει (Shulman, 1986). Η μεγάλη επιρροή που ασκεί το γνωστικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών στο εκπαιδευτικό αποτέλεσμα οδήγησε στη δημιουργία κατηγοριοποίησης των ειδών γνώσης που χρειάζεται να κατέχει ένας εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία (Shulman, 1986). Οι θεωρητικές μελέτες καταλήγουν σε μια κατηγοριοποίηση των ειδών γνώσης που «οφείλει» να κατέχει ένας εκπαιδευτικός (Shulman, 1986). Ο Shulman (1986) πρότεινε τη διάκριση της γνώσης του περιεχομένου (content knowledge) σε τρεις κατηγορίες:

- Τη γνώση του γνωστικού αντικειμένου του περιεχομένου (subject matter content knowledge), που αναφέρεται στις γνώσεις που πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί από διάφορα επιστημονικά πεδία προκειμένου να διδάξουν αποτελεσματικά
- Την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (pedagogical content knowledge), που αναφέρεται στη γνώση που βοηθάει τον εκπαιδευτικό να επιλέξει τον καλύτερο τρόπο προκειμένου να μετασχηματίσει μια έννοια, για να γίνει κατανοητή από τους μαθητές
- Τη γνώση του αναλυτικού προγράμματος (curricular knowledge), που αποτελεί τη γνώση των στόχων και των εκπαιδευτικών μέσων και υλικών που αφορούν μια συγκεκριμένη διδακτική περιοχή

Στη συνέχεια επεκτείνει την κατηγοριοποίηση και υποστηρίζει ότι εφτά κατηγορίες γνώσεων συγκροτούν την επαγγελματική κατάρτιση ενός εκπαιδευτικού (Shulman, 1999). Οι κατηγορίες γνώσεων αυτές είναι:

- Γνώση Περιεχομένου: αφορά το πλήθος γνώσεων και την οργάνωση αυτών στο μυαλό των εκπαιδευτικών με τέτοιο τρόπο ώστε να γνωρίζουν όχι μόνο το πώς γίνεται κάτι, αλλά και το λόγο (αιτία) που το προκαλεί
- Γενική Παιδαγωγική Γνώση: αφορά στρατηγικές διαχείρισης και οργάνωσης στην τάξη
- Γνώση Αναλυτικού Προγράμματος: αφορά τα εργαλεία, υλικά και προγράμματα που μπορούν να αξιοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για την επίτευξη των εκπαιδευτικών στόχων
- Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου: αφορά τις γνώσεις που είναι αναγκαίες για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου
- Γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους
- Γνώση του εκπαιδευτικού πλαισίου: αφορά τον τρόπο εργασίας εντός και εκτός της τάξης (ομάδες εργασίας, διαχείριση τάξης, διαχείριση σχολικής μονάδας κ.ά.)
- Γνώση των εκπαιδευτικών σκοπών και αξιών, ιστορικών και φιλοσοφικών θεμελίων

2.3 Γνώση εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών

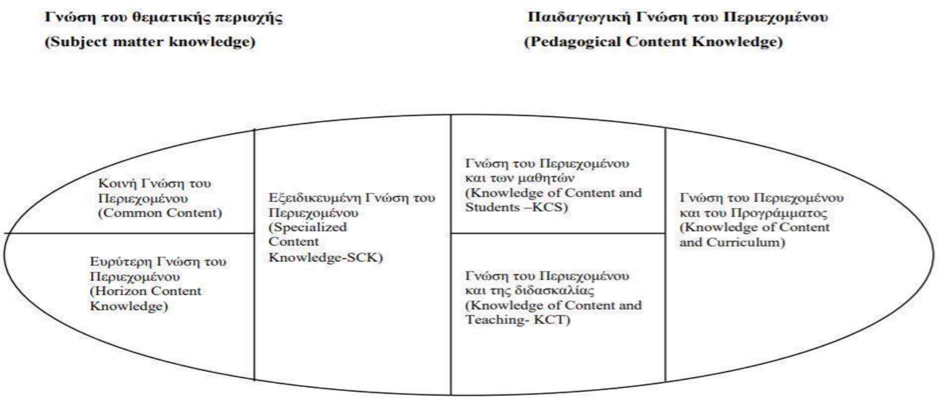
Η κατηγοριοποίηση των γνώσεων του Shulman υιοθετήθηκε και αναθεωρήθηκε από αρκετούς ερευνητές που μελέτησαν τη Διδακτική των Μαθηματικών (Ball, 2008; Depaepe, et al, 2013). Πολλοί ερευνητές διερεύνησαν τα είδη γνώσης που θα πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Ma, 1999; Cuoco, 2001; Ball et al., 2008). Ο κάθε ερευνητής δίνει τη δική του προσέγγιση στην επιστημονική κοινότητα. Η παρούσα έρευνα θα παρουσιάσει την κατηγοριοποίηση των Ball et al. (2008) για την μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία.

Οι Ball et al. (2008) αναπτύσσουν τη δική τους προσέγγιση για τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία (mathematical knowledge for teaching). Αναγνώρισαν τα είδη των γνώσεων που απαιτούνται από μέρους των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών, βασιζόμενοι στο έργο του Shulman. Οι συγγραφείς προσδιόρισαν συγκεκριμένους τομείς της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι τομείς αυτοί είναι:

- Η κοινή γνώση περιεχομένου (common content knowledge-CCK) ορίζεται ως «*η μαθηματική γνώση και δεξιότητα που χρησιμοποιείται και σε περιβάλλοντα διαφορετικά από αυτό της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να γνωρίζουν το υλικό που πρόκειται να διδάξουν, να χρησιμοποιούν τους όρους και τον συμβολισμό σωστά, χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίζουν πότε οι μαθητές τους δίνουν λανθασμένες απαντήσεις και πότε τα σχολικά εγχειρίδια αναφέρουν ανακρίβειες. Διευκρινίζεται ότι ο όρος «κοινή» δεν αναφέρεται στη γνώση που έχει ο καθένας αλλά ότι αυτό το είδος γνώσης χρησιμοποιείται σε πολλά περιβάλλοντα και όχι κατά μοναδικό τρόπο στη διδασκαλία*» (Ball et al., 2008:399).
- Η ευρύτερη γνώση περιεχομένου (horizon content knowledge-HCK) *«αφορά σε μια συνειδητοποίηση για τον τρόπο που τα μαθηματικά θέματα σχετίζονται κατά τη διάρκεια του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών. Επίσης, περιλαμβάνει την δυνατότητα εύρεσης συνδέσεων με πιο προχωρημένες μαθηματικές ιδέες»* (Ball et al., 2008:403)
- Η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου (specialized content knowledge-SCK) είναι «*η μαθηματική γνώση και δεξιότητα που απαιτείται αποκλειστικά για τη διδασκαλία, δηλαδή δεν χρειάζεται για σκοπούς άλλους εκτός απ' αυτή. Κάποιες δραστηριότητες της διδασκαλίας που χαρακτηρίζουν αυτού του είδους τη γνώση είναι: η παρουσίαση των μαθηματικών ιδεών, οι απαντήσεις στα «γιατί» των μαθητών, η εύρεση παραδειγμάτων για κάποιο συγκεκριμένο ζήτημα, η επιλογή αναπαραστάσεων για συγκεκριμένους σκοπούς καθώς και η αναγνώριση αυτού που περιλαμβάνει η χρήση μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης, η σύνδεση αναπαραστάσεων με κάποιες ιδέες και με άλλες αναπαραστάσεις, η σύνδεση ενός ζητήματος διδασκαλίας με άλλα από προηγούμενα ή επόμενα χρόνια, η επεξήγηση μαθηματικών στόχων, η (συχνά σύντομη) αξιολόγηση της αληθοφάνειας των ισχυρισμών των*

μαθητών, η επιλογή και ανάπτυξη κατάλληλων ορισμών, η χρήση τηςμαθηματικής γλώσσας και του συμβολισμού καθώς και η κριτική της, η τοποθέτηση παραγωγικών μαθηματικών ερωτήσεων και η μελέτη των ισοδυναμιών. Η εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου περιλαμβάνει ένα είδος αποσυμπιεσμένης γνώσης των μαθηματικών, η οποία δεν χρειάζεται σε περιβάλλοντα διαφορετικά από αυτό της διδασκαλίας» (Ball et al. 2008:400)

- Η γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (knowledge of content and students-KCS) είναι «*η γνώση που προσφέρει σ' έναν εκπαιδευτικό τη δυνατότητα να προβλέπει τι μπορεί να σκεφτούν οι μαθητές και τι θα τους μπερδέψει, τι θα βρουν ενδιαφέρον και τι θα τους κινητοποιήσει. Είναι η γνώση που δίνει στον εκπαιδευτικό την ικανότητα να ακούει και να ερμηνεύει τις ατελείς σκέψεις των μαθητών με τους τρόπους που αυτοί χρησιμοποιούν τη γλώσσα. Αυτό το είδος γνώσης είναι ένα αμάλγαμα που περιλαμβάνει μια συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα ή διαδικασία και μια οικειότητα με αυτό που οι μαθητές συχνά σκέφτονται ή κάνουν*» (Ball et al., 2008:401)
- Η γνώση περιεχομένου και διδασκαλίας (knowledge of content and teaching-KCT) περιλαμβάνει «*τη μαθηματική γνώση που απαιτείται για το σχεδιασμό της διδασκαλίας, την επιλογή της σειράς εμφάνισης των παραδειγμάτων, την αξιολόγηση πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων των αναπαραστάσεων μιας ιδέας, την αξιολόγηση της στιγμής για το ποιες από τις ιδέες των μαθητών θα αξιοποιηθούν, θα αγνοηθούν ή θα αναφερθούν αργότερα. Αυτές οι ενέργειες απαιτούν μια αλληλεπίδραση μεταξύ μιας ιδιαίτερης μαθηματικής κατανόησης και μιας κατανόησης των παιδαγωγικών ζητημάτων που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών*» (Ball et al., 2008:401)
- Η γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών (knowledge of content and curriculum-KCC) αναφέρεται στη γνώση του αναλυτικού προγράμματος, στους στόχους και στις δραστηριότητες.



Εικόνα 1:Τομείς της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία των Ball et al., όπως εμφανίζεται μεταφρασμένο (Κολιπέτρη, 2015:35)

3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

3.1 Εισαγωγή

Η έννοια του κλάσματος αποτελεί μία θεμελιώδης μαθηματική έννοια. Η κατανόησή της είναι καταλυτική για την ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης αλλά και για την κατανόηση άλλων μαθηματικών πεδίων. Ωστόσο, τα κλάσματα προκαλούν μεγάλη δυσκολία στους μαθητές και αυτό οφείλεται σε πολλούς λόγους, μεταξύ των οποίων σημαντικοί είναι το πλήθος των διαφορετικών νοημάτων που μπορούν να αποδοθούν στο κλάσμα, η μεγάλη ποικιλία των αναπαραστάσεων του κλάσματος και το γεγονός ότι η προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς δεν είναι πάντα συμβατή με τις νέες πληροφορίες για τα κλάσματα, στις οποίες εκτίθενται τα παιδιά στο σχολικό πλαίσιο, όπως επεσήμανε η Moss (2005). Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι όψεις και οι αναπαραστάσεις του κλάσματος, η κατανόηση των οποίων αποτελεί βασικό προαπαιτούμενο για την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τα λάθη - τις παρανοήσεις των μαθητών στα κλάσματα, αλλά και τους λόγους που ενισχύουν αυτές τις δυσκολίες.

3.2 Οι όψεις του κλάσματος

Τα κλάσματα αποτελούν μια πολυδιάστατη κατασκευή και έχουν διαφορετικές όψεις (Kieren, 1976). Αυτές περιλαμβάνουν την όψη του κλάσματος ως μέρος-όλου, ως πηλίκο, ως λόγος, ως τελεστής και ως μέτρο (Behr et al.,1983; Marshall, 1993). Πιο συγκεκριμένα:

- Το κλάσμα μέρος - όλου: είναι μια κατάσταση στην οποία μια συνεχής ποσότητα ή ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων χωρίζεται σε μέρη ίσου μεγέθους. Το κλάσμα αναπαριστά μια σύγκριση μεταξύ ενός πλήθους μερών μιας διαμερισμένης μονάδας και του συνολικού αριθμού μερών, στα οποία η μονάδα έχει διαμεριστεί. Θεωρείται η πιο εύκολη όψη στην κατανόηση του κλάσματος, για αυτό συνήθως η εισαγωγή στα κλάσματα γίνεται με αυτήν την όψη (Kieren, 1976). Σύμφωνα με την Butaro (2004), σε αυτή την όψη οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν ότι τα μέρη στα οποία διαμερίζεται η ολόκληρη ποσότητα πρέπει να είναι ίσου μεγέθους και να κατανοήσουν την έννοια της μοναδοποίησης (unitizing) και της επανα-μοναδοποίησης (reunitizing)

- Το κλάσμα ως πηλίκο: το κλάσμα ως αποτέλεσμα της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή (Behr et al., 1983)
- Το κλάσμα ως λόγος: εκφράζει τη σχέση-σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Εμπεριέχει την έννοια της σταθερότητας και της συμμεταβολής (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)
- Το κλάσμα ως τελεστής: λειτουργεί ως ένας μηχανισμός πολλαπλασιαστικής αντιστοίχισης μεταξύ δύο διακριτών ή συνεχών συνόλων (Behr et al.,1983)
- Το κλάσμα ως μέτρο: παρουσιάζεται μέσω της αριθμητικής γραμμής ως σημείο (Kieren, 1976). Η όψη αυτή είναι πολύ σημαντική, γιατί εδώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι τα κλάσματα είναι αριθμοί, και μάλιστα άπειροι (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Βέβαια αξίζει να σημειωθεί ότι παρότι η όψη του κλάσματος ως μέτρο συνδέεται με την αριθμογραμμή, η παρουσία της δεν είναι αναγκαία. Οι Wilkins και Norton (2018) όπως αναφέρει η Τριανταφύλλου (2019:24) *«αναγνωρίζουν τη συγκεκριμένη όψη του κλάσματος σε περιπτώσεις που, δεδομένης μιας ποσότητας που έχει οριστεί ως 1/β ενός όλου, το α/β προκύπτει με α επαναλήψεις του 1/β»*

Η συστηματική έκθεση των μαθητών σε όλες τις διαφορετικές όψεις του κλάσματος βοηθούν στην εξάλειψη των παρανοήσεων (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Επομένως, είναι σημαντικό, οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με όλες τις όψεις του κλάσματος για να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος και να αποφεύγονται οι παρανοήσεις.

3.3 Αναπαραστάσεις των κλασμάτων

Σύμφωνα με τον Kaput (1987), η αναπαράσταση αποτελεί ένα νοητικό σύμβολο ή εικόνα. Το νοητικό σύμβολο ή εικόνα περιλαμβάνει ένα σύνολο νοητικών δραστηριοτήτων και πρακτικών. Οι αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τη μάθηση των Μαθηματικών επισημαίνουν οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς οι αναπαραστάσεις αποτελούν το μέσο για την κατανόηση και τον χειρισμό των μαθηματικών εννοιών (Van de Walle, 2007; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Οι Lesh, Behr & Post (1987) διακρίνουν πέντε διαφορετικά είδη εξωτερικών αναπαραστάσεων:

- Κείμενα: αναφέρεται σε γεγονότα της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση άλλων προβλημάτων
- Χειραπτικά αντικείμενα – μοντέλα, για παράδειγμα η αριθμητική γραμμή και οι ράβδοι κλασμάτων, όπου τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος – μοντέλου δεν έχουν

νόημα αυτά καθαυτά, ωστόσο οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και τον συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής

- Εικόνες ή διαγράμματα: εικονικά μοντέλα τα οποία μπορούν να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες
- Γλώσσες, συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών: σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία, όπως τη μαθηματική λογική
- Γραπτά σύμβολα: περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις της καθημερινής γλώσσας

Κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων χρησιμοποιούνται συνήθως συγκεκριμένα μοντέλα (Van de Walle, 2007). Τα πιο συνηθισμένα μοντέλα είναι: μοντέλα εμβαδού, μοντέλα μήκους ή μέτρησης και μοντέλα συνόλου

- Μοντέλα εμβαδού: η επιφάνεια αποτελεί τη μονάδα αναφοράς και υποδιαιρείται σε μικρότερα μέρη. Τα μοντέλα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ασκήσεις μοιρασιάς. Μοντέλα εμβαδού είναι οι κυκλικοί δίσκοι, οι ορθογώνιες επιφάνειες, οι γεωπίνακες, οι διάστικτοι και οι ορθογώνιοι καμβάδες, τα σχήματα διαφορετικού μεγέθους (pattern blocks), το διπλωμένο χαρτί, κλπ. Τα μοντέλα αυτά δίνουν έμφαση στην ποσότητα που απομένει για να σχηματιστεί ολόκληρη η μονάδα, έτσι αναπτύσσεται η όψη του κλάσματος «μέρος - όλου»
- Μοντέλα συνόλων: η μονάδα αναφοράς είναι το σύνολο των αντικειμένων, ενώ τα υποσύνολα του συνόλου συνιστούν τα κλασματικά μέρη. Οι δυσκολίες στην κατανόηση αυτών των μοντέλων είναι η ιδέα της μονάδας σε ένα σύνολο από αντικείμενα ως μεμονωμένη οντότητα. Τα μοντέλα αυτά ενισχύουν τις συνδέσεις με πολλές καθημερινές εφαρμογές των κλασμάτων
- Μοντέλα μήκους ή μέτρησης: συγκρίνουμε μήκη, αντί επιφάνειες. Συγκρίνουμε χειραπτικά υλικά ως προς το μήκος τους. Στα μοντέλα αυτά ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα, η αριθμογραμμή, οι διπλωμένες λωρίδες χαρτιού και οι λωρίδες κλασμάτων, που αποτελούν μια εκδοχή των ράβδων του Cuisenaire. Τα μοντέλα μήκους ενώ είναι πολύ σημαντικά για την ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας των κλασμάτων, δεν χρησιμοποιούνται συχνά από τους εκπαιδευτικούς. Έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση της αριθμογραμμής βοηθάει τους μαθητές να αντιληφθούν το κλάσμα ως αριθμό (Van de Walle et al., 2013)

Τα μοντέλα αναπαράστασης ενισχύουν την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας και αποτρέπουν ενδεχόμενα λάθη και παρανοήσεις που πιθανό να κάνουν οι μαθητές. Ωστόσο, αρκετοί εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν συχνά όλα τα μοντέλα για την ανάπτυξη των κλασμάτων αλλά περιορίζονται στη χρήση του μοντέλου επιφάνειας (Charalambous & Pitta Pantazi, 2007).

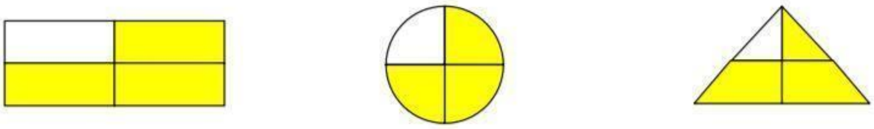
3.4 Λάθη και παρανοήσεις των μαθητών στα κλάσματα

Στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης, αρκετοί ερευνητές εστίασαν στα λάθη και στις παρανοήσεις των μαθητών στα κλάσματα (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Gabriel et al, 2013; Aksu, 1997). Οι δυσκολίες εντοπίζονται στην εννοιολογική φύση των κλασμάτων, στις αναπαραστάσεις τους αλλά και στις πράξεις με τα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα:

Ως προς την εννοιολογική φύση των κλασμάτων: Αρκετές έρευνες πραγματοποιήθηκαν για να διερευνήσουν τις δυσκολίες των μαθητών που αντιμετωπίζουν στην πυκνότητα των κλασμάτων και γενικότερα στους ρητούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). Αυτές οι δυσκολίες οφείλονται στην εσφαλμένη απόδοση ιδιοτήτων, οι οποίες σχετίζονται με τη διακριτή φύση των φυσικών αριθμών αλλά και στην πολλαπλή συμβολική αναπαράσταση των ρητών αριθμών. Αρκετοί μαθητές πιστεύουν ότι ανάμεσα στο 1/2 και στο 1/3 δεν υπάρχει κανένας αριθμός, γιατί θεωρούν ότι ανάμεσα στο 2 και στο 3 δεν υπάρχει κανένας αριθμός. Σύμφωνα με τους Vamvakoussi & Vosniadou (2007), η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς αποτελεί έναν ακόμα ανασταλτικό παράγοντα στην κατανόηση των κλασμάτων. Σε έρευνά τους έδειξαν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις που έχουν για τους φυσικούς αριθμούς για να ερμηνεύσουν τους ρητούς αριθμούς, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθη στη διάταξη, στις πράξεις και στον συμβολισμό των ρητών αριθμών.

Άλλη μια παρανόηση των μαθητών εντοπίζεται στη σύγκριση κλασμάτων. Οι μαθητές θεωρούν τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων ανεξάρτητους αριθμούς, αντί να εξετάζουν τη σχέση μεταξύ τους (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Η συγκεκριμένη θεώρηση έχεις ως αποτέλεσμα οι μαθητές να πιστεύουν ότι το κλάσμα 1/3 είναι μικρότερο από το κλάσμα 1/4, επειδή το 3 είναι μικρότερο του 4. Αντίστοιχα, ενδεχομένως να νομίζουν ότι το κλάσμα 7/9 είναι μεγαλύτερο από το κλάσμα 3/4, επειδή οι αριθμοί 7 και 9 είναι μεγαλύτεροι από τους αριθμούς 3 και 4.

Ως προς τις αναπαραστάσεις: Ένας από τους λόγους που γίνονται πολλά λάθη στα κλάσματα είναι η χρήση συγκεκριμένων αναπαραστάσεων. Οι Newstead και Murray (1998) ανέφεραν ότι στην εισαγωγή των κλασμάτων χρησιμοποιούνται συνήθως διαμερίσεις γεωμετρικών σχημάτων. Στην ερώτησή τους «Δείξε το κλάσμα 3/4 με τουλάχιστον 3 διαφορετικούς τρόπους», το 12% των μαθητών της τετάρτης τάξης και το 10% των μαθητών της έκτης τάξης απάντησαν με τα παρακάτω σχήματα:



Εικόνα 2:Απαντήσεις μαθητών στις διαμερίσεις γεωμετρικών σχημάτων, Newstead & Murray, 1998:5

Όπως φαίνεται από την Εικόνα 2, οι μαθητές χρησιμοποιούν λανθασμένα τη διαμέριση του τριγώνου. Οι μαθητές έχουν την τάση να γενικεύουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν όλα τα γεωμετρικά σχήματα για το διαμερισμό.

Δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές και στη χρήση της αριθμογραμμής. Οι Keijzer & Terwel (2003, αναφορά στους Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) κατέδειξαν ότι οι μαθητές για να τοποθετήσουν ένα κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή μετρούν τις γραμμές, που χρησιμοποιούνται για να οριοθετήσουν αυτά τα διαστήματα και όχι τα διαστήματα. Οι μαθητές δυσκολεύονται στην αναγνώριση της μονάδας αναφοράς στην αριθμητική γραμμή (Behr et al., 1983).

Ως προς τις διαδικασίες: Μια άλλη περιοχή στην οποία δυσκολεύονται οι μαθητές είναι οι πράξεις με κλασματικούς αριθμούς. Σε έρευνα με μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ο Ndalichako (2013) βρήκε ότι ένας σημαντικός αριθμός μαθητών δεν μπορεί να εκτελέσει σωστά πράξεις με κλάσματα. Οι μαθητές εφαρμόζουν στα κλάσματα τους κανόνες της πρόσθεσης/αφαίρεσης φυσικών αριθμών. Σε ερωτήσεις που αφορούσαν την πρόσθεση κλασμάτων, οι μαθητές τείνουν να αντιμετωπίζουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές ως ξεχωριστές οντότητες. Για παράδειγμα, 1/2+2/3=3/5. Οι μαθητές παρατηρείται να προσθέτουν ή να αφαιρούν τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων. Δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές και στην εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων. Σύμφωνα με την έρευνα των Siegler et al. (2010), οι μαθητές όταν εκτελούν τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού στα κλάσματα, αφήνουν το κοινό παρονομαστή αμετάβλητο. Για παράδειγμα, 3/4*2/4=6/4. Η πιθανή αιτία είναι ότι οι μαθητές εκτίθενται περισσότερο σε προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων και έχουν την τάση να γενικεύουν. Στην εκτέλεση της διαίρεσης, ένα από τα συνηθισμένα λάθη είναι ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι το να διαιρέσεις έναν αριθμό με ένα κλάσμα όπως το 1/2 είναι το ίδιο με το να τον διαιρέσεις με το 2, οπότε γράφουν 6:1/2=3. Παρανοήσεις παρατηρούνται και στην εκτέλεση των πράξεων με μεικτούς αριθμούς (Siegler et al. 2010). Στην περίπτωση πρόσθεσης ή αφαίρεσης μεικτών αριθμών, σύνηθες λάθος των μαθητών είναι να ασχολούνται μόνο με το ακέραιο μέρος, για παράδειγμα 3 1/2 + 3 2/7=6. Τέλος, στη μελέτη του Aksu (1997) σε ένα δείγμα 155 μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης μελετήθηκαν διαφορές στην απόδοση των μαθητών όταν τα κλάσματα παρουσιάστηκαν σε μορφή: α) κατανόησης της έννοιας του κλάσματος, β) πράξεων με κλάσματα και γ) επίλυση λεκτικών προβλημάτων που περιλαμβάνουν κλάσματα. Η απόδοση των μαθητών ήταν υψηλότερη στην περίπτωση πράξεων με κλάσματα σε σύγκριση με την επίλυση προβλημάτων. Στην περίπτωση λεκτικών προβλημάτων, υπήρξε μεγαλύτερη ευκολία στην πρόσθεση κλασμάτων και μεγαλύτερη δυσκολία στον πολλαπλασιασμό.

3.5 Η διδασκαλία και εκμάθηση των κλασμάτων

Η διδασκαλία και η μάθηση των κλασμάτων θεωρούνται από τις πιο δύσκολες και περίπλοκες έννοιες στα μαθηματικά (Lamon, 2007). Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι λόγοι που συμβάλλουν στη δυσκολία εκμάθησης των κλασμάτων είναι οι διαφορετικές όψεις του κλάσματος, ο συμβολισμός τους και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις τους (Moss, 2005). Μεγάλο μερίδιο ευθύνης αποδίδεται και στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Οι Charalambous & Pitta Pantazi (2007) αναφέρουν ότι και ο τρόπος διδασκαλίας είναι ένας ακόμα λόγος που δυσχεραίνει την κατανόηση των κλασμάτων. Στην παραδοσιακή διδασκαλία δίνεται έμφαση στην όψη του κλάσματος ως «μέρος-όλου» και χρησιμοποιείται η συμβολική αναπαράσταση του κλάσματος μέσω του μοντέλου επιφάνειας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως δύο ανεξάρτητους πληθικούς αριθμούς και να αδυνατούν να αντιληφθούν το κλάσμα ως μια ενιαία οντότητα (Moss, 2005).

Επίσης, κατά τη διδασκαλία δίνεται έμφαση στην εκτέλεση των αλγορίθμων των κλασμάτων, χωρίς να δίνονται εξηγήσεις, και οι μαθητές απλά απομνημονεύουν κανόνες (Charalambous & Pitta Pantazi, 2007). Οι εκπαιδευτικοί περιορίζονται στη διαδικαστική γνώση και δίνουν λιγότερη έμφαση στην εννοιολογική γνώση στη διδασκαλία των κλασμάτων (Charalambous & Pitta Pantazi, 2007). Επίσης, οι εκπαιδευτικοί δε λαμβάνουν υπόψη τους τις αυθόρμητες σκέψεις των μαθητών για να κατανοήσουν τα κλάσματα. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν, μέσω της διδασκαλίας, οι μαθητές να υιοθετήσουν μια προσέγγισηπου είναι βασισμένη στην εφαρμογή των κανόνων (Moss & Case, 1999).

Τέλος, τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών αποτελούν τροχοπέδη στην κατανόηση των κλασμάτων (Alajmi, 2012). Συνήθως περιορίζονται στη χρήση στερεοτυπικών αναπαραστάσεων για τα κλάσματα. Οι δραστηριότητες απαιτούν κυρίως την εκτέλεση των αλγορίθμων και παρουσιάζουν έλλειψη σε δραστηριότητες που να αναφέρονται στο πολλαπλασιαστικό πεδίο. Τα ενδεικτικά προβλήματα των εγχειριδίων περιορίζονται κατά βάση στο προσθετικό πεδίο (Τριανταφύλλου, 2019).

4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Τα κλάσματα αποτελούν έναν γνωστικό χώρο δύσκολο όχι μόνο για τους μαθητές αλλά και για τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς (Ball, 1990). Έρευνες επισημαίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται στη διδασκαλία των κλασμάτων (Ball, 1990a). Στην παρούσα έρευνα θα επικεντρωθούμε στις δυσκολίες - παρανοήσεις των εκπαιδευτικών για τα κλάσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης με θέμα τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των κλασμάτων.

4.2 Δυσκολίες των εκπαιδευτικών στα κλάσματα

Πληθώρα ερευνών καταδεικνύουν τη δυσκολία των εκπαιδευτικών να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος (Olanoff, 2014; Shin & Bryant, 2015; Şahin, Gökkurt, Soylu, 2016). Οι Olanoff, Lo και Tobias (2014) διεξήγαγαν μία συστηματική ανασκόπηση προκειμένου να συνοψίσουν τα εμπειρικά ευρήματα των μελλοντικών εκπαιδευτικών για τη γνώση μαθηματικού περιεχομένου στον τομέα των κλασμάτων. Βρέθηκε ότι η γνώση κλασμάτων είναι σχετικά ισχυρή όταν πρόκειται για διαδικασίες. Ωστόσο, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί δεν διαθέτουν ευελιξία για να απομακρυνθούν από τις διαδικασίες και να κάνουν χρήση της "αίσθησης αριθμού κλασμάτων". Επιπρόσθετα, οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις έννοιες πίσω από τις διαδικασίες ή γιατί συγκεκριμένες διαδικασίες λειτουργούν. Προς αυτή την κατεύθυνση, οδηγούνται κι άλλες έρευνες (Yang et al., 2009; Livy, S., 2011). Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικών στη σύγκριση κλασμάτων βασίζονται σε διαδικασίες, όπως η εύρεση κοινών παρονομαστών, ακόμη και όταν άλλες στρατηγικές μπορεί να είναι πιο αποτελεσματικές (Yang et al., 2009). Ορισμένοι εκπαιδευτικοί βασίζονται στη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, για τη σύγκριση των κλασμάτων (Livy, S.,2011).

Μια άλλη προβληματική περιοχή είναι η επίλυση προβλημάτων με κλάσματα ή η δημιουργία προβλημάτων με κλάσματα. Η έρευνα της Tapp (2016) εστίασε στην επίλυση προβλημάτων στο πεδίο των κλασμάτων. Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων κατέδειξαν μια περιορισμένη ικανότητα να αποσαφηνίσουν τα λεκτικά προβλήματα (word problem) σε μια έκφραση και μετά να τα επιλύσουν. Επίσης, διαπιστώθηκε περιορισμένη ικανότητα των εκπαιδευτικών να αποδίδουν νόημα σε αριθμητικές παραστάσεις που εμπεριέχουν κλάσματα θέτοντας κατάλληλα πλαίσια. Ο Kilic (2015) έδωσε έμφαση στη δημιουργία προβλημάτων με κλάσματα. Ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να δημιουργήσουν όσο το δυνατόν περισσότερα προβλήματα με βάση τις ακόλουθες συνθήκες: α) χρησιμοποιώντας και τα κλάσματα 1/2 και 3/4 και β) χρησιμοποιώντας είτε το κλάσμα 1/2 είτε το κλάσμα 3/4. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι υπήρξε ουσιαστική ποικιλομορφία στα προβλήματα. Οι συμμετέχοντες προτίμησαν να θέσουν ιστορία και συμβολικές εξισώσεις στην πρώτη περίπτωση (α) και ιστοριών στη δεύτερη (β). Κατά τη δημιουργία των προβλημάτων, οι συμμετέχοντες αντιμετώπισαν ορισμένα ζητήματα όπως η μη συνειδητοποίηση ότι το άθροισμα 1/2 + 3/4 είναι μεγαλύτερο από 1, ότι λείπουν δεδομένα, ότι επιλέγουν λάθος αριθμό, ότι χρησιμοποιούν διαφορετικά κλάσματα και ότι θέτουν πρόβλημα χωρίς κλάσματα. Βρέθηκε πως οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί έχουν δυσκολίες σχετικά με τη δημιουργία προβλημάτων στα κλάσματα. Η Ball (1990) αναφέρει ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να δημιουργήσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων με δεδομένα κλάσματα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να μη δημιουργούν προβλήματα.

Δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των κλασμάτων. Οι Siegler και Lortie-Forgues (2015) εξέτασαν την υπόθεση ότι ορισμένοι εκπαιδευτικοί ενδέχεται να μην κατανοούν εννοιολογικά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων. Θεώρησαν ότι, η κατανόηση μιας αριθμητικής πράξης συνεπάγεται, τουλάχιστον, τη γνώση του αποτελέσματος που παράγει αυτή η πράξη. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να προβλέψουν, χωρίς να υπολογίσουν, εάν η απάντηση σε μια ανισότητα θα ήταν μεγαλύτερη ή μικρότερη από το μεγαλύτερο τμήμα του προβλήματος (π.χ. "True or false: 31/56 * 17/42 > 31/56"). Η αδύναμη κατανόηση του πολλαπλασιασμού και του διαχωρισμού των κλασμάτων κάτω από τη μονάδα διαπιστώθηκε και σε εκπαιδευτικούς που εκτέλεσαν σωστά τις αριθμητικές διαδικασίες κλάσματος και είχαν πολύ ακριβή γνώση των μεγεθών των μεμονωμένων κλασμάτων. Συνολικά, οι εκπαιδευτικοί έδειξαν άριστη κατανόηση των μεγεθών των μεμονωμένων κλασμάτων μεταξύ 0 και 1, αλλά ελάχιστη κατανόηση των μεγεθών που παράγονται από τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των κλασμάτων στο ίδιο εύρος. Προέβλεπαν με συνέπεια ότι ο πολλαπλασιασμός δύο κλασμάτων κάτω από τη μονάδα θα απέδιδε μια απάντηση μεγαλύτερη από κάθε παράγοντα και ότι η διαίρεση με κλάσμα μικρότερο της μονάδας θα παρείχε μια απάντηση μικρότερη από τον διαιρεμένο αριθμό. Η γνώση περιεχομένου του αντικειμένου της διαίρεσης κλασμάτων διερευνήθηκε από τους Lo και Luo (2012). Τα αποτελέσματα κατέδειξαν ότι αρκετοί μελλοντικοί εκπαιδευτικοί έχουν αναπτύξει πολλαπλές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης κλασμάτων ωστόσο δυσκολεύονται να δημιουργήσουν προβλήματα.

4.3 Δυσκολίες των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των κλασμάτων

Αρκετές έρευνεςαναδεικνύουν αφενός την τάση των εκπαιδευτικών να επικεντρώνονται, κυρίως, στην στρατηγική της απομνημόνευσης των κανόνων, όταν θέλουν να βοηθήσουν τους μαθητές να διορθώσουν τα λάθη, αφετέρου τις σχετικές δυσκολίες τους στον εντοπισμό των αιτιών που οδηγούν τους μαθητές σε παρανοήσεις και λάθη (Tirosh, 2000; Turnuklu & Yelsidere, 2007; Şahin, Gökkurt & Soylu, 2016)

Οι Şahin, Gökkurt και Soylu (2016) εξέτασαν την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των υποψηφίων εκπαιδευτικών σχετικά με τα κλάσματα όσον αφορά τα λάθη των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκαν οι παιδαγωγικές γνώσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών αναφορικά με την κατανόηση της γνώσης των μαθητών και της γνώσης των εκπαιδευτικών στρατηγικών που αποτελούν τις επιμέρους συνιστώσες της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών σχετικά με τα κλάσματα δεν ήταν σε επαρκές επίπεδο για τον προσδιορισμό και τη διόρθωση των μαθητικών λαθών. Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί κατάφεραν να αναγνωρίσουν εν μέρει τα λάθη των μαθητών σε πολλά ερωτήματα, αν και όχι σε ένα επιθυμητό επίπεδο. Οι στρατηγικές των μελλοντικών εκπαιδευτικών στην ερώτηση «Πώς διορθώνετε τα λάθη των μαθητών;» δεν ήταν σε επαρκές επίπεδο. Οι εκπαιδευτικοί προτιμούν τη μέθοδο της απομνημόνευσης των κανόνων-διαδικασιών για τη διόρθωση των μαθητικών λαθών. Επομένως, η γνώση των διδακτικών στρατηγικών των μελλοντικών εκπαιδευτικών συνεπάγεται την απομνημόνευση των κανόνων από τους μαθητές. Παρομοίως και οι Turnuklu & Yelsidere (2007) έδειξαν ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι δυσκολεύονται να εντοπίσουν τις παρανοήσεις των μαθητών και να κατανοήσουν τα αίτια αυτών, ενώ οι διδακτικές προσεγγίσεις ήταν περισσότερο διαδικαστικές και λιγότερο εννοιολογικές.

Οι Depaepe et al., (2015) διεξήγαγαν μια συγκριτική έρευνα μεταξύ της γνώσης περιεχομένου και παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και υποψήφιων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί εμφάνισαν κενά. Πολλοί εκπαιδευτικοί διέθεταν περιορισμένες γνώσεις για τις παρανοήσεις των μαθητών και για τις στρατηγικές διδασκαλίας. Η πιθανότητα να λύσουν σωστά ένα έργο γνώσης περιεχομένου ήταν μεγαλύτερη από το να λύσουν ένα έργο παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου. Αυτό σημαίνει ότι η γνώση περιεχομένου είναι αναγκαία αλλά όχι επαρκής συνθήκη για την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

Η Tirosh (2000) μελέτησε τη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου Ισραηλινών μελλοντικών εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στις διαιρέσεις κλασμάτων. Εκτός από τη γνώση του αντικειμένου, δηλαδή τη διαίρεση κλασμάτων, δόθηκε έμφαση στην παιδαγωγική γνώση και σε θέματα όπως η γνώση των εκπαιδευτικών για τη φύση και τις πιθανές αιτίες των συχνών παρανοήσεων των παιδιών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι ενώ γνώριζαν να διαιρούν κλάσματα, δεν μπορούσαν να εξηγήσουν τη διαδικασία. Επίσης παρατήρησε ότι οι περισσότεροι δάσκαλοι είχαν δυσκολίες στο να προβλέπουν λάθη μαθητών. Τα λάθη που μπορούσαν να προβλέψουν ήταν λάθη στους αλγόριθμους.

Τέλος, οι Shin και Bryant (2015) διεξήγαγαν μία θεωρητική ανασκόπηση 17 άρθρων κατά την περίοδο 1975-2014 που εστίαζε σε παρεμβάσεις που χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου οι μαθητές να κατανοήσουν τα κλάσματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι παρεμβάσεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι οπτικές αναπαραστάσεις, η συστηματική διδασκαλία, παραδείγματα, οι ευρετικές (heuristic) στρατηγικές και η χρήση πραγματικών προβλημάτων οδήγησαν σε καλύτερες επιδόσεις. Οι οπτικές αναπαραστάσεις ήταν η πιο κοινή μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε. Δέκα από τις 17 μελέτες που χρησιμοποίησαν οπτικές αναπαραστάσεις σε συνδυασμό με συστηματική διδασκαλία έδειξαν εξαιρετικά θετικά αποτελέσματα σε κλάσματα και δεξιότητες. Πέντε μελέτες υλοποίησαν ευρετικές στρατηγικές προωθώντας τη μαθηματική φρασεολογία με μια στρατηγική «σκέφτοντας δυνατά» (think aloud protocol) ή σε συνδυασμό με εικονικούς χειρισμούς (virtual manipulatives), οδηγώντας σε βελτιωμένες δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και υπολογισμών κλάσματος. Τέλος, η χρήση προβλημάτων πραγματικού κόσμου, που συνδέουν δεξιότητες κλάσματος με προβλήματα περιβάλλοντος μέσω τεχνητής νοημοσύνης με βάση το βίντεο, είχε θετικά αποτελέσματα στην κατανόηση των κλασμάτων, αλλά όχι στον υπολογισμό κλασμάτων και στην επίλυση προβλημάτων.

5 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αρχικά το ερευνητικό πρόβλημα και τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε στην παρούσα έρευνα. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο ερευνητικό εργαλείο καθώς και στους συμμετέχοντες της έρευνας. Έπειτα ακολουθεί η εγκυρότητα και η αξιοπιστία της ερευνητικής διαδικασίας, η διαδικασία διενέργειας της έρευνας και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τον τρόπο ανάλυσης των δεδομένων.

5.2 Ερευνητικό πρόβλημα

Η εργασία ερευνά στοιχεία της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τα κλάσματα. Τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε ήταν:

1. Είναι ικανοί οι εκπαιδευτικοί να αξιολογούν σωστά τις απαντήσεις των μαθητών σε έργα σχετικά με τα κλάσματα;
2. Μπορούν οι εκπαιδευτικοί να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα με βάση δεδομένες πράξεις κλασμάτων;
3. Μπορούν οι εκπαιδευτικοί να ερμηνεύσουν τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών;
4. Με ποιους τρόπους και ποιες στρατηγικές αποπειρώνται οι εκπαιδευτικοί να δώσουν ανατροφοδότηση σε μαθητές σχετικά με τις απαντήσεις τους σε έργα κλασμάτων;

Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε, θα μπορούσαμε να αναμένουμε ότι οι εκπαιδευτικοί θα έχουν επαρκή γνώση των (σχολικών) ορισμών, των κανόνων και των διαδικασιών που αφορούν τα κλάσματα (κοινή γνώση περιεχομένου), που θα τους επιτρέπει την αξιολόγηση αντίστοιχων έργων. Θα αναμενόταν, επίσης, οι εκπαιδευτικοί να αντιμετωπίσουν δυσκολίες στην αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών σε έργα που αφορούν εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα και ξεφεύγουν από τις συνήθεις ασκήσεις των σχολικών εγχειριδίων για τα κλάσματα. Ακολουθώντας τους Ball et al. (2008), θεωρούμε ότι η αντίστοιχη γνώση είναι συνιστώσα της κοινής γνώσης περιεχομένου, εφόσον χρησιμοποιείται και σε άλλα πλαίσια, πέραν αυτού της διδασκαλίας - ο χώρος έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι ένα προφανές παράδειγμα. Θα αναμέναμε, επίσης, ότι η διατύπωση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που λύνονται με δεδομένες πράξεις (εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου) θα δυσκολέψει τους εκπαιδευτικούς, όπως έχει φανεί σε σχετικές έρευνες (Tapp, 2016). Τέλος, θα μπορούσαμε να αναμένουμε ότι οι ορισμοί, οι κανόνες και οι διαδικασίες που αφορούν τα κλάσματα θα χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς ως κεντρικό εργαλείο για την ανατροφοδότηση των (υποθετικών) μαθητών (Yang et al., 2009). Περισσότερα στοιχεία για τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία αναμένουμε να προκύψουν από τη διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων 2 (γνώση του περιεχομένου και των μαθητών) και 3 (γνώση περιεχομένου για τη διδασκαλία, εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου).

5.3 Ο τύπος προσέγγισης και το ερευνητικό εργαλείο

Στην παρούσα έρευνα προσεγγίσαμε τα ερευνητικά ερωτήματα με ποιοτικό ερευνητικόσχεδιασμό. Θεωρήσαμε ότι αυτή ήταν η καταλληλότερη προσέγγιση διότι μας δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσουμε το θέμα σε βάθος.

Η μέθοδος συλλογής δεδομένων που επιλέχθηκε ήταν η ατομική συνέντευξη, που είναι ιδιαίτερα δημοφιλής στην ποιοτική έρευνα. Η συγκεκριμένη τεχνική συγκέντρωσης δεδομένων χρησιμοποιεί τη λεκτική επικοινωνία για την αναζήτηση πληροφοριών. Η ερευνητική συνέντευξη ορίζεται ως «*η συζήτηση δύο ατόμων, που αρχίζει από τον συνεντευκτή, με ειδικό σκοπό την απόκτηση σχετικών με την έρευνα πληροφοριών, και επικεντρώνεται από αυτόν σε περιεχόμενο καθορισμένο από τους στόχους της έρευνας με συστηματική περιγραφή, πρόβλεψη ή ερμηνεία. Η άμεση αλληλεπίδραση της ερευνήτριας με τους ερωτώμενους κατά τη συνέντευξη επιτρέπει μεγαλύτερο βάθος απ' ότι στην περίπτωση άλλων τεχνικών συλλογής στοιχείων*» (Cannell, Kahn, 1968, όπ. αναφ. στους Cohen & Manion, 1994:374). Οι συνεντεύξεις ποικίλουν ως προς το περιεχόμενο και τη δομή τους.

Η παρούσα έρευνα επίλεξε την ημιδομημένη, βασισμένη σε έργα (task-based) συνέντευξη, για να διερευνήσει τη μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών. Προτιμήθηκε αυτό το είδος συνέντευξης, έναντι μιας συνέντευξης βασισμένης σε γενικές ερωτήσεις μεγάλου εύρους (π.χ. Creswell, 2011), καθώς οι ερωτήσεις αυτού του είδους τείνουν να αποσπούν από τους εκπαιδευτικούς πολύ γενικές απαντήσεις, ή απαντήσεις οι οποίες δεν αντιστοιχούν στις πραγματικές διδακτικές πρακτικές τους. Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν βασίζονται σε ρεαλιστικά διδακτικά σενάρια, τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν ερευνητικούς στόχους, όπως για παράδειγμα τη διερεύνηση της γνώσης του περιεχομένου των εκπαιδευτικών και τη διερεύνηση της χρήσης συγκεκριμένων στρατηγικών μέσω της ανατροφοδότησης που παρέχουν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές τους (Biza, Nardi, & Zachariades, 2007). Τα έργα αυτά έχουν την εξής δομή: σε μια υποτιθέμενη τάξη ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν σε ένα μαθηματικό ερώτημα, το οποίο γνωρίζουμε από τη βιβλιογραφία ή εμπειρικά ότι δυσκολεύει τους μαθητές. Κάποιοι μαθητές δίνουν λανθασμένες απαντήσεις ή αμφίσημες απαντήσεις. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αναγνωρίσουν τα λάθη των μαθητών, να τα ερμηνεύσουν και να δώσουν μια διδακτική ανατροφοδότηση, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν το λάθος τους.

5.3.1 Το πρωτόκολλο συνέντευξης

Στην κατασκευή του πρωτοκόλλου συνέντευξης, χρησιμοποιήσαμε έργα τα οποία είναι τεκμηριωμένα ότι δυσκολεύουν τους μαθητές. Τα έργα που δόθηκαν στους ερωτώμενους ήταν δέκα (10). Τα οχτώ (8) πρώτα έργα αναφέρονται σε δυσκολίες των μαθητών που αφορούν την εννοιολογική φύση του κλάσματος, τον συμβολισμό και τις αναπαραστάσεις του, το ένατο έργο αναφέρεται σε δυσκολίες πάνω στις πράξεις των κλασμάτων ενώ το τελευταίο έργο ζητάει από τον εκπαιδευτικό να δημιουργήσει προβλήματα κλασμάτων με βάση δεδομένες πράξεις (πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων). Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν τις απαντήσεις των μαθητών. Ανάλογα με την αξιολόγηση που έκανε ο ερωτώμενος σε κάθε έργο ξεχωριστά, ακολουθούσε μία σειρά ερωτήσεων. Πιο συγκεκριμένα:

Αν ο εκπαιδευτικός αξιολογούσε σωστά την απάντηση, ακολουθούσαν οι εξής ερωτήσεις: α) πώς πιστεύεις ότι σκέφτηκε το παιδί; β) τι ανατροφοδότηση θα του έδινες;

Αν ο εκπαιδευτικός αξιολογούσε λανθασμένα την απάντηση, ακολουθούσαν οι εξής ερωτήσεις: α) έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά εδώ; Αν ο εκπαιδευτικός απαντούσε ναι, τότε ακολουθούσε η ερώτηση «πώς το αντιμετωπίζεις;». Αν ο εκπαιδευτικός απαντούσε όχι, τότε ακολουθούσε η ερώτηση «γιατί πιστεύεις ότι δεν δυσκολεύονται;».

Στόχος των εννιά πρώτων έργων ήταν:

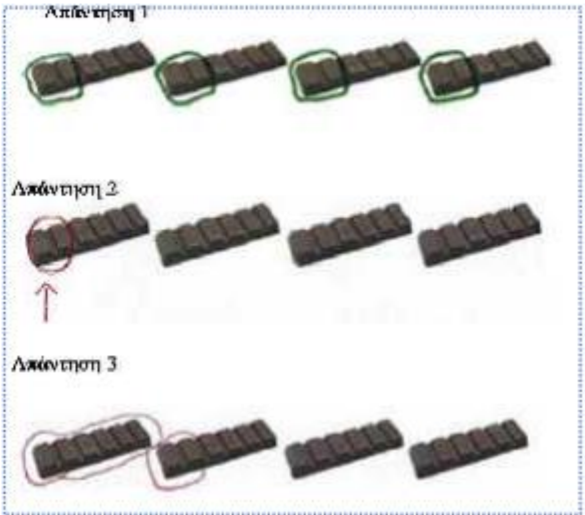
- Να ελεγχθεί η ικανότητα των εκπαιδευτικών να αξιολογούν σωστά τις απαντήσεις των παιδιών που, σύμφωνα με τους Ball et al. (2008), αντιστοιχεί σε μια συνιστώσα της κοινής γνώσης περιεχομένου

- Να ελεγχθεί η ικανότητα των εκπαιδευτικών να ερμηνεύουν τις απαντήσεις των μαθητών που, σύμφωνα με τους Ball et al. (2008), αντιστοιχεί σε μια συνιστώσα της γνώσης του περιεχομένου και των μαθητών
- Να διερευνηθούν οι γνώσεις και οι στρατηγικές που επιστρατεύουν οι εκπαιδευτικοί ώστε να υποστηρίξουν τους μαθητές σε απαιτητικά έργα σχετικά με τα κλάσματα. Σύμφωνα με τους Ball et al. (2008), η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής αντιστοιχεί σε δυο συνιστώσες, της γνώσης του περιεχομένου και διδασκαλίας και της εξειδικευμένης γνώσης περιεχομένου

Στόχος του δέκατου έργου ήταν να ελεγχθεί η ικανότητα των εκπαιδευτικών να σχηματίζουν προβλήματα που να αντιστοιχούν σε μια πράξη κλασμάτων και, συγκεκριμένα, διαίρεση και πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Σύμφωνα με τους Ball et al. (2008), η εύρεση παραδειγμάτων για να γίνει κατανοητό ένα μαθηματικό ζήτημα είναι μια συνιστώσα της εξειδικευμένης γνώσης περιεχομένου.

Το σενάριο του κάθε έργου που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα έρευνα παρουσιάζεται πιο αναλυτικά παρακάτω.

Έργο 1: Σε μια σχολική τάξη Ε΄ Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές: «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:



Το έργο αυτό πάρθηκε από την έρευνα των Depaepe et al. (2015:87). Το κεντρικό ζήτημα στο έργο αυτό, αφορά την όψη «μέρος όλου» του κλάσματος σε μια περίπτωση, όπου η μονάδα αναφοράς παρουσιάζει τα εξής χαρακτηριστικά: Αφενός πρόκειται για ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων (σοκολάτες), αφετέρου κάθε αντικείμενο είναι μια συνεχής «διακριτοποιημένη» μονάδα, η οποία μπορεί να διαμεριστεί περαιτέρω. Επομένως, το 1/3 των σοκολατών μπορεί να βρεθεί α) διαμερίζοντας κάθε σοκολάτα σε τρία ίσα μέρη (Απάντηση 1), β) διαμερίζοντας τις 4 σοκολάτες σε 3 ίσα μέρη και ξανα-διαμερίζοντας το υπόλοιπο (1 σοκολάτα) σε τρία ίσα μέρη, γ) θεωρώντας ως μονάδα αναφοράς το σύνολο των κομματιών των σοκολατών και υπολογίζοντας το 1/3 των κομματιών. Η Απάντηση 3 μπορεί να έχει προκύψει με οποιονδήποτε από τους τρόπους (β) και (γ).

Έργο 2: Σε μια τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μια μαθήτρια προτείνει το 2,5/5.

Δύο κεντρικά θέματα υπάρχουν στο έργο αυτό. Το πρώτο αφορά την ύπαρξη ρητών αριθμών ανάμεσα σε δύο «ψευδοδιαδοχικούς» αριθμούς και το δεύτερο αφορά τη συμβολική αναπαράσταση των κλασμάτων. Η μαθήτρια βρίσκει έναν αριθμό που πράγματι βρίσκεται ανάμεσα στο 2/5 και στο 3/5. Ωστόσο, ο αριθμός αυτός δε βρίσκεται στη συνηθισμένη συμβολική μορφή του κλάσματος, καθώς ο ορισμός του κλάσματος στα σχολικά μαθηματικά απαιτεί ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι ακέραιοι αριθμοί. Πάραυτα, ο αριθμός που προτείνει η μαθήτρια μπορεί να μετατραπεί στην τυπική μορφή του κλάσματος.

Έργο 3: Σε μια σχολική τάξη Ε΄ Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές: «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο».

3/8, 1/4, 2/3

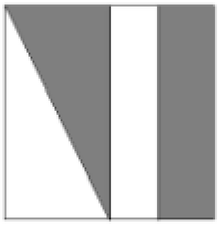
Δυο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:

Γιώργος: 1/4 < 2/3 < 3/8

Μαρία: 2/3 < 1/4 < 3/8

Το ζήτημα που θίγεται σε αυτό το έργο αφορά τη διάταξη των ετερώνυμων κλασμάτων. Οι μαθητές πραγματοποιούν τη διάταξη λανθασμένα. Βέβαια, μπορεί η διαδικασία να είναι λανθασμένη, όμως δεν είναι τυχαία. Μια ερμηνεία για τα λάθη αυτά είναι ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους όρους των κλασμάτων ως ανεξάρτητους αριθμούς και βασιζόμενοι στην προϋπάρχουσα γνώση των φυσικών αριθμών, τοποθετούν τα κλάσματα ως εξής: Ο Γιώργος διατάσσει τα κλάσματα με βάση τους αριθμητές ενώ η Μαρία διατάσσει τα κλάσματα με βάση τους παρονομαστές.

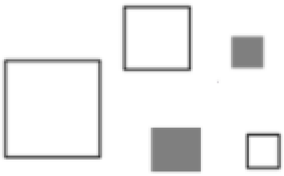
Έργο 4: Από τα παιδιά μιας τάξης Στ΄ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μια αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής:



Το έργο αυτό προέρχεται από Mathematics Navigator (2015:15). Το ζήτημα που θίγεται στο έργο αυτό αφορά την όψη «μέρος όλου» του κλάσματος στο μοντέλο του εμβαδού και, συγκεκριμένα, το μέγεθος που ενδιαφέρει όταν ζητείται το μέρος ενός σχήματος. Όπως φαίνεται και από τον όρο «μοντέλο του εμβαδού», το εν λόγω μέγεθος είναι η επιφάνεια. Επομένως, ο μερισμός της επιφάνειας σε ίσα μέρη απαιτεί τα μέρη να είναι ισεμβαδικά. Ωστόσο, πολλοί εκπαιδευτικοί και μαθητές θεωρούν ότι τα κομμάτια μιας ισομερισμένης επιφάνειας πρέπει, επιπλέον, να έχουν και το ίδιο σχήμα. Πιθανόν αυτό σχετίζεται με τον τρόπο που συνήθως παρουσιάζονται τα μοντέλα επιφάνειας. Για παράδειγμα, στο παραπάνω έργο αρκετοί μαθητές ισχυρίζονται ότι η σκιασμένη περιοχή δεν αντιπροσωπεύει τα 2/4 του τετραγώνου, γιατί τα κομμάτια «δεν είναι ίδια».

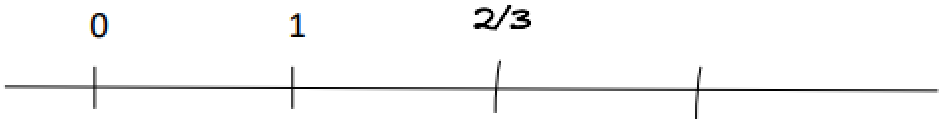
Έργο 5: Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη: « Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας».

Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια».



Το έργο αυτό προέρχεται από Mathematics Navigator (2015:17).Το ζήτημα που θίγεται στο έργο αυτό αφορά την όψη «μέρος - όλου» του κλάσματος στο μοντέλο του συνόλου και, συγκεκριμένα, το μέγεθος που ενδιαφέρει όταν ζητείται το μέρος ενός συνόλου. Το εν λόγω μέγεθος είναι το πλήθος. Επομένως, ο μερισμός ενός συνόλου σε ίσα μέρη απαιτεί τα μέρη να είναι ισοπληθή. Ωστόσο, οι μαθητές και, ενδεχομένως, οι εκπαιδευτικοί τείνουν να υπεργενικεύουν τις εμπειρίες τους από τα μοντέλα επιφάνειας και αναπτύσσουν την αντίληψη ότι όταν μιλάμε για σύνολα αντικειμένων, πρέπει όλα τα αντικείμενα να είναι ίδιου μεγέθους.

Έργο 6: Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης Ε΄ Δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μια δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση:



Το κεντρικό ζήτημα του έργου αυτού είναι η τοποθέτηση του κλάσματος στην αριθμογραμμή. Η δυσκολία του έργου επικεντρώνεται στην αναγνώριση της μονάδας αναφοράς (Behr er al., 1983). Στην αριθμογραμμή, η μονάδα αναφοράς είναι το 1. Το συγκεκριμένο λάθος που έκανε ο μαθητής θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως εξής: α) Ο μαθητής θεωρεί ότι η μονάδα αναφοράς είναι το διάστημα από το 0 έως το 4 και β) ο μαθητής αγνοεί τον παρονομαστή και τοποθετεί το κλάσμα με βάση τη διάταξη των φυσικών.

Έργο 7: Σε μια τάξη παιδιών ΣΤ΄ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4.

Ένας μαθητής λέει: «Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4».

Αυτό το έργο έχει την εξής ιδιαιτερότητα: Η απάντηση είναι σωστή, αλλά η μέθοδος με την οποία κατέληξε ο μαθητής στην απάντηση είναι λανθασμένη και βασίζεται στην προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς.

Έργο 8: Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν. Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34»

Στο έργο αυτό τόσο η απάντηση, όσο και η μέθοδος με την οποία κατέληξε στην απάντηση η μαθήτρια είναι σωστές. Ωστόσο, τα συγκεκριμένα κλάσματα μπορούν να συγκριθούν και χωρίς την εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου, αρκεί να τύχουν προσοχής οι αξίες τους (το ένα είναι μεγαλύτερο της μονάδας, ενώ το άλλο είναι μικρότερο της μονάδας).

Έργο 9: Σε μια τάξη παιδιών Ε΄ Δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις.

Μια μαθήτρια γράφει:

*α) 3/4 + 4/5 = 7/9 β) 3/4 : 3/2=4/3 * 2/3= 8/3*

Και στα δύο ερωτήματα του έργου αυτού, ένας αλγόριθμος εφαρμόζεται λανθασμένα. Στην περίπτωση της πρόσθεσης, το συγκεκριμένο λάθος μπορεί να αποδοθεί στην επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς και στην τάση των μαθητών να αντιμετωπίζουν τους όρους του κλάσματος ως δύο ασύνδετους μεταξύ τους φυσικούς αριθμούς. Στην περίπτωση της διαίρεσης, το συγκεκριμένο λάθος αποδίδεται στην επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης για την πρόσθεση των κλασμάτων.

Σε όλα τα παραπάνω έργα ενδιαφέρον παρουσιάζει η στρατηγική που θα ακολουθήσουν οι ερωτώμενοι στην ανατροφοδότηση που θα δώσουν στους μαθητές.

Έργο 10: Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη:

α) 3/5 x 1/2 *β) 5/6 : 1/2*

Το κεντρικό ζήτημα του έργου αυτού είναι η δημιουργία προβλημάτων - καταστάσεων που να μπορούν να μοντελοποιηθούν με πολλαπλασιασμό κλασμάτων και με διαίρεση κλασμάτων.

5.4 Συμμετέχοντες της έρευνας

Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 12 διορισμένοι εκπαιδευτικοί Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, που διδάσκουν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της Περιφερειακής Ενότητας Θεσπρωτίας. Η επιλογή των συμμετεχόντων της έρευνας εξαρτήθηκε κυρίως από την επιθυμία τους να συμμετάσχουν σε αυτήν καθώς και από την τάξη που διδάσκουν. Προτιμήθηκαν εκπαιδευτικοί που διδάσκουν στην Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξη του Δημοτικού σχολείου. Σε σχέση με το φύλο, αν και η συντριπτική πλειοψηφία των δασκάλων είναι γυναίκες, επιδιώχθηκε η εκπροσώπηση και από τα δύο φύλα. Έτσι, ελήφθησαν συνεντεύξεις από 4 άντρες και 8 γυναίκες. Ως προς τα χρόνια υπηρεσίας των συνεντευξιαζόμενων, επιλέξαμε να συνομιλήσουμε με «εν ενεργεία» εκπαιδευτικούς των οποίων η διδακτική εμπειρία κυμαίνεται από 10 έως 33 έτη.

5.5 Εγκυρότητα και αξιοπιστία της ερευνητικής διαδικασίας

Η εγκυρότητα και η αξιοπιστία της ποιοτικής έρευνας διασφαλίζεται όταν συνυπάρχουν οι εξής προϋποθέσεις (Βάμβουκας, 2010:245):

- *«η συνεντεύκτρια να είναι άγνωστη στο υποκείμενο που δίνουν τη συνέντευξη»*
- *«η διασφάλιση της ανωνυμίας των συνεντευξιαζόμενων»*

- *«η ερευνήτρια να είναι επιδέξια στη δημιουργία αρμονικών σχέσεων, να δείχνει την αμεροληψία της σε όλη τη διάρκεια της συνέντευξης και να δημιουργεί μια ατμόσφαιρα άνεσης και εμπιστοσύνης»*

Όσον αφορά στην πρώτη προϋπόθεση, αποφασίστηκε το δείγμα της έρευνας να αποτελείται από εκπαιδευτικούς που εργάζονται σε δημοτικά σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Θεσπρωτίας. Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίστηκε η απόσταση της ερευνήτριας από τα υποκείμενα που δίνουν τη συνέντευξη.

Όσον αφορά στη δεύτερη προϋπόθεση, το ίδιο το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήσαμε διασφαλίζει αυτήν την προϋπόθεση.

Όσον αφορά στην τρίτη προϋπόθεση, οι συνεντεύξεις έγιναν σε χρόνο και χώρο της επιλογής των συμμετεχόντων. Η συνεντεύκτρια διαβεβαίωσε τους συμμετέχοντες ότι θα διατηρηθεί η ανωνυμία τους και δε θα αναφερθούν στοιχεία για τα σχολεία στα οποία υπηρετούν. Ανέφερε, επίσης, ότι η παρούσα έρευνα θέλει να εξετάσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν έμπειροι δάσκαλοι για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στα κλάσματα. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, η ερευνήτρια παρακολουθούσε με προσοχή τους ερωτώμενους, χωρίς να αξιολογεί κατά οποιονδήποτε τρόπο τις απόψεις τους.

5.6 Η διαδικασία διενέργειας της έρευνας

Αρχικά κατασκευάστηκε το πρωτόκολλο συνέντευξης. Στη συνέχεια επιλέχθηκαν οι συμμετέχοντες της έρευνας. Λόγω της ιδιότητας της ερευνήτριας, υπήρξε μεγάλη προθυμία για τη συμμετοχή τους στην έρευνα. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίστηκε η συνειδητή συναίνεση των εκπαιδευτικών που βοήθησαν στην παρούσα έρευνα. Οι συμμετέχοντες όρισαν τον τόπο και τον χρόνο συνάντησης.

Έπειτα ακολούθησε η ενημέρωση των συμμετεχόντων για τον σκοπό και τους στόχους της έρευνας, τη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας και στο τέλος αφού συναινούσαν, τους δινόταν το ερευνητικό εργαλείο.

Οι συνεντεύξεις ελήφθησαν τον Νοέμβριο του 2019. Ο κάθε εκπαιδευτικός έδωσε από μια προσωπική συνέντευξη διάρκειας περίπου 30 λεπτών, η οποία μαγνητοφωνήθηκε, απομαγνητοφωνήθηκε κι εν συνεχεία αναλύθηκε. Κατά τη διεξαγωγή των συνεντεύξεων, υπήρξε ευχάριστο και φιλικό κλίμα μεταξύ της ερευνήτριας και των συμμετεχόντων της έρευνας. Η συναδελφική σχέση της ερευνήτριας με τους ερωτώμενους, βοήθησε στην μεταξύ τους επικοινωνία και διαμόρφωσε έναν κοινό γλωσσικό κώδικα για την κατανόηση των ερωτήσεων με σχετική ευκολία.

5.7 Η τεχνική ανάλυσης των δεδομένων

Η ερευνήτρια, στην παρούσα έρευνα, συνέλεξε πρώτα τα δεδομένα και έπειτα τα προετοίμασε για ανάλυση. Αρχικά στάδια για την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων είναι τα εξής (Creswell, 2011:276-277):

- *«Συγκέντρωση δεδομένων με τη μορφή αρχείου κειμένου»*
- *«Προετοιμασία των δεδομένων για ανάλυση»*
- *«Ανάγνωση των δεδομένων, ώστε να αποκτηθεί μια γενική εικόνα του υλικού»*
- *«Κωδικοποίηση των δεδομένων, εντοπίζοντας τμήματα του κειμένου που τους αποδίδεται ένας κωδικός»*
- *«Κωδικοποίηση του κειμένου για θέματα ή για περιγραφή που θα χρησιμοποιηθούν στην Αναφορά της Έρευνας»*

Αντικείμενο ανάλυσης της παρούσας έρευνας αποτελούν οι απαντήσεις των δασκάλων Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, όπως διατυπώθηκαν στις συνεντεύξεις που δόθηκαν, οι οποίες απομαγνητοφωνήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκαν α) οι αξιολογήσεις των εκπαιδευτικών για τις απαντήσεις των (υποθετικών) μαθητών, β) οι ερμηνείες που έδωσαν στις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, εφόσον τις είχαν αξιολογήσει ως λανθασμένες και γ) η ανατροφοδότηση που παρείχαν. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών καταγράφηκαν ανά άξονα και ανά έργο, μελετήθηκαν αρχικά συνολικά και κατασκευάστηκαν κατηγορίες απαντήσεων ανά άξονα, οι οποίες παρουσιάζονται στα αποτελέσματα.

6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

6.1 Αξιολόγηση απαντήσεων των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς (Κοινή γνώση περιεχομένου)

Οι αξιολογήσεις των απαντήσεων των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς εξετάστηκαν ως προς την ορθότητά τους. Στις περιπτώσεις που στο έργο εμφανίζονταν παραπάνω από μία απαντήσεις μαθητών, εξετάστηκε η αξιολόγηση των εκπαιδευτικών για κάθε απάντηση ξεχωριστά. Για παράδειγμα, στο Έργο 3 όπου υπάρχουν 2 απαντήσεις μαθητών προς αξιολόγηση, εξετάστηκε η αξιολόγηση των εκπαιδευτικών της Απάντησης 1 και της Απάντησης 2. Το έργο 2 εξετάστηκε ως προς την αξιολόγηση του αριθμού στο οποίο κατέληξε η μαθήτρια και ως προς την αξιολόγηση της συμβολικής μορφής. Όσον αφορά τοναριθμό, εξετάστηκε αν οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι η μαθήτρια αναφέρεται πράγματι σε έναν ενδιάμεσο αριθμό που μπορεί να μετατραπεί στην τυπική μορφή του κλάσματος. Όσον αφορά τη συμβολική μορφή, εξετάστηκε αν αξιολόγησαν την εγκυρότητά της ή όχι. Το έργο 7 και το έργο 8 εξετάστηκαν επίσης ως προς δυο παραμέτρους ξεχωριστά, την αξιολόγηση του αποτελέσματος και την αξιολόγηση της μεθόδου που οδήγησε στο αποτέλεσμα. Οι κατηγορίες που προέκυψαν ήταν οι εξής: «Ορθή Αξιολόγηση», «Λανθασμένη Αξιολόγηση» και «Καμία Αξιολόγηση». Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η συχνότητα των σωστών και λανθασμένων αξιολογήσεων ανά έργο.

Πίνακας 1:Συχνότητα σωστών/λανθασμένων αξιολογήσεων

Έργο	Αξιολόγηση	Κατηγορία απάντησης			Σύνολο
		Λανθασμένη Αξιολόγηση	Ορθή Αξιολόγηση	Καμία Αξιολόγηση	
1	**Αξ1α(Απάντηση 1)**	0	12	0	**12**
	Αξ1β(Απάντηση 2)	1	11	0	**12**
	Αξ1γ(Απάντηση 3)	1	11	0	**12**
2	**Αξ2α (Αριθμός)**	0	2	10	**12**
	Αξ2β(Συμβολική μορφή)	1	11	0	**12**
3	**Αξ3α(Απάντηση Γιώργου)**	0	12	0	**12**
	Αξ3β(Απάντηση Μαρίας)	0	12	0	**12**
4	**Αξ4**	9	3	0	**12**
5	**Αξ5**	11	1	0	**12**
6	**Αξ6**	0	12	0	**12**
7	**Αξ7α (Αποτέλεσμα)**	5	5	2	**12**
	Αξ7β(Μέθοδος)	0	12	0	**12**
8	**Αξ8α (Αποτέλεσμα)**	0	12	0	**12**
	Αξ8β(Μέθοδος)	0	3	9	**12**
9	**Αξ9α (Πράξη α)**	0	12	0	**12**
	Αξ9β (Πράξη β)	0	12	0	**12**

Στον Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι, από τις συνολικά 16 αξιολογήσεις που έκαναν οι εκπαιδευτικοί, οι 8 έγιναν ορθά από όλους τους συμμετέχοντες. Οι αξιολογήσεις αυτές αφορούν την εύρεση του μέρους μιας σύνθετης ποσότητας (Αξ1α), τη διάταξη κλασμάτων

(Αξ3α, Αξ3β, Αξ8α), την τοποθέτηση κλάσματος στην αριθμογραμμή (Αξ6), τη μέθοδο στην εύρεση του ενδιάμεσου κλάσματος (Αξ7β), την πρόσθεση και τη διαίρεση κλασμάτων (Αξ9α, Αξ9β). Τα αντίστοιχα έργα αφορούν βασικές γνώσεις για τα κλάσματα, κυρίως διαδικαστικής φύσης. Τα έργα/υποέργα που αξιολογήθηκαν λανθασμένα από τους περισσότερους ερωτώμενους ήταν το υποέργο 2α, το έργο 4, το έργο 5, το υποέργο 7α και το υποέργο 8β.

Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων αξιολόγησε ορθά τις απαντήσεις των υποθετικών μαθητών όσον αφορά την εύρεση του μέρους μιας σύνθετης ποσότητας που συνδύαζε το μοντέλο συνόλου και το μοντέλο του εμβαδού (Αξ1α, Αξ1β, Αξ1γ).

Ωστόσο, στα Έργα 4 και 5 που αφορούν πάλι το μέρος μιας ποσότητας, αλλά σε λιγότερο τυπική μορφή, η μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών έκανε λανθασμένη αξιολόγηση (Αξ4, Αξ5). Πράγματι, όσον αφορά το έργο 4, οι εκπαιδευτικοί που αξιολόγησαν λανθασμένα εξέφρασαν την άποψη ότι τα μέρη στα οποία χωρίζεται η (συνεχής) μονάδα πρέπει να είναι ίδια σχήματα. Ενδεικτικά απάντησαν:

«Το παιδί έχει σχεδιάσει τέσσερα τμήματα και από αυτά όντως έχει γραμμοσκιάσει τα δυο. Το πρόβλημα είναι όμως ότι οι ποσότητες δεν είναι ισάξιες, γιατί σε ένα κλάσμα πρέπει να παίρνει το μέρος μιας ποσότητας όπου είναι ουσιαστικά με ίσο τρόπο κατανεμημένη ποσότητα» Ε1

«Αυτός δεν χώρισε σε 4 ίσα κομμάτια» Ε6

«Δεν έχει χωρίσει όπως θα έπρεπε. Σε τέσσερα ίσα κομμάτια» Ε8

Παρομοίως και στο έργο 5, οι ερωτώμενοι εξέφρασαν την άποψη ότι τα διακριτά μέρη της δεδομένης ποσότητας θα έπρεπε να είναι ισεμβαδικά. Ενδεικτικά απάντησαν:

«Συνήθως δεν καταλαβαίνουν ότι τα τετράγωνα δεν είναι ίδια» Ε11

«Δεν καταλαβαίνουν ότι τα τετράγωνα δεν είναι ίδια σε μέγεθος» Ε12

Σημειώνουμε ότι κανείς εκπαιδευτικός δεν αξιολόγησε σωστά και τα δύο έργα (4, 5). Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί Ε3 και Ε5 αξιολόγησαν σωστά το Έργο 4, αλλά όχι το Έργο 5, ενώ ο Ε4 αξιολόγησε σωστά το Έργο 5 και λανθασμένα το Έργο 4.

Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών εντόπισε ότι η συμβολική αναπαράσταση 2,5/5 αντίκειται στο σχολικό ορισμό για τα κλάσματα (Αξ2β). Αντίθετα, αγνόησαν το γεγονός ότι ο αριθμός αυτός βρίσκεται όντως ανάμεσα στα δεδομένα κλάσματα (Αξ2α). Αντιπροσωπευτική αξιολόγηση είναι η εξής:

«Και εδώ η απάντηση είναι λάθος και πάω πάλι στο προηγούμενο. Θα τους διδάξω τι είναι ο αριθμητής και τι ο παρονομαστής. Εδώ η μαθήτρια δεν ξέρει ότι ο αριθμητής

δεν πρέπει να είναι δεκαδικός. Πρέπει να καταλάβει ότι ο αριθμητής είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε στους όρους του κλάσματος έναν δεκαδικό αριθμό.» Ε9

Ερμηνεύοντας την απάντηση της μαθήτριας, κάποιοι εκπαιδευτικοί αναφέρονται στα κλάσματα και στους (ρητούς) δεκαδικούς αριθμούς ως αν να ήταν διαφορετικές κατηγορίες αριθμών. Ενδεικτικά αναφέρουν:

«Δεν έχει ξεκαθαρίσει στο μυαλό της τους δεκαδικούς και τους κλασματικούς αριθμούς και τους μπερδεύει. Έχει μια σύγχυση» Ε1

«Η μαθήτρια έχει μπερδέψει τους δεκαδικούς αριθμούς με τους κλασματικούς» Ε5

Στο έργο 6, όλοι οι εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν ως λανθασμένη την τοποθέτηση του κλάσματος σε αυτή τη θέση, αναγνωρίζοντας το πρόβλημα της μονάδας αναφοράς.

Στο έργο 7,όλοι οι εκπαιδευτικοί αξιολόγησαν ως λανθασμένο το συλλογισμό του μαθητή (Αξ7β), αλλά ορισμένοι εκπαιδευτικοί αγνόησαν το γεγονός ότι το κλάσμα είναι όντως ενδιάμεσα στα συγκεκριμένα κλάσματα (Αξ7α).

Το έργο 8, όπως προαναφέραμε, είναι σωστό και ως προς το αποτέλεσμα και ως προς τη μέθοδο, αλλά τα συγκεκριμένα κλάσματα μπορούν να συγκριθούν και με βάση την αξία τους. Μόνο 3 εκπαιδευτικοί (Ε1, Ε2 και Ε9) σχολίασαν τη μέθοδο της μαθήτριας ενώ οι υπόλοιποι είτε δε σχολίασαν τίποτα είτε συμφώνησαν απόλυτα με τη μέθοδο που ακολουθήθηκε.

6.2 Δημιουργία προβλημάτων (Εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου)

Στο έργο 10 διακρίναμε τρεις κατηγορίες απαντήσεων: Στην πρώτη εντάχθηκαν αυτές στις οποίες προτάθηκαν από τους εκπαιδευτικούς προβλήματα, που δεν αντιστοιχούσαν στις δεδομένες πράξεις («Ακατάλληλο Πρόβλημα»). Στη δεύτερη εντάχθηκαν αυτές στις οποίες προτάθηκαν από τους εκπαιδευτικούς προβλήματα κατάλληλα για τις δεδομένες πράξεις («Κατάλληλο Πρόβλημα»). Τέλος, στην τρίτη κατηγορία («Κανένα πρόβλημα») εντάχθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί δεν πρότειναν κάποιο πρόβλημα. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τη συχνότητα κάθε κατηγορίας απάντησης στα δύο υποέργα του έργου (10α – πολλαπλασιασμός, 10β – διαίρεση).

Πίνακας 2:Συχνότητα κατηγοριών απάντησης στο Έργο 10

Έργο	Κατηγορία Απάντησης			Σύνολο
	Ακατάλληλο Πρόβλημα	Κατάλληλο Πρόβλημα	Κανένα Πρόβλημα	
10α (Πολλαπλασιασμός)	3	3	6	**12**
10β(Διαίρεση)	4	1	7	**12**

Από τον Πίνακα 2 βλέπουμε ότι η πλειονότητα των εκπαιδευτικών αδυνατεί να κατασκευάσει πρόβλημα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Οι εκπαιδευτικοί που δεν πρότειναν κάποιο πρόβλημα αναγνώρισαν και εξέφρασαν ρητά τη δυσκολία τους.

«Πρέπει να σκεφτώ τώρα; Μας έβαλες δύσκολα τώρα. Αστο αυτό δεν μπορώ να το βρω» Ε5

«Αυτό έχει μία δυσκολία. Μεγάλη δυσκολία. Δεν είναι για γρήγορη σκέψη είναι για πολλή σκέψη. Δεν μπορώ να σκεφτώ δεν ξέρω. Θα χρειαστώ χρόνο για να σκεφτώ κάποιο πρόβλημα. Δεν μπορώ τώρα» Ε10

Όσον αφορά το πρόβλημα πολλαπλασιασμού, από τα ακατάλληλα προβλήματα που προτάθηκαν, στα δύο προβλήματα εμπεριέχονταν οι δεδομένοι αριθμοί, αλλά όχι η απαιτούμενη πράξη:

*«Ένα παιδί τρώει τα 3/5 του συνόλου του φαγητού του στο μισό, στο 1/2 της ημέρας. Ολόκληρη την ημέρα πόσο θα έτρωγε;»*Ε3

«Στην προπόνηση του μπάσκετ ο προπονητής είπε στους παίκτες του ότι αν βάζουν τα 3/5 των βολών που σουτάρουν σε κάθε παιχνίδι θα τους δίνει μισό πόντο στο τέλος του παιχνιδιού. Όταν θα συμπληρώσουν 10 πόντους ο καθένας θα πάρουν μία μέρα ρεπό. Σε πόσα παιχνίδια το λιγότερο όταν πετυχαίνουν πάντα τα 3/5 των βολών θα πάρουν την ημέρα ρεπό;» Ε12

Το τρίτο ακατάλληλο πρόβλημα αφορούσε την κατάλληλη πράξη, αλλά όχι τους δεδομένους αριθμούς και προτάθηκε από τον Ε8. Ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός αναφέρθηκε πιο γενικά στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με κλάσματα, επισημαίνοντας διαφορές σε σχέση με τις αντίστοιχες πράξεις στους φυσικούς. Ωστόσο, φαίνεται να εστιάζει στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση φυσικού με κλασματικό αριθμό, και δεν αναφέρεται στο νόημα του πολλαπλασιασμού κλάσματος με κλάσμα (το μέρος του μέρους):

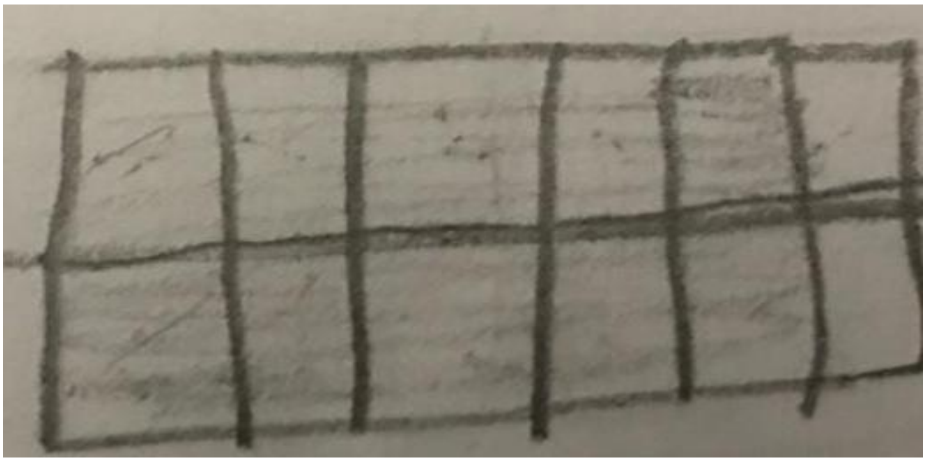
«Καταρχήν, όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό, πρέπει να τους μάθουμε ότι κάνουμε πολλαπλασιασμό πέρα από το γνωστό ξέρω το ένα και ζητάω τα πολλά. Ξέρω το όλο και θέλω να βρω το μέρος. Όταν ξέρω το όλο και θέλω να βρω το μέρος, κάνω πολλαπλασιασμό. Στη διαίρεση συμβαίνει το αντίθετο. Δηλαδή ξέρω το μέρος και θέλω να βρω το όλο. (...)Αυτό τους τονίζω συνέχεια και κάνω παραδείγματα. Δηλαδή του στυλ ένα σχολείο, αυτό βάζω συνέχεια, ένα σχολείο έχει 80 μαθητές. Πόσα είναι τα 5/8 των μαθητών;» Ε8

Ο Ε8, με το ίδιο σκεπτικό, πρότεινε για τη διαίρεση ένα πρόβλημα διαίρεσης φυσικού με κλάσμα:

«Και στη διαίρεση κάνω ακριβώς το αντίθετο. Δηλαδή λέω τα 5/8 των μαθητών είναι 40. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές; Αυτό βασικά δουλεύω σε αυτές τις πράξεις το μέρος και το όλο.» Ε8

Δύο ακόμα ακατάλληλα προβλήματα προτάθηκαν από τους εκπαιδευτικούς, στα οποία εμφανίζονταν μεν τα δεδομένα κλάσματα, αλλά η αντίστοιχη πράξη ήταν ο πολλαπλασιασμός και όχι η διαίρεση:

«Θα μπορούμε να σχεδιάσουμε 5/6 μιας ποσότητας και από τα 5/6 να τα μοιράσουμε στη μέση και να πάρουμε ουσιαστικά τα μισά. Άρα 10/6 κομματάκια βγαίνουνε ζωγραφισμένα ή κομμένα ή οτιδήποτε.» Ε1 (βλ. Εικόνα 3)



Εικόνα 3:Απάντηση του Ε1 για το υποέργο 10β

«Έχω το 5/6 ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου ας πούμε. Το έχω κόψει σε κομμάτια και ψάχνω να βρω το ένα δεύτερο.» Ε2

«Σε μία προπόνηση ποδοσφαίρου οι δύο μεγαλύτερες τάξεις αφού χώρισαν το γήπεδο αποφάσισαν να παίξουν ποδόσφαιρο στα 5/6 της συνολικής επιφάνειας του. Στη συνέχεια αφού οι δάσκαλοι του σχολείου διαπίστωσαν ότι δεν είναι χωρισμένο σε ίσα

μέρη τους πρότειναν να δώσουν τη μισή έκταση και στις υπόλοιπες τάξεις έτσι ώστε να έχουν όλοι αρκετό χώρο για να παίξουν. Πόσο τελικά επιφάνεια του γηπέδου θα καταλάβουν οι δύο μεγαλύτερες τάξεις;» Ε12

Ένα μόνο πρόβλημα κατηγοριοποιήθηκε ως κατάλληλο στην περίπτωση της διαίρεσης, παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν επιπλέον δεδομένα:

«Τα 5/6 των 100 ευρώ είναι το μισό της τιμής ενός φορέματος με έκπτωση. Πόσο είναι η συνολική του η κανονική του τιμή;» Ε3

6.3 Εξήγηση στη λανθασμένη απάντηση του μαθητή (Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών)

Πρώτα από όλα καταγράφτηκαν όλες οι αξιολογήσεις των εκπαιδευτικών ανα έργο. Στη συνέχεια πραγματοποιήσαμε μια αδρή κατηγοριοποίηση των εξηγήσεων που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί για τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, εφόσον είχαν αξιολογήσει σωστά την απάντηση. Οι τρεις κατηγορίες που δημιουργήσαμε ήταν οι εξής: «Ουσιαστική εξήγηση», «Μη ουσιαστική εξήγηση» και «Καμία εξήγηση». Ουσιαστικές θεωρήθηκαν οι εξηγήσεις στις οποίες διακρινόταν η προσπάθεια να ανιχνευθεί ο τρόπος σκέψης του μαθητή που θα ήταν πιθανό να οδηγήσει στην απάντηση που έδωσε. Μη ουσιαστικές θεωρήθηκαν οι εξηγήσεις του τύπου «το ξέχασε», «μπερδεύτηκε», «απάντησε στην τύχη». Οι ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν ανα έργο είναι οι εξής:

Στο έργο 1, οι ουσιαστικές εξηγήσεις αφορούσαν την κατανόηση του μαθητή για τη μονάδα αναφοράς.

«Σκέφτηκε τη μια σοκολάτα και όχι το όλο» Ε2

«Τώρα αυτός πήρε το 1/3 από τη μία σοκολάτα, όχι από το σύνολο» Ε7

Στο υποέργο 2β, οι ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν αφορούσαν την επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς.

«Σκέφτηκε σύμφωνα με τους ολόκληρους ακεραίους» Ε2

«Η μαθήτρια σκέφτηκε ξέροντας τους ακέραιους αριθμούς ότι ανάμεσα στο 2 και στο 3 είναι το 2,5» Ε12

Στα υποέργα 3α και 3β, οι ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν αφορούσαν την επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς, κυρίως όσον αφορά την αντιμετώπιση των όρων του κλάσματος ως ασύνδετους αριθμούς.

«Τα σκέφτηκαν σαν αριθμούς και όχι σαν κλάσματα» *Ε1*

«Αυτό που σκέφτονται τώρα αυτά είναι μόνο τον αριθμητή και μόνο τον παρονομαστή» *Ε2*

Στο έργο 5, η ουσιαστική εξήγηση ήταν μόνο μια και αφορούσε την όψη «μέρος - όλου» του κλάσματος στο μοντέλο του συνόλου.

«Τα 2/5 από τα ίσα μέρη των τετραγώνων για αυτό θεώρησαν ότι είναι λανθασμένη, όχι του συνόλου.» Ε4

Στο έργο 6, οι ουσιαστικές εξηγήσεις που δόθηκαν αφορούσαν α) την έλλειψη κατανόησης για τη μονάδα αναφοράς και β) την επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς.

«Εδώ έχουμε πρόβλημα τώρα με την ακέραιη μονάδα και είναι κάτι που δεν το καταλαβαίνουν. Θα καταλάβουν την ολόκληρη σοκολάτα σαν μία ακέραιη. Θα καταλάβουνε ένα ψωμί που τους λέω καμιά φορά να του κόψουν ή μια πίτσα πιο εύκολο που την τρώνε. Αλλά αν τους πεις να κόψουν έναν αριθμό στα 2/3 ή στο 1/3 δε θα το καταλάβουν. Δεν καταλαβαίνουν ότι ο αριθμός...πότε είναι ανάμεσα και πότε υπερβαίνει την μονάδα ο μαθητής.» Ε2

«Μετράνε μόνο τις γραμμές και τα κενά και μετά τοποθετούν το κλάσμα» Ε6

«Προφανώς είδε το 1 και επικεντρώθηκε στον αριθμητή» Ε10

Στο υποέργο 7β, οι ουσιαστικές εξηγήσεις αφορούσαν την επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς.

«Είδε μόνο τους αριθμούς» Ε3

«Είναι σαν να βλέπει μόνο αριθμητή και μόνο παρονομαστή και όχι σαν κλάσμα» Ε5

Στο υποέργο 9α, οι ουσιαστικές εξηγήσεις αφορούσαν την επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς, ενώ στο υποέργο 9β, δεν υπήρχε καμία ουσιαστική εξήγηση. Κανένας εκπαιδευτικός δεν αναφέρθηκε στην επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών για την πρόσθεση των κλασμάτων. Αντιπροσωπευτικές εξηγήσεις στα δυο υποέργα είναι οι εξής:

«(...) Η πρόσθεση κλασμάτων δεν είναι πάλι φυσικοί αριθμοί να προσθέσουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή. Ενώ στη διαίρεση, δεν ήξερε τη διαδικασία.» Ε9

«Εδώ έχει προσθέσει αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή παρονομαστή σαν αριθμούς. Ενώ στη δεύτερη, δεν θυμάται τον αλγόριθμο.» Ε11

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τη συχνότητα κάθε κατηγορίας απάντησης στα έργα/υποέργα, στα οποία οι μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση και οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν σωστά.

Πίνακας 3:Συχνότητα των ουσιαστικών/μη ουσιαστικών εξηγήσεων

Έργο	**Λανθασμένηαπάντηση μαθητών**	**Κατηγορία απάντησης**			**Σύνολο**
		Μη Ουσιαστική Εξήγηση	**Ουσιαστική Εξήγηση**	**Καμία Εξήγηση**	
1	**1β(Απάντηση 2)**	1	10	0	**11**
2	**2β (Συμβολική μορφή)**	3	7	1	**11**
3	**3α (Απάντηση Γιώργου)**	1	11	0	**12**
	3β (Απάντηση Μαρίας)	2	10	0	**12**
5	**5**	0	1	0	**1**
6	**6**	1	11	0	**12**
7	**7β (Μέθοδος)**	2	10	0	**12**
9	**9α (Πράξη α)**	3	9	0	**12**
	9β(Πράξη β)	12	0	0	**12**

Από τον Πίνακα 3, παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί, όταν αξιολογούν σωστά το έργο, μπορούν να δώσουν μια ουσιαστική εξήγηση στον τρόπο σκέψης των μαθητών. Μόνο στο υποέργο 9β αδυνατούν να δώσουν μια ουσιαστική εξήγηση.

6.4 Ανατροφοδότηση (Γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας - Εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου)

Αρχικά καταγράφτηκαν όλες οι ανατροφοδοτήσεις των συμμετεχόντων είτε αξιολόγησαν σωστά τα έργα είτε λανθασμένα, καθώς όταν υπήρξε λανθασμένη αξιολόγηση, ακολουθούσαν οι εξής ερωτήσεις:
α) έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά εδώ; Αν ο εκπαιδευτικός απαντούσε ναι, τότε ακολουθούσε η ερώτηση «πώς το αντιμετωπίζεις;».

Οι βασικοί μας άξονες ανάλυσης ήταν οι εξής: α) η ανταπόκριση στη συγκεκριμένη απάντηση του μαθητή (π.χ. θα ζητούσε ο/η εκπαιδευτικός από το μαθητή να εξηγήσει πώς σκέφτηκε; Θα έκανε προσπάθεια να υποστηρίξει το μαθητή να αναγνωρίσει μια λανθασμένη απάντηση ή να ανακαλύψει ένα διαφορετικό / καλύτερο τρόπο προσέγγισης του ζητήματος;) ή η μη ανταπόκριση (δηλαδή, η παρουσίαση μιας απάντησης που ο εκπαιδευτικός θεωρεί ορθή, χωρίς σύνδεση με την απάντηση του μαθητή) και β) η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου που θα αξιοποιούσε για την ανατροφοδότηση (π.χ., αναπαραστάσεις, αντιπαραδείγματα, άλλα επιχειρήματα ή διδακτικά εργαλεία). Όσον αφορά το (β), η εξέταση των απαντήσεων ανέδειξε τρεις διαφορετικές κατηγορίες: (1) Ορισμός-Κανόνες-Διαδικασίες, (2) Εποπτικά μέσα, (3) Συνδυασμός των προηγούμενων.

Στην πρώτη κατηγορία εντάχθηκαν οι απαντήσεις, στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρονταν στον ορισμό του κλάσματος, σε κανόνες σχετικά με τα κλάσματα, ή σε διαδικασίες σχετικά με τα κλάσματα προκειμένου να περιγράψουν την ανατροφοδότηση που θα έδιναν στο μαθητή. Ενδεικτικά απάντησαν:

«Θα του εξηγούσα τι είναι το κλάσμα. Θα ξεκινούσα από την αρχή.» Ε7

«Καταρχάς δεν έχουν καταλάβει τι είναι ο αριθμητής και τι είναι ο παρονομαστής. Πρέπει να ξεκινήσουμε από κει. Δεν έχουν καταλάβει αυτές τις βασικές έννοιες των όρων του κλάσματος. Άρα θα διδάξω τον αριθμητή και τον παρανομαστή πάλι και τι ποσά μας δηλώνει ο καθένας.» Ε9

«Θα πρέπει να αντιληφθούν πρώτα ότι το κλάσμα είναι μία διαίρεση. Να κάνουν τη διαίρεση, να βρουν πόσο είναι, να βρουν τον δεκαδικό αριθμό που είναι ανάμεσα και μετά να το κάνουν κλάσμα. Να κάνουν αυτήν την ακολουθία.» Ε4

«Πρέπει να καταλάβουμε τα κλάσματα για να μπουν τη σωστή σειρά πρέπει να είναι ομώνυμα. » Ε2

«Τους λέω ότι στα κλάσματα τα κομμάτια είναι ίδια, ίδια σε μέγεθος.» Ε12

Στη δεύτερη κατηγορία, εντάχθηκαν οι απαντήσεις, στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρονταν στη χρήση κάποιου εποπτικού μέσου, είτε χρησιμοποιώντας γενικά τον όρο εποπτικά μέσα είτε συγκεκριμένα αναφερόμενοι στο είδος του εποπτικού μέσου.

«Εγώ κουβαλάω μαζί μου συνήθως κάτι πίτσες και εποπτικά υλικά.» Ε1

«Θα κάναμε πολλά παραδείγματα με την αριθμογραμμή.» Ε3

«Μόνο με εποπτικό υλικό» Ε10

«Με παραδείγματα μέσα στην τάξη με απλά πράγματα απλά υλικά και επίδειξη.» Ε11

Στην τρίτη κατηγορία, εντάχθηκαν οι απαντήσεις, στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αναφέρονταν στο συνδυασμό των δύο προηγούμενων κατηγοριών.

«Βάζω κλάσματα εξηγούμε τον κανόνα και μετά λυνουμε την άσκηση. Κοιτάμε παρονομαστή μετά κοιτάμε αριθμητή και μετά θα κάνουμε ομώνυμα αν δεν μπορούμε να βρούμε την απάντηση με τον παρονομαστή ή τον αριθμητή. Κάνουμε βέβαια και σχεδιαγράμματα. Θέλει οπωσδήποτε οπτικοποίηση όχι σκέτο αριθμούς.» Ε7

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζεται η συχνότητα των κατηγοριών ανταπόκρισης στην απάντηση του μαθητή και στον Πίνακα 5 παρουσιάζεται η συχνότητα κατηγοριών των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για την παρουσίαση της απάντησης.

Πίνακας 4:Συχνότητα των κατηγοριών ανταπόκρισης στην απάντηση του μαθητή

Έργα	**Ανταπόκριση στην απάντηση του μαθητή**			**Σύνολο**
	Ναι	**Όχι**		
		Παρουσίαση μίας σωστής απάντησης	**Άλλο**	
1	2	10	0	**12**
2	1	11	0	**12**
3	0	12	0	**12**
4	0	12	0	**12**
5	0	12	0	**12**
6	1	11	0	**12**
7	1	11	0	**12**
8	1	11	0	**12**
9α	0	12	0	**12**
9β	0	12	0	**12**

Παρατηρούμε σε όλες, πλην έξι, τις περιπτώσεις, οι εκπαιδευτικοί προτιμούν να δείξουν - παρουσιάσουν μια απάντηση που θεωρούν σωστή, χωρίς να ανταποκρίνονται στην απάντηση που έδωσε ο μαθητής, με τα δεδομένα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, σε καμία περίπτωση δεν αναφέρθηκε ότι ο μαθητής θα χρειαζόταν να εξηγήσει πώς σκέφτηκε. Από τις απαντήσεις που δόθηκαν παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι ερωτώμενοι θα έδειχναν στον μαθητή πως θα βρει τη σωστή απάντηση - μάλιστα με έναν τρόπο (κανείς δε λαμβάνει υπόψη ότι υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να απαντηθεί το ερώτημα). Για παράδειγμα στο Έργο 1, οι δύο από τις τρεις απαντήσεις των μαθητών είναι σωστές. Οι εκπαιδευτικοί, ακόμα και σε αυτό το έργο, επιλέγουν να παρουσιάσουν μια σωστή απάντηση.

«Θα έπαιρνα τις σοκολάτες και θα μετρούσαμε ότι συνολικά τα κομμάτια είναι 24. Και θα λέγαμε ουσιαστικά να βρούμε το 1/3 του 24.» Ε1

«Θα του έλεγα ότι έχουμε τέσσερις σοκολάτες και θα πρέπει να πάρουμε ένα μέρος από κάθε σοκολάτα.» Ε4

Οι εκπαιδευτικοί που ανταποκρίθηκαν στην απάντηση του μαθητή, υποστήριξαν τον μαθητή να αναγνωρίσει τη λανθασμένη απάντηση και να οδηγηθεί μόνος του στη σωστή απάντηση.

«Θα έπαιρνα τις σοκολάτες και θα του έλεγα να τις μοιράσει σε τρία άτομα με το τρόπο που έκανε αυτός στο χαρτί και μετά θα τον ρωτούσα αν είναι δίκαιη μοιρασιά.» Ε5

«Θα χώριζα τα παιδιά σε ομάδες και μεταξύ τους, μέσα από συζήτηση, χρησιμοποιώντας καθημερινά υλικά να βρουν την απάντηση. Δε θα τους το έδειχνα εγώ. Αλλά μόνοι τους θα έπρεπε να βρουν τη σωστή απάντηση.» Ε11

Πίνακας 5:Συχνότητα κατηγοριών των εργαλείων

Έργα	Συχνότητα κατηγοριών των εργαλείων			Σύνολο
	Ορισμός - Κανόνες - Διαδικασίες	**Εποπτικά μέσα**	**Συνδυασμός**	
Έργο 1	7	5	0	**12**
Έργο 2	7	5	0	**12**
Έργο 3	7	4	1	**12**
Έργο 4	7	5	0	**12**
Έργο 5	7	5	0	**12**
Έργο 6	8	3	1	**12**
Έργο 7	7	3	2	**12**
Έργο 8	9	1	2	**12**
Έργο 9α	10	1	1	**12**
Έργο 9β	11	1	0	**12**

Παρατηρούμε ότι η πλειονότητα των εκπαιδευτικών ακολουθεί τη στρατηγική του ορισμού - του κανόνα - της διαδικασίας. Αρκετοί εκπαιδευτικοί ακολουθούν τη στρατηγική της οπτικοποίησης. Λίγοι είναι αυτοί που επιλέγουν συνδυασμό και των δύο στρατηγικών.

Η πλειονότητα των εκπαιδευτικών επιλέγει την στρατηγική του ορισμού - του κανόνα - της διαδικασίας, κυρίως, σε έργα που αφορούν τη σύγκριση κλασμάτων (Έργο 8), την πρόσθεση και τηδιαίρεση κλασμάτων (Έργο 9α, Έργο 9β). Αντιπροσωπευτική είναι η απάντηση του Ε10:

«(...) τα 2 τελευταία δεν έχουμε θέμα κατανόησης. Εννοώ στην ερώτηση 8 και στην ερώτηση 9. Τα προηγούμενα είχαμε πρόβλημα κατανόησης της έννοιας των κλασμάτων. Που είναι το πιο δύσκολο πράγμα. Εδώ δεν έχουμε τέτοιο πρόβλημα εδώ είναι θέμα τεχνικής. Αυτό δεν είναι δύσκολο είναι θέμα εξάσκησης. Καθαρά θέμα επανάληψης.

Δηλαδή αυτά πρέπει να τα βλέπει και να ξέρει τι πρέπει να κάνει. Δεν είναι όμως θέμα κατανόησης.» Ε10

Για την εξέταση των απαντήσεων ως προς την ανατροφοδότηση με ορισμούς - κανόνες και διαδικασίες, αναλύθηκαν τα έργα που αφορούν τη σύγκριση των κλασμάτων (Έργο 3,Έργο 8), την εύρεση του ενδιάμεσου κλάσματος (Έργο 2, Έργο 7), την τοποθέτηση του κλάσματος σε αριθμογραμμή (Έργο 6). Οι κατηγορίες που διακρίθηκαν ήταν: α) η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, β) η μετατροπή τωνκλασμάτων σε ομώνυμα, γ) Και τα δύο (όταν οι συμμετέχοντες πρότειναν και τους δυο τρόπους), δ) Άλλο (αξία του κλάσματος ή εύρεση των ισοδύναμων κλασμάτων). Στον Πίνακα 6 παρουσιάζεται η συχνότητα του είδους της διαδικασίας.

Πίνακας 6:Συχνότητα του είδους της διαδικασίας

Έργα	Συχνότητα είδους της διαδικασίας				Σύνολο
	Μετατροπή σε δεκαδικό	Μετατροπή σε ομώνυμα	Και τα δυο	Άλλο	
Έργο 2	3	0	0	4	**7**
Έργο 3	1	5	1	1	**8**
Έργο 6	6	0	0	3	**9**
Έργο 7	2	3	3	1	**9**
Έργο 8	1	9	0	1	**11**
Σύνολο	13	17	4	10	-

Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες επιλέγουν τη μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα. Στα έργα που αφορούν τη σύγκριση των κλασμάτων (Έργο 3, Έργο 8), οι περισσότεροι ερωτώμενοιεπιλέγουν τη μετατροπή του κλάσματος σε ομώνυμα και στη συνέχεια να γίνει η σύγκριση. Στην τοποθέτηση του κλάσματος στην αριθμογραμμή (Έργο 6),οι περισσότεροι ερωτώμενοι επιλέγουν τη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό. Στην εύρεση του ενδιάμεσου κλάσματος (Έργο 2) προτείνεται, κυρίως, η μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό ενώ στο Έργο 7 προτείνεται η μετατροπή του κλάσματος σε ομώνυμα ή η μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό.

Η εξέταση των απαντήσεων ως προς το είδος των εποπτικών μέσων που θα χρησιμοποιούσαν οι εκπαιδευτικοί ανέδειξε αρχικά δυο κατηγορίες: α) οι εκπαιδευτικοί που ανέφεραν γενικά τα εποπτικά μέσα, β) οι εκπαιδευτικοί που ανέφεραν συγκεκριμένο είδος εποπτικού μέσου. Στη συνέχεια τα είδη των εποπτικών μέσων κατηγοριοποιήθηκαν σε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες: (1) Εμπράγματη αναπαράσταση, (2) Εικονική αναπαράσταση, (3) Αριθμογραμμή, (4) Συνδυασμός (Χρήση αριθμογραμμής και Εμπράγματης αναπαράστασης ή Εικονικής αναπαράστασης ή Γενικά εποπτικά μέσα). Στον Πίνακα 7 παρουσιάζεται η συχνότητα του είδους των εποπτικών μέσων.

Πίνακας 7:Συχνότητα του είδους των εποπτικών μέσων

Έργα	Συχνότητα είδους εποπτικών μέσων					Σύνολο
	Γενικά	Συγκεκριμένα				
		Εμπράγματη	Εικονική	Αριθμογραμμή	Συνδυασμός	
Έργο 1	2	3	0	0	0	**5**
Έργο 2	0	0	0	4	1	**5**
Έργο 3	2	1	2	0	0	**5**
Έργο 4	1	1	3	0	0	**5**
Έργο 5	1	2	2	0	0	**5**
Έργο 6	0	0	1	0	3	**4**
Έργο 7	2	0	1	1	1	**5**
Έργο 8	0	2	1	0	0	**3**
Έργο 9α	1	0	1	0	0	**2**
Έργο 9β	0	0	1	0	0	**1**
Σύνολο	9	9	12	5	5	**-**

Παρατηρούμε ότι οι εκπαιδευτικοί κατα τη διδασκαλία των κλασμάτων χρησιμοποιούν, κυρίως, εικονικές αναπαραστάσεις ή εμπράγματες αναπαραστάσεις στα περισσότερα έργα.

> *«Θα μπορούσαμε να κάνουμε και ένα σχήμα ώστε να αντιληφθεί έτσι σχηματικά (...)» Ε4*
>
> *«Με επίδειξη στην τάξη. Θα έφερνα σοκολάτες, όπως έχουν εδώ για παράδειγμα, πίτες, φρούτα και θα τα κάναμε...» Ε11*

Επισημαίνεται ότι οι ερωτώμενοι χρησιμοποιούν συγκεκριμένα παραδείγματα αναπαραστάσεων είτε είναι εικονικές αναπαραστάσεις είτε εμπράγματες. Αντιπροσωπευτικές απαντήσεις είναι οι εξής:

«Αυτό που κάνουμε είναι να χρησιμοποιούμε οπτικά και ακουστικά υλικά για να σχηματίσουν τα παιδιά εεε...συγκεκριμένες παραστάσεις πάνω στα κλάσματα.» Ε1

«Χρησιμοποιώ πιο πολύ το σταυρό για να καταλάβουν την ίση αξία, γιατί και στον πίνακα που το δείχνεις, παρατηρούν τα περισσότερα και την παραμικρή λεπτομέρεια δηλαδή αν κόψεις λίγο πιο δω ή λίγο πιο κει θα το καταλάβω στη λωρίδα και σου λένε αυτό δεν είναι ίσο με εκείνο. Για αυτό εγώ το χρησιμοποιώ το σταυρό εδώ...» Ε2

Η χρήση της αριθμογραμμής θα γινόταν μόνο σε τρία έργα - στο Έργο 2, Έργο 6, Έργο 7. Οι περισσότεροι ερωτώμενοι όταν κάνουν χρήση κάποιου εποπτικού μέσου αναφέρουν πως θα το χρησιμοποιούσαν.

«Χρησιμοποίησα πίτσες, μία πίτσα με 3/4 και μία πίτσα με 4/5 και είδαμε ότι άμα τα βάλω όλα μαζί δεν είναι ουσιαστικά, δεν έχουν την ίδια κλασματική αξία. Και θα πρέπει για να μπορέσουμε να τα προσθέσουμε, να τα αντικαταστήσουμε με άλλα κλάσματα ισοδύναμα που να είναι ομώνυμα. Δηλαδή να έχουνε...να τα πάμε και τα δύο σε εικοστά και αλλάξαμε τα κομμάτια τα 3/4 με κομμάτια που αντιστοιχούν σε εικοστά και τα 4/5 με κομμάτια που αντιστοιχούν σε εικοστά και τα βάλαμε όλα μαζί και είδαμε πόσο κάνουν. Και έτσι είπαμε ότι για να γίνει πρόσθεση πρέπει να τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.» Ε1

«Χρειάζεται επανάληψη με χρήση εποπτικού υλικού, ώστε κάθε φορά να του παρουσιάζεις παρόμοια προβλήματα και να μπορεί να κάνει επιλογές μέσα από αυτό. Πάντα όμως με εποπτικό υλικό, έτσι ώστε να κατανοήσει ότι όταν ζητάμε ένα μέρος από σύνολο.» Ε10

Όμως, στην περίπτωση της αριθμογραμμής, δε γίνεται αναφορά στον τρόπο που θα την χρησιμοποιούσαν, εκτός από τον Ε1.

«Εδώ θα χρειαστεί μία αριθμογραμμή, ουσιαστικά, που να τοποθετηθούν οι ίδιοι οι κλασματικοί αριθμοί και ταυτόχρονα από κάτω να δούμε με ποιον δεκαδικό αριθμό αντιστοιχεί ο καθένας.» Ε1

Επισημαίνεται ότι ορισμένοι εκπαιδευτικοί αναφέρουν ότι θα χρησιμοποιούσαν αναπαραστάσεις στις μικρές τάξεις ενώ στις μεγάλες τάξεις θα εφάρμοζαν τους κανόνες και τις διαδικασίες.

«Στις πιο μεγάλες τάξεις (...) έναν καθιερωμένο τρόπο...κανόνες..(..)Δεν κάνουμε κάτι τώρα πάλι εδώ παραδείγματα με σοκολάτες και με την ακέραιη μονάδα. Τώρα δηλαδή πρέπει να ξέρουν να το κάνουν» Ε2

«Στις μικρές τάξεις χρησιμοποιώ υλικά. Είναι απαραίτητο. Στις μεγάλες όχι. Πρέπει να ξέρουν τον κανόνα.» Ε3

6.5 Προφίλ εκπαιδευτικών

6.5.1 Ως προς τις αξιολογήσεις και τις εξηγήσεις

Για να βγάλουμε το προφίλ των εκπαιδευτικών ως προς τις αξιολογήσεις και τις εξηγήσεις, αναλύσαμε μόνο τα έργα/υποέργα, στα οποία οι (υποθετικοί) μαθητές απάντησαν λανθασμένα. Οι βασικοί άξονες ανάλυσης ήταν οι εξής: α) οι εκπαιδευτικοί που κάνουν σωστή αξιολόγηση και δίνουν ουσιαστική εξήγηση, β) οι εκπαιδευτικοί που κάνουν σωστή αξιολόγηση και δίνουν μη ουσιαστική εξήγηση, γ) οι εκπαιδευτικοί που κάνουν σωστή αξιολόγηση και δε δίνουν καμία εξήγηση, δ) οι εκπαιδευτικοί που αξιολογούν λανθασμένα. Στον Πίνακα 8 παρουσιάζονται τα προφίλ των εκπαιδευτικών σε σχέση με τις αξιολογήσεις και τις εξηγήσεις που έκαναν ανά έργο.Με κίτρινο χρωμα απεικονίζεται η σωστή αξιολόγηση, ουσιαστική εξήγηση, με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η σωστή αξιολόγηση, μη ουσιαστική εξήγηση, με πορτοκαλί χρώμα απεικονίζεταιη σωστή αξιολόγηση, καμία εξήγηση και με μαύρο χρώμα απεικονίζεται λανθασμένη αξιολόγηση.

Πίνακας 8:Προφίλ εκπαιδευτικών ως προς τις αξιολογήσεις και τις εξηγήσεις

Έργα/ Υποέργα	Συμμετέχοντες											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
1β												
2β												
3α												
3β												
5												
6												
7β												
9α												
9β												

Παρατηρούμε ότι όλοι οι εκπαιδευτικοί, εκτός από τον Ε8, όταν αξιολογούν σωστά το έργο, μπορούν να δώσουν μια ουσιαστική εξήγηση τις περισσότερες φορές των περιπτώσεων.

6.5.2 Ως προς τις ανατροφοδοτήσεις

Για να βγάλουμε το προφίλ των εκπαιδευτικών ως προς τις ανατροφοδοτήσεις, αναλύσαμε τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε όλα τα έργα είτε αξιολογήθηκαν σωστά είτε λανθασμένα. Οι βασικοί άξονες ανάλυσης ήταν οι εξής: α) οι εκπαιδευτικοί που δίνουν συστηματικά ανατροφοδότηση με ορισμό - κανόνες και διαδικασίες, β) οι εκπαιδευτικοί που δίνουν συστηματικά ανατροφοδότηση με τη χρήση εποπτικών μέσων, γ) οι εκπαιδευτικοί που δίνουν συστηματικά ανατροφοδότηση είτε με ορισμούς - κανόνες και διαδικασίες είτε με τη χρήση εποπτικών μέσων ή με συνδυασμό των δυο. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι το συστηματικά αναφέρεται στη συχνότητα των τουλάχιστον 7 ανατροφοδοτήσεων που δίνουν οι εκπαιδευτικοί στα έργα. Στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται τα προφίλ των εκπαιδευτικών σε σχέση με τις ανατροφοδοτήσεις που έκαναν ανά έργο. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η στρατηγικήμε ορισμό – κανόνες και διαδικασίες, με κίτρινο χρώμα απεικονίζεται η στρατηγικήμε εποπτικά μέσα και με μπλε χρώμααπεικονίζεται ο συνδυασμός των δύο

Πίνακας 9:Προφίλ εκπαιδευτικών ως προς τις ανατροφοδοτήσεις

Έργα	**Συμμετέχοντες**											
	Ε1	**Ε2**	**Ε3**	**Ε4**	**Ε5**	**Ε6**	**Ε7**	**Ε8**	**Ε9**	**Ε10**	**Ε11**	**Ε12**
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9α												
9β												

Από το Πίνακα 9 παρατηρούμε ότι οι έξι από τους δώδεκα εκπαιδευτικούς (Ε4, Ε5, Ε6, Ε8, Ε9, Ε12) δίνουν συστηματικά ανατροφοδότηση με ορισμούς - κανόνες και διαδικασίες. Οι τρεις από τους δώδεκα εκπαιδευτικούς (Ε1, Ε10, Ε11) δίνουν συστηματικά ανατροφοδότηση με εποπτικά μέσα. Οι τρεις από τους δώδεκα εκπαιδευτικούς (Ε2, Ε3, Ε7) δίνουν ανατροφοδότηση πότε με ορισμούς - κανόνες και διαδικασίες και πότε με εποπτικά.

Για την εξέταση των απαντήσεων ως προς την ανατροφοδότηση με ορισμούς - κανόνες και διαδικασίες, οι κατηγορίες που διακρίθηκαν ήταν: α) η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικό αριθμό, β) η μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα, γ) Και τα δυο, δ) Ορισμός – Κανόνας, ε) Άλλο (αξία κλάσματος ή εύρεση των ισοδύναμων κλασμάτων). Στον πίνακα 10 παρουσιάζονται τα προφίλ των ερωτώμενων ως προς τη συχνότητα του είδους της διαδικασίας.

Πίνακας 10:Προφίλ εκπαιδευτικών ως προς τη συχνότητα του είδους της διαδικασίας

Συμμετέχοντες	**Συχνότητα είδους της διαδικασίας**					**Σύνολο**
	Μετατροπή σε δεκαδικό	**Μετατροπή σε ομώνυμα**	**Και τα δυο**	**Ορισμός Κανόνα**	**Άλλο**	
Ε1	2	0	0	1	0	**3**
Ε2	0	0	0	3	3	**6**
Ε3	0	3	1	2	0	**6**
Ε4	2	2	1	5	0	**10**
Ε5	1	1	0	6	1	**9**
Ε6	2	1	1	4	1	**9**
Ε7	1	2	1	4	0	**8**
Ε8	1	3	0	5	0	**9**
Ε9	4	0	0	6	0	**10**
Ε10	0	1	0	2	0	**3**
Ε11	0	1	0	2	0	**3**
Ε12	0	3	0	6	1	**10**

Από τον Πίνακα 10 παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι ερωτώμενοι επιλέγουν να διορθώσουν τα λάθη των μαθητών τους, κυρίως, λέγοντας τον ορισμό του κλάσματος ή τονίζοντας τους κανόνες. Ακολουθούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα από όλες τις κατηγορίες:

«Για να κάνουν την διάταξη πρέπει τα κλάσματα να είναι ομώνυμα.» Ε3

«Την αξία του κλάσματος.» Ε2

«Μετά θα βρίσκαμε τα ισοδύναμα των κλασμάτων και θα της έλεγα να βρει τον ενδιάμεσο.» Ε5

«Από ένα κλάσμα δημιουργείται ένας δεκαδικός αριθμός. Και στην ουσία κλάσμα και δεκαδικός αριθμός είναι σχεδόν τα ίδια.» Ε8

«Καταρχάς, δεν έχει καταλάβει τι είναι ο αριθμητής και τι είναι ο παρονομαστής. Πρέπει να ξεκινήσουμε από εκεί. Δεν έχει καταλάβει αυτές τις βασικές έννοιες των όρων του κλάσματος. Άρα θα διδάξω τον αριθμητή και τον παρανομαστή πάλι και τι ποσά μας δηλώνει ο καθένας.» Ε9

Για την εξέταση των απαντήσεων ως προς το είδος των εποπτικών μέσων και πώς χρησιμοποιούν το εποπτικό μέσο. Οι κατηγορίες που διακρίθηκαν ήταν: α) Γενικά εποπτικά μέσα, χωρίς να αναφέρεται στο πως θα τα χρησιμοποιήσει, β) Γενικά εποπτικά μέσα, όπου να αναφέρεται στο πως θα τα χρησιμοποιήσει, γ) Συγκεκριμένα εποπτικά μέσα, χωρίς να αναφέρεται στο πως θα τα χρησιμοποιήσει, δ) Συγκεκριμένα εποπτικά μέσα, όπου αναφέρεται στο πως θα τα χρησιμοποιήσει. Στον πίνακα 11 παρουσιάζονται τα προφίλ των ερωτώμενων ως προς τη συχνότητα του είδους των εποπτικών μέσων σε σχέση με τον τρόπο χρήσης.

Πίνακας 11:Προφίλ εκπαιδευτικών ως προς τη συχνότητα του είδους των εποπτικών μέσων

Συμμετέχοντες	**Συχνότητα του είδους των εποπτικών μέσων**				**Σύνολο**
	Γενικά με χρήση	**Συγκεκριμένα με χρήση**	**Γενικά χωρίς χρήση**	**Συγκεκριμένα χωρίς χρήση**	
Ε1	0	6	1	0	**7**
Ε2	0	2	2	0	**4**
Ε3	0	0	4	0	**4**
Ε4	0	3	1	0	**4**
Ε5	0	1	0	0	**1**
Ε6	0	1	0	0	**1**
Ε7	0	0	1	3	**4**
Ε8	0	1	0	1	**2**
Ε9	0	0	0	0	**0**
Ε10	1	0	3	3	**7**
Ε11	1	3	2	1	**7**
Ε12	0	0	0	0	**0**

Από τον Πίνακα 11 παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι ερωτώμενοι χρησιμοποιούν συγκεκριμένα εποπτικά μέσα και συνήθως αναφέρονται στον τρόπο χρήσης τους. Ακολουθούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα από όλες τις κατηγορίες:

«Μόνο με εποπτικό υλικό. Δεν υπάρχει άλλος τρόπος στα κλάσματα.» Ε10

«Πολύ πιθανό να χρησιμοποιούσαμε και χαρτόνια για να δουν ακριβώς τη διαφορά. Με εποπτικό υλικό.» Ε3

«Με πίτσα, με ζωγραφιά με απλά μπορούν να τα καταλάβουν. Δουλεύουμε κυρίως αναπαραστάσεις.» Ε7

«Και εδώ με επίδειξη θα τους το έδειχνα. Θα έπαιρνα πίτες κομμένες, σε όσα κομμάτια λέει ο παρονομαστής των κλασμάτων και θα έβλεπαν τα κομμάτια.» Ε11

7 Συμπεράσματα – Συζήτηση

Στην ενότητα αυτή θα αναδειχθούν τα σημαντικότερα ευρήματα της έρευναςμε βάση τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε. Ταυτόχρονα θα γίνει μια συσχέτιση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την έρευνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να κατέχουν μια ποικιλία γνώσεων, προκειμένου να μπορέσουν να κάνουν το μαθηματικό αντικείμενο κατανοητό στους μαθητές τους. Η παρούσα έρευνα διερευνά τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Θέσαμε τέσσερα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία διερεύνησαν τις γνώσεις των εκπαιδευτικών στα κλάσματα, υιοθετώντας την κατηγοριοποίηση των Ball et al.

Οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν ορθά τα έργα που απαιτούσαν κυρίως την εκτέλεση διαδικασιών, ενώ αξιολόγησαν λανθασμένα τα έργα που απαιτούσαν βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση. Ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η αδυναμία των συμμετεχόντων να αξιολογήσουν σωστά τις απαντήσεις των μαθητών σε έργα εύρεσης του «μέρος – όλου», όταν η μορφή του όλου ξεφεύγει από την τυπική μορφή του μοντέλου εμβαδού, διαμερασμένης σε ισεμβαδικά κομμάτια και του μοντέλου συνόλου με ίδιες διακριτές ποσότητες. Αντίθετα, σε έργα που απαιτούσαν την εκτέλεση των κανόνων και των διαδικασιών, οι συμμετέχοντες δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία. Το εύρημα αυτό έρχεται σεσυμφωνία με την έρευνα των Olanoff, Lo και Tobias (2014), στην οποία βρέθηκε ότι η γνώση κλασμάτων είναι σχετικά ισχυρή όταν πρόκειται για διαδικασίες.

Η παρούσα έρευνα ανέδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί κατάφεραν να ερμηνεύσουν σε σημαντικό βαθμό τα λάθη των μαθητών (Şahin, Gökkurt & Soylu, 2016). Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων αναγνώρισε το θέμα της προϋπάρχουσας γνώσης των φυσικών αριθμών ως αιτία δυσκολίας στην κατανόηση των κλασμάτων καθώς και τη δυσκολία στηνκατανόηση της μονάδας αναφοράς.Αντίθετα, κανένας ερωτώμενος δεν αναγνώρισε την επίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης της πρόσθεσης των κλασμάτων στην εκτέλεση της διαίρεσης των κλασμάτων.

Σχετικά με τις ανατροφοδοτήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές, ηανάλυση έδειξε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν ανταποκρίθηκαν στην απάντηση του μαθητή αλλά επέλεξαν να παρουσιάσουν μια σωστή απάντηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Έργο 1, στο οποίο παρουσιάζονται δυο απαντήσεις και οι συμμετέχοντες ακόμα κι εκεί παρουσίασαν μια σωστή απάντηση. Οι συμμετέχοντες στην πλειοψηφία τους δεν έλαβαν υπόψη τους τις αυθόρμητες σκέψεις των μαθητών για να τους βοηθήσουν να κατανοήσουν τα κλάσματα. Αντίθετα, προσπάθησαν να υιοθετήσουν οι μαθητές μια προσέγγιση που είναι βασισμένη, κυρίως, στην εφαρμογή των κανόνων για να μην κάνουν λάθος (Moss & Case, 1999; Charalambous & Pitta Pantazi, 2007; Şahin, Gökkurt & Soylu, 2016). Αξίζει να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις που οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν τα εποπτικά μέσα, αυτά ήταν σε εμπράγματη ή εικονική αναπαράσταση, με ιδιαίτερη προτίμηση σε συγκεκριμένα παραδείγματα που εντάσσονταν στην τυπική μορφή του μοντέλου του εμβαδού (Van de Walle, 2007). Για τον τρόπο χρήσης των εποπτικών μέσων, οι περισσότεροι ερωτώμενοι ανέφεραν τον τρόπο χρήσης μόνο όταν αφορούσαν εποπτικά μέσα εμπράγματης ή εικονικής αναπαράστασης. Αυτό που προκάλεσε ιδιαίτερη εντύπωση είναι ότι οι περισσότεροι ερωτώμενοι θα χρησιμοποιούσαν αναπαραστάσεις μόνο στις μικρές τάξεις, ενώ στις μεγάλες τάξεις θα έπρεπε οι μαθητές να ξέρουν να εκτελούν τις διαδικασίες.

Άλλο ένα εύρημα που ανέδειξε η έρευνα είναι ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί στη σύγκριση κλασμάτων βασίστηκαν σε διαδικασίες, όπως η εύρεση κοινών παρονομαστών ή η μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, ακόμη και όταν άλλες στρατηγικές ήταν πιο αποτελεσματικές (Yang et al., 2009; Livy, 2011).

Ένα ακόμα εύρημα που προέκυψε είναι ότι οι συμμετέχοντες αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στη διατύπωση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με δεδομένους κλασματικούς αριθμούς (Tirosh, 2000; Kilic, 2015). Οι περισσότεροι συμμετέχοντες δήλωσαν αδυναμία, εκφράζοντας τη δυσκολία τους και πολλές φορές και τη δυσφορία τους, στον σχηματισμό των προβλημάτων. Οι συμμετέχοντες που διατύπωσαν ακατάλληλα προβλήματα, συμπεριέλαβαν τους δεδομένους αριθμούς αλλά όχι τη δεδομένη πράξη, συγχέοντας τον πολλαπλασιασμό με τη διαίρεση. Φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί είχαν δυσκολία στην κατανόηση του νοήματος αυτών των πράξεων στο πεδίο των κλασματικών αριθμών.

Η συγκεκριμένη έρευνα δίνει ενδείξεις ότι οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν οι ίδιοι δυσκολίες με την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων. Επιπλέον, παρά το γεγονός ότι συχνά μπορούν να εξηγήσουν την αιτία δυσκολίας των μαθητών στα κλάσματα, δεν φαίνεται να το αξιοποιούν συστηματικά στην ανατροφοδότησή τους. Ταυτόχρονα, βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στην υπενθύμιση ορισμών, κανόνων και διαδικασιών, που δεν υποστηρίζουν τους μαθητές να κατανοήσουν τα κλάσματα. Φαίνεται ότι η μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας για τη διδασκαλία (Ball et al., 2008) και, συγκεκριμένα, για τη διδασκαλία των κλασμάτων, παρουσιάζει ελλείψεις.

Σε αυτό το σημείο όμως, κρίνεται απαραίτητο να αναφερθεί ότι η παρούσα έρευνα είχε και ορισμένους περιορισμούς. Πρώτα από όλα, ο αριθμός των συμμετεχόντων ήταν περιορισμένος (12 συμμετέχοντες), με αποτέλεσμα τα ευρήματα της έρευνας να μην μπορούν να γενικευτούν. Άλλος ένας περιορισμός είναι η έλλειψη εμπειρίας της ερευνήτριας, εξαιτίας της οποίας δεν διευκρινίστηκαν ακόμα περισσότερο κάποιες απαντήσεις των ερωτώμενων, όπως για παράδειγμα δε ρώτησε τους εκπαιδευτικούς πώς θα χρησιμοποιήσουν την αριθμογραμμή. Επίσης, στην παρουσίαση μια σωστής απάντησης, οι εκπαιδευτικοί πιθανό να είχαν και μια δεύτερη απάντηση αλλά να θεώρησαν ότι η μια αρκούσε για τα πλαίσια της έρευνας. Πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη ότι παρά το γεγονός ότι πλαίσιο των έργων είναι κατά το δυνατό ρεαλιστικό (Biza, Nardi & Zachariades, 2007), αυτό σε καμία περίπτωση δε σημαίνει απαραίτητα ότι η ανταπόκριση των εκπαιδευτικών σε συνθήκη πραγματικής τάξης θα ήταν ακριβώς η ίδια. Από την άλλη πλευρά, βέβαια, αν αυτό αποτελούσε μέρος της συνήθους διδακτικής τους πρακτικής, ίσως να διατύπωναν την ανταπόκριση στην απάντηση του μαθητή.

Ολοκληρώνοντας τη συζήτηση, προκύπτει από τα ευρήματα της έρευνας ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί προτιμούν να ανατροφοδοτούν τους μαθητές, κυρίως με βάση τη στρατηγική των κανόνων - διαδικασιών. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν οι εκπαιδευτικοί προτιμούν αυτή την παρέμβαση, γιατί οι ίδιοι δε γνωρίζουν άλλους τρόπους ή γιατί τα σχολικά εγχειρίδια δίνουν βαρύτητα στην εκτέλεση των πράξεων και οι επιμορφώσεις που γίνονται κατά καιρούς περιορίζονται στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων;». Το ερώτημα αυτό μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικών ερευνών.

8 Βιβλιογραφικές αναφορές

Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research*, 90(6), 375-380.

Alajmi, A. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 239-261.

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the US. *Journal of mathematics teacher education*, 7(2), 145-172.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The elementary school journal*, 90(4), 449-466.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator*, 2, 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to Help Year 5 Students Construct Fraction Understanding. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Baumert, J., & Kunter, M. (2013). The COACTIV model of teachers' professional competence. In M., Kunter, J., Baumert, W., Blum, U., Klusmann, S., Krauss, M., Neubrand (Eds), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers*. (Vol.8, pp. 25-48). *Springer US.*

Behr, M., Lesh, R., Post, T.R. & Silver, E.A. 1983. Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (eds.) *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, 91-126. *New York: Academic Press*

Burgess, T. (2009). Statistical knowledge for teaching: Exploring it in the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 18-21.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 301-309.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students’ understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293.

Chinnappan, M., & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 871-896.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (1994). Educational research methodology. *Athens: Metaixmio*.

Creswell, J. W. (2011). Η έρευνα στην εκπαίδευση: σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση της ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας. *Αθήνα: Ίων*.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for Teaching. *Notices of the AMS*, Vol.48, No 2: 168-174.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12-25.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4, doi: 10.3389/fpsyg.2013.00715.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers’ pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 213-230.

İskenderoğlu, T. A. (2017). The problems posed and models employed by primary school teachers in subtraction with fractions. *Educational Research and Reviews*, 12(5), 239-250.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 19, 26.

Kar, T., & Işık, C. (2014). Analysis of Problems Posed by Pre-service Primary Teachers about Adding Fractions in terms of Semantic Structures. *Mathematics Education*, 9(2), 135-146.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional. In R. Lesh (Ed.), Number and measurement: *Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.*

Kilic, C. (2015). Analyzing Pre-Service Primary Teachers' Fraction Knowledge Structures through Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 11(6), 1603-1619.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). *Reston, VA: NCTM*.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translation among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33 ± 40). *Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.*

Livy, S., & Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution to a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development*, *13*(2), 22-43.

Lo, J.-J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(6), 481-500.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. *Hillsdale, NJ:Erlbaum*.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. Rational numbers: *An integration of research*, 261-288.

Mathematics Navigator: A sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2-8). (2015) *America's Choice*.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: Teaching rational number. In J. Bransford & S. Donovan (Eds.), *How children learn: History, science and mathematics in the classroom* (pp. 309–350). *Washington, DC: National Academies Press*.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: *A new model and an experimental curriculum. Journal for research in mathematics education,* 122-147.

Ndalichako, J. L. (2013). Analysis of Pupils' Difficulties in Solving Questions Related to Fractions: The Case of Primary School Leaving Examination in Tanzania. *Creative Education*, 4(9), 69-73.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. *In PME CONFERENCE* (Vol. 3, pp. 3-295).

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: *The origins and implications of whole number bias. EducationalPsychologist*, 40(1), 27-52.

Olanoff, D., Lo, J.-J., & Tobias, J. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions. *The MathematicsEnthusiast*, 11(2), 267-310.

Olfos, R., Goldrine, T., & Estrella, S. (2014). Teachers' pedagogical content knowledge and its relation with students' understanding. *Revista Brasileira de Educação*, 19(59), 913-944.

Şahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 531-551.

Shin, M., & Bryant, D. P. (2015). Fraction Interventions for Students Struggling to Learn Mathematics: A Research Synthesis. *Remedial and Special Education*, 36(6), 374-387.

Shulman, L., S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 75(2),σ.σ. 4-14.

Shulman, L., S. (1999). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Στο*J.Leach & B. Moon (Eds.), Learners & Pedagogy*, σ.σ. 61-77. London: Sage.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual Knowledge of Fraction Arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909-918.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). Developing effective fractions instruction: A practice guide (NCEE No. 2010-009). *Washington, DC: National Center for Education, Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, US Department of Education*.

Tapp, L. E. K. (2016). An analysis of undergraduate elementary school pre-service teachers' ability to contextualize fraction expressions and decontextualize fraction word problems. *PhD Thesis, University of Central Florida*.

Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A., Feldman, Z., Tobiaw, J. M., & Welder, R. M. (2016). Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 123-148.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.

Turnuklu, E. B., & Yesildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: pre-service primary mathematics teachers' perspectives in Turkey. *IUMPST: The Journal*, 1

Unesco (1996). Mathematics Education Research: Past, Present and Future. Bangkok: *UNESCO Principal Regional Office for Asia and the Pacific*.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakousi, X. (2007). Extending the conceptual change approach to mathematics learning: an introduction.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 344-355.

Van de Walle, J. A. (2007). Διδάσκοντας μαθηματικά. Για Δημοτικό και Γυμνάσιο. *Μια αναπτυξιακή Διαδικασία, Αθήνα. Επίκεντρο.*

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). Elementary and middle school mathematics: *Teaching developmentally. PearsonEducation*.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by sixth grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 31(3), 317–334.

Young, E., & Zientek, L. R. (2011). Fraction Operations: An Examination of Prospective Teachers' Errors, Confidence, and Bias. *Investigations in Mathematics Learning*, 4(1), 1-23.

Βάμβουκας, Μ. Ι. (2010). Εισαγωγήστηνψυχοπαιδαγωγικήέρευνακαιμεθοδολογία. *Αθήνα: Γρηγόρη.*

Κολιπέτρη, Ζ. (2015). Μαθηματική παιδαγωγική γνώση και διδακτικές πρακτικές στην προσχολική εκπαίδευση: Η περίπτωση της μέτρησης της επιφάνειας(Διδακτορική διατριβή). *Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο, Θεσσαλονίκη*.

Κωνσταντίνου, Ι. Χ. (2015). Το καλό σχολείο, ο ικανός εκπαιδευτικός και η κατάλληλη αγωγή ως παιδαγωγική θεωρία και πράξη. *Μια προσέγγιση βασισμένη σε θεωρητικά και ερευνητικά δεδομένα. Αθήνα : Gutenberg*, 2015.

Τριανταφύλλου, Μ. (2019). Εννοιολογικές προκλήσεις της έννοιας του κλάσματος: Ο ρόλος των εγχειριδίων των Μαθηματικών του Δημοτικού(Αδημοσίευτη Μεταπτυχιακή εργασία). *Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα*.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Απομαγνητοφωνήσεις

Ερωτώμενος 1

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 10 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε΄ Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Πιστεύω ότι η απάντηση ένα και δυο είναι σωστές. Η δεύτερη απάντηση είναι λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Το παιδάκι κύκλωσε το ένα τρίτο μόνο της μίας σοκολάτας, όχι της συνολικής ποσότητας σοκολατών, αγνόησε τις άλλες.

Πώς θα το βοηθούσες για να το καταλάβει;

Θα έπαιρνα τις σοκολάτες και θα μετρούσαμε ότι συνολικά τα κομμάτια είναι 24. Και θα λέγαμε ουσιαστικά να βρούμε το 1/3 του 24.

Δηλαδή τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής για να το κάνει σωστά μόνος του;

Το ότι θέλουμε ουσιαστικά να βρούμε ένα μέρος μιας συνολικής ποσότητας.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Προφανώς η μαθήτρια δεν έχει ξεκαθαρίσει στο μυαλό της τους δεκαδικούς και τους κλασματικούς αριθμούς και τους μπερδεύει. Για αυτό χρησιμοποίησε ένα κλάσμα με αριθμητή δεκαδικό. Έχει μία σύγχυση στο μυαλό.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Ποιος είναι ανάμεσα σε αυτά τα δύο κλάσματα; Εδώ θα χρειαστεί μία αριθμογραμμή, ουσιαστικά, που να τοποθετηθούν οι ίδιοι οι κλασματικοί αριθμοί και ταυτόχρονα από κάτω να δούμε με ποιον δεκαδικό αριθμό αντιστοιχεί ο καθένας. Και ας πούμε...θα δούμε ότι το 2/5 είναι 0,4 το 3/5 είναι 0,6. Και να καταλάβει έτσι η μαθήτρια ανάμεσα στο 0,4 και στο 0,6 ποιος αριθμός βρίσκεται; Το 0,5. Νομίζω ότι χρειάζεται οπτικοποίηση εδώ για να αντιληφθεί τη διάκριση δεκαδικών και κλασματικών. Είναι κλάσμα ζητείται κλάσμα. Οπότε θα πρέπει το 0,5 να το μετατρέψει σε δεκαδικό κλάσμα. Που θα πει ότι η αντιστοίχιση είναι 5/10. Εν ολίγοις, οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν λίγο τους δεκαδικούς με αριθμογραμμή, τους κλασματικούς και την αντιστοιχία δεκαδικών και κλασματικών. Ουσιαστικά ότι ένας αριθμός εκφράζεται και σαν κλάσμα και σαν δεκαδικός.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λοιπόν και οι δύο μαθητές έχουν απαντήσει λάθος. Και ο Γιώργος και η Μαρία. Προφανώς δεν έχουν καταλάβει ακριβώς την αξία των κλασματικών αριθμών. Ο Γιώργος έχει βάλει σωστά το μικρότερο αριθμό. Μετά όμως έβαλε το μεγαλύτερο και το μεσαίο τον έβαλε ως μεγαλύτερο και η Μαρία ξεκίνησε από το μεγαλύτερο και τα μπέρδεψε λιγάκι. Στην προκειμένη περίπτωση νομίζω ότι επίσης τα παιδιά θα έπρεπε λίγο να οπτικοποιήσουν τα κλάσματα. Να καταλάβουν ότι το 1/4 είναι το ένα από τα τέσσερα τα 3/8 είναι περίπου το μισό, περίπου στη μέση ενός κλάσματος και τα 2/3 είναι πάνω από τη μέση ενός κλάσματος. Ε, αφού τα δούνε και αυτά με οπτικοακουστικό υλικό και τα έχουν σαν εικόνα θεωρώ ότι θα μπορούν πιο εύκολα να εκτιμήσουν πού περίπου..την αξία ενός κλάσματος.

Δηλαδή ο Γιώργος και η Μαρία πώς σκέφτηκαν; Γιατί έκαναν αυτή τη διάταξη;

Μμμμ...Ο Γιώργος εεεεε το 1/4 νομίζω ότι τα έβαλε αριθμητικά σαν αριθμούς. Δηλαδή το 1/4 του φάνηκε πιο μικρό τα 2/3... τα 3/8 ενδεχομένως και τον παρονομαστή ότι είναι λίγο μεγαλύτερος το 8, οπότε σου λέει αυτό θα είναι και το μεγαλύτερο κλάσμα. Ομοίως και η Μαρία. Εεεε το 2/3 και το 1/4...νομίζω ότι απλά αριθμητικά τα σκέφτηκαν και όχι...τα σκέφτηκαν σαν αριθμούς και όχι σαν κλάσματα.

Όταν λες αριθμούς; Δηλαδή;

Δηλαδή νομίζω ότι ο Γιώργος είδε εδώ το 8 και σου λέει το 8 είναι μεγαλύτερο αλλά θα είναι μεγαλύτερο το κλάσμα. Δεν έκανε την εεεε...ουσιαστικά δεν σκέφτηκε ότι το κλάσμα εκφράζει το μέρος μιας ποσότητας. Νομίζω ότι πιο πολύ έπαιξε ρόλο...τα τοποθέτησαν αριθμητικά.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Λάθος. Το παιδί έχει σχεδιάσει τέσσερα τμήματα και από αυτά όντως έχει γραμμοσκιάσει τα δυο. Το πρόβλημα είναι όμως ότι οι ποσότητες δεν είναι ισάξιες, γιατί σε ένα κλάσμα πρέπει να παίρνει το μέρος μιας ποσότητας όπου είναι ουσιαστικά με ίσο τρόπο κατανεμημένη ποσότητα. Άρα εδώ το παιδί δεν έχει αντιληφθεί αυτή την αξία του κλάσματος. Ότι παίρνω 1 μέρος μιας ποσότητας, η οποία όμως είναι τεμαχισμένη σε ίσα κομμάτια.

Και πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει αυτό;

Εεεεε…νομίζω ότι πάλι με οπτικοποίηση. Δηλαδή θα έπρεπε να πάρουμε υλικά, τα παιδιά θα πρέπει να βιώσουν πιο πολύ τα κλάσματα. Θα πρέπει να πάρουμε υλικά και να τα κόψουμε στη μέση και να δούμε ότι κόβονται ισόποσα ας το πούμε. Και επιλέγουμε τα δύο από τα τέσσερα. Και να κάνει και μία σύγκριση με αυτό που σχεδίαζε. Εάν όντως είναι κομμένα και αυτά τα κομματάκια ισόποσα. Αυτό.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Είναι γραμμοσκιασμένα τα 2/5 άλλα τα τετράγωνα όντως δεν είναι ίσες ποσότητες. Εεε.. δηλαδή τα τετράγωνα δεν είναι ομοιόμορφα, δεν είναι ίδια αλλά είναι γραμμοσκιασμένα τα 2 από τα 5.

Άρα συμφωνείς με την απάντηση των παιδιών ότι είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια;

(Παύση)....Ναι, συμφωνώ.

Συναντάς ποτέ κάποια δυσκολία σε τέτοιου είδους δραστηριότητες; Οι μαθητές δυσκολεύονται;

Συχνά.

Πώς το αντιμετωπίζεις;Τι κάνεις;

Εεεεε…μμμ...Τίποτα...αυτό που κάνουμε είναι να χρησιμοποιούμε οπτικά και ακουστικά υλικά για να σχηματίσουν τα παιδιά εεε...συγκεκριμένες παραστάσεις πάνω στα κλάσματα.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Είναι λάθος, γιατί το 2/3 είναι μικρότερο της μονάδας. Προφανώς ο μαθητής είδε το 2 και το 3 σαν αριθμοί. Μετά το 1 είναι το 2 και το τοποθέτησε εκεί στην αριθμογραμμή.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Στην πέμπτη τάξη θα κάνουμε τη διαίρεση ενδεχομένως 2:3 να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης και μετά θα τοποθετήσουμε πάνω στη γραμμή.

Τι πρέπει να ξέρει ο μαθητής για να κάνει σωστά αυτή την άσκηση;

Πόσο κάνει η διαίρεση του κλάσματος.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει: «Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Παρομοίως, ο μαθητής εδώ πέρα σκέφτηκε αριθμητικά. Το αιτιολογεί κιόλας. Εεεεε…(παύση)

Πώς θα τον βοηθούσες;

Πάλι εδώ πέρα με την αντιστοιχία. Νομίζω ότι θα πρέπει να κάνουν τις διαιρέσεις τα παιδιά να βρούνε...εεε...Γιατί οι δεκαδικοί είναι πιο εύκολο να συγκριθούνε. Να βρούνε κάθε κλασματικός αριθμός με ποιον δεκαδικό ισοδυναμεί και μετά να κάνουν τη σύγκριση και να βρούνε ποιο κλάσμα βρίσκεται εκεί ανάμεσα. Δηλαδή νομίζω ότι πρέπει να κάνουμε τις μετατροπές από κλασματικούς σε δεκαδικούς. Το 1/2 είναι 0,5, τα 3/4 είναι 0,75 και να δούνε ποιοι αριθμοί είναι εκεί. Και να δούνε αν το 2/3 όντως βρίσκεται ανάμεσα σε αυτούς τους δύο.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν. Μια μαθήτρια γράφει:«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

…..(παύση) Ωραία, η απάντηση της μαθήτριας δείχνει ότι υπάρχει ένα σκεπτικό για να συγκρίνουν τα κλάσματα. Απλά ακολούθησε λίγο την πιο μακριά οδό. Τα μετέτρεψε από ετερώνυμα σε ομώνυμα. Οπότε είδε ότι υπάρχουν οι ίδιοι παρανομαστές και σύγκρινε τους αριθμητές. Μπορεί να γίνει και με αυτό τον τρόπο. Ωστόσο επειδή το 14/17 και το 3/2 μπορεί να εκτιμηθεί εεε μπορεί να εκτιμηθεί και χωρίς να μετατραπούν σε ομώνυμα, γιατί το 3/2 είναι μεγαλύτερο της ακέραιης μονάδας και το 14/17 είναι μικρότερο. Απλά η μαθήτρια θα μπορούσε να οδηγηθεί στη σύγκριση κλασμάτων χωρίς να μπει στη διαδικασία να τα μετατρέψει σε ομώνυμα.

Άρα πώς αξιολογείς αυτή την απάντηση; Ως σωστή ή λάθος;

Η απάντησή της δεν είναι λάθος. Γιατί τη δίνει σωστά. Λέει ότι είναι το 51/34 μεγαλύτερο τουτέστιν το 3/2. Δεν είναι λάθος. Απλά δεν ακολούθησε το πιο σύντομο τρόπο για να περιγράψει, να αιτιολογηθεί, να πάρει την απάντηση της.

Ωραία, εσύ έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά σε τέτοιου είδους δραστηριότητα;

Ναι, πολλές φορές δεν μπορούν να εκτιμήσουν ή εκτιμούν τυχαία ή δεν μπορούν να μπουν καν στη διαδικασία να υπολογίσουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο για να τα συγκρίνουν και επίσης πολλές φορές δεν έχουν αντιληφθεί ότι το 2/2 είναι μία ολόκληρη ποσότητα, μία ολόκληρη ακέραιη μονάδα και το 3/2 κάτι παραπάνω και το 17/17 είναι μία ακέραιη μονάδα και το 19/17 κάτι παρακάτω. Δηλαδή γενικά στα κλάσματα υπάρχει μία σύγχυση.

Εσύ όταν εντοπίσεις κάποιο παρόμοιο λάθος, τι κάνεις μέσα στην τάξη; Πώς βοηθάς αυτά τα παιδιά;

Εγώ κουβαλάω μαζί μου συνήθως κάτι πίτσες και εποπτικά υλικά. Κάθονται τα παιδιά κάτω ή σε ομαδούλες και τα βλέπουμε. Και τα και προσπαθούμε να... με βάση αυτά που θα μου πούνε να τα δούμε αν όντως ισχύουν ή όχι. Και με πραγματικές ποσότητες μπροστά τους. Γιατί είναι λίγο αφηρημένες οι έννοιες και τα παιδιά δεν έχουν εξοικείωση με τα κλάσματα. Οπότε αν δεν έχουνε και οπτική επαφή και δεν τα έχουν νιώσει θα είναι πολύ δύσκολα για αυτά να τα εκτιμήσουν στην τύχη. Αυτό.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Ωραία, η πρώτη απάντηση έχει να κάνει με την πρόσθεση κλασμάτων. Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα οπότε εδώ πέρα πρέπει να τα μετατρέψεις σε ομώνυμα. Αυτή πρόσθεσε, σύνηθες λάθος στους μαθητές του Δημοτικού, πρόσθεσε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή σαν αριθμητικά. Πράγμα που δεν είναι σωστό. Εεεε...

Τι κάνεις για να μάθουν τα παιδιά πρόσθεση κλασμάτων μέσα στην τάξη;

Να σου πω πώς το έκανα; Χρησιμοποίησα πίτσες μία πίτσα με 3/4 και μία πίτσα με 4/5 και είδαμε ότι άμα τα βάλω όλα μαζί δεν είναι ουσιαστικά, δεν έχουν την ίδια κλασματική αξία και θα πρέπει για να μπορέσουμε να τα προσθέσουμε να τα αντικαταστήσουμε με άλλα κλάσματα ισοδύναμα που να είναι ομώνυμα. Δηλαδή να έχουνε.. να τα πάμε και τα δύο σε εικοστά και αλλάξαμε τα κομμάτια τα 3/4 με κομμάτια που αντιστοιχούν σε εικοστά και τα 4/5 με κομμάτια που αντιστοιχούν σε εικοστά και τα βάλαμε όλα μαζί και είδαμε πόσο κάνουν. Και έτσι είπαμε ότι για να γίνει πρόσθεση πρέπει να τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.

Σχετικά με τη διαίρεση;

Σχετικά με τη διαίρεση, εδώ πέρα η μαθήτρια έχει αντιστρέψει και τους δύο όρους και των δύο κλασμάτων και έχει πολλαπλασιάσει. Προφανώς και αυτή δεν θυμότανε ακριβώς τη διαδικασία. Εεεεε…

Τι κάνεις στην προκειμένη περίπτωση;

Στην προκειμένη περίπτωση για τη διαίρεση νομίζω ότι μπορείς να χρησιμοποιήσεις πιο πολύ εεεε...έτσι εεεε...Να σου πω τι έκανα εγώ. Εγώ χρησιμοποίησα ας πούμε θα πάρω... πήραμε, ζωγραφίσαμε ένα πινακάκι με τρία τέταρτα. Και θέλαμε να πάρουμε ας πούμε από αυτά τα τρία τέταρτα να τα ξαναμοιράσουμε σε τρία δευτέρα. Πάλι δηλαδή χρησιμοποιήσαμε ζωγραφική στον πίνακα ή στα χαρτιά των παιδιών ή τους είχα ετοιμάσει εγώ έτοιμα φυλλάδια και με ζωγραφική….εεεε…. και είδαμε ότι άμα χωρίσουμε ένα κλάσμα σε τρία τέταρτα και από αυτά τα τρία τέταρτα θα πάρουμε τα 3/2, ουσιαστικά τι θα βγει.

Ωραία, άρα κάθε φορά που έχουν προσθέσει και διαίρεση κλασμάτων χρησιμοποιείς ζωγραφιές;

Χρησιμοποιώ εποπτικό υλικό ανάλογα με το τι από αυτά μπορεί να ταιριάξει καλύτερα σε αυτό που θέλω να διδάξω. Μπορεί να είναι κάποια υλικά που θα έχω πάρει από το εμπόριο, μπορεί να είναι ζωγραφιές, μπορεί να είναι υπολογιστής. Ανάλογα πώς μπορεί να γίνει...εεεε ανάλογα με το τι έχω βρει πιο κατάλληλο για το συγκεκριμένο διδακτικό στόχο. Αλλά στα κλάσματα ναι, χρησιμοποιώ σίγουρα οπτικό υλικό και εποπτικό.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Στο πρώτο παράδειγμα θα πάρουμε….εντάξει μπορούμε να το κάνουμε με διάφορα υλικά εγώ τώρα θα χρησιμοποιήσω πάλι ζωγραφιές. Μπορείς να το πάρεις και με σοκολάτα να την κόψεις στη μέση και να θέλει να πεις ότι θέλω να πάρω ουσιαστικά τα 3/5 από τη μισή σοκολάτα άρα να κόψεις τη σοκολάτα στη μέση και το μισό κομμάτι να το κόψεις πάλι στα πέντε και να επιλέξεις τα τρία και να δεις ουσιαστικά ότι παίρνεις από τα συνολικά κομμάτια τα τρία από τα δέκα. Μπορείς με κάποια ζωγραφική με κάποια φρούτα ή οτιδήποτε θεωρείς εσύ ότι μπορούν τα παιδιά να το καταλάβουν και ότι έχεις πρόσβαση και εσύ. Με απλά υλικά επίσης και μπορείς και με τον υπολογιστή να τους το δείξεις. Εεεεε...

Στη διαίρεση;

Στη διαίρεση με παρόμοιο τρόπο. Ουσιαστικά πάλι με οπτικοποίηση με κάποιο τρόπο. εεεε…. θέλουμε να πάρουμε, ας πούμε, θέλουμε τα 5/6 να τα μοιράσουμε σε 1/2. Θα πάρουμε μία ποσότητα, ας πούμε τώρα το παράδειγμα της ζωγραφιάς. Την κόβουμε στη μέση την ποσότητα το 1/2 ουσιαστικά που θέλουμε να μοιράσουμε και θα πάρουμε και θα πάρουμε τα πέντε από τα έξι του 1/2 και βλέπουμε τα πέντε από τα έξι του 1/2 είναι τα 5/12. Άρα εδώ έχει τύχει τα παιδιά τα ίδια ουσιαστικά να καταλάβουν να τους πω «παιδιά πώς έχουμε οδηγηθεί εδώ πέρα;» Εεεεεεε….. συγνώμη δεν είναι... τι είπα τώρα; 5/6 Χ…... Ναι, εντάξει. Εδώ έγινε ένα μπέρδεμα στη διαίρεση. Εεεεε μισό λεπτό…. (παύση) αυτό πρέπει λίγο να το σκεφτώ δεν το έχω μελετήσει στη διαίρεση…. Άρα αυτό που θα μπορούμε να σχεδιάσουμε 5/6 μιας ποσότητας και από τα 5/6 να τα μοιράσουμε στη μέση και να πάρουμε ουσιαστικά τα μισά. Άρα 10/6 κομματάκια βγαίνουνε ζωγραφισμένα ή κομμένα ή οτιδήποτε. Και να πούμε με τα παιδιά «Πώς μπορούμε από το 5/6:1/2 να πάμε στο 10/6;». Και να αντιληφθούν ουσιαστικά ότι η διαίρεση σημαίνει αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και πολλαπλασιάζω. Πάλι δηλαδή με μια σχηματοποίηση μπορεί να γίνει αυτό. Και μπορείς να βάλεις και πάρα πολλές έτσι από ζωγραφιές από κατασκευές να κάνουν τα παιδιά με διαιρέσεις για να μπορέσουν σιγά-σιγά να το αντιληφθούνε.

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα; Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά γενικότερα πάνω στα κλάσματα; Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Αυτό που προσπαθώ να ενσωματώσω μέσα στη διδασκαλία των κλασμάτων, το οποίο το έχουμε αναφέρει είναι να χρησιμοποιούμε πάρα πολλά υλικά και πάρα πολλά παιχνίδια. Να το κάνουμε πιο παιγνιώδης μορφή. Είτε να χρησιμοποιούν τους υπολογιστές που μπορείς να βρεις τους υπολογιστές μέσα καλές εφαρμογές με κλάσματα. Ούτως ώστε να έχουν μία αλληλεπίδραση και μία τριβή με αυτά. Για παράδειγμα, τα ισοδύναμα κλάσματα που είναι δύσκολο κεφάλαιο για τα παιδιά. Εχω βρει ένα παιχνίδι το Bingo, το οποίο το παίζουν σε ομάδες και πρέπει να σχηματίσουν τέλος πάντων, πρέπει να εντοπίσουν από έναν πίνακα τα ισοδύναμα κλάσματα. Μέσα από κει από διάφορες δραστηριότητες τα παιδιά σιγά-σιγά αυτοματοποιούν κάποιες διαδικασίες. Όμως για να μπορέσουνε να τα αντιληφθούν τα κλάσματα νομίζω ότι το σημαντικό είναι λίγο να το νιώσουν. Δηλαδή να τα δουν, να αλληλεπιδράσουν μαζί τους. Γιατί σαν έννοιες είναι αφηρημένες και δύσκολες όποτε θέλει οπτικοποίηση, θέλει βίωμα, θέλει να παίξουμε πολλές και διαφορετικές δραστηριότητες για να μπορέσουν να έχουν περισσότερες εικόνες και παραστάσεις πάνω στα κλάσματα και να εξοικειωθούν.

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Όχι.

Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Καλή επιτυχία!

Ερωτώμενος 2

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 33 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Ακαδημίας

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Ναι είναι λάθος το δεύτερο.

Πώς σκέφτηκε;

Αλλά αυτός πώς σκέφτηκε τώρα;

Ναι.

Κανονικά εγώ θα έλεγα δηλαδή ότι πρέπει να κυκλώσει όλο μαζί. Αυτό σκέφτηκε το ένα τρίτο της μιας σοκολάτας. Σκέφτηκε τη μια σοκολάτα και όχι το όλο. Αυτό το λάθος το κάνουν πάρα πολύ συχνά. Γιατί περιορίζονται μόνο στη μία μονάδα σαν ακέραιη μονάδα. Και εκεί είναι το πρόβλημα τώρα στα κλάσματα. Δεν μπορούν να καταλάβουν ποια είναι η ακέραιη μονάδα και ποιο είναι το ολόκληρο. Και εδώ σαν ολόκληρο βλέπει μόνο τη μία σοκολάτα, δεν το βλέπει όλο γενικό. Και αυτό γίνεται πάρα πολύ πιο συχνά από κάποιο άλλο λάθος. Ναι, πάρα πολύ συχνά.

Πώς τους βοηθάς για να το καταλάβουν;

Ποιο είναι το θέμα τώρα; Το ότι τα παιδιά ακόμη και καλοί μαθητές δυσκολεύονται πάρα πολύ στο να καταλάβουν ποιο είναι το όλο. Δηλαδή πολλές φορές εμείς θα επιμένουμε σε μία τάξη όπως είναι και η Τετάρτη σε μία μονάδα που να φαίνεται πιο...να είναι πιο διακριτή. Δηλαδή να μην είναι έτσι όλα μαζί να μην... κατάλαβες; Πρέπει να αθροίσεις να βρεις μετά όλα τα κομμάτια, πιο πολύ συχνά έτσι τα κάνω εγώ, να διαιρέσουμε όσο λέει ο παρανομαστής. Μόνο έτσι θα το καταλάβουν. Δεν μπορούν να το καταλάβουν δηλαδή έτσι χωριστά ένα ένα. Δηλαδή κατάλαβες μετράω όλη την ποσότητα και κάνω πράξεις δίπλα εγώ. Εγώ έτσι το κάνω.

Τι πρέπει να καταλάβουν οι μαθητές;

Ποιο είναι το ολόκληρο.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει το 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Εδώ είναι μεγάλη δυσκολία για τα παιδιά. Πάρα πολύ μεγάλη δυσκολία. Δηλαδή δεν αντιλαμβάνονται τα παιδιά ότι δεν ... καταρχάς εντάξει λάθος έτσι. Δεν αντιλαμβάνεται ότι ανάμεσα από το 2/5 και το 3/5 υπάρχουν πάρα πολλοί άλλοι αριθμοί πάρα πολλά άλλα κλάσματα. Τι κάνω τώρα εγώ; Εεεεε μεγαλώνω τον παρονομαστή δηλαδή βάζω μηδενικά αυτό τους εξηγείς ότι στα κλάσματα το μηδέν δεν αλλάζει την αξία των αριθμών. Θα βάλω 20/50 μπροστά και βρίσκουν ανάμεσα μετά πως υπάρχουν 21 22 23 μέχρι να φτάσουν στα 30/50. Έτσι μόνο. Δεν μπορούν να το καταλάβουν αλλιώς. Και πιστεύω ότι είναι πάρα πολύ δύσκολο αυτό να το καταλάβουν. Γιατί μέχρι τώρα τα παιδιά αντιμετωπίζουν αριθμούς ρε παιδί μου ολόκληρους ακέραιους. Δεν μπορούν τώρα αυτό εκεί να το καταλάβουν ότι ανάμεσα από τα 2/5 και 3/5 υπάρχουν τόσο πολλοί αριθμοί. Επειδή υπάρχουν 500στα, υπάρχουν 5.000στα δηλαδή τον παρονομαστή πρέπει να μεγαλώσει πάρα πολύ. Αυτό δεν το καταλαβαίνουν.

Η μαθήτρια πώς σκέφτηκε;

Σκέφτηκε σύμφωνα με τους ολόκληρους ακεραίους.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Είναι λάθος. Τι κάνουμε τώρα; Αυτό που σκέφτονται τώρα αυτά είναι μόνο τον αριθμητή και μόνο τον παρονομαστή. Οπότε πρέπει να καταλάβουμε τα κλάσματα για να μπουν στη σωστή σειρά πρέπει να είναι ομώνυμα. Να έχουν τον ίδιο παρονομαστή για να μπορέσω να τα συγκρίνω. Στην Τετάρτη τάξη όμως είναι δύσκολο τώρα αυτό. Δεν κάνεις ομώνυμα. Πρέπει να καταλάβουν δηλαδή ότι δεν είναι ίδια αξία του κλάσματος ανάλογα με τον παρονομαστή που έχει.

Άρα στην τετάρτη τάξη θα δουλέψεις την αξία;

Ναι δεν….θα κάνω δηλαδή δίπλα που σου είπα με ίσες σοκολάτες θα μοιράσω σε τέταρτα, θα μοιράσω σε τρίτα, θα μοιράσω σε όγδοα και θα αρχίσουν να παίρνουν, να σκιάζουν το κάθε μέρος για να καταλάβει ποιο είναι ποιο. Πιο πρακτικά. Δεν μπορώ να το κάνουν ομώνυμα δηλαδή δεν κάνουμε εδώ ομώνυμα για να το καταλάβουνε.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Δεν έχει καταλάβει...έχει πάρει το τρίγωνο ίδιο με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Εννοείται ότι είναι λάθος. Για να βρουν τώρα τα τέταρτα συνήθως κόβουμε στη μέση και τώρα που τους κάνω εγώ...(παύση)Ας πούμε πρέπει να καταλάβουν σαν όλο τώρα το σχήμα και να το κόψουν στη μέση και ξανά στη μέση. Δηλαδή τον σταυρό χρησιμοποιούμε τώρα εδώ. Παρά τις λωρίδες. Χρησιμοποιώ πιο πολύ το σταυρό για να καταλάβουν την ίση αξία, γιατί και στον πίνακα που το δείχνεις, παρατηρούν τα περισσότερα και την παραμικρή λεπτομέρεια δηλαδή αν κόψεις λίγο πιο δω ή λίγο πιο κει θα το καταλάβω στη λωρίδα και σου λένε αυτό δεν είναι ίσο με εκείνο. Για αυτό εγώ το χρησιμοποιώ τον σταυρό εδώ, για να βρουν το τέταρτο.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν παρακάτω η δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Εντάξει επειδή τους έχουμε μάθει τώρα ότι τα πέμπτα πρέπει να είναι ίσα με μία ακέραιη μονάδα κομμένη σε πέντε ίσα μέρη οπότε για αυτό το έχουν...το βρίσκουνε λάθος. Δηλαδή θα τους έλεγα για λάθος τώρα στην Τετάρτη δημοτικού. Εννοείται. Αν έλεγαν δηλαδή ότι τα 2/5 είναι αυτά του όλου.

Του όλου;

Θεωρούσαν όλο δηλαδή όλα τα σχήματα μαζί.

Συμφωνείς με την απάντηση των παιδιών;

Ναι ναι.

Γενικά τα παιδιά τι δυσκολία βρίσκουνε σε κάτι τέτοια παραδείγματα;

Καταρχάς τα παιδιά τα δικά μου μπορεί και να μη το καταλάβαιναν αυτό, να πω την αλήθεια. Δηλαδή αν τους έλεγες τώρα ότι αυτά είναι 5 σχήματα όποτε πάρε εσύ τα δύο πέμπτα δε θα σου πω...όντως θα σκίαζαν τα 2/5. Μπορεί να το έκαναν αυτό σαν λάθος. Δε θα καταλάβαιναν δηλαδή ότι δεν είναι ίση, ίσα μοιρασμένη δηλαδή οι επιφάνειες. Δυσκολεύονται πάρα πολύ στα κλάσματα τα παιδιά.

Πώς την αντιμετωπίζεις;

Με παραδείγματα στην τάξη.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Εντάξει, είναι λάθος. Εδώ έχουμε πρόβλημα τώρα με την ακέραιη μονάδα και είναι κάτι που δεν το καταλαβαίνουν. Θα καταλάβουν την ολόκληρη σοκολάτα σαν μία ακέραιη. Θα καταλάβουνε ένα ψωμί που τους λέω καμιά φορά να του κόψουν ή μια πίτσα πιο εύκολο που την τρώνε. Αλλά αν τους πεις να κόψουν έναν αριθμό στα 2/3 ή στο 1/3 δε θα το καταλάβουν. Δεν καταλαβαίνουν ότι ο αριθμός...πότε είναι ανάμεσα και πότε υπερβαίνει την μονάδα ο μαθητής.

Γιατί έβαλε εκεί το κλάσμα; Τι πιστεύεις;

Πιστεύω ότι πήρε 1 2 3 4 κι έβαλε τα δύο του τρίτα ή σκέφτηκε 1 2 3 την γραμμή και πήρε τα δύο από τα τρία κομμάτια, τα ίσα μέρη.

Και για να το καταλάβουν οι μαθητές που θα μπει το κλάσμα τι κάνεις συνήθως;

Θα πρέπει να καταλάβουν τώρα εδώ το ότι….θα λέω ότι τα 3/3 είναι μία ακέραιη μονάδα είναι το ένα οπότε τα δύο τρίτα είναι κάτω από μια ακέραιη μονάδα. Δηλαδή για να υπερβώ το ένα, πρέπει να υπερβώ να 3/3.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Την αξία του κλάσματος.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Εννοείται ότι αυτό είναι λάθος πάλι. Τι κάνει τώρα; Παίρνει αριθμητή αριθμητή βάζει ανάμεσα τον ενδιάμεσο και παίρνει παρονομαστή παρονομαστή και βάζει τον ενδιάμεσο.

Πώς το βοηθάς να καταλάβει ποιο κλάσμα είναι ανάμεσα;

Να εδώ τώρα θα κάνουμε μία αριθμογραμμή.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.

Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Συγκρίνουν τα δύο και σκέφτηκαν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο; Δε μου έχει συμβεί αυτό..(γελάει)

Συνήθως πώς συγκρίνουν;

Δεν θα χρησιμοποιήσουμε πότε 14/17. Όχι, είναι τελείως άσχετος αριθμός σε αυτή την ηλικία. Θα χρησιμοποιούμε το 1/3 ή το 2/4. Δε χρησιμοποιούμε τέτοιο κλάσμα, γιατί δεν μπορούν να βρουν και ένα ισοδύναμο τώρα εδώ. Γιατί πολλές φορές με τα ισοδύναμα τα βοηθάς. Ενώ τώρα δεν θα μπορέσουν να βρουν αυτά το ισοδύναμο εδώ.

Δυσκολεύονται στις συγκρίσεις οι μαθητές;

Ανάλογα τα κλάσματα. Στα μικρά όχι στα μεγάλα ναι.

Πώς το αντιμετωπίζεις;

Δουλεύω την αξία εδώ.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Έχει κάνει λάθος.

Πώς σκέφτηκε η μαθήτρια;

Σύμφωνα με τους ολόκληρους αριθμούς στην πρόσθεση. Στη διαίρεση ξέχασε τον αλγόριθμο.

Πώς θα την βοηθούσες;

Έχω καιρό να κάνω τώρα εγώ...δεν κάνω τώρα πράξη...εδώ πέρα...σε μεγάλες τάξεις. Στις πιο μεγάλες τάξεις κάνουν πολύ...πιο πολλή εξάσκηση και δουλεύω πιο πολύ να σου πω τώρα που τα λέω κόλπα...έναν καθιερωμένο τρόπο...κανόνες. Δηλαδή θα πρέπει να μάθουμε ένα καθιερωμένο τρόπο που κάνουμε ένα σύστημα χωρίς να κάνουν καμία ιδιαίτερη ανάλυση. Πρέπει να καταλάβουν το πρώτο κλάσμα το αφήνω όπως είναι και αντιστρέφω το δεύτερο και κάνω πολλαπλασιασμό. Δεν κάνουμε κάτι τώρα πάλι εδώ παραδείγματα με σοκολάτες και με την ακέραιη μονάδα.Τώρα δηλαδή πρέπει να ξέρουν να το κάνουν.

Δηλαδή να ξέρουν απέξω τον αλγόριθμο;

Ναι ναι. Εγώ έτσι πιστεύω στις μεγάλες τάξεις.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Τώρα όμως που δεν έχω ασχοληθεί...τώρα έχουμε προβλήματα τέτοια εδώ... γιατί νόμιζα ….Να βρουν τα 3/5 ας πούμε από ένα μισό με ένα τετράγωνο. Να ξέρουν δηλαδή από τη μία μονάδα να πηγαίνω στα πολλά με τον βασικό τρόπο που κάνουν τον πολλαπλασιασμό. ….(παύση)

Πρόβλημα διαίρεσης;

Να σου πω την αλήθεια δεν έχω ασχοληθεί. Πιστεύω πάλι θα είναι….να βρω το ένα από τη μεγάλη ποσότητα και βρίσκω το...Έχω το 5/6 ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου ας πούμε. Το έχω κόψει σε κομμάτια και ψάχνω να βρω το ένα δεύτερο. Να διαιρέσω σε ένα στο μισό.

Τι κάνεις για να καταλάβουν οι μαθητές τα κλάσματα γενικά;

Γενικά τα κλάσματα με σχηματισμούς και τα λοιπά. Για παράδειγμα ένα τετράγωνο το καταλαβαίνουν, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έναν κύκλο τον καταλαβαίνουν πιο εύκολα. Σκιάζουν από μόνα τους. Τους δίνω σχήματα σε Α4 να το κόψουν στη μέση ξανά πάλι στη μέση να κάνουν το τέταρτο. Έτσι για να βρουν το όγδοο και μετά τα κομματάκια μεταξύ τους τα ενώνουν όλα μεταξύ τους και τα κολλάνε πάνω σε ένα Α4 που ολόκληρο και βρίσκουν πόσα καλύπτουν. Τα κάνω πρακτικά.

Ευχαριστώ πάρα πάρα πολύ!

Ερωτώμενος 3

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 26 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Είναι πολύ πιθανό να δοθούν και οι τρεις απαντήσεις. Η πλειοψηφία των μαθητών θα δώσει την πρώτη απάντηση στην Πέμπτη τάξη. Εεεεε...στις μικρότερες τάξεις οι μαθητές θα δώσουν την δεύτερη και την τρίτη απάντηση κατά πλειοψηφία. Ενδεχομένως θα έδιναν και μία τέταρτη απάντηση που δεν μπορώ να σκεφτώ τώρα.

Από τις απαντήσεις που δόθηκαν ποια εσύ θα βαθμολογούσες ως λάθος;

Σαφώς η δεύτερη.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής και επέλεξε δύο κομμάτια στη δεύτερη απάντηση;

Εεεεεε….(παύση). Ζητάει το 1/3 και δέχεται το 1/3 από τη μία σοκολάτα. Έχει κάποια σύγχυση. Βλέπει μόνο την πρώτη σοκολάτα και αγνοεί όλες τις υπόλοιπες. Δεν είναι σε θέση να επεξεργαστεί εεε…(παύση) το σύνολο.

Πώς θα το βοηθούσες για να το καταλάβει;

Σε μία μικρή τάξη θα έδινα περισσότερες πληροφορίες. Θα μετράμε πόσα είναι τα κομμάτια Τα συνολικά κομμάτια της σοκολάτας εεεε θα προσπαθούσαμε να βρούμε πόσο είναι το 1/3 στο σύνολο όλων των κομματιών και μετά θα βρίσκαμε το αποτέλεσμα πάνω στο σχήμα.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Αναφέρεται στο σύνολο.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Εννοείται είναι λάθος. Η μαθήτρια εδώ σκέφτηκε μόνο τον αριθμητή, αγνόησε τελείως τον παρονομαστή.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Προφανώς, με μία αριθμογραμμή. Πιστεύω..αυτό μου έρχεται τώρα στο μυαλό. Ως μία πρόχειρη απάντηση.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Πέμπτη δημοτικού έτσι;

Ναι.

Εεε..(παύση). Λάθος, θα τους θύμιζα ότι έπρεπε να κάνουν τα κλάσματα ομώνυμα και μετά να κάνουν την κατάταξη των κλασμάτων από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

Δηλαδή ο Γιώργος και η Μαρία πώς σκέφτηκαν; Γιατί έκαναν αυτή τη διάταξη;

Ο Γιώργος επεξεργάστηκε μόνο τους αριθμητές ενώ η Μαρία μόνο τους παρονομαστές. Αγνοούσαν ότι τα κλάσματα δεν μπορούσαν να συγκριθούν αφού δεν ήταν ομώνυμα.

Τι πρέπει να καταλάβουν οι μαθητές για να λύσουν σωστά την άσκηση;

Για να κάνουν την διάταξη πρέπει τα κλάσματα να είναι ομώνυμα.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

….(παύση). Πολλές φορές συμβαίνει αυτό τα παιδιά να θέλουν να δώσουν με σχήμα την απάντηση.

Η απάντηση αυτή εδώ είναι σωστή;

Ναι, εγώ θα το έπιανα σωστά. Ναι, ναι.

Υπάρχει περίπτωση να αποτυπώσουν διαφορετικά το κλάσμα;

Ναι, βεβαίως υπάρχει περίπτωση. Να είναι όλα τα σχήματα τα ίδια.

Αντιμετωπίζουν δυσκολίες τα παιδιά σε τέτοιου είδους ασκήσεις;

Νομίζω όχι...βέβαια αυτήν την απάντηση θα την έδιναν...αλλά όχι η πλειοψηφία των μαθητών. Μόνο ένας, δύο μαθητές το πολύ, που έχουν εξοικειωθεί πολύ με τα κλάσματα.

Συνήθως τι απαντήσεις δίνουν;

Πιο συγκεκριμένες. Να είναι όλα τα σχήματα ίδια και πολλές φορές τα σκιαγραφούν και με το ίδιο χρώμα.

Γιατί δεν δυσκολεύονται τα παιδιά σε τέτοιες ασκήσεις;

Μμμμμ δεν ξέρω. Δεν το έχω σκεφτεί ποτέ.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Πολύ πιθανό να έδιναν αυτήν την απάντηση με την δικαιολογία που δίνουν εδώ τα παιδιά ότι δεν είναι ίδια. Τα τετράγωνα δεν είναι ίδια άρα δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Άρα συμφωνείς με την απάντηση των παιδιών ότι είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια;

Συμφωνώ. Εφόσον τα 2/5 δεν είναι ίδια. Το εμβαδόν των τετραγώνων δεν είναι ίδιο.

Έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν οι μαθητές;

Ναι, να μην καταλάβαιναν αυτή την ερώτηση για παράδειγμα.

Για να το καταλάβουν εσύ τι θα έκανες στους μαθητές σου;

Θα έκανα παραδείγματα γύρω από την σωστή απάντηση. Πολύ πιθανό να χρησιμοποιούσαμε και χαρτόνια για να δουν ακριβώς τη διαφορά.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Αυτή είναι η απάντηση του μαθητή;

Ναι.

Είναι λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Πάλι έχει λάβει υπόψη του τον αριθμητή.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα κάναμε πολλά παραδείγματα με την αριθμογραμμή. Πρώτα μόνο με κλασματικούς αριθμούς. Αριθμογραμμές μόνο με δεκαδικούς και αριθμογραμμές μόνο με ακέραιους.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Να καταλάβει ότι το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Πάλι υπάρχει σύγχυση. Αφού ξέρει ότι όταν κάνουμε σύγκριση κλασμάτων πρέπει να βρούμε ομώνυμα. Σίγουρα αυτό δεν το έχει ξεχωρίσει στο μυαλό του. Για αυτό και το βρήκε λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Είδε μόνο τους αριθμούς.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Θα του υπενθύμιζα να τα κάνει ομώνυμα.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.

Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Εεεε…(παύση). Καλά σκέφτηκε. Είναι σωστό.

Ωραία, εσύ έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά σε τέτοιου είδους δραστηριότητα;

Ναι, ναι, όσο πιο μικρή τάξη τόσο πιο μεγάλες οι δυσκολίες. Στις μικρές τάξεις δεν μπορούν να περάσουν από το φανταστικό στο συγκεκριμένο. Τα παιδιά θέλουν να είναι πιο συγκεκριμένο αυτό που τους ζητάμε. Ειδικότερα όταν μιλάμε για κλάσματα. Όταν δώσουμε αριθμούς που δεν συνοδεύονται από ένα αντικείμενο δηλαδή αν πω σύγκρινε το 2/3 με το 8/3 τους είναι πάρα πολύ δύσκολο. Ενώ αν τους πω τα 2/3 μιας σοκολάτας με τα 8/3 μιας άλλης σοκολάτας να ξέρουν συγκεκριμένα για τι μιλάμε τότε είναι πιο εύκολα.

Πώς βοηθάς αυτά τα παιδιά;

Στις μικρές τάξεις χρησιμοποιώ υλικά. Είναι απαραίτητο. Στις μεγάλες όχι. Πρέπει να ξέρουν τον κανόνα.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Και πάλι εδώ δεν έχουν καταλάβει ότι στην πρόσθεση τα κλάσματα πρέπει να είναι ομώνυμα. Έτσι μόνο θα μπορέσουμε να κάνουμε την πρόσθεση. Στη δεύτερη πάλι εδώ έχει κάνει λάθος. Έχει αντιστρέψει τους όρους του πρώτου κλάσματος.

Πώς σκέφτηκε η μαθήτρια;

Στη πρόσθεση όπως στους κανονικούς αριθμούς ενώ στη διαίρεση δεν ήξερε τον κανόνα.

Τι κάνεις για να μάθουν τα παιδιά πρόσθεση κλασμάτων μέσα στην τάξη;

Πρέπει να καταλάβουν ότι τα κομμάτια πρέπει να είναι όμοια. Θα πρέπει να τα κάνουν ομώνυμα τα κλάσματα και μετά να προσθέσουν μόνο τους αριθμητές. Τους υπενθυμίζω την τακτική που ακολουθούμε.

Σχετικά με τη διαίρεση;

Πρέπει να ξέρουν τον κανόνα. Αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος. Πρέπει κάποια πράγματα να τα έχουν στο μυαλό τους ως κανόνες για να μπορέσουν να λύσουν. Δεν μπορούμε κάθε φορά να ψάχνουμε να αποδεικνύουμε και μετά να πάμε να το λύσουμε. Πρέπει να το θυμούνται, για να λύσουμε την άσκηση.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Να φτιάξω πρόβλημα τώρα; Αυτό εννοείς;

Ναι ένα παράδειγμα που θα χρησιμοποιούσες.

Εεεε… (παύση). Ένα παιδί τρώει τα 3/5 του συνόλου του φαγητού του στο μισό στο 1/2 της ημέρας. Ολόκληρη την ημέρα πόσο θα έτρωγε;

Στη διαίρεση;

Εεεεε.(παύση). Τα 5/6 μιας τιμής που θα δώσω στους μαθητές εεεεε είναι το…. μπλόκαρα λίγο.

Δεν πειράζει. Πάρε το χρόνο σου.

Τα 5/6 των 100 ευρώ είναι το μισό της τιμής ενός φορέματος με έκπτωση. Πόσο είναι η συνολική του η κανονική του τιμή;

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα; Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά γενικότερα πάνω στα κλάσματα; Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Πιστεύω όσο πιο μικρή τάξη τόσο πιο δύσκολο είναι να κατανοήσουν τα κλάσματα τα παιδιά. Στις μικρές τάξεις για παράδειγμα στην τρίτη τάξη μπορούν να κατανοήσουν πολύ απλά πράγματα όπως ποιο είναι το 1/2, ποιο είναι το 1/3 και αυτό πάνω σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Όχι σαν αριθμούς. Χρησιμοποιείς πολύ εποπτικό υλικό και συγκεκριμένα αντικείμενα. Απλά παραδείγματα πολύ απλά και με πράγματα που χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή. Για να καταλάβουν τι είναι τα κλάσματα. Τώρα όσον αφορά τις πράξεις πρέπει να μάθουν τον κανόνα. Βέβαια πρέπει να έχουν καταλάβει το κλάσμα να μην τα κάνουν μηχανικά. Τα παιδιά στην πέμπτη τάξη αρχίζουν και εμπεδώνουν τα κλάσματα. Αυτή είναι η άποψη μου. Να σου πω και κάτι τελευταίο; Τα κλάσματα είναι πολύ δύσκολα. Εκεί που πιστεύουμε ότι τα παιδιά έχουν καταλάβει τι είναι τα κλάσματα μερικές φορές διαπιστώνουμε ότι οι απαντήσεις τους είναι τυχαία σωστές. Στην πέμπτη τάξη όμως θεωρώ ότι οι μαθητές έχουν καταλάβει τι είναι τα κλάσματα.

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Όχι.

Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Καλή επιτυχία!

Ερωτώμενος 4

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 25 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Μάλιστα. Λάθος, θεωρώ τη δεύτερη απάντηση. Ο μαθητής πήρε το ένα τρίτο της μίας σοκολάτας, δεν αξιολόγησε τις άλλες σοκολάτες. Αγνόησε το πλήθος.

Πώς θα τον βοηθούσες για να το καταλάβει;

Θα του έλεγα ότι έχουμε τέσσερις σοκολάτες και θα πρέπει να πάρουμε ένα μέρος από κάθε σοκολάτα.

Δηλαδή τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής για να το κάνει σωστά μόνος του;

Πρέπει να καταλάβει το όλο πρώτα από όλα. Και ότι είναι παραπάνω από ένα. Να βλέπει το σύνολο. Βέβαια να πω είναι λίγο δύσκολο να το καταλάβουν τα παιδιά έτσι νιώθω. Ξέρω εγώ;

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Οι μαθητές δυσκολεύονται πάρα πολύ να καταλάβουν τους αριθμούς κάτω από το 1. Να δουν δηλαδή ότι το 2/5 είναι 0,5 δηλαδή μικρότερο από τη μονάδα. Δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα σε αυτούς εδώ τους δύο. Αυτό έχω νιώσει.

Δηλαδή ο μαθητής πώς σκέφτηκε και έβαλε το 2,5/5;

Από ότι αντιλαμβάνομαι τι έβαλε; Δεν μπορώ να καταλάβω.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Θα πρέπει να αντιληφθούν πρώτα ότι το κλάσμα είναι μία διαίρεση. Αυτό το πράγμα. Να κάνουν τη διαίρεση, να βρουν πόσο είναι, να βρουν τον δεκαδικό αριθμό που είναι ανάμεσα και μετά να το κάνουν κλάσμα. Να κάνουν αυτήν την ακολουθία. Μόνο έτσι θεωρώ.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο στο

μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η σύγκριση αριθμών που έκανε ο Γιώργος και η Μαρία, πρώτα από όλα οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι όταν βλέπουν ένα κλάσμα είναι κοντά στο μηδέν, στο μισό ή στο ένα. Μπορεί να το αντιληφθείς με μία πρώτη ματιά ότι για παράδειγμα το 3/8 είναι περίπου στη μέση και το 1/4 είναι κοντά στο μηδέν. Αλλά για να συγκριθούν τα κλάσματα πρέπει να γίνουν ομώνυμα. Για να είμαστε σίγουροι για το αποτέλεσμα.

Δηλαδή ο Γιώργος και η Μαρία πώς σκέφτηκαν; Γιατί έκαναν αυτή τη διάταξη;

Ο Γιώργος σκέφτηκε με τον αριθμητή ενώ η Μαρία σκέφτηκε με τον παρονομαστή. Αλλά δεν έχει λογική.

Πώς θα τους βοηθούσες;

Θα τους έλεγα ότι πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα ή να σκεφτούν πού βρίσκονται τα κλάσματα κοντά. Αν και εδώ δεν βοηθάει αυτό.

Τι πρέπει να καταλάβει το παιδί;

Τη διαδικασία. Πρέπει να τα κάνει ομώνυμα.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Μάλιστα. Δεν αντιλαμβάνομαι και εγώ... Εγώ θα τα χώριζα σε ίσα. Αυτός χώρισε δύο ορθογώνια και δύο τρίγωνα και πήρε τα δύο από τα τέσσερα. Είναι λάθος, εγώ θεωρώ, γιατί πρέπει να είναι όμοια τα μέρη. Τώρα πώς σκέφτηκες θα μου πεις. Πώς σκέφτηκε αυτός ε; Λοιπόν τι σκέφτηκε; χώρισε...πολύ σωστά ξεκίνησε αλλά μετά το έχασε. Το χώρισε διαφορετικά. Δεν ξέρω τι άλλο να σου πω εδώ πέρα δεν μπορώ να αντιληφθώ κάτι άλλο.

Πώς θα το βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα του υπενθύμιζα ότι πρέπει να τα χωρίσουμε σε ίσα κομμάτια. Τα κομμάτια να είναι όμοια. Αυτό.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν παρακάτω η δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Διαφωνώ. Είναι σωστή η πρόταση αλλά αυτά εδώ πέρα είπαν δεν είναι τα ίδια. Τα 2/5 από τα ίσα μέρη των τετραγώνων για αυτό θεώρησαν ότι είναι λανθασμένη, όχι του συνόλου. Δεν ξέρω πώς να στο διατυπώσω.

Άρα διαφωνείς με την απάντηση των παιδιών ότι είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια;

Ναι, διαφωνώ.

Πώς θα βοηθούσες τους μαθητές να το καταλάβουν ότι αυτό εδώ είναι σωστό;

Διαβάζοντας πολύ καλύτερα την εκφώνηση. Δίνοντας βαρύτητα εκεί τι ζητάει κάθε φορά. Αυτό. Είναι αγχωτικό. Μου φαίνεται δύσκολο.

Μην αγχώνεστε. Συζήτηση κάνουμε σε αυτά που κάνετε κάθε μέρα. Συνεχίζουμε;

Ναι.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Είναι λάθος, γιατί δεν έχει αντιληφθεί ότι είναι μικρότερο της μονάδας. Αυτός τώρα πώς σκέφτηκε; Σκέφτηκε ότι θα είναι κάπου ανάμεσα στο 2 και στο 3 και το έβαλε κάπου εκεί. Έτσι αξιολόγησε ότι έπρεπε να μπει.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Κάνοντας διαίρεση να δει τον 2/3 σαν δεκαδικό. Αυτό θα τον βοηθούσε. Θα μπορούσαμε να κάνουμε και ένα σχήμα ώστε να αντιληφθεί έτσι σχηματικά για να αντιληφθεί ότι το 2/3 είναι μικρότερο από το όλο, από τη μονάδα. Αυτούς τους δύο τρόπους.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Ότι το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Εγώ δεν μπορώ να αντιληφθώ αν το 2/3 είναι ανάμεσα σε αυτά τα δύο. Θα πρέπει ή να το κάνω σχηματικά ή να το κάνω με διαίρεση όπως είπα και πριν. Για να αντιληφθώ ποιος αριθμός είναι...θέλουμε κλάσμα όμως ε; Έναν αριθμό σε κλάσμα εεεε ή θα συγκρίνω. Επίσης μπορώ να κάνω τα κλάσματα ομώνυμα για να μπορέσω να βρω ποιο είναι ανάμεσά τους.

Όμως σχετικά με το μαθητή συμφωνείς με αυτά που λέει με την απάντησή του;

Όχι, αυτό σκέφτηκε γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4. Δεν έχει καμία σχέση το κλάσμα με αυτή τη σκέψη που κάνει ο μαθητής.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Όπως σου είπα πριν.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.

Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34».

Αξιολόγησε την απάντηση.

Κάτσε να δω μήπως είναι σωστό….(παύση). Ναι είναι σωστή.

Ωραία, εσύ έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά σε τέτοιου είδους δραστηριότητα;

Το να βρουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο πρώτα από όλα. Υπάρχουν δύο τρεις μέθοδοι και παρόλα αυτά δυσκολεύονται να το βρουν. Στο να αντιληφθούν μετά ότι θα το πολλαπλασιάσουν το καπελάκι που λέγαμε. Αν και το θεωρώ ως η καλύτερη λύση παρά ο πολλαπλασιασμός του αριθμητή με τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό. Ναι έχουν δυσκολίες αρκετές. Στην πρόσθεση, στην σύγκριση, στη διαίρεση.

Εσύ όταν εντοπίσεις κάποιο παρόμοιο λάθος, τι κάνεις μέσα στην τάξη; Πώς βοηθάς αυτά τα παιδιά;

Στη σύγκριση σίγουρα σχήματα. Να το αντιληφθούν μόνο μέσα από τα σχήματα. Έτσι αντιλαμβάνεσαι τα κλάσματα. Εεεε και μετά γίνεται συνήθεια μόνο έτσι μόνο έτσι. Βέβαια αυτό στην τρίτη δημοτικού όχι στην πέμπτη. Στις μεγαλύτερες τάξεις δεν μπαίνεις σε τέτοιες διαδικασίες. Αυτή η ερώτηση είναι σωστή; Νιώθω ότι δεν έχω απαντήσει σε αυτή την ερώτηση.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λάθος και οι δύο. Η μαθήτρια πρόσθεσε, όπως τους φυσικούς, αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές παρανομαστές, χωρίς να κάνει ομώνυμα τα κλάσματα. Η δεύτερη έκανε πολλαπλασιασμό αλλά αντέστρεψε και τα δύο κλάσματα. Δεν ήξερε τη διαδικασία. Δύσκολο όμως να αντιληφθούν τη διαίρεση οι μαθητές. Ότι δηλαδή αντιστρέφουν και αντί για διαίρεση κάνουμε πολλαπλασιασμό. Πώς να το εξηγήσεις αυτό; Δεν ξέρω κάτι άλλο πάνω σε αυτό δεν έχω να σου πω κάτι άλλο.

Πώς θα τη βοηθούσες να το καταλάβει;

Με επανάληψη στους κανόνες.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Τα 3/5 μιας τάξης είναι αγόρια και το 1/2 φοράει γυαλιά. Πόσα παιδιά; όχι όχι θα σκεφτώ ένα άλλο. Αυτό δεν το έχω. Περίμενε λίγο…(παύση). Τα 3/5 της γης είναι στεριά, το 1/2 της στεριάς είναι δάσος. Πόσο μέρος είναι δάσος της γης; Αυτό.

Στη διαίρεση;

Θα πω ένα απλό. Τα 5/6 μίας σοκολάτας όχι σοκολάτας δεν νομίζω εεε...περίμενε….εεεε το τελευταίο είναι αυτό;

Ναι. Σκέψου.

Εεεεε…(παύση). Στη διαίρεση δε βρίσκω. Το αφήνουμε αυτό;

Ναι. Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα; Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά γενικότερα πάνω στα κλάσματα; Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Χρησιμοποιώ πολλά πολλά παραδείγματα, σχήματα. Ναι σχηματοποιημένα. Προσπαθούμε με παραδείγματα με αντικείμενα από την πραγματικότητα και βάζοντας απλούς αριθμούς. Και όταν έχουμε προβλήματα προσπαθώ να τους υπενθυμίσω να βάζουν απλούς αριθμούς για παράδειγμα αντί για 3/5 το 5 και μετά να βρουν την πράξη και αντί για 5 να βάλουν το κλάσμα. Έτσι με απλά λογάκια. Να σκεφτούν απλά πιο απλά πρώτα. Το κλάσμα εκφράζει λεπτομέρειες. Είναι μέρος μιας πραγματικής ποσότητας δηλαδή ότι είναι πιο ακριβές ακόμα και από έναν δεκαδικό που είναι ατελής η διαίρεση του. Που δεν τελειώνει.

Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Καλή επιτυχία! Να ξέρεις ότι με προβλημάτισες με αυτή τη συνέντευξη. Μου φάνηκε δύσκολη. Νομίζω ότι δεν κάνω σωστά τίποτα μέσα στην τάξη...ότι δεν τους τα εξηγώ καθόλου.

Ερωτώμενος 5

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Άνδρας

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 24 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Μεταπτυχιακές σπουδές

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η πρώτη είναι σωστή, η δεύτερη είναι λάθος και η τρίτη είναι και αυτή σωστή.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής στην απάντηση 2;

Ο μαθητής στην απάντηση 2 δεν είδε το σύνολο των σοκολατών αλλά είδε μόνο τη μία σοκολάτα. Φαίνεται ότι αγνόησε τις άλλες.

Πώς θα το βοηθούσες για να το καταλάβει;

Θα έπαιρνα τις σοκολάτες και θα του έλεγα να τις μοιράσει σε τρία άτομα με το τρόπο που έκανε αυτός στο χαρτί και μετά θα τον ρωτούσα αν είναι δίκαιη μοιρασιά. Βιωματικά. Αυτό θα έκανα.

Τι θα πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Πρέπει να κοιτάει το όλο, το σύνολο. Δηλαδή τι είναι κάθε φορά το σύνολο. Είναι ένα μήλο, δύο μήλα, δέκα μήλα και τα λοιπά.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Είναι λάθος.

Πώς πιστεύεις ότι σκέφτηκε η μαθήτρια;

Η μαθήτρια έχει μπερδέψει τους δεκαδικούς αριθμούς με τους κλασματικούς.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Πρώτα από όλα θα της έλεγα ότι δεν μπορεί να υπάρξει δεκαδικός αριθμός στην περίπτωση του κλάσματος. Μετά θα βρίσκαμε τα ισοδύναμα των κλασμάτων και θα της έλεγα να βρει τον ενδιάμεσο.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο στο

μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Μισό λεπτό...Ναι ναι. Και οι δύο απαντήσεις είναι λάθος.

Δηλαδή ο Γιώργος και η Μαρία πώς σκέφτηκαν; Γιατί έκαναν αυτή τη διάταξη;

Ο Γιώργος σκέφτηκε με βάση των αριθμητών ενώ η Μαρία σκέφτηκε με βάση των παρονομαστών.

Πώς θα τους βοηθούσες να το καταλάβουν;

Καταρχάς, θα ξεκινούσα από την αρχή. Τι είναι το κλάσμα, τι είναι κλασματική μονάδα, ποια είναι η αξία ενός κλάσματος και μετά θα μιλούσαμε για σύγκριση. Πρώτα σε ομώνυμα, μετά σε ετερώνυμα με ίδιους αριθμητές και στο τέλος στα ετερώνυμα.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Να καταλάβει τι είναι το κλάσμα και ποια είναι η αξία του. Το πιο σημαντικό από όλα.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Αυτό είναι σωστό, αφού βρήκε το μισό.

Αντιμετωπίζουν δυσκολίες τα παιδιά σε τέτοιου είδους ασκήσεις;

Όχι, ιδιαίτερα. Από την τρίτη δημοτικού κάνουν αναπαραστάσεις. Νομίζω είναι το μόνο που τους αρέσει και τους φαίνεται πολύ εύκολο.

Γιατί πιστεύεις ότι τους φαίνεται εύκολο;

Γιατί ξέρουν ότι με τον παρονομαστή χωρίζονται τα κομμάτια όσο μας λέει ο παρονομαστής ενώ ζωγραφίζω όσο μας λέει ο αριθμητής. Τους αρέσει αρκετά δεν δυσκολεύονται σε αυτό.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν παρακάτω η δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Αυτό είναι λάθος, γιατί τα τετράγωνα δεν έχουν το ίδιο μέγεθος.

Άρα συμφωνείς με την απάντηση των παιδιών ότι είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια;

Ναι συμφωνώ. Οι μαθητές ξέρουν πολύ καλά ότι στα κλάσματα χωρίζω σε ίσα μέρη και αυτά που παίρνω είναι ίδια.

Αντιμετωπίζουν δυσκολίες τα παιδιά σε τέτοιου είδους ασκήσεις;

Δε νομίζω. Παρομοίως με την παραπάνω άσκηση.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Αυτό είναι λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Ο μαθητής είδε το ένα και μετά το ένα είναι το δύο και εκεί έβαλε το κλάσμα.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα του υπενθύμιζα ότι το κλάσμα είναι μία απλή διαίρεση. Αρκεί να έκανε τη διαίρεση και να καταλάβαινε ότι είναι μικρότερο από το 1.

Τι πρέπει να ξέρει ο μαθητής για να λύσει σωστά την άσκηση;

Την αξία του κλάσματος, που θα την καταλάβει αν κάνει διαίρεση.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Εδώ, σωστά το βρήκε αλλά με την εξήγηση που δίνει έχω μία ένσταση. Είναι σαν να βλέπει μόνο αριθμητή και μόνο παρονομαστή και όχι σαν κλάσμα.

Και πώς θα βοηθούσε στο παιδί να το δει σαν κλάσμα;

Θα του έβαζα αλλά κλάσματα που δεν θα μπορούσε να τα εξηγήσει έτσι. Επομένως, θα καταλάβαινε ότι δεν βλέπουμε αριθμητή ή παρονομαστή άλλα βλέπουμε όλο το κλάσμα.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.

Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Για λίγο εεεε ναι είναι σωστό.

Ωραία, εσύ έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά σε τέτοιου είδους δραστηριότητα;

Όχι, τους φαίνεται εύκολο.

Γιατί πιστεύεις ότι δεν δυσκολεύονται σε τέτοιες ασκήσεις;

Ξέρουν τη διαδικασία και την κάνουν. Είναι σαν μία ρουτίνα στα κλάσματα.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Εντάξει και τα δύο λάθος.

Πώς σκέφτηκε η μαθήτρια;

Στην πρόσθεση, πρόσθεσε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή σαν τους φυσικούς. Ενώ στη διαίρεση αντέστρεψε και τους δύο όρους. Μάλλον ξέχασε τον κανόνα της διαίρεσης.

Τι κάνεις για να μάθουν τα παιδιά πρόσθεση κλασμάτων μέσα στην τάξη;

Τους υπενθυμίζω τον κανόνα και πολλές ασκήσεις στο τετράδιο να λύσουν.

Σχετικά με τη διαίρεση;

Και εδώ το ίδιο. Θέλει εξάσκηση.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Ααα ωραία. Με πολλαπλασιασμό και διαίρεση ε;

Ναι.

Εεεε… (παύση). Πρέπει να σκεφτώ τώρα; Μας έβαλες δύσκολα τώρα. Άστο αυτό δεν μπορώ να το βρω.

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα; Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά γενικότερα πάνω στα κλάσματα; Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Τα κλάσματα είναι δύσκολα. Στις μικρές τάξεις τα παιδιά αγαπούν τα κλάσματα, γιατί χρησιμοποιούνται απλές αναπαραστάσεις όμως στην πέμπτη δημοτικού τα πράγματα αλλάζουν και γίνονται λίγο πιο δύσκολα. Βέβαια, αν ξέρεις τους κανόνες και τις λέξεις κλειδιά για να λύσεις προβλήματα, τότε δεν πιστεύω να υπάρχει κάποια δυσκολία στα κλάσματα. Νομίζω πως οι μαθητές δυσκολεύονται στα προβλήματα με τα κλάσματα, όχι τόσο όμως στην εκτέλεση των πράξεων. Αν ξέρεις τους κανόνες, λύνεις σωστά την άσκηση. Όμως το τι πράξη θα κάνεις νομίζω ότι αυτό τους δυσκολεύει. Χάνονται μόνο και μόνο όταν βλέπουν κλάσμα αντί για έναν φυσικό αριθμό. Χρησιμοποιώ πολύ εποπτικό υλικό μέσα στην τάξη για να καταλάβουν τα κλάσματα. Γεμίζουμε όλη την τάξη με χαρτόνια για να τα βλέπουν. Αυτά.

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Όχι.

Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Καλή επιτυχία και σε σένα! Ελπίζω να σε βοήθησα.

Ερωτώμενος 6

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 22 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η πρώτη απάντηση σωστή, η δεύτερη λάθος και η τρίτη σωστή.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής στη δεύτερη ερώτηση;

Λοιπόν, σκέφτηκαν μόνο τη μία σοκολάτα και αγνόησαν τις άλλες. Ετσι κύκλωσαν μόνο την πρώτη σοκολάτα.

Πώς θα το βοηθούσες για να το καταλάβει;

Θα το δείξουμε στην πράξη. Θα έπαιρνα σοκολάτες και θα πειραματιζόμασταν με τα παιδιά μέχρι να καταλάβει τη σωστή απάντηση.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Χωρίς να έχουν διδαχτεί μεικτούς;

Έχουν διδαχτεί.

Η απάντηση θα μπορούσε κάποιος να την πάρει σαν σωστή. Δηλαδή εκείνη βάζει έναν δεκαδικό μαζί με ένα κλάσμα. Χωρίς να είναι χωρισμένο...λάθος όπως φαίνεται έτσι εδώ.

Πώς σκέφτηκε η μαθήτρια;

Είπε ανάμεσα στο δυο και στο τρία είναι το 2,5 κι έβαλε 2,5.

Πώς θα την βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα μπορούσε κάποιος να της πει ότι θα είναι και αυτό ένα κλάσμα ανάμεσα αν το εξελίξει. Εκτός και αν μετατρέψουμε το δεκαδικό σε κλάσμα. Ή να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό και να βρούμε έναν ενδιάμεσο.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο στο

μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λοιπόν, έχουμε τρία διαφορετικά κλάσματα με τρεις διαφορετικούς παρανομαστές. Άρα δεν είναι ομώνυμα. Κοιτάμε τους αριθμητές, ούτε οι αριθμητές είναι ίδιοι. Δεν μπορώ να ταξινομήσω αυτά τα κλάσματα, αν δεν τα μετατρέψω σε ομώνυμα. Και οι δύο απαντήσεις που δίνουν μαθητές είναι λάθος.

Δηλαδή ο Γιώργος και η Μαρία πώς σκέφτηκαν; Γιατί έκαναν αυτή τη διάταξη;

Εεεεε... κοιτούσαν τον παρονομαστή στην περίπτωση του Γιώργου ενώ η Μαρία τον αριθμητή εεεεε αντίστροφα. Ο Γιώργος τους αριθμητές και η Μαρία τους παρονομαστές.

Πώς θα βοηθούσες τους μαθητές;

Θα τους έλεγα ότι δεν μπορώ να τα ταξινομήσω αν δεν τα κάνω ομώνυμα.

Τι πρέπει να καταλάβουν οι μαθητές;

Πρέπει τα κλάσματα να έχουν τον ίδιο παρονομαστή δηλαδή να είναι ομώνυμα.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Αυτός δεν χώρισε σε 4 ίσα κομμάτια άρα απάντησε λάθος.

Και πώς θα τον βοηθούσε να το καταλάβει αυτό;

Ναι, όταν λέμε στα κλάσματα 2/4...μάλλον τη μονάδα τη χωρίζουμε σε 4 ίσα κομμάτια, ίδια κομμάτια, όμοια κομμάτια και έπειτα παίρνουμε τα δύο από αυτά. Ζωγραφίζουμε τα δύο από αυτά ή κυκλώνουμε και λοιπά.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν παρακάτω η δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Σωστά λένε τα παιδιά ότι τα 2/5 δεν είναι ίδια. Είναι διαφορετικά τα τετράγωνα μεταξύ τους σε μεγέθη.

Συναντάς ποτέ κάποια δυσκολία σε τέτοιου είδους δραστηριότητες; Οι μαθητές δυσκολεύονται;

Ναι. Δίνουν αυτή την απάντηση. Εννοώ ζωγραφίζουν όπως την εικόνα, ανεξάρτητα από το μέγεθος.

Πώς το αντιμετωπίζεις; Τι κάνεις;

Εεεεε…Τους υπενθυμίζω ότι πρέπει να είναι ίδια τα κομμάτια όμοια.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Λοιπόν, η απάντηση είναι λάθος. Εκείνα τι κάνουν μετράνε μόνο τις γραμμές και τα κενά και μετά τοποθετούν το κλάσμα.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα κάναμε τη διαίρεση για να καταλάβει ότι είναι μικρότερος από το 1.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Πρέπει να καταλάβει ότι το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας κι έτσι μπαίνει πριν από το 1 στην αριθμογραμμή.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Σωστά είπε το 2/3.

Πώς σκέφτηκε το παιδί;

Η εξήγηση που δίνει μου φαίνεται μπακαλίστικη. Επειδή το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3. Ε όχι δεν είναι σωστή η εξήγηση.

Πώς θα τον βοηθούσες να εξηγήσει σωστά τη σκέψη του;

Θα πρέπει να μετατρέψει τα κλάσματα σε ομώνυμα και μετά να βρει τον ενδιάμεσο ή να μετατρέψει σε δεκαδικό τα κλάσματα και μετά να βρει πάλι τον ενδιάμεσο. Κι έτσι λύνονται αυτές οι ασκήσεις. Μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.Μια μαθήτρια γράφει:«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

…(παύση). Ναι ναι είναι σωστό.

Ωραία, εσύ έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά σε τέτοιου είδους δραστηριότητα;

Ναι δυσκολεύονται να κάνουν συγκρίσεις.

Εσύ όταν εντοπίσεις κάποιο παρόμοιο λάθος, τι κάνεις μέσα στην τάξη; Πώς βοηθάς αυτά τα παιδιά;

Το πιο απλό. Τα κάνουμε ομώνυμα. Αυτός είναι ο πιο εύκολος τρόπος.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η πρώτη είναι λάθος και η δεύτερη είναι λάθος.

Πώς σκέφτηκε η μαθήτρια;

Η μαθήτρια μπερδεύτηκε. Δε θυμόταν τους κανόνες των πράξεων.

Τι κάνεις για να μάθουν τα παιδιά πράξεις κλασμάτων μέσα στην τάξη;

Τους υπενθυμίζω τον μηχανισμό και με εξάσκηση στον πίνακα και στο τετράδιο. Με πολλές ασκήσεις.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Ναι, ένας μανάβης αγόρασε τα 3/5 των πατάτες εεεε….(παύση). Πρόσεξε θέλω το ένα και θέλω να βρω τα πολλά. Πρέπει να καταλήξω σε αυτήν την πράξη. Εεεε περίμενε λίγο... το πιστεύεις ότι με δυσκολεύει; Δεν μπορώ να βρω.

Έχουμε χρόνο, σκέψου το.

Δεν το πιστεύω. Δεν μπορώ να βρω. Δεν μπορώ να βρω πρόβλημα. Δεν μπορώ για κανένα αυτή τη στιγμή.

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα; Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά γενικότερα πάνω στα κλάσματα; Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Τα παιδιά, τα κλάσματα, τα καταλαβαίνουν καλύτερα με αναπαράσταση. Με πίτσα, με ζωγραφιά με απλά μπορούν να τα καταλάβουν. Δουλεύουμε κυρίως αναπαραστάσεις. Για να μάθουν τις πράξεις πρέπει να ξέρουν τους μηχανισμούς. Τώρα για το πρόβλημα δεν το έχω σκεφτεί ποτέ. Συνήθως τα προβλήματα που δίνονται στα σχολικά εγχειρίδια δεν έχουν κλάσματα. Το ένα μπορεί να είναι κλάσμα και το αλλά ακέραιος. Επομένως με δυσκόλεψαν πολύ, δεν μπορούσα να βρω. Κοίταξέ το λίγο και εσύ να δεις ότι στα βιβλία δεν έχουν πράξεις με δύο κλάσματα. Εννοώ προβλήματα με δύο κλάσματα. Υπάρχουν πράξεις σκέτο με δύο κλάσματα όχι όμως με προβλήματα και κλάσματα.

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Να έχεις καλή επιτυχία.

Σε ευχαριστούμε πολύ!

Ερωτώμενος 7

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 16 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η πρώτη απάντηση φαίνεται σωστή, η δεύτερη λάθος...(παύση) εεε η τρίτη είναι σωστή.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής στη δεύτερη απάντηση;

Μπορεί να.. Τι να είδε…(παύση). Τώρα ο δεύτερος μαθητής πήρε από τη μία σοκολάτα τα δύο. Τώρα αυτός πήρε το 1/3 από τη μία σοκολάτα, όχι από το σύνολο.

Πώς θα τον βοηθούσες για να το καταλάβει;

Θα εξηγούσαμε τι είναι το κλάσμα. Θα ξεκινούσαμε από την αρχή. Ότι παίρνουμε μία ποσότητα και τη χωρίζουμε σε ίσα κομμάτια. Μετά θα πρέπει να μετρήσουμε όλα τα κομμάτια και θα κάνουμε διαίρεση και το αποτέλεσμα θα είναι τα κομμάτια που θα πάρουμε.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής στη δεύτερη απάντηση;

Πρέπει να σκέφτεται όλη την ποσότητα.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Ναι, είναι λάθος.

Πώς σκέφτηκε η μαθήτρια;

Μετράει ένα ένα και προσπαθεί να βρει τον ενδιάμεσο.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Πρέπει να το κάνουμε σε δεκαδικό το κλάσμα και έτσι θα το βρουν πιο εύκολα. Πολλά πολλά παραδείγματα μέσα στην τάξη και μετά θα το βρουν.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Εεεεε...(παύση). Η Μαρία το έχει σωστό. Πρέπει να κοιτάξουν τον παρανομαστή, όχι, τα έχουν βάλει λάθος και οι δύο. Όταν τους κάνω τέτοιες ασκήσεις εγώ, πάντα βάζουμε, κάνουμε παραδείγματα στον πίνακα. Βάζω κλάσματα, εξηγούμε τον κανόνα και μετά λύνουμε την άσκηση.

Τι εννοείς κανόνα;

Κοιτάμε παρονομαστή μετά κοιτάμε αριθμητή και μετά θα κάνουμε ομώνυμα, αν δεν μπορούμε να βρούμε την απάντηση με τον παρανομαστή ή τον αριθμητή. Κάνουμε βέβαια και σχήματα. Θέλει οπωσδήποτε οπτικοποίηση όχι σκέτο αριθμούς.

Πώς σκέφτηκαν οι μαθητές;

Τα κοιτάνε σαν αριθμούς και όχι σαν κλάσματα.

Τι πρέπει να καταλάβουν δηλαδή οι μαθητές για να λύσουν σωστά τέτοιες ασκήσεις;

Πρέπει να τα κάνουν ομώνυμα. Αυτό.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Είναι λάθος. Το κλάσμα είναι διαίρεση. Διαιρώ το ίδιο δεν μπορώ να τα διαιρέσω όπως θέλω. Σε όποια ποσότητα εγώ θέλω. Επομένως και αυτό το εξηγούμε με παραδείγματα στον πίνακα και τους εξηγούμε ότι πρέπει να είναι ίδια όμοια τα κομμάτια και επιλέγουμε τα δύο. Με παραδείγματα.

Πώς σκέφτηκε;

Τα χώρισε σε τέσσερα αλλά όχι σε ίσα.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Συμφωνώ με τα παιδιά.

Αντιμετωπίζουν δυσκολίες τα παιδιά σε τέτοια παραδείγματα;

Αν έχουν καταλάβει ότι πρέπει να είναι ίσα, όχι.

Αν δεν το έχουν καταλάβει, τι κάνεις;

Ε είναι αυτό που λέγαμε. Αν δεν καταλάβουμε αυτό, μετά δεν έχουν καταλάβει τίποτα. Τονίζουμε στην τάξη να είναι ίσα.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Λάθος είναι αυτό πάλι.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Είδε το 1 και μετά λέει το επόμενο είναι το 2 και το έβαλε εκεί.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα πρέπει να χωρίσει το κάθε κενό σε τρία κομμάτια και να εντοπίσει που είναι τα δύο τρίτα. Αυτό.

Τι πρέπει δηλαδή να καταλάβει ο μαθητής;

Την έννοια του κλάσματος.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Σωστά αλλά η σκέψη λάθος.

Πώς σκέφτηκε δηλαδή;

Μπερδεύονται με το 1, 2, 3, 4 το πάνε με τη σειρά. Δεν καταλαβαίνουν ότι είναι κλάσμα και όχι φυσικοί αριθμοί.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Πάλι σχηματοποιημένα θα το δείξουμε. Μπορούμε βέβαια να τα μετατρέψουμε και σε δεκαδικούς αριθμούς ή και σε ομώνυμα κλάσματα. Βοηθάει πολύ και η αριθμογραμμή να το βλέπουν. Γενικά η οπτικοποίηση βοηθάει.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.

Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

(Παύση). Ναι, είναι σωστή.

Ωραία, εσύ έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά σε τέτοιου είδους δραστηριότητα;

Ναι, πολλές φορές.

Εσύ όταν εντοπίσεις κάποιο παρόμοιο λάθος, τι κάνεις μέσα στην τάξη; Πώς βοηθάς αυτά τα παιδιά;

Στη σύγκριση των κλασμάτων, αν τους εξηγήσεις ότι συγκρίνουμε ίδια πράγματα και όταν βλέπουν ότι δεν είναι ίδια, τα κάνουν ομώνυμα και μπορούμε μετά να το βρουν. Γενικά δεν δυσκολεύονται πολύ άμα τα κάνουμε έτσι. Δεν είναι από τα δύσκολα όχι. Αρκεί να ξέρουν ομώνυμα, να ξέρουν να βρίσκουν δηλαδή και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Μετά τους είναι εύκολο.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Τα μπέρδεψε λίγο εδώ. Το πιο φυσικό που κάνουν τα παιδιά είναι να προσθέσουν αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή από τους φυσικούς. Βέβαια η πρόσθεση είναι αυτό που λέγαμε πρέπει να μάθουν να τα κάνουν ομώνυμα να ξέρουν τη διαδικασία. Σίγουρα και να το δουν οπτικά θα τους βοηθήσει αλλά πρέπει να το ξέρουν τώρα αυτό απέξω.

Στη διαίρεση;

Στη διαίρεση έκανε λάθος τον κανόνα.

Πώς θα την βοηθούσες;

Γενικά λέμε τον κανόνα, να κάνουμε και παραδείγματα και το μαθαίνει. Δεν είναι πολύ δύσκολο τους αρέσει ο κανόνας. Νομίζω ότι είναι από τα εύκολα οι πράξεις στα κλάσματα τους αρέσει όταν μαθαίνουν τον κανόνα. Τα κάνουν μόνα τους.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Πολλαπλασιασμό και διαίρεση ε; Για να σκεφτώ λίγο. Το βιβλίο έχει και εικόνες και παραδείγματα και προβλήματα. Εχει και για διαίρεση και για πολλαπλασιασμό. Να σκεφτώ εγώ ένα πρόβλημα εεεε...(παύση). Δεν μπορώ να θυμηθώ. Έχει έχει πολλά προβλήματα αλλά δεν μπορώ να θυμηθώ όχι. Μπορώ να μην απαντήσω σε αυτό; Εεεε να βρίσκουν λέξεις κλειδιά για να μπορούν να λύσουν το πρόβλημα. Να ξέρουν πότε κάνουν πολλαπλασιασμό και πότε κάνουν διαίρεση. Δεν είναι οι πράξεις εδώ σαν τους φυσικούς αριθμούς εννοώ τα προβλήματα. Οι λέξεις-κλειδιά δεν είναι σαν τους φυσικούς αριθμούς. Υπάρχουν άλλες λέξεις κλειδιά για πράξεις πολλαπλασιασμού στα κλάσματα. Είναι διαφορετικά από τα κανονικά εννοώ από τους φυσικούς. Δεν μπορώ να θυμηθώ όμως.

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα; Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά γενικότερα πάνω στα κλάσματα; Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Κάνουμε στον πίνακα αρκετά σχεδιαγράμματα, ζωγραφιές, διάφορες αναπαραστάσεις. Παίρνουμε χαρτόνια στις πράξεις των κλασμάτων για να βλέπουν. Το οπτικό υλικό βοηθάει πάρα πολύ. Πολλές επαναλήψεις και πολλά παραδείγματα βέβαια επιλέγουμε τα προβλήματα που κάνουμε. Το βιβλίο έχει τόσα πολλά. Εμείς επιλέγουμε τουλάχιστον να ξέρουν τα βασικά. Να μπορούν όταν πάνε σε επόμενες τάξεις, να ξέρουν να κάνουν πέντε πράγματα. Κάποια πράγματα πρέπει να ξέρουν να τα κάνουν μηχανικά. Αλλά χρησιμοποιούμε εποπτικό υλικό. Και υπολογιστή πολλές φορές χρησιμοποιούμε για τα κλάσματα. Πολύ πίνακα και στον τοίχο, όπως λέμε, για να τα βλέπουνε. Πρέπει να τους γίνει βίωμα. Πώς αλλιώς;

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Όχι.

Σε ευχαριστούμε πολύ!

Καλή επιτυχία σου εύχομαι!

Ερωτώμενος 8

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Άνδρας

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 30 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λοιπόν, η πρώτη απάντηση είναι σωστή και οι άλλες δύο ερωτήσεις είναι λάθος. Για να δω λίγο την τρίτη...Εεεε...Όχι, η δεύτερη απάντηση είναι μόνο λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής και απάντησε λάθος;

Απάντησε λάθος, γιατί δεν έχει καταλάβει την ακέραιη μονάδα. Δηλαδή η ακέραια μονάδα αναφέρεται και σε ένα αντικείμενο. Δηλαδή ένα μήλο, η ακέραια μονάδα όμως μπορεί να αναφέρεται και σε ένα κομμάτι του μήλου. Αυτό μπορεί μετά να χωριστεί σε ίσα κομμάτια. Αλλά ακέραιη μονάδα θεωρείται και ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων δηλαδή τα 12 μήλα. Εκεί λοιπόν υπάρχει δυσκολία.

Πώς θα το βοηθούσες για να το καταλάβει;

Θα πρέπει να κάνεις παραδείγματα με εεεε με πραγματικά αντικείμενα. Δηλαδή να φέρεις ένα μήλο και να το χωρίσεις στα τέσσερα κομμάτια για να δουν το 1/4. Να πάρεις ένα κομμάτι του μήλου και να χωρίσεις αυτό σε κομμάτια και μετά να πάρεις τα 12 μήλα και να τους δείξεις πως θα χωριστούν και στη συνέχεια να πάρεις κάποιο από αυτά τα κομμάτια να το δουν και να συγκρίνουν.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Ο μαθητής πρέπει να ξεκαθαρίσει το τι είναι η ακέραια μονάδα κάθε φορά.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Εεεε…(παύση). Περίμενε λίγο…(παύση). Σωστή απάντηση.

Γενικά οι μαθητές δυσκολεύονται να βρουν τον ενδιάμεσο στα κλάσματα;

Ναι δυσκολεύονται να το βρουν. Δυσκολεύονται να το βρουν κυρίως όταν είναι ετερώνυμα τα κλάσματα. Στα ομώνυμα κλάσματα πιο εύκολα.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Την αριθμογραμμή. Αυτό.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λάθος και τα δυο.

Πώς σκέφτηκαν οι μαθητές;

Εδώ πιστεύω ότι τα έβαλαν στην τύχη.

Πώς θα τους βοηθούσες;

Θα έπρεπε να κάνουν τα κλάσματα ομώνυμα και μετά να κάνουν τη σύγκριση. Γενικότερα σε τέτοιου είδους ασκήσεις τους λέω να κάνουν τα κλάσματα ομώνυμα. Δεν μπορείς εεεε να καταλάβεις εύκολα ποιο είναι μεγαλύτερο ή ποιο είναι μικρότερο έτσι. Πρέπει να γίνουν ομώνυμα.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Λοιπόν εδώ…(παύση). Καταρχήν είναι λάθος αυτό εδώ πέρα. Εδώ δεν έχει χωρίσει όπως θα έπρεπε. Σε τέσσερα ίσα κομμάτια.

Πώς θα τους βοηθούσες;

Θα πρέπει να καταλάβουν τα παιδιά, όταν λέμε κλάσμα, εννοούμε ότι χωρίζουμε σε ίσα κομμάτια.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Λοιπόν σωστά, τα τετράγωνα δεν είναι ίδια, οπότε, όταν μιλάμε για κλάσματα και πάλι θα πρέπει να...το κλάσμα σημαίνει χωρίζω σε ίσα κομμάτια και παίρνω τα αντίστοιχα.

Συναντάς ποτέ κάποια δυσκολία σε τέτοιου είδους δραστηριότητες; Οι μαθητές δυσκολεύονται;

Συχνά.

Πώς το αντιμετωπίζεις; Τι κάνεις;

Τους υπενθυμίζω κάθε φορά ότι θα πρέπει να είναι το ίδιο και να είναι χωρισμένα σε ίδια κομμάτια αλλιώς δεν υπάρχει κλάσμα.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Καταρχήν υπάρχει λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Στην τύχη. Είδε τη γραμμή και το έβαλε εκεί.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Να τα κάνει δεκαδικούς αριθμούς. Πάντα ένα κλάσμα εεεε...Από ένα κλάσμα δημιουργείται ένας δεκαδικός αριθμός. Και στην ουσία κλάσμα και δεκαδικός αριθμός είναι σχεδόν τα ίδια. Δηλαδή θα πρέπει τα παιδιά να δουλέψουν και στους δεκαδικούς αριθμούς. Δηλαδή να έχουν ένα κλάσμα, το 2/3 ή το 2/4, στην προκειμένη περίπτωση το 2/3 δεν βγαίνει έχει πολλά δεκαδικά ψηφία. Όμως καλό είναι να μετατρέψω το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό. Μετά είναι πιο εύκολα με δεκαδικούς αριθμούς να βρουν που μπαίνει και μετά να το βάλει πάνω στην αριθμογραμμή.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Σωστά, αλλά το έβαλε στην τύχη. Εδώ υπάρχει σύγχυση.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Θα του έβαζα άλλα κλάσματα και θα του έλεγα ότι πρέπει να κάνει τα κλάσματα ομώνυμα. Μετά να βρει ποιος είναι ο ενδιάμεσος.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.Μια μαθήτρια γράφει:«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Εδώ σωστά σκέφτηκε. Έκανε τα κλάσματα ομώνυμα και επέλεξε το μεγαλύτερο, ναι, εδώ είναι σωστό.

Εσύ έχεις εντοπίσει κάποιο συχνό λάθος που κάνουν τα παιδιά σε τέτοιου είδους δραστηριότητα;

Δυσκολεύονται στη σύγκριση κλασμάτων.

Εσύ όταν εντοπίσεις κάποιο παρόμοιο λάθος, τι κάνεις μέσα στην τάξη; Πώς βοηθάς αυτά τα παιδιά;

Εξάσκηση αρκετή εξάσκηση. Με παραδείγματα στον πίνακα, άσκηση στο σπίτι εεε..(παύση).

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λοιπόν, εδώ απάντησε λάθος, γιατί πρόσθεσε τα κλάσματα σαν να ήταν οι φυσικοί. Βέβαια αυτό είναι συχνό το λάθος, προσθέτουν και τους παρονομαστές πολύ συχνά. Πρέπει να το υπενθυμίζεις συνέχεια αυτό. Στα κλάσματα προσθέτουμε μόνο αριθμητές. Αυτό λες συνέχεια.

Στη διαίρεση;

Και στη διαίρεση λάθος τα αντέστρεψαν όλα. Μάλλον δεν ήξερε τον κανόνα.

Τι κάνεις στην προκειμένη περίπτωση;

Επιμένω πολύ στον κανόνα. Πρέπει να θυμούνται τον κανόνα αλλιώς θα κάνουν συνέχεια λάθος. Εξάσκηση θέλει δεν υπάρχει κάτι άλλο εδώ πέρα.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Καταρχήν, όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό, πρέπει να τους μάθουμε ότι κάνουμε πολλαπλασιασμό πέρα από το γνωστό ξέρω το ένα και ζητάω τα πολλά. Ξέρω το όλο και θέλω να βρω το μέρος. Οταν ξέρω το όλο και θέλω να βρω το μέρος, κάνω πολλαπλασιασμό. Στη διαίρεση συμβαίνει το αντίθετο. Δηλαδή ξέρω το μέρος και θέλω να βρω το όλο.

Χρησιμοποιείς κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα εσύ όταν διδάσκεις πολλαπλασιασμό ή διαίρεση κλασμάτων;

Αυτό τους τονίζω συνέχεια και κάνω παραδείγματα. Δηλαδή του στυλ ένα σχολείο, αυτό βάζω συνέχεια, ένα σχολείο έχει 80 μαθητές. Πόσα είναι τα 5/8 των μαθητών; Και στη διαίρεση κάνω ακριβώς το αντίθετο. Δηλαδή λέω τα 5/8 των μαθητών είναι 40. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές; Αυτό βασικά δουλεύω σε αυτές τις πράξεις το μέρος και το όλο.

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα; Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά γενικότερα πάνω στα κλάσματα; Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Καταρχήν, για να διδάξεις το κλάσμα πρέπει κανονικά….στην πέμπτη τάξη διδάσκονται τα κλάσματα. Εγώ τώρα βλέπω στην τρίτη υπάρχουν κλάσματα αλλά αυτοί έρχονται στην πέμπτη χωρίς να ξέρουν τίποτα. Πρέπει να ξεκινήσεις από το μηδέν. Και κακώς βάζουν και κλάσματα στις μικρές τάξεις. Στην πέμπτη πρέπει να μπουν τα κλάσματα. Τώρα στην τρίτη εγώ θα κάνω κανονικά, δεν θα επιμείνω. Θα επιμείνω εκεί που πρέπει να επιμείνω στην πρόσθεση, στον πολλαπλασιασμό αλλά όχι στα κλάσματα. Στην πέμπτη τάξη θα αρχίσω να διδάσκω κανονικά τα κλάσματα. Και βέβαια θα ξεκινήσω από το μηδέν. Θα ξεκινήσω από την ακέραια μονάδα, ποια είναι, μετά θα μπω στην κλασματική μονάδα. Πώς δημιουργείται ο κλασματικός αριθμός; Δηλαδή από την επανάληψη της ακέραιης μονάδας αυτό πρέπει να το καταλάβουν πολύ πολύ καλά και μετά μπαίνουμε στην έννοια του κλάσματος. Αρχίζουν και καταλαβαίνουν τι είναι το κλάσμα με πολλά παραδείγματα. Τα κλάσματα θέλουν πολλά παραδειγματάκια. Για παράδειγμα το 1/2 του κιλού, τα 2/5 του ευρώ. Εκεί πάσχουν τα καθημερινά. Αυτά. Πολλά παραδείγματα.

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Τα κλάσματα δεν είναι εύκολα. Στην καθημερινότητα δεν είναι εύκολα τα κλάσματα. Καλά είναι τα κλάσματα να τα δουλεύουμε παράλληλα με τους δεκαδικούς αριθμούς. Να καταλάβουν ότι το κλάσμα είναι και δεκαδικός αριθμός. Δηλαδή έχεις το κλάσμα 3/5 και αυτό είναι 0,60. Θα πρέπει τα παιδιά να μετατρέπουν τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς. Και δεν μιλάμε για το δεκαδικό κλάσμα που το ξέρουν μιλάμε για όλα τα κλάσματα. Και καλά είναι κάποια κλάσματα να τα ξέρει απέξω. Ποιος είναι ο δεκαδικός αριθμός δηλαδή. Το 1/4 είναι 0,25. Αυτά.

Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Τι ευχαριστείς ;Καλή επιτυχία να έχεις!

Ερωτώμενος 9

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Άνδρας

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 29 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Ο δεύτερος λάθος και οι άλλοι απάντησαν σωστά.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Τα κύκλωσε στη τύχη.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Καταρχάς, δεν έχει καταλάβει τι είναι ο αριθμητής και τι είναι ο παρονομαστής. Πρέπει να ξεκινήσουμε από εκεί. Δεν έχει καταλάβει αυτές τις βασικές έννοιες των όρων του κλάσματος. Άρα θα διδάξω τον αριθμητή και τον παρανομαστή πάλι και τι ποσά μας δηλώνει ο καθένας.

Τι πρέπει να καταλάβουν οι μαθητές;

Τι σημαίνει το κλάσμα.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Και εδώ η απάντηση είναι λάθος και πάω πάλι στο προηγούμενο. Θα τους διδάξω τι είναι ο αριθμητής και τι ο παρονομαστής. Εδώ η μαθήτρια δεν ξέρει ότι ο αριθμητής δεν πρέπει να είναι δεκαδικός. Πρέπει να καταλάβει ότι ο αριθμητής είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε στους όρους του κλάσματος έναν δεκαδικό αριθμό.

Πώς σκέφτηκε δηλαδή η μαθήτρια;

Σύμφωνα με τους φυσικούς.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Εεεε….μισό λεπτό (παύση). Και οι δύο απαντήσεις είναι λάθος.

Δηλαδή ο Γιώργος και η Μαρία πώς σκέφτηκαν; Γιατί έκαναν αυτή τη διάταξη;

Εεεεε…(παύση). Ο πρώτος πήρε τους αριθμητές σαν φυσικούς αριθμούς ενώ η Μαρία τα έβαλε στην τύχη.

Πώς θα τους βοηθούσες να το καταλάβουν;

Δεν έχουν κατανοήσει σωστά τα κλάσματα. Αν κάνουν τη διαίρεση αριθμητή με παρονομαστή που μας δίνει κάθε κλάσμα έναν δεκαδικό, μπορούν να λύσουν την άσκηση.

Τι πρέπει να καταλάβουν τα παιδιά;

Επιμένω, πρέπει να μετατρέψω τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Ναι, ο συγκεκριμένος μαθητής έχει στο μυαλό του τον παρονομαστή. Και χωρίζει το τετράγωνο σε τέσσερα κομμάτια αλλά δεν έχει καταλάβει ότι πρέπει να είναι τέσσερα ίσα κομμάτια. Όχι απλώς σε τέσσερα κομμάτια. Άρα η απάντησή του είναι λάθος. Σωστά πήρε τα δύο. Αλλά το λάθος του είναι ότι δεν τα χώρισε σε τέσσερα ίσα κομμάτια.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Θα του υπενθύμιζα ότι στα κλάσματα τα κομμάτια πρέπει να είναι όμοια.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

(Παύση). Ναι, συμφωνώ.

Συναντάς ποτέ κάποια δυσκολία σε τέτοιου είδους δραστηριότητες; Οι μαθητές δυσκολεύονται;

Τα παιδιά, ναι, αντιμετωπίζουν συχνά τέτοιες δυσκολίες. Συνήθως δεν καταλαβαίνουν ότι τα τετράγωνα δεν είναι ίδια.

Πώς το αντιμετωπίζεις; Τι κάνεις;

Με επανάληψη και εξατομικευμένη διδασκαλία όταν βέβαια προλαβαίνεις να το κάνεις.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

(Παύση). Ναι, τα έχει βάλει λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Μέτρησε γραμμές, κενά.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Εγώ θα επιμείνω στη διαίρεση. Οι μαθητές καταλαβαίνουν καλύτερα τη διαίρεση αριθμητή παρονομαστή. Να τον κάνεις δεκαδικό και μετά να τον βάλεις στην αριθμογραμμή.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Την αξία του κλάσματος.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Είναι λανθασμένη απάντηση, γιατί τα παιδιά εξακολουθούν εδώ να σκέφτονται σύμφωνα με τους φυσικούς αριθμούς. Φαίνεται στην αιτιολόγηση. Δεν είναι έτσι και εδώ επιμένω να κάνουν διαίρεση, να βρουν δεκαδικό αριθμό.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.

Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Ααα περίμενε λίγο να το δω. Ναι είναι σωστό. Είναι ένας τρόπος σωστός, αυτό που σκέφτηκε η μαθήτρια. Βρήκε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.

Τα παιδιά δυσκολεύονται σε τέτοιου είδους ασκήσεις;

Μμμ...Τα παιδιά δυσκολεύονται σε τέτοιου είδους ασκήσεις, γιατί δεν έχουν καταλάβει την έννοια του αριθμητή και του παρονομαστή. Και ότι κάθε κλάσμα παριστάνει μία διαίρεση αριθμητή δια παρανομαστή. Άρα αυτοί που το έχουν καταλάβει, δεν δυσκολεύονται σε αυτές τις ασκήσεις. Επιμένω εγώ σε αυτό.

Πώς το αντιμετωπίζεις;

Πάλι εδώ θα μπορούσε να κάνει τη διαίρεση να βρει τον δεκαδικό και να κάνει τη σύγκριση.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η πρώτη απάντηση είναι λάθος, γιατί δεν έκανε τα κλάσματα ομώνυμα. Ενας τρόπος ήταν...έπρεπε να κάνει τα κλάσματα ομώνυμα ή να κάνει τα κλάσματα δεκαδικούς αριθμούς και μετά να το προσθέσει. Δεν έκανε τίποτα από αυτά και έτσι είναι λάθος. Και η δεύτερη απάντηση είναι λάθος, γιατί αντέστρεψε και τα δύο κλάσματα.

Γιατί η μαθήτρια απάντησε έτσι;

Προφανώς, γιατί δεν έχει καταλάβει σωστά ότι η πρόσθεση κλασμάτων δεν είναι πάλι φυσικοί αριθμοί να προσθέσουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή. Ενώ στη διαίρεση, δεν ήξερε τη διαδικασία.

Τι κάνεις στην προκειμένη περίπτωση;

Πάλι από την αρχή. Επαναληπτικές ασκήσεις.

Πού;

Πάνω στα κλάσματα από την αρχή.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Τι;;;..(παύση). Δώστε ένα παράδειγμα που να λύνεται με την πράξη εεε εδώ θέλω τη βοήθεια του κοινού. Εεεε δεν μπορώ τώρα να σκεφτώ. Μπορώ να μην απαντήσω σε αυτό;

Ναι. Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τα κλάσματα;

Τα κλάσματα είναι δύσκολα για τα παιδιά. Είναι λίγος ο χρόνος που προβλέπεται για να τα διδάξεις. Χρειάζεται κάθε δάσκαλος να αφιερώσει περισσότερο χρόνο για να διδάξει τα κλάσματα. Και να ξαναγυρίζει συνέχεια πίσω στα κλάσματα και να κάνει συνέχεια επαναλήψεις και κάνοντας διαθεματικές δραστηριότητες με άλλα μαθήματα.

Τι ακολουθείς εσύ έτσι ώστε να τους διδάξει τα κλάσματα και να τα κάνεις πιο απλά;

Εγώ διδάσκω τα κλάσματα ξεκινώντας με τους όρους του κλάσματος. Και αφού έχουν καταλάβει τα παιδιά τι σημαίνουν αυτά τότε πάω στα επόμενα. Εάν οι μαθητές δεν καταλάβουν τι σημαίνουν αυτά, τότε δεν μπορούν να καταλάβουν τα κλάσματα. Δουλεύοντας μόνο τους όρους και εξηγώντας ότι το κλάσμα είναι μία διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή. Αν δεν καταλάβουν αυτά, δεν προχωράς παρακάτω.

Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Ερωτώμενος 10

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 23 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Μάλιστα, η πρώτη και η τρίτη απάντηση είναι σωστές με διαφορετικό τρόπο σκέψης. Η τρίτη απάντηση θεωρώ είναι πιο σύνθετη από την πρώτη απάντηση. Στη δεύτερη περίπτωση ο μαθητής δεν κατανόησε ότι πρέπει να πάρει το 1/3 από όλες τις σοκολάτες, όχι μόνο από τη μία.

Πώς θα τον βοηθούσες για να το καταλάβει;

Χρειάζεται επανάληψη με χρήση εποπτικού υλικού, ώστε κάθε φορά να του παρουσιάζεις παρόμοια προβλήματα και να μπορεί να κάνει επιλογές μέσα από αυτό. Πάντα όμως με εποπτικό υλικό, έτσι ώστε να κατανοήσει ότι όταν ζητάμε ένα μέρος από σύνολο, πρέπει να πάρει από όλο το σύνολο το μέρος και όχι μεμονωμένα. Να το δει σαν ένα δηλαδή.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5, ναι το 2,5. Άρα λάθος.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Μπέρδεψε τα κλάσματα με τους δεκαδικούς αριθμούς.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Πρέπει να κάνουμε επανάληψη με εποπτικό υλικό και αριθμογραμμή.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Ένα λεπτάκι. Ο πρώτος είδε τους αριθμητές και ο δεύτερος είδε τους παρονομαστές, έτσι έκανα λάθος στη σύγκριση.

Πώς θα βοηθούσες τα παιδιά;

Το καλύτερο είναι να χρησιμοποιήσουμε εποπτικό υλικό. Εγώ αυτό κάνω. Χρησιμοποιώ εποπτικό υλικό να το δουν τα παιδιά. Να μπορεί οπτικά να κατανοήσει ότι δεν μπορεί να συγκριθεί. Αλλά πρέπει να συγκρίνουμε με βάση όμοια.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Ναι, είναι λάθος. Δεν έχει κατανοήσει ότι μοιράζουμε ίσα μέρη με το κλάσμα.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Με σχήματα ξεκινώντας, ώστε να κατανοήσουν ότι πρέπει να χωρίζονται σε ίσα μέρη.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Για λίγο να το σκεφτώ αυτό. Θέλω να το σκεφτώ αυτό αλλά δεν ξέρω γιατί. Καλά δεν είναι έτσι κι αλλιώς όμως... Απλώς σκεφτόμουν, αν αυτό το τετραγωνάκι, το μικρό, χωρούσε στα αλλά, τότε ναι...αλλά...όχι, όχι, δεν χωράει στα άλλα δύο. Καλά απάντησαν τα παιδιά .Είναι λανθασμένη.

Συναντάς κάποιο συχνό λάθος που κάνουν οι μαθητές εδώ;

Ναι, να πουν για παράδειγμα σωστή αυτή την πρόταση.

Πώς το αντιμετωπίζεις;

Άρα πάλι το ίδιο θα πούμε τα παιδιά που δεν το καταλαβαίνουν ότι πρέπει να είναι ίσα. Το ίδιο με πριν.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Λάθος, δεν έχει κατανοήσει ότι το κλάσμα είναι μέρος της μονάδας. Δηλαδή του ολόκληρου φυσικού αριθμού. Άρα δεν θα μπορούσε να είναι εκεί.

Πώς σκέφτηκε δηλαδή;

Προφανώς είδε το 1 και επικεντρώθηκε στον αριθμητή.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα πρέπει να χρησιμοποιείς αριθμογραμμή. Αλλά όχι τέτοια, πιο αραιή, να χωράνε τα κομμάτια. Πάντα αυτά πρέπει να δουλεύονται με εποπτικό υλικό. Μόνο έτσι μπορούν να καταλάβουν τα παιδιά. Ειδικά στις μικρές ηλικίες. Τα κλάσματα είναι πολύ δύσκολα στη σύλληψη, αν δεν υπάρχει εποπτικό υλικό. Δεν μπορεί να δουλευτεί θεωρητικά. Πρέπει να έχεις όλα τα εποπτικά υλικά, μέσα, σχήματα, αριθμογραμμές, κυβάκια, μολύβια, ό,τι μπορείς να έχεις για να κατανοήσουν το μέρος του όλου. Αυτό είναι το πιο δύσκολο πράγμα στα κλάσματα στα παιδιά να κατανοήσουν. Ας πούμε, αν έχω εγώ 10 μολύβια και εγώ ζητήσω τα 2/3...ότι αυτό είναι μέρος των 10. Αυτή είναι η μεγαλύτερη δυσκολία όπως και εδώ μέρος του όλου.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Επίσης το ίδιο. Δεν έχουν κατανοήσει το κλάσμα. Το βλέπουν σαν φυσικό αριθμό.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Μόνο με εποπτικό υλικό. Δεν υπάρχει άλλος τρόπος στα κλάσματα. Δεν μπορούν αλλιώς να τα καταλάβουν. Αν ένας μαθητής καταλάβει το όλο και τον ισομερισμό, τότε έχει καταλάβει τα κλάσματα. Σαν έννοια.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Είναι μία σωστή απάντηση.

Δυσκολεύεται τα παιδιά στη σύγκριση κλασμάτων;

Δεν νομίζω ότι είναι πολύ δύσκολο να κάνουν, αρκεί βέβαια να ξέρουν, να βρίσκουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, να ξέρουν πολλαπλασιασμό και τα λοιπά.

Γιατί δε δυσκολεύονται πιστεύεις;

Είναι μία τεχνική αν ξέρεις την τεχνική μπορείς να το κάνεις. Συνεχής επανάληψη. Αυτό.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Την πρώτη απάντηση, δεν έχει καταλάβει ότι προσθέτουμε μόνο στα ομώνυμα κλάσματα και στη δεύτερη δεν έχει καταλάβει την τεχνική αλλά αυτά τα δύο είναι θέμα τεχνικής. Αν ξέρεις την τεχνική, μπορείς να κάνεις πράξεις. Δηλαδή εδώ τα 2 τελευταία δεν έχουμε θέμα κατανόησης. Εννοώ στην ερώτηση 8 και στην ερώτηση 9. Τα προηγούμενα είχαμε πρόβλημα κατανόησης της έννοιας των κλασμάτων. Που είναι το πιο δύσκολο πράγμα. Εδώ δεν έχουμε τέτοιο πρόβλημα εδώ είναι θέμα τεχνικής. Αυτό δεν είναι δύσκολο είναι θέμα εξάσκησης. Καθαρά θέμα επανάληψης. Δηλαδή αυτά πρέπει να τα βλέπει και να ξέρει τι πρέπει να κάνει. Δεν είναι όμως θέμα κατανόησης. Έτσι νομίζω.

Πώς σκέφτηκε η μαθήτρια;

Η μαθήτρια δεν ήξερε την τεχνική.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Αυτό έχει μία δυσκολία. Μεγάλη δυσκολία. Δεν είναι για γρήγορη σκέψη είναι για πολλή σκέψη. Δεν μπορώ να σκεφτώ, δεν ξέρω. Θα χρειαστώ χρόνο για να σκεφτώ κάποιο πρόβλημα. Δεν μπορώ τώρα.

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τη διδασκαλία των κλασμάτων;

Εγώ δουλεύω πολύ, κυρίως, ξεκινώντας κύκλους που είναι το πιο εύκολο και το πιο χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, πίτσα, πολύ γνωστό παράδειγμα. Γιατί είναι ένα ολόκληρο. Ξεκινάς πάντα από ένα πράγμα που το βλέπεις συνέχεια και είναι ένα όλο. Εκεί είναι ευκολία μεγάλη. Εκεί τα παιδιά δεν δυσκολεύονται. Το να χωρίσεις δηλαδή την πίτσα και να πάρεις κάποια κομμάτια, εκεί δεν δυσκολεύονται. Το πιο δύσκολο πράγμα μετά είναι το σύνολο. Οταν, για παράδειγμα, έχεις δέκα μολύβια, εκεί δυσκολεύονται. Πάντα με εποπτικό υλικό τα κλάσματα. Μόνο με εποπτικό υλικό.

Ωραία! Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Ερωτώμενος 11

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Γυναίκα

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 17 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Πτυχίο Πανεπιστημίου

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λοιπόν, η πρώτη είναι σωστή, η δεύτερη είναι σχεδόν σωστή και η τρίτη είναι λάθος.

Πώς σκέφτηκαν οι μαθητές στην απάντηση 2 και πως στην απάντηση 1;

Η δεύτερη είναι σχεδόν σωστή, απλώς, δεν έχουν κυκλώσει σε όλες τις σοκολάτες και στην τρίτη απάντηση δεν έχει κατανοήσει την έννοια του κλάσματος. Δηλαδή πήρε το ένα και κύκλωσε όλη την σοκολάτα και είδε τον παρονομαστή και κύκλωσε τρία κομμάτια και από την άλλη σοκολάτα.

Πώς θα τα βοηθούσες για να το καταλάβουν;

Με επίδειξη στην τάξη. Θα έφερνα σοκολάτες, όπως έχουν εδώ για παράδειγμα, πίτες, φρούτα και θα τα κάναμε...θα τα χωρίζαμε σε κομμάτια και θα το έδειχνα.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Είναι λάθος, γιατί έχει πάρει το 2 και το 3 από τους φυσικούς αριθμούς και βρήκε τον 2,5.

Πώς θα την βοηθούσες να το καταλάβει;

Πάλι με επίδειξη στην τάξη θα τους το έδειχνα. Με αριθμογραμμή.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λοιπόν, και οι δύο απαντήσεις είναι λάθος, γιατί πήραν τους αριθμούς και σύγκριναν απλά τους αριθμούς. Ο ένας είδε τον αριθμητή ενώ ο άλλος είδε τον παρονομαστή.

Πώς θα τους βοηθούσες να το καταλάβουν;

Και εδώ με επίδειξη θα τους το έδειχνα. Θα έπαιρνα πίτες κομμένες, σε όσα κομμάτια λέει ο παρονομαστής των κλασμάτων και θα έβλεπαν τα κομμάτια.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Λοιπόν, είναι λάθος. Δεν τα έχει χωρίσει σε ίσα κομμάτια, ίσα μέρη. Και πώς θα το έκανα; Πάλι με τον ίδιο τρόπο με επίδειξη. Τα κλάσματα με επίδειξη μπορεί κάποιος να το καταλάβει.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Συμφωνώ. Ναι, σωστό είναι. Σωστά σκέφτηκαν.

Τα παιδιά δυσκολεύονται σε τέτοιες ασκήσεις;

Κάποια ναι, κάποια όχι.

Γιατί πιστεύεις ότι δυσκολεύονται;

Γιατί δεν έχουν κατανοήσει την έννοια του κλάσματος.

Και τι κάνεις για να το καταλάβουνε;

Με παραδείγματα μέσα στην τάξη, με απλά πράγματα, απλά υλικά και επίδειξη.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Είναι λάθος. Φαίνεται ότι δεν έχει καταλάβει την έννοια του κλάσματος, αφού τοποθέτησε το κλάσμα σύμφωνα με τον αριθμητή είδε το ένα και μετά το έβαλε στο νούμερο 2.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Φτιάχνοντας αριθμογραμμή και εξηγώντας με βάση την αριθμογραμμή που πρέπει να μπει το κάθε κλάσμα.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Είναι λάθος εννοείται. Ο μαθητής δεν κατανοεί το κλάσμα βλέπει μόνο αριθμούς. Εχει σύγχυση. Το βλέπει σαν να είναι ένας απλός αριθμός. Το λέει κιόλας.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Θα χώριζα τα παιδιά σε ομάδες και μεταξύ τους, μέσα από συζήτηση, χρησιμοποιώντας καθημερινά υλικά να βρουν την απάντηση. Δε θα τους το έδειχνα εγώ. Αλλά μόνοι τους θα έπρεπε να βρουν τη σωστή απάντηση.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Μμμμ ναι, ωραία, ναι, σωστό είναι. Σωστά σκέφτηκε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.

Δυσκολεύονται τα παιδιά στη σύγκριση κλασμάτων;

Όταν είναι ετερώνυμα, ναι, όταν είναι ομώνυμα, όχι.

Και πώς θα βοηθάς για να καταλάβουν τη σύγκριση κλασμάτων στα ετερώνυμα;

Με πολλές ασκήσεις στον πίνακα και ασκήσεις στο σπίτι. Να ακολουθήσουν τη διαδικασία. Αυτά.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Λάθος, αυτή και λάθος, αυτή. Εδώ έχει προσθέσει αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή παρονομαστή σαν αριθμούς. Ενώ στη δεύτερη, δεν θυμάται τον αλγόριθμο.

Πώς βοηθά στα παιδιά να καταλάβουν τις πράξεις τα κλάσματα;

Με πολλές ασκήσεις και στην τάξη και στο σπίτι. Και επανάληψη.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Πλάκα μου κάνεις. Δεν μπορώ να σκεφτώ αυτή τη στιγμή. Να σου πω κάτι; Δεν είμαι καλή στα προβλήματα. Δεν μπορώ να σκεφτώ.

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τη διδασκαλία των κλασμάτων;

Στα κλάσματα θέλει πολλά παραδείγματα μέσα στην τάξη εννοείται. Μπορούμε να ζητήσουμε από τα παιδιά να φέρουν υλικά απλά, του τύπου σοκολάτα, φρούτα. Να τα κόψουμε στην τάξη, να το κάνουν τα ίδια τα παιδιά στις ομάδες και να δείχνουν το ένα στο άλλο και όλοι μαζί να αποφασίζουμε ποιο είναι το σωστό και γιατί. Αυτό κυρίως στα κλάσματα. Τώρα για τις πράξεις στα κλάσματα με παραδείγματα και επανάληψη στον αλγόριθμο. Τετράδιο και πολλές πράξεις.

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Θεωρώ ότι η μεγαλύτερη δυσκολία στα κλάσματα είναι η σύγκριση κλασμάτων, γιατί μπερδεύονται από τη σύγκριση των απλών αριθμών. Και προσπαθούν να τα συγκρίνουν κοιτώντας ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος και ποιος είναι μικρότερος. Αυτό.

Ωραία! Σε ευχαριστούμε πάρα πολύ!

Ερωτώμενος 12

Φύλο συνεντευξιαζόμενου: Άνδρας

Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου: 13 έτη

Ανώτατο Ακαδημαϊκό Επίπεδο: Μεταπτυχιακές σπουδές

1. Σε μία σχολική τάξη Ε Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η πρώτη είναι σωστή, η δεύτερη είναι λάθος, γιατί έχει σημειώσει το 1/3 μόνο της μίας σοκολάτας και έχει αγνοήσει τελείως τα άλλα και η τρίτη είναι σωστή.

Πώς θα τον βοηθούσες για να το καταλάβει;

Από τη μία σκοπιά ξέρει να βρίσκει το 1/3 από τη μία σοκολάτα. Θα του εξηγούσα ότι είναι τέσσερις σοκολάτες. Επομένως πρέπει να πάρει κάτι και από τις υπόλοιπες σοκολάτες.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Πρέπει να καταλάβει ότι αναφέρεται στο σύνολο.

2. Σε μία τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μία μαθήτρια προτείνει τον 2,5/5. Αξιολόγησε την απάντηση.

Είναι λάθος, γιατί δεν γίνεται να βάλουμε δεκαδικό αριθμό στο κλάσμα.

Η μαθήτρια πώς σκέφτηκε;

Η μαθήτρια σκέφτηκε ξέροντας τους ακέραιους αριθμούς ότι ανάμεσα στο 2 και στο 3 είναι το 2,5. Όμως, δεν σκέφτηκε ότι στα κλάσματα δεν μπορούμε να βάλουμε δεκαδικούς αριθμούς.

Πώς θα βοηθούσες τη μαθήτρια να το καταλάβει;

Του εξηγείς, πρώτα από όλα, ότι δεν μπορείς να βάλεις δεκαδικό. Και στη συνέχεια του βρίσκεις αλλά κλάσματα, με άλλον παρονομαστή, για να μπορέσει να βρει ανάμεσα το κλάσμα, χωρίς να σκέφτεται τους αριθμούς.

3. Σε μία σχολική τάξη πέμπτης δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο». Δύο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η μαθήτρια 2 δίνει λάθος απάντηση αλλά και ο πρώτος δίνει λάθος απάντηση.

Πώς σκέφτηκαν οι μαθητές;

Οι μαθητές σκέφτηκαν με βάση τους αριθμητές και τους παρονομαστές. Δεν έλαβαν υπόψη τους το κλάσμα.

Πώς θα τους βοηθήσεις να το καταλάβουν;

Τους εξηγείς για να τοποθετήσουν τα κλάσματα από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο θα πρέπει τα κλάσματα να είναι υποχρεωτικά ομώνυμα. Δηλαδή να έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Τι πρέπει να καταλάβουν οι μαθητές;

Τα κλάσματα πρέπει να είναι ομώνυμα.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης ΣΤ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής. Αξιολόγησε την απάντηση.

Ο μαθητής είναι τσάκαλος. Ναι, είναι σωστό, παίρνει το μισό.

Συναντάς κάποιο συχνό λάθος που κάνουν οι μαθητές σε τέτοιες ασκήσεις;

Όχι. Απλά εδώ ο μαθητής το έχει δυσκολέψει λίγο μόνος του. Θα μπορούσε να είχε χωρίσει απλά το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα κομμάτια και να πάρει τα δύο. Αυτός διάλεξε να πάρει το μισό με αυτόν τον τρόπο. Λίγοι μαθητές σκέφτονται έτσι.

Γιατί δε δυσκολεύονται;

Ε, γιατί από την τρίτη Δημοτικού κάνουν αναπαραστάσεις. Το έχουν καταλάβει πλέον στην έκτη τάξη.

5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη. Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας. Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια». Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

Για λίγο. Κοίτα, μπορούμε να το πάρουμε λίγο με την ερώτηση πώς τη διατυπώνουμε. Της συνολικής επιφάνειας όντως, μπορεί να είναι τα 2/5. Αλλά τώρα που το σκέφτομαι., όχι, είναι λάθος. Άρα συμφωνώ με τα παιδιά.

Τα παιδιά δυσκολεύονται σε τέτοιες ασκήσεις;

Ίσως και να δυσκολευτούν, ναι.

Πού δυσκολεύονται κυρίως;

Δεν καταλαβαίνουν ότι τα τετράγωνα δεν είναι ίδια σε μέγεθος.

Πώς τους βοηθάς να το καταλάβουν;

Τους λέω ότι στα κλάσματα τα κομμάτια είναι ίδια, ίδια σε μέγεθος.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης πέμπτης δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μία δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση. Αξιολόγησε την απάντηση αυτή.

Είναι λάθος, γιατί ο μαθητής σκέφτηκε ότι επειδή το κλάσμα έχει 2 και 3 άρα είναι μεγαλύτερο από το 1. Επομένως μπαίνει μετά το ένα.

Πώς θα τον βοηθούσες να το καταλάβει;

Θα του έλεγα ότι όταν ένα κλάσμα έχει μικρότερο αριθμητή από τον παρονομαστή τότε είναι μικρότερο της μονάδας. Μετά θα του έδειχνα ποια κλάσματα είναι μικρότερα από τη μονάδα, ποια ίσα και ποια μεγαλύτερα. Θεωρώ είναι πολύ εύκολο να το καταλάβει και μετά να το ξαναλύσει.

Τι πρέπει να καταλάβει ο μαθητής;

Την αξία του κλάσματος.

7. Σε μία τάξη παιδιών ΣΤ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένας μαθητής λέει:« Το 2/3 γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4». Αξιολόγησε την απάντηση.

Ότι το 2/3 είναι ανάμεσα, έχει δίκιο, αλλά δεν είναι σωστός ο τρόπος που το εξηγεί ο μαθητής. Πάλι ο μαθητής σκέφτηκε με βάση τους ακέραιους αριθμούς.

Πώς θα τον βοηθούσες;

Θα πρέπει να του υπενθυμίσω ότι για να το λύσει αυτό, θα πρέπει τα κλάσματα να έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Είναι από τα βασικά που πρέπει να εξηγήσουμε σε έναν μαθητή, όταν θέλει να βρει την αξία ενός κλάσματος.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν.Μια μαθήτρια γράφει:

«Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34». Αξιολόγησε την απάντηση.

Καλά το κάνει. Τα κλάσματα ήταν ετερώνυμα τα έκανε ομώνυμα. Ναι σωστό.

Κάνουν κάποιο συχνό λάθος;

Δεν νομίζω. Όχι.

Γιατί πιστεύεις;

Γιατί είναι πράγματα που τα διδάσκονται αρκετές φορές. Μέσα από εξάσκηση τα παιδιά το καταφέρνει δεν είναι τόσο δύσκολο.

9. Σε μία τάξη παιδιών πέμπτης δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μία μαθήτρια γράφει τα παρακάτω. Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

Η πρώτη είναι λάθος. Για να κάνει την πρόσθεση αναγκαστικά θα κάνει τα κλάσματα ομώνυμα. Και όσον αφορά τη δεύτερη μισό λεπτό...Ναι και αυτή λάθος, γιατί έχει αντιστρέψει τους όρους και στα δύο κλάσματα.

Πώς σκέφτηκε ο μαθητής;

Ο μαθητής απάντησε λάθος, γιατί δεν θυμόταν πώς κάνεις τις πράξεις στα κλάσματα.

Πώς τους βοηθάς;

Τους θυμίζεις πως πρέπει να κάνεις την πρόσθεση και τη διαίρεση.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη.

Ωραία…(παύση). Δώσε μου λίγο χρόνο…(παύση). Στην προπόνηση του μπάσκετ, ο προπονητής είπε στους παίκτες του ότι αν βάζουν τα 3/5 των βολών που σουτάρουν σε κάθε παιχνίδι, θα τους δίνει μισό πόντο στο τέλος του παιχνιδιού. Όταν θα συμπληρώσουν 10 πόντους ο καθένας, θα πάρουν μία μέρα ρεπό. Σε πόσα παιχνίδια το λιγότερο, όταν πετυχαίνουν πάντα τα 3/5 των βολών, θα πάρουν την ημέρα ρεπό; Αναγκαστικά για να το λύσεις, πρέπει να κάνεις 3/5 επί μισό βαθμό, δηλαδή 1/2. Και βγάζοντας τον πολλαπλασιασμό, θα καταλάβεις σε πόσα παιχνίδια, αν είναι πάντα εύστοχοι στα 3/5, θα πάρουν τη μέρα ρεπό. Τώρα στη διαίρεση. Κάτσε θα βρω..(παύση). Τι μπορεί να είναι 5/6 και να το χωρίσω στη μέση; Δεν μπορώ να σκεφτώ αλλά θέλω να σκεφτώ. Περίμενε. Σε μία προπόνηση ποδοσφαίρου οι δύο μεγαλύτερες τάξεις αφού χώρισαν το γήπεδο αποφάσισαν να παίξουν ποδόσφαιρο στα 5/6 της συνολικής επιφάνειας του. Στη συνέχεια, αφού οι δάσκαλοι του σχολείου διαπίστωσαν ότι δεν είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη, τους πρότειναν να δώσουν τη μισή έκταση και στις υπόλοιπες τάξεις, έτσι ώστε να έχουν όλοι αρκετό χώρο για να παίξουν. Πόσο τελικά επιφάνεια του γηπέδου θα καταλάβουν οι δύο μεγαλύτερες τάξεις;

Θα ήθελες να κάνεις κάποιο άλλο σχόλιο σχετικά με τη διδασκαλία των κλασμάτων;

Τα αγαπώ. Θεωρώ ότι οι πράξεις είναι κάτι απλό. Αρκεί να μάθουν πώς γίνονται να ξέρουν δηλαδή τους βασικούς κανόνες. Ένα πράγμα που θεωρώ ότι δυσκολεύονται τα παιδιά να καταλάβουν είναι όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Βρίσκουμε ένα κλάσμα μικρότερο από το αρχικό. Πράγμα που οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν εξαιτίας της κανονικής πράξης του πολλαπλασιασμού.

Και εσύ πώς τους βοηθάς να μη δυσκολεύονται;

Τους εξηγούμε ότι ποια είναι η αξία του κάθε κλάσματος και εφόσον το κλάσμα με μικρότερο αριθμητή από τον παρονομαστή είναι ένας αριθμός μικρότερος της μονάδας είναι φυσιολογικό να μικρύνει αντί να μεγαλώσει.

Την αξία πώς την καταλαβαίνουν;

Τους εξηγούμε εξαρχής ποτέ ένα κλάσμα είναι ίσο, μικρότερο ή μεγαλύτερο της μονάδας. Ανάλογα με τον αριθμητή και τον παρονομαστή.

Ωραία θα ήθελες να προσθέσεις κάτι άλλο;

Όχι. Αυτά που σου είπα.

Ωραία! Σε ευχαριστούμε πολύ!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Ερευνητικό Εργαλείο

Ημερομηνία:

Τοποθεσία συνέντευξης:

Φύλο συνεντευξιαζόμενου/ης:

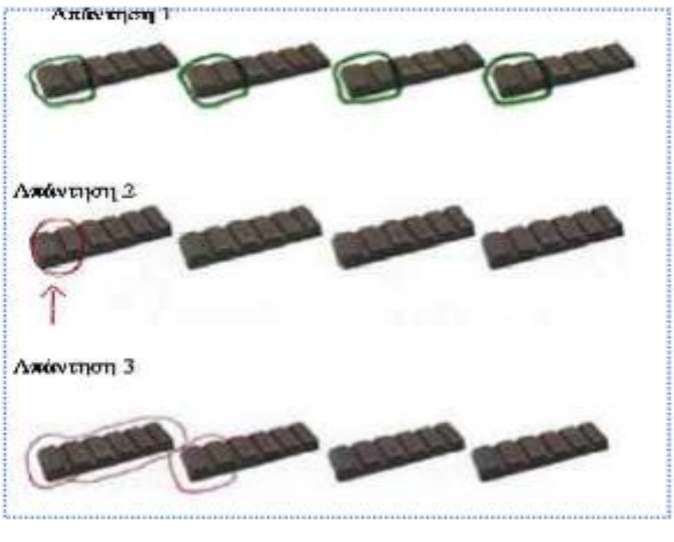
Χρόνια προϋπηρεσίας συνεντευξιαζόμενου/ης:

Ηλικία συνεντευξιαζόμενου/ης:

Ανώτερο ακαδημαϊκό επίπεδο:

Σημειώσεις: «Σε ευχαριστούμε θερμά για τη συμμετοχή σου στην έρευνά μας. Η συμμετοχή σου είναι πολύτιμη. Τα προσωπικά δεδομένα είναι απόρρητα και δεν δημοσιοποιούνται. Η διάρκεια της συνέντευξής μας θα είναι περίπου 30 λεπτά.»

1.Σε μια σχολική τάξη Ε΄ Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές: «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών παρακάτω». Τρεις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:



Αξιολόγησε κάθε απάντηση.

2. Σε μια τάξη ζητείται από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5. Μια μαθήτρια προτείνει το 2,5/5.

Αξιολόγησε την απάντηση.

3. Σε μια σχολική τάξη Ε΄ Δημοτικού στο μάθημα των Μαθηματικών ο δάσκαλος ρωτάει τους μαθητές: «Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο». 3/8, 1/4, 2/3

Δυο μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις:

Γιώργος: 1/4 < 2/3 < 3/8

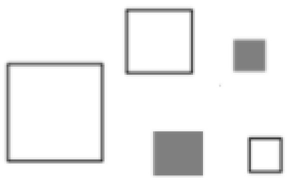
Μαρία: 2/3 < 1/4 < 3/8

Αξιολόγησε κάθε απάντηση.

4. Από τα παιδιά μιας τάξης Στ΄ Δημοτικού ζητείται να κατασκευάσουν μια αναπαράσταση για το κλάσμα 2/4. Ένα παιδί σχεδιάζει το εξής:

Αξιολόγησε την απάντηση.

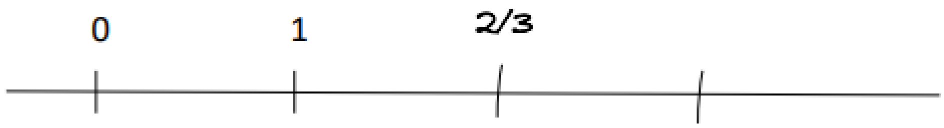
5. Στα παιδιά μιας τάξης ζητείται να αποφανθούν αν η παρακάτω δήλωση είναι σωστή ή λανθασμένη: « Τα γραμμοσκιασμένα τετράγωνα αποτελούν τα 2/5 των τετραγώνων της παρακάτω εικόνας»



Τα παιδιά της ομάδας καταλήγουν στο εξής συμπέρασμα: «Είναι λανθασμένη, γιατί τα τετράγωνα δεν είναι ίδια».

Αξιολόγησε την απάντηση των παιδιών.

6. Ζητείται από τα παιδιά μιας τάξης Ε΄ Δημοτικού να τοποθετήσουν το κλάσμα 2/3 σε μια δεδομένη αριθμογραμμή. Ένας μαθητής δίνει την παρακάτω απάντηση:



Αξιολόγησε την απάντηση.

7. Σε μια τάξη παιδιών ΣΤ΄ Δημοτικού ζητείται να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 3/4. Ένα μαθητής λέει: «Το 2/3, γιατί το 2 είναι ανάμεσα στο 1 και το 3 και το 3 είναι ανάμεσα στο 2 και το 4».

Αξιολόγησε την απάντηση.

8. Σε ένα διαγώνισμα ζητείται από τους μαθητές μιας τάξης να συγκρίνουν τα κλάσματα 14/17 και 3/2 και να εξηγήσουν πώς σκέφτηκαν. Μια μαθήτρια γράφει: «Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π. του 17 και του 2, που είναι το 34. Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα: 28/34 και 51/34. Μεγαλύτερο είναι το 51/34»

Αξιολόγησε την απάντηση.

9. Σε μια τάξη παιδιών Ε΄ Δημοτικού ζητείται να κάνουν τις παρακάτω πράξεις. Μια μαθήτρια γράφει:

α)3/4 + 4/5 = 7/9 β) 3/4 : 3/2=4/3 * 2/3= 8/3

Αξιολόγησε την κάθε απάντηση.

10. Πρόκειται να διδάξετε πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων. Δώστε ένα παράδειγμα προβλήματος που να λύνεται με την πράξη:

α) 3/5 x 1/2 β) 5/6 : 1/2