



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΣΧΟΛΙΚΗ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

**«Αυθόρμητες αναπαραστάσεις και σημειωτική δραστηριότητα στην
πρώιμη αλγεβρική σκέψη: μια μελέτη επικεντρωμένη στις κανονικότητες»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΤΟΥΡΟΥ ΑΓΑΘΗ (Α.Μ.: 64)

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2020

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Κατεύθυνση: Θετικές Επιστήμες Και Τεχνολογίες Της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών
στην Προσχολική και Πρωτοσχολική Εκπαίδευση

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Αυθόρμητες αναπαραστάσεις και σημειωτική δραστηριότητα στην πρόιμη αλγεβρική
σκέψη: μια μελέτη επικεντρωμένη στις κανονικότητες»

“Spontaneous representations and semiotic activity in early algebraic thinking: a study
focusing on patterns”

της φοιτήτριας
ΝΤΟΥΡΟΥ ΑΓΑΘΗ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: ΚΑΛΔΡΥΜΙΔΟΥ ΜΑΡΙΑ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Καλδρυμίδου Μαρία
Καθηγήτρια Π.Τ.Ν

Βαμβακούση Ξανθή
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Π.Τ.Ν

Τάτσης Κωνσταντίνος
Επίκουρος Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της.

Ευχαριστώ θερμά την κυρία Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια της Διδακτικής των Μαθηματικών και επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε εξ' αρχής αναθέτοντάς μου το συγκεκριμένο θέμα, την επιστημονική της καθοδήγηση, τις υποδείξεις της, την επιμονή της, και τη συνεχή της υποστήριξη και παρότρυνση από την αρχή μέχρι το τέλος.

Επίσης, ευχαριστώ την κυρία Βαμβακούση Ξένια, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια της Διδακτικής των Μαθηματικών για τις εποικοδομητικές της υποδείξεις κατά την επιλογή του θέματος της εργασίας και καθ' όλη τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας.

Δε θα μπορούσα να παραλείψω τον Επίκουρο Καθηγητή κύριο Τάση Κωνσταντίνο για την πολύτιμη συμβολή του στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, ως μέλος της τριμελούς επιτροπής.

Επιπλέον, ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα και τις οικογένειές τους. Με τον ενθουσιασμό και τη συνεργασία τους έδωσαν ζώη και υπόσταση στην έρευνα και κουράγιο στη γράφοντα. Παιδιά, σας ευχαριστώ από καρδιάς.

Τέλος, θα ήθελα εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για την υπομονή που έδειξαν όλες εκείνες τις ατελείωτες ώρες κατά τις οποίες μιλούσα για την εργασία και τις δυσκολίες που συναντούσα. Η υποστήριξη και η ενθάρρυνσή τους είναι ανεκτίμητες. Μαμά, μπαμπά, σας ευχαριστώ.

Στους γονείς μου, Δονάτο και Δανάη.

Τα κατάφερα.

Περίληψη

Ο όρος της Άλγεβρας περιλαμβάνει δύο διακριτές έννοιες, αυτή του αλγεβρικού συλλογισμού και αυτή του αλγεβρικού συμβολισμού (Zazkis & Liljedahl, 2002). Ένα σύνολο σύγχρονων ερευνών και μελετών έχουν οδηγήσει στη διαπίστωση πως οι μαθητές είναι σε θέση να χειριστούν αλγεβρικές έννοιες και να χρησιμοποιήσουν αλγεβρικό συμβολισμό, ήδη από αρκετά νεαρή ηλικία και σίγουρα πολύ νωρίτερα από την επίσημη εισαγωγή τους στη διδασκαλία της Άλγεβρας (Mulligan & Mitchelmore, 2013).

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια μελέτης των αυθόρμητων αναπαραστάσεων και της σημειωτικής δραστηριότητας των παιδιών που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, με τη χρήση δραστηριοτήτων προτύπων και τη γενίκευση αυτών. Τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν σε γενικές γραμμές με αντίστοιχες προηγούμενες έρευνες και με την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Λέξεις-Κλειδιά: αναπαραστάσεις, σημειωτική δραστηριότητα, πρώιμη αλγεβρική σκέψη, γενίκευση, πρότυπα

Abstract

Algebra consists of two distinct concepts, that of algebraic thinking and that of algebraic symbolism (Zazkis & Liljedahl, 2002). A series of modern research and studies has led to the discovery that students are able to handle algebraic concepts and use algebraic symbolism from a very young age and well before their formal introduction to Algebra (Mulligan & Mitchelmore, 2013).

The current master thesis makes an attempt to study the spontaneous representations and semiotic activity of students in early algebraic thinking, using pattern activities and generalizations. The findings of the research are generally consistent with previous researches and the existing literature.

Key words: representations, semiotic activity, pre-algebraic thinking, generalization, patterns

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή	8
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ	10
Κεφάλαιο 1: Πρώιμη αλγεβρική σκέψη	11
1.1. Το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα	11
1.2. Αλγεβρικός συλλογισμός.....	12
1.3. Αλγεβρικός συλλογισμός και αλγεβρικός συμβολισμός.....	13
1.4. Η διαδικασία της γενίκευσης	15
1.5. Πρότυπα.....	17
1.5.1. Ορισμός	17
1.5.2. Είδη προτύπων	18
1.6. Γενίκευση προτύπων	20
1.6.1. Γενίκευση και πρότυπα	20
1.6.2. Μοντέλα έκφρασης γενίκευσης σε δραστηριότητες προτύπων	23
Κεφάλαιο 2: Αναπαραστάσεις	29
2.1. Εξωτερικές αναπαραστάσεις.....	29
2.2. Εσωτερικές αναπαραστάσεις	30
2.3. Σχέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων	31
2.4. Χαρακτηριστικά γνωρίσματα αναπαραστάσεων	32
2.5. Δομή και παραγωγή αναπαραστατικών συστημάτων.....	33
2.6. Επίσημα σημειωτικά αναπαραστατικά συστήματα	34
Κεφάλαιο 3: Σημειωτική δραστηριότητα	37
3.1. Λειτουργίες σημείων	38
3.2. Αντικειμενικοποίηση γνώσης	41
3.3. Είδη σημείων	42
3.4. Ο ρόλος της γλώσσας	43
3.5. Σχετικές μελέτες-έρευνες	44
ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ	48
Κεφάλαιο 4: Μεθοδολογία της έρευνας	49
4.1. Στόχος κι ερευνητικά ερωτήματα	49
4.2. Είδος έρευνας/ Μέθοδος	49

4.3. Δείγμα	50
4.4. Διαδικασία συλλογής δεδομένων και τεχνικές.....	50
4.5. Έργα	51
Κεφάλαιο 5: Αποτελέσματα.....	54
5.1. Χαρακτηριστικά δομής για την περιγραφή προτύπου	54
5.1.1 Εύρεση επόμενου όρου	56
5.1.2 Εύρεση κοντινού όρου	57
5.1.3 Εύρεση μακρινού όρου	59
5.1.4. Γραπτό λεκτικό και συμβολικό μήνυμα	60
5.2. Είδος μαθηματικής σχέσης περιγραφής του προτύπου.....	63
5.2.1 Εύρεση επόμενου όρου	65
5.2.2 Εύρεση κοντινού όρου	66
5.2.3 Εύρεση μακρινού όρου	67
5.2.4. Γραπτό λεκτικό και συμβολικό μήνυμα	68
5.3. Είδος μηνύματος	72
5.4. Στοιχεία αναπαράστασης συμβολικού μηνύματος	74
5.5. Τρόπος γραφής απαντήσεων	76
5.5.1. Δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.....	77
5.5.2. Χωρικό δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.....	78
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ	80
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	89
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι	94

Εισαγωγή

Οι αναπαραστάσεις και τα σημεία κατέχουν σημαντικό ρόλο στην ανθρώπινη σκέψη, καθώς χωρίς αυτά, δεν υφίστανται ούτε η σκέψη, ούτε οι νοερές γενικεύσεις που οδηγούν σε αυτή. Η επιστήμη των Μαθηματικών, μάλιστα, κατακλύζεται από νοερές ή απτές αναπαραστάσεις και σημεία, σκοπός των οποίων αποτελούν η αποτύπωση και κωδικοποίηση των αφηρημένων εννοιών κι αντικειμένων που διέπουν το πεδίο των Μαθηματικών (Steinbring, 2006).

Οι αναπαραστάσεις συνιστούν ένα ισχυρό μέσο έκφρασης και παρουσίασης μαθηματικών ιδεών και σχέσεων κι αποτελούν σημαντικό εργαλείο διδασκαλίας, μάθησης και επικοινωνίας, καθώς εμπλέκονται στη διαδικασία της σκέψης. Δεν δύναται να υφίσταται γνώση χωρίς αναπαράσταση (Duvai, 2000). Όμως, ουσία της Άλγεβρας αποτελεί η αποστασιοποίηση από το πλαίσιο για να υποδηλώσουμε τα πράγματα με έναν αφηρημένο τρόπο και κεντρικό σημείο αυτής της αποστασιοποίησης συνιστά η σημειωτική δραστηριότητα και η κριτική συνειδητοποίηση, όχι απλώς η νοερή αναπαράσταση (Otte, 2006; Radford, 2010). Έτσι, η μάθηση συνεπάγεται απόδοση νοήματος και ερμηνεία, μέσα από την ενασχόληση και την ερμηνεία σημείων ή αντικειμένων από τους μαθητές (Radford, Bardini & Sabena, 2005).

Άρρηκτα συνδεδεμένη με τη δημιουργία αναπαραστάσεων και τη χρήση σημείων είναι η διαδικασία της μαθηματικής γενίκευσης και η έκφραση αυτής. Η μαθηματική γενίκευση, μάλιστα, συνιστά παράγοντα ανάπτυξης του αλγεβρικού συλλογισμού σε μαθητές που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, ενώ συνδέεται και με τον αλγεβρικό συμβολισμό.

Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες μεθόδους αναζήτησης της γενίκευσης είναι να την εντοπίσουμε σε δραστηριότητες που περιλαμβάνουν πρότυπα (Van de Walle, 2013). Μέσα από τη γενίκευση των κανόνων των προτύπων, οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν και να αναπαραστήσουν σχέσεις με διάφορα σημειωτικά μέσα, αναπτύσσοντας έτσι την ικανότητα αλγεβρικού συλλογισμού.

Στόχος, λοιπόν, της παρούσης έρευνας είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά προσεγγίζουν και αναπαριστούν τόσο προφορικά όσο και γραπτά δραστηριότητες με πρότυπα κατά τη διαδικασία γενίκευσης των κανόνων. Για το σκοπό αυτό σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε μια διερευνητική μελέτη περίπτωσης σε παιδιά ηλικίας 8 έως 13 ετών.

Η εργασία δομείται σε δύο μέρη, το *θεωρητικό* κα το *εμπειρικό*.

Το **πρώτο μέρος** περιλαμβάνει το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίχθηκε η οργάνωση και η διεξαγωγή της παρούσας έρευνας. Συγκεκριμένα, αποτελείται από τρία κεφάλαια. Στο *πρώτο κεφάλαιο* (Κεφάλαιο 1) γίνεται αναφορά στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη και τη σύνδεση μεταξύ αλγεβρικού συλλογισμού και συμβολισμού. Επιπρόσθετα, γίνεται μια σύντομη περιγραφή της διαδικασίας της γενίκευσης και πώς αυτή εκφράζεται μέσα από δραστηριότητες προτύπων. Το *δεύτερο κεφάλαιο* (Κεφάλαιο 2) σχετίζεται με τις μαθηματικές αναπαραστάσεις και την επίδραση αυτών στη μάθηση κι επικοινωνία των μαθητών. Το *τρίτο κεφάλαιο* (Κεφάλαιο 3) του θεωρητικού μέρους σχετίζεται με τη σημειωτική δραστηριότητα και την αντικειμενικοποίηση της γνώσης μέσω αυτής. Επιπρόσθετα, αναφέρεται στο ρόλο της γλώσσας στη μάθηση και τη διδασκαλία.

Το **δεύτερο μέρος** της εργασίας περιλαμβάνει τη μέθοδο και τη διαδικασία της έρευνας. Επίσης, παρατίθενται τα αποτελέσματα, ενώ παρουσιάζονται και τα συμπεράσματα της έρευνας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 1: Πρώιμη αλγεβρική σκέψη

1.1 Το πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Σύμφωνα με τα «παραδοσιακά» σχολικά Μαθηματικά, όταν μιλάει κανείς για την Άλγεβρα και την Αριθμητική, αναφέρεται σε δύο εντελώς διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, τα οποία μάλιστα διδάσκονται σε διαφορετικές σχολικές βαθμίδες. Συγκεκριμένα, η Αριθμητική διδάσκεται στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, ενώ η Άλγεβρα διδάσκεται στην Δευτεροβάθμια. Η παραπάνω άποψη στηρίζεται σε δύο κυρίως στοιχεία: α) στο γεγονός ότι η Άλγεβρα προέκυψε ιστορικά μετά από, και ως γενίκευση, της Αριθμητικής και β) στην ύπαρξη αναπτυξιακών περιορισμών που καθιστούν, σύμφωνα με τον πιαζετιανό κονστρουκτιβισμό, την Άλγεβρα "αναπτυξιακά ακατάλληλη" για τους νέους μαθητές, καθώς βρίσκεται πολύ πέρα από τις σημερινές τους δυνατότητες. Από αναπτυξιακή άποψη, η Άλγεβρα αποτελεί συνέχεια της Αριθμητικής κι έτσι τεκμηριώνονται αυτοί οι περιορισμοί, οι οποίοι λειτουργούν ως εμπόδιο στην τρέχουσα γνωστική ικανότητα των μαθητών, και σύμφωνα με τους οποίους οι μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης δεν βρίσκονται στο κατάλληλο αναπτυξιακό επίπεδο ώστε να μπορέσουν να κατανοήσουν ορισμένα πράγματα, ούτε θα είναι σε θέση να το κάνουν στο προσεχές μέλλον (Carragher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011; Sfard & Linchevski, 1994). Στο Carragher et al. (2006) γίνεται μια συνοπτική αναφορά σε συγγραφείς κι ερευνητές, που έχουν υποστηρίξει την ύπαρξη αυτών των αναπτυξιακών περιορισμών, η οποία μεταξύ άλλων περιλαμβάνει τους Collis (1975), Filloy and Rojano (1989), Herscovics and Linchevski (1994), Kuchemann (1981) και MacGregor (2001).

Το γεγονός ότι οι μαθητές καταδεικνύουν δυσκολίες στην κατανόηση και εκμάθηση της Άλγεβρας στην πρώτη τους επαφή είναι κάτι που ισχύει. Κατά πόσο όμως αυτό οφείλεται σε αναπτυξιακούς περιορισμούς; Σύμφωνα με νέες μελέτες, οι δυσκολίες των μαθητών έχουν τις ρίζες τους στην έλλειψη αναγκαίας προετοιμασίας κατά την αρχική διδασκαλία των Μαθηματικών σε νεαρότερη ηλικία και στα κενά που δημιουργούνται από τις χαμένες ευκαιρίες και έννοιες οι οποίες θα πρέπει αργότερα να καλυφθούν. Ταυτόχρονα, πλήθος ερευνών υποστηρίζει πως οι νεαροί μαθητές είναι σε θέση να αναπτύξουν σύνθετες μαθηματικές γνώσεις και αφηρημένη συλλογιστική πολύ νωρίτερα από ό,τι προηγουμένως θεωρούνταν. Συγκεκριμένα, έχει διαπιστωθεί πως οι μαθητές δύναται να χειριστούν αλγεβρικές έννοιες και να χρησιμοποιήσουν αλγεβρικό συμβολισμό λίγο νωρίτερα από ότι συνήθως υποτίθεται κι έτσι να κάνουν χρήση αλγεβρικών ιδεών και αναπαραστάσεων που

κατά κανόνα απουσιάζουν από το διδακτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (Carragher et al., 2006; Mulligan & Mitchelmore, 2013).

Με την πάροδο των ετών, λοιπόν, έχει αρχίσει να διαμορφώνεται μια διαφορετική άποψη σχετικά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας. Υπάρχουν ευρήματα που καταδεικνύουν πως οι δυσκολίες των μαθητών στην ενασχόλησή τους με την Άλγεβρα οφείλονται αφενός στο γεγονός ότι το πεδίο της διαχωρίζεται από αυτό της Αριθμητικής και αφετέρου στο γεγονός ότι υπάρχει, από μέρους των μαθητών, μια έλλειψη πρώιμων σχετικών εμπειριών κι έτσι δεν στηρίζεται ο αλγεβρικός τους συλλογισμός (Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011).

Σύμφωνα με μια άλλη προσέγγιση της Άλγεβρας, αυτή προσεγγίζεται ως μια κουλτούρα. Συγκεκριμένα, η Lee (1996) αναφέρεται στην Άλγεβρα ως μια μίνι-κουλτούρα μέσα στην ευρύτερη κουλτούρα των Μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο της δίνεται η δυνατότητα να την εξετάσει ως ένα σύνολο δραστηριοτήτων και ως γλώσσα, ενώ ταυτόχρονα είναι σε θέση να αντιληφθεί την αλληλεπίδραση της γλώσσας και της γνώσης, που λαμβάνει χώρα στη σχολική τάξη, καθώς και την αλληλεπίδραση μεταξύ Άλγεβρας και άλλων μαθηματικών κουλτούρων, όπως η Αριθμητική. Οι μαθητές, λοιπόν, περνούν ένα «πολιτισμικό σοκ» κατά την εισαγωγή τους στην αλγεβρική κουλτούρα, μια κάπως περίεργη κουλτούρα με τις δικές πεποιθήσεις, δικό της τρόπο επικοινωνίας και κώδικα συμπεριφοράς, δική της επιλογή θεμάτων και δομών, κ.ο.κ.

Αντιστοίχως, ο Karut (2008) περιγράφει τα Μαθηματικά γενικότερα και την Άλγεβρα ειδικότερα ως πολιτισμικά κατασκευάσματα, κάτι που κληρονομούμε με την πολιτισμική μας κληρονομιά. Έτσι, ενσωματώνονται στο εκπαιδευτικό σύστημα κάθε χώρας και εξαρτώνται από πράγματα όπως το πότε ξεκινάει η διδασκαλία της Άλγεβρας ή πόσο στενά συνδέονται με άλλα μαθηματικά θέματα. Επιπλέον, η Άλγεβρα, και τα Μαθηματικά γενικότερα, αποτελούν μια σειρά δραστηριοτήτων που κάνουν οι άνθρωποι, όπως η κατασκευή αναπαραστάσεων για να εκφράσουν μια γενίκευση, και ο μετασχηματισμός αυτών.

1.2 Αλγεβρικός συλλογισμός

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2013) «η αλγεβρική σκέψη ή αλγεβρικός συλλογισμός περιλαμβάνει τη διαμόρφωση γενικεύσεων μετά την ύπαρξη εμπειριών με αριθμούς και υπολογισμούς, την επισημοποίηση αυτών των ιδεών με τη χρήση ενός ουσιαστικού συμβολικού συστήματος και την εξερεύνηση των εννοιών του προτύπου και των συναρτήσεων». Επίσης, ο ίδιος πρόσθεσε πως η αλγεβρική σκέψη ενυπάρχει παντού στα Μαθηματικά και πως είναι

ζωτικής σημασίας για την αξιοποίηση των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Ακόμη, δήλωσε πως η αλγεβρική σκέψη ξεκινάει από την αρχή της εκπαίδευσης, το Νηπιαγωγείο, και συνεχίζεται μέχρι το τέλος του Λυκείου. Συνεχίζει λοιπόν να περιλαμβάνεται σε όλες της τάξεις του σχολείου, από την αρχή μέχρι το τέλος, με κύρια σημεία τη χρήση προτύπων που οδηγούν σε γενικεύσεις, τη μελέτη της αλλαγής και την έννοια της συνάρτησης.

Σύμφωνα με τον Radford (2006, 2010) δεν υπάρχει ένας σαφής ορισμός της «αλγεβρικής σκέψης» γεγονός που ίσως οφείλεται στο ότι υφίσταται ένα ευρύ πεδίο αλγεβρικών αντικειμένων (εξισώσεις, συναρτήσεις, μοτίβα κ.λπ.) και διαδικασιών (απλοποίηση), ενώ παράλληλα υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να αντιληφθεί τη σκέψη. Αυτό, όμως, που είναι εμφανές είναι πως η «αλγεβρική σκέψη» είναι ένας τρόπος να στοχάζεται κανείς μαθηματικά και χαρακτηρίζεται από τρία αλληλένδετα στοιχεία: την *απροσδιοριστία* των αλγεβρικών αντικειμένων (π.χ. άγνωστα, μεταβλητές και παράμετροι), την *αναλυτική* διαχείριση των απροσδιόριστων αυτών αντικειμένων (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση κ.λπ. αγνώστων) κι έναν ιδιόμορφο *συμβολισμό* που θα πρέπει να αναπαραστήσει τα αντικείμενα αυτά. Τα αντικείμενα της Άλγεβρας μπορούν να αναπαρασταθούν μόνο με έμμεσο τρόπο, μέσα από κατασκευές που βασίζονται σε σημεία, τα οποία θα μπορούσαν να είναι γράμματα, αλλά όχι απαραίτητα (π.χ. γεωμετρικά σχέδια). Συγκεκριμένα, ο αλφαριθμητικός συμβολισμός είναι μία από τις πολλές σημειωτικές μορφές που μπορούν να ορίσουν και να εκφράσουν μια απροσδιοριστία.

Ο Karut (2008) αναφέρεται σε δύο βασικές όψεις του αλγεβρικού συλλογισμού, οι οποίες είναι α) η γενίκευση και η έκφραση αυτής της γενίκευσης με συστηματικό συμβατικό συμβολισμό και β) οι ενέργειες για γενίκευση που εκφράζονται με συστηματικό συμβατικό συμβολισμό. Και οι δύο αυτές όψεις κάνουν την εμφάνισή τους σε κάθε μία από τις τρεις πτυχές της αλγεβρικής σκέψης που περιλαμβάνουν τη μελέτη των δομών στο αριθμητικό σύστημα, τη μελέτη των συναρτήσεων, των σχέσεων και των προτύπων και τη διαδικασία μαθηματικής μοντελοποίησης, η οποία περιλαμβάνει και την ουσιαστική χρήση συμβόλων.

1.3 Αλγεβρικός συλλογισμός και αλγεβρικός συμβολισμός

Ο όρος της Άλγεβρας περιλαμβάνει δύο διακριτές έννοιες, αυτή του αλγεβρικού συλλογισμού και αυτή του αλγεβρικού συμβολισμού. Όσον αφορά τη σχέση αυτών των δύο εννοιών, οι απόψεις των ερευνητών και συγγραφέων δίστανται. Από τη μία πλευρά υπάρχουν αυτοί που υποστηρίζουν πως ο αλγεβρικός συμβολισμός αποτελεί απαραίτητο συστατικό

στοιχείο του αλγεβρικού συλλογισμού, ενώ από την άλλη πλευρά υπάρχουν εκείνοι που διατείνονται πως τα σύμβολα είναι τα ορατά αποτελέσματα του αλγεβρικού συλλογισμού ή λειτουργούν ως επικοινωνιακό εργαλείο αυτού. Η δεύτερη άποψη υποστηρίζεται και από το γεγονός ότι παρατηρείται η χρήση συμβόλων από τους μαθητές χωρίς να αντιλαμβάνονται τη λειτουργία και το νόημά τους και από το γεγονός ότι τα τελευταία χρόνια δίνεται έμφαση στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στη δομή της Άλγεβρας, περισσότερο, παρά στον υπολογισμό (Zazkis & Liljedahl, 2002).

Ο αλγεβρικός συλλογισμός αποτελείται από διαφορετικές μορφές σκέψης και κατανόησης των συμβόλων και εντάσσεται σε όλο το φάσμα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, η διδασκαλία για την ανάπτυξη αυτών των μορφών σκέψης ξεκινάει από πολύ νωρίς, έτσι ώστε να μάθουν οι μαθητές να σκέφτονται παραγωγικά με αυτές τις ισχυρές μαθηματικές ιδέες Karut (2008).

Σε έρευνά τους οι Zazkis & Liljedahl (2002) παρατήρησαν πως η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν αλγεβρικό συμβολισμό δεν συνέπιπτε χρονικά με την ανάπτυξη της αλγεβρικής τους σκέψης. Έτσι, κατέληξαν στο συμπέρασμα πως η εμφάνιση αλγεβρικού συμβολισμού δεν θα έπρεπε να συνεπάγεται και την ύπαρξη αλγεβρικού συλλογισμού. Ταυτόχρονα, όμως, και η έλλειψη αλγεβρικού συμβολισμού δεν θα έπρεπε να αποτελεί δείκτη έλλειψης αλγεβρικής σκέψης.

Αντιστοίχως, σύμφωνα με τον Radford (2008, 2010, 2012) παρόλο που η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μπορεί να διευκολύνει την επαφή των μαθητών με τον αλγεβρικό συμβολισμό, η χρήση γραμμάτων και συμβόλων στην Άλγεβρα ποτέ δεν ήταν ούτε αναγκαία ούτε επαρκή προϋπόθεση για να σκεφτεί κανείς αλγεβρικά. Η χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού αποτελεί ένα μόνο από τα συστατικά της αλγεβρικής σκέψης και θα ήταν λάθος μας να μελετήσουμε την εξέλιξή της εστιάζοντας μόνο σε αυτό. Ο ίδιος, επίσης, υποστήριξε σε προγενέστερη δημοσίευσή του (Radford, 2000) πως οι μαθητές παρουσιάζουν στοιχεία αλγεβρικής σκέψης όταν ασχολούνται με την παραγωγή γραπτού μηνύματος, παρόλο που δεν χρησιμοποιούν αλγεβρικό συμβολισμό. Έτσι, ανοίγονται νέοι δρόμοι για τη διερεύνηση των στοιχειωδών μορφών αλγεβρικής σκέψης σε νεότερους μαθητές, που δεν έχουν προβεί ακόμη σε σημείωση αλγεβρικού συμβολισμού. Επιπρόσθετα, ο ίδιος κάνει λόγο (Radford, 2010) και για την ύπαρξη μιας «ζώνης εμφάνισης αλγεβρικής σκέψης», η οποία πρόκειται για μία εννοιολογική περιοχή, όπου οι μαθητές δύνανται να σκεφτούν αλγεβρικά χωρίς να είναι σε θέση ακόμη να χρησιμοποιήσουν αλφαριθμητικά σύμβολα.

Ακόμη, ο Charbonneau (1996) υποστήριξε πως ο αλγεβρικός συμβολισμός αποτελεί κεντρικό στοιχείο της Άλγεβρας, καθώς μας επιτρέπει να ονομάσουμε και να ορίσουμε ένα αντικείμενο που προηγουμένως δεν είχε κάποιο όνομα. Έτσι, λειτουργεί ως γλώσσα της Άλγεβρας. Ταυτόχρονα, όμως, ο αλγεβρικός συμβολισμός δεν αποτελεί και το σύνολο της Άλγεβρας. Ο συμβολισμός δεν έχει κάποιο σκοπό από μόνος του, παρά λειτουργεί ως μέσο για την επίτευξη ενός σκοπού (π.χ. για την επίλυση ενός προβλήματος).

Παρατηρούμε λοιπόν πως η χρήση τυπικών συμβολισμών δεν αποτελεί απαραίτητο χαρακτηριστικό της Άλγεβρας και υπό αυτήν την έννοια, η αλγεβρική σκέψη εμφανίζεται πολύ πριν από την εισαγωγή κάποιου ειδικού συμβολισμού (Sfard & Linchevski, 1994). Παρ' όλα αυτά, ο αλγεβρικός συμβολισμός μπορεί να στηρίξει τη μαθηματική σκέψη ακόμη και μεταξύ των νέων μαθητών (Carraher et al., 2006). Πρόκειται για το μέσο έκφρασης του αλγεβρικού συλλογισμού, ένα μέσο επικοινωνίας των ιδεών και των πληροφοριών σε άλλα άτομα.

Έτσι, όλο και περισσότεροι εκπαιδευτικοί, υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής γύρω από τα Μαθηματικά και ερευνητές (συμπεριλαμβανομένων των National Council of Teachers of Mathematics στις Η.Π.Α. και μιας ειδικής επιτροπής του RAND Corporation) υποστηρίζουν την εισαγωγή των μαθητών στην αλγεβρική σκέψη από πολύ νεαρή ηλικία και δεν υπάρχει πια η ανάγκη να περιμένει η διδασκαλία της Άλγεβρας μια υποτιθέμενη μεταβατική περίοδο μετά τη διδασκαλία της Αριθμητικής (Blanton & Kaput, 2004; Kaput, 2008; Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011; Radford, 2010, 2012; Van de Walle, 2013). Οι Carraher et al. (2006) συνοψίζουν μια λίστα ερευνητών και συγγραφέων που υποστηρίζουν την εισαγωγή της διδασκαλίας της Άλγεβρα στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, η οποία περιλαμβάνει τους: Davis (1985,1989), Vergnaud (1988), Schoenfeld (1995), Mason (1996), Lins and Gimenez (1997), Kaput (1998), Booth (1988), Brown and Coles (2001), Crawford (2001), Henry (2001), and Warren (2001), το NCTM (1997) και το NCTM Standards (2000).

1.4 Η διαδικασία της γενίκευσης

Η γενίκευση είναι ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά που κάνουν την Άλγεβρα διαφορετική από την Αριθμητική. Ο αλγεβρικός συλλογισμός εντοπίζεται σε οποιαδήποτε μαθηματική ενασχόληση επεξεργασίας υπολογιστικών διαδικασιών με κάποιον γενικό τρόπο, ανεξάρτητα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την έκφραση αυτής της γενικότητας (Sfard, 1995).

Ο Radford (2000) μάλιστα υποστήριξε πως «ο αλγεβρικός συλλογισμός είναι ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές ενεργούν εννοιολογικά προκειμένου να εκτελέσουν τις ενέργειες που απαιτούνται από τη δραστηριότητα γενίκευσης».

Η έκφραση μιας γενικότητας βρίσκεται στο κεντρικό σημείο της Άλγεβρας, ενώ χαρακτηρίζει και όλη τη διαδρομή της (Mason, 1996 στο Κυλάφης, 2009). Η διαδικασία δημιουργίας γενικεύσεων, μάλιστα, ξεκινάει από την πρώτη επαφή των μαθητών με το πεδίο των Μαθηματικών και συνεχίζει σε όλη τη σχολική τους ζωή (Van de Walle, 2013). Οι Carraher et al. (2006), και οι Βαμβακούση & Κυλάφης (2011) επισημαίνουν πως η ικανότητα γενίκευσης αποτελεί κύριο χαρακτηριστικό του αλγεβρικού συλλογισμού, ενώ το ίδιο υποστηρίζουν και οι Becker & Rivera (2006b), συμπληρώνοντας πως η γενίκευση είναι απαραίτητη για τη μαθηματική μοντελοποίηση και αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων και αναπαράσταση των ποσοτικών σχέσεων συμβολικά.

Η γενίκευση συνιστά παράγοντα ανάπτυξης του αλγεβρικού συλλογισμού και προετοιμασία για τη μελλοντική εκμάθηση της Άλγεβρας από νέους μαθητές. Συνεπώς, οι μαθητές θα πρέπει να μιλούν σε αυτή από νεαρή ηλικία (Cooper & Warren, 2011; Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall, 1998; Lee, 1996). Στη βιβλιογραφία απαντάται ένα σύνολο ερευνών που τονίζουν τη χρησιμότητα της γενίκευσης στη μαθησιακή διαδικασία, όπως αυτή της Warren (2006), που υπογραμμίζει τη χρησιμότητα δραστηριοτήτων γενίκευσης στην εισαγωγή αλγεβρικών εννοιών σε νέους μαθητές ηλικίας 12-13 ετών.

Η αλγεβρική γενίκευση συνδέεται και με τον αλγεβρικό συμβολισμό, καθώς στο κέντρο αυτού υπάρχουν σύνθετες συμβολικές διαδικασίες που βοηθούν στη γενίκευση (Kaput, 2008); Lee, 1996). Σύμφωνα με τους Radford, Bardini & Sabena (2005), μάλιστα, οι γενικεύσεις παρέχουν πλούσιες πληροφορίες σχετικά με το νόημα των αλγεβρικών συμβολισμών που σημειώνουν οι μαθητές. Παρ' όλα αυτά, οι γενικεύσεις δεν χαρακτηρίζονται μόνο από τη χρήση σημειώσεων αλλά από τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χειρίζονται το γενικό στοιχείο (Radford, 2008). Σε έρευνα των Zazkis & Liljedahl (2002) σημειώθηκε πως η ικανότητα των μαθητών να εκφράσουν προφορικά μια γενίκευση δεν συνοδεύεται και δεν εξαρτάται απαραίτητως από την αλγεβρική σημειογραφία. Όμως, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ως ανεπαρκείς τις ακριβείς τους απαντήσεις οι οποίες δεν περιλαμβάνουν αλγεβρικό συμβολισμό. Αντιστοίχως, οι Cooper & Warren (2011) υπογραμμίζουν πως υπάρχει διαφορά μεταξύ της κατανόησης μιας γενίκευσης και την έκφραση αυτής. Πολλές φορές οι μαθητές δυσκολεύονται στην έκφραση καθώς υστερούν στη γλώσσα με την οποία μπορούν να συζητήσουν τη γενίκευση, ενώ την έχουν κατανοήσει.

Η γενίκευση είναι ιδιαίτερης σημασίας για τη ζωή μας καθώς χωρίς αυτήν, τα πάντα θα ήταν διαφορετικά. Κάθε αντικείμενο θα ήταν διαφορετικό από κάθε άλλο, χωρίς να είμαστε σε θέση να εντοπίζουμε ομοιότητες και αναλογίες (Radford, 2008). Συνεπώς, είναι σχεδόν αδύνατο να εντοπίσει κανείς ένα πεδίο των Μαθηματικών που να μην περιλαμβάνει κάποιου είδους γενίκευση. Μάλιστα, ο τρόπος σκέψης με χρήση γενικεύσεων βρίσκεται στο επίκεντρο των Μαθηματικών ως «η επιστήμη των προτύπων και των κανονικοτήτων» (Van de Walle, 2013).

Ολοκληρώνοντας, η ανακάλυψη και η έκφραση μιας γενίκευσης αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής δραστηριότητας και δύναται να συνδέσει τους μαθητές με τα κατάλληλα πλαίσια αναφοράς, που θα τους βοηθήσουν να συσχετίσουν τις πρότερες γνώσεις τους σχετικά με την αριθμητική με την Άλγεβρα και να κατανοήσουν τις συμβολικές αναπαραστάσεις. Ο Lannin (2005), μάλιστα, συστήνει ως μέσο εισαγωγής των μαθητών στην Άλγεβρα δραστηριότητες με πρότυπα που απαιτούν γενίκευση.

1.5 Πρότυπα

1.5.1 Ορισμός

Μολονότι στη συγκεκριμένη εργασία έχει υιοθετηθεί ο όρος «*πρότυπο*», μπορεί κανείς να τον συναντήσει στη βιβλιογραφία επίσης και ως κανονικότητα, μοτίβο, pattern. Δεν υπάρχει ένας σαφής ορισμός για το «*πρότυπο*», καθώς αποτελεί μια αρχική έννοια, η οποία μπορεί να προκύψει μόνο μέσα από την περιγραφή ενός συνόλου παραδειγμάτων. Έτσι, δεν μπορεί να οριστεί, παρά μόνο να περιγραφεί από το σύνολο των χαρακτηριστικών που την απαρτίζει (Κυλάφης, 2009). Επιπλέον, τον όρο «*πρότυπο*» μπορεί κανείς να τον συναντήσει με διαφορετικό περιεχόμενο σε πολλές άλλες περιοχές, πλην των Μαθηματικών, π.χ. Τέχνη, Μουσική, Ποίηση κ.ά.

Εντούτοις, έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες από πολλούς μελετητές κι ερευνητές να δοθεί ένας ορισμός. Σύμφωνα με τις Τζεκάκη και Κούλελη (2007 στο Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011) «*Στο χώρο των Μαθηματικών, πρότυπο αποτελεί ένα σύνολο από μορφικά, γεωμετρικά ή μετρικά χαρακτηριστικά που παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων*».

Ακόμη, σύμφωνα με την Τζεκάκη (2007) στην μαθηματική εκπαίδευση «*προτείνεται ως εύρεση προτύπου η ανακάλυψη ηχητικών, οπτικών και κινητικών κανονικοτήτων που μπορούν να επαναλαμβάνονται, να μεγαλώνουν ή γενικότερα να σχετίζονται μεταξύ τους με ένα*

κανόνα», ενώ οι Mulligan & Mitchelmore (2013) αναφέρουν το μαθηματικό πρότυπο ως μια προβλέψιμη κανονικότητα που περιλαμβάνει αριθμό, χώρο ή μέτρηση.

Ταυτόχρονα, οι Mulligan & Mitchelmore (2009) υπογραμμίζουν πως ως μαθηματικό πρότυπο μπορεί να χαρακτηριστεί μια οποιαδήποτε προβλέψιμη κανονικότητα, που συνήθως περιλαμβάνει σχέσεις αριθμητικές, χωρικές ή λογικές. Ακόμη, υποστηρίζουν πως τα παιδιά έρχονται σε επαφή με διάφορα είδη προτύπων από την πρώιμη ακόμη παιδική τους ηλικία.

Τα πρότυπα θεωρούνται από πολλούς συγγραφείς ως βασικό στοιχείο των Μαθηματικών, καθώς η εύρεσή τους απαιτεί σύγκριση μεταξύ στοιχείων για τον εντοπισμό σταθερών χαρακτηριστικών και αντιπαραβολή των στοιχείων για τον εντοπισμό εκείνων που μεταβάλλονται (Bennet & Nelson, 2001 στο Κυλάφης, 2009). Προτείνεται, μάλιστα, η χρήση δραστηριοτήτων κατά τη διδασκαλία, που περιλαμβάνουν την αναγνώριση, περιγραφή κι επέκταση προτύπων, προκειμένου να βοηθηθούν οι μαθητές στην μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα και να αναπτυχθεί η αλγεβρική τους κατανόηση (Hargreaves et al, 1998; Lannin, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2002).

1.5.2 Είδη προτύπων

Υπάρχουν δύο ευρύτερες κατηγορίες προτύπων: τα επαναλαμβανόμενα και τα εξελισσόμενα.

Επαναλαμβανόμενα ονομάζονται τα πρότυπα εκείνα που περιλαμβάνουν έναν σταθερό κύκλο στοιχείων (μονάδα επανάληψης) που επαναλαμβάνεται επ' αόριστον (Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011; Wijns, Torbeyns, De Smedt & Verschaffel, 2019). Σύμφωνα με τον Luken (2018), τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα έχουν κυκλική δομή, διότι πρόκειται για μια περιοδική ακολουθία στοιχείων που δύναται να αναχθούν σε ένα μικρότερο υποσύνολο, τη λεγόμενη μονάδα επανάληψης, το οποίο υποσύνολο επαναλαμβάνεται συνεχώς προκειμένου να σχηματίσει το πρότυπο. Συμπληρώνοντας, ο Κυλάφης (2009) αναφέρει πως κάθε όρος του προτύπου ταυτίζεται με έναν από τους αρχικούς όρους (που ανήκουν στην μονάδα επανάληψης) αλλά και με κάθε όρο που βρίσκεται τόσες θέσεις πριν από αυτόν όσες θέσεις καταλαμβάνει και η αρχική μονάδα επανάληψης.

Η κυκλική αυτή φύση των επαναλαμβανόμενων προτύπων που αναφέρθηκε παραπάνω, καθιστά αυτό το είδος προτύπων κατάλληλο για μαθητές νεότερης ηλικίας (Νηπιαγωγείου και πρώτων τάξεων Δημοτικού) καθώς είναι πιο κοντά στις εμπειρίες και στην καθημερινότητα των παιδιών (Κυλάφης, 2009). Επιπρόσθετα, τα επαναλαμβανόμενα πρότυπα

κάνουν την εμφάνισή τους στη μέτρηση, με την επανάληψη πανομοιότυπων χωρικών μονάδων, και τον πολλαπλασιασμό, με την επανάληψη ίδιων αριθμητικών μονάδων (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο συνήθως είναι της μορφής ABABAB, ABΓABΓABΓ κ.λπ. και σε αυτήν την περίπτωση καλείται γραμμικό επαναλαμβανόμενο πρότυπο (Wijns et al., 2019). Κανείς μπορεί, όμως, να προσθέσει συνθετότητα σε ένα τέτοιου είδους πρότυπο, διαφοροποιώντας μερικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα, όπως μέγεθος, χρώμα, προσανατολισμό κ.λπ. και κρατώντας σταθερά κάποια άλλα. Ακόμη, εκτός από τα γραμμικά πρότυπα, υπάρχουν και τα δύο διαστάσεων επαναλαμβανόμενα πρότυπα, τα οποία αποτελούνται κι αυτά από μια επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της μονάδας επανάληψης, με τη διαφορά ότι είναι δύο διαστάσεων (Κυλάφης, 2009).

Εξελισσόμενα ή, αλλιώς, αναπτυσσόμενα ή αυξανόμενα καλούνται τα πρότυπα εκείνα που αυξάνονται ή μειώνονται συστηματικά και είναι της μορφής ABAABAAB, 2 4 6 8, κ.λπ. (Wijns et al., 2019). Τέτοιου είδους πρότυπα περιλαμβάνουν μια μετακίνηση από όρο σε όρο και η επίλυση τους απαιτεί την εύρεση του κανόνα με βάση τον οποίο εξελίσσονται (Van de Walle, 2013). Τα πρότυπα αυτά στη βιβλιογραφία τυπικά αποκαλούνται ακολουθίες (Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011).

Τα εξελισσόμενα πρότυπα αποτελούν σημαντικό βήμα για την εισαγωγή των μαθητών στην Άλγεβρα, καθώς δύναται να παρέχουν ευκαιρίες για αναγνώριση, περιγραφή, συνέχιση και δημιουργία νέων προτύπων. Επιπλέον, οι μαθητές καλούνται όχι μόνο να επεκτείνουν ή να αναγνωρίσουν τον κανόνα του προτύπου, αλλά και να εντοπίσουν μια γενίκευση ή μια αλγεβρική σχέση που θα καταδεικνύει κάθε όρο του προτύπου, σε οποιαδήποτε θέση κι αν βρίσκεται (τον n -οστό όρο) (Friel & Markworth, 2009; Κυλάφης, 2009; Van de Walle, 2013).

Επιπρόσθετα, η ενασχόληση με εξελισσόμενα πρότυπα παρέχει μια εναλλακτική προσέγγιση για την καλλιέργεια και εκμάθηση των αλγεβρικών εννοιών. Ακόμη, παρέχει μια σταδιακή έκφραση της γενικότητας από προφορικές, στην αρχή, περιγραφές σε όλο πιο τυπικούς τρόπους έκφρασης, παρόλο που φαίνεται πως η ενασχόληση με τέτοιου είδους πρότυπα παρουσιάζει περισσότερες δυσκολίες για τους μαθητές σε σχέση με την ενασχόληση με επαναλαμβανόμενα πρότυπα (English & Warren, 1998; Wijns et al., 2019).

Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως ανεξάρτητα από το σε ποια από τις παραπάνω κατηγορίες εντάσσεται, ένα πρότυπο μπορεί να αποτελείται από αριθμούς (αριθμητικό πρότυπο, αριθμητικές ακολουθίες) ή εικόνες και σχήματα (γεωμετρικό, οπτικό ή χωρικό

πρότυπο), να είναι γραμμικό ή τετραγωνικό πρότυπο, να είναι δισδιάστατο, τρισδιάστατο κ.λπ. (Stacey, 1989; Van de Walle, 2013; Zazkis & Liljedahl, 2002). Τα δομικά χωρικά πρότυπα πρόκειται για πρότυπα που αποτελούνται από διάφορα γεωμετρικά σχήματα και περιγράφουν την οργάνωση μεμονωμένων στοιχείων σε ένα δισδιάστατο ή τρισδιάστατο χώρο (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Wijns et al., 2019).

1.6 Γενίκευση προτύπων

1.6.1 Γενίκευση και πρότυπα

Τα πρότυπα και οι γενικεύσεις συνιστούν σημαντικό κομμάτι του πεδίου των Μαθηματικών. Τα πρότυπα δύναται να εκφραστούν, να χρησιμοποιηθούν και να κατανοηθούν μέσω της γενίκευσης, η οποία αποτελεί κεντρική δραστηριότητα της Άλγεβρας (Hargreaves et al, 1998; Lee, 1996). Τα πρότυπα, μάλιστα, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της ικανότητας για γενίκευση και της συναρτησιακής σκέψης διότι μπορούν να υποθάψουν διαφορετικούς και διαβαθμισμένης δυσκολίας τρόπους έκφρασης της γενικότητας (Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011).

Αυτό που χαρακτηρίζει τη σκέψη των μαθητών ως αλγεβρική είναι η διερεύνηση κι έκφραση του γενικού όρου ενός προτύπου, κάτι που δεν απαιτείται στο επίπεδο της αριθμητικής σκέψης Radford (2000). Ο αλγεβρικός συλλογισμός των μαθητών αναφορικά με δραστηριότητες προτύπων δύναται να διακριθεί σε δύο επίπεδα: α) την αναδρομική, τοπική σκέψη και β) τη λειτουργική σκέψη. Οι μαθητές που σκέφτονται αναδρομικά βλέπουν μόνο τη σχέση μεταξύ διαδοχικών στοιχείων σε ένα μοτίβο και επομένως μπορούν μόνο να προβλέψουν τον επόμενο όρο, ενώ εκείνοι που σκέφτονται λειτουργικά μπορούν να δουν την υποκείμενη δομή ενός προτύπου και ως εκ τούτου να προβλέψουν οποιονδήποτε όρο του (Wijns et al., 2019). Αντιστοίχως, οι Friel & Markworth (2009) σημειώνουν πως η αλγεβρική συλλογιστική λαμβάνει διάφορες μορφές συμπεριλαμβανομένης της λειτουργικής σκέψης, στην οποία οι μαθητές διερευνούν γενικευμένα πρότυπα προκειμένου να περιγράψουν τις λειτουργικές σχέσεις που τα διέπουν.

Προκειμένου να καταφέρουν οι μαθητές να κατανοήσουν και να εκφράσουν μια γενίκευση αναφορικά με ένα πρότυπο, θα πρέπει πρωτίστως να κατανοήσουν πως ένας κανόνας αποτελεί μια μαθηματική περιγραφή μιας κατάστασης για μια οποιαδήποτε τιμή και κατ' επέκταση, λοιπόν, είναι μια γενίκευση (Lannin, 2005). Επιπλέον, θα πρέπει να παρουσιάζουν ταυτόχρονα ευχέρεια τόσο στην ικανότητα να αναπαριστούν μεταφορικά όσο

και στην ικανότητα να χρησιμοποιούν σωστά μεταβλητές. Η καλλιέργεια της ικανότητας να γενικεύουν γραμμικά πρότυπα και της ευχέρειας στη χρήση μεταβλητών και πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την καθοδήγηση, που δίνει έμφαση στις παραστατικές, αριθμητικές και λεκτικές αναπαραστάσεις προτύπων καθώς επίσης και στις μεταξύ τους σχέσεις (Rivera & Becker, 2006a, 2006b).

Κάθε μαθητής τείνει να βλέπει ένα πρότυπο διαφορετικά. Κατά συνέπεια, είναι πιθανό να παράγει διαφορετικές γενικεύσεις σε σύγκριση με κάποιον άλλο μαθητή (Rivera & Becker, 2008). Παρόλα αυτά, μια σημαντική ιδέα στη γενίκευση, που σημειώνει ένας οποιοσδήποτε μαθητής, είναι η αναγνώριση μιας νέας κατάστασης στην οποία μπορεί να εφαρμοστεί και να προσαρμοστεί κατάλληλα (Van de Walle, 2013).

Το αρχικό στάδιο της γενίκευσης περιλαμβάνει την εστίαση σε ένα πιθανό σταθερό στοιχείο ή σχέση, την παρατήρηση ενός κοινού χαρακτηριστικού και την συνειδητοποίηση των πράξεων του ατόμου σε σχέση με το φαινόμενο που γενικεύεται (Rivera & Becker, 2008).

Ακόμη, η γενίκευση βασίζεται στην ικανότητα κατανόησης των κοινών χαρακτηριστικών ορισμένων στοιχείων ενός προτύπου (μια σταδιακή διαδικασία), στην ικανότητα αντίληψης πως τα στοιχεία αυτά δύναται να επεκταθούν ή να γενικευτούν σε όλους τους επόμενους όρους και στο να είναι κανείς σε θέση να χρησιμοποιήσει αυτά τα κοινά στοιχεία για να εκφράσει οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας (Radford, 2006, 2008).

Ο Radford (2003, 2006) διαχωρίζει τη γενίκευση σε τέσσερις ευρύτερες κατηγορίες:

- α. *Αριθμητική γενίκευση (arithmetic generalization)*: πρόκειται για μια γενίκευση με την οποία γίνεται αντιληπτό πως οι μαθητές παραμένουν στο στάδιο της Αριθμητικής και δεν έχουν μεταπηδήσει στο στάδιο της Άλγεβρας. Είναι σε θέση να παρατηρήσουν τη σχέση μεταξύ διαδοχικών όρων και αναγνωρίζουν πως αυτή η σχέση θα ισχύει και για τους επόμενους όρους. Εντούτοις, δεν είναι σε θέση να αξιοποιήσουν όσα παρατήρησαν στη συνέχεια του προτύπου, προκειμένου να εκφράσουν έναν μακρινό όρο αυτού, παρά μόνον εφόσον σημειώσουν και όλους τους ενδιάμεσους.
- β. *Πραγματική γενίκευση (factual generalization)*: πρόκειται για μια γενίκευση που είναι αλγεβρική. Οι μαθητές είναι σε θέση να αξιοποιήσουν στη συνέχεια του προτύπου όσα παρατήρησαν, προκειμένου να εκφράσουν έναν οποιοδήποτε όρο αυτού. Σε αυτό το είδος γενίκευσης, όμως, η απροσδιοριστία, βασικό χαρακτηριστικό της αλγεβρικής σκέψης, δεν φτάνει στο επίπεδο της επίσημης έκφρασης αλλά εκφράζεται μέσω συγκεκριμένων ενεργειών. Ονομάζεται πραγματική διότι λαμβάνει χώρα μέσα σε

συγκεκριμένα πλαίσια αριθμών. Οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν πραγματική γενίκευση διότι αυτή είναι αρκετά καλή ώστε να δώσουν τις απαντήσεις που χρειάζονται, όμως δεν είναι αρκετά επαρκής ώστε να εκφράσουν μια απροσδιοριστία, να εξηγήσουν δηλαδή έναν οποιοδήποτε όρο. Η γενίκευση αυτή περιλαμβάνει σημειωτικά στοιχεία όπως λέξεις, χειρονομίες και ρυθμό, αλλά όχι αλγεβρικά σύμβολα. Σε αυτό το είδος γενίκευσης οι Rivera & Becker (2008) καταγράφουν πως οι μαθητές αρχίζουν συχνά με μια αναδρομική προσέγγιση του προτύπου που είναι τόσο προσθετική όσο και αριθμητική.

- γ. *Συμβολική γενίκευση* (symbolic generalization): πρόκειται για μια γενίκευση κατά την οποία οι μαθητές εκφράζονται με αλφαριθμητικά σύμβολα, ενώ ταυτόχρονα δίνουν κάποιο συγκεκριμένο νόημα στα σύμβολα αυτά. Είναι μια σύνθετη διαδικασία που δεν περιλαμβάνει χειρονομίες κ.ά. αλλά αλγεβρικό συμβολισμό. Οι μαθητές λοιπόν καλούνται να χρησιμοποιήσουν μειωμένες μορφές έκφρασης.
- δ. *Γενίκευση σύμφωνα με τα συμφραζόμενα* (contextual generalization): πρόκειται για μια γενίκευση που αναφέρεται σε αντικείμενα ενσωματωμένα στα συμφραζόμενα (π.χ. επόμενος όρος), βοηθώντας τους μαθητές να εκφραστούν για έναν οποιοδήποτε όρο του προτύπου. Χρησιμοποιούνται εκφράσεις όπως «ο όρος» αντί του «οποιοσδήποτε όρος». Μάλιστα, για τον Radford (2010) ένας αλγεβρικός τύπος αποτελεί μια περιγραφή του γενικού όρου όπως τον είχε σχεδιάσει ή φανταστεί ένα άτομο. Για το λόγο αυτό θεωρείται γενίκευση σχετικά με τα συμφραζόμενα.

Ακόμη, στη βιβλιογραφία γίνεται διαχωρισμός της γενίκευσης προτύπων σε «κοντινή» και «μακρινή γενίκευση». Με τον όρο «κοντινή γενίκευση» περιγράφεται η εύρεση ενός όρου του προτύπου που μπορεί να υπολογιστεί με βήμα προς βήμα σχεδίαση ή καταμέτρηση (π.χ. 8^{ος} όρος), ενώ με τον όρο «μακρινή γενίκευση» περιγράφεται η εύρεση ενός όρου του προτύπου που δεν δύναται να υπολογιστεί με τον παραπάνω τρόπο (π.χ. 100^{ος} όρος) και που προϋποθέτει την εύρεση συναρτησιακών σχέσεων συμμεταβολής ή αντιστοίχισης (Stacey, 1989). Επιπλέον, οι Cooper & Warren (2011) αναφέρονται στην ύπαρξη της «μερικής γενίκευσης» η οποία αποτελεί πρόδρομος της πλήρους. Κατά τη μερική γενίκευση, οι μαθητές είναι σε θέση να εκφραστούν με όρους συγκεκριμένων αριθμών και παραδειγμάτων, προτού να μπορέσουν να εκφράσουν μια γενίκευση λεκτικά ή συμβολικά.

Ο Rivera (2010) σημειώνει πως οι μαθητές παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία στη γενίκευση κατά την ενασχόληση με τα αριθμητικά μοτίβα, σε σχέση με τα οπτικά. Επιπρόσθετα, όσοι μαθητές φαίνεται πως έχουν αντίληψη της δομής, παρουσιάζουν

περισσότερο οπτικά (με σχέδιο ή σχήμα) παρά προφορικά τη μακρινή γενίκευση. Ακόμη, ο ίδιος καταγράφει πως σε δραστηριότητες κατά τις οποίες ζητείται από τους μαθητές να καταγράψουν έναν γενικό κανόνα, αφού πρώτα χρειάζεται να υπολογίσουν κάποιον κοντινό και κάποιον μακρινό όρο, οι μαθητές δεν καταφέρνουν να διαχειριστούν το επίπεδο της γενίκευσης.

Ολοκληρώνοντας, σε έρευνα της Orton (1997) διαπιστώθηκε πως όλοι οι μαθητές είναι σε θέση να παράγουν γενικεύσεις, ο καθένας, όμως, γενικεύει σε διαφορετικό επίπεδο. Η ερευνήτρια, μάλιστα, μέσα από τα αποτελέσματα της έρευνάς της σε μαθητές ηλικίας 9 έως 13 ετών, αναφορικά με την αντίληψη και τη χρήση προτύπων και γενικεύσεων, κατέληξε πως οι παράγοντες, που εμποδίζουν τους μαθητές να γενικεύσουν και να εκφράσουν αυτή τη γενίκευση, περιλαμβάνουν:

- την αριθμητική ανικανότητα των μαθητών (π.χ. λάθη στην πρόσθεση)
- την σύγχυση μεταξύ του αριθμού του όρου και του αριθμού των σχημάτων που απεικονίζονται σε αυτόν
- το γεγονός ότι οι μεγάλοι αριθμοί οδηγούν τους μαθητές σε χρήση σύντομων μεθόδων
- την ανικανότητα να αντιληφθούν οι μαθητές πως ο $20^{ος}$ ή $100^{ος}$ όρος θα ακολουθεί τον ίδιο κανόνα, θα τον διέπουν δηλαδή οι ίδιες σχέσεις, με τους πρώτους όρους
- την καθήλωση των μαθητών στις διαφορές ή τη σχέση επανάληψης (π.χ. προσθέτω δύο κάθε φορά)
- την έλλειψη αντίληψης του τι χρειάζεται, μη αναγνώριση της σχέσης μεταξύ δύο όρων
- την καθήλωση των μαθητών για προσωπικούς λόγους
- την ανικανότητα των μαθητών να επεξεργαστούν το «άγνωστο». Πρόκειται για γνωστικό κενό.

1.6.2 Μοντέλα έκφρασης γενίκευσης σε δραστηριότητες προτύπων

Ο όρος της γενίκευσης περιλαμβάνει την υπέρβαση από τους μαθητές των στοιχείων που παρατηρούν σε ένα πρότυπο προκειμένου να βγάλουν νόημα από αυτό και να είναι σε θέση να το επεξεργαστούν και να εξάγουν συμπεράσματα (Hargreaves et al, 1998).

Σύμφωνα με έρευνα που έχουν διεξάγει οι Rivera & Becker (2006a, 2006b), τόσο σε εκπαιδευτικούς όσο και σε μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες που περιλαμβάνουν γραμμικά μοτίβα, κάθε άτομο τείνει να εκφράζει τη γενίκευση με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους:

- *Αριθμητικά* (numerical generalizers): τα άτομα που γενικεύουν αριθμητικά τείνουν να χρησιμοποιούν στοιχεία για τη γενίκευσή τους από τα αριθμητικά δεδομένα που τους παρέχονται από τη δραστηριότητα, ενώ δεν είναι σε θέση να αιτιολογούν συστηματικά τις γενικεύσεις τους. Επίσης, τείνουν να προβαίνουν σε αριθμητικές στρατηγικές π.χ. στη μέθοδο δοκιμής και λάθους, κατασκευή πίνακα δεδομένων, δίχως να αντιλαμβάνονται τι αντιπροσωπεύουν ο συντελεστής και η σταθερά στο γραμμικό πρότυπο. Δεν λαμβάνουν υπόψιν τις μεταβλητές καθώς τις αντιλαμβάνονται ως απλά σύμβολα που αντιπροσωπεύουν μία θέση.
- *Παραστατικά* (figural generalizers): τα άτομα που γενικεύουν παραστατικά τείνουν να συνδέουν τις μεταβλητές με τα πρότυπα και είναι σε θέση να παρατηρήσουν τις σταθερές δομές τους. Ως εκ τούτου, δύναται να αιτιολογούν συστηματικά τις γενικεύσεις τους μη-επαγωγικά. Επιπλέον, δεν προβαίνουν σε χρήση αριθμητικών στρατηγικών αλλά παραστατικών, οι οποίες επικεντρώνονται στην αναγνώριση των σταθερών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών που δίνονται.

Ακόμη, ο Radford (2003, 2006) κάνει λόγο για δύο βασικά στοιχεία της γενίκευσης: α) το *φαινομενολογικό*, που σχετίζεται με την κατανόηση της γενίκευσης και β) το *σημειωτικό* που σχετίζεται με την έκφραση όσων παρατηρούνται στο πλαίσιο του φαινομενολογικού, μέσω σημείων.

Στο σημειωτικό στοιχείο της γενίκευσης αναφέρεται και η Warren (2005a), σύμφωνα με έρευνα της οποίας διαπιστώνεται πως ακόμη και τα μικρά παιδιά μπορούν να εκφράσουν γενικεύσεις οι οποίες θα εμπίπτουν σε μία από τις παρακάτω τέσσερις κύριες κατηγορίες: α) χρήση μεγάλων αριθμών για να εκφράσουν τη γενίκευση, β) συνεχής επανάληψη των στοιχείων ενός όρου προκειμένου να σχηματίσουν έναν μεγαλύτερο, γ) χρήση λέξεων για να εκφράσουν τη γενίκευση, όπως διπλό, τριπλό, δύο φορές κ.λπ. και, τέλος, δ) επίσημος συμβολισμός.

Οι Rivera & Becker (2008) παρουσιάζουν μια διαφορετική προσέγγιση των γενικεύσεων των μαθητών, που βασίζεται στο είδος της μαθηματικής σχέσης που εντοπίζουν και περιγράφουν οι μαθητές στο πρότυπο. Έτσι, διακρίνουν μεταξύ των μαθητών που προσεγγίζουν τη γενίκευση προσθετικά κι εκείνων που την προσεγγίζουν πολλαπλασιαστικά. Σημείωσαν, μάλιστα, πως οι μαθητές που χρησιμοποιούν προσθετική προσέγγιση κατά τη γενίκευση δεν σκέφτονται με όρους αναλογίας και χρησιμοποιούν συχνά τη στρατηγική καταμέτρησης προκειμένου να υπολογίσουν κάποιον όρο. Ομοίως, η Warren (2006) κάνει αναφορά σε ένα είδος γενίκευσης που περιλαμβάνει προσθετική στρατηγική και συνδέσεις

μεταξύ διαδοχικών όρων. Η προσθετική προσέγγιση είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος δημιουργίας εξελισσόμενων προτύπων, ενώ σε πιο περίπλοκα εξελισσόμενα πρότυπα οι μαθητές συχνά καταφεύγουν στη χρήση της πολλαπλασιαστικής προσέγγισης (Becker & Rivera, 2006b).

Στο ίδιο μήκος κύματος, η Stacey (1989) αναφέρεται σε μια γραμμική προσέγγιση του γενικού κανόνα, η οποία περιλαμβάνει την αναγνώριση όλων των σχέσεων μεταξύ των όρων του προτύπου και την κατανόηση από τους μαθητές πως η σειρά των πράξεων έχει σημασία.

Προκειμένου να φτάσουν οι μαθητές σε μια γενίκευση για ένα πρότυπο, θα πρέπει να ακολουθήσουν μια στρατηγική, έναν τρόπο δράσης που χρησιμοποιείται για την επίτευξη ενός στόχου ή μια συλλογή διαδικασιών που τοποθετούνται σε μια σειρά με την οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Μια στρατηγική είναι απαραίτητη όταν παρουσιάζεται ένα πρόβλημα σε έναν μαθητή, έτσι ώστε να μπορεί να αναζητήσει μια λύση (Hargreaves et al, 1998).

Στη βιβλιογραφία απαντάται ένα σύνολο μελετών και ερευνών που πραγματεύονται το θέμα των στρατηγικών αυτών των μαθητών. Παρακάτω παρατίθενται ένα μέρος των ερευνών αυτών καθώς επίσης και οι στρατηγικές που καταγράφηκαν.

Οι Warren & Cooper (2008) διεξήγαγαν έρευνά σε μαθητές 8 ετών αναφορικά με οπτικά εξελισσόμενα πρότυπα και σημείωσαν ένα πλήθος στρατηγικών που ακολουθούν οι μαθητές κατά την γραπτή καταγραφή του κανόνα ενός προτύπου. Αντίστοιχα, οι Billings, Tiedt and Slater (2007 στο Rivera, 2010) διεξήγαγαν έρευνα σε μαθητές δευτέρας και τρίτης δημοτικού αναφορικά με τις γενικεύσεις των μαθητών σε δραστηριότητες με οπτικά πρότυπα. Ακόμη, ο Rivera (2010) μελέτησε τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές δευτέρας τάξης, που δεν είχαν καμία σχετική προηγούμενη εμπειρία, κατά τη διάρκεια της γενίκευσης σε δραστηριότητες με πρότυπα. Άλλες έρευνες και μελέτες είναι αυτές των Stacey (1989) οι οποίες κατέταξε τις μεθόδους που ακολούθησαν οι μαθητές ηλικίας 9-13 ετών κατά τη μακρινή γενίκευση, των Hargreaves et al. (1998), που επικεντρώνεται στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές ηλικίας 7-11 ετών όταν γενικεύουν, των English & Warren (1998) οι οποίοι κατέγραψαν τις στρατηγικές που υιοθετούν οι μαθητές για τη διαμόρφωση γενικεύσεων από οπτικά πρότυπα, του Lannin (2005), ο οποίος διεξήγαγε έρευνα αναφορικά με την παραγωγή και αιτιολόγηση των γενικεύσεων από μαθητές έκτης δημοτικού, του Radford (2006) ο οποίος κατέγραψε τα είδη στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές δευτέρας γυμνασίου για την εύρεση ενός κοντινού ή μακρινού όρου του προτύπου και, τέλος,

της Warren (2006) η οποία κατέγραψε τον τρόπο προσέγγισης του γενικού κανόνα ενός προτύπου από μαθητές μέσης ηλικίας 10 ετών.

Στο σύνολο αυτών των ερευνών παρατηρείται η καταγραφή των ίδιων ή παρόμοιων στρατηγικών, από τις οποίες οι πιο συχνές σε εμφάνιση είναι:

- Η *μέθοδος καταμέτρησης*, κατά την οποία οι μαθητές κατασκευάζουν ένα μοντέλο που αντιπροσωπεύει την κατάσταση για να μετρήσουν το επιθυμητό χαρακτηριστικό. Έτσι, υπολογίζουν όλους τους όρους με τη σειρά, ή ανά δύο κ.λπ., έχοντας ως αφετηρία το πρότυπο (Lannin, 2005; Rivera, 2010; Stacey, 1989).
- Η *αναδρομική μέθοδος*, κατά την οποία οι μαθητές βασίζονται στον προηγούμενο όρο ή όρους του προτύπου για τον προσδιορισμό του επόμενου όρου (Billings, Tiedt and Slater, 2007 στο Rivera, 2010; English & Warren, 1998; Lannin, 2005; Warren, 2006).
- Η *μέθοδος διαφοράς*, κατά την οποία οι μαθητές υπολογίζουν τη διαφορά ανάμεσα σε δύο όρους και ύστερα πολλαπλασιάζουν αυτό με το πόσους όρους χρειάζονται ακόμη μέχρι να φτάσουν στον επιθυμητό (Billings, Tiedt and Slater, 2007 στο Rivera, 2010; Hargreaves et al., 1998; Stacey, 1989).
- Στρατηγικές όπως η «δοκιμή και λάθος» ή η «μάντεψε κι έλεγξε» (guess and check) (δεν αποτελούν αλγεβρικές στρατηγικές) (Lannin, 2005; Radford, 2006).
- Η *μέθοδος ολόκληρου αντικειμένου*, κατά την οποία οι μαθητές υπολογίζουν έναν μικρότερο όρο του προτύπου και ύστερα χρησιμοποιούν αυτόν ως μονάδα για την κατασκευή ενός μεγαλύτερου όρου με πολλαπλασιασμό (Hargreaves et al., 1998; Lannin, 2005; Stacey, 1989).
- Η μέθοδος της *αναζήτησης λειτουργικών σχέσεων*, κατά την οποία οι μαθητές προσδιορίζουν τη λειτουργία που συνδέει τη θέση του όρου με τον αριθμό των στοιχείων στον όρο (English & Warren, 1998; Warren, 2006; Warren & Cooper, 2008).
- Η εύρεση *ομοιοτήτων και κοινών χαρακτηριστικών* μεταξύ των όρων, κατά την οποία οι μαθητές εντοπίζουν τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των όρων του προτύπου και ύστερα τις γενικεύουν και στους επόμενους όρους (Billings, Tiedt and Slater, 2007 στο Rivera, 2010; Hargreaves et al., 1998; Radford, 2006; Warren & Cooper, 2008).

Η Warren (2006), συγκεκριμένα, σημείωσε τις εξής κατηγορίες όσον αφορά τη *γραφτή λεκτική απάντηση* που έδωσαν οι μαθητές όταν τους ζητήθηκε να καταγράψουν τον κανόνα

του προτύπου: α) Καμία απάντηση, β) Απάντηση δίχως νόημα, γ) Ποσοτικοποίηση του κανόνα ανάπτυξης, δ) Σχέση μεταξύ θέσης και προτύπου και ε) Σχέση μεταξύ όρου και θέσης με οπτική (δείχνει το πάνω κάτω). Επιπρόσθετα, σημείωσε τις εξής κατηγορίες όσον αφορά τη γραπτή συμβολική απάντηση που έδωσαν οι μαθητές: α) Καμία απάντηση, β) Απάντηση δίχως νόημα, γ) Ποσοτικοποίηση του κανόνα ανάπτυξης με χρήση συμβόλων, δ) Καταγραφή συγκεκριμένου ποσοτικοποιημένου παραδείγματος και ε) Καταγραφή σωστής συμβολικής σχέσης χρησιμοποιώντας μεταβλητές. Μάλιστα, η ίδια τονίζει πως δεν υπήρξε σημαντική διαφορά μεταξύ του επιπέδου ανταπόκρισης κάθε μαθητή στη γραπτή λεκτική περιγραφή και τη συμβολική περιγραφή της γενίκευσης, για καθεμία από τις ερωτήσεις που τους τέθηκαν.

Αξίζει να σημειωθεί πως τα ευρήματα της έρευνας των English & Warren (1998) καταδεικνύουν την ευκολία των μαθητών να εκφράσουν λεκτικά τις γενικεύσεις και όχι να τις καταγράψουν συμβολικά. Ωστόσο, όσο οι δραστηριότητες και οι γενικεύσεις αυτών γίνονται πιο περίπλοκες, οι μαθητές καταφεύγουν σε μια αναδρομική προσέγγιση για να εκφράσουν τις γενικεύσεις τους και χρησιμοποιούν αριθμητικά στοιχεία για να τις εκφράσουν επίσημα. Τα παραπάνω ενισχύονται και από τα ευρήματα της έρευνας του Luken (2018), σύμφωνα με τα οποία όσο πιο περίπλοκο είναι ένα πρότυπο, τόσο λιγότερο εξελιγμένες είναι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά. Ομοίως, σε παλιότερη έρευνα των Hargreaves et al. (1998) σε μαθητές λίγο μεγαλύτερης ηλικίας (11 έως 15 ετών) προέκυψε πως δυσκολεύονται περισσότερο στο να περιγράψουν ένα πρότυπο απ' ό,τι στο να το συνεχίσουν, ενώ πολλοί είναι εκείνοι που σημειώνουν γενικεύσεις χρησιμοποιώντας μόνο μερικές πληροφορίες και αυτό συμβαίνει συχνότερα στις πιο σύνθετες δραστηριότητες.

Στον αντίποδα με τα παραπάνω, ο Luken (2018), σημειώνει μια διαφορετική ταξινόμηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές και τις εντάσσει σε μία από τις παρακάτω κατηγορίες:

- *Καμία αναφορά στο πρότυπο εκτός από την αναπαραγωγή του:* σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται όλες εκείνες οι στρατηγικές που δεν αναφέρονται ούτε στα ειδικά χαρακτηριστικά των όρων ούτε στην κανονικότητα του προτύπου και κατά τις οποίες οι μαθητές σημειώνουν τους όρους με βάση την εικασία, την προσωπική προτίμηση ή την τυχαία επιλογή στοιχείων
- *Κατανόηση των μοναδικών χαρακτηριστικών:* σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται όλες εκείνες οι στρατηγικές που δείχνουν πως οι μαθητές έχουν κατανοήσει τα χαρακτηριστικά του προτύπου.

- *Σύγκριση και ταξινόμηση:* σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται όλες εκείνες οι στρατηγικές κατά τις οποίες οι μαθητές συγκρίνουν τους όρους ενός προτύπου κι επισημαίνουν τις ομοιότητες σε ένα βασικό επίπεδο. Επικεντρώνονται στις ομοιότητες μεταξύ διαδοχικών όρων και αντιλαμβάνονται πως αυτοί διατάσσονται με κανονικό τρόπο, όμως δεν είναι ακόμα σε θέση να ξεχωρίσουν τη μονάδα επανάληψης.
- *Αναγνώριση της μονάδας επανάληψης:* σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται όλες εκείνες οι στρατηγικές που δείχνουν πως οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη δομή του προτύπου. Είναι σε θέση να ξεχωρίσουν τη μονάδα επανάληψης.

Ολοκληρώνοντας το παρόν κεφάλαιο, οι δραστηριότητες που περιλαμβάνουν πρότυπα παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να παρατηρούν, να εκφράζουν λεκτικά και να συμβολίζουν τις γενικεύσεις (Warren, 2006). Καλούμενοι οι μαθητές, λοιπόν, να παρατηρήσουν και να συνοψίσουν τα μοτίβα, προφορικά ή γραπτά, βοηθούνται στη μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα (Hargreaves et al., 1998).

Κεφάλαιο 2: Αναπαραστάσεις

Οι αναπαραστάσεις στο χώρο των Μαθηματικών αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο διδασκαλίας, μάθησης και επικοινωνίας καθώς εμπλέκονται στη διαδικασία της σκέψης. Δεν δύναται να υφίσταται γνώση χωρίς αναπαράσταση (Duval, 2000). Κάθε σχήμα, εικόνα, διάγραμμα, αντίληψη, από αντικείμενο κ.λπ. που χρησιμοποιείται προκειμένου να αναπαραστήσει κάτι άλλο, συνιστά ισχυρό μέσο έκφρασης και αναπαράστασης μαθηματικών ιδεών και σχέσεων (Gagatsis & Elia, 2004; Van de Walle, 2013). Κάθε ένα από τα παραπάνω μέσα έκφρασης και αναπαράστασης ανήκει σε κάποιο δομικό σύστημα, που δύναται να είναι προσωπικό ή πολιτισμικό, και ονομάζεται σύστημα αναπαράστασης (Goldin & Kaput, 1996).

Σύμφωνα με τον Goldin (1998) ένα σύστημα αναπαράστασης αποτελείται από δύο κυρίως μέρη, από *χαρακτήρες ή σημεία (characters or signs)* και από *κανόνες*. Ως σημεία, θεωρεί τις οντότητες εκείνες που προέρχονται από ένα αρκετά καθορισμένο σύνολο, όπως συμβολικοί χαρακτήρες, λέξεις, γράμματα, αριθμοί, κ.λπ. και τις οντότητες εκείνες που δεν είναι τόσο εύκολο να διακρίνει κανείς, όπως, τα φυσικά αντικείμενα, αφηρημένες μαθηματικές οντότητες, δυνάμεις κ.λπ. Χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτών των σημείων είναι πως δεν τους αποδίδεται ακόμα περαιτέρω ερμηνεία. Οι κανόνες είναι εκείνοι που διέπουν τα παραπάνω σημεία και που χρειάζονται για να συνδυαστούν και να διαμορφωθούν κατάλληλα. Δύναται, επίσης, να συνδυαστούν και σημεία διαφορετικών συστημάτων. Έτσι, ανάλογα με τους χαρακτήρες/σημεία και τον τρόπο που συνδυάζονται, προκύπτουν και διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει δύο ξεχωριστές αλλά αλληλοσχετιζόμενες κατηγορίες: τις εξωτερικές και τις εσωτερικές αναπαραστάσεις.

2.1 Εξωτερικές αναπαραστάσεις

Στις εξωτερικές αναπαραστάσεις συγκαταλέγονται οι εικόνες, τα διαγράμματα, οι πίνακες, οι αλγεβρικές εξισώσεις, τα σχήματα, λέξεις, χειρονομίες κ.ά. Πρόκειται δηλαδή για παρατηρήσιμες αναπαραστάσεις που δίνουν έμφαση σε αισθητηριακά ερεθίσματα και βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις μας δηλώνουν έμμεσα τον τρόπο σκέψης και κατανόησης των υποκειμένων (Cooper & Warren, 2011; Goldin, 1998; Goldin & Shteingold, 2001; Rico, Castro & Romero, 1996).

Σύμφωνα με τους Goldin & Shteingold (2001), η πρόσβαση στη γνώση επιτυγχάνεται δια μέσω των εξωτερικών αναπαραστάσεων, οι οποίες μπορούν να λάβουν διάφορες μορφές.

Έτσι, υπάρχουν επίσημες αναπαραστάσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν το αριθμητικό σύστημα, τον τρόπο γραφής των αλγεβρικών εξισώσεων και των συναρτήσεων κ.ο.κ. Ακόμη, υπάρχουν αναπαραστάσεις που δηλώνουν σχέσεις όπως τα γραφήματα, οι πίνακες δεδομένων, οι αριθμητικές γραμμές κ.ά. Τέλος, εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν και οι προφορικές ή γραπτές φράσεις που χρησιμοποιεί κάποιος, καθώς δίνουν περιγραφή των αντικειμένων, των δράσεων και των σχέσεων μεταξύ αντικειμένων.

2.2 Εσωτερικές αναπαραστάσεις

Στις εσωτερικές αναπαραστάσεις συγκαταλέγονται τα νοερά σχήματα, οι αντιλήψεις, τα νοητικά μοντέλα κ.ά. Πρόκειται δηλαδή για αναπαραστάσεις που δεν είναι άμεσα ορατές αλλά γίνονται αντιληπτές διαμέσου της παρατήρησης της συμπεριφοράς των υποκειμένων, της συζήτησης και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι νοερές κατασκευές και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη αλγεβρικού συλλογισμού (Cooper & Warren, 2011; Goldin, 1998; Goldin & Shteingold, 2001; Rico et al., 1996).

Ο Goldin (1998) και οι Goldin & Shteingold (2001) διακρίνουν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις στις παρακάτω κατηγορίες:

- *Λεκτικά/συντακτικά αναπαραστατικά συστήματα (Verbal/syntactic systems)*: πρόκειται για αναπαραστάσεις που αποτελούνται από λεκτικές εκφράσεις με μαθηματικό ή μη μαθηματικό λεξιλόγιο.
- *Εικονιστικά αναπαραστατικά συστήματα (Imagistic systems)*: πρόκειται για γνωστικά σχήματα ή νοερές εικόνες. Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται και οι χειρονομίες, οι κινήσεις του σώματος, καθώς επίσης και ρυθμικές κατασκευές.
- *Επίσημες σημειωτικές αναπαραστάσεις (Formal notational representation)*: πρόκειται για νοερή επεξεργασία αριθμών, αριθμητικές πράξεις, στρατηγικές και διαδικασίες που ακολουθούν οι μαθητές και ο τρόπος που αυτές απεικονίζονται στο νου τους.
- *Αναπαραστάσεις που περιλαμβάνουν στρατηγικό σχεδιασμό, παρακολούθηση και λήψη αποφάσεων (strategic planning, monitoring, and executive control)*: πρόκειται για αναπαραστάσεις που καθοδηγούν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και οδηγούν σε σχεδιασμό και λήψη αποφάσεων.
- *Αναπαραστάσεις σχετικά με τα ατομικά συναισθήματα (individuals' affective systems of representation)*: πρόκειται για τα συναισθήματα, τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα Μαθηματικά ή για τον εαυτό τους σε σχέση με τα Μαθηματικά.

Η επίδραση αυτών των αναπαραστάσεων δύναται να παρεμποδίσει ή να ενισχύσει την κατανόηση των μαθητών σχετικά με τα Μαθηματικά.

2.3 Σχέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων

Οι δύο παραπάνω ευρύτερες κατηγορίες αναπαραστάσεων συνυπάρχουν κατά τη μάθηση των Μαθηματικών. Προκειμένου να σκεφτεί ένας μαθητής για τις μαθηματικές ιδέες θα πρέπει πρώτα να τις αναπαραστήσει εσωτερικά και να εργαστεί πάνω σε αυτές. Ύστερα, τις επικοινωνεί παρουσιάζοντάς τες με εξωτερικές αναπαραστάσεις, λαμβάνοντας υπόψη την προφορική γλώσσα, τα γραπτά σύμβολα, κ.λπ. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις κάθε ατόμου αποτελούν καίριο σημείο της μάθησης των Μαθηματικών και διαφέρουν από τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες περιορίζονται και καθορίζονται από το βαθμό στον οποίο κάθε άτομο τις κατανοεί (Goldin & Shteingold, 2001; Rico et al., 1996).

Η κατανόηση των μαθητών σχετικά με τα Μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τον αριθμό και το είδος των συνδέσεων μεταξύ των εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθητών, καθώς αυτές ενεργούν κι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (Cooper & Warren, 2011; Goldin, 1998).

Συνδέσεις, όμως, δύναται να υπάρχουν και μεταξύ των εσωτερικών κι εξωτερικών αναπαραστάσεων. Οι Rico et al. (1996) υποστηρίζουν πως οι συνδέσεις μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων είναι στοιχεία που συντελούν στην μαθηματική κατανόηση αλλά αποτελούν και ενδείξεις για τη μελέτη αυτής. Επιπρόσθετα, θεωρούν την κατανόηση ως μια νέα αναπαράσταση η οποία δομείται από τη σχέση μεταξύ των νέων πληροφοριών που μαθαίνονται και των ιδεών και πληροφοριών που ήδη αναπαρίσταντο στο νου των μαθητών. Επομένως, παρατηρείται το φαινόμενο κάθε μαθητής να παρουσιάζει διαφορετική κατανόηση της ίδιας μαθηματικής έννοιας. Ομοίως, στο βιβλίο της η Τζεκάκη (2007) τονίζει πως η δομή και η οργάνωση ενός εξωτερικού συστήματος αναπαράστασης αντικατοπτρίζεται και στο εσωτερικό σύστημα αναπαράστασης.

Αντίστοιχα, ο Pimm (1995) αναφέρεται στη ύπαρξη νοερών εικόνων που βασίζονται στην οπτική επαφή των μαθητών με τον εξωτερικό κόσμο και τη φαντασία τους. Υποστηρίζει πως οι εικόνες ενός ατόμου είναι ιδιωτικές και πως το περιεχόμενο και η σημασία τους εξαρτώνται από την αλληλεπίδραση εσωτερικών κι εξωτερικών στοιχείων.

Όσον αφορά στη σχέση εσωτερικών κι εξωτερικών αναπαραστάσεων, ο Duval (2000) σημειώνει πως η κατανόηση μιας νέας πληροφορίας συνιστά αποτέλεσμα μιας πολύ μακράς

διαδικασίας εσωτερικοποίησης των εξωτερικών αναπαραστάσεων. Επιπρόσθετα, ο Van de Walle (2013) σημειώνει πως και η εναλλαγή μεταξύ αναπαραστάσεων, είτε πρόκειται για εσωτερικές είτε για εξωτερικές, συμβάλει στην εις βάθος κατανόηση μιας νέας γνώσης.

Στον αντίποδα, βρίσκονται εκείνοι οι μελετητές που υποστηρίζουν πως ο διαχωρισμός των αναπαραστάσεων σε εσωτερικές κι εξωτερικές, καθώς επίσης και ο ισχυρισμός πως οι εξωτερικές αντικατοπτρίζουν με κάποιον τρόπο τις εσωτερικές, είναι προβληματικός. Η παραπάνω άποψη στηρίζεται στο γεγονός ότι ο διαχωρισμός αυτός δεν εξηγεί το είδος της σχέσης που υπάρχει μεταξύ των εξωτερικών και των εσωτερικών αναπαραστάσεων. Ακόμη, υποστηρίζουν πως το αντικείμενο το οποίο αναπαρίσταται εξωτερικά αφαιρείται από το ιστορικό και πολιτιστικό του πλαίσιο. Έτσι, επηρεάζεται η κατασκευή νοήματος καθώς φαίνεται πως αυτή είναι το αποτέλεσμα της σχέσης που το άτομο έχει με το μη ιστορικό και απομονωμένο αντικείμενο (Radford, 2000).

Σε κάθε περίπτωση, όμως, η δυνατότητα χρήσης από τους μαθητές διαφορετικών συστημάτων και μέσων αναπαράστασης συνδράμει στην εννοιολογική τους συγκρότηση, διότι με κάθε διαφορετικό μέσο αναπαριστούν και διαφορετικά την ίδια έννοια ή αφηρημένη ιδέα. Επιπρόσθετα, η αντίληψη των μαθητών για τα αναπαραστατικά μέσα, που συναντούν ή χρησιμοποιούν, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ικανότητά τους να αφαιρούν, κινούμενοι από τα πραγματικά μέσα (π.χ. τουβλάκια) σε πιο αφηρημένα (π.χ. διαγράμματα) (Τζεκάκη, 2007).

Ακόμη, σύμφωνα με τον Duval (1995, στο Κολέζα, 2003) το σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης το οποίο χρησιμοποιούν οι μαθητές επηρεάζει άμεσα και την νοητική επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων κι εννοιών. Η χρήση παραπάνω του ενός σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης οδηγεί στη δημιουργία πολλών μορφών αναπαράστασης της ίδιας έννοιας ή αντικειμένου, το οποίο συνεπάγεται την ύπαρξη περισσότερων εσωτερικών νοητικών αναπαραστάσεων.

2.4 Χαρακτηριστικά γνωρίσματα αναπαραστάσεων

Ανεξάρτητα από το είδος των αναπαραστάσεων, υπάρχουν μερικά στοιχεία που τις χαρακτηρίζουν και που θα πρέπει να λαμβάνει κανείς υπόψη του αναφερόμενος σε αυτές (Duval, 2000). Τα στοιχεία αυτά περιλαμβάνουν:

- ✓ Το σύστημα μέσω του οποίου αναπαράγεται η αναπαράσταση. Αυτό μπορεί να είναι μια φυσική συσκευή (π.χ. κάμερα, πίνακας), ή μια οργάνωση του εγκεφάλου (π.χ. νοερές εικόνες) ή ακόμα κι ένα σημειωτικό σύστημα (π.χ. γλώσσα).
- ✓ Τη σχέση μεταξύ αναπαράστασης και αντικείμενου που αναπαρίσταται.
- ✓ Τη δυνατότητα πρόσβασης στο αντικείμενο που αναπαρίσταται (π.χ. υπάρχουν αναπαραστάσεις για μαθηματικά αντικείμενα τα οποία δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτά παρά μόνο μέσα από αυτές).
- ✓ Τον λόγο για τον οποίο χρειάζεται η αναπαράσταση, ο οποίος είναι είτε για την επικοινωνία είτε για την επεξεργασία των πληροφοριών.

Αναλυτικότερα, όσον αφορά το σύστημα μέσω του οποίου παράγεται η αναπαράσταση, δεν υπάρχει κάποιο σύστημα απόλυτα ικανό ώστε να εκφράσει την πολυπλοκότητα που περιλαμβάνεται σε κάθε μαθηματική έννοια. Έτσι, παρατηρείται το φαινόμενο να εκφράζεται κάθε έννοια με παραπάνω από ένα αναπαραστατικό σύστημα (π.χ. λέξεις, πίνακες και γραφήματα) (Rico et al., 1996).

Επιπρόσθετα, κάθε πλαίσιο αναπαράστασης περιλαμβάνει δύο συσχετιζόμενες οντότητες: αυτό που αναπαρίσταται κι αυτό που αναπαριστά (Rico et al., 1996) ή αλλιώς το σημείο και το σημαινόμενο (Radford, 2000). Υπάρχει επικοινωνία και συσχέτιση μεταξύ αυτών των δύο στοιχείων, τα οποία μπορεί να είναι ακόμη και νοερά ή να αποτελούν μια αφηρημένη έννοια (Rico et al. 1996). Περαιτέρω ανάλυση αυτών των στοιχείων θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο.

2.5 Δομή και παραγωγή αναπαραστατικών συστημάτων

Οι Goldin & Kaput (1996) συνοψίζουν τρία κύρια στάδια ανάπτυξης αναπαραστατικών συστημάτων:

- i. *Εφευρετικό-σημειωτικό στάδιο* (inventive-semiotic stage). Στο στάδιο αυτό δημιουργούνται και μαθαίνονται οι νέοι χαρακτήρες, οι οποίοι συχνά θεωρούνται ότι δεν συμβολίζουν κάτι αλλά πως αναφέρονται σε πτυχές ενός προηγούμενου αναπαραστατικού συστήματος.
- ii. *Στάδιο δομικής ανάπτυξης* (structural development). Στο στάδιο αυτό χρησιμοποιούνται οι χαρακτήρες που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο στάδιο προκειμένου να κατασκευαστεί μια νέα δομή για το καινούριο σύστημα. Σε κάθε περίπτωση, σε αυτό το στάδιο δεν εισάγεται κάτι νέο, αλλά γίνεται χρήση των όσων

ήδη γνωρίζει το άτομο. Με την πάροδο του χρόνου, οι νέοι αυτοί χαρακτήρες ενσωματώνονται και αποτελούν μέρος της ευρύτερης δομής του νέου αναπαραστατικού συστήματος.

- iii. *Αυτόνομο στάδιο*. Σε αυτό το στάδιο το νέο αναπαραστατικό σύστημα διαχωρίζεται από το παλιό, στο οποίο στηρίχθηκε, και αυτονομείται. Στο σημείο αυτό είναι εφικτή η αλληλεπίδραση ενός συστήματος με ένα άλλο, διαφορετικής μορφής.

Οι Mulligan & Mitchelmore (2009), σε έρευνά τους σχετικά με την αντίληψη της δομής των προτύπων και την αναπαράσταση αυτών, προτείνουν τέσσερα ευρεία στάδια ανάπτυξης αναπαραστάσεων από τους μαθητές:

- i. *Προ-δομικό στάδιο* (Pre-structural stage). Στο στάδιο αυτό εντάσσονται οι αναπαραστάσεις που δεν έχουν καμία ένδειξη αριθμητικής ή χωρικής δομής. Χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτού του σταδίου είναι η ύπαρξη αναπαραστάσεων ιδιοσυγκρασιακής φύσεως.
- ii. *Αναδύμενο (εφευρετικό-σημειωτικό) στάδιο* (Emergent (inventive-semiotic) stage). Στο στάδιο αυτό εντάσσονται οι αναπαραστάσεις που παρουσιάζουν κάποια στοιχεία δομής, αλλά η αριθμητική ή χωρική δομή τους δεν αναπαρίσταται.
- iii. *Στάδιο μερικής δομής* (Partial structural stage). Στο στάδιο αυτό εντάσσονται οι αναπαραστάσεις που παρουσιάζουν τις σημαντικότερες πτυχές της αριθμητικής ή χωρικής δομής, αλλά είναι ελλιπείς.
- iv. *Στάδιο δομικής ανάπτυξης* (Stage of structural development). Στο στάδιο αυτό εντάσσονται οι αναπαραστάσεις που ενσωματώνουν σωστά τα χαρακτηριστικά αριθμητικής και χωρικής δομής

2.6 Επίσημα σημειωτικά αναπαραστατικά συστήματα

Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν μπορεί κανείς να τα προσεγγίσει αισθητηριακά, ούτε να τα μελετήσει με διάφορα όργανα. Ο μόνος τρόπος πρόσβασης σε αυτά είναι η χρήση σημάτων, λέξεων, εκφράσεων, εικόνων ή σχεδίων. Αυτό όμως δεν συνεπάγεται πως τα παραπάνω στοιχεία αποτελούν από μόνα τους σημειωτικές αναπαραστάσεις (Duval, 2000). Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι εξωτερικές και περιλαμβάνουν τη χρήση σημείων (π.χ. αλγεβρικά σύμβολα, λέξεις και γράμματα, σχήματα κ.λπ.), μέσω των οποίων εκφράζονται οι εσωτερικές νοητικές αναπαραστάσεις. Εξαρτώνται λοιπόν από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις και χρησιμοποιούνται για την επικοινωνία κι επεξεργασία των μαθηματικών

αντικειμένων (Κολέζα, 2003). Έτσι, τα σημειωτικά αναπαραστατικά συστήματα που κάνουν χρήση οι μαθητές σχετίζονται άμεσα με την εννοιολογική τους ανάπτυξη (Τζεκάκη, 2007).

Τα σημειωτικά συστήματα αναπαραστάσεων διαδραματίζουν ουσιαστικό ρόλο σε κύριες γνωστικές λειτουργίες, όπως η επικοινωνία και η επεξεργασία των πληροφοριών.

Ο Duval (2000) διαχωρίζει τις σημειωτικές αναπαραστάσεις σε εσωτερικές και εξωτερικές:

- Οι *εσωτερικές σημειωτικές αναπαραστάσεις* εμπλέκουν τις γνωστικές λειτουργίες της αντικειμενικοποίησης της γνώσης και της επεξεργασίας των πληροφοριών. Συνδράμουν δηλαδή στη μετατροπή μιας αναπαράστασης σε μια άλλη μέσα στο ίδιο σύστημα και χωρίς να χρειάζεται η ύπαρξη άλλων εξωτερικών αναπαραστάσεων. Επιπλέον, οδηγούν σε αντικειμενικοποίηση της νέας μαθηματικής γνώσης καθώς πρόκειται για έναν νέο τρόπο έκφρασης ή αναπαράστασης αυτής. Αντίστοιχα, στην αντικειμενικοποίηση της γνώσης έχει αναφερθεί και ο Pimm (1995), υπογραμμίζοντας πως οι νοερές εικόνες κάθε μαθητή αντικειμενικοποιούνται και γίνονται πιο στατικές με το να ενώνονται με άλλα αντικείμενα και με το να εκφράζονται με κάποιον τρόπο.
- Οι *εξωτερικές σημειωτικές αναπαραστάσεις* διαχωρίζονται σε προφορικές, οι οποίες εμπλέκουν την γνωστική λειτουργία της επικοινωνίας, και γραπτές, οι οποίες εμπλέκουν τις λειτουργίες της επικοινωνίας, της αντικειμενικοποίησης της γνώσης και της επεξεργασίας των πληροφοριών. Σε κάθε περίπτωση, όμως, σημειώνει πως πρωταρχικός ρόλος των σημειωτικών αναπαραστάσεων είναι η επεξεργασία και κατανόηση νέων πληροφοριών.

Εν μέρει διαφορετική άποψη έχει ο Van de Walle (2013), ο οποίος υποστηρίζει πως οι αναπαραστάσεις που περιλαμβάνουν σύμβολα, γραφήματα και διαγράμματα λειτουργούν κυρίως ως τρόπος επικοινωνίας μαθηματικών ιδεών μεταξύ ατόμων.

Ακόμη, στους Πατσιομίτου & Εμβαλωτή (2009) αναφέρεται πως τα σημειωτικά συστήματα αναπαραστάσεων αποτελούν σημαντικά εργαλεία α) επικοινωνίας, των ιδεών αλλά και των μαθητών μεταξύ τους, και β) κατανόησης μαθηματικών εννοιών, βοηθώντας τους μαθητές να αναδιοργανώσουν και να μετατρέψουν τις ιδέες τους με σημειωτικά αναπαραστατικά συστήματα.

Αν και μία αναπαράσταση, όπως σημειώθηκε και προηγουμένως, μπορεί να έχει διάφορες μορφές, παρατηρείται το φαινόμενο, όσον αφορά τα σχολικά Μαθηματικά, το μεγαλύτερο μέρος αυτών να ασχολείται με τα αναπαραστατικά συστήματα επίσημων

συμβολισμών και όχι τόσο με άλλες διαδικασίες, όπως είναι η αναγνώριση κι επεξεργασία προτύπων, οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων κ.ά. Έτσι οι μαθητές εντάσσονται στη διδασκαλία των Μαθηματικών μαθαίνοντας να γράφουν και να χειρίζονται αριθμούς και σύμβολα, τυπικούς αλγόριθμους των πράξεων, αλγεβρικές εκφράσεις, αλγοριθμικές διαδικασίες (π.χ. στρογγυλοποίηση), εξισώσεις κ.ο.κ Για να αναπτύξουν, όμως, οι μαθητές συστήματα εσωτερικών αναπαραστάσεων και κατ' επέκταση αλγεβρικό συλλογισμό, θα πρέπει να δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία, εξίσου με τις τεχνικές, και στον σχεδιασμό και λήψη αποφάσεων και στις αναπαραστάσεις που σχετίζονται με τα ατομικά συναισθήματα των μαθητών. Ακόμη, θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη βάση στις εξωτερικές αναπαραστάσεις που παρέχονται στους μαθητές, καθώς αυτές έχουν πρωταγωνιστικό ρόλο στη δόμηση των εσωτερικών αναπαραστάσεων (Goldin, 1998; Goldin & Kaput, 1996).

Οι μαθητές είναι σε θέση από πολύ νωρίς να προβούν σε αυθόρμητες εξωτερικές αναπαραστάσεις (ζωγραφιές, σχήματα κ.λπ.) εμπνευσμένες από το καθημερινό τους περιβάλλον, οι οποίες βρίσκονται σε αντιστοιχία με τα αντικείμενα τα οποία περιγράφουν. Με έρευνά της, μάλιστα, η Warren (2005b) διαπιστώνει πως ακόμη και τα μικρά παιδιά μπορούν να εκφράσουν γενικεύσεις με πιο αφηρημένα συμβολικά συστήματα. Έτσι, με τις κατάλληλες εμπειρίες και καθοδήγηση θα είναι σε θέση μελλοντικά να αναγνωρίζουν και στη συνέχεια να σημειώνουν και άλλες άτυπες ή τυπικές μορφές αναπαραστάσεων, οι οποίες μάλιστα να προέρχονται από πιο συμβατικά συμβολικά συστήματα (Τζεκάκη, 2007). Κατ' επέκταση, στο πεδίο της Άλγεβρας με τη σωστή καθοδήγηση, τις κατάλληλες διδακτικές πρακτικές καθώς επίσης και με τα κατάλληλα πραγματικά ή σχηματικά μέσα, θα μπορούν να προβούν σε χρήση συμβολικών αναπαραστατικών συστημάτων τυπικής ή άτυπης μορφής.

Ολοκληρώνοντας το παρόν κεφάλαιο, αξίζει να σημειωθεί το εξής: Δεδομένου ότι οι εσωτερικές κι εξωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών είναι άρρηκτα συνδεδεμένες και αλληλοεξαρτώμενες (Duval, 2000; Goldin, 1998; Goldin & Kaput, 1996; Rico, Castro & Romero, 1996) κι έχοντας υπόψη πως οι μαθητές που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης δεν έχουν διδαχθεί ακόμη τον τυπικό αλγεβρικό συμβολισμό, καταλήγει κανείς στο συμπέρασμα ότι οι νεαροί μαθητές βρίσκονται σε θέση να αναπαραστήσουν μαθηματικά αντικείμενα κι έννοιες που κατανοούν με έναν δικό τους, αυθόρμητο τρόπο. Και καθώς η αναπαραστάση συνεπάγεται γενίκευση και αφαίρεση (Otte, 2006), δύο θεμελιώδεις διαδικασίες της αλγεβρικής σκέψης, οδηγείται κανείς στο συμπέρασμα πως η δυνατότητα αναπαραστάσης αποτελεί απόρροια της ύπαρξης αλγεβρικής σκέψης.

Κεφάλαιο 3: Σημειωτική δραστηριότητα

Η ύπαρξη σημείων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανθρώπινη σκέψη, καθώς χωρίς αυτά, δεν υφίστανται ούτε η ανθρώπινη σκέψη, ούτε οι νοερές γενικεύσεις (Steinbring, 2006). Παραδοσιακά, ο αλφαριθμητικός συμβολισμός θεωρείται ως το κατ' εξοχήν σημειωτικό σύστημα της άλγεβρας καθώς τα γράμματα και τα σύμβολα των πράξεων θεωρούνται ως τα αλγεβρικά σημεία της σχολικής, τουλάχιστον, Άλγεβρας. Ωστόσο, τα σημεία δύναται να είναι λέξεις, χειρονομίες, ρυθμός με τον οποίο επαναλαμβάνονται οι λέξεις, σχέδια κ.λπ. ή οτιδήποτε άλλο μπορεί να λειτουργήσει ως αλγεβρική ένδειξη (Radford, 2010, 2012).

Η επιστήμη των Μαθηματικών βρίθει σημείων. Σκοπός αυτών είναι η αποτύπωση και κωδικοποίηση των αφηρημένων εννοιών κι αντικειμένων που διέπουν το πεδίο των Μαθηματικών (Steinbring, 2006). Πρόκειται λοιπόν για ένα είδος γλώσσας αποτελούμενη από σύμβολα ή άλλα αναπαραστατικά μέσα, τα οποία όμως θα πρέπει να ενταχθούν σε κάποιο πλαίσιο προκειμένου να αποκτήσουν νόημα (Τζεκάκη, 2007). Ένα σύμβολο χωρίς να είναι ενταγμένο σε ένα ευρύτερο πλαίσιο δεν έχει καμία σημασία, διότι δεν έχει κάποιο περιεχόμενο. Περιεχόμενο αποκτά μέσω της σχέσης που υφίσταται μεταξύ αυτού και του αντικειμένου, της έννοιας, της διαδικασίας κ.λπ. στα οποία αναφέρεται (Otte, 2006; Pimm, 1995).

Σύμφωνα με τους Radford et al. (2005) η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα από τη χρήση διαφόρων σημειωτικών συστημάτων. Η μάθηση συνεπάγεται απόδοση νοήματος και ερμηνεία, δράσεις κατά τις οποίες ο λόγος από μόνος του δεν μπορεί να οδηγήσει σε αυτήν. Χρειάζεται η ενασχόληση και η ερμηνεία σημείων ή αντικειμένων από τους μαθητές με διαφορετικούς τρόπους.

Συνεπώς, τα αντικείμενα της γνώσης δεν συνδέονται απευθείας με τα άτομα και η γνωστική πρόσβαση στην πραγματικότητα δεν είναι άμεση αλλά μεσολαβείται από σημεία. Τα σημεία αυτά θα πρέπει να σχετίζονται άμεσα με τα αντικείμενα, που αντιπροσωπεύουν καθαρή πραγματική ύπαρξη, προκειμένου να αποκτήσουν περιεχόμενο και να λειτουργήσουν ως σημεία (Otte, 2006; Radford, 2002). Η Τζεκάκη (2007), αναφερόμενη στα σημεία, υπογραμμίζει πως «ένα σήμα ή σύμβολο αποδίδει ένα και μόνο αντικείμενο, κατάσταση ή δράση, δηλαδή ένα και μόνο νόημα, ενώ δύο διαφορετικά σήματα ή σύμβολα μπορούν να αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο ή κατάσταση».

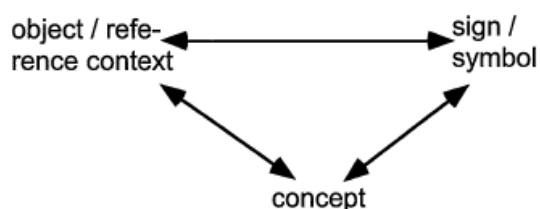
3.1 Λειτουργίες σημείων

Τα σημεία διαδραματίζουν διπλό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία. Από τη μια πλευρά έχουν το ρόλο των εργαλείων, με σκοπό την διευκόλυνση των ατόμων στην επεξεργασία πληροφοριών κι ενασχόληση με γνωστικές πρακτικές. Από την άλλη πλευρά, τα σημεία που χρησιμοποιεί ένα άτομο για να σκεφτεί ή να εκφραστεί ανήκουν σε πολιτιστικά σημειωτικά συστήματα που ξεπερνούν το ατομικό επίπεδο και μέσω αυτών αντικειμενικοποιείται η γνώση Radford (2000).

1^η λειτουργία: επεξεργασία πληροφοριών

Τα μαθηματικά σημεία χρησιμοποιούνται για την καταγραφή των μαθηματικών εννοιών και πληροφοριών και, συνεπώς, σχετίζονται άμεσα με την επιστημολογική έννοια της γνώσης.

Τα μαθηματικά σημεία έχουν τις εξής δύο λειτουργίες: μια *σημειωτική λειτουργία*, όπου το σημείο σχετίζεται κι αναπαριστά ένα άλλο αντικείμενο ή έννοια, το οποίο αναφέρεται ως αντικείμενο αναφοράς, και μια *επιστημολογική λειτουργία*, όπου το σημείο σχετίζεται με το πλαίσιο της επιστημολογικής σύστασης της μαθηματικής γνώσης. Οι δύο αυτές λειτουργίες συνδέονται μεταξύ τους και αναπαρίστανται με τη χρήση του παρακάτω επιστημολογικού τριγώνου (Steinbring, 2006).



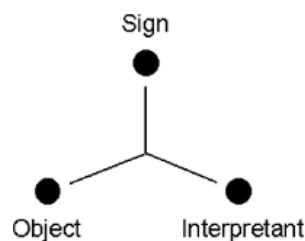
Εικόνα 1 Επιστημολογικό τρίγωνο (Steinbring, 2006)

Συγκεκριμένα, τα μαθηματικά σημεία ή συμβολικά συστήματα δεν έχουν κάποιο δικό τους νόημα ή περιεχόμενο (Otte, 2006; Radford, 2002; Steinbring, 2006; Warren & Cooper, 2008). Επιπλέον, δεν έχουν καμία εγγενή σχέση με τα αντικείμενα που καλούνται να αντιπροσωπεύσουν, ούτε παρουσιάζουν στοιχεία ανθρώπινης παρουσίας (Radford, 2002). Περιεχόμενο τους προσδίδει το κάθε άτομο μέσα από το πλαίσιο στο οποίο αναφέρονται και μέσα από την ερμηνεία που τους δίνει. Υπό αυτό το πρίσμα, σύμφωνα με τους Warren & Cooper (2008) τα σημεία και οι αναπαραστάσεις είναι το ίδιο. Ταυτόχρονα, δεν δύναται να υφίσταται ένα σημείο χωρίς περιεχόμενο, χωρίς να αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο ή γεγονός (Otte, 2006).

Το επιστημολογικό τρίγωνο πρόκειται για τη μοντελοποίηση αυτής της διαμεσολάβησης του ατόμου μεταξύ σημείου και πλαισίου αναφοράς. Παρ' όλα αυτά, χρειάζεται να σημειωθεί πως η διαμεσολάβηση αυτή του ατόμου δεν είναι εντελώς υποκειμενική, αλλά λαμβάνει χώρα κάτω από τις επιστημολογικές επιρροές της μαθηματικής γνώσης, προκειμένου να γίνουν τα σημεία αυτά μαθηματικά σημεία (Steinbring, 2006).

Ο Steinbring (2006) σημειώνει σχετικά με το επιστημολογικό τρίγωνο πως η μαθηματική έννοια (concept) θα πρέπει να διακρίνεται από το πλαίσιο αναφοράς (object/reference context) και από το σημείο (sign/symbol) και να θεωρείται αυτόνομη. Επίσης, τονίζει πως κατά τη διαδικασία της μάθησης τα απτά αντικείμενα τείνουν να αντικαθίστανται σιγά σιγά από νοερά αντικείμενα και δομές.

Στην επιστημολογική θεώρηση του ρόλου των σημείων αναφέρεται και η σημειωτική προσέγγιση των Μαθηματικών του Peirce, σύμφωνα με την οποία τα σημεία λειτουργούν ως διαμεσολαβητές ανάμεσα στα μαθηματικά αντικείμενα και το νόημα αυτών των αντικειμένων (Κυλάφης, 2009). Έτσι, η παραπάνω σχέση μοντελοποιείται στο κλασικό σημειωτικό τρίγωνο που έχει στις κορυφές του το σημείο (sign), το αντικείμενο (object) και τον ερμηνευτή (interpretant). Σε αυτή την τριαδική σχέση, το σημείο αντιπροσωπεύει το αντικείμενο για έναν ερμηνευτή και μεσολαβεί μεταξύ αντικειμένου και ερμηνευτή για να καταστήσει το εν λόγω αντικείμενο κατανοητό (Sáenz-Ludlow, 2006). Ταυτόχρονα, η λειτουργία του σημείου εξαρτάται άμεσα από τον ερμηνευτή και το νόημα που του προσδίδει (Warren & Cooper, 2008). Ακόμη, παραπάνω από ένα σημεία που απευθύνονται στο ίδιο αντικείμενο δύναται να προκύψουν μέσα από διαφορετικά αναπαραστατικά συστήματα (π.χ. γραφική παράσταση ή τύπος) (Τζεκάκη, 2007).



Εικόνα 2 Σημειωτικό τρίγωνο (Otte, 2006)

Στην παραπάνω σχέση αναφέρεται και η Τζεκάκη (2007) σε μια προσπάθεια απόδοσης ορισμού στη Σημειωτική ως μια «γνωστική δραστηριότητα με βάση την οποία το άτομο αποκαθιστά μια σχέση ανάμεσα σε ένα σήμα και τη σημασία του, καθώς και την αλλαγή της σημασίας με την αλλαγή του σήματος».

Ο Radford (2000), αντιθέτως, έχει διαφορετική άποψη σχετικά με το σημειωτικό τρίγωνο. Υποστηρίζει πως δεν είναι σε θέση να αποδώσει κατάλληλα τα σημεία και τις εννοιολογικές σχέσεις που τα διέπουν. Ένα σημειωτικό τρίγωνο παρουσιάζει τα υποκείμενα, τα αντικείμενα και τα σύμβολα απομονωμένα από το περιβάλλον τους και τα άλλα άτομα.

Δεν είναι εφικτό να θεωρήσουμε κάθε αντικείμενο, εικόνα, σύμβολο κ.λπ. ως σημείο, παρά μόνο εφόσον λειτουργεί ως τέτοιο. Αλλά για να λειτουργήσει ως τέτοιο χρειάζεται έναν ερμηνευτή προκειμένου να αποδώσει το κατάλληλο περιεχόμενο (Otte, 2006).

Συμπερασματικά, λοιπόν, τόσο τα συστήματα συμβολικής σημειογραφίας όσο και οι γλωσσικές περιγραφές μπορούν να χαρακτηριστούν ως σημεία. Σύμφωνα με τους Warren & Cooper (2008) η Σημειωτική περιλαμβάνει μια εξελισσόμενη διαδικασία ενασχόλησης με όλο και πιο σύνθετες αναπαραστάσεις που ενσωματώνουν νέα σημεία και γενικεύσεις. Υπό αυτό το πρίσμα, κεντρική ιδέα της γνώσης αποτελεί η σημειωτική δραστηριότητα, που περιλαμβάνει συσχέτιση σημείων, αντικειμένων και ερμηνειών, και όχι οι νοερές αναπαραστάσεις (Otte, 2006).

2^η λειτουργία: επικοινωνία

Η ενασχόληση των μαθητών με τα Μαθηματικά περιλαμβάνει αφενός την ερμηνεία των σημείων, αφετέρου όμως περιλαμβάνει και την κατασκευή νοήματος μέσω της επικοινωνίας (Sáenz-Ludlow, 2006). Έτσι, εκτός από την επεξεργασία των μαθηματικών εννοιών, τα μαθηματικά σημεία λειτουργούν και ως μέσα για την περιγραφή και επικοινωνία των μαθηματικών εννοιών. Επομένως, τα μαθηματικά σημεία λειτουργούν ως πολιτιστικά εργαλεία, τα οποία συνδράμουν στην επικοινωνία με άλλα άτομα με σκοπό την ανάπτυξη μαθηματικής γνώσης. (Radford, 2002)

Η σημειωτική αντίληψη για την κατανόηση των Μαθηματικών εμπεριέχει την παραγωγή και χρήση σημείων και δίνει βαρύτητα στο νόημα που υπάρχει μεταξύ δύο σημείων. Δίνεται, λοιπόν, έμφαση στην κοινωνική πλευρά της γνώσης. Δηλαδή υποστηρίζεται πως, κατά την επικοινωνία των ατόμων μέσω ιδιοσυγκρασιακών ή συμβατικών σημείων, προκύπτει γνώση καθώς το άτομο ερμηνεύει συνεχώς αυτά τα σημεία (Warren & Cooper, 2008).

Επιπλέον, η μαθηματική γνώση δεν δύναται να αποκτηθεί μόνο μέσα από την απλή ανάγνωση σημείων ή συμβόλων. Τα σημεία αυτά θα πρέπει να ερμηνευθούν με χρήση των εμπειριών και των πρότερων γνώσεων ενός ατόμου, οι οποίες αποτελούν και μέρος της κουλτούρας των Μαθηματικών. Ακόμη, και η ίδια η χρήση σημείων και συμβόλων αποτελεί

βασική πτυχή της κουλτούρας των Μαθηματικών καθώς τους προσδίδεται κοινωνικό κι επικοινωνιακό νόημα, ανάλογα με το πλαίσιο αναφοράς τους (Steinbring, 2006).

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως στα πλαίσια της επικοινωνίας μέσα σε μια σχολική τάξη χρησιμοποιούνται και άλλα σημειωτικά συστήματα πέρα του συμβατικού μαθηματικού συμβολισμού, όπως είναι οι χειρονομίες, οι γλωσσικές εκφράσεις κ.ά. (Sáenz-Ludlow, 2006).

Ολοκληρώνοντας, θα πρέπει να καταστεί κατανοητό πως στη σημειωτική διαδικασία δεν υπερέχει ούτε η λειτουργία των σημείων ως τρόπου διαχείρισης του αντικειμένου της γνώσης ούτε η κοινωνική αλληλεπίδραση. Οι δύο αυτές λειτουργίες συνυπάρχουν και υποστηρίζουν τη μαθησιακή διαδικασία (Warren & Cooper, 2008).

3.2 Αντικειμενικοποίηση γνώσης

Η εκμάθηση της άλγεβρας περιλαμβάνει τη χρήση και παραγωγή σημείων, το περιεχόμενο και η σημασία των οποίων αποκτώνται από τους μαθητές ύστερα από την ενασχόληση τους με μαθηματικές δραστηριότητες. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της σχέσης που αναπτύσσεται μεταξύ των ιδίων και των κοινωνικών μέσων σημειωτικής αντικειμενικοποίησης και όχι με την απλή μεταφορά πληροφοριών από το δάσκαλο (Radford, 2000).

Η *αντικειμενικοποίηση* (objectification) είναι μια διαδικασία που στοχεύει στο να κάνει κάτι εμφανές, να φέρει κάτι μπροστά στο οπτικό πεδίο κάποιου άλλου. Οδηγεί σε συστολή έκφρασης και σε συνακόλουθο βαθύτερο επίπεδο συνειδητοποίησης Πρόκειται για μια διαδικασία που περιλαμβάνει μια πολυσημειωτική δραστηριότητα, αποτελούμενη από σύμβολα, γλωσσικές εκφράσεις, χειρονομίες, σχήματα κ.λπ., κατά τη διάρκεια της οποίας το αντικείμενο αρχίζει να διαφαίνεται σιγά σιγά. Τα σήματα και αντικείμενα διαφόρων ειδών που χρησιμοποιούνται για την αντικειμενικοποίηση της γνώσης αποκαλούνται *σημειωτικά μέσα αντικειμενικοποίησης* (semiotic means of objectification) (Radford, 2006, 2008).

Συγκεκριμένα, τα σημειωτικά μέσα αντικειμενικοποίησης, όπως αναφέρει ο Radford (2003) είναι όλα εκείνα «τα αντικείμενα, εργαλεία, γλωσσικές μέθοδοι και σημεία που τα άτομα σκοπίμως χρησιμοποιούν στις κοινωνικές διαδικασίες κοινωνικής απόδοσης νοήματος, προκειμένου να επιτύχουν μια σταθερή μορφή συνειδητοποίησης, να καταστήσουν εμφανείς τις

προθέσεις τους και να διεκπεραιώσουν τις ενέργειές τους για να επιτύχουν το στόχο των δραστηριοτήτων τους».

Ακόμη, οι χειρονομίες, οι δεικτικοί όροι, ο ρυθμός κλπ. αποτελούν σημειωτικά μέσα αντικειμενικοποίησης. Αν και ανήκουν σε διαφορετικά σημειωτικά συστήματα, δεν δύναται να λειτουργήσουν ξεχωριστά το ένα από το άλλο, ενώ ο συντονισμός τους φέρεται να είναι σημαντικός για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Radford et al., 2005).

Η αντικειμενικοποίηση της γνώσης είναι ένα θεωρητικό κατασκεύασμα που λαμβάνει υπόψη τις κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της γνώσης. Στηρίζεται στην ιδέα πως οι σχολικές τάξεις αποτελούν περιοχές αλληλεπίδρασης των μαθητών και μεταφοράς ιδεών και αξιών, επιστημονικών γνώσεων και πολιτιστικών και ιστορικών πληροφοριών. Αυτά είναι και τα στοιχεία που καλούνται οι μαθητές να αντικειμενικοποιήσουν και κατ' επέκταση να κατανοήσουν (Radford, 2006).

Αποτελείται από δύο κύριες και διακριτές διαδικασίες που διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην απόκτηση μαθηματικής γνώσης (Radford, 2008, 2012):

- *Εικονικότητα* (iconicity): πρόκειται για τη διαδικασία που περιλαμβάνει την αξιοποίηση των προηγούμενων εμπειριών των μαθητών με σκοπό τη χρήση τους για τη δημιουργία νέων.
- *Συστολή* (contraction): πρόκειται για τη διαδικασία που οδηγεί στον περιορισμό της προσοχής κάθε ατόμου σε εκείνες τις πτυχές που φαίνονται σχετικές με το θέμα που εξετάζει. Περιλαμβάνει την συρρίκνωση της προηγούμενης σημειωτικής δραστηριότητας, οδηγώντας σε ένα βαθύτερο επίπεδο κατανόησης και μάθησης. Αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επίτευξη της γνώσης και εξαρτάται άμεσα από τα σημειωτικά συστήματα μέσω των οποίων λαμβάνει χώρα η αντικειμενικοποίηση. Συγκεκριμένα, υφίστανται δύο γενικοί τύποι συστολής που διαμορφώνονται ανάλογα με τα σημειωτικά συστήματα που χρησιμοποιούνται: η συστολή μέσα σε ένα ίδιο σύνολο σημειωτικών συστημάτων και η συστολή μεταξύ σημειωτικών συστημάτων.

3.3 Είδη σημείων

Σύμφωνα με τον Peirce, διακρίνονται τρεις θεμελιώδεις τύποι σημείων (Otte, 2006; Warren & Cooper, 2008):

- *Εικόνες*(icons): πρόκειται για σημεία που μοιάζουν αρκετά με τα αντικείμενα, έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά

- *Δείκτες* (indices): πρόκειται για σημεία που μπορούν υπάρξουν από μόνα τους, αλλά αποκτούν νόημα μέσα από τη σχέση τους με το αντικείμενο. Δεν έχουν απαραίτητα τα ίδια χαρακτηριστικά με τα αντικείμενα
- *Σύμβολα* (symbols): πρόκειται για σημεία-αναπαραστάσεις που δεν μοιάζουν με τα αντικείμενα ούτε σχετίζονται κατά κάποιον τρόπο με αυτά. Αντιπροσωπεύουν απλά τα αντικείμενα.

Η Τζεκάκη (2007) σημειώνει μια κατηγοριοποίηση ως προς το περιεχόμενο των σημειωτικών μέσων:

- Αυτά που εκφράζουν δεδομένα (factual)
- Αυτά που σχετίζονται με ένα πλαίσιο (contextual)
- Αυτά που αποδίδουν μια συμβολική γενίκευση (symbolic generalization)

Η ίδια σημειώνει και μία ακόμη κατηγοριοποίηση ως προς το στόχο της χρήσης των συμβολικών μέσων: α) δεικτικά (deictic), β) εικονικά (iconic) και γ) μεταφορικά ή συμβολικά (metaphoric or symbolic). Η κατηγοριοποίηση αυτή βρίσκεται στο ίδιο μήκος κύματος με αυτά που ο Radford (2003) αποκαλεί σημειωτικά μέσα αντικειμενικοποίησης (semiotic means of objectification) και που περιλαμβάνουν διαφορετικά είδη σημάτων π.χ. λέξεις, ζωγραφιές, χειρονομίες.

3.4. Ο ρόλος της γλώσσας

Ο λόγος, είτε πρόκειται για τον προφορικό είτε για τον γραπτό, αποτελεί σημαντικό μέρος του τρόπου παραγωγής γνώσης κι ως εκ τούτου συμπεριλαμβάνεται στη διαδικασία της σημειωτικής δραστηριότητας. Κατά την ενασχόληση με εξειδικευμένα συμβολικά συστήματα, η φυσική γλώσσα συνδράμει σημαντικά και υποστηρίζει τη διαδικασία παραγωγής των νέων σημείων (Radford, 2002).

Υπάρχει μια κατηγορία γλωσσικών όρων που αναφέρονται ως δεικτικές λέξεις. Πρόκειται για περιγραφικές λέξεις, π.χ. πάνω, κάτω κ.ά., των οποίων βασική λειτουργία αποτελεί το να δείχνουν κάτι στο οπτικό πεδίο των ομιλητών. Οι λέξεις αυτές έρχονται σε αντικατάσταση πρότερων δεικτικών σημείων, όπως είναι οι χειρονομίες και ο ρυθμός. Το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται κάποιος γλωσσικός δεικτικός όρος σχετίζεται με το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται και συνεπώς καθιστά τον δεικτικό όρο σύμφωνο με τα συμφραζόμενα και άμεσα συνδεδεμένο με το περιβάλλον. Το γεγονός αυτό ορισμένες φορές δύναται να δημιουργήσει προβλήματα στον μαθηματικό λόγο, ο οποίος, μέσα στα πλαίσια του

αλγεβρικού συμβολισμού και της απροσδιοριστίας που τον διέπει, αναφέρεται σε αντικείμενα ελεύθερα από το περιβάλλον (Radford, 2002, 2010).

Παρ' όλα αυτά, θα πρέπει να σημειωθεί πως οι δεικτικοί όροι που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή ενός γενικού όρου επιτρέπουν στον μαθητή να εκφράσει μια γενίκευση. Η γενίκευση όμως αυτή είναι ακόμη τοποθετημένη μέσα σε πλαίσια ή με προοπτική (Radford, 2002).

Συνοψίζοντας, ο όρος της γλωσσικής παραμέτρου αναφέρεται τόσο στη φυσική γλώσσα και μαθηματική ορολογία που χρησιμοποιούν οι μαθητές, όσο και στην ικανότητα περιγραφής κι αντίληψης τους και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία (Κυλάφης, 2009).

3.5. Σχετικές μελέτες-έρευνες

Στη βιβλιογραφία απαντάται ένα σύνολο μελετητών που έχουν ασχοληθεί με την παραγωγή και χρήση σημείων από τους μαθητές, κατά την ενασχόλησή τους με μαθηματικές δραστηριότητες γενίκευσης, που ενέχουν τη χρήση προτύπων.

Όταν ζητείται από τους μαθητές η καταγραφή ενός συμβολικού μηνύματος, πρόκειται για μια συμβολική αφηγηματική καταγραφή ενός προγενέστερα γλωσσολογικά αντικειμενικού σχήματος. Συγκεκριμένα, πρόκειται για την αφήγηση μιας ιστορίας, που βασίζεται στη γενίκευση προτύπων που έχουν συναντήσει οι μαθητές στο παρελθόν, με τη χρήση σημείων, τα οποία έχουν διανεμηθεί χωρικά με τέτοιο τρόπο ώστε να αναπαριστούν μια οργάνωση προηγούμενων γεγονότων και ενεργειών (Radford, 2002). Έτσι, οι τύποι που σημειώνονται αποτελούν εικονίδια, διότι παρουσιάζουν ένα είδος χωρικής περιγραφής του σχήματος και της ενέργειας που θα πρέπει να πραγματοποιηθεί, ενώ δεν εντάσσονται ακόμη στο επίπεδο της απρόσωπης έννοιας (Radford, 2010).

Οι Rico et al. (1996) αναφέρονται στη χρησιμότητα των συμβόλων, σημειώνοντας πως η εύρεση ενός γενικού όρου ενός προτύπου απαιτεί την ύπαρξη ενός υψηλού επιπέδου αφαίρεσης και πως ο συνήθης τρόπος για να τον γράψει κανείς είναι με αλγεβρικό συμβολισμό. Αντίστοιχα, οι Radford et al. (2005) τονίζουν πως η αντίληψη των μαθητών για το πρότυπο και η οικοδόμηση κι έκφραση της γενικότητας στηρίζονται σε μια σύνθετη ερμηνεία γραπτών σημείων, λέξεων και χειρονομιών. Η γενίκευση όμως που επιτυγχάνεται μέσα από λέξεις και χειρονομίες διαφέρει από αυτήν που επιτυγχάνεται μέσα από έναν τύπο ή ένα γράφημα. Κάθε διαφορετικό σημειωτικό σύστημα παρέχει και διαφορετικούς τρόπους έκφρασης, χωρίς αυτό,

όμως, να σημαίνει πως ό,τι εκφράζεται σε ένα σημειωτικό σύστημα είναι εντελώς ανεξάρτητο από αυτό που εκφράζεται σε ένα άλλο (Radford, 2006).

Οι Friel & Markworth (2009) σημειώνουν πως οι μαθητές είναι σε θέση να παρατηρήσουν τις σχέσεις που ενυπάρχουν στα πρότυπα και μπορούν να τις αναπαραστήσουν με χρήση συμβόλων, πινάκων λέξεων κ.ο.κ. Ακόμη, είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν αυτές τις σχέσεις προκειμένου να κάνουν προβλέψεις για επόμενους όρους.

Σύμφωνα με τους Warren & Cooper (2008) η προφορική και η γραπτή περιγραφή ενός προτύπου θεωρούνται ως δύο ξεχωριστά συμβολικά συστήματα στα πλαίσια μιας σημειωτικής προοπτικής. Στο ίδιο μήκος κύματος, ο Radford (2010) σημειώνει πως κατά την προφορική περιγραφή του γραπτού ή συμβολικού μηνύματος οι μαθητές χρησιμοποιούν χειρονομίες και δεικτικές λέξεις. Κατά την γραπτή καταγραφή, όμως, τα αντικαθιστούν με σημεία και παρενθέσεις. Ακόμη, ο Duval (2000) παρατηρεί πως συχνά υφίσταται ένα χάσμα μεταξύ της χρήσης λέξεων και της χρήσης συμβόλων από τους μαθητές.

Τα ευρήματα των ερευνών και μελετών, σύγχρονων κυρίως, είναι ιδιαίτερος ενδιαφέροντα και προσφέρουν ένα σύνολο πληροφοριών σχετικά με την ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν επαρκώς σημειωτικά μέσα.

Σε έρευνά τους οι Zazkis & Liljedahl (2002) διαπίστωσαν πως η ικανότητα των μαθητών να εκφράζουν προφορικά μια γενίκευση δεν συμπίπτει με την ικανότητα τους να χρησιμοποιούν άνετα αλγεβρικό συμβολισμό. Ταυτόχρονα, πολλοί μαθητές τείνουν να σημειώνουν συμβολισμούς αποτελούμενους από ένα γράμμα μόνο. Αυτό οδήγησε πολλούς από τους μαθητές στο να αισθανθούν ανεπαρκείς λόγω μη ικανοποίησης των προσδοκιών τους. Συγκεκριμένα, πιστεύουν πως οι λύσεις τους ήταν ελλιπείς διότι δεν είχαν κάποιον συγκεκριμένο τύπο. Οι ίδιοι προτείνουν στους εκπαιδευτικούς να μη περιμένουν μια συγκεκριμένη αλγεβρική σημειογραφία από τους μαθητές αλλά να τους παρέχουν τη δυνατότητα να εμπλακούν σε καταστάσεις που προωθούν την αλγεβρική σκέψη, χωρίς τους περιορισμούς του επίσημου συμβολισμού.

Τα ευρήματα της έρευνας των Becker & Rivera (2006a) δείχνουν πως ενώ οι περισσότεροι μαθητές είναι σε θέση να χειριστούν επιτυχώς συγκεκριμένες περιπτώσεις οπτικών γραμμικών προτύπων, λίγοι μόνο από αυτούς μπορούν να χρησιμοποιήσουν αλγεβρικά σημεία για να εκφράσουν σωστές σχέσεις ή να γενικεύσουν τον κανόνα. Αντιστοίχως, οι Cooper and Warren (2008) σε έρευνά τους διαπίστωσαν πως οι μαθητές δυσκολεύονται να εκφράσουν όσα παρατηρούν. Ταυτόχρονα, δυσκολεύονται περισσότερο στο

να εκφραστούν γραπτά, από το να εκφραστούν προφορικά. Αντίστοιχο εύρημα προέκυψε κι από έρευνα του Radford (2010), ο οποίος κατέληξε στο συμπέρασμα πως οι μαθητές εκφράζονται ευκολότερα με λέξεις παρά με τυπικό αλγεβρικό συμβολισμό. Οι Cooper and Warren (2008) παρατήρησαν, επίσης, πως οι μαθητές μπορούν να εκφραστούν με μεγαλύτερη ευκολία σε ορισμένα συμβολικά συστήματα. Συγκεκριμένα, πολλοί μαθητές ήταν ικανοί να εκφράσουν προφορικά μια γενίκευση, όμως η περιγραφή τους αυτή παρατηρήθηκε πως στερούνταν ακριβών στοιχείων. Έτσι, ενώ η περιγραφή τους ήταν φαινομενικά σωστή, πολλά από τα στοιχεία υπονοήθηκαν ή εκφράστηκαν με χειρονομίες, κάτι που δεν δύναται να συμβαίνει κατά την γραπτή τους περιγραφή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διαφέρουν οι προφορικές από τις γραπτές περιγραφές, οι οποίες εμφανίζονται ως περισσότερο ελλιπείς, διότι λείπουν στοιχεία όπως η γλώσσα του σώματος, οι χειρονομίες κ.ά. Αντίστοιχα, στην έρευνα του ο Radford (2010) διαπιστώνει πως οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν συγκεκριμένα παραδείγματα για να μεταδώσουν μια γενική ιδέα. Μάλιστα, υπάρχουν φορές που οι μαθητές δεν ολοκληρώνουν το γραπτό μήνυμα (π.χ. «Προσθέτετε 1 [κύκλο] στην κορυφή και 1 στο κάτω μέρος.»)

Η μελέτη του Radford (2000) σχετικά με τη χρήση των σημείων και την παραγωγή νοήματος από μαθητές δευτέρας γυμνασίου (8th Grade) προσφέρει μερικά ενδιαφέροντα ευρήματα. Η έρευνά του δίνει στοιχεία αναφορικά με τη σημειωτική αντικειμενικοποίηση των μαθητών, καθώς καταγράφεται ο τρόπος με τον οποίο σκέφτηκαν και σημείωσαν τη σχέση μεταξύ του συγκεκριμένου και του γενικού. Συγκεκριμένα, οι μαθητές έκαναν χρήση δύο βασικών γλωσσικών στοιχείων: των δεικτικών όρων και των εκφράσεων που δηλώνουν έναν επαναλαμβανόμενο χαρακτήρα (π.χ. πάντα, κάθε φορά).

Σε επόμενη δημοσίευση του ίδιου (Radford, 2006) σημειώνεται πως η εξέλιξη των αλγεβρικών σημειώσεων των μαθητών βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο λόγο και συγκεκριμένα στη γλώσσα των προηγούμενων αλφαριθμητικών αλγεβρικών σημειώσεων.

Σε έρευνα του ο Radford (2010) υπογράμμισε πως κατά την γραπτή περιγραφή ενός μηνύματος, οι μαθητές υπεισέρχονται σε ένα βαθύτερο επίπεδο αντικειμενικότητας σε σχέση με την αντίστοιχη προφορική τους περιγραφή, καθώς με τη γραφή τα πράγματα γίνονται πιο ρητά και συγκεκριμένα και απομακρύνονται από το στάδιο της πρωτο-προσοχής, όπως το αποκαλούν οι νευροψυχολόγοι. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τον ίδιο, οι μαθητές συχνά είναι σε θέση να σημειώσουν έναν φαινομενικό αλγεβρικό τύπο (π.χ. $2x-1$), οποίος όμως προκύπτει με άλλες μεθόδους, π.χ. με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους. Τέτοιοι τύποι δεν μπορούν να

χαρακτηριστούν ως αλγεβρικοί καθώς δεν βασίζονται στον αναλυτικό τρόπο σκέψης που διέπει την άλγεβρα.

Στην έρευνα του ο Radford (2010) διαπίστωσε πως στον προφορικό λόγο οι μαθητές προσδιορίζουν με διαφορετικά σημειωτικά μέσα τα αντικείμενα π.χ. με χειρονομίες, δεικτικούς όρους, δείχνουν κλπ., τα οποία δεν έχουν καμία θέση στον γραπτό λόγο και τους αλφαριθμητικούς αλγεβρικούς τύπους. Ο ίδιος Radford (2012) σε μεταγενέστερη μελέτη του σημειώνει την ύπαρξη μαθητών που γενικεύουν κι εκφράζουν έναν κανόνα αποτελούμενο από λέξεις, χειρονομίες και άλλους αισθητήριους τρόπους, χωρίς να αλληλεπιδρούν με άλλα άτομα. Οι διαφορετικές αυτές μορφές δράσης πρόκειται, λοιπόν, για ένα μέρος της γνωστικής λειτουργίας των μαθητών και της διαδικασίας της σημειωτικής τους δραστηριότητας.

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 4: Μεθοδολογία της έρευνας

4.1 Στόχος κι ερευνητικά ερωτήματα

Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση παρατηρείται πως η ενασχόληση των μαθητών με πρότυπα και μάλιστα η γενίκευση αυτών αποτελεί μια κεντρική δραστηριότητα της Άλγεβρας (Lee, 1996). Επιπλέον, η γενίκευση αυτή διευκολύνεται από τη χρήση της συμβολικής γλώσσας και ταυτόχρονα μας προσφέρει πληροφορίες σχετικά με τον αλγεβρικό συμβολισμό που χρησιμοποιούν οι μαθητές και το νόημα αυτού (Radford, Bardini & Sabena, 2005).

Σκοπός, λοιπόν, της παρούσας ερευνητικής εργασίας είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά προσεγγίζουν και αναπαριστούν τόσο προφορικά όσο και γραπτά δραστηριότητες με πρότυπα κατά τη διαδικασία γενίκευσης των κανόνων.

Έχοντας αναλύσει στο θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας τον όρο «γενίκευση προτύπων», καθώς και το θεωρητικό πλαίσιο που διέπει την πρώιμη αλγεβρική σκέψη, τις αναπαραστάσεις και τη σημειωτική δραστηριότητα, τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας παρουσιάζονται ως εξής:

- Πώς προσεγγίζουν και αναπαριστούν προφορικά και γραπτά τα παιδιά, που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, δράσεις, όπως η επέκταση και η γενίκευση, σε δραστηριότητες προτύπων;
- Πώς εκφράζουν τα παιδιά, που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, μια γενίκευση;
- Είναι τα παιδιά στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης σε θέση να προβούν σε σημειωτική δραστηριότητα, τυπικής αλγεβρικής ή μη μορφής;

4.2 Είδος έρευνας/Μέθοδος

Προκειμένου να μελετηθούν τα παραπάνω ερωτήματα ακολουθήθηκε μεθοδολογία ποιοτικής προσέγγισης και συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε η διερευνητική μελέτη περίπτωσης με τη χρήση ατομικών συνεντεύξεων και τη μέθοδο της παρατήρησης. Η μελέτη περίπτωσης δίνει τη δυνατότητα στον ερευνητή να επικεντρωθεί στη μελέτη εις βάθος ατομικών δρώντων υποκειμένων και στη συνέχεια να κάνει γενικεύσεις στον ευρύτερο πληθυσμό. Επιπλέον, συνδυάζει πραγματικά πρόσωπα σε πραγματικές καταστάσεις, παρέχοντας ταυτόχρονα τη δυνατότητα στον ερευνητή να οριοθετήσει χρονικά και

οργανωσιακά το περιβάλλον διεξαγωγής της έρευνας. (Cohen, Manion & Morrison, 2008, σελ. 310-315)

4.3 Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας συνίσταται από 13 μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου με εύρος ηλικιών από 8 ετών έως 13 ετών. (ΜΟ ηλικιών $\approx 10,7$) Πιο συγκεκριμένα, συμμετείχαν δύο μαθητές που είχαν τελειώσει την Γ' Δημοτικού (1 αγόρι, 1 κορίτσι), δύο μαθητές που είχαν τελειώσει την Δ' Δημοτικού (2 αγόρια), τρεις μαθητές που είχαν τελειώσει την Ε' Δημοτικού (2 κορίτσια, 1 αγόρι), τέσσερις μαθητές που είχαν τελειώσει την Στ' Δημοτικού (3 αγόρια, 1 κορίτσι) και δύο μαθητές που είχαν τελειώσει την Α' Γυμνασίου (1 αγόρι, 1 κορίτσι). Οι μαθητές προέρχονται από τέσσερις διαφορετικές πόλεις της Ηπείρου και της Κεντρικής Μακεδονίας (Θεσσαλονίκη, Πρέβεζα, Ηγουμενίτσα, Φιλιάτες). Σχετικά με τις σχολικές επιδόσεις των παιδιών σημειώνεται πως όλοι παρουσιάζουν μέσες έως υψηλές επιδόσεις, ενώ δύο από αυτά συμμετείχαν την προηγούμενη χρονιά σε μαθητικούς διαγωνισμούς Μαθηματικών το ένα και Μαθηματικών και Ρομποτικής το άλλο. Τέλος, τηρήθηκε η ανωνυμία των παιδιών και από το σημείο αυτό κι εξής θα αναφέρονται ως Π1, Π2, Π3 κλπ., ενώ, ταυτόχρονα, η αναφορά σε αυτά θα γίνεται μόνο στο ουδέτερο γένος.

4.4 Διαδικασία συλλογής Δεδομένων και Τεχνικές

Η διαδικασία έλαβε χώρα από τον Ιούνιο του 2018 έως και τον Σεπτέμβριο του 2018, σε περίοδο που τα σχολεία ήταν κλειστά και είχε ολοκληρωθεί η σχολική χρονιά, ενώ τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω ατομικών συνεντεύξεων, κατά τη διάρκεια των οποίων δόθηκαν στα παιδιά ειδικά κατασκευασμένα φύλλα εργασίας.

Τα φύλλα εργασίας περιλάμβαναν δραστηριότητες και χορηγήθηκαν στα παιδιά ανά μία, δύο ή τρία κάθε φορά.

Ως εργαλεία συλλογής δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα προαναφερθέντα φύλλα εργασίας, η παρατήρηση, οι σημειώσεις πεδίου, ενώ χρησιμοποιήθηκε και η μαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων.

Στη σημείο αυτό θεωρείται σκόπιμο να αναφερθεί πως οι συνεντεύξεις ήταν ημι-δομημένου τύπου και πως η ερευνήτρια δεν ενεπλάκη, παρά μόνο για να εξηγήσει τις δραστηριότητες και να ενθαρρύνει τα παιδιά.

4.5 Έργα

Τα φύλλα εργασίας που δόθηκαν στα υποκείμενα της έρευνας περιλάμβαναν πέντε δραστηριότητες εξελισσόμενων προτύπων που αφορούν α) στην επέκταση συγκεκριμένων όρων του προτύπου μέσω της γενίκευσης κι εύρεσης «κοντινών» και «μακρινών» όρων, β) στην έκφραση αυτής της γενίκευσης με τη μορφή μηνύματος και γ) τέλος, στη χρήση τυπικού ή μη αλγεβρικού συμβολισμού για την έκφραση αυτής της γενίκευσης. Οι λόγοι για τους οποίους έγινε αυτή η εκτενής χρήση εξελισσόμενων προτύπων περιλαμβάνουν τη μη διαδεδομένη εμφάνιση τους στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, τον περιορισμένο αριθμό ερευνών που εξετάζουν τέτοιου είδους πρότυπα, ιδίως από μαθητές νεαρότερης ηλικίας και , τέλος, τα γεγονόσ ότι, όπως αναφέρθηκε και στη βιβλιογραφική ανασκόπηση, τα εξελισσόμενα πρότυπα αποτελούν σημαντικό βήμα για την εισαγωγή της διδασκαλίας της Άλγεβρας.

Τα πρότυπα που περιλήφθηκαν στις δραστηριότητες περιλάμβαναν τόσο στοιχεία αριθμών, όσο και εικόνων, ενώ πρόκειται για προσθετικά και πολλαπλασιαστικά πρότυπα, μίας ή δύο διαστάσεων. Κάθε δραστηριότητα δομείται σε πέντε στάδια-δράσεις:

- i. Επέκταση του προτύπου
- ii. Εύρεση κοντινού όρου (στην προκειμένη περίπτωση του 10^{00} όρου)
- iii. Εύρεση μακρινού όρου (στην προκειμένη περίπτωση του 100^{00} όρου)
- iv. Λεκτική καταγραφή του γενικού κανόνα του προτύπου
- v. Συμβολική αποτύπωση του γενικού κανόνα του προτύπου

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο πως οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν δεν εντάχθηκαν σε κάποιο πλαίσιο. Αυτό έγινε σκόπιμα προκειμένου να περιοριστούν οι πιθανότητες να εμποδίσει το πλαίσιο τη διαπραγμάτευση των ορίων μεταξύ των μαθηματικών και των πραγματικών στοιχείων και κατ' επέκταση την επίλυση των δραστηριοτήτων (Warren, 2006; Cooper & Warren, 2011). Έτσι, παρουσιάστηκαν στα παιδιά δραστηριότητες αποπλαισιωμένες, όπου έμφαση δίνεται στην επίλυση τους και όχι στην προβληματική κατάσταση, η οποία δύναται να τα αποπροσανατολίσει.

Τέλος, τα φύλλα εργασίας που δόθηκαν και τα ερωτήματα που τέθηκαν σε όλα τα υποκείμενα της έρευνας ήταν ίδια, ανεξάρτητα από την ηλικία τους, και παρατίθενται στο παράρτημα της εργασίας (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι). Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο πως η σειρά των δραστηριοτήτων που συμπεριλήφθηκαν στα φύλλα εργασίας έγινε με βάση τον βαθμό δυσκολίας.

Έργο 1: προσθετικό αριθμητικό πρότυπο

Η πρώτη δραστηριότητα περιελάμβανε ένα γραμμικό εξελισσόμενο πρότυπο, με αριθμητικά, στοιχεία προσθετικού τύπου.

1 3 5 7 9

Εικόνα 3 Πρότυπο 1ης Δραστηριότητας

Έργο 2: πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο

Η δεύτερη δραστηριότητα περιελάμβανε ένα γραμμικό εξελισσόμενο πρότυπο, με αριθμητικά στοιχεία, πολλαπλασιαστικού τύπου.

2 4 8 16 32

Εικόνα 4 Πρότυπο 2ης Δραστηριότητας

Έργο 3: μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο

Η τρίτη δραστηριότητα περιελάμβανε ένα μονοδιάστατο εξελισσόμενο πρότυπο, με στοιχεία εικόνων, προσθετικού τύπου.



Εικόνα 5 Πρότυπο 3ης Δραστηριότητας

Έργο 4: δισδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο

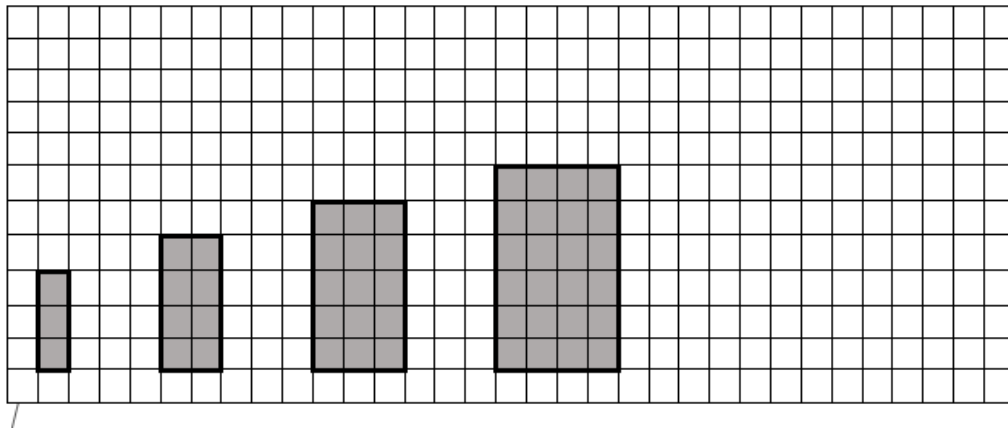
Η τέταρτη δραστηριότητα περιελάμβανε ένα δισδιάστατο εξελισσόμενο πρότυπο, με στοιχεία εικόνων, προσθετικού τύπου.



Εικόνα 6 Πρότυπο 4ης Δραστηριότητας

Έργο 5: χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό πρότυπο

Η πέμπτη δραστηριότητα (Radford, 2000) περιελάμβανε ένα χωρικό δισδιάστατο εξελισσόμενο πρότυπο, με στοιχεία εικόνων, πολλαπλασιαστικού τύπου.



Εικόνα 7 Πρότυπο 5ης Δραστηριότητας

Κεφάλαιο 5: Αποτελέσματα

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της μελέτης, τα οποία προκύπτουν από την ανάλυση των απαντήσεων. Με βάση τα δεδομένα που συλλέχθηκαν τόσο από τα φύλλα εργασίας, όσο και από τις μαγνητοφωνήσεις και τις σημειώσεις πεδίου, εξετάστηκαν οι προφορικές και οι γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων. Συγκεκριμένα, οι απαντήσεις των παιδιών σε κάθε είδος δράσης στις δραστηριότητες που κλήθηκαν να επιλύσουν, μελετήθηκαν ως προς πέντε άξονες που αφορούν:

1. στα χαρακτηριστικά της δομής των προτύπων (κανόνας, σχέσεις μεταξύ όρων κ.λπ.) στα οποία εστιάζουν τα παιδιά προκειμένου να περιγράψουν το πρότυπο.
2. στο είδος της μαθηματικής σχέσης (προσθετική, πολλαπλασιαστική κ.λπ.) που εντοπίζουν και περιγράφουν τα παιδιά στο πρότυπο της δραστηριότητας.
3. στο είδος του γενικευμένου μηνύματος (αναδρομικό, τοπικό κ.λπ.) που σημειώνουν τα παιδιά κατά τη γενίκευση του κανόνα ενός προτύπου.
4. στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά μπορούν να συνοψίσουν σε μια γραπτή συμβολική καταγραφή τον κανόνα ενός προτύπου, κάνοντας χρήση χαρακτηριστικών στοιχείων των δραστηριοτήτων ή συνοπτικών σημειώσεων.
5. στα στοιχεία εκείνα των προτύπων που εντοπίζουν και σημειώνουν στις γραπτές τους απαντήσεις τα παιδιά. Αφορά στο σύνολο των δράσεων των δισδιάστατων οπτικών προτύπων.

Σε κάθε δραστηριότητα, σε κάθε μέρος της δραστηριότητας και για κάθε έναν από τους τρεις πρώτους άξονες, εξετάστηκαν τόσο οι προφορικές όσο και οι γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων, ενώ έγινε και προσπάθεια σύγκρισης αυτών.

5.1 Χαρακτηριστικά δομής για την περιγραφή προτύπου

Ο πρώτος άξονας ως προς τον οποίο εξετάστηκαν τα δεδομένα της έρευνας αφορά στα χαρακτηριστικά εκείνα της δομής στα οποία εστιάζουν τα υποκείμενα για να περιγράψουν το πρότυπο της δραστηριότητας. Οι κατηγοριοποιήσεις που προέκυψαν και αναφέρονται παρακάτω βασίστηκαν στις προφορικές και γραπτές απαντήσεις των παιδιών.

Κατηγορίες χαρακτηριστικών για την περιγραφή προτύπου:

- α). Μορφολογική σχέση: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των υποκειμένων που δίνουν έμφαση στη δομή και τα χαρακτηριστικά των όρων του προτύπου και χρησιμοποιούν αυτές τις πληροφορίες προκειμένου να το

περιγράφουν. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την προφορική απάντηση του Παιδιού 2 κατά την εύρεση του μακρινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.

Π2: Το εκατόν ενενήντα εννιά.

E: Πώς το σκέφτηκες;

Π2: Αφού πάει... αφού εδώ πέρα πήγε πάλι ένα τρία πέντε εφτά. Κι εδώ πέρα ένα τρία πέντε εφτά... κι εννιά.

- β). Μεταφορά κατ' αναλογία με άλλον όρο: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των υποκειμένων που δίνουν έμφαση στις σχέσεις μεταξύ των όρων ενός προτύπου και περιγράφουν ένα στοιχείο κατ' αναλογία με ένα άλλο. Στη συγκεκριμένη κατηγορία εντάσσονται απαντήσεις όπως η παρακάτω. Πρόκειται για την προφορική απάντηση του Παιδιού 4 κατά την εύρεση του μακρινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα μονοδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.

E: Το δέκατο σχήμα πόσα τριγωνάκια θα έχει;

Π4: Το δέκατο... μμμ...δεκαοκτώ.

E: Και πώς το βρήκες;

Π4: Επειδή το πέντε είναι το μισό του δέκα και άρα πρέπει να διπλασιάσω τον αριθμό.

- γ). Απλή δήλωση του κανόνα του προτύπου: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες που απλά περιγράφουν τον κανόνα του προτύπου είτε αναδρομικά είτε γενικά. Παράδειγμα της συγκεκριμένης κατηγορίας είναι το παρακάτω. Πρόκειται για τη γραπτή απάντηση του Παιδιού 13 κατά την καταγραφή του μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.

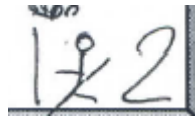
«Για να βρεις οποιονδήποτε αριθμό στο συγκεκριμένο μοτίβο θα πρέπει να πολλαπλασιάσεις τον αριθμό που θα σου δοθεί, με τον αριθμό 2. Και έτσι θα προκύψει ο επόμενος αριθμός.»

- δ). Δήλωση του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση των όρων του: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες που περιγράφουν τον κανόνα του προτύπου, όχι όμως απλά, αλλά σε σχέση με τη θέση των όρων του. Παρακάτω αναφέρεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας που πρόκειται για τη γραπτή απάντηση του Παιδιού 10 κατά την καταγραφή του μηνύματος στη δραστηριότητα

που περιλαμβάνει ένα χωρικό δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.

«Ανάλογα με τον αριθμό της σειράς, για να βρούμε πόσα κουτάκια θα έχουμε κάθετα, θα τον προσθέσουμε με 2 ακόμα. Για οριζόντια θα μείνει ίδιος (με τον αριθμό της σειράς). Το αποτέλεσμα θα βρεθεί πολλαπλασιάζοντας τα δύο αυτά αποτελέσματα.»

- ε). Απλή καταγραφή της τιμής του όρου του προτύπου: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται απαντήσεις που δεν προσφέρουν τίποτα περισσότερο από την τιμή του όρου. Τα υποκείμενα εκφράζουν είτε με λεκτικό τρόπο είτε γραπτά την τιμή του όρου που αναζητούν, χωρίς να εξηγούν ή να περιγράφουν αλλιώς το πρότυπο.
- στ). Καμία ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση. Ως ιδιοσυγκρασιακές χαρακτηρίστηκαν οι προφορικές ή γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων που στηρίζονται σε έναν ιδιαίτερο και προσωπικό τρόπο περιγραφής του προτύπου. Για παράδειγμα, παρακάτω παρατίθεται η γραπτή απάντηση του Παιδιού 3 κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.



5.1.1 Εύρεση επόμενου όρου

Όσον αφορά την εύρεση του επόμενου όρου (προφορικές απαντήσεις), η πλειονότητα των υποκειμένων απαντά δίνοντας περιγραφή του κανόνα του προτύπου. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν την περιγραφή του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση του όρου που αναζητούν και την εύρεση του όρου κατ' αναλογία με έναν άλλο. Τέλος, ορισμένα υποκείμενα δεν έδωσαν καμία απάντηση ή απάντησαν ιδιοσυγκρασιακά. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα.

ΤΡΟΠΟΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ				
	προσθετικό αριθμητικό	πολλαπλασιαστικό αριθμητικό	μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό	δισδιάστατο προσθετικό οπτικό	χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό
<i>Μεταφορά κατ' αναλογία με άλλον όρο</i>	0	3	0	0	1
<i>Απλός κανόνας</i>	12	10	10	11	9
<i>Κανόνας σε σχέση με τη θέση των όρων</i>	0	0	0	1	1
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	1	0	3	1	2

Πίνακας 1 Τρόπος περιγραφής προτύπου_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην εύρεση επόμενου όρου (προφορικές απαντήσεις)

Ως προς την γραφτή καταγραφή του επόμενου όρου, όσα παιδιά κατέγραψαν μια απάντηση, σημείωσαν απλά την τιμή του όρου (13 στα αριθμητικά πρότυπα, 12 ή 11 στα οπτικά πρότυπα), ενώ τα υπόλοιπα απαντούν ιδιοσυγκρασιακά ή δεν απαντούν καθόλου(1 ή 2 στα οπτικά πρότυπα).

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων κατά την επέκταση των προτύπων παρατηρεί κανείς, λοιπόν, πως ενώ τα υποκείμενα τείνουν προφορικά να δίνουν μια περιγραφή του κανόνα του προτύπου (9, 10, 11 ή 12 παιδιά ανάλογα το πρότυπο), κατά τη γραπτή αποτύπωση σχεδόν όλοι σημειώνουν απλώς την τιμή του όρου (11, 12 ή 13 ανάλογα το πρότυπο).

5.1.2 Εύρεση κοντινού όρου

Όσον αφορά στην εύρεση του κοντινού όρου (προφορικές απαντήσεις) και στην προκειμένη περίπτωση του δέκατου όρου, οι απαντήσεις που καταγράφονται παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία. Έτσι, υφίστανται απαντήσεις που περιλαμβάνουν την περιγραφή μιας μορφολογικής σχέσης εντός του προτύπου, την εύρεση του όρου κατ' αναλογία με έναν άλλο, την περιγραφή απλώς του κανόνα του προτύπου και την περιγραφή του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση του όρου που αναζητούν. Υπάρχουν δε κι ελάχιστες περιπτώσεις όπου κάποιο παιδί είτε δεν δίνει καμία απάντηση είτε η απάντησή του είναι ιδιοσυγκρασιακή. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2) παρουσιάζονται αναλυτικά τα δεδομένα ανά δραστηριότητα.

ΤΡΟΠΟΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ			
	προσθετικό αριθμητικό	μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό	δισδιάστατο προσθετικό οπτικό	χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό
<i>Μορφολογική σχέση</i>	2	1	0	0
<i>Μεταφορά κατ' αναλογία με άλλον όρο</i>	1	5	6	6
<i>Απλός κανόνας</i>	7	6	2	2
<i>Κανόνας σε σχέση με τη θέση των όρων</i>	3	0	3	3
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	0	1	2	2

Σημείωση: Δεν ζητήθηκε από τα υποκείμενα η εύρεση κοντινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει το πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο

Πίνακας 2 Τρόπος περιγραφής προτύπου_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην εύρεση κοντινού όρου (προφορικές απαντήσεις)

Ως προς τη γραπτή καταγραφή του κοντινού όρου, τα περισσότερα υποκείμενα (10 στο αριθμητικό πρότυπο, 12 ή 11 στα οπτικά πρότυπα) σημειώνουν απλά την τιμή του όρου. Εξάιρεση αποτελεί η δραστηριότητα, που περιλαμβάνει το χωρικό δισδιάστατο οπτικό πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου, κατά την οποία οι περισσότεροι (6 παιδιά) σημειώνουν τον κοντινό όρο κατ' αναλογία με έναν άλλο. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν την απλή περιγραφή του κανόνα του προτύπου (3 στο προσθετικό αριθμητικό πρότυπο, 2 στο χωρικό δισδιάστατο οπτικό πρότυπο) και την περιγραφή του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση του όρου που αναζητούν (3 ή 1 στα οπτικά προσθετικά πρότυπα). Τέλος, ορισμένα παιδιά (1 ή 2 στα οπτικά πρότυπα) δεν δίνουν καμία απάντηση ή απαντούν ιδιοσυγκρασιακά.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων κατά την «κοντινή γενίκευση» παρατηρεί, λοιπόν, κανείς πως υπάρχει διασπορά μεταξύ των απαντήσεων όσον αφορά τις προφορικές περιγραφές των υποκειμένων. Παρόλα αυτά, οι δύο επικρατέστερες κατηγορίες προφορικών απαντήσεων περιλαμβάνουν την εύρεση του κοντινού όρου κατ' αναλογία με έναν άλλο στα οπτικά πρότυπα και την απλή περιγραφή του κανόνα του προτύπου στο αριθμητικό πρότυπο και το μονοδιάστατο οπτικό πρότυπο. Αυτό που προκαλεί εντύπωση, όμως, είναι το γεγονός πως ενώ προφορικά κανένας δεν αναφέρει απλώς την τιμή του όρου, στις γραπτές απαντήσεις είναι η επικρατέστερη κατηγορία απαντήσεων (10, 11 ή 12 ανάλογα το πρότυπο). Εξάιρεση αποτελεί μόνο η δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα χωρικό δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.

5.1.3 Εύρεση μακρινού όρου

Σχετικά με την εύρεση του μακρινού όρου (*προφορικές απαντήσεις*) και στην προκειμένη περίπτωση του εκατοστού όρου, τα περισσότερα υποκείμενα περιγράφουν τον μακρινό όρο κατ' αναλογία με έναν άλλο. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν την περιγραφή μιας μορφολογικής σχέσης εντός του προτύπου, την περιγραφή απλώς του κανόνα του προτύπου και την περιγραφή του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση του όρου που αναζητούν. Τέλος, αρκετοί δεν έδωσαν καμία απάντηση ή απάντησαν ιδιοσυγκρασιακά. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα.

ΤΡΟΠΟΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ			
	προσθετικό αριθμητικό	μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό	δισδιάστατο προσθετικό οπτικό	χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό
<i>Μορφολογική σχέση</i>	1	0	0	0
<i>Μεταφορά κατ' αναλογία με άλλον όρο</i>	6	8	6	7
<i>Απλός κανόνας</i>	0	2	0	1
<i>Κανόνας σε σχέση με τη θέση των όρων</i>	2	0	2	1
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	4	3	5	4

Σημείωση: Δεν ζητήθηκε από τα υποκείμενα η εύρεση μακρινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει το πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο

Πίνακας 3 Τρόπος περιγραφής προτύπου_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην εύρεση μακρινού όρου (*προφορικές απαντήσεις*)

Ως προς τη *γραπτή καταγραφή* του μακρινού όρου, τα αποτελέσματα είναι αντίστοιχα με εκείνα της γραπτής καταγραφής του κοντινού όρου. Η επικρατέστερη κατηγορία καταγραφής είναι η απλή σημείωση της τιμής του όρου (10 στο αριθμητικό πρότυπο, 11, 9 ή 7 στα οπτικά πρότυπα). Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν την περιγραφή του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση του όρου που αναζητούν (1 σε κάθε δισδιάστατο οπτικό πρότυπο) και την περιγραφή εύρεσης του όρου κατ' αναλογία με έναν άλλο (1 ή 3 στα δισδιάστατα οπτικά πρότυπα). Τέλος, ορισμένα υποκείμενα (3 στο αριθμητικό πρότυπο, 2 σε κάθε ένα από τα οπτικά πρότυπα) δεν έδωσαν καμία απάντηση ή απάντησαν ιδιοσυγκρασιακά.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων κατά τη «μακρινή γενίκευση» παρατηρείται πως οι επικρατέστερες κατηγορίες προφορικών απαντήσεων είναι είτε η περιγραφή εύρεσης του

όρου κατ' αναλογία με έναν άλλο (6, 7 ή 8 ανάλογα το πρότυπο), είτε η μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση (3, 4 ή 5 ανάλογα το πρότυπο). Αντιθέτως, όσον αφορά τις γραπτές απαντήσεις των παιδιών, τα περισσότερα καταγράφουν απλώς την τιμή του μακρινού όρου ενώ αρκετά είναι κι εκείνα που δεν σημειώνουν τίποτα ή σημειώνουν κάτι ιδιοσυγκρασιακό. Επιπλέον, παρατηρείται ομοιότητα μεταξύ των απαντήσεων που καταγράφηκαν με εκείνες που σημειώθηκαν κατά την «κοντινή γενίκευση».

5.1.4 Γραπτό λεκτικό και συμβολικό μήνυμα

Κατά την καταγραφή τόσο του γραπτού λεκτικού μηνύματος, όσο και του συμβολικού, τα περισσότερα υποκείμενα (6 ή 9 στα αριθμητικά πρότυπα, 9, 12 ή 11 στα οπτικά πρότυπα για το λεκτικό μήνυμα και 7 ή 10 στα αριθμητικά πρότυπα, 7 ή 9 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα) δεν δίνουν καμία προφορική περιγραφή του πώς θα υπολογίσει κανείς ένα οποιοδήποτε όρο του προτύπου ή η περιγραφή που δίνουν είναι ιδιοσυγκρασιακής φύσεως. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν κυρίως την περιγραφή απλώς του κανόνα του προτύπου (7 ή 2 στα αριθμητικά πρότυπα, 3 ή 1 στα οπτικά πρότυπα για το λεκτικό μήνυμα και 6 ή 3 στα αριθμητικά πρότυπα, 5, 4 ή 3 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα).

Στη γραπτή καταγραφή του γραπτού λεκτικού μηνύματος και του συμβολικού μηνύματος, τα περισσότεροι παιδιά σημειώνουν απλώς τον κανόνα του προτύπου. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν την περιγραφή μιας μορφολογικής σχέσης εντός του προτύπου, την περιγραφή εύρεσης ενός όρου κατ' αναλογία με έναν άλλο, την περιγραφή του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση του όρου που αναζητούν και την απλή καταγραφή του όρου του προτύπου. Υπάρχουν δε κι ορισμένες περιπτώσεις όπου κάποιο υποκείμενο είτε δεν δίνει καμία απάντηση είτε η απάντησή του είναι ιδιοσυγκρασιακή. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 4) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα και είδος μηνύματος.

ΤΡΟΠΟΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ									
	προσθετικό αριθμητικό		πολλαπλασιαστικό αριθμητικό		μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό		δισδιάστατο προσθετικό οπτικό		χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό	
	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό
<i>Μορφολογική σχέση</i>	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<i>Μεταφορά κατ' αναλογία με άλλον όρο</i>	1	1	2	1	3	1	2	0	2	1
<i>Απλός κανόνας</i>	11	10	9	11	7	10	8	9	5	6
<i>Κανόνας σε σχέση με τη θέση των όρων</i>	0	0	0	0	1	1	2	3	3	2
<i>Απλή καταγραφή τιμής όρου</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	1	2	1	1	2	1	1	1	3	2

Πίνακας 4 Τρόπος περιγραφής προτύπου_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στο γραπτό και συμβολικό μήνυμα (γραπτές απαντήσεις)

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων παρατηρεί κανείς πως κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος, η πλειονότητα των υποκειμένων δεν προσφέρει κανένα προφορικό σχόλιο ή όσα αναφέρουν είναι ιδιοσυγκρασιακά. Η δεύτερη σε συχνότητα εμφάνισης κατηγορία είναι η απλή περιγραφή του κανόνα του προτύπου. Αντιθέτως, κατά την γραπτή καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος, ελάχιστα είναι εκείνα που δεν σημειώνουν τίποτα ή σημειώνουν κάτι ιδιοσυγκρασιακό ενώ τα περισσότερα προβαίνουν στην απλή καταγραφή του κανόνα του προτύπου (9, 10 ή 11 στα αριθμητικά πρότυπα, από 5 έως 10 στα οπτικά πρότυπα). Ιδιαίτερα στο χωρικό οπτικό πρότυπο, μολονότι τα περισσότερα παιδιά προβαίνουν όντως σε περιγραφή του κανόνα, παρατηρείται μεγάλη διασπορά απαντήσεων τόσο στο γραπτό λεκτικό όσο και στο συμβολικό μήνυμα. Τέλος, παρατηρείται μια μεγαλύτερη ποικιλία στα είδη των κατηγοριών των γραπτών απαντήσεων, σε όλα τα πρότυπα, σε σχέση με εκείνα των προφορικών.

Συμπερασματικά, λοιπόν, παρατηρείται πως τα υποκείμενα κατά μήκος όλων των δραστηριοτήτων τείνουν είτε να περιγράφουν απλώς των κανόνα του κάθε προτύπου, προκειμένου να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους κατά την επέκταση, κυρίως, των προτύπων, αλλά και την εύρεση ενός κοντινού όρου, είτε βρίσκουν τους όρους αυτούς

(επόμενος, κοντινός, μακρινός) κατ' αναλογία με κάποιον άλλο όρο. Όσο, όμως, εντοπίζουν και καταγράφουν πιο μακρινούς όρους (κι εν μέρει κατά την εύρεση κοντινών) προβαίνουν σε εύρεση των όρων αυτών κατ' αναλογία με έναν άλλο, μικρότερο και ήδη γνωστό όρο. Ακόμη, κατά την εύρεση της «μακρινής γενίκευσης» σημειώνονται οι περισσότερες προφορικές ιδιοσυγκρασιακές απαντήσεις ή τα παιδιά δεν εκφράζονται καθόλου προφορικά. Παρόλα αυτά, σε όλες τις δραστηριότητες τα υποκείμενα σημειώνουν γραπτά κατά κύριο λόγο απλώς την τιμή των επόμενων, κοντινών ή μακρινών όρων. Αντιθέτως, κατά τις δράσεις της καταγραφής του λεκτικού και συμβολικού γενικευμένου μηνύματος, τείνουν να σημειώνουν απλά τον γενικό κανόνα που διέπει το εκάστοτε πρότυπο, δίχως να προσφέρουν κάποιο προφορικό σχόλιο.

Επιπλέον με τα παραπάνω, παρατηρούνται διαφορές μεταξύ των δραστηριοτήτων, που εντοπίζονται στα διαφορετικά είδη των προτύπων (αριθμητικά ή οπτικά) και στον βαθμό δυσκολίας τους. Έτσι, κατά την επέκταση των προτύπων, το πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο παρουσιάζει μεγαλύτερη συχνότητα προφορικών απαντήσεων που εντάσσονται στην κατηγορία της εύρεσης όρων κατ' αναλογία με άλλους, σε σχέση με όλες τις άλλες δραστηριότητες προτύπων. Αξίζει να σημειωθεί πως αυτός ο τρόπος εύρεσης και περιγραφής απαντήθηκε μόνο στα πολλαπλασιαστικά πρότυπα. Επιπλέον, όσον αφορά τις προφορικές απαντήσεις, το χωρικό διδιάστατο πολλαπλασιαστικό πρότυπο εμφανίζει τη μεγαλύτερη διασπορά απαντήσεων. Τέλος, στα οπτικά πρότυπα παρουσιάζεται μεγαλύτερη συχνότητα έκφρασης ιδιοσυγκρασιακών σχολίων ή έλλειψης προφορικών απαντήσεων.

Κατά την «κοντινή γενίκευση» οι προφορικές απαντήσεις των υποκειμένων παρουσιάζουν μεγαλύτερη ποικιλία σε σχέση με την επέκταση των προτύπων, κατά μήκος όλων των δραστηριοτήτων. Στα οπτικά πρότυπα φαίνεται να καταφεύγουν τα υποκείμενα πιο συχνά στην εύρεση των κοντινών όρων κατ' αναλογία με άλλους, σε σχέση με τα αριθμητικά πρότυπα. Ακόμη, παρατηρείται πως στο προσθετικό αριθμητικό πρότυπο και το μονοδιάστατο οπτικό πρότυπο τα παιδιά δεν κατέφυγαν στην περιγραφή των κοντινών όρων με βάση τα ίδια χαρακτηριστικά, παρόλο που οι δραστηριότητες είναι παρόμοιες (διαφέρουν μόνο ως προς τα στοιχεία, αριθμητικά ή εικονικά, από τα οποία αποτελούνται). Επιπλέον, στα δύο διδιάστατα οπτικά πρότυπα καταγράφεται η ίδια συχνότητα σε όλες τις απαντήσεις.

Όσον αφορά στις γραπτές καταγραφές των υποκειμένων κατά την «κοντινή γενίκευση», το χωρικό διδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό πρότυπο παρουσιάζει διαφορές σε σύγκριση με τα υπόλοιπα πρότυπα και μεγάλη διασπορά καταγεγραμμένων απαντήσεων.

Επιπλέον, μόνο σε αυτό το πρότυπο οι προφορικές και γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων συγκλίνουν, καθώς στα υπόλοιπα παρατηρείται μια διαφορά προφορικών και γραπτών απαντήσεων. Ακόμη, έλλειψη γραπτών σημειώσεων ή καταγραφή ιδιοσυγκρασιακών απαντήσεων παρατηρείται μόνο στα οπτικά πρότυπα και όχι στα αριθμητικά.

Κατά τη δράση της «μακρινής γενίκευσης» παρατηρείται μια γενικότερη ταύτιση των γραπτών απαντήσεων των παιδιών με τις γραπτές απαντήσεις που σημείωσαν κατά την «κοντινή γενίκευση». Επιπρόσθετα, οι προφορικές απαντήσεις των παιδιών σε όλο το φάσμα των δραστηριοτήτων είναι παρόμοιες. Μάλιστα, το προσθετικό αριθμητικό πρότυπο και το δισδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο εμφανίζουν παρόμοιες κατηγορίες προφορικών απαντήσεων.

Κατά την καταγραφή του γενικευμένου γραπτού λεκτικού ή συμβολικού μηνύματος, τα περισσότερα υποκείμενα έχουν την τάση να μην προσφέρουν καμία προφορική απάντηση. Κατά τη γραπτή καταγραφή τους, όμως, οι απαντήσεις τους για το λεκτικό και συμβολικό μήνυμα είναι παρόμοιες εντός της ίδιας δραστηριότητας. Επιπρόσθετα, όσο αυξάνεται η συνθετότητα των δραστηριοτήτων και των προτύπων (και περνάμε από τα αριθμητικά στα οπτικά πρότυπα), μειώνονται οι καταγραφές που περιλαμβάνουν απλώς τον κανόνα του προτύπου και αυξάνονται οι καταγραφές που περιλαμβάνουν περιγραφή του κανόνα του προτύπου σε σχέση με τη θέση του όρου (αυτό το συναντάμε μόνο στα οπτικά πρότυπα). Ακόμη, το χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό πρότυπο εμφανίζει μια ελάχιστη μεγαλύτερη διασπορά απαντήσεων σε σχέση με τα υπόλοιπα πρότυπα, ενώ είναι και το μοναδικό στο οποίο τα παιδιά είτε σημειώνουν κάτι ιδιοσυγκρασιακό είτε τίποτα απολύτως.

Τέλος, εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι στο μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο και στο προσθετικό αριθμητικό πρότυπο (παρόμοιες δραστηριότητες) σημειώνονται διαφορετικές απαντήσεις κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού μηνύματος, αλλά κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος οι απαντήσεις ταυτίζονται.

5.2 Είδος μαθηματικής σχέσης περιγραφής του προτύπου

Ο δεύτερος άξονας ως προς τον οποίο εξετάστηκαν τα δεδομένα της έρευνας αφορά στο είδος της προσέγγισης που χρησιμοποιούν τα υποκείμενα προκειμένου να απαντήσουν σε κάθε είδος δράσης κάθε δραστηριότητας και οι κατηγοριοποιήσεις που προέκυψαν, και αναφέρονται παρακάτω, βασίζονται στις προφορικές και γραπτές απαντήσεις τους.

Κατηγορίες προσέγγισης και αναπαράστασης προτύπου:

- α). Προσθετική προσέγγιση: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των παιδιών που αναφέρονται στην προσθετική σχέση μεταξύ των όρων του προτύπου. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την προφορική απάντηση του Παιδιού 9 κατά την εύρεση του κοντινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.

«έκτο είναι το έντεκα. Άρα έντεκα και δύο δεκατρία... εεε δεκαπέντε είναι το όγδοο... μετά δεκαεπτά είναι το ένατο... το δεκαεννιά.»

- β). Πολλαπλασιαστική προσέγγιση: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των παιδιών που αναφέρονται στην πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των όρων του προτύπου. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 8 κατά την καταγραφή του μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.

«Κάθε φορά ο επόμενος αριθμός είναι ο διπλάσιος άρα αφού ο τελευταίος αριθμός είναι $32=32 \times 2=64$ »

- γ). Γραμμική προσέγγιση: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των παιδιών που αναφέρονται τόσο σε προσθετικές όσο και σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των όρων του προτύπου. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 10 κατά την καταγραφή του μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.

«Ανάλογα με τη σειρά, θα την κάνεις $\times 2$ και μετά -1 και βρίσκει το αποτέλεσμα (σειρά: $33=33 \times 2=66-1=65$). Τα μισά θα πάνε οριζόντια και τα άλλα κάθετα ($33 \uparrow$ και $32 \leftarrow$) ή θα μήνει ένα στη μέση και τα άλλα θα είναι ίσα ($32+32+$ το 1 στη μέση).»

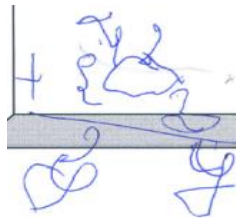
- δ). Απλή καταγραφή της τιμής του όρου του προτύπου: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται απαντήσεις που δεν προσφέρουν τίποτα περισσότερο από την τιμή του όρου. Τα υποκείμενα εκφράζουν είτε με λεκτικό τρόπο είτε γραπτά την τιμή

του όρου που αναζητούν, χωρίς να προσεγγίζουν ή να αναπαριστούν διαφορετικά το πρότυπο.

- ε). Αναφορά στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες που δίνουν έμφαση στη σειρά των όρων του προτύπου και στη φύση των όρων αυτών. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την προφορική απάντηση του Παιδιού 1 κατά την εύρεση του επόμενου όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.

«Ένα, πηδάω το ... τρία, πηδάω το τέσσερα, πέντε, πηδάω το έξι, εφτά, πηδάω το οχτώ, εννιά. Πηδάω το δέκα, έντεκα.»

- στ). Καμία ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση. Ως ιδιοσυγκρασιακές χαρακτηρίστηκαν οι προφορικές ή γραπτές απαντήσεις των παιδιών που στηρίζονται σε έναν ιδιαίτερο και προσωπικό τρόπο περιγραφής του προτύπου. Για παράδειγμα, παρακάτω παρατίθεται η γραπτή απάντηση του Παιδιού 3 κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.



5.2.1 Εύρεση επόμενου όρου

Σχετικά με το είδος της μαθηματικής σχέσης κατά την εύρεση του επόμενου όρου (προφορικές απαντήσεις), η επικρατέστερη κατηγορία απαντήσεων περιλαμβάνει τη χρήση της προσθετικής προσέγγισης. Άλλες απαντήσεις που σημειώνονται περιλαμβάνουν τη χρήση πολλαπλασιαστικής προσέγγισης και την αναφορά από τα υποκείμενα στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας. Ακόμη, κάποια παιδιά δεν δίνουν καμία απάντηση ή απαντούν ιδιοσυγκρασιακά. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 5) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα.

ΕΙΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ				
	προσθετικό αριθμητικό	πολλαπλασιαστικό αριθμητικό	μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό	δισδιάστατο προσθετικό οπτικό	χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό
<i>Προσθετική προσέγγιση</i>	5	6	6	12	11
<i>Πολλαπλασιαστική προσέγγιση</i>	3	7	2	0	0
<i>Αναφορά στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας</i>	4	0	2	0	0
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	1	0	3	1	2

Πίνακας 5 Είδος μαθηματικής σχέσης_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην εύρεση του επόμενου όρου (προφορικές απαντήσεις)

Κατά την γραπτή καταγραφή του επόμενου όρου, όσα παιδιά κατέγραψαν μια απάντηση, σημείωσαν απλά την τιμή του όρου (13 στα αριθμητικά πρότυπα, 12 ή 10 στα οπτικά πρότυπα), ενώ τα υπόλοιπα είτε απαντούν ιδιοσυγκρασιακά ή καθόλου(1 ή 2 στα οπτικά πρότυπα), είτε προβαίνουν σε περιγραφή μιας πολλαπλασιαστικής σχέσης (1 στο χωρικό οπτικό πρότυπο).

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων παρατηρείται πως κατά την επέκταση του προτύπου και την εύρεση του επόμενου όρου (προφορικές απαντήσεις), τα παιδιά προβαίνουν κυρίως σε χρήση της προσθετικής προσέγγισης (5 ή 6 στα αριθμητικά πρότυπα, 6, 11 ή 12 στα οπτικά πρότυπα). Άλλες προσεγγίσεις που υιοθετούνται, ανάλογα τη δραστηριότητα, είναι η πολλαπλασιαστική και η αναφορά στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας. Κατά τη σημείωση των γραπτών απαντήσεων, όμως, η πλειονότητα των παιδιών προβαίνει σε απλή καταγραφή της τιμής του όρου.

5.2.2 Εύρεση κοντινού όρου

Σχετικά με το είδος της μαθηματικής σχέσης κατά την εύρεση του κοντινού όρου και στη προκειμένη περίπτωση του δέκατου όρου (προφορικές απαντήσεις), τα περισσότερα υποκείμενα προβαίνουν σε χρήση της προσθετικής προσέγγισης. Άλλες απαντήσεις που σημειώνονται περιλαμβάνουν τη χρήση πολλαπλασιαστικής προσέγγισης, τη χρήση γραμμικής προσέγγισης και την αναφορά από τα υποκείμενα στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας. Ακόμη, κάποια υποκείμενα δεν δίνουν καμία απάντηση ή απαντούν ιδιοσυγκρασιακά. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 6) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα.

ΕΙΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ			
	προσθετικό αριθμητικό	μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό	δισδιάστατο προσθετικό οπτικό	χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό
<i>Προσθετική προσέγγιση</i>	6	7	6	6
<i>Πολλαπλασιαστική προσέγγιση</i>	2	3	5	4
<i>Γραμμική προσέγγιση</i>	4	1	0	1
<i>Αναφορά στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας</i>	1	1	0	0
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	0	1	2	2

Σημείωση: Δεν ζητήθηκε από τα υποκείμενα η εύρεση κοντινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει το πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο

Πίνακας 6 Είδος μαθηματικής σχέσης_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην εύρεση του κοντινού όρου (προφορικές απαντήσεις)

Κατά την γραπτή καταγραφή του κοντινού όρου, τα περισσότερα παιδιά σημειώνουν απλά την τιμή του όρου (10 στο αριθμητικό πρότυπο, 12, 13 ή 6 στα οπτικά πρότυπα). Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν τη χρήση προσθετικής προσέγγισης (3 στο αριθμητικό πρότυπο, 2 στο χωρικό οπτικό πρότυπο), τη χρήση πολλαπλασιαστικής προσέγγισης (2 στο χωρικό οπτικό πρότυπο) και τη χρήση γραμμικής προσέγγισης (1 στο χωρικό οπτικό πρότυπο). Ακόμη, κάποια παιδιά (1 ή δύο στα οπτικά πρότυπα) δεν καταγράφουν καμία απάντηση ή απαντούν ιδιοσυγκρασιακά.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων κατά την «κοντινή γενίκευση» παρατηρούμε πως οι προφορικές απαντήσεις των υποκειμένων ποικίλουν και συναντά κανείς απαντήσεις που εντάσσονται σε όλες σχεδόν τις κατηγορίες, με εξαίρεση την κατηγορία που περιλαμβάνει την απλή καταγραφή της τιμής του όρου. Αντιθέτως, κατά την γραπτή σημείωση του κοντινού όρου, η πλειονότητα των υποκειμένων σημειώνει απλώς την τιμή του όρου.

5.2.3 Εύρεση μακρινού όρου

Σχετικά με το είδος της μαθηματικής σχέσης κατά την εύρεση του μακρινού όρου και στη προκειμένη περίπτωση του εκατοστού όρου (προφορικές απαντήσεις), η επικρατέστερη κατηγορία απαντήσεων περιλαμβάνει τη χρήση της πολλαπλασιαστικής προσέγγισης. Άλλες απαντήσεις που σημειώνονται περιλαμβάνουν τη χρήση προσθετικής προσέγγισης και τη χρήση γραμμικής προσέγγισης. Ακόμη, αρκετά υποκείμενα δεν δίνουν καμία απάντηση ή απαντούν ιδιοσυγκρασιακά. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 7) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα.

ΕΙΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ			
	προσθετικό αριθμητικό	μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό	δισδιάστατο προσθετικό οπτικό	χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό
<i>Προσθετική προσέγγιση</i>	1	0	2	1
<i>Πολλαπλασιαστική προσέγγιση</i>	7	9	6	7
<i>Γραμμική προσέγγιση</i>	2	1	0	1
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	3	3	5	4

Σημείωση: Δεν ζητήθηκε από τα υποκείμενα η εύρεση μακρινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει το πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο

Πίνακας 7 Είδος μαθηματικής σχέσης_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην εύρεση του μακρινού όρου (προφορικές απαντήσεις)

Κατά την γραπτή καταγραφή του μακρινού όρου, η πλειονότητα των υποκειμένων σημειώνει απλώς την τιμή του όρου. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν τη χρήση προσθετικής προσέγγισης (2 στο χωρικό οπτικό πρότυπο), τη χρήση πολλαπλασιαστικής προσέγγισης (1 ή 2 στα δισδιάστατα οπτικά πρότυπα) και τη χρήση γραμμικής προσέγγισης (1 στο χωρικό οπτικό πρότυπο). Ακόμη, κάποια παιδιά (3 στο αριθμητικό πρότυπο, 2 στα οπτικά πρότυπα) δεν καταγράφουν καμία απάντηση ή απαντούν ιδιοσυγκρασιακά.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων παρατηρούμε πως κατά την εύρεση του μακρινού όρου, τα υποκείμενα προβαίνουν κυρίως σε μια προφορική περιγραφή μια προσθετικής σχέσης μεταξύ των όρων του προτύπου. Αντιθέτως, κατά την γραπτή σημείωση του μακρινού όρου, τα περισσότερα σημειώνουν απλώς την τιμή του όρου.

5.2.4 Γραπτό λεκτικό και συμβολικό μήνυμα

Στην καταγραφή τόσο του γραπτού λεκτικού μηνύματος, όσο και του συμβολικού, τα περισσότερα υποκείμενα (6 ή 10 στα αριθμητικά πρότυπα, 9, 12 ή 11 στα οπτικά πρότυπα για το λεκτικό μήνυμα και 7 ή 10 στα αριθμητικά πρότυπα, 7, 9 ή 8 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα) δεν δίνουν καμία προφορική περιγραφή του τρόπου προσέγγισης ή η περιγραφή που δίνουν είναι ιδιοσυγκρασιακής φύσεως. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν τη χρήση προσθετικής προσέγγισης (5 ή 1 στα αριθμητικά πρότυπα, 2 στα οπτικά πρότυπα για το λεκτικό μήνυμα και 5 ή 1 στα αριθμητικά πρότυπα, 5 ή 4 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα), τη χρήση πολλαπλασιαστικής προσέγγισης (1 ή 2 στα αριθμητικά πρότυπα, 1 στα οπτικά πρότυπα για το λεκτικό μήνυμα και 1 ή 2 στα αριθμητικά πρότυπα, 1 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα) και την αναφορά από

τα υποκείμενα στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας (1 στο αριθμητικό πρότυπο για το λεκτικό μήνυμα).

Στη γραπτή καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος οι απαντήσεις που σημειώνονται περιλαμβάνουν τη χρήση προσθετικής προσέγγισης, τη χρήση πολλαπλασιαστικής προσέγγισης, τη χρήση γραμμικής προσέγγισης, την απλή καταγραφή της τιμής του όρου και την αναφορά στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας. Υπάρχουν δε κι ορισμένες περιπτώσεις όπου κάποια υποκείμενα είτε δεν δίνουν καμία απάντηση είτε η απάντησή τους είναι ιδιοσυγκρασιακή. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 8) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα και είδος μηνύματος.

ΕΙΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΟΥ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ									
	προσθετικό αριθμητικό		πολλαπλασιαστικό αριθμητικό		μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό		δισδιάστατο προσθετικό οπτικό		χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό	
	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό
<i>Προσθετική προσέγγιση</i>	6	9	5	7	6	11	8	11	8	8
<i>Πολλαπλασιαστική προσέγγιση</i>	4	1	7	6	4	1	3	0	3	0
<i>Γραμμική προσέγγιση</i>	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
<i>Απλή καταγραφή τιμής όρου</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
<i>Αναφορά στο μοντέλο αριθμητικής ακολουθίας</i>	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	1	3	1	0	2	1	1	1	2	2

Πίνακας 8 Είδος μαθηματικής σχέσης_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος (γραπτές απαντήσεις)

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων παρατηρεί κανείς πως κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος, το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος δεν προσφέρει κανένα προφορικό σχόλιο ή όσα αναφέρει είναι ιδιοσυγκρασιακά (6 ή 10 στα αριθμητικά πρότυπα, 9, 12 ή 11 στα οπτικά πρότυπα για το λεκτικό μήνυμα και 7 ή 10 στα αριθμητικά πρότυπα, 7, 9 ή 8 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα). Ακόμη, πολλά είναι τα παιδιά που κάνουν χρήση της προσθετικής προσέγγισης. Αντιθέτως, κατά την γραπτή καταγραφή του μηνύματος, ελάχιστα είναι εκείνα που δεν σημειώνουν τίποτα ή σημειώνουν κάτι ιδιοσυγκρασιακό, ενώ τα περισσότερα παιδιά προβαίνουν σε χρήση της προσθετικής

προσέγγισης. Ακόμη, πολλά είναι εκείνα που έχουν πολλαπλασιαστική προσέγγιση, κυρίως κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού μηνύματος.

Συμπερασματικά, παρατηρείται πως τα υποκείμενα κατά μήκος όλων των δραστηριοτήτων τείνουν να εντοπίζουν και να χρησιμοποιούν κυρίως μια προσθετική ή μια πολλαπλασιαστική μαθηματική σχέση εντός του προτύπου κατά την περιγραφή του.

Συγκεκριμένα, κατά την επέκταση του προτύπου κι εύρεση του επόμενου όρου, στα δύο δισδιάστατα οπτικά πρότυπα, οι προφορικές απαντήσεις των υποκειμένων παρουσιάζουν κυρίως μια προσθετική προσέγγιση. Στο προσθετικό αριθμητικό πρότυπο και στο μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο (παρόμοιες δραστηριότητες) παρατηρείται μια διασπορά των προφορικών απαντήσεων, με επικρατέστερη εκείνη της προσθετικής προσέγγισης. Μόνο στο πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο οι προφορικές απαντήσεις των υποκειμένων μοιράζονται μεταξύ του εντοπισμού προσθετικής και πολλαπλασιαστικής μαθηματικής σχέσης (6 προσθετική προσέγγιση, 7 πολλαπλασιαστική προσέγγιση). Παρόλες τις διαφορές τους στις προφορικές απαντήσεις, τα περισσότερα υποκείμενα κατά τη γραπτή τους απάντηση σημείωσαν απλώς την τιμή του επόμενου όρου.

Στην «κοντινή γενίκευση», οι προφορικές απαντήσεις των υποκειμένων δείχνουν πως αυτοί εντοπίζουν και περιγράφουν κατά κύριο λόγο μια προσθετική μαθηματική σχέση. Εντύπωση προκαλεί, όμως, πως στο προσθετικό αριθμητικό πρότυπο το 1/3 των υποκειμένων περιγράφει μια γραμμική μαθηματική σχέση, ενώ στα δύο δισδιάστατα οπτικά πρότυπα οι προφορικές απαντήσεις των υποκειμένων μοιράζονται μεταξύ του εντοπισμού προσθετικής και πολλαπλασιαστικής μαθηματικής σχέσης, με αυτές της προσθετικής να είναι περισσότερες. Επίσης, έλλειψη απαντήσεων ή καταγραφή ιδιοσυγκρασιακών προφορικών σχολίων υφίσταται μόνο στα οπτικά πρότυπα. Τέλος, παρ' όλες τις διαφορές τους στις προφορικές απαντήσεις, τα περισσότερα παιδιά κατά τη γραπτή τους απάντηση σημείωσαν απλώς την τιμή του κοντινού όρου, ενώ μόνο το χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό πρότυπο παρουσιάζει μεγάλη διασπορά γραπτών απαντήσεων.

Κατά την «μακρινή γενίκευση», σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες δράσεις, η επικρατέστερη κατηγορία προφορικών απαντήσεων περιλαμβάνει την περιγραφή μιας πολλαπλασιαστικής μαθηματικής σχέσης, ενώ παράλληλα πολλοί είναι εκείνοι που δεν προσφέρουν κανένα προφορικό σχόλιο ή η απάντησή τους είναι ιδιοσυγκρασιακή. Επιπλέον, κι εδώ τα περισσότερα υποκείμενα κατά τη γραπτή τους απάντηση σημειώνουν απλώς την

τιμή του κοντινού όρου, ενώ διαφορετικές γραπτές καταγραφές απαντώνται μόνο στα οπτικά πρότυπα.

Κατά την καταγραφή του γενικευμένου γραπτού λεκτικού ή συμβολικού μηνύματος, τα περισσότερα παιδιά τείνουν να μην εκφέρουν κανένα προφορικό σχόλιο ή το σχόλιό τους να είναι ιδιοσυγκρασιακό. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται πιο συχνά κατά την ενασχόλησή τους με τα οπτικά πρότυπα, σε σχέση με τα αριθμητικά. Επιπρόσθετα, στο προσθετικό αριθμητικό πρότυπο είναι αρκετά τα υποκείμενα (5 παιδιά) τα οποία περιγράφουν προφορικά μια προσθετική σχέση εντός του προτύπου τόσο κατά την εύρεση του λεκτικού γενικευμένου μηνύματος, όσο και του συμβολικού. Κατά την γραπτή καταγραφή του λεκτικού και συμβολικού γενικευμένου μηνύματος, όμως, τα παιδιά αυτά ήταν περισσότερα (6 και 9 αντίστοιχα). Επιπλέον, στα οπτικά πρότυπα, εμφανίζονται περισσότερα υποκείμενα να περιγράφουν προφορικά μια προσθετική προσέγγιση στο λεκτικό μήνυμα σε σχέση με το συμβολικό. Κατά τη γραπτή καταγραφή του λεκτικού και συμβολικού μηνύματος, η μαθηματική σχέση που περιγράφεται είναι κατά κύριο λόγο προσθετική και δευτερευόντως πολλαπλασιαστική. Μόνο στο πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο καταγράφεται πιο συχνά η πολλαπλασιαστική σχέση. Επιπρόσθετα, σε όλα τα πρότυπα, τα παιδιά τείνουν να σημειώνουν διαφορετική μαθηματική σχέση εντός του ίδιου προτύπου μεταξύ λεκτικού και συμβολικού μηνύματος. Στα δύο δισδιάστατα οπτικά πρότυπα, μάλιστα, ενώ οι γραπτές καταγραφές του λεκτικού μηνύματος των παιδιών είναι οι ίδιες, οι συμβολικές καταγραφές είναι διαφορετικές. Τέλος, το προσθετικό αριθμητικό πρότυπο και το μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο παρουσιάζουν παρόμοιες γραπτές καταγραφές κατά τη σημείωση του γενικού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος, ενώ είναι τα μόνο πρότυπα κατά τα οποία τα υποκείμενα κάνουν αναφορά στο μοντέλο της αριθμητικής ακολουθίας.

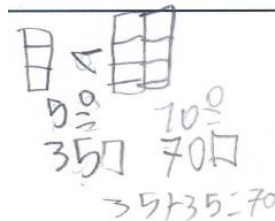
Συνοψίζοντας, παρατηρείται πως τα παιδιά εντοπίζουν και περιγράφουν προφορικά και γραπτά κατά κύριο λόγο μια προσθετική μαθηματική σχέση εντός των προτύπων, σε όλο το φάσμα των δράσεων, με εξαίρεση την «μακρινή γενίκευση» όπου περιγράφουν μια πολλαπλασιαστική σχέση. Τη διαφορά κάνει μόνο η δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο, στην οποία τα παιδιά εντοπίζουν μια προσθετική και μια πολλαπλασιαστική σχέση εξίσου συχνά.

5.3 Είδος μηνύματος

Ο τρίτος άξονας ως προς τον οποίο εξετάστηκαν τα δεδομένα της έρευνας είναι το είδος του μηνύματος που παρέχουν τα υποκείμενα, είτε σημειώνοντας γραπτά και συμβολικά, είτε περιγράφοντας και σχολιάζοντας προφορικά. Οι κατηγοριοποιήσεις που προέκυψαν, και αναφέρονται παρακάτω, βασίστηκαν τόσο στις προφορικές όσο και στις γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων.

Κατηγορίες είδους μηνύματος:

- α). Τοπικό μήνυμα: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των υποκειμένων που αναφέρονται σε μια γενίκευση του κανόνα ενός προτύπου βασισμένη σε σταθερά χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή αυτού του κανόνα και που έχουν αποσπαστεί από το αρχικό τους νόημα και πεδίο αναφοράς. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 7 κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα χωρικό δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.



- β). Αναδρομικό μήνυμα: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των υποκειμένων που χτίζουν στους προηγούμενους όρους προκειμένου να υπολογίσουν τους επόμενους. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την προφορική απάντηση του Παιδιού 11 κατά την καταγραφή του μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα γραμμικό αριθμητικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.

«Εφόσον ανεβαίνουνε ανά δύο μονάδες, κάθε φορά θα προσθέτεις δύο μονάδες και... ώσπου να φτάσεις στον αριθμό που θέλεις»

- γ). Γενικό μήνυμα: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των παιδιών που αναφέρονται σε μια αποτύπωση του κανόνα ενός προτύπου που μπορεί να γενικευτεί για όλους ανεξαιρέτως τους όρους, χωρίς περιορισμούς. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 10 κατά την καταγραφή του μηνύματος στη δραστηριότητα

που περιλαμβάνει ένα μονοδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.

«Σε κάθε σειρά, έχεις όσα τρίγωνα λέει η σειρά, σιν τα διπλά και απλά βγάζεις ένα.»

- δ). Καμία ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση. Ως ιδιοσυγκρασιακές χαρακτηρίστηκαν οι προφορικές ή γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων που στηρίζονται σε έναν ιδιαίτερο και προσωπικό τρόπο περιγραφής του προτύπου.

Στην καταγραφή τόσο του γραπτού λεκτικού μηνύματος, όσο και του συμβολικού, τα περισσότερα παιδιά (6 ή 10 στα αριθμητικά πρότυπα, 9, 12 ή 11 στα οπτικά πρότυπα για το λεκτικό μήνυμα και 7 ή 11 στα αριθμητικά πρότυπα, 7, 9 ή 8 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα) δεν δίνουν καμία προφορική απάντηση ή η απάντηση που δίνουν είναι ιδιοσυγκρασιακής φύσεως. Οι άλλες απαντήσεις που καταγράφονται περιλαμβάνουν την έκφραση τοπικού μηνύματος (1 στο χωρικό οπτικό πρότυπο για το γραπτό λεκτικό μήνυμα και 1 στο αριθμητικό πρότυπο, 3 ή 1 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα), την έκφραση αναδρομικού μηνύματος (7 ή 3 στα αριθμητικά πρότυπα, 3 ή 1 στα οπτικά πρότυπα για το γραπτό λεκτικό μήνυμα και 5 ή 2 στα αριθμητικά πρότυπα, 3 ή 4 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα) και την έκφραση γενικού μηνύματος (1 στα οπτικά πρότυπα για το γραπτό λεκτικό μήνυμα).

Στη γραπτή καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος οι απαντήσεις που σημειώνονται περιλαμβάνουν την καταγραφή τοπικού μηνύματος, την καταγραφή αναδρομικού μηνύματος και την καταγραφή γενικού μηνύματος. Υπάρχουν δε κι ορισμένες περιπτώσεις όπου κάποια παιδιά είτε δεν δίνουν καμία απάντηση είτε η απάντησή τους είναι ιδιοσυγκρασιακή. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 22) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα και είδος μηνύματος.

ΕΙΔΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ									
	προσθετικό αριθμητικό		πολλαπλασιαστικό αριθμητικό		μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό		δισδιάστατο προσθετικό οπτικό		χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό	
	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό	Γραπτό	Συμβολικό
<i>Τοπικό μήνυμα</i>	1	1	3	2	1	5	3	3	3	5
<i>Αναδρομικό μήνυμα</i>	11	9	7	10	9	7	8	8	5	6
<i>Γενικό μήνυμα</i>	0	0	0	1	1	0	1	1	2	0
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	1	3	3	0	2	1	1	1	3	2

Πίνακας 9 Είδος μηνύματος_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων όσον αφορά στην καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος (γραπτές απαντήσεις)

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων παρατηρεί κανείς πως κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού μηνύματος, τα περισσότερα υποκείμενα δεν προσφέρουν κανένα προφορικό σχόλιο ή όσα αναφέρουν είναι ιδιοσυγκρασιακά. Ακόμη, πολλά είναι τα παιδιά που περιγράφουν με αναδρομικό τρόπο το πρότυπο. Αντιθέτως, κατά την γραπτή καταγραφή τόσο του γραπτού λεκτικού όσο και του συμβολικού μηνύματος, ελάχιστα είναι εκείνα που δεν σημειώνουν τίποτα ή σημειώνουν κάτι ιδιοσυγκρασιακό, ενώ τα περισσότερα προβαίνουν στην καταγραφή ενός αναδρομικού μηνύματος τόσο στα αριθμητικά, όσο και στα οπτικά πρότυπα. Ακόμη, αρκετά είναι εκείνα που καταγράφουν μια τοπική σχέση, κυρίως στο συμβολικό μήνυμα, ενώ η σημείωση ενός γενικού μηνύματος, λεκτικού ή συμβολικού, παρατηρείται κατά κύριο λόγο στα οπτικά πρότυπα, αν και σε μικρό βαθμό συχνότητας. Επιπλέον, στο δισδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο καταγράφεται μια ταύτιση των γραπτών καταγραφών μεταξύ λεκτικού και συμβολικού μηνύματος.

5.4 Στοιχεία αναπαράστασης συμβολικού μηνύματος

Ο τέταρτος άξονας ως προς τον οποίο εξετάστηκαν τα δεδομένα της έρευνας είναι ο τρόπος με τον οποίο τα υποκείμενα συνοψίζουν σε μια γραπτή συμβολική καταγραφή και αναπαριστούν το συμβολικό μήνυμα, κάνοντας χρήση χαρακτηριστικών στοιχείων των δραστηριοτήτων ή συνοπτικών σημειώσεων. Οι κατηγοριοποιήσεις που προέκυψαν, και αναφέρονται παρακάτω, βασίστηκαν στις γραπτές απαντήσεις τους.

Κατηγορίες τρόπου αναπαράστασης συμβολικού μηνύματος:

- α). Επανάληψη της δραστηριότητας μαζί με τον κανόνα: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των υποκειμένων που κάνουν χρήση των στοιχείων της δραστηριότητας προκειμένου να αποτυπώσουν συμβολικά το μήνυμα. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 6 κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.



- β). Συνοπτική σημείωση: σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες των παιδιών που κάνουν χρήση συνοπτικών συμβολισμών και δεν χρησιμοποιούν στοιχεία της δραστηριότητας προκειμένου να αποτυπώσουν συμβολικά το μήνυμα. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 13 κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα μονοδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.



- γ). Καμία ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση. Ως ιδιοσυγκρασιακές χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις των υποκειμένων που στηρίζονται σε έναν ιδιαίτερο και προσωπικό τρόπο περιγραφής του προτύπου προκειμένου να αποτυπώσουν συμβολικά το μήνυμα.

Όσον αφορά τον τρόπο αναπαράστασης του συμβολικού μηνύματος, τα περισσότερα υποκείμενα σε όλες τις δραστηριότητες επαναλαμβάνουν τη δραστηριότητα μαζί με τον κανόνα. Οι άλλες καταγραφές που σημειώθηκαν περιλαμβάνουν τη συνοπτική σημείωση ενώ υπάρχουν και ορισμένα υποκείμενα που είτε δεν σημείωσαν τίποτα είτε η σημείωσή τους ήταν ιδιοσυγκρασιακής φύσεως. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 10) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δραστηριότητα.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ	ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ				
	προσθετικό αριθμητικό	πολλαπλασιαστικό αριθμητικό	μονοδιάστατο προσθετικό οπτικό	δισδιάστατο προσθετικό οπτικό	χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό
<i>Επανάληψη της δραστηριότητας μαζί με τον κανόνα.</i>	9	9	10	11	10
<i>Συνοπτική σημείωση</i>	2	4	2	1	1
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	2	0	1	1	2

Πίνακας 10 Στοιχεία αναπαράστασης συμβολικού μηνύματος_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων

Παρατηρείται, λοιπόν, πως τα παιδιά χρησιμοποιούν στοιχεία της δραστηριότητας προκειμένου να καταγράψουν το γενικευμένο συμβολικό μήνυμα. Ειδικά, στα οπτικά πρότυπα, συγκριτικά με τα αριθμητικά, ελάχιστα (1 ή 2) είναι εκείνα τα υποκείμενα που προβαίνουν σε συνοπτικές σημειώσεις. Επιπλέον, οι περισσότερες συνοπτικές σημειώσεις καταγράφονται στο πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο.

5.5 Τρόπος γραφής απαντήσεων

Ο πέμπτος άξονας ως προς τον οποίο εξετάστηκαν τα δεδομένα της έρευνας αφορά τα στοιχεία εκείνα των προτύπων που εντοπίζουν και σημειώνουν στις γραπτές τους απαντήσεις τα υποκείμενα, σε όλο το φάσμα των δράσεων των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν δισδιάστατα οπτικά εξελισσόμενα πρότυπα. Ο λόγος για τον οποίο έγινε αυτή η ξεχωριστή μελέτη έγκειται στο γεγονός ότι παρατηρήθηκε κατά την διεξαγωγή της έρευνας η δυσκολία μερικών υποκειμένων να αποτυπώσουν γραπτά όλα τα στοιχεία και χαρακτηριστικά του προτύπου που καλούνται να επεξεργαστούν. Οι κατηγοριοποιήσεις που προέκυψαν, και αναφέρονται παρακάτω, βασίστηκαν στις γραπτές απαντήσεις τους.

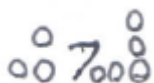
Κατηγορίες τρόπου αποτύπωσης γραπτών απαντήσεων:

- α). Αριθμοί χωρίς προσδιορισμό/τελικό αποτέλεσμα απλώς: σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες που περιλαμβάνουν είτε έναν απλό αριθμό είτε το τελικό αποτέλεσμα χωρίς κάποια επεξήγηση. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 4 κατά την καταγραφή του κοντινού και του μακρινού όρου στη

δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα χωρικό δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου.



- β). Αόριστη δήλωση μορφής/δομής του όρου: σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες που περιλαμβάνουν μια αόριστη περιγραφή όσων καλούνται τα υποκείμενα να αποτυπώσουν. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 13 κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου.



- γ). Ακριβής δήλωση του όρου: σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις εκείνες που περιλαμβάνουν μια επακριβή περιγραφή όσων καλούνται τα υποκείμενα να αποτυπώσουν. Παρακάτω αποτυπώνεται ένα παράδειγμα αυτής της κατηγορίας. Πρόκειται για την γραπτή απάντηση του Παιδιού 8 κατά την καταγραφή του κοντινού και τους μακρινού όρου στη δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου

110 οριζόντια = 219
110 κάθετα

11 οριζόντια = 21
12 κάθετα

- δ). Καμία ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση. Ως ιδιοσυγκρασιακές χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις των υποκειμένων που στηρίζονται σε έναν ιδιαίτερο και προσωπικό τρόπο περιγραφής του προτύπου προκειμένου να αποτυπώσουν τις γραπτές τους απαντήσεις.

5.5.1 Δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο προσθετικού τύπου

Κατά μήκος όλων των δράσεων τα περισσότερα υποκείμενα δηλώνουν επακριβώς τον όρο ή το μήνυμα που κλήθηκαν να καταγράψουν. Οι άλλες απαντήσεις περιλαμβάνουν την αόριστη δήλωση μορφής του όρου ή του μηνύματος και τη καταγραφή ενός απλού αριθμού χωρίς προσδιορισμό. Τέλος, υπάρχουν και ορισμένα παιδιά που είτε δεν σημείωσαν τίποτα είτε η σημείωσή τους ήταν ιδιοσυγκρασιακής φύσεως. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 11) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δράση της κάθε δραστηριότητας.

ΤΡΟΠΟΣ ΓΡΑΦΗΣ ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	Δισδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο				
	ΕΙΔΟΣ ΔΡΑΣΗΣ				
	<i>Εύρεση επόμενου όρου</i>	<i>Εύρεση κοντινού όρου</i>	<i>Εύρεση μακρινού όρου</i>	<i>Γραπτό μήνυμα</i>	<i>Συμβολικό μήνυμα</i>
<i>Αριθμοί χωρίς προσδιορισμό/τελικό αποτέλεσμα απλά</i>	0	5	4	0	2
<i>Αόριστη δήλωση μορφής/δομής του όρου</i>	0	3	3	0	2
<i>Ακριβής δήλωση του όρου</i>	12	4	4	8	8
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	1	1	2	5	1

Πίνακας 11 Τρόπος γραφής γραπτών απαντήσεων_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων ανά είδος δράσης (1)

5.5.2 Χωρικό δισδιάστατο οπτικό εξελισσόμενο πρότυπο πολλαπλασιαστικού τύπου

Κατά μήκος όλων των δράσεων τα περισσότερα παιδιά δηλώνουν επακριβώς τον όρο ή το μήνυμα που καλούνται να καταγράψουν. Οι άλλες απαντήσεις περιλαμβάνουν την αόριστη δήλωση μορφής του όρου ή του μηνύματος και τη καταγραφή ενός απλού αριθμού χωρίς προσδιορισμό. Εξαιρέση αποτελούν οι απαντήσεις στις δράσεις της «κοντινής» και «μακρινής γενίκευσης», κατά τις οποίες η επικρατέστερη κατηγορία απαντήσεων περιλαμβάνει την καταγραφή όρων χωρίς κάποιο προσδιορισμό. Ακόμη, υπάρχουν και αρκετά παιδιά που είτε δεν σημείωσαν τίποτα είτε η σημείωσή τους ήταν ιδιοσυγκρασιακής φύσεως. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 12) παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά δράση της κάθε δραστηριότητας.

ΤΡΟΠΟΣ ΓΡΑΦΗΣ ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ	Χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό πρότυπο				
	ΕΙΔΟΣ ΔΡΑΣΗΣ				
	<i>Εύρεση επόμενου όρου</i>	<i>Εύρεση κοντινού όρου</i>	<i>Εύρεση μακρινού όρου</i>	<i>Γραπτό μήνυμα</i>	<i>Συμβολικό μήνυμα</i>
<i>Αριθμοί χωρίς προσδιορισμό/τελικό αποτέλεσμα απλά</i>	0	6	6	2	3
<i>Αόριστη δήλωση μορφής/δομής του όρου</i>	0	1	1	3	3
<i>Ακριβής δήλωση του όρου</i>	11	4	4	4	5
<i>Μη απάντηση ή ιδιοσυγκρασιακή απάντηση</i>	2	2	2	4	2

Πίνακας 12 Τρόπος γραφής γραπτών απαντήσεων_ Πίνακας κατανομής συχνοτήτων ανά είδος δράσης (2)

Από τα παραπάνω μπορεί κανείς να συμπεράνει πως, και στις δύο αυτές δραστηριότητες, τα περισσότερα υποκείμενα δηλώνουν επακριβώς τον όρο ή το μήνυμα που καλούνται να σημειώσουν, ενώ αρκετά είναι κι εκείνα που καταγράφουν ένα απλό αριθμό χωρίς προσδιορισμό. Συγκεκριμένα, κατά την επέκταση του προτύπου και στα δύο πρότυπα τα παιδιά σημειώνουν κατά κύριο λόγο τον ακριβή επόμενο όρο. Κατά την «κοντινή» και «μακρινή γενίκευση», όμως, στο δισδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο παρατηρείται μια διασπορά απαντήσεων, ενώ στο χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό πρότυπο τα υποκείμενα είτε σημειώνουν τον ακριβή όρο, είτε σημειώνουν κάποιον αριθμό χωρίς προσδιορισμό. Αντίθετα, στην καταγραφή του λεκτικού και συμβολικού μηνύματος, στο δισδιάστατο προσθετικό οπτικό πρότυπο τα παιδιά σημειώνουν κυρίως με ακρίβεια το μήνυμά τους, ενώ στο χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό οπτικό πρότυπο παρατηρείται μια διασπορά απαντήσεων. Τέλος, και στους δύο τύπους προτύπων, κατά την καταγραφή του λεκτικού μηνύματος, σημειώνονται οι περισσότερες ιδιοσυγκρασιακές απαντήσεις ή η έλλειψη απαντήσεων γενικότερα (5 στο δισδιάστατο προσθετικό πρότυπο, 4 στο χωρικό δισδιάστατο πολλαπλασιαστικό πρότυπο).

Συμπεράσματα - Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια διερεύνησης του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά, που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, προσεγγίζουν και αναπαριστούν, τόσο προφορικά όσο και γραπτά, δραστηριότητες με πρότυπα κατά τη διαδικασία γενίκευσης των κανόνων. Ακόμη, ερευνήθηκε το κατά πόσο τα παιδιά αυτά βρίσκονται σε θέση να παραγάγουν αλγεβρικό συμβολισμό, τυπικής ή μη τυπικής μορφής.

Μελετώντας τις απαντήσεις των παιδιών στα διάφορα είδη δράσεων κατά μήκος όλων των δραστηριοτήτων, διαπιστώνεται πως:

✓ Σχετικά με **τα χαρακτηριστικά της δομής των προτύπων (κανόνας, σχέσεις μεταξύ όρων κ.λπ.)** στα οποία εστιάζουν τα παιδιά προκειμένου να περιγράψουν το πρότυπο προφορικά, παρατηρείται σε γενικές γραμμές πως, ως επί το πλείστον, περιγράφουν τον κανόνα του προτύπου, ενώ στις δράσεις της «κοντινής» και «μακρινής» γενίκευσης, προσφεύγουν στην κατ' αναλογία εύρεση των όρων με άλλους μικρότερους και ήδη γνωστούς (Πίνακες 2 και 3). Επίσης, στις δράσεις εκείνες όπου τα υποκείμενα καλούνται να σημειώσουν το γραπτό και το συμβολικό μήνυμα, λίγοι είναι αυτοί που προσφέρουν κάποια προφορική απάντηση.

Σχετικά με τις γραπτές απαντήσεις και σημειώσεις των παιδιών παρατηρείται πως τα περισσότερα εξ αυτών σημειώνουν μόνο την τιμή του αντίστοιχου όρου κατά τις δράσεις της επέκτασης του προτύπου (13, 12 ή 11 ανάλογα το πρότυπο), της «κοντινής» γενίκευσης (10, 12 ή 11 ανάλογα το πρότυπο) και της «μακρινής» γενίκευσης (10, 11, 9 ή 7 ανάλογα το πρότυπο). Κατά την καταγραφή του γραπτού και συμβολικού μηνύματος, όμως, περιγράφουν κυρίως τον κανόνα του προτύπου, ενώ σε δεύτερη θέση έρχεται η περιγραφή μιας αναλογικής σχέσης εντός του προτύπου. Ακόμη, κατά την ενασχόλησή τους με οπτικά πρότυπα, ορισμένα παιδιά είναι σε θέση να συσχετίσουν τον γενικό κανόνα που διέπει το πρότυπο με τη θέση του όρου που αναζητούν (1, 2 ή 3 ανάλογα το πρότυπο και το γραπτό λεκτικό ή συμβολικό μήνυμα), κάτι που δεν κάνουν καθόλου στα αριθμητικά. Πρόκειται για εύρημα που ενδεχομένως να συνδέεται με τη φύση των προτύπων, με το γεγονός, δηλαδή, πως αποτελούνται από εικόνες.

Συγκρίνοντας τις προφορικές και γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων είναι κανείς σε θέση να παρατηρήσει πως υπάρχουν διαφορές μεταξύ των όσων διατυπώνουν προφορικά και γραπτά. Οι διαφορές αυτές, όμως, φαίνεται πως οφείλονται στο γεγονός ότι κατά την επέκταση του προτύπου και την εύρεση το επόμενου όρου, καθώς επίσης και κατά την εύρεση του

«κοντινού» και «μακρινού» όρου, τα παιδιά τείνουν να εξηγούν προφορικά τον τρόπο σκέψης τους, γραπτά όμως να σημειώνουν απλώς το αποτέλεσμα. Κατά την καταγραφή του γραπτού και συμβολικού μηνύματος, αντιθέτως, τείνουν να μην εκφέρουν καμία προφορική εξήγηση και μόνο να σημειώνουν.

Σε γενικές γραμμές, λοιπόν, παρατηρείται πως τα παιδιά, κατά κύριο λόγο, είτε δηλώνουν απλώς τον κανόνα του μοτίβου, είτε περιγράφουν ένα όρο κατ' αναλογία με έναν άλλο. Ακόμη, παρατηρείται η γενικότερη τάση να αποτυπώνουν γραπτά και να προσεγγίζουν με τον ίδιο τρόπο τις δράσεις εύρεσης του επόμενου, του «κοντινού» και του «μακρινού» όρου, σε όλο το φάσμα των δραστηριοτήτων. Επιπλέον, κατά την καταγραφή του γραπτού μηνύματος, όσον αφορά στις προφορικές περιγραφές, παρατηρήθηκαν παρόμοιες απαντήσεις των παιδιών με αυτές που δόθηκαν κατά την προφορική περιγραφή του συμβολικού μηνύματος.

Τέλος, εντύπωση προκαλεί το γεγονός πως η δραστηριότητα που περιλαμβάνει ένα χωρικό διαστάτο εξελισσόμενο πολλαπλασιαστικό πρότυπο με στοιχεία εικόνων, τείνει να παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά απαντήσεων σε σχέση με τις υπόλοιπες. Η ποικιλία αυτή των απαντήσεων γίνεται αισθητή τόσο στις προφορικές όσο και στις γραπτές απαντήσεις των παιδιών.

✓ Σχετικά με το είδος της μαθηματικής σχέσης (προσθετική, πολλαπλασιαστική κ.λπ.) που εντοπίζουν και περιγράφουν τα παιδιά στο πρότυπο της δραστηριότητας κατά την προφορική τους απάντηση, παρατηρείται πως τα περισσότερα προσέγγισαν το πρότυπο με όρους πρόσθεσης, όσον αφορά στην επέκταση του προτύπου κι εύρεση του επόμενου όρου (από 5 έως 12, ανάλογα το πρότυπο), καθώς επίσης και στην «κοντινή» γενίκευση (6 ή 7). Εξάιρεση αποτελεί η επέκταση του πολλαπλασιαστικού αριθμητικού προτύπου, κατά την οποία η επικρατέστερη κατηγορία απαντήσεων περιλαμβάνει την προσέγγιση με πολλαπλασιαστικούς όρους (7 παιδιά). Κατά την εύρεση του «μακρινού» όρου, όμως, τα περισσότερα παιδιά προσέγγισαν το πρότυπο πολλαπλασιαστικά (6, 7 ή 9 παιδιά). Παρατηρείται, λοιπόν, μια διαφορά στον τρόπο προσέγγισης. Επιπρόσθετα, στα μέρη των δραστηριοτήτων όπου τα παιδιά καλούνται να σημειώσουν το γραπτό και το συμβολικό μήνυμα, λίγα είναι αυτά που προσφέρουν μια προφορική απάντηση.

Σχετικά με τις γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων παρατηρούμε πως, οι περισσότεροι σημειώνουν μόνο την τιμή του όρου κατά την εύρεση του επόμενου, του κοντινού και του μακρινού όρου. Κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού και συμβολικού

μηνύματος, όμως, τα παιδιά καταγράφουν κατά κύριο λόγο σημειώσεις που παραπέμπουν στις προσθετικές σχέσεις μεταξύ των όρων των προτύπων (5 έως 11 ανάλογα το πρότυπο) και δευτερευόντως σημειώσεις που παραπέμπουν στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις (1 έως 7 ανάλογα το πρότυπο).

Συγκρίνοντας τις προφορικές και γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων μπορεί κανείς να διαπιστώσει πως υπάρχουν διαφορές μεταξύ των όσων εκφράζουν προφορικά και σημειώνουν γραπτά. Οι διαφορές αυτές, όμως, φαίνεται να εντοπίζονται στο γεγονός ότι κατά την επέκταση του προτύπου και τις δράσεις «κοντινής» και «μακρινής» γενίκευσης, τα περισσότερα παιδιά τείνουν να εξηγούν προφορικά τον τρόπο σκέψης που ακολουθούν, γραπτά όμως να σημειώνουν απλώς το τελικό αποτέλεσμα. Τουναντίον, κατά την καταγραφή του γραπτού και συμβολικού μηνύματος τα περισσότερα τείνουν να μην εκφέρουν καμία προφορική εξήγηση και μόνο να σημειώνουν.

Σε γενικές γραμμές λοιπόν, γίνεται αντιληπτό πως τα παιδιά προσεγγίζουν κατά κύριο λόγο τα πρότυπα των δραστηριοτήτων με όρους πρόσθεσης, τόσο κατά τις προφορικές όσο και κατά τις γραπτές τους απαντήσεις. Όμως, παρατηρείται η επικράτηση της προσέγγισης με πολλαπλασιαστικούς όρους, κατά την «μακρινή» κυρίως γενίκευση, αλλά και σε λίγες περιπτώσεις κατά την γραπτή καταγραφή του γραπτού μηνύματος. Τα παραπάνω ευρήματα οδηγούν στο συμπέρασμα πως όσο ανεβαίνει ο βαθμός δυσκολίας των δράσεων που καλούνται να ολοκληρώσουν, τα παιδιά αναζητούν εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης των προτύπων που θα τους οδηγήσουν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σε παρόμοιο συμπέρασμα κατέληξαν κατόπιν έρευνάς τους και οι Becker & Rivera (2006b). Αυτό επιβεβαιώνεται κι από την έλλειψη απαντήσεων γενικότερα ή το γεγονός ότι αυξάνεται η συχνότητα εμφάνισης των ιδιοσυγκρασιακών απαντήσεων κατά τη «μακρινή γενίκευση» (3,4 ή 5 ανάλογα το πρότυπο).

✓ Σχετικά με **το είδος του γενικευμένου μηνύματος (αναδρομικό, τοπικό κλπ.)** που σημειώνουν τα υποκείμενα κατά τη γενίκευση του κανόνα ενός προτύπου, στις προφορικές τους απαντήσεις παρατηρείται πως η πλειονότητα δεν προσφέρει κάποιον προφορικό σχολιασμό, ούτε κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού ούτε του συμβολικού μηνύματος. Όσοι όμως δίνουν κάποια προφορική απάντηση, προσεγγίζουν το μοτίβο κυρίως αναδρομικά (7 ή 3 στα αριθμητικά πρότυπα, 3 ή 1 στα οπτικά πρότυπα για το γραπτό λεκτικό μήνυμα και 5 ή 2 στα αριθμητικά πρότυπα, 3 ή 4 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα).

Αναφορικά με τις γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων, αυτές διαφέρουν σε σχέση με τα όσα σχολίασαν προφορικά. Τα περισσότερα παιδιά σημειώνουν ένα αναδρομικό μήνυμα (ανάλογα το πρότυπο, 5 έως 6 στο γραπτό λεκτικό μήνυμα, 6 έως 10 στο συμβολικό μήνυμα) ενώ λιγότερα είναι εκείνα που καταγράφουν ένα τοπικό μήνυμα. Ταυτόχρονα, όμως, αρκετά είναι τα παιδιά που είτε σημειώνουν κάτι ιδιοσυγκρασιακό, είτε δεν σημειώνουν τίποτα απολύτως (ανάλογα το πρότυπο, 1, 2 ή 3 στο γραπτό λεκτικό μήνυμα, 0 έως 3 στο συμβολικό μήνυμα).

Συγκρίνοντας τις προφορικές και γραπτές απαντήσεις των υποκειμένων μπορεί κανείς να αντιληφθεί πως υπάρχουν ορισμένες διαφορές μεταξύ των όσων εκφράζουν προφορικά και σημειώνουν γραπτά. Οι διαφορές αυτές, όμως, φαίνεται να οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι τα παιδιά τείνουν να μην εκφέρουν καμία προφορική εξήγηση κατά την καταγραφή του γραπτού και συμβολικού μηνύματος και μόνο να σημειώνουν. Παρόλα αυτά, εξετάζοντας τις απαντήσεις που δόθηκαν, παρατηρεί κανείς πως σημειώνουν ως επί το πλείστον αναδρομικά λεκτικά και συμβολικά μηνύματα για να περιγράψουν τα πρότυπα. Το γεγονός αυτό συμφωνεί και με ευρήματα έρευνας των English & Warren (1998), σύμφωνα με τους οποίους όσο πιο περίπλοκα είναι τα πρότυπα, τόσο πιο συχνά καταφεύγουν οι μαθητές σε αναδρομικές προσεγγίσεις. Σε μικρότερο βαθμό σημειώνουν, στην παρούσα έρευνα, μια τοπική γενίκευση (ανάλογα το πρότυπο, 1, 2 ή 3 στο γραπτό λεκτικό μήνυμα, 1 έως 5 στο συμβολικό μήνυμα), ενώ ελάχιστες φορές έναν κανόνα που μπορεί να γενικευθεί για οποιοδήποτε όρο των προτύπων (ανάλογα το πρότυπο, 1 ή 2 στο γραπτό λεκτικό μήνυμα, 1 στο συμβολικό μήνυμα).

✓ **Σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά μπορούν να συνοψίσουν σε μια γραπτή συμβολική καταγραφή τον κανόνα ενός προτύπου**, κάνοντας χρήση χαρακτηριστικών στοιχείων των δραστηριοτήτων ή συνοπτικών σημειώσεων, παρατηρείται πως τα περισσότερα τείνουν να επαναλαμβάνουν τη δραστηριότητα μαζί με τον κανόνα του προτύπου (9 στα αριθμητικά πρότυπα, 10 ή 11 στα οπτικά πρότυπα). Επίσης, λίγα είναι τα παιδιά εκείνα που καταγράφουν ένα συνοπτικό συμβολικό μήνυμα (2 ή 4 στα αριθμητικά πρότυπα, 1 ή 2 στα οπτικά πρότυπα), και ακόμη λιγότερα εκείνα που είτε δεν σημειώνουν τίποτα είτε σημειώνουν κάτι ιδιοσυγκρασιακό (2 στα αριθμητικά πρότυπα, 1 ή 2 στα οπτικά πρότυπα).

Γίνεται αντιληπτό, λοιπόν, πως τα παιδιά δυσκολεύονται να προβούν σε συμβολική αναπαράσταση των προτύπων, παρόλο που έχουν κατανοήσει τη δομή και τον γενικό κανόνα που τα διέπει, γεγονός που συμφωνεί και με άλλες έρευνες (English & Warren, 1998). Επιπρόσθετα, κάνουν χρήση άλλων σημείων (π.χ. σχημάτων) ή ακόμη και ιδιοσυγκρασιακών σημειωτικών αναπαραστάσεων (π.χ. σχέδια) προκειμένου να εκφράσουν τη γενίκευση.

✓ Σχετικά με τα **στοιχεία εκείνα των προτύπων που εντοπίζουν και σημειώνουν** στις γραπτές τους απαντήσεις τα υποκείμενα, σε όλο το φάσμα των δράσεων των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν δισδιάστατα οπτικά εξελισσόμενα πρότυπα, διαπιστώνεται πως η πλειονότητα των παιδιών στο σύνολο δηλώνει ακριβώς τον όρο ή το μήνυμα που καλείται να σημειώσει. Παρόλα αυτά, όμως, οι απαντήσεις τους ποικίλουν ανάλογα με το είδος δράσης. Έτσι, παρατηρούμε πως κατά την επέκταση του προτύπου και καταγραφή του επόμενου όρου (12 ή 11 παιδιά), καθώς επίσης και κατά την καταγραφή του γραπτού λεκτικού μηνύματος (8 ή 4 παιδιά) και του συμβολικού μηνύματος (8 ή 5 παιδιά), τα περισσότερα παιδιά σημειώνουν ακριβώς τον όρο ή το μήνυμα. Το ίδιο, όμως, δεν συμβαίνει και για την καταγραφή της «κοντινής» και «μακρινής» γενίκευσης, καθώς σε αυτές τις δράσεις ο επικρατέστερος τρόπος γραφής των απαντήσεων είναι η σημείωση αριθμών ή σχημάτων χωρίς κάποιον προσδιορισμό ή η καταγραφή του τελικού αποτελέσματος απλά (5 ή 6 στη κοντινή γενίκευση, 4 ή 6 στη μακρινή γενίκευση). Ακόμη, αρκετοί είναι και εκείνοι που σημειώνουν αόριστα τη μορφή του όρου.

Κατά την καταγραφή του συμβολικού μηνύματος παρατηρείται μεγάλη διασπορά απαντήσεων, ειδικά στην δραστηριότητα που περιλαμβάνει το χωρικό πρότυπο. Όμως και σε αυτή τη δραστηριότητα, τα παιδιά συχνότερα δηλώνουν ακριβώς τον όρο που θέλουν να περιγράψουν και λιγότερο συχνά δηλώνουν αόριστα τη μορφή του ή σημειώνουν αριθμούς χωρίς προσδιορισμό.

Ολοκληρώνοντας, αίσθηση προκαλεί το γεγονός πως σε όλες τις δράσεις πολλά από τα παιδιά δεν προσφέρουν καμία καταγραφή ή η καταγραφή τους είναι ιδιοσυγκρασιακή.

Μετά την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών διαπιστώνεται, σε γενικές γραμμές, πως τα υποκείμενα, καλούμενα να περιγράψουν και να αναπαραστήσουν ένα πρότυπο προφορικά και γραπτά, αναφέρονται ως επί το πλείστον στον κανόνα που το διέπει και όχι στα χαρακτηριστικά και τη δομή των όρων ή τη σχέση των όρων με τη θέση στην οποία βρίσκονται (Πίνακες 1, 2 και 4). Μόνο κατά τη δράση της «μακρινής» γενίκευσης και την εύρεση ενός μεγάλου και μακρινού όρου καταφεύγουν στην περιγραφή και καταγραφή όρων κατ' αναλογία με άλλους μικρότερους (Πίνακας 3). Ακόμη, τα παιδιά παρουσιάζουν την τάση να προσεγγίζουν και να αναπαριστούν τα πρότυπα με όρους πρόσθεσης (Πίνακες 5, 6 και 8), ενώ περιγράφουν και σημειώνουν πολλαπλασιαστική μαθηματική σχέση, σε μεγάλο βαθμό, μόνο κατά τη «μακρινή» γενίκευση (Πίνακας 7). Αντίστοιχα ήταν και τα ευρήματα έρευνας των Becker & Rivera (2006a, 2006b). Εξαίρεση αποτελεί η δραστηριότητα που περιλαμβάνει το

πολλαπλασιαστικό αριθμητικό πρότυπο, σε όλες τις δράσεις της οποίας τα υποκείμενα σημείωσαν μια πολλαπλασιαστική μαθηματική σχέση εντός του προτύπου.

Παρατηρείται, λοιπόν, πως τα παιδιά κατά τη δράση της «μακρινής γενίκευσης» εγκαταλείπουν τις στρατηγικές και την προσέγγιση που ακολουθούσαν μέχρι εκείνο το σημείο, καθώς δεν τους εξυπηρετούν πια. Έτσι, ενεργοποιούν πιο σύνθετες διαδικασίες και δίνουν έμφαση στις σχέσεις μεταξύ των όρων ενός προτύπου, περιγράφοντας ένα στοιχείο κατ' αναλογία με ένα άλλο. Ταυτόχρονα, προβαίνουν στον εντοπισμό πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ των όρων και χρησιμοποιούν πολλαπλασιαστική προσέγγιση προκειμένου να απαντήσουν σε κάθε είδος δράσης κάθε δραστηριότητας.

Επιπρόσθετα, παρατηρείται πως οι λεκτικές και συμβολικές περιγραφές που καταγράφουν γραπτά τα υποκείμενα βρίσκονται σε σύμπτωση. Έτσι, η γραπτή λεκτική περιγραφή του κανόνα του προτύπου που σημειώνεται σε κάθε δραστηριότητα έχει την τάση να συμφωνεί με την αντίστοιχη συμβολική καταγραφή. Όπως φαίνεται και τον Πίνακα 9, οι απαντήσεις των παιδιών είναι παρόμοιες στο λεκτικό και συμβολικό μήνυμα, καθώς προσπαθούν να αποτυπώσουν συμβολικά όσα σημειώνουν και στο γραπτό λεκτικό μήνυμα.

Επίσης, στο ίδιο μήκος κύματος βρίσκονται και οι προφορικοί σχολιασμοί των υποκειμένων, όσοι καταγράφηκαν, με τις αντίστοιχες γραπτές τους καταγραφές κατά τη σημείωση του γραπτού και συμβολικού μηνύματος. Όσοι προσφέρουν κάποιο προφορικό σχόλιο, κάνουν αναφορά σε έναν τύπο για το πρότυπο με αναδρομικά στοιχεία (7 ή 3 στα αριθμητικά πρότυπα, 3 ή 1 στα οπτικά πρότυπα για το γραπτό λεκτικό μήνυμα και 5 ή 2 στα αριθμητικά πρότυπα, 3 ή 4 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα) ή, λιγότερο συχνά, στην έκφραση τοπικού μηνύματος (1 στο χωρικό οπτικό πρότυπο για το γραπτό λεκτικό μήνυμα και 1 στο αριθμητικό πρότυπο, 3 ή 1 στα οπτικά πρότυπα για το συμβολικό μήνυμα). Η ίδια τάση παρατηρείται και στις γραπτές απαντήσεις των παιδιών, όπως αποτυπώνονται στον Πίνακα 9. Σε αυτό το σημείο, εντύπωση προκαλεί το γεγονός πως, ιδιαίτερα κατά την καταγραφή του γραπτού και συμβολικού μηνύματος, το μεγαλύτερο μέρος των παιδιών δεν προβαίνει σε κάποια προφορική περιγραφή ή εξήγηση, παρά μόνο σημειώνει γραπτά το μήνυμα.

Ακόμη, παρατηρήθηκε από την ερευνήτρια κατά τη διεξαγωγή της έρευνας η δυσκολία κάποιων παιδιών στο να εκφράσουν συμβολικά τις γενικεύσεις τους, παρόλο που είχαν ήδη σχολιάσει προφορικά το λεκτικό γενικό μήνυμα. Μάλιστα, διαφαίνεται η δυσκολία αυτή των παιδιών και μέσα από τα στοιχεία που χρησιμοποιούν προκειμένου να εκφραστούν

(ανικανότητα συνοπτικής σημείωσης, χρήση ιδιοσυγκρασιακών σημείων κ.λπ.). Μολονότι το γεγονός αυτό συμφωνεί και με άλλες έρευνες (English & Warren, 1998), δεν αποτέλεσε εν τέλει τροχοπέδη σε γενικές γραμμές στην καταγραφή του συμβολικού μηνύματος.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων διαπιστώνει κανείς, επίσης, πως τα παιδιά που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, είναι σε θέση να παραγάγουν σημειωτικές αναπαραστάσεις, έστω και μη τυπικής αλγεβρικής μορφής. Σύμφωνα με τον Radford (Radford, 2010), μάλιστα, οι μαθητές δύναται να σκεφτούν αλγεβρικά χωρίς να είναι σε θέση ακόμη να χρησιμοποιήσουν αλφαριθμητικά σύμβολα. Οι περισσότεροι εξ αυτών, βέβαια, στην παρούσα έρευνα, προβαίνουν σε επανάληψη, κυρίως, στοιχείων του ίδιου του προτύπου προκειμένου να συμβολίσουν τη γενίκευση του κανόνα του (9 στα αριθμητικά πρότυπα, 10 ή 11 στα οπτικά).

Τέλος, δεν καταγράφονται διαφορές μεταξύ των προσεγγίσεων και αναπαραστάσεων των αριθμητικών και οπτικών προτύπων, μολονότι υπήρξε παιδί που κατά τη διάρκεια της έρευνας υποστήριξε πως «του αρέσουν περισσότερο οι δραστηριότητες με τα αριθμητικά πρότυπα διότι είναι πιο εύκολες».

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό (**πρώτο ερευνητικό ερώτημα**) πως τα παιδιά που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης φαίνεται πως είναι σε θέση να κατανοήσουν και να επεξεργαστούν ένα πρότυπο μέχρι ενός βαθμού. Το συγκεκριμένο γίνεται σαφές μέσα από τον τρόπο με τον οποίο αιτιολογούν προφορικά τις απαντήσεις τους κατά την επέκταση των προτύπων. Είναι σε θέση να εξηγήσουν προφορικά τον κανόνα που διέπει το κάθε πρότυπο, αν και στις γραπτές τους απαντήσεις σημειώνουν μόνο την τιμή του όρου που τους ζητήθηκε να υπολογίσουν. Επιπρόσθετα, οι πλειονότητα εξ αυτών διακρίνει και περιγράφει μια προσθετική μαθηματική σχέση εντός των προτύπων, ανεξάρτητα από το είδος αυτών. Κατά τη δράση της γενίκευσης όμως, κυρίως στην μακρινή, φαίνεται πως εντοπίζουν και περιγράφουν τους κοντινούς και μακρινούς όρους κατ' αναλογία με άλλους μικρότερους, που ήδη γνωρίζουν. Πέραν τούτου, διακρίνουν και περιγράφουν μια πολλαπλασιαστική μαθηματική σχέση εντός του μοτίβου, γεγονός που γίνεται εμφανές κατά την αιτιολόγηση των απαντήσεών τους.

Το παραπάνω γίνεται ακόμη πιο αισθητό στα δύο πιο σύνθετα πρότυπα, τα δύο δισδιάστατα οπτικά πρότυπα. Σε αυτά, τα υποκείμενα σημειώνουν επακριβώς όσα τους ζητούνται κατά την επέκταση των προτύπων, όμως κατά την «κοντινή» και, πολύ περισσότερο,

κατά την «μακρινή γενίκευση» σημειώνουν αριθμούς χωρίς κάποιον προσδιορισμό ή όρους με αόριστη δομή (Πίνακες 11 και 12).

Σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά, που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, εκφράζουν μια γενίκευση (**δεύτερο ερευνητικό ερώτημα**) φαίνεται πως οι περισσότεροι εξ αυτών χτίζουν σε προηγούμενους όρους του προτύπου προκειμένου να εκφραστούν, ιδιαίτερα στις πιο σύνθετες δραστηριότητες. Προβαίνουν, έτσι, κατά κύριο λόγο σε σημείωση ενός γενικού κανόνα με αναδρομικούς όρους (Πίνακας 9). Ακόμη, τα ευρήματα δείχνουν πως τα παιδιά καταφεύγουν στη χρήση στοιχείων των δραστηριοτήτων προκειμένου να εκφραστούν. Αυτό, μάλιστα, εμφανίζεται πιο συχνά κατά την ενασχόληση με τα οπτικά πρότυπα.. Έτσι, παρόλο που είναι σε θέση να κατανοήσουν τον γενικό κανόνα ενός προτύπου, δυσκολεύονται να εκφράσουν σωστές σχέσεις ή να γενικεύσουν σε ένα τύπο. Παρόμοια ευρήματα κατέδειξε κι έρευνα των Becker & Rivera (2006a, 2006b), ενώ σε έρευνα του ο Radford (2010) διαπιστώνει πως οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν συγκεκριμένα παραδείγματα και γνωστά στοιχεία για να μεταδώσουν μια γενική ιδέα.

Τέλος, παρόλο που στη βιβλιογραφία απαντάται έρευνα των English & Warren (1998) σύμφωνα με την οποία οι μαθητές είναι σε θέση να εκφράσουν λεκτικά μια γενίκευση αλλά δυσκολεύονται να την εκφράσουν συμβολικά, ευρήματα της παρούσας έρευνας δεν δείχνουν να υπάρχει κάποια διαφορά μεταξύ γραπτών λεκτικών και συμβολικών μηνυμάτων (Πίνακας 4). Διαφορές υφίστανται μόνο μεταξύ των προφορικών απαντήσεων και γραπτών λεκτικών ή συμβολικών μηνυμάτων.

Σχετικά με το **τρίτο ερευνητικό ερώτημα**, που αφορά την ικανότητα των παιδιών να προβούν σε σημειωτική δραστηριότητα, τυπικής ή μη αλγεβρικής μορφής στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, διαπιστώνεται πως οι περισσότεροι εξ αυτών είναι σε θέση να το κάνουν ως ένα σημείο. Το γεγονός, όμως, ότι ενώ βρίσκονται σε θέση να περιγράψουν με μεγαλύτερη ευκολία προφορικά τον γενικό κανόνα των προτύπων, δυσκολεύονται εντούτοις να τον αποδώσουν με έναν συνοπτικό και σημειωτικό τρόπο, οδηγεί στο συμπέρασμα πως υφίσταται έλλειψη της ικανότητας σημειωτικής δραστηριότητας. Το παραπάνω υπογραμμίζεται έντονα τόσο από τη χρήση στοιχείων των ίδιων των δραστηριοτήτων κατά τη γραπτή σημείωση του γενικού μηνύματος, όσο και από τη χρήση άλλων αυθόρμητων σημειωτικών μέσων (π.χ. σχημάτων, σχεδίων κλπ). Παράλληλα, επισημαίνεται και από την καταγραφή όρων χωρίς κάποιον προσδιορισμό ή όρων με αόριστη μορφή και δομή κατά την ενασχόληση των παιδιών με τα πιο σύνθετα πρότυπα, τα δύο δισδιάστατα οπτικά πρότυπα. Σε

αντίστοιχα αποτελέσματα έχουν καταλήξει και άλλες έρευνες (Cooper & Warren, 2008; English & Warren, 1998; Radford, 2010).

Συμπερασματικά, λοιπόν, μέσα από την παρούσα εργασία γίνεται μια πρώτη προσπάθεια προσέγγισης των αναπαραστάσεων και σημειώσεων των παιδιών που βρίσκονται στο στάδιο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης. Βεβαίως, τα ευρήματα αυτής της έρευνας δεν θα μπορούσαν σε καμία περίπτωση να γενικευτούν στον ευρύτερο πληθυσμό, διότι το δείγμα είναι μικρό και σίγουρα όχι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Παρόλα αυτά, έγινε μια όσο το δυνατόν αντικειμενική προσέγγιση του θέματος και τα αποτελέσματα, που συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως βάση για περαιτέρω έρευνες.

Κλείνοντας, έχει ήδη τονισθεί η σημασία της εισαγωγής των νέων παιδιών στην Άλγεβρα ήδη από την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Radford, 2012; Van de Walle, 2013; Βαμβακούση & Κυλάφης, 2011; Radford, 2010; Kaput, 2008; Blanton & Kaput, 2004) και οι δραστηριότητες προτύπων ενδείκνυνται για την εισαγωγή των νέων μαθητών σε αυτή (Van de Walle, 2013; Radford, 2006; Lannin, 2005). Επίσης, κάτι άλλο που έχει επισημανθεί επανειλημμένα, κι επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, είναι το γεγονός πως τα παιδιά δύναται να εμφανίσουν σημάδια αλγεβρικού συλλογισμού, ακόμη και πριν την επίσημη εισαγωγή τους στο πεδίο της Άλγεβρας και των τυπικών αλγεβρικών σημείων (Mulligan & Mitchelmore, 2013; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006).

Έτσι, τα παιδιά είναι σε θέση να προβούν σε αυθόρμητες αναπαραστάσεις και σημειωτική δραστηριότητα ήδη από νεαρή ηλικία, όπως φαίνεται μέσα από τις έρευνες, αλλά και από τη συγκεκριμένη μελέτη. Αυτό που ενδεχομένως λείπει και συνεπάγεται τη δυσκολία των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες που προβάλλουν τη σημειωτική δραστηριότητα, είναι η έλλειψη κατάλληλων εμπειριών. Επομένως, θα ήταν καίριο να παρέχονται στους μαθητές οι κατάλληλες ευκαιρίες και συνθήκες ώστε να αποκτήσουν πρώιμες εμπειρίες σε σχετικά θέματα. Εμπειρίες που μετέπειτα θα διευκολύνουν τη μετάβασή τους στην Άλγεβρα και την ανάπτυξη αλγεβρικού συλλογισμού.

Βιβλιογραφία

- Βαμβακούση, Ξ., & Κυλάφης, Π. (2011) Ο ρόλος των patterns στην ανάπτυξη του πρώιμου αλγεβρικού συλλογισμού. Ανάκτηση από <https://olympias.lib.uoi.gr/jspui/handle/123456789/26589>
- Becker, J.R. & Rivera, F. (2006a). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 465-472. Prague: PME.
- Becker, J.R. & Rivera, F. (2006b). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 135–142. Bergen, Norway: Bergen University College.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 87–115.
- Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to Geometry. In Bednarz, N., Kieran C. & Lee L. (Eds), *Approaches to Algebra*, 15-37. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. Μτφρ. Σ. Κυρανάκης, Μ. Μαυράκη, Χ. Μητσοπούλου, Π. Μπιθάρα & Μ. Φιλοπούλου. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Cooper T.J. & Warren E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. In Cai J., Knuth E. (Eds), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*. Springer, Berlin: Heidelberg.
- Duval, R. (2000), Basic issues for research in mathematics education. In Nakahara, T. and Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of PME*, 1, 55–69. Hiroshima: Nishiki Print Co. Ltd.
- English, L.D. & Warren, E.A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, 91(2), 166–170.

- Friel, S. & Markworth, K. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(1), 24–33.
- Gagatsis, A. & Elia, I. (2004). The Effects of Different Modes of Representation on Mathematical Problem Solving. *Proceedings of the 28th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, 2, 447–454. Bergen: Norway.
- Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.
- Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning*, 397.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics, 2001*, 1-23.
- Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Number Patterns, *Educational Studies*, 24(3), 315-331
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J., Carragher D. W., & Blanton M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades*. Reston, VA: NCTM.
- Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Κυλάφης, Π. (2009). *Ο ρόλος των patterns στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Η ανάπτυξη του πρώιμου αλγεβρικού συλλογισμού* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Αθηνών και Πανεπιστήμιο Κύπρου, Αθήνα
- Lannin, J. K. (2005) Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (3), 231-258.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In Bednarz, N., Kieran C. & Lee L. (Eds), *Approaches to Algebra*, 87-106. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.
- Luken, M.M. (2018, in press). Is patterning a mathematical activity? – An analysis of young children’s strategies in working with repeating. In POEM 2018, Kristiansand, Norway.
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49.
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In English, L. & Mulligan, J. (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning*, 29–46. Dordrecht: Springer Science-Business Media.

- Orton, J. (1997). Matchsticks, pattern and generalisation, *Education 3-13: International Journal of Primary, Elementary and Early Years Education*, 25 (1), 61-65
- Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 11–38.
- Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής, Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία. *Θέματα επιστημών και τεχνολογίας στην εκπαίδευση*, 2(3), 247-272.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and Meanings in School Mathematics*. London: Routledge.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237–268.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematics knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83–96.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea.
- Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2005). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. *Proceedings of the 4th congress of the European society for research in Mathematics Education*, 684-698. Barcelona: Spain
- Rico, L., Castro, E. & Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. In Puig, L. and Gutiérrez, A. (Eds), *Proceedings of the 20th*

- Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 87–102. Spain: University of Valencia.
- Rivera, F. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 81-88.
- Rivera, F. & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40(1), 65–82.
- Sáenz-Ludlow, A. (2006). Classroom interpreting games with an illustration. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 183-218.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39.
- Sfard, A. and Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign?—An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 133-162.
- Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.
- Van de Walle, J. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching and Developmentally*. Boston: Perso Education.
- Warren, E. (2005a). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In Clarkson, P., Downton, A., Gronn, D., Horne, M., McDonough, A., Pierce, R. & Roche, A. (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice (Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, MERGA-28)*, 2, 759–766. Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Warren, E. (2005b). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In Chick, H. L. & Vincent, J.L. (Eds), *Proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 305-312, Australia: University of Melbourne
- Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.),

Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5, 377-384). Prague, Czech Republic: PME.

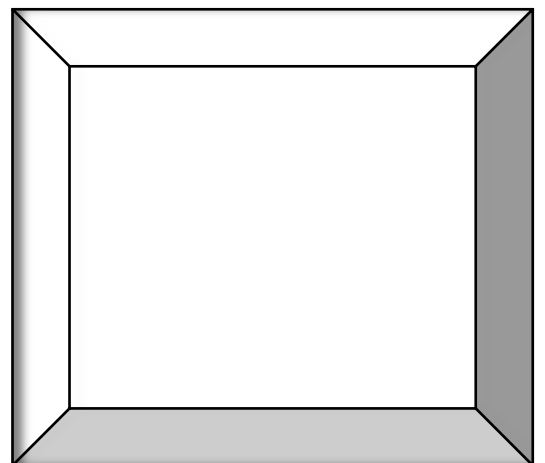
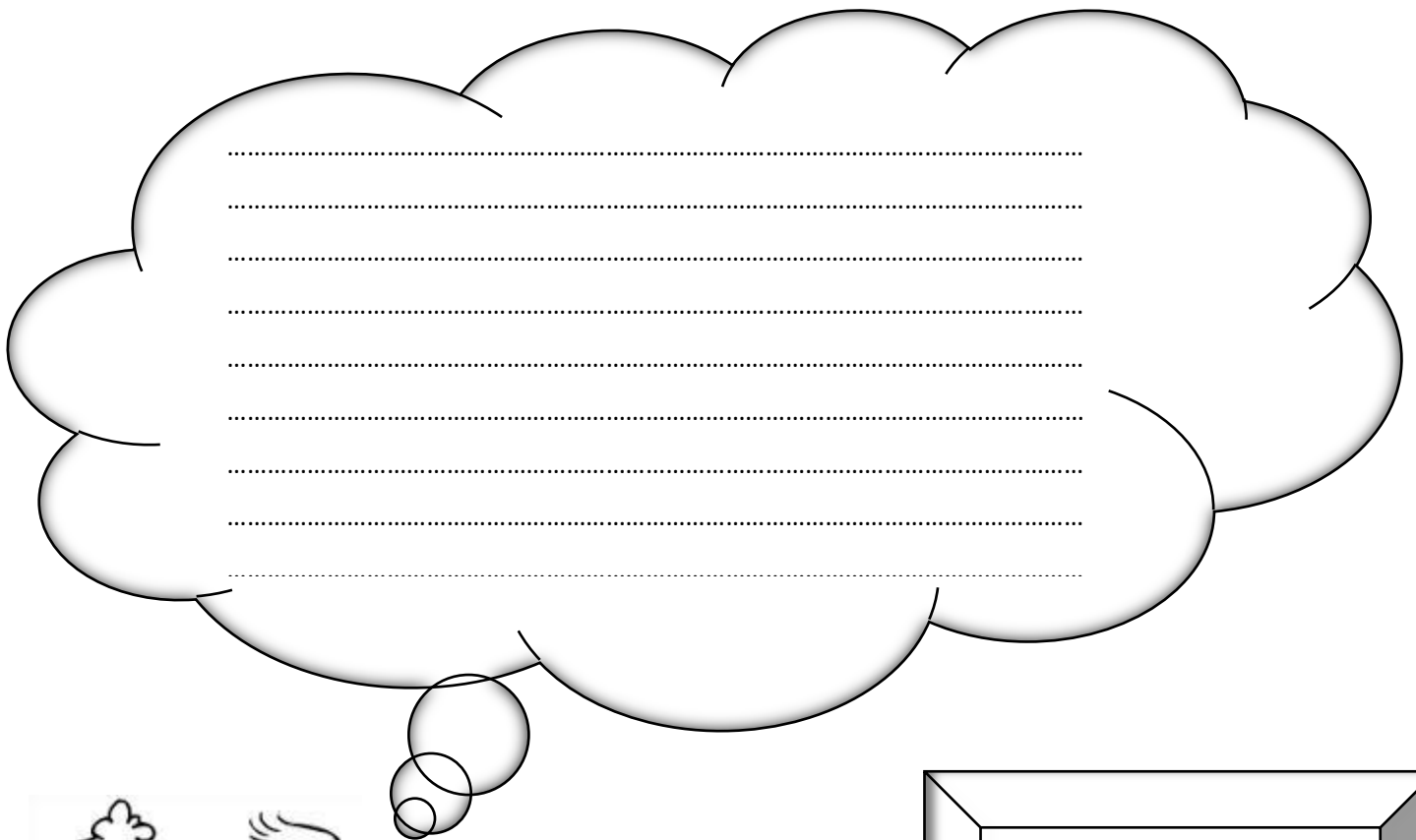
- Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171–185.
- Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Young Children's Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. In *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood*, 139-161. Springer, Cham.
- Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379–402.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Έργο 1

Μπορείς να συνεχίσεις την παρακάτω σειρά από αριθμούς;

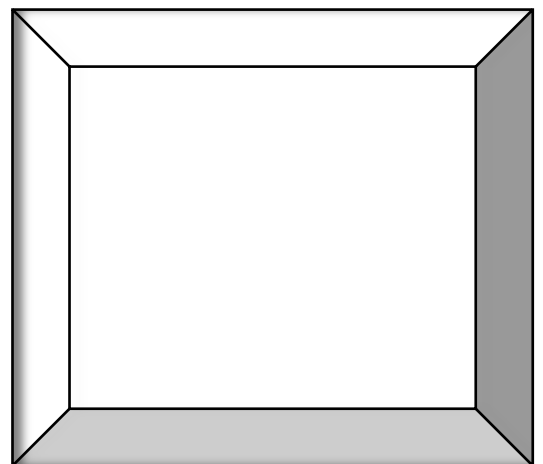
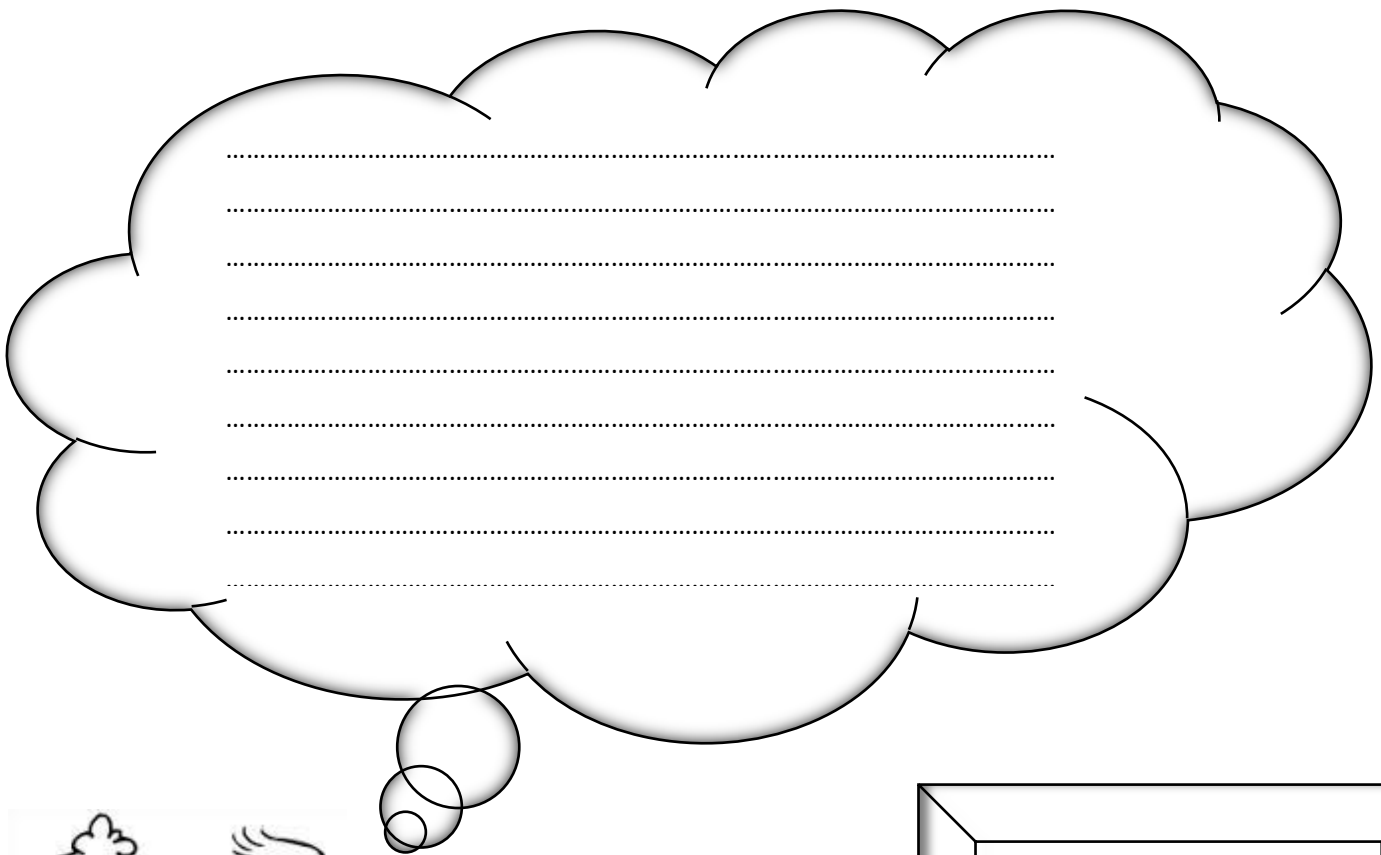
1 3 5 7 9



Έργο 2

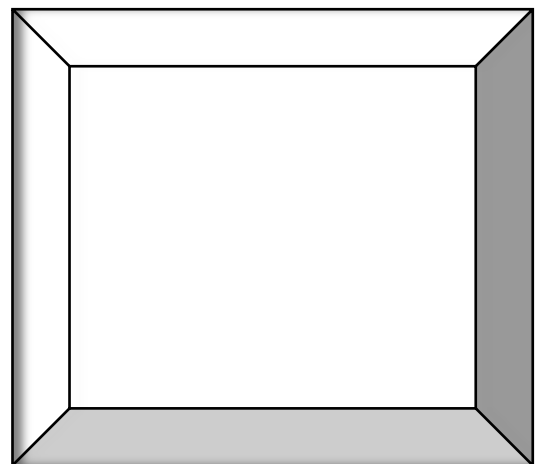
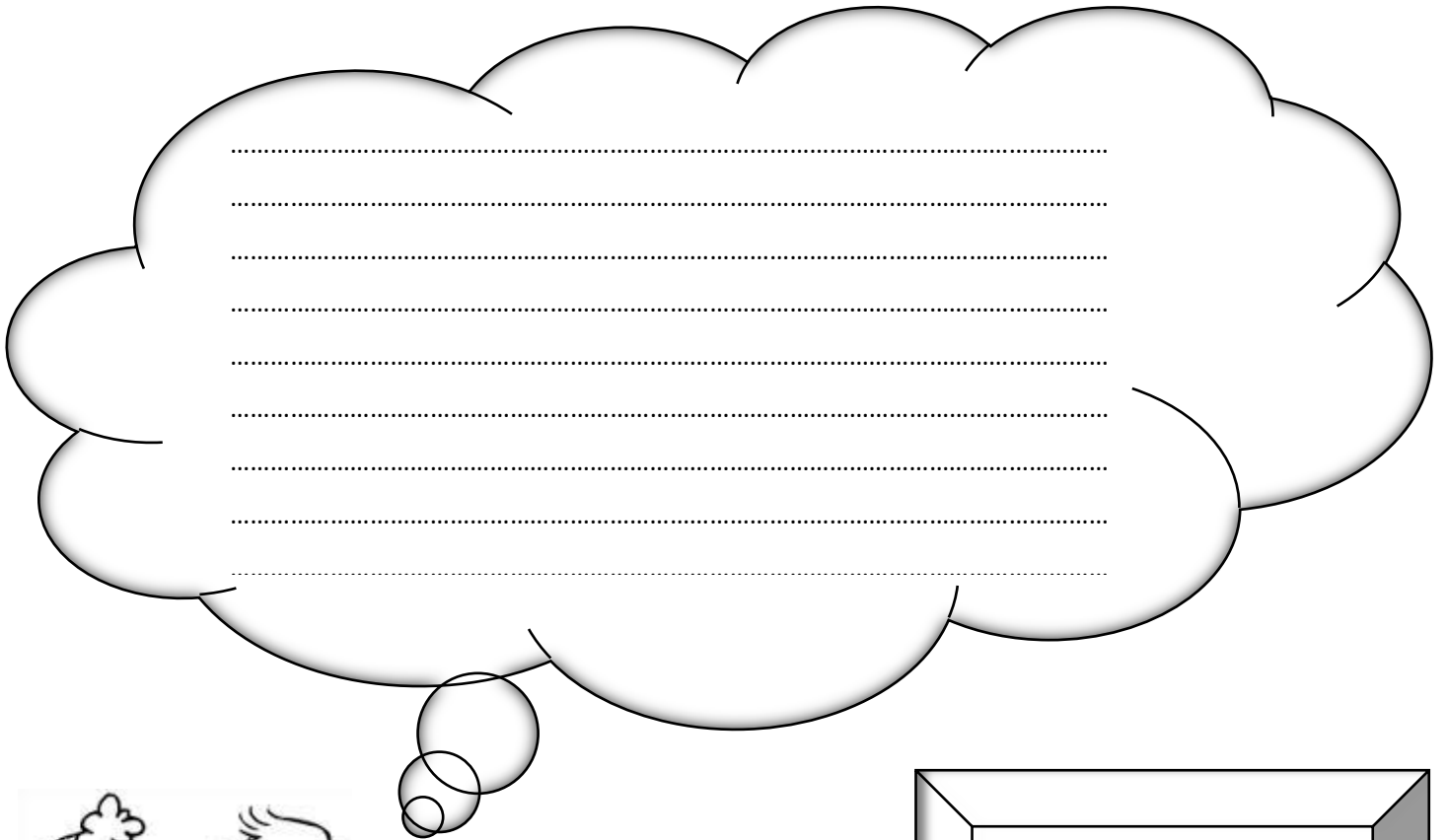
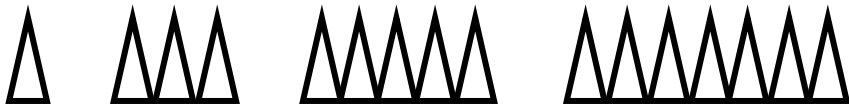
Μπορείς να συνεχίσεις την παρακάτω σειρά από αριθμούς:

2 4 8 16 32



Έργο 3

Μπορείς να συνεχίσεις την παρακάτω σειρά από τριγωνάκια;



Έργο 4

Μπορείς να συνεχίσεις την παρακάτω σειρά από κυκλάκια;

