**_ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ_**

Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

# Υποστηρίζοντας την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των νηπίων

Διπλωματική Εργασία
της
Γεωργίας Πήττα

**Επιβλέπουσα καθηγήτρια:**
Ξανθή (Ξένια) Βαμβακούση

Σεπτέμβριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος που απονέμει το Παιδαγωγικό τμήμα Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών (Π.Μ.Σ.) με τίτλο «Προσχολική Εκπαίδευση στην κατεύθυνση «Θετικές Επιστήμες και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Προσχολική και Πρωτοσχολική Εκπαίδευση».

## **Εξεταστική Επιτροπή**:

**Ξανθή (Ξένια) Βαμβακούση**, Επιβέπουσα, Αναπλ. Καθηγήτρια
Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

**Μαρία Καλδρυμίδου,** Καθηγήτρια
Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

**Αικατερίνη Πλακίτση,** Καθηγήτρια
Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

# Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την καθηγήτρια μου κ. Ξένια Βαμβακούση για την πολύτιμη καθοδήγηση της, την υπομονή της και τις ατέλειωτες συζητήσεις που μου έδιναν κίνητρο να συνεχίσω. Οι συμβουλές της και ο χρόνος που μου διέθετε ήταν εκείνα που οδήγησαν στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Καλδρυμίδου Μαρία και την κ. Πλακίτση Κατερίνα για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στις υπεύθυνες του ΚΔΑΠ που μου επέτρεψαν να πραγματοποιήσω στο χώρο τους το ερευνητικό κομμάτι της παρούσας εργασίας καθώς και στους γονείς των παιδιών που τους επέτρεψαν να συμμετέχουν στις δραστηριότητες. Φυσικά, εκείνοι που συνέβαλαν περισσότερο στην παρούσα έρευνα ήταν τα ίδια τα παιδιά που με την καλή τους διάθεση και την έμφυτη περιέργεια τους συμμετείχαν σε όλα τα έργα που τους δόθηκαν.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς την οικογένεια μου που μου θύμιζε κάθε φορά την δύναμη που κρύβω μέσα μου. Η ψυχολογική και ηθική τους στήριξη ήταν εκείνη που με βοήθησε στην επίτευξη των στόχων μου. Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω αυτή την εργασία στο μπαμπά μου, Βασίλη.

Περίληψη

*Στην εργασία αυτή διερευνούμε τη δυνατότητα υποστήριξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας. Σχεδιάσαμε μια παρέμβαση βασισμένη στην παροχή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων και την επίλυση προβλημάτων με ισομερισμό, μέτρηση με διαφορετικές μονάδες και επανάληψη ποσότητας, ενέργειες που θεωρούνται θεμελιώδεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Η παρέμβαση δοκιμάστηκε με μια μελέτη περίπτωσης με ημι-πειραματικό σχεδιασμό σε μία ομάδα τεσσάρων νηπίων. Η παρέμβαση ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών και προκάλεσε βελτιώσεις στην επίδοσή τους και στην ποιότητα των εξηγήσεών τους.*

**Λέξεις κλειδιά:** πολλαπλασιαστική σκέψη, παιδιά προσχολικής ηλικίας, μελέτη παρέμβασης

# Abstract

This paper reports on an empirical investigation on multiplicative thinking in preschool students. The set of tasks designed focuses on introducing the students to the mathematical terminology needed to verbally express themselves when solving problems involving equipartiotioning, counting with different units and unit iteration which are considered fundamental in evolving students' multiplicative thinking. This observational study was conducted on a group of 4 preschool students. All the tasks were designed based on the students' abilities and contributed to the development of their performance and validity of explanations on the specific tasks.

**Keywords:** multiplicative thinking, preschool students, observational study

# Πίνακας περιεχομένων

# Εισαγωγή

Η πολλαπλασιαστική σκέψη αφορά τη διαχείριση καταστάσεων οι οποίες εμπεριέχουν πολλαπλασιαστικές και αναλογικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (αριθμητικών ή/και φυσικών). Σχετίζονται με μια πληθώρα καταστάσεων (π.χ., καταστάσεις μέτρησης ή καταστάσεις μοιρασιάς) και διαπερνούν πολλές διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών (Βράκα, 2017).

Όπως είναι φανερό, οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις εμφανίζονται σε μια μεγάλη ποικιλία καταστάσεων και σχετίζονται με ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διεργασιών. Με τους όρους του Vergnaud (1983), οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις είναι στον πυρήνα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Ο Vergnaud (1983) όρισε το εννοιολογικό πεδίο ως ένα σύνολο εννοιών και ένα σύνολο καταστάσεων στενά συνδεδεμένων μεταξύ τους: κάθε έννοια αποκτά νόημα στο πλαίσιο πολλών διαφορετικών καταστάσεων και, ταυτόχρονα, η ανάλυση μιας κατάστασης απαιτεί παραπάνω από μία έννοιες. Το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο περιλαμβάνει έννοιες και καταστάσεις που συνδέονται με τον πολλαπλασιασμό. Πέρα από τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, ο λόγος και η αναλογία, οι ρητοί αριθμοί, η πιθανότητα, οι γραμμικές συναρτήσεις και όλες οι καταστάσεις που συνδέονται με τα παραπάνω, όπως τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής, εντάσσονται στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο. Το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο, δηλαδή, εκτείνεται από τα στοιχειώδη έως και τα ανώτερα μαθηματικά και συνδέεται με διαφορετικούς τομείς, όπως η άλγεβρα, η ανάλυση, η γεωμετρία, τα στοχαστικά μαθηματικά κ.λπ.(Βαμβακούση, Καλδρυμίδου 2018).

Το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες για τους μαθητές διαφόρων ηλικιών. Πολλοί ερευνητές (π.χ., Sophian, 2004; Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018) αποδίδουν μέρος των δυσκολιών αυτών στον τρόπο με τον οποίο πραγματεύονται έννοιες και καταστάσεις του πολλαπλασιαστικού πεδίου στην εκπαίδευση. Πράγματι, τα παιδιά διδάσκονται ήδη από την πρωτοσχολική ηλικία για τους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητες τους και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κατάκτηση των προσθετικών σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους, γεγονός που δεν ισχύει και για την διδασκαλία πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ αριθμών και ποσοτήτων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018; Βράκα, 2017). Ταυτόχρονα, η πρόσθεση χρησιμοποιείται ως βάση για την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού (ο πολλαπλασιασμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση), κάτι που συσκοτίζει τις ενυπάρχουσες πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Η ασυμμετρία αυτή δημιουργεί πολλά προβλήματα στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης από τους μαθητές μιας και οι γνώσεις που τα παιδιά διαθέτουν σχετικά με τις ιδιότητες και της προσθετικές σχέσεις των φυσικών αριθμών δεν μπορούν να υποστηρίξουν αποτελεσματικά την κατάκτηση εννοιών και καταστάσεων του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου (π.χ., τους ρητούς αριθμούς και τις πράξεις τους, Vamvakoussi et al., 2018). Για την αποφυγή τέτοιων ασυμμετριών σημαντικό ρόλο παίζει η διδασκαλία με στόχο την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικών σκέψης, ήδη από την πρωτοσχολική ηλικία.

Από τη δεκαετία του 80, οι ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν ασχοληθεί με τις βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης, τις ικανότητες και τις στρατηγικές των μικρών παιδιών σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, καθώς και με πιθανές σχετικές διδακτικές προσεγγίσεις στις μικρές ηλικίες (π.χ., Confrey, 1995; Hunting& Davis, 1991; Desforges & Desforges, 1980; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Nunes & Bryant, 1996; Sophian, 2004).. Η έρευνα αυτή έχει προκαλέσει αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα για την πρωτοσχολική ηλικία σε διεθνές επίπεδο (π.χ., Clements, Sarama, & DiBiase, 2004), αλλά και στον ελληνικό χώρο (βλ. Αναλυτικό Πρόγραμμα, 2011), τα οποία ενσωματώνουν ρητούς στόχους σχετικούς με το πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ήδη από το νηπιαγωγείο.

Η παρούσα εργασία αξιοποιεί τα θεωρητικά, εμπειρικά και εκπαιδευτικά αυτά δεδομένα στο σχεδιασμό μιας πειραματικής παρέμβασης με στόχο να υποστηριχθεί η ικανότητα των παιδιών να πραγματευθούν πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Το **πρώτο μέρος** της εργασίας αυτής παρουσιάζει την βιβλιογραφική ανασκόπηση που αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της παρούσας έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο, στην πρώτη ενότητα, παρουσιάζεται ο ορισμός της πολλαπλασιαστικής σκέψης σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία. Στην δεύτερη ενότητα, γίνεται λόγος για τις βάσεις της ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης και στην τρίτη ενότητα συζητώνται οι στρατηγικές που έχουν εντοπιστεί σε προγενέστερες εμπειρικές έρευνες που σχετίζονται με την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στα παιδιά προσχολικής και πρωτοσχολικής ηλικίας. Τέλος, η τέταρτη ενότητα αφορά τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την ενασχόληση τους με διάφορους τομείς της πολλαπλασιαστικής σκέψης και αναγνωρίζει ως μια από τις αιτίες για τις δυσκολίες αυτές την ασυμμετρία στη διδασκαλία υπέρ του προσθετικού πεδίου.

Στο **δεύτερο μέρος** παρουσιάζεται η μέθοδος και τα αποτελέσματα της παρέμβασης που σχεδιάστηκε στη βάση των συμπερασμάτων που προέκυψαν από την βιβλιογραφική ανασκόπηση. Τέλος, ακολουθούν τα συμπεράσματα της έρευνας και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω εμπειρική τεκμηρίωση τους.

# Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό υπόβαθρο

## 1.1. Πολλαπλασιαστικές σχέσεις και πολλαπλασιαστική σκέψη

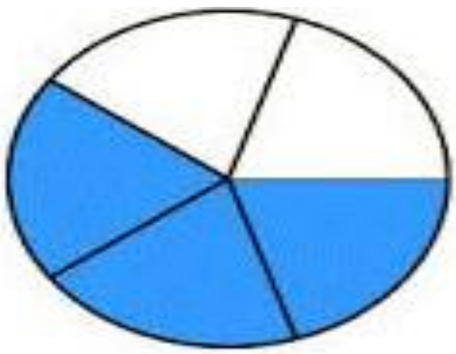
Η εργασία αυτή εστιάζει στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις της μορφής α=κ.β, όπου τα α,β, κ είναι μεγέθη ή αριθμοί. Αυτή η μορφή σχέσης είναι, σύμφωνα με την ταξινόμηση του Vergnaud (1994), ειδική περίπτωση της απλής αναλογίας και ενυπάρχει σε καταστάσεις που μοντελοποιούνται με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται μια τυπολογία των διαφορετικών προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και των φυσικών αριθμών που είναι προσαρμογή της τυπολογίας του Greer (1992), όπως εμφανίζεται στον Long (2011). Οι διαφορετικοί τύποι καταστάσεων προσαρμόζονται ανάλογα και όταν οι εμπλεκόμενες ποσότητες είναι συνεχείς (Greer, 1992, 1994), όπως θα συζητηθεί σε επόμενη ενότητα. Επισημαίνεται ότι για την πρώτη κατηγορία στον Πίνακα 1, ο όρος «επαναλαμβανόμενη πρόσθεση» θα ήταν προτιμότερο να αντικατασταθεί με τον όρο «επανάληψη ποσότητας», καθώς η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση είναι ένας τρόπος υπολογισμού του αποτελέσματος, ενώ η «επανάληψη της ποσότητας» είναι η ενέργεια που προϋποτίθεται. Για να γίνει αυτό κατανοητό, στο παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης του Πίνακα 1, θα μπορούσε να φανταστεί κανείς το είδος της ενέργειας που θα έπρεπε να κάνει ένα μικρό παιδί, αναπαριστώντας εμπράγματα την κατάσταση (επανάληψη των 2 ροδών τόσες φορές, όσα είναι τα ποδήλατα).

| **Τύπος προβλήματος** | **Παράδειγμα** |
|---|---|
| Ισοπληθών ομάδων (Επανάληψη ποσότητας) | Πόσες ρόδες έχουν τέσσερα ποδήλατα; Ή με πιο σαφή διατύπωση: Έχουμε 4 ποδήλατα που το καθένα έχει 2 ρόδες. Πόσες ρόδες έχουν όλα μαζί; |
| Ομαδοποίησης | Πόσες ομάδες των 5 βόλων μπορώ να έχω αν συνολικά έχω 15 βόλους; |
| Μερισμού | Έχουμε 15 μήλα για να τα μοιράσουμε σε 3 παιδιά. Πόσα μήλα θα πάρει το κάθε παιδί; |

| | |
|---|---|
| Αναλογικού Μερισμού | Η Ιωάννα μαζεύει 1 μπουκάλι γάλα για κάθε 3 μπουκάλια που παίρνει ο Μάριος. Αν η Ιωάννα έχει μαζέψει 9 μπουκάλια, πόσα μπουκάλια έχει μαζέψει ο Μάριος; |
| Αναλογικής Σύγκρισης | Ο Γιάννης έχει μαζέψει τα τριπλάσια μήλα από την Μαρία. Αν η Μαρία έχει μαζέψει 4 μήλα, πόσα θα έχει μαζέψει ο Γιάννης; |
| Αναλογίας | Η Αλίκη πίνει 3 κούπες γάλα κάθε μέρα. Πόσες κούπες θα πιει σε μια βδομάδα; |
| Ορθογώνιας παράταξης (γραμμές-στήλες) | Ο Δημήτρης φυτεύει 3 σειρές με λάχανα και κάθε μία από αυτές έχει 5 λάχανα. Πόσα λάχανα έχει φυτέψει συνολικά; |
| Καρτεσιανού γινομένου | Η Άννα έχει ένα μπλε, ένα κόκκινο και ένα κίτρινο πουκάμισο. Έχει ακόμη μια μαύρη και μία λευκή φούστα. Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς μπορεί να κάνει με αυτά τα ρούχα; |

**Πίνακας 1:** Είδη προβλημάτων που μοντελοποιούνται με τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση.

Στην περίπτωση που τα α, β αντιστοιχούν σε ομοειδή μεγέθη (ή σε μεγέθη που μπορούν να θεωρηθούν ομοειδή σε ένα υπερσύνολο, όπως τα μπλε και λευκά κομμάτια στο υπερσύνολο *κύκλος* του Σχήματος 1), τότε το κ είναι καθαρός αριθμός και οι σχέσεις τις μορφής α=κ.β αντιστοιχούν σε σχέσεις μέρους-όλου ή μέρους-μέρους. Ορισμένοι ερευνητές θεωρούν ότι οι καταστάσεις που αντιστοιχούν σε αυτή την περίπτωση είναι ψευδο-πολλαπλασιαστικές, καθώς μπορούν να αναχθούν σε προσθετικές. Ωστόσο, η περίπτωση αυτή έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αφορά τη μέτρηση, ενώ αποτελεί και τη συνήθη βάση για την εισαγωγή των κλασματικών αριθμών. Για παράδειγμα στο Σχήμα 1 υπάρχουν τριών ειδών πολλαπλασιαστικές σχέσεις: δύο μέρους- όλου και μία μέρους- μέρους (ή δύο, αν ληφθούν υπόψη ο λόγος πλήθος των μπλε/πλήθος των λευκών και ο λόγος πλήθος των λευκών/ πλήθος των μπλε).



**Σχήμα 1:** Σχέσεις μέρους-μέρους και μέρους-όλου

Οι Singer και Resnick (1992) ονομάζουν τις καταστάσεις όπου χρειάζεται να παρατηρηθούν σχέσεις μέρους- όλου και μέρους- μέρους καταστάσεις «Από τα …» και «Για κάθε …» αντίστοιχα. Όσον αφορά τις καταστάσεις «για κάθε…», στο παραπάνω παράδειγμα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την εξής πρόταση για να περιγράψουμε τη σχέση ανάμεσα στα μπλε και τα λευκά κομμάτια του κύκλου: «Για κάθε 3 μπλε τετράγωνα υπάρχουν 2 λευκά» - πρόκειται δηλαδή για μια κατάσταση «αναλογικού μερισμού» (βλ. Πίνακα 1). Από την άλλη μεριά, οι καταστάσεις «από τα …» είναι σημαντικές για την κατανόηση των κλασμάτων ως σχέσεις μέρους όλου. Στο παραπάνω παράδειγμα, δηλαδή θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την παρακάτω πρόταση για να περιγράψουμε τη σχέση των μπλε κομματιών του κύκλου με τα συνολικά κομμάτια: «Τα 3 από τα 5 κομμάτια είναι μπλε» αλλά και «τα 3/5 των τμημάτων στα οποία είναι χωρισμένος ο κύκλος είναι μπλε», ή « τα 3/5 της επιφάνειας του κύκλου είναι μπλε».

Με βάση τα παραπάνω, είναι φανερό ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη αφορά πολλά περισσότερα από την κατάκτηση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και η οριοθέτησή της δεν είναι απλή υπόθεση. Μια ενδεικτική προσπάθεια είναι αυτή των Siemon και συνεργατών (2006, σελ.113 ), οι οποίοι παρουσιάζουν τα παρακάτω τρία χαρακτηριστικά της πολλαπλασιαστικής σκέψης:

- Την δυνατότητα να επεξεργάζεται το άτομο με ευελιξία και επάρκεια ένα εύρος αριθμών (για παράδειγμα μεγαλύτερους ακέραιους αριθμούς, δεκαδικούς, κλάσματα και ποσοστά).
- Την ικανότητα να αναγνωρίζει και να λύνει ένα εύρος προβλημάτων που αφορούν καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και σχετίζονται με πολλαπλασιαστικές/αναλογικές σχέσεις.

- Τα μέσα για την αποτελεσματική επικοινωνία της πληροφορίας που αυτές οι σχέσεις παρέχουν με ποικίλους τρόπους (Για παράδειγμα, λέξεις, διαγράμματα, συμβολική έκφραση των εννοιών και γραπτοί αλγόριθμοι).

Για τους σκοπούς αυτής της εργασία, ιδιαίτερη σημασία έχουν τα δύο τελευταία, καθώς το πρώτο αναφέρεται στην πολλαπλασιαστική διαχείριση αριθμών που αφορά παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας.

## 1.2. Πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης

Ο Piaget μέσα από μία σειρά πειραμάτων που αφορούσαν την διαχείριση σχέσεων ισοδυναμίας και διάταξης μεταξύ λόγων παρατήρησε ότι τα παιδιά πριν από στάδιο της συγκεκριμένης σκέψης, δηλαδή την ηλικία των 11 ετών, δεν έχουν την ικανότητα αναλογικής σκέψης. Αυτό συμβαίνει γιατί σε μικρότερη ηλικία, σύμφωνα με τις έρευνες του, τα παιδιά δεν κατάφερναν επιτυχώς να αναλύσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις αναλογίες που τους δινόταν, μιας και βασιζόταν στις γνώσεις που είχαν για την πρόσθεση (Βρακά, 2017).

Πολλοί ερευνητές, επηρεασμένοι από την άποψη του Piaget, θεώρησαν ότι η προσθετική σκέψη προηγείται της πολλαπλασιαστικής (Clark & Kamii, 1996; Jacob & Willis, 2003; Lamon & Lesh, 1992) αναφέροντας μάλιστα την μετάβαση από την προσθετική σκέψη στην πολλαπλασιαστική ως «ένα από τα μεγαλύτερα εμπόδια για να μάθουν τα παιδιά μαθηματικά μετά τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης τους» (Siemon et al., 2005, σελ.1).

Η άποψη αυτή για την ανάπτυξη πρώτα της προσθετικής και μετά της πολλαπλασιαστικής σκέψης έχει τεθεί υπό αμφισβήτηση τα τελευταία χρόνια μιας και έρευνες (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007; Nunes & Bryant, 2010) έχουν φέρει στο φως πρώιμες ικανότητες σχετικές με την πολλαπλασιαστική σκέψη. Οι Mix, Huttenlocher, & Levine (2002) βασισμένες σε πλήθος ερευνών, υποστηρίζουν ότι, υπό κατάλληλες συνθήκες, τα βρέφη και τα μικρά παιδιά διακρίνουν μεταβολές στο λόγο μεταξύ δύο ποσοτήτων (δηλ., μεταβολές με πολλαπλασιαστικό χαρακτήρα) και επεξεργάζονται αναλογικές σχέσεις σε αντιληπτικό επίπεδο. Για παράδειγμα, οι McCrink & Spelke (2016) αναφέρονται σε ευρήματα που δείχνουν ότι παιδιά 6 ετών, αν τους δοθούν αρκετά παραδείγματα μιας συγκεκριμένης σχέσης μέρους-όλου σε σχήματα με ένα γραμμοσκιασμένο μέρος, τότε μπορούν να επιλέξουν ανάμεσα σε άλλα ένα μοντέλο που αναπαριστά την ίδια σχέση. Αναφέρονται επίσης σε ευρήματα που δείχνουν ότι παιδιά ηλικίας 6-7 ετών, όταν τους παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα ενός πολλαπλασιαστικού μετασχηματισμού, και συγκεκριμένα, υποδιπλασιασμού, επί ποσοτήτων (συνεχών ή διακριτών), είναι σε θέση να προβλέψουν τι θα συμβεί σε μια νέα ποσότητα.

Επίσης, έχει τεκμηριωθεί η ικανότητα των παιδιών να αντιμετωπίζουν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις πριν από την εισαγωγή τους στην επίσημη διδασκαλία της. Για παράδειγμα, τα παιδιά μπορούν να μοιράσουν τα γλυκά που έχουν στους συμμαθητές τους ή να συγκρίνουν το μέγεθος των κομματιών μιας πίτσας και να κατανοήσουν ότι αυτό αλλάζει ανάλογα με το πλήθος των κομματιών που έχουν (Degrande, 2019; Kornelaki & Nunes, 2005; Hunting & Davis, 1991).

Το γεγονός ότι πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης ανιχνεύονται ερευνητικά, δε σημαίνει, φυσικά, ότι αυτές εκδηλώνονται από όλα τα παιδιά της ίδιας ηλικίας και σε οποιοδήποτε πλαίσιο. Στην περίπτωση της αντιληπτικής αναγνώρισης πολλαπλασιαστικών σχέσεων, για παράδειγμα, τα μικρά παιδιά επιτυγχάνουν συχνότερα όταν εμπλέκονται συνεχείς ποσότητες. Αντίθετα, στην περίπτωση της δίκαιης μοιρασιάς, τα μικρά παιδιά επιτυγχάνουν συχνότερα στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (McKrink & Spelke, 2016). Η πολλαπλασιαστική σχέση που ενυπάρχει στην κατάσταση είναι επίσης σημαντική με τη σχέση 1:2 να είναι η πρώτη που ανιχνεύουν τα παιδιά (McKrink & Spelke, 2016) και μπορούν να διαχειριστούν, για παράδειγμα, στο πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς (Hunting & Davis, 1991).

Η δίκαιη μοιρασιά είναι το πρώτο είδος προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής που τα παιδιά συναντούν και ίσως το είδος για το οποίο έχουν μελετηθεί περισσότερο οι ικανότητες και οι στρατηγικές των μικρών παιδιών, ιδιαίτερα στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων. Συνοψίζοντας τα σχετικά ευρήματα, οι Charles και Nason (2000) επισημαίνουν ότι τα μικρά παιδιά τείνουν πράγματι να χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για να αντιμετωπίσουν καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Ωστόσο, τόσο η επιλογή, όσο και η επιτυχία της στρατηγικής εξαρτάται από μια σειρά παραγόντων, όπως η προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρία τους για τέτοιες καταστάσεις, το πλαίσιο στο οποίο τίθεται το πρόβλημα, το είδος των αντικειμένων που μοιράζονται, το πλήθος των αντικειμένων και το πλήθος των μεριδίων. Συχνά, δε, το κοινωνικό πλαίσιο παίζει ρόλο στο τρόπο με τον οποίο τα παιδιά ερμηνεύουν μια κατάσταση μοιρασιάς και μπορεί να παραβλέψουν την αρχή ότι τα μερίδια πρέπει να είναι ίσα, προκειμένου να δώσουν, για παράδειγμα, περισσότερα αντικείμενα σε ένα μεγαλύτερο παιδί.

Οι Skoumpourdi και Sofokiti (2000) τονίζουν επίσης, πως και το είδος των ποσοτήτων που εμπλέκονται στο πρόβλημα επηρεάζει τις στρατηγικές που τα παιδιά χρησιμοποιούν, αλλά και τη συχνότητα της επιτυχούς μοιρασιάς. Αυτό συμβαίνει γιατί στις διακριτές ποσότητες τα παιδιά μπορούν να μοιράσουν την αρχική ποσότητα αντιστοιχώντας ένα αντικείμενο σε κάθε παραλήπτη και επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία μέχρι τα αντικείμενα να τελειώσουν ενώ στις συνεχείς ποσότητες τα παιδιά καλούνται να φτιάξουν μόνα τους το μερίδιο που θα αντιστοιχεί σε κάθε παραλήπτη. Εμπειρικά δεδομένα είναι συμβατά με αυτή την άποψη. Για παράδειγμα, και οι Kornelaki και Nunes (2005) παρατήρησαν πως τα παιδιά ηλικίας 6-7 ετών δυσκολεύονται περισσότερο στην επίλυση προβλημάτων μερισμού για τις συνεχείς ποσότητες. Ωστόσο, οι Kornelaki και Nunes διαπίστωσαν ότι τα παιδιά που είχαν κατανοήσει βασικές αρχές της διαίρεσης στις διακριτές ποσότητες (π.χ., όσο περισσότεροι οι παραλήπτες, τόσο μικρότερα τα μερίδια), τις κατανοούσαν και στις συνεχείς, παρά το γεγονός ότι δυσκολεύονταν να κατασκευάσουν τα ίσα μερίδια. Με άλλα λόγια, η μεγαλύτερη δυσκολία στις συνεχείς ποσότητες είναι μάλλον πρακτικό θέμα, παρά θέμα κατανόησης.

Από την παραπάνω συζήτηση φαίνεται ότι τα μικρά παιδιά διαθέτουν πράγματι ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης, οι οποίες, όπως είναι αναμενόμενο, έχουν περιορισμούς ως προς τις συνθήκες και τα πλαίσια στα οποία εκδηλώνονται. Για την ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων, πολύ σημαντικό ζήτημα είναι η συχνότητα και η ποιότητα των ευκαιριών που δίνονται στα παιδιά για να διαχειριστούν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Οι Prawatt (1993, 1995) και Dreyfus et al. (1997, όπως αναφέρεται στο Charles &, Nason, 2000) επισημαίνουν πως απαιτείται συστηματική ενασχόληση των παιδιών με προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής, ώστε να αρχίσουν να αναγνωρίζουν τις ίδιες έννοιες, δομές και σχέσεις και οικοδομούν στρατηγικές για να μπορούν να επιλύουν προβλήματα σε όποιο πλαίσιο και αν τα βρουν.

### 1.3 Η ασυμμετρία υπέρ του προσθετικού πεδίου στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης και οι συνέπειές της

Οι πρώιμες ικανότητες των μικρών παιδιών για πολλαπλασιαστική σκέψη δεν τυγχάνουν κατάλληλης προσοχής στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης, η οποία επικεντρώνεται στους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις, στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018).

Πράγματι, ήδη από το νηπιαγωγείο, τα παιδιά εκτίθενται σε συστηματική διδασκαλία για τους φυσικούς αριθμούς ως πληθικούς αριθμούς και για προσθετικές καταστάσεις. Εμπράγματες αναπαραστάσεις, όπως αυτοκινητάκια και κούκλες, αλλά και τα χέρια τους, χρησιμοποιούνται από το νηπιαγωγείο κιόλας για να μπορέσουν να προσεγγίσουν την πρόσθεση και ιδιότητές της κυρίως όσον αφορά τις διακριτές ποσότητες.

Παρά το γεγονός ότι σήμερα αναγνωρίζεται διεθνώς η σημασία της υποστήριξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες, πολλά προγράμματα σπουδών διεθνώς δεν έχουν προσαρμοστεί κατάλληλα, ιδιαίτερα στο νηπιαγωγείο. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τα Common Core Standards στην Αμερική, ενώ τα παιδιά προσχολικής ηλικίας έρχονται σε επαφή με τους φυσικούς αριθμούς ως πληθικούς και διάφορες προσθετικές καταστάσεις, δεν αναφέρονται στόχοι σχετικά με την πολλαπλασιαστική σκέψη.[1] Το ίδιο παρατηρούμε και στην περίπτωση της Φινλανδίας, μιας χώρας πρότυπο όσον αφορά το εκπαιδευτικό της σύστημα. Μέσα από βιωματικές διαδικασίες μάθησης ευχάριστες προς τους μαθητές τα παιδιά στην Φινλανδία έρχονται σε επαφή με συγκρίσεις και ταξινομήσεις, τους αριθμούς και τις πράξεις και τα βασικά γεωμετρικά σχήματα παρατηρώντας σχέσεις μεταξύ αριθμών και ποσοτήτων αλλά και πάλι δεν συμμετέχουν σε δραστηριότητες που να προάγουν καθαρά την πολλαπλασιαστική σκέψη (Mononen, Aunio & Koponen, 2014). Το ίδιο παρατηρούμε και στην Κίνα, όπου τα παιδιά στο νηπιαγωγείο ασχολούνται μόνο με τους αριθμούς, την πληθικότητα και την σειροθέτηση[2] και εισάγονται στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση μέσα από απλές δραστηριότητες κατά το πρώτο έτος φοίτησης τους στο δημοτικό σχολείο.

---

[1] Πηγή: http://www.corestandards.org/Math/Content/K/introduction/

[2] Πηγή: https://www.futureschool.com/china-curriculum/#552f66315fc24

Αντίθετα, στο πιο πρόσφατο ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα (ΑΠ, 2011) παρατηρούμε πως υπάρχει ενότητα η οποία αφορά τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση. Ρητοί στόχοι είναι οι εξής:

- Αρ. 8: Ομαδοποιούν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες.
- Αρ.9: Μοιράζουν αντικείμενα σε δυάδες, και τριάδες

Ωστόσο, μια ανάλυση αυτού του αναλυτικού προγράμματος έδειξε ότι η ασυμμετρία ανάμεσα στο προσθετικό και το πολλαπλασιαστικό πεδίο παραμένει (Βράκα, 2017). Πράγματι, οι πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που προβλέπονται στο αναλυτικό πρόγραμμα αφορούν αποκλειστικά τις διακριτές ποσότητες, ενώ λείπουν εντελώς γλωσσικά εργαλεία που να εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Ενδεικτικό είναι το «μισό» δεν εμφανίζεται πουθενά στο αναλυτικό αυτό. Από την άλλη, η διδασκαλία των φυσικών αριθμών και των προσθετικών σχέσεων καταλαμβάνει μεγάλο μέρος του προγράμματος, με ρητά προσδιορισμένους στόχους.

Η ασυμμετρία αυτή υπέρ του προσθετικού πεδίου στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης δημιουργεί προβλήματα στη συνέχεια (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Πράγματι, τα παιδιά βασίζονται σε προσθετικές σχέσεις για να μπορέσουν να επεξεργαστούν και κατανοήσουν καταστάσεις, γεγονός που τα οδηγεί σε λάθη ή περιορισμένη εκτίμηση μιας κατάστασης. Για παράδειγμα, η Lamon (όπως αναφέρει η Moss, 2005) έδειξε μέσα από το ερευνητικό της έργο ότι τα παιδιά συχνά ερμηνεύουν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ως προσθετικές. Στο παράδειγμα που ακολουθεί ζητήθηκε από τα παιδιά να υπολογίσουν ποιο από δύο φίδια μεγάλωσε περισσότερο, αναφέροντας τους πως το πρώτο φίδι είχε αρχικό μήκος 4 πόδια και τελικό μήκος 7 πόδια και το δεύτερο φίδι είχε αρχικό μήκος 5 πόδια και τελικό μήκος 8 πόδια. Τα περισσότερα παιδιά εστίασαν στην προσθετική μεταβολή και απάντησαν ότι τα δύο φίδια μεγάλωσαν το ίδιο, ενώ πολύ λιγότερα παιδιά εστίασαν στην πολλαπλασιαστική μεταβολή και σύγκριναν τους λόγους 4/7 και 5/8 παρατηρώντας ότι το πρώτο φίδι μεγάλωσε περισσότερο σε σχέση με το αρχικό του μήκος.

Πολλά προβλήματα παρουσιάζονται και στα κλάσματα. Η Moss (2005) σε έρευνα της παρατήρησε ότι μέσα από τη μεταφορά των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών στα κλάσματα τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα της θεωρούσαν τα κλάσματα 3/4 και 2/3 είναι ίσα μιας και «λείπει ένα κομμάτι για να γίνουν ολόκληρα» από το καθένα. Η απάντηση τους δεν άλλαζε ακόμη και όταν σχεδίαζαν την αναπαράσταση του κάθε κλάσματος φτιάχνοντας έναν κύκλο για το πρώτο κλάσμα που αναφέρθηκε παραπάνω και χρωματίζοντας τα 3 από τα 4 κομμάτια του και έναν ακόμη για το δεύτερο χρωματίζοντας τα 2 από τα 3 κομμάτια του. Στην περίπτωση αυτή είναι εμφανές ότι τα παιδιά εστιάζουν στα (διακριτά) κομμάτια που προκύπτουν σε κάθε πίττα και στις προσθετικές, αντί τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μέρους-όλου.

Παρόμοια φαινόμενα παρατηρούνται και σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο. Πολλοί μαθητές αποφαίνονται ότι, για παράδειγμα, το κλάσμα 3/8 είναι μεγαλύτερο από το 2/3, γιατί «το 3 είναι μεγαλύτερο από το 2 και το 8 είναι μεγαλύτερο από το 3». Σε αυτή την περίπτωση, οι φυσικοί αριθμοί που αποτελούν τους όρους των κλασμάτων εξετάζονται ξεχωριστά, και αναγνωρίζονται οι προσθετικές και όχι οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ τους (Vamvakoussi et al., 2018).

Τα παραπάνω είναι ενδεικτικά των εμποδίων που δημιουργεί η επικέντρωση στη διδασκαλία των προσθετικών σχέσεων και των φυσικών αριθμών στην πρωτοσχολική εκπαίδευση στην κατάκτηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης από τα παιδιά. Πληθώρα ευρημάτων δείχνουν ότι σε μια ποικιλία καταστάσεων, μαθητές διαφόρων ηλικιών δεν αναγνωρίζουν και δεν αξιοποιούν πολλαπλασιαστικές σχέσεις – αντ'αυτού επικεντρώνουν σε διακριτές ποσότητες, φυσικούς αριθμούς και σε προσθετικές σχέσεις μεταξύ τους (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Όπως έχουν επισημάνει εδώ και χρόνια οι Hunting και Davis (1991), αυτά τα προβλήματα ενδεχομένως θα αμβλύνονταν, αν η εκπαίδευση φρόντιζε να θεμελιωθούν από νωρίς οι βάσεις τις πολλαπλασιαστικής σκέψης.

### 1.4. Βάσεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης

Ως σημαντική βάση της πολλαπλασιαστικής σκέψης θεωρείται η ένα-προς-πολλά αντιστοίχιση (Park & Nunes, 2001). Τα παιδιά, ήδη από την προσχολική ηλικία, είναι ικανά να κατανοήσουν την αντιστοιχία ένα-προς-πολλά. Μπορούν, για παράδειγμα, να βρουν τον αριθμό των παιδιών που βρίσκονται σε μία τάξη βλέποντας τα ζευγάρια από παπούτσια που εκείνα έχουν αφήσει απ' έξω. Οι Jakob και Willis (2018) χαρακτηρίζουν αυτή την ικανότητα των παιδιών και ως ένα από τα αρχικά στάδια ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής τους σκέψης φέρνοντας ως παράδειγμα τον Zachary (8 ετών), ένα παιδί το οποίο συμμετείχε στις έρευνες του Steffe (1992, όπως αναφέρεται στο Jacob & Willis, 2003). Ο Zachary κατάφερε να υπολογίσει πόσοι πύργοι με δεκάδες από τουβλάκια θα μπορούσαν να φτιαχτούν με τα 87 τουβλάκια, αντιστοιχώντας την κάθε δεκάδα σε ένα του δάχτυλο. Οι Mulligan and Watson (1998) αναφέρουν πως ο παραπάνω τρόπος καταμέτρησης διακριτών ποσοτήτων από τα παιδιά απαιτεί το να γίνονται ταυτόχρονα δύο μετρήσεις: μία των απλών μονάδων για την οργάνωση της σύνθετης μονάδας (ζευγάρι, πεντάδα κτλ.) και μία καταμέτρηση των σύνθετων μονάδων που οργανώθηκαν.

Στην ίδια κατεύθυνση με τους παραπάνω ερευνητές και οι Park και Nunes (2001) αναφέρουν ως βάση για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης το πρωταρχικό σχήμα της αντιστοίχησης ένα-προς-πολλά (schema of correspondence one-to-many) μιας και μέσα από έρευνα τους σε παιδιά ηλικίας 6 ετών έδειξαν ότι όσα από αυτά μέσα από την παρέμβαση είχαν υποστηριχθεί στη χρήση του παραπάνω πρωταρχικού σχήματος απαντούσαν σωστά σε περισσότερα έργα από εκείνα που μπορούσαν να επιλυθούν με την στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Για παράδειγμα, σε ένα από τα έργα της παρέμβασης τους οι Park και Nunes, 2001) ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να βρουν τον αριθμό από τις ντομάτες που θα χρειαστεί η μητέρα της Amy για να φτιάξει δύο κατσαρόλες με σούπα εάν για κάθε κατσαρόλα έπρεπε να χρησιμοποιήσει 3 ντομάτες. Έτσι, τα παιδιά που χρησιμοποιούσαν το πρωταρχικό σχήμα της αντιστοίχησης «ένα- προς- πολλά» με τη χρήση υλικού μέσα από την τάξη τους (τουβλάκια για κατασκευές) αντιστοιχούσαν πρώτα την κάθε μία κατσαρόλα με τις 3 ντομάτες που χρειαζόταν για τη σούπα και στην συνέχεια να μετρούσαν όλες τις ντομάτες που είχαν για να απαντήσουν στην ερώτηση του ερευνητή.

Όπως είναι φανερό, η αντιστοίχιση ένα-προς-πολλά μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων. Συνθέτοντας τη βιβλιογραφία που αφορά τις βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) επισημαίνουν ότι στο πλαίσιο τόσο των διακριτών, όσο και των συνεχών ποσοτήτων, τρεις ενέργειες είναι θεμελιώδεις: ο **ισομερισμός** μιας ποσότητας, η **μέτρηση** ποσότητας με διαφορετικού τύπου μονάδες (σύνθετες, κλασματικές) και η **επανάληψη ποσότητας**. Οι ενέργειες αυτές μπορούν να σχετιστούν με τις στρατηγικές που αναπτύσσουν τα μικρά παιδιά κατά την ενασχόληση τους με προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής. Στους Πίνακες 2 και 3 παρουσιάζονται παραδείγματα σχετικά με τις τρία είδη προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες ανάλογα και τις ενέργειες που απαιτούνται για την επίλυση τους. Σημειώνεται ότι στον Πίνακα 3, τα προβλήματα είναι προσαρμοσμένα στο επίπεδο του νηπιαγωγείου και προϋποθέτουν εμπράγματες αναπαραστάσεις, οι οποίες υπονοούνται με τις λέξεις σε έντονη γραφή.

| **Ενέργεια** | **Πρόβλημα** |
|---|---|
| Ισομερισμός | Τα 20 αυτοκινητάκια μοιράστηκαν δίκαια σε 5 παιδιά. Πόσα αυτοκινητάκια θα πάρει το κάθε παιδί; |
| Μέτρηση | Τα 20 αυτοκινητάκια που είχαμε μοιράστηκαν δίκαια σε μια παρέα παιδιών. Το κάθε παιδί πήρε 4 αυτοκινητάκια. Πόσα παιδιά ήταν στην παρέα; |
| Επανάληψη ποσότητας | Τα αυτοκινητάκια που είχαμε στην τάξη μοιράστηκαν δίκαια σε 5 παιδιά και το καθένα από αυτά πήρε 4 αυτοκινητάκια. Πόσα ήταν συνολικά τα αυτοκινητάκια που είχαμε; |

**Πίνακας 2:** Παραδείγματα προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής για τις διακριτές ποσότητες και αντίστοιχες ενέργειες

| **Ενέργεια** | **Πρόβλημα** |
|---|---|
| Ισομερισμός | **Αυτή** η σοκολάτα που είχα μοιράστηκε δίκαια σε 4 παιδιά. Τι κομμάτι πήρε το κάθε παιδί από την αρχική σοκολάτα; |
| Μέτρηση | Μοίρασα **αυτή** τη σοκολάτα δίκαια στα παιδιά της παρέας. Το κάθε παιδί πήρε **αυτό** το κομμάτι (π.χ. ¼ της αρχικής σοκολάτας). Σε πόσα παιδιά μοίρασα τη σοκολάτα μου; |
| Επανάληψη ποσότητας | Η σοκολάτα που είχα μοιράστηκε δίκαια σε 4 παιδιά. Το κάθε παιδί πήρε **αυτό** το κομμάτι (¼ της αρχικής σοκολάτας) . Ποια ήταν η αρχική σοκολάτα που είχα; |

**Πίνακας 3:** Παραδείγματα προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής για τις συνεχείς ποσότητες και αντίστοιχες ενέργειες

Αναλύοντας τον Πίνακα 2 παρατηρούμε ότι από τη συνθήκη «20 αυτοκινητάκια μοιράστηκαν δίκαια σε 5 παιδιά – κάθε παιδί πήρε 4 αυτοκινητάκια» μπορούν να προκύψουν τρία προβλήματα (βλ. Confrey, 2008, για μια παρόμοια ανάλυση). Πράγματι, αν το ζητούμενο είναι το μερίδιο, τότε απαιτείται ισομερισμός της διακριτής ποσότητας και το 1 μερίδιο αντιστοιχεί σε μια σύνθετη μονάδα (τα πολλά θεωρούνται ως ένα). Αν το ζητούμενο είναι το πλήθος των ατόμων, τότε απαιτείται ομαδοποίηση της ποσότητας σε 4-άδες (στην ουσία, μέτρηση της ποσότητας με σύνθετη μονάδα). Τέλος, αν το ζητούμενο είναι το σύνολο των αντικειμένων, τότε απαιτείται επανάληψη μιας ποσότητας (στην ουσία, επανάληψη της σύνθετης μονάδας). Τα προβλήματα αυτά αντιστοιχούν σε προβλήματα διαίρεσης μερισμού, διαίρεσης μέτρησης και πολλαπλασιασμού (Greer, 1992).

Επιπλέον, η ίδια ανάλυση μπορεί να γίνει και για τον Πίνακα 3 και τις συνεχείς ποσότητες. Αν το ζητούμενο είναι το μερίδιο, τότε απαιτείται ισομερισμός της ποσότητας και το 1 μερίδιο αντιστοιχεί σε μια κλασματική μονάδα. Αν το ζητούμενο είναι το πλήθος των ατόμων, τότε απαιτείται μέτρηση της ποσότητας με την κλασματική μονάδα. Τέλος, αν το ζητούμενο είναι η συνολική ποσότητα, τότε απαιτείται επανάληψη της κλασματικής μονάδας.

# Κεφάλαιο 2: Η εμπειρική μελέτη

## 2.1 Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, εξετάζοντας το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (2011) θα παρατηρήσει κάνεις ότι υπάρχει έμφαση στις διακριτές ποσότητες, τους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις στο νηπιαγωγείο (Βράκα, 2017), η οποία συνεχίζεται και στις δυο πρώτες τάξεις του Δημοτικού (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Δύο κεντρικά ζητήματα μπορούν να επισημανθούν: α) όλοι οι στόχοι που αφορούν την πολλαπλασιαστική σκέψη περιορίζονται στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και β) λείπουν τα κατάλληλα γλωσσικά εργαλεία που θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, όπως για παράδειγμα, οι όροι «μισό» και «διπλάσιο». Το δεύτερο ζήτημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Πράγματι, όπως επισημαίνει ο Davis (1991), τα μικρά παιδιά μπορεί να έχουν ποικίλες εμπειρίες με καταστάσεις στις οποίες ενυπάρχουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις (π.χ. μοιρασιά, ή ανάλυση(«κόψιμο») συνεχών ποσοτήτων σε ίσα μέρη), αλλά αυτό δε συνεπάγεται ότι αναγνωρίζουν την κοινή σχεσιακή βάση αυτών των καταστάσεων. Επιπλέον, μεγάλο μέρος των εμπειριών των παιδιών είναι άτυπες. Τα γλωσσικά εργαλεία στο πλαίσιο δομημένων εμπειριών είναι ένα μέσο, το οποία θα μπορούσε να υποστηρίξει τα παιδιά στην πραγμάτευση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων (Vamvakoussi, 2016).

Με βάση τα παραπάνω, σκοπός αυτής της έρευνας είναι να διερευνήσει τις δυνατότητες υποστήριξης παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας να προσεγγίσουν και να εκφράσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ τόσο διακριτών, όσο και συνεχών ποσοτήτων στο πλαίσιο προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στους Πίνακες 2 και 3,αλλά και στο πλαίσιο πολλαπλασιαστικής μεταβολής ποσοτήτων (βλ. Πίνακα 1).

Υπόθεση της έρευνας ήταν ότι με κατάλληλη παρέμβαση, τα παιδιά μπορούν να αναγνωρίσουν, να εκφράσουν και να κατασκευάσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, καθώς και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Κεντρικός πυλώνας της παρέμβασης είναι η σύνδεση λεκτικών όρων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων με τις θεμελιώδεις ενέργειες του ισομερισμού, της μέτρησης με διαφορετικές μονάδες και της επανάληψης της ποσότητας.

## 2.2 Μέθοδος

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης με ημι-πειραματικό σχεδιασμό (προέλεγχος-παρέμβαση-μεταέλεγχος), η οποία δανείζεται στοιχεία από τη μικρογενετική ανάλυση (Siegler &Crowley, 1991) υπό την εξής έννοια: Τα παιδιά εκτίθενται εντατικά σε εμπειρίες και μελετάται η συμπεριφορά τους και κατά τη διάρκεια της παρέμβασης,

Στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο, τα δεδομένα συλλέχτηκαν μέσω ατομικών συνεντεύξεων, στη διάρκεια των οποίων τα παιδιά κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν συγκεκριμένα έργα (task-based interviews), και καταγράφηκαν οι απαντήσεις τους καθώς και οι αιτιολογήσεις που χρησιμοποίησαν.

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, δεδομένα συλλέχτηκαν με παρατήρηση και σύγχρονη καταγραφή, καθώς και με ασύγχρονες καταγραφές, αμέσως μετά το τέλος της κάθε παρέμβασης.

## 2.3 Διαδικασία

Στον **προέλεγχο** έγινε η διερεύνηση και καταγραφή των αρχικών ικανοτήτων αναγνώρισης πολλαπλασιαστικών σχέσεων των παιδιών. Σε αυτή τη φάση τα παιδιά αντιμετώπισαν ατομικά έργα αναγνώρισης πολλαπλασιαστικών σχέσεων σε έργα με τη χρήση εικονικών αναπαραστάσεων των υπό συζήτηση αντικειμένων. Η διαδικασία διαρκούσε κατά μέσο όρο 20’.

Στη φάση της **διδακτικής παρέμβασης** τα παιδιά συμμετείχαν σε δραστηριότητες σχετικές με τις σχέσεις 1:2 /2:1 (μισό/διπλάσιο), 1:3/3:1 (ένα τρίτο/τριπλάσιο) και 1:4/4:1 (ένα τέταρτο/τετραπλάσιο). Οι πειραματικές δραστηριότητες διαρκούσαν κατά μέσο όρο 45’ και γινόταν σε καθημερινή βάση για τέσσερις ημέρες. Τα παιδιά συμμετείχαν στις δραστηριότητες τόσο σαν ομάδα (συζητώντας και ανταλλάσσοντας απόψεις) , όσο και ατομικά (μιας και ο καθένας δοκίμαζε να κατασκευάσει τα υποπολλαπλάσια και τα πολλαπλάσια ποσοτήτων). Οι δραστηριότητες είχαν τη μορφή ιστοριών και παιχνιδιών, μιας και το παιχνίδι αποτελεί ισχυρό διδακτικό μέσο για την προσχολική αγωγή και συμβάλλει στο να κατακτήσουν τα παιδιά βιωματικά τη γνώση.

Στην τρίτη και τελευταία φάση του **μεταελέγχου (post test)** τα παιδιά συμμετείχαν στην επεξεργασία των ίδιων έργων της φάσης του προ- ελέγχου, τα οποία εμπλουτίστηκαν με 4 ακόμα νέα έργα σχετικά με τις σχέσεις 1:3 και 3:1 για να παρατηρηθούν οι αλλαγές στις απαντήσεις αλλά και στις στρατηγικές που εκείνα είχαν αναπτύξει κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

### 2.4 Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα αυτή ήταν τέσσερα παιδιά προσχολικής ηλικίας (N=4, εύρος ηλικιών από 5 ετών και 5 μηνών έως 6 ετών ) που παρακολουθούσαν τις δραστηριότητες ενός Κέντρου Δημιουργικής Απασχόλησης του Νομού Άρτας. Από αυτά το 1 ήταν κορίτσι, το οποίο θα αναφέρεται στην παρούσα εργασία με το ψευδώνυμο Μαρία (ηλικίας 5 ετών και 9 μηνών) και τα 3 αγόρια τα οποία θα έχουν τα ψευδώνυμα Κώστας (ηλικίας 6 ετών), Νίκος (ηλικίας 5 ετών και 5 μηνών) και Χάρης (ηλικίας 5 ετών και 7 μηνών). Τα τέσσερα αυτά παιδιά έλαβαν μέρος και στις τρεις φάσεις της έρευνας και όλα είχαν φοιτήσει στο ίδιο δημόσιο νηπιαγωγείο του νομού για ένα χρόνο πριν από τη συμμετοχή τους στην έρευνα. Συγκεκριμένα, ο Νίκος και Χάρης είχαν φοιτήσει σε προ- νηπιακή τάξη και η Μαρία και ο Κώστας σε νηπιακή.

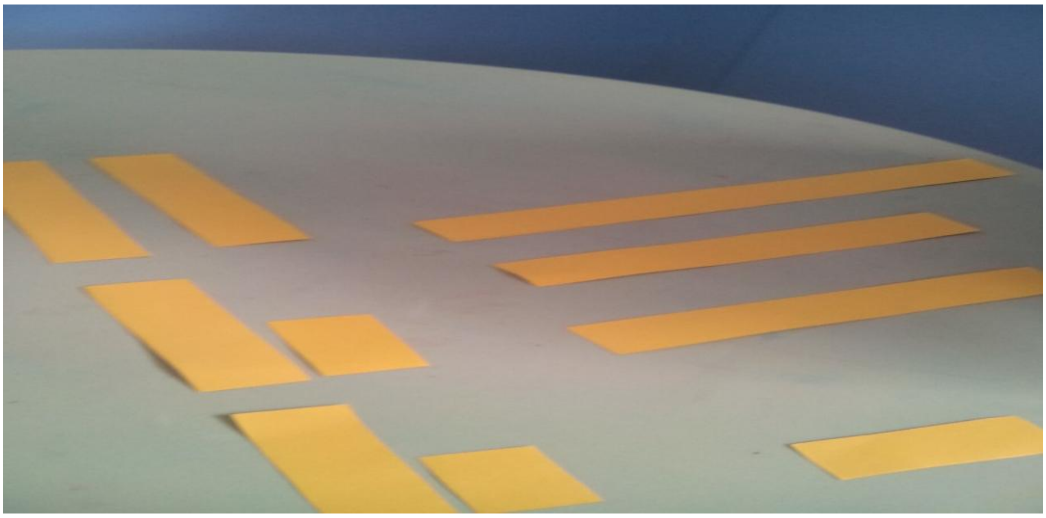
### 2.5 Ερευνητικά έργα

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται συνοπτικά τα έργα μαζί με τις οδηγίες που τα παιδιά είχαν στην διάθεση τους κατά τη διάρκεια συμμετοχής τους στη διαδικασία. Πιο αναλυτικά, τα έργα παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α.

**Έργα Προελέγχου.** Κατά τη διάρκεια του Προελέγχου τα παιδιά κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν δώδεκα έργα αναγνώρισης των σχέσεων «μισό» (1:2) και «διπλάσιο» (2:1) μεταξύ συνεχών και διακριτών ποσοτήτων. Τα έργα χωρίζονταν σε τρεις κατηγορίες (Α, Β, Γ).

***Κατηγορία Α.*** Τα έργα της κατηγορίας Α ήταν τυπικά έργα αναγνώρισης μιας αναλογικής σχέσης (Α:Β = Γ:Δ), στα οποία δίνονταν στα παιδιά δύο παραδείγματα της σχέσης (Α1:Β1, Α2:Β2) με την πληροφορία ότι «το Β1 ταιριάζει με το Α1» και «το Β2 ταιριάζει με το Α2». Στη συνέχεια δινόταν το Γ, και ζητούνταν το Δ («Ποιο πιστεύεις ότι ταιριάζει με το Γ;»). Τα παιδιά έπρεπε να επιλέξουν το Δ ανάμεσα σε 5 επιλογές και να εξηγήσουν την επιλογή τους («Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»). Στις Εικόνες 1 και 2 παρουσιάζεται το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για τα έργα της κατηγορίας Α για το μισό και το διπλάσιο σε συνεχείς (Ε1.1, Ε1.3) και διακριτές ποσότητες (Ε1.2, Ε1.4), αντίστοιχα. Η αναγνώριση των σχέσεων στα έργα της κατηγορίας Α είναι κατά βάση αντιληπτική.

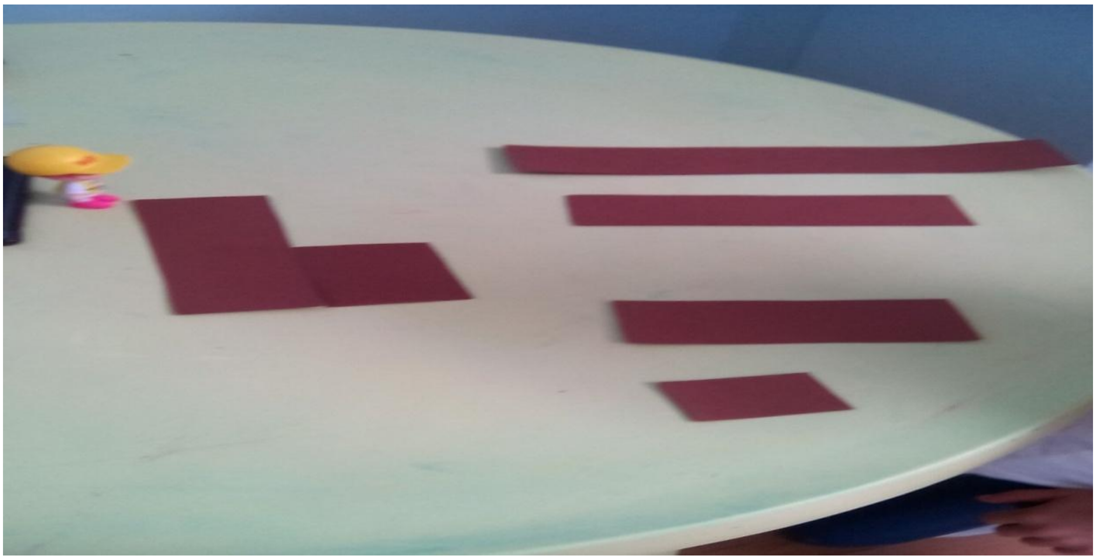
**Εικόνα 1:** Παράδειγμα υλικού που χρησιμοποιήθηκε για τις διακριτές ποσότητες (Έργο Ε1.4)



**Εικόνα 2:** Παράδειγμα υλικού που χρησιμοποιήθηκε για τις συνεχείς ποσότητες (Έργο Ε1.1)

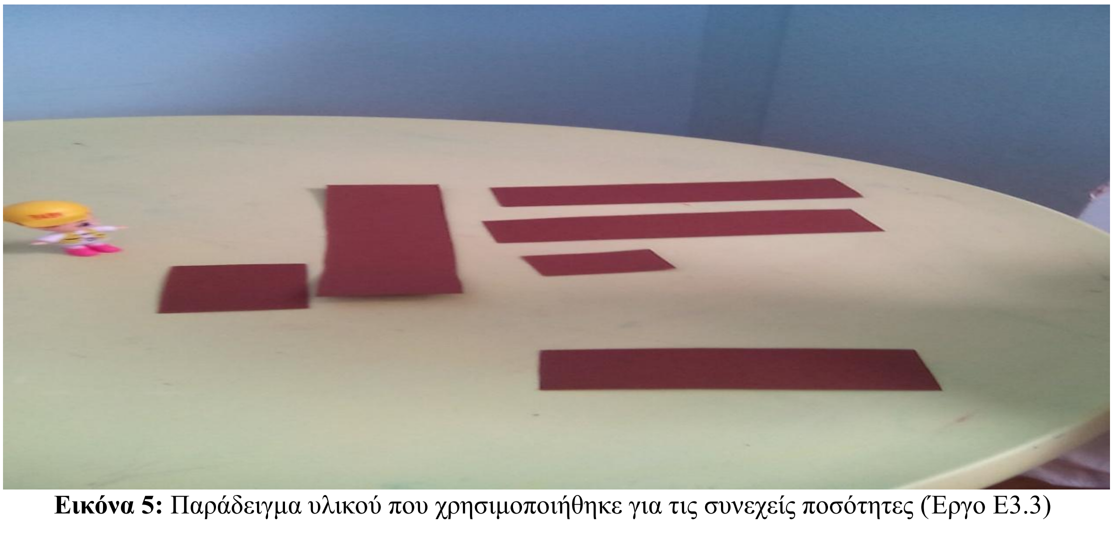
***Κατηγορία Β.*** Στα έργα της κατηγορίας Β αξιοποιήθηκε το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς. Εδώ, τα παιδιά έπρεπε να απαντήσουν σε προβλήματα που τους παρουσιάζονταν σχετικά με συνεχείς και διακριτές ποσότητες. Με την πληροφορία ότι τα «δύο αδέρφια» που συμμετείχαν στο πρόβλημα έπρεπε να μοιραστούν δίκαια την αρχική ποσότητα Α τα παιδιά έπρεπε να επιλέξουν από τις 5 διαθέσιμες επιλογές ποια θα ήταν τελικά η ποσότητα Β που θα έπρεπε να έχει στο τέλος της μοιρασιάς το κάθε «αδερφάκι». Τα παιδιά έπρεπε και να εξηγήσουν την επιλογή τους («Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»). Στη συνέχεια, τα παιδιά με την πληροφορία ότι μια άγνωστη αρχική ποσότητα Α μοιράστηκε «δίκαια σε δύο αδερφάκια» και γνωρίζοντας ότι το αποτέλεσμα αυτής της «μοιρασιάς» ήταν η ποσότητα Β, έπρεπε να βρουν ποια από τις 5 επιλογές που τους δινόταν αντιστοιχεί στην αρχική ποσότητα. Και πάλι τα παιδιά έπρεπε να εξηγήσουν τις επιλογές τους. Στις Εικόνες 3 και 4 παρουσιάζεται το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για τα έργα της κατηγορίας Β για το μισό και το διπλάσιο σε συνεχείς (Ε2.1, Ε2.3) και διακριτές ποσότητες (Ε2.2, Ε2.4), αντίστοιχα.

**Εικόνα 3:** Παράδειγμα υλικού που χρησιμοποιήθηκε για τις διακριτές ποσότητες (Έργο Ε2.2)



**Εικόνα 4:** Παράδειγμα υλικού που χρησιμοποιήθηκε για τις συνεχείς ποσότητες (Έργο Ε2.3)

***Κατηγορία Γ.*** Τέλος, στα έργα της κατηγορίας Γ, τα παιδιά κλήθηκαν να αναγνωρίσουν σχέσεις οι οποίες περιγράφονταν λεκτικά. Τα παιδιά έπρεπε να απαντήσουν σε προβλήματα που τους παρουσιάζονταν σχετικά με συνεχείς και διακριτές ποσότητες στα οποία κλήθηκαν να αναγνωρίσουν τους όρους «μισό» και «διπλάσιο». Και εδώ τα παιδιά είχαν 5 διαθέσιμες επιλογές για κάθε κατάσταση που τους παρουσιαζόταν και αφού επέλεγαν εκείνη που θεωρούσαν ως κατάλληλη έπρεπε και να εξηγήσουν την επιλογή τους («Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»). Στις Εικόνες 5 και 6 παρουσιάζεται το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για τα έργα της κατηγορίας Γ για το μισό και το διπλάσιο σε συνεχείς (Ε3.1, Ε3.3) και διακριτές ποσότητες (Ε3.2, Ε3.4), αντίστοιχα.



**Εικόνα 5:** Παράδειγμα υλικού που χρησιμοποιήθηκε για τις συνεχείς ποσότητες (Έργο Ε3.3)


**Εικόνα 6:** Παράδειγμα υλικού που χρησιμοποιήθηκε για τις διακριτές ποσότητες (Έργο Ε3.2)

**Έργα Μεταελέγχου.** Στο μεταέλεγχο χρησιμοποιήθηκαν τα 12 έργα του Προελέγχου. Ακόμη, προστέθηκαν μόνο 4 έργα που αφορούσαν την λεκτική τους αναγνώριση των σχέσεων 1:3 και 3:1 (κατηγορία Δ) μιας και το να προστεθούν έργα και των δύο προηγούμενων κατηγοριών (αντιληπτική αναγνώριση των παραπάνω σχέσεων και προβλήματα στο πλαίσιο της «δίκαιης μοιρασιάς») θα έκανε την διαδικασία του μεταελέγχου εξαιρετικά κουραστική για τους μικρούς μαθητές (θα έπρεπε να απαντήσουν σε 24 έργα). Πιο συγκεκριμένα τα παιδιά κλήθηκαν να αναγνωρίσουν σχέσεις οι οποίες περιγράφονταν λεκτικά με τους όρους: «μισό», «διπλάσιο», «1/3» και «τριπλάσιο». Και εδώ τα παιδιά είχαν 5 διαθέσιμες επιλογές για κάθε κατάσταση που τους παρουσιαζόταν και αφού επέλεγαν εκείνη που θεωρούσαν ως κατάλληλη έπρεπε και να εξηγήσουν την επιλογή τους («Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»). Ο Πίνακας 4 συνοψίζει τον κωδικό του κάθε έργου, την κατηγορία στην οποία ανήκει, και το είδος της ποσότητας και της σχέση που αφορά.

| Κατηγορία | Έργο | Ποσότητα | Σχέση | ΠροΕ | ΜεταΕ |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | Ε1.1 | Συνεχής | 1:2 | ✓ | ✓ |
| | Ε1.2 | Διακριτή | 1:2 | ✓ | ✓ |
| | Ε1.3 | Συνεχής | 2:1 | ✓ | ✓ |
| | Ε1.4 | Διακριτή | 2:1 | ✓ | ✓ |
| Β | Ε2.1 | Συνεχής | 1:2 | ✓ | ✓ |
| | Ε2.2 | Διακριτή | 1:2 | ✓ | ✓ |
| | Ε2.3 | Συνεχής | 2:1 | ✓ | ✓ |
| | Ε2.4 | Διακριτή | 2:1 | ✓ | ✓ |
| Γ | Ε3.1 | Συνεχής | 1:2 | ✓ | ✓ |
| | Ε3.2 | Διακριτή | 1:2 | ✓ | ✓ |
| | Ε3.3 | Συνεχής | 2:1 | ✓ | ✓ |
| | Ε3.4 | Διακριτή | 2:1 | ✓ | ✓ |
| Δ | Ε4.1 | Συνεχής | 1:3 | - | ✓ |
| | Ε4.2 | Διακριτή | 1:3 | - | ✓ |
| | Ε4.3 | Συνεχής | 3:1 | - | ✓ |
| | Ε4.4 | Διακριτή | 3:1 | - | ✓ |

**Πίνακας 4:** Κωδικοποίηση έργων Προελέγχου και Μεταελέγχου

## 2.6 Σχεδιασμός της παρέμβασης

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης τα παιδιά συμμετείχαν σε δραστηριότητες οι οποίες είχαν σχεδιαστεί με σκοπό εκείνα να έρθουν σε επαφή με τις σχέσεις 1:2 / 2:1, 1:3 / 3:1, 1:4/ 4:1 ανάμεσα σε διακριτές, καθώς και συνεχείς ποσότητες. Ιστορίες, παιχνίδια και εμπράγματο υλικό επιστρατεύτηκαν για να μπορέσουν τα παιδιά με βιωματικό τρόπο να κατανοήσουν τις παραπάνω σχέσεις. Καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης η ερευνήτρια ήταν εκείνη που παρουσίαζε τις ιστορίες και τα παιχνίδια στα παιδιά και τα προέτρεπε να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία. Στη συνέχεια, συζητούσε μαζί τους για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να ελέγξουν την ορθότητα των απαντήσεών τους και τους ζητούσε αιτιολογήσεις. Στο τέλος του κάθε έργου ήταν εκείνη που παρουσίαζε το συμπέρασμα που έβγαινε από τη συζήτηση και τις δοκιμές των παιδιών, επισημοποιώντας την γνώση της ομάδας. Όλα τα παιδιά συμμετείχαν σε όλα τα έργα με τη σειρά ενώ μπορούσαν παράλληλα να λένε την άποψη τους για να εξηγούν στους άλλους συμμετέχοντες το τι έκαναν και γιατί.

Σχεδιάστηκαν δύο ομάδες δραστηριοτήτων (Ομάδα 1, Ομάδα 2), με διαφορετικό πλαίσιο η κάθε μία. Στην Ομάδα 1 αξιοποιήθηκε το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς, ενώ στην Ομάδα 2 το 1/ν και το ν πραγματεύθηκαν ως τελεστές που επιδρούν σε ποσότητες και μεταβάλλουν το μέγεθός τους. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται μια κωδικοποίηση των έργων ανάλογα με το είδος της ποσότητας που τα παιδιά είχαν για να επεξεργαστούν και την ενέργεια που το κάθε έργο απαιτούσε.

| **Ημέρα** | **Δραστηριότητα** | **Έργο** | **Ποσότητα** | **Σχέση** | **Ενέργεια** |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α.1 | Α.1.1 | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Α.1.2 | Διακριτή | 1:2 | Ενδιάμεσο* |
| | | Α.1.3 | Διακριτή | 1:2 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Α.1.4 | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Α1.5 | Διακριτή | 1:2 | Ενδιάμεσο |
| | | Α.1.6 | Διακριτή | 1:2 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Α.1.7 | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Α.1.8 | Διακριτή | 1:2 | Ενδιάμεσο |
| | | Α.1.9 | Διακριτή | 1:2 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Α.1.10 | Συνεχής | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Α.1.11 | Συνεχής | 1:2 | Ενδιάμεσο |
| | Α.2 | Α.2.1 | Συνεχής | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Α.2.2. | Συνεχής | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Α.2.3. | Συνεχής | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Α.2.4. | Συνεχής | 1:2 | Ενδιάμεσο |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A.2.5 | Συνεχής | 1:2 | Επανάληψη ποσότητας |
| | A.3 | A.3.1 | Διακριτή | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | A.4 | A.4.1 | Διακριτή | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | A.4.2 | Διακριτή | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | A.4.3 | Διακριτή | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | A.4.4 | Συνεχής | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | A5 | A.5.1 | Συνεχής | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | A.5.2 | Συνεχής | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | A.6 | A.6.1 | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | A.6.2 | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | A.7 | A.7.1 | Συνεχής | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | A.7.2 | Συνεχής | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | | | | |
| B | B.1 | B.1.1 | Διακριτή | 1:3 | Ισομερισμός |
| | | B.1.2 | Διακριτή | 1:3 | Ισομερισμός |
| | | B.1.3. | Διακριτή | 1:3 | Ισομερισμός |
| | | B.1.4 | Διακριτή | 1:3 | Ενδιάμεσο |
| | | B.1.5 | Διακριτή | 1:3 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | B.1.6. | Διακριτή | 1:3 | Ενδιάμεσο |
| | | B.1.7. | Διακριτή | 1:3 | Επανάληψη ποσότητας |
| | B.2 | B.2.1 | Συνεχής** | 3:1 | Ισομερισμός |
| | | B.2.2. | Συνεχής | 1:3 | Επανάληψη ποσότητας |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Β.2.3. | Συνεχής | 1:3 | Επανάληψη ποσότητας |
| | Β.3 | Β.3.1 | Διακριτή | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | Β.4 | Β.4.1. | Διακριτή | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Β.4.2. | Διακριτή | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Β.4.3 | Διακριτή | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | Β.5 | Β.5.1. | Συνεχής | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | | | | |
| Γ | Γ.1 | Γ.1.1. | Διακριτή | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Γ.1.2. | Διακριτή | 2.2 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Γ.1.3. | Διακριτή | 2:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | Γ.2 | Γ.2.1. | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Γ.2.2. | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | | Γ.2.3. | Διακριτή | 1:2 | Ισομερισμός |
| | Γ.3 | Γ.3.1 | Συνεχής | 2:1 | Μέτρηση |
| | | Γ.3.2 | Συνεχής | 2:1 | Μέτρηση |
| | | Γ.3.3. | Συνεχής | 2:1 | Μέτρηση |
| | Γ.4 | Γ.4.1 | Συνεχής | 1:2 | Μέτρηση |
| | | Γ.4.2. | Συνεχής | 1:2 | Μέτρηση |
| | Γ.5 | Γ.5.1. | Διακριτή | 1:4 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Γ.5.2. | Διακριτή | 4:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Γ.5.3. | Διακριτή | 4:1 | Επανάληψη ποσότητας |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Γ.6 | Γ.6.1 | Διακριτή | 1:4 | Ισομερισμός |
| | | Γ.6.2. | Διακριτή | 1:4 | Ισομερισμός |
| | Γ.7 | Γ.7.1. | Συνεχής | 1:4 | Μέτρηση |
| | Γ8 | Γ.8.1 | Συνεχής | 4:1 | Μέτρηση |
| | | | | | |
| Δ | Δ.1 | Δ.1.1 | Διακριτή | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | | Δ.1.2 | Διακριτή | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | Δ.2 | Δ.2.1. | Διακριτή | 1:3 | Ισομερισμός |
| | Δ.3 | Δ.3.1 | Συνεχής | 3:1 | Επανάληψη ποσότητας |
| | Δ.4 | Δ.4.1. | Συνεχής | 1:3 | Ισομερισμός/ Μέτρηση |
| *Ως ενδιάμεσο ονομάστηκε η ενέργεια κατά την οποία τα παιδιά μετά από προτροπή της ερευνήτριας παρατηρούσαν την σχέση μέρους- μέρους στις ποσότητες που μοίραζαν κάθε φορά. **Στο έργο αυτό δόθηκε υλικό με διαφορετικό μήκος σε κάθε ένα από τα 4 παιδιά που συμμετείχαν στην παρέμβαση | | | | | |

**Πίνακας 5:** Κωδικοποίηση έργων Προελέγχου και Μεταελέγχου

Κατά την συμμετοχή τους σε κάθε έργο κάθε ένα παιδί επεξεργάστηκε καταστάσεις που σχετίζονται με ορισμένα από τα τρία προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής. Για παράδειγμα, σε ένα έργο δίκαιης μοιρασιάς μιας συλλογής μπισκότων στα δύο, κάθε παιδί κλήθηκε να κατασκευάσει το μισό έχοντας στα χέρια του ολόκληρη την ποσότητα. Σε ένα άλλο έργο από εκείνα της δεύτερης ομάδας το κάθε παιδί έπρεπε να βρει την αρχική ποσότητα γνωρίζοντας το μισό.

Οι δραστηριότητες της Ομάδας 1 και της Ομάδας 2 παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Β.

## 2.7 Αποτελέσματα

### *2.7.1: Ανάλυση αποτελεσμάτων Προ- Ελέγχου και Μετά- Ελέγχου*

Κατά τη διάρκεια των δύο δοκιμασιών ελέγχου (Προέλεγχος και Μεταέλεγχος) οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να δώσουν απαντήσεις σε μια σειρά από έργα (12 στον Προέλεγχο και 16 στον Μεταέλεγχο) που είχαν σχέση με την αναγνώριση (αντιληπτική και εννοιολογική) του μισού και του διπλάσιου και στη συνέχεια του 1/3 και του τριπλάσιου. Οι απαντήσεις τους μελετήθηκαν ως προς:

1. Την επίδοση τους στα έργα (σωστές και λάθος απαντήσεις)
2. Τις στρατηγικές επίλυσης που χρησιμοποίησαν
3. Την αιτιολόγηση των απαντήσεων τους
4. Την ερμηνεία των μαθηματικών όρων που επεξεργάστηκαν και
5. Τις λανθασμένες απαντήσεις τους

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω. (Οι απομαγνητοφωνήσεις των δοκιμασιών ελέγχου παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Γ)

1. <u>Επίδοση συμμετεχόντων στα έργα</u>

Στους Πίνακες 1 και 2 παρουσιάζεται η επίδοση ανά παιδί και ανά έργο στον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο, για τα έργα διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, αντίστοιχα. Ως σωστή ή λανθασμένη απάντηση θεωρήθηκε η σωστή ή λανθασμένη επιλογή του παιδιού από τις εναλλακτικές που του παρουσιάστηκαν. Η σωστή απάντηση κωδικοποιήθηκε ως 1, ενώ η λανθασμένη απάντηση ως 0. Οι κωδικοί αυτοί μπορούν να θεωρηθούν και ως αριθμητικές τιμές που εκφράζουν τη συχνότητα της σωστής απάντησης ανά παιδί και ανά έργο. Επομένως, το άθροισμά τους ανά παιδί μπορεί να ερμηνευθεί ως το πλήθος των σωστών απαντήσεων του παιδιού στο σύνολο των έργων, ενώ το άθροισμά τους ανά έργο εκφράζει το πλήθος των σωστών απαντήσεων (ή και το πλήθος των παιδιών που απάντησαν σωστά) στο έργο.

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | Σύνολο | **Μεταέλεγχος** | | | | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | |
| Ε1.2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| Ε1.4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Ε2.2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Ε2.4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Ε3.2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| Ε3.4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| Σύνολο | 1 | 3 | 2 | 1 | 7 | 4 | 4 | 3 | 6 | 17 |
| Ε4.2 | - | - | - | - | - | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Ε4.4 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Σύνολο | - | - | - | - | - | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |

**Πίνακας 6:** Επίδοση σε έργα σχετικά με τις διακριτές ποσότητες, ανά παιδί και ανά έργο

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | Σύνολο | **Μεταέλεγχος** | | | | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | |
| Ε1.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| Ε1.3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Ε2.1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Ε2.3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Ε3.1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Ε3.3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| Σύνολο | 2 | 1 | 3 | 2 | 8 | 4 | 5 | 4 | 6 | 19 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ε4.1 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Ε4.3 | - | - | - | - | - | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Σύνολ ο | - | - | - | - | - | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |

**Πίνακας 7:** Επίδοση σε έργα σχετικά με τις συνεχείς ποσότητες, ανά παιδί και ανά έργο

Από τα στοιχεία των Πινάκων 1 και 2 φαίνεται ότι, στα κοινά έργα των δύο δοκιμασιών, υπάρχει αξιόλογη αύξηση των σωστών απαντήσεων από τον Προέλεγχο στο Μεταέλεγχο, τόσο ανά παιδί, όσο και στη συνολική συχνότητα των σωστών απαντήσεων (από 7 στις 17 για τις διακριτές ποσότητες και από τις 8 στις 19 για τις συνεχείς, στο σύνολο των 24 απαντήσεων). Ο Χάρης απάντησε σωστά σε όλα αυτά τα έργα στο Μεταέλεγχο. Όσον αφορά τα 4 επιπλέον έργα του Μεταελέγχου, όλα τα παιδιά είχαν από μια σωστή απάντηση, με τον Κώστα και το Νίκο να απαντούν σωστά στα έργα που αφορούν τις διακριτές ποσότητες και την Μαρία και τον Χάρη στα έργα που αφορούν τις συνεχείς.

Αξίζει να σημειωθεί ότι 3 από τα παιδιά (Η Μαρία, ο Νίκος και ο Χάρης) γνώριζαν από τον προέλεγχο τον όρο «μισό» και μάλιστα μπορούσαν να το κατασκευάσουν και για τις συνεχείς αλλά και στις διακριτές ποσότητες.

2. Στρατηγικές

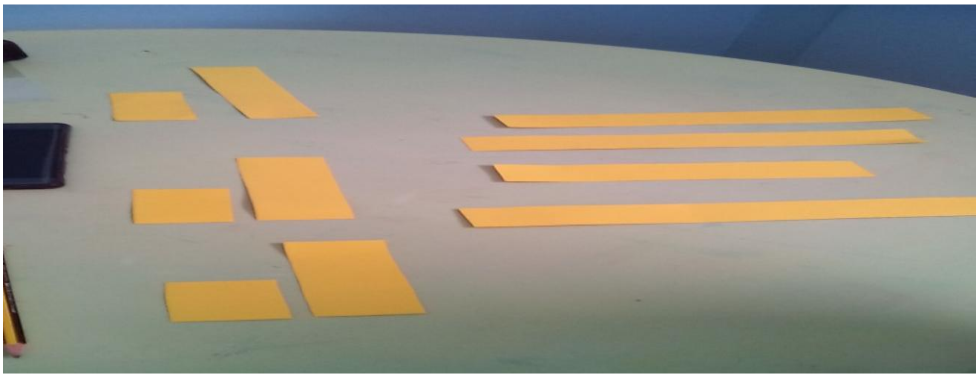
Κατά τη διάρκεια του προελέγχου μία ήταν η κύρια στρατηγική που τα παιδιά χρησιμοποιούσαν για να λύσουν τα προβλήματα «Δίκαιης Μοιρασιάς» στις διακριτές μόνο ποσότητες. Τα παιδιά χώριζαν με το χέρι τους τις ποσότητες στη μέση και στη συνέχεια μετρούσαν τα αντικείμενα των συνόλων που δημιουργούσαν για να βεβαιωθούν ότι είναι ίσα μεταξύ τους.

Μετά την **παρέμβαση**, όμως τα παιδιά έδειξαν να χρησιμοποιούν για κάθε έργο τις στρατηγικές που είχαν αναδυθεί κατά τη διαδικασία της παρέμβασης. Χρησιμοποίησαν όλοι την επανάληψη της κατά την κατασκευή των πολλαπλασίων (τόσο στις διακριτές που επαναλάμβαναν ομάδες αντικείμενων όσο και στις συνεχείς που επαναλάμβαναν ένα αρχικό κομμάτι) και φρόντιζαν πάντα όταν χώριζαν μια ποσότητα σε υποπολλαπλάσια αυτά να είναι ίσα μεταξύ τους. Φάνηκαν εξοικειωμένα με τις έννοιες που είχαν επεξεργαστεί και οι τρείς από αυτούς βελτίωσαν τις αιτιολογήσεις τους. Αναφέρεται παρακάτω η κατηγοριοποίηση των στρατηγικών αλλά και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από τις στρατηγικές που αναπτύχθηκαν από τα παιδιά:

**Τυχαία επιλογή (Σ0):** Το παιδί επιλέγει στην τύχη μια ποσότητα (το εκφράζει ρητά, ή φαίνεται από τη συμπεριφορά του, π.χ., δυσανασχετεί). Χαρακτηριστική είναι η απάντηση του Χάρη που ακολουθεί στο έργο Ε1.3 του προελέγχου που αναφέρει ξεκάθαρα το πώς επέλεξε την απάντηση του (ακόμη και αν αυτή ήταν σωστή).

> ***Δ:*** *Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! Θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα; Για πες μου!*
> ***Χ:*** *(2) [Δείχνει την κορδέλα που επέλεξε]*
> ***Δ:*** *Γιατί;*
> ***Χ:*** *Δεν ξέρω! Τυχαία!*

**Δοκιμή χωρίς διαδικασία ελέγχου (Σ1):** Στην κατηγορία αυτή υπάρχουν δύο υποπεριπτώσεις στην εφαρμογή της στρατηγικής. Για το 1/ν μιας ποσότητας (ν=2,3), το παιδί επιλέγει μια *μικρότερη* ποσότητα και βασίζεται στην αντιληπτική αναγνώριση της σχέσης για να ελέγξει. Για παράδειγμα, ο Νίκος στο έργο Ε1.3 του προελέγχου αναφέρει ότι θα αντιστοιχήσει τη μικρότερη κορδέλα στη μεγαλύτερη όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα λέγοντας: «Γιατί αυτό είναι το παιδάκι και αυτή είναι η μαμά!»



**Εικόνα 7:** Η απάντηση του Νίκου στο έργο Ε1.3

Για το ν-πλάσιο μιας ποσότητας (ν=2,3), το παιδί επιλέγει μια *μεγαλύτερη* ποσότητα και βασίζεται στην αντιληπτική αναγνώριση της σχέσης για να ελέγξει. Σαν παράδειγμα για αυτή τη στρατηγική μπορούμε να ανακαλέσουμε το πώς αντιμετώπισε ο Κώστας το έργο Ε2.3 του Προελέγχου, όπως προκύπτει από την παρακάτω απομαγνητοφώνηση:

> ***Δ:*** *Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;*
>
> ***Κ:*** *Αυτή!*
>
> ***Δ:*** *Πως το ξέρεις ότι αυτή είναι ολόκληρη η σοκολάτα;*
>
> ***Κ:*** *Γιατί είναι πολύ μεγάλη!*

**Δοκιμή με διαδικασία ελέγχου (Σ2):** Πιο συγκεκριμένα, για το 1/ν**,** το παιδί επιλέγει μια ποσότητα και ελέγχει –μετράει αν τα μέρη είναι ισοπληθή, ή επαναλαμβάνει την ποσότητα που διάλεξε για να δει αν φτιάχνει την αρχική. Η Μαρία φαίνεται να χρησιμοποιεί αυτή τη στρατηγική κατά τη διάρκεια του έργου Ε1.1 του μεταελέγχου όπως φαίνεται από το παρακάτω απόσπασμα:

> ***Δ:*** *Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ' όλα τα κομμάτια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα;*
>
> ***Μ:*** *Αυτή.*
>
> ***Δ:*** *Γιατί;*
>
> ***Μ:*** *Γιατί χωράει κι άλλη μια τέτοια, όπως στις άλλες.*

Για το ν-πλάσιο: Το παιδί κατασκευάζει την ποσότητα που απαιτείται με την επανάληψη της ποσότητας που του δίνεται. Η Μαρία επαναλαμβάνοντας την ποσότητα που της δόθηκε μπόρεσε να απαντήσει στο έργο Ε1.3 του μεταελέγχου, όπως φαίνεται από το απόσπασμα που ακολουθεί.

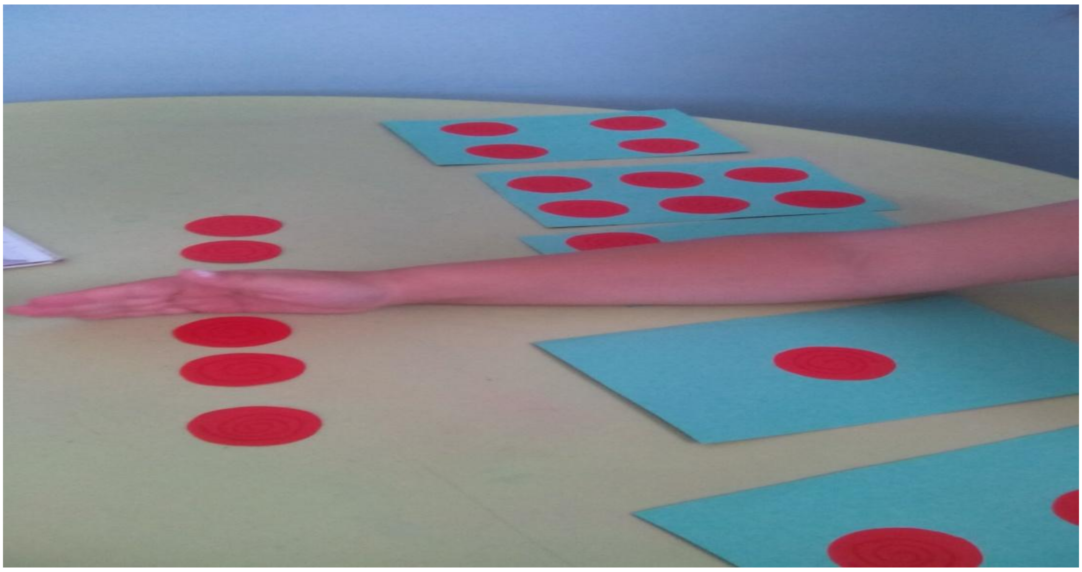
*__Δ:__ Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα;*

*__Μ:__ Με αυτή την μικρούλα ποια θα ταιριάξω; Με αυτή*

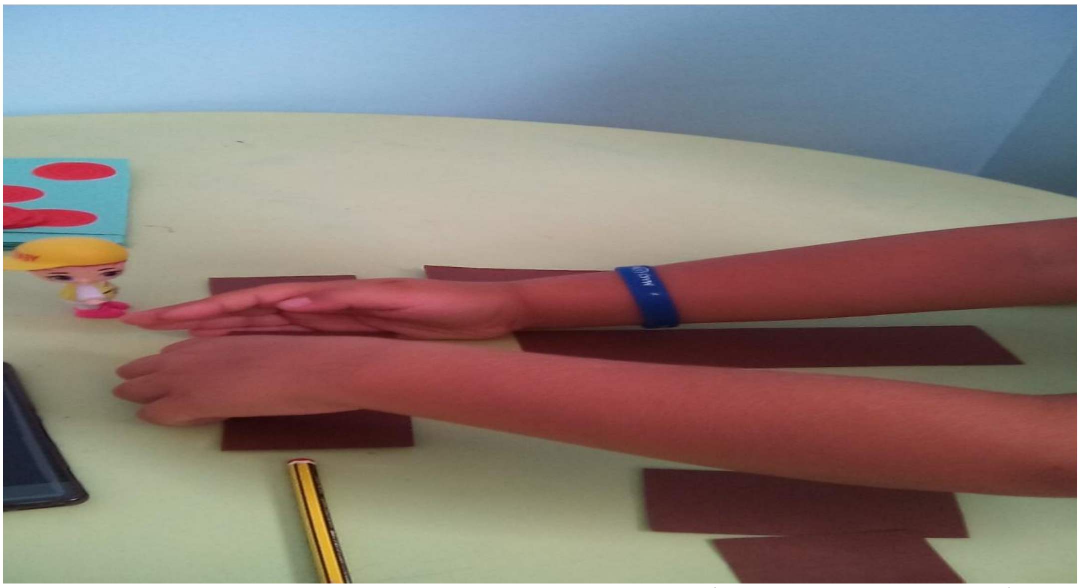
*__Δ:__ Γιατί;*

*__Μ:__ Γιατί την γεμίζουμε με ένα άλλο τέτοιο ίδιο κομματάκι. Όπως και τις άλλες. Έχουν δύο ίδια κομματάκια που χωράνε.*

**Ημι-νοερή η νοερή κατασκευή του 1/ν ή του ν-πλάσιου (Σ3):** Για το 1/ν, το παιδί ισομερίζει την ποσότητα π.χ. «κόβοντας» με το χέρι και αναζητά την κατάλληλη επιλογή. Στις εικόνες που ακολουθούν φαίνεται πως τα η Μαρία και ο Χάρης χρησιμοποιούν τις παραπάνω στρατηγικές για συνεχείς και διακριτές ποσότητες.



**Εικόνα 8:** Η Μαρία χρησιμοποιεί την ημι- νοερή κατασκευή του 1/ν για το έργο 3.2 του μεταελέγχου για τις διακριτές ποσότητες.



**Εικόνα 9:** Ο Χάρης χρησιμοποιεί την ημι- νοερή κατασκευή του 1/ν για το έργο 3.2 του μεταελέγχου για τις συνεχείς ποσότητες.

Για το  για το 1/ν, το παιδί ισομερίζει την ποσότητα νοερά, όπως κάνει ο Νίκος για το έργο Ε3.1 και το οποίο παρουσιάζεται στο εξής απόσπασμα:

***Δ:*** *Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη μισή στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;*

***Ν:*** *Αυτό. [Αναγνωρίζει αμέσως ποιο είναι το μισό]*

***Δ:*** *Πως το ξέρεις ότι αυτό είναι το μισό;*

***Ν:*** *Επειδή ο Γιώργος έβαλε αυτό το μισό και αυτό το άλλο μισό. Μισό από δω και μισό από κει. [Δείχνει να κόβει με το χέρι του.]*

Νοερός για το ν-πλάσιο: Το παιδί επαναλαμβάνει την ποσότητα νοερά. Ο Χάρης χρησιμοποιώντας αυτή τη στρατηγική βρίσκει την απάντηση στο έργο Ε2.4 του μεταελέγχου πριν του παρουσιαστούν οι εναλλακτικές του επιλογές όπως φαίνεται παρακάτω:

***Δ:*** *Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;*

*__Χ:__ [Βρίσκει την απάντηση χωρίς τη βοήθεια της κάρτας] Κυρία, το τέσσερα δε θα το βάλεις; Να έχεις το ολόκληρο;*

**Αριθμητικοποίηση (Σ4):** Το παιδί βασίζεται σε σχέσεις μεταξύ αριθμών (πριν ή και χωρίς να ελέγξει με χειρισμό των ποσοτήτων). Χαρακτηριστική η παρακάτω απάντηση του Χάρη στο έργο Ε1.2 του μεταελέγχου:

*__Δ:__ Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή. Δες τις επιλογές και πες μου…*
*__Χ:__ Με αυτή.*
*__Δ:__ Γιατί;*
*__Χ:__ Γιατί είναι δύο, βάζουμε και δύο και γίνονται τέσσερα. Δύο και δύο κάνει τέσσερα.*

Στους Πίνακες 8 και 9 παρουσιάζεται ο τύπος της στρατηγικής του κάθε παιδιού στον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο, ανά έργο, για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, στον Πίνακα 10 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης της κάθε στρατηγικής κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο. Ακόμη, υπάρχει στον Πίνακα 11, παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης της κάθε στρατηγικής για τα 2 επιπλέον έργα του μεταελέγχου που αφορούν τις σχέσεις 1:3 και 3:1.

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | **Μεταέλεγχος** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ |
| Ε1.2 | Σ0 | **Σ0** | Σ0 | Σ0 | **Σ4** | Σ0 | **Σ0** | **Σ4** |
| Ε1.4 | Σ0 | Σ0 | **Σ0** | Σ0 | Σ2 | Σ0 | Σ0 | **Σ0** |
| Ε2.2 | Σ0 | **Σ3** | **Σ3** | Σ3 | **Σ4** | **Σ3** | **Σ2** | **Σ4** |
| Ε2.4 | Σ0 | Σ3 | Σ0 | **Σ0** | **Σ3** | **Σ4** | **Σ4** | **Σ3** |
| Ε3.2 | **Σ3** | **Σ3** | Σ3 | Σ3 | Σ0 | **Σ3** | Σ3 | **Σ3** |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ε3.4 | Σ0 | Σ0 | Σ0 | **Σ0** | **Σ4** | **Σ3** | Σ3 | **Σ4** |
| Ε4.2 | - | - | - | - | **Σ2** | Σ0 | Σ0 | Σ0 |
| Ε4.4 | - | - | - | - | Σ2 | Σ0 | **Σ0** | Σ3 |
| *Σημείωση:* Με έντονη γραμματοσειρά επισημαίνονται τα έργα τα οποία είχαν και σωστή απάντηση | | | | | | | | |

**Πίνακας 8:** Στρατηγικές στον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο, στις διακριτές ποσότητες ανά παιδί και ανά έργο.

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | **Μεταέλεγχος** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ |
| Ε1.1 | Σ1 | Σ1 | Σ0 | Σ1 | Σ1 | **Σ3** | Σ0 | **Σ3** |
| Ε1.3 | **Σ0** | Σ1 | **Σ1** | **Σ0** | **Σ3** | **Σ2** | **Σ2** | **Σ0** |
| Ε2.1 | Σ0 | Σ3 | **Σ0** | Σ0 | **Σ0** | Σ0 | Σ1 | **Σ3** |
| Ε2.3 | Σ1 | Σ1 | Σ0 | Σ1 | **Σ3** | **Σ3** | **Σ3** | **Σ3** |
| Ε3.1 | Σ1 | **Σ3** | **Σ3** | **Σ0** | **Σ3** | **Σ2** | **Σ3** | **Σ3** |
| Ε3.3 | **Σ0** | Σ0 | Σ0 | Σ0 | **Σ3** | **Σ2** | **Σ3** | **Σ3** |
| Ε4.1 | - | - | - | - | Σ0 | Σ0 | Σ2 | **Σ3** |
| Ε4.3 | - | - | - | - | Σ0 | **Σ2** | Σ3 | Σ0 |
| *Σημείωση: Με* έντονη γραμματοσειρά επισημαίνονται τα έργα τα οποία είχαν και σωστή απάντηση) | | | | | | | | |

**Πίνακας 9:** Στρατηγικές στον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο στις συνεχείς ποσότητες ανά παιδί και ανά έργο.

| Στρατηγική | Προέλεγχος | | | | | Μεταέλεγχος | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | **ΣΥΝΟΛΟ** | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | **ΣΥΝΟΛΟ** |
| Σ0 | 8 | 4 | 9 | 8 | **29** | 2 | 3 | 3 | 2 | **10** |
| Σ1 | 3 | 3 | 1 | 2 | **9** | 1 | 0 | 1 | 0 | **2** |
| Σ2 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** | 1 | 3 | 2 | 0 | **6** |
| Σ3 | 1 | 5 | 1 | 2 | **9** | 5 | 5 | 5 | 7 | **22** |
| Σ4 | 0 | 0 | 1 | 0 | **1** | 3 | 1 | 1 | 3 | **8** |

**Πίνακας 10:** Συχνότητα της κάθε στρατηγικής στα κοινά έργα του προελέγχου και του μεταελέγχου

| Στρατηγική | Μεταέλεγχος | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | **ΣΥΝΟΛΟ** |
| Σ0 | 2 | 3 | 2 | 2 | **9** |
| Σ1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| Σ2 | 2 | 1 | 1 | 0 | **4** |
| Σ3 | 0 | 0 | 1 | 2 | **3** |
| Σ4 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |

**Πίνακας 11:** Συχνότητα της κάθε στρατηγικής στα έργα του μεταελέγχου
που αφορούν τις σχέσεις 1:3 και 3:1.

Από τους Πίνακες 8,9 και 10 φαίνεται ότι τα παιδιά κατά τον προέλεγχο επέλεγαν συχνότερα τυχαία την απάντηση τους μιας και σε ένα σύνολο 48 απαντήσεων (12 έργα x 4 παιδιά), 29 (60,4%) από τις απαντήσεις τους στηρίζονταν σε αυτή τη στρατηγική. Ακόμη, κατά τη διάρκεια του προελέγχου κανένα από τα παιδιά δεν προσπαθούσε να ελέγξει την απάντηση του δοκιμάζοντας να συνθέσει ή να μοιράσει τη ζητούμενη ποσότητα. Τα πράγματα αλλάζουν κατά τη διάρκεια του μεταελέγχου που δείχνει ότι τα παιδιά προχωρούν στη χρήση στρατηγικών που σχετίζονται με την κατανόηση των σχέσεων που αναπτύσσονται ανάμεσα σε υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια. Πιο συγκεκριμένα, όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της δοκιμασίας με διαδικασία ελέγχου αλλά και της ημι- νοερής και νοερής κατασκευής των υποπολλαπλασίων και των πολλαπλασίων που τους ζητήθηκαν. Ακόμη, μειώθηκε η χρήση της τυχαίας επιλογής μιας και 10 από τις 48 απαντήσεις (20,8%) στηρίχθηκαν σε αυτή τη στρατηγική. Το ίδιο όμως, δεν ισχύει και για τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα παιδιά για τα που αφορούν τις σχέσεις 1:3 και 3:1 όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 11. Η τυχαία επιλογή της απάντησης τους χρησιμοποιείται ως στρατηγική 9 φορές σε ένα σύνολο 16 απαντήσεων (56,25%) ενώ η αριθμητικοποίηση ως στρατηγική δεν χρησιμοποιείται καθόλου. Ακόμη, ο Κώστας, η Μαρία και ο Νίκος χρησιμοποιούν τη διαδικασία του ελέγχου για τις απαντήσεις τους, ενώ ο Νίκος και ο Χάρης χρησιμοποιούν και την στρατηγική της ημι- νοερής και νοερής κατασκευής των υποπολλαπλασίων και των πολλαπλασίων που τους ζητήθηκαν.

Οι στρατηγικές που ανέπτυξαν τα παιδιά μετά την παρέμβαση τα υποστήριξαν ώστε να εξηγήσουν και τις απαντήσεις τους, όπως θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα.

3. Αιτιολόγηση απαντήσεων

Κατά τη διάρκεια της συμμετοχής τους στις διαδικασίες ελέγχου τα παιδιά χρησιμοποίησαν μια πληθώρα αιτιολογήσεων. Στα έργα του προελέγχου τα παιδιά χρησιμοποιούσαν ως αιτιολόγηση πράγματα που είχαν διδαχθεί στο σχολείο χωρίς συνάφεια με το αντικείμενο αλλά και αιτίες που είχαν ως στόχο να ερμηνεύσουν με τον δικό τους τρόπο το «γιατί» δόθηκε η λύση στο πρόβλημα που είχαν να αντιμετωπίσουν. Παρατηρείται, λοιπόν, ότι μόνο στις διακριτές ποσότητες εξηγούσαν τον όρο «δίκαιη μοιρασιά» και το μισό δείχνοντας να έχουν γνώση των όρων με 3 από τα παιδιά να υποστηρίζουν ότι για να είναι δίκαιη η μοιρασιά πρέπει οι ποσότητες που μοιράζονται να είναι ίδιες.

Εξετάζοντας τις εξηγήσεις των παιδιών στα έργα του προελέγχου και του μεταελέγχου, αναγνωρίστηκαν 5 κατηγορίες εξηγήσεων:

**Καμία εξήγηση (ΕΞ0):** Η κατηγορία αυτή αφορά τις απαντήσεις για τις οποίες δεν δόθηκε καμία εξήγηση.

**Μη εξηγήσεις (ΕΞ1):** Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις εξηγήσεις του τύπου «Έτσι είναι!» ή «Το είδα».

**Ψευδοεξηγήσεις (ΕΞ2):** Εξηγήσεις οι οποίες δεν σχετίζονται με το έργο αλλά με εμπειρίες των παιδιών ή βιώματα τα οποία ήθελαν να περιγράψουν. Για παράδειγμα θα πει ο Νίκος κατά τη διάρκεια του έργου Ε2.1 του προελέγχου:

> ***Δ:*** *Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] θα μοιραστούν δίκαια αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος;*
>
> ***Ν:*** *Μμμμ (2) Νομίζω ότι πήρε αυτή!*
>
> ***Δ:*** *Για ταίριαξε τη! Γιατί;*
>
> ***Ν:*** *Για να την φάει μετά το φαγητό!*

**Ψευδομαθηματικές εξηγήσεις (ΕΞ3):** Εξηγήσεις στις οποίες τα παιδιά χρησιμοποιούν πράγματα που γνωρίζουν σχετικά με μαθηματικές έννοιες θεωρώντας ότι έτσι θα δώσουν λύση στο πρόβλημα που τους παρουσιαζόταν. Θα εξηγήσει η Μαρία στο έργο Ε1.2 του προελέγχου:

> ***Δ:*** *Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή…*
> ***Μ:*** *Ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, έξι. Εδώ είναι έξι οι καραμέλες.*
> ***Δ:*** *Ωραία! Και θα ταιριάξουμε αυτή την κάρτα με αυτή. Θέλεις να μου πεις με κάρτα θα ταιριάξω αυτή εδώ; Για δες εσύ! Από αυτές τις κάρτες μπορείς να διαλέξεις. Δεν μπορείς όμως να κουνήσεις τις κάρτες που ταίριαξα εγώ. Μπορείς να διαλέξεις από τις υπόλοιπες.*
> ***Μ:*** *Μα αυτή είναι ίδια με αυτή [Δείχνει μια ακόμα κάρτα που έχει έξι καραμέλες].*

*__Δ:__ Ναι αλλά εσύ αυτές εδώ τις κάρτες δεν μπορείς να τις κουνήσεις. Πρέπει να διαλέξεις από τις υπόλοιπες που σου έδωσα για να ταιριάξεις την τελευταία καρτούλα. Μπράβο!=*

*__Μ:__ Ξέρεις γιατί το 'κανα; Γιατί; Ένα, δύο. Όταν αρχίζουμε να μετράμε δε ξεκινάμε ένα, δύο. Εδώ είναι ένα, δύο. Εδώ συνολικά αυτά είναι ίδια, είναι έξι, τα μέτρησα εγώ πριν αυτά.*

*__Δ:__ Ωραία!*

**Έγκυρες εξηγήσεις (ΕΞ4):** Εδώ τα παιδιά είτε κάνουν ρητή αναφορά στις ποσότητες και στις μεταξύ τους σχέσεις, είτε φαίνεται να τις αξιοποιούν.

Στο παρακάτω παράδειγμα, ο Νίκος εξηγεί τι είναι και το μισό μιας σοκολάτας:

*__Ν:__ Ναι, το κόβουμε στη μέση και μένει το μισό. [Δείχνει με το χέρι του την μέση της σοκολάτας ενώ περιγράφει την διαδικασία] Και μένει ένα άλλο χαρτόνι που είναι μικρότερο και είναι όσο αυτό [Δείχνει το μισό}.*

*__Δ:__ Α, ωραία!*

*__Ν:__ Και μένει και το άλλο κομμάτι που είναι το μισό! Είναι ίδιο με το άλλο! Να δες [Ταυτίζει τα δύο κομμάτια].*

Στο επόμενο παράδειγμα, ο Χάρης φαίνεται να αξιοποιεί την κεντρική αρχή ότι σε μια δίκαιη μοιρασιά τα μερίδια πρέπει να είναι ίσα:

*__Δ:__ Πόσες ήταν οι καραμέλες δηλαδή; Αν πήρε δύο η Ελενίτσα….*

*__Χ:__ ….Και δύο η αδερφούλα της.*

*__Δ:__ Και όλες μαζί πόσες ήταν;*

*__Χ:__ Τέσσερις. Και μετά έγιναν δύο για την κάθε μία.*

Στους Πίνακες 12 και 13 εμφανίζονται αναλυτικά ο τύπος εξήγησης ανά παιδί και ανά έργο στα έργα διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, αντίστοιχα, κατά τον προέλεγχο και το μεταέλεγχο. Με έντονα γράμματα σημειώνονται οι εξηγήσεις που αντιστοιχούν σε σωστή απάντηση. Στη συνέχεια στον πίνακα 14 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των παραπάνω εξηγήσεων στο σύνολο των απαντήσεων των παιδιών στα έργα που αφορούν τόσο τις διακριτές όσο και τις συνεχείς ποσότητες. Τέλος, ο πίνακας 15 μας δίνει την συχνότητα εμφάνισης των παραπάνω εξηγήσεων για τα επιπλέον έργα του μεταελέγχου που αφορούν τις σχέσεις 1:3 και 3:1.

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | **Μεταέλεγχος** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ |
| Ε1.2 | ΕΞ1 | **ΕΞ3** | ΕΞ2 | ΕΞ3 | **ΕΞ4** | ΕΞ3 | **ΕΞ3** | **ΕΞ4** |
| Ε1.4 | ΕΞ0 | ΕΞ3 | **ΕΞ3** | ΕΞ0 | ΕΞ4 | ΕΞ3 | ΕΞ2 | **ΕΞ0** |
| Ε2.2 | ΕΞ0 | **ΕΞ2** | **ΕΞ2** | ΕΞ4 | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** | **ΕΞ0** | **ΕΞ4** |
| Ε2.4 | ΕΞ1 | ΕΞ4 | ΕΞ3 | ΕΞ0 | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** |
| Ε3.2 | **ΕΞ2** | **ΕΞ3** | ΕΞ2 | ΕΞ4 | ΕΞ4 | **ΕΞ4** | ΕΞ4 | **ΕΞ1** |
| Ε3.4 | ΕΞ0 | ΕΞ0 | ΕΞ0 | **ΕΞ2** | **ΕΞ4** | **ΕΞ2** | ΕΞ3 | **ΕΞ4** |
| Ε4.2 | - | - | - | - | **ΕΞ4** | ΕΞ3 | ΕΞ3 | ΕΞ0 |
| Ε4.4 | - | - | - | - | ΕΞ3 | ΕΞ0 | **ΕΞ3** | ΕΞ3 |
| Σημείωση: Με έντονη γραμματοσειρά επισημαίνονται τα έργα τα οποία είχαν και σωστή απάντηση | | | | | | | | |

**Πίνακας 12:** Εξηγήσεις στον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο, στις διακριτές ποσότητες ανά παιδί και ανά έργο.

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | **Μεταέλεγχος** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ |
| Ε1.1 | ΕΞ1 | ΕΞ2 | ΕΞ3 | ΕΞ3 | ΕΞ3 | **ΕΞ4** | ΕΞ4 | **ΕΞ4** |
| Ε1.3 | **ΕΞ0** | ΕΞ2 | **ΕΞ2** | **ΕΞ0** | **ΕΞ3** | **ΕΞ3** | **ΕΞ4** | **ΕΞ1** |
| Ε2.1 | ΕΞ2 | ΕΞ2 | **ΕΞ2** | ΕΞ0 | ΕΞ3 | ΕΞ2 | ΕΞ1 | **ΕΞ4** |
| Ε2.3 | ΕΞ2 | ΕΞ3 | ΕΞ2 | ΕΞ3 | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** | **ΕΞ3** | **ΕΞ4** |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ε3.1 | ΕΞ1 | **ΕΞ3** | **ΕΞ2** | **ΕΞ0** | **ΕΞ3** | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** |
| Ε3.3 | **ΕΞ0** | ΕΞ0 | ΕΞ0 | ΕΞ0 | **ΕΞ4** | **ΕΞ4** | **ΕΞ0** | **ΕΞ4** |
| Ε4.1 | - | - | - | - | ΕΞ0 | ΕΞ3 | ΕΞ4 | **ΕΞ1** |
| Ε4.3 | - | - | - | - | ΕΞ0 | **ΕΞ3** | ΕΞ4 | ΕΞ0 |
| Σημείωση: Με έντονη γραμματοσειρά επισημαίνονται τα έργα τα οποία είχαν και σωστή απάντηση | | | | | | | | |

**Πίνακας 13:** Εξηγήσεις στον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο, στις συνεχείς ποσότητες ανά παιδί και ανά έργο.

| Εξήγηση | **Προέλεγχος** | | | | | **Μεταέλεγχος** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | **ΣΥΝΟΛΟ** | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | **ΣΥΝΟΛΟ** |
| Εξ0 | 5 | 2 | 2 | 6 | **15** | 0 | 0 | 2 | 1 | **3** |
| Εξ1 | 4 | 0 | 0 | 0 | **4** | 0 | 1 | 1 | 1 | **3** |
| Εξ2 | 3 | 4 | 7 | 1 | **15** | 0 | 1 | 2 | 0 | **4** |
| Εξ3 | 0 | 5 | 3 | 3 | **11** | 4 | 3 | 2 | 0 | **9** |
| Εξ4 | 0 | 1 | 0 | 2 | **3** | 8 | 7 | 5 | 10 | **30** |

**Πίνακας 14:** Συχνότητα κάθε τύπου εξήγηση στο σύνολο των κοινών έργων, ανά παιδί στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο

| Εξήγηση | **Μεταέλεγχος** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | **ΣΥΝΟΛΟ** |
| ΕΞ0 | 2 | 1 | 0 | 2 | **5** |
| ΕΞ1 | 0 | 0 | 0 | 1 | **1** |
| ΕΞ2 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ΕΞ3 | 1 | 3 | 2 | 1 | **7** |
| ΕΞ4 | 1 | 0 | 2 | 0 | **3** |

**Πίνακας 15:** Συχνότητα κάθε τύπου εξήγηση στο σύνολο των έργων που αφορούν την σχέση 1:3 και 3:1, ανά παιδί στον μεταέλεγχο

Όπως φαίνεται από τα στοιχεία του Πίνακα 12 κατά τον προέλεγχο τα παιδιά έδωσαν κατά κύριο λόγο μη έγκυρες εξηγήσεις (ΕΞ0, ΕΞ1, ΕΞ2) μιας και μόνο οι 3 από τις 48 αιτιολογήσεις που χρησιμοποίησαν τα παιδιά κατά τη συμμετοχή τους στα έργα ήταν έγκυρες. Αντίθετα, στο μεταέλεγχο, η πλειοψηφία των εξηγήσεων που δόθηκαν ήταν έγκυρες, ενώ παράλληλα σημειώθηκε σημαντική μείωση και στις απαντήσεις που είτε δεν είχαν κάποια εξήγηση, είτε είχαν ως εξηγήσεις πράγματα που δεν είχαν καμία σχέση με τα υπό επεξεργασία έργα (κατηγορίες ΕΞ1, ΕΞ2). Τα παιδιά κατάφεραν να χρησιμοποιούν σωστά αιτιολογήσεις στις οποίες τα ίδια κατέληξαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Όσον αφορά τα έργα του μεταελέγχου που σχετίζονται με τις σχέσεις 1:3 και 3:1 τα παιδιά δίνουν κατά κύριο λόγο ψευδομαθηματικές εξηγήσεις ή επιλέγουν να μην εξηγήσουν καθόλου την απάντηση τους, όπως φαίνεται και από τον πίνακα 15.

<u>4. Ερμηνεία των μαθηματικών όρων</u>

Κατά τη διάρκεια τόσο του προελέγχου όσο και του μεταελέγχου τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση: «Τι σημαίνει η λέξη μισό/ ένα τρίτο;» και «Τι σημαίνει η λέξη διπλάσιο/ τριπλάσιο;», προσπαθώντας να εξηγήσουν λεκτικά τους όρους που επεξεργάστηκαν κατά τη διάρκεια της συμμετοχής τους στα έργα των κατηγοριών Γ και Δ.

Στους Πίνακες 16, 17, 18 και 19 παρουσιάζεται η παρουσία ή μη ερμηνείας για τους μαθηματικούς όρους που τα παιδιά επεξεργάστηκαν ανά παιδί και ανά έργο στον Προέλεγχο και το Μεταέλεγχο, για τα έργα διακριτών και συνεχών ποσοτήτων. Οι περιπτώσεις κατά τις οποίες τα παιδιά έδωσαν ερμηνεία στους όρους που η ερευνήτρια τους παρουσίασε κωδικοποιήθηκαν ως 1, ενώ εκείνες οι περιπτώσεις που δεν δόθηκε ερμηνεία των όρων ως 0. Οι κωδικοί αυτοί μπορούν να θεωρηθούν και ως αριθμητικές τιμές που εκφράζουν τη συχνότητα ερμηνείας των όρων ανά παιδί και ανά έργο.

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | Σύνολο | **Μεταέλεγχος** | | | | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | |
| Ε3.1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| Ε3.2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Σύνολο | 0 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |

**Πίνακας 16:** Συχνότητα ερμηνείας του όρου «μισό» στο σύνολο των έργων για διακριτές και συνεχείς ποσότητες ανά παιδί

| Έργο | **Προέλεγχος** | | | | Σύνολο | **Μεταέλεγχος** | | | | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | |
| Ε3.3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| Ε3.4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| Σύνολο | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 |

**Πίνακας 17:** Συχνότητα ερμηνείας του όρου «διπλάσιο» στο σύνολο των έργων για διακριτές και συνεχείς ποσότητες ανά παιδί

| Έργο | **Μεταέλεγχος** | | | | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | |
| Ε4.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Ε4.2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Σύνολο | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

**Πίνακας 18:** Συχνότητα ερμηνείας του όρου «ένα τρίτο» στο σύνολο των έργων για διακριτές και συνεχείς ποσότητες ανά παιδί στον μεταέλεγχο

| Έργο | **Μεταέλεγχος** | | | | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|---|
| | ΚΩΣΤΑΣ | ΜΑΡΙΑ | ΝΙΚΟΣ | ΧΑΡΗΣ | |
| Ε4.1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| Ε4.2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Σύνολο | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |

**Πίνακας 19:** Συχνότητα ερμηνείας του όρου «τριπλάσιο» στο σύνολο των έργων για διακριτές και συνεχείς ποσότητες ανά παιδί στον μεταέλεγχο

Παρατηρείται σύμφωνα με τον πίνακα 16, πως στον προέλεγχο, η Μαρία, ο Νίκος και ο Χάρης προσπαθούν να δώσουν ερμηνεία στον όρο «μισό» ενώ στον μεταέλεγχο ο Κώστας, ο Νίκος και ο Χάρης. Τόσο στον προέλεγχο όσο και στον μεταέλεγχο, τα παιδιά επικαλούνται την ενέργεια του ισομερισμού για να απαντήσουν στην ερώτηση: «Τι σημαίνει η λέξη μισό;». Το παρακάτω απόσπασμα αποτελεί ένα παράδειγμα της ερμηνείας του όρου «μισό» από την Μαρία στο έργο Ε3.1 του προελέγχου:

***Δ:*** *Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη «μισό»;*

***Μ:*** *Ναι, ότι το κόβουμε και μένουν δύο…*

***Δ:*** *Α και αυτά τα δύο;*

***Μ:*** *Αυτά είναι τα μισά!*

***Δ:*** *Είναι μισά! Και το ένα μισό είναι όσο το άλλο μισό; Ή μπορείς να έχεις ένα μεγάλο μισό και ένα μικρό;*

***Μ:*** *Όχι, γιατί θα τσακώνονταν! Πρέπει να είναι ίδια μέτρα οι σοκολάτες!*

Από την άλλη, σύμφωνα με τον πίνακα 17, για τον όρο «διπλάσιο» προσπάθησαν να δώσουν ερμηνεία στον προέλεγχο μόνο η Μαρία και ο Χάρης χωρίς να τα καταφέρουν (Η Μαρία ανέφερε πως διπλάσιο σημαίνει το ίδιο και ο Χάρης ότι «έχεις πάντα άλλες δύο μαζί»). Αντίθετα στον μεταέλεγχο ερμηνεία του όρου προσπαθούν να δώσουν τρία από τα τέσσερα παιδιά (ο Κώστας, η Μαρία και ο Νίκος) και μάλιστα τα καταφέρνουν χρησιμοποιώντας την ενέργεια της επανάληψης της ποσότητας όπως φαίνεται και από το παρακάτω παράδειγμα για το έργο Ε3.3 του μεταελέγχου:

***Δ:*** *Ξέρεις τι σημαίνει διπλάσιο;*

***Μ:*** *Ναι το διπλό. Ότι έχει πάντα δύο τέτοια κομματάκια.*

Για την έννοια του 1/3, όπως παρουσιάζει ο πίνακας 18, μόνο η Μαρία προσπάθησε να δώσει ερμηνεία του παραπάνω όρου μετά από προτροπή της ερευνήτριας κάνοντας λάθος (το ίδιο λάθος που είχε κάνει και κατά την παρέμβαση όπως αναφέρεται και πιο κάτω) και μπερδεύοντας το 1/3 με το μισό. Τέλος, για τον όρο «τριπλάσιο» (πίνακας 19) η Μαρία και ο Νίκος ερμηνεύουν σωστά το τι σημαίνει ο όρος λέγοντας στην ερευνήτρια το πόσες φορές πρέπει να επαναληφθεί η ποσότητα που τους δίνεται για να «φτιάξουν» το τριπλάσιο της όπως φαίνεται και από το απόσπασμα για το έργο Ε4.3 από τις απαντήσεις του Νίκου:

***Δ:*** *Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι τριπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;*

***Ν:*** *Αυτό*

***Δ:*** *Α, τι σημαίνει «τριπλάσιο»;*

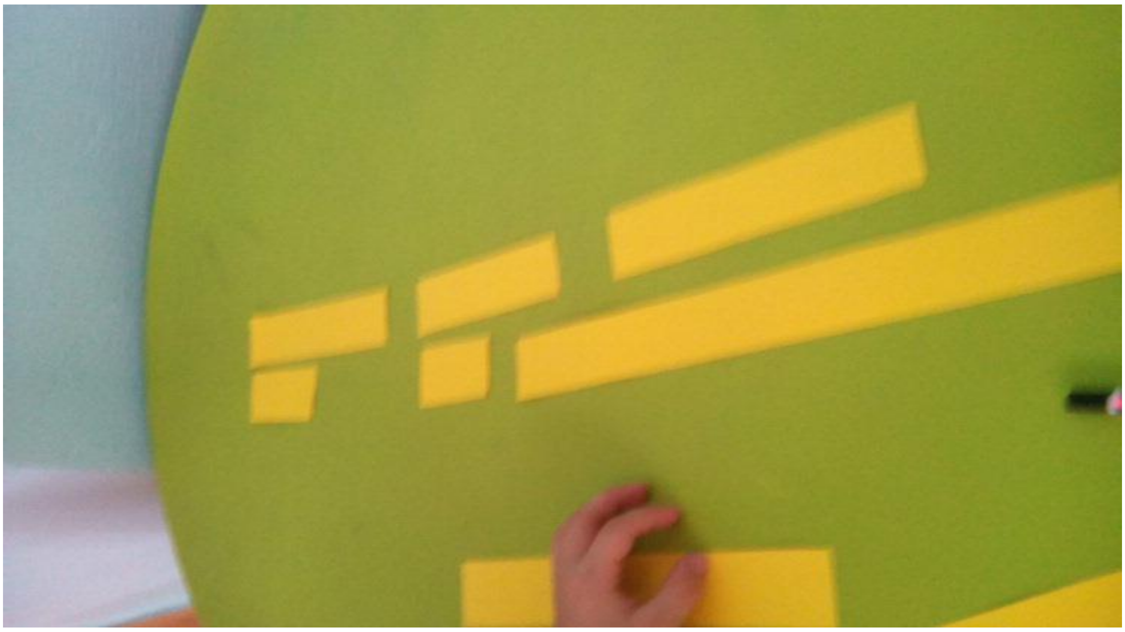
***Ν:*** *Θα μπουν τρία κομμάτια. Σαν αυτό τρεις φορές.*

**4.** Λανθασμένες απαντήσεις

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά την διάρκεια του Μεταελέγχου παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ως προς τα λάθη τα οποία έκαναν τα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια του Μεταελέγχου δύο από τα παιδιά (ο Κώστας και ο Νίκος) αν και κατάφεραν να επεξεργαστούν με επιτυχία την πλειοψηφία των έργων απάντησαν λάθος σε 7 από αυτά σε αντίθεση με τους άλλους δύο συμμετέχοντες (την Μαρία και τον Χάρη), οι οποίοι απάντησαν λάθος σε λιγότερα έργα από αυτούς. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα παιδιά επέλεγαν τυχαία την απάντηση τους και είτε δεν την αιτιολογούσαν καθόλου είτε χρησιμοποιούσαν ψευδομαθηματικές εξηγήσεις όπως για παράδειγμα ο Κώστας στο έργο 1.4 του Μεταελέγχου που παραθέτουμε στη συνέχεια:

> ***Δ:*** *Πολύ ωραία! Κάτι ακόμα! Πρόσεξε με! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [Δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές. Πιο συγκεκριμένα οι κάρτες παρουσιάζουν τις αντιστοιχίες 3:6 και 1:2 ] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα [Η κάρτα έχει 2 καραμέλες]; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.*
>
> ***Κ:*** *[Δείχνει την κάρτα που επιλέγει. Η κάρτα έχει 3 καραμέλες.]*
>
> ***Δ:*** *Γιατί;*
>
> ***Κ:*** *Γιατί ένα και ένα μας κάνουν δύο και άλλο ένα μας κάνει τρία.*
>
> ***Δ:*** *Δηλαδή, ένα και ένα μας κάνουν δύο. Αν βάλεις και ακόμα ένα θα γίνει τρία.*

Υπήρξε όμως και μία περίπτωση που ένα από τα παιδιά αν και κατάφερε να παρατηρήσει ότι υπάρχει κάποιου είδους σχέση μεταξύ των ποσοτήτων δεν κατάφερε να την αναγνωρίσει σωστά. Για παράδειγμα, στην παρακάτω εικόνα φαίνεται πως ο Νίκος αν και παρατηρεί ότι οι κορδέλες που του δώσαμε για το έργο 1.1 «κρύβουν» μια σχέση μισού και διπλάσιου εκείνος επιλέγει να μην αντιστοιχήσει στην τρίτη επιλογή το μισό της αρχικής ποσότητας αλλά το διπλάσιο. (σχέση 1:2 αντί για 2:1)



**Εικόνα 10:** Η απάντηση του Νίκου στο έργο 1.1 του Μεταελέγχου

Οι περισσότερες λάθος απαντήσεις δόθηκαν από τα παιδιά στα έργα του Μεταελέγχου που αφορούν τις σχέσεις 1:3 και 3:1. Ένα μέρος από τις απαντήσεις τους έγιναν με την στρατηγική της τυχαίας επιλογής και ορισμένοι από αυτούς δεν έδωσαν καμία εξήγηση ή μη εξήγηση του τύπου «Το είδα». Ωστόσο παρατηρώντας την απάντηση της Μαρίας στην επιλογή της για το κομμάτι του 1/3 της σοκολάτας θα επισημάνουμε πως δεν κατάφερε να αναγνωρίσει την σχέση 1:3 αλλά επέμενε στο να εφαρμόζει ότι είχε αντιληφθεί για τις σχέσεις 1:2 κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Για παράδειγμα στο έργο Ε4.1 για τις συνεχείς ποσότητες η Μαρία θα αναφέρει τα εξής:

***Δ:*** *Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω το 1/3 στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;*

***Μ:*** *Αυτό;*

***Δ:*** *Πως το ξέρεις;*

***Μ:*** *Δε το ξέρω. Στη μέση θα το μοιράσω;*

***Δ:*** *Δε ξέρω.*

***Μ:*** *Στη μέση θα το μοιράσω. Αυτό είναι το σωστό. Το ένα τρίτο είναι το ένα μισό.*

Αξίζει εδώ να σημειωθεί πως η Μαρία επαναλαμβάνει στον μεταέλεγχο το ίδιο λάθος που είχε κάνει και κατά την διάρκεια της παρέμβασης όπως θα αναφερθεί και στη συνέχεια και το οποίο είχε τότε αλλάξει μετά από παραίνεση ενός από τους άλλους συμμετέχοντες.

### *2.7.2: Επεισόδια από τη διαδικασία της παρέμβασης*

Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, τα παιδιά που συμμετείχαν στην παρέμβαση βελτίωσαν τις απαντήσεις τους, ανέπτυξαν στρατηγικές και τις αξιοποίησαν τόσο για να αντιμετωπίσουν τα έργα, όσο και για να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Από την άλλη μεριά, φαίνεται ότι η γενίκευση αυτών των νέων στρατηγικών στην περίπτωση του 1/3 και του τριπλάσιου ήταν περιορισμένη. Στη συνέχεια θα περιγραφούν επεισόδια από την παρέμβαση, τα οποία φωτίζουν τον τρόπο με τον οποίο προέκυψαν αυτές οι αλλαγές, αλλά και οι περιορισμοί. (Οι απομαγνητοφωνήσεις από την διαδικασία της παρέμβασης βρίσκονται στο Παράρτημα Δ).

**Επεισόδιο 1 (Ημέρα 1$^{η}$ , Έργο Α.1.10): Πώς θα μοιράσω δίκαια 3 μπισκότα στα δυο; («Δίκαιη μοιρασιά» για τις συνεχείς ποσότητες)**

Το επεισόδιο αυτό αφορά τη προσπάθεια των παιδιών να μεταφέρουν τις γνώσεις τους για τη «δίκαιη μοιρασιά» των διακριτών ποσοτήτων στις συνεχείς ποσότητες. Είναι μια μεταβατική δραστηριότητα που είχε ως στόχο να προκαλέσει τα παιδιά να προσπαθήσουν να «σπάσουν» την μονάδα. Παρακάτω περιγράφεται το πώς τα παιδιά αντιμετώπισαν το έργο μέχρι ο Χάρης να σκεφτεί «λύση» για το τελευταίο μπισκότο.

> ***Δ:*** *Τέλεια! Χάρη είσαι έτοιμος και εσύ να βοηθήσεις τον Παμ και την Πένυ; Αν τώρα η μαμά τους δώσει 3 μπισκότα. Πόσα μπισκότα θα πάρει ο Παμ και πόσα μπισκότα θα πάρει η Πένυ; Για σκέψου.*
>
> ***Χ:*** *Δε μπορώ να τα μοιράσω τα 3 μπισκότα σε δύο παιδιά*
> ***Δ:*** *Να τα πάρω πίσω δηλαδή τα μπισκότα; Δεν μπορείς να τους βοηθήσεις;*
>
> ***Χ:*** *Όχι!*
>
> ***Δ:*** *Για πάμε να προσπαθήσουμε! Έχω δύο παιδάκια, σωστά;*

***Χ:*** *Ναι!*

***Δ:*** *Πως μπορούμε να μοιράσουμε;*

***Κ:*** *Θα κόψουμε (.)*

***Δ:*** *(Κάνει νόημα στον Κώστα να σταματήσει για να προσπαθήσει ο Χάρης).*

***Χ:*** *Δεν γίνεται να μοιράσω. Δεν γίνεται. Μπορώ να δώσω στο ένα παιδί τα δύο αλλά δεν είναι δίκαιο.*

***Δ:*** *Δίκιο έχεις! Δεν είναι δίκαιο. Μπορείς να σκεφτείς κάποιον άλλο τρόπο να μοιράσεις; Μπορείς να τους δώσεις από ένα;*

***Χ:*** *Ναι! Αλλά μου έμεινε ένα μπισκότο.*

***Δ:*** *Αυτό το ένα μπισκότο μπορείς να το μοιράσεις με κάποιον τρόπο;*

***Χ:*** *Να το κόψω στη μέση!*

***Δ:*** *Α για να δούμε! Για κάντο!*

***Χ:*** *(κόβει το μπισκότο)*

***Δ:*** *Και τώρα από πόσα θα πάρει ο καθένας;*

***Χ:*** *Από ένα. Από ένα κομμάτι.*

***Δ:*** *Α, Από ένα κομμάτι. Από μισό μπισκότο, δηλαδή, σωστά;*

***Όλα μαζί:*** *Ναι.*

***Δ:*** *Αν λοιπόν, μοιράσουμε τρία μπισκότα σε δύο παιδιά ο καθένας θα πάρει από ένα και…*

***Χ:*** *Μισό μπισκότο.*

***Δ:*** *Μπράβο! Πολύ ωραία! Να ρωτήσω και κάτι άλλο. Αυτά τα δύο μισά είναι ίδια;*

***Χ:*** *Είναι.*

***Δ:*** *Γιατί;*

***Χ:*** *Γιατί στην αρχή ήταν ένα μπισκότο ολόκληρο και το κόψαμε στη μέση.*

***Δ:*** *Πολύ ωραία! Δηλαδή;*

***Χ:*** *Δηλαδή αν τα ενώσω και πάλι θα φτιάξω ένα μπισκότο.*

*__Δ:__ Μπράβο! Πως μπορώ, όμως να δω ότι αυτά τα δύο μισά είναι ίσα;*

*__Μ:__ Επειδή είναι ένα ολόκληρο.*

*__Δ:__ Και τι σημαίνει αυτό;*

*__Ν:__ Δε ξέρω.*

*__Κ:__ Αν βάλω το ένα πάνω στο άλλο θα είναι ίδια.*

*__Δ:__ Α, βλέπετε ότι αν βάλω το ένα πάνω στο άλλο θα δω ότι τα κομμάτι θα είναι ίδια.*

**Επεισόδιο 2 (Ημέρα 1η , Έργο Α.2.1): Πώς θα μοιράσω τη σοκολάτα;- Ανάπτυξη στρατηγικής για την «δίκαιη μοιρασιά» συνεχών ποσοτήτων**

Το επεισόδιο αυτό αφορά την ανάπτυξη μιας νέας στρατηγικής για τη «δίκαιη μοιρασιά» των συνεχών ποσοτήτων . Τα παιδιά αναγνωρίζοντας το ότι τα «δύο μισά» που θα προκύπτουν κάθε φορά πρέπει να είναι ίσα προσπαθούν να βρουν ένα τρόπο να κατασκευάζουν το μισό όσο καλύτερα γίνεται. Η στρατηγική που αναπτύχθηκε υιοθετήθηκε από όλη την ομάδα. Ο διάλογος που ακολουθεί μας δίνει περισσότερες λεπτομέρειες για τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά ανέπτυξαν την στρατηγική του να διπλώνουν το χαρτί του κάθε φορά και στην συνέχεια να ταυτίζουν τα κομμάτια που προκύπτουν για να επαληθεύουν την απάντηση τους.

*__Δ:__ Για πάμε τώρα να σας πω τι έγινε μια άλλη μέρα. Μια άλλη μέρα, λοιπόν, η μαμά έδωσε στον Παμ και την Πένυ μια σοκολάτα και τους είπε ότι μπορούν να την μοιραστούν. Τους έδωσε λοιπόν αυτή εδώ την σοκολάτα. Πως μπορούν να την μοιραστούν. =*

*__Κ:__= Θα την κόψω.*

*__Δ:__ Περίμενε, πώς θα την κόψω;*

*__Κ:__ Θα την κόψω εδώ; [Δείχνει με το ψαλίδι πάνω στη σοκολάτα]*

*__Δ:__ Δε ξέρω εσύ θα μου πεις.*

*__Κ:__ Είναι ίδιο; Εκεί;*

*__Δ:__ Εσύ θα επιλέξεις που θα κόψεις.*

***Κ:*** *Δε ξέρω που.*

***Δ:*** *Εγώ είδα ότι κάτι κοιτάς. Θέλεις να είναι όσο μπορείς πιο ίδια τα κομμάτια, σωστά;*

***Κ:*** *Ναι!*

***Δ:*** *Υπάρχει πιο εύκολος τρόπος για να δεις ότι τα κομμάτια είναι ίδια.*

***Ν:*** *Δεν ξέρω.*

***Δ:*** *Μήπως να δοκιμάσω να μετρήσω το χαρτί; Αλλά πως;*

***Μ:*** *Να το διπλώσω.*

***Δ:*** *Α πολύ ωραία ιδέα. Τότε θα βρω πιο εύκολα τα δύο κομμάτια. Για να είναι ίδια. Για δοκίμασε.*

***Κ:*** *Κυρία, να κάνω ένα άλλο για να το κάνω αυτό;*

***Δ:*** *Αμέ! Σε πόσα κομμάτια θα το κόψεις*

***Κ:*** *Στα δύο.*

***Δ:*** *Είναι ίδια τα δύο μισά;*

***Κ:*** *Ναι!*

***Δ:*** *Πάντα θα είναι ίδια τα δύο μισά. Αν τώρα τα ενώσω, τι θα έχω;*

***Χ:*** *Μια ολόκληρη σοκολάτα.*

***Δ:*** *Μπράβο Μαρία! Για έλα να μοιράσεις και εσύ αυτή την σοκολάτα.*

***Μ:*** *Να κάνω το κόλπο;*

***Δ:*** *Πως είπαμε ότι είναι το κόλπο για να μοιράσω μια σοκολάτα στη μέση;*

***Μ:*** *[Παίρνει το χαρτί και το διπλώνει.]*

***Δ:*** *Τι κάνεις Μαρία στο χαρτάκι.*

***Μ:*** *Θα το διπλώσω και θα το κόψω. Δύο μισά κομμάτια.*

**Επεισόδιο 3 (Ημέρα 2η , Έργο Β.1.1): Πώς θα μοιράσω 9 μπισκότα στα τρία;**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στα αποτελέσματα του Προελέγχου, τα παιδιά, ήδη πριν από την παρέμβαση, ήταν εξοικειωμένα με τη «δίκαιη μοιρασιά» στα δύο με μια στρατηγική ημι-νοερού ισομερισμού με την οποία «έκοβαν» με το χέρι την ποσότητα βασιζόμενα σε μια αντιληπτική αναγνώριση του «μισού» της. Η στρατηγική αυτή δε μεταφέρθηκε στην περίπτωση της «δίκαιης μοιρασιάς» στα τρία, όπως φαίνεται από το επεισόδιο που ακολουθεί.

> ***Δ:*** *Για να δούμε… Ο ξάδερφος Εν-τρίτο έφερε μαζί του 3 μπισκότα για να τα μοιραστεί με τον Παμ και την Πένυ. Πόσα μπισκότα θα πάρει το κάθε κουκλάκι;*
>
> ***Μ:*** *Θα πάρουν από τρία.*
>
> ***Δ:*** *Μα όλα όλα τα μπισκότα είναι τρία, πως γίνεται να πάρει και το καθένα από τρία.*
>
> ***Μ:*** *[Δίνει σε όλους από ένα]*
>
> ***Δ:*** *Αααα, άρα θα δώσουμε σε όλους από ένα. Πόσα θα φάει δηλαδή ο ξάδερφος Ένα Τρίτο;*
>
> ***Μ:*** *Ένα.*
>
> ***Δ:*** *Και ο Παμ;*
>
> ***Ν:*** *Ένα. Και η Πένυ ένα.*
>
> ***Κ:*** *Όλοι θα φάνε από ένα.*
>
> ***Δ:*** *Αν τώρα δώσω στα τρία παιδάκια 6 μπισκότα Νίκο, πως θα τους τα μοιράσεις;*
>
> ***Ν:*** *Τρία και τρία. Σιγά!*
>
> ***Δ:*** *Μη βιάζεσαι! Και η Πένυ, δε θα πάρει μπισκότα;*
>
> ***Ν:*** *[Αλλάζει το πώς μοιράζει και δίνει 3 στο πρώτο κουκλάκι, δύο στο δεύτερο και ένα στο τρίτο]*

***Δ:*** *Τώρα έχουν όλα τα παιδιά τα ίδια μπισκότα;*

***Ν:*** *Όχι.*

***Δ:*** *Πρέπει λοιπόν να βρούμε ένα τρόπο, όχι να χωρίσουμε τα μπισκότα στη μέση, αλλά να τα μοιράζουμε το ίδιο και στους τρεις.*

***Κ:*** *Ναι να δίνουμε από ένα- ένα μέχρι να μας τελειώσουν.*

***Δ:*** *Α, πολύ ωραία! Όταν, λοιπόν, θέλουμε να μοιράσουμε κάτι δίνουμε σε όλους από ένα. ΧΑΡΗΣ, εσύ θα πάρεις 9 μπισκότα. Μπορείς να τα μοιράσεις στα τρία ξαδερφάκια;*

***Χ:*** *[Βάζει στο ένα πιάτο 4, στο δεύτερο άλλα 4 και στο τρίτο μόνο ένα] Κυρία, θέλω άλλα 3.*

***Δ:*** *Δε μπορώ να σου δώσω και άλλα μπισκότα. Είπαμε ότι θα μοιράσουμε αυτά τα 9 μπισκότα. Πως είπαμε ότι μοιράζουμε;*

***Χ:*** *(Το παιδί μοιράζει ένα- ένα τα μπισκότα και ανακοινώνει στην ομάδα το αποτέλεσμα.) Επειδή ήταν εννιά θα τα μοιράσω και στα τρία παιδιά. Άρα, θα πάρουν από τρία.*

***Δ:*** *Πολύ ωραία. Αν τώρα ξέρουμε ότι ο ξάδερφος Ένα- τρίτο πήρε δύο μπισκότα, ξέρουμε πόσα μπισκότα θα πήρε η Πένυ;*

***Μ:*** *Τέσσερα.*

***Δ:*** *Δηλαδή, δε θα τα μοιράσω δίκαια τα μπισκότα στα τρία παιδιά;*

***Χ:*** *Δύο θα πάρει. Και δύο θα πάρει και ο Παμ.*

***Δ:*** *Και πόσα θα είναι τα μπισκότα όλα μαζί;*

***Κ:*** *Είναι δύο και δύο και δύο. [Μετράει τα μπισκότα όλα μαζί] Είναι* 6.

***Δ:*** *Πολύ ωραία. Αν τώρα έχουμε 1 μπισκότο για τον Παμ. Πόσα μπισκότα θα πάρει η Πένυ και πόσα ο ξάδερφος Ένα- τρίτο;*

***Χ:*** *Πάλι το ίδιο θα κάνουμε. Ένα και ένα και ένα. Ένα θα πάρει ο Παμ, ένα η Πένυ, και ένα ο ξάδερφος. [Βάζει στο κάθε πιάτο από ένα μπισκότο]*

***Δ:*** *Και πόσα μπισκότα θα έχουμε όλα μαζί.*

***Χ:*** *Τρία μπισκότα θα έχουμε.*

**Επεισόδιο 4 (Ημέρα 2η, Έργο Β.2.1): Πώς θα μοιράσω συνεχείς ποσότητες;**

Στη συνέχεια κατά τη διάρκεια των έργων που σχετιζόταν με το μοίρασμα τα παιδιά μοίραζαν αρχικά τυχαία τις ποσότητες (κυρίως τις συνεχείς) χρησιμοποιώντας το πρώτο κομμάτι που έκοβαν ως μονάδα- οδηγό για τα υπόλοιπα. Σε περίπτωση που υπήρχε «περίσσευμα» επαναλάμβαναν τη διαδικασία όσο χρειαζόταν. Μέσα λοιπόν από δοκιμές κατέληγαν στο να δημιουργήσουν τα υποπολλαπλάσια που τους ζητούνταν κάθε φορά. Παρατηρώντας όμως, ότι αυτή η διαδικασία ήταν χρονοβόρα και χωρίς ικανοποιητικό αποτέλεσμα (πολλά κομμάτια που δεν είχαν ίδιο μέγεθος και περίσσευμα που κάποια στιγμή δεν μπορούσε άλλο να μοιραστεί) τα παιδιά ζήτησαν από την δασκάλα να τους δώσει έτοιμα μικρά κομμάτια για να συνθέτουν την αρχική ποσότητα, γνωρίζοντας πως πάντα έπρεπε να έχουν τρία κομμάτια). Η ίδια στρατηγική χρησιμοποιήθηκε και για το επόμενο έργο με τη σύνθεση τριπλάσιων για τις συνεχείς ποσότητες.

***Δ:*** *Για να δούμε και τις τρελοσοκολάτες! Την επόμενη μέρα, ο ξάδερφος Έν-τρίτο έδειξε στα δίδυμα αυτή τη σοκολάτα για να την μοιραστούν δίκαια. Μπορούμε να τον βοηθήσουμε;*

***Μ:*** *Θα την μοιράσω εγώ. [Προσπαθεί να κόψει την σοκολάτα σε τρία ίσα κομμάτια]*

***Δ:*** *[Το παιδί κόβει το πρώτο κομμάτι και το χρησιμοποιεί σαν οδηγό για να κόψει τα υπόλοιπα] Και το υπόλοιπο; Ποιος θα πάρει τα κομμάτια και ποιος αυτό που έμεινε;*

***Μ:*** *Ο Φαγάνας θα πάρει το μεγάλο. [Δείχνει αυτό που έμεινε]*

*[Και τα υπόλοιπα παιδιά μοίρασαν τις σοκολάτες που τους δόθηκαν χρησιμοποιώντας το πρώτο κομμάτι που έκοψαν σαν οδηγό αλλά όχι σε τρία κομμάτια. Σε όλες τις δοκιμές υπήρχε περίσσευμα.]*

***Δ:*** *Για να ρωτήσω εγώ κάτι άλλο. Αν ο Παμ πήρε αυτό το κομμάτι της τρελοσοκολάτας, τι κομμάτι πήρε η Πένυ και ο ξάδερφος Ένα-τρίτο;*

***Κ:*** *Έχεις άλλα τέτοια κομμάτια;*

***Δ:*** *Ναι, τα χρειάζεσαι;*

***Κ:*** *Ναι θέλω άλλα δύο για να φτιάξω τη σοκολάτα. [Ενώνει τα κομμάτια και μετά ψάχνει να βρει την ολόκληρη σοκολάτα.]*

***Δ:*** *Πολύ ωραία! Ποιος άλλος θέλει να προσπαθήσει να μου βρει ποια ήταν η αρχική σοκολάτα αν ξέρουμε ότι το ένα τρίτο της είναι αυτό εδώ το κομμάτι;*

***Χ:*** *Εγώ. Δώσε μου κι άλλα ίδια κομμάτια.*

***Δ:*** *Ορίστε.*

*[Πάλι ενώνει τα κομμάτια και μετά ψάχνει να δει ποια από τις σοκολάτες είναι αυτή που ψάχνει.]*

### Επεισόδιο 5 (Ημέρα 2η, Έργο Β.4.1): Τα ν-πλάσια για τις διακριτές ποσότητες

Τα παιδιά παρατηρώντας τη σχέση ανάμεσα στα υποπολλαπλάσια των συνεχών ποσοτήτων κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν την στρατηγική που αναδύθηκε και να ενώνουν «τρεις φορές» την ποσότητα που τους δινόταν για να βρουν την τελική ποσότητα. Όπως φαίνεται από το παρακάτω απόσπασμα δεν αντιμετώπισαν κάποια δυσκολία στο να αντιληφθούν ως σύνθετη μονάδα τα ζευγάρια ή τις τριάδες αντικειμένων που τους δινόταν και τα επαναλάμβαναν για να κατασκευάσουν την τελική ποσότητα. Μάλιστα, στο τέλος του επεισοδίου το ένα από τα παιδιά φαίνεται να προσπαθεί να γενικεύσει αυτά που κατανόησε για τις σχέσεις ανάμεσα σε υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια.

***Δ:*** *Ο Τριπλάσιος τρώει πάρα πολύ! Όσο τα τρία παιδιά μαζί, δηλαδή τρώει το τριπλάσιο από ότι τρώει ο μικρός του αδερφός το Έν-τρίτο. Μαρία, αν ο ξάδερφος Έν-τρίτο έφαγε ένα μπισκότο μπορείς να μου δείξεις πόσα μπισκότα έφαγε ο Τριπλάσιος;*

***Μ:*** *3 θα φάει! Να τα!*

***Δ:*** *Πολύ ωραία, Κώστα, αν ο ξάδερφος Έν-τρίτο φάει 2 μπισκότα πόσα μπισκότα θα φάει ο Τριπλάσιος;*

***Κ:*** *Θα βάλω δύο μπισκότα, τρεις φορές.*

***Δ:*** *Για βάλτα να τα μετρήσουμε.*

***Κ:*** *[Βάζει τα μπισκότα σε σειρές σαν αυτή που του δόθηκε και τα μετράει] 6 θα φάει.*

***Δ:*** *Τέλεια Νίκο, αν ο ξάδερφος Έν-τρίτο φάει 3 μπισκότα πόσα θα φάει ο Τριπλάσιος;*

***Ν:*** *[Βάζει πάλι τα μπισκότα στις ίδιες σειρές και τα μετράει] 9 θα φάει.*

***Δ:*** *Τέλεια. Τώρα αν ο ξάδερφος Έν-τρίτο φάει αυτό το κομμάτι σοκολάτα [δείχνουμε το κομμάτι] μπορείς να μου δείξεις ποια σοκολάτα είναι η ολόκληρη;*

***Χ:*** *Έχεις κι άλλα κομμάτια; [Όπως και πριν φτιάχνει τη σοκολάτα με τα κομμάτια και μετά ψάχνει την ολόκληρη] Αυτή είναι.*

***Δ:*** *Να σε ρωτήσω κάτι; Πόσες φορές χωράει το μικρό κομμάτι στο μεγάλο; Πόσες φορές χωράει το 1/3 στο τριπλάσιο;*

***Κ, Χ [ταυτόχρονα]:*** *3 φορές.*

***Μ:*** *Κυρία, αύριο θα ρθείς με τον πιο μεγάλο γίγαντα; Με τον τεσραπλάσιο; Τον τέσσερα- τριπλάσιο;*

***Δ:*** *Τι εννοείς;*

***Μ:*** *Να είναι τέσσερις φορες ο μικρός.*

*Δ: Θα δεις! Έκπληξη!*

**Επεισόδιο 6 (Ημέρα 3η, Έργο Γ.3.1): Ο αριθμός ως τελεστής**

Κατά την τρίτη μέρα τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν σε έργα που τα απομακρύνουν από το οικείο πλαίσιο της μοιρασιάς και τα πάνε σε ένα άλλο, μιας και ο αριθμός παρουσιάζεται ως τελεστής. Τα παιδιά κλήθηκαν να επεξεργαστούν τις σχέσεις 1:2 και 2:1 , 1:3 και 3:1 και 1:4 και 4:1. Επιπλέον, επεξεργάστηκαν την αντιστροφή, δηλαδή την ιδέα ότι μια ποσότητα που ν-πλασιάστηκε από τη μηχανή, όταν η διαδικασία αντιστραφεί, επιστρέφει στο αρχικό της μέγεθος.

Παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά διαχειρίστηκαν με μεγαλύτερη ευκολία τις σχέσεις ανάμεσα στο μισό και το διπλάσιο διακριτών ποσοτήτων αλλά δυσκολεύτηκαν στα έργα σχετικά με συνεχείς ποσότητες. Οι συνεχείς ποσότητες έπρεπε να είναι διαταγμένες και ορατές καθ' όλη τη διάρκεια της κατασκευής των υποπολλαπλασίων και των πολλαπλασίων και συχνά χρειαζόταν η παρέμβαση της δασκάλας για να καταφέρουν τα παιδιά να απαντήσουν στα έργα. Στο απόσπασμα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι απαντήσεις των παιδιών για το έργο Π17 ως ενδεικτικές της δυσκολίας που αυτά συνάντησαν σχετικά με την κατασκευή μισών και διπλάσιων για τις συνεχείς ποσότητες.

***Δ:*** *Για να σας δείξω και κάτι ακόμα. Η κυρία Διάνοια μας έβαλε μια σπαζοκεφαλιά ακόμα! Μια μέρα έφτιαξε αυτή τη μηχανή για τα ζαχαρωτά.*

***Μ:*** *Δηλαδή, κάνει ότι έκανε και η άλλη; Θα βγάζει από τη μια πιο πολλά;*

***Δ:*** *Δηλαδή; Τι εννοείς;*

***Ν:*** *Να εξαφανίζει από τη μια και…*

***Μ:*** *Δηλαδή αν βάλουμε από την μια πλευρά μία, θα βγάλει από την άλλη, άλλη μία.*

***Δ:*** *Για να δούμε τι θα βγάλει και να σκεφτούμε.*

***Ν:*** *Κυρία πότε θα φέρεις το τετραπλάσιο;*

***Δ:*** *Ποιο;*

***Μ:*** *Το τετραπλάσιο. Να τα κάνει τέσσερα.*

***Δ:*** *Θα δεις. Προς το παρόν να δούμε τη μηχανή με τα ζαχαρωτά. Βάζω από την μικρή πλευρά αυτό το κομματάκι ζαχαρωτό. Θα βγάλω από την άλλη πόρτα αυτή.*

*[Δείχνουμε στα παιδιά τα δύο κομμάτια ταυτόχρονα μιας και στην προηγούμενη περίπτωση είδαμε ότι έχουν δυσκολία στο να κατανοήσουν την σχέση ανάμεσα στα πλήθη όταν δεν τα βλέπουν και τα δύο.]*

***Ν:*** *Βγήκε το μεγάλο από τη μεγάλη πόρτα.*

***Δ:*** *Πόσες φορές λέτε να χωράει το μικρό ζαχαρωτό στο μεγάλο;*

*[Ο Κώστας παίρνει στα χέρια του τα δύο κομμάτια και μετράει]*

***Κ:*** *Δύο.*

***Δ:*** *Για δες μπορείς να την γεμίσεις με δύο κομματάκια;*

***Κ:*** *[Παίρνει και το άλλο ίδιο κομματάκι από αυτά που είναι στο πάτωμα και το γεμίζει.] Ναι.*

***Δ:*** *Για να δοκιμάσουμε και με ένα ακόμα κομματάκι ζαχαρωτό. [Βάζει από τη μία πλευρά το μικρό ζαχαρωτό και βγάζει το μεγάλο από την άλλη.] Πόσες φορές λες να χωράει αυτό το ζαχαρωτό [το μικρό] στο άλλο.*

***Χ:*** *[Ψάχνει να βρει τα ίδια κομμάτια] Δύο. [Ενώνει τα μισά κομμάτια για να φτιάξει το διπλάσιο.]*

***Δ:*** *Τώρα αν εγώ βάλω αυτό μέσα στη μηχανή από την μικρή πλευρά [Δείχνει το μισό κομμάτι], ποιο πιστεύεις ότι θα βγάλει από την μεγάλη πλευρά Μαρία;*

*[Δίνουμε στο παιδί διάφορες επιλογές κομματιών]*

***Μ:*** *Αυτό. [Δείχνει ένα τυχαίο κομμάτι που του δόθηκε]*

***Δ:*** *Γιατί; Πόσες φορές χωράει το μικρό κομμάτι στο μεγάλο;*

***Μ:*** *Μία. Ίδια είναι.*

***Δ:*** *Πόσες φορές πρέπει να χωράει;*

***Μ:*** *Δύο. Δεν είναι αυτό.*

***Δ:*** *Για ξαναδοκίμασε.*

***Μ:*** *Αυτό είναι. Να το!*

***Δ:*** *Μπορείς να το γεμίσεις με δύο μικρά κομμάτια;*

***Μ:*** *Ναι!*

**Επεισόδιο 7 (Ημέρα 4η, Έργο Δ.1.1): Αντιμετώπιση των περιορισμών της «μισομηχανής»**

Κατά την ενασχόληση τους με τα πρώτα έργα των «μισομηχανών» όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως τα παιδιά φάνηκαν να δυσκολεύονται να «φτιάξουν» πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια όταν οι αρχικές ποσότητες που τους δινόταν δεν ήταν ορατές. Το γεγονός αυτό προκάλεσε αλλαγή στον τρόπο της παρέμβασης για την διευκόλυνση των μικρών μαθητών. Έτσι, λοιπόν, μετά την τρίτη ημέρα της παρέμβασης και όσο τα παιδιά ασχολήθηκαν με τις «μισομηχανές», οι ποσότητες που «επεξεργαζόταν» η μηχανή ήταν πάντα ορατές για τα παιδιά τόσο για τους λόγους 1:2 και 2:1 αλλά και για τους λόγους 1:4 και 4:1. Στις διακριτές ποσότητες τα παιδιά για να μπορέσουν να βρουν τα τετραπλάσια των ποσοτήτων που τους δινόταν έφτιαχναν «ομάδες» με την ίδια ακριβώς διάταξη που τους δινόταν. Αυτή τη στρατηγική (επανάληψη ποσότητας) ακολούθησαν και για τους λόγους 1:3 και 3:1 κατά την τέταρτη ημέρα της παρέμβασης όπως φαίνεται και από την παρακάτω εικόνα.

**Εικόνα 11:** Παράδειγμα υλικού που χρησιμοποιήθηκε για το έργο Δ.1.1

**Επεισόδιο 8 (Ημέρα 4η, Έργο Δ.1.1): Αναγνώριση του αριθμού 3 ως τελεστή στη σχέση 3:1**

Κατά τη διάρκεια της τέταρτης ημέρας της παρέμβασης και όσο τα παιδιά ασχολήθηκαν με τις «μισομηχανές» , οι ποσότητες που «επεξεργαζόταν» αφορούσαν και τους λόγους 1:3 και 3:1 για συνεχείς και διακριτές ποσότητες. Κατά τη διάρκεια αυτών του Έργου Δ.1.1 για τις διακριτές ποσότητες ένα από τα παιδιά, ο Χάρης έδειξε να αναγνωρίζει τη σχέση ανάμεσα στους όρους του λόγου 3:1. Πιο συγκεκριμένα, «διορθώνοντας» τον Κώστα αναφέρει στην ομάδα πως η μηχανή που φτιάχνει το τριπλάσιο θα βγάζει 3 ομάδες της ποσότητας που βάζουμε σε αυτή. Το παρακάτω απόσπασμα παρουσιάζει τον διάλογο των δύο παιδιών:

***Δ:*** *Η μηχανή αυτή δουλεύει με καραμέλες. Αν βάλω μέσα αυτή την καραμέλα θα μου βγάλει από την άλλη πλευρά τρεις καραμέλες.=*

***Κ:*** *Τριπλάσιο. Και άμα βάλεις δύο θα τις κάνει έξι.*

***Δ:*** *Πώς το ξέρεις αυτό;*

***Κ:*** *Γιατί θα επαναλάβει δύο φορές το τρία.*

***Χ:*** *Όχι, τρεις φορές το δύο. Αφού δύο είναι οι καραμέλες.*

**Επεισόδιο 9 (Ημέρα 4η, Έργο Δ.3.1): Προσπάθεια γενίκευσης της έννοιας του ν-πλάσιου**

Στο τέλος της τέταρτης ημέρας της παρέμβασης και αφού τα παιδιά είχαν εξοικειωθεί πλέον με τις «μισομηχανές» , και την «παραγωγή» πολλαπλάσιων και υποπολλαπλάσιων των ποσοτήτων που τους δινόταν ένα από αυτά, ο Νίκος προσπαθώντας να εξηγήσει το πώς αλλιώς θα μπορούσε να «δουλέψει» η μηχανή του αναφέρει τον όρο «εκτραπλάσιο». Ο όρος αυτός ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στο έργο Δ.3.1 για τις συνεχείς ποσότητες είχε ως στόχο να εξηγήσει πως θα «φτιαχνόταν» ένα ζαχαρωτό που θα ήταν το οποίο θα ήταν 6 φορές ίσο με το αρχικό. Παρακάτω παρουσιάζεται ο αντίστοιχος διάλογος:

***Δ:*** *Για να σας δείξω τι κάνει αυτή η μηχανή με τα ζαχαρωτά παιδιά. Αν βάλω αυτό το ζαχαρωτό από αυτή την πλευρά.*

***Κ:*** *Και να βγάλει τριπλάσιο.*

***Μ:*** *Και από την άλλη να βγάλει το μεγάλο.*

***Δ:*** *Μπράβο παιδιά! Μήπως μπορεί κάποιος να μου βρει το τριπλάσιο από αυτό το ζαχαρωτό;*

***Χ:*** *Εγώ. [Κάνει δοκιμές με διάφορα κομμάτια που τα μεταφέρει πάνω στο μεγάλο ζαχαρωτό μετρώντας πόσες φορές χωράνε.] Αυτό.*

***Ν:*** *Κυρία πότε θα ρθει ο εκτραπλάσιος;*

***Δ:*** *Δηλαδή;*

***Ν:*** *Αυτός που τα κάνει έξι φορές.*

# Συμπεράσματα- Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκε η δυνατότητα υποστήριξης παιδιών πρωτοοσχολικής ηλικίας προκειμένου να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, καθώς και να επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Κεντρική παραδοχή της έρευνας, η οποία παρουσιάστηκε στο θεωρητικό μέρος της εργασίας, ήταν ότι τα μικρά παιδιά έχουν πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης που όμως δεν υποστηρίζονται επαρκώς στα πρώτα χρόνια της τυπικής εκπαίδευσης (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002; Nunes & Bryant, 2010; Βράκα, 2017). Βασική υπόθεση ήταν ότι δημιουργώντας ευκαιρίες για τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τις θεμελιώδεις ενέργειες του ισομερισμού, της μέτρησης με διαφορετικές μονάδες και της επανάληψης της ποσότητας (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018) για την αντιμετώπιση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων διαφόρων τύπων, στο πλαίσιο διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, με ταυτόχρονη παροχή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, θα ενίσχυε την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν, να διαχειρίζονται και να εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Στη βάση αυτή, σχεδιάστηκε μια παρέμβαση, στην οποία συμμετείχαν τέσσερα νήπια που ελέγχθηκαν πριν και μετά σε έργα σχετικά με την αναγνώριση, και έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, καθώς και με την επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας είναι ενθαρρυντικά μιας και όσον αφορά τις επιδόσεις των παιδιών, καθώς υπάρχει αξιόλογη αύξηση των σωστών απαντήσεων μετά την παρέμβαση, τόσο και στη συνολική συχνότητα των σωστών απαντήσεων, όσο και ανά παιδί. Βελτίωση παρατηρείται και στις στρατηγικές που τα παιδιά χρησιμοποιούν μετά την συμμετοχή τους στην παρέμβαση. Έτσι, αν και κατά τη διάρκεια του προελέγχου κανένα από τα παιδιά δεν προσπαθούσε να ελέγξει την απάντηση του δοκιμάζοντας να συνθέσει ή να μοιράσει τη ζητούμενη ποσότητα κατά τη διάρκεια του μεταελέγχου τα παιδιά προχωρούν στη χρήση πιο εξελιγμένων στρατηγικών που σχετίζονται με την αναγνώριση των σχέσεων που αναπτύσσονται ανάμεσα σε υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια. Πιο συγκεκριμένα, όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της δοκιμασίας με διαδικασία ελέγχου αλλά και της ημι- νοερής και νοερής κατασκευής των υποπολλαπλασίων και των πολλαπλασίων που τους ζητήθηκαν. Μαζί με την χρήση πιο εξελιγμένων στρατηγικών, τα παιδιά κατά τη διάρκεια του μεταελέγχου χρησιμοποιούσαν και πιο έγκυρες αιτιολογήσεις για τις απαντήσεις τους. Η πλειοψηφία των εξηγήσεων που δόθηκαν στα έργα του μεταελέγχου ήταν έγκυρες, ενώ παράλληλα σημειώθηκε σημαντική μείωση και στις απαντήσεις που είτε δεν είχαν κάποια εξήγηση, είτε είχαν ως εξηγήσεις πράγματα που δεν είχαν καμία σχέση με τα υπό επεξεργασία έργα. Τα παιδιά κατάφεραν να χρησιμοποιούν σωστά αιτιολογήσεις στις οποίες τα ίδια κατέληξαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας, κανένα παιδί δεν πέτυχε σε όλα τα έργα του μεταελέγχου, με τη μεγαλύτερη δυσκολία να παρουσιάζεται στα έργα του Μεταελέγχου που αφορούσαν τις σχέσεις 1:3 και 3:1. Ακόμα και παιδιά που, όπως φαίνεται από τα επεισόδια της παρέμβασης που παρουσιάστηκαν, μπόρεσαν να διαχειριστούν σχετικά έργα στο πλαίσιο της παρέμβασης (π.χ., ο Νίκος), δεν το έκαναν κατά το μεταέλεγχο. Αυτό είναι αναμενόμενο, για διάφορους λόγους. Καταρχήν, είναι η σχέση 1:3 είναι πολύ πιο απαιτητική για τα παιδιά, συγκρινόμενη με τη σχέση 1:2 (Hunting & Davis, 1991). Επιπλέον, η οικειοποίηση νέων στρατηγικών δε συντελείται σε σύντομο χρονικό διάστημα, ειδικά για παιδιά αυτής της ηλικίας. Πράγματι, συνήθως μεσολαβούν περίοδοι κατά τις οποίες τα παιδιά μπορεί να χρησιμοποιούν μια νέα στρατηγική σε ορισμένες, αλλά όχι σε όλες τις σχετικές καταστάσεις, ή να παλινδρομούν σε παλαιότερες και ίσως αποτυχημένες στρατηγικές. Ένα επιπλέον ζήτημα που μπορεί να εξηγεί την αποτυχία στα συγκεκριμένα έργα, είναι ότι, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα έργα του μεταελέγχου, σε αυτά δεν εξετάστηκε η αντιληπτική αναγνώριση τους ή η χρήση τους στο πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς, μιας και το να προστεθούν ακόμη 12 (αντί για τα 4 που προστέθηκαν) έργα στον μεταέλεγχο θα δυσκόλευε ακόμη περισσότερο την διαδικασία. Πρέπει να σημειωθεί, επιπλέον, αντίθετα με ό,τι συνέβη στο πλαίσιο της παρέμβασης τα παιδιά χρησιμοποίησαν τους νέους όρους για τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις (όπως φαίνεται από τα επεισόδια που παρουσιάστηκαν).

Θα πρέπει, επίσης, να επισημανθεί και ότι η ίδια η παρέμβαση είχε περιορισμούς, με πρώτους τη μικρή διάρκειά της και το, αναλογικά, μεγάλο πλήθος των δραστηριοτήτων που περιελάμβανε. Αυτοί οι δύο παράγοντες, που οφείλονται στο γεγονός ότι ο διαθέσιμος χρόνος με τα παιδιά ήταν εξαρχής περιορισμένος, δημιούργησαν μια συνθήκη πυκνής παρουσίασης των έργων που δεν είναι η βέλτιστη από διδακτική άποψη. Επιπλέον, είχαν ως αποτέλεσμα την κούραση των μαθητών, οι οποίοι, όμως συνέχισαν να προσπαθούν μέχρι και τον Μεταέλεγχο.

Υπήρξαν, ακόμη, ζητήματα στο σχεδιασμό της παρέμβασης που προκάλεσαν δυσκολίες που δεν είχαν προβλεφθεί. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης των παιδιών στα έργα με τη Μισο-μηχανή, τα παιδιά δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν με ευκολία την σχέση των δεδομένων ποσοτήτων όταν δεν τα έβλεπαν μαζί σε αντιστοιχία. Για παράδειγμα, μπορούσαν να καταλάβουν ότι τα τέσσερα μπισκότα που «έβγαιναν» από την Μισο- μηχανή ήταν αποτέλεσμα του διπλασιασμού των δύο μπισκότων που «βάζαμε» σε αυτή όταν έβλεπαν όλα τα μπισκότα και από τις δύο πλευρές της μηχανής αλλά όχι ότι τα δύο μπισκότα είχαν «δημιουργηθεί» από το ένα που βάλαμε στη μηχανή μας όταν το πρώτο δεν ήταν ορατό. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να γίνει άμεση τροποποίηση των έργων της δεύτερης ομάδας από την ερευνήτρια. Η αλλαγή αυτή φάνηκε να έχει αποτέλεσμα αμέσως μιας και τα παιδιά μπόρεσαν μετά από αυτή να αντιληφθούν την λειτουργία της «Μισο-μηχανής» και να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που εκείνη «έφτιαχνε».

Η μελέτη αυτή δίνει ενδείξεις ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας όταν βρεθούν στο κατάλληλο διδακτικό περιβάλλον είναι ικανά να πραγματευθούν πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Το συμπέρασμα αυτό δε θα μπορούσε, βέβαια, να γενικευθεί μιας και ο αριθμός των συμμετεχόντων στην έρευνα ήταν πολύ μικρός. Μπορεί όμως να λειτουργήσει ως εύλογη υπόθεση, η οποία θα μπορούσε να ελεγχθεί εμπειρικά μέσω της δημιουργία ενός διδακτικού προγράμματος με στόχο την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στο νηπιαγωγείο, βασισμένο στις αρχές της παρούσας παρέμβασης που θα εφαρμοστεί στο πλαίσιο μιας μακροχρόνιας και συστηματικής παρέμβασης.

# Βιβλιογραφία

## Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία


Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental psychology*, *44*(5), 1478.

Charles, K., & Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 191–221.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27* (1), 41-51

Confrey, J. (1995). Student voice in examining "splitting" as an approach to ratio, proportions and fractions. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Ψonference for the Psychology of Mathematics Education* (V. 1, pp.3-29). Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco.

Confrey, J. (2008). A synthesis of the research on rational number reasoning: A learning progression approach to synthesis. Paper presented at the *International Congress of Mathematics Instruction*, Monterrey, Mexico.

Degrande, T., (2019)., To add or to multiply?, An investigation of children's preference for additive or multiplicative relations. Doctoral thesis. Interuniversity Center for Educational Sciences

Desforges A. & Desforges C. (1980) Number-based strategies of sharing in young children. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 97-109.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; New York: MacmillanPublishing Co.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). Albany, NY: State University of New York Press.

Hunting, R.,  Davis, G., (1991). Early fraction learning. New York, NY: Springer-Verlag.

Jacob, L.,  Willis, S. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity (Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 460-467). Sydney: MERGA.
Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237-256.

Kornilaki, K., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development, 20,* 388-406.

Kouba, V., (1989)., Children's solution strategies for equivalents et multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147-158

Lamon, S. J., & Lesh, R. (1992). Interpreting responses to problems with several levels and types of correct answers. In *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*, 319-342.

Long, M.C. (2011). *Mathematical, cognitive and didactic elements of the multiplicative conceptual field investigated within a Rasch assessment and measurement framework.* Unpublished doctoral thesis, Faculty of Education, University of Cape Town.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of Experimental Child Psychology, 142,* 66-82.

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood.* Oxford University Press.

Mononen , R , Aunio , P & Koponen , T 2014 , Investigating RightStart Mathematics Kindergarten Instruction in Finland. *Journal of Early Childhood Education Researc*h, 3(1), pp. 2-26.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (pp. 309-349). Washington, D.C: National Academy Press.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 309–330.

Mulligan, J. T., & Watson J. M., (1998). A developmental multi-modal model for multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(2), 61-86.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Cambridge, MA: Blackwell.

Nunes, T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning*, London: Nuffield Foundation.

Nunes, T., & Bryant, P. (2010). *Understanding relations and their graphical representation.* London: Newfield foundation

Park, J., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, *16*, 1–11.

Sarama, J., DiBiase, A. M., Clements, D. H., & Spitler, M. E. (Eds.) (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Routledge

Siegler, R. S., & Crowley, K. (1991). The microgenetic method: A direct means for studying cognitive development. *American psychologist*, *46*(6), 606

Siemon, D., Izard, J., Breed, M., & Virgona, J. (2006). In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-120). Prague, Czech Republic: PME.

Siemon, D., Breed, M., & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking: the big challenge of the middle years. In J. Mousley, L. Bragg, & C. Campbell (Eds.),*Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria* (pp.278-286). Melbourne, Australia: Mathematical Association of Victoria.

Singer, J.A., & Resnick, L.B. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, 23,231-246.

Skoumpoudi C, Sofikiti D (2009). Young children's material manipulating strategies in division task. In M. Tzekaki; M. Kaldrimidou and H. Sakonidis (Eds). *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (V. 5, pp. 137-145). Thessaloniki, Greece: PME.

Sophian, C. (2004), Mathematics for the future: Developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 59-81.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In G. Harel & J.Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Vamvakoussi, X., Christou, K.P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. Journal of Numerical Cognition, 4(1), 86-104

Vamvakoussi, X. (2016, June). The natural number bias: What do we know and where do we go from here? Keynote speech given at the *10th International Conference on Conceptual Change*, Florina, Greece.

Ελληνική Βιβλιογραφία

Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.). *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή*: *«Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»* (σελ. 302-311), Ρόδος: Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. και Εργαστήριο Φυσικών Επιστημών του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Ψηφιακή έκδοση, ISBN: 978-960-86791-9-1

Vraka Lina (2018). *Η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία: Ανάλυση και εφαρμογές*. Αδημοσίευτή Διπλωματική Εργασία, Π.Τ.Ν., Παενπιστήμιο Ιωαννίνων.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). *Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-Πρώτη Σχολική Ηλικία (Β' μέρος*). Ανακτήθηκε από: http://ebooks.edu.gr/info/newps

**Ηλεκτρονικές πηγές**

http://www.corestandards.org/Math/Content/K/G/B/6/

https://www.futureschool.com/china-curriculum/#552f66315fc24

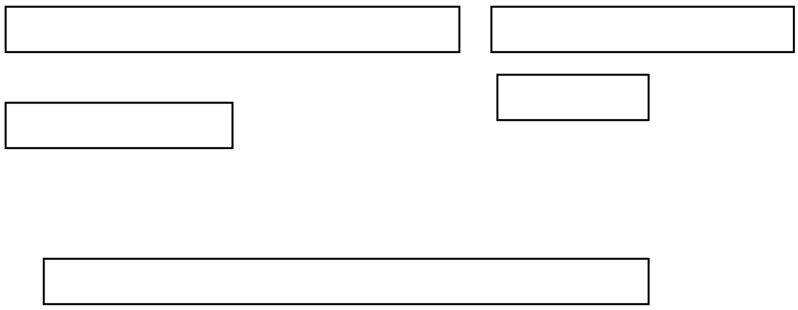
# Παράρτημα Α

## Αναλυτική περιγραφή έργων Προελέγχου- Μεταελέγχου

### 1. Αναγνώριση (αντιληπτική, μη λεκτική).

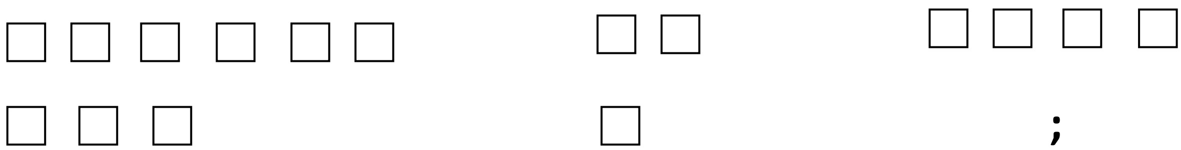
Σε αυτή την ομάδα έργων τα παιδιά συμμετείχαν σε έργα που τα παρακινούσαν να αναγνωρίσουν τη σχέση ανάμεσα στο μισό και το διπλάσιο αντιληπτικά και να αιτιολογήσουν την απάντηση τους.

**Έργο Ε1.1 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού):** Στα παιδιά δόθηκαν λωρίδες από χαρτόνι με τα αντίστοιχα μισά τους. Για την τελευταία λωρίδα για την οποία δεν υπήρχε αντιστοίχηση δόθηκαν 5 επιλογές.



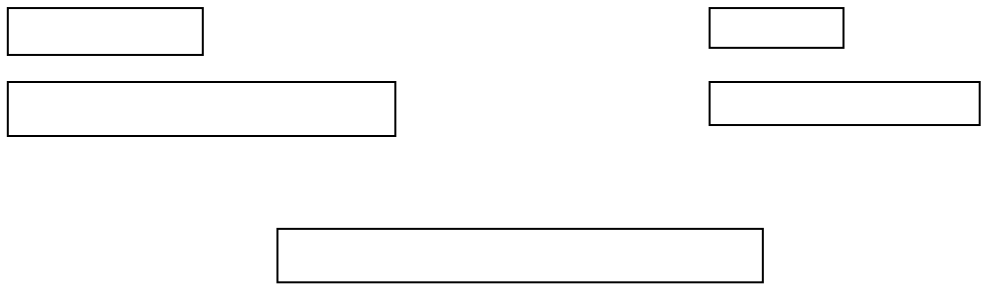
Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Ποιο πιστεύεις ότι ταιριάζει κάτω από αυτό($3^{ο}$ σχήμα);» και «Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»

**Έργο Ε1.2 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού):** Στα παιδιά δόθηκαν λωρίδες από χαρτόνι, ίσου μήκους με μεγάλες κουκκίδες. Η μια λωρίδα τοποθετείται κάτω από την άλλη λωρίδα δημιουργώντας έτσι αντιστοιχίες ανάμεσα σε διπλάσιες και μισές κουκκίδες.




Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Ποιο πιστεύεις ότι ταιριάζει κάτω από αυτό($3^{ο}$ σχήμα);» και «Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»

**Έργο Ε1.3 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου):** Στα παιδιά δόθηκαν λωρίδες από χαρτόνι με τα αντίστοιχα διπλάσια τους. Για την τελευταία λωρίδα για την οποία δεν υπήρχε αντιστοίχηση δόθηκα 5 επιλογές.



Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Ποιο πιστεύεις ότι ταιριάζει κάτω από αυτό($3^{ο}$ σχήμα);» και «Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»

**Έργο Ε1.4 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου):** Στα παιδιά δόθηκαν λωρίδες από χαρτόνι, ίσου μήκους με μεγάλες κουκκίδες. Η μια λωρίδα τοποθετείται κάτω από την άλλη λωρίδα δημιουργώντας έτσι αντιστοιχίες ανάμεσα σε διπλάσιες και μισές κουκκίδες.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Ποιο πιστεύεις ότι ταιριάζει κάτω από αυτό($3^{ο}$ σχήμα);» και «Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;»

## 2. <u>Αναγνώριση, εννοιολογική, (χωρίς λέξη)</u>

Σε αυτή την ομάδα έργων τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν την φράση «Δίκαιη μοιρασιά» για να απαντήσουν στο πρόβλημα που κάθε φορά τους παρουσιαζόταν.

**Έργο Ε2.1 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Γιώργος και το αδερφάκι του θα μοιραστούν δίκαια αυτή τη σοκολάτα», η οποία ήταν σχεδιασμένη σε ένα χαρτόνι. Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν υποπολλαπλάσια της αρχικής σοκολάτας (½, ¼, ¾, 1, 1,5) και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος»; Και «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό το κομμάτι»;

**Έργο Ε2.2 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Η Ελένη και η αδερφή της θα μοιραστούν δίκαια αυτές τις 6 καραμέλες», φτιαγμένες από χαρτόνι. Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν υποπολλαπλάσια της αρχικής ποσότητας (2, 3, 4, 5, 7) και πάλι σχεδιασμένες σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;» και «Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες»;

**Έργο Ε2.3 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου).** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Γιώργος και το αδερφάκι του θα μοιραστούν δίκαια αυτή τη σοκολάτα», η οποία ήταν σχεδιασμένη σε ένα χαρτόνι. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι (στα παιδιά παρουσιάζοταν μια ακόμα σοκολάτα από χαρτόνι). Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν πολλαπλάσια της αρχικής σοκολάτας ( x1, x2, x3, x4) και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα»; Και «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτή»;

**Έργο Ε2.4 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Η Ελένη και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελένη πήρε αυτές τις 2 καραμέλες, οι οποίες ήταν σχεδιασμένες σε χαρτόνι. Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν πολλαπλάσια της αρχικής ποσότητας ( x1, x2, x3, x4) και πάλι σχεδιασμένες σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά τους»; Και «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτές οι καραμέλες»;

## 3. Αναγνώριση, εννοιολογική (με λέξη).

Σε αυτή την ομάδα έργων τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν τις έννοιες «Μισό» και «Διπλάσιο» για να απαντήσουν στο πρόβλημα που κάθε φορά τους παρουσιαζόταν.

**Έργο Ε3.1 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: « Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα (σχεδιασμένη σε χαρτόνι). Θα δώσω τη μισή στον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω; Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν υποπολλαπλάσια της αρχικής σοκολάτας (½, ¼, ¾, 1, 1,5) και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος»; ,«Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό το κομμάτι»; Και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη *μισό*;»

**Έργο Ε3.2 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του μισού):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Έχω εδώ αυτές τις 4 καραμέλες. Θα δώσω τις μισές στην Ελένη. Πόσες λες ότι θα της δώσω; (επιλογές). Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν υποπολλαπλάσια της αρχικής ποσότητας (2, 3, 4, 5, 7) και πάλι σχεδιασμένες σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;» , «Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες»; Και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη *μισό*;»

**Έργο Ε3.3 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από τη σοκολάτα του Γιώργου (όλες σχεδιασμένες σε χαρτόνι). Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν πολλαπλάσια της αρχικής σοκολάτας ( x1, x2, x3, x4) και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα;», «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτή;» και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη *Διπλάσιο*;»

**Έργο Ε3.4 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του διπλάσιου):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Η Ελένη έχει αυτές τις 3 καραμέλες. Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από αυτήν (όλες σχεδιασμένες σε χαρτόνι). Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν πολλαπλάσια της αρχικής ποσότητας ( x1, x2, x3, x4) και πάλι σχεδιασμένες σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά τους;» , «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτές οι καραμέλες;» και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη *Διπλάσιο*;»

**4. <u>Αναγνώριση, εννοιολογική (με λέξη για το 1/3 και το τριπλάσιο).</u>**

Σε αυτή την ομάδα έργων που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια του μεταελέγχου, τα παιδιά καλούνται να ερμηνεύσουν τις έννοιες «1/3» και «Τριπλάσιο» για να απαντήσουν στο πρόβλημα που κάθε φορά τους παρουσιαζόταν.

**Έργο Ε4.1 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του 1/3):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: « Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα (σχεδιασμένη σε χαρτόνι). Θα δώσω το 1/3 της στον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω; Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν υποπολλαπλάσια της αρχικής σοκολάτας (1/3, ¼, ¾, 1, 1,5) και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος»; ,«Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό το κομμάτι»; Και «Ξέρεις τι σημαίνει το 1/3;»

**Έργο Ε4.2 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του 1/3):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Έχω εδώ αυτές τις 6 καραμέλες (σχεδιασμένες σε χαρτόνι). Θα δώσω το 1/3 στην Ελένη. Πόσες λες ότι θα της δώσω; (επιλογές). Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν υποπολλαπλάσια της αρχικής ποσότητας (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/7) και πάλι σχεδιασμένες σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;» , «Πώς το ξέρεις ότι είναι τόσες»; και «Ξέρεις τι σημαίνει το 1/3;»

**Έργο Ε4.3 (Συνεχείς Ποσότητες- Αναγνώριση του τριπλάσιου):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι τριπλάσια από αυτόν (όλες σχεδιασμένες σε χαρτόνι). Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν πολλαπλάσια της αρχικής σοκολάτας ( x1, x2, x3, x4) και πάλι σχεδιασμένα σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα;», «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτή;» και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη *Τριπλάσιο*;»

**Έργο Ε4.4 (Διακριτές Ποσότητες- Αναγνώριση του τριπλάσιου):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Η Ελένη έχει αυτές τις 2 καραμέλες. Εγώ έχω τριπλάσιες καραμέλες από αυτήν (όλες σχεδιασμένες σε χαρτόνι). Οι επιλογές που τους δόθηκαν ήταν πολλαπλάσια της αρχικής ποσότητας ( x1, x2, x3, x4) και πάλι σχεδιασμένες σε χαρτόνι.

Οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά ήταν οι εξής: «Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά τους;» , «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτές οι καραμέλες;» και «Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη *Τριπλάσιο*;»

# Παράρτημα Β

## Αναλυτική περιγραφή έργων Παρέμβασης

**Ομάδα έργων 1 –Ημέρα Α.** Η πρώτη ομάδα έργων τέθηκε στο πλαίσιο μιας ιστορίας, με το εξής σενάριο:

« *Μια φορά και ένα καιρό, υπήρχε μια πόλη χαμένη μέσα στη ζούγκλα της χώρας των Κλασμάτων, η πόλη του Μισό- Διπλάσιου στην οποία ζούσε η οικογένεια Κοντό- Ψηλού. Η μαμά ήταν ψηλή και αδύνατη σαν μακαρόνι ενώ ο μπαμπάς πολύ πολύ κοντός και παχουλός σαν μπαλίτσα. Η οικογένεια είχε τρία παιδιά, τον Παμ και την Πένυ που ήταν δίδυμα και τον Παμ-παμ. Τα παιδιά έμοιαζαν πολύ με τη μαμά τους και ήταν αδύνατα και μακριά σαν μακαρόνια.*

*Τα δύο δίδυμα αδέρφια, ο Παμ και η Πένυ ήταν πολύ αγαπημένα και περνούσαν όλη τη μέρα μαζί. Έπαιζαν μαζί, έτρωγαν μαζί και μοιραζόταν τα πάντα. Τους άρεσε πάρα πολύ να μοιράζονται τις σοκολάτες και τα γλυκάκια που τους έδινε η μαμά τους».*

Στη συνέχεια τα παιδιά άρχισαν να επεξεργάζονται τα παρακάτω έργα.

***Δραστηριότητα Α.1 (Διακριτές Ποσότητες- Σχέση 1:2*).** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το αρχικά το παρακάτω έργο: «Μια μέρα η μαμά του Παμ και της Πένυ αποφάσισε να τους δώσει ένα γλυκό μιας και κατάφεραν να τακτοποιήσουν το δωμάτιο τους πάρα πολύ γρήγορα. Τους έδωσε λοιπόν 4 μπισκότα (κατασκευασμένα από χαρτόνι) και τους είπε ότι μπορούν να τα μοιραστούν». Με αφορμή την ερώτηση: «Τι λέτε μπορούμε να τους βοηθήσουμε;» το πρώτο παιδί ξεκίνησε να τα μοιράζει. Η διαδικασία επαναλήφθηκε για όλους τους συμμετέχοντες με διαφορετικό αριθμό μπισκότων (**2, 6** και τέλος **3** μπισκότα).

***Δραστηριότητα Α.2 (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 1:2).*** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το παρακάτω έργο: «Μια άλλη μέρα τους έδωσε μια σοκολάτα (κατασκευασμένη από χαρτόνι) και τους είπε να τη μοιραστούν δίκαια». Και πάλι έγινε η ερώτηση: «Τι λέτε μπορούμε να τους βοηθήσουμε;» στο πρώτο παιδί και η διαδικασία ξεκινά ξανά. Όλοι συμμετείχαν και πάλι στην με μία σοκολάτα με διαφορετικό μήκος.

Τα πρώτα αυτά έργα ακολούθησε η συνέχεια της ιστορίας του Παμ και των αδερφών και η δεύτερη ομάδα έργων. Η ιστορία και τα έργα ήταν τα εξής: *«Ο Παμ- παμ ήταν ο μεγάλος αδερφός της οικογένειας και πολλές φορές τα ήθελε όλα δικά του. Ήταν διπλάσιος στο ύψος από τον Παμ, είχε τα διπλάσια παιχνίδια και ακόμα και στο φαγητό ήταν άπληστος και ήθελε να τρώει το διπλάσιο από όσο έτρωγε ο Παμ».*

***Δραστηριότητα Α.3 (Συνεχείς Ποσότητες- Εισαγωγή του όρου «διπλάσιο»):*** Δείχνουμε στα παιδιά την εικόνα του Παμ-παμ, συζητάμε τη σχέση του ύψους του με τον Παμ και τα προτρέπουμε να «μετρήσουν» το ύψος του Παμ- παμ με το ύψος του Παμ και της Πένυ για να δουν τη σχέση ανάμεσα στα αδέρφια της ιστορίας, αλλά και το ότι η λέξη «διπλάσιο» σημαίνει όσο ο Παμ και η Πένυ μαζί, ή 2 φορές ο Παμ.

***Δραστηριότητα Α.4 (Διακριτές Ποσότητες- Σχέση 2:1).*** Αφού τα παιδιά βρουν τη σχέση ανάμεσα στα αδέρφια της ιστορίας ξεκινάμε τις δοκιμές για να ταΐσουμε τον Παμ και τον Παμ- παμ. Θυμίζουμε στα παιδιά ότι ο Παμ-παμ τρώει το διπλάσιο από τον Παμ τους ζητάμε να βρουν το τι έφαγε ο μεγάλος αδερφός της οικογένειας. Σαν βοήθεια τους λέμε ότι ο Παμ- παμ τρώει όσο η Πένυ και ο Παμ μαζί. Έτσι σε κάθε παιδί δείχνουμε ένα σύνολο με μπισκότα και στη συνέχεια τους ζητάμε να μας δείξει πόσα μπισκότα έφαγε ο Παμ- παμ.

***Δραστηριότητα Α.5 (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 2:1).*** Τα παιδιά προσπαθούν και πάλι να ταΐσουν τον μεγάλο αδερφό της οικογένειας. Έτσι σε κάθε παιδί δείχνουμε ένα κομμάτι σοκολάτας και στη συνέχεια τους ζητάμε να μας δείξει ποια σοκολάτα έφαγε ο Παμ- παμ.

***Δραστηριότητα Α.6 (Διακριτές Ποσότητες- Σχέση 1:2).*** Η ίδια διαδικασία με το φαγητό των δύο αδερφών επαναλαμβάνεται και από την ανάποδη τώρα ζητώντας από τα παιδιά να δούμε πόσο τρώει ο Παμ αν ξέρουμε το φαγητό του Παμ- παμ. Έτσι, κάθε παιδί καλείται να βρει πόσα μπισκότα έφαγε ο Παμ γνωρίζοντας τον αριθμό των μπισκότων που έφαγε ο Παμ-παμ.

***Δραστηριότητα Α.7 (Συνεχείς Ποσότητες-Σχέση 1:2).*** Και πάλι τα παιδιά γνωρίζοντας την σοκολάτα που έφαγε ο Παμ- παμ καλούνται να βρουν ποιο κομμάτι θα έτρωγε ο Παμ.

**Ομάδα έργων 1 – 2η ημέρα Β.**

Την δεύτερη ημέρα της παρέμβασης τα παιδιά και πάλι «ταξίδεψαν» στην χώρα του Μισού- Διπλάσιου και συνέχισαν να επεξεργάζονται έργα για την κατανόηση αυτή τη φορά της σχέσης 1:3 και 3:1. Η ιστορία αυτή τη φορά ήταν η εξής:

*«Μια μέρα στην πόλη του Μισό- διπλάσιου ήρθε επίσκεψη η οικογένεια Τριπλάσιου. Η οικογένεια αυτή είχε δύο παιδιά, το Ένα-Τρίτο και το Τριπλάσιο που ήταν ξαδέρφια με τον Παμ, την Πένυ και τον Παμ-παμ. Το Ένα-Τρίτο έμοιαζε πολύ με τον Παμ και την Πένυ, τόσο πολύ που καμιά φορά τον μπέρδευαν με τον Παμ. Το Ένα-Τρίτο αγαπούσε πολύ τα ξαδερφάκια του και πάντα έπαιζε μαζί τους. Μάλιστα του άρεσε να μοιράζεται μαζί τους τα μπισκότα του και τις τρελοσοκολάτες που έφερνε και μόνο καφέ δεν ήταν».*

**Δραστηριότητα Β.1. (Διακριτές Ποσότητες- Κατασκευή του 1/3):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε το αρχικά το παρακάτω έργο: «Ο ξάδερφος Έν-τρίτο έφερε μαζί του 3 μπισκότα για να τα μοιραστεί με τον Παμ και την Πένυ. Με αφορμή την ερώτηση: «Τι λέτε μπορούμε να τους βοηθήσουμε;» το πρώτο παιδί ξεκίνησε να τα μοιράζει. Η διαδικασία επαναλήφθηκε για όλους τους συμμετέχοντες με διαφορετικό αριθμό μπισκότων (**6,9** και τέλος **12** μπισκότα).

**Δραστηριότητα Β.2. (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 1:3):** Το επόμενο έργο ξεκίνησε με την παρακάτω φράση: «Την επόμενη μέρα, ο ξάδερφος Έν-τρίτο έδειξε στα δίδυμα αυτή τη σοκολάτα για να την μοιραστούν δίκαια» και πάλι μετά την ερώτηση «Μπορούμε να τον βοηθήσουμε;» τα παιδιά άρχισαν να προσπαθούν να κατασκευάσουν το  της αρχικής ποσότητας. Όλοι συμμετείχαν και πάλι στην με μία σοκολάτα με διαφορετικό μήκος.

Η ιστορία συνεχίστηκε με έργα που σχετιζόταν με την κατασκευή του τριπλάσιου αλλά και την συσχέτιση ανάμεσα στα αδέρφια και τον «γίγαντα» της ιστορίας. Πιο συγκεκριμένα αφού η ερευνήτρια παρουσίασε τον ξάδερφο Τριπλάσιο, ο οποίος ήταν πιο μεγάλος από τα δίδυμα αλλά και από τον Παμ- παμ και ήταν πάρα πολύ λαίμαργος τα παιδιά επεξεργάστηκαν τα παρακάτω έργα.

**Δραστηριότητα Β.3. (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 3:1):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε η εικόνα του Τριπλάσιου και ξεκίνησε η συζήτηση για τη σχέση του ύψους του με τον Παμ, την Πένυ και τον ξάδερφο Έν-τρίτο. Τα παιδιά προτρέπονται να τον καλύψουν με τους τρεις μικρούς ήρωες της ιστορίας για να δουν τη σχέση ανάμεσα στα κομμάτια.

**Δραστηριότητα Β.4. (Διακριτές Ποσότητες- Σχέση 3:1):** Αφού τα παιδιά βρουν τη σχέση ανάμεσα στον ξάδερφο Τριπλάσιο και τους υπόλοιπους ήρωες της ιστορίας ξεκινάμε τις δοκιμές με το φαγητό των ηρώων. Λέμε, λοιπόν, στα παιδιά θυμίζοντας τους ότι ο Τριπλάσιος τρώει όσο τα τρία παιδιά μαζί, ζητάμε να μας δείξουν πόσο φαγητό θα φάει παρουσιάζοντας τους το πόσα μπισκότα έχει φάει ο ξάδερφος Έν-τρίτο.

**Δραστηριότητα Β.5 (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 3:1):** Στη συνέχεια, η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τις σοκολάτες που θα φάει ο ξάδερφος Τριπλάσιος όταν ξέρουμε το κομμάτι της σοκολάτας που έχει φάει ο ξάδερφος Έν-τρίτο.

**Δραστηριότητα Β.6 (Διακριτές Ποσότητες- Σχέση 1:3):** Η ίδια διαδικασία με το φαγητό των ηρώων της ιστορίας επαναλαμβάνεται και από την ανάποδη τώρα ζητώντας από τα παιδιά να δούμε πόσο τρώει ο ξάδερφος Έν-τρίτο αν ξέρουμε το φαγητό του Τριπλάσιου. Ζητάμε, λοιπόν, να μας δείξουν πόσο φαγητό θα φάει ο ξάδερφος Έν-τρίτο παρουσιάζοντας τους το πόσα μπισκότα έχει φάει ο ξάδερφος Τριπλάσιος.

**Δραστηριότητα Β.7. (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 1:3):** Στη συνέχεια, η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τις σοκολάτες που θα φάει ο ξάδερφος Έν-τρίτο όταν ξέρουμε το κομμάτι της σοκολάτας που έχει φάει ο ξάδερφος Τριπλάσιος.

**Ομάδα έργων 2 – Ημέρα Γ.**

Την τρίτη ημέρα της Παρέμβασης τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να παίξουν με την «μηχανή» της κυρίας Διάνοιας, η οποία είχε ως στόχο να τα βοηθήσει να κατανοήσουν καλύτερα τις σχέσεις ανάμεσα σε υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια. Με τη χρήση και αυτή τη φορά εικονικών αναπαραστάσεων τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στα έργα αυτής της ομάδας και να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Έγινε μια αλλαγή στο διδακτικό σενάριο αυτής ομάδας έργων κατά τη διάρκεια της παρέμβασης η οποία είχε ως στόχο να διευκολύνει τα παιδιά στο να παρατηρήσουν αντιληπτικά τις σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες. Πιο συγκεκριμένα μιας και τα παιδιά δεν μπορούσαν να συγκρατήσουν το ποια ήταν η αρχική ποσότητα (συνεχής και διακριτή), η οποία «έμπαινε» στη μηχανή και χανόταν για να παραχθεί η αντίστοιχη μισή ή διπλάσια, η ερευνήτρια αποφάσισε να παρουσιάζει και τις δύο ποσότητες ταυτόχρονα. Παρακάτω παρουσιάζονται τα έργα της ομάδας καθώς και οι ερωτήσεις που έγιναν στα παιδιά.

**Δραστηριότητα Γ1 (Διακριτές Ποσότητες – Σχέση 2:1):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε η κυρία Διάνοια, η οποία είναι τρομερή εφευρέτης και έφτιαξε κάτι φανταστικές μηχανές, όπου όσοι τις βλέπουν μένουν με το στόμα ανοιχτό. Στη συνέχεια τους αναφέρουμε ότι η πρώτη μηχανή δουλεύει με καραμέλες και ότι αν βάλουμε 1 καραμέλα, η μηχανή το σκανάρει και βγάζει αυτά 2 καραμέλες. Αν βάλουμε 3 καραμέλες, τα σκανάρει και βγάζει 6 καραμέλες. Αφού επαναλάβουμε τη διαδικασία μερικές φορές ρωτάμε τα παιδιά αν μπόρεσαν να καταλάβουν τι κάνει η μηχανή.

**Δραστηριότητα Γ2 (Διακριτές Ποσότητες – Σχέση 1:2, Αντιστροφή):** Το δεύτερο έργο σχετίζεται με την ανάποδη χρήση της Μισό- μηχανής. Βάζουμε λοιπόν στη μηχανή 2 καραμέλες από την αντίθετη πλευρά και ρωτάμε τα παιδιά ποιο πιστεύουν ότι θα είναι το αποτέλεσμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με διαφορετικό αριθμό από καραμέλες κάθε φορά. Οι ερωτήσεις που γίνονται στα παιδιά είναι οι εξής: «Κατάλαβες τι κάνει η μηχανή της κυρίας Διάνοιας, αν βάλω τις καραμέλες από εδώ (αριστερά);» και «Κατάλαβες τι κάνει η μηχανή μου, αν βάλω τις καραμέλες από δεξιά;»

**Δραστηριότητα Γ3 (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 2:1):** Παρουσιάζεται στη συνέχεια η επόμενη σπαζοκεφαλιά της κυρίας Διάνοιας η οποία είχε να κάνει με ζαχαρωτά αυτή τη φορά. Τα παιδιά βλέποντας το αρχικό κομμάτι ζαχαρωτού ψάχνουν να βρουν ποιο είναι το διπλάσιο που θα βγει από την Μηχανή. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με διαφορετικά κομμάτια ζαχαρωτού για κάθε παιδί.

**Δραστηριότητα Γ4(Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 2:1, Αντιστροφή)** : Η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται από την ανάποδη πλευρά αυτή τη φορά. Δείχνουμε, λοιπόν, τα ζαχαρωτά διαφορετικού μήκους που μπαίνουν στη Μηχανή και τους ζητάμε να βρουν ποιο κομμάτι θα βγει από την άλλη πλευρά της μηχανής. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με διαφορετικά κομμάτια της σοκολάτας για όλα τα παιδιά.

**Ομάδα έργων 2 – Ημέρα Δ.**

Η τέταρτη μέρα της παρέμβασης βρίσκει και πάλι τα παιδιά να παίζουν με τις μηχανές της κυρίας Διάνοιας αλλά αυτή τη φορά να επεξεργάζονται τις σχέσεις 1:4 και 4:1. Χρησιμοποιήθηκε εμπράγματο υλικό για τη διαδικασία και τα παιδιά έβλεπαν καθ' όλη την διάρκεια της διαδικασίας και τις δύο ποσότητες (υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια) που «έμπαιναν» και «έβγαιναν» από τη μηχανή. Το παιχνίδι ξεκίνησε με την αφήγηση της παρακάτω ιστορίας:

«Ο κύριος Γλυκομάστορας είναι ζαχαροπλάστης. Είδε τη τις μηχανές της κας. Διάνοιας και ενθουσιάστηκε. *«Κυρία Διάνοια»,* της είπε, *«πολύ θα ήθελα μια μηχανή να μου διπλασιάζει τις καραμέλες μου. Και γιατί όχι, να μου τις τετραπλασιάζει! Μία να βάζω, τέσσερις να γίνονται! Δύο να βάζω, να γίνονται… να γίνονται… ε, όσες είναι να γίνονται, τέλος πάντων. Μπορείς να μου φτιάξεις μια τέτοια μηχανή; Και να ξέρεις, θα σε εφοδιάζω με παγωτό για όλη σου τη ζωή!» «Α, κύριε Γλυκομάστορα»,* είπε η κ. Διάνοια, *«εγώ αύριο θα την έχω έτοιμη. Αλλά να ξέρεις, δε θα σου τη δώσω, αν δεν μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα βγάλει κάθε φορά»*. Έτσι είναι η κυρία Διάνοια, πειραχτήρι! Ελάτε να βοηθήσουμε τον κύριο Γλυκομάστορα».

**Δραστηριότητα Δ5 (Διακριτές Ποσότητες- Σχέση 4:1):** Στα παιδιά παρουσιάστηκε η νέα μηχανή που έφτιαξε η κυρία Διάνοια, για τον Γλυκομάστορα και ξεκινούν οι δοκιμές. Όταν στη μηχανή βάλουμε 1 καραμέλα η μηχανή τη σκανάρει και βγάζει αυτά 4 καραμέλες. Αν βάλουμε 2 καραμέλες η μηχανή βγάζει 8 καραμέλες. Αφού επαναλάβουμε τη διαδικασία μερικές φορές ρωτάμε τα παιδιά αν μπόρεσαν να καταλάβουν τι κάνει η μηχανή.

**Δραστηριότητα Δ6 (Διακριτές Ποσότητες- Σχέση 1:4, Αντιστροφή):** Το δεύτερο έργο σχετίζεται με την ανάποδη χρήση της καινούργιας μας μηχανής. Βάζουμε λοιπόν 4 καραμέλες από την αντίθετη πλευρά και ρωτάμε τα παιδιά ποιο πιστεύουν ότι θα είναι το αποτέλεσμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με διαφορετικό αριθμό από καραμέλες κάθε φορά. Οι ερωτήσεις που γίνονται στα παιδιά είναι οι εξής: «Κατάλαβες τι κάνει η μηχανή της κυρίας Διάνοιας, αν βάλω τις καραμέλες από εδώ (αριστερά);» και «Κατάλαβες τι κάνει η μηχανή μου, αν βάλω τις καραμέλες από δεξιά;»

**Δραστηριότητα Δ7 (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 1:4):** Στα παιδιά παρουσιάζεται και η τελευταία μηχανή της κυρίας Διάνοιας η οποία είχε να κάνει με ζαχαρωτά αυτή τη φορά. Τα παιδιά βλέποντας το αρχικό κομμάτι του ζαχαρωτού ψάχνουν να βρουν ποιο είναι κομμάτι που θα βγει από αυτή τη μηχανή (1/4 της αρχικής σοκολάτας). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με διαφορετικά κομμάτια ζαχαρωτού για όλα τα παιδιά.

**Δραστηριότητα Δ8 (Συνεχείς Ποσότητες- Σχέση 4:1, Αντιστροφή):** Η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται από την ανάποδη πλευρά αυτή τη φορά. Δείχνουμε, λοιπόν, τα κομμάτια ζαχαρωτού που αντιστοιχούν στο 1/4 αρχικών ποσοτήτων και τους ζητάμε να βρουν ποιο θα είναι ολόκληρο το ζαχαρωτό που θα βγει από την άλλη πλευρά της μηχανής. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με διαφορετικά κομμάτια ζαχαρωτού για όλα τα παιδιά.

# Παράρτημα Γ

## Γ.1 Απομαγνητοφώνηση έργων Προελέγχου

**Απομαγνητοφώνηση έργων Προελέγχου: Κώστας**

1. **<u>Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).</u>**

**<u>Έργο Ε1.1:</u>**

Δ: Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ' όλα τα κομμάτια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα;

ΚΩΣΤΑΣ: [Προσπαθεί να πάρει μία κορδέλα με μήκος κοντά σε αυτή που του δείξαμε από αυτές που είχαμε ταιριάξει.]

Δ: Δεν μπορείς να κουνήσεις αυτές που ταίριαξα εγώ. Μπορείς να πάρεις αυτές που είναι κάτω.

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή!

Δ: Γιατί αυτή;

ΚΩΣΤΑΣ: Μμμμ γιατί νομίζω ότι αυτή είναι η σωστή.

Δ: Για βάλτη από κάτω από τη άλλη! Είναι σωστή;

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι! Επειδή εδώ έχει μια λίγο πιο μεγάλη γωνία και δεν είναι!

Δ: Εσύ, δηλαδή, τι κομμάτι ψάχνεις να ταιριάξεις; Πως πρέπει να είναι η κορδέλα;

ΚΩΣΤΑΣ: (2)

Δ: Αυτή η λωρίδα είναι ίδια μ' αυτή; [Δείχνουμε στον Κώστα την πρώτη αντιστοιχία]

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι.

Δ: Αυτή με αυτή;

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι!

Δ: Εσύ, λοιπόν, ψάχνεις μια ίδια; Ποια λες ότι είναι η σωστή;

ΚΩΣΤΑΣ: [Κάνει διάφορες δοκιμές] Όχι, αυτή είναι πολύ μικρή! Αυτή πολύ μεγάλη!

**<u>Έργο Ε1.2:</u>**

Δ: Για να σε ρωτήσω κάτι άλλο! Για δες! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή… Μπορείς να μου πεις με καρτούλα θα ταιριάξω αυτή [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες]; Μπορείς να διαλέξεις όποια θέλεις από τις καρτούλες που έχουμε από κάτω.

ΚΩΣΤΑΣ: (3) [Μετρά τις καραμέλες που έχει η κάθε κάρτα].

Δ: Τι κάνεις τώρα; Μετράς τις τελίτσες;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι!

Δ: Για πες μου, λοιπόν, ποια θα βάλουμε κάτω από την τελευταία κάρτα;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή.

Δ: Γιατί;

ΚΩΣΤΑΣ: Γιατί είναι ίδια μ' αυτή. [Δείχνει μια κάρτα ίδια με αυτή που του ζητήσαμε να αντιστοιχήσει]

Δ: Είσαι σίγουρος;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι! Με αυτή ταιριάζει!

**<u>Έργο Ε1.3:</u>**

Δ: Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα; Μπορείς να τις κουνήσεις για να τις δεις καλύτερα.

ΚΩΣΤΑΣ: (2) Δεν είναι!

Δ: Τι δεν είναι;

ΚΩΣΤΑΣ: Δεν είναι ίση με αυτή.

Δ: Ταιριάζει, όμως, με αυτή; Όπως ταιριάζουν και οι άλλες;

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι!

**Έργο Ε1.4:**

Δ: Να ρωτήσω και κάτι άλλο; Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα [Η κάρτα έχει 2 καραμέλες];

ΚΩΣΤΑΣ: (2) [Δείχνει την κάρτα που επιλέγει] Αυτή με αυτή!

Δ: Για βάλτην εκεί!

ΚΩΣΤΑΣ: [Την αντιστοιχεί κάτω από εκείνη που του ζητήσαμε] Δεν είναι!

Δ: Τι ψάχνεις να βρεις;

ΚΩΣΤΑΣ: Τη δύο. [Εννοεί την κάρτα που έχει δύο καραμέλες για να βάλει δύο ίδιες κάρτες μαζί].

Δ: Γιατί;

ΚΩΣΤΑΣ: (3) Δε ξέρω.

**2. Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη**

**Έργο Ε2.1:**

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι πήρε ο Γιώργος;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι! Αυτό! [Δείχνει το κομμάτι που επέλεξε.]

Δ: Γιατί πιστεύεις ότι πήρε αυτό το κομμάτι;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή είναι ίδιο!

Δ: Πρέπει να πάρει ένα ίδιο δηλαδή;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι!

Δ: Μα η σοκολάτα που έχουν όλη- όλη είναι αυτή. Μπορεί και ο ένας και ο άλλος να πάρουν αυτό το κομμάτι;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή δεν είναι δικαία ο ένας να μην έχει καμία!

Δ: Άρα τι πρέπει να πάρουν;

ΚΩΣΤΑΣ: Ο καθένας από μια!

**<u>Έργο Ε2.2:</u>**

Δ: Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 6καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι! (3) Έξι!

Δ: Έξι; Και η αδερφή της τότε πόσες έφαγε;

ΚΩΣΤΑΣ: Έξι!

Δ: Μα όλες όλες οι καραμέλες είναι έξι!

ΚΩΣΤΑΣ: (5) [Δεν απαντά καθόλου]

**<u>Έργο Ε2.3:</u>**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή!

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτή είναι ολόκληρη η σοκολάτα;

ΚΩΣΤΑΣ: Γιατί είναι πολύ μεγάλη!

**<u>Έργο Ε2.4:</u>**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι! Έξι![Δείχνει μια κάρτα]

Δ: Πήραν δηλαδή από δύο και στην αρχή ήταν έξι; Πως το ξέρεις ότι στην αρχή είχαν έξι;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή το είδα!

Δ: Εντάξει!

### 3. <u>Αναγνώριση, με λέξη</u>

**<u>Έργο Ε3.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή!

Δ: Γιατί;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή θα πάρει τη μισή ο Γιώργος και τη μισή εσύ.

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη «μισό»;

ΚΩΣΤΑΣ: Τι;

Δ: Δε ξέρω! Γι αυτό σε ρωτάω!

ΚΩΣΤΑΣ: Δε ξέρω! Σημαίνει ότι θα πάρει ο καθένας από δύο και θα είναι ίδια.

Δ: Α θα είναι ίδια! Από δύο θα έχεις; Πάντα;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι!

**<u>Έργο Ε3.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΚΩΣΤΑΣ: Τέσσερις!

Δ: Μα τέσσερις έχω και εγώ!

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι! Θα έχεις εσύ τέσσερις και η Ελενίτσα τέσσερις! Όχι, δύο! Εσύ δύο και η Ελενίτσα δύο!

Δ: Μπράβο!

**<u>Έργο Ε3.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή!

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει «διπλάσιο»;

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι!

**<u>Έργο Ε3.4:</u>**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΚΩΣΤΑΣ: Δύο!

Δ: Μα δύο έχω και εγώ! Ξέρεις τι σημαίνει «διπλάσιο»;

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι δεν ξέρω!

**Απομαγνητοφώνηση έργων Προελέγχου: Μαρία**

1. **Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).**

**Έργο Ε1.1:**

Δ: Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ' όλα τα κομμάτια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα;

ΜΑΡΙΑ: (2) [Δείχνει μια κορδέλα] Για να δω μια στιγμή αν είναι ίδιες. Είναι πιο ψηλή αυτή!

Δ: [η Μαρία προσπάθησε να πάρει μια από τις κορδέλες που είχαμε ήδη ταιριάξει] Όχι, αυτές δεν μπορείς να τις πάρεις. Μπορείς να πάρεις αυτές που είναι κάτω. Με ποια θα ταιριάξει;

ΜΑΡΙΑ: Για να δω! Όχι, είναι μεγάλες!

Δ: Και εσύ τι θέλεις;

ΜΑΡΙΑ: Θέλω να τις κάνουμε στο ίδιο μέτρο (.)

Δ: Ναι, και;

ΜΑΡΙΑ: Να τις κάνουμε στο ίδιο μέτρο και να τις φτιάξουμε ή πίνακα ή κάτι τέτοιο.

Δ: Και, δεν έχει καμία που να είναι η ίδια; Επίσης, πρόσεξε κάτι. Αυτή είναι ίδια μ' αυτή; [Δείχνουμε στην Μαρία την πρώτη αντιστοιχία]

ΜΑΡΙΑ: Όχι.

Δ: Αυτή είναι ίδια μ' αυτή; [Δείχνουμε στην Μαρία την δεύτερη αντιστοιχία]

ΜΑΡΙΑ: Όχι.

Δ: Εσύ τότε γιατί να βάλεις μια κορδέλα ίδια με εκείνη που σου έδωσα εγώ; Πρέπει να βάλεις ίδια; Δε ξέρω… Για σκέψου εσύ και πες μου με ποια θα την ταιριάξεις τελικά.

ΜΑΡΙΑ: Δε ξέρω ποια θα ταιριάξει! Αυτό είναι μικρό, αυτό είναι μικρό, αυτό δεν… [Δείχνει την πρώτη σειρά με τις κορδέλες]

Δ: Εσύ δεν έχεις κανένα μικρό όσο θέλεις για να διαλέξεις;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό είναι μεγάλο, αυτό είναι μεγάλο και εδώ θέλει μεγάλο [δείχνει τις κορδέλες της κάτω σειράς].

Δ: Ααα! Ωραία!

ΜΑΡΙΑ: Θες επειδή αυτά είναι ίδια στα μέτρα να τα βάλουμε μαζί έτσι;

Δ: Α! Τέλεια!

**<u>Έργο Ε1.2:</u>**

Δ: Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή…

ΜΑΡΙΑ: Ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, έξι. Εδώ είναι έξι οι καραμέλες.

Δ: Ωραία! Και θα ταιριάξουμε αυτή την κάρτα με αυτή. Θέλεις να μου πεις με κάρτα θα ταιριάξω αυτή εδώ [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες]; Για δες εσύ! Από αυτές τις κάρτες μπορείς να διαλέξεις. Δεν μπορείς όμως να κουνήσεις τις κάρτες που ταίριαξα εγώ. Μπορείς να διαλέξεις από τις υπόλοιπες.

ΜΑΡΙΑ: Μα αυτή είναι ίδια με αυτή [Δείχνει μια ακόμα κάρτα που έχει έξι καραμέλες].

Δ: Ναι αλλά εσύ αυτές εδώ τις κάρτες δεν μπορείς να τις κουνήσεις. Πρέπει να διαλέξεις από τις υπόλοιπες που σου έδωσα για να ταιριάξεις την τελευταία καρτούλα. Μπράβο!=

ΜΑΡΙΑ: = Ξέρεις γιατί το 'κανα; Γιατί; Ένα, δύο. Όταν αρχίζουμε να μετράμε δε ξεκινάμε ένα, δύο. Εδώ είναι ένα, δύο. Εδώ συνολικά αυτά είναι ίδια, είναι έξι, τα μέτρησα εγώ πριν αυτά.

Δ: Ωραία!

**Έργο Ε1.3:**

Δ: Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα;

ΜΑΡΙΑ: Να πω λίγο κάτι αυτά τα δύο [δείχνει δύο κορδέλες με μικρή διαφορά στο μήκος] είναι λίγο ίδια. Μήπως να τα κάνουμε ζευγάρι;

Δ: Όχι! Εγώ θα τα ταιριάξω έτσι… Και αυτά μοιάζουν σε κάτι αν τα ταιριάξω πολύ καλά. Αυτή τη λωριδίτσα, λοιπόν, με ποια από αυτές που σου έδωσα μπορώ να την ταιριάξω;

ΜΑΡΙΑ: Δε μπορώ από αυτές να διαλέξω; [Δείχνει τις κορδέλες που έχουμε ήδη αντιστοιχίσει]

Δ: Όχι, από αυτές δεν μπορείς να διαλέξεις.

ΜΑΡΙΑ: Λοιπόν, επειδή αυτό είναι λίγο πιο μεγάλο από αυτό, λίγο πιο μεγάλο αυτό και αυτό λίγο πιο μεγάλο και αυτό το μεγαλύτερο δεν κάνει καμία!

Δ: Γιατί δεν κάνει καμία;

ΜΑΡΙΑ: Επειδή αυτό είναι λίγο μικρούλη και ταιριάζουν αυτά που δεν έχεις συνδέσει μ’ αυτό.

Δ: Πρόσεξε, όμως, αυτά τα ταίριαξα με μικρούλια;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό, όμως, δεν πάει μ’ αυτό.

Δ: Έκανα λάθος και στα άλλα, λες;

ΜΑΡΙΑ: Μπορούμε να τα ταιριάξουμε αυτά τα δύο και αυτά τα δύο [Δείχνει τις κορδέλες που έχουν παρόμοιο μήκος]

**Έργο Ε1.4:**

Δ: Κάτι ακόμα! Πρόσεξε με! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα [Η κάρτα έχει 2 καραμέλες]; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.

ΜΑΡΙΑ: [Δείχνει την κάρτα που επιλέγει]

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί αυτά τα δύο είναι ίδια. Λοιπόν, κοίτα αν βάζαμε μαζί, αυτά τα δύο =

Δ: Δε θέλω να μου αλλάζεις τη σειρά από τις κάρτες που εγώ ταίριαξα! Εσύ μπορείς να διαλέξεις από αυτές τις κάρτες που σου έδωσα από κάτω.

ΜΑΡΙΑ: Ναι αλλά πρέπει να είναι ζευγάρια!

Δ: Ζευγάρια τι εννοείς;

ΜΑΡΙΑ: Ότι πρέπει να είναι τα ίδια μαζί!

Δ: Α, μάλιστα!

ΜΑΡΙΑ: Κοίτα είναι ίδιο αυτό με αυτό αλλά δε μπορούμε να το ταιριάξουμε. Μπορούμε να το ταιριάξουμε ή έτσι…

Δ: Δε μπορείς ματάκια μου να πάρεις τις κάρτες που ταίριαξα εγώ για να βρεις την ίδια. Πρέπει να διαλέξεις μια από τις κάρτες που σου έδειξα εγώ.

ΜΑΡΙΑ: Η μόνη λύση είναι τότε αυτή για μένα. [Δείχνει την κάρτα που επέλεξε]

## 2. <u>Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη</u>

### <u>Έργο Ε2.1:</u>

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο Γιώργος αγαπάει τις σοκολάτες! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι πήρε ο Γιώργος;

ΜΑΡΙΑ: [Δείχνει το κομμάτι που επέλεξε.]

Δ: Γιατί; Γιατί πιστεύεις ότι αυτό είναι το κομμάτι του Γιώργου;

ΜΑΡΙΑ: Επειδή είναι ίδιο με αυτό που μου έδειξες! Για να μην τσακώνονται!

Δ: Μα η σοκολάτα που έχουν όλη- όλη είναι αυτή. Πώς θα πάρει και αυτός τόση; Θα πάρει μια ίδια και ο αδερφός του; Πρέπει να την μοιραστούν…

ΜΑΡΙΑ: Μπορεί Ο Γιώργος, δηλαδή, ο αδερφός του να πάρει πρώτα αυτή [δείχνει τη σοκολάτα που δώσαμε αρχικά ως ολόκληρη] και μετά ο Γιώργος να πάρει την ίδια.

Δ: Μα έχουμε μόνο μια σοκολάτα. Δεν έχουμε δεύτερη! Να έχουμε αυτή εδώ τη σοκολάτα!

ΜΑΡΙΑ: Μμμμ να την κόψουν στην μέση!

Δ: Αααα και αν την κόψουν στην μέση τι θα γίνει;

ΜΑΡΙΑ: Θα φάει ο ένας το ένα μισό που είναι ίδιο και ο άλλος το άλλο μισό που είναι πάλι ίδιο.

Δ: Υπάρχει κάποιο από αυτά τα μισά που λες σε αυτά τα κομμάτια που σου έδειξα; Μπορείς και να τα πάρεις στα χέρια σου ή να δοκιμάσεις να δεις ποιο ταιριάζει.

ΜΑΡΙΑ: Μπορεί να είναι ή αυτό ή αυτό.

Δ: Για δοκίμασε…

ΜΑΡΙΑ: Εμένα στην αρχή μου ταίριαζε αυτό αλλά και αυτό!

Δ: Δοκίμασε να δεις ποιο είναι το μισό. Μπορείς να ελέγξεις την απάντηση σου;

ΜΑΡΙΑ: Η μέση είναι εδώ. Σωστά; [Χωρίζει το χαρτόνι με το χέρι της στη μέση] Αν το κόψουμε, τσακ, βγαίνει η σοκολάτα και βγαίνει και το άλλο κομμάτι και μετά τις τρώνε.

**<u>Έργο Ε2.2:</u>**

Δ: Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 6 καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΜΑΡΙΑ: Για να σκεφτώ! (.) Ξέρω. Επειδή είναι μία, δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε, έξι, μπορούν να πάρει τρεις η Ελενίτσα και τρεις η αδερφή της.

Δ: Μπράβο. Για δείξε μου την κάρτα που δείχνει τις τρεις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα.

ΜΑΡΙΑ: Αυτό θα πάρει η Ελενίτσα.

**Έργο Ε2.3:**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση για τον φίλο μου! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΜΑΡΙΑ: Αυτή είναι η ολόκληρη! [Δείχνει τη μεγαλύτερη]. Αυτή είναι μισή, αυτή είναι μισή, αυτή είναι μισή. [Δείχνει τα μικρά κομμάτια]

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτή είναι ολόκληρη η σοκολάτα;

ΜΑΡΙΑ: Πως το ξέρω; Επειδή είναι μεγάλη και είναι σαν ολόκληρη η σοκολάτα.

Δ: Για βάλτην κάτω από την άλλη. Ταιριάζει;

ΜΑΡΙΑ: Όχι! Είναι λίγο πιο μεγαλύτερη.

Δ: Μήπως, λοιπόν, πρέπει να βρεις άλλη σοκολάτα;

ΜΑΡΙΑ: Αυτή δεν ταιριάζει με καμία. Αυτή είναι μικρή, μεγάλη, μεγάλη, μεγάλη!

**Έργο Ε2.4:**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΜΑΡΙΑ: [Δείχνει μια κάρτα]

Δ: Τόσες ήταν οι καραμέλες δηλαδή; Πήρε δύο η Ελενίτσα. =

ΜΑΡΙΑ:= Και δύο η αδερφούλα της.

Δ: Και όλες μαζί πόσες ήταν;

ΜΑΡΙΑ: Τέσσερις. Και μετά έγιναν δύο για την κάθε μία.

**3. <u>Αναγνώριση, με λέξη</u>**

**<u>Έργο Ε3.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΜΑΡΙΑ: Μια στιγμή κάτι να δω… [και προσπαθεί με το χέρι της να μοιράσει τη σοκολάτα] Αυτή! Και την άλλη να την δώσουμε στον αδερφό του.

Δ: Γιατί πιστεύεις ότι είναι αυτό το μισό;

ΜΑΡΙΑ: Αν ήταν έτσι ολόκληρη θα την κόβαμε και θα έβγαινε τα μισά κομμάτια.

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη «μισό»;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι, ότι το κόβουμε και μένουν δύο…

Δ: Αία και αυτά τα δύο;

ΜΑΡΙΑ: Αυτά είναι τα μισά!

Δ: Είναι μισά! Και το ένα μισό είναι όσο το άλλο μισό; Ή μπορείς να έχεις ένα μεγάλο μισό και ένα μικρό;

ΜΑΡΙΑ: Όχι, γιατί θα τσακώνονταν! Πρέπει να είναι ίδια μέτρα οι σοκολάτες!

Δ: Α, ωραία!

**<u>Έργο Ε3.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΜΑΡΙΑ: [Δείχνει την κάρτα με τις δύο καραμέλες.

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτές είναι οι μισές;

ΜΑΡΙΑ: Επειδή εδώ μας είναι δύο δύο [Δείχνει τις δυάδες] και αν τα ενώσουμε θα είναι τέσσερις. Και μετά αν είναι τέσσερις οι καραμέλες και κοπούν στη μέση θα είναι δύο και δύο. Μπορούμε να κάνουμε και κάτι άλλο… [Παίρνει 4 καραμέλες]

Μπορούμε να πάρουμε τέσσερις καραμέλες και να τις μοιραστούμε μαζί τους. Και θα πάρουμε μία, μία, μία, μία. [Μοιράζει στα 4].

Δ: Μπράβο!

**<u>Έργο Ε3.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΜΑΡΙΑ: Τι είναι «διπλάσια»;

Δ: Α, δεν ξέρεις τι σημαίνει «διπλάσιο»;

ΜΑΡΙΑ: Όχι!

**<u>Έργο Ε3.4:</u>**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΜΑΡΙΑ: Α θες να σου βρω από αυτό που μου έδειξες την κάρτα με τον ίδιο αριθμό.

Δ: Διπλάσιο σημαίνει το ίδιο;

ΜΑΡΙΑ: Μπορεί! Δε ξέρω.

**Απομαγνητοφώνηση έργων Προελέγχου: Νίκος**

1. **<u>Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).</u>**

**<u>Έργο Ε1.1:</u>**

Δ: Λοιπόν, Δ. αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ’ όλα τα κομμάτια που είναι όρθια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα; Για σκέψου εσύ…

ΝΙΚΟΣ: Μμμμ μ’ αυτή.

Δ: Για βάλτην από κάτω! Γιατί ταιριάζει μ’ αυτή;

ΝΙΚΟΣ: Τώρα είναι το (πως) που είναι, που είναι ακίνητο! Όπως το παιδικό.

Δ: Ταιριάζει, δηλαδή, αυτό μ’ αυτό;

ΝΙΚΟΣ: Πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο;

Δ: Δεν ξέρω! Εγώ σου ταίριαξα αυτή την κορδέλα μ’ αυτή και αυτή μ’ αυτή. Εσύ θα διαλέξεις.

ΝΙΚΟΣ: Αυτή! Τόσο μεγάλη! Αυτή θέλω!

Δ: Ωραία!

ΝΙΚΟΣ: Είναι τόσο μεγάλη! Αυτή (.) Ένα, δύο, τρία, τέσσερα πέντε, έξι, εφτά, οκτώ [δείχνει την επόμενη κάρτα], ένα, δύο, τρία, τέσσερα πέντε, έξι, εφτά, οκτώ, εννέα, δέκα, έντεκα, δώδεκα.

Δ: Ωραία! Για φέρε μου! Λοιπόν, επόμενο;

**<u>Έργο Ε1.2:</u>**

ΝΙΚΟΣ: Ναι, επόμενο.

Δ: Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες για να τις βάλουμε επιτέλους με τη σειρά! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή…

ΝΙΚΟΣ: Αυτή η καρτούλα πόσες είναι [εννοεί τις καραμέλες που απεικονίζονται στην κάρτα]

Δ: Περίμενε! Και αυτή την καρτούλα με αυτή! [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κάρτες με τις μισές καραμέλες και τις διπλάσιες] Μη βιάζεσαι! =

ΝΙΚΟΣ: = Έχει 4

Δ: Αυτή την καρτούλα με αυτή. =

ΝΙΚΟΣ: = 2

Δ: Με τι θα ταιριάξω εγώ αυτή την καρτούλα [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες]; =

ΝΙΚΟΣ: = 6

Δ: Θα σου βάλω εγώ εδώ και τις κάρτες που μπορείς να διαλέξεις.

ΝΙΚΟΣ: (2) 6. Τρία και δύο πόσο κάνουν;

Δ: Για μέτρα τα όλα μαζί.

ΝΙΚΟΣ: Πέντε. Αφού αυτά είναι έξι, για να δοκιμάσω κάτι (.) Η μήπως να βάλω αυτό, το 4! Θα βάλω αυτό.

Δ: Ωραία! Γιατί τα ταίριαξες; Το 6 με το 4;

ΝΙΚΟΣ: Το ταίριαξα γιατί αυτό είναι ο άντρας και αυτή είναι η γυναίκα του!

**<u>Έργο Ε1.3:</u>**

Δ: Λοιπόν, θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα; =

ΝΙΚΟΣ: = Αυτή!

Δ: Ωραία! Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Γιατί αυτό είναι το παιδάκι και αυτή είναι η μαμά!

**<u>Έργο Ε1.4:</u>**

Δ: Κάτι ακόμα! Να σου δείξω αυτές τι καρτούλες να με βοηθήσεις! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα [Η κάρτα έχει 2 καραμέλες]; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.

ΝΙΚΟΣ: Με αυτό!

Δ: Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Γιατί; (.) Ένα και ένα μας κάνουν δύο.

## 2. Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη

**Έργο Ε2.1:**

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] θα μοιραστούν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει ο Γιώργος;

ΝΙΚΟΣ: Μμμμ (2) Νομίζω ότι πήρε αυτή!

Δ: Για ταιριαξέ τη! Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Για να την φάει μετά το φαγητό!

**Έργο Ε2.2:**

Δ: Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 8 καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΝΙΚΟΣ: Αυτή είναι η Ελενίτσα; (.) Αυτή. [Δείχνει την κάρτα]

Δ: Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Για να τις φάει όταν τελειώσει το φαγητό της.

**Έργο Ε2.3:**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση για τον φίλο μου! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΝΙΚΟΣ: (2) Έτσι ήταν!

Δ: Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Γιατί (.) Γιατί μόλις την άνοιξαν η μαμά τους, τους είπε να την φάνε μετά το φαγητό!

**<u>Έργο Ε2.4:</u>**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΝΙΚΟΣ: Ένα, δύο, τρία, τέσσερα. Ένα, δύο. Ήταν στην αρχή έξι. Νομίζω ότι δεν βρίσκω το έξι.

Δ: Γιατί ήταν έξι.

ΝΙΚΟΣ: Γιατί (.) Έξι ήταν οι καραμέλες στην αρχή.

Δ: Ωραία!

3. **<u>Αναγνώριση, με λέξη</u>**

**<u>Έργο Ε3.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΝΙΚΟΣ: Αυτό δεν είναι [Δείχνει το πιο μεγάλο κομμάτι]. Δεν μπορεί να είναι αυτό! Αυτό είναι το μεγαλύτερο από όλα! Α, να! Αυτό είναι.

Δ: Γιατί πιστεύεις ότι είναι αυτό το μισό;

ΝΙΚΟΣ: Εεεε, γιατί (.) αφού έφαγε όλο του το φαγητό μπορεί να την φάει τώρα.

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη «μισό»;

ΝΙΚΟΣ: Ναι, το κόβουμε στη μέση και μένει το μισό. [Δείχνει με το χέρι του την μέση της σοκολάτας ενώ περιγράφει την διαδικασία] Και μένει ένα άλλο χαρτόνι που είναι μικρότερο και είναι όσο αυτό [Δείχνει το μισό}.

Δ: Α, ωραία!

ΝΙΚΟΣ: Και μένει και το άλλο κομμάτι που είναι το μισό!

Δ: Τέλεια

**<u>Έργο Ε3.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΝΙΚΟΣ: Λοιπόν, η Ελενίτσα (.) αφού είναι έξυπνη πήρε μία καραμέλα.

Δ: Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Γιατί δεν την υπακούει τη μαμά της και θα πάρει μία καραμέλα.

Δ: Τι σημαίνει, δηλαδή, ότι πήρε τις μισές καραμέλες;

ΝΙΚΟΣ: Σημαίνει, ότι είχαμε δύο καραμέλες εδώ [τις ξεχωρίζει από το σύνολο] και ότι πήρε τη μία για το σπίτι. Αυτό σημαίνει!

**<u>Έργο Ε3.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΝΙΚΟΣ: Αφού είσαι μεγαλύτερη να πάρεις αυτή τη σοκολάτα.

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει «διπλάσιο»;

ΝΙΚΟΣ: Όχι! Όχι, δεν ξέρω!

**<u>Έργο Ε3.4:</u>**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΝΙΚΟΣ: Ε, δεν ξέρω! Δεν ξέρω τι σημαίνει «διπλάσιο».

**Απομαγνητοφώνηση έργων Προελέγχου: Χάρης**

1. **<u>Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).</u>**

**<u>Έργο Ε1.1:</u>**

Δ: Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα;

ΧΑΡΗΣ: (2) [Δείχνει μια κορδέλα] Με αυτό.

Δ: Γιατί πιστεύεις ότι αυτό ταιριάζει;

ΧΑΡΗΣ: Πάνε μικρό, μεσαίο, μεγάλο!

Δ: Δηλαδή;

ΧΑΡΗΣ: Δε ξέρω!

**<u>Έργο Ε1.2:</u>**

Δ: Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή και θα ταιριάξουμε αυτή την κάρτα με αυτή. Θέλεις να μου πεις με κάρτα θα ταιριάξω αυτή εδώ [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες];

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει την κάρτα που έχει τρεις τελίτσες] Με αυτή!

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί λέμε δύο, τρία.

Δ: Δηλαδή, γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζουν οι τελευταίες κάρτες; (2) Ξέρεις;

ΧΑΡΗΣ: Όχι!

Δ: Εντάξει!

**<u>Έργο Ε1.3:</u>**

Δ: Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! Θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα; Για πες μου!

ΧΑΡΗΣ: (2) [Δείχνει την κορδέλα που επέλεξε]

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Δεν ξέρω! Τυχαία!

**<u>Έργο Ε1.4:</u>**

Δ: Πάμε να δούμε κάτι ακόμα! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την τελευταία καρτούλα [Η κάρτα έχει 2 καραμέλες]; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει την κάρτα που επιλέγει]

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Δεν ξέρω! Και αυτή τυχαία!

2. **<u>Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη</u>**

**<u>Έργο Ε2.1:</u>**

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο Γιώργος αγαπάει τις σοκολάτες! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι πήρε ο Γιώργος;

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει το κομμάτι που επέλεξε.] Αυτό!

Δ:Ωραία! Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί είναι ίδια. Δε ξέρω!

**<u>Έργο Ε2.2:</u>**

Δ:  Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 8 καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΧΑΡΗΣ: Από μια και μία δε θα πάρουν;

Δ: Αφού οι καραμέλες που έχουν είναι τόσες. Είναι αυτές που είναι πάνω στο τραπέζι. Αφού τις μοιραστούν δίκαια από πόσες θα πάρουν;

ΧΑΡΗΣ: [Κάνει μια κίνηση για να χωρίσει τις καραμέλες σε δύο ομάδες]

Δ: Για ξανακάντο!

ΧΑΡΗΣ: Να θα πάρουν τρεις και τρεις καραμέλες!

Δ: Ωραία! Για δείξε μου, δηλαδή, ποια κάρτα δείχνει πόσες καραμέλες θα πάρει η Ελενίτσα;

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει τη σωστή κάρτα]

Δ: Ωραία!

**<u>Έργο Ε2.3:</u>**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση για τον φίλο μου! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει τη σοκολάτα που θεωρεί ως ολόκληρη]

Δ: Ωραία! Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί είναι έτσι η σοκολάτα, μεγάλη. Μετά πιο μικρή, πιο μικρή!

**<u>Έργο Ε2.4:</u>**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες

[Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΧΑΡΗΣ: Πόσες ήταν πριν τις μοιραστούν;

Δ: Ναι πριν τις μοιραστούν.

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει μια κάρτα]

Δ: Γιατί ήταν τόσες;

ΧΑΡΗΣ: (3) Τρεις ήταν όλες.

Δ: Πριν μοιραστούν ήταν τρεις και αφού τις μοιράστηκαν ήταν τρεις;

ΧΑΡΗΣ: Όχι τέσσερις.

Δ: Γιατί ήταν τέσσερις, ξέρεις;

ΧΑΡΗΣ: Όχι!

3. **<u>Αναγνώριση, με λέξη</u>**

**<u>Έργο Ε3.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει το κομμάτι]

Δ: Γιατί είναι αυτό;

ΧΑΡΗΣ: Δε ξέρω!

Δ: Τι σημαίνει «μισό» ξέρεις;

ΧΑΡΗΣ: Όχι!

**<u>Έργο Ε3.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΧΑΡΗΣ: [Δείχνει την κάρτα με τις δύο καραμέλες]

Δ: Γιατί; Ξέρεις τι σημαίνει «οι μισές»;

ΧΑΡΗΣ: Ναι ότι τις κόβουμε στη μέση και παίρνουμε τις μισές.

Δ: Μπράβο!

**<u>Έργο Ε3.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΧΑΡΗΣ: Να τη!

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί είναι η μεγαλύτερη!

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει «διπλάσιο»;

ΧΑΡΗΣ: Όχι!

**<u>Έργο Ε3.4:</u>**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΧΑΡΗΣ: Αυτές που έχω και άλλες δύο μαζί δηλαδή;

Δ: Δε ξέρω! Εσύ θα μου πεις. Ξέρεις τι σημαίνει «διπλάσιο»;

ΧΑΡΗΣ: Θα έχω και άλλες δύο μαζί.

Δ: Πάντα μόνο δύο;

ΧΑΡΗΣ: Ναι!

## Γ.2 Απομαγνητοφώνηση έργων Μεταελέγχου

**Απομαγνητοφώνηση έργων Μεταελέγχου: Κώστας**

1. **Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).**

**Έργο Ε1.1:**

Δ: Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ' όλα τα κομμάτια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή.

Δ: [η Μαρία προσπάθησε να πάρει μια από τις κορδέλες που είχαμε ήδη ταιριάξει] Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζουν;

ΚΩΣΤΑΣ: Είναι ίδιες. Αφού θέλουμε να είναι ίδιες.

**Έργο Ε1.2:**

Δ: Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή… Δες τις επιλογές και πες μου [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες].

ΚΩΣΤΑΣ: Με αυτή.

Δ: Γιατί;

ΚΩΣΤΑΣ: Γιατί τρία και τρία μας κάνουν έξι. [Μετράει τις καραμέλες στις κάρτες.]

**Έργο Ε1.3:**

Δ: Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα;

ΚΩΣΤΑΣ: Με αυτή… [Δείχνει δύο κορδέλες με μικρή διαφορά στο μήκος] Επειδή, το μικρότερο θα γίνει ζευγαράκι με το μεγαλύτερο.

Δ: Τι εννοείς;

ΚΩΣΤΑΣ: Να αυτό είναι ένα και ένα δύο [εννοεί τα δύο μισά]

**<u>Έργο Ε1.4:</u>**

Δ: Πολύ ωραία! Κάτι ακόμα! Πρόσεξε με! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα[Η κάρτα έχει 2 καραμέλες]; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.

ΚΩΣΤΑΣ: [Δείχνει την κάρτα που επιλέγει]

Δ: Γιατί;

ΚΩΣΤΑΣ: Γιατί ένα και ένα μας κάνουν δύο και άλλο ένα μας κάνει τρία.

Δ: Δηλαδή, ένα και ένα μας κάνουν δύο. Αν βάλεις και ακόμα ένα θα γίνει τρία.

## 2. <u>Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη</u>

**<u>Έργο 2.1:</u>**

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο Γιώργος αγαπάει τις σοκολάτες! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι πήρε ο Γιώργος;

ΚΩΣΤΑΣ: Θα πάρει (2)

Δ: Μπορείς να κουνήσεις αν θέλεις τα κομμάτια.

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτό. [Δείχνει το ίδιο κομμάτι]

Δ: Θα πάρει το ίδιο; Μα είπαμε πως θα μοιραστεί η σοκολάτα.

ΚΩΣΤΑΣ: Στην αρχή ήταν έτσι, μετά έτσι… [Παίρνει ένα κομμάτι που βρήκε τυχαία και αναφέρει πως αυτή ήταν η αρχική σοκολάτα.]

Δ: Όχι, όχι! Η αρχική σοκολάτα ήταν αυτή. Δεν μπορείς να αλλάξεις την σοκολάτα.

ΚΩΣΤΑΣ: Θα βάλω το πρώτο κομμάτι.

Δ: Πως το ξέρεις;

ΚΩΣΤΑΣ: Το ξέρω! Είναι ο μάστορας που δεν κάνει ολόκληρα γλυκά.

**Έργο 2.2:**

Δ: Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 8 καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτό! [Δείχνει την σωστή κάρτα]Το ξέρω εγώ επειδή τρία και τρία μας κάνουν έξι.

**Έργο 2.3:**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση για τον φίλο μου! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΚΩΣΤΑΣ: Έτσι. Αυτή είναι.

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτή είναι ολόκληρη η σοκολάτα;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή την έκοψε στη μέση ο Γιώργος και τα παιδιά έφαγαν από μιση σοκολάτα. Η ολόκληρη ήταν αυτή.

**Έργο 2.4:**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΚΩΣΤΑΣ: Έτσι[Δείχνει μια κάρτα]

Δ: Δηλαδή;

ΚΩΣΤΑΣ: Το ξέρω επειδή η Ελενίτσα είχε τέσσερις καραμέλες, μετά τις έφαγε στη μέση και ήταν μισές οι καραμέλες.

## 3. Αναγνώριση, με λέξη

### Έργο Ε3.1:

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή. [Αναγνωρίζει αμέσως ποιο είναι το μισό]

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτό είναι το μισό;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή ο Γιώργος έκανε λίγες χαζομάρες και έτσι θα φάει λίγη σοκολάτα.

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει η λέξη «μισό»;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι, ότι το κόβουμε στη μέση…

### Έργο Ε3.2:

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΚΩΣΤΑΣ: [Παίρνει τυχαία μερικές καραμέλες]. (4)

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτές είναι οι μισές;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή είναι τρία αυτά και άλλα τρία και μετά μένουν δύο.

Δ: Άρα χωρίστηκαν στη μέση; Για χωρισέ τες στη μέση.

ΚΩΣΤΑΣ: Τώρα είναι χωρισμένες στη μέση. Μία, δύο, τρεις, τέσσερις από δω και μία, δύο, τρεις, τέσσερις από εκεί.

### Έργο Ε3.3:

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή. [Δείχνει τη σωστή σοκολάτα.]

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτό είναι το διπλάσιο;

ΚΩΣΤΑΣ: Επειδή αν το βάλουμε από τη μικρή την μηχανή, θα μας βγάλει το διπλάσιο. Δύο φορές.

**Έργο Ε3.4:**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτή.

Δ: Πως το ξέρεις;

ΚΩΣΤΑΣ: Ξέρω γιατί το διπλάσιο του 3 είναι το 6.

Δ: Δηλαδή;

ΚΩΣΤΑΣ: Τρία και τρία είναι έξι.

**4. Αναγνώριση, με λέξη του ενός τρίτου και του τριπλάσιου**

**Έργο Ε4.1:**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω το 1/3 στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτό.

Δ: Γιατί πιστεύεις ότι είναι αυτό το 1/3;

ΚΩΣΤΑΣ: Γιατί εγώ είμαι μικρότερος και εσύ μεγαλύτερη.

Δ: Τι εννοείς; Θες να σου δώσω κομμάτια να δεις πόσα θα χρειαστείς; Πόσα λες ότι θα χρειαστείς.

ΚΩΣΤΑΣ: Ένα…

Δ: Μόνο; Για πάρε όσα χρειάζεσαι.

ΚΩΣΤΑΣ: Δε ξέρω!

**<u>Έργο 4.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά έξι καραμέλες] Θα δώσω *το 1/3* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτό[Δείχνει την κάρτα με τις καραμέλες].

Δ: Αυτό είναι το ένα τρίτο; Πόσες καραμέλες έχω;

ΚΩΣΤΑΣ: 6

Δ: Και σε πόσες ομάδες πρέπει να τις χωρίσω;

ΚΩΣΤΑΣ: Σε 3.

Δ: Από πόσες καραμέλες θα έχει η κάθε ομάδα;

ΚΩΣΤΑΣ: Δύο.

**<u>Έργο Ε4.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι τριπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτό

Δ: Α, τι σημαίνει «τριπλάσιο»;

ΚΩΣΤΑΣ: Δε ξέρω.

**<u>Έργο Ε4.4:</u>**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά καραμέλες] Εγώ έχω τριπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΚΩΣΤΑΣ: Αυτές είναι

Δ: Πως το ξέρεις;

ΚΩΣΤΑΣ: Το ξέρω γιατί από αυτές εγώ πρέπει να πάρω τρία [Και φτιάχνει τρεις ομάδες με δύο].

**Απομαγνητοφώνηση έργων Μετάελεγχου: Μαρία**

## 1. **<u>Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).</u>**

**<u>Έργο Ε1.1:</u>**

Δ: Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ' όλα τα κομμάτια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα;

ΜΑΡΙΑ: Αυτή.

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί χωράει κι άλλη μια τέτοια, όπως στις άλλες.

**<u>Έργο Ε1.2:</u>**

Δ: Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες]. Δες τις επιλογές και πες μου…

ΜΑΡΙΑ: Με αυτή.

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί αυτή έχει ένα παραπάνω και η άλλη ένα λιγότερο.

Δ: Δηλαδή και οι άλλες που ταίριαξα έχουν ένα παραπάνω και ένα λιγότερο;

ΜΑΡΙΑ: Όχι.

Δ: Αλλά;

ΜΑΡΙΑ: Έχουν τον πρώτο αριθμό με τον δεύτερο. [Εννοεί τον επόμενο]

**<u>Έργο Ε1.3:</u>**

Δ: Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα;

ΜΑΡΙΑ: Με αυτή την μικρούλα ποια θα ταιριάξω; Με αυτή

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί την γεμίζουμε με ένα άλλο τέτοιο ίδιο κομματάκι. Όπως και τις άλλες. Έχουν δύο ίδια κομματάκια που χωράνε.

**Έργο Ε1.4:**

Δ: Πολύ ωραία! Κάτι ακόμα! Πρόσεξε με! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα [Η κάρτα είχε 2 καραμέλες]; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.

ΜΑΡΙΑ: Με αυτή.

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Επειδή σχεδόν είναι ίδιες.

Δ: Και οι άλλες είναι ίδιες;

ΜΑΡΙΑ: Όχι. Αλλά μοιάζουν με τους αριθμούς.

## 2. Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη

**Έργο 2.1:**

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο Γιώργος αγαπάει τις σοκολάτες! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι πήρε ο Γιώργος;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό. [Διαλέγει ένα κομμάτι ίδιο.]

Δ: Άρα θα μοιραστεί αυτή τη σοκολάτα και θα δώσει άλλη μία ίδια;

ΜΑΡΙΑ: Για να του περισσέψει και να φάει.

Δ: Το μοίρασε δηλαδή έτσι δίκαια;

ΜΑΡΙΑ: Ναι για να περισσεύει και για αυτόν.

**<u>Έργο Ε2.2:</u>**

Δ: Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 8 καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΜΑΡΙΑ: Τόσες.

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Για να έχει τρεις αυτή και τρεις η αδερφή της. Να μοιραστούν δίκαια.

**<u>Έργο Ε2.3:</u>**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση για τον φίλο μου! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΜΑΡΙΑ: Αυτή; Αυτή ήταν.

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Επειδή θέλουμε δύο ίδια κομμάτια για να γίνει μια ολόκληρη.

**<u>Έργο Ε2.4:</u>**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΜΑΡΙΑ: Αυτή επειδή είναι δύο και δύο.

**3. <u>Αναγνώριση, με λέξη</u>**

**<u>Έργο Ε3.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό. [Δοκιμάζει κομμάτια για το μισό]

Δ: Πως το ξέρεις;

ΜΑΡΙΑ: Επειδή μετά βγαίνει άλλο ένα ίδιο κομμάτι. Μισό το ένα και μισό το άλλο για να γίνει αυτή.

**<u>Έργο Ε3.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΜΑΡΙΑ: [Χωρίζει τις καραμέλες.] Να τέσσερις και τέσσερις. Τέσσερις θα δώσω.

**<u>Έργο Ε3.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΜΑΡΙΑ: Αυτή.

Δ: Πως το ξέρεις;

ΜΑΡΙΑ: Βγαίνει άλλο ένα κομματάκι νομίζω.

Δ: Ξέρεις τι σημαίνει διπλάσιο;

ΜΑΡΙΑ: Ναι το διπλό. Ότι έχει πάντα δύο κομματάκια.

**<u>Έργο Ε3.4:</u>**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό.

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί αν της μοιράσεις θα κρατήσεις δύο εσύ και δύο το κουκλάκι.

**4. <u>Αναγνώριση, με λέξη του ενός τρίτου και του τριπλάσιου</u>**

**<u>Έργο Ε4.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω το 1/3 στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό;

Δ: Πως το ξέρεις;

ΜΑΡΙΑ: Δε το ξέρω. Στη μέση θα το μοιράσω;

Δ: Δε ξέρω.

ΜΑΡΙΑ: Στη μέση θα το μοιράσω. Αυτό είναι το σωστό. Το ένα τρίτο είναι το ένα μισό.

**<u>Έργο Ε4.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *το 1/3* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό

Δ: Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί το ένα τρίτο σημαίνει ότι έχεις ένα και βάζεις άλλα πέντε. Εεε, ότι έχεις ένα και βάζεις άλλα τρία.

**<u>Έργο Ε4.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι τριπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΜΑΡΙΑ: Αυτό. Το τριπλάσιο σημαίνει λίγο πιο μεγάλο από αυτό.

Δ: Α, τι σημαίνει «τριπλάσιο»;

ΜΑΡΙΑ: Δε ξέρω. Ότι θα είναι μια φορά μεγαλύτερο;

Δ: Αφου είναι ΤΡΙπλάσιο.. Πόσες φορές μεγαλύτερο πρέπει να είναι;

ΜΑΡΙΑ: Τρείς. Αυτό είναι;

Δ: Εσύ θα μου πεις.

ΜΑΡΙΑ: Αυτό είναι.

**Έργο Ε4.4:**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά καραμέλες] Εγώ έχω τριπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΜΑΡΙΑ: Τρεις

Δ: Πως το ξέρεις;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί το ένα τρίτο. Εσύ θα κρατήσεις μία και εμένα θα μου δώσεις τρεις; Δε ξέρω.

**Απομαγνητοφώνηση έργων Μετάελεγχου: Νίκος**

1. **Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).**

**Έργο Ε1.1:**

Δ: Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ' όλα τα κομμάτια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα;

ΝΙΚΟΣ: Αυτή. Δύο. Δύο φορές χωράει. Δύο φορές χωράνε. [Δείχνει τις λωρίδες που ταιριάξαμε από πριν.]

**Έργο Ε2.2:**

Δ: Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες]. Δες τις επιλογές και πες μου…

ΝΙΚΟΣ: Με αυτή.

Δ: Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Γιατί έχει και αυτή τρία και εδώ τρία.

Δ: Δηλαδή και τις άλλες τις έχω ταιριάξει με ίδιες. Τις τέσσερις καραμέλες με τέσσερις; Τη μία με μία;

ΝΙΚΟΣ: Όχι.

Δ: Άρα πρέπει να ταιριάξουμε τα ίδια;

ΝΙΚΟΣ: Όχι!

Δ: Αλλά;

ΝΙΚΟΣ: Δε ξέρω.

**Έργο 2.3:**

Δ: Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα;

ΝΙΚΟΣ: Με αυτή… Επειδή, θα μπει άλλο ένα εδώ για να γίνει ένα.

**Έργο 2.4:**

Δ: Πολύ ωραία! Κάτι ακόμα! Πρόσεξε με! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.

ΝΙΚΟΣ: Με αυτή.

Δ: Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Γιατί με είδες; Επειδή αυτή έχει δύο κομμάτια και αυτή έχει τρία.

Δ: Τι εννοείς;

ΝΙΚΟΣ: Αυτή έχει δύο ενώ η άλλη τρία.

[Το παιδί έδειχνε να μη κατανοεί τι προσπαθεί να εξηγήσει.]

2. **<u>Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη</u>**

**<u>Έργο Ε2.1:</u>**

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο Γιώργος αγαπάει τις σοκολάτες! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι πήρε ο Γιώργος;

ΝΙΚΟΣ: Θα πάρει αυτό

Δ: Πως το ξέρεις;

ΝΙΚΟΣ: Επειδή θα πάρει το μισό.

Δ: Και αυτό είναι το μισό;

ΝΙΚΟΣ: Ναι αυτό είναι.

**<u>Έργο Ε2.2:</u>**

Δ: Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 8 καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΝΙΚΟΣ: Η Ελενίτσα θα πάρει τρεις και η αδερφή της θα πάρει τρεις. Θα πάρουν από τριπλάσιες.

Δ: Έτσι το λέμε; Τριπλάσιο;

ΝΙΚΟΣ: Όχι, μισό.

**Έργο Ε2.3:**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση για τον φίλο μου! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΝΙΚΟΣ: Αυτή είναι.

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτή είναι ολόκληρη η σοκολάτα;

ΝΙΚΟΣ: Επειδή αυτή είναι η μισή και η άλλη η άλλη μισή.

**Έργο Ε2.4:**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΝΙΚΟΣ: Τρεις.[Δείχνει μια κάρτα]

Δ: Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Γιατί η Ελενίτσα έχει πάρει τρεις και πήρε και η αδερφή της τρεις.

Δ: Άρα τρεις ήταν όλες οι καραμέλες;

ΝΙΚΟΣ: Όχι. Η Ελενίτσα πήρε δύο. Δύο και δύο, τέσσερις ήταν οι καραμέλες.

**3. Αναγνώριση, με λέξη**

**Έργο Ε3.1:**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΝΙΚΟΣ: Αυτό. [Αναγνωρίζει αμέσως ποιο είναι το μισό]

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτό είναι το μισό;

ΝΙΚΟΣ: Επειδή ο Γιώργος έβαλε αυτό το μισό και αυτό το άλλο μισό. Μισό από δω και μισό από κει. [Δείχνει να κόβει με το χέρι του.]

**Έργο Ε3.2:**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΝΙΚΟΣ: [Παίρνει τυχαία μερικές καραμέλες]. Αυτές. Επειδή θα πάρει δύο η Ελενίτσα και δύο η αδερφή της. Είναι μισές και οι δύο. Από δύο και οι δύο.

Δ: Δηλαδή;

ΝΙΚΟΣ: Δηλαδή δύο από δω και δύο από κει. Από δύο καραμέλες.

**Έργο Ε3.3:**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΝΙΚΟΣ: Αυτή. [Δείχνει τη σωστή σοκολάτα.] Δύο φορές το ίδιο.

Δ: Α, αυτό είναι το διπλάσιο;

ΝΙΚΟΣ: Ναι. Αυτή.

**Έργο Ε3.4:**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΝΙΚΟΣ: Αυτό.

Δ: Μία.

ΝΙΚΟΣ: Μία θα σου δώσω; Αφού είναι διπλάσιο πόσες φορές πρέπει να βάλω από δύο καραμέλες.

Δ: Δηλαδή;

ΝΙΚΟΣ: Μία, δύο, τρεις, τέσσερις.

## 4. <u>Αναγνώριση, με λέξη του ενός τρίτου και του τριπλάσιου</u>

**<u>Έργο Ε4.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω το 1/3 στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΝΙΚΟΣ: Αυτό. Μπορώ να το πάρω στα χέρια μου;

Δ: Ναι.

ΝΙΚΟΣ: [Μετράει τη μεγάλη σοκολάτα με το κομμάτι για το 1/3 της]

Δ: Πόσες φορές θα χωρέσει;

ΝΙΚΟΣ: Τρεις πρέπει. Να αυτό είναι το κομμάτι.

**<u>Έργο Ε4.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά έξι καραμέλες] Θα δώσω *το 1/3* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΝΙΚΟΣ: Αυτό [Δείχνει την κάρτα με τις καραμέλες].

Δ: Αυτό είναι το ένα τρίτο; Πως το ξέρεις;

ΝΙΚΟΣ: Επειδή αυτό είναι έξι και αυτό 7.

Δ: Τι εννοείς;

ΝΙΚΟΣ: Αυτό είναι 6 και αυτό 7.

**<u>Έργο Ε4.3:</u>**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι τριπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΝΙΚΟΣ: Αυτό

Δ: Α, τι σημαίνει «τριπλάσιο»;

ΝΙΚΟΣ: Θα μπουν τρία κομμάτια. Σαν αυτό τρεις φορές.

**<u>Έργο Ε4.4:</u>**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά καραμέλες] Εγώ έχω τριπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΝΙΚΟΣ: Τρεις

Δ: Πως το ξέρεις;

ΝΙΚΟΣ: Επειδή θα πάρουμε τρεις φορές. Θα βάλει μία, η αδερφή της, μία η αδερφή της και μία η αδερφή της. Τρεις φορές.

**Απομαγνητοφώνηση έργων Μετάελεγχου: Χάρης**

1. **<u>Αναγνώριση (αντιληπτική, χωρίς λέξη).</u>**

**<u>Έργο Ε1.1:</u>**

Δ: Λοιπόν, αν ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή (.) και αυτή με αυτή, [εδώ δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία της μισής κορδέλας προς την διπλάσια] μπορείς να μου δείξεις με ποια κορδέλα μπορώ να ταιριάξω την τελευταία μου κορδέλα; Ποιο απ’ όλα τα κομμάτια ταιριάζει με την τελευταία κορδέλα;

ΧΑΡΗΣ: Αυτή.

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί είναι η μικρότερη, η μεσαία και η μεγαλύτερη. Η κάθε μία είναι διπλάσιες από τις μικρές.

**<u>Έργο Ε1.2:</u>**

Δ: Για να σε ρωτήσω εγώ και κάτι ακόμα! Θα ταιριάξουμε και τις άλλες μου τις καρτούλες! Ταιριάζουμε αυτή την καρτούλα με αυτή [Η κάρτα έχει 4 καραμέλες]. Δες τις επιλογές και πες μου…

ΧΑΡΗΣ: Με αυτή.

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί είναι δύο, βάζουμε και δύο και γίνονται τέσσερα. Δύο και δύο κάνει τέσσερα.

**Έργο Ε1.3:**

Δ: Λοιπόν, να σε ρωτήσω κάτι ακόμα! θα ταιριάξω αυτή την κορδέλα με αυτή και αυτή με αυτή, [δείχνουμε στα παιδιά την αντιστοιχία ανάμεσα σε κορδέλες που αναπαριστούν το διπλάσιο προς αυτές που αναπαριστούν το μισό] θέλεις να μου πεις με ποια θα ταιριάξω αυτήν εδώ την κορδέλα;

ΧΑΡΗΣ: Με αυτή;

Δ: Δε ξέρω.

ΧΑΡΗΣ: Επειδή πάλι είναι μεσαίο;

Δ: Αυτό μας ενδιαφέρει να δούμε;

ΧΑΡΗΣ: Δε ξέρω. Αυτά ταιριάζουν.

**Έργο Ε1.4:**

Δ: Πολύ ωραία! Κάτι ακόμα! Πρόσεξε με! Ταίριαξα αυτή την καρτούλα με αυτή και αυτή με αυτή. [δείχνουμε στα παιδιά τις αντιστοιχίες ανάμεσα στις κάρτες που δείχνουν τις διπλάσιες καραμέλες προς εκείνες που δείχνουν τις μισές] Θέλεις να μου πεις με τι θα ταιριάξω αυτή την καρτούλα; Περίμενε! Να σου βάλω όρθιες τις επιλογές σου.

ΧΑΡΗΣ: Με αυτή.

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Επειδή είναι ένα και μετά θα πάμε στα δύο.

Δ: Δηλαδή;

ΧΑΡΗΣ: Δεν ξέρω.

2. **Αναγνώριση, εννοιολογική, χωρίς λέξη**

**Έργο Ε2.1:**

Δ: Να σου γνωρίσω το φίλο μου το Γιώργο! Ο Γιώργος αγαπάει τις σοκολάτες! Ο φίλος μου ο Γιώργος και το αδερφάκι του [εδώ στα παιδιά δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν *δίκαια* αυτή τη σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι πήρε ο Γιώργος;

ΧΑΡΗΣ: [«Κόβει τη σοκολάτα με το χέρι του.] Ίδιο πρέπει να είναι. Να πάρουν από μισό.

**<u>Έργο Ε2.2:</u>**

Δ:  Και τώρα θα σου γνωρίσω την φίλη μου την Ελενίτσα! Η Ελενίτσα και η αδερφή της θα μοιραστούν *δίκαια* αυτές τις καραμέλες [δείξαμε στα παιδιά 8 καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις τις καραμέλες που θα πάρει η Ελενίτσα;

ΧΑΡΗΣ: [Αμέσως βρίσκει το μισό]. Τρεις. Είναι τρεις και τρεις. Θα πάρουν από μισό.

**<u>Έργο Ε2.3:</u>**

Δ: Ωραία! Και τώρα άλλη μια ερώτηση για τον φίλο μου! Ο Γιωργάκης που αγαπάει τις σοκολάτες και το αδερφάκι του [στα παιδιά και πάλι δεν δείξαμε το κουκλάκι] μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Ο Γιώργος πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου δείξεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν;

ΧΑΡΗΣ: Αυτή είναι.

Δ: Πως το ξέρεις ότι αυτή είναι ολόκληρη η σοκολάτα;

ΧΑΡΗΣ: Επειδή αυτή είναι η μισή.

**<u>Έργο Ε2.4:</u>**

Δ: Η Ελενίτσα που της αρέσουν οι καραμέλες και η αδερφή της μοιράστηκαν δίκαια τις καραμέλες που τους έδωσε η μαμά τους. Η Ελενίτσα πήρε αυτές τις καραμέλες [Δείχνουμε στα παιδιά δύο καραμέλες]. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες τους έδωσε η μαμά;

ΧΑΡΗΣ: [Βρίσκει την απάντηση χωρίς τη βοήθεια της κάρτας] Κυρία, το τέσσερα δε θα το βάλεις; Να έχεις το ολόκληρο;

## 3. **Αναγνώριση, με λέξη**

**Έργο Ε3.1:**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω τη *μισή* στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΧΑΡΗΣ: Αυτό. [Δοκιμάζει κομμάτια για το μισό] Αυτά τα δύο είναι τα μισά του.

Δ: Και τα δύο θα τα δώσω;

ΧΑΡΗΣ: Όχι, το ένα αλλά αυτά μαζί κάνουν τη σοκολάτα. Πρέπει να είναι δύο τα μισά.

Δ: Τι εννοείς;

ΧΑΡΗΣ: Ότι πάντα το ένα στη μέση θα κάνει δύο.

**Έργο Ε3.2:**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τέσσερις καραμέλες] Θα δώσω *τις μισές* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΧΑΡΗΣ: [Χωρίζει τις καραμέλες.] Α, να βρω κάρτα; Πάντα τέσσερις και τέσσερις.

**Έργο Ε3.3:**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι διπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΧΑΡΗΣ: Αυτή.

Δ: Πως το ξέρεις.

ΧΑΡΗΣ: Έχουμε δύο ίδια κομμάτια και βγαίνει αυτή. Η διπλάσια.

**Έργο Ε3.4:**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά τρείς καραμέλες] Εγώ έχω διπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΧΑΡΗΣ: Αυτό.

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί είναι μια φορά το τρία, θα βάλω άλλα τρία και θα γίνουν έξι.

4. **<u>Αναγνώριση, με λέξη του ενός τρίτου και του τριπλάσιου</u>**

**<u>Έργο Ε4.1:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτή τη σοκολάτα. Θα δώσω το 1/3 στο κουκλάκι μου, τον Γιώργο. Ποιο κομμάτι λες ότι θα του δώσω;

ΧΑΡΗΣ: Αυτό;

Δ: Πως το ξέρεις;

ΧΑΡΗΣ: Δε το ξέρω. Θέλω και άλλα κομμάτια. Τέτοια. Ίδια.

Δ: Για δες

ΧΑΡΗΣ: Τέτοια κομμάτια θέλω. [Δείχνει εκείνα που επέλεξε.] Αυτό θα δώσουμε. Να είναι τρία.

**<u>Έργο Ε4.2:</u>**

Δ: Έχω εδώ αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά έξι καραμέλες] Θα δώσω *το 1/3* στην Ελενίτσα. Πόσες λες ότι θα της δώσω;

ΧΑΡΗΣ: Κυρία έχεις άλλες κάρτες;

Δ: Όχι αυτές είναι οι επιλογές.

ΧΑΡΗΣ: Δε ξέρω.

**Έργο Ε4.3:**

Δ: Ο Γιώργος έχει αυτή τη σοκολάτα. Εγώ έχω μια σοκολάτα που είναι τριπλάσια από αυτήν. Ποια λες ότι είναι η σοκολάτα μου;

ΧΑΡΗΣ: Αυτό.

Δ: Α, τι σημαίνει «τριπλάσιο»;

ΧΑΡΗΣ: Δε ξέρω.

**Έργο Ε4.4:**

Δ: Το κουκλάκι μου, η Ελενίτσα έχει αυτές τις καραμέλες. [Δείχνουμε στα παιδιά καραμέλες] Εγώ έχω τριπλάσιες καραμέλες από το κουκλάκι. Πόσες λες ότι έχω;

ΧΑΡΗΣ: Τρεις

Δ: Πως το ξέρεις;

ΧΑΡΗΣ: Επειδή είναι τριπλάσιες. Έβαλα τρεις φορές από μια καραμέλα.

# Παράρτημα Δ

## Απομαγνητοφώνηση έργων Παρέμβασης

**Ημέρα Α**

*Δ: Μια φορά και ένα καιρό, υπήρχε μια πόλη χαμένη μέσα στη ζούγκλα της χώρας των Κλασμάτων, η πόλη του Μισό- Διπλάσιου στην οποία ζούσε η οικογένεια Κοντό-Ψηλού. Η μαμά ήταν ψηλή και αδύνατη σαν μακαρόνι ενώ ο μπαμπάς πολύ πολύ κοντός και παχουλός σαν μπαλίτσα. Η οικογένεια είχε τρία παιδιά, τον Παμ και την Πένυ που ήταν δίδυμα και τον Παμ-παμ. Τα παιδιά έμοιαζαν πολύ με τη μαμά τους και ήταν αδύνατα και μακριά σαν μακαρόνια.*

*Τα δύο δίδυμα αδέρφια, ο Παμ και η Πένυ ήταν πολύ αγαπημένα και περνούσαν όλη τη μέρα μαζί. Έπαιζαν μαζί, έτρωγαν μαζί και μοιραζόταν τα πάντα. Τους άρεσε πάρα πολύ να μοιράζονται τις σοκολάτες και τα γλυκάκια που τους έδινε η μαμά τους.*

*Για να δούμε τώρα κάτι! Για να αφήσω εγώ κάτω τον Παμ και την Πένυ και να σας πω τι τους συνέβη.*

<u>**Δραστηριότητα Α.1**</u>

**Έργο Α.1.1**

Δ: Μια μέρα η μαμά του Παμ και της Πένυ αποφάσισε να τους δώσει ένα γλυκό μιας και κατάφεραν να τακτοποιήσουν το δωμάτιο τους πάρα πολύ γρήγορα. Τους έδωσε λοιπόν 4 μπισκότα.

ΚΩΣΤΑΣ:= Να ένα, δύο τρία, τέσσερα

Δ: Τους είπε, λοιπόν, ότι μπορούν να τα μοιραστούν. Τι λέτε;

ΚΩΣΤΑΣ: Δύο από δω και δυο από δω (Ο μαθητής μοιράζει κατευθείαν τα μπισκότα)

Δ: Περίμενε! Μη βιάζεσαι! Εξήγησε μας Κώστα πώς θα τα μοιράσεις;

ΚΩΣΤΑΣ: Να δύο από δω και δύο από κει (δείχνει τις πλευρές που βρίσκονται τα κουκλάκια). Δύο και δύο μας κάνει τέσσερα.

**Έργο Α.1.2**

Δ: Δηλαδή αν ο Παμ πήρε δύο μπισκότα, πόσα μπισκότα έχει πάρει η Πένυ;

ΜΑΡΙΑ: Δύο!

**Έργο Α.1.3**

Δ: Δύο! Πάρα πολύ ωραία! Και πόσα ήταν όλα τα μπισκότα; Ξέρετε;

ΜΑΡΙΑ: Περίμενε να τα βάλω μαζί! Τέσσερα! Ένα, δύο, τρία, τέσσερα.

**Έργο Α.1.4**

Δ: Αν τώρα η μαμά τους δώσει 6 μπισκότα. Πόσα μπισκότα θα πάρει ο Παμ και πόσα μπισκότα θα πάρει η Πένυ;=

ΜΑΡΙΑ:= Τρία και τρία!

Δ: Ωραία! Γιατί;

ΜΑΡΙΑ: Γιατί τρία θα πάρει ο ένας και τρία ο άλλος. Τρία και τρία κάνει έξι.

**Έργο Α.1.5**

Δ: Δηλαδή αν ξέρεις ότι ο Παμ πήρε τρία μπισκότα, ξέρεις πόσα πήρε η Πένυ;

ΜΑΡΙΑ: Ναι τρία! Τα ίδια. Αφού τα μοιράζονται.

**Έργο Α.1.6**

Δ: Πάρα πολύ ωραία! Αν τώρα ξέρουμε ότι η Πένυ αφού μοιράστηκε τα μπισκότα με τον Παμ πήρε τρία, ξέρουμε πόσα ήταν όλα τα μπισκότα;

ΜΑΡΙΑ: Ναι, να τα (τα παίρνει όλα μαζί στα χέρια της). Ήταν έξι.

**Έργο Α.1.7**

Δ: Τέλεια! Νίκο είσαι έτοιμος και εσύ να βοηθήσεις τον Παμ και την Πένυ; Αν τώρα η μαμά τους δώσει 8 μπισκότα. Πόσα μπισκότα θα πάρει ο Παμ και πόσα μπισκότα θα πάρει η Πένυ;

ΝΙΚΟΣ: (Το παιδί αρχίζει να μοιράζει ένα προς ένα τα μπισκότα στα δύο κουκλάκια). Τέσσερα από δω και τέσσερα από κει!

**Έργο Α.1.8**

Δ: (παίρνει η δασκάλα στα χέρια της τα μπισκότα από την Πένυ πριν κάνει την ερώτηση) Ωραία! Αν, δηλαδή, ο Παμ πήρε τέσσερα μπισκότα πόσα μπισκότα λες να πήρε η Πένυ;

ΝΙΚΟΣ: Θα πάρει πάντα τα ίδια! Τέσσερα!

**Έργο Α.1.9**

Δ: Πάρα πολύ ωραία! Αν τώρα ξέρουμε ότι η Πένυ αφού μοιράστηκε τα μπισκότα με τον Παμ πήρε τέσσερα, ξέρουμε πόσα ήταν όλα τα μπισκότα;

ΝΙΚΟΣ: Ναι, οκτώ.

**Έργο Α.1.10**

Δ: Τέλεια! Χάρη είσαι έτοιμος και εσύ να βοηθήσεις τον Παμ και την Πένυ; Αν τώρα η μαμά τους δώσει 3 μπισκότα. Πόσα μπισκότα θα πάρει ο Παμ και πόσα μπισκότα θα πάρει η Πένυ; Για σκέψου.

ΧΑΡΗΣ: Δε μπορώ να τα μοιράσω τα 3 μπισκότα σε δύο παιδιά
Δ: Να τα πάρω πίσω δηλαδή τα μπισκότα; Δεν μπορείς να τους βοηθήσεις;

ΧΑΡΗΣ: Όχι!

Δ: Για πάμε να προσπαθήσουμε! Έχω δύο παιδάκια, σωστά;

ΧΑΡΗΣ: Ναι!

Δ: Πως μπορούμε να μοιράσουμε;

ΚΩΣΤΑΣ: Θα κόψουμε (.)

Δ: (Κάνει νόημα στον Κώστα να σταματήσει για να προσπαθήσει ο Χάρης).

ΧΑΡΗΣ: Δεν γίνεται να μοιράσω. Δεν γίνεται. Μπορώ να δώσω στο ένα παιδί τα δύο αλλά δεν είναι δίκαιο.

Δ: Δίκιο έχεις! Δεν είναι δίκαιο. Μπορείς να σκεφτείς κάποιον άλλο τρόπο να μοιράσεις; Μπορείς να τους δώσεις από ένα;

ΧΑΡΗΣ: Ναι! Αλλά μου έμεινε ένα μπισκότο.

Δ: Αυτό το ένα μπισκότο μπορείς να το μοιράσεις με κάποιον τρόπο;

ΧΑΡΗΣ: Να το κόψω στη μέση!

Δ: Α για να δούμε! Για κάντο!

ΧΑΡΗΣ: (κόβει το μπισκότο)

Δ: Και τώρα από πόσα θα πάρει ο καθένας;

ΧΑΡΗΣ: Από ένα. Από ένα κομμάτι.

Δ: Α, Από ένα κομμάτι. Από μισό μπισκότο, δηλαδή, σωστά;

Όλα μαζί: Ναι.

Δ: Αν λοιπόν, μοιράσουμε τρία μπισκότα σε δύο παιδιά ο καθένας θα πάρει από ένα και…

ΧΑΡΗΣ: Μισό μπισκότο.

**Έργο Α.1.10**

Δ: Μπράβο! Πολύ ωραία! Να ρωτήσω και κάτι άλλο. Αυτά τα δύο μισά είναι ίδια;

ΧΑΡΗΣ: Είναι.

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί στην αρχή ήταν ένα μπισκότο ολόκληρο και το κόψαμε στη μέση.

Δ: Πολύ ωραία! Δηλαδή;

ΧΑΡΗΣ: Δηλαδή αν τα ενώσω και πάλι θα φτιάξω ένα μπισκότο.

Δ: Μπράβο! Πως μπορώ, όμως να δω ότι αυτά τα δύο μισά είναι ίσα;

ΜΑΡΙΑ: Επειδή είναι ένα ολόκληρο.

Δ: Και τι σημαίνει αυτό;

ΝΙΚΟΣ: Δε ξέρω.

ΚΩΣΤΑΣ: Αν βάλω το ένα πάνω στο άλλο θα είναι ίδια.

Δ: Α, βλέπετε ότι αν βάλω το ένα πάνω στο άλλο θα δω ότι τα κομμάτι θα είναι ίδια.

**Δραστηριότητα Α.2**

**Έργο Α.2.1**

Δ: Για πάμε τώρα να σας πω τι έγινε μια άλλη μέρα. Μια άλλη μέρα, λοιπόν, η μαμά έδωσε στον Παμ και την Πένυ μια σοκολάτα και τους είπε ότι μπορούν να την μοιραστούν. Τους έδωσε λοιπόν αυτή εδώ την σοκολάτα. Πως μπορούν να την μοιραστούν;

ΚΩΣΤΑΣ:= Θα την κόψω.

Δ: Περίμενε, πώς θα την κόψω;

ΚΩΣΤΑΣ: Θα την κόψω εδώ; [Δείχνει με το ψαλίδι πάνω στη σοκολάτα]

Δ: Δε ξέρω εσύ θα μου πεις.

ΚΩΣΤΑΣ: Είναι ίδιο; Εκεί;

Δ: Εσύ θα επιλέξεις που θα κόψεις.

ΚΩΣΤΑΣ: Δε ξέρω που.

Δ: Εγώ είδα ότι κάτι κοιτάς. Θέλεις να είναι όσο μπορείς πιο ίδια τα κομμάτια, σωστά;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι!

Δ: Υπάρχει πιο εύκολος τρόπος για να δεις ότι τα κομμάτια είναι ίδια.

ΚΩΣΤΑΣ: Δεν ξέρω.

Δ: Μήπως να δοκιμάσω να μετρήσω το χαρτί; Αλλά πως;

ΜΑΡΙΑ: Να το διπλώσω.

Δ: Α πολύ ωραία ιδέα. Τότε θα βρω πιο εύκολα τα δύο κομμάτια. Για να είναι ίδια. Για δοκίμασε.

**Έργο Α.2.2**

ΚΩΣΤΑΣ: Κυρία, να κάνω ένα άλλο για να το κάνω αυτό;

Δ: Αμέ! Σε πόσα κομμάτια θα το κόψεις

ΚΩΣΤΑΣ: Στα δύο.

Δ: Είναι ίδια τα δύο μισά;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι!

Δ: Πάντα θα είναι ίδια τα δύο μισά. Αν τώρα τα ενώσω, τι θα έχω;

ΧΑΡΗΣ: Μια ολόκληρη σοκολάτα.

**Έργο Α.2.3**

Δ: Μπράβο Μαρία! Για έλα να μοιράσεις και εσύ αυτή την σοκολάτα.

ΜΑΡΙΑ: Να κάνω το κόλπο;

Δ: Πως είπαμε ότι είναι το κόλπο για να μοιράσω μια σοκολάτα στη μέση;

ΜΑΡΙΑ: [Παίρνει το χαρτί και το διπλώνει.]

Δ: Τι κάνεις Μαρία στο χαρτάκι.

ΜΑΡΙΑ: Θα το διπλώσω και θα το κόψω.

Δ:Α Μπράβο! Και τώρα τι έχεις;

ΜΑΡΙΑ: Δύο μισά κομμάτια.

Δ: Και αν ενώσεις τα δύο μισά τι φτιάχνεις;

ΜΑΡΙΑ: Μια ολόκληρη σοκολάτα.

ΚΩΣΤΑΣ: Κυρία τη μαμά και το μπαμπά [εννοούν του Παμ και της Πένυ] τον έχετε; Είναι πιο μεγάλος;

**Έργο Α.2.4**

Δ: Θα τους δεις και αυτούς. Μη βιάζεσαι. Τώρα, όμως, θέλω να ρωτήσω κάτι. Αν αυτό είναι το κομμάτι που θα πάρει ο Παμ, μπορείτε να βρείτε το κομμάτι της Πένυ; Για να ανακατέψω τα κομμάτια που έχω εδώ.

ΝΙΚΟΣ: [Συγκρίνει το κομμάτι με αυτά που του δόθηκαν]. Όχι αυτό!

Δ: Αυτό όχι; Γιατί;

ΝΙΚΟΣ: Να αυτό! [Έχει ταυτίσει τα δύο κομμάτια.]

**Έργο Α.2.5.**

Δ: Πολύ ωραία. Μήπως μπορείς να βρεις και ποια είναι η ολόκληρη σοκολάτα;

ΧΑΡΗΣ: [Διαλέγει τυχαία μία από τις σοκολάτες και τη δείχνει]

Δ: Για δείτε λίγο, τον Χάρη λέει αυτή. Πώς το ξέρεις;

ΚΩΣΤΑΣ: Όχι γιατί αν βάλω πάνω τα δύο μισά δε θα τη γεμίσω.

Δ: Α, δηλαδή, δεν είναι αυτή η ολόκληρη;

ΧΑΡΗΣ: Όχι. Αυτή είναι.

ΚΩΣΤΑΣ: Το μεγάλο το αδερφάκι δε θα μας το δώσεις;

Δ: Περίμενε. Όλα στην ώρα τους.

[Έγινε ένα μικρό διάλλειμα]

*Δ: Θυμάστε τον άλλον αδερφό που με ρωτούσατε. Ήρθε η ώρα να σας τον γνωρίσω. Ο Παμ- παμ ήταν ο μεγάλος αδερφός της οικογένειας και πολλές φορές τα ήθελε όλα δικά του. Ήταν διπλάσιος στο ύψος από τον Παμ, είχε τα διπλάσια παιχνίδια και ακόμα και στο φαγητό ήταν άπληστος και ήθελε να τρώει το διπλάσιο από όσο έτρωγε ο Παμ.*

ΧΑΡΗΣ: Τι σημαίνει αυτό;

Δ: Θα το ανακαλύψουμε μαζί!

## <u>Δραστηριότητα Α.3</u>

### Έργο Α.3.1. (εισαγωγικό)

Δ: Να σας ρωτήσω κάτι; Θέλω να κοιτάξετε καλά τον Παμ- Παμ και τον Παμ. Ο Παμ είναι ίδιος με τον Παμ- παμ;

Όλα μαζί: Όχι!

Δ: Είναι ίδιος με την Πένυ;

Όλα μαζί: Όχι!

Δ: Μοιάζουν καθόλου; Μοιάζουν σε τίποτα;

ΜΑΡΙΑ: Μοιάζουν στο χρώμα και στο πρόσωπο.

Δ: Πολύ ωραία. Μοιάζουν σε τίποτα άλλο; (5) Για να ρωτήσω κάτι άλλο. Ο Παμ-παμ είναι τόσο ψηλός όσο ο Παμ;

Όλοι μαζί: Όχι!

Δ: Είναι πιο κοντός; Ή πιο ψηλός;

Όλοι μαζί: Πιο ψηλός.

Δ: Ο Παμ- Παμ είναι τόσο ψηλός όσο η Πένυ;

Όλοι μαζί: Όχι!

Δ: Είναι πιο ψηλός ή πιο κοντός;

Όλοι μαζί: Πιο ψηλός.

ΧΑΡΗΣ: Ναι, όμως, αν πάει το ένα πάνω στο άλλο θα είναι ίσα.

Δ: Μπράβο Χάρη! Δηλαδή, ο Παμ- Παμ είναι όσο η Πένυ και ο Παμ μαζί ή ότι είναι ο διπλάσιος από τον Παμ. Η Πένυ δεν είναι ίδια με τον Παμ;

Όλοι μαζί: Ναι!

Δ: Δηλαδή είναι σαν να γεμίσαμε τον Παμ- παμ με δύο φορές τον Παμ. Άρα Χάρη αυτή η λέξη, το «διπλάσιο» που ρωτούσες, μπορείς τώρα να σκεφτείς τι σημαίνει; Τι σημαίνει ότι ο Παμ- Παμ είναι διπλάσιος από τον Παμ;

ΧΑΡΗΣ: Ότι θέλει πιο πολλά πράγματα δικά του.

Δ: Και τι άλλο;

ΧΑΡΗΣ: Ότι είναι πιο μεγάλος.

**<u>Δραστηριότητα Α.4</u>**

**Έργο Α.4.1**

Δ: Ωραία. Για πάμε να τον βοηθήσουμε να βρει τώρα πόσα πράγματα χρειάζεται. Σας θυμίζω ότι ο Παμ-παμ τρώει το διπλάσιο φαγητό από τον Παμ. Τρώει δηλαδή, όσο ο Παμ και η Πένυ μαζί. Κώστα αν ο Παμ φάει δύο μπισκότα, πόσα θα φάει ο Παμ-παμ;

ΚΩΣΤΑΣ: [κατευθείαν] 4

Δ: Γιατί; Δηλαδή αν βάλω δύο φορές στο πιάτο του Παμ- παμ από δύο μπισκότα θα έχει φάει 4. Συμφωνούμε;

ΜΑΡΙΑ: Ναι, έφαγε δύο φορές τα μπισκότα του Παμ.

**Έργο Α.4.2**.

Δ: Μαρία, ο Παμ θα φάει τέσσερα μπισκότα. Πόσα θα φάει ο Παμ- Παμ;

ΜΑΡΙΑ: Θα φάει δύο φορές από δύο μπισκότα;

Δ: Από δύο μπισκότα; Αφού αυτή τη φορά έδωσα στον Παμ τέσσερα;

ΜΑΡΙΑ: Θα φάει τότε το διπλάσιο του 4. [Φτιάχνει τις ομάδες με τα 4 μπισκότα]

Δ: Μπράβο. Για μέτρα τώρα πόσα μπισκότα θα φάει ο Παμ- παμ;

ΜΑΡΙΑ: 9

Δ: Για δες τα λίγο πάλι.

ΜΑΡΙΑ: Όχι! Τέσσερα και τέσσερα. [Μετράει πάλι τα μπισκότα]. Θα φάει 8.

**Έργο Α.4.3**

Δ: Πολύ ωραία. Νίκο, αν δώσω στον Παμ 1 μπισκότο, πόσα μπισκότα θα φάει ο Παμ-Παμ;

ΝΙΚΟΣ: Δύο. Είναι απλό. Θα φάει δύο φορές από ένα, άρα δύο.

**Έργο Α.4.4.**

Δ: Ωραία! Χάρη, εσένα θα σου βάλω πολλά μπισκότα. Ο Παμ έφαγε μισό μπισκότο. Πόσα μπισκότα θα φάει ο Παμ- παμ.

ΚΩΣΤΑΣ: Από δύο μισά. Θα βάλεις δύο φορές το μισό.

Δ: Περίμενε Κώστα. Δηλαδή, πόσα μπισκότα θα φάει ο Παμ- Παμ.

ΧΑΡΗΣ: Δύο μισά μπισκότα.

Δ: Δηλαδή; Μπορώ να τα βάλω αυτά τα μισά μαζί;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι αυτά ενώνονται.

Δ: Και τι θα φτιάξουν όταν ενωθούν;

ΚΩΣΤΑΣ: Ένα ολόκληρο, μεγάλο μπισκότο.

Δ: Τι σημαίνει δηλαδή, η λέξη διπλάσιο;

ΚΩΣΤΑΣ: Ότι τρώει δύο φορές το φαγητό του Παμ.

**Δραστηριότητα Α5**

**Έργο Α.5.1.**

Δ:Για να ρωτήσω και κάτι ακόμα. Αν ο Παμ έφαγε μισή σοκολάτα [δείχνει το κομμάτι] μπορείς να μου δείξεις ποια σοκολάτα είναι η ολόκληρη;

ΚΩΣΤΑΣ: [Παίρνει το κομμάτι και δείχνει στα διαθέσιμα κομμάτια που έχουμε δώσει] Θα φάει το διπλάσιο. Ορίστε.

**Έργο Α.5.2**

Δ: Μπράβο. Μαρία, αν ο Παμ φάει αυτό το κομμάτι σοκολάτας [δείχνουμε το κομμάτι]. Ποιο θα φάει ο Παμ- Παμ.

ΝΙΚΟΣ: Θα ενώσουμε δύο ίδια κομμάτια μαζί και θα το βρούμε.

Δ: Ωραία, αλλά θέλω να περιμένουμε τη σειρά μας. Για πες μας γι' αυτό το κομμάτι Μαρία.

ΜΑΡΙΑ: [Επαναλαμβάνει το μισό πάνω στις διαθέσιμες επιλογές.] Αυτό.

[Τα παιδιά είχαν κουραστεί γι' αυτό και δεν έγιναν άλλες δοκιμές στο έργο αυτό]

[Έγινε διάλλειμα]

**Δραστηριότητα Α.6**

**Έργο Α.6.1.**

Δ: Να ρωτήσω κάτι τελευταίο και θα σταματήσουμε τις δοκιμές. Μπορεί να απαντάει όποιος θέλει. Δε χρειάζεται να πηγαίνουμε με τη σειρά. Αν ο Παμ- παμ φάει 2 μπισκότα μπορείτε να μου δείξετε πόσα μπισκότα έφαγε ο Παμ;

ΚΩΣΤΑΣ: Ο Παμ τρώει πάντα τα μισά. Άρα ένα!

**Έργο Α.6.2**

Δ: Μπράβο Κώστα. Και αν φάει 4, Μαρία; [Η Μαρία δείχνει κουρασμένο και δε θέλει να συμμετέχει άλλο στη διαδικασία. Τον λόγο παίρνει ο Χάρης]

ΧΑΡΗΣ: Θα φάει 2. Τα μισά πάλι.

[Δεν έγιναν άλλες δοκιμές αλλά προχωρήσαμε στις συνεχείς ποσότητες.

**Δραστηριότητα Α.7**

**Έργο Α.7.1**

Δ: Ωραία. Αν ο Παμ- παμ φάει αυτή σοκολάτα [δείχνουμε το κομμάτι] μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα φάει ο Παμ;»

ΚΩΣΤΑΣ: Το μισό. [Αρχίζει τις δοκιμές με τα διαθέσιμα μισά κομμάτια]. Πάντα θα τρώει το μισό.

**Έργο Α.7.2**

Δ: Πολύ ωραία. Νίκο, θέλεις να μας βοηθήσεις εσύ. Αν ο Παμ- παμ φάει αυτό το κομμάτι, ο Παμ ποιο κομμάτι θα φάει;

ΝΙΚΟΣ: Το μισό κυρία, πάντα το μισό. [Και πάλι κάνει δοκιμές, επαναλαμβάνοντας τα μισά κομμάτια πάνω στο ολόκληρο που του δόθηκε για να επιλέξει το κατάλληλο]

**Ημέρα Β΄**

Δ: Καλημέρα! Για πάμε να ξεκινήσουμε πάλι το ταξίδι μας στη χώρα του Μισού-Διπλάσιου. Θυμάται κανείς τι είπαμε χτες; Ποια είναι αυτά τα δύο κουκλάκια που ήρθαν στην παρέα μας.

ΚΩΣΤΑΣ: Ο Παμ και…

ΧΑΡΗΣ: …Η Πένυ

Δ: Και τι είναι αυτά μεταξύ τους;

ΚΩΣΤΑΣ: Αδέρφια.

ΜΑΡΙΑ: =Δίδυμα.=

ΚΩΣΤΑΣ:= Ίσα.

Δ: Μπράβο! Και θυμάστε που είχαν και ένα μεγάλο αδερφό;

ΧΑΡΗΣ: Τον Παμ- παμ.

Δ: Μπράβο. Τον Παμ- παμ. Ο Παμ- παμ έμοιαζε καθόλου με τα αδέρφια του;

ΧΑΡΗΣ: Έτρωγε το διπλάσιο φαγητό.

Δ: Πολύ ωραία!

ΝΙΚΟΣ: Είναι δύο φορές μεγαλύτερος.

Δ: Από ποιον;

ΝΙΚΟΣ: [Δείχνει τη φιγούρα του Παμ]. Από τον αδερφό τον μικρότερο.

ΚΩΣΤΑΣ: Τον άλλον τον μεγάλο πότε θα τον φέρεις. Αν τον φέρεις θα τα φάει όλα;

Δ:Περίμενε θα τον φέρω και τον μεγάλο. Να συνεχίσω τώρα την ιστορία της οικογένειας Κοντό-ψηλού; Θέλετε να γνωρίσετε τον γίγαντα αυτόν; [Δείχνουμε την εικόνα του τριπλάσιου.]

ΚΩΣΤΑΣ: Εγώ ξέρω ποιος είναι. Είναι ο Παμ- παμ – παμ- παμ.

Δ: Τι εννοείς;

ΚΩΣΤΑΣ: Είναι ο πιο μεγάλος Παμ. Πιο μεγάλος και από τον Παμ-παμ.

Δ: Για ακούστε τώρα την ιστορία. *Μια μέρα στην πόλη του Μισό- διπλάσιου ήρθε επίσκεψη η οικογένεια Τριπλάσιου. Η οικογένεια αυτή είχε δύο παιδιά, το Εν-τρίτο και το Τριπλάσιο που ήταν ξαδέρφια με τον Παμ, την Πένυ και τον Παμ-παμ. Το Εν-τρίτο έμοιαζε πολύ με τον Παμ και την Πένυ, τόσο πολύ που καμιά φορά τον μπέρδευαν με τον Παμ. Το Εν-τρίτο αγαπούσε πολύ τα ξαδερφάκια του και πάντα έπαιζε μαζί τους. Μάλιστα του άρεσε να μοιράζεται μαζί τους τα μπισκότα του και τις τρελοσοκολάτες που έφερνε και μόνο καφέ δεν ήταν.* Πάμε να τους βοηθήσουμε να μοιραστούν τα μπισκότα και πάλι; Σε πόσα μέρη θα χωρίζουμε τώρα το φαγητό;

ΚΩΣΤΑΣ: Σε τρία.

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί είπες το 1/3.

**<u>Δραστηριότητα Β1</u>**

**Έργο Β.1.1**

Δ: Για να δούμε… Ο ξάδερφος Εν-Τρίτο έφερε μαζί του 3 μπισκότα για να τα μοιραστεί με τον Παμ και την Πένυ. Πόσα μπισκότα θα πάρει το κάθε κουκλάκι;

ΜΑΡΙΑ: Θα πάρουν από τρία.

Δ: Μα όλα όλα τα μπισκότα είναι τρία, πως γίνεται να πάρει και το καθένα από τρία.

ΜΑΡΙΑ: [Δίνει σε όλους από ένα]

Δ: Αααα, άρα θα δώσουμε σε όλους από ένα. Πόσα θα φάει δηλαδή ο ξάδερφος Ένα Τρίτο;

ΜΑΡΙΑ: Ένα.

Δ: Και ο Παμ;

ΝΙΚΟΣ: Ένα. Και η Πένυ ένα.

ΚΩΣΤΑΣ: Όλοι θα φάνε από ένα.

**Έργο Β.1.2.**

Δ: Αν τώρα δώσω στα τρία παιδάκια 6 μπισκότα Νίκο, πως θα τους τα μοιράσεις;

ΝΙΚΟΣ: Τρία και τρία. Σιγά!

Δ: Μη βιάζεσαι! Και η Πένυ, δε θα πάρει μπισκότα;

ΝΙΚΟΣ: [Αλλάζει το πώς μοιράζει και δίνει 3 στο πρώτο κουκλάκι, δύο στο δεύτερο και ένα στο τρίτο]

Δ: Τώρα έχουν όλα τα παιδιά τα ίδια μπισκότα;

ΝΙΚΟΣ: Όχι.

Δ: Πρέπει λοιπόν να βρούμε ένα τρόπο, όχι να χωρίσουμε τα μπισκότα στη μέση, αλλά να τα μοιράζουμε το ίδιο και στους τρεις.

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι να δίνουμε από ένα- ένα μέχρι να μας τελειώσουν.

**Έργο Β.1.3**

Δ: Α, πολύ ωραία! Όταν, λοιπόν, θέλουμε να μοιράσουμε κάτι δίνουμε σε όλους από ένα. Χάρη, εσύ θα πάρεις 9 μπισκότα. Μπορείς να τα μοιράσεις στα τρία ξαδερφάκια;

ΧΑΡΗΣ: [Βάζει στο ένα πιάτο 4, στο δεύτερο άλλα 4 και στο τρίτο μόνο ένα] Κυρία, θέλω άλλα 3.

Δ: Δε μπορώ να σου δώσω και άλλα μπισκότα. Είπαμε ότι θα μοιράσουμε αυτά τα 9 μπισκότα. Πως είπαμε ότι μοιράζουμε;

ΧΑΡΗΣ: Επειδή ήταν εννιά θα τα μοιράσω και στα τρία παιδιά. Άρα, θα πάρουν από τρία.

**Έργο Β.1.4**

Δ: Πολύ ωραία. Αν τώρα ξέρουμε ότι ο ξάδερφος Ένα- τρίτο πήρε δύο μπισκότα, ξέρουμε πόσα μπισκότα θα πήρε η Πένυ;

ΜΑΡΙΑ: Τέσσερα.

Δ: Δηλαδή, δε θα τα μοιράσω δίκαια τα μπισκότα στα τρία παιδιά;

ΧΑΡΗΣ: Δύο θα πάρει. Και δύο θα πάρει και ο Παμ.

**Έργο Β.1.5**

Δ: Και πόσα θα είναι τα μπισκότα όλα μαζί;

ΚΩΣΤΑΣ: Είναι δύο και δύο και δύο. [Μετράει τα μπισκότα όλα μαζί] Είναι 6.

**Έργο Β.1.6**

Δ: Πολύ ωραία. Αν τώρα έχουμε 1 μπισκότο για τον Παμ, πόσα μπισκότα θα πάρει η Πένυ και πόσα ο ξάδερφος Ένα- τρίτο;

ΧΑΡΗΣ: Πάλι το ίδιο θα κάνουμε. Ένα και ένα και ένα. Ένα θα πάρει ο Παμ, ένα η Πένυ, και ένα ο ξάδερφος. [Βάζει στο κάθε πιάτο από ένα μπισκότο]

**Έργο Β.1.7**

Δ: Και πόσα μπισκότα θα έχουμε όλα μαζί.

ΧΑΡΗΣ: Τρία μπισκότα θα έχουμε.

**<u>Δραστηριότητα Β.2</u>**

**Έργο Β.2.1.**

Δ: Για να δούμε και τις τρελοσοκολάτες! Την επόμενη μέρα, ο ξάδερφος Έν-τρίτο έδειξε στα δίδυμα αυτή τη σοκολάτα για να την μοιραστούν δίκαια. Μπορούμε να τον βοηθήσουμε;

ΜΑΡΙΑ: Θα την μοιράσω εγώ. [Προσπαθεί να κόψει την σοκολάτα σε τρία ίσα κομμάτια]

Δ: [Το παιδί κόβει το πρώτο κομμάτι και το χρησιμοποιεί σαν οδηγό για να κόψει τα υπόλοιπα] Και το υπόλοιπο; Ποιος θα πάρει τα κομμάτια και ποιος αυτό που έμεινε;

ΜΑΡΙΑ: Ο Φαγάνας θα πάρει το μεγάλο. [Δείχνει αυτό που έμεινε]

[Και τα υπόλοιπα παιδιά μοίρασαν τις σοκολάτες που τους δόθηκαν χρησιμοποιώντας το πρώτο κομμάτι που έκοψαν σαν οδηγό αλλά όχι σε τρία κομμάτια. Σε όλες τις δοκιμές υπήρχε περίσσευμα.]

**Έργο Β.2.2.**

Δ: Για να ρωτήσω εγώ κάτι άλλο. Αν ο Παμ πήρε αυτό το κομμάτι της τρελοσοκολάτας, τι κομμάτι πήρε η Πένυ και ο ξάδερφος Ένα- τρίτο;

ΚΩΣΤΑΣ: Έχεις άλλα τέτοια κομμάτια;

Δ: Ναι, τα χρειάζεσαι;

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι θέλω άλλα δύο για να φτιάξω τη σοκολάτα. [Ενώνει τα κομμάτια και μετά ψάχνει να βρει την ολόκληρη σοκολάτα.]

**Έργο Β.2.2.**

Δ: Πολύ ωραία! Ποιος άλλος θέλει να προσπαθήσει να μου βρει ποια ήταν η αρχική σοκολάτα αν ξέρουμε ότι το ένα τρίτο της είναι αυτό εδώ το κομμάτι;

ΧΑΡΗΣ: Εγώ. Δώσε μου κι άλλα ίδια κομμάτια.

Δ: Ορίστε.

[Πάλι ενώνει τα κομμάτια και μετά ψάχνει να δει ποια από τις σοκολάτες είναι αυτή που ψάχνει.]

Δ: Για να σας γνωρίσω εγώ και αυτόν που λέγατε ότι είναι ο γίγαντας. Αυτός εδώ είναι ο ξάδερφος *Τριπλάσιος που ήταν πιο μεγάλος από τα δίδυμα αλλά και από τον Παμ- παμ και ήταν πάρα πολύ λαίμαργος.*

**<u>Δραστηριότητα Β3</u>**

**Έργο Β.3.1.**

Δ: Για δείτε τώρα μοιάζει καθόλου ο ξάδερφος Τριπλάσιος με τους άλλους;

ΝΙΚΟΣ: Ναι είναι τρία παιδάκια μαζί!

Δ: Α, είναι δηλαδή σε ύψος όσο είναι τα άλλα τρία παιδιά μαζί. Μπορούμε να φτιάξουμε τον ξάδερφο Τριπλάσιο μόνο με ένα από τα κουκλάκια; Πόσες φορές θα βάλουμε το κουκλάκι;

ΧΑΡΗΣ: Τον Παμ 3 φορές ή την Πένυ 3 φορές.

Δ: Η΄ μπορούμε να βάλουμε τον ξάδερφο Ένα- τρίτο τρεις φορές.

Όλοι μαζί: Ναι!

**<u>Δραστηριότητα Β4</u>**

**Έργο Β.4.1**

Δ: Ο Τριπλάσιος  τρώει πάρα πολύ! Όσο τα τρία παιδιά μαζί, δηλαδή τρώει το τριπλάσιο από ότι τρώει ο μικρός του αδερφός το Εν-Τρίτο. Μαρία, αν ο ξάδερφος Εν-Τρίτο έφαγε ένα μπισκότο μπορείς να μου δείξεις πόσα μπισκότα έφαγε ο Τριπλάσιος;

ΜΑΡΙΑ: 3 θα φάει! Να τα!

**Έργο Β.4.2**

Δ: Πολύ ωραία, Κώστα, αν ο ξάδερφος Εν-Τρίτο φάει 2 μπισκότα πόσα μπισκότα θα φάει ο Τριπλάσιος;

ΚΩΣΤΑΣ: Θα βάλω δύο μπισκότα, τρεις φορές.

Δ: Για βάλτα να τα μετρήσουμε.

ΚΩΣΤΑΣ: [Βάζει τα μπισκότα σε σειρές σαν αυτή που του δόθηκε και τα μετράει] 6 θα φάει.

**Έργο Β.4.3**

Δ: Τέλεια Νίκο, αν ο ξάδερφος Εν-Τρίτο φάει 3 μπισκότα πόσα θα φάει ο Τριπλάσιος;

ΝΙΚΟΣ: [Βάζει πάλι τα μπισκότα στις ίδιες σειρές και τα μετράει] 9 θα φάει.

**Δραστηριότητα Β5**

**Έργο Β.5.1**

Δ: Τέλεια. Τώρα αν ο ξάδερφος Έν-τρίτο φάει αυτό το κομμάτι σοκολάτα [δείχνουμε το κομμάτι] μπορείς να μου δείξεις ποια σοκολάτα είναι η ολόκληρη;

ΧΑΡΗΣ: Έχεις κι άλλα κομμάτια; [Όπως και πριν φτιάχνει τη σοκολάτα με τα κομμάτια και μετά ψάχνει την ολόκληρη] Αυτή είναι.

Δ: Να σε ρωτήσω κάτι; Πόσες φορές χωράει το μικρό κομμάτι στο μεγάλο; Πόσες φορές χωράει το 1/3 στο τριπλάσιο;

ΚΩΣΤΑΣ, ΧΑΡΗΣ [ταυτόχρονα]: 3 φορές.

ΜΑΡΙΑ: Κυρία, αύριο θα ρθείς με τον πιο μεγάλο γίγαντα; Με τον τετραπλάσιο; Τον τέσσερα- τριπλάσιο;

Δ: Τι εννοείς;

ΜΑΡΙΑ: Να είναι τέσσερις φορές ο μικρός.

Δ: Θα δεις! Έκπληξη!

**Ημέρα Γ**

Δ: Σήμερα έφερα μαζί μου μια τρομερή μηχανή! Αυτή την μηχανή μου την έδωσε η κ. Διάνοια! Η κυρία Διάνοια είναι τρομερή εφευρέτης! Έφτιαξε κάτι φανταστικές μηχανές, που όσοι τις βλέπουν μένουν με το στόμα ανοιχτό.

**Δραστηριότητα Γ1**

**Έργο Γ.1.1**

Δ: Η πρώτη μηχανή δουλεύει με καραμέλες. Αν βάλω μέσα αυτή την καραμέλα θα την περάσει από το μαγικό της υπολογιστή και θα βγάλει αυτό. [Δείχνουμε τις δύο καραμέλες.] Πόσες καραμέλες έβγαλε η μηχανή;

Όλοι μαζί: Δύο!

Δ: Για δείτε τώρα και κάτι ακόμα. Θα βάλω στη μηχανή αυτές τις καραμέλες [2 καραμέλες], θα τις σκανάρει η τρομερή μηχανή της κ. Διάνοιας…

ΚΩΣΤΑΣ: Θα βγάλει τρεις τώρα!

ΝΙΚΟΣ: =Πέντε θα βγάλει!

Δ: Περιμένετε να δούμε. Βγήκαν, λοιπόν, αυτές οι καραμέλες. Πόσες είναι;

ΚΩΣΤΑΣ: Τέσσερις.

Δ: Ωραία! Αν βάλω 4 καραμέλες, πόσες λέτε να βγάλει η μηχανή;

ΜΑΡΙΑ: 6

ΚΩΣΤΑΣ: 7

Δ:Για να δούμε! Όχι! 8 έβγαλε! Έχει καταλάβει κανένας τι κάνει αυτή η μηχανή; Βγάζει κάθε φορά όσες καραμέλες θέλει;

[Δεν απαντά κανείς]

Δ: Για να θυμηθούμε τι είδαμε. Έβαλα μία καραμέλα και μου έβγαλε δύο. [Δείχνουμε τις καραμέλες μαζί έξω από το κουτί]. Όταν έβαλα δύο μου έβγαλε τέσσερις. Όταν έβαλα τέσσερις έβγαλε οκτώ. Άρα;

ΚΩΣΤΑΣ: Βγάζει κι άλλες καραμέλες.

ΝΙΚΟΣ: Ναι αλλά μπορεί να μπερδεύεται.

Δ: Δηλαδή τι κάνει;

ΧΑΡΗΣ: Έχει τα υλικά μέσα και φτιάχνει τις καραμέλες.

Δ: Μπράβο Χάρη! Και πόσες κάνει κάθε φορά;

ΧΑΡΗΣ: Φτιάχνει όσες να είναι οι καραμέλες για να βγουν και άλλη φορά.

Δ: Δηλαδή; Πόσες φορές φτιάχνει τις καραμέλες που βάζω από τη μικρή μεριά;

ΧΑΡΗΣ: Μία και άλλη μία.

Δ: Ααα, δηλαδή όταν τις βάλω δύο καραμέλες αυτή θα βγάλει δύο φορές από δύο καραμέλες. Σωστά;

Όλοι μαζί: Ναι!

Δ: Πως το λέμε αυτό που βγάζουμε δύο φορές τις ίδιες καραμέλες;

ΝΙΚΟΣ: Το λέμε δύο.

ΚΩΣΤΑΣ, ΧΑΡΗΣ: Διπλάσιο.

Δ: Άρα τι κάνει παιδιά αυτή η μηχανή;

Όλοι μαζί: Βγάζει το διπλάσιο.

Δ: Για να δοκιμάσουμε πάλι. Βάζω, λοιπόν, στη μηχανή τρεις καραμέλες. Πόσες λέτε να βγάλει;

ΚΩΣΤΑΣ: 6.

Δ: Μπράβο! Και αν βάλω 2;

ΜΑΡΙΑ: Τέσσερις.

**Δραστηριότητα Γ2**

**Έργο Γ.2.1.**

Δ: Για να την γεμίσω εγώ πάλι με υλικό για να δούμε πώς η μηχανή αυτή δουλεύει κι ανάποδα. Αν βάλω αυτές 4 καραμέλες από την άλλη μεριά, τη μεγάλη, τι πιστεύετε ότι θα βγάλει από εδώ [Δείχνουμε την αριστερή μεριά]

ΚΩΣΤΑΣ: Δύο.

ΝΙΚΟΣ: Οκτώ.

ΜΑΡΙΑ: Εφτά.

Δ: Γιατί να βγάλει δύο Κώστα;

ΚΩΣΤΑΣ: Γιατί αν βάλεις από τη μεγάλη μεριά τέσσερις ανακατεύει το υλικό και λέει λάθος, λάθος και μετά βγάζει δύο.

**Έργο Γ.2.2.**

Δ: Για να δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Αν βάλω από τη μεγάλη πλευρά 6 καραμέλες, πόσες θα βγάλει από την μικρή;

ΧΑΡΗΣ: Τρεις;

Δ: Γιατί;

ΧΑΡΗΣ: Γιατί βγάζει πιο λίγες.

Δ: Α, δηλαδή όταν βάζουμε καραμέλες από την μικρή πλευρά προς την μεγάλη βγάζει πιο πολλές, βγάζει τις διπλάσιες. Όταν βάλουμε υλικό από την μεγάλη πλευρά προς τη μικρή βγάζει πιο λίγες. Τι βγάζει δηλαδή;

ΝΙΚΟΣ: Εφτά.

ΜΑΡΙΑ: Τρεις.

ΚΩΣΤΑΣ: Τις μισές.

**Έργο Γ.2.3.**

Δ: Πάρα πολύ ωραία. Αν τώρα βάλω από τη μεγάλη πλευρά δύο καραμέλες, πόσες θα βγάλει από την μικρή πλευρά Χάρη;

ΧΑΡΗΣ: Τις μισές.

Δ: Πόσες θα είναι αυτές δηλαδή;

ΚΩΣΤΑΣ: Μία.

[Τα παιδιά κατάφερναν να μοιράσουν τις καραμέλες όταν αυτές δεν «έμπαιναν» στην μηχανή αλλά τις έβλεπαν για να τις χωρίσουν.]

**Δραστηριότητα Γ3**

**Έργο Γ.3.1.**

Δ: Για να σας δείξω και κάτι ακόμα. Η κυρία Διάνοια μας έβαλε μια σπαζοκεφαλιά ακόμα! Μια μέρα έφτιαξε αυτή τη μηχανή για τα ζαχαρωτά.

ΜΑΡΙΑ: Δηλαδή, κάνει ότι έκανε και η άλλη; Θα βγάζει από τη μια πιο πολλά;

Δ: Δηλαδή; Τι εννοείς;

ΝΙΚΟΣ: Να εξαφανίζει από τη μια και ΧΧΧ

ΜΑΡΙΑ: Δηλαδή αν βάλουμε από την μια πλευρά μία, θα βγάλει από την άλλη, άλλη μία.

Δ: Για να δούμε τι θα βγάλει και να σκεφτούμε.

ΜΑΡΙΑ: Κυρία πότε θα φέρεις το τετραπλάσιο;

Δ: Ποιο;

ΜΑΡΙΑ: Το τετραπλάσιο. Να τα κάνει τέσσερα.

Δ: Θα δεις. Προς το παρόν να δούμε τη μηχανή με τα ζαχαρωτά. Βάζω από την μικρή πλευρά αυτό το κομματάκι ζαχαρωτό. Θα βγάλω από την άλλη πόρτα αυτή.

[Δείχνουμε στα παιδιά τα δύο κομμάτια ταυτόχρονα μιας και στην προηγούμενη περίπτωση είδαμε ότι έχουν δυσκολία στο να κατανοήσουν την σχέση ανάμεσα στα πλήθη όταν δεν τα βλέπουν και τα δύο.]

ΝΙΚΟΣ: Βγήκε το μεγάλο από τη μεγάλη πόρτα.

Δ: Πόσες φορές λέτε να χωράει το μικρό ζαχαρωτό στο μεγάλο;

[Ο Κώστας παίρνει στα χέρια του τα δύο κομμάτια και μετράει]

ΚΩΣΤΑΣ: Δύο.

Δ: Για δες μπορείς να την γεμίσεις με δύο κομματάκια;

ΚΩΣΤΑΣ: [Παίρνει και το άλλο ίδιο κομματάκι από αυτά που είναι στο πάτωμα και το γεμίζει.] Ναι.

**Έργο Γ.3.2**

Δ: Για να δοκιμάσουμε και με ένα ακόμα κομματάκι ζαχαρωτό. [Βάζει από τη μία πλευρά το μικρό ζαχαρωτό και βγάζει το μεγάλο από την άλλη.] Πόσες φορές λες να χωράει αυτό το ζαχαρωτό [το μικρό] στο άλλο.

ΧΑΡΗΣ: [Ψάχνει να βρει τα ίδια κομμάτια] Δύο. [Ενώνει τα μισά κομμάτια για να φτιάξει το διπλάσιο.]

**Έργο Γ.3.3.**

Δ: Τώρα αν εγώ βάλω αυτό μέσα στη μηχανή από την μικρή πλευρά [Δείχνει το μισό κομμάτι], ποιο πιστεύεις ότι θα βγάλει από την μεγάλη πλευρά Μαρία;

[Δίνουμε στο παιδί διάφορες επιλογές κομματιών]

ΜΑΡΙΑ: Αυτό. [Δείχνει ένα τυχαίο κομμάτι που του δόθηκε]

Δ: Γιατί; Πόσες φορές χωράει το μικρό κομμάτι στο μεγάλο;

ΜΑΡΙΑ: Μία. Ίδια είναι.

Δ: Πόσες φορές πρέπει να χωράει;

ΜΑΡΙΑ: Δύο. Δεν είναι αυτό.

Δ: Για ξαναδοκίμασε.

ΜΑΡΙΑ: Αυτό είναι. Να το!

Δ: Μπορείς να το γεμίσεις με δύο μικρά κομμάτια;

ΜΑΡΙΑ: Ναι!

**Δραστηριότητα Γ4**

**Έργο Γ.4.1.**

Δ: Πολύ ωραία! Για πάμε τώρα να σας δείξω τι γίνεται αν βάλουμε ένα ζαχαρωτό από τη μεγάλη πλευρά. Τι λέτε να μου βγάλει από την άλλη πλευρά;

ΝΙΚΟΣ: Δύο φορές.

Δ: Δύο φορές μεγαλύτερο βγαίνει το ζαχαρωτό όταν το βάλουμε από την μικρή πλευρά.

ΚΩΣΤΑΣ: Το μισό θα βγάλει.

Δ: Για να δούμε; [Δείχνει το ζαχαρωτό που βγήκε από τη μηχανή]. Είναι αυτό το μισό; Πως το ξέρεις;

ΚΩΣΤΑΣ: [Ταυτίζει τα δύο ζαχαρωτά και με το χέρι του κάνει πως κόβει το μεγάλο] Να έτσι.

Δ: Δηλαδή;

ΚΩΣΤΑΣ: Δηλαδή είναι ένα και άλλο ένα.

**Έργο Γ.4.2**

Δ: Ωραία, Χάρη αν βάλω αυτό το ζαχαρωτό από την μεγάλη πλευρά τι κομμάτι πιστεύεις ότι θα βγάλει από την άλλη; [Δίνονται στον Χάρη διάφορες επιλογές.]

ΧΑΡΗΣ: [Αφού δοκιμάσει διάφορα μικρά κομμάτια, βρίσκει το μισό] Να αυτό χωράει δύο φορές.

**Δραστηριότητα Γ5**

Δ: Τέλεια! Έφερα μαζί μου μια άλλη φοβερή μηχανή της κ. Διάνοιας! Η κυρία Διάνοια έφτιαξε για το ζαχαροπλάστη του γειτονικού χωριού μια καινούργια μηχανή. Της είχε πει εκείνος μια μέρα που είδε την πρώτη της μηχανή: «Κυρία Διάνοια πολύ θα ήθελα μια μηχανή σαν και την δική σας. Μία μηχανή που διπλασιάζει τις καραμέλες, ή μάλλον που τετραπλασιάζει τις καραμέλες. Μία να βάζω, τέσσερις να γίνονται! Δύο να βάζω, να γίνονται…»

ΚΩΣΤΑΣ:= Τρεις!

ΧΑΡΗΣ: =Εφτά!

Δ: =Ε, όσες είναι να γίνονται, τέλος πάντων.» Της είπε και συνέχισε: «Μπορείς να μου φτιάξεις μια τέτοια μηχανή; Και να ξέρεις, θα σε εφοδιάζω με παγωτό για όλη σου τη ζωή!» «Α, κύριε ζαχαροπλάστη», του είπε η κ. Διάνοια, «εγώ αύριο θα την έχω έτοιμη. Αλλά να ξέρεις, δε θα σου τη δώσω, αν δεν μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα βγάλει κάθε φορά». Έτσι είναι η κυρία Διάνοια, πειραχτήρι! Τι λέτε; Θέλετε να βοηθήσουμε τον ζαχαροπλάστη να πάρει τη μηχανή του και να δούμε και εμείς τι κάνεις επιτέλους αυτή η μηχανή;

**Έργο Γ.5.1**

Δ: Η μηχανή αυτή δουλεύει με καραμέλες. Έβαλε λοιπόν, μέσα στη μηχανή η κ. Διάνοια μία καραμέλα και έβγαλε από αυτή τέσσερις καραμέλες. [Δείχνουμε τις τέσσερις καραμέλες.] Αν βάλουμε δύο, πόσες καραμέλες λέτε να βγάλει; Πόσες φορές θα επαναλάβουμε τις δύο καραμέλες μέσα στη μηχανή;

ΧΑΡΗΣ: Δύο!

ΚΩΣΤΑΣ: Τέσσερις! Είπες τέσσερα τριπλάσιο.

ΧΑΡΗΣ: Α. τέσσερις! [Φτιάχνει τέσσερις ομάδες από δύο καραμέλες σαν και αυτές που της δόθηκαν.]

**Έργο Γ.5.2**

Δ: Για δείτε τώρα και κάτι ακόμα. Θα βάλω στη μηχανή αυτές τις καραμέλες [3 καραμέλες]. Πόσες λες Μαρία ότι θα βγάλει η μηχανή;

ΜΑΡΙΑ: Δε ξέρω!

Δ: Πόσες φορές θα τις επαναλάβει η μηχανή;

ΜΑΡΙΑ: Τετραπλάσιες.

Δ: Πόσες φορές δηλαδή;

ΜΑΡΙΑ: Τέσσερις. [Ακολουθεί τον τρόπο του Χάρη και φτιάχνει ακριβώς την ίδια ομάδα με καραμέλες 4 φορές. Τις μετράει]

Δ: Πόσες έχει;

ΜΑΡΙΑ: Δώδεκα.

**Έργο Γ.5.3**

Δ: Να βάλουμε τώρα δύο καραμέλες;

ΝΙΚΟΣ: Ναι. Θα τις κάνει τέσσερις φορές. [Επαναλαμβάνει τις ίδιες καραμέλες και μετράει]

Δ: Οκτώ.

**Δραστηριότητα Γ6**

**Έργο Γ.6.1**

Δ: Για δείτε τώρα πως δουλεύει η μηχανή και ανάποδα. Αν βάλω αυτές 4 καραμέλες από την άλλη μεριά, τη μεγάλη, τι πιστεύετε ότι θα βγάλει από εδώ [Δείχνουμε την αριστερή μεριά]

ΚΩΣΤΑΣ: Τις μισές.

Δ: Δηλαδή από τη μία πλευρά θα της επαναλαμβάνει τέσσερις φορές και από την άλλη θα τις χωρίζει δύο;

ΚΩΣΤΑΣ: Έ όχι!

ΧΑΡΗΣ: Δεν είναι δίκαιο.

ΚΩΣΤΑΣ: Σε τέσσερις φορές να μοιράσει.

Δ: Για να δούμε.

ΧΑΡΗΣ: Μία θα βγάλει. Να [χωρίζει τις καραμέλες σε τέσσερα σημεία στο πάτωμα.]

**Έργο Γ.6.2**

Δ: Πολύ ωραία. Και αν τώρα βάλω οκτώ καραμέλες;

ΜΑΡΙΑ: Ξανά θα μοιράσω σε τέσσερις ομάδες.

Δ: Δηλαδή;

ΜΑΡΙΑ: [Χωρίζει τις καραμέλες μοιράζοντας τες μία προς μία σε τέσσερις ομάδες.] Να δύο καραμέλες σε κάθε ομάδα.

Δ: Και πόσες ομάδες από δύο καραμέλες έχουμε;

ΝΙΚΟΣ, ΧΑΡΗΣ: Τέσσερις.

**Δραστηριότητα Γ7**

**Έργο Γ.7.1**

Δ: Για να σας δείξω και κάτι ακόμα. Η κυρία Διάνοια μας έφτιαξε και αυτή τη μηχανή για τα ζαχαρωτά. Έβαλα αυτό το ζαχαρωτό από τη μία μεριά και μου έβγαλε αυτό από την άλλη. Πόσες φορές λέτε να χωράει το μικρό ζαχαρωτό στο μεγάλο.

ΜΑΡΙΑ: Τέσσερις. Όπως και η καραμέλες.

Δ: Πως μπορώ να το δω αυτό;

ΜΑΡΙΑ: Έχεις άλλα μικρά κομματάκια τέτοια;

Δ: Ναι.

ΜΑΡΙΑ: Δώσε μου. [Το παιδί συνθέτει το μεγάλο ζαχαρωτό] Να τέσσερις φορές χωράει.

**Δραστηριότητα Γ8**

**Έργο Γ.8.1**

Δ: Πολύ ωραία! Για πάμε τώρα να σας δείξω τι γίνεται αν βάλουμε ένα ζαχαρωτό από τη μεγάλη πλευρά. Τι λέτε να μου βγάλει από την άλλη πλευρά;

ΚΩΣΤΑΣ: Θα το μοιράσει σε τέσσερα κομμάτια.

Δ: Για να δούμε.

ΚΩΣΤΑΣ: Να στο είπα.

Δ: Πως το ξέρεις ότι μοιράζει σε τέσσερα κομμάτια.

ΧΑΡΗΣ: Ε αυτό κάνουν αυτές οι μηχανές. Από τη μία το βγάζει τέσσερις φορές το ίδιο και από την άλλη το μοιράζει τέσσερις φορές.

Δ: Πολύ ωραία. [Η διαδικασία δεν συνεχίστηκε λόγω της κούρασης των παιδιών.

**Ημέρα 4η (Δ)**

Δ: Σήμερα έφερα μαζί μου μια τελευταία τρομερή μηχανή της κυρίας Διάνοιας! Θέλετε να δούμε τι κάνει;

**Δραστηριότητα Δ1**

**Έργο Δ.1.1.**

Δ: Η μηχανή αυτή δουλεύει με καραμέλες. Αν βάλω μέσα αυτή την καραμέλα θα μου βγάλει από την άλλη πλευρά τρεις καραμέλες.=

ΚΩΣΤΑΣ: Τριπλάσιο. Και άμα βάλεις δύο θα τις κάνει έξι.

Δ: Πώς το ξέρεις αυτό;

ΚΩΣΤΑΣ: Γιατί θα επαναλάβει δύο φορές το τρία.

ΧΑΡΗΣ: Όχι, τρεις φορές το δύο. Αφού δύο είναι οι καραμέλες.

**Έργο Δ.1.2.**

Δ: Μπράβο Χάρη. Θα επαναλάβει τρεις φορές τις δύο καραμέλες. Και να βάλουμε τρεις καραμέλες Νίκο;

ΝΙΚΟΣ: Θα βάλει τρεις φορές τις τρεις καραμέλες.

Δ: Για δείξε μας.

ΝΙΚΟΣ: [Φτιάχνει τις τρεις σειρές ίδιες με αυτή που του δόθηκε. Μετράει] 9

Δ: Μπράβο.

**Δραστηριότητα Δ2**

**Έργο Δ.2.1.**

Δ: Για να την γεμίσω εγώ πάλι με υλικό για να δούμε πως η μηχανή αυτή δουλεύει κι ανάποδα. Αν βάλω αυτές 3 καραμέλες από την άλλη μεριά, τη μεγάλη, τι πιστεύετε ότι θα βγάλει από εδώ [Δείχνουμε την αριστερή μεριά]

ΚΩΣΤΑΣ: Μια. Θα χωρίσει σε τρεις ομάδες.

ΧΑΡΗΣ: Και αν βάλω έξι θα βγάλει δύο.

Δ: Πάντα θα μοιράζει στις τρεις ομάδες;

Όλοι μαζί: Ναι!

Δ: Και τι θα δείχνει;

ΜΑΡΙΑ: Το μισό.

Δ: Όχι, πως λέγαμε το αδερφάκι του τριπλάσιου;

[Δεν απαντά κανείς.]

Δ: Το αδερφάκι του τριπλάσιου το ένα τρίτο δεν είναι;

Όλοι μαζί: Ναι.

Δ: Τι βγάζει δηλαδή η μηχανή;

Όλοι μαζί: Το ένα τρίτο!

**Δραστηριότητα Δ3**

**Έργο Δ.3.1.**

Δ: Για να σας δείξω τι κάνει αυτή η μηχανή με τα ζαχαρωτά παιδιά. Αν βάλω αυτό το ζαχαρωτό από αυτή την πλευρά.

ΚΩΣΤΑΣ: Και να βγάλει τριπλάσιο.

ΜΑΡΙΑ: Και από την άλλη να βγάλει το μεγάλο.

Δ: Μπράβο παιδιά! Μήπως μπορεί κάποιος να μου βρει το τριπλάσιο από αυτό το ζαχαρωτό;

ΧΑΡΗΣ: Εγώ. [Κάνει δοκιμές με διάφορα κομμάτια που τα μεταφέρει πάνω στο μεγάλο ζαχαρωτό μετρώντας πόσες φορές χωράνε.] Αυτό.

ΝΙΚΟΣ: Κυρία πότε θα ρθει ο εκτραπλάσιος;

Δ: Δηλαδή;

ΝΙΚΟΣ: Αυτός που τα κάνει έξι φορές.

[Τα παιδιά έδειξαν να έχουν συνηθίσει τη διαδικασία για αυτό και προχωρήσαμε στην αντίστροφη.]

**Δραστηριότητα Δ4**

**Έργο Δ.4.1.**

Δ: Πολύ ωραία! Για πάμε τώρα να σας δείξω τι γίνεται αν βάλουμε ένα ζαχαρωτό από τη μεγάλη πλευρά. Τι λέτε να μου βγάλει από την άλλη πλευρά;

ΝΙΚΟΣ: Θα το μοιράσει.

ΚΩΣΤΑΣ: Ναι τρεις φορές.

Δ: Ποιος θέλει να δοκιμάσει να μοιράσει αυτό το ζαχαρωτό.

ΜΑΡΙΑ: Εγώ. Έχεις μικρά κομματάκια;

Δ: Ναι.

ΜΑΡΙΑ: [Δοκιμάζει διάφορα κομμάτια μέχρι που βρίσκει αυτό που ταιριάζει τρεις φορές.]

Δ: Τέλεια.

[Η διαδικασία δεν επαναλήφθηκε καθώς τα παιδιά κατάφεραν να κατανοήσουν τη λειτουργία των μηχανών]