ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τμημα Μαθηματικων

Περικλής Παπίας

Στοχαστικη Αναλυση και μια εφαρμογη της στα Μαθηματικα Χρηματοοικονομικα

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2019

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

Μαθηματικά (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 4/7/2019 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Ιωάννης Γιαννούλης (Επιβλέπων)	Αναπληρωτής Καθηγητής
Αθανάσιος Γιαννακόπουλος	Καθηγητής
Κωνσταντίνος Ζωγράφος	Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Περικλής Παπίας

Ευχαριστιες

Με το τέλος της παρούσας Μεταπτυχιακής Διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ιωάννη Γιαννούλη, ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με αυτό το πολύ ενδιαφέρον θέμα. Οι παρατηρήσεις και οι συμβουλές του ήταν καθοριστικές για την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Αθανάσιο Γιαννακόπουλο, μέλος της επιτροπής μου, διότι μια ομιλία του, μου έδωσε το έναυσμα να ασχοληθώ με τη Στοχαστική Ανάλυση, καθώς και το τρίτο μέλος της επιτροπής Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Ζωγράφο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του.

Σε αυτή την προσπάθεια, ουσιαστικό ρόλο διαδραμάτισαν οι φίλοι μου. Ιδιαίτερα ο συνοδοιπόρος και συγκάτοικος Κώστας Δήμογλου και η Όλγα, της οποίας η συμπαράσταση ήταν αμείωτη.

Τέλος δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους γονείς μου Ελένη και Θεόδωρο και τον αδελφό μου Σωτήρη, ο οποίος είναι πραγματικά πρότυπο ανθρώπου για εμένα. Η ανιδιοτελής αγάπη τους, η αμείωτη συμπαράσταση, η κατανόηση και η πολύπλευρη στήριξη κατά την διάρκεια των σπουδών μου, μου έδινε δύναμη να συνεχίσω και να προσπαθώ πάντα για το καλύτερο.

Περιληψη

Σκοπός της διατριβής αυτής είναι η αυστηρή θεμελίωση στα πλαίσια της Μαθηματικής Ανάλυσης ορισμένων από τις βασικότερες έννοιες της Στοχαστικής Ανάλυσης και η παρουσίαση της πιο γνωστής, ίσως, εφαρμογής της στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά.

Για το σκοπό αυτό, αναφέρονται στο Πρώτο Κεφάλαιο οι βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Θεωρίας Μέτρου (συνήθως χωρίς απόδειξη, αλλά με σαφείς παραπομπές) πάνω στις οποίες στηρίζεται η Στοχαστική Ανάλυση. Στο Δεύτερο Κεφάλαιο, ορίζεται η έννοια της κίνησης Brown σε μία και σε περισσότερες διαστάσεις, αποδεικνύεται αναλυτικά η ύπαρξη τέτοιων στοχαστικών διαδικασιών και μελετώνται οι ιδιότητες των τροχιών δείγματός τους. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι αυτές είναι σχεδόν βέβαια συνεχείς, αλλά πουθενά διαφορίσιμες.

Στο Τρίτο Κεφάλαιο ορίζεται το Ολοκλήρωμα Itô ως προς μια κίνηση Brown και αποδεικνύονται, σε μία και περισσότερες διαστάσεις, ο Κανόνας του Γινομένου και ο Κανόνας της Αλυσίδας του Itô, θεμελιώνοντας έτσι τα βασικότερα εργαλεία του Λογισμού Itô.

Με χρήση αυτών, εισάγεται στο Τέταρτο Κεφάλαιο η έννοια της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης και αποδεικνύεται η ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί την κορύφωση του θεωρητικού, αναλυτικού μέρους της εργασίας.

Στο Πέμπτο Κεφάλαιο, μετά από μια πολύ σύντομη εισαγωγή κάποιων στοιχειωδών εννοιών των Μαθηματικών Χρηματοοικονομικών, με κυριότερες αυτές του arbitrage και του hedging, παρουσιάζεται η μέθοδος καθορισμού της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, ως ένα από τα απλούστερα παραδείγματα της χρήσης του Λογισμού Itô στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε ένα πρόβλημα τελικών και συνοριακών τιμών για μια ομογενή γραμμική Μερική Διαφορική Εξίσωση δεύτερης τάξης, παραβολικού τύπου, σε δύο μεταβλητές, την εξίσωση Black-Scholes, η αρχική τιμή της λύσης της οποίας είναι η ζητούμενη τιμή.

Κύρια πηγή και οδηγός για την παραπάνω ανάπτυξη του θέματος της διατριβής, αποτέλεσε το συνοπτικό έργο *An Introduction to Stochastic Differential Equations* του L.C. Evans, βλέπε [11], αλλά για μια πληρέστερη απόδειξη των πιο τεχνικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν και άλλα, αναλυτικά πιο αυστηρά, έργα θεμελίωσης του Λογισμού Itô, τα οποία και αναφέρονται στα αντίστοιχα σημεία.

ABSTRACT

The aim of the present thesis, titled *Stochastic Analysis and an application to Mathematical Finance*, is to establish rigorously, within the framework of Mathematical Analysis, some of the most basic notions of Stochastic Analysis and to present its, probably, best known application in Mathematical Finance.

To this end, the basic notions of Probability Theory and Measure Theory, upon which Stochastic Analysis is based, are presented in the First Chapter (mostly without proofs, but providing instead specific references). In the Second Chapter, the notion of Brownian motion, in one or several dimensions, is introduced, a proof of the existence of such stochastic processes is given, and the properties of their sample paths are studied. In particular, it is shown that these are almost surely continuous but nowhere differentiable.

In the Third Chapter, Itô's Integral with respect to a Brownian motion is defined and Itô's Product and Chain Rules are proven, in one and several dimensions, thus establishing the most fundamental tools of Itô's Calculus.

With their use, in the Fourth Chapter, the notion of a Stochastic Differential Equations is introduced and the existence and uniqueness of the solution to the corresponding initial value problem is proven. This chapter constitutes the culmination of the theoretic, analytic part of the thesis.

In the Fifth Chapter, after a very short introduction of some elementary notions of Mathematical Finance, most importantly of those of arbitrage and hedging, the method to determine the value of a European call option is presented, as one of the most simple examples for the use of Ito Calculus in Mathematical Finance. This method leads to a terminal and boundary value problem for a homogeneous linear Partial Differential Equation of second order and parabolic type in two variables, the Black-Scholes equation, the initial value of its solution being the sought-after value.

The main source and guide for the above exposition of the subject of the thesis has been the concise work *An Introduction to Stochastic Differential*

Equations by L.C. Evans, see [11], but for a more complete proof of the more technical results also other, analytically more rigorous, works concerning the foundation of Ito Calculus have been used, which are cited at the relevant places.

Περιεχομενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Προκαταρκτικα

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο αναφέρουμε απλώς, χωρίς αποδείξεις, κάποιες έννοιες και συμπεράσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, της Θεωρίας Μέτρου και της Πραγματικής Ανάλυσης, πάνω στις οποίες στηρίζεται η Στοχαστική Ανάλυση. Σχετικά με τα στοιχεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων, αυτά προέκυψαν κυρίως από την επισκόπηση του βιβλίου *An Introduction to Stochastic Differential Equations* του Evans (βλέπε [11, Κεφάλαιο 2]), πάνω στο οποίο βασίστηκε ως κύρια πηγή αναφοράς και όλη η εργασία. Επίσης, συμβουλευτήκαμε και τα βιβλία των Γιαννακόπουλου (βλέπε [9, Κεφάλαιο 1]) και Ζωγράφου (βλέπε [26]). Τέλος, σχετικά με τα της Θεωρίας Μέτρου και της Πραγματικής Ανάλυσης συμβουλευτήκαμε τα βιβλία των Γιαννακόπουλου (βλέπε [9, Κεφάλαιο 1]), Evans (βλέπε [12]), Καρακώστα (βλέπε [18]), Κουμουλλή-Νεγρεπόντη (βλέπε [19]) και Rudin (βλέπε [25]).

1.1 Βασικά στοιχεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Σε γενικά πλαίσια η Θεωρία Πιθανοτήτων οικοδομεί μοντέλα για την περιγραφή και την μελέτη φαινομένων, τα αποτελέσματα των οποίων δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν με ακρίβεια, αλλά παρουσιάζουν κάποιου είδους τυχαιότητα.

Τυχαίο πείραμα είναι μια φυσική διαδικασία της καθημερινότητας, η οποία χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό παρατηρούμενων αποτελεσμάτων και το τελικό της αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα.
Επίσης, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος ονομάζεται **δειγματικός χώρος**.
Σε όλη την εργασία θα συμβολίζουμε τον δειγματικό χώρο με το σύμβολο Ω.

Ορισμός 1.1.1. *Ως* ***σ-άλγεβρα*** *ορίζουμε μια συλλογή $\mathcal{U}$ υποσυνόλων του Ω, με τις εξής ιδιότητες:*

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{U}$.

(ii) *Αν* $A \in \mathcal{U}$, *τότε* $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{U}$.

(iii) *Αν* $A_n \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, *τότε* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω* $\mathcal{U}$ *μια* σ*-άλγεβρα υποσυνόλων του* Ω. *Η συνολοσυνάρτηση* $P : \mathcal{U} \to [0,1]$ *ονομάζεται* ***μέτρο πιθανότητας****, αν ικανοποιεί τα αξιώματα:*

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \ \forall \ A \in \mathcal{U}$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) *Αν* $A_i \in \mathcal{U}, \ i \in \mathbb{N}$, *με* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *για* $i \neq j$, *τότε*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Πρόταση 1.1.3. *Κάποιες πολύ βασικές ιδιότητες ενός μέτρου πιθανότητας είναι οι εξής:*

(i) *Αν* $A, B \in \mathcal{U}$, *με* $A \subset B$, *τότε*

$$P(A) \leq P(B).$$

(ii) $P(\emptyset) = 0$.

(iii) *Αν* $A_n \in \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, *τότε*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ορισμός 1.1.4. *Τα αξιώματα του Ορισμού 1.1.2 λέγονται και* ***αξιώματα του Kolmogorov*** *και η τριάδα* $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ *λέγεται* ***χώρος πιθανότητας****.*

Παρατηρήσεις 1.1.5.

1. *Κάθε σύνολο* $A \in \mathcal{U}$ *ονομάζεται* ***ενδεχόμενο (ή γεγονός)*** *και κάθε σημείο* $\omega \in \Omega$ ***σημείο δείγματος (ή δειγματικό σημείο)****.*
2. *$P(A)$ καλούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A.*

3. *Μια ιδιότητα που είναι αληθής εκτός από ένα ενδεχόμενο μηδενικής πιθανότητας, λέμε ότι πραγματοποιείται **σχεδόν βέβαια** (θα γράφουμε σ.β.).*

Ορισμός 1.1.6. *Ορίζουμε τη **συλλογή των Borel** υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, ως τη μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, η οποία περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με τη συνήθη (Ευκλείδεια) νόρμα. Θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Αν ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$, τότε η τριάδα $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P)$ θα είναι ένας χώρος πιθανότητας, όπου το $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ περιέχει όλα τα ενδεχόμενα του $\mathbb{R}^n$, στα οποία μπορούμε να προσδώσουμε μια πιθανότητα. Επίσης, μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, περιέχει όλα τα «καλά» υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.1.7. *Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας. Η απεικόνιση*

$$\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

*ονομάζεται (n-διάστατη) **τυχαία μεταβλητή**, αν για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε ότι*

$$\overline{X}^{-1}(B) \in \mathcal{U}. \tag{1.1}$$

Ισοδύναμα λέμε ότι η $\overline{X}$ είναι $\mathcal{U}$-μετρήσιμη.

Σημειώνουμε, ότι η τυχαία μεταβλητή παίζει τον ρόλο της μετρήσιμης συνάρτησης της γενικής Θεωρίας Μέτρου. Επίσης, γράφοντας $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θα αναφερόμαστε στις πραγματικές τυχαίες μεταβλητές (χωρίς παύλα πάνω από το X).

Παράδειγμα 1.1.8. *Ας θεωρήσουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ και ένα ενδεχόμενο $A \in \mathcal{U}$. Τότε η συνάρτηση*

$$\mathcal{X}_A(\omega) = 1_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

*είναι τυχαία μεταβλητή. Η τυχαία μεταβλητή αυτή ονομάζεται **δείκτρια συνάρτηση (indicator function)** του συνόλου A.*

Παρατήρηση 1.1.9. *Η τυχαία μεταβλητή $\overline{X}$ είναι μια αντιστοίχιση μεταξύ των σημείων δείγματος και του Ευκλείδειου χώρου. Η τιμή που δίνουμε σε κάθε σημείο δείγματος δεν προκύπτει από μια προκαθορισμένη διαδικασία, αλλά εξαρτάται από τη φύση του τυχαίου πειράματος. Το σημαντικότερο είναι ότι η τυχαία* *μεταβλητή δεν είναι ένα εργαλείο απλοποιημένης περιγραφής ενδεχομένων, αλλά και ένα εργαλείο υπολογισμού πιθανοτήτων. Έτσι, η ιδιότητα* (1.1) *μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε την* $P\left(\overline{X}^{-1}(B)\right)$ *ως την πιθανότητα η τιμή* $\overline{X}(\omega)$ *του σημείου δείγματος* ω *να ανήκει στο* B*, δηλαδή*

$$P(\overline{X} \in B) := P\left(\{\omega \in \Omega : \overline{X}(\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}\right).$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της τυχαίας μεταβλητής και τη σημασία της ιδιότητας (1.1), παραθέτουμε το επόμενο παράδειγμα μιας πραγματικής διακριτής τυχαίας μεταβλητής, το οποίο δανειστήκαμε από το βιβλίο [26], Παράδειγμα 3.1.6, σελ. 83-85.

Παράδειγμα 1.1.10. *Έστω* Y *το κέρδος ενός φοιτητή που απαντάει στην τύχη σε τρεις ερωτήσεις. Κερδίζει μία μονάδα για κάθε σωστή απάντηση, ενώ χάνει μία μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Άρα, ο δειγματικός χώρος* Ω *στην περίπτωση μας είναι ο*

$$\Omega := \{\Lambda\Lambda\Lambda,\Lambda\Lambda\Sigma,\Lambda\Sigma\Lambda,\Sigma\Lambda\Lambda,\Sigma\Sigma\Lambda,\Sigma\Lambda\Sigma,\Lambda\Sigma\Sigma,\Sigma\Sigma\Sigma\},$$

όπου Σ*=σωστή απάντηση και* Λ*=λάθος απάντηση. Συνεπώς, από τα δεδομένα του προβλήματος, είναι εύλογο να δώσουμε στην τυχαία μεταβλητή* Y *τις εξής τιμές:*

$$\begin{gathered} Y(\Lambda\Lambda\Lambda) = -3, \\ Y(\Lambda\Lambda\Sigma) = Y(\Lambda\Sigma\Lambda) = Y(\Sigma\Lambda\Lambda) = -1, \\ Y(\Sigma\Sigma\Lambda) = Y(\Sigma\Lambda\Sigma) = Y(\Lambda\Sigma\Sigma) = 1, \\ Y(\Sigma\Sigma\Sigma) = 3. \end{gathered}$$

Οπότε, όταν αναζητούμε για παράδειγμα, την πιθανότητα $Y = 3$*, εννοούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο φοιτητής να έχει απαντήσει σωστά και στις τρεις ερωτήσεις (δηλαδή του ενδεχομένου* $\Sigma\Sigma\Sigma$*). Αν θέλουμε να την υπολογίσουμε, είναι*

$$P(Y = 3) = P(\Sigma\Sigma\Sigma) = \frac{1}{8}.$$

Τώρα, ας στραφούμε στο ενδεχόμενο

$$A := \{\text{ο φοιτητής να κερδίσει}\}$$

και στην πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού. Αυτή είναι

$$\begin{aligned} P(A) &= P(Y = 1 \text{ ή } Y = 3) \\ &= P(Y(\Sigma\Sigma\Lambda) = Y(\Sigma\Lambda\Sigma) = Y(\Lambda\Sigma\Sigma) = 1 \text{ ή } Y(\Sigma\Sigma\Sigma) = 3) \\ &= P(\Sigma\Sigma\Lambda,\Sigma\Lambda\Sigma,\Lambda\Sigma\Sigma,\Sigma\Sigma\Sigma) \\ &= P\left(Y^{-1}(\{1,3\})\right). \end{aligned}$$

Άρα, για να έχει νόημα η τελευταία πιθανότητα και να μπορεί να υπολογιστεί, πρέπει η αντίστροφη εικόνα του $\{1,3\}$ μέσω της Y να είναι ενδεχόμενο, δηλαδή στοιχείο της σ-άλγεβρας $\mathcal{U}$ υποσυνόλων του Ω. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτό ισχύει πάντα, καθώς ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένο σύνολο. Σε υπεραριθμήσιμους δειγματικούς χώρους θέλει μεγάλη προσοχή. Γι΄ αυτό είναι τόσο σημαντική η ιδιότητα (1.1) του ορισμού.

Στα επόμενα όταν δεν αναφέρεται ρητά κάποιος χώρος πιθανότητας, θα θεωρείται ότι αυτός είναι ο $(\Omega, \mathcal{U}, P)$.

Λήμμα 1.1.11. *Έστω $\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαία μεταβλητή. Τότε η*

$$\mathcal{U}(\overline{X}) := \{\overline{X}^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

είναι σ-άλγεβρα. Μάλιστα, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία η $\overline{X}$ είναι μετρήσιμη.

Ορισμός 1.1.12. *Η σ-άλγεβρα $\mathcal{U}(\overline{X})$ ονομάζεται **παραγόμενη σ-άλγεβρα** της $\overline{X}$ ή, διαφορετικά, σ-άλγεβρα που παράγεται από τη $\overline{X}$.*

Η παραγόμενη σ-άλγεβρα είναι πολύ σημαντική καθώς περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με τις πιθανότητες των ενδεχομένων για τα σημεία δείγματος των οποίων η $\overline{X}$ παίρνει τις εκάστοτε τιμές της. Ιδιαίτερα χρήσιμο για τον χαρακτηρισμό των παραγόμενων σ-αλγεβρών είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.1.13. ***(Doob-Dynkin)*** *Έστω $\overline{X}, \overline{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ δύο τυχαίες μεταβλητές. Τότε η $\overline{Y}$ είναι $\mathcal{U}(\overline{X})$-μετρήσιμη (δηλαδή μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα που παράγεται από τη $\overline{X}$) αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) έτσι ώστε*

$$\overline{Y} = \Phi(\overline{X}).$$

Συμβολισμός 1.1.14. *Έστω $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\overline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε γράφοντας*

$$x \leq y,$$

θα εννούμε

$$x_i \leq y_i,$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Ορισμοί 1.1.15. *Έστω $\overline{X}, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαίες μεταβλητές.*

(i) *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $F_{\overline{X}} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, *ως*

$$F_{\overline{X}}(\overline{x}) := P(\overline{X} \leq \overline{x}),$$

για κάθε $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. *Αυτή ονομάζεται* ***(αθροιστική) συνάρτηση κατανομής*** *της* $\overline{X}$.

(ii) *Επίσης, ορίζουμε τη συνάρτηση* $F_{\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n} : (\mathbb{R}^n)^n \to [0,1]$, *ως*

$$F_{\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) := P(\overline{X}_1 \leq \overline{x}_1,\ldots,\overline{X}_n \leq \overline{x}_n),$$

για κάθε $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^n$, *με* $i = 1,\ldots,n$. *Αυτή καλείται* ***από κοινού συνάρτηση κατανομής*** *των* $\overline{X}_i,\ i = 1,\ldots,n$.

Ορισμός 1.1.16. *Οι τυχαίες μεταβλητές* $\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n,\ldots$ *καλούνται* ***ισόνομες (identically distributed)***, *αν*

$$F_{\overline{X}_1} = F_{\overline{X}_2} = \cdots = F_{\overline{X}_n} = \cdots .$$

Ορισμός 1.1.17. *Έστω* $\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *τυχαία μεταβλητή. Αν υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση* $f_{\overline{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *έτσι ώστε*

$$F_{\overline{X}}(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\overline{X}}(y_1,\ldots,y_n)dy_n\cdots dy_1,$$

τότε αυτή ονομάζεται ***συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*** *της* $\overline{X}$.

Παρατήρηση 1.1.18. *Από τα παραπάνω εξάγουμε το γενικό συμπέρασμα*

$$P(\overline{X} \in B) = \int_B f_{\overline{X}}(\overline{x})d\overline{x} \quad \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

το οποίο συνδέει την πιθανότητα με ένα σύνηθες (πολλαπλό) ολοκλήρωμα. Οπότε, αυτός ο τύπος μας βοηθάει στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.1.19. *Μια τυχαία μεταβλητή* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται* ***απλή τυχαία μεταβλητή***, *αν*

$$X = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i},$$

όπου $A_i \in \mathcal{U}$ *και* $a_i \in \mathbb{R}$.

Ορισμοί 1.1.20. *(i) Για μια απλή τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$, ορίζουμε το (κατά Lebesgue)* ***ολοκλήρωμα*** *της X, ως*

$$\int_\Omega X dP := \sum_{i=1}^{k} a_i P(A_i).$$

(ii) Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μη αρνητική τυχαία μεταβλητή (δηλαδή $P(\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 0) = 1$, το οποίο σημαίνει ότι για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $X(\omega) \geq 0$), ορίζουμε το ολοκλήρωμά της, ως

$$\int_\Omega X dP := \sup_{Y \leq X} \int_\Omega Y dP,$$

όπου Y είναι απλές τυχαίες μεταβλητές.

Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών έχουμε:

Ορισμοί 1.1.21. *(i) Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Θέτουμε $X^+ := \max(X, 0)$ και $X^- := \max(-X, 0)$, έτσι ώστε*

$$X = X^+ - X^- \quad \text{και} \quad |X| = X^+ + X^-.$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της X, ως

$$\int_\Omega X dP := \int_\Omega X^+ dP - \int_\Omega X^- dP,$$

υπό την προϋπόθεση τουλάχιστον ένα από τα δύο ολοκληρώματα στα δεξιά να είναι πεπερασμένο, αποφεύγοντας έτσι τις απροσδιοριστίες, αλλά επιτρέποντας τις «τιμές» $\pm\infty$.

(ii) Αν $\overline{X} = (X^1, X^2, \ldots, X^n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαία μεταβλητή, τότε το ολοκλήρωμά της ορίζεται ανά συντεταγμένη, δηλαδή

$$\int_\Omega \overline{X} dP := \left(\int_\Omega X^1 dP, \int_\Omega X^2 dP, \cdots, \int_\Omega X^n dP \right).$$

Παρατήρηση 1.1.22. *Εάν, αντί για τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ έχουμε έναν οποιοδήποτε χώρο μέτρου $(\Omega', \mathfrak{M}, \mu)$ και αντί για μια τυχαία μεταβλητή έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμά της ως προς μ, ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.*

Ορισμός 1.1.23. *Η* ***αναμενόμενη τιμή (ή μέση τιμή)*** *μιας τυχαίας μεταβλητής $\overline{X}$ ορίζεται ως*

$$E(\overline{X}) := \int_{\Omega} \overline{X} dP.$$

Ορισμός 1.1.24. *Η* ***διακύμανση*** *μιας τυχαίας μεταβλητής $\overline{X}$ ορίζεται ως*

$$V(\overline{X}) := \int_{\Omega} |\overline{X} - E(\overline{X})|^2 dP.$$

Παρατήρηση 1.1.25. *Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, προκύπτει η γνωστή σχέση*

$$V(\overline{X}) = E\left(|\overline{X}|^2\right) - |E(\overline{X})|^2.$$

Πρόταση 1.1.26. *Έστω $\overline{X}$ τυχαία μεταβλητή, για την οποία ορίζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\overline{X}}$. Τότε*

$$E(\overline{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{x} f_{\overline{X}}(\overline{x}) d\overline{x},$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$V(\overline{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{x} - E(\overline{X})|^2 f_{\overline{X}}(\overline{x}) d\overline{x}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό, καθώς μας βοηθάει να υπολογίζουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση, ως ένα σύνηθες (πολλαπλό) ολοκλήρωμα πάνω από το $\mathbb{R}^n$.

Ορισμοί 1.1.27. *(i) Αν η τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

τότε λέμε ότι η X ακολουθεί ***κανονική κατανομή*** *με μέση τιμή m και διακύμανση σ^2, το οποίο συμβολίζουμε με $X \sim N(m, \sigma^2)$.*

(ii) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{\overline{X}}(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det C}} e^{\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{m})^T C^{-1}(\overline{x}-\overline{m})},$$

όπου $\overline{m} \in \mathbb{R}^n$ και C συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε, όμοια λέμε πως η $\overline{X}$ ακολουθεί ***πολυδιάστατη κανονική κατανομή*** *με μέση τιμή $\overline{m}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων C, το οποίο συμβολίζουμε με $\overline{X} \sim N(\overline{m}, C)$.*

Στη συνέχεια, αναφέρουμε μια ανισότητα που συνδέει την πιθανότητα με την μέση τιμή.

Πρόταση 1.1.28. ***(Ανισότητα Chebyshev)*** *Έστω $\overline{X}$ τυχαία μεταβλητή και $p \in [1, \infty)$. Τότε*

$$P(|\overline{X}| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|\overline{X}|^p),$$

για κάθε $\lambda > 0$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$E\left(|\overline{X}|^p\right) = \int_{\Omega} |\overline{X}|^p dP \geq \int_{\{|\overline{X}| \geq \lambda\}} |\overline{X}|^p dP \geq \lambda^p P(|\overline{X}| \geq \lambda).$$

□

Παραθέτουμε στη συνέχεια την έννοια της ανεξαρτησίας μεταξύ ενδεχομένων και τυχαίων μεταβλητών και αναφέρουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα που είναι βοηθητικά στα επόμενα.

Ορισμός 1.1.29. *Έστω δύο ενδεχόμενα A, B με $P(B) > 0$. Η* ***δεσμευμένη (ή υπο συνθήκη) πιθανότητα του A δοθέντος B****, συμβολίζεται με $P(A|B)$ και ορίζεται ως*

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Παρατήρηση 1.1.30. *Το κίνητρο που μας οδήγησε στον παραπάνω ορισμό είναι το εξής: Ξεκινήσαμε με έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ και δύο ενδεχόμενα A, B, τα οποία ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\mathcal{U}$. Φτιάχνοντας τώρα έναν νέο χώρο πιθανότητας*

$$\left(\tilde{\Omega} := B,\ \tilde{\mathcal{U}} := \{C \cap B : C \in \mathcal{U}\},\ \tilde{P} := \frac{P}{P(B)}\right),$$

παρατηρούμε ότι $\tilde{P}(\tilde{\Omega}) = 1$. Έτσι, η πιθανότητα $\omega \in A$ δοθέντος ότι $\omega \in B$ είναι

$$\tilde{P}(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ορισμός 1.1.31. *Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται* ***ανεξάρτητα****, αν*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ο ορισμός είναι απόλυτα λογικός, αφού σύμφωνα και με τον Ορισμό 1.1.29, αν τα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος B ισούται με την πιθανότητα του A, $P(A|B) = P(A)$. Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό στην περίπτωση που έχουμε περισσότερα ενδεχόμενα, σε σ-άλγεβρες και σε τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 1.1.32. *Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ενδεχόμενα. Τα ενδεχόμενα αυτά λέγονται* ***ανεξάρτητα****, αν για κάθε υποσύνολο δεικτών $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ του $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, ισχύει*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, για την ανεξαρτησία περισσότερων των δύο ενδεχομένων δεν αρκεί μόνο η πιθανότητα της τομής τους να ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους, αλλά θα πρέπει η ιδιότητα αυτή να ισχύει για κάθε υποσύνολο του αρχικού συνόλου ενδεχομένων.

Ορισμός 1.1.33. *Έστω $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}$ σ-άλγεβρες, με $i \in \mathbb{N}$. Οι $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{\infty}$ καλούνται* ***ανεξάρτητες****, αν για όλες τις επιλογές $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ και για όλα τα ενδεχόμενα $A_{k_i} \in \mathcal{U}_{k_i}$ ισχύει*

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_m}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_m}).$$

Ορισμός 1.1.34. *Έστω $\overline{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$, τυχαίες μεταβλητές. Οι τυχαίες μεταβλητές αυτές καλούνται* ***ανεξάρτητες****, αν για κάθε $k \geq 2$ και για οποιαδήποτε επιλογή συνόλων Borel $B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$P(\overline{X}_1 \in B_1, \ldots, \overline{X}_k \in B_k) = P(\overline{X}_1 \in B_1) \cdots P(\overline{X}_k \in B_k).$$

Όπως καταλαβαίνουμε, αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι οι παραγόμενες σ-άλγεβρες $\{\mathcal{U}(\overline{X}_i)\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες.

Πρόταση 1.1.35. *Έστω $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{m+n}$ k-διάστατες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, $f : (\mathbb{R}^k)^n \to \mathbb{R}$ και $g : (\mathbb{R}^k)^m \to \mathbb{R}$. Τότε οι τυχαίες μεταβλητές*

$$Y = f(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n) \quad \text{και} \quad Z = g(\overline{X}_{n+1}, \ldots, \overline{X}_{n+m})$$

είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 1.1.36. *Οι τυχαίες μεταβλητές $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m$ είναι ανεξάρτητες, αν και μόνο αν*

$$F_{\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_m}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m) = F_{\overline{X}_1}(\overline{x}_1) \cdots F_{\overline{X}_m}(\overline{x}_m),$$

για κάθε $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^n$, με $i = 1, \ldots, m$.
Επίσης, αν οι τυχαίες μεταβλητές έχουν συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με τη

$$f_{\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_m}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m) = f_{\overline{X}_1}(\overline{x}_1) \cdots f_{\overline{X}_m}(\overline{x}_m),$$

για κάθε $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^n$, με $i = 1, \ldots, m$.

Θεώρημα 1.1.37. *Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έτσι ώστε $E(|X_i|)$ πεπερασμένη για κάθε $i = 1, \ldots, n$, τότε $E(|X_1 \cdots X_n|)$ πεπερασμένη και*

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n).$$

Θεώρημα 1.1.38. *Αν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με $V(X_i)$ πεπερασμένη για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, τότε*

$$V(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1V(X_1) + \cdots + a_nV(X_n).$$

Στη συνέχεια εισάγουμε την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης, η οποία είναι αρκετά χρήσιμη στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Ορισμός 1.1.39. *Έστω $\overline{X}$ τυχαία μεταβλητή. Τότε*

$$\phi_{\overline{X}}(\lambda) := E(e^{i\lambda^T \overline{X}}), \ \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

*είναι η **χαρακτηριστική συνάρτηση** της $\overline{X}$.*

Παράδειγμα 1.1.40. *Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(m, \sigma^2)$, τότε*

$$\phi_X(\lambda) = e^{im\lambda - \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λήμμα 1.1.41. *Έστω X τυχαία μεταβλητή. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει*

$$\phi^{(k)}(0) = i^k E(X^k).$$

Πρόταση 1.1.42. *Αν $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$\phi_{\overline{X}_1+\cdots+\overline{X}_n}(\lambda) = \phi_{\overline{X}_1}(\lambda) \cdots \phi_{\overline{X}_n}(\lambda).$$

Θεώρημα 1.1.43. *Έστω $\overline{X}, \overline{Y}$ τυχαίες μεταβλητές, έτσι ώστε*

$$\phi_{\overline{X}}(\lambda) = \phi_{\overline{Y}}(\lambda) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε

$$F_{\overline{X}}(\overline{x}) = F_{\overline{Y}}(\overline{x}) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Πιο πάνω, ορίσαμε τη δεσμευμένη πιθανότητα μέσω του χώρου πιθανότητας

$$\left(\tilde{\Omega} := B,\ \tilde{\mathcal{U}} := \{C \cap B : C \in \mathcal{U}\},\ \tilde{P} := \frac{P}{P(B)}\right).$$

Με τη βοήθεια αυτού του χώρου και του Ορισμού 1.1.23 δίνεται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 1.1.44. *Έστω X τυχαία μεταβλητή και B ένα ενδεχόμενο, με $P(B) > 0$. Τότε*

$$E(X|B) := \frac{1}{P(B)} \int_B X dP \left(= \int_{\tilde{\Omega}} X d\tilde{P} \right)$$

είναι η ***δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δοθέντος του ενδεχομένου B****.*

Το ενδιαφέρον είναι, πώς θα ορίσουμε λογικά τη δεσμευμένη μέση τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής δοθείσης μιας σ-άλγεβρας ή μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 1.1.45. *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Τότε ορίζουμε την $\mathcal{U}(Y)$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή $E(X|Y)$, ως αυτήν για υην οποία ισχύει*

$$\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP \quad \forall\, A \in \mathcal{U}(Y).$$

Η τυχαία μεταβλητή $E(X|Y)$ ονομάζεται ***δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Y****.*

Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια τυχαία μεταβλητή είναι μοναδική μέχρι συνόλων μηδενικής πιθανότητας. Επίσης, παρατηρούμε ότι το σημαντικό δεν είναι οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής Y, αλλά η παραγόμενη σ-άλγεβρα $\mathcal{U}(Y)$. Αυτό μας δίνει το κίνητρο για τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.1.46. *Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ και μια τυχαία μεταβλητή X, για την οποία ισχύει $E(|X|) < \infty$. Τότε, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή*

$$Z := E(X|\mathcal{V}),$$

ως αυτήν με τις εξής ιδιότητες:

(i) Z *είναι* $\mathcal{V}$*-μετρήσιμη.*

(ii) $\int_A X dP = \int_A Z dP \quad \forall\ A \in \mathcal{V}$.

Η τυχαία μεταβλητή $Z = E(X|\mathcal{V})$ ονομάζεται ***δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δοθείσης της σ-άλγεβρας*** $\mathcal{V}$.

Σχετικά με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής δοθείσης μιας σ-άλγεβρας ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.47. *Έστω X ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Τότε για καθε σ-άλγεβρα $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X|\mathcal{V})$ υπάρχει και είναι μοναδική μέχρι $\mathcal{V}$-μετρήσιμων συνόλων μηδενικής πιθανότητας.*

Παρατήρηση 1.1.48. *Από τον Ορισμό 1.1.46 προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $E(X|Y) = E(X|\mathcal{U}(Y))$.

(ii) $E(E(X|\mathcal{V})) = E(X)$.

(iii) $E(X) = E(X|\mathcal{W})$, *όπου* $\mathcal{W} := \{\emptyset, \Omega\}$ *η τετριμμένη σ-άλγεβρα.*

Παρατήρηση 1.1.49. *Μια εύκολη σχέση που συνδέει την πιθανότητα με τη μέση τιμή είναι η εξής:*

$$E(1_A) = P(A),$$

όπου A τυχόν ενδεχόμενο. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει το κίνητρο για τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.1.50. *Αν $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ σ-άλγεβρα, τότε ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $P(A|\mathcal{V})$, ως*

$$P(A|\mathcal{V}) := E(1_A|\mathcal{V}),$$

για κάθε $A \in \mathcal{U}$. Αυτή ονομάζεται ***δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) πιθανότητα του ενδεχομένου A δοθείσης της σ-άλγεβρας*** $\mathcal{V}$.

Στην εργασία αυτή θα χρειαστούμε τις ακόλουθες ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής δοθείσης μιας σ-άλγεβρας.

Πρόταση 1.1.51. ***(Ιδιότητες δεσμευμένης μέσης τιμής)***
Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ δύο ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

(i) Έστω X $\mathcal{V}$-μετρήσιμη. Τότε

$$E(X|\mathcal{V}) = X \quad \sigma.\beta.$$

(ii) Αν a, b πραγματικές σταθερές, τότε

$$E(aX + bY|\mathcal{V}) = aE(X|\mathcal{V}) + bE(Y|\mathcal{V}) \quad \sigma.\beta.$$

(iii) Έστω X $\mathcal{V}$-μετρήσιμη και $E(|XY|) < \infty$. Τότε

$$E(XY|\mathcal{V}) = XE(Y|V) \quad \sigma.\beta.$$

(iv) Αν X ανεξάρτητη της $\mathcal{V}$ (δηλαδή $\mathcal{U}(X)$ ανεξάρτητη της $\mathcal{V}$), τότε

$$E(X|\mathcal{V}) = E(X) \quad \sigma.\beta.$$

(v) Έστω σ-άλγεβρα $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Τότε

$$E(X|\mathcal{W}) = E(E(X|\mathcal{V})|\mathcal{W}) = E(E(X|\mathcal{W})|\mathcal{V}) \quad \sigma.\beta.$$

*Αυτή η ιδιότητα πολλές φορές αποκαλείται και **tower property**.*

(vi) Αν $P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)) = 1$ (δηλαδή $X \leq Y$ σ.β.) τότε

$$E(X|\mathcal{V}) \leq E(Y|\mathcal{V}) \quad \sigma.\beta.$$

Μια ακόμα χρήσιμη ανισότητα είναι η εξής:

Πρόταση 1.1.52. ***(Δεσμευμένη ανισότητα Jensen)*** *Έστω $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, έτσι ώστε $E(|\Phi(X)|) < \infty$. Τότε*

$$\Phi(E(X|\mathcal{V})) \leq E(\Phi(X)|\mathcal{V}).$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [8], Θεώρημα 9.1.4, σελ. 302.

1.2 Βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Μέτρου

Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και $1 \leq p < \infty$.

Ορισμός 1.2.1. *Το σύνολο όλων των τυχαίων μεταβλητών $\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, για τις οποίες ισχύει*

$$E(|\overline{X}|^p) < \infty,$$

αποτελεί έναν χώρο Banach με νόρμα

$$\| \cdot \|_{L^p(\Omega)} := [E(| \cdot |^p)]^{1/p} = \left(\int_\Omega | \cdot |^p \right)^{1/p},$$

τον οποίο θα συμβολίζουμε με $L^p(\Omega)$.

Παρατηρήσεις 1.2.2. *1. Στην ειδική περίπτωση, όπου $p = 2$, η νόρμα παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο και συνεπώς ο $L^2(\Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert.*

2. Με $| \cdot |$ συμβολίζουμε στην παρούσα εργασία την Ευκλείδεια νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ (και άρα και την απόλυτη τιμή στο $\mathbb{R}$). Έτσι για μια τυχαία μεταβλητή $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n) := \Omega \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$|\overline{X}(\omega)|^2 := \sum_{i=1}^n (X_i(\omega))^2 \quad \text{και} \quad |\overline{X}|^2 := \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Ακολουθούν δύο γνωστές ανισότητες της Θεωρίας Μέτρου και της Πραγματικής Ανάλυσης.

Θεώρημα 1.2.3. ***(Ανισότητα Hölder)*** *Έστω X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές και $p, q > 1$, έτσι ώστε $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Τότε*

$$E(|XY|) \leq [E(|X|^p)]^{1/p} [E(|Y|^q)]^{1/q}.$$

Στην ειδική περίπτωση $p = q = 2$, αυτή είναι η ανισότητα ***Cauchy-Schwarz****.*

Θεώρημα 1.2.4. ***(Ανισότητα Minkowski)*** *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές και $p \geq 1$. Τότε*

$$[E(|X + Y|^p)]^{1/p} \leq [E(|X|^p)]^{1/p} + [E(|Y|^p)]^{1/p}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα βασικά είδη σύγκλισης που χρησιμοποιούμε στη Θεωρία Μέτρου και τη Θεωρία Πιθανοτήτων και αναφέρουμε τα κλασικά συμπεράσματα για τις μεταξύ τους σχέσεις.

Ορισμός 1.2.5. *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X^n* ***συγκλίνει σχεδόν βέβαια*** *σε μια τυχαία μεταβλητή X (συμβολικά: $X^n \xrightarrow{n\to\infty} X$ σ.β.) αν*

$$P\left(\omega\in\Omega : X^n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)\right) = 1.$$

Ορισμός 1.2.6. *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X^n* ***συγκλίνει κατά πιθανότητα*** *στην τυχαία μεταβλητή X, αν*

$$\forall\, \epsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} P(\omega\in\Omega : |X^n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

Ορισμός 1.2.7. *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X^n συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή X στον χώρο $L^p(\Omega)$, αν*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X^n - X|^p) = 0.$$

Για $p = 1$ είναι γνωστή ως ***σύγκλιση κατά μέση τιμή***.

Παρατήρηση 1.2.8. *Μπορεί να αποδείξει κανείς (βλέπε π.χ. [9], σελ. 37 και [19] Προτάσεις 8.3 και 11.19) ότι οι σχέσεις που συνδέουν αυτές τις συγκλίσεις είναι:*

$$\text{σύγκλιση στον } L^p(\Omega),\ 1\le p<\infty \Longrightarrow \text{σύγκλιση κατά πιθανότητα}$$

και

$$\text{σύγκλιση σ.β.} \Longrightarrow \text{σύγκλιση κατά πιθανότητα.}$$

Αξίζει να αναφέρουμε πως υπάρχουν και άλλα είδη σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών, όπως π.χ. η σύγκλιση κατά κατανομή, οι οποίες όμως δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Σημειώνουμε επίσης, ότι οι πιο πάνω συνεπαγωγές γενικά δεν αντιστρέφονται. Ειδικότερα για τη δεύτερη συνεπαγωγή ισχύει μια ασθενέστερη αντιστροφή. Για να την αποδείξουμε θα εισάγουμε την ακόλουθη πολύ σημαντική έννοια, καθώς και το Λήμμα Borel-Cantelli, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί αρκετές φορές.

Ορισμός 1.2.9. *Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία ενδεχομένων. Τότε το ενδεχόμενο*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

ονομάζεται "$\mathbf{A_n}$ ***συμβαίνει άπειρες φορές****"και συμβολίζεται με "A_n α.φ.".*

Λήμμα 1.2.10. ***(Borel-Cantelli)*** *Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ενδεχομένων. Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, τότε*

$$P(A_n \text{ α.φ.}) = 0.$$

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 1.2.9 έχουμε

$$P(A_n \text{ α.φ.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m),$$

όπου στην πρώτη και δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 1.1.3 $(i), (iii)$, αντίστοιχα. Εφόσον $\sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m) < \infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0,$$

το οποίο μας δίνει το αποδεικτέο. □

Πρόταση 1.2.11. *Αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X^n συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, τέτοια ώστε*

$$X_{n_k}(\omega) \xrightarrow{k\to\infty} X(\omega) \text{ σ.β.}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.6, για κάθε φυσικό αριθμό k επιλέγουμε n_k, τέτοιο ώστε

$$P\left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

και επίσης $\cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$, $n_k \to \infty$. Θέτουμε $A_k := \{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}$ και εφόσον $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, από το Λήμμα Borel-Cantelli έπεται ότι

$$P(A_k \text{ α.φ.}) = 0.$$

Επομένως, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε ότι $|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k}$ για $k \geq K$, όπου το K είναι ένα σύνολο δεικτών που εξαρτάται από το ω. Άρα

$$X_{n_k}(\omega) \xrightarrow{k\to\infty} X(\omega) \text{ σ.β.}$$

□

Τα ακόλουθα είναι τα κλασικά θεωρήματα σύγκλισης για ολοκληρώματα τυχαίων μεταβλητών και βρίσκονται σε κάθε βιβλίο Πραγματικής Ανάλυσης και Θεωρίας Μέτρου.

Θεώρημα 1.2.12. ***(Μονότονης σύγκλισης)*** *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ μη αρνητική και αύξουσα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε $X^n \xrightarrow{n\to\infty} X$ σ.β. (όπου X τυχαία μεταβλητή). Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} E(X^n) = E(X).$$

Λήμμα 1.2.13. ***(Fatou)*** *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε $X^n \xrightarrow{n\to\infty} X$ σ.β. (όπου X τυχαία μεταβλητή).*

(i) Αν $X^n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$E(X) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X^n).$$

(ii) Αν $X^n \leq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε από το (i) έπεται ότι

$$E(X) \geq \limsup_{n\to\infty} E(X^n).$$

Θεώρημα 1.2.14. ***(Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue)*** *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε $X^n \xrightarrow{n\to\infty} X$ σ.β. (όπου X τυχαία μεταβλητή). Αν $|X^n(\omega)| \leq Y(\omega)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$, με $E(Y) < \infty$ (Y τυχαία μεταβλητή), τότε*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X^n - X|) = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} E(X^n) = E(X).$$

Θεώρημα 1.2.15. ***(Φραγμένης σύγκλισης)*** *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε $X^n \xrightarrow{n\to\infty} X$ σ.β. (όπου X τυχαία μεταβλητή). Αν υπάρχει σταθερά $K > 0$, με $|X^n(\omega)| \leq K$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X^n - X|) = 0.$$

Στην πορεία αυτής της εργασίας θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε πάνω από ένα καρτεσιανό γινόμενο συνόλων. Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει την σύνδεση τέτοιων ολοκληρωμάτων με τα επαναληπτικά ολοκληρώματα πάνω από τα επιμέρους σύνολα.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος μέτρου $(\Omega', \mathfrak{M}, \mu)$ ονομάζεται χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, αν υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ τέτοια, ώστε $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega'$ και $\mu(A_n) < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου, τετριμμένα είναι και χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Θεώρημα 1.2.16. ***(Fubini-Tonelli)*** *Έστω $(\Omega_1, \mathcal{U}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{U}_2, \mu_2)$ δύο χώροι σ-πεπρασμένου μέτρου. Αν η συνάρτηση $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ είναι $\mu_1 \times \mu_2$-μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη ως προς το γινόμενο μέτρο $\mu_1 \times \mu_2$, τότε:*

(i) Για μ_2-σχεδόν κάθε $\omega_2 \in \Omega_2$ η $f(\cdot, \omega_2)$ είναι μ_1-ολοκληρώσιμη και η απεικόνιση

$$\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1),$$

είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο μ_2.

(ii) Για μ_1-σχεδόν κάθε $\omega_1 \in \Omega_1$ η $f(\omega_1, \cdot)$ είναι μ_2-ολοκληρώσιμη και η απεικόνιση

$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2),$$

είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο μ_1.

(iii) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1).\end{aligned}$$

Κλείνουμε το κεφάλαιο δίνοντας κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα πάνω σε ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Για τις αποδείξεις τους παραπέμπουμε π.χ. στο [11], σελ. 24-28.

Θεώρημα 1.2.17. ***(Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών)*** *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων, ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $E(|X^i|) < \infty$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Θέτοντας $m := E(X^i)$, ισχύει*

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{X^1 + \cdots + X^n}{n} = m \right) = 1.$$

Πρόταση 1.2.18. *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με*

$$\begin{cases} P(X^i = 1) = p, \\ P(X^i = 0) = 1 - p. \end{cases}$$

Τότε

$$E(X^1 + \cdots + X^n) = np$$

και

$$V(X^1 + \cdots + X^n) = np(1-p).$$

*Η τυχαία μεταβλητή $X^1 + \cdots + X^n$ λέμε ότι ακολουθεί **διωνυμική κατανομή**, με παραμέτρους n και p, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές X^i ακολουθούν **κατανομή Bernoulli**, με παράμετρο p.*

Θεώρημα 1.2.19. ***(Laplace-De Moivre)*** *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης. Επίσης, θέτουμε $S_n := X^1 + \cdots + X^n$. Τότε, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Παρατήρηση 1.2.20. *Το προηγούμενο θεώρημα μας λέει ουσιαστικά πως, καθώς το $n \to \infty$ η διωνυμική κατανομή προσεγγίζει την κανονική κατανομή $N(0,1)$.*

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 1.2.21. ***(Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)*** *Έστω $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με*

$$\begin{cases} E(X^i) = m, \\ V(X^i) = \sigma^2, \end{cases}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε, για $S_n := X^1 + \cdots + X^n$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστικές Διαδικασίες

2.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμοί 2.1.1. *(i) Μια συλλογή $\overline{X}(\cdot) := \{\overline{X}(t) : t \geq 0\}$ τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες είναι ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, ονομάζεται* ***στοχαστική διαδικασία****. Συγκεκριμένα:*

$$[0, \infty) \ni t \mapsto \overline{X}(t), \text{ όπου } \overline{X}(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

Δηλαδή, $\overline{X}(t)(\omega) \in \mathbb{R}^n$ (για λόγους απλούστευσης θα γράφουμε $\overline{X}(t, \omega)$).

(ii) Για κάθε $\omega \in \Omega$, η απεικόνιση $t \mapsto \overline{X}(t, \omega)$ είναι η ***τροχιά δείγματος (sample path)*** *της στοχαστικής διαδικασίας που αντιστοιχεί στο δειγματικό σημείο ω.*

Παρατηρήσεις 2.1.2. *1. Η $\overline{X}(t, \omega)$ γενικά παίρνει τιμές σε έναν μετρήσιμο χώρο. Στην εργασία αυτή, θα επικεντρωθούμε είτε σε πραγματικές στοχαστικές διαδικασίες (δηλαδή με τιμές στο $\mathbb{R}$), είτε πιο γενικά σε n-διάστατες στοχαστικές διαδικασίες (δηλαδή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$), όπου τα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται εφοδιασμένα με τις αντίστοιχες σ-άλγεβρες Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ως προς τη συνήθη (Ευκλείδεια) μετρική.*

2. *Αν το t πάρει διακριτές τιμές (π.χ. $t \in \mathbb{N}$), τότε ονομάζεται* ***διακριτή στοχαστική διαδικασία****. Εμείς θα εστιάσουμε κυρίως στις* ***συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες****, όπου το $t \geq 0$ δηλώνει τον χρόνο.*

3. *Η τροχιά δείγματος παριστά το μαθηματικό μοντέλο ενός τυχαίου πειράματος, του οποίου τα αποτελέσματα μπορούν να καταγραφούν με συνεχή τρόπο στο χρόνο.*

4. *Μια στοχαστική διαδικασία, μπορούμε να την δούμε από τρεις οπτικές γωνίες. Πρώτον, θεωρώντας για κάθε $\omega \in \Omega$, την απεικόνιση*

$$[0, \infty) \ni t \mapsto \overline{X}(t, \omega),$$

η οποία, όπως προαναφέραμε, είναι η τροχιά δείγματος. Δεύτερον, θεωρώντας για κάθε $t \in [0, \infty)$ την απεικόνιση

$$\Omega \ni \omega \mapsto \overline{X}(t, \omega),$$

η οποία είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε t. Τρίτον, θεωρώντας την ως προς ω και t από κοινού, δηλαδή ως απεικόνιση δύο μεταβλητών:

$$[0, \infty) \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \overline{X}(t, \omega)$$

Όπως καταλαβαίνουμε, η τρίτη θεώρηση είναι η πληρέστερη.

Ορισμός 2.1.3. *Δύο στοχαστικές διαδικασίες θα τις αποκαλούμε* ***ίδιες*** *αν*

$$\overline{X}(t, \omega) = \overline{Y}(t, \omega)$$

για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $\omega \in \Omega$.

Ορισμός 2.1.4. *Η $\overline{Y}(\cdot)$ καλείται μία* ***εκδοχή (version ή modification)*** *της $\overline{X}(\cdot)$, αν για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι*

$$P(\overline{X}(t) = \overline{Y}(t)) := P\left(\{\omega \in \Omega : \overline{X}(t, \omega) = \overline{Y}(t, \omega)\}\right) = 1$$

Ορισμός 2.1.5. *Δύο στοχαστικές διαδικασίες $\overline{X}(\cdot), \overline{Y}(\cdot)$ καλούνται* ***μη διακρίσιμες (indistinguishable)****, αν σχεδόν όλες οι τροχιές δείγματος ταυτίζονται, δηλαδή*

$$P(\overline{X}(t) = \overline{Y}(t), \forall\, t \geq 0) := P\left(\{\omega \in \Omega : \overline{X}(t, \omega) = \overline{Y}(t, \omega)\ \forall\ 0 \leq t < \infty\}\right) = 1.$$

Παρατήρηση 2.1.6. *Ο Ορισμός 2.1.5 δίνει μια πιο ισχυρή μορφή ταύτισης δύο στοχαστικών διαδικασιών, σε σχέση με αυτήν του Ορισμού 2.1.4. Εύκολα βλέπουμε ότι, αν $\overline{X}(\cdot), \overline{Y}(\cdot)$ είναι μη διακρίσιμες, τότε η $\overline{X}(\cdot)$ είναι εκδοχή της $\overline{Y}(\cdot)$ (ή, αν προτιμάμε, η $\overline{Y}(\cdot)$ εκδοχή της $\overline{X}(\cdot)$). Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα δύο στοχαστικών διαδικασιών που να έχουν την ιδιότητα του Ορισμού 2.1.4, αλλά όχι αυτήν του Ορισμού 2.1.5.*

Παράδειγμα 2.1.7. *Έστω Z θετική και συνεχής τυχαία μεταβλητή. Ορίζουμε δύο πραγματικές στοχαστικές διαδικασίες $X(\cdot), Y(\cdot)$ έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$,*

$$X(t) \equiv 0$$

και

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t \neq Z, \\ 1, & t = Z. \end{cases}$$

Τότε για κάθε $t \geq 0$,

$$P(X(t) = Y(t)) = P(Z \neq t) = 1 - P(Z = t) = 1,$$

καθώς η Z *είναι συνεχής. Οπότε, η* $X(\cdot)$ *είναι μια εκδοχή της* $Y(\cdot)$*. Από την άλλη, εύκολα παρατηρούμε ότι έχουν διαφορετικές τροχιές δείγματος καθώς*

$$\begin{aligned} P(X(t) = Y(t),\ \forall\ 0 \leq t < \infty) &= P(\{\omega \in \Omega : Y(t,\omega) = 0\ \forall\ 0 \leq t < \infty\}) \\ &= P(\emptyset) = 0, \end{aligned}$$

αφού για κάθε $\omega \in \Omega$ *υπάρχει* $t_0 > 0$ *με* $Z(\omega) = t_0$*, μιας και η* Z *είναι θετική. Άρα* $Y(\cdot,\omega) \not\equiv 0$ *για κάθε* ω*.*

Ορισμός 2.1.8. *Η* $\overline{X}(\cdot)$ *καλείται* ***μετρήσιμη****, αν για κάθε* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *το σύνολο* $\{(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega : \overline{X}(t,\omega) \in A\}$ *ανήκει στη σ-άλγεβρα* $\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{U}$*. Με άλλα λόγια, η απεικόνιση* $(t,\omega) \mapsto \overline{X}(t,\omega) : ([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{U}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *είναι μετρήσιμη.*

Ορισμοί 2.1.9. *(i) Η σ-άλγεβρα*

$$\mathcal{X}_t := \mathcal{U}(\overline{X}(s) : 0 \leq s \leq t) := \mathcal{U}\left(\bigcup_{s=0}^{t} \mathcal{U}(\overline{X}(s))\right)$$

ονομάζεται ***ιστορία της διαδικασίας*** $\overline{X}(\cdot)$ *στον χρόνο* t*.*

(ii) Η σ-άλγεβρα

$$\mathcal{X}_t^+ := \mathcal{U}(\overline{X}(s) - \overline{X}(t) : s \geq t) := \mathcal{U}\left(\bigcup_{s=t}^{\infty} \mathcal{U}(\overline{X}(s) - \overline{X}(t))\right)$$

είναι ***το μέλλον της διαδικασίας*** *πέρα από τον χρόνο* t*.*

Η $\mathcal{X}_t$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που κάνει την $\overline{X}(s)$ μετρήσιμη, για κάθε $s \in [0,t]$. Διαισθητικά, μας δίνει την παρατηρούμενη πληροφορία της $\overline{X}(s)$, μέχρι τον χρόνο t.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ορισμό (βλέπε [11], σελ.65).

Ορισμός 2.1.10. *Μία οικογένεια* $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ *από σ-άλγεβρες* $\subset \mathcal{U}$ *καλείται* ***(nonanticipating) filtration*** *(ως προς τη διαδικασία* $\overline{X}(\cdot)$*) αν:*

(i) $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_s,\ \forall\ t \geq s \geq 0.$

(ii) $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{X}_t, \ \forall\ t \geq 0$.

(iii) $\mathcal{F}_t$ *είναι ανεξάρτητη της* $\mathcal{X}_t^+, \ \forall\ t \geq 0$.

Παρατήρηση 2.1.11. *Σύμφωνα με έναν διαφορετικό ορισμό της filtration (βλέπε [16], σελ. 3), αυτή χαρακτηρίζεται απλά από την ιδιότητα* (i) *του προηγούμενου ορισμού (δηλαδή είναι μια αύξουσα σ-άλγεβρα).*

Ορισμός 2.1.12. *Η* $\overline{Y}(\cdot)$ *είναι* ***προσαρμοσμένη στην filtration (adapted to the filtration)*** $\mathcal{F}_t$, *αν, για κάθε* $t \geq 0$, *η* $\overline{Y}(t)$ *είναι* $\mathcal{F}_t$*-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.*

Μια προσαρμοσμένη στην filtration $\mathcal{F}_t$ στοχαστική διαδικασία $\overline{Y}(\cdot)$ ονομάζεται και nonanticipating (βλέπε [11], σελ.65).

Ορισμός 2.1.13. *Η* $\overline{Y}(\cdot)$ *καλείται* ***προοδευτικά μετρήσιμη (progressively measurable)***, *ως προς την filtration* $\mathcal{F}_t$, *αν για κάθε* $t \geq 0$ *και* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *το σύνολο* $\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : \overline{Y}(s,\omega) \in A\}$ *ανήκει στη σ-άλγεβρα* $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$. *Με άλλα λόγια, αν η* $(s,\omega) \mapsto \overline{Y}(s,\omega) : ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *είναι μετρήσιμη για κάθε* $t \geq 0$.

Παρατήρηση 2.1.14. *Ίσως κάποιος αναρωτηθεί, για ποιο λόγο δώσαμε αυτούς τους τεχνικούς ορισμούς. Η σημασία όλων αυτών θα φανεί στο Κεφάλαιο 3 όπου θα διαδραματίσουν θεμελιώδη ρόλο για τον ορισμό και τη μελέτη του λογισμού Itô. Για τον σκοπό αυτό, θα επικεντρωθούμε στις ομοιότητες και διαφορές των προοδευτικά μετρήσιμων και μετρήσιμων στοχαστικών διαδικασιών.*

Μπορούμε να διαπιστώσουμε από τους παραπάνω ορισμούς, ότι κάθε προοδευτικά μετρήσιμη στοχαστική διαδικασία είναι μετρήσιμη και προσαρμοσμένη στην filtration $\mathcal{F}_t$. Στη συνέχεια, θα δούμε κάτω από ποιες προυποθέσεις ισχύει το αντίστροφο.

Θεώρημα 2.1.15. *Έστω μια* $\overline{Y}(\cdot)$ *η οποία είναι μετρήσιμη και προσαρμοσμένη στην filtration* $\mathcal{F}_t$. *Τότε, η* $\overline{Y}(\cdot)$ *έχει μία προοδευτικά μετρήσιμη εκδοχή.*

Για την απόδειξη, βλέπε [22, Θεώρημα T46, σελ. 68.].

Ορισμός 2.1.16. *Η διαδικασία* $\overline{X}(t)$ *καλείται* ***συνεχής στο*** $\mathbf{t_0}$ *αν, για σχεδόν κάθε* ω, *για* $t \to t_0$ *ισχύει*

$$\overline{X}(t,\omega) \to \overline{X}(t_0,\omega).$$

Επίσης, θα την λέμε ***συνεχή***, *αν είναι συνεχής σε κάθε* t_0.

2.2 Κίνητρο και ορισμός της κίνησης Brown

Το 1827 ο βρετανός βοτανολόγος Robert Brown έκανε ένα πείραμα βάζοντας σωματίδια γύρης μέσα στο νερό. Παρατήρησε ότι:

1. Μια διαδρομή ενός σωματιδίου είναι «περίεργη» και κάπως ακανόνιστη. Συγκεκριμένα, δεν έχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο της διαδρομής.

2. Κοιτώντας δύο μεμονωμένα σωματίδια παρατήρησε ότι η κίνηση του ενός φαίνεται να μην εξαρτάται από την κίνηση του άλλου.

Το 1900 ο γάλλος μαθηματικός Louis Bachelier προσπάθησε να καταγράψει με μαθηματικό τρόπο τις διακυμάνσεις μετοχών. Τα μαθηματικά θεμέλια της κίνησης Brown μπήκαν αρχικά από τον Albert Einstein το 1905. Από τη δεκαετία του 1920 ο αμερικανός μαθηματικός και φιλόσοφος Norbert Wiener έκανε ίσως την πιο ουσιαστική δουλειά στη μαθηματική μοντελοποίηση της κίνησης Brown (η οποία ονομάζεται και διαδικασία Wiener).
Ας δούμε ένα απλό μοντέλο της κίνησης Brown για να κατανοήσουμε πρώτα διαισθητικά τη συμπεριφορά της. Θα μελετήσουμε τον λεγόμενο **τυχαίο περίπατο (random walk)** ενός σωματιδίου σε ένα διδιάστατο ορθογώνιο πλέγμα. Οι θέσεις που μπορεί να βρίσκεται το σωματίδιο είναι οι

$$\{(m\Delta x, n\Delta t) : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,\ n = 0, 1, \dots\},$$

όπου $\Delta x > 0$ είναι η χωρική και $\Delta t > 0$ η χρονική απόσταση μεταξύ των θέσεων του πλέγματος. Έστω ότι το σωματίδιο ξεκινάει τον τυχαίο περίπατο από τη θέση $x = 0$ ($m = 0$) τη χρονική στιγμή $t = 0$ ($n = 0$). Σε κάθε χρονική στιγμή $t = n\Delta t$ κινείται από τη θέση του $x = m\Delta x$ σε χρόνο Δt προς τα αριστερά ή τα δεξιά, κατά απόσταση Δx με πιθανότητα $1/2$, φτάνοντας στη θέση $(m \pm +1)\Delta x$(με $+$ αν κινηθεί δεξιά και $-$ αν κινηθεί αριστερά) τη χρονική στιγμή $(n+1)\Delta t$. Συμβολίζουμε με $p(m, n)$ την πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται στη θέση $m\Delta x$ τη χρονική στιγμή $n\Delta t$. Τότε

$$p(m, 0) = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

και

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2}p(m-1, n) + \frac{1}{2}p(m+1, n).$$

Άρα, αφαιρώντας από την παραπάνω σχέση το $p(m, n)$, έχουμε

$$p(m, n+1) - p(m, n) = \frac{1}{2}[p(m+1, n) - 2p(m, n) + p(m-1, n)]. \tag{2.1}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $D := \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$, πολλαπλασιάζουμε την (2.1) με $\frac{1}{\Delta t}$ και παίρνουμε

$$\frac{p(m,n+1)-p(m,n)}{\Delta t} = \frac{D}{2}\left(\frac{p(m+1,n)-2p(m,n)+p(m-1,n)}{(\Delta x)^2}\right).$$

Για $\Delta t \to 0,\ \Delta x \to 0,\ m\Delta x \to x,\ n\Delta t \to t$, η παραπάνω σχέση μας δίνει την εξίσωση θερμότητας

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t),$$

με $p(m,n) \to f(x,t)$, όπου η f είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του σωματιδίου, το οποίο βρίσκεται στη θέση x τη χρονική στιγμή t.

Στη συνέχεια, αναλύουμε την παραπάνω «διαισθητική» ερμηνεία με περισσότερη λεπτομέρεια και χρησιμοποιώντας τυχαίες μεταβλητές.
Υποθέτουμε ότι το σωματίδιο κινείται αριστερά ή δεξιά απόσταση Δx, με πιθανότητα $1/2$. Έστω, $X(t)$ η θέση του σωματιδίου στον χρόνο $t = n\Delta t$ με $n = 0, 1, \ldots$ Ορίζουμε:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

όπου X_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έτσι ώστε

$$\begin{cases} P(X_i = 0) = 1/2, \\ P(X_i = 1) = 1/2, \end{cases}$$

για $i = 1, 2\ldots$ (η τιμή $X_i = 1$, σημαίνει πως το σωματίδιο κινήθηκε κατά την i-οστή κίνησή του προς τα δεξιά και η τιμή $X_i = 0$ ότι το σωματίδιο κινήθηκε προς τα αριστερά). Οι X_i αντιστοιχούν σε κατανομή Bernoulli με παράμετρο $1/2$, οπότε $E(X_i) = 1/2$ και $V(X_i) = 1/4$. Το άθροισμα S_n είναι ο αριθμός των κινήσεων προς τα δεξιά στον χρόνο $t = n\Delta t$. Επομένως,

$$X(t) = S_n\Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = (2S_n - n)\Delta x.$$

Ας βρούμε τώρα τη διακύμανση της θέσης του σωματιδίου, γνωρίζοντας ότι $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = nV(X_1) = n/4$ (λόγω ανεξαρτησίας των X_i).

$$\begin{aligned} V(X(t)) &= (\Delta x)^2 V(2S_n - n) \\ &= (\Delta x)^2 4V(S_n) \\ &= (\Delta x)^2 4nV(X_1) \end{aligned}$$

$$= (\Delta x)^2 n = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t.$$

Θέτοντας πάλι $D := \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ έχουμε

$$\begin{aligned} X(t) = (2S_n - n)\Delta x &= \left(\frac{\frac{\sqrt{n}}{2}(2S_n - n)}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \right) \Delta x \\ &= \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{n}\Delta x = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{t \frac{(\Delta x)^2}{Dt}} \\ &= \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{tD}. \end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Laplace-De Moivre έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(a \leq X(t) \leq b) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{a}{\sqrt{tD}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leq \frac{b}{\sqrt{tD}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{tD}}}^{\frac{b}{\sqrt{tD}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2Dt}} \frac{du}{\sqrt{tD}} \quad \left(u = x\sqrt{tD} \Leftrightarrow du = \sqrt{tD}dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dx. \end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο, έχουμε καταλήξει στη συνάρτηση πυκνότητας μιας $N(0, Dt)$ κατανομής.

Εμπνευσμένοι τώρα από τον παραπάνω συλλογισμό και παίρνοντας $D = 1$, είμαστε έτοιμοι να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό της κίνησης Brown.

Ορισμός 2.2.1. *Μία πραγματική στοχαστική διαδικασία $W(\cdot)$ καλείται **κίνηση Brown (ή διαδικασία Wiener)** αν:*

(i) $P(W(0) = 0) = 1,$

(ii) $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s), \ \forall\, t \geq s \geq 0,$

(iii) Για τυχαία $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες (ανεξάρτητες προσαυξήσεις).

Παρατήρηση 2.2.2. *Από τα (i) και (ii) του ορισμού προκύπτουν για κάθε $t \geq 0$:*

1. $E(W(t)) = 0$.
2. $E\left(W^2(t)\right) = \int_\Omega W^2(t)dP = \int_\Omega W^2(t)dP - [E(W(t))]^2 = V(W(t)) = t$.

Επίσης, για κάθε $t \geq 0$ και κάθε a, b με $a \leq b$ ισχύει ότι

$$P(a \leq W(t) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dt.$$

Επιλέγουμε τώρα $0 < t_1 < \cdots < t_n$ και πραγματικούς αριθμούς $a_i \leq b_i$ με $i = 1, \ldots, n$. Διερωτώμαστε ποια είναι η από κοινού πιθανότητα

$$P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1, \ldots, a_n \leq W(t_n) \leq b_n).$$

Με άλλα λόγια, θέλουμε να βρούμε ποια είναι η πιθανότητα, μια τροχιά δείγματος να παίρνει τιμές μεταξύ a_i και b_i τις χρονικές στιγμές t_i, για $i = 1, \cdots, n$;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα, θα μας τη δώσει το παρακάτω θεώρημα σε πιο γενικό πλαίσιο.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $W(\cdot)$ μια κίνηση Brown. Τότε, για κάθε ακέραιο n, οποιαδήποτε επιλογή $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ και για κάθε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ισχύει*

$$\begin{aligned} E[f(W(t_1), \ldots, W(t_n))] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} & f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, t_1|0) \\ & \cdots g(x_2, t_2 - t_1|x_1) g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \cdots dx_1, \end{aligned}$$

όπου $g(x, t|y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$.

Απόδειξη. Έστω $Y_i := W(t_i) - W(t_{i-1})$ για $i = 1, \cdots, n$ και $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ώστε

$$h(y_1, y_2, \cdots, y_n) := f(y_1, y_1 + y_2, \cdots, y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Διαπιστώνουμε τώρα το εξής:

$$\begin{aligned} E[h(Y_1, \ldots, Y_n)] &= E[f(Y_1, Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_2 + Y_3, \cdots, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)] \\ &= E[f(W(t_1) - W(0), W(t_2) - W(0), \ldots, W(t_n) - W(0))] \\ &= E[f(W(t_1), \ldots, W(t_n))] \quad (W(0) = 0). \end{aligned}$$

Χάριν ευκολίας, ορίζουμε $X_i := W(t_i)$. Οπότε, οι $Y_i := X_i - X_{i-1}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και επιπλέον $Y_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Άρα, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&E[f(W(t_1), \dots, W(t_n))] = E[h(Y_1, \dots, Y_n)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, \dots, y_n) g(y_1, t_1|0) g(y_2, t_2 - t_1|0) \\
&\qquad\qquad \cdots g(y_n, t_n - t_{n-1}|0) dy_n \cdots dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \\
&\qquad\qquad \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \cdots dx_1.
\end{aligned}
$$

Για την τελευταία ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής κάνοντας χρήση της εξίσωσης $y_i = x_i - x_{i-1}$, για $i = 1, \dots, n$ και $x_0 = 0$. Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα αυτού του μετασχηματισμού ισούται με 1.

$\square$

Παρατήρηση 2.2.4. *Επιλέγοντας* $f(x_1, \cdots, x_n) = \chi_{[a_1,b_1]}(x_1) \cdots \chi_{[a_n,b_n]}(x_n)$ *παίρνουμε ότι*

$$
\begin{aligned}
&P(a_1 \le W(t_1) \le b_1, \dots, a_n \le W(t_n) \le b_n) \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \cdots dx_1.
\end{aligned}
$$

Λήμμα 2.2.5. *Έστω* $W(\cdot)$ *μια στοχαστική διαδικασία. Τότε*

$$E[W(t)W(s)] = t \wedge s := \min\{s, t\}, \quad \forall\ t, s \ge 0.$$

Απόδειξη. Για $t = s$ το συμπέρασμα ισχύει, όπως είδαμε.
Υποθέτουμε ότι $t > s$ (όμοια για $s > t$). Τότε

$$
\begin{aligned}
E[W(t)W(s)] &= E\left[W(t)W(s) + W^2(s) - W^2(s)\right] \\
&= E\left[W^2(s) + (W(t) - W(s))(W(s)\right] \\
&= E\left[W^2(s)\right] + E[W(t) - W(s)]E(W(s)) \text{ (λόγω ανεξαρτησίας)} \\
&= s + 0 \cdot 0 \text{ (εξ' ορισμού της } W(t)) \\
&= s = t \wedge s.
\end{aligned}
$$

$\square$

2.3 Κατασκευή της κίνησης Brown

Δώσαμε τον ορισμό της κίνησης Brown έχοντας κάποια πειραματικά στοιχεία και ένα «μαθηματικό κίνητρο» στα χέρια μας. Δεν μας εγγυάται κανείς ότι όντως υπάρχει μια τέτοια στοχαστική διαδικασία με τις συγκεκριμένες ιδιότητες. Για τον λόγο αυτό, οφείλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη της κίνησης Brown μαθηματικώς τεκμηριωμένα. Σημαντικό ρόλο για την επίτευξη αυτού του σκοπού παίζει η οικογένεια συναρτήσεων που θα ορίσουμε ευθύς αμέσως. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το κίνητρο της ακόλουθης προσέγγισης, βλέπε [11], σελ. 43-46.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω $0 \leq t \leq 1$. Ορίζουμε τις ακολουθίες συναρτήσεων*

$$h_0(t) := 1,\ 0 \leq t \leq 1,$$

$$h_1(t) := \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

και για $k \in \mathbb{N}$ με $2^n \leq k < 2^{n+1}$, όπου $n \in \mathbb{N}$,

$$h_k(t) := \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n}, \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} < t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n}, \\ 0, & \textit{αλλού.} \end{cases}$$

*Η $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ ονομάζεται **οικογένεια των συναρτήσεων Haar**.*

Παρατήρηση 2.3.2. *Για καλύτερη κατανόηση της παραπάνω οικογένειας συναρτήσεων, ας δούμε πως ορίζονται οι συναρτήσεις h_2, h_3. Για $n = 1$ έχουμε $k \in \{2, 3\}$. Επομένως*

$$h_2(t) = \begin{cases} 2^{1/2}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ -2^{1/2}, & \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

και

$$h_3(t) = \begin{cases} 2^{1/2}, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ -2^{1/2}, & \frac{3}{4} < t \leq 1, \\ 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Για τη μελέτη των συναρτήσεων Haar και για λόγους πληρότητας ο επόμενος ορισμός αναφέρεται στην έννοια της ορθοκανονικής βάσης σε ένα χώρο Hilbert.

Ορισμός 2.3.3. *Μια ακολουθία $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Hilbert $\mathbb{H}$ καλείται **πλήρης ορθοκανονική βάση** αν:*

(i) $\langle e_m, en \rangle = \delta_{mn}$. *(ορθοκανονικότητα)*

(ii) Ο γραμμικός χώρος $\operatorname{span}(e_n)$ *είναι πυκνός στον* $\mathbb{H}$. *(πληρότητα)*

Για περισσότερα πάνω σε χώρους Hilbert παραπέμπουμε στο [6, Κεφάλαιο 5].

Λήμμα 2.3.4. *Η οικογένεια $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ των συναρτήσεων Haar αποτελεί μια πλήρη, ορθοκανονική βάση του $L^2(0,1)$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε την ορθοκανονικότητα.
Έστω h_k, h_l δύο τυχαίες συναρτήσεις Haar, $k, l \in \mathbb{N}_0$. Για $k = l \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|h_k\|_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 h_k^2 dt \\
&= 2^n \left(\frac{k - 2^n + \frac{1}{2}}{2^n} - \frac{k - 2^n}{2^n} \right) + 2^n \left(\frac{k - 2^n + 1}{2^n} - \frac{k - 2^n + \frac{1}{2}}{2^n} \right) \\
&= 2^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 1.
\end{aligned}$$

Επίσης, $\|h_k\|_{L^2(0,1)}^2 = 1$ για $k = 0, 1$.
Έστω τώρα $l > k$.

- Αν $2^n \leq k < l < 2^{n-1}$, παρατηρούμε ότι για το εσωτερικό των στηριγμάτων (φορέων, support) των h_k, h_l,

  $$\operatorname{supp} h_k = \left[\frac{k - 2^n}{2^n}, \frac{k - 2^n + 1}{2^n} \right], \quad \operatorname{supp} h_l = \left[\frac{l - 2^n}{2^n}, \frac{l - 2^n + 1}{2^n} \right],$$

  ισχύει

  $$\operatorname{int}(\operatorname{supp} h_k) \cap \operatorname{int}(\operatorname{supp} h_l) = \emptyset,$$

  αφού $k + 1 \leq l$. Συνεπώς $\int_0^1 h_k h_l dt = 0$.

- Αν $2^n \leq k \leq 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, και $2^m \leq l < 2^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, παρατηρούμε ότι το h_k είναι σταθερό στα 2^{n+1} ισομήκη υποδιαστήματα του $[0,1]$,
$$\left[\frac{i-1}{2^{n+1}}, \frac{i}{2^{n+1}}\right],\ i = 1, \ldots, 2^{n+1},$$
αφού τα υποδιαστήματα αυτά είναι
$$\left[\frac{2k-2^{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{2k-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right]$$
και
$$\left[\frac{2k-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}, \frac{2k-2^{n+1}+2}{2^{n+1}}\right],$$
$k = 2^n, 2^n+1, \ldots, 2^{n+1}-1$, όπου θέτουμε $i = 2k - 2^{k+1} + 1$ και $i = 2k - 2^{n+1} + 2$ για περιττά και άρτια i, αντίστοιχα.
Από την άλλη, θέτοντας $j = l - 2^m + 1$ για $l = 2^m, 2^m+1, \ldots, 2^{m+1}-1$ με $m = n+1+q$, $q \in \mathbb{N}_0$, παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned}\operatorname{supp} h_l &= \left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m}\right] \\ &= \left[\frac{i-1+2^{-q}(p-1)}{2^{n+1}}, \frac{i-1+2^{-q}p}{2^{n+1}}\right] \\ &\subset \left[\frac{i-1}{2^{n+1}}, \frac{i}{2^{n+1}}\right]\end{aligned}$$
για $j = (i-1)2^q + p$, όπου $p = 1, \ldots, 2^q$, $i = 1, \ldots, 2^{n+1}$. Συνεπώς, για κάθε τέτοιο l, έχουμε
$$\int_0^1 h_k h_l dt = \pm 2^{n/2} \int_0^1 h_l dt = 0.$$

- Τετριμμένα, για $k = 0,\ l \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$\int_0^1 h_0 h_l dt = \int_0^1 h_l dt = 0.$$

Άρα,
$$\langle h_k(t), h_l(t) \rangle = 0 \text{ για } k \neq l.$$

Μένει να δείξουμε την πληρότητα της ορθοκανονικής βάσης, δηλαδή ότι η γραμμική θήκη της ακολουθίας $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ είναι πυκνή στον $L^2(0,1)$. Αφού ο

$L^2(0,1)$ είναι χώρος Hilbert, άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz (βλέπε [6], Θεώρημα 4.11, σελ. 97), ταυτίζεται με τον δυϊκό του χώρο. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι αν $f \in L^2(0,1)$ και $\langle f, h_k \rangle = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots,$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού (βλέπε [6], Παρατήρηση 5, σελ. 8).
Αν $k = 0$, τότε

$$0 = \int_0^1 f h_0 dt = \int_0^1 f dt. \tag{2.2}$$

Αν $k = 1$, τότε

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 f h_1 dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} f dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f dt \\ \iff \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} f dt &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f dt \end{aligned}$$

και αφού από την (2.2) έχουμε

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f dt = 0,$$

προκύπτει

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f dt = 0.$$

Αντίστοιχα, για $2^n \leq k < 2^{n+1}$ με $n = 1$,

$$0 = \int_0^1 f h_k dt = 2^{n/2} \underbrace{\int_{\frac{k-2^n}{2^n}}^{\frac{k-2^n+1/2}{2^n}} f dt}_{=:I(n,k)} - 2^{n/2} \underbrace{\int_{\frac{k-2^n+1/2}{2^n}}^{\frac{k-2^n+1}{2^n}} f dt}_{=:J(n,k)}$$

με

$$I(n,k) + J(n,k) = \int_{\frac{k-2^n}{2^n}}^{\frac{k-2^n+1}{2^n}} f dt = 0,$$

από την προηγούμενη διαδικασία. Άρα, έπεται ότι

$$I(n,k) = J(n,k) = 0, \tag{2.3}$$

για $n = 1$ και $k = 2, 3$. Έστω τώρα, ότι η (2.3) ισχύει για όλα τα $2^n \le k < 2^{n+1}$ και κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε για $2^{n+1} \le l < 2^{n+2}$ έχουμε

$$0 = \int_0^1 f h_l dt = 2^{(n+1)/2} \left(I(n+1, l) - J(n+1, l) \right)$$

με

$$\begin{aligned} I(n+1,l) + J(n+1,l) &= \int_{\frac{l-2^{n+1}}{2^{n+1}}}^{\frac{l-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}} f dt \\ &= \int_{\frac{l/2-2^n}{2^n}}^{l/2-2^n+1/2} f dt \\ &= \begin{cases} I(n, l/2), & \text{αν } l \text{ άρτιος}, \\ J(n, (l-1)/2), & \text{αν } l \text{ περιττός}, \end{cases} \end{aligned}$$

και από την υπόθεση της επαγωγής (2.3) προκύπτει

$$I(n+1, l) = J(n+1, l) = 0$$

για όλα τα $2^{n+1} \le l < 2^{n+2}$.
Συνεπώς, δείξαμε ότι η (2.3) ισχύει για όλα τα $2^n \le k < 2^{n+1}$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή θέτοντας $i = 2k - 2^{n+1} + 1$ και $i = 2k - 2^{n+1} + 2$ για περιττά και άρτια i, αντίστοιχα, έχουμε

$$\int_{\frac{i-1}{2^{n+1}}}^{\frac{i}{2^{n+1}}} f dt = 0$$

για κάθε $i = 1, \ldots, 2^{n+1}$ και $n \in \mathbb{N}$.
Έτσι, δείξαμε

$$\begin{aligned} &\int_s^r f(t) dt = 0, \ \forall\ 0 \le s \le r \le 1, \ s, r \text{ δυαδικοί ρητοί} \\ \Longrightarrow &\int_s^r f(t) dt = 0, \ \forall\ 0 \le s \le r \le 1, \ s, r \text{ πραγματικοί}. \end{aligned}$$

Για την τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε, ότι οι δυαδικοί ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς.
Τώρα η απόδειξη έχει τελειώσει καθώς (βλέπε [25], Θεώρημα 7.11, σελ. 141)

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x f(t) dt \right] = 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$

$\square$

Ορισμός 2.3.5. *Για τυχόν $k \in \mathbb{N}_0$, ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$s_k(t) := \int_0^t h_k(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

η οποία ονομάζεται k-οστή ***συνάρτηση Schauder****.*

Παρατήρηση 2.3.6. *Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης είναι σα μια «σκηνή», η οποία βρίσκεται πάνω από το διάστημα $[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k-2^n+1}{2^n}]$, της οποίας η κορυφή (το μέγιστο της s_k) έχει ύψος $2^{-\frac{n}{2}-1}$.*
Επομένως, για $2^n \leq k < 2^{n+1}$ παίρνουμε ότι

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |s_k(t)| = 2^{-\frac{n}{2}-1}.$$

Επιπλέον, για $2^n \leq k < 2^{n+1}$, οι συναρτήσεις s_k έχουν ξένα μεταξύ τους στηρίγματα.

Ο στόχος μας είναι να ορίσουμε την κίνηση Brown ως

$$W(t, \omega) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega) s_k(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

όπου οι συντελεστές $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες, $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε κάποιο χώρο πιθανότητας.
Οπότε, ας δούμε αρχικά, κάτω από ποιες προϋποθέσεις η παραπάνω σειρά συγκλίνει.

Λήμμα 2.3.7. *Έστω $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, έτσι ώστε*

$$|a_k| = \mathcal{O}(k^{\delta}) \quad \text{καθώς } k \to \infty,$$

για κάποιο $0 \leq \delta < 1/2$. Τότε η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k(t)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $0 \leq t \leq 1$.

Απόδειξη. Αρχικά θέτουμε

$$b_n := \max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |a_k|.$$

Τότε $b_n \leq C\left(2^{n+1}\right)^{\delta}$, όπου C σταθερά, από την υπόθεση.
Έστω $\varepsilon > 0$, τότε για $t \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=2^m}^{\infty} a_k s_k(t)\right| &\leq \sum_{k=2^m}^{\infty} |a_k||s_k(t)| \\ &\leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n \max_{\substack{2^n \leq k < 2^{n+1} \\ 0 \leq t \leq 1}} |s_k(t)| \\ &\leq C \sum_{n=m}^{\infty} \left(2^{n+1}\right)^{\delta} 2^{-\frac{n}{2}-1} < \varepsilon\end{aligned}$$

για αρκετά μεγάλο $m \in \mathbb{N}$. Να προσεχθεί ότι για $2^n \leq k < 2^{n+1}$ τα στηρίγματα των s_k είναι ξένα μεταξύ τους και επίσης $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$. Οπότε, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $t \in [0,1]$. □

Λήμμα 2.3.8. *Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες, $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε για σχεδόν κάθε ω, ισχύει*

$$|A_k(\omega)| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\log k}\right) \quad \text{καθώς } k \to \infty.$$

Απόδειξη. Αρχικά ας δούμε το εξής:
Έστω τυχόν $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $X = A_k, Y = |A_k|$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y. Οπότε

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= P(X \leq y) - P(X < -y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y).\end{aligned}$$

Επομένως

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) - F_X(-y), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Έτσι, παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = 2f_X(y) \ (f_X(y) = f_X(-y) \text{ καθώς } X \sim N(0,1)).$$

Άρα

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Έπειτα, για κάθε $x > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$P(|A_k| > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \tag{2.4}$$

Εν συνεχεία, ισχύει ότι

$$e^{-\frac{s^2}{2}} = e^{-\frac{s^2}{4}} e^{-\frac{s^2}{4}}.$$

Επιπλέον, αφού $s \geq x$ τότε

$$e^{-\frac{s^2}{4}} \leq e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{s^2}{4}} e^{-\frac{s^2}{4}} \leq e^{-\frac{x^2}{4}} e^{-\frac{s^2}{4}} \\ \Longrightarrow \quad & e^{-\frac{s^2}{2}} \leq e^{-\frac{x^2}{4}} e^{-\frac{s^2}{4}} \\ \Longrightarrow & \int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds \leq e^{-\frac{x^2}{4}} \int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds. \end{aligned}$$

Έτσι, από τη (2.4) έπεται

$$\begin{aligned} P(|A_k| > x) &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds \\ &\leq \sqrt{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds \\ &\leq C e^{-\frac{x^2}{4}}, \end{aligned}$$

αφού $\int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} \leq \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} < \infty$. Θέτοντας $x = 4\sqrt{\log k}$, παίρνουμε

$$P(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k}) \leq \sqrt{2} e^{-4 \log k} = \sqrt{2} \frac{1}{k^4}.$$

Καθώς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \left(\frac{\pi^4}{90}\right) < \infty$, το Λήμμα Borel-Cantelli δίνει

$$P(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k} \text{ α.φ.}) = 0.$$

Επομένως, για σχεδόν κάθε ω

$$\begin{aligned} & |A_k(\omega)| \leq 4\sqrt{\log k}, \text{ για } k \geq K(\omega) \\ \Longrightarrow & |A_k(\omega)| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\log k}\right), \text{ καθώς } k \to \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Παρατήρηση 2.3.9. *Οι αριθμοί $\{A_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ ικανοποιούν σχεδόν βέβαια, την υπόθεση του Λήμματος 2.3.7, αφού $\sqrt{\log k} \le Ck^{\frac{1}{4}}$.*

Λήμμα 2.3.10. *Για κάθε $0 \le s \le 1$ και $0 \le t \le 1$ ισχύει*

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s)s_k(t) = t \wedge s.$$

Απόδειξη. Για $0 \le s \le 1$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$g_s(x) := \begin{cases} 1, & 0 \le x \le s, \\ 0, & s < x \le 1. \end{cases}$$

Έστω $s \le t$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1 g_t(x)g_s(x)dx = \underbrace{\int_0^s g_t(x)g_s(x)dx}_{=s} + \underbrace{\int_s^1 g_t(x)g_s(x)dx}_{=0}.$$

Οπότε, δείξαμε ότι

$$\langle g_t, g_s\rangle_{L^2(0,1)} = s. \tag{2.5}$$

Καθώς $g_t, g_s \in L^2(0,1)$ από το Λήμμα 2.3.4, την εξίσωση Parseval (βλέπε [6], Θεώρημα 5.9, σελ. 141) και τον Ορισμό 2.3.5

$$\begin{aligned}
\langle g_t, g_s\rangle_{L^2(0,1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle g_t, h_k\rangle_{L^2(0,1)} \langle g_s, h_k\rangle_{L^2(0,1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 g_t(x)h_k(x)dx\right)\left(\int_0^1 g_s(x)h_k(x)dx\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t h_k(x)dx\right)\left(\int_0^s h_k(x)dx\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s_k(t)s_k(s).
\end{aligned}$$

Τελικά, από τον παραπάνω υπολογισμό και τη σχέση (2.5) καταλήγουμε στο αποδεικτέο:

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s)s_k(t) = s.$$

□

Θεώρημα 2.3.11. *Έστω $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες, $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας, $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Ορίζουμε για $0 \leq t \leq 1$ και $\omega \in \Omega$:*

$$W(t,\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega) s_k(t). \tag{2.6}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Η σειρά (2.6) συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς t, για σχεδόν κάθε ω.

(ii) Η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t,\omega)$, $t \in [0,1]$, είναι συνεχής για σχεδόν κάθε ω.

(iii) Η $W(\cdot)$ είναι κίνηση Brown, για $0 \leq t \leq 1$.

Απόδειξη. $(i), (ii)$: Η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι άμεση συνέπεια των Λημμάτων 2.3.7 και 2.3.8. Επίσης η τροχιά δείγματος είναι συνεχής συνάρτηση αφού η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και οι όροι της είναι συνεχείς συναρτήσεις του $t \in [0,1]$.
(iii): Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1 για να δείξουμε ότι η $W(\cdot)$ είναι κίνηση Brown πρέπει να επαληθεύσουμε τα εξής:

(α′) $W(0) = 0$ σχεδόν βέβαια.

(β′) $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$, $\forall\ 0 \leq s \leq t \leq 1$.

(γ′) Οι τυχαίες μεταβλητές $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες για $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq 1$.

Το (α′) είναι προφανές αφού, εξ′ ορισμού, $s_k(0) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$.
Για να επαληθεύσουμε το (β′), ας υπολογίσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$\begin{aligned}
&\phi_{W(t)-W(s)}(\lambda) \\
&= E\left(e^{i\lambda(W(t)-W(s))}\right) \\
&= E\left(e^{i\lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty}[A_k(s_k(t)-s_k(s))]}\right) \\
&= E\left(\lim_{m\to\infty} e^{i\lambda \sum\limits_{k=0}^{m}[A_k(s_k(t)-s_k(s))]}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty} E\left(e^{i\lambda\sum\limits_{k=0}^{m}[A_k(s_k(t)-s_k(s))]}\right)\\
&= \prod_{k=0}^{\infty} E\left(e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))}\right) \text{ (λόγω της ανεξαρτησίας των } A_k)\\
&= \prod_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}(s_k(t)-s_k(s))^2} \text{ (βλέπε Παράδειγμα 1.1.40)}\\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(s_k(t)-s_k(s))^2}\\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[s_k^2(t)-2s_k(t)s_k(s)+s_k^2(s)\right]}\\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-2s+s)} \text{ (σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.10)}\\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}.
\end{aligned}
$$

Άρα, από τη μοναδικότητα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων (Θεώρημα 1.1.43) έχουμε ότι $W(t)-W(s)\sim N(0,t-s)$.
Μένει να δείξουμε το (γ΄).
Για τον σκοπό αυτό θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. *Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και για κάθε $0=t_0<t_1<\cdots<t_m\le 1$ ισχύει ότι*

$$E\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{m}[\lambda_j(W(t_j)-W(t_{j-1}))]}\right)=\prod_{j=1}^{m}e^{-\frac{\lambda_j^2}{2}(t_j-t_{j-1})}.$$

Απόδειξη ισχυρισμού. Για $m=1$ ισχύει από το (β΄).
Για $m=2$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&E\left(e^{i[\lambda_1 W(t_1)+\lambda_2(W(t_2)-W(t_1))]}\right)\\
&= E\left(e^{i[(\lambda_1-\lambda_2)W(t_1)+\lambda_2 W(t_2)]}\right)\\
&= E\left(e^{i(\lambda_1-\lambda_2)\sum\limits_{k=0}^{\infty}[A_k s_k(t_1)]+i\lambda_2\sum\limits_{k=0}^{\infty}[A_k s_k(t_2)]}\right)\\
&= \prod_{k=0}^{\infty} E\left(e^{iA_k[(\lambda_1-\lambda_2)s_k(t_1)+\lambda_2 s_k(t_2)]}\right) \text{ (όπως πριν)}\\
&= \prod_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[(\lambda_1-\lambda_2)s_k(t_1)+\lambda_2 s_k(t_2)]^2} \text{ (όπως πριν)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[(\lambda_1-\lambda_2)^2 s_k^2(t_1)+2(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2 s_k(t_1)s_k(t_2)+\lambda_2^2 s_k^2(t_2)\right]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\left[(\lambda_1-\lambda_2)^2 t_1+2(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2 t_1+\lambda_2^2 t_2\right]} \quad \text{(σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.10)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\left[\lambda_1^2 t_1+\lambda_2^2(t_2-t_1)\right]}.
\end{aligned}
$$

Η γενική περίπτωση, προκύπτει με τον ίδιο τρόπο εκτελώντας απλά περισσότερες πράξεις. Έτσι ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

Ο ισχυρισμός μας δίνει

$$\phi_{W(t_1),\ldots,W(t_m)-W(t_{m-1})}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \phi_{W(t_1)}(\lambda_1)\cdots\phi_{W(t_m)-W(t_{m-1})}(\lambda_m).$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.43 παίρνουμε

$$F_{W(t_1),\ldots,W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_1,\ldots,x_m) = F_{W(t_1)}(x_1)\cdots F_{W(t_m)-W(t_{m-1})}(x_m),$$

για κάθε $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R}$. Τελικά, αυτό μας δίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές

$$W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \ldots, W(t_m)-W(t_{m-1})$$

είναι ανεξάρτητες. □

Με την προηγούμενη ανάλυση, δείξαμε την ύπαρξη μιας κίνησης Brown για $t \in [0,1]$. Με τη βοήθεια αυτής θα δείξουμε την ύπαρξη μιας κίνησης Brown για $t \in [0,\infty)$.

Πρόταση 2.3.12. *Έστω $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες, $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας, $(\Omega,\mathcal{U},P)$. Τότε υπάρχει μια πραγματική κίνηση Brown $W(\cdot)$ για $t \geq 0$.*

***Απόδειξη*.** Διατάσσοντας τις αριθμήσιμες τυχαίες μεταβλητές $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ σε έναν πίνακα με αριθμήσιμο αριθμό από γραμμές και στήλες με μια «διαγώνια» διαδικασία, όπως χρησιμοποιείται (αντίστροφα) για την απόδειξη της αριθμησιμότητας του $\mathbb{Q}$, αποκτάμε μια αριθμήσιμη ακολουθία (οι γραμμές του πίνακα) από αριθμήσιμες ακολουθίες (οι στήλες του πίνακα) ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, έτσι ώστε όλες οι ακολουθίες - γραμμές να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για κάθε γραμμή, $n = 1,2,\ldots$, κατασκευάζουμε μια πραγματική κίνηση Brown $W^n(t)$ για $t \in [0,1]$, όπως στο Θεώρημα 2.3.11. Τότε οι κινήσεις Brown $W^n(\cdot)$, $n = 1,2,\ldots$, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

«Συγκολλούμε» τώρα αυτές τις κινήσεις Brown $W^n(t)$, $t \in [0,1]$, επαγωγικά ως εξής:

$$\begin{cases} W(0) := 0, \\ W(t) := W(n-1) + W^n(t-(n-1)), \quad t \in [n-1, n], \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Τότε η $W(t)$, $t \geq 0$, είναι μια πραγματική κίνηση Brown. $\square$

2.4 Κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$

Έχοντας εισάγει την προηγούμενη θεωρία για πραγματικές κινήσεις Brown, είμαστε έτοιμοι να επεκτείνουμε τους ορισμούς μας σε n-διάστατες κινήσεις Brown.

Ορισμός 2.4.1. *Μια n-διάστατη στοχαστική διαδικασία $\overline{W}(\cdot) := \big(W^1(\cdot), \dots, W^n(\cdot)\big)$ καλείται* ***n-διάστατη κίνηση Brown*** *αν*

(i) Η $W^k(\cdot)$ είναι πραγματική κίνηση Brown, για $k = 1, \dots, n$.

(ii) Οι σ-άλγεβρες $\mathcal{W}^k := \mathcal{U}\left(W^k(t) : t \geq 0\right)$ είναι ανεξάρτητες, για $k = 1, \dots, n$.

Παρατήρηση 2.4.2. *Αν έχουμε $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ανεξάρτητες πραγματικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας, μπορούμε να τις διατάξουμε πρώτα σε n («γραμμές» από) ακολουθίες από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έτσι ώστε οι n ακολουθίες να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Κάθε μία από τις n ανεξάρτητες ακολουθίες μας δίνει μια πραγματική κίνηση Brown $W^k(t)$, $t \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.12. Τότε η $\overline{W}(\cdot) := \big(W^1(\cdot), \dots, W^n(\cdot)\big)$ είναι μια n-διάστατη κίνηση Brown για $t \geq 0$.*

Λήμμα 2.4.3. *Έστω $\overline{W}(\cdot)$ n-διάστατη κίνηση Brown, τότε*

(i) $E\left(W^k(t)W^l(s)\right) = (t \wedge s)\delta_{kl}$ για $k, l = 1, \dots, n$.

(ii) $E\left[\left(W^k(t) - W^k(s)\right)\left(W^l(t) - W^l(s)\right)\right] = (t-s)\delta_{kl}$, $t \geq s \geq 0$ για $k, l = 1, \dots, n$.

Απόδειξη. (i): Για $k = l$, ο ισχυρισμός προκύπτει από το Λήμμα 2.2.5.
Για $k \neq l$ ισχύει

$$E\left(W^k(t)W^l(s)\right) = \underbrace{E\left(W^k(t)\right)}_{=0}\underbrace{E\left(W^l(s)\right)}_{=0},$$

λόγω ανεξαρτησίας των W^k και W^l.
(ii): Για $k = l$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E\left[\left(W^k(t) - W^k(s)\right)^2\right] &= E\left[\left(W^k(t)\right)^2 - 2W^k(t)W^k(s) + \left(W^k(s)\right)^2\right] \\ &= t - 2(t \wedge s)\delta_{kl} + s \text{ (από το } (i)) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Τέλος, για $k \neq l$

$$E\left(W^k(t)W^l(t) - W^k(t)W^l(s) - W^k(s)W^l(t) + W^k(s)W^l(s)\right) = 0,$$

από το (i). □

Πρόταση 2.4.4. *Έστω μια n-διάστατη κίνηση Brown $\overline{W}(\cdot)$. Τότε*

$$\overline{W}(t) \sim N(0, tI), \ \forall \ t > 0,$$

όπου I ο μοναδιαίος τάξης n, δηλαδή

$$P(\overline{W}(t) \in A) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_A e^{-\frac{|\overline{x}|^2}{2t}} dx, \ \overline{x} \in \mathbb{R}^n,$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Καθώς οι $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές $W^1(t), \ldots, W^n(t)$ είναι ανεξάρτητες, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\overline{W}(t)$ μας δίνει

$$\begin{aligned} f_{\overline{W}(t)}(x_1, \ldots, x_n) &= f_{W^1(t)}(x_1) \cdots f_{W^n(t)}(x_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2t}} \cdots \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_n^2}{2t}} \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ισότητα πάνω από το A, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύεται ως εξής (βλέπε και Θεώρημα 2.2.3):

Θεώρημα 2.4.5. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε συνάρτηση* $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m-\text{φορές}} \to \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$E[f(\overline{W}(t_1), \ldots, \overline{W}(t_m)] = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots x_m) g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \cdots g(x_m, t_m - t_{m-1}|x_{m-1}) dx_m \cdots dx_1,$$

όπου

$$g(x, t|y) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}.$$

2.5 Βασικές ιδιότητες των τροχιών δείγματος

Σε αυτήν την ενότητα, θα αποδείξουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα για τις τροχιές δείγματος, τα οποία θα διαδραματίσουν βασικό ρόλο στη μετέπειτα θεωρία.

1. Θα δείξουμε ότι, για σχεδόν κάθε ω, η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t, \omega)$ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής για κάθε εκθέτη $\gamma < 1/2$, ενώ δεν είναι πουθενά Hölder συνεχής για κάθε εκθέτη $\gamma > 1/2$.

2. Επιπλέον, η συγκεκριμένη τροχιά δείγματος είναι σχεδόν βέβαια μη διαφορίσιμη για κάθε t και άπειρης μεταβολής για κάθε υποδιάστημα του $[0, \infty)$.

Αρχικά, θα δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς για την κατανόηση των παραπάνω εννοιών.

Ορισμός 2.5.1. *Έστω $0 < \gamma \leq 1$, $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ και $s \in [0, T]$. Αν υπάρχει σταθερά $K \geq 0$, έτσι ώστε*

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\gamma, \quad \forall\, t \in [0, T],$$

*τότε η f καλείται **Hölder συνεχής στο σημείο s με εκθέτη γ**.*

Ορισμός 2.5.2. *Έστω $0 < \gamma \leq 1$ και $f : [0, T] \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει σταθερά $K \geq 0$, έτσι ώστε*

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\gamma, \quad \forall\, t, s \in [0, T],$$

*τότε η f καλείται **ομοιόμορφα Hölder συνεχής με εκθέτη γ**.*

Ορισμός 2.5.3. *Μια συνάρτηση f ονομάζεται* ***φραγμένης μεταβολής*** *στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αν υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq K$$

για οποιαδήποτε διαμέριση $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ του $[\alpha, \beta]$.

Θεώρημα 2.5.4. ***(Θεώρημα συνέχειας του Kolmogorov)***
Έστω $X(\cdot)$ στοχαστική διαδικασία με συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια και τέτοια ώστε

$$E\left(|X(t) - X(s)|^{\beta}\right) \leq C|t-s|^{1+\alpha} \quad \forall\, t, s \in [0, \infty), \tag{2.7}$$

όπου β, α, C σταθερές έτσι ώστε $\beta \geq 1,\ \alpha > 0$ και $C \geq 0$.

Τότε για κάθε $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$, $T > 0$ και για σχεδόν κάθε ω, υπάρχει μια σταθερά $K = K(\omega, \gamma, T)$ τέτοια ώστε

$$|X(t, \omega) - X(s, \omega)| \leq K|t-s|^{\gamma}, \quad \forall\, s, t \in [0, T]. \tag{2.8}$$

Άρα, η τροχιά δείγματος $t \mapsto X(t, \omega)$ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής με εκθέτη γ στο διάστημα $[0, T]$.

Απόδειξη. Λόγω της τεχνικής φύσης της απόδειξης, θα εργαστούμε με $T = 1$. Αρχικά επιλέγουμε τυχόν γ, ώστε

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}. \tag{2.9}$$

Τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και με την βοήθεια των δυαδικών ρητών αριθμών στο διάστημα $[0, 1]$, ορίζουμε την ακολουθία συνόλων του Ω

$$\begin{aligned} A_n :&= \left\{\left|X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{i}{2^n}\right)\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}},\ \text{για κάποιο } i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq i < 2^n\right\} \\ &= \bigcup_{i=0}^{2^n-1} \left\{\left|X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{i}{2^n}\right)\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
P(A_n) &\le \sum_{i=0}^{2^n-1} P\left(\left|X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{i}{2^n}\right)\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right) \\
&\le \sum_{i=0}^{2^n-1} E\left(\left|X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{i}{2^n}\right)\right|^{\beta}\right)\left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \\
&\le C\sum_{i=0}^{2^n-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1+\alpha}\left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \quad \text{(από υπόθεση)} \\
&= C\sum_{i=0}^{2^n-1}(2^n)^{-1-\alpha+\gamma\beta} = C2^n(2^n)^{-1-\alpha+\gamma\beta} \\
&\le C2^{n(-\alpha+\gamma\beta)},
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει, από την ανισότητα Chebyshev (βλέπε Πρόταση 1.1.28) με $\lambda = \frac{1}{2n\gamma}$ και $p = \beta$. Τώρα, από τη (2.9) έχουμε $-\alpha + \gamma\beta < 0$. Άρα,

$$C\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(-\alpha+\gamma\beta)} < \infty,$$

ως γεωμετρική σειρά. Οπότε, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, από το Λήμμα Borel-Cantelli, έχουμε

$$P(A_n \text{ α.φ.}) = 0.$$

Κατά συνέπεια, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει $m = m(\omega)$ έτσι ώστε

$$\left|X\left(\frac{i+1}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \le \frac{1}{2^{n\gamma}}, \text{ για } 0 \le i \le 2^n - 1,\ n \ge m.$$

Οπότε, επιλέγοντας $K = K(\omega)$ πολύ μεγάλο (για παράδειγμα $K = \max\left\{1, \max_{n=0,\ldots,m} 2^{n\gamma} \max_{i=0,\ldots,2^n-1}\left|X\left(\frac{i+1}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right|\right\}$) έχουμε

$$\left|X\left(\frac{i+1}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \le K\frac{1}{2^{n\gamma}}, \text{ για } 0 \le i \le 2^n - 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.10}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι η σχέση (2.10) δίνει τον ισχυρισμό του θεωρήματος, δηλαδή την ανισότητα (2.8).

Αρχικά, σταθεροποιούμε ένα $\omega \in \Omega$ για το οποίο η (2.10) ισχύει. Έστω $t_1, t_2 \in [0,1]$ δύο δυαδικοί ρητοί ώστε $0 < t_2 - t_1 < 1$. Επιπλέον, επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$2^{-n} \leq t < 2^{-(n-1)}, \text{ για } t := t_2 - t_1. \tag{2.11}$$

Το t είναι δυαδικός ρητός στο $[0,1]$ καθώς η πράξη της πρόσθεσης είναι κλειστή σε αυτό το σύνολο. Επιπλέον, κάθε δυαδικό ρητό μπορούμε να τον γράψουμε ως άθροισμα δυαδικών αριθμών με αριθμητή μονάδα. Γι΄ αυτό τον λόγο έχουμε

$$\begin{cases} t_1 - \frac{r}{2^n} = -\frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_k}}, \text{ για } n < p_1 < \cdots < p_k \\ t_2 - \frac{j}{2^n} = -\frac{1}{2^{q_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{q_k}}, \text{ για } n < q_1 < \cdots < q_k \end{cases}$$

με

$$t_1 \leq \frac{r}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} \leq t_2, \text{ για } \ r = 0, \ldots, 2^n - 1, \ j = 1, \ldots, 2^n.$$

Από τις ανισότητες αυτές παίρνουμε

$$\begin{cases} \frac{-r}{2^n} \leq -t_1 \\ \frac{j}{2^n} \leq t_2 \end{cases} \implies \frac{j-r}{2^n} \leq t.$$

Έτσι, αφού $t_1, t_2 \in [0,1]$ με $t_1 < t_2$, τότε $j = r$ ή $j = r+1$. Άρα, κάνοντας χρήση της σχέσης (2.10) παίρνουμε

$$\left| X\left(\frac{r}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \leq K \left| \frac{r-j}{2^n} \right|^{\gamma} \leq K t^{\gamma}. \tag{2.12}$$

Επίσης, πάλι από τη σχέση (2.10), έχουμε

$$\left| X\left(\frac{r}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_\xi}}, \omega\right) - X\left(\frac{r}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_{\xi-1}}}, \omega\right) \right| \leq K \left| \frac{1}{2^{p_\xi}} \right|^{\gamma}$$

για $\xi = 1, \ldots, k$, και άρα

$$\begin{aligned} \left| X(t_1, \omega) - X\left(\frac{r}{2^n}, \omega\right) \right| &\leq K \sum_{\xi=1}^{k} \left| \frac{1}{2^{p_\xi}} \right|^{\gamma} \\ &= K \sum_{\xi=1}^{k} \frac{1}{2^{\gamma p_\xi}} \\ &\leq \frac{K}{2^{n\gamma}} \sum_{\xi=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\xi\gamma}} \ (\text{αφού } p_\xi > n) \\ &= \frac{C}{2^{n\gamma}} \\ &\leq C t^{\gamma} \ (\text{από τη } (2.11)), \end{aligned} \tag{2.13}$$

όπου $C = C(\omega)$. Με μια ανάλογη διαδικασία προκύπτει

$$\left| X\left(t_2, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \leq C t^{\gamma}. \tag{2.14}$$

Τελικά, αφού

$$\begin{aligned} \left| X\left(t_1, \omega\right) - X\left(t_2, \omega\right) \right| \leq & \left| X\left(t_1, \omega\right) - X\left(\frac{r}{2^n}, \omega\right) \right| + \left| X\left(\frac{r}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \\ & + \left| X\left(t_2, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right|, \end{aligned}$$

από τις σχέσεις (2.12), (2.13), (2.14) παίρνουμε

$$|X(t_1, \omega) - X(t_2, \omega)| \leq C t^{\gamma} + C t^{\gamma} + K t^{\gamma} = \tilde{C} |t_1 - t_2|^{\gamma}$$

για κάποια σταθερά $\tilde{C}$ και για κάθε ζεύγος δυαδικών ρητών $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Αφού η απεικόνιση $t \mapsto X(t, \omega)$ είναι συνεχής για σχεδόν κάθε ω και οι δυαδικοί ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς, η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε ζεύγος πραγματικών $t_1, t_2 \in [0, 1]$. □

Παρατήρηση 2.5.5. *Διατυπώσαμε και αποδείξαμε το θεώρημα αυτό του Kolmogorov σε μια πιο ειδική μορφή. Όπως αναφέρεται από τον Evans, (βλέπε [11], Παρατήρηση, σελ. 54) γενικότερα αποδεικνύεται ότι μια στοχαστική διαδικασία με την ιδιότητα* (2.7)*, έχει μια εκδοχή για την οποία, σχεδόν κάθε τροχιά δείγματος είναι Hölder συνεχής για κάθε εκθέτη* $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$*. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στις σημειώσεις [4].*

Από το Θεώρημα 2.5.4 του Kolmogorov προκύπτει η ομοιόμορφη Hölder συνέχεια με εκθέτη $0 < \gamma < 1/2$ της κίνησης Brown:

Θεώρημα 2.5.6. *Για σχεδόν κάθε* $\omega \in \Omega$ *και κάθε* $T > 0$*, η τροχιά δείγματος* $t \mapsto \overline{W}(t, \omega)$ *είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής με εκθέτη* $0 < \gamma < 1/2$ *στο διάστημα* $[0, T]$.

Απόδειξη. Για $r := t - s > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} E\left(|\overline{W}(t) - \overline{W}(s)|^{2m}\right) &= \frac{1}{(2\pi r)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{x}|^{2m} e^{-\frac{|\overline{x}|^2}{2r}} d\overline{x} \\ &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} r^{m-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{y}|^{2m} e^{-\frac{|\overline{y}|^2}{2}} d\overline{y} \; (\overline{x} = \overline{y}\sqrt{r}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi^{n/2}} r^m \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{y}|^{2m} e^{-\frac{|\overline{y}|^2}{2}} d\overline{y}}_{<\infty} \\ &= C r^m \\ &\leq C|t-s|^m, \end{aligned}$$

όπου C θετική σταθερά. Άρα, η υπόθεση του Θεωρήματος του Kolmogorov ισχύει για $\beta = 2m$ και $\alpha = m - 1$. Επίσης, η $\overline{W}(\cdot)$ έχει συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια, διότι στο Θεώρημα 2.3.11 έχουμε αποδείξει ότι κάθε συνιστώσα έχει αυτή την ιδιότητα. Οπότε, για σχεδόν κάθε ω και κάθε $T > 0$, η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t, \omega)$ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής στο διάστημα $[0, T]$ για κάθε εκθέτη

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}, \; \forall\, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow 0 < \gamma < \frac{1}{2}.$$

□

Θεώρημα 2.5.7. *(i) Για κάθε $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ και για σχεδόν κάθε ω, η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t, \omega)$ δεν είναι πουθενά Hölder συνεχής με εκθέτη γ.*

(ii) Για σχεδόν κάθε ω η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t, \omega)$ δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη και είναι άπειρης μεταβολής σε οποιοδήποτε διάστημα $\subset [0, \infty)$.

Απόδειξη. (i): Θα αποδείξουμε το θεώρημα για $n = 1$, από το οποίο προκύπτει το αποτέλεσμα και για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $W(\cdot)$ πραγματική κίνηση Brown ορισμένη για λόγους απλότητας στο διάστημα $[0, 1]$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1.$$

Αυτή η επιλογή μπορεί να γίνει, καθώς από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\gamma - \frac{1}{2} > 0$. Υποθέτουμε ότι η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t, \omega)$ είναι Hölder συνεχής με εκθέτη γ σε κάποιο σημείο $0 \leq s < 1$. Σκοπός μας είναι να καταλήξουμε σε αντίφαση. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $s \in [0, 1]$, έτσι ώστε

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma, \; \forall\, t \in [0, 1]$$

για κάποια σταθερά $K > 0$. Στη συνέχεια, ορίζουμε $i = [ns] + 1$, όπου n πολύ μεγάλος φυσικός αριθμός. Για $j = i, i+1, \ldots, i+N-1$ έχουμε ότι $\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \in [0,1]$. Άρα

$$\begin{aligned}\left|W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right) - W\left(\frac{j}{n},\omega\right)\right| &\leq \left|W(s,\omega) - W\left(\frac{j}{n},\omega\right)\right| \\ &\quad + \left|W(s,\omega) - W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)\right| \\ &\leq K\left(\left|s - \frac{j}{n}\right|^{\gamma} + \left|s - \frac{j+1}{n}\right|^{\gamma}\right) \\ &\leq \frac{M}{n^{\gamma}}\end{aligned}$$

αφού

$$\left|s - \frac{i}{n}\right|, \left|s - \frac{j+1}{n}\right| \leq \frac{2+N}{n},$$

όπου $M > 1$ σταθερά. Οπότε

$$\omega \in \mathcal{A}^{i}_{M,n} := \left\{\left|W\left(\frac{j+1}{n}\right) - W\left(\frac{j}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}},\ \forall\ j = i, \ldots, i+N-1\right\}$$

για κάποιο $1 \leq i \leq n$, κάποιο $M \geq 1$ και κάθε $n \geq k$.
Έστω $\mathcal{C}$ το σύνολο εκείνων των $\omega \in \Omega$ για τα οποία η $W(\cdot,\omega)$ είναι Hölder συνεχής με εκθέτη γ σε κάποιο σημείο $0 \leq s < 1$. Τότε

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{A}^{i}_{M,n}.$$

Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα να συμβεί το παραπάνω ενδεχόμενο είναι 0 και έτσι θα έχουμε αποδείξει το συμπέρασμα. Παρατηρούμε αρχικά, ότι για κάθε M, k έχουμε

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{A}^{i}_{M,n}\right) &\leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{A}^{i}_{M,n}\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P\left(\mathcal{A}^{i}_{M,n}\right)\ \text{(από την Πρόταση 1.1.3, } (iii)\text{)} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} n\left[P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right)\right]^{N},\end{aligned}$$

εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $W\left(\frac{j+1}{n}\right)-W\left(\frac{j}{n}\right)$ είναι $N\left(0,\frac{1}{n}\right)$ και ανεξάρτητες. Επιπλέον, η πρώτη ανισότητα προέκυψε καθώς

$$\begin{aligned}\tilde{B}_k := \bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n} A^i_{M,n} \subset \bigcup_{i=1}^{n} A^i_{M,n} := \tilde{A}_n,\ \forall n \geq k\\ \Longrightarrow P(\tilde{B}_k) \leq P(\tilde{A}_n).\end{aligned}$$

Ας εκτιμήσουμε τώρα την πιθανότητα

$$\begin{aligned}P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right) &= P\left(-\frac{M}{n^{\gamma}} \leq W\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-Mn^{-\gamma}}^{Mn^{-\gamma}} e^{-\frac{nx^2}{2}}dx \ \left(\text{αφού } W\left(\frac{1}{n}\right) \sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-Mn^{\frac{1}{2}-\gamma}}^{Mn^{\frac{1}{2}-\gamma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \ \ (\sqrt{n}x = y)\\ &\leq Cn^{\frac{1}{2}-\gamma}.\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των δύο παραπάνω σχέσεων καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{A}^i_{M,n}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} nC\left(n^{N\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)}\right) = C\liminf_{n\to\infty} n^{1-N\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)} = 0,$$

διότι $N\left(\gamma-\frac{1}{2}\right) > 1$ από την αρχική επιλογή. Έτσι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{A}^i_{M,n}\right) = 0,\ \forall\ k, M\\ \Longrightarrow P\left(\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{A}^i_{M,n}\right) = 0.\end{aligned}$$

(ii):

- Αν η τροχιά δείγματος $W(t,\omega)$ είναι διαφορίσιμη στο s, τότε είναι τοπικά Lipschitz γύρω από το s. Δηλαδή, είναι Hölder συνεχής με εκθέτη $\gamma = 1$ στο s, <u>Άτοπο</u> από (i).

- Τέλος, έστω ότι η τροχιά δείγματος $W(t,\omega)$ είναι φραγμένης μεταβολής σε κάποιο διάστημα $\subset [0,\infty)$. Τότε (βλέπε [24], Θεώρημα Jordan, σελ. 117)

$$W(t,\omega) = f_1(t) - f_2(t),$$

όπου f_1, f_2 αύξουσες συναρτήσεις. Εν συνέχεια, από το Θεώρημα Lebesgue για τη διαφορισιμότητα μονότονων συναρτήσεων (βλέπε [24], Πρόταση 6, σελ. 118), παίρνουμε ότι οι f_1, f_2 είναι διαφορίσιμες σχεδόν παντού. Άρα, η τροχιά δείγματος είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο διάστημα που πήραμε στην αρχή. Πράγμα Άτοπο από το προηγούμενο επιχείρημα.

$\square$

2.6 Δύο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες

Σε αυτήν την ενότητα θα μιλήσουμε για στοχαστικές διαδικασίες martingales και Markov. Το εξαιρετικά χρήσιμο αποτέλεσμα που θα εξαγάγουμε, είναι ότι η κίνηση Brown είναι martingale και διαδικασία Markov. Πριν περάσουμε στους αυστηρούς ορισμούς, θα δώσουμε το κίνητρο και την ερμηνεία των martingales. Έστω $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ ανεξάρτητες πραγματικές τυχαίες μεταβλητές, έτσι ώστε, για κάθε $i \in \mathbb{N}$,

$$E(Y_i) = 0. \tag{2.15}$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε το άθροισμα $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n,\ n \in \mathbb{N}$. Η ερώτηση που θέτουμε είναι: Ποια είναι η βέλτιστη πρόβλεψη του $S_{n+k},\ k \in \mathbb{N}$, δοθέντων των $S_1, \ldots, S_n$; Για την απάντηση αυτού του ερωτήματος αρκεί να κάνουμε τον εξής υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
E(S_{n+k}|S_1, \ldots, S_n) &= E(S_n|S_1, \ldots, S_n) + E(Y_{n+1} + \cdots + Y_{n+k}|S_1, \ldots, S_n) \\
&= S_n + E(Y_{n+1} + \cdots + Y_{n+k}) \\
&= S_n + E(Y_{n+1}) + E(Y_{n+2}) + \cdots + E(Y_{n+k}) \\
&= S_n \text{ (λόγω της (2.15))}.
\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής (Πρόταση 1.1.51).

Παρατήρηση 2.6.1. *Σκεφτείτε τώρα, ότι με τα παραπάνω μαθηματικά δεδομένα στήνουμε ένα παιχνίδι. Ως Y_i ορίζουμε τα κέρδη του παιχνιδιού στο χρόνο i και επομένως το S_n είναι τα συνολικά κέρδη τη χρονική στιγμή n (έχουμε υπολογίσει όλα τα κέρδη, μέχρι και την τελευταία φορά που παίξαμε. Δηλαδή, η τελευταία μας «παρτίδα» είναι τη χρονική στιγμή n). Ο υπολογισμός που κάναμε πιο πάνω, στην ορολογία του παιχνιδιού, μας λέει ότι: Έχουμε στο χέρι μας τα κέρδη από την αρχή του παιχνιδιού (S_n). Η εκτίμηση των κερδών κάποια μελλοντική στιγμή (S_{n+k}) θα είναι ακριβώς τα κέρδη που έχουμε την παρούσα χρονική στιγμή.*

Δηλαδή, η αναμενόμενη τιμή των μελλοντικών μας κερδών είναι μηδέν. Για αυτό το λόγο μιλάμε για ένα «δίκαιο» παιχνίδι.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε αυστηρά τους ορισμούς, ξεκινώντας από τη διακριτή στοχαστική διαδικασία martingale για καλύτερη κατανόηση.

Ορισμός 2.6.2. *Έστω $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ μια ακολουθία πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, έτσι ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $E(|X_i|) < \infty$. Αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $j \geq k$ ισχύει ότι*

$$E(X_j|X_1, \ldots, X_k) = X_k \text{ σ.β.}$$

τότε η $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ καλείται ***(διακριτή) martingale****.*

Ορισμός 2.6.3. *Έστω $X(t)$ πραγματική στοχαστική διαδικασία, έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$, $E(|X(t)|) < \infty$. Αν για κάθε $t \geq s \geq 0$ ισχύει ότι*

(i)
$$E(X(t)|\mathcal{X}_s) = X(s) \text{ σ.β.}$$

τότε η $X(\cdot)$ καλείται ***martingale****.*

(ii)
$$E(X(t)|\mathcal{X}_s) \geq X(s) \text{ σ.β.}$$

τότε η $X(\cdot)$ καλείται ***submartingale****.*

Υπενθυμίζουμε ότι η $\mathcal{X}_s$ είναι η ιστορία της στοχαστικής διαδικασίας $X(\cdot)$ στον χρόνο s (Ορισμός 2.1.9, (i)).

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε κυρίως με (συνεχείς) στοχαστικές διαδικασίες martingale και θα δώσουμε τρεις απαραίτητες για τη συνέχεια ιδιότητες. Οι αποδείξεις παραλείπονται, καθώς δεν είναι αυτός ο σκοπός της εργασίας.

Πρόταση 2.6.4. *Έστω $X(\cdot)$ πραγματική, martingale στοχαστική διαδικασία και $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή. Αν για κάθε $t \geq 0$, $E(|\Phi(X(t))|) < \infty$, τότε η*

$$\Phi(X(\cdot)) \text{ είναι submartingale.}$$

Θεώρημα 2.6.5. ***(Ανισότητες martingale)*** *Έστω $X(\cdot)$ πραγματική στοχαστική διαδικασία με σχεδόν βέβαια συνεχείς τροχιές δείγματος.*

(i) Αν $X(\cdot)$ είναι submartingale, τότε για κάθε $\lambda > 0$ και $t \geq 0$ ισχύει

$$P\left(\sup_{0\leq s\leq t} X(s) \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}E(X(t)^+).$$

(ii) Αν $X(\cdot)$ είναι martingale και $p > 1$ τότε

$$E\left[\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X(t)|^p).$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [11], Θεώρημα (Martingale inequalities), σελ. 35-36 και στο [16], Θεώρημα 3.8, $(i),(iv)$, σελ. 13-14.

Στα επόμενα με $\mathcal{W}_t$ θα εννοούμε την ιστορία της κίνησης Brown στο χρόνο t.

Πρόταση 2.6.6. *Κάθε πραγματική κίνηση Brown είναι martingale.*

Απόδειξη. Έστω $W(\cdot)$ πραγματική κίνηση Brown και $s \leq t$. Καθώς $W(t) - W(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{W}_s$ και $W(s)$ είναι $\mathcal{W}_s$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή, παίρνουμε ότι

$$E(W(t) - W(s)|\mathcal{W}_s) = E(W(t) - W(s))$$

και

$$E(W(s)|\mathcal{W}_s) = W(s).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E(W(t)|\mathcal{W}_s) &= E(W(t) - W(s) + W(s)|\mathcal{W}_s) \\ &= E(W(t) - W(s)|\mathcal{W}_s) + E(W(s)|\mathcal{W}_s) \\ &= \underbrace{E(W(t) - W(s))}_{=0} + W(s) = W(s) \text{ σ.β.} \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.6.7. *Μια n-διάστατη στοχαστική διαδικασία $\overline{X}(\cdot)$ καλείται* ***διαδικασία Markov****, αν*

$$P(\overline{X}(t) \in B|\mathcal{X}_s) = P(\overline{X}(t) \in B|\overline{X}(s)) \text{ σ.β.}$$

για κάθε $s \in [0,t)$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (για υπενθύμιση των συμβολισμών βλέπε τους Ορισμούς 1.1.45, 1.1.46, 1.1.50 και την Παρατήρηση 1.1.48 (i)).

Παρατήρηση 2.6.8. *Η ιδέα της συγκεκριμένης ιδιότητας είναι η εξής: Έστω ότι θέλουμε να προβλέψουμε τις μελλοντικές τιμές της $X(t)$, έχοντας στο χέρι μας όλη την ιστορία της διαδικασίας μέχρι και τον χρόνο s. Το προηγούμενο είναι ισοδύναμο, με το να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές τιμές, δοσμένης μόνο της τωρινής τιμής της διαδικασίας, δηλαδή την $X(s)$. Σε πλήρη εκλαΐκευση, η διαδικασία ξέρει μόνο την τιμή στο χρόνο s και δεν «θυμάται» πώς έφτασε εκεί.*

Υπάρχουν διάφορες ισοδύναμες εκφράσεις της ιδιότητας Markov (βλέπε π.χ. [9], Ενότητα 3.2).

Για τη σκιαγράφηση της απόδειξης ότι η κίνηση Brown είναι στοχαστική διαδικασία Markov, θα στηριχθούμε στην απόδειξη των Karatzas and Shreve (βλέπε [16], Θεώρημα 5.12, σελ. 75 και Πρόβλημα 5.9, σελ. 74 και σελ. 121).

Πρόταση 2.6.9. *Έστω $\overline{X}, \overline{Y}$ n-διάστατες τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Έστω $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$ σ-άλγεβρα, $\overline{X}$ ανεξάρτητη της $\mathcal{G}$ και $\overline{Y}$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. Τότε, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,*

$$P(\overline{X} + \overline{Y} \in B|\mathcal{G}) = P(\overline{X} + \overline{Y} \in B|\overline{Y}).$$

***Απόδειξη*.** Έστω $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Αρχικά, θα δείξουμε ότι

$$P((\overline{X}, \overline{Y}) \in D|\mathcal{G}) = P((\overline{X}, \overline{Y}) \in D|\overline{Y}). \tag{2.16}$$

Αν $D = C \times K$, όπου $C, K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, τότε

$$\begin{aligned} P((\overline{X}, \overline{Y}) \in C \times K|\mathcal{G}) &= E\left(1_{\{\overline{X} \in C\}} 1_{\{\overline{Y} \in K\}}|\mathcal{G}\right) \\ &= 1_{\{\overline{Y} \in K\}} E\left(1_{\{\overline{X} \in C\}}|\mathcal{G}\right) \text{ (Πρόταση 1.1.51, } (iii)) \\ &= 1_{\{\overline{Y} \in K\}} E\left(1_{\{\overline{X} \in C\}}\right) \text{ (Πρόταση 1.1.51, } (iv)) \\ &= 1_{\{\overline{Y} \in K\}} P(\overline{X} \in C). \end{aligned}$$

Με την ίδια ακριβώς διαδικασία, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$P((\overline{X}, \overline{Y}) \in D|\overline{Y}) = 1_{\{\overline{Y} \in K\}} P(\overline{X} \in C).$$

Οπότε, δείξαμε ότι για κάθε $D = C \times K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ισχύει η (2.16). Το σύνολο όλων των παραπάνω D, αποτελούν ένα σύστημα Dynkin (βλέπε [16], Ορισμό 1.2, σελ. 49), που περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια. Συνεπώς, η (2.16) ισχύει για κάθε $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. □

Πρόταση 2.6.10. *Κάθε n-διάστατη κίνηση Brown είναι διαδικασία Markov.*

Απόδειξη. Έστω $\{\overline{W}(s) : s \geq 0\}$ n-διάστατη κίνηση Brown. Τότε, από τον ορισμό της n-διάστατης κίνησης Brown, η διαδικασία

$$\overline{W}(t) := (\overline{W}(t) - \overline{W}(s)) - \overline{W}(s),\ 0 \leq s < t,$$

είναι n-διάστατη κίνηση Brown και η προσαύξηση $\overline{W}(t) - \overline{W}(s)$ είναι ανεξάρτητη της ιστορίας $\mathcal{W}_s$. Οπότε, από την Πρόταση 2.6.9, για $\overline{X} := \overline{W}(t) - \overline{W}(s)$, $\overline{Y} := \overline{W}(s)$ και $\mathcal{G} := \mathcal{W}_s$, παίρνουμε το αποτέλεσμα. $\square$

Παρατήρηση 2.6.11. *Το ότι η κίνηση Brown, είναι διαδικασία Markov «εξηγεί» κατά κάποιο τρόπο, τη μη διαφορισιμότητα των τροχιών δείγματός της.*
Έστω $\overline{W}(s, \omega) = b$. Η μελλοντική συμπεριφορά της $\overline{W}(t, \omega)$ $(t > s)$ εξαρτάται μόνο από το b και όχι από το πώς αυτή προσέγγισε το b καθώς $t \to s^-$. Δηλαδή, η τροχιά δείγματος «δεν θυμάται» πώς έφτασε στο b, άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για εφαπτόμενο διάνυσμα της $\overline{W}(t, \omega)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Λογισμος Itô

3.1 Κίνητρο

Κύριος σκοπός αυτής της διατριβής είναι να μελετηθεί η ολοκληρωτική εξίσωση

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(X(s), s)ds + \int_0^t B(X(s), s)dW(s), \ \forall \ t \geq 0,$$

όπου $X(\cdot)$ στοχαστική διαδικασία, b, B συναρτήσεις, οι οποίες θα οριστούν με ακρίβεια στην πορεία και $W(\cdot)$, όπως ήδη γνωρίζουμε, η κίνηση Brown.
Όμως, τι ακριβώς εννοούμε γράφοντας

$$\int_0^T G(t)dW(t),$$

για μια κλάση στοχαστικών διαδικασιών G; Πώς ακριβώς ορίζεται ένα τέτοιο ολοκλήρωμα; Ας απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση με την εξής παρατήρηση:

Παρατήρηση 3.1.1. *Όπως είδαμε η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t, \omega)$ είναι άπειρης μεταβολής. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται με τον συνήθη τρόπο του ολοκληρώματος Riemann. Επιπλέον, ακόμα και αν τυπικά (formally) μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα ως*

$$\int_0^T G(t)dW(t) = \int_0^T G(t)\frac{dW(t)}{dt}dt,$$

δεν είναι σαφές πώς αυτό ορίζεται, καθώς η κίνηση Brown είναι σχεδόν βέβαια μη διαφορίσιμη σε κάθε $t \in [0, t]$. Έτσι, πρέπει να θεμελιώσουμε κάποιο «νέο» είδος λογισμού, αν θέλουμε να «επιλύσουμε» την παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση. Ο λογισμός αυτός που θα χτίσουμε στην πορεία καλείται λογισμός Itô, προς τιμή του Ιάπωνα μαθηματικού Kiyosi Itô (1915-2008), ο οποίος είχε καθοριστική συμβολή στη θεμελίωση του λογισμού αυτού.

Έναν πρώτο ορισμό αυτού του ολοκληρώματος έδωσαν οι μαθηματικοί Paley, Wiener, Zygmund, με την προϋπόθεση όμως ότι το ολοκληρωτέο μέγεθος δεν είναι στοχαστική διαδικασία, αλλά μια συνήθης (ντεντερμινιστική) συνάρτηση (βλέπε και [11], σελ. 60).

Ορισμός 3.1.2. *Έστω $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, έτσι ώστε $g(0) = g(T) = 0$. Τότε ορίζουμε*

$$\int_0^T g(t)dW(t) := -\int_0^T g'(t)W(t)dt.$$

Παρατήρηση 3.1.3. *Σημειώνουμε εδώ ότι, καθώς για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto W(t,\omega) \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, είναι συνεχής, το ολοκλήρωμα στα δεξιά ορίζεται, για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$, ως ένα σύνηθες ολοκλήρωμα Riemann (ή Lebesgue). Μέσω της απεικόνισης*

$$\omega \mapsto \int_0^T g'(t)W(t,\omega)dt \in \mathbb{R},$$

για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, ορίζεται μια τυχαία μεταβλητή $\Omega \to \mathbb{R}$. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για συνεχείς συναρτήσεις $\overline{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, όπου μέσω της

$$\omega \mapsto \int_0^t \overline{b}(\overline{X}(s,\omega), s)ds \in \mathbb{R}^n,$$

ορίζεται για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ και κάθε $t \geq 0$ μια τυχαία μεταβλητή, αν η $\overline{X}(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ έχει σχεδόν βέβαια συνεχείς τροχιές δείγματος.

Πολλές φορές, χάριν συντομίας θα παραλείπουμε το όρισμα των συναρτήσεων και θα γράφουμε π.χ. g ή W.
Ας δούμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες του συγκεκριμένου ολοκληρώματος.

Λήμμα 3.1.4. *Έστω $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, έτσι ώστε $g(0) = g(T) = 0$. Τότε*

(i) $E\left(\int_0^T gdW\right) = 0.$

(ii) $E\left[\left(\int_0^T gdW\right)^2\right] = \int_0^T g^2 dt.$

Απόδειξη. (i): Είναι άμεσο από τον ορισμό, αφού

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^1 gdW\right) &= -E\left(\int_0^T g'Wdt\right) = -\int_0^T E(g'W)dt \\ &= -\int_0^T g'(t)\underbrace{E(W(t))}_{=0}dt = 0, \end{aligned}$$

εφόσον $W(t) \sim N(0,t)$.
(ii):

$$\begin{aligned} & E\left[\left(\int_0^T gdW\right)^2\right] = E\left(\int_0^T g'(t)W(t)dt\int_0^T g'(s)W(s)ds\right) \\ &= \int_0^T\int_0^T g'(t)g'(s)\underbrace{E(W(t)W(s))}_{=t\wedge s}dsdt \\ &= \int_0^T g'(t)\left(\int_0^T g'(s)(t\wedge s)ds\right)dt \text{ (σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.5)} \\ &= \int_0^T g'(t)\left(\int_0^t sg'(s)ds + \int_t^T tg'(s)ds\right)dt \\ &= \int_0^T g'(t)\left(tg(t) - \int_0^t g(s)ds + t\underbrace{g(T)}_{=0} - tg(t)\right)dt \\ &= \int_0^T g'(t)\left(-\int_0^t g(s)ds\right)dt \\ &= \int_0^T g^2(t)dt \text{ (παραγοντική ολοκλήρωση)}, \end{aligned}$$

όπου για την τρίτη ισότητα από το τέλος, χρησιμοποιήσαμε την παραγοντική ολοκλήρωση. □

Υποθέτουμε τώρα ότι $g \in L^2(0,1)$. Αφού ο χώρος των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα $C_c^\infty(0,1)$ είναι πυκνός στον $L^2(0,1)$ (βλέπε [6], Πρόταση 4.23, σελ. 109), μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία συνεχών διαφορίσιμων συναρτήσεων $g_n \in L^2(0,1)$, έτσι ώστε

$$\int_0^1 (g_n - g)^2 dt \to 0.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την δεύτερη ιδιότητα του προηγούμενου λήμματος έχουμε

$$E\left[\left(\int_0^1 g_m dW - \int_0^1 g_n dW\right)^2\right] = \int_0^1 (g_m - g_n)^2 dt$$

και επομένως, η ακολουθία $\{\int_0^1 g_n dW\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy στον χώρο $L^2(\Omega)$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μοναδικά το ολοκλήρωμα της g ως

$$\int_0^1 g dW := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n dW$$

για το οποίο ισχύουν τα συμπεράσματα του προηγούμενου λήμματος, σύμφωνα με τον Evans (βλέπε [11], σελ. 61).
Άρα, με την προηγούμενη διαδιακασία δώσαμε έναν ορισμό του ολοκληρώματος $\int_0^1 g dW$, ο οποίος έχει όμως νόημα μόνο για συναρτήσεις $g \in L^2(0,1)$ και όχι για στοχαστικές διαδικασίες που είναι ο κύριος στόχος μας. Στη συνέχεια, θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t B(X(s), s) dW(s),$$

όπου $X(\cdot)$ είναι στοχαστική διαδικασία. Προφανώς, η παραπάνω διαδικασία σε αυτήν την περίπτωση δεν μας καλύπτει. Έτσι οδηγούμαστε να δώσουμε έναν γενικευμένο ορισμό, όταν το ολοκληρωτέο μέγεθος είναι μια στοχαστική διαδικασία, ο οποίος θα πρέπει να συμπίπτει με τον ορισμό των Paley-Wiener-Zygmund, στην περίπτωση που η $X(\cdot)$ είναι συνάρτηση.

Ας συνεχίσουμε την μελέτη μας με το ολοκληρωτικο μέγεθος να είναι η πραγματική κίνηση Brown και όχι γενικά μια οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία. Θα προσπαθήσουμε να δουλέψουμε με τον γνωστό τρόπο, δηλαδή να κατασκευάσουμε μια προσέγγιση με αθροίσματα Riemann και μετέπειτα, αν είναι εφικτό, να περάσουμε στην οριακή κατάσταση.

Ορισμοί 3.1.5. *(i) Έστω διάστημα $[0,T] \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως **διαμέριση** P του $[0,T]$, μια πεπερασμένη διατεταγμένη συλλογή σημείων αυτού του διαστήματος με τον εξής τρόπο:*

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}.$$

*(ii) Ονομάζουμε **λεπτότητα (mesh size)** του P και συμβολίζουμε με $|P|$ τον αριθμό*

$$|P| := \max_{0\le k\le m-1} |t_{k+1} - t_k|.$$

.

Ορισμός 3.1.6. *Σταθεροποιούμε ένα $\lambda \in [0,1]$ και επιλέγουμε μια διαμέριση P του $[0,T]$. Ορίζουμε για $k = 0, \dots, m-1$*

$$\tau_k := (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1} \left(\iff \tau_k - t_k = \lambda(t_{k+1} - t_k) \right).$$

*Επιπλέον, ορίζουμε το αντίστοιχο **άθροισμα Riemann** για την προσέγγιση του $\int_0^T W dW$, το οποίο είναι*

$$R = R(P, \lambda) := \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Γενικά, η διαμέριση θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία για καλύτερη προσέγγιση. Για τον λόγο αυτό ας δούμε τι συμβαίνει στο όριο $|P| \to 0$.

Λήμμα 3.1.7. ***(Τετραγωνική μεταβολή)*** *Έστω $[a,b] \subset [0,\infty)$ και διαμερίσεις $P^n = \{a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = b\}$ του $[a,b]$, έτσι ώστε $|P^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Τότε*

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right)\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} b-a$$

στον χώρο $L^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω $Q_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right)\right)^2$. Τότε, χρησιμοποιώντας και τη μορφή της διαμέρισης έχουμε

$$Q_n - (b-a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left[\left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right)\right)^2 - \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right)\right].$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} E\left[(Q_n - (b-a))^2\right] = \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{j=0}^{m_n-1} E(&\left[\left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right)\right)^2 - \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right)\right] \\ &\times \left[\left(W\left(t_{j+1}^n\right) - W\left(t_j^n\right)\right)^2 - \left(t_{j+1}^n - t_j^n\right)\right]) \end{aligned}$$

Τώρα για $k \neq j$ η μέση τιμή στο διπλό άθροισμα μπορεί να σπάσει στις δύο αγκύλες, λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων της κίνησης Brown (βλέπε Θεώρημα 1.1.37). Όμως

$$E\left[\left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right)\right)^2 - \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right)\right] = 0$$

και

$$E\left[\left(W\left(t_{j+1}^n\right)-W\left(t_j^n\right)\right)^2-\left(t_{j+1}^n-t_j^n\right)\right]=0,$$

διότι από την Παρατήρηση 2.2.2 γνωρίζουμε ότι $E\left[(W(t)-W(s))^2\right]=t-s$ για κάθε $t\geq s\geq 0$. Οπότε ας δούμε τι γίνεται, όταν $k=j$:

$$\begin{aligned}
E\left[(Q_n-(b-a))^2\right] &= \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left(\left[\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)^2-\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)\right]^2\right)\\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[\frac{\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)^2-\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)}{t_{k+1}^n-t_k^n}\right]^2\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)^2\\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[\left(Y_k^2-1\right)^2\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)^2\right],
\end{aligned}$$

όπου

$$Y_k:=\frac{W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(t_k^n\right)}{\sqrt{t_{k+1}^n-t_k^n}}\sim N(0,1).$$

Επομένως, αφού $E\left((Y_k^2-1)^2\right)\leq C$, για κάθε $k=0,\ldots,m_n-1$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$, για κάποια σταθερά C παίρνουμε

$$\begin{aligned}
E\left[(Q_n-(b-a))^2\right] &\leq C\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)^2\\
&\leq C\left|P^n\right|(b-a)\xrightarrow{n\to\infty}0.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.1.8. *Είναι το πρώτο αποτέλεσμα που ίσως μας φανεί κάπως περίεργο σε σχέση με όσα γνωρίζουμε από τον «συνήθη» λογισμό:*
Έστω $f:[0,T]\to\mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και μια διαμέριση $\left\{0,\frac{T}{n},\frac{2T}{n},\ldots\frac{(n-1)T}{n},T\right\}$ του διαστήματος $[0,T]$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $s_i\in\left(t_{i-1}=\frac{i-1}{n}T,t_i=\frac{i}{n}T\right)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n\left(f\left(t_i\right)-f\left(t_{i-1}\right)\right)^2 &= \sum_{i=1}^n\left[f'(s_i)(t_i-t_{i-1})\right]^2\\
&\leq \max_{0\leq s\leq T}(f'(s))^2\sum_{i=1}^n\underbrace{(t_i-t_{i-1})^2}_{=\frac{T^2}{n^2}}
\end{aligned}$$

$$= \max_{0\le s\le T}(f'(s))^2\frac{T^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ \forall\, T>0.$$

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με αυτό που ισχύει στην περίπτωση $f = W$, *όπως είδαμε στο προηγούμενο λήμμα. Αυτό φυσικά οφείλεται στο ότι οι τροχιές δείγματος* $t \mapsto W(t,\omega)$ *κάθε άλλο παρά συνεχώς διαφορίσιμες είναι, αφού δεν είναι πουθενά διαφορίσιμες.*

Μάλιστα, το προηγούμενο λήμμα επιβεβαιώνει ότι οι τροχιές δείγματος είναι άπειρης μεταβολής: Αφού δείξαμε ότι

$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t^n_{k+1}\right)-W\left(t^n_k\right)\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} b-a$$

στον $L^2(\Omega)$, *υπάρχει υπακολουθία έτσι ώστε (βλέπε [6], Θεώρημα 4.9, σελ. 94)*

$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t^n_{k+1}\right)-W\left(t^n_k\right)\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} b-a \text{ σ.β.}$$

Για κάθε $\omega \in \Omega$ *για το οποίο ισχύει αυτή η σύγκλιση και για το οποίο η τροχιά δείγματος είναι Hölder συνεχής με εκθέτη* $0<\gamma<1/2$ *έχουμε*

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{2} &\le \sum_{k=0}^{m_n-1}\left|W\left(t^n_{k+1}\right)-W\left(t^n_k\right)\right|^2\\ &\le C|t^n_{k+1}-t^n_k|^\gamma\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|W\left(t^n_{k+1}\right)-W\left(t^n_k\right)\right|\\ &\le C|P^n|^\gamma\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|W\left(t^n_{k+1}\right)-W\left(t^n_k\right)\right|\end{aligned}$$

για κάποιο $C\ge 0$ *και συνεπώς*

$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|W\left(t^n_{k+1}\right)-W\left(t^n_k\right)\right| \ge \frac{b-a}{2C}\frac{1}{|P^n|^\gamma}\to\infty,$$

για $|P^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. *Άρα*

$$\sup_{\text{διαμερίσεις } P}\left\{\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|W\left(t^n_{k+1}\right)-W\left(t^n_k\right)\right|\right\}=\infty.$$

Επίσης, το συγκεκριμένο λήμμα είναι πολύ σημαντικό, διότι μας δείχνει πώς συνδέονται οι διαφορές των τιμών της $W(t)$ με τις διαφορές των τιμών του t. Συγκεκριμένα, καθώς

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}\right)^2 = b - a,$$

για $n \to \infty$, ισχύει

$$(dW)^2 \approx dt \;\text{ ή }\; dW \approx \sqrt{dt}.$$

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς συμπεριφέρεται το όριο του αθροίσματος Riemann που ορίσαμε.

Πρόταση 3.1.9. *Έστω $P^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = T\}$ μια διαμέριση του $[0,T]$ με $|P^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $\lambda \in [0,1]$. Επίσης, θέτουμε*

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W\left(\tau_k^n\right)\left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right)\right) \tag{3.1}$$

με τ_k^n όπως πριν. Τότε

$$R_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T$$

στον χώρο $L^2(\Omega)$. Συγκεκριμένα, αυτό μας δίνει ότι

$$\left\| R_n - \frac{W^2(T)}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$\iff E\left[\left(R_n - \frac{W^2(T)}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T\right)^2\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Απόδειξη. Αρχικά, ας παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{W^2(T)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W^2\left(t_{k+1}^n\right) - W^2\left(t_k^n\right)\right) \text{ (τηλεσκοπικό άθροισμα).}$$

Έτσι, σύμφωνα με αυτή την σχέση και προσθαφαιρώντας τους όρους

$\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} W^2\left(\tau_k^n\right)$ και $\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} W\left(t_{k+1}^n\right) W\left(t_k^n\right)$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=0}^{m_n-1} W\left(\tau_k^n\right)\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right) \\
&= \frac{W^2(T)}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)^2+\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)^2 \\
&\quad+\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(\tau_k^n\right)\right)\left(W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right).
\end{aligned}
$$

Οπότε, παίρνοντας τώρα το όριο και σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα και τον Ορισμό 3.1.6 έχουμε

$$
R_n \to \frac{W^2(T)}{2}-\frac{T}{2}+\lambda T+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(\tau_k^n\right)\right)\left(W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right),
$$

όπου φυσικά τα όρια είναι στον $L^2(\Omega)$, καθώς $n\to\infty$. Άρα, μένει να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο (το οποίο πρέπει να το βγάλουμε ίσο με 0).

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left[\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(\tau_k^n\right)\right)\left(W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)\right]^2\right) \\
&= Var\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(\tau_k^n\right)\right)\left(W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)\right) \\
&\quad+\left[E\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(\tau_k^n\right)\right)\left(W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)\right)\right]^2 \\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1} Var\left(\left[W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(\tau_k^n\right)\right]\left[W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right]\right) \\
&\quad+\left[\sum_{k=0}^{m_n-1}\underbrace{E\left(W\left(t_{k+1}^n\right)-W\left(\tau_k^n\right)\right)}_{=0}\underbrace{E\left(W\left(\tau_k^n\right)-W\left(t_k^n\right)\right)}_{=0}\right]^2 \\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1}\left(t_{k+1}-\tau_k^n\right)\left(\tau_k^n-t_k^n\right)=\sum_{k=0}^{m_n-1}(1-\lambda)\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)\lambda\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right) \\
&\le \lambda(1-\lambda)|P^n|\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(t_{k+1}^n-t_k^n\right)=\lambda(1-\lambda)|P^n|\left(t_{m_n}^n-t_0^n\right)
\end{aligned}
$$

$$= \lambda(1-\lambda)\,|P^n|\,T \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Στην πρώτη ισότητα κάναμε χρήση της Παρατήρησης 1.1.25 και στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 1.1.38, καθώς γνωρίζουμε ότι οι προσαυξήσεις της κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες (άρα και το γινόμενο δύο προσαυξήσεων είναι ανεξάρτητο σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.35). Επίσης, για την τρίτη ισότητα θέτουμε $X = W(t^n_{k+1}) - W(\tau^n_k)$, $Y = W(\tau^n_k) - W(t^n_k)$ και γνωρίζοντας ότι $E(X^2) = t^n_{k+1} - \tau^n_k$, $E(Y^2) = \tau^n_k - t^n_k$ (μέσω της Παρατήρησης 2.2.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} Var(XY) &= E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 \\ &= E(X^2)E(Y^2) - \Bigg[\underbrace{E(X)}_{=0}\underbrace{E(Y)}_{=0}\Bigg]^2 \\ &= (t^n_{k+1} - \tau^n_k)(\tau^n_k - t^n_k), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες και άρα οι X^2, Y^2 είναι ανεξάρτητες (μέσω της Πρότασης 1.1.35), και φυσικά το Θεώρημα 1.1.37. □

Παρατήρηση 3.1.10. *Από την παραπάνω πρόταση καταλαβαίνουμε ότι το αποτέλεσμα του ορίου εξαρτάται από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων* $\tau^n_k = (1-\lambda)t^n_k + \lambda t^n_{k+1}$ *της διαμέρισης, δηλαδή από την επιλογή του* λ.

Στην επόμενη ενότητα, ορίζοντας το ολοκλήρωμα Itô, θα δούμε ότι αυτό αντιστοιχεί στην επιλογή $\lambda = 0$. Δηλαδή, για $\lambda = 0$ η προηγούμενη πρόταση μας δίνει το ολοκλήρωμα Itô της κίνησης Brown το οποίο είναι

$$\int_0^T W dW = \frac{W^2(T)}{2} - \frac{T}{2}.$$

Με την επιλογή $\lambda = 0$, επιλέγουμε τα αθροίσματα Riemann για την τιμή $\tau^n_k = t^n_k$, η οποία είναι το αριστερό άκρο του υποδιαστήματος $[t^n_k, t^n_{k+1}]$ της διαμέρισης P^n του $[0, T]$. Η ιδέα πίσω από αυτή την επιλογή είναι ότι (όπως θα δούμε στη συνέχεια πιο αναλυτικά), αν t εκπροσωπεί τον χρόνο, δεν γνωρίζουμε τη χρονική στιγμή t^n_k ποια θα είναι η εξέλιξη της κίνησης Brown στο μέλλον και άρα και για $\tau^n_k \in (t^n_k, t^n_{k+1}]$, ενώ αντίθετα γνωρίζουμε την τιμή της τη χρονική στιγμή t^n_k.

3.2 Ολοκλήρωμα Itô

Ορισμός 3.2.1. *Ορίζουμε ως $\mathbb{L}^2(0,T)$ τον χώρο των πραγματικών, προοδευτικά μετρήσιμων στοχαστικών διαδιακασιών $G(\cdot)$, έτσι ώστε*

$$E\left(\int_0^T G^2(t)dt\right) < \infty \ \left(\iff \|G\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} < \infty\right).$$

Εδώ, όπως και σε όλη την εργασία, η filtration $\mathcal{F}_t$, στην οποία αναφέρεται η προοδευτική μετρησιμότητα, θεωρούμε ότι είναι ως προς μια κίνηση Brown, δηλαδή η $\overline{X}(\cdot)$ του Ορισμού 2.1.10 είναι μια κίνηση Brown.

Ορισμός 3.2.2. *Αντίστοιχα, ορίζουμε ως $\mathbb{L}^1(0,T)$ τον χώρο των πραγματικών, προοδευτικά μετρήσιμων στοχαστικών διαδικασιών $F(\cdot)$, έτσι ώστε*

$$E\left(\int_0^T |F(t)|dt\right) < \infty \ \left(\iff \|F\|_{L^1([0,T]\times\Omega)} < \infty\right).$$

Ορισμός 3.2.3. *Μια διαδικασία $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ καλείται **διαδικασία βήματος (step process)** αν υπάρχει μια διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$ ώστε*

$$G(t) \equiv G_k \text{ για } t_k \leq t < t_{k+1} \ (k = 0, \dots, m-1)$$

ή ισοδύναμα

$$G(t) := \sum_{k=0}^{m-1} G_k 1_{[t_k,t_{k+1})}(t),$$

όπου θυμίζουμε ότι $1_{[t_k,t_{k+1})}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_k,t_{k+1}) \\ 0, & t \notin [t_k,t_{k+1}) \end{cases}$ *είναι η δείκτρια συνάρτηση.*

Παρατήρηση 3.2.4. *Καθώς η G είναι προσαρμοσμένη στην filtration $\mathcal{F}_t$ (η οποία μας παρέχει πληροφορίες για την κίνηση Brown, εφόσον στον ορισμό της filtration χρησιμοποιούμε την ιστορία και το μέλλον της κίνησης Brown), οι τυχαίες μεταβλητές G_k είναι $\mathcal{F}_{t_k}$-μετρήσιμες.*

Στη συνέχεια, θα δώσουμε έναν «αναμενόμενο» ορισμό, σύμφωνα με αυτά που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Ορισμός 3.2.5. *Έστω $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ μια διαδικασία βήματος. Τότε το*

$$\int_0^T G dW := \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

είναι το ***στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô*** *της διαδικασίας βήματος G στο διάστημα $(0,T)$.*

Προφανώς, το ολοκλήρωμα που ορίσαμε είναι τυχαία μεταβλητή. Ας δούμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες αυτού του ολοκληρώματος.

Πρόταση 3.2.6. *Έστω σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$ και $G, H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ διαδικασίες βήματος. Τότε*

(i) (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

$$\int_0^T (aG + bH)dW = a\int_0^T GdW + b\int_0^T HdW.$$

(ii) (μέση τιμή του ολοκληρώματος)

$$E\left(\int_0^T GdW\right) = 0.$$

(iii) (διακύμανση του ολοκληρώματος ή ισομετρία του Itô)

$$E\left[\left(\int_0^T GdW\right)^2\right] = E\left(\int_0^T G^2 dt\right).$$

Απόδειξη. (i): Έστω $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$ η κοινή διαμέριση των $G(\cdot)$ και $H(\cdot)$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_0^T (aG+bH)dW &= \sum_{k=0}^{m-1} (aG_k + bH_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) \\ &= a\sum_{k=0}^{m-1} G_k\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) + b\sum_{k=0}^{m-1} H_k\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) \\ &= a\int_0^T GdW + b\int_0^T HdW.\end{aligned}$$

(ii): Έστω $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$ η διαμέριση της $G(\cdot)$. Τότε

$$\begin{aligned}E\left(\int_0^T GdW\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} E\left[G_k\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{E(G_k)}_{<\infty}\underbrace{E\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η G_k είναι $\mathcal{F}_{t_k}$-μετρήσιμη (από τον ορισμό της διαδικασίας βήματος), η $\mathcal{F}_{t_k}$ είναι ανεξάρτητη από το μέλλον της κίνησης Brown $\mathcal{W}_{t_k}^{+}$ (από τον ορισμό της filtration) και η $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ είναι $\mathcal{W}_{t_k}^{+}$-μετρήσιμη. Άρα, η G_k είναι ανεξάρτητη της $W(t_{k+1}) - W(t_k)$. Στην ουσία, την ανεξαρτησία μας την έδωσε η πληροφορία ότι η G είναι προσαρμοσμένη στην filtration.
(iii): Έστω πάλι $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$ η διαμέριση της $G(\cdot)$. Τότε

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^T GdW\right)^2\right] &= E\left[\left(\int_0^T GdW\right)\left(\int_0^T GdW\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{m-1} G_k\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\sum_{j=0}^{m-1} G_j\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{k,j=0}^{m-1} G_kG_j\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)\right] \\
&= \sum_{k,j=0}^{m-1} E\left[G_kG_j\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)\right].
\end{aligned}$$

Ας εκτιμήσουμε τον όρο μέσα στο διπλό άθροισμα για $j < k$. Εφαρμόζοντας τα ίδια επιχειρήματα με το (ii), έχουμε ότι οι όροι $G_k, G_j, W(t_{j+1}) - W(t_j)$ είναι ανεξάρτητοι από τον όρο $W(t_{k+1}) - W(t_k)$. Οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.35 , το $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ είναι ανεξάρτητο του $G_kG_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))$. Άρα, βάση του Θεωρήματος 1.1.37 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&E\left[G_kG_j\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)\right] \\
&= \underbrace{E(G_kG_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)))}_{<\infty}\underbrace{E(W(t_{k+1}) - W(t_k))}_{=0}.
\end{aligned}$$

Ομοίως, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα για $j > k$ και εν τέλει το άθροισμα «επιβιώνει» για $j = k$. Ας το υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^T GdW\right)^2\right] &= \sum_{k=0}^{m-1} E\left[G_k^2\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k^2\right)\underbrace{E\left[\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2\right]}_{=t_{k+1}-t_k} \\
&= E\left(\sum_{k=0}^{m-1} G_k^2(t_{k+1} - t_k)\right)
\end{aligned}$$

$$= E\left(\int_0^T G^2 dt\right).$$

□

Στη συνέχεια, σκοπός μας είναι να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα μιας τυχαίας στοχαστικής διαδικασίας $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Θα προσπαθήσουμε να την προσεγγίσουμε από μια ακολουθία διαδικασιών βήματος και να πάρουμε το όριο αυτής της ακολουθίας.

Πρόταση 3.2.7. *Έστω $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Τότε υπάρχει ακολουθία φραγμένων διαδικασιών βήματος $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$, έτσι ώστε*

$$E\left(\int_0^T |G^n - G|^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη σε τρία βήματα.
Βήμα 1:
Έστω $F \in \mathbb{L}^2(0,T)$ φραγμένη και $F(\cdot,\omega)$ συνεχής για κάθε $\omega \in \Omega$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία διαδικασιών βήματος $F^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$ έτσι ώστε

$$E\left(\int_0^T |F^n - F|^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε την ακολουθία

$$F^n(t,\omega) := \sum_{j=0}^{n-1} F(t_j,\omega) 1_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$

όπου $t_0,\ldots,t_n$ μια διαμέριση του $[0,T]$. Αφού $F \in \mathbb{L}^2(0,T)$, τότε η F^n είναι μια ακολουθία διαδικασιών βήματος ορισμένη στον χώρο $\mathbb{L}^2(0,T)$. Επίσης, για κάθε $\omega \in \Omega$, η $F(\cdot,\omega)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,T]$ και συνεπώς για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\omega,\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε για $t, t' \in [0,T]$ με $|t-t'| < \delta$ ισχύει $|F(t,\omega) - F(t',\omega)| < \varepsilon$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0 = n_0(\delta)$, για το οποίο η λεπτότητα της διαμέρισης είναι μικρότερη από δ, ισχύει

$$\sup_{t\in[0,T)} |F(t,\omega) - F^n(t,\omega)| = \max_{j=0,\ldots,n-1} \sup_{t\in[t_j,t_{j+1})} |F(t,\omega) - F(t_j,\omega)| < \varepsilon$$

και συνεπώς $F^n(\cdot,\omega) \xrightarrow{n\to\infty} F(\cdot,\omega)$ ομοιόμορφα στο $[0,T]$. Αυτό συνεπάγεται

$$\int_0^T |F^n - F|^2 dt \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega..$$

Επιπλέον, επειδή η $F \in \mathbb{L}^2(0,T)$ είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$, έτσι ώστε

$$\forall\ (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega: \quad |F(t,\omega)| \leq M \quad \Longrightarrow \quad |F^n(t,\omega)| \leq M \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς

$$\int_0^T |F^n - F|^2 dt \leq 4M^2T \quad \forall\ \omega \in \Omega.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης,

$$E\left(\int_0^T |F^n - F|^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Βήμα 2:

Έστω $H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ φραγμένη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία φραγμένων διαδικασιών $H^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$, έτσι ώστε $H^n(\cdot,\omega)$ να είναι συνεχής για κάθε ω, n και να ισχύει

$$E\left(\int_0^T |H^n - H|^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Αρχικά, εφόσον η H είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$, έτσι ώστε για κάθε (t,ω)

$$|H(t,\omega)| \leq M.$$

Εν συνεχεία, ορίζουμε μια ακολουθία συναρτήσεων ψ_n, η οποία αποτελείται από μη αρνητικές και συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες στο $\mathbb{R}$, με τις εξής ιδιότητες

(i) $\psi_n(x) = 0,\ \forall\ x \leq -\frac{1}{n}$ και $\forall\ x \geq 0$.

(ii) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)dx = 1 \ \left(\Longleftrightarrow \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{0} \psi_n(x)dx = 1\right)$.

Επίσης, ορίζουμε την ακολουθία

$$H^n(t,\omega) := \int_0^t \psi_n(s-t)H(s,\omega)ds = \int_{t-\frac{1}{n}}^t \psi_n(s-t)H(s,\omega)ds.$$

Ας επιβεβαιώσουμε τώρα, ότι αυτή η ακολουθία είναι φραγμένη για κάθε $\omega \in \Omega$ και συνεχής ως προς t:

$$\begin{aligned}
|H^n(t,\omega)| &\leq \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} |\psi_n(s-t)||H(s,\omega)|ds \\
&\leq M \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \psi_n(s-t)ds \\
&= M \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \psi_n(u)du \ (u = s-t) \\
&= M \ (\text{από το } (ii)).
\end{aligned}$$

Άρα, η H^n είναι φραγμένη. Επιπροσθέτως, αφού η ψ_n είναι συνεχής με συμπαγή φορέα $[-1/n, 0]$ και η H φραγμένη, τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ η H^n είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \in (0,1)$, έτσι ώστε για κάθε $x, x' \in [-3,2]$ με $|x - x'| < \delta$ ισχύει $|\psi_n(x) - \psi_n(x')| < \varepsilon$. Έστω τώρα τυχαίο, αλλά σταθερό, $t \in \mathbb{R}$ και $t' \in \mathbb{R}$ με $|t - t'| < \delta$. Τότε

$$\begin{aligned}
H^n(t,\omega) - H^n(t',\omega) = &\int_{t'}^{t} \psi_n(s-t)H(s,\omega)ds \\
&+ \int_{0}^{t'} \big(\psi_n(s-t) - \psi_n(s-t')\big)H(s,\omega)ds,
\end{aligned}$$

όπου

$$\int_{t'}^{t} \psi_n(s-t)|H(s,\omega)|ds \leq M \int_{t'}^{t} \psi_n(s-t)ds \leq M \max \psi_n \, |t-t'|$$

και

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{t'} |\psi_n(s-t) - \psi_n(s-t')||H(s,\omega)|ds &\leq M \int_{-t'}^{0} |\psi_n(u+t'-t) - \psi_n(u)|du \\
&\leq M \int_{-2}^{1} |\psi_n(u+t'-t) - \psi_n(u)|du \\
&\leq 3M\varepsilon,
\end{aligned}$$

αφού για $u \notin [-\frac{1}{n}, 0] \cup [-\frac{1}{n} - (t'-t), -(t'-t)] \subset [-2,1]$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση μηδενίζεται και για $u \in [-2,1]$ ισχύει και $u + t' - t \in [-3,2]$.

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι $H^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Για την τεχνικά απαιτητική απόδειξη παραπέμπουμε στο [16], σελ. 133. Τέλος, από την κατασκευή της ακολουθίας ψ_n, προκύπτει ότι για την ακολουθία H^n ισχύει

$$\int_{0}^{T} |H^n - H|^2 dt \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Για τη σχετική θεωρία παραπέμουμε στο [15], σελ. 22. Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε και πάλι το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης, το οποίο μας δίνει

$$E\left(\int_0^T |H^n - H|^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Βήμα 3:
Έστω $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία φραγμένων διαδικασιών $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$ έτσι ώστε

$$E\left(\int_0^T |G^n - G|^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Για την απόδειξη αυτού του βήματος ορίζουμε ως

$$G^n(t,\omega) := \begin{cases} -n, & G(t,\omega) < -n, \\ G(t,\omega), & -n \le G(t,\omega) \le n, \\ n, & G(t,\omega) > n. \end{cases}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} G^n(t,\omega) = G(t,\omega) \text{ και } |G^n(t,\omega)| \le |G(t,\omega)|.$$

Με την βοήθεια αυτής της ανισότητας παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^T (G^n(t,\omega) - G(t,\omega))^2 dt &\le 2\int_0^T (G^n(t,\omega))^2 dt + 2\int_0^T G^2(t,\omega)dt \\ &\le 4\int_0^T G^2(t,\omega)dt. \end{aligned}$$

Τέλος, καθώς $E\left[\int_0^T G^2 dt\right] < \infty$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε το συμπέρασμα, δηλαδή

$$E\left(\int_0^T |G^n - G|^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

Παρακινούμενοι από την προηγούμενη πρόταση, θα δώσουμε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος για τυχαίο $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ και θα τον σχολιάσουμε.

Ορισμός 3.2.8. *Έστω $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Ορίζουμε το **στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô** της στοχαστικής διαδικασίας G ως*

$$\int_0^T G dW := \lim_{n\to\infty} \int_0^T G^n dW,$$

όπου το όριο υπάρχει στον χώρο $L^2(\Omega)$ και $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$ είναι μια ακολουθία διαδικασιών βήματος, όπως στην προηγούμενη πρόταση. Δηλαδή

$$E\left(\int_0^T (G^n - G)^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Παρατήρηση 3.2.9. *Οφείλουμε να εξηγήσουμε την ύπαρξη του ορίου και να διαπιστώσουμε ότι το έχουμε ορίσει καλώς.*

- *Για να δείξουμε ότι το $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^T G^n dW$ υπάρχει, αρκεί να δείξουμε ότι το $\int_0^T G^n dW$ αποτελεί μια ακολουθία Cauchy στον χώρο $L^2(\Omega)$ και λόγω της πληρότητας αυτού του χώρου το όριο του ολοκληρώματος θα υπάρχει. Για τον σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε μια ακολουθία διαδικασιών βήματος $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$ έτσι ώστε*

  $$E\left(\int_0^T (G^n - G)^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

  Φυσικά και υπάρχουν τέτοιες ακολουθίες, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Τότε

  $$\begin{aligned}
  &\left\|\int_0^T G^n dW - \int_0^T G^m dW\right\|_{L^2(\Omega)} = E\left[\left(\int_0^T G^n dW - \int_0^T G^m dW\right)^2\right]\\
  &= E\left[\left(\int_0^T (G^n - G^m) dW\right)^2\right] \ (\textit{γραμμικότητα διαδικασιών βήματος})\\
  &= E\left(\int_0^T (G^n - G^m)^2 dt\right) \ (\textit{Ισομετρία του Itô})\\
  &\leq 2\underbrace{E\left(\int_0^T (G^n - G)^2 dt\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + 2\underbrace{E\left(\int_0^T (G^m - G)^2 dt\right)}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0}.
  \end{aligned}$$

  Οπότε, έχουμε το ζητούμενο καθώς

  $$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \left\|\int_0^T G^n dW - \int_0^T G^m dW\right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

- *Ακόμα, πρέπει να δείξουμε ότι το όριο στον ορισμό δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας διαδικασιών βήματος. Έτσι, ας επιλέξουμε δύο ακολουθίες G^n, H^n οι οποίες να ικανοποιούν τον ορισμό. Πρέπει να δείξουμε ότι*
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T G^n dW = \lim_{n\to\infty}\int_0^T H^n dW \iff \|G^n - H^n\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$\iff \left\|\int_0^T G^n dW - \int_0^T H^n dW\right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$
το οποίο ισχύει ακολουθώντας τον παραπάνω συλλογισμό (αντικαθιστώντας το G^m με H^n).

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε τις ιδιότητες αυτού του ολοκληρώματος οι οποίες αντιστοιχούν στις ιδιότητες του ολοκληρώματος για διαδικασίες βήματος.

Θεώρημα 3.2.10. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $G, H \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Τότε*

(i) (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)
$$\int_0^T (aG + bH)dW = a\int_0^T GdW + b\int_0^T HdW.$$

(ii) (μέση τιμή του ολοκληρώματος)
$$E\left(\int_0^T GdW\right) = 0.$$

(iii) (διακύμανση του ολοκληρώματος ή ισομετρία του Itô)
$$E\left[\left(\int_0^T GdW\right)^2\right] = E\left(\int_0^T G^2 dt\right).$$

(iv)
$$E\left(\int_0^T GdW\int_0^T HdW\right) = E\left(\int_0^T GHdt\right).$$

Απόδειξη. (i): Έστω $G^n, H^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$ διαδικασίες βήματος με $G^n \xrightarrow{n\to\infty} G$, $H^n \xrightarrow{n\to\infty} H$ στο $\mathbb{L}^2(0,T)$. Τότε, από τον ορισμό
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T G^n dW = \int_0^T GdW,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T H^n dW = \int_0^T HdW \text{ στο } L^2(\Omega)$$

και συνεπώς

$$a\int_0^T GdW + b\int_0^T HdW = \lim_{n\to\infty}\left(a\int_0^T G^n dW + b\int_0^T H^n dW\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^T (aG^n + bH^n)\, dW,$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από τη γραμμικότητα του ορίου (στο $L^2(\Omega)$) και η δεύτερη από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για διαδικασίες βήματος (βλέπε Πρόταση 3.2.6). Από την άλλη, χρησιμοποιώντας το ότι ο $\mathbb{L}^2(0,T)$ είναι διανυσματικός χώρος και αφού

$$E\left(\int_0^T \underbrace{(aG + bH - aG^n - bH^n)^2}_{\leq 2a^2(G-G^n)^2+2b^2(H-H^n)^2} dt\right)$$
$$\leq 2a^2 E\left(\int_0^T (G-G^n)^2 dt\right) + 2b^2 E\left(\int_0^T (H-H^n)^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

προκύπτει ότι $aG^n + bH^n \xrightarrow{n\to\infty} aG + bH$ στο $\mathbb{L}^2(0,T)$. Έτσι, από την ανεξαρτησία του ολοκληρώματος της $aG + bG$ από την ακολουθία διαδικασιών βήματος που την προσεγγίζει έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T (aG^n + bH^n)dW = \int_0^T (aG + bG)dW.$$

(ii): Έστω $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$ διαδικασία βήματος με $G^n \xrightarrow{n\to\infty} G$ στο $\mathbb{L}^2(0,T)$. Τότε αφού

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T G^n dW = \int_0^T GdW \text{ στο } L^2(\Omega)$$

και το μέτρο πιθανότητας είναι πεπερασμένο προκύπτει (βλέπε [19], Πρόταση 11.8, σελ. 181)

$$g^n := \int_0^T G^n dW \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^T GdW =: g \text{ στο } L^1(\Omega).$$

Συνεπώς (βλέπε [6], Θεώρημα 4.9, σελ. 94), υπάρχει υπακολουθία g^{k_n} με $g^{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} g$ σ.β. και $h \in L^1(\Omega)$ με $|g^{k_n}| \leq h$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, σ.β. Άρα από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue (Θεώρημα 1.2.14)

$$E\left(\int_0^T GdW\right) = \int_\Omega g dP = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g^{k_n} dP$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g^{k_n} dP = \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T G^{k_n} dW\right) = 0,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.6, (ii).
(iii): Έστω $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$ διαδικασίες βήματος με $G^n \xrightarrow{n\to\infty} G$ στο $\mathbb{L}^2(0,T)$. Τότε

$$\int_0^T G^n dW \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^T GdW \text{ στο } L^2(\Omega)$$

και άρα (σύμφωνα με την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα στο $L^2(\Omega)$ και στο $\mathbb{L}^2(0,T)$ και την Πρόταση 3.2.6, (iii))

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^T GdW\right)^2\right) &= \lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int_0^T G^n dW\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T (G^n)^2 dt\right) \\ &= E\left(\int_0^T G^2 dt\right). \end{aligned}$$

(iv): Για την απόδειξη αυτής της ισότητας θα κάνουμε χρήση της ταυτότητας $ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - a^2 - b^2\right)$, με $a = \int_0^T GdW$ και $b = \int_0^T HdW$.

$$\begin{aligned} 2E\left(\int_0^T GdW \int_0^T HdW\right) &= E\left[\left(\int_0^T (G+H)dW\right)^2\right] - E\left[\left(\int_0^T GdW\right)^2\right] \\ &\quad - E\left[\left(\int_0^T HdW\right)^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T (G+H)^2 dt\right] - E\left(\int_0^T G^2 dt\right) \\ &\quad - E\left(\int_0^T H^2 dt\right) \ (\text{από το } (iii)) \\ &= E\left(\int_0^T 2GHdt\right). \end{aligned}$$

Στην πρώτη και τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε και τη γραμμικότητα, δηλαδή την ιδιότητα (i). □

3.3 Σημαντικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ και $t \in [0,T]$. Ορίζουμε το **αόριστο ολοκλήρωμα Itô της G** ως*

$$I(t) := \int_0^t G(s)dW(s).$$

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να αποδείξουμε ότι η διαδικασία $I(\cdot)$ έχει συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια. Αυτό θα μας φανεί χρήσιμο κατά τον χειρισμό του λογισμού Itô.

Για το ακόλουθο λήμμα βλέπε [7], Άσκηση 7.5, σελ. 186.

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ διαδικασία βήματος. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int_0^t HdW, \ t \in [0,T],$$

είναι martingale.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.6.3, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $0 \leq s \leq t \leq T$

$$E\left(\int_0^t H(s)dW(s)\Big|\mathcal{W}_s\right) = \int_0^s H(u)dW(u) \ \sigma.\beta.,$$

όπου $\mathcal{W}_s$ υπενθυμίζουμε ότι είναι η ιστορία της κίνησης Brown. Έστω $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = s < t_{k+1} < \cdots < t_m = t$ μια διαμέριση που αντιστοιχεί στα βήματα H_j. Τότε

$$E\left(\int_0^t H(s)dW(s)\Big|\mathcal{W}_s\right) = E\left(\sum_{j=0}^{m-1} H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))\Big|\mathcal{W}_s\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{k-1} H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))\Big|\mathcal{W}_s\right) + E\left(\sum_{j=k}^{m-1} H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))\Big|\mathcal{W}_s\right)$$

σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.51, (i). Ας υπολογίσουμε ξεχωριστά τους δύο όρους του αθροίσματος. Για τον πρώτο έχουμε,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j=0}^{k-1} H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))\big|\mathcal{W}_s\right) &= \sum_{j=0}^{k-1} E\left(H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))\Big|\mathcal{W}_s\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\ &= \int_0^s HdW, \end{aligned}$$

όπου για την πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 1.1.51, (i) και για τη δεύτερη την Πρόταση 1.1.51, $(ii), (iii)$, αφού $H_j, \ j = 0, \ldots, k-1$ και $W(t_{j+1})$,

$W(t_j)$ είναι $\mathcal{W}_s$-μετρήσιμα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι ο δεύτερος όρος μηδενίζεται. Για ευκολία στις πράξεις θέτουμε $Y_j := W(t_{j+1}) - W(t_j)$.

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{j=k}^{m-1} H_j Y_j \Big| \mathcal{W}_s\right) &= \sum_{j=k}^{m-1} E\left(H_j Y_j | \mathcal{W}_s\right) \\
&= \sum_{j=k}^{m-1} E\left[E\left(H_j Y_j | \mathcal{W}_{t_j}\right) | \mathcal{W}_s\right] \\
&= \sum_{j=k}^{m-1} E\left[H_j E\left(Y_j | \mathcal{W}_{t_j}\right) | \mathcal{W}_s\right] \\
&= \sum_{j=k}^{m-1} E(H_j E(Y_j) | \mathcal{W}_s) \\
&= \sum_{j=k}^{m-1} E(H_j | \mathcal{F}_s) E(Y_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 1.1.51, (v), αφού $\mathcal{W}_{t_j} \supset \mathcal{W}_s$, στην τρίτη την ιδιότητα (iii) (της ίδιας πρότασης), αφού H_j είναι $\mathcal{W}_{t_j}$-μετρήσιμο, στην τέταρτη την ιδιότητα (iv) (της ίδιας πρότασης), αφού Y_j είναι ανεξάρτητο του $\mathcal{W}_{t_j}$ και στην τελευταία την ιδιότητα (i) (της ίδιας πρότασης), εφόσον $E(Y_j)(= 0) \in \mathbb{R}$. □

Για να δείξουμε ότι μια γενική στοχαστική διαδικασία $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ είναι martingale θα χρειαστούμε και το επόμενο λήμμα (βλέπε [7], Λήμμα 7.1, σελ. 192), που στην διατύπωσή του ίσως φανεί προφανές, αλλά η απόδειξή του δεν είναι τετριμμένη.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ και X τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, έτσι ώστε $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ στον $L^2(\Omega)$. Τότε*

$$E(X_n|\mathcal{V}) \xrightarrow{n\to\infty} E(X|\mathcal{V}) \text{ στον } L^2(\Omega)$$

για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Απόδειξη. Από την ανισότητα Jensen (Πρόταση 1.1.52), με $\Phi(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, και την Πρόταση 1.1.51 έχουμε

$$|E(X_n|\mathcal{V}) - E(X|\mathcal{V})|^2 = |E(X_n - X|\mathcal{V})|^2 \le E\left(|X_n - X|^2 \big| \mathcal{V}\right),$$

από την οποία πέρνουμε

$$\begin{aligned} E\left(|E(X_n|\mathcal{V}) - E(X|\mathcal{V})|^2\right) &\leq E\left[E\left(|X_n - X|^2 \big| \mathcal{V}\right)\right] \\ &= E\left(|X_n - X|^2\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ (από υπόθεση).} \end{aligned}$$

□

Για το παρακάτω πολύ σημαντικό αποτέλεσμα βλέπε [7], Θεώρημα 7.3, (3), σελ. 191.

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω τυχούσα διαδικασία $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int_0^t G dW, \ 0 \leq t \leq T,$$

είναι martingale.

***Απόδειξη*.** Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$E\left(\int_0^t G(s)dW(s) \Big| \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s G(u)dW(u) \ \sigma.\beta.$$

Για τον σκοπό αυτό, επιλέγουμε ακολουθία διαδικασιών βήματος $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$, η οποία προσεγγίζει την G, όπως στον Ορισμό 3.2.8. Από το Λήμμα 3.3.2 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t G^n(s)dW(s) \Big| \mathcal{F}_s\right) &= \int_0^s G^n(u)dW(u) \\ \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^t G^n(s)dW(s) \Big| \mathcal{F}_s\right) &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_0^s G^n(u)dW(u)}_{:=\int_0^s GdW}. \end{aligned}$$

Τέλος, από το Λήμμα 3.3.3 έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^t G^n(s)dW(s) \Big| \mathcal{F}_s\right) = E\left(\int_0^t G(s)dW(s) \Big| \mathcal{F}_s\right),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I(t) = \int_0^t G dW, \ 0 \leq t \leq T,$$

έχει μια εκδοχή $J(\cdot)$ με συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη. Αρχικά, όπως γνωρίζουμε, υπάρχει ακολουθία διαδικασιών βήματος $G^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$, έτσι ώστε

$$E\left(\int_0^T (G^n - G)^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Εν συνεχεία, ορίζουμε $I^n(t) := \int_0^t G^n dW$, για $0 \le t \le T$. Έστω $\{0 = t_0 < t_1^n < \cdots < t_k^n < t_{k+1}^n = t\}$ η διαμέριση του $(0,T)$ έτσι ώστε $G^n(s) \equiv G_k^n$ για $t_k^n \le s < t_{k+1}^n$, $k = 0, \dots, m$. Τότε για $t_k^n \le s < t_{k+1}^n$ έχουμε

$$G^n(s) = \sum_{i=0}^{m} G_i^n 1_{[t_i, t_{i+1})}(s),\ s \in [0,T].$$

Οπότε, η $I^n(\cdot)$ γράφεται για $t_k^n \le s < t_{k+1}^n$ ως

$$I^n(t) = \sum_{i=0}^{k-1} G_i^n(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)) + G_k^n(W(t) - W(t_k^n)).$$

Επομένως, η $I^n(\cdot)$ έχει συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια, λόγω του ότι η κίνηση Brown έχει αυτή την ιδιότητα. Από το Λήμμα 3.3.2, η $I^n(\cdot)$ είναι martingale (και άρα και η $I^n(\cdot) - I^m(\cdot)$). Αφού $E\left(|I^n(t) - I^m(t)|^2\right) < \infty$ ($I^n \in \mathbb{L}^2(0,T)$) προκύπτει ότι,

$$|I^n(\cdot) - I^m(\cdot)|^2 \text{ είναι } submartingale$$

μέσω του Λήμματος 2.6.4 (με $\Phi(x) = x^2$).
Έστω $\varepsilon > 0$. Με τη βοήθεια της ανισότητας martingale (Θεώρημα 2.6.5, (i)) έχουμε

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{0\le t\le T} |I^n(t) - I^m(t)| > \varepsilon\right) &= P\left(\left(\sup_{0\le t\le T} |I^n(t) - I^m(t)|\right)^2 > \varepsilon^2\right) \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(|I^n(T) - I^m(T)|^2\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\int_0^T |G^n - G^m|^2 dt\right),
\end{aligned}$$

βάση της Πρότασης 3.2.6, (iii). Για $\varepsilon = \frac{1}{2^\ell}, \ell \in \mathbb{N}_0$ από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} |I^n(t) - I^m(t)| > \frac{1}{2^\ell}\right) \le 2^{2\ell} E\left(\int_0^T |G^n(t) - G^m(t)|^2 dt\right). \quad (3.2)$$

Τώρα, αφού η G^n αποτελεί ακολουθία Cauchy στον χώρο $\mathbb{L}^2(0,T)$:

$$(\forall \ell > 0)(\exists n_\ell \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_\ell) : E\left(\int_0^T |G^n(t) - G^m(t)|^2 dt\right) \leq \frac{1}{2^{2\ell}\ell^2}. \quad (3.3)$$

Από τις (3.2) και (3.3) έπεται

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} |I^n(t) - I^m(t)| > \frac{1}{2^\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2},\ \forall\ m, n \geq n_\lambda. \quad (3.4)$$

Συνεχίζοντας, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $n_{\ell+1} > n_\ell > n_{\ell-1} > \cdots$ με $n_\ell \to \infty$. Επίσης ορίζουμε

$$A_\ell := \left\{\sup_{0\leq t\leq T} |I^{n_\ell}(t) - I^{n_{\ell+1}}(t)| > \frac{1}{2^\ell}\right\}.$$

Έτσι, από την (3.4) έχουμε ότι $P(A_\ell) \leq \frac{1}{\ell^2}$. Οπότε, από το Λήμμα Borel-Cantelli προκύπτει $P(A_\ell \text{ α.φ.}) = 0$. Δηλαδή, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$:

$$\sup_{0\leq t\leq T} |I^{n_\ell}(t,\omega) - I^{n_{\ell+1}}(t,\omega) \leq \frac{1}{2^\ell},\ \forall\ \ell \geq \ell_0(\omega).$$

Άρα, η $I^{n_\lambda}(\cdot,\omega)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,T]$, για σχεδόν κάθε ω. Ορίζουμε

$$J(t,\omega) := \lim_{\lambda\to\infty} I^{n_\lambda}(t,\omega).$$

Από τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος γνωρίζουμε ότι $I^n(t) \xrightarrow{n\to\infty} I(t)$ στο $L^2(\Omega)$ για κάθε $0 \leq t \leq T$. Συνεπώς (βλέπε π.χ. [6], Θεώρημα 4.9, σελ. 94) $I^n(t,\omega) \xrightarrow{n\to\infty} I(t,\omega)$, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ και κάθε $t \in [0,T]$, άρα

$$P\left[\{\omega \in \Omega : J(t,\omega) = I(t,\omega)\}\right] = 1,\ \forall\ 0 \leq t \leq T,$$

πράγμα που μας λέει ότι η $J(\cdot)$ είναι μια εκδοχή της $I(\cdot)$. Τέλος, για σχεδόν κάθε ω, η $J(\cdot,\omega)$ είναι το ομοιόμορφο όριο της συνεχούς συνάρτησης $I^{n_\lambda}(\cdot,\omega)$, δηλαδή είναι συνεχής. Επομένως, η $J(\cdot)$ έχει συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια. $\square$

Παρατήρηση 3.3.6. *Κάθε φορά που θα κάνουμε χρήση του αόριστου ολοκληρώματος $I(\cdot)$, εμμέσως πλην σαφώς, θα αναφερόμαστε στην εκδοχή $J(\cdot)$. Ο λόγος είναι, φυσικά, πως θέλουμε να έχουμε το εργαλείο της σχεδόν βέβαιης συνέχειας των τροχιών δείγματος στα χέρια μας.*

3.4 Κανόνας της αλυσίδας κατά Itô

Μέχρι στιγμής, έχουμε πάρει μια ιδέα ότι το ολοκλήρωμα Itô συμπεριφέρεται διαφορετικά από ένα σύνηθες ολοκλήρωμα. Πρωτού ξεκινήσουμε την παρούσα ενότητα ας κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση για να εξετάσουμε ένα σημαντικό σημείο του λογισμού Itô.

Παρατήρηση 3.4.1. *Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ «καλή», δηλαδή n-φορές παραγωγίσιμη. Σκοπός μας, είναι να εκτιμήσουμε την διαφορά $\Delta f(W(t)) = f(W(t_2)) - f(W(t_1))$ και κατ΄ επέκταση, να περάσουμε στην απειροελάχιστη διαφορά, το διαφορικό $df(W(t))$. Αν η κίνηση Brown ήταν παραγωγίσιμη, τότε σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας του συνήθους λογισμού θα παίρναμε*

$$df(W(t)) = \left(f'(W(t))\frac{dW(t)}{dt}\right) dt.$$

Όμως, όπως είδαμε, η κίνηση Brown δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη, οπότε αυτή η διαδικασία αποτυγχάνει. Αρχικά, θα θυμηθούμε το διαφορικό $df(x)$. Έτσι, αναπτύσσοντας την f σε ανάπτυγμα Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots \\ \Longrightarrow \quad \Delta f(x) &= f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Παίρνοντας τώρα την απειροελάχιστη διαφορά, οι όροι από την δεύτερη τάξη και πάνω θεωρούνται αμελητέοι, οπότε καταλήγουμε στη γνωστή σχέση

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Άρα, τι πιο φυσιολογικό, υπολογίζοντας την f πάνω στην κίνηση Brown, να πάρουμε

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t).$$

Όμως ούτε αυτή η ισότητα είναι ορθή. Ο λόγος είναι, ότι εξαιτίας της τετραγωνικής μεταβολής της κίνησης Brown (Λήμμα 3.1.7), ο όρος της δεύτερης τάξης στο ανάπτυγμα Taylor δεν θεωρείται αμελητέος (βλέπε σχετικά και τη συζήτηση στο [11], σελ. 3-4). Άρα, λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3.1.7 έπεται ότι

$$\boxed{df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt.}$$

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να κατανοήσουμε καλύτερα και να δικαιολογήσουμε αυστηρά τη σχέση αυτή, δηλαδή να μάθουμε πώς παραγωγίζεται η σύνθεση μιας συνήθους συνάρτησης με μια στοχαστική διαδικασία.

Αρχικά, θα ορίσουμε αυστηρά την ολοκληρωτική εξίσωση που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου.

Ορισμός 3.4.2. *Έστω $X(\cdot)$ πραγματική στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε*

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F(t)dt + \int_s^r G(t)dW(t), \tag{3.5}$$

όπου $F \in \mathbb{L}^1(0,T),\ G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ και $0 \leq s \leq r \leq T$. Τότε θα λέμε ότι η $X(\cdot)$ έχει το ***στοχαστικό διαφορικό***

$$dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t), \tag{3.6}$$

για $0 \leq t \leq T$.

Παρατήρηση 3.4.3. *Να προσεχθεί ότι η εξίσωση (3.6) δεν έχει νόημα όταν θεωρούμε τους όρους dX, dW, dt μεμονωμένα. Κάθε φορά που θα την χρησιμοποιούμε, στην ουσία θα αναφερόμαστε στην ολοκληρωτική εξίσωση (3.5).*
Επιπλέον, λόγω της γραμμικότητας των δύο ολοκληρωμάτων, έπεται ότι ο «τελεστής» d είναι γραμμικός.

Ας δούμε τώρα, δύο απαραίτητα για τη συνέχεια στοχαστικά διαφορικά.

Λήμμα 3.4.4. *Ισχύουν τα εξής:*

(i) $d\left(W^2\right) = 2WdW + dt$.

(ii) $d(tW) = Wdt + dW$.

Απόδειξη. (i): Μεταφράζοντας αυτή την σχέση, σε μορφή ολοκληρωτικής εξίσωσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W^2(r) - W^2(s) &= \int_s^r 2WdW + \int_s^r dt \\ \iff \int_s^r WdW &= \frac{W^2(r) - W^2(s) - (r+s)}{2}, \end{aligned}$$

την οποία αποδείξαμε ήδη στην §3.1 για $s = 0$. Τροποποιώντας την απόδειξη εκεί προκύπτει το αποτέλεσμα.

Εναλλακτικά, από την κατασκευή του ολοκληρώματος Itô προκύπτει ότι, για $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ και $0 < t < T$,

$$\int_0^T GdW = \int_0^t GdW + \int_t^T GdW.$$

Συνεπώς, αφού για $0 \le s \le r \le T$

$$\int_0^r WdW = \frac{W^2(r)}{2} - \frac{r}{2}, \qquad \int_0^s WdW = \frac{W^2(s)}{2} - \frac{s}{2},$$

έπεται ότι

$$\int_s^r WdW = \int_0^r WdW - \int_0^s WdW = \frac{W^2(r) - W^2(s) - (r+s)}{2},$$

δηλαδή το αποδεικτέο.
(ii): Από τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος για $G(t) = t$, ισχύει ότι

$$\int_s^r tdW = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n - 1} t_k^n \left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right) \right), \tag{3.7}$$

όπου $P^n = \{s = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = r\}$ διαμέριση του $[s,r]$ με $|P^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η τροχιά δείγματος $t \mapsto W(t)$ είναι συνεχής σχεδόν βέβαια. Για τον λόγο αυτό, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_s^r Wdt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n - 1} W\left(t_{k+1}^n\right)\left(t_{k+1}^n - t_k^n\right) \ \sigma.\beta.$$

Αξίζει να αναφέρουμε, πως αυτό το ολοκλήρωμα είναι ένα σύνηθες ολοκλήρωμα, αφού όπως είπαμε η $t \mapsto W(t)$ είναι συνεχής σχεδόν βέβαια. Και αυτός είναι ο λόγος που μέσα στο άθροισμα Riemann μπορούμε να θεωρήσουμε την τιμή της $W(\cdot)$ στο τελικό δεξί σημείο t_{k+1}^n.
(Προσοχή! Αν ήταν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô, έπρεπε αναγκαστικά να πάρουμε το αρχικό σημείο t_k^n όπως στη (3.7) (βλέπε §3.1).)

Ας υπολογίσουμε τώρα το εξής:

$$
\begin{aligned}
\int_s^r tdW + \int_s^r Wdt & \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} t_k^n \left(W\left(t_{k+1}^n\right) - W\left(t_k^n\right)\right) + W\left(t_{k+1}^n\right)\left(t_{k+1}^n - t_k^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left[t_k^n W\left(t_{k+1}^n\right) - t_k^n W\left(t_k^n\right) + t_{k+1}^n W\left(t_{k+1}^n\right) - t_k^n W\left(t_{k+1}^n\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(t_{k+1}^n W\left(t_{k+1}^n\right) - t_k^n W\left(t_k^n\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(t_{m_n}^n W\left(t_{m_n}^n\right) - t_0^n W\left(t_0^n\right)\right) \ (\text{τηλεσκοπικό άθροισμα}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(rW(r) - sW(s)\right) \\
&= rW(r) - sW(s).
\end{aligned}
$$

Άρα, δείξαμε ότι

$$rW(r) - sW(s) = \int_s^r tdW + \int_s^r Wdt,$$

η οποία έχει στοχαστικό διαφορικό

$$d(tW) = tdW + Wdt.$$

$\square$

Παρατήρηση 3.4.5. *Να προσεχθεί ότι $W \in \mathbb{L}^2(0,T)$ για κάθε $T \geq 0$ και ότι για κάθε διαμέριση $P^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m_n}^n = T\}$ η*

$$W^n(t) := W(t_k^n), \text{ για } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n), \ k = 0, \ldots, m_n - 1,$$

είναι μια διαδικασία βήματος στο $\mathbb{L}^2(0,T)$, για την οποία ισχύει

$$E\left(\int_0^T (W^n - W)^2 dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα $\int_0^T WdW$ που υπολογίσαμε στην §3.1 μέσω προσέγγισης με αθροίσματα Riemann είναι το ολοκλήρωμα Itô του Ορισμού 3.2.8.
Το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμα $\int_0^T tdW$, όπως και για κάθε G με σχεδόν βέβαια συνεχείς τροχιές δείγματος. Τα παραπάνω προκύπτουν όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.7.

Με τη βοήθεια του προηγούμενου λήμματος θα δείξουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.6. ***(Κανόνας γινομένου του Itô)*** *Έστω $X_1(\cdot), X_2(\cdot)$ τυχαίες στοχαστικές διαδικασίες τέτοιες ώστε,*

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt + G_1 dW, \\ dX_2 = F_2 dt + G_2 dW, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.8}$$

με $F_i \in \mathbb{L}^1(0,T)$ και $G_i \in \mathbb{L}^2(0,T)$ για $i = 1, 2$. Τότε ισχύει ο ***τύπος ή κανόνας γινομένου του Itô****,*

$$d(X_1X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt. \tag{3.9}$$

Απόδειξη*.* Η απόδειξη γίνεται μέσω των ακόλουθων βημάτων.

- Έστω $0 \leq r \leq T$. Υποθέτουμε ότι

  $$X_1(0) = X_2(0) = 0,\ F_i(t) \equiv F_i,\ G_i(t) \equiv G_i,$$

  δηλαδή οι F_i, G_i είναι ανεξάρτητες του χρόνου και $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Τότε η (3.8) είναι ισοδύναμη με την ολοκληρωτική της μορφή

  $$\begin{cases} X_1(t) = F_1 t + G_1 W(t), \\ X_2(t) = F_2 t + G_2 W(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.10}$$

  Στη συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει να δείξουμε ότι

  $$X_1(r)X_2(r) = \int_0^r X_2 dX_1 + \int_0^r X_1 dX_2 + G_1 G_2 r,$$

  η οποία είναι η ολοκληρωτική μορφή του στοχαστικού διαφορικού που μας ζητείται να αποδείξουμε.
  Αντικαθιστώντας τα dX_i από την (3.8) έχουμε

  $$\begin{aligned} \int_0^r X_2 dX_1 + \int_0^r X_1 dX_2 + G_1 G_2 r &= \int_0^r X_2 (F_1 dt + G_1 dW) \\ &+ \int_0^r X_1 (F_2 dt + G_2 dW) + G_1 G_2 r \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, αντικαθιστώντας τις X_i από την (3.10), το δεξί μέλος της ισότητας ισούται με

$$\begin{aligned}
&\int_0^r (F_2 t + G_2 W(t))(F_1 dt + G_1 dW) + \int_0^r (F_1 t + G_1 W(t))(F_2 dt + G_2 dW) \\
&\qquad + G_1 G_2 r \\
&= F_1 F_2 \frac{r^2}{2} + G_1 F_2 \int_0^r t dW + F_1 G_2 \int_0^r W dt + G_1 G_2 \int_0^r W dW + F_1 F_2 \frac{r^2}{2} \\
&\qquad + F_1 G_2 \int_0^r t dW + G_1 F_2 \int_0^r W dt + G_1 G_2 \int_0^r W dW + G_1 G_2 r \\
&= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + F_1 G_2) \int_0^r t dW + (F_1 G_2 + G_1 F_2) \int_0^r W dt \\
&\qquad + 2 G_1 G_2 \int_0^r W dW + G_1 G_2 r \\
&= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + F_1 G_2) \left(\int_0^r W dt + \int_0^r t dW \right) + 2 G_1 G_2 \int_0^r W dW \\
&\qquad + G_1 G_2 r,
\end{aligned}$$

το οποίο σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα ισούται με

$$\begin{aligned}
&F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + F_1 G_2) r W(r) + G_1 G_2 \left(W^2(r) - r \right) + G_1 G_2 r \\
&= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + F_1 G_2) r W(r) + G_1 G_2 W^2(r) \\
&= (F_1 r + G_1 W(r))(F_2 r + G_2 W(r)) \\
&= X_1(r) X_2(r) \text{ (από την (3.10))}.
\end{aligned}$$

- Η απόδειξη για τυχαία $X_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, και F_i, G_i πάλι ανεξάρτητες του χρόνου και $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές, είναι ακριβώς ανάλογη με την προηγούμενη, εκτελώντας περισσότερες πράξεις.

- Στην περίπτωση όπου $F_i(\cdot)$, $G_i(\cdot)$ δεν είναι χρονικά σταθερές σε όλο το $[0, T]$, αλλά είναι διαδικασίες βήματος, εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία σε κάθε υποδιάστημα $[t_k, t_{k+1})$ της κοινής τους διαμέρισης και παίρνουμε το αποτέλεσμα.

- Τέλος, στη γενική περίπτωση, χωρίς κάποια συνθήκη για τις F_i, G_i, επιλέγουμε διαδικασίες βήματος $F_i^n \in \mathbb{L}^1(0, T)$ και $G_i^n \in \mathbb{L}^2(0, T)$ τέτοιες ώστε

$$E \left(\int_0^T |F_i^n - F_i| dt \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{και} \quad E \left(\int_0^T |G_i^n - G_i|^2 dt \right) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Έπειτα, για $i = 1, 2$ ορίζουμε τις ακολουθίες

$$X_i^n(t) := X_i(0) + \int_0^t F_i^n ds + \int_0^t G_i^n dW.$$

Για κάθε X_i^n, μπορούμε να κάνουμε χρήση του ακριβώς προηγούμενου βήματος στο διάστημα (s, r). Οπότε, περνώντας στα όρια έχουμε την ολοκληρωτική μορφή

$$X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) = \int_s^r X_1 dX_2 + \int_s^r X_2 dX_1 + G_1 G_2 dt,$$

του στοχαστικού διαφορικού

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt.$$

$\square$

Παρατηρήσεις 3.4.7. 1. *Η διαφοροποίηση αυτού του κανόνα παραγώγισης από τον κλασικό κανόνα παραγώγισης βρίσκεται στον όρο $G_1 G_2 dt$. Επιπλέον, η ολοκληρωτική μορφή*

$$\int_s^r X_2 dX_1 = X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) - \int_s^r X_1 dX_2 - \int_s^r G_1 G_2 dt$$

είναι η παραγοντική ολοκλήρωση κατά Itô. *Αυτή διαφέρει από την κλασική περίπτωση κατά τον όρο $-\int_s^r G_1 G_2 dt$.*

2. *Αν $G_1 \equiv 0$ ή $G_2 \equiv 0$, τότε φανερά παίρνουμε τη συνήθη παραγοντική ολοκλήρωση. Αυτό μας επιβεβαιώνει, ότι ο ορισμός των Paley-Wiener-Zygmund στην ειδική περίπτωση, συμφωνεί με τον ορισμό του Itô.*

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε, τον Κανόνα της Αλυσίδας κατά Itô (ή Τύπος κατά Itô).

Θεώρημα 3.4.8. ***(Τύπος ή Κανόνας της Αλυσίδας κατά Itô)*** *Έστω $X(\cdot)$ στοχαστική διαδικασία στο $[0, T]$, η οποία έχει στοχαστικό διαφορικό*

$$dX = F dt + G dW,$$

όπου $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$. Έστω ακόμα $u : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Τότε η σύνθετη στοχαστική διαδικασία

$$Y(t) := u(t, X(t))$$

έχει στοχαστικό διαφορικό

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2\right)dt + \frac{\partial u}{\partial x}GdW, \end{aligned}$$

όπου οι μερικές παράγωγοι του u έχουν ως όρισμα το $(t, X(t))$. Αυτό σε ολοκληρωτική μορφή σημαίνει ότι για $0 \leq s \leq r \leq T$,

$$\begin{aligned} Y(r) - Y(s) &= u(r, X(r)) - u(s, X(s)) \\ &= \int_s^r \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2\right)dt + \int_s^r \frac{\partial u}{\partial x}GdW \ \sigma.\beta. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα ποδείξουμε το θεώρημα σε τρία βήματα.
Βήμα 1:
Έστω $u(t, x) = u(x) := x^m$, $m = 0, 1, \ldots$. Θα αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό:

$$d\left(X^m\right) = mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2 dt. \tag{3.11}$$

Για $m = 0, 1$ η (3.11) ισχύει, κατά προφανή τρόπο.
Για $m = 2$ παίρνουμε ότι

$$d\left(X^2\right) = 2XdX + G^2 dt,$$

το οποίο ισχύει από το Θεώρημα 3.4.6.
Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ισχύει για $m-1$, $m \geq 3$, δηλαδή

$$d\left(X^{m-1}\right) = (m-1)X^{m-2}dX + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}G^2 dt \tag{3.12}$$

και αντικαθιστώντας το dX έχουμε

$$d(X^{m-1}) = (m-1)X^{m-3}\left(XF + \frac{1}{2}(m-2)G^2\right)dt + (m-1)X^{m-2}GdW. \tag{3.13}$$

Έτσι, θα δείξουμε ότι ισχύει για m:

$$\begin{aligned}
d\left(X^m\right) &= d\left(XX^{m-1}\right) \\
&= Xd\left(X^{m-1}\right) + X^{m-1}dX + (m-1)X^{m-2}G^2dt \text{ (από (3.9), (3.13))} \\
&= X\left((m-1)X^{m-2}dX + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}G^2dt\right) \\
&\qquad + (m-1)X^{m-2}G^2dt + X^{m-1}dX \qquad \text{(από την (3.12))} \\
&= (m-1)X^{m-1}dX + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-2}G^2dt \\
&\qquad + (m-1)X^{m-2}G^2dt + X^{m-1}dX \\
&= mX^{m-1}dX + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(m-1)(m-2) + (m-1)\right)}_{=\frac{1}{2}m(m-1)} X^{m-2}G^2dt \\
&= mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2dt.
\end{aligned}$$

Έτσι, σε αυτό το βήμα δείξαμε το θεώρημα για κάθε μονώνυμο $f(x) = x^m$ με $f'(x) = mx^{m-1}$ και $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$. Για να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα, πρέπει να δείξουμε το θεώρημα για κάθε πολυώνυμο. Δηλαδή, έστω τυχόν πολυώνυμο

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m.$$

Λόγω της γραμμικότητας του στοχαστικού διαφορικού και με χρήση του διαφορικού οποιουδήποτε μονωνύμου που υπολογίσαμε παραπάνω (βλέπε (3.11)), έχουμε για το πιο πάνω πολυώνυμο ότι

$$d(f(X)) = f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)G^2dt.$$

Βήμα 2:
Έστω τώρα, $u(t,x) := f(x)g(t)$, όπου f, g πολυώνυμα. Τότε

$$\begin{aligned}
d\left(u(t,X)\right) &= d\left(f(X)g\right) \\
&= f(X)dg + gd\left(f(X)\right) \text{ (από (3.9) και Παρατήρηση 3.4.7, 2)} \\
&= f(X)g'dt + g\left[f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)G^2dt\right] \text{ (από το Βήμα 1)} \\
&= f(X)g'dt + gf'(X)dX + \frac{1}{2}gf''(X)G^2dt \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2dt,
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα για $u(t,x) = f(x)g(t)$, όπου f, g πολυώνυμα. Πάλι, όπως πριν, λόγω της γραμμικότητας του στοχαστικού διαφορικού, ο τύπος ισχύει για όλα τα πολυώνυμα των x και t, αφού ισχύει για

$$p(t,x) = \sum_{i=1}^{m} f^i(x)g^i(t), \tag{3.14}$$

όπου f^i, g^i πολυώνυμα.

Βήμα 3:

Στο τελικό βήμα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u(\cdot,\cdot)$ έχει τις ιδιότητες στην υπόθεση του θεωρήματος. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p^n (όπως στην (3.14)), έτσι ώστε

$$p^n \xrightarrow{n\to\infty} u, \ \frac{\partial p^n}{\partial t} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial p^n}{\partial x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 p^n}{\partial x^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x},$$

όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, μέσα σε συμπαγή υποσύνολα του $[0,T] \times \mathbb{R}$ (βλέπε το τρίτο βήμα της απόδειξης του [13, Θεώρημα 4.5.2]). Το γεγονός πως η δεύτερη μεταβλητή της u, δηλαδή η $X(t)$, δεν ανήκει απαραίτητα σε συμπαγές σύνολο (αφού μπορεί να πάρει τιμές σε όλο $\mathbb{R}$) δεν επηρεάζει το συμπέρασμα. Ο λόγος θα φανεί ευθύς αμέσως, αφού παίρνοντας τα ολοκληρώματα, το t θα ανήκει σε ένα συμπαγές διάστημα και εφόσον η $X(t)$ έχει συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια (βλέπε την παρατήρηση πιο κάτω) οι τιμές της θα βρίσκονται για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ στο $X([0,r],\omega)$ που είναι συμπαγές στο $\mathbb{R}$. Για του λόγου το αληθές, βάσει του Βήματος 2, για κάθε $0 \le r \le T$, έχουμε

$$\begin{aligned} &p^n(r,X(r)) - p^n(0,X(0)) \\ &\quad = \int_0^r \left(\frac{\partial p^n}{\partial t}(t,X(t)) + \frac{\partial p^n}{\partial x}(t,X(t))F(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p^n}{\partial x^2}(t,X(t))G^2(t) \right) dt \\ &\quad + \int_0^r \frac{\partial p^n}{\partial x}(t,X(t))G(t)dW \text{ σχεδόν βέβαια.} \end{aligned}$$

Τώρα, παίρνοντας τα όρια καταλήγουμε στην ολοκληρωτική μορφή του στοχαστικού διαφορικού

$$dY = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x}GdW.$$

Για μια πιο αναλυτική απόδειξη παραπέμπουμε σε αυτήν του [13, Θεώρημα 4.5.2]. □

Παρατηρήσεις 3.4.9. *Ας κάνουμε κάποια σχόλια πάνω σε αυτό το θεώρημα.*

1. *Στον κλασικό λογισμό, έχουμε ότι*

$$dY = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dX.$$

Δηλαδή, ο επιπλέον όρος στην δική μας περίπτωση είναι ο $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2 dt$.

2. *Η* $X(\cdot)$ *έχει συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια, αφού*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t F ds + \int_0^t G dW.$$

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε δείξει ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^t G dW$ *έχει αυτή την ιδιότητα και το ίδιο ισχύει και για το* $\int_0^t F ds$, *αφού είναι σχεδόν βέβαια το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης* $t \mapsto F(t,\omega)$ *που είναι* $L^1(0,1)$. *Αυτή η παρατήρηση είναι καίριας σημασίας, διότι για σχεδόν κάθε* ω, *οι απεικονίσεις*

$$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X(t),t)$$

είναι συνεχείς και τα ολοκληρώματα στην ολοκληρωτική μορφή του κανόνα της αλυσίδας είναι καλώς ορισμένα.

Ο τύπος του Itô μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

Πρόταση 3.4.10. *Έστω* $dX^i = F^i dt + G^i dW$, *όπου* $F^i \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G^i \in \mathbb{L}^2(0,T)$ *για* $i = 1,\dots,n$. *Επιπλέον, αν* $u : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ *για* $i,j = 1,\dots,n$, *τότε*

$$d\left(u(t,X^1,\dots,X^n)\right) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}G^i G^j dt.$$

Σημειώνουμε ότι εδώ έχουμε μια κοινή κίνηση Brown για τα στοχαστικά διαφορικά των n στοχαστικών διαδικασιών X^i, $i = 1,\dots,n$. Πρόκειται για την περίπτωση $m = 1$ της επόμενης γενίκευσης.

3.5 Γενίκευση στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $\overline{W}(\cdot) := \left(W^1(\cdot),\dots,W^m(\cdot)\right)$ m-διάστατη κίνηση Brown σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{U},P)$.

Ορισμός 3.5.1. *Ορίζουμε ως $\mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$ τον χώρο των στοχαστικών $n \times m$-πινάκων*

$$\boldsymbol{G} := \begin{pmatrix} G^{11} & \cdots & G^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{n1} & \cdots & G^{nm} \end{pmatrix},$$

έτσι ώστε κάθε στοιχείο του πίνακα να ανήκει στον χώρο $\mathbb{L}^2(0,T)$, δηλαδή για κάθε $i = 1,\dots,n$ και $j = 1,\dots,m$ να ισχύει

$$G^{ij}(\cdot) \in \mathbb{L}^2(0,T).$$

Συμβολίζουμε $\|\boldsymbol{G}\|^2 := \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(G^{ij})^2$.

Ορισμός 3.5.2. *Ορίζουμε ως $\mathbb{L}^1_n(0,T)$ τον χώρο τον n-διάστατων στοχαστικών διαδικασιών $\overline{F} = \big(F^1,\dots,F^n\big)$, έτσι ώστε για κάθε $i = 1,\dots,n$ να ισχύει*

$$F^i(\cdot) \in \mathbb{L}^1(0,T).$$

Επίσης, συμβολίζουμε

$$\int_0^T \overline{F}dt := \left(\int_0^T F^1 dt, \dots, \int_0^T F^n dt\right) \quad \textit{και} \quad \big|\overline{F}\big|^2 := \sum_{i=1}^{n}(F^i)^2.$$

Ορισμός 3.5.3. *Έστω $\boldsymbol{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Itô του στοχαστικού πίνακα $\boldsymbol{G}$ ως*

$$\int_0^T \boldsymbol{G}d\overline{W} := \left(\sum_{j=1}^{m}\int_0^T G^{1j}dW^j, \dots, \sum_{j=1}^{m}\int_0^T G^{nj}dW^j\right).$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι προφανώς n-διάστατη τυχαία μεταβλητή. Παρατηρούμε ότι είναι το ολοκλήρωμα ως προς $t \in [0,T]$ του γινομένου

$$\begin{pmatrix} G^{11} & \cdots & G^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{n1} & \cdots & G^{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dW^1 \\ \vdots \\ dW^n \end{pmatrix}.$$

Στην παρούσα περίπτωση παίρνουμε τη μέση τιμή και την ισομετρία του Itô του ολοκληρώματος $\int_0^T \mathbf{G}d\overline{W}$, κατά αντιστοιχία με την περίπτωση $m = n = 1$ (βλέπε Θεώρημα 3.2.10).

Πρόταση 3.5.4. *Έστω* $\boldsymbol{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$. *Τότε*

(i) $E\left(\int_0^T \boldsymbol{G}d\overline{W}\right) = 0.$

(ii) $E\left(\left|\int_0^T \boldsymbol{G}d\overline{W}\right|^2\right) = E\left(\int_0^T \|\boldsymbol{G}\|^2 dt\right).$

Απόδειξη. (i): Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ισχύει

$$\begin{aligned} & E\left(\sum_{j=1}^m \int_0^T G^{ij} dW^j\right) = 0 \\ \iff \quad & \sum_{j=1}^m E\left(\int_0^T G^{ij} dW^j\right) = 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.10 (και μάλιστα για κάθε $j = 1, \ldots, m$ ξεχωριστά).
(ii): Θέτουμε $\overline{Y} := \int_0^T \mathbf{G}d\overline{W}$ και $Y^i := \sum\limits_{j=1}^m \int_0^T G^{ij}dW^j,\ i = 1, \ldots, n$, δηλαδή

$$\overline{Y} = (Y^1, \ldots, Y^n).$$

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} E\left(|\overline{Y}|^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n (Y^i)^2\right) = \sum_{i=1}^n E\left((Y^i)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[Var(Y^i) + \left(E(Y^i)\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m Var\left(\int_0^T G^{ij} dW^j\right) + \left(\sum_{j=1}^m E\left(\int_0^T G^{ij} dW^j\right)\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Var\left(\int_0^T G^{ij} dW^j\right) \text{ (από το Θεώρημα 3.2.10)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m E\left[\left(\int_0^T G^{ij} dW^j\right)^2\right] \text{ (από το Θεώρημα 3.2.10)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} E\left(\int_0^T (G^{ij})^2 dt\right)$$
$$= E\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (G^{ij})^2 dt\right) = E\left(\int_0^T \|\mathbf{G}\|^2 dt\right).$$

□

Ανάλογα με την περίπτωση ενός στοχαστικού διαφορικού ($n = 1$) για μια κίνηση Brown ($m = 1$) ορίζεται και το στοχαστικό διαφορικό για $m, n \geq 1$:

Ορισμός 3.5.5. *Έστω* $\overline{X}(\cdot) = \big(X^1(\cdot), \ldots, X^n(\cdot)\big)$ *n-διάστατη στοχαστική διαδικασία, τέτοια ώστε*

$$\overline{X}(r) = \overline{X}(s) + \int_0^T \overline{F} dt + \int_0^T \boldsymbol{G} d\overline{W}, \tag{3.15}$$

όπου $\overline{F} \in \mathbb{L}^1_n(0,T)$, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$ *και* $0 \leq s \leq r \leq T$. *Λέμε τότε ότι η* $\overline{X}(\cdot)$ *έχει το* ***στοχαστικό διαφορικό***

$$d\overline{X}(t) = \overline{F} dt + \boldsymbol{G}(t) d\overline{W}(t), \tag{3.16}$$

για $0 \leq t \leq T$.

Παρατήρηση 3.5.6. *Οι σχέσεις* (3.15) *και* (3.16) *είναι στην πραγματικότητα n-διάστατα συστήματα εξισώσεων. Συγκεκριμένα, για την* (3.16) *εννοούμε το σύστημα*

$$dX^i = F^i dt + \sum_{j=1}^{m} G^{ij} dW^j,\ i = 1, \ldots, n$$

και για την (3.15) *το σύστημα*

$$X^i(r) = X^i(s) + \int_0^T F^i dt + \sum_{j=1}^{m} \int_0^T G^{ij} dW^j,\ i = 1, \ldots, n.$$

Για την απόδειξη του Κανόνα Γινομένου και του Κανόνα της Αλυσίδας (ή τύπου) του Itô στην παρούσα διανυσματική περίπτωση, θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.5.7. *Έστω* W^1, W^2 *δύο ανεξάρτητες πραγματικές κινήσεις Brown. Τότε*

$$d\left(W^1 W^2\right) = W^1 dW^2 + W^2 dW^1.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$X(t) := \frac{W^1(t) + W^2(t)}{\sqrt{2}}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η $X(\cdot)$ είναι κίνηση Brown.
Φανερά, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, ισχύει $X(0, \omega) = 0$.
Για τον έλεγχο της δεύτερης ιδιότητας:

$$\begin{aligned} &W^1(t), W^2(t) \sim N(0, t) \\ \Longrightarrow\ &\frac{W^1(t)}{\sqrt{2}}, \frac{W^2(t)}{\sqrt{2}} \sim N\left(0, \frac{t}{2}\right) \\ \Longrightarrow\ &X(t) = \frac{W^1(t)}{\sqrt{2}} + \frac{W^2(t)}{\sqrt{2}} \sim N(0, t). \end{aligned}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι, για κάθε $t \geq s$,

$$X(t) - X(s) \sim N(0, t - s).$$

Τέλος, είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι, λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων των $W^1(\cdot)$, $W^2(\cdot)$ και της ανεξαρτησίας μεταξύ των δύο κινήσεων Brown, η $X(\cdot)$ έχει την ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων.
Από αυτή τη διαπίστωση και το Λήμμα 3.4.4, παίρνουμε

$$\begin{cases} d(X^2) = 2XdX + dt, \\ d\left((W^1)^2\right) = 2W^1dW^1 + dt, \\ d\left((W^2)^2\right) = 2W^2dW^2 + dt. \end{cases}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} &(W^1 + W^2)^2 = (W^1)^2 + 2W^1W^2 + (W^2)^2 \\ \Longrightarrow\ &W^1W^2 = X^2 - \frac{1}{2}(W^1)^2 - \frac{1}{2}(W^2)^2. \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των δύο παραπάνω και λόγω της γραμμικότητας του στοχαστικού διαφορικού d, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ζητούμενο:

$$\begin{aligned} d(W^1W^2) &= d\left(X^2 - \frac{1}{2}(W^1)^2 - \frac{1}{2}(W^2)^2\right) \\ &= 2XdX + dt - \frac{1}{2}(2W^1dW^1 + dt) - \frac{1}{2}(2W^2dW^2 + dt) \\ &= 2\frac{W^1 + W^2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}d(W^1 + W^2) + dt - dt - W^1dW^1 - W^2dW^2 \\ &= (W^1 + W^2)(dW^1 + dW^2) - W^1dW^1 - W^2dW^2 \\ &= W^1dW^2 + W^2dW^1. \end{aligned}$$

$\square$

Παρατήρηση 3.5.8. *Λαμβάνοντας υπόψη και το Λήμμα 3.4.4, (ii), βλέπουμε ότι για ανεξάρτητες κινήσεις Brown* $W^i, W^j, i, j = 1, \ldots, m$, *το στοχαστικό διαφορικό* $d(W^iW^j)$ *έχει σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα την ολοκληρωτική μορφή*

$$\int_s^r W^i dW^j + \int_s^r W^j dW^i = W^i(r)W^j(r) - W^i(s)W^j(s) - (r-s)\delta_{ij}.$$

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε τη γενίκευση του κανόνα γινομένου του Itô.

Πρόταση 3.5.9. *Έστω* $X_1(\cdot), X_2(\cdot)$ *πραγματικές στοχαστικές διαδικασίες και μια* m*-διάστατη κίνηση Brown,* $\overline{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \ldots, W^m(\cdot))$, *έτσι ώστε*

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt + \sum\limits_{k=1}^{m} G_1^k dW^k, \\ dX_2 = F_2 dt + \sum\limits_{l=1}^{m} G_2^l dW^l, \end{cases} \tag{3.17}$$

με $F_i \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G_i^k \in \mathbb{L}^2(0,T)$, *για* $i = 1, 2$ *και* $k = 1, \ldots, m$. *Τότε*

$$d(X_1X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + \sum_{k=1}^{m} G_1^k G_2^k dt.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτού είναι παραπλήσια με αυτήν της ειδικής περίπτωσης $m = n = 1$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.6 εργαστήκαμε σε τέσσερα βήματα, όπου στην ουσία τα τρία τελευταία βασίστηκαν στο πρώτο. Έτσι και εδώ θα κάνουμε μόνο το πρώτο βήμα και με ακριβώς την ίδια διαδικασία, όπως στην ειδική περίπτωση, θα μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα.
Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι $0 \le r \le t$. Επίσης, έστω

$$X_i(0) = 0,\ F_i(t) \equiv F_i,\ G_i^k(t) \equiv G_i^k,\ i = 1, 2,\ k = 1, \ldots, m,$$

δηλαδή F_i, G_i^k είναι ανεξάρτητες του χρόνου και $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, η (3.17) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{cases} X_1(t) = F_1 t + \sum\limits_{k=1}^{m} G_1^k W^k(t), \\ X_2(t) = F_2 t + \sum\limits_{l=1}^{m} G_2^l W^l(t). \end{cases} \tag{3.18}$$

Μεταφράζοντας αυτό που θέλουμε να δείξουμε, στην ολοκληρωτική του μορφή, αρκεί να αποδείξουμε

$$X_1(r)X_2(r) = \int_0^r X_1 dX_2 + \int_0^r X_2 dX_1 + r\sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k.$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος τα dX_i από την (3.17) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^r X_1 dX_2 + \int_0^r X_2 dX_1 + r\sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k &= \int_0^r X_1 \left(F_2 dt + \sum_{l=1}^m G_2^l dW^l\right)\\ &+ \int_0^r X_2 \left(F_1 dt + \sum_{k=1}^m G_1^k dW^k\right) + r\sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k.\end{aligned}$$

Εν συνεχεία, αντικαθιστώντας τα X_i από την (3.18), το δεξί μέλος ισούται με

$$\begin{aligned}&\int_0^r \left(F_1 t + \sum_{k=1}^m G_1^k W^k(t)\right)\left(F_2 dt + \sum_{l=1}^m G_2^l dW^l\right)\\ &+ \int_0^r \left(F_2 t + \sum_{l=1}^m G_2^l W^l(t)\right)\left(F_1 dt + \sum_{k=1}^m G_1^k dW^k\right) + r\sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k.\end{aligned}$$

Κάνοντας τις επιμεριστικές πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}&F_1F_2r^2 + F_1\sum_{l=1}^m G_2^l \left(\int_0^r t dW^l + \int_0^r W^l(t)dt\right)\\ &+ F_2\sum_{k=1}^m G_1^k \left(\int_0^r t dW^k + \int_0^r W^k(t)dt\right)\\ &+ \sum_{k=1}^m G_1^k \sum_{l=1}^m G_2^l \left(\int_0^r W^k(t)dW^l + \int_0^r W^l(t)dW^k\right) + r\sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k,\end{aligned}$$

το οποίο σύμφωνα με το Λήμμα 3.4.4 και την Παρατήρηση 3.5.8, ισούται με

$$\begin{aligned}&F_1F_2r^2 + F_1\sum_{l=1}^m G_2^l r W^l(r) + F_2\sum_{k=1}^m G_1^k r W^k(r)\\ &+ \sum_{k=1}^m G_1^k \sum_{l=1}^m G_2^l \left(W^k(r)W^l(r) - r\delta_{kl}\right) + r\sum_{k=1}^m G_1^k G_2^k\\ &= \left(F_1 r + \sum_{k=1}^m G_1^k W^k(r)\right)\left(F_2 r + \sum_{l=1}^m G_2^l W^l(r)\right) - r\sum_{k=1}^m G_1^k \sum_{l=1}^m G_2^l \delta_{kl}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ r\sum_{k=1}^{m} G_1^k G_2^k \\
&= X_1(r)X_2(r) - r\sum_{k=1}^{m} G_1^k G_2^k + r\sum_{k=1}^{m} G_1^k G_2^k \qquad \text{(από την (3.18))} \\
&= X_1(r)X_2(r).
\end{aligned}
$$

□

Με τα προηγούμενα βοηθητικά συμπεράσματα, είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε τον Κανόνα της Αλυσίδας κατά Itô στην n-διάστατη περίπτωση.

Θεώρημα 3.5.10. *Έστω $d\overline{X}(t) = \overline{F}dt + \boldsymbol{G}(t)d\overline{W}(t)$, όπως στον Ορισμό 3.5.5. Επιπλέον, έστω $u : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής, με συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, για $i, j = 1, \dots, n$. Τότε ισχύει ότι*

$$d(u(t, \overline{X}(t))) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^{m} G^{il}G^{jl}dt.$$

Προφανώς και εδώ οι μερικές παράγωγοι έχουν ως όρισμα το $(t, \overline{X}(t))$.

Απόδειξη. Η λογική της απόδειξης είναι ακριβώς ίδια με αυτήν του θεωρήματος 3.4.8. Λόγω πολύ μεγάλων αριθμητικών παραστάσεων που θα εμφανιστούν σε αυτή την απόδειξη, θα προσπαθήσουμε να είμαστε λιτοί, αλλά ταυτόχρονα σαφείς. Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε είναι τρία, όπως και στην ειδική περίπτωση. Έστω $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Βήμα 1:

Θα δείξουμε τον τύπο για πολυώνυμα μορφής

$$u(t, \overline{x}) = u(\overline{x}) := x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},\ k_i \in \mathbb{N}_0,\ i = 1, \dots, n.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$
\begin{aligned}
d(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}) = &\sum_{i=1}^{n} k_i X_i^{k_i - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_j^{k_j} dX_i \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} k_i X_i^{k_i-1} k_j X_j^{k_j-1} \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i,j}}^{n} X_r^{k_r} \right) \sum_{l=1}^{m} G^{il}G^{jl}dt
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i(k_i-1)X_i^{k_i-2}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}X_j^{k_j}\right)\sum_{l=1}^{m}(G^{il})^2dt. \qquad (3.19)$$

Η επαγωγή θα γίνει στα $k_1,\ldots,k_n$. Δηλαδή, για το πρώτο βήμα της επαγωγής υποθέτουμε ότι $k_i=0,\ i=2,\ldots,n$. Άρα, πρέπει να βρούμε το διαφορικό $d(X_1^{k_1})$. Έτσι, παίρνουμε

$$d(X_1^{k_1})=k_1X_1^{k_1-1}dX_1+\frac{1}{2}k_1(k_1-1)X_1^{k_1-2}\sum_{l=1}^{m}(G^{1l})^2dt,$$

το οποίο προκύπτει όπως στην απόδειξη της μονοδιάστατης περίπτωσης (βλέπε Βήμα 1 στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.8).
Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ισχύει για $k_1,\ldots,k_{n-1}$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι ισχύει ο τύπος (3.19) αντικαθιστώντας το n με $n-1$.
Άρα, για να δείξουμε ότι ισχύει για $k_1,\ldots,k_n$, υπολογίζουμε το παρακάτω διαφορικό, μέσω της Πρότασης 3.5.9.

$$\begin{aligned}d\left((X_1^{k_1}\cdots X_{n-1}^{k_{n-1}})X_n^{k_n}\right)=&(X_1^{k_1}\cdots X_{n-1}^{k_{n-1}})d(X_n^{k_n})+X_n^{k_n}d(X_1^{k_1}\cdots X_{n-1}^{k_{n-1}})\\&+k_nX_n^{k_n-1}\sum_{i=1}^{n-1}k_iX_i^{k_i-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}X_j^{k_j}\right)\sum_{a=1}^{m}G^{ia}G^{na}dt.\end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος του παραπάνω αθροίσματος προήλθε, αφενός, αναπτύσσοντας το dX_i στην (3.19). Κάνοντας αυτό, ο όρος που λαμβάνουμε υπόψη (δηλαδή ο μόνος όρος που περιέχει το στοχαστικό διαφορικό της κίνησης Brown) για το $d\left(X_1^{k_1}\cdots X_{n-1}^{k_{n-1}}\right)$ είναι ο

$$\sum_{i=1}^{n-1}k_iX_i^{k_i-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}X_j^{k_j}\right)\sum_{a=1}^{m}G^{ia}dW^a.$$

Αφετέρου, χρειαζόμαστε και τον όρο που περιέχει το στοχαστικό διαφορικό της κίνησης Brown για το $d(X_n^{k_n})$. Αν παρατηρήσουμε το πρώτο βήμα της επαγωγής, θα δούμε ότι αυτός ο όρος είναι ο

$$k_nX_n^{k_n-1}\sum_{j=1}^{m}G^{nj}dW^j.$$

Τελικά, για τον υπολογισμό του $d\left((X_1^{k_1}\cdots X_{n-1}^{k_{n-1}})X_n^{k_n}\right)$ αναπτύσσουμε τα $d(X_n^{k_n})$, $d(X_1^{k_1}\cdots X_{n-1})$ (από το πρώτο βήμα και την υπόθεση της επαγωγής) και καταλήγουμε στον ισχυρισμό μας.

Βήμα 2:

Ακολουθώντας, όπως προαναφέραμε, τη διαδικασία στην ειδική περίπτωση, υποθέτουμε $u(t,\overline{x}) = f(\overline{x})g(t)$, όπου f ένα πολυώνυμο όπως στο Βήμα 1 και g ένα πολυώνυμο ως προς t. Τότε

$$\begin{aligned}
d\left(u(t,\overline{X})\right) &= d\left(f(\overline{X})g(t)\right)\\
&= f(\overline{X})dg + gd\left(f(\overline{X})\right)\\
&= f(\overline{X})g'(t)dt + g(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dX_i + \frac{1}{2}g(t)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\sum_{l=1}^{m}G^{il}G^{jl}dt\\
&= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\sum_{l=1}^{m}G^{il}G^{jl}dt.
\end{aligned}$$

Άρα, σε αυτή την περίπτωση, έχουμε αποδείξει τον τύπο. Στο τρίτο βήμα, χρησιμοποιώντας το ίδιο «προσεγγιστικό επιχείρημα» όπως στο Θεώρημα 3.4.8, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

4.1 Ορισμοί και ένα κύριο παράδειγμα

Αρχικά, θα δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $\overline{W}(\cdot)$ m-διάστατη κίνηση Brown και $\overline{X}_0$ n-διάστατη τυχαία μεταβλητή, η οποία είναι ανεξάρτητη της $\overline{W}(\cdot)$. Ορίζουμε την filtration*

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{U}\left(\overline{W}(s) : 0 \leq s \leq t, \overline{X}_0\right),$$

η οποία είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την ιστορία της κίνησης Brown μέχρι και τη χρονική στιγμή t και την $\overline{X}_0$.

Έστω $T > 0$, $\overline{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to M^{n\times m}$ δοσμένες συναρτήσεις, όπου $M^{n\times m}$ ο χώρος των $n \times m$ πινάκων.

Ορισμός 4.1.2. *Λέμε ότι μια n-διάστατη στοχαστική διαδικασία $\overline{X}(\cdot)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (Itô)*

$$\begin{cases} d\overline{X} = \overline{b}(\overline{X}, t)dt + \boldsymbol{B}(\overline{X}, t)d\overline{W}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \overline{X}(0) = \overline{X}_0, \end{cases}$$

αν ικαναποιούνται τα εξής:

(i) Η $\overline{X}(\cdot)$ είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_t$ (του παραπάνω ορισμού).

(ii) $\overline{b}(\overline{X}(\cdot), \cdot) \in \mathbb{L}^1_n(0,T)$.

(iii) $\boldsymbol{B}(\overline{X}(\cdot), \cdot) \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$.

(iv) *για κάθε* $t \in [0,T]$,

$$\overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \int_0^t \overline{b}(\overline{X}(s), s)ds + \int_0^t \boldsymbol{B}(\overline{X}(s), s)d\overline{W} \ \sigma.\beta.$$

Λόγω του (iii) μπορούμε να υποθέτουμε πάντα ότι για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$ η $\overline{X}(\cdot)$ έχει συνεχείς τροχιές δείγματος.

Προτού προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα, θα δώσουμε τη μοντελοποίηση μιας μετοχής. Σε αυτό το μοντέλο θα στηριχθεί και η εφαρμογή μας στα Χρηματοοικονομικά στο τελευταίο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 4.1.3. *Έστω* $S(t)$ *η τιμή μιας μετοχής τη χρονική στιγμή* t. *Θέλουμε να μοντελοποιήσουμε την εξέλιξη της μετοχής στον χρόνο. Το σύνηθες μοντέλο που χρησιμοποιείται στα Χρηματοοικονομικά, βάσει της συσσωρευμένης εμπειρίας, υποθέτει ότι η σχετική μεταβολή της τιμής της εξελίσσεται σύμφωνα με τον κανόνα*

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \quad t \geq 0 \\ S(0) = s_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

δηλαδή ισοδύναμα

$$\begin{cases} dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad t \geq 0 \\ S(0) = s_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

όπου οι σταθερές $\mu > 0$ *και* σ, *λέγονται drift και volatility της μετοχής, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον Κανόνα της Αλυσίδας του Itô (Θεώρημα 3.4.8), για* $Y(t) := \log S(t) = u(S(t))$ *έχουμε,*

$$d(\log S) = \frac{1}{S}dS - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 S^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW$$

Δηλαδή, σε ολοκληρωτική μορφή,

$$\log\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t),$$

και άρα η λύση της (4.1) *είναι*

$$S(t) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}.$$

Παρατήρηση 4.1.4. *Παρατηρούμε ότι η τιμή της μετοχής είναι πάντα θετική, αν το s_0 είναι θετικό. Επιπλέον, από την (4.2) προκύπτει*

$$S(t) = s_0 + \int_0^t \mu S ds + \int_0^t \sigma S dW \tag{4.3}$$

και από τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος (Θεώρημα 3.2.10, (ii)), έχουμε

$$E\left(\int_0^t \sigma S dW\right) = 0. \tag{4.4}$$

Από τις (4.3) και (4.4) προκύπτει η συνήθης ολοκληρωτική εξίσωση

$$E(S(t)) = s_0 + \int_0^t \mu E(S(s)) ds,$$

της οποίας η λύση είναι η

$$E(S(t)) = s_0 e^{\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής, ταυτίζεται με τη (ντετερμινιστική) λύση που αντιστοιχεί στη συνήθη διαφορική εξίσωση (4.2) για $\sigma = 0$.

4.2 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Όπως σε κάθε εξελικτική διαδικασία, βασικό ρόλο θα παίξει το παρακάτω κλασικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.2.1. ***(Gronwall)*** *Έστω $\phi, f : [0,T] \to \mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις και $C_0 \geq 0$ σταθερά. Αν*

$$\phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f(s)\phi(s) ds, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

τότε ισχύει ότι

$$\phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f(s) ds}, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Απόδειξη. Έστω $h(t) := C_0 + \int_0^t f(s)\phi(s)ds$. Τότε

$$h'(t) = f(t)\phi(t) \tag{4.5}$$

και

$$\begin{aligned}\left(e^{-\int_0^t f(s)ds}h(t)\right)' &= -f(t)e^{-\int_0^t f(s)ds}h(t) + e^{-\int_0^t f(s)ds}h'(t)\\ &= e^{-\int_0^t f(s)ds}\big(h'(t) - f(t)h(t)\big)\\ &= e^{-\int_0^t f(s)ds}(f(t)\phi(t) - f(t)h(t)) \le 0,\end{aligned}$$

διότι από την υπόθεση έχουμε

$$\phi(t) \le h(t) \Longrightarrow f(t)\phi(t) \le f(t)h(t) \Longrightarrow f(t)\phi(t) - f(t)h(t) \le 0.$$

Άρα, καθώς η συνάρτηση $e^{-\int_0^t f(s)ds}h(t)$ είναι φθίνουσα, έπεται ότι, για $t \ge 0$,

$$\begin{aligned} & e^{-\int_0^t f(s)ds}h(t) \le 1C_0\\ \Longrightarrow\quad & h(t) \le C_0 e^{\int_0^t f(s)ds}\\ \Longrightarrow\quad & \phi(t) \le C_0 e^{\int_0^t f(s)ds},\end{aligned}$$

για $0 \le t \le T$. □

Θεώρημα 4.2.2. ***(Ύπαρξης και Μοναδικότητας)***
Έστω $\overline{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ και $\boldsymbol{B} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to M^{n\times m}$ συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες, για κάποια σταθερά $L > 0$, κάθε $t \in [0,T]$ και $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$:

(i)

$$\begin{cases} |\overline{b}(\overline{x}_1,t) - \overline{b}(\overline{x}_2,t)| \le L|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|,\\ \|\boldsymbol{B}(\overline{x}_1,t) - \boldsymbol{B}(\overline{x}_2,t)\| \le L|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|,\end{cases} \tag{4.6}$$

δηλαδή οι συναρτήσεις $\overline{b}, \boldsymbol{B}$ είναι ολικά Lipschitz ως προς $\overline{x}$, ομοιόμορφα ως προς $t \in [0,T]$.

(ii)

$$\begin{cases} |\overline{b}(\overline{x}_1,t)| \le L(1 + |\overline{x}_1|),\\ \|\boldsymbol{B}(\overline{x}_1,t)\| \le L(1 + |\overline{x}_1|),\end{cases} \tag{4.7}$$

δηλαδή οι συναρτήσεις $\overline{b}, \boldsymbol{B}$ αυξάνουν γραμμικά ως προς $\overline{x}$, ομοιόμορφα ως προς $t \in [0,T]$.

Επίσης, έστω $\overline{X}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ n-διάστατη τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, έτσι ώστε

$$\begin{cases} E\left(|\overline{X}_0|^2\right) < \infty, \\ \overline{X}_0 \text{ ανεξάρτητη της } \mathcal{W}_0^+, \end{cases}$$

όπου $\overline{W}(\cdot)$ m-διάστατη κίνηση Brown .
Τότε, υπάρχει μοναδική λύση $\overline{X}(\cdot) \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$ του προβλήματος αρχικών τιμών για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} d\overline{X} = \overline{b}(\overline{X}, t)dt + \boldsymbol{B}(\overline{X}, t)d\overline{W}, \quad t \in [0,T], \\ \overline{X}(0) = \overline{X}_0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Παρατήρηση 4.2.3. *Αναφέροντας παραπάνω «μοναδική λύση», εννούμε ότι, αν $\overline{X}_1(\cdot), \overline{X}_2(\cdot) \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$ είναι λύσεις του (4.8), με συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια, τότε αυτές είναι μη διακρίσιμες (βλέπε τον Ορισμό 2.1.5).*

Απόδειξη. Θα δουλέψουμε σε δύο βήματα και αρχικά θα ξεκινήσουμε με τη μοναδικότητα της λύσης.
Μοναδικότητα:
Έστω $\overline{X}_1(\cdot), \overline{X}_2(\cdot)$ δύο λύσεις της (4.8). Τότε, για κάθε $t \in [0,T]$,

$$\overline{X}_1(t) - \overline{X}_2(t) = \int_0^t \overline{b}(\overline{X}_1, s) - \overline{b}(\overline{X}_2, s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}_1, s) - \mathbf{B}(\overline{X}_2, s)d\overline{W}.$$

Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |\overline{X}_1(t) - \overline{X}_2(t)| \leq & \left| \int_0^t \overline{b}(\overline{X}_1, s) - \overline{b}(\overline{X}_2, s)ds \right| \\ & + \left| \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}_1, s) - \mathbf{B}(\overline{X}_2, s)d\overline{W} \right|. \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, υψώνουμε την παραπάνω ανισότητα στο τετράγωνο και με τη βοήθεια της ανισότητας $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} E\left(|\overline{X}_1(t) - \overline{X}_2(t)|^2\right) \leq 2E & \left(\left| \int_0^t \overline{b}(\overline{X}_1, s) - \overline{b}(\overline{X}_2, s)ds \right|^2 \right) \\ & + 2E\left(\left| \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}_1, s) - \mathbf{B}(\overline{X}_2, s)d\overline{W} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Πρέπει τώρα να εκτιμήσουμε τις δύο μέσες τιμές που προέκυψαν.
Αν $\overline{f} : [0,t] \to \mathbb{R}^n$, με $t > 0$, η ανισότητα Cauchy-Schwarz στο $L^2(0,T)$, μας δίνει ότι

$$\left| \int_0^t \overline{f}(s) ds \right|^2 \leq t \int_0^t |\overline{f}(s)|^2 ds.$$

Για τον επόμενο υπολογισμό, χρησιμοποιούμε την προηγούμενη ανισότητα, το Θεώρημα Fubini και την υπόθεση (4.6). Αναλυτικά, έχουμε για κάθε $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} E\left(\left| \int_0^t \overline{b}(\overline{X}_1, s) - \overline{b}(\overline{X}_2, s) ds \right|^2 \right) &\leq E\left(t \int_0^t \left| \overline{b}(\overline{X}_1, s) - \overline{b}(\overline{X}_2, s) \right|^2 ds \right) \\ &\leq TE\left(\int_0^t \left| \overline{b}(\overline{X}_1, s) - \overline{b}(\overline{X}_2, s) \right|^2 ds \right) \\ &\leq L^2 T \int_0^t E\left(|\overline{X}_1(s) - \overline{X}_2(s)|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Για τον δεύτερο όρο, χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Itô (βλέπε Πρόταση 3.5.4, (ii)) και την υπόθεση (4.6), καταλήγουμε στην ανισότητα

$$E\left(\left| \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}_1, s) - \mathbf{B}(\overline{X}_2, s) d\overline{W} \right|^2 \right) \leq L^2 \int_0^t E\left(|\overline{X}_1(s) - \overline{X}_2(s)|^2 \right) ds.$$

Οπότε, από τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτει ότι, για κάθε $t \in [0,T]$,

$$E\left(|\overline{X}_1(t) - \overline{X}_2(t)|^2 \right) \leq \underbrace{(2L^2(T+1)}_{:=C} \int_0^t E\left(|\overline{X}_1(s) - \overline{X}_2(s)|^2 \right) ds. \tag{4.9}$$

Άρα, για $\phi(t) := E\left(|\overline{X}_1(t) - \overline{X}_2(t)|^2 \right)$, $f(t) := C$ και $C_0 = 0$, σύμφωνα με το Λήμμα του Gronwall, συνεπάγεται ότι $\phi \equiv 0$ (το ολοκλήρωμα στην (4.9) υπάρχει αφού $\overline{X}_1, \overline{X}_2 \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$). Οπότε

$$P\left(|\overline{X}_1(t) - \overline{X}_2(t)| = 0, \ \forall\, t \in \mathbb{Q} \cap [0,T] \right) = 1$$

και εφόσον οι $\overline{X}_1$ και $\overline{X}_2$ έχουν συνεχείς τροχιές δείγματος σχεδόν βέβαια, προκύπτει

$$P\left(|\overline{X}_1(t) - \overline{X}_2(t)| = 0, \ \forall\, t \in [0,T] \right) = 1.$$

Ύπαρξη:

Θα εργαστούμε προσεγγιστικά, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε τη ζητούμενη λύση

ως το σταθερό σημείο ενός ολοκληρωτικού τελεστή).
Για $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in [0,T]$ ορίζουμε

$$\begin{cases} \overline{X}^0(t) := \overline{X}_0, \\ \overline{X}^{n+1}(t) := \overline{X}_0 + \int_0^t \overline{b}(\overline{X}^n(s), s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}^n(s), s)d\overline{W}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Επιπροσθέτως, ορίζουμε

$$d^n(t) := E\left(|\overline{X}^{n+1}(t) - \overline{X}^n(t)|^2\right).$$

Το σκεπτικό είναι να δείξουμε ότι για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, η $\overline{X}^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή διαστήματα (του χρόνου) και περνώντας στο όριο να αποφανθούμε ότι αυτό είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.
Αρχικά, θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό, ο οποίος θα είναι το κλειδί της απόδειξης. Έτσι, θα δείξουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in [0,T]$ ότι

$$d^n(t) \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{4.11}$$

όπου $M = M(L, T, \overline{X}_0)$, το οποίο θα προσδιοριστεί στην πορεία. Για την απόδειξη αυτού θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο n.
Για $n = 0$:

$$\begin{aligned} d^0(t) &= E\left(|\overline{X}^1(t) - \overline{X}^0(t)|^2\right) \\ &= E\left(\left|\int_0^t \overline{b}(\overline{X}_0, s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}_0, s)d\overline{W}\right|^2\right) \\ &\leq 2E\left(\left|\int_0^t \overline{b}(\overline{X}_0, s)ds\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(X_0, s)d\overline{W}\right|^2\right) \\ &\qquad (\text{τριγωνική ανισότητα και } (x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2) \\ &\leq E\left(t\int_0^t |\overline{b}(\overline{X}_0, s)|^2 ds\right) + E\left(\int_0^t \|\mathbf{B}(\overline{X}_0, s)\|^2 ds\right) \\ &\qquad (Cauchy - Schwarz \text{ στο } L^2(0,t) \text{ και ισομετρία του } It\hat{o}) \\ &\leq 2E\left(t\int_0^t L^2(1 + |\overline{X}_0|)^2 ds\right) + 2E\left(\int_0^t L^2(1 + |\overline{X}_0|)^2 ds\right) \\ &\qquad (\text{σύμφωνα με την } (4.7)) \\ &= 2L^2t^2E\left((1 + |\overline{X}_0|)^2\right) + 2L^2tE\left((1 + |\overline{X}_0|)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq t\left(2L^2TE\left((1+|\overline{X}_0|)^2\right)+2L^2E\left((1+|\overline{X}_0|)^2\right)\right)\\
&= tM,
\end{aligned}$$

όπου $M = (2L^2T + 2L^2)E\left((1+|\overline{X}_0|)^2\right) \leq 2L^2(T+1)2\left(1+E\left(|\overline{X}_0|^2\right)\right)$.
Υποθέτουμε τώρα ότι η (4.11) ισχύει για $n-1$, δηλαδή

$$d^{n-1}(t) \leq \frac{(Mt)^n}{n!}, \tag{4.12}$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει για n (επειδή τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε, είναι ίδια με αυτά του προηγούμενου βήματος, εκτός του ότι αντί για την (4.7) χρησιμοποιούμε την (4.6), δεν θα τα αναφέρουμε).

$$\begin{aligned}
d^n(t) &= E\left(\left|\int_0^t \overline{b}(\overline{X}^n,s)-\overline{b}(\overline{X}^{n-1},s)ds+\int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}^n,s)-\mathbf{B}(\overline{X}^{n-1},s)d\overline{W}\right|^2\right)\\
&\leq 2E\left[\left|\int_0^t \overline{b}(\overline{X}^n,s)-\overline{b}(\overline{X}^{n-1},s)ds\right|^2\right]\\
&\qquad +2E\left[\left|\int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}^n,s)-\mathbf{B}(\overline{X}^{n-1},s)d\overline{W}\right|^2\right]\\
&\leq 2E\left(t\int_0^t |\overline{b}(\overline{X}^n,s)-\overline{b}(\overline{X}^{n-1},s)|^2ds\right)\\
&\qquad +2E\left(\int_0^t \|\mathbf{B}(\overline{X}^n,s)-\mathbf{B}(\overline{X}^{n-1},s)\|^2ds\right)\\
&\leq 2tE\left(\int_0^t L^2|\overline{X}^n-\overline{X}^{n-1}|^2ds\right)+2E\left(\int_0^t L^2|\overline{X}^n-\overline{X}^{n-1}|^2ds\right)\\
&\leq 2L^2(T+1)\int_0^t d^{n-1}(s)ds\\
&\leq 2L^2(T+1)\int_0^t \frac{(Ms)^n}{n!}ds \quad \text{(σύμφωνα με την (4.12))}\\
&= 2L^2(T+1)M^n\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\\
&\leq \frac{M^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{(αφού } M \geq 2L^2(T+1)\text{)}.
\end{aligned}$$

Οπότε, η επαγωγή ολοκληρώθηκε.

Στη συνέχεια, βάσει του ίδιου συλλογισμού, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

Cauchy-Schwarz στο $L^2(0,T)$ και την (4.6), έχουμε για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}\left(\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t)-\overline{X}^{n}(t)|\right)^2 &\le 2TL^2\int_0^T|\overline{X}^{n}-\overline{X}^{n-1}|^2ds\\ &+2\max_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}^{n},s)-\mathbf{B}(\overline{X}^{n-1},s)d\overline{W}\right|^2.\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$Z_n(t):=\int_0^t \mathbf{G_n}(s)d\overline{W},\quad \mathbf{G_n}(s):=\mathbf{B}(\overline{X}^{n},s)-\mathbf{B}(\overline{X}^{n-1},s),$$

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.4 κάθε συντεταγμένη του $Z_n(t)$ είναι martingale και συνεπώς από την ανισότητα martingale (Θεώρημα 2.6.5, (ii), $p=2$) έπεται ότι

$$\begin{aligned}E\left[\left(\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t)-\overline{X}^{n}(t)|\right)^2\right] \le& 2TL^2\int_0^T E\left(|\overline{X}^{n}-\overline{X}^{n-1}|^2\right)ds\\ &+8E\left(|Z_n(T)|^2\right),\end{aligned}$$

και από την ισομετρία του Itô (Πρόταση 3.5.4), την (4.6) και τον ορισμό του d^n, προκύπτει

$$E\left[\left(\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t)-\overline{X}^{n}(t)|\right)^2\right]\le 2L^2(T+4)\int_0^T E\left(|\overline{X}^{n}-\overline{X}^{n-1}|^2\right)ds.$$

Τελικά, σύμφωνα με την (4.11),

$$\begin{aligned}E\left[\left(\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t)-\overline{X}^{n}(t)|\right)^2\right] &\le 2L^2(T+4)\int_0^T\frac{M^ns^n}{n!}ds\\ &=2L^2(T+4)M^n\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}\\ &\le C\frac{(MT)^n}{n!},\end{aligned}$$

με $C=2L^2T(T+4)$.
Χρησιμοποιώντας τώρα την ανισότητα Chebyshev (Πρόταση 1.1.28) για $p=2$, $\lambda=\frac{1}{2^n}$ και τυχαία μεταβλητή την $\max\limits_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t)-\overline{X}^{n}(t)|$, προκύπτει

$$\begin{aligned}P\left(\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t)-\overline{X}^{n}(t)|>\frac{1}{2^n}\right) &\le 2^{2n}E\left[\left(\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t)-\overline{X}^{n}(t)|\right)^2\right]\\ &\le 2^{2n}C\frac{(MT)^n}{n!}\end{aligned}$$

και αφού
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\frac{(MT)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4MT)^n}{n!} = e^{4MT} - 1 < \infty,$$
το Λήμμα Borel-Cantelli μας δίνει
$$P\left(\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t) - \overline{X}^{n}(t)| > \frac{1}{2^n} \text{ α.φ.}\right) = 0.$$
Οπότε, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, υπάρχει $n_0 = n_0(\omega)$, έτσι ώστε
$$\max_{0\le t\le T}|\overline{X}^{n+1}(t) - \overline{X}^{n}(t)| \le \frac{1}{2^n}, \quad \forall\, n \ge n_0.$$
Αυτό συνεπάγεται ότι για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, η $\overline{X}^n(\cdot,\omega) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0,T]$.

Σημειώνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ η στοχαστική διαδικασία $\overline{X}^n : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ έχει σχεδόν βέβαια συνεχείς τροχιές δείγματος. Αυτό είναι τετριμμένο για τη χρονικά σταθερή $\overline{X}^0(t) = \overline{X}_0$, $t \in [0,T]$ και προκύπτει επαγωγικά από τον αναγωγικό τύπο (4.10), αφού οι $\overline{b}, \mathbf{B}$ είναι συνεχείς ως προς t και $\overline{X}$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.5, όπου σε κάθε επαγωγικό βήμα αλλοιώνουμε το αόριστο ολοκλήρωμα Itô, μόνο σε ένα υποσύνολο του Ω μηδενικής πιθανότητας, για να θεωρήσουμε μια εκδοχή του που έχει σχεδόν βέβαια συνεχείς τροχιές δείγματος. Εξαιρώντας, συνεπώς, για κάθε όρο της ακολουθίας $\{\overline{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ένα υποσύνολο μηδενικής πιθανότητας του Ω, έχουμε σε ένα υποσύνολο $\tilde{\Omega}$ του Ω με $P(\tilde{\Omega}) = 1$, μια ακολουθία στοχαστικών διαδικασιών της οποίας οι όροι είναι για κάθε $\omega \in \tilde{\Omega}$ συνεχείς συναρτήσεις του $t \in [0,T]$. Αφού η ακολουθία $\overline{X}^n(\cdot,\omega) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις και συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,T]$ (ως ακολουθία Cauchy) σε μια $\overline{X}(\cdot,\omega) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, προκύπτει, ότι η στοχαστική διαδικασία $\overline{X} : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ θα έχει σχεδόν βέβαια συνεχείς τροχιές δείγματος.

Θα δείξουμε τώρα ότι η $\overline{X} : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ που βρήκαμε ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (4.8). Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [0,T]$ και $m > n \ge 0$ έχουμε
$$\begin{aligned}\|\overline{X}^m(t) - \overline{X}^n(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\|\sum_{k=n}^{m-1}\left(\overline{X}^{k+1}(t) - \overline{X}^k(t)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \sum_{k=n}^{m-1}\|\overline{X}^{k+1}(t) - \overline{X}^k(t)\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left[\frac{(Mt)^{k+1}}{(k+1)!} \right]^{1/2} \quad (\text{σύμφωνα με την } (4.11)).$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{(Mt)^{k+1}}{(k+1)!} \right]^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Δηλαδή, για κάθε $t \in [0,T]$, η $\overline{X}^n(t)$ συγκλίνει στο $L^2(\Omega)$ σε κάποιο $\overline{X}^*(t)$. Αυτό σημαίνει (βλέπε π.χ. [6], Θεώρημα 4.9, σελ. 94) ότι για κάθε $t \in [0,T]$ υπάρχει υπακολουθία $\{\overline{X}^{k_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{\overline{X}^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει σχεδόν βέβαια στο $\overline{X}^*(t)$. Όπως όμως είδαμε, για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, $\overline{X}^n(\cdot,\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{X}(\cdot,\omega)$ ομοιόμορφα στο $[0,T]$ και συνεπώς $\overline{X}^{k_n}(t,\omega) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{X}(t,\omega)$ για κάθε $t \in [0,T]$ και σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$. Άρα, σχεδόν βέβαια,

$$\overline{X}(t) = \overline{X}^*(t), \ \forall \ t \in [0,T],$$

και

$$\overline{X}^n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{X}(t) \text{ στο } L^2(\Omega) \text{ για κάθε } t \in [0,T].$$

Μένει να δείξουμε ότι

$$\int_0^t \bar{b}(\overline{X}^n(s),s)ds \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t \bar{b}(\overline{X}(s),s)ds \tag{4.13}$$

και

$$\int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}^n(s),s)d\overline{W} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}(s),s)d\overline{W}, \tag{4.14}$$

όπου η σύγκλιση είναι στο $L^2(\Omega)$.
Για τον σκοπό αυτό, μέσω του Λήμματος Fatou και της (4.11), σε αναλογία με τον παραπάνω υπολογισμό, έχουμε

$$E\left(\int_0^T |\overline{X}(t) - \overline{X}^n(t)|^2 dt\right)$$
$$\leq \liminf_{m\to\infty} E\left(\int_0^T |\overline{X}^m(t) - \overline{X}^n(t)|^2 dt\right)$$
$$\leq \limsup_{m\to\infty} E\left(\int_0^T |\overline{X}^m(t) - \overline{X}^n(t)|^2 dt\right)$$
$$= \limsup_{m\to\infty} \int_0^T E\left(|\overline{X}^m(t) - \overline{X}^n(t)|^2\right) dt$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \limsup_{m\to\infty} \left(\sum_{k=n}^{m-1} \left(\int_0^T E\left(|\overline{X}^{k+1}(t) - \overline{X}^k(t)|^2 \right) dt \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\leq \limsup_{m\to\infty} \left(\sum_{k=n}^{m-1} \left(\int_0^T \frac{(Mt)^{k+1}}{(k+1)!} dt \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{M^{k+1} T^{k+2}}{(k+2)!} \right)^{1/2} \right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι

$$
\|\overline{X}^n - \overline{X}\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{4.15}
$$

Από αυτό, μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwarz, της ισομετρίας του Itô και της Lipschitz συνέχειας των $\overline{b}, \mathbf{B}$ προκύπτει

$$
\left\| \int_0^t \overline{b}(\overline{X}^n(s), s) - \overline{b}(\overline{X}(s), s) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq tL^2 \|\overline{X}^n - \overline{X}\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0
$$

και

$$
\left\| \int_0^t \mathbf{B}(\overline{X}^n(s), s) - \mathbf{B}(\overline{X}(s), s) d\overline{W} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq L^2 \|\overline{X}^n - \overline{X}\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2 \to 0.
$$

Οπότε, οι σχέσεις (4.13) και (4.14) ικανοποιούνται. Άρα, δείξαμε ότι το όριο (στον $L^2(\Omega)$) της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.10) μας δίνει την (4.8), η οποία ισχύει, δηλαδή, σχεδόν βέβαια για κάθε $t \in [0, t]$.

Μένει να δείξουμε ότι $\overline{X}(\cdot) \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$. Ειδικότερα θα δείξουμε ότι

$$
\|\overline{X}(\cdot)\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} < \infty. \tag{4.16}
$$

Δουλεύοντας παρόμοια όπως στον υπολογισμό της $d^0(t)$ έχουμε για κάθε $t \in [0, T]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}_0$

$$
E\left(|\overline{X}^{n+1}(t)|^2 \right) \leq C\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right) + C \int_0^t E\left(|\overline{X}^n(s)|^2 \right) ds, \tag{4.17}
$$

όπου $C = C(L, T) \geq 1$. Για $n = 0$, όπου $\overline{X}^0 = \overline{X}_0$ είναι χρονικά ανεξάρτητη και αφού $C \geq 1$, έχουμε από τη (4.17) για κάθε $t \in [0, T]$

$$
\begin{aligned}
E\left(|\overline{X}^1(t)|^2 \right) &\leq C\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right) + CtE\left(|\overline{X}_0(t)|^2 \right) \\
&\leq (C + C^2 t)\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right)
\end{aligned}
$$

και, επαγωγικά, αν για $n \geq 0$ ισχύει

$$E\left(|\overline{X}^n(t)|^2\right) \leq \left(C + C^2 t + \cdots + C^{n+1}\frac{t^n}{n!}\right)\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right)$$

η (4.17) συνεπάγεται για κάθε $t \in [0,T]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} E\left(|\overline{X}^{n+1}(t)|^2\right) &\leq C\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right) + C\int_0^t \left(C + C^2 s + \cdots + C^{n+1}\frac{s^n}{n!}\right) ds \\ &\qquad \left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right) \\ &\leq \left(C + C^2 t + \cdots + C^{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right) \\ &\leq Ce^{Ct}\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Αφού για κάθε $t \in [0,T]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, $\overline{X}^n(t), \overline{X}(t) \in L^2(\Omega)$ με $\overline{X}^n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{X}(t)$ στο $L^2(\Omega)$ έχουμε

$$|\overline{X}^n(t)|^2,\ |\overline{X}(t)|^2 \in L^1(\Omega)$$

και

$$|\overline{X}^n(t)|^2 \xrightarrow{n\to\infty} |\overline{X}(t)|^2 \text{ στο } L^1(\Omega).$$

Επίσης, έχουμε ότι $\overline{X}^n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{X}(t)$ σχεδόν βέβαια και άρα

$$|\overline{X}^n(t)|^2 \xrightarrow{n\to\infty} |\overline{X}(t)|^2 \ \sigma.\beta.$$

Συνεπώς από την (4.18) και το Λήμμα Fatou προκύπτει ότι, για κάθε $t \in [0,T]$,

$$E\left(|\overline{X}(t)|^2\right) \leq C\left(1 + E(|\overline{X}_0|^2)\right)e^{Ct}.$$

Τελικά, ολοκληρώνοντας από 0 έως T καταλήγουμε στο εξής:

$$E\left(\int_0^T |\overline{X}(t)|^2 dt\right) < \infty,$$

το οποίο επαληθεύει την (4.16). □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μια εφαρμογή στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά

5.1 Βασικές έννοιες των Χρηματοοικονομικών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια χρήσιμη εφαρμογή της Στοχαστικής Ανάλυσης στον κλάδο των Χρηματοοικονομικών.

Εδώ θα εστιάσουμε στη μοντελοποίηση του προβλήματος και όχι τόσο στην μαθηματικά αυστηρή ανάλυσή του. Θα ξεκινήσουμε με κάποιες χρήσιμες έννοιες των Χρηματοοικονομικών. Για μια πληρέστερη εισαγωγή στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά και τη σχέση τους με τη Στοχαστική Ανάλυση παραπέμπουμε στα [3], [9], [20].

Ορισμοί 5.1.1. *(i) **Παράγωγο** (χρηματοοικονομικό) **προϊόν** ονομάζεται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου προϊόντος, το οποίο ονομάζεται **υποκείμενο προϊόν**. Ουσιαστικά, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου προϊόντος. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή, ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή. Τέλος, τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι οτιδήποτε, από μετοχές μέχρι και αγροτικά προϊόντα ή άλλες πρώτες ύλες.*

*(ii) Ένα **ομόλογο** είναι ένα χρεόγραφο, για το οποίο ο εκδότης έχει την υποχρέωση να καταβάλει, στη λήξη της σύμβασης, την ονομαστική αξία αυτού. Ένα ομόλογο είναι απλώς ένα δάνειο, το οποίο αντλείται από τον εκδότη του δανείου όχι μέσω της τραπεζικής διαμεσολάβησης, αλλά μέσω των κεφαλαιαγορών. Ο εκδότης είναι ο οφειλέτης και ο κάτοχος ομολόγων ο δανειστής. Τα ομόλογα και οι μετοχές είναι και τα δύο χρεόγραφα, αλλά η διαφορά*

είναι ότι οι κάτοχοι μετοχών είναι ιδιοκτήτες ενός μέρους (τμήματος) της εκδότριας εταιρείας (έχουν εταιρικό μερίδιο), ενώ οι κάτοχοι ομολόγων είναι στην ουσία δανειστές του εκδότη.

(iii) ***Χαρτοφυλάκιο (portfolio)*** *είναι το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων που έχει ένας επενδυτής στην κατοχή του. Για παράδειγμα, οι μετοχές, τα ομόλογα κτλ.*

(iv) ***Το κέρδος από επιτηδειότητα (arbitrage)*** *είναι γνωστό ως εξασφάλιση κέρδους χωρίς ρίσκο. Οι arbitrageurs, όπως αποκαλούνται αυτοί που εφαρμόζουν τη συγκεκριμένη τεχνική, προσπαθούν να εντοπίσουν και να εκμεταλλευτούν πρόσκαιρες ανισορροπίες της αγοράς αποκομίζοντας σίγουρο κέρδος, δηλαδή χωρίς ρίσκο.*
Μια τιμή ενός προϊόντος σε μια αγορά και μια αγορά γενικότερα θεωρείται «δίκαιη» αν δεν υπάρουν ευκαιρίες για arbitrage (no-arbitrage principle, αρχή της μη-επιτηδειότητας).

(v) ***Η αντιστάθμιση κινδύνου (hedging)*** *περιλαμβάνει όλες τις ενέργειες ενός πωλητή που στοχεύουν στην μείωση του κινδύνου από μελλοντικές μεταβολές των τιμών που απορρέουν από μια θέση που ήδη κατέχει σε κάποιο προϊόν (π.χ. εμπόρευμα, συναλλαγματική ισοτιμία).*

Ας δώσουμε τώρα δύο παραδείγματα για να καταλάβουμε πρακτικά τις έννοιες του arbitrage και του hedging.

Παράδειγμα 5.1.2. *Έστω ότι η τιμή μιας μετοχής στο χρηματιστήριο του Λονδίνου είναι 100 λίρες. Την ίδια ώρα, η αντίστοιχη τιμή στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης είναι 110 δολάρια, ενώ η συναλλαγματική ισοτιμία είναι*

$$1 \text{ λίρα} = 1,7 \text{ δολάρια}$$

Ο arbitrageur θα αγοράσει τη χρονική στιγμή t 1000 μετοχές από την Νέα Υόρκη και θα τις πουλήσει τη χρονική στιγμή $t + dt$ στο Λονδίνο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αποκομίσει σίγουρο κέρδος

$$-1000 \times 110 + 1000 \times 100 \times 1,7 = 1000 \times 100(-1,1 + 1,7) = 60000 \text{ δολάρια}$$

Η ευκαιρία αυτή όμως σύντομα θα εκλείψει, διότι αντιλαμβανόμενοι το γεγονός, θα σπεύσουν πολλοί να αγοράσουν από τη Νέα Υόρκη και να πωλήσουν στο Λονδίνο. Το αποτέλεσμα θα είναι να φτάσει η τιμή της μετοχής σε ένα σημείο ισορροπίας που δεν θα επιτρέπει σίγουρο κέρδος. Επομένως οι ευκαιρίες για arbitrage που τυχόν εμφανίζονται στην αγορά, πολύ γρήγορα εξαφανίζονται.

Παράδειγμα 5.1.3. *Έστω ότι μια ευρωπαϊκή εταιρεία πρέπει να πληρώσει έναν αμερικανό προμηθευτή της σε δολάρια σε μια μελλοντική χρονική στιγμή. Αυτό προφανώς ενέχει σημαντικό συναλλαγματικό κίνδυνο (μεταξύ ευρώ και δολαρίου). Ένας από τους διάφορους τρόπους για να μειώσει τον κίνδυνό της είναι να αγοράσει δικαιώματα προαίρεσης (options, η έννοια αυτή θα εξηγηθεί στα επόμενα) στο υποκείμενο αγαθό, ούτως ώστε να μειώσει την έκθεσή της στο ρίσκο που απορρέει από τις μεταβολές της τιμής του αγαθού.*

5.2 Η εξίσωση Black-Scholes

Έστω μια μετοχή, της οποίας η τιμή τη χρονική στιγμή t είναι $S(t)$. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.1.3, η εξέλιξη της μετοχής μοντελοποιείται από τη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

$$\begin{cases} dS = \mu S dt + \sigma S dW, & t \geq 0, \\ S(0) = s_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

όπου η αρχική τιμή s_0 θεωρείται γνωστή.

Θα ασχοληθούμε με ένα συγκεκριμένο παράγωγο προϊόν, το οποίο ονομάζεται **δικαίωμα προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου** (European call option). Η μετοχή αποτελεί το υποκείμενο προϊόν στο παράδειγμά μας. Αυτό το παράγωγο (προϊόν) είναι μία συμφωνία, η οποία δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει κάποιες μετοχές σε μία καθορισμένη τιμή και σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία (υπάρχουν και δικαιώματα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου, όπου το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί από τον αγοραστή ανά πάσα στιγμή, μέχρι να εξαντληθεί ο χρόνος ισχύος της συμφωνίας).
Αρα, σε αυτό το συμβόλαιο έχουμε καθορίσει μια τιμή p ως πωλητές της μετοχής (strike price) στην οποία ο αγοραστής του δικαιώματος μπορεί να αγοράσει τη μετοχή σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή $T > 0$ (strike). Για την καλύτερη κατανόηση του θέματος, ας υποθέσουμε ότι είμαστε ιδιοκτήτες μιας χρηματοοικονομικής εταιρείας και θέλουμε να πουλήσουμε στους πελάτες μας το παραπάνω δικαίωμα προαίρεσης. Αυτό που μας απασχολεί προφανώς ως εταιρεία είναι να πουλήσουμε αυτό το συμβόλαιο, έτσι ώστε να μην έχουμε ζημία. Έτσι, το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι:

Ποιά είναι η κατάλληλη, δηλαδή δίκαιη (fair), τιμή του δικαιώματος αυτού τη χρονική στιγμή $t = 0$ έτσι ώστε να μην δημιουργούνται ευκαιρίες για arbitrage;

Εξετάζοντας το πρόβλημα με μια πρώτη ματιά, ο υπολογισμός της τιμής αυτής φαίνεται σχετικά απλός. Διαισθητικά φαίνεται λογικό να κοστολογήσουμε αυτό το συμβόλαιο στην τιμή των

$$e^{-rT}E\left((S(T)-p)^{+}\right), \tag{5.2}$$

όπου $x^{+} := \max(x, 0)$. Αυτή είναι η αναμενόμενη τιμή του δικαιώματος τη χρονική στιγμή $T > 0$, κοστολογημένη σε παρούσα αξία, αν λάβουμε υπ΄ όψη μας ένα επιτόκιο χωρίς ρίσκο $r > 0$, το οποίο θα μας έδινε π.χ. μία τράπεζα. Η λογική πίσω από την παραπάνω τιμή κρύβεται στο ότι, αν $S(T) < p$, τότε ο αγοραστής δεν θα έχει κανένα όφελος να αγοράσει τη μετοχή στην τιμή p και δεν θα ασκήσει το δικαίωμα (το αντίθετο μάλιστα και γι΄ αυτό το λόγο δεν θα το κάνει). Αν τώρα $S(T) > p$, θα ασκήσει το δικαίωμα, αφού η τιμή του συμβολαίου p είναι συμφέρουσα σε σχέση με την τιμή της μετοχής στην αγορά και θα έχει κέρδος $S(T) - p$, αν τη χρονική στιγμή $T + dt$ πουλήσει τη μετοχή. Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η τιμή της μετοχής είναι μια στοχαστική διαδικασία και η τιμή της τη χρονική στιγμή T εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή $S(T)$, η αναμενόμενη τιμή του κέρδους από την κατοχή του δικαιώματος είναι

$$P' := E\left((S(T)-p)^{+}\right)$$

τη χρονική στιγμή $T > 0$. Το ίδιο κέρδος θα έχει ο αγοραστής τη χρονική στιγμή $t = T > 0$, αν την παρούσα χρονική στιγμή $t = 0$, που θέλουμε να του πουλήσουμε το δικαίωμα, επενδύσει σε μια τράπεζα με σταθερό, σίγουρο επιτόκιο $r > 0$ το ποσό $e^{-rT}P'$. Συνεπώς, σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό, η «δίκαιη» τιμή του δικαιώματος φαίνεται να είναι

$$P = e^{-rT}P' = e^{-rT}E\left((S(T)-p)^{+}\right).$$

Τα πράγματα όμως δεν είναι έτσι. Η τιμή που υπολογίσαμε δεν είναι «λάθος», αλλά δεν είναι αυτή που θα καθοριστεί από έναν διαθέτη ενός τέτοιου δικαιώματος, δηλαδή μια χρηματοοικονομική εταιρεία που θέλει (τουλάχιστον) να μην έχει ζημία και μάλλον κάποιο (μικρό ή μεγάλο) κέρδος. Η «δίκαιη» τιμή είναι αυτή που αποκλείει το arbitrage, δηλαδή την εκμετάλλευση του συγκεκριμένου προϊόντος για κέρδος χωρίς ρίσκο, από άλλους αγοραστές. Ο καθορισμός μιας τέτοιας τιμής για το εν λόγω δικαίωμα αντιστοιχεί, από την πλευρά του πωλητή, με την εξάλειψη του ρίσκου του κατά τη διάθεση του δικαιώματος, μέσω hedging, βλέπε την Παρατήρηση 5.2.1 πιο κάτω. (Σχετικά με τις διαφορές μεταξύ των δύο σκεπτικών αποτίμησης του δικαιώματος, δηλαδή μέσω της (5.2) και της χρήσης του hedging, παραπέμπουμε στο πολύ διαφωτιστικό παράδειγμα του bookmaker, βλέπε [3, σελ.

1-2], στο οποίο ουσιαστικά εξηγείται πώς ένας bookmaker καθορίζει τα στοιχήματα σχετικά με το ποιο από δύο άλογα κούρσας θα κερδίσει, σύμφωνα με το πώς στοιχηματίζουν οι παίκτες και όχι σύμφωνα με τις πραγματικές δυνατότητες των δύο αλόγων κούρσας.)

Θα εξηγήσουμε τώρα πώς αυτές οι αρχές (arbitrage και hedging) μεταφράζονται σε ένα μαθηματικό μοντέλο και οδηγούν στην εξίσωση Black-Scholes (-Merton), δηλαδή ένα Πρόβλημα Τελικών και Συνοριακών Τιμών για μια ομογενή γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, παραβολικού τύπου, δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Ο βασικός μηχανισμός που χρησιμοποιείται στην πράξη είναι ο καθορισμός της τιμής του δικαιώματος μέσω της εισαγωγής ενός «αντιγράφου» του (duplication ή replication), που είναι ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από ένα ομόλογο χωρίς ρίσκο και την υποκείμενη μετοχή.

Έστω $s \geq 0$ και $t \in [0, T]$. Αφού η τιμή του δικαιώματος είναι συνάρτηση της μετοχής και του χρόνου, εισάγουμε τη συνάρτηση

$$u(s, t),$$

η οποία είναι η ορθή τιμή του συμβολαίου (δικαιώματος) τη χρονική στιγμή t, δοθείσης της τιμής της μετοχής $S(t) = s$. Η τιμή που ζητείται είναι η

$$\boxed{u(s_0, 0)},$$

όπου s_0 η γνωστή αρχική τιμή της μετοχής την παρούσα χρονική στιγμή $t = 0$. Σύμφωνα με την προηγούμενη περιγραφή είμαστε τώρα σε θέση να θέσουμε τις τελικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματός μας. Έτσι, στο χρόνο $t = T$, πρέπει να ισχύει

$$u(s, T) = (s - p)^+, \quad s \geq 0. \tag{5.3}$$

Επιπλέον, πρέπει να λάβουμε υπόψη και την τετριμμένη περίπτωση όπου το συμβόλαιο δεν έχει καμία αξία από τον αρχικό μέχρι τον τελικό χρόνο. Δηλαδή, αν $s_0 = 0$, τότε $S(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, T]$. Οπότε

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{5.4}$$

Όπως είπαμε, ενδιαφερόμαστε να κατασκευάσουμε μια μερική διαφορική εξίσωση με τις τελικές και συνοριακές συνθήκες (5.3) και (5.4) η οποία καθορίζει τη u.

Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία

$$C(t) := u(S(t), t),$$

η οποία είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε $t \in [0, T]$, αφού η $S(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή. Η $C(t)$ είναι η τρέχουσα τιμή του συμβολαίου τη χρονική στιγμή t. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του Itô (Θεώρημα 3.4.8) και την (5.1) έχουμε

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial s}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\sigma^2 S^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mu S\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial u}{\partial s}dW. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε το σκεπτικό της αντιστάθμισης κινδύνου (hedging). Σύμφωνα με αυτό, δημιουργούμε ως «αντίγραφο» του δικαιώματος ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο αποτελείται από μια ποσότητα της μετοχής S και μια ποσότητα ενός ομολόγου B. Ας υποθέσουμε ότι το ομόλογο αυξάνεται με ένα σταθερό επιτόκιο $r > 0$ και έχει την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ την τιμή 1. Άρα, μοντελοποιείται ως εξής:

$$\begin{cases} dB = rBdt, & t \geq 0, \\ B(0) = 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Αυτή είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, η οποία έχει λύση

$$B(t) = e^{rt}.$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε στοχαστικές διαδικασίες ϕ και ψ, έτσι ώστε

$$C(t) = \phi(t)S(t) + \psi(t)B(t), \quad t \in [0, T]. \tag{5.7}$$

Η ιδέα είναι ότι αν υπολογίσουμε αυτές τις διαδικασίες, έτσι ώστε να ισχύει η (5.7), θα έχουμε εξαλείψει τον κίνδυνο. Πράγματι ως χρηματοοικονομική εταιρεία που προσφέρει το δικαίωμα προαίρεσης, διατρέχουμε τον κίνδυνο η τιμή της μετοχής $S(T)$ να υπερβεί τη χρονική στιγμή T την τιμή p (strike price) που αναγράφει το συμβόλαιο. Έτσι, ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς με αποτέλεσμα να έχει κέρδος $S(T) - p$ αυτός και ζημία εμείς. Αλλά αν έχουμε κατασκευάσει το χαρτοφυλάκιο (5.7), η αξία του θα ισούνται με τα επιπλέον κεφάλαια $S(T) - p$ που θα χρειαστούν για να αγοράσουμε τη μετοχή και να τη δώσουμε στον πελάτη έναντι του ποσού p. Από την άλλη μεριά, αν το δικαίωμα δεν έχει αξία τη χρονική στιγμή T, δηλαδή η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη της τιμής p, τότε ούτε το χαρτοφυλάκιό μας θα έχει κάποια αξία. Να σημειωθεί, ότι ο υπολογισμός της τιμής του δικαιώματος μοντελοποιείται εδώ κατά τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να είναι η τιμή με την οποία, ως εταιρεία, δεν θα έχουμε ούτε κέρδος ούτε ζημία (break-even price).

Για να επιτύχουμε το παραπάνω σκεπτικό της αντιστάθμισης κινδύνου, ως εταιρεία, πρέπει να μη βάλουμε άλλα κεφάλαια μέσα στο χαρτοφυλάκιό μας εκτός από τα αρχικά, δηλαδή το χαρτοφυλάκιο να είναι αυτοχρηματοδοτούμενο (self-financing). Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από τις μεταβολές στις τιμές των S και B. Αυτή η υπόθεση σημαίνει ότι

$$dC = \phi dS + \psi dB, \quad 0 \le t \le T. \tag{5.8}$$

Παρατήρηση 5.2.1. *Σημειώνουμε ότι, αν υπάρχει κάποιο αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο* $X(t) = \phi(t)S(t) + \psi(t)B(t)$, $t \in [0,T]$, *τέτοιο ώστε* $C(T) = X(T)$, *τότε θα πρέπει να ισχύει* $C(t) = X(t)$ *για κάθε* $t \in [0,T]$, *καθώς αλλιώς θα επιτρεπόταν το arbitrage. Πράγματι, αν για κάποια χρονική στιγμή ίσχυε* $C(t) < X(t)$, *θα μπορούσε κάποιος να πουλήσει το χαρτοφυλάκιό του στην τιμή* $X(t)$, *να αγοράσει το δικαίωμα στην τιμή* $C(t)$, *και να καταθέσει τη διαφορά* $X(t) - C(t)$ *στην τράπεζα με σταθερό επιτόκιο και χωρίς ρίσκο. Τη χρονική στιγμή* $t = T$, *θα μπορούσε να επαναγοράσει το χαρτοφυλάκιό του στην τιμή* $X(T) = C(T)$, *χωρίς να καταβάλει κάποιο επιπλέον κεφάλαιο, πουλώντας το δικαίωμα, καταλήγοντας έτσι να έχει το αρχικό του χαρτοφυλάκιο και επιπλέον την (ανατοκισμένη) ασφαλή κατάθεσή του στην τράπεζα.*

Αντίστροφα, αν $C(t) > X(t)$ *για κάποιο* $t < T$, *θα μπορούσαμε να πουλήσουμε εμείς το δικαίωμα στην τιμή* $C(t)$, *να αγοράσουμε το χαρτοφυλάκιο στην τιμή* $X(t)$ *και να καταθέσουμε τη διαφορά* $X(t) - C(t) > 0$ *στην τράπεζα με σταθερό επιτόκιο χωρίς ρίσκο. Τη χρονική στιγμή* $t = T$ *θα μπορούσαμε να πουλήσουμε το χαρτοφυλάκιο στην τιμή* $X(T)$ *και να αγοράσουμε το δικαίωμα στην ίδια τιμή, έχοντας τελικά πάλι το δικαίωμα προαίρεσης στα χέρια μας και επιπλέον την ασφαλή κατάθεσή μας στην τράπεζα.*

Από την ισότητα (5.8) μαζί με τις σχέσεις (5.1), (5.5) και (5.6) έπεται ότι

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mu S\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial u}{\partial s}dW = \phi(\mu S dt + \sigma S dW) + \psi r B dt,$$

από την οποία προκύπτει άμεσα

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mu S\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial u}{\partial s}dW = (\phi\mu S + \psi r B)dt + \phi\sigma S dW. \tag{5.9}$$

Τώρα, για να ισούνται οι όροι που περιέχουν το dW (στην (5.9)) πρέπει να θέσουμε

$$\phi(t) := \frac{\partial u}{\partial s}(S(t), t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5.10}$$

Έτσι, η (5.9) γίνεται

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) dt = r\psi B dt. \tag{5.11}$$

Επίσης, από την (5.7), μέσω της (5.10), έχουμε ότι

$$\psi(t) = B^{-1}\left(u - S\frac{\partial u}{\partial s}(S(t), t)\right). \tag{5.12}$$

Έτσι, έχουμε προσδιορίσει τις διαδικασίες ϕ και ψ ως συναρτήσεις του u, που ήταν ένας από τους στόχους μας. Τέλος, από τις σχέσεις (5.11) και (5.12) παίρνουμε ότι

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + rS\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - ru\right) dt = 0.$$

Δηλαδή, για να είμαστε σίγουροι ότι η (5.7) είναι ορθή, θέλουμε η συνάρτηση $u = u(s,t)$ να λύνει τη μερική διαφορική εξίσωση **Black-Scholes(-Merton)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + rs\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - ru = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το drift μ δεν εμφανίζεται.

Παρατήρηση 5.2.2. *Πρέπει να επιβεβαιώσουμε την (5.8) για να εξάγουμε την (5.9), την οποία χρησιμοποιήσαμε. Έτσι, από τη γραμμικότητα του στοχαστικού διαφορικού, μέσω της (5.7), έπεται*

$$dC = d(\phi S) + d(\psi B).$$

Έχουμε $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ και $dB = rBdt$. Αν $d\phi := F_1 dt + G_1 dW$ και $d\psi := F_2 dt + G_2 dW$, τότε από τον Κανόνα Γινομένου του Itô (Θεώρημα 3.4.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(\phi S) &= \phi dS + S d\phi + G_1 \sigma S dt, \\ d(\psi B) &= \psi dB + B d\psi. \end{aligned}$$

Οπότε, για να ισχύει η (5.8) πρέπει να δείξουμε ότι

$$S d\phi + B d\psi + G_1 \sigma S dt = 0. \tag{5.13}$$

Όμως $\phi(t) = u_s(S(t), t)$, και από τον Κανόνα Αλυσίδας του Itô, για $X(t) = S(t)$ και $u(X,t) = u_s(X(t), t)$, προκύπτει ότι

$$d\phi = \underbrace{\left(u_{st} + u_{ss}\mu S + \frac{1}{2} u_{sss}\sigma^2 S^2\right)}_{=F_1} dt + \underbrace{u_{ss}\sigma S}_{=G_1} dW. \tag{5.14}$$

Με αυτήν, η (5.13) *γίνεται*

$$\begin{aligned} &S d\phi + B d\psi + u_{ss}\sigma^2 S^2 dt = 0 \\ \iff & d\psi = -B^{-1}\left(S d\phi + \sigma^2 S^2 u_{ss} dt\right), \end{aligned} \tag{5.15}$$

δηλαδή, αν ισχύει η (5.15), *ισχύει και η* (5.13).
Όμως, $\psi = B^{-1}(C - \phi S) = e^{-rt}(u(S,t) - u_s(S,t)S) =: V(S,t)$. *Έτσι από τον Κανόνα Αλυσίδας του Itô*

$$\begin{aligned} d\psi &= \left(V_t + V_s \mu S + \frac{1}{2} V_{ss}\sigma^2 S^2\right) dt + V_s \sigma S dW \\ &= e^{-rt}[(u_t - u_{st}S - ru + ru_s S - u_{ss}\mu S^2 - \frac{1}{2}u_{ss}\sigma^2 S^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}u_{sss}\sigma^2 S^3)dt - u_{ss}\sigma S^2 dW], \end{aligned} \tag{5.16}$$

αφού $V_t = e^{-rt}(u_t - u_{st}S - ru + ru_s S)$, $V_s = -e^{-rt}u_{ss}S$ *και* $V_{ss} = -e^{-rt}(u_{ss} + u_{sss}S)$.
Από την άλλη, από την (5.15) *και την* (5.14) *έχουμε*

$$d\psi = -e^{-rt}\left[\left(S u_{st} + u_{ss}\mu S^2 + \frac{1}{2}u_{sss}\sigma^2 S^3 + \sigma^2 S^2 u_{ss}\right) dt + u_{ss}\sigma S^2 dW\right]. \tag{5.17}$$

Συνεπώς, τα αναπτύγματα (5.16) *και* (5.17) *ταυτίζονται, αφού ισχύει η εξίσωση Black-Scholes, και άρα*

$$u_t + ru_s S + \frac{\sigma^2}{2}S^2 u_{ss} - ru = 0.$$

Συμπέρασμα: Για να κοστολογήσουμε το δικαίωμα προαίρεσης (να βρούμε δηλαδή την τιμή $u(s_0, 0)$), πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα τελικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t(s,t) + rsu_s(s,t) + \frac{\sigma^2}{2}s^2 u_{ss}(s,t) - ru = 0, & s > 0,\ 0 \le t \le T, \\ u(s,T) = (s-p)^+, & s > 0, \\ u(0,t) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases}$$

το οποίο επιλύεται ρητά. Για την επίλυσή του παραπέμπουμε στα [5] και [3, σελ. 91].

Πράγματι, το πρόβλημα *τελικών* και συνοριακών τιμών μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πρόβλημα *αρχικών* και συνοριακών τιμών για τη συνάρτηση

$$v(s,t) = u(s, T-t), \quad \text{όπου } (s,t) \in [0,\infty) \times [0,T].$$

Το μετασχηματισμένο πρόβλημα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{cases} v_t + rv - rsv_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 v_{ss} = 0, & \text{στο } (0,\infty) \times (0,T), \\ v(s,0) = (s-p)^+, & \text{για } s > 0, \\ v(0,t) = 0, & \text{για } 0 \le t \le T, \end{cases}$$

και επαληθεύεται ότι έχει τη λύση

$$v(s,t) = s\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{p} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - pe^{-rt}\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{p} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

όπου $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. Η λύση αυτή ονομάζεται **Τύπος Black-Scholes** και μας δίνει την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου μιας μετοχής με την παρούσα αξία $s = s_0$, volatility σ και χρόνο ωρίμανσης $t = T$ για strike price $p > 0$, αν το σταθερό επιτόκιο του ομολόγου είναι $r > 0$.

Παράδειγμα 5.2.3. *(βλέπε [3, σελ. 92])*
Αν μια μετοχή έχει volatility 18% *και παρούσα αξία* 20€*, ποια είναι η αξία του δικαιώματος προαίρεσης αγοράς αυτής της μετοχής σε δύο χρόνια στην τιμή των* 25€*, αν θεωρήσουμε ότι ένα ομόλογο έχει σταθερό επιτόκιο* 6%*;*
Λύση: *Αν θέσουμε στον τύπο Black-Scholes*

$$t = 2,\ s = 20,\ p = 25,\ \sigma = 0.18 \text{ και } r = 0.06$$

προκύπτει η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης ως

$$v(20,2) = 1.221€.$$

Βιβλιογραφια

[1] H. Bauer. *Measure and Integration Theory*, De Gruyter, 2001.

[2] H. Bauer. *Probability Theory*, De Gruyter, 1996.

[3] M. Baxter and A. Rennie. *Financial Calculus, An Introduction to Derivative Pricing*, The Press Syndicate of the University of Cambridge, 1996.

[4] J. Bell. *The Kolmogorov continuity theorem, Hölder continuity, and the Kolmogorov-Chentsov theorem*, notes, 9 pages, 2015. (http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/kolmogorovcontinuity.pdf)

[5] F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 637-654, 1973.

[6] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[7] Z. Brzeźniak and T. Zastawniak. *Basic Stochastic Processes*, Springer, 2000.

[8] K.L. Chung. *A Course in Probability Theory*, Second Edition, Academic Press, 1974.

[9] Α.Ν. Γιαννακοπουλος. *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική*, ανέκδοτες σημειώσεις, 2003.

[10] D. Gamarnik. *Advanced Stochastic Processes.* Fall 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare.

(https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-070j-advanced-stochastic-processes-fall-2013)

[11] L.C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, 2013.

[12] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Taylor and Francis, 2015.

[13] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications 1*, Academic Press, 1975.

[14] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications 2*, Academic Press, 1976.

[15] K. Hoffmann. *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall, 1962.

[16] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer, 1991.

[17] P. Kempthorne, C. Lee, V. Strela, and J. Xia. *Topics in Mathematics with Applications in Finance.* Fall 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. (https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-s096-topics-in-mathematics-with-applications-in-finance-fall-2013)

[18] Γ.Α. Καρακωστας. *Πραγματική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Ιωαννίνων, 2014.

[19] Γ. Κουμουλλης και Σ. Νεγρεποντης. *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[20] Μ. Λουλακης. *Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία*, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015.

[21] Μ. Λουλακης. *Στοχαστικές Διαδικασίες*, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015.

[22] P.A. Meyer. *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Company, 1966.

[23] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Fifth Edition, Springer, 2000.

[24] H.L. Royden and P.M. Fitzpatrick. *Real Analysis*, Fourth Edition, Prentice Hall, 2010.

[25] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[26] Κ.Α. Ζωγραφος. *Πιθανότητες*, Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Ιωαννίνων, 2014.