ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟ ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Παναγιώτα Παππά-Ζώη

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2019

Αφιερώνεται στους γονείς μου.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε στις 12 Νοεμβρίου 2019 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Χάρης Παπαδόπουλος	Επίκουρος Καθηγητής
Δημήτριος Νούτσος	Καθηγητής
Λουκάς Γεωργιάδης	Αναπληρωτής Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Παναγιώτα Παππά-Ζώη

Ευχαριστιες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χάρη Παπαδόπουλο, για την καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθειά του, καθώς χωρίς αυτόν η ολοκλήρωση της διατριβής θα ήταν σχεδόν αδύνατη.

Περιληψη

Στην διατριβή αυτή ασχολούμαστε με προβλήματα σχετικά με το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο σύνολο σε γραφήματα: Δοθέντος ενός γραφήματος $G = (V, E)$, όπου V είναι το σύνολο των κορυφών και E το σύνολο των ακμών, μας ενδιαφέρει να βρούμε εκείνο το σύνολο κορυφών D με την ιδιότητα ότι κάθε κορυφή του γραφήματος G να κυριαρχείται από μία ακριβώς κορυφή του συνόλου D. Επικεντρωνόμαστε στους αλγορίθμους και στη πολυπλοκότητα του προβλήματος που υπάρχουν στην σύγχρονη βιβλιογραφία. Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας σε κλάσεις γραφημάτων όπου το πρόβλημα είτε παραμένει $NP-$δύσκολο είτε επιδέχεται πολυωνυμικό αλγόριθμο για την επιλυσή του. Παρουσιάζουμε αναγωγές για την δυσκολία του προβλήματος και ταυτόχρονα μελετάμε αλγορίθμους και τη γενικότερη μεθοδολογία που έχει αναπτυχθεί για την επιλυσή του. Κυρίως μας ενδιαφέρουν κλάσεις γραφημάτων που χαρακτηρίζονται από την απουσία επαγώμενου υπογραφήματος H, για δεδομένο γράφημα H.

Abstract

In this dissertation we deal with problems related to the efficient domination set in graphs: Given a graph $G = (V, E)$, where V is the set of vertices and E is the set of edges, we are interested in finding that set of vertices D of the graph G with the property that every vertex of the graph G is dominated by exactly one vertex of the set D. We concentrate on algorithms and the complexity of the problem that can be found in the modern literature. Our interest is focused on classes of graphs where the problem remains NP-hard or admits a polynomial algorithm for its solution. We present reductions for the difficulty of the problem and simultaneously study algorithms and the general methodology that have been developed for its solution. We are mainly interested in classes of graphs that are characterised by the absence of an induced subgraph H, for every given graph H.

Περιεχομενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγη

1.1 Βασικοί ορισμοί αλγορίθμων και θεωρίας γραφημάτων

Ορισμός 1.1. **Γράφημα** είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$, όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο που το καλούμε σύνολο κορυφών (ή σύνολο κόμβων) και E είναι ένα σύνολο από διμελή σύνολα κορυφών τα οποία εκφράζουν τις ακμές του γραφήματος. Ως $V(G)$ και $E(G)$ συμβολίζουμε τα σύνολα των κορυφών και ακμών. Το πλήθος των κορυφών του γραφήματος συμβολίζεται με n, ενώ το πλήθος των ακμών συμβολίζεται με m. Δηλαδή $n = |V(G)|$ και $m = |E(G)|$.

Ορισμός 1.2. **Ανοιχτή γειτονιά** της κορυφής v ορίζεται ως
$N(v) =_{def} \{u | \{v, u\} \in E(G)\}$.

Ορισμός 1.3. **Κλειστή γειτονιά** της κορυφής v όρίζεται ως
$N[v] =_{def} N(v) \cup \{v\}$.

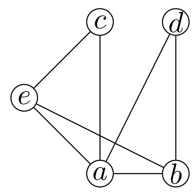
Ορισμός 1.4. *Αντι-γειτονιά* της κορυφής v είναι $A(v) = V \setminus N[v]$.

Ορισμός 1.5. Δυο γραφήματα G και H ονομάζονται **ισόμορφα** αν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f : V(G) \rightarrow V(H)$ τέτοια ώστε $\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$.

Ορισμός 1.6. Έστω G και H δύο γραφήματα. Λέμε ότι το γράφημα H είναι **υπογράφημα** του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $H \subseteq G$. Αντίστροφα θα λέμε ότι το γράφημα G είναι **υπεργράφημα** του H.

Ορισμός 1.7. Έστω G και H δύο γραφήματα. Λέμε ότι το γράφημα H είναι **επαγόμενο υπογράφημα** του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και για κάθε $u, v \in V(H)$, $\{u, v\} \in E(H)$ αν και μόνο αν $\{u, v\} \in E(G)$.

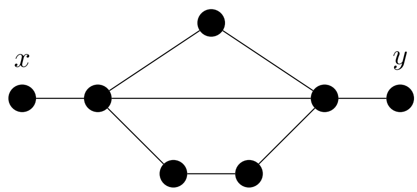
Ορισμός 1.8. Για ένα γράφημα G ο **βαθμός** κάθε κορυφής $v \in V(G)$ είναι το πλήθος των ακμών που προσπίτουν στην κορυφή v. Συμβολίζεται τον βαθμό ως $\deg_G(v)$ και θα ισχύει $\deg_G(v) = |\ N_G(v)|$



Σχήμα 1.1: Παρατηρούμε ότι η κορυφή a έχει βαθμό 4 ($\deg_G(a) = 4$), η κορυφή b έχει βαθμό 3 ($\deg_G(b) = 3$), η κορυφή c έχει βαθμό 2 ($\deg_G(c) = 2$), η κορυφή d έχει βαθμό 2 ($\deg_G(d) = 2$) και η κορυφή e έχει βαθμό 3 ($\deg_G(e) = 4$).

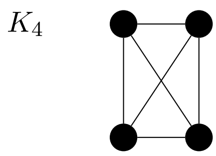
Ορισμός 1.9. Ο **ελάχιστος** και ο **μέγιστος βαθμός** του γραφήματος είναι $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} deg(v)$ και $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} deg(v)$, αντίστοιχα.

Ορισμός 1.10. Έστω x,y δυο κορυφές του γραφήματος G. Η **απόσταση** $dist(x, y)$ μεταξύ του x και y ορίζεται ως το μήκος του μικρότερου(συντομότερου) μονοματιού με άκρα τις κορυφές x και y.

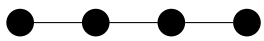


Σχήμα 1.2: Η απόσταση του x από το y είναι 3, δηλαδή $distx, y = 3$

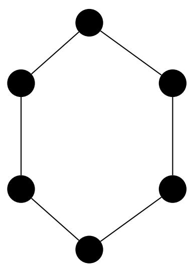
Ορισμός 1.11. Το γράφημα με $n \geq 1$ κορυφές και ακμές για κάθε ζεύγος κορυφών το ονομάζουμε **πλήρες γράφημα** ή **κλίκα**, το συμβολίζουμε με K_n και ισχύει: $K_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_j\} | 1 \leq i, j \leq n\}\}$.



Ορισμός 1.12. Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ και $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ καλείται **μονοπάτι**. Το γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές που ορίζεται ως $P_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} | 1 \leq i, j \leq n\}\}$ καλείται άχορδο μονοπάτι.

P_4 

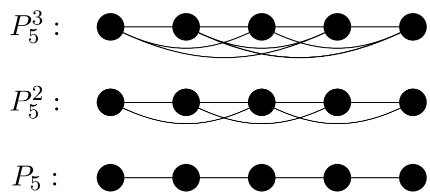
Ορισμός 1.13. Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, \ddots, v_n\}$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \cup \{v_1, v_n\} \in E(G)$ καλείται **κύκλος**. Το γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές που ορίζεται ως $C_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_1 v_n\}\}$ καλείται άχορδος κύκλος. Το γράφημα C_3 καλείται **τρίγωνο** και είναι ισόμορφο με την κλίκα K_3.

C_6 

Ορισμός 1.14. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **διμερές (bipartite)** αν μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο $V(G)$ σε δύο μη-κενά σύνολα, $V(G) = A \cup B$ με $A \cup B = \emptyset$ και για κάθε ακμή $e = \{x, y\} \in E(G)$, $x \in A$ και $y \in B$.

Ορισμός 1.15. Τα σύνολα A, B ονομάζονται **διαμέριση του** G και συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα ως μια τριάδα, $G = (A, B, E)$.

Ορισμός 1.16. Έστω ένα γράφημα G και έστω $k \geq 1$. Ορίζουμε την **δύναμη ενός γραφήματος** G ως το γράφημα $G^k = (V(G), \{\{u, v\} | dist(u, v) \leq k\}$.



Σχήμα 1.3: Οι πρώτες 3 δυνάμεις του P_5.

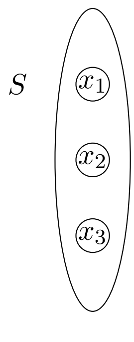
Ορισμός 1.17. Ένα γράφημα G ονομάζεται **συνεκτικό** αν για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(G)$ υπάρχει $(u, v)-$μονοπάτι στο G.

Ορισμός 1.18. Λέμε ότι μια ακμή καλύπτεται από ένα σύνολο κορυφών S αν τουλάχιστον ένα από τα άκρα της ακμής ανήκει στο S. Ένα υποσύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ καλέιται **κάλυμμα κορυφών** ενός γραφήματος G αν το S καλύπτει όλες τις ακμές του G. Το κάλυμμα κορυφών με το ελάχιστο αριθμό κορυφών καλείται αριθμός **καλύμματος κορυφών** του G και συμβολίζεται με $vc(G)$.

Ορισμός 1.19. Δεδομένης μιας συλλογής S των υποσυνόλων ενός συνόλου X, μια **ακριβή κάλυψη (exact cover)** είναι μια οικογένεια S^* των στοιχείων του S έτσι ώστε κάθε στοιχείο X να περιέχεται σε ακριβώς ένα υποσύνολο στο S^*.

Ορισμός 1.20. Μια συνεκτική συνιστώσα ενός γραφήματος G είναι ένα **μεγιστοτικό (maximal)** υπογράφημα του G που είναι συνεκτικό. Σημαντικό είναι να τονίσουμε εδώ ότι οι όροι μεγιστοτικοί ή ελαχιστικοί αναφέρονται στην ιδιότητα που έχει ένα σύνολο έτσι ώστε κανένα υποσύνολο που το εμπεριέχεται ή υπερσύνολο που το περιέχει δεν παρουσιάζει την ιδιότητα αυτή. Δεν πρέπει σε κάμια περίπτωση να συγχέουμε τους όρους αυτούς με το μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο που υποδηλώνουν μετρικούς όρους.

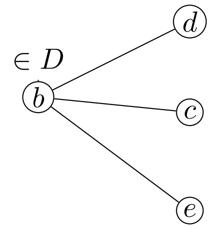
Ορισμός 1.21. Ένα σύνολο κορυφών ονομάζεται **ανεξάρτητο σύνολο** αν κάθε δύο κορυφές του δεν συνδέονται με ακμή. Δηλαδή είναι ένα σύνολο S κορυφών έτσι ώστε για κάθε δύο κορυφές στο S, δεν υπάρχει ακμή που να τις συνδέει.



Ορισμός 1.22. Ένα **μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο (Maximal Independent Set)** είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο που δεν αποτελεί υποσύνολο οποιουδήποτε άλλου ανεξάρτητου συνόλου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει καμία κορυφή έξω από το ανεξάρτητο σύνολο που μπορεί να ενωθεί με αυτό επειδή είναι το μέγιστο σε βάση την ανεξάρτητη ιδιότητα του συνόλου.

Ορισμός 1.23. Ένα **καθολικό σύνολο (universal set)** είναι ένα σύνολο το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές συμπεριλαμβανομένου και του εαυτού του.

Ορισμός 1.24. Μια **καθολική κορυφή (universal vertex)** είναι μια κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος η οποία γειτονεύει με όλες τις άλλες κορυφές του γραφήματος. Μπορεί επίσης να ονομάζεται **κυρίαρχη κορυφή (dominating vertex)** καθώς σχηματίζει η κορυφή ένα κυρίαρχο σύνολο.



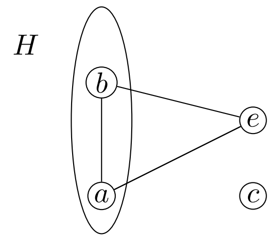
Σχήμα 1.4: Παρατηρούμε ότι η κορυφή b είναι μια καθολική κορυφή.

Ορισμός 1.25. Η **αναζήτηση κατά πλάτος (BFS)** είναι μια μέθοδος που αρχίζει από μια κορυφή που σημειώνεται ¨ως επισκεφθείσα¨. Η αναζήτηση αυτή ελέγχει πρώτα τις κορυφές κατα την οριζόντια κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινάει από έναν κόμβο s (την ρίζα του δέντρου) και διερευνά όλους τους γειτονικούς κόμβους στο παρόν βάθος πριν μετακινηθούν στους κόμβους του επόμενου βάθους. Ο χρόνος που απαιτεί αυτός ο αλγόριθμος είναι $0(n+m)$ ο οποίος είναι γραμμικός ως προς το μέγεθος του γραφήματος και είναι ο καλύτερος δυνατός που μπορούμε να επιτύχουμε, μιας και πρέπει να εξετάσουμε όλους τους κόμβους και όλες τις ακμές του γραφήματος εισόδου.

1.1.1 Αποσύνδεση σε ομογενή σύνολα κορυφών (Modular Decomposition)

Ορισμός 1.26. Σε ένα γράφημα $G = (V, E)$, ένα σύνολο κόμβων $M \subseteq V$ καλείται **ομογενές (Module)** εάν για όλους τους κόμβους $u \in V - M$ ισχύει είτε $M \cap N(x) = \emptyset$ είτε $M \subseteq N(x)$.

Ορισμός 1.27. Έστω ένα σύνολο H με τουλάχιστον δύο κορυφές ενός γραφήματος G καλείται **ομογενές (homogeneous)** εάν $H \neq V(G)$ και κάθε κορυφή έξω από το H συμπεριφέρεται το ίδιο στις κορυφές του H ή δεν ενώνεται με καμία κορυφή του H. Έτσι προφανώς το H είναι ομογενές στο G αν και μόνο αν το H είναι ομογενές στο συμπλήρωμα του $G(\overline{G})$.

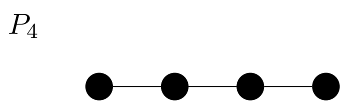


Σχήμα 1.5: Το σύνολο H είναι ομογενές, διότι οι δύο κορυφές έξω από αυτό συμπεριφέρονται το ίδιο στις κορυφές του H.

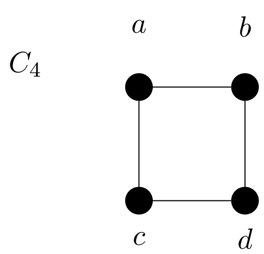
Ορισμός 1.28. Ένα ομογενές σύνολο H είναι **μέγιστο (maximal)** εάν δεν περιέχει κανένα άλλο μεγαλύτερο ομογενές σύνολο.

Ορισμός 1.29. Ένα γράφημα καλείται **πρωταρχικό (prime)** εαν δεν περιέχει κανένα ομογενές σύνολο ή διαφορετικά όταν οι κορυφές δεν έχουν την ίδια γειτονιά.

Για παράδειγμα το P_4 είναι ένα πρωταρχικό γράφημα, ενώ το C_4 δεν είναι πρωταρχικό.



Σχήμα 1.6: Όλες οι κορυφές έχουν διαφορετικές γειτονιές.



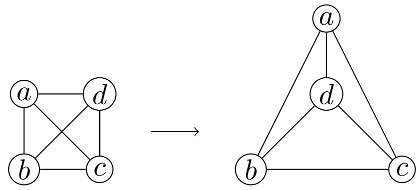
Σχήμα 1.7: Οι κορυφές a και d έχουν την ίδια γειτονιά, δηλαδή τις κορυφές b και c.

1.1.2 Κλάσεις γραφημάτων

Ορισμός 1.30. **H-free** γραφήματα είναι η κλάση των γραφημάτων που δεν περιέχουν το H ως επαγόμενο γράφημα.

Ορισμός 1.31. **Δέντρο(tree)** είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο οποιεσδήποτε δύο κορυφές συνδέονται με ακριβώς μια διαδρομή. Κάθε άκυκλο και συνεκτικό γράφημα είναι δέντρο.Μια κορυφή ενός δέντρου με βαθμό 1 ονομάζεται **φύλλο** και ένα γράφημα που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται **δάσος ή άκυκλο**. Ένα παράδειγμα δέντρου είναι τα μονοπάτια (P_n) και ακόμη ένα γράφημα που δεν είναι δέντρο είναι οι κύκλοι (C_n).

Ορισμός 1.32. Ένα **επίπεδο γράφημα (planar graph)** είναι ένα γράφημα που μπορεί να ενσωματωθεί στο επίπεδο, δηλαδή μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι άκρες του να τέμνονται μόνο στα τελικά σημεία τους. Με άλλα λόγια, μπορούν να σχεδιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να μην διασχίζουν τα άκρα μεταξύ τους. Ένα παράδειγμα επίπεδου γραφήματος είναι το πλήρες γράφημα (K_4) και ακόμη ένα γράφημα που δεν είναι επίπεδο είναι το πλήρες γράφημα (K_5).



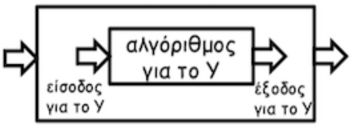
1.1.3 Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων

Αναγωγή: Το πρόβλημα X ανάγεται πολυωνυμικά στο πρόβλημα Y αν κάθε στοιγμιότυπο X μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας:

- Πολυωνυμικό πλήθος υπολογιστικών βημάτων και
- πολυωνυμικό πλήθος κλήσεων της τεχνικής που λύνει το πρόβλημα Y.

Συμβολίζεται ως εξής: $X \leq_p Y$.

Ορισμός 1.33. Ένα πρόβλημα Π ονομάζεται **ευχείριστο (tractable)**, εάν υπάρχει αποτελεσματικός (πολυωνυμικός) αλγόριθμος που το επιλύει, ενώ ονομάζουμε **δυσχείριστο ή δυσεπίλυτο (intractable)** το Π, εάν δεν υπάρχει



τέτοιος αλγόριθμος. Αναφέρουμε ότι η κλάση $P(Polynomial)$ περιλαμβάνει τα προβλήματα που επιδέχονται λύση πολυωνυμικού χρόνου, δηλαδή υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι που τα επιλύουν. Επιπλέον, εάν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για κάποια από αυτά τα προβλήματα τότε υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για όλα τα προβλήματα της κλάσης.

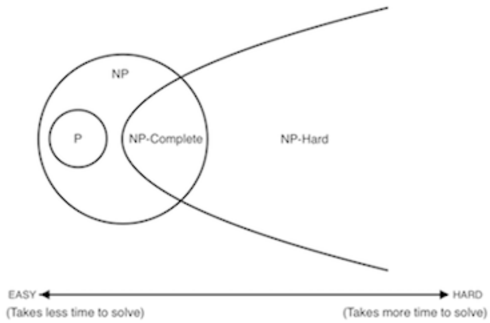
Ορισμός 1.34. Η κλάση πολυπλοκότητας **NP (nondeterministic polynomial time)** χρησιμοποιείται για να ταξινομήσει προβλήματα απόφασης. Πιο συγκεκριμένα, η κλάση NP περιέχει το σύνολο των προβλημάτων απόφασης όπου στις περιπτώσεις των προβλημάτων που η απάντηση είναι ¨ναι¨, έχουν αποδεικτικά στοιχεία επαληθεύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο. Τέτοια προβλήματα είναι οι $Hamiltonian$ Κύκλοι, το πρόβλημα SAT και άλλα.

Ένα πρόβλημα απόφασης X είναι $NP-$πλήρης εάν:

- $X \in NP$,
- για όλα τα $Y \in NP$, $Y \leq_p X$.

Με άλλα λόγια ζητάμε κάθε πρόβλημα του NP να μπορεί να ενταχθεί στο X.

Ορισμός 1.35. Ένα πρόβλημα απόφασης H είναι NP-**δύσκολο** ($NP-hard$) όταν για κάθε πρόβλημα L στο NP, μπορεί να αναχθεί με πολυωνυμικό χρόνο στο H.



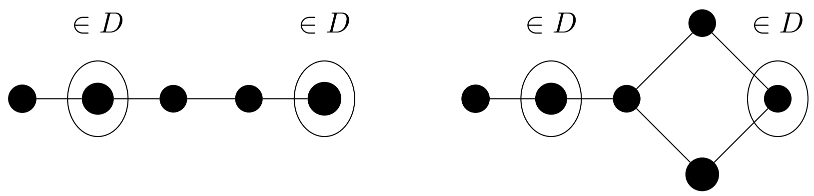
Σχήμα 1.8: Διάγραμμα P, NP, NP-πλήρης και NP- δύσκολο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κυριαρχο Προβλημα (Dominant Problem)

2.1 Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο Efficient Domination Set)

Ορισμός 2.1. Έστω $G = (V, E)$ ένα πεπερασμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα. Μια κορυφή v κυριαρχεί τον ευατό της και τους γειτονές της. Ένα υποσύνολο κορυφών $D \subseteq V$ είναι **ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο** ($e.d.s.$) του G εάν κάθε κορυφή του G κυριαρχείται από μία ακριβώς κορυφή του συνόλου D, για κάθε Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο ($e.d.s.$), D, δηλαδή $|D \cap N[v]| = 1$, για κάθε $v \in V$ (όπου $N[x]$ κυριαρχεί την κλειστή γειτονιά του x).

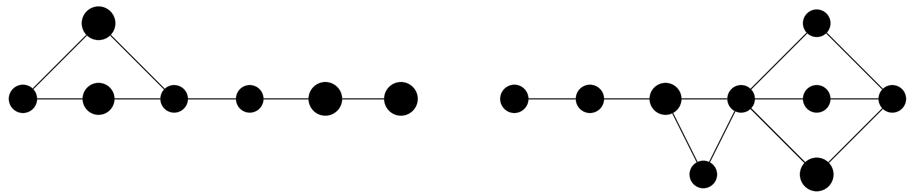


Σχήμα 2.1: Παρατηρούμε ότι όλες οι κορυφές των δύο γραφημάτων κυριαρχούνται από το σύνολο κορυφών D.

Σημειώνουμε ότι ότι όλα τα γραφήματα δεν έχουν ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο.Όπως για παράδειγμα είναι τα παρακάτω:

Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Πρόβλημα (Efficient Dominate Problem)

Έστω ένα $G = (V, E)$ ένα πεπερασμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα. Ψάχνου-



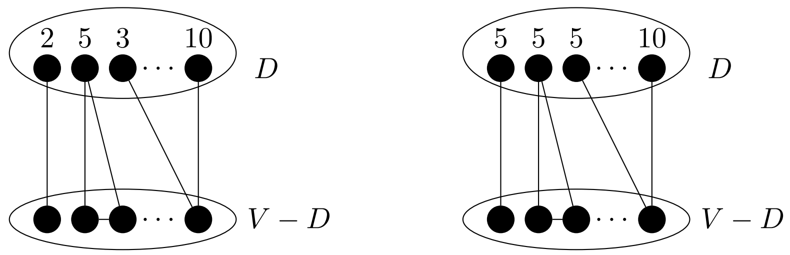
Σχήμα 2.2: Παρατηρούμε οτι η τελευταία κορυφή του γραφήματος δεν κυριαρχείται από το σύνολο D.

με να βρούμε το ελάχιστο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο.

2.2 Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη στις κορυφές (Weighted Efficient Domination Set)

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, με βάρη κορυφών $w : V \implies \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ψάχνουμε να βρούμε το ελάχιστο συνολικό βάρος ή να αποφασίσουμε ότι το γράφημα G δεν περιέχει κανένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο.

Στην ουσία στο πρόβλημα αυτό βάζουμε αυθαίρετα βάρη στις κορυφές και ψάχνουμε να βρούμε εκείνο το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με το ελάχιστο συνολικό βάρος.



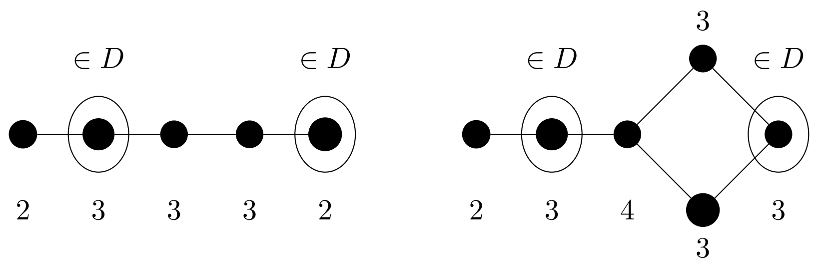
Παρατήρηση 2.1. *Από τα δυο παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι παρ'όλου που έχουν ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο σύνολο εμείς θα διαλέξουμε αυτό με το μικρότερο συνολικό βάρος.*

2.3 Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη Γειτνίασης στις κορυφές (Neigbourhood Weighted Efficient Domination Set

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, με βάρη γειτνίασης κορυφών $w : V \Longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ψάχνουμε να βρούμε το ελάχιστο συνολικό βάρος ή να αποφασίσουμε ότι το γράφημα G δεν περιέχει κανένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο.

Ορισμός 2.2. Για ένα γράφημα $G = (V, E)$, ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση βαρών στις κορυφές ως εξής: Έστω $w(v) := |N_G[v]|$, (δηλαδή $w(v) = deg(v)+1$) και για $D \subseteq V$, έχουμε $w(D) := \sum_{d \in D} w(d)$.

Ακολουθούν γραφήματα με βάρη στις κορυφές:



Πρόταση 2.1. *[10] Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα και $D \subseteq V$.*

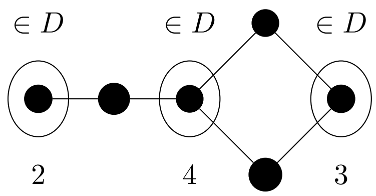
- *Εάν D είναι ένα κυρίαρχο σύνολο κορυφών στο G τότε $w(D) \geq |V|$.*
- *Εάν D είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών στο G^2 τότε $w(D) \leq |V|$.*

Λήμμα 2.1. *[10] Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα και $w(v) := |N[v]|$ μια συνάρτηση βάρους στις κορυφές του G. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για κάθε υποσύνολο $D \subseteq V$:*

- *D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G.*
- *D είναι το μικρότερο κυρίαρχο σύνολο κορυφών με βάρη στο G με $w(D) = |V|$.*
- *D είναι το μεγαλύτερο ανεξάρτητο κυρίαρχο σύνολο κορυφών με βάρη στο G^2 με $w(v) = |V|$*

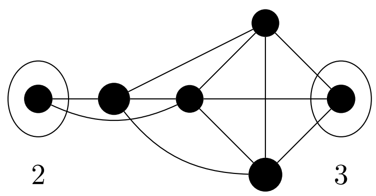
Απόδειξη. $(i) \rightarrow (ii)$: Εάν το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G τότε από τον ορισμό έχουμε ότι είναι ενα κυρίαρχο σύνολο κορυφών όπου κάθε κορυφή $v \in V$ έχει ακριβώς μια κλειστή γειτονιά στοιχείων στο D. Έτσι, η κλειστή γειτονιά $N[d]$, $d \in D$, δίνει μια διαμέριση στο V και άρα $w(D) = |V|$. Επίσης από την πρόταση 2.1, έχουμε ότι δεν υπάρχει D' με $w(D') \leq w(D)$.
$(ii) \rightarrow (iii)$: Εάν το D είναι ένα κυρίαρχο σύνολο στο G με $w(D) = |V|$ τότε οι κλειστές γειτονιές $N[d]$, $d \in D$ δίνουν μια διαμέριση του V και συγκεκριμένα, το D είναι ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο κορυφών στο G^2 με $w(D) = |V|$.
$(iii) \rightarrow (i)$: Εάν το D είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών στο G^2 με $w(D) = |V|$ τότε οι κλειστοί γείτονες $N[d]$, $d \in D$, δίνουν μια διαμέριση του V και τότε το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G. $\square$

<u>Στο G</u>:



Σχήμα 2.3: $w(D) = \sum_{d \in D} w(d) = 2 + 4 + 3 = 9$, $|V| = 6$, άρα $w(D) \geq |V|$.

<u>Στο G^2</u>:



Σχήμα 2.4: $w(D) = \sum_{d \in D} w(d) = 2 + 3 = 5$, $|V| = 6$, άρα $w(D) \leq |V|$.

Επομένως, αν λύσω το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε πολυωνυμικό χρόνο τότε μπορώ να λύσω και το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο σε πολ/κό χρόνο. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα [14].

2.4 Εφαρμογές του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου Συνόλου

Η Αποτελεσματική κυριαρχία εισήχθει από τον $Bange$ και άλλους, όταν αυτοί εποικοδομητικώς χαρακτήρισαν δέντρα με ξένα κυρίαρχα σύνολα διαφορετικών τύπων.Υπάρχουν κάποιες ενδιαφέρουσες εφαρμογές της Αποτελεσματικής Κυριαρχίας όπως είναι στην θεωρία κωδικοποίησης, στην ενσωμάτωση γραφημάτων, στις θέσεις εγκατάστασης των γεωγραφικών περιοχών και στην κατανομή πόρων των συστημάτων παράλληλης επεξεργασίας.

Πιο συγκεκριμένα, σχετικά με την θεωρία κωδικοποίησης ο $Biggs$ μελέτησε τέλειους $d-$κώδικες των μεταβατικών γραφημάτων απόστασης, όπου οι τέλειοι $d-$κώδικες ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα υποσύνολο S του συνόλου των κορυφών V τέτοιο ώστε κάθε κορυφή $v \in V$ να βρίσκεται σε απόσταση d από ακριβώς μια κορυφή του S. Η ιδέα του τέλειου 1-κώδικα είναι ίδια με την ιδέα της Αποτελεσματικής Κυριαρχίας, αφού οι κορυφές που αποτελούν το κυρίαρχο σύνολο απέχουν απόσταση 1 από τις μη κυρίαρχες κορυφές [4, 7, 32].

Σχετικά τώρα με την κατανομή των πόρων των συστημάτων παράλληλης επεξεργασίας, ο $Livingston$ και άλλοι, μελέτησαν τα τέλεια $d-$κυρίαρχα σύνολα, τα οποία είναι ακριβώς οι τέλειοι $d-$κώδικες. Αυτοί μοντελοποίησαν τα συστήματα παράλληλης επεξεργασίας σε ένα γράφημα $G = (V, E)$, όπου κάθε κορυφή $u \in V$ αντιπροσωπεύει ένα στοιχείο επεξεργασίας και κάθε ακμή $uv \in E$ αντιπροσωπεύει μια άμεση σύνδεση επικοινωνίας μεταξύ των στοιχείων επεξεργασίας που αντιστοιχούν στις κορυφές u και v. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν περιορισμένοι πόροι, όπως είναι οι πηγές ενέργειας, δίσκοι, συνδέσεις Εισόδου\Εξόδου και λογισμικά. Είναι επιθυμητό να διατίθεται ένας ελάχιστος αριθμός από αυτές τις μονάδες πόρων στα στοιχεία επεξεργασίας με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο επεξεργασίας να έχει το πολύ μια μονάδα πόρων και να είναι εντός μιας απόστασης d από ακριβώς μια μονάδα πόρών. Η λύση αυτού του προβλήματος αντιπροσωπεύει μια βέλτιστη κατάσταση κατά την οποία δεν υπάρχουν ούτε ομοιότητες ούτε συμπτώσεις [5, 8, 33, 37].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

NP-ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΥ ΚΥΡΙΑΡΧΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ (ED)

3.1 Εισαγωγικά

Γνωρίζουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Πρόβλημα (ED problem) είναι $NP-$πλήρες ακόμη και για περιορισμένες κλάσεις όπως είναι τα $2P_3-$free chordal graphs, ωστόσο το πρόβλημα αυτό λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για P_6-free chordal graphs. Από την άλλη μεριά το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο λύνεται σε γραμμικό χρόνο για $2P_2 - free$ και ακόμη για P_6-free graphs και άρα και για P_5-free bipartite graphs [3, 4].

Ο Lu και ο $Tung$ έδειξαν ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο είναι $NP-$πλήρες για $chordal$ διμερή γραφήματα και για επίπεδα διμερή γραφήματα. Πράγματι, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο είναι $NP-$πλήρες ακόμη και για επίπεδα διμερή γραφήματα με βαθμό κορυφών το πολύ 3. Έτσι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο είναι $NP-$πλήρες για $K_{1,4} - free$ διμερή γραφήματα. Για $K_{1,3} - free$ διμερή γραφήματα, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο αλλά και για κλάσεις με περιορισμένο πλάτος της κλίκας [23, 30, 38].

Ο $Dabrowski$ και ο $Paulusma$ δημοσίευσαν την διχοτόμηση για το πλάτος της κλίκας των $H - free$ διμερή γραφημάτων. Για παράδειγμα το πλάτος της κλίκας του $S_{1,2,3} - free$ διμερή γραφήματα που είναι περιορισμένα (τα οποία περιέχουν $K_{1,3} - free$ διμερή γραφήματα) [17].

Εμείς θα δείξουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο είναι $NP-$πλήρες για $K_{3,3}$ διμερή γραφήματα. Επιπλέον θα δείξουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για $H - free$ διμερή γραφήματα, όταν το H είναι P_7 ή $S_{1,2,4}$ ή lP_7 για καθορισμένο l και ομοίως για $P_9 - free$ διμερή γραφήματα με βαθμό κορυφών το πολύ 3 [12].

Λήμμα 3.1. *[13] Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο είναι NP-πλήρες για $K_{3,3} - free$ διμερή γραφήματα.*

Απόδειξη. Το πρόβλημα ακριβούς κάλυψης (Exact Cover Problem) παραμένει NP-πλήρες εάν κανένα στοιχείο δεν εμφανίζεται περισσότερο από τρεις φορές σε κάθε υποσύνολο [27]. Έστω $H = (V, E)$ με $V = \{u_1, .., u_n\}$ και $E = \{e_1, ..., e_m\}$ είναι ένα υπεργράφημα με $|e_i| = 3$ για όλα τα $i \in \{1, ..., m\}$. Έστω G_H είναι το ακόλουθω μειωμένο γράφημα:

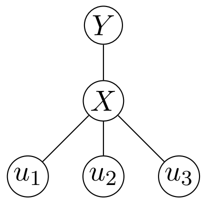
$V(G_H) = V \cup X \cup Y$ τέτοιο ώστε $X = \{x_1, ..., x_m\}$, $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ και V, X, Y είναι κατά ζεύγη ξεχωριστά ανεξάρτητα σύνολα στο G_H. Το σύνολο ακμών στο G_H περιέχει όλες τις ακμές $u_i x_j$ όταν $u_i \in e_j$, και για κάθε κορυφή y_i είναι μόνο γειτονικός του x_i. Δηλαδή, για κάθε ζεύγος $x_i, x_j \in X$, $i \neq j$, x_i και x_j έχουν διαφορετικούς γείτονες στο V.

Πιο συγκεκριμένα, $H = (V, E)$ έχει μια ακριβής κάλυψη αν και μόνο αν το G_H έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D τέτοιο ώστε για μια ακριβής κάλυψη E' του H, κάθε $e_i \in E'$ αντιστοιχεί μια κορυφή $x_i \in D$ και για κάθε $e_i \notin E'$ αντιστοιχεί μια κορυφή $y_i \in D$.

Αντίστροφα, εάν το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G_H τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $D \cup V = \varnothing$ (διαφορετικά οι κορυφές Y δεν θα κυριαρχούνται) και τώρα $D \cup X$ αντιστοιχεί σε μια ακριβής κάλυψη του H.

Δηλαδή, το G_H είναι διμερές. Τότε είναι ένα πρόβλημα ακριβούς κάλυψης, όπου κάθε υποσύνολο δεν περιέχει κάποιο στοιχείο περισσότερο από τρείς φορές και κάθε κορυφή στο V έχει βαθμό το πολύ 3, κάθε κορυφή στο Q έχει βαθμό 4 και κάθε κορυφή στο U έχει βαθμό 1.

Έστω F είναι ένα $K_{3,3}$ με κορυφές a_1, a_2, a_3 και b_1, b_2, b_3 . Καταλήγουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a_i \in V$. Τότε b_1 και b_2 έχουν την ίδια γειτονιά στο $V - a$, άτοπο. Έτσι το G_H είναι $K_{3,3} - free$. □



3.2 Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας (SAT)

Το πρόβλημα ικανοποίησης $Boolean$ ή αλλίως SAT είναι το πρόβλημα του προσδιορισμού, εάν υπάρχει δηλαδή μια ανάθεση που να ικανοποιεί μια δεδομένη $Boolean$ φόρμουλα. Πιο συγκεκριμένα, ρωτά αν οι μεταβλητές ενός δεδομένου τύπου $Boolean$ μπορούν να αντικατασταθούν με τις τιμές $TRUE$ ή $FALSE$ με τέτοιο τρόπο ώστε η φόρμουλα να πάρει στο τέλος την τιμή $TRUE$. Από την άλλη πλευρά, αν δεν υπάρχει τέτοια αντιστοίχιση τότε η φόρμουλα θα πάρει την τιμή $FALSE$ για όλες τις πιθανές μεταβλητές εκχώρησεις και η φόρμουλα θα είναι μη ικανοποιητική.

Για παράδειγμα η φόρμουλα "a AND NOT b" είναι ικανοποιητική επειδή μπορεί να πάρει τις τιμές $a = TRUE$ και $b = FALSE$ που βγαίνει (a AND NOT b)=$TRUE$. Αντίθετα, το "a AND NOT a" δεν είναι ικανοποιητική.

Γνωρίζουμε ότι το SAT είναι το πρώτο πρόβλημα που αποδείχθηκε ότι είναι $NP-$πλήρες, που σημαίνει ότι όλα τα προβλήματα λήψης απόφασης και βελτισοποίησης είναι εξίσου δύσκολα να λυθούν όπως το SAT.

Υπάρχουν διάφορες ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος SAT, στο οποίο οι προτάσεις πρέπει να έχουν μια συγκεκριμένη δομή. Ακόμα υπάρχουν μεταβλητές που είναι θετικές (x_1) αλλά και αρνητικές ($\neg x_1$).

Μια φόρμουλα είναι σε συνηθισμένη κανονική μορφή (CNF) αν πρόκειται για συνδιασμό ρητρών ή μιας ρήτρας. Για παράδειγμα, x_1 είναι μια θετική μεταβλητή, $\neg x_2$ είναι μια αρνητική μεταβλητη, $x_1 \vee \neg x_2$ είναι μια ρήτρα και $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_1$ είναι μια φόρμουλα σε συνηθισμλενη κανονική μορφή (CNF). Η φόρμουλα αυτή είναι ικανοποιητική εάν επιλέξουμε για $x_1 = FALSE$, $x_2 = FALSE$ και x_3 μια αυθαίρετη τιμή.

Ορισμός 3.1. Η φόρμουλα (F) είναι **μονότονη** όταν κάθε μεταβλητή εμφανίζεται μόνο θετικά(x_1) και όχι αρνητικά($\neg x_1$).

Ορισμός 3.2. Όπως και το πρόβλημα ικανοποίησης για αυθαίρετες φόρμουλες έτσι και ο προσδιορισμός της ικανοποίησης μιας φόρμουλας σε συνηθισμένη κανονική μορφή όπου κάθε ρήτρα θα περιορίζεται σε τρείς μεταβλητές είναι και αυτο με την σειρά του $NP-$πλήρες και ονομάζεται $3-SAT$ ή $3-CNFSAT$.

Το $3-SAT$ είναι ένα από τα 21 $NP-$ πλήρης προβλήματα του $Karp$ και χρησιμοποιείται ως αρχικός ισχυρισμός για να αποδειχθεί ότι άλλα προβλήματα είναι $NP-$δύσκολα.

Μια παραλλαγή του προβλήματος $3-SAT$ είναι το ένα στα τρία $3-SAT$ ($ONE-IN-THREE$ $3SAT$ $problem$). Πιο συγκεκριμένα, με δεδομένη μια συνηθισμένη κανονική μορφή με τρείς λέξεις ανά ρήτρα, το πρόβλημα που υπάρχει είναι να προσδιοριστεί αν υπάρχει μια ανάθεση αληθείας στις μεταβλητές, έτσι ώστε κάθε ρήτρα να έχει ακριβώς μια μεταβλητή $TRUE$ (και επομένως ακριβώς δύο μεταβλητές $FALSE$). Σε αντίθεση με το συνηθισμένο $3-SAT$ το οποίο απαιτεί κάθε ρήτρα να έχει τουλάχιστον μια μεταβλητή $TRUE$.

Θεώρημα 3.1 ([13]). *Για κάθε $g \geq 3$, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες για διμερή επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό κορυφών 3 και με $girth$ (μήκος του μικρότερου κύκλου) τουλάχιστον g.*

Εμείς θα το ανάγουμε από το $1-in-3$ $3SAT$ πρόβλημα: Δοθέντος μια $Boolean$ φόρμουλα F να είναι σε συνηθισμένη κανονική μορφή ($3-CNF$), ρωτάμε εάν υπάρχει κάποια ανάθεση ($TRUE/FALSE$) στις ματαβλητές τέτοια ώστε να ικανοποιούνται όλες οι προτάσεις της F περιέχοντας ακριβώς μια μεταβλητή $TRUE$ σε κάθε ρήτρα. Αυτό το πρόβλημα παραμένει $NP-$πλήρες αν η F είναι μονότονη και το $I(F)$ είναι επίπεδο και διμερές γράφημα [31, 41, 42].

Έστω F είναι μια μονότονη, $3-CNF$ ένα επίπεδο γράφημα με μεταβλητές τα $u_1, ..., u_n$ και προτάσεις $C_1, ..., C_m$ και έστω $I(F) = (V \cup C, E)$ είναι μια περίπτωση γραφήματος. Κατασκευάζω ένα επίπεδο $I(F)$. Για όλα τα $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., m\}$, έστω $a(i,j)$ είναι η θέση των προτάσεων C_j σε σφαιρική διάταξη(κατά την φορά του ρολογιου) όλων των γειτονών του u_i ξεκινώντας με τις προτάσεις που έχουν τον μικρότερο δείκτη ή είναι απροσδιόριστες, εάν το $u_i \notin C_j$.

Εμείς κατασκευάζουμε το μειωμένο γράφημα $G(F)$ τροποποιώντας το $I(F)$. Αντικαθιστούμε κάθε μεταβλητή κορυφής $u_i \in V$ με ένα μονοπάτι P_i με $6m$ κορυφές ορίζοντας το ως εξής:

$$P_i = (\bar{w}_{i,1}, u_{i,1}, \bar{x}_{i,1}, w_{i,1}, \bar{u}_{i,1}, x_{i,1}, ..., \bar{w}_{i,m}, u_{i,m}, \bar{x}_{i,m}, w_{i,m}, \bar{u}_{i,m}, x_{i,m}),$$

και αντικαθιστούμε κάθε ακμή $u_iC_j \in E$ με το μονοπάτι $E_{i,j}$ από $6g+2$ κορυφές ορίζοντας ως εξής:

$$E_{i,j} = (\bar{u}_{i,a(i,j)}, x^1_{i,j}, \bar{w}^1_{i,j}, u^1_{i,j}, \bar{x}^1_{i,j}, w^1_{i,j}, \bar{u}^1_{i,j}, ..., x^g_{i,j}, \bar{w}^g_{i,j}, u^g_{i,j}, \bar{x}^g_{i,j}, w^g_{i,j}, \bar{u}^g_{i,j}, C_j).$$

Από την χρήση του $a(i,j)$, το $G(F)$ παραμένει επίπεδο και από την κατασκευή έχουμε ότι κάθε κορυφή έχει το πολύ 3 γείτονες. Επιπλέον, το $G(F)$ έχει

$girth$ τουλάχιστον g, επειδή τα εισερχόμενα μονοπάτια που αντικατέστησαν τις μεταβλητές είναι άκυκλα και κάθε ακμή του $I(F)$ έχει αντικατασταθεί με μονοπάτι μεγέθους $6g+1$. Τέλος, το $G(F)$ περιέχει διαμέριση κορυφών που είναι ανεξάρτητο σύνολο από την μια και ανεξάρτητο σύνολο κορυφών από την άλλη πλευρά.

Ορίζουμε

$V_i = \{u_{i,j}, \bar{u}_{i,j}, u^k_{i,j}, \bar{u}^k_{i,j} : 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq g\}$

και ανάλογα τα W_i και X_i για όλα τα $i \in \{1, ..., n\}$. Έστω D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο $G(F)$.

Τότε για όλα τα $i \in \{1, ..., n\}$:

είτε $V_i \subseteq D$ είτε $W_i \subseteq D$, (41)

Απόδειξη. Έστω $i \in \{1, ..., n\}$. Η κορυφή $\bar{w}_{i,1}$ έχει μόνο ένα γείτονα τον $u_{i,1}$. Τότε το $\bar{w}_{i,1}$ πρέπει να κυριαρχείται από το D, που σημαίνει είτε το $\bar{w}_{i,1} \in D$ είτε το $u_{i,1} \in D$.

Εάν το $\bar{w}_{i,1} \in D$, τότε το $u_{i,1}, \bar{x}_{i,1} \notin D$, επειδή το D είναι Αποτελεσματικό ($efficient$). Τότε ο μόνος τρόπος να κυριαρχηθεί το $\bar{x}_{i,1}$ είναι το $w_{i,1} \in D$, αφού δεν έχει άλλους γείτονες. Επαναλαμβάνοντας αυτόν τον ισχυρισμό προκύπτει το μονοπάτι P_i: $\bar{w}_{i,2}, w_{i,2}, ..., \bar{w}_{i,m}, w_{i,m} \in D$. Με αυτό έχουμε ότι το $x^1_{i,j} \notin D$. Τότε από παρόμοιο ισχυρισμό παίρνουμε:

$w^1_{i,j}, \bar{w}^2_{i,j}, w^2_{i,j}, ..., \bar{w}^g_{i,j}, w^g_{i,j} \in D$ για όλα τα $j \in \{1, ..., m\}$.

Εάν $u_{i,j} \in D$, τότε το $\bar{x}_{i,1}, w_{i,1} \notin D$ και ο μόνος τρόπος να κυριαρχηθεί το $w_{i,1}$ είναι το $\bar{u}_{i,1} \in D$. Ανάλογα με την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $u_{i,2}, \bar{u}_{i,2}, \therefore, u_{i,m}, \bar{u}_{i,m} \in D$ και

$u^1_{i,j}, \bar{u}^1_{i,j}, ..., u^g_{i,j}, \bar{u}^g_{i,j}, \in D$ για όλα τα $j \in \{1, ..., m\}$. □

Τότε το D είναι Αποτελεσματικό($efficient$), η σχέση (41) υποδηλώνει:

$(X_1 \cup ... \cup X_n) \cap D = \emptyset$ και $\{C_1, ..., C_m\} \cap D = \emptyset$. (42)

Συνεπώς, κάθε μεταβλητή των προτάσεων κυριαρχείται από ακριβώς ένα γειτονά της. Αυτό σημαίνει ότι εάν το $G(F)$ περιέχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D, τότε η F ικανοποιείται από μια ανάθεση αληθείας που ορίζει ένα σύνολο μεταβλητών u_i είναι αληθής αν και μόνο αν το $V_i \in D$.

Από την άλλη κατεύθυνση, έχουμε ότι αν η F ικανοποιείται από μια ανάθεση αληθείας και έστω το D είναι ένα σύνολο που περιέχει όλες τις κορυφές του V_i

για κάθε αληθής μεταβλητή u_i και το W_i περιέχει όλες τις μεταβλητές u_i που είναι ψευδής και τίποτα άλλο. Πιο συγκεκριμένα, το D πραγματοποιείται από τις σχέσεις (41) και (42) και τότε το σύνολο των αληθών αναθέσεων περιέχει ακριβώς μια μεταβλητή αληθείας σε κάθε πρόταση και κάθε μεταβλητή της κάθε πρότασης του $G(F)$ έχει ακριβώς έναν γείτονα στο D. Επομένως, το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο $G(F)$.

Τότε το $G(F)$ μπορεί να κατασκευαστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πολυωνυμικοι Αλγοριθμοι για το Αποτελεσματικο Κυριαρχο Συνολο με Βαρη στις κορυφες: Πρωτα αποτελεσματα

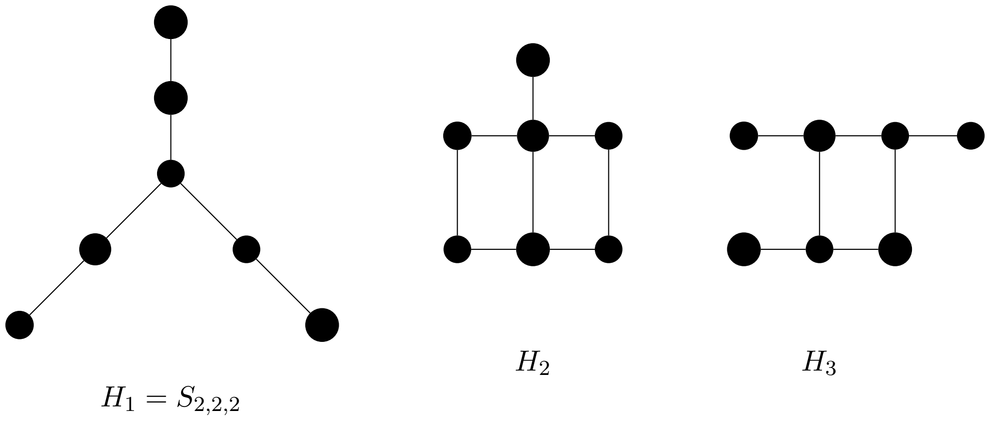
4.1 Εισαγωγικά

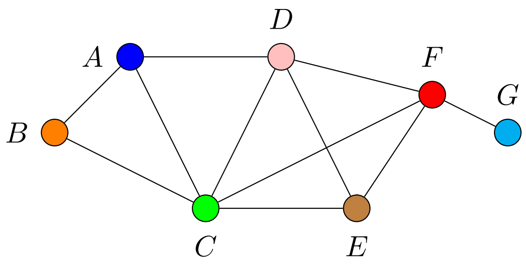
Είναι γνωστό ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο για γραφήματα με διαστήματα μεγάλων διαστάσεων και για convex bipartite graphs (κυρτά διμερή γραφήματα) που είναι υποκλάσεις αυτών και των chordals bipartite graphs [10, 46].

Επιπλέον, ο Lu και ο $Tang$ έδειξαν ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε γραμμικό χρόνο για bipartite permutation graphs (τα οποία είναι υποκλάσεις των convex bipartite graphs). Είναι γνωστό ότι το G είναι bipartite permutation graphs αν και μόνο αν το G είναι $AT - free\ bipartite$ αν και μόνο αν το G είναι $(H_1, H_2, H_3, hole) - free$ διμερές [7, 37, 36]. Όπου το γράφημα $hole$ είναι να υπάρχει κύκλος C_5 και πάνω και τα H_1, H_2 και H_3 είναι τα παρακάτω γραφήματα:

Ορισμός 4.1. Ένα γράφημα **διαστήματος (interval graph)** είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G που σχηματίζεται από μια οικογένεια διαστημάτων S_i, $i = 0, 1, 2, ..,$ δημιουργώντας μια κορυφή v_i για κάθε διάστημα S_i και συνδέοντας δύο κορυφές v_i και v_j με μια άκρη όποτε οι αντίστοιχες δύο διαστήματα έχουν μια μη κενή κονή τομή, δηλαδή, το σύνολο άκρων του G είναι $E(G) = \{\{v_i, v_j\}, S_i \cap Sj \neq \emptyset\}$ και το σύνολο κορυφών είναι $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$.

Έχουμε επτά διαστήματα πάνω στην γραμμή των πραγματικών και το αντίστοι-



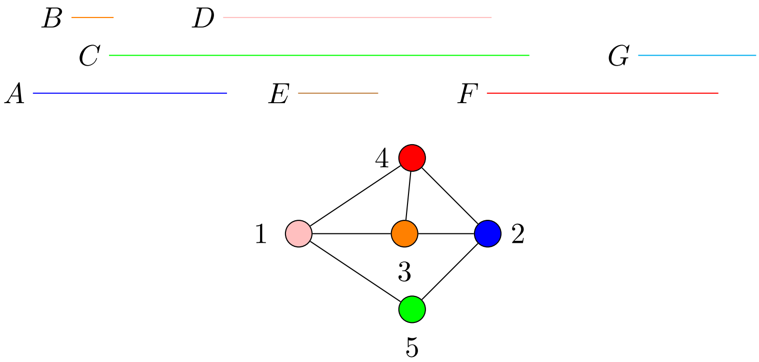


χο γράφημα διαστημάτων με επτά κορυφές

Ορισμός 4.2. Ένα **μεταθετικό γράφημα (permutation graph)** αποτελείται από n σημεία πάνω σε κάθε μία από τις δύο παράλληλες ευθείες και από n ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν ίδια σημεία. Το γράφημα τομής της οικογένειας τέτοιων ευθύγραμμων τμημάτων ονομάζεται μεταθετικό γράφημα.

Ορισμός 4.3. Για ένα γράφημα $G = (V, E)$, **η απόσταση** $dist_G(a, b)$ μεταξύ των κορυφών a, b του G είναι ο αριθμός των ακμών του μικρότερου μονοπατιού μεταξύ του a και του b στο G.

Όπου $dist_G(a, b) = 2$



4.2 Πολυωνυμικός αλγόριθμος σε $P_7 - free$ διμερή γραφήματα και σε σχετικά γραφήματα

Λήμμα 4.1 ([13]). *Εάν το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για $F - free$ γραφήματα τότε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο και για $(P_2 + F) - free$ γραφήματα.*

Αυτό προφανώς συνεπάγεται και για $(P_1 + F) - free$ γραφήματα.

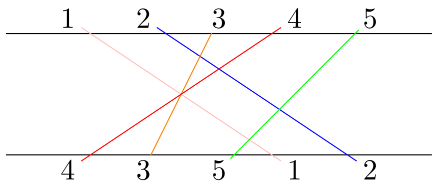
Θεώρημα 4.1 ([13]). *Κάθε συνεκτικό $G = (V, E)$, γράφημα $P_t - free$ περιέχει μια κορυφή $v \in V$ τέτοια ώστε $dist_G(v, u) \leq [t/2]$ για κάθε $u \in V$.*

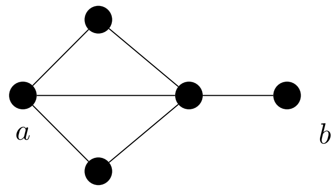
Ορισμός 4.4. Ένας κόμβος $x \in V$ λέγεται **αναγκασμένος** ($forced$) εαν η $x \in D$ για κάθε Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D του G. Ενώ ένας κόμβος x λέγεται **αποκλεισμένος** ($excluded$) εαν $x \notin D$ για κάθε Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D του G. Ωστόσο, υπάρχουν και κόμβοι που δεν είναι ούτε αναγκασμένοι ούτε αποκλεισμένοι. Τώρα, εάν το $x \in D$ για κάποιο D, μας ενδιαφέρει να δούμε ποιους υποχρεώνει και ποιους αποκλείει ο x. Πιο συγκεκριμένα, ένας κόμβος $y \in V$ λέγεται $x-$αποκλεισμένος ($x - excluded$) εάν το $y \notin D$ για κάθε Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D του G που ανήκει και το x. Ενώ ένας κόμβος $y \in D$ λέγεται $x-$αναγκασμένος αν ο $y \in D$ για κάθε D που ανήκει ο y.

Ακόλουθεί σχήμα για να κατανοήσουμε καλύτερα τον ορίσμο.

Σημαντικό είναι σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε διαισθητικά πως λειτουργεί ο αλγόριθμος BFS τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά στην συνέχεια.

Ο αλγόριθμος BFS ξεκινώντας από έναν κόμβο s:





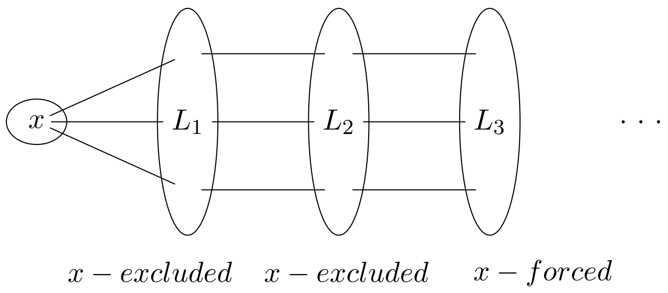
- L_0 =$\{s\}$.
- L_1= όλοι οι γείτονες του L_0.
- L_2= όλοι οι κόμβοι που δεν ανήκουν στο L_0 ή L_1 και έχουν ακμή με ένα κόμβο του L_1. . . .
- L_{i+1}= όλοι οι κόμβοι που δεν ανήκουν σε προηγούμενα επίπεδα και έχουν ακμή με έναν κόμβο του L_i.

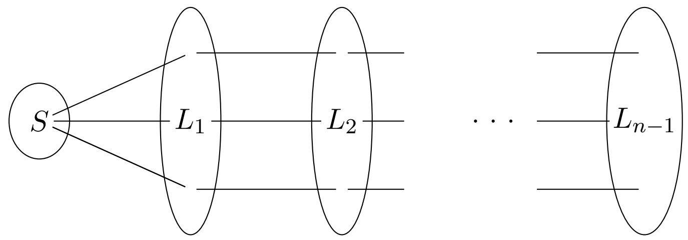
Έτσι όταν λέμε $N_k(v)$ εννοούμε τους γείτονες που είναι σε απόσταση k.

Τα ακόλουθο αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στην εργασία [13].

Θεώρημα 4.2. *Για $P_7 - free$ διμερή γραφήματα, έχουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε χρόνο $O(n^4)$.*

Απόδειξη. Έστω το $G = (V, E)$ να είναι ένα $P_7 - free$ γράφημα. Έστω $N_i(v)$, $i \geq 1$, το οποίο υποδηλώνει την απόσταση των επιπέδων του v στο G τέτοιο ώστε το G να είναι διμερές και το $N_i(v)$ να είναι ανεξάρτητο για κάθε $i \geq 1$. Από το θεώρημα 4.1, βλέπουμε ότι υπάρχει μια κορυφή v της οποίας η απόσταση των επιπέδων $N_k(v)$, $k \geq 5$ είναι κενή, αυτό προκύπτει από την σχέση: $dist_G(v, u) \leq [t/2]$ όπου εδώ το $t = 7$ και άρα η μεγαλύτερη απόσταση δύο κάμβων είναι $t/2 = 7/2 = 3.5 \rightarrow 4$ και επομένως φτάνει μέχρι το επίπεδο 4. Οι κορυφές του επιπέδου 4 δεν έχουν γείτονες στο επίπεδο 5, επομένως τα επίπεδα 5 και πάνω είναι κενά. Επιπλέον, για κάθε Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D στο G έχουμε ότι είτε το $v \in D$ είτε υπάρχει ένας γείτονας w του v τέτοιος ώστε $w \in D$. Έτσι, το G είναι $P_7 - free$ και το $N_k(v) = \emptyset$ για κάθε $k \geq 5$.





Έτσι, μπορούμε να ελέγχουμε κάθε κορυφή $v \in V$ αν είναι μέρος ενός συνόλου Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D του G. Πιο συγκεκριμένα, για $v \in D$ έχουμε ότι $D \cap (N_1(v) \cup N_2(v)) = \emptyset$.

Εάν για $x \in N_3$ και $N(x) \cap N_4(v) = \emptyset$ τότε η κορυφή x είναι $v-$αναγκασμένη, δηλαδή θα ανήκει στο D αφού ανήκει και το v, διαφορετικά το $x \in N_3(x)$ θα έχει γείτονες στο επίπεδο 4 και θα ισχύει $N(x) \cap N_4(v) \neq \emptyset$. Εάν τώρα υπάρχουν δύο κορυφές $x_1, x_2 \in N_3(v) \cap D$ τότε το G μπορεί να περιέχει P_6, διότι σε αυτά τα τρία επίπεδα υπάρχει μονοπάτι P_7 και αφού υπάρχει το επίπεδο 4 τότε σίγουρα θα υπάρχει γειτονάς του στο επίπεδο 3. Με αποτέλεσμα να έχουμε P_6 και μια ακόμη ακμή που ενώνει το επίπεδο 4 με το 3, άρα φτιάχνεται P_7. Έτσι έπειτα από αναγωγή προκύπτει ότι το $|D \cap N_3(v)| = 1$ και έστω ότι είναι το $d_1 \in N_3(v) \cap D$. Τότε ξανά το $N_5(v) = \emptyset$ για κάθε $x \in N_4(v)/\ N(d_1)$ είναι $(v, d_1)-$αναγκασμένη. Τότε έχουμε δείξει ότι το G είναι ένα $P_7 - free$ γράφημα και αν του προσθέσουμε βάρη στις κορυφές θα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Το οποίο προκύπτει από τον παρακάτω αλγόριθμο δοκιμάζοντας κάθε κορυφή ως ρίζα του BSF, θα χρειαστούμε n επαναλήψεις του αλγόριθμου που θα περιγράψουμε παρακάτω.

Ο αλγόριθμος που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ο εξής:

1. Βρίσκουμε ρίζα x του BSF.

2. Για κάθε $v \in N[x]$, ελέγχουμε αν υπάρχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D του G με $v \in D$, ως εξής:

   (α΄) Προσθέτω όλες τις κορυφές του $y \in N_3$ με $N(y) \cap N_4 = \emptyset$ του D και μειώνω το G αντίστοιχα. Εάν το D έχει μια αντίφαση στις ιδιότητες του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο τότε το $v \notin D$.

   (β΄) Για κάθε μειωμένο γράφημα G ελέγχουμε κάθε μια κορυφή $z \in N_3$ με $N(z) \cap N_4 \neq \emptyset$ αν το $D \cup \{z\} \cup N_4 \backslash N(z)$ είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο.

Ο χρόνος που χρειάζεται αυτός ο αλγόριθμος είναι $O(n^4)$. □

Τα ακόλουθο αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στην εργασία [13].

Θεώρημα 4.3. *Για $kP_3 - free$ διμερή γραφήματα, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για κάθε καθορισμένο $k \geq 2$.*

Απόδειξη. Έστω το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G. Εμείς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μια κορυφή $v \in D$ με $deg(v) \geq 2$: εάν για όλα τα $v \in D$ με $deg(v) = 1$ μπορούμε να ελένξουμε αν το σύνολο των φύλλων του G σχηματίζει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο. Από ιδιότητα της αποσύνδεσης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δύο φύλλα δεν έχουν τον ίδιο γείτονα στο G. Έστω ότι έχουν τον ίδιο γείτονα, δηλαδή $a_1, a_2 \in N(v)$ τότε επειδή το G είναι διμερές, τα a_1, v, a_2 θα επάγουν P_3 στο G.

Τώρα για $k = 2$, προκείπτει από το προηγούμενο Θεώρημα 4.1 ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται πολυωνυμικά όταν δεν υπάρχει P_7 και επομένως δεν υπάρχει και $2P3$. Άρα το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται πολυωνυμικά σε $2P_3 - free$.

Για το επόμενο βήμα, έστω $k = 3$ και έστω ξανά το N_i, $i \geq 1$, να είναι τα επίπεδα αποστάσεων του v. Τότε προφανώς το $N_{10} = \emptyset$, διότι διαφορετικά θα υπήρχε ένα $3P_3$ στο G. Από την απόδειξητο Θεωρήματος 4.1 προκύπτει ότι αν το $x \in N_3$ με $N(x) \cap N_4(v) \neq \emptyset$ τότε η κορυφή x είναι $v-$αναγκασμένη. Έτσι μειώνουμε το γράφημα G σβήνοντας αυτές τις κορυφές και εξετάζοντας τις κορυφές $x \in N_3$ με $N(x) \cap N_4(v) \neq \emptyset$.

Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι $|D \cap N_3| \leq 2$ διότι διαφορετικά αν υπήρχαν $d_1, d_2, d_3 \in D \cap N_3$ τότε για τους γείτονες του $x_i \in N_2$ και $y_i \in N_4$ του d_i όπου $i = 1, 2, 3$ έχουμε ότι το $d_1, d_2, d_3, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ επάγουν ένα $3P_3$ στο G.

Μετά την μείωση του G έχουμε ότι τα $v, d_1, d_2 \in D$ και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε κορυφή $w \in N_4$ η οποία δεν είναι γειτονική με τα d_1, d_2 τότε θα αναγκάζεται και θα ανήκει στο D. Τότε συμπεραίνουμε ότι για κάθε κορυφή $w \in N_4$ θα ισχύει $N(w) \cap N_5 \neq \emptyset$.

Το επόμενο που μπορούμε να ισχυριστούμε είναι ότι το $|D \cap N_4| \leq 1$, διαφορετικά αν υπάρχουν $w_1, w_2 \in D \cap N_4$ τότε για κάθε γείτονα του $x_i \in N_3$ και $y_i \in N_5$ του w_i όπου $i = 1, 2$ έχουμε ότι το $w_1, w_2, x_1, x_2, y_1, y_2, v, a_1, a_2$ επάγουν ένα $3P_3$ στο G.

Με την ίδια λογική ισχύει για τα $D \cap N_i$, $5 \leq i \leq 9$. Τότε το D περιέχει το πολύ 9 κορυφές οι οποίες δεν αναγκάζονται από την v και έτσι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Για κάθε καθορισμένο $k \geq 4$ ισχύουν τα ίδια και έτσι πάλι οδηγούμαστε σε πολυωνυμικό χρόνο του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη.

Ο χρόνος που χρειαζόμαστε για να λύσουμε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη είναι πολυωνυμικός, διότι αρκεί να διαλέξουμε από τις n κορυφές τις 9. Άρα χρειαζόμαστε $O(n^9)$. □

Εάν ο βαθμός όλων των κορυφών είναι το πολύ 3 τότε μπορούμε να δείξουμε το εξής από εργασία [13]:

Θεώρημα 4.4. *Για $P_9 - free$ διμερή γραφήματα με βαθμό κορυφών το πολύ 3, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε ένα γράφημα $G = (V, E)$ που να είναι $P_9 - free$ διμερές με βαθμό κορυφών το πολύ 3. Από το Θεώρημα 4.1 και από την ιδιότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο έχουμε ότι εαν ελέγξουμε κάθε κορυφή $v \in V$ είναι μέρος του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη του G και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η απόσταση των επιπέδων $N_k(v)$ για $k \geq 6$ θα είναι κενή. Παίρνοντας έναν κόμβο $x \in N_3$ με $N(x) \cap N_4 = \emptyset$ βλέπουμε ότι είναι $v-$αναγκασμένη, δηλαδή ότι ανήκει στο D και επομένως καταλήγουμε ότι για κάθε $x \in N_3$ έχεο γείτονα στο N_4, διαφορετικά θα ανήκει στο D. Πρώτα θα δείξουμε ότι:

Ισχυρισμός 4.4.1. $|D \cap N_3| \leq 2$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή $|D \cap N_3| \geq 3$. Έστω $y_1, y_2, y_3 \in D \cap N_3$ και έστω z_i με $i = 1, 2, 3$ είναι οι γείτονες του y_i στο N_4 και έστω x_i με $i = 1, 2, 3$ οι γείτονες του y_i στο N_2. Όμως τα $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ επάγουν ένα $3P_3$ στο G. Έστω $u_i \in N_1$, με $i = 1, 2, 3$ είναι ο κοινός γείτονας του u και των x_i. Τότε τα $z_1, y_1, x_1, u_1, u, u_2, x_2, y_2, z_2$ δεν επάγουν ένα P_9 στο G, διότι έχουμε τις ακμές $u_1x_2 \in E$ ή $u_2x_1 \in E$ και ανάλογα έχουμε $u_1x_3 \in E$ ή $u_3x_1 \in E$ και $u_2x_3 \in E$ ή $u_3x_2 \in E$.

Εάν το $u_1x_2 \in E$ και $u_2x_1 \in E$ τότε οι βαθμοί των κορυφών u_1, u_2, x_1, x_2 είναι 3 και παίρνουμε ένα P_9 που αντιβαίνει στην υπόθεση. Έτσι ακριβώς ένα από τα u_1x_2, u_2x_1 έχουν ακμή και ανάλογα για τα $u_1x_3, u_3x_1, u_2x_3, u_3x_2$. Συμπαιρένουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το $u_1x_2 \in E$. Τότε από την υπόθεση ότι κάθε κορυφή πρέπει να έχει βαθμό το πολύ 3 συμπεραίνουμε ότι το $x_2u_3 \notin E$ και άρα το $u_2x_3 \in E$ και ανάλογα το $u_1x_3 \notin E$ και έτσι το $x_1u_3 \in E$. Αλλά τώρα τα $z_1, y_1, x_1, u_1, u, u_2, x_3, y_3, z_3$ επάγουν ένα P_9 στο G, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση. Έτσι έχουμε ότι $|D \cap N_3| \leq 2$. $\diamondsuit$

Έτσι για κάθε ζευγάρι $y_1, y_2 \in N_3$ μπορούμε να ελέγξουμε αν υπάρχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη, D του G με $u, y_1, y_2 \in D$, μειώνοντας το γράφημα.Έστω $N_4' := N_4 \setminus (N(y_1) \cup N(y_2))$. Ξανά καταλήγουμε στο ότι όλες οι κορυφές του N_4' έχουν γείτονα στο N_5 διότι διαφορετικά θα άνηκαν στο D αφού θα αναγκάζονταν από τις $u, y_1, y_2 \in D$. Χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιήσαμε στον 4.4.1 μπορούμε να δείξουμε και αυτό $|D \cap N_4| \leq 2$ και τελικά για τις κορυφές $z_1, z_2 \in N_4' \cap D$, με $N_5 \setminus (N(z_1) \cup N(z_2)) \subset D$ δηλαδή και αυτές είναι αναγκασμένες να ανήκουν στο D, αφού δεν έχουν άλλο γείτονα που να ανήκει στο D (το επίπεδο N_6 είναι κενό). Έτσι το θεώρημα αυτό αποδείχτηκε. $\square$

4.3 Πολυωνυμικός αλγόριθμος σε $S_{1,2,3}-free$ διμερή γραφήματα και σε γενικές περιπτώσεις

.

Το $clique-width$ (πλάτος της κλίκας) ενός γραφήματος G είναι μια παράμετρος που περιγράφει την δομική πολυπλοκότητα του G και είναι στενά συνδεδεμένη με το $tree-width$ (δεντρο-πλάτος). Με την διαφορά ότι το πλάτος της κλίκας μπορεί να οριοθετηθεί ακόμη και για πυκνά γραφήματα [19, 29]. Πιο συγκεκριμένα ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός ετικετών που απαιτούνται για την κατασκευή του G με τις ακόλουθες 4 λειτουργίες:

1. Δημιουργία νέας κορυφής v με ετικέτα i (σημειώνουμε $i(v)$).

2. Διασυνδεδεμένη ένωση δύο γραφημάτων G και H (σημειώνουμε $G \bigoplus H$).

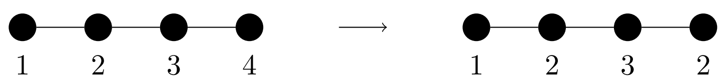
3. Ενώνουμε με ακμή κάθε κορυφή i με κάθε κορυφή j (σημειωνοντάς την με $h(i, j)$ όπου $i \neq j$).

4. Μετονομάζουμε την ετικέτα i σε ετικέτα j(σημειώνουμε $r(i, j)$).

Κάθε γράφημα με n κορυφές μπορεί να κατασκευαστεί με "n" επιγραφές. Βέβαια εμείς θέλουμε τον μικρότερο τέτοιο αριθμό.

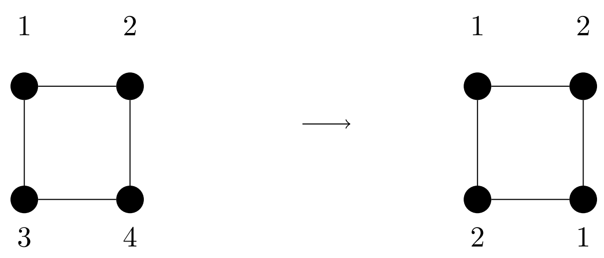
Για παράδειγμα:

P_4



$clique - width = 3$

C_4



$clique - width = 2$

Υπευνθυμίζουμε ότι το πλάτος της κλίκας σε $S_{1,2,3} - free$ διμερή γραφήματα είναι περιορισμένο ενώ σε $S_{1,2,4} - free$ διμερή γραφήματα είναι απεριόριστο.

Ας γενικεύσουμε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη για $P_7 - free$ διμερή γραφήματα.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στην εργασία [13].

Θεώρημα 4.5. *Για $S_{1,2,4} - free$ διμερή γραφήματα, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό θα δείξουμε πρώτα μερικούς ισχυρισμούς.

Έστω $G = (V, E)$ ένα $S_{1,2,4} - free$ διμερή γράφημα και θα καταλήξουμε ότι το G έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D με κορυφή $v \in V$. Έστω N_i, $i \geq 1$ να είναι τα επίπεδα αποστάσεων του v. Τότε κάθε κορυφή $y \in N_3$ με $N(y) \cap N_4 = \emptyset$ είναι μια $v-$αναγκασμένη που σημαίνει ότι ανήκει στο D. Διαφορετικά θα έχει γείτονα στο N_4 και θα ισχύει ότι για κάθε $y \in N_3$, έχουμε $N(y) \cap N_4 \neq \emptyset$. Πράγμα που θα ισχύει από εδώ και πέρα.

Λήμμα 4.2 ([13])**.** *Εάν* $|D \cap N_3| \geq 3$ *τότε* $N_6 = \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω $y_1, y_2, y_3 \in D \cap N_3$ είναι τρείς κορυφές και έστω $x_i \in N(y_i) \cap N_2$, $z_i \in N(y_i) \cap N_4$ με $i = 1, 2, 3$. Οι κορυφές y_1, y_2, y_3 είναι οι γείτονες του N_2 και N_4 οι οποίες επάγουν ένα $3P_3$. Πρώτα, θα ισχυριστούμε ότι υπάρχει κοινός γείτονας των x_1, x_2, x_3 στο N_1:

Αρχικά καταλήγουμε ότι το $w_1 \in N_1 \cap N(x_1)$ δεν γειτονεύει ούτε με το x_2 ούτε με το x_3. Εάν υπήρχε κοινός γείτονας ο $w_2 \in N_1 \cap (N(x_2) \cup N(x_3))$ τέτοιος ώστε $w_2x_1 \notin E$ τότε τα $w_2, x_2, x_3, y_3, v, w_1, x_1, y_1$ (με κέντρο το w_2) θα επάγουν $S_{1,2,4}$. Έτσι, δεν υπάρχει κοινός γείτονας και έστω $w_2 \in N_1 \cap N(x_2)$ και $w_3 \in N_1 \cap N(x_3)$ τέτοιο ώστε $w_2x_3 \notin E$ και $w_3x_2 \notin E$. Έτσι, το $w_2x_1 \notin E$ και ανάλογα το $w_3x_1 \notin E$ αλλά τότε τα $v, w_3, w_2, x_2, w_1, x_1, y_1, z_1$ (με κέντρο το v) επάγουν $S_{1,2,4}$.

Έτσι, κάθε $w_1 \in N_1 \cap N(x_1)$ γειτονεύει ή με το x_2 ή με το x_3. Εάν χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε $w_1x_2 \in E$ και $w_1x_3 \notin E$ τότε υπάρχει ένας γείτονας το $w_3 \in N_1 \cap N(x_3)$. Εαν $w_3x_1 \notin E$ και $w_3x_2 \notin E$ τότε υπάρχει ένα $S_{1,2,4}$ στο G. Εάν χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε ότι $w_3x_1 \notin E$ και $w_3x_2 \in E$ τότε τα $x_2, w_1, y_2, z_2, w_3, x_3, y_3, z_3$ (με κέντρο το x_2) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$.

Έτσι, το w_3 είναι ο κοινός γείτονας των x_1, x_2, x_3 στο N_1, διότι διαφορετικά θα υπήρχε $S_{1,2,4}$.

Τώρα έστω $r \in N_6$ και έστω $s \in N_5$ είναι ένας γείτονας του r.

Εάν το $sz_1 \in E$ τότε $w_3, v, x_2, y_2, x_1, y_1, z_1, s$ (με κέντρο το w_3) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ και ανάλογα για το $sx_2 \in E$ ή για το $sz_3 \in E$. Τότε, έστω $t \in N_4 \cap N(v)$ να είναι γείτονας του s διαφορετικά από τα z_1, z_2, z_3.

Εάν $ty_1 \in E$ τότε από την ιδιότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο έχουμε ότι το $y_1, z_1, t, s, x_1, w, x_2, y_2$ (με κέντρο το y_1) επάγουνι ένα $S_{1,2,4}$ και ανάλογα ισχύει για το $ty_2 \in E$ ή το $ty_3 \in E$. Έτσι, έστω $u \in N_3$, $u \neq y_i$, με $i = 1, 2, 3$ είναι ένας γείτονας του t στο N_3.

Εάν $ux_1 \in E$ τότε τα $x_1, y_1, w, v, u, t, s, r$ (με κέντρο το x_1) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$

και ανάλογα ισχύει για το $ux_2 \in E$ ή το $ux_3 \in E$. Έτσι, έστω $q \in N_2$, $q \neq x_i$, με $i = 1, 2, 3$ είναι ένας γείτονας του u στο N_2.

Εάν $qw \in E$ τότε από την ιδιότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο έχουμε ότι το q δεν γειτονεύει με δύο από τις κορυφές y_1, y_2, y_3, διότι διαφορετικά αντιβαίνει στον ορισμό του κυρίαρχου συνόλου. Έτσι, έχουμε ότι $qy_2 \notin E$ και $qy_3 \notin E$, αλλά τότε τα $w, v, x_3, y_3, q, u, t, s$ (με κέντρο το w) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$. Επομένως, το $qw \notin E$ και έστω $p \in N_1$, $p \neq w$ είναι ένας γείτονας του q στο N_1. Οπότε το $qy_2 \notin E$ και $qy_3 \notin E$, διότι διαφορετικά θα σχημάτιζαν ένα $S_{1,2,4}$.

Εάν το $px_2 \notin E$ και $px_3 \notin E$ τότε τα $w, x_2, x_3, y_3, v, p, q, u$ (με κέντρο το w) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$.

Εάν το $px_2 \notin E$ και $px_3 \in E$ τότε τα $x_3, y_3, w, x_2, p, q, u, t$ (με κέντρο το x_3) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ όμοια και για το εάν ισχύουν $px_2 \in E$ και $px_3 \notin E$.

Έτσι, τα $px_2 \in E$ και $px_3 \in E$. Αλλά τότε τα $p, x_2, x_3, y_3, q, u, t, s$ (με κέντρο το p) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, το οποίο είναι άτοπο.

Έτσι καταλήγουμε στο ότι το N_6 είναι κενό, διότι διαφορετικά θα σχηματιζόταν ένα $S_{1,2,4}$. □

Παρατήρηση 4.1. *Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα $S_{1,2,4} - free$ διμερές γράφημα. Ελέγχουμε για κάθε $v \in V$ όπου v είναι μέρος από το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D του G. Έστω N_i, $i \geq 1$, να είναι τα επίπεδα αποστάσεων του v στο G, τότε το G είναι διμερές και κάθε N_i είναι ανεξάρτητα σύνολα.*

Ισχυρισμός 4.5.1. *: Για $k \leq 5$, κάθε κορυφή του N_k έχει το πολύ έναν γείτονα στο N_{k+1}.*

Απόδειξη: Έστω το $u_k \in N_k$, για $k \leq 5$ και έστω $v, u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u_k$ είναι το συντομότερο μονοπάτι από το u στο u_k, όπου $u_i \in N_i$ για $i = 1, 2, ..., k$. Υποθέτουμε το αντίθετο ότι δηλαδή το u_k έχει δύο γείτονες τον q_1, q_2 στο N_{k+1}. Όμως επειδή το G είναι πρωταρχικό, θα υπάρχει και μια κορυφή $y \in N_k \cup N_{k+2}$ διαφορετική από τα q_1, q_2 τέτοια ώστε $yq_1 \in E$ και $yq_2 \notin E$. Εάν $y \in N_{k+2}$ τότε το επαγόμενο υπογράφημα των $v, u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u_k, q_1, q_2, y$ περιέχει ένα $S_{1,2,4}$. Εάν το $y \in N_k$ και τότε εάν το $yu_{k-1} \notin E$ τότε το επαγόμενο υπογράφημα των $v, u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u_k, q_1, q_2, y$ περιέχει ένα $S_{1,2,4}$, εάν το $yu_{k-1} \in E$ τότε το επαγόμενο υπογράφημα των $v, u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u_k, q_2, y$ περιέχει ένα $S_{1,2,4}$. Οπότε δείξαμε ότι το N_k έχει το πολύ ένα γείτονα στο N_{k+1} διότι διαφορετικά θα περιέχει $S_{1,2,4}$. ♢

Ισχυρισμός 4.5.2. *Εάν τα $a, b \in N_k$ με $a \neq b$ να μην κυριαρχούνται από κάποια $D-$κορυφή του N_{k-1}, $N(a) \cap N(b) \cap N_{k+1} = \{y\}$ και καμία κορυφή στο*

N_{k+1} δεν ξεχωρίζει τις κορυφές a και b τότε το y είναι $v-$αναγκασμένη.

Απόδειξη: Εάν χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε ότι το $a \in D$ τότε από την ιδιότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο σημαίνει ότι το $y \notin D$, διότι διαφορετικά δεν ισχύει ο ορισμός του κυρίαρχου. Τότε το b δεν κυριαρχείται από κάποια κορυφή αφού και στο N_{k-1} δεν υπάρχει κάποια $D-$κορυφή και το y είναι ο μόνος γείτονας στο N_{k+1}. Έτσι, το b δεν κυριαρχείται από κάποια κορυφή. Όμοια ισχύουν και για το αν $b \in D$, το a δεν θα κυριαρχούνταιν. Άρα καταλήγουμε ότι το y είναι $v-$αναγκασμένη. $\diamondsuit$

Έπειτα από αυτά το G είναι ένα γράφημα που μειώνεται σύμφωνα με τις $v-$ αναγκασμένες κορυφές και συμπεραίνουμε ότι:

Ισχυρισμός 4.5.3. *Εάν το $a, b \in N_k$ με $a \neq b$ να μην κυριαρχούνται από κάποια $D-$κορυφή του N_{k-1} και $|N(a) \cap N(b) \cap N_{k+1}| = 1$ τότε υπάρχει μια κορυφή στο N_{k+1} που ξεχωρίζει τις κορυφές a και b.*

Πιο συγκεκριμένα, $D \cap (N_1 \cap N_2) = \emptyset$, δηλαδή δεν υπάρχει κυρίαρχη κορυφή στα επίπεδα N_1 και N_2. Έτσι κάθε κορυφή του N_2 κυριαρχείται από κάποια κορυφή του N_3. Επίσης κάθε κορυφή του N_3, έστω $x \in N_3$ έχει γείτονα στο N_4, διότι διαφορετικά το x θα ήταν $v-$αναγκασμένη.

Τότε ας κατασκευάσουμε το γράφημα $H = (N_3, E')$ τέτοιο ώστε για κάθε $a, b \in N_3$ να έχουμε $(a, b) \in E'$ αν και μόνο αν $(N_2 \cup N_4) \cap N(a) \cap N(b) \neq \emptyset$, δηλαδή όταν οι κορυφές a και b έχουν κοινό γείτονα τότε υπάρχει ακμή αναμεσά τους στο H.

Παρατήρηση 4.2. *Από τον ορισμό του H και από την ιδιότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο έχουμε ότι κάθε μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του H, που το ονομάζουμε S, το οποίο έχει την ιδιότητα ότι $\{N_2 \cap N(s) : s \in S\}$ είναι μια διαμέριση του N_2, είναι ένας υποψήφιος (candidate) του N_3 για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με v και δεν υπάρχει άλλος υποψήφιος στο N_3 για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο , D με $v \in D$.*

Ισχυρισμός 4.5.4. *Για κάθε $c \in N_3 \cap D$, με $N_3 \setminus N_{H(c)}$ είναι $P_2 - free$ στο H.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι δηλαδή υπάρχει κόμβος $c \in N_3 \cap D$, επίσης υπάρχει στο H ακμή ανάμεσα από το a και b, όπου οι κορυφές a και b δεν ανήκουν στις κορυφές N_3 $N_H(c)$, δηλαδή ισχύει $(N_2 \cup N_4) \cap N(a) \cap N(b) \neq \emptyset$. Τότε έστω $c' \in N_2$ και $c'' \in N_4$ να είναι δύο γείτονες του c και ισχύει ότι $c \in N_3 \cap D$ δεν είναι $v-$αναγκασμένη διότι διαφορετικά θα ήταν φύλλο, το οποίο

δεν ισχύει αφού έχει γείτονα στο N_4. Επιπλέον, το c' και c'' δεν ενώνονται με τα a και b αφού αν ενωνόνταν θα πρέπει να είχαμε ακμή στο H μεταξύ των κόμβων a, b και c.
Ας εξετάσουμε αναλυτικά τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $N_2 \cap N(a) \cap N(b) = \emptyset$.

Τότε υπάρχει κόμβος $z \in N_4$ ο οποίος είναι ο κοινός γείτονας του a και του b και έστω $a' \in N_2$ να είναι ο γείτονας του a' και $b' \in N_2$ να είναι ο γείτονας του b' και $w \in N_1$. Οπότε εύκολα συμπαιρένουμε ότι $a'b \notin E$ και $ab' \notin E$ (από την υπόθεση που κάναμε στην αρχή).

Τότε τα w, v, c', c, a', a, z, b (με κέντρο το w) δεν επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, όμως $wc' \notin E$ και γενκά το a' και το c' δεν πρέπει να έχουν κοινό γείτονα στο N_1. Έτσι, βάζουμε το $w' \in N_1$ να είναι γείτονας του c' και επίσης έχουμε $w'a' \notin E$, αφού το G είναι ένα πρωταρχικό γράφημα. Στην συνέχεια παίρνουμε υποπεριπτώσεις:

Περίπτωση 1.1: Υπάρχει ένας κόμβος $y \in N_4$ που ξεχωρίζει τους κόμβους a και b, δηλαδή $ay \in E$ και $by \notin E$. Τότε τα a, y, z, b, a', w, v, w' (με κέντρο το a) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ το οποίο είναι άτοπο.Έτσι η υποπερίπτωση αυτή απορρίπτεται.

Περίπτωση 1.2: Κανένας κόμβος του N_4 δεν ξεχωρίζει τους κόμβους a και b.

Τότε από τον Ισχυρισμούς 4.5.2 και 4.5.3 καταλήγουμε στο ότι $|N_4 \cap N(a) \cap N(b)| \geq 2$ και επειδή το G είναι πρωταρχικό γράφημα, τότε υπάρχει ένας κόμβος $z \in N_3 \cap N_5$ που ξεχωρίζει τις δύο κορυφές και έστω $q_1, q_2 \in N_4 \cap N(a) \cap N(b)$. Καταλήγουμε ότι $zq_1 \in E$ και $zq_2 \notin E$.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $z \in N_5$. Υπενθυμίζουμε ότι $w'a' \notin E$. Τότε τα $a, q_2, q_1, z, a', w, v, w'$ (με κέντρο το a) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ το οποίο είναι άτοπο. Έτσι καταλήγουμε ότι το $z \notin N_5$ και έστω τώρα ότι το $z \in N_3$.

Τότε τα $a, q_2, q_1, z, a', w, v, w'$ (με κέντρο το a) δεν επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, διότι υπάρχει κύκλος στο μονοπάτι αφού έχουμε το $za' \in E$.

Τότε τα $c', c, w', v, z, q_1, a, q_2$ (με κέντρο το c') δεν επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ διότι έχουμε $zc' \in E$. Αλλά τώρα παρατηρούμε ότι τα $a', z, a, q_2, w, v, w', c'$ (με κέντρο το a') επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ το οποίο είναι άτοπο. Έτσι καταλήγουμε ότι η υποπερίπτωση 1.2 είναι αδύνατη.

Περίπτωση 2: $N_2 \cap N(a) \cap N(b) \neq \emptyset$.
Έστω $a' \in N_2$ είναι ο κοινός γείτονας του a και του b και έστω $w \in N_1 \cap N(a')$. Παίρνουμε τις υποπεριπτώσεις:

Περίπτωση 2.1: Υπάρχει μια κορυφή $y \in N_4$ που ξεχωρίζει τα a και b, δηλαδή ισχύει $ay \in E$ και $by \notin E$. Τότε τα $a', b, a, y, w, c', c, c''$ (με κέντρο το a') δεν επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, διότι έχουμε ότι $wc' \notin E$. Έστω $w' \in N_1 \cap N(c')$, δηλαδή $w'a' \notin E$. Τότε τα $a', b, a, y, w, v, w', c'$ (με κέντρο το a') επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ το οποίο πάλι είναι άτοπο. Άρα η υποπερίπτωση 2.1 είναι αδύνατη.

Περίπτωση 2.2: Κανένας κόμβος του N_4 δεν ξεχωρίζει τα a και b.

Τότε από τους Ισχυρισμούς 4.5.2 και 4.5.3 συμπαιρένουμε ότι $|N_4 \cap N(a) \cap N(b)| \geq 2$ και αφού το G είναι ένα πρωταρχικό γράφημα και υπάρχει μια κορυφή $z \in N_3 \cup N_5$ που ξεχωρίζει τις δύο κορυφές, που τις ονομάζουμε $q_1, q_2 \in N_4 \cap N(a) \cap N(b)$ και καταλήγουμε στο εξής: $zq_1 \in E$ και $zq_2 \notin E$.
Κάνοντας τώρα μια ανακεφαλαίωση τα παραπάνω έχουμε:
Πρώτα υποθέσαμε ότι το $z \in N_5$.

Είδαμε ότι τα $w, v, c', c, a', a, q_1, z$ (με κέντρο το w) δεν επάγουν $S_{1,2,4}$, διότι το $wc' \notin E$. Υποθέσαμε ότι $w' \in N_1 \cap N(c')$, δηλαδή ότι $w'a' \notin E$. Αλλά τότε τα $a, q_2, q_1, z, a', w, v, w'$ (με κέντρο το a) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, το οποίο είναι άτοπο. Οπότε καταλήξαμε ότι το $z \notin E$ και ότι το $z \in N_3$.

Αρχικά ισχυριστήκαμε ότι τι $zc' \notin E$, διότι διαφορετικά εάν $zc' \in E$ τότε ο γείτονας του c' ο $w' \in N_1$ (και πιθανόν αφού ο $c'w \in E$ τότε το $w' = w$) τότε θα είχαμε ότι τα $c', c, w', v, z, q_1, a, q_2$ επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ το οποίο είναι άτοπο, άρα $zx' \notin E$.

Έπειτα ισχυριστήκαμε ότι $za' \in E$, διότι διαφορετικά εάν $za' \notin E$ και αν το $c'w \in E$ τα $a, q_2, q_1, z, a', w, c', c$ (με κέντρο το a) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ και διαφορετικά αν το $c'w \notin E$ τότε το $c'w' \in E$ για κάποιο $w' \in N_1$ τα $a, q_2, q_1, z, a', w, v, w'$ (με κέντρο το a) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $za' \in E$.

Στην συνέχεια υποθέσαμε ότι το $zc'' \in E$, διότι διαφορετικά αν το $zc'' \notin E$ και αν τώρα το $c'w \in E$ τα $a', z, a, q_2, w, c', c, c''$ (με κέντρο το a') επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, ενώ αν το $c'w' \notin E$ και έτσι το $c'w' \in E$ για κάποιο $w' \in N_1$ τα $a\, z, a, q_2, w, v, w', c'$ (με κέντρο το a') επάγουν ένα $S_{1,2,4}$. Άρα το $zc'' \in E$.

Τέλος, ισχυριστήκαμε ότι $wc' \in E$, διότι διαφορετικά εάν το $wc' \notin E$ τότε τα $a', w, a, q_2, z, c'', c, c'$ (με κέντρο το a') επάγουν ένα $S_{1,2,4}$. Άρα το $wc' \in E$.

Τώρα, το $c \in D$ και $zc'' \in E$ τότε το $z \notin E$ διότι διαφορετικά το c'' θα κυριαρχούνται από δύο κορυφές το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, υπάρχει μια $D-$κορυφή στο N_3 που περιορίζεται από το z και η οποία κυριαρχεί την κορυφή a' και ακόμη υπάρχει μια $D-$κορυφή στο N_4 η οποία κυριαρχεί την z.

Πιο συγκεκριμένα, η $c'' \notin D$, αφού υπάρχει ακμή με την c, η οποία είναι και κυρίαρχει.Εάν το $q_1 \in D$ τότε τα $a, b \notin D$, αφού υπάρχει ακμή μεταξύ τους και έτσι υπάρχει μια κορυφή $d' \in D \cap N_3$ με $d'a' \in E$. Τα $c'w \in E$ αλλά τότε τα $a', d', a, q_1, w, c', c, c''$ (με κέντρο το a') επάγουν ένα $S_{1,2,4}$.

Έτσι, το $q_1 \notin E$ το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει κορυφή $d \in N_4 \cap D$ με $zd \in E$ και $d \neq c'', q_1$.

Εάν το $a \in D$ τότε τα $z, d, q_1, a, c'', c, c', w$ (με κέντρο το z) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$. Έτσι τα $a \notin D$ και $b \notin D$.

Οπότε υπάρχει μια κορυφή $d' \in D \cap N_3$, με $d' \neq a, b$ και $a'd' \in E$. Εάν το $d'q_2 \notin E$ τότε τα $a', d', a, q_2, z, c'', c, c'$ (με κέντρο το a') επάγουν ένα $S_{1,2,4}$, άρα το $dq_2 \in E$. Εάν $dq_2 \in E$ τότε τα $z, d, c'', c, q_1, a, q_2, d'$ (με κέντρο το z) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$. Έτσι, το $dq_1 \in E$ αλλά τώρα έχουμε ότι τα $z, d, q_1, d', c'', c, c', w$ (με κέντρο το z) επάγουν ένα $S_{1,2,4}$ το οποίο είναι άτοπο. Οπότε αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 4.5.4, ο οποίο έλεγε ότι για κάθε $c \in N_3 \cap D$ με $N_3 \setminus N_{H(c)}$ είναι $P_2 - free$ στο H, δηλαδή ότι το H είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. Για να υπάρχει ακμή στο H και να μην είναι δηλαδή αναξάρτητο, σημαίνει πως δεν πρέπει να έχουμε κοινούς γείτονες στο G, πράγμα που το αποδείξαμε παραπάνω. $\diamondsuit$

Ισχυρισμός 4.5.5. *Εάν το $c \in N_3 \cap D$ τότε για κάθε $a \in N_3 \setminus N_H(c)$, a είναι $(v, c)-$αναγκασμένη.*

Απόδειξη: Έστω $c \in N_3 \cap D$. Πιο συγκεκριμένα, όλες οι κορυφές του $N_H(c)$ εκτός από το c δεν ανήκουν στο D. Έστω $a \in N_3 \setminus N_H(c)$ και $a' \in N_2$ να είναι ένας γείτονας του a. Τότε από τον Ισχυρισμό 4.5.4 έχουμε ότι $a'c \notin E$ και το a' δεν έχει δύο γείτονες στο $N_3 \setminus N_H(c)$, διότι διαφορετικά αν το a' είχε δύο γείτονες τότε θα κυριαρχούνταν και από τις δύο κορυφές a, c, το οποίο είναι άτοπο και θα πρέπει το a' να κυριαρχείται από μόνο μια κορυφή γιάυτό $a \in D$. Έτσι, το a είναι $(v, c)-$αναγκασμένη. $\diamondsuit$

Ορισμός 4.5. Για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D του G με $v \in D$, θα καλούμε τα $N_3 \cap D$ N_3-**υποψήφιους** και όμοια για $N_k \cap D$ με $k \geq 4$.

Ισχυρισμός 4.5.6. *Για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D του G με $v \in D$, υπάρχουν το πολύ n N_3-υποψήφιοι και οι οποίοι μπορούν να υπολογιστούν σε $\mathcal{O}(n^2)$ χρόνο.*

Απόδειξη: Το παραπάνω προκύπτει από τον ορισμό του H, από τον ορισμό του N_3-υποψήφιου για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D με $v \in D$ και από τον Ισχυρισμό 4.5.5. Πιο συγκεκριμένα, χρειαζόμαστε $\mathcal{O}(n^2)$ χρόνο για να φτιάξουμε το H, επίσης χρειαζόμαστε αρχικά $\mathcal{O}(n)$ χρόνο για να ελέγξουμε μια μια τις κορυφές αν ανήκουν στο D και επιπλέον χρειαζόμαστε πάλι $\mathcal{O}(n)$ χρόνο για να ελέγξουμε αν ισχύει η υπόθεση $\{c\} \cup [N_3 \setminus N_H(c)]$ για κάθε κορυφή που ανήκει στο N_3. Έτσι γι' αυτούς τους δύο ελέγχους χρειαζόμαστε $\mathcal{O}(n^2)$. Επόμένως, ο συνολικός χρόνος για να υπολογίσουμε τους υποψήφιους του N_3 είναι $\mathcal{O}(n^2)$. $\diamondsuit$

Από τον Ισχυρισμό 4.5.6 έχουμε ότι έστω το σύνολο H κυριαρχεί την οικογένεια των N_3-υποψηφίων για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D με $v \in D$. Το πρόβλημα μας είναι να ελέγξουμε ποιά από τα v είναι μέρος των Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D του G και να μπορούμε να τα χωρίσουμε σε $|H|$ προβλήματα, όπου σε κάθε τέτοιο πρόβλημα ο αριθμός των μεταβλητών του H, είναι καθορισμένος.

Ας καθορίσουμε μερικές μεταβλητές του H και ας ονομάσουμε αυτό το σύνολο Q και επομένως το πρόβλημα του Q το ονομάζουμε $Problem[X]$.

Τότε το επίπεδο N_3 έχει χωριστεί σε ένα σύνολο Q και σε ένα $N_3 \setminus X$. Οι κορυφές του $N_3 \setminus X$ κυριαρχούνται από κάποιες κορυφές του επιπέδου N_4.
Τότε το επίπεδο N_4 διαμερίζεται στα σύνολα $N_4 \cap N(X)$ και στο $N_4 \setminus N(X)$. Επομένως οι κορυφές του $N_3 \setminus X$ κυριαρχούνται μόνο από κάποιες κορυφές του $N_4 \setminus N(X)$.

Με όμοιο τρόπο χωρίζουμε και το επίπεδο N_5 και έτσι παίρνουμε τα σύνολα $N_3 \setminus X$, $N_4 \setminus N(X)$ και $N_5 \cap N(N_4 \setminus N(X)$ αντί για τα σύνολα N_2, N_3 και N_4 τα οποία αποτελούν την οικογένεια H' (περιέχουν το πολύ n μεταβλητές οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο) των N_4-υποψηφίων του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D με $v \in D$ και $X \subset D$.

Τότε το $Problem[X]$ μπορεί να χωριστεί σε $|H'|$ προβλήματα, όπου κάθε πρόβλημα του H' έχει μια καθορισμένη μεταβλητή.

Οπότε καθορίζουμε κάθε μεταβλητή του H' και την βάζουμε στο σύνολο U και έτσι το πρόβλημα αυτό το ονομάζουμε $Problem[X, Y]$.

Τότε το N_4 μπορεί να χωριστεί στα σύνολα $N_4 \cap N(X)$, Y και $[N_4 \setminus N(X)] \setminus Y$. Πιο συγκεκριμένα, οι κορυφές του $[N_4 \setminus N(X)] \setminus Y$ κυριαρχούνται από κάποιες κορυφές του N_5.

Τότε το N_5 μπορεί να χωριστεί στα σύνολα $N_5' = N_5 \cap N(U)$, $N_5'' = [N_5 \setminus N(U)] \setminus N(N_4 \cap N(X))$ και $N_5''' = N_5 \setminus (N_5' \cup N_5'')$. Πιο συγκεκριμένα, οι κορυφές του $[N_4 \setminus N(X)] \setminus Y$ κυριαρχούνται μόνο από κάποιες κορυφές του N_5'''.

Τότε με όμοια επιχειρήματα παίρνουμε τα σύνολα $[N_4 \setminus N(X)] \setminus Y$, N_5''' και $N_6 \cap N(N_5''')$ αντί για τα σύνολα N_2, N_3 και N_4 που αποτελούν μια οικογένεια συνόλων την H'' (που περιέχει το πολύ n μεταβλητές και τις οποίες μπορούμε να τις υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο) των υποψηφίων του N_5 του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D με $v \in D$ και $X \cup Y \subset D$.

Τότε το $Problem[X, Y]$ μπορεί να χωριστεί σε $|H''|$ προβλήμστα όπου στο καθένα μια μεταβλητή του $|H'''$ είναι καθορισμένη.

Τότε έστω ότι καθορίζουμε κάθε μεταβλητή του $|H''|$ και τις βάζουμε σε ένα σύνολο Z και επομένως το πρόβλημα ονομάζεται $Problem[X, Y, Z]$.

Τότε το N_5 μπορεί να διαχωριστεί ως εξής: σε ένα σύνολο από άσπρες κορυφές (οι οποίες έχουν ένα καθορισμένο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, δηλαδή το Z), σε ένα σύνολο από γκρί κορυφές (οι οποίες κυριαρχούνται από κάποιες κορυφές του N_4, που το ονομάζουμε Y) και τέλος σε ένα σύνολο από μαύρες κορυφές (οι οποίες κυριαρχούνται από κάποιες κορυφές του N_6).

Τώρα, από τον Ισχυρισμό 4.5.1 έχουμε ότι η οικογένεια των υποψηφίων του N_6 για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με v, X, Y, Z (δηλαδή οι κορυφές του N_6, οι οποίες κυριαρχούνται από τις μαύρες κορυφές του N_5) έχουν ακριβώς μια μεταβλητή που την ονομάζουμε Q_6 και οι οποίες μπορούνα να υπολογιστούν εύκολα. Πιο συγκεκριμένα, κάθε μαύρη κορυφή του N_5 έχει μόνο έναν γείτονα στο N_6, διότι διαφορετικά δεν θα είχε κανένα γείτονα στο N_5 και έτσι το G δεν θα είχε ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με v, X, Y, Z. Έτσι, οι γείτονες αναγκάζονται να είναι σε κάθε Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με v, X, Y, Z.

Τότε το $Problem[X, Y, Z]$ μπορεί να λυθεί ως εξής: από τον υπολογισμό κάθε επιπέδου N_k, με $k \leq 6$, από το σύνολο Q_k των κορυφών, οι οποίες είναι υποψήφιες στο N_k για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D με $v \in D$ και $X \cup Y \cup Z \subset D$ και τέλος από τον εξής έλεγχο: αν τα v, X, Y, Z, Q_k για $k \leq 6$ σχηματίζουν ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G. Άρα το $Problem[X, Y, Z]$ μπορεί να λυθεί σε $\mathcal{O}(n)$.

Συνοψίζοντας, χρησιμοποιώντας το παραπάνω πρόβλημα μπορούμε να λύσουμε το γενικό-βασικό μας πρόβλημα όπως παρακάτω:

- Διαχωρίζουμε το πρόβλημα σε πολύ σε n^3 προβλήματα, όπως το $Problem[X, Y, Z]$ όπως δείξαμε παραπάνω (και πιο συγκεκριμένα όπως στον Ισχυρισμό 4.5.6, σε ένα σύνολο Q που μπορώ να το επιλέξω το πολύ με n διαφορετικούς τρόπους, σε ένα σύνολο Y που μπορώ να το επιλέξω το πολύ με n διαφορετικούς τρόπους καθορίζοντας κάθε φορά το X, δηλαδή επιλέγω ένα από το X και έχω να το αντιστοιχίσω σε n από το U και τέλος για το σύνολο Z που μπορώ να το επιλέξω με το πολύ n^2 διαφορετικούς τρόπους καθορίζοντας τα X, Y) και κάθε φορά προκύπτει διαφορετικό Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, με αρχή την κορυφή v.
- Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, τότε επιλέγω από όλα τα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο αυτό με το

ελάχιστο βάρος, διαφορετικά το v δεν είναι μέρος του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D του G. Όλη η παραπάνω διαδικασία χρειάζεται $\mathcal{O}(n^7)$ σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 4.5.6.

Παρακάτω επισημαίνουμε ένα Πόρισμα που προκύπτει από τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν για να αποδειχθεί το Θεώρημα 4.5.

Πόρισμα 4.1. *Για κάθε $S_{1,2,3} - free$ δημερές γράφημα G, έχουμε το πολύ n^4 οικογένειες Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G και μπορούμε να τις υπολογίσουμε σε $\mathcal{O}(n^8)$ χρόνο.*

Ας παρατηρήσουμε ότι τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν για να αποδειχθεί το Θεώρημα 4.5 μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να εισαχθούν επιπλέον κλάσεις διμερή γραφημάτων, για τις οποίες το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη να μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Στην πραγματικότητα φαίνεται ότι αρκεί να εξασφαλιστούν τα παρακάτω:

- οι οικογένειες των υποψηφίων του N_3 για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με v να περιέχει πολυωνυμικές μεταβλητές, οι οποίες να μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο και
- να υπάρχει μια σταθερά t τέτοια ώστε οι οικογένειες των υποψηφίων για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο σε οποιοδήποτε επίπεδο N_k, για $k \geq t$ να οριοθετείται από μια σταθερά και να μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Έτσι μπορούμε να εξασφαλίσουμε τα αποτελέσματα που αναφέρονται στην πρώτη κουκκίδα στα H γραφήματα του Θεωρήματος 4.5 σε $2K_2 - free$ ή γενικότερα σε $lK_2 - free$ για κάποιο καθορισμένο l.

Θεώρημα 4.6 ([13]). *Η οικογένεια των ανεξάρτητων συνόλων κάθε $2K_2 - free$ γραφημάτων με n κορυφές έχει $\mathcal{O}(n^2)$ μεταβλητές και μπορεί να υπολογιστεί σε $\mathcal{O}(n^2)$ χρόνο. Η οικογένεια των ανεξάρτητων συνόλων κάθε $lK_2 - free$ γραφημάτων με n κορυφές έχει $\mathcal{O}(n^2)$ μεταβλητές και μπορεί να υπολογιστεί σε $\mathcal{O}(n^2)$ χρόνο.*

Θεώρημα 4.7 ([13]). *Για $lP_4 - free$ διμερή γραφήματα, για κάθε καθορισμένο l, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι όμοια με αυτή του Θεωρήματος 4.5. Πιο συγκεκριμένα, ας παρατηρήσουμε τα εξής:

- η οικογένεια των υποψηφίων του N_3 για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με v να περιέχει πολυωνυμικά μέλη που να μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο, αφού το γράφημα H είναι $lK_2 - free$ το οποίο μπορούμε να το δείξουμε με άτοπο. Δηλαδή άν το H περιέχει lK_2 με ακμές τις $a_1b_1, a_2b_2, ..., a_lb_l$, τότε λόγο καταστκευής και λόγο ότι το G είναι ένα πρωταρχικό γράφημα, για $i = 1, 2, ..., l$ υπάρχουν υπογραφήματα Q_i (που σχηματίζονται από τις κορυφές a_i, b_i, c_i, d_i όπου $c_i \in N_2 \cap N(a_i) \cap N(b_i)$ και $d_i \in N_4 \cap N(a_i) \cap N(b_i)$ το οποίο επάγει ένα P_4 και το οποίο είναι συγχρόνος $co - join$.
- τα επίπεδα αποστάσεων N_k, για $k \geq (4+1)l$ είναι κενά, έτσι το G είναι $lP_4 - free$.

□

Πόρισμα 4.2 ([13]). *Για κάθε $lP_4 - free$ διμερές γράφημα, με κάποιο καθορισμένο l, η οικογένεια των Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο περιέχει πολυωνυμικά μέλη και μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο.*

4.4 Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο για H-free chordal διμερή γραφήματα

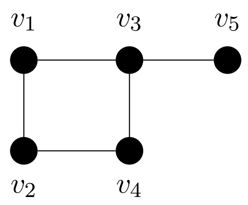
Το πλάτος της κλίκας για $A - free\ chordal$ διμερή γραφήματα είναι το πολύ 6. Ένα γράφημα είναι $chordal$ διμερές αν και μόνο αν είναι $(3P_2, C_6, C_8) - free$ διμερές. Αυτά τα γραφήματα καλούνται $auto - chordal$ διμερή γραφήματα. Έτσι, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για αυτά τα $auto - chordal$ διμερή γραφήματα [6, 18].

Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη για το G μπορεί να λυθεί από το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο με βάρη για το G^2 [9, 14].

Θυμίζουμε ότι το A_4 έχει πέντε κορυφές τις $v_1, ..., v_5$ τέτοιες ώστε οι $v_1, ..., v_4$ να παράγουν ένα C_4 και η v_5 να γειτονεύει με ακριβώς μια από τις κορυφές $v_1, ..., v_4$ και έστω ότι $v_5u_3 \in E$.

Ορισμός 4.6. Ένα γράφημα λέγεται **τρύπα (Hole)** εαν το γράφημα αυτό περιέχει κύκλους C_5 και πάνω (δηλαδή δεν περιέχει κύκλους C_3,C_4, κτλ.)

Έτσι, το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο με βάρη για $(hole, A_4) - free$ γραφήματα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο [11].



A_4

Εαν τώρα περιορίσουμε τα *chordal* διμερή γραφήματα με βαθμό το πολύ 3 τότε παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα 4.8 ([13])**.** *Έστω το G να είναι ένα chordal διμερές γράφημα με βαθμό κορυφών το πολύ 3. Τότε:*

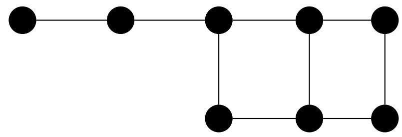
1. *το G^2 είναι $hole-free$.*

2. *εαν το G είναι H_4-free τότε το G^2 είναι A_4-free.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι δηλαδή υπάρχει τρύπα $(v_1,...,v_k)$, $k \geq 5$ στο G^2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το $v_1 \in X$. Εαν η $dist_G(v_i, u_{i+1}) = 2$ για όλα τα $i = 1,...,k$ τότε όλοι οι κοινοί γείτονες των κορυφών v_i, v_{i+1} ανήκουν στο Y και έτσι υπάρχει τρύπα στο G, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι κορυφών v_i, v_{i+1} που έχουν απόσταση 1, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε $v_1v_2 \in E$. Τότε $dist_G(v_k, u_1) = 2$ και $dist_G(v_2, u_3) = 2$ και έστω $x_2 \in X$ είναι ο κοινός γείτονας των κορυφών v_2, v_3 και έστω $y_k \in Y$ να είναι ο κοινός γείτονας των v_k, v_1. Εάν οι $x_2y_k \notin E$ τότε υπάρχει τρύπα στο G το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, το $x_2y_k \in E$ αλλά τώρα ο βαθμός των κορυφών x_2 και y_k είναι 3 και επομένως αυτές οι δύο κορυφές δεν έχουν άλλο γείτονα,διότι τότε ο βαθμός των κορυφών τους θα είναι μεγαλύτερος του 3. Οπότε τώρα ο κύκλος $(x_2, v_3, ..., v_k, y_k)$ δημιουργεί πάλι μια τρύπα στο G, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το G^2 είναι $hole-free$.

2. Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι οι κορυφές $v_1,...,v_5$ παράγουν ένα A_4 στο G^2 με κύκλο C_4 (v_1, v_2, v_3, v_4) και για την κορυφή v_5 ισχύει $v_5v_3 \in E$ τέτοια ώστε η κορυφή v_5 να μην γειτονεύει με τις v_1, v_2, v_4. Εάν η απόσταση των κορυφών v_i, v_{i+1} είναι 2 για κάθε $i = 1,2,3,4(module4)$ τότε σχηματίζεται μια τρύπα στο G.Έτσι, καταλήγουμε στό ότι $dist_G(v_1, u_4) = 1$ και $dist_G(v_2, u_3) = 1$ ενώ $dist_G(v_1, u_2) = 2$ και $dist_G(v_3, u_4) = 2$. Έστω $v_1, v_2 \in X$ και $y_1 \in Y$ είναι ο κοινός γείτονας των κορυφών v_1, v_2. Ανάλογα, έστω $x_3 \in X$ είναι ο κοινός γείτονας των κορυφών v_3, v_4. Τότε αν

το $y_1x_3 \notin E$ τότε υπάρχει πάλι τρύπα, το οποίο είναι άτοπο και άρα ισχύει $y_1x_3 \in E$ και έτσι το G είναι $hole - free$. Επίσης η $dist_G(v_3, u_5) = 2$, αφού η $dist_G(v_2, u_5) \geq 3$, διότι διαφορετικά θα εννωνόταν στο G^2. Έστω το $x_5 \in X$ είναι ο κοινός γείτονας των κορυφών v_3, v_5. Από τον περιορισμό που έχουμε στον βαθμό των κορυφών που πρέπει να είναι το πολύ 3, συμπαιρένουμε ότι $y_1x_5 \notin E$, διότι $deg_G(y_1) = 3$. Άρα οι κορυφές $v_1, ..., v_5, y_1, x_3, x_5$ παράγουν το H_4. Όπου το H_4 είναι το ακόλουθο γράφημα:



H_4

□

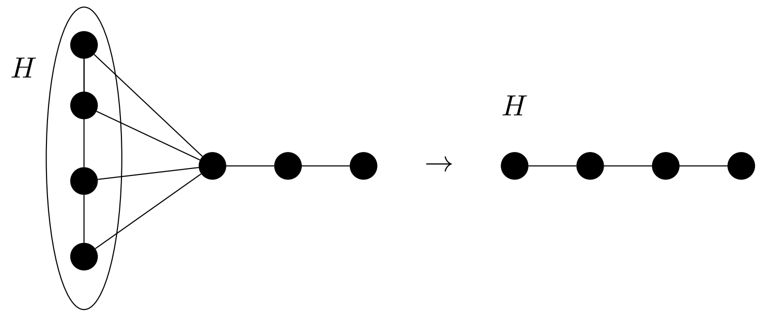
Πόρισμα 4.3 ([13]). *Για κάθε $H_4 - free$ chordal διμερή γραφήματα με βαθμό κορυφής το πολύ 3, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.*

4.5 Αποσύνδεση για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη

Ορισμός 4.7. Έστω ένα σύνολο H με τουλάχιστον δύο κορυφές ενός γραφήματος G καλείται **ομογενές (homogeneous)** εάν $H \neq V(G)$ και κάθε κορυφή έξω από το H συμπεριφέρεται το ίδιο στις κορυφές του H ή δεν ενώνεται με καμία κορυφή του H. Έτσι προφανώς το H είναι ομογενές στο G αν και μόνο αν το H είναι ομογενές στο συμπλήρωμα του $G(\overline{G})$.

Πόρισμα 4.4 ([15]). *Είναι γνωστό ότι στο συνεκτικό γράφημα G με συνεκτικό συμπλήρωμα $(\overline{G})$, τα μέγιστα ομογενή σύνολα είναι κατά ζεύγη ξεχωριστά σύνολα και μπορούν να προσδιοριστούν σε γραμμικό χρόνο χρησιμοποιώντας τη λεγόμενη αποσύνδεση.*

Ορισμός 4.8. Ένα **χαρακτηριστικό γράφημα** G^* του G είναι ένα γράφημα που προέρχεται από το G, συμβάλλοντας σε κάθε ένα από τα μέγιστα ομογενή σύνολα H του G μια ενιαία αντιπροσωπευτική κορυφή $h \in H$ και συνδέοντας δύο τέτοιες κορυφές με μια ακμή αν και μόνο αν υπάρχει γείτονας στο G. Στην ουσία, συσσορεύω το σύνολο H το οποίο είναι ομογενές σε έναν κάμβο. Στο H υπάρχουν κορυφές και ακμές που συμπεριφέρονται το ίδιο στις κορυφές εκτός του H. Επίσης γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το G^* είναι ένα πρωταρχικό γράφημα.



Πόρισμα 4.5 ([15])**.** *Για ένα μη-συνεκτικά γραφήματα G, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη μπορεί να λυθεί ξεχωριστά για κάθε συνεκτική συνιστώσα του. Εάν το $(\overline{G})$ είναι μη-συνεκτικό τότε προφανώς το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G αν και μόνο αν το D είναι μια καθολική κορυφή στο G. Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το G και το $(\overline{G})$ είναι συνεκτικά γραφήματα και επομένως τα μέγιστα ομογενή σύνολα είναι κατά ζεύγη ξεχωριστά.*

Οπότε έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.3 ([15])**.** *Έστω H είναι ένα ομογενές σύνολο στο G και D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $|D \cap H| \leq 1$.
2. *Εάν δεν υπάρχει κορυφή στο H που να είναι καθολική στο H τότε ισχύει* $|D \cap H| = 0$.

Έτσι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη είναι ένα συνεκτικό γράφημα G του οποίου το $(\overline{G})$ είναι συνεκτικό και μπορεί εύκολα να αναχθεί σε ένα χαρακτιριστικό γράφημα G^*, με την υπόθεση ότι κάθε ομογενές σύνολο H αντιπροσωπεύεται από μια κορυφή h η οποία έχει απεριόριστο βάρος εαν το H δεν έχει μια καθολική κορυφή ή το ελάχιστο βάρος της καθολικής κορυφής του H είναι διαφορετικό. Προφανώς, το G έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D πεπερασμένου βάρους αν και μόνο αν το $G*$ έχει ένα αντίστοιχο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με το ίδιο βάρος. Έτσι μπορούμε να συμπαιράνουμε τα παρακάτω:

Θεώρημα 4.9 ([15]). *Έστω G είναι μια κλάση γραφημάτων και G^* είναι η κλάση όλων των πρώτων επαγόμενων υπογραφημάτων του γραφήματος G. Εαν το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη μπορεί να λυθεί για τα γραφήματα του G^* με n κορυφές και m ακμές σε χρόνο $\mathcal{O}(T(n,m))$, τότε το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί για γραφήματα του G σε χρόνο $\mathcal{O}(T(n,m)+m)$.*

Παρατήρηση 4.3. *Η αποσύνδεση πάει να οδηγήσει σε πολυωνυμικούς αλγορίθμους για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο τα $2P_2 - free$ γραφήματα και σε ένα πολύ απλό αλγοριθμικό χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)m)$ για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο τα $P_5 - free$ γραφήματα.*

4.6 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο λύνεται πολυωνυμικά για $(P_5+kP_2)-free$ γραφήματα

Έστω το G είναι ένα $(P_5 + P_2) - free$ γράφημα και υποθέτουμε ότι το G δεν είναι $P_5 - free$ (δηλαδή ότι υπάρχει P_5 στο G), διότι διαφορετικά το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη θα μπορούσε να λυθεί σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)m)$. Έστω οι κορυφές v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 επάγουν ένα P_5 του H στο G με ακμές τις $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5$ και έστω $X = N(H) = \{x | x \notin V(H), \exists i(xv_i \in E)\}$ η γειτονιά των κορυφών του H και έστω Y το σύνολο με τις κορυφές που είναι αντι-γείτονες $A(H)$ του H στο G, δηλαδή ισχύει $Y = V(G) \setminus (X \cup V(H))$. Εφόσον το G έχει ένα P_5 κοιτάμε τι ιδιότητες υπάρχουν κοντά σε αυτές τις κορυφές του P_5, ορίζοντας τα σύνολα X και Y , όπως παραπάνω. Αυτό το πετυχαίνουμε διότι το G είναι $(P_5 + P_2) - free$.

Ισχυρισμός 4.9.1. *Το Y είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο.*

Που σημαίνει ότι όλες οι κορυφές του G που δεν έχουν γείτονες πάνω στο P_5 επάγουν ένα ανεξάρτητο σύνολο, διότι διαφορετικά αν υπήρχει ακμή μέσα τους θα σχηματιζόταν ένα $(P_5 + P_2)$. Άρα το Y είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. Επίσης το G είναι $(P_5 + P_2) - free$.

Επιπλέον συμπεραίνουμε ότι το G έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D. Τότε:

Ισχυρισμός 4.9.2. $|(V(H) \cap X) \cup D| \leq 5$.

Απόδειξη: Προφανώς, το $|V(H) \cap D| \leq 2$. Αν $|V(H) \cap D| = 2$ τότε το $|X \cap D| = 0$ ή $|X \cap D| = 1$ τότε το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο. Αν

$|V(X) \cap D| = 1$ τότε το $|X \cap D| \leq 3$. Τέλος, αν το $|V(H) \cap D| = 0$ τότε το $|X \cap D| \leq 5$, βάζουμε και την περίπτωση " $<$ " διότι μια κορυφή του συνόλου X μπορεί να χτυπάει δύο ή και παραπάνω κορυφές του H. $\diamondsuit$

Έστω $D = D_1 \cup D_2$ είναι μια διαμέριση του D σε $D_1 = D \cap (V(H) \cup X)$ και $D_2 = D \cap Y$.

Ισχυρισμός 4.9.3. $D_2 = A(D_1) \cap Y$.

Απόδειξη: Εφόσον η αντι-γειτονιά Y του H είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο, από τον Ισχυρισμό 4.9.1 , κάθε κορυφή στο Y κυριαρχείται είτε από τον εαυτό του είτε από μια κορυφή του $D \cap X$. $\diamondsuit$.

Τα παραπάνω οδηγούν στον παρακάτω απλό αλγόριθμο που ελέγχει αν το G έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D σε χρόνο $\mathcal{O}(n^5 m)$ ως εξής:

1. Ελέγχω αν το G είναι $P_5 - free$. Εαν είναι τότε εφαρμόζω τον αντίστοιχο αλγόριθμο για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη στο $P_5 - free$ γράφημα (το οποίο λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)m)$), διαφορετικά θέτω το H να έχει ένα P_5 στο G. Καθορίζουμε ότι $X = N(H)$ και $Y = A(H)$. Εάν το Y δεν είναι ανεξάρτητο σύνολο τότε το G δεν είναι $(P_5 + P_2) - free$. Διαφορετικά ισχύουν τα ακόλουθα:

2. Για κάθε ανεξάρτητο σύνολο $S \subseteq V(H) \cup X$ με $|S| \leq 5$, ελέγχουμε αν το $S \cup (A(S) \cap Y)$ είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο.

3. Εαν δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο τότε παίρνω αυτό με το ελάχιστο βάρος, διαφορετικά λέω ότι ' το G δεν έχει Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο¨.

Ο χρόνος που χρειάζεται ο παραπάνω αλγόριθμος είναι όπως είπαμε $\mathcal{O}(n^5 m)$ διότι χρειαζόμαστε $\mathcal{O}(n^5)$ χρόνο για να απαριθμήσουμε όλα τα P_5 και επιπλέον χρειαζόμαστε $\mathcal{O}(m)$ χρόνο για να βάλουμε τις ακμές στα σύνολα $X, A(X), N(X)$.

Επίσης για κάθε καθορισμένο k, η προσέγγιση για $(P_5 + P_2) - free$ γραφήματα μπορεί να γενικοποιηθεί σε $(P_5 + kP_2) - free$ γραφήματα ως εξή: Αρχικά καταλήγουμε επαγωγικά ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για $(P_5 + (k-1)P_2) - free$ γραφήματα. Έτσι, αν δωθεί ένα γράφημα G το οποίο είναι $(P_5 + (k-1)P_2) - free$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ή διαφορετικά βρίσκουμε (σε πολυωνυμικό χρόνο) ένα επαγόμενο υπογράφημα H ισόμορφο με το $P_5 + (k-1)P_2$ και καθορίζουμε την γειτονιά X και την αντι-γειτονιά U. Τότε με όμοιους ισχυρισμούς όπως στο $(P_5 + P_2) - free$, έχουμε ότι το Y είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο,

$|(V(H) \cup X) \cap D| \leq 5 + 2k$ και μπορούμε να ελέγξουμε αν το S είναι ανεξάρτητο σύνολο καθώς και τις διαμερίσεις $D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = A(D_1) \cap Y$.

Πόρισμα 4.6 ([15]). *Για κάθε καθορισμένο k, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για $(P_5 + kP_2) - free$ γραφήματα.*

Η προσέγγιση μπορεί εύκολα να γενικευτεί σε $(H + kP_2) - free$ γραφήματα όποτε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για $H - free$ γραφήματα. Ωστόσο, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη παραμένει $NP-$πλήρες για $(H + kP_2) - free$ οπότε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη είναι $NP-$πλήρες για $H - free$ γραφήματα. Τέλος, συμπεραίνουμε ότι αν το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για $P_6 - free$ γραφήματα τότε λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο και για $(P_6 + kP_2) - free$ γραφήματα.

4.7 Γενική μεθοδολογία για την επίλυση του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου Συνόλου με Βάρη

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε περιληπτικά τον αλγόριθμο για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη των *Brandstädt et al.* [12].

Αλγόριθμος: Robust-C-Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη

Είσοδος: Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με βάρη στις κορυφές $w : V \to \mathbb{N}$.
Έξοδος: Ένα από τα παρακάτω: ή ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο D του G με το ελάχιστο βάρος ή την απόδειξη ότι το G δεν περιέχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο ή την απόδειξη ότι το $G \notin C$.

1. Έχουμε το σύνολο $\mathcal{D} := \emptyset$.

2. Για κάθε κορυφή $v \in V$, κάνε

   (α΄) Καθόριζε τα επίπεδα των αποστάσεων $N_1, N_2, ...$ του v.

   (β΄) Υπολόγισε το σύνολο D_v καλώντας τον αλγόριθμο $Robust - C - Best - Candidate - for - Vertex$ για την κορυφή v έτσι ώστε να είναι είτε ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο για το G με το ελάχιστο βάρος για όλα τα Αποτελεσματικά Κυρίαρχα Σύνολα του G που περιέχουν την κορυφή v, στην περίπτωση που το G περιέχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο, είτε να μην περιέχει καθόλου το G ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο. Αν ο αλγόριθμος $Robust - C - Best - Candidate - for - Vertex$ σταματήσει με την απόδειξη ότι $G \notin C$ τότε σταματάει.

(γ′) Έχουμε το σύνολο $\mathcal{D} := \mathcal{D} \cup \{D_v\}$.

3. Για κάθε $D \in \mathcal{D}$, ελέγχει αν το D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο για το G και υπολογίζει το βάρος του.

4. Αν το $\mathcal{D}$ δεν περιέχει κανένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο του G, τότε σταματάει.Διαφορετικά επιστρέφει ένα σύνολο $D \in \mathcal{D}$ το οποίο είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο του G με το ελάχιστο βάρος.

Η ορθότητα του παραπάνω αλγορίθμου μπορεί εύκολα να δειχθεί. Οπότε τα επίπεδα των αποστάσεων της κορυφής v μπορούν να καθοριστούν σε γραμμικό χρόνο και να ελεγθεί αν κάθε σύνολο κορυφών είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο που μπορεί επίσης να υλοποιηθεί σε γραμμικό χρόνο. Άρα έχουμε το εξής:

Λήμμα 4.4 ([12]). *Αν ο αλγόριθμος $Robust - C - Best - Candidate - for - Vertex$ τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(t(n,m))$ για ένα γράφημα κλάσης C εισάγοντας ένα γράφημα με n κορυφές και m ακμές, τότε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη είναι ένα πρόβλημα που λύνεται εύκολα στο C σε χρόνο $\mathcal{O}(n \cdot max(n + m, t(n,m)))$.*

4.8 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $2P_2$-free γραφήματα

Ορισμός 4.9. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **split** γράφημα αν το σύνολο κορυφών V μπορεί να διαχωριστεί σε μια κλίκα και σε ένα ανεξάρτητο σύνολο , δηλαδή να ισχύει $V = C \cup I$ για μια κλίκα C και ένα ανεξάρτητο σύνολο I με $C \cap I = \emptyset$. Στο [16] είδαμε ότι το Κυρίαρχο Πρόβλημα λυνόταν σε γραμμικό χρόνο για διαχωρίσιμα γραφήματα.

Τότε ένα γράφημα είναι διαχωρίσιμα γράφημα αν και μόνο αν το γράφημα είναι $2P_2, C_4, C_5 - free$ όπως αναφέρεται στο [25] και όταν τα $2P_2 - free$ γραφήματα γενικεύουν τα διαχωρίσιμα γραφήματα.

Θεώρημα 4.10 ([12]). *Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα μπορεί να λυθεί εύκολα σε γραμμικό χρόνο $\mathcal{O}(n + m)$ για $2P_2 - free$ γραφήματα.*

4.9 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε P_5-free γραφήματα

Το Αποτελεσματικό Κυριάρχο πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες για $P_7 - free$ γραφήματα, οπότε είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε την πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη για υποκλάσεις των $P_7 - free$ γραφημάτων. Θα ξεκινήσουμε με τα $P_7 - free$ γραφήματα. Σχετικά με το πρόβλημα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη, είναι περίπλοκο σε $P_5 - free$ γραφήματα και είναι ένα από τα κύρια ανοιχτά προβλήματα που σχετίζονται με την πολυπλοκότητα των Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη προβλημάτων σε κληρονομικές κλάσεις γραφημάτων, όπως αναφέρονται και στα [35] και [44].

Θεώρημα 4.11 ([12]). *Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(nm)$ σε $P_5 - free$ γραφήματα με εύκολο τρόπο.*

4.10 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $\{P_6, S_{1,2,2}\}$-free γραφήματα

Πόρισμα 4.7 ([12]). *Για γραμμικά γραφήματα, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες.*

Υπενθυμίζουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι $NP-$ πλήρες για $P_7 - free$ γραφήματα και είναι περίπλοκο για $P_6 - free$ γραφήματα. Έστω $S_{1,2,2}$ να είναι ένα γράφημα με έξι κορυφές τις a, b, c, d, e, f τέτοιες ώστε οι κορυφές a, b, c, d, e να επάγουν ένα P_5 με ακμές τις ab, bc, cd, de και μόνο η κορυφή f να γειτονεύει με την κορυφή c. Επίσης, σημειώνουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες για $S_{1,2,2} - free$ γραφήματα και τότε αυτό είναι ήδη $NP-$πλήρες για ευθύγραμμα γραφήματα (και άρα και για $claw - free$ γραφήματα), όπως αναφέρεται στο πόρισμα 4.7.

Θεώρημα 4.12 ([12]). *Για $\{P_6, S_{1,2,2}\} - free$ γραφήματα, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα με Βάρη μπορεί να λυθεί σε χρόνο $O(n^2m)$ με εύκολο τρόπο.*

4.11 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $\{2P_3, S_{1,2,2}\}$-free γραφήματα

Υπενθυμίζουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες για $2P_3 - free$ αλλά και για $S_{1,2,2} - free$ γραφήματα. Σε αυτή την ενότητα, θα πάρουμε εύκολα σε πολυωνυμικό χρόνο, αλγόριθμο για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $\{2P_3, S_{1,2,2}\} - free$ γραφήματα.

Θεώρημα 4.13 ([12]). *Για $\{2P_3, S_{1,2,2}\} - free$ γραφήματα, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε χρόνο $\mathcal{O}(n^5)$ με εύκολο τρόπο.*

4.12 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $(P_2 + P_4)$-free γραφήματα

Γνωρίζουμε ότι από την ενότητα 3 ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα λύνεται σε γραμμικό χρόνο για τα $2P_2 - free$ γραφήματα και είναι $NP-$πλήρες για τα $2P_3 - free$ γραφήματα. Ωστόσο είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε την πολυπλοκότητα μεταξύ αυτών των δύο γραφημάτων. Εμείς θα δείξουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε $(P_2+P_4)-free$ γραφήματα, το οποίο υποδηλώνει ότι λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε $(P_2 + P_3) - free$ γραφήματα, σε υπερκλάσεις των $P_2 - free$ γραφημάτων και σε υπερκλάσεις των $2P_3 - free$ γραφημάτων.

Θεώρημα 4.14 ([12]). *Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη μπορεί να λυθεί σε $(P_2 + P_4) - free$ γραφήματα σε χρόνο $\mathcal{O}(nm)$ με εύκολο τρόπο.*

4.13 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη για $(P_4 + P_2) - free$ γραφήματα λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)m)$

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε να βελτιώνεται η χρονική πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη από $\mathcal{O}(nm)$ σε $\mathcal{O}(\delta(G)m)$ και να απλοποιείται η απόδειξη του Θεωρήματος 4.14.

Λήμμα 4.5 ([12]). *Εαν για ένα γράφημα $G = (V, E)$ της κλάσης C, το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε χρόνο $t(m)$ στο G_v για όλα τα $v \in V$ τότε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)t(m))$ για κάθε γράφημα της κλάσης C.*

Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα: Για κάθε κορυφή $v \in V$ με ελάχιστο βαθμό $\delta(G)$, ελέγχουμε για όλα τα $x \in N[v]$ αν το G_x έχει ένα Αποτελεσματικό

Κυρίαρχο Σύνολο D_x. Πρώτα θα συλλέξουμε μερικές ιδιότητες υποθέτοντας ότι το G είναι $(P_4 + P_2) - free$ και ότι έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο $D_v = D \cup \{v\}$. Έστω ότι $G_v := G[N_2 \cup R]$, όπου $R = V \backslash (\{v\} \cup N_1 \cup N_2)$. Όπως πριν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το G_v είναι πρωταρχικό γράφημα. Εμεις ψάχνουμε ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G_v με πεπερασμένο βάρος και καταλήγουμε ότι το $D_v \backslash v$ είναι ένα τέτοιο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο. Τότε το G είναι $(P_4 + P_2) - free$ και έχουμε:

Ισχυρισμός 4.14.1. *$G[R]$ είναι ένα cograph, δηλαδή δεν υπάρχει P_4 στο $G[R]$.*

Έστω $R_1, ..., R_l$ οι συνετκικές συνιστώσες του $G[R]$. Σημειώνουμε ότι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του συνεκτικού γραφήματος *cograph* H έχει μόνο μια κορυφή, που την ονομάζουμε καθολική κορυφή του H. Έτσι:

Ισχυρισμός 4.14.2. *Για όλα τα $i \in \{1, ..., l\}$, $|D_v \cap R_i| = 1$ και πιο συγκεκριμένα αν το $d \in D_v \cap R_i$ τότε το d είναι καθολική κορυφή για το R_i.*

Για όλα τα $i \in \{1, ..., l\}$, έστω $D_v \cap R_i = \{d_i\}$. Έστω U_i είναι ένα σύνολο από καθολικές κορυφές στο R_i. Έτσι, αν το $U_i = \emptyset$, τότε το G δεν έχει Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, αφού δεν υπάρχει κάποια κορυφή. Αν $U_i = \{d_i\}$ τότε αναγκαστικά το $d_i \in D_v$, αφού περιέχει μια μόνο κορυφή. Από τώρα συμπεραίνουμε ότι για κάθε $i \in \{1, ..., l\}$, ισχύει $|U_i| \geq 2$. Αρχικά, αν $l > 1$, δηλαδή περιέχει πάνω από μια συνεκτική συνιστώσα τότε το G_v είναι πρωταρχικό γράφημα. Στην περίπτωση που το $l = 1$, το G_v έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο αν και μόνο αν το G_v περιέχει μια καθολική κορυφή $z \in R_1$ για το G_v και η οποία θα μπεί στην λύση (αφού είναι μια καθολική κορυφή).

Ισχυρισμός 4.14.3. *Για ένα πρωταρχικό γράφημα G_v με Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D_v πεπερασμένου βάρους, υπάρχουν παραπάνω από μια συνεκτικές συνιστώσες, δηλαδή ισχύει $l > 1$.*

Δεδομένου ότι για την εύρεση ενός Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G_v, κάθε R_i μπορεί να αναχθεί σε σύνολα U_i που περιέχουν καθολικές κορυφές (έτσι προκύπτει ότι οι μη-καθολικές κορυφές του R_i δεν μπορούν να κυριαρχούν όλες τις κορυφές του R_i). Μπορούμε να καταλήξουμε ότι για όλα τα $i \in \{1, ..., l\}$, τα R_i είναι κλίκες, αφού ενώνονται με όλες τις κορυφές. Εαν τώρα το $|N_2| = 1$, τότε το G_v είναι ένα πρωταρχικό γράφημα, διότι έχουν διαφορετικούς γείτονες. Επίσης για όλα τα $i \in \{1, ..., l\}$, ισχύει ότι $|R_i| \leq 2$ και έτσι το G_v είναι ένα δέντρο, διότι διαφορετικά θα σχηματιζόταν τρίγωνο στο οποίο όλες οι κορυφές του είναι καθολικές και θα έπρεπε όλες να ανήκουν στο D, το οποίο είναι άτοπο.

Έτσι από τώρα, έχουμε ότι το $|N_2| \geq 2$. Αν για όλα τα $z \in R$, είτε το z θα είναι γειτονικό με όλες τις κορυφές του N_2 είτε μη-γειτονικό με αυτό και τότε το N_2 θα ήταν ένα ομογενές σύνολο στο G_v, το οποίο είναι άτοπο, αφού δεν έχουν πάλι οι κορυφές του την ίδια γειτονιά.
Έτσι, έχουμε τα εξής:

Ισχυρισμός 4.14.4. *Υπάρχει μια κορυφή $z \in R$ που έχει ένα γείτονα και ένα μη-γείτονα στο N_2.*

Τότε το G είναι $(P_4 + P_2) - free$ και έχουμε:

Ισχυρισμός 4.14.5. *Εαν η κορυφή $x \in N_2$ έχει ένα γείτονα στο R_i, τότε για όλα τα $j \neq i$, η κορυφή x έχει το πολύ ένα μη-γείτονα στο R_j.*

Στην ουσία αυτό σημαίνει ότι:

Ισχυρισμός 4.14.6. *Εαν η κορυφή $x \in N_2$ είναι γειτονική του $d_i \in R_i \cap D_v$ τότε για όλα τα $j \neq i$, η κορυφή x έχει ακριβώς ένα μη-γείτονα στο Z_j, η οποία είναι D_v-κορυφή στο R_j.*

Ισχυρισμός 4.14.7. *Εαν η κορυφή $z \in R_i$ έχει ένα μη-γείτονα $x \in N_2$ και $z \notin D_v$ τότε για όλα τα $j \neq i$, η κορυφή x έχει ακριβώς ένα μη-γείτονα στο R_j, έτσι ώστε $xd_j \notin E$ για $d_j \in R_j \cap D_v$.*

Απόδειξη: Έστω η κορυφή $z \in R_1$ να έχει έναν μη-γείτονα $x \in N_2$ (διαφορετικά αν είχε η κορυφή x δύο μη-γείτονες θα σχηματιζόταν (P_4+P_2)) και έστω $z \notin D_v$ και $z \neq d_1$. Τότε το G είναι $(P_4 + P_2) - free$ και $xd_1 \in E$. Από τον Ισχυρισμό 4.14.6, η κορυφή x έχει ακριβώς ένα μη-γείτονα στο R_j για κάθε $j \in \{2, ..., l\}$, διότι διαφορετκά αν είχε κι άλλο γείτονα τότε οι κορυφές θα πρέπει να βρισκόταν όλες στο N_3 και έτσι το N_4 θα ήταν κενό. ♢

Αλγόριθμος $(P_4 + P_2) - free - WED - G_v$:

Δεδομένα: Ένα γράφημα $G = (V, E)$ και ένα πρωταρχικό γράφημα $G_v = G[N_2 \cup R]$ όπως κατασκευάστηκε παραπάνω με βάρη κορυφών $w(x)$, για όλα τα $x \in N_2$ και $w(x) = \infty$.
Έξοδος: Ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D_v του G_v ελαχίστου βάρους, αν το G_v έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο ή το G δεν είναι $(P_4+P_2)-free$ ή το G_v δεν έχει κάποιο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους.

1. Αρχικά, $D_v := \emptyset$.

2. Ελέγχουμε αν το $G[R]$ είναι ένα *cograph*. Εαν όχι τότε το G δεν είναι $(P_4 + P_2) - free$ και σταματάμε. Διαφορετικά καθορίζομε τις συνεκτικές συνιστώσες $R_1, ..., R_l$ του $G[R]$. Αν το $l = 1$ τότε το G_v δεν έχει *e.d.* πεπερασμένου βάρους και σταματάμε.

3. Για όλα τα $i \in \{1, ..., l\}$, καθορίζουμε τα σύνολα U_i των καθολικών κορυφών του R_i. Αν για κάποιο i το $U_i = \emptyset$ τότε το G_v δεν έχει Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και σταματάμε. Από τώρα έχουμε ότι $R_i := U_i$. Αν το $U_i = \{d_i\}$ τότε το $D_v := D_v \cup \{d_i\}$.

4. Αν $|N_2| = 1$ τότε ελέγχουμε αν το G_v είναι δέντρο και έτσι μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με τον παρακάτω τρόπο. Αν το $|N_2| > 1$, τότε διαλέγω μια κορυφή $z \in R$ με γείτονα την κορυφή $w \in N_2$ και μια μη-γειτονική κορυφή $x \in N_2$, την $z \in R_i$.

   (α′) Ελέγχουμε αν $z \in D_v$ οδηγεί σε ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο (χρησιμοποιώντας τον γείτονα w του z και τον Ισχυρισμό 4.14.6).

   (β′) Ελέγχουμε αν $z \notin D_v$ οδηγεί σε ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο (χρησιμοποιώντας τον μη-γείτονα του x στο R_j, με $j \neq i$ και τον Ισχυρισμό 4.14.7).

   (γ′) Αν δεν υπάρχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις τότε ούτε το γράφημα G δεν είναι $(P_4 + P_2) - free$ και ούτε το γράφημα G έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους και άρα σταματάμε.

Ο χρόνος του παραπάνου αλγορίθμου προκύπτει αν τρέξουμε κάθε κόμβο με BFS και έτσι έχουμε:

Θεώρημα 4.15. *[12] Ο αλγόριθμος $(P_4+P_2)-free-WED-G_v$ είναι ορθός και τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(m)$.*

Πόρισμα 4.8. *[12] Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)m)$ για $(P_4 + P_2) - free$ γραφήματα.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε μερικές υποκλάσεις των $P_6 - free$ γραφημάτων

Υπενθυμίζουμε ότι η πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη για $P_6 - free$ γραφήματα είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα. Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε μερικές υποκλάσεις των $P_6 - free$ γραφημάτων. Έστω το $G = (V, E)$ να είναι ένα πρώτο $P_6 - free$ γράφημα, έστω $v \in V$ και έστω $N_1, N_2, ...$ να είναι τα επίπεδα αποστάσεων του v. Τότε έχουμε:

Ισχυρισμός 5.0.1. *$N_k = \emptyset$ για όλα τα $k \geq 5$ και N_4 είναι ένα σύνολο από ανεξάρτητες κορυφές.*

Συμπεραίνουμε ότι το G περιέχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D_v πεπερασμένου βάρους με $v \in D_v$. Έστω $G_v := G[N_2 \cup N_3 \cup N_4]$ και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το G_v είναι ένα πρώτο γράφημα, αφού έχουμε υποθέσει ότι και το G είναι πρώτο. Όπως και πριν, έχουμε ότι $D_v \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset$ και το $w(x) = \infty$, για $x \in N_2$. Έτσι, οι κορυφές του N_2 πρέπει να κυριαρχούνται από τις κορυφές του $D_v \cap N_3$, αφού από την υπόθεση δεν υπάρχουν κορυφές στο N_1 και στο N_2 που να ανήκουν στο D. Ισχυριζόμαστε το εξής:

Ισχυρισμός 5.0.2. *Το πολύ μια κορυφή του $D_v \cap N_3$ έχει γείτονα στο N_4.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δύο κορυφές οι $d_1, d_2 \in N_3 \cap D_v$ οι οποίες έχουν γείτονες στο N_4, δηλαδή ισχύει $x_i \in N_4$ με $d_i x_i \in E$ για $i = 1, 2$. Έστω $b_i \in N_2$ με $b_i d_i \in E$ για $i = 1, 2$. Τότε το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και έχουμε ότι $b_1 \neq b_2$, $x_1 \neq x_2$ και το d_1 δεν ενώνεται με τα b_2, x_2 ενώ το b_2 δεν ενώνεται με τα b_1, x_1, αφού το γράφημα G είναι πρώτο. Επίσης ξέρουμε ότι το N_4 είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο και άρα ισχύει $x_1x_2 \notin E$. Τώρα, αν τα $b_1b_2 \in E$ τότε τα $x_1, d_1, b_1, b_2, d_2, x_2$ επάγουν ένα P_6 στο G το οποίο είναι άτοπο. Επίσης αν $b_1b_2 \notin E$ πάλι μαζί με τις κορυφές του N_1 επάγουν ένα P_6 και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα προκύπτει ότι το πολύ μια κορυφή του $D_v \cap N_3$ έχει γείτονα στο N_4. $\diamondsuit$

5.1 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $(P_6, S_{1,2,2}) - free$ γραφήματα λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)m)$

Σε αυτήν την υποενότητα θα βελτιώσουμε την χρονική πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη από $\mathcal{O}(n^2m)$ σε $\mathcal{O}(\delta(G)m)$ και στην συνέχεια θα απλοποιήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1. Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα $(P_6, S_{1,2,2}) - free$, με $v \in V$ και έστω $N_1, N_2, ...$ να είναι τα επίπεδα αποστάσεων του v. Ισχυριζόμαστε:

Ισχυρισμός 5.0.3. $D_v \cap N_4 = \emptyset$.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει μια κορυφή $d \in D_v \cap N_4$. Επίσης υποθέτουμε ότι το $c \in N_3$ ο οποίος είναι ο γείτονας του d, το $b \in N_2$ που είναι ο γείτονας του c και η $a \in N_1$ είναι ο γείτονας του b. Τότε το b κυριαρχείται από το D_v- κορυφή, δηλαδή $d' \in N_3$ και έτσι το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο. Επιπλέον έχουμε ότι $cd' \notin E$ και $dd' \notin E$, διότι τότε θα υπήρχε πρόβλημα με την κυριαρχεία των κορυφών. Παρ'όλα αυτά τα v, a, b, c, d, d' (με κέντρο το b) επάγουν ένα $S_{1,2,2}$, το οποίο είναι άτοπο. $\diamondsuit$

Έτσι , το σύνολο $w(x) := \infty$ για όλα τα $x \in N_4$. Από τον Ισχυρισμό 5.0.3, έχουμε ότι το $D_v \subseteq N_3 \cup \{v\}$. Ο Ισχυρισμός 5.0.2 σημαίνει ότι οι κορυφές του N_3 που ανήκουν στο D_v είτε ενώνονται με τις κορυφές του N_4 είτε όχι. Έτσι, για την εύρεση ενός Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, μπορούμε να διαγράψουμε όλες τις κορυφές του N_3 οι οποίες είτε ενώνονται με όλες τις κορυφές του N_4 είτε δεν ενώνονται με καμία. Έτσι μειώνουμε του G_v με αυτόν τον τρόπο και παίρνουμε το G'_v που μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι και αυτό είναι ένα πρώτο γράφημα. Έπειτα από τις διαγραφές αυτές, το N_4 είναι ένα ομογενές σύνολο και ισχύει $|N_4| \leq 1$. Αν το N_4 δεν είναι κενό τότε θα έχουμε $N_4 = \{z\}$. Έστω $Q_1, ..., Q_l$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $G[N_3]$. Επίσης ισχυριζόμαστε:

Ισχυρισμός 5.0.4. *Καμία συνιστώσα Q_i του $G[N_3]$ δεν περιέχει δύο κορυφές του D_v.*

Απόδειξη: Έστω ότι η συνιστώσα Q_1 περιέχει τις κορυφές $d_1, d_2 \in D_v$, με $d_1 \neq d_2$. Έστω $x \in N_2$ να είναι ο γείτονας του d_1 και έστω P να είναι ένα μονοπάτι του Q_1 που συνδέει τα d_1 και d_2, οπότε έχουμε είτε το μονοπάτι $P = (d_1, x_1, x_2, d_2)$ είτε το $P = (d_1, x_1, x_2, x_3, d_2)$. Έστω τώρα η κορυφή a να είναι ο κοινός γείτονας των x και v. Αν πάρουμε αρχικά το μονοπάτι $P = (d_1, x_1, x_2, d_2)$ τότε το x δεν ενώνεται με το x_2 διότι διαφορετικά τα (v, a, x, d_1, x_2, d_2) θα επάγουν ένα $S_{1,2,2}$ το οποίο είναι άτοπο. Επίσης το G είναι $P_6 - free$ και το x δεν ενώνεται με το x_1, διότι διαφορετικά τα v, a, x, d_1, x_1, x_2 θα επάγουν ένα P_6 το οποίο είναι άτοπο. Όμως και πάλι τα v, a, x, x_1, x_2, d_2 επάγουν ένα P_6, το οποίο είναι άτοπο. Εάν τώρα πάρουμε το άλλο μονοπάτι $P = (d_1, x_1, x_2, x_3, d_2)$, με όμοια επιχειρήματα θα καταλήξουμε σε άτοπο. $\diamondsuit$

Έτσι, από τους Ισχυρισμούς 5.0.3 και 5.0.4, έχουμε ότι αν το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G_v τότε ισχύει $|D_v \cap Q_i| = 1$ για όλα τα i με $1 \leq i \leq l$ και επίσης οι αντίστοιχες D_v-κορυφές είναι καθολικές για τα Q_i. Έτσι, μπορούμε να περιορίσουμε τα Q_i στις καθολικές κορυφές των U_i, το οποίο σημαίνει ότι τα Q_i είναι κλίκες. Στην περίπτωση που $U_i = \emptyset$ τότε το G_v δεν έχει Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο. Τώρα στην περίπτωση που το $l = 1$, σημαίνει ότι αν το G_v έχει ενα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, το G_v πρέπει να έχει μια καθολική κορυφή. Όμως τότε η D_v-κορυφή θα είναι καθολική για το Q_1 και άρα θα είναι και καθολική για το $N_2 \cup N_4$, το οποίο είναι αδύνατον διότι το D_v είναι ένα πρώτο γράφημα. Αυτό σημαίνει ότι το $l > 1$. Αν τώρα το $|Q_i| = 1$, τότε η αντίστοιχη κορυφή στο Q_i είναι μια αναγκασμένη κορυφή για το D_v και πρέπει να προστεθεί στο D_v. Ισχυριζόμαστε:

Ισχυρισμός 5.0.5. *Οι κόμβοι του N_2 δεν μπορούν να ξεχωρίζουν πάνω από ένα σύνολο κόμβων του Q_i με $i \in \{1, ..., l\}$*

Απόδειξη: Επειδή το G είναι $S_{1,2,2}-free$ τότε καμία κορυφή του N_2 δεν μπορεί να ξεχωρίσει δύο συνιστώσες τις Q_i, Q_j του N_3. Προκειμένου να δείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, θα υποθέσουμε το αντίθετο, ότι δηλαδή υπάρχουν συνιστώσες οι Q_1, Q_2 του G'_v με $c_1, d_1 \in Q_1$ και $c_2, d_2 \in Q_2$ οι οποίες ξεχωρίζουν τις κορυφές $x_1, x_2 \in N_2$. Δηλαδή ισχύει $x_1 d_1 \in E$, $x_1 c_1 \notin E$ και $x_2 d_2 \in E$, $x_2, c_2 \notin E$. Τότε καμία κορυφή του N_2 δεν ξεχωρίζει τις δύο συνιστώσες Q_i, Q_j, με $x_i \neq x_2$ και έτσι το G είναι $S_{1,2,2} - free$, με $x_1, c_2 \notin E$ και $x_1 d_2 \notin E$. Από συμμετρία έχουμε επίσης ότι $x_2 c_1 \notin E$ και $x_2 d_1 \notin E$ αλλά τώρα τα $c_1, d_1, x_1, x_2, d_2, c_2$ επάγουν ένα P_6, αν τα $x_1 x_2 \in E$ ή αν $x_1 x_2 \notin E$ τότε πάλι επάγοουν ένα P_6 μαζί με τις κορυφές του N_1 , το οποίο είναι άτοπο. $\diamondsuit$

Αρχικά υποθέτουμε ότι το $N_4 \neq \emptyset$, δηλαδή $N_4 = \{z\}$. Για κάθε $i \in \{1, ..., l\}$, έχουμε ότι Q_i^+ είναι οι γείτονες του z στο Q_i και το Q_i^- είναι οι μη-γείτονες του z στο Q_i. Από τον Ισχυρισμό 5.0.5, έχουμε ότι το πολύ ένα Q_i^+ έχει περισσότερες από δύο κορυφές, δηλαδή $|Q_i| \leq 2$ για όλα τα $i \in \{2, ..., l\}$. Τότε τα Q_i^+ και Q_i^- είναι $modoles$. Έτσι το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και υπάρχει μια κορυφή $d \in D_v$ με $dz \in E$, δηλαδή $d \in Q_i^+$. Έστω $b \in N_2$ με $bd \in E$ και $a \in N_1$ με $ab \in E$. Τώρα για $i \neq j$, κάθε γείτονας $x \in Q_j^+$ του z πρέπει να βλέπει το b, διότι διαφορετικά τα v, a, b, d, z, x επάγουν ένα P_6 και κάθε μη-γείτονας $y \in Q_j^-$ του z πρέπει να μην βλέπει το b διότι διαφορετικά τα v, a, b, d, z, y επάγουν ένα $S_{1,2,2}$. Επίσης αν το Q_j περιέχει και την κορυφή x και την y τότε τα v, a, b, d, x, y επάγουν πάλι ένα $S_{1,2,2}$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι έχουμε ότι:

Ισχυρισμός 5.0.6. *Το πολύ ένα Q_i έχει περισσότερες από μία κορυφή.*

Λέμε ότι το $|Q_i| = 1$ για όλα τα $i \in \{2, ..., l\}$. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση που το $N_4 = \emptyset$.

Αυτό οδηγεί στον ακόλουθω αλγόριθμο για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη με χρόνο $\mathcal{O}(m)$ για κάθε κορυφή v:

Αλγόριθμος για $(P_6, S_{1,2,2}) - Free - WED - G_v$:

Δεδομένα: Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και ένα πρωταρχικό γράφημα $G_v = G[N_2 \cup N_3 \cup N_4]$ όπως κατασκευάστηκε παραπάτω με βάρη κορυφών $w(x)$, για όλα τα $x \in N_2 \cup N_4$ και $w(x) = \infty$.
Έξοδος: Ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D_v του G_v πεπερασμένου βάρους, αν το G_v έχει φτάσει σε κατάσταση που να έχει ένα τέτοιο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο ή αν το G δεν είναι $(P_6, S_{1,2,2}) - Free$ ή αν το G_v δεν έχει κάποιο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους.

1. Αρχικά, $D_v := \emptyset$.

2. Ελέγχουμε αν το $G[N_5] = \emptyset$, εαν όχι τότε το G δεν είναι $P_6 - free$ και σταματάμε. Διαφορετικά καθορίζουμε τις συνεκτικές συνιστώσες $Q_1, ..., Q_l$ του $Q[N_3]$. Εάν το $l = 1$ τότε το G_v δεν έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους και σταματάμε.

3. Για όλα τα $i \in \{1, ..., l\}$ καθορίζουμε τα σύνολα U_i των καθολικών κορυφών του Q_i. Εαν το $U_i = \emptyset$ τότε το G_v έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και σταματάμε. Από τώρα έχουμε ότι το $Q_i := U_i$. Εαν $U_i = \{d_i\}$

τότε $D_v := D_v \cup \{d_i\}$. Διαγράφουμε όλες τις κορυφές $x \in N_3$ οι οποίες έχουν γείτονα και μη-γείτονα στο N_4. Εισάγουμε στο N_4 μια κορυφή z, αν το $N_4 = \emptyset$.

4. Για όλα τα $|Q_i| = 1$ τις προσθέτουμε στις κορυφές του D_v και διαγράφουμε τους γείτονες από το N_2. Αν υπάρχει ένα $i \in \{1, ..., l\}$ με $|Q_i| > 1$ τότε ελέγχουμε αν υπάρχει μια κορυφή $d \in Q_1$ η οποία βλέπει όλες τις κορυφές του N_2 καθώς και την κορυφή z του $N_4 = \{z\}$.

5. Τέλος ελέγχουμε αν το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G_v. Αν όχι, τότε είτε το G δεν είναι $(P_6, S_{1,2,2}) - free$ είτε δεν έχει (μαζί με την κορυφή v) ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους.

Η ορθότητα του αλγορίθμου προκύπτει από τους προηγούμενους ισχυρισμούς. Οπότε έχουμε:

Θεώρημα 5.1. *[12] Ο αλγόριθμος $(P_6, S_{1,2,2}) - Free - WED - G_v$ είναι ορθός και τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(m)$.*

Πόρισμα 5.1. *[12] Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)m)$ για τα $(P_6, S_{1,2,2}) - Free$ γραφήματα.*

5.1.1 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $P_6 - free$ γραφήματα με διάμετρο 3

Σε αυτή την υποενότητα, θα μειώσουμε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη των $P_6 - free$ γραφημάτων σε πολυωνυμικό χρόνο καθώς και σε γραφήματα που έχουν διάμετρο 3. Έστω D είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G. Από το θεώρημα 4.9, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το G είναι ένα πρώτο γράφημα. Όπως πριν, ελέγχουμε για κάθε κορυφή $v \in V$, αν το $v \in D$ οδηγεί σε ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο του G. Για αυτή την πρόταση, υποθέτουμε ότι N_i, $i \geq 1$ είναι πάλι τα επίπεδα αποστάσεων του v. Υπενθυμίζουμε ότι από τον Ισχυρισμό 5.0.1, ότι το $N_k = \emptyset$ για $k \geq 5$ και ότι το N_4 είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών και ακόμη από τον Ισχυρισμό 5.0.2, έχουμε ότι το πολύ μια κορυφή του $D_v \cap N_3$ έχει γείτονα στο N_4.

Ακόμη, υπενθυμίζουμε ότι το $A(x)$ είναι η αντι-γειτονιά του x. Έτσι, αν το $N_4 \neq \emptyset$, τότε ελέγχουμε για κάθε κορυφή $x \in N_3$ αν το $\{v, x\} \cup (A(x) \cap N_4)$ είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο στο G. Τότε το N_4 είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο και οι κορυφές του N_4 από τον κόμβο x που είναι στο G_v. Αυτο σημαίνει ότι μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για όλα τα v με $N_4 \neq \emptyset$.

Τώρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διάμετρος του G είναι το πολύ 3, αφού για κάθε $v \in V$ το επίπεδο N_4 είναι κενό.

Πόρισμα 5.2 ([12]). *Αν το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για $P_6 - free$ γραφήματα με διάμετρο 3 τότε το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για $P_6 - free$ γραφήματα.*

5.2 Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη σε $(2P_3, S_{1,2,2}) - free$ γραφήματα λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)n^3)$

Σε αυτή την ενότητα θα βελτιώσουμε την χρονική πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη από $\mathcal{O}(n^5)$ σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)n^3)$ και θα απλοποιήσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1. Έστω το $G = (V, E)$ είναι ένα συνεκτικό $(2P_3, S_{1,2,2}) - free$ γράφημα, έστω $v \in V$ και έστω $N_1, N_2, ...$ να είναι τα επίπεδα των αποστάσεων του v. Τότε το G είναι ένα $2P_3 - free$ και έχουμε ότι $N_k = \emptyset$, για $k \geq 6$. Έστω $R := V \backslash (\{v\} \cup N_1 \cup N_2)$. Υποθέτουμε ότι το G περιέχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο, D_v πεπερασμένου βάρους με $v \in D_v$. Έστω $G_v := G[N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5]$, δηλαδή το $G_v = G[N_2 \cup R]$ και επίσης υποθέτουμε ότι το G_v είναι ένα πρώτο γράφημα, αφού όλο το G είναι και αυτό πρώτο. Τότε το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και $R \neq \emptyset$. Έστω $Q_1, ..., Q_l$, με $l \leq 1$ να είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $G[R]$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι $D_v \cap Q_i \neq \emptyset$ για κάθε i. Έστω $D_v \backslash \{v\} = \{d_1, ..., d_k\}$ και υποθέτουμε ότι $k \geq 2$, διαφορετικά το G_v θα είχε μια καθολική κορυφή το οποίο είναι αδύνατον να ισχύει σε πρώτα γραφήματα. Τότε το G είναι $S_{1,2,2} - free$ και το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και έχουμε:

Ισχυρισμός 5.1.1. *Κάθε κορυφή $x \in N_2$ βλέπει μια κορυφή $d_i \in D_v$ και χάνει τις κορυφές $N[d_i] \cap R$, με $i \neq j$.*

Εμείς ισχυριζόμαστε ότι:

Ισχυρισμός 5.1.2. *Για κάθε $i = 1, ..., k$, έχουμε ότι το $N[d_i] \cap R$ είναι κλίκα.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το $N[d_1] \cap R$ δεν είναι κλίκα, ότι δηλαδή υπάρχουν δύο γείτονες οι $x, y \in R$ του d_1 με $xy \notin E$. Έστω $b \in N_2$ είναι ο γείτονας του d_2. Από τον Ισχυρισμό 5.1.1, έχουμε ότι το b δεν βλέπει τις κορυφές του x και y, αλλά τώρα τα a, b, d_2, x, d_1, y επάγουν ένα $2P_3$, το οποίο είναι άτοπο. $\diamondsuit$

Ακόμη ισχυριζόμαστε:

Ισχυρισμός 5.1.3. *Αν το $k \geq 3$ τότε το $G[N_3]$ είναι μια ξεχωριστή ένωση από κλίκες.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το $k \geq 3$ και ότι υπάρχει η ακμή $vw \in E$ για $u \in N(d_2) \cap R$ και $w \in N(d_3) \cap R$. Έστω $x \in N_2$ με $xd_1 \in E$ και $a \in N_1$ με $ax \in E$. Τότε από το Ισχυρισμό 5.1.1 τα v, a, x, d_2, u, w επάγουν $2P_3$, το οποίο είναι άτοπο. ♢

Έτσι, για $k \geq 3$, κάθε $Q_i \cap N_3$ είναι μια κλίκα που περιέχει ακριβώς μια D_v κορυφή:

Ισχυρισμός 5.1.4. $|D_v \cap Q_i| = 1$.

Εαν το $Q_i \cap N_3$ είναι είναι μια απλή κορυφή q_i, τότε το q_i είναι αναγκασμένη και πρέπει να το προσθέσουμε στο D_v. Από τώρα υποθέτουμε ότι για όλα τα i, ισχύει $|Q_i| \geq 2$. Από τον Ισχυρισμό 5.1.1 έχουμε:

Ισχυρισμός 5.1.5. *Αν το $z \in N_2$ βλέπει τις κορυφές $Q_i \cap N_3$ τότε χάνει όλες τις Q_j, με $j \neq i$.*

Έστω S_i ότι είναι ένα σύνολο από κορυφές του N_2 που ξεχωρίζει τις κορυφές του Q_i, δηλαδή βλέπει κάποιες από τις κορυφές του Q_i. Τότε το Q_i δεν είναι ομογενές (δηλαδή δεν έχει την ίδια γειτονιά) και $S_i \neq \emptyset$ για όλα τα $i \in \{1, ..., k\}$. Έστω U_i να είναι οι κορυφές του Q_i οι οποίες να μην ενώνονται με το S_i. Επίσης το $U_i \neq \emptyset$ και τότε οι κορυφές του S_i πρέπει να έχουν ένα D_v γείτονα στο Q_i. Επίσης ισχυριζόμαστε:

Ισχυρισμός 5.1.6. *Για όλα τα $i \in \{1, ..., k\}$, με $|U_i| = 1$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι δηλαδή το $|U_1| > 1$. Αν η κορυφή $x \in S_1$, από τον Ισχυρισμό 5.1.5 έχουμε ότι $xd_1 \in E$, δηλαδή $d_1 \in U_1$. Επίσης ξέρουμε ότι όποιες κορυφές ανήκουν στο U_1 θα πρέπει να ενώνονται με το S_i. Επομένως, αν είχαμε και δεύτερη κορυφή στο U_1 την q τότε θα ίσχυε $xq \in E$. Όμως τότε η κορυφή x δεν ξεχωρίζει το U_1, αφού χτυπάει όλες τις κορυφές του το οποίο σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 5.1.5 είναι άτοπο και άρα το $|U_i| = 1$. Επιπλέον, οι κορυφές d_1, q έχουν την ίδια γειτονιά (x) και άρα το G_v δεν είναι πρώτο γράφημα, το οποίο είναι πάλι άτοπο. ♢

Στην περίπτωση όπου το $k \leq 2$, δηλαδή το $|D_v \backslash \{v\}| \leq 2$, έχουμε από τον πίνακα γειτνίασης του G, ότι για κάθε ζευγάρι $x, y \in R$, $x \neq y$ με $xy \notin E$

ελέγχουμε όλες τις κορυφές του G_v που είναι γειτονικές με αυτές. Ο χρόνος που απαιτείται είναι αρχικά $\mathcal{O}(n^2)$ συν $\mathcal{O}(n)$ χρόνο που χρειάζεται για να ελέγξω αν χτυπάνε ακριβώς μια κορυφή. Οπότε ο συνολικός χρόνος είναι $\mathcal{O}(n^3)$.

Αυτά οδηγούν στον παρακάτω αλγόριθμο:

Αλγόριθμος $(2P_3, S_{1,2,2}) - free - WED - G_v$:

Δεδομένα: Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και ένα πρωταρχικό γράφημα $G_v = G[N_2 \cup R]$ όπως κατασκευάστηκε παραπάνω με βάρη στις κορυφές $w(x)$ για όλα τα $x \in N_2$ και $w(x) = \infty$.
Έξοδος: Ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο D_v του G_v με πεπερασμένο βάρος, αν το G_v έχει φτάσει σε κατάσταση που να έχει ένα τέτοιο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο ή το G δεν έχει $(2P_3, S_{1,2,2}) - free$ ή το G_v δεν έχει κάποιο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους.

1. Αρχικά, το $D_v := \emptyset$.

2. Καθορίζουμε τα N_1, N_2 και R. Αν το $R = \emptyset$ τότε το $G_v = G[N_2 \cup R]$ δεν έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και σταματάμε. Διαφορετικά καθορίζουμε τις συνεκτικές συνιστώσες $Q_1, ..., Q_l$ του R.

3. Αν το $G[R]$ δεν είναι μια ξεχωριστή ένωση από κλίκες $Q_1 \cap N_3, ..., Q_l \cap N_3$, με $l \geq 3$ ελέγχω αν το G_v έχει ένα πεπερασμένου βάρους Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με δύο κορυφές και καθορίζω ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με ελάχιστο βάρος. Αν όχι, τότε το G_v δεν έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους και σταματάμε.

4. (Τώρα το $G[R]$ δεν είναι μια ξεχωριστή ένωση από κλίκες $Q_1 \cap N_3, ..., Q_l \cap N_3$, με $l \geq 3$). Αν το $Q_i = \{d_i\}$ τότε το d_i είναι αναγκασμένο - $D_v := D_v \cup \{d_i\}$. Αν το $|Q_i| > 1$ τότε καθορίζουμε τα σύνολα S_i των κορυφών που διαχωρίζουν το Q_i και καθορίζουμε τα σύνολα U_i των κορυφών του Q_i που έχουν ενωθεί στο S_i. Αν το $U_i = \emptyset$ τότε το G_v δεν έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο και σταματάμε. Διαφορετικά, τα $U_i = \{d_i\}$ και τα d_i είναι αναγκασμένα - $D_v := D_v \cup \{d_i\}$.

5. Τελικά ελέγχουμε αν το D_v είναι ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους του G_v. Αν όχι τότε είτε το G δεν είναι $(2P_3, S_{1,2,2}) - free$ είτε το G δεν έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο πεπερασμένου βάρους.

Η ορθότητα του αλγορίθμου προκύπτει από τους προηγούμενους ισχυρισμούς. Οπότε έχουμε:

Θεώρημα 5.2 ([12]). *Ο αλγόριθμος $(2P_3, S_{1,2,2}) - free - WED - G_v$ είναι ορθός και τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(n^3)$.*

Πόρισμα 5.3 ([12]). *Το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο με Βάρη λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(\delta(G)n^3)$ για $(2P_3, S_{1,2,2}) - free$ γραφήματα.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπερασματα και Επεκτασεις

6.1 Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε περιληπτικά και σχηματικά όσα ειπώθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα θα ακολουθήσουν δύο πίνακες με αποτελέσματα τόσο για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα όσο και με το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα με Βάρη στις κορυφές. Στους οποίους θα αναγράφονται οι χρόνοι πολυπλοκότητας του κάθε γραφήματος καθώς και αν το πρόβλημα παραμένει $NP-$πλήρες στην συγκεκριμένη κλάση γραφημάτων. Παρατηρούμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι πιο γενικό από το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα με Βάρη και επομένως αναμένουμε να είναι πιο δύσκολο σε ορισμένες κλάσεις γραφημάτων. Επιπλέον σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι είτε ζητάμε το μικρότερο Αποτελεσματικό Κυρίαρχο σύνολο είτε το μεγαλύτερο δεν υπάρχει διαφορά, διότι το γράφημα G έχει ένα Αποτελεσματικό Κυρίαρχο σύνολο και όλα τα σύνολα έχουν τις ίδιες ιδιότητες είτε πάρουμε λίγες είτε περισσότερες κορυφές από αυτο. Στην συνέχεια θα ακολουθήσει σχήμα με την ιεράρχηση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του προβλήματος σε κάθε κλάση γραφημάτων.

Επιπλέον κάνοντας μια μικρή ανακεφαλαίωση αναφέρουμε πάλι ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες για $F-free$ γραφήματα, όποτε το F περιέχει κύκλο ή $claw$ [12]. Έτσι κι εμείς εστιάζουμε την προσοχή μας σε F γραφήματα που αποτελούν ένωση από ξένα μονοπάτια. Ακόμη από τα αποτελέσματα τις απόδειξης της $NP-$πληρότητας για τα $chordal$ γραφήματα έδειξαν ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες για $2P_3-free$ γραφήματα και για P_7-free [47]. Τέλος στην εργασία [12] παρατηρήσαμε ότι η πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου προβλήματος για κλάσεις $F-free$ γραφημάτων ισχύει και για όλα τα γραφήματα F με το πολύ 6 κορυφές, εκτός από την περίπτωση που το F είναι ισόμορφο με το P_6, δηλαδή $F=P_6$.

Κλάσεις γραφημάτων	Πολυωνυμικός χρόνος	$NP-$πληρότητα
$2P_3 - free$ $chordal$ γραφήματα		[13]
$chordal$ διμερή γραφήματα		[13]
Επίπεδα διμερή γραφήμα με $\Delta(G) \leq 3$		Θεώρ.3.1
$P_6 - free$ $chordal$ γραφήματα	[13]	
$2P_3 - free$ γραφήματα		[15]
$P_7 - free$ γραφήματα		[15]
$K_{1,4} - free$ διμερή γραφήματα		[13]
$K_{1,3} - free$ διμερή γραφήματα	[13]	
$K_{3,3} - free$ διμερή γραφήματα		Λήμμα3.1
$S_{1,2,2} - free$ γραφήματα		[12]
$(P_2 + P_4) - free$ γραφήματα	[12]	
$(P_2 + P_3) - free$ γραφήματα	[12]	
Γραμμικά γραφήματα		Πορ.4.7

Πίνακας 6.1: Υπολογιστική πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων.

Σημειώνουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα είναι πιο γενικό από το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα με Βάρη και επομένως αναμένουμε να είναι πιο δύσκολο σε ορισμένες κλάσεις γραφημάτων.

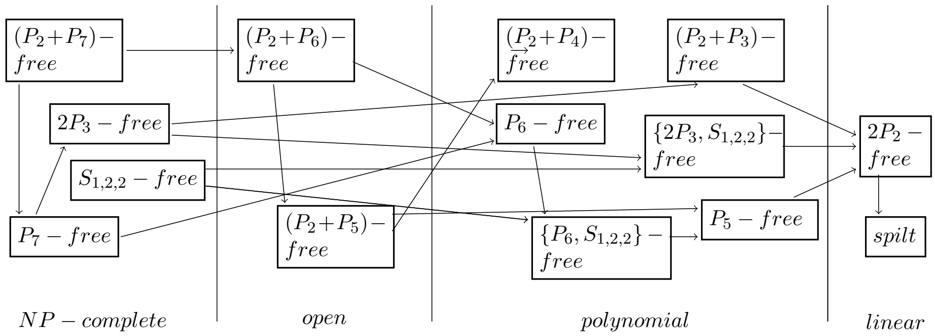
6.2 Επεκτάσεις

Είναι ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς την πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου Συνόλου με Βάρη σε $P_k - free$ γραφήματα, με $k \geq 8$ και σε $chordal$ διμερή γραφήματα με $\Delta(G) \leq 3$.

Επίσης είναι ενδιαφέρον να υλοποιηθούν ορισμένοι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα (με Βάρη) [28, 39]. Πιο συγκεκριμένα, οι αλγόριθμοι προσέγγισης είναι αποτελεσματικοί αλγόριθμοι που βρίσκουν προσεγγιστικές λύσεις στα προβλήματα $NP-$δύσκολης βελτιστοποίησης με αποδεδειγμένες εγγυήσεις για την απόσταση της επιστρεφόμενης λύσης στη βέλτιστη. Οι αλγόριθμοι αυτοί προκύπτουν υπό την υπόθεση ότι μια μεγάλη τάξη προβλημάτων βελτιστοποίησης δεν μπορεί να λυθεί ακριβώς σε πολυωνυμικό χρόνο. Στην ουσία το πεδίο των αλγορίθμων προσέγγισης προσπαθεί να καταλάβει πόσο στενά είναι δυνατόν να προσεγγίσουν τις βέλτιστες λύσεις σε τέτοια προβλήματα

Κλάσεις γραφημάτων	Πολυωνυμικός χρόνος
$P_7 - free$ διμερή γραφήματα	$\mathcal{O}(n^4)$,Θεώρ.4.2
$lP_7 - free$ διμερή γραφήματα	[13]
$kP_3 - free$ διμερή γραφήματα, $k \geq 2$	Θεώρ.4.3
$P_9 - free$ διμερή γραφήματα με $\Delta(G) \leq 3$	Θεώρ.4.4
Κυρτά διμερή γραφήματα	[10]
$chordal$ διμερή γραφήματα	[10]
$S_{1,2,4} - free$ διμερή γραφήματα	Θεώρ.4.5
$S_{1,2,3} - free$ διμερή γραφήματα	$\mathcal{O}(n^8)$, Πορ.4.1
$2K_2 - free$ γραφήματα	$\mathcal{O}(n^2)$, Θεώρ.4.6
$lP_4 - free$ διμερή γραφήματα με καθορ. l	Θεώρ.4.7
$auto - chordal$ διμερή γραφήματα	[13]
$H_4 - free\ chordal$ διμερή γραφήματα με $\Delta(G) \leq 3$	Πορ.4.3
$(P_5 + kP_2) - free$ γραφήματα με καθορ. k	Πορ.4.6
$P_5 - free$ γραφήματα	$\mathcal{O}(nm)$, Θεώρ.4.11
$\{P_6, S_{1,2,2}\} - free$ γραφήματα	$\mathcal{O}(n^2m)$, Θεώρ.4.12
$\{2P_3, S_{1,2,2}\} - free$ γραφήματα	$\mathcal{O}(n^5)$, Θεώρ.4.13
$(P_2 + P_4) - free$ γραφήματα	$\mathcal{O}(nm)$, Θεώρ.4.14
$P_6 - free\ chordal$ γραφήματα	[13]
$P_6 - free$ γραφήματα	[34]

Πίνακας 6.2: Υπολογιστική πολυπλοκότητα του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου προβλήματος με Βάρη σε κλάσεις γραφημάτων.



Σχήμα 6.1: Σχηματική αναπαράσταση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου Συνόλου (με Βάρη) σε κλάσεις γραφημάτων.

σε πολυωνυμικό χρόνο. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, η εγγύηση τέτοιων αλγορίθμων είναι πολλαπλασιαστική και εκφράζεται ως ο λόγος προσέγγισης ή ως ο συντελεστής προσέγγισης που σημαίνει ότι η βέλτιστη λύση είναι πάντοτε εγγυημένη ότι είναι εντός ενός προκαθορισμένου πολλαπλασιαστικού παράγοντα της επιστρεφόμενης λύσης. Στην περιοχή των προσεγγιστικών αλγορίθμων μας ενδιαφέρει ο λόγος προσέγγισης που προσδιορίζεται ως εξής:

Λόγος προσέγγισης: Έστω $C(I)=$ τιμή της λύσης του προσεγγιστικού αλγόριθμου για είσοδο I $C(I)=$ τιμή της βέλτιστης λύσης για είσοδο I. Ο αλγόριθμος έχει λόγο προσέγγισης $r(n)$ αν για κάθε είσοδο I μεγέθους n έχουμε: $\frac{C(I)}{C*(I)} \leq r(n)$, όπου $r(n)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος.

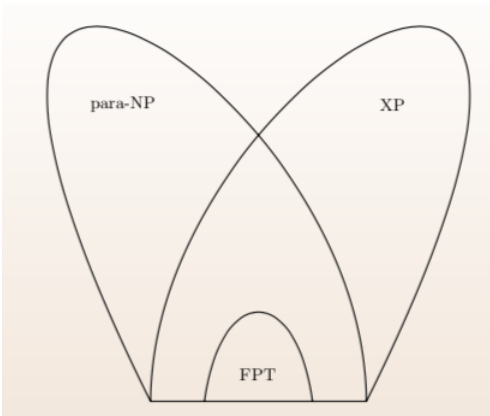
Τώρα, λόγο της αναγωγής που έγινε στο Κεφάλαιο 3, έχουμε ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα (με Βάρη) είναι $APX-$δύσκολο. Η κλάση $APX-$δύσκολο είναι το σύνολο των προβλημάτων βελτιστοποίησης NP που δεν επιδέχονται αλγόριθμους προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου με λόγο προσέγγισης οριοθετημένο από μια σταθερά. Διαφορετικά ονομάζονται αλγόριθμοι προσέγγισης σταθερού παράγοντα. Πιο συγκεκριμένα τα προβλήματα σε αυτή την κλάση έχουν αποτελεσματικούς αλγορίθμους που μπορούν να βρούν μια απάντηση μέσα σε κάποιο καθορισμένο πολλαπλασιαστικό παράγοντα βέλτιστης απάντησης. Επομένως, είναι ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς σε ποια κλάση γραφημάτων (όπως για παράδειγμα σε $P_k - free$ γραφήματα με $k \geq 7$) το πρόβλημα επιδέχεται αλγόριθμο προσέγγισης σταθερού παράγοντα.

Επίσης το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο πρόβλημα (με Βάρη) έχει μελετηθεί και από την παραμετρικοποιημένη άποψη, όπως αναφέρεται στην εργασία [14]. Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία [39] αποδείχθηκε ότι το πρόβλημα μας είναι $W[2]-hard$, ενώ στην εργασία [28] είδαμε ότι το πρόβλημα παραμετρικοποιείται ως προς το μέγεθος του Αποτελεσματικού Κυρίαρχου Συνόλου. Ειδικότερα έχει γραμμικό πυρήνα σε επίπεδα γραφήματα [1].

Αναλυτικότερα, η παραμετρικοποιημένη πολυπλοκότητα είναι ένας κλάδος της θεωρίας της υπολογιστικής πολυπλοκότητας που επικεντρώνεται στην ταξινόμηση των υπολογιστικών προβλημάτων ανάλογα με την εγγενή δυσκολία τους σε σχέση με τις πολλαπλές παραμέτρους της εισόδου ή της εξόδου. Ωστόσο, ορισμένα προβλήματα μπορούν να λυθούν με αλγορίθμους που είναι εκθετικοί μόνο στο μέγεθος μιας σταθερής παραμέτρου και πολυωνυμική στο μέγεθος της εισόδου. Ένας τέτοιος αλγόριθμος ονομάζεται $tractable$ με σταθερή παράμετρο(fpt), επειδή το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αποτελεσματικά για μικρές τιμές της σταθερής παραμέτρου. Επιπλέον προβλήματα στα οποία η ορισμένη παράμετρος k έχει οριστεί ονομάζονται παραμετρικοποιημένα προβλήματα. Τώρα, ένα παραμετρικοποιημενο πρόβλημα που επιτρέπει ένα τέτοιο αλγόριθμο fpt λέγεται ότι είναι πρόβλημα με σταθερή παράμετρο και ανήκει στην κλάση FPT. Άρα ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση FPT όταν επιδέχεται αλγόριθμο με χρονική πολυπλοκότητα $f(k)n^{\mathcal{O}(1)}$ ως προς μια δεδομένη παράμετρο k. Επίσης η ιεραρχία W είναι μια συλλογή υπολογιστικών κλάσεων πολυπλοκότητας. Ένα παραμετρικοποιημένο πρόβλημα είναι στην κλάση $W[i]$, αν κάθε περίπτωση (x, k) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα συνδυαστικό κύκλωμα που έχει το πολύ i, έτσι ώστε $(x, k) \in L$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ικανοποιητική ανάθεση στις εισόδους, η οποία εκχωρεί από 1 εως k εισόδους. Επιπλέον σημαντικό είναι να σημειώσουμε τα εξής: $FPT = W[0]$ και $W[i] \subseteq W[j]$ για όλα τα $i \leq j$. Οι κλάσεις στην ιεραρχία W είναι κλειστές κάτω από την μείωση του fpt. Τέλος, καλό θα ήταν να αναφερθούμε και στις κλάσεις XP και $para-NP-complete$ [2, 20, 21, 22, 43]. Η κλάση XP είναι η κατηγορία των παραμετρικοποιημένων προβλημάτων που μπορούν να λυθούν σε χρόνο $n^{f(k)}$ για κάποια υπολογιστική λειτουργία f. Η κλάση XP περιέχεται στην κλάση FPT. Όσον αφορά την κλάση $para-NP-$πλήρες ορίζεται ως εκείνη η κλάση για την οποία για κάποια σταθερή τιμή της παραμέτρου k το πρόβλημα είναι $NP-$πλήρες. Με άλλα λόγια είναι απίθανο ένα πρόβλημα της κλάσης $para-NP-$πλήρες να είναι XP (δηλαδή να υπάρχει $n^{f(k)}$ αλγόριθμος) [24, 45].

Σχετικά τώρα με τον πυρήνα γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας είναι μια τεχνική που χρησιμοποιούμε για να σχεδιάσουμε αποτελεσματικούς αλγόριθμους που επιτυγχάνουν την αποδοτικότητα τους από ένα στάδιο προεπεξεργασίας στο οποίο οι είσοδοι στον αλγόριθμο αντικαθίστανται από μια μικρότερη είσοδο που ονομάζεται πυρήνας. Στην θεωρία της παραμετρικοποιημένης πολυπλοκότητας είναι συχνό φαινόμενο να αποδειχθεί ότι ένας πυρήνας με εγγυημένα όρια στο μέγεθος να μπορεί να βρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Όταν είναι δυνατό αυτό, οδηγεί σε ένα αλγόριθμο fixed-parameter tractable (FPT) και ο χρόνος εκτέλεσης του είναι το άθροισμα του χρόνου πυρήνωσης(πολυωνυμικός χρόνος) και του χρόνου επίλησης του πυρήνα(όχι πολυωνυμικός) [26, 40]. Η ιεραρχία αυτών των κλάσεων δίνονται στο Σχήμα 6.2.

Ως προς τα προβλήματα μας από τα προηγούμενα είναι σαφές ότι το Αποτελεσματικό Κυρίαρχο Σύνολο σε $P_k - free$ γραφήματα είναι $para - NP-$πλήρες με παράμετρο το k, καθώς αποδείχθηκε ότι μένει $NP-$πλήρες για $k = 7$. Τέλος, ο πυρήνας παραμετρικοποιείται ως προς το μέγεθος και μάλιστα σε επίπεδα γραφήματα ο πυρήνας είναι γραμμικός. Έτσι για το προβλημά μας έχει αποδειχθεί ότι έχει έναν γραμμικό μεγέθους πυρήνα όταν περιοριζόμαστε σε επίπεδα γραφήματα ως προς την λύση του προβλήματος.



Σχήμα 6.2: Διάγραμμα των κλάσεων XP, $para - NP$ και FPT

Βιβλιογραφια

[1] Alber, J., B.Dorn, and R.Neidermeier. Polynomial time data reduction for dominating set. *Joyrnal of the ACM 51*, (3) (2004), 363–384.

[2] Baker, B. Approximation algorithms for np-complete problems on planar graphs. *ACM 41*, 1 (1994), 153–180.

[3] Bange, D., Barkauskas, A., Host, L., and Slater, P. Generalized domination and efficient domination in graphs. *Discrete Math 159* (1996), 1–11.

[4] Bange, D., Barkauskas, A., and Slater, P. Efficiant dominating sets in graphs in: R.d. ringeisen and f.s. roberts. *Applications of Discrete Math* (1988), 189–199.

[5] Bange, D., and Slater, A. B. P. Disjoint dominating sets in tree. *SAND* (1978), 78–1087.

[6] Berry, A., Brandstädt, A., and Engel, K. The dilworth number of auto-chordal bipartite graphs. *Graphs and Combinatorics 31* (2015), 1463–1471.

[7] Biggs, N. Perfect code in graphs. *Eslevier 15* (1973), 288–296.

[8] Biggs, N. Perfect codes and distance transitive graphs. *London Mathematical Society Lecture Notes 13* (1973), 1–8.

[9] Brandstädt, A. Efficiant domination and efficient edge domination: A brief survey. *Panda and P.S. Goswami(Eds.) 10743* (2018), 1–14.

[10] Brandstädt, A., A.Leitert, and D.Rautenbach. Efficient dominating and edge dominating sets for graphs and hypergraphs. *arXiv 1207.0953v2* (2012).

[11] Brandstädt, A., Lozin, V., and Mosca, R. Independent sets of maximum weight in apple-free graphs. *SIAM Journal on Direcrete Mathematics 24* (2010), 239–254.

[12] Brandstädt, A., M.Milanič, and R.Nevries. New polynomial cases of the weighted efficient domination problem. *arXiv 1304.6255v1* (2013).

[13] Brandstädt, A., and Mosca, R. On efficient domination for some classes of h-free bipartite graphs. *arXiv 1806.00386v1* (2018).

[14] Brandstädt, A., P.Fičur, A.Leitert, and M.Milanič. Polynomial-time algorithms for weighted efficient domination problems in at-free graphs and dually chardal graphs. *Information Processing Letters 115*, 256-262 (2015).

[15] Brandstädt, A., and V.Giakoumakis. Weighted efficient domination for $(p_5 + kp_2)$-free graphs in polynomial time. *arXiv 1407.4593v1* (2014).

[16] Chang, M.-S., and Liu, Y.-C. Polynomial algorithms for the weighted perfect domination problems on chordal graphs and spilt graphs. *Information Processing Letters 48* (1993), 205–210.

[17] Courcelle, B., Makowsky, J., and Rotics, U. Linear time solvable optimazation problems on graphs of bounded clique-width. *New York Inc. 33* (2000), 125–150.

[18] Dabrowski, K., Lozin, V., and V.Zamaraev. On factorial properties of chordal bipartite graphs. *Discrete Math 312* (2012), 2457–2465.

[19] Dabrowski, K., and Paulusma, D. Classifying the clique-width of h-free bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics 200* (2016), 43–51.

[20] Downey, R., and Fellows, M. Fixed-parameter tractability and comleteness i. *SIAM Journal Comput. 24* (1995), 873–921.

[21] Downey, R., and Fellows, M. Fixed-parameter tractability and comleteness.ii. *SIAM Journal Comput. 141* (1995), 109–131.

[22] Downey, R., and Fellows, M. Parameterized complexity. *Springer, New York* (1999).

[23] Fellows, M., and Hoover, M. Perfect domination. *Australasian J. of Combinatorics 3* (1991), 141–150.

[24] Flum, J., and Grohe, M., Eds. *Parameterized Complexity Theory.* Springer, 1995-2017.

[25] Foldes, S., and Hammer, P. Split graphs. *Congressus Numerantium 19* (1977), 311–315.

[26] Fomin, F., Lokshtanov, D., Saurabh, S., and Zehavi, M., Eds. *Kernelization. Theory of Parameterized Preprocessing.* Cambridge, university press, 2019.

[27] Garey, M., and Johnson, D. *Computers and Intractability-A Guide to the Theory of NP-completeness.* Freeman, 1979.

[28] J.Guo, and R.Neidermeier. *Linear problem kernels for NP-hard problems on planar graphs*, vol. 4596. Proceedings of the 34th ICALP, 2007.

[29] Köhler, E. *Graphs without asteroidal triples.* PhD thesis, TU Berlin, 1999.

[30] Kratochvíl, J. Perfect codes in general graphs. *Akademia, Praha 7* (1991).

[31] Laroche, P. Planar 1-in-3 satisfiability is np-complete. *ASMICS workshop on Tilings* (1992).

[32] Liang, Y., Lu, C. L., and Tang, C. Y. Efficient domination on permutation graphs and trapezoid graphs. *Networks 1276*, 232-241 (2006).

[33] Livingston, M., and Stout, Q. Perfect dominating sets. *Congressus Numerantium 79* (1990), 187–203.

[34] Lokshtanov, D., Pilipczuk, M., and van Leeuwen, E. J. Independence and Efficient Domination on P_6-free Graphs. *ACM Trans. Algorithms 14*, 1 (2018), 3–30.

[35] Lozin, V., and Mosca, R. Maximum independent sets in subclasses of P_5-free graphs. *Information Processing Letters 109* (2009), 319–324.

[36] Lu, C., and Tang, C. Solving the weighted efficient edge domination problem on bipartite permutation graphs. *Discrete Applied Mathematics 87* (1998), 203–211.

[37] Lu, C., and Tang, C. Weighted efficient domination problem on some perfect graphs. *Discrete Applied Mathematics 117* (2002), 163–182.

[38] McConnell, R., and Spinrad, J. Efficiently dominatable graphs. *Joyrnal of Graph Theory* (2012).

[39] M.Cesati. Perfect code is w[1]-complete. *Information Processing Letters 163-168*, 81 (2002).

[40] M.Cygan, Fomin, F., Kowalik, L., Likshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., and Saurabh, S. *Parameterized Algorithms.* Springer, 2015.

[41] Moore, C., and Robson, J. Hard tiling problems with simple tiles. *Discrete and Computational Geometry 26* (2001), 573–590.

[42] Mulzer, W., and Rote, G. Minimum-weight triangulation is np-hard. *J. ACM 55*, 11 (2008).

[43] Nemhauser, G., and Trotter, L. Vertex packing: structural properties and algorithms. *Mathematical Programming 8* (1975), 232–248.

[44] Randerath, B., and Schiermeyer, I. On maximum independent sets in $p_5 - free$ graphs. *Discrete Applied Mathematics 158* (2010), 1041–1044.

[45] R.Downey, and Thilikos, D. Confronting intractability via parameters. *Elsevier* (2011).

[46] R.Nevries. *Efficient Domination and Polarity.* PhD thesis, University of Rostock, 2014.

[47] Yen, C.-C., Lee, and R.C.T. The weighted perfect domination problem and its variants. *Discrete Applied Mathematics 147-160*, 66 (1996).