ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

Από τη Φιλοσοφική Λογική στη Βιομηχανική Λογική

Σταμούλης Βασίλειος

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2019

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των Σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 27/6/2019 από την Εξεταστική Επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Επιβλέπων:	
Σωκράτης Μπαλτζής	Λέκτορας
τα Μέλη ΔΕΠ:	
Νικόλαος Γλυνός	Επίκουρος Καθηγητής
Ιωάννης Σταματίου	Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή»

Βασίλειος Σταμούλης

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της Μεταπτυχιακής Διατριβής μου θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους αποτέλεσαν σημαντικό παράγοντα για την επιτυχή περάτωση των σπουδών μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. από το οποίο απεφοίτησα, που μου έδωσε την ευκαιρία να συμμετάσχω και να ολοκληρώσω τις μεταπτυχιακές σπουδές μου στο αντικείμενο που επέλεξα.

Ευχαριστώ τον κ. Μπαλτζή Σωκράτη, Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την ανάθεση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής, για την άψογη καθοδήγησή του και για την εξαιρετική συνεργασία.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον κ. Γλυνό Νικόλαο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και τον κ. Σταματίου Ιωάννη, Καθηγητή του Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων του Πανεπιστημίου Πατρών, μέλη της Τριμελούς Επιτροπής για την αξιολόγηση και κρίση της παρούσας Διατριβής.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου καθώς και τη σύντροφο μου Ελένη για τη στήριξη και κατανόησή τους όλο αυτό το διάστημα.

Περίληψη

Στη διατριβή αυτή μελετήσαμε την εξέλιξη της Λογικής από τη Αριστοτελική Φιλοσοφία μέχρι σήμερα. Από την Αναγέννηση, τον Διαφωτισμό μέχρι και την εποχή της Βιομηχανικής Επανάστασης φωτισμένοι Μαθηματικοί με καινοτόμες ιδέες εισήγαγαν τον μαθηματικό φορμαλισμό στη Λογική και αργότερα την έννοια της αυτόματης υπολογιστικής προσέγγισης.

Οι εξελίξεις αφενός με τον Turing και τη γνωστή Μηχανή Turing που εισάγει οδηγούν στην κατασκευή του πρώτου Η/Υ, αφετέρου ο Von Neuman με τη Θεωρία Αυτομάτων θεμελιώνει την Επιστήμη των Η/Υ, ολοκληρώνοντας τη Μαθηματική Θεωρία Υπολογισμού και εγκαινιάζοντας τη Βιομηχανική Λογική με προϊόντα και μηχανικά αλλά και λογισμικά.

Στο κεφάλαιο 1, εισάγουμε την έννοια της Λογικής.

Το κεφάλαιο 2 αναφέρεται στη Φιλοσοφική Λογική του Αριστοτέλη που είναι η βάση της εξέλιξης της Λογικής.

Το κεφάλαιο 3 συνδέει τα Μαθηματικά και τη Λογική.

Στο κεφάλαιο 4, τονίζουμε την αυτοματοποίηση της Μαθηματικής Λογικής στα πρώτα χρόνια της Βιομηχανικής περιόδου και την εισαγωγή της Επιστήμης των Η/Υ

Στο κεφάλαιο 5, αναδεικνύουμε τη σχέση της Λογικής με τη Τεχνητή Νοημοσύνη, ενώ παράλληλα παραθέτομε σύγχρονα βιομηχανικά προϊόντα της Βιομηχανικής Λογικής και ενδεικτικές εφαρμογές της Γλωσσικής Τεχνολογίας.

Στο κεφάλαιο 6, συμπεριλαμβάνομε συμπεράσματα από την εργασία και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Τέλος στα Παραρτήματα περιλαμβάνονται 2 γλωσσάρια ελληνοαγγλικών και αγγλοελληνικών όρων της διατριβής αντίστοιχα καθώς και αναλυτικοί ορισμοί και βασικές έννοιες που απλά αναφέρονται στη διατριβή.

Abstract

In this dissertation we studied the development of Logic from the Aristotelian Philosophy to the present day. From the Renaissance, the Enlightenment to the Age of Industrial Revolution enlightened mathematicians with innovative ideas introduced mathematical formalism into Logic and later the concept of automatic computational approach.

In one hand Turing theories introduce Turing Machine led to the invention of computer, in the other hand Von Neumann's Automata Theory establish a new science, the Computer Science. Thus, the Computational Theory arises and it leads to the Industrial Logic and Industrial Logic products which concerns hardware as well as software productions.

In Chapter 1, we introduce the concept of Logic.

Chapter 2 refers to Aristotle's Philosophical Logic, the basis of the Logic forthcoming development.

Chapter 3 links Mathematics and Logic.

Chapter 4 refers to the automation of Mathematical Logic in the early years of the Industrial Age and the establishment of Computer Science.

In Chapter 5, the relationship between Logic and Artificial Intelligence is highlighted, while we present contemporary Industrial Logic products and indicative Language Technology applications.

Chapter 6 refers to the dissertation conclusions and proposals for further research.

Finally, in the Appendices are included two glossaries of a Greek-English and an English-Greek basic dissertation terms correspondingly. In the third Appendix is included definitions and basic theories which are referred in the dissertation.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η Λογική ή η Επιστήμη της Λογικής, με τις διάφορες μορφές της, όπως τη γνωρίζομε σήμερα είναι Φιλοσοφία και εξελίχτηκε από τη Φιλοσοφία.

Ο Αριστοτέλης στην Κλασική Ελλάδα είναι ο πρώτος που επινοεί τη Λογική. Κατά τον Αριστοτέλη η Λογική, δεν έχει κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο μελέτης, όμως καθορίζει ένα σύνολο κανόνων, καθολικής ισχύος, άρρηκτα συνδεδεμένων με τη φιλοσοφική δραστηριότητα, θεμελιώνοντας τρόπους για κατάλληλους συλλογισμούς που οδηγούν στην «ορθή ή λογική σκέψη».

Η πλειονότητα των φιλοσόφων θεωρεί ότι η «κανονική ή ορθή συλλογιστική» μπορεί να αποτυπωθεί από τη Λογική αν επινοηθεί η «σωστή μέθοδος» για «την κωδικοποίηση της καθημερινής γλώσσας στη «Γλώσσα της Λογικής».

Η Φιλοσοφική Λογική, που ασχολείται με την τυποποίηση της φυσικής γλώσσας, αποτελεί ουσιαστικά μια συνέχεια του παραδοσιακού τομέα της Λογικής, όπως την αποκαλούσαν, πριν από την θεμελίωση της Μαθηματικής Λογικής. Κύριος στόχος και ταυτόχρονα το ενδιαφέρον της Φιλοσοφικής Λογικής ήταν να επικεντρωθεί στη σύνδεση της φυσικής γλώσσας και της Λογικής. Αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν η ανάπτυξη της Χρονικής Λογικής καθώς και διάφορες άλλες επεκτάσεις της Κλασικής Λογικής. Η Λογική και η Φιλοσοφία της Γλώσσας είναι άρρηκτα συνδεδεμένες, ως προς τη μελέτη του τρόπου που η γλώσσα δεσμεύει και αλληλεπιδρά στη σκέψη, καθώς και ως προς τη μελέτη του τρόπου της καλύτερης δόμησης και κατανόησης των επιχειρημάτων.

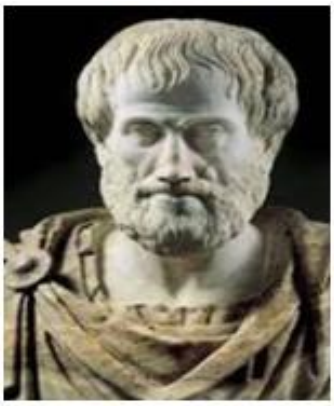
Διάγραμμα 1: Λογική και Επιστήμες

Τέλος η Υπολογιστική Λογική, η σύγχρονη εξέλιξη της Λογικής που θεμελιώνει την Επιστήμη των Η/Υ, αναδείχτηκε από τον Alan Turing με το «Πρόβλημα Απόφασης», τον Kurt Gödel με τα «θεωρήματα της μη πληρότητας», και την «ιδέα των υπολογιστών γενικής χρήσης» από τους σχεδιαστές των Η/Υ. Η Λογική με μαθηματική σημειογραφία οδηγεί στην Τεχνητή Νοημοσύνη. Η Τεχνητή Νοημοσύνη ο Προγραμματισμός Λογικής και τα Ευφυή Συστήματα οδήγησαν στη Βιομηχανική Λογική και κατ' επέκταση στα πάσης φύσης βιομηχανικά προϊόντα. Στις παρακάτω ενότητες θα παρουσιαστούν οι παραπάνω εξελίξεις αναλυτικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η Φιλοσοφική Λογική του Αριστοτέλη

Με εξαίρεση τα Μαθηματικά και την Ιατρική, ο Αριστοτέλης έχει καθοριστική συμβολή σε όλους τους άλλους γνωστικούς τομείς. Ασχολήθηκε με όλους τους κλάδους της Φιλοσοφίας, τις Φυσικές Επιστήμες, όπως, τη Φυσιολογία, τη Γεωγραφία και τη Μετεωρολογία. Επίσης, επηρέασε τη Ρητορική, τη Θεωρία του Επιχειρήματος, τη Γλώσσα και τη Θεωρία της Λογοτεχνίας, την Ιστορία των Θεσμών και των Ιδεών καθώς και την Πολιτική Επιστήμη. Ο ρόλος του Αριστοτέλη στη Φιλοσοφία ήταν σημαντικός καθώς υπήρξε ο πρώτος ο οποίος επεχείρησε τον επιτυχή συνδυασμό της Πλατωνικής Ηθικής και Πολιτικής Φιλοσοφίας με τη Φυσική Φιλοσοφία των Προσωκρατικών, εγκαινιάζοντας τον κλάδο της Λογικής.



Εικόνα 1: Αριστοτέλης

Κατά τον Αριστοτέλη, η Λογική, η ικανότητα δηλαδή κάποιου να φέρεται και να σκέφτεται λογικά αποτελεί ένα έμφυτο χαρακτηριστικό. Επίσης, η ορθή χρήση της γλώσσας αντικατοπτρίζει μία σωστή λειτουργία της ανθρώπινης σκέψης, η οποία με τη σειρά της αποκαλύπτει αντικειμενικές πληροφορίες για την ανθρώπινη ύπαρξη. Επομένως, υπάρχει μια άρρηκτα στενή σχέση ανάμεσα στη γλώσσα και την πραγματικότητα. Υποστηρίζει ότι μια απλή πρόταση με δομή υποκείμενο-ρήμα-κατηγορούμενο, όπως: «ο Σωκράτης είναι φιλόσοφος», είναι σε θέση να προσδώσει λογικό και φιλοσοφικό ενδιαφέρον πέραν του ότι προσφέρει μια απλή και γενική πληροφορία.

Έχοντας ως βάση την πεποίθηση του ότι η γλώσσα έχει άμεση και στενή σχέση με την πραγματικότητα, ο Αριστοτέλης προχώρησε ακόμη περισσότερο, αναλύοντας στοιχειώδεις προτάσεις και εξάγοντας σημαντικά συμπεράσματα. Πρώτα απ’ όλα, κατέληξε στη διαπίστωση ότι υπάρχουν λέξεις όπως «Σωκράτης», οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο ως υποκείμενο σε μία πρόταση, και άλλες όπως «φιλόσοφος», οι οποίες συνήθως λειτουργούν σαν κατηγορήματα. Η διαπίστωση αυτή τον οδήγησε στο ότι: «εφόσον έχουμε δύο κατηγορίες λέξεων, η σκέψη μας λειτουργεί με δύο κατηγορίες εννοιών, τις ατομικές και τις γενικές έννοιες, καθώς η λέξη «Σωκράτης» δηλώνει κάτι ατομικό, ενώ η λέξη «φιλόσοφος» κάτι γενικό». Αφού η γλώσσα συνδέεται με την πραγματικότητα τότε και η πραγματικότητα αποτελείται από δύο κατηγορίες όντων: «τα καθ’ έκαστον» και «τα καθόλου». Τα «καθ’ έκαστον» αφορούν τα συγκεκριμένα πρόσωπα, ζώα και πράγματα τα οποία υπάρχουν στον φυσικό κόσμο, ενώ τα «καθόλου» αναφέρονται στα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες που αποδίδουμε στις παραπάνω οντότητες όπως για παράδειγμα ότι ο Σωκράτης είναι φιλόσοφος.

Επομένως συνοψίζοντας κατά τον Αριστοτέλη:

1. η γλώσσα αποτελείται από «υποκείμενα» και «κατηγορούμενα»,
2. η σκέψη από «ατομικές έννοιες» και «γενικές έννοιες» και
3. η πραγματικότητα από «τα καθ’ έκαστον» και «τα καθόλου».

Επισημαίνεται ότι μέχρι τα τέλη του 17^{ου} αιώνα ο όρος «φιλοσοφία» είναι άρρηκτα συνδεδεμένος και σχεδόν ταυτίζεται με τη διάδοση, την ερμηνεία και την κριτική της Αριστοτελικής Λογικής αφού ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος ο οποίος χρησιμοποίησε τα γράμμα του αλφάβητου ως σύμβολα της λογικής του. Αυτό που θα πρέπει να γίνει κατανοητό είναι ότι οποιαδήποτε πρόταση μας δίνει πάντα μία πληροφορία είτε αυτή είναι αληθινή είτε είναι λανθασμένη. Η αλήθεια ή το λάθος μίας πρότασης σχετίζεται πάντα με το περιεχόμενο της πρότασης και είναι απόρροια της εμπειρίας, σε αντίθεση με τη δομή της πρότασης όπου εξαρτάται από τη λογική.

Η φιλοσοφία της ύστερης ελληνικής αρχαιότητας του Βυζαντίου, των Αράβων και του Δυτικού Μεσαίωνα είναι έντονα επηρεασμένη από την Αριστοτελική Σκέψη και Λογική, γεγονός που αποδεικνύει την προσαρμοστικότητα αυτής της Λογικής σε κάθε εποχή και πολιτισμό. Το ακόλουθο παράδειγμα: «Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, όλοι οι Έλληνες είναι άνθρωποι, επομένως, όλοι οι Έλληνες είναι θνητοί» καθιστά κατανοητό ότι το «αριστοτελικό σύστημα της λογικής» εισήγαγε:

- «τον υποθετικό συλλογισμό»,
- «τη χρονική τυπική λογική»,
- «την επαγωγική λογική»,

καθώς και όρους όπως:

- «πρόταση»,
- «συλλογισμός» και
- «κατηγορία».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Λογική και Μαθηματικά

3.1 Εισαγωγή

Η Αναγέννηση, ο Διαφωτισμός και η Βιομηχανική Επανάσταση μέχρι τα μέσα του 20^{ου} αιώνα, δεν άφησαν ανεπηρέαστη και την εξέλιξη της Φιλοσοφικής Λογικής. Τα ονόματα των Μαθηματικών που έπαιξαν τον αποφασιστικότερο ρόλο τις περιόδους αυτές στην θεμελίωση των Μαθηματικών στα πλαίσια της φιλοσοφικής Λογικής ενδεικτικά είναι: ο Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), ο George Boole (1815-1864), Friedric Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970), ο Kurt Gödel (1906-1978) και ο David Hilbert (1862-1943).

3.2 Leibniz - ο Λογισμός της Λογικής και υπολογιστικοί κανόνες Λογικής

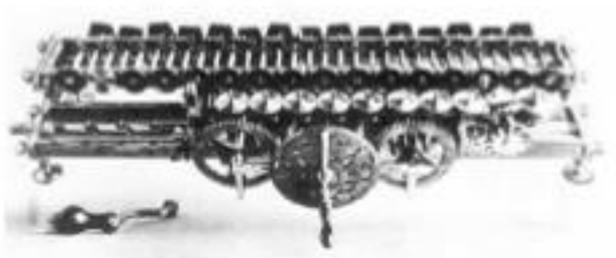
Εικόνα 2 :Gottfried Leibniz

Ο Leibniz, έζησε την περίοδο του Διαφωτισμού, διδάχθηκε Λατινικά σε ηλικία 8 ετών και διάβασε τον Αριστοτέλη στην ηλικία των 12 ετών. Σε ηλικία 20 ετών έγραψε διατριβή για τη Μεταφυσική του Αριστοτέλη, ακολουθούμενη από μια άλλη διατριβή για τη Λογική του Νόμου. Ο Leibniz:

1. Οραματιζόταν μια παγκόσμια «Τεχνητή Μαθηματική Γλώσσα» (Lingua Universallis) στην οποία θα μπορούσαν να εκφράζονται κάθε είδους γνώσεις,

2. Αναζητούσε, κυρίως, εκείνους τους «υπολογιστικούς κανόνες» που θα μπορούσαν να αποκαλύψουν κάθε λογική εξάρτηση και εμπλοκή, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών δηλώσεων, και παράλληλα
3. Επιζητούσε εκείνες τις «μηχανές» οι οποίες θα μπορούσαν να υπολογίσουν, απελευθερώνοντας έτσι το μυαλό για πιο δημιουργικές σκέψεις εισάγοντας τη γνωστή «Υπολογιστική Μηχανή του Leibniz».

Η Υπολογιστική Μηχανή του Leibniz ήταν μια δυαδική μηχανική υπολογιστική μηχανή που μπορούσε να εκτελέσει και τις τέσσερις βασικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση). Ο Leibniz εισήγαγε και το δυαδικό αριθμητικό σύστημα που αποτελεί μέχρι και σήμερα τη βάση για τις γλώσσες προγραμματισμού των υπολογιστών. Στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης η αναπαράσταση της πληροφορίας γίνεται με τη χρήση δύο συμβόλων, το 0 και το 1. Συγκεκριμένα, αποτελεί ένα θεσιακό σύστημα, δηλαδή μια μέθοδο κωδικοποίησης αριθμών με βάση[1] το δύο. Κάθε ψηφίο ανήκει σε μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη κατά ένα από αυτή του ψηφίου στα δεξιά του. Επομένως, κάθε ψηφίο ενός δυαδικού αριθμού από δεξιά προς τα αριστερά δηλώνει μονάδα, δυάδα, τετράδα, οκτάδα.



Εικόνα 3: Η μηχανή του Leibniz

Σημαντικότατη ήταν η συμβολή του στην εξέλιξη της Λογικής με τον Λογισμό της Λογικής που εισήγαγε. Ενδεικτικά αναφέρομε:

Ορισμός 3:

- Α ανήκει στο L ή L περιέχει το Α, το οποίο έχει την έννοια ότι: L μπορεί να οριστεί ώστε να συμπίπτει με τη συνύπαρξη ενός πλήθους όρων, εκ των

[1] «Βάση», η οποία συμβολίζεται με τον λατινικό χαρακτήρα «r», αποτελεί το πλήθος των μοναδικών ψηφίων, συμπεριλαμβανομένου και του 0, που αναπαριστώνται οι αριθμοί στο συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα. Για παράδειγμα, στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται σήμερα, η βάση είναι το δέκα, που σημαίνει ότι υπάρχουν 10 ψηφία από το 0 έως το 9.

οποίων ένας Α.

- Β ⊕ Ν = L δηλώνει ότι το Β ανήκει στο L και ότι το Β και το Ν συνθέτουν ή αποτελούν το L. Ανάλογα ισχύουν για περισσότερους όρους.

Αξίωμα 1: Β ⊕ Ν = Ν ⊕ Β.

Ισχυρισμός: Οποιοιδήποτε όροι Α και Β μπορεί να προστεθούν και να συνθέσουν την πράξη Α ⊕ Β.

Αξίωμα 2: Α ⊕ Α = Α.

Πρόταση 5: Εάν Α ανήκει στο Β και Α = C, τότε C ανήκει στο Β.

Πρόταση 6: Εάν C ανήκει στο Β και Α = Β, τότε C ανήκει στο Α.

Πρόταση 7: Α ανήκει στο Α.

(Εάν Α ανήκει στο Α ⊕ Α (βάσει του ορισμού 3) τότε (βάσει της πρότασης 6) το Α ανήκει στο Α.)

…

Πρόταση 20: Εάν Α ανήκει στο Μ και Β ανήκει στο Ν, τότε Α ⊕ Β ανήκει στο Μ ⊕ Ν.

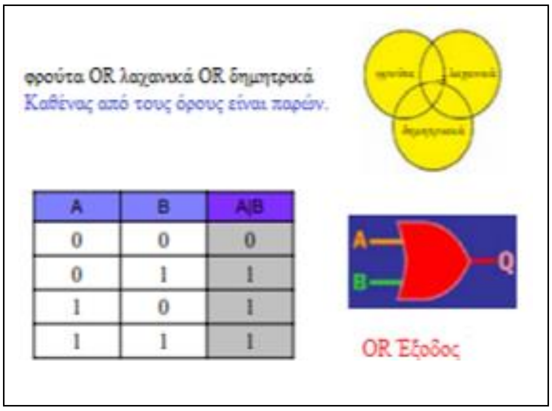
3.3 Η Συμβολική Λογική του Boole

Σύμφωνα με τον Boole οι συλλογισμοί του Αριστοτέλη σχετίζονται με τις τάξεις των αντικειμένων που θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν αλγεβρικά. Οι κανόνες, δηλαδή, που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα των αριθμών θα μπορούσαν επίσης να εφαρμοστούν και στη Λογική, αντιστοιχίζοντας μια έκφραση σε μια ισοδύναμη η οποία θα έχει λιγότερους τελεστές. Συγκεκριμένα ο Boole, ο οποίος έζησε και έδρασε στην απαρχή της βιομηχανικής περιόδου, υποστήριξε πως αν έχουμε ένα επίθετο, όπως το «καλός», το οποίο χρησιμοποιείται ως όρος περιγραφής, μπορούμε να το συμβολίσουμε με ένα γράμμα, για παράδειγμα το «y», δηλώνοντας παράλληλα «όλα τα πράγματα στα οποία ταιριάζει η περιγραφή καλός», δηλαδή «όλα τα καλά πράγματα» ή «τάξη των καλών πραγμάτων».

Εικόνα 5 : George Boole

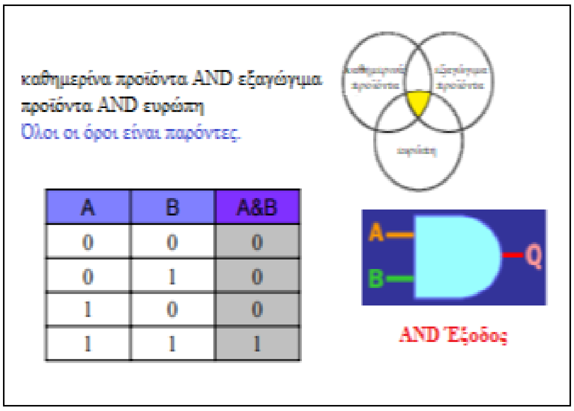
Επιπλέον εισήγαγε την παραδοχή ότι με τον συνδυασμό «xy» θα αναπαριστώνται «εκείνες οι κλάσεις των πράξεων στις οποίες ισχύουν ταυτόχρονα το όνομα ή η περιγραφή που αντιπροσωπεύονται από τα x και y». Επομένως, εάν το «x» σημαίνει μόνο «λευκά πράγματα» και «y» τα «πρόβατα», μπορούμε να θέσουμε με «xy» τα «λευκά πρόβατα».

Η Άλγεβρα του Boole, αναφέρεται σε λογικές μεταβλητές που παίρνουν δύο τιμές {αληθές/true, ψευδές/false} ή {0,1}. Βάσει αυτών των τιμών ορίζονται οι δυαδικοί



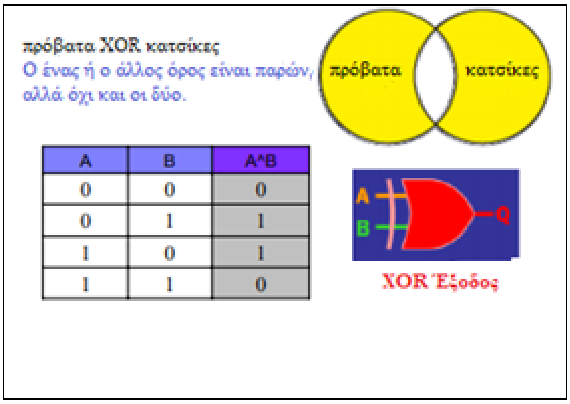
A	B	A|B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Εικόνα 6: Τελεστής OR (|)



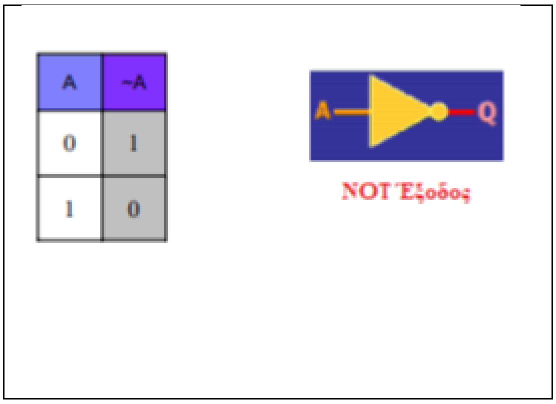
A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Εικόνα 7: Τελεστής AND (&)



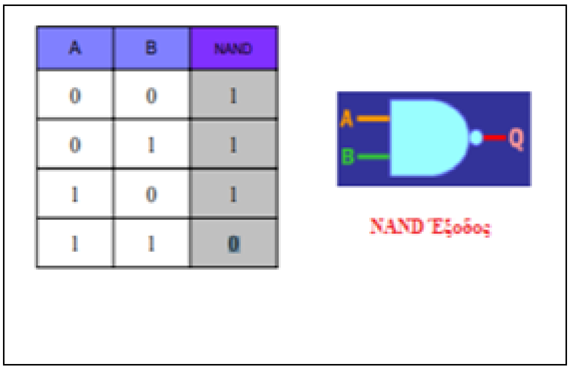
A	B	A^B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Εικόνα 8: Τελεστής XOR (^)



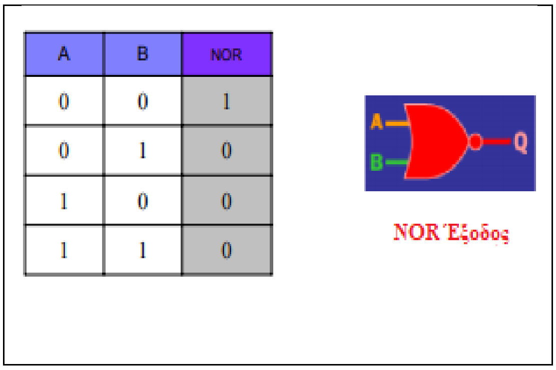
A	~A
0	1
1	0

Εικόνα 9: Τελεστής NOT (~)



A	B	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Εικόνα 10: Τελεστής NAND



A	B	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Εικόνα 11: Τελεστής NOR

τελεστές AND, OR και ο μοναδιαίος τελεστής NOT, οι οποίοι σχηματίζουν λογικές σχέσεις όπως ακριβώς περιγράφονται στους παραπάνω πίνακες αληθείας.

Παράλληλα πολλές φορές στην Άλγεβρα του Boole χρησιμοποιείται:

- AB αντί του A AND B
- A+B αντί του A OR B
- $\overline{A}$ αντί του NOT A

Έτσι ώστε για οποιαδήποτε στοιχεία A,B $\in$ {0,1} να ισχύει ο ακόλουθος πίνακας αξιωμάτων:

Αξιώματα της Άλγεβρας Boole

1.	$A\cdot 0 = 0$	9.	$A\cdot(A+B)=A$
2.	$A+0=A$	10.	$A+(B+C)=(A+B)+C$
3.	$A\cdot 1=A$	11.	$A+A\cdot B=A$
4.	$A+1=1$	12.	$A+B=B+A$
5.	$A\cdot A=A$	13.	$A\cdot B= B\cdot A$
6.	$\overline{A}\cdot A=A$	14.	$A+A=A$
7.	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	15.	$\overline{A}\cdot B+A=A\cdot B$
8.	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	16.	$A+A\cdot B= \overline{A}+B$

3.4 Η Μαθηματικοποίηση της Λογικής


Εικόνα 12 : Friedric Frege

Ο Frege έζησε και έδρασε στο τέλος της περιόδου του Διαφωτισμού μέχρι τις αρχές της Βιομηχανικής Επανάστασης. Αποτέλεσε έναν από τους θεμελιωτές της Σύγχρονης Λογικής, παρότι η βασική του εκπαίδευση επικεντρωνόταν κυρίως στα Μαθηματικά και ειδικότερα στον κλάδο της Γεωμετρίας. Ο Frege βαθιά επηρεασμένος από την Πλατωνική και Αριστοτελική Λογική είχε ως στόχο να δείξει ότι τα Μαθηματικά εξελίσσονται από τη Λογική και για αυτόν τον λόγο επινόησε τεχνικές αρκετά πρωτοποριακές σε σχέση με αυτά που είχε αναφέρει η αριστοτελική συλλογιστική. Προσπάθησε να εισάγει ένα «Σύστημα Λογικής» το οποίο θα εμπεριείχε όλα τα επαγωγικά επιχειρήματα[2] στη Μαθηματική πρακτική. Θεώρησε σημαντικό για το συγκεκριμένο σκοπό να επινοήσει τα δικά του ειδικά σύμβολα για λογικές σχέσεις προκειμένου να αποφευχθεί η σύγχυση με την Άλγεβρα και την Αριθμητική. Ενδεικτικά παραθέτομε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα των ειδικών συμβόλων, των μεταβλητών και των συναρτήσεων που χρησιμοποίησε ο Frege:

- $\exists$, $\forall$, $\supset$, v , $\wedge$,$\neg$.
- $\forall$x, «για κάθε x που είναι άλογο τότε το x είναι θηλαστικό».
- $\exists$x, «υπάρχει x που είναι άλογο και x να είναι καθαρόαιμο».
- ($\forall$x) ($\exists$y) L(x,y), «για κάθε άνθρωπο υπάρχουν επαγγέλματα που αγαπά»
- ($\forall$x) ($\exists$y) [($\exists$z) L(y,z) $\supset$ L(x,y)], «για κάθε άνθρωπο υπάρχουν επαγγέλματα που κάνει αλλά κάποια αγαπά».

Στο πλαίσιο αυτό, προσπάθησε να υλοποιήσει την ιδέα του Leibniz για μια «καθολική γλώσσα λογικής» και έναν «λογισμό λογικής» και ανέπτυξε έναν «τυπικό συμβολισμό». Ο φορμαλισμός αυτός δημοσιεύτηκε το 1879 με τίτλο «Begriffisschrift» και αποτέλεσε το πρώτο παράδειγμα επίσημης γλώσσας με αυστηρό συντακτικό. Παρόλο αυτά, οι κανόνες της λογικής του Frege, δεν παρείχαν μια υπολογιστική μέθοδο που θα μπορούσε να αποδείξει εάν ένα συμπέρασμα κάτω από δεδομένες προϋποθέσεις είναι έγκυρο, πράγμα που αποτέλεσε μια δυσάρεστη εξέλιξη για την υλοποίηση της ιδέας του Leibniz.
Η Λογική του Frege έχει καθιερωθεί ως η τυποποιημένη Λογική που διδάσκεται στη σημερινή εποχή στα μεγάλα πανεπιστήμια στα μαθήματα Λογικής στα Μαθηματικά, την Επιστήμη των Η/Υ και τα τμήματα Φιλοσοφίας. Η Λογική του Frege αποτέλεσε μια τεράστια πρόοδο πέρα από την Αλγεβρική Συμβολική Παράσταση του Boole.

3.5 Τα Άπειρα Σύνολα των Μαθηματικών

Ο George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) έζησε την ίδια περίοδο με τον Frege και ασχολήθηκε κυρίως με τη Θεωρία Συνόλων και με τα «άπειρα σύνολα των Μαθηματικών». Τεκμηρίωσε τις θεωρίες περί «πραγματικού απείρου» ή περί «πιθανών μεγεθών απείρων συνόλων»

Εικόνα 13 : Georg Cantor

[2] Ένα παραγωγικό επιχείρημα είναι ένας τύπος επιχειρήματος Λογικής, το οποίο ξεκινώντας με μια πραγματική προϋπόθεση οδηγείται σε ένα έγκυρο/αληθές συμπέρασμα. Ένα τέτοιο παράδειγμα επαγωγικού επιχειρήματος είναι: «Όλοι οι άνδρες είναι θνητοί. Ο Νίκος είναι άνδρας. Επομένως, ο Νίκος είναι θνητός» .

επηρεαζόμενος από τη Φιλοσοφία. Απέδειξε πως το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο, δηλαδή, δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε ισομέγεθες με το $\mathbb{N}$. Για το σκοπό αυτό, επινόησε τη μέθοδο της Διαγωνοποίησης, προσπαθώντας να συγκρίνει τα μεγέθη δύο απείρων συνόλων, δηλαδή, εάν υπάρχει ένα προς ένα και επί συνάρτηση από το ένα σύνολο στο άλλο.

Παράδειγμα 1. Έστω N = {1, 2, 3, ...}το σύνολο των φυσικών αριθμών και A = {2, 4, 6, ...} το σύνολο των άρτιων αριθμών. Είναι τα δύο σύνολα ισομεγέθη; Θεωρούμε την αντιστοιχία f(n)=2n από το $\mathbb{N}$ στο A. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1, κάθε στοιχείο

n	*f*(*n*)
1	2
2	4
3	6
…	…

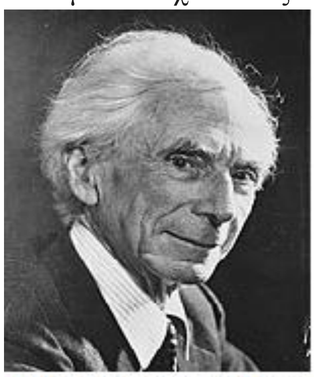
Πίνακας 1: Πίνακας Τιμών παραδείγματος 1

του N αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό στοιχείο του A, επομένως βάσει του Cantor τα 2 σύνολα είναι ισομεγέθη.

Σημειώνεται ότι, ο Hilbert περιέγραψε το έργο του Cantor ως το καλύτερο προϊόν της μαθηματικής ιδιοφυΐας και ένα από τα υπέρτατα επιτεύγματα της καθαρά πνευματικής ανθρώπινης δραστηριότητας.

3.6 Το Παράδοξο του Russell

Ο Russell με μία επιστολή στον Frege το 1902 αναφέρθηκε στο έργο του σχετικά με τη θεώρηση της Λογικής του. Το ζήτημα που έθετε ο Russell έμελλε όχι απλώς να προκαλέσει στον Frege την κατάρρευση του έργου του αλλά και του ιδίου του Frege, όπως χαρακτηριστικά ανέφερε στην επιστολή του στον Russell το 1903. Το γνωστό έως και σήμερα «Παράδοξο του Russell», το οποίο αποτέλεσε και ένα από τα γνωστότερα σφάλματα της Λογικής βασίστηκε στο παρακάτω παράδειγμα:



Εικόνα 14 : Bertrand Russell

«Εστω ότι ζούμε σε ένα χωριό, όπου ισχύει ένας πολύ περίεργος νόμος, που υπαγορεύει ότι:

1. Όλοι οι κάτοικοι πρέπει να κυκλοφορούν καλοξυρισμένοι.
2. Οι κάτοικοι δεν πρέπει να ξυρίζονται μόνοι τους, αλλά από τον κουρέα του χωριού.

Το παράδοξο αυτού του συλλογισμού εντοπιζόταν στο ερώτημα: «ποιός θα ξυρίσει τον κουρέα; δεν μπορεί να ξυριστεί μόνος του, γιατί απαγορεύεται από τον νόμο, αλλά ταυτόχρονα δεν μπορεί να κυκλοφορήσει και αξύριστος.»

Το παράδοξο εντοπίζεται στην αυτοαναφορά δηλαδή, η αναφορά σε σύνολα πραγμάτων που περιέχουν τον εαυτό τους. Συγκεκριμένα, έστω C, το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους:

1. Αν C δεν είναι μέλος του εαυτού του, τότε ο ορισμός του υπαγορεύει ότι πρέπει να περιέχει τον εαυτό του, το οποίο είναι μια αντίφαση και
2. Αν C περιέχει τον εαυτό του, τότε αντιβαίνει με τον δικό του ορισμό ως το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλος του εαυτού τους.

Η Μαθηματική Τυποποίηση των παραπάνω είναι: $C = \{x | x \notin x\}$, τότε $C \in C \Leftrightarrow C \notin C$

Το παράδοξο του Russell βάζει ένα σαφές όριο σε αυτό που καλούμε ανθρώπινη λογική. Δεν μπορούμε δηλαδή να μιλήσουμε για ένα σύνολο όλων των συνόλων καθώς επίσης υπάρχουν σύνολα που δεν ανήκουν σε κανένα άλλο σύνολο.

Ένα ακόμη παράδειγμα αυτού του ορίου είναι ο κατάλογος όλων των βιβλίων που δεν έχουν αναφορά στον εαυτό τους. «Αυτός ο κατάλογος θα συμπεριελάμβανε τον εαυτό του; αν τον συμπεριελάμβανε, θα δημιουργούσε παράδοξο, όπως επίσης και αν δεν τον συμπεριελάμβανε».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μαθηματική Λογική και Επιστήμη των Η/Υ

4.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία 50 χρόνια υπήρξε μια εκτεταμένη και αυξανόμενη αλληλεπίδραση μεταξύ της Λογικής και της Επιστήμης των Υπολογιστών. Οι έννοιες και οι μέθοδοι Λογικής άρχισαν να καταλαμβάνουν κεντρική θέση στην Επιστήμη των Υπολογιστών, καθώς η Λογική ονομάστηκε «Λογισμός της Επιστήμης των Υπολογιστών». Ο M. Davis, το 1988, αναφέρθηκε σχετικά με τις επιρροές της Μαθηματικής Λογικής στον τομέα της Πληροφορικής, σημειώνοντας πως στη σημερινή εποχή οι συνδέσεις μεταξύ Λογικής και Ηλεκτρονικών Υπολογιστών είναι θέμα μηχανικής πρακτικής σε κάθε επίπεδο της οργάνωσης Ηλεκτρονικών Υπολογιστών.

4.2 Gödel και Principa Mathematica

Ο Gödel δίνει την τελική ώθηση στην εξέλιξη των Μαθηματικών στη Λογική με τα δύο θεωρήματα που διατύπωσε για τη «μη πληρότητα». Μέσα από αυτά συμπεραίνει ότι:

1. Δεν μπορούν ακόμα και τα ισχυρότερα συστήματα να συμπεριλάβουν το πλήρες φάσμα της μαθηματικής απόδειξης.
2. Υπάρχουν δηλώσεις που μπορούν να εκφραστούν αλλά όχι αποδεδειγμένα μέσα στα μαθηματικά συστήματα.

3. Υπάρχουν αληθείς προτάσεις που δεν μπορούν να αποδειχθούν από τα αξιώματα.

Οι συγκεκριμένες θέσεις κάνουν αποδεκτά τα ανθρώπινα όρια της Λογικής στις αρχές του 20ου αιώνα.

Παράλληλα, εκδίδεται μια δεκαετής μνημειώδης εργασία, τριών τόμων και 2.000 σελίδων, η «Principia Mathematica», από τους Russell και Whitehead (1910-1913), που είχε στόχο τη συστηματική σύνδεση της Λογικής με τα Μαθηματικά και την αποφυγή προφανών παραδόξων.

4.3 Το Πρόγραμμα του Hilbert

Ο Hilbert θεωρείται ένας από τους πλέον καινοτόμους Μαθηματικούς αφού προσπάθησε να ξεφύγει από τα θεμελιώδη ερωτήματα που έθεταν οι διάφοροι επιστήμονες εκείνη την εποχή. Το 1900 στο διεθνές συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι, ο Hilbert ασχολήθηκε με την επίλυση 23 προβλημάτων τα οποία εκείνη την εποχή ήταν δύσκολο να επιλυθούν με τις υπάρχουσες μεθόδους. Η λίστα των άλυτων προβλημάτων περιελάμβανε: τη Συνέπεια της Αριθμητικής, τη Διοφαντική Ανάλυση και το Πρόβλημα Συνέχειας του Cantor. Το σύνολο των προβλημάτων που πρότεινε προκάλεσε έντονο ενδιαφέρον στη πλειονότητα των Μαθηματικών καθορίζοντας σε τεράστιο βαθμό την ανάπτυξη της Επιστήμης των Μαθηματικών στον 20ο αιώνα.

Εικόνα 16 :DavidHilbert

Για τον Hilbert τα μαθηματικά δεν ήταν παρά μια χειραγώγηση των συμβόλων σύμφωνα με συμφωνημένους τυπικούς κανόνες, μια άποψη ιδιαιτέρως διαφορετική σε σχέση με αυτές των προγενέστερων επιστημόνων. Το αντίκτυπο των λεγομένων του Hilbert άνοιξε το δρόμο για την ανάπτυξη ενός φορμαλιστικού σχολείου, ένα από τα τρία πιο σημαντικά σχολεία των μαθηματικών του 20ού αιώνα.

Το 1920 πρότεινε ένα ερευνητικό πρόγραμμα (στα μεταμαθηματικά, όπως χαρακτηρίστηκε τότε) το οποίο έγινε γνωστό ως το «Πρόγραμμα του Hilbert». Ο Hilbert ήθελε τα Μαθηματικά να διαμορφωθούν σε σταθερές και ολοκληρωμένες λογικές βάσεις, θεωρώντας ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα πρέπει απαραιτήτως να έχει μια ακριβή δήλωση, είτε με τη μορφή μιας πραγματικής απάντησης στην ερώτηση που τίθεται, είτε με την απόδειξη της αδυναμίας επίλυσής του. Κατ 'αρχήν, πίστευε ότι αυτό μπορούσε να γίνει, αποδεικνύοντας ότι:

1. Όλα τα Μαθηματικά προκύπτουν από ένα σωστά επιλεγμένο πεπερασμένο σύστημα από αξιώματα και
2. Ένα τέτοιο αξιωματικό σύστημα είναι αποδεδειγμένα συνεπές με κάποιο τρόπο όπως ο υπολογισμός του έψιλον.

Το πρόγραμμα του Hilbert παρείχε ένα ενιαίο και επίσημο σύστημα υπολογισμού ικανό να δημιουργήσει όλες τις ισχύουσες υποθέσεις των Μαθηματικών από τις «πρώτες αρχές» (Λογική Πρώτου Βαθμού και Θεωρία των Στοιχειωδών Συνόλων). Απέδειξε με μαθηματικό τρόπο ότι αυτό το σύστημα είναι συνεπές, δηλαδή, ότι δεν περιέχει καμία αντίφαση. Αυτό ουσιαστικά αποτέλεσε μια απόδειξη της ορθότητας. Εφόσον το πρόγραμμα ήταν επιτυχές τότε όλα τα μαθηματικά ερωτήματα θα μπορούσαν να καθοριστούν με μηχανικούς υπολογισμούς. Το τέλος του Προγράμματος του Hilbert ήρθε δια χειρός του Gödel (1930-1933) ο οποίος κατέδειξε τη μη πληρότητα της απλής αριθμητικής, διότι δεν υπήρχε συστηματικός τρόπος επίλυσης όλων των μαθηματικών ερωτημάτων. Παράλληλα, ο Gödel αναφέρθηκε και στην αδυναμία απόδειξης της συνέπειας των Μαθηματικών, μια παράμετρο η οποία και αυτή δεν ικανοποιούνταν στο πρόγραμμα του Hilbert. Λίγα χρόνια αργότερα ο A. Church και ο A.Turing (1936-1937) αναφέρθηκαν στον όρο «αναποφασιστικότητα» για τη Λογική Πρώτου Βαθμού, καθώς παρατήρησαν ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λογικών τύπων πρώτου βαθμού δεν μπορεί να υπολογιστεί, εφόσον δεν υπάρχει συστηματικός υπολογιστικός τρόπος για να αποφασιστεί η αλήθεια των τύπων της Λογικής Πρώτου Βαθμού.

4.4 Turing και Von Neumann

Η Επιστήμη των Η/Υ γεννήθηκε μετά το τέλος του προγράμματος του Hilbert. Έτσι, ορίστηκε για πρώτη φορά η έννοια του «αλγορίθμου» ως μια διαδικασία για την επίλυση ενός προβλήματος με τη διεξαγωγή μιας επακριβώς καθορισμένης ακολουθίας απλούστερων, αναμφισβήτητων βημάτων.

Εικόνα 17 : Alan Turing

Ο Turing παράλληλα προχώρησε στη διάκριση ανάμεσα στο hardware και στο software, ενώ λίγο αργότερα επινόησε μια «καθολική μηχανή», η οποία θα μπορούσε να εκτελέσει τυχαία προγράμματα. Η συγκεκριμένη μηχανή κατασκευάστηκε για να εκτελέσει την εργασία οποιουδήποτε μηχανήματος ειδικής χρήσης, δηλαδή για να εκτελέσει οποιοδήποτε κομμάτι υπολογιστικής μεθόδου, με την εισαγωγή μιας ταινίας που έφερε τις κατάλληλες οδηγίες. Παράλληλα, σημαντική ήταν η συνεισφορά του Turing για τον τερματισμό του Β' Παγκοσμίου πολέμου. Ο Turing με τη βοήθεια ενός άλλου μαθηματικού του W.G. Welchman, δημιούργησε τη «μηχανή Bombe» που στηρίχθηκε σε προγενέστερη δουλειά Πολωνών μαθηματικών. Με τη συγκεκριμένη μηχανή, κατά τα τέλη του 1940 και ενώ ο δεύτερος παγκόσμιος πόλεμος βρισκόταν σε έξαρση, οι σύμμαχοι, χάρη στη μεγαλοφυΐα του Turing, αποκωδικοποιούσαν όλα τα μηνύματα που έστελναν οι Γερμανοί με τη βοήθεια της «μηχανής Enigma» της Luftwaffe.


Εικόνα 18 : Von Neumann

Παράλληλα, με τον Turing σημαντική συνεισφορά εκείνη τη περίοδο είχε ο John Von Neumann (1903-1954). Ο Von Neumann υπήρξε ο πρώτος που αντιλήφθηκε την σημασία του θεωρήματος πληρότητας του Gödel. Ήταν μάλιστα, ικανός να αποδείξει ότι η συνέπεια των Μαθηματικών δεν μπορούσε να αποδειχθεί αλλά ο Gödel τον πρόλαβε καθώς είχε φτάσει ήδη στο αποτέλεσμα. Μετά από την ανακάλυψη του Gödel, ο Von Neumann αποφάσισε να μην αναμειχθεί ξανά με τη λογική. Εντάχθηκε στην ομάδα που δημιούργησε το ENIAC στην Η.Μ. Σχολή Μουρ Φιλαδέλφειας (Eckert, Mauchly, Goldstine). Ο ENIAC υπήρξε ο πρώτος μεγάλης κλίμακας επαναπρογραμματιζόμενος ηλεκτρονικός ψηφιακός υπολογιστής (Η/Υ) ικανός να λύσει ένα πλήρες εύρος υπολογιστικών προβλημάτων, όντας ο πρώτος ηλεκτρονικός ψηφιακός υπολογιστής γενικής χρήσης στον κόσμο. Ο ENIAC είχε περισσότερες από 18.000 λυχνίες κενού και 1500 ηλεκτρονόμους. Ζύγιζε 30 τόνους, καταλάμβανε 163 τετραγωνικά μέτρα χώρο και κατανάλωνε 140 κιλοβάτ ισχύ. Παρόλα αυτά, ο ENIAC αποτελούσε μια αναλογική μηχανή. Οι επιστήμονες μετά το ENIAC κατασκεύασαν έναν διάδοχο του το EDVAC, ο οποίος αποτέλεσε έναν από τους πρώτους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Ο συγκεκριμένος υπολογιστής δεχόταν τα προγράμματα από τα σημεία εισόδου, ήταν δυαδικός σε αντίθεση με τον προκάτοχο του που ήταν δεκαδικός και σχεδιάστηκε για να είναι ένας υπολογιστής αποθηκευμένου προγράμματος(αποθήκευε και εκτελούσε το πρόγραμμα μέσω οδηγιών). Ο Von Neumann συνοψίζοντας τις εξελίξεις του λογικού σχεδιασμού στο περίφημο μονόγραμμα «First Report on EDVAC», έπαιξε καθοριστικό ρόλο καθώς συνέβαλλε στην κύρια βελτίωση του σχεδιασμού του, ενσωματώνοντας την αρχή του «αποθηκευμένου προγράμματος» που σήμερα ονομάζουμε ως «Von Neumann αρχιτεκτονική». Σύμφωνα με τον Von Neumann ήταν εύκολο να παρατηρήσουμε με επίσημες λογικές μεθόδους ότι υπάρχουν κώδικες που είναι αφηρημένα κατάλληλοι για να ελέγχουν και να προκαλούν την εκτέλεση οποιασδήποτε ακολουθίας λειτουργιών, ενώ παράλληλα είναι ατομικά διαθέσιμοι στο μηχάνημα και είναι στο σύνολό τους κατανοητές από τον προγραμματιστή προβλημάτων. Κατασκεύασε, οπότε, έναν υπολογιστή που μπορούσε όχι μόνο να σώσει πληροφορίες αλλά και ολόκληρα προγράμματα.

4.5 Μαθηματική Λογική και αυτόματα

Το 1915 ο Leopold Löwenheim (1878–1957) απέδειξε ότι η Μοναδιακή Τάξη[3] ανάγεται σε «πρόβλημα λήψης απόφασης». Σημειώνεται ότι στη Λογική, η απάντηση στο ερώτημα <αληθές> ή <ψευδές> σε ένα πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα λήψης απόφασης εάν και μόνο εάν υπάρχει μια αποτελεσματική μέθοδος για να δώσει ως αποτέλεσμα τη σωστή απάντηση. Επιπλέον ένα Σύστημα Λογικής μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα λήψης απόφασης εφόσον μπορούν να προσδιοριστούν αποτελεσματικά τα μέλη του συνόλου των λογικά έγκυρων τύπων του. Έτσι η τεχνική της απόδειξης του Löwenheim αφενός ανάγεται σε πρόβλημα λήψης απόφασης, αφετέρου στην ιδιότητα του «οριοθετημένου μοντέλου», αποδεικνύοντας ότι «μία μοναδιακή πρόταση είναι ικανοποιήσιμη (βλ. Παράρτημα 3.6) εάν είναι ικανοποιήσιμη σε ένα μοντέλο οριοθετημένου μεγέθους». Αυτό επιτρέπει τη μείωση των δοκιμών ικανοποίησης για την εύρεση ενός οριοθετημένου μοντέλου. Το 1919, η τεχνική του Löwenheim επεκτάθηκε από τον Thoralf Albert Skolem (1887–1963) στη Μοναδιακή Λογική Δευτέρου Βαθμού (βλ. Παράρτημα 3.5), στην οποία μπορούν να ποσοτικοποιηθούν τα μοναδιακά κατηγορήματα[4], εκτός από την ποσοτικοποίηση των στοιχείων του πεδίου τιμών.

Η ιδιότητα του οριοθετημένου μοντέλου χρησιμοποιήθηκε επίσης και από τον Skolem, ο οποίος στην προσπάθειά του να αποδείξει τη συγκεκριμένη ιδιότητα

[3] Η Μοναδιακή Κατηγορηματική Λογική (Monadic First Order Logic) αποτελεί ένα μέρος της Λογικής Πρώτου Βαθμού στην οποία όλα τα σύμβολα σχέσης είναι μοναδιακά (παίρνουν μόνο μία τιμή) και δεν υπάρχουν σύμβολα συναρτήσεων. Όλοι οι ατομικοί τύποι είναι της μορφής P(x), με το P να είναι ένα σύμβολο σχέσης και το x μία μεταβλητή.

[4] Ένα κατηγόρημα ή κατηγορηματική μεταβλητή με μόνο ένα μόνο επιχείρημα ονομάζεται «Μοναδιακό».

εισήγαγε μια βασική τεχνική στη Μαθηματική Λογική, αυτή της «Εξάλειψης του Ποσοδείκτη» ή «Εξάλειψη του Ποσοτικοποιητή». Η Εξάλειψη του Ποσοδείκτη είναι μια τεχνική απλοποίησης, η οποία δίνει τη δυνατότητα δοθείσας μιας πρότασης. που αποτελείται από κάποιες ποσοτικές μεταβλητές, με τιμές πραγματικούς αριθμούς, να παράγει μια ισοδύναμη πρόταση στην οποία. δεν θα εμφανίζονται πλέον ποσοτικές μεταβλητές. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται στη Μαθηματική Λογική, στη Θεωρία Μοντέλων και στην Επιστήμη των Η/Υ.

Για παράδειγμα, εάν έχουμε τον τύπο εισόδου: «έστω ένα x τέτοιο ώστε να ισχύει: $ax^2+bx+c = 0$ με $a \neq 0$» τότε με την εξάλειψη του ποσοτικοποιητή προκύπτει η ισοδύναμη μορφή: «$a \neq 0$ και $4ac - b^2 \leq 0$».

Παράλληλα, σημειώνεται ότι στη Μοναδιακή Λογική Δευτέρου Βαθμού του Skolem το μόνο δυαδικό κατηγόρημα είναι αυτό της «ισότητας».

Στην Κλασική Λογική η έννοια της Λογικής θεωρείται ως ένας δηλωτικός φορμαλισμός, με στόχο την εξειδίκευση των ιδιοτήτων των μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, η πρόταση $(\forall\ x, y, z)(mult(x, y, z) \leftrightarrow mult(y ,x ,z))$, εκφράζει τη μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1930, ένας διαφορετικός κλάδος της Λογικής επικεντρώθηκε σε φορμαλισμούς για την «περιγραφή των υπολογισμών» ξεκινώντας με την εισαγωγή των Μηχανών Turing (MT). Η εξέλιξη συνεχίστηκε κατά την δεκαετία του 1950, από τον Von Neuman, με την ανάπτυξη της θεωρίας των «Μηχανών Πεπερασμένων Καταστάσεων», δηλαδή μαθηματικών μοντέλων αποδεκτών αλυσίδων, ολοκληρώνοντας τη Θεωρία Υπολογισμού.

Ένα «Μη Αιτιοκρατικό Πεπερασμένο Αυτόματο (ΜΑΠΑ) που διαχειρίζεται λέξεις» είναι μία απλή μορφή Μηχανής Πεπερασμένων Καταστάσεων.

Ο μαθηματικός ορισμός ενός ΜΑΠΑ, A είναι: $A = (\Sigma, S, S_0, \rho, F)$, όπου: Σ είναι ένα πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου, S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, S_o είναι ένα αρχικό σύνολο καταστάσεων, με $S_0 \subseteq S$, ρ μία συνάρτηση, η συνάρτηση μετάβασης, με $\rho \subseteq S \times \Sigma \times S$ και F ένα αποδεκτό σύνολο καταστάσεων $F \subseteq S$.

Ένα ΜΑΠΑ δέχεται μια πεπερασμένη λέξη εισόδου $w = a_0, \ldots , a_{n-1} \in \Sigma^*$ και επιστρέφει καταφατική απάντηση αν γίνεται αποδεκτή ή αρνητική σε αντίθετη περίπτωση. Η διαδικασία για τον έλεγχο της λέξης w από το A αντιστοιχεί στην καταγραφή της πεπερασμένης ακολουθίας $r = s_0, \ldots , s_n$ των καταστάσεων του S η οποία περιγράφεται ως:

$s_0 \in S$ και $(s_i, a_i, s_{i+1}) \in \rho$, για $0 \leq i < n$. Λέμε ότι έχουμε αποδοχή από το Α,

1. του το r εάν και μόνο εάν $s_n \in F$,
2. του w εάν και μόνο εάν το Α έχει μια αποδεκτή εκτέλεση στο w

Η γλώσσα του Α, που συμβολίζεται L(A), δηλώνει το σύνολο των λέξεων που είναι αποδεκτό από το αυτόματο Α, δηλαδή,

$$L(A) = \{\ w/w \in \Sigma^* \ \&\ \rho(S_0,w) \cap F \neq \varnothing\ \}.$$

Η κλάση των γλωσσών που γίνονται αποδεκτές από ΜΑΠΑ ορίζεται ως κλάση κανονικών γλωσσών, είναι κανονικά σύνολα και συμβολίζονται με τις κανονικές εκφράσεις. Τα κανονικά σύνολα είναι μία πολυπληθής κλάση με αντίστοιχη ποικιλία εκφράσεων.

Παράδειγμα 2. Η κωδικοποίηση της πρόσθεσης δυαδικών αριθμών σε πρόβλημα λήψης απόφασης. Έστω οι δυαδικοί αριθμοί, 1001 και 0101, είναι γνωστό ότι το άθροισμά τους υπολογίζεται ως (βλ. Εικόνα 19):

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,1 \\ \underline{0\,1\,0\,1} \\ 1\,1\,1\,0 \end{array}$$

Εικόνα 19: Άθροισμα δυαδικών αριθμών

Η κωδικοποίησή του σε πρόβλημα λήψης απόφασης έγκειται στο να οριστεί το αντίστοιχο αυτόματο «ΠΑ» το οποίο θα δέχεται ως είσοδο την αλυσίδα που θα αντιστοιχεί στο άθροισμα δοθέντων δυαδικών αριθμών και θα αποφαίνεται ναι ή όχι αν αυτό αντίστοιχα είναι αποδεκτό ή όχι.

Δηλαδή, ορίζουμε ένα ΠΑ = (Σ, S, S_0, ρ, F), όπου,

- $\Sigma = \{\ \sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6,\sigma_7\ \}$ πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου με:

$$\sigma_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \sigma_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \sigma_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \quad \sigma_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \sigma_5=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \sigma_6=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \sigma_7=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

να αποτελούν τα σύνθετα σήματα που παριστούν τις κάθετες πράξης της δυαδικής πρόσθεσης (βλ. Εικόνα 19),

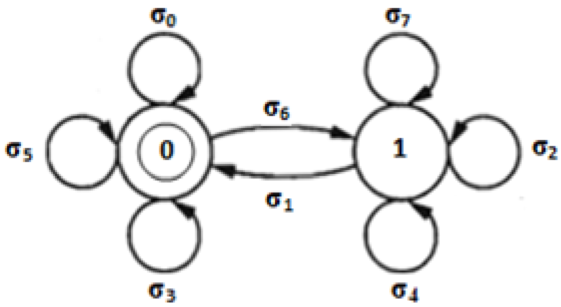
- S = {0(κατάσταση χωρίς υπόλοιπο), 1(κατάσταση με υπόλοιπο)}, πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων,
- $S_0 = \{0\}$ αρχική κατάσταση,
- $\rho: \Sigma x S \rightarrow S$ συνάρτηση μετάβασης,

- $F = \{0\}$ κατάσταση αποδοχής, $F \subseteq S$.

Επομένως, η πρόσθεση (βλ. Εικόνα 19) κωδικοποιείται και συμβολίζεται ως η αλυσίδα:

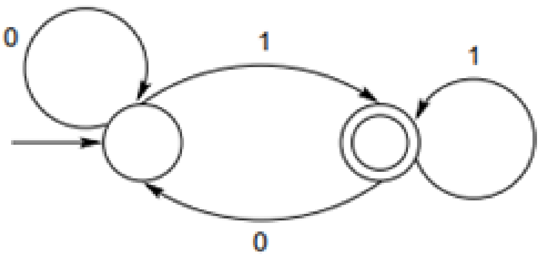
$$\sigma_5\ \sigma_3\ \sigma_1\ \sigma_6$$

η οποία γίνεται αποδεκτή από το Πεπερασμένο Αυτόματο με καταστατικό διάγραμμα :



Σχήμα 1: Καταστατικό Διάγραμμα Πεπερασμένου Αυτομάτου

Παράδειγμα 3. Περιγράφουμε διαγραμματικά ένα ΜΑΠΑ που αποδέχεται όλες τις λέξεις πάνω στο αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$, το οποίο τερματίζει στη περίπτωση της κατάστασης που δέχεται το στοιχείο του αλφαβήτου/σήμα «1». Όπως φαίνεται και στο καταστατικό διάγραμμα, το τόξο με επιγραφή το στοιχείο του αλφαβήτου/σήμα «0» ακολουθώντας τον ορισμό της συνάρτησης μετάβασης, οδηγείται στην αρχική κατάσταση (μη τερματική κατάσταση), ενώ το τόξο με επιγραφή το στοιχείο του αλφαβήτου/σήμα «1», οδηγείται ανάλογα στην κατάσταση αποδοχής.



Σχήμα 2: Καταστατικό Διάγραμμα παραδείγματος 3

Θεωρούμε, μία πεπερασμένη λέξη $w = a_0, \ldots, a_{n-1}$ πάνω σε ένα αλφάβητο Σ ως μία σχεσιακή δομή M_w, με πεδίο τιμών από 0,....,n-1, οι οποίες είναι διατεταγμένες με τη δυαδική σχέση «<», και τις μοναδιαίες σχέσεις $\{P_a : a \in \Sigma\}$, με την έννοια ότι ισχύει ακριβώς $P_a(i)$ εάν a_i=a. Αναφερόμαστε σε αυτές τις δομές ως δομές λέξης. Χρησιμοποιούμε τη Λογική Πρώτου Βαθμού (ΛΠΒ) για να περιγράψομε τέτοιες λέξεις. Για παράδειγμα η πρόταση:

$$(\exists x)((\forall y)(\neg(x < y)) \wedge P_a(x))$$

δηλώνει ότι το τελευταίο γράμμα της λέξης είναι το a, τέτοιες προτάσεις ορίζονται επί του αλφαβήτου Σ.

Υπερβαίνοντας τη Λογική Πρώτου Βαθμού (ΛΠΒ) (βλ. Παράρτημα 3.4) είναι η Μοναδιακή Λογική Δευτέρου Βαθμού (ΜΛΔΒ), στην οποία μπορούμε να έχουμε μοναδιακούς ποσοδείκτες δεύτερης τάξης της μορφής ∃Q, με τιμές επί υποσυνόλων του πεδίου τιμών, και δημιουργώντας νέους ατομικούς τύπους της μορφής Q(x). Δοθείσας μιας πρότασης φ στην ΛΜΒ, το σύνολο των προτύπων/μοντέλων models(φ) είναι ένα σύνολο λέξεων. Σημειώνεται ότι αυτή η Λογική είναι μία επέκταση της Λογικής του Skolem με την προσθήκη της γραμμικής σχέσης «<».

Η θεμελιώδης σύνδεση μεταξύ της Λογικής και των Αυτομάτων θεμελιώνεται από με το ακόλουθο θεώρημα που επινόησαν ανεξάρτητα ο Buchi, ο Elgot και ο Trakhtenbrot.

Θεώρημα 1. Δοθείσας μιας ΜΛΔΒ πρότασης φ πάνω σε ένα αλφάβητο Σ, μπορεί να κατασκευαστεί ένα ΜΑΠΑ, A_{φ}, με αλφάβητο Σ έτσι ώστε μια λέξη w στο Σ* να είναι αποδεκτή από το A_{Φ} εάν και μόνο εάν η φ ισχύει στη δομή λέξης M_w. Αντίστροφα, δοθέντος ενός ΜΑΠΑ, Α, με αλφάβητο Σ, μπορεί να κατασκευαστεί μια ΜΛΔΒ πρόταση φ_A πάνω σε ένα αλφάβητο Σ έτσι ώστε το φ_A να ισχύει στη δομή λέξης M_w αν και μόνο αν το w είναι αποδεκτό από το Α.

Επομένως, η κλάση των γλωσσών που ορίζονται από ΜΛΔΒ προτάσεις είναι ακριβώς η κλάση των κανονικών γλωσσών. Για να αποφασίσουμε πότε μία πρόταση φ είναι ικανοποιήσιμη, δηλαδή, εάν $models_{\omega}(\phi) \neq \emptyset$, χρειάζεται να ελέγξομε αν $L(A_{\varphi}) \neq \emptyset$, έτσι το πρόβλημα γίνεται ευκολότερο. Έστω το ΜΑΠΑ: $A = (\Sigma, S, S_0, \rho, F)$. Κατασκευάζοντας ένα κατευθυνόμενο γράφημα, $G_A=(S,E_A)$, με S να ορίζεται ως το σύνολο των κορυφών και $E_A=\{(s,t) : (s,a,t) \epsilon \, p$ για ορισμένα $a \epsilon \Sigma\}$, το ακόλουθο λήμμα είναι σαφές και περισσότερο συγκεκριμένο.

Λήμμα 1. Είναι $L(A) \neq \emptyset$ εάν και μόνο εάν υπάρχουν καταστάσεις $s_0 \in S_0$ και $t \in F$ έτσι ώστε στο G_A να υπάρχει ένα μονοπάτι (διαδρομή) από το s_0 στο t.

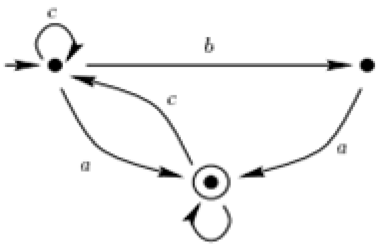
Επομένως, προκύπτει ένας αλγόριθμος για τα «προβλήματα Ικανοποιησιμότητας» της ΜΛΔΒ πάνω σε δομές λέξεων: δοθείσας μιας ΜΛΔΒ πρότασης φ, κατασκευάζεται ένα ΜΑΠΑ, A_{Φ} και ελέγχουμε εάν $L(A) \neq \emptyset$ βρίσκοντας μια διαδρομή από μία αρχική κατάσταση σε μία κατάσταση αποδοχής. Αυτή η προσέγγιση για τον έλεγχο ικανοποιησιμότητας αναφέρεται ως «Θεωρητική Προσέγγιση Αυτομάτων», αφού η διαδικασία «λήψης απόφασης» ενεργεί ξεκινώντας από τη Λογική στα Αυτόματα αναζητώντας στη συνέχεια μια διαδρομή στο αυτόματο που έχει κατασκευαστεί.

Αναφορικά με την ανάλυση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του προβλήματος ικανοποιησιμότητας υπήρξε ελάχιστο ενδιαφέρον κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1950. Το 1974, όμως ορίστηκε η συνάρτηση exp(k,n)[5] επαγωγικά ως εξής:

- exp(0,n) = n και
- exp(k+1,n) = 2exp(k,n)

Αναφέρουμε, λοιπόν, ότι ένα πρόβλημα είναι «μη στοιχειώδες»[6] εάν δεν μπορεί να επιλυθεί από έναν αλγόριθμο του οποίου ο χρόνος εκτέλεσης περιορίζεται από το exp(k,n) για κάποια $k \geq 0$. Δηλαδή, ο χρόνος εκτέλεσης δεν μπορεί να οριοθετηθεί από έναν εκθετικό πυλώνα σταθερού ύψους. Αποδείχθηκε, επίσης, ότι το πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας (βλ. Παράρτημα 3.6) για ΜΛΔΒ δεν είναι «στοιχειώδες». Στην πραγματικότητα το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ήδη «μη στοιχειώδες» για τη ΛΠΒ.

Παράδειγμα 4. Δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα περιγραφής τυπικής γλώσσας με λογικό φορμαλισμό που γίνεται αποδεκτή από ΠΑ. Έστω το Πεπερασμένο Αυτόματο με καταστατικό διάγραμμα:



Σχήμα 3: Καταστατικό Διάγραμμα παραδείγματος 4

το οποίο αποδέχεται τις λέξεις/αλυσίδες πάνω σε ένα αλφάβητο Σ={a,b,c}, στις οποίες:

- το a δεν ακολουθείται από a ή b,
- κάποιο b ακολουθείται από το a και
- το a είναι το τελευταίο γράμμα

Αυτές οι 3 συνθήκες μπορούν να εκφραστούν από τύπους της ΛΠΒ, χρησιμοποιώντας:

- Μεταβλητές x, y για τις θέσεις των γραμμάτων
- Έναν τύπο S(x,y) που δείχνει ότι η θέση του y διαδέχεται το x

[5] Βλ. Παράρτημα 3.1

[6] Στην Θεωρία Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας ως «Στοιχειώδες» καλείται ένα πρόβλημα το οποίο ανήκει στην ένωση των κλάσεων : EXP $\cup$ 2EXP $\cup$ 3EXP $\cup$…KTIME(2^n)….

- Τον ατομικό τύπο Q_a (x) που δηλώνει ότι στη θέση x υπάρχει το γράμμα a

Οπότε, ορίζεται η πρόταση φ της ΛΠΒ :

φ: $\neg\exists x\exists y(S(x,y)\wedge Q_a(x)\wedge Q_b(y)) \wedge\forall x(Q_b(x)\rightarrow\exists y(S(x,y)\wedge Q_a(y)))\wedge\exists x(\neg\exists yS(x,y)\wedge Q_a(x))$

όπου:

- $(S(x,y)\wedge Q_a(x)\wedge Q_b(y))$ εκφράζει ότι το a δεν ακολουθείται από το a ή b.
- $(Q_b(x)\rightarrow\exists y(S(x,y)\wedge Q_a(y)))$ εκφράζει ότι κάποιο b ακολουθείται από το a.
- $(\neg\exists yS(x,y)\wedge Q_a(x))$ εκφράζει ότι το a είναι το τελευταίο γράμμα.

4.6 Μαθηματική Λογική και Ακολουθιακά Κυκλώματα

Το 1957 ο Alonzo Church (1903-1957) περιέγραψε τη χρήση της Λογικής για να ορίσει τα «ακολουθιακά κυκλώματα». Ένα ακολουθιακό κύκλωμα είναι ένα κύκλωμα εναλλαγής του οποίου η έξοδος δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο του αλλά και από τις προηγούμενες εισόδους που είχε στο παρελθόν. Με άλλα λόγια, είναι ένας ιδιαίτερος τύπος μηχανής πεπερασμένων καταστάσεων ο οποίος έγινε θέμα μελέτης στη Μαθηματική Λογική και την Επιστήμη των Η/Υ τη δεκαετία του 1950.

Ο μαθηματικός ορισμός ενός ακολουθιακού κυκλώματος C, είναι:

$$C = (I, O, R, f, g, r_0)$$

όπου:

I είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημάτων εισόδου του Boole,

O ένα πεπερασμένο σύνολο σημάτων εξόδου του Boole,

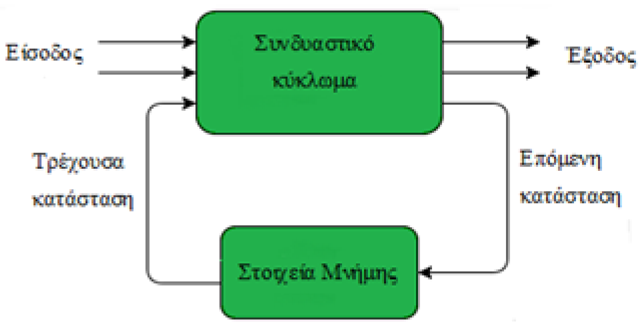
R ένα πεπερασμένο σύνολο ακολουθιακών στοιχείων του Boole,

f μία συνάρτηση μετάβασης, με $f: 2^I \times 2^R \rightarrow 2^R$,

g μία συνάρτηση εξόδου με $g : 2^R \rightarrow 2^O$ και

r_0 μία αρχική κατάσταση: $r_0 \in 2^R$.

Σημειώνεται ότι, τα στοιχεία του $I \cup O \cup R$ αναφέρονται ως «στοιχεία του κυκλώματος» και υποθέτουμε ότι I, O, R είναι διακεκριμένα.



Σχήμα 4: Ακολουθιακό Κύκλωμα

Τα «Στοιχεία Μνήμης» του ακολουθιακού κυκλώματος (βλ. Σχήμα 4) είναι συσκευές-κυκλώματα που μπορούν να αποθηκεύουν δυαδική πληροφορία μέσα τους, ενώ οι «Έξοδοι» είναι συναρτήσεις όχι μόνο των εισόδων του, αλλά και της τρέχουσας κατάστασης των στοιχείων μνήμης του.

Αναλυτικότερα, μία κατάσταση του κυκλώματος είναι μία ανάθεση τιμών του Boole στα ακολουθιακά στοιχεία, με αρχική κατάσταση το r_0 και ως σήμα εξόδου το g(r). Όταν το κύκλωμα είναι στην κατάσταση $r \in 2^R$ και διαβάζει μία ανάθεση εισόδου $i \in 2^I$, αυτή αλλάζει την κατάσταση της σε f(i, r).

Ένα ίχνος επί ενός συνόλου V μεταβλητών του Boole, είναι μία μη πεπερασμένη λέξη πάνω σε ένα αλφάβητο 2^V, για παράδειγμα ένα στοιχείο του $(2^V)^\omega$. Ένα ίχνος του ακολουθιακού κυκλώματος C, είναι ένα ίχνος πάνω στο $I \cup O \cup R$ που ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες. Συγκεκριμένα, μία ακολουθία: $\tau = (i_0, r_0, o_0)\,(i_1, r_1, o_1), \ldots$, όπου: $i_j \in 2^I$, $o_j \in 2^O$, $r_j \in 2^R$ αποτελεί ένα ίχνος του C $r_{j+1} = f(i_j, r_j)$ και $o_j = g(r_j)$, για $j \geq 0$. Με τη σύγχρονη ορολογία ο Church ακολούθησε την προσέγγιση του γραμμικού χρόνου.[7] Το σύνολο των ιχνών του C συμβολίζεται ως traces(C).

Στη §4.3 αναφέρθηκε ο τρόπος συσχετισμού σχεσιακών δομών με λέξεις. Ανάλογα συσχετίζεται μία απλή λέξη $w = a_0, a_1, \ldots$, πάνω σε ένα αλφάβητο 2^V με μια σχεσιακή δομή $M_w = (N, \leq, V)$, με πεδίο τιμών τους διατεταγμένους φυσικούς N με τη γραμμική σχέση «<» και την επέκταση στο σύνολο V των μοναδιαίων κατηγορημάτων, όπου είναι $j \in p$, για $p \in V$, ακριβώς όταν το p[8] παίρνει την Boolean τιμή 1 στο a_i. Αναφερόμαστε σε τέτοιες δομές ως «μη πεπερασμένες δομές λέξης». Όταν αναφερόμαστε στο λεξιλόγιο μιας τέτοιας δομής εννοούμε κατά ρητό τρόπο μόνο το σύνολο V, θεωρώντας τη γραμμική σχέση «<» ως δεδομένη.

Επομένως, μπορούμε να καθορίσουμε τα ίχνη χρησιμοποιώντας προτάσεις της Λογικής Πρώτης Βαθμού (ΛΠΒ) κατασκευασμένες από ατομικούς τύπους της μορφής:

$$x = y,\ \ x < y, \text{ και } p(x) \text{ για } p \in V = I \cup R \cup O.$$

Για παράδειγμα η ΛΠΒ πρόταση:

$$(\forall x)(\exists y)(x < y \wedge p(y)),$$

δηλώνει ότι το p ισχύει απείρως συχνά στο ίχνος. Το 1963 ο Church σκέφτηκε,

[7] Ένας αλγόριθμος λέγεται ότι λαμβάνει γραμμικό χρόνο, εάν η πολυπλοκότητα του χρόνου του είναι O(n). Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου αυξάνεται το πολύ γραμμικά.

[8] Υπερβατικά συμβολίζομε και χειριζόμαστε το p συγχρόνως ως μεταβλητή του Boole και κατηγόρημα.

παράλληλα, να προσδιορίσει τα ίχνη χρησιμοποιώντας τη Μοναδιακή Λογική Δεύτερης Βαθμού (ΜΛΔΒ), όπου επιπρόσθετα των ποσοτικών προσδιορισμών πρώτης τάξης, το πεδίο τιμών των οποίων πάνω στο σύνολο N, επιτρέπονται επίσης ποσοδείκτες της Μοναδιακής Λογικής Δεύτερης Βαθμού, με πεδίο τιμών πάνω σε υποσύνολα του N και ατομικούς τύπους της μορφής Q(x), όπου Q είναι μια μοναδιακή κατηγορηματική μεταβλητή. Για παράδειγμα, δίνεται η παρακάτω ΜΛΔΒ πρόταση:

$$(\exists P)(\forall x)(\forall y)((((P(x) \wedge y = x+1) \rightarrow (\neg P(y))) \wedge$$
$$(((\neg P(x)) \wedge y = x+1) \rightarrow P(y))) \wedge$$
$$(x = 0 \rightarrow P(x)) \wedge (P(x) \rightarrow q(x))),$$

όπου: $x=0$ είναι μία συντομογραφία για το $(\neg(\exists z)(z < x))$ και

$y = x+1$ είναι μία συντομογραφία για το $(y > x \wedge \neg(\exists z)(x < z \wedge z < y))$,

εκφράζοντας ότι το q ισχύει σε κάθε σημείο στο ίχνος.

Στην πραγματικότητα ο Church πρότεινε τη χρήση της Κλασικής Λογικής (ΛΠΒ ή ΜΛΔΒ) ως μία Λογική του χρόνου, εστιάζοντας σε μη πεπερασμένες δομές λέξης. Το σύνολο των μη πεπερασμένων μοντέλων από μία ΛΠΤ ή ΜΛΔΒ πρόταση φ συμβολίζεται ως $\text{models}_{\omega}(\phi)$.

Ο Church έθεσε δύο προβλήματα σχετικά με τα ακολουθιακά κυκλώματα:

1. Το πρόβλημα Απόφασης: Δοθέντος ενός κυκλώματος C και μιας πρότασης φ, η φ ισχύει σε όλα τα ίχνη του C; Δηλαδή, ισχύει $\text{traces}(C) \subseteq \text{models}(\phi)$;
2. Το πρόβλημα Σύνθεσης: Δοθέντων των συνόλων I και O σημάτων εισόδου και εξόδου, και μίας πρότασης φ πάνω σε ένα λεξιλόγιο $I \cup O$, κατασκευάζομε, εάν είναι δυνατό, ένα ακολουθιακό κύκλωμα C με σήματα εισόδου I και σήματα εξόδου O, έτσι ώστε η φ να ισχύει όλα τα ίχνη του C. Δηλαδή, κατασκευάζεται το κύκλωμα C έτσι ώστε να ισχύει $\text{traces}(C) \subseteq \text{models}(\phi)$.

Στη σύγχρονη ορολογία το «πρόβλημα Απόφασης του Church», είναι το πρόβλημα «Ελέγχου Μοντέλου» (βλ. Παράρτημα 3.2) σε προσέγγιση γραμμικού χρόνου. Αυτό το πρόβλημα δεν έτυχε μεγάλης προσοχής, μέχρι την εισαγωγή του «Ελέγχου Μοντέλου» στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Αντίθετα, το «πρόβλημά της Σύνθεσης» έχει παραμείνει ακόμα και σήμερα αντικείμενο συνεχούς έρευνας για τους επιστήμονες. Ένας από τους λόγους για τους οποίους το πρόβλημα της Απόφασης δεν παρέμεινε αντικείμενο μελέτης έγκειται στο γεγονός ότι μπορεί να περιοριστεί στο «πρόβλημα Εγκυρότητας» σε μία υποκείμενη Λογική (ΛΠΒ ή

ΜΛΔΒ). Δοθέντος ενός ακολουθιακού κυκλώματος C, μπορούμε εύκολα να παράγουμε μία ΛΠΒ πρόταση $α_c$. η οποία να ισχύει ακριβώς σε όλες τις δομές που σχετίζονται με τα ίχνη του C. Τότε, η φ ισχύει σε όλα τα ίχνη του C ακριβώς όταν $α_c \rightarrow \phi$ ισχύει σε όλες τις δομές λέξης (του κατάλληλου λεξιλογίου). Επομένως, για την επίλυση του «προβλήματος Απόφασης» πρέπει πρώτα να επιλύσουμε το «πρόβλημα Εγκυρότητας» πάνω σε δομές λέξης.

4.7 Η Λογική των προβλημάτων Απόφασης με μη πεπερασμένες λέξεις

Το πρόβλημα Απόφασης του Church, επιλύθηκε ουσιαστικά το 1962 από τον Julius Büchi (1924-1984) ο οποίος απέδειξε ότι το πρόβλημα Εγκυρότητας για άπειρες δομές λέξεων ανάγεται σε πρόβλημα λήψης απόφασης, δηλαδή υπάρχει μια αποτελεσματική μέθοδος για να δώσει ως αποτέλεσμα τη σωστή απάντηση. Στην πραγματικότητα, ο Büchi απέδειξε ότι το πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας για ΜΛΜΒ σε άπειρες δομές λέξης είναι ένα πρόβλημα Λήψης Απόφασης και στηριζόμενος σε αυτή την απόδειξη προχώρησε στο πρόβλημα Εγκυρότητας. Η προσέγγιση του Büchi βασίστηκε στην επέκταση της «Θεωρητικής Προσέγγισης Αυτομάτων» (βλ. Θεώρημα 1), η οποία εισήχθη μερικά χρόνια νωρίτερα για δομές λέξης, σε μη πεπερασμένες δομές λέξης, επιτρέποντας στον Büchi να επεκτείνει τη Θεωρία Αυτομάτων σε Αυτόματα μη Πεπερασμένων Λέξεων.

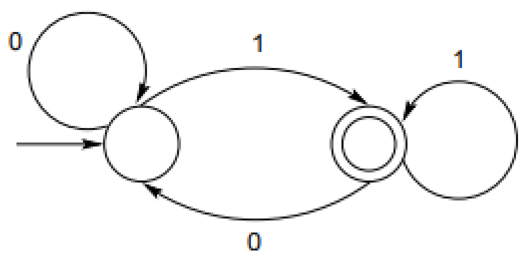
Ο μαθηματικός ορισμός ενός Μη Αιτιοκρατικού Πεπερασμένου Αυτομάτου του Büchi, στο εξής Büchi αυτομάτου, που διαχειρίζεται λέξεις, είναι $A = (\Sigma, S, S_0, \rho, F)$ όπου: Σ είναι ένα πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου, S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, S_o είναι ένα αρχικό σύνολο καταστάσεων, με $S_0 \subseteq S$, ρ μία συνάρτηση μετάβασης, με $\rho \subseteq S \times \Sigma \times S$ και F ένα αποδεκτό σύνολο καταστάσεων $F \subseteq S$. Ένα ΜΑΠΑ του Büchi δέχεται μια μη πεπερασμένη λέξη εισόδου $w = a_0, a_1\ldots \in \Sigma^\omega$ και επιστρέφει καταφατική απάντηση αν γίνεται αποδεκτή ή αρνητική σε αντίθετη περίπτωση. Η διαδικασία ελέγχου της λέξης w από το A αντιστοιχεί στην καταγραφή της πεπερασμένης ακολουθίας $r = s_0,s_1,\ldots$ των καταστάσεων του S η οποία περιγράφεται ως: $s_0 \in S$ και $(s_i ,ai, s_{i+1}) \in \rho$, για $0 \leq i < n$. Λέμε ότι έχουμε αποδοχή από το A,

1. του το r εάν και μόνο εάν $s_i \in F$, για απείρως πολλά i και
2. του w εάν και μόνο εάν το A έχει μια αποδεκτή εκτέλεση στο w

Η γλώσσα του A, που συμβολίζεται $L_w(A)$, δηλώνει το σύνολο των μη πεπερασμένων λέξεων που είναι αποδεκτό από το αυτόματο A.

Η κλάση των γλωσσών που γίνονται αποδεκτές από Büchi αυτόματο ορίζεται ως κλάση ω-κανονικών γλωσσών, είναι κανονικά σύνολα και συμβολίζονται με τις κανονικές εκφράσεις, επαυξημένες με τον ω-τελεστή (e^{ω} δηλώνει μία μη πεπερασμένη επανάληψη του e).

Παράδειγμα 5. Περιγράφουμε διαγραμματικά ένα Büchi αυτόματο που αποδέχεται όλες τις λέξεις από το αλφάβητο $\Sigma = \{0,1\}$ το οποίο περιέχει άπειρα πολλά γεγονότα του 1. Όπως φαίνεται και στο καταστατικό διάγραμμα, το τόξο με επιγραφή το στοιχείο του αλφαβήτου/σήμα «0» ακολουθώντας τον ορισμό της συνάρτησης μετάβασης, οδηγείται στην αρχική κατάσταση (μη τερματική κατάσταση), ενώ το τόξο με επιγραφή το στοιχείο του αλφαβήτου/σήμα «1», οδηγείται ανάλογα στην κατάσταση αποδοχής. Σημειώνεται ότι αυτό το διάγραμμα του Παραδείγματος 3 με το αντίστοιχο του Παραδείγματος 5 έχουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά, με τη μόνη διαφορά να έγκειται στο γεγονός ότι στο Παράδειγμα 3 θεωρήσαμε πεπερασμένες λέξεις εισόδου, σε αντίθεση με τη συγκεκριμένη που περίπτωση εξετάζουμε άπειρες λέξεις εισόδου. Όπως επισημάναμε νωρίτερα, η παραδειγματική ιδέα της «Θεωρητικής Προσέγγισης Αυτομάτων» είναι ότι μπορούμε να μπορούμε να καταρτίσουμε λογικές προδιαγραφές υψηλού επιπέδου μέσα σε ένα ισοδύναμο χαμηλού επιπέδου επίπεδου πεπερασμένων καταστάσεων φορμαλισμό.



Σχήμα 5: Γραφική αναπαράσταση παραδείγματος 5

Θεώρημα 2. Δοθείσας μιας ΜΛΔΒ πρότασης ϕ με λεξιλόγιο V, μπορεί να κατασκευαστεί ένα Büchi Αυτόματο A_{ϕ} με αλφάβητο 2^V, έτσι ώστε μία λέξη w στο $(2^V)^{\omega}$ να είναι αποδεκτή από το A_{ϕ} αν και μόνο αν το φ ισχύει στη δομή λέξης M_w. Αντιστρόφως, δοθέντος ενός Büchi Αυτομάτου, A, με αλφάβητο 2^V μπορεί να κατασκευαστεί μία ΜΛΔΒ πρόταση φ_A με λεξιλόγιο V έτσι ώστε η φ_A να ισχύει σε μία άπειρη δομή λέξης M_w αν και μόνο αν η w είναι αποδεκτή από το A.

Επομένως, η κλάση των γλωσσών που ορίζονται από ΜΛΔΒ προτάσεις είναι ακριβώς η κλάση των ω-κανονικών γλωσσών. Για να αποφασίσουμε πότε μία πρόταση φ είναι ικανοποιήσιμη επί μη πεπερασμένων λέξεων, δηλαδή, εάν $models_{\omega}(\phi) \neq \emptyset$, χρειάζεται να ελέγξομε εάν $L_{\omega}(A_{\varphi}) \neq \emptyset$. Έστω το ΜΑΠΑ του Buchi: $A = (\Sigma, S, S_0, \rho, F)$. Κατασκευάζοντας ένα κατευθυνόμενο γράφημα, $G_A=(S,E_A)$, με S να ορίζεται ως το σύνολο των κορυφών και $E_A=\{(s,t): (s,a,t) \in p$ για ορισμένα $a \in \Sigma\}$, το ακόλουθο λήμμα είναι σαφές και περισσότερο συγκεκριμένο.

Λήμμα 2. $L_{\omega}(A_{\varphi}) \neq \emptyset$, αν και μόνο αν υπάρχουν καταστάσεις $s_0 \in S_0$ και $t \in F$ έτσι ώστε στο G_A να υπάρχει μια (διαδρομή) από το s_0 στο t και ένα μονοπάτι από το t στον εαυτό του.

Επομένως, προκύπτει ένας αλγόριθμος για το πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας της ΜΛΔΒ πάνω σε μη πεπερασμένες δομές λέξης: δοθείσας μίας ΜΛΔΒ πρότασης φ, κατασκευάζεται ένα Büchi αυτόματο, A_{φ} και ελέγχει εάν $L_{\omega}(A_{\varphi})\neq\emptyset$, βρίσκοντας μια διαδρομή από μια αρχική κατάσταση σε μια κατάσταση αποδοχής και έναν κύκλο μέσω της κατάστασης αποδοχής. Δεδομένου ότι το πρόβλημα Απόφασης μπορεί να μειωθεί σε πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας, το οποίο επίσης επιλύει το πρόβλημα Απόφασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Βιομηχανική Λογική και σύγχρονα βιομηχανικά προϊόντα της

5.1 Λογική και Τεχνητή Νοημοσύνη

Η Τεχνητή Νοημοσύνη (ΤΝ) αποτελεί ένα πεδίο της Ε.Η/Υ με αντικείμενο τη δημιουργία ενός τεχνητού υπολογιστικού συστήματος προσομοίωσης της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου.

Ανάλογες σκέψεις για τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου είχαν διατυπωθεί και στην Κλασική Ελλάδα από τον Σωκράτη και τον Αριστοτέλη. Κύριος εμπνευστής της ιδέας ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος λειτουργεί ως ένα υπολογιστικό σύστημα, υπήρξε ο άγγλος φιλόσοφος Thomas Hobbes (1588-1679). Το 1651 διατυπώνει ότι οι νοητικοί υπολογισμοί βασίζονται σε μηχανικές αρχές οι οποίες μπορούν να συγκριθούν με τους αριθμητικούς κανόνες, δηλαδή, οποιαδήποτε μορφή συλλογισμού αποτελεί επί της ουσίας έναν υπολογισμό ο οποίος επιτελεί προσθέσεις και αφαιρέσεις, ως απόρροια των λέξεων που έχουν προσυμφωνηθεί, έτσι ώστε να σηματοδοτούνται και να αποκτούν νόημα οι σκέψεις μας.

Ο Alan Turing, με σημαντική επίδραση στο τομέα της Τεχνητής Νοημοσύνης, υποστήριξε ότι ο ανθρώπινος νους αποτελεί προϊόν ενός λειτουργικού υπολογιστικού μηχανισμού. Στις αρχές της δεκαετίας του 1950, επινοώντας «το παιχνίδι της μίμησης», προσπάθησε να αναδείξει την ομοιότητα της ανθρώπινης νοημοσύνης και του υπολογιστή, δηλαδή να σκέφτεται και να πράττει.

Στις αρχές του 1960 ο Αμερικάνος μαθηματικός, φιλόσοφος και επιστήμονας των υπολογιστών Hilary Putnam (1926-2016) προσπαθώντας να αντικρούσει το ρεύμα του «συμπεριφορισμού» υποστήριξε, μία θεωρία με μεγάλο αντίκτυπο, ότι οι νοητικές λειτουργίες είναι αντίστοιχες με τις υπολογιστικές διαδικασίες των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Τη δεκαετία, του 1970, ο Αμερικάνος φιλόσοφος Jerry Fodor (1935-2017) υποστήριξε ότι οι νοητικές λειτουργίες συνιστούν μια γλώσσα, με δικό της σημασιολογικό και συντακτικό περιεχόμενο και επιρροή στις νοητικές αναπαραστάσεις.

Έτσι γλώσσα και ΤΝ αναδεικνύονται ως αλληλοσυμπληρούμενες έννοιες καθώς η γλώσσα είναι θεμελιώδης παράγοντας στην ανάπτυξη της δεύτερης. Σημειώνεται ότι, η αποκρυπτογράφηση του λειτουργικού μηχανισμού του νου, αποτελεί σημείο αναφοράς της Νευροεπιστήμης με τη γλώσσα ως εργαλείο να παίζει κυρίαρχο ρόλο.

Οι έρευνες στην ΤΝ επικεντρώθηκαν κυρίως σε εφαρμογές της Γλωσσικής Τεχνολογίας, με ουσιαστικό ενδιαφέρον για τον μακροπρόθεσμο στόχο της οικοδόμησης γενικά ευφυών και αυτόνομων «πρακτόρων». Η ΤΝ παρουσιάζει μια αρκετά μεγάλη ποικιλία θεωριών και ερευνητικών μεθοδολογιών.

Η Επιστήμη των Η/Υ εξελίχθηκε από τη Λογική, τη Θεωρία Υπολογισμού και από συναφείς τομείς των Μαθηματικών. Η Λογική παρέχει τεχνικές για την ανάλυση των επαγωγικών ιδιοτήτων των γλωσσών βοηθώντας την περαιτέρω ανάπτυξη νέων ιδεών σε αυτή καθαυτή τη Θεωρία της Λογικής.

5.2 Ενδεικτικές Εφαρμογές από τη Γλωσσική Τεχνολογία

5.2.1 Εισαγωγή

Η Γλωσσική Τεχνολογία (ΓΤ) ή επεξεργασία οποιαδήποτε μορφής γραπτού κειμένου και προφορικού λόγου στοχεύει να βοηθήσει:

1. τους ανθρώπους να συνεργάζονται, να συναλλάσσονται, να μοιράζονται γνώσεις και να συμμετέχουν στον κοινωνικό και πολιτικό διάλογο ανεξάρτητα από γλωσσικούς φραγμούς και δεξιότητες χρήσης υπολογιστή.
2. τη βιομηχανική παραγωγή γλωσσολογικών προϊόντων για την παροχή των παραπάνω υπηρεσιών

Πολλές φορές η ΓΤ λειτουργεί αόρατα μέσα σε σύνθετα συστήματα λογισμικού με στόχο:

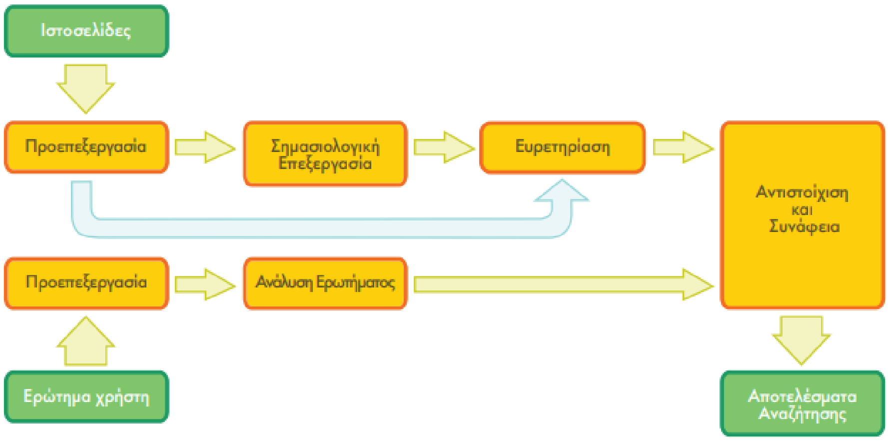
1. την εύρεση πληροφοριών με μια μηχανή αναζήτησης
2. τον έλεγχο της ορθογραφίας και της γραμματικής σε έναν επεξεργαστή κειμένου
3. τη μετάδοση φωνητικών πληροφοριών από ένα σύστημα πλοήγησης αυτοκινήτου
4. τη μετάφραση ιστοσελίδων μέσω μιας διαδικτυακής υπηρεσίας.

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας της ανθρώπινης γλώσσας, η μοντελοποίηση των γλωσσών και η δοκιμή του μοντέλου στον πραγματικό κόσμο είναι μια μακρά, δαπανηρή υπόθεση που απαιτεί δεσμεύσεις συνεχούς χρηματοδότησης.

Οι κύριες εφαρμογές από τις οποίες αποτελείται η ΓΤ έχουν τεράστιο πεδίο εφαρμογής τη σημερινή εποχή. Παρόλη όμως τη ραγδαία εξέλιξή τους την τελευταία δεκαετία, υπάρχει ένα σημαντικό περιθώριο για ακόμα μεγαλύτερη βελτίωση της ποιότητας των συστημάτων τους, έτσι ώστε να γίνει περισσότερο αποτελεσματικές και να έχουν μεγαλύτερο βιομηχανικό αντίκτυπο.

5.2.2 Αναζήτηση στο διαδίκτυο

Η περιήγηση σε εσωτερικά δίκτυα ή ψηφιακές βιβλιοθήκες διά μέσου του διαδικτύου αποτελεί τη λιγότερο αναπτυγμένη ΓΤ παρά την ευρεία καθημερινή χρήση της.



Σχήμα 6: Διαδικασία αναζήτησης στον ιστό

Η Google μετρά 21 χρόνια λειτουργίας και αποτελεί τη διαχρονικότερη και πιο δημοφιλή μηχανή αναζήτησης καθώς καλύπτει παγκοσμίως το μεγαλύτερο μέρος των ερωτημάτων αναζήτησης. Όμως οι διαφορές ως προς τις δυνατότητες και τις αδυναμίες της ανάμεσα στη πρώτη και στις επόμενες εκδόσεις της δεν είναι αισθητές.

Έτσι επιβάλλεται οι επόμενες γενιές μηχανών αναζήτησης να είναι εξοπλισμένες με πολύ πιο προηγμένη ΓΤ για αναζητήσεις, οι οποίες να στηρίζονται σε ερώτηση ή άλλον τύπο πρότασης, πέρα από έναν κατάλογο λέξεων-κλειδιών. Με άλλα λόγια είναι απαραίτητο η απαιτούμενη ΓΤ να μπορεί:

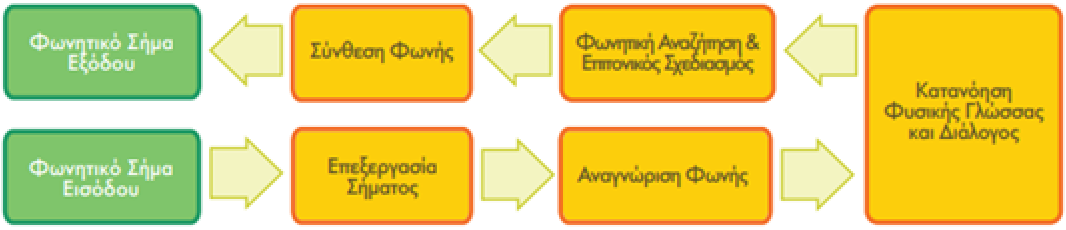
1. να αναλύει συντακτικά και σημασιολογικά μια πρόταση και παράλληλα να διαθέτει ένα ευρετήριο για ευκολότερη και γρηγορότερη ανάκτηση σχετικών εγγράφων και
2. να διαχειρίζεται σωστά την ανανεωμένη πληροφορία, προσδιορίζοντας το σχετικό χρονικό διάστημα και τέλος
3. να αντιστοιχίζει την πληροφορία με έναν τεράστιο όγκο αδόμητων δεδομένων, με σκοπό την ανάκτηση των πληροφοριών της αναζήτησης και την κατάταξη των σχετικών εγγράφων για την ικανοποίηση του χρήστη. Η διαγλωσσική ανάκτηση πληροφορίας δίνει λύση στη διαδικασία της γλωσσικής αντιστοίχισης με :
    3.1 την αυτόματη μετάφραση του ερωτήματος σε όλες τις πιθανές γλώσσες αναζήτησης,
    3.2 την εύρεση των αποτελεσμάτων και
    3.3 την επακόλουθη μετάφρασή τους στην αρχική γλώσσα του ερωτήματος.

Μία ακόμα δυνατότητα της ΓΤ είναι η αντιμετώπιση των μη κειμενικών μορφών ερωτημάτων, δηλαδή την αναζήτηση πληροφορίας σε δεδομένα από εικόνες, ήχο και βίντεο. Στην περίπτωση των αρχείων ήχου και βίντεο, η μηχανή αναζήτησης οφείλει και μπορεί να μετατρέψει το προφορικό περιεχόμενο σε κείμενο ή σε φωνητική αναπαράσταση, οποίο στη συνέχεια θα αντιστοιχίζεται στο ερώτημα του χρήστη.

5.2.3 Φωνητική Αλληλεπίδραση

Η επεξεργασία του Λόγου είναι μία ακόμα διάσταση της ΓΤ που οδήγησε στη σχεδίαση και την παραγωγή σύγχρονων και εύχρηστων βιομηχανικών προϊόντων. Η φωνητική αλληλεπίδραση ή διεπαφή μέσω του προφορικού λόγου ανάμεσα στο εκάστοτε μηχάνημα και τον άνθρωπο αποτελεί ένα από τα πλέον ευρέως διαδεδομένα πεδία εφαρμογών της ΓΤ. Παραδείγματα πεδία εφαρμογών ΓΤ είναι:

1. οι πλήρως ή μερικώς αυτοματοποιημένες τηλεφωνικές υπηρεσίες που συναντώνται σε εταιρείες, ανάμεσα σε εργαζομένους ή πελάτες, σε τράπεζες, σε δημόσιες συγκοινωνίες και σε τηλεπικοινωνίες,
2. τα συστήματα πλοήγησης σε αυτοκίνητα και
3. η φωνητική χρήση αντί της οθόνης αφής στα έξυπνα κινητά τηλέφωνα.



Σχήμα 7: Διαλογικό σύστημα βασισμένο στην επεξεργασία του Λόγου.

Η φωνητική αλληλεπίδραση περιλαμβάνει τις εξής τέσσερις επιμέρους τεχνολογίες:

1. την αυτόματη αναγνώριση φωνής προσδιορίζει τις λέξεις που ειπώθηκαν δεδομένης μιας ακολουθίας ήχων που εκφέρει ο χρήστης.
2. την τεχνολογία κατανόησης φυσικής γλώσσας αναλύει τη συντακτική δομή του εκφωνήματος του χρήστη και το ερμηνεύει αναλόγως με το σκοπό του αντίστοιχου συστήματος.
3. την τεχνολογία διαχείρισης διαλόγου καθορίζει τις ενέργειες που πρέπει να γίνουν αναλόγως με το εκφώνημα του χρήστη και τη λειτουργικότητα του εκάστοτε συστήματος.
4. την τεχνολογία σύνθεσης φωνής μετατρέπει την απόκριση του συστήματος σε ήχους αντιληπτούς από τον χρήστη.

Ένα από τα κύρια θέματα στο συγκεκριμένο τομέα είναι η ακριβής-πλήρης αναγνώριση όλων των λέξεων που «εκφωνεί», ή ακριβέστερα αρθρώνει, ο εκάστοτε χρήστης. Τα γλωσσικά μοντέλα μέσω της προσαρμογής τεχνικών μηχανικής μάθησης είναι δυνατόν να παραχθούν αυτόματα από σώματα κειμένων προφορικού λόγου, δηλαδή από αρχεία ήχου και κειμενικές μεταγραφές αυτών.

Τα συστήματα σύνθεσης φωνής τα οποία υπάρχουν στη σημερινή εποχή, παρά το γεγονός ότι έχουν διαγράψει ραγδαία άνοδο, είναι βέβαιο ότι επιδέχονται σημαντικών βελτιώσεων όχι μόνο στο ρυθμό, τον τόνο και τον επιτονισμό των εκφωνημάτων αλλά κυρίως στην εν γένει φυσικότητα τους.

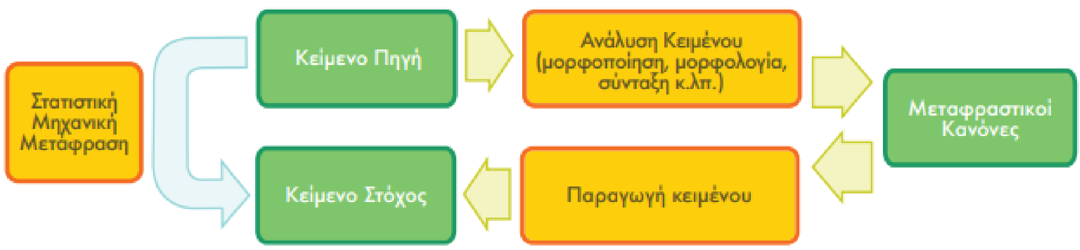
Ο αριθμός των χρηστών οι οποίοι επιζητούν την αυτοεξυπηρέτηση μέσω φωνητικών διεπαφών χρήστη αυξάνεται ολοένα περισσότερο διότι ο αντιλαμβάνονται ότι μέσω του προφορικού λόγου μπορούν να βελτιώσουν σημαντικά τη καθημερινότητά τους. Τα επόμενα χρόνια αναμένεται ραγδαία άνοδος της φωνητικής αλληλεπίδρασης ιδιαίτερα με τη διάδοση των έξυπνων κινητών τηλεφώνων ως μιας νέας πλατφόρμας διαχείρισης των πελατειακών σχέσεων, θέτοντας σε δεύτερη μοίρα πλέον τη χρήση του διαδικτύου, του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου και του σταθερού τηλεφώνου.

Αυτή η τάση θα επηρεάσει την ανάπτυξη της τεχνολογίας φωνητικής αλληλεπίδρασης. Στο μέλλον, η ζήτηση για τις βασισμένες στο τηλέφωνο φωνητικές διεπαφές χρήστη θα μειωθεί σημαντικά, ενώ η χρήση της φωνής ως μιας φιλικής προς τον χρήστη λειτουργικότητας εισόδου για έξυπνα κινητά τηλέφωνα θα αποκτήσει σημαντικό προβάδισμα. Αυτή η τάση υποστηρίζεται από την παρατηρούμενη βελτίωση της ακρίβειας στην αναγνώριση φωνής, ανεξαρτήτως ομιλητή, στις υπηρεσίες υπαγόρευσης που είναι ήδη διαθέσιμες ως υπηρεσίες σε χρήστες έξυπνων κινητών τηλεφώνων.

5.2.4 Μηχανική Αλληλεπίδραση-Αυτόματη ή Μηχανική Μετάφραση

Το 1946 χρονολογείται η απαρχή της σύλληψης της ιδέας για τη προσέγγιση με Μηχανικό ή Αυτόματο τρόπο της Μετάφρασης μεταξύ Φυσικών Γλωσσών. Στις επόμενες δεκαετίες κυρίως αυτές του 50’[9] και του 80’ με γενναίες χρηματοδοτήσεις ξεκίνησε η έρευνα και η ανάπτυξη αντίστοιχα του συγκεκριμένου τομέα. Οι προσπάθειες αυτές έδωσαν το έναυσμα για τη δημιουργία, ανάπτυξη και καθιέρωση της Επεξεργασίας Φυσικής Γλώσσας ως αυτόνομου πεδίου της ΤΝ και αργότερα με την Επεξεργασία του Λόγου δημιουργείται η Γλωσσική Τεχνολογία ως ξεχωριστό και αυτόνομο επιστημονικό πεδίο. Σημειώνεται ότι η Επεξεργασία Φυσικής Γλώσσας περιλαμβάνεται σε ποικίλα άλλα επικαλυπτόμενα πεδία στα διάφορα Τμήματα, όπως:

- Υπολογιστική Γλωσσολογία στη Γλωσσολογία,
- Επεξεργασία Φυσικής Γλώσσας στην Επιστήμη Η/Υ,
- Αναγνώριση Λόγου στους Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς και τέλος
- Υπολογιστική Ψυχογλωσσολογία στους Ψυχολόγους της Γνωσιακής Επιστήμης.



Σχήμα 8: Διάγραμμα Μηχανικής Μετάφρασης που χρησιμοποιεί Στατιστικές μεθόδους

Η μηχανική μετάφραση ακόμα και σήμερα εξακολουθεί να μη μπορεί να

[9] Είναι η εποχή των επιστημονικών επιτευγμάτων του Turing, Chomsky, Von Neuman, κ.ά,

ικανοποιήσει τις πάρα πολύ υψηλές προσδοκίες που δημιούργησε η ίδια στα πρώτα της χρόνια αναφορικά με το ζήτημα της πλήρους μετάφρασης. Η συγκεκριμένη λειτουργία μπορεί να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για διάφορους θεματικούς τομείς με πολύ περιορισμένη και τυποποιημένη γλώσσα, όπως λόγω χάριν τα μετεωρολογικά δελτία. Παρόλο αυτά, η ορθή μετάφραση λιγότερο τυποποιημένων και μεγαλύτερων κειμένων (φράσεων, προτάσεων ή ακόμα και ολόκληρων αποσπασμάτων) απαιτεί την αντιστοίχιση με τα πιο κοντινά τους ισοδύναμα στη γλώσσα στόχο. Όσο τα βοηθητικά για την μηχανική μετάφραση γλωσσολογικά βιομηχανικά προϊόντα, όπως είναι οι Μορφολογικοί, οι Σημασιολογικοί και οι Συντακτικοί Αναλυτές[10] εξελίσσονται και ομογενοποιούνται ως προς την αντιστοίχιση των γλωσσολογικών δεδομένων μεταξύ των υποψηφίων γλωσσών για αυτόματη μετάφραση αλλά και οι προγραμματιστικές μεθοδολογίες και τεχνικές εξελίσσονται τόσο η ακρίβεια των επιδόσεων της διαδικασίας της αυτόματης ή μηχανικής μετάφρασης τείνει στο 100%.

[10] Είναι αντίστοιχα Υπολογιστικά βιομηχανικά προϊόντα που χρησιμοποιούν ή δεν χρησιμοποιούν στατιστικές μεθόδους, Οι αναλυτές αυτοί είναι υπολογιστικά λεξικά, για παράδειγμα Υπολογιστικό Μορφολογικό Λέξικό της Νέας Ελληνικής κ.λπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπεράσματα-Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Σκοπός της παρούσας διατριβής ήταν η καταγραφή της εξέλιξης της πορείας της Λογικής, από τη Φιλοσοφία του Αριστοτέλη μέχρι και της σημερινή της μορφή ως Βιομηχανική Λογική. Βασικός άξονας στον οποίο κινήθηκε η εργασία ήταν η παρουσίαση των βασικών σταθμών της πορείας αυτής ανά περιόδους μέσα από τη σημαντική συνεισφορά της επιστήμης των Μαθηματικών, η οποία με τους υπολογιστικούς της κανόνες συνέβαλλε στη «Μαθηματικοποίηση» της Λογικής καθώς και στην εξέλιξή της στην Υπολογιστική Λογική των Νέων Τεχνολογιών.

Παράλληλα, επισημάναμε την σύνδεση μεταξύ Αυτομάτων και Λογικής καθώς και την σχέση που έχει η Λογική με κλάδους που ακόμα αναπτύσσονται όπως είναι αυτός της Τεχνητής Νοημοσύνης. Επίσης, παραθέσαμε ορισμένα σύγχρονα αυτοματοποιημένα βιομηχανικά προϊόντα τα οποία βασίζονται στην επεξεργασία της φυσικής γλώσσας, η χρήση των οποίων καθίσταται αναγκαία για την ικανοποίηση των αναγκών των ανθρώπων στη σημερινή παγκοσμιοποιημένη εποχή.

Τέλος, η πρότασή μας είναι ότι η νέα πραγματικότητα της υλοποίησης απαιτεί την περαιτέρω προτυποποίηση της Λογικής των δομολειτουργικών κανόνων των εσωτερικών διαδικασιών αναπαραγωγής των εκάστοτε φυσικών φαινομένων ως εφαρμογές γενικής χρήσης, όπως επίσης και την τυποποίηση της Λογικής της Κωδικοποίησης των πάσης φύσεως δεδομένων τους. Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω προτυποποιήσεις και τυποποιήσεις είναι ανάλογα εγχειρήματα με αυτά που έγιναν από τους Μαθηματικούς για την Μαθηματικοποίηση της Λογικής.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Aho, A.V., Sethi, R. and Ullman ,J.D. (1986). *Compilers: principles, techniques, and tools*. Mass: Addison-Wesley Longman Publishing Co.
2. Baldzis, S.D. (1999). *The Modern Greek Language Semantic Basis for Processing*. In Transscientific Semiotics: III-V, vol.11-1-3: 9-22.
3. Baldzis, S.D., Eumeridou E. & Kolalas S. (2001b). A Complete and Comprehensive System for Modern Greek Language Processing Proposed as a Modern Greek Language Call Method Developer. *Literary and Linguistic Computing*, *17(4)*, 373-400.
4. Baldzis, S.D., Kolalas S. & Eumeridou E. (2005a). The Computational Modern Greek Morphological Lexicon - An Efficient and Comprehensive System for Morphological Analysis and Synthesis. *Literary and Linguistic Computing*, *19(4)*, 1-35.
5. Baldzis, S.D., Savranidis, Ch. & Kolalas S. (2001a). Written Modern Greek Sentences Corrector and Content Analyser based on Intelligent Computer Methods. In: *Proceedings of 1st Panhellenic Conference with International Participation on Human – Computer Interaction*. Patras: University of Patras, Advances in Human-Computer Interaction I, 182-191.
6. Börger, E., Grädel, E., Gurevich, Y. (1996): *The Classical Decision Problem*. Springer.
7. Burch, J., Clarke, E., McMillan, K., Dill, D., Hwang, L(1990): *Symbolic model checking*: 1020 states and beyond. In: Proc. 5th IEEE Symp. on Logic.
8. Christos Papadimitriou *(1994). Computational Complexity.* Addison-Wesley. ISBN 0-201-53082-1. Section 20.1, page 491.
9. Dreben, D., Goldfarb, W.D.(1979): *The Decision Problem: Solvable Classes of Quantificational Formulas.* Addison-Wesley.
10. Elgot, C., (1961): Decision problems of finite-automata design and related arithmetics. Trans. Amer. Math. Soc. 98. 21–51.
11. Etessami, K., Vardi, M., Wilke, T.(2002): *First-order logic with two variables and unary temporal logic.* Inf. Comput. 179(2), 279–295.
12. Hodgson, Dr. J. P. E., (1995), *First Order Logic*, Saint Joseph's University, Philadelphia.

13. Hopcroft, J. E., Motwani, R. & Ullman, J.D. (2001). *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. USA: Addison Wesley.
14. Jäger, G. & Rogers, J. (2012). Formal language theory: Refining the Chomsky hierarchy. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences, 367(1598),* pp. 1956-1970.
15. Jurafsky, D. & Martin, J.H. (2000). *Speech and Language Processing: An Introduction to Natural Language Processing, Computational Linguistics, and Speech Recognition*. New Jersey: Prentice Hall.
16. Jurafsky, D. (1996). A Probabilistic Model of Lexical and Syntactic Access and Disambiguation. *Cognitive Science, 20(2),* 137-194.
17. Martin Davis, (2001), *The Universal Computer : The Road from Leibniz to Turing,* W. W. Norton & Company, A K Peters/CRC Press; 1 edition, ISBN-10: 1466505192.
18. Moshe Y. Vardi,(2009), *From Aristotle to the Pentium,* Rice University, USA.
19. Nilsson, N. J. (1991). Logic and artificial intelligence. *Artificial Intelligence, 47*(1-3), 31-56. doi:10.1016/0004-3702(91)90049-p.
20. Rabin, M., Scott, D.: *Finite automata and their decision problems*. IBM Journal of Research and Development 3 (1959) ,115–125.
21. Vardi, M. Y. (2008). From Philosophical to Industrial Logics. *Logic and Its Applications Lecture Notes in Computer Science,* 89-115. doi:10.1007/978-3-540-92701-3_7.
22. Γαβριηλίδου Μαρία, Κουτσομπογέρα Μαρία, Πατρικάκος Αναστάσιος, Πιπεράκης Στέλιος, (2012). *Η Έλληνική Γλώσσα στην Ψηφιακή Εποχή-The Greek Language in the Digital Age*. Springer, Berlin.
23. Κάλφας, Β. (2019). *Η φιλοσοφία του Αριστοτέλη*. Repository.kallipos.gr. Available at: https://repository.kallipos.gr/handle/11419/683 [Accessed 24 May 2019].
24. Μπαλτζής, Δ. Σ. (2018). Υπολογιστικά Λεξικά της Νεοελληνικής το μέσο για τη συνέχεια της γλώσσας στη σύγχρονη παγκοσμιοποιημένη ηλεκτρονική εποχή. Υπό δημοσίευση στα Πρακτικά ΣΤ΄ Ευρωπαϊκού Συνεδρίου Νεοελληνικών Σπουδών της ΕΕΝΣ: *Ο ελληνικός κόσμος σε περιόδους κρίσης και ανάκαμψης, 1204-2018*, Lund.

25. Μπαλτζής, Δ. Σ., Βυζάς Θ. & Ευμοιρίδου Ε. (2017). *Εναλλακτική αξιοποίηση της έννοιας της οντολογίας στη σημασιοσυντακτική κωδικοποίηση μίας φυσικής γλώσσας για αυτόματη επεξεργασία της - Παραδείγματα από τη Νέα Ελληνική Γλώσσα*. It will appear in Conference Proceedings of the 6th International Conference on Modern Greek Language (ICGL 13), University of Westminster- London.

Π α ρ α ρ τ ή μ α τ α :

Παράρτημα 1: Ελληνοαγγλικό Γλωσσάρι όρων της Διατριβής

Παράρτημα 2: Αγγλοελληνικό Γλωσσάρι όρων της Διατριβής

Παράρτημα 3: Έννοιες και Ορισμοί Βασικών Θεωριών της Διατριβής

Παράρτημα 1:

Ελληνοαγγλικό Γλωσσάρι όρων της Διατριβής

	Α
Ακέραιος	Integer
Ακολουθία	Sequence
Αλγόριθμος	Algorithm
Αληθές	True
Αποδεκτό σύνολο καταστάσεων	Accepting state set
Απόσπασμα	Fragment
Αποφασιστικότητα	Decidability
Αρχές Μαθηματικής Λογικής	Principles of Mathematical Logic
Αρχική σημασιολογία	Initial semantic
Αρχικό σύνολο καταστάσεων	Initial state set
Ασυνέπεια	Inconsistency
	Β
Βάση	Base
	Γ
Γραμμικός χρόνος	Linear time
	Δ
Ακολουθιακά κυκλώματα	Sequential circuits
Δομή λέξης	Word structure
Δυαδικός	Binary
	Ε
Εξάλειψη ποσοδείκτη	Quantifier elimination
Επαγωγικό επιχείρημα	Deductive argument
	Θ
Θεωρητική προσέγγιση Αυτομάτων	Automata theoretic approach
	Ι
Ιδιότητα οριοθετημένου μοντέλου	Bounded-model property
Ικανοποιησιμότητα	Satisfiability
Ίχνος	Trace
	Κ

Κανονική γλώσσα	Regular language
Κανονική έκφραση	Regular expression
Κατηγόρημα	Predicate
Κλασσικοί συλλογισμοί	Classical sylogisms
Κύρια Μαθηματικά	Principia Mathematica

Λ

Λεξιλόγιο	Vocabulary
Λογική Πρώτου Βαθμού	First Order Logic

Μ

Μετάφραση	Translation
Μη αιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο σε λέξεις (ΜΑΠΑ)	Non deterministic finite automaton on words (NFW)
Μη στοιχειώδες	Non elementary
Μηχανική Μετάφραση	Machine Translation
Μοναδιαίος	Unary
Μοναδιακή Λογική	Monadic Logic
Μοναδιακή Λογική Δεύτερης Τάξης	Monadic Second Order Logic
Μοναδιακή Τάξη	Monadic Class

Ο

Όρος	Term

Π

Παράδοξο του Ράσελ	Russell's Paradox
Πεδίο τιμών	Domain
Πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου	Finite input alphabet
Πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων	Finite state set
Πολυπλοκότητα	Complexity
Πρόβλημα Απόφασης	Decision Problem
Πρόβλημα Εγκυρότητας	Validity problem
Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας	Satisfiability problem
Πρόβλημα Ελέγχου-Μοντέλου	Model-checking problem
Πρόβλημα Σύνθεσης	Synthesis problem
Πρόγραμμα του Χίλμπερτ	Hilbert's Program

Πρόταση	Sentence
	Σ
Στοιχεία κυκλώματος	Circuit elements
Συνάρτηση	Function
Συνάρτηση μετάβασης	Transition relation
Συνάρτηση του Μπουλ	Boolean function
Συστήματα μετάβασης	Transition systems
	Τ
Τελεστής	Operator
Τεχνητή Νοημοσύνη	Artificial Intelligence
Τεχνική	Technique
Τύπος	Formula
	Φ
Φιλοσοφική Λογική	Philosofical Logic
Φωνητική Αλληλεπίδραση	Speech Interaction
	Ψ
Ψευδές	False
	Ω
ω-κανονική γλώσσα	ω-regular language

Παράρτημα 2:

Αγγλοελληνικό Γλωσσάρι όρων της Διατριβής

	A
Accepting state set	Αποδεκτό σύνολο καταστάσεων
Algorithm	Αλγόριθμος
Artificial Intelligence	Τεχνητή Νοημοσύνη
Automata-theoretic approach	Αυτόματη-θεωρητική προσέγγιση
	B
Binary	Διμερής
Boolean function	Συνάρτηση του Μπουλ
Bounded-model property	Ιδιότητα οριοθετημένου μοντέλου
	C
Circuit elements	Στοιχεία κυκλώματος
Classical sylogism	Κλασσικοί συλλογισμός
Complexity	Πολυπλοκότητα
	D
Decision Problem	Πρόβλημα Απόφασης
Deductive argument	Επαγωγικό επιχείρημα
Domain	Πεδίο τιμών
	F
False	Ψευδές
Finite input alphabet	Πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου
Finite state set	Πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων
First Order Logic	Λογική Πρώτου Βαθμού
Formula	Τύπος
Fragment	Μέρος
Function	Συνάρτηση
	H
Hilbert's Program	Πρόγραμμα του Χίλμπερτ
Inconsistency	Ασυνέπεια
Infinite	Άπειρο
Initial semantic	Αρχική σημασιολογία
Initial state set	Αρχικό σύνολο καταστάσεων

Integer	Ακέραιος
	L
Linear time	Γραμμικός χρόνος
	M
Machine Translation	Μηχανική Μετάφραση
Model-checking problem	Πρόβλημα Ελέγχου Μοντέλων
Monadic Logic	Μοναδιακή Λογική
Monadic Class	Μοναδιακή Τάξη
Monadic Second Order Logic	Μοναδιακή Λογική Δεύτερης Βαθμού
	N
Non deterministic finite automaton on words (NFW)	Μη αιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο σε λέξεις (ΜΑΠΑ)
Non elementary	Μη στοιχειώδες
	O
Operator	Τελεστής
	P
Philosofical Logic	Φιλοσοφική Λογική
Predicate	Κατηγόρημα
Principia Mathematica	Αρχές Μαθηματικών
Principles of Mathematical Logic	Αρχές Μαθηματικής Λογικής
Program	Πρόγραμμα
	Q
Quantifier elimination	Εξάλειψη του προσδιοριστή ποσότητας
	R
Regular expression	Κανονική έκφραση
Regular language	Κανονική γλώσσα
Russell's Paradox	Το Παράδοξο του Ράσελ
	S
Satisfiability	Ικανοποιησιμότητα

Satisfiability problem	Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας
Sequential circuits	Ακολουθιακά κυκλώματα
Sentence	Πρόταση
Speech interaction	Φωνητική αλληλεπίδραση
Synthesis problem	Πρόβλημα Σύνθεσης
	T
Technique	Τεχνική
Term	Όρος
Trace	Ίχνος
Transition relation	Συνάρτηση μετάβασης
Transιtion systems	Συστήματα μετάβασης
True	Αληθές
	U
Unary	Μοναδιαίος
Unsolvable	Μη επιλύσιμο
	V
Validity problem	Πρόβλημα Εγκυρότητας
Vocabulary	Λεξιλόγιο
	W
Word structure	Δομή λέξης

Παράρτημα 3:

Έννοιες και Ορισμοί Βασικών Θεωριών της Διατριβής

1. ΕΚΘΕΤΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

«Exptime» είναι μια κλάση πολυπλοκότητας η οποία αποτελείται από το σύνολο όλων των προβλημάτων Απόφασης που έχουν εκθετικό χρόνο εκτέλεσης, δηλαδή επιλύονται από μια αιτιοκρατική μηχανή Turing σε χρόνο $O(2^{p(n)})$, όπου p(n) είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση του n.

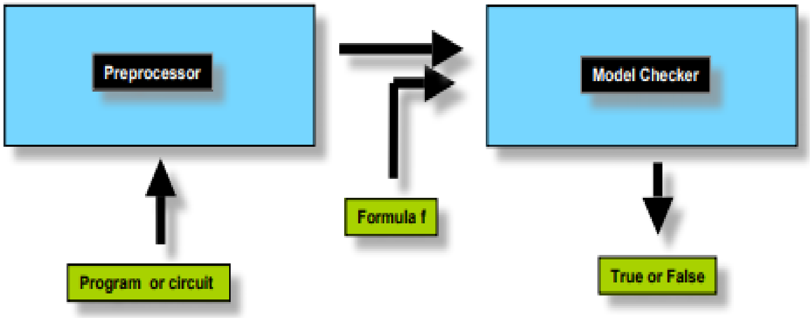
2. ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Το πρόβλημα του «Ελεγχου Μοντέλου» είναι εύκολο να δηλωθεί:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω Μ είναι μια δομή Kripke (δηλαδή ένα καταστατικό-μεταβατικό γράφημα). Έστω f ένας τύπος Χρονικής Λογικής . Βρείτε ένας ένας καταστάσεις s του Μ έτσι ώστε Μ, s | = f.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Δεδομένου του μοντέλου ένας συστήματος, να ελεγχθεί με αυτόματο τρόπο αν αυτό το μοντέλο συμφωνεί με δεδομένες προδιαγραφές

Τα συστήματα τα οποία εξετάζονται κυρίως λογισμικού και οι προδιαγραφές αφορούν απαιτήσεις ασφάλειας, ένας η απουσία αδιεξόδων και άλλων παρόμοιων επικίνδυνων καταστάσεων που μπορεί να προκαλέσουν την αποτυχία ένας λειτουργίας του συστήματος. Για να λυθεί ένα τέτοιο πρόβλημα αλγοριθμικά, πρέπει το μοντέλο του συστήματος και οι προδιαγραφές να διατυπώνονται με κάποια ακριβή Μαθηματική γλώσσα. Για αυτόν το λόγο, η διατύπωση γίνεται σε κάποια Λογική και ελέγχεται αν κάποια δομή ικανοποιεί μια δεδομένη λογική έκφραση. Αυτή η ιδέα είναι γενικότερη και εφαρμόζεται σε πολλά είδη Λογικής και σε αρκετές δομές. Ένα απλό πρόβλημα ελέγχου μοντέλου είναι να επαληθευτεί αν μια δεδομένη έκφραση ένας Προτασιακής Λογικής ικανοποιείται από μια δεδομένη δομή. Χρησιμοποιήσαμε τον όρο «Ελεγχος Μοντέλου» επειδή θέλαμε να προσδιορίσουμε αν ο χρονικός τύπος f ήταν αληθής στη δομή Kripke M, δηλαδή αν η δομή M ήταν ένα μοντέλο για τον τύπο f. Μερικοί άνθρωποι πιστεύουν λανθασμένα ότι η χρήση του όρου «μοντέλο» αναφέρεται στη σημασία του λεξικού ένας ένας λέξης (για παράδειγμα μια μικροσκοπική αναπαράσταση ή ένα πρότυπο για κάτι που πρέπει να γίνει) και δείχνει ότι έχουμε να κάνουμε με μια αφαίρεση του πραγματικού συστήματος υπό μελέτη. Οι Clarke ,E. A. Emerson J. P. Queille και Ιωσήφ Σηφάκη έδωσαν έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για την επίλυση του Προβλήματος Ελέγχου-Μοντέλου για τη Λογική CTL. Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη δομή ένας τυπικού συστήματος ελέγχου μοντέλου. Ένας προεπεξεργαστής εξάγει ένα γράφημα μεταβατικής κατάστασης από ένα πρόγραμμα ή ένα κύκλωμα. Ο μηχανισμός Ελέγχου Μοντέλου παίρνει το γράφημα μεταβατικής κατάστασης και ένα χρονικό τύπο και καθορίζει εάν ο τύπος είναι αληθής ή όχι .



Σχήμα 9: Γραφική Αναπαράσταση Ελέγχου Μοντέλου

2.1 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ:

Ο Έλεγχος Μοντέλου έχει ορισμένα πλεονεκτήματα σε σύγκριση με άλλες τεχνικές επαλήθευσης, όπως η Αυτοματοποιημένη Θεώρηση ή ο έλεγχος Απόδειξης. Μερικά από αυτά τα πλεονεκτήματα είναι:

- Δεν υπάρχουν αποδείξεις. Ο χρήστης ενός Ελέγχου Μοντέλου δεν χρειάζεται να κατασκευάσει μια απόδειξη ορθότητας. Μοναδική προϋπόθεση είναι να εισαγάγει ο χρήστης μια περιγραφή του κυκλώματος ή προγράμματος που πρέπει να επαληθευτεί και τις προδιαγραφές που πρέπει να ελεγχθούν πατώντας, έπειτα το πλήκτρο «επιστροφής».
- Είναι γρήγορος. Στην πράξη, ο Έλεγχος Μοντέλου είναι γρήγορος σε σύγκριση με άλλες αυστηρές μεθόδους, όπως η χρήση ενός ελεγκτή απόδειξης, ο οποίος μπορεί να απαιτεί μήνες λειτουργίας.
- Διαγνωστικά αντιπαραδείγματα. Εάν η προδιαγραφή δεν ικανοποιείται, ο Έλεγχος Μοντέλου θα παράγει ένα αντιπαράδειγμα εντολών εκτέλεσης που δείχνει γιατί δεν ισχύει η προδιαγραφή. Είναι αδύνατο να υπερεκτιμήσουμε τη σημασία του αντιπαραδείγματος. Μερικοί άνθρωποι χρησιμοποιούν τον Έλεγχος Μοντέλου μόνο για αυτό το χαρακτηριστικό.
- Δεν υπάρχει πρόβλημα με μερικές προδιαγραφές. Δεν είναι απαραίτητο να καθορίσουμε πλήρως το πρόγραμμα ή το κύκλωμα πριν ξεκινήσουμε τις ιδιότητες του έλεγχου μοντέλου. Έτσι, ο Έλεγχος Μοντέλου μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού ενός σύνθετου συστήματος. Ο χρήστης δεν χρειάζεται να περιμένει μέχρι να ολοκληρωθεί η φάση σχεδιασμού.

2.3 ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ:

- Οι προδιαγραφές γραφής είναι δύσκολες. Αλλά ισχύει και για άλλες τεχνικές επαλήθευσης όπως η αυτοματοποιημένη θεώρηση. Βεβαίως, μέρος της λύσης είναι καλύτερη εκπαίδευση. Πολύ λίγα τμήματα πληροφορικής και ηλεκτρολόγων μηχανικών προσφέρουν επί του παρόντος μαθήματα επίσημης επαλήθευσης. (Οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί των Η.Π.Α. συχνά ξοδεύουν περισσότερο χρόνο για να μάθουν για το μετασχηματισμό Laplace από ότι γράφουν τυπικές προδιαγραφές για κυκλώματα)
- Η απόδειξη ενός προγράμματος βοηθά στη κατανόηση του. Είναι δυνατόν να κατανοήσουμε ένα πρόγραμμα εξίσου καλά, αν όχι καλύτερα, ελέγχοντας ιδιότητες και εξετάζοντας τα αντιπαραδείγματα όταν είναι ψευδή, ξοδεύοντας παράλληλα μεγάλο μέρος χρόνου.
- Ο αριθμός του συστήματος καταστάσεων αποτελεί ένα πρόβλημα ειδικά αν έχουμε ένα παράλληλο σύστημα με πολλές διαδικασίες ή πολύπλοκες δομές δεδομένων παγκόσμιου συστήματος ενός ταυτόχρονου συστήματος με πολλές διαδικασίες ή πολύπλοκες δομές δεδομένων μπορεί να είναι τεράστιος.

Τα εργαλεία Ελέγχου Μοντέλου αρχικά δημιουργήθηκαν για την ανάλυση της λογικής ορθότητας συστημάτων διακριτών καταστάσεων, αλλά από τότε έχουν δημιουργηθεί επεκτάσεις τους που μπορούν να χειριστούν συστήματα πραγματικού χρόνου και κάποιες (περιορισμένες) μορφές υβριδικών συστημάτων.

3. ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Το Κλασσικό Πρόβλημα Απόφασης μπορεί να δηλωθεί με ισοδύναμους τρόπους :

- Το πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας (ή πρόβλημα Συνέπειας) για τη Λογική Πρώτου Βαθμού: με βάση τον τύπο πρώτης τάξης, αποφασίστε εάν είναι συνεπής.
- Το πρόβλημα Εγκυρότητας για Λογική Πρώτης Βαθμού: με βάση τον τύπο πρώτης τάξης, αποφασίστε αν είναι έγκυρος.
- Το πρόβλημα Απόδειξης για ένα σωστό και ολοκληρωμένο σύστημα επίσημης απόδειξης για Λογική Πρώτου Βαθμού: με βάση ένα τύπο πρώτης τάξης, αποφασίστε αν είναι αποδεδειγμένο στο σύστημα.

Ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος (ή συνεπής) αν έχει ένα μοντέλο. Είναι έγκυρος (ή Λογικά αληθής) εάν ισχύει σε όλα τα μοντέλα όπου έχει οριστεί. Ένα σύστημα απόδειξης είναι σωστό εάν κάθε αποδεδειγμένος τύπος είναι έγκυρος. Είναι πλήρες εάν είναι αποδεδειγμένος κάθε έγκυρος τύπος. Ο Hilbert ήταν αυτός που επέστησε την προσοχή των Μαθηματικών για το κλασσικό πρόβλημα Απόφασης και το κατέστησε το κεντρικό πρόβλημα της Μαθηματικής Λογικής. Το ονόμασε «das Entscheidungs» πρόβλημα, δηλαδή, «το πρόβλημα της Απόφασης», αναπτύσσοντας ένα φορμαλιστικό πρόγραμμα για τα θεμέλια των Μαθηματικών με σκοπό να προσεγγίσει διάφορους κλάδους των Μαθηματικών μέσω πολλών αξιωμάτων πρώτου βαθμού. Με αυτή τη προσέγγιση μειώνει την απόδειξη μιας μαθηματικής δήλωσης για την εκτέλεση μιας μηχανικής προέλευσης σε ένα σταθερό τυπικό σύστημα Λογικής .

4. ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ (ΛΠΒ)

Η Λογική Πρώτου Βαθμού (ΛΠΒ) αποτελεί μια τυπική Λογική που την συναντάμε σε διάφορους κλάδους όπως εκείνους των Μαθηματικών, της Φιλοσοφίας ή της Επιστήμης των Υπολογιστών. Σε ποικίλα επιστημονικά έγγραφα πολλές φορές η ΛΠΒ αναφέρεται ως «Κατηγορηματική Λογική» ή «Κατηγορηματικός Λογισμός Πρώτου Βαθμού». Μια ειδοποιός διαφορά της Λογικής Πρώτου Βαθμού σε σχέση με τη «Προτασιακή Λογική» είναι η χρήση των ποσοτικών τελεστών. Κάθε ερμηνεία της ΛΠΒ περιλαμβάνει ένα πεδίο τιμών στο κυμαίνονται οι ποσοτικές τελεστές. Χαρακτηριστικό στοιχείο της ΛΠΒ είναι τα πολλά συμπερασματικά συστήματα της τα οποία διακρίνονται από πληρότητα και συνέπεια, αφού είναι ικανά να παράγουν οποιαδήποτε ορθά δομημένη πρόταση. Η ΛΠΒ δεν περιλαμβάνει μόνο απλές δηλωτικές προτάσεις, αλλά πλέον κύριο ρόλο κατέχουν τα κατηγορήματα (τα οποία μπορούν να πάρουν μονάχα δύο τιμές «Αληθές» ή «Ψευδές») και οι ποσοτικοποιήσεις. Ωστόσο, το κατηγόρημα «είναι φιλόσοφος» εμφανίζεται ξεχωριστές προτάσεις. Η πρώτη είναι: «Ο Αρχιμήδης είναι μαθηματικός», ενώ η δεύτερη είναι: «Ο Πυθαγόρας είναι μαθηματικός». Παρατηρούμε, αρχικά ότι και οι δύο προτάσεις έχουν παρόμοια δομή, αναφέροντας αντίστοιχα και οι δύο ότι ένας πρόσωπο («κάποιος») είναι μαθηματικός (έχει δηλαδή την ιδιότητα του μαθηματικού). Η λέξη «κάποιος» οπότε, έχει τον ρόλο μιας μεταβλητής ,όπως θα λέγαμε και στα μαθηματικά, η οποία έχει ως τιμές τα δύο πρόσωπα τον Αρχιμήδη στην πρώτη πρόταση και τον Πυθαγόρα στην δεύτερη, αντίστοιχα. Ο συμβολισμός που θα δίνονταν στην Προτασιακή Λογική και για τις δύο διαφορετικές προτάσεις θα ήταν συνήθως p και q. Επιπλέον, κύριο χαρακτηριστικό της Πρωτοβάθμιας Λογικής είναι η χρήση κατηγορημάτων. Στις παραπάνω δύο προτάσεις το κατηγόρημα αποτελεί η φράση «είναι μαθηματικός», γεγονός που διακρίνει τη Λογική Πρώτου Βαθμού από τη Προτασιακή. Όσον αφορά, τα κατηγορήματα εξάγεται ο εξής συλλογισμός. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εφόσον «κάποιος» είναι μαθηματικός τότε ο «κάποιος» είναι έξυπνος. Το πρώτο μέρος της πρότασης αποτελεί μια υπό όρους δήλωση και το δεύτερο μέρος («κάποιος είναι έξυπνος») το συμπέρασμα. Η αλήθεια αυτού του τύπου εξαρτάται από το ποιο αντικείμενο δηλώνεται ως «κάποιος» και από την ερμηνεία των κατηγορημάτων «είναι μαθηματικός» και «είναι έξυπνος». Επιπρόσθετα, ένα βασικό γνώρισμα της Λογικής Πρώτου Βαθμού είναι η ποσοτικοποίηση των μεταβλητών. Για παράδειγμα στην προηγούμενη πρόταση που χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή «κάποιος» αυτή μπορεί βάσει της Πρωτοβάθμιας Λογικής να ποσοτικοποιηθεί στην εξής πρόταση: «Για κάθε κάποιον, αν κάποιος είναι μαθηματικός, τότε κάποιος είναι έξυπνος». Επομένως, με τη χρήση του ποσοδείκτη «για κάθε», δηλώνουμε πως ο παραπάνω ισχυρισμός έχει καθολικό χαρακτήρα. Υπάρχουν δύο βασικά τμήματα της ΛΠΒ. Το συντακτικό και η σημασιολογία κατέχουν εξέχον ρόλο στη ΛΠΒ καθότι καθορίζουν τα επιτρεπόμενα σύμβολα και τις έννοιες της κάθε έκφρασης, αντίστοιχα. Τα δύο κύρια είδη εκφράσεων που είναι επιτρεπτές είναι οι όροι και οι τύποι. Οι όροι αντιπροσωπεύουν αντικείμενα, ενώ οι τύποι εκφράζουν κατηγορήματα, επομένως οι τιμές που μπορεί να πάρουν είναι είτε «Αληθής» είτε «Ψευδής». Οι όροι και οι τύποι της λογικής πρώτου βαθμού είναι συμβολοσειρές (σημεία στίξης ή γράμματα) που σχηματίζουν μαζί το αλφάβητο της γλώσσας. Αξίζει να σημειωθεί πως ανάλογα με την σημασία και την ερμηνεία μιας πρότασης τα σύμβολα μπορεί να διαφοροποιηθούν σε λογικά και μη λογικά. Για παράδειγμα, το λογικό σύμβολο πάντα αντιπροσωπεύει «και», ενώ ποτέ δεν ερμηνεύεται ως «ή». Από την άλλη πλευρά, ένα μη-λογικό σύμβολο κατηγόρημα όπως το Nick(x) θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως «το x είναι ένας μαθηματικός», «το x είναι ένας άνθρωπος που ονομάζεται Nick. Ένας σαφής ορισμός για τους «όρους» είναι ότι αποτελούν εκφράσεις της ΛΠΒ που παριστάνουν αντικείμενα στον κόσμο που μοντελοποιούμε. Ένας όρος της ΛΠΒ είναι είτε μια σταθερά, είτε μια μεταβλητή, είτε ένας συναρτησιακός όρος της μορφής $F(t_1,t_2,...,t_n)$, όπου F είναι ένα συναρτησιακό σύμβολο τάξης n και τα ορίσματα $t_1,t_2,...,t_n$ είναι επίσης όροι. Η σύνταξη των όρων δίνεται από την ακόλουθη γραμματική: Όρος $\rightarrow$ Σταθερά $|$ Μεταβλητή $|$Συναρτησιακό Σύμβολο (Όρος,…, Όρος).

Παράδειγμα 6

x, 65, Nick,FatherOf(Nick), WifeOf (FatherOf(x))

Οι «ατομικοί τύποι» είναι εκφράσεις της ΛΠ που παριστάνουν απλά γεγονότα ή απλές σχέσεις σε αντικείμενα του κόσμου που μοντελοποιούμε. Το συντακτικό των ατομικών τύπων δίνεται από την ακόλουθη γραμματική:

Ατομικός Τύπος $\rightarrow$ Όρος = Όρος $|$ Σύμβολο Κατηγορήματος (Όρος,…,Όρος).

Παράδειγμα 7

- John = ElderSonOf(Mary)
- John = ElderSonOf(FatherOf(John))

- Sum(1,Sum(2,3)) = 6
- Happy(John)
- EvenNumber(Sum(1, Sum(2, 3))
- LivesIn(John, London)
- Arrives(John, Athens, Monday)

Οι «**καλά ορισμένοι τύποι**» είναι πιο περίπλοκες εκφράσεις της ΛΠΒ και τις χρησιμοποιούμε για να αναφερθούμε σε οποιαδήποτε κατάσταση του κόσμου που μοντελοποιούμε. Η σύνταξη των καλά ορισμένων τύπων δίνεται από την ακόλουθη γραμματική: Καλά Ορισμένοι Τύποι →Ατομικός Τύπος │(Καλά ΟρισμένοιΤύποι) │¬Καλά Ορισμένοι Τύποι │

Παράδειγμα 8

- ¬Loves(John,Mary)
- Loves(John,Christina)∨Loves(John,Anna)
- ∃(x) (SportsCar(x) ∧ Owns(John(x))

5. ΜΟΝΑΔΙΑΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ (ΜΛΔΒ)

Η Μοναδιακή Λογική Δευτέρου Βαθμού (ΜΛΔΒ) αποτελεί είναι έναν περιορισμό της Λογικής Δευτέρου Βαθμού (ΛΔΒ) στην οποία επιτρέπονται αποκλειστικά ποσοτικοποιήσεις πάνω σε μοναδιαίες σχέσεις όπως είναι τα σύνολα, επειδή τα μοναδιακά κατηγορήματα είναι εκφραστικά ισοδύναμα με τα σύνολα. Δεν επιτρέπονται ποσοτικοποιήσεις πάνω σε συναρτήσεις, οι οποίες οφείλονται στην ισοδυναμία μεταξύ των σχέσεων. Η Λογική Δευτέρου Βαθμού χωρίς αυτούς τους περιορισμούς αποκαλείτε κάποιες φορές ως «Πλήρης Λογική Δευτέρου Βαθμού», ώστε να είναι ευδιάκριτη από τη ΜΛΔΒ.

6. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Δεδομένου ενός τύπου F με μεταβλητές του Boole σε κανονική διαζευκτική μορφή, πότε είναι ικανοποιήσιμος ; Δίδεται μια λογική έκφραση σε μορφή CNF (Conjuxtive normal form). Υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές της έκφρασης ώστε αυτή να ικανοποιείται ; Δηλαδή, ζητάμε να μάθουμε πότε λαμβάνεται η τιμή αλήθειας «true». Το SAT είναι NP-πλήρες πρόβλημα.