



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

«Εννοιολογικές προκλήσεις της έννοιας του κλάσματος:

Ο ρόλος των εγχειριδίων των Μαθηματικών του Δημοτικού»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2019

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Π.Τ.Ν. του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κα Ξένια Βαμβακούση, για το χρόνο που αφιέρωσε, τις γνώσεις που μου προσέφερε και την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε που ήταν πάντα άμεση και ουσιαστική.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τις Καθηγήτριες του Π.Τ.Ν. του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κα Μαρία Καλδρυμίδου και κα Αικατερίνη Πλακίτση, τόσο για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, όσο και για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους δικούς μου ανθρώπους για την υποστήριξη που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Τα κλάσματα αποτελούν θεμελιώδη μαθηματική έννοια και η κατανόησή τους αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Ωστόσο, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόησή τους. Αυτό οφείλεται αφενός στη φύση των κλασμάτων και αφετέρου στον τρόπο διδασκαλίας τους. Τα σχολικά εγχειρίδια καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το τί διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί και πώς το διδάσκουν. Στην παρούσα μελέτη αναλύθηκαν τα εγχειρίδια Μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου, ως προς το πώς παρουσιάζεται σε αυτά η έννοια του κλάσματος. Πιο συγκεκριμένα, η διερεύνηση αφορά τα είδη αναπαράστασης που εμφανίζονται, τις ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές και τις όψεις του κλάσματος που παρουσιάζονται. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι επικρατεί η όψη του κλάσματος «μέρος-όλου», με κυρίαρχη ενέργεια την από-ενσωμάτωση του μέρους από το όλο, και το διακριτοποιημένο μοντέλο επιφάνειας. Τα ευρήματα αυτά προκαλούν προβληματισμό καθώς, σύμφωνα με πολλούς ερευνητές, το πλαίσιο που δημιουργούν οι αλληλο-συνδεόμενες αυτές συνθήκες δεν υποστηρίζει την πολλαπλασιαστική σκέψη που απαιτείται για τα κλάσματα. Αντίθετα, ευνοούν την προσθετική σκέψη στο πλαίσιο των κλασμάτων, η οποία αποτελεί πηγή πολλών παρανοήσεων για τις κλασματικές έννοιες.

Λέξεις κλειδιά: κλάσματα, σχολικά εγχειρίδια, όψη του κλάσματος, αναπαραστάσεις, παρανοήσεις μαθητών

Abstract

Fractions are a fundamental mathematical concept and understanding them is crucial for mathematical development. However, many students find fractions very difficult to understand. This is due to the nature of fractions as well as to the way they are taught. School textbooks largely determine what teachers teach and how they teach it. In the current study, the Elementary School Mathematics textbooks were analyzed in terms of how they present fractions. Specifically, we examined the types of fraction representations, the intended actions for students, and fraction subconstructs that are included in the textbooks. The results of this study show that the predominate fraction subconstruct in the textbooks is the “part-whole” one; the predominant action is disembedding the part of the whole; and the predominate model was the “discretized area” model. These findings indicate that the concept of fraction is presented in the textbooks in a context that, according to many researchers, does not support multiplicative reasoning, which is essential for fraction understanding. Rather, it allows for additive reasoning in fractional contexts, which is a source of many misconceptions about fractions.

Key words: fractions, textbooks, fraction subconstructs, representations, misconceptions

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	3
Περίληψη.....	4
Abstract	5
Εισαγωγή	8
Κεφάλαιο 1. Κλάσματα	10
1.1 Η σημασία των κλασμάτων και οι δυσκολίες τους	10
1.2 Οι διαφορετικές όψεις του κλάσματος	16
1.2.1 Το κλάσμα ως μέρος-όλου	17
1.2.2 Το κλάσμα ως πηλίκιο	18
1.2.3 Το κλάσμα ως λόγος.....	19
1.2.4 Το κλάσμα ως τελεστής.....	21
1.2.5 Το κλάσμα ως μέτρο.....	22
1.3 Σχήματα για τα κλάσματα.....	24
Κεφάλαιο 2. Αναπαραστάσεις κλασμάτων	30
2.1 Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά	30
2.2 Μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων.....	32
2.3 Διακριτά και συνεχή μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων.....	34
2.4 Περιορισμοί στη χρήση μοντέλων	39
2.5 Λάθη που σχετίζονται με τις διάφορες αναπαραστάσεις	41
3.7 Δυσκολίες μαθητών με τη χρήση της αριθμογραμμής	45
Κεφάλαιο 3. Τα σχολικά εγχειρίδια	47
3.1 Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων	47
3.2 Είδη ανάλυσης σχολικών Μαθηματικών εγχειριδίων	48
3.3 Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων και ρητοί αριθμοί	51
Κεφάλαιο 4. Μεθοδολογία.....	55
4.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα	55
4.2 Μέθοδος έρευνας	56
4.3 Το υλικό της έρευνας	57
4.4 Η μονάδα ανάλυσης και οι άξονες	67

4.5 Αξιοπιστία της ανάλυσης	70
4.6 Ο τρόπος ανάλυσης	70
Κεφάλαιο 5. Αποτελέσματα	75
5.1 Μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων.....	75
5.2 Είδος ποσότητας	79
5.3 Ενέργειες των μαθητών	84
5.4 Η όψη του κλάσματος	88
Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα - Συζήτηση	94
Βιβλιογραφία.....	98
Παράρτημα	102

Εισαγωγή

Η μάθηση και διδασκαλία των ρητών αριθμών και ιδιαίτερα των κλασμάτων αποτελεί τις τελευταίες δεκαετίες εξέχον αντικείμενο μελέτης, καθώς λογίζεται ιδιαίτερης σημασίας για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Συγκεκριμένα, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, η καλή γνώση των κλασμάτων αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα κατάκτησης της γνώσης που σχετίζεται με συναφή πεδία, όπως οι αναλογίες και τα ποσοστά. Ωστόσο, το πεδίο των κλασμάτων ανήκει σε μια από τις πιο προβληματικές περιοχές των Μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου και αποτελεί δύσκολη πρόκληση για τους μαθητές. Η Moss (2005), βασιζόμενη σε εμπειρικά δεδομένα και στην ανάλυση προηγούμενων μελετών, συνόψισε τους βασικούς λόγους για τους οποίους οι ρητοί αριθμοί θεωρούνται δύσκολοι: οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν ένα πολύπλοκο δίκτυο γνώσεων που βασίζεται στις πολλαπλασιαστικές και όχι στις προσθετικές σχέσεις, να κατανοήσουν και να συντονίσουν τα νέα σύμβολα και τις αναπαραστάσεις τους, να επαναπροσδιορίσουν την έννοια της μονάδας και να επανασυντονίσουν εννοιολογικά διακριτές ιδέες που συνδέονται με τους ρητούς αριθμούς. Αυτές περιλαμβάνουν την όψη του κλάσματος ως μέρος-όλου, ως πηλίκο, ως λόγος, ως τελεστής και ως μέτρο.

Ένας άλλος παράγοντας με τον οποίο συνδέονται οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα είναι τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών (Alajmi, 2012). Έρευνες έχουν δείξει ότι το μαθηματικό περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων είναι θεμελιώδους σημασίας, καθώς επηρεάζει τα θέματα που καλύπτονται και τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται στην τάξη. Το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας (NRC, 2001) προτείνει ότι, για να αναπτυχθεί η μαθηματική ικανότητα των μαθητών στα κλάσματα, θα πρέπει τα σχολικά εγχειρίδια να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν βαθιά εννοιολογική κατανόηση. Βασικός παράγοντας για την ανάπτυξη αυτή είναι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να σκιαγραφήσουν τα διαφορετικά χαρακτηριστικά του κλάσματος. Ωστόσο, έρευνες δείχνουν ότι τόσο τα σχολικά εγχειρίδια, όσο και η διδασκαλία στην τάξη περιορίζονται στη χρήση στερεότυπων αναπαραστάσεων για τα κλάσματα, όπως το διακριτοποιημένο μοντέλο επιφάνειας. Η προσκόλληση αυτή περιορίζει την κατανόηση και γίνεται η αιτία για τη δημιουργία πολλών παρανοήσεων.

Στην παρούσα εργασία γίνεται ανάλυση των Μαθηματικών εγχειριδίων του Ελληνικού Δημοτικού σχολείου, εξετάζοντάς τα ως προς το πώς εμφανίζεται εξελικτικά η έννοια του κλάσματος. Ειδικότερα, η διερεύνηση αφορά τις διαφορετικές όψεις του κλάσματος που εμφανίζονται στις δραστηριότητες των εγχειριδίων, τα είδη αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται καθώς και τις ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων.

Η παρούσα εργασία αρθρώνεται σε έξι κεφάλαια. Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η σημασία των κλασμάτων και οι δυσκολίες τους. Έπειτα, παρατίθεται μια εκτενής βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με τις διαφορετικές όψεις του κλάσματος, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζεται η ιεραρχία ανάπτυξης τεσσάρων νοητικών σχημάτων, τα οποία βασίζονται σε νοερές ενέργειες και χαρτογραφούν την εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στο ρόλο των αναπαραστάσεων στη μαθηματική διαδικασία και στα διάφορα είδη αναπαραστάσεων για τα κλάσματα. Στη συνέχεια, παραθέτονται περιορισμοί που προκύπτουν από τη χρήση στερεότυπων μοντέλων αναπαράστασης. Τέλος, παρουσιάζονται συχνά λάθη μαθητών και δυσκολίες που σχετίζονται με τις διάφορες αναπαραστάσεις.

Στο τρίτο κεφάλαιο επιχειρείται μια ανασκόπηση ερευνών σχετικών με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών. Αρχικά, επισημαίνεται ο ρόλος των εγχειριδίων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διάφορα είδη ανάλυσης σχολικών εγχειριδίων κι έπειτα ακολουθεί αναφορά σε έρευνες που επικεντρώθηκαν στην ανάλυση εγχειριδίων ως προς την έννοια του κλάσματος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία της παρούσας έρευνας, ξεκινώντας με το σκοπό και τα ερευνητικά ερωτήματα. Ακολούθως, παρουσιάζεται η μέθοδος και το υλικό της έρευνας. Στο τελευταίο τμήμα αυτού το κεφαλαίου, περιγράφονται οι άξονες ανάλυσης, η αξιοπιστία της έρευνας και ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, ενώ στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο σχολιάζονται τα αποτελέσματα και εξάγονται τα συμπεράσματα της έρευνας.

Κεφάλαιο 1. Κλάσματα

1.1 Η σημασία των κλασμάτων και οι δυσκολίες τους

Τα κλάσματα και γενικότερα οι ρητοί αριθμοί αποτελούν μια από τις πιο σημαντικές μαθηματικές έννοιες και καταλαμβάνουν ένα μεγάλο μέρος στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Μια εξήγηση για τη σπουδαιότητα αυτή δίνεται από τους Behr, Lesh, Post και Silver (1983), σύμφωνα με τους οποίους:

α) από πρακτική άποψη, η ικανότητα ενός μαθητή να χειρίζεται αποτελεσματικά αυτές τις έννοιες βελτιώνει την ικανότητά του να κατανοεί και να χειρίζεται καταστάσεις και προβλήματα της καθημερινής ζωής,

β) από ψυχολογική άποψη, προσφέρουν ένα πλούσιο περιβάλλον στο οποίο ο μαθητής μπορεί να αναπτύξει δομές απαραίτητες για την συνεχώς εξελισσόμενη διανοητική του ανάπτυξη, και

γ) από μαθηματική άποψη, η κατανόηση των κλασμάτων και γενικότερα των ρητών αριθμών δημιουργεί τη βάση πάνω στην οποία στηρίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις.

Ωστόσο, έρευνες δείχνουν ότι η διδασκαλία και η μάθησή των κλασμάτων αποτελεί μια από τις πιο προβληματικές περιοχές των Μαθηματικών. Παρ' όλο που ένα μεγάλο μέρος του αναλυτικού προγράμματος αφιερώνεται στη διδασκαλία τους, παρατηρείται ότι οι μαθητές παρουσιάζουν αδυναμίες στην κατανόησή τους. Η ελλιπής γνώση των κλασμάτων οδηγεί σε περαιτέρω δυσκολίες στα Μαθηματικά, καθώς παρεμβαίνει στη μάθηση κι άλλων μαθηματικών εννοιών, επηρεάζοντας τη γενικότερη μαθηματική επίδοση των μαθητών (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Booth & Newton, 2012).

Σύμφωνα με τους ερευνητές, υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατανόηση αυτή και οφείλονται τόσο στην εννοιολογική φύση των κλασμάτων, στο συμβολισμό και τις αναπαραστάσεις τους, όσο και στον τρόπο διδασκαλίας τους. Ένα από τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των κλασματικών αριθμών είναι η χρήση συγκεκριμένων αναπαραστάσεων. Η παραδοσιακή διδασκαλία περιλαμβάνει την πρόωρη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων και δίνει έμφαση στο κλάσμα ως «μέρος-

όλου» μέσω του μοντέλου επιφάνειας (συχνά του κυκλικού δίσκου). Όταν το σχήμα παρουσιάζεται με στερεότυπη μορφή, δηλαδή χωρισμένο σε τόσα μέρη όσα και ο παρονομαστής του κλάσματος με γραμμοσκιασμένα τόσο κομμάτια, όσα η αξία του αριθμητή, οι μαθητές πάντα ακολουθούν τη διαδικασία της διπλής καταμέτρησης για να σκιάσουν την επιφάνεια που τους ζητείται – δηλαδή, καταμετρούν τα γραμμοσκιασμένα κομμάτια για να βρουν τον αριθμητή και τα μη γραμμοσκιασμένα για να βρουν τον παρονομαστή. Ο σχηματισμός ενός τέτοιου στερεοτύπου στο μυαλό των μαθητών οδηγεί σε εσφαλμένες αντιλήψεις. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές θεωρούν ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός πάντα μικρότερος από τη μονάδα και δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν και να αναπαραστήσουν τα καταχρηστικά κλάσματα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Συχνά οι μαθητές αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως δύο ανεξάρτητους πληθικούς αριθμούς δηλαδή, ερμηνεύουν τον συμβολισμό $\frac{\alpha}{\beta}$ ως δύο φυσικούς αριθμούς οι οποίοι διαχωρίζονται απλά με μία γραμμή (Moss, 2005; Stafylidou & Vosniadou, 2004), γεγονός που τους εμποδίζει να αντιληφθούν το κλάσμα ως μια ενιαία οντότητα. Τέλος, οι μαθητές, με βάση με το στερεότυπο μοντέλο του μέρους-όλου, αντιλαμβάνονται τις κλασματικές μονάδες ως διακριτά «κομμάτια» στα οποία μπορούν να μεταφερθούν πολλά από αυτά που γνωρίζουν για τους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, οι κλασματικές μονάδες μπορούν να διαταχθούν όπως διατάσσονται οι φυσικοί και τα κλάσματα μπορούν να προκύψουν με πρόσθεση των κλασματικών μονάδων. Γενικότερα, στο πλαίσιο αυτό, οι μαθητές μπορούν να αγνοήσουν την πολλαπλασιαστική σχέση που συνδέει τον αριθμητή με τον παρονομαστή και να ανταπεξέλθουν σε πολλές καταστάσεις βασιζόμενοι στην προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς (Moss, 2005).

Ένας ακόμη λόγος που οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τα κλάσματα, είναι το γεγονός ότι οι ιδιότητες που ισχύουν για τους ακέραιους αριθμούς, δεν ισχύουν για όλους τους αριθμούς. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις που έχουν για τους φυσικούς αριθμούς, ώστε να συλλάβουν τους ρητούς και να δώσουν νόημα στα κλάσματα, με αποτέλεσμα να κάνουν συστηματικά λάθη στη διάταξη, στις πράξεις και στο συμβολισμό των ρητών αριθμών (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007).

Βασικές διαφορές ανάμεσα στους φυσικούς και τους κλασματικούς αριθμούς είναι ότι οι φυσικοί είναι διακριτοί, ως πληθικοί αριθμοί, μετράνε διακριτές ποσότητες έχουν ελάχιστο στοιχείο, έχουν μοναδικό συμβολισμό και η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνουν» τους αριθμούς, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση τους «μικραίνουν». Αντίθετα,

οι κλασματικοί αριθμοί είναι πυκνοί, δεν έχουν ελάχιστο στοιχείο, έχουν άπειρους ισοδύναμους συμβολισμούς, μετράνε συνεχείς και διακριτές ποσότητες και η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός (αντίστοιχα η αφαίρεση και η διαίρεση) άλλοτε «μεγαλώνουν» και άλλοτε «μικραίνουν» τους αριθμούς. Ακριβώς στα σημεία που διαφέρουν τα κλάσματα από τους ρητούς, είτε στα χαρακτηριστικά, είτε στις ιδιότητες, ή, ακόμα, στις διαδικασίες σύγκρισης ή πράξεων, εμφανίζονται συστηματικά λάθη από τους μαθητές.

Κατά τη σύγκριση κλασμάτων, μια βασική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι το να καταφέρουν να κατανοήσουν ότι το μέγεθος του κλάσματος εξαρτάται από την πολλαπλασιαστική σχέση αριθμητή – παρονομαστή (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005). Όπως προαναφέρθηκε, συχνά οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα κλάσματα ως δύο ανεξάρτητους αριθμούς. Πάνω σε αυτή την ερμηνεία, έρχεται να προστεθεί η παρανόηση του τύπου «το κλάσμα μεγαλώνει όταν αυξάνεται ο αριθμητής του ή ο παρονομαστής του ή και οι δύο» (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Μια τέτοια ερμηνεία, άλλοτε οδηγεί σε ορθό συμπέρασμα (π.χ. $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$) και άλλοτε σε ψευδές, όπως για παράδειγμα ότι $\frac{2}{5} < \frac{2}{7}$. Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές ουσιαστικά εφαρμόζουν τους κανόνες που γνωρίζουν από τη σύγκριση φυσικών αριθμών.

Σε έρευνα του National Assessment of Educational Progress (NAEP, 2000), μόνο το 21% των μαθητών της τετάρτης τάξης μπόρεσε να εξηγήσει γιατί ένα κλασματικό μέρος ήταν μεγαλύτερο ή μικρότερο από ένα άλλο. Αυτό αποδεικνύει ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν το σχετικό μέγεθος των κλασμάτων. Αντίθετα, όταν οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν έργα διάταξης κλασμάτων κάνοντας χρήση γνωστούς κανόνες ή αλγόριθμους σύγκρισης, τότε τα αποτελέσματα είναι καλύτερα. Ωστόσο, όταν τα παιδιά διδάσκονται αυτούς τους κανόνες προτού να έχουν την ευκαιρία να σκεφτούν για το σχετικό μέγεθος των κλασμάτων, υπάρχουν ελάχιστες πιθανότητες να αποκτήσουν οικειότητα με την αριθμητική έννοια του κλάσματος (Van de Walle, 2007).

Μια άλλη περιοχή στην οποία δυσκολεύονται οι μαθητές είναι οι πράξεις με κλασματικούς αριθμούς. Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, επειδή οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα κλάσματα ως δύο ανεξάρτητους φυσικούς αριθμούς (Stafylidou & Vosniadou, 2004), ένα σύννηθες λάθος που παρατηρείται κατά την πρόσθεση ή αφαίρεσή τους είναι να προσθέτουν ή να αφαιρούν τους αριθμητές και τους παρονομαστές των

κλασμάτων. Για παράδειγμα: $\frac{2}{4} + \frac{5}{4} = \frac{7}{8}$ ή $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές εφαρμόζουν στα κλάσματα τους κανόνες της πρόσθεσης/αφαίρεσης φυσικών αριθμών, χωρίς να αντιληφθούν ότι οι παρονομαστές ορίζουν το ολικό μέγεθος του κλάσματος, ενώ οι αριθμητές το μέρος αυτού του μεγέθους. Ωστόσο, το γεγονός ότι η παραπάνω προσέγγιση είναι ορθή για τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων, είναι μια πιθανή αιτία για την εσφαλμένη αυτή αντίληψη (Siegler et al., 2010).

Αντίστοιχα, σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, οι μαθητές συχνά αφήνουν τον κοινό παρονομαστή αμετάβλητο σε προβλήματα πολλαπλασιασμού, π.χ. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Αυτό πιθανόν να συμβαίνει διότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν συνήθως περισσότερα προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων, παρά πολλαπλασιασμού.

Πηγή διαφόρων παρανοήσεων για τους μαθητές αποτελούν και οι πράξεις με μεικτούς αριθμούς. Στην περίπτωση πρόσθεσης ή αφαίρεσης μικτών αριθμών, σύνηθες λάθος των μαθητών είναι να ασχολούνται μόνο με το ακέραιο μέρος, για παράδειγμα $5\frac{3}{5} - 2\frac{1}{7} = 3$. Αυτό σημαίνει είτε ότι αγνοούν το μέρος της πράξης που δεν κατανοούν, είτε ότι υποθέτουν πως τέτοιες πράξεις δεν ορίζονται. Επίσης, μια άλλη εσφαλμένη αντίληψη είναι να θεωρούν ότι ο φυσικός αριθμός έχει τον ίδιο παρονομαστή με το κλάσμα που ακολουθεί στην πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης, για παράδειγμα η πράξη $4 - \frac{3}{8}$ μεταφράζεται ως $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}$ και έτσι δίνεται η απάντηση $\frac{1}{8}$ (Siegler et al., 2010).

Προβλήματα παρατηρούνται και στην πράξη της διαίρεσης κατά την εφαρμογή του παραδοσιακού αλγορίθμου. Ενίοτε οι μαθητές πιστεύουν ότι το να διαιρέσεις έναν αριθμό με ένα κλάσμα όπως το $\frac{1}{2}$, είναι το ίδιο με το να τον διαιρέσεις με το 2, οπότε γράφουν $4 : \frac{1}{2} = 2$. Αυτό πιθανόν να σχετίζεται με την αντίληψη ότι η διαίρεση «μικραίνει τον αριθμό», ενώ ο πολλαπλασιασμός τον «μεγαλώνει», μια αντίληψη που μεταφέρεται από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς.

Ανάλογα λάθη συναντώνται και στην περίπτωση των ισοδύναμων κλασμάτων. Σε έρευνα του America's Choice (2015), θυγατρικός φορέας του Εθνικού Κέντρου Εκπαίδευσης

και Οικονομίας (National Center on Education and the Economy - NCEE), δημοσιεύθηκε το “Mathematics Navigator: *misconceptions and errors*”, μια μελέτη σχετικά με τα συχνότερα λάθη των μαθητών στα κλάσματα. Στην έρευνα αυτή φάνηκε ότι πολλές φορές οι μαθητές δυσκολεύονται να αποδεχτούν ότι δύο ισοδύναμα κλάσματα προσδιορίζουν την ίδια ποσότητα, διότι φαινομενικά είναι διαφορετικά. Επίσης, όταν προσπαθούν να εντοπίσουν ισοδύναμα κλάσματα, συχνά ακολουθούν εσφαλμένα μια αθροιστική λογική, για παράδειγμα: $\frac{3}{8} = \frac{4}{9}$, διότι $3+1=4$ και $8+1=9$. Μια ακόμη εσφαλμένη αντίληψη που παρατηρείται είναι πως αν πολλαπλασιάσεις (ή διαιρέσεις) τους δύο όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, τότε αυξάνεται (ή αντίστοιχα μειώνεται) η αξία του κλάσματος.

Πληθώρα ερευνών έχει τεκμηριώσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την πυκνότητα των κλασμάτων και γενικότερα των ρητών αριθμών. Αυτές οι δυσκολίες οφείλονται τόσο στην εσφαλμένη απόδοση ιδιοτήτων που σχετίζονται με τη διακριτή δομή των φυσικών αριθμών (Ni & Zhou, 2005), όσο και στην πολλαπλή συμβολική αναπαράσταση των ρητών αριθμών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007). Παρατηρείται συχνά ότι οι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν ότι δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα σε δύο ψευτο-διαδοχικούς ρητούς, για παράδειγμα ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και το $\frac{4}{5}$, καθώς θεωρούν ότι δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ του 3 και του 4. Η αντίστοιχα θεωρούν ότι μεταξύ αριθμών όπως το $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$ υπάρχει μόνο ένας, το $\frac{4}{8}$ (αφελής διακριτότητα). Επιπλέον, σχετικά με το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών, οι μαθητές τείνουν να έχουν την αντίληψη ότι υπάρχουν μόνο κλάσματα μεταξύ κλασμάτων και μόνο δεκαδικοί μεταξύ δεκαδικών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004, 2007).

Ένα πρόσθετο εμπόδιο για τους μαθητές στην προσπάθειά τους να κατακτήσουν την πυκνότητα των ρητών είναι η πολλαπλή αναπαράστασή τους, σε αντίθεση με τη μοναδική αναπαράσταση των φυσικών. Οι μαθητές δε θεωρούν ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις αφορούν τον ίδιο αριθμό και συχνά δεν αντιλαμβάνονται τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ως μέλη του ίδιου συνόλου (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi et al., 2012).

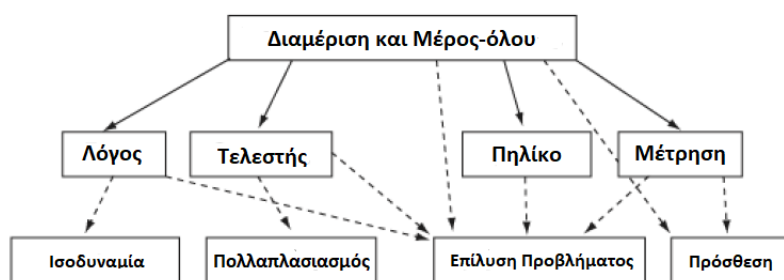
Ένα μεγάλο μέρος των συστηματικών λαθών που οφείλονται στην παρεμβολή της γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς θα μπορούσαν, να αποδοθούν στην κατάχρηση του στερεοτυπικού μοντέλου επιφάνειας για την αναπαράσταση του κλάσματος ως μέρος-όλου, που επιτρέπει στους μαθητές να χτίσουν τη γνώση τους για τα κλάσματα στη βάση της

γνώσης τους για τους φυσικούς, προσαρμόζοντας το σχήμα της καταμέτρησης με απλή μονάδα στη «διπλή καταμέτρηση», αξιοποιώντας προσθετικές σχέσεις μεταξύ αριθμών και αγνοώντας την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των όρων του κλάσματος (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Παράδειγμα τέτοιων λαθών είναι τα λάθη στη σύγκριση και στις πράξεις που υποδηλώνουν ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως δυο ανεξάρτητους αριθμούς, όπως και η ιδέα ότι τα κλάσματα είναι διακριτά διατεταγμένα. Το ζήτημα αυτό θα συζητηθεί εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα.

Ωστόσο, έχει διαπιστωθεί ότι ένας από τους κυρίαρχους παράγοντες που συμβάλλουν στην πολυπλοκότητα της διαδικασίας της μάθησης των κλασμάτων, έγκειται στο γεγονός ότι τα κλάσματα αποτελούν μια πολυδιάστατη κατασκευή και είναι δυνατό να τους αποδοθούν διαφορετικά νοήματα. Αναλυτικότερα, σύμφωνα με τους Kieren (1976) και Behr et al. (1983), το κλάσμα μπορεί να ερμηνευτεί ως μέρος του όλου, ως πηλίκο, ως λόγος, ως τελεστής και ως μέτρο. Μια βαθιά κατανόηση των διαφορετικών ερμηνειών του κλάσματος, μπορεί να βελτιώσει τις επιδόσεις των μαθητών σε σχετικές δραστηριότητες (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ωστόσο, έχει παρατηρηθεί ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί δίνουν έμφαση στη διαδικαστική γνώση (κανόνες –αλγόριθμοι). Οι γνώσεις, συχνά εφαρμόζονται μηχανικά από τους μαθητές και μένουν ασύνδετες με την έννοια του κλάσματος, με αποτέλεσμα να μην αντιλαμβάνονται γιατί τις εφαρμόζουν (Γαγάτσης, 2006). Οι Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) προτείνουν ότι οι εκπαιδευτικοί, αντί να βιάζονται να δώσουν στους μαθητές διαφορετικούς αλγόριθμους για την εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων, θα ήταν πιο σκόπιμο να επιμένουν περισσότερο στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων.

1.2 Οι διαφορετικές όψεις του κλάσματος

Ο πρώτος που διατύπωσε την άποψη ότι η έννοια του κλάσματος έχει διαφορετικές όψεις με διακριτό νόημα ήταν ο Kieren (1976). Συγκεκριμένα, υποστήριξε ότι η έννοια του κλάσματος αποτελείται από τέσσερις αλληλοσυνδεόμενες υποκατασκευές (subconstructs): λόγος (ratio), τελεστής (operator), πηλίκο (quotient) και μέτρο (measure). Σύμφωνα με την άποψή του, η όψη του κλάσματος ως μέρος-όλο (part-whole) διαχέεται στις τέσσερις προαναφερθείσες υποκατασκευές, δημιουργώντας έτσι τη βάση για την κατανόησή τους, επομένως απέφυγε τον προσδιορισμό της ως πέμπτη υποκατασκευή. Επιπλέον, ισχυρίστηκε ότι για την πλήρη κατανόηση της έννοιας του κλάσματος απαιτείται όχι μόνο η κατανόηση της κάθε υποκατασκευής, αλλά και ο τρόπος αλληλοσύνδεσής τους. Αργότερα, οι Behr και συνεργάτες (1983) επέκτειναν τις ιδέες του Kieren (1976) προτείνοντας ότι η σχέση μερος-όλου αποτελεί από μόνη της ξεχωριστή υποκατασκευή, την οποία μάλιστα συνέδεσαν με τη διαδικασία της διαμέρισης, ισχυριζόμενοι ότι αυτά τα δύο αποτελούν τη βάση για την εκμάθηση των άλλων υποκατασκευών. Επιπρόσθετα, οι παραπάνω ερευνητές πρότειναν ένα θεωρητικό μοντέλο που συνδέει τις διαφορετικές όψεις του κλάσματος με τις βασικές πράξεις κλασμάτων, την ισοδυναμία κλασμάτων και την επίλυση προβλήματος. Συγκεκριμένα, θεώρησαν την υποκατασκευή του λόγου ως το πιο «φυσικό» μονοπάτι για να αναπτυχθεί η έννοια της ισοδυναμίας και τις υποκατασκευές του τελεστή και του μέτρου ως πολύ χρήσιμες για την ανάπτυξη και κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης κλασμάτων, αντίστοιχα. Επιπλέον, επισήμαναν ότι η κατανόηση και των πέντε υποκατασκευών είναι επιτακτική προκειμένου να επιλυθούν προβλήματα που περιλαμβάνουν κλάσματα. Το θεωρητικό μοντέλο των Behr κ.α. (1983) παρουσιάζεται γραφικά στην Εικόνα 1.1, όπου τα συμπαγή και διακεκομμένα βέλη υποδεικνύουν τις εγκαθιδρυμένες και υποθετικές σχέσεις, αντίστοιχα.



Εικόνα 1.1: Το θεωρητικό μοντέλο που συνδέει τις πέντε όψεις του κλάσματος με τις διάφορες λειτουργίες των κλασμάτων και την επίλυση προβλημάτων (απόδοση από Behr et al., 1983, σελ.100)

Ωστόσο, οι όψεις του κλάσματος δεν είναι ανεξάρτητες. Κάθε υποκατασκευή αποτελεί μια διαφορετική όψη για τα κλάσματα, όμως όλες μαζί συνθέτουν την έννοια του κλάσματος. Επίσης, κάθε υποκατασκευή σχετίζεται με διαφορετικούς τρόπους σκέψης και διαφορετικές γνωστικές δομές. Επομένως, αν αναπτυχθεί μία από αυτές, δε συνεπάγεται ότι αναπτύσσονται παράλληλα και οι υπόλοιπες. Συνεπώς, αν η διδασκαλία βασίζεται σε μία μόνο όψη του κλάσματος και παρουσιάζονται συγκεκριμένες μόνο αναπαραστάσεις, τότε οι μαθητές πιθανόν να μην κατορθώσουν να κατασκευάσουν επαρκή θεμέλια για την πλήρη κατανόηση των ρητών αριθμών (Lamon, 2001).

1.2.1 Το κλάσμα ως μέρος-όλου

Η όψη του κλάσματος ως μέρος-όλου είναι συνήθως η πρώτη με την οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων, καθώς θεωρείται πιο εύκολη στην κατανόηση συγκριτικά με τις υπόλοιπες (Behr et al., 1983; Kieren, 1976). Η υποκατασκευή αυτή ορίζεται ως μια κατάσταση στην οποία μια συνεχής ποσότητα ή ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων χωρίζεται σε μέρη ίσου μεγέθους. Επομένως, το κλάσμα αναπαριστά μια σύγκριση μεταξύ ενός πλήθους μερών μιας διαμερισμένης μονάδας και του συνολικού αριθμού μερών στα οποία η μονάδα έχει διαμεριστεί. Με βάση αυτή την ερμηνεία, ο αριθμητής του κλάσματος πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τον παρονομαστή (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Οι μαθητές, για να κατακτήσουν πλήρως την όψη μέρος-όλου, είναι αναγκαίο να αποκτήσουν αρκετές εμπειρίες, ώστε να αναπτύξουν μια σειρά από κατανοήσεις (Batturo, 2004; Lamon, 2008). Συγκεκριμένα, απαιτείται να κατανοήσουν ότι τα μέρη στα οποία διαμερίζεται η ολόκληρη ποσότητα πρέπει να είναι ίσου μεγέθους. Επίσης, είναι βασικό οι μαθητές να είναι σε θέση να χωρίσουν σε ίσα μέρη μια συνεχή ποσότητα ή ένα σύνολο αντικειμένων, καθώς και να διακρίνουν εάν η ολόκληρη ποσότητα είναι όντως ισοδιαμερισμένη. Επιπλέον, είναι αναγκαίο να γίνουν κατανοητές οι σχέσεις που συνδέουν το όλο και το μέρος μιας ποσότητας. Δηλαδή ότι όλα τα μέρη μαζί συνθέτουν το όλο, ή ότι όσο αυξάνεται το πλήθος των τμημάτων στα οποία διαιρείται η ολόκληρη ποσότητα, τόσο μειώνεται το μέγεθός τους, ή ότι η σχέση ανάμεσα στα μέρη και το όλο διατηρείται ανεξάρτητα από το μέγεθος, το σχήμα, τη διάταξη ή τον προσανατολισμό των ισοδύναμων τμημάτων. Ακόμη, είναι βασικό οι μαθητές να κατανοήσουν ότι το μέρος ενός όλου είναι

ταυτόχρονα ξεχωριστή οντότητα και στοιχείο του συνόλου της διαμέρισης, καθώς παραμένει ενσωματωμένο (embedded) στο όλο. Αν οι μαθητές δεν κατανοήσουν αυτή την ιδέα, τότε αποτυγχάνουν να μετρήσουν κάποια μέρη δύο φορές. Για παράδειγμα, αν τους ζητηθεί μια αναπαράσταση του κλάσματος $\frac{2}{3}$, τότε συνήθως επιλέγουν μια αναπαράσταση που αντιστοιχεί στο κλάσμα $\frac{2}{5}$ (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Τέλος, η Baturo (2004) υποστηρίζει ότι για την πλήρη κατανόηση της υποκατασκευής μέρος-όλου, εκτός από την έννοια της διαμέρισης, οι μαθητές είναι αναγκαίο να κατανοήσουν τις ενέργειες της μοναδοποίησης (unitizing) και επανα-μοναδοποίησης (reunitizing). Έτσι, οι μαθητές θα είναι σε θέση να επανακατασκευάσουν το όλο με βάση τα μέρη του (π.χ. εάν δίνεται το $\frac{3}{4}$, να κατασκευαστεί όλη η ποσότητα), αλλά και να διαχωρίσουν εκ νέου μια ποσότητα που είναι ήδη χωρισμένη σε ίσα μέρη (π.χ. να κατασκευάσουν το $\frac{2}{5}$, με βάση μια ποσότητα που είναι χωρισμένη σε δέκα ίσα μέρη ή να δημιουργήσουν το $\frac{3}{10}$ έχοντας την ολόκληρη ποσότητα χωρισμένη σε πέντε ίσα μέρη).

Ωστόσο, παρά τον θεμελιακό χαρακτήρα της κατασκευής μέρος-όλου, πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η εκτεταμένη έμφαση σε αυτή, είναι δυνατό να δημιουργήσει σύγχυση στους μαθητές. Συγκεκριμένα, ο Freudenthal (1986) θεωρεί ότι αυτή η κατασκευή είναι πολύ περιορισμένη καθώς αναφέρεται μόνο σε γνήσια κλάσματα. Εντούτοις, κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων, συνήθως δίνεται μεγάλη έμφαση σε ασκήσεις που προωθούν αυτό το σχήμα, με αποτέλεσμα οι μαθητές να περιορίζονται στο να αναπτύξουν πλήρως την έννοια του κλάσματος και να το αντιληφθούν ως αριθμό.

1.2.2 Το κλάσμα ως πηλίκο

Σύμφωνα με τον Kieren (1980), η όψη του κλάσματος ως πηλίκο συνδέεται στενά με τη σχέση μέρος-όλου, ωστόσο προκύπτει και εφαρμόζεται σε διαφορετικό πλαίσιο. Στη σχέση μέρος-όλου, ο συμβολισμός $\frac{\alpha}{\beta}$ αναφέρεται στο κλασματικό μέρος μιας ενιαίας ποσότητας, ενώ στην ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο αναφέρεται στην πράξη της

διαίρεσης $\alpha:\beta$ (Behr et al., 1983). Η έννοια του πηλίκου βασίζεται στην έννοια της ισοδιαμέρισης και όπως επισημαίνει ο Kieren (1976), οι καταστάσεις ισοδιαμέρισης μιας απλής ή σύνθετης μονάδας αποτελούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο αποκτά νόημα ο ρητός αριθμός ως πηλίκο.

Επιπλέον, δεδομένου ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης αναφέρεται σε μια αριθμητική τιμή και όχι στα μέρη που λαμβάνονται από τη διαδικασία της δίκαιης μοιρασιάς, στο σχήμα του κλάσματος ως πηλίκο δεν υπάρχει περιορισμός για τους όρους του κλάσματος. Δηλαδή, ο αριθμητής μπορεί να είναι μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος από τον παρονομαστή και η ποσότητα που προκύπτει μπορεί να είναι επίσης μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη της μονάδας (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Έχει παρατηρηθεί ότι η όψη του κλάσματος ως πηλίκο παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες για τους μαθητές. Ενώ χρησιμοποιούμε την ίδια συμβολική αναπαράσταση $(\frac{\alpha}{\beta})$ τόσο στο σχήμα μέρος-όλου, όσο και στο σχήμα ως πηλίκο, το νόημα του κλάσματος είναι διαφορετικό. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως διαίρεση και να αναγνωρίζουν το ρόλο του διαιρετέου και του διαιρέτη. Ο διαιρετέος α δεν αναπαριστά τα μέρη του όλου, αλλά την ποσότητα ή τα στοιχεία που θα κατανεμηθούν ισομερώς, ενώ ο διαιρέτης β τον αριθμό των μερών της διαμέρισης (Κολέζα, 2000; Lamon, 2008). Επίσης, οι μαθητές για να αντιληφθούν καλύτερα την έννοια του πηλίκου, απαιτείται να κατανοήσουν την διάκριση ανάμεσα στη διαίρεση μερισμού και μέτρησης. Στη διαίρεση μερισμού δίνεται έμφαση στο μερίδιο του κάθε παραλήπτη (π.χ. Τέσσερα παιδιά μοιράζονται εξίσου τρεις πίτσες. Πόση πίτσα θα πάρει το κάθε παιδί;). Αντίθετα, στη διαίρεση μέτρησης δίνεται έμφαση στον αριθμό των μεριδίων που προκύπτουν από τη διαμέριση μιας ποσότητας σε ίσα μέρη (π.χ. τρεις πίτσες μοιράζονται μεταξύ φίλων. Αν ο καθένας από αυτούς πάρει τα $\frac{3}{4}$ της πίτσας, τότε πόσοι είναι όλοι οι φίλοι;) (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

1.2.3 Το κλάσμα ως λόγος

Η όψη του κλάσματος ως λόγος εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, όπου το μέγεθος μιας ποσότητας συγκρίνεται με το μέγεθος μιας άλλης. Ουσιαστικά, ο λόγος θεωρείται δείκτης σύγκρισης και όχι αριθμός (Behr et al., 1983; Lamon, 2008). Η σύγκριση

αυτή μπορεί να είναι είτε μεταξύ δύο ποσοτήτων διαφορετικού τύπου, είτε μεταξύ δύο ποσοτήτων του ίδιου τύπου (Lamon, 2008). Επομένως, από μαθηματικής άποψης, πρόκειται για δύο διαφορετικά μεγέθη ή χώρους μέτρησης (measure spaces). Στην πρώτη περίπτωση, αναφερόμαστε σε μια σχέση «μεταξύ» (between) δύο διαφορετικών χώρων, οπότε μιλάμε για λόγο υπό μορφή ρυθμού μεταβολής (rate) ή για εξωτερικό λόγο (external ratio). Ενώ στη δεύτερη περίπτωση, πρόκειται για μία «εντός» (“within”) του ίδιου χώρου σχέση, οπότε αναφερόμαστε σε εσωτερικό λόγο (internal ratio) ή απλά λόγο (ratio) (Κολέζα, 2000).

Η Lamon (2001), για να κάνει τον παραπάνω διαχωρισμό πιο σαφή, δίνει ως παράδειγμα τις διαφορετικές προσεγγίσεις που μπορεί να ακολουθήσουν οι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα όπως το εξής:

*«7 κορίτσια μοιράζονται 3 πίτσες και 3 αγόρια μοιράζονται 1 πίτσα.
Ποιοί θα φάνε περισσότερη πίτσα, τα αγόρια ή τα κορίτσια;»*

Αν οι μαθητές συγκρίνουν τον αριθμό των παιδιών με τον αριθμό από τις πίτσες,

$$\frac{3 \text{ πίτσες}}{7 \text{ κορίτσια}} \text{ και } \frac{1 \text{ πίτσα}}{3 \text{ αγόρια}}$$

τότε χρησιμοποιούν το λόγο υπό μορφή ρυθμού μεταβολής (rate ή εξωτερικός λόγος).

Αν, όμως, οι μαθητές συγκρίνουν κορίτσια με αγόρια και τον αριθμό από τις πίτσες των κοριτσιών με αυτόν των αγοριών,

$$\frac{7 \text{ κορίτσια}}{3 \text{ αγόρια}} \text{ και } \frac{3 \text{ πίτσες}}{1 \text{ πίτσα}}$$

τότε εφαρμόζουν την έννοια του λόγου (ratio ή εσωτερικός λόγος).

Επιπλέον, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση της σύγκριση δύο ποσοτήτων του ίδιου τύπου, μπορούμε να διακρίνουμε δύο ειδών εσωτερικούς λόγους: ο λόγος μέρους-όλου (part-whole) και ο λόγος μέρος-μέρους (part-part) (Lamon, 2008). Για παράδειγμα, έστω ότι σε ένα κουτί υπάρχουν 5 κόκκινες και 7 πράσινες μπάλες. Στη σύγκριση μέρους-όλου προκύπτουν οι λόγοι:

$$\frac{5 \text{ κόκκινες}}{12 \text{ μπάλες}} \text{ και } \frac{7 \text{ πράσινες}}{12 \text{ μπάλες}}$$

ενώ στη σύγκριση μέρους-μέρους έχουμε τους λόγους:

$$\frac{5 \text{ κόκκινες}}{7 \text{ πράσινες}} \text{ και } \frac{7 \text{ πράσινες}}{5 \text{ κόκκινες}}.$$

Γενικά, ο εσωτερικός λόγος παρουσιάζει ουσιώδεις διαφορές σε σχέση με τον εξωτερικό. Ο εσωτερικός είναι ένας καθαρός αριθμός, ενώ ο εξωτερικός ορίζει ένα νέο μέγεθος, που ταυτόχρονα εκφράζει τη σχέση μεταξύ των δύο αρχικών ποσοτήτων. Πρόκειται για ένα νέο είδος ποσότητας η οποία ονομάζεται εντατική (intensive, βλ. Nunes & Bryant, 2015) και απαντάται και ως σχετική (relative, βλ. Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Μια ακόμη διαφορά μεταξύ εξωτερικού κι εσωτερικού λόγου είναι ότι μπορούμε να προσθέσουμε τους πρώτους, αλλά όχι τους δεύτερους (Behr et al., 1983).

Στενά συνδεδεμένη με την κατανόηση της έννοιας του λόγου είναι και η κατανόηση της ισοδυναμίας δύο λόγων, δηλαδή της αναλογίας. Αυτό απαιτεί οι μαθητές να αντιληφθούν τι σημαίνει όταν λέμε ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων και να κατανοήσουν την ιδιότητα της συμμεταβλητότητας (covariance) και του αναλλοίωτου (invariance), δηλαδή ότι οι δύο ποσότητες που βρίσκονται σε σχέση αναλογίας αλλάζουν μαζί, ώστε η σχέση τους να παραμένει σταθερή. Επιπλέον, οι μαθητές είναι βασικό να συνειδητοποιήσουν ότι όταν δύο ποσότητες ενός λόγου πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο μη-μηδενικό αριθμό, τότε η τιμή του λόγου παραμένει σταθερή. Επομένως, οι παραπάνω ιδιότητες θεωρούνται βασικές για την ανάπτυξη της έννοιας της ισοδυναμίας. Ωστόσο, έχει διαπιστωθεί ότι μαθητές που είναι ικανοί να κατασκευάσουν ισοδύναμα κλάσματα, δεν είναι αναγκαίο ότι είναι σε θέση να αναγνωρίσουν την ιδιότητα της ισοδυναμίας (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

1.2.4 Το κλάσμα ως τελεστής

Σύμφωνα με τον Kieren (1980), το κλάσμα ως τελεστής λειτουργεί ως ένας μηχανισμός πολλαπλασιαστικής αντιστοίχισης μεταξύ δύο διακριτών ή συνεχών συνόλων. Αντίστοιχα, οι Behr et al., (1983) αναφέρουν ότι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως τελεστής μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση που μετατρέπει ένα γεωμετρικό σχήμα σε ένα νέο όμοιο με το πρώτο ή ένα σύνολο αντικειμένων με k στοιχεία σε ένα νέο σύνολο με $\frac{\alpha}{\beta} \cdot k$ στοιχεία. Δηλαδή, λειτουργεί ως μετασχηματισμός, ο οποίος μπορεί να μεγαλώσει – μικρύνει ευθύγραμμα τμήματα, να αυξήσει – μειώσει τον αριθμό ενός συνόλου διακριτών

αντικειμένων ή να μεγαθύνει – συρρικνώνει ένα γεωμετρικό σχήμα στο επίπεδο (Moss, 2005; Lamon, 2008).

Ως εκ τούτου, παρατηρούμε ότι η όψη του κλάσματος ως τελεστής διαφέρει από τις όψεις μέρος-όλου και πηλίκου, αλλά εμπεριέχεται στο γενικότερο σχήμα του κλάσματος ως λόγου (Κολέζα, 2000; Lamon, 2008). Το κλάσμα ως τελεστής εκφράζει τη σχέση μεταξύ της τελικής και της αρχικής ποσότητας, στην οποία ενεργήσαμε.

Οι Behr et al. (1983) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση του σχήματος του κλάσματος ως τελεστής μπορεί να βοηθήσει στην εμπέδωση του πολλαπλασιασμού μεταξύ των κλασμάτων και ειδικότερα στην ερμηνεία της έννοιας «παίρνω ένα μέρος ενός μέρος του όλου» (π.χ. τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$ μιας μονάδας). Επιπρόσθετα, η Lamon (2008) ισχυρίζεται ότι για την πλήρη κατάκτηση αυτού του σχήματος, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση:

- να ερμηνεύουν έναν κλασματικό πολλαπλασιαστή με διαφορετικούς τρόπους π.χ. το $\frac{3}{4}$ μιας ποσότητας ερμηνεύεται ως $3 \cdot \left(\frac{1}{4} \text{ της ποσότητας} \right)$ ή ως το $\frac{1}{4}$ από τρεις τέτοιες ποσότητες
- να μπορούν να κατονομάσουν ένα κλάσμα το οποίο περιγράφει μια σύνθετη διαδικασία κατά την οποία μια πράξη πολλαπλασιασμού και μια διαίρεσης λαμβάνουν χώρα, χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά τους
π.χ. το να διαιρέσω μια ποσότητα με το 4 και μετά να την πολλαπλασιάσω με το 3 είναι το ίδιο με το να πολλαπλασιάσω την αρχική ποσότητα με το κλάσμα $\frac{3}{4}$
- να μπορούν να συσχετίσουν την τελική με την αρχική ποσότητα
π.χ. στην περίπτωση που ένα ευθύγραμμο τμήμα είχε αρχικό μήκος 4cm και τελικό μήκος 3cm, λέμε ότι έχουμε σμίκρυνση με τελεστή $\frac{3}{4}$

1.2.5 Το κλάσμα ως μέτρο

Στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ παρουσιάζεται συνήθως ως ένα σημείο πάνω στην αριθμογραμμή, στην οποία τίθεται αυθαίρετα ένα σημείο ως αρχή που αντιστοιχεί στο μηδέν και ορίζεται μια μονάδα μέτρησης που μπορεί να διαιρείται συνεχώς

σε μικρότερες μονάδες (Kieren, 1976; Moss, 2005). Συγκεκριμένα, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως μέτρο σημαίνει ότι το μοναδιαίο διάστημα έχει διαιρεθεί σε β ίσα μέρη μήκους $\frac{1}{\beta}$ και ότι το σημείο που αντιστοιχεί στο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ πάνω στην αριθμογραμμή, απέχει από το μηδέν α διαστήματα μήκους $\frac{1}{\beta}$ (Lamon, 2008). Οι Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) υποστηρίζουν ότι σε αυτό το σχήμα εμπεριέχονται δύο συνιστώσες αλληλοσυνδεόμενες και αλληλοεξαρτώμενες. Η πρώτη συνδέει το κλάσμα με τη μέτρηση ενός διαστήματος. Ειδικότερα, ορίζεται ένα μοναδιαίο κλάσμα και χρησιμοποιείται επαναληπτικά, ξεκινώντας από ένα σημείο αναφοράς, τόσες φορές όσες υποδεικνύει το κλάσμα. Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{3}{4}$ αντιστοιχεί στην απόσταση 3 φορές το $\frac{1}{4}$ από ένα συγκεκριμένο σημείο. Η δεύτερη είναι η αντίληψη του κλάσματος ως αριθμού, κάτι που αναδεικνύει και την ποσοτική διάσταση του κλάσματος, δηλαδή το μέγεθός του.

Σε αυτή την ερμηνεία, τα κλάσματα θεωρούνται αριθμοί. Παρότι αυτή η αντίληψη φαίνεται απλοϊκή, για τους μαθητές η μετάβαση από τους φυσικούς αριθμούς στην αντίληψη του κλάσματος ως αριθμού παρουσιάζει μεγάλες προκλήσεις. Μια από τις κύριες δυσκολίες αυτού του σχήματος είναι ότι δε συσχετίζεται εύκολα με την καθημερινή εμπειρία των μαθητών. Πολλές από τις γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς δεν ισχύουν για τους ρητούς, επομένως οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν το κλάσμα ως έναν αριθμό και συνήθως το αντιμετωπίζουν ως δύο ξεχωριστούς αριθμούς (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Moss, 2005).

Όσον αφορά την όψη του κλάσματος ως μέτρο, η Lamon (2008) θεωρεί απαραίτητη την ανάπτυξη της ικανότητας του ισοδιαμερισμού, ώστε οι μαθητές να την κατανοήσουν σε βάθος. Εξίσου σημαντική θεωρεί την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών, δηλαδή ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι άλλοι. Επιπλέον, είναι σημαντικό οι μαθητές να είναι σε θέση να καθορίζουν ένα μήκος, χρησιμοποιώντας ένα μοναδιαίο διάστημα με κάποιο σημείο αναφοράς (π.χ. το μηδέν). Δηλαδή, να μπορούν να εντοπίσουν οποιοδήποτε κλάσμα πάνω στην αριθμογραμμή και αντίστροφα, να μπορούν να αναγνωρίσουν ποιός αριθμός αναπαριστάται σε ένα σημείο αυτής (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Παρά το γεγονός ότι η χρήση της αριθμογραμμής ευνοεί να αναπτυχθούν θεμελιώδεις ιδιότητες των κλασματικών αριθμών και συμβάλει στην ανάπτυξη της αίσθησης του κλάσματος ως αριθμός (Ni, 2001), έρευνες δείχνουν ότι η αριθμογραμμή ως μοντέλο αναπαράστασης δυσκολεύει τους μαθητές. Συχνά, οι μαθητές αποτυγχάνουν να εντοπίσουν τη θέση του κλάσματος όταν το μήκος της αριθμογραμμής είναι μεγαλύτερο της μονάδας ή η αριθμογραμμή έχει διαμεριστεί σε πλήθος ίσων τμημάτων διαφορετικό από αυτό που ορίζει ο παρονομαστής του κλάσματος. Επίσης, πολλές φορές οι μαθητές, αντί να μετρούν τα διαστήματα της αριθμογραμμής, μετρούν τις γραμμές που χρησιμοποιούνται για να οριοθετήσουν αυτά τα διαστήματα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, παρά το γεγονός ότι συνήθως η όψη του κλάσματος ως μέτρο συνδέεται με την αριθμογραμμή, η παρουσία της αριθμογραμμής δεν είναι αναγκαία. Για παράδειγμα, οι Wilkins και Norton (2018) η αναγνωρίζουν τη συγκεκριμένη όψη του κλάσματος σε περιπτώσεις που, δεδομένης μιας ποσότητας που έχει οριστεί ως $1/\beta$ ενός όλου, το a/β προκύπτει με a επαναλήψεις του $1/\beta$.

1.3 Σχήματα για τα κλάσματα

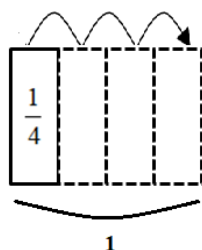
Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, τα κλάσματα αποτελούν μια δύσκολη περιοχή των Μαθηματικών και κρίσιμη πρόκληση τόσο για τους μαθητές, όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Σύμφωνα με ερευνητές της Μαθηματική εκπαίδευσης, η πρόκληση αυτή πιθανόν να προέρχεται από τους περιορισμούς που προκύπτουν από την όψη του κλάσματος «μέρος-όλου», η οποία αποτελεί το επίκεντρο στα περισσότερα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για την περιοχή των κλασμάτων. Η ανάπτυξη πιο εξελιγμένων εννοιών για τα κλάσματα, πέρα από την όψη «μέρος-όλου», αποτελεί τη βάση για τη μετέπειτα μελέτη σημαντικών μαθηματικών περιοχών, όπως οι αναλογίες και τα ποσοστά.

Στην όψη του κλάσματος «μέρος-όλου», οι μαθητές ερμηνεύουν το κλάσμα ως σύγκριση δύο αριθμών: ο συνολικός αριθμός των ίσων μερών και ο αριθμός των μερών που λαμβάνεται από το σύνολο. Όμως, η ερμηνεία αυτή οδηγεί σε πολλούς περιορισμούς και παρανοήσεις. Το πρόγραμμα σπουδών *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM) των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, καλεί τους εκπαιδευτικούς να προωθούν στους μαθητές πιο εξελιγμένες ερμηνείες των κλασμάτων, όπως αυτή του μέτρου.

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το CCSSM (2010), οι μαθητές έως την τέταρτη τάξη του Δημοτικού σχολείου πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως τη μέτρηση: « α φορές το μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ ». Η Lamon (2008), σε μια διαχρονική μελέτη για τις πέντε όψεις του κλάσματος, διαπίστωσε ότι η διδασκαλία η οποία βασίζεται στην όψη του κλάσματος ως μέτρο, ευνοεί περισσότερο την ανάπτυξη και διασύνδεση των υπόλοιπων ερμηνειών (subconstucts) του κλάσματος. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί, για να μπορέσουν να σχεδιάσουν κατάλληλα τη διδασκαλία τους και να εισάγουν τους μαθητές στις πιο εξελιγμένες όψεις του κλάσματος, πρέπει να λάβουν υπόψη ποιές νοερές ενέργειες (*mental actions*) προωθούν αυτές τις όψεις.

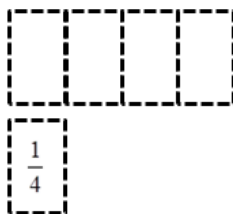
Οι Wilkins και Norton (2018), μελέτησαν και περιέγραψαν την εξέλιξη της μάθησης από τη στιγμή που οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του κλάσματος ως μέρος-όλου, έως ότου κατακτήσουν την έννοια του κλάσματος ως μέτρο. Η μελέτη τους επικεντρώθηκε στις νοερές ενέργειες των μαθητών που προωθούν αυτή την έννοια και εξελίσσουν τη μάθηση. Οι ενέργειες αυτές αναλύονται παρακάτω.

- 1. Ισομερισμός (Partitioning)**, δηλαδή διαίρεση μιας ποσότητας σε ίσα μέρη. Στην περίπτωση της συνεχούς ποσότητας, οι Wilkins και Norton (2018) περιγράφουν αυτή την ενέργεια ως «προβολή μια σύνθετης μονάδας επί ενός συνεχούς όλου» (σελ.2). Αντίστοιχα, στην περίπτωση ενός διακριτού όλου, ο ισομερισμός αναφέρεται στην προβολή μιας οργάνωσης σύνθετων (ή και απλών) μονάδων επί του όλου. Η ενέργεια αυτή αναφέρεται και ως μοναδοποίηση (unitizing) (π.χ. Lamon, 2008).
- 2. Επανάληψη (Iterating)**, δηλαδή η επανάληψη μιας μονάδας μήκους ή επιφάνειας, με σκοπό να παραχθεί ολόκληρη η ποσότητα. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 1.2, η ποσότητα $\frac{1}{4}$ επαναλαμβάνεται τέσσερις φορές για να παραχθεί το «όλο».



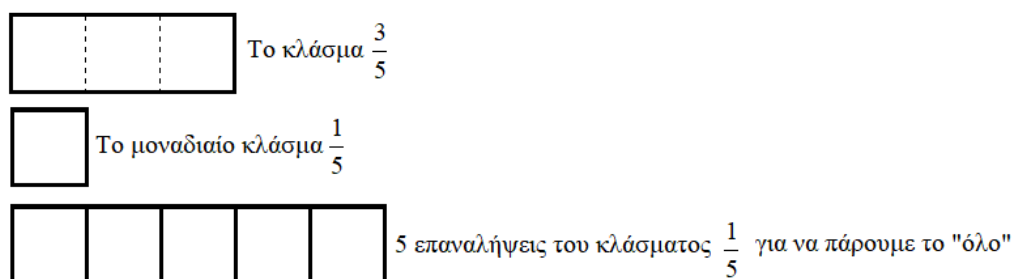
Εικόνα 1.2: Επανάληψη της ποσότητας $\frac{1}{4}$, ώστε να παραχθεί το «όλο»

3. **Αποενσωμάτωση** (Disembedding), δηλαδή η λήψη κάποιων μερών ενός όλου, ως ξεχωριστές μονάδες, διατηρώντας παράλληλα τη σχέση τους με το όλο (βλ. Εικόνα 1.3).



Εικόνα 1.3: Αποενσωμάτωση της ποσότητας $\frac{1}{4}$ από το «όλο»

4. **Ισομερισμός/Επανάληψη**. Με τον όρο αυτόν αποδίδουμε τον αγγλικό όρο “splitting” που, στο πλαίσιο αυτό, σημαίνει την ταυτόχρονη εφαρμογή ισομερισμού και επανάληψης, ως αντίστροφες πράξεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.4, όπου η ποσότητα $\frac{3}{5}$ διαμερίζεται σε τρία ίσα μέρη και στη συνέχεια το μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{5}$ επαναλαμβάνεται πέντε φορές για να παραχθεί ολόκληρη η ποσότητα. Επιπλέον, η ποσότητα $\frac{3}{5}$ μπορεί να θεωρηθεί ως τρεις επαναλήψεις της ποσότητας $\frac{1}{5}$.



Εικόνα 1.4: Ισομερισμός/Επανάληψη

5. **Συντονισμός μονάδων** (Units coordination), δηλαδή διαχείριση μιας κατάστασης με επίγνωση και των σχέσεων μεταξύ μονάδων διαφορετικής τάξης που ενυπάρχουν σε αυτήν, που περιλαμβάνει τον συντονισμό των απλούστερων ενεργειών του ισομερισμού, της επανάληψης και της αποενσωμάτωσης. Για παράδειγμα, συντονισμός μονάδων εμπλέκεται στη περίπτωση της Εικόνας 1.5.

Η παρακάτω σοκολάτα αποτελεί τα $\frac{2}{3}$ της ολόκληρης σοκολάτας.
 Αν κάθε άτομο θέλει το $\frac{1}{9}$ ολόκληρης της σοκολάτας, τότε πόσα
 άτομα μπορούν να μοιραστούν την παρακάτω σοκολάτα;



Εικόνα 1.5: Συντονισμός μονάδων

Οι παραπάνω ενέργειες σχετίζονται με διαφορετικές όψεις του κλάσματος. Για παράδειγμα, η όψη του κλάσματος ως μέρος-όλου σχετίζεται με τις νοερές ενέργειες του *ισομερισμού* και της *αποενσωμάτωσης*, διότι οι μαθητές διαιρούν μια ποσότητα σε ίσα μέρη (*ισομερισμός*) και «αποσπούν» κάποια μέρη της, διατηρώντας συγχρόνως τη σχέση τους με το σύνολο (*αποενσωμάτωση*). Μια σημαντική ενέργεια που δεν εμφανίζεται στο σχήμα μέρος-όλου είναι η ενέργεια της *επανάληψης*. Με αυτήν, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα μοναδιαίο κλάσμα για να μετρήσουν νοερά είτε μια ολόκληρη ποσότητα, είτε ένα μέρος της (Wilkins & Norton, 2011). Η κατανόηση ότι ένα μη-μοναδιαίο κλάσμα ή μια ολόκληρη ποσότητα αποτελείται από επαναλήψεις μιας κλασματικής μονάδας, είναι ουσιαστικής σημασίας για την κατάκτηση της έννοιας της μέτρησης (Kieren, 1980), αλλά και της όψης του κλάσματος ως μέτρου (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Wilkins & Norton, 2018).

Η έννοια του κλάσματος ως μέτρο αναπτύσσεται μέσω διάφορων αναπτυξιακών φάσεων, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τη δημιουργία νοητικών κλασματικών σχημάτων (*fraction schemes*). Οι νοερές ενέργειες που σχετίζονται με αυτά τα σχήματα, παρέχουν έναν οδηγό προς τους εκπαιδευτικούς, έτσι ώστε να σχεδιάσουν τη διδασκαλία τους και να προωθήσουν στους μαθητές την έννοια του κλάσματος ως μέτρο (Wilkins & Norton, 2018).

Οι Wilkins και Norton (2018) παρουσίασαν την ιεραρχία ανάπτυξης τεσσάρων νοητικών σχημάτων, τα οποία βασίζονται στις προαναφερθείσες νοερές ενέργειες και χαρτογραφούν την εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος, έως ότου κατακτηθεί η αντίληψη του κλάσματος ως μέτρο:

1. Αρχικά, οι μαθητές αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως μέρος-όλου (*part-whole scheme—PWS*). Οι μαθητές που κατακτούν αυτό το σχήμα, είναι σε θέση να διαιρούν μια

συνεχή ποσότητα σε ίσα μέρη κι έπειτα να «αποσπούν» κάποια από μέρη της, διατηρώντας συγχρόνως τη σχέση τους με το σύνολο. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να κατασκευάσουν οποιοδήποτε απλό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ($\alpha < \beta$).

2. Στη συνέχεια οι μαθητές, χρησιμοποιώντας νοερά την ενέργεια της επανάληψης, χτίζουν το σχήμα της μέτρησης για μοναδιαία κλάσματα (measurement scheme for unit fractions—MSUF). Στη φάση αυτή, οι μαθητές είναι σε θέση να προσδιορίζουν το μέγεθος ενός μοναδιαίου κλάσματος $\frac{1}{\beta}$ σε σχέση με μια συνεχή ποσότητα. Αυτό επιτυγχάνεται επαναλαμβάνοντας το μέγεθος $\frac{1}{\beta}$, εντός του συνόλου, με σκοπό να προσδιοριστεί το πόσες φορές χωράει.

3. Οι μαθητές που έχουν κατακτήσει το παραπάνω σχήμα, μπορούν να το γενικεύσουν και να κατασκευάσουν το σχήμα της μέτρησης για απλά κλάσματα (measurement scheme for proper fractions—MSPF). Οι μαθητές που κατακτούν αυτό το σχήμα είναι σε θέση να παράγουν μια ολόκληρη ποσότητα, έχοντας ένα απλό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ($\alpha < \beta$).

Για να το πετύχουν αυτό, απαιτείται η ενέργεια του διαμοιρασμού (splitting), διότι διαιρούν το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ σε α ίσα μέρη, έτσι ώστε να παράγουν το μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{\beta}$, και επαναλαμβάνοντάς το $\frac{1}{\beta}$ προσδιορίζουν το «όλο».

4. Τέλος, οι μαθητές που έχουν δομήσει τα παραπάνω σχήματα, είναι έτοιμοι να κατασκευάσουν το γενικευμένο σχήμα μέτρησης (generalized measurement scheme for fractions – GMSF). Όσοι κατακτούν αυτό το σχήμα, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τα κλάσματα ως αριθμούς. Πλέον, είναι σε θέση να προσδιορίζουν μια ολόκληρη ποσότητα, έχοντας ένα οποιοδήποτε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ (απλό ή καταχρηστικό). Εφαρμόζουν την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο σχήμα, διατηρώντας παράλληλα τη σχέση του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ με τη μονάδα αναφοράς. Για την κατανόηση αυτού του σχήματος, ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται συγχρόνως τρία επίπεδα: το ίδιο το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ως ποσότητα, το μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ που χρησιμοποιείται για τη μέτρησή του, καθώς και τη μονάδα αναφοράς. Συνεπώς, η επιπλέον ενέργεια που απαιτείται για την κατάκτηση αυτού του σχήματος είναι ο συντονισμός μονάδων.

Η μαθησιακή εξέλιξη που περιγράφηκε παραπάνω, την οποία οι Wilkins και Norton (2018) στηρίζουν και σε εμπειρικά δεδομένα, θα μπορούσε να αποτελεί έναν θεωρητικό οδηγό για τον σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων, οι οποίες θα παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να εσωτερικεύσουν τις ενέργειες που απαιτούνται για τη δόμηση του σχήματος του κλάσματος ως μέτρο. Ιδιαίτερα, αν οι δραστηριότητες σχετίζονται με ενέργειες όπως ο ισομερισμός/επανάληψη και ο συντονισμός μονάδων, οι μαθητές υποστηρίζονται ώστε σταδιακά να αναπτύξουν μια βαθιά εννοιολογική κατανόηση του κλάσματος ως μέτρο. Η σημαντικότητα αυτής της όψης του κλάσματος έχει επισημανθεί και από πολλούς άλλους ερευνητές (π.χ., Lamon, 2008), καθώς αποτελεί τη βάση για τη μελέτη κι άλλων σημαντικών μαθηματικών περιοχών.

Κεφάλαιο 2. Αναπαραστάσεις κλασμάτων

2.1 Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά

Ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης τονίζουν ότι ο ρόλος των αναπαραστάσεων είναι πολύ σημαντικός για τη μάθηση των Μαθηματικών. Σε αντίθεση με άλλες επιστήμες, όπως για παράδειγμα τη Βιολογία ή την Αστρονομία, στις οποίες η πρόσβαση στη γνώση είναι δυνατή τόσο μέσω αναπαραστάσεων, όσο και μέσω άμεσης παρατήρησης των φυσικών φαινομένων, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι προσβάσιμα μόνο μέσω κατάλληλων αναπαραστατικών συστημάτων (Duval, 2006). Οι αναπαραστάσεις είναι σύμφυτες με τα Μαθηματικά, αποτελούν το μέσο για την κατανόηση και το χειρισμό των μαθηματικών εννοιών. Υπάρχουν περιπτώσεις που οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια έννοια, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση, που είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης.

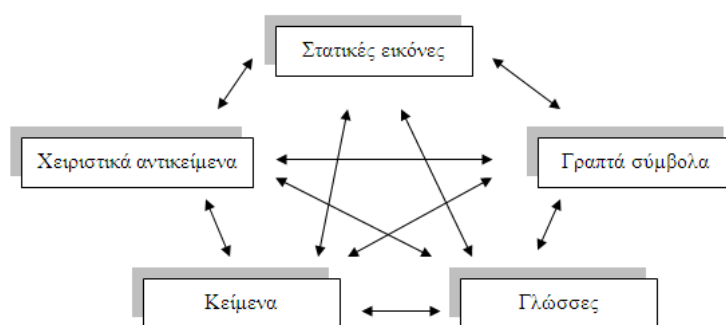
Ένας βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν τη βοηθητική φύση των αναπαραστάσεων, ώστε να μπορούν να τις χρησιμοποιούν αποδοτικά στη μαθηματική διαδικασία. Τα σύμβολα, οι πίνακες, τα γραφήματα και τα διαγράμματα είναι δυναμικές μέθοδοι έκφρασης μαθηματικών ιδεών και σχέσεων. Ο συμβολισμός στα Μαθηματικά, μαζί με οπτικά βοηθήματα, θα πρέπει να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές ως τρόποι επικοινωνίας μαθηματικών ιδεών στους άλλους (Van de Walle, 2007).

Η αναπαραστατική ικανότητα, δηλαδή η γνώση αναφορικά με τις διάφορες αναπαραστάσεις και η ευκολία στην χρήση αυτής της γνώσης με σκοπό την επίλυση προβλημάτων, είναι κρίσιμης σημασίας για τη μαθηματική επιτυχία (NCTM, 2000). Η εκπαιδευτική σημασία των διάφορων αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων έχει επισημανθεί επανειλημμένως ερευνητικά. Μάλιστα, το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικών των ΗΠΑ (NCTM) περιλαμβάνει τις αναπαραστάσεις στα πέντε βασικά στάνταρ διαδικασίας όλων των βαθμίδων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα στάνταρ της διαδικασίας προώθησης των μαθηματικών περιεχομένων αναφέρονται στη μαθηματική διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές θα αποκτήσουν τη μαθηματική γνώση (Van de Walle, 2007). Σύμφωνα με το NCTM, η μαθηματική εκπαίδευση είναι απαραίτητο να προσφέρει στους μαθητές δυνατότητες:

- να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να οργανώνουν, να καταγράφουν και να μεταδίδουν τις μαθηματικές ιδέες
- να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν ανάμεσα σε μαθηματικές αναπαραστάσεις για να επιλύουν προβλήματα
- να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να μοντελοποιούν και να ερμηνεύουν φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα

Οι Lesh, Behr & Post (1987) διακρίνουν πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων σε σχέση με τη μάθηση των Μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος:

- **Κείμενα**, στα οποία η γνώση είναι οργανωμένη με βάση γεγονότα της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση άλλων καταστάσεων προβλήματος.
- **Χειριστικά αντικείμενα – μοντέλα**, όπως είναι οι ράβδοι κλασμάτων και η αριθμητική γραμμή, όπου τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος – μοντέλου δεν έχουν νόημα αυτά καθαυτά, ωστόσο οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
- **Εικόνες ή διαγράμματα**, στατικά εικονικά μοντέλα τα οποία, όπως και τα χειριστικά μοντέλα, είναι δυνατό να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες
- **Γλώσσες**, συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών, που σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία, όπως μαθηματική λογική, κλπ.
- **Γραπτά σύμβολα**, τα οποία, όπως και οι γλώσσες, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις της καθημερινής γλώσσας.



Εικόνα 2.1: Διάγραμμα εξωτερικών αναπαραστάσεων

(Απόδοση από τους: Lesh, Behr & Post, 1987, σελ.34)

Με το μοντέλο αυτό, οι παραπάνω ερευνητές υπογραμμίζουν τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία. Θεωρούν σημαντικό οι μαθητές να είναι σε θέση όχι μόνο να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις, αλλά και να τις αποκωδικοποιούν, να τις ερμηνεύουν και να τις επανακωδικοποιούν. Οι αλληπάλλληλες αυτές μεταφράσεις παρέχουν νόημα στις μαθηματικές ιδέες, αφού η κατανόηση αντανακλάται στην ικανότητα αναπαράστασης μαθηματικών ιδεών με διαφορετικούς τρόπους, όπως και στην ικανότητα σύνδεσης και συσχέτισης όλων αυτών των διαφορετικών μορφών.

Κάθε πεδίο αναπαράστασης χαρακτηρίζεται από διαφορετικές δυνατότητες. Ωστόσο, καθένα από αυτά τα πεδία κωδικοποιεί τις ίδιες δομές μιας έννοιας με ξεχωριστό τρόπο. Η ικανότητα αναγνώρισης των δομών στις διαφορετικές αναπαραστάσεις και ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων πεδίων αναπαράστασης, μπορούν να βοηθήσουν το άτομο στην πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας.

Για να συμβάλλουν θετικά οι αναπαραστάσεις στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, βασική προϋπόθεση είναι οι μαθητές να έχουν κατανοήσει τη λειτουργία τους και να είναι σε θέση να δημιουργούν όσο το δυνατόν περισσότερες συνδέσεις γύρω από μια νέα γνώση. Η διασύνδεση αυτή αφορά τόσο τις προϋπάρχουσες γνώσεις και τις αναπαραστάσεις τους, όσο και τις διάφορες μορφές αναπαράστασης της νέας γνώσης. Πετυχαίνοντας αυτή τη διασύνδεση παλαιών και νέων αναπαραστάσεων, οι μαθητές μπορούν να δομήσουν μια συνεκτική εσωτερική αναπαράσταση της έννοιας που διδάσκονται. Ωστόσο, συχνά δε λαμβάνεται υπόψη το χάσμα που πιθανόν να υπάρχει ανάμεσα στις εξωτερικές αναπαραστάσεις που καλούνται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές και στην αναπαράσταση που έχουν οι ίδιοι δημιουργήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων εμπειριών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να τίθενται εμπόδια στην κατανόηση, η οποία αναφέρεται σε εσωτερικά συνεχώς αναπτυσσόμενα δίκτυα αναπαραστάσεων (Hiebert & Carpenter, 1992).

2.2 Μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στο Δημοτικό σχολείο για την προσέγγιση των έννοιας του κλάσματος παίζουν καθοριστικό ρόλο στην απόδοση νοημάτων στην έννοια. Οι αναπαραστάσεις έχουν σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές να σκιαγραφήσουν τα διαφορετικά εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος. Ως εκ τούτου,

η εξοικείωση των μαθητών με μια όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ποικιλία μοντέλων αναπαράστασης πρέπει να αποτελεί κεντρικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Κολέζα, 2000).

Πολλές φορές είναι χρήσιμο για τους μαθητές να αντιμετωπίζουν την ίδια δραστηριότητα, χρησιμοποιώντας διαφορετικό μοντέλο αναπαράστασης κάθε φορά. Ορισμένοι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν κάποιες αναπαραστάσεις καλύτερα από κάποιες άλλες. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις προσφέρουν διαφορετικές ευκαιρίες μάθησης. Σύμφωνα με τον Van de Walle (2007), τα πιο συνηθισμένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων είναι τα εξής: μοντέλα εμβαδού, μοντέλα μήκους ή μέτρησης και μοντέλα συνόλου.

Στα **μοντέλα εμβαδού** υπάρχει μια επιφάνεια η οποία αποτελεί τη μονάδα αναφοράς και υποδιαιρείται σε μικρότερα μέρη. Τα μοντέλα αυτά αποτελούν ένα καλό σημείο εκκίνησης όταν γίνονται ασκήσεις μοιρασιάς. Η χρήση τους προϋποθέτει την ανάπτυξη συλλογισμών στις σχέσεις μέρους-όλου. Μοντέλα εμβαδού είναι οι κυκλικοί δίσκοι, οι ορθογώνιες επιφάνειες, οι γεωπίνακες, οι διάστικτοι και οι ορθογώνιοι καμβάδες, τα σχήματα διαφορετικού μεγέθους (pattern blocks), το διπλωμένο χαρτί, κλπ. Από αυτά τα μοντέλα, αυτό που συναντώνται συχνότερα είναι οι κυκλικοί δίσκοι. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημά τους, σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα επιφάνειας, είναι ότι δίνουν έμφαση στην ποσότητα που απομένει για να σχηματιστεί ολόκληρη η μονάδα. Τα υπόλοιπα μοντέλα είναι περισσότερο ευέλικτα και επιτρέπουν μονάδες ή σύνολα διαφορετικών μεγεθών (Van de Walle, 2007; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013).

Στα **μοντέλα συνόλων**, συνήθως το σύνολο των αντικειμένων αποτελεί τη μονάδα αναφοράς, ενώ τα υποσύνολα του συνόλου συνιστούν τα κλασματικά μέρη. Η ιδέα της μονάδας σε ένα σύνολο από αντικείμενα ως μεμονωμένη οντότητα είναι κάτι που δυσκολεύει την κατανόηση αυτών των μοντέλων, ειδικά για τους μαθητές των μικρότερων τάξεων. Ωστόσο, το μοντέλο των συνόλων βοηθά στη συγκρότηση σημαντικών συνδέσεων με πολλές καθημερινές εφαρμογές των κλασμάτων, καθώς και με έννοιες των λόγων (Van de Walle, 2007; Van de Walle et al., 2013).

Στα **μοντέλα μήκους ή μέτρησης** συγκρίνουμε μήκη, αντί επιφάνειες. Σχεδιάζουμε και υποδιαιρούμε ευθείες γραμμές ή συγκρίνουμε χειραπτικά υλικά ως προς το μήκος τους. Σε αυτή την κατηγορία συναντάμε τα ευθύγραμμα τμήματα, την αριθμογραμμή, τις διπλωμένες λωρίδες χαρτιού και τις λωρίδες κλασμάτων, που αποτελούν μια εκδοχή των ράβδων του Cuisenaire.

Τα μοντέλα μήκους είναι πολύ σημαντικά για την ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας των κλασμάτων. Παρόλα αυτά, δε χρησιμοποιούνται ευρέως στις αίθουσες διδασκαλίας. Ιδιαίτερα η αριθμογραμμή, σύμφωνα με πρόσφατες έρευνες, βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν την ποσοτική διάσταση του κλάσματος και να το αντιληφθούν ως αριθμό. Έρευνα του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικών Επιστημών (IES), προτρέπει τους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή ως κεντρικό εργαλείο αναπαράστασης κλασμάτων από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού. Έτσι, οι μαθητές θα επεκτείνουν από νωρίς τις γνώσεις τους για το αριθμητικό σύστημα και θα μπορέσουν να αντιληφθούν το κλάσμα ως αριθμό (Van de Walle et al, 2013).

Σύμφωνα με τους Bright, Behr, Post, & Wachsmuth (1988), η αριθμογραμμή είναι μια μαθηματικά προηγμένη αναπαράσταση. Ως μοντέλο αναπαράστασης κλασμάτων, διαφέρει από τα μοντέλα επιφάνειας και συνόλων ως προς πολλά σημεία:

- η μονάδα αναπαριστάνεται από ένα μήκος και η αριθμογραμμή υποβάλλει την ιδέα όχι μόνο της επανάληψης της μονάδας, αλλά και της υποδιαίρεσης όλων των επαναλαμβανόμενων μονάδων.
- στην αριθμογραμμή δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ συνεχόμενων μονάδων, το μοντέλο είναι συνεχές,
- ένα σημείο στην αριθμογραμμή δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που θα καθοριστεί το νόημα δύο άλλων τουλάχιστον σημείων αναφοράς.

Ερευνητές επιβεβαιώνουν ότι η αριθμογραμμή είναι ένα βασικό εργαλείο. Η χρήση της στη διδασκαλία θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν το κλάσμα ως μέγεθος και να εδραιώσουν τις έννοιες της ισοδυναμίας και της πυκνότητας των ρητών αριθμών (Bright et al., 1988; Saxe et al., 2007).

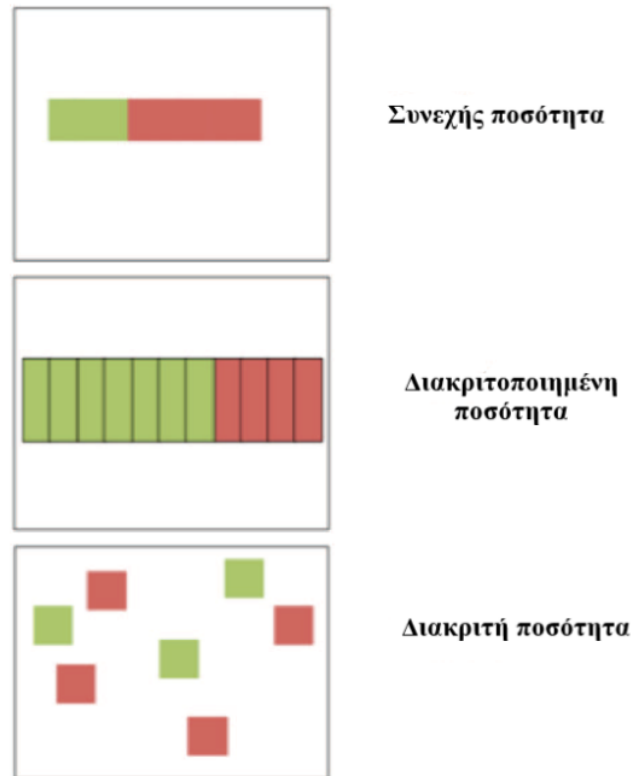
2.3 Διακριτά και συνεχή μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος εισαγωγής στην έννοια του κλάσματος είναι μέσα από διαδικασίες διαμέρισης συνεχών ή διακριτών ποσοτήτων, δίνοντας έτσι έμφαση στην όψη του κλάσματος ως μέρος-όλου. Ο χωρισμός του «όλου» σε ίσα μέρη συνιστά την πρώτη εμπειρία των παιδιών με τα κλάσματα. Σε αυτή την εμπειρία η παράμετρος *συνεχής* ή *διακριτή* μονάδα αναφοράς φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο.

Διακριτές είναι οι ποσότητες που αποτελούνται από ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων και εμπεριέχουν τη μονάδα αναφοράς, η οποία μπορεί να είναι ένα ή περισσότερα αντικείμενα (π.χ. 10 μήλα, με μονάδα αναφοράς το 1 μήλο). *Συνεχείς* είναι οι ποσότητες που είναι ενιαίες και για να μετρηθούν χρειάζονται μια εξωτερική μονάδα μέτρησης (π.χ. μήκος, με μονάδα μέτρησης το μέτρο). Αν η διδασκαλία περιοριστεί είτε σε συνεχείς, είτε σε διακριτές αναπαραστάσεις, τότε οι αντιλήψεις των μαθητών γύρω από την έννοια του κλάσματος θα είναι πολύ διαφορετικές. Το πλεονέκτημα του διακριτού υλικού είναι ο αριθμητικά ακριβής καθορισμός της κλασματικής μονάδας, ενώ το πλεονέκτημα του συνεχούς είναι ότι επιτρέπει στο μαθητή να αναπτύξει δυναμικά νοητικά εργαλεία, με σαφώς ευρύτερο φάσμα εφαρμογών. Το αν κατά τη διδασκαλία πρέπει να συνυπάρχουν αυτές οι δύο μορφές είναι ένα ερώτημα που έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές (Κολέζα, 2000).

Σύμφωνα με τους Saxe et al. (2007), το συνεχές μοντέλο εμβαδού είναι αυτό που χρησιμοποιείται συχνότερα στη διδακτική πράξη και είναι το κυρίαρχο σχήμα έκφρασης κλασμάτων από τους μαθητές. Επικρατεί η άποψη ότι η χρήση αυτού του μοντέλου είναι πιο εύκολη και πρέπει να προηγείται από τη χρήση διακριτών μοντέλων συνόλων (Κολέζα, 2000, Van de Walle, 2007). Ωστόσο, το μοντέλο εμβαδού έχει αρκετούς περιορισμούς (Saxe et al., 2007). Έτσι, όταν οι μαθητές έρθουν αντιμέτωποι με προβλήματα εντοπισμού μέρους συνόλου δυσκολεύονται. Το διακριτό μοντέλο προϋποθέτει την αντίληψη ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων ως μια οντότητα. Οι Behr et al. (1983) τάσσονται υπέρ της συνύπαρξης των δύο μοντέλων. Θεωρούν ότι οι στρατηγικές που επιστρατεύουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν δραστηριότητες με διακριτές και συνεχείς ποσότητες είναι σαφώς διαφορετικές. Αυτό δηλώνει ότι οι γνωστικές δομές που απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων με διακριτές ποσότητες, είναι σημαντικά διαφορετικές από αυτές που αφορούν σε συνεχείς ποσότητες.

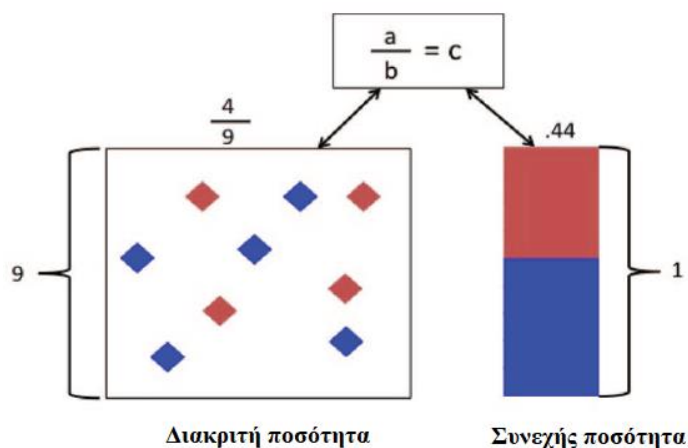
Μια εναλλακτική διάκριση στα μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων κάνουν οι DeWolf, Bassok, & Holyoak (2013, 2015) και τα κατηγοριοποιούν ως **μετρήσιμα** (countable) και **συνεχή** (continuous). Τα **συνεχή** μοντέλα είναι ενιαίες ποσότητες, όπως το μήκος, το βάρος, ο όγκος, και αντιμετωπίζονται ως ολότητες που δε σπάνε σε μικρότερα κομμάτια. Τα μετρήσιμα μοντέλα διακρίνονται σε **διακριτά** και **συνεχή-διακριτοποιημένα**. Τα διακριτά μοντέλα αποτελούνται από σύνολα διακριτών αντικειμένων, όπως για παράδειγμα οι χάντρες, τα μπαλόνια ή τα σταφύλια. Αντίθετα, τα διακριτοποιημένα είναι συνεχείς ποσότητες που διαμερίστηκαν σε ίσα κομμάτια, έτσι ώστε να καταστούν μετρήσιμες, για παράδειγμα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαιρεμένο σε ίσα μέρη ή μια πίτσα σε κομμάτια (βλ. Εικόνα 2.2).



Εικόνα 2.2: Παραδείγματα συνεχούς, διακριτής και διακριτοποιημένης ποσότητας
(DeWolf et al., 2013, σελ.390)

Η διάκριση αυτή έγινε από τους παραπάνω ερευνητές στην προσπάθειά τους να εξετάσουν αν υπάρχει σημασιολογική ευθυγράμμιση των κλασμάτων με τις διακριτές και διακριτοποιημένες ποσότητες και των δεκαδικών αριθμών με τις συνεχείς ποσότητες.

Η βασική διαφορά κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών είναι ότι τα κλάσματα έχουν μια διμερή δομή, $\frac{a}{b}$, η οποία εκφράζει μια συγκεκριμένη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών, a και b . Οι δεκαδικοί από την άλλη δίνουν μια αίσθηση μεγέθους, καθώς αναπαριστούν το μέγεθος αυτών των κλασματικών σχέσεων. Αυτή η διαφορά έχει σημαντικές επιπτώσεις για το πώς οι άνθρωποι (μαθητές και ενήλικες) αντιλαμβάνονται και συσχετίζουν αυτούς τους αριθμούς με συγκεκριμένες ποσότητες (βλ. Εικόνα 2.3).



Εικόνα 2.3: Σύνδεση κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών με διακριτές/διακριτοποιημένες και συνεχείς ποσότητες, αντίστοιχα (απόδοση από: Rapp et al., 2015, σελ.49)

Οι DeWolf et al., (2013, 2015) πραγματοποίησαν τις μελέτες τους σε δείγμα φοιτητών επιλεγμένο από Πανεπιστήμια των Η.Π.Α. Στόχος τους ήταν να διερευνήσουν αν οι άνθρωποι τείνουν να συσχετίζουν συγκεκριμένες μορφές αριθμών (κλάσματα ή δεκαδικούς), με συγκεκριμένους τύπους ποσοτήτων (μετρήσιμες ή συνεχείς ποσότητες). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες ήταν πιο ικανοί να εξάγουν ορθά συμπεράσματα για διακριτές και διακριτοποιημένες ποσότητες όταν αυτές συνδέονταν με κλάσματα, παρά όταν συνδέονταν με δεκαδικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, οι έρευνες έδειξαν πως οι Αμερικανοί φοιτητές προτιμούν να χρησιμοποιούν κλάσματα για να αναπαραστήσουν σχέσεις αναλογίας (είτε μέρους-όλου, είτε μέρους-μέρους) σε διακριτές ή διακριτοποιημένες ποσότητες, ενώ προτιμούν τους δεκαδικούς όταν πρόκειται για συνεχείς ποσότητες. Αυτή η διαφορά προκύπτει επειδή τα κλάσματα διατηρούν την αντιστοίχιση του αριθμητή και του παρονομαστή με δύο ξεχωριστά μετρήσιμα σύνολα, ενώ στους δεκαδικούς αυτή η αντιστοίχιση είναι αφανής. Συγχρόνως, οι δεκαδικοί αριθμοί παρέχουν την άμεση αντιστοίχισή τους με μια νοερή αριθμογραμμή και έτσι επιτρέπουν μια ευκολότερη εκτίμηση του μεγέθους μιας ποσότητας, έναντι των κλασμάτων.

Οι Rapp, Bassok, DeWolf & Holyoak (2015) επέκτειναν την παραπάνω έρευνα επιλέγοντας και αυτοί ένα δείγμα φοιτητών από Πανεπιστήμια των Η.Π.Α. και μελετώντας συγχρόνως τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών που είχαν οι παραπάνω φοιτητές στα σχολικά τους χρόνια. Η ανάλυση των εγχειριδίων επικεντρώθηκε στα λεκτικά προβλήματα και έδειξε ότι τα προβλήματα με κλάσματα συνδέονται κυρίως με διακριτές ή διακριτοποιημένες ποσότητες, ενώ τα προβλήματα με δεκαδικούς συνδέονται περισσότερο με συνεχείς ποσότητες. Τα αποτελέσματα της έρευνας υποδηλώνουν ότι οι συγγραφείς των

αντίστοιχων εγχειριδίων, στην προσπάθειά τους να επιλέξουν κατάλληλα παραδείγματα προκειμένου να πετύχουν τους προσδοκώμενους μαθησιακούς στόχους, συσχετίζουν συγκεκριμένα μεγέθη, με συγκεκριμένες συμβολικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών. Η συχνή έκθεση των μαθητών σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι μια πιθανή ερμηνεία για τις αντιλήψεις που δημιουργούν και τις επιδόσεις που έχουν στην ενήλικη ζωή τους.

Συγκεντρωτικά, τόσο από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, όσο και από τις επιδόσεις των φοιτητών, παρατηρείται μια σημασιολογική ευθυγράμμιση των δεκαδικών αριθμών με συνεχείς ποσότητες και των κλασμάτων με διακριτές ή διακριτοποιημένες. Αυτή η αντιστοίχιση πιθανόν να οφείλεται στη διευκόλυνση υπολογισμών. Τα κλάσματα απεικονίζουν πιο εύκολα μετρήσιμες ποσότητες (π.χ. τα $\frac{3}{4}$ των παιδιών είναι κορίτσια), καθώς χρησιμοποιούνται οικίες διαδικασίες, όπως η καταμέτρηση. Αντίθετα, η μονοδιάστατη δεκαδική αναπαράσταση τέτοιων ποσοτήτων φαίνεται πολύ λιγότερο φυσική (π.χ. το 0,75 των παιδιών είναι κορίτσια). Άλλωστε, για την αναπαράσταση σε δεκαδική μορφή απαιτείται ένας επιπλέον μετασχηματισμός, η διαίρεση. Αντίστοιχα, η δεκαδική μορφή διευκολύνει την απεικόνιση τμημάτων συνεχών ποσοτήτων, δεδομένου ότι τα απεριόριστα δεκαδικά ψηφία αναπαριστούν όλους τους πραγματικούς αριθμούς (δηλαδή όλα τα σημεία σε μια γραμμή), για παράδειγμα 0,72 λίτρα. Ωστόσο, μια τέτοια μέτρηση για να συμβολιστεί με κλάσμα, απαιτείται επίσης μετασχηματισμός.

Η παραπάνω σημασιολογική ευθυγράμμιση είναι μια πιθανή αιτία των πολλών δυσκολιών που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση των κλασμάτων και γενικότερα των ρητών αριθμών. Μια λύση, που θα μπορούσε να μειώσει αυτή την ευθυγράμμιση, είναι να αποκτήσουν οι μαθητές μεγαλύτερη εξοικείωση στη μετατροπή ρητών από μια μορφή σε άλλη, χρησιμοποιώντας προβλήματα με ποσότητες από την καθημερινή ζωή. Τέλος, μια άλλη διδακτική πρόταση είναι ότι θα μπορούσε η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών να προηγείται των κλασμάτων. Οι Moss και Case (1999) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που διδάχθηκαν τα κλάσματα ως μια εναλλακτική μορφή των δεκαδικών αριθμών, πέτυχαν βαθύτερη κατανόηση των ρητών αριθμών. Αυτή η πρόταση θα μπορούσε να συμβάλει θετικά στην ανάπτυξη της αντίληψης της ποσοτικής διάστασης των κλασμάτων (DeWolf et al., 2015; Rapp et al., 2015).

2.4 Περιορισμοί στη χρήση μοντέλων

Τα μοντέλα αναπαράστασης μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να ξεκαθαρίσουν έννοιες που συχνά τους μπερδεύουν. Ωστόσο, δυστυχώς, τα σχολικά εγχειρίδια και πολλοί εκπαιδευτικοί, ιδίως στις μεγάλες τάξεις, δε χρησιμοποιούν συχνά μοντέλα για την ανάπτυξη των κλασμάτων και όταν το κάνουν τείνουν να χρησιμοποιούν μόνο τα μοντέλα επιφάνειας. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές συχνά δεν μπορούν να διερευνήσουν τα κλάσματα με μια ποικιλία μοντέλων και δεν έχουν αρκετό χρόνο για να συνδέσουν τα μοντέλα με τις σχετικές έννοιες (Van de Walle, 2007). Βέβαια, η απλή παρουσία μοντέλων αναπαράστασης δεν εξασφαλίζει την κατανόηση των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών. Η αποτελεσματική τους χρήση εξαρτάται από το διδακτικό πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιούνται. Ιδέες που ισχύουν σε συγκεκριμένα πλαίσια, όπως το ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, ή ότι το κλάσμα είναι μέρος του όλου, αποπροσανατολίζουν όταν επεκτείνονται σε νέα πεδία.

Ο πιο κοινός τρόπος εισαγωγής των κλασμάτων στους μαθητές είναι μέσω του διακριτοποιημένου μοντέλου επιφάνειας. Δηλαδή, μέσω μιας ολότητας, διαιρεμένης εκ των προτέρων σε ίσα μέρη, από τα οποία μερικά ξεχωρίζουν από τα υπόλοιπα μέρη επειδή, για παράδειγμα, είναι σκιασμένα. Το μοντέλο αυτό είναι ένα ισχυρό οπτικό μοντέλο, με το οποίο τα παιδιά νιώθουν μεγάλη άνεση. Παρομοιάζει καταστάσεις της πραγματικής ζωής και επιτρέπει στους μαθητές να βασίζονται στις άτυπες γνώσεις τους, όπως η δίκαιη μοιρασιά, καθώς μοιράζονται πίτσες, σοκολάτες και άλλες αντίστοιχα συνεχείς-διακριτοποιημένες ποσότητες (Nunes & Bryant, 2007; Saxe et al., 2007).

Ωστόσο, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η προσκόλληση και συχνή χρήση τέτοιων στερεότυπων μοντέλων αναπαράστασης, περιορίζει την κατανόηση και συχνά οδηγεί τα παιδιά σε λάθη. Τα μοντέλα αυτά ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν για τα κλάσματα ένα είδος διαδικασίας διπλής καταμέτρησης – δηλαδή, να απαριθμούν τον συνολικό αριθμό των μερών και μετά τα σκιασμένα μέρη – χωρίς να κατανοούν τη σπουδαιότητα αυτού του νέου είδους αριθμού (Nunes & Bryant, 2007). Αντίστοιχα, η Moss (2005) ανέπτυξε τους περιορισμούς που έχει το πιο διαδεδομένο μοντέλο αναπαράστασης κλασμάτων: ο διακριτοποιημένος κυκλικός δίσκος. Θεωρεί ότι το μοντέλο αυτό υποστηρίζει την προσθετική σκέψη και όχι την πολλαπλασιαστική, η οποία απαιτείται για τα κλάσματα.

Σε παράδειγμά της αναφέρει την προσπάθεια ενός μαθητή να συγκρίνει τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και

$\frac{3}{4}$. Ο μαθητής ισχυρίστηκε ότι τα κλάσματα είναι ίσα, καθώς και στα δύο λείπει «ένα κομμάτι από το όλο». Ο μαθητής, για να αιτιολογήσει την άποψή του, σχεδίασε δύο κυκλικούς δίσκους, διαμερίζοντάς τους σε τρία και σε τέσσερα ίσα μέρη αντίστοιχα. Ωστόσο, αγνόησε το σχετικό μέγεθος των κομματιών και απλώς αναφέρθηκε στο πλήθος τους. Γενικότερα, τα παιδιά τείνουν να αντιμετωπίζουν τα μεμονωμένα μέρη που προκύπτουν από την ισοδιαμέριση ως διακριτά αντικείμενα. Παρότι η αναπαράσταση του κυκλικού δίσκου έχει τη δυνατότητα να αναδείξει τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που ενυπάρχουν στους κλασματικούς αριθμούς, επιτρέπει στους μαθητές να βασίζονται στις προσθετικές σχέσεις.

Σύμφωνα με τη Moss (2005), η προσθετική σκέψη είναι η πηγή πολλών παρανοήσεων για τα κλάσματα και γενικότερα για τους ρητούς αριθμούς. Ουσιαστικά, οι μαθητές, συχνά και οι ενήλικες, χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς και τις διακριτές ποσότητες και τη μεταφέρουν στο πεδίο των ρητών αριθμών. Με αποτέλεσμα, αντί να δουλεύουν την πολλαπλασιαστική σχέση του «μέρους» και του «όλου», δουλεύουν την προσθετική σχέση με εργαλεία καταμέτρησης.

Η διδασκαλία που περιορίζεται σε καταστάσεις της μορφής «μέρος-όλου» και παραβλέπει την πολυπλοκότητα και την ποικιλομορφία των εννοιών που εμπεριέχονται στα κλάσματα και τους ρητούς αριθμούς, ελλοχεύει πολλούς κινδύνους και περιορίζει την κατανόηση. Η δημιουργία της αντίληψης του κλάσματος ως «μέρος» κάποιου «όλου», επαρκεί, στην καλύτερη περίπτωση, μόνο για το πρώτο στάδιο της διδασκαλίας, δηλαδή για την αναπαράσταση των απλών κλασμάτων. Οι δυσκολίες και η σύγχυση των μαθητών κορυφώνονται όταν έρθουν αντιμέτωποι με καταχρηστικά κλάσματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό των Siegler, Fazio, Bailey & Zhou (2013), οι οποίοι αναφέρουν τη σκέψη ενός μαθητή που υποστηρίζει ότι «το κλάσμα $\frac{4}{3}$ δεν έχει νόημα, καθώς δεν μπορούμε να πάρουμε τέσσερα μέρη ενός αντικειμένου, το οποίο χωρίζεται στα τρία».

Ερευνητές υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία των κλασμάτων, αντί να βασίζεται στην πλέον εδραιωμένη προσθετική σκέψη των παιδιών, θα πρέπει να υποστηρίζει την πολλαπλασιαστική σκέψη, χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ενέργειες, ώστε οι μαθητές να υπερβούν τις παραπάνω αντιλήψεις. Κατά καιρούς, έχουν προταθεί εναλλακτικές εκπαιδευτικές προσεγγίσεις για να μπορέσουν οι μαθητές να ξεπεράσουν αυτά τα εμπόδια.

Για παράδειγμα ο Kieren (1994) ανέπτυξε ένα πρόγραμμα για τη διδασκαλία των κλασμάτων που βασίζεται στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις του ισομερισμού και της επανάληψης. Στην προσέγγιση αυτή προτίμησε να χρησιμοποιήσει διπλώσεις χαρτιού, αντί για κυκλικούς δίσκους, ως την κύρια κατάσταση του προβλήματος. Μέσω αυτής της πρότασης έρχονται στην επιφάνεια κι άλλες όψεις του κλάσματος, όπως του τελεστή και του κλάσματος ως μέτρο. Μία άλλη διδακτική πρόταση έκανε ο Streefland (1993), δίνοντας έμφαση στην ενέργεια της ισοδιαμέρισης και την έννοια του πηλίκου μέσα από ρεαλιστικές καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς (π.χ., πέντε παιδιά μοιράζονται δύο μπάρες σοκολάτας). Για να αντιμετωπίσουν αυτές τις καταστάσεις τα παιδιά δημιουργούν ένα σύστημα συμβολισμού, το οποίο δίνει έμφαση στις αναλογικές και όχι στις προσθετικές σχέσεις. Τέλος, πολλοί ερευνητές προτείνουν το μοντέλο της αριθμογραμμής ως το βασικό εργαλείο για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Το μοντέλο θεωρείται μια σημαντική αναπαράσταση για τα κλάσματα, παρόλο που είναι πιο αφηρημένη σε σχέση με άλλα συνεχή μοντέλα που οι μαθητές μπορούν να χειριστούν ενεργά. Θεωρείται ένας σημαντικός μηχανισμός που συνδέει την εννοιολογική με τη διαδικαστική γνώση και οδηγεί σε μία βαθύτερη κατανόηση των κλασμάτων (Cramer & Wyberg, 2009).

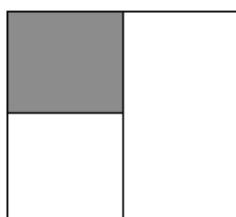
Συνοψίζοντας, οι ερευνητές συμφωνούν ότι η διδασκαλία των κλασμάτων πρέπει να γίνεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης. Έχει αποδειχθεί ότι οι μαθητές που έρχονται σε επαφή με διαφορετικές αναπαραστάσεις κλασμάτων και τους ζητείται να μετακινούνται από τη μία στην άλλη, τελικά αναπτύσσουν μια πιο ολοκληρωμένη αντίληψη για τα κλάσματα. Ωστόσο, η χρησιμότητά τους είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να οικοδομήσουν την κατανόησή τους. Επομένως, πρέπει να τηρηθεί η ισορροπία ανάμεσα στη χρήση των μοντέλων και την υπερβολική εξάρτηση από αυτά.

2.5 Λάθη που σχετίζονται με τις διάφορες αναπαραστάσεις

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται συχνότερα στη διδασκαλία των κλασμάτων είναι τα μοντέλα επιφάνειας, στα οποία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τις άτυπες γνώσεις τους για τη δίκαιη μοιρασιά, όπως ο ισομερισμός πίτσας, σοκολάτας κ.α. (Saxe et al., 2007). Παρόλα αυτά, πολλοί ερευνητές συμφωνούν πως στη συχνή ενασχόληση των μαθητών με στερεότυπες τέτοιες αναπαραστάσεις ελλοχεύουν

αρκετοί κίνδυνοι που έχουν ήδη συζητηθεί. Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε λάθη που κάνουν οι μαθητές σε αναπαραστάσεις κλασμάτων με μοντέλα επιφάνειας, όταν αυτά αποκλίνουν από τη στερεοτυπική μορφή.

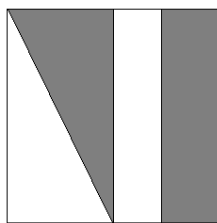
Μια σημαντική αδυναμία των μαθητών είναι η αναγνώριση του κλάσματος ως μέρος μιας συνεχούς επιφάνειας, στην περίπτωση που η επιφάνεια δεν είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη. Για παράδειγμα, σε έρευνα του Saxe et al. (2007) διαπιστώθηκε πως στην ερώτηση «ποιοό κλάσμα αναπαριστά το σκιασμένο κομμάτι στο παρακάτω σχήμα?», πολλοί μαθητές έδωσαν την απάντηση $\frac{1}{3}$ (βλ. Εικόνα 2.4).



Εικόνα 2.4: Τετράγωνο χωρισμένο σε άνισα μέρη (Πηγή: Saxe et al., 2007, σελ. 223)

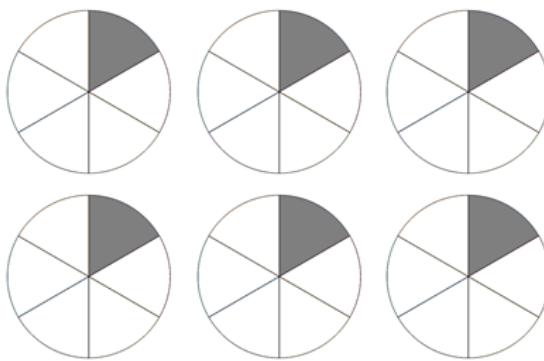
Οι μαθητές ακολούθησαν τη στρατηγική της καταμέτρησης των κομματιών της επιφάνειας, αδιαφορώντας για το μέγεθός τους σε σχέση το συνολικό μέγεθος της επιφάνειας. Εδώ φαίνεται ότι οι μαθητές εστίασαν στο πλήθος των σκιασμένων κομματιών και στο συνολικό πλήθος των κομματιών, δεδομένου ότι όταν το επίμαχο μέγεθος είναι το πλήθος μιας συλλογής φυσικών αντικειμένων, τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά τους πρέπει να αγνοηθούν.

Μια άλλη παρανόηση των μαθητών, η οποία πιθανόν σχετίζεται με τον τρόπο που συνήθως παρουσιάζονται τα μοντέλα επιφάνειας, είναι να θεωρούν ότι τα κομμάτια μιας ισομερισμένης επιφάνειας πρέπει να έχουν και το ίδιο σχήμα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της Εικόνας 2.5 αρκετοί μαθητές ισχυρίζονται ότι η σκιασμένη περιοχή δεν αντιπροσωπεύει τα $\frac{2}{4}$ του τετραγώνου, γιατί τα κομμάτια «δεν είναι ίδια» (Mathematics Navigator, 2015).



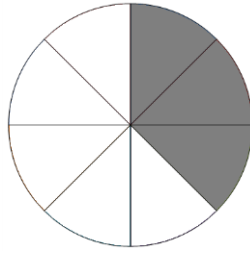
Εικόνα 2.5: Τετράγωνο χωρισμένο σε διαφορετικά σχήματα ίδιας επιφάνειας

Επίσης, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στην αναγνώριση του κλάσματος ως μέρος επιφάνειας, γιατί στρέφουν την προσοχή τους μόνο στα μέρη της επιφάνειας που χρωματίζονται ή αποκόπτονται, χωρίς να δίνουν σημασία στο όλο. Για παράδειγμα, σύμφωνα με το Mathematics Navigator (2015), σε μια δραστηριότητα όπως αυτή της Εικόνας 2.6 στην οποία υπάρχουν αρκετά σχήματα, οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται εύκολα ποιά είναι η μονάδα, ώστε να αναγνωρίσουν το μέρος της χρωματισμένης επιφάνειας. Επομένως, δίνουν την απάντηση $\frac{6}{30}$, έναντι της σωστής $\frac{6}{6}$.



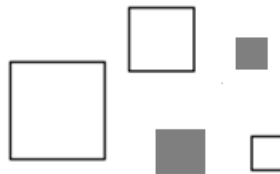
Εικόνα 2.6: Κύκλοι χωρισμένοι σε έξι ίσα μέρη

Επιπλέον, συχνό φαινόμενο είναι ότι οι μαθητές, να συγχέουν τη σχέση μέρους-όλου με τη σχέση μέρους-μέρους και να αντιστοιχούν το κλάσμα που εκφράζει την πρώτη, στη δεύτερη. Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις όπως της Εικόνας 2.7, πολλοί μαθητές θα ισχυρίζονταν ότι είναι σκιασμένα τα $\frac{3}{5}$ της επιφάνειας.



Εικόνα 2.7: Κύκλος χωρισμένος σε οκτώ ίσα μέρη

Όμοια λάθη παρατηρούνται όταν οι μαθητές έχουν να διαχειριστούν ένα σύνολο διακριτών αντικειμένων. Είναι πολύ πιθανό οι μαθητές να δώσουν απάντηση αναφερόμενοι σε λόγο και όχι στο μέρος του συνόλου, ιδιαίτερα αν τα αντικείμενα δεν έχουν το ίδιο σχήμα ή μέγεθος. Παραδείγματος χάρη, στην ερώτηση «*Τι μέρος των τετραγώνων αποτελούν τα σκιασμένα τετράγωνα στο παρακάτω σχήμα?*», κάποιοι μαθητές θα έδιναν την λανθασμένη απάντηση $\frac{2}{3}$, ενώ άλλοι θα υποστήριζαν ότι η συγκεκριμένη περίπτωση δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με κλάσμα, διότι τα τετράγωνα είναι διαφορετικού μεγέθους (βλ. Εικόνα 2.8).



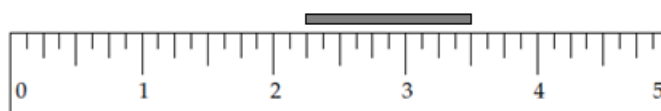
Εικόνα 2.8: «Τι μέρος των τετραγώνων αποτελούν τα σκιασμένα τετράγωνα?»

Οι μαθητές τείνουν να υπεργενικεύουν τις εμπειρίες τους από τα μοντέλα επιφάνειας και αναπτύσσουν την αντίληψη ότι όταν μιλάμε για σύνολα αντικειμένων, πρέπει όλα τα αντικείμενα να είναι ίδιου μεγέθους.

Επίσης, δυσκολία των μαθητών παρατηρείται όταν το πλήθος των αντικειμένων δε συμπίπτει με τον παρονομαστή του κλάσματος που τους δίνεται, όπως για παράδειγμα όταν τους ζητείται να χρωματίσουν το $\frac{1}{4}$ ενός συνόλου 20 αντικειμένων.

3.7 Δυσκολίες μαθητών με τη χρήση της αριθμογραμμής

Από τα συνεχή μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων, η χρήση της αριθμογραμμής ενέχει τις περισσότερες δυσκολίες. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιστοιχίσουν ένα κλάσμα στην αριθμογραμμή όταν ο αριθμός των ίσων μερών που έχει διαμεριστεί η αριθμογραμμή είναι πολλαπλάσιος ή υποπολλαπλάσιος του παρονομαστή του κλάσματος (Behr et al., 1983, Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Για παράδειγμα, δυσκολεύονται να τοποθετήσουν το κλάσμα $\frac{7}{8}$ σε αριθμογραμμή που είναι χωρισμένη σε τέταρτα, δεύτερα ή δέκατα έκτα. Μια άλλη βασική παρανόηση που παρατηρείται είναι ότι πολλοί μαθητές δε θεωρούν το κλάσμα αριθμό, επομένως πιστεύουν ότι δεν μπορούν να το τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή, ενώ άλλοι μαθητές εντοπίζουν τη θέση του κλάσματος πάντα στα δεξιά της μονάδας, αντί του μηδενός (Hannula, 2003). Συγχρόνως, οι Keijzer & Terwel (2003, αναφορά στους Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) εντόπισαν ότι οι μαθητές συχνά, αντί να μετρούν τα διαστήματα της αριθμογραμμής, μετρούν τις γραμμές που χρησιμοποιούνται για να οριοθετήσουν αυτά τα διαστήματα. Επιπλέον, ιδιαίτερη δυσκολία παρουσιάζουν οι μαθητές στην αναγνώριση της μονάδας αναφοράς στην αριθμητική γραμμή (Behr et al., 1983). Σχετικό παράδειγμα παρουσιάζεται στο Mathematics Navigator(2015):



Εικόνα3.6: Πηγή:Mathematics Navigator 2015

Παρατηρώντας τον παραπάνω αριθμογραμμή (χάρακα), οι μαθητές εύκολα αντιλαμβάνονται ότι η μία ίντσα είναι η απόσταση από το μηδέν μέχρι το ένα. Ωστόσο, αδυνατούν να αντιληφθούν την ίντσα ως μονάδα αναφοράς σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του χάρακα.

Βέβαια, το γεγονός ότι τα παιδιά αποτυγχάνουν σε έργα που σχετίζονται με την αριθμογραμμή, δε σημαίνει ότι δεν έχουν την ικανότητα να κατανοήσουν τη χρήση και τη σημασία της. Η αποτυχία αυτή οφείλεται στην ελλιπή εξάσκηση πάνω σε αυτήν, καθώς οι μαθητές έχουν συνηθίσει αναπαραστάσεις του τύπου «μέρος-όλου». Η χρήση της αριθμογραμμής έχει επισημανθεί ως ουσιώδης για να οικοδομηθεί η κατανόηση του

μεγέθους ενός κλάσματος και να εδραιωθούν οι έννοιες της ισοδυναμίας και της πυκνότητας των ρητών αριθμών (Behr et al., 1983; Saxe et al., 2007). Αυτό που χρειάζεται είναι εξάσκηση και σωστή καθοδήγηση για το πώς οι μαθητές να χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή. Η συστηματική χρήση της μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και σε βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών.

Κεφάλαιο 3. Τα σχολικά εγχειρίδια

3.1 Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων

Ένα από τα θέματα που απασχολεί συχνά την ερευνητική κοινότητα της Μαθηματικής εκπαίδευσης είναι τα προγράμματα σπουδών. Μία από τις κύριες παραμέτρους ενός προγράμματος σπουδών είναι τα σχολικά εγχειρίδια. Επομένως, πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με το ζήτημα των σχολικών εγχειριδίων, καθώς θεωρούνται ο ενδιάμεσος κρίκος μεταξύ του αναλυτικού προγράμματος και της παιδαγωγικής πρακτικής στη σχολική τάξη.

Τα εγχειρίδια είναι εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης και λειτουργούν ως μέσο καθοδήγησης για τον εκπαιδευτικό. Επηρεάζουν το τί διδάσκουν οι δάσκαλοι, πώς το διδάσκουν και ποιές εργασίες ή δραστηριότητες αναθέτουν στους μαθητές. Διαμορφώνουν τα θέματα που καλύπτονται και το πώς παρουσιάζονται στη σχολική τάξη (Alajmi, 2012). Επίσης, θεωρείται πως ένα θέμα είναι πιο πιθανό να διδαχθεί στην τάξη αν συμπεριλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο, παρά αν παραλείπεται, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η παρουσία του διασφαλίζει ότι σίγουρα θα διδαχθεί. (Alajmi, 2012; Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010).

Όπως έχει υποστηριχθεί στη σχετική βιβλιογραφία, αποτελεί γεγονός ότι ένα εγχειρίδιο αντανακλά τους στόχους του εθνικού προγράμματος σπουδών και νομιμοποιεί τις εθνικές πολιτισμικές παραδόσεις (Haggarty & Pepin, 2002). Θεωρείται η οπτικοποίηση του προγράμματος σπουδών και σε μεγάλο βαθμό, προσδιορίζει το τί διδάσκεται και τί μαθαίνουν οι μαθητές (Son & Senk, 2010).

Όσον αφορά τον τρόπο χρήσης των εγχειριδίων των Μαθηματικών, οι Robitaille και Travers (1992) (αναφορά στους Fan, Jones, Wang & Xu, 2013), υποστηρίζουν ότι η εξάρτηση από το εγχειρίδιο είναι ίσως περισσότερο χαρακτηριστικό της διδασκαλίας των Μαθηματικών, παρά οποιουδήποτε άλλου γνωστικού αντικειμένου. Τα αποτελέσματα του TIMSS δείχνουν ότι οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν το βιβλίο των μαθηματικών ως κύριο πόρο τους όταν επιλέγουν μεθόδους διδασκαλίας (Schmidt et al., 1997, αναφορά στο Alajmi, 2012).

Ωστόσο, παρά τη διάχυτη παρουσία των εγχειριδίων στη σχολική και εκπαιδευτική πρακτική, λίγες μελέτες έχουν επικεντρώσει την προσοχή τους στα Μαθηματικά εγχειρίδια όσον αφορά το μαθηματικό τους περιεχόμενο. Ένας λόγος για αυτό, σύμφωνα με την Mesa (2004), πιθανόν να είναι ότι στην προσπάθεια να κατανοηθεί η φύση των Μαθηματικών που μαθαίνουν οι μαθητές, θεωρείται συχνά πιο σημαντικό να μελετηθεί το πώς οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα εγχειρίδια, παρά τη μελέτη των ίδιων των εγχειριδίων. Εντούτοις, η ανάλυσή τους δεν μπορεί να παραλείπεται, διότι αυτά εξυπηρετούν πολλούς σκοπούς.

3.2 Είδη ανάλυσης σχολικών Μαθηματικών εγχειριδίων

Τα τελευταία χρόνια, η ανάλυση των μαθηματικών σχολικών εγχειριδίων απασχολεί έντονα τους ερευνητές της Μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι έρευνες που έχουν γίνει, έχουν μελετήσει ένα ευρύ φάσμα χαρακτηριστικών, όπως τα φυσικά χαρακτηριστικά των βιβλίων (μέγεθος, αριθμός κεφαλαίων, ποσοστό σελίδων ανά θεματική περιοχή), το περιεχόμενο και τη δομή των κεφαλαίων, το βάθος της μαθηματικής έρευνας και της ποιότητας του υλικού (Alajmi, 2012).

Οι Fan et al. (2013) θεωρούν ότι η ανάλυση εγχειριδίων είναι ένας ευρύς όρος που περιλαμβάνει κυρίως:

- την ανάλυση ενός εγχειριδίου ως προς τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται μία ή περισσότερες μαθηματικές ιδέες σε αυτό ή πώς μία περιοχή ενδιαφέροντος εκφράζεται με αυτό και
- την ανάλυση διαφορετικών σειρών εγχειριδίων από την ίδια χώρα ή, πιο συχνά, από διαφορετικές χώρες, με στόχο τον προσδιορισμό των διαφορών και των ομοιοτήτων τους, μέσω της σύγκρισής τους.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, οι πέντε διαστάσεις της ανάλυσης των εγχειριδίων είναι οι εξής: (1) μαθηματικό περιεχόμενο και μαθηματικές έννοιες, (2) γνώση (cognition) και παιδαγωγική (τρόπος διδασκαλίας) ή, με άλλα λόγια, οι παιδαγωγικές προθέσεις (3) φύλο, εθνικότητα, ισότητα, κουλτούρα και αξίες, (4) σύγκριση διαφορετικών εγχειριδίων και (5) εννοιολόγηση (conceptualization) και μεθοδολογικά θέματα.

Επίσης, οι Pepin και Haggarty (2001) επισημαίνουν ότι η ανάλυση ενός σχολικού εγχειριδίου μπορεί να γίνει τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο και τη δομή του, όσο και σε σχέση με τον τρόπο εφαρμογής του στη σχολική τάξη. Συγκεκριμένα, εστιάζουν σε τρεις βασικές περιοχές:

- Στις *μαθηματικές προθέσεις* των εγχειριδίων, δηλαδή τα Μαθηματικά που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια, οι πεποιθήσεις που προωθούνται για τη φύση των Μαθηματικών και τον τρόπο συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης.
- Στις *διδακτικές προθέσεις* των εγχειριδίων, δηλαδή τους τρόπους με τους οποίους ενισχύεται ο μαθητής στην κατανόηση του περιεχομένου και ο δάσκαλος στη διδασκαλία του.
- Στα *κοινωνιολογικά πλαίσια* και τις *πολιτισμικές παραδόσεις* που εμφανίζονται στα εγχειρίδια.

Σύμφωνα με την Κολέζα (2009), οι διαστάσεις ανάλυσης του περιεχομένου ενός εγχειριδίου Μαθηματικών συνοψίζονται σε δύο ευρύτερες κατηγορίες:

- Τη Γνωσιακή/Εννοιολογική, που περιλαμβάνει τις μαθηματικές, γνωσιακές και διδακτικές προθέσεις των εγχειριδίων και
- Την Παιδαγωγική, που περιλαμβάνει τις κοινωνιολογικές και πολιτισμικές προθέσεις των εγχειριδίων

Σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο των Μαθηματικών σχολικών εγχειριδίων, έρευνες ανέδειξαν διάφορα μοντέλα ανάλυσης. Από τα πιο γνωστά, όπως αναφέρει η Κολέζα (2009) είναι εκείνα των Schmidt et al. (1996, 1997) και Van Dormolen (1986). Ο Van Dormolen προτείνει να αξιολογηθεί το μαθηματικό περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων ως προς την:

- Θεωρητική πτυχή (θεωρήματα, ορισμούς, αξιώματα)
- Αλγοριθμική πτυχή (π.χ., εξηγούνται ρητά οι αλγόριθμοι;)
- Λογική πτυχή (π.χ., εκθέτονται οι λογικοί κανόνες σε σχέση με τη θεωρία και την ισχύ των αλγορίθμων;)
- Μεθοδολογική πτυχή (π.χ., εξηγείται ο τρόπος δράσης στο πλαίσιο μιας ευρετικής αντιμετώπισης των προβλημάτων;)

- Επικοινωνιακή πτυχή (μορφές επικοινωνίας του περιεχομένου, π.χ., μέσω αναπαραστάσεων, συγκεκριμένων γλωσσικών εκφράσεων κλπ.)

Οι Schmidt et al. (1996, 1997), από την άλλη, προτείνουν να αναλυθούν τα εγχειρίδια ως προς την:

- Πολυπλοκότητα του θέματος, δηλαδή ποιές εννοιολογικές διαστάσεις του θέματος εμφανίζονται
- Εξέλιξη της πολυπλοκότητας, δηλαδή πώς αναπτύσσεται ένα θέμα σε ένα εγχειρίδιο ή στο σύνολο των εγχειριδίων
- Γνωστικής πολυπλοκότητας, δηλαδή οι παιδαγωγικές προθέσεις του θέματος, τι θέλουμε να μπορούν να κάνουν οι μαθητές, ως αποτέλεσμα της μάθησης του θέματος)

Οι Charalambous et al., (2010) πρότειναν τρεις ευρείες κατηγορίες προσεγγίσεων για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, τις οποίες κατέταξαν ως εξής: *οριζόντια* ανάλυση, *κάθετη* ανάλυση και *εμπλαισιωμένη* ανάλυση (contextual). Στην *οριζόντια* ανάλυση, το βιβλίο εξετάζεται στο σύνολό του και η ανάλυση επικεντρώνεται στα γενικά χαρακτηριστικά, όπως η φυσική εμφάνιση και η οργάνωση του περιεχομένου σε όλο το βιβλίο. Στην *κάθετη* ανάλυση, εξετάζεται πώς το σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο θεωρείται ένα «περιβάλλον κατασκευής γνώσης», αντιμετωπίζει μια μαθηματική έννοια. Με την ανάλυση αυτή, μπορούν να εξεταστούν διάφορες πτυχές του βιβλίου, όπως μαθηματική, παιδαγωγική, κοινωνικοπολιτισμική (Pepin & Haggarty, 2001). Η τρίτη προσέγγιση, εξετάζει τους τρόπους με τους οποίους τα εγχειρίδια χρησιμοποιούνται στις εκπαιδευτικές δραστηριότητες, είτε από τους εκπαιδευτικούς, είτε από τους μαθητές. Αυτή η προσέγγιση ασχολείται ευθέως με προβλήματα εφαρμογής του αναλυτικού προγράμματος σπουδών, δηλαδή πώς να υλοποιηθούν οι προθέσεις των σχολικών εγχειριδίων. Οι παραπάνω ερευνητές υποστηρίζουν ότι ένα πλαίσιο που ενσωματώνει τόσο την οριζόντια, όσο και την κάθετη ανάλυση των εγχειριδίων, είναι απαραίτητο για την εμπλαισιωμένη ανάλυση. Επιπλέον, η ανάλυση που θα προκύψει συνδυάζοντας τις δύο πρώτες διαστάσεις, μπορεί να αποκαλύψει χαρακτηριστικά των βιβλίων, τα οποία αλλιώς θα χάνονταν αν αναλυόταν μόνο μία από αυτές τις πλευρές.

Οι Son & Senk (2010) θεωρούν ότι η ανάλυση σχολικών εγχειριδίων μπορεί να ταξινομηθεί σε δύο ομάδες, *ανάλυση περιεχομένου* και *ανάλυση προβλήματος*. Ως βασικά χαρακτηριστικά για την ανάλυση του περιεχομένου αναφέρουν τον αριθμό μαθημάτων που αφιερώνεται σε ένα θέμα, οι στόχοι που καθορίζονται, οι καταστάσεις που χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή και την ανάπτυξη μιας έννοιας, οι τύποι αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται και οι υπολογιστικές στρατηγικές που προωθούνται. Ενώ ως προς την ανάλυση προβλήματος, οι πτυχές που ξεχωρίζουν ως πιο σημαντικές είναι οι εξής: (1) ο αριθμός των απαιτούμενων βημάτων, δηλαδή αν απαιτούνται απλές ή πολλαπλές υπολογιστικές διαδικασίες, (2) το πλαίσιο αν είναι αμιγώς μαθηματικό ή απεικονιστικό, (3) ο τύπος απάντησης (αριθμητική απάντηση ή εξήγηση) και (4) η γνωστική προσδοκία (εννοιολογική κατανόηση, διαδικαστική ευχέρεια, μαθηματική αιτιολόγηση, χρήση αναπαραστάσεων).

Συνεπώς, η ανάλυση ενός σχολικού εγχειριδίου είναι μία διαδικασία η οποία μπορεί να διεξαχθεί από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Προϋπόθεση οποιασδήποτε μορφής ανάλυσης αποτελεί ο σαφής προσδιορισμός των κριτηρίων ανάλυσης. Η επιλογή αυτή γίνεται ανάλογα με το είδος, το αντικείμενο και το σκοπό της αξιολόγησης που επιδιώκει ο κάθε ερευνητής.

3.3 Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων και ρητοί αριθμοί

Ο Alajmi (2012), στην προσπάθειά του να αναλύσει την παρουσίαση των κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού της Ιαπωνίας, του Κουβέιτ και των Η.Π.Α, δημιούργησε ένα πλαίσιο και σχήμα κωδικοποίησης. Η ανάλυση αυτή επικεντρώθηκε σε τρεις πτυχές των σχολικών βιβλίων: στα *φυσικά χαρακτηριστικά*, στη *διάρθρωση* των μαθημάτων και στη *φύση* των προβλημάτων.

Για την ανάλυση των φυσικών χαρακτηριστικών χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του Flanders (1994). Υπολογίστηκαν όλες οι σελίδες του κάθε βιβλίου, καθώς και οι σελίδες που αφιερώνονται στα κλάσματα, εξαιρουμένων των παραρτημάτων και των συμπληρωματικών ασκήσεων στο τέλος των εγχειριδίων. Επίσης, για τον προσδιορισμό της θέσης των κεφαλαίων που αναφέρονται στα κλάσματα, υπολογίστηκε το ποσοστό των σελίδων που προηγούνται αυτών των κεφαλαίων.

Η ανάλυση της διάρθρωσης των μαθημάτων έγινε για να φανεί πως παρουσιάζονται συνολικά τα κλάσματα σε κάθε τάξη. Μελετήθηκε η δομή των μαθημάτων (πώς ξεκινάνε, τί ακολουθεί, αν χρησιμοποιούνται αναπαραστάσεις και τί είδους), καθώς επίσης και το σύνολο των θεμάτων που εξετάζει το σχολικό εγχειρίδιο κάθε τάξης.

Η ανάλυση της φύσης των μαθηματικών προβλημάτων περιελάμβανε τέσσερα βασικά στοιχεία:

- Το γενικό πλαίσιο παρουσίασης των προβλημάτων
 - τα προβλήματα παρουσιάζονται με αμιγώς μαθηματικό τρόπο, με λεκτικό τρόπο ή με εικονικές αναπαραστάσεις;
- Τη χρήση χειριστικών υλικών
 - π.χ. ράβδοι κλασμάτων, διπλωμένες λωρίδες χαρτιού, pattern blocks.
- Τις μεθόδους υπολογισμού
 - π.χ. υπολογιστικοί αλγόριθμοι, νοερές πράξεις, εκτίμηση αποτελέσματος, χρήση αριθμομηχανής
- Την επανάληψη ή μη μαθηματικών προβλημάτων
 - αν ένα πρόβλημα παρουσιάστηκε σε προηγούμενη τάξη, τότε εξετάζονταν αν παρουσιάστηκε με νέο τρόπο, δηλαδή αν ζητήθηκαν ίδιες ερωτήσεις, αν είχε την ίδια προσδοκία μάθησης, αν παρουσιάστηκε στο ίδιο πλαίσιο και αν απαιτούσε την ίδια μέθοδο υπολογισμού.

Οι Charalambous et al. (2010) πραγματοποίησαν μια συγκριτική μελέτη με σκοπό να εξετάσουν πώς παρουσιάζεται η πρόσθεση και η αφαίρεση κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου, της Ιρλανδίας και του Ταιβάν. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποίησαν ένα πλαίσιο αναφοράς, ειδικά σχεδιασμένο, για να διερευνήσει τις δυνατότητες μάθησης που προσφέρουν τα εγχειρίδια από την άποψη της παρουσίασης του περιεχομένου και τις προσδοκίες του εγχειριδίου, όπως αυτές εμφανίζονται στα σχετικά έργα (tasks). Το πλαίσιο αυτό αναλύει τα βιβλία σε δύο διαστάσεις, οριζόντια και κάθετη. Ωστόσο, η προσπάθεια ανάπτυξης ενός τέτοιου πλαισίου εμπεριέχει τον κίνδυνο να αποτελεί μια σύνθεση από διαφορετικά κριτήρια, χωρίς κανένα υπόβαθρο δομής ή οργάνωσης. Αυτό μπορεί να περιορίσει τις δυνατότητες του πλαισίου ως εργαλείο για την κατανόηση των διαφορετικών δυνατοτήτων μάθησης που προσφέρουν τα εγχειρίδια στους μαθητές και τους δασκάλους. Επομένως, οι ερευνητές οργάνωσαν τα κριτήρια σε κατηγορίες και υποκατηγορίες, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1.

HORIZONTAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK		
Background Information - Title - Number of books - Pages (Number and Density) - Profile of authors and advisory committee - Publisher and year of publication - Accompanying materials (e.g., teachers' guides, resource materials)		Overall Structure - Number of units/lessons and average number of pages per unit/lesson - Structure of units/lessons - Topics covered - Sequencing of topics
VERTICAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK		
Communicated to Students	Required of Students	Connections
<i>Mathematical Content</i> - Topic-specific construct, structure etc. (e.g. part-whole, ratio, operator, quotient, measure fraction constructs) - Definitions, rules, conventions - Illustrations-representations (irrelevant, relevant to the context but not to the mathematics, supporting the mathematics)	- Potential Cognitive Demands (memorization, procedures with connections, procedures without connections, doing mathematics) - Type of Response (answer only, answer and mathematical sentence, explanation, justification)	- Connecting within and between strands - Classroom instruction - textbook connections - Connecting to situations outside of school
<i>Mathematical Practices</i> - Worked examples - Modeling thinking		
<i>Attitudes</i> - Equity - View of mathematics		

Εικόνα 3.1: Το πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων
(Charalambous et al., 2010, σελ.123)

Η οριζόντια ανάλυση περιλαμβάνει δύο κατηγορίες: (1) γενικές πληροφορίες για το εγχειρίδιο και (2) συνολική δομή του εγχειριδίου. Η πρώτη κατηγορία παρέχει μια γενική περιγραφική επισκόπηση του εγχειριδίου, ενώ η δεύτερη αφορά τα θέματα που καλύπτονται στο εγχειρίδιο και την οργάνωσή τους. Η κάθετη ανάλυση εστιάζει σε τρεις κατηγορίες: (1) μετάδοση προς τους μαθητές, (2) απαιτήσεις από τους μαθητές και (3) συνδέσεις. Η πρώτη κατηγορία αναφέρεται στο πώς το εγχειρίδιο μεταφέρει τα Μαθηματικά προς τους μαθητές και αναλύεται σε τρεις υποκατηγορίες: το μαθηματικό περιεχόμενο, τις μαθηματικές πρακτικές και τις στάσεις απέναντι στο θέμα. Η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται στις απαιτήσεις που έχει το βιβλίο από τους μαθητές και περιλαμβάνει δύο κριτήρια: πιθανές γνωστικές απαιτήσεις και τύποι απαντήσεων. Τέλος, η τρίτη κατηγορία αναλύει τις

συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μαθηματικών θεμάτων, καθώς επίσης και τις συνδέσεις του βιβλίου και της διδασκαλίας στην τάξη ή με καταστάσεις εκτός σχολείου.

Εντούτοις, οι Charalambous et al. 2010, για το σκοπό της έρευνάς τους, επέλεξαν μόλις έξι κριτήρια (δύο από την οριζόντια και τέσσερα από την κάθετη ανάλυση), ώστε να ερευνηθούν οι ομοιότητες και διαφορές του τρόπου παρουσίασης της πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων μεταξύ των εγχειριδίων των τριών χωρών. Για την οριζόντια ανάλυση επιλέχθηκαν κι εξετάστηκαν οι ενότητες που σχετίζονται με την πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, καθώς και η αλληλουχία τους. Για την κάθετη ανάλυση, επιλέχθηκαν δύο κριτήρια της πρώτης κατηγορίας: οι όψεις του κλάσματος και τα λυμένα παραδείγματα που χρησιμοποιούν τα εγχειρίδια. Οι επιλογές αυτές έγιναν διότι, σύμφωνα με έρευνες, οι διαφορετικές όψεις του κλάσματος βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν πλήρως την έννοια του κλάσματος, ενώ οι λυμένες ασκήσεις διευκολύνουν την απόκτηση δεξιοτήτων. Τέλος, αναλύθηκαν τα κριτήρια της κατηγορίας *«απαιτήσεις από τους μαθητές»*, διότι η δυσκολία μιας δραστηριότητας επηρεάζει το κατά πόσο θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα ενισχύσει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Μια διαφορετική ανάλυση εγχειριδίων έγινε από τους Rapp et al. (2015). Πραγματοποίησαν την ανάλυση μιας σειράς σχολικών εγχειριδίων των Η.Π.Α., από την τάξη του νηπιαγωγείου έως την 8^η τάξη, με σκοπό να διαπιστώσουν αν υπάρχει σημασιολογική ευθυγράμμιση των κλασμάτων με διακριτές ή διακριτοποιημένες ποσότητες και των δεκαδικών αριθμών με συνεχείς. Όμοια μελέτη πραγματοποιήθηκε από τους Lee, DeWolf, Bassok & Holyoak (2016) για τα σχολικά εγχειρίδια της Νότιας Κορέας, αλλά για μικρότερο εύρος τάξεων. Στις έρευνες αυτές αναλύθηκαν όλα τα λεκτικά προβλήματα των βιβλίων, που αφορούσαν είτε κλάσματα, είτε δεκαδικούς αριθμούς, αλλά όχι και τις δύο μορφές συγχρόνως. Δημιουργήθηκε ένα σχήμα κωδικοποίησης και κατηγοριοποίησε τα προβλήματα βάσει της μορφής των ρητών αριθμών που παρουσίαζαν (*προβλήματα κλασμάτων* και *προβλήματα δεκαδικών*) και βάσει του είδους της ποσότητας που περιελάμβαναν, (*συνεχείς* και *μετρήσιμες ποσότητες*). Τα αποτελέσματα και των ερευνών έδειξαν ότι οι δεκαδικοί αριθμοί έχουν σχεδόν μια αποκλειστική ευθυγράμμιση με τις συνεχείς ποσότητες, ενώ τα κλάσματα συσχετίζονται κυρίως με τις μετρήσιμες.

Κεφάλαιο 4. Μεθοδολογία

4.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Το ζήτημα των σχολικών εγχειριδίων έχει απασχολήσει έντονα τα τελευταία χρόνια τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς το σχολικό βιβλίο αποτελεί κεντρικό διδακτικό εργαλείο και επηρεάζει σημαντικά τη διδασκαλία και τη μάθηση στη σχολική τάξη. Θεωρείται εργαλείο τόσο για τον εκπαιδευτικό, όσο και για τον μαθητή, στο οποίο αντανακλάται το περιεχόμενο, οι στόχοι και η μεθοδολογία διδασκαλίας, όπως αυτά καθορίζονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Επομένως, καταβάλλεται ιδιαίτερη μέριμνα ώστε το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων να παρουσιάζεται με ισορροπία, ακρίβεια, λογική συνοχή και επιστημονική ορθότητα, με σκοπό να οδηγεί στην επίτευξη των προσδοκώμενων μαθησιακών στόχων.

Ένα μεγάλο μέρος του αναλυτικού προγράμματος και των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επικεντρώνεται στην έννοια του κλάσματος, η οποία αποτελεί θεμελιώδη μαθηματική έννοια, πάνω στην οποία βασίζεται η οικοδόμηση σημαντικών μεταγενέστερων μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο, παρά την έμφαση που δίνεται στα αναλυτικά προγράμματα, οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση και στον αποτελεσματικό χειρισμό των κλασμάτων. Δεν αντιλαμβάνονται την αφηρημένη φύση τους, την ποικιλία των ερμηνειών τους, την ιδιαίτερη γλώσσα που χρησιμοποιείται στη μελέτη τους και τους αλγορίθμους που απαιτεί η αριθμητική τους (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων, οι οποίες σχετίζονται με το φαινόμενο της μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005). Επίσης, δυσκολίες και λάθη παρατηρούνται στις αναπαραστάσεις των κλασματικών αριθμών, όπως στην αναγνώριση του κλάσματος μέσα από συνεχή επιφάνεια ή στην αναγνώριση κλασμάτων ως μέρος συνόλου αντικειμένων. Συγχρόνως, λάθη μαθητών παρουσιάζονται και στις διαφορετικές διαστάσεις της έννοιας του κλάσματος και κυρίως στην αναγνώριση του κλασματικού αριθμού ως μέτρο και την αναπαράστασή του στην αριθμογραμμή.

Οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια για την εισαγωγή και ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος είναι καθοριστικής σημασίας για την εικόνα που θα σχηματίσουν οι μαθητές για την έννοια. Η επιλογή των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων

μπορεί να διευκολύνει ή να εμποδίσει τη μάθηση. Οι όψεις τις έννοιες που αναδεικνύονται μέσα από τις δραστηριότητες στις οποίες εκτίθενται οι μαθητές, μαζί με τους χειρισμούς και τις αναπαραστάσεις που προάγουν, αποτελούν μέρος της εμπειρίας των μαθητών μέσω της οποίας κατασκευάζουν τη γνώση και κατανοούν μια έννοια. Συνεπώς, η ύπαρξη κατάλληλων δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών είναι αναγκαία για να αντιληφθούν ορθά οι μαθητές την έννοια του κλάσματος.

Βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι, λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρονται στη σχετική βιβλιογραφία, να δώσει πληροφορίες για το πώς εμφανίζεται η έννοια του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της Ελλάδας. Για την επίτευξη αυτού του στόχου γίνεται ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων του Δημοτικού, με σκοπό α) τη διερεύνηση της προοδευτικής εξέλιξης της έννοις του κλάσματος και των αναπαραστατικών της τύπων καθώς και β) την εξέταση των βασικών χαρακτηριστικών των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται στα παραπάνω εγχειρίδια.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, γίνεται προσπάθεια να απαντηθούν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποιές μορφές αναπαράστασης χρησιμοποιούν τα σχολικά εγχειρίδια για να αναπτύξουν την έννοια του κλάσματος;
2. Τι είδους ενέργειες προβλέπονται για τους μαθητές στις δραστηριότητες των εγχειριδίων;
3. Ποιές όψεις της έννοις του κλάσματος εμφανίζονται;
4. Παρατηρούνται ομοιότητες ή διαφορές από τάξη σε τάξη;

4.2 Μέθοδος έρευνας

Για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, επιλέχθηκε η μεθοδολογική προσέγγιση της ανάλυσης του περιεχομένου. Η μέθοδος αυτή θεωρήθηκε η καταλληλότερη για τη διερεύνηση των στόχων της παρούσας εργασίας. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, όσον αφορά την ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών, στη βιβλιογραφία προτείνονται

διάφορα μοντέλα. Από τα πλέον γνωστά είναι εκείνα των Schmidt et al. (1996, 1997), των Pepin & Haggarty (2001) και των Charalambous et al. (2010). Λαμβάνοντας υπόψη γνωστά μοντέλα, δημιουργήθηκαν άξονες ανάλυσης, οι οποίοι θα αναφερθούν παρακάτω, με σκοπό να αναλυθεί το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούν τα εγχειρίδια για αναπτύξουν την έννοια του κλάσματος.

Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας, διαμορφώθηκε και πραγματοποιήθηκε ένα ερευνητικό πλάνο, το οποίο ολοκληρώθηκε σε πέντε στάδια. Στο πρώτο στάδιο μελετήθηκαν όλα τα κεφάλαια των προς ανάλυση εγχειριδίων και πραγματοποιήθηκε ποιοτική καταγραφή των δεδομένων. Στο δεύτερο στάδιο καθορίστηκε η μονάδα ανάλυσης, ενώ στο τρίτο στάδιο διαμορφώθηκαν οι άξονες ανάλυσης (εργαλείο ανάλυσης). Στη συνέχεια, έγινε η εφαρμογή του εργαλείου στις μονάδες ανάλυσης και συλλέχθηκαν τα δεδομένα. Στο τελικό στάδιο, αναλύθηκαν τα δεδομένα και ακολούθως εξήχθησαν τα συμπεράσματα από την ανάλυση.

4.3 Το υλικό της έρευνας

Προκειμένου να διερευνηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα, επιλέχθηκαν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και εξετάστηκαν μόνο τα κεφάλαια που αναφέρονται **ρητά** στα κλάσματα. Συνεπώς, εξαιρέθηκαν τα εγχειρίδια της Α' και Β' Δημοτικού, διότι οι μαθητές έρχονται επίσημα πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια του κλάσματος στην Γ' τάξη του Δημοτικού σχολείου. Επίσης, εξαιρέθηκε από την ανάλυση το βιβλίο της Δ' τάξης, καθώς δεν υπάρχει κεφάλαιο αφιερωμένο στα κλάσματα, διότι δεν προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Αυτό δε σημαίνει ότι στο βιβλίο αυτό δεν εμφανίζονται καθόλου κλάσματα. Παρατηρούνται μόνο τα δεκαδικά κλάσματα, τα οποία όμως εμφανίζονται ως μια διαφορετική αναπαράσταση των δεκαδικών αριθμών και παρουσιάζονται στο πλαίσιο των μετρήσεων.

Συνεπώς, τα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία ήταν τα εξής:

- **Μαθηματικά Γ' Δημοτικού– Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής**
Λεμονίδης Χ., Θεοδώρου Ε., Νικολαντωνάκης Κ., Παναγάκος Ι., Σπανακά Α. (2006)., Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων
- **Μαθηματικά Ε' Δημοτικού,**
Βρυώνης Κ., Δουκάκης Σ., Καρακώστα Β., Μπαραλής Γ., Σταύρου Ι. (2018), Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος»
- **Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού,**
Κασσώτη Ο., Κλιάπης Π., Οικονόμου Θ. (2006), Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

Τα παραπάνω εγχειρίδια συνοδεύονται από τα αντίστοιχα τετράδια εργασιών και το βιβλίο του εκπαιδευτικού για κάθε τάξη, τα οποία μελετήθηκαν επίσης. Συγκεκριμένα, τα διδακτικά πακέτα της **Γ'** και της **ΣΤ' Δημοτικού** αποτελούνται από το Βιβλίο Μαθητή (ΒΜ, 1 τεύχος), το Τετράδιο Εργασιών (ΤΕ, 4 τεύχη) και το Βιβλίο Εκπαιδευτικού (ΒΕ, 1 τεύχος). Αντίστοιχα, το διδακτικό πακέτο της **Ε' Δημοτικού** αποτελείται από το Βιβλίο Μαθητή (ΒΜ, 2 τεύχη), το Τετράδιο Εργασιών (ΤΕ, 2 τεύχη) και το Βιβλίο Εκπαιδευτικού (ΒΕ, 1 τεύχος). Οι βασικές θεματικές περιοχές στις οποίες αναπτύσσονται τα μαθηματικά περιεχόμενα των παραπάνω εγχειριδίων είναι: *Αριθμοί–Άλγεβρα, Χώρος-Γεωμετρία-Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά* και ανταποκρίνονται πλήρως στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Κάθε εγχειρίδιο διαιρείται σε ενότητες, οι οποίες στη συνέχεια υποδιαιρούνται σε επιμέρους κεφάλαια. Πιο αναλυτικά:

- **Το βιβλίο της Γ' Δημοτικού αποτελείται από 9 ενότητες:**
 1. Αριθμοί μέχρι το 1.000 - Οι τέσσερις πράξεις – Γεωμετρικά σχήματα
 2. Μετρήσεις μήκους – Πράξεις αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού
 3. Αριθμοί μέχρι το 3000 – Οι τέσσερις πράξεις – Χαράξεις, ορθές γωνίες
 4. **Εισαγωγή στα απλά κλάσματα**
 5. Προσθέσεις και αφαιρέσεις – Αλγόριθμος πολλαπλασιασμού
 6. Εισαγωγή στους δεκαδικούς αριθμούς
 7. Αριθμοί μέχρι το 7.000 – Μέτρηση μάζας
 8. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις – Μοτίβα – Μέτρηση χρόνου κι επιφάνειας
 9. Αριθμοί μέχρι το 10.000 – Κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί – Πράξεις – Γεωμετρία

- **Το βιβλίο της Ε' Δημοτικού αποτελείται από 8 ενότητες:**

1. Οι φυσικοί αριθμοί
2. Οι πράξεις στους φυσικούς αριθμούς
- 3. Οι κλασματικοί αριθμοί**
4. Στατιστική – Πιθανότητες
5. Οι δεκαδικοί αριθμοί
6. Άλγεβρα
7. Γεωμετρία
8. Γεωμετρία – Μετρήσεις

- **Το βιβλίο της ΣΤ' Δημοτικού αποτελείται από 6 ενότητες:**

- 1. Αριθμοί και πράξεις**
2. Εξισώσεις
3. Λόγοι – Αναλογίες
4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων
5. Μετρήσεις – Μοτίβα
6. Γεωμετρία

Από τις παραπάνω ενότητες επιλέχθηκαν προς ανάλυση μόνο τα κεφάλαια που αναφέρονται ρητά στα κλάσματα και που σημαίνονται με έντονη γραμματοσειρά. Έτσι, από τα εγχειρίδια της Γ' και της Ε' Δημοτικού εξαιρέθηκαν τα κεφάλαια με τίτλο «Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί Αριθμοί», με παρόμοιο σκεπτικό με αυτό της εξαίρεσης του βιβλίου της Δ' Δημοτικού.

Στα εγχειρίδια της Ε' και της ΣΤ' Δημοτικού (βιβλία μαθητή), κάθε κεφάλαιο ξεκινάει με τις εισαγωγικές δραστηριότητες διερεύνησης. Αυτές περιέχουν καταστάσεις που μπορεί να κινήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, στηρίζονται στην προηγούμενη γνώση τους και αποτελούν το έναυσμα για προβληματισμό και συζήτηση μέσα στην τάξη, με σκοπό να εξάγουν οι μαθητές νέα συμπεράσματα. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η θεωρία με συμπεράσματα, ορισμούς και κανόνες, συνοδευόμενη από τα αντίστοιχα παραδείγματα. Ακολουθούν εφαρμογές σχετικά με τη νέα γνώση, μαζί με υποδείξεις στρατηγικών επίλυσης ή τεχνικών που δύσκολα θα ανακάλυπταν οι μαθητές χωρίς υποστήριξη. Στο τέλος του κάθε κεφαλαίου, στο βιβλίο του μαθητή, ακολουθεί αναστοχασμός και ερωτήσεις για αυτοέλεγχο, που αποτελούν σύντομη ανακεφαλαίωση των εννοιών που διδάχθηκαν οι μαθητές στο κεφάλαιο. Η εμπέδωση και επέκταση της νέας γνώσης γίνεται μέσα από τις ασκήσεις, τα προβλήματα και τις δραστηριότητες με προεκτάσεις στο τετράδιο εργασιών. Αντίστοιχη

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα κεφάλαια που αναλύθηκαν ανά τάξη, με μια σύντομη περιγραφή των «ορισμών», των κανόνων, των στρατηγικών και των μεθόδων που παρουσιάζονται υπό μορφή «θεωρίας» στο κάθε κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 22: Εισαγωγή στα κλάσματα

Γράφω και διαβάζω τις κλασματικές μονάδες.



[60]

Στη συνέχεια του κεφαλαίου οι μαθητές ασκούνται στο να μεταφράσουν τη συμβολική γραφή στην αντίστοιχη γλωσσική έκφραση και να σκιάσουν το μέρος ενός όλου κάποιου γραφήματος ή το αντίστροφο.

Κεφάλαιο 23: Οι κλασματικές μονάδες

Σε αυτό το κεφάλαιο οι μαθητές ασκούνται στο να αναγνωρίζουν σε ένα σχήμα, που είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη, την ποσότητα που εκφράζει μια κλασματική μονάδα ή αντίστροφα από σχηματικές αναπαραστάσεις να βρίσκουν το αντίστοιχο κλάσμα.

Κεφάλαιο 24: Οι κλασματικές μονάδες και οι απλοί κλασματικοί αριθμοί

Στο κεφάλαιο 24 (σελ. 62), οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του απλού κλάσματος. Το κλάσμα παρουσιάζεται ως μια ποσότητα από κάτι ολόκληρο, δηλαδή το μέρος ενός όλου (βλ. Εικόνα 4.2).



Εικόνα 4.2. Εισαγωγή στην τυπική γραφή των κλασματικών μονάδων,
BM, Κεφ.24, σελ.62, Γ' Δημοτικού

Κεφάλαιο 25: Ισοδύναμα κλάσματα

Στο κεφάλαιο αυτό (σελ. 64) παρουσιάζεται η ισοδυναμία κλασμάτων. Εξετάζεται όπως εμφανίζεται στα πραγματικά φαινόμενα, μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής που είναι οικείες στους μαθητές, όπως ο χωρισμός συνεχών ή διακριτών μεγεθών. Δε γίνεται αναφορά σε μαθηματικές ιδιότητες, όπως πολλαπλασιασμός ή διαίρεση αριθμητή και παρονομαστή, κλπ.

Κεφάλαιο 26: Επαναληπτικό της ενότητας «Εισαγωγή στα κλάσματα»

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια επανάληψη των κεφαλαίων που προαναφέρθηκαν. Δεν εισάγεται στους μαθητές κάποια νέα έννοια.

Κεφάλαιο 57: Κλάσματα και δεκαδικοί

Το κεφάλαιο 57 είναι επαναληπτικό σε έννοιες των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών (ωστόσο, στην παρούσα έρευνα, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, εξετάστηκαν μόνο οι δραστηριότητες που αναφέρονται ρητά στα κλάσματα). Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν κλάσματα, χωρίς όμως να προτείνεται κάποια μέθοδος. Η σύγκριση γίνεται με αναφορά στις ποσότητες. Επίσης, στο ίδιο κεφάλαιο (BM, σελ. 136) δίνεται στους μαθητές για πρώτη φορά καταχρηστικό κλάσμα και καλούνται να σκιασουν το κατάλληλο μέρος μιας εικονικής αναπαράστασης.

Ε' Δημοτικού

Κεφάλαιο 13: Οι κλασματικοί αριθμοί

Στο κεφάλαιο αυτό, στο βιβλίο του δασκάλου (ΒΔ, σελ. 46-47) γίνεται ρητή αναφορά στις διαφορετικές όψεις του κλάσματος (μέρος-όλου, μέτρο, πηλίκο, λόγος, τελεστής). Στο βιβλίο του μαθητή (BM, σελ. 40) το κλάσμα παρουσιάζεται ως ένας αριθμός, ο οποίος «σχηματίζεται από τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που λέγονται όροι του κλάσματος και χωρίζονται με τη γραμμή κλάσματος», όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.3.



Διαβάζουμε: τρία τέταρτα

Εικόνα 4.3. Περιγραφή του κλάσματος, BM, Κεφ.13, σελ.40, Ε' Δημοτικού

Στη συνέχεια, (BM, Κεφ.13, σελ. 40) γίνεται ρητή αναφορά στην όψη του κλάσματος ως μέρος-όλου (Ένα **κλάσμα** μπορεί να εκφράζει μια ποσότητα από κάτι ολόκληρο, **το μέρος ενός όλου**. Το ολόκληρο ή όλο το λέμε **ακέραη μονάδα**.), ενώ νοηματοδοτούνται οι όροι

αριθμητής και παρονομαστής με βάση αυτή την όψη του κλάσματος: Όταν το κλάσμα δείχνει το μέρος ενός όλου, τότε ο παρονομαστής δείχνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε το όλο (και) ο αριθμητής δείχνει πόσα από αυτά τα ίσα μέρη παίρνουμε. Στην ίδια σελίδα παρουσιάζεται ο κανόνας «όταν ο παρονομαστής είναι ίσος με τον αριθμητή, το κλάσμα είναι ίσο με την ακέραιη μονάδα». Τέλος, στην ίδια σελίδα, παρουσιάζεται μια αλγοριθμικού τύπου (βήμα-βήμα) μέθοδος για την τοποθέτηση κλάσματος στην αριθμογραμμή (βλ. Εικόνα 4.4)

Να τοποθετήσετε πάνω στην αριθμογραμμή τα κλάσματα: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{4}$

1ο βήμα: Χωρίζουμε κάθε μονάδα στην αριθμογραμμή σε

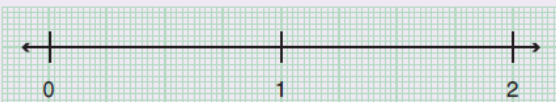
.....

2ο βήμα: Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή την κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$.

3ο βήμα: Για να τοποθετήσουμε το κλάσμα $\frac{3}{4}$, επαναλαμβάνουμε 3 φορές την κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$. Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{3}{4}$.

4ο βήμα: Προσδιορίζουμε πάνω στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{4}{4}$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{4}{4} = \dots\dots$



Εικόνα 4.4. Κλάσματα στην αριθμογραμμή, ΒΜ, Κεφ.13, σελ.40, Ε' Δημοτικού

Κεφάλαιο 14: Κλάσματα μεγαλύτερα της ακέραιης μονάδας

Στο κεφάλαιο 14 (σελ. 42) δίνεται ο κανόνας για την αναγνώριση των καταχρηστικών κλασμάτων (όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή), ενώ εισάγονται οι μεικτοί αριθμοί ως εναλλακτικός τρόπος συμβολισμού των καταχρηστικών κλασμάτων. Τέλος, δίνονται αλγοριθμικού τύπου διαδικασίες μετατροπής καταχρηστικού κλάσματος σε μεικτό αριθμό και αντίστροφα.

Κεφάλαιο 15: Το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης

Σε αυτό το κεφάλαιο (σελ. 44) παρουσιάζεται η έννοια του κλάσματος ως πηλίκο διαίρεσης (κάθε κλάσμα εκφράζει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή). Στην ίδια σελίδα, γίνεται αναφορά στο ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί με τη μορφή κλάσματος και στη συνέχεια ακολουθούν αλγοριθμικού τύπου διαδικασίες μετατροπής κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και μετατροπής καταχρηστικού κλάσματος σε μεικτό αριθμό.

Κεφάλαιο 16: Ισοδυναμία κλασμάτων – Απλοποίηση κλασμάτων

Στο κεφάλαιο 16 (σελ. 46) παρουσιάζεται η ισοδυναμία κλασμάτων μέσω του εξής κανόνα: «Τα **κλάσματα** που εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός όλου λέγονται **ισοδύναμα ή ίσα**». Στη συνέχεια παρουσιάζονται διαδικαστικοί τρόποι κατασκευής ισοδύναμων κλασμάτων. Τέλος, περιγράφεται η διαδικασία της απλοποίησης και δίνεται ο ορισμός του ανάγωγου κλάσματος.

Κεφάλαιο 17: Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό (σελ. 48), αρχικά αναπτύσσονται τέσσερις στρατηγικές σύγκρισης κλασμάτων, οι οποίες εστιάζουν στην εννοιολογική προσέγγιση της γνώσης:

1. Κλάσματα που έχουν ίσους παρονομαστές
2. Κλάσματα που έχουν ίσους αριθμητές
3. Κλάσματα που έχουν μεγαλύτερο αριθμητή και μικρότερο παρονομαστή από άλλα κλάσματα
4. Σύγκριση κλασμάτων χρησιμοποιώντας ένα κοινό σημείο αναφοράς, π.χ. το 1 ή το $\frac{1}{2}$

Στη συνέχεια, στην ίδια σελίδα, παρουσιάζεται η αλγοριθμικού τύπου διαδικασία σύγκρισης κλασμάτων με διαφορετικό παρονομαστή (μετατροπή των κλασμάτων σε ισοδύναμα κλάσματα που έχουν ίδιο παρονομαστή, βρίσκοντας το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών).

Κεφάλαιο 18: Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό (σελ. 50) παρουσιάζονται οι όροι *ομώνυμα* και *ετερόνυμα* κλάσματα καθώς και οι τρόποι πρόσθεσης και αφαίρεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων. Έπειτα, παρουσιάζονται οι τρόποι πρόσθεσης - αφαίρεσης μεικτών αριθμών (είτε μετατρέπουμε τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα, είτε προσθέτουμε – αφαιρούμε χωριστά τις ακέραιες μονάδες από τα κλάσματα).

Κεφάλαιο 19: Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα – Αντίστροφοι αριθμοί

Σε αυτή την παράγραφο (σελ. 52) παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι του πολλαπλασιασμού κλάσματος με κλάσμα και κλάσματος με φυσικό αριθμό. Έπειτα γίνεται αναφορά στο πότε είναι απαραίτητη η πράξη του πολλαπλασιασμού (όταν ζητάμε ένα **μέρος**

ενός αριθμού, φυσικού ή κλασματικού, κάνουμε πολλαπλασιασμό). Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η έννοια των αντίστροφων αριθμών. Τέλος, παρατίθενται με τη βοήθεια μοντέλων αναπαράστασης, ο πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα και ο πολλαπλασιασμός μεικτού με φυσικό αριθμό με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και τη μετατροπή του μεικτού σε κλάσμα.

Κεφάλαιο 20: Διαίρεση κλασμάτων

Στο κεφάλαιο 20 (σελ. 54) παρουσιάζεται η διαίρεση κλάσματος με κλάσμα και προτείνονται τρόποι για διαίρεση ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων: «Για να διαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, διαιρούμε τους αριθμητές τους. Για να διαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές τους». Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο μηχανιστικός κανόνας για τη διαίρεση κλασμάτων (για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, μπορούμε να **αντιστρέψουμε** τους όρους του δεύτερου κλάσματος και αντί για διαίρεση να κάνουμε πολλαπλασιασμό), ωστόσο στο βιβλίο του δασκάλου προτείνεται αυτός ο κανόνας να διδαχθεί αφού οι μαθητές έχουν κατανοήσει τον προηγούμενο τρόπο διαίρεσης κλασμάτων.

Κεφάλαιο 21: Αναγωγή στην κλασματική μονάδα

Σε αυτό το κεφάλαιο (σελ. 56) παρουσιάζεται πότε χρησιμοποιείται η μέθοδος της αναγωγής στην κλασματική μονάδα: «χρησιμοποιείται όταν γνωρίζουμε το όλο και θέλουμε να βρούμε ένα κλασματικό μέρος ή όταν γνωρίζουμε ένα κλασματικό μέρος του όλου και θέλουμε να βρούμε είτε το όλο, είτε ένα άλλο κλασματικό του μέρους».

Επαναληπτικό της 3^{ης} ενότητας: «Οι κλασματικοί αριθμοί»

Αυτό το κεφάλαιο αποσκοπεί στην επανάληψη των εννοιών που διδάχθηκαν οι μαθητές στα κεφάλαια 13 έως 21, χωρίς να γίνεται αναφορά σε κάποια καινούρια έννοια.

ΣΤ' Δημοτικού

Κεφάλαιο 19: Κλάσματα ομώνυμα και ετερόνυμα

Στο κεφάλαιο αυτό, στο βιβλίο του μαθητή (σελ. 46), το κλάσμα παρουσιάζεται ως το μέρος ενός «όλου», το οποίο σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή:

Στη συνέχεια, (ΒΜ, Κεφ.19, σελ. 46) γίνεται ρητή αναφορά στη σύγκριση ενός κλάσματος σε σχέση με τη μονάδα (όταν ο αριθμητής είναι μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο από το 1, αντίστοιχα). Χρησιμοποιώντας κλάσματα που είναι μεγαλύτερα της μονάδας, εισάγεται έπειτα η έννοια του μεικτού αριθμού. Τέλος, στην ίδια σελίδα ακολουθούν λυμένα παραδείγματα μετατροπής μεικτού αριθμού σε κλάσμα και το αντίστροφο.

Κεφάλαιο 20: Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης

Στο κεφάλαιο 20 (σελ. 48) γίνεται ρητή αναφορά στην όψη του κλάσματος ως πηλίκο διαίρεσης (το κλάσμα εκφράζει το ακριβές **πηλίκο** μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του). Έπειτα, τονίζεται ότι κάνοντας τη διαίρεση μπορούμε να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό ή σε φυσικό, αν η διαίρεση είναι τέλεια. Ακολουθούν παραδείγματα διαδικαστικού τύπου, μετατροπής κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα.

Κεφάλαιο 21: Ισοδύναμα κλάσματα

Το κεφάλαιο αυτό (σελ. 50) παρουσιάζει τον ορισμό των ισοδύναμων κλασμάτων: «**Ισοδύναμα** ή **ίσα** λέγονται δύο κλάσματα που εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου». Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στο πώς εξετάζουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Ο τρόπος που προτείνεται είναι η «χιαστί» διαδικασία. Ακολουθούν οι κανόνες για το πώς δημιουργούμε ισοδύναμα κλάσματα (πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό) και έπειτα παρουσιάζονται οι έννοιες της απλοποίησης και του ανάγωγου κλάσματος.

Κεφάλαιο 22: Σύγκριση – Διάταξη κλασμάτων

Σε αυτή την παράγραφο (σελ. 52) δίνονται οι κανόνες σύγκρισης κλασμάτων: σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων, σύγκριση ετερόνυμων κλασμάτων με ίδιους αριθμητές και σύγκριση ετερόνυμων κλασμάτων με διαφορετικούς αριθμητές. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια αλγοριθμικού τύπου διαδικασία μετατροπής ετερόνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, με σκοπό τη σύγκρισή τους. Τέλος, στην ίδια σελίδα προτείνεται η προσεγγιστική

σύγκριση κλασμάτων, κάνοντας υπολογισμούς με το νου κι έχοντας ως σημεία αναφοράς αριθμούς όπως το 0, το $\frac{1}{2}$ και το 1.

Κεφάλαιο 23: Προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Στο κεφάλαιο 23 παρουσιάζονται οι κανόνες πρόσθεσης - αφαίρεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων (σελ. 54). Στη συνέχεια, ακολουθεί σύντομη μεθοδολογία για την επίλυση ενός προβλήματος με κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς. Τέλος, ακολουθούν λυμένα παραδείγματα, τα οποία εφαρμόζουν τα βήματα που παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.5:

Όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς:
✓ **Ελέγχω** αν οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αν δεν είναι στην ίδια μορφή, τους **μετατρέπω** σε αριθμούς μιας μορφής.
✓ **Αποφασίζω** ποιες πράξεις πρέπει να κάνω.
✓ **Εκτελώ** τις πράξεις και ελέγχω το αποτέλεσμα.

Εικόνα 4.5. Μεθοδολογία επίλυσης προβλήματος με κλάσματα,
BM, Κεφ.23, σελ.54, ΣΤ' Δημοτικού

Κεφάλαιο 24: Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό (σελ. 56) παρουσιάζονται οι κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων. Ακολουθεί λυμένο παράδειγμα για τον υπολογισμό του κλασματικού μέρους ενός ποσού, στο οποίο προτείνονται δύο τρόποι επίλυσης: είτε πολλαπλασιασμός του κλάσματος με το ποσό, είτε εφαρμογή της μεθόδου ανάγωγής στην κλασματική μονάδα. Έπειτα, παρουσιάζεται σύντομη μεθοδολογία για τον υπολογισμό αριθμητικής παράστασης με κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς.

4.4 Η μονάδα ανάλυσης και οι άξονες

Στην παρούσα εργασία, ως μονάδα ανάλυσης ορίστηκε κάθε δραστηριότητα που περιέχεται στα προς εξέταση κεφάλαια των παραπάνω σχολικών εγχειριδίων. Με τον όρο «δραστηριότητα» θεωρήθηκε κάθε ερώτηση, άσκηση ή πρόβλημα που ανήκει στο υπό ανάλυση υλικό και καλείται ο μαθητής να αντιμετωπίσει. Συνολικά καταμετρήθηκαν και μελετήθηκαν 212 δραστηριότητες (εισαγωγικές δραστηριότητες διερεύνησης, εφαρμογές,

ασκήσεις, προβλήματα και δραστηριότητες προς επέκταση). Αναλυτικότερα για κάθε τάξη αναλύθηκαν:

- 44 δραστηριότητες από τα εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού
- 101 δραστηριότητες από τα εγχειρίδια της Ε' Δημοτικού
- 67 δραστηριότητες από τα εγχειρίδια της ΣΤ' Δημοτικού

Κάθε δραστηριότητα αναλύθηκε ξεχωριστά, κρατήθηκαν σημειώσεις με αναφορά στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Ποια μοντέλα αναπαράστασης χρησιμοποιούνται;
2. Τι είδους ποσότητες παρουσιάζονται;
3. Τι είδους ενέργειες προβλέπονται για τους μαθητές;
4. Ποια όψη του κλάσματος εμφανίζεται;

Τα ερωτήματα αυτά αναδύθηκαν από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας και αποτέλεσαν τους άξονες ανάλυσης των δραστηριοτήτων (εργαλείο ανάλυσης). Επομένως, κατασκευάστηκαν τέσσερις άξονες για την ανάλυση του περιεχομένου των παραπάνω εγχειριδίων, με σκοπό να συλλεχθούν τα σχετικά δεδομένα, να ερμηνευτούν και να δοθούν απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα. Για κάθε άξονα ορίστηκαν επιμέρους κατηγορίες, οι οποίες φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 4.1.

ΑΞΟΝΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	ΕΙΔΟΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ	Μοντέλο εμβαδού
		Μοντέλο συνόλων
		Μοντέλο μήκους
		Αριθμογραμμή
		Συμβολική
		Εμπράγματη
		Άλλη εικονική
	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	Συνεχής
		Διακριτή
		Διακριτοποιημένη
		Συνεχής καταταμημένη σε άνισα μέρη
		Συνεχής – Λεκτική περιγραφή
		Διακριτή – Λεκτική περιγραφή
		Διακριτοποιημένη – Λεκτική περιγραφή
	ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	Ισομερισμός
		Αποενσωμάτωση
		Επανάληψη
		Ισομερισμός/Επανάληψη
		Συντονισμός μονάδων
	ΟΨΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ	Μέρος-όλου
		Πηλίκιο
		Λόγος
		Τελεστής
		Μέτρο
		Αριθμός

Πίνακας 4.1. Οι άξονες ανάλυσης

4.5 Αξιοπιστία της ανάλυσης

Δύο άτομα ασχολήθηκαν με την ανάλυση των εγχειριδίων. Αρχικά, από κοινού ανέλυσαν τουλάχιστον μια ενότητα από κάθε κεφάλαιο ανά τάξη. Συζητήθηκαν τα προβλήματα που ανέκυψαν και λήφθηκαν αποφάσεις για τη συνέχεια. Ακολούθως, η συγγραφέας της εργασίας ανέλυσε το υλικό της Γ' τάξης, και η κωδικοποίηση ανά άξονα ανάλυσης συζητήθηκε από κοινού συνολικά. Η διαδικασία επαναλήφθηκε για το υλικό της Ε' τάξης και, τέλος, το υλικό της Στ' τάξης. Σε κάθε φάση, το ποσοστό συμφωνίας ήταν άνω του 80%. Τα σημεία στα οποία δεν υπήρχε ταύτιση, μελετήθηκαν από κοινού και οι διαφορές λύθηκαν με συζήτηση. Μέσα από αυτή την διαδικασία, το σημαντικότερο ζήτημα που προέκυψε ήταν το εξής: σε κάποιες περιπτώσεις η διάκριση των κατηγοριών του τρίτου και τέταρτου άξονα δεν ήταν εύκολη. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκαν δραστηριότητες στις οποίες **ενυπήρχαν** ορισμένες κατηγορίες (π.χ. η ενέργεια της επανάληψης μιας κλασματικής μονάδας), ωστόσο η οργάνωση της δραστηριότητας δεν ήταν ευνοϊκή για την ανάδειξη της ενέργειας αυτής. Αυτές οι περιπτώσεις σημειώθηκαν με αστεράκι και εξετάστηκαν χωριστά. Παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων παρουσιάζονται παρακάτω.

4.6 Ο τρόπος ανάλυσης

Με βάση τους άξονες ανάλυσης, κάθε δραστηριότητα αναλύθηκε προσεκτικά και εντάχθηκε στην κατάλληλη κατηγορία κάθε άξονα. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα του τρόπου ανάλυσης και ταξινόμησης μιας δραστηριότητας της Γ' Δημοτικού, από το τετράδιο εργασιών, κεφάλαιο 22, άσκηση 1.



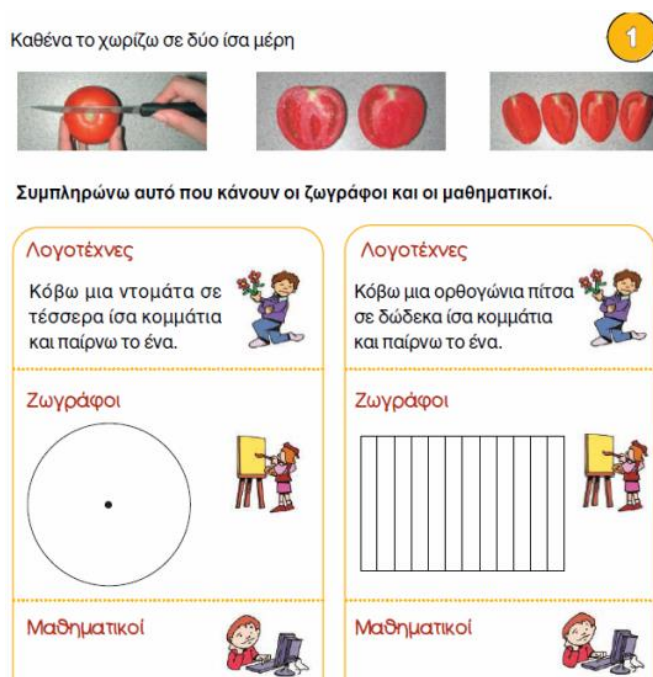
Εικόνα 4.6: Τετράδιο Εργασιών, Γ' Δημοτικού, Κεφάλαιο 22, Άσκηση 1

Ανάλυση δραστηριότητας:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος- όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–

Πίνακας 4.2: Ανάλυση της δραστηριότητας «Γ' Δημοτικού, ΤΕ, Κεφ.22, Ασκ.1»

Στόχος της έρευνας είναι να φανεί συνολικά η συχνότητα εμφάνισης των κατηγοριών κάθε άξονα. Επομένως, σε κάθε δραστηριότητα καταγράφηκε η συχνότητα εμφάνισης κάθε κατηγορίας. Για παράδειγμα, στην παραπάνω δραστηριότητα υπάρχουν δύο μοντέλα εμβαδού, συνεπώς σημειώθηκε συχνότητα δύο (2). Ωστόσο, κατά τη διαδικασία της ανάλυσης υπήρξαν δυσκολίες σχετικά με την κατάταξη δραστηριοτήτων. Ένα πρώτο πρόβλημα που παρατηρήθηκε ήταν ότι συχνά στις δραστηριότητες εμφανίζονταν διαφορετικές κατηγορίες σε κάθε άξονα. Για παράδειγμα, υπήρχαν δραστηριότητες, όπως αυτή που παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.7, στην οποία εμφανίζονταν περισσότερα από ένα είδη αναπαράστασης ή καταγράφονταν περισσότερες από μία ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές.



Εικόνα 4.7: Βιβλίο Μαθητή Γ' Δημοτικού, Κεφάλαιο 23, Άσκηση 1

Ανάλυση δραστηριότητας:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ		ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (2) & Άλλη εικονική (1)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (2)	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (3)	—	Μέρος- όλου (3)	—

Πίνακας 4.3: Ανάλυση της δραστηριότητας «Γ' Δημοτικού, ΒΜ, Κεφ.23, Ασκ.1»

Σε αυτές τις περιπτώσεις, σημειώθηκαν όλες οι πιθανές κατηγορίες, με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Μια άλλη δυσκολία που προέκυψε αφορούσε στην όψη του κλάσματος σε δραστηριότητες διαδικαστικού χαρακτήρα. Για παράδειγμα, μια τέτοια δραστηριότητα είναι η άσκηση 3 από το κεφάλαιο 17, στο τετράδιο εργασιών της Ε' Δημοτικού (βλ. Εικόνα 4.8):

3η Άσκηση

Να βάλεις ένα από τα σύμβολα $<$, $>$ ή $=$ σε κάθε ζευγάρι των παρακάτω κλασμάτων υπολογίζοντας νοερά. Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

$$\frac{9}{9} \bigcirc \frac{8}{9} \quad \frac{2}{4} \bigcirc \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \bigcirc \frac{2}{20} \quad \frac{1}{5} \bigcirc \frac{2}{10} \quad \frac{35}{100} \bigcirc \frac{25}{100} \quad \frac{3}{10} \bigcirc \frac{9}{12}$$

Εικόνα 4.8: Τετράδιο Εργασιών Ε' Δημοτικού, Κεφάλαιο 17, Άσκηση 3

Σε αυτές τις περιπτώσεις θεωρήθηκε ότι το κλάσμα παίρνει την όψη του *αριθμού*. Αυτή η επιλογή έγινε γιατί όταν τα κλάσματα λειτουργούν ως αντικείμενα στο αριθμητικό σύστημα, δηλαδή όταν πρόκειται για πράξεις κλασματικών αριθμών ή ισοδυναμία ή διάταξη, σε καθαρά συμβολικό επίπεδο, τότε τα κλάσματα εμφανίζονται ως αριθμοί. Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη αναδεικνύεται η ποσοτική διάσταση του κλάσματος, δηλαδή το μέγεθός του (Post, Behr & Lesh, 1986; Moss, 2005).

Αντίστοιχη θεώρηση έγινε για την όψη του κλάσματος σε λεκτικά προβλήματα, στα οποία οι μαθητές καλούνται να δουλέψουν μόνο συμβολικά. Μια τέτοια δραστηριότητα είναι αυτή που παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.9.

Πρόβλημα 1ο

Ποιο είναι το εμβαδόν ορθογωνίου του οποίου η μικρή πλευρά είναι $\frac{1}{3}$ μ. και η μεγάλη πλευρά $\frac{5}{8}$ μ.

Λύση



Εικόνα 4.9: Τετράδιο Εργασιών ΣΤ' Δημοτικού, Κεφάλαιο 24, Πρόβλημα 1

Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα λεκτικό πρόβλημα με αναφορά στο εμβαδόν ορθογωνίου, στο οποίο δε δίνεται ούτε ζητείται το σχετικό μοντέλο αναπαράστασης. Ωστόσο, παρότι υπάρχει πλαίσιο, στην ουσία αυτό που πρόκειται να γίνει είναι μια διαχείριση των αριθμών, αφού οι μαθητές καλούνται να δουλέψουν συμβολικά και να πολλαπλασιάσουν τα δύο κλάσματα. Επομένως, η όψη του κλάσματος σε αυτό και σε αντίστοιχα προβλήματα είναι το κλάσμα ως αριθμός, με μόνη αναπαράσταση τη συμβολική.

Ένα άλλο πρόβλημα που σημειώθηκε, αφορούσε τις δραστηριότητες στις οποίες ζητούμενο ήταν να βρεθεί ένα μέρος μιας ποσότητας. Η δυσκολία κι εδώ ήταν στο πώς θα κατηγοριοποιηθεί μια τέτοια δραστηριότητα ως προς την όψη του κλάσματος. Παράδειγμα:

Πρόβλημα 2ο

Η γιαγιά έδωσε από μια σοκολάτα 120 γραμμαρίων στις δύο εγγονές της. Η Μαρία έφαγε τα $\frac{3}{8}$ της δικής της σοκολάτας, ενώ η Πόπη έφαγε το $\frac{1}{3}$ της δικής της σοκολάτας. Πόσα γραμμάρια σοκολάτας έφαγε το καθένα από τα δύο κορίτσια;

Εικόνα 4.10: Τετράδιο Εργασιών ΣΤ' Δημοτικού, Κεφάλαιο 19, Πρόβλημα 2

Η δραστηριότητα της Εικόνας 4.10 μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους, είτε εφαρμόζοντας τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, είτε πολλαπλασιάζοντας το κάθε κλάσμα με τον αριθμό 120. Αυτό που παρατηρήθηκε κατά τη μελέτη των εγχειριδίων ήταν ότι στις περισσότερες δραστηριότητες αντίστοιχου τύπου, ο τρόπος επίλυσης που προωθείται είναι η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα. Στις περιπτώσεις αυτές θεωρήθηκε ότι η όψη του κλάσματος είναι αυτή του μέτρου. Αυτή η επιλογή έγινε γιατί σύμφωνα με τους Kieren (1980) και Behr et al. (1983) η όψη του κλάσματος « a/b » ως μέτρο προκύπτει από την επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος « $1/b$ » κατά « a » φορές για τον καθορισμό μιας απόστασης ή μιας ποσότητας. Ωστόσο, στις υπόλοιπες δραστηριότητες, στις οποίες δεν προτείνεται συγκεκριμένη μέθοδος για την επίλυσή τους, σημειώθηκε ότι το κλάσμα έχει δύο

όψεις: *μέρος-όλου* και *μέτρο*. Αυτό έγινε γιατί ενυπάρχουν και οι δύο όψεις και εξαρτάται από τι πώς θα αντιμετωπιστεί η δραστηριότητα από τους μαθητές. Αν δουλέψουν με πολλαπλασιασμό, η όψη του κλάσματος είναι *μέρος-όλου*, ενώ αν εργαστούν με αναγωγή στη μονάδα τότε είναι το κλάσμα ως *μέτρο*.

Τέλος, κατά τη διερεύνηση του πρώτου άξονα, ο οποίος εξετάζει τα είδη αναπαράστασης, παρατηρήθηκε ότι η συμβολική αναπαράσταση παρουσιαζόταν σε όλες τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων. Ωστόσο, επιλέχθηκε να καταγραφεί και να απαριθμηθεί μόνο σε δραστηριότητες καθαρά συμβολικού χαρακτήρα. Επιπλέον, προκειμένου να διερευνηθεί ο δεύτερος άξονας, δηλαδή τα είδη ποσοτήτων (συνεχείς, διακριτές, διακριτοποιημένες) που χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων, χωρίστηκε σε δύο υποάξονες. Ο ένας εξέτασε τα είδη ποσοτήτων που χρησιμοποιούν τα μοντέλα αναπαράστασης των κλασμάτων, ενώ ο άλλος υποάξονας εξέτασε τα είδη ποσοτήτων που παρουσιάζονται στα λεκτικά προβλήματα.

Κεφάλαιο 5. Αποτελέσματα

5.1 Μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η μελέτη του πρώτου άξονα ανάλυσης, έγινε καταγραφή και απαρίθμηση του συνόλου των μοντέλων αναπαράστασης κλασμάτων που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια (ΒΔ, ΒΜ, ΤΕ) της Γ', της Ε' και της ΣΤ' Δημοτικού. Τα μοντέλα που καταγράφηκαν όρισαν τις επιμέρους κατηγορίες του δεύτερου άξονα ανάλυσης. Συγκεκριμένα, οι κατηγορίες που προέκυψαν είναι: μοντέλο εμβαδού, μοντέλο συνόλων, μοντέλο μήκους, αριθμογραμμή, συμβολική αναπαράσταση, εμπράγματα και άλλη εικονική.

Γ' Δημοτικού

Από τα σχολικά εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού καταγράφηκαν, συνολικά, 120 μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1:

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ (N=120)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΜΒΑΔΟΥ	88	73%
ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΟΛΩΝ	13	11%
ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΗΚΟΥΣ	4	3,4%
ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ	0	0%
ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ	4	3,4%
ΕΜΠΡΑΓΜΑΤΗ	8	6,7%
ΑΛΛΗ ΕΙΚΟΝΙΚΗ	3	2,5%

Πίνακας 5.1: Μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων, αποτελέσματα Γ' Δημοτικού

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, αυτό που προκύπτει είναι ότι επικρατεί με μεγάλη διαφορά το μοντέλο του εμβადού, με συχνότητα εμφάνισης 73%. Αντίθετα, το μοντέλο συνόλων χρησιμοποιείται ελάχιστα (11%) συγκριτικά με το μοντέλο εμβადού. Έπειτα, παρατηρούμε ότι εμφανίζονται οι εμπράγματα αναπαραστάσεις με ποσοστό 6,7%, ακολουθεί το μοντέλο μήκους, με 3,4% και οι συμβολικές, ομοίως με 3,4%. Το μικρό ποσοστό των συμβολικών αναπαραστάσεων δικαιολογείται, καθώς, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, κατά την ανάλυση των εγχειριδίων η κατηγορία αυτή καταγράφονταν και προσμετρούνταν μόνο αν η δραστηριότητα ήταν καθαρά συμβολικού χαρακτήρα. Όμως, τέτοιες δραστηριότητες είναι ελάχιστες στα εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού, διότι θεωρούνται πιο απαιτητικές για τους μαθητές αυτής της ηλικίας. Τέλος, χρησιμοποιούνται άλλες εικονικές αναπαραστάσεις (όπως εικόνες πραγματικών αντικειμένων), σε ποσοστό μόλις 2,5%, ενώ το μοντέλο της αριθμογραμμής δεν εμφανίζεται καθόλου.

Ε' Δημοτικού

Από την ανάλυση των δεδομένων της Ε' Δημοτικού, σχετικά με τα 225 είδη αναπαράστασης κλασμάτων που καταγράφηκαν, προέκυψαν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2:

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ (N=225)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΜΒΑΔΟΥ	65	29%
ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΟΛΩΝ	4	1,7%
ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΗΚΟΥΣ	4	1,7%
ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ	21	9,3%
ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ	119	53%
ΕΜΠΡΑΓΜΑΤΗ	7	3,1%
ΑΛΛΗ ΕΙΚΟΝΙΚΗ	5	2,2%

Πίνακας 5.2: Μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων, αποτελέσματα Ε' Δημοτικού

Σε αντίθεση με τη Γ' Δημοτικού, παρατηρούμε ότι υπερτερεί η συμβολική αναπαράσταση (53%). Η διαφορά αυτή ήταν αναμενόμενη, καθώς στην Ε' Δημοτικού σχεδόν οι μισές δραστηριότητες είναι συμβολικού – διαδικαστικού χαρακτήρα. Ακολουθεί το μοντέλο εμβαδού (29%), το οποίο υπερτερεί συντριπτικά σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα αναπαράστασης. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι στα βιβλία της Ε' Δημοτικού, συγκριτικά με αυτά της Γ', γίνεται μια δυναμική προσπάθεια αξιοποίησης τους μοντέλου της αριθμογραμμής, η οποία εμφανίζεται με ποσοστό 9,3%. Έπειτα, ακολουθούν οι εμπράγματα και άλλες εικονικές αναπαραστάσεις, με ποσοστό εμφάνισης 3,1% και 2,2% αντίστοιχα. Τέλος, εμφανίζεται ελάχιστα το μοντέλο συνόλων (1,7%), καθώς και το μοντέλο μήκους (1,7%).

ΣΤ' Δημοτικού

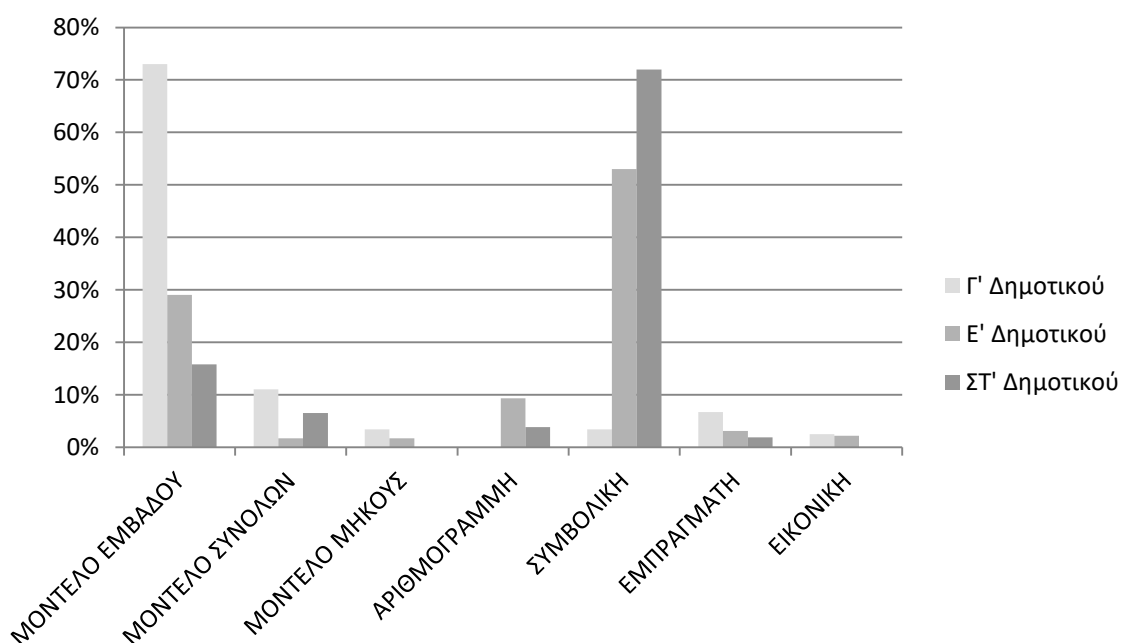
Από τα σχολικά εγχειρίδια της ΣΤ' Δημοτικού καταγράφηκαν, συνολικά, 108 μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων. Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων:

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ (N=108)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΜΒΑΔΟΥ	17	15,8%
ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΟΛΩΝ	7	6,5%
ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΗΚΟΥΣ	0	0%
ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ	4	3,8%
ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ	78	72%
ΕΜΠΡΑΓΜΑΤΗ	2	1,9%
ΑΛΛΗ ΕΙΚΟΝΙΚΗ	0	0%

Πίνακας 5.3: Μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων, αποτελέσματα ΣΤ' Δημοτικού

Συγκριτικά με τις δύο προηγούμενες τάξεις, στην ΣΤ' Δημοτικού η συμβολική αναπαράσταση υπερτερεί συντριπτικά (72%) σε σχέση με τα υπόλοιπα είδη αναπαράστασης. Αυτή η μεγάλη απόκλιση ήταν αναμενόμενη, καθώς η πλειοψηφία των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνονται στα εγχειρίδια της ΣΤ' Δημοτικού είναι συμβολικού – διαδικαστικού χαρακτήρα. Συγκρίνοντας τα υπόλοιπα είδη αναπαράστασης κλασμάτων παρατηρούμε ότι τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης παρουσιάζει το μοντέλο εμβαδού, με ποσοστό 15,8%. Το μοντέλο συνόλων χρησιμοποιείται περισσότερο (6,5%) σε σχέση με την Ε' Δημοτικού, ενώ, αντίθετα, το μοντέλο της αριθμογραμμής εμφανίζεται σημαντικά λιγότερο (3,8%). Τέλος, μικρό ποσοστό εμφάνισης παρουσιάζουν οι εμπράγματα αναπαραστάσεις (1,9%), ενώ το μοντέλο μήκους και οι εικονικές αναπαραστάσεις δε χρησιμοποιούνται καθόλου.

Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.1 παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης των ειδών αναπαράστασης και για τις τρεις τάξεις μαζί.



Εικόνα 5.1: Είδη αναπαράστασης κλασμάτων σε Γ', Ε' και ΣΤ' Δημοτικού

5.2 Είδος ποσότητας

Για να διερευνηθεί ο δεύτερος άξονας της έρευνας, διακρίθηκαν δύο ημιάξονες και μελετήθηκαν ξεχωριστά. Στον πρώτο ημιάξονα, εξετάστηκαν και απαριθμήθηκαν τα είδη των ποσοτήτων (συνεχείς, διακριτές, διακριτοποιημένες, συνεχείς κατατμημένες σε άνισα μέρη) που χρησιμοποιούν τα μοντέλα αναπαράστασης των κλασμάτων. Στον δεύτερο ημιάξονα, μελετήθηκαν τα λεκτικά προβλήματα και καταγράφηκαν τα είδη των ποσοτήτων που περιγράφονται λεκτικά (π.χ. βάρος, μήκος, άτομα, κλπ). Ωστόσο, ο δεύτερος ημιάξονας διερευνήθηκε μόνο για τις τάξεις Ε' και ΣΤ' Δημοτικού, καθώς στα εγχειρίδια της Γ' τάξης δεν υπάρχουν λεκτικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν αναλύονται παρακάτω.

Γ' Δημοτικού

Στα σχολικά εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού μελετήθηκαν 116 μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων ως προς το είδος της ποσότητας που αναπαριστούσαν. Από την ανάλυση των δεδομένων πήραμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον Πίνακα 6.4:

ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ (N=116)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΣΥΝΕΧΗΣ	13	11%
ΔΙΑΚΡΙΤΗ	13	11%
ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ	90	78%
ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΤΑΤΜΗΜΕΝΗ ΣΕ ΑΝΙΣΑ ΜΕΡΗ	0	0%

Πίνακας 5.4: Είδος ποσότητας, αποτελέσματα Γ' Δημοτικού

Αυτό που προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων είναι ότι κυριαρχούν οι διακριτοποιημένες ποσότητες (78%), ενώ οι συνεχείς και οι διακριτές ποσότητες εμφανίζονται εξίσου με ποσοστό 11%. Αυτή η μεγάλη απόκλιση ενδεχομένως οφείλεται στο ότι στόχος των βιβλίων της Γ' Δημοτικού είναι να ενεργοποιήσει τις προϋπάρχουσες γνώσεις

των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα. Επομένως, τα βιβλία χρησιμοποιούν κυρίως μοντέλα αναπαράστασης της καθημερινής ζωής, όπως η πίτσα σε κομμάτια, η σοκολάτα ή άλλες διακριτοποιημένες ποσότητες.

Ε' Δημοτικού

Από την ανάλυση των δεδομένων της Ε' Δημοτικού, σχετικά με τα 101 μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων που καταγράφηκαν, προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:

ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ (N=101)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΣΥΝΕΧΗΣ	15	15%
ΔΙΑΚΡΙΤΗ	4	4%
ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ	77	77%
ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΤΑΤΜΗΜΕΝΗ ΣΕ ΑΝΙΣΑ ΜΕΡΗ	5	5%

Πίνακας 5.5: Είδος ποσότητας, αποτελέσματα Ε' Δημοτικού

Παρατηρούμε ότι, για ακόμα μια φορά, επικρατούν με μεγάλη διαφορά οι διακριτοποιημένες ποσότητες (77%). Ακολουθούν οι συνεχείς (15%), ενώ εμφανίζονται ελάχιστα διακριτές ποσότητες (4%) και ποσότητες συνεχείς-κατατμημένες σε άνισα μέρη (5%). Ωστόσο, αν ανατρέξουμε στους στόχους του κεφαλαίου των κλασμάτων, όπως αυτοί περιγράφονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού, θα διαπιστώσουμε ότι στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα αναμένεται «οι μαθητές να είναι σε θέση να χωρίζουν διακριτές και συνεχείς ποσότητες σε ίσα μέρη, να περιγράφουν τη μεταξύ τους σχέση και να την εκφράζουν με κλάσμα». Επομένως, αυτός ο στόχος δείχνει να έρχεται σε σύγκρουση σε σχέση με τα μικρά ποσοστά εμφάνισης των συνεχών και διακριτών ποσοτήτων.

Αντίθετη εικόνα σχηματίζουμε εξετάζοντας τα λεκτικά προβλήματα ως προς το είδος των ποσοτήτων που περιγράφονται λεκτικά (βλ. Πίνακα 5.6).

ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ (N=30)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΣΥΝΕΧΗΣ	20	67%
ΔΙΑΚΡΙΤΗ	5	16,5%
ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ	5	16,5%

Πίνακας 5.6: Είδος ποσότητας στα λεκτικά προβλήματα, αποτελέσματα Ε' Δημοτικού

Παρατηρούμε ότι επικρατούν οι συνεχείς ποσότητες με ποσοστό 67% και έπονται οι διακριτές και οι διακριτοποιημένες ποσότητες με ποσοστό εξίσου 16,5%.

ΣΤ' Δημοτικού

Στα εγχειρίδια της ΣΤ' Δημοτικού εντοπίστηκαν μόλις 27 μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων, καθώς, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, οι περισσότερες δραστηριότητες αυτής της τάξης είναι συμβολικού-διαδικαστικού χαρακτήρα. Τα μοντέλα ατά μελετήθηκαν ως προς το είδος της ποσότητας που αναπαριστούν και τα αποτελέσματα που προέκυψαν φαίνονται στον Πίνακα 5.7.

ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ (N=27)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΣΥΝΕΧΗΣ	1	4%
ΔΙΑΚΡΙΤΗ	7	26%
ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ	18	66%
ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΤΑΤΜΗΜΕΝΗ ΣΕ ΑΝΙΣΑ ΜΕΡΗ	1	4%

Πίνακας 5.7: Είδος ποσότητας, αποτελέσματα ΣΤ' Δημοτικού

Παρατηρούμε ότι, όπως στις προηγούμενες τάξεις, έτσι και τώρα, επικρατούν οι διακριτοποιημένες ποσότητες (66%). Αντίθετα, οι διακριτές ποσότητες εμφανίζονται περισσότερο (26%) συγκριτικά με τις άλλες τάξεις. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι οι

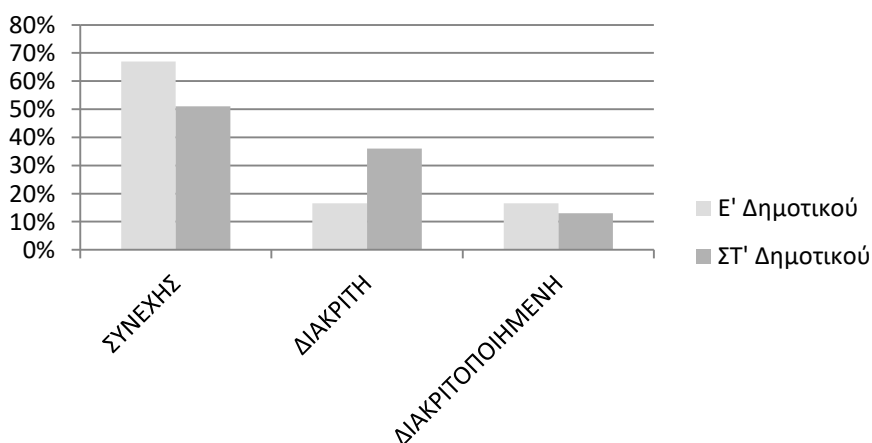
συνεχείς ποσότητες είναι σχεδόν ανύπαρκτες στην ΣΤ' Δημοτικού. Καταγράφηκε μόλις μία αναπαράσταση συνεχούς ποσότητας (4%) και άλλη μια συνεχής, αλλά κατατμημένη σε άνισα τμήματα (4%).

Αντίθετα, εξετάζοντας τα λεκτικά προβλήματα ως προς το είδος των ποσοτήτων που περιγράφουν λεκτικά, παίρνουμε μια διαφορετική εικόνα (βλ. Πίνακα 5.8).

ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ (N=39)		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΣΥΝΕΧΗΣ	20	51%
ΔΙΑΚΡΙΤΗ	14	36%
ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗ	5	13%

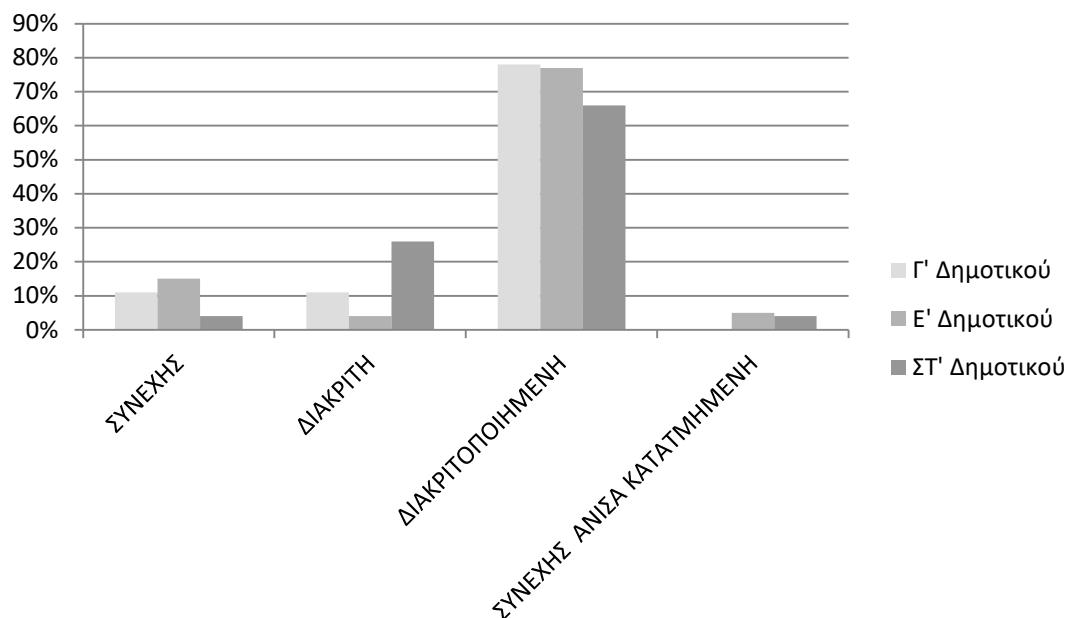
Πίνακας 5.8: Είδος ποσότητας στα λεκτικά προβλήματα, αποτελέσματα Ε' Δημοτικού

Μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης έχουν οι συνεχείς ποσότητες (51%), ακολουθούν οι διακριτές (36%) και τέλος οι διακριτοποιημένες (13%). Γενικότερα, διαπιστώνουμε ότι τα λεκτικά προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων και των τριών τάξεων αναφέρονται κυρίως σε ποσότητες που είναι συνεχείς (βλ. Εικόνα 5.2).



Εικόνα 5.2: Είδος ποσότητας στα λεκτικά προβλήματα, αποτελέσματα Ε' & ΣΤ' Δημοτικού

Τέλος, στο διάγραμμα της Εικόνας 5.3 παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης των διαφορετικών ειδών ποσοτήτων και για τις τρεις τάξεις μαζί.



Εικόνα 5.3: Ποσότητες αναπαράστασης, συγκριτικά αποτελέσματα από Γ', Ε' και ΣΤ' Δημοτικού

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα των τριών τάξεων ως προς τα είδη ποσοτήτων των μοντέλων αναπαράστασης, διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται αυτό που πολλάκις έχουν επισημάνει ερευνητές του χώρου. Ο πιο κοινός τρόπος διδασκαλίας των κλάσμάτων είναι μέσω διακριτοποιημένων μοντέλων επιφάνειας. Τα μοντέλα αυτά είναι ένα ισχυρά οπτικά μοντέλα, με τα οποία τα παιδιά νιώθουν μεγάλη άνεση (Nunes & Bryant, 2007; Saxe, 2007). Ωστόσο, η προσκόλληση και συχνή χρήση τέτοιων στερεότυπων μοντέλων αναπαράστασης, περιορίζει την κατανόηση και συχνά οδηγεί τα παιδιά σε λάθη. Η διδασκαλία που περιορίζεται σε αυτές καταστάσεις, ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιούν για τα κλάσματα ένα είδος διαδικασίας διπλής απαρίθμησης (Nunes & Bryant, 2007). Δηλαδή, ενθαρρύνει την προσθετική σκέψη, η οποία είναι η πηγή πολλών παρανοήσεων για τα κλάσματα και γενικότερα για τους ρητούς αριθμούς (Moss, 2005).

5.3 Ενέργειες των μαθητών

Γ' Δημοτικού

Στον Πίνακα 5.9 καταγράφονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων της Γ' Δημοτικού, ως προς τις ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές.

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ (N=117)					
ΕΜΦΑΝΗΣ			ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ	19	16%	ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ*	0	0%
ΑΠΟΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ	107	91%	ΑΠΟΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ*	0	0%
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	0	0%	ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*	4	3%
ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ/ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	0	0%	ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ/ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*	0	0%
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ	9	7,7%	ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ*	0	0%

Πίνακας 5.9: Ενέργειες μαθητών, αποτελέσματα Γ' Δημοτικού

Από την ανάλυση παρατηρούμε ότι η κυρίαρχη ενέργεια που σχετίζεται με την επίλυση των δραστηριοτήτων είναι η «αποενσωμάτωση» (91%). Ακολουθεί η ενέργεια του ισομερισμού (16%) και έπειτα η ενέργεια του «συντονισμού μονάδων» (7,7%). Σημαντική παρατήρηση είναι ότι το μικρό ποσοστό της ενέργειας του «ισομερισμού» έρχεται σε αντίθεση με τους στόχους για τα κλάσματα, όπως διατυπώνονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού. Συγκεκριμένα αναφέρεται ότι «στόχος του κεφαλαίου είναι να οδηγήσει τους μαθητές να καταστούν ικανοί να πραγματοποιούν χωρισμούς σε ίσα μέρη και να αξιολογούν τις σχέσεις μεταξύ των μεριδίων της διανομής». Ωστόσο, μελετώντας τα αποτελέσματα του δεύτερου άξονα της έρευνας και παρατηρώντας το μεγάλο ποσοστό των διακριτοποιημένων ποσοτήτων αναπαράστασης (78%), διαπιστώνουμε ότι το μικρό ποσοστό της ενέργειας του «ισομερισμού» ήταν αναμενόμενο. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι ενέργειες «επανάληψη» και «ισομερισμός/επανάληψη» δεν εμφανίζονται καθόλου. Εντούτοις, ενυπάρχει σε μικρό ποσοστό η ενέργεια της «επανάληψης» (6%), η οποία σχετίζεται άμεσα με την όψη του κλάσματος ως «μέτρο». Το ποσοστό αυτό ήταν προβλεπόμενο, καθώς από τα αποτελέσματα του πρώτου άξονα παρατηρήσαμε ότι η όψη του κλάσματος ως «μέτρο» ενυπήρχε με αντίστοιχο ποσοστό.

Ε' Δημοτικού

Από την ανάλυση των εγχειριδίων της Ε' Δημοτικού, ως προς τις ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές για την επίλυσή των δραστηριοτήτων, προέκυψε ο Πίνακας 5.10.

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ (N=185)					
ΕΜΦΑΝΗΣ			ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ	31	17%	ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ*	0	0%
ΑΠΟΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ	79	43%	ΑΠΟΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ*	0	0%
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	19	10%	ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*	11	6%
ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ/ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	14	7%	ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ/ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*	4	2%
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ	42	23%	ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ*	0	0%

Πίνακας 5.10: Ενέργειες μαθητών, αποτελέσματα Ε' Δημοτικού

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια της «αποενσωμάτωσης» παραμένει κυρίαρχη συγκριτικά με τις άλλες, αν και με σημαντικά μειωμένη συχνότητα εμφάνισης (43%), ενώ σχεδόν σταθερή παραμένει η σχετική συχνότητα της ενέργειας του «ισομερισμού» (17%). Επίσης, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, συγκριτικά με τα αποτελέσματα της Γ' Δημοτικού, μεγάλη άνοδο παρουσιάζει η ενέργεια του «συντονισμού μονάδων» (23%). Επιπλέον, σημαντικό εύρημα είναι ότι, σε αντίθεση με την Γ' Δημοτικού, στην Ε' εντοπίστηκαν σε μικρό ποσοστό οι ενέργειες «επανάληψη» και «ισομερισμός/επανάληψη», 10% και 7% αντίστοιχα. Ωστόσο, παρατηρήθηκε να ενυπάρχουν στα εγχειρίδια οι τελευταίες ενέργειες, σε ποσοστό 6% και 2% αντίστοιχα. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο, οι ενέργειες αυτές σχετίζονται άμεσα με την όψη του κλάσματος ως «μέτρο». Επομένως, τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι οι συγγραφείς των εγχειριδίων της Ε' Δημοτικού έχουν κάνει σημαντική προσπάθεια να προωθήσουν στους μαθητές την όψη του κλάσματος ως «μέτρο», ωστόσο η όψη «μέρος-όλου» και πάλι κυριαρχεί.

ΣΤ' Δημοτικού

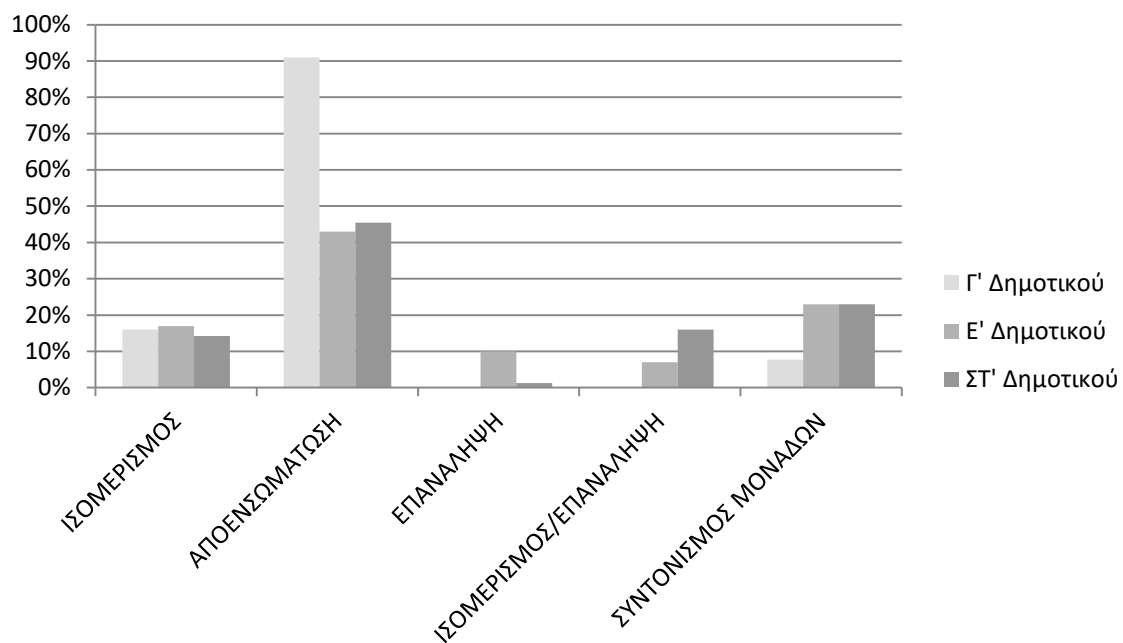
Στον Πίνακα 5.11 καταγράφονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων της ΣΤ' Δημοτικού, ως προς τις ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές.

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ (N=77)					
ΕΜΦΑΝΗΣ			ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ	11	14,2%	ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ*	0	0%
ΑΠΟΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ	35	45,5%	ΑΠΟΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ*	0	0%
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	1	1,3%	ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*	5	6,5%
ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ/ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	12	16%	ΙΣΟΜΕΡΙΣΜΟΣ/ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*	7	9%
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ	18	23%	ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΜΟΝΑΔΩΝ*	5	6,5%

Πίνακας 5.11: Ενέργειες μαθητών, αποτελέσματα ΣΤ' Δημοτικού

Από την ανάλυση των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων της ΣΤ' Δημοτικού προέκυψε ότι η ενέργεια που συναντάται συχνότερα είναι η «αποενσωμάτωση» (45,5%). Ακολουθεί η ενέργεια «συντονισμός μονάδων» (23%), ενώ έπεται αυτή του «ισομερισμού/επανάληψης» (16%), η οποία παρουσιάζει αυξημένη συχνότητα εμφάνισης σε σχέση με τις προηγούμενες τάξεις. Σχεδόν σταθερή συχνότητα παρατηρείται στην ενέργεια του «ισομερισμού» (14,2%), ενώ σημαντική μείωση παρουσιάζει η ενέργεια της «επανάληψης» με ποσοστό μόλις 1,3%. Ωστόσο, η διαδικασία της «επανάληψης» ενυπάρχει με ποσοστό 6,5%, αλλά, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, οι δραστηριότητες είναι έτσι διαμορφωμένες που δεν επιτρέπουν την επανάληψη. Τέλος, παρατηρήθηκε να ενυπάρχουν οι ενέργειες «ισομερισμός/επανάληψη» και «συντονισμός μονάδων», με ποσοστά 9% και 6,5%, αντίστοιχα.

Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.4 παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης των ενεργειών που προβλέπονται για τους μαθητές στα εγχειρίδια της Γ', της Ε' και της ΣΤ' Δημοτικού.



Εικόνα 5.4: Ενέργειες μαθητών, συγκριτικά αποτελέσματα από Γ', Ε' και ΣΤ' Δημοτικού

5.4 Η όψη του κλάσματος

Γ' Δημοτικού

Από την ανάλυση των εγχειριδίων της Γ' Δημοτικού ως προς την όψη το κλάσματος προέκυψαν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.12.

Η ΟΨΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ (N=120)					
ΕΜΦΑΝΗΣ			ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΜΕΡΟΣ-ΟΛΟΥ	108	98,2%	ΜΕΡΟΣ-ΟΛΟΥ*	0	0%
ΜΕΤΡΟ	0	0%	ΜΕΤΡΟ*	4	3,3%
ΠΗΛΙΚΟ	0	0%	ΠΗΛΙΚΟ*	0	0%
ΛΟΓΟΣ	0	0%	ΛΟΓΟΣ*	0	0%
ΤΕΛΕΣΤΗΣ	0	0%	ΤΕΛΕΣΤΗΣ*	0	0%
ΑΡΙΘΜΟΣ	2	1,8%	ΑΡΙΘΜΟΣ*	0	0%

Πίνακας 5.12: Η όψη του κλάσματος, αποτελέσματα Γ' Δημοτικού

Παρατηρούμε ότι η όψη του κλάσματος «μέρος-όλου» υπερτερεί συντριπτικά, καθώς εμφανίζεται στο 98,2% των περιπτώσεων. Σε μικρό ποσοστό (1,8%) εμφανίζεται το κλάσμα ως αριθμός, ενώ οι υπόλοιπες όψεις του κλάσματος δεν εμφανίζονται καθόλου. Το μικρό αυτό ποσοστό ήταν αναμενόμενο, καθώς αντιστοιχεί σε δραστηριότητες καθαρά συμβολικού χαρακτήρα, οι οποίες είναι ελάχιστες καθώς θεωρούνται πιο απαιτητικές για τους μαθητές αυτής της ηλικίας.

Ωστόσο, η όψη του κλάσματος ως «μέτρο» ενυπάρχει σε ποσοστό 3,6%. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η άσκηση 2, από το κεφάλαιο 24, στο βιβλίο του μαθητή (βλ. Εικόνα 5.5):



Εικόνα 5.5: Βιβλίο Μαθητή, Γ' Δημοτικού, Κεφάλαιο 24, Άσκηση 2

Εάν η παραπάνω ευθεία δεν ήταν διαβαθμισμένη, θα επέτρεπε να γίνει η ενέργεια της επανάληψης του ευθύγραμμου τμήματος AB και τότε η όψη του κλάσματος θα ήταν αυτή του «μέτρου». Ωστόσο, το γεγονός ότι η ευθεία είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη συνεπάγεται ότι, κατά πάσα πιθανότητα, οι μαθητές θα ακολουθήσουν την στρατηγική της διπλής καταμέτρησης για την επίλυση της δραστηριότητας, επομένως η όψη του κλάσματος θεωρείται αυτή του «μέρους-όλου». Η σκέψη αυτή επιβεβαιώνεται αν ανατρέξουμε στα βιβλία του δασκάλου και του μαθητή. Τόσο το κεφάλαιο 24, όσο και το κεφάλαιο 23 που είναι το πρώτο που πραγματεύεται τα κλάσματα, προωθούν αποκλειστικά την όψη του κλάσματος «μέρος-όλου», αξιοποιώντας την άτυπη γνώση των μαθητών.

Ε' Δημοτικού

Από την ανάλυση των δεδομένων ως προς την όψη του κλάσματος που χρησιμοποιούνται στις 101 δραστηριότητες των εγχειριδίων της Ε' Δημοτικού, προέκυψαν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.13.

Η ΟΨΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ (N=245)					
ΕΜΦΑΝΗΣ			ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΜΕΡΟΣ-ΟΛΟΥ	101	41%	ΜΕΡΟΣ-ΟΛΟΥ*	0	0%
ΜΕΤΡΟ	39	16%	ΜΕΤΡΟ*	15	6%
ΠΗΛΙΚΟ	18	7%	ΠΗΛΙΚΟ*	0	0%
ΛΟΓΟΣ	0	0%	ΛΟΓΟΣ*	0	0%
ΤΕΛΕΣΤΗΣ	0	0%	ΤΕΛΕΣΤΗΣ*	0	0%
ΑΡΙΘΜΟΣ	87	36%	ΑΡΙΘΜΟΣ*	0	0%

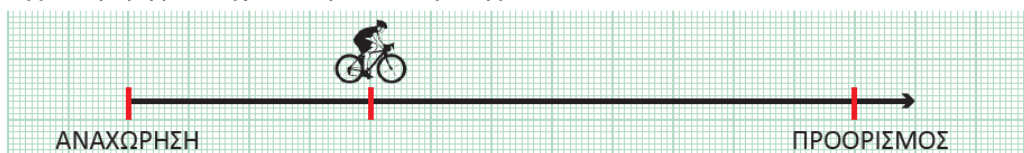
Πίνακας 5.13: Η όψη του κλάσματος, αποτελέσματα Ε' Δημοτικού

Παρατηρούμε ότι στις περισσότερες δραστηριότητες συναντάμε την όψη του κλάσματος «μέρος-όλου» (41%). Ακολουθεί το κλάσμα ως αριθμός με ποσοστό εμφάνισης 36%. Συγκριτικά με τα αποτελέσματα της Γ' Δημοτικού, παρατηρείται μεγάλη αύξηση στη συχνότητα εμφάνισης αυτής της όψης του κλάσματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην Ε' Δημοτικού, σε αντίθεση με την Γ', σχεδόν οι μισές δραστηριότητες είναι συμβολικού – διαδικαστικού χαρακτήρα.

Στη συνέχεια ακολουθεί η όψη του κλάσματος ως «μέτρο», με ποσοστό εμφάνισης 16%. Αν ανατρέξουμε στους στόχους του κεφαλαίου των κλασμάτων, όπως αυτοί περιγράφονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού, θα διαπιστώσουμε ότι στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα αναφέρεται ότι «*αναμένεται οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν το κλάσμα ως μέρος της ακεραίας μονάδας, ως μέρος συνόλου και ως **μέτρο***». Συνεπώς, ο στόχος αυτός δείχνει να έρχεται σε σύγκρουση σε σχέση με το μικρό ποσοστό εμφάνισης της όψης του κλάσματος ως «μέτρο». Ωστόσο, από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η όψη του «μέτρου» ενυπάρχει στο 6% των περιπτώσεων. Ενδεικτική δραστηριότητα είναι η επόμενη.

1ο Πρόβλημα

Να χωρίσεις την αριθμογραμμή και να γράψεις στο κουτάκι το κλάσμα που εκφράζει το μέρος της διαδρομής που έχει καλύψει ο ποδηλάτης.



Τι μέρος της διαδρομής χρειάζεται να καλύψει ακόμα ο ποδηλάτης, για να φτάσει στον προορισμό του;

Εικόνα 5.6: Τετράδιο Εργασιών, Ε' Δημοτικού, Κεφάλαιο 13, Πρόβλημα 1

Το πλαίσιο της παραπάνω δραστηριότητας δίνει τη δυνατότητα να αναδυθεί το κλάσμα ως «μέτρο», ιδιαίτερα στο δεύτερο ερώτημα. Ωστόσο, το όλο «στήσιμο» της δραστηριότητας, δηλαδή το γεγονός ότι η ευθεία είναι διαβαθμισμένη, δεν επιτρέπει να γίνει η ενέργεια της επανάληψης της μονάδας. Συνεπώς, το πιθανότερο είναι οι μαθητές να μη χρησιμοποιήσουν τη διαδικασία της επανάληψης για να εξετάσουν πόσες φορές χωράει η μονάδα σε όλο το μήκος, αλλά να ακολουθήσουν την οικεία διαδικασία της διπλής καταμέτρησης, δηλαδή να βασιστούν στην όψη του κλάσματος ως μέρος όλου. Επομένως, μια τέτοια κατάσταση θεωρήθηκε ότι το κλάσμα ως «μέτρο» ενυπάρχει, αλλά δεν αξιοποιείται.

Τέλος, η διάσταση «πηλίκιο» χρησιμοποιείται λιγότερο από τις προηγούμενες τρεις, σχεδόν μόνο στο κεφάλαιο που ασχολείται αποκλειστικά με το κλάσμα ως πηλίκιο διαίρεσης, ενώ οι όψεις του κλάσματος «λόγος» και «τελεστής» δεν εμφανίστηκαν καθόλου.

Στ' Δημοτικού

Από τα σχολικά εγχειρίδια της ΣΤ' Δημοτικού, μελετήθηκαν συνολικά 67 δραστηριότητες από τα κεφάλαια που σχετίζονται με τα κλάσματα. Από την ανάλυση των δεδομένων ως προς την όψη του κλάσματος προέκυψαν τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.14.

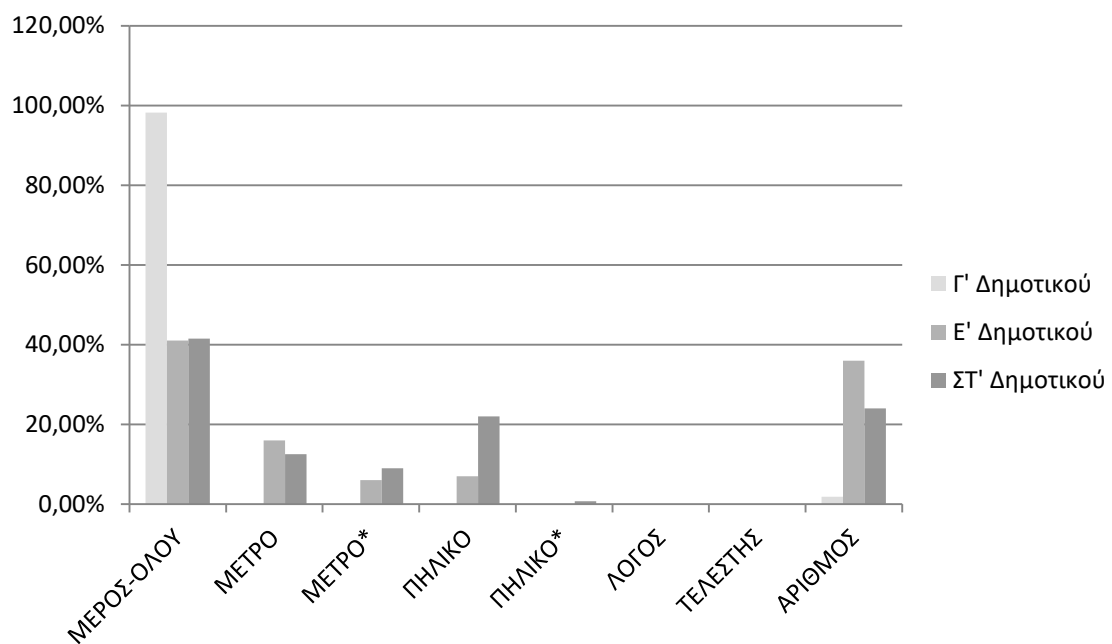
Η ΟΨΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ (N=138)					
ΕΜΦΑΝΗΣ			ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΜΕΡΟΣ-ΟΛΟΥ	57	41,5%	ΜΕΡΟΣ-ΟΛΟΥ*	0	0%
ΜΕΤΡΟ	17	12,5%	ΜΕΤΡΟ*	13	9%
ΠΗΛΙΚΟ	31	22%	ΠΗΛΙΚΟ*	1	0,7%
ΛΟΓΟΣ	0	0%	ΛΟΓΟΣ*	0	0%
ΤΕΛΕΣΤΗΣ	0	0%	ΤΕΛΕΣΤΗΣ*	0	0%
ΑΡΙΘΜΟΣ	33	24%	ΑΡΙΘΜΟΣ*	0	0%

Πίνακας 5.14: Η όψη του κλάσματος, αποτελέσματα ΣΤ' Δημοτικού

Από τον πίνακα φαίνεται ότι επικρατεί, για ακόμα μία φορά, η όψη του κλάσματος ως «μέρος-όλου» (41,5%). Γενικότερα, και στις τρεις τάξεις, παρατηρείται ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως σχέση «μέρος-όλου» είναι εκείνη που πρωτοσυναντούν οι μαθητές στα εισαγωγικά κεφάλαια των κλασμάτων. Συγχρόνως, η συχνότητα εμφάνισής της υπερτερεί με διαφορά σε σχέση με τις άλλες και είναι η μόνη όψη, μαζί με το «πηλίκιο» (αλλά σε μικρότερο βαθμό αυτό), που τυγχάνει ρητής διδακτικής διαπραγμάτευσης στο δημοτικό σχολείο.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι ακολουθεί η όψη του κλάσματος ως αριθμός, με ποσοστό εμφάνισης 24%, και η όψη του «πηλίκιου» με ποσοστό 22%. Όπως στην Ε' Δημοτικού, έτσι και στην ΣΤ', η διάσταση του «πηλίκιου» εμφανίζεται σχεδόν μόνο στο κεφάλαιο με τίτλο «Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκιο διαίρεσης». Βέβαια, παρατηρήθηκε ακόμα μια δραστηριότητα στο βιβλίο (0,7%), στην οποία ενυπήρχε το κλάσμα ως «πηλίκιο». Η όψη του κλάσματος ως «μέτρο» χρησιμοποιείται λιγότερο (12,5%). Ωστόσο, όπως στις προηγούμενες τάξεις, έτσι και στην ΣΤ' Δημοτικού, παρατηρήθηκαν περιπτώσεις (9%) όπου η όψη του κλάσματος ως «μέτρο» ενυπήρχε. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι όψεις του «λόγου» και του «τελεστή» δεν παρουσιάζονται καθόλου. Γενικότερα, η διάσταση του «λόγου» παρατηρείται για πρώτη φορά στο δημοτικό σχολείο στην τάξη ΣΤ', συγκεκριμένα στη θεματική ενότητα «Λόγοι – Αναλογίες» και παρουσιάζεται ως σχέση μεταξύ δύο μεγεθών. Όμως αυτή η ενότητα είναι διαφορετική από εκείνη των κλασμάτων, επομένως δεν αποτελεί μέρος της παρούσας έρευνας.

Στο διάγραμμα της Εικόνας 5.7 παρουσιάζονται τα ποσοστά εμφάνισης των διαφορετικών όψεων του κλάσματος και για τις τρεις τάξεις μαζί.



Εικόνα 5.7: Η όψη του κλάσματος σε Γ', Ε' και ΣΤ' Δημοτικού

Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα - Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία αναλύθηκαν τα εγχειρίδια Μαθηματικών του Ελληνικού Δημοτικού σχολείου, με σκοπό να διερευνηθεί πώς εμφανίζεται εξελικτικά η έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα, μελετήθηκαν οι μορφές αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στα εγχειρίδια, οι ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές στις δραστηριότητες των εγχειριδίων και οι όψεις του κλάσματος που εμφανίζονται.

Σχετικά με τα είδη αναπαράστασης, η ανάλυση έδειξε ότι παρουσιάζονται συχνότερα το μοντέλο εμβαδού και οι συμβολικές αναπαραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, στα εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού κυρίαρχη μορφή αναπαράστασης είναι το μοντέλο εμβαδού και ακολουθεί με μεγάλη διαφορά το μοντέλο συνόλων, το οποίο χρησιμοποιείται ελάχιστα. Αυτό πιθανόν συμβαίνει διότι, όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, τα διακριτά μοντέλα θεωρούνται δυσκολότερα για τους μαθητές των μικρότερων τάξεων (Κολέζα, 2000; Van de Walle, 2007). Στα εγχειρίδια της Ε' και ΣΤ' Δημοτικού κυρίαρχο είδος αναπαράστασης είναι η συμβολική, αποτέλεσμα αναμενόμενο καθώς τα εγχειρίδια των δύο μεγαλύτερων τάξεων περιέχουν πολλές δραστηριότητες συμβολικού-διαδικαστικού χαρακτήρα. Ωστόσο, η μεγάλη ενασχόληση των μαθητών με τέτοιου είδους δραστηριότητες, δε βοηθάει στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών, ούτε στην ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά. Στη συνέχεια, η αναπαράσταση που υπερέχει συγκριτικά με τις υπόλοιπες είναι το μοντέλο εμβαδού. Τα υπόλοιπα μοντέλα αναπαράστασης (μοντέλο συνόλων, μοντέλο μήκους, εμπράγματα και άλλες εικονικές αναπαραστάσεις) τα συναντάμε ελάχιστα στα εγχειρίδια των τριών τάξεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι το ίδιο παρατηρήθηκε για το μοντέλο της αριθμογραμμής. Συγκεκριμένα, στα εγχειρίδια της Γ' Δημοτικού δεν εμφανίζεται καθόλου, ενώ στις δύο μεγαλύτερες τάξεις παρατηρείται σε πολύ μικρό ποσοστό. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι τα εγχειρίδια δε συμβαδίζουν με την άποψη πολλών ερευνητών που υποστηρίζουν ότι η αριθμογραμμή είναι ένα βασικό εργαλείο που βοηθάει τους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση των κλασμάτων (Bright et al., 1988; Saxe et al., 2007).

Ένα ακόμα εύρημα που προέκυψε από την παρούσα μελέτη είναι ότι τα κλάσματα «ευθυγραμμίζονται» σχεδόν απόλυτα με τις διακριτές και διακριτοποιημένες ποσότητες (DeWolf et al., 2013, 2015). Παρατηρήθηκε ότι τα διακριτοποιημένα μοντέλα αναπαράστασης εμφανίζονται με ποσοστό σχεδόν 80%, ενώ τα συνεχή μοντέλα

παρουσιάζονται ελάχιστα. Αυτό διαπιστώθηκε στα εγχειρίδια και των τριών τάξεων. Εξαιρέση αποτελούν τα λεκτικά προβλήματα στα οποία εμφανίζονται κυρίως συνεχείς λεκτικές ποσότητες, όπως το μήκος ή το βάρος. Ωστόσο, δεν είναι λίγα τα προβλήματα τα οποία αναφέρονται με λεκτικό τρόπο σε διακριτές ή διακριτοποιημένες ποσότητες, όπως οι μπάλες, οι μαθητές μιας τάξης ή τα κομμάτια μιας πίτσας. Η πραγμάτευση των κλασμάτων σε διακριτά, επί της ουσίας, πλαίσια, δεν υποστηρίζει την κατανόησή τους ως πυκνά διατεταγμένο σύνολο αριθμών (π.χ. Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Ως προς τις ενέργειες που προβλέπονται για τους μαθητές στις δραστηριότητες των εγχειριδίων, η ανάλυση έδειξε ότι η ενέργεια της «αποενσωμάτωσης» υπερέχει σημαντικά και στις τρεις τάξεις. Ακολουθούν, με μεγάλη διαφορά, οι ενέργειες του «ισομερισμού» και του «συντονισμού μονάδων». Σύμφωνα με τους Wilkins και Norton (2018), οι δύο πρώτες ενέργειες σχετίζονται άμεσα με την όψη του κλάσματος ως «μέρος-όλου», καθώς οι μαθητές διαιρούν μια ποσότητα σε ίσα μέρη (ισομερισμός) και «αποσπούν» κάποια μέρη της, διατηρώντας συγχρόνως τη σχέση τους με το σύνολο (αποενσωμάτωση). Συνεπώς, συνεχίζοντας την ανάλυση των δεδομένων ως προς την όψη του κλάσματος, διαπιστώσαμε ότι η όψη που κυριαρχεί είναι αυτή του «μέρους-όλου», με ποσοστό σχεδόν 100% στη Γ' Δημοτικού και ποσοστό άνω του 40% στις άλλες δύο τάξεις. Ωστόσο, το γεγονός ότι η ενέργεια του «ισομερισμού» εμπλέκεται ελάχιστα στις δραστηριότητες των εγχειριδίων σχετίζεται με το μεγάλο ποσοστό εμφάνισης διακριτών και διακριτοποιημένων ποσοτήτων, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι στις δύο τελευταίες τάξεις εμφανίζεται συχνά το κλάσμα ως αριθμός, δηλαδή το κλάσμα μέσα σε λεκτικά προβλήματα ή αριθμητικές πράξεις που είναι καθαρά συμβολικής μορφής. Το εύρημα αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς, όπως προαναφέρθηκε, ένας σημαντικός αριθμός δραστηριοτήτων αυτών των εγχειριδίων είναι καθαρά συμβολικού-διαδικαστικού χαρακτήρα.

Αντίθετα, η όψη του κλάσματος που παρατηρήθηκε λιγότερο είναι «το κλάσμα ως μέτρο». Η όψη αυτή, σύμφωνα με τους Wilkins και Norton (2018), σχετίζεται άμεσα με τις ενέργειες «επανάληψη» και «ισομερισμός/επανάληψη», οι οποίες επίσης παρατηρήθηκαν ελάχιστα. Το αποτέλεσμα αυτό προκάλεσε έκπληξη, ιδίως για τα εγχειρίδια της Ε' Δημοτικού, καθώς στους διδακτικούς στόχους της ενότητας των κλασμάτων διατυπώνεται ρητά ότι οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν το κλάσμα ως «μέτρο». Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι σε όλες τις τάξεις, και ιδιαίτερα στις δύο μεγαλύτερες,

παρατηρήθηκε ότι **ενυπάρχει** σε μικρό ποσοστό η όψη του κλάσματος ως «μέτρο». Αυτό σημαίνει ότι εντοπίστηκαν δραστηριότητες των οποίων το πλαίσιο δίνει τη δυνατότητα να αναδυθεί το κλάσμα ως «μέτρο», αλλά αυτή τελικά δεν αξιοποιείται. Οι δραστηριότητες αυτές είναι δομημένες με τέτοιο τρόπο που δεν επιτρέπουν την ενέργεια της επανάληψης. Συνεπώς, οδηγούν τους μαθητές να εφαρμόσουν τη διαδικασία της διπλής καταμέτρησης και έτσι έχουμε την όψη του κλάσματος «μέρος-όλου».

Τέλος, το κλάσμα ως «πηλίκιο» παρατηρείται μόνο στις δύο μεγαλύτερες τάξεις και μόνο στα κεφάλαια που αναφέρονται ρητά στο κλάσμα ως πηλίκιο διαίρεσης, ενώ οι όψεις «λόγος» και «τελεστής» δεν παρατηρήθηκαν καθόλου, σε καμία τάξη.

Συνοψίζοντας, από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας διαπιστώνουμε ότι στα εγχειρίδια Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης παρουσιάζεται μικρή ποικιλία μοντέλων αναπαράστασης. Δίνεται μεγάλη έμφαση στο διακριτοποιημένο μοντέλο εμβαδού και στην όψη του κλάσματος «μέρος-όλου». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μην έχουν την ευκαιρία να δημιουργήσουν αρκετές συνδέσεις γύρω από τη νέα γνώση. Όπως έχει επισημανθεί από ερευνητές του χώρου, η διδασκαλία που περιορίζεται σε στερεότυπα μοντέλα αναπαράστασης και σε καταστάσεις της μορφής «μέρος-όλου», παρεμποδίζει την κατανόηση και τη συγκρότηση σημαντικών συνδέσεων. Τα μοντέλα αυτά ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν για τα κλάσματα ένα είδος διαδικασίας διπλής καταμέτρησης και υποστηρίζουν την προσθετική και όχι την πολλαπλασιαστική σκέψη, η οποία απαιτείται για τα κλάσματα (Moss, 2005; Nunes & Bryant, 2007).

Η προσθετική σκέψη είναι η πηγή πολλών παρανοήσεων για τα κλάσματα και γενικότερα για τους ρητούς αριθμούς. Ουσιαστικά, οι μαθητές χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς και τις διακριτές ποσότητες και τη μεταφέρουν στο πεδίο των ρητών αριθμών. Με αποτέλεσμα, αντί να δουλεύουν την πολλαπλασιαστική σχέση του «μέρους» και του «όλου», δουλεύουν την προσθετική σχέση με εργαλεία καταμέτρησης (Moss, 2005). Ερευνητές υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία των κλασμάτων, αντί να βασίζεται στην πλέον εδραιωμένη προσθετική σκέψη των παιδιών, θα πρέπει να υποστηρίζει την πολλαπλασιαστική σκέψη, χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ενέργειες, ώστε οι μαθητές να υπερβούν τις παλιές τους αντιλήψεις. Κατά καιρούς, έχουν προταθεί εναλλακτικές εκπαιδευτικές προσεγγίσεις, που προωθούν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και εστιάζουν σε άλλα μοντέλα αναπαράστασης, επιδιώκοντας οι μαθητές να ξεπεράσουν αυτά τα εμπόδια (Kieren, 1994; Streefland, 1993; Moss, 2005).

Κλείνοντας, από το σύνολο της παρούσας εργασίας, γεννιέται το εξής ερώτημα: αν τα εγχειρίδια Μαθηματικών που μελετήσαμε χρησιμοποιούσαν μια διαφορετική οργάνωση και έδιναν μικρότερη βαρύτητα σε καταστάσεις «μέρους-όλου» και στερεότυπα μοντέλα αναπαράστασης, θα οδηγούσαν τους μαθητές σε μια βαθύτερη κατάκτηση της έννοιας του κλάσματος. Αυτό είναι ένα ερώτημα που απαιτεί τη μακροχρόνια και συστηματική σύγκριση εναλλακτικών προγραμμάτων σπουδών.

Βιβλιογραφία

- Alajmi, A. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 239-261.
- Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, 113(3), 447-455.
- Baturo, A.R. (2004). Empowering Andrea to help year-5 students construct fraction understanding. In M. J. Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 th PME Conference*, 2 (pp.95-102), Bergen: Bergen University College.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.
- Bempeni, M., & Vamvakoussi, X. (2015). Individual Differences in students' knowing and learning about fractions: evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research*, 3(1), 18-35
- Booth, J., L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman?. *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253.
- Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for research in mathematics education*, 19 (3), 215-232
- Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαράλης, Γ., και Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, α' τεύχος*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος"
- Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαράλης, Γ., και Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, α' τεύχος*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος"
- Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαράλης, Γ., και Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος"
- Γαγάτσης, Α. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα. Στο Α. Γαγάτσης, Ι. Ηλία, & Χ. Λεμονίδης (Επιμ.), *Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία. (σ.σ. 99-110). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου και Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293.
- Charalambous, C., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, M. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Common Core State Standards for Mathematics. (2010). Available online: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math_Standards.pdf
- Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 226-257
- DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. (2013). Analogical reasoning with rational numbers: Semantic alignment based on discrete versus continuous quantities. In M. Knauff, M. Pauen, N. Sebanz, & I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 388-393). Austin, TX: Cognitive Science Society.

- DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, 133, 72-84
- Dormolen, Van J. (1986). Textual analysis, In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*, pp.141-171. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131
- Fan, L., Jones, K., Wang, J., & Xu, B. (Eds.) (2013). Textbook research in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45, 633-646.
- Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1): Springer Science & Business Media.
- Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French, and German Classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567-590.
- Hannula, M. S. (2003). Locating Fraction on a Number Line. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 17-24.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-98). New York: Macmillan.
- Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2006), *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού*, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2006), *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου*, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2006), *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών β' τεύχος*, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
- Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Τόπος
- Kieren, T. E. (1976). *On the mathematical, cognitive and instructional*. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. Kieren, T. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In T. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-149). Columbus, OH: Ohio State University
- Kieren, T. E. (1994a). Multiple views of multiplicative structure. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 387-397). Albany: State University of New York Press.
- Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. και Σπανακά, Α. (2006). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού - Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων
- Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. και Σπανακά, Α. (2006). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού - Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Τετράδιο Εργασιών β' & δ' τεύχος*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων
- Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. και Σπανακά, Α. (2006). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού - Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων

- Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco and F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 146–165.
- Lamon, S. J. (2008). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, Taylor & Francis e-Library.
- Lee, H. S., DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2016). Conceptual and procedural distinctions between fractions and decimals: A cross-national comparison. *Cognition*, 147, 57-69.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translation among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33 ± 40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Mathematics Navigator: *A sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2-8)*. (2015) America'sChoice. Ανακτήθηκε από:
https://www.westada.org/cms/lib8/ID01904074/Centricity/Domain/207/Misconceptions_Error%202.pdf?fbclid=IwAR1ifHQIjIN_nLywhifLmeRBoZWebwFRHQpEBjVqdcF0_N2XVwGYIo8GX0
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 255-286.
- Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 122-147.
- Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: Teaching rational number. In J. Bransford & S. Donovan (Eds.), *How children learn: History, science and mathematics in the classroom* (pp. 309–350). Washington, DC: National Academies Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1).
- National Research Council. (2001). In Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26(3), 400-417.
- Nunes, T., Bryant, P. (2007). *Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά*, Μετάφραση: Λειβαδοπούλου, Σ. & Σαρηγιαννίδου, Επιμέλεια: Δεσλή Δ., Gutenberg: Αθήνα
- Nunes, T., & Bryant, P. (2015). The development of quantitative reasoning. In L. S. Liben & U. Müller (Eds.), *Handbook of child psychology and developmental science* (7 ed., Vol.2. pp. 715-764). Hoboken, NJ: Wiley.
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). *ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21^{ου} αιώνα.) Νέο πρόγραμμα σπουδών*. Υποέργο 1: Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και οδηγών για τον εκπαιδευτικό "Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων". Επιστημονικό Πεδίο: Μαθηματικά. Πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση. Ανακτήθηκε από: <http://ebooks.edu.gr/new/ps.php>
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-Based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on learning problems in mathematics*, 8(1), 39-48.

- Rapp, M., Bassok, M., DeWolf, M., & Holyoak, K. J. (2015). Modeling discrete and continuous entities with fractions and decimals. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 21(1), 47.
- Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Shannon, A., Langer-Osuna, J. M., Chinn, R., & Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number line. In W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott (Eds.), *The learning of mathematics: Sixty-ninth yearbook* (pp. 221–237). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction: A practice guide* (NCEE No. 2010-009). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, US Department of Education.
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13-19.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R.T., & Wiley, D.E. (1996), *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. Norwell, MA: Kluwer Academic Press.
- Schmidt, W. H., Raizen, S. A., Britton, E.D., Bianchi, L. J., & Wolfe, R. G. (1997). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school science*. Norwell, MA: Kluwer Academic Press.
- Son, J., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117-142.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, 14, 503-518.
- Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 289–325). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 344-355.
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in an interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 267-283). Oxford, UK: Elsevier
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209.
- Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά. Για Δημοτικό και Γυμνάσιο. Μια αναπτυξιακή Διαδικασία*, Αθήνα. Επίκεντρο
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Pearson Education
- Wilkins, J. L., & Norton, A. (2011). The splitting loop. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 386-416.
- Wilkins, J. L., & Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fractions. *International Journal of STEM Education*, 5(1), 27.

Παράρτημα

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ Γ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΒΔ Κεφ.22- Δραστ.Διερεύνησης	Εμπράγματα (1)	Συνεχής (1)	–	–	–	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.22-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (3)	Διακριτοποιημένη (3)	Μέρος-όλου (3)	–	Αποενσωμάτωση (3)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.22-Ασκ.2	Εμπράγματα (1) & Εικονική (2) & Μοντέλο εμβαδού (6)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (8)	Μέρος-όλου (9)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση(8)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (4)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.3	Μοντέλο εμβαδού (3) & Μοντέλο συνόλων (3)	Συνεχής (2) & Διακριτοποιημένη (1) & Διακριτή (3)	–	–	Ισομερισμός (6)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.4	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Συντονισμός μονάδων(1) & Αποενσωμάτωση (1)	–
Γ' Δημοτικού ΒΔ Κεφ.23- Δραστ.Διερεύνησης	Εμπράγματα (2)	Συνεχής (2)	–	–	Ισομερισμός (2)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (2) & Εικονική (1)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (3)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (3)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής (1)	–	–	Ισομερισμός (1)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23-Ασκ.3	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (4)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Ισομερισμός (2) & Αποενσωμάτωση (4)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Ασκ.3	Μοντέλο εμβαδού (6) & Μοντέλο συνόλων (2)	Διακριτοποιημένη (6) & Διακριτή (2)	Μέρος-όλου (8)	–	Αποενσωμάτωση (8)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Ασκ.4	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Συντονισμός μονάδων (4) & Αποενσωμάτωση (4)	–
Γ' Δημοτικού ΒΔ Κεφ.24- Δραστ.Διερεύνησης	Εμπράγματη (1)	Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (2) & Αποενσωμάτωση (3)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.24-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (6) & Μοντέλο συνόλων (1)	Συνεχής (4) & Διακριτοποιημένη (2) & Διακριτή (1)	Μέρος-όλου (7)	–	Ισομερισμός (4) & Αποενσωμάτωση (7)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.24-Ασκ.2	Μοντέλο συνόλων (1) & Μοντέλο μήκους (1)	Διακριτή (1) & Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (2)	Μέτρο* (1)	Αποενσωμάτωση (2)	Επανάληψη* (1)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (6)	Διακριτοποιημένη (6)	Μέρος-όλου (6)	–	Συντονισμός μονάδων (3) & Αποενσωμάτωση (6)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Ασκ.2	Μοντέλο συνόλων (1)	Διακριτή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Ασκ.3	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Ασκ.4	Μοντέλο μήκους (3)	Διακριτοποιημένη (3)	Μέρος-όλου (3)	–	Αποενσωμάτωση (3)	Επανάληψη* (3)
Γ' Δημοτικού ΒΔ Κεφ.25- Δραστ.Διερεύνησης	Εμπράγματη (3)	Διακριτοποιημένη (3)	Μέρος-όλου (3)	–	Αποενσωμάτωση (3)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.25-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (3)	Διακριτοποιημένη (3)	Μέρος-όλου (3)	–	Αποενσωμάτωση (3)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.25-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (4)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.25-Ασκ.3	Μοντέλο συνόλων (2)	Διακριτή (2)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.25-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (5)	Διακριτοποιημένη (5)	Μέρος-όλου (5)	–	Αποενσωμάτωση (5)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.25-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (8)	Διακριτοποιημένη (8)	Μέρος-όλου (8)	–	Αποενσωμάτωση (8)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.26-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.26-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2)	Μέτρο* (3)	Αποενσωμάτωση (2)	Επανάληψη* (3)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.26-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (5)	Διακριτοποιημένη (5)	Μέρος-όλου (5)	–	Αποενσωμάτωση (5)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.26-Ασκ.2	Συμβολική (2)	–	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.26-Ασκ.3	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.26-Ασκ.4	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.57-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (3) & Μοντέλο συνόλων (3)	Διακριτοποιημένη (3) & Διακριτή (3)	Μέρος-όλου (6)	–	Αποενσωμάτωση (6)	–
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.57-Ασκ.2	–	–	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.57-Ασκ.3	—	—	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	—	—	—
Γ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.57-Ασκ.4	—	—	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	—	—	—
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.57-Ασκ.1	—	—	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	—	—	—
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.57-Ασκ.2	—	—	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	—	—	—
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.57-Ασκ.3	—	—	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	—	—	—
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.57-Ασκ.4	—	—	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	—	—	—
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.57-Ασκ.5	—	—	(ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)	—	—	—
Γ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.57-Ασκ.6	Συμβολική (1)	—	Αριθμός (1)	—	—	—

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ Ε' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.13-Δραστ.Διερεύνησης.1	Εμπράγματη (1) & Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής – κατατμημένη σε άνισα μέρη (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (4)	–	Επανάληψη (4) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.13-Δραστ.Διερεύνησης.2	Μοντέλο συνόλων (1)	Διακριτή (1)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2) & Συντονισμός μονάδων (2)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.13-Εφαρμογή	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση (1) & Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.13-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (4) & Μοντέλο συνόλων (1)	Διακριτοποιημένη (4) & Διακριτή (1)	Μέρος-όλου (5)	–	Αποενσωμάτωση (5) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.13-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (1) & Συνεχής – κατατμημένη σε άνισα κομμάτια (1)	Μέρος-όλου (2)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (2)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.13-Ασκ.3	Μοντέλο εμβαδού (2) & Μοντέλο συνόλων (2)	Διακριτή (2) & Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2) & Μέτρο (2)	–	Επανάληψη (1) & Ισομερισμός/Επανάληψη (1) Συντονισμός μονάδων 2	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.13-Προβλ.1	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	Μέτρο* (1)	Αποενσωμάτωση (1)	Επανάληψη* (1)
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.13-Προβλ.2	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (2)	–	Ισομερισμός (2) & Αποενσωμάτωση (2)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.13-Προβλ.3	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.13-Δραστ.Επέκτασης	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής – κατατμημένη σε άνισα μέρη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (2) & Συντονισμός μονάδων (2)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.14-Δραστ.Διερεύνησης	Εμπράγματη (1) & Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (2)	–	Ισομερισμός (2) & Αποενσωμάτωση (2)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.14-Εφαρμογή.1	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	Μέτρο* (1) (αναφέρεται και στο ΒΔ)	Αποενσωμάτωση (1)	Ισομερισμός* (1) & Επανάληψη* (1)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.14-Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.14-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (3)	Διακριτοποιημένη (3)	Μέρος-όλου (3)	–	Αποενσωμάτωση (3)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.14-Ασκ.2	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (4)	Μέτρο* (4)	Αποενσωμάτωση (2) & Συντονισμός μονάδων (2)	Επανάληψη* (2) & Ισομερισμός/Επανάληψη* (2)
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.14-Ασκ.3	Μοντέλο εμβαδού (3)	Συνεχής (2) & Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	Μέτρο* (1)	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1)	Επανάληψη* (1)
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.14-Προβλ.1	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέτρο (1)	–	Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.14- Δραστ.Επέκτασης	Εικονική (1)	Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (1)	Μέτρο* (1)	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1)	Επανάληψη* (1)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.15-Δραστ.Διερεύνησης	Εικονική (1)	Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (2) & Πηλίο (2)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (2)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.15-Εφαρμογή	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίο (1) & Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός (1) & Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.15-Ασκ.1	Συμβολική (6)	–	Πηλίο (6)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.15-Ασκ.2	Συμβολική (3)	–	Πηλίο (3)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.15-Προβλ.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.15-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.15-Προβλ.3	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίκο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.15-Προβλ.4	Συμβολική (1)	–	Πηλίκο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.15-Δραστ.Επέκτασης	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίκο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.16-Δραστ.Διερεύνησης.1	Εμπράγματα (1) & Μοντέλο εμβαδού (1) & Εικονική (1)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (2)	–	Ισομερισμός (2) & Αποενσωμάτωση (2)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.16-Δραστ.Διερεύνησης.2	Εμπράγματα (1) & Μοντέλο μήκους (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέτρο (1)	–	Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.16-Εφαρμογή.1	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (2)	Μέτρο* (2)	Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	Ισομερισμός/Επανάληψη* (2)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.16-Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.16-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (6)	Διακριτοποιημένη (6)	Μέρος-όλου (6)	–	Αποενσωμάτωση (3) & Συντονισμός μονάδων (3)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.16-Ασκ.2	Αριθμογραμμή (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2) & Μέτρο (2)	–	Αποενσωμάτωση (2) & Συντονισμός μονάδων (2)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.16-Ασκ.3	Συμβολική (6)	–	Αριθμός (6)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.16-Προβλ.1	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.16- Δραστ.Επέκτασης	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.17-Δραστ.Διερεύνησης	Συμβολική (4)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (4)	–	Ισομερισμός (4) & Αποενσωμάτωση (4)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.17-Εφαρμογή	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (4) & Εικονική (2)	Διακριτοποιημένες (6)	Μέρος-όλου (6)	–	Αποενσωμάτωση (2) & Συντονισμός μονάδων (4)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17-Ασκ.2	Συμβολική (3)	–	Αριθμός (3)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17-Ασκ.3	Συμβολική (6)	–	Αριθμός (6)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17-Ασκ.4	Αριθμογραμμή (1)	Συνεχής – κατατμημένη σε άνισα μέρη (1)	Αριθμός (1) & Μέτρο (1)	–	Συντονισμός μονάδων (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17-Ασκ.5	Αριθμογραμμή (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Αριθμός (2)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17-Ασκ.6	Συμβολική (3)	–	Αριθμός (3)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17-Προβλ.1	Μοντέλο Εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.17- Δραστ.Επέκτασης	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.18- Δραστ.Διερεύνησης.1	Μοντέλο Εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.18- Δραστ.Διερεύνησης.2	Εμπράγματη (2) & Μοντέλο μήκους (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέτρο (2)	–	Επανάληψη (2)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.18-Εφαρμογή.1	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.18-Εφαρμογή.2	Μοντέλο εμβαδού (2)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Ασκ.1	Συμβολική (4)	–	Αριθμός (4)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Ασκ.2	Συμβολική (7)	–	Αριθμός (7)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Ασκ.3	Συμβολική (3)	–	Αριθμός (3)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Ασκ.4	Αριθμογραμμή (1)	Συνεχής (1)	Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Προβλ.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1) & Αριθμός (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Προβλ.3	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.18-Δραστ.Επέκτασης	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής – κατατμημένη σε άνισα μέρη (1)	Μέρος-όλου (5)	–	Αποενσωμάτωση (5)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19-Δραστ.Διερεύνησης.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19-Δραστ.Διερεύνησης.2	Εμπράγματη (1) & Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής (1)	Μέτρο (3)	–	Επανάληψη (3)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19- Δραστ.Διερεύνησης.3	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19- Δραστ.Διερεύνησης.4	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (4) & Συντονισμός μονάδων (4)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19-Εφαρμογή.1	Μοντέλο εμβαδού (3) & Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη (3)	Μέρος-όλου (2) & Αριθμός (1)	–	Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19-Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Ασκ.1	Μοντέλο Εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (3) & Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (4) & Συντονισμός μονάδων (4)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Ασκ.2	Συμβολική (4)	–	Αριθμός (4)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Ασκ.3	Συμβολική (4)	–	Αριθμός (4)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Ασκ.4	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Αριθμός (1) & Μέρος-όλου (1)	Μέτρο* (1)	Αποενσωμάτωση (1)	Επανάληψη* (1)
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Προβλ.1	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1) & Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός(1) & Αποενσωμάτωση (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19- Δραστ.Επέκτασης	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.20- Δραστ.Διερεύνησης_α	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση (2) & Επανάληψη (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.20- Δραστ.Διερεύνησης_β	Μοντέλο μήκους (1)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (1)	Μέτρο (1)	–	Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.20-Εφαρμογή	Συμβολική (2) & Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (2) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων(1) & Επανάληψη (1)	Ισομερισμός* (1)
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Ασκ.1	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέτρο (2)	–	Επανάληψη (2)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Ασκ.2	Συμβολική (8)	–	Αριθμός (8)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Ασκ.3	Συμβολική (2)	–	Αριθμός (2)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Προβλ.1	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (2)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων(1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Προβλ.2	Συμβολική (1) & Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1) & Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέτρο (1) & Αριθμός (1)	–	Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Προβλ.3	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Δραστ.Επέκτασης	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.21-Δραστ.Διερεύνησης.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.21-Δραστ.Διερεύνησης.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.21-Εφαρμογή	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Ασκ.1	Συμβολική (4)	Συνεχής Λεκτική (2) & Διακριτή (1) & Διακριτοποιημένη Λεκτική (1)	Μέτρο (2) & Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2) & Ισομερισμός/Επανάληψη (2)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Ασκ.2	Μοντέλο εμβαδού (1) & Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση (1) & Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Προβλ.1	Συμβολική (2)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (2)	Μέτρο (2)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (2)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21- Δραστ.Επέκτασης	Μοντέλο εμβαδού (2)	Συνεχής (1) & Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση (1) & Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Άσκ.1	Μοντέλο εμβαδού (5)	Διακριτοποιημένη (5)	Μέρος-όλου (4)	–	Ισομερισμός (4) & Συντονισμός μονάδων (4)	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Άσκ.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΒΜ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Άσκ.3	Αριθμογραμμή (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλο (4)	Μέτρο* (4)	Αποενσωμάτωση (4)	Επανάληψη* (4)
Ε' Δημοτικού ΒΜ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Άσκ.4	Συμβολική (4)	–	Αριθμός (4)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΒΜ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Πρόβλ.1	Συμβολική (4)	–	Αριθμός (4)	–	–	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Άσκ.1	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέτρο (2)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Άσκ.2	Συμβολική (6)	–	Αριθμός (6)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13 έως 21 Άσκ.3	Αριθμογραμμή (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέτρο (2)	–	Επανάληψη (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13-21, Πρόβλ.1	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση (1) & Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13-21, Πρόβλ.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
Με Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13-21, Πρόβλ.3	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13-21, Πρόβλ.4	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίκιο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
Ε' Δημοτικού ΤΕ Επαναληπτικό Κεφ. 13-21, Πρόβλ.5	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	–	–

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19- Δραστ.Διερεύνησης.1	Συμβολική (3)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (3)	Μέρος-όλου (3)	–	Ισομερισμός (3) & Αποενσωμάτωση (3)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19- Δραστ.Διερεύνησης.2	Συμβολική (2)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (2)	Μέτρο (2)	–	Επανάληψη (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19-Εφαρμογή.1	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	Πηλίκιο* (1)	Συντονισμός μονάδων (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.19-Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Ασκ.1	Μοντέλο συνόλων (2)	Διακριτή (2)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (4)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Ασκ.2	Μοντέλο συνόλων (4)	Διακριτή (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων (3)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Ασκ.3	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Συντονισμός μονάδων (4)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Προβλ.1	Μοντέλο συνόλων (1)	Διακριτή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Προβλ.3	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Συντονισμός μονάδων (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Προβλ.4	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου(1) & Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.19-Δραστ.Επέκτασης	Εμπράγματη (1) & Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής – κατατμημένη σε άνισα μέρη (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση (4) & Συντονισμός μονάδων (3)	Επανάληψη* (4)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.20-Δραστ.Διερεύνησης.1	Συμβολική (1) & Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1) & Πηλίκιο (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.20-Δραστ.Διερεύνησης.2	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Πηλίκιο (7)	Μέτρο* (7)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη* (7)
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.20-Εφαρμογή.1	Συμβολική (1)	–	Πηλίκιο (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.20-Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	–	Πηλίκιο (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Ασκ.1	Συμβολική (4)	–	Πηλίκιο (4)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Ασκ.2	Συμβολική (4)	–	Πηλίκιο (4)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ		
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Ασκ.3	Συμβολική (4)	–	Πηλίο (4)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Ασκ.4	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Πηλίο (5)	Μέτρο* (5)	–	Συντονισμός μονάδων* (5)
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Προβλ.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Προβλ.3	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίο (1)	–	Ισομερισμός (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.20-Δραστ.Επέκτασης	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1) & Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Πηλίο (1)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.21- Δραστ.Διερεύνησης.1	Μοντέλο εμβαδού (4)	Διακριτοποιημένη (4)	Μέρος-όλου (4)	–	Αποενσωμάτωση (4)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.21- Δραστ.Διερεύνησης.2	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.21-Εφαρμογή	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Ασκ.1	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Ασκ.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Ασκ.3	Συμβολική (4)	–	Αριθμός (4)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Ασκ.4	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Προβλ.1	Μοντέλο εμβαδού (1) & Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη (1) & Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (2) & Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1) & Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.21-Δραστ.Επέκτασης	Συμβολική (6)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (6)	Μέρος-όλου (6) & Μέτρο (6)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (6)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.22-Δραστ.Διερεύνησης.1	Μοντέλο εμβαδού (2)	Διακριτοποιημένη (2)	Μέρος-όλου (2)	–	Αποενσωμάτωση (2)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.22-Δραστ.Διερεύνησης.2	Αριθμογραμμή (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέτρο (1) & Αριθμός (1)	–	Συντονισμός μονάδων (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.22- Εφαρμογή.1	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.22- Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22- Ασκ.1	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.2	Συμβολική (5)	–	Αριθμός (5)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.3	Συμβολική (3)	–	Αριθμός (3)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Ασκ.4	Συμβολική (3)	–	Αριθμός (3)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Προβλ.1	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Προβλ.3	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1) & Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22-Προβλ.4	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.22- Δραστ.Επέκτασης	–	–	–	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23- Δραστ.Διερεύνησης.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23- Δραστ.Διερεύνησης.2	Μοντέλο εμβαδού (1)	Διακριτοποιημένη (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23- Εφαρμογή.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.23- Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23- Ασκ.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Ασκ.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Προβλ.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Προβλ.3	Εμπράγματη (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.23-Δραστ.Επέκτασης	Συμβολική (1)	Διακριτή Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Αποενσωμάτωση (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.24-Δραστ.Διερεύνησης.1	Μοντέλο εμβαδού (1)	Συνεχής (1)	Μέρος-όλου (1)	–	Ισομερισμός (1) & Αποενσωμάτωση (1) & Συντονισμός μονάδων (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.24-Δραστ.Διερεύνησης.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	Μέτρο* (1)	–	Επανάληψη* (1)
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.24- Εφαρμογή.1	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ	ΕΙΔΟΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ	ΟΨΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ		ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ	
			ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ	ΕΜΦΑΝΗΣ	ΕΝΥΠΑΡΧΕΙ
ΣΤ' Δημοτικού ΒΜ Κεφ.24- Εφαρμογή.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24- Ασκ.1	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Ασκ.2	Συμβολική (1)	–	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Προβλ.1	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Αριθμός (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Προβλ.2	Συμβολική (1)	Συνεχής Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέτρο (1)	–	–	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Προβλ.3	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (1) & Μέτρο (1)	–	Αποενσωμάτωση(1) & Ισομερισμός/Επανάληψη (1)	–
ΣΤ' Δημοτικού ΤΕ Κεφ.24-Δραστ.Επέκτασ	Συμβολική (1)	Διακριτοποιημένη Λεκτική Περιγραφή (1)	Μέρος-όλου (5)	–	Αποενσωμάτωση (3) & Συντονισμός μονάδων (3)	–

