

Ένας Απλούστερος Αλγόριθμος Υπολογισμού του Πυρήνα ενός Πολυέδρου

Η Μεταπτυχιακή Εργασία Εξειδίκευσης

υποβάλλεται στην ορισθείσα
από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης
του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Εξεταστική Επιτροπή

από τον

Διονύσιο Κεφαλληνό

ως μέρος των υποχρεώσεων για την απόκτηση του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ
ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Σεπτέμβριος 2019

Εξεταστική Επιτροπή:

- **Λεωνίδας Παληός**, Καθηγητής, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
- **Λουκάς Γεωργιάδης**, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
- **Χρήστος Νομικός**, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Στην οικογένειά μου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Δημήτριο και Λαμπρινή για την συνεχή υποστήριξή τους στο παρασκήνιο της παρούσας εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Κ. Λεωνίδα Παλιό καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την καταλυτική του συμβολή στην εκπόνηση της εν λόγω εργασίας, τις συμβουλές του, την καθοδήγησή του, αλλά και για την προσιτότητα που τον διακρίνει.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Σχημάτων	vi
Περίληψη	vii
Extendend Abstract	viii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Βασικοί Ορισμοί	1
1.2 Σχετικά Ερευνητικά Αποτελέσματα	5
1.3. Αντικείμενο της Μεταπτυχιακής Εργασίας	6
1.4 Δομή της Μεταπτυχιακής Εργασίας	6
2 Ο Αλγόριθμος	7
2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο	7
2.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου	10
2.3 Η Πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου	15
2.4 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου	16
3 Η Υλοποίηση	20
3.1 Είσοδος - Έξοδος	20
3.2 Δομές Δεδομένων	21
3.3 Επιλεγμένες Συναρτήσεις	21
3.4 Παράδειγμα Εκτέλεσης του Προγράμματος	26
4 Επίλογος	28
4.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα	28
4.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις	28
Βιβλιογραφία	29

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα	Σελ.
Σχήμα 1.1 Παραδείγματα πολυέδρων	1
Σχήμα 1.2 Παράδειγμα ορατότητας.	2
Σχήμα 1.3 Παράδειγμα πυρήνα	2
Σχήμα 1.4 Παράδειγμα κενού πυρήνα	2
Σχήμα 1.5 Παράδειγμα δυϊκότητας.	3
Σχήμα 1.6 Παράδειγμα ιδιότητας στη δυϊκότητα	4
Σχήμα 1.7 Παράδειγμα Λήμματος 1.4	5
Σχήμα 2.1 Παράδειγμα δυϊκότητας στις 3 διαστάσεις	8
Σχήμα 2.2 Παράδειγμα Λήμματος 2.1	9
Σχήμα 2.3 Επέκταση Λήμματος 2.2	9
Σχήμα 2.4 Γενίκευση Λήμματος 2.2	10
Σχήμα 2.5 Το άνω τμήμα του πυρήνα	11
Σχήμα 2.6 Το κάτω τμήμα του Πυρήνα	12
Σχήμα 2.7 Η ένωση των δύο τμημάτων του πυρήνα	12
Σχήμα 2.8 Ο τελικός πυρήνας	12
Σχήμα 2.9 Οπτικοποίηση του βήματος 2 του Αλγορίθμου	16
Σχήμα 2.10 Οπτικοποίηση του βήματος 3 του Αλγορίθμου	16
Σχήμα 2.11 Μια διαφορετική απεικόνιση του βήματος 3 του Αλγορίθμου	17
Σχήμα 2.12 Οπτικοποίηση των βημάτων 4, 5 του Αλγορίθμου.	17
Σχήμα 2.13 Μια διαφορετική όψη του προηγούμενου σχήματος	18
Σχήμα 2.14 Οπτικοποίηση των βημάτων 7, 8 του Αλγορίθμου	18
Σχήμα 2.15 Οπτικοποίηση των βημάτων 9, 10 του Αλγορίθμου	19
Σχήμα 2.16 Οπτικοποιημένη η έξοδος του Αλγορίθμου	19
Σχήμα 3.1 Ο πυρήνας ενός κεφαλιού (Πρώτο παράδειγμα εκτέλεσης)	26
Σχήμα 3.2 Ο πυρήνας από δύο φρούτα (Δεύτερο παράδειγμα εκτέλεσης).	26
Σχήμα 3.3 Ο πυρήνας ενός σταυρού (Τρίτο παράδειγμα εκτέλεσης)	27
Σχήμα 3.4 Παράδειγμα κενού πυρήνα (τέταρτο παράδειγμα εκτέλεσης)	27

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Διονύσιος Κεφαλληνός, MSc, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Σεπτέμβριος 2019.

Ένας Απλούστερος Αλγόριθμος Υπολογισμού του Πυρήνα ενός Πολυέδρου.

Επιβλέπων: Λεωνίδα Παλιός, Καθηγητής.

Η εύρεση του πυρήνα ενός πολυέδρου συγκαταλέγεται στην οικογένεια προβλημάτων ορατότητας του χώρου με το ελάχιστο πλήθος φυλάκων (art gallery problem). Βρίσκοντας τον πυρήνα έχουμε πλήρη ορατότητα σε όλο τον χώρο με έναν μόνο φύλακα, λύνοντας το πρόβλημα της επόπτευσης. Σε αυτήν την εργασία δίνεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του πυρήνα ενός πολυέδρου. Πολύεδρο είναι ένα απλό στερεό το οποίο ορίζεται από ένα σύνολο κορυφών και ένα σύνολο εδρών στις τρεις διαστάσεις, ως έδρα εννοούμε το πολύγωνο στις τρεις διαστάσεις. Το πολύεδρο χωρίζει το χώρο σε δύο περιοχές στο εσωτερικό του και στο εξωτερικό του. Όλα τα στερεά του πραγματικού κόσμου μπορούν να αναπαρασταθούν ως πολύεδρα. Πυρήνας K ενός πολυέδρου P είναι το μεγαλύτερο κυρτό πολύεδρο που μπορεί να υπάρξει εντός του P , με την ιδιότητα κάθε σημείο του K να ενώνεται με καθένα σημείο του P μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος L , χωρίς το L να βρίσκεται σε κάποιο σημείο του εκτός του P . Η κωδικοποίηση του αλγορίθμου έγινε στη γλώσσα προγραμματισμού C++, και η οπτικοποίηση έγινε με τις βιβλιοθήκες της OpenGL στο περιβάλλον visual studio.

EXTENDED ABSTRACT

Dionysios Kefallinos, MSc, Department of Computer Science and Engineering, University of Ioannina, Greece, September 2019.

A Simpler Algorithm for Computing the Kernel of a Polyhedron.

Advisor: Leonidas palios, Professor.

Determining the kernel of a polyhedron is a subproblem which is included to the generic category of problems of finding the minimum number of guards which is required to watch all the given space (art gallery problem). When we know the kernel, we know all the points that can watch all the space. Of course the kernel can be empty which means no one point (guard) can watch the entire space. In this project we give one algorithm that computes the kernel of a polyhedron. Polyhedron is a simple solid that is defined from a set of vertices and a set of faces in three dimensions. All the solids in real world can be presented as polyhedrons. Kernel K of a polyhedron P is the largest convex polyhedron that can exist inside of P , respecting the following rule. Every point of K can be connected to every point of P via a line segment L , with no point of L outside of P .

Our algorithm uses the idea of duality to compute the kernel of a polyhedron. It transforms the planes of the polyhedron to points in three dimensional space, by a transformation equation one to one that corresponds one plane to one point and one point to one plane. Initially we enlist each plane of the given polyhedron in one of two groups. In the first group we have planes from the up part of the polyhedron, symmetrically in the second group we have planes from the down part of the polyhedron. Then we compute the two convex hulls of the dualized points of each group. Finally from the planes of the convex hulls we take the dualized points (inverse transformation) which are points of the kernel.

The algorithm runs in $O(n \log n)$ time as the algorithm of Preparata and Muller [2] however is simpler algorithm because it uses simpler equation of duality, while the algorithm of Preparata and Muller [2] uses transformation in fourth dimensional space with more complicated manipulations.

The algorithm was coded in C++ programming language and visualized with libraries of OpenGL in visual studio environment.

1.1 Βασικοί Ορισμοί

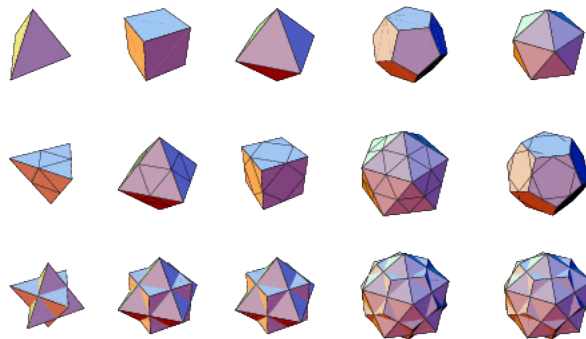
1.2 Σχετικά Ερευνητικά Αποτελέσματα

1.3 Αντικείμενο της Μεταπτυχιακής Εργασίας

1.4 Δομή της Μεταπτυχιακής Εργασίας

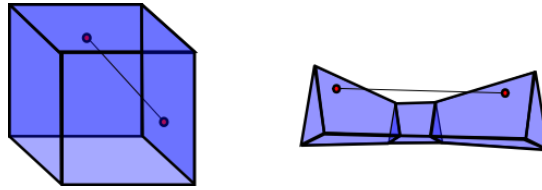
1.1. Βασικοί Ορισμοί

Πολύεδρο είναι ένα στερεό στον τρισδιάστατο χώρο που ορίζεται από ένα σύνολο κορυφών και ένα σύνολο εδρών. Ως έδρα εννοούμε το πολύγωνο στις τρεις διαστάσεις το οποίο ορίζεται από ένα σύνολο κορυφών. Το πολύεδρο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη στο εσωτερικό του και στο εξωτερικό του (Σχήμα 1.1), όλα τα στερεά του πραγματικού κόσμου μπορούν να αναπαρασταθούν ως πολύεδρα.



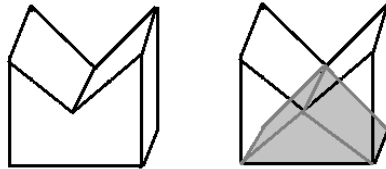
Σχήμα 1.1: Παραδείγματα πολυέδρων.

Δύο σημεία p, q ενός πολυέδρου P είναι **ορατά** το ένα από το άλλο όταν το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει βρίσκεται εξ ολοκλήρου εντός του πολυέδρου P (Σχήμα 1.2).



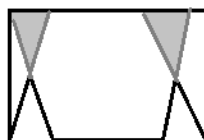
Σχήμα 1.2: Παράδειγμα ορατότητας: στον κύβο αριστερά φαίνεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο ορατά μεταξύ τους σημεία, ενώ στο σχήμα δεξιά βλέπουμε δύο σημεία μη ορατά μεταξύ τους.

Ο **πυρήνας** ενός πολυέδρου P είναι το σύνολο των σημείων του πολυέδρου P από τα οποία κάθε σημείο του πολυέδρου P είναι ορατό (Σχήμα 1.3). Ο πυρήνας ενός πολυέδρου είναι ένα κυρτό πολυέδρο.



Σχήμα 1.3: Παράδειγμα πυρήνα: αριστερά απεικονίζεται ένα πολυέδρο και δεξιά απεικονίζεται το πολυέδρο με τον πυρήνα του στο εσωτερικό του, χρώματος γκρι, σε σχήμα στέγης. Παρατηρούμε ότι από κάθε σημείο της γκριζας περιοχής έχουμε ορατότητα σε όλα τα σημεία του πολυέδρου.

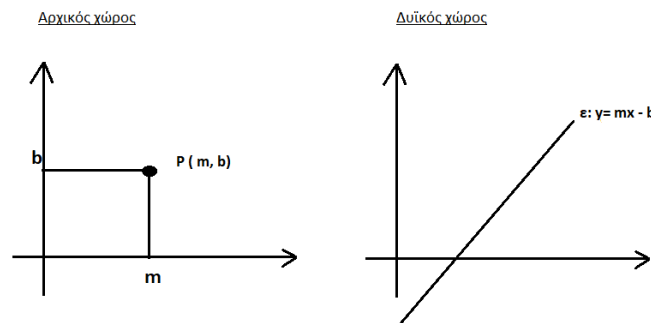
Σημειώνεται ότι ο πυρήνας ενός πολυέδρου ενδέχεται να είναι κενός. Για παράδειγμα, στον τόρο όπου υπάρχει μια διαμετρής τρύπα, κανένα σημείο του δεν μπορεί να βλέπει όλα τα σημεία του τόρου, διότι δύο αντιδιαμετρικά σημεία ως προς την τρύπα είναι πάντοτε μη ορατά.



Σχήμα 1.4: Παράδειγμα κενού πυρήνα, προβαλλόμενου στις δύο διαστάσεις: παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει σημείο που να βλέπει όλα τα σημεία του πολυέδρου καθώς δεν μπορεί ένα σημείο να βρίσκεται ταυτοχρόνως και στις δύο γκριζες περιοχές.

Εναλλακτικά, ο πυρήνας ενός πολυέδρου θα μπορούσε να ορισθεί ως η τομή όλων των ημιχώρων που ορίζονται από τα επίπεδα των εδρών του πολυέδρου.

Ο **Μετασχηματισμός Δυϊκότητα στις 2 διαστάσεις** είναι μια απεικόνιση σημείων σε ευθείες και το αντίστροφο. Για παράδειγμα, η ευθεία $y = mx + b$ μπορεί να αντιστοιχισθεί με το σημείο (m, b) . Από την άλλη μεριά, ένα σημείο μπορεί να αντιστοιχισθεί με μια ευθεία όπου οι συντεταγμένες του αντιστοιχούν στην κλίση της ευθείας και στην τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα των y . Με αυτή την απεικόνιση έχουμε μια σχέση (1-1) με κάθε σημείο να αντιστοιχίζεται σε μια μοναδική μη κατακόρυφη ευθεία και κάθε μη κατακόρυφη ευθεία να αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό σημείο (Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5: Παράδειγμα δυϊκότητας: το σημείο p στον αρχικό χώρο αντιστοιχίζεται στην ευθεία ε στο δυϊκό χώρο.

Υπάρχουν και άλλοι τύποι μετασχηματισμών που πραγματοποιούν δυϊκότητα ανάμεσα σε ευθείες και σημεία εκτός από τον μετασχηματισμό $L : y = mx - b \Leftrightarrow p : (m, b)$ στον οποίον αναφερθήκαμε παραπάνω. Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός $L : ax + by = 1 \Leftrightarrow p : (a, b)$ ορίζει τη λεγόμενη **πολική δυϊκότητα** (polar duality ή polarity). Ένας άλλος μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται συχνά είναι ο $L : y = 2ax - b \Leftrightarrow p : (a, b)$ κυρίως λόγω της στενής του σχέσης με το παραβολοειδές. Κάθε φορά χρησιμοποιείται ο ιδανικότερος μετασχηματισμός ως προς την εκάστοτε εφαρμογή.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε κάποια Λήμματα στα οποία αποδεικνύουμε ιδιότητες του μετασχηματισμού δυϊκότητας που είδαμε: $L : y = mx - b \Leftrightarrow p : (m, b)$. Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και για τους άλλους μετασχηματισμούς. Αν χ είναι το αντικείμενό μας (σημείο ή ευθεία) θα συμβολίζουμε ως D τον μετασχηματισμό μας, και ως $D(\chi)$ την δυϊκή εικόνα του χ .

Λήμμα 1.1. $D(D(\chi)) = \chi$ οπού χ είναι είτε σημείο είτε ευθεία.

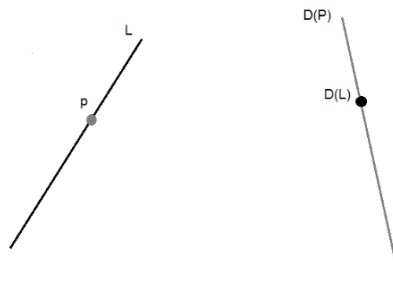
Απόδειξη. Προφανές καθώς ο μετασχηματισμός είναι συμμετρικός. □

Ο μετασχηματισμός D δεν ορίζεται για κατακόρυφες ευθείες καθώς αυτές είναι οι μόνες που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν στη μορφή $y = mx - b$. Ωστόσο, αυτό συνήθως δεν είναι πρόβλημα διότι μπορούμε να χειριστούμε χωριστά αυτές τις ευθείες.

Λήμμα 1.2. Ο μετασχηματισμός D είναι μια απεικόνιση (1-1) ανάμεσα σε όλες τις μη κατακόρυφες ευθείες και σε όλα τα σημεία στο επίπεδο.

Λήμμα 1.3. Το σημείο p ανήκει στην ευθεία L αν και μόνο αν το σημείο $D(L)$ ανήκει στην ευθεία $D(p)$ (Σχήμα 1.6).

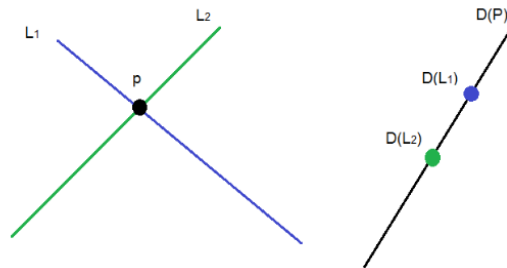
Απόδειξη. Έστω η ευθεία $L : y = mx - b$ και το σημείο $p = (c, d)$. Τότε το p ανήκει στην L αν και μόνο αν $d = mc - b$. Στον δυϊκό χώρο έχουμε το σημείο $D(L) = (m, b)$ και την ευθεία $D(p)$ που είναι η $y = cx - d$. Το σημείο $D(L)$ ανήκει στην ευθεία $D(p)$ αν και μόνο αν $b = mc - d$ που είναι η ίδια ισότητα που βρήκαμε αρχικά. □



Σχήμα 1.6: Αν το σημείο p ανήκει στην ευθεία L , στον δυϊκό χώρο το σημείο $D(L)$ ανήκει στην ευθεία $D(p)$.

Λήμμα 1.4. Έστω ότι δύο ευθείες L_1, L_2 τέμνονται στο σημείο p τότε τα δυϊκά σημεία $D(L_1), D(L_2)$ ανήκουν στη δυϊκή ευθεία $D(p)$. (Σχήμα 1.7).

Απόδειξη. Εφόσον το p ανήκει στην L_1 τότε το $D(L_1)$ ανήκει στην $D(p)$, και εφόσον το p ανήκει στην L_2 τότε και το $D(L_2)$ ανήκει στην $D(p)$. \square



Σχήμα 1.7: Παράδειγμα για το Λήμμα 1.4: οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο p , αυτό σημαίνει ότι στο δυϊκό χώρο τα δυϊκά σημεία των ευθειών ανήκουν στην ευθεία $D(p)$.

1.2. Σχετικά Ερευνητικά Αποτελέσματα

Στο επίπεδο, ο πυρήνας ενός απλού πολυγώνου μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n \log n)$ χρόνο ως τομή κλειστών ημιεπιπέδων, ένα για κάθε ακμή του πολυγώνου. Για το ίδιο πρόβλημα, οι Lee και Preparata [1] περιέγραψαν έναν αλγόριθμο $O(n)$ χρόνου, ο οποίος είναι βέλτιστος .

Στις τρεις διαστάσεις, ο αλγόριθμος των Lee και Preparata δεν φαίνεται να επεκτείνεται. Επιπλέον, αν και ο πυρήνας πολυέδρου μπορεί να υπολογιστεί ως τομή κλειστών ημιχώρων, ενός ημιχώρου για κάθε έδρα του δοθέντος πολυέδρου, όμως, δεν υπάρχει αλγόριθμος να το κάνει αυτό σε $O(n \log n)$ χρόνο.

Για τον πυρήνα στις 3 διαστάσεις, οι Preparata και Muller [2] επινόησαν έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας $O(n \log n)$. Ο αλγόριθμός τους χρησιμοποιεί δυϊκότητα αντιστοιχίζοντας κάθε επίπεδο έδρας του πολυέδρου σε ένα τετραδιάστατο σημείο πάνω σε μια τετραδιάστατη σφαίρα, πολλαπλασιάζοντας την κατάλληλα ούτως ώστε να έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων, στη συνέχεια υπολογίζουν το κυρτό περίβλημα στις 4 διαστάσεις με κάποιο τέχνασμα προβολών ούτως ώστε να μη ξεπεραστεί η πολυπλοκότητα της τάξης του $O(n \log n)$ και τέλος αντιστρέφουν τον μετασχηματισμό και υπολογίζουν τον πυρήνα.

Εμείς προτείνουμε έναν απλούστερο τρόπο υπολογισμού του πυρήνα χρησιμοποιώντας μια επέκταση του προαναφερθέντος μετασχηματισμού δυϊκότητας D αντιστοιχίζοντας τα επίπεδα των εδρών του πολυέδρου σε τρισδιάστατα σημεία και απλοποιώντας σημαντικά τον υπολογισμό.

1.3. Αντικείμενο της Μεταπτυχιακής εργασίας

Η εργασία αφορά τη σχεδίαση και υλοποίηση ενός αποδοτικού αλγορίθμου για τον υπολογισμό του πυρήνα ενός πολυέδρου. Προτείνουμε μια επέκταση του μετασχηματισμού δυϊκότητας στις τρεις διαστάσεις την οποία εκμεταλλευόμαστε για τον υπολογισμό του πυρήνα. Η κωδικοποίηση του αλγορίθμου έγινε στη γλώσσα προγραμματισμού C++, και η οπτικοποίηση έγινε με τις βιβλιοθήκες της OpenGL στο περιβάλλον visual studio.

1.4. Δομή της Μεταπτυχιακής Εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται ο αλγόριθμος υπολογισμού του πυρήνα, εξηγείται η λειτουργία του και υπολογίζεται η πολυπλοκότητά του.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται μέρος της υλοποίησης του αλγορίθμου, οι δομές δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και τα αποτελέσματα που παράγονται σε διάφορα παραδείγματα εισόδων.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται συμπεράσματα της εργασίας και επεκτάσεις που μπορούν να γίνουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

2.3 Η Πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου

2.4 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου

2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Ο αλγόριθμος υπολογισμού του πυρήνα πολυέδρου βασίζεται στη **δυϊκότητα στις τρεις διαστάσεις** που εφαρμόζουμε στον τρισδιάστατο χώρο. Ανάλογα όπως στη δυϊκότητα σημείου–ευθείας στο επίπεδο, που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, τώρα συσχετίζουμε σημείο με επίπεδο στον χώρο.

- Ένα επίπεδο με εξίσωση επιπέδου $E: z = ax + by + c$ το αντιστοιχίζουμε στο σημείο $D(E) = p : (a, b, -c)$.
- Αντίστροφα, ένα σημείο $p: (a, b, c)$ το αντιστοιχίζουμε στο επίπεδο $D(p) = E: z = ax + by - c$.

Παρακάτω αποδεικνύουμε ιδιότητες, τις οποίες χρησιμοποιούμε στην επόμενη παράγραφο για τη σχεδίαση του αλγορίθμου.

Σημειώνουμε ότι ο μετασχηματισμός D που περιγράψαμε δεν εφαρμόζεται σε κατακόρυφα επίπεδα (δηλαδή, επίπεδα παράλληλα στον z -άξονα) καθώς αυτά δεν μπορούν να περιγραφούν στη μορφή $z = ax + by - c$. Εάν όμως υπάρχουν τέτοια επίπεδα στο δοθέν πολύεδρό μας, τα χειριζόμαστε ξεχωριστά στο τέλος του αλγορίθμου, επίσης σε $O(n \log n)$ χρόνο, χρησιμοποιώντας προβολές στο xy -επίπεδο.

Λήμμα 2.1. *Αν ένα σημείο p βρίσκεται ψηλότερά από ένα (μη κατακόρυφο) επίπεδο E τότε το δυϊκό σημείο $D(E)$ βρίσκεται ψηλότερα από το επίπεδο $D(p)$ (δυϊκή εικόνα του σημείου p). Συμμετρικά αν ένα σημείο p βρίσκεται χαμηλότερά από ένα (μη κατακόρυφο) επίπεδο E τότε η δυϊκή του εικόνα $D(E)$ βρίσκεται χαμηλότερα από το επίπεδο $D(p)$ (δυϊκή εικόνα του σημείου p) (Σχήμα 2.1).*

Απόδειξη. Αν το σημείο $p : (m, n, o)$ είναι ψηλότερα από το επίπεδο $E : z = ax + by + c$, ισχύει ότι $o > am + bn + c$. Οι δυϊκές εικόνες του επιπέδου και του σημείου είναι $D(E) = p' : (a, b, -c)$ και $D(p) = E' : z = mx + ny - o$. Η σχέση $o > am + bn + c$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως $-c > ma + nb - o$, η οποία ισοδυναμεί με το ότι το σημείο $D(E)$ βρίσκεται ψηλότερα από το επίπεδο $D(p)$. \square

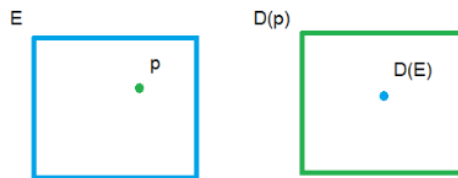
Παρόμοια, δείχνεται και η δεύτερη σχέση.



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα δυϊκότητας στις τρεις διαστάσεις: το σημείο p στον αρχικό χώρο είναι πάνω από το επίπεδο E ενώ στον δυϊκό χώρο το δυϊκό επίπεδο $D(p)$ είναι κάτω από το δυϊκό σημείο $D(E)$.

Λήμμα 2.2. *Αν ένα σημείο p ανήκει σε ένα (μη κατακόρυφο) επίπεδο E τότε το σημείο $D(E)$ ανήκει στο επίπεδο $D(p)$ (Σχήμα 2.2).*

Απόδειξη. Εφόσον το p ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου E , μετατρέποντας το p σε επίπεδο οι συντεταγμένες του θα γίνουν συντελεστές εξίσωσης επιπέδου και αντίστροφα οι συντελεστές του E θα γίνουν συντεταγμένες, συνεπώς η εξίσωση και πάλι θα ικανοποιείται. □

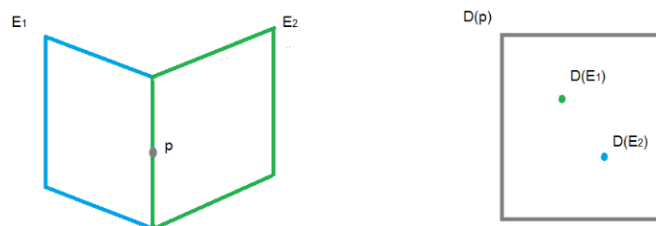


Σχήμα 2.2: Το σημείο p ανήκει στο επίπεδο E , ισοδύναμα στον δυϊκό χώρο, το σημείο $D(E)$ ανήκει στο επίπεδο $D(p)$.

Το επόμενο λήμμα αποτελεί επέκταση του προηγούμενου Λήμματος για την τομή δύο επιπέδων.

Λήμμα 2.3. *Αν ένα σημείο p ανήκει σε δύο επίπεδα E_1, E_2 τότε στον δυϊκό χώρο τα δυϊκά σημεία $D(E_1), D(E_2)$ θα ανήκουν στο επίπεδο $D(p)$ (Σχήμα 2.3).*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα 2.2 δύο φορές, αποδεικνύουμε το ζητούμενο. □

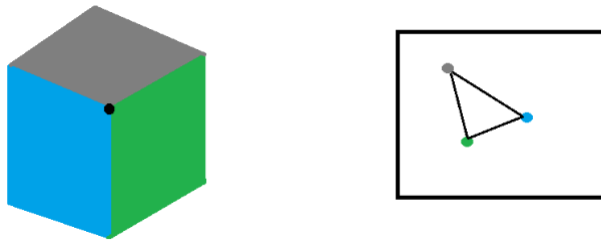


Σχήμα 2.3: Αν το σημείο p ανήκει στα επίπεδα E_1, E_2 τότε τα δυϊκά σημεία $D(E_1), D(E_2)$ ανήκουν στο επίπεδο $D(p)$.

Τέλος, θα δούμε ότι γνωρίζοντας το επίπεδο το οποίο ορίζεται από τα δυϊκά σημεία 3 επιπέδων, εύκολα υπολογίζουμε το σημείο τομής αυτών των επιπέδων.

Λήμμα 2.4. *Αν ένα σημείο p ανήκει σε τρία επίπεδα E_1, E_2, E_3 , τότε στον δυϊκό χώρο τα δυϊκά σημεία $D(E_1), D(E_2), D(E_3)$ θα ανήκουν στο επίπεδο $D(p)$ (Σχήμα 2.4).*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2 τρεις φορές, αποδεικνύουμε το ζητούμενο. \square



Σχήμα 2.4: Αν ένα σημείο ανήκει στην τομή τριών επιπέδων, στον δυϊκό χώρο, τα τρία δυϊκά σημεία των τριών επιπέδων ανήκουν στο δυϊκό επίπεδο του σημείου.

2.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

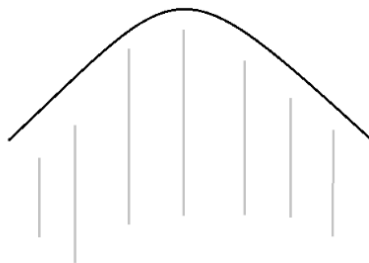
Ο αλγόριθμος υπολογισμού του πυρήνα ενός πολυέδρου όπως προαναφέραμε βασίζεται στον μετασχηματισμό δυϊκότητας D στις τρεις διαστάσεις, ο οποίος μας επιτρέπει να απεικονίσουμε επίπεδα σε σημεία και να αποφύγουμε να υπολογίσουμε τομές επιπέδων που είναι υπολογιστικά δαπανηρή διαδικασία. Η κατάσταση απλουστεύει διότι η τομή των επιπέδων αντιστοιχίζεται στο κυρτό περίβλημα σημείων στον δυϊκό χώρο, άρα το ζητούμενο πλέον είναι ο υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος.

Σημειώνεται ότι αν ο ζητούμενος πυρήνας δεν είναι κενός τότε θα υπάρχει σημείο p το οποίο αφενός βρίσκεται ψηλότερα από όλα τα επίπεδα E_1 των εδρών που περιβάλλουν από κάτω το δοθέν πολύεδρο P και αφετέρου βρίσκεται χαμηλότερα από όλα τα επίπεδα E_2 των εδρών που περιβάλλουν από επάνω το P . Ισοδύναμα, λόγω του Λήμματος 2.1, στον δυϊκό χώρο θα πρέπει να υπάρχει επίπεδο το οποίο βρίσκεται χαμηλότερα από όλα τα δυϊκά σημεία $D(E_1)$, και ψηλότερα από όλα τα δυϊκά σημεία $D(E_2)$. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να υπάρχει

διαχωριστικό επίπεδο μεταξύ των δύο κυρτών περιβλημάτων των δυϊκών σημείων $D(E_1)$ και $D(E_2)$. Συνεπώς, αν τα δύο αυτά κυρτά περιβλήματα τέμνονται, δεν υπάρχει τέτοιο επίπεδο, αλλιώς υπάρχει διαχωριστικό επίπεδο ή ισοδύναμα σημείο στον αρχικό χώρο από το οποίο όλα τα σημεία του δοθέντος πολυέδρου P είναι ορατά, και άρα ο πυρήνας δεν είναι κενός. Για να υπολογίσουμε τον πυρήνα αρκεί να βρούμε τις κορυφές που τον ορίζουν. Γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας ορίζεται από κορυφές που είναι τομές επιπέδων στον αρχικό χώρο και απεικονίζονται με επίπεδα εδρών των κυρτών περιβλημάτων στον δυϊκό χώρο (Λήμμα 2.4). Συνεπώς, αν υπολογίσουμε τα δυϊκά σημεία των επιπέδων των εδρών των κυρτών περιβλημάτων έχουμε τις κορυφές του πυρήνα, πρέπει όμως να προσέξουμε να συμπεριλάβουμε μόνο τα δυϊκά σημεία των επιπέδων των εδρών που ορίζουν τον χώρο μεταξύ των δύο κυρτών περιβλημάτων, και όχι επίπεδα εδρών που δεν εφάπτονται σε αυτόν τον χώρο.

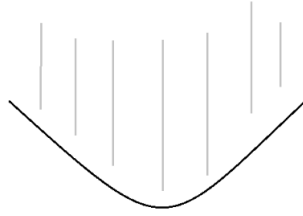
Τέλος, επειδή κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου διαχωρίζουμε τα επίπεδα εδρών που βρίσκονται ψηλότερα από τα σημεία του πυρήνα από τα επίπεδα εδρών που βρίσκονται χαμηλότερα από τα σημεία του πυρήνα του δοθέντος πολυέδρου, στην πραγματικότητα αυτό που κάνουμε είναι ότι υπολογίζουμε το επάνω τμήμα του πυρήνα, έπειτα το κάτω τμήμα του πυρήνα και στη συνέχεια χρειάζεται να συνδυάσουμε τα δύο τμήματα για να υπολογίσουμε ολόκληρο τον πυρήνα.

Στα ακόλουθα σχήματα βλέπουμε το άνω και κάτω τμήμα του πυρήνα έπειτα από τον υπολογισμό των δυϊκών σημείων των επιπέδων των εδρών των δύο κυρτών περιβλημάτων.



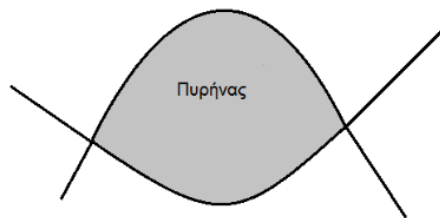
Σχήμα 2.5: Το άνω τμήμα του πυρήνα.

Στη συνέχεια υπολογίζεται το κάτω τμήμα του πυρήνα (Σχήμα 2.6).



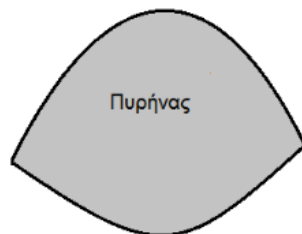
Σχήμα 2.6: Το κάτω τμήμα του πυρήνα.

Ο ζητούμενος πυρήνας είναι η τομή του άνω και του κάτω τμήματος (Σχήμα 2.7). Για να τον υπολογίσουμε χρειάζεται να βρούμε τα σημεία τομής των δύο μερών και να τα συμπεριλάβουμε στις κορυφές του πυρήνα, καθώς επίσης και να αφαιρέσουμε τυχόν περιττά σημεία τα οποία βρίσκονται εκτός του τελικού πυρήνα (Σχήμα 2.8). Ο τελικός πυρήνας είναι όλα τα σημεία που ανήκουν στην τομή των δύο τμημάτων του πυρήνα (Σχήμα 2.7).



Σχήμα 2.7 Ο τελικός πυρήνας είναι η τομή των δύο τμημάτων του πυρήνα.

Τα σημεία των δύο καμπύλων γραμμών πέρα από τα σημεία τομής τους δεν ανήκουν στον πυρήνα οπότε τα αφαιρούμε (Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8: Το τελικό σχήμα του πυρήνα, με όλες τις κορυφές του πυρήνα (μαύρα σημεία), έπειτα από υπολογισμό και προσθήκη των σημείων τομής του άνω και κάτω μέρους του

πυρήνα, και αφαίρεση των περιττών σημείων που βρίσκονται πέρα από τα σημεία τομής των δύο καμπύλων γραμμών.

Παρακάτω δίνεται ο αλγόριθμος σε πιο αυστηρή περιγραφή.

Βήματα αλγορίθμου.

Είσοδος: Πολύεδρο P , του οποίου τον πυρήνα θέλουμε να υπολογίσουμε.

Έξοδος: Πολύεδρο K που είναι ο πυρήνας ή αναφορά μη ύπαρξης πυρήνα.

Βήμα 1: Υπολογισμός του κάθετου διανύσματος κάθε έδρας E του P .

Βήμα 2: Ανάθεση κάθε έδρας E του P σε ένα εκ των δύο συνόλων E_{pos} , E_{neg} με βάση το πρόσημο της z συντεταγμένης του κάθετου διανύσματος της έδρας E .

Βήμα 3: Υπολογισμός του δυϊκού σημείου $D(E)$ του επιπέδου κάθε έδρας E του P , σύμφωνα με την εξίσωση μετασχηματισμού $E : z = ax + by - c \Leftrightarrow p : (a, b, c)$.

Βήμα 4: Υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος H_1 των δυϊκών σημείων του p που προέρχονται από τις έδρες του συνόλου E_{pos} .

Βήμα 5: Υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος H_2 των δυϊκών σημείων του P που προέρχονται από τις έδρες του συνόλου E_{neg} .

Βήμα 6: Έλεγχος τομής των δύο κυρτών περιβλημάτων H_1 και H_2 .

6α: Αν τα H_1 και H_2 τέμνονται, τερμάτισε.

6β: Αν τα H_1 και H_2 δεν τέμνονται, συνέχισε στο βήμα 7.

Βήμα 7: Υπολογισμός του δυϊκού σημείου του επιπέδου κάθε έδρας του κυρτού περιβλήματος H_1 και ένταξή τους στο σύνολο D_1 .

Βήμα 8: Υπολογισμός του δυϊκού σημείου του επιπέδου κάθε έδρας του κυρτού περιβλήματος H_2 και ένταξή τους στο σύνολο D_2 .

Βήμα 9: Υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος K_1 των σημείων που είναι στοιχεία του συνόλου D_1 .

Βήμα 10: Υπολογισμός του κυρτού περιβλήματος K_2 των σημείων που είναι στοιχεία του συνόλου D_2 .

Βήμα 11: Υπολογισμός των κάθετων διανυσμάτων κάθε έδρας E των K_1 και K_2 .

Βήμα 12: Εύρεση των σημείων τα οποία ανήκουν στο D_1 και δεν ανήκουν στο κυρτό περίβλημα K_2 και ένταξή τους στο σύνολο A_1 .

Βήμα 13: Εύρεση των σημείων τα οποία ανήκουν στο D_2 και δεν ανήκουν στο κυρτό περίβλημα K_1 και ένταξή τους στο σύνολο A_2 .

Βήμα 14: Υπολογισμός των σημείων τομής των περιβλημάτων K_1 , K_2 και ένταξή τους στο σύνολο T .

Βήμα 15: $S = (D_1 - A_1) \cup (D_2 - A_2) \cup T$.

Βήμα 16: Υπολογισμός του πυρήνα K ως κυρτό περίβλημα των σημείων του συνόλου S .

Σημειώνουμε κάποιες παραδοχές που κάνουμε στον παραπάνω αλγόριθμο για κάποιες ακραίες περιπτώσεις που μπορούν να τύχουν. Υποθέτουμε ότι όταν υπολογίζουμε το κυρτό περίβλημα το αντίστοιχο σύνολο περιέχει τουλάχιστον τέσσερα σημεία που δεν είναι συνεπίπεδα μεταξύ τους, καθώς αυτό είναι αναγκαίο για να υπολογίσουμε το κυρτό περίβλημα στις τρεις διαστάσεις. Σε τέτοιες απλουστευμένες περιστάσεις, όταν όλα τα σημεία μιας εκ των δύο ομάδων είναι συνεπίπεδα μεταξύ τους, υπολογίζουμε τα σημεία τομής των επιπέδων των εδρών, από τις οποίες προέκυψαν αυτά τα σημεία, με τον υπόλοιπο πυρήνα και έτσι, έχουμε όλες τις κορυφές του πυρήνα. Επίσης, μπορεί να τύχει το αντίστοιχο σύνολο να περιέχει μόνο ένα ή δύο σημεία. Αν έχουμε μόνο ένα σημείο p υπολογίζουμε την τομή του επιπέδου $D(p)$ με τον υπόλοιπο πυρήνα σε γραμμικό χρόνο και λαμβάνουμε τον τελικό πυρήνα. Αν έχουμε μόνο δύο σημεία p, q , παρόμοια υπολογίζουμε την τομή του υπόλοιπου πυρήνα με τα δύο δυϊκά επίπεδα $D(p)$ και $D(q)$, και με αυτόν το τρόπο συνθέτουμε ολόκληρο τον πυρήνα.

Ακόμη υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει έδρα στο πολύεδρο η οποία να είναι κατακόρυφη (δηλαδή, το κάθετο διάνυσμά της είναι κάθετο στον άξονα z). Σε μια τέτοια περίπτωση, αρχικώς βρίσκουμε τον πυρήνα χωρίς να λάβουμε υπόψη την κατακόρυφη έδρα και στη συνέχεια προβάλλουμε το άνω τμήμα του πυρήνα και την έδρα στο xy -επίπεδο, λαμβάνοντας ένα πολύγωνο χωρισμένο σε περιοχές και μια ευθεία e στο xy -επίπεδο αντίστοιχα, υπολογίζουμε την τομή των περιοχών του πολυγώνου με την ευθεία e και βρίσκουμε την αντίστοιχη τομή στο τριδιάστατο άνω τμήμα του πυρήνα. Κατόπιν, δουλεύουμε παρόμοια για το κάτω τμήμα του πυρήνα και την κατακόρυφη έδρα. Τέλος, συνθέτουμε τα δύο τμήματα μετά την τομή τους, προσθέτοντας κατακόρυφες έδρες σχήματος τραπεζίου εκεί όπου τα τμήματα αυτά έχουν τμηθεί. Η όλη διαδικασία απαιτεί γραμμικό χρόνο για μία έδρα. Για περισσότερες έδρες, υπολογίζουμε την τομή των ημιεπιπέδων των εδρών σε $O(n \log n)$ χρόνο

και στη συνέχεια χρειαζόμαστε γραμμικό χρόνο για τον υπολογισμό των τομών και τη σύνθεση των τμημάτων που έχουν τμηθεί, δηλαδή, συνολικά $O(n \log n)$ χρόνο.

2.3 Η Πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου

Προτού ξεκινήσουμε την ανάλυση να σημειώσουμε ότι ως είσοδο n θεωρούμε το πλήθος των κορυφών του δοθέντος πολυέδρου. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι τότε το πλήθος των εδρών είναι τάξης $O(n)$.

Τα βήματα 1, 2, 3, 7, 8, 11 του αλγορίθμου υπολογίζουν μια τιμή για κάθε έδρα οπότε αρκεί ένα πέρασμα όλων των εδρών για να πραγματοποιηθούν αυτά τα βήματα, άρα έχουμε συνολική πολυπλοκότητα χρόνου $O(n)$.

Τα βήματα 4, 5, 9, 10, 16 υπολογίζουν κάποιο κυρτό περίβλημα $O(n)$ σημείων και μπορούν να εκτελεστούν σε $O(n \log n)$ χρόνο συνολικά [4].

Στο βήμα 6 χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο των Dobkin και Kirkpatrick [3] για τον έλεγχο τομής δύο κυρτών πολυέδρων ο οποίος έχει πολυπλοκότητα χρόνου $O(n)$.

Τα βήματα 12 και 13 εκτελούνται σε χρόνο $O(n \log n)$, καθώς υπάρχουν αλγόριθμοι που ελέγχουν αν ένα σημείο βρίσκεται εντός ή εκτός ενός κυρτού πολυέδρου σε χρόνο $O(\log n)$, κατά συνέπεια για όλα τα σημεία έχουμε συνολικό χρόνο $O(n \log n)$.

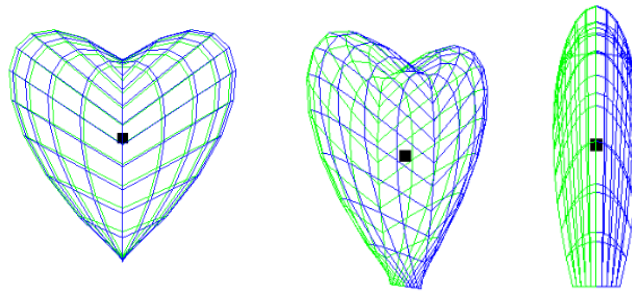
Στο βήμα 14 υπάρχει αλγόριθμος [5] υπολογισμού των σημείων τομής δύο κυρτών περιβλημάτων τάξης $O(n)$.

Το βήμα 15 εκτελείται σε χρόνο $O(n)$ καθώς ο πληθάρηθος τόσο των συνόλων D_1, D_2 όσο και του συνόλου T είναι $O(n)$ και τα στοιχεία των συνόλων A_1, A_2 είναι γνωστά από τα βήματα 13 και 14.

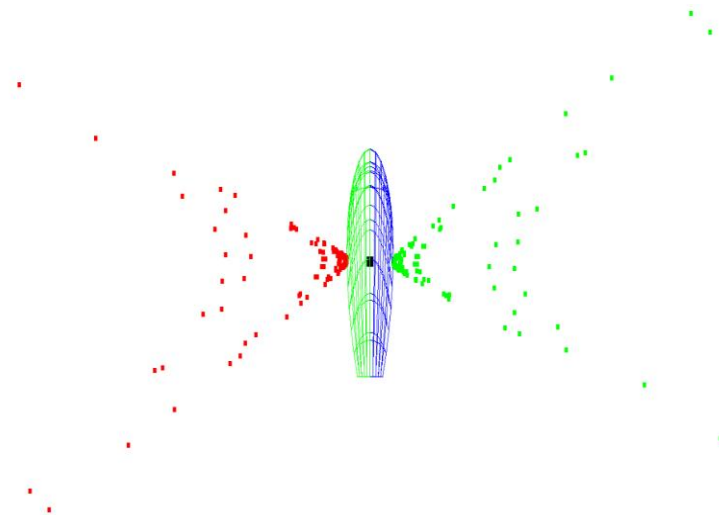
Συνολικά, για καθένα από τα βήματα του αλγορίθμου είδαμε ότι η πολυπλοκότητα χρόνου κάθε βήματος δεν ξεπερνάει την τάξη του $O(n \log n)$, συνεπώς η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n \log n)$.

2.4 Παράδειγμα Εφαρμογής του Αλγορίθμου

Παρακάτω παραθέτουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού του πυρήνα όπου παρουσιάζονται τα βήματα του αλγορίθμου σε εικόνες στο κάτω μέρος των οποίων εξηγείται το περιεχόμενο της εικόνας αλλά και το βήμα του αλγορίθμου το οποίο το προκαλεί, ώστε να γίνει πιο κατανοητή η λειτουργία του αλγορίθμου. Στα σχήματα που ακολουθούν υπονοείται ότι ο άξονας z είναι ο οριζόντιος άξονας, ο άξονας y ο κατακόρυφος άξονας και ο άξονας x είναι ο άξονας που είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Συνεπώς η σχέση άνω/κάτω απεικονίζεται ως σχέση αριστερά/δεξιά.

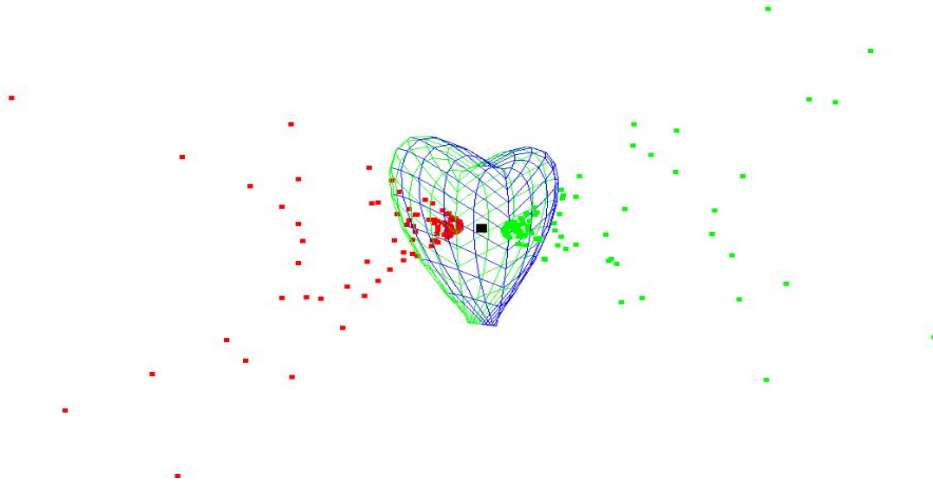


Σχήμα 2.9: Στο σχήμα αυτό βλέπουμε το πολύεδρο της εισόδου σε τρεις διαφορετικές προβολές, διακρίνουμε επίσης τον διαχωρισμό των εδρών του βήματος 2 του αλγορίθμου, σε μπλε και πράσινες έδρες σύμφωνα με το πρόσημο της z συντεταγμένης του κάθετου διανύσματος κάθε έδρας.

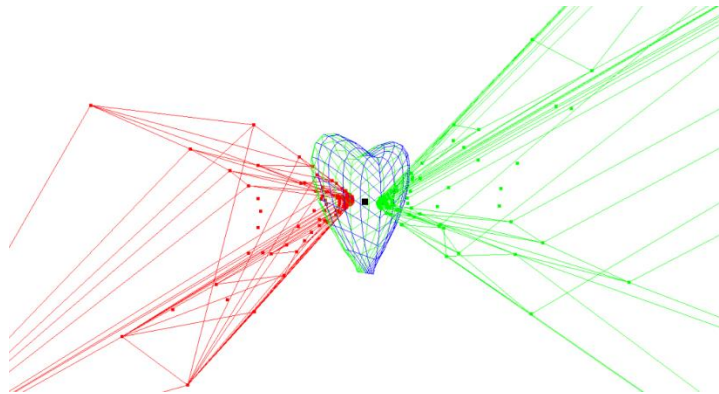


Σχήμα 2.10: Απεικονίζεται το δοθέν πολύεδρο όπως πρωτίτερα αλλά και τα δυτικά σημεία των εδρών του, αποτυπώνεται το αποτέλεσμα του βήματος 3 του αλγορίθμου. Με κόκκινο

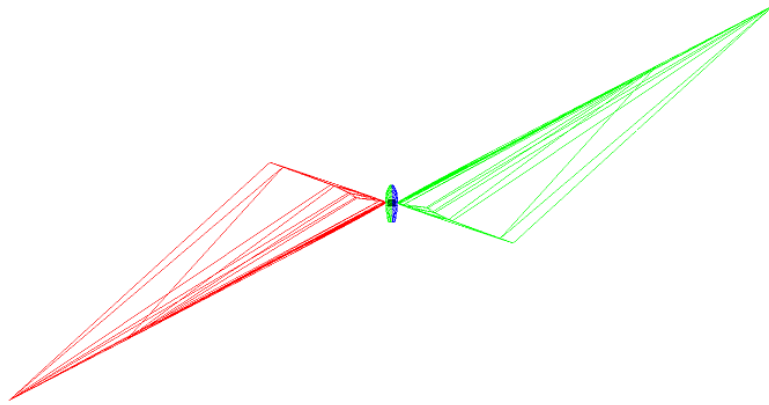
σημειώνονται τα δυϊκά σημεία των μπλε εδρών και με πράσινο τα δυϊκά σημεία των πράσινων εδρών.



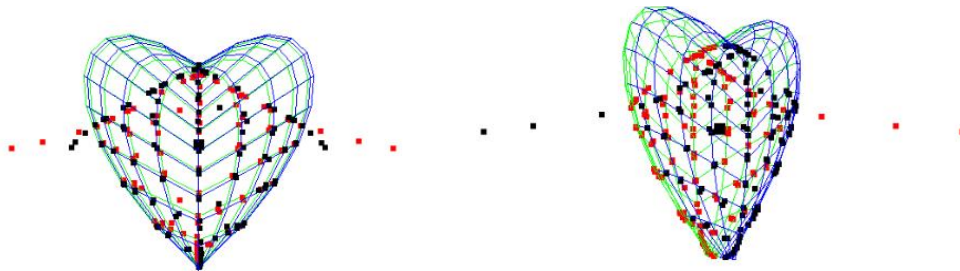
Σχήμα 2.11: Μια διαφορετική όψη του σχήματος 2.10 από διαφορετική γωνία λήψης, ώστε να γίνει ευκρινώς αντιληπτό στις τρεις διαστάσεις.



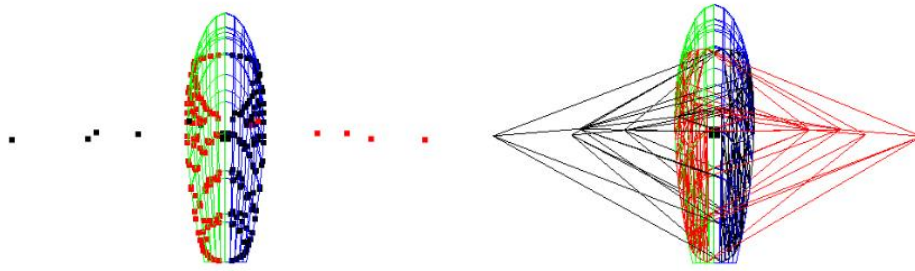
Σχήμα 2.12: Στην εικόνα αυτή βλέπουμε το αποτέλεσμα των βημάτων 4, 5 του αλγορίθμου όπου υπολογίζονται τα κυρτά περιβλήματα των κόκκινων και πράσινων σημείων του προηγούμενου σχήματος (Σχήμα 2.11). Στη συνέχεια εκτελείται το βήμα 6 του αλγορίθμου για τον έλεγχο τομής των δύο κυρτών περιβλημάτων, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση της καρδιάς επιστρέφει την ύπαρξη λύσης, καθότι τα δύο κυρτά περιβλήματα δεν τέμνονται.



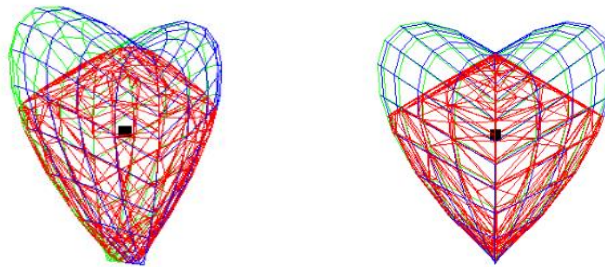
Σχήμα 2.13: Μια άλλη προβολή του προηγούμενου σχήματος (Σχήμα 2.12) με λιγότερη εστίαση. Βλέπουμε ολόκληρα τα δύο κυρτά περιβλήματα των δυϊκών σημείων τα οποία έχουν μια συμμετρία ως προς το κέντρο του αρχικού πολυέδρου, πράγμα που οφείλεται στην εξίσωση μετασχηματισμού αλλά και στη συμμετρικότητα των εδρών του δοθέντος πολυέδρου.



Σχήμα 2.14: Σε αυτές τις δύο εικόνες απεικονίζονται δύο όψεις του αποτελέσματος των βημάτων 7, 8 του αλγορίθμου, που είναι πολλά από τα σημεία που σχηματίζουν τον τελικό πυρήνα τα οποία είναι τα δυϊκά σημεία των εδρών των δύο κυρτών περιβλημάτων του προηγούμενου σχήματος (Σχήμα 2.13). Με κόκκινο χρώμα διακρίνουμε τα σημεία που προέρχονται από το πράσινο κυρτό περίβλημα, ενώ με μαύρο χρώμα τα σημεία που προέρχονται από το κόκκινο κυρτό περίβλημα.



Σχήμα 2.15: Στην αριστερή εικόνα απεικονίζεται, όπως στο προηγούμενο σχήμα (Σχήμα 2.14), το δοθέν πολύεδρο αλλά και τα σημεία πολλά εκ των οποίων σχηματίζουν τον πυρήνα, με κόκκινο και με μαύρο χρώμα. Στη δεξιά εικόνα εμφανίζεται το αποτέλεσμα των βημάτων 9, 10 που είναι τα δύο κυρτά περιβλήματα των σημείων κάθε χρώματος της αριστερής εικόνας, τα οποία θα χρησιμεύσουν στον υπολογισμό του τελικού πυρήνα.



Σχήμα 2.16: Τελικώς έχουμε την έξοδο του αλγορίθμου έπειτα από αφαίρεση των σημείων που δεν ανήκουν στον πυρήνα αλλά και πρόσθεση των σημείων τομής των κυρτών περιβλημάτων της δεξιάς εικόνας του προηγούμενου σχήματος (Σχήμα 2.15). Βλέπουμε τον πυρήνα ο οποίος φαίνεται σε δύο διαφορετικές όψεις με κόκκινο χρώμα εντός του αρχικού πολύεδρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

3.1 Είσοδος – Έξοδος

3.2 Δομές Δεδομένων

3.3 Επιλεγμένες Συναρτήσεις

3.4 Παραδείγματα Εκτέλεσης του Προγράμματος

3.1 Είσοδος- Έξοδος

Η είσοδος του αλγορίθμου είναι ένα τυχαίο πολύεδρο P . Το P δίνεται με τη μορφή .OFF (Object File Format) αρχείου το οποίο περιγράφει τη μορφή του P .

Η έξοδος του αλγορίθμου είναι η αναφορά μη ύπαρξης λύσης ή ένα πολύεδρο K το οποίο περιγράφεται επίσης με ένα .OFF αρχείο όπως και το πολύεδρο εισόδου που αναφέραμε παραπάνω.

Κάθε αρχείο .OFF δομείται ως εξής. Στη πρώτη γραμμή δηλώνουμε το πλήθος των κορυφών, των εδρών και των ακμών του πολυέδρου μας. Ακολούθως δίνεται η λίστα των κορυφών, σε κάθε γραμμή δηλώνουμε τις συντεταγμένες της κορυφής σε κάθε έναν από τους 3 άξονες του καρτεσιανού συστήματος. Τέλος δίνεται η λίστα των εδρών, όπου στην αρχή κάθε γραμμής δηλώνεται το πλήθος των κορυφών της έδρας και έπειτα για κάθε κορυφή της έδρας ο αύξων

αριθμός της γραμμής της κορυφής, ξεκινώντας από το 0. Οι κορυφές της έδρας πάντα δίνονται με ανθωρολογιακή φορά.

3.2 Δομές δεδομένων

- Η δομή για την αποθήκευση κορυφών.

```
struct point{  
    float x,y,z;  
};
```

Όπου x, y, z οι συντεταγμένες τις κορυφής στον τρισδιάστατο χώρο.

- Η δομή για την αποθήκευση εδρών.

```
struct face{  
    int *vertices;  
    int number_of_vertices;  
    struct point dual;  
    struct point normal_vector;  
};
```

Η κάθε έδρα αποτελείται από έναν πίνακα ο οποίος έχει τον αύξων αριθμό κάθε κορυφής που συμμετέχει στην έδρα, το πλήθος των κορυφών της έδρας, το δυϊκό σημείο της, και το κάθετο διάνυσμα της.

- Η δομή για την αποθήκευση πολυέδρων.

```
struct polyhedron{  
    struct point *vertices;  
    struct face * faces;  
    int Nfaces;  
    int Nvertices;  
};
```

Το κάθε πολυέδρο αποτελείται από τις κορυφές του, τις έδρες του, το πλήθος των κορυφών του και το πλήθος των εδρών του.

3.3 Επιλεγμένες συναρτήσεις

- `void store_3d_object()`

Η συνάρτηση `store_3d_object` γεμίζει τη δομή δεδομένων που περιγράφει ένα πολύεδρο διαβάζοντας την περιγραφή του από ένα αρχείο τύπου (.OFF).

```
void store_3d_object(){

    int num_vert_of_face;
    ifstream myfile(mypoly);

    myfile >> p.Nvertices >>p.Nfaces;
    printf("%d %d\n",p.Nfaces,p.Nvertices);

    p.vertices=new struct point[p.Nvertices];
    p.faces=new struct face[p.Nfaces];

    for (int i=0;i<p.Nvertices;i++){
        myfile>>p.vertices[i].x>>p.vertices[i].y>>p.vertices[i].z;
    }

    for (int i=0;i<p.Nfaces;i++){

        myfile >> num_vert_of_face;

        p.faces[i].vertices=new int[num_vert_of_face];

        p.faces[i].number_of_vertices=num_vert_of_face;
    }

    for (int j=0;j<num_vert_of_face;j++)
        myfile>>p.faces[i].vertices[j];
    }
myfile.close();

//call this function to compute some needed things of the faces
compute_duals_of_faces_and_normals();
}
```

Η συνάρτηση `store_3d_object` γεμίζει τη δομή δεδομένων που περιγράφει ένα πολύεδρο διαβάζοντας τη περιγραφή του από ένα αρχείο τύπου (.OFF), και έπειτα καλεί την συνάρτηση `compute_duals_of_faces_and_normals()`, η οποία υπολογίζει τα κάθετα διανύσματα και τα δυϊκά σημεία κάθε έδρας του πολυέδρου που αποθηκεύτηκε.

- `struct point com_dual(struct point p1,struct point p2,struct point p3){`

Η συνάρτηση `point com_dual` υπολογίζει το δυϊκό σημείο κάθε έδρας.

```
struct point com_dual(struct point p1,struct point p2,struct point p3){
```

```

    struct point dual_point;

float x=(p2.y-p1.y)*(p3.z-p1.z)-(p3.y-p1.y)*(p2.z-p1.z);
float y=(p2.z-p1.z)*(p3.x-p1.x)-(p3.z-p1.z)*(p2.x-p1.x);
float z=(p2.x-p1.x)*(p3.y-p1.y)-(p3.x-p1.x)*(p2.y-p1.y);

float c1=p1.x*(((p3.y-p1.y)*(p2.z-p1.z))-((p2.y-p1.y)*(p3.z-p1.z)));
float c2=p1.y*(((p3.z-p1.z)*(p2.x-p1.x))-((p2.z-p1.z)*(p3.x-p1.x)));
float c3=p1.z*(((p3.x-p1.x)*(p2.y-p1.y))-((p2.x-p1.x)*(p3.y-p1.y)));
float c=c1+c2+c3;

    if (z!=0){

        dual_point.z=c/z;

        dual_point.x=-x/z;

        dual_point.y=-y/z;
    }
    else{
//found z=0 which means undefined handle it later

        dual_point.z=0;

        dual_point.x=0;

        dual_point.y=0;
    }
    return dual_point;//returns a point in 3d-space
}

```

Η παραπάνω συνάρτηση ως ορίσματα δέχεται τρεις κορυφές κάποιας έδρας ούτως ώστε να υπολογίσει την εξίσωση επιπέδου και έπειτα σύμφωνα την εξίσωση του επιπέδου της έδρας υπολογίζει το δυϊκό σημείο της με βάση τον τύπο που δώσαμε στο Κεφάλαιο 2.

- `bool intersect_edge_polyhedro(struct point p0,struct point p1,int sign){`

Η συνάρτηση `intersect_edge_polyhedro` αποφαινεται αν μια ακμή τέμνει ένα πολύεδρο, και σε περίπτωση τομής ποιο είναι το σημείο τομής. Η χρησιμότητα της είναι να βρίσκει τα σημεία τομής των δύο κυρτών περιβλημάτων του βήματος 14 του αλγορίθμου τα οποία συναποτελούν σημεία του πυρήνα.

```

bool intersect_edge_polyhedro(struct point p0,struct point p1,int sign){

    float t;//t parameter
    struct point dvector,V;

```

```

float N,D;//for computing t
bool in;

polyhedron q;

if (sign==0){
    q=up_kernel;
}
else{
    q=down_kernel;
}
direction_vector.x=p1.x-p0.x;
direction_vector.y=p1.y-p0.y;
direction_vector.z=p1.z-p0.z;

for (int i=0;i<q.Nfaces;i++){
    V.x=q.vertices[q.faces[i].vertices[0]].x;

    V.y=q.vertices[q.faces[i].vertices[0]].y;
    V.z=q.vertices[q.faces[i].vertices[0]].z;

    float nx,ny,nz;

    nx=q.faces[i].normal_vector.x;
    ny=q.faces[i].normal_vector.y;
    nz=q.faces[i].normal_vector.z;

    N=-(nx*(p0.x-V.x)+ny*(p0.y-V.y)+nz*(p0.z-V.z));
    D=dvector.x*nx+dvector.y*ny+dvector.z*nz;

    if (D==0){

        if (N<0) //then P0 is outside the face Fi
            return false;

        }//since S cannot intersect OMEGA;
        else{
            continue;
        }
    }
}
t=N/D;

if (t>=0 && t<=1){
    inter_point.x=p0.x+t*(p1.x-p0.x);
    inter_point.y=p0.y+t*(p1.y-p0.y);
    inter_point.z=p0.z+t*(p1.z-p0.z);
    nx=abs(nx);
}

```



```

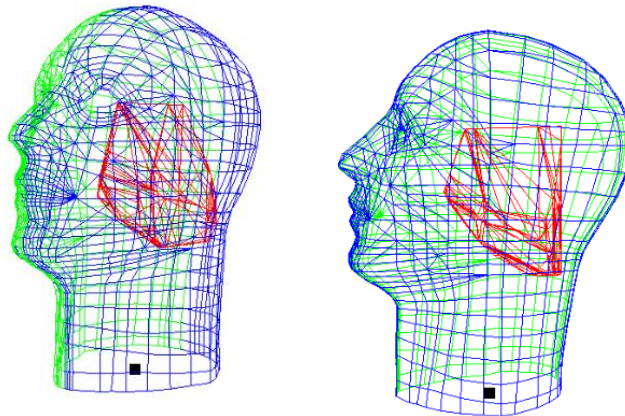
        ny=abs(ny);
        nz=abs(nz);
    if (nx<=ny){
        if (ny<nz){
            in=check_X_Y(inter_point,sign,i);
            if (in==true)
                return true;
        }
        else{
            in=check_X_Z(inter_point,sign,i);
            if (in==true)
                return true;
        }
    }
    else if(nx>ny){
        if (nx<nz){
            in=check_X_Y(inter_point,sign,i);
            if (in==true)
                return true;
        }
        else{
            in=check_Y_Z(inter_point,sign,i);
            if (in==true)
                return true;
        }
    }
    return false;
}

```

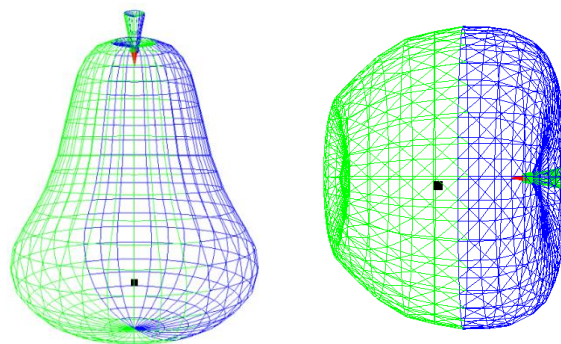
Η συνάρτηση `intersect_edge_polyhedro` δέχεται ως παραμέτρους δύο σημεία που είναι τα άκρα μιας ακμής, και ένα δείκτη που δηλώνει με ποιο κυρτό περίβλημα p από τα δύο που έχουμε υπολογίσει, πρόκειται να γίνει έλεγχος τομής. Διασχίζοντας όλες τις έδρες του πολυέδρου για κάθε επίπεδο της έδρας E με βάση τη παραμετρική εξίσωση $q = p_0t + (1-t)p_1$ βρίσκουμε την παράμετρο t , για την οποία η ακμή e τέμνει το επίπεδο της έδρας. Αν η παράμετρος t είναι μεταξύ του διαστήματος $(0, 1)$ τότε προβάλλουμε την έδρα E και την

ακμή e σε ένα επίπεδο και ελέγχουμε για τομή του προβληθέντος πολυγώνου και της προβληθείσας ακμής e σε λογαριθμικό χρόνο, αν τέμνονται, τότε σίγουρα υπάρχει σημείο τομής και εύκολα το υπολογίζουμε, διαφορετικά δεν υπάρχει τομή.

3.4 Παραδείγματα εκτέλεσης του προγράμματος

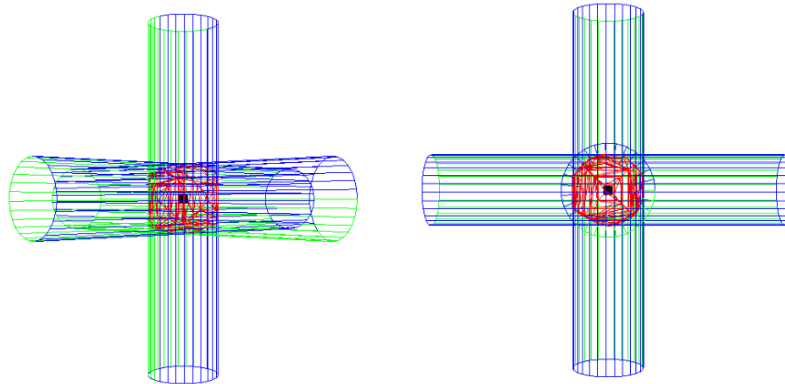


Σχήμα 3.1: Εδώ βλέπουμε δύο διαφορετικές όψεις του πυρήνα (κόκκινο πολύεδρο) ενός κεφαλιού. Παρατηρούμε ότι ο λαιμός περιορίζει τον πυρήνα στο κέντρο του κεφαλιού ενώ τα μάτια και η μύτη διαμορφώνουν τον πυρήνα πιο αιχμηρό στο επάνω μέρος του.

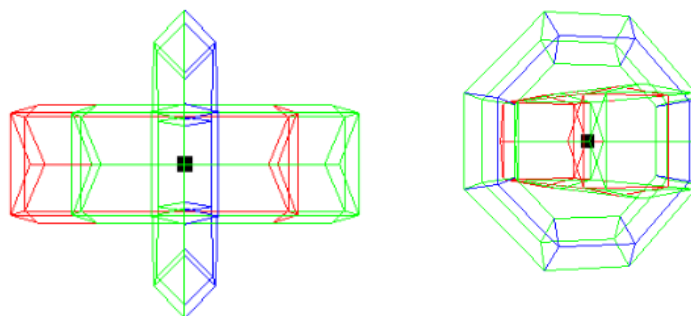


Σχήμα 3.2: Στην αριστερή εικόνα βλέπουμε ένα αχλάδι και στην δεξιά εικόνα ένα μήλο. Παρατηρούμε ότι το κοτσάνι και των δύο πολυέδρων περιορίζει πάρα πολύ τους πυρήνες

(χρώματος κόκκινου) που έχουν κωνική μορφή και συνεχίζουν ως προέκταση στα δύο κοτσάνια.



Σχήμα 3.3: Δύο όψεις ενός κυλινδροειδούς σταυρού όπου κάθε κύλινδρος αποτελείται από πολλές έδρες, με τον πυρήνα σε χρώμα κόκκινο, στην κοινή περιοχή των δύο κυλίνδρων.



Σχήμα 3.4: Ένα παράδειγμα κενού πυρήνα: βλέπουμε ότι τα δύο κυρτά περιβλήματα του τόρου, χρώματος πράσινου και χρώματος κόκκινου αντίστοιχα, τέμνονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

4.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα

4.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

4.1 Σύνοψη και συμπεράσματα

Σε αυτήν την εργασία ασχοληθήκαμε με τον υπολογισμό του πυρήνα ενός πολυέδρου. Περιγράψαμε έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας χρόνου $O(n \log n)$, που υπολογίζει τον πυρήνα ή επιστρέφει μήνυμα ότι ο πυρήνας είναι κενός. Ο αλγόριθμός μας πετυχαίνει την ίδια πολυπλοκότητα $O(n \log n)$ με τον αλγόριθμο των Preparata, Muller [2] όμως είναι πιο απλός στην υλοποίηση και πιο πρακτικός διότι χρησιμοποιεί διαφορετικό μετασχηματισμό δυϊκότητας, χωρίς να μεταβαίνει σε χώρο 4 διαστάσεων.

4.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Για το μέλλον αποτελεί πρόκληση η επινοήση κάποιου ταχύτερου αλγορίθμου ή η απόδειξη ενός εφαρμοστού (tight) κάτω φράγματος για το πρόβλημα. Τέλος ενδιαφέρον θα είχε η μελέτη του προβλήματος σε χώρους περισσότερων διαστάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] D.T. Lee and F.P. Preparata, “An optimal algorithm for finding the kernel of a polygon”, *Journal of ACM* 26, pp. 415–421, 1979.
- [2] F. P. Preparata and D.E. Muller, “Finding the intersection of n halfspaces in time $O(n \log n)$ ”, *Theoretical Computer Science*, vol 8, no 1, pp. 45–55, 1979.
- [3] D. Dobkin and D.G. Kirkpatrick, “A linear algorithm for determining the separation of convex polyhedra”, *Journal of Algorithms*, vol 6, no 3, September 1985, pp. 381–392.
- [4] F.P. Preparata and S.J. Hong, “Convex Hulls of Finite Sets of Points in Two and Three Dimensions”, *Communications of the ACM* , vol 20, no 2, pp 87–93, 1977.
- [5] T.M. Chan, “A Simpler Linear–Time Algorithm for Intersecting Two Convex Polyhedra in Three Dimensions”, *Journal of Discrete & Computational Geometry*, vol 56, no 4, pp. 860–865, 2016.
- [6] B. Chazelle, “An optimal algorithm for intersecting three-dimensional convex polyhedra”, *SIAM Journal on Computing*, vol 21, no 4, pp. 671–696, 1992

ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

Γεννήθηκα στην Ζάκυνθο το 1993.

Αποφοίτησα από το Δεύτερο Γενικό Λύκειο Ζακύνθου το 2011.

Απέκτησα το Δίπλωμα Μηχανκών Η/Υ και Πληροφορικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το 2017.

