ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Τανυστική Τριγωνική Γεωμετρία

Δημητριος Μιχαηλιδης

Μεταπτυχιακη Διατριβη

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2017

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

Εγκρίθηκε την 06/11/2017 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

1. ΜΠΕΛΗΓΙΑΝΝΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)

2. ΘΩΜΑ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

3. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Δημήτριος Μιχαηλίδης

Αφιερώνεται στους γονείς μου Παναγιώτη και Δέσποινα.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Συχνά στα Μαθηματικά και ιδιαίτερα στην Άλγεβρα, και στη Γεωμετρία ή την Τοπολογία, ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη ενός αλγεβρικού αντικειμένου, για παράδειγμα ενός δακτυλίου Λ ή μιας ομάδας G, ή ενός γεωμετρικού ή τοπολογικού αντικειμένου, για παράδειγμα μιας αλγεβρικής ποικιλότητας, ενός σχήματος ή γενικότερα ενός τοπολογικού χώρου X. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε σημαντικές ιδιότητες αλγεβρικών, γεωμετρικών ή τοπολογικών αντικειμένων είναι πολύ χρήσιμο να διευρύνουμε το πλαίσιο μελέτης και να θεωρήσουμε «αναπαραστάσεις» αυτών των αντικειμένων. Έτσι στην περίπτωση ενός δακτυλίου Λ μελετούμε την κατηγορία Λ-Mod των (αριστερών) προτύπων υπεράνω του Λ, στην περίπτωση μιας ομάδας G, και επιλέγοντας ένα σώμα $\mathbb{K}$, μελετούμε γραμμικές αναπαραστάσεις της ομάδας G υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, με άλλα λόγια πρότυπα υπεράνω της ομάδας άλγεβρας $\mathbb{K}G$, στην περίπτωση μιας αλγεβρικής ποικιλότητας X μελετούμε την κατηγορία $\mathsf{coh}X$ των coherent sheaves υπεράνω της X, κ.ο.κ. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι με αυτό τον τρόπο μελετούμε αλγεβρικά, γεωμετρικά ή τοπολογικά αντικείμενα με βάση τις αλληλεπιδράσεις που έχουν με άλλα αντικείμενα παρόμοιας φύσης με τέτοιο τρόπο ώστε σημαντικές ιδιότητες ή αναλλοίωτες να παραμένουν αμετάβλητες. Διακεκριμένα παραδείγματα τέτοιων αναλλοίωτων αποτελούν η Αλγεβρική K-Θεωρία, η Κυκλική Ομολογία, η Συνομολογία Hochschild... Κατ' αυτόν τον τρόπο διευρύνουμε το πλαίσιο μελέτης και τα όρια ταξινόμησης των υπό μελέτη αντικειμένων. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις δημιουργείται η ανάγκη περαιτέρω διεύρυνσης και επέκτασης του πλαισίου μελέτης και των ορίων ταξινόμησης αντικαθιστώντας την αβελιανή κατηγορία των αναπαραστάσεων των αλγεβρικών, γεωμετρικών ή τοπολογικών αντικειμένων με μια τριγωνισμένη κατηγορία η οποία επάγεται από την αβελιανή κατηγορία των αναπαραστάσεων με φυσικό τρόπο και η οποία περιέχει με ουσιαστικό τρόπο τις περισσότερο σημαντικές πληροφορίες που μας ενδιαφέρουν. Ιδιαίτερα οι σημαντικές αναλλοίωτες οι οποίες αναφέρθηκαν παραπάνω παραμένουν αμετάβλητες στο πλαίσιο των τριγωνισμένων κατηγοριών.

Έτσι οδηγούμαστε στην μελέτη:

1. της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\Lambda\text{-}\mathsf{Mod})$ της κατηγορίας προτύπων Λ-Mod υπεράνω ενός δακτυλίου Λ,
2. της ευσταθούς κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ της κατηγορίας αναπαραστάσεων μιας πεπερασμένης ομάδας G υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$,
3. της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}^b(\mathsf{coh}X)$ των coherent sheaves υπεράνω μιας αλγεβρικής ποικιλότητας X,
4. της ευσταθούς ομοτοπικής κατηγορίας των τοπολογικών χώρων.

Οι παραπάνω κατηγορίες δεν είναι πλέον αβελιανές, αλλά είναι τριγωνισμένες. Οι τριγωνισμένες κατηγορίες εισήχθηκαν από τους A. Grothendieck και J. L. Verdier ως το καταλληλότερο πλαίσιο μελέτης συνομολογικών θεωριών στην Αλγεβρική Γεωμετρία και έκτοτε διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών, για παράδειγμα στην Ομολογική Άλγεβρα, στη Θεωρία Αναπαραστάσεων, στην Αλγεβρική Γεωμετρία, στην Αλγεβρική Τοπολογία, και στην Ανάλυση. Εν συντομία, μια *τριγωνισμένη κατηγορία* είναι μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{T}$ η οποία είναι εφοδιασμένη με μια ισοδυναμία κατηγοριών $\Sigma\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$, που καλείται *translation συναρτητής* ή *suspension* *συναρτητής* και μια κλάση διαγραμμάτων της μορφής $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$, τα οποία καλούνται *τρίγωνα*, ώστε να ικανοποιούνται συγκεκριμένα αξιώματα το οποία περιγράφουν ιδιότητες οι οποίες είναι ανάλογες ιδιοτήτων ακριβών ακολουθιών σε μια αβελιανή κατηγορία.

Είναι σημαντικό να αναρωτηθούμε κατά πόσο και με ποιόν τρόπο οι αβελιανές κατηγορίες αναπαραστάσεων ή οι επαγόμενες τριγωνισμένες κατηγορίες οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα αλγεβρικό, γεωμετρικό ή τοπολογικό αντικείμενο, το καθορίζουν. Ιδιαίτερα μπορεί ένα αλγεβρικό, γεωμετρικό ή τοπολογικό αντικείμενο να *ανακατασκευαστεί* από την αβελιανή ή τριγωνισμένη κατηγορία αναπαραστάσεων; Η απάντηση, σ' αυτή τη γενικότητα και χωρίς θεώρηση επιπρόσθετης δομής, είναι αρνητική. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν θετικά αποτελέσματα προς αυτή την κατεύθυνση. Για παράδειγμα ο Gabriel περί τα τέλη της δεκαετίας του 1950 έδειξε ότι η κατηγορία των coherent sheaves υπεράνω μιας αλγεβρικής ποικιλότητας ή γενικότερα ενός σχήματος X καθορίζει το X με τέτοιον τρόπο ώστε αν για δύο σχήματα X, Y οι κατηγορίες $\mathsf{coh}X$ και $\mathsf{coh}Y$ είναι ισοδύναμες, τότε τα σχήματα X, Y είναι είναι ισόμορφα στην κατηγορία των σχημάτων.

Με βάση την παραπάνω ανάλυση καθίσταται επιτακτική η ανάγκη εύρεσης κατάλληλης θεωρίας και η ανάπτυξη κατάλληλων εργαλείων τα οποία να επιτρέπουν την ανακατασκευή ενός αλγεβρικού, γεωμετρικού ή τοπολογικού αντικειμένου από την τριγωνισμένη κατηγορία των αναπαραστάσεών του. Προς αυτή την κατεύθυνση είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι τριγωνισμένες κατηγορίες αναπαραστάσεων αλγεβρικών, γεωμετρικών ή τοπολογικών αντικειμένων οι οποίες αναφέρθηκαν παραπάνω, με πιθανή εξαίρεση την περίπτωση ενός μη-μεταθετικού δακτυλίου, είναι εφοδιασμένες με επιπρόσθετη μονοειδή ή τανυστική δομή η οποία απορρέει από την ύπαρξη σ' αυτό το πλαίσιο, ενός δισυναρτητή τανυστικού γινομένου.

Σ' αυτό το πλαίσιο έρευνας και μελέτης, ο Paul Balmer δημοσίευσε το 2004 ένα θεμελιώδες άρθρο, βλέπε [2], το οποίο αποτέλεσε την απαρχή για την ανάπτυξη μια νέας θεωρίας που είναι γνωστή ως **Τανυστική Τριγωνική Γεωμετρία (Tensor Triangular Geometry)**. Το βασικό στοιχείο αυτής της θεωρίας είναι η αντιστοίχιση με φυσικό τρόπο ενός τοπολογικού χώρου, ο οποίος είναι γνωστός ως **φάσμα του Balmer**, σε κάθε τριγωνισμένη κατηγορία η οποία είναι εφοδιασμένη με μια τανυστική δομή, δηλαδή με μια μονοειδή δομή η οποία είναι συμβατή με την τριγωνική δομή. Η τανυστική τριγωνική γεωμετρία είναι τότε η μελέτη του φάσματος του Balmer μιας τριγωνισμένης τανυστικής κατηγορίας. Ειδικεύοντας την θεωρία η οποία αναπτύσσεται στα προαναφερθέντα παραδείγματα, σημαντική θέση έχει το πρόβλημα του κατά πόσον το φάσμα του Balmer καθορίζει το υπό μελέτη αντικείμενο από το οποίο έχουμε ξεκινήσει.

Εν συντομία, μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία είναι μια τριάδα της μορφής $(\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$, όπου $\mathcal{K}$ είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία, $\otimes\colon \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ είναι ένας δισυναρτητής ο οποίος είναι ακριβής και ως προς τις δύο μεταβλητές, και $\mathbf{1} \in \mathcal{K}$ είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$, το οποίο καλείται *μοναδιαίο*, και για το οποίο ισχύει ότι υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί $X \otimes \mathbf{1} \simeq 1$ και $\mathbf{1} \otimes X \simeq X$, για οποιοδήποτε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Επιπλέον απαιτείται η ύπαρξη οικογενειών φυσικών ισομορφισμών οι οποίοι καθιστούν μεταθετικά διάφορα διαγράμματα τα οποία απορρέουν με φυσικό τρόπο, παραπέμπουμε στο κείμενο για περισσότερες λεπτομέρειες. Για μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$, ο Balmer, γενικεύοντας αποτελέσματα του Thomason [26], εισήγαγε την έννοια του πρώτου (prime) thick τανυστικού ιδεώδους, η οποία έχει κεντρικό ρόλο στη διατριβή. Υπενθυμίζουμε ότι μια υποκατηγορία $\mathcal{C}$ της $\mathcal{K}$ καλείται *thick* αν η $\mathcal{C}$ είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$ η οποία είναι κλειστή στους ευθείς προσθεταίους. Μια τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται *τανυστικό ιδεώδες*, αν $C \otimes X \in \mathcal{C}$ και $X \otimes C \in \mathcal{C}$, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ και για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$. Ένα γνήσιο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ καλείται *πρώτο* (prime) αν:

$$X \otimes Y \in \mathcal{P} \quad \Longrightarrow \quad X \in \mathcal{P} \ \text{ ή } \ Y \in \mathcal{K}$$

Ο παραπάνω ορισμός θυμίζει, σαφώς, τον ορισμό του πρώτου ιδεώδους ενός μεταθετικού δακτυλίου που γνωρίζουμε από τη βασική άλγεβρα και για το λόγο αυτό γίνεται αμέσως οικείος στον αναγνώστη. Με μια κατασκευή εμπνευσμένη, επίσης, από τη Μεταθετική Άλγεβρα ορίζουμε το φάσμα του Balmer $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$, ως το σύνολο των πρώτων thick τανυστικών ιδεωδών της $\mathcal{K}$. Το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της $\mathcal{K}$ αποτελεί τον καταλληλότερο χώρο-πλαίσιο στον οποίον μπορούμε να ορίσουμε φορείς (supports) αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Έτσι για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ ορίζουμε τον *φορέα* του X να είναι το υποσύνολο

$$\mathsf{supp}(X) := \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid X \notin \mathcal{P}\} \subseteq \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

Το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ αποκτά τότε δομή τοπολογικού χώρου, έχοντας σαν βάση από ανοικτά υποσύνολα τη συλλογή υποσυνόλων $\{\mathsf{U}(X) := \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash \mathsf{supp}(X) \mid X \in \mathcal{K}\}$. Προσεκτική μελέτη του τοπολογικού χώρου $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ και των υποσυνόλων $\mathsf{supp}(X)$, $X \in \mathcal{K}$, οδηγεί με φυσικό τρόπο στην έννοια των δεδομένων υποστήριξης (support data):

Ορισμός. *Έστω $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$ μια ταυνστική τριγωνισμένη κατηγορία. Μια* **support data** *στην $\mathcal{K}$ είναι ένα ζεύγος (T, σ), όπου T είναι ένας τοπολογικός χώρος και σ είναι μια απεικόνιση, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$, ένα κλειστό υποσύνολο $\sigma(X) \subset T$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $\sigma(0) = \varnothing$ *και* $\sigma(\mathbf{1}) = T$.

2. $\sigma(X \oplus Y) = \sigma(X) \cup \sigma(Y)$, $X, Y \in \mathcal{K}$.

3. $\sigma(\Sigma(X)) = \sigma(X)$, $X \in \mathcal{K}$.

4. *Για κάθε τρίγωνο*
$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$
στην $\mathcal{K}$, ισχύει ότι $\sigma(X) \subset \sigma(Y) \cup \sigma(Z)$.

5. $\sigma(X \otimes Y) = \sigma(X) \cap \sigma(Y)$.

Ένας μορφισμός $f: (T_1, \sigma_1) \longrightarrow (T_2, \sigma_2)$ ανάμεσα σε support data είναι μία συνεχής απεικόνιση $f: T_1 \longrightarrow T_2$, τέτοια ώστε $\sigma_1(X) = f^{-1}(\sigma_2(X))$, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$.

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας του Balmer είναι το ακόλουθο το οποίο δείχνει ότι το φάσμα του Balmer είναι μια support data η οποία μάλιστα χαρακτηρίζεται από μια καθολική ιδιότητα:

Θεώρημα 1. (Καθολική ιδιότητα του φάσματος) *Έστω $(\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$ μια ταυνστική τριγωνισμένη κατηγορία και θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο $(\mathsf{Spc}(\mathcal{K}), \mathsf{supp})$.*

1. *Για οποιαδήποτε αντικείμενα X, Y, $Z \in \mathcal{K}$ ισχύουν τα εξής:*

   (α') $\mathsf{supp}(0) = \varnothing$ *και* $\mathsf{supp}(\mathbf{1}) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

   (β') $\mathsf{supp}(X \oplus Y) = \mathsf{supp}(X) \cup \mathsf{supp}(Y)$.

   (γ') $\mathsf{supp}(\Sigma X) = \mathsf{supp}(X)$.

   (δ') $\mathsf{supp}(X) \subset \mathsf{supp}(Y) \cup \mathsf{supp}(Z)$, *για κάθε τρίγωνο* $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$.

   (ε') $\mathsf{supp}(X \otimes Y) = \mathsf{supp}(X) \cap \mathsf{supp}(Y)$.

   Δηλαδή το ζεύγος $(\mathsf{Spc}(\mathcal{K}), \mathsf{supp})$ αποτελεί support data στην $\mathcal{K}$.

2. *Για κάθε ζεύγος (T, σ), όπου T είναι ένας τοπολογικός χώρος και $\sigma : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{P}(T)$ είναι μια απεικόνιση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{K}$ ένα κλειστό υποσύνολο $\sigma(X) \subset T$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (α') - (ε'), υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $f: T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοια ώστε $\sigma(X) = f^{-1}(\mathsf{supp}(X))$.*

Στην περίπτωση κατά την οποία το ζεύγος (T, σ) είναι μια *ταξινομούσα* support data, μια έννοια που θα οριστεί στη διατριβή, τότε η απεικόνιση $f\colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ αποτελεί ομοιομορφισμό.

Κεντρικό ρόλο στη διατριβή παίζουν τα ριζικά (radical) τανυστικά ιδεώδη της κατηγορίας $\mathcal{K}$: μια thick υποκατηγορία $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ είναι *ριζικό τανυστικό ιδεώδες* αν

$$\mathcal{J} = \sqrt{\mathcal{J}} := \big\{X \in \mathcal{K} \mid \exists n \geqslant 1 : X^{\otimes n} \in \mathcal{J}\big\}$$

Αυτό συμβαίνει διότι, σχεδόν σε όλα τα παραδείγματα τα οποία έχουν προαναφερθεί, τα thick τανυστικά ιδεώδη μιας κατηγορίας $\mathcal{K}$ είναι ριζικά. Χρησιμοποιώντας τα ριζικά thick τανυστικά ιδεώδη, οδηγούμαστε στο ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα της Θεωρίας του Balmer και κεντρικό αποτέλεσμα της διατριβής, το οποίο δίνει μια ταξινόμηση των thick τανυστικών ιδεωδών μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας.

Θεώρημα 2. (Ταξινόμηση των thick τανυστικών ιδεωδών υποκατηγοριών) *Έστω $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{R}$ το σύνολο των ριζικών thick τανυστικών ιδεωδών της $\mathcal{K}$. Ας είναι $\mathfrak{S}$ το σύνολο των υποσυνόλων $Y \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της μορφής $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$, όπου Y_i κλειστά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ με $\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash Y_i$ ημισυμπαγές για κάθε $i \in I$. Τότε η απεικόνιση*

$$\Phi : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{R}, \quad Y \longmapsto \mathcal{K}_Y = \{X \in \mathcal{K} \mid \mathsf{supp}(X) \subset Y\}$$

είναι «1-1» και «επί», διατηρεί την διάταξη, και έχει ως αντίστροφη την απεικόνιση

$$\Psi : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}, \quad \mathcal{J} \longmapsto \mathsf{supp}(\mathcal{J}) = \bigcup_{X \in \mathcal{J}} \mathsf{supp}(X)$$

Η θεωρία του Balmer έχει σημαντικές εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των σύγχρονων Μαθηματικών, και ιδιαίτερα στην Τοπολογία, στην Μεταθετική Άλγεβρα, στην Θεωρία Αναπαραστάσεων, και στην Αλγεβρική Γεωμετρία. Στην παρούσα διατριβή θα εφαρμόσουμε την θεωρία του Balmer σε δύο σπουδαία παραδείγματα.

1. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $\mathbb{K}$ ένα σώμα χαρακτηριστικής p έτσι ώστε $p \mid |G|$. Θεωρούμε την ομάδα άλγεβρα $\mathbb{K}G$, η οποία είναι μια άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του $\mathbb{K}$ και η οποία ως δακτύλιος είναι quasi-Frobenius. Ως άμεση συνέπεια, έπεται ότι στην κατηγορία προτύπων $\mathbb{K}G$-mod τα προβολικά πρότυπα συμπίπτουν με τα ενέσιμα, και τότε από ένα βασικό αποτέλεσμα του Happel, η ευσταθής κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ είναι τριγωνισμένη. Θεωρώντας τον συναρτητή τανυστικό γινόμενο $-\otimes_{\mathbb{K}}-$, και το τετριμμένο $\mathbb{K}G$-πρότυπο $\mathbb{K}$, έπεται εύκολα ότι η τριάδα

$$(\mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}, \ -\otimes_{\mathbb{K}}-, \ \mathbb{K})$$

   είναι μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Θεωρούμε το ζεύγος $(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G, \mathbb{K}), V_G)$, το οποίο αποτελείται από το σύνολο $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G, \mathbb{K})$ των ομογενών πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου συνομολογίας $\mathsf{H}^{\bullet}(G, \mathbb{K})$ και τη αντιστοιχία V_G, η οποία απεικονίζει κάθε αντικείμενο $M \in \mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ σε ένα κλειστό υποσύνολο $V_G(M)$ του $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G, \mathbb{K})$, το οποίο καλείται ποικιλότητα (variety) του προτύπου M. Το παραπάνω ζεύγος αποτελεί μια ταξινομούσα support data της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$, και επομένως από τη γενική θεωρία του φάσματος του Balmer αποκτούμε έναν ομοιομορφισμό

$$\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G, \mathbb{K}) \ \simeq \ \mathsf{Spc}(\mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}})$$

2. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether. Θεωρούμε την παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ των τέλειων συμπλόκων, δηλαδή των συμπλόκων τα οποία είναι ισόμορφα στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(R\text{-}\mathsf{mod})$ με φραγμένα σύμπλοκα πεπερασμένα παραγόμενων

προβολικών R-πρότυπων. Θεωρώντας τον ολικά παραγόμενο δισυναρτητή $-\otimes^{\mathsf{L}}_R -$ ο οποίος ορίζεται στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^b(R\text{-mod})$ και το πρότυπο R θεωρούμενο ως αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, έπεται εύκολα ότι η τριάδα

$$(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R),\ -\otimes^{\mathsf{L}}_R -,\ R)$$

είναι μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Το φάσμα των πρώτων ιδεωδών $\mathsf{Spec}(R)$ του R, μαζί με την αντιστοιχία Supp_R που σε κάθε αντικείμενο $X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ αντιστοιχεί το υποσύνολο $\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) := \big\{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(X_P) \ncong 0\big\}$ του $\mathsf{Spec}(R)$, δηλαδή το ζεύγος $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$, αποτελεί μια ταξινομούσα support data της κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, και επομένως από τη γενική θεωρία του φάσματος του Balmer αποκτούμε έναν ομοιομορφισμό

$$\mathsf{Spec}(R) \ \simeq\ \mathsf{Spc}(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R))$$

Παρόμοια ταξινόμηση ισχύει και στο πλαίσιο της Αλγεβρικής Γεωμετρίας όπου τη θέση του μεταθετικού δακτυλίου της Noether παίρνει ένα σχήμα της Noether. Ως μια άμεση συνέπεια έπεται ότι για ένα σχήμα της Noether X η παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$ καθορίζει πλήρως το σχήμα X.

Η διατριβή είναι συνθετικού χαρακτήρα και οι βασικές πηγές στις οποίες βασίστηκε η παρουσίαση της συγκεκριμένης θεωρίας και των επιλεγμένων εφαρμογών της είναι το άρθρο [2] του Balmer, οι δύο τόμοι [6] και [7] του Benson, η διατριβή του Sigstad [23], καθώς και τα άρθρα [8] των Benson, Carlson, Rickard και [18] του Neeman.

• • •

Η διατριβή έχει οργανωθεί σε επτά κεφάλαια και σε αδρές γραμμές είναι χωρισμένη σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, το οποίο αποτελείται από τα κεφάλαια 1 - 4, αναπτύσσεται η γενική θεωρία κατηγοριών και τοπικοποίησης με ιδιαίτερη έμφαση στη ανάπτυξη της θεωρίας τριγωνισμένων κατηγοριών. Στο δεύτερο μέρος, το οποίο αποτελείται από τα κεφάλαια 5-7, αναπτύσσεται η θεωρία του φάσματος του Balmer και αναλύονται δύο σπουδαία παραδείγματα εφαρμογής της. Στο τέλος του κειμένου παρατίθεται ένα παράρτημα, περίληψη, βιβλιογραφία, και ευρετήριο.

Κεφάλαιο 1: Το πρώτο κεφάλαιο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα και παρατίθενται οι βασικές έννοιες της θεωρίας κατηγοριών. Δίνεται ο ορισμός της κατηγορίας και στοιχειώδη παραδείγματα κατηγοριών. Ακόμη δίνεται ο ορισμός της έννοιας του συναρτητή μεταξύ κατηγοριών, ενώ μελετώνται έννοιες όπως οι φυσικοί μετασχηματισμοί και οι συζυγείς συναρτητές. Τέλος παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία δύο θεμελιωδών τύπων κατηγοριών με επιπρόσθετη δομή, των προσθετικών και των αβελιανών κατηγοριών και παρουσιάζονται οι κλασικές κατασκευές του pullback και του pushout ενός διαγράμματος σε μια αβελιανή κατηγορία.

Κεφάλαιο 2: Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά την τοπικοποίηση κατηγοριών, μια κατασκευή που είναι κλασική και ιδιαίτερα χρήσιμη. Ως παράδειγμα αυτής παρουσιάζεται η τοπικοποίηση ενός (μεταθετικού) δακτυλίου ως προς ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολό του και ως προς ένα πρώτο ιδεώδες του. Ακόμη γίνεται αναφορά στην τοπικοποίηση υποκατηγοριών μιας κατηγορίας, ενώ τέλος παρουσιάζεται η περίπτωση στην οποία η κατηγορία από την οποία ξεκινάμε για να κατασκευάσουμε την τοπικοποίησή της είναι προσθετική.

Κεφάλαιο 3: Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε την έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας και παρουσιάζουμε αναλυτικά κάποιες από τις βασικές ιδιότητες αυτών των κατηγοριών. Επιπλεόν δίνεται ως παράδειγμα τριγωνισμένης κατηγορίας η, λεγόμενη, ευσταθής κατηγορία των προτύπων η οποία θα μας απασχολήσει και στα επόμενα κεφάλαια. Ακόμη παρουσιάζεται η έννοια της τοπικοποίησης μιας τριγωνισμένης κατηγορίας και ως παράδειγμα τέτοιου είδους τοπικοποίησης παρατίθεται η τοπικοποίηση με την έννοια του Bousfield. Η τοπικοποίηση Bousfield εξασφαλίζει την ύπαρξη της τοπικοποίησης και μας εφοδιάζει με σημαντικές ιδιότητες καθώς αφού μπορούμε να την δούμε σαν πλήρη υποκατηγορία της αρχικής τριγωνισμένης κατηγορίας.

Κεφάλαιο 4: Το τέταρτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις παραγόμενες κατηγορίες, οι οποίες αποτελούν κλασικό παράδειγμα τριγωνισμένων κατηγοριών. Για να καταλήξουμε, στην τελευταία ενότητά του, να μιλήσουμε για παραγόμενες κατηγορίες κάνουμε, στις δύο πρώτες ενότητες, εκτενή αναφορά στην κατηγορία των συμπλόκων καθώς και στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων. Κλείνουμε το κεφάλαιο παρουσιάζοντας την παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων, η οποία είναι μια πλήρης υποκατηγορία της παραγόμενης κατηγορίας υπεράνω της αβελιανής κατηγορίας R-Mod.

Κεφάλαιο 5: Το πέμπτο κεφάλαιο αποτελεί τον πυρήνα της διατριβής όπου παρουσιάζεται αναλυτικά η θεωρία του Balmer. Η πρώτη ενότητα μας εισάγει στην έννοια της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας και πιστοποιεί το γεγονός ότι η ευσταθής κατηγορία των προτύπων και η παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών. Στην επόμενη ενότητα ορίζονται βασικές έννοιες της θεωρίας μας, όπως αυτή του πρώτου thick τανυστικού ιδεώδους και του φάσματος μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$. Ακόμη επισημαίνεται ο τρόπος με τον οποίον το φάσμα αποκτά δομή τοπολογικού χώρου και ορίζονται οι φορείς των αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Στην τρίτη ενότητα, αφού οριστεί η έννοια του support data, πιστοποιείται ότι το φάσμα αποτελεί τον καταλληλότερο χώρο-πλαίσιο στον οποίον μπορούμε να ορίσουμε φορείς αντικειμένων. Στην τελευταία ενότητα διατυπώνεται και αποδεικνύεται το κύριο θεώρημα ταξινόμησης του Balmer, το οποίο είναι και το κύριο αποτέλεσμα της διατριβής.

Κεφάλαιο 6: Στο έκτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την ευσταθή κατηγορία των (πεπερασμένα παραγόμενων) προτύπων πάνω από την ομάδα άλγεβρα $\mathbb{K}G$ μιας πεπερασμένης ομάδας G υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ χαρακτηριστικής $p \mid |G|$. Η πρώτη ενότητα έχει εισαγωγικό και βοηθητικό χαρακτήρα, αφού ασχολείται με τους συναρτητές επέκτασης Ext και παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο οι ομάδες συνομολογίας $\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K})$ αποκτούν δομή βαθμωτού δακτυλίου. Στη δεύτερη ενότητα γίνεται αναφορά στην κατασκευή του προβολικού φάσματος πρώτων ιδεωδών, $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K})$ καθώς και στις ποικιλότητες προτύπων. Τέλος αποδεικνύεται ότι το ζεύγος $(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K}), V_G)$ είναι μια support data για την ευσταθή κατηγορία και εφαρμόζεται το θεώρημα ταξινόμησης του Balmer.

Κεφάλαιο 7: Το έβδομο, και τελευταίο, κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο να παρουσιαστεί άλλη μια εφαρμογή της θεωρίας του Balmer, αυτήν την φορά στην παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου της Noether. Για λόγους πληρότητας είναι αναγκαίο να γίνουν κάποιες αναφορές σε στοιχεία από τη Μεταθετική Άλγεβρα και κυρίως από την τοπικοποίηση δακτυλίων και προτύπων σε ένα πρώτο ιδεώδες. Ακόμη ορίζεται ο φορέας Supp_R των αντικειμένων της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ και αποδεικνύεται ότι το ζεύγος $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$ είναι support data της κατηγορίας. Τέλος εφαρμόζεται και σε αυτήν την περίπτωση το θεώρημα ταξινόμησης του Balmer και πιστοποιείται ότι το σύνθετο αντικείμενο $\mathsf{Spc}(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R))$ είναι, στην πραγματικότητα, ομοιομορφικό με το απλούστερο και ευκολότερα διαχειρίσιμο φάσμα $\mathsf{Spec}(R)$ του δακτυλίου R.

Ευχαριστίες:

Η διαδικασία από την ημέρα εισαγωγής στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών είναι ιδιαίτερα όμορφη αλλά συνάμα επίπονη και ψυχοφθόρα. Τώρα που αυτός ο κύκλος κλείνει, με την παράδοση της μεταπτυχιακής μου διατριβής, κοιτώντας πίσω, θα ήθελα να ευχαριστήσω μια σειρά από ανθρώπους χωρίς τους οποίους είναι πολύ πιθανόν να μην κατάφερνα να φτάσω ως το τέλος.

Πρωτίστως θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Καθηγητή μου κ. Απόστολο Μπεληγιάννη για την υπομονή του και την άριστη καθοδήγησή του προς την ολοκλήρωση της διατριβής.

Ήταν μεγάλη μου τιμή να συνεργαστώ μαζί του και να αποκομίσω κάτι από τις γνώσεις και τον τρόπο σκέψης του.

Επίσης οφείλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Σταύρο Παπαδάκη που διετέλεσαν μέλη της Τριμελούς Επιτροπής Εξέτασης της διατριβής. Ιδιαιτέρως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Σταύρο που μου δίδαξε πολλά και ενδιαφέροντα κατά τη διάρκεια του πρώτου χρόνου του μεταπτυχιακού.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στο συνάδελφο Γιάννη Λυκογιώργο για την αμέριστη ψυχολογική, κυρίως, υποστήριξη που απλόχερα μου παρείχε. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Κώστα Λιάμπη με τον οποίο μοιραστήκαμε το γραφείο αλλά και όλους τους προβληματισμούς μας από την πρώτη μέρα που ξεκινήσαμε το μεταπτυχιακό.

Το πρώτο, δύσκολο, έτος του μεταπτυχιακού δεν θα περνούσε το ίδιο ευχάριστα αν δεν υπήρχαν οι φίλοι-αδερφοί μου Φώτης και Αλέξανδρος. Τους ευχαριστώ γι αυτό και τους εκφράζω την αγάπη μου (♡) και την υπόσχεσή μου ότι δεν θα χαθούμε!

Οφείλω, ακόμη, ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ στην Άρτεμις για την υπομονή της και για το πόσο πίστευε σε 'μένα, παρακινώντας 'με να γίνομαι καλύτερος.

Τέλος το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στους γονείς μου Παναγιώτη και Δέσποινα, οι οποίοι ήταν δίπλα μου σε κάθε μου σχέδιο και το υποστήριξαν υλικά και ηθικά. Χωρίς τον δικό τους κόπο δεν θα κατάφερνα τίποτα.

Δημήτρης Μιχαηλίδης

Ιωάννινα, Σεπτέμβριος 2017

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών

Σε αυτό το κεφαλαίο θα παραθέσουμε κάποια βασικά στοιχεία από την Θεωρία Κατηγοριών, τα οποία θα εμφανιστούν σε όλη την έκταση της διατριβής. Ακόμη θα υπενθυμίσουμε την έννοια του συναρτητή μεταξύ δύο κατηγοριών, ενώ θα αναφερθούν οι κύριες ιδιότητες των φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ συναρτητών. Στις δυο τελευταίες ενότητες του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με δύο σημαντικά είδη κατηγοριών, τις προσθετικές και τις αβελιανές, και θα γίνει μια αναφορά στις κλασικές κατασκευές των pullback και pushout.

1.1 Κατηγορίες

Στα μαθηματικά συχνά χρειάζεται να εργαστούμε σε σύνολα που έχουν δομή, έτσι ώστε να μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς και να καταλήγουμε σε συμπεράσματα. Αν έχουμε ένα τυχαίο σύνολο X και πάρουμε δύο στοιχεία του συνόλου, δεν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα σε αυτά τα δύο στοιχεία. Οι κατηγορίες περιέχουν αντικείμενα τα οποία έχουν κάποια δομή και μας παρέχουν τρόπους σύνδεσης αυτών των αντικειμένων χωρίς να χάνεται η δομή τους. Η απαρχή της Θεωρίας Κατηγοριών έγινε από τους Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane στο επιστημονικό τους άρθρο με τίτλο, General theory of natural equivalences.

Θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας κάποιους στοιχειώδεις και βασικούς ορισμούς της Θεωρίας Κατηγοριών.

Ορισμός 1.1.1. *Μια* **κατηγορία (category)** *$\mathcal{C}$ αποτελείται από μία κλάση αντικειμένων $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ και μια κλάση μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}$ ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

(C1) Για κάθε δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, υπάρχει ένα σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ που καλείται το σύνολο των μορφισμών $f : X \longrightarrow Y$ από το X στο Y έτσι ώστε:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \bigcap \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y') = \varnothing, \text{ όταν } (X,Y) \neq (X',Y').$$

(C2) Για $X, Y, Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ υπάρχει μια απεικόνιση σύνθεσης:

$$\circ : \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), \quad (f,g) \longmapsto g \circ f$$

έτσι ώστε

(α) Για μορφισμούς $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ και $h : Z \longrightarrow W$ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(β) Για κάθε αντικείμενο X υπάρχει ο **ταυτοτικός μορφισμός (identity morphism)**

$$1_X : X \longrightarrow X$$

τέτοιος ώστε $f \circ 1_X = f$ *και* $1_X \circ g = g$ *για όλους τους μορφισμούς* $f : X \longrightarrow Y$ *και* $g : Z \longrightarrow X$.

Συμβολισμός: Αν X είναι ένα αντικείμενο σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$, τότε αντί για $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, θα συμβολίζουμε απλούστερα $X \in \mathcal{C}$.

Αφού έχουμε ορίσει την έννοια της κατηγορίας, μπορούμε με φυσικό τρόπο να ορίσουμε τη δυϊκή κατηγορία:

Ορισμός 1.1.2. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Καλούμε* **δυϊκή κατηγορία (opposite category)** *και συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ την κατηγορία που έχει σαν αντικείμενα, τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$, ενώ για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ η κλάση μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}}(X,Y)$ ισούται με την κλάση μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Δηλαδή ισχύει ότι:*

$$\mathsf{Ob}(\mathcal{C}) = \mathsf{Ob}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}) \ \ \textit{και} \ \ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

Για δύο μορφισμούς $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ορίζεται η σύνθεση $g \circ^{\mathsf{op}} f$ ως η σύνθεση $f \circ g$ στην $\mathcal{C}$.

Σύμβαση: Στη συνέχεια για απλούστευση του συμβολισμού θα χρησιμοποιούμε $\circ$ αντί για $\circ^{\mathsf{op}}$.

Στον ορισμό της Κατηγορίας δεν προκύπτει από πουθενά ότι η κλάση αντικειμένων $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι σύνολο. Επομένως για να αποφύγουμε προβλήματα που θα προέκυπταν από τη Θεωρία Συνόλων δίνουμε τον ακόλουθο ορισμο:

Ορισμός 1.1.3. *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **μικρή (small)** *αν η κλάση αντικειμένων της είναι σύνολο.*

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια παραδείγματα κατηγοριών, που είναι χαρακτηριστικά και θα τα συναντήσουμε στην συνέχεια της διατριβής:

Παράδειγμα 1.1.4.

1. Η κατηγορία Grp των ομάδων. Έχει σαν αντικείμενα ομάδες και σαν μορφισμούς, ομομορφισμούς ομάδων.
2. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων. Έχει σαν αντικείμενα αβελιανές ομάδες και σαν μορφισμούς, ομομορφισμούς αβελιανών ομάδων.
3. Η κατηγορία Ring των δακτυλίων. Έχει σαν αντικείμενα δακτυλίους και σαν μορφισμούς, ομομορφισμούς δακτυλίων.
4. Η κατηγορία CRing των μεταθετικών δακτυλίων. Έχει σαν αντικείμενα μεταθετικούς δακτυλίους και σαν μορφισμούς, ομομορφισμούς μεταθετικών δακτυλίων.
5. Η κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων. Έχει σαν αντικείμενα τοπολογικούς χώρους και σαν μορφισμούς, συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων.
6. Η κατηγορία CTop των συμπαγών τοπολογικών χώρων. Έχει σαν αντικείμενα συμπαγείς τοπολογικούς χώρους και σαν μορφισμούς, συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ συμπαγών τοπολογικών χώρων.
7. Η κατηγορία $\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}$ των διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Έχει σαν αντικείμενα $\mathbb{K}$-διανυσματικούς χώρους και σαν μορφισμούς, γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων.
8. Η κατηγορία R-Mod των αριστερών προτύπων υπεράνω ενός τυχαίου δακτυλίου R. Έχει σαν αντικείμενα αριστερά R-πρότυπα και σαν μορφισμούς, ομομορφισμούς αριστερών R-προτύπων.
9. Έστω $(M, \cdot)$ ένα μονοειδές. Σε αυτό προσαρτούμε μία κατηγορία $\mathcal{M}$ που έχει ένα μόνο αντικείμενο, δηλαδή $\mathsf{Ob}(M) = \{\star\}$. Η κλάση μορφισμών της $\mathcal{M}$ είναι $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(\star, \star) = M$.

Πολλές φορές στη μελέτη των κατηγοριών εμφανίζονται μορφισμοί οι οποίοι έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Για να ορίσουμε αυτούς του μορφισμούς θα χρειαστούμε την έννοια των παράλληλων μορφισμών:

Ορισμός 1.1.5. *Δύο μορφισμοί f, g στην κατηγορία $\mathcal{C}$ που ξεκινούν από το ίδιο αντικείμενο X και καταλήγουν στο ίδιο αντικείμενο Y καλούνται* **παράλληλοι μορφισμοί (parallel morphisms)** *και συμβολίζονται με $f, g\colon X \rightrightarrows Y$.*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τους μονομορφισμούς, επιμορφισμούς και ισομορφισμούς σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$.

Ορισμός 1.1.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και X, Y, Z αντικείμενα στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ καλείται* **μονομορφισμός (monomorphism)** *αν για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών $g_1, g_2\colon Z \rightrightarrows X$ ισχύει ότι:*
$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Longrightarrow g_1 = g_2.$$

2. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ καλείται* **επιμορφισμός (epimorphism)** *αν για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών $g_1, g_2\colon Y \rightrightarrows Z$ ισχύει ότι:*
$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2.$$

Σχόλιο 1.1.7. Όταν ο μορφισμός f του Ορισμού 1.1 ικανοποιεί την ιδιότητα του πρώτου σκέλους, λέμε ότι είναι **αριστερά διαγράψιμος (left cancellable)**. Αντίστοιχα, όταν ικανοποιεί την ιδιότητα του δεύτερου σκέλους του Ορισμού 1.1, λέμε ότι είναι **δεξιά διαγράψιμος (right cancellable)**.

Ορισμός 1.1.8. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και X, Y δυο αντικείμενα στην $\mathcal{C}$. Ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ καλείται* **ισομορφισμός (isomorphism)**, *αν υπάρχει μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow X$ ώστε να ισχύει ότι $f \circ g = 1_Y$ και $g \circ f = 1_X$. Τότε ο f συμβολίζεται με $f\colon X \xrightarrow{\simeq} Y$*

Σχόλιο 1.1.9.
1. Ο μορφισμός g του Ορισμού 1.1.8 είναι μοναδικός, καλείται **αντίστροφος** του f και συμβολίζεται με f^{-1}.
2. Αν για τους μορφισμούς f, g του Ορισμού 1.1.8 ισχύει ότι $f \circ g = 1_Y$, τότε ο f καλείται αριστερός αντίστροφος του g και ο g δεξιός αντίστροφος του f.
3. Δύο αντικείμενα X και Y μιας κατηγορίας καλούνται ισόμορφα αν υπάρχει μεταξύ τους μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ που είναι ισομορφισμός. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $X \simeq Y$.

Παράδειγμα 1.1.10.
1. Στην κατηγορία Grp των ομάδων οι μονομορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί ομάδων που είναι «1-1», οι επιμορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί ομάδων που είναι «επί», ενώ οι ισομορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί ομάδων που είναι «1-1» και «επί».
2. Στην κατηγορία Ring των ομάδων οι μονομορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί δακτυλίων που είναι «1-1», οι επιμορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί δακτυλίων που είναι «επί», ενώ οι ισομορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί δακτυλίων που είναι «1-1» και «επί».
3. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων οι ισομορφισμοί είναι οι ομοιομορφισμοί μεταξύ τοπολογικών χώρων και όχι οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων που είναι «1-1» και «επί».

Είναι φανερό, ήδη από τα πρώτα παραδείγματα κατηγοριών, ότι υπάρχουν κάποιες κατηγορίες που, κατά κάποιον τρόπο, «ζουν μέσα» σε κάποιες μεγαλύτερες. Γενικότερα στα μαθηματικά όταν έχουμε μία δομή, συχνά ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε κάτι «μικρότερο», το οποίο όμως να κληρονομεί πλήρως την δομή. Στην περίπτωση των κατηγοριών, εμφανίζεται η έννοια της υποκατηγορίας, της οποίας τις σημαντικότερες ιδιότητες θα παραθέσουμε ακολούθως.

Ορισμός 1.1.11. *Μια κατηγορία $\mathcal{C}'$ καλείται* **υποκατηγορία (subcategory)** *της κατηγορίας $\mathcal{C}$ αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για την κλάση αντικειμένων της $\mathcal{C}'$ ισχύει ότι,* $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}') \subset \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$
2. *Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων X και Y στην $\mathcal{C}'$ ισχύει ότι:*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$
3. *Οι ταυτοτικοί μορφισμοί μεταξύ των αντικειμένων της $\mathcal{C}'$ είναι οι ταυτοτικοί μορφισμοί στην $\mathcal{C}$*
4. *Η σύνθεση στην $\mathcal{C}'$ είναι η επαγόμενη από την $\mathcal{C}$.*

Όταν η $\mathcal{C}'$ είναι υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, συμβολίζουμε $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$.

Ορισμός 1.1.12. *Μια υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται* **πλήρης (full)** *αν για κάθε ζευγάρι αντικειμένων X, Y στην $\mathcal{C}'$ ισχύει ότι:*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

Παράδειγμα 1.1.13.
1. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων είναι μία πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας Grp των ομάδων.
2. Η κατηγορία CTop των συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι μία πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας Top των τοπολογικών χώρων.

Στη μελέτη των κατηγοριών συχνά εμφανίζονται κάποια «ιδιαίτερα» αντικείμενα τα οποία ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 1.1.14. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία.*

1. *Ένα αντικείμενο P στην $\mathcal{C}$ καλείται* **αρχικό αντικείμενο (initial object)**, *αν για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $P \longrightarrow X$.*
2. *Ένα αντικείμενο P στην $\mathcal{C}$ καλείται* **τελικό αντικείμενο (terminal object)**, *αν το P είναι αρχικό αντικείμενο στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Δηλαδή αν για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $X \longrightarrow P$.*
3. *Ένα αντικείμενο P στην $\mathcal{C}$ καλείται* **μηδενικό αντικείμενο (zero object)**, *αν το P είναι ταυτόχρονα αρχικό και τελικό αντικείμενο.*

Παρατήρηση 1.1.15.
1. Αν P_1, P_2 είναι δύο αρχικά αντικείμενα στην κατηγορία $\mathcal{C}$, τότε αυτά είναι ισόμορφα. Δηλαδή το αρχικό αντικείμενο μιας κατηγορίας είναι μοναδικό με ακρίβεια ισομορφισμού.
2. Το μηδενικό αντικείμενο μιας κατηγορίας συμβολίζεται με 0.

1.2 Συναρτητές

Αφού ορίσαμε την έννοια της κατηγορίας και περιγράψαμε κάποιες από τις στοιχειώδεις ιδιότητες των κατηγοριών, θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε με ποιον τρόπο μπορούμε να συνδέσουμε δύο κατηγορίες μεταξύ τους χωρίς να χάνεται η δομή. Η σύνδεση αυτή γίνεται μέσω των συναρτητών. Οι συναρτητές γεννήθηκαν στον κλάδο της Αλγεβρικής Τοπολογίας, όπου χρησιμοποιούνταν για να αντιστοιχήσουν αλγεβρικά αντικείμενα σε τοπολογικούς χώρους και αλγεβρικούς ομομορφισμούς σε συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων. Στη σύγχρονη έρευνα οι συναρτητές χρησιμοποιούνται σε ευρύτερο πλαίσιο και συνδέουν κατηγορίες με αντικείμενα από ποικίλους κλάδους των μαθηματικών.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες. Ένας* **συναρτητής (functor)** $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *αποτελείται από μία απεικόνιση* $F\colon \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Ob}(\mathcal{C}')$ *και μία απεικόνιση* $F\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}\,\mathcal{C}'(F(X),F(Y))$ *για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{C}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$, ισχύει ότι $F(1_X) = 1_{F(X)}$*

2. *Για αντικείμενα X, Y και Z στην $\mathcal{C}$ και μορφισμούς $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$, ισχύει ότι $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

Σχόλιο 1.2.2. Ένας συναρτητής όπως ορίστηκε στον Ορισμό 1.2.1 καλείται **συναλλοίωτος συναρτητής (covariant functor)**. Με τον όρο «συναρτητής» θα εννοούμε τον συναλλοίωτο συναρτητή. Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ καλείται **αντισυναλλοίωτος συναρτητής (contravariant functor)** αν αντικαταστήσουμε το δεύτερο σκέλος του Οριμού 1.2.1 με το εξής: «Για αντικείμενα X, Y και Z στην $\mathcal{C}$ και μορφισμούς $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$, ισχύει ότι $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.»

Παρατήρηση 1.2.3.

1. Έστω τρεις κατηγορίες $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}''$ και συναρτητές $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$. Τότε η σύνθεσή τους $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ο συναρτητής που ορίζεται ως, $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ και $(G \circ F)(f) = G(F(f))$, για κάθε αντικείμενο X και για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}$.

2. Από τον συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ορίζεται, με φυσικό τρόπο, ο συναρτητής $F^{\mathsf{op}}\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{C}'^{\,\mathsf{op}}$.

Παρακάτω παραθέτουμε κάποια κλασικά παραδείγματα συναρτητών:

Παράδειγμα 1.2.4.

1. **Ο ταυτοτικός συναρτητής**: Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και έστω
$$1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$
ο συναρτητής που ορίζεται ως η ταυτότητα στα αντικείμενα και στους μορφισμούς της $\mathcal{C}$, δηλαδή
$$1_{\mathcal{C}}(X) = X \;\text{ και }\; 1_{\mathcal{C}}(f) = f$$
για κάθε αντικείμενο X και κάθε μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$. Ο συναρτητής $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο ταυτοτικός συναρτητής της κατηγορίας $\mathcal{C}$.

2. **Ο συναρτητής έγκλεισης**: Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία αυτής. Τότε ο συναρτητής
$$i\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$$
που ορίζεται ως
$$i(X) = X \;\text{ και }\; i(f) = f$$
για κάθε αντικείμενο X και κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}'$ είναι ο συναρτητής έγκλεισης από την $\mathcal{C}'$ στην $\mathcal{C}$.

3. **Ο λησμονικός συναρτητής**: Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα έχουν κάποια δομή και οι μορφισμοί της «σέβονται» αυτήν την δομή. Τότε ορίζεται ένας συναρτητής
$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$$
που δρα ως ταυτότητα στα αντικείμενα της $\mathcal{C}$, με την επιπλέον ιδιότητα να «ξεχνάει» την δομή του αντικειμένου. Επομένως για ένα αντικείμενο X στην κατηγορία $\mathcal{C}$, το αντικείμενο $F(X)$ είναι σύνολο. Επίσης στέλνει κάθε μορφιμό μεταξύ δύο αντικειμένων της κατηγορίας σε μία απεικόνιση μεταξύ συνόλων. Ο συναρτητής που ορίζεται με τον παραπάνω τρόπο καλείται λησμονικός συναρτητής.

4. **Ο συναρτητής** $\mathsf{Hom}_R(X,\text{-})$: Έστω R ένας δακτύλιος και X ένα δεξιό R-πρότυπο. Τότε ορίζεται ο συναρτητής
$$\mathsf{Hom}_R(X,\text{-})\colon \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
Αν $M \in \mathsf{Mod}\text{-}R$, τότε:
$$\mathsf{Hom}_R(X,\text{-})(M) = \mathsf{Hom}_R(X,M)$$
ενώ αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων, τότε:
$$\mathsf{Hom}_R(X,\text{-})(f) = \mathsf{Hom}_R(X,f) = f_\star^X$$
όπου
$$f_\star^X\colon \mathsf{Hom}_R(X,M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X,N), \quad f_\star^X(h) = f \circ h$$
Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(X,\text{-})$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής.

5. **Ο συναρτητής** $\mathsf{Hom}_R(\text{-},X)$ Έστω R ένας δακτύλιος και X ένα δεξιό R-πρότυπο. Τότε ορίζεται ο συναρτητής
$$\mathsf{Hom}_R(\text{-},X)\colon \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
Αν $M \in \mathsf{Mod}\text{-}R$, τότε:
$$\mathsf{Hom}_R(\text{-},X)(M) = \mathsf{Hom}_R(M,X)$$
ενώ αν $f\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων, τότε:
$$\mathsf{Hom}_R(\text{-},X)(f) = \mathsf{Hom}_R(f,X) = f_X^\star$$
όπου
$$f_X^\star\colon \mathsf{Hom}_R(N,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M,X), \quad f_X^\star(h) = h \circ f$$
Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(\text{-},X)$ είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής.

6. **Ο συναρτητής** $X \otimes_R \text{-}$: Έστω R ένας δακτύλιος και X ένα δεξιό R-πρότυπο. Ο συναρτητής $X \otimes_R \text{-}$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής
$$X \otimes_R \text{-}\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$
και ορίζεται ως
$$(X \otimes_R \text{-})(M) = X \otimes_R M$$
για κάθε αριστερό R-πρότυπο M, ενώ για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$,
$$(X \otimes_R \text{-})(f) = X \otimes_R f = 1_X \otimes f$$
όπου
$$1_X \otimes f\colon X \otimes_R M \longrightarrow X \otimes_R N$$
Αν
$$z = \sum_{k=1}^{l} n_l(x_l \otimes m_l)$$
είναι ένα τυπικό στοιχείο του τανυστικού γινομένου $X \otimes_R M$ τότε:
$$(1_X \otimes f)(z) = \sum_{k=1}^{l} n_l(x_l \otimes f(m_l))$$

7. **Ο συναρτητής** $\text{-} \otimes_R X$: Ορίζεται δυϊκά του συναρτητή $X \otimes_R \text{-}$ και είναι επίσης συναλλοίωτος συναρτητής.

Υπάρχουν παραδείγματα συναρτητών που εμφανίζονται συχνά στη μελέτη της θεωρίας κατηγοριών και εξασφαλίζουν την ύπαρξη κάποιων επιθυμητών ιδιοτήτων. Τέτοιου είδους συναρτητές περιγράφονται στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.2.5. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες και $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής.*

1. *Ο F καλείται* **πιστός (faithful)** *αν η απεικόνιση*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$
είναι «1-1», για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$.

2. *Ο F καλείται* **πλήρης (full)** *αν η απεικόνιση*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$
είναι «επί», για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$.

3. *Ο F καλείται* **πλήρης και πιστός (fully faithful)** *αν η απεικόνιση*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$
είναι «1-1» και «επί», για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$.

4. *Ο F καλείται* **ουσιωδώς «επί» (essentially surjective)** *αν για όλα τα αντικείμενα Y της $\mathcal{C}'$,υπάρχει αντικείμενο X της $\mathcal{C}$, έτσι ώστε $X \simeq F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$.*

Αν $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$, I: σύνολο δεικτών, είναι μια οικογένεια κατηγοριών τότε ορίζεται μια νέα κατηγορία, η οποία είναι γνωστή ως κατηγορία γινόμενο.

Ορισμός 1.2.6. *Έστω $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$, I: σύνολο δεικτών, μια οικογένεια κατηγοριών. Ορίζουμε την κατηγορία $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ όπου:*
$$\mathsf{Ob}(\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i) = \prod_{i \in I} \mathsf{Ob}(\mathcal{C}_\mathsf{i})$$
και
$$\mathsf{Hom}_{\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i}(\{X_i\}, \{Y_i\}) = \prod_{i \in I} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i)$$
η οποία καλείται **κατηγορία γινόμενο (product category)**.

Χρησιμοποιώντας την έννοια του συναρτητή και της κατηγορίας γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του δισυναρτητή, για την οποία παραθέτουμε δύο ισοδύναμους ορισμούς.

Ορισμός 1.2.7. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}''$ κατηγορίες. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ καλείται* **δισυναρτητής (bifunctor)**

Ορισμός 1.2.8. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}''$ κατηγορίες. Ο συναρτητής $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ καλείται* **δισυναρτητής (bifunctor)** *αν για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$ και $X' \in \mathcal{C}'$, $F(X, \text{-}) : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ και $F(\text{-}, X') : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι συναρτητές και επιπλέον για κάθε μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ και $g : X' \longrightarrow Y'$ στην $\mathcal{C}'$, το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
F(X, X') \arrow[r, "F(X,g)"] \arrow[d, "F(f,X')"'] & F(X, Y') \arrow[d, "F(f,Y')"] \\
F(Y, X') \arrow[r, "F(Y,g)"] & F(Y, Y')
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Παράδειγμα 1.2.9. 1. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\text{-})\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι ένας δισυναρτητής.

2. Έστω R ένας δακτύλιος. Ο συναρτητής

$$\mathsf{Hom}_R(\text{-},\text{-})\colon (\mathsf{Mod}\text{-}R)^{\mathsf{op}} \times \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

είναι ένας δισυναρτητής.

3. Έστω R δακτύλιος. Ο συναρτητής

$$\text{-}\otimes\text{-}\colon \mathsf{Mod}\text{-}R^{\mathsf{op}} \times \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

είναι ένας δισυναρτητής.

Παρατήρηση 1.2.10. Τα σκέλη 2. και 3. παραπάνω παραδείγματος αποτελούν δύο κλασικά παραδείγματα που εμφανίζονται διαρκώς κατά τη μελέτη της Ομολογικής Άλγεβρας.

1.2.1 Φυσικοί Μετασχηματισμοί και Συζυγείς Συναρτητές

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε τον τρόπο που συνδέονται μεταξύ τους δύο συναρτητές μεταξύ κατηγοριών. Ουσιαστικά στόχος μας είναι να περιγράψουμε τους «μορφισμούς» μεταξύ συναρτητών και να ορίσουμε, πότε δύο συναρτητές θα είναι φυσικά ισόμορφοι. Ακόμη θα ορίσουμε κάποια ζεύγη συναρτητών, που καλούνται συζυγή ζεύγη (adjoint pairs) και έχουν κεντρικό ρόλο στην Θεωρία Κατηγοριών.

Αρχικά θα διατυπώσουμε τον ορισμό του φυσικού μετασχηματισμού μεταξύ δύο συναρτητών.

Ορισμός 1.2.11. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες και $F_1, F_2\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ δύο συναρτητές. Ένας* **φυσικός μετασχηματισμός (natural transformation)** *$\theta\colon F_1 \longrightarrow F_2$ είναι μια οικογένεια μορφισμών:*

$$\theta = \{\theta_X\colon F_1(X) \longrightarrow F_2(X) \mid \text{για όλα τα } X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})\}$$

έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$, το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_2(X) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] & F_2(Y) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Ορισμός 1.2.12. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ κατηγοριές και $F_1, F_2\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ δύο συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\theta\colon F_1 \longrightarrow F_2$ καλείται* **φυσικός ισομορφισμός (natural isomorphism)** *αν για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$, οι μορφισμοί $\theta_X\colon F_1(X) \longrightarrow F_2(X)$ είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{C}'$. Αν μεταξύ των συναρτητών F_1, F_2 υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός, τότε αυτοί καλούνται* **φυσικά ισόμορφοι (naturally isomorphic)** *και συμβολίζουμε με $F_1 \simeq F_2$.*

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα, πότε δύο κατηγορίες είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 1.2.13. *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες. Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ καλείται* **ισοδυναμία κατηγοριών (equivalence of categories)** *αν υπάρχει συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ και φυσικοί ισομορφισμοί, $\alpha\colon G \circ F \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ και $\beta\colon F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{C}'}$. Σε αυτήν την περίπτωση οι κατηγορίες καλούνται* **ισοδύναμες (equivalent)** *και γράφουμε $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$.*

Παρατήρηση 1.2.14. Αν ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών, τότε ο συναρτητής $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ για τον οποίον ισχύει ότι $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ και $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$ καλείται **ημι-αντίστροφος (quasi-inverse)** του F. Ο ημι-αντίστροφος συναρτητής απέχει πολύ από το να είναι μοναδικός, ωστόσο είναι μοναδικός με ακρίβεια φυσικής ισοδυναμίας.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, για να είναι ένας συναρτητής ισοδυναμία κατηγοριών. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 1.2.15. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δυο κατηγορίες. Θεωρούμε ένα συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και μια πλήρη υποκατηγορία $\mathcal{C}'_0$ της $\mathcal{C}'$ τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$, να υπάρχει ένα αντικείμενο Y στην $\mathcal{C}'_0$ και ένας ισομορφισμός $F(X) \longrightarrow Y$. Συμβολίζουμε με $i'\colon \mathcal{C}'_0 \longrightarrow \mathcal{C}'$ το συναρτητή έγκλεισης. Τότε υπάρχει ένας συναρτητής $F_0\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ και ένας ισομορφισμός συναρτητών $\theta_0\colon F \xrightarrow{\sim} i' \circ F_0$. Επιπλέον ο συναρτητής F_0 είναι μοναδικός με ακρίβεια μοναδικού ισομορφισμού. Πιο συγκεκριμένα δοθέντος ενός άλλου ισομορφισμού $\theta_1\colon F \xrightarrow{\sim} i' \circ F_1$, υπάρχει μοναδικός φυσικός ισομορφισμός συναρτητών $\theta\colon F_1 \xrightarrow{\sim} F_0$ τέτοιος ώστε $\theta_0 = (i' \circ \theta) \circ \theta_1$.*

Απόδειξη. Έστω $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής και $\mathcal{C}'_0$ μία πλήρης κατηγορία της $\mathcal{C}'$ όπως περιγράφεται στη διατύπωση του λήμματος. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής, για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$, επιλέγουμε ένα αντικείμενο Y στην $\mathcal{C}'_0$ και έναν ισομορφισμό $\phi_X\colon Y \xrightarrow{\sim} F(X)$. Στόχος είναι να ορίσουμε το ζητούμενο συναρτητή $F_0\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$. Για ένα αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$, ορίζουμε $F_0(X) = Y$, όπου το αντικείμενο Y, είναι αυτό που επιλέξαμε μέσω του αξιώματος της επιλογής.

Θεωρούμε, τώρα, ένα μορφισμό $f\colon X \longrightarrow X'$ στην $\mathcal{C}$. Ορίζουμε τον μορφισμό $F_0(f)\colon F_0(X) \longrightarrow F(X')$ ως τη σύνθεση:

$$F_0(X) \xrightarrow[\phi_X]{\sim} F(X) \xrightarrow{F(f)} F(X') \xleftarrow[\phi_{X'}]{\sim} F_0(X')$$

δηλαδή $F_0(X) = \phi_{X'}^{-1} \circ F(f) \circ \phi_X$. Από τον τρόπο που ορίζεται ο μορφισμός $F_0(f)$ προκύπτει ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(X') \arrow[rr, "F(g)"] & & F(X'') \\
Y = F_0(X) \arrow[u, "\phi_X", "\sim"'] \arrow[rr, "F_0(f)"] & & Y' = F_0(X') \arrow[u, "\phi_{X'}", "\sim"'] \arrow[rr, "F_0(g)"] & & Y'' = F_0(X'') \arrow[u, "\phi_{X''}", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για κάθε μορφισμό $g\colon X' \longrightarrow X''$ στην $\mathcal{C}$. Άρα

$$\begin{aligned}
F_0(g) \circ F_0(f) &= \phi_{X''} \circ F(g) \circ \phi_{X'} \\
&= \circ\phi_{X'}^{-1} \circ F(f) \circ \phi_X \\
&= \phi_{X''} \circ F(g) \circ F(f) \circ \phi_X \\
&= \phi_{X''} \circ F(g \circ f) \circ \phi_X
\end{aligned}$$

Συνεπώς $F_0(g \circ f) = F_0(g) \circ F_0(f)$. Ακόμη, ας είναι $1_X\colon X \longrightarrow X$ ο ταυτοτικός μορφισμός του αντικειμένου X στην $\mathcal{C}$. Από τον τρόπο ορισμού του συναρτητή F_0 στους μορφισμούς της $\mathcal{C}$, έχουμε ότι $F_0(1_X) = \phi_X \circ F(1_X) \circ \phi_X^{-1} = 1_{F_0(X)}$. Άρα ο $F_0\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ είναι πράγματι ένας συναρτητής.

Έστω $i'\colon \mathcal{C}'_0 \longrightarrow \mathcal{C}'$ ο συναρτητής έγκλεισης. Θεωρούμε τον φυσικό μετασχηματισμό $\theta_0\colon i' \circ F_0 \longrightarrow F$. Για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$ ορίζουμε τους μορφισμούς:

$$(\theta_0)_X\colon (i' \circ F_0)(X) = Y \longrightarrow F(X)$$

να είναι ίσοι με τον μορφισμό ϕ_X, δηλαδή $(\theta_0)_X = \phi_X : Y \longrightarrow F(X)$. Έστω $f : X \longrightarrow X'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
(i' \circ F_0)(X) \arrow[r, "(\theta_0)_X"] \arrow[d, "(i' \circ F_0)(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
(i' \circ F_0)(X') \arrow[r, "(\theta_0)_{X'}"] & F(X')
\end{tikzcd}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
(\theta_0)_{X'} \circ (i' \circ F_0)(f) &= \phi_{X'} \circ i'(F_0(f)) \\
&= \phi_{X'} \circ F_0(f) \\
&= \phi_{X'} \circ \phi_{X'}^{-1} \circ F(f) \circ \phi_X \\
&= F(f) \circ (\theta_0)_X
\end{aligned}$$

Συνεπώς το διάγραμμα είναι μεταθετικό και άρα ο φυσικός μετασχηματισμός $\theta_0 : i' \circ F_0 \longrightarrow F$ είναι φυσικός ισομορφισμός.

Απομένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα του συναρτητή $F_0 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_0$ με ακρίβεια μοναδικού ισομορφισμού. Έστω $\theta_1 : F \longrightarrow i' \circ F_1$ ένας άλλος φυσικός ισομορφισμός. Τότε εφόσον ισχύει $F \simeq i' \circ F_1$ αλλά και $F \simeq i' \circ F_0$, θα ισχύει ότι $i' \circ F_1 \simeq i' \circ F_0$, δηλαδή $F_1 \simeq F_0$. Επομένως ανάμεσα στους συναρτητές F_0, F_1 υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\theta : F_1 \longrightarrow F_0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\theta_0 = (i' \circ \theta) \circ \theta_1$. Στόχος είναι να δείξουμε ότι αυτός ο φυσικός ισομορφισμός είναι μοναδικός. Έστω $\eta : F_1 \longrightarrow F_0$ ένας άλλος φυσικός ισομορφισμός μεταξύ αυτών των συναρτητών, για τον οποίο να ισχύει επίσης η σχέση $\theta_0 = (i' \circ \eta) \circ \theta_1$. Τότε

$$(i' \circ \theta) \circ \theta_1 = (i' \circ \eta) \circ \theta_1 \Longrightarrow \theta \circ \theta_1 = \eta \circ \theta_1$$

Όμως ο φυσικός μετασχηματισμός θ_1 είναι φυσικός ισομορφισμός. Συνθέτοντας από δεξιά με τον θ_1^{-1}, προκύπτει ότι $\theta = \eta$ και συνεπώς ο φυσικός ισομορφισμός $\theta : F_1 \longrightarrow F_0$ είναι μοναδικός. ■

Λήμμα 1.2.16. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Τότε υπάρχει μια πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{C}_0$ τέτοια ώστε ο συναρτητής έγκλεισης $i : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών και η υποκατηγορία $\mathcal{C}_0$ έχει την ιδιότητα ότι κάθε δύο ισόμορφα αντικείμενά της είναι ίσα.*

Απόδειξη. Στο σύνολο $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ των αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, ορίζουμε τη σχέση «$\sim$» ως εξής:

$$X \sim Y \Longleftrightarrow \text{υπάρχει ισομορφισμός } X \simeq Y.$$

Η σχέση «$\sim$» είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής επιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάθε κλάση ισοδυναμίας της σχέση «$\sim$». Θεωρούμε την πλήρη υποκατηγορία $\mathcal{C}_0$ της $\mathcal{C}$ που περιέχει αυτά τα αντικείμενα. Η κατηγορία $\mathcal{C}_0$ έχει την ιδιότητα ότι αν επιλέξουμε δύο ισόμορφα αντικείμενά της, τότε αυτά είναι ίσα. Αυτό συμβαίνει γιατί αν δύο αντικείμενα είναι ισόμορφα τότε θα ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και από κάθε κλάση ισοδυναμίας έχουμε επιλέξει ένα αντικείμενο.

Συμβολίζουμε με $i : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}$ τον συναρτητή έγκλεισης. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.2.15 στον ταυτοτικό συναρτητή $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικός συναρτητής $F_0 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_0$ τέτοιος ώστε $i \circ F_0 \simeq 1_{\mathcal{C}}$. Όμως

$$i \circ (F_0 \circ i) = (i \circ F_0) \circ i \simeq 1_{\mathcal{C}} \circ i \simeq i \simeq i \circ 1_{\mathcal{C}_0}$$

Αφού ο συναρτητής έγκλεισης i είναι πλήρης και πιστός, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $F_0 \circ i \simeq 1_{\mathcal{C}_0}$. Συνεπώς $i \circ F_0 \simeq 1_{\mathcal{C}}$ και $F_0 \circ i \simeq 1_{\mathcal{C}_0}$ και άρα ο συναρτητής έγκλεισης i είναι φυσική ισοδυναμία. ■

Με χρήση του αποτελέσματος του Λήμματος 1.2.16 μπορούμε να δώσουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για το πότε ένας συναρτητής είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Πρόταση 1.2.17. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών αν και μόνον αν ο F είναι πλήρης και πιστός και ουσιωδώς επί.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Τότε υπάρχει ο ημι-αντίστροφος συναρτητής $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ του F. Δηλαδή $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ και $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$. Θεωρούμε την ακόλουθη απεικόνιση μεταξύ αβελιανών ομάδων:

$$\Phi\colon \ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y)), \ \Phi(f) := F(f)$$

Έστω f ένας μορφισμός στον πυρήνα $\mathsf{Ker}\,(\Phi)$. Τότε ισχύει $\Phi(f) = 0$, δηλαδή $F(f) = 0$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή G, προκύπτει ότι $G\,(F\,(f)) = 0$. Όμως από τον ορισμό του συναρτητή G ως ημι-αντιστρόφου του F, ισχύει ότι $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$. Συνεπώς έχουμε ότι $f \simeq 0$ και άρα η απεικόνιση Φ είναι «1-1». Στη συνέχεια θεωρούμε ένα μορφισμό $h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$. Θέτοντας $\alpha = G(h) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ προκύπτει ότι

$$\Phi(\alpha) = h$$

Επομένως η απεικόνιση Φ είναι «επί» και εξ' ορισμού ο συναρτητής F είναι πλήρης και πιστός. Έστω, τώρα, ένα αντικείμενο $Y \in \mathcal{C}'$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $F\circ G$, προκύπτει ότι $(F\circ G)(Y) \simeq Y$. Συνεπώς ο συναρτητής F είναι ουσιωδώς «επί» και έχουμε το ζητούμενο.

($\Longleftarrow$) Αντίστροφα υποθέτουμε ότι ο συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι πλήρης και πιστός και ουσιωδώς «επί». Σύμφωνα με το Λήμμα 1.2.16, υπάρχει μια πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{C}_0$ της $\mathcal{C}$, τέτοια ώστε ο συναρτητής έγκλεισης $i : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών και αν δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}_0$ είναι ισόμορφα, τότε αυτά είναι ίσα. Υποθέτουμε ότι $k : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_0$ είναι ο ημι-αντίστροφος του συναρτητή i. Εργαζόμαστε ανάλογα και για την κατηγορία $\mathcal{C}'$ και κατασκευάζουμε την πλήρη υποκατηγορία $\mathcal{C}'_0$ για την οποία ο συναρτητής έγκλεισης $i' : \mathcal{C}'_0 \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι φυσική ισοδυναμία, σύμφωνα με το Λήμμα 1.2.16. Συμβολίζουμε με $k' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ τον ημι-αντίστροφο του συναρτητή έγκλεισης i'. Τότε η σύνθεση

$$k' \circ F \circ i : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}'_0$$

είναι ισομορφισμός συναρτητών. Συμβολίζουμε με K τον αντίστροφό του και θέτουμε $G = i \circ K \circ k'$. Τότε

$$F \circ G = F \circ i \circ K \circ k' \tag{1.1}$$

Επειδή K είναι ο αντίστροφος του $k' \circ F \circ i$ έχουμε ότι:

$$k' \circ F \circ i \circ K = 1_{\mathcal{C}'_0} \Longrightarrow i' \circ k' \circ F \circ i \circ K = i'$$

Όμως $i' \circ k' \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ και άρα καταλήγουμε στο ότι $F \circ i \circ K \simeq i'$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.1) προκύπτει ότι:

$$F \circ G = F \circ i \circ K \circ k' \simeq i' \circ k' \simeq 1_{\mathcal{C}'} \tag{1.2}$$

Κάνοντας ανάλογους υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι:

$$G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}} \tag{1.3}$$

Από τις σχέσεις (1.2), (1.3) ο συναρτητής G είναι ημι-αντίστροφος του F και συνεπώς ο συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών. ∎

Μπορούμε, τώρα, να ορίσουμε την έννοια των συζυγών συναρτητών. Οι συζυγείς συναρτητές είναι ζεύγη συναρτητών που, όπως αναφέραμε και παραπάνω, παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην Θεωρία Κατηγοριών και έχουν και οι ίδιοι ιδιαίτερα πλούσια θεωρία. Είναι αδύνατον στην έκταση αυτής της διατριβής να ασχοληθούμε εκτενώς με την θεωρία των συζυγών ζευγών συναρτητών και επομένως θα επικεντρωθούμε σε κάποια βασικά αποτελέσματα που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

Ορισμός 1.2.18. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες και $L\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, $R\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ δύο συναρτητές. Το ζεύγος (L, R) καλείται* **ζεύγος συζυγών συναρτητών (pair of adjoint functors)** *ή ο L καλείται* **αριστερός συζυγής (left adjoint)** *του R ή ο R* **δεξιός συζυγής (right adjoint)** *του L, αν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός δισυναρτητών:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(\text{-}), \text{-}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, R(\text{-})) \tag{1.4}$$

από την κατηγορία γινόμενο $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C}'$ στην κατηγορία Set *των συνόλων.*

Παρατήρηση 1.2.19. 1. Έστω $X \in \mathcal{C}$ και $Y \in \mathcal{C}'$. Ισοδύναμα λέμε ότι ένα ζεύγος συναρτητών (L, R), όπως στον Ορισμό 1.2.18, είναι συζυγές αν υπάρχουν «1-1» και «επί» απεικονίσεις:

$$\theta_{X,Y} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y))$$

ώστε κάθε μία από τις $\theta_{X,Y}$ είναι φυσική και ως προς τα δύο αντικείμενα. Δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y) \arrow[r, "(L(f))^{\star}"] \arrow[d, "\theta_{X,Y}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X'), Y) \arrow[d, "\theta_{X',Y}"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y)) \arrow[r, "f^{\star}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X', R(Y))
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για κάθε μορφισμό $f\colon X' \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ και το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y) \arrow[r, "g_{\star}"] \arrow[d, "\theta_{X,Y}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y') \arrow[d, "\theta_{X,Y'}"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y)) \arrow[r, "(R(g))_{\star}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y'))
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για κάθε μορφισμό $g\colon Y \longrightarrow Y'$ στην $\mathcal{C}'$.

2. Έστω X ένα αντικείμενο στην $\mathcal{C}$. Εφαρμόζοντας τον φυσικό ισομορφισμό (1.4) με αντικείμενα το X και το $L(X)$, καταλήγουμε στον ισομορφισμό:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(L(X)))$$

Επομένως ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{L(X)}$, ορίζει έναν μορφισμό

$$X \longrightarrow (R \circ L)(X)$$

Αντίστοιχα αν Y είναι ένα αντικείμενο στην $\mathcal{C}'$, εφαρμόζοντας τον φυσικό ισομορφισμό (1.4) με αντικείμενα το Y και το $R(Y)$, προκύπτει ο ισομορφισμός:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(R(Y)), Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(R(Y), R(Y))$$

και άρα ο μορφισμός $1_{R(Y)}$ ορίζει έναν μορφισμό

$$(L \circ R)(Y) \longrightarrow Y$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν φυσικοί μετασχηματισμοί:

$$\varepsilon\colon 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow R \circ L \tag{1.5}$$

και

$$\eta\colon L \circ R \longrightarrow 1_{\mathcal{C}'} \tag{1.6}$$

Οι φυσικοί μετασχηματισμοί ε και η είναι χαρακτηριστικοί για ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών (L, R).

Ορισμός 1.2.20. *Έστω (L, R) συζυγές ζεύγος συναρτητών. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί ε και η, των σχέσεων (1.5), (1.6) καλούνται* **μονάδα (unit)** *και* **συνμονάδα (counit)** *του συζυγούς ζεύγους (L, R), αντίστοιχα.*

1.3 Στοιχεία Προσθετικών Κατηγοριών

Όπως έχουμε δει εως τώρα, η κατηγορία είναι μια αφηρημένη έννοια και δεν έχουμε αναπτύξει εργαλεία που να μας επιτρέπουν να εφοδιάσουμε την κατηγορία με κάποια παραπάνω δομή. Έτσι δεν έχουμε την δυνατότητα να συνδέσουμε τα αντικείμενα της κατηγορίας μεταξύ τους και να πάρουμε νέα αντικείμενα, ενώ το ίδιο συμβαίνει και με τους μορφισμούς. Στη προσπάθεια αυτή προκύπτει μια κλάση κατηγοριών με σχετικά απλή δομή, αυτή των προσθετικών κατηγοριών. Στην ενότητα αυτή θα παραθέσουμε κάποια βασικά στοιχεία για τις προσθετικές κατηγορίες, ενώ θα εισάγουμε και την έννοια του προσθετικού συναρτητή μεταξύ προσθετικών κατηγοριών.

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό του γινομένου και του συνγινομένου δύο αντικειμένων μιας κατηγορίας.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και X_1, X_2 δύο αντικειμενά της.*

1. *Ένα αντικείμενο X καλείται* **γινόμενο (product)** *των X_1, X_2 αν για τους μορφισμούς $p_1\colon X \longrightarrow X_1$ και $p_2\colon X \longrightarrow X_2$ ικανοποιείται η ακόλουθη οικουμενική ιδιότητα: Για κάθε αντικείμενο Y στην $\mathcal{C}$ και ζεύγος μορφισμών $f_1\colon Y \longrightarrow X_1$, $f_2\colon Y \longrightarrow X_2$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f\colon Y \longrightarrow X$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X_1 & X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

Το αντικείμενο X συμβολίζεται με $X_1 \times X_2$.

2. *Ένα αντικείμενο X καλείται* **συνγινόμενο (coproduct)** *των X_1, X_2 αν για τους μορφισμούς $i_1\colon X_1 \longrightarrow X$ και $i_2\colon X_2 \longrightarrow X$ ικανοποιείται η ακόλουθη οικουμενική ιδιότητα: Για κάθε αντικείμενο Y στην $\mathcal{C}$ και ζεύγος μορφισμών $f_1\colon X_1 \longrightarrow Y$, $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & X \arrow[u, dotted, "f"'] & X_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

Το αντικείμενο X συμβολίζεται με $X_1 \coprod X_2$.

Ανάλογα, αν $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία και J ένα σύνολο δεικτών, μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο και το συνγινόμενο μιας οικογένειας αντικειμένων $\{X_j\}_{j\in J}$ της $\mathcal{C}$.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, J ένα σύνολο δεικτών και $\{X_j\}_{j\in J}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{C}$.*

1. *Ένα αντικείμενο X καλείται* **γινόμενο (product)** *της οικογένειας $\{X_j\}_{j\in J}$ αν υπάρχουν μορφισμοί $p_j\colon X \longrightarrow X_j$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη οικουμενική ιδιότητα: Για κάθε αντικείμενο Y και οικογένεια μορφισμών $\{f_j : Y \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f\colon Y \longrightarrow X$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε $j \in J$:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "p_j"] \\ Y \arrow[r, "f_j"'] & X_j \end{tikzcd}$$

Το αντικείμενο X συμβολίζεται με $X = \prod_{j\in J} X_j$.

2. *Ένα αντικείμενο X καλείται* **συνγινόμενο (coproduct)** *της οικογένειας $\{X_j\}_{j\in J}$ αν υπάρχουν μορφισμού $i_j : X_j \longrightarrow X$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη οικουμενική ιδιότητα: Για κάθε αντικείμενο Y και οικογένεια μορφισμών $\{f_j : X_j \longrightarrow Y\}_{j\in J}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε $j \in J$:*

$$\begin{tikzcd} X & \\ X_j \arrow[u, "i_j"] \arrow[r, "f_j"'] & Y \arrow[ul, dotted, "f"'] \end{tikzcd}$$

Το αντικείμενο X συμβολίζεται με $X = \coprod_{j\in J} X_j$.

Παρατήρηση 1.3.3. Εάν το σύνολο δεικτών J είναι πεπερασμένο, τότε τα $\prod_{j=1}^n X_j$ και $\coprod_{j=1}^n X_j$ είναι πεπερασμένα ευθέα γινόμενα και συνγινόμενα της οικογένειας $\{X_j\}_{j=1}^n$, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό της προ-προσθετικής κατηγορίας, τον οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε αργότερα, το βασικό αντικείμενο αυτής της ενότητας, τις προσθετικές κατηγορίες.

Ορισμός 1.3.4. *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **προ-προσθετική (pre-additive)** *αν για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{C}$, το σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ είναι εφοδιασμένο με δομή προσθετικής αβελιανής ομάδας και η πράξη της σύνθεσης είναι διγραμμική.*

Παράδειγμα 1.3.5. 1. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων είναι προ-προσθετική.

2. Οι κατηγορίες R-Mod και Mod-R των αριστερών και δεξιών R-προτύπων αντίστοιχα είναι προ-προσθετικές.

Στην πορεία για τον ορισμό της προσθετικής κατηγορίας, θα χρειαστούμε την έννοια του ευθέως αθροίσματος αντικειμένων μιας κατηγορίας. Για τον σκοπό αυτό θα διατυπώσουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 1.3.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μια προ-προσθετική κατηγορία και X_1, X_2 δύο αντικείμενα αυτής.*

1. *Υποθέτουμε ότι το γινόμενο $X_1 \times X_2$, υπάρχει στην $\mathcal{C}$ και έστω $p_k : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_k$, $k = 1, 2$ η κανονική προβολή. Έστω επίσης $i_k : X_k \longrightarrow X_1 \times X_2$, $k = 1, 2$ οι μορφισμοί που ορίζονται ως*
$$p_j \circ i_k = \begin{cases} 1_{X_k}, & \text{αν } j = k \\ 0, & \text{αν } j \neq k \end{cases} \tag{1.7}$$
Τότε ισχύει ότι
$$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1_{X_1\times X_2} \tag{1.8}$$

2. *Αντίστροφα, έστω $Z \in \mathcal{C}$ και έστω $p_k : Z \longrightarrow X_k$ και $i_k : X_k \longrightarrow Z$, $k = 1, 2$, μορφισμοί που ικανοποιούν τα (1.7), (1.8). Τότε το Z είναι γινόμενο και συνγινόμενο των X_1, X_2.*

Απόδειξη. 1. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\mathcal{C}$ είναι προ-προσθετική, αλλά και την σχέση (1.8), εύκολα καταλήγουμε στη σχέση:
$$p_1 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) = (p_1 \circ i_1) \circ p_1 + (p_1 \circ i_2) \circ p_2 = p_1$$
και στη σχέση:
$$p_2 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) = (p_2 \circ i_1) \circ p_1 + (p_2 \circ i_2) \circ p_2 = p_2$$
Συνεπώς, $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1_{X_1\times X_2}$.

2. Για κάθε αντικείμενο Y στην $\mathcal{C}$, θέτουμε:

$$\tilde{Z} := \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \in \mathsf{Ab}$$

και

$$\tilde{X}_k := \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_k) \in \mathsf{Ab}$$

και θεωρούμε τους μορφισμούς $\tilde{i}_k \colon \tilde{X}_k \longrightarrow \tilde{Z}$ και $\tilde{p}_k \colon \tilde{Z} \longrightarrow \tilde{X}_k$, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$\tilde{i}_k \colon \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{Z},\ f \longmapsto i_k \circ f$$

$$\tilde{p}_k \colon \tilde{Z} \longrightarrow \tilde{X}_k,\ g \longmapsto p_k \circ g$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi \colon \tilde{Z} \longrightarrow \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2,\ \Phi(h) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η Φ είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η Φ είναι «1-1» και «επί» προκύπτει ότι για κάθε ζεύγος μορφισμών (f, g), όπου $f \colon Y \longrightarrow X_1$ και $g \colon Y \longrightarrow X_2$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h \colon Y \longrightarrow Z$, τέτοιος ώστε

$$\Phi(h) = (f, g) \Longrightarrow (p_1 \circ h, p_2 \circ h) = (f, g)$$

Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
X_1 & Z \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επομένως το αντικείμενο Z είναι γινόμενο των αντικειμένων X_1, X_2. Αλλάζοντας την φορά των βελών καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αντικείμενο Z είναι και συνγινόμενο των X_1, X_2. ∎

Ορισμός 1.3.7. *Το αντικείμενο Z δεύτερου σκέλους του Λήμματος 1.3.6 συμβολίζεται με $X_1 \oplus X_2$ και καλείται* **ευθύ άθροισμα (direct sum)** *των αντικειμένων X_1 και X_2.*

Παρατήρηση 1.3.8. Το ευθύ άθροισμα των X_1 και X_2 είναι ταυτόχρονα γινόμενο και συνγινόμενο των X_1, X_2.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε τον ορισμό της προσθετικής κατηγορίας, αλλά και του προσθετικού συναρτητή μεταξύ δύο προσθετικών κατηγοριών.

Ορισμός 1.3.9. *Μια προ-προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται* **προσθετική κατηγορία (additive category)** *αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(AD1) Περιέχει μηδενικό αντικείμενο, το οποίο συμβολίζουμε με 0.

(AD2) Δέχεται πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα.

Ορισμός 1.3.10. *Έστω $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ δύο προσθετικές κατηγορίες και $F \colon \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ ένας συναρτητής. Ο F καλείται* **προσθετικός συναρτητής (additive functor)** *αν για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{A}_1$ η απεικόνιση:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(Y))$$

είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Μια χρήσιμη ιδιότητα των προσθετικών συναρτητών δίνεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.3.11. *Έστω $F\colon \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ ένας προσθετικός συναρτητής. Τότε $F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y)$.*

Απόδειξη. Έστω $F\colon \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ ένας προσθετικός συναρτητής και X, Y δύο αντικείμενα στην $\mathcal{A}_1$. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα $X \oplus Y$ των αντικειμένων X, Y. Τότε υπάρχουν μορφισμοί

$$i_X\colon X \longrightarrow X \oplus Y$$

$$i_Y\colon Y \longrightarrow X \oplus Y$$

$$p_X\colon X \oplus Y \longrightarrow X$$

και

$$p_Y\colon X \oplus Y \longrightarrow Y$$

ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$p_X \circ i_X = 1_X,\ p_Y \circ i_Y = 1_Y$$

$$p_X \circ i_Y = 0,\ p_Y \circ i_X = 0$$

και

$$i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y = 1_{X \oplus Y}$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F και εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι είναι προσθετικός, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$F(p_X) \circ F(i_X) = 1_{F(X)},\ F(p_Y) \circ F(i_Y) = 1_{F(Y)}$$

$$F(p_X) \circ F(i_Y) = 0,\ F(p_Y) \circ F(i_X) = 0$$

και

$$F(i_X) \circ F(p_X) + F(i_Y) \circ F(p_Y) = 1_{F(X \oplus Y)}$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι υπάρχουν μορφισμοί ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (1.7), (1.8) του Λήμματος 1.3.6, για τα αντικείμενα $F(X), F(Y)$. Άρα, από το Λήμμα 1.3.6 προκύπτει ότι το αντικείμενο $F(X \oplus Y)$ είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα $F(X) \oplus F(Y)$. Δηλαδή

$$F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y)$$

■

1.4 Στοιχεία Αβελιανών Κατηγοριών

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των αβελιανών κατηγοριών. Οι αβελιανές κατηγορίες θεωρούνται το καταλληλότερο πλαίσιο για την μελέτη της Ομολογικής Άλγεβρας. Η θεμελίωση των αβελιανών κατηγοριών οφείλεται στην προσπάθεια μελέτης συνομολογικών θεωριών από τον Alexander Grothendieck καθώς και στην ανεξάρτητη δουλειά του David Buchsbaum.

Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας βασικές έννοιες και παραθέτοντας αποτελέσματα, που είναι απαραίτητα για να «φτάσουμε» στον ορισμό της αβελιανής κατηγορίας.

Πρόταση 1.4.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Στο σύνολο των μονομορφισμών της $\mathcal{A}$ ορίζουμε μία σχέση ως εξής: δύο μονομορφισμοί $f\colon X_1 \longrightarrow Y$ και $g\colon X_2 \longrightarrow Y$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν υπάρχει ισομορφισμός $h\colon X_1 \longrightarrow X_2$, τέτοιος ώστε $g \circ h = f$. Η σχέση αυτή είναι μία σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η απόδειξη της Πρότασης είναι άμεση. ■

Πρόταση 1.4.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Στο σύνολο των επιμορφισμών της $\mathcal{A}$ ορίζουμε μία σχέση ως εξής: δύο επιμορφισμοί $f\colon X \longrightarrow Y_1$ και $g\colon X \longrightarrow Y_2$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν υπάρχει ισομορφισμός $h\colon Y_1 \longrightarrow Y_2$, τέτοιος ώστε $h \circ f = g$. Η σχέση αυτή είναι μία σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η απόδειξη της Πρότασης είναι άμεση. ∎

Ορισμός 1.4.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία.*

1. *Μια κλάση ισοδυναμίας μονομορφισμών επί ενός αντικειμένου X καλείται* **υποαντικείμενο (subobject)** *του X.*

2. *Μία κλάση ισοδυναμίας επιμορφισμών από ένα αντικείμενο X καλείται* **αντικείμενο πηλίκο (quotient object)** *του X.*

Παρατήρηση 1.4.4.

1. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό συχνά, όταν αναφερόμαστε σε υποαντικείμενο ενός αντικειμένου X θα θεωρούμε ένα αντικείμενο Y και έναν μονομορφισμό $f\colon Y \longrightarrow X$. Με άλλα λόγια θα επιλέγουμε έναν αντιπρόσωπο της κλάσης ισοδυναμίας.

2. Ανάλογα θα εργαζόμαστε και όταν αναφερόμαστε σε ένα αντικείμενο πηλίκο ενός αντικειμένου X.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τον ορισμό δύο πολύ σημαντικών μορφισμών, αυτών του πυρήνα και του συνπηρύνα ενός μορφισμού οι οποίοι είναι θεμελιώδεις για τον ορισμό της αβελιανής κατηγορίας.

Ορισμός 1.4.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Θεωρούμε τον μορφισμό $\kappa\colon K \longrightarrow X$ για τον οποίον ισχύει:*

1. *$f \circ \kappa = 0$, δηλαδή το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & \\
K \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "0"] & Y
\end{tikzcd}$$

   είναι μεταθετικό

2. *για κάθε μορφισμό $f'\colon X' \longrightarrow X$ τέτοιο ώστε $f \circ f' = 0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\alpha\colon X' \longrightarrow K$ ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f"] & \\
 & K \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "0"] & Y \\
X' \arrow[uur, bend left, "f'"] \arrow[ur, dotted, "\alpha"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

   είναι μεταθετικό, δηλαδή $\kappa \circ \alpha = f'$.

Ο μορφισμός $\kappa\colon K \longrightarrow X$ καλείται **πυρήνας (kernel)** *του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$.*

Παρατήρηση 1.4.6. Ο πυρήνας $\kappa\colon K \longrightarrow X$ ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι μονομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{A}$.

Πρόταση 1.4.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι $\kappa\colon K \longrightarrow X$ και $\kappa'\colon K' \longrightarrow X$ είναι δύο πυρήνες του μορφισμού f. Τότε οι μορφισμοί κ, κ' αναπαριστούν το ίδιο υποαντικείμενο του αντικειμένου Y.*

Απόδειξη. Ο μορφισμός $\kappa\colon K \longrightarrow X$ είναι πυρήνας του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ και γνωρίζουμε ότι για το μορφισμό $\kappa'\colon K' \longrightarrow X$ ισχύει $f \circ k' = 0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει μορφισμός $\alpha\colon K' \longrightarrow K$ τέτοιος ώστε $\kappa \circ \alpha = \kappa'$. Αντίστοιχα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο μορφισμός $\kappa'\colon K' \longrightarrow X$ είναι πυρήνας του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ και ισχύει ότι $f \circ \kappa = 0$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μορφισμός $\alpha'\colon K \longrightarrow K'$ τέτοιος ώστε $\kappa' \circ \alpha' = \kappa$. Συνεπώς καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\kappa \circ \alpha \circ \alpha' = \kappa' \circ \alpha' = \kappa = \kappa \circ 1_K$$

και

$$\kappa' \circ \alpha' \circ \alpha = \kappa \circ \alpha = \kappa' = \kappa' \circ 1_{K'}$$

Επειδή οι μορφισμοί κ, κ' είναι μονομορφισμοί, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι ισότητες

$$\alpha \circ \alpha' = 1_K$$

και

$$\alpha' \circ \alpha = 1_{K'}$$

Συνεπώς ο μορφισμός $\alpha\colon K' \longrightarrow K$ είναι ισομορφισμός και συμπεραίνουμε ότι οι μορφισμοί κ, κ' αναπαριστούν το ίδιο υποαντικείμενο του αντικειμένου Y. ∎

Παρατήρηση 1.4.8. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.4.7, ο πυρήνας ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ σε μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι μοναδικός. Τον πυρήνα του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$, αν υπάρχει, το συμβολίζουμε $\ker f$, ενώ το αντικείμενο K το συμβολίζουμε $\operatorname{Ker} f$.

Δυϊκά ορίζεται η έννοια του συνπυρήνα ενός μορφισμού σε μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$.

Ορισμός 1.4.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Θεωρούμε το μορφισμό $q\colon Y \longrightarrow Q$ για τον οποίον ισχύει:*

1. *$q \circ f = 0$, δηλαδή το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Q & Y \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}$$

   είναι μεταθετικό

2. *για κάθε μορφισμό $f'\colon Y \longrightarrow Y'$ τέτοιο ώστε $f' \circ f = 0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\alpha\colon Q \longrightarrow Y'$ ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "0"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dl, bend right, "0"'] & \\
 & Q \arrow[dl, dotted, "\alpha"'] & Y \arrow[l, "q"] \arrow[dll, bend left, "f'"] \\
Y' & &
\end{tikzcd}$$

   είναι μεταθετικό, δηλαδή $\alpha \circ q = f'$.

Ο μορφισμός $q\colon Y \longrightarrow Q$ καλείται **συνπυρήνας (cokernel)** *του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$.*

Παρατήρηση 1.4.10. Ο συνπυρήνας $q\colon Y \longrightarrow Q$ ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι επιμορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{A}$.

Θα διατυπώσουμε, τώρα, τη δυϊκή της Πρότασης 1.4.7.

Πρόταση 1.4.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι $q\colon Y \longrightarrow Q$ και $q'\colon Y \longrightarrow Q'$ είναι δύο συνπυρήνες του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$. Τότε οι μορφισμοί q, q' αναπαριστούν το ίδιο αντικείμενο πηλίκο του αντικειμένου Y.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.4.7. ∎

Παρατήρηση 1.4.12. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.4.11, ο συνπυρήνας ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ σε μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι μοναδικός. Τον συνπυρήνα του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$, αν υπάρχει, το συμβολίζουμε $\mathsf{coker}\, f$, ενώ το αντικείμενο Q το συμβολίζουμε $\mathsf{Coker}\, f$.

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει μία σύνδεση ανάμεσα στον πυρήνα και τον συνπυρήνα ενός μορφισμού σε μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$.

Πρόταση 1.4.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Αν είναι α ο πυρήνας του μορφισμού f, τότε ισχύει ότι $\alpha = \mathsf{ker}(\mathsf{coker}\,\alpha)$.*

Απόδειξη. Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{A}$ και υποθέτουμε ότι $\alpha = \mathsf{ker}\, f$. Τότε ισχύει ότι $f \circ \alpha = 0$. Επίσης για τον μορφισμό $\mathsf{coker}\,\alpha\colon X \longrightarrow \mathsf{Coker}\,\alpha$ ισχύει ότι $(\mathsf{coker}\,\alpha) \circ \alpha = 0$. Συνεπώς τα δύο τρίγωνα του παρακάτω διαγράμματος είναι μεταθετικα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Coker}\,\alpha & X \arrow[l, "\mathsf{coker}\,\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
& \mathsf{Ker}\, f \arrow[ul, "0"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "0"] & Y
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι για τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ ισχύει ότι $f \circ \alpha = 0$. Από τον Ορισμό 1.4.9 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u\colon \mathsf{Coker}\,\alpha \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $u \circ \mathsf{coker}\,\alpha = f$. Έστω, τώρα, $\xi\colon Z \longrightarrow X$ ένας μορφισμός τέτοιος ώστε $(\mathsf{coker}\,\alpha) \circ \xi = 0$. Τότε ισχύει

$$\xi \circ f = u \circ (\mathsf{coker}\,\alpha) \circ \xi = u \circ 0 = 0$$

Από τον Ορισμό 1.4.5 εξασφαλίζεται η ύπαρξη μοναδικού μορφισμού $v\colon Z \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ τέτοιου ώστε $\alpha \circ v = \xi$. Συνεπώς για τον μορφισμό α ικανοποιούνται οι συνθήκες του Ορισμού 1.4.5 κι έτσι ισχύει ότι $\alpha = \mathsf{ker}(\mathsf{coker}\,\alpha)$. ∎

Ας δούμε ένα παράδειγμα πυρήνα και συνπυρήνα σε μια γνωστή μας κατηγορία.

Παράδειγμα 1.4.14. Έστω R ένας τυχαίος δακτύλιος. Θεωρούμε την κατηγορία $\mathsf{Mod}\text{-}R$ των δεξιών προτύπων υπεράνω του δακτυλίου R και έστω $f\colon M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός R-προτύπων. Ο πυρήνας του f είναι

$$\mathsf{Ker}\, f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

και $i\colon \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow M$ είναι η κανονική εισαγωγή. Αντίστοιχα ο συνπυρήνας του f είναι

$$\mathsf{Coker}\, f = N/\,\mathsf{Im}\, f$$

και $\pi\colon N \longrightarrow \mathsf{Coker}\, f$ είναι η κανονική προβολή.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τον ορισμό της αβελιανής κατηγορίας.

Ορισμός 1.4.15. *Μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ καλείται* **αβελιανή (abelian)** *αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(AB1) Κάθε πεπερασμένη οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{A}$ έχει γινόμενο και συνγινόμενο.

(AB2) Κάθε μορφισμός στην $\mathcal{A}$ έχει πυρήνα και συνπυρήνα.

(AB3) Για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{A}$, ο μορφισμός $\bar{f}\colon \mathsf{Coker}(\mathsf{ker}\, f) \longrightarrow \mathsf{Ker}(\mathsf{coker}\, f)$ είναι ισομορφισμός.

Ορισμός 1.4.16. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{A}$. Το αντικείμενο $\mathsf{Ker}(\mathsf{coker}\, f)$ καλείται* **εικόνα (image)** *του μορφισμού f και συμβολίζεται με $\mathsf{Im}\, f$.*

Ας δούμε κάποια παραδείγματα αβελιανών κατηγοριών.

Παράδειγμα 1.4.17. 1. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων είναι μια αβελιανή κατηγορία.

2. Οι κατηγορίες R-Mod και Mod-R των αριστερών και δεξιών R-προτύπων αντίστοιχα, υπεράνω ενός τυχαίου δακτυλίου R είναι αβελιανές κατηγορίες.

1.4.1 Pullbacks και Pushouts

Στο πλαίσιο των αβελιανών θα υπενθυμίσουμε δύο θεμελιώδεις κατασκευές σε μια αβελιανή κατηγορία, αυτές των pullbacks και pushouts.

Ορισμός 1.4.18. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία και θεωρούμε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Το **pullback** *του διαγράμματος είναι μια τριάδα (P, h, k), όπου $P \in \mathcal{A}$ και $h\colon P \longrightarrow X$, $k\colon P \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{A}$ τέτοιοι ώστε:*

1. *Το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[d, dotted, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

2. *Για κάθε αντικείμενο $P' \in \mathcal{A}$ και μορφισμούς $h'\colon P' \longrightarrow X$, $k'\colon P' \longrightarrow Y$ με $f \circ h' = g \circ k'$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\alpha\colon P' \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "h'"] \arrow[ddr, bend right, "k'"'] & & \\ & P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Ορισμός 1.4.19. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία και θεωρούμε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

Το **pushout** *του διαγράμματος είναι μια τριάδα (D, h, k), όπου $D \in \mathcal{A}$ και $h\colon Y \longrightarrow D$, $k\colon Z \longrightarrow D$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{A}$ τέτοιοι ώστε:*

1. *Το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, dotted, "h"] \\ Z \arrow[r, dotted, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

   είναι μεταθετικό.

2. *Για κάθε αντικείμενο $D' \in \mathcal{A}$ και μορφισμούς $h'\colon Y \longrightarrow D'$, $k'\colon Z \longrightarrow D'$ με $h' \circ f = k' \circ g$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\alpha\colon D \longrightarrow D'$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "h'"] & \\ Z \arrow[r, "k"'] \arrow[drr, bend right, "k'"'] & D \arrow[dr, dotted, "\alpha"] & \\ & & D' \end{tikzcd}$$

   είναι μεταθετικό.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Θεωρίας Τοπικοποίησης

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την έννοια της τοπικοποίησης μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς κάποια κλάση μορφισμών της S, η οποία αποτελεί μια γενίκευση της γνωστής κατασκευής τοπικοποίησης ενός δακτυλίου. Στην πράξη η κλάση μορφισμών δεν θα είναι τυχαία, αλλά θα ικανοποιεί κάποιες επιθυμητές ιδιότητες και θα καλείται τοπικοποιούσα κλάση. Ακόμη θα αναφερθούμε στην τοπικοποίηση μιας υποκατηγορίας $\mathcal{B}$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς μια τοπικοποιούσα κλάση μορφισμών της, η οποία θα δίνεται ως η τομή της τοπικοποιούσας κλάσης S με το σύνολο των μορφισμών της $\mathcal{B}$. Τέλος η γενική κατασκευή της τοπικοποίησης μιας κατηγορίας, θα ειδικευτεί στην περίπτωση που η κατηγορία είναι προσθετική.

2.1 Τοπικοποίηση Κατηγοριών

Σε αυτήν την ενότητα υποθέτουμε ότι $\mathcal{C}$ είναι μια τυχαία κατηγορία και S είναι μία κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}$. Σκοπός της τοπικοποίησης της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση μορφισμών S, είναι να βρούμε μια νέα κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ και ένα συναρτητή $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ ώστε οι μορφισμοί που ανήκουν στην κλάση S να είναι μέσω του συναρτητή Q αντιστρέψιμοι στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Με άλλα λόγια ο συναρτητής Q θα απεικονίζει τους μορφισμούς της S σε ισομορφισμούς της $\mathcal{C}[S^{-1}]$, αν είναι δυνατόν κατά καθολικό τρόπο.

Η ύπαρξη αυτής της νέας κατηγορίας εξασφαλίζεται, εκτός κάποιων συνολοθεωρητικών προβλημάτων, χωρίς επιπλέον συνθήκες για την κλάση μορφισμών S. Ωστόσο στην παρούσα ενότητα και γενικότερα στην παρούσα διατριβή θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση που η κλάση μορφισμών ικανοποιεί κάποιες επιπλέον «καλές» συνθήκες.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια τυχαία κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Καλούμε* **τοπικοποίηση (localization)** *της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση μορφισμών S, μια κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ μαζί με έναν συναρτητή $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(L1) Για κάθε μορφισμό s στην κλάση μορφισμών S, ο μορφισμός $Q(s)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

(L2) Αν $\mathcal{C}'$ είναι μια κατηγορία και $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής έτσι ώστε ο μορφισμός $F(s)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ για κάθε s στην S, τότε υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $F = G \circ Q$. Δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[dl, dotted, "\exists!"', "G"] \\ \mathcal{C}' & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Η τοπικοποίηση κατηγοριών είναι μια γενίκευση της τοπικοποίησης ενός μεταθετικού δακτυλίου, μιας κατασκευής που είναι γνωστή από τη Μεταθετική Άλγεβρα.

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ένα υποσύνολο S του R καλείται **πολλαπλασιαστικά κλειστό** αν

- $1_R \in S$
- $s_1, s_2 \in S \Longrightarrow s_1 s_1 \in S$.

1. Θεωρούμε ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο S του R. Στο σύνολο $R \times S$ ορίζουμε μια σχέση «$\sim$» ως εξής:

   $$(r,s) \sim (r',s') \Longleftrightarrow \text{υπάρχει στοιχείο } \ u \in S \text{ τέτοιο ώστε } \ u(rs' - r's) = 0.$$

   Εύκολα βλέπουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι μία σχέση ισοδυναμίας και συμβολίζουμε με $R[S^{-1}]$ το σύνολο πηλίκο. Την κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο ένα ζεύγος (r,s) θα την συμβολίζουμε με r/s. Εφοδιάζουμε το σύνολο $R[S^{-1}]$ με μια πράξη πρόσθεσης και μία πράξη πολλαπλασιασμού:

   $$+ : R[S^{-1}] \times R[S^{-1}] \longrightarrow R[S^{-1}], \quad \frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{rs' + r's}{ss'}$$

   και

   $$\cdot : R[S^{-1}] \times R[S^{-1}] \longrightarrow R[S^{-1}], \quad \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{rr'}{ss'}$$

   Οι πράξεις αυτές είναι καλά ορισμένες και καθιστούν το σύνολο $R[S^{-1}]$ μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα.
   Θεωρούμε τώρα τον ομομορφισμό δακτυλίων $f : R \longrightarrow R[S^{-1}]$, με τύπο $f(r) = r/1_R$ και τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του δακτυλίου που ανήκει στο υποσύνολο S να απεικονίζεται σε αντιστρέψιμο στοιχείο του $R[S^{-1}]$.
   Ο δακτύλιος $R[S^{-1}]$ μαζί με τον ομομορφισμό δακτυλίων f καλείται **τοπικοποίηση του μεταθετικού δακτυλίου** R.

2. Ως εφαρμογή της κατασκευής της τοπικοποίησης μεταθετικών δακτυλίων, θεωρούμε τον μεταθετικό δακτύλιο $R = \mathbb{Z}$ και $S = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.
   Το σύνολο $R[S^{-1}]$ με τις παραπάνω πράξεις αποτελεί μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα που ταυτίζεται με το δακτύλιο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

3. Έστω R ένας τυχαίος μεταθετικός δακτύλιος, P ένα πρώτο ιδεώδες του R και θεωρούμε $S = R \backslash P$. Τότε το σύνολο $R[S^{-1}] := R_P$ είναι η τοπικοποίηση του R στο P. Αναλυτικότερες πληροφορίες για αυτό το παράδειγμα θα δώσουμε στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής, όπου θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στη θεμελίωση και τη μελέτη κάποιων ιδιοτήτων.

Σχόλιο 2.1.3. Στην περίπτωση που ο δακτύλιος R από τον οποίο ξεκινάμε είναι μη-μεταθετικός, η τοπικοποίησή του είναι πιο δύσκολη υπόθεση. Δεν θα αναφερθούμε με λεπτομέρειες σε αυτήν την περίπτωση. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [25].

Πρόταση 2.1.4. *Η τοπικοποίηση $\mathcal{C}[S^{-1}]$ της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση μορφισμών S, αν υπάρχει, είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο ζεύγη $(\mathcal{C}_1, Q_1)$ και $(\mathcal{C}_2, Q_2)$ τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες του Ορισμού 2.1.1. Τότε λόγω της καθολικής ιδιότητας που περιγράφεται στον Ορισμό 2.1.1 προκύπτει ότι υπάρχουν συναρτητές:

$$G : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2 \ \text{ και } \ H : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$$

τέτοιοι ώστε

$$Q_2 = G \circ Q_1 \tag{2.1}$$

και

$$Q_1 = H \circ Q_1 \tag{2.2}$$

Επομένως έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q_1"] \arrow[d, "Q_2"'] & \mathcal{C}_1 \arrow[dl, shift left, "G"] \\
\mathcal{C}_2 \arrow[ur, shift left, "H"] &
\end{tikzcd}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2) προκύπτει ότι:

$$Q_1 = H \circ (G \circ Q_1) = (H \circ G) \circ Q_1 \tag{2.3}$$

και

$$Q_2 = G \circ (H \circ Q_2) = (G \circ H) \circ Q_2 \tag{2.4}$$

Λόγω της σχέσης (2.3) προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q_1"] \arrow[d, "Q_1"'] & \mathcal{C}_1 \arrow[dl, shift right, "1_{\mathcal{C}_1}"'] \arrow[dl, shift left, "H \circ G"] \\
\mathcal{C}_1 &
\end{tikzcd}$$

όπου $1_{\mathcal{C}_1}$ είναι ο ταυτοτικός συναρτητής στην $\mathcal{C}_1$. Λόγω μοναδικότητας προκύπτει ότι $H \circ G = 1_{\mathcal{C}_1}$. Ακριβώς ανάλογα, χρησιμοποιώντας την σχέση (2.4), προκύπτει ότι $G \circ H = 1_{\mathcal{C}_2}$.
Επομένως οι συναρτητές G και H είναι ισοδυναμίες κατηγοριών και έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι μοναδική ως προς ισομορφισμό. ∎

Αφού εξασφαλίσαμε μια έννοια μοναδικότητας για την τοπικοποίηση μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς μια κλάση μορφισμών της, στρεφόμαστε στο πρόβλημα ύπαρξης. Μη λαμβάνοντας υπ' όψιν κάποια προβλήματα συνολοθεωρητικής φύσης, η τοπικοποίηση υπάρχει αλλά δεν έχει εύκολη περιγραφή. Εδώ θα επικεντρωθούμε σε μια σημαντική περίπτωση τοπικοποίησης η οποία επιτρέπει καλή περιγραφή της τοπικοποιημένης κατηγορίας.

Ορισμός 2.1.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Η S καλείται* **τοπικοποιούσα κλάση (localizing class)** *μορφισμών στην $\mathcal{C}$ αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

(LC1) Για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$ ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ ανήκει στην S.

(LC2) Αν s και t είναι δύο μορφισμοί στην S, τότε και η σύνθεσή τους $s \circ t$ ανήκει στην S.

(LC3a) Για κάθε ζεύγος μορφισμών $f : X \longrightarrow Y$ και $s : Z \longrightarrow Y$, υπάρχει μορφισμός g στην $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ και t στην S έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d, dotted, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

(LC3b) *Για κάθε ζεύγος μορφισμών $f : Y \longrightarrow X$ και $s : Y \longrightarrow Z$, υπάρχει μορφισμός g στην* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}$ *και t στην S έτσι ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
W & Z \arrow[l, dotted, "g"'] \\
X \arrow[u, dotted, "t"] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

(LC4) *Αν X και Y είναι δύο αντικείμενα στην $\mathcal{C}$ και $f, g : X \longrightarrow Y$ δύο μορφισμοί, τότε υπάρχει μορφισμός s στην κλάση S τέτοιος ώστε $s \circ f = s \circ g$ αν και μόνο αν υπάρχει μορφισμός t στην S τέτοιος ώστε $f \circ t = g \circ t$.*

Παράδειγμα 2.1.6. Θεωρούμε $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και ας είναι S η κλάση μορφισμών που περιέχει όλους τους ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}$.
Προφανώς για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$ ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ είναι ισομορφισμός και άρα ανήκει στην S. Έστω, τώρα, $t : X \longrightarrow Y$ και $s : Y \longrightarrow Z$ δύο συνθέσιμοι ισομορφισμοί στην κλάση S. Προφανώς η σύνθεση $s \circ t : X \longrightarrow Z$, είναι ισομορφισμός και άρα ανήκει στην κλάση S.
Έστω τώρα $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $s : Z \longrightarrow Y$ ένας ισομορφισμός στην S. Τότε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dotted, "s^{-1}\circ f"] \arrow[d, dotted, "1_X"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με $s^{-1} \circ f : X \longrightarrow Z$ μορφισμό στην $\mathcal{C}$ και $1_X : X \longrightarrow X$ στην S. Ανάλογα προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X & Z \arrow[l, dotted, "f\circ s^{-1}"'] \\
X \arrow[u, dotted, "1_X"] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

Τέλος αν $f, g : X \longrightarrow Y$ είναι δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ και υπάρχει $s \in S$ ώστε $s \circ f = s \circ g$, τότε επειδή ο s είναι ισομορφισμός, θα υπάρχει ο αντίστροφος s^{-1} και θα έχουμε:

$$s \circ f = s \circ g \Longrightarrow s^{-1} \circ s \circ f = s^{-1} \circ s \circ g \Longrightarrow f = g \Longrightarrow f \circ 1_X = g \circ 1_X$$

Ανάλογα, αν $f \circ t = g \circ t$ για κάποιο ισομορφισμο t στην S, προκύπτει ότι $1_Y \circ f = 1_Y \circ g$.
Συνεπώς ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα του Ορισμού 2.1.5 και έτσι η κλάση S όλων των ισομορφισμών είναι τοπικοποιούσα κλάση για την κατηγορία $\mathcal{C}$.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, όταν η κλάση μορφισμών ως προς την οποία κάνουμε την τοπικοποίηση είναι localizing, έχουμε μία καλύτερη περιγραφή για τους μορφισμούς στην τοπικοποίηση $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Η περιγραφή αυτή γίνεται με την βοήθεια δύο νέων εννοιών, των αριστερών και δεξιών roofs:

Ορισμός 2.1.7. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μία localizing κλάση μορφισμών για την $\mathcal{C}$.*

1. *Ένα* **αριστερό roof (left roof)** *μεταξύ των αντικειμένων X και Y είναι ένα διάγραμμα της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

   όπου ο μορφισμός s ανήκει στην S.

2. *Ένα* **δεξιό roof (right roof)** *μεταξύ των αντικειμένων X και Y είναι ένα διάγραμμα της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

   όπου ο μορφισμός t ανήκει στην S.

Σχόλιο 2.1.8. Το σύμβολο «$\sim$» υπονοεί ότι ο αντίστοιχος μορφισμός ανήκει στην S.

Παρατήρηση 2.1.9. Αν από την κατηγορία $\mathcal{C}$ μεταβούμε στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, τότε αλλάζει η φορά των βελών και έτσι ένα αριστερό roof μεταξύ των X και Y γίνεται δεξιό roof μεταξύ των Y και X. Επομένως είναι αρκετό να επικεντρωθούμε στην μελέτη των ιδιοτήτων των αριστερών roofs.

Εφόσον ορίσαμε τα αριστερά και δεξιά roofs, θέλουμε να βρούμε κάποιον τρόπο με τον οποίο δύο αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) roofs, συνδέονται μεταξύ τους. Για το σκοπό αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1.10. *Δύο αριστερά roofs:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

καλούνται **ισοδύναμα** *αν υπάρχει αντικείμενο A στην $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p : A \longrightarrow Z$ και $q : A \longrightarrow W$ έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & A \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & Y \\ & W \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ισχύει ότι $s \circ p = t \circ q \in S$.

Δυϊκά ορίζουμε:

Ορισμός 2.1.11. *Δύο δεξιά roofs:*

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

καλούνται **ισοδύναμα** *αν υπάρχει αντικείμενο A στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p : Z \longrightarrow A$ και $q : W \longrightarrow A$ έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "p"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & A & Y \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[dl, "t", "\sim"'] \\
& W \arrow[u, "q"] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ισχύει ότι $p \circ s = q \circ t$.

Παρατήρηση 2.1.12. Αν

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

είναι δύο ισοδύναμα αριστερά roofs, τότε ο μορφισμός $Q(s \circ p)$ στον Ορισμό 2.1.10 είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Όμως $Q(s \circ p) = Q(s) \circ Q(p)$ και $Q(s)$ είναι ισομορφισμός. Άρα ο $Q(p)$ είναι επίσης ισομορφισμός. Ανάλογα και ο $Q(q)$ είναι ισομορφισμός. Επομένως,

$$Q(f) \circ Q(s)^{-1} = Q(f) \circ Q(p) \circ Q(p)^{-1} \circ Q(s)^{-1} = Q(f \circ p) \circ Q(s \circ p)^{-1} =$$

$$= Q(g \circ q) \circ Q(t \circ q)^{-1} = Q(g) \circ Q(q) \circ Q(q)^{-1} \circ Q(t)^{-1} = Q(g) \circ Q(t)^{-1}$$

Λήμμα 2.1.13. *Η σχέση που ορίζεται στον Ορισμό 2.1.10 είναι μία σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των αριστερών roofs.*

Απόδειξη.

- Ανακλαστική: Θεωρούμε το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Τότε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & Z \arrow[u, "1_Z"'] \arrow[d, "1_Z"] & Y \\
& Z \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι προφανώς μεταθετικό και άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.10 το αριστερό roof από το οποίο ξεκινήσαμε είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του.

- Συμμετρική: Θεωρούμε τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

και υποθέτουμε ότι το πρώτο είναι ισοδύναμο με το δεύτερο. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει αντικείμενο $A \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ και μορφισμοί $p : A \longrightarrow Z$ και $q : A \longrightarrow W$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & A \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & Y \\
 & W \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και $s \circ p = t \circ q \in S$. Προφανώς το ίδιο θα ισχύει και για το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & A \arrow[u, "q"'] \arrow[d, "p"] & Y \\
 & Z \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

και έτσι το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

- <u>Μεταβατική</u>: Θεωρούμε τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z'' \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

και υποθέτουμε ότι το πρώτο είναι ισοδύναμο με το δεύτερο και το δεύτερο είναι ισοδύναμο με το τρίτο. Τότε εξ' ορισμού προκύπτουν τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & A \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] & Y \\
 & Z' \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & A' \arrow[u, "p'"'] \arrow[d, "q'"] & Y \\
 & Z'' \arrow[ul, "u", "\sim"'] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον ισχύουν και οι σχέσεις:

$$s \circ p = t \circ q \in S \text{ και } u \circ q' = t \circ p' \in S. \tag{2.5}$$

Θεωρούμε τους μορφισμούς $s \circ p : A \longrightarrow X$ και $t \circ p' : A' \longrightarrow X$. Από το αξίωμα (LC3a) του Ορισμού 2.1.5 προκύπτει ότι υπάρχει αντικείμενο B και μορφισμοί $a : B \longrightarrow A'$ και $z : B \longrightarrow A$ όπου ο z ανήκει στην S, έτσι ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dotted, "a"] \arrow[d, dotted, "z"', "\sim"] & A' \arrow[d, "t \circ p'", "\sim"'] \\ A \arrow[r, "s \circ p"'] & X \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.
Τώρα θεωρούμε τους μορφισμούς $b := q \circ z : B \longrightarrow Z'$ και $c := p' \circ a : B \longrightarrow Z'$. Χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα του προηγούμενου τετραγώνου αλλά και τις σχέσεις (2.5) προκύπτει ότι:

$$t \circ b = t \circ q \circ z = s \circ p \circ z = t \circ p' \circ a = t \circ c$$

Τότε από το αξίωμα (LC4) του Ορισμού 2.1.5 έχουμε ότι υπάρχουν αντικείμενο C και μορφισμός $w : C \longrightarrow B$ τέτοια ώστε:

$$b \circ w = c \circ w \tag{2.6}$$

Θέτοντας:

$$x = p \circ z \circ w \ \text{ και } \ y = q' \circ a \circ w \tag{2.7}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.5), (2.6) έχουμε ότι:

$$s \circ x = s \circ p \circ z \circ w = t \circ q \circ z \circ w = t \circ b \circ w =$$

$$= t \circ c \circ w = t \circ p' \circ a \circ w = u \circ q' \circ a \circ w = u \circ y$$

και επειδή οι $s \circ p$, z, w ανήκουν στην S, προκύπτει ότι:

$$s \circ x = u \circ y \in S. \tag{2.8}$$

Ανάλογα προκύπτει ότι:

$$h \circ y = f \circ x \in S. \tag{2.9}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.8), (2.9) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & C \arrow[u, "x"'] \arrow[d, "y"] & Y \\ & Z'' \arrow[ul, "u", "\sim"'] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.
Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.10 τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z'' \arrow[dl, "u"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα.

Τελικά αποδείξαμε ότι η σχέση που ορίστηκε στον Ορισμό 2.1.10 είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των αριστερών roofs. ■

Λήμμα 2.1.14. *Η σχέση που ορίζεται στον Ορισμό 2.1.11 είναι μία σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των δεξιών roofs.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 2.1.13. ∎

Εφόσον, σύμφωνα με τα Λήμματα 2.1.13, 2.1.14, οι σχέσεις που ορίστηκαν στους Ορισμούς 2.1.10, 2.1.11 είναι σχέσεις ισοδυναμίας, το αμέσως επόμενο βήμα είναι να περιγράψουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας και ειδικότερα τον τρόπο με τον οποίον συνδέονται αυτές που καθορίζονται από την ισοδυναμία στην κλάση των αριστερών roofs, με αυτές που καθορίζονται από την ισοδυναμία στην κλάση των δεξιών roofs. Για το σκοπό αυτό θα αποδείξουμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 2.1.15. *Υπάρχει μία «1-1» και «επί» αντιστοιχία ανάμεσα στις κλάσεις ισοδυναμίας αριστερών και δεξιών roofs μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Έστω X, Y δύο αντικείμενα στην $\mathcal{C}$ και

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ένα αριστερό roof ανάμεσα στα αντικείμενα X, Y.
Τότε από το αξίωμα (LC3b) του Ορισμού 2.1.5, υπάρχει ένα δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

ανάμεσα στα X και Y τέτοιο ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} W & Z \arrow[l, dotted, "g"'] \\ X \arrow[u, dotted, "t", "\sim"'] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή

$$g \circ s = t \circ f \tag{2.10}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει και ένα άλλο δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd} & W' & \\ X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

που να έχει την ίδια ιδιότητα. Δηλαδή και για το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} W' & Z \arrow[l, dotted, "g'"'] \\ X \arrow[u, dotted, "t'", "\sim"'] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

ισχύει:

$$g' \circ s = t' \circ f \quad . \tag{2.11}$$

Εκμεταλλευόμενοι και πάλι τα αξιώματα του Ορισμού 2.1.5 προκύπτει ότι υπάρχει αντικείμενο U στην $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u : W \longrightarrow U$ και $u' : W' \longrightarrow U$ ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
U & W' \arrow[l, dotted, "u'"'] \\
W \arrow[u, dotted, "u", "\sim"'] & Y \arrow[l, "\sim"', "t"] \arrow[u, "\sim", "t'"']
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ο μορφισμός u ανήκει στην κλάση μορφισμών S. Δηλαδή προκύπτει ότι:

$$u' \circ t' = u \circ t \tag{2.12}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.10), (2.11) και (2.12) έχουμε ότι:

$$u \circ g \circ s = u \circ t \circ f = u' \circ t' \circ f = u' \circ g' \circ s.$$

Από το αξίωμα (TR4) του Ορισμού 2.1.5 προκύπτει ότι υπάρχει αντικείμενο V και μορφισμός $v : U \longrightarrow V$ στην S έτσι ώστε:

$$v \circ u \circ g = v \circ u' \circ g' \tag{2.13}$$

Επειδή ο μορφισμός v ανήκει στην κλάση S, προκύπτει από το αξίωμα (LC2) ότι ο μορφισμός:

$$v \circ (u \circ t) = v \circ (u' \circ t') : Y \longrightarrow V$$

ανήκει στην κλάση S. Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "v\circ u"', "\sim"] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & A & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"] \arrow[dl, "t'", "\sim"'] \\
 & W' \arrow[u, "v\circ u'"] &
\end{tikzcd}$$

Άρα τα δεξιά roofs:

$$\begin{tikzcd}
 & W & \\
X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & W' & \\
X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία καλά ορισμένη απεικόνιση από τα αριστερά roof ανάμεσα στα X και Y, στις κλάσεις ισοδυναμίας, δεξιών roofs ανάμεσα στα X και Y.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτή η απεικόνιση είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs ανάμεσα στα X και Y.
Ας είναι,

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

δύο ισοδύναμα αριστερά roofs. Τότε από το Ορισμό 2.1.10 ξέρουμε ότι υπάρχει αντικείμενο C και μορφισμοί $w : C \longrightarrow Z$ και $w' : C \longrightarrow L'$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & C \arrow[u, "w"'] \arrow[d, "w'"] & Y \\
 & L' \arrow[ul, "s'", "\sim"'] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}
$$

είναι μεταθετικό και οι συνθέσεις,

$$s \circ w = s' \circ w'$$

ανήκουν στην κλάση S.

Κάνοντας χρήση του Ορισμού 2.1.5 υποθέτουμε ότι υπάρχουν δεξιά roofs:

$$
\begin{tikzcd}
 & K & \\
X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K' & \\
X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"', "\sim"]
\end{tikzcd}
$$

ανάμεσα στα X και Y τέτοια ώστε τα διαγράμματα:

$$
\begin{tikzcd}
K & X \arrow[l, dotted, "g"'] \\
Y \arrow[u, dotted, "t", "\sim"'] & L \arrow[u, "s"', "\sim"] \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K' & X \arrow[l, dotted, "g'"'] \\
Y \arrow[u, dotted, "t'", "\sim"'] & L' \arrow[u, "s'"', "\sim"] \arrow[l, "f'"]
\end{tikzcd}
$$

είναι μεταθετικά. Από την μεταθετικότητα των παραπάνω διαγραμμάτων προκύπτει ότι και τα διαγράμματα:

$$
\begin{tikzcd}
K & X \arrow[l, dotted, "g"'] \\
Y \arrow[u, dotted, "t", "\sim"'] & C \arrow[u, "s \circ w"', "\sim"] \arrow[l, "f \circ w"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K' & X \arrow[l, dotted, "g'"'] \\
Y \arrow[u, dotted, "t'", "\sim"'] & L' \arrow[u, "s' \circ w'"', "\sim"] \arrow[l, "f' \circ w'"]
\end{tikzcd}
$$

είναι μεταθετικά. Επομένως τα δεξιά roofs:

$$
\begin{tikzcd}
 & K & \\
X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K' & \\
X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"', "\sim"]
\end{tikzcd}
$$

αντιστοιχούν στο ίδιο αριστερό roof ανάμεσα στα X και Y.

Επειδή δείξαμε ότι η απεικόνιση ανάμεσα στα αριστερά roofs και τις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs είναι καλά ορισμένη, προκύπτει ότι τα δεξιά roofs είναι ισοδύναμα. Επομένως δείξαμε ότι η απεικόνιση είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs ανάμεσα στα X και Y. Συνεπώς έχουμε μία καλά ορισμένη απεικόνιση από τις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs ανάμεσα στα X και Y, στις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs ανάμεσα στα X και Y.

Επειδή, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1.9, ένα αριστερό roof στην $\mathcal{C}$ είναι δεξιό roof στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, προκύπτει ότι υπάρχει και μία καλά ορισμένη απεικόνιση από τις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs στις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs η οποία είναι επίσης σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η μία απεικόνιση είναι αντίστροφη της άλλης και έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ζητούμενη απεικόνιση είναι «1-1» και «επί». ■

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τη σύνθεση μεταξύ δύο αριστερών (αντίστοιχα δεξιών) roofs:

Ορισμός 2.1.16. *1. Έστω*

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

δύο αριστερά roofs. Η **σύνθεσή** *τους είναι ένα αριστερό roof:*

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο προέρχεται από το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dl, dotted, "u"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "h"] & & \\ & W \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & W' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

με χρήση του Ορισμού 2.1.5.

2. Έστω

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' & \\ Y \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

δύο δεξιά roofs. Η **σύνθεσή** *τους είναι ένα δεξιό roof:*

$$\begin{tikzcd} & V & \\ X \arrow[ur, "h\circ f"] & & Z \arrow[ul, "v\circ t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

το οποίο προέρχεται από το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & V & & \\ & W \arrow[ur, dotted, "h"] & & W' \arrow[ul, dotted, "v"', "\sim"] & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

με χρήση του Ορισμού 2.1.5.

Πρόταση 2.1.17. *1. Έστω*

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

δύο αριστερά roofs. Η κλάση ισοδυναμίας της σύνθεσης τους, δηλαδή η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s \circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του αντικειμένου U και των μορφισμών u και h.

2. Έστω

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' & \\ Y \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

δύο δεξιά roofs. Η κλάση ισοδυναμίας της σύνθεσης τους, δηλαδή η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd} & V & \\ X \arrow[ur, "h \circ f"] & & Z \arrow[ul, "v \circ t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του αντικειμένου V και των μορφισμών v και h.

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ισοδύναμο με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει ένα αντικείμενο C και μορφισμοί $p : C \longrightarrow W$, $p' : C \longrightarrow A$ ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & C \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "p'"] & Y \\ & A \arrow[ul, "s'", "\sim"'] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ισχύει ότι $s \circ p = s' \circ p' \in S$.
Συνθέτοντας τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

προκύπτει ότι υπάρχει αντικείμενο U' και μορφισμοί $u' : U' \longrightarrow A$, $h' : U' \longrightarrow W'$ ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & U' \arrow[dl, dotted, "u'"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "h'"] & & \\ & A \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & & W' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Το παραπάνω διάγραμμα καθορίζει το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U' \arrow[dl, "s' \circ u'"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h'"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι ο μορφισμός $p : C \longrightarrow W$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $u : U \longrightarrow W$ είναι ένας μορφισμός στην κλάση S, από το αξίωμα (TR3a) του Ορισμού 2.1.5, προκύπτει ότι υπάρχουν αντικείμενο L και μορφισμοί $w : L \longrightarrow C$, $\alpha : L \longrightarrow U$, ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, dotted, "\alpha"] \arrow[d, dotted, "w"', "\sim"] & U \arrow[d, "u", "\sim"'] \\ C \arrow[r, "p"'] & W \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.
Ανάλογα, επειδή ο μορφισμός $p' : C \longrightarrow A$ είναι μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $u' : U' \longrightarrow A$ είναι στην κλάση S, από το (TR3a) υπάρχει αντικείμενο L' και μορφισμοί $w' : L' \longrightarrow U'$, $\alpha' : L' \longrightarrow U'$ ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, dotted, "\alpha'"] \arrow[d, dotted, "w'"', "\sim"] & U' \arrow[d, "u'", "\sim"'] \\ C \arrow[r, "p'"'] & A \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Από την μεταθετικότητα των δύο τελευταίων τετραγώνων, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$p \circ w = u \circ \alpha \text{ και } u' \circ \alpha' = p' \circ w' \tag{2.14}$$

Εφαρμόζοντας και πάλι το αξίωμα (TR3a) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει αντικείμενο R και μορφισμοί $r : R \longrightarrow L$, $r' : R' \longrightarrow L'$ ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dotted, "r"] \arrow[d, dotted, "r'"', "\sim"] & L \arrow[d, "w", "\sim"'] \\
L' \arrow[r, "w'"'] & C
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Από τις σχέσεις (2.14) προκύπτει ότι:

$$s \circ u \circ \alpha \circ r = s \circ p \circ w \circ r = s' \circ p' \circ w' \circ r' = s' \circ u' \circ \alpha' \circ r'$$

και επειδή οι μορφισμοί $s' \circ p'$, w' και r' ανήκουν στην κλάση S παίρνουμε ότι:

$$s \circ u \circ \alpha \circ r = s' \circ u' \circ \alpha' \circ r' \in S$$

Ανάλογα,

$$t \circ h \circ \alpha \circ r = f \circ u \circ \alpha \circ r = f \circ p \circ w \circ r = f' \circ p' \circ w' \circ r' = t \circ h' \circ \alpha' \circ r' \in S$$

Τότε από το αξίωμα (LC4) προκύπτει ότι υπάρχει αντικείμενο Q και μορφισμός $q : Q \longrightarrow R$ ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$h \circ \alpha \circ r \circ q = h' \circ \alpha' \circ r' \circ q$$

Θέτοντας $x = \alpha \circ r \circ q$ και $x' = \alpha' \circ r' \circ q$, αποκτούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s \circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\
X & Q \arrow[u, "x"'] \arrow[d, "x'"] & Z \\
& U' \arrow[ul, "s' \circ u'", "\sim"'] \arrow[ur, "g \circ h'"'] &
\end{tikzcd}$$

Επομένως τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s \circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& U' \arrow[dl, "s' \circ u'"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h'"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα και άρα συμπεραίνουμε ότι η κλάση ισοδυναμίας της σύνθεσης είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των U, u, h.
Ακριβώς ανάλογα ελέγχουμε ότι αν πάρουμε ένα αριστερό roof που να είναι ισοδύναμο με το δεύτερο roof:

$$\begin{tikzcd}
& W' \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}$$

τότε και πάλι η κλάση ισοδυναμίας της σύνθεσης είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των U, u, h.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης για τα αριστερά roofs. ■

Σχόλιο 2.1.18. 1. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 2.1.17 ορίζει μια απεικόνιση από το καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs ανάμεσα στο X και Y με την οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs ανάμεσα στο Y και Z, στην οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας ανάμεσα στο X και Y. Για να αποφευχθούν συγχύσεις στην ορολογία, θα καλούμε αυτήν την απεικόνιση **σύνθεση των αριστερών roofs**.

2. Ανάλογα ορίζεται και απεικόνιση απο το γινόμενο του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας των δεξιών roofs ανάμεσα στο X και Y με το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ανάμεσα στο Y και Z, στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των δεξιών roofs ανάμεσα στο X και στο Z. Η απεικόνιση αυτή θα καλείται **σύνθεση των δεξιών roofs**.

Πρόταση 2.1.19. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και S μία localizing κλάση μορφισμών της. Τότε:*

1. *Η πράξη σύνθεσης κλάσεων ισοδυναμίας αριστερών roofs είναι προσεταιριστική.*

2. *Η πράξη σύνθεσης κλάσεων ισοδυναμίας δεξιών roofs είναι προσεταιριστική.*

Απόδειξη. 1. Έστω X, Y, Z και W αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Θεωρούμε τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "w"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ Z & & W \end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά το αξίωμα (TR3a) του Ορισμού 2.1.5, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη αντικειμένων U, V και P στην $\mathcal{C}$ και μορφισμών u, v, p στην κλάση S και k, l, m στην κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}$, που συγκροτούν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dotted, "p"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "m"] & & & \\ & & U \arrow[dl, dotted, "u"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "k"] & & V \arrow[dl, dotted, "v"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "l"] & & \\ & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & M \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & & N \arrow[dl, "w"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y & & Z & & W \end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.16 η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των δύο πρώτων roofs, είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ k"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Συνθέτοντας, διαδοχικά, με την κλάση ισοδυναμίας του τρίτου roof παίρνουμε την κλάση ισοδυναμίας του roof:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "(s\circ u)\circ p"', "\sim"] \arrow[dr, "(h\circ l)\circ m"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Ανάλογα, συνθέτοντας τις κλάσεις ισοδυναμίας του δεύτερου και του τρίτου roof και στην συνέχεια με την κλάση ισοδυναμίας τους πρώτου roof παίρνουμε και πάλι την κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "s\circ(u\circ p)"', "\sim"] \arrow[dr, "h\circ(l\circ m)"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Επειδή η πράξη σύνθεσης στην $\mathcal{C}$ είναι προσεταιριστική, έπεται ότι η σύνθεση κλάσεων ισοδυναμίας αριστερών roofs είναι προσεταιριστική.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης για τα αριστερά roofs. ∎

Σχόλιο 2.1.20. Η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

συμβολίζεται με s/f. Οπότε η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

συμβολίζεται με $1_X/1_X$.
Ανάλογα, η κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof:

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

συμβολίζεται με f/s. Οπότε η κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \arrow[ur, "1_X"] & & X \arrow[ul, "1_X"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

συμβολίζεται με $1_X/1_X$.

Στη συνέχεια στόχος μας είναι να δείξουμε ότι αν συνθέσουμε την κλάση ισοδυναμίας 1_X με την κλάση ισοδυναμίας των αριστερών (αντίστοιχα δεξιών) roofs παίρνουμε και πάλι την κλάση ισοδυναμίας των αριστερών (αντίστοιχα δεξιών) roofs.

Τα ζητούμενα αποτελέσματα συνοψίζονται στην παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 2.1.21. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών της. Τότε για κάθε δυο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{C}$ και για κάθε μορφισμό $\phi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ που παριστάνεται από το roof:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

1. *Η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας $1_X/1_X$ με την κλάση ισοδυναμίας s/f και η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας s/f με την κλάση ισοδυναμίας $1_Y/1_Y$ είναι η κλάση ισοδυναμίας s/f.*

2. *Η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας $1_X/1_X$ με την κλάση ισοδυναμίας f/s και η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας f/s με την κλάση ισοδυναμίας $1_Y/1_Y$ είναι η κλάση ισοδυναμίας f/s.*

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε τους αντιπροσώπους:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

των κλάσεων $1_X/1_X$ και s/f, αντίστοιχα.
Έχουμε ότι ο $1_X : X \longrightarrow X$ είναι ο ταυτοτικός μορφισμός για το αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $s : Z \longrightarrow X$ ανήκει στην localizing κλάση S. Επομένως, από το Ορισμό 2.1.5, υπάρχει αντικείμενο Z και μορφισμοί $1_Z : Z \longrightarrow Z$ και $s : Z \longrightarrow X$ ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} X & X \arrow[l, "1_X"'] \\ Z \arrow[u, "s", "\sim"'] & Z \arrow[l, dotted, "1_Z"] \arrow[u, dotted, "s"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Άρα έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & Z \arrow[dl, dotted, "s"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "1_Z"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & X & & Y \end{tikzcd}$$

Η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας $1_X/1_X$ και s/f είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το αριστερο roof:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "1_X \circ s"', "\sim"] \arrow[dr, "f \circ 1_Z"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

που προφανώς είναι το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Επομένως το αποτέλεσμα της σύνθεσης είναι η κλάση ισοδυναμίας s/f.
Ανάλογα, παίρνουμε ότι αν συνθέσουμε την κλάση ισοδυναμίας s/f των αριστερών roofs με την κλάση ισοδυναμίας $1_Y/1_Y$, παίρνουμε σαν αποτέλεσμα την κλάση ισοδυναμίας s/f.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.

■

Συμβολισμός: Από εδώ και στο εξώς θα συμβολίζουμε με $\sim_l$ την σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των αριστερών roofs του Ορισμού 2.1.10 και με $\sim_r$ την σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των δεξιών roofs του Ορισμού 2.1.11.

Ορισμός 2.1.22. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών της. Τότε ορίζεται η κατηγορία $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ για την οποία ισχύουν τα εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ είναι ακριβώς τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

2. *Για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ οι μορφισμοί από το X στο Y είναι η κλάση:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_l[S^{-1}]}(X,Y) := \{(Z,s,f) \mid s : Z \longrightarrow X, f : Z \longrightarrow Y, s \in S\}/\sim_l$$

   Δηλαδή είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_l$.

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών $(W,s,f) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_l[S^{-1}]}(X,Y)$ και $(W',s',f') \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_l[S^{-1}]}(Y,Z)$ ορίζεται να είναι ο μορφισμός $(U, s\circ t, f'\circ g)$, όπου U αντικείμενο της $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ και $t : U \longrightarrow W$, $g : U \longrightarrow W'$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ με τον t να ανήκει στην κλάση S, όπως φαίνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dl, dotted, "t"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "g"] & & \\ & W \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & W' \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

   Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του σχολίου 2.1.20, συμβολίζουμε τη σύνθεση των roofs s/f και s'/f' με $s\circ t = f'\circ g$.

4. *Για ένα αντικείμενο X στην $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ ο ταυτοτικός μορφισμός $(X, 1_X, 1_X)$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Δυϊκά και χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα αποτελέσματα για δεξιά roofs, ορίζουμε και την κατηγορία $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ διατυπώνοντας τον ακόλουθο Ορισμό:

Ορισμός 2.1.23. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών της. Τότε ορίζεται η κατηγορία $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ για την οποία ισχύουν τα εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ είναι ακριβώς τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

2. *Για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ οι μορφισμοί από το X στο Y είναι η κλάση:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_r[S^{-1}]}(X,Y) := \{(Z,f,s) \mid f : X \longrightarrow Z, s : Y \longrightarrow Z, s \in S\}/\sim_r$$

   Δηλαδή είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_r$.

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών $(W,f,s) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_r[S^{-1}]}(X,Y)$ και $(W',f',s') \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_r[S^{-1}]}(Y,Z)$ ορίζεται να είναι ο μορφισμός $(U, t\circ s', g\circ f)$, όπου U αντικείμενο της $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ και $g : W \longrightarrow$*

U, $t : W' \longrightarrow U$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ με τον t να ανήκει στην κλάση S, όπως φαίνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & U & & \\
& W \arrow[ur, dotted, "g"] & & W' \arrow[ul, dotted, "t"', "\sim"] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[ur, "f'"] & & Z \arrow[ul, "s'"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του σχολίου 2.1.20, συμβολίζουμε τη σύνθεση των roofs f/s και f'/s' με $g \circ f = s' \circ t$.

4. *Για ένα αντικείμενο X στην $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ ο ταυτοτικός μορφισμός $(X, 1_X, 1_X)$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof:*

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X \arrow[ur, "1_X"] & & X \arrow[ul, "1_X"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 2.1.24. Το γεγονός ότι οι $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ και $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ είναι πράγματι κατηγορίες, εξασφαλίζεται από τις Προτάσεις 2.1.19 και 2.1.21.

Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι η τοπικοποίηση μιας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς μία localizing κλάση μορφισμών S, δεν αλλάζει αν επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε αριστερά ή δεξιά roofs. Για το σκοπό αυτό θα αποδείξουμε ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ και $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ είναι και οι δύο τοπικοποιήσεις της $\mathcal{C}$. Τότε εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η τοπικοποίηση είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών, θα έχουμε το ζητούμενο.

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την αντιστοίχιση, $Q_l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_l[S^{-1}]$, η οποία είναι η ταυτότητα στα αντικείμενα ενώ στέλνει τον μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ στην κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή $Q_l(X) = X$ και $Q_l(f) = 1_X/f$. Δυϊκά ορίζουμε την αντιστοίχιση, $Q_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_r[S^{-1}]$, η οποία είναι επίσης η ταυτότητα στα αντικείμενα και στέλνει τον μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ στην κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd}
& Y & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "1_Y"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή $Q_r(X) = X$ και $Q_r(f) = f/1_Y$.

Λήμμα 2.1.25. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών της.*

1. *Η αντιστοίχιση $Q_l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_l[S^{-1}]$ είναι ένας συναρτητής μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$.*

2. *Η αντιστοίχιση $Q_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_r[S^{-1}]$ είναι ένας συναρτητής μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$.*

Απόδειξη. 1. Έστω X ένα αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ και $1_X : X \longrightarrow X$ ο ταυτοτικός μορφισμός. Τότε το $Q_l(1_X)$ αντιστοιχεί στην κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Από το Σχόλιο 2.1.20 ξέρουμε ότι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το παραπάνω roof συμβολίζεται με 1_X και είναι ο ταυτοτικός μορφισμός στην $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$.
Έστω τώρα ένας άλλος μορφισμός $g : Y \longrightarrow Z$. Η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας $Q_l(f)$, $Q_l(g)$ αντιστοιχεί στο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, dotted, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "f"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "1_Y"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο επίσης αντιστοιχεί στην κλάση $Q_l(g \circ f)$. Επομένως ισχύει ότι $Q_l(g \circ f) = Q_l(g) \circ Q_l(f)$ και άρα ο $Q_l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_l[S^{-1}]$ είναι ένας συναρτητής.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης για τον Q_l. ■

Πρόταση 2.1.26. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών της.*

1. *Η κατηγορία $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ είναι τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ με συναρτητή τοπικοποίησης $Q_l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_l[S^{-1}]$.*

2. *Η κατηγορία $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ είναι τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ με συναρτητή τοπικοποίησης $Q_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_r[S^{-1}]$.*

Απόδειξη. 1. Έστω $s : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κλάση μορφισμών S. Από τον Ορισμό του συναρτητή Q_l έχουμε ότι το $Q_l(s)$ αντιστοιχεί στην κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Αν συνθέσουμε το παραπάνω roof με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, dotted, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "1_X"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & & X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & Y & & X \end{tikzcd}$$

το οποίο μας δίνει το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\
X & & X
\end{tikzcd}$$

που εξ' ορισμού είναι ο αντιπρόσωπος της ταυτοτικής κλάσης ισοδυναμίας. Άρα η κλάση ισοδυναμίας του roof:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\
Y & & X
\end{tikzcd}$$

είναι δεξιά αντίστροφη της κλάσης ισοδυναμίας $Q_l(s)$.
Ανάλογα, από το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dl, dotted, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "1_X"] & & \\
& X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

βλέπουμε ότι η σύνθεση αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας είναι η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & & Y
\end{tikzcd}$$

Όμως άμεσα προκύπτει ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & X \arrow[u, "1_X"'] \arrow[d, "s"] & Y \\
& Y \arrow[ul, "1_Y", "\sim"'] \arrow[ur, "1_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και έτσι το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & & Y
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με τον αντιπρόσωπο της ταυτοτικής κλάσης ισοδυναμίας. Άρα η κλάση ισοδυναμίας του:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\
Y & & X
\end{tikzcd}$$

είναι και αριστερά αντίστροφη της κλάσης $Q(s)$. Συνεπώς ικανοποιείται η προϋπόθεση (L1) του Ορισμού 2.1.1.
Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει συναρτητής F από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ με την ιδιότητα ότι ο $Q_l(s)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ για κάθε μορφισμό s στην κλάση S.
Έστω

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

δυο ισοδύναμα αριστερά roofs ανάμεσα στα αντικείμενα X και Y. Τότε υπάρχει αντικείμενο U και μορφισμοί $u : U \longrightarrow L$, $v : U \longrightarrow K$ ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] & Y \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και $s \circ u = t \circ u \in S$. Χάρη στη μεταθετικότητα του διαγράμματος και στο ότι ο F είναι συναρτητής προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$F(f) \circ F(u) = F(g) \circ F(v), \quad F(s) \circ F(u) = F(t) \circ F(v) \tag{2.15}$$

Επειδή ισχύει $s \circ u \in S$, προκύπτει ότι η συνθεση $F(s) \circ F(u)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$. Επιπλέον επειδή ο μορφισμός $F(s)$ είναι ισομορφισμός έχουμε ότι και ο $F(u)$ είναι ισομορφισμός. Ανάλογα και ο μορφισμός $F(v)$ είναι ισομορφισμός. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} = F(v)^{-1} \circ F(t)^{-1}$$

και λόγω αυτού:

$$F(f) \circ F(s)^{-1} = F(f) \circ F(u) \circ F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} = F(g) \circ F(v) \circ F(v)^{-1} \circ F(t)^{-1} = F(g) \circ F(t)^{-1}$$

Επομένως η απεικόνιση που αντιστοιχεί στο αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

την απεικόνιση $F(f) \circ F(s)^{-1} : F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας.
Ορίζουμε μία αντιστοιχία $G : \mathcal{C}_l[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ το αντικείμενο $F(X)$ στην $\mathcal{C}'$ και σε κάθε μορφισμό ϕ που αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

τον μορφισμό $G(s/f) = F(f) \circ F(s)^{-1}$.
Ισχυρισμός: Η αντιστοιχία $G : \mathcal{C}_l[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι συναρτητής από την $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ στην $\mathcal{C}'$.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Ο ταυτοτικός μορφισμός στην $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ είναι η κλάση 1_X με αντιπρόσωπο το roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Προφανώς, $G(1_X) = F(1_X) \circ F(1_X)^{-1} = 1_X$ και άρα η G στέλνει τον ταυτοτικό μορφισμό της $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ στον ταυτοτικό μορφισμό $1_{F(X)}$ της $\mathcal{C}'$.
Έστω τώρα δύο μορφισμοί $\phi : X \longrightarrow Y$ και $\psi : Y \longrightarrow Z$ που αναπαρίστανται από τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dl, dotted, "u"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "h"] & & \\ & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

και η σύνθεση $\psi \circ \phi$ αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s \circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Από τον ορισμό της αντιστοιχίας G έχουμε ότι:

$$G(\psi) \circ G(\phi) = F(g) \circ F(t)^{-1} \circ F(f) \circ F(s)^{-1}$$

Από την μεταθετικότητα του τελευταίου διαγράμματος, επειδή $f \circ u = t \circ h$, προκύπτει ότι $F(f) \circ F(u) = F(t) \circ F(h)$ και επειδή $F(t)$ και $F(u)$ είναι ισομορφισμοί έχουμε ότι:

$$F(t)^{-1} \circ F(f) = F(h) \circ F(u)^{-1}$$

Τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$G(\psi) \circ G(\phi) = F(g) \circ F(h) \circ F(u)^{-1} \circ F(s)^{-1} = F(g \circ h) \circ F(s \circ u)^{-1} = G(\psi \circ \phi).$$

Άρα η αντιστοιχία G είναι συναρτητής και έτσι αποδείξαμε τον Ισχυρισμό.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η σύνθεση των συναρτητών G και Q_l ισούται με τον συναρτητή F. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $G \circ Q_l = F$. Έστω X ένα αντικείμενο στην $\mathcal{C}$. Τότε,

$$(G \circ Q_l)(X) = G(Q_l(X)) = G(X) = F(X)$$

Επιπλέον, έστω $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Εφαρμόζοντας τη σύνθεση $G \circ Q_l$, έχουμε $(G \circ Q_l)(f) = G(Q_l(f))$. Ο μορφισμός $Q_l(f)$ παριστάνεται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και τότε από τον ορισμό του συναρτητή G παίρνουμε ότι:

$$G(Q_l(f)) = F(f) \circ F(1_X)^{-1} = F(f) \ .$$

Επομένως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι:

$$G \circ Q_l = F \ .$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένας άλλος συναρτητής $H : \mathcal{C}_l[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ για τον οποίον ισχύει $H \circ Q_l = F$. Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Τότε,

$$(H \circ Q)(X) = F(X) \Longrightarrow H(Q(X)) = F(X) \Longrightarrow H(X) = F(X)$$

Επειδή ισχύει $G(X) = F(X)$, έχουμε ότι $H(X) = G(X)$.
Έστω $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $\phi : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$ ο οποίος αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Τότε για τον μορφισμό ϕ γνωρίζουμε ότι $\phi = Q_l(f) \circ Q_l(s)^{-1}$.
Άρα,

$$H(\phi) = H(Q_l(f) \circ Q_l(s)^{-1}) = H(Q_l(f)) \circ H(Q_l(s)^{-1}) =$$

$$= F(f) \circ F(s)^{-1} = G(Q_l(f)) \circ G(Q_l(s)^{-1}) = G(\phi)$$

Συνεπώς

$$H = G$$

Άρα καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο συναρτητής $G : \mathcal{C}_l[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ο μοναδικός συναρτητής που ικανοποιεί την ιδιότητα $G \circ Q = F$. Από τον Ορισμό 2.1.1 το ζεύγος $(\mathcal{C}_l[S^{-1}], Q_l)$ είναι μια τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση μορφισμών S.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης για το ζεύγος $(\mathcal{C}_l[S^{-1}], Q_l)$. ■

Από τα αποτελέσματα της παρούσας παραγράφου μπορούμε άμεσα να καταλήξουμε στην ακόλουθη Παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.1.27. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.4 η τοπικοποίηση μιας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών. Από τη στιγμή που, σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.25 τα ζεύγη $(\mathcal{C}_l[S^{-1}], Q_l)$, $(\mathcal{C}_r[S^{-1}], Q_r)$ είναι τοπικοποιήσεις της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την localizing κλάση μορφισμών S, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}_l[S^{-1}]$, $\mathcal{C}_r[S^{-1}]$ είναι ισοδύναμες. Επομένως από εδώ και πέρα κάνουμε την ταύτιση $\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathcal{C}_l[S^{-1}] = \mathcal{C}_r[S^{-1}]$ και η τοπικοποίηση θα είναι ανεξάρτητη από την επιλογή αναπαράστασης των μορφισμών με αριστερά ή δεξιά roofs.

Λήμμα 2.1.28. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών της. Υποθέτουμε ότι*

$$\begin{tikzcd} & L_i \arrow[dl, "s_i"', "\sim"] \arrow[dr, "f_i"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι αριστερά roofs που αναπαριστούν τους μορφισμούς $\phi_i : X \longrightarrow Y$, $1 \leqslant i \leqslant n$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Τότε υπάρχει αντικείμενο L στην $\mathcal{C}$, μορφισμοί s στην S και $g_i : L \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g_i"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν τους μορφισμούς ϕ_i, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.

Προφανώς για $n = 1$ δεν έχουμε κάτι να δείξουμε.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για $n > 1$ υπάρχει αντικείμενο K, μορφισμός t στην κλάση S και μορφισμοί h_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ στην $\mathcal{C}$, έτσι ώστε τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "h_i"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν τους μορφισμούς ϕ_i, για $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για n.
Από το αξίωμα (LC3a), θα υπάρχει ένα αντικείμενο U και μορφισμοί $u : U \longrightarrow K$ και $u' : U \longrightarrow L_n$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dotted, "u'"] \arrow[d, dotted, "u"', "\sim"] & L_n \arrow[d, "s_n", "\sim"'] \\ K \arrow[r, "\sim", "t"'] & X \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ο μορφισμός u ανήκει στην κλάση S. Θέτουμε $s = t \circ u = s_n \circ u' \in S$ και προκύπτει ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "h_i"] & \\ X & U \arrow[u, "u"] \arrow[d, "1_U"] & Y \\ & U \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "h_i \circ u"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επομένως οι μορφισμοί ϕ_i, παριστάνονται και από τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "h_i \circ u"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

για $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Επιπλέον το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & L_n \arrow[dl, "s_n"', "\sim"] \arrow[dr, "f_n"] & \\ X & U \arrow[u, "u'"'] \arrow[d, "1_U"] & Y \\ & U \arrow[ul, "s", "\sim"'] \arrow[ur, "f_n \circ u'"'] & \end{tikzcd}$$

είναι επίσης μεταθετικό και άρα το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f_n \circ u"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

αναπαριστά τον μορφισμό ϕ_n. Άρα για $L = U$, $g_i = h_i \circ u$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ και $g_n = f_n \circ u'$ έχουμε το ζητούμενο. ■

2.2 Τοπικοποίηση Υποκατηγοριών

Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, S μια localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{B}$ μία υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι η κλάση μορφισμών $S_{\mathcal{B}} = S \cap \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}$ είναι μια localizing κλάση μορφισμών για την υποκατηγορία $\mathcal{B}$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε την τοπικοποίηση $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ της $\mathcal{B}$ ως προς την localizing κλάση $S_{\mathcal{B}}$. Με τις παραπάνω συνθήκες ορίζεται ένας φυσικός συναρτητής $G : \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$, ο οποίος είναι η ταυτότητα στα αντικείμενα και αν $\phi : X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ που παριστάνεται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

τότε ο ϕ απεικονίζεται μέσω του συναρτητή G στην κλάση ισοδυναμίας του ίδιου roof στην τοπικοποίηση $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Αναζητούμε συνθήκες έτσι ώστε ο συναρτητής G να είναι πλήρης και πιστός ή ισοδυναμία κατηγοριών.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, S μία localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{B}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Η κλάση μορφισμών $S_{\mathcal{B}} = S \cap \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}$ είναι localizing κλάση μορφισμών για την $\mathcal{B}$.*

2. *Για κάθε μορφισμό $s : Y \longrightarrow X$ όπου $s \in S$ και X είναι αντικείμενο της $\mathcal{B}$, υπάρχει μορφισμός $u : P \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε η σύνθεση $s \circ u : P \longrightarrow X$ ανήκει στην S και το αντικείμενο P ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

Τότε ο φυσικός συναρτητής $G : \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός (fully faithful).

Απόδειξη. Ας είναι X και Y δύο αντικείμενα στην υποκατηγορία $\mathcal{B}$. Για να δείξουμε ότι ο συναρτητής G είναι πλήρης και πιστός αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $G_{X,Y} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ είναι «1-1» και «επί».

- $\underline{G_{X,Y} \text{ είναι «1-1»}}$: Έστω

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

δύο αριστερά roofs στην $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ που καθορίζουν τους ίδιους μορφισμούς στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Αυτό σημαίνει ότι τα αριστερά roofs είναι ισοδύναμα και άρα υπάρχει αντικείμενο U στην $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u : U \longrightarrow L$, $v : U \longrightarrow K$ ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "v"] & Y \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και $s \circ u = t \circ v \in S$. Τότε, από τη δεύτερη συνθήκη, υπάρχει αντικείμενο V στην $\mathcal{B}$ και μορφισμός $w : V \longrightarrow U$ τέτοιος ώστε $s \circ u \circ w = t \circ v \circ w \in S$. Άρα το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & V \arrow[u, "u \circ w"'] \arrow[d, "v \circ w"] & Y \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επειδή οι μορφισμοί $s \circ u \circ w = t \circ v \circ w$ ανήκουν στην κλάση S, προκύπτει ότι τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα και άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας με αντιπροσώπους αυτά τα roofs είναι ίσες. Συνεπώς οι εικόνες των μορφισμών της $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ που αντιστοιχούν στα παραπάνω roofs μέσω της απεικόνισης $G_{X,Y}$ είναι οι ίδιες κλάσεις ισοδυναμίας στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Συνεπώς η $G_{X,Y}$ είναι «1-1».

- $\underline{G_{X,Y} \text{ είναι «επί»}}$: Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ένα αριστερό roof που αναπαριστά ένα μορφισμό $\phi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$. Από την δεύτερη συνθήκη έχουμε ότι υπάρχει αντικείμενο U στην $\mathcal{B}$ και μορφισμός $u : U \longrightarrow L$ στην S, ώστε η σύνθεση $s \circ u$ να ανήκει στην κλάση S. Επομένως το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & U \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "1_U"] & Y \\
& U \arrow[ul, "s\circ u", "\sim"'] \arrow[ur, "f\circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, πράγμα που σημαίνει ότι το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "f\circ u"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

επίσης αναπαριστά τον μορφισμό ϕ. Επιπλέον το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s\circ u"', "\sim"] \arrow[dr, "f\circ u"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

καθορίζει μορφισμό στην $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ ο οποίος απεικονίζεται στον ϕ. Συνεπώς η απεικόνιση $G_{X,Y}$ είναι «επί».

Από τα παραπάνω εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η απεικόνιση:

$$G_{X,Y} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y)$$

είναι «1-1» και «επί» και άρα ο συναρτητής: $G : \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός. ∎

Παρατήρηση 2.2.2. Στην περίπτωση που ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 2.2.1 μπορούμε να δούμε την τοπικοποίηση $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ σαν πλήρη υποκατηγορία της τοπικοποίησης $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Αν, τώρα, αντικαταστήσουμε την κατηγορία $\mathcal{C}$ με την δυϊκή της κατηγοριά $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.2.3. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, S μία localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{B}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Η κλάση μορφισμών $S_{\mathcal{B}} = S \cap \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}$ είναι localizing κλάση μορφισμών για την $\mathcal{B}$.*

2. *Για κάθε μορφισμό $s : X \longrightarrow Y$ όπου $s \in S$ και X είναι αντικείμενο της $\mathcal{B}$, υπάρχει μορφισμός $u : Y \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε η σύνθεση $u \circ s : X \longrightarrow P$ ανήκει στην S και το αντικείμενο P ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

Τότε ο φυσικός συναρτητής $G : \mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 2.2.1. ∎

Τέλος θα διατυπώσουμε δύο πορίσματα των Θεωρημάτων 2.2.1 και 2.2.3 αντίστοιχα, χωρίς να συμπεριλάβουμε αποδείξεις.

Πόρισμα 2.2.4. *Με τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.2.1 υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$, υπάρχει μορφισμός $s\colon B \longrightarrow X$ με $s \in S$ και $B \in \mathcal{B}$. Τότε ο συναρτητής G είναι ισοδυναμία κατηγοριών.*

Πόρισμα 2.2.5. *Με τις προϋποθέσεις της Πρότασης 2.2.3 υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$, υπάρχει μορφισμός $t\colon X \longrightarrow B$ με $t \in S$ και $B \in \mathcal{B}$. Τότε ο συναρτητής G είναι ισοδυναμία κατηγοριών.*

2.3 Τοπικοποίηση Προσθετικών Κατηγοριών

Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μια προσθετική κατηγορία και S είναι μια localizing κλάση μορφισμών της. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η τοπικοποίηση $\mathcal{C}[S^{-1}]$ έχει φυσική δομή προσθετικής κατηγορίας, έτσι ώστε ο συναρτητής τοπικοποίησης $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S-1]$ να είναι ένας προσθετικός συναρτητής.

Όπως γνωρίζουμε για κάθε δύο αντικείμενα X και Y στην $\mathcal{C}$ το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας. Στην περίπτωση αυτήν μπορούμε, χωρίς να χάσουμε κάποια πληροφορία, να αντικαταστήσουμε το αξίωμα (LC4) του Ορισμού 2.1.5 με το εξής αξίωμα:

(LC4') Έστω X, Y δύο αντικείμενα και $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $s \in S$ τέτοιος ώστε $s \circ f = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει μορφισμός $t \in S$ τέτοιος ώστε $f \circ t = 0$.

Αυτό συμβαίνει ακριβώς διότι το $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ είναι αβελιανή ομάδα. Εάν λοιπόν για δύο μορφισμούς $f, g : X \longrightarrow Y$ ισχύει ότι $s \circ f = s \circ g$, τότε $s \circ (f-g) = 0$. Ακόμη αν $f \circ t = g \circ t$, τότε ισοδύναμα ισχύει ότι $(f-g) \circ t = 0$. Επομένως αν αντικαταστήσουμε την f στο (LC4') με την $f-g$ θα συμπέσουμε στο αξίωμα (LC4).
Έστω τώρα X και Y δύο αντικείμενα στην $\mathcal{C}$ και $\phi, \psi : X \longrightarrow Y$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Τότε από το Λήμμα 2.1.28 γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντικείμενο L και μορφισμοί $s \in S$ και $f, g : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ ώστε τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν τους μορφισμούς ϕ και ψ αντίστοιχα.

Λήμμα 2.3.1. *Έστω $\phi, \psi : X \longrightarrow Y$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Ο μορφισμός $X \longrightarrow Y$ που καθορίζεται από το αριστερό roof:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

εξαρτάται μόνο από τους ϕ και ψ και όχι από την επιλογή των L, s, f, g.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί ϕ και ψ αναπαριστόνται και από τα roofs:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Τότε έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & U \arrow[u, "r"'] \arrow[d, "r'"] & Y \\
& K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

με $s \circ r = t \circ r' \in S$, καθώς και το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & V \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "p'"] & Y \\
& K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

με $s \circ p = t \circ p' \in S$.
Σύμφωνα με το αξίωμα (LC3a) υπάρχει αντικείμενο W και μορφισμοί $w : W \longrightarrow U$, $w' : W \longrightarrow V$ με $w \in S$, ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dotted, "w'"] \arrow[d, dotted, "w"', "\sim"] & V \arrow[d, "s\circ p", "\sim"'] \\
U \arrow[r, "\sim", "s\circ r"'] & X
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Τότε έχουμε ότι $s \circ r \circ w = s \circ p \circ w' \in S$. Από το (LC4) υπάρχει αντικείμενο Z και μορφισμός $q : Z \longrightarrow W$, ώστε να ισχύει $r \circ w \circ q = p \circ w' \circ q$. Εκμεταλλευόμενοι την μεταθετικότητα των παραπάνω διαγραμμάτων καταλήγουμε ότι:

$$t \circ r' \circ w = s \circ r \circ w = s \circ p \circ w' = t \circ p' \circ w' \in S$$

Συνθέντοντας από δεξιά με τον μορφισμό q προφανώς ισχύει ότι:

$$t \circ r' \circ w \circ q = t \circ p' \circ w' \circ q$$

και μάλιστα, από το (LC1) οι παραπάνω συνθέσεις ανήκουν στην κλάση S.
Τότε και πάλι από το αξίωμα (LC4) έχουμε ότι υπάρχει αντικείμενο A και μορφισμός $q' : A \longrightarrow Z$ στην κλάση S, ώστε:

$$r' \circ w \circ q \circ q' = p' \circ w' \circ q \circ q'.$$

Θέτουμε,

$$\alpha = r \circ w \circ q \circ q' = p \circ w' \circ q \circ q' : A \longrightarrow L$$

και

$$\alpha' = r' \circ w \circ q \circ q' = p' \circ w' \circ q \circ q' : A \longrightarrow K$$

Τότε άμεσα βλέπουμε ότι:

$$s \circ \alpha = s \circ r \circ w \circ q \circ q' = t \circ p' \circ w \circ q \circ q' = t \circ \alpha' \tag{2.16}$$

και επειδή οι μορφισμοί $s \circ p \circ w'$, q, q' ανήκουν στην κλάση S συνεπάγεται ότι οι συνθέσεις $s \circ \alpha$ και $t \circ \alpha'$ ανήκουν στην κλάση S. Επιπλέον και πάλι άμεσα βλέπουμε ότι:

$$f \circ a = f \circ r \circ w \circ q \circ q' = g' \circ p' \circ w \circ q \circ q' = g' \circ \alpha' \tag{2.17}$$

και

$$g \circ \alpha = g \circ p \circ w' \circ q \circ q' = g' \circ p' \circ w' \circ q \circ q' = g' \circ \alpha'. \tag{2.18}$$

Συνεπώς από τις σχέσεις (2.16), (2.17), (2.18), προκύπτει ότι τα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & A \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha'"] & Y \\
& K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & A \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha'"] & Y \\
& K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικά. Αυτό, με τη σειρά του, σημαίνει ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\
X & A \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha'"] & Y \\
& K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "f'+g'"'] &
\end{tikzcd}$$

επίσης μετατίθεται. Συνεπώς τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f'+g'"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

αναπαριστούν τον ίδιο μορφισμό στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Άρα ο μορφισμός που καθορίζεται από το roof:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

δεν εξαρτάται από την επιλογή των L, s, f, g. ■

Σχόλιο 2.3.2. Χάρη στο αποτέλεσμα του Λήμματος 2.3.1 θα συμβολίζουμε τον μορφισμό της $\mathcal{C}[S^{-1}]$ που καθορίζεται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

με $\phi + \psi$. Άμεσα στην κλάση $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ ορίζεται διμελής πράξη, $(\phi, \psi) \longmapsto \phi + \psi$.

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η διμελής πράξη που ορίσαμε έχει κάποιες «καλές» ιδιότητες, όπως θα φανεί στην παρακάτω παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.3.3. 1. Οι μορφισμοί $\phi + \psi$ και $\psi + \phi$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ ισούνται με τις κλάσεις ισοδυναμίας με αντιπροσώπους τα αριστερα roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g+f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Επειδή η $\mathcal{C}$ είναι προσθετική, το $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ είναι αβελιανή ομάδα και άρα $f + g = g + f$. Συνεπώς η διμελής πράξη στην $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ είναι μεταθετική.

2. Θεωρούμε τους μορφισμούς ϕ, ψ, χ στην κλάση $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.28 μπορούμε να τους αναπαραστήσουμε με τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

για κάποιο αντικείμενο L στην $\mathcal{C}$, $s \in S$ και $f, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, Y)$. Τότε ο μορφισμός $\phi + (\psi + \chi)$ αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+(g+h)"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ενώ ο μορφισμός $(\phi + \psi) + \chi$ από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "(f+g)+h"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Επειδή η πρόσθεση στην αβελιανή ομάδα $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ είναι προσεταιριστική, προκύπτει ότι και η διμελής πράξη στην $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ είναι προσεταιριστική.

3. Θεωρούμε ϕ, ψ δύο μορφισμούς στην $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$. Αν αναπαραστίσουμε τους μορφισμούς με τα δεξιά roofs:

$$\begin{tikzcd} & K & \\ X \arrow[ur, "\alpha"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K & \\ Y \arrow[ur, "\beta"] & & Z \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

που αντιστοιχούν στα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ώστε τα τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd}
K & X \arrow[l, "\alpha"'] \\
Y \arrow[u, "t", "\sim"'] & L \arrow[l, dotted, "f"] \arrow[u, dotted, "s"', "\sim"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
K & X \arrow[l, "\beta"'] \\
Y \arrow[u, "t", "\sim"'] & L \arrow[l, dotted, "g"] \arrow[u, dotted, "s"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικά. Τότε

$$t \circ (f+g) = t \circ f + t \circ g = \alpha \circ s + \beta \circ s = (\alpha+\beta) \circ s$$

δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
K & X \arrow[l, "\alpha+\beta"'] \\
Y \arrow[u, "t", "\sim"'] & L \arrow[l, dotted, "f+g"] \arrow[u, dotted, "s"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Συνεπώς το δεξιό roof:

$$\begin{tikzcd}
& K & \\
X \arrow[ur, "\alpha+\beta"] & & Y \arrow[ul, "t"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

αντιστοιχεί στο αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

και αναπαριστά τον μορφισμό $\phi+\psi$. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν χρησιμοποιήσουμε δεξιά roofs για να αναπαραστίσουμε τους μορφισμούς της $\mathcal{C}[S^{-1}]$, αντί για αριστερά roofs, παίρνουμε την ίδια διμελή πράξη στο σύνολο των μορφισμών.

4. Θεωρούμε έναν μορφισμό στο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y)$ που παριστάνεται από το roof:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Συμβολίζουμε αυτό τον μορφισμό με 0. Έστω L ένα αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ και $s : L \longrightarrow X$ μορφισμός στην κλάση S. Τότε, άμεσα, το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\
X & L \arrow[u, "1_L"'] \arrow[d, "s"] & Y \\
& X \arrow[ul, "1_X", "\sim"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και $s \circ 1_L = 1_X \circ s = s \in S$.
Επομένως το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "0"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

αναπαριστά επίσης τον μορφισμό 0. Αν ϕ είναι ένας μορφισμός στην $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y)$ που παριστάνεται από το roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

τότε προφανώς σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει ότι $\phi + 0 = \phi = 0 + \phi$. Δηλαδή ο μορφισμός 0 είναι το ταυτοτικό στοιχείο στο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y)$.

5. Κάνοντας ανάλογες θεωρήσεις, όπως και στα προηγούμενα, προκύπτει ότι ο αντίστροφος μορφισμός του ϕ, έστω $-\phi$, είναι αυτός που παριστάνεται από το roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "-f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Δηλαδή $\phi + (-\phi) = 0 = (-\phi) + \phi$.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών της. Για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στη $\mathcal{C}$, το $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας με την πράξη που ορίστηκε στο Σχόλιο 2.3.2.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 2.3.3. ■

Πρόταση 2.3.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία, S μια localizing κλάση μορφισμών της και X, Y, Z τρία αντικείμενα στην $\mathcal{C}$. Τότε η σύνθεση:*

$$\circ : \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y) \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Z)$$

είναι διγραμμική.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι εύκολη, αλλά αρκετά τεχνική. Χρησιμοποιεί τεχνικές που έχουν επαναληφθεί αρκετές φορές σε αυτό το κεφάλαιο και για το λόγο αυτό θα την παραλείψουμε. ■

Τα αποτελέσματα των Προτάσεων 2.3.4, 2.3.5 μας προϊδεάζουν ότι η τοπικοποίηση $\mathcal{C}[S^{-1}]$ της προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$, ως προς την localizing κλάση S, θα είναι και αυτή προσθετική. Ωστόσο για να φτάσουμε σε αυτό το συμπέρασμα χρειαζόμαστε λίγη ακόμη δουλειά, η οποία θα γίνει στην απόδειξη της ακόλουθης Πρότασης:

Πρόταση 2.3.6. *Έστω $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία, S μια localizing κλάση μορφισμών της. Η τοπικοποίηση $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι και αυτή προσθετική κατηγορία.*

Απόδειξη. Θεωρώντας δεδομένες τις Προτάσεις 2.3.4 και 2.3.5, για να δείξουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι προσθετική, μένει να δείξουμε ότι έχει μηδενικό αντικείμενο και ότι ορίζονται τα ευθέα αθροίσματα των αντικειμένων της. Έστω 0 το μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Τότε για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f : 0 \longrightarrow X$ και μοναδικός μορφισμός

$g\colon X \longrightarrow 0$. Όμως τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$ είναι αντικείμενα της $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Ο μοναδικός μορφισμός $\phi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(0, X)$ είναι αυτός που παριστάνεται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "1_0"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ 0 & & X \end{tikzcd}$$

ενώ ο μοναδικός μορφισμός $\psi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, 0)$ είναι αυτός που παριστάνεται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & 0 \end{tikzcd}$$

Επομένως το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Έστω X, Y δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Εφόσον η $\mathcal{C}$ είναι προσθετική κατηγορία, ορίζεται το ευθύ άθροισμα $X \oplus Y$ των αντικειμένων X, Y στην $\mathcal{C}$. Ωστόσο τα αντικείμενα X, Y είναι αντικείμενα της τοπικοποίησης $\mathcal{C}[S^{-1}]$, άρα και το αντικείμενο $X \oplus Y$ είναι το ευθύ άθροισμα των X, Y στην κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Οι κανονικές εισαγωγές και οι κανονικές προβολές αναπαριστόνται από αντίστοιχα roofs. Επομένως η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι προσθετική. ■

Στις πρώτες γραμμές αυτής της ενότητας θέσαμε ως στόχο να αποδείξουμε ότι αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ με την οποία ξεκινάμε είναι προσθετική, τότε και η τοπικοποίηση της ως προς μία localizing κλάση μορφισμών S είναι προσθετική. Είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το Θεώρημα που θα μας επιτρέψει να καταλήξουμε στο παραπάνω συμπέρασμα:

Θεώρημα 2.3.7. *Έστω $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία, S μια localizing κλάση μορφισμών της. Τότε υπάρχει μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ και ένας προσθετικός συναρτητής $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ έτσι ώστε:*

1. *Για κάθε μορφισμό s στην S, ο μορφισμός $Q(s)$ είναι ισομορφισμός.*
2. *Για κάθε προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}'$ και προσθετικό συναρτητή $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ έτσι ώστε ο $F(s)$ είναι ισομορφισμός για κάθε s στην S, υπάρχει μοναδικός, προσθετικός συναρτητής $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $F = G \circ Q$. Δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[dl, dotted, "G", "\exists!"'] \\ \mathcal{C}' & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών.

Απόδειξη. Μέχρι στιγμής με την Πρόταση 2.3.4 έχουμε δείξει ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι προσθετική. Επομένως αυτό που μένει είναι να εξασφαλίζουμε την ύπαρξη των προσθετικών συναρτητών Q, G.

Έστω $f, g : X \longrightarrow Y$ δύο μορφισμοί μεταξύ δύο αντικειμένων στην $\mathcal{C}$. Γνωρίζουμε πως οι αντίστοιχοι μορφισμοί $Q(f), Q(g)$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ αναπαρίστανται από τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα. Επομένως ο μορφισμός $Q(f)+Q(g)$ αναπαριστάται από το roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Δηλαδή $Q(f)+Q(g)=Q(f+g)$ και έτσι ο συναρτητής $Q:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}[S^{-1}]$ είναι προσθετικός.
Έστω τώρα $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$ προσθετικός συναρτητής τέτοιος ώστε, για κάθε μορφισμό s στην S, ο μορφισμός $F(s)$ να είναι ισομορφισμός. Τότε από τον Ορισμό 2.1.1, υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G:\mathcal{C}[S^{-1}]\longrightarrow\mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $F=G\circ Q$. Άρα το μόνο που μένει να δείξω είναι ότι ο G είναι προσθετικός συναρτητής.
Προφανώς, από την κατασκευή του G, για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{C}$, $F(X)=(G\circ Q)(X)$. Επειδή $Q(X)=X$, έχουμε ότι $G(X)=F(X)$.
Επίσης για κάθε μορφισμό $\phi:X\longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ που αναπαριστάται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

έχουμε $G(\phi)=F(f)\circ F(s)^{-1}$.
Αν $\phi,\psi:X\longrightarrow Y$ είναι δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$, τότε από το Λήμμα 2.1.28, ξέρουμε ότι θα έχουν αντιπροσώπους:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

για κάποιο αντικείμενο L και κάποιους μορφισμούς $s\in S$ και f,g στην $\mathcal{C}$. Το άθροισμα $\phi+\psi$ είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το roof:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f+g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι ο F είναι προσθετικός και η σύνθεση είναι διγραμμική, έχουμε:

$$G(\phi+\psi)=F(f+g)\circ F(s)^{-1}=(F(f)+F(g))\circ F(s)^{-1}=F(f)\circ F(s)^{-1}+F(g)\circ F(s)^{-1}=G(\phi)+G(\psi)$$

Συνεπώς ο G είναι προσθετικός.
Η απόδειξη για την μοναδικότητα, με ακρίβεια ισοδυναμίας, της κατηγορίας $\mathcal{C}[S^{-1}]$, είναι πανομοιότυπη με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.4 και για αυτό το λόγο παραλείπεται. ■

Κεφάλαιο 3

Στοιχεία Τριγωνισμένων Κατηγοριών

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε μια σημαντική κλάση κατηγοριών, που θα αποτελέσουν τη βάση της διατριβής, τις τριγωνισμένες κατηγορίες. Επιπλέον θα εξειδικεύσουμε την έννοια της τοπικοποίησης μιας τυχαίας κατηγορίας, σε τριγωνισμένες κατηγορίες και θα παραθέσουμε ένα σημαντικό παράδειγμα τοπικοποίησης τριγωνισμένης κατηγορίας, την τοπικοποίηση με την έννοια του Bousfield. Η συνεισφορά αυτού του κεφαλαίου στη διατριβή -εκτός από το ότι θεμελιώνει το βασικό εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο θα δουλέψουμε- είναι ότι παρουσιάζει την κατασκευή της ευσταθούς κατηγορίας των προτύπων πάνω από μια ομάδα άλγεβρα. Το συγκεκριμένο παράδειγμα τριγωνισμένης κατηγορίας είναι ένα από αυτά στα οποία θα εφαρμόσουμε τη βασική θεωρία της διατριβής στα επόμενα κεφάλαια.

3.1 Τριγωνισμένες Κατηγορίες

Μια τριγωνισμένη κατηγορία είναι μια προσθετική κατηγορία που αποκτά επιπλέον δομή από έναν συναρτητή, τον translation (ή suspension) συναρτητή και είναι εφοδιασμένη με μία κλάση τριγώνων που ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες. Οι τριγωνισμένες κατηγορίες ορίστηκαν από τους Dieter Puppe και Jean-Louis Verdier, δουλεύοντας ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλον. Η δουλειά του Puppe παρουσιάστηκε στο άρθρο του: On the structure of the stable homotopy theory και βασικό του παράδειγμα είναι η Ομοτοπική Κατηγορία (Homotopy Category). Από την άλλη το κύριο παράδειγμα του Verdier είναι η Παραγόμενη Κατηγορία (Derived Category) μιας, εν γένει, αβελιανής κατηγορίας και η ενασχόληση έγινε κατά την διάρκεια της διδακτορικής του διατριβής. Ωστόσο η δημοσίευση των αποτελεσμάτων έγινε κάποια χρόνια αργότερα, στο άρθρο του: Des catégories dérivées des catégories abéliennes.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια προσθετική κατηγορία και έστω $\Sigma\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ ένας προσθετικός συναρτητής, ο οποίος είναι αυτομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{T}$. Ο Σ από τώρα και στο εξής θα καλείται* **translation** *ή* **suspension συναρτητής**.

Αν X είναι ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$ τότε συμβολίζουμε με $\Sigma^n X = X[n]$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 3.1.2. *Ένα* **τρίγωνο (triangle)** *στην κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι ένα διάγραμμα της μορφής:*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

Παρατήρηση 3.1.3. Σχηματικά ένα τρίγωνο αναπαριστάται ως εξής:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Ο δείκτης $[1]$ υπονοεί ότι ο μορφισμός είναι της μορφής $Z \longrightarrow \Sigma X$.

Ορισμός 3.1.4. *Ένας* **μορφισμός** *μεταξύ τριγώνων είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

Ένας μορφισμός τριγώνων είναι **ισομορφισμός τριγώνων**, *αν οι μορφισμοί u, v, w είναι ισομορφισμοί.*

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τον ορισμό της τριγωνισμένης κατηγορίας.

Ορισμός 3.1.5. *Μια* **τριγωνισμένη κατηγορία (triangulated category)** *είναι μια τριάδα $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$, όπου $\mathcal{T}$: προσθετική κατηγορία, Σ είναι ένας αυτομορφισμός της $\mathcal{T}$ και Δ είναι μία κλάση τριγώνων, η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:*

(TR1a) Κάθε τρίγωνο ισόμορφο με ένα τρίγωνο στην Δ είναι τρίγωνο στην Δ.

(TR1b) Για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{T}$, το τρίγωνο:

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

είναι τρίγωνο στην Δ.

(TR1c) Για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$, υπάρχει ένα τρίγωνο στην Δ

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

(TR2) Το τρίγωνο

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$$

είναι τρίγωνο στην Δ αν και μόνο αν το τρίγωνο

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$$

είναι στην Δ.

(TR3) Κάθε διάγραμμα στην $\mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα στην Δ και το τετράγωνο είναι μεταθετικό, συμπληρώνεται σε έναν μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\
X' \arrow[r] & X' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

(TR4) Έστω $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ και $h = g \circ f$ μορφισμοί στην $\mathcal{T}$. Τότε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "\gamma"] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα, μπορεί να συμπληρωθεί στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "1_{X'}"] & \Sigma Y \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' \arrow[r, "w"] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

όπου οι τέσσερις γραμμές είναι τρίγωνα και τα κατακόρυφα βέλη δημιουργούν μορφισμούς τριγώνων.

Η ιδιότητα **(TR2)** *καλείται και* **στροφή των τριγώνων (turning of triangles)** *ενώ η ιδιότητα* **(TR4)** *καλείται και* **οκταεδρικό αξίωμα (octahedral axiom)**.

Παρατήρηση 3.1.6. Στον ορισμό της τριγωνισμένης κατηγορίας εμφανίζεται η έννοια του αυτομορφισμού $\Sigma \colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ της κατηγορίας $\mathcal{T}$. Με τον όρο «αυτομορφισμός κατηγοριών» υπονοούμε την ισοδυναμία κατηγοριών.

Ορισμός 3.1.7. *Έστω $(\mathcal{T}_1, \Sigma_1, \Delta_1)$ και $(\mathcal{T}_2, \Sigma_2, \Delta_2)$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας προσθετικός συναρτητής $F \colon \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ καλείται* **βαθμωτός (graded)** *αν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $\eta \colon \Sigma_2 \circ F \longrightarrow F \circ \Sigma_1$ μεταξύ των συναρτητών $\Sigma_2 \circ F$ και $F \circ \Sigma_1$, δηλαδή το τετράγωνο*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Sigma_1"'] & \mathcal{T}_2 \arrow[d, "\Sigma_2"] \\
T_1 \arrow[r, "F"'] & \mathcal{T}_2
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών.

Παρατήρηση 3.1.8. Αν

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

είναι ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}_1$, τότε εφαρμόζοντας τον F παίρνουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & F(Z) \arrow[dl, "\eta_X \circ F(h)"', "{[1]}"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Y) \arrow[ul, "F(g)"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}_2$. Λέμε ότι ο F **απεικονίζει το πρώτο τρίγωνο στο δεύτερο**.

Ορισμός 3.1.9. *Έστω $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας βαθμωτός συναρτητής $F\colon \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ καλείται* **ακριβής (exact)** *αν απεικονίζει τρίγωνα στην Δ σε τρίγωνα στην Δ, με την παραπάνω έννοια.*

Ορισμός 3.1.10. *Έστω $(\mathcal{T}_1, \Sigma_1, \Delta_1)$ και $(\mathcal{T}_2, \Sigma_2, \Delta_2)$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες και $F, G\colon \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ δύο ακριβείς συναρτητές. Ένας μορφισμός $\omega\colon F \longrightarrow G$ μεταξύ συναρτητών καλείται* **βαθμωτός μορφισμός (graded morphism)** *αν το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} F\Sigma_1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\omega\Sigma_1"'] & \Sigma_2 F \arrow[d, "\Sigma_2\omega"] \\ G\Sigma_1 \arrow[r, "\eta'"'] & \Sigma_2 G \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Λήμμα 3.1.11. *Έστω*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο σε μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$. Τότε η σύνθεση κάθε δύο διαδοχικών μορφισμών στο τρίγωνο ισούται με μηδέν. Δηλαδή:

$$g \circ f = h \circ g = \Sigma(f) \circ h = 0$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $g \circ f = 0$, διότι τότε από την ιδιότητα (TR2) του ορισμού της τριγωνισμένης κατηγορίας, προκύπτουν και οι άλλες δύο σχέσεις. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα (TR1) η πρώτη γραμμή του διαγράμματος είναι τρίγωνο στην Δ, ενώ από την υπόθεση και η δεύτερη γραμμή είναι τρίγωνο στην Δ. Από την ιδιότητα (TR3), υπάρχει μορφισμός $u\colon 0 \longrightarrow Z$, ο οποίος αναγκαστικά είναι ο μηδενικός, ώστε το διάγραμμα συμπληρώνεται στον ακόλουθο μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

Από την μεταθετικότητα του μεσσαίου τετραγώνου προκύπτει ότι:

$$g \circ f = 0$$

■

Ορισμός 3.1.12. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία. Ένας προσθετικός συναρτητής $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ καλείται* **συνομολογικός συναρτητής (cohomological functor)** *αν για κάθε τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

η ακολουθία:

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 3.1.13. Αν ο συναρτητής F είναι συναλλοίωτος, τότε το F καλείται **ομολογικός συναρτητής (homological functor)**.

Σχόλιο 3.1.14. Από τώρα και στο εξής μια τριγωνισμένη κατηγορία $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ θα συμβολίζεται απλά με $\mathcal{T}$ καθώς ο translation συναρτητής Σ και η κλάση τριγώνων Δ θα εννοούνται. Τα στοιχεία της κλάσης Δ θα καλούνται απλά τρίγωνα.

Σχόλιο 3.1.15. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και $f : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}$. Τότε για κάθε αντικείμενο A στην $\mathcal{T}$ επάγονται οι μορφισμοί:

$$f_\star : \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y), \quad f_\star(\phi) := f \circ \phi$$

και

$$f^\star : \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, A) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, A), \quad f^\star(\psi) := \psi \circ f$$

Επιπλέον για ένα τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

και ένα αντικείμενο A στην $\mathcal{T}$, επάγονται οι μεγάλες (άπειρες) ακολουθίες αβελιανών ομάδων:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) \xrightarrow{f_\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y) \xrightarrow{g_\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Z) \xrightarrow{h_\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma(X)) \xrightarrow{\Sigma(f)_\star} \cdots$$

και

$$\cdots \xrightarrow{\Sigma(f)^\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(X), A) \xrightarrow{h^\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, A) \xrightarrow{g^\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, A) \xrightarrow{f^\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι οι παραπάνω ακολουθίες είναι ακριβείς:

Πρόταση 3.1.16. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και A ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}$. Τότε:*

1. *Ο συναρτητής*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A,\text{-}) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Ab}, \quad X \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A,X)$$
από την κατηγορία $\mathcal{T}$ στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων είναι ομολογικός συναρτητής.

2. *Ο συναρτητής*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{-},A) : \mathcal{T}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathsf{Ab}, \quad X \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X,A)$$
από την δυϊκή κατηγορία $\mathcal{T}^{\mathsf{op}}$ της $\mathcal{T}$ στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων είναι συνομολογικός συναρτητής.

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A,X) \xrightarrow{f_\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A,Y) \xrightarrow{g_\star} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A,Z)$$

είναι ακριβής στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων. Για το σκοπό αυτό πρέπει να δείξουμε ότι $\mathsf{Im}(f_\star) = \mathsf{Ker}(g_\star)$.Όμως, επειδή $g \circ f = 0$, έπεται άμεσα ότι $\mathsf{Im}(f_\star) \subset \mathsf{Ker}(g_\star)$. Για την αντίστροφη έγκλειση θεωρούμε μορφισμό $u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A,Y)$, τέτοιο ώστε $u \in \mathsf{Ker}(g_\star)$. Τότε προκύπτει το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \Sigma(A) \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

Οι γραμμές είναι τρίγωνα και το μεσαίο τετράγωνο είναι μεταθετικό, αφού από το γεγονός ότι $u \in \mathsf{Ker}(g_\star)$, προκύπτει ότι $g_\star(u) = 0$, δηλαδή $g \circ u = 0$.
Στρέφοντας και τα δύο τρίγωνα, προκύπτει το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \Sigma(A) \arrow[r, "-1_{\Sigma(A)}"] & \Sigma(A) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[r, "-\Sigma(f)"] & \Sigma(Y) \end{tikzcd}$$

Επειδή το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό και οι γραμμές είναι τρίγωνα, το διάγραμμα μπορεί να συμπληρωθεί σε μορφισμό τριγώνων, ως εξής:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \Sigma(A) \arrow[r, "-1_A"] \arrow[d, "v'"'] & \Sigma(A) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[r, "-\Sigma(f)"] & \Sigma(Y) \end{tikzcd}$$

Στρέφοντας ξανά τα τρίγωνα προς τα πίσω προκύπτει ο ακόλουθος μορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \Sigma(A) \arrow[d, "\Sigma(v)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \end{tikzcd}$$

Επομένως κατασκευάσαμε μορφισμό $v\colon A \to X$ τέτοιο ώστε $u = f \circ v = f_\star(v)$. Συνεπώς $u \in \mathsf{Im}(f_\star)$ και έτσι δείξαμε ότι $\mathsf{Ker}(g_\star) \subset \mathsf{Im}(f_\star)$
Τελικά
$$\mathsf{Im}(f_\star) = \mathsf{Ker}(g_\star).$$

2. Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης του πρώτου σκέλους της Πρότασης. ■

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.1.16, προκύπτει το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα:

Λήμμα 3.1.17. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και έστω:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

ένας μορφισμός μεταξύ τριγώνων. Αν δύο από τους μορφισμούς u, v και w είναι ισομορφισμοί, τότε και ο τρίτος είναι επίσης ισομορφισμός.

Απόδειξη. Χάρη στην ιδιότητα της στρέψης των τριγώνων μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι οι μορφισμοί u και v είναι ισομορφισμοί και να δείξουμε ότι και ο μορφισμός w είναι επίσης ισομορφισμός. Από την Πρόταση 3.1.16 έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', X) \arrow[r] \arrow[d, "u_\star"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', Y) \arrow[r] \arrow[d, "v_\star"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', Z) \arrow[r] \arrow[d, "w_\star"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', \Sigma(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma(u)_\star"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', \Sigma(Y)) \arrow[d, "\Sigma(v)_\star"] \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', X') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', Y') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', Z') \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', \Sigma(X')) \arrow[r] & \mathsf{Hom}(Z', \Sigma(Y')) \end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι ακριβείς και οι κατακόρυφοι μορφισμοί, εκτός του $w_\star$ προς το παρόν, είναι ισομορφισμοί. Από το Five Lemma [16, Lemma 8.3.13] προκύπτει ότι και ο μορφισμός $w_\star$ είναι ισομορφισμός. Επομένως υπάρχει μορφισμός $\alpha \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', Z)$ τέτοιος ώστε $w_\star(\alpha) = w \circ \alpha = 1_{Z'}$. Ανάλογα έχουμε και το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(Y'), Z) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma(u)^\star"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(X'), Z) \arrow[r] \arrow[d, "u^\star"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', Z) \arrow[r] \arrow[d, "w^\star"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Y', Z) \arrow[r] \arrow[d, "v^\star"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X', Z) \arrow[d, "u^\star"] \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(Y), Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(X), Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z) \arrow[r] & \mathsf{Hom}(X, Z) \end{tikzcd}$$

Όπως και παραπάνω προκύπτει ότι ο μορφισμός $w^\star$ είναι ισομορφισμός και επομένως υπάρχει μορφισμός $\beta \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z', Z)$ τέτοιος ώστε $w^\star(\beta) = b \circ w = 1_Z$. Τότε επάγεται ότι:

$$\beta = \beta \circ (w \circ \alpha) = (\beta \circ w) \circ \alpha = \alpha$$

Άρα $w \circ \alpha = 1_{Z'}$ και $\alpha \circ w = 1_Z$. Συνεπώς ο μορφισμός w είναι ισομορφισμός. ■

Σχόλιο 3.1.18. Θεωρούμε τον μορφισμό:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

ανάμεσα σε δύο τρίγωνα με βάση τον μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$. Τότε ο μορφισμός $w : Z \longrightarrow Z'$ είναι ισομορφισμός. Επομένως η τρίτη κορυφή σε ένα τρίγωνο είναι μοναδική με ακρίβεια -όχι μοναδικού- ισομορφισμού και καλείται **κώνος (cone)** του μορφισμού f. Σημειώνουμε ότι ο ισομορφισμός w δεν είναι μοναδικός, δηλαδή υπάρχουν πολλοί ισομορφισμοί $Z \longrightarrow Z'$ οι οποίοι καθιστούν το διάγραμμα μεταθετικό.

Λήμμα 3.1.19. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Αν δύο από τις κορυφές του τριγώνου είναι ισόμορφες με το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{T}$, τότε και η τρίτη είναι ισόμορφη με το μηδενικό αντικείμενο.

Απόδειξη. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

και υποθέτουμε ότι οι κορυφές Y και Z είναι ισόμορφες με το μηδενικό αντικείμενο. Στρέφοντας το τρίγωνο και χρησιμοποιώντας την υπόθεσή μας προκύπτει το ακόλουθο τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ 0 \arrow[rr] & & 0 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Επομένως το αντικείμενο X είναι ο κώνος του ισομορφισμού $1_0 \colon 0 \longrightarrow 0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο κώνος ενός μορφισμού είναι μοναδικός με ακρίβεια ισομορφισμού, προκύπτει ότι το αντικείμενο X είναι ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο, $X \simeq 0$. ∎

Λήμμα 3.1.20. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *ο f είναι ισομορφισμός,*

2. *η κορυφή Z είναι ισόμορφη με το μηδενικό αντικείμενο.*

Απόδειξη. (2. $\Longrightarrow$ 1.) Θεωρούμε τον ακόλουθο μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Αν $Z \simeq 0$, τότε ο πρώτος και ο τρίτος κατακόρυφος μορφισμός είναι ισομορφισμοί. Επομένως, από το Λήμμα 3.1.17, ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ισομορφισμός.

(1. $\Longrightarrow$ 2.) Αντίστροφα, αν ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ισομορφισμός τότε και πάλι από το Λήμμα 3.1.17 προκύπτει ότι ο μορφισμός $0 \longrightarrow Z$ είναι ισομορφισμός. Επομένως έχουμε ότι $Z \simeq 0$. ■

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις υποκατηγορίες μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, οι οποίες έχουν την «καλή» ιδιότητα να διατηρούν την τριγωνική δομή της $\mathcal{T}$.

Ορισμός 3.1.21. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{T}'$ μια πλήρης υποκατηγορία αυτής, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:*

(TS1) *Το μηδενικό αντικείμενο ανήκει στην $\mathcal{T}'$.*

(TS2) *Για κάθε δύο αντικείμενα X και Y στην $\mathcal{T}'$, το ευθύ άθροισμα $X \oplus Y$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}'$.*

(TS3) *Κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}'$ αν και μόνο αν το αντικείμενο $\Sigma(X)$ ανήκει στην $\mathcal{T}'$.*

(TS4) *Για κάθε δύο αντικείμενα X και Y στην $\mathcal{T}'$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$, υπάρχει αντικείμενο Z στην $\mathcal{T}'$ έτσι ώστε το τρίγωνο:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο της $\mathcal{T}$.

Τότε η πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{T}'$ καλείται **πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία (full triangulated subcategory)** *της $\mathcal{T}$.*

Παρατήρηση 3.1.22. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι, πράγματι, όλα τα τρίγωνα της $\mathcal{T}'$, με κορυφές που είναι αντικείμενα στην $\mathcal{T}$, ορίζουν τριγωνική δομή στην $\mathcal{T}'$.

Ορισμός 3.1.23. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία.*

1. *Μια υποκατηγορία $\mathcal{T}'$ της $\mathcal{T}$ καλείται* **thick** *αν είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία και περιέχει όλους τους ευθείς αθροιστέους των αντικειμένων της. Δηλαδή αν X είναι ένα αντικείμενο στην $\mathcal{T}'$ και $X \simeq Y \oplus Z$ για κάποια αντικείμενα $Y, Z \in \mathcal{T}$, τότε και οι δύο ευθείς αθροιστέοι Y, Z είναι αντικείμενα της υποκατηγορίας $\mathcal{T}'$.*

2. *Μια υποκατηγορία $\mathcal{T}'$ της $\mathcal{T}$ καλείται* **υπερπλήρης (replete)** *αν είναι κλειστή στους ισομορφισμούς. Δηλαδή αν X είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{T}$ και $X \simeq Y$, για κάποιο αντικείμενο Y της $\mathcal{T}'$, τότε το X είναι αντικείμενο της υποκατηγορίας $\mathcal{T}'$.*

3.1.1 Η Ευσταθής Κατηγορία των Προτύπων

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να ορίσουμε την ευσταθή κατηγορία των προτύπων, η οποία διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στον κλάδο της Άλγεβρας και ειδικότερα στη Θεωρία Αναπαραστάσεων, και να αποδείξουμε ότι αυτή αποκτά δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Τα πρότυπα που αποτελούν τα αντικείμενα αυτής της κατηγορίας, είναι πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα υπεράνω ενός δακτυλίου Λ. Στην παρούσα διατριβή θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση κατά την οποία τα πρότυπα της ευσταθούς κατηγορίας είναι πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα υπεράνω μιας ομάδας άλγεβρας RG, όπου G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος.

Τα βασικά αποτελέσματα που παρατίθενται σε αυτήν την ενότητα προέρχονται από το βιβλίο [6] του Benson. Οι αποδείξεις ορισμένων εξ αυτών ξεφεύγουν από τα πλαίσια της διατριβής και γι αυτό παραλείπονται. Για λόγους πληρότητας ξεκινάμε υπενθυμίζουντας ορισμένες έννοιες από τη βασική άλγεβρα πριν προχωρήσουμε στον ορισμό της ομάδας άλγεβρας.

Σύμβαση: Σε αυτήν την ενότητα θα συμβολίζουμε με G μια πεπερασμένη ομάδα και με R έναν μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

Ορισμός 3.1.24. *Έστω R ένας δακτύλιος. Μια* **άλγεβρα (algebra)** *υπεράνω του R ή μια* **R-άλγεβρα (R-algebra)** *είναι ένας δακτύλιος Λ μαζί με έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\phi\colon R \longrightarrow \Lambda$, τέτοιον ώστε $\mathsf{Im}(\phi) \subset \mathsf{Z}(\Lambda)$.*

Ορισμός 3.1.25. *Έστω Λ_1, Λ_2 δυο R-άλγεβρες. Μια απεικόνιση $f\colon \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ καλείται* **ομομορφισμός αλγεβρών** *αν για κάθε $r \in R$ και $a, b \in \Lambda_1$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $f(rx) = rf(x)$
2. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
3. $f(xy) = f(x)f(y)$

Στην συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό της ομάδας δακτυλίου και επιβεβαιώνουμε ότι η ομάδα δακτύλιος αποτελεί άλγεβρα.

Ορισμός 3.1.26. *Έστω G μια ομάδα και R ένας δακτύλιος. Ορίζουμε την ομάδα δακτύλιο (group ring) RG ως το ελεύθερο R-πρότυπο με βάση τα στοιχεία της ομάδας G, και άρα τα στοιχεία της είναι πεπερασμένα αθροίσματα της μορφής:*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i g_i, \text{ με } r_i \in R \text{ και } g_i \in G$$

με την πράξη της πρόσθεσης να είναι η ακόλουθη:

$$+\colon RG \times RG \longrightarrow RG, \ \sum_i r_i g_i + \sum_j r'_j g_j := \sum_i (r_i + r'_i) g_i$$

Η δομή δακτυλίου του R-προτύπου RG προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό:

$$\cdot\colon RG \times RG \longrightarrow RG, \ \sum_i r_i g_i \cdot \sum_j r'_j g_j := \sum_{i,j} (r_i r'_j) g_i g_j$$

Παράδειγμα 3.1.27. Έστω RG μια ομάδα δακτύλιος. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi\colon R \longrightarrow RG, \ \phi(r) := re$$

Εύκολα αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\mathsf{Im}(\phi) = \{re \in RG \mid r \in R\}$$

Έστω $re \in \mathsf{Im}(\phi)$. Τότε

$$re\left(\sum_i r_i g_i\right) = \left(\sum_i (rr_i) g_i\right) = \left(\sum_i (r_i r) g_i\right) = \left(\sum_i r_i g_i\right) re$$

Επομένως προκύπτει η σχέση έγκλεισης $\mathsf{Im}(\phi) \subset \mathsf{Z}(RG)$, η οποία μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η ομάδα δακτύλιος RG είναι μια R-άλγεβρα.

Έχουμε αποδείξει ότι η ομάδα δακτύλιος RG είναι R-αλγεβρα. Από εδώ και στο εξής δεν θα χρησιμοποιούμε τον όρο αλλά ομάδα δακτύλιος, αλλά θα δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι αποτελεί R-άλγεβρα. Για το λόγο αυτό διατυπώνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.1.28. *Η ομάδα δακτύλιος RG μαζί με τον ομομορφισμό $\phi\colon R \longrightarrow RG$ καλείται* **ομάδα άλγεβρα (group algebra)**.

Για να είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τον ορισμό της ευσταθούς κατηγορίας των προτύπων πάνω από μια ομάδα άλγεβρα RG, είναι απαραίτητο να υπενθυμίσουμε ορισμένες σημαντικές περιπτώσεις δακτυλίων και αλγεβρών, αφού με χρήση αποτελεσμάτων για αυτούς τους δακτυλίους πιστοποιείται ότι η κατηγορία που θα ορίσουμε είναι «καλά ορισμένη».

Ορισμός 3.1.29. *Μια άλγεβρα Λ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ καλείται* **άλγεβρα Frobenius** *αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $\lambda\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$, τέτοια ώστε ο πυρήνας $\mathsf{Ker}(\lambda)$ δεν περιέχει κανένα μη-μηδενικό αριστερό και δεξιό ιδεώδες του Λ.*

Στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε η ομάδα άλγεβρα $\mathbb{K}G$ είναι μια άλγεβρα Frobenius, όπως φαίνεται στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 3.1.30. *Έστω $\mathbb{K}G$ μια ομάδα άλγεβρα. Μέσω της γραμμικής απεικόνισης*

$$\lambda\colon \mathbb{K}G \longrightarrow \mathbb{K},\ \lambda\left(\sum_i r_i g_i\right) := r_0,\ r_0 : \textit{η συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου}$$

η άλγεβρα $\mathbb{K}G$ είναι άλγεβρα Frobenius.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [6, Proposition 3.1.2] ■

Μια κλάση δακτυλίων που είναι πολύ σημαντική και ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες, είναι η κλάση των self injective δακτυλιών.

Ορισμός 3.1.31. *Ένας δακτύλιος Λ καλείται* **(αριστερός) self injective** *αν ο Λ είναι ενέσιμο ως (αριστερό) Λ-πρότυπο.*

Ακολουθεί μια πρόταση η οποία θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στην πορεία της ενότητας:

Πρόταση 3.1.32. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και Λ μια άλγεβρα Frobenius υπαράνω του $\mathbb{K}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Η άλγεβρα Λ είναι (αριστερή) self injective.*
2. *Αν η άλγεβρα Λ είναι (αριστερή) self injective τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα πεπερασμένα παραγόμενο Λ-πρότυπο M:*
   - *(i) το M είναι προβολικό*
   - *(ii) το M είναι ενέσιμο*
   - *(iii) το δυϊκό πρότυπο $M^\star$ είναι προβολικό*
   - *(iv) το δυϊκό πρότυπο $M^\star$ είναι ενέσιμο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [6, Proposition 1.6.2] ■

Μια εξαιρετικά σημαντική κλάση δακτυλίων είναι η κλάση των Quasi Frobenius δακτυλίων, οι οποίοι συχνά συμβολίζονται με την συντομογραφία QF.

Ορισμός 3.1.33. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **Quasi Frobenius** *αν τα προβολικά R-πρότυπα του δακτυλίου, ταυτίζονται με τα ενέσιμα.*

Μια βασική ιδιότητα των αλγεβρών Frobenius περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.1.34. *Κάθε άλγεβρα Frobenius Λ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ είναι ένας Quasi Frobenius δακτύλιος.*

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την ευσταθή κατηγορία των προτύπων υπεράνω μιας ομάδας άλγεβρας RG. Στην πραγματικότητα η κατηγορία που μας ενδιαφέρει είναι η κατηγορία των προτύπων υπεράνω μιας ομάδας άλγεβρας $\mathbb{K}G$, όπου $\mathbb{K}$ είναι σώμα. Ωστόσο ο ορισμός της ευσταθούς κατηγορίας θα δωθεί για την περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι ένας τυχαίος μεταθετικός δακτύλιος και στη συνέχεια της ενότητας θα περιοριστούμε στην περίπτωση που παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον στα πλαίσια της διατριβής.

Ορισμός 3.1.35. *Έστω RG μια ομάδα άλγεβρα. Καλούμε* **ευσταθή κατηγορία των προτύπων (stable module category)** *και συμβολίζουμε RG-$\underline{\mathsf{mod}}$ την κατηγορία η οποία:*

1. *Έχει ως αντικείμενα πεπερασμένα παραγόμενα RG-πρότυπα.*

2. *Αν $M, N \in RG$-$\underline{\mathsf{mod}}$ τότε το σύνολο μορφισμών μεταξύ των M, N συμβολίζεται με $\underline{\mathsf{Hom}}_{RG}(M, N)$ και ορίζεται ως η ομάδα πηλίκο*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{RG}(M, N) = \mathsf{Hom}_{RG}(M, N)/\mathcal{P}\,\mathsf{Hom}_{RG}(M, N)$$

όπου $\mathcal{P}\,\mathsf{Hom}_{RG}(M, N)$ είναι η υποομάδα της $\mathsf{Hom}_{RG}(M, N)$ που αποτελείται από τους μορφισμούς $f\colon M \longrightarrow N$, οι οποίοι αναλύονται μέσω ενός προβολικού RG-προτύπου. Δηλαδή από τους μορφισμούς $f\colon M \longrightarrow N$, για τους οποίους υπάρχει ένα προβολικό RG-πρότυπο P, τέτοιο ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & N \\ & P \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Παρατήρηση 3.1.36. Ο λόγος για τον οποίον περνάμε από την κατηγορία των προτύπων RG-Mod στην ευσταθή κατηγορία RG-$\underline{\mathsf{mod}}$ είναι διότι επιθυμούμε να απαλλαγούμε από τα προβολικά πρότυπα. Στην κατηγορία RG-$\underline{\mathsf{mod}}$ κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό RG-πρότυπο είναι ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας.

Παρατήρηση 3.1.37. Δυϊκά ορίζουμε την κατηγορία RG-$\overline{\mathsf{mod}}$ η οποία έχει ως αντικείμενα, πεπερασμένα παραγόμενα RG-πρότυπα, ενώ το σύνολο των μορφισμών ανάμεσα σε δύο πρότυπα $M, N \in RG$-$\overline{\mathsf{mod}}$ συμβολίζεται με $\overline{\mathsf{Hom}}_{RG}(M, N)$ και ισούται με την ακόλουθη ομάδα πηλίκο:

$$\overline{\mathsf{Hom}}_{RG}(M, N) = \mathsf{Hom}_{RG}(M, N)/\mathcal{I}\,\mathsf{Hom}_{RG}(M, N)$$

όπου $\mathcal{I}\,\mathsf{Hom}_{RG}(M, N)$ είναι η υποομάδα της $\mathsf{Hom}_{RG}(M, N)$ που αποτελείται από τους μορφισμούς $f\colon M \longrightarrow N$, οι οποίοι αναλύονται μέσω ενός ενέσιμου RG-προτύπου. Η έννοια της ανάλυσης ενός μορφισμού μέσω ενός ενέσιμου προτύπου είναι δυϊκή της έννοιας της ανάλυσης μέσω ενός προβολικού προτύπου που περιγράψαμε στον Ορισμό 3.1.35.

Παράδειγμα 3.1.38. Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Από την Πρόταση 3.1.30 γνωρίζουμε ότι η ομάδα άλγεβρα $\mathbb{K}G$ είναι μια άλγεβρα Frobenius. Εκμεταλλευόμενοι την Πρόταση 3.1.34, συμπεραίνουμε ότι η ομάδα άλγεβρα $\mathbb{K}G$ είναι ένας Quasi Frobenius δακτύλιος και άρα τα προβολικά $\mathbb{K}G$-πρότυπα ταυτίζονται με τα ενέσιμα $\mathbb{K}G$-πρότυπα. Συνεπώς οι κατηγορίες $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ και $\mathbb{K}G$-$\overline{\mathsf{mod}}$ ταυτίζονται.

Η τριγωνική δομή της ευσταθούς κατηγορίας των προτύπων

Είναι γνωστό ότι η κατηγορία RG-Mod είναι μια αβελιανή κατηγορία. Περνώντας από την κατηγορία των προτύπων στην ευσταθή κατηγορία RG-$\underline{\mathsf{mod}}$, χάνεται η αβελιανή δομή της κατηγορίας και η δομή η οποία αποκτά είναι αυτή της τριγωνισμένης κατηγορίας. Θα αφιερώσουμε αυτό το κομμάτι της υποενότητας στην περιγραφή της τριγωνικής δομής της ευσταθούς κατηγορίας. Το γεγονός ότι η κατηγορία αυτή αποτελεί πράγματι τριγωνισμένη κατηγορία οφείλεται σε ένα βασικό αποτέλεσμα του D. Happel [15].

Παρατήρηση 3.1.39. Στα πλαίσια της διατριβής περιοριζόμαστε στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα $\mathbb{K}$ με χαρακτηριστική έναν πρώτο αριθμό p για τον οποίον ισχύει ότι $p \mid |G|$. Όταν η χαρακτηριστική του σώματος είναι είτε 0 είτε ένας πρώτος αριθμός $p > 0$ με την ιδιότητα $p \nmid |G|$, τότε η άλγεβρα $\mathbb{K}G$ είναι ημιαπλή και η μελέτη της είναι τετριμμένη.

Η ευσταθής κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ είναι μια προσθετική κατηγορία. Συνεπώς για να αποκτήσει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας πρέπει να εφοδιαστεί με έναν translation συναρτητή και με μια κλάση τριγώνων ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα του Ορισμού 3.1.5.

Ορισμός 3.1.40. *Στα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ ορίζουμε τις αντιστοιχίες $\Omega\colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$ και $\Omega^{-1}\colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$, ως εξής:*

$$\Omega M := \mathsf{Ker}(\pi_M), \ \text{όπου } \pi_M\colon P_M \longrightarrow M \text{ ένας επιμορφισμός και } P_M \text{ προβολικό πρότυπο,}$$

και

$$\Omega^{-1} M := \mathsf{Coker}(i_M) \text{ όπου } i_M\colon M \longrightarrow I_M \text{ ένας μονομορφισμός και } I_M \text{ ενέσιμο πρότυπο.}$$

Παρατήρηση 3.1.41. Στη θέση των μορφισμών $\pi_M\colon P_M \longrightarrow M$ και $i_M\colon M \longrightarrow I_M$ του Ορισμού 3.1.40 μπορούμε να θεωρήσουμε το προβολικό κάλυμμα (projective cover) και το injective envelope του προτύπου M. Συνεπώς οι αντιστοιχίες Ω και Ω^{-1} είναι «καλά ορισμένες».

Για δύο πρότυπα $M, N \in \mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ κατασκευάζουμε τις σύντομες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_M} I_M \xrightarrow{c_M} \Omega^{-1}M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_N} I_N \xrightarrow{c_N} \Omega^{-1}N \longrightarrow 0$$

και έστω $f \in \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbb{K}G}(M, N)$. Τότε προκύπτει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "f"'] & I_M \arrow[r, "c_M"] & \Omega^{-1}M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_N"] & I_N \arrow[r, "c_N"] & \Omega^{-1}N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή το πρότυπο I_N είναι ενέσιμο και η απεικόνιση $i_N\colon N \longrightarrow I_N$ είναι μονομορφισμός, προκύπτει ότι υπάρχει ομομορφισμός προτύπων $I_f\colon I_M \longrightarrow I_M$ ώστε το πρώτο τετράγωνο του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "f"'] & I_M \arrow[r, "c_M"] \arrow[d, "I_f"'] & \Omega^{-1}M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_N"] & I_N \arrow[r, "c_N"] & \Omega^{-1}N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Ο μορφισμός
$$\Omega^{-1}f\colon \Omega^{-1}M \longrightarrow \Omega^{-1}N$$
είναι ο μοναδικός επαγόμενος από τον f μορφισμός, ο οποίος καθιστά το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό. Με άλλα λόγια το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "f"] & I_M \arrow[r, "c_M"] \arrow[d, "I_f"] & \Omega^{-1}M \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists!" left, "\Omega^{-1}f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_N"] & I_N \arrow[r, "c_N"] & \Omega^{-1}N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Πρόταση 3.1.42. (Translation Συναρτητής) *Η απεικόνιση*
$$\Omega^{-1}\colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$$
που δρα στα αντικείμενα και τους μορφισμούς όπως ορίσαμε προηγουμένως, είναι συναρτητής, αυτομορφισμός στην $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ και παίζει το ρόλο του translation συναρτητή στην κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [15, Proposition, page 13]. ■

Ακολούθως θα ορίσουμε μια κλάση τριγώνων στην κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$. Θεωρούμε μια σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

στην $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ καθώς και τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_M} I_M \xrightarrow{c_M} \Omega^{-1}M \longrightarrow 0$$

Τότε προκύπτει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] & I_M \arrow[r, "c_M"] & \Omega^{-1}M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

και χάρη στο γεγονός ότι το πρότυπο I_M είναι ενέσιμο, υπάρχει ομομορφισμός προτύπων $\alpha\colon N \longrightarrow I_M$ ώστε το πρώτο τετράγωνο του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] & I_M \arrow[r, "c_M"] & \Omega^{-1}M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Ο μορφισμός $h\colon L \longrightarrow \Omega^{-1}M$ είναι ο μοναδικός επαγόμενος μορφισμός, ο οποίος καθιστά το αντίστοιχο τετράγωνο του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & L \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists!" left, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"] & I_M \arrow[r, "c_M"] & \Omega^{-1}M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Ορισμός 3.1.43. (Τρίγωνα) *Στην κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\text{mod}}$ ορίζουμε την κλάση Δ, η οποία αποτελείται από τρίγωνα της μορφής*

$$M \xrightarrow{\underline{f}} N \xrightarrow{\underline{g}} L \xrightarrow{\underline{h}} \Omega^{-1}M$$

τα οποία προκύπτουν από την κατασκευή που περιγράψαμε παραπάνω και τα ισόμορφά τους.

Παρατήρηση 3.1.44. Οι μορφισμοί $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ του παραπάνω ορισμού αποτελούν κλάσεις ισοδυναμίας των μορφισμών f, g, h στην ευσταθή κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\text{mod}}$.

Ακολούθως διατυπώνουμε το κεντρικό αποτέλεσμα του Happel για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία. Το αποτέλεσμα αυτό πιστοποιεί ότι η ευσταθής κατηγορία των προτύπων εφοδιασμένη με τον translation συναρτητή και την κλάση τριγώνων που ορίσαμε παραπάνω αποτελεί τριγωνισμένη κατηγορία. Το συγκυκριμένο αποτέλεσμα εφαρμόζεται και σε πιο γενικές περιπτώσεις κατηγοριών, όπως αυτές περιγράφονται στο [15].

Θεώρημα 3.1.45. (Happel 1987) *Η τριάδα $(\mathbb{K}G\text{-}\underline{\text{mod}}, \Omega^{-1}, \Delta)$ αποτελεί μια τριγωνισμένη κατηγορία.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [15, Theorem 2.6]. ■

3.2 Τοπικοποίηση Τριγωνισμένων Κατηγοριών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε αναφερθεί αναλυτικά στην έννοια της τοπικοποίησης μιας τυχαίας κατηγορίας, ως προς μια localizing κλάση μορφισμών της. Υποθέτουμε, τώρα, ότι έχουμε μία τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ και μία localizing κλάση μορφισμών S. Για να μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένη πρέπει η localizing κλάση μορφισμών S να ικανοποιεί κάποιες επιπλέον ιδιότητες που θα επιτρέπουν να «συνεργάζεται καλά» με την τριγωνική δομή. Θα πρέπει δηλαδή η S να είναι, όπως λέμε, συμβατή με την τριγωνική δομή. Το σημαντικότερο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι ότι αν η κατηγορία είναι τριγωνισμένη και η localizing κλάση μορφισμών S είναι συμβατή με την τριγωνική δομή, τότε και η τοπικοποίηση ως προς την S είναι επίσης τριγωνισμένη κατηγορία.

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό μιας localizing κλάσης συμβατής με την τριγωνική δομή.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και S μια localizing κλάση μορφισμών για την $\mathcal{T}$. Η S καλείται* **συμβατή με την τριγωνική δομή (compatible with triangulation)** *αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

(LT1) Για κάθε μορφισμό s στην $\mathcal{T}$, ισχύει ότι ο s ανήκει στην localizing κλάση S αν και μόνο αν ο $\Sigma(s)$ ανήκει στην S.

(LT2) Το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(s)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα, το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό και οι μορφισμοί s, t ανήκουν στην κλάση S, μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα μορφισμό μεταξύ τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(s)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $p\colon Z \longrightarrow Z'$ ανήκει στην localizing κλάση S.

Παρατήρηση 3.2.2. Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία με $\Sigma\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ τον translation συναρτητή και S μία localizing κλάση συμβατή με την τριγωνική δομή.

1. Θεωρούμε $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}[S^{-1}]$ τον συναρτητή τοπικοποίησης. Τότε για κάθε s στην κλάση μορφισμών S, ο μορφισμός $(Q \circ \Sigma)(s) = Q(\Sigma(s))$ είναι ισομορφισμός. Άρα ο συναρτητής $Q \circ \Sigma$ αναλύεται μέσω της κατηγορίας $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{T}[S^{-1}] \arrow[r, "\Sigma_S"] & \mathcal{T}[S^{-1}] \end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής Σ_S είναι ένας αυτομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Για απλοποίηση του συμβολισμού, στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε και αυτόν τον συναρτητή με Σ.

2. Έστω ότι

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι ένα τρίγωνο στην κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Το τρίγωνο αυτό είναι τρίγωνο στην κλάση τριγώνων της $\mathcal{T}[S^{-1}]$, αν υπάρχει τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr] & & V \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$ και ισομορφισμός τριγώνων

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, το οποίο συνοψίζεται στο παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία localizing κλάση μορφισμών συμβατή με την τριγωνική δομή. Τότε η κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι τριγωνισμένη και ο συναρτητής τοπικοποίησης, $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}[S^{-1}]$, είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία localizing κλάση μορφισμών συμβατή με την τριγωνική δομή. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι και αυτή τριγωνισμένη. Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Τότε ο μορφισμός αυτός, μπορεί να αναπαρασταθεί με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός s ανήκει στην κλάση S. Αφού η κατηγορία $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένη και $g\colon U \longrightarrow Y$ είναι μορφισμός στην $\mathcal{T}$, υπάρχει τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "g"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό $g\colon U \longrightarrow Y$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "Q(s)"] & Y \arrow[r, "Q(v)"] \arrow[d, "1_Y"] & V \arrow[r, "Q(w)"] \arrow[d, "1_V"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(Q(s))"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "Q(v)"'] & V \arrow[r, "\alpha"'] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

όπου $\alpha := \Sigma(Q(s)) \circ Q(w)$. Επειδή οι μορφισμοί $1_Y, 1_V$ είναι ισομορφισμοί, από το Λήμμα 3.1.17, προκύπτει ότι ο μορφισμός $Q(s)$ είναι επίσης ισομορφισμός και επομένως το διάγραμμα είναι ένας ισομορφισμός τριγώνων. Άρα το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "Q(v)"'] \end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{C}[S^{-1}]$ με βάση τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ και συνεπώς ικανοποιείται το αξίωμα (TR1) του Ορισμού 3.1.5. Έστω

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Τότε υπάρχει τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "u"] & & V \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

και ισομορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}$. Εφόσον το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "u"] & & V \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{T}$, έχουμε ότι και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma(U) \arrow[dl, "-\Sigma(u)"', "{[1]}"] & \\
V \arrow[rr, "v"] & & W \arrow[ul, "w"']
\end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Θεωρούμε το μορφισμό τριγώνων

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma U \arrow[r, "-\Sigma(u)"] \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] & \Sigma V \arrow[d, "\Sigma(\beta)"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma(f)"'] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

ο οποίος είναι ισομορφισμός τριγώνων. Χάρη σε αυτό συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma(X) \arrow[dl, "-\Sigma(f)"', "{[1]}"] & \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Όμοια δείχνουμε πως αν

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma(X) \arrow[dl, "-\Sigma(f)"', "{[1]}"] & \\
Y \arrow[rr, "g"] & & Z \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$, τότε και το

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Επομένως δείξαμε ότι ικανοποιείται το αξιώμα (TR2) του Ορισμού 3.1.5. Ακολούθως έστω

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "h"', "{[1]}"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
& Z' \arrow[dl, "h'"', "{[1]}"] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[ul, "g'"']
\end{tikzcd}$$

δύο τρίγωνα στην $\mathcal{T}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}[S^{-1}]$ προκύπτουν τα τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "Q(h)"', "{[1]}"] & \\ X \arrow[rr, "Q(f)"] & & Y \arrow[ul, "Q(g)"'] \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "Q(h')"', "{[1]}"] & \\ X' \arrow[rr, "Q(f')"] & & Y' \arrow[ul, "Q(g')"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r, "Q(h)"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\ X' \arrow[r, "Q(f')"'] & Y' \arrow[r, "Q(g')"'] & Z' \arrow[r, "Q(h')"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

στο οποίο οι γραμμές είναι τρίγωνα και το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Από την μεταθετικότητα προκύπτει η ισότητα

$$\psi \circ Q(f) = Q(f') \circ \phi \tag{3.1}$$

Εφόσον οι μορφισμοί ϕ, ψ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$, μπορούν να αναπαρασταθούν με τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\ X & & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "v"] & \\ Y & & Y' \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας τους μορφισμούς $f \circ s\colon U \longrightarrow Y$ και $t\colon V \longrightarrow Y$ έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "t", "\sim"'] \\ U \arrow[r, "f\circ s"'] & Y \end{tikzcd}$$

όπου $t \in S$. Αφού η κλάση μορφισμών S είναι localizing κλάση, υπάρχει αντικείμενο U' και μορφισμοί $u' \colon U' \longrightarrow V$, $t' \colon U' \longrightarrow U$ ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, dotted, "u'"] \arrow[d, dotted, "t'"', "\sim"] & V \arrow[d, "t", "\sim"'] \\
U \arrow[r, "f\circ s"'] & Y
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και ο μορφισμός t' να ανήκει στην κλάση S. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\
X & U' \arrow[u, "t'"'] \arrow[d, "1_{U'}"] & X' \\
& U' \arrow[ul, "s\circ t'", "\sim"'] \arrow[ur, "u\circ t'"'] &
\end{tikzcd}$$

Προφανώς το διάγραμμα είναι μεταθετικό και ο μορφισμός $s \circ t'$ ανήκει στην κλάση S. Άρα τα roofs είναι ισοδύναμα και ο μορφισμός ϕ μπορεί να αναπαρασταθεί και με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& U' \arrow[dl, "s\circ t'"', "\sim"] \arrow[dr, "u\circ t'"] & \\
X & & X'
\end{tikzcd}$$

Άρα έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U' \arrow[u, "s\circ t'", "\sim"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "u\circ t'"'] & V \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

όπου $f \circ s \circ t' = u' \circ t$, δηλαδή το πάνω τετράγωνο είναι μεταθετικό στην κατηγορία $\mathcal{T}$. Αν ονομάσουμε ξανά τα αντικείμενα και τους μορφισμούς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εξ αρχής είχαμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

στο οποίο το πάνω τετράγωνο είναι μεταθετικό στην $\mathcal{T}$. Από τον τρόπο που ορίζονται οι μορφισμοί στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}[S^{-1}]$ έχουμε ότι $\phi = Q(u) \circ Q(s)^{-1}$ και $\psi = Q(v) \circ Q(t)^{-1}$ ενω χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1) έχουμε ότι

$$Q(v) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(f) = Q(f') \circ Q(u) \circ Q(s)^{-1}$$

Συνθέτοντας από δεξιά με τον μορφισμό $Q(s)$, προκύπτει:

$$Q(v) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(f) \circ Q(s) = Q(f') \circ Q(u)$$

Επιπλέον

$$Q(f) \circ Q(s) = Q(f \circ s) = Q(t \circ u') = Q(t) \circ Q(u')$$

Άρα

$$Q(v) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(f) \circ Q(s) = Q(v) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(t) \circ Q(u') = Q(v) \circ Q(u')$$

και τελικά

$$Q(v) \circ Q(u') = Q(f') \circ Q(u)$$

Συνεπώς το κάτω τετράγωνο του τελευταίου διαγράμματος μετατίθεται στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ και υπάρχει μορφισμός $r \colon U'' \longrightarrow U$, $r \in S$ έτσι ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "1_U"', "\sim"] \arrow[dr, "v\circ u'"] & \\
U & U'' \arrow[u, "r", "\sim"'] \arrow[d, "r"', "\sim"] & Y' \\
 & U \arrow[ul, "1_U", "\sim"'] \arrow[ur, "f'\circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $v \circ u' \circ r = f' \circ u \circ r$ Επίσης το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\
X & U'' \arrow[u, "r", "\sim"'] \arrow[d, "1_{U''}"', "\sim"] & X' \\
 & U'' \arrow[ul, "s\circ r", "\sim"'] \arrow[ur, "u\circ r"'] &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στην $\mathcal{T}$ και άρα ο μορφισμός ϕ παριστάνεται από το roof:

$$\begin{tikzcd}
 & U'' \arrow[dl, "s\circ r"', "\sim"] \arrow[dr, "u\circ r"] & \\
X & & X'
\end{tikzcd}$$

Επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το κάτω τετράγωνο του διαγράμματος (3.2) και να προκύψει το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
U'' \arrow[u, "s\circ r", "\sim"'] \arrow[r, "u'\circ r"] \arrow[d, "u\circ r"'] & V \arrow[u, "t"', "\sim"] \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

στο οποίο και το κάτω τετράγωνο είναι μεταθετικό. Ονομάζοντας ξανά τα αντικείμενα και τους μορφισμούς προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "\sim", "t"'] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

στην κατηγορία $\mathcal{T}$. Έστω

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ U \arrow[rr, "u'"] & & V \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$ με βάση τον μορφισμό $u' \colon U \longrightarrow V$. Τότε το διάγραμμα (3.3) μπορεί να θεωρηθεί σαν μέρος του μεγαλύτερου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \\ U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[r] & \Sigma U \arrow[u, "\sim", "\Sigma(s)"'] \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα στην $\mathcal{T}$. Από τον Ορισμό 3.2.1 προκύπτει ότι υπάρχει μορφισμός $p \colon W \longrightarrow Z$ στην κλάση S, ο οποίος να συμπληρώνει το πάνω μέρος του παραπάνω διαγράμματος σε μορφισμό τριγώνων. Επίσης από το αξίωμα (TR3) του Ορισμού 3.1.5, υπάρχει μορφισμός $w \colon W \longrightarrow Z'$ που συμπληρώνει και το κάτω μέρος του διαγράμματος σε μορφισμό τριγώνων στην $\mathcal{T}$. Συνεπώς προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \\ U \arrow[u, "s", "\sim"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t", "\sim"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & W \arrow[u, "\sim", "p"'] \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \Sigma U \arrow[u, "\sim", "\Sigma(s)"'] \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & \Sigma X' \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

στο οποίο όλα τα τετράγωνα είναι μεταθετικά. Ας υποθέσουμε ότι $\chi \colon Z \longrightarrow Z'$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ που παριστάνεται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p"', "\sim"] \arrow[dr, "w"] & \\ Z & & Z' \end{tikzcd}$$

Τότε το διάγραμμα (3.4) μπορεί να θεωρηθεί ως μορφισμός:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "\chi"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\
X' \arrow[r, "Q(f')"'] & Y' \arrow[r, "Q(g')"'] & Z' \arrow[r, "Q(h')"'] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

μεταξύ τριγώνων στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Επομένως δείξαμε ότι ισχύει και το αξίωμα (TR3) στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Μένει να δείξουμε ότι ικανοποιείται και το αξίωμα (TR4) του Ορισμού 3.1.5. Έστω $\phi\colon X \longrightarrow Y$ ο μορφισμός που παριστάνεται από το roof:

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

και $\psi\colon Y \longrightarrow Z$ ο μορφισμός που παριστάνεται από το roof:

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}$$

Η σύνθεσή τους παριστάνεται από το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, dotted, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "f'"] & & \\
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

δηλαδή από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "s\circ s'"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f'"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & W \arrow[u, "s'", "\sim"'] \arrow[d, "1_W"] & Y \\
& W \arrow[ul, "\sim", "s\circ s'"'] \arrow[ur, "f\circ s'"'] &
\end{tikzcd}$$

το οποίο προφανώς είναι μεταθετικό και $s \circ s' \in S$. Επομένως τα roofs είναι ισοδύναμα και ο μορφισμός ϕ μπορεί να αναπαρασταθεί και από το roof:

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "s\circ s'"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f'"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}$$

Ονομάζοντας ξανά τα αντικείμενα και τους μορφισμούς μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

1. O $\phi\colon X \longrightarrow Y$ παριστάνεται από το roof:

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
$$

2. O $\psi\colon Y \longrightarrow Z$ παριστάνεται από το roof:

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

3. O $\chi := \psi \circ \phi\colon X \longrightarrow Z$ παριστάνεται από το:

$$
\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, dotted, "1_U"', "\sim"] \arrow[dr, dotted, "f'"] & & \\
 & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή το roof:

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ f'"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}
$$

Θέτουμε $h := g \circ f'$ και $W := Z$. Επειδή η $\mathcal{T}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία, μπορούμε να κατασκευάσουμε το οκταεδρικό διάγραμμα, που καθορίζεται από τους μορφισμούς f', g, h:

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_U"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & W' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(1_U)"] \\
U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1_W"'] & V' \arrow[r] \arrow[d, "v'"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(f')"] \\
V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] \arrow[d, "1_{U'}"] & \Sigma V \arrow[d] \\
W' \arrow[r, "u'"] & V' \arrow[r, "v'"] & U' \arrow[r, "w"] & \Sigma W'
\end{tikzcd}
$$

Η εικόνα του οκτάεδρου στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι ένα διάγραμμα της ίδιας μορφής. Θεωρούμε το αρχικό τμήμα του οκτάεδρου:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\
X \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Απομονώνουμε το πάνω μέρος του διαγράμματος (3.5), δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Επίσης θεωρούμε τον μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "1_U"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"] & W' \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(1_U)"] \\
U \arrow[r, "Q(h)"] & W \arrow[r] & V' \arrow[r] & \Sigma U
\end{tikzcd}$$

ο οποίος παρατηρούμε ότι αποτελεί τις δύο πρώτες γραμμές του οκταεδρικού διαγράμματος στην $\mathcal{T}$, μετά την εφαρμογή του συναρτητή τοπικοποίησης Q. Ενώνοντας τα δύο τελευταία διαγράμματα προκύπτει το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \\
U \arrow[r, "Q(f')"] \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[d, "1_U"'] & V \arrow[r] \arrow[u, "Q(t)"'] \arrow[d, "Q(g)"] & W' \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"] & \Sigma U \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"'] \arrow[d, "\Sigma(1_U)"] \\
U \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(s)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1_W"] & V' \arrow[r] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(Q(s))"] \\
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Όπως έχουμε δείξει σε προηγούμενο στάδιο της απόδειξης, το αξίωμα (TR3) ικανοποιείται και στην κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Επομένως υπάρχουν μορφισμοί $\alpha\colon W' \longrightarrow Z'$ και $\beta\colon V' \longrightarrow Y'$ έτσι ώστε το παραπάνω διάγραμμα να συμπληρώνεται στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X \\
U \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[r, "Q(f')"] \arrow[d, "1_U"'] & V \arrow[u, "Q(t)"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(g)"] & W' \arrow[u, dotted, "\alpha"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(u')"] & \Sigma U \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"'] \arrow[d, "\Sigma(1_U)"] \\
U \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(s)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1_W"] & V' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\beta"] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(Q(s))"] \\
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$, όπου όλες οι γραμμές είναι μορφισμοί τριγώνων. Όμως ξέρουμε ότι το αποτέλεσμα του Λήμματος 3.1.17 δεν εξαρτάται από το οκταεδρικό αξιώμα. Επομένως, εφόσον οι μορφισμοί $Q(s)$, $Q(t)$, 1_W είναι ισομορφισμοί, οι μορφισμοί α και β είναι επίσης ισομορφισμοί στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Όμοια αν πάρουμε το κάτω μέρος του διαγράμματος (3.5), δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

μπορούμε να το επεκτείνουμε στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \\
U \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(f')"'] & W \arrow[u, "1_W"'] \arrow[r] \arrow[d, "1_W"] & V' \arrow[u, "\beta"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(v')"] & \Sigma U \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"'] \arrow[d, "\Sigma(f')"] \\
V \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "Q(t)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1_W"] & U' \arrow[r] & \Sigma V \arrow[d, "\Sigma(Q(t))"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας ανάλογο επιχείρημα με πριν, υπάρχει μορφισμός $\gamma\colon U' \longrightarrow X'$ που συμπληρώνει το παραπάνω διάγραμμα στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\chi"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & \Sigma X \\
U \arrow[u, "Q(s)"] \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "Q(f')"'] & W \arrow[u, "1_W"'] \arrow[r] \arrow[d, "1_W"] & V' \arrow[u, "\beta"'] \arrow[r] \arrow[d, "Q(v')"] & \Sigma U \arrow[u, "\Sigma(Q(s))"'] \arrow[d, "\Sigma(f')"] \\
V \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "Q(t)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1_W"] & U' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & \Sigma V \arrow[d, "\Sigma(Q(t))"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

και ο γ να είναι ισομορφισμός. Θέτοντας

$$u := \beta \circ Q(u') \circ \alpha^{-1}, \ v := \gamma \circ Q(v') \circ \beta^{-1} \ \text{ και } \ w := \Sigma(\alpha) \circ Q(w') \circ \gamma^{-1}$$

προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "Q(u')"] \arrow[d, "\alpha"'] & V' \arrow[r, "Q(v')"] \arrow[d, "\beta"'] & U' \arrow[r, "Q(w')"] \arrow[d, "\gamma"'] & \Sigma W' \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' \arrow[r, "w"] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

και συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα

$$Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} \Sigma Z'$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Συνεπώς προκύπτει το οκταεδρικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(\phi)"] \\
Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "1_{X'}"] & \Sigma Y \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, "u"'] & Y' \arrow[r, "v"'] & X' \arrow[r, "w"'] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αξίωμα (TR4) του Ορισμού 3.1.5 ισχύει και στην κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Τελικά αποδείξαμε ότι η κατηγορία $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι τριγωνισμένη. Απομένει να δείξουμε ότι ο συναρτητής $Q : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι ακριβής. Έχουμε δει ότι ο συναρτητής $Q \circ \Sigma$ αναλύεται μέσω της $\mathcal{T}[S^{-1}]$ και έχουμε ότι, $Q \circ \Sigma = \Sigma \circ Q$. Συνεπώς ο Q είναι βαθμωτός συναρτητής. Έστω

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] & \\ X \arrow[rr, "f"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή Q προκύπτει το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "Q(h)"'] & \\ X \arrow[rr, "Q(f)"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y \arrow[ul, "Q(g)"'] \end{tikzcd}$$

και έχουμε τον ισομορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "1_Z"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(1_X)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Επομένως το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "Q(h)"'] & \\ X \arrow[rr, "Q(f)"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y \arrow[ul, "Q(g)"'] \end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο στην $\mathcal{T}[S^{-1}]$ και ο συναρτητής Q απεικονίζει τρίγωνα της κατηγορίας $\mathcal{T}$ σε τρίγωνα της κατηγορίας $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Άρα ο συναρτητής $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι ακριβής. ∎

Στο προηγούμενο κεφάλαιο και ειδικότερα στο Θεώρημα 2.3.7 αποδείξαμε ότι η τοπικοποίηση μιας προσθετικής κατηγορίας είναι επίσης προσθετική κατηγορία και είναι μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για τις τριγωνισμένες κατηγορίες. Το γεγονός ότι αν ξεκινήσουμε από μια τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{T}$ και η τοπικοποίηση $\mathcal{T}[S^{-1}]$ είναι τριγωνισμένη, το έχουμε αποδείξει στο προηγούμενο θεώρημα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η τοπικοποίηση μιας τριγωνισμένης κατηγορίας είναι και αυτή μοναδική με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών και η ισοδυναμία κατηγοριών που εξασφαλίζει αυτό το αποτέλεσμα είναι ακριβής συναρτητής.

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ δύο τριγωνισμένες κατηγορίες και $F\colon \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ ένας ακριβής συναρτητής. Έστω, επίσης, S μια localizing κλάση της $\mathcal{T}_1$ συμβατή με την τριγωνική δομή έτσι ώστε αν $s \in S$, ο μορφισμός $F(s)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{T}_2$. Τότε υπάρχει μοναδικός συναρτητής $F_S\colon \mathcal{T}_1[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{T}_2$ ώστε το διαγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_1 \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{T}_1[S^{-1}] \arrow[r, "F_S"'] & \mathcal{T}_2 \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Ο συναρτητής $F_S\colon \mathcal{T}_1[S^{-1}] \longrightarrow \mathcal{T}_2$ είναι ακριβής.

Απόδειξη. Η ύπαρξη ενός μοναδικού προσθετικού συναρτητή F_S έτσι ώστε $F = F_S \circ Q$, εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 2.3.7. Επομένως το μόνο που απομένει να αποδείξουμε είναι ότι ο συναρτητής F_S είναι και ακριβής. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\Sigma \circ F_S \circ Q = \Sigma \circ F \tag{3.6}$$

Επίσης εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι ο συναρτητής Q είναι βαθμωτός (δηλαδή $\Sigma \circ Q \simeq Q \circ \Sigma$), αλλά και την υπόθεση έχουμε ότι:

$$F_S \circ \Sigma \circ Q = F_S \circ Q \circ \Sigma = F \circ \Sigma \tag{3.7}$$

Όμως ο συναρτητής F είναι ακριβής και άρα βαθμωτός. Συνεπώς $\Sigma \circ F \simeq F \circ \Sigma$ και από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\Sigma \circ F_S \circ Q \simeq F_S \circ \Sigma \circ Q$$

Ας είναι $\eta \colon F \circ \Sigma \longrightarrow \Sigma \circ F$ ο φυσικός ισομορφισμός ανάμεσα στους συναρτητές $F \circ \Sigma$, $\Sigma \circ F$. Τότε για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{T}_1$, ο μορφισμός:

$$\eta_X : (F \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ F)(X)$$

είναι ισομορφισμός, ενώ για κάθε μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathcal{T}_1$, το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} (F \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "(F\circ\Sigma)(f)"'] & (\Sigma \circ F)(X) \arrow[d, "(\Sigma\circ F)(f)"] \\ (F \circ \Sigma)(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & (\Sigma \circ F)(Y) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$(\Sigma \circ F)(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ (F \circ \Sigma)(f) \tag{3.8}$$

Τα αντικείμενα της $\mathcal{T}_1[S^{-1}]$ ταυτίζονται με τα αντικείμενα της $\mathcal{T}_1$, άρα για κάθε αντικείμενο X έχουμε τον ισομορφισμό:

$$\eta_X \colon (F_S \circ \Sigma)(X) \longrightarrow (\Sigma \circ F_S)(X)$$

Έστω, τώρα, ένας μορφισμός $\phi \colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}_1[S^{-1}]$. Υποθέτουμε ότι ο ϕ παριστάνεται με το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Επειδή οι μορφισμοί s, g είναι μορφισμοί στην $\mathcal{T}_1$, εκμεταλλευόμενοι την ισότητα (3.8), συμπεραίνουμε ότι:

$$(\Sigma \circ F)(s) \circ \eta_U = \eta_X \circ (F \circ \Sigma)(s)$$

και

$$(\Sigma \circ F)(g) \circ \eta_U = \eta_Y \circ (F \circ \Sigma)(g)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.6), (3.7) προκύπτει άμεσα ότι:

$$(\Sigma \circ F_S)(Q(s)) \circ \eta_U = \eta_X \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s))$$

Όμως ο μορφισμός $Q(s)$ είναι ισομορφισμός. Συνθέτοντας με τους μορφισμούς $(F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1})$, $(\Sigma \circ F_S)(Q(s)^{-1})$ από δεξιά και αριστερά αντίστοιχα, αποκτούμε την ισότητα:

$$\eta_U \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) = (\Sigma \circ F_S)(Q(s)^{-1}) \circ \eta_X$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(\phi) &= \eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(g) \circ Q(s)^{-1}) \\
&= \eta_Y \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(g)) \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) \\
&= (\Sigma \circ F_S)(Q(g)) \circ \eta_U \circ (F_S \circ \Sigma)(Q(s)^{-1}) \\
&= (\Sigma \circ F_S)(Q(g)) \circ (\Sigma \circ F_S)(Q(s)^{-1}) \circ \eta_X \\
&= (\Sigma \circ F_S)(Q(g) \circ Q(s)^{-1}) \circ \eta_X \\
&= (\Sigma \circ F_S)(\phi) \circ \eta_X
\end{aligned}$$

Συνεπώς το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
(F_S \circ \Sigma)(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "(F_S\circ\Sigma)(f)"'] & (\Sigma \circ F_S)(X) \arrow[d, "(\Sigma\circ F_S)(f)"] \\
(F_S \circ \Sigma)(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & (\Sigma \circ F_S)(Y)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\Sigma \circ F_S \simeq F_S \circ \Sigma$, δηλαδή ο συναρτητής F_S είναι βαθμωτός. Για να αποδείξουμε ότι ο συναρτητής F_S είναι ακριβής, μένει να αποδείξουμε ότι απεικονίζει τρίγωνα σε τρίγωνα. Έστω

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{T}_1[S^{-1}]$. Από τον τρόπο που έχουμε ορίσει τα τρίγωνα στην τοπικοποίηση, υπάρχει τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
U \arrow[rr] & & V \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}_1$ και ένας ισομορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma(\alpha)"] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{T}_1[S^{-1}]$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F_S στον παραπάνω ισομορφισμό τριγώνων, προκύπτει το μεταθετικό διάγραμα:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(\alpha)"'] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(\beta)"'] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(\gamma)"'] & F(\Sigma U) \arrow[d, "F_S(\Sigma(\alpha))"] \\
F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \arrow[r] & F_S(\Sigma X)
\end{tikzcd}$$

Όμως οι συναρτητές F, F_S είναι βαθμωτοί. Άρα $F(\Sigma U) \simeq \Sigma(F(U))$ και $F_S(\Sigma X) \simeq \Sigma(F_S(X))$.

Άρα έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(\alpha)"'] & F(V) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(\beta)"'] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, "F_S(\gamma)"'] & \Sigma(F(U)) \arrow[d, "\Sigma(F_S(\alpha))"] \\
F_S(X) \arrow[r] & F_S(Y) \arrow[r] & F_S(Z) \arrow[r] & \Sigma(F_S(X))
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι ισομορφισμός τριγώνων στην $\mathcal{T}_2$. Αφού ο συναρτητής F είναι ακριβής, η πρώτη γραμμή είναι τρίγωνο. Επειδή η $\mathcal{T}_2$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία, από το αξίωμα (TR1a) του Ορισμού 3.1.5 το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& F_S(Z) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
F_S(X) \arrow[rr] & & F_S(Y) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

είναι επίσης τρίγωνο. Συνεπώς ο συναρτητής F_S απεικονίζει τρίγωνα της $\mathcal{T}_1[S^{-1}]$ σε τρίγωνα της $\mathcal{T}_2$. Τελικά ο συναρτητής F_S είναι ένας ακριβής συναρτητής. ■

3.2.1 Τοπικοποίηση Bousfield

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε μία ειδικού τύπου τοπικοποίηση μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$, η οποία είναι γνωστή ως τοπικοποίηση Bousfield και αναφέρεται στην ύπαρξη συζυγούς συναρτητή για τον συναρτητή τοπικοποίησης. Η τοπικοποίηση με την έννοια του Bousfield είναι εξαιρετικά σημαντική αφού μας επιτρέπει να «δούμε» την τοπικοποίηση ως πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αρθούν ορισμένα συνολοθεωρητικά προβλήματα που αφορούν την ύπαρξη της τοπικοποίησης. Η κύρια πηγή για την ανάπτυξη της θεωρίας της τοπικοποίησης με την έννοια του Bousfield είναι το κείμενο [19] του A. Neeman.

Θεωρούμε μία thick τριγωνισμένη υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ της $\mathcal{T}$ και για κάθε δύο αντικείμενα X, Y στην $\mathcal{T}$ κατασκευάζουμε την κλάση μορφισμών:

$$S_{\mathfrak{X}} = \{f : X \longrightarrow Y \mid \mathsf{cone}(f) \in \mathfrak{X}\}$$

<u>**Συμβολισμός**</u>: Από εδώ και στο εξής, κυριώς για να συμβαδίζουμε με την βιβλιογραφία, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$ την τοπικοποίηση της $\mathcal{T}$ ως προς την κλάση μορφισμών $S_{\mathfrak{X}}$. Με άλλα λόγια θα γράφουμε $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$ αντί για το μέχρι τώρα γνωστό συμβολισμό $\mathcal{T}[S_{\mathfrak{X}^{-1}}]$. Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στον Verdier.

Ορισμός 3.2.5. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{X}$ μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Ο* **συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield υπάρχει** *για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$ αν υπάρχει δεξιός συζυγής συναρτητής για τον συναρτητή τοπικοποίησης*

$$Q : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$$

Ο συζυγής συναρτητής καλείται **συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield** *και θα τον συμβολίζουμε $\tilde{Q} : \mathcal{T}/\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{T}$.*

Παρατήρηση 3.2.6.
1. Τα αντικείμενα της τοπικοποίησης $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$ είναι ίδια με τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{T}$.
2. Ο συναρτησής $\tilde{Q} : \mathcal{T}/\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι <u>δεξιός συζυγής</u> του συναρτητή $Q : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε την ακόλουθη Πρόταση, που αφορά μορφισμούς.

Πρόταση 3.2.7. *Έστω ότι υπάρχει συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$. Τότε για δύο αντικείμενα $X \in \mathfrak{X}$, $Y \in \mathcal{T}$ όλοι οι μορφισμοί $X \longrightarrow \tilde{Q}(Y)$ είναι οι μηδενικοί.*

Απόδειξη. Έστω $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$ ο συναρτητής και $\tilde{Q}\colon \mathcal{T}/\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{T}$ ο συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield. Για αντικείμενα $X \in \mathfrak{X}$ και $Y \in \mathcal{T}$ της $\mathcal{T}$, λόγω της συζυγίας έχουμε ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \tilde{Q}(Y)) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Y)$$

Επειδή το αντικείμενο X ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ ισχύει ότι $Q(X) = 0$. Συνεπώς το σύνολο μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \tilde{Q}(Y))$ περιλαμβάνει μόνον τον μηδενικό μορφισμό. ∎

Στη συνέχεια για μία κλάση αντικειμένων S της $\mathcal{T}$ θα διατυπώσουμε τις έννοιες των S-τοπικών και S-συντοπικών αντικειμένων της $\mathcal{T}$.

Ορισμός 3.2.8. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και S μία κλάση αντικειμένων της $\mathcal{T}$.*

1. *Ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$ καλείται S-**τοπικό** (S-**local**) αν για κάθε αντικείμενο $Y \in S$ οι όλοι οι μορφισμοί $X \longrightarrow Y$ είναι μηδενικοί.*

2. *Ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$ καλείται S-**συντοπικό** (S-**colocal**) αν για κάθε αντικείμενο $Y \in S$ οι όλοι οι μορφισμοί $Y \longrightarrow X$ είναι μηδενικοί.*

Παρατήρηση 3.2.9. Εάν αντί για μία κλάση αντικειμένων S, έχουμε μία thick υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ της $\mathcal{T}$ και ο συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield υπάρχει για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$, τότε για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$, το αντικείμενο $\tilde{Q}(X)$ είναι πάντα $\mathfrak{X}-$τοπικό, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.7.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ένα λήμμα που θα φανεί χρήσιμο στη συνέχεια.

Λήμμα 3.2.10. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία, $\mathfrak{X}$ μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ δύο παράλληλοι μορφισμοί μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathcal{T}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *$Q(f) = Q(g)$, όπου $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$ είναι ο συναρτητής τοπικοποίησης.*

2. *Υπάρχει μορφισμός $\alpha\colon W \longrightarrow X$ όπου $\alpha \in S_{\mathfrak{X}}$, τέτοιος ώστε $f \circ \alpha = g \circ \alpha$.*

3. *Ο μορφισμός $f - g\colon X \longrightarrow Y$ αναλύεται μέσω του*

$$X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$$

όπου $Z \in \mathfrak{X}$.

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η πρώτη συνθήκη είναι ισοδύναμη με τη δεύτερη συνθήκη. Οι μορφισμοί $Q(f), Q(g)$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν τα αριστερά roofs:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα. Δηλαδή, από τον Ορισμό 2.1.10, αν και μόνον αν υπάρχει αντικείμενο W στην $\mathcal{T}$ και μορφισμοί $\alpha_1\colon W \longrightarrow X$, $\alpha_2\colon W \longrightarrow X$ ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & W \arrow[u, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\alpha_2"] & Y \\ & X \arrow[ul, "1_X", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και $\alpha_1, \alpha_2 \in S_{\mathfrak{X}}$. Από την μεταθετικότητα του διαγράμματος προκύπτει ότι $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ και $f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_2$. Συνεπώς $f \circ \alpha = g \circ \alpha$ και έχουμε αποδείξει την ισοδυναμία των πρώτων δύο συνθηκών. Μένει να αποδείξουμε ότι η δεύτερη και η τρίτη συνθήκη είναι ισοδύναμες. Η δεύτερη συνθήκη ισχύει αν και μόνον αν για κάποιον μορφισμό $\alpha\colon W \longrightarrow X$ στην κλάση $S_{\mathfrak{X}}$ ισχύει ότι $(f - g) \circ \alpha = 0$. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$W \xrightarrow{\alpha} X \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(W)$$

Εφαρμόζουμε τον συνομολογικό συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{-}, Y)$ και προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(W), X) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\alpha, Y)} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y)$$

Τότε ισχύει $\alpha^\star(f - g) = 0$ αν και μόνον αν $(f - g) \circ \alpha = 0$. Το τελευταίο ισχύει αν και μόνον αν ο μορφισμός $f - g\colon X \longrightarrow Y$ αναλύεται μέσω του αντικειμένου Z. Όμως ο μορφισμός α ανήκει στην κλάση $S_{\mathfrak{X}}$ αν και μόνον αν το αντικείμενο Z ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Συνεπώς υπάρχει μορφισμός $\alpha\colon W \longrightarrow X$ στην κλάση $S_{\mathfrak{X}}$ αν και μόνον αν ο μορφισμός $f - g$ αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου $Z \in \mathfrak{X}$. ∎

Πρόταση 3.2.11. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{X}$ μία τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι το Y είναι ένα $\mathfrak{X}$-τοπικό αντικείμενο. Τότε η απεικόνιση:*

$$\Phi\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(Y))$$

είναι ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο $X \in \mathfrak{X}$.

Απόδειξη. Ένας μορφισμός $Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$ είναι κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο ένα αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός s ανήκει στην κλάση μορφισμών $S_{\mathfrak{X}}$. Για να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση Φ είναι «επί», αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μορφισμός $X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{T}$, τέτοιος ώστε να είναι ισοδύναμος με τον αντιπρόσωπο

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Γνωρίζουμε ότι ο μορφισμός $s\colon Z \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση μορφισμών $S_{\mathfrak{X}}$. Συνεπώς στο τρίγωνο:

$$W \longrightarrow Z \xrightarrow{s} X \longrightarrow \Sigma(W)$$

το αντικείμενο W ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Από την Πρόταση 3.1.16 γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{-}, Y)$ είναι συνομολογικός συναρτητής. Εφαρμόζοντάς τον στο παραπάνω τρίγωνο προκύπτει η ακριβής ακολουθία:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(W), X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(s, Y)} \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y)$$

Επειδή τα αντικείμενα $W, \Sigma(W)$ είναι αντικείμενα της υποκατηγορίας $\mathfrak{X}$ και το αντικείμενο Y είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό, προκύπτει ότι οι αβελιανές ομάδες $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y), \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma(W), Y)$ περιέχουν μόνο τον μηδενικό μορφισμό. Άρα ο μορφισμός $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(s, Y)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, Y)$ είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων. Συνεπώς για κάθε μορφισμό $g\colon Z \longrightarrow Y$ υπάρχει μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(s, Y)(h) = g$. Δηλαδή

$$s^{\star}(h) = g \Longrightarrow h \circ s = g$$

Άρα το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
Z \arrow[r, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και επάγεται ο μορφισμός $X \longrightarrow Y$ στην κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Επομένως η απεικόνιση Φ είναι «επί». Έστω, τώρα, μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ που ανήκει στον πυρήνα του ομομορφισμού Φ, δηλαδή ο μορφισμός $\Phi(f)$ είναι ο μηδενικός στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$. Από το Λήμμα 3.2.10 προκύπτει ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου Z της υποκατηγορίας $\mathfrak{X}$, σύμφωνα με το διάγραμμα:

$$X \xrightarrow{f} Z \longrightarrow Y$$

Επειδή το αντικείμενο Y είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό και το αντικείμενο Z ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$, έπεται ότι ο μορφισμός $Z \longrightarrow Y$ είναι ο μηδενικός. Επομένως και η σύνθεση:

$$X \xrightarrow{f} Z \longrightarrow Y$$

είναι ο μηδενικός μορφισμός και έτσι η απεικόνιση Φ είναι «1-1». ■

Ο συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield, όταν υπάρχει, είναι συζυγής του συναρτητή τοπικοποίησης. Στη θεωρία των συζυγών ζευγών εμφανίζονται οι έννοιες της μονάδας και της συνμονάδας που ορίστηκαν στον Ορισμό 1.2.20. Θα αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι στην τοπικοποίηση με την έννοια του Bousfield η μονάδα είναι φυσικός ισομορφισμός στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$.

Λήμμα 3.2.12. *Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$ μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ τέτοια ώστε ο συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield να υπάρχει. Τότε για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$ η απεικόνιση*

$$\varepsilon_X\colon X \longrightarrow \tilde{Q}(X)$$

είναι ισομορφσιμός στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield υπάρχει για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$. Επειδή το ζεύγος συναρτητών $(Q, \tilde{Q})$ είναι συζυγές, προκύπτει ότι υπάρχει η μονάδα:

$$\varepsilon\colon 1_{\mathcal{T}} \longrightarrow \tilde{Q} \circ Q$$

Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$ επάγεται μορφισμός $\varepsilon_X : X \longrightarrow (\tilde{Q} \circ Q)(X)$ στην $\mathcal{T}$. Θα αποδείξουμε ότι είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός

$$Q(\varepsilon_X)\colon Q(X) \longrightarrow (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(X)$$

είναι ισομορφισμός. Θεωρούμε, επίσης, την συνμονάδα

$$\eta\colon Q \circ \tilde{Q} \longrightarrow 1_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}$$

Η σύνθεση

$$Q(X) \xrightarrow{Q(\varepsilon_X)} (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(X) \xrightarrow{\eta(Q(X))} Q(X)$$

είναι η ταυτότητα για κάθε αντικείμενο X στην $\mathcal{T}$. Επομένως η απεικόνιση $Q(\varepsilon_X)$ έχει αριστερό αντίστροφο για κάθε αντικείμενο X. Για να αποδείξουμε ότι είναι ισομορφισμός, απομένει να αποδείξουμε ότι έχει και δεξιό αντίστροφο. Έστω X, Y δύο αντικείμενα στην κατηγορία $\mathcal{T}$. Λόγω της συζυγίας ισχύει η σχέση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(Y)) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \tilde{Q}(Q(Y))) \tag{3.9}$$

Θεωρούμε τον μορφισμό $f\colon Q(X) \longrightarrow Q(Y)$. Τότε προκύπτει το διάγραμμα

$$X \xrightarrow{\varepsilon_X} (\tilde{Q} \circ Q)(X) \xrightarrow{\tilde{Q}(f)} (\tilde{Q} \circ Q)(Y)$$

Από την Πρόταση 3.2.7 γνωρίζουμε ότι κάθε μορφισμός $Z \longrightarrow \tilde{Q}(Q(Y))$, όπου Z είναι ένα αντικείμενο στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$, είναι ο μηδενικός. Άρα το αντικείμενο $\tilde{Q}(Q(Y))$ είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό. Από την Πρόταση 3.2.11 προκύπτει ο ισομορφισμός:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \tilde{Q}(Q(Y))) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(\tilde{Q}(Q(Y)))) \tag{3.10}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.9), (3.10) επάγεται ισομορφισμός

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(Y)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(\tilde{Q}(Q(Y))))$$

Πιο συγκεκριμένα ο παραπάνω ισομορφισμός ορίζεται ως αυτός που στέλνει το μορφισμό $f\colon Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ στη σύνθεση:

$$Q(X) \xrightarrow{Q(\varepsilon_X)} (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(X) \xrightarrow{Q(\tilde{Q}(f))} (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(Y)$$

Από την φυσικότητα του μετασχηματισμού $\eta\colon Q \circ \tilde{Q} \longrightarrow 1_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}$ προκύπτει ότι για τον μορφισμό $f\colon Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ στην $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
(Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(X) \arrow[r, "Q(\tilde{Q}(f))"] \arrow[d, "\eta_{Q(X)}"'] & (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(Y) \arrow[d, "\eta_{Q(Y)}"] \\
Q(X) \arrow[r, "f"] & Q(Y)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Θεωρούμε τη σύνθεση:

$$Q(X) \xrightarrow{Q(\varepsilon_X)} (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(X) \xrightarrow{Q(\tilde{Q}(f))} (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(Y) \xrightarrow{\eta_{Q(Y)}} Q(Y)$$

Χάρη στη μεταθετικότα του παραπάνω τετραγώνου, συμπεραίνουμε ότι είναι ίση με τη σύνθεση

$$Q(X) \xrightarrow{Q(\varepsilon_X)} (Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(X) \xrightarrow{\eta_{Q(X)}} Q(X) \xrightarrow{f} Q(Y)$$

Όμως $Q(\varepsilon_X) \circ \eta_{Q(X)} \circ f = f = \eta_{Q(Y)} \circ Q(\tilde{Q}(f)) \circ Q(\varepsilon_X)$. Επειδή η σύνθεση $\eta_{Q(Y)} \circ Q(\tilde{Q}(f))$ είναι η εικόνα του μορφισμού $f\colon Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ μέσω του ισομορφισμού:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(Y)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(\tilde{Q}(Q(Y))))$$

προκύπτει ότι ο μορφισμός $\eta_{Q(Y)}$ επάγει τον αντίστροφο του παραπάνω ισομορφσιμού. Άρα ο μορφισμός $\eta_{Q(Y)}$ είναι ισομορφισμός. Επίσης γνωρίζουμε ότι $Q(\varepsilon_Y) \circ \eta_{Q(Y)} = 1_{(Q \circ \tilde{Q} \circ Q)(Y)}$ και συνεπώς ο μορφισμός $Q(\varepsilon_Y)$ είναι ο αντίστροφος του $\eta_{Q(Y)}$. Τελικά αποδείξαμε ότι ο μορφισμός $Q(\varepsilon_Y)\colon Q(Y) \longrightarrow Q(\tilde{Q}(Q(Y)))$ είναι ισομορφισμός και έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. ■

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.2.13. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{X}$ μια thick υποκατηγορία της. Υποθέτουμε ότι για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$ υπάρχει συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield και για ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$, θεωρούμε το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Q}(X) \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] & & X \arrow[ul, "\varepsilon_X"'] \end{tikzcd}$$

Τότε το αντικείμενο $\tilde{Q}(X)$ είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό και το αντικείμενο $X_{\mathfrak{X}}$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.2.7 προκύπτει ότι κάθε μορφισμός $Z \longrightarrow \tilde{Q}(X)$, όπου το Z είναι αντικείμενο της $\mathfrak{X}$, είναι ο μηδενικός, συνεπώς το αντικείμενο $\tilde{Q}(X)$ είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & X_{\mathfrak{X}} \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X \arrow[rr, "\varepsilon_X"] & & \tilde{Q}(X) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.12 γνωρίζουμε ότι ο μορφισμός

$$\varepsilon_X\colon X \longrightarrow \tilde{Q}(X)$$

είναι ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$. Επομένως υπάρχει αντικείμενο X' στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ ώστε το ευθύ άθροισμα της τρίτης κορυφής $X_{\mathfrak{X}}$ τους τριγώνου με το αντικείμενο X' είναι αντικείμενο της υποκατηγορίας $\mathfrak{X}$, δηλαδή $X' \oplus X_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. Επειδή η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι thick υποκατηγορία, οι ευθείς αθροιστέοι των αντικειμένων της ανήκουν επίσης στην $\mathfrak{X}$. Συνεπώς το αντικείμενο $X_{\mathfrak{X}}$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. ■

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.13 προκύπτει ως πόρισμα το ακόλουθο αποτέλεσμα για την μονάδα του συζυγούς ζεύγους συναρτητών της τοπικοποίηση Bousfield.

Πόρισμα 3.2.14. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, $\mathfrak{X}$ μια thick υποκατηγορία της και υποθέτουμε ότι υπάρχει συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι X είναι ένα $\mathfrak{X}$-τοπικό αντικείμενο της $\mathcal{T}$. Τότε ο μορφισμός*

$$\varepsilon_X\colon X \longrightarrow \tilde{Q}(X)$$

είναι ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Έστω X ένα $\mathfrak{X}$-τοπικό αντικείμενο. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$X_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X \xrightarrow{\varepsilon_X} \tilde{Q}(X) \longrightarrow \Sigma(X_{\mathfrak{X}})$$

Από την Πρόταση 3.2.13 γνωρίζουμε ότι το αντικείμενο $X_{\mathfrak{X}}$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Επειδή το αντικείμενο X είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό, προκύπτει ότι ο μορφισμός $X_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X$ είναι ο μηδενικός. Τότε έχουμε ότι $\tilde{Q}(X) \simeq X \oplus \Sigma(X_{\mathfrak{X}})$. Από την Πρόταση 3.2.7 γνωρίζουμε ότι το αντικείμενο $\tilde{Q}(X)$ είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό. Άρα η κανονική εισαγωγή $\Sigma(X_{\mathfrak{X}}) \longrightarrow \tilde{Q}(X) \simeq X \oplus \Sigma(X_{\mathfrak{X}})$ είναι ο μηδενικός μορφισμός, αφού το αντικείμενο $\Sigma(X_{\mathfrak{X}})$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Συνεπώς το αντικείμενο $\Sigma(X_{\mathfrak{X}})$ είναι ισόμορφο με το μηδενικό αντικείμενο. Με άλλα λόγια

$$\Sigma(X_{\mathfrak{X}}) \simeq 0 \Longrightarrow X_{\mathfrak{X}} \simeq 0$$

Επομένως το τρίγωνο

$$X_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X \xrightarrow{\varepsilon_X} \tilde{Q}(X) \longrightarrow \Sigma(X_{\mathfrak{X}})$$

είναι ισόμορφο με το τρίγωνο

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\varepsilon_X} \tilde{Q}(X) \longrightarrow 0$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο μορφισμός

$$\varepsilon_X \colon X \longrightarrow \tilde{Q}(X)$$

είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{T}$. ■

Ακολούθως, δοθείσας μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$ και μιας κλάσης αντικειμένων $\mathcal{S}$, θα ορίσουμε δύο πλήρεις υποκατηγορίες της $\mathcal{T}$, αυτές των $\mathcal{S}$-τοπικών και $\mathcal{S}$-συντοπικών αντικειμένων της.

Ορισμός 3.2.15. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{S}$ μια κλάση αντικειμένων της.*

1. *Η κατηγορία ${}^{\perp}\mathcal{S}$ ορίζεται ως η πλήρης υποκατηγορία που περιέχει τα $\mathcal{S}$-τοπικά αντικείμενα της $\mathcal{T}$. Δηλαδή*
$${}^{\perp}\mathcal{S} = \big\{X \in \mathcal{T} \mid \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y) = 0, \text{ για κάθε } Y \in \mathcal{S}\big\}$$

2. *Η κατηγορία $\mathcal{S}^{\perp}$ ορίζεται ως η πλήρης υποκατηγορία που περιέχει τα $\mathcal{S}$-συντοπικά αντικείμενα της $\mathcal{T}$. Δηλαδή*
$$\mathcal{S}^{\perp} = \big\{X \in \mathcal{T} \mid \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,X) = 0, \text{ για κάθε } Y \in \mathcal{S}\big\}$$

Παρατήρηση 3.2.16. Οι πλήρεις υποκατηγορίες ${}^{\perp}\mathcal{S}$ και $\mathcal{S}^{\perp}$ μιας τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$ είναι thick υποκατηγορίες της $\mathcal{T}$.

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο μας εξασφαλίζει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την του συναρτητή τοπικοποίησης Bousfield.

Θεώρημα 3.2.17. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{X}$ μία thick υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Τότε υπάρχει ένας συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$ αν και μόνον αν για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$, υπάρχει τρίγωνο*

$$X_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X \longrightarrow {}_{\perp\mathfrak{X}}X \longrightarrow \Sigma(X_{\mathfrak{X}})$$

με $X_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ και ${}_{\perp\mathfrak{X}}X \in {}^{\perp}\mathfrak{X}$.

Απόδειξη. Έστω $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$ ο συναρτητής τοπικοποίησης. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$. Από την Πρόταση 3.2.13 γνωρίζουμε, άμεσα, ότι υπάρχει τρίγωνο

$$X_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X \longrightarrow {}_{\perp\mathfrak{X}}X \longrightarrow \Sigma(X_{\mathfrak{X}})$$

όπου $X_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ και το αντικείμενο ${}_{\perp\mathfrak{X}}X$ είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό, δηλαδή ${}_{\perp\mathfrak{X}}X \in {}^{\perp}\mathfrak{X}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένα τρίγωνο

$$X_{\mathfrak{X}} \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} {}_{\perp\mathfrak{X}}X \longrightarrow \Sigma(X_{\mathfrak{X}})$$

όπου $X_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ και ${}_{\perp\mathfrak{X}}X \in {}^{\perp}\mathfrak{X}$. Εφόσον το αντικείμενο $X_{\mathfrak{X}}$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$, ο μορφισμός α ανήκει στην κλάση μορφισμών $S_{\mathfrak{X}}$ και είναι ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$. Συνεπώς ισχύει

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Z, X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Z, {}_{\perp\mathfrak{X}}X) \tag{3.11}$$

για κάθε αντικείμενο $Z \in \mathcal{T}$. Επίσης το αντικείμενο ${}_{\perp\mathfrak{X}}X$ είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό. Τότε, από την Πρόταση 3.2.11, γνωρίζουμε ότι για κάθε αντικείμενο $Z \in \mathcal{T}$ προκύπτει ο ισομορφισμός

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Z, X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, {}_{\perp\mathfrak{X}}X) \tag{3.12}$$

Από τις σχέσεις (3.11) και (3.12) προκύπτει

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Z, X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, {}_{\perp\mathfrak{X}}X)$$

Θέτοντας $\tilde{Q}(X) = {}_{\perp\mathfrak{X}}X$ επάγεται ο φυσικός ισομορφισμός

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(\text{-}, X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\text{-}, \tilde{Q}(X))$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το αντικείμενο $\tilde{Q}(X) = {}_{\perp\mathfrak{X}}X$ είναι μοναδικό με ακρίβεια ισομορφισμού και ο συναρτητής $\tilde{Q}\colon \mathcal{T}/\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{T}$ είναι συζυγής του συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$. Άρα ο συναρτητής $\tilde{Q}$ είναι ένας συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield. ■

Ως πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία:

Πόρισμα 3.2.18. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, $\mathfrak{X}$ μια thick υποκατηγορία της και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$. Τότε υπάρχει ένας συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield για το ζεύγος $({}^{\perp}\mathfrak{X})^{\mathsf{op}} \subset \mathcal{T}^{\mathsf{op}}$ και ισχύει $({}^{\perp}\mathfrak{X})^{\perp} = \mathfrak{X}$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [19, Corollary 9.1.14]. ■

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που έχουμε αποδείξει μέχρι αυτό το σημείο, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο σημαντικό Θεώρημα, το οποίο περιγράφει την τοπικοποίηση μιας τριγωνισμένης κατηγορίας με την έννοια του Bousfield με ακρίβεια ισοδυναμίας κατηγοριών.

Θεώρημα 3.2.19. *Έστω $\mathcal{T}$ μια τριγωνισμένη κατηγορία, $\mathfrak{X}$ μια thick υποκατηγορία της $\mathcal{T}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$. Τότε η υποκατηγορία ${}^{\perp}\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$. Συγκεκριμένα η σύνθεση*

$$^{\perp}\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{Q} \mathcal{T}/\mathfrak{X}$$

είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Απόδειξη. Έστω $Q\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$ ο συναρτητής τοπικοποίησης. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.11 γνωρίζουμε ότι για κάθε δύο αντικείμενα $X \in \mathcal{T}$ και $Y \in {}^{\perp}\mathfrak{X}$, η φυσική απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathfrak{X}}(Q(X), Q(Y))$$

είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων. Συνεπώς η σύνθεση

$$^{\perp}\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{Q} \mathcal{T}/\mathfrak{X}$$

είναι ένας πλήρης και πιστός συναρτητής. Από το Λήμμα 3.2.12 γνωρίζουμε πως ο μορφισμός

$$\varepsilon_X \colon X \longrightarrow \tilde{Q}(X)$$

είναι ισομορφισμός στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$. Ακόμη στην Πρόταση 3.2.7 έχουμε αποδείξει ότι για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{T}/\mathfrak{X}$, το αντικείμενο $\tilde{Q}(X)$ είναι $\mathfrak{X}$-τοπικό, δηλαδή ανήκει στην υποκατηγορία ${}^{\perp}\mathfrak{X}$. Συνεπώς κάθε αντικείμενο X στην τοπικοποίηση $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$ είναι ισόμορφο με ένα $\mathfrak{X}$-τοπικό αντικείμενο. Άρα η σύνθεση

$$ {}^{\perp}\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\ Q\ } \mathcal{T}/\mathfrak{X}$$

είναι ένας συναρτητής ουσιωδώς «επί». Από την Πρόταση 1.2.17 προκύπτει ότι η σύνθεση

$$ {}^{\perp}\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\ Q\ } \mathcal{T}/\mathfrak{X}$$

είναι ισοδυναμία κατηγοριών. ■

Κλείνοντας κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση, στην οποίαν ερμηνεύουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.2.19. Μέσω αυτής γίνεται αντιληπτό γιατί επιλέξαμε να αναπτύξουμε την τοπικοποίηση με την έννοια του Bousfield ως ένα εξαιρετικά σημαντικό παράδειγμα τοπικοποίησης τριγωνισμένων κατηγοριων.

Παρατήρηση 3.2.20. Έστω $\mathcal{T}$ μία τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{X}$ μια thick υποκατηγορία της $\mathcal{T}$. Υποθέτουμε ότι για το ζεύγος $\mathfrak{X} \subset \mathcal{T}$ υπάρχει ένας συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield. Δηλαδή υπάρχει δεξιός συζυγής συναρτητής $\tilde{Q} \colon \mathcal{T}/\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{T}$ του συναρτητή τοπικοποίησης

$$Q \colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathfrak{X}$$

Από το Θεώρημα 3.2.19 προκύπτει ότι μπορούμε να «δούμε» την τοπικοποίηση $\mathcal{T}/\mathfrak{X}$ ως πλήρη υποκατηγορία της τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{T}$. Επομένως το γεγονός ότι υπάρχει συναρτητής τοπικοποίησης Bousfield μας επιτρέπει να άρουμε τυχόντα, συνολοθεωρητικά, προβλήματα σχετικά με την ύπαρξη της τοπικοποίησης μιας κατηγορίας.

Κεφάλαιο 4

Παραγόμενες Κατηγορίες

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στη μελέτη της, λεγόμενης, παραγόμενης κατηγορίας μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε αυτού του είδους τις κατηγορίες διότι αποτελούν ένα από τα πλέον κλασικά παραδείγματα τριγωνισμένων κατηγοριών. Για την πιο ομαλή μετάβαση στην παραγόμενη κατηγορία είναι αναγκαίο να αναφερθούμε, αρχικά, στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ των συμπλόκων. Στην επόμενη ενότητα θα κατασκευάσουμε την ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ των συμπλόκων, η οποία προκύπτει με φυσικό τρόπο από την $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Τέλος χρησιμοποιώντας τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί στη διατριβή θα κατασκευάσουμε την παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ ως την τοπικοποίηση της ομοτοπικής κατηγορίας ως προς την κλάση των ημι-ισομορφισμών της. Η παραγόμενη κατηγορία στην οποία θα δώσουμε μεγαλύτερη έμφαση είναι η παραγόμενη κατηγορία ενός μεταθετικού δακτυλίου R και ιδιαίτερα η πλήρης υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ αυτής, η οποία έχει ως αντικείμενα τα τέλεια σύμπλοκα.

4.1 Η Κατηγορία των Συμπλόκων

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες της Κατηγορίας των Συμπλόκων, η οποία έχει σαν αντικείμενα σύμπλοκα υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$ και σαν μορφισμούς, μορφισμούς μεταξύ συμπλόκων. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια του βαθμωτού $\mathcal{A}$-αντικειμένου καθώς και την έννοια του βαθμωτού μορφισμού μεταξύ δύο βαθμωτών $\mathcal{A}$-αντικειμένων.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Ένα* **βαθμωτό $\mathcal{A}$-αντικείμενο (graded $\mathcal{A}$-object)** *είναι μια συλλογή $X^\bullet = \{X^n, n \in \mathbb{Z}\}$ αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Το αντικείμενο X^n καλείται* **ομογενής συνιστώσα (homogeneous component)** *βαθμού n του $X^\bullet$.*

Ορισμός 4.1.2. *Έστω $X^\bullet$, $Y^\bullet$ δύο βαθμωτά $\mathcal{A}$-αντικείμενα. Η συλλογή μορφισμών*

$$f^\bullet = \{f^n \colon X^n \longrightarrow Y^{n+p} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

καλείται **βαθμωτός μορφισμός (graded morphism)** *βαθμού p. Το σύνολο όλων των βαθμωτών μορφισμών βαθμού p συμβολίζεται με $\mathsf{Hom}^p(X^\bullet, Y^\bullet)$.*

Αφού ορίσαμε τις τα βαθμωτά αντικείμενα και τους βαθμωτούς μορφισμούς, είμαστε σε θέση να ορίσουμε τα θεμελιώδη αντικείμενα που θα μας απασχολήσουν σε αυτή την ενότητα, τα αλυσιδωτά και συναλυσιδωτά σύμπλοκα.

Ορισμός 4.1.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία.*

1. *Ένα ζεύγος $(X_\bullet, d_\bullet)$ ενός βαθμωτού αντικειμένου $X_\bullet$ και ενός βαθμωτού μορφισμού $d^X_\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X_\bullet, X_\bullet)$, τέτοιου ώστε $d^X_{n-1} \circ d^X_n = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$, καλείται* **αλυσιδωτό σύμπλοκο (chain complex)** *αντικειμένων της $\mathcal{A}$. Ο μορφισμός d^X_n καλείται* **διαφορικό (differential)** *του συμπλόκου.*

2. *Ένα ζεύγος* $(X^\bullet, d^\bullet)$ *ενός βαθμωτού αντικειμένου* $X^\bullet$ *και ενός βαθμωτού μορφισμού* $d_X^\bullet \in \mathsf{Hom}^1(X^\bullet, X^\bullet)$, *τέτοιου ώστε* $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{Z}$, *καλείται* **συναλυσιδωτό σύμπλοκο (cochain complex)** *αντικειμένων της* $\mathcal{A}$. *Ο μορφισμός* d_X^n *καλείται* **διαφορικό (differential)** *του συμπλόκου.*

Παρατήρηση 4.1.4. Ένα αλυσιδωτό σύμπλοκο παριστάνεται από ένα διάγραμμα της μορφής:

$$X_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X^n \xrightarrow{d_n^X} X^{n-1} \longrightarrow \cdots$$

ενώ ένα συναλυσιδωτό σύμπλοκο παριστάνεται από ένα διάγραμμα της μορφής:

$$X^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Σύμβαση: Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε συναλυσιδωτά σύμπλοκα, με εξαίρεση το τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής το οποίο αφορά το φάσμα της κατηγορίας των τέλειων συμπλόκων όπου, χάριν παράδοσης, χρησιμοποιούμε αλυσιδωτά σύμπλοκα. Συνεπώς αντί για συναλυσιδωτά σύμπλοκα, θα γράφουμε συχνά σύμπλοκα.

Ορισμός 4.1.5. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια προσθετική κατηγορία και* $(X^\bullet, d_X^\bullet)$, $(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ *δύο σύμπλοκα αντικειμένων της* $\mathcal{A}$. *Ένας* **μορφισμός συμπλόκων (morphism of complexes)** $f^\bullet \colon (X^\bullet, d_X^\bullet) \longrightarrow (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ *είναι ένας βαθμωτός μορφισμός* $f \in \mathsf{Hom}^0(X^\bullet, Y^\bullet)$ *τέτοιος ώστε:*

$$f^\bullet \circ d_X^\bullet = d_Y^\bullet \circ f^\bullet$$

Δηλαδή το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet : \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
Y^\bullet : \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Σχόλιο 4.1.6. Αν $f^\bullet \colon (X^\bullet, d_X^\bullet) \longrightarrow (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων, συχνά για απλοποίηση του συμβολισμού θα παραλείπουμε τα διαφορικά $d_X^\bullet$, $d_Y^\bullet$ και από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την κατηγορία που έχει σαν αντικείμενα σύμπλοκα από αντικείμενα της $\mathcal{A}$ και σαν μορφισμούς, μορφισμούς συμπλόκων.

Ορισμός 4.1.7. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια προσθετική κατηγορία. Καλούμε* **κατηγορία των συμπλόκων (category of complexes)** *και συμβολίζουμε με* $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ *την κατηγορία που ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της* $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ *είναι σύμπλοκα από αντικείμενα της* $\mathcal{A}$

2. *Οι μορφισμοί της* $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ *είναι οι μορφισμοί συμπλόκων όπως ορίστηκαν στον Ορισμό 4.1.5 και συμβολίζουμε με* $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ *την κλάση μορφισμών ανάμεσα σε δύο αντικείμενα* $X^\bullet$, $Y^\bullet$.

3. *Για δύο μορφισμούς συμπλόκων* $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $g^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ *η απεικόνιση σύνθεσης*

$$\circ : \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet), \quad (f^\bullet, g^\bullet) \longmapsto g^\bullet \circ f^\bullet$$

είναι ο βαθμωτός μορφισμός $g^\bullet \circ f^\bullet = \{g^n \circ f^n, n \in \mathbb{Z}\}$

4. *Για κάθε αντικείμενο $X^\bullet$ ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{X^\bullet} : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ είναι ο βαθμωτός μορφισμός $1_{X^\bullet} = \{1_{X^n} : X^n \longrightarrow X^n, n \in \mathbb{Z}\}$*

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε κάποια βασικά δομικά στοιχεία της κατηγορίας $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να της δώσουμε δομή προσθετικής κατηγορίας.

Παρατήρηση 4.1.8. Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία.

1. Ας είναι $X^\bullet$, $Y^\bullet$ δύο σύμπλοκα στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ ορίζουμε την πράξη:

$$+ : \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet), \ \ (f^\bullet, g^\bullet) \longmapsto f^\bullet + g^\bullet$$

όπου $f^\bullet + g^\bullet = \{f^n + g^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

2. Το σύμπλοκο

$$0^\bullet : \ \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

όπου 0 είναι το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$, είναι το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Πράγματι αν

$$X^\bullet : \ \ \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

είναι ένα τυχαίο αντικείμενο της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, τότε υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί συμπλόκων $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow 0^\bullet$, $g^\bullet \colon 0^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ από και προς το σύμπλοκο $0^\bullet$. Οι μορφισμοί $f^\bullet$, $g^\bullet$ είναι βαθμωτοί μορφισμοί $f^\bullet = \{f^n \colon X^n \longrightarrow 0, n \in \mathbb{Z}\}$, $g^\bullet = \{g^n \colon 0 \longrightarrow X^n, n \in \mathbb{Z}\}$ που αποτελούνται από τους μορφισμούς, από και προς το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{A}$ αντίστοιχα, για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$.

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι η $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ προσθετική κατηγορία είναι το σύνολο των μορφισμών μεταξύ δύο οποιονδήποτε αντικειμένων να είναι αβελιανή ομάδα. Η επόμενη πρόταση πιστοποιεί αυτό το αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.1.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Για κάθε δύο σύμπλοκα $X^\bullet$, $Y^\bullet$ στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, το σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ με την πράξη πρόσθεσης που ορίστηκε στην Παρατήρηση 4.1.8, έχει δομή αβελιανής ομάδας.*

Απόδειξη. Έστω $X^\bullet$, $Y^\bullet$ δύο αντικείμενα της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Ο μηδενικός μορφισμός $0^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι ο βαθμωτός μορφισμός $0^\bullet = \{0 \colon X^n \longrightarrow Y^n, n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $0 \colon X^n \longrightarrow Y^n$ είναι ο μηδενικός μορφισμός στην $\mathcal{A}$ και ανήκει στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Έστω $f^\bullet$, $g^\bullet$ δύο μορφισμοί στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Τότε από τον ορισμό της πρόσθεσης των μορφισμών, προκύπτει ο βαθμωτός μορφισμός $f^\bullet + g^\bullet = \{f^n + g^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι προσθετική καηγορία, το σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας για δύο οποιαδήποτε αντικείμενα X, Y της $\mathcal{A}$. Επομένως οι μορφισμοί $f^n + g^n \colon X^n \longrightarrow Y^n$, ανήκουν στο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς και το άθροισμα $f^\bullet + g^\bullet$ ανήκει στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Θεωρούμε, τέλος, ένα μορφισμό $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Ο μορφισμός $-f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ορίζεται ως ο βαθμωτός μορφισμός $-f^\bullet = \{-f^n, n \in \mathbb{Z}\}$, ο οποίος ανήκει στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$, διότι η $\mathcal{A}$ είναι προσθετική. Επιπλέον ισχύει ότι $f^\bullet + (-f^\bullet) = 0^\bullet = (-f^\bullet) + f^\bullet$. Άρα το $(\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet), +)$ έχει δομή ομάδας. Ακόμη για δύο μορφισμούς $f^\bullet, g^\bullet \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ ισχύει ότι:

$$f^\bullet + g^\bullet = \{f^n + g^n, n \in \mathbb{Z}\} = \{g^n + f^n, n \in \mathbb{Z}\} = g^\bullet + f^\bullet$$

με την δεύτερη ισότητα να ισχύει χάρη στο ότι το $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n)$ είναι αβελιανή ομάδα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τελικά το ζεύγος $(\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet), +)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας. ■

Ακολούθως είναι αναγκαίο να οριστεί το ευθύ άθροισμα δύο αντικειμένων της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

Παρατήρηση 4.1.10. Έστω $X^\bullet$, $Y^\bullet$ δύο σύμπλοκα στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Ορίζουμε το σύμπλοκο $X^\bullet \oplus Y^\bullet$, ως εξής:

$$(X^\bullet \oplus Y^\bullet)^n = X^n \oplus Y^n \quad \text{και} \quad d^n_{X\oplus Y} = d^n_X \oplus d^n_Y$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως μπορούμε να οπτικοποιήσουμε το σύμπλοκο $X^\bullet \oplus Y^\bullet$ με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$X^\bullet \oplus Y^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X^{n-1} \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1} \oplus d_Y^{n-1}} X^n \oplus Y^n \xrightarrow{d_X^n \oplus d_Y^n} X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Το σύμπλοκο $X^\bullet \oplus Y^\bullet$ καλείται **ευθύ άθροισμα (direct sum)** των συμπλόκων $X^\bullet$, $Y^\bullet$. Με φυσικό τρόπο ορίζονται οι μορφισμοί $i_{X^\bullet} : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet \oplus Y^\bullet$, $i_{Y^\bullet} : Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet \oplus Y^\bullet$, $p_{X^\bullet} : X^\bullet \oplus Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ και $p_{Y^\bullet} : X^\bullet \oplus Y^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$p_{X^\bullet} \circ i_{X^\bullet} = 1_{X^\bullet}, \ p_{Y^\bullet} \circ i_{Y^\bullet} = 1_{Y^\bullet}, \ p_{X^\bullet} \circ i_{Y^\bullet} = 0^\bullet, \ p_{Y^\bullet} \circ i_{X^\bullet} = 0^\bullet$$

και

$$i_{X^\bullet} \circ p_{X^\bullet} + i_{Y^\bullet} \circ p_{Y^\bullet} = 1_{X^\bullet \oplus Y^\bullet}$$

Έχουμε λοιπόν τα κατάλληλα εργαλεία για να αποδείξουμε ότι αν η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι μια προσθετική κατηγορία, τότε και η κατηγορία των συμπλόκων με αντικείμενα από την $\mathcal{A}$ είναι προσθετική. Το αποτέλεσμα αυτό συνοψίζεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.1.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Η κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ των συμπλόκων με αντικείμενα από την $\mathcal{A}$, είναι προσθετική.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 4.1.8, την Πρόταση 4.1.9 και την Παρατήρηση 4.1.10, προκύπτει ότι: η κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ έχει μηδενικό αντικείμενο το $0^\bullet$, το σύνολο $\mathsf{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας και για κάθε δύο αντικείμενα $X^\bullet$, $Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, ορίζεται το ευθύ άθροισμα $X^\bullet \oplus Y^\bullet$. Συνεπώς η κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι προσθετική. ∎

Παράδειγμα 4.1.12. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και R-Mod η προσθετική κατηγορία των αριστερών R-προτύπων. Συμβολίζουμε $\mathsf{C}(R)$ και καλούμε κατηγορία των συμπλόκων υπεράνω του R, την κατηγορία $\mathsf{C}(R\text{-Mod})$ η οποία έχει ως αντικείμενα, σύμπλοκα αριστερών R-προτύπων της μορφής

$$M^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{d_M^{n-1}} M^n \xrightarrow{d_M^n} M^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

και ως μορφισμούς, μορφισμούς μεταξύ συμπλόκων με την έννοια του Ορισμού 4.1.5. Ξεκινώντας από δύο σύμπλοκα $X^\bullet$, $Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}(R)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το τανυστικό γινόμενο $X^\bullet \otimes_R Y^\bullet$, ως το σύμπλοκο που έχει στη n-οστή θέση το πρότυπο

$$(X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)_n = \bigoplus_{p+q=n} X^p \otimes_R Y^q$$

ενώ το διαφορικό

$$d^n_{X \otimes_R Y} : (X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)_n \longrightarrow (X^\bullet \otimes_R Y^\bullet)_{n+1}$$

δίνεται από τη σχέση

$$d^n_{X \otimes_R Y}(x \otimes y) = d^p_X(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d^q_Y(y)$$

Τέλος για δύο σύμπλοκα $X^\bullet$, $Y^\bullet \in \mathsf{C}(R)$ ορίζουμε το σύμπλοκο $\mathsf{Hom}^\bullet_R(X^\bullet, Y^\bullet)$ ως το σύμπλοκο το οποίο στη n-οστή θέση έχει το αντικείμενο

$$(\mathsf{Hom}_R(X^\bullet, Y^\bullet))_n = \bigoplus_{-p+q=n} \mathsf{Hom}_R(X^p, Y^q)$$

ενώ το διαφορικό

$$d^n_{\mathsf{Hom}_R(X,Y)}\colon (\mathsf{Hom}_R(X^\bullet, Y^\bullet))_n \longrightarrow (\mathsf{Hom}_R(X^\bullet, Y^\bullet))_{n+1}$$

δίνεται από τη σχέση

$$(d^n_{\mathsf{Hom}_R(X,Y)} f)(x) = d^q_Y(f(x)) - (-1)^n f(d^{p+1}_X(x))$$

όπου $f \in \mathsf{Hom}_R(X^p, Y^q)$.

Παρατήρηση 4.1.13. Αφού οι κατηγορίες $\mathcal{A}$ και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι προσθετικές, μπορούμε να ορίσουμε ανάμεσά τους έναν προσθετικό συναρτητή. Ορίζουμε, λοιπόν, τον συναρτητή $\mathsf{C}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ ο οποίος σε κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{A}$ αντιστοιχεί ένα σύμπλοκο $\mathsf{C}(X)^\bullet$ της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, όπου

$$\mathsf{C}(X) = \begin{cases} X, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \neq 0 \end{cases}$$

και σε κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ αντιστοιχεί ένα μορφισμό συμπλόκων $\mathsf{C}(f)^\bullet = \big\{\mathsf{C}(f)^n\colon \mathsf{C}(X)^n \longrightarrow \mathsf{C}(Y)^n, n \in \mathbb{Z}\big\}$, όπου

$$\mathsf{C}(f)^n = \begin{cases} f, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \neq 0 \end{cases}$$

Ευθύς αμέσως θα δείξουμε ότι ο συναρτητής C της Παρατήρησης 4.1.13 είναι πλήρης και πιστός.

Λήμμα 4.1.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Ο συναρτητής $\mathsf{C}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον συναρτητή $\mathsf{C}\colon \mathcal{A} \longrightarrow C(\mathcal{A})$ και έστω X, Y δύο αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Για να δείξουμε ότι ο συναρτητής C είναι πλήρης και πιστός, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση:

$$\Phi\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{C(\mathcal{A})}(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(Y)), \quad \Phi(f) = \mathsf{C}(f)^\bullet$$

είναι «1-1» και «επί». Από τον τρόπου που ορίζεται ο συναρτητής C στους μορφισμούς, προκύπτει εύκολα ότι είναι η απεικόνιση Φ είναι ένας ομομορφισμός μεταξύ αβελιανών ομάδων. Πράγματι αν f, g είναι δύο μορφισμοί στην $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, τότε

$$\Phi(f+g) = \mathsf{C}(f+g)^\bullet\colon \mathsf{C}(X)^\bullet \longrightarrow \mathsf{C}(Y)^\bullet$$

είναι ένας μορφισμός συμπλόκων. Από τον ορισμό του συναρτητή C, για $n = 0$, έχουμε:

$$\mathsf{C}(f+g)^n = f + g = \mathsf{C}(f)^n + \mathsf{C}(g)^n$$

ενώ για $n \neq 0$, έχουμε:

$$\mathsf{C}(f+g)^n = 0 = 0 + 0 = \mathsf{C}(f)^n + \mathsf{C}(g)^n$$

Σε κάθε περίπτωση $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$. Άρα η απεικόνιση Φ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Θεωρούμε, τώρα, τον πυρήνα του ομομορφισμού Φ:

$$\begin{aligned} \mathsf{Ker}\,\Phi &= \big\{X \in \mathcal{A} \mid \Phi(X) = 0^\bullet\big\} \\ &= \big\{X \in \mathcal{A} \mid X = 0\big\} \\ &= \big\{0\big\} \end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση Φ είναι «1-1» και προφανώς η Φ είναι «επί». Τελικά ο συναρτητής $\mathsf{C}\colon \mathcal{A} \longrightarrow C(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός. ∎

Παρατήρηση 4.1.15. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.14 ο συναρτητής $\mathsf{C}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός. Επομένως μπορούμε να «δούμε» την κατηγορία $\mathcal{A}$ ως την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ που έχει σαν αντικείμενα σύμπλοκα $X^\bullet$ για τα οποία ισχύει ότι $X^n = 0$ για $n \neq 0$.

Θα ορίσουμε, τώρα, ένα translation συναρτητή στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

Ορισμός 4.1.16. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ η κατηγορία των συμπλόκων. Ορίζουμε τον translation συναρτητή, $\Sigma\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ ως το συναρτητή που δρα στα αντικείμενα και τους μορφισμούς της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ ως εξής:*

1. *Σε κάθε αντικείμενο $X^\bullet$ της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, αντιστοιχεί ένα αντικείμενο $\Sigma(X^\bullet)$, τέτοιο ώστε:*

$$\Sigma(X^\bullet)^n = X^{n+1} \ \ \text{και} \ \ d^n_{\Sigma(X)} = -d^{n+1}_X$$

   για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

2. *Σε κάθε μορφισμό $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, αντιστοιχεί ένα μορφισμό $\Sigma(f^\bullet)\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow \Sigma(Y^\bullet)$, τέτοιο ώστε:*

$$\Sigma(f^\bullet)^n = f^{n+1}$$

   για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 4.1.17. Ο translation συναρτητής του Ορισμού 4.1.16 είναι ένας αυτομορφισμός της κατηγορίας $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα ορίζοντας κάποια ειδικού τύπου σύμπλοκα της κατηγορίας $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ και ακολούθως ορίζοντας τις πλήρεις υποκατηγορίες της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ που έχουν αυτά ως αντικείμενα.

Ορισμός 4.1.18. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη κατηγορία των συμπλόκων.*

1. *Ένα σύμπλοκο $X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ καλείται* **φραγμένο από κάτω (bounded from below)** *αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $X^n = 0$ για $n < n_0$.*

2. *Ένα σύμπλοκο $X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ καλείται* **φραγμένο από πάνω (bounded from above)** *αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $X^n = 0$ για $n > n_0$.*

3. *Ένα σύμπλοκο $X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ καλείται* **φραγμένο (bounded)** *αν είναι φραγμένο από πάνω και από κάτω.*

Παρατήρηση 4.1.19.

1. Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη κατηγορία των συμπλόκων. Συμβολίζουμε με $\mathsf{C}^-(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ που έχει ως αντικείμενα, σύμπλοκα που είναι φραγμένα από πάνω. Αντίστοιχα συμβολίζουμε με $\mathsf{C}^+(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ με αντικείμενα σύμπλοκα φραγμένα από κάτω, ενώ με $\mathsf{C}^b(\mathcal{A})$ συμβολίζουμε την πλήρη υποκατηγορία που αποτελείται από τα φραγμένα σύμπλοκα.

2. Όταν θέλουμε να διατυπώσουμε ένα αποτέλεσμα στο οποίο δεν είναι σημαντικό να γνωρίζουμε σε ποια από τις τρεις παραπάνω πλήρεις υποκατηγορίες εργαζόμαστε, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$, όπου $\star = -, +, b$.

4.2 Η Ομοτοπική Κατηγορία των Συμπλόκων

Μια θεμελιώδης έννοια της Ομολογικής Άλγεβρας είναι αυτή της ομοτοπίας. Στα πλαίσια που εργαζόμαστε βασικό αντικείμενο μελέτης είναι, πότε δύο απεικονίσεις μεταξύ συμπλόκων είναι ομοτοπικές. Αν απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, τότε μπορούμε ξεκινώντας από μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$ και την κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, να κατασκευάσουμε μια νέα κατηγορία, που θα καλούμε ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων. Το σημαντικό με αυτήν την νέα κατηγορία είναι ότι με κατάλληλη επιλογή της κλάσης των τριγώνων, καθίσταται τριγωνισμένη κατηγορία. Η ομοτοπική κατηγορία αποτελεί το παράδειγμα πάνω στο οποίο εργάστηκε ο Dieter Puppe για να ορίσει τις τριγωνισμένες κατηγορίες.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης ενότητας, συμβολίζουμε $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ την κατηγορία των συμπλόκων μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια της ομοτοπίας.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Ο μορφισμός $f^\bullet$ καλείται* **ομοτοπικός με το μηδενικό (homotopic to zero)** *αν υπάρχει μορφισμός $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ ώστε:*

$$f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$$

Με άλλα λόγια στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet: \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dl, dotted, "h^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, dotted, "h^{n+1}"] & \cdots \\
Y^\bullet: \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ισχύει ότι $f^n = d_Y^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_X^n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Η απεικόνιση $h^\bullet$ καλείται **ομοτοπία (homotopy)**.

Συμβολισμός: Συμβολίζουμε με $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ το σύνολο των μορφισμών της αβελιανής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$, που είναι ομοτοπικοί με το μηδενικό.

Προφανώς το σύνολο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι υποσύνολο του $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι αποτελεί και υποομάδα επίσης.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Το σύνολο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι μια υποομάδα της αβελιανής ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ για κάθε δύο σύμπλοκα $X^\bullet$, $Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Ο μηδενικός μορφισμός $0^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ανήκει στο σύνολο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$, των ομοτοπικών μορφισμών από το σύμπλοκο $X^\bullet$ στο $Y^\bullet$. Έστω $f^\bullet$, $g^\bullet$ δύο μορφισμοί ομοτοπικοί με το μηδενικό, στο σύνολο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Τότε υπάρχουν απεικονίσεις $h^\bullet$, $k^\bullet$ που ανήκουν στο σύνολο $\mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet \tag{4.1}$$

και

$$g^\bullet = d_Y^\bullet \circ k^\bullet + k^\bullet \circ d_X^\bullet \tag{4.2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.1), (4.2) προκύπτει ότι,

$$f^\bullet + g^\bullet = d_Y^\bullet \circ (h^\bullet + k^\bullet) + (h^\bullet + k^\bullet) \circ d_X^\bullet$$

Συνεπώς ο μορφισμός $f^\bullet + g^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό και ανήκει στο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Έστω, τώρα, $f^\bullet$ ένας μορφισμός στο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Τότε υπάρχει απεικόνιση $h^\bullet$ στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοια ώστε:

$$f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$$

Άμεσα προκύπτει η ισότητα:

$$-f^\bullet = d_Y^\bullet \circ (-h^\bullet) + (-h^\bullet) \circ d_X^\bullet$$

και άρα ο μορφισμός $-f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό και ανήκει στο σύνολο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Τελικά το σύνολο $\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι μια υποομάδα της ομάδας $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. ■

Στη συνέχεια θα δούμε πότε δύο μορφισμοί στην κατηγορία των συμπλόκων καλούνται ομοτοπικοί.

Ορισμός 4.2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ η κατηγορία των συμπλόκων από αντικείμενα της $\mathcal{A}$. Δυο μορφισμοί $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ καλούνται* **ομοτοπικοί (homotopic)** *αν ο μορφισμός $f^\bullet - g^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό. Τότε συμβολίζουμε $f^\bullet \approx g^\bullet$.*

Ακολούθως θα αποδείξουμε ότι η σχέση που καθορίζει το πότε δύο μορφισμοί στην κατηγορία των συμπλόκων είναι ομοτοπικοί, είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των μορφισμών μεταξύ δύο αντικειμένων της κατηγορίας.

Πρόταση 4.2.4. *Η σχέση «$\approx$» του Ορισμού 4.2.3 είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.*

Απόδειξη. Η σχέση του Ορισμού 4.2.3 ορίζεται στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ ως εξής:

$$f^\bullet \approx g^\bullet \Longleftrightarrow f^\bullet - g^\bullet \in \mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

Θα αποδείξουμε ότι η σχέση αυτή είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- <u>Ανακλαστική</u>: Έστω $f^\bullet$ ένας μορφισμός στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Τότε $f^\bullet - f^\bullet = 0^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ και προφανώς ο μηδενικός μορφισμός είναι ομοτοπικός με το μηδενικό.

- <u>Συμμετρική</u>: Έστω $f^\bullet, g^\bullet$ δύο μορφισμοί στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοιοι ώστε $f^\bullet \approx g^\bullet$. Τότε υπάρχει απεικόνιση (ομοτοπία) $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοια ώστε:

  $$f^\bullet - g^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$$

  Τότε άμεσα προκύπτει

  $$g^\bullet - f^\bullet = d_Y^\bullet \circ (-h^\bullet) + (-h^\bullet) \circ d_X^\bullet$$

  και προφανώς $-h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Επομένως ο μορφισμός $g^\bullet - f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό και άρα $g^\bullet \approx f^\bullet$.

- <u>Μεταβατική</u>: Έστω $f^\bullet, g^\bullet, h^\bullet$ μορφισμοί στο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοιοι ώστε $f^\bullet \approx g^\bullet$ και $g^\bullet \approx h^\bullet$. Τότε υπάρχουν απεικονίσεις (ομοτοπίες) $k^\bullet, l^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ τέτοιες ώστε:

  $$f^\bullet - g^\bullet = d_Y^\bullet \circ k^\bullet + k^\bullet \circ d_X^\bullet$$

  και

  $$g^\bullet - h^\bullet = d_Y^\bullet \circ l^\bullet + l^\bullet \circ d_X^\bullet$$

  Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

  $$f^\bullet - h^\bullet = d_Y^\bullet \circ (k^\bullet - l^\bullet) + (k^\bullet - l^\bullet) \circ d_X^\bullet$$

  και $k^\bullet - l^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Επομένως ο μορφισμός $f^\bullet - h^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό και άρα $f^\bullet \approx h^\bullet$.

Τελικά η σχέση «$\approx$» του Ορισμού 4.2.3 είναι σχέση ισοδυναμίας. ■

<u>**Συμβολισμός**</u>: Έστω $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Θα συμβολίζουμε με $[f^\bullet]_\approx$ την κλάση ισοδυναμίας που αποτελείται από τους μορφισμούς της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, που είναι ομοτοπικοί με τον μορφισμό $f^\bullet$.

Αν συνθέσουμε δύο μορφισμούς $f^\bullet, g^\bullet$ στην κατηγορία των συμπλόκων, αρκεί ένας από τους δύο να είναι ομοτοπικός με το μηδενικό, ώστε και η σύνθεσή τους να είναι μορφισμός ομοτοπικός με το μηδενικό. Το αποτέλεσμα συνοψίζεται στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.2.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet$ τρία αντικείμενα στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ των συμπλόκων. Θεωρούμε τους μορφισμούς $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ και $g^\bullet \colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$. Αν ένας από τους μορφισμούς $f^\bullet, g^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό, τότε και η σύνθεσή τους $g^\bullet \circ f^\bullet$ είναι μορφισμός ομοτοπικός με το μηδενικό.*

Απόδειξη. Ας είναι $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $g^\bullet \colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ δύο μορφισμοί μεταξύ συμπλόκων στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό. Τότε υπάρχει ομοτοπία $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ έτσι ώστε

$$f^\bullet = d_Y^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$$

Συνθέτοντας από αριστερά με τον μορφισμό $g^\bullet$ προκύπτει:

$$g^\bullet \circ f^\bullet = g^\bullet \circ d_Y^\bullet \circ h^\bullet + g^\bullet \circ h^\bullet \circ d_X^\bullet \tag{4.3}$$

Όμως λόγω του ότι ο μορφισμός $g^\bullet$ είναι μορφισμός μεταξύ συμπλόκων έχουμε ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Y^\bullet: & \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] \arrow[d, "g^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] \arrow[d, "g^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{n+1}"] & \cdots \\
Z^\bullet: & \cdots \arrow[r] & Z^{n-1} \arrow[r, "d_Z^{n-1}"] & Z^n \arrow[r, "d_Z^n"] & Z^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επομένως ισχύει ότι $g^\bullet \circ d_Y^\bullet = d_Z^\bullet \circ g^\bullet$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (4.3), προκύπτει ότι:

$$g^\bullet \circ f^\bullet = d_Z^\bullet \circ g^\bullet \circ h^\bullet + g^\bullet \circ h^\bullet \circ d_X^\bullet$$

όπου $g^\bullet \circ h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Z^\bullet)$. Επομένως η απεικόνιση $g^\bullet \circ h^\bullet$ είναι ομοτοπία και άρα ο μορφισμός $g^\bullet \circ f^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό. Ανάλογη είναι η απόδειξη και στην περίπτωση που ο μορφισμός $g^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό. ■

Με βάση τα παραπάνω είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$.

Ορισμός 4.2.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Καλούμε* **ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων (homotopic category of complexes)** *και συμβολίζουμε $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, την κατηγορία που ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι σύμπλοκα από αντικείμενα της $\mathcal{A}$.*

2. *Για δύο αντικείμενα $X^\bullet, Y^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, το σύνολο των μορφισμών από το $X^\bullet$ στο $Y^\bullet$ είναι η αβελιανή ομάδα:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\,\mathsf{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

   Δηλαδή το σύνολο των μορφισμών μεταξύ των αντικειμένων $X^\bullet, Y^\bullet$ είναι η αβελιανή ομάδα που περιλαμβάνει τις κλάσεις ισοδυναμίας των ομοτοπικών μορφισμών μεταξύ των συμπλόκων $X^\bullet, Y^\bullet$.

3. *Για δύο μορφισμούς $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $g^\bullet \colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ορίζεται η απεικόνιση σύνθεσης:*

$$\circ : \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \times \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet), \quad (f^\bullet, g^\bullet) \longmapsto g^\bullet \circ f^\bullet$$

   η οποία επάγεται με φυσικό τρόπο από την απεικόνιση σύνθεσης στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ με χρήση της Πρότασης 4.2.5.

4. *Για κάθε αντικείμενο $X^\bullet$ ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{X^\bullet} : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, είναι η κλάση ισοδυναμίας του ταυτοτικού μορφισμού $1_{X^\bullet} : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Δηλαδή ο ταυτοτικός μορφισμός ενός αντικειμένου $X^\bullet$ στην $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι η κλάση ισοδυναμίας που περιλαμβάνει τους μορφισμούς που είναι ομοτοπικοί με τον ταυτοτικό μορφισμό του $X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.*

Παρατήρηση 4.2.7. Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία.

1. Το μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, δηλαδή το σύμπλοκο:
$$0^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

2. Το ευθύ άθροισμα δύο συμπλόκων της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ορίζεται ως το ευθύ άθροισμα των συμπλόκων στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$.

Αν ξεκινήσουμε από μία προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$, έχουμε αποδείξει ότι η κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι προσθετική κατηγορία. Το ίδιο ισχύει και για την ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Πρόταση 4.2.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ των συμπλόκων είναι προσθετική.*

Απόδειξη. Η κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι προ-προσθετική, αφού για κάθε δύο αντικείμενα $X^\bullet, Y^\bullet$ το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ είναι αβελιανή ομάδα. Συνδυάζοντας και την Παρατήρηση 4.2.7 προκύπτει ότι η κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι προσθετική κατηγορία. ∎

Ανακαλούμε, τώρα, την έννοια του translation συναρτητή $\Sigma\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$, που ορίστηκε στον Ορισμό 4.1.16. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε πως «συμπεριφέρεται» όταν δράσει σε μία έναν μορφισμό της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ που είναι ομοτοπικός με το μηδενικό.

Λήμμα 4.2.9. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ η κατηγορία των συμπλόκων της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε τον μορφισμό $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο μορφισμός $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό.*

2. *Ο μορφισμός $\Sigma(f^\bullet)\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow \Sigma(Y^\bullet)$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό.*

Απόδειξη. Έστω $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Εφαρμόζουμε τον translation συναρτητή $\Sigma\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ και προκύπτει ο μορφισμός $\Sigma(f^\bullet)\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow \Sigma(Y^\bullet)$. Από τον Ορισμό 4.1.16, ο μορφισμός $\Sigma(f^\bullet)$ είναι ο βαθμωτός μορφισμός τέτοιος ώστε, $\Sigma(f^\bullet)^n = f^{n+1}\colon X^{n+1} \longrightarrow Y^{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

(1.⟹2.) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό. Τότε υπάρχει ομοτοπία $h^\bullet \in \mathrm{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ έτσι ώστε

$$f^n = d_Y^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_X^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τον βαθμωτό μορφισμό $k^\bullet$ ως εξής:

$$k^n := h^{n+1}\colon X^{n+1} \longrightarrow Y^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από τον ορισμό του translation συναρτητή προκύπτει ότι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε $k^n\colon \Sigma(X^\bullet)^n \longrightarrow \Sigma(Y^\bullet)^{n-1}$. Συνεπώς η απεικόνιση $k^\bullet$ ανήκει στο σύνολο $\mathrm{Hom}^{-1}(\Sigma(X^\bullet), \Sigma(Y^\bullet))$. Επιπλέον, από το γεγονός ότι η $h^\bullet$ είναι ομοτοπία και από τον ορισμό της $k^\bullet$, ισχύει ότι:

$$\Sigma(f^\bullet)^n = f^{n+1} = d_Y^n \circ h^{n+1} + h^{n+2} \circ d_X^{n+1} = -d_{\Sigma(Y)}^{n-1} \circ k^n + k^{n+1} \circ (-d_{\Sigma(X)}^n)$$

Άρα ισχύει η ισότητα,

$$\Sigma(f^\bullet)^n = d_{\Sigma(Y)}^{n-1} \circ (-k^n) + (-k^{n+1}) \circ d_{\Sigma(X)}^n$$

και συνεπώς ο μορφισμός $\Sigma(f^\bullet)\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow \Sigma(Y^\bullet)$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό με ομοτοπία την $k^\bullet \in \mathrm{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

(2.$\Longrightarrow$1.) Η απόδειξη είναι ανάλογη του σκέλους (1.$\Longrightarrow$2.). ∎

Παρατήρηση 4.2.10. Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία.

1. Από το αποτέλεσμα του Λήμματος 4.2.9 προκύπτει ότι ο translation συναρτητής $\Sigma\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ επάγει για κάθε δύο σύμπλοκα $X^\bullet, Y^\bullet$ έναν ισομορφισμό:
$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\Sigma(X^\bullet), \Sigma(Y^\bullet))$$
Επομένως επάγει έναν αυτομορφισμό $\Sigma_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ στην κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Για να μην υπάρχει σύγχυση με τον συμβολισμό, θα συμβολίζουμε και αυτόν τον αυτομορφισμό με Σ.

2. Ανάλογα με τον Ορισμό 4.1.18 ορίζονται οι πλήρεις υποκατηγορίες, $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ και $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$, της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$. Όταν δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε με ακρίβεια σε ποια από τις τρεις υποκατηγορίες εργαζόμαστε, θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, όπου $\star = -, +, b$.

Παρατήρηση 4.2.11. Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Θεωρούμε τους translation συναρτητές $\Sigma\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ και $\Sigma\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ των κατηγοριών $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ και $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ αντίστοιχα. Ορίζουμε τον συναρτητή $H\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ ως εξής:
$$H(X^\bullet) = X^\bullet, \ \text{ για κάθε αντικείμενο } \ X^\bullet \ \text{ στην } \ \mathsf{C}(\mathcal{A})$$
και
$$H(f^\bullet) = [f^\bullet]_\approx, \ \text{ για κάθε μορφισμό } \ f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \ \text{ στην } \ \mathsf{C}(\mathcal{A})$$
Θεωρούμε τις συνθέσεις, $H\circ\Sigma$, $\Sigma\circ H\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$, του συναρτητή H με τους translation συναρτητές. Τότε ισχύει $H\circ\Sigma = \Sigma\circ H$. Πράγματι για ένα αντικείμενο $X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, έχουμε:
$$(H\circ\Sigma)(X^\bullet) = H(\Sigma(X^\bullet)) = \Sigma(X^\bullet) = \Sigma(H(X^\bullet)) = (\Sigma\circ H)(X^\bullet)$$
ενώ για ένα μορφισμό $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, έχουμε:
$$(H\circ\Sigma)(f^\bullet) = H(\Sigma(f^\bullet)) = [\Sigma(f^\bullet)]_\approx$$
και
$$(\Sigma\circ H)(f^\bullet) = \Sigma(H(f^\bullet)) = \Sigma\big([f^\bullet]_\approx\big)$$
Όμως ο αντιπρόσωπος, $\Sigma(f^\bullet)$, της κλάσης ισοδυναμίας $[\Sigma(f^\bullet)]_\approx$ ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας $\Sigma\big([f^\bullet]_\approx\big)$. Άρα $[\Sigma(f^\bullet)]_\approx = \Sigma\big([f^\bullet]_\approx\big)$ και συμπεραίνουμε ότι $(H\circ\Sigma)(f^\bullet) = (\Sigma\circ H)(f^\bullet)$. Τελικά για τις συνθέσεις του συναρτητή H με τους translation συναρτητές ισχύει ότι, $H\circ\Sigma = \Sigma\circ H$.

Με χρήση του συναρτητή H της Παρατήρησης 4.2.11, ορίζουμε ένα συναρτητή $\mathsf{K}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ και θα δείξουμε ότι αυτός ο συναρτητής είναι πλήρης και πιστός.

Λήμμα 4.2.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Ο συναρτητής $\mathsf{K} := H\circ\mathsf{C}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$, όπου H είναι ο συναρτητής της Παρατήρησης 4.2.11 και C ο συναρτητής της Παρατήρησης 4.1.13, είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Έστω X, Y δύο αντικείμενα στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό του συναρτητή $\mathsf{K}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ προκύπτει ότι:
$$\mathsf{K}(X) = (H\circ\mathsf{C})(X) = H(\mathsf{C}(X)) = \mathsf{C}(X)$$
όπου $\mathsf{C}(X)$ είναι ένα σύμπλοκο της $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, τέτοιο ώστε $\mathsf{C}(X)^n = 0$, για κάθε $n \neq 0$. Όμοια $\mathsf{K}(Y) = \mathsf{C}(Y)$, όπου $\mathsf{C}(Y)^n = 0$, για κάθε $n \neq 0$. Επομένως αν θεωρήσουμε ένα βαθμωτό μορφισμό στο σύνολο $\mathsf{Hom}^{-1}(K(X), K(Y))$, η μοναδική επιλογή που έχουμε είναι ο μορφισμός

αυτός να είναι ο μηδενικός και άρα $\mathsf{Ht}(K(X), K(Y)) = 0$. Από τον ορισμό της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, γνωρίζουμε ότι για κάθε δύο σύμπλοκα $X^\bullet, Y^\bullet$ ισχύει ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y)) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))/\,\mathsf{Ht}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))$$

Επειδή $\mathsf{Ht}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y)) = 0$, έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))/\,\mathsf{Ht}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))$$

και άρα

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y)) \tag{4.4}$$

Όμως, σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.14, ο συναρτητής $\mathsf{C} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός. Άρα για τις αβελιανές ομάδες μορφισμών ισχύει ότι, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(Y)) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4) προκύπτει:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\mathsf{K}(X), \mathsf{K}(Y))$$

και ο συναρτητής $\mathsf{K} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός. ■

Παρατήρηση 4.2.13. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.12 ο συναρτητής $\mathsf{K}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ είναι πλήρης και πιστός. Επομένως μπορούμε να «δούμε» την κατηγορία $\mathcal{A}$ ως την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ που έχει σαν αντικείμενα σύμπλοκα $X^\bullet$ για τα οποία ισχύει ότι $X^n = 0$ για $n \neq 0$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι αβελιανή. Θα ορίσουμε τους συναρτητές συνομολογίας από την κατηγορία των συμπλόκων με αντικείμενα της $\mathcal{A}$ στην αβελιανή κατηγορία $\mathcal{A}$.

Ορισμός 4.2.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε ένα συναρτητή*

$$\mathsf{H}^n\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

ως εξής:

- *Για κάθε αντικείμενο $X^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$,*

$$\mathsf{H}^n(X^\bullet) = \ker d_X^n /\, \mathrm{im}\, d_X^{n-1}$$

- *Για κάθε μορφισμό $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, όπου $f^n(\ker d_X^n) \subset \ker d_Y^n$ και $f^n(\mathrm{im}\, d_X^{n-1}) \subset \mathrm{im}\, d_Y^{n-1}$, επάγεται ένας μορφισμός*

$$\mathsf{H}^n(f^\bullet)\colon \mathsf{H}^n(X^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(Y^\bullet)$$

Οι συναρτητές $\mathsf{H}^n\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται **συναρτητές συνομολογίας (cohomology functors)**.

Παρατήρηση 4.2.15. 1. Οι συναρτητές συνομολογίας είναι προσθετικοί συναρτητές.

2. Θεωρούμε τον translation συναρτητή $\Sigma\colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{A})$. Για ένα αντικείμενο $X^\bullet$ στην $C(\mathcal{A})$, έχουμε:

$$\mathsf{H}^n(\Sigma(X^\bullet)) = \ker d_{\Sigma(X)}^n /\, \mathrm{im}\, d_{\Sigma(X)}^{n-1} = \ker d_X^{n+1} /\, \mathrm{im}\, d_X^n = \mathsf{H}^{n+1}(X^\bullet)$$

και για ένα μορφισμό $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$,

$$\mathsf{H}^n(\Sigma(f^\bullet)) = \mathsf{H}^{n+1}(f^\bullet)$$

Επομένως προκύπτει ότι $\mathsf{H}^{n+1} = \mathsf{H}^n \circ \Sigma$. Τότε

$$\mathsf{H}^0 \circ \Sigma^n = \mathsf{H}^0 \circ \Sigma \circ \Sigma^{n-1} = \mathsf{H}^1 \circ \Sigma^{n-1} = \cdots = \mathsf{H}^n$$

Άρα καταλήγουμε στη σχέση $\mathsf{H}^n = \mathsf{H}^0 \circ \Sigma$ και συνεπώς για να μελετήσουμε τους συναρτητές $\mathsf{H}^n, n \in \mathbb{Z}$, αρκεί να μελετήσουμε τον συναρτητή H^0.

Πρόταση 4.2.16. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία και $f^\bullet, g^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ δύο ομοτοπικοί μορφισμοί στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Τότε $\mathsf{H}^n(f^\bullet) = \mathsf{H}^n(g^\bullet)$.*

Απόδειξη. Έστω $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $g^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ δύο ομοτοπικοί μορφισμοί στην κατηγορία $\mathsf{C}(\mathcal{A})$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 4.2.15, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathsf{H}^0(f^\bullet) = \mathsf{H}^0(g^\bullet)$. Επειδή οι μορφισμοί $f^\bullet, g^\bullet$ είναι ομοτοπικοί, υπάρχει ομοτοπία $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$, τέτοια ώστε:

$$f^0 - g^0 = d_Y^{-1} \circ h^0 + h^1 \circ d_X^0 : X^0 \longrightarrow Y^0$$

Θεωρούμε τον περιορισμό του μορφισμού $f^0 - g^0$ στον $\ker d_X^0$ και τον συμβολίζουμε με $(f^0 - g^0)|_{\ker d_X^0}$. Τότε $(f^0 - g^0)|_{\ker d_X^0} = d_Y^{-1} \circ h^0$. Συνεπώς η εικόνα του μορφισμού $(f^0 - g^0)|_{\ker d_X^0} : \ker d_X^0 \longrightarrow Y^0$ περιέχεται στην $\operatorname{im} d_Y^{-1}$ και άρα ο μορφισμός $(f^0 - g^0)|_{\ker d_X^0}$ επάγει τον μηδενικό μορφισμό από τον πυρήνα $\ker d_X^0$ στο $\mathsf{H}^0(Y^\bullet) = \ker d_Y^0 / \operatorname{im} d_Y^{-1}$. Άρα ο μορφισμός $\mathsf{H}^0(f^\bullet - g^\bullet) \colon \mathsf{H}^0(X^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^0(Y^\bullet)$ είναι ο μηδενικός μορφισμός, διότι $\mathsf{H}^0(X^\bullet) = \ker d_X^0 \longrightarrow \operatorname{im} d_X^{-1}$. Επειδή ο συναρτητής H^0 είναι προσθετικός, προκύπτει ότι $\mathsf{H}^0(f^\bullet) - H^0(g^\bullet) = \mathsf{H}^0(f^\bullet - g^\bullet) = 0$. Τελικά ισχύει ότι $\mathsf{H}^0(f^\bullet) = \mathsf{H}^0(g^\bullet)$. ∎

Παρατήρηση 4.2.17. Εκμεταλλευόμενοι το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.2.16, συμπεραίνουμε ότι κάθε συναρτητής $\mathsf{H}^n \colon \mathsf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$, επάγει συναρτητή $\mathsf{H}^n \colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και ο συναρτητής $\mathsf{H}^n \colon K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι προσθετικός και ισχύει ότι $\mathsf{H}^n = \mathsf{H}^0 \circ \Sigma^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως και σε αυτήν την περίπτωση, για να μελετήσουμε τον συναρτητή συνομολογίας H^n για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$, αρκεί να μελετήσουμε τον συναρτητή συνομολογίας H^0.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$. Δοθέντων δύο συμπλόκων $X^\bullet, Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ και ενός μορφισμού συμπλόκων $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ θα ορίσουμε ένα νέο σύμπλοκο, το οποίο θα καλούμε κώνο του μορφισμού $f^\bullet$.

Ορισμός 4.2.18. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$. Ορίζουμε το σύμπλοκο $(C^\bullet_{f^\bullet}, d^\bullet_{C_{f^\bullet}})$ της $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$, όπου:*

1. *το αντικείμενο $C^\bullet_{f^\bullet}$ είναι ένα βαθμωτό αντικείμενο, τέτοιο ώστε $C^n_{f^\bullet} = X^{n+1} \oplus Y^n, n \in \mathbb{Z}$.*
2. *ο βαθμωτός μορφισμός $d^\bullet_{C_{f^\bullet}} = \{d^n_{C_{f^\bullet}} : C^n_{f^\bullet} \longrightarrow C^{n+1}_{f^\bullet}\}$, ορίζεται ως:*

$$d^n_{C_{f^\bullet}} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{Z}$$

Το σύμπλοκο $(C^\bullet_{f^\bullet}, d^\bullet_{C_{f^\bullet}})$ καλείται **κώνος (cone)** *του μορφισμού $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$.*

Παρατήρηση 4.2.19. 1. Θεωρούμε τον μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ και $(C^\bullet_{f^\bullet}, d^\bullet_{C_{f^\bullet}})$ τον κώνο του μορφισμού $f^\bullet$. Ο κώνος παριστάνεται από το διάγραμμα:

$$C^\bullet_{f^\bullet} : \cdots \longrightarrow X^n \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}_{C_{f^\bullet}}} X^{n+1} \oplus Y^n \xrightarrow{d^n_{C_{f^\bullet}}} X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Θεωρούμε τη σύνθεση των δύο διαδοχικών μορφισμών $d^{n-1}_{C_{f^\bullet}}$, $d^n_{C_{f^\bullet}}$:

$$d^n_{C_{f^\bullet}} \circ d^{n-1}_{C_{f^\bullet}} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^n & 0 \\ f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^{n+1} \circ d_X^n & 0 \\ -f^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^n \circ f^n & d_Y^n \circ d_Y^{n-1} \end{pmatrix}$$

Όμως $d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0$ και $d_Y^n \circ d_Y^{n-1} = 0$, αφού $d_X^\bullet, d_Y^\bullet$ είναι διαφορικά. Επιπλέον, επειδή ο $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι μορφισμός συμπλόκων, προκύπτει ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet : \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
Y^\bullet : \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $-f^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^n \circ f^n = 0$. Τελικά

$$d_{C_{f^\bullet}}^n \circ d_{C_{f^\bullet}}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα ο μορφισμός $d_{C_{f^\bullet}}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι πράγματι διαφορικό.

2. Θεωρούμε τον μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ και $(C_{f^\bullet}^\bullet, d_{C_{f^\bullet}}^\bullet)$ τον κώνο του μορφισμού $f^\bullet$. Θεωρούμε, επίσης, τον βαθμωτό μορφισμό $i_{f^\bullet} \colon Y^\bullet \longrightarrow C_{f^\bullet}^\bullet$ ο οποίος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ορίζεται ως
$$i_{f^\bullet}^n = i_{Y^n} \colon Y^n \longrightarrow C_{f^\bullet}^n$$
Τότε
$$d_{C_{f^\bullet}}^n \circ i_{f^\bullet}^n = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_Y^n \end{pmatrix} = i_{f^\bullet}^{n+1} \circ d_Y^n$$
Δηλαδή το διάγραμμα:
$$\begin{tikzcd} Y^\bullet : \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] \arrow[d, "i_{f^\bullet}^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] \arrow[d, "i_{f^\bullet}^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{f^\bullet}^{n+1}"] & \cdots \\ C_{f^\bullet}^\bullet : \cdots \arrow[r] & X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "d_{C_{f^\bullet}}^{n-1}"] & X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "d_{C_{f^\bullet}}^n"] & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$
είναι μεταθετικό. Συνεπώς ο μορφισμός $i_{f^\bullet} \colon Y^\bullet \longrightarrow C_{f^\bullet}^\bullet$ είναι μορφισμός συμπλόκων.

3. Θεωρούμε τον μορφισμό συμπλόκων $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ και $(C_{f^\bullet}^\bullet, d_{C_{f^\bullet}}^\bullet)$ τον κώνο του μορφισμού $f^\bullet$. Θεωρούμε, επίσης, τον βαθμωτό μορφισμό $p_{f^\bullet} \colon C_{f^\bullet}^n \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$, ο οποίος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ορίζεται ως
$$p_{f^\bullet}^n = p_{X^{n+1}} \colon C_{f^\bullet}^n \longrightarrow X^{n+1}$$
Τότε
$$p_{f^\bullet}^{n+1} \circ d_{C_{f^\bullet}}^n = \begin{pmatrix} 1_{X^{n+2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \end{pmatrix} = d_{\Sigma(X)}^n \circ p_{f^\bullet}^n$$
Δηλαδή το διάγραμμα:
$$\begin{tikzcd} C_{f^\bullet}^\bullet : \cdots \arrow[r] & X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "d_{C_{f^\bullet}}^{n-1}"] \arrow[d, "p_{f^\bullet}^{n-1}"'] & X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "d_{C_{f^\bullet}}^n"] \arrow[d, "p_{f^\bullet}^n"] & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "p_{f^\bullet}^{n+1}"] & \cdots \\ X^\bullet : \cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] & X^{n+1} \arrow[r, "d_{X^{n+1}}"] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$
είναι μεταθετικό και συνεπώς ο μορφισμός $p_{f^\bullet} \colon C_{f^\bullet}^\bullet \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$ είναι μορφισμός συμπλόκων.

Χρησιμοποιώντας τον κώνο ενός μορφισμού $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$, θα ορίσουμε μία νέα κλάση τριγώνων στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$ που θα καλούνται standard τρίγωνα.

Ορισμός 4.2.20. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$. Το τρίγωνο*
$$\begin{tikzcd} & C_{f^\bullet}^\bullet \arrow[dl, "p_{f^\bullet}"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_{f^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$
όπου $i_{f^\bullet}, p_{f^\bullet}$ οι μορφισμοί της Παρατήρησης 4.2.19, καλείται **standard τρίγωνο (standard triangle)** *με βάση το μορφισμό $f^\bullet$.*

Λήμμα 4.2.21. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $g^\bullet \colon X_1^\bullet \longrightarrow Y_1^\bullet$ δύο μορφισμοί στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$, τέτοιοι ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[d, "v^\bullet"] \\ X_1^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & Y_1^\bullet \end{tikzcd}$$

μετατίθεται ως προς ομοτοπία, δηλαδή οι μορφισμοί $v^\bullet \circ f^\bullet$, $g^\bullet \circ u^\bullet$ είναι ομοτοπικοί. Τότε υπάρχει μορφισμός $w^\bullet \colon C_{f^\bullet}^\bullet \longrightarrow C_{g^\bullet}^\bullet$, ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_{f^\bullet}"] \arrow[d, "v^\bullet"] & C_{f^\bullet}^\bullet \arrow[r, "p_{f^\bullet}"] \arrow[d, "w^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u^\bullet)"] \\ X_1^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & Y_1^\bullet \arrow[r, "i_{g^\bullet}"] & C_{g^\bullet}^\bullet \arrow[r, "p_{g^\bullet}"] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

μετατίθεται ως προς ομοτοπία. Επιπλέον αν το πρώτο διάγραμμα είναι μεταθετικό στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$, τότε και το δεύτερο διάγραμμα είναι μεταθετικό στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Έστω ότι οι μορφισμοί $v^\bullet \circ f^\bullet$, $g^\bullet \circ u^\bullet$ είναι ομοτοπικοί. Τότε υπάρχει μορφισμός $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y_1^\bullet)$ τέτοιος ώστε:

$$g^\bullet \circ u^\bullet - v^\bullet \circ f^\bullet = d_{Y_1}^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d_X^\bullet$$

Ορίζουμε τον βαθμωτό μορφισμό $w^\bullet \colon C_{f^\bullet}^\bullet \longrightarrow C_{g^\bullet}^\bullet$ ως:

$$w^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & u^n \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} d_{C^{g^\bullet}}^n \circ w^n &= \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} & d_{Y_1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} \circ u^{n+1} & 0 \\ g^{n+1} \circ u^{n+1} - d_{Y_1}^n \circ h^{n+1} & d_{Y_1}^n \circ v^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u^{n+2} \circ d_X^{n+1} & 0 \\ v^{n+1} \circ f^{n+1} + h^{n+2} \circ d_X^{n+1} & v^{n+1} \circ d_Y^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^{n+2} & 0 \\ -h^{n+2} & v^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \\ &= w^{n+1} \circ d_{C_{f^\bullet}}^n \end{aligned}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως $d_{C_{g^\bullet}}^\bullet \circ w^\bullet = w^\bullet \circ d_{C_{f^\bullet}}^\bullet$ και άρα ο βαθμωτός μορφισμός $w^\bullet \colon C_{f^\bullet}^\bullet \longrightarrow C_{g^\bullet}^\bullet$ είναι μορφισμός συμπλόκων. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$w^n \circ i_{f^\bullet}^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u^n \end{pmatrix} = i_{g^\bullet}^n \circ v^n$$

Επομένως ισχύει $w^\bullet \circ i_{f^\bullet} = i_{g^\bullet} \circ v$ και άρα το δεύτερο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Τέλος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$u^{n+1} \circ p_{f^\bullet}^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ -h^{n+1} & v^n \end{pmatrix} = p_{g^\bullet} \circ w^n$$

Συνεπώς $u^\bullet \circ p_{f^\bullet} = p_{g^\bullet} \circ w^\bullet$ και έτσι το τελευταίο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Έστω, τώρα, ότι το πρώτο διάγραμμα είναι μεταθετικό. Τότε ο βαθμωτός μορφισμός $h^\bullet$ θα είναι ο μηδενικός και άρα $g^\bullet \circ u^\bullet = v^\bullet \circ f^\bullet$. Σε αυτήν την περίπτωση και το πρώτο τετράγωνο θα είναι μεταθετικό. ∎

Με βάση τα παραπάνω μπορούσε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις που θα φανούν χρήσιμες στην πορεία αυτής της ενότητας.

Παρατήρηση 4.2.22. 1. Έστω $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ και $i_{f^\bullet} \colon Y^\bullet \longrightarrow C^\bullet_{f^\bullet}$ ο βαθμωτός μορφισμός που ορίσαμε στο δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 4.2.19. Ορίζουμε τον κώνο $D^\bullet_{f^\bullet}$ του μορφισμού $i_{f^\bullet}$, ως εξής:

$$D^n_{f^\bullet} = Y^{n+1} \oplus C^n_{g^\bullet} = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$$

και

$$d^n_{D_{f^\bullet}} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 \\ i^{n+1}_{f^\bullet} & d^n_{C_{f^\bullet}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 & 0 \\ 0 & -d^{n+1}_X & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

2. Έστω $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ και $D^\bullet_{f^\bullet}$ ο κώνος που ορίσαμε στο πρώτο σκέλος της Παρατήρησης. Ορίζουμε ένα βαθμωτό μορφισμό $\alpha \colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow D^\bullet_{f^\bullet}$ ως:

$$\alpha^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει

$$d^n_{D_{f^\bullet}} \circ \alpha^n = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 & 0 \\ 0 & -d^{n+1}_X & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{n+1}_Y \circ f^{n+1} \\ -d^{n+1}_X \\ 0 \end{pmatrix}$$

Όμως ο μορφισμός $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι μορφισμός συμπλόκων και άρα προκύπτει ότι $d^{n+1}_Y \circ f^{n+1} = f^{n+2} \circ d^{n+1}_X$. Επομένως

$$d^n_{D_{f^\bullet}} \circ \alpha^n = \begin{pmatrix} f^{n+2} \circ d^{n+1}_X \\ -d^{n+1}_X \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -f^{n+2} \\ 1_{X^{n+2}} \\ 0 \end{pmatrix} \circ d^{n+1}_X = \alpha^{n+1} \circ d^n_{\Sigma(X^\bullet)}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και άρα ο βαθμωτός μορφισμός $\alpha : \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow D^\bullet_{f^\bullet}$ είναι μορφισμός συμπλόκων.

3. Έστω $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ και $D^\bullet_{f^\bullet}$ ο κώνος που ορίσαμε στο πρώτο σκέλος της Παρατήρησης. Ορίζουμε ένα βαθμωτό μορφισμό $\beta : D^\bullet_{f^\bullet} \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$ ως:

$$\beta^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ανάλογα με το δεύτερο σκέλος της παρούσας Παρατήρησης δείχνουμε ότι:

$$d^n_{\Sigma(X^\bullet)} \circ \beta^n = \beta^{n+1} \circ d^n_{D_{f^\bullet}}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, πράγματι, ο βαθμωτός μορφισμός $\beta : D^\bullet_{f^\bullet} \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$ είναι ένας μορφισμός συμπλόκων.

Βασικός στόχος αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε οτι η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, με αντικείμενα σύμπλοκα αντικειμένων μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{A}$, είναι τριγωνισμένη κατηγορία, αν εφοδιαστεί με έναν translation συναρτητή και κατάλληλη κλάση τριγώνων. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την ακόλουθη κλάση τριγώνων στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$:

Ορισμός 4.2.23. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη ομοτοπική κατηγορία. Ορίζουμε μία κλάση τριγώνων Δ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ η οποία να αποτελείται από τα τρίγωνα:*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & {[1]} & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

της $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$, των οποίων η εικόνα στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ να είναι ισόμορφη με ένα standard τρίγωνο στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.

Για τους μορφισμούς α και β της παραπάνω παρατήρησης θα αποδείξουμε τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 4.2.24. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Ο μορφισμός $\alpha\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow D^\bullet_{f^\bullet}$ είναι ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τους βαθμωτούς μορφισμούς $\alpha\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow D^\bullet_{f^\bullet}$ και $\beta\colon D^\bullet_{f^\bullet} \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$ της Παρατήρησης 4.2.22. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε:

$$\beta^n \circ \alpha^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{X^{n+1}}$$

Συνεπώς ισχύει, $\beta\circ\alpha = 1_{\Sigma(X^\bullet)}$. Στη συνέχεια θεωρούμε τον βαθμωτό μορφισμό $h^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(D^\bullet_{f^\bullet}, D^\bullet_{f^\bullet})$, ο οποίος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ως:

$$h^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι:
$d^{n-1}_{D_{f^\bullet}} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n_{D_{f^\bullet}} =$

$$= \begin{pmatrix} -d^n_Y & 0 & 0 \\ 0 & -d^n_X & 0 \\ 1^n_Y & f^n & d^{n-1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{Y^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 & 0 \\ 0 & -d^{n+1}_X & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d^n_Y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1^{n+1}_Y & f^{n+1} & d_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1_{D^n_{f^\bullet}} - \alpha^n \circ \beta^n$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο μορφισμός $\alpha \circ \beta$ είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_{D^\bullet_{f^\bullet}}$. Συνεπώς ο μορφισμός $\alpha\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow D^\bullet_{f^\bullet}$ είναι ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων από αντικείμενα της $\mathcal{A}$. ∎

Λήμμα 4.2.25. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία και $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων. Τότε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet \arrow[r, "i_{f^\bullet}"] \arrow[d, "1_{Y^\bullet}"'] & C^\bullet_{f^\bullet} \arrow[r, "p_{f^\bullet}"] \arrow[d, "1_{C_{f^\bullet}}"] & \Sigma(X^\bullet)^\bullet \arrow[r, "-\Sigma(f^\bullet)"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(Y^\bullet)}"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "i_{f^\bullet}"'] & C^\bullet_{f^\bullet} \arrow[r, "i_{i_{f^\bullet}}"'] & D^\bullet_{f^\bullet} \arrow[r, "p_{i_{f^\bullet}}"'] & \Sigma(Y^\bullet) \end{tikzcd}$$

μετατίθεται ως προς ομοτοπία.

Απόδειξη. Έστω $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός συμπλόκων και $\alpha\colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow D^\bullet_{f^\bullet}$, $\beta\colon D^\bullet_{f^\bullet} \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$ οι μορφισμοί της Παρατήρησης 4.2.22. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Y^\bullet \arrow[r, "i_{f^\bullet}"] \arrow[d, "1_{Y^\bullet}"'] & C^\bullet_{f^\bullet} \arrow[r, "p_{f^\bullet}"] \arrow[d, "1_{C_{f^\bullet}}"] & \Sigma(X^\bullet)^\bullet \arrow[r, "-\Sigma(f^\bullet)"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(Y^\bullet)}"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "i_{f^\bullet}"'] & C^\bullet_{f^\bullet} \arrow[r, "i_{i_{f^\bullet}}"'] & D^\bullet_{f^\bullet} \arrow[r, "p_{i_{f^\bullet}}"'] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Το πρώτο τετράγωνο είναι, προφανώς, μεταθετικό. Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$p_{i_{f^\bullet}} \circ \alpha^n = \begin{pmatrix} 1_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ 1_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = -f^{n+1} = -\Sigma(f^\bullet)^n$$

Επομένως ισχύει ότι $p_{i_{f^\bullet}} \circ \alpha = -\Sigma(f^\bullet)$ και συμπεραίνουμε ότι το τελευταίο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Τέλος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$\beta^n \circ i^n_{i_{f^\bullet}} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{Y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} = p^n_{f^\bullet}$$

και άρα ισχύει η ισότητα $\beta \circ i_{i_{f^\bullet}} = p_{f^\bullet}$. Όμως από το Λήμμα 4.2.24 ισχύει η σύνθεση $\alpha \circ \beta$ είναι ομοτοπική με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_{D^\bullet_{f^\bullet}}$. Άρα προκύπτει ότι:

$$\alpha \circ p_{f^\bullet} = \alpha \circ \beta \circ i_{i_{f^\bullet}} \approx 1_{D^\bullet_{f^\bullet}} \circ i_{i_{f^\bullet}} = i_{i_{f^\bullet}}$$

και το μεσσαίο τετράγωνο μετατίθεται ως προς ομοτοπία. ∎

Για να καταλήξουμε ότι η $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, μαζί με την κλάση τριγώνων Δ του παραπάνω ορισμού, είναι μια τριγωνισμένη κατηγορία χρειαζόμαστε μια σειρά από αποτελέσματα, τα οποία παραθέτουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 4.2.26. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία, $X^\bullet$ ένα σύμπλοκο της $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$ και $1_{X^\bullet}\colon X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ ο ταυτοτικός μορφισμός του αντικειμένου $X^\bullet$. Τότε ο κώνος $C^\bullet_{1_{X^\bullet}}$ του ταυτοτικού μορφισμού είναι ισόμορφος με το μηδενικό αντικείμενο $0^\bullet$ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Έστω $X^\bullet$ ένα αντικείμενο στην $\mathsf{C}(\mathcal{A})$ και $1_{X^\bullet}\colon X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ ο ταυτοτικός μορφισμός του $X^\bullet$. Ορίζουμε το βαθμωτό αντικείμενο:

$$C^\bullet := C^\bullet_{1_{X^\bullet}} = \Sigma(X^\bullet) \oplus X^\bullet$$

και θεωρούμε τον βαθμωτό μορφισμό $h \in \mathsf{Hom}^{-1}(C^\bullet, C^\bullet)$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο μορφισμός $h^\bullet$ ορίζεται ως:

$$h^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
d^{n-1}_C \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n_C &= \begin{pmatrix} -d^n_X & 0 \\ 1_{X^n} & d^{n-1}_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & d^n_X \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d^n_X \\ 0 & 1_{X^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & d^n_X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{X^n} \end{pmatrix} \\
&= 1^n_C
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα $d^\bullet_{C^\bullet} \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d^\bullet_{C^\bullet} = 1^\bullet_{C^\bullet}$ και συνεπώς ο ταυτοτικός μορφισμός του αντικειμένου $C^\bullet$ είναι ομοτοπικός με το μηδενικό. Επομένως ισχύει ότι $C^\bullet \simeq 0^\bullet$ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. ∎

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.26 θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.2.27. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Θεωρούμε την τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$, όπου $\Sigma \colon \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι translation συναρτητής και Δ η κλάση τριγώνων του Ορισμού 4.2.23. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Κάθε τρίγωνο που είναι ισόμορφο με ένα τρίγωνο της κλάσης Δ, είναι τρίγωνο της κλάσης Δ.*

2. *Για κάθε αντικείμενο $X^\bullet$ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & 0^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "1_{X^\bullet}"] & & X^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι τρίγωνο της κλάσης Δ.

3. *Για κάθε μορφισμό $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, υπάρχει αντικείμενο $Z^\bullet$ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

να ανήκει στην κλάση Δ.

Απόδειξη. 1. Έστω

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην κλάση Δ. Εξ' ορισμού η εικόνα του τριγώνου στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ θα είναι ισόμορφη με ένα standard τρίγωνο. Έστω, τώρα, ένα τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z_1^\bullet \arrow[dl, "h_1^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X_1^\bullet \arrow[rr, "f_1^\bullet"] & & Y_1^\bullet \arrow[ul, "g_1^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$, το οποίο είναι ισόμορφο με το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

Άμεσα και η εικόνα του τριγώνου

$$\begin{tikzcd} & Z_1^\bullet \arrow[dl, "h_1^\bullet"'] & \\ X_1^\bullet \arrow[rr, "f_1^\bullet"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y_1^\bullet \arrow[ul, "g_1^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, είναι ισόμορφη με ένα standard τρίγωνο. Συνεπώς το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & Z_1^\bullet \arrow[dl, "h_1^\bullet"'] & \\ X_1^\bullet \arrow[rr, "f_1^\bullet"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y_1^\bullet \arrow[ul, "g_1^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ.

2. Έστω $X^\bullet$ ένα αντικείμενο στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ και $1_{X^\bullet} \colon X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ ο ταυτοτικός μορφισμός του $X^\bullet$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.26, προκύπτει ότι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "1_{X^\bullet}"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"] & 0^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "0^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "1_{X^\bullet}"] & X^\bullet \arrow[r] & C^\bullet_{1_{X^\bullet}} \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ και το δεύτερο τρίγωνο είναι standard τρίγωνο. Επειδή οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί, προκύπτει ότι το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & 0^\bullet \arrow[dl] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "1_{X^\bullet}"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & X^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι ισόμορφο με ένα standard τρίγωνο, συνεπώς ανήκει στην κλάση Δ.

3. Έστω $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Τότε το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet_{f^\bullet} \arrow[dl, "h^\bullet"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

είναι προφανώς ένα τρίγωνο της κλάσης Δ, αφού η εικόνα του είναι ισόμορφη με ένα standard τρίγωνο στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. ■

Παρατήρηση 4.2.28. Η Πρόταση 4.2.27 αποδεικνύει ότι για την τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$ ικανοποιούνται τα αξιώματα (TR1a), (TR1b), (TR1c) του Ορισμού 3.1.5.

Πρόταση 4.2.29. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Θεωρούμε την τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$, όπου $\Sigma\colon \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι translation συναρτητής και Δ η κλάση τριγώνων του Ορισμού 4.2.23. Το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ αν και μόνο αν το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(f^\bullet)"', "{[1]}"] & \\ Y^\bullet \arrow[rr, "g^\bullet"] & & Z^\bullet \arrow[ul, "h^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ.

Απόδειξη. $(\Longrightarrow)$ Υποθέτουμε ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ ανήκει στην κλάση Δ. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει ένα standard τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[dl, "p_{\alpha^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "\alpha^\bullet"] & & V^\bullet \arrow[ul, "i_{\alpha^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

του οποίου η εικόνα στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφη με το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

Επομένως έχουμε έναν ισομορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "v^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "w^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u^\bullet)"] \\ U^\bullet \arrow[r, "{[\alpha^\bullet]_\approx}"'] & V^\bullet \arrow[r, "{[i_{\alpha^\bullet}]_\approx}"'] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\alpha^\bullet}]_\approx}"'] & \Sigma(U^\bullet) \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Από τα Λήμματα 4.2.24, 4.2.25, προκύπτει ότι η εικόνα του τριγώνου

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(U^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(\alpha^\bullet)"', "{[1]}"] & \\ V^\bullet \arrow[rr, "i_{\alpha^\bullet}"] & & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[ul, "p_{\alpha^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

είναι ισόμορφη με την εικόνα ενός standard τριγώνου στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Επομένως το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(U^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(\alpha^\bullet)"', "{[1]}"] & \\ V^\bullet \arrow[rr, "i_{\alpha^\bullet}"] & & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[ul, "p_{\alpha^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Όμως ο μορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "v^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "w^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet)^\bullet \arrow[r, "-\Sigma(f^\bullet)"] \arrow[d, "\Sigma(u^\bullet)"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(v^\bullet)"] \\ V^\bullet \arrow[r, "{[i_{\alpha^\bullet}]_\approx}"'] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\alpha^\bullet}]_\approx}"'] & \Sigma(U^\bullet) \arrow[r, "{-\Sigma([\alpha^\bullet]_\approx)}"'] & \Sigma(V^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι ισομορφισμός στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, αφού οι μορφισμοί $v^\bullet, w^\bullet$ είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(U^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(\alpha^\bullet)"', "{[1]}"] & \\ V^\bullet \arrow[rr, "i_{\alpha^\bullet}"] & & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[ul, "p_{\alpha^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ και από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.2.27, έπεται ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(f^\bullet)"', "{[1]}"] & \\ Y^\bullet \arrow[rr, "g^\bullet"] & & Z^\bullet \arrow[ul, "h^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ.

$(\Longleftarrow)$ Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(f^\bullet)"', "{[1]}"] & \\ Y^\bullet \arrow[rr, "g^\bullet"] & & Z^\bullet \arrow[ul, "h^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ. Τότε, εξ' ορισμού, υπάρχει ένα standard τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[dl, "p_{\alpha^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "\alpha^\bullet"] & & V^\bullet \arrow[ul, "i_{\alpha^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε, η εικόνα του στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφη με το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(f^\bullet)"', "{[1]}"] & \\ Y^\bullet \arrow[rr, "g^\bullet"] & & Z^\bullet \arrow[ul, "h^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "v^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet)^\bullet \arrow[r, "-\Sigma(X^\bullet)"] \arrow[d, "w^\bullet"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(u^\bullet)"] \\
U^\bullet \arrow[r, "{[\alpha^\bullet]_\approx}"'] & V^\bullet \arrow[r, "{[i_{\alpha^\bullet}]_\approx}"'] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\alpha^\bullet}]_\approx}"'] & \Sigma(U^\bullet)
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Θεωρούμε, τώρα, το standard τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_{\Sigma^{-2}(\alpha)} \arrow[dl, "p_{\Sigma^{-2}(\alpha^\bullet)}"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}(U^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma^{-2}(\alpha^\bullet)"] & & \Sigma^{-2}(V^\bullet) \arrow[ul, "i_{\Sigma^{-2}}(\alpha^\bullet)"']
\end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό $\Sigma^{-2}(\alpha^\bullet)\colon \Sigma^{-2}(U^\bullet) \longrightarrow \Sigma^{-2}(V^\bullet)$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ το βαθμωτό αντικείμενο $C^\bullet_{\Sigma^{-2}(\alpha)}$ ορίζεται ως:

$$C^n_{\Sigma^{-2}(\alpha^\bullet)} = \Sigma^{-1}(U^\bullet)^n \oplus \Sigma^{-2}(V^\bullet)^n = U^{n-1} \oplus V^{n-2} = \Sigma^{-2}(C^\bullet_{\alpha^\bullet})$$

ενώ το διαφορικό του ορίζεται ως:

$$d^n_{C_{\Sigma^{-2}(\alpha^\bullet)}} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_{\Sigma^{-2}(U^\bullet)} & 0 \\ \Sigma^{-2}(\alpha^\bullet)^{n+1} & d^n_{\Sigma^{-2}(V^\bullet)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^{n-1}_U & 0 \\ \alpha^{n-1} & d^{n-2}_V \end{pmatrix} = d^n_{\Sigma^{-2}(C^\bullet_{\alpha^\bullet})}$$

Επομένως προκύπτει ότι $C^\bullet_{\Sigma^{-2}(\alpha)} = \Sigma^{-2}(C^\bullet_{\alpha^\bullet})$ και καταλήγουμε, άμεσα, ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma^{-2}(C^\bullet_{\alpha^\bullet}) \arrow[dl, "{\Sigma^{-2}([p_{\alpha^\bullet}]_\approx)}"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}(U^\bullet) \arrow[rr, "{\Sigma^{-2}([\alpha^\bullet]_\approx)}"] & & \Sigma^{-2}(V^\bullet) \arrow[ul, "{\Sigma^{-2}([i_{\alpha^\bullet}]_\approx)}"']
\end{tikzcd}$$

της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ ανήκει στην κλάση Δ. Εφαρμόζοντας το συναρτητή Σ^{-2} στον παραπάνω ισομορφισμό τριγώνων, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma^{-1}(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma^{-1}(g^\bullet)"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}(Y^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma^{-2}(h^\bullet)"] & & \Sigma^{-2}(Z^\bullet) \arrow[ul, "\Sigma^{-1}(f^\bullet)"']
\end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ. Εφαρμόζοντας το πρώτο σκέλος της απόδειξης, προκύπτει ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma^{-1}(Y^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma^{-1}(f^\bullet)"', "{[1]}"] & \\
\Sigma^{-2}(Z^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma^{-2}(g^\bullet)"] & & \Sigma^{-1}(X^\bullet) \arrow[ul, "\Sigma^{-2}(h^\bullet)"']
\end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση Δ. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το πρώτο σκέλος της απόδειξης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ανήκει και αυτό στην κλάση Δ και έτσι λαμβάνουμε το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 4.2.30. Η Πρόταση 4.2.29 αποδεικνύει ότι η τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$ ικανοποιεί το αξίωμα (TR2) του Ορισμού 3.1.5.

Πρόταση 4.2.31. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Θεωρούμε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Z^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\ X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, όπου οι δύο πρώτες γραμμές είναι τρίγωνα και το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Τότε υπάρχει μορφισμός $Z^\bullet \longrightarrow Z_1^\bullet$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\ X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι μορφισμός τριγώνων.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z_1^\bullet \arrow[dl] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ X_1^\bullet \arrow[rr] & & Y_1^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Τότε υπάρχουν standard τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd} & C_{\alpha^\bullet}^\bullet \arrow[dl] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ U^\bullet \arrow[rr, "\alpha^\bullet"] & & V^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_{\beta^\bullet}^\bullet \arrow[dl] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ U_1^\bullet \arrow[rr, "\beta^\bullet"] & & V_1^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

τέτοια ώστε οι εικόνες τους στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφες με τα παραπάνω τρίγωνα. Επομένως υπάρχουν μορφισμοί συμπλόκων $u^\bullet : U^\bullet \longrightarrow U_1^\bullet$ και $v^\bullet : V^\bullet \longrightarrow V_1^\bullet$ τέτοιοι ώστε η εικόνα του διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} U^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & V^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v^\bullet"'] & C_{\alpha^\bullet}^\bullet \arrow[r] & \Sigma(U^\bullet) \arrow[d] \\ U_1^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] & V_1^\bullet \arrow[r] & C_{\beta^\bullet}^\bullet \arrow[r] & \Sigma(U_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι ισόμορφη με το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Z^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\ X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

Επειδή το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Y^\bullet \arrow[d] \\ X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} U^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & V^\bullet \arrow[d, "v^\bullet"] \\ U_1^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] & V_1^\bullet \end{tikzcd}$$

μετατίθεται ως προς ομοτοπία. Τότε, από το Λήμμα 4.2.21 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $w^\bullet \colon C^\bullet_{\alpha^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{\beta^\bullet}$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} U^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"'] & V^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v^\bullet"'] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "w^\bullet"'] & \Sigma(U^\bullet) \arrow[d] \\ U_1^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] & V_1^\bullet \arrow[r] & C^\bullet_{\beta^\bullet} \arrow[r] & \Sigma(U_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

μετατίθεται ως προς ομοτοπία. Επομένως υπάρχει μορφισμός $Z^\bullet \longrightarrow Z_1^\bullet$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d] \\ X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι μορφισμός τριγώνων στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. ∎

Παρατήρηση 4.2.32. Η Πρόταση 4.2.31 αποδεικνύει ότι η τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$ ικανοποιεί το αξίωμα (TR3) του Ορισμού 3.1.5.

Στο επόμενο λήμμα θα δώσουμε μια διαφορετική περιγραφή των τριγώνων της κλάσης Δ του Ορισμού 4.2.23, την οποία θα χρειαστούμε για να αποδείξουμε το οκταεδρικό αξίωμα του Ορισμού 3.1.5 για την τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$.

Λήμμα 4.2.33. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία, $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ και $\alpha^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ο μορφισμός συμπλόκων που αναπαριστά τον μορφισμό $f^\bullet$. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Το τρίγωνο*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

   ανήκει στην κλάση Δ του Ορισμού 4.2.23.

2. *Υπάρχει ένας ισομορφισμός συμπλόκων $u^\bullet : Z^\bullet \longrightarrow C^\bullet_{\alpha^\bullet}$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{Y^\bullet}"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & \Sigma(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

   είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, που παριστάνεται από τον μορφισμό συμπλόκων $\alpha\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$.

(1.$\Longrightarrow$2.) Υποθέτουμε ότι το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση τριγώνων Δ του Ορισμού 4.2.23. Επίσης, προφανώς, η εικόνα του standard τριγώνου:

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[dl, "p_{\alpha^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_{\alpha^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

είναι ένα τρίγωνο της κλάσης Δ. Συνεπώς έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{Y^\bullet}"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & \Sigma(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

του οποίου οι γραμμές είναι τρίγωνα της κλάσης Δ και το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Όμως έχουμε δείξει ότι ισχύει το αξίωμα (TR3) για την τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$. Επομένως υπάρχει μορφισμός συμπλόκων $u^\bullet\colon Z^\bullet \longrightarrow C^\bullet_{\alpha^\bullet}$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{Y^\bullet}"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & \Sigma(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι μορφισμός τριγώνων στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Επειδή οι μορφισμοί $1_{X^\bullet}, 1_{Y^\bullet}$ είναι ισομορφισμοί, από το Λήμμα 3.1.17, έπεται πως ο μορφισμός $u^\bullet\colon Z^\bullet \longrightarrow C^\bullet_{\alpha^\bullet}$ είναι ισομορφισμός.

(2.$\Longrightarrow$1.) Το ζητούμενο είναι άμεσο από τον ορισμό της κλάσης τριγώνων Δ του Ορισμού 4.2.23. ∎

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.2.34. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία, $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $g^\bullet\colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ δυο μορφισμοί στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ και $h^\bullet := g^\bullet \circ f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ η σύνθεση αυτών. Θεωρούμε το διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "g^\bullet"'] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & Y_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "\gamma^\bullet"] & X_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα στην κλάση Δ και τα τετράγωνα της πρώτης στήλης είναι μεταθετικά. Τότε υπάρχουν μορφισμοί $u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet$ που συμπληρώνουν το παραπάνω διάγραμμα στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "g^\bullet"'] & Z_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u^\bullet"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & Y_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v^\bullet"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "\alpha^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "\gamma^\bullet"] \arrow[d, "\beta^\bullet"'] & X_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{X_1^\bullet}"'] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(\alpha^\bullet)"] \\
Z_1^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] & Y_1^\bullet \arrow[r, "v^\bullet"] & X_1^\bullet \arrow[r, "w^\bullet"] & \Sigma(Z_1^\bullet)
\end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα στην κλάση Δ και οι κατακόρυφοι μορφισμοί δημιουργούν μορφισμούς τριγώνων.

Απόδειξη. Έστω $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $g^\bullet\colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ και $h^\bullet := g^\bullet \circ f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ μορφισμοί στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "g^\bullet"'] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & Y_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "\gamma^\bullet"] & X_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα της κλάσης Δ και τα τετράγωνα της πρώτης στήλης είναι μεταθετικά. Από το Λήμμα 4.2.33 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $\phi^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, $\psi^\bullet \colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ και $\chi^\bullet := \psi^\bullet \circ \phi^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ τέτοιοι ώστε τα τρίγωνα:

$$\begin{tikzcd} & Z_1^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & X_1^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ Y^\bullet \arrow[rr, "g^\bullet"] & & Z^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & Y_1^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "h^\bullet"] & & Z^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

είναι ισόμορφα με τις εικόνες των standard τριγώνων

$$\begin{tikzcd} & C_{\phi^\bullet}^\bullet \arrow[dl, "p_{\phi^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "\phi^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_{\phi^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C_{\psi^\bullet}^\bullet \arrow[dl, "p_{\psi^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "\psi^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_{\psi^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & C_{\chi^\bullet}^\bullet \arrow[dl, "p_{\chi^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "\chi^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_{\chi^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, αντίστοιχα. Συνεπώς το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "g^\bullet"'] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & Y_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "\gamma^\bullet"] & X_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(Y^\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι ισόμορφο με την εικόνα του διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_{\phi^\bullet}"] \arrow[d, "\psi^\bullet"'] & C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[r, "p_{\phi^\bullet}"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "\chi^\bullet"] \arrow[d, "\phi^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_{\chi^\bullet}"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "p_{\chi^\bullet}"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(\phi^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "\psi^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "i_{\psi^\bullet}"] & C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[r, "p_{\psi^\bullet}"] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, όπου τα τετράγωνα της πρώτης στήλης είναι μεταθετικά. Επειδή το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "\phi^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[d, "\psi^\bullet"] \\
X^\bullet \arrow[r, "\chi^\bullet"] & Z^\bullet
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό[1], από το Λήμμα 4.2.21 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μορφισμός $u^\bullet : C^\bullet_{\phi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{\chi^\bullet}$, ο οποίος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ως:

$$u^n = \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix}$$

ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "\phi^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_{\phi^\bullet}"] \arrow[d, "\psi^\bullet"'] & C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[r, "p_{\phi^\bullet}"] \arrow[d, "u^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "\chi^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_{\chi^\bullet}"'] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "p_{\chi^\bullet}"'] & \Sigma(X^\bullet)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Ανάλογα, επειδή το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "\chi^\bullet"] \arrow[d, "\phi^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "\psi^\bullet"] & Z^\bullet
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό[2], από το Λήμμα 4.2.21 προκύπτει ότι υπάρχει μορφισμός $v^\bullet : C^\bullet_{\chi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{\psi^\bullet}$ ο οποίος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ως:

$$v^n = \begin{pmatrix} \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix}$$

[1] Κάθε ομοτοπία $k^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(Y^\bullet, X^\bullet)$ είναι μηδενική.
[2] Κάθε ομοτοπία $l^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(Z^\bullet, Y^\bullet)$ είναι μηδενική.

ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "\chi^\bullet"] \arrow[d, "\phi^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_{\chi^\bullet}"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "p_{\chi^\bullet}"] \arrow[d, "v^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(\phi^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "\psi^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "i_{\psi^\bullet}"] & C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[r, "p_{\psi^\bullet}"] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Τελικά αποδείξαμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $u^\bullet\colon C^\bullet_{\phi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{\chi^\bullet}$ και $v^\bullet\colon C^\bullet_{\chi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{\psi^\bullet}$ ώστε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "\phi^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "i_{\phi^\bullet}"] \arrow[d, "\psi^\bullet"'] & C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[r, "p_{\phi^\bullet}"] \arrow[d, "u^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "\chi^\bullet"] \arrow[d, "\phi^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "i_{\chi^\bullet}"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "p_{\chi^\bullet}"] \arrow[d, "v^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(\phi^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "\psi^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "i_{\psi^\bullet}"] & C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[r, "p_{\psi^\bullet}"] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Τώρα θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[dl, "\Sigma([i_{\phi^\bullet}]_\approx)\circ[p_{\psi^\bullet}]_\approx"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[rr, "{[u^\bullet]_\approx}"] & & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[ul, "{[v^\bullet]_\approx}"']
\end{tikzcd}$$

ανήκει στην κλάση τριγώνων Δ της κατηγορίας $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μορφισμός $w^\bullet\colon C^\bullet_{\psi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{u^\bullet}$ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ ώστε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[dl, "\Sigma(i_{\phi^\bullet})\circ p_{\psi^\bullet}"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[rr, "u^\bullet"] & & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[ul, "v^\bullet"']
\end{tikzcd}$$

είναι ισόμορφο με το standard τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet_{u^\bullet} \arrow[dl, "p_{u^\bullet}"', "{[1]}"] & \\
C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[rr, "u^\bullet"] & & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[ul, "i_{u^\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

μέσω του ισομορφισμού τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[r, "u^\bullet"] \arrow[d, "1_{C^\bullet_{\phi^\bullet}}"'] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "v^\bullet"] \arrow[d, "1_{C^\bullet_{\chi^\bullet}}"'] & C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[r, "\Sigma(i_{\phi^\bullet})\circ p_{\psi^\bullet}"] \arrow[d, "w^\bullet"] & \Sigma(C^\bullet_{\phi^\bullet}) \arrow[d, "1_{\Sigma(C^\bullet_{\phi^\bullet})}"] \\
C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[r, "u^\bullet"] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "i_{u^\bullet}"] & C^\bullet_{u^\bullet} \arrow[r, "p_{u^\bullet}"] & \Sigma(C^\bullet_{\phi^\bullet})
\end{tikzcd}$$

Εξ' ορισμού ο κώνος του μορφισμού $\psi^\bullet\colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$, ορίζεται ως το βαθμωτό αντικείμενο $C^\bullet_{\psi^\bullet} = \Sigma(Y^\bullet) \oplus Z^\bullet$ μαζί με το διαφορικό:

$$d^n_{C_{\psi^\bullet}} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 \\ \psi^{n+1} & d^n_X \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αντίστοιχα ο κώνος του μορφισμού $u^\bullet\colon C^\bullet_{\phi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{\chi^\bullet}$, ορίζεται ως το βαθμωτό αντικείμενο $C^\bullet_{u^\bullet} = \Sigma(C^\bullet_{\phi^\bullet}) \oplus C^\bullet_{\chi^\bullet} = \Sigma^2(X^\bullet) \oplus \Sigma(Y^\bullet) \oplus \Sigma(X^\bullet) \oplus Z^\bullet$ μαζί με το διαφορικό:

$$d^n_{C_{u^\bullet}} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_{C_{\phi^\bullet}} & 0 \\ u^{n+1} & d^n_{C_{\chi^\bullet}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{n+2}_X & 0 & 0 & 0 \\ -\phi^{n+2} & -d^{n+1}_Y & 0 & 0 \\ 1_{X^{n+2}} & 0 & -d^{n+1}_X & 0 \\ 0 & \psi^{n+1} & \chi^{n+1} & d^n_Z \end{pmatrix}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε, τώρα, για $n \in \mathbb{Z}$ τον βαθμωτό μορφισμό $w^\bullet\colon C^\bullet_{\psi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{u^\bullet}$ ως:

$$w^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix}$$

Τότε για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned}
w^{n+1} \circ d^n_{C_{\psi^\bullet}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 \\ \psi^{n+1} & d^n_X \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d^{n+1}_Y & 0 \\ 0 & 0 \\ \psi^{n+1} & d^n_Z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d^{n+2}_X & 0 & 0 & 0 \\ -\phi^{n+2} & -d^{n+1}_Y & 0 & 0 \\ 1_{X^{n+2}} & 0 & -d^{n+1}_X & 0 \\ 0 & \psi^{n+1} & \chi^{n+1} & d^n_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} \\
&= d^n_{C_{u^\bullet}} \circ w^n
\end{aligned}$$

Συνεπώς ο βαθμωτός μορφισμός $w^\bullet$ είναι μορφισμός συμπλόκων. Εύκολα τώρα μπορούμε να ελέγξουμε ότι το τρίτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Πράγματι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
p^n_{u^\bullet} \circ w^n &= \begin{pmatrix} 1_{X^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 01_{Z^n} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{Y^{n+1}} 0 \end{pmatrix} \\
&= \Sigma(i_{\phi^\bullet})^n \circ p^n_{\psi^\bullet}
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το μεσσαίο τετράγωνο μετατίθεται ως προς ομοτοποπία. Θεωρούμε τον βαθμωτό μορφισμό $k^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(C^\bullet_{\chi^\bullet}, C^\bullet_{u^\bullet})$, ο οποίος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ως:

$$k^n = \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε ισχύει ότι,

$$d^{n-1}_{C_{u^\bullet}} \circ k^n + k^{n+1} \circ d^n_{C_{\chi^\bullet}} = \begin{pmatrix} d^{n+1}_X & 0 & 0 & 0 \\ -\phi^{n+1} & -d^n_Y & 0 & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & 0 & -d^n_X & 0 \\ 0 & \psi^n & \chi^n & d^{n-1}_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1_{X^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{n+1}_Y & 0 \\ \psi^{n+1} & d^n_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{n+1}_X & \\ -\phi^{n+1} & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\phi^{n+1} & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} =$$

$$= -w^n \circ v^n + i^n_{u^\bullet} = i^n_{u^\bullet} - w^n \circ v^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως ο μορφισμός $w^\bullet \circ v^\bullet$ είναι ομοτοπικός με τον μορφισμό $i_{u^\bullet} \circ 1_{C^\bullet_{\chi^\bullet}}$ και έτσι καταλήγουμε ότι το μεσσαίο τετράγωνο μετατίθεται ως προς ομοτοπία. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό απομένει να δείξουμε ότι ο μορφισμός $w^\bullet \colon C^\bullet_{\psi^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{u^\bullet}$ είναι ισομορφισμός συμπλόκων στην κατηγορία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Ορίζουμε το βαθμωτό μορφισμό $\theta^\bullet \colon C^\bullet_{u^\bullet} \longrightarrow C^\bullet_{\psi^\bullet}$ ως εξής:

$$\theta^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y^{n+1}} & \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο βαθμωτός μορφισμός $\theta^\bullet$ είναι μορφισμός συμπλόκων. Για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\theta^{n+1} \circ d^n_{C_u^\bullet} &= \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y^{n+1}} & \phi^{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ -\phi^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ 1_{X^{n+2}} & 0 & -d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & \psi^{n+1} & \chi^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d_Y^{n+1} & -\phi^{n+2} \circ d_X^{n+1} & 0 \\ 0 & \psi^{n+1} & \chi^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d_Y^{n+1} & -d_Y^{n+1} \circ \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & \psi^{n+1} & \psi^{n+1} \circ \phi^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d_Y^{n+1} & 0 \\ \psi^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y^{n+1}} & \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} \\
&= d^n_{C_\psi^\bullet} \circ \theta^n
\end{aligned}$$

Άρα ο μορφισμός $\theta^\bullet \colon C_{u^\bullet}^\bullet \longrightarrow C_{\psi^\bullet}^\bullet$ είναι μορφισμός συμπλόκων. Τέλος θα δείξουμε ότι η σύνθεση του $\theta^\bullet$ με τον $w^\bullet$ δίνει τον αντίστοιχο ταυτοτικό μορφισμό. Για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\theta^n \circ w^n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y^{n+1}} & \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} = 1^n_{C_{\psi^\bullet}}$$

δηλαδή $\theta^\bullet \circ w^\bullet = 1_{C_{\psi^\bullet}}$. Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ προκύπτει:

$$w^n \circ \theta^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y^{n+1}} & \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y^{n+1}} & \phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z^n} \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε, τώρα, τον βαθμωτό μορφισμό $l^\bullet \in \mathsf{Hom}^{-1}(C_{u^\bullet}^\bullet, C_{u^\bullet}^\bullet)$ ως:

$$l^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι:

$$d^{n-1}_{C_{u^\bullet}} \circ l^n + l^{n+1} \circ d^n_{C_{u^\bullet}} = \begin{pmatrix} 1_{X^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι $d_{C_{u^\bullet}} \circ l^\bullet + l^\bullet \circ d_{C_{u^\bullet}} = 1_{C^\bullet_{u^\bullet}} - w^\bullet \circ \theta^\bullet$ και άρα ο μορφισμός $w^\bullet \circ \theta^\bullet$ είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_{C^\bullet_{u^\bullet}}$. Τελικά ο μορφισμός $w^\bullet \colon C_{\psi^\bullet}^\bullet \longrightarrow C_{u^\bullet}^\bullet$ επάγει ισομορφισμό στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ και έτσι αποδείχθηκε ο ισχυρισμός.

Επομένως το διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_{\phi^\bullet}]_\approx}"] \arrow[d, "\psi^\bullet"'] & C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\phi^\bullet}]_\approx}"] \arrow[d, "u^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "\phi^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "{[i_{\chi^\bullet}]_\approx}"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\chi^\bullet}]_\approx}"] \arrow[d, "v^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "{[i_{\phi^\bullet}]_\approx}"'] & Z^\bullet \arrow[r, "{[i_{\psi^\bullet}]_\approx}"] \arrow[d, "{[i_{\chi^\bullet}]_\approx}"'] & C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\psi^\bullet}]_\approx}"] \arrow[d, "1_{C^\bullet_{\psi^\bullet}}"] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "{\Sigma([i_{\phi^\bullet}]_\approx)}"] \\
C^\bullet_{\phi^\bullet} \arrow[r, "{[u^\bullet]_\approx}"] & C^\bullet_{\chi^\bullet} \arrow[r, "{[v^\bullet]_\approx}"] & C^\bullet_{\psi^\bullet} \arrow[r, "{[t^\bullet]_\approx}"] & \Sigma(C^\bullet_{\phi^\bullet})
\end{tikzcd}
$$

όπου $[t^\bullet]_\approx = \Sigma([i_{\phi^\bullet}]_\approx) \circ [p_{\psi^\bullet}]_\approx$, είναι οκταεδρικό διάγραμμα στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Άμεσα προκύπτει ότι το αρχικό διάγραμμα συμπληρώνεται στο διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"] \arrow[d, "g^\bullet"'] & Z_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u^\bullet"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\
X^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"] \arrow[d, "1_{Z^\bullet}"'] & Y_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v^\bullet"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "\alpha^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r, "\gamma^\bullet"] \arrow[d, "\beta^\bullet"'] & X_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{X_1^\bullet}"'] & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(\alpha^\bullet)"] \\
Z_1^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] & Y_1^\bullet \arrow[r, "v^\bullet"] & X_1^\bullet \arrow[r, "w^\bullet"] & \Sigma(Z_1^\bullet)
\end{tikzcd}
$$

■

Παρατήρηση 4.2.35. Η Πρόταση 4.2.34 αποδεικνύει ότι η τριάδα $(\mathsf{K}^\star(\mathcal{A}), \Sigma, \Delta)$ ικανοποιεί το αξίωμα (TR4) του Ορισμού 3.1.5.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε στο ακόλουθο θεώρημα, το βασικό αποτέλεσμα που αφορά την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στον D. Happel [15]

Θεώρημα 4.2.36. (Happel 1987) *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ των συμπλόκων μαζί τον translation συναρτητή $\Sigma\colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$ και την κλάση τριγώνων Δ του Ορισμού 4.2.23, αποτελούν τριγωνισμένη κατηγορία.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση με χρήση των Προτάσεων 4.2.27, 4.2.29, 4.2.31, 4.2.34. ■

Ακολύθως θα αποδείξουμε ένα θεώρημα που θα χρειαστούμε στην συνέχεια.

Θεώρημα 4.2.37. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία. Ο συναρτητής $\mathsf{H}^0\colon \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι συνομολογικός συναρτητής.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Για να αποδείξουμε ότι ο συναρτητής $\mathsf{H}^0\colon \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι συνομολογικός, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολυθία:

$$\mathsf{H}^0(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(g^\bullet)} \mathsf{H}^0(Z^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(h^\bullet)} \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet))$$

είναι ακριβής στην $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι $\alpha^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ο μορφισμός συμπλόκων που αναπαριστά τον μορφισμό $f^\bullet$ και έστω

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[dl, "p_{\alpha^\bullet}"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "\alpha^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i_{\alpha^\bullet}"'] \end{tikzcd}$$

το standard τρίγωνο με βάση τον μορφισμό $\alpha^\bullet$. Τότε έχουμε τον ισομορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "1_{X^\bullet}"'] & Y^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "1_{Y^\bullet}"] & Z^\bullet \arrow[r, "h^\bullet"] \arrow[d, "u^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "1_{\Sigma(X^\bullet)}"] \\ X^\bullet \arrow[r, "{[\alpha^\bullet]_\approx}"] & Y^\bullet \arrow[r, "{[i_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & C^\bullet_{\alpha^\bullet} \arrow[r, "{[p_{\alpha^\bullet}]_\approx}"] & \Sigma(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, όπου το δεύτερο τρίγωνο είναι η εικόνα του παραπάνω standard τριγώνου. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή H^0 προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}^0(Y^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(g^\bullet)"] \arrow[d, "1_{\mathsf{H}^0(Y^\bullet)}"'] & \mathsf{H}^0(Z^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(h^\bullet)"] \arrow[d, "\mathsf{H}^0(u^\bullet)"'] & \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet)) \arrow[d, "1_{\mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet))}"] \\ \mathsf{H}^0(Y^\bullet) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(i_{\alpha^\bullet})"] & \mathsf{H}^0(C^\bullet_{\alpha^\bullet}) \arrow[r, "\mathsf{H}^0(p_{\alpha^\bullet})"] & \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet)) \end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $\mathcal{A}$, όπου οι κάθετοι μορφισμοί είναι ισομορφισμοί. Συνεπώς είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι το διάγραμμα:

$$\mathsf{H}^0(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(i_{\alpha^\bullet})} \mathsf{H}^0(C^\bullet_{\alpha^\bullet}) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(p_{\alpha^\bullet})} \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet))$$

είναι ακριβές. Θεωρούμε τον κώνο $C^0_{\alpha^\bullet} = X^1 \oplus Y^0$ και το υποαντικείμενό του $\mathsf{im}\, d^0_X \oplus Y^0$. Το αντικείμενο $\mathsf{im}\, d^{-1}_{C_{\alpha^\bullet}}$ είναι υποαντικείμενο του $\mathsf{im}\, d^0_X \oplus Y^0$. Θεωρούμε τον μορφισμό $k\colon X^0 \oplus Y^0 \longrightarrow \mathsf{im}\, d^0_X \oplus Y^0$, που ορίζεται ως

$$k = \begin{pmatrix} d^0_X & 0 \\ -\alpha^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^0_X & 0 \\ 0 & 1_{Y^0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^0 & 1_{Y^0} \end{pmatrix}$$

καθώς επίσης και τον μορφισμό $l\colon X^0 \oplus Y^0 \longrightarrow X^0 \oplus Y^{-1}$ που ορίζεται ως:

$$l = \begin{pmatrix} 1_{X^0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνθέτοντας το μορφισμό l με τον μορφισμό $-d^{-1}_{C_\alpha^\bullet}\colon X^0 \oplus Y^{-1} \longrightarrow X^1 \oplus Y^0$ που ορίζεται ως:

$$-d^{-1}_{C_\alpha^\bullet} = \begin{pmatrix} d^0_X & 0 \\ -\alpha^0 & -d^{-1}_Y \end{pmatrix}$$

προκύπτει ότι

$$-d^{-1}_{C_\alpha^\bullet} \circ l = \begin{pmatrix} d^0_X & 0 \\ -\alpha^0 & -d^{-1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{X^0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^0_X & 0 \\ -\alpha^0 & 0 \end{pmatrix} = k$$

Συνεπώς επάγεται ο μηδενικός μορφισμός από το αντικείμενο $X^0 \oplus Y^\bullet$ στο πηλίκο $(\mathsf{im}\, d^0_X \oplus Y^0)/\,\mathsf{im}\, d^{-1}_{C_\alpha^\bullet}$ και οι μορφισμοί:

$$\begin{pmatrix} d^0_X & 0 \\ 0 & 1_{Y^0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^0 & 1_{Y^0} \end{pmatrix}$$

επάγουν τους ίδιους μορφισμούς από το αντικείμενο $X^0 \oplus Y^0$ στο πηλίκο $(\mathsf{im}\, d^0_X \oplus Y^0)/\,\mathsf{im}\, d^{-1}_{C_\alpha^\bullet}$. Όμως ισχύει ότι $0 \oplus Y^0 + \mathsf{im}\, d^{-1}_{C_\alpha^\bullet} = \mathsf{im}\, d^0_X \oplus Y^0$ και συμπεραίνουμε ότι:

$$\ker d^0_{C_\alpha^\bullet} \bigcap (\mathsf{im}\, d^0_X \oplus Y^0) = \ker d^0_{C_\alpha^\bullet} \bigcap (0 \oplus Y^0 + \mathsf{im}\, d^{-1}_{C_\alpha^\bullet}) = (0 \oplus \ker d^0_Y) + \mathsf{im}\, d^{-1}_{C_\alpha^\bullet}$$

Επομένως ο πυρήνας του μορφισμού $\mathsf{H}^0(p_{\alpha^\bullet})$ είναι ίσος με την εικόνα του $\mathsf{H}^0(i_{\alpha^\bullet})$. Συνεπώς το διάγραμμα:

$$\mathsf{H}^0(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(i_{\alpha^\bullet})} \mathsf{H}^0(C^\bullet_{\alpha^\bullet}) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(p_{\alpha^\bullet})} \mathsf{H}^0(\Sigma(X^\bullet))$$

είναι ακριβές και άρα ο ο συναρτητής $\mathsf{H}^0\colon K^\star(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ είναι συνομολογικός. ■

Από το τελευταίο θεώρημα προκύπτει το ακόλουθο, άμεσο, πόρισμα:

Πόρισμα 4.2.38. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία και*

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] \arrow[urr, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Τότε το διάγραμμα:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f^\bullet)} \mathsf{H}^n(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(g^\bullet)} \mathsf{H}^n(Z^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(h^\bullet)} \mathsf{H}^{n+1}(X^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβές στην $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 4.2.39. Η ακριβής ακολουθία του Πορίσματος 4.2.38 καλείται μεγάλη ακριβής ακολουθία της συνομολογίας του τρίγωνου:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "h^\bullet"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] \arrow[urr, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "g^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

4.3 Παραγόμενη Κατηγορία

Οι παραγόμενες κατηγορίες μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι μια κατασκευή που προέρχεται από την ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων υπεράνω της $\mathcal{A}$. Εισήχθησαν από τους Alexander Grothendieck και Jean-Louis Verdier μετά το 1960. Η κατασκευή τους βαζίσεται στην έννοια της τριγωνισμένης κατηγορίας, καθώς και στην έννοια της τοπικοποίησης κατηγοριών. Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε στον τρόπο κατασκευής μιας παραγόμενης κατηγορίας, υπεράνω μίας αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ και θα διατυπώσουμε ορισμένες από τις βασικές της ιδιότητες.

Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τις εισαγωγικές έννοιες του ημι-ισομορφισμού και του ακυκλικού αντικειμένου, οι οποίες είναι απαραίτητες για να φτάσουμε στον ορισμό της παραγόμενης κατηγορίας.

Ορισμός 4.3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία. Ένας μορφισμός συμπλόκων $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ καλείται* **ημι-ισομορφισμός (quasi-isomorphism)** *αν ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(f^\bullet)\colon \mathsf{H}^n(X^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(Y^\bullet)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Παρατήρηση 4.3.2.

1. Έστω $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας ημι-ισομορφισμός και $g^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός ομοτοπικός με τον $f^\bullet$. Τότε και ο μορφισμός $g^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός.

2. Ένας μορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι ημι-ισομορφισμός, αν όλοι οι αντιπρόσωποί του είναι ημι-ισομορφισμοί στην $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$.

3. Συμβολίζουμε με $S^\star$ την κλάση μορφισμών που περιέχει τους ημι-ισομορφισμούς της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ και με $\tilde{S}^\star$ την κλάση μορφισμών που περιέχει τους ημι-ισομορφισμούς της $\mathsf{C}^\star(\mathcal{A})$.

Ορισμός 4.3.3. *Ένα αντικείμενο $X^\bullet$ στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ καλείται* **ακυκλικό (acyclic)** *αν $\mathsf{H}^n(X^\bullet) = 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$.*

Θα διατυπώσουμε, τώρα, μία ιδιαίτερα χρήσιμη συνθήκη για το πότε ένα αντικείμενο είναι ακυκλικό.

Πρόταση 4.3.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $K^\star(\mathcal{A})$. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο μορφισμός $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός.*

2. *Ο κώνος του μορφισμού $f^\bullet$ είναι ακυκλικό αντικείμενο.*

Απόδειξη. Έστω $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.

(1.$\Longrightarrow$2.) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός και θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

με βάση το μορφισμό $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$. Από το Πόρισμα 4.2.38 γνωρίζουμε ότι επάγεται η μεγάλη ακριβής ακολουθία της συνομολογίας του παραπάνω τριγώνου, δηλαδή το διάγραμμα:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f^\bullet)} \mathsf{H}^n(Y^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(g^\bullet)} \mathsf{H}^n(Z^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(h^\bullet)} \mathsf{H}^{n+1}(X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^{n+1}(f^\bullet)} \mathsf{H}^{n+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Επειδή ο μορφισμός $f^\bullet\colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός, προκύπτει ότι οι μορφισμοί $\mathsf{H}^n(f^\bullet)$ και $\mathsf{H}^{n+1}(f^\bullet)$ είναι ισομορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Επομένως $\mathsf{H}^n(Z^\bullet) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή το αντικείμενο $Z^\bullet$ είναι ακυκλικό.

(2.$\Longrightarrow$1.) Υποθέτουμε, τώρα, ότι το αντικείμενο $Z^\bullet$ είναι ακυκλικό. Τότε εξ' ορισμού ισχύει ότι $\mathsf{H}^n(Z^\bullet) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε την μεγάλη ακριβή ακολουθία της συνομολογίας:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^{n-1}(Z^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{H}^n(f^\bullet)} \mathsf{H}^n(Y^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(Z^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Επειδή το αντικείμενο $Z^\bullet$ είναι ακυκλικό, προκύπτει ότι $\mathsf{H}^n(Z^\bullet) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άμεσα προκύπτει ότι ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(f^\bullet)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{A}$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Άρα ο μορφισμός $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός. ■

Στη συνέχεια, στόχος είναι να κατασκευάσουμε την τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, ως προς την κλάση μορφισμών $S^\star$ που περιλαμβάνει τους ημι-ισομορφισμούς της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Επειδή, όπως έχουμε αποδείξει, η κατηγορία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι τριγωνισμένη, πρέπει να αποδείξουμε ότι η κλάση $S^\star$ είναι localizing κλάση που σέβεται την τριγωνική δομή της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.

Πρόταση 4.3.5. *Η κλάση μορφισμών $S^\star$ που αποτελείται από τους ημι-ισομορφισμούς της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ είναι localizing κλάση συμβατή με την τριγωνική δομή της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η κλάση $S^\star$ είναι localizing κλάση μορφισμών για την κατηγορία $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, δηλαδή ικανοποιούνται τα αξιώματα του Ορισμού 2.1.5. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & 0^\bullet \arrow[dl] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & X^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Το μηδενικό αντικείμενο $0^\bullet$ είναι ακυκλικό και άρα από την Πρόταση 4.3.4 προκύπτει ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{X^\bullet} \colon X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός. Έστω $s^\bullet$, $t^\bullet$ δύο μορφισμοί στην κλάση $S^\star$. Τότε, εξ' ορισμού, οι μορφισμοί $\mathsf{H}^n(s^\bullet)$, $\mathsf{H}^n(t^\bullet)$ είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{A}$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Όμως

$$\mathsf{H}^n(s^\bullet \circ t^\bullet) = \mathsf{H}^n(s^\bullet) \circ \mathsf{H}^n(t^\bullet)$$

και έτσι προκύπτει ότι η σύνθεση $s^\bullet \circ t^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός και ανήκει στην κλάση $S^\star$. Θεωρούμε μορφισμούς $s^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y\bullet$ και $f^\bullet \colon Z^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, όπου ο μορφισμός $s^\bullet$ ανήκει στην κλάση $S^\star$. Επομένως έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & Z^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] \\
X^\bullet \arrow[r, "s^\bullet"] & Y^\bullet
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε, τώρα, το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & U^\bullet \arrow[dl, "p^\bullet"'] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "s^\bullet"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i^\bullet"']
\end{tikzcd}$$

με βάση τον ημι-ισομορφισμό $s^\bullet$. Τότε το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό και από το αξίωμα (TR2) του Ορισμού 3.1.5 το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma(X^\bullet) \arrow[dl, "-\Sigma(s^\bullet)"'] & \\
Y^\bullet \arrow[rr, "i^\bullet"] \arrow[ur, phantom, "{[1]}"] & & U^\bullet \arrow[ul, "p^\bullet"']
\end{tikzcd}$$

που προκύπτει από την στροφή του τριγώνου:

$$\begin{tikzcd} & U^\bullet \arrow[dl, "p^\bullet"', "{[1]}"] & \\ X^\bullet \arrow[rr, "s^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "i^\bullet"'] \end{tikzcd}$$

είναι επίσης τρίγωνο στην $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & V^\bullet \arrow[dl, "u^\bullet"', "{[1]}"] & \\ Z^\bullet \arrow[rr, "i^\bullet \circ f^\bullet"] & & U^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

με βάση τον μορφισμό $i^\bullet \circ f^\bullet \colon Z^\bullet \longrightarrow U^\bullet$ και κατασκευάζουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Z^\bullet \arrow[r, "i^\bullet \circ f^\bullet"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & U^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{U^\bullet}"'] & V^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] & \Sigma(Z^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "i^\bullet"] & U^\bullet \arrow[r, "p^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-\Sigma(f^\bullet)"] & \Sigma(Y^\bullet) \end{tikzcd}$$

όπου προφανώς το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Από το αξίωμα (TR3) γνωρίζουμε ότι υπάρχει μορφισμός $v^\bullet \colon V^\bullet \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$, ώστε το παραπάνω διάγραμμα συμπληρώνεται στον μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd} Z^\bullet \arrow[r, "i^\bullet \circ f^\bullet"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & U^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "1_{U^\bullet}"'] & V^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] \arrow[d, "v^\bullet"'] & \Sigma(Z^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\ Y^\bullet \arrow[r, "i^\bullet"] & U^\bullet \arrow[r, "p^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-\Sigma(f^\bullet)"] & \Sigma(Y^\bullet) \end{tikzcd}$$

Εφόσον το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό, θεωρώντας το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & U^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\ -\Sigma(V^\bullet) \arrow[rr, "u^\bullet"] & & Z^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός $u^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός και άρα ανήκει στην κλάση μορφισμών $S^\star$. Στο τελευταίο τετράγωνο του μορφισμού τριγώνων εφαρμόζουμε τον συναρτητή Σ^{-1} και θέτουμε $W^\bullet := \Sigma^{-1}(V^\bullet)$, $t^\bullet := \Sigma^{-1}(u^\bullet)$ και $g := -\Sigma^{-1}(v^\bullet)$. Τότε προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} W^\bullet \arrow[r, "t^\bullet"] \arrow[d, "g^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] \\ X^\bullet \arrow[r, "s^\bullet"] & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

όπου οι μορφισμοί $t^\bullet$, $s^\bullet$ ανήκουν στην κλάση μορφισμών $S^\star$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι ικανοποιείται και το αξίωμα (LC3b) του Ορισμού 2.1.5. Για να αποδείξουμε ότι η κλάση μορφισμών $S^\star$ είναι localizing κλάση για την $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, αρκεί να αποδείξουμε ότι για δύο μορφισμούς

$f^\bullet, g^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ισχύει ότι $s^\bullet \circ f^\bullet = s^\bullet \circ g^\bullet$, για κάποιο μορφισμό $s^\bullet$ στην κλάση $S^\star$ αν και μόνον αν $f^\bullet \circ t^\bullet = g^\bullet \circ t^\bullet$ για κάποιο μορφισμό $t^\bullet$ στην κλάση $S^\star$. Αντικαθιστώντας του μορφισμούς με την διαφορά τους, αρκεί να αποδείξουμε ότι $s^\bullet \circ f^\bullet = 0$ για κάποιο μορφισμό $s^\bullet \in S^\star$ αν και μόνον αν $f^\bullet \circ t^\bullet = 0$ για κάποιον μορφισμό $t \in S^\star$. Υποθέτουμε ότι $s^\bullet \circ f^\bullet = 0$, για κάποιο μορφισμό $s^\bullet$ στην κλάση $S^\star$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"'] & 0^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-1_{X^\bullet}"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "s^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "i^\bullet"] & U^\bullet \arrow[r, "p^\bullet"] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

όπου η πρώτη γραμμή είναι το τρίγωνο που προκύπτει από τη στροφή του τριγώνου:

$$\begin{tikzcd}
 & 0^\bullet \arrow[dl] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "f^\bullet"] & & X^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

και η δεύτερη γραμμή είναι το τρίγωνο με βάση το μορφισμό $s^\bullet \colon Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$. Το πρώτο τετράγωνο είναι μεταθετικό, συνεπώς εφαρμόζοντας το αξίωμα (TR3) το παραπάνω διάγραμμα συμπληρώνεται σε μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"'] & 0^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[r, "-1_{X^\bullet}"] \arrow[d, "-v^\bullet"'] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(f^\bullet)"] \\
Y^\bullet \arrow[r, "s^\bullet"] & Z^\bullet \arrow[r, "i^\bullet"] & U^\bullet \arrow[r, "p^\bullet"] & \Sigma(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Από τη μεταθετικότητα του τελευταίου τετραγώνου προκύπτει:

$$-\Sigma(f^\bullet) = -p^\bullet \circ v^\bullet \Longrightarrow \Sigma(f^\bullet) = p^\bullet \circ v^\bullet$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή Σ^{-1} προκύπτει:

$$f^\bullet = \Sigma^{-1}(p^\bullet) \circ \Sigma^{-1}(v^\bullet)$$

Επειδή ο μορφισμός $s^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός, προκύπτει ότι το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & V^\bullet \arrow[dl, "t^\bullet"'] \arrow[dl, phantom, "{[1]}", shift left=3] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "\Sigma^{-1}(v^\bullet)"'] & & \Sigma^{-1}(U^\bullet) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

το οποίο στρέφουμε δύο φορές και προκύπτει το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
 & U^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
V^\bullet \arrow[rr, "t^\bullet"'] & & \Sigma(X^\bullet) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Επειδή το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό, επάγεται ότι ο μορφισμός $t^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός, δηλαδή ανήκει στην κλάση $S^\star$. Επίσης γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\Sigma^{-1}(v^\bullet) \circ t^\bullet = 0$$

και προκύπτει ότι

$$f^\bullet \circ t^\bullet = \Sigma^{-1}(p^\bullet) \circ \Sigma^{-1}(v^\bullet) \circ t^\bullet = 0$$

όπου $t^\bullet \in S^\star$. Ανάλογα δείχνουμε ότι αν $f^\bullet \circ t^\bullet = 0$, για κάποιο μορφισμό $t^\bullet \in S^\star$, τότε υπάρχει μορφισμός $s^\bullet \in S^\star$ τέτοιος ώστε $s^\bullet \circ f^\bullet = 0$. Επομένως ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα του Ορισμού 2.1.5 και έτσι η κλάση $S^\star$ είναι localizing κλάση μορφισμών για την $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$.
Απομένει να δείξουμε ότι η κλάση $S^\star$ είναι συμβατή με την τριγωνική δομή της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. Έστω $s^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ ένας μορφισμός στην κλάση $S^\star$ και θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& U^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "s^\bullet"'] & & Y^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

με βάση το μορφισμό αυτό. Από την Πρόταση 4.3.4 γνωρίζουμε ότι το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό. Στρέφοντας το παραπάνω τρίγωνο τρεις φορές προκύπτει το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma(U^\bullet) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
\Sigma(X^\bullet) \arrow[rr, "-\Sigma(s^\bullet)"'] & & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Επειδή το αντικείμενο $U^\bullet$ είναι ακυκλικό, εξ' ορισμού ισχύει $\mathsf{H}^n(U^\bullet) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε $\mathsf{H}^n(\Sigma(U^\bullet)) = \mathsf{H}^{n+1}(U^\bullet) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και επομένως το αντικείμενο $\Sigma(U^\bullet)$ είναι ακυκλικό. Συνεπώς ο μορφισμός $\Sigma(s^\bullet)$ ανήκει στην κλάση $S^\star$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $\Sigma(s^\bullet) \colon \Sigma(X^\bullet) \longrightarrow \Sigma(Y^\bullet)$ είναι ημι-ισομορφισμός στην $K^\star(\mathcal{A})$. Θεωρούμε το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& V^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
\Sigma(X^\bullet) \arrow[rr, "\Sigma(s^\bullet)"'] & & \Sigma(Y^\bullet) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

όπου, από την Πρόταση 4.3.4, το αντικείμενο $V^\bullet$ είναι ακυκλικό. Στρέφοντας το τελευταίο τρίγωνο τρεις φορές προκύπτει το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma^{-1}(V^\bullet) \arrow[dl, "{[1]}"] & \\
X^\bullet \arrow[rr, "s^\bullet"] & & Y^\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Όπως παραπάνω, αφού το αντικείμενο $V^\bullet$ είναι ακυκλικό, προκύπτει ότι και το αντικείμενο $\Sigma^{-1}(V^\bullet)$ είναι ακυκλικό. Συνεπώς ο μορφισμός $s^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός και ανήκει στην κλάση $S^\star$. Θεωρούμε, τώρα, το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "s^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "t^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(s^\bullet)"] \\
X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet)
\end{tikzcd}$$

όπου οι γραμμές είναι τρίγωνα στην $K^\star(\mathcal{A})$ και οι μορφισμοί $s^\bullet, t^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμοί. Από το αξίωμα (TR3) του Ορισμού 3.1.5 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μορφισμός $u^\bullet \colon Z^\bullet \longrightarrow Z_1^\bullet$, ώστε το παραπάνω διάγραμμα συμπληρώνεται στο μορφισμό τριγώνων:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "s^\bullet"'] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "t^\bullet"'] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "u^\bullet"] & \Sigma(X^\bullet) \arrow[d, "\Sigma(s^\bullet)"] \\
X_1^\bullet \arrow[r] & Y_1^\bullet \arrow[r] & Z_1^\bullet \arrow[r] & \Sigma(X_1^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Άρα μένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $u^\bullet$ ανήκει στην κλάση $S^\star$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ επάγεται το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}^n(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^n(s^\bullet)"'] & \mathsf{H}^n(Y^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^n(t^\bullet)"'] & \mathsf{H}^n(Z^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^n(u^\bullet)"'] & \mathsf{H}^{n+1}(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{H}^{n+1}(s^\bullet)"] & \mathsf{H}^{n+1}(Y^\bullet) \arrow[d, "\mathsf{H}^{n+1}(t^\bullet)"] \\
\mathsf{H}^n(X_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^n(Y_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^n(Z_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^{n+1}(X_1^\bullet) \arrow[r] & \mathsf{H}^{n+1}(Y_1^\bullet)
\end{tikzcd}$$

όπου οι μορφισμοί $\mathsf{H}^n(s^\bullet), \mathsf{H}^n(t^\bullet), \mathsf{H}^{n+1}(s^\bullet), \mathsf{H}^{n+1}(t^\bullet)$ είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{A}$. Από το Five lemma [16, Lemma 8.3.13] προκύπτει ότι ο μορφισμός $\mathsf{H}^n(u^\bullet)$ είναι επίσης ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{A}$. Άρα ο μορφισμός $u^\bullet$ είναι ημι-ισομορφισμός. Τελικά έχουμε αποδείξει ότι η κλάση μορφισμών $S^\star$ είναι localizing κλάση συμβατή με την τριγωνική δομή της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$. ■

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ μία αβελιανή κατηγορία και $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ η αντίστοιχη ομοτοπική κατηγορία των συμπλόκων. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.5, μπορούμε να κατασκευάσουμε την τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$, ως προς την κλάση μορφισμών $S^\star$ που περιλαμβάνει όλους τους ημι-ισομορφισμούς. Τότε προκύπτει μία νέα κατηγορία υπεράνω της κατηγορίας $\mathcal{A}$, με ιδιαίτερη σημασία, η οποία καλείται παραγόμενη κατηγορία.

Ορισμός 4.3.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αβελιανή κατηγορία. Η τοπικοποίηση της ομοτοπικής κατηγορίας $\mathsf{K}(\mathcal{A})$, ως προς την κλάση μορφισμών $S^\star$ των ημι-ισομορφισμών, καλείται* **παραγόμενη κατηγορία (derived category)** *της κατηγορίας $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.*

Συμβολισμός: Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε με $Q \colon \mathsf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A})$ το συναρτητή τοπικοποίησης της $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ ως προς την κλάση μορφισμών $S^\star$.

Παρατήρηση 4.3.7. Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία.

1. Η ομοτοπική κατηγορία υπεράνω της αβελιανής κατηγορίας $\mathcal{A}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία. Εφόσον η κλάση μορφισμών $S^\star$ είναι localizing κλάση συμβατή με την τριγωνική δομή προκύπτει, από το Θεώρημα 3.2.3, ότι και η τοπικοποίηση ως προς αυτήν την κλάση μορφισμών, δηλαδή παραγόμενη κατηγορία υπεράνω της $\mathcal{A}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία.

2. Έστω $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ η παραγόμενη κατηγορία των συμπλόκων. Συμβολίζουμε με $\mathsf{D}^-(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ που έχει ως αντικείμενα, σύμπλοκα που είναι φραγμένα από πάνω. Αντίστοιχα συμβολίζουμε με $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ με αντικείμενα σύμπλοκα φραγμένα από κάτω, ενώ με $\mathsf{D}^b(\mathcal{A})$ συμβολίζουμε την πλήρη υποκατηγορία που αποτελείται από τα φραγμένα σύμπλοκα.

3. Όταν θέλουμε να διατυπώσουμε ένα αποτέλεσμα στο οποίο δεν είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε σε ποια από τις τρεις παραπάνω πλήρεις υποκατηγορίες εργαζόμαστε, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A})$, όπου $\star = -, +, b$.

4. Ο συνομολογικός συναρτητής $\mathsf{H}^0\colon \mathsf{K}^\star(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ απεικονίζει ημι-ισομορφισμούς της $\mathsf{K}^\star(\mathcal{A})$ σε ισομορφισμούς της $\mathcal{A}$. Συνεπώς επάγεται συνομολογικός συναρτητής από την κατηγορία $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A})$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$, τον οποίο θα συμβολίζουμε επίσης με $\mathsf{H}^0\colon \mathsf{D}^\star(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$.

5. Έστω

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ X^\bullet \arrow[rr] & & Y^\bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ένα τρίγωνο στην $\mathsf{D}^\star(\mathcal{A})$. Το διάγραμμα:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}^n(X^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(Y^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^n(Z^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^{n+1}(X^\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}^{n+1}(Y^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβές και καλείται μεγάλη ακριβής ακολουθία της συνομολογίας του τριγώνου.

Κλείνοντας αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε, χωρίς απόδειξη, ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά τις παραγόμενες κατηγορίες.

Πρόταση 4.3.8. *Όλες οι σύντομες ακριβείς ακολουθίες συμπλόκων της κατηγορίας* $\mathsf{C}(\mathcal{A})$

$$0 \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow 0$$

επάγουν ένα τρίγωνο

$$X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow \Sigma(X^\bullet)$$

στην κατηγορία $\mathsf{D}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [17, Proposition 3.5.2]. ■

4.3.1 Η παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα παραγόμενης κατηγορίας με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων υπεράνω ενός μεταθετικού δακτυλίου R της Noether. Όπως είναι γνωστό μια παραγόμενη κατηγορία, προέρχεται από την τοπικοποίηση μιας κατηγορίας συμπλόκων, στη συγκεκριμένη περίπτωση της κατηγορίας $\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$, που αποτελείται από σύμπλοκα R-προτύπων. Ο λόγος που εστιάζουμε στη συγκεκριμένη κατηγορία, είναι ότι αποτελεί ένα ακόμη παράδειγμα τριγωνισμένης κατηγορίας.

Σύμβαση: Για ιστορικούς λόγους στην παρούσα ενότητα με τον όρο «σύμπλοκο» θα εννοούμε αλυσιδωτό σύμπλοκο (chain complex), με την έννοια του Ορισμού 4.1.3.

Υποθέτουμε ότι R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με μονάδα. Ακολουθώντας τον – εώς τώρα– συμβολισμό της διατριβής, η κατηγορία $\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ είναι η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα, σύμπλοκα R-προτύπων και ως μορφισμούς, μορφισμούς μεταξύ συμπλόκων. Η τοπικοποίηση της $\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ ως προς την κλάση των ημι-ισομορφισμών της, δίνει την παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(R\text{-}\mathsf{Mod})$.

Συμβολισμός: Από εδώ και στο εξής, συμβολίζουμε με $\mathsf{C}(R)$ την κατηγορία $\mathsf{C}(R\text{-}\mathsf{Mod})$ και με $\mathsf{D}(R)$ την αντίστοιχη παραγόμενη κατηγορία.

Στην προηγούμενη ενότητα έχουμε αποδείξει ότι μια παραγόμενη κατηγορία έχει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας. Επομένως η κατηγορία $\mathsf{D}(R)$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία. Επειδή οι ορισμοί και τα αποτελέσματα για τις κατηγορίες συμπλόκων έχουν διατυπωθεί με όρους συναλυσιδωτών συμπλόκων, θα διατυπώσουμε κάποιες γνωστές έννοιες, όπως ο translation συναρτητής και τα τρίγωνα, προσαρμοσμένες στην κατηγορία $\mathsf{D}(R)$ χρησιμοποιώντας τη – δυϊκή– έννοια του αλυσιδωτού συμπλόκου.

Ορισμός 4.3.9. (Translation Συναρτητής) *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με μονάδα. Ορίζουμε τον translation συναρτητή:*

$$\Sigma \colon \mathsf{D}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(R)$$

ως εξής

$$(\Sigma X_\bullet)_n := X_{n-1}$$

όπου $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$.

Πριν ορίσουμε την κλάση των τριγώνων που, μαζί με τον συναρτητή Σ, καθιστούν την $\mathsf{D}(R)$ τριγωνισμένη κατηγορία, θα ορίσουμε τον κώνο ενός μορφισμού και τα standard τρίγωνα της $\mathsf{D}(R)$.

Ορισμός 4.3.10. *Έστω $f_\bullet \colon X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ ένας μορφισμός στην $\mathsf{D}(R)$. Ορίζουμε το σύμπλοκο $((C_{f_\bullet})_\bullet, d_\bullet^{C_{f_\bullet}})$ της $\mathsf{D}(R)$, όπου:*

- *το αντικείμενο $(C_{f_\bullet})_\bullet$ είναι ένα βαθμωτό αντικείμενο, τέτοιο ώστε $C_n^{f_\bullet} = X_{n-1} \oplus Y_n, n \in \mathbb{Z}$.*
- *ο βαθμωτός μορφισμός $d_\bullet^{C_{f_\bullet}} = \{d_n^{C_{f_\bullet}} : C_n^{f_\bullet} \longrightarrow C_{n+1}^{f_\bullet}\}$, ορίζεται ως:*

$$d_n^{C_{f_\bullet}} = \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{Z}$$

Το σύμπλοκο $((C_{f_\bullet})_\bullet, d_\bullet^{C_{f_\bullet}})$ καλείται **κώνος (cone)** *του μορφισμού $f_\bullet \colon X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$.*

Ορισμός 4.3.11. *Ένα τρίγωνο της μορφής*

$$X_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} Y_\bullet \xrightarrow{i_{f_\bullet}} (C_{f_\bullet})_\bullet \xrightarrow{p_{f_\bullet}} \Sigma X_\bullet$$

καλείται **standard τρίγωνο (standard triangle)** *της $\mathsf{D}(R)$.*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε μια κλάση τριγώνων στην κατηγορία $\mathsf{D}(R)$.

Ορισμός 4.3.12. (Τρίγωνα) *Ορίζουμε την κλάση τριγώνων Δ της $\mathsf{D}(R)$ ως την κλάση που αποτελείται από τρίγωνα, τα οποία είναι ισόμορφα με ένα standard τρίγωνο της $\mathsf{D}(R)$.*

Πρόταση 4.3.13. *Η τριάδα $(\mathsf{D}(R), \Sigma, \Delta)$ αποτελεί μια τριγωνισμένη κατηγορία.*

Στην παρούσα ενότητα, αλλά και στη συνέχεια της διατριβής, δεν θα επικεντρωθούμε στην κατηγορία $\mathsf{D}(R)$ αλλά σε μια υποκατηγορία αυτής, την παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων.

Ορισμός 4.3.14. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με μονάδα. Καλούμε* **παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων (derived category of perfect complexes)** *και συμβολίζουμε $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ την κατηγορία η οποία διαθέτει:*

- *ως αντικείμενα, φραγμένα σύμπλοκα από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα, τα οποία καλούνται τέλεια σύμπλοκα (perfect complexes), δηλαδή σύμπλοκα της μορφής*

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow 0$$

  όπου P_i είναι πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα.
- *ως μορφισμούς, μορφισμούς μεταξύ τέλειων συμπλόκων.*

Στόχος είναι να αποδείξουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, στην οποία θα εργαστούμε και στη συνέχεια, αποτελεί επίσης μια τριγωνισμένη κατηγορία. Η απαίτηση αυτή ικανοποιείται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.3.15. *Η κατηγορία* $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ *είναι πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της κατηγορίας* $\mathsf{D}(R)$.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Ορισμού 3.1.21. Αρχικά το μηδενικό αντικείμενο της $\mathsf{D}(R)$, το οποίο είναι το σύμπλοκο

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

που σε κάθε θέση έχει το μηδενικό R-πρότυπο, ανήκει στην υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Ακόμη το ευθύ άθροισμα προβολικών R-προτύπων, είναι προβολικό R-πρότυπο. Επομένως το ευθύ άθροισμα δύο τέλειων συμπλόκων $P_\bullet$, $Q_\bullet$ της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ ανήκει, επίσης, στην $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Επιπλέον, ας είναι

$$P_\bullet : \quad 0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow 0$$

ένα τέλειο σύμπλοκο της κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Αν εφαρμόσουμε τον translation συναρτητή Σ της $\mathsf{D}(R)$, προκύπτει το σύμπλοκο $\Sigma P_\bullet$, για το οποίο ισχύει

$$(\Sigma P_\bullet)_i = P_{i-1}$$

Επομένως το σύμπλοκο $\Sigma P_\bullet$ παραμένει τέλειο σύμπλοκο και ανήκει στην υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Τέλος θεωρούμε δύο τέλεια σύμπλοκα $P_\bullet$, $Q_\bullet$ και έστω $f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ ένας μορφισμός της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}$. Τότε ο κώνος $(C_{f_\bullet})_\bullet$ του μορφισμού $f_\bullet$ είναι τέλειο σύμπλοκο, δεδομένου ότι το ευθύ άθροισμα προβολικών R-προτύπων είναι προβολικό R-πρότυπο και το standard τρίγωνο

$$X_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} Y_\bullet \xrightarrow{i_{f_\bullet}} (C_{f_\bullet})_\bullet \xrightarrow{p_{f_\bullet}} \Sigma X_\bullet$$

είναι τρίγωνο της $\mathsf{D}(R)$. Τελικά η υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ είναι πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{D}(R)$. ■

Παρατήρηση 4.3.16. Από την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ έχει δομή τριγωνισμένης κατηγορίας, ως πλήρης τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathsf{D}(R)$.

Κεφάλαιο 5

Το Φάσμα μιας Τανυστικής Τριγωνισμένης Κατηγορίας

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε διεξοδικά με τις τανυστικές τριγωνισμένες κατηγορίες και θα πιστοποιήσουμε ότι η ευσταθής κατηγορία των προτύπων και η παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων αποτελούν αποτελούν παραδείγματα τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών. Η Τανυστική Τριγωνική Γεωμετρία (Tensor Triangular Geometry) αφορά την μελέτη τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών με αλγεβρικές και γεωμετρικές μεθόδους και ιδιαίτερα την μελέτη του φάσματος του Balmer της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας. Το φάσμα μια τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ ορίζεται ως το σύνολο των πρώτων τανυστικών ιδεωδών της και εφοδιασμένο με κατάλληλη τοπολογία καθίσταται τοπολογικός χώρος. Θα μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες αυτού του τοπολογικού χώρου και θα διαπιστώσουμε ότι, μιλώντας γενικά, το φάσμα είναι ο καθολικός χώρος στον οποίο μπορούμε να ορίσουμε φορείς (supports) για τα αντικείμενα της $\mathcal{K}$. Βασικός στόχος του κεφαλαίου είναι να ταξινομήσουμε τις thick υποκατηγορίες μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας και να περιγράψουμε το φάσμα της. Η συγκεκριμένη θεωρία οφείλεται, κατά κύριο λόγο, στον Paul Balmer και παρουσιάζει εφαρμογές σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών μεταξύ των οποίων είναι η Αλγεβρική Γεωμετρία, η Θεωρία Αναπαραστάσεων, η Μεταθετική Άλγεβρα και η Ευσταθής Ομοτοπική Θεωρία.

5.1 Τανυστικές Τριγωνισμένες Κατηγορίες

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου θα αναφερθούμε στις τανυστικές τριγωνισμένες κατηγορίες (tensor triangulated categories). Οι τανυστικές κατηγορίες εισήχθησαν για να γενικεύσουν και να αξιωματοποιήσουν τις ιδιότητες του τανυστικού γινομένου διανυσματικών χώρων. Χρησιμοποιούνται σε διάφορους κλάδους της επιστήμης όπως η Μαθηματική Φυσική (Mathematical Physics) και η Θεωρία Κόμβων (Knot Theory). Η παρούσα ενότητα περιλαμβάνει δύο υποενότητες στις οποίες θα αποδείξουμε ότι η ευσταθής κατηγορία των προτύπων και η παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων αποτελούν τανυστικές τριγωνισμένες κατηγορίες.

Ξεκινάμε διατυπώνοντας τον ορισμό της τανυστικής κατηγορίας.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $\mathcal{K}$ μια κατηγορία η οποία είναι εφοδιασμένη με:*

(TC1) ένα δισυναρτητή

$$-\otimes- : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

(TC2) ένα αντικείμενο, που συμβολίζεται με $\mathbf{1}$ και καλείται <u>μοναδιαίο αντικείμενο</u> (unit object),

(TC3) μια οικογένεια φυσικών ισομορφισμών α, η οποία αποτελείται από φυσικούς ισομορφισμούς:

$$\alpha_{X,Y,Z} \colon (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$$

για κάθε τρία αντικείμενα $X, Y, Z \in \mathcal{K}$,

(TC4) *δυο οικογένειες φυσικών ισομορφισμών λ, ρ, οι οποίες αποτελούνται από τους ισομορφισμούς*

$$\lambda_X \colon \mathbf{1} \otimes X \longrightarrow X$$

και

$$\rho_X \colon X \otimes \mathbf{1} \longrightarrow X$$

αντίστοιχα, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ και για όλα τα αντικείμενα X, Y, Z, W στην $\mathcal{K}$ τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r, "\alpha_{X \otimes Y, Z, W}"] \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z} \otimes W"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[dd, "\alpha_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "\alpha_{X, Y \otimes Z, W}"'] & \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[r, "X \otimes \alpha_{Y,Z,W}"'] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "\rho_X \otimes \mathbf{1}"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "\mathbf{1} \otimes \lambda_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Τότε η εξάδα $(\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ καλείται **τανυστική κατηγορία (tensor category)** *ή* **μονοειδής κατηγορία (monoidal category)**.

Σχόλιο 5.1.2. Όταν αναφερόμαστε σε μια τανυστική κατηγορία $(\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$, συχνά παραλείπουμε τις οικογένειες φυσικών ισομορφισμών α, λ, ρ και τη συμβολίζουμε με την τριάδα $(\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$. Σε ορισμένες περιπτώσεις για να απλοποιήσουμε ακόμη περισσότερο τον συμβολισμό, συμβολίζουμε την τανυστική κατηγορία με $\mathcal{K}$ και ο δισυναρτητής $\otimes$ καθώς και το μοναδιαίο αντικείμενο υπονοούνται.

Ορισμός 5.1.3. *Αν μια τανυστική κατηγορία $\mathcal{K}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία και ο δισυναρτητής*

$$\text{-} \otimes \text{-} \colon \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

είναι ακριβής και ως προς τις δύο μεταβλητές, τότε η κατηγορία $\mathcal{K}$ καλείται **τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία (tensor triangulated category)**.

Σχόλιο 5.1.4. Συχνά η δομή που αποκτά η κατηγορία $\mathcal{K}$ του Ορισμού 5.1.1 από τον δισυναρτητή $\text{-} \otimes \text{-} \colon \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ καλείται **μονοειδής δομή (monoidal structure)**.

Παρατήρηση 5.1.5.

1. Όταν αναφερόμαστε στο μοναδιαίο αντικείμενο μιας τανυστικής κατηγορίας $\mathcal{K}$ και χρειάζεται να δώσουμε έμφαση στην κατηγορία στην οποία ανήκει το αντικείμενο, θα το συμβολίζουμε με $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ αντί για $\mathbf{1}$.
2. Εάν η τριάδα $(\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$ είναι μια τανυστική κατηγορία, τότε και η δυϊκή κατηγορία $\mathcal{K}^{\mathsf{op}}$ έχει δομή τανυστικής κατηγορίας.

Ορισμός 5.1.6. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική κατηγορία. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια οικογένεια φυσικών ισομορφισμών η οποία αποτελείται από φυσικούς ισομορφισμούς*

$$s_{X,Y} \colon X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$$

για κάθε δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$ καθώς και ότι για κάθε τρία αντικείμενα $X, Y, Z \in \mathcal{K}$ τα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "s_{X,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "\rho_X"'] & & \mathbf{1} \otimes X \arrow[dl, "\lambda_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "s_{X,Y} \otimes \mathbf{1}"] \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z}"'] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "\alpha_{Y,X,Z}"] \\ X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "s_{X,Y \otimes Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes s_{X,Z}"] \\ (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[r, "\alpha_{Y,Z,X}"'] & Y \otimes (Z \otimes X) \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & Y \otimes X \arrow[dr, "s_{Y,X}"] & \\ X \otimes Y \arrow[ur, "s_{X,Y}"] \arrow[rr, equal] & & X \otimes Y \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικά. Τότε η τανυστική κατηγορία $\mathcal{K}$ καλείται **συμμετρική τανυστική κατηγορία (symmetric tensor category)**.

Σύμβαση: Οι τανυστικές (τριγωνισμένες) κατηγορίες στις οποίες θα εργαστούμε στη συνέχεια της διατριβής και θα εφαρμόσουμε την θεωρία του Balmer θα είναι συμμετρικές τανυστικές κατηγορίες.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε συναρτητές μεταξύ δύο τανυστικών κατηγοριών, οι οποίοι «σέβονται» την μονοειδή δομή των κατηγοριών αυτών.

Ορισμός 5.1.7. *Έστω $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ δύο τανυστικές κατηγορίες. Ένας* **τανυστικός συναρτητής (tensor functor)** *ή* **συναρτητής τανυστικών κατηγοριών (functor of tensor categories)** *είναι ένα ζεύγος (F, ξ_F), όπου ο $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ είναι ένας συναρτητής και ο ξ_F είναι ένας φυσικός ισομορφισμός μεταξύ δισυναρτητών:*

$$\xi_F\colon F(\text{-} \otimes \text{-}) \longrightarrow F(\text{-}) \otimes F(\text{-})$$

τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(\alpha_{X,Y,Z})"] \arrow[d, "\xi_F(X \otimes Y, Z)"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "\xi_F(X, Y \otimes Z)"] \\ F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "\xi_F(X,Y) \otimes F(Z)"'] & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[d, "F(X) \otimes \xi_F(Y,Z)"] \\ (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[r, "\alpha_{F(X),F(Y),F(Z)}"'] & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για όλα τα αντικείμενα X, Y, Z στην $\mathcal{K}$.

Σχόλιο 5.1.8. Όταν αναφερόμαστε σε έναν τανυστικό συναρτητή (F, ξ_F), συχνά, παραλείπουμε τον φυσικό ισομορφισμό ξ_F και τον συμβολίζουμε απλούστερα με F.

Εάν οι τανυστικές κατηγορίες $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ του Ορισμού 5.1.7 είναι τανυστικές τριγωνισμένες κατηγορίες, τότε εμφανίζεται η έννοια του τανυστικού τριγωνισμένου συναρτητή.

Ορισμός 5.1.9. *Έστω $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ δύο τανυστικές τριγωνισμένες κατηγορίες. Ένας τανυστικός συναρτητής $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ καλείται* **τανυστικός τριγωνισμένος συναρτητής (tensor triangulated functor)** *αν είναι ακριβής συναρτητής και στέλνει το μοναδιαίο αντικείμενο της $\mathcal{K}$ στο μοναδιαίο αντικείμενο της $\mathcal{K}'$, δηλαδή $F(\mathbf{1}_{\mathcal{K}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}'}$.*

5.1.1 Η Ευσταθής Κατηγορία των Προτύπων ως τανυστική κατηγορία

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα με χαρακτηριστική έναν πρώτο αριθμό p, τέτοιον ώστε $p \mid |G|$. Σε προηγούμενο κεφάλαιο, στην Πρόταση 3.1.45, αποδείξαμε ότι η ευσταθής κατηγορία των προτύπων $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ υπεράνω της ομάδας άλγεβρας $\mathbb{K}G$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία. Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε ότι η κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ αποτελεί μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία.

Θεωρούμε την αντιστοιχία:

$$-\otimes_{\mathbb{K}} - \colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \times \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$$

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι η παραπάνω αντιστοιχία αποτελεί, πράγματι, έναν «καλά ορισμένο» δισυναρτητή στην ευσταθή κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να αποδείξουμε ότι για ένα $\mathbb{K}G$-διπρότυπο M, ο συναρτητής

$$-\otimes_{\mathbb{K}} M \colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$$

στέλνει προβολικά σε προβολικά $\mathbb{K}G$-πρότυπα. Το αποτέλεσμα αυτό συνοψίζεται στην επόμενη πρόταση, για την απόδειξη της οποίας παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία.

Πρόταση 5.1.10. *Έστω M ένα $\mathbb{K}G$-πρότυπο και P ένα προβολικό $\mathbb{K}G$-πρότυπο. Τότε το τανυστικό γινόμενο $P \otimes_{\mathbb{K}} M$ είναι ένα προβολικό $\mathbb{K}G$-πρότυπο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [7, Proposition 3.1.5]. ■

Παρατήρηση 5.1.11. Έστω M, N δυο $\mathbb{K}G$-πρότυπα. Βλέπουμε τα πρότυπα M και N σαν $\mathbb{K}$-διανυσματικούς χώρους και έστω $M \otimes_{\mathbb{K}} N$ το τανυστικό τους γινόμενο υπεράνω του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}$. Το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_{\mathbb{K}} N$ καθίσταται $\mathbb{K}G$-πρότυπο μέσω της διαγώνιας δράσης της ομάδας άλγεβρας $\mathbb{K}G$ στους γεννήτορες του τανυστικού γινομένου, η οποία επεκτείνεται σε δράση στα στοιχεία του τανυστικού γινομένου.

Παρατήρηση 5.1.12. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για ένα $\mathbb{K}G$-διπρότυπο M, ο συναρτητής

$$M \otimes - \colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$$

στέλνει προβολικά $\mathbb{K}G$-πρότυπα σε προβολικά $\mathbb{K}G$-πρότυπα. Αυτό σε συνδυασμό με την Παρατήρηση 5.1.11 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αντιστοιχία

$$-\otimes_{\mathbb{K}} - \colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \times \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$$

είναι ένας «καλά ορισμένος» δισυναρτητής στην ευσταθή κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν σταθεροποιήσουμε ένα $\mathbb{K}G$-διπρότυπο X, ο συναρτητής $-\otimes_{\mathbb{K}} X$ καθώς και ο συναρτητής $X \otimes_{\mathbb{K}} -$ απεικονίζει τρίγωνα σε τρίγωνα στην κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$.

Πρόταση 5.1.13. *Έστω X ένα $\mathbb{K}G$-διπρότυπο. Τότε:*

1. *ο συναρτητής* $-\otimes_{\mathbb{K}} X$ *απεικονίζει τρίγωνα της* $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$ *σε τρίγωνα στην* $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$*, με την έννοια της Παρατήρησης 3.1.8.*
2. *ο συναρτητής* $X \otimes_{\mathbb{K}} -$ *απεικονίζει τρίγωνα της* $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$ *σε τρίγωνα στην* $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$*, με την έννοια της Παρατήρησης 3.1.8.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow \Omega^{-1}M$$

στην τριγωνισμένη κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$.

1. Ας είναι

   $$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_M \longrightarrow \Omega^{-1}M \longrightarrow 0$$

   η σύντομη ακριβής ακολουθία, στην οποία εφαρμόζουμε το συναρτητή $-\otimes_{\mathbb{K}} X$. Τότε προκύπτει η ακολουθία

   $$0 \longrightarrow M \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow I_M \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow \Omega^{-1}M \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow 0$$

   Όμως το πρότυπο I_M είναι ενέσιμο και η ομάδα άλγεβρα $\mathbb{K}G$ είναι ένας Quasi Frobenius δακτύλιος. Επομένως το I_M είναι προβολικό $\mathbb{K}G$-πρότυπο και από την Πρόταση 5.1.10 προκύπτει ότι το πρότυπο $I_M \otimes_{\mathbb{K}} X$ είναι προβολικό άρα και ενέσιμο. Χάρη στην ενεσιμότητα του προτύπου $I_M \otimes_{\mathbb{K}} X$, η παραπάνω ακριβής ακολουθία επεκτείνεται στο τρίγωνο:

   $$M \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow I_M \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow \Omega^{-1}M \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow \Omega^{-1}(M \otimes_{\mathbb{K}} X)$$

   Άρα ο συναρτητής $-\otimes_{\mathbb{K}} X$ μετατίθεται με τον translation συναρτητή Ω^{-1}. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $-\otimes_{\mathbb{K}} X$ στο αρχικό τρίγωνο, προκύπτει το τρίγωνο

   $$M \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow L \otimes_{\mathbb{K}} X \longrightarrow \Omega^{-1}(M \otimes_{\mathbb{K}} X)$$

   στην κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή του πρώτου σκέλους. ■

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, μέχρι στιγμής, έχουμε αποδείξει ότι ο δισυναρτητής $\otimes_{\mathbb{K}}$ ικανοποιεί όλες τις επιθυμητές ιδιότητες, ώστε να αποτελεί το δισυναρτητή τανυστικού γινομένου της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$. Για να αποδειχθεί ότι πράγματι η τριγωνισμένη κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$ αποτελεί τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία, απομένει να οριστεί το μοναδιαίο αντικείμενο αυτής. Από τη στοιχειώδη θεωρία του τανυστικού γινομένου προτύπων γνωρίζουμε ότι

$$M \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = M$$

και

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} M = M$$

για κάθε $\mathbb{K}G$-διπρότυπο M. Συνεπώς προκύπτει το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 5.1.14. *Το τετριμμένο* $\mathbb{K}G$*-πρότυπο* $\mathbb{K}$ *αποτελεί το μοναδιαίο αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$.

Τελικά χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτής της υποενότητας πιστοποιείται ότι η ευσταθής κατηγορία των προτύπων υπεράνω μιας ομάδας άλγεβρας αποτελεί μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία.

Πρόταση 5.1.15. *Η τριάδα* $(\mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathrm{mod}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$ *αποτελεί μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει συνδυάζοντας τις Προτάσεις 5.1.10 και 5.1.13, το Λήμμα 5.1.14 καθώς και το γεγονός ότι η κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία. ■

Παρατήρηση 5.1.16. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι το τανυστικό γινόμενο προτύπων είναι συμμετρικό, γνωρίζουμε ότι η κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathrm{mod}}$ αποτελεί μια *συμμετρική* τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία.

5.1.2 Η παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων ως τανυστική κατηγορία

Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether. Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε ορίσει την παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ των τέλειων συμπλόκων, δηλαδή των συμπλόκων που σε κάθε θέση έχουν πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά R-πρότυπα, και έχουμε αποδείξει ότι αποτελεί παράδειγμα τριγωνισμένης κατηγορίας. Στην παρούσα ενότητα στόχος μας είναι να καταστήσουμε την παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων, τανυστική κατηγορία.

Έστω R, S δυο μεταθετικοί δακτύλιοι της Noether. Για να ορίσουμε το δισυναρτητή που εφοδιάζει την $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ με την επιθυμητή δομή, πρέπει δοθέντος ενός προσθετικού συναρτητή $F\colon \mathsf{C}(R) \longrightarrow \mathsf{C}(S)$ μεταξύ των κατηγοριών των συμπλόκων να ορίσουμε τον επαγόμενο συναρτητή ανάμεσα στις αντίστοιχες παραγόμενες κατηγορίες $\mathsf{D}(R)$, $\mathsf{D}(S)$, γνωστό και ως παραγόμενο συναρτητή (derived functor). Είναι γνωστό το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 5.1.17. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether. Τότε*

1. *Κάθε σύμπλοκο $X_\bullet \in \mathsf{D}^+(R)$ είναι ημι-ισόμορφο με ένα κάτω φραγμένο σύμπλοκο από προβολικά R-πρότυπα.*

2. *Κάθε σύμπλοκο $X_\bullet \in \mathsf{D}^-(R)$ είναι ημι-ισόμορφο με ένα άνω φραγμένο σύμπλοκο από ενέσιμα R-πρότυπα.*

Χάρη στην παραπάνω πρόταση, στο [27, Section 10.5] αποδεικνύεται ότι για ένα κάτω ή άνω φραγμένο σύμπλοκο, ορίζεται ο παραγόμενος συναρτητής. Η γενίκευση αυτού του αποτελέσματος σε μη-φραγμένες παραγόμενες κατηγορίες έγινε αρχικά από τον Spaltenstein και αργότερα από τους Bokstedt και Neeman στα [24], [11] αντίστοιχα. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να ορίσουμε τα K-προβολικά και K-ενέσιμα σύμπλοκα.

Ορισμός 5.1.18. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος της Noether με μονάδα.*

1. *Ένα σύμπλοκο $P_\bullet \in \mathsf{C}(R)$ καλείται* K-**προβολικό (**K-**projective)** *αν*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(P_\bullet, X_\bullet) = 0$$

για κάθε ακυκλικό σύμπλοκο $X_\bullet$.

2. *Ένα σύμπλοκο $I_\bullet \in \mathsf{C}(R)$ καλείται* K-**ενέσιμο (**K-**injective)** *αν*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{C}(R)}(X_\bullet, I_\bullet) = 0$$

για κάθε ακυκλικό σύμπλοκο $X_\bullet$.

Έστω R, S δύο μεταθετικοί δακτύλιοι της Noether και ας είναι $Q_R\colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(R)$ και $Q_S\colon \mathsf{K}(S) \longrightarrow \mathsf{D}(S)$ οι αντίστοιχοι συναρτητές τοπικοποίησης.

Ορισμός 5.1.19. *Ορίζουμε τις πλήρεις υποκατηγορίες $\mathsf{K}_P(R)$, $\mathsf{K}_I(R)$ της $\mathsf{K}(R)$ ως τις υποκατηγορίες που αποτελούνται από τα* K*-προβολικά και* K*-ενέσιμα σύμπλοκα αντίστοιχα.*

Σύμφωνα με το [11, Proposition 2.12] οι συνθέσεις συναρτητών

$$\mathsf{K}_P(R) \hookrightarrow \mathsf{K}(R) \xrightarrow{Q_R} \mathsf{D}(R)$$

και

$$\mathsf{K}_I(R) \hookrightarrow \mathsf{K}(R) \xrightarrow{Q_R} \mathsf{D}(R)$$

αποτελούν ισοδυναμίες κατηγοριών. Συμβολίζουμε $l\colon \mathsf{K}_P(R) \longrightarrow \mathsf{D}(R)$ και $r\colon \mathsf{K}_I(R) \longrightarrow \mathsf{D}(R)$ τις παραπάνω ισοδυναμίες κατηγοριών και συμπεραίνουμε ότι κάθε σύμπλοκο της $\mathsf{D}(R)$ είναι ημι-ισόμορφο με ένα K-προβολικό και K-ενέσιμο σύμπλοκο. Επιπλέον είναι γνωστό ότι για κάθε προσθετικό συναρτητή $F\colon \mathsf{C}(R) \longrightarrow \mathsf{C}(S)$ επάγεται ένας καλά ορισμένος, ακριβής συναρτητής $F^*\colon \mathsf{K}(R) \longrightarrow \mathsf{K}(S)$ μεταξύ των αντίστοιχων ομοτοπικών κατηγοριών (βλ. [17, Chapter 5, Proposition 1.1.1]). Για απλοποίηση του συμβολισμού τον επαγόμενο συναρτητή στις ομοτοπικές κατηγορίες θα τον συμβολίζουμε επίσης με F. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω ορίζονται οι ακόλουθες συνθέσεις συναρτητών:

$$\mathsf{D}(R) \xrightarrow{l^{-1}} \mathsf{K}_P(R) \hookrightarrow \mathsf{K}(R) \xrightarrow{F} \mathsf{K}(S) \xrightarrow{Q_S} \mathsf{D}(S)$$

και

$$\mathsf{D}(R) \xrightarrow{r^{-1}} \mathsf{K}_I(R) \hookrightarrow \mathsf{K}(R) \xrightarrow{F} \mathsf{K}(S) \xrightarrow{Q_S} \mathsf{D}(S)$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, ορίζουμε τον αριστερό και δεξιό παραγόμενο συναρτητή.

Ορισμός 5.1.20. *Έστω R, S δυό μεταθετικοί δακτύλιοι της Noether με μονάδα και $F\colon \mathsf{C}(R) \longrightarrow \mathsf{C}(S)$ ένας προσθετικός συναρτητής μεταξύ των αντίστοιχων κατηγοριών των συμπλόκων.*

1. *Ο* **αριστερός παραγόμενος συναρτητής (left derived functor)** $\mathsf{L}F$ *του* F *ορίζεται ως η σύνθεση*
$$Q_S \circ F \circ l^{-1}\colon \mathsf{D}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(S)$$

2. *Ο* **δεξιός παραγόμενος συναρτητής (right derived functor)** $\mathsf{R}F$ *του* F *ορίζεται ως η σύνθεση*
$$Q_S \circ F \circ r^{-1}\colon \mathsf{D}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(S)$$

Ακολούθως ορίζουμε δύο παραγόμενους συναρτητές οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν εκτενέστερα στην συνέχεια της διατριβής.

Ορισμός 5.1.21. *Έστω R, S δυο μεταθετικοί δακτύλιοι της Noether. Για ένα σύμπλοκο $X_\bullet$ από R-S-διπρότυπα ορίζουμε τους παραγόμενους συναρτητές:*

$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_R(X_\bullet, \text{-}) := \mathsf{R}(\mathsf{Hom}_R(X_\bullet, \text{-}))\colon \mathsf{D}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(S)$$

και

$$\text{-}\otimes^{\mathsf{L}}_R X_\bullet := \mathsf{L}(\text{-}\otimes_R X_\bullet)\colon \mathsf{D}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(S)$$

Παρατήρηση 5.1.22. Έστω R, S δυο μεταθετικοί δακτύλιοι της Noether με μονάδα.

1. Ας είναι $Y_\bullet$ ένα σύμπλοκο από R-S-διπρότυπα. Κάθε σύμπλοκο $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$ γνωρίζουμε ότι είναι ισόμορφο με ένα K-προβολικό σύμπλοκο $P_\bullet \in \mathsf{K}_P(R)$. Τότε από τον Ορισμό 5.1.21 προκύπτει ότι
$$X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet = P_\bullet \otimes_R Y_\bullet$$
όπου
$$(X_\bullet \otimes_R Y_\bullet)_n = \bigoplus_{i+j=n} P_i \otimes_R Y_j$$
Ακόμη κάθε σύμπλοκο $Z_\bullet \in \mathsf{D}(R)$ είναι ισόμορφο με ένα K-ενέσιμο σύμπλοκο $I_\bullet \in \mathsf{K}_I(R)$. Τότε
$$\mathsf{R}\,\mathsf{Hom}_R(Y_\bullet, Z_\bullet) = \mathsf{Hom}_R(Y_\bullet, I_\bullet)$$
όπου
$$\mathsf{Hom}_R(Y_\bullet, I_\bullet) = \bigoplus_{-i+j=n} \mathsf{Hom}_R(Y_i, I_j)$$

2. Οι συναρτητές
$$-\otimes^{\mathsf{L}}_R - \colon \mathsf{D}(R) \times \mathsf{D}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(R)$$
και
$$\mathsf{R}\operatorname{Hom}_R(-,-) \colon \mathsf{D}(R)^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D}(R) \longrightarrow \mathsf{D}(R)$$
αποτελούν δισυναρτητές.

3. Μπορούμε να δούμε τον δακτύλιο R σαν αντικείμενο της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}(R)$, δηλαδή σαν σύμπλοκο συγκεντρωμένο στη μηδενική θέση. Τότε ισχύει
$$R \otimes^{\mathsf{L}}_R X_\bullet = X_\bullet$$
για κάθε σύμπλοκο $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$. Επομένως ο δακτύλιος R είναι το μοναδιαίο αντικείμενο $\mathbf{1}_{\mathsf{D}(R)}$ της κατηγορίας $\mathsf{D}(R)$.

Χρησιμοποιώντας το τρίτο σκέλος της προηγούμενης παρατήρησης προκύπτει το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 5.1.23. *Ο δακτύλιος R ως αντικείμενο της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}(R)$ αποτελεί το μοναδιαίο αντικείμενο της $\mathsf{D}(R)$.*

Ανατρέχοντας στο [18, Section 2] μπορεί κανείς να βρεί τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Πρόταση 5.1.24. *Έστω $X_\bullet$, $Z_\bullet \in \mathsf{D}(R)$ και $Y_\bullet$ ένα σύμπλοκο από R-S-διπρότυπα. Τότε:*

1. $(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet) \otimes^{\mathsf{L}}_R Z_\bullet \simeq X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R (Y_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Z_\bullet)$
2. $X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet \simeq Y_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R X_\bullet$

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των σχέσεων είναι άμεσες εκμεταλλευόμενοι την προσεταιριστικότητα και τη μεταθετικότητα του συνήθους τανυστικού γινομένου. ∎

Παρατήρηση 5.1.25. Ο συναρτητής τανυστικού γινομένου $\otimes^{\mathsf{L}}_R$ είναι ακριβής συναρτητής με την έννοια ότι απεικονίζει τρίγωνα της $\mathsf{D}(R)$ σε τρίγωνα της $\mathsf{D}(R)$ και από τον ορισμό του τανυστικού γινομένου συμπλόκων, μετατίθεται με τον translation συναρτητή της τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathsf{D}(R)$. Τα προαναφερθέντα αποτελέσματα τα ανεφέρουμε χωρίς απόδειξη καθώς ξεφεύγει από το πλαίσιο της διατριβής και παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα κείμενα [18] και [24] του Neeman και Spaltenstein αντίστοιχα.

Πρόταση 5.1.26. *Η τριάδα $(\mathsf{D}(R), \otimes^{\mathsf{L}}_R, R)$ αποτελεί μια ταυυστική τριγωνισμένη κατηγορία.*

Παρατήρηση 5.1.27. Η απόδειξη της Πρότασης προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 5.1.23, την Παρατήρηση 5.1.25 καθώς και από το γεγονός ότι η παραγόμενη κατηγορία ενός μεταθετικού δακτυλίου είναι τριγωνισμένη.

Στην συνέχεια της διατριβής, ωστόσο, δε θα ασχοληθούμε με την κατηγορία $\mathsf{D}(R)$ αλλά με την πλήρη υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ που αποτελείται από τα τέλεια σύμπλοκα. Θα αποδείξουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ εφοδιασμένη με το δισυναρτητή $\otimes^{\mathsf{L}}_R$ είναι τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Για το σκοπό αυτό θα αποδείξουμε ότι οι παραγόμενοι συναρτητές των συναρτητών $\mathsf{R}\operatorname{Hom}_R(X_\bullet, -)$ και $-\otimes^{\mathsf{L}}_R X_\bullet$ είναι «καλά ορισμένοι» στην παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων.

Πρόταση 5.1.28. *Έστω $X_\bullet$, $Y_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Τότε ισχύει ότι:*
$$\mathsf{R}\operatorname{Hom}_R(X_\bullet, Y_\bullet) \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$$
και
$$X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε, αφού πρώτα τις αποδείξουμε, δύο ιδιότητες των προβολικών προτύπων. Έστω P, Q δυο προβολικά R-πρότυπα. Τότε υπάρχουν R-πρότυπα M, N, τέτοια ώστε

$$P \oplus M \simeq R^n$$

και

$$Q \oplus N \simeq R^m$$

για κάποια $n, m \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το τανυστικό γινόμενο των δύο παραπάνω σχέσεων και προκύπτει:

$$(P \oplus M) \otimes_R (Q \oplus N) \simeq R^n \otimes_R R^m$$

Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες του τανυστικού γινομένου λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$P \otimes_R Q \oplus (P \otimes_R N \oplus M \otimes_R Q \oplus M \otimes_R N) \simeq R^{n \times m}$$

Επομένως το πρότυπο $P \otimes_R Q$ είναι ευθύς αθροιστέος ενός ελεύθερου προτύπου, άρα είναι προβολικό R-πρότυπο. Με ανάλογα επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι και το R-πρότυπο $\mathsf{Hom}_R(P, Q)$ είναι προβλικό R-πρότυπο.

Τελικά από τον ορισμό των δισυναρτητών $\mathsf{RHom}_R(\text{-}, \text{-})$ και $\text{-} \otimes^{\mathsf{L}}_R \text{-}$, προκύπτει ότι αν $X_\bullet$, $Y_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, τότε

$$\mathsf{RHom}_R(X_\bullet, Y_\bullet) \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$$

και

$$X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$$

■

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οι παραπάνω συναρτητές είναι «καλά ορισμένοι» στην πλήρη υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ της $\mathsf{D}(R)$. Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η τριγωνισμένη κατηγορία $\mathsf{D}(R)$ αποτελεί τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία μας οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 5.1.29. *Η τριάδα $(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R), \otimes^{\mathsf{L}}_R, R)$ αποτελεί μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία.*

Παρατήρηση 5.1.30.

1. Στην κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ το τανυστικό γινόμενο $\otimes^{\mathsf{L}}_R$ είναι το σύνηθες τανυστικό γινόμενο συμπλόκων και το συμβολίζουμε απλούστερα με $\otimes_R$.
2. Το τανυστικό γινόμενο δύο συμπλόκων αποτελούμενων από R-πρότυπα είναι συμμετρικό χάρη στη συμμετρικότητα του τανυστικού γινομένου προτύπων. Συνεπώς η τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ αποτελεί μια *συμμετρική* τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία.

5.2 Πρώτα Τανυστικά Ιδεώδη και Φάσμα

Η παρούσα ενότητα αποτελεί ουσιαστικά την αρχή της παρουσίασης της θεωρίας του Balmer. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό του πρώτου τανυστικού ιδεώδους μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ και θα ορίσουμε το φάσμα της κατηγορίας. Στη συνέχεια θα ορίσουμε κάποια υποσύνολα του φάσματος, τα οποία θα παίξουν θεμελιώδη ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας και θα ορίσουμε την τοπολογία με την οποία εφοδιάζουμε το φάσμα για να αποκτήσει δομή τοπολογικού χώρου.

Αρχικά ας διατυπώσουμε τον ορισμό του thick τανυστικού ιδεώδους μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$.

Ορισμός 5.2.1. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα* **thick τανυστικό ιδεώδες (thick tensor ideal)** *είναι μία πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{K}$ η οποία περιέχει το μηδενικό αντικείμενο και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *η υποκατηγορία $\mathcal{A}$ είναι thick, δηλαδή είναι μια τριγωνισμένη υποκατηγορία κλειστή στους ευθείς αθροιστέους,*

2. *η υποκατηγορία $\mathcal{A}$ είναι ταυνστικό ιδεώδες, δηλαδή για δυο αντικείμενα $X \in \mathcal{A}$ και $Y \in \mathcal{K}$ το αντικείμενο $X \otimes Y$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{A}$.*

Παρατήρηση 5.2.2. Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Αν $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ είναι μια συλλογή thick τανυστικών ιδεωδών της $\mathcal{K}$, τότε η τομή τους είναι επίσης thick τανυστικό ιδεώδες. Δοδείσας μιας συλλογής αντικειμένων S της $\mathcal{K}$ συμβολίζουμε με $\langle S\rangle$ το μικρότερο thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$ που περιέχει τη συλλογή S.

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε μια θεμελιώδη έννοια για την συνέχεια της διατριβής, αυτήν του πρώτου τανυστικού ιδεώδους μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας. Η έννοια αυτή εισήχθη για πρώτη φορά από τον Balmer στο άρθρο [2] και θυμίζει τον ορισμό του πρώτου ιδεώδους ενός μεταθετικού δακτυλίου.

Ορισμός 5.2.3. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα γνήσιο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ καλείται* **πρώτο (prime)** *αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\text{για κάθε } X, Y \in \mathcal{K} \text{ με } X \otimes Y \in \mathcal{P} \Longrightarrow X \in \mathcal{P} \text{ ή } Y \in \mathcal{P}$$

Στη Μεταθετική Άλγεβρα υπάρχει η γνωστή κατασκευή του φάσματος ενός μεταθετικού δακτυλίου R, δηλαδή ενός συνόλου που περιέχει τα πρώτα ιδεώδη του R. Επίσης γνωρίζουμε ότι αν το φάσμα εφοδιαστεί με την τοπολογία Zariski, τότε αποκτά δομή τοπολογικού χώρου. Μια ανάλογη κατασκευή υπάρχει και στην περίπτωση που διαπραγματεύεται η παρούσα διατριβή.

Ορισμός 5.2.4. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Το σύνολο όλων των πρώτων thick τανυστικών ιδεωδών της $\mathcal{K}$ καλείται* **φάσμα του Balmer (Balmer's spectrum)** *η απλώς* **φάσμα (spectrum)** *της $\mathcal{K}$ και συμβολίζεται με $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Δηλαδή*

$$\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) := \{\mathcal{P} \subset \mathcal{K} \mid \mathcal{P} : \text{ πρώτο ιδεώδες της } \mathcal{K}\}$$

Στη συνέχεια, δοθείσας μιας συλλογής αντικειμένων S μιας τανυστικής κατηγορίας $\mathcal{K}$, θα ορίσουμε ένα υποσύνολο του φάσματος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ το οποίο θα μας επιτρέψει να δώσουμε στο φάσμα δομή τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 5.2.5. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $S \subset \mathcal{K}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Ορίζουμε το σύνολο*

$$\mathsf{Z}(S) := \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \cap \mathcal{P} = \varnothing\}$$

το οποίο είναι ένα υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Η συλλογή υποσυνόλων*

$$\mathfrak{T} = \{\mathsf{Z}(S) \mid S \subset \mathcal{K}\}$$

του φάσματος της $\mathcal{K}$, αποτελεί τη συλλογή κλειστών υποσυνόλων της τοπολογίας του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

Απόδειξη. Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\mathsf{Z}(\varnothing) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \varnothing \cap \mathcal{P} = \varnothing\} = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

και

$$\mathsf{Z}(\mathcal{K}) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \cap \mathcal{P} = \varnothing\} = \varnothing$$

Έστω τώρα $\{S_j\}_{j\in J}$, J:σύνολο δεικτών, μια οικογένεια που αποτελείται από συλλογές αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\bigcap_{j\in J} \mathsf{Z}(S_j) = \mathsf{Z}\left(\bigcup_{j\in J} S_j\right)$$

Έστω $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \bigcap_{j\in J} \mathsf{Z}(S_j)$. Τότε προκύπτει ότι $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_j)$, για κάθε $j \in J$. Συνεπώς

$$\mathcal{P} \cap S_j = \varnothing, \text{ για κάθε } j \in J \Longrightarrow \mathcal{P} \cap \left(\bigcup_{j\in J} S_j\right) = \varnothing \Longrightarrow \mathcal{P} \in \mathsf{Z}\left(\bigcup_{j\in J} S_j\right)$$

Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$\bigcap_{j\in J} \mathsf{Z}(S_j) \subset \mathsf{Z}\left(\bigcup_{j\in J} S_j\right) \tag{5.1}$$

Ανάλογα, θεωρούμε ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}\left(\bigcup_{j\in J} S_j\right)$. Τότε

$$P \cap \left(\bigcup_{j\in J} S_j\right) = \varnothing \Longrightarrow P \cap S_j = \varnothing, \text{ για κάθε } j \in J \Longrightarrow \mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_j), \text{ για κάθε } j \in J.$$

Άρα ισχύει

$$\mathcal{P} \in \bigcap_{j\in J} \mathsf{Z}(S_j)$$

και έτσι προκύπτει η σχέση

$$\mathsf{Z}\left(\bigcup_{j\in J} S_j\right) \subset \bigcap_{j\in J} \mathsf{Z}(S_j) \tag{5.2}$$

Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (5.1) και (5.2) προκύπτει ότι:

$$\bigcap_{j\in J} \mathsf{Z}(S_j) = \mathsf{Z}\left(\bigcup_{j\in J} S_j\right)$$

Τέλος θεωρούμε S_1, S_2 δύο συλλογές αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\mathsf{Z}(S_1) \cup \mathsf{Z}(S_2) = \mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2)$$

Έστω $\mathcal{P}$ ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες, τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1) \cup \mathsf{Z}(S_2)$$

Τότε

$$\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1) \text{ ή } \mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_2)$$

Αν $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1)$, τότε $\mathcal{P} \cap S_1 = \varnothing$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2)$, δηλαδή $\mathcal{P} \cap (S_1 \oplus S_2) = \varnothing$. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι $\mathcal{P} \cap (S_1 \oplus S_2) \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει αντικείμενο $X \in \mathcal{P} \cap (S_1 \oplus S_2)$. Τότε προκύπτει ότι

$$X \in \mathcal{P} \text{ και } X = Y \oplus Z, \text{ όπου } Y \in S_1 \text{ και } Z \in S_2.$$

Όμως επειδή το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι thick, τα αντικείμενα Y, Z ανήκουν στο $\mathcal{P}$ και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $Y \in \mathcal{P}$ και $Y \in S_1$. Δηλαδή

$$\mathcal{P} \cap S_1 \neq \varnothing$$

το οποίο είναι άτοπο, και επομένως συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2)$. Όμοια αν $\mathcal{P} \in S_2$, αποδεικνύεται ότι $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2)$. Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\mathsf{Z}(S_1) \cap \mathsf{Z}(S_2) \subset \mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2) \tag{5.3}$$

Αντίστροφα, θεωρούμε ένα πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2)$ και υποθέτουμε ότι $\mathcal{P} \notin \mathsf{Z}(S_1)$. Τότε ισχύει $\mathcal{P} \cap S_1 \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει αντικείμενο X, τέτοιο ώστε

$$X \in \mathcal{P} \text{ και } X \in S_1$$

Αν $\mathcal{P} \notin \mathsf{Z}(S_2)$ τότε $\mathcal{P} \cap S_2 \neq \varnothing$. Συνεπώς υπάρχει αντικείμενο Y τέτοιο ώστε

$$Y \in \mathcal{P} \text{ και } Y \in S_2$$

Τότε το αντικείμενο $Z := X \oplus Y$ ανήκει στο ευθύ άθροισμα $S_1 \oplus S_2$ και λόγω του ότι το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι thick προκύπτει ότι το αντικείμενο Z ανήκει στο $\mathcal{P}$. Άρα καταλήξαμε ότι $\mathcal{P} \cap (S_1 \oplus S_2) \neq \varnothing$, το οποίο είναι άτοπο επομένως $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_2)$ και έτσι $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1) \cup \mathsf{Z}(S_2)$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι αν $\mathcal{P} \notin \mathsf{Z}(S_2)$, τότε $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1)$. Τελικά σε κάθε περίπτωση $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_1) \cup \mathsf{Z}(S_2)$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2) \subset \mathsf{Z}(S_1) \cup \mathsf{Z}(S_2) \tag{5.4}$$

Με χρήση των σχέσεων (5.3), (5.4) προκύπτει ότι

$$\mathsf{Z}(S_1) \cup \mathsf{Z}(S_2) = \mathsf{Z}(S_1 \oplus S_2)$$

Τελικά η συλλογή $\mathfrak{T}$ αποτελείται από κλειστά υποσύνολα τα οποία αποτελούν τοπολογία για το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της κατηγορίας $\mathcal{K}$. ∎

Παρατήρηση 5.2.7. Έστω S μια συλλογή αντικειμένων μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$. Τότε ορίζουμε το ανοικτό συμπλήρωμα του κλειστού υποσυνόλου $\mathsf{Z}(S)$ του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$:

$$\mathsf{U}(S) := \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \cap \mathcal{P} \neq \varnothing\}$$

Χρησιμοποιώντας το σύνολο $\mathsf{Z}(S)$ για μια συλλογή αντικειμένων S της $\mathcal{K}$, μπορούμε για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας να ορίσουμε ένα υποσύνολο του φάσματος, το οποίο καλείται φορέας του X και έχει θεμελιώδη σημασία στη συνέχεια της διατριβής. Ακόμη είναι χρήσιμο να ορίσουμε κάποιες συλλογές αντικειμένων της $\mathcal{K}$, οι οποίες είναι «κλειστές» στο τανυστικό γινόμενο της κατηγορίας και είναι γνωστές με την ονομασία «τανυστικά πολλαπλασιαστικές» συλλογές αντικειμένων.

Ορισμός 5.2.8. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και X ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$. Το υποσύνολο*

$$\mathsf{supp}(X) := \mathsf{Z}(X) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid X \notin \mathcal{P}\}$$

του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ καλείται **φορέας (support)** *του αντικειμένου X της $\mathcal{K}$.*

Ορισμός 5.2.9. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $S \subset \mathcal{K}$ μια συλλογή αντικειμένων της. Η συλλογή S καλείται* **τανυστικά πολλαπλασιαστική (tensor multiplicative)** *αν το μοναδιαίο αντικείμενο $\mathbf{1}$ της κατηγορίας $\mathcal{K}$ ανήκει στην συλλογή S και για κάθε δύο αντικείμενα $X, Y \in S$ ισχύει ότι $X \otimes Y \in S$.*

Θα αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο λήμμα, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη κάποιων σημαντικών αποτελεσμάτων στη συνέχεια.

Λήμμα 5.2.10. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες και $S \subset \mathcal{K}$ μια τανυστικά πολλαπλασιαστική συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$ τέτοια ώστε $S \cap \mathcal{J} = \varnothing$. Τότε υπάρχει πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P}$ της $\mathcal{K}$ τέτοιο ώστε*

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{P} \text{ και } \mathcal{P} \cap S = \varnothing$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συλλογή $\mathcal{F}$ που αποτελείται από τα thick τανυστικά ιδεώδη $\mathcal{A}$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\mathcal{A} \cap S = \emptyset$

(2) $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$

(3) Αν $Z \in S$ και $X \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $Z \otimes X \in \mathcal{A}$ τότε $X \in \mathcal{A}$.

Ορίζουμε την ακόλουθη υποκατηγορία της κατηγορίας $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{A}_0 := \{X \in \mathcal{K} \mid \exists\ Z \in S \text{ με } X \otimes Z \in \mathcal{J}\}$$

Θα αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$ είναι thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$ και ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. Αρχικά για κάθε δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{A}_0$ ισχύει

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}_0}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$$

Επομένως η υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$ είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{K}$. Επιπλέον για κάθε αντικείμενο $Z \in \mathcal{K}$, ο συναρτητής

$$\text{-} \otimes Z \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

είναι ακριβής, άρα και προσθετικός. Συνεπώς για το μηδενικό αντικείμενο 0 της κατηγορίας $\mathcal{K}$ ισχύει

$$(\text{-} \otimes Z)(0) \simeq 0$$

Άρα προκύπτει $0 \otimes Z \simeq 0$ και συμπεραίνουμε ότι το μηδενικό αντικείμενο 0 ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$. Έστω, τώρα, ένα τρίγωνο

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X)$$

στην κατηγορία $\mathcal{K}$, όπου τα αντικείμενα X, Y ανήκουν στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$. Τότε υπάρχουν αντικείμενα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{K}$, τέτοια ώστε $X \otimes Z_1, Y \otimes Z_2 \in \mathcal{J}$. Θεωρούμε ένα αντικείμενο $Z_3 \in S$ και μορφισμούς $a \colon Z_1 \longrightarrow Z_2$, $b \colon Z_2 \longrightarrow Z_3$ και $c \colon Z_3 \longrightarrow Z_1$. Δημιουργούμε το τρίγωνο

$$X \otimes Z_1 \xrightarrow{f \otimes a} Y \otimes Z_2 \xrightarrow{g \otimes b} Z \otimes Z_3 \xrightarrow{h \otimes c} \Sigma(X) \otimes \Sigma(Z_1)$$

Επειδή τα αντικείμενα $X \otimes Z_1$ και $Y \otimes Z_2$ ανήκουν στο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J}$, το οποίο είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$ προκύπτει ότι και το αντικείμενο $Z \otimes Z_3$ ανήκει στο $\mathcal{J}$. Συνεπώς το αντικείμενο Z ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$ και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{A}_0$ το οποίο διασπάται ως εξής:

$$X \simeq Y \oplus Y', \text{ για κάποια } Y, Y' \in \mathcal{K}$$

Επειδή το αντικείμενο X ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντικείμενο $Z \in S$ τέτοιο ώστε $X \otimes Z \in \mathcal{J}$. Επομένως προκύπτει ότι

$$X \otimes Z = (Y \oplus Y') \otimes Z \tag{5.5}$$

Θεωρούμε το τρίγωνο

$$Y \longrightarrow Y \oplus Y' \longrightarrow Y' \longrightarrow \Sigma(Y) \tag{5.6}$$

στην κατηγορία $\mathcal{K}$. Εφαρμόζουμε τον συναρτητή

$$\text{-} \otimes Z \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

και προκύπτει το τρίγωνο

$$Y \otimes Z \longrightarrow (Y \oplus Y') \otimes Z \longrightarrow Y' \otimes Z \longrightarrow (\Sigma Y) \otimes Z \tag{5.7}$$

Εφόσον το τρίγωνο (5.6) είναι διασπάσιμο και ο συναρτητής $-\otimes Z$ είναι ακριβής, προκύπτει ότι και το τρίγωνο (5.7) είναι διασπάσιμο. Επομένως προκύπτει ότι

$$(Y \oplus Y') \otimes Z = (Y \otimes Z) \oplus (Y' \otimes Z)$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω ισότητα στη σχέση (5.5) και προκύπτει ότι

$$X \otimes Z = (Y \otimes Z) \oplus (Y' \otimes Z) \in \mathcal{J}$$

Επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{J}$ είναι thick έχουμε ότι

$$Y \otimes Z \in \mathcal{J} \text{ και } Y' \otimes Z \in \mathcal{J}$$

Δηλαδή τα αντικείμενα Y, Y' ανήκουν στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$ και έτσι η $\mathcal{A}_0$ είναι thick υποκατηγορία. Θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ και $Y \in \mathcal{A}_0$. Τότε υπάρχει αντικείμενο $Z \in S$ τέτοιο ώστε $X \otimes Z \in \mathcal{J}$. Τότε

$$(X \otimes Y) \otimes Z = (X \otimes Z) \otimes Y \in \mathcal{J}$$

αφού το $\mathcal{J}$ είναι τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Άρα συμπεραίνουμε ότι $X \otimes Y \in \mathcal{A}_0$ και έτσι το $\mathcal{A}_0$ είναι τανυστικό ιδεώδες. Τελικά αποδείξαμε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{A}_0$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το ιδεώδες $\mathcal{A}_0$ ικανοποιεί τις ιδιότητες των στοιχείων της συλλογής $\mathcal{F}$ και έτσι η $\mathcal{F}$ δεν είναι κενή. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\mathcal{A}_0 \cap S \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει αντικείμενο $X \in \mathcal{A}_0 \cap S$, δηλαδή $X \in \mathcal{A}_0$ και $X \in S$. Επειδή $X \in \mathcal{A}_0$, υπάρχει αντικείμενο $Z \in S$ τέτοιο ώστε $X \otimes Z \in \mathcal{J}$. Όμως η συλλογή αντικειμένων S είναι τανυστικά πολλαπλασιαστική. Συνεπώς $X \otimes Z \in S$ και προκύπτει ότι $\mathcal{J} \cap S \neq \emptyset$, το οποίο όμως αντιβαίνει στις υποθέσεις του λήμματος. Επομένως ισχύει ότι $\mathcal{A}_0 \cap S = \emptyset$. Έστω, τώρα, ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{J}$. Η υποκατηγορία $\mathcal{J}$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες. Συνεπώς για οποιοδήποτε $Y \in S \subset \mathcal{K}$ προκύπτει ότι $X \otimes Y \in \mathcal{J}$ και καταλήγουμε ότι $X \in \mathcal{A}_0$. Άρα αποδείξαμε ότι $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_0$. Τέλος θεωρούμε ένα αντικείμενο $Z \in S$ και $X \in \mathcal{K}$ τέτοιο ώστε $X \otimes Z \in \mathcal{A}_0$. Τότε από τον ορισμό της υποκατηγορίας $\mathcal{A}_0$ προκύπτει ότι $X \in \mathcal{A}_0$. Συνοψίζοντας, αποδείξαμε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{K}$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1), (2), (3) της συλλογής $\mathcal{F}$ και άρα $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Από το Λήμμα του Zorn γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα maximal στοιχείο $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$. Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{P}$ είναι πρώτο ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Για το σκοπό αυτόν υποθέτουμε ότι για δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$ με $X \otimes Y \in \mathcal{P}$, ισχύει ότι $Y \notin \mathcal{P}$ και θα αποδείξουμε ότι $X \in \mathcal{P}$. Ορίζουμε την υποκατηγορία:

$$\mathcal{A}_1 := \{W \in \mathcal{K} \mid X \otimes W \in \mathcal{P}\}$$

Θα αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες. Αρχικά η υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$ είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{K}$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ο συναρτητής

$$X \otimes - : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

είναι ακριβής, άρα και προσθετικός. Συνεπώς $(X \otimes -)(0) \simeq 0 \in \mathcal{P}$, αφού το $\mathcal{P}$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες. Άρα το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{K}$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$.
Θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$Y \longrightarrow Y' \longrightarrow Y'' \longrightarrow \Sigma(Y)$$

στην κατηγορία $\mathcal{K}$ και εφαρμόζουμε τον ακριβή συναρτητή

$$X \otimes - : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

Τότε προκύπτει το τρίγωνο

$$X \otimes Y \longrightarrow X \otimes Y' \longrightarrow X \otimes Y'' \longrightarrow X \otimes \Sigma(Y)$$

Όμως τα αντικείμενα $X \otimes Y, X \otimes Y'$ ανήκουν στο ιδεώδες $\mathcal{P}$ το οποίο είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$. Άρα και το αντικείμενο $X \otimes Y''$ ανήκει στο πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P}$ και συμπεραίνουμε ότι $Y'' \in \mathcal{A}_1$. Άρα η υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$ είναι τριγωνισμένη. Έπειτα, υποθέτουμε ότι W είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}_1$ τέτοιο ώστε $W \simeq W' \oplus W''$, για κάποια αντικείμενα $W', W'' \in \mathcal{K}$. Τότε, από τον ορισμό της υποκατηγορίας $\mathcal{A}_1$, γνωρίζουμε ότι $X \otimes W \in \mathcal{P}$ και

$$X \otimes W \in \mathcal{P} \Longrightarrow X \otimes (W' \oplus W'') \in \mathcal{P} \Longrightarrow (X \otimes W') \oplus (X \otimes W'') \in \mathcal{P}$$

Όμως το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι thick. Εξ' ορισμού προκύπτει ότι $X \otimes W' \in \mathcal{P}$ και $X \otimes W'' \in \mathcal{P}$. Συνεπώς τα αντικείμενα W', W'' ανήκουν στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$ και άρα η $\mathcal{A}_1$ είναι μια thick υποκατηγορία. Τέλος θεωρούμε αντικείμενα $W \in \mathcal{A}_1$ και $Z \in \mathcal{K}$. Θα αποδείξουμε ότι το αντικείμενο $W \otimes Z$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$. Από το γεγονός ότι το αντικείμενο W ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$, συμπεραίνουμε ότι το αντικείμενο $X \otimes W$ ανήκει στο ιδεώδες $\mathcal{P}$. Όμως το $\mathcal{P}$ είναι thick τανυστικό ιδεώδες. Άρα

$$(X \otimes W) \otimes Z \in \mathcal{P} \Longrightarrow X \otimes (W \otimes Z) \in \mathcal{P} \Longrightarrow W \otimes Z \in \mathcal{A}_1$$

Συνεπώς η υποκατηγορία $\mathcal{A}_1$ είναι τανυστικό ιδεώδες. Τελικά αποδείξαμε ότι η $\mathcal{A}_1$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Ακόμη, άμεσα, ισχύει η σχέση έγκλεισης $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}_1$. Όμως το $\mathcal{P}$ είναι maximal στοιχείο του $\mathcal{F}$, ως προς τη σχέση υποσυνόλου. Άρα το thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{A}_1$ δεν ανήκει στη συλλογή $\mathcal{F}$.

Όμως $\mathcal{J} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{A}_1$, δηλαδή το $\mathcal{A}_1$ ικανοποιεί την ιδιότητα (2). Στη συνέχεια θεωρούμε δύο αντικείμενα $Z \in S$ και $Z' \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $Z \otimes Z' \in \mathcal{A}_1$. Θα αποδείξουμε ότι $Z' \in \mathcal{A}_1$. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι $Z' \otimes X \in \mathcal{P}$. Αφού $Z \otimes Z' \in \mathcal{A}_1$ ισχύει ότι $Z \otimes (Z' \otimes X) \in \mathcal{P}$. Όμως το ιδεώδες $\mathcal{P}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (3), δηλαδή $Z' \otimes X \in \mathcal{P}$. Συνεπώς για το $\mathcal{A}_1$ ικανοποιείται και η ιδιότητα (3). Εφόσον το ιδεώδες $\mathcal{A}_1$ δεν ανήκει στη συλλογή $\mathcal{F}$, αλλά ικανοποιούνται οι ιδιότητες (2) και (3), εύλογα συμπεραίνουμε ότι δεν θα ικανοποιείται η ιδιότητα (1). Συνεπώς $\mathcal{A}_1 \cap S \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει αντικείμενο W με την ιδιότητα $W \in S$ και $W \in \mathcal{A}_1$. Τότε $W \otimes X \in \mathcal{P}$ και άρα $X \in \mathcal{P}$. Συνοψίζοντας αποδείξαμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι το thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι πρώτο και ικανοποιεί τις ιδιότητες $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ και $\mathcal{P} \cap S = \varnothing$. ∎

Σχόλιο 5.2.11. Αν στο Λήμμα 5.2.10 το τανυστικά πολλαπλασιαστικό σύνολο S είναι το

$$S = \{\mathbf{1}\}$$

τότε η συνθήκη (3) της απόδειξης ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο και το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι ένα maximal γνήσιο ιδεώδες που περιέχει το ιδεώδες $\mathcal{J}$.

Συνεχίζουμε διατυπώνοντας την ακόλουθη πρόταση την οποία και θα αποδείξουμε κάνοντας χρήση του προηγούμενου λήμματος:

Πρόταση 5.2.12. *Έστω $\mathcal{K}$ μια μη-μηδενική τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Έστω S μια τανυστικά πολλαπλασιαστική συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$ η οποία δεν περιέχει το μηδενικό αντικείμενο. Τότε υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \cap S = \varnothing$.*

2. *Έστω $\mathcal{J}$ ένα γνήσιο thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Τότε υπάρχει ένα maximal γνήσιο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{M}$ της $\mathcal{K}$ που περιέχει το $\mathcal{J}$.*

3. *Κάθε maximal thick τανυστικό ιδεώδες είναι πρώτο.*

4. *Το φάσμα, $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, της κατηγορίας $\mathcal{K}$ είναι μη-κενό.*

Απόδειξη. 1. Έστω $\mathcal{J} = 0 \subset \mathcal{K}$ ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Αφού το μηδενικό αντικείμενο 0 δεν ανήκει στην τανυστικά πολλαπλασιαστική συλλογή S, προκύπτει ότι $\mathcal{J} \cap S = \varnothing$. Τότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.10 προκύπτει ότι υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε:

$$0 \subset \mathcal{P} \text{ και } \mathcal{P} \cap S = \varnothing$$

Άρα αποδείξαμε ότι υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, με την ιδιότητα $\mathcal{P} \cap S = \varnothing$.

2. Έστω $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ ένα γνήσιο thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Θεωρούμε το σύνολο $S = \{\mathbf{1}\}$, το οποίο είναι τανυστικά πολλαπλασιαστικό. Τότε από το σχόλιο (5.2.11) γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα maximal (ως προς τη σχέση υποσυνόλου) thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{M}$ με $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$.

3. Έστω $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ ένα maximal thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$ και $S = \{\mathbf{1}\}$ μια τανυστικά πολλαπλασιαστική συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Τότε από το Λήμμα 5.2.10 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$, τέτοιο ώστε $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$. Όμως έχουμε υποθέσει ότι το $\mathcal{J}$ είναι maximal. Συνεπώς $\mathcal{J} = \mathcal{P}$ και έχουμε αποδείξει ότι το maximal ιδεώδες $\mathcal{J}$ είναι πρώτο.

4. Θεωρούμε ένα τανυστικά πολλαπλασιαστικό σύνολο S το οποίο δεν περιέχει το μηδενικό αντικείμενο, όπως για παράδειγμα το σύνολο $S = \{\mathbf{1}\}$. Από το πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός πρώτου thick τανυστικού ιδεώδους $\mathcal{P}$ τέτοιου ώστε $\mathcal{P} \cap S = \varnothing$. Επομένως
$$\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \neq \varnothing$$

■

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε δύο πορίσματα της Πρότασης 5.2.12. Στη διατύπωση αυτών των πορισμάτων θα εμφανιστεί η έννοια των τανυστικά μηδενοδύναμων αντικειμένων μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας, τα οποία και θα ορίσουμε.

Ορισμός 5.2.13. *Έστω $\mathcal{K}$ μια ταυυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ καλείται* **τανυστικά μηδενοδύναμο (tensor nilpotent)** *αν υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geqslant 1$ τέτοιος ώστε $X^{\otimes n} = 0$.*

Πόρισμα 5.2.14. *Έστω $\mathcal{K}$ μια ταυυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ ανήκει στην τομή όλων των πρώτων ιδεωδών, δηλαδή*

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})} \mathcal{P}$$

αν και μόνον αν το αντικείμενο X είναι ταυυστικά μηδενοδύναμο.

Απόδειξη. Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$ και υποθέτουμε ότι το X είναι τανυστικά μηδενοδύναμο, δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geqslant 1$ τέτοιος ώστε $X^{\otimes n} = 0$. Όμως για κάθε πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$, γνωρίζουμε ότι το μηδενικό αντικείμενο ανήκει στο $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Επομένως ισχύει ότι
$$X^{\otimes n} \in \mathcal{P}, \text{ για κάθε } \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$
Επειδή το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι πρώτο προκύπτει ότι $X \in \mathcal{P}$, για κάθε $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Τελικά

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})} \mathcal{P}$$

Αντίστροφα, θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ για το οποίο ισχύει ότι

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})} \mathcal{P}$$

Υποθέτουμε ότι το αντικείμενο X δεν είναι τανυστικά μηδενοδύναμο, δηλαδή δεν υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geqslant 1$ για τον οποίον $X^{\otimes n} = 0$. Θεωρούμε τη συλλογή αντικειμένων

$$S = \left\{X^{\otimes n} \mid n \geqslant 0\right\}$$

της κατηγορίας $\mathcal{K}$, για την οποία άμεσα βλέπουμε ότι ισχύει $0 \notin S$. Ακόμη εύκολα αποδεικνύεται ότι η συλλογή S είναι τανυστικά πολλαπλασιαστική, αφού αν $X^{\otimes n_1}, X^{\otimes n_2}$ είναι δύο αντικείμενα της S, τότε

$$X^{\otimes n_1} \otimes X^{\otimes n_2} = X^{\otimes (n_1+n_2)} \in S$$

Επομένως από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.2.12 προκύπτει ότι υπάρχει ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \cap S = \varnothing$. Τότε κανένα αντικείμενο της μορφής $X^{\otimes n}, n \geqslant 0$, δεν ανήκει στο πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P}$ και επομένως το αντικείμενο X δεν ανήκει στο $\mathcal{P}$. Με την τελευταία διαπίστωση καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ξεκινήσαμε υποθέτοντας ότι

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})} \mathcal{P}$$

Τελικά το αντικείμενο X είναι τανυστικά μηδενοδύναμο. ■

Παρατήρηση 5.2.15. Στο Πόρισμα 5.2.14 η συνθήκη $X \in \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})}$ μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})} \Longleftrightarrow \mathsf{U}(X) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \Longleftrightarrow \mathsf{supp}(X) = \varnothing$$

και την χρησιμοποιούμε ανάλογα με την περίπτωση στην οποία εργαζόμαστε.

Πόρισμα 5.2.16. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Ένα αντικείμενο X δεν ανήκει σε κανένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες αν και μόνον αν το X γεννά την κατηγορία $\mathcal{K}$ ως thick τανυστικό ιδεώδες, δηλαδή*

$$\langle X \rangle = \mathcal{K}$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\langle X \rangle := \{X^{\otimes n} \mid n \geqslant 0\} = \mathcal{K}$ και έστω ότι το αντικείμενο X ανήκει σε κάποιο πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Τότε $X^{\otimes n} \in \mathcal{P}$, $\forall n \geqslant 0$ και άρα $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως το αντικείμενο X δεν ανήκει σε κανένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το αντικείμενο X δεν ανήκει σε κανένα thick τανυστικό ιδεώδες και έστω ότι $\langle X \rangle \subsetneq \mathcal{K}$. Τότε από την Πρόταση 5.2.12 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα maximal, γνήσιο, thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K}$ τέτοιο ώστε $\langle X \rangle \subset \mathcal{M}$. Όμως κάθε maximal thick τανυστικό ιδεώδες είναι πρώτο. Άρα το ιδεώδες $\mathcal{M}$ είναι πρώτο και ισχύει ότι $X \in \mathcal{M}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το αντικείμενο X υποθέσαμε ότι δεν ανήκει σε κανένα πρώτο ιδεώδες. Συνεπώς ισχύει ότι

$$\langle X \rangle = \mathcal{K}$$

■

Παρατήρηση 5.2.17. Στο Πόρισμα 5.2.16 η συνθήκη «ένα αντικείμενο X δεν ανήκει σε κανένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες» είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\mathsf{U}(X) = \varnothing \Longleftrightarrow \mathsf{supp}(X) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μια αντιστοιχία, η οποία σε κάθε αντικείμενο X μιας τανυστικής κατηγορίας $\mathcal{K}$ αντιστοιχίζει ένα υποσύνολο $\mathsf{U}(X)$ του φάσματος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της $\mathcal{K}$. Στο λήμμα που ακολουθεί θα αποδείξουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες αυτής της αντιστοιχίας.

Λήμμα 5.2.18. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Η αντιστοιχία*

$$\mathcal{K} \ni X \longmapsto \mathsf{U}(X) := \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid X \in \mathcal{P}\} \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\mathsf{U}(0) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ *και* $\mathsf{U}(\mathbf{1}) = \varnothing$.

2. $\mathsf{U}(X \oplus Y) = \mathsf{U}(X) \cap \mathsf{U}(Y)$.

3. $\mathsf{U}(\Sigma(X)) = \mathsf{U}(X)$.

4. *Για κάθε τρίγωνο*
$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$
στην $\mathcal{K}$, *ισχύει* $\mathsf{U}(X) \supset \mathsf{U}(Y) \cap \mathsf{U}(Z)$.

5. $\mathsf{U}(X \otimes Y) = \mathsf{U}(X) \cup \mathsf{U}(Y)$.

Απόδειξη. 1. Από τον τρόπο ορισμού του συνόλου $\mathsf{U}(S)$, όπου S είναι μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$, προκύπτει ότι
$$\mathsf{U}(0) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \{0\} \in \mathcal{P} \neq \varnothing\} = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$
Ακόμη άμεσα ισχύει
$$\mathsf{U}(\mathbf{1}) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathbf{1} \in \mathcal{P}\} = \varnothing$$

2. Έστω X, Y δύο αντικείμενα της $\mathcal{K}$. Θεωρούμε ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X \oplus Y)$. Εξ' ορισμού ισχύει ότι $X \oplus Y \in \mathcal{P}$ και επειδή το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι thick προκύπτει ότι
$$X \in \mathcal{P} \ \text{ και } \ Y \in \mathcal{P}$$
Επομένως συμπεραίνουμε ότι:
$$\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X) \ \text{ και } \ \mathcal{P} \in \mathsf{U}(Y)$$
Άρα $\mathsf{U}(X \oplus Y) \subset \mathsf{U}(X) \cap \mathsf{U}(Y)$. Για να αποδείξουμε την αντίστροφη έγκλειση θεωρούμε ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X) \cap \mathsf{U}(Y)$, δηλαδή $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X)$ και $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(Y)$. Τότε ισχύει ότι $X \in \mathcal{P}$ και $Y \in \mathcal{P}$. Θεωρούμε το τρίγωνο
$$X \longrightarrow Y \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow \Sigma(X)$$
στην κατηγορία $\mathcal{K}$, όπου τα αντικείμενα X, Y ανήκουν στην υποκατηγορία $\mathcal{P}$. Επειδή το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$ ισχύει ότι και η τρίτη κορυφή του τριγώνου ανήκει στην $\mathcal{P}$, δηλαδή $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X \oplus Y)$ και έτσι $\mathsf{U}(X) \cap \mathsf{U}(Y) \subset \mathsf{U}(X \oplus Y)$. Τελικά ισχύει
$$\mathsf{U}(X \oplus Y) = \mathsf{U}(X) \cap \mathsf{U}(Y)$$

3. Έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$ και $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(\Sigma(X))$. Τότε ισχύει $\Sigma(X) \in \mathcal{P}$ και επειδή ο συναρτητής $\Sigma\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών, προκύπτει ότι το αντικείμενο X ανήκει στο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$, δηλαδή $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X)$. Επομένως αποδείξαμε ότι
$$\mathsf{U}(\Sigma(X)) \subset \mathsf{U}(X)$$
Με ανάλογα επιχειρήματα, θεωρούμε ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X)$ και αποδεικνύουμε ότι το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ ανήκει στο σύνολο $\mathsf{U}(\Sigma(X))$, δηλαδή
$$\mathsf{U}(X) \subset \mathsf{U}(\Sigma(X))$$
Τελικά
$$\mathsf{U}(\Sigma(X)) = \mathsf{U}(X)$$

4. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$

στην κατηγορία $\mathcal{K}$ και έστω $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(Y) \cap \mathsf{U}(Z)$. Τότε τα αντικείμενα Y, Z ανήκουν στην υποκατηγορία $\mathcal{P}$. Επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ είναι τριγωνισμένη προκύπτει ότι και το αντικείμενο X ανήκει στην $\mathcal{P}$. Επομένως προκύπτει ότι $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X)$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathsf{U}(X) \supset \mathsf{U}(Y) \cap \mathsf{U}(Z)$$

5. Έστω X, Y δύο αντικείμενα της $\mathcal{K}$ και $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα thick τανυστικό ιδεώδες τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X \otimes Y)$. Τότε $X \otimes Y \in \mathcal{P}$ και επειδή το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι πρώτο προκύπτει ότι:

$$X \in \mathcal{P} \;\text{ ή }\; Y \in \mathcal{P}$$

Με άλλα λόγια

$$\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X) \;\text{ ή }\; \mathcal{P} \in \mathsf{U}(Y)$$

Συνεπώς

$$\mathsf{U}(X \otimes Y) \subset \mathsf{U}(X) \cup \mathsf{U}(Y)$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X) \cup \mathsf{U}(Y)$, δηλαδή

$$X \in \mathcal{P} \;\text{ ή }\; Y \in \mathcal{P}$$

Έστω ότι το αντικείμενο X ανήκει στο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ και το αντικείμενο Y είναι αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{K}$. Επειδή το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι τανυστικό ιδεώδες προκύπτει ότι $X \otimes Y \in \mathcal{P}$. Ομοίως και αν εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το αντικείμενο Y ανήκει στο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$. Σε κάθε περίπτωση το τανυστικό γινόμενο $X \otimes Y$ ανήκει στο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ και άρα $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X \otimes Y)$. Τελικά αποδείξαμε ότι

$$\mathsf{U}(X \otimes Y) = \mathsf{U}(X) \cup \mathsf{U}(Y)$$

■

Στην Πρόταση 5.2.6 έχουμε αποδείξει ότι η συλλογή υποσυνόλων του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ που αποτελείται από σύνολα της μορφής $\mathsf{Z}(S)$, όπου S συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$, αποτελεί συλλογή από κλειστά για την τοπολογία του φάσματος. Στην ακόλουθη παρατήρηση θα ορίσουμε μια συλλογή από ανοικτά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

Παρατήρηση 5.2.19. 1. Για μια συλλογή αντικειμένων S μιας τανυστικής κατηγορίας $\mathcal{K}$ ισχύει ότι:

$$\mathsf{U}(S) = \bigcup_{X \in S} \mathsf{U}(X) \tag{5.8}$$

Θεωρούμε τη συλλογή

$$\mathcal{B} = \{\mathsf{U}(X) \mid X \in \mathcal{K}\} \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

Εκμεταλλευόμενοι τα σκέλη (1.) και (2.) του Λήμματος 5.2.18 αλλά και τη σχέση 5.8 συμπεραίνουμε ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί μια βάση από ανοικτά για την τοπολογία του φάσματος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της $\mathcal{K}$.

2. Άμεσα προκύπτει ότι η συλλογή

$$\mathcal{B}' := \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash \mathcal{B} = \{\mathsf{supp}(X) \mid X \in \mathcal{K}\} \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

που αποτελείται από τα συμπληρώματα της συλλογής $\mathcal{B}$, ορίζει μια βάση από κλειστά υποσύνολα για την τοπολογία του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

Μέχρι στιγμής έχουμε εφοδιάσει το φάσμα μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ με δομή τοπολογικού χώρου και έχουμε περιγράψει βάσεις από ανοικτά και κλειστά υποσύνολα. Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας κάποιες βασικές ιδιότητες που έχει το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, ως τοπολογικός χώρος.

Πρόταση 5.2.20. *Έστω $\mathcal{K}$ μια ταυυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Θεωρούμε $W \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα υποσύνολο του φάσματος της $\mathcal{K}$. Τότε η θήκη του συνόλου W είναι η εξής:*

$$\overline{W} = \bigcap_{X \in \mathcal{K}} \mathsf{supp}(X), \ \textit{τέτοια ώστε} \ W \subset \mathsf{supp}(X)$$

Απόδειξη. Από τη Γενική Τοπολογία γνωρίζουμε ότι η θηκή ενός υποσυνόλου Y ενός τοπολογικού χώρου X ισούται με την τομή των κλειστών υποσυνόλων του X που περιέχουν το Y. Από το δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 5.2.19 γνωρίζουμε ότι η συλλογή

$$\{\mathsf{supp}(X) \mid X \in \mathcal{K}\} \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

αποτελεί μια βάση απο κλειστά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Επομένως για ένα υποσύνολο $W \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Πρόταση 5.2.21. *Έστω $\mathcal{K}$ μια ταυυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο ταυυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Τότε ισχύει ότι*

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}\}$$

καθώς επίσης ισχύει και η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\overline{\{\mathcal{P}_1\}} = \overline{\{\mathcal{P}_2\}} \Longrightarrow \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες και ορίζουμε $S_0 := \mathcal{K} \backslash \mathcal{P}$. Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του φάσματος της $\mathcal{K}$:

$$\mathsf{Z}(S_0) = \{\mathcal{R} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S_0 \cap \mathcal{R} = \varnothing\}$$

Το σύνολο $\mathsf{Z}(S_0)$ είναι μη-κενό αφού $S_0 \cap \mathcal{P} = (\mathcal{K} \backslash \mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = \varnothing$ και άρα προκύπτει ότι $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S_0)$. Αν S είναι μια κλάση αντικειμένων της $\mathcal{K}$ τέτοια ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S)$, τότε ισχύει ότι $S \subset S_0$. Πράγματι, έστω X ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$ με $X \in S$. Επειδή $\mathcal{P} \in \mathsf{Z}(S)$, προκύπτει ότι $X \notin \mathcal{P}$, δηλαδή $X \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{P} = S_0$. Θεωρούμε, τώρα, ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{R} \in \mathsf{Z}(S)$. Εξ' ορισμού $S_0 \cap \mathcal{R} = \varnothing$ και επειδή $S \subset S_0$, προκύπτει ότι $S \cap \mathcal{P} = \varnothing$. Άρα $\mathcal{R} \in \mathsf{Z}(S_0)$ και καταλήγουμε στο ότι $\mathsf{Z}(S_0) \subset \mathsf{Z}(S)$. Συνεπώς το σύνολο $\mathsf{Z}(S_0) \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι το μικρότερο, κλειστό υποσύνολο του φάσματος της $\mathcal{K}$ που περιέχει το πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$. Συνεπώς

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}\}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε δύο πρώτα τανυστικά ιδεώδη $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοια ώστε $\overline{\{\mathcal{P}_1\}} = \overline{\{\mathcal{P}_2\}}$. Με άλλα λόγια

$$\{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}_1\} = \{\mathcal{Q}' \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}_2\}$$

Όμως το μεγαλύτερο στοιχείο του συνόλου $\overline{\{\mathcal{P}_1\}}$ είναι το πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}_1$, ένω το μεγαλύτερο στοιχείο του συνόλου $\overline{\{\mathcal{P}_2\}}$ είναι το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}_2$. Συνεπώς $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ και άρα αποδείξαμε τη συνεπαγωγή

$$\overline{\{\mathcal{P}_1\}} = \overline{\{\mathcal{P}_2\}} \Longrightarrow \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$$

∎

Το παρακάτω αποτέλεσμα προκύπτει ως πόρισμα της Πρότασης 5.2.20:

Πόρισμα 5.2.22. *Έστω $\mathcal{K}$ μια μη-μηδενική τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, υπάρχει ένα minimal πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}'$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε μη-κενή αλυσίδα $\mathcal{C}$ από πρώτα thick τανυστικά ιδεώδη, το τανυστικό ιδεώδες

$$\mathcal{Q}' = \bigcap_{\mathcal{Q} \in \mathcal{C}} \mathcal{Q}$$

είναι, επίσης, πρώτο. Θεωρούμε δυο αντικείμενα $X_1, X_2 \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $X_1 \notin \mathcal{Q}'$ και $X_2 \notin \mathcal{Q}'$. Τότε υπάρχει πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{Q}_i \in \mathcal{C}$ με την ιδιότητα $X_i \notin \mathcal{Q}_i$, $i = 1, 2$. Συμβολίζουμε $\mathcal{Q}_0$ το μικρότερο εκ των $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ ως προς τη σχέση υποσυνόλου. Δηλαδή $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1$, αν $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_2$, διαφορετικά $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_2$. Τότε

$$X_1, X_2 \notin \mathcal{Q}_0 \Longrightarrow X_1 \otimes X_2 \notin \mathcal{Q}_0 \Longrightarrow X_1 \otimes X_2 \notin \mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}_0$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι

$$X_1, X_2 \notin \mathcal{Q}' \Longrightarrow X_1 \otimes X_2 \notin \mathcal{Q}'$$

Άρα το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{Q}'$ είναι πρώτο και η μη-κενή αλυσίδα $\mathcal{C}$ έχει κάτω φράγμα το $\mathcal{Q}'$. Εφοδιάζουμε το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της $\mathcal{K}$ με τη σχέση διάταξη «$\subset^\star$», η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{P}_1 \subset^\star \mathcal{P}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2$$

Τότε το πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{Q}'$ γίνεται άνω φράγμα για την αλυσίδα $\mathcal{C}$. Από το Λήμμα του Zorn γνωρίζουμε ότι υπάρχει maximal στοιχείο $\mathcal{P}'$, δηλαδή $\mathcal{P} \subset^\star \mathcal{P}'$, για κάθε $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Από τον ορισμό της σχέσης «$\subset^\star$» τελικά προκύπτει ότι $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, για κάθε $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Άρα το πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}'$ αποτελεί minimal πρώτο ιδεώδες. ∎

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο πόρισμα αποδεικνύουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πόρισμα 5.2.23. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε υπάρχει ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε:*

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{P}\}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες του φάσματος και ας είναι Z ένα μη-κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in Z$. Από το Πόρισμα 5.2.22 γνωρίζουμε ότι υπάρχει minimal πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}'$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$. Από την Πρόταση 5.2.21 γνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{P}' \in \overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}\} \subset Z$$

Επομένως το πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P}'$ ανήκει στο κλειστό υποσύνολο Z. Ακόμη

$$\overline{\{\mathcal{P}'\}} = \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}'\}$$

Επειδή το $\mathcal{P}'$ είναι minimal προκύπτει ότι:

$$\overline{\{\mathcal{P}'\}} = \overline{\{\mathcal{P}\}}$$

∎

Σχόλιο 5.2.24. Ένα στοιχείο $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ για το οποίο ισχύει $\overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{P}\}$, θα το καλούμε **κλειστό σημείο (closed point)**, του φάσματος της $\mathcal{K}$.

Λήμμα 5.2.25. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία, $X \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενό της και S μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Τότε ισχύει ότι $\mathsf{U}(X) \subset \mathsf{U}(S)$ αν και μόνο αν υπάρχουν αντικείμενα $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \in S$, τέτοια ώστε $Y_1 \otimes Y_2 \otimes \cdots \otimes Y_n \in \langle X \rangle$.*

Απόδειξη. Έστω S μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$ και S' μια τανυστικά πολλαπλασιαστική συλλογή που αποτελείται από πεπερασμένα γινόμενα στοιχείων της συλλογής $S \cup \{\mathbf{1}\}$. Θεωρούμε ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(S)$. Τότε

$$\mathcal{P} \in \bigcup_{X \in S} \mathsf{U}(X) \Longrightarrow \mathcal{P} \in \mathsf{U}(X),\ \text{για κάποιο αντικείμενο } X \in S$$

Επομένως $X \in \mathcal{P}$ και συμπεραίνουμε ότι $X \otimes \mathbf{1} \in \mathcal{P}$. Άρα

$$\mathcal{P} \in \bigcup_{X' \in S'} \mathsf{U}(X')$$

και προκύπτει ότι:

$$\mathsf{U}(S) \subset \mathsf{U}(S') \tag{5.9}$$

Έστω τώρα ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(S')$, δηλαδή

$$\mathcal{P} \in \bigcup_{X' \in S'} \mathsf{U}(X') \Longrightarrow \mathcal{P} \in \mathsf{U}(X'),\ \text{για κάποιο αντικείμενο } X' \in S'$$

Άρα $X' \in \mathcal{P}$ και αφού $X' \in S'$, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντικείμενα $Z_1, \cdots, Z_m \in S \cup \{\mathbf{1}\}$ τέτοια ώστε $X' = Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_m$. Επειδή το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι πρώτο, προκύπτει ότι $Z_i \in \mathcal{P}, i = 1, \cdots, m$, δηλαδή $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(Z_i), Z_i \in S \cup \{\mathbf{1}\}$. Τελικά

$$\mathcal{P} \in \bigcup_{X \in S} \mathsf{U}(X) = \mathsf{U}(S)$$

και καταλήγουμε ότι:

$$\mathsf{U}(S') \subset \mathsf{U}(S) \tag{5.10}$$

Από τις σχέσεις (5.9) και (5.10) προκύπτει ότι

$$\mathsf{U}(S) = \mathsf{U}(S')$$

Επομένως για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\mathsf{U}(X) \subset \mathsf{U}(S') \Longleftrightarrow S' \cap \langle X \rangle \neq \varnothing$$

($\Longrightarrow$) Έστω ότι $\mathsf{U}(X) \subset \mathsf{U}(S')$ και υποθέτουμε ότι $S' \cap \langle X \rangle = \varnothing$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.2.10 και προκύπτει ότι, υπάρχει πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε $\langle X \rangle \subset \mathcal{P}$ και $\mathcal{P} \cap S' = \varnothing$. Συνεπώς υπάρχει $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X) \backslash \mathsf{U}(S')$. Άρα καταλήγουμε σε άτοπο, διότι $\mathsf{U}(X) \subset \mathsf{U}(S')$. Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $S' \cap \langle X \rangle = \varnothing$, επομένως ισχύει ότι $S' \cap \langle X \rangle \neq \varnothing$.

($\Longleftarrow$) Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $S' \cap \langle X \rangle \neq \varnothing$. Δηλαδή υπάρχει αντικείμενο $Y \in \mathcal{K}$ τέτοιο ώστε $Y \in S'$ και $Y \in \langle X \rangle$. Τότε

$$Y = X^{\otimes n},\ n \geqslant 1$$

Έστω $\mathcal{P}$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X)$. Τότε

$$X \in \mathcal{P} \Longrightarrow X^{\otimes n} \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P} \in \mathsf{U}(X \otimes \cdots \otimes X) \Longrightarrow \mathcal{P} \in \mathsf{U}(Y),\ Y \in S'$$

Επομένως

$$\mathcal{P} \in \bigcup_{Z \in S} \mathsf{U}(Z) = \mathsf{U}(S')$$

και προκύπτει ότι $\mathsf{U}(X) \subset \mathsf{U}(S')$. ∎

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε την έννοια του ημισυμπαγούς τοπολογικού χώρου. Ένας τοπολογικός χώρος είναι **ημισυμπαγής (quasi-compact)** αν είναι συμπαγής, χωρίς την απαίτηση να είναι Hausdorff. Η ακόλουθη πρόταση πιστοποιεί το γεγονός ότι τα ανοικτά υποσύνολα $\mathsf{U}(X)$ του φάσματος είναι ημισυμπαγή.

Πρόταση 5.2.26. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ το ανοικτό σύνολο $\mathsf{U}(X) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash \mathsf{supp}(X)$ είναι ημισυμπαγές.*

2. *Κάθε ημισυμπαγές ανοικτό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι της μορφής $\mathsf{U}(X)$ για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$.*

Απόδειξη. 1. Έστω X ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{K}$ και θεωρούμε την ανοικτή κάλυψη $\{\mathsf{U}(S_i) \mid i \in I\}$ του συνόλου $\mathsf{U}(X)$. Έστω

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i$$

μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$ τέτοια ώστε:

$$\mathsf{U}(X) \subset \bigcup_{i \in I} \mathsf{U}(S_i) = \mathsf{U}(S)$$

Από το Λήμμα 5.2.25 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντικείμενα $Y_1, \cdots, Y_n \in S$, τέτοια ώστε $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n \in \langle X \rangle$, δηλαδή $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n = X^{\otimes m}, m \geqslant 1$. Ωστόσο τα αντικείμενα $Y_1, \cdots, Y_n$, τα οποία είναι πεπερασμένα σε πλήθος, ανήκουν στην ένωση $\bigcup_{i \in I_0} S_i$ για κάποιο πεπερασμένο σύνολο δεικτών I_0.
Έστω $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{U}(X)$. Τότε $X \in \mathcal{P}$ και επειδή το ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι τανυστικό, προκύπτει ότι $X^{\otimes m} \in \mathcal{P}$. Επομένως

$$Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n \in \mathcal{P} \Longrightarrow Y_i \in \mathcal{P}, \text{ για κάποιο } i \in I_0$$

Άρα προκύπτει ότι

$$\mathcal{P} \in \bigcup_{Y_i \in S_i} \mathsf{U}(Y_i) = \mathsf{U}(S_i) \Longrightarrow \mathcal{P} \in \bigcup_{i \in I_0} \mathsf{U}(S_i)$$

Τελικά

$$\mathsf{U}(X) \subset \bigcup_{i \in I_0} \mathsf{U}(S_i)$$

Άρα υπάρχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη $\{\mathsf{U}(S_i) \mid i \in I_0 \subset I\}$ του ανοικτού συνόλου $\mathsf{U}(X)$. Τελικά το ανοικτό σύνολο $\mathsf{U}(X)$ είναι ημισυμπαγές.

2. Έστω $U = \mathsf{U}(S)$ ένα ημισυμπαγές, ανοικτό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, για κάποια συλλογή αντικειμένων $S \subset \mathcal{K}$. Τότε

$$U = \bigcup_{X \in S} \mathsf{U}(X)$$

και επειδή το υποσύνολο U είναι ημισυμπαγές, προκύπτει ότι υπάρχουν $X_1, \cdots, X_n \in S$ τέτοια ώστε $U = \mathsf{U}(X_1) \cup \cdots \cup \mathsf{U}(X_n)$. Όμως από το Λήμμα 5.2.18 γνωρίζουμε ότι $\mathsf{U}(X_1) \cup \cdots \cup \mathsf{U}(X_n) = \mathsf{U}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$, $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \in \mathcal{K}$. Τελικά

$$U = \mathsf{U}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$$

■

Πόρισμα 5.2.27. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και υποθέτουμε ότι $\mathsf{U}(S) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, για κάποια συλλογή αντικειμένων $S \subset \mathcal{K}$. Τότε υπάρχουν αντικείμενα $Y_1, \cdots, Y_n \in S$ τέτοια ώστε $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n = 0$. Συγκεκριμένα το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της κατηγορίας $\mathcal{K}$ είναι ημισυμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Για το μηδενικό αντικείμενο 0 της $\mathcal{K}$ ισχύει $\mathsf{U}(0) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Από το Λήμμα 5.2.25 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντικείμενα $Y_1, \cdots, Y_n$ τέτοια ώστε $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n \in \langle 0 \rangle$. Επομένως

$$Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n = 0$$

Εφαρμόζουμε, τώρα, την Πρόταση 5.2.26 για το μηδενικό αντικείμενο $0 \in \mathcal{K}$ και προκύπτει ότι το σύνολο

$$\mathsf{U}(X) = \mathsf{U}(0) = \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

είναι ημισυμπαγές. ■

Ορισμός 5.2.28. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος της* **Noether** *αν κάθε αύξουσα αλυσίδα από ανοικτά υποσύνολα του X τερματίζει.*

Παρατήρηση 5.2.29. Ισοδύναμα ένας τοπολογικός χώρος X καλείται τοπολογικός χώρος της Noether αν κάθε μη-κενή οικογένεια από κλειστά υποσύνολα έχει minimal στοιχείο. Η συνθήκη «κάθε μη-κενή οικογένεια από κλειστά υποσύνολα έχει minimal στοιχείο» του Ορισμού 5.2.28 είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη «όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X είναι ημισυμπαγή».

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε, ως πόρισμα της Πρότασης 5.2.26, μια συνθήκη που πιστοποιεί το φάσμα μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ είναι τοπολογικός χώρος της Noether.

Πόρισμα 5.2.30. *Έστω $\mathcal{K}$ μια ταυυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Ο τοπολογικός χώρος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι χώρος της Noether αν και μόνον αν κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι φορέας ενός αντικειμένου της $\mathcal{K}$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος της Noether. Τότε κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι ημισυμπαγές. Από την Πρόταση 5.2.26 γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, είναι της μορφής $\mathsf{U}(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Συνεπώς κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι της μορφής $\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash \mathsf{U}(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Όμως $\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash \mathsf{U}(X) = \mathsf{supp}(X)$ και άρα κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι της μορφής $\mathsf{supp}(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι φορέας ενός αντικειμένου της $\mathcal{K}$. Είναι, δηλαδή, της μορφής $\mathsf{supp}(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Τότε κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι της μορφής $\mathsf{U}(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Όμως, από την Πρόταση 5.2.26, γνωρίζουμε ότι τα ανοικτά σύνολα της μορφής $\mathsf{U}(X)$ είναι ημισυμπαγή. Συνεπώς ο τοπολογικός χώρος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι χώρος της Noether. ■

Υπενθυμίζουμε από τη Γενική Τοπολογία την έννοια του *ανάγωγου (irreducible)* υποσυνόλου, ενός τοπολογικού χώρου:

Ορισμός 5.2.31. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο Z του X καλείται* **ανάγωγο (irreducible)** *αν για κάθε δύο ανοικτά υποσύνολα U_1, U_2 του X τέτοια ώστε $Z \cap U_1 \cap U_2 = \varnothing$, τότε $Z \cap U_1 = \varnothing$ ή $Z \cap U_2 = \varnothing$.*

Στη συνέχεια επανερχόμαστε στον τοπολογικό χώρο $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ και αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.2.32. *Έστω $\mathcal{K}$ μια ταυυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Κάθε μη-κενό, κλειστό, ανάγωγο υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ έχει μοναδικό γενικό σημείο (generic point). Συγκεκριμένα αν $Z \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα μή-κενό, κλειστό, υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το υποσύνολο Z είναι ανάγωγο.*
2. *Για όλα τα αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$, αν $\mathsf{U}(X \oplus Y) \cap Z = \varnothing$, τότε $\mathsf{U}(X) \cap Z = \varnothing$ ή $\mathsf{U}(Y) \cap Z = \varnothing$.*
3. *Το ταυυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{K} \mid \mathsf{U}(X) \cap Z \neq \varnothing\}$ είναι πρώτο.*

Επιπλέον, όταν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες, ισχύει ότι $Z = \overline{\{\mathcal{P}\}}$.

Απόδειξη. Έστω $Z \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα μη-κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

(1.$\Longrightarrow$2.) Υποθέτουμε ότι το υποσύνολο Z είναι ανάγωγο. Επομένως για U_1, U_2 ανοικτά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοια ώστε $Z \cap U_1 \cap U_2 = \varnothing$, ισχύει ότι $Z \cap U_1 = \varnothing$ ή $Z \cap U_2 = \varnothing$. Έστω X, Y δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{K}$, τέτοια ώστε $\mathsf{U}(X \oplus Y) \cap Z = \varnothing$. Επειδή $\mathsf{U}(X \oplus Y) = \mathsf{U}(X) \cap \mathsf{U}(Y)$, προκύπτει ότι

$$\mathsf{U}(X) \cap \mathsf{U}(Y) \cap Z = \varnothing$$

Όμως το σύνολο Z είναι ανάγωγο και τα $\mathsf{U}(X), \mathsf{U}(Y)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Άρα προκύπτει ότι

$$\mathsf{U}(X) \cap Z = \varnothing \text{ ή } \mathsf{U}(Y) \cap Z = \varnothing$$

(2.$\Longrightarrow$3.) Υποθέτουμε ότι για δυο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$, αν $\mathsf{U}(X \oplus Y) \cap Z$, τότε $\mathsf{U}(X) \cap Z = \varnothing$ ή $\mathsf{U}(U) \cap Z = \varnothing$. Θεωρούμε την υποκατηγορία

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{K} \mid \mathsf{U}(X) \cap Z \neq \varnothing\}$$

Θα αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ είναι ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Έστω X, Y δύο αντικείμενα, τέτοια ώστε $X, Y \in \mathcal{P}$, δηλαδή $\mathsf{U}(X) \cap Z \neq \varnothing$ και $\mathsf{U}(Y) \cap Z \neq \varnothing$. Επομένως $\mathsf{U}(X \oplus Y) \cap Z \neq \varnothing$ και καταλήγουμε ότι $X \oplus Y \in \mathcal{P}$. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Y' \longrightarrow \Sigma(X)$$

στην κατηγορία $\mathcal{K}$. Τότε $Y' \in \langle X \oplus Y \rangle$, δηλαδή $Y' = (X \oplus Y)^{\otimes m}, m \geqslant 1$. Έστω $\mathcal{P}_0 \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες, τέτοιο ώστε $\mathcal{P}_0 \in \mathsf{U}(X \oplus Y)$. Τότε

$$X \oplus Y \in \mathcal{P}_0 \Longrightarrow (X \oplus Y)^{\otimes m} \in \mathcal{P}_0 \Longrightarrow Y' \in \mathcal{P}_0 \Longrightarrow \mathcal{P}_0 \in \mathsf{U}(Y')$$

Συνεπώς καταλήγουμε στη σχέση έγκλεισης

$$\mathsf{U}(X \oplus Y) \subset \mathsf{U}(Y') \qquad (\star)$$

Όμως ισχύει ότι $\mathsf{U}(X \oplus Y) \cap Z \neq \varnothing$ και λόγω της σχέσης $(\star)$ προκύπτει ότι $\mathsf{U}(Y' \cap Z) \neq \varnothing$. Άρα $Y' \in \mathcal{P}$ και τελικά η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε $X \simeq X_1 \oplus X_2$ για κάποια αντικείμενα $X_1, X_2 \in \mathcal{K}$. Αφού το αντικείμενο X ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{P}$, προκύπτει ότι

$$\mathsf{U}(X) \cap Z \neq \varnothing \Longrightarrow \mathsf{U}(X_1 \oplus X_2) \cap Z \neq \varnothing \Longrightarrow \mathsf{U}(X_1) \cap \mathsf{U}(X_2) \cap Z \neq \varnothing$$

Συνεπώς υπάρχει ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}' \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε $\mathcal{P}' \in \mathsf{U}(X_1) \cap \mathsf{U}(X_2) \cap Z$. Τότε $\mathcal{P}' \in \mathsf{U}(X_1) \cap Z$ και $\mathcal{P}' \in \mathsf{U}(X_2) \cap Z$. Επομένως προκύπτει ότι $\mathsf{U}(X_1) \cap Z \neq \varnothing$ και $\mathsf{U}(X_2) \cap Z \neq \varnothing$. Εξ' ορισμού της υποκατηγορίας $\mathcal{P}$ έχουμε ότι $X_1, X_2 \in \mathcal{P}$ και άρα η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ είναι thick υποκατηγορία.

Έστω $X \in \mathcal{P}$ και $Y \in \mathcal{K}$ δυο αντικείμενα της $\mathcal{K}$. Τότε

$$X \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mathsf{U}(X) \cap Z \neq \varnothing$$

Επομένως υπάρχει ένα πρώτο thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}''$ τέτοιο ώστε $\mathcal{P}'' \in \mathsf{U}(X)$ και $\mathcal{P}'' \in Z$. Τότε

$$\mathcal{P}'' \in \mathsf{U}(X) \cup \mathsf{U}(Y) = \mathsf{U}(X \otimes Y) \Longrightarrow \mathcal{P}'' \in \mathsf{U}(X \otimes Y) \cap Z \Longrightarrow \mathsf{U}(X \otimes Y) \cap Z \neq \varnothing$$

Συνεπώς $X \otimes Y \in \mathcal{P}$, δηλαδή η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ της $\mathcal{K}$ είναι τανυστική. Επιπλέον, το μηδενικό αντικείμενο της $\mathcal{K}$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{P}$, αφού $\mathsf{U}(0) \cap Z = \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \cap Z \neq$

$\varnothing$. Επομένως η υποκατηγορία $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathcal{K}$. Τέλος θεωρούμε δυο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $X \otimes Y \in \mathcal{P}$. Τότε υπάρχει $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{Q} \in \mathsf{U}(X \otimes Y) \cap Z$. Από το Λήμμα 5.2.18 γνωρίζουμε ότι $\mathsf{U}(X \otimes Y) = \mathsf{U}(X) \cup \mathsf{U}(Y)$. Επομένως

$$\mathcal{Q} \in \mathsf{U}(X) \cap Z \;\text{ ή }\; \mathcal{Q} \in \mathsf{U}(Y) \cap Z$$

Άρα

$$\mathsf{U}(X) \cap Z \neq \varnothing \;\text{ ή }\; \mathsf{U}(Y) \cap Z \neq \varnothing$$

Τελικά $X \in \mathcal{P}$ ή $Y \in \mathcal{P}$ και προκύπτει ότι το thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι πρώτο.

($3. \Longrightarrow 1.$) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $Z = \overline{\{\mathcal{P}\}}$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{Q} \in Z$. Έστω $X \in \mathcal{Q}$ ένα αντικείμενο της $\mathcal{Q}$. Τότε $\mathcal{Q} \in \mathsf{U}(X) \cap Z \neq \varnothing$. Άρα το αντικείμενο X ανήκει στο πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ και συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Από την Πρόταση 5.2.21 προκύπτει ότι $\mathcal{Q} \in \overline{\{\mathcal{P}\}}$ και καταλήγουμε στην έγκλειση

$$Z \subset \overline{\{\mathcal{P}\}} \tag{5.11}$$

Αντίστροφα αρκεί να αποδειχθεί ότι $\mathcal{P} \in \overline{Z} = Z$, καθώς το σύνολο Z είναι κλειστό. Έστω $Y \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενο τέτοιο ώστε $Z \subset \mathsf{supp}(Y)$. Άμεσα προκύπτει ότι $\mathsf{U}(Y) \cap Z = \varnothing$ και συμπεραίνουμε ότι $Y \notin \mathcal{P}$. Ισοδύναμα ισχύει ότι

$$\mathcal{P} \in \mathsf{supp}(Y) \Longrightarrow \mathcal{P} \in \bigcap_{Y \in \mathcal{K}} \mathsf{supp}(Y), \text{ τέτοια ώστε } Z \subset \mathsf{supp}(Y)$$

δηλαδή $\mathcal{P} \in \overline{\{Z\}} = Z$. Αφού το πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ ανήκει στο σύνολο Z, προκύπτει ότι όλα τα πρώτα τανυστικά ιδεώδη που περιέχονται στο $\mathcal{P}$, δηλαδή η θήκη $\overline{\{\mathcal{P}\}}$, ανήκουν στο Z. Επομένως

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} \subset Z \tag{5.12}$$

Από τις σχέσεις (5.11), (5.12) προκύπτει ότι

$$Z = \overline{\{\mathcal{P}\}}$$

Τέλος θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $Z \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι ανάγωγο. Αποδείξαμε ότι

$$Z = \overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}\}$$

Έστω U_1, U_2 ανοικτά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοια ώστε

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} \cap U_1 \neq \varnothing \text{ και } \overline{\{\mathcal{P}\}} \cap U_2 \neq \varnothing$$

Τότε υπάρχουν πρώτα τανυστικά ιδεώδη $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{Q}_1 \in \overline{\{\mathcal{P}\}} \cap U_1 \text{ και } \mathcal{Q}_2 \in \overline{\{\mathcal{P}\}} \cap U_2$$

Συνεπώς $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{Q}_1 \in U_1$ και $\mathcal{Q}_2 \in U_2$. Όμως $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}_1 \in U_1$ και $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}_2 \in U_2$. Άρα

$$\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \in \overline{\{\mathcal{P}\}} \cap U_1 \cap U_2 \Longrightarrow \overline{\{\mathcal{P}\}} \cap U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$$

Από τον ορισμό του ανάγωγου συνόλου προκύπτει ότι το σύνολο $Z = \overline{\{\mathcal{P}\}}$ είναι ανάγωγο. ∎

Πόρισμα 5.2.33. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της $\mathcal{K}$ είναι ανάγωγο σύνολο αν και μόνο αν για κάθε δυο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $\langle X \oplus Y \rangle = \mathcal{K}$, ισχύει $\langle X \rangle = \mathcal{K}$ ή $\langle Y \rangle = \mathcal{K}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι ανάγωγο σύνολο και έστω δυο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $\langle X \oplus Y \rangle = \mathcal{K}$. Τότε από το Πόρισμα 5.2.16 προκύπτει ότι το αντικείμενο $X \oplus Y$ δεν ανήκει σε κανένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες. Άρα

$$\mathsf{U}(X \oplus Y) \cap \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) = \varnothing$$

Επειδή το σύνολο $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι ανάγωγο, ισχύει ότι

$$\mathsf{U}(X) \cap \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) = \varnothing \text{ ή } \mathsf{U}(Y) \cap \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) = \varnothing$$

Συνεπώς είτε το αντικείμενο X είτε το αντικείμενο Y δεν ανήκει σε κανένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες. Εκμεταλλευόμενοι και πάλι το Πόρισμα 5.2.16 συμπεραίνουμε ότι

$$\langle X \rangle = \mathcal{K} \;\text{ ή }\; \langle Y \rangle = \mathcal{K}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε δυο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}$, τέτοια ώστε $\langle X \oplus Y \rangle = \mathcal{K}$, ισχύει ότι $\langle X \rangle = \mathcal{K}$ ή $\langle Y \rangle = \mathcal{K}$. Τότε $\mathsf{U}(X \oplus Y) \cap \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) = \varnothing$. Επομένως

$$\mathsf{U}(X) \cap \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) = \varnothing \;\text{ ή }\; \mathsf{U}(Y) \cap \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) = \varnothing$$

Επειδή το $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι μη-κενό και κλειστό σύνολο, επικαλλούμαστε την Πρόταση 5.2.32 και προκύπτει ότι το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της $\mathcal{K}$ είναι ανάγωγο σύνολο. ■

Παρατήρηση 5.2.34. Στο Πόρισμα 5.2.14 έχουμε αποδείξει ότι ένα αντικείμενο X μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ είναι τανυστικά μηδενοδύναμο αν και μόνο αν ανήκει σε όλα τα πρώτα τανυστικά ιδεώδη. Έστω $\mathcal{P}$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες και ας θεωρήσουμε το συναρτητή τοπικοποίησης

$$Q \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{P}$$

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ είναι τανυστικά μηδενοδύναμο αν η εικόνα του μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης μηδενίζεται στην τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$, για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$.

Στη συνέχεια στόχος είναι να περιγράψουμε ανάλογη ιδιότητα με αυτή του Πορίσματος 5.2.14 και της Παρατήρησης 5.2.34, για τους μορφισμούς της κατηγορίας $\mathcal{K}$. Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε την πρόταση που περιγράφει το παραπάνω αποτέλεσμα, θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 5.2.35. *Έστω $f \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{K}$ και έστω $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο μορφισμός f απεικονίζει στο μηδενικό αντικείμενο στην τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$.*

2. *Υπάρχει ένα αντικείμενο $Z \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε ο μορφισμός f να αναλύεται μέσω του Z, δηλαδή*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ X \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $f \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{K}$. Επειδή το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι πρώτο, είναι και thick. Άρα ορίζεται η τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$.

(1.$\Longrightarrow$2.) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ απεικονίζει στο μηδενικό αντικείμενο στην τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $s\colon Z' \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $f \circ s = 0$ και $\mathsf{cone}(s) \in \mathcal{P}$. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{cone}(s) \arrow[dl, "h'"'] \arrow[d, phantom, "{[1]}"] & \\ Z' \arrow[rr, "s"] & & X \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

Από τις ιδιότητες των τριγώνων σε μια τριγωνισμένη κατηγορία, γνωρίζουμε ότι $h \circ s = 0$. Θέτοντας $Z := \mathsf{cone}(s)$, προκύπτει ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, "s"] & \\ Z & X \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Για τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ ισχύει ότι $f \circ s = 0$. Επομένως, από την καθολική ιδιότητα του συνπυρήνα στον Ορισμό 1.4.9, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g\colon Z \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $g \circ h = f$ και αποδείξαμε ότι υπάρχει αντικείμενο $Z \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ αναλύεται μέσω αυτού.

(2.$\Longrightarrow$1.) Υποθέτουμε ότι υπάρχει αντικείμενο $Z \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε να υπάρχουν μορφισμοί $g\colon Z \longrightarrow Y$ και $h\colon X \longrightarrow Z$, με την ιδιότητα $f = g \circ h$. Επειδή το αντικείμενο Z ανήκει στο πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$, προκύπτει ότι ο μορφισμός h απεικονίζει στο μηδενικό αντικείμενο στην τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$. Συνεπώς ο μορφισμός $f = g \circ h$ απεικονίζει στο μηδενικό αντικείμενο στην τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$. ∎

Παρατήρηση 5.2.36. Το αποτέλεσμα του Λήμματος 5.2.35 ισχύει για οποιαδήποτε thick υποκατηγορία $\mathcal{P}$ της $\mathcal{K}$ και όχι μόνο για τα πρώτα τανυστικά ιδεώδη της.

Συμβολισμός: Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{K}$. Θα συμβολίζουμε $f^{\otimes n}$ τον μορφισμό:

$$\underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n-\text{φορές}}\colon X^{\otimes n} \longrightarrow Y^{\otimes n}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 5.2.37. *Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{K}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε πρώτο ταυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$, η εικόνα του μορφισμού f μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης $Q\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{P}$, μηδενίζεται την τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$. Τότε υπάρχει $n \geqslant 1$, τέτοιο ώστε*

$$f^{\otimes n} = 0$$

Απόδειξη. Έστω $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός, ο οποίος μηδενίζεται στην τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{P}$, μέσω του συναρτητή τοπικοποίησης, για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$. Από το Λήμμα 5.2.35 γνωρίζουμε ότι για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, υπάρχει ένα αντικείμενο $Z_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε ο μορφισμός f αναλύεται μέσω του $Z_{\mathcal{P}}$. Θεωρούμε την ανοικτή κάλυψη

$$\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})} \mathsf{U}(Z_{\mathcal{P}}) = \mathsf{U}(\{Z_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})\})$$

του φάσματος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Από το Πόρισμα 5.2.27 γνωρίζουμε ότι το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι ημισυμπαγής χώρος. Άρα υπάρχουν, πεπερασμένα σε πλήθος, αντικείμενα $Z_1, \cdots, Z_n \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε

$Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_n = 0$ και τέτοια ώστε ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ αναλύεται μέσω μέσω αυτών. Επομένως ο μορφισμός $f^{\otimes n} \colon X^{\otimes n} \longrightarrow Y^{\otimes n}$ αναλύεται μέσω του αντικειμένου $Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_n = 0$ και προκύπτει ότι υπάρχει $n \geqslant 1$, τέτοιο ώστε

$$f^{\otimes n} = 0.$$

■

5.3 Ιδιότητες του Φάσματος

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε κάποιες βασικές ιδιότητες που ικανοποιεί το φάσμα μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$. Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια της support data σε μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{K}$ και θα αποδείξουμε ότι το φάσμα της, μαζί με τον φορέα της, είναι ένα καθολικό support data για την $\mathcal{K}$. Επιπλέον θα «δούμε» το φάσμα σαν ένα αντισυναλλοίωτο συναρτητή ανάμεσα στα φάσματα δύο τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, όταν ανάμεσά τους υπάρχει ένας τανυστικός τριγωνισμένος συναρτητής $F \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Ευθύς αμέσως θα ορίσουμε την έννοια της support data σε μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{K}$. Παράλληλα θα χρειαστούμε και την έννοια του μορφισμού ανάμεσα σε δύο support data της ίδιας κατηγορίας.

Ορισμός 5.3.1. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Μια* **support data** *στην $\mathcal{K}$ είναι ένα ζεύγος (T, σ), όπου T είναι ένας τοπολογικός χώρος και σ είναι μια απεικόνιση, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$, ένα κλειστό υποσύνολο $\sigma(X) \subset T$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $\sigma(0) = \varnothing$ *και* $\sigma(\mathbf{1}) = T$.
2. $\sigma(X \oplus Y) = \sigma(X) \cup \sigma(Y)$, $X, Y \in \mathcal{K}$.
3. $\sigma(\Sigma(X)) = \sigma(X)$, $X \in \mathcal{K}$.
4. *Για κάθε τρίγωνο*
$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$
στην $\mathcal{K}$, ισχύει ότι $\sigma(X) \subset \sigma(Y) \cup \sigma(Z)$.
5. $\sigma(X \otimes Y) = \sigma(X) \cap \sigma(Y)$.

Ορισμός 5.3.2. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και (T_1, σ_1), (T_2, σ_2) δύο support data στην $\mathcal{K}$. Ένας μορφισμός $f \colon (T_1, \sigma_1) \longrightarrow (T_2, \sigma_2)$ ανάμεσα σε support data είναι μία συνεχής απεικόνιση $f \colon T_1 \longrightarrow T_2$, τέτοια ώστε $\sigma_1(X) = f^{-1}(\sigma_2(X))$, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$.*

Παρατήρηση 5.3.3. Ένα μορφισμός $f \colon (T_1, \sigma_1) \longrightarrow (T_2, \sigma_2)$ ανάμεσα σε δύο support data της $\mathcal{K}$ είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν η συνεχής απεικόνιση $f \colon T_1 \longrightarrow T_2$ είναι ομοιομορφισμός.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε δύο λήμματα, τα οποία θα μας επιτρέψουν να αποδείξουμε ένα σημαντικό θεώρημα, το οποίο περιγράφει την οικουμενική ιδιότητα που ικανοποιεί το φάσμα μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$.

Λήμμα 5.3.4. *Έστω T ένα σύνολο και $f_1, f_2 \colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ δύο απεικονίσεις με την ιδιότητα $f_1^{-1}(\mathsf{supp}(X)) = f_2^{-1}(\mathsf{supp}(X))$, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Τότε ισχύει ότι $f_1 = f_2$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι
$$f_1^{-1}(\mathsf{supp}(X)) = \{x \in T \mid f_1(x) \in \mathsf{supp}(X)\}$$
και
$$f_2^{-1}(\mathsf{supp}(X)) = \{x \in T \mid f_2(x) \in \mathsf{supp}(X)\}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$f_1(x) \in \mathsf{supp}(X) \iff f_2(x) \in \mathsf{supp}(X)$$

Έστω $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε

$$\mathcal{P} \in \bigcap_{f_1(x)\in\mathsf{supp}(X)} \mathsf{supp}(X) \iff \mathcal{P} \in \mathsf{supp}(X), \forall X \in \mathcal{K}, \text{ τέτοια ώστε } f_1(x) \in \mathsf{supp}(X) \iff$$

$$\mathcal{P} \in \mathsf{supp}(X), \forall X \in \mathcal{K}, \text{ τέτοια ώστε } f_2(x) \in \mathsf{supp}(X) \iff \mathcal{P} \in \bigcap_{f_2(x)\in\mathsf{supp}(X)} \mathsf{supp}(X)$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\bigcap_{f_1(x)\in\mathsf{supp}(X)} \mathsf{supp}(X) = \bigcap_{f_2(x)\in\mathsf{supp}(X)} \mathsf{supp}(X)$$

Εξ' ορισμού ισχύει ότι

$$\overline{\{f_1(x)\}} = \bigcap_{f_1(x)\in\mathsf{supp}(X)} \mathsf{supp}(X) = \bigcap_{f_2(x)\in\mathsf{supp}(X)} \mathsf{supp}(X) = \overline{\{f_2(x)\}}$$

Από την Πρόταση 5.2.21 προκύπτει ότι

$$f_1(x) = f_2(x) \Longrightarrow f_1 = f_2.$$

■

Λήμμα 5.3.5. *Έστω (T, σ) ένα support data μιας ταυυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ και $V \subset T$ ένα υποσύνολο του τοπολογικού χώρου T. Τότε η πλήρης υποκατηγορία*

$$\mathfrak{X} := \{X \in \mathcal{K} \mid \sigma(X) \subset V\}$$

είναι ένα thick ταυυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathcal{K}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την πλήρη υποκατηγορία

$$\mathfrak{X} := \{X \in \mathcal{K} \mid \sigma(X) \subset V\}$$

Γνωρίζουμε ότι $\sigma(0) = \varnothing \subset V$. Επομένως το μηδενικό αντικείμενο 0 ανήκει στην $\mathfrak{X}$. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$

στην κατηγορία $\mathcal{K}$, τέτοιο ώστε $Y, Z \in \mathfrak{X}$. Τότε ισχύει ότι $\sigma(Y), \sigma(Z) \subset V$. Συνεπώς

$$\sigma(X) \subset \sigma(Y) \cup \sigma(Z) \subset V \cup V = V \Longrightarrow X \in \mathfrak{X}$$

Άρα η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$. Έστω $X \in \mathfrak{X}$ ένα αντικείμενο, τέτοιο ώστε

$$X \simeq Y \oplus Z$$

για δυο αντικείμενα $Y, Z \in \mathcal{K}$. Επειδή $X \in \mathfrak{X}$ ισχύει ότι $\sigma(X) \subset V$ και προκύπτει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\sigma(X) \subset V \Longrightarrow \sigma(Y \oplus Z) = \sigma(Y) \cup \sigma(Z) \subset V$$

Προφανώς ισχύει

$$\sigma(Y) \subset \sigma(Y) \cup \sigma(Z) \subset V \Longrightarrow Y \in \mathfrak{X}$$

και

$$\sigma(Z) \subset \sigma(Y) \cup \sigma(Z) \subset V \Longrightarrow Y \in \mathfrak{X}$$

Επομένως η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι thick υποκατηγορία της $\mathcal{K}$. Τέλος θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathfrak{X}$ και ένα αντικείμενο $Y \in \mathcal{K}$. Τότε

$$\sigma(X \otimes Y) = \sigma(X) \cap \sigma(Y) \subset \sigma(X) \subset V \Longrightarrow X \otimes Y \in \mathfrak{X}$$

Επομένως η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι τανυστική. Τελικά αποδείξαμε ότι η πλήρης υποκατηγορία $\mathfrak{X} \subset \mathcal{K}$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathcal{K}$. ■

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε ένα από τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας του Balmer και της διατριβής, το οποίο αναφέρει ότι το φάσμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ μια τανυστικής κατηγορίας $\mathcal{K}$ ικανοποιεί μια καθολική ιδιότητα ως προς τις support data της $\mathcal{K}$.

Θεώρημα 5.3.6. (Οικουμενική ιδιότητα του φάσματος) *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Το ζεύγος $(\mathsf{Spc}(\mathcal{K}), \mathsf{supp})$ αποτελεί support data στην $\mathcal{K}$, με την έννοια του Ορισμού 5.3.1. Επιπλέον για κάθε άλλη support data (T, σ) στην $\mathcal{K}$, υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $f \colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοια ώστε $\sigma(X) = f^{-1}(\mathsf{supp}(X))$, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Συγκεκριμένα η απεικόνιση f ορίζεται ως*

$$x \longmapsto f(x) := \{X \in \mathcal{K} \mid x \notin \sigma(X)\}$$

Απόδειξη. Έστω (T, σ) ένα support data στην κατηγορία $\mathcal{K}$. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$f \colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K}), \ f(x) := \{X \in \mathcal{K} \mid x \notin \sigma(X)\}$$

και θέτουμε $T' := T \backslash \{x\}$. Τότε

$$f(x) = \{X \in \mathcal{K} \mid \sigma(X) \subset T \backslash \{x\}\} = \{X \in \mathcal{K} \mid \sigma(X) \subset T'\}$$

Από το Λήμμα 5.3.5 προκύπτει ότι η υποκατηγορία $f(x)$, $x \in T$, είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες. Ακόμη, έστω $X, Y \in f(x)$, τέτοια ώστε $X \otimes Y \in f(x)$, δηλαδή

$$x \notin \sigma(X \otimes Y) = \sigma(X) \cap \sigma(Y) \Longrightarrow x \notin \sigma(X) \text{ ή } x \notin \sigma(Y)$$

Επομένως ισχύει ότι $X \in f(x)$ ή $Y \in f(x)$ και το τανυστικό ιδεώδες $f(x)$ είναι πρώτο. Συνεπώς η απεικόνιση $f \colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι καλά ορισμένη. Έστω, τώρα, $X \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$. Τότε

$$f^{-1}(\mathsf{supp}(X)) = \{x \in T \mid f(x) \in \mathsf{supp}(X)\} = \{x \in T \mid X \notin f(x)\} = \{x \in T \mid x \notin \sigma(X)\} = \sigma(X)$$

Όμως η συλλογή $\{\mathsf{supp}(X) \mid X \in \mathcal{K}\}$ είναι βάση από κλειστά υποσύνολα για την τοπολογία του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ και επίσης τα σύνολα $\sigma(X)$ είναι κλειστά για όλα τα $X \in \mathcal{K}$. Επομένως η απεικόνιση $f \colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο απεικονίσεις $f_1, f_2 \colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ με τις παραπάνω ιδιότητες. Τότε ισχύει ότι $f_1^{-1}(\mathsf{supp}(X)) = f_2^{-1}(\mathsf{supp}(X))$, $X \in \mathcal{K}$. Από το Λήμμα 5.3.4 προκύπτει ότι $f_1 = f_2$. ■

Σχόλιο 5.3.7. Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στην εξάρτηση από την κατηγορία $\mathcal{K}$, συμβολίζουμε τον φορέα ενός αντικειμένου $X \in \mathcal{K}$ με $\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μία ακόμη ιδιότητα που έχει το φάσμα μια τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας.

Πρόταση 5.3.8. *Έστω $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ δυο τανυστικές τριγωνισμένες κατηγορίες. Το φάσμα είναι functorial. Δοθέντος ενός τανυστικού, τριγωνισμένου συναρτητή $F \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$, η απεικόνιση*

$$\mathsf{Spc}(F) \colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K}), \ \mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}) := F^{-1}(\mathcal{Q})$$

είναι καλά ορισμένη, συνεχής και για όλα τα αντικείμενα $X \in \mathcal{K}$, ισχύει ότι

$$(\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)) = \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X))$$

Απόδειξη. Έστω $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ένας τανυστικός, τριγωνισμένος συναρτητής. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathsf{Spc}(F)\colon\ \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K}),\ \mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}) := F^{-1}(\mathcal{Q})$$

Έστω $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$ και $X, Y \in \mathcal{K}$, τέτοια ώστε $X \otimes Y \in F^{-1}(\mathcal{Q})$. Τότε ισχύει ότι $F(X \otimes Y) \in \mathcal{Q}$ και επειδή ο συναρτητής F είναι τανυστικός και τριγωνισμένος, προκύπτει ότι $F(X) \otimes F(Y) \in \mathcal{Q}$. Ακόμη επειδή το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{Q}$ είναι πρώτο, προκύπτει ότι

$$F(X) \in \mathcal{Q} \text{ ή } F(Y) \in \mathcal{Q} \Longrightarrow X \in F^{-1}(\mathcal{Q}) \text{ ή } Y \in F^{-1}(\mathcal{Q})$$

Συνεπώς $\mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}) = F^{-1}(\mathcal{Q}) \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ και η απεικόνιση $\mathsf{Spc}(F)$ είναι καλά ορισμένη. Έστω $X \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$. Τότε

$$\begin{aligned}
(\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)) &= \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \mid (\mathsf{Spc}(F))(\mathcal{Q}) \in \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)\}\\
&= \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \mid F^{-1}(\mathcal{Q}) \in \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)\}\\
&= \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \mid X \notin F^{-1}(\mathcal{Q})\}\\
&= \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \mid F(X) \notin \mathcal{Q}\}\\
&= \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{Q} \in \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X))\}\\
&= \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X))
\end{aligned}$$

Συνεπώς η απεικόνιση $\mathsf{Spc}(F)\colon\ \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ αντιστρέφει κλειστά σύνολα σε κλειστά και άρα είναι συνεχής. ∎

Παρατήρηση 5.3.9. Από το Θεώρημα 5.3.8 συμπεραίνουμε ότι επάγεται ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής Spc(-), από την κατηγορία των (ουσιωδώς) μικρών τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών (ας τη συμβολίσουμε $\mathfrak{T}$), στην κατηγορία Top, τοπολογικών χώρων. Δηλαδή

$$\mathsf{Spc}(\text{-})\colon \mathfrak{T} \longrightarrow \mathsf{Top}$$

Πράγματι, ας είναι $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ ο ταυτοτικός μορφισμός του αντικειμένου $\mathcal{K} \in \mathfrak{T}$ και $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$. Τότε

$$\mathsf{Spc}(\mathbf{1}_{\mathcal{K}})(\mathcal{Q}) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}}^{-1}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} = \mathbf{1}_{\mathsf{Spc}(\mathcal{K})}(Q)$$

Επομένως $\mathsf{Spc}(\mathbf{1}_{\mathcal{K}}) = \mathbf{1}_{\mathsf{Spc}(\mathcal{K})}$. Επιπλέον έστω $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ και $G\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ δύο τανυστικοί τριγωνισμένοι συναρτητές και $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{M})$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathsf{Spc}(G \circ F)(\mathcal{Q}) &= (G \circ F)^{-1}(\mathcal{Q})\\
&= (F^{-1} \circ G^{-1})(\mathcal{Q})\\
&= F^{-1}(G^{-1}(Q))\\
&= F^{-1}(\mathsf{Spc}(G)(\mathcal{Q}))\\
&= (\mathsf{Spc}(F) \circ \mathsf{Spc}(G))(\mathcal{Q})
\end{aligned}$$

Συνεπώς $\mathsf{Spc}(G \circ F) = \mathsf{Spc}(F) \circ \mathsf{Spc}(G)$.

Ακολουθούν δύο πορίσματα της Πρότασης 5.3.8.

Πόρισμα 5.3.10. *Ας είναι $F_1, F_2\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ δυο τανυστικοί τριγωνισμένοι συναρτητές με την ιδιότητα $\langle F_1(X)\rangle = \langle F_2(X)\rangle$ για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Τότε οι επαγόμενες απεικονίσεις στο φάσμα, συμπίπτουν, δηλαδή $\mathsf{Spc}(F_1) = \mathsf{Spc}(F_2)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $F_1, F_2\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ είναι τανυστικοί τριγωνισμένοι συναρτητές που ικανοποιούν την ιδιότητα $\langle F_1(X)\rangle = \langle F_2(X)\rangle$ για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Τότε επάγονται οι απεικονίσεις:

$$\mathsf{Spc}(F_1)\colon\ \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

και

$$\mathsf{Spc}(F_2)\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

στο φάσμα των τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών $\mathcal{K}, \mathcal{L}$. Έστω $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$ και $X \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$. Τότε ισχύει ότι

$$X \in \mathsf{Spc}(F_1)(\mathcal{Q}) \Longleftrightarrow X \in F_1^{-1}(\mathcal{Q}) \Longleftrightarrow F_1(Q) \in \mathcal{Q}$$

Από το δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 5.2.2, γνωρίζουμε ότι το $\langle F_1(X) \rangle$ είναι το μικρότερο thick τανυστικό ιδεώδες που περιέχει το αντικείμενο $F_1(X)$. Επομένως, ισοδύναμα, προκύπτει ότι

$$\langle F_1(X) \rangle \subset \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \langle F_2(X) \rangle \subset \mathcal{Q} \Longleftrightarrow F_2(X) \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow X \in F_2^{-1}(\mathcal{Q}) \Longleftrightarrow X \in \mathsf{Spc}(F_2)(\mathcal{Q})$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι $\mathsf{Spc}(F_1) = \mathsf{Spc}(F_2)$. ■

Πόρισμα 5.3.11. *Έστω $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ένας τανυστικός τριγωνισμένος συναρτητής, ο οποίος είναι επιπλέον ουσιωδώς «επί». Τότε η επαγόμενη απεικόνιση*

$$\mathsf{Spc}(F)\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

στο φάσμα, είναι «1-1».

Απόδειξη. Έστω $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ένας τανυστικός τριγωνισμένος συναρτητής, ο οποίος είναι ουσιωδώς επί και $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathcal{L}$. Θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{L}$, τέτοιο ώστε $X \in F(F^{-1}(\mathcal{Q}))$. Επειδή ο συναρτητής F είναι ουσιωδώς επί, προκύπτει ότι $X = F(Y)$, για κάποιο αντικείμενο $Y \in F^{-1}(\mathcal{Q})$. Επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$ είναι υπερπλήρης, προκύπτει ότι $X \in \mathcal{Q}$. Άρα $F(F^{-1}(\mathcal{Q})) \subset \mathcal{Q}$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\left\langle F(F^{-1}(\mathcal{Q})) \right\rangle \subset \mathcal{Q}$$

Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι $\mathcal{Q} \subset \left\langle F(F^{-1}(\mathcal{Q})) \right\rangle$. Επομένως ισχύει ότι

$$\mathcal{Q} = \left\langle F(F^{-1}(\mathcal{Q})) \right\rangle \tag{5.13}$$

Θεωρούμε $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$, τέτοια ώστε $\mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}_1) = \mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}_2)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}_1) = \mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}_2) \quad &\Longrightarrow \\
F^{-1}(\mathcal{Q}_1) = F^{-1}(\mathcal{Q}_2) \quad &\Longrightarrow \\
F(F^{-1}(\mathcal{Q}_1)) = F(F^{-1}(\mathcal{Q}_2)) \quad &\Longrightarrow \\
\left\langle F(F^{-1}(\mathcal{Q}_1)) \right\rangle = \left\langle F(F^{-1}(\mathcal{Q}_2)) \right\rangle &
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (5.13) προκύπτει ότι $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$. Επομένως η απεικόνιση

$$\mathsf{Spc}(F)\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

είναι «1-1». ■

Πρόταση 5.3.12. *Έστω $F\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ένας τανυστικός τριγωνισμένος συναρτητής. Υποθέτουμε ότι S είναι η συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$, των οποίων οι εικόνες παράγουν την $\mathcal{L}$, ως thick τανυστικά ιδεώδη. Τότε η θήκη της εικόνας της απεικόνισης*

$$\mathsf{Spc}(F)\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

είναι

$$\overline{\mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F))} = \mathsf{Z}(S)$$

Απόδειξη. Από τη διατύπωση της Πρότασης προκύπτει ότι η συλλογή αντικειμένων S είναι η ακόλουθη:

$$S := \{X \in \mathcal{K} \mid \langle F(X) \rangle = \mathcal{L}\}$$

Επομένως ισχύει ότι

$$X \in S \Longleftrightarrow \langle F(X) \rangle = \mathcal{L}$$

Από το Πόρισμα 5.2.16, σε συνδυασμό με την Παρατήρηση 5.2.17, προκύπτει ότι

$$X \in S \Longleftrightarrow \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X)) = \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$$

Από την Πρόταση 5.3.8 γνωρίζουμε ότι: $(\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)) = \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X))$.

Ισχυρισμός: $\mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X)) = \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \Longleftrightarrow \mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F)) \subset \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού: $(\Longrightarrow)$ Έστω $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in \mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F))$. Τότε υπάρχει $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$, τέτοιο ώστε $\mathsf{Spc}(F)(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$. Όμως $\mathsf{Spc}(\mathcal{L}) = \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X)) = (\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X))$. Επομένως ισχύει ότι $\mathcal{Q} \in (\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X))$ και άρα $\mathcal{P} \in \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$. Τελικά

$$\mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F)) \subset \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$$

$(\Longleftarrow)$ Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F)) \subset \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$. Προφανώς ισχύει ότι

$$\mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X)) = (\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)) \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \tag{5.14}$$

Έστω $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες. Τότε

$$\begin{aligned} (\mathsf{Spc}(F))(Q) \in \mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F)) &\Longrightarrow \\ (\mathsf{Spc}(F))(Q) \in \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X) &\Longrightarrow \\ \mathcal{Q} \in (\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)) &\Longrightarrow \end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει η σχέση έγκλεισης

$$\mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \subset (\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)) \tag{5.15}$$

Από τις σχέσεις (5.14), (5.15), προκύπτει ότι

$$\mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(F(X)) = (\mathsf{Spc}(F))^{-1}(\mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)) = \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$$

και έτσι αποδείξαμε τον ισχυρισμό. Συνοψίζοντας προκύπτει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$X \in S \Longleftrightarrow \mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F)) \subset \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\overline{\mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F))} = \bigcap_{X \in \mathcal{K}} \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$$

για εκείνα τα αντικείμενα X, τέτοια ώστε $\mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F)) \subset \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X)$. Άμεσα προκύπτει ότι

$$\overline{\mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(F))} = \bigcap_{X \in S} \mathsf{supp}_{\mathcal{K}}(X) = \mathsf{Z}(S).$$

∎

Παρατήρηση 5.3.13. Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Τότε ορίζεται η τοπικοποίηση $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ και έστω

$$q \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{J}$$

ο συναρτητής τοπικοποίησης. Τότε η κατηγορία $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ κληρονομεί την τανυστική δομή από την κατηγορία $\mathcal{K}$. Ακόμη υπάρχει και μία ακριβής ακολουθία τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{K} \xrightarrow{\ q\ } \mathcal{K}/\mathcal{J} \longrightarrow 0$$

Ο συναρτητής τοπικοποίησης $q \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{J}$ είναι τριγωνισμένος.

Πρόταση 5.3.14. *Έστω $q \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L} := \mathcal{K}/\mathcal{J}$ συναρτητής τοπικοποίησης. Η απεικόνιση*

$$\mathsf{Spc}(q) \colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

επάγει ομοιομορφισμό

$$\mathsf{Spc}(q)' \colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow V$$

όπου V είναι ο ακόλουθος υπόχωρος του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$

$$V := \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{P}\}$$

δηλαδή ο υπόχωρος των πρώτων τανυστικών ιδεωδών που περιέχουν την υποκατηγορία $\mathcal{J}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες στην κατηγορία $\mathcal{L}$. Τότε

$$\mathsf{Spc}(q)(\mathcal{Q}) = q^{-1}(\mathcal{Q}) \supset q^{-1}(0)$$

Όμως $q^{-1}(0) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid q(\mathcal{P}) = 0\} = \mathcal{J}$. Επομένως

$$\mathcal{J} \subset \mathsf{Spc}(q)(\mathcal{Q}) \tag{5.16}$$

Έστω $\mathcal{P}' \in \mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(q))$. Τότε υπάρχει πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}$, τέτοιο ώστε $\mathsf{Spc}(q)(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}'$. Λόγω της σχέσης (5.16) προκύπτει ότι

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \mathcal{P}' \in V$$

και άρα $\mathsf{Im}(\mathsf{Spc}(q)) \subset V$. Επίσης είναι άμεσο ότι η απεικόνιση $q \colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ είναι ουσιωδώς επί, αφού για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}/\mathcal{J}$, υπάρχει αντικείμενο $Y = X \in \mathcal{K}$, τέτοιο ώστε $q(Y) = X$. Από το Πόρισμα 5.3.11 προκύπτει ότι η επαγόμενη απεικόνιση

$$\mathsf{Spc}(q)' \colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow V$$

είναι «1-1».

Ισχυρισμός Έστω τώρα $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$. Η υποκατηγορία $q(\mathcal{P})$ είναι ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathcal{L}$ και ισχύει ότι $q^{-1}(q(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού Θεωρούμε δύο αντικείμενα $X, Y \in \mathcal{K}/\mathcal{J}$, τέτοια ώστε $X \otimes Y \in q(\mathcal{Q})$. Τότε υπάρχει αντικείμενο $Z \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε $q(Z) = X \otimes Y$. Συνεπώς $Z = X \otimes Y$ και επειδή το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι υπερπλήρες, ισχύει ότι $X \otimes Y \in \mathcal{P}$. Άρα προκύπτει

$$X \in \mathcal{P} \;\text{ ή }\; Y \in \mathcal{P} \Longrightarrow q(X) \in q(\mathcal{P}) \;\text{ ή }\; q(Y) \in q(\mathcal{P}) \Longrightarrow X \in q(\mathcal{P}) \;\text{ ή }\; Y \in q(\mathcal{P})$$

Επίσης η υποκατηγορία $q(\mathcal{P})$ είναι ένα τανυστικό ιδεώδες, αφού ο συναρτητής τοπικοποίησης q είναι τανυστικός, τριγωνισμένος συναρτητής. Τελικά το $q(\mathcal{P})$ είναι ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathcal{K}/\mathcal{J}$. Για το δεύτερο σκέλος του ισχυρισμού, θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{P}$. Τότε

$$q(X) \in q(\mathcal{P}) \Longrightarrow X \in q^{-1}(q(\mathcal{P}))$$

Ακόμη θεωρούμε ένα μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$, μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Τότε ο μορφισμός $q(f)$ στην τοπικοποίηση, παριστάνεται από το αριστερό roof:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Όμως επειδή $q(X), q(Y) \in q(\mathcal{P})$, ισχύει ότι $X, Y \in q(\mathcal{P})$. Επομένως ο μορφισμός $q(f)$ ανήκει στην υποκατηγορία $q(\mathcal{P})$, άρα $f \in q^{-1}(q(\mathcal{P}))$. Επομένως καταλήγουμε στο ότι

$$\mathcal{P} \subset q^{-1}(q(\mathcal{P}))$$

Ανάλογα προκύπτει ότι

$$q^{-1}(q(\mathcal{P})) \subset \mathcal{P}$$

και καταλήγουμε στο ότι

$$q^{-1}(q(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$$

Με άλλα λόγια $\mathsf{Spc}(q)(q(\mathcal{P})) = \mathcal{P},\ \mathcal{P} \in V$ και άρα η απεικόνιση $\mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow V$ είναι «επί». Τέλος, έστω $Y = q(X) \in \mathcal{K}/\mathcal{J}$ και $\mathcal{P} \in V$. Τότε ισχύει πως

$$Y \in q(\mathcal{P}) \Longleftrightarrow X \in \mathcal{P}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(q)(\mathsf{Z}(Y)) &\iff \\ \mathcal{P} \in q^{-1}(\mathsf{Z}(Y)) &\iff \\ q(\mathcal{P}) \in \mathsf{Z}(Y) &\iff \\ q(\mathcal{P}) \in \mathsf{Z}(q(X)) &\iff \\ q(X) \notin q(\mathcal{P}) &\iff \\ X \notin \mathcal{P} &\iff \\ \mathcal{P} \in \mathsf{Z}(X) & \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι $\mathsf{Spc}(q)(\mathsf{Z}(Y)) = \mathsf{Z}(X) \cap V$, δηλαδή η απεικόνιση $\mathsf{Spc}(q)'\colon\ \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow V$ είναι κλειστή και τελικά ισχύει ότι η απεικόνιση $\mathsf{Spc}(q)'\colon\ \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow V$ είναι ομοιομορφισμός. ∎

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε, συνοπτικά, την έννοια της ταυτοδύναμης πλήρωσης (idempotent completion) μιας τριγωνισμένης κατηγορίας. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο άρθρο [4] των Balmer και Schlichting.

Ορισμός 5.3.15. *Έστω $\mathcal{A}$ μια προσθετική κατηγορία. Η* **ταυτοδύναμη πλήρωση (idempotent completion)** *της $\mathcal{A}$ είναι η κατηγορία $\tilde{\mathcal{A}}$, η οποία έχει:*

- *ως αντικείμενα ζεύγη (X, e), όπου $X \in \mathcal{A}$ και $e\colon X \longrightarrow X$ μορφισμός με την ιδιότητα $e^2 = e$.*
- *ως μορφισμούς $f\colon (X, e) \longrightarrow (Y, e')$, όπου $f\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμός στην $\mathcal{A}$, με την ιδιότητα*

$$f \circ e = f = e' \circ f$$

Παρατήρηση 5.3.16. Για κάθε προσθετική κατηγορία $\mathcal{A}$, υπάρχει πάντοτε η ταυτοδύναμη πλήρωση $\tilde{\mathcal{A}}$.

Αποδεικνύεται ότι αν η κατηγορία $\mathcal{K}$ είναι τριγωνισμένη, τότε και η ταυτοδύναμη πλήρωσή της $\tilde{\mathcal{K}}$ είναι τριγωνισμένη κατηγορία και ο συναρτητής $\iota\colon \mathcal{K} \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ είναι ακριβής. Ακόμη αν η κατηγορία $\mathcal{K}$ είναι τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και η κατηγορία $\tilde{\mathcal{K}}$ είναι τανυστική τριγωνισμένη, δεδομένου ότι ο συναρτητής $\iota\colon \mathcal{K} \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ είναι τανυστικός τριγωνισμένος συναρτητής. Επιπλέον ότι ταυτοδύναμη πλήρωση μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ δεν επηρεάζει το φάσμα. Θα διατυπώσουμε το αποτέλεσμα αυτό πιο γενικά και για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της cofinal υποκατηγορίας μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$.

Ορισμός 5.3.17. *Έστω $\mathcal{L}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ μια πλήρης τανυστική τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{L}$. Η υποκατηγορία $\mathcal{K}$ καλείται* **cofinal** *αν για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{L}$, υπάρχει αντικείμενο $X' \in \mathcal{L}$, τέτοιο ώστε $X \oplus X' \in \mathcal{K}$.*

Πρόταση 5.3.18. *Έστω $\mathcal{L}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ μια πλήρης τανυστική τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{L}$, η οποία είναι cofinal. Τότε η αντιστοιχία*

$$\mathcal{Q} \longmapsto \mathcal{Q} \cap \mathcal{K}$$

ορίζει έναν ομοιομορφισμό $\mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

Απόδειξη. Πριν μπούμε στο κυρίως μέρος της απόδειξης κάνουμε μια σύμβαση η οποία γίνεται από τον Balmer στο [2, Proposition 3.13]: αντικαθιστούμε την κατηγορία $\mathcal{K}$ με την ισόμορφη θήκη της και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{K}$ είναι υπερπλήρης. Περαιτέρω ανάλυση αυτής της σύμβασης ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της διατριβής. Έστω $\iota\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ο συναρτητής έγκλεισης. Τότε η ζητούμενη απεικόνιση είναι η επαγόμενη

$$\mathsf{Spc}(\iota)\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K}),\ \mathsf{Spc}(\iota)(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \cap \mathcal{K}$$

στο φάσμα. Συνεπώς η απεικόνιση $\mathsf{Spc}(\iota)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Ισχυρισμός: Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{L}$, ισχύει ότι $X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{K}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{L}$. Επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{K}$ είναι cofinal, υπάρχει αντικείμενο $X' \in \mathcal{L}$, τέτοιο ώστε $X \oplus X' \in \mathcal{K}$. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$X' \longrightarrow X' \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma(X')$$

στην $\mathcal{L}$. Στρέφοντάς το προκύπτει το τρίγωνο

$$X' \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma(X') \longrightarrow \Sigma(X')$$

Ακόμη θεωρούμε το τρίγωνο

$$\Sigma(X) \longrightarrow \Sigma(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma^2(X)$$

το οποίο μετά από στροφή «δίνει» το τρίγωνο

$$0 \longrightarrow \Sigma(X) \longrightarrow \Sigma(X) \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα

$$X \oplus X' \longrightarrow X \oplus \Sigma(X) \longrightarrow \Sigma(X \oplus X') \longrightarrow \Sigma(X \oplus X')$$

όπου $X \oplus X'$, $\Sigma(X \oplus X') \in \mathcal{K}$. Τότε το αντικείμενο $X \oplus \Sigma(X)$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{K}$. Από την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού προκύπτει επίσης ότι αν το ευθύ άθροισμα $X \oplus X'$

ανήκει σε κάποια τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$, το ίδιο συμβαίνει και με το ευθύ άθροισμα $X \oplus \Sigma(X)$. Επομένως αν $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathcal{K}$, ισχύει η ισότητα:

$$\{X \in \mathcal{L} \mid X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{P}\} = \{X \in \mathcal{L} \mid \exists X' \in \mathcal{L} \text{ τέτοιο ώστε } X \oplus X' \in \mathcal{P}\} =: \tilde{\mathcal{P}}$$

Θα αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\tilde{\mathcal{P}}$ της κατηγορίας $\mathcal{L}$ είναι ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{L}$. Προφανώς $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{L}$ είναι μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{L}$. Ακόμη, άμεσα, βλέπουμε ότι $0 \oplus \Sigma(0) = 0 \in \mathcal{P}$, δηλαδή $0 \in \tilde{\mathcal{P}}$. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα τρίγωνο

$$Y \longrightarrow Y' \longrightarrow Y'' \longrightarrow \Sigma(Y)$$

στην $\mathcal{L}$, όπου $Y, Y' \in \tilde{\mathcal{P}}$. Τότε υπάρχουν $Z, Z' \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $Y \oplus Z$, $Y' \oplus Z' \in \mathcal{P}$. Θεωρούμε το τρίγωνο

$$Z \longrightarrow Z' \longrightarrow Z'' \longrightarrow \Sigma(Z)$$

με βάση το μορφισμό $Z \longrightarrow Z'$ και έστω

$$Y \oplus Z \longrightarrow Y' \oplus Z' \longrightarrow Y'' \oplus Z'' \longrightarrow \Sigma(Y \oplus Z)$$

το ευθύ άθροισμα των παραπάνω τριγώνων. Όμως το πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία και επιπλέον $Y \oplus Z$, $Y' \oplus Z' \in \mathcal{P}$, δηλαδή το αντικείμενο $Y'' \oplus Z''$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{P}$. Άρα $Y'' \in \tilde{\mathcal{P}}$ και η υποκατηγορία $\tilde{\mathcal{P}}$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{L}$. Θεωρούμε, τώρα, ένα αντικείμενο $X \in \tilde{\mathcal{P}}$, τέτοιο ώστε $X \simeq Y \oplus Z$, για κάποια αντικείμενα $Y, Z \in \mathcal{L}$. Τότε υπάρχει αντικείμενο $X' \in \mathcal{L}$, τέτοιο ώστε $X \oplus X' \in \mathcal{P} \subset \mathcal{K}$. Επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ είναι thick προκύπτει ότι $X \in \mathcal{P}$ και $X' \in \mathcal{P}$. Τότε

$$X \simeq Y \oplus Z \in \mathcal{P} \Longrightarrow Y, Z \in \tilde{\mathcal{P}}$$

Άρα η υποκατηγορία $\tilde{\mathcal{P}}$ είναι thick υποκατηγορία της $\mathcal{L}$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{P}$ και ένα αντικείμενο $Y \in \mathcal{L}$. Τότε υπάρχει αντικείμενο $X' \in \mathcal{L}$, τέτοιο ώστε $X \oplus X' \in \mathcal{P}$. Επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ είναι τανυστική, ισχύει ότι $(X \oplus X') \otimes Y \in \mathcal{P}$. Επομένως

$$(X \otimes Y) \oplus (X' \otimes Y) \in \mathcal{P} \Longrightarrow X \otimes Y \in \tilde{\mathcal{P}}$$

Άρα η υποκατηγορία $\tilde{\mathcal{P}}$ της $\mathcal{L}$ είναι τανυστική υποκατηγορία. Τελικά η υποκατηγορία $\tilde{\mathcal{P}}$ είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{L}$.

Έστω $X, Y \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $X \otimes Y \in \tilde{\mathcal{P}}$. Υποθέτουμε ότι $X \notin \tilde{\mathcal{P}}$ και θέτουμε $Z := X \oplus \Sigma(X)$. Τότε $Z \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{P}$, διαφορετικά αν $X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{P}$, θα ίσχυε ότι $X \in \tilde{\mathcal{P}}$, το οποίο είναι άτοπο. Επιπλέον

$$Z \otimes Y \simeq (X \oplus \Sigma(X)) \otimes Y \simeq (X \otimes Y) \oplus \Sigma(X \otimes Y) \in \mathcal{P}$$

αφού $X \otimes Y \in \tilde{\mathcal{P}}$. Τότε

$$Z \otimes (Y \oplus \Sigma(Y)) = (Z \otimes Y) \oplus \Sigma(Z \otimes Y) \in \mathcal{P}$$

Επειδή το $\mathcal{P}$ είναι πρώτο τανυστικό ιδεώδες και $Z \notin \mathcal{P}$, προκύπτει ότι $Y \oplus \Sigma(Y) \in \mathcal{P}$, δηλαδή $Y \in \tilde{\mathcal{P}}$. Τελικά αποδείξαμε ότι η υποκατηγορία $\tilde{\mathcal{P}}$ της κατηγορίας $\mathcal{L}$, είναι ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{K} = \mathcal{P}$. Έστω $X \in \mathcal{L}$ ένα αντικείμενο, τέτοιο ώστε $X \in \tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{K}$. Τότε υπάρχει αντικείμενο $X' \in \mathcal{L}$ με την ιδιότητα $X \oplus X' \in \mathcal{P}$. Επειδή το τανυστικό ιδεώδες είναι thick, προκύπτει ότι $X \in \mathcal{P}$. Συνεπώς

$$\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{P} \tag{5.17}$$

Αντίστροφα, θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{P} \subset \mathcal{K}$. Ακόμη

$$X \oplus 0 \simeq X \in \mathcal{P} \Longrightarrow X \in \tilde{\mathcal{P}}$$

Τελικά προκύπτει ότι $X \in \tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{K}$, δηλαδή

$$\mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{K} \tag{5.18}$$

Από τις σχέσεις (5.17), (5.18), προκύπτει ότι

$$\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{K} = \mathcal{P}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{L}),\ \Phi(\mathcal{P}) := \tilde{\mathcal{P}}$$

Τότε

$$(\mathsf{Spc}(\iota) \circ \Phi)(\mathcal{P}) = \mathsf{Spc}(\iota)(\Phi(\mathcal{P})) = \mathsf{Spc}(\iota)(\tilde{\mathcal{P}}) = \tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{K} = \mathcal{P}$$

Άρα η απεικόνιση Φ είναι δεξιά αντίστροφη για την επαγόμενη απεικόνιση $\mathsf{Spc}(\iota)$.

Έστω $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{L})$. Τότε $\mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{P}}$, όπου $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{K} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Πράγματι, έστω $X \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$. Τότε

$$X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{K} \Longrightarrow X \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{K} = \mathcal{P} \Longrightarrow X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{P} \Longrightarrow X \in \tilde{\mathcal{P}}$$

Επομένως ισχύει ότι $\mathcal{Q} \subset \tilde{\mathcal{P}}$. Αντίστροφα έστω ότι $X \in \tilde{\mathcal{P}}$. Τότε συνεπάγεται ότι

$$X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{K} \Longrightarrow X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{Q}$$

Επειδή η $\mathcal{Q}$ είναι thick υποκατηγορία, προκύπτει ότι $X \in \mathcal{Q}$. Επομένως $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{Q}$ και τελικά αποδείξαμε ότι

$$\mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{P}}$$

Επομένως για οποιοδήποτε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, ορίζεται η απεικόνιση

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{K} \longmapsto \mathcal{Q}$$

η οποία είναι αντίστροφη της $\mathsf{Spc}(\iota)$. Άρα η επαγόμενη απεικόνιση

$$\mathsf{Spc}(\iota)\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K}),\ \mathsf{Spc}(\iota)(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \cap \mathcal{K}$$

είναι «1-1» και «επί». Για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{L}$, ισχύει ότι

$$X \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow X \oplus \Sigma(X) \in \mathcal{P}$$

όπου $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ είναι πρώτα τανυστικά ιδεώδη με $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{K}$ και $\mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{P}}$. Άρα προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Spc}(\iota)(\mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(X)) &= \{\mathsf{Spc}(\iota)(\mathcal{Q}) \mid \mathcal{Q} \in \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(X)\} \\
&= \{\mathsf{Spc}(\iota)(\mathcal{Q}) \mid X \notin \mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{P}}\} \\
&= \{\mathsf{Spc}(\iota)(\mathcal{Q}) \mid X \oplus \Sigma(X) \notin \mathcal{P}\} \\
&= \{\mathsf{Spc}(\iota)(\mathcal{Q}) \mid \mathcal{P} \in \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(X \oplus \Sigma(X))\} \\
&= \{\mathsf{Spc}(\iota)(\mathcal{Q}) \mid (\mathcal{Q} \cap \mathcal{K}) \in \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(X \oplus \Sigma(X))\} \\
&= \mathsf{supp}_{\mathcal{L}}(X \oplus \Sigma(X))
\end{aligned}$$

Συνεπώς η απεικόνιση $\mathsf{Spc}(\iota)$ είναι κλειστή απεικόνιση. Τελικά αποδείξαμε ότι η ζητούμενη απεικόνιση

$$\mathsf{Spc}(\iota)\colon \mathsf{Spc}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

είναι ομοιομορφισμός. ∎

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.3.18 για την ταυτοδύναμη πλήρωση $\tilde{\mathcal{K}}$, μιας τανυστικής κατηγορίας $\mathcal{K}$ και προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα:

Πόρισμα 5.3.19. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\iota\colon \mathcal{K} \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ η ταυτοδύναμη πλήρωση της $\mathcal{K}$. Τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός*

$$\mathsf{Spc}(\iota)\colon \mathsf{Spc}(\tilde{\mathcal{K}}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

Απόδειξη. Η κατηγορία $\mathcal{K}$ είναι πλήρης υποκατηγορία της ταυτοδύναμης πλήρωσής της $\tilde{\mathcal{K}}$. Επιπλέον αν (X, e) είναι ένα αντικείμενο της $\tilde{\mathcal{K}}$, τότε υπάρχει το αντικείμενο $(0, 1_0) \in \tilde{\mathcal{K}}$, τέτοιο ώστε $(X, e) \oplus (0, 1_0) \in \mathcal{K}$. Επομένως η υποκατηγορία $\mathcal{K}$ της $\tilde{\mathcal{K}}$ είναι cofinal. Τότε από την Πρόταση 5.3.18 επάγεται ομοιομορφισμός

$$\mathsf{Spc}(\iota)\colon \mathsf{Spc}(\tilde{\mathcal{K}}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

■

5.4 Ταξινόμηση Thick Υποκατηγοριών

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να καταφέρουμε να ταξινομήσουμε τις thick υποκατηγορίες μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί να ορίσουμε μια κλάση τανυστικών ιδεωδών της $\mathcal{K}$, τα οποία καλούνται ριζικά ιδεώδη και να περιγράψουμε ορισμένες βασικές τους ιδιότητες. Ο λόγος για τον οποίον ορίζουμε τα ριζικά τανυστικά ιδεώδη έχει να κάνει με το γεγονός ότι στην πλειοψηφία των κατηγοριών που δουλεύουμε τα thick τανυστικά ιδεώδη ταυτίζονται με τα ριζικά. Τέλος θα ορίσουμε κάποιες support data (T, σ) στην $\mathcal{K}$ με επιπρόσθετες ιδιότητες, οι οποίες καλούνται καλούνται ταξινομούσες support data (classifying support data), με την βοήθεια των οποίων θα διατυπώσουμε το κεντρικό θεώρημα που μας εξασφαλίζει ότι το φάσμα της κατηγορίας $\mathcal{K}$ είναι ομοιομορφικό με τον τοπολογικό χώρο T.

Θα ξεκινήσουμε διατυπώνοντας τον ορισμό του ριζικού thick τανυστικού ιδεώδους και δίνοντας μια περιγραφή των ριζικών thick τανυστικών ιδεωδών μιας κατηγορίας συναρτήσει των πρώτων thick τανυστικών ιδεωδών αυτής.

Ορισμός 5.4.1. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{J}$ ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Το* **ριζικό (radical)** *του $\mathcal{J}$ ορίζεται να είναι το*

$$\sqrt{\mathcal{J}} := \{X \in \mathcal{K} \mid \exists n \geqslant 1 \text{ τέτοιο ώστε } X^{\otimes n} \in \mathcal{J}\}$$

Ορισμός 5.4.2. *Ένα thick τανυστικό ιδεώδες μιας τανυστικής κατηγορίας $\mathcal{K}$ καλείται* **ριζικό (radical)** *αν*

$$\mathcal{J} = \sqrt{\mathcal{J}}$$

Λήμμα 5.4.3. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{J}$ ένα thick τανυστικό ιδεώδες. Τότε το ριζικό του $\mathcal{J}$ ισούται με την τομή όλων των πρώτων τανυστικών ιδεωδών που περιέχουν το $\mathcal{J}$. Δηλαδή*

$$\sqrt{\mathcal{J}} = \bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$$

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει ότι $\sqrt{\mathcal{J}} \subset \mathcal{P}$, για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ που περιέχει το $\mathcal{J}$. Επομένως ισχύει ότι

$$\sqrt{\mathcal{J}} \subset \bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P} \tag{5.19}$$

Αντίστροφα, θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \bigcap_{\mathcal{P} \subset \mathcal{J}} \mathcal{P}$. Τότε $X \in \mathcal{P}$, για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \supset \mathcal{J}$. Θεωρούμε τη συλλογή αντικειμένων $S := \{X^{\otimes n} \mid n \geqslant 1\}$ και ας είναι $X^{\otimes n}$, $X^{\otimes m} \in S$ δυο αντικείμενα στην S. Τότε

$$X^{\otimes n} \otimes X^{\otimes m} = X^{\otimes (n+m)} \in S$$

Επομένως η συλλογή αντικειμένων S είναι τανυστικά πολλαπλασιαστική. Υποθέτουμε ότι $S \cap \mathcal{J} = \varnothing$. Τότε από το Λήμμα 5.2.10 γνωρίζουμε ότι υπάρχει πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ και $\mathcal{P} \cap S = \varnothing$. Επομένως το αντικείμενο $X \notin \mathcal{P}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα συμπεραίνουμε ότι $S \cap \mathcal{J} \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει $X^{\otimes n} \in S$ τέτοιο ώστε $X^{\otimes n} \in \mathcal{J}$. Εξ' ορισμού προκύπτει ότι $X \in \sqrt{\mathcal{J}}$. Επομένως

$$\bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P} \subset \sqrt{\mathcal{J}} \tag{5.20}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.19), (5.20) προκύπτει ότι

$$\sqrt{\mathcal{J}} = \bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$$

Για να αποδείξουμε ότι το ριζικό ενός thick τανυστικού ιδεώδους $\mathcal{J}$ είναι επίσης thick τανυστικό ιδεώδες, αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή των πρώτων τανυστικών ιδεωδών που περιέχουν το $\mathcal{J}$ είναι thick τανυστικό ιδεώδες. Προφανώς η τομή

$$\bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$$

είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{K}$ και επειδή κάθε ένα από τα πρώτα τανυστικά ιδεώδη $\mathcal{P}$ είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{K}$, ισχύει ότι $0 \in \mathcal{P}$, για κάθε πρώτο ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Επομένως

$$0 \in \bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$$

Έστω

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$$

ένα τρίγωνο στην $\mathcal{K}$, όπου $X, Y \in \bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$. Τότε $X, Y \in \mathcal{P}$, για κάθε $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, $\mathcal{P} \supset \mathcal{J}$. Επειδή η υποκατηγορία $\mathcal{P}$ είναι τριγωνισμένη, προκύπτει ότι

$$Z \in \mathcal{P}, \text{ για κάθε } \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}), \mathcal{P} \supset \mathcal{J}$$

Επομένως ισχύει ότι

$$Z \in \bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$$

και συμπεραίνουμε ότι η πλήρης υποκατηγορία $\bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$ είναι τριγωνισμένη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$. Με ανάλογο τρόπο, εύκολα, αποδεικνύουμε ότι η τομή

$$\bigcap_{\mathcal{P} \supset \mathcal{J}} \mathcal{P}$$

είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Επομένως το ριζικό ενός thick τανυστικού ιδεώδους, είναι επίσης thick τανυστικό ιδεώδες. ■

Πρόταση 5.4.4. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Κάθε thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$ είναι ριζικό.*
2. *Ισχύει ότι $X \in \langle X \otimes X \rangle$ για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία.

(1.$\Longrightarrow$2.) Υποθέτουμε ότι κάθε thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$ είναι ριζικό. Τότε το thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J} := \langle X \otimes X \rangle$ είναι ριζικό και ισχύει ότι $\sqrt{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$, δηλαδή

$$\langle X \otimes X \rangle = \{Y \in \mathcal{K} \mid \exists n \geqslant 1 \ : \ Y^{\otimes n} \in \mathcal{J}\}$$

Προφανώς

$$X^{\otimes 2} = X \otimes X \in \mathcal{J} = \langle X \otimes X \rangle \Longrightarrow X \in \sqrt{\mathcal{J}}$$

Όμως το thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J}$ είναι ριζικό, επομένως $\sqrt{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$ και προκύπτει ότι $X \in \mathcal{J} = \langle X \otimes X \rangle$.

(2.$\Longrightarrow$1.) Υποθέτουμε ότι $X \in \langle X \otimes X \rangle$, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ και έστω $\mathcal{J}$ ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Αν $X \in \mathcal{J}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το ιδεώδες $\mathcal{J}$ είναι τανυστικό, προκύπτει ότι $X^{\otimes n} \in \mathcal{J}$, για κάθε $n \geqslant 1$. Άρα $X \in \sqrt{\mathcal{J}}$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{J} \subset \sqrt{\mathcal{J}} \tag{5.21}$$

Αν υποθέσουμε ότι $X \in \sqrt{\mathcal{J}}$, τότε υπάρχει $n \geqslant 1$, τέτοιο ώστε $X^{\otimes n} \in \mathcal{J}$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$X^{\otimes n} \in \mathcal{J} \Longrightarrow X \in \mathcal{J}$$

Η απόδειξη της τελευταίας συνεπαγωγής θα γίνει με επαγωγή στο n. Για $n = 1$, ισχύει άμεσα. Για $n = 2$, έστω ότι $X^{\otimes 2} \in \mathcal{J}$, δηλαδή $X \otimes X \in \mathcal{J}$. Όμως, προφανώς, $X \otimes X \in \langle X \otimes X \rangle$ και $\langle X \otimes X \rangle$ είναι το ελάχιστο τανυστικό ιδεώδες που περιέχει το $X \otimes X$. Συνεπώς

$$\langle X \otimes X \rangle \subset \mathcal{J}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $X \in \langle X \otimes X \rangle \Longrightarrow X \in \mathcal{J}$. Επομένως το ζητούμενο ισχύει για $n = 2$.
Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $2 \leqslant m < n$, ισχύει

$$X^{\otimes m} \in \mathcal{J} \Longrightarrow X \in \mathcal{J}$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για n.
Έστω ότι $X^{\otimes n} \in \mathcal{J}$. Τότε

$$X^{\otimes (n-1)} \otimes X \in \mathcal{J}$$

Αν $X \notin \mathcal{J}$, τότε $X^{\otimes (n-1)} \in \mathcal{J}$. Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι $X \in \mathcal{J}$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς

$$X \in \mathcal{J}$$

Με επαγωγή προκύπτει ότι

$$X^{\otimes n} \in \mathcal{J} \Longrightarrow X \in \mathcal{J}$$

για όλα τα $n \geqslant 1$. Άρα συμπεραίνουμε ότι

$$\sqrt{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J} \tag{5.22}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.21), (5.22) προκύπτει ότι

$$\mathcal{J} = \sqrt{\mathcal{J}}$$

δηλαδή το thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J}$ είναι ριζικό. ■

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον φορέα μιας συλλογής αντικειμένων μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$ καθώς και την έννοια της υποκατηγορίας της $\mathcal{K}$ με φορέα ένα υποσύνολο του φάσματος της κατηγορίας.

Ορισμός 5.4.5. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και S μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Ο* **φορέας (support)** *της συλλογής αντικειμένων S ορίζεται ως η ένωση των φορέων των αντικειμένων της. Δηλαδή*

$$\mathsf{supp}(S) = \bigcup_{X \in S} \mathsf{supp}(X) \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$$

Ορισμός 5.4.6. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και Y ένα υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Τότε ορίζουμε την* **υποκατηγορία με φορέα το** *Y, ως την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{K}$ με τα ακόλουθα αντικείμενα:*

$$\mathcal{K}_Y := \{X \in \mathcal{K} \mid \mathsf{supp}(X) \subset Y\} \subset \mathcal{K}$$

Παρατήρηση 5.4.7. Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία, S μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$ και Y ένα υποσύνολο του φάσματος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$.

1. Το υποσύνολο $\mathsf{supp}(S) \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ δεν είναι το ίδιο με το κλειστό υποσύνολο $\mathsf{Z}(S) \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Ωστόσο και τα δύο ταυτίζονται με τον φορέα $\mathsf{supp}(X)$, όταν $S = \{X\}$.

2. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.3.5 προκύπτει ότι η υποκατηγορία $\mathcal{K}_Y$ του Ορισμού 5.4.6 είναι ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$.

Στα αποτελέσματα που ακολουθούν δίνουμε μια περιγραφή του φορέα μιας συλλογής αντικειμένων της $\mathcal{K}$ και της υποκατηγορίας με φορέα ένα υποσύνολο του φάσματος της $\mathcal{K}$ χρησιμοποιώντας τα πρώτα thick τανυστικά του φάσματος της κατηγορίας $\mathcal{K}$.

Λήμμα 5.4.8. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $S \subset \mathcal{K}$ μια συλλογή αντικειμένων της $\mathcal{K}$. Τότε*

$$\mathsf{supp}(S) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \not\subset \mathcal{P}\}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{Q} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες τέτοιο ώστε $\mathcal{Q} \in \mathsf{supp}(S) = \bigcup_{X \in S} \mathsf{supp}(X)$. Τότε υπάρχει $X \in S$, τέτοιο ώστε

$$\mathcal{Q} \in \mathsf{supp}(X) \Longrightarrow X \notin \mathcal{Q} \Longrightarrow S \not\subset \mathcal{Q}$$

Επομένως

$$\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \not\subset \mathcal{P}\}$$

και ισχύει ότι

$$\mathsf{supp}(S) \subset \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \not\subset \mathcal{P}\} \tag{5.23}$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \not\subset \mathcal{P}\}$. Τότε εξ' ορισμού ισχύει ότι $S \not\subset \mathcal{Q}$, δηλαδή υπάρχει αντικείμενο $X \in S$ με $X \notin \mathcal{Q}$. Άρα υπάρχει $X \in S$, τέτοιο ώστε $\mathcal{Q} \in \mathsf{supp}(X)$. Συνεπώς

$$\mathcal{Q} \in \bigcup_{X \in S} \mathsf{supp}(X) = \mathsf{supp}(S)$$

Τελικά προκύπτει η έγκλειση

$$\{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \not\subset \mathcal{P}\} \subset \mathsf{supp}(S) \tag{5.24}$$

Από τις σχέσεις (5.23), (5.24) προκύπτει ότι

$$\mathsf{supp}(S) = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \mid S \not\subset \mathcal{P}\}.$$

∎

Πρόταση 5.4.9. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $Y \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Τότε το thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{K}_Y$ ισούται με την τομή των πρώτων τανυστικών ιδεωδών της $\mathcal{K}$, που δεν ανήκουν στο Y. Δηλαδή*

$$\mathcal{K}_Y = \bigcap_{\mathcal{P} \notin Y} \mathcal{P}$$

Απόδειξη. Έστω X αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{K}$, τέτοιο ώστε $X \in \mathcal{K}_Y$, δηλαδή $\mathsf{supp}(X) \subset Y$. Επομένως για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ με την ιδιότητα $\mathcal{P} \notin Y$, ισχύει ότι $\mathcal{P} \notin \mathsf{supp}(X)$. Επομένως για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ με την ιδιότητα $\mathcal{P} \notin Y$ προκύπτει $X \in \mathcal{P}$. Άρα συμπεραίνουμε ότι

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P} \notin Y} \mathcal{P}$$

και προκύπτει

$$\mathcal{K}_Y \subset \bigcap_{\mathcal{P}\notin Y} \mathcal{P} \tag{5.25}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P}\notin Y} \mathcal{P}$$

Δηλαδή $X \in \mathcal{P}$ για κάθε πρώτο τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{P}$ το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο Y. Άρα

$$\mathcal{P} \notin \mathsf{supp}(X), \text{ για κάθε } \mathcal{P} \notin Y \Longrightarrow \mathsf{supp}(X) \subset Y \Longrightarrow X \in \mathcal{K}_Y$$

Επομένως

$$\bigcap_{\mathcal{P}\notin Y} \mathcal{P} \subset \mathcal{K}_Y \tag{5.26}$$

Από τις σχέσεις (5.25), (5.26) προκύπτει ότι

$$\mathcal{K}_Y = \bigcap_{\mathcal{P}\notin Y} \mathcal{P}$$

■

Στην ακόλουθη πρόταση, συνδέουμε το ριζικό ενός thick τανυστικού ιδεώδους με την υποκατηγορία που ορίσαμε στον Ορισμό 5.4.6:

Πρόταση 5.4.10. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ ένα thick τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Τότε ισχύει ότι*

$$\mathcal{K}_{\mathsf{supp}(X)} = \sqrt{\mathcal{J}}$$

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει ότι $\mathsf{supp}(\mathcal{J}) \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$. Από την Πρόταση 5.4.9 γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{K}_{\mathsf{supp}(X)} = \bigcap_{\mathcal{P}\notin \mathsf{supp}(X)} \mathcal{P}$$

Έστω $X \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενο, τέτοιο ώστε $X \in \sqrt{\mathcal{J}}$. Από την Πρόταση 5.4.3 προκύπτει ότι

$$X \in \bigcap_{\mathcal{P}\supset\mathcal{J}} \mathcal{P} \Longleftrightarrow X \in \mathcal{P}, \text{ για κάθε } \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \text{ με } \mathcal{J} \subset \mathcal{P}$$

Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.4.8, προκύπτει ότι

$$X \in \mathcal{P} \text{ για κάθε } \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \text{ με } \mathcal{P} \notin \mathsf{supp}(\mathcal{J}) \Longleftrightarrow X \in \bigcap_{\mathcal{P}\notin \mathsf{supp}(\mathcal{J})} \mathcal{P} \Longleftrightarrow X \in \mathcal{K}_{\mathsf{supp}(\mathcal{J})}$$

Επομένως ισχύει ότι $\mathcal{K}_{\mathsf{supp}(\mathcal{J})} = \sqrt{\mathcal{J}}$. ■

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα της διατριβής, το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας «1-1» και «επί» αντιστοιχίας, ανάμεσα στα κλειστά υποσύνολα του φάσματος μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας και στα ριζικά thick τανυστικά ιδεώδη της $\mathcal{K}$. Στην πραγματικότητα το θεώρημα μας προσφέρει ταξινόμηση για τα thick τανυστικά ιδεώδη μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathcal{K}$.

Θεώρημα 5.4.11. (Ταξινόμηση των thick τανυστικών ιδεωδών υποκατηγοριών) *Έστω $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, \otimes, \mathbf{1})$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και $\mathfrak{R}$ το σύνολο των ριζικών thick τανυστικών ιδεωδών της $\mathcal{K}$. Ας είναι $\mathfrak{G}$ το σύνολο των υποσυνόλων $Y \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ της μορφής $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$, όπου Y_i κλειστό υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ με $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})\backslash Y_i$ ημισυμπαγές για κάθε $i \in I$. Τότε η απεικόνιση*

$$\Phi : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{R}, \quad Y \longmapsto \mathcal{K}_Y = \{X \in \mathcal{K} \mid \mathsf{supp}(X) \subset Y\}$$

είναι «1-1» και «επί», διατηρεί την διάταξη, και έχει ως αντίστροφη την απεικόνιση

$$\Psi : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{G}, \quad \mathcal{J} \longmapsto \mathsf{supp}(\mathcal{J}) = \bigcup_{X\in\mathcal{J}} \mathsf{supp}(X)$$

Απόδειξη. **1ο Βήμα**: Αρχικά θα αποδείξουμε ότι οι απεικονίσεις είναι «καλά ορισμένες». Έστω Y ένα υποσύνολο του φάσματος που ανήκει στη συλλογή $\mathfrak{G}$. Θα αποδείξουμε ότι το thick τανυστικό ιδεώδες $\Phi(Y) = \mathcal{K}_Y$ είναι ριζικό, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{K}_Y = \sqrt{\mathcal{K}_Y} = \{X \in \mathcal{K} \mid \exists n \geqslant 1 : X^{\otimes n} \in \mathcal{K}_Y\}$. Έστω $X \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενο, τέτοιο ώστε $X \in \mathcal{K}_Y$, δηλαδή $X^{\otimes 1} \in \mathcal{K}_Y$ και άμεσα προκύπτει ότι $X \in \sqrt{\mathcal{K}_Y}$. Άρα

$$\mathcal{K}_Y \subset \sqrt{\mathcal{K}_Y} \tag{5.27}$$

Έστω, τώρα, $X \in \mathcal{K}$ ένα αντικείμενο τέτοιο ώστε $X \in \sqrt{\mathcal{K}_Y}$. Τότε υπάρχει $n \geqslant 1$ τέτοιο ώστε $X^{\otimes n} \in \mathcal{K}_Y$. Επομένως

$$\mathsf{supp}(X^{\otimes n}) \subset Y \Longrightarrow \mathsf{supp}(X) \cap \cdots \cap \mathsf{supp}(X) \subset Y \Longrightarrow \mathsf{supp}(X) \subset Y$$

Άρα $X \in \mathcal{K}_Y$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\sqrt{\mathcal{K}_Y} \subset \mathcal{K}_Y \tag{5.28}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.27), (5.28) προκύπτει ότι $\mathcal{K}_Y = \sqrt{\mathcal{K}_Y}$ και άρα η απεικόνιση $\Phi \colon \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{R}$ είναι «καλά ορισμένη». Για να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση Ψ είναι «καλά ορισμένη», θεωρούμε ένα ριζικό thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J} \in \mathfrak{R}$. Τότε $\Psi(\mathcal{J}) = \mathsf{supp}(\mathcal{J}) = \bigcup_{X \in \mathcal{J}}(\mathsf{supp}(X))$. Άρα, εξ' ορισμού, το $\mathsf{supp}(\mathcal{J})$ είναι ένωση από κλειστά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, καθένα από τα οποία έχει ημισυμπαγές συμπλήρωμα. Συνεπώς και η δεύτερη απεικόνιση είναι καλά ορισμένη.

2ο Βήμα: Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι απεικονίσεις Φ, Ψ διατηρούν την διάταξη. Έστω $Y_1, Y_2 \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοια ώστε $Y_1 \subset Y_2$. Τότε

$$\Phi(Y_1) = \mathcal{K}_{Y_1} = \{X \in \mathcal{K} \mid \mathsf{supp}(X) \subset Y_1\}$$

και

$$\Phi(Y_2) = \mathcal{K}_{Y_2} = \{X \in \mathcal{K} \mid \mathsf{supp}(X) \subset Y_2\}$$

Αν $X \in \mathcal{K}_{Y_1}$, τότε $\mathsf{supp}(X) \subset Y_1 \subset Y_2$. Επομένως $X \in \mathcal{K}_{Y_2}$ και συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{K}_{Y_1} \subset \mathcal{K}_{Y_2}$. Άρα η απεικόνιση Φ διατηρεί τη διάταξη. Ακόμη θεωρούμε δύο ριζικά thick τανυστικά ιδεώδη $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \in \mathfrak{R}$, τέτοια ώστε $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$. Τότε

$$\Psi(\mathcal{J}_1) = \mathsf{supp}(\mathcal{J}_1) = \bigcup_{X \in \mathcal{J}_1} \mathsf{supp}(X) \subset \bigcup_{X \in \mathcal{J}_2} \mathsf{supp}(X) = \mathsf{supp}(\mathcal{J}_2) = \Psi(\mathcal{J}_2)$$

Επομένως και η απεικόνιση Ψ διατηρεί τη διάταξη.

3ο Βήμα: Για να αποδείξουμε το Θεώρημα, απομένει να αποδείξουμε ότι οι συνθέσεις $\Phi \circ \Psi$, $\Psi \circ \Phi$ είναι ίσες με την ταυτοτική απεικόνιση. Έστω $Y \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ ένα υποσύνολο του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, το οποίο ανήκει στο σύνολο $\mathfrak{G}$. Τότε

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$$

όπου Y_i είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ και τα συμπληρώματα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash Y_i$ είναι ημισυμπαγή σύνολα για κάθε $i \in I$. Όμως το συμπλήρωμα $\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash Y_i$ είναι ημισυμπαγές και ανοικτό. Επομένως, από την Πρόταση 5.2.26, γνωρίζουμε ότι

$$\mathsf{Spc}(\mathcal{K}) \backslash Y_i = \mathsf{U}(X), \text{ για κάποιο αντικείμενο } X \in \mathcal{K}$$

Τότε $Y_i = \mathsf{supp}(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$ και $Y_i \subset Y$. Επομένως

$$\mathsf{supp}(X) \subset Y \Longrightarrow X \in \mathcal{K}_Y$$

Άρα αν $\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} \in Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$, προκύπτει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\mathcal{P} = \mathsf{supp}(X), \text{ για κάποιο αντικείμενο } X \in \mathcal{K} \Longrightarrow \mathcal{P} = \mathsf{supp}(X), \text{ για κάποιο αντικείμενο } X \in \mathcal{K}_Y$$

Άρα $\mathcal{P} \in \bigcup_{X\in\mathcal{K}_Y} \mathsf{supp}(X)$ και καταλήγουμε ότι

$$Y \subset \bigcup_{X\in\mathcal{K}_Y} \mathsf{supp}(X) \tag{5.29}$$

Εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\bigcup_{X\in\mathcal{K}_Y} \mathsf{supp}(X) \subset Y \tag{5.30}$$

Από τις σχέσεις (5.29), (5.30) συμπεραίνουμε ότι

$$\bigcup_{X\in\mathcal{K}_Y} \mathsf{supp}(X) = Y$$

Με βάση την τελευταία σχέση αποδεικνύουμε ότι:

$$(\Psi \circ \Phi)(Y) = \Psi(\Phi(Y)) = \Psi(\mathcal{K}_Y) = \mathsf{supp}(\mathcal{K}_Y) = \bigcup_{X\in\mathcal{K}_Y} \mathsf{supp}(X) = Y$$

δηλαδή $\Psi \circ \Phi = \mathsf{Id}_{\mathfrak{S}}$. Αντίστοιχα θεωρούμε ένα ριζικό thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$. Τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.4.10 και το γεγονός ότι το τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J}$ είναι ριζικό, έχουμε:

$$(\Phi \circ \Psi)(\mathcal{J}) = \Phi(\Psi(\mathcal{J})) = \Phi(\mathsf{supp}(\mathcal{J})) = \mathcal{K}_{\mathsf{supp}(\mathcal{J})} = \sqrt{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$$

δηλαδή $\Phi \circ \Psi = \mathsf{Id}_{\mathfrak{R}}$. Συνεπώς αποδείξαμε ότι η απεικόνιση $\Phi\colon \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{R}$ είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη την απεικόνιση $\Psi\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$. ∎

Παρατήρηση 5.4.12. Η συνθήκη $Y = \bigcup_{i\in Y_i} Y_i$, με $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})\backslash Y_i$ ημισυμπαγή για κάθε $i \in I$, είναι γνωστή ως συνθήκη Thomason. Στην περίπτωση που ο τοπολογικός χώρος $\mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι χώρος της Noether, η συνθήκη Thomason μπορεί να αντικατασταθεί από την απλούστερη συνθηκή: «το σύνολο Y είναι specialization closed», την οποία θα ορίσουμε παρακάτω.

Ορισμός 5.4.13. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο Y του X καλείται* **specialization closed** *αν είναι ένωση κλειστών υποσυνόλων του X.*

Παρατήρηση 5.4.14. Ισοδύναμα με τον Ορισμό 5.4.13, ένα υποσύνολο $Y \subset X$ ενός τοπολογικού χώρου X είναι specialization closed αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$y \in Y \Longrightarrow \overline{\{y\}} \subset Y$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έννοια των specialization closed υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου, μπορούμε να ορίσουμε μια κλάση από support data, τις ταξινομούσες support data. Αυτές οι support data έχουν κεντρικό ρόλο στη διατριβή μιας και όπως θα δούμε στη συνέχεια όταν η support data είναι ταξινομούσα υπάρχει μια πολύ καλή περιγραφή για το φάσμα του Balmer της κατηγορίας $\mathcal{K}$.

Ορισμός 5.4.15. *Έστω $\mathcal{K}$ μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία. Μια support data (T, σ) καλείται* **ταξινομούσα support data (classifying support data)** *αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Ο τοπολογικός χώρος T είναι χώρος της Noether και κάθε μη-κενό, ανάγωγο, κλειστό υποσύνολο $Z \subset T$ έχει μοναδικό γενικό σημείο (generic point). Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x \in Z$, τέτοιο ώστε $\overline{\{x\}} = Z$.*

2. *Υπάρχει μια «1-1» και «επί» απεικόνιση*

   $$\theta\colon \{Y \subset T \mid Y : \textit{specialization closed}\} \longrightarrow \{\mathcal{J} \subset \mathcal{K} \mid \mathcal{J} : \textit{ριζικό thick τανυστικό ιδεώδες}\}$$

   που ορίζεται ως

   $$Y \longmapsto \{X \in \mathcal{K} \mid \sigma(X) \subset Y\}$$

   με αντίστροφη την απεικόνιση

   $$\mathcal{J} \longmapsto \sigma(\mathcal{J}) := \bigcup_{X\in\mathcal{J}} \sigma(X).$$

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο της θεωρίας του Balmer αποδεικνύοντας το ακόλουθο θεώρημα το οποίο είναι ίσως το πλέον σημαντικό, αφού εξασφαλίζει ότι η απεικόνιση του Θεωρήματος 5.3.6 είναι, κάτω από ορισμένες συνθήκες για την support data, ομοιομορφισμός. Το θεώρημα αυτό δημοσιεύθηκε στο άρθρο [2] του Balmer.

Θεώρημα 5.4.16. (P. Balmer, 2005) *Υποθέτουμε ότι (T,σ) είναι μία ταξινομούσα support data στην ταυνστική τριγωνισμένη κατηγορία $\mathcal{K}$. Τότε η απεικόνιση $f\colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ του Θεωρήματος 5.3.6 είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι η απεικόνιση στην οποία αναφερόμαστε είναι η απεικόνιση

$$f\colon T \longrightarrow \mathsf{Spc}\,(\mathcal{K}), \quad f(x) := \{X \in \mathcal{K} \,|\, x \notin \sigma(X)\}$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και $\sigma(X) = f^{-1}(\mathsf{supp}(X))$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Κάθε κλειστό υποσύνολο $Z \subset T$ είναι της μορφής $Z = \sigma(X)$, για κάποιο αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Γνωρίζουμε ότι $\sigma(X_1) \cup \cdots \cup \sigma(X_n) = \sigma(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)$ και ο τοπολογικός χώρος T είναι χώρος της Noether. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $Y \subset T$, είναι ένα μη-κενό, κλειστό υποσύνολο του T, τότε το υποσύνολο Y γράφεται σαν πεπερασμένη ένωση ανάγωγων υποσυνόλων. Θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{A}$ που αποτελείται από μη-κενά, κλειστά υποσύνολα του T, τα οποία δεν γράφονται σαν πεπερασμένη ένωση ανάγωγων υποσυνόλων, υποθέτουμε ότι αυτή η συλλογή δεν είναι κενή και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επειδή ο τοπολογικός χώρος T είναι χώρος της Noether, έπεται ότι η μη-κενή συλλογή $\mathcal{A}$, έχει ένα ελάχιστο στοιχείο Z, το οποίο δεν μπορεί να γραφεί σαν πεπερασμένη ένωση ανάγωγων υποσυνόλων του T. Τότε το υποσύνολο Z δεν είναι, επίσης, ανάγωγο. Άρα μπορεί να γραφεί σαν ξένη ένωση δύο κλειστών υποσυνόλων $Z_1, Z_2 \subset Z$, όπου $Z_1 \neq Z$ και $Z_2 \neq Z$. Επειδή το Z είναι το ελάχιστο στοιχείο της συλλογής $\mathcal{A}$, προκύπτει ότι τα υποσύνολα $Z_1, Z_2 \subset Z$ δεν ανήκουν στην συλλογή $\mathcal{A}$. Άρα μπορούν να γραφούν σαν πεπερασμένη ένωση ανάγωγων υποσυνόλων του T. Όμως σε αυτήν την περίπτωση το ίδιο θα συνέβαινε και με το Z, το οποίο ωστόσο ανήκει στη συλλογή $\mathcal{A}$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για κάποιο ανάγωγο, κλειστό υποσύνολο $Z = \overline{\{x\}}$, όπου $x \in T$. Όμως

$$\overline{\{x\}} = Z = \theta^{-1}(\theta(Z)) = \bigcup_{X \in \theta(Z)} \sigma(X)$$

όπου θ είναι η απεικόνιση του Ορισμού 5.4.15. Άρα υπάρχει αντικείμενο $X \in \theta(Z) \subset \mathcal{K}$ τέτοιο ώστε $x \in \sigma(X) \subset Z$. Επομένως $\overline{\{x\}} \subset \sigma(X) \subset Z = \overline{\{x\}}$, δηλαδή $\sigma(X) = \overline{\{x\}}$. Άρα

$$Z = \sigma(X), \text{ για κάποιο } X \in \mathcal{K}$$

Για $x \in T$ θέτουμε

$$Y(x) := \{y \in T | x \notin \overline{\{y\}}\}$$

Θα αποδείξουμε ότι σύνολο $Y(x)$ είναι specialization closed υποσύνολο του τοπολογικού χώρου X. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε στοιχείο $y \in Y(x)$, προκύπτει ότι $\overline{\{y\}} \subset Y(x)$. Θεωρούμε ένα στοιχείο $y \in Y(x)$. Από τον ορισμό του συνόλου $Y(x)$ προκύπτει ότι $x \notin \overline{\{y\}}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $z \in \overline{\{y\}}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\{z\} \subset \overline{\{y\}} \Longrightarrow \overline{\{z\}} \subset \overline{\overline{\{y\}}} = \overline{\{y\}}$$

Υποθέτουμε ότι $z \notin Y(x)$. Τότε

$$x \in \overline{\{z\}} \subset \overline{\{y\}} \Longrightarrow x \in \overline{\{y\}} \Longrightarrow y \notin Y(x)$$

Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο γιατί ξεκινήσαμε υποθέτοντας ότι $y \in Y(x)$. Επομένως ισχύει ότι $z \in Y(x)$ και καταλήξαμε στο ότι

$$\overline{\{y\}} \subset Y(x)$$

Τελικά αποδείξαμε ότι το $Y(x)$ είναι specialization closed. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$. Θα αποδείξουμε ότι αν $\sigma(X) \subset Y(x)$ τότε ισχύει ότι $x \notin \sigma(X)$. Υποθέτουμε ότι $\sigma(X) \subset Y(x)$. Τότε γνωρίζουμε ότι $x \notin Y(x)$ διότι, αν $x \in Y(x)$, θα ίσχυε ότι $x \notin \overline{\{x\}}$, το οποίο είναι άτοπο. Όμως $\sigma(X) \subset Y(x)$ και άρα $x \notin \sigma(X)$.

Αντίστροφα, γνωρίζουμε ότι το υποσύνολο $\sigma(X) \subset \mathsf{Spc}(\mathcal{K})$ είναι κλειστό. Άρα το $\sigma(X)$ είναι specialization closed. Επομένως ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$y \in \sigma(X) \Longrightarrow \overline{\{y\}} \subset \sigma(X)$$

Υποθέτουμε ότι $x \notin \sigma(X)$ και θεωρούμε ένα στοιχείο $y \in T$, τέτοιο ώστε $y \in \sigma(X)$. Όμως

$$y \in \sigma(X) \Longrightarrow \overline{\{y\}} \subset \sigma(X) \Longrightarrow x \notin \overline{\{y\}} \Longrightarrow y \in Y(x)$$

Τελικά

$$\sigma(X) \subset Y(x)$$

και αποδείξαμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\sigma(X) \subset Y(x) \Longleftrightarrow x \notin \sigma(X)$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\theta(Y(x)) = \{X \in \mathcal{K} \mid \sigma(X) \subset Y(x)\} = \{X \in \mathcal{K} \mid x \notin \sigma(X)\} = f(x)$$

Έστω $x_1, x_2 \in T$, τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \theta(Y(x_1)) = \theta(Y(x_2)) \Longrightarrow Y(x_1) = Y(x_2) \Longrightarrow \overline{\{x_1\}} = \overline{\{x_2\}} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως αποδείξαμε ότι η απεικόνιση f είναι «1-1».

Έστω $\mathcal{P}$ ένα πρώτο τανυστικό ιδεώδες της $\mathcal{K}$. Επειδή η απεικόνιση θ είναι «επί», ισχύει ότι υπάρχει ένα spesialization closed υποσύνολο $Y \subset T$, τέτοιο ώστε $\mathcal{P} = \theta(Y)$. Ακόμη ισχύει ότι $\mathcal{P} \neq \mathcal{K}$, αφού το $\mathcal{P}$ είναι πρώτο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $X \in \mathcal{K}$, τέτοιο ώστε $X \notin \mathcal{P} = \theta(Y)$. Άρα υπάρχει $x \in T \backslash Y$, τέτοιο ώστε $\theta(x) = X$, συνεπώς $T \backslash Y \neq \emptyset$. Έστω $x, y \in T \backslash Y$. Επειδή τα σύνολα $\overline{\{x\}}$ και $\overline{\{y\}}$ είναι κλειστά, από τον ισχυρισμό που αποδείξαμε, ξέρουμε ότι υπάρχουν αντικείμενα $X_1, X_2 \in \mathcal{K}$, τέτοια ώστε

$$\overline{\{x\}} = \sigma(X_1) \;\text{ και }\; \overline{\{y\}} = \sigma(X_2)$$

Όμως $x, y \notin Y$, επομένως $X_1, X_2 \notin \theta(Y) = \mathcal{P}$. Επειδή το $\mathcal{P}$ είναι πρώτο προκύπτει ότι $X_1 \otimes X_2 \notin \mathcal{P} = \theta(Y) = \{X \in \mathcal{K} \mid \sigma(X) \subset Y\}$, δηλαδή $\sigma(X_1 \otimes X_2) \not\subset Y$. Τότε υπάρχει $z \in T \backslash Y$ τέτοιο ώστε $z \in \sigma(X_1 \otimes X_2) = \sigma(X_1) \cap \sigma(X_2) = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$. Επομένως

$$\overline{\{z\}} \subset \overline{\{x\}} \;\text{ και }\; \overline{\{z\}} \subset \overline{\{y\}}$$

Θεωρούμε την μη-κενή οικογένεια από κλειστά σύνολα:

$$\mathcal{F} := \{\overline{\{x\}} \subset T | x \in T \backslash Y\}$$

η οποία έχει την ιδιότητα, ότι κάθε δύο στοιχεία της δέχονται κάτω φράγμα ως προς τη σχέση έγκλεισης. Από την άλλη επειδή ο τοπολογικός χώρος T είναι χώρος της Noether, εξ' ορισμού θα υπάρχει minimal στοιχείο στην $\mathcal{F}$, το οποίο είναι το κάτω φράγμα για την $\mathcal{F}$ από την παραπάνω αιτιολόγηση. Επομένως υπάρχει $x \in T \backslash Y$, τέτοιο ώστε

$$\{y \in T \mid x \in \overline{\{y\}}\}$$

Αντίστροφα γνωρίζουμε ότι το Y είναι specialization closed. Αν $\overline{\{y\}} \subset Y$, τότε

$$x \in \overline{\{y\}} \subset Y \Longrightarrow x \in Y$$

Όμως αυτό είναι άτοπο διότι $x \in T \backslash Y$. Άρα $\overline{\{y\}} \not\subset Y$ και επειδή το Y είναι specialization closed προκύπτει ότι $y \notin Y$. Συνεπώς,

$$\{y \in T \mid x \in \overline{\{y\}}\} \subset T \backslash Y$$

Τελικά

$$T \backslash Y = \{y \in T \mid x \in \overline{\{y\}}\}$$

Με άλλα λόγια

$$Y = \{y \in T \mid x \notin \overline{\{y\}}\} = Y(x)$$

Επομένως $\mathcal{P} = \theta(Y) = \theta(Y(x)) = f(x)$, το οποίο αποδεικνύει ότι η f είναι «επί». Τέλος για ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{K}$, επειδή $f^{-1}(\mathsf{supp}(X)) = \sigma(X)$, προκύπτει ότι $f(\sigma(X)) = \mathsf{supp}(X)$. Όμως από τον ισχυρισμό που αποδείξαμε παραπάνω, ξέρουμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του T είναι της μορφής $\sigma(X)$, για κάποιο $X \in \mathcal{K}$. Επομένως οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η απεικόνιση f είναι κλειστή. Τελικά αποδείξαμε ότι η απεικόνιση

$$f : T \longrightarrow \mathsf{Spc}\,(\mathcal{K})$$

είναι ομοιομορφισμός. ■

Παρατήρηση 5.4.17. Η χρησιμότητα του θεωρήματος του Balmer είναι μεγάλη καθώς μας επιτρέπει κάτω από ορισμένες συνθήκες να περιγράψουμε πλήρως το φάσμα του Balmer μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας. Συνήθως το φάσμα των πρώτων thick τανυστικών ιδεωδών της κατηγορίας αποτελεί ένα σύνθετο και περίπλοκο σύνολο. Εφαρμόζοντας το Θεωρήμα 5.4.16 ταυτίζουμε το φάσμα με έναν τοπολογικό χώρο, ο οποίος συχνά είναι αρκετά απλούστερος και μας δίνει επαρκή πληροφορία για την κατηγορία στην οποία εργαζόμαστε. Γενικές πληροφορίες για διακεκριμένα παραδείγματα και εφαρμογές της θεωρίας του Balmer και συγκεκριμένα του Θεωρήματος 5.4.16 μπορεί κανείς να βρει στα [2] και [3]. Στην διατριβή θα επιλέξουμε να παρουσιάσουμε εφαρμογές αυτής της θεωρίας σε δυο κατηγορίες που εμφανίζονται στην Θεωρία Αναπαραστάσεων, στη Μεταθετική Άλγεβρα και στην Αλγεβρική Γεωμετρία.

Κεφάλαιο 6

Το Φάσμα της Ευσταθούς Κατηγορίας των Προτύπων

Στο παρών κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε την θεωρία ταξινόμησης του Balmer στην ευσταθή κατηγορία των προτύπων $\mathbb{K}G$-$\underline{\text{mod}}$ υπεράνω της ομάδας άλγεβρας $\mathbb{K}G$. Όπως έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο της διατριβής η κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\text{mod}}$ εφοδιασμένη με το τανυστικό γινόμενο $\otimes_{\mathbb{K}}$ του σώματος $\mathbb{K}$, αποκτά δομή τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας. Στο δρόμο προς την εφαρμογή της θεωρίας του Balmer αρχικά θα παρουσιάσουμε κάποιες απαραίτητες έννοιες από την Ομολογική Άλγεβρα που αφορούν το συναρτητή επέκτασης Ext, ο οποίος θα μας απασχολήσει στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου. Ακόμη θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίον οι ομάδες συνομολογίας $\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K})$ αποκτούν δομή βαθμωτού δακτυλίου. Στην επόμενη ενότητα θα παραθέσουμε συνοπτικά επιλεγμένα στοιχεία από τη θεωρία των ποικιλοτήτων προτύπων, όπως αυτά παρουσιάζονται στο [7]. Οι ποικιλότητες προτύπων είναι απαραίτητες για να ορίσουμε support data στην κατηγορία $\mathbb{K}G$-$\underline{\text{mod}}$. Κλείνοντας το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε το θεώρημα ταξινόμησης του Balmer στην ευσταθή κατηγορία των προτύπων, δίνοντας έτσι μια πλήρη περιγραφή του φάσματος των πρώτων thick τανυστικών ιδεωδών της κατηγορίας.

6.1 Ο Συναρτητής Ext

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε την κατασκευή του συναρτητή Ext και θα παραθέσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες αυτού. Δεδομένου ότι η κατασκευή του είναι από τις θεμελιώδεις στην Ομολογική Άλγεβρα, θα επικεντρωθούμε στα κύρια σημεία, χωρίς να αναφερθούμε σε πολλές λεπτομέρειες. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις ενότητες (2.4), (2.5) και (2.6) του [6]. Επιπλέον όπως προαναφέραμε θα εφοδιάσουμε τις ομάδες συνομολογίας $\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K})$, όπου G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και $\mathbb{K}$ ένα σώμα χαρακτηριστικής $p \mid |G|$.

Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας κάποιες στοιχειώδεις έννοιες από την Ομολογική Άλγεβρα.

Ορισμός 6.1.1. *Έστω Λ ένας δακτύλιος.*

1. *Μια* **προβολική ανάλυση (projective resolution)** *ενός Λ-προτύπου M είναι μια ακριβής ακολουθία*

$$P_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M$$

   όπου P_n είναι προβολικά Λ-πρότυπα.

2. *Μια* **ενέσιμη ανάλυση (injective resolution)** *ενός Λ-προτύπου M είναι μια ακριβής ακολουθία*

$$I^\bullet : \quad M \xrightarrow{\delta^0} I_0 \xrightarrow{\delta^1} I_1 \xrightarrow{\delta^2} I_2 \longrightarrow \cdots$$

   όπου I_n είναι ενέσιμα Λ-πρότυπα.

Έστω X ένα αριστερό Λ-πρότυπο και

$$P_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M$$

μια προβολική ανάλυση ενός αριστερού Λ-προτύπου M. Εφαρμόζουμε στην προβολική ανάλυση $P_\bullet$ τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_\Lambda(\text{-}, X)$ και προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\mathsf{Hom}_\Lambda(P_\bullet, X) : \quad \mathsf{Hom}_\Lambda(M, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_\Lambda(P_0, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_\Lambda(P_1, X) \longrightarrow \cdots$$

Τότε ορίζουμε

$$\mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, X) = \mathsf{H}^n(\mathsf{Hom}_\Lambda(P_\bullet, X))$$

Παρατήρηση 6.1.2. 1. Οι συναρτητές $\mathsf{Ext}^n_\Lambda(\text{-}, X)$ είναι οι δεξιά παραγόμενοι συναρτητές του συναρτητή $\mathsf{Hom}_\Lambda(\text{-}, X)$. Δηλαδή

$$\mathsf{R}^n \,\mathsf{Hom}_\Lambda(\text{-}, X) = \mathsf{Ext}^n_\Lambda(\text{-}, X)$$

2. Επειδή ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_\Lambda(\text{-}, X)$ είναι αριστερά ακριβής, ισχύει ότι

$$\mathsf{Ext}^0_\Lambda(M, X) = \mathsf{Hom}_\Lambda(M, X)$$

Θα διατυπώσουμε, τώρα, τον ορισμό της επαυξημένης άλγεβρας.

Ορισμός 6.1.3. *Μια* **επαυξημένη άλγεβρα (augmented algebra)** Λ *πάνω από έναν μεταθετικό δακτύλιο* R *είναι μια άλγεβρα* Λ *μαζί με έναν επιμορφισμό αλγεβρών* $\epsilon \colon \Lambda \longrightarrow R$*. Ο ομομορφισμός* ϵ *καλείται* **απεικόνιση επαύξησης (augmentation map)**.

Σχόλιο 6.1.4. Έστω Λ μια επαυξημένη R-άλγεβρα με απεικόνιση επαύξησης $\epsilon \colon \Lambda \longrightarrow R$. Τότε ο δακτύλιος R αποκτά δομή αριστερού Λ-προτύπου, μέσω της δράσης:

$$\cdot \, : \; \Lambda \times R \longrightarrow R, \; \lambda \cdot x = \epsilon(\lambda)x$$

Ορισμός 6.1.5. *Έστω* Λ *μια επαυξημένη* R*-άλγεβρα και* M *ένα* Λ*-πρότυπο. Ορίζουμε τις* **ομάδες συνομολογίας (cohomology groups)** *με συντελεστές στο πρότυπο* M *ως*

$$\mathsf{H}^n(\Lambda, M) = \mathsf{Ext}^n_\Lambda(R, M)$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι Λ είναι ένας δακτύλιος και M, M' είναι δύο αριστερά Λ-πρότυπα. Θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε τα στοιχεία που περιέχει η ομάδα $\mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M')$. Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε και θα παραθέσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των, λεγόμενων, n-οστών επεκτάσεων ενός προτύπου. Λόγω της σύνδεσης του συναρτητή Ext με τις επεκτάσεις προτύπων έχει επικρατήσει αυτός ο συναρτητής να καλείται συναρτηής επέκτασης.

Ορισμός 6.1.6. *Έστω* Λ *ένας δακτύλιος και* M, M' *δύο αριστερά* Λ*-πρότυπα. Μια ακριβής ακολουθία της μορφής*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

καλείται n**-οστή επέκταση (**n**-fold extension)** *του* M *κατά* M'*. Για* $n = 1$ *η* n*-οστή επέκταση καλείται απλώς* **επέκταση (extension)**.

Ας είναι

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

δύο n-οστές επεκτάσεις του M κατά M'. Αυτές είναι ισοδύναμες αν το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M'_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 6.1.7. *Ορίζουμε την αβελιανή ομάδα* $\mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M')$ *ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των* n*-οστών επεκτάσεων του* M *κατά* M'*.*

Παράδειγμα 6.1.8. Η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Ext}^1_\Lambda(M, M')$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των επεκτάσεων

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Σε αυτήν την περίπτωση δύο επεκτάσεις

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

είναι ισοδύναμες αν υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M'_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

μεταξύ σύντομων ακριβών ακολουθιών.

Συμβολισμός: 1. Αν M είναι ένα Λ-πρότυπο συμβολίζουμε $\tilde{\Omega}(M)$ τον πυρήνα ενός επιμορφισμού $P \longrightarrow M$, όπου το P είναι προβολικό Λ-πρότυπο, ενώ

$$\tilde{\Omega}^n = \underbrace{\Omega \circ \Omega \circ \cdots \circ \Omega}_{n-\text{φορές}}$$

2. Έστω $\zeta \in \mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M')$. Συμβολίζουμε με $\hat{\zeta}$ την απεικόνιση:

$$\hat{\zeta} \colon \tilde{\Omega}^n(M) \longrightarrow M'$$

ενώ $L_\zeta := \mathsf{Ker}(\hat{\zeta})$.

Ακολούθως στοχεύουμε να δώσουμε στην αβελιανή ομάδα $\mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M)$ δομή δακτυλίου. Για να το πετύχουμε αυτό θα ορίσουμε μια πράξη σύνθεσης ανάμεσα στα στοιχεία των $\mathsf{Ext}^m_\Lambda(M', M'')$ και $\mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M')$, για κάποια αριστερά Λ-πρότυπα M, M' και M'', όπου M, M' και M'' είναι αριστερά Λ-πρότυπα.

Ορισμός 6.1.9. *Έστω* Λ *ένας δακτύλιος και* M, M' *και* M'' *αριστερά* Λ*-πρότυπα. Υποθέτουμε ότι οι ακριβείς ακολουθίες*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

αναπαριστούν δύο στοιχεία $\zeta \in \mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M')$ *και* $\eta \in \mathsf{Ext}^m_\Lambda(M', M'')$ *αντίστοιχα. Τότε ορίζεται η* **συγκόλληση Yoneda (Yoneda splice)***:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] & M'_{m-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M'_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & & M' \arrow[ur] \arrow[d] & & & & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

η οποία αναπαριστά το στοιχείο $\eta \circ \zeta \in \mathsf{Ext}^{n+m}_\Lambda(M, M'')$*. Ακολούθως επάγεται μια διγραμμική απεικόνιση*

$$\mathsf{Ext}^m_\Lambda(M', M'') \times \mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M') \longrightarrow \mathsf{Ext}^{m+n}_\Lambda(M, M'')$$

η οποία καλείται **σύνθεση Yoneda (Yoneda composition)**.

Έπειτα θα υπενθυμίσουμε τον ορισμό του βαθμωτού δακτυλίου και θα παραθέσουμε μερικούς ακόμη ορισμούς εννοιών που πηγάζουν από τη θεωρία των βαθμωτών δακτυλίων και θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

Ορισμός 6.1.10. *Ένας* **βαθμωτός δακτύλιος (graded ring)** *είναι ένας δακτύλιος* $R^\star$ *μαζί με μια οικογένεια* $\{R_n\}_{n\geqslant 0}$ *προσθετικών υποομάδων του* $R^\star$ *τέτοιων ώστε:*

1. $R^\star = \bigoplus_{n\geqslant 0} R_n$
2. $R_n R_m \subset R_{n+m}$*, για κάθε* $n, m \geqslant 0$.

Ορισμός 6.1.11. *Έστω* $R^\star$ *ένας βαθμωτός δακτύλιος. Ένα μη-μηδενικό στοιχείο* $x \in R_n$ *καλείται* **ομογενές στοιχείο (homogeneous element)** *του* $R^\star$ *βαθμού* n *και συμβολίζουμε* $\mathsf{deg}(x) = n$.

Ορισμός 6.1.12. *Ένας βαθμωτός δακτύλιος* $R^\star$ *καλείται* **βαθμωτά μεταθετικός δακτύλιος (graded commutative ring)** *αν για κάθε δυο ομογενή στοιχεία* x, y *ισχύει ότι:*

$$xy = (-1)^{\mathsf{deg}(x)\mathsf{deg}(y)} yx$$

Παρατήρηση 6.1.13. Η σύνθεση Yoneda είναι προσεταιριστική πράξη και καθιστά την αβελιανή ομάδα

$$\mathsf{Ext}^\star_\Lambda(M, M) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M)$$

έναν **βαθμωτό δακτύλιο**.

Παρατήρηση 6.1.14.
1. Έστω M, M' δυο Λ-πρότυπα. Τότε η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Ext}^\star_\Lambda(M, M')$ είναι ένα $\mathsf{Ext}^\star_\Lambda(M', M')$-$\mathsf{Ext}^\star_\Lambda(M, M)$-διπρότυπο.
2. Ο βαθμωτός δακτύλιος $\mathsf{Ext}^\star_\Lambda(M, M)$ δεν είναι μεταθετικός δακτύλιος.
3. Έστω $\zeta \in \mathsf{Ext}^n_\Lambda(M, M')$ και $\eta \in \mathsf{Ext}^m_\Lambda(M', M'')$ είναι δύο στοιχεία που παριστάνονται από τις απεικονίσεις $\hat{\zeta} \colon \tilde{\Omega}(M) \longrightarrow M'$ και $\hat{\eta} \colon \tilde{\Omega}(M') \longrightarrow M''$ αντίστοιχα. Τότε θεωρούμε την απεικόνιση
$$\tilde{\Omega}^m(\hat{\zeta}) \colon \tilde{\Omega}^{n+m}(M) \longrightarrow \tilde{\Omega}^m(M')$$
και θέτουμε
$$\eta \,\hat{\circ}\, \zeta := \hat{\eta} \circ \tilde{\Omega}^m(\hat{\zeta}) \colon \tilde{\Omega}^{n+m}(M) \longrightarrow M''$$
Η απεικόνιση $\eta \,\hat{\circ}\, \zeta$ είναι αντιπρόσωπος της συγκόλλησης Yoneda των παραπάνω απεικονίσεων.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι αν ο δακτύλιος Λ είναι μια ομάδα άλγεβρα RG, ο δακτύλιος $\mathsf{H}^\star(G,R) = \mathsf{Ext}^\star_{RG}(R,R)$ είναι βαθμωτά μεταθετικός δακτύλιος. Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε μια νέα πράξη ανάμεσα στα στοιχεία του δακτυλίου $\mathsf{Ext}^\star_{RG}(R,R)$, η οποία καλείται cup product. Η παρουσίαση του cup product θα είναι συνοπτική και για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [6].

Θεωρούμε μια ομάδα άλγεβρα RG η οποία είναι ένα προβολικό R-πρότυπο και M, M', N, N' RG-πρότυπα τα οποία είναι προβολικά σαν R-πρότυπα. Με αυτές τις συνθήκες ορίζουμε το **cup product**:

$$\cup : \mathsf{Ext}^m_{RG}(M,M') \times \mathsf{Ext}^n_{RG}(N,N') \longrightarrow \mathsf{Ext}^{m+n}_{RG}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

ως εξής: θεωρούμε δύο στοιχεία $\zeta \in \mathsf{Ext}^m_{RG}(M,M')$, $\eta \in \mathsf{Ext}^n_{RG}(N,N')$ και ας είναι

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

δύο ακριβείς ακολουθίες που τα αναπαριστούν. Επιλέγουμε τις ακολουθίες

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow P_{m-1}/L_\zeta \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow Q_{n-1}/L_\eta \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

για να εξασφαλίσουμε ότι τα πρότυπα M_i, N_j είναι προβολικά. Χρησιμοποιώντας τα Πορίσματα 2.7.2 και 2.7.3 του [6], προκύπτει ότι το τανυστικό γινόμενο, υπεράνω του R, των ακολουθιών

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

είναι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N' \longrightarrow (M_{m-1} \otimes_R N') \oplus (M' \otimes_R N_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \otimes_R N_0$$

με ομολογία στη μηδενική θέση ίση με $M \otimes_R N$. Συνεπώς προκύπτει ότι η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N' \longrightarrow (M_{m-1} \otimes_R N') \oplus (M' \otimes_R N_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \otimes_R N_0 \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

είναι μια $(m+n)$-οστή επέκταση του $M \otimes_R N$ κατά $M' \otimes_R N'$, άρα αναπαριστά το στοιχείο $\zeta \cup \eta \in \mathsf{Ext}^{m+n}_{RG}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$. Ακόμη γνωρίζουμε ότι μια ομάδα άλγεβρα RG είναι μια συμμεταθετική (cocommutative) Hopf άλγεβρα και για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [6, Section 3.1]. Σε αυτήν την περίπτωση το τανυστικό γινόμενο συμπλόκων είναι βαθμωτά μεταθετικό, με την έννοια ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός συμπλόκων:

$$C_\bullet \otimes_R D_\bullet \longrightarrow D_\bullet \otimes_R C_\bullet, \quad x \otimes y \longmapsto (-1)^{\mathsf{deg}(x)\mathsf{deg}(y)} y \otimes x$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι το cup product είναι βαθμωτά μεταθετικό και καθιστά τον δακτύλιο $\mathsf{Ext}^\star_{RG}(R,R)$ έναν βαθμωτά μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα.

Παρατήρηση 6.1.15. Έχουμε ορίσει δύο γινόμενα στον δακτύλιο $\mathsf{Ext}^\star_{RG}(R,R)$, τη σύνθεση Yoneda και το cup product. Από τον τρόπο ορισμού τους παρατηρούμε ότι κάθε cup product μπορούμε να το δούμε ως σύνθεση Yoneda. Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού, για παράδειγμα, η σύνθεση Yoneda γενικά δεν είναι βαθμωτά μεταθετική πράξη στον δακτύλιο $\mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(M,M)$ για κάποιο σώμα $\mathbb{K}$.

6.2 Ποικιλότητες Προτύπων

Υποθέτουμε ότι G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και M ένα RG-πρότυπο. Από το Θεώρημα του Evens [7, Theorem 4.2.1] καθώς και το Πόρισμα αυτού [7, Corollary 4.2.2] γνωρίζουμε ότι ο δακτύλιος $\mathsf{H}^\star(G,R)$ είναι ένας πεπερασμένα παραγόμενος βαθμωτός δακτύλιος, από ομογενή στοιχεία ως δακτύλιος πάνω από τον R. Ακόμη, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ο δακτύλιος $\mathsf{H}^\star(G,R) = \mathsf{Ext}^\star_{RG}(R,R)$ είναι βαθμωτά μεταθετικός, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας δύο ομογενή στοιχεία x, y ισχύει ότι:

$$xy = (-1)^{\mathsf{deg}(x)\mathsf{deg}(y)}yx$$

Από εδώ και στο εξής ο δακτύλιος R θα είναι ένα σώμα $\mathbb{K}$ με χαρακτηριστική έναν πρώτο αριθμό p τέτοιο ώστε $p \mid |G|$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη χαρακτηριστική $\mathsf{char}(\mathbb{K})$ του σώματος $\mathbb{K}$:

- $\mathsf{char}(\mathbb{K}) = 2$
- $\mathsf{char}(\mathbb{K}) > 2$, δηλαδή η χαρακτηριστική να είναι περιττός αριθμός.

Στην πρώτη περίπτωση, για $\mathsf{char}(\mathbb{K}) = 2$, ο δακτύλιος $\mathsf{H}^\star(G,\mathbb{K})$ είναι προφανώς μεταθετικός δακτύλιος, αφού για κάθε δύο στοιχεία x, y ανεξαρτήτου βαθμού ισχύει ότι $xy = yx$. Στην περίπτωση κατά την οποία $\mathsf{char}(\mathbb{K}) > 2$, ο υποδακτύλιος

$$\mathsf{H}^{\mathrm{ev}}(G,\mathbb{K}) = \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}} \mathsf{H}^n(G,\mathbb{K})$$

που γεννάται από στοιχεία άρτιου βαθμού είναι επίσης ένας μεταθετικός δακτύλιος.

Ορισμός 6.2.1. *Ορίζουμε τον βαθμωτό δακτύλιο:*

$$\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}) := \begin{cases} \mathsf{H}^\star(G,\mathbb{K}), & \text{αν } \mathsf{char}(\mathbb{K}) = 2 \\ \mathsf{H}^{ev}(G,\mathbb{K}), & \text{αν } \mathsf{char}(\mathbb{K}) > 2 \end{cases}$$

Ο δακτύλιος $\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$ είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την κλασική κατασκευή του προβολικού φάσματος των ομογενών πρώτων ιδεωδών ενός μεταθετικού βαθμωτού δακτυλίου, το οποίο μπορεί να εφοδιαστεί με δομή τοπολογικού χώρου. Χρησιμοποιώντας αυτήν την κατασκευή μπορούμε να ορίσουμε τον προβολικό φάσμα του δακτυλίου $\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$, το οποίο θα αποτελέσει θεμελιώδη τοπολογικό χώρο για την ανάπτυξη της θεωρίας του Balmer στην ευσταθή κατηγορία των προτύπων που εργαζόμαστε.

Ορισμός 6.2.2. *Έστω $R = \bigoplus_{n\geqslant 0} R_n$ ένας μεταθετικός βαθμωτός δακτύλιος. Το* **προβολικό φάσμα πρώτων ιδεωδών (projective prime ideal spectrum)** *του R, συμβολίζεται με $\mathsf{Proj}\text{-}R$ και είναι το σύνολο των ομογενών πρώτων ιδεωδών που δεν περιέχουν το ιδεώδες $\bigoplus_{n\geqslant 1} R_n$.*

Παρατήρηση 6.2.3.

1. Έστω $R = \bigoplus_{n\geqslant 0} R_n$ ένας μεταθετικός βαθμωτός δακτύλιος. Το σύνολο $\mathsf{Proj}\text{-}R$ αποκτά δομή τοπολογικού χώρου με την τοπολογία Zariski. Η συλλογή

$$\{V(I) \mid I \text{ ομογενές ιδεώδες του } R\}$$

όπου

$$V(I) = \{P \in \mathsf{Proj}\text{-}R \mid I \subset P\} \subset \mathsf{Proj}\text{-}R$$

αποτελεί τη συλλογή κλειστών υποσυνόλων του $\mathsf{Proj}\text{-}R$.

2. Το προβολικό φάσμα των πρώτων ιδεωδών $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$ του μεταθετικού βαθμωτού δακτυλίου $\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$ αποτελεί μια προβολική αλγεβρική ποικιλότητα (projective algebraic variety). Αυτή η θεώρηση θα φανεί χρήσιμη στην συνέχεια της ενότητας όπου θα ορίσουμε τις πολλαπλότητες προτύπων, οι οποίες αποτελούν κλειστά υποσύνολα (υποποικιλότητες) της αλγεβρικής ποικιλότητας $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$.

Για την εφαρμογή της θεωρίας του Balmer είναι αναγκαίο να ορίσουμε κατάλληλο ζεύγος που αποτελείται από έναν τοπολογικό χώρο και μια αντιστοιχία που «στέλνει» αντικείμενα της κατηγορίας σε κλειστά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου. Το ζεύγος αυτό θα είναι μια support data στην τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία στην οποία εργαζόμαστε, εν προκειμένω στην ευσταθή κατηγορία των προτύπων. Ο τοπολογικός χώρος τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε, ορίστηκε παραπάνω και είναι το προβολικό φάσμα των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου $\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$. Για τον ορισμό της κατάλληλης απεικόνισης θα χρησιμοποιήσουμε τις λεγόμενες ποικιλότητες προτύπων (varieties of modules) και παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [7, Section 5.7] για εκτενέστερη θεωρία που τις αφορά.

Έστω M ένα $\mathbb{K}G$-πρότυπο. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi_M \colon \mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}) = \mathsf{Ext}^\bullet_{\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(M,M)$$

ως εξής: η εικόνα ενός στοιχείου $\zeta \in \mathsf{Ext}^\bullet_{\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ με αντιπρόσωπο μια επέκταση

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

είναι ένα στοιχείο $\Phi_M(\zeta) \in \mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(M,M)$ με αντιπρόσωπο την επέκταση

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0\otimes_{\mathbb{K}} M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Με άλλα λόγια η απεικόνιση Φ_M εφαρμόζει στους αντιπροσώπους των στοιχείων του δακτυλίου $\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$ το τανυστικό γινόμενο $-\otimes_{\mathbb{K}} M$.

Λήμμα 6.2.4. *Η απεικόνιση* $\Phi_M \colon \mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}) = \mathsf{Ext}^\bullet_{\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(M,M)$ *για ένα* $\mathbb{K}G$-*πρότυπο* M *αποτελεί ομομορφισμό δακτυλίων.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του λήμματος είναι άμεση. ■

Ορισμός 6.2.5. *Ορίζουμε την απεικόνιση*

$$V_G \colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})),\ V_G(M) := V(\mathsf{Ker}\,\Phi_M)$$

όπου $\mathcal{P}(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}))$ *είναι το δυναμοσύνολο του δακτυλίου* $\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$.

Παρατήρηση 6.2.6. Από τον ορισμό της τοπολογίας του προβολικού φάσματος των πρώτων ιδεωδών ενός μεταθετικού βαθμωτού δακτυλίου, βλέπουμε ότι το σύνολο $V_G(M)$ αποτελεί ένα κλειστό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$. Συγκεκριμένα το $V_G(M)$ καλείται *ποικιλότητα του προτύπου M και αποτελεί μια υποποικιλότητα (subvariety) της προβολικής αλγεβρικής ποικιλότητας* $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$. *Συνεπώς η απεικόνιση*

$$V_G \colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}))$$

αντιστοιχίζει αντικείμενα της ευσταθούς κατηγορίας των προτύπων σε κλειστά υποσύνολα του $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$.

6.3 Ταξινόμηση thick υποκατηγοριών της $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων για να εφαρμόσουμε τη θεωρία του Balmer στην ευσταθή κατηγορία των προτύπων υπεράνω μιας ομάδας άλγεβρας $\mathbb{K}G$. Συγκεκριμένα: 1) θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}), V_G)$ που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη ενότητα αποτελεί μια support data της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$, και 2) θα εφαρμόσουμε το θεώρημα ταξινόμησης του Balmer το οποίο θα μας επιτρέψει να περιγράψουμε το σύνθετο και περίπλοκο αντικείμενο του φάσματος της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ με το απλούστερο αντικείμενο του προβολικού φάσματος των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου συνομολογίας $\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$. Ο πρώτος στόχος που περιγράψαμε παραπάνω συνοψίζεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 6.3.1. *Το ζεύγος* $(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}), V_G)$ *αποτελεί μια support data της κατηγορίας* $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη της πρότασης βασιστήκαμε στη διατριβή [23] του Sigstad. Ορισμένα από τα στοιχεία της ξεπερνούν τα όρια αυτής της διατριβής και για το λόγο αυτό παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει στη βασική θεωρία του Balmer, για να αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}), V_G)$ είναι μια support data, αρκεί να αποδείξουμε ότι πληρούνται οι ιδιότητες του Ορισμού 5.3.1.

1. Έστω 0 το μηδενικό $\mathbb{K}G$-πρότυπο και $\mathbb{K}$ το τετριμμένο $\mathbb{K}G$-πρότυπο, τα οποία είναι το μηδενικό και το μοναδιαίο αντικείμενο της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ αντίστοιχα. Τότε
$$V_G(0) = V(\mathsf{Ker}\,\Phi_0) = V(\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})) = \varnothing$$
και
$$V_G(\mathbb{K}) = V(\mathsf{Ker}\,\Phi_{\mathbb{K}}) = V(0) = \mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$$

2. Έστω M, N δύο $\mathbb{K}G$-πρότυπα της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$. Εξ' ορισμού ισχύει ότι
$$V_G(M\oplus N) = V(\mathsf{Ker}\,\Phi_{M\oplus N}) \tag{6.1}$$
Όμως για την απεικόνιση
$$\Phi_{M\oplus N}\colon \mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(M\oplus N, M\oplus N)$$
ισχύει η ακόλουθη παραγοντοποίηση:
$$\mathsf{H}^\bullet(G,\mathbb{K}) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\Phi_M\\ \Phi_N\end{pmatrix}} \mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(M,M)\oplus \mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(N,N) \hookrightarrow \mathsf{Ext}^\star_{\mathbb{K}G}(M\oplus N, M\oplus N)$$
Επομένως προκύπτει ότι
$$V(\mathsf{Ker}\,\Phi_{M\oplus N}) = V(\mathsf{Ker}\,\Phi_M \cap \mathsf{Ker}\,\Phi_N)$$
Όμως
$$V(\mathsf{Ker}\,\Phi_M \cap \mathsf{Ker}\,\Phi_N) = V(\mathsf{Ker}\,\Phi_M)\cup V(\mathsf{Ker}\,\Phi_N) \tag{6.2}$$
Από τις σχέσεις (6.1) και (6.2) προκύπτει ότι:
$$V_G(M\oplus N) = V(\mathsf{Ker}\,\Phi_M)\cup V(\mathsf{Ker}\,\Phi_N) = V_G(M)\cup V_G(N)$$

3. Έστω M ένα $\mathbb{K}G$-πρότυπο της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$ και συμβολίζουμε $\Sigma = \Omega^{-1}$ τον translation συναρτητή της $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$. Θεωρούμε μια n-οστή επέκταση
$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0$$
η οποία είναι αντίπροσωπος ενός στοιχείου $\zeta \in \mathsf{Ext}^n_{\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ και ας είναι
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0\otimes_{\mathbb{K}} M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
ένας αντιπρόσωπος του στοιχείου $\Phi_M(\zeta) \in \mathsf{Ext}^n_{\mathbb{K}G}(M,M)$. Το στοιχείο ζ ανήκει στον πυρήνα $\mathsf{Ker}\,\Phi_M$ αν και μόνο αν υπάρχει ισοδυναμία επεκτάσεων
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} M & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_0\otimes_{\mathbb{K}} M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{6.3}$$

Επίσης η εικόνα του στοιχείου $\zeta \in \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ μέσω του ομομορφισμού $\Phi_{\Sigma M}$ είναι το στοιχείο $\Phi_{\Sigma M}(\zeta) \in \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{K}G}(\Sigma M,\Sigma M)$ με αντιπρόσωπο την n-οστή επέκταση

$$0 \longrightarrow \Sigma M \longrightarrow M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} \Sigma M \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0\otimes_{\mathbb{K}} \Sigma M \longrightarrow \Sigma M \longrightarrow 0$$

Επειδή ο συναρτητής Σ είναι ακριβής προκύπτει ο ισομορφισμός επεκτάσεων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M_0\otimes_{\mathbb{K}} \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] & \Sigma(M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} M) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Sigma(M_0\otimes_{\mathbb{K}} M) \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ακόμη γνωρίζουμε ότι ο translation συναρτητής $\Sigma\colon \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \longrightarrow \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathrm{mod}}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών. Επομένως η ισοδυναμία επεκτάσεων (6.3), υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει η ισοδυναμία επεκτάσεων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} M) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \Sigma(M_0\otimes_{\mathbb{K}} M) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει ισοδυναμία επεκτάσεων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & M_{n-1}\otimes_{\mathbb{K}} \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M_0\otimes_{\mathbb{K}} \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Sigma M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

δηλαδή με το γεγονός ότι το στοιχείο $\zeta \in \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ ανήκει στον πυρήνα του ομομορφισμού $\Phi_{\Sigma M}$. Συνεπώς αποδείξαμε ότι

$$\mathrm{Ker}\,\Phi_M = \mathrm{Ker}\,\Phi_{\Sigma M} \tag{6.4}$$

Τότε, από τη σχέση (6.4), προκύπτει:

$$V_G(M) = V(\mathrm{Ker}\,\Phi_M) = V(\mathrm{Ker}\,\Phi_{\Sigma_M}) = V_G(\Sigma M).$$

4. Για την απόδειξη βλέπε [8, Proposition 2.2 (d)].

5. Για την απόδειξη βλέπε [8, Proposition 2.2 (f)].

■

Έχοντας αποδείξει ότι το ζεύγος $(\text{Proj-H}^\bullet(G,\mathbb{K}), V_G)$ αποτελεί support data της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-mod, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή του Θεωρήματος 5.4.16 του Balmer στην συγκεκριμένη κατηγορία. Όπως προαναφέραμε αυτό θα μας επιτρέψει να δώσουμε μια καλή περιγραφή για το φάσμα της κατηγορίας $\mathbb{K}G$-mod.

Θεώρημα 6.3.2. *Υπάρχει ένας ομοιομορφισμός* $f\colon \text{Proj-H}^\bullet(G,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Spc}(\mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathrm{mod}})$, *όπου*

$$f(P) := \{M \in \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \mid P \notin V_G(M)\}$$

Απόδειξη. Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.4.16, αρκεί να αποδείξουμε ότι η support data $(\text{Proj-H}^\bullet(G,\mathbb{K}), V_G)$ της Πρότασης 6.3.1 είναι μια ταξινομούσα support data με την έννοια του Ορισμού 5.4.15. Αρχικά πρέπει να αποδείξουμε ότι το προβολικό φάσμα $\text{Proj-H}^\bullet(G,\mathbb{K})$ του δακτυλίου συνομολογίας $\mathrm{H}^\bullet(G,\mathbb{K})$ είναι τοπολογικός χώρος της Noether. Σύμφωνα με τον Ορισμό

5.2.28 ένας τοπολογικός χώρος καλείται χώρος της Noether αν κάθε αύξουσα αλυσίδα από ανοικτά υποσύνολα τερματίζει. Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε φθίνουσα αλυσίδα από κλειστά τερματίζει. Ας είναι

$$\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K}) = V(I_0) \supset V(I_1) \supset \cdots$$

μια φθίνουσα αλυσίδα από κλειστά υποσύνολα του $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$, όπου I_i είναι ομογενή ιδεώδη του δακτυλίου $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$. Λόγω του πρώτου σκέλους της Πρότασης Α΄.0.6 προκύπτει μια αύξουσα αλυσίδα

$$\sqrt{I_0} \subset \sqrt{I_1} \subset \cdots$$

ιδεωδών του δακτυλίου $\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$. Όμως ο δακτύλιος συνομολογίας $\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$ είναι δακτύλιος της Noether σύμφωνα με το [6, Proposition 4.2.1], επομένως η αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών τερματίζει. Συνεπώς

$$\sqrt{I_m} = \sqrt{I_{m+1}} = \cdots$$

για κάποιο $m \geqslant 0$ και συμπεραίνουμε ότι η φθίνουσα αλυσίδα κλειστών υποσυνόλων του $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$ επίσης τερματίζει. Με άλλα λόγια ο τοπολογικός χώρος $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$ είναι χώρος της Noether. Επιπλέον πρέπει κάθε κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο του προβολικού φάσματος $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$ να έχει μοναδικό γενικό σημείο (generic point). Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται χάρη στο Πόρισμα Α΄.0.9 του παραρτήματος Α΄. Τέλος θεωρούμε τα σύνολα $\mathfrak{G} := \{Y \subset \mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K}) \mid Y :$ specialization κλειστό$\}$, $\mathfrak{R} := \{\mathcal{J} \subset \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \mid \mathcal{J} :$ ριζικό$\}$ και τις απεικονίσεις:

$$\theta\colon \{Y \subset \mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K}) \mid Y : \text{specialization κλειστό}\} \longrightarrow \{\mathcal{J} \subset \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \mid \mathcal{J} : \text{ριζικό}\}$$

$$\eta\colon \{\mathcal{J} \subset \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \mid \mathcal{J} : \text{ριζικό}\} \longrightarrow \{Y \subset \mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K}) \mid Y : \text{specialization κλειστό}\}$$

όπου

$$\theta(Y) := \{M \in \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \mid V_G(M) \subset Y\} \tag{6.5}$$

και

$$\eta(\mathcal{J}) := \bigcup_{M \in \mathcal{J}} V_G(M) \tag{6.6}$$

Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση θ είναι «1-1» και «επί» με $\theta^{-1} = \eta$. Θεωρούμε ένα specialization κλειστό υποσύνολο του προβολικού φάσματος $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$ του δακτυλίου συνομολογίας $\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$, δηλαδή

$$Y = \bigcup_{I} V(I)$$

όπου I είναι ομογενές ιδεώδες του δακτυλίου $\mathsf{H}^{\bullet}(G,\mathbb{K})$. Δοθέντος του (6.5) έχουμε

$$\eta(\theta(Y)) = V_G(\theta(Y)) = \bigcup_{M \in \theta(Y)} V_G(M)$$

Όμως $V_G(M) \subset Y$ για κάθε $M \in \theta(Y)$, άρα

$$\bigcup_{M \in \theta(Y)} V_G(M) \subset Y \tag{6.7}$$

Αντίστροφα έστω $P \in Y$ ένα πρώτο ομογενές ιδεώδες του δακτυλίου συνομολογίας. Τότε $P \in V(I)$, για κάποιο ομογενές ιδεώδες I. Υποθέτουμε ότι

$$P \notin \bigcup_{M \in \theta(Y)} V_G(M)$$

δηλαδή δεν υπάρχει πρότυπο $M \in \theta(Y)$ τέτοιο ώστε $P \in V_G(M)$. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει πρότυπο M, τέτοιο ώστε $V_G(M) \subset Y$ και $P \in V_G(M)$. Ωστόσο η τελευταία πρόταση μας οδηγεί σε άτοπο λόγω της υπόθεσής μας ότι $P \in V(I) \subset Y$ για κάποιο ιδεώδες I του R. Τελικά προκύπτει ότι

$$P \in \bigcup_{M \in \theta(Y)} V_G(M)$$

και άρα

$$Y \subset \bigcup_{M \in \theta(Y)} V_G(M) \tag{6.8}$$

Από τις σχέσεις (6.7), (6.8) προκύπτει ότι

$$(\eta \circ \theta)(Y) = Y$$

Ακολούθως θεωρούμε ένα ριζικό thick τανυστικό ιδεώδες $\mathcal{J}$ της ευσταθούς κατηγορίας $\mathbb{K}G$-$\underline{\mathsf{mod}}$. Τότε

$$\eta(\mathcal{J}) = \bigcup_{M \in \mathcal{J}} V_G(M)$$

όπου $V_G(M)$ είναι κλειστό υποσύνολο του προβολικού φάσματος $\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K})$. Συνεπώς $V_G(M) = V(I)$, όπου I είναι ομογενές ιδεώδες του δακτυλίου συνομολογίας. Με άλλα λόγια προκύπτει

$$\eta(\mathcal{J}) = \bigcup_{I} V(I), \text{ όπου } V(I) = V_G(M),\ M \in \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}}$$

Τότε από τον ορισμό της απεικόνισης θ, έχουμε ότι

$$\theta(\eta(\mathcal{J})) = \{M \in \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \mid V_G(M) \subset \eta(\mathcal{J})\}$$

Συνεπώς το σύνολο $\theta(\eta(\mathcal{J}))$ περιέχει εκείνα τα πρότυπα M για τα οποία ισχύει

$$V_G(M) \subset \bigcup_{N \in \mathcal{J}} V_G(N)$$

Όμως τότε

$$\theta(\eta(\mathcal{J})) = \{M \in \mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}} \mid M \in \mathcal{J}\} = \mathcal{J}$$

και άρα

$$(\theta \circ \eta)(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$$

Τελικά αποδείξαμε ότι η απεικόνιση θ είναι «1-1» και «επί». Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι το ζεύγος $(\mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K}), V_G)$ είναι μια ταξινομούσα support data και η απεικόνιση $f\colon \mathsf{Proj}\text{-}\mathsf{H}^\bullet(G, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathbb{K}G\text{-}\underline{\mathsf{mod}})$ είναι ομοιομορφισμός. ■

Κεφάλαιο 7

Το Φάσμα της Παραγόμενης Κατηγορίας των Τέλειων Συμπλόκων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ένα ακόμη παράδειγμα στο οποίο βρίσκει εφαρμογή η βασική θεωρία που αναπτύξαμε στη διατριβή. Θα δουλέψουμε στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ των τέλειων συμπλόκων, για κάποιο μεταθετικό δακτύλιο R της Noether, η οποία έχουμε αποδείξει ότι είναι μια τανυστική τριγωνισμένη κατηγορία και θα επιχειρήσουμε να ταξινομήσουμε τα thick τανυστικά ιδεώδη αυτής. Στην πρώτη ενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα από τη Μεταθετική Άλγεβρα, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε ότι το φάσμα των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου R, μαζί με μια αντιστοιχία που θα ορίσουμε ανάμεσα στο φάσμα και την $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, αποτελούν μια support data στην $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Θα κλείσουμε αποδεικνύοντας ότι η support data πληροί τις προϋποθέσεις για να χαρακτηριστεί ταξινομούσα support data της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ και θα αποδείξουμε ότι το Θεώρημα ταξινόμησης του Balmer, το οποίο θα μας επιτρέψει να ταξινομήσουμε τα thick τανυστικά ιδεώδη της κατηγορίας μας και να διαπιστώσουμε με ποιον τοπολογικό χώρο είναι ομοιομορφικό το φάσμα της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$.

7.1 Στοιχεία Τοπικοποίησης Προτύπων

Η Μεταθετική Άλγεβρα είναι ο κλάδος της Άλγεβρας που μελετά τους μεταθετικούς δακτυλίους. Από εδώ και στο εξής θα σύμβολίζουμε με R έναν μεταθετικό δακτύλιο της Noether, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά. Στο παράδειγμα 2.1.2 έχουμε αναφερθεί, συνοπτικά, στην τοπικοποίηση ενός δακτυλίου R ως προς το πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο $S = R\backslash P$, όπου P είναι ένα πρώτο ιδεώδες αυτού. Από την τοπικοποίηση προκύπτει ένας νέος δακτύλιος τον οποίον συμβολίσαμε με R_P. Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες σε αυτού του είδους την τοπικοποίηση, αφού θα αποδειχθεί θεμελιώδης στην προσπάθειά μας να επεξεργαστούμε το παράδειγμα της θεωρίας του Balmer που αφορά την παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων.

Συμβολισμός: Σε αυτήν την ενότητα θα συμβολίζουμε την τοπικοποίηση ενός δακτυλίου R ως προς ένα τυχαίο πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο S, με $S^{-1}R$.

Επανερχόμαστε στον δακτύλιο R_P, που προκύπτει από την τοπικοποίηση του R ως προς το υποσύνολο $S = R\backslash P$. Τα στοιχεία του δακτυλίου R_P είναι κλάσεις ισοδυναμίας, ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε στο Παράδειγμα 2.1.2, τα οποία συμβολίζουμε με x/s, όπου $x \in P$ και

$s \in S$. Θέτουμε

$$\mathfrak{m} := \big\{x/s \in R_P \mid x \in P,\ s \in S\big\} \tag{7.1}$$

Το σύνολο $\mathfrak{m} \subset R_P$ αποτελεί ένα ιδεώδες του δακτυλίου R_P.

Παρατήρηση 7.1.1. Θεωρούμε το ιδεώδες $\mathfrak{m}$ που ορίσαμε στη σχέση (7.1) και υποθέτουμε ότι $I \subset R_P$ είναι ένα ιδεώδες του R_P, τέτοιο ώστε $I \not\subset \mathfrak{m}$. Τότε υπάρχει στοιχείο $x/s \in I$, τέτοιο ώστε $x/s \notin \mathfrak{m}$. Όμως

$$x/s \notin \mathfrak{m} \Longrightarrow x \notin P \Longrightarrow x \in S$$

Επομένως το στοιχείο $x/s \in I$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου R_P. Συνεπώς

$$I = R_P$$

Καταλήγουμε στο ότι το ιδεώδες $\mathfrak{m}$ είναι το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες του R_P και άρα ο δακτύλιος R_P είναι **τοπικός δακτύλιος (local ring)**.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην τοπικοποίηση ενός R-προτύπου M, αρχικά ως προς ένα τυχαίο πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο S του R και έπειτα σε ένα πρώτο ιδεώδες P του R.

Ορισμός 7.1.2. *Έστω R δακτύλιος, M ένα R-πρότυπο και S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Ορίζουμε τη σχέση «$\sim_M$» στο $M \times S$ ως εξής:*

$$(m, s) \sim_M (m', s') \Longleftrightarrow \text{υπάρχει στοιχείο } t \in S \text{ τέτοιο ώστε } t(ms' - m's) = 0.$$

Η σχέση αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Συμβολίζουμε με m/s την κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το στοιχείο (m, s) και $S^{-1}M$ το σύνολο αυτών κλάσεων ισοδυναμίας.

Παρατήρηση 7.1.3. Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα R-πρότυπο.

1. Το σύνολο $S^{-1}M$ αποκτά δομή $S^{-1}R$-προτύπου, μέσω της δράσης

$$\star\ :\ S^{-1}R \times S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M,\ r/s \star m/s := rm/s$$

2. Θεωρούμε την τοπικοποίηση $S^{-1}R$ ενός δακτυλίου R μαζί με τον ομομορφισμό δακτυλίων $f_R \colon R \longrightarrow S^{-1}R$, $f_R(r) := r/1_R$, ο οποίος απεικονίζει στοιχεία του R σε αντιστρέψιμα στοιχεία του $S^{-1}R$. Μέσω του ομομορφισμού δακτυλίων f_R το $S^{-1}R$-πρότυπο $S^{-1}M$ αποκτά δομή R-προτύπου, ως εξής:

$$r \cdot \frac{m}{s} := \frac{f(r)m}{s}$$

Ορίζουμε τον ομομορφισμό R-προτύπων $f \colon M \longrightarrow S^{-1}M$, $f(m) := m/1$, ο οποίος καλείται **κανονικός ομομορφισμός**.

Ορισμός 7.1.4. *Έστω R δακτύλιος, M ένα R-πρότυπο και S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του δακτυλίου. Το $S^{-1}R$-πρότυπο $S^{-1}M$ μαζί με τον κανονικό ομομορφισμό καλείται* **τοπικοποίηση** *του προτύπου M ως προς το S.*

Παράδειγμα 7.1.5. Έστω R δακτύλιος, P ένα πρώτο ιδεώδες του R και M ένα R-πρότυπο. Η τοπικοποίηση του M ως προς το πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο $S = R \backslash P$ είναι το R_P-πρότυπο $S^{-1}M$, το οποίο θα συμβολίζουμε με M_P.

Παρατήρηση 7.1.6. Για κάθε ομομορφισμό R-προτύπων $f \colon M \longrightarrow N$, επάγεται ο ομομορφισμός $S^{-1}R$-προτύπων

$$S^{-1}f \colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N,\ \ (S^{-1}f)(m/s) := f(m)/s$$

Για το μορφισμό $S^{-1}f\colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$ αποδεικνύουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 7.1.7. *Έστω R δακτύλιος, S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολό του και $f\colon M' \longrightarrow M$, $g\colon M \longrightarrow M''$ δύο ομομορφισμοί R-προτύπων. Τότε*

$$S^{-1}(g\circ f) = (S^{-1}g)\circ(S^{-1}f)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $S^{-1}(g\circ f)\colon S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M''$. Τότε για $m' \in M'$ και $s \in S$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\big((S^{-1}g)\circ(S^{-1}f)\big)(m'/s) &= S^{-1}g\big(S^{-1}f(m'/s)\big)\\
&= S^{-1}g(f(m')/s)\\
&= g\big(f(m'/s)\big)\\
&= (g\circ f)(m'/s)\\
&= S^{-1}(g\circ f)(m/s)
\end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$S^{-1}(g\circ f) = (S^{-1}g)\circ(S^{-1}f)$$

■

Θα αφιερώσουμε ένα μέρος της ενότητας παραθέτοντας κάποιες βασικές ιδιότητες της τοπικοποίησης προτύπων. Από εδώ και πέρα ο R θα είναι ένας δακτύλιος και το S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R.

Πρόταση 7.1.8. *Έστω*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

μια ακολουθία R-προτύπων, ακριβής στο M. Τότε η επαγόμενη ακολουθία $S^{-1}R$-προτύπων

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

είναι ακριβής στο $S^{-1}M$.

Απόδειξη. Αφού η πρώτη ακολουθία είναι ακριβής στο M, ισχύει ότι $g\circ f = 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.1.7 προκύπτει ότι:

$$(S^{-1}g)\circ(S^{-1}f) = S^{-1}(g\circ f) = S^{-1}(0) = 0$$

Άρα

$$\mathsf{Im}(S^{-1}f) \subset \mathsf{Ker}(S^{-1}g) \tag{7.2}$$

Έστω τώρα ένα στοιχείο $m/s \in \mathsf{Ker}(S^{-1}g)$. Ισχύει ότι

$$(S^{-1}g)(m/s) = 0 \Longrightarrow g(m)/s = 0 \text{ στο } S^{-1}M''$$

Τότε υπάρχει $t \in S$, τέτοιο ώστε $tg(m) = 0$ στο M''. Επειδή η απεικόνιση g είναι ομομορφισμός R-προτύπων, μπορούμε να γράψουμε ότι $g(tm) = 0$. Όμως τότε ισχύει ότι $tm \in \mathsf{Ker}\, g = \mathsf{Im}\, f$, δηλαδή υπάρχει $m' \in M'$, τέτοιο ώστε $tm = f(m')$. Άρα

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m')}{ts} = (S^{-1}f)\left(\frac{m'}{ts}\right)$$

Συνεπώς ισχύει ότι $m/s \in \mathsf{Im}(S^{-1}f)$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathsf{Ker}(S^{-1}g) \subset \mathsf{Im}(S^{-1}f) \tag{7.3}$$

Από τις σχέσεις (7.2), (7.3) προκύπτει ότι

$$\mathsf{Ker}(S^{-1}g) = \mathsf{Im}(S^{-1}f)$$

άρα η επαγόμενη ακολουθία είναι ακριβής στο $S^{-1}M$. ■

Πρόταση 7.1.9. *Έστω M ένα R-πρότυπο. Τότε ισχύει ότι*

$$S^{-1}R \otimes_R M \simeq S^{-1}M$$

ως S^{-1}-πρότυπα.

Απόδειξη. Θεωρούμε δυο ομομορφισμούς $S^{-1}R$-προτύπων

$$f\colon S^{-1}R \otimes_R M \longrightarrow S^{-1}M$$

και

$$g\colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}R \otimes_R M, \quad g(m/s) := \frac{1}{s} \otimes m$$

Για να αποδείξουμε ότι ο ομομορφισμός g είναι καλά ορισμένος, θεωρούμε δύο στοιχεία $(m, s), (m', s')$ τέτοια ώστε $(m, s) \sim_M (m', s')$. Τότε υπάρχει $t \in S$, τέτοιο ώστε $t(ms' - m's) = 0$ και προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g(m/s) - g(m'/s') &= \frac{1}{s} \otimes m - \frac{1}{s'} \otimes m \\ &= \frac{1}{ts's} \otimes ts'm - \frac{1}{ts's} \otimes tsm' \\ &= \frac{1}{ts's} \otimes t(ms' - m's) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο ομομορφισμός g είναι, πράγματι, καλά ορισμένος. Για να ορίσουμε την απεικόνιση $f\colon S^{-1}R \otimes_R M \longrightarrow S^{-1}M$, θεωρούμε την R-ισόρροπη απεικόνιση

$$\rho\colon S^{-1}R \times M \longrightarrow S^{-1}R, \quad \rho(r/s, m) := \frac{rm}{s}$$

Η ζητούμενη απεικόνιση f είναι αυτή που, από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου κάνει το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} S^{-1}R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho"'] & S^{-1}R \otimes_R M \arrow[dl, dotted, "f"] \\ S^{-1}R & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επομένως η απεικόνιση f είναι καλά ορισμένη και ισχύει ότι

$$f\left(\frac{r}{s} \otimes m\right) = \frac{rm}{s}$$

Άμεσα βλέπουμε ότι οι ομομορφισμοί $S^{-1}R$-προτύπων f, g είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου και άρα

$$S^{-1}R \otimes_R M \simeq S^{-1}M$$

ως $S^{-1}R$-πρότυπα. ∎

Πόρισμα 7.1.10. *Το $S^{-1}R$ είναι ένα επίπεδο R-πρότυπο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία R-προτύπων

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

και υποθέτουμε ότι είναι ακριβής στο M. Εφαρμόζουμε σε αυτήν το συναρτητή $S^{-1}R \otimes_R$ - και προκύπτει η ακολουθία

$$S^{-1}R \otimes_R M' \xrightarrow{1 \otimes f} S^{-1}R \otimes_R M \xrightarrow{1 \otimes g} S^{-1}R \otimes_R M''$$

Από την Πρόταση 7.1.9 γνωρίζουμε ότι η τελευταία ακολουθία είναι ισόμορφη με την ακολουθία

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

η οποία, όπως έχουμε αποδείξει στην Πρόταση 7.1.8, είναι ακριβής στο $S^{-1}M$. Άρα το $S^{-1}R$ είναι επίπεδο R-πρότυπο. ■

Πρόταση 7.1.11. *Έστω M, N δυο R-πρότυπα. Τότε υπάρχει ισομορφισμός*

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \simeq S^{-1}(M \otimes_R N)$$

Συγκεκριμένα υπάρχει ισομορφισμός

$$M_P \otimes_{R_P} N_P \simeq (M \otimes_R N)_P$$

όπου P είναι ένα πρώτο ιδεώδες του R.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [1, Proposition 3.7] ■

7.2 Η Support Data της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$

Σε αυτήν την ενότητα θα συνεχίσουμε ορίζοντας το φορέα ενός τέλειου συμπλόκου της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ και αποδεικνύοντας ότι ο φορέας μαζί με το φάσμα $\mathsf{Spec}(R)$ των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου R, αποτελούν μια support data της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Υπενθυμίζουμε ότι για ιστορικούς λόγους σε αυτήν την ενότητα δουλεύουμε με αλυσιδωτά σύμπλοκα.

Έστω $X_\bullet$ ένα σύμπλοκο. Τότε ορίζεται η ομολογία του συμπλόκου ως εξής:

$$\mathsf{H}_\bullet(X_\bullet) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_i(X_\bullet)$$

Ακόμη, για ένα σύμπλοκο $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$ ορίζουμε την τοπικοποίηση του συμπλόκου σε ένα πρώτο ιδεώδες P του R ως το σύμπλοκο X_P, το οποίο προκύπτει αν εφαρμόσουμε το συναρτητή $-\otimes_R R_P$ σε κάθε ομογενή συνιστώσα του συμπλόκου. Ο παραπάνω συναρτητής επάγεται από τον ομομορφισμό $R \longrightarrow R_P$.

Ορισμός 7.2.1. *Έστω $X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Ορίζουμε το ως φορέα (support) του $X_\bullet$, το ακόλουθο υποσύνολο του φάσματος $\mathsf{Spec}(R)$ των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου R:*

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) := \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(X_P) \not\simeq 0\}$$

Χάρη στην ακρίβεια της τοπικοποίησης ισχύει ότι

$$\mathsf{H}_\bullet(X_\bullet)_P \simeq \mathsf{H}_\bullet(X_P)$$

Ακολούθως θα διατυπώσουμε ένα αποτέλεσμα του Foxby [14], το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για την απόδειξη του βασικού θεωρήματος αυτής της ενότητας.

Ορισμός 7.2.2. *Έστω $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$. Ορίζουμε το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$:*

$$\mathsf{i}(X_\bullet) := \{i \mid H_i(X_\bullet) \not\simeq 0\}$$

Λήμμα 7.2.3. *Έστω $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathsf{D}^+(R)$. Τότε*

$$\mathsf{i}(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet) \leqslant \mathsf{i}(X_\bullet) + \mathsf{i}(Y_\bullet)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $\mathsf{H}_{\mathsf{i}(X_\bullet)}(X_\bullet) \otimes_R \mathsf{H}_{\mathsf{i}(Y_\bullet)}(Y_\bullet) \not\simeq 0$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [14, Lemma 2.1] ■

Ευθύς αμέσως θα αποδείξουμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα, το οποίο θα μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε τη θεωρία του Balmer για την ταξινόμηση των thick τανυστικών ιδεωδών της παραγόμενης κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$.

Θεώρημα 7.2.4. *Το ζεύγος* $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$ *αποτελεί μια support data της κατηγορίας* $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$ πληροί τις συνθήκες του Ορισμού 5.3.1.

1. Έστω $0_\bullet$ το μηδενικό σύμπλοκο της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Τότε

$$\mathsf{Supp}_R(0_\bullet) = \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(0_P) \not\simeq 0\} = \varnothing$$

Επιπλέον υπενθυμίζουμε ότι το μοναδιαίο αντικείμενο της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ είναι ο δακτύλιος R, αν τον «δούμε» ως σύμπλοκο περιορισμένο στη μηδενική θέση. Τότε

$$\mathsf{Supp}_R(R) = \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(R_P) \not\simeq 0\} = \mathsf{Spec}(R)$$

2. Θεωρούμε δυο σύμπλοκα $X_\bullet, X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathsf{Supp}_R(X_\bullet \oplus Y_\bullet) &= \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet((X_\bullet \oplus Y_\bullet)_P) \not\simeq 0\} \\ &= \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(X_P \oplus Y_P) \not\simeq 0\} \\ &= \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(X_P) \oplus \mathsf{H}_\bullet(Y_P) \not\simeq 0\} \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet \oplus Y_\bullet) = \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(X_P) \not\simeq 0\} \cup \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(Y_P) \not\simeq 0\}$$

και άρα καταλήγουμε στο γεγονός ότι

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet \oplus Y_\bullet) = \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \cup \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet)$$

3. Έστω $X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Από το ορισμό του translation συναρτητή $\Sigma \colon \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \longrightarrow \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, προκύπτει άμεσα ότι:

$$\mathsf{H}_\bullet(\Sigma X_\bullet) \simeq 0 \Longleftrightarrow \mathsf{H}_\bullet(X_\bullet) \simeq 0$$

Άρα

$$\mathsf{H}_\bullet(\Sigma X_\bullet) \not\simeq 0 \Longleftrightarrow \mathsf{H}_\bullet(X_\bullet) \not\simeq 0$$

Συνεπώς

$$\mathsf{Supp}_R(\Sigma X_\bullet) = \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$$

4. Έστω

$$X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet \longrightarrow Z_\bullet \longrightarrow \Sigma X_\bullet$$

ένα τρίγωνο στην $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Από την Πρόταση 4.3.8 γνωρίζουμε ότι κάθε τρίγωνο της παραγόμενης κατηγορίας προέρχεται από μια σύντομη ακριβή ακολουθία συμπλόκων. Θεωρούμε τη μεγάλη ακριβή ακολουθία στην ομολογία, δηλαδή την ακουλουθία:

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_{n+1}(Z_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_n(X_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_n(Y_\bullet) \longrightarrow \mathsf{H}_n(Z_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Επειδή η τοπικοποίηση είναι ακριβής προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{H}_{n+1}(Z_P) \longrightarrow \mathsf{H}_n(X_P) \longrightarrow \mathsf{H}_n(Y_P) \longrightarrow \mathsf{H}_n(Z_P) \longrightarrow \cdots$$

Θεωρούμε ένα πρώτο ιδεώδες $P \in \mathsf{Spec}(R)$, τέτοιο ώστε $P \in \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$, δηλαδή $\mathsf{H}_\bullet(X_P) \not\simeq 0$. Υποθέτουμε ότι $P \notin \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet) \cup \mathsf{Supp}_R(Z_\bullet)$. Τότε

$$P \notin \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet) \text{ και } P \notin \mathsf{Supp}_R(Z_\bullet)$$

και άρα προκύπτει ότι

$$\mathsf{H}_\bullet(Y_P) \simeq 0 \text{ και } \mathsf{H}_\bullet(Z_P) \simeq 0$$

Όμως τότε θα ίσχυε ότι $\mathsf{H}_\bullet(X_P) \simeq 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $P \in \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet) \cup \mathsf{Supp}_R(Z_\bullet)$ και καταλήγουμε ότι

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet) \cup \mathsf{Supp}_R(Z_\bullet)$$

5. Έστω $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Από την Πρόταση 7.1.11 και το Λήμμα 7.2.3 προκύπτει ότι για κάποιο πρώτο ιδεώδες P, ισχύει ότι

$$\mathsf{i}((X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet)_P) = \mathsf{i}(X_P \otimes^{\mathsf{L}}_{R_P} Y_P) \leqslant \mathsf{i}(X_P) + \mathsf{i}(Y_P)$$

Χάρη στην τελευταία ανισότητα προκύπτει η σχέση

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet) \subset \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \cap \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet) \tag{7.4}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $P \in \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \cap \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet)$. Χρησιμοποιώντας το [22, Corollary 2, p.2], επειδή ο δακτύλιος R_P είναι τοπικός και τα $\mathsf{H}_\bullet(X_P)$, $\mathsf{H}_\bullet(Y_P)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενα R-πρότυπα (αφού ο R είναι δακτύλιος της Noether), προκύπτει ότι:

$$\mathsf{H}_{\mathsf{i}(X_P)}(X_P) \otimes_{R_P} \mathsf{H}_{\mathsf{i}(Y_P) Y_P} \not\simeq 0$$

Όμως σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η ισότητα του Λήμματος 7.2.3 και συμπεραίνουμε ότι $P \in \mathsf{Supp}_R(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet)$. Άρα

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \cap \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet) \subset \mathsf{Supp}_R(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet) \tag{7.5}$$

Από τις σχέσεις (7.4), (7.5) προκύπτει ότι

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R Y_\bullet) = \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \cap \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet)$$

Συνεπώς το ζεύγος $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$ είναι support data της κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. ■

Στην παραγόμενη κατηγορία $\mathsf{D}(R)$, ορίζουμε μια ακόμη αντιστοιχία, η οποία «στέλνει» ένα σύμπλοκο $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$ σε ένα υποσύνολο του $\mathsf{Spec}(R)$ και η οποία συχνά αναφέρεται με το όνομα «μικρός» φορέας («small» support). Για τον ορισμό του «μικρού» φορέα ενός αντικειμένου $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$, είναι αναγκαίο να υπενθυμίσουμε τον ορισμό του σώματος κλασμάτων ενός τοπικού δακτυλίου.

Ορισμός 7.2.5. *Έστω R ένας τοπικός δακτύλιος και $\mathfrak{m}$ το μέγιστο ιδεώδες αυτού. Τότε ο δακτύλιος πηλίκο $R/\mathfrak{m}$ καλείται* **σώμα υπολοίπων (residue field)** *του δακτυλίου R.*

Ορισμός 7.2.6. *Έστω $X_\bullet \in \mathsf{D}(R)$. Ορίζουμε ως «μικρό» φορέα («small» support) το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathsf{Spec}(R)$:*

$$\mathsf{supp}_R(X_\bullet) := \left\{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid \mathsf{H}_\bullet(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R \mathsf{k}(P)) \not\simeq 0\right\}$$

όπου $\mathsf{k}(P)$ είναι το σώμα υπολοίπων του δακτυλίου R_P.

Παρατηρούμε ότι ο φορέας Supp_R ορίστηκε στην υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, ενώ ο «μικρός» φορέας ορίστηκε στην κατηγορία $\mathsf{D}(R)$. Ωστόσο τα υποσύνολα $\mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$, $\mathsf{supp}_R(X_\bullet)$ ταυτίζονται όταν $X^\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Αυτό το αποτέλεσμα ταυτίζεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 7.2.7. *Έστω $X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Τότε*

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) = \mathsf{supp}_R(X_\bullet)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα πρώτο ιδεώδες P του R, τέτοιο ώστε $P \in \mathsf{supp}_R(X_\bullet)$, δηλαδή $\mathsf{H}_\bullet(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R \mathsf{k}(P)) \not\simeq 0$. Εφόσον το σύμπλοκο $X_\bullet$ ανήκει στην υποκατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$, ισχύει ότι

$$X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R R_P \simeq X_\bullet \otimes_R R/P \simeq X_P$$

Επομένως προκύπτει η ισοδυναμία $X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R \mathsf{k}(P) \simeq X_P \otimes^{\mathsf{L}}_{R_P} \mathsf{k}(P)$. Από το Λήμμα 7.2.3 προκύπτει ότι

$$\mathsf{i}(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R \mathsf{k}(P)) = \mathsf{i}(X_P \otimes^{\mathsf{L}}_{R_P} \mathsf{k}(P)) \leqslant \mathsf{i}(X_P) + \mathsf{i}(\mathsf{k}(P)) = \mathsf{i}(X_P)$$

Τότε προκύπτει ότι $\mathsf{H}_\bullet(X_P) \not\simeq 0$, δηλαδή $P \in \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$. Συνεπώς

$$\mathsf{supp}_R(X_\bullet) \subset \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \tag{7.6}$$

Από την άλλη, υποθέτουμε ότι $P \in \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$, δηλαδή $\mathsf{H}_\bullet(X_P) \not\simeq 0$. Τότε

$$\mathsf{H}_{\mathsf{i}(X_P)}(X_P) \otimes_{R_P} \mathsf{H}_0(\mathsf{k}(P)) \not\simeq 0$$

και χρησιμοποιώντας, ξανά, το Λήμμα 7.2.3 προκύπτει ότι

$$\mathsf{i}(X_\bullet \otimes^{\mathsf{L}}_R \mathsf{k}(P)) = \mathsf{i}(X_P) + \mathsf{i}(\mathsf{k}(P)) = \mathsf{i}(X_P)$$

Επομένως $P \in \mathsf{supp}_R(X_\bullet)$ και καταλήγουμε στη σχέση έγκλεισης

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset \mathsf{supp}_R(X_\bullet) \tag{7.7}$$

Από τις σχέσεις (7.6), (7.7) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. ■

7.3 Ταξινόμηση Thick Υποκατηγοριών της $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε ότι το ζεύγος $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$ είναι μια support data για την κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Τώρα είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε το θεώρημα ταξινόμησης του Balmer για τη συγκεκριμένη κατηγορία και να αποδείξουμε ότι το φάσμα της τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$ είναι ομοιομορφικό με το φάσμα $\mathsf{Spec}(R)$ των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου R.

Θεώρημα 7.3.1. *Υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f\colon \mathsf{Spec}(R) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R))$, όπου*

$$f(P) := \left\{X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \mid P \notin \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)\right\}$$

Απόδειξη. Για αν αποδείξουμε ότι η δοθείσα απεικόνιση $f\colon \mathsf{Spec}(R) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R))$ είναι ομοιομορφισμός, αρκεί να αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$ αποτελεί μια ταξινομούσα support data με την έννοια του Ορισμού 5.4.15. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο τοπολογικός χώρος $\mathsf{Spec}(R)$ είναι τοπολογικός χώρος της Noether. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος καλείται χώρος της Noether αν κάθε αύξουσα αλυσίδα από ανοικτά υποσύνολα τερματίζει. Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε φθίνουσα αλυσίδα από κλειστά υποσύνολα τερματίζει. Θεωρούμε μια φθίνουσα αλυσίδα

$$\mathsf{Spec}(R) = V(I_0) \supset V(I_1) \supset \cdots$$

από κλειστά υποσύνολα του φάσματος, όπου I_i είναι ιδεώδη του R. Λόγω του πρώτου σκέλους της Πρότασης Α΄.0.6 προκύπτει μια αύξουσα αλυσίδα

$$\sqrt{I_0} \subset \sqrt{I_1} \subset \cdots$$

ιδεωδών του R. Επειδή ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, η παραπάνω αύξουσα αλυσίδα τερματίζει. Με άλλα λόγια

$$\sqrt{I_m} = \sqrt{I_{m+1}} = \cdots$$

για κάποιο $m \geqslant 0$. Χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος της Πρότασης Α΄.0.6 προκύπτει ότι:

$$V(I_m) = V(I_{m+1}) = \cdots$$

για κάποιο $m \geqslant 0$ και άρα συμπεραίνουμε ότι η φθίνουσα αλυσίδα κλειστών υποσυνόλων του $\mathsf{Spec}(R)$, επίσης, τερματίζει. Τελικά ο τοπολογικός χώρος $\mathsf{Spec}(R)$ είναι τοπολογικός χώρος της Noether. Επιπλέον είναι αναγκαίο κάθε κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο του φάσματος $\mathsf{Spec}(R)$ να έχει μοναδικό γενικό σημείο (generic point). Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζεται από το Πόρισμα Α΄.0.9. Τέλος θεωρούμε τα σύνολα $\mathfrak{G} := \{Y \subset \mathsf{Spec}(R) \mid Y : \text{specialization κλειστό}\}$, $\mathfrak{R} := \{\mathcal{J} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \mid \mathcal{J} : \text{ριζικό}\}$ και τις απεικονίσεις:

$$\theta \colon \{Y \subset \mathsf{Spec}(R) \mid Y : \text{specialization κλειστό}\} \longrightarrow \{\mathcal{J} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \mid \mathcal{J} : \text{ριζικό}\}$$

$$\eta \colon \{\mathcal{J} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \mid \mathcal{J} : \text{ριζικό}\} \longrightarrow \{Y \subset \mathsf{Spec}(R) \mid Y : \text{specialization κλειστό}\}$$

όπου

$$\theta(Y) := \{X_\bullet \mid \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset Y\} \tag{7.8}$$

και

$$\eta(\mathcal{J}) := \bigcup_{X_\bullet \in \mathcal{J}} \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \tag{7.9}$$

Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση θ είναι «1-1» και «επί». Έστω $\mathcal{J}$ ένα ριζικό thick τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Κάθε ένα από τα $\mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$ είναι κλειστό υποσύνολο του φάσματος $\mathsf{Spec}(R)$. Συνεπώς ισχύει ότι $\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) = V(K)$, όπου K είναι ένα ιδεώδες του δακτυλίου R. Με άλλα λόγια προκύπτει ότι:

$$\eta(\mathcal{J}) = \bigcup_K V(K), \text{ όπου } V(K) = \mathsf{Supp}_R(X_\bullet),\ \ X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$$

Τότε από τον ορισμό της απεικόνισης θ, έχουμε ότι

$$\theta(\eta(\mathcal{J})) = \{X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \mid \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset \eta(\mathcal{J})\}$$

Με άλλα λόγια το σύνολο $\theta(\eta(\mathcal{J}))$ περιέχει εκείνα τα σύμπλοκα $X_\bullet$ για τα οποία ισχύει

$$\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset \bigcup_{Y_\bullet \in \mathcal{J}} \mathsf{Supp}_R(Y_\bullet)$$

Συνεπώς

$$\theta(\eta(\mathcal{J})) = \{X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \mid X_\bullet \in \mathcal{J}\} = \mathcal{J}$$

και άρα

$$(\theta \circ \eta)(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$$

Θεωρούμε, τώρα, ένα specialization κλειστό υποσύνολο Y του φάσματος του δακτυλίου R, δηλαδή

$$Y = \bigcup_I V(I)$$

όπου I είναι ιδεώδες του R. Τότε

$$\theta(Y) = \{X_\bullet \in \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R) \mid \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset Y\}$$

και το παραπάνω σύνολο είναι ριζικό thick τανυστικό ιδεώδες της κατηγορίας $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R)$. Τότε

$$\eta(\theta(Y)) = \mathsf{Supp}_R(\theta(Y)) = \bigcup_{X_\bullet \in \theta(Y)} \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$$

Όμως εξ' ορισμού $\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset Y$, για κάθε $X_\bullet \in \theta(Y)$, άρα

$$\bigcup_{X_\bullet \in \theta(Y)} \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset Y \tag{7.10}$$

Αντίστροφα έστω $P \in Y$, δηλαδή $P \in V(I) \subset Y$, για κάποιο ιδεώδες I του R. Υποθέτουμε ότι

$$P \notin \bigcup_{X_\bullet \in \theta(Y)} \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$$

δηλαδή δεν υπάρχει σύμπλοκο $X_\bullet \in \theta(Y)$ τέτοιο ώστε $P \in \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει σύμπλοκο $X_\bullet$, τέτοιο ώστε $\mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \subset Y$ και $P \in \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$. Ωστόσο το τελευταίο είναι άτοπο λόγω της υποθεσής μας ότι $P \in V(I) \subset Y$, για κάποιο ιδεώδες I του R. Τελικά προκύπτει ότι

$$P \in \bigcup_{X_\bullet \in \theta(Y)} \mathsf{Supp}_R(X_\bullet)$$

και άρα

$$Y \subset \bigcup_{X_\bullet \in \theta(Y)} \mathsf{Supp}_R(X_\bullet) \tag{7.11}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.10), (7.11), προκύπτει ότι

$$(\eta \circ \theta)(Y) = Y$$

Τελικά αποδείξαμε ότι η απεικόνιση θ είναι «1-1» και «επί» με $\theta^{-1} = \eta$. Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι το ζεύγος $(\mathsf{Spec}(R), \mathsf{Supp}_R)$ είναι μια ταξινομούσα support data και η απεικόνιση $f\colon \mathsf{Spec}(R) \longrightarrow \mathsf{Spc}(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(R))$ είναι ομοιομορφισμός. ■

Παρατήρηση 7.3.2. Παρόμοιο αποτέλεσμα με το παραπάνω ισχύει και στο πλαίσιο της Αλγεβρικής Γεωμετρίας. Στην περίπτωση αυτήν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον δακτύλιο της Noether με ένα σχήμα της Noether X και να έχουμε παρόμοιο αποτέλεσμα. Τότε η κατηγορία $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$, όπου X σχήμα της Noether καθορίζει πλήρως το X. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [2, Theorem 5.5].

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Μεταθετικής Άλγεβρας

Στο παρόν παράρτημα στόχος είναι να παραθέσουμε, για λόγους πληρότητας, κάποια στοιχειώδη αποτελέσματα της Μεταθετικής Άλγεβρας τα οποία χρησιμοποιούνται σε κεντρικές αποδείξεις των δύο τελευταίων κεφαλαίων της διατριβής, όπου και εφαρμόζεται η θεωρία του Balmer σε δυο διακεκριμένα παραδείγματα τανυστικών τριγωνισμένων κατηγοριών. Κεντρικό ρόλο στη Μεταθετική Άλγεβρα κατέχει το φάσμα των πρώτων ιδεωδών ενός μεταθετικού δακτυλίου R ή χάρην συντομίας φάσμα του δακτυλίου R, το οποίο συμβολίζεται με $\mathsf{Spec}(R)$. Για κάθε ιδεώδες I του δακτυλίου R ορίζουμε το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathsf{Spec}(R)$:

$$V(I) := \{P \in \mathsf{Spec}(R) \mid I \subset P\}$$

Από στοιχειώδη Μεταθετική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι η συλλογή

$$\big\{V(I) \mid I : \text{ιδεώδες του } R\big\}$$

αποτελεί μια συλλογή από κλειστά υποσύνολα για μια τοπολογία του $\mathsf{Spec}(R)$ η οποία καλείται **τοπολογία Zariski** και καθιστά το φάσμα τοπολογικό χώρο. Ακόμη ξεκινώντας από ένα ιδεώδες I του δακτυλίου R κατασκευάζουμε το ριζικό αυτού του ιδεώδους ως εξής:

$$\mathsf{rad}(I) = \sqrt{I} := \{r \in R \mid r^n \in I, \ \text{για κάποιο } n \geqslant 1\}$$

Άμεσα προκύπτει η έννοια του ριζικού ιδεώδους ενός δακτυλίου R.

Ορισμός Α΄.0.1. *Έστω R ένας δακτύλιος και I ένα ιδεώδες αυτού. Το ιδεώδες I καλείται* ***ριζικό (radical)*** *αν ισούται με το ριζικό του.*

Αρχικά θα χρειαστούμε την έννοια του μηδενοριζικού ενός δακτυλίου R, την περιγραφή του ριζικού ενός ιδεώδους μέσω των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου καθώς και μια σειρά από αποτελέσματα που αφορούν τα κλειστά υποσύνολα της βάσης του φάσματος.

Ορισμός Α΄.0.2. *Έστω R ένας δακτύλιος. Το σύνολο*

$$N_R := \{r \in R \mid r^n = 0, \ \textit{για κάποιο } n \geqslant 1\}$$

δηλαδή το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων του R καλείται ***μηδενοριζικό (nilradical)*** *του R.*

Παρατήρηση Α΄.0.3. Το μηδενοριζικό ενός δακτυλίου R αποτελεί ιδεώδες του R. Για περισσότερες πληροφορίες βλ. [1, Proposition 1.7].

Πρόταση Α΄.0.4. *Έστω R ένας δακτύλιος και I ένα ιδεώδες αυτού. Το ριζικό του I ισούται με την τομή όλων των πρώτων ιδεωδών του R που περιέχουν το I.*

Απόδειξη. Έστω R ένας δακτύλιος και I ένα ιδεώδες του R. Θεωρούμε τη κανονική απεικόνιση

$$\phi\colon I \longrightarrow R/I$$

όπου R/I είναι ο δακτύλιος πηλίκο και συμβολίζουμε με $N_{R/I}$ το μηδενοριζικό ιδεώδες του R/I. Τότε

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(N_{R/I}) &= \{r \in I \mid \phi(r) \in N_{R/I}\}\\ &= \{r \in I \mid r + I \in N_{R/I}\}\\ &= \{r \in I \mid (r+I)^n = I, \text{ για κάποιο } n \geqslant 0\}\\ &= \{r \in I \mid r^n \in I, \text{ για κάποιο } n \geqslant 0\}\\ &= \sqrt{I}\end{aligned}$$

Όμως το μηδενοριζικό ενός δακτυλίου ισούται με την τομή όλων των πρώτων ιδεωδών του δακτυλίου [1, Proposition 1.8] και γνωρίζουμε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου πηλίκο R/I είναι της μορφής P/I, όπου το P είναι ένα πρώτο ιδεώδες του R με $I \subset P$. Επομένως έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. ■

Λήμμα Α΄.0.5. *Έστω R ένας δακτύλιος και I ένα ιδεώδες του R. Τότε $V(I) = V(\sqrt{I})$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα πρώτο ιδεώδες P του R με $P \in V(I)$, δηλαδή $I \subset P$. Από την πρόταση Α΄.0.4 γνωρίζουμε ότι το ριζικό $\sqrt{I}$ ισούται με την τομή όλων των πρώτων ιδεωδών του R που περιέχουν το I. Συνεπώς προκύπτει ότι το ιδεώδες $\sqrt{I}$ περιέχεται στο P και άρα $P \in V(\sqrt{I})$. Άρα

$$V(I) \subset V(\sqrt{I}) \tag{Α΄.1}$$

Αντίστροφα θεωρούμε ένα πρώτο ιδεώδες P με $P \in V(\sqrt{I})$, δηλαδή $\sqrt{I} \subset P$. Άμεσα ισχύει ότι $I \subset \sqrt{I}$ και επομένως $I \subset \sqrt{I} \subset P$. Συνεπώς το ιδεώδες P ανήκει στο υποσύνολο $V(I)$ του φάσματος και άρα προκύπτει ότι

$$V(\sqrt{I}) \subset V(I) \tag{Α΄.2}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (Α΄.1) και (Α΄.2) προκύπτει το ζητούμενο. ■

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε μεταγενέστερη ενότητα του κεφαλαίου όταν θα χρειαστεί να αποδείξουμε ότι το φάσμα ενός δακτυλίου R είναι τοπολογικός χώρος της Noether.

Πρόταση Α΄.0.6. *Έστω R ένας δακτύλιος και I, J ιδεώδη αυτού. Τότε*

1. *$V(I) \subset V(J)$ αν και μόνον αν $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$*
2. *$V(I) = V(J)$ αν και μόνον αν $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.*

Απόδειξη.
1. Έστω ότι $V(I) \subset V(J)$ και ας είναι $x \in \sqrt{J}$. Από την Πρόταση Α΄.0.4 γνωρίζουμε ότι το στοιχείο x ανήκει στην τομή όλων των πρώτων ιδεωδών που περιέχουν το ιδεώδες J. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες $P \in \mathrm{Spec}(R)$ με $I \subset P$ και $x \notin P$. Όμως ισχύει ότι $V(I) \subset V(J)$, δηλαδή $J \subset P$. Στην περίπτωση αυτή, εφ' όσον $x \notin P$, προκύπτει ότι $x \notin J$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς αποδεικνύουμε ότι το στοιχείο x ανήκει στην τομή όλων των πρώτων ιδεωδών του R που περιέχουν το I. Με άλλα λόγια το στοιχείο x ανήκει στο ριζικό $\sqrt{I}$ του I. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$. Τότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α΄.0.5 προκύπτει ότι:

   $$V(I) = V(\sqrt{I}) \subset V(\sqrt{J}) = V(J)$$

   και αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

2. Η ευθεία κατεύθυνση προκύπτει άμεσα με χρήση του πρώτου σκέλους. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α΄.0.5, προκύπτει ότι:

$$V(I) = V(\sqrt{I}) = V(\sqrt{J}) = V(J)$$

■

Πρόταση Α΄.0.7. *Έστω R ένας δακτύλιος και P ένα πρώτο ιδεώδες αυτού. Τότε το ιδεώδες P είναι ριζικό.*

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει ότι $P \subset \sqrt{P}$. Αντίστροφα, έστω $x \in \sqrt{P}$, δηλαδή $x^m \in P$, για κάποιο $m \geqslant 1$. Επειδή το ιδεώδες P είναι πρώτο, μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων προκύπτει ότι $x \in P$ και άρα $\sqrt{P} \subset P$. Συνεπώς $\sqrt{P} = P$, δηλαδή το P είναι ριζικό ιδεώδες. ■

Από τη Μεταθετική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι όταν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, τότε υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των ριζικών ιδεωδών του R και των κλειστών υποσυνόλων του φάσματος $\mathsf{Spec}(R)$. Συγκεκριμένα, η απεικόνιση

$$V\colon \{I \subset R \mid I : \text{ριζικό ιδεώδες}\} \longrightarrow \{Z \subset \mathsf{Spec}(R) \mid Z : \text{κλειστό}\},\ I \mapsto V(I)$$

είναι μια «1-1» και «επί» απεικόνιση. Στη συνέχεια θα δώσουμε ακριβή περιγραφή για τα ανάγωγα κλειστά υποσύνολα του φάσματος.

Πρόταση Α΄.0.8. *Έστω R ένας δακτύλιος. Κάθε κλειστό ανάγωγο υποσύνολο του $\mathsf{Spec}(R)$ είναι της μορφής $V(P)$, όπου το P είναι πρώτο ιδεώδες του R.*

Απόδειξη. Αρχικά, ας είναι P ένα πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου R. Θα αποδείξουμε ότι $V(P) = \overline{\{P\}}$. Από τη Γενική Τοπολογία γνωρίζουμε ότι το κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει τον τοπολογικό χώρο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο $V(I)$ του φάσματος όπου I ιδεώδες του R, τέτοιο ώστε:

$$\{P\} \subsetneqq V(I) \subsetneqq V(P)$$

Αφού $V(I) \subsetneqq V(P)$, από την Πρόταση Α΄.0.6 προκύπτει ότι $\sqrt{P} \subsetneqq \sqrt{I}$ και από την Πρόταση Α΄.0.7 έχουμε ότι $P \subsetneqq \sqrt{I}$. Όμως το ιδεώδες P ανήκει στο κλειστό σύνολο $V(I)$, δηλαδή $I \subset P$ και το ριζικό $\sqrt{I}$ είναι η τομή όλων των πρώτων ιδεωδών που περιέχουν το I. Άρα προκύπτει ότι $P \not\subset \sqrt{I}$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς το $V(P)$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το $\{P\}$ και αποδεικνύουμε ότι $V(P) = \overline{\{P\}}$. Όμως ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου είναι ανάγωγο αν και μόνον αν το τοπολογικό του κάλυμμα είναι ανάγωγο [20, Proposition 3.A.10]. Άρα το κλειστό σύνολο $V(P)$, όπου P είναι πρώτο ιδεώδες του R, είναι ανάγωγο. Αντίστροφα θεωρούμε ένα κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο $V(I)$ του φάσματος όπου το I είναι ιδεώδες του R και θα αποδείξουμε ότι το ιδεώδες I είναι πρώτο. Έστω $x, y \in R$ τέτοια ώστε $xy \in I$. Τότε $V(I) = V(I + \langle x\rangle) \cup V(I + \langle y\rangle)$ και επειδή το σύνολο $V(I)$ είναι ανάγωγο, προκύπτει ότι $V(I) = V(I + \langle x\rangle)$ ή $V(I) = V(I + \langle y\rangle)$. Άρα είτε $x \in I$, είτε $y \in I$ και προκύπτει ότι το ιδεώδες I είναι πρώτο. ■

Πόρισμα Α΄.0.9. *Έστω R ένας δακτύλιος. Κάθε κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο του φάσματος $\mathsf{Spec}(R)$ έχει μοναδικό γενικό σημείο (generic point).*

Απόδειξη. Από την Πρόταση Α΄.0.8 γνωρίζουμε ότι κάθε κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο του φάσματος είναι της μορφής $V(P)$, όπου το P είναι ένα πρώτο ιδεώδες του R και στην απόδειξη της ίδιας πρότασης αποδεικνύουμε ότι $V(P) = \overline{\{P\}}$. Με άλλα λόγια το κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο $V(P)$ έχει μοναδικό γενικό σημείο. ■

Παράρτημα Β΄

Περίληψη - Abstract

Περίληψη. Ο κεντρικός στόχος της παρούσας διατριβής είναι να παρουσιάσει μια θεωρία για την ταξινόμηση των thick τανυστικών υποκατηγοριών μιας τανυστικής τριγωνισμένης κατηγορίας, ο οποία οφείλεται στον Paul Balmer. Για την ανάπτυξη αυτής της θεωρίας απαιτείται να γνωρίζουμε τις βασικές έννοιες που αφορούν τις τανυστικές τριγωνισμένες κατηγορίες, οι οποίες και παρατίθενται. Η θεωρία ταξινόμησης του Balmer έχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Επιλέγουμε να αναλύσουμε δυο παραδείγματα που προέρχονται από την άλγεβρα. Το πρώτο αφορά την ευσταθή κατηγορία των προτύπων υπεράνω μιας ομάδας άλγεβρας, ενώ το δεύτερο την παραγόμενη κατηγορία των τέλειων συμπλόκων ενός μεταθετικού δακτυλίου.

Abstract. The central aim of this thesis is to present a theory for the classification of thick tensor subcategories of a tensor triangulated category, which is attributed to Paul Balmer. For the development of this theory we need to know the basic concepts concerning the tensor triangulated categories, which are listed. The Balmer's classification theory has a wide range of applications in various branches of mathematics. We choose to analyze two examples from the area of algebra. The first one concerns the stable module category over a group algebra, while the second one concerns the derived category of perfect complexes over a commutative ring.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] **M. F. Atiyah and I. G. Macdonald**. Introduction to commutative algebra. *Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., (1969).*

[2] **P. Balmer**. The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories. J. Reine Angew. Math., **588** (2005), 149–168.

[3] **P. Balmer**. Tensor triangular geometry. Proceedings of the International Congress of Mathematics, Hyderabad, India, 2010.

[4] **P. Balmer and M. Schlichting**. Idempotent completion of triangulated categories. J. Algebra, **236** (2) (2001), 819–834.

[5] **M. Barot**. Introduction to the representation theory of algebras. *Springer (2015).*

[6] **D.J. Benson**. Representations and Cohomology, Vol. 1. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 30, Cambridge University Press (1995).*

[7] **D.J. Benson**. Representations and Cohomology, Vol. 2. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 31, Cambridge University Press (1991).*

[8] **D.J. Benson, J.F. Carlson and J. Rickard**. Thick subcategories of the stable module category. Fund. Math., **153** (1997), 59–80.

[9] **D.J. Benson, J.F. Carlson and J. Rickard**. Complexity and Varieties for infinitely generated modules, II. Math. Proc. Cambidge Philos. Soc., **120** (1996), 597–615.

[10] **P. Bland**. Rings and their Modules. *De Gruyter (2011).*

[11] **M. Bökstedt and A. Neeman**. Homotopy limits in triangulated categories. Compositio Mathematica, **86**, no. 2 (1993), 209–234.

[12] **F. Borceux**. Handbook of Categorical Algebra, Vol.1. *Cambridge University Press (1974).*

[13] **E. S. Devinatz, M. J. Hopkins and J. H. Smith**. Nilpotence and stable homotopy theory. Ann. of Math. (2) **128** (1988), 207–241..

[14] **H. B. Foxby**. Bounded complexes of flat modules. J. Pure Appl. Algebra, **15**, vo. 2 (1979), 149–172.

[15] **D. Happel**. Triangulated categories in the representation theory of finite–dimensional algebras. *London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.* **119**, *Cambridge University Press, Cambridge, (1988).*

[16] **M. Kashiwara and P. Schapira**. Categories and Sheaves. *Springer (2006).*

[17] **D. Milicic**. Lectures on Derived Categories. *Lecture Notes. Available at https://www.math.utah.edu/ milicic/Eprints/dercat.pdf*

[18] **A. Neeman**. The chromatic tower of $D(R)$. Topology, **31** no. 3 (1992), 519–532. With an appendix by M. Boksted.

[19] **A. Neeman**. Triangulated Categories, volume 148 of Annals of Mathematics Studies. *Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).*

[20] **D. Patil and U. Strorch**. Introduction to Algebraic Geometry and Commutative Algebra. *IISc Lecture Notes Series (2008).*

[21] **J. Rickard**. Idempotent modules in stable category. J. London Math. Soc. (2) **56** (1997), 149–170.

[22] **J. P. Serre**. Local Algebra. *Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2000).*

[23] **H. Sigstad**. Subcategory Classifications in Tensor Triangulated Categories. *MSc Thesis, NTNU, Trondheim (2011).*

[24] **N. Spaltenstein**. Resolutions of unbounded complexes. Compositio Mathematica, **65**, no. 2 (1988), 121–154.

[25] **B. Stenstrom**. Rings of quotients, An introduction to methods of ring theory. *Springer-Verlag (1975).*

[26] **R. W. Thomason**. The classification of triangulated subcategories. Compositio Mathematica, **105**, (1997), 1–27.

[27] **C. Weibel**. An Introduction to Homological Algebra. *Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2004).*