ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Ευρεση Μη-Συνεκτικου Διαχωριστη σε Γραφηματα

Ιωάννα Κιαφζέζι

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2019

Αφιερώνεται στους γονείς μου.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα μαθηματκά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 12/11/2019 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Παπαδόπουλος Χάρης	Επίκουρος Καθηγητής
Γεωργιάδης Λουκάς	Αναπληρωτής Καθηγητής
Νούτσος Δημήτριος	Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Ιωάννα Κιαφζέζι

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου διατριβής αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με στήριξαν, ο καθένας με τον δικό του ξεχωριστό τρόπο. Πάνω απ' όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χάρη Παπαδόπουλο, για τη συνεργασία μας και την αδιάκοπη καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την συμπαράσταση του και το πραγματικό ενδιαφέρον του για κάθε πρόβλημα που παρουσιαζόταν. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του προπτυχιακού και μεταπτυχιακού.

Περίληψη

Ο κεντρικός στόχος της παρούσης διατριβής είναι η παρουσίαση και ανάλυση σε βάθος του προβλήματος της εύρεσης ενός μη συνεκτικού διαχωριστή σε συνεκτικά γραφήματα: δοθέντος ενός συνεκτικού γραφήματος G, θέλουμε να υπολογίσουμε ένα υποσύνολο κορυφών S (το οποίο καλείται διαχωριστής), τέτοιο ώστε τα δύο γραφήματα $G \backslash S$ και $G[S]$ να είναι μη-συνεκτικά γραφήματα. Με άλλα λόγια το πρόβλημα αποσκοπεί στην εύρεση ενός μη-συνεκτικού διαχωριστή. Μελετάμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος που συναντάται στη σύγχρονη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα, η διατριβή αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται εισαγωγικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων καθώς και η έννοια της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στον ορισμό του προβλήματος του μη συνεκτικού διαχωριστή και σε προβλήματα ισοδύναμα με αυτό. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται η υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος στις περιπτώσεις όπου το γράφημα έχει διάμετρο ίση με δύο και διάμετρο διάφορη του δύο. Στο επόμενο κεφάλαιο αναφέρουμε τις κλάσεις γραφημάτων όπου το πρόβλημα επιδέχεται πολυωνυμική λύση, εστιάζοντας στα H-free γραφήματα. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα αυτής της διατριβής και επίσης, επεκτείνουμε τα ήδη γνωστά πολυωνυμικά αποτελέσματα, σχεδιάζοντας τον πρώτο πολυωνυμικό αλγόριθμο για την κλάση των distance-hereditary γραφημάτων.

Abstract

The principal aim of this thesis is to present an extended analysis of the problem of finding a disconnected cut within a connected graph: given a connected graph G, our task is to find a set S of vertices such that both graphs $G \backslash S$ and $G[S]$ are disconnected. Therefore, the goal of the problem is to find a disconnected cut of a given connected graph. We study the computational complexity of disconnected cut problem, which can be found in the modern literature. More specifically, the thesis consists of five chapters. In the first chapter mentioned some basic concepts in graph theory and the definition of computational complexity. The second chapter is devoted to the definition of disconnected cut problem and some polynomially equivalent problems. In the third chapter we analyze the computational complexity of disconnected cut to graphs of diameter 2 and to graphs of diameter 1 or at least 3. In the next chapter we mention several graph classes where the disconnected cut problem has polynomial-time algorithms. We are focused on H-free graphs. In the fifth and last chapter we present the conclusions of this thesis and also extend the already known polynomial results, constructing the first polynomial algorithm for distance-hereditary graphs.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Θεωρία γραφημάτων

Ένα γράφημα είναι ένας τρόπος αναπαράστασης των σχέσεων ανά ζεύγη μεταξύ των αντικειμένων ενός συνόλου. Η θεωρία γραφημάτων είναι ένα γνωστικό πεδίο των διακριτών μαθηματικών με στόχο την επίλυση ενός προβλήματος το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα γράφημα. Το 1736 ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler μοντελοποίησε το πρόβλημα των γεφυρών του Konigsberg σε ένα γράφημα G λύνοντας έτσι το πρόβλημα. Από τότε, πολλά προβλήματα έχουν μοντελοποιηθεί σε γραφήματα, όπως η αναπαράσταση των αεροδρομίων και των πτήσεων με τους κόμβους και τις ακμές του γραφήματος αντίστοιχα. Επίσης οι συναρτήσεις ενός αλγορίθμου μπορούν να αναπαρασταθούν με τους κόμβους του γραφήματος και η κλίση τους με τις ακμές του. Την θεωρία γραφημάτων την συναντάμε και στις κοινωνικές επιστήμες, αν σκεφτούμε ότι οι ανθρώπινες σχέσεις μπορούν να μοντελοποιηθούν σε ένα γράφημα στο οποίο οι άνθρωποι αναπαριστώνται με τους κόμβους και η σχέση ανάμεσα τους με τις ακμές.
Ο λόγος που μελετάμε τα γραφήματα είναι ότι δύο ή περισσότερα προβλήματα μπορεί να ανήκουν στην ίδια κατηγορία, έτσι λύνοντας ένα πρόβλημα στην θεωρία γραφημάτων αποφεύγουμε να λύσουμε πολλές φορές, το ίδιο πρόβλημα στις διαφορετικές εκδοχές του.

Ορισμός 1.1.1. *Ένα* **γράφημα (Graph)** G *είναι ένα ζεύγος* $G = (V, E)$ *όπου* V *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο κόμβων (ή κορυφών) και* E *είναι ένα σύνολο από διμελή σύνολα κορυφών τα οποία εκφράζουν τις ακμές του γραφήματος. Το σύνολο των κορυφών συμβολίζεται ως* $V(G)$ *και το σύνολο των ακμών ως* $E(G)$.

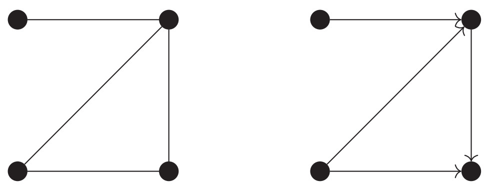
Ορισμός 1.1.2. *Αν τα άκρα μιας ακμής* e *είναι οι κορυφές* u *και* v *τότε γράφουμε* $e = \{u, v\}$ *και θα λέμε ότι οι κορυφές* u *και* v *είναι* **γειτονικές** .

Ορισμός 1.1.3. *Αν θεωρήσουμε το σύνολο των ακμών* E *ως ένα σύνολο μη διατεταγμένων ζευγών τότε το γράφημα ονομάζεται* **μη κατευθυνόμενο**.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο των ακμών E ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών τότε το γράφημα ονομάζεται **κατευθυνόμενο** .

Η αναπαράσταση ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G σε σχέση με αυτή ενός μη-κατευθυνόμενου, διαφοροποιείται μόνον ως προς τις ακμές, όπου τώρα χρησιμοποιούμε τόξα αντί για γραμμές. Δηλαδή σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα οι ακμές $\{u, v\}$ και $\{v, u\}$ είναι ίδιες ενώ σε ένα κατευθυνόμενο διαφέρουν.

Σχόλιο 1.1.4. Θα μας απασχολήσουν μόνο μη κατευθυνόμενα γραφήματα



Μη-Κατευθυνόμενο γράφημα και Κατευθυνόμενο γράφημα

1.2 Βασικοί ορισμοί

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε πότε δύο κορυφές ονομάζονται γειτονικές. Παρακάτω θα δώσουμε τον ορισμό της γειτονιάς μιας κορυφής.

Ορισμός 1.2.1. *Για μια κορυφή $v \in V(G)$ καλούμε* **γειτονία** *του v το σύνολο των κορυφών που συνδέεται η v με ακμή. Η γειτονία του v συμβολίζεται ως $N(v) := \{u|\{u, v\} \in E(G)\}$. Η* **κλειστή γειτονία** *της κορυφής v ορίζεται ως $N[v] := N(v) \cup \{v\}$. Αν για μια κορυφή $v \in V(G)$ ισχύει $N[v] = \varnothing$ τότε η v ονομάζεται* **απομονωμένη** *, ενώ αν $N[v] = V(G)$ τότε λέμε ότι η v είναι* **καθολική** .

Ορισμός 1.2.2. *Η γειτονία ενός συνόλου $S \subseteq V(G)$ ορίζεται ως $N(S) := \bigcup_{v \in S} N(v) \backslash S$*

Ορισμός 1.2.3. *'Οταν ισχύει $u = v$ τότε η ακμή λέγεται* **βρόγχος** .

Ορισμός 1.2.4. *Αν δύο ακμές έχουν ίδια άκρα τότε ονομάζονται* **παράλληλες** *. Γραφήματα που έχουν παράλληλες ακμές λέγονται* **πολυγραφήματα** *και γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές ή βρόγχους λέγονται* **απλά** *.*

Σχόλιο 1.2.5. Θα ασχοληθούμε κυρίως με απλά γραφήματα.

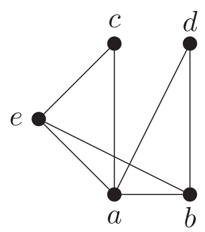
Αρκετές φορές δύο γραφήματα μπορούν να έχουν κοινές ιδιότητες. Άρα υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα τους. Θα ξεκινήσουμε με το πότε δύο γραφήματα ονομάζονται ισόμορφα.

Ορισμός 1.2.6. *Δύο γραφήματα G και H ονομάζονται* **ισόμορφα** *αν υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f\colon V(G) \longrightarrow V(H)$ τέτοια ώστε*

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

Ορισμός 1.2.7. *Σε ένα γράφημα G ο* **βαθμός** *κάθε κορυφής $v \in V(G)$ είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή v. Συμβολίσουμε τον βαθμό ως $deg_G(v)$ και θα ισχύει $deg_G(v) = |N_G(v)|$. Αν μια απομονωμένη κορυφή έχει βαθμό 0, ενώ αν έχει βαθμό 1 τότε ονομάζεται* **εκκρεμής** *κορυφή.*

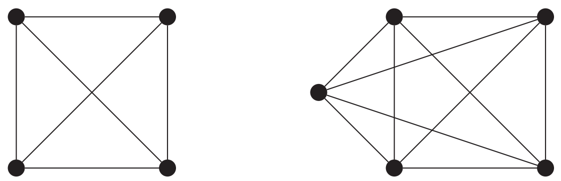
Παράδειγμα 1.2.8. Η κορυφή a έχει βαθμό 4, η κορυφή b έχει βαθμό 3, η κορυφή c έχει βαθμό 2, η κορυφή d έχει βαθμό 2, και η κορυφή e έχει βαθμό 3.



Παρακάτω θα δώσουμε τους ορισμούς κάποιων βασικών γραφημάτων με πολύ σημαντικές ιδιότητες. Ομαδοποιούμε τα γραφήματα με βάση τις κοινές τους ιδιότητες. Μια μεγάλη κατηγορία γραφημάτων είναι τα γραφήματα εκείνα όπου όλες οι κορυφές είναι γειτονικές μεταξύ τους. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται πλήρη ή κλίκες.

Ορισμός 1.2.9. *Το γράφημα με $n \geqslant 1$ κορυφές και ακμές για κάθε ζεύγος κορυφών το ονομάζουμε* **πλήρες γράφημα** *ή* **κλίκα** *και το συμβολίζουμε με K_n και θα ισχύει :*

$$K_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_j\}|1 \leqslant i, j \leqslant n\}\}.$$



K_4 και K_5

Δύο άλλες μεγάλες κατηγορίες γραφημάτων είναι τα μονοπάτια και οι κύκλοι. Τα μονοπάτια μπορούμε να τα φανταστούμε σαν κορυφές οι οποίες ενώνονται διαδοχικά και τους κύκλους σαν μονοπάτια που όμως η πρώτη και η τελευταία κορυφή είναι γειτονικές.

Ορισμός 1.2.10. *Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ καλείται* **μονοπάτι** . *Το γράφημα με $n \geqslant 2$ κορυφές που ορίζεται ως*

$$P_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\}|1 \leqslant i \leqslant n\}\}.$$

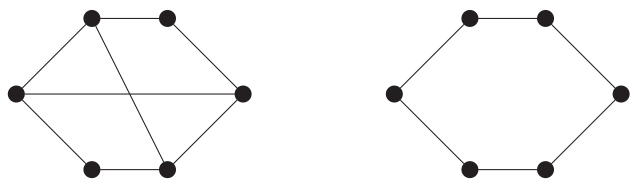
καλείται **άχορδο μονοπάτι** .

Μονοπάτι και Άχορδο μονοπάτι

Ορισμός 1.2.11. *Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \cup \{v_i v_n\} \in E(G)$ καλείται* **κύκλος** . *Το γράφημα με $n \geqslant 3$ κορυφές που ορίζεται ως*

$$C_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\}|1 \leqslant i < n\} \cup \{v_1 v_n\}\}$$

καλείται **άχορδος κύκλος**.



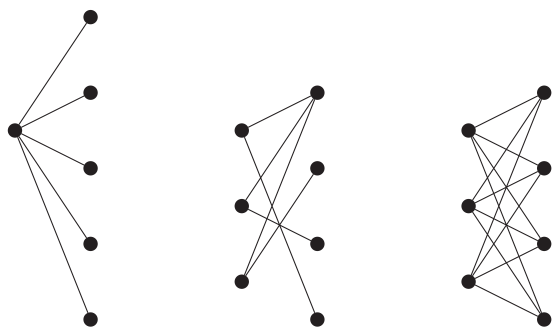
Κύκλος και Άχορδος κύκλος

Σχόλιο 1.2.12. Είναι σημαντική η διαφορά ανάμεσα στα μονοπάτια (στους κύκλους) και τα άχορδα μονοπάτια (στους άχορδους κύκλους). Κάθε άχορδο μονοπάτι (ή άχορδος κύκλος) είναι μονοπάτι (ή κύκλος) αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Η σημαντική διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι σε ένα μονοπάτι μπορεί να υπάρχουν ακμές μεταξύ μη-συνεχόμενων κορυφών v_i, v_{i+1} ενώ στο άχορδο μονοπάτι δεν επιτρέπονται τέτοιες ακμές. Αντίστοιχα. στον κύκλο μπορεί να υπάρχουν ακμές μεταξύ μη συνεχόμενων κορυφών v_i, v_{i+1} και του ζεύγους v_i, v_n
.

Σχόλιο 1.2.13. Το γράφημα C_3 καλείται **τρίγωνο** και είναι ισόμορφο με την κλίκα K_3.

Μια άλλη κατηγορία γραφημάτων είναι τα γραφήματα εκείνα όπου το σύνολο των κορυφών τους χωρίζεται σε δύο υποσύνολα A και B και δύο γειτονικές κορυφές ανήκουν η μια στο A και η άλλη στο B. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται διμερή. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός ενός τέτοιου γραφήματος.

Ορισμός 1.2.14. *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται* **διμερές** *αν μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο $V(G)$ σε δύο μη-κενά σύνολα, $V(G) = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ και για κάθε ακμή*
$e = \{x, y\} \in E(G), x \in A$ και $y \in B$. Τα σύνολα A, B ονομάζονται διαμέριση του G και συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα ως μια τριάδα $G = (A, B, E)$.
Ένα διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$ καλείται **πλήρες διμερές ή bicliques** *αν για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ υπάρχει η ακμή $\{x, y\} \in E(G)$.*
Θα συμβολίζουμε το πλήρες διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$ με $K_{p,q}$ όπου $p = |A|$ και $q = |B|$. Στην ειδική περίπτωση όπου $p = 1$ το γράφημα $K_{1,q}$ ονομάζεται **αστέρας** .



Αστέρας, Διμερές και πλήρες Διμερές

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε κάποιες πράξεις μεταξύ γραφημάτων.

Ορισμός 1.2.15. *Το* **συμπλήρωμα** *του γραφήματος $G = (V, E)$ ορίζεται ως*

$$\overline{G} = (V(G), \{\{u, v\} | u, v \in V(G) \& \{u, v\} \notin E(G)\}).$$

Δηλαδή το συμπλήρωμα ενός γραφήματος έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το G και ακριβώς εκείνες τις ακμές που δεν υπάρχουν το G. Επίσης, το συμπλήρωμα του γραφήματος G μπορούμε να το ονομάσουμε ως $co - G$.

Ορισμός 1.2.16. *Έστω G και H δύο διακεκριμένα γραφήματα. Ορίζουμε την* **ένωση** *την G και H ως εξής:*

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$$

Λόγω συντομίας χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Έστω ένα γράφημα G και ένας θετικός ακέραιος $k \geqslant 0$. Τότε $kG = \underbrace{G \cup .... \cup G}_{k}$

Ορισμός 1.2.17. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και έστω $v \in V(G)$. Η πράξη της* **διαγραφής κορυφής** *έχει ως αποτέλεσμα το γράφημα που προκύπτει από την διαγραφή της v από το σύνολο κορυφών και την διαγραφή των ακμών που είναι προσκείμενες στην v. Συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει ως $G - v$ και θα ισχύει*

$$G - v = \{V \backslash \{v\}, E(G) \backslash \{u, v\} | \{u, v\} \in E(G)\}$$

Ορισμός 1.2.18. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και έστω $v \in V(G)$ που είναι γειτονική με ακριβώς δύο κορυφές u και w. Η πράξη της* **σύμπτυξης κορυφής** *συμβολίζεται με G/v και προκύπτει από την διαγραφή της κορυφής v και την προσθήκη της ακμής $\{u, w\}$.*

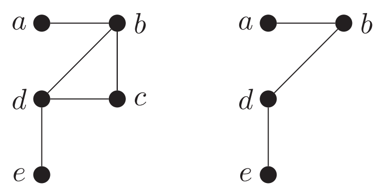
Για να καταλάβουμε καλύτερα τις σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν ανάμεσα σε δυο γραφήματα θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια του υπογραφήματος.

Ορισμός 1.2.19. *Έστω G και H δύο γραφήματα. Λέμε ότι το γράφημα H είναι* **υπογράφημα** *του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $H \subseteq G$.*

Ορισμός 1.2.20. *Έστω G και H δύο γραφήματα. Λέμε ότι το γράφημα H είναι* **επαγώμενο υπογράφημα** *του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και για κάθε $u, v \in V(H), \{u, v\} \in E(H)$ αν και μόνο αν $\{u, v\} \in E(G)$.*

Η έννοια του επαγώμενου υπογραφήματος είναι μια ειδική κατηγορία του υπογραφήματος. Δηλαδή αν το γράφημα G είναι επαγώμενο υπογράφημα του H τότε το G είναι υπογράφημα του H.

Παρατήρηση 1.2.21. Κάθε επαγώμενο υπογράφημα ενός γραφήματος G προκύπτει από διαγραφή ορισμένων κορυφών.



Μετά από την διαγραφή της κορυφής c προκύπτει το διπλανό επαγώμενο υπογράφημα

Παρακάτω θα δούμε τους ορισμούς της απόστασης, της εκκεντρότητας και της διαμέτρου. Οι όροι αυτοί αφορούν τις σχέσεις των κόμβων ενός γραφήματος.

Ορισμός 1.2.22. *Έστω x, y δύο κορυφές του γραφήματος G. Η* **απόσταση** *dist(x,y) μεταξύ του x και του y ορίζεται ως το μήκος του μικρότερου μονοπατιού με άκρα τις κορυφές x και y. Αν δεν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι τότε θα ισχύει $dist(x, y) = \infty$.*

Ορισμός 1.2.23. *Η* **εκκεντρότητα** *μια κορυφής v στο γράφημα G ορίζεται ως εξής:*

$$ecc(v) = \max_{u \in V(G)} dist(v, u).$$

Η **διάμετρος** *ενός γραφήματος ορίζεται ως εξής:*

$$dia(G) = \max_{v \in V(G)} ecc(v).$$

Η σχέση $dia(G) = \infty$, δηλαδή το γεγονός να υπάρχουν σε ένα γράφημα δύο κορυφές οι οποίες δεν περιέχουν κανένα μονοπάτι αναμεσα τους, θα μας δώσει την έννοια της μη συνεκτικότητας.

Ορισμός 1.2.24. *Ένα γράφημα G ονομάζεται* **συνεκτικό** *αν για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(G)$ υπάρχει (u,v)-μονοπάτι στο G.*

Θεώρημα 1.2.25. *Για κάθε γράφημα G, είτε το G είναι συνεκτικό είτε το $\overline{G}$ είναι συνεκτικό.*

Ορισμός 1.2.26. *Μια* **συνεκτική συνιστώσα** *ενός γραφήματος G είναι ένα μεγιστοτικό (maximal) υπογράφημα του G που είναι συνεκτικό.*

Οι όροι μεγιστοτικοί ή ελαχιστοτικοί αναφέρονται στην ιδιότητα που έχει ένα σύνολο έτσι ώστε κανένα υποσύνολο του ή υπερσύνολο που το περιέχει δεν παρουσιάζει την ιδιότητα αυτή. Στον παραπάνω ορισμό ο όρος μεγιστοτικός αναφέρεται ως προς το σύνολο των κορυφών του γραφήματος.

Από ένα γράφημα που είναι συνεκτικό θα μπορούσαμε να πάμε σε ένα γράφημα μη συνεκτικό. Αυτό μπορεί να γίνει με την διαγραφή κάπου κόμβου ή κάποιου συνόλου κόμβων. Οι παρακάτω ορισμοί αναφέρονται σε ένα γράφημα το οποίο δεν είναι αναγκαστικά συνεκτικό , αλλά αφαιρώντας κάποιους κόμβους αυξάνονται οι συνεκτικές συνιστώσες του.

Ορισμός 1.2.27. *Μια κορυφή v σε ένα γράφημα G ονομάζεται* **κόμβος τομής** *αν η αφαίρεσή της αυξάνει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του G.*

Ορισμός 1.2.28. *Έστω ένα γράφημα G με k συνεκτικές συνιστώσες και έστω $S \subseteq V(G)$. Το S καλείται* **διαχωριστής** *αν το γράφημα $G \backslash S$ έχει περισσότερες απο k συνεκτικές συνιστώσες.*

1.3 Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η θεωρία γραφημάτων έχει ως στόχο την επίλυση προβλημάτων τα οποία έχουμε αναπαραστήσει με κάποιο γράφημα. Η επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος επιτυγχάνεται με έναν αποδοτικό αλγόριθμο. Για να ορίσουμε την έννοια του αποδοτικού αλγορίθμου πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ορισμό του αλγορίθμου.

Ορισμός 1.3.1. *Δοθέντος ενός προβλήματος,* **αλγόριθμος** *είναι μια καλά προσδιορισμένη διαδικασία η οποία παρέχει τις οδηγίες σύμφωνα με τις οποίες τα δεδομένα του προβλήματος μετασχηματίζονται και συνδυάζονται για να προκύψει η λύση του προβλήματος.*

Ένας αλγόριθμος είναι σημαντικό να είναι αποδοτικός και ως προς το χρόνο εκτέλεσης αλλά και ως προς τον χώρο μνήμης. Παρακάτω θα εστιάσουμε κατά κύριο λόγο στην αποδοτικότητα ως προς τον χρόνο εκτέλεσης, δηλαδή θέλουμε οι αλγόριθμοι να εκτελούνται γρήγορα. Άρα σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να δώσουμε τον ορισμός της υπολογιστικής πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω M μια ντετερμινιστική μηχανή Turing που τερματίζει σε κάθε είσοδο. Ο* **χρόνος εκτέλεσης** *ή η* **υπολογιστική πολυπλοκότητα** *της M είναι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ όπου $f(n)$ είναι το μέγιστο πλήθος βημάτων που είναι δυνατόν να πραγματοποιήσει η M όταν το μήκος της εισόδου της είναι n.*

Άρα η υπολογιστική πολυπλοκότητα ενός αλγόριθμου εξαρτάται από τον αριθμό επαναλήψεών του και από το μέγεθος εισόδου.

Για τον υπολογισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική ανάλυση.

Ορισμός 1.3.3. *Έστω f και g δύο συναρτήσεις από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο σύνολο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f(n) = O(g(n))$, αν υπάρχουν ακέραιοι $c > 0$ και $n_0 \geqslant 0$ τέτοιοι ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει*

$$f(n) \leqslant c \cdot g(n)$$

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω αλγόριθμος με υπολογιστική πολυπλοκότητα $f(n) = 9n^5 + 2n^3 - 5n^2 + 1$. Λέμε ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι ασυμπτωτικά το πολυ n^5 , δηλαδή $f(n) = O(n^5)$.

Οι χρόνοι αναζήτησης τείνουν να αυξάνονται εκθετικά σε συνάρτηση με το μέγεθος της εισόδου n. Δηλαδή αν το μέγεθος εισόδου αυξηθεί κατά ένα, ο αριθμός των βημάτων αυξάνεται πολλαπλάσια. Θα θέλαμε έναν αλγόριθμο με καλύτερη ιδιότητα κλιμάκωσης. Έστω ένας αλγόριθμος έχει την ακόλουθη ιδιότητα : Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $d > 0$ και $k \geqslant 0$ έτσι ώστε για κάθε είσοδο μεγέθους n, ο χρόνος εκτέλεσης φράσσεται από $c \cdot n^d \cdot \log^k n$ στοιχειώδη υπολογιστικά βήματα. Αν ισχύει αυτό το όριο ως προς το χρόνο εκτέλεσης για κάποια c και d, τότε λέμε ότι ο αλγόριθμος έχει **πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης** ή ότι είναι ένας **αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου**. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι ένας αλγόριθμος είναι αποδοτικός εάν έχει πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης.

Ορισμός 1.3.5. *Τα προβλήματα απόφασης για τα οποία έχει βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος ανήκουν στην* **κλάση προβλημάτων** $\mathcal{P}$.

Πολλά προβλήματα όμως δεν είναι εύκολο να λυθούν με αποδοτικό τρόπο, δηλαδή δεν είναι εύκολο να βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος. Παρακάτω θα αναλύσουμε μια τεχνική η οποία μας βοηθάει να χαρακτηρίσουμε υπολογιστικά δύσκολα προβλήματα. Η τεχνική αυτή είναι να συγκρίνουμε τη σχετική δυσκολία διαφορετικών προβλημάτων, θα θέλαμε δηλαδή να διατυπώσουμε με τυπικό τρόπο προτάσεις όπως ' Το πρόβλημα X είναι τουλάχιστον εξίσου δύσκολο με το πρόβλημα Y ' . Αυτό θα το επιτύχουμε μέσω της έννοιας της αναγωγής. Υποθέστε ότι το πρόβλημα X μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο και επίσης υποθέτουμε ότι έχουμε ένα μαύρο κουτί που θα μπορούσε να λύσει στιγμιότυπα ενός προβλήματος X. Αν σημειώσουμε την είσοδο ενός στιγμιότυπου του X, τότε σε ένα μόνο βήμα το μαύρο κουτί θα επιστρέψει τη σωστή απάντηση. Μπορούμε να κάνουμε την ακόλουθη ερώτηση:
Μπορούν να λυθούν τυχαία στιγμιότυπα του προβλήματος Y με τη χρήση ενός πολυωνυμικού αριθμού τυπικών υπολογιστικών βημάτων, συν έναν πολυωνυμικό αριθμό κλήσεων σε ένα μαύρο κουτί που λύνει το πρόβλημα X;
Αν η απάντηση είναι ' Ναι', τότε γράφουμε ότι $Y \leqslant_p X$. Αυτό σημαίνει ότι το X είναι εξίσου δύσκολο όσο το Y όσον αφορά τον πολυωνυμικό χρόνο. Έστω ότι ισχύει ότι $Y \leqslant_p X$ και ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνιμικού χρόνου για την επίλυση του X. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε με έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για το X. Έτσι προκύπτει ότι:

Θεώρημα 1.3.6. [7] *Υποθέστε ότι $Y \leqslant_p X$. Αν το X μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε το Y μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Επίσης ισχύει ότι:

Θεώρημα 1.3.7. [7] *Υποθέστε ότι $Y \leqslant_p X$. Αν το Y δεν μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε το X δεν μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Παρακάτω θα μελετήσουμε μια άλλη κλάση προβλημάτων, την κλάση $\mathcal{NP}$. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ορισμό του πιστοποιητή.

Ορισμός 1.3.8. *Ο αλγόριθμος C(s,t) είναι ένας* **πιστοποιητής** *για το πρόβλημα X αν για κάθε s, το $s \in X$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα t τέτοιο ώστε C(s,t)=yes.*

Ορισμός 1.3.9. *Τα προβλήματα απόφασης για τα οποία υπάρχει πολυωνυμικός πιστοποιητής ανήκουν στην* **κλάση προβλημάτων** $\mathcal{NP}$.

Παρατήρηση 1.3.10. [7] $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$

Ποία είναι τα δυσκολότερα προβλήματα στην κλάση $\mathcal{NP}$;

Ορισμός 1.3.11. *Ο χαρακτηρισμός ενός τέτοιου προβλήματος θα γίνει μέσω των δύο παρακάτω ιδιοτήτων :*

(i) $X \in \mathcal{NP}$ *και*

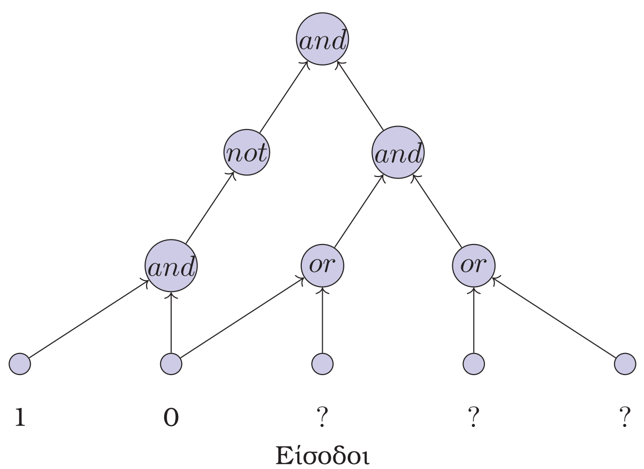
(ii) *για όλα τα* $Y \in \mathcal{NP}, Y \leqslant_p X$

Με άλλα λόγια, ζητάμε κάθε πρόβλημα του $\mathcal{NP}$ *να μπορεί να αναχθεί στο* X*. Ένα τέτοιο πρόβλημα* X *ονομάζεται* **NP-πλήρες πρόβλημα (NP-Complete)**.

Έτσι προκύπτει ότι:

Θεώρημα 1.3.12. *[7] Υποθέστε ότι το* X *είναι ένα* $\mathcal{NP}-$*πλήρες πρόβλημα. Τότε το* X *λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν και μόνο αν* $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Το πρώτο $\mathcal{NP}-$πλήρες πρόβλημα είναι το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας κυκλώματος ($Circuit - Sat$), το οποίο ορίζεται ως: Δεδομένου ενός συνδυαστικού κυκλώματος με πύλες AND, OR και NOT, υπάρχει τρόπος να θέσουμε τις εισόδους του έτσι ώστε η έξοδος να είναι 1;



Το πρόβλημα Circuit-Sat.

Αφού έχουμε ένα $\mathcal{NP}-$πλήρες πρόβλημα, μπορούμε να δείξουμε οτι και το πρόβλημα Y είναι $\mathcal{NP}-$πλήρες πρόβλημα ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

(i) Δείχνουμε ότι το X ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$.

(ii) Επιλέγουμε κάποιο $\mathcal{NP}-$πλήρες πρόβλημα Y.

(iii) Αποδεικνύουμε ότι $Y \leqslant_p X$

Δηλαδή :

Θεώρημα 1.3.13. [7] *Αν το Y είναι $\mathcal{NP}-$πλήρες πρόβλημα και το X είναι ένα πρόβλημα της κλάσης $\mathcal{NP}$ με την ιδιότητα $Y \leqslant_p X$, τότε το X είναι $\mathcal{NP}-$πλήρες.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μη Συνεκτικός Διαχωριστής (Disconnected Cut)

Η μελέτη της σύνδεσης των κορυφών ενός γραφήματος G αποτελεί μεγάλο και σημαντικό κομμάτι της θεωρίας γραφημάτων. Προβλήματα όπως ο κύκλος $Hamilton$, εύρεση γεννητικού δέντρου (spanning trees),εύρεση διαχωριστών, κτλ ανήκουν στην μελέτη αυτή. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ύπαρξης μη συνεκτικού διαχωριστή.

2.1 Ορισμός Προβλήματος

Πριν ορίζουμε το πρόβλημα, θα δώσουμε πρώτα έναν ορισμό που θα μας φανεί χρήσιμος για το πρόβλημά μας.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $U \subseteq V(G)$, ορίζουμε το $G[U]$ ως το υπογράφημα του G για το οποίο ισχύει:*

$$\{uv|u, v \in U \& uv \in E(G)\}$$

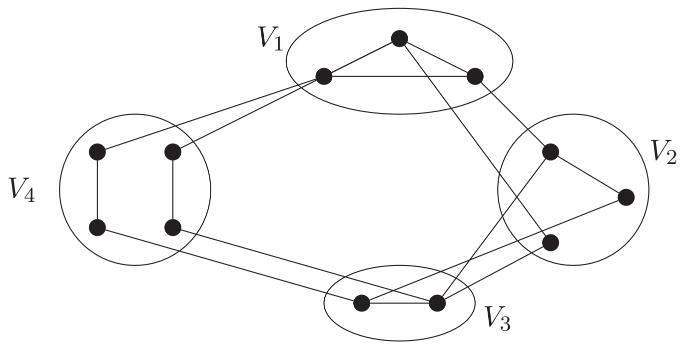
Ορισμός 2.1.2. *Έστω ένα γράφημα G και έστω $U \subseteq G$ ένας διαχωριστής. Το U καλείται* **μη συνεκτικός διαχωριστής** *εάν το υπογράφημα $G[U]$ είναι μη συνεκτικό.*

Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε τον ορισμό δύο εννοιών οι οποίες χαρακτηρίζουν την σχέση δύο συνόλων.

Ορισμός 2.1.3. *Έστω δύο σύνολα κορυφών X και Y.Τα X και Y είναι* **complete** *εάν κάθε ζεύγος κορυφών $v \in X$, $w \in Y$ είναι γειτονικές, και* **anti-complete** *εάν κάθε ζεύγος κορυφών $v \in X$,$w \in Y$ είναι μη-γειτονικές.*

Εναλλακτικά μπορούμε να δούμε το πρόβλημα disconnected cut ως εξής: Έστω ότι το σύνολο κορυφών του G, $V(G)$ μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 τέτοια ώστε καμία κορυφή του V_1 να είναι γειτονική με κάποια κορυφή του V_3 (δηλαδή το σύνολο V_1 είναι anti-complete με το σύνολο V_3) και καμία κορυφή του V_2 να είναι γειτονική με κάποια κορυφή του V_4 (δηλαδή το σύνολο V_2 είναι anti-complete με το σύνολο V_4). Έτσι τα σύνολα $V_1 \cup V_3$ και $V_2 \cup V_4$ είναι και τα δύο μη συνεκτικοί διαχωριστές του G.

Παράδειγμα 2.1.4.



Γράφημα με disconnected cuts τα σύνολα $V_1 \cup V_3$ και $V_2 \cup V_4$

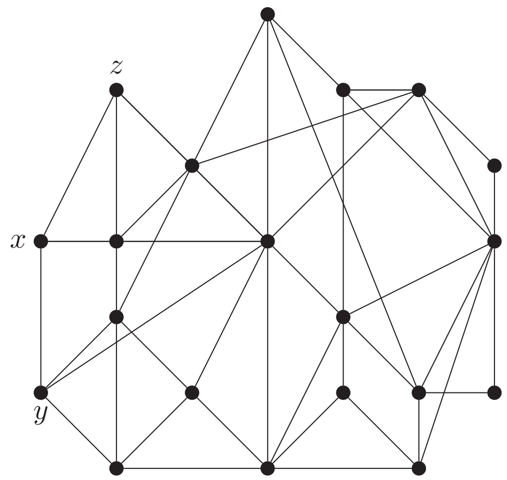
Πόσο εύκολα μπορούμε να βρούμε εάν ένα γράφημα έχει disconneced cut ;

Αυτό το ερώτημα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον όπως μπορούμε να δούμε στα [15], [13] και [16]. Θα προσπαθήσουμε να το απαντήσουμε στις επόμενες σελίδες.

2.2 Εφαρμογές

Στην θεωρία γραφημάτων, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα με πολλές μελέτες και εφαρμογές είναι η συνεκτικότητα ενός γραφήματος. Ειδικά, η συνεκτικότητα των δικτύων είναι μια από τις πιο θεμελιώδεις και χρήσιμες ιδέες για την ανάλυση διαφόρων τύπων προβλημάτων δικτύου στις πρακτικές εφαρμογές όπως τα δίκτυα επικοινωνιών. Παρακάτω θα δώσουμε ένα πρόβλημα το οποίο μοντελοποιείται με ένα γράφημα και η λύση του δίνεται μέσω του προβλήματος του μη συνεκτικού διαχωριστή.

Έστω ένα δίκτυο εργαζομένων, οι οποίοι ανταλλάσσουν πληροφορίες μεταξύ τους. Θεωρούμε ότι από κάθε εργαζόμενο μπορεί να φύγει ή να έρθει πληροφορία προς ή από κάποιον άλλον εργαζόμενο, ακόμα και αν χρειαστεί να περάσει πρώτα από άλλους εργαζόμενους. Το δίκτυο αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα γράφημα όπου κάθε κόμβος είναι ένας εργαζόμενος και κάθε ακμή δηλώνει την δυνατότητα ανταλλαγής πληροφοριών μεταξύ των δύο εργαζομένων. Παραδείγματος χάρη στο παρακάτω γράφημα ο εργαζόμενος y μπορεί να ανταλλάξει άμεσα πληροφορίες με τον εργαζόμενο x, όμως για να ανταλλάξει πληροφορία με τον εργαζόμενο z θα πρέπει πρώτα αυτή να περάσει από τον εργαζόμενο x.



Κάθε μήνα δύο ομάδες εργαζομένων (οι οποίες δεν ανταλλάσσουν άμεσα πληροφορίες) αφαιρούνται για λίγες μέρες από το δίκτυο με σκοπό την προετοιμασία κάποιου άλλου πρότζεκτ. Ο προϊστάμενος θα ήθελε να αφήσει ελεύθερη επιλογή στους εργαζομένους για τον σχηματισμό των ομάδων, χωρίς όμως να υπάρχει κίνδυνος το δίκτυο να διασπαστεί. Θα θέλαμε δηλαδή να αφαιρέσουμε δύο σύνολα κορυφών από το γράφημα τα οποία είναι anti-complete και το γράφημα να παραμείνει συνεκτικό. Το ερώτημα είναι, υπάρχει κάποια επιλογή των συνόλων αυτών που με την αφαίρεση τους το γράφημα να γίνεται μη συνεκτικό; Άρα για να αφήσει ο προϊστάμενος ελεύθερη επιλογή στους εργαζομένους θα πρέπει η απάντηση στο ερώτημα να είναι αρνητική, δηλαδή να μην υπάρχει μη συνεκτικός διαχωριστής για το αντίσοιχο γράφημα του δικτύου.

2.3 Σχετικά Προβλήματα

Αρκετά προβλήματα στην θεωρία γραφημάτων είναι ισοδύναμα με το πρόβλημα μας. Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό διότι μπορούμε τα αποτελέσματα για το ένα πρόβλημα να τα μεταφέρουμε σε κάποιο ισοδύναμό του. Επίσης είναι σύνηθες, αναπάντητες ερωτήσεις για ένα πρόβλημα να μπορούν να απαντηθούν εύκολα σε κάποιο ισοδύναμό του.

Πριν γνωρίσουμε τα ισοδύναμα προβλήματα του disconnected cut είναι σημαντικό να επισημάνουμε οτι θεωρούμε τα γραφήματα μη κατευθυνόμενα , χωρίς παράλληλες ακμές και χωρις βρόγχους. Επίσης θα συμβολίζουμε το σύνολο των κορυφών ενός γραφήματος G με V_G και και το σύνολο των ακμών του με E_G.

Οι προτάσεις και οι ορισμοί αυτή της ενότητας δίνονται στο [5]

2.3.1 H-διαχωρισμός

Ένα γράφημα H με $V_H = \{h_0, ..., h_{k-1}\}$ έχει δύο ειδών ακμές: Συνεχής και διακεκομμένη, και ένας H-διαχωρισμός του γραφήματος G είναι ένας διαχωρισμός του V_G σε k μη κενά σύνολα $V_0, V_1, ..., V_{k-1}$ τέτοια ώστε για όλες τις κορυφές $u \in V_i, v \in V_j$ και για κάθε $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$ ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν h_ih_j είναι συνεχής ακμή του H, τότε $uv \in E_G$

(ii) Αν h_ih_j είναι διακεκομμένη ακμή του H, τότε $uv \notin E_G$

Έστω το γράφημα $2K_2$ με κορυφές $h_0, ..., h_3$, συνεχείς ακμές h_0h_2, h_1h_3 και χωρίς διακεκομμένες ακμές, και έστω το γράφημα $2S_2$ με κορυφές $h_0, ..., h_3$, διακεκομμένες ακμές h_0h_2, h_1h_3 και χωρίς συνεχείς ακμές.

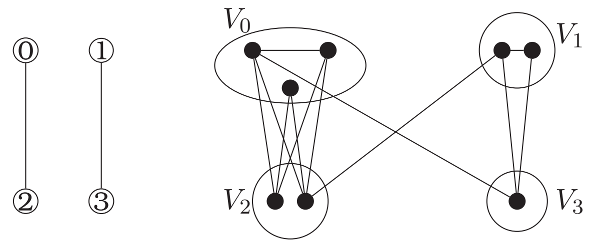
Πρόταση 2.3.1. *Ένα γράφημα G έχει $2K_2$-διαχωρισμό αν και μόνο αν το συμπλήρωμα $\overline{G}$ έχει $2S_2$- διαχωρισμό.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ένα γράφημα G έχει έναν $2K_2$-διαχωρισμό. Άρα $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, V_1 είναι complete στο V_3 και V_2 είναι complete στο V_4. Στο $\overline{G}$ το V_1 θα είναι anti-complete V_3 και V_2 θα είναι anti-complete V_4. Άρα έχω έναν $2S_2$- διαχωρισμό.

($\Leftarrow$) Έστω το γράφημα $\overline{G}$ έχει έναν $2S_2$-διαχωρισμό. Άρα $V(\overline{G}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, V_1 είναι anti-complete στο V_3 και V_2 είναι anti-complete στο V_4. Στο $\overline{\overline{G}} = G$ το V_1 θα είναι complete στο V_3 και το V_2 θα είναι complete στο V_4. Άρα έχω έναν $2K_2$- διαχωρισμό. ∎

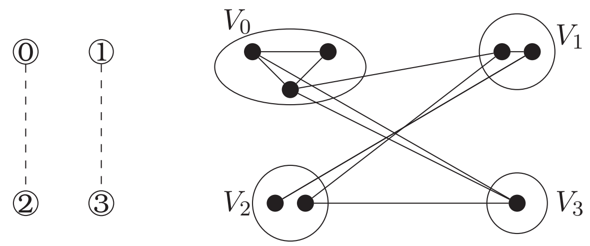
Ερώτημα(1): Μπορούμε να βρούμε αν ένα γράφημα έχει $2\mathrm{K}_2$-διαχωρισμό
;

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται: **$2\mathrm{K}_2$ -διαχωρισμός.**



Εικόνα 2.3.2. Αριστερά είναι το γράφημα $2K_2$ και δεξιά ένας $2K_2$-διαχωρισμός ενός γραφήματος G

Παρατήρηση 2.3.3. Παρατηρούμε ότι αν δύο κόμβοι στο γράφημα $2K_2$ ενώνονται με συνεχή ακμή τότε τα αντίστοιχα σύνολα στο γράφημα G είναι complete.



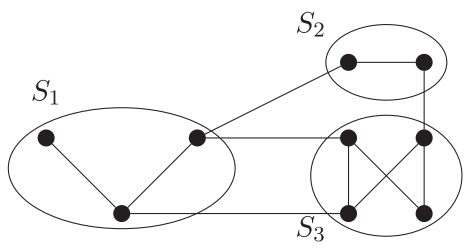
Εικόνα 2.3.4. Αριστερά είναι το γράφημα $2S_2$ και δεξιά ένας $2S_2$-διαχωρισμός ενός γραφήματος H

Παρατήρηση 2.3.5. Παρατηρούμε ότι αν δύο κόμβοι στο γράφημα $2S_2$ ενώνονται με διακεκομμένη ακμή τότε τα αντίστοιχα σύνολα στο γράφημα H είναι anti-complete.

2.3.2 Κάλυμμα Γραφήματος

Έστω G ένα γράφημα και έστω S ένα σύνολο υπογραφημάτων (όχι απαραίτητα επαγώμενων) του G, το οποίο έχει μέγεθος $|\ S\ |$. Τότε το σύνολο S ονομάζεται **κάλυψη** του G αν κάθε ακμή του G περιέχεται σε τουλάχιστον ένα υπογράφημα του S. Το σύνολο S ονομάζεται **κάλυμμα κορυφών** του G αν κάθε κορυφή του

G περιέχεται σε τουλάχιστον ένα υπογράφημα του S. Στην περίπτωση που όλα τα υπογραφήματα του συνόλου S είναι πλήρη διμερή (bicliques) τότε μιλάμε για **biclique κάλυψη** ή για **biclique κάλυμμα κορυφών**, αντίστοιχα.



Ένα biclique κάλυμμα κορυφών του γραφήματος G είναι το σύνολο $S = (S_1, S_2, S_3)$ όπου $S_1 = K_3, S_2 = K_2$ και $S_3 = K_4$

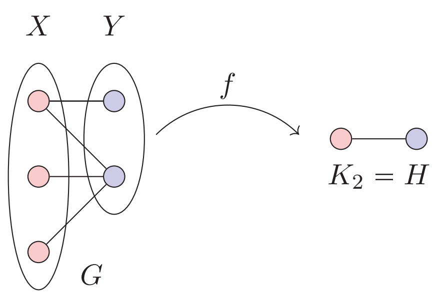
Ερώτημα(2): Μπορούμε να βρούμε αν ένα γράφημα έχει biclique κάλυμμα κορυφών μεγέθους 2 ;

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται: **2-Biclique κάλυμμα κορυφών**.

2.3.3 Ομομορφισμός Γραφήματος

Ένας **ομομορφισμός** απο ένα γράφημα G σε ένα γράφημα H είναι μια απεικόνιση $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ τέτοια ώστε $uv \in E_G \Rightarrow f(u)f(v) \in E_H$. Δηλαδή η f αντιστοιχεί γειτονικές κορυφές του G σε γειτονικές κορυφές του H.

Παράδειγμα 2.3.6. Έστω G ένα διμερές γράφημα και έστω H το γράφημα K_2 με $V(K_2) = \{u_0, u_1\}$. Ορίζουμε ως ομομορφισμό από το $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ την απεικόνιση $f(v) = \begin{cases} u_0, ifv \in X \\ u_1, ifv \in Y \end{cases}$



Για κάθε ακμή $xy \in E_G$ με $x \in X$ και $y \in Y$ ισχύει $f(x)f(y) = u_0u_1 \in E_{K_2}$

Το πρόβλημα του **H-ομομορφισμού** ελέγχει αν ένα γράφημα G επιτρέπει έναν ομομορφισμό σε ένα γράφημα H.

Ένας ομομορφισμός f ενός γραφήματος G σε ένα γράφημα H καλείται **surjective** αν για κάθε $x \in V_H$ υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή $u \in V_G$ με $f(u) = x$. Αυτό μας οδηγεί στο πρόβλημα εαν ένα γράφημα G επιτρέπει έναν surjective ομομορφισμό σε ένα γράφημα H. Το πρόβλημα αυτό καλείται **Surjective H-ομομορφισμός**.

Ερώτημα(3): Μπορούμε να βρούμε αν ένα γράφημα έχει έναν Surjective ομομορφισμό στο $\mathbf{C_4}$;

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται: **Surjective $\mathbf{C_4}$-ομομορφισμός**.

Η επόμενη έννοια είναι αρκετά κοντά στην έννοια του surjective ομομορφισμού. Ένας ομομορφισμός f απο ένα γράφημα G σε ένα επαγώμενο υπογράφημα H του G ονομάζεται **retraction** απο το G στο H αν $f(h) = h$ για όλα τα $h \in V_H$.

Ένας surjective ομομορφισμός αναφέρετε στις κορυφές ενός γραφήματος (vertex-surjective). Μια πιο ισχυρή έννοια είναι αυτή που αναφέρεται στις ακμές ενός γραφήματος (edge-surjective), η οποία ορίζεται ως: για κάθε ακμή $xy \in E_H$ με $x \neq y$ υπάρχει ακμή $uv \in E_G$ με $f(u) = x$ και $f(v) = y$. Ένας edge-surjective ομομορφισμός καλείται αλλιώς **compaction**.

Σχόλιο 2.3.7. Κάθε compaction είναι και vertex-surjective

Ερώτημα(4): Μπορούμε να βρούμε αν ένα γράφημα έχει Compaction στο $\mathbf{C_4}$;

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται: **$\mathbf{C_4}$-Compaction**.

2.3.4 Contractibility Γραφήματος

Το πρόβλημα τροποποίησης γραφήματος έχει ως είσοδο ένα γράφημα G και έναν ακέραιο k. Το ερώτημα είναι πότε ένα γράφημα μπορεί να τροποποιηθεί έτσι ώστε να ανήκει σε κάποια συγκεκριμένη κλάση γραφημάτων η οποία ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες, χρησιμοποιώντας το πολύ k πράξεις όπως η διαγραφή κορυφής, η διαγραφή ακμής ή η σύμπτυξη κορυφής. Αν ένα γράφημα H μπορεί να προκύψει από το G με μια σειρά πράξεων σύμπτυξης κορυφής τότε λέμε ότι το G είναι contractible στο H.Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι το

G έχει H-witness δομή $w = \{W(h_1), W(h_2), ..., W(h_{|V_H|})\}$, το οποίο είναι ένας διαχωρισμός του V_G σε $\mid V_H \mid$ σύνολα $W(h)$, τα οποία λέγονται $H-$witness, καθένα απο τα οποία αποτελεί ένα συνεκτικό υπογράφημα του G και για κάθε δύο $h_i, h_j \in V_h$, τα σύνολα $W(h_i)$ και $W(h_j)$ είναι γειτονικά στο G αν και μόνο αν τα h_i και h_j είναι γειτονικά στο H. Το πρόβλημα Π -Contractibility έχει ως είσοδο ένα γράφημα G και έναν ακέραιο k και ελέγχει αν ένα γράφημα G είναι contractible στο Π χρησιμοποιώντας το πολύ k συμπτύξεις κορυφών.

Στο Κεφάλαιο 1 είχαμε δεί μια κλάση γραφημάτων, τα πλήρη διμερή γραφήματα (bicliques), και τα είχαμε συμβολίσει με $K_{k,l}$. Αν $k \geqslant 2$ και $l \geqslant 2$ τότε το γράφημα ονομάζεται **proper biclique** .

Ερώτημα(5): Μπορούμε να βρούμε ένα γράφημα το οποίο είναι contractible σε ένα $\mathrm{K_{k,l}}$;

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται: **Biclique Contractibility**.

2.4 Ισοδυναμία προβλημάτων

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε τα προβλήματα: $2K_2$-διαχωρισμός, $2S_2$-διαχωρισμός, 2-Biclique κάλυμμα κορυφών, Surjective ομομορφισμό στο C_4, C_4 -Compaction και Biclique Contractibility. Παρακάτω θα δουμε πως αυτά τα προβλήματα σχετίζονται με το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή.

Πρόταση 2.4.1. *[6] Έστω ένα συνεκτικό γράφημα G. Τα (i)-(v) είναι ισοδύναμα:*

(i) Το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

(ii) Το γράφημα $\overline{G}$ έχει $2K_2$-διαχωρισμό.

(iii) Το γράφημα G έχει $2S_2$-διαχωρισμό.

(iv) Το γράφημα $\overline{G}$ έχει κάλυμμα κορυφών από ακριβώς δύο biclique.

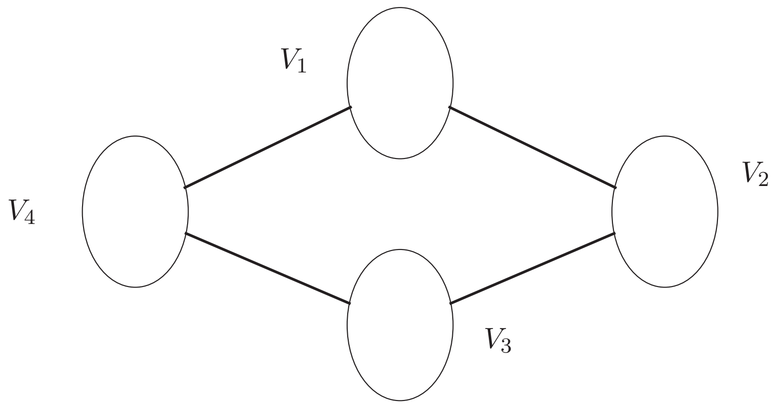
(v) Το γράφημα G έχει surjective ομομορφισμό στο C_4.

Αν $diam(G) = 2$, τότε τα (i)-(v) είναι επίσης ισοδύναμα με τα ακόλουθα:

(vi) Το γράφημα G έχει compaction στο C_4.

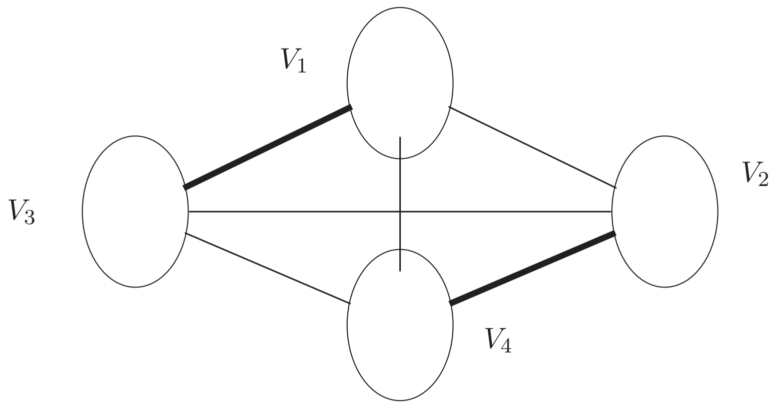
(vii) Το γράφημα G είναι contractible σε κάποιο $K_{k,l}$ για $k, l \geqslant 2$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Άρα το γράφημα μπορεί να πάρει την μορφή:



Τα V_1 και V_3 είναι anti-complete στο G, άρα παίρνοντας το συμπλήρωμα του G , τα V_1 και V_3 θα είναι complete στο $\overline{G}$. Άρα έχουμε έναν $2K_2$-διαχωρισμός. Αντίστοιχα για τα σύνολα V_2 και V_4.

$(i) \Leftarrow (ii)$ Έστω H ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο έχει έναν $2K_2$-διαχωρισμός. Αυτό σημαίνει ότι ότι το γράφημα H μπορεί να πάρει την μορφή:



Παίρνω $\overline{H} = G$. Άρα, αφού στο H τα σύνολα V_1, V_3 είναι complete, στο G θα είναι anti-complete. Το ίδιο ισχύει και για τα σύνολα V_2, V_4. Το $G[V_1 \cup V_3]$ είναι μη συνεκτικό, και το $G \backslash V_1 \cup V_3 = G[V_2 \cup V_4]$ είναι επίσης μη συνεκτικό , αρα το $V_1 \cup V_3$ είναι ένας μη συνεκτικός διαχωριστής.

Το ίδιο ισχύει και για το $V_2 \cup V_4$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Πρόταση 2.2.1

$(i) \Rightarrow (iv)$ Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και έστω ότι το G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή, άρα V_G= $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ με V_1 να είναι anti-complete στο V_3, και το V_2 anti-complete στο V_4. Από το (ii) συμπεραίνουμε ότι το $\overline{G}$ έχει $2K_2$-διαχωρισμό με V_1 να είναι complete στο V_3 και το V_2 να είναι complete στο V_4. Άρα τα V_1, V_3 και V_2, V_4 είναι δύο πλήρη διμερή γραφήματα. Άρα το $\overline{G}$ έχει δύο biclique τα V_1, V_3 και V_2, V_4 .

$(i) \Leftarrow (iv)$ Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα. Έστω ότι το $\overline{G}$ έχει ακριβώς δύο biclique τα V_1, V_3 και V_2, V_4 με V_G= $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$. Παίρνοντας το συμπλήρωμα, δηλαδή το G, το V_1 θα είναι anti-complete στο V_3 και το V_2 θα είναι anti-complete στο V_4. Άρα στο G το $V_1 \cup V_3$ θα είναι ένας μη συνεκτικός διαχωριστής αφού και το $V_2 \cup V_4$ θα είναι μη συνεκτικό.

$(i) \Rightarrow (v)$ Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και έστω ότι το G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή, άρα V_G=$\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ με V_1 να είναι anti-complete στο V_3, και το V_2 anti-complete στο V_4. Ορίζω τον ομομορφισμό απο το $f\colon V_G \longrightarrow V_{C_4}$ την απεικόνιση $f(v) = \begin{cases} u_1, if v \in V_1 \\ u_2, if v \in V_2 \\ u_3, if v \in V_3 \\ u_4, if v \in V_4 \end{cases}$

Έχουμε ότι η $f(v)$ είναι ομομορφισμός αφού κάθε ακμή uv στο G δεν είναι ανάμεσα στα σύνολα V_1 και V_3, ούτε ανάμεσα στα σύνολα V_2 και V_4. Αυτό ισχύει και για τις κορυφές $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ του κύκλου C_4. Επίσης είναι surjective αφού κάθε κόμβος του C_4 αντιστοιχείται σε έναν κόμβο του G, αφού τα $V_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, ..., 4\}$.

$(i) \Leftarrow (v)$ Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και έστω ότι το G έχει surjective ομομορφισμό στο C_4. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια απεικόνιση $f\colon V_G \longrightarrow V_{C_4}$ με $f(v) = \begin{cases} u_1, v \in V_1 \\ u_2, v \in V_2 \\ u_3, v \in V_3 \\ u_4, v \in V_4 \end{cases}$

Αφού u_1 δεν είναι γειτονικό με το u_3 τότε το V_1 είναι anti-complete στο V_3. Αντίστοιχα για τους κόμβους u_2, u_4. Άρα το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα με $diam(G) = 2$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει f η οποία είναι vertex-surjective ομομορφισμός από το G στο C_4. Υποθέτουμε ότι $f(u) = c_1$ και $f(v) = c_2$. Αν $uv \in E$ τότε c_1 και c_2 είναι οι απεικονίσεις από τα άκρα της ακμής. Στην άλλη περίπτωση, παίρνοντας σαν υπόθεση ότι $diam(G) = 2$, υπάρχει ένας κόμβος s γειτονικός με τα u και

v. Τότε $f(s) = c_1$ ή $f(s) = c_2$. Στην πρώτη περίπτωση sv και στην δεύτερη περίπτωση us είναι η επιθυμητή ακμή. Όμοια για τις ακμές c_2c_3, c_3c_4 και c_4c_1. Άρα το γράφημα έχει compaction στο C_4.

$(v) \Leftarrow (vi)$ Σχόλιο 2.3.7

$(i) \Rightarrow (vii)$ Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα με $diam(G) = 2$. Έστω ότι το G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή U. Έστω k το πλήθος των συνεκτικών συνιστοσών του $G[U]$, τότε $k \geqslant 2$. Έστω $X_1, X_2, ..., X_k$ τα σύνολα των κορυφών των συνιστοσών του $G[U]$. Τότε οποιαδήποτε δύο X_i, X_j είναι μη γειτονικά. Επίσης έστω ότι l είναι το πλήθος των συνεκτικων συνιστοσών του $G[V\backslash U]$ και έστω ότι τα $Y_1, Y_2, ..., Y_l$ είναι τα σύνολα των κορυφών των συνεκτικών συνιστοσών στο $G[V\backslash U]$. Τότε $l \geqslant 2$ και οποιαδήποτε δύο U_i, U_j είναι μη γειτονικά. Παρακάτω θα δείξουμε ότι τα $k + l$ σύνολα $X_1, X_2, ..., X_k, Y_1, Y_2, ..., Y_l$ δημιουργούν τα $K_{k,l}$-witness σύνολα στο G. Από τα παραπάνω αρκεί να δείξουμε ότι δύο σύνολα X_i και Y_j είναι γειτονικά για κάθε ζεύγος δεικτών i και j με $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ζεύγος (X_i, Y_j) τέτοιο ώστε X_i και Y_j δεν είναι γειτονικά. Τότε η απόσταση από μια κορυφή στο X_i σε μια κορυφή στο Y_j είναι τουλάχιστον τρία. Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $diam(G) = 2$.

$(i) \Leftarrow (vii)$ Υποθέτουμε ότι το G είναι $K_{k,l}$-contractible για κάποια $k, l \geqslant 2$. Αυτό σημαίνει ότι το G έχει $K_{k,l}$-witness δομή $w = \{W(a_1), W(a_2), ..., W(a_k), W(b_1), W(b_2), ..., W(b_l)\}$ όπου $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ και $\{b_1, b_2, ..., b_l\}$ είναι τα δύο σύνολα του $K_{k,l}$. Επειδή και το k και το l είναι μικρότερα του 2, τα σύνολα $W(a_1) \cup W(a_2) \cup ... \cup W(a_k)$ σχηματίζουν μη συνεκτικό διαχωριστή στο G.

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

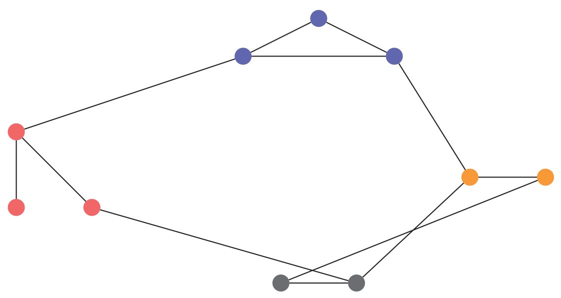
Υπολογιστική Πολυπλοκότητα του Μη Συνεκτικού Διαχωριστή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος του μη συνεκτικού διαχωριστή. Δηλαδή, δοθέντος ενός γραφήματος G, μπορεί να κατασκευαστεί ένας αλγόριθμος που να ελέγχει εάν το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή σε πολυωνυμικό χρόνο; Παρακάτω θα δούμε ότι για $diam(G) = 2$ ένας τέτοιος αλγόριθμος είναι δύσκολο να κατασκευαστεί. Δηλαδή για $diam(G) = 1$ ή $diam(G) > 2$ το πρόβλημα ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}$ ενώ, για $diam(G) = 2$ το πρόβλημα ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$.

3.1 Γραφήματα με διάμετρο διάφορη του 2

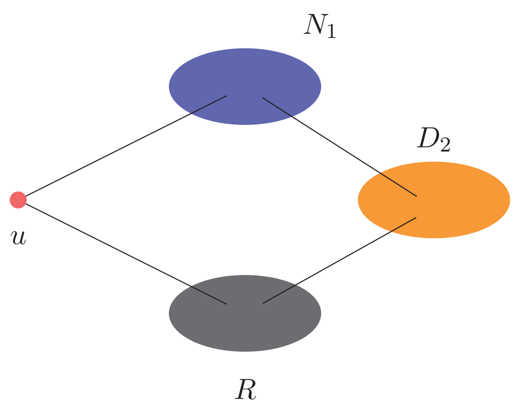
Ορισμός 3.1.1. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και h μια απεικόνιση από το G στο $C_4 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Αν η απεικόνιση h απεικονίζει μια κορυφή $v \in G$ στο c_i τότε λέμε ότι η κορυφή v παίρνει το χρώμα i. Έτσι η h δημιουργεί έναν χρωματισμό με ακριβώς τέσσερα χρώματα, τα 1, 2, 3, 4 τέτοιον ώστε μια ακμή δεν έχει άκρα με χρώματα (1,3) ή (2,4). Ονομάζομαι την h* **diagonal coloring** .

Παρατήρηση 3.1.2. [4] Κάθε diagonal coloring αντιστοιχεί σε έναν vertex-surjective ομομορφισμό από το G στο C_4.



Θεώρημα 3.1.3. *[4] Μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο εαν ένα γράφημα G έχει vertex-surjective ομομορφισμό στο C_4 αν για το γράφημα G ισχύει ότι $diam(G) \neq 2$.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 3.1.2 παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το γράφημα G έχει diagonal coloring. Υποθέτουμε ότι το γράφημα G δεν έχει διάμετρο 2. Αν $diam(G) = 1$, τότε το G είναι ένα πλήρες γράφημα και δεν έχει diagonal coloring αφού θα υπάρχει ακμή με άκρα τα χρώματα (1,3) ή (2,4). Αν $diam(G) \geqslant 3$ τότε υπάρχουν δύο κορυφές v, u στο G με $d_G(u, v) = diam(G) \geqslant 3$. Αυτές τις κορυφές μπορούμε να τις βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο. Θέτουμε το χρώμα 1 στην κορυφή u , το χρώμα 2 σε όλους του γείτονές της, το χρώμα 3 σε όλες τς κορυφές με απόσταση 2 από το u και ο χρώμα 4 σε όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος G.



Το σύνολο N_1 έχει όλους τους γείτονες της κορυφής u. Το σύνολο D_2 έχει όλες τις κορυφές με απόσταση 2 από την κορυφή u και στο σύνολο R οι υπόλοιπες κορυφές. Ανάμεσα στην κορυφή u και σε κάποια κορυφή $x \in D_2$ δεν υπάρχει ακμή διότι αν υπήρχε οι κορυφές u και x θα ήταν γειτονικές και έτσι η κορυφή x θα είχε ήδη τοποθετηθεί στο σύνολο N_1. Αντίστοιχα, ανάμεσα στην κορυφή $z \in N_1$ και σε κάποια κορυφή $y \in R$ δεν υπάρχει ακμή, διότι αν υπήρχε οι κορυφές οι κορυφές y και z θα ήταν γειτονικές και έτσι η απόσταση της κορυφής y με την κορυφή u θα ήταν 2 και έτσι η κορυφή y θα είχε ήδη τοποθετηθεί στο σύνολο D_2. Άρα δεν υπάρχει ακμή με άκρα τα χρώματα (1,3) ή (2,4), οπότε ο χρωματισμός αυτός είναι diagonal coloring. ■

Λήμμα 3.1.4. [4] *Έστω G ένα γράφημα. Αν το G έχει διάμετρο ίση με ένα τότε το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Αν το G έχει διάμετρο μεγαλύτερη ή ίση με τρία τότε έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.*

Ορισμός 3.1.5. *Ένα υποσύνολο $D \subset V$ είναι* **dominating set** *του γραφήματος $G = (V, E)$ αν κάθε κορυφή του $V \setminus D$ είναι γειτονική με τουλάχιστον μια κορυφή του D. Αν $D = \{u\}$, τότε u είναι* **dominating vertex** *του G. Η ακμή uv του γραφήματος G λέγεται dominating αν το σύνολο $\{u, v\}$ είναι dominating. Το σύνολο $\{u, v\}$ λέγεται dominating non-edge αν το σύνολο $\{u, v\}$ είναι dominating αλλά δεν υπάρχει η ακμή uv.*

Θεώρημα 3.1.6. [4] *Μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο εάν ένα γράφημα G έχει vertex- surjective ομομορφισμό στο C_4 αν*

1. *το G έχει dominating ακμή, ή*
2. *το G έχει φραγμένο μέγιστο βαθμό, ή*
3. *το G είναι C_3-free.*

Απόδειξη.

1. Υποθέτουμε ότι το G έχει dominating ακμή, την $\{xy\}$. Οι κορυφές αυτές θα έχουν δύο διαφορετικά χρώματα σε οποιοδήποτε diagonal coloring h. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο diagonal coloring,το h και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η κορυφή x παίρνει το χρώμα 1 και η κορυφή y το χρώμα 2. Παρακάτω θα δούμε ότι σε πολυωνυμικό χρόνο μπορούμε να ελέγξουμε αν μπορούμε να χρωματίσουμε και τις υπόλοιπες κορυφές έτσι ώστε ο χρωματισμός να είναι diagonal coloring.Ονομάζουμε το σύνολο $U \subseteq V$ χρωματισμένο εάν κάθε κορυφή του U έχει πάρει κάποιο χρώμα. Ορίζουμε το σύνολο όλων των χρωματισμένων γειτόνων μιας κορυφής u ως $N^c(u)$ και επίσης ονομάζουμε το σύνολο U ως j-χρωματισμένο αν το πλήθος των διαφορετικών χρωμάτων του U είναι j.

Ξεκινάμε ως εξής. Παίρνουμε τυχαία μια κορυφή s η οποία δεν έχει πάρει κάποιο χρώμα και δεν είναι γειτονική με το x, και της δίνουμε το χρώμα 3. Επίσης παίρνουμε τυχαία μια κορυφή t η οποία δεν έχει πάρει κάποιο χρώμα και δεν είναι γειτονική με το y, και της δίνουμε το χρώμα 4. Αυτό απαιτεί χρόνο το πολύ $O(\mid V \mid^2)$. Ακολουθούμε τον παρακάτω κανόνα : Όσο υπάρχει κορυφή u η οποία δεν έχει πάρει κάποιο χρώμα και το $N^c(u)$ είναι 3-χρωματισμένο, δίνουμε στην κορυφή u το μόνο χρώμα που μπορεί να πάρει. Έπειτα ελέγχουμε αν υπάρχει κορυφή w η οποία δεν έχει πάρει κάποιο χρώμα και το $N^c(u)$ είναι 4-χρωματισμένο. Αν υπάρχει, τότε στην κορυφή w δεν μπορούμε να δώσουμε κατάλληλο χρώμα και έτσι το ζεύγος (s,t) είναι λάθος υπόθεση, αφού υπενθυμίζουμε ότι το πήραμε τυχαία. Τότε παίρνουμε τυχαία ένα άλλο ζεύγος (s',t') όπου δίνουμε στις κορυφές τα χρώματα 3 και 4 και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Έστω ότι υπάρχει ένα ζεύγος (s,t), στο οποίο εφαρμόσαμε τον παραπάνω κανόνα, και δεν υπάρχει κορυφή w για την οποία να ισχύει ότι το $N^c(u)$ είναι 4-χρωματισμένο. Αφού όμως το $\{xy\}$ είναι dominating ακμή, τότε όλες οι κορυφές του γραφήματος θα είναι είτε γείτονες του x είτε γείτονες του y άρα μπορώ να χωρίσω τις κορυφές του G ο οποίες δεν είναι χρωματισμένες σε δύο σύνολα: πρώτον στο $U_{i,j}$ στο οποίο ανήκουν κορυφές οι οποίες είναι γειτονικές με τα χρώματα i και j για $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$ (παρατηρούμε ότι το ζευγάρι (3,4) λείπει, διότι αν υπήρχε τέτοια κορυφή το πλήθος των διαφορετικών χρωμάτων που θα έχουν οι γείτονές της θα ήταν 3 , αφού έχει γείτονα σίγουρα ή το x ή το y) και δεύτερον, στο σύνολο U_i στο οποίο ανήκουν κορυφές οι οποίες είναι γειτονικές μόνο με το χρώμα i για $i = 1,2$. Έτσι χρωματίζω με το χρώμα 1 τις κορυφές που ανήκουν στο $U_{1,2}, \cup U_{1,4} \cup U_{2,4} \cup U_1 \cup U_2$ και με το χρώμα 2 τις κορυφές που ανήκουν στο $U_{1,3} \cup U_{2,3}$. Αυτός ο χρωματισμός είναι diagonalo coloring.

2. Έστω ότι το G έχει φραγμένο μέγιστο βαθμό, δηλαδή ο μέγιστος βαθμός όλων των κορυφών είναι d. Λόγω του Λήμματος 3.1.4 υποθέτω ότι το G έχει διάμετρο ίση με 2. Τότε αν πάρω μια κορυφή αυτή θα μου δώσει το πολύ d γείτονες, όμως κάθε γειτονάς της θα μου δώσει το πού $d-1$ άλλους γείτονες. Επαναλαμβάνω αυτή τη διαδικασία για όλους τους γείτονες της αρχικής μας κορυφή, αυτό θα μας δώσει $1 + d + d(d-1)$ κορυφές, άρα παίρνω ότι το μέγιστο βαθμός κορυφών είναι $d^2 + 1$, μπορώ να τρέξω έναν αλγόριθμο ο οποίος δεν θα εξαρτάται από το πλήθος των κορυφών n αλλά θα εξαρτάται από το $d^2 + 1$, άρα ο αλγόριθμος θα έχει πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης.

3. Υποθέτουμε ότι το G είναι ένα C_3-free γράφημα. Λόγω του Πορίσματος 3.1.4 υποθέτουμε ότι η διάμετρος είναι ίση με δύο. Επίσης, από την Παρατήρηση 3.1.2 παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το γράφημα G έχει diagonal coloring.

   Αν το G έχει dominating vertex u τότε το G δεν έχει diagonal coloring, διότι σε διαφορετική περίπτωση το u θα ήταν γειτονικό με απαγορευμένο χρώμα. Άρα υποθέτουμε οτι το G δεν έχει dominating vertex.

   Ισχυριζόμαστε ότι το G έχει diagonal coloring αν και μόνο αν $\mid V \mid \geqslant 4$.

   Υποθέτουμε ότι το G έχει diagonal coloring c. Αφού όμως $\mid c(V) \mid = 4$, τότε θα υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις κορυφές, άρα $\mid V \mid \geqslant 4$.

   Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι $\mid V \mid \geqslant 4$. Έστω u μια κορυφή με βαθμό τουλάχιστον δύο. Δίνουμε στην κορυφή u το χρώμα 1, σε έναν από τους γείτονές της το χρώμα 2, στους υπόλοιπους γείτονές της το χρώμα 4 και στις υπόλοιπες κορυφές το χρώμα 3 (αφού το G δεν έχει dominating vertex. τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή η οποία δεν είναι γειτονική με την κορυφή u .) Τώρα μένει να εξασφαλίσουμε ότι δεν υπάρχει ακμή της οποίας τα άκρα έχουν χρώμα 2 ή 4. Αν υπήρχε τέτοια ακμή, έστω η xy, τότε θα υπήρχαν και οι ακμές xu και xy. Αυτό όμως μας δημιουργεί ένα C_3. Άτοπο λόγω της υπόθεσης, άρα δεν υπάρχει ακμή της οποίας τα άκρα έχουν χρώμα 2 ή 4. Άρα το G έχει diagonal coloring.

   ■

Πόρισμα 3.1.7. *Αφού το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή και το πρόβλημα vertex-surjective ομομορφισμό στο C_4 είναι ισοδύναμα, τότε για $diam(G) \neq 2$ μπορούμε να βρούμε μη συνεκτικό διαχωριστή για το γράφημα G σε πολυωνυμικό χρόνο.*

3.2 Γραφήματα με διάμετρο ίση με 2

Έστω ένα γράφημα G για το οποίο ισχύει ότι $diam(G) = 2$. Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$ θα χρειαστούμε τις παρακάτω έννοιες. Η παρακάτω ενότητα στηρίζεται στο [5].

Ορισμός 3.2.1. *Ονομάζουμε* **structure** *το $\mathcal{A} = (A; R_1, R_2, ..., R_k)$, όπου το A ονομάζεται* **domain** *του $\mathcal{A}$ και το R_i είναι η n_i-οστή σχέση στο A, για $i = 1, ..., k$, ένα σύνολο απο n_i-αδα στοιχεία του A.*

Πόρισμα 3.2.2. *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ μπορούμε να το δούμε σαν ένα structure $G = (V; \{(u, v), (v, u) | uv \in E\})$.*

3.2.1 $\mathcal{NP}$-πληρότητα και $\mathcal{B}$-Homomorphism

Ορισμός 3.2.3. *Έστω $\mathcal{A} = (A; R_1, R_2, ..., R_k)$ και $\mathcal{B} = (B; S_1, S_2, ..., S_k)$ δύο structure όπου R_i και S_i είναι σχέσεις της ίδιας n_i-αδας. Τότε ένας ομομορφισμός απο το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$ είναι μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ τέτοια ώστε $(a_1, ..., a_{n_i}) \in R_i$ υποδηλώνει ότι $(f(a_1), ..., f(a_i)) \in S_i$, $\forall i$ και κάθε n_i-αδα $(a_1, ..., a_{n_i}) \in A^{n_i}$. Το πρόβλημα απόφασισης το οποίο ελέγχει εάν δοθέντος ενός structure $\mathcal{A}$ επιτρέπει έναν ομομορφισμό σε ένα συγκεκριμένο $\mathcal{B}$ ονομάζεται $\mathcal{B}$-Homomorphism.*

Έστω $\mathcal{A} = (A; R_1, R_2, ..., R_k)$ ένα structure και l ένας ακέραιος.Το **power structure** $\mathcal{A}^l$ έχει domain το A^l και για $1 \leqslant i \leqslant k$, έχει τις σχέσεις

$$R_i^l = \{((a_1^1, ..., a_l^1), ..., (a_1^{n_i}, ..., a_l^{n_i})) | (a_1^1, ..., a_1^{n_i}), ..., (a_l^1, ..., a_l^{n_i}) \in R_i\}$$

Ορισμός 3.2.4. *Ένας **πολυμορφισμός** του $\mathcal{A}$ είναι ένας ομορφισμός από το $\mathcal{A}^l$ στο $\mathcal{A}$ για κάποιον ακέραιο l. Ένας l-οστός πολυμορφισμός ονομάζεται **ενδομορφισμός** . Το σύνολο των πολυμορφισμών του $\mathcal{A}$ ορίζεται ως $Pol(\mathcal{A})$. Ένα structure ονομάζεται **core** αν όλοι οι ενδομορφισμοί του είναι αυτομορφισμοί.*

Ορισμός 3.2.5. *Μια δυαδική συνάρτηση f σε ένα domain A είναι μια **semilattice** συνάρτηση αν $f(h, f(i, j)) = f(f(h, i), j)$, $f(i, j) = f(j, i)$ και $f(i, i) = i$ για κάθε $i, j \in A$. Μια τριαδική συνάρτηση f είναι μια **Mal'tsev** συνάρτηση αν $f(i, j, j) = f(j, j, i) = i$ για κάθε $i, j \in A$. Μια τριαδική συνάρτηση f είναι μια **majority** συνάρτηση αν $f(h, h, i) = f(h, i, h) = f(i, h, h) = h$ για κάθε $i, h \in A$.*

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω $\mathcal{B} = (B; S_1, S_2, ..., S_k)$ ένας core και $A \subseteq B$ με $|A| = 2$ ως ενιαία σχέση στο $\mathcal{B}$. Αν για κάθε $f \in Pol(\mathcal{B})$, $f_{|A}$ δεν είναι majority, Mal'tsev ούτε semilattice τότε το πρόβλημα $\mathcal{B}-$HOMOMORPISM είναι NP-πλήρες.*

Έστω $\mathcal{D}$ το structure στο domain $D = \{0, 1, 3\}$ με τις τέσσερις παρακάτω σχέσεις:

$$S_1 := \{(0, 3), (1, 1), (3, 1), (3, 3)\}$$

$$S_2 := \{(1, 0), (1, 1), (3, 1), (3, 3)\}$$

$$S_3 := \{(1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

$$S_4 := \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$$

Πρόταση 3.2.7. *Το πρόβλημα $\mathcal{D}$-HOMOMORPHISM είναι NP-complete.*

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης γίνεται με χρήση του θεωρήματος 3.2.6 Για το $\mathcal{D}$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.

Πρόταση 3.2.8. *Το πρόβλημα H-RETRACTION είναι NP-complete για γραφήματα με διάμετρο 2.*

Η αναγωγή γίνεται απο το πρόβλημα $\mathcal{D}$-HOMOMORPHISM.

Υπενθυμίζουμε οτι, παρακάτω το γράφημα H θα είναι ο κύκλος C_4, με κορυφές h_0, h_1, h_2, h_3 και ακμές $h_0h_1, h_1h_2, h_2h_3, h_3h_0$. Έστω $\mathcal{A} = (A; R_1, R_2, R_3, R_4)$ είναι μια περίπτωση του $\mathcal{D}$-HOMOMORPHISM. Απο το $\mathcal{A}$ κατασκευάζουμε ένα γράφημα G. Τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ αντιστοιχούν στις κορυφές του G. Αν $p, q \in R_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$, τότε λέμε οτι η κορυφή p είναι τύπου l και η κορυφή q είναι τύπου r. Μια κορυφή μπορεί να είναι τύπου l και τύπου r ταυτόχρονα. Για κάθε $(p, q) \in R_i$ φτιάχνουμε 4 νέες κορυφές a_p, b_p, c_q, d_q και τις ακμές $a_pp, a_pb_p, b_pp, c_qq, c_qd_q, d_qq$. Οι κορυφές a_p, b_p, c_q, d_q είναι τύπου a, b, c, d αντίστοιχα.

Έστω H ένα επαγώμενο υπογράφημα του G (με κορυφές h_0, h_1, h_2, h_3). Το G μπορεί να έχει βρόγχους διότι το H έχει. Έξω απο το γράφημα H δεν έχει σημασία αν υπάρχουν βρόγχοι. Στο G ενώνουμε κάθε κορυφή τύπου a με το h_0 και h_3. Κάθε κορυφή τύπου b με το h_1 και h_2, κάθε κορυφή τύπου c με το h_2 και h_3, κάθε κορυφή τύπου d με το h_0 και h_1 και προσθέτουμε ακμή ανάμεσα στο h_0 και κάθε κορυφή του A.

Συνεχίζουμε την κατασκευή του G περιγράφοντας πως θα διακρίνουμε δύο ζεύγη που ανήκουν σε διαφορετικά R_i.

Αν $(p, q) \in R_1$ τότε προσθέτουμε τις ακμές c_pp, qh_2

Αν $(p, q) \in R_2$ τότε προσθέτουμε τις ακμές h_2p, b_pq

Αν $(p, q) \in R_3$ τότε προσθέτουμε τις ακμές h_2p, h_2q, a_pc_q

Αν $(p, q) \in R_4$ τότε προσθέτουμε τις ακμές h_2p, h_2q, b_pd_q

Ολοκληρώνουμε την κατασκευή προσθέτοντας μια ακμή μεταξύ δύο οποιονδήποτε τύπου a, μεταξύ δύο οποιονδήποτε τύπου b, μεταξύ δύο οποιονδήποτε τύπου c, μεταξύ δύο οποιονδήποτε τύπου d. Ονομάζουμε το γράφημα G ως $\mathcal{D}$-γράφημα.

Λήμμα 3.2.9. *Κάθε $\mathcal{D}$-γράφημα έχει διάμετρο 2 και ένα dominating non-edge .*

Υπενθυμίζουμε οτι το πρόβλημα H-RETRACTION είναι ένα NP-πλήρες πρόβλημα.

Θεώρημα 3.2.10. *Το πρόβλημα H-RETRACTION είναι ένα NP-πλήρες πρόβλημα ακόμα και για $\mathcal{D}$-γραφήματα.*

Απο το παραπάνω θεώρημα και από το λήμμα 3.2.9 μπορούμε να συμπεράνουμε οτι το πρόβλημα H-RETRACTION είναι NP-πλήρες για γραφήματα διαμέτρου 2 τα οποία έχουν dominating non-edge.

Παρακάτω θα κατασκευάσουμε ένα νέο τύπου γραφήματος, το H-compactor του G. Έστω H ένα επαγώμενο υπογράφημα του G.Για κάθε κορυφή $v \in V_G \backslash V_H$ προσθέτουμε τρείς νέες κορυφές u_v, w_v, y_v και τις ακμές $h_0u_v, h_0y_v, h_1u_v, h_2w_v$ $, h_2y_v, h_3w_v, u_vv, u_vw_v, u_v, y_v, vw_v, w_vy_v$. Λέμε οτι οι κορφές u_v, w_v, y_v είναι τύπου u, w, y αντίστοιχα. Επίσης προσθέτουμε όλες τις ακμές ανάμεσα σε κάθε δύο κορυφές $u_v, u_{v'}$ και ανάμεσα σε κάθε δύο κορυφές $w_v, w_{v'}$ με $v \neq v'$. Για κάθε ακμή vv' στο $E_G \backslash E_H$ διαλέγουμε μια αυθαίρετη διάταξη όπως απο το v στο v' και έπειτα προσθέτουμε μια καινούρια κορυφή $x_{vv'}$ και τις ακμές $vx_{vv'}, v'x_{vv'}, u_vx_{vv'}, w_{v'}x_{vv'}$. Η καινούρια αυτή κουφή είναι τύπου x. Το καινούριο γράφημα G' ονομάζεται **H-compactor** του G.

Το γράφημα H-compactor του G έχει διάμετρο 3. Στόχος μας είναι να τροποποιήσουμε το γράφημα έτσι ώστε να πάμε σε ένα γράφημα διαμέτρου 2. Έστω G ένα $\mathcal{D}$-γράφημα. Για κάθε κορυφή του G δημιουργούμε κορυφές τύπου u, v, w, y και ακμές όπως περιγράφεται στον ορισμό του H-compactor. Έπειτα ακολουθούμε τα εξής τρία βήματα:

1 Δεν δημιουργούμε όλες τις κορυφές τύπου x για τις παρακάτω ακμές του G: ακμές ανάμεσα σε κορυφές τύπου a, ακμές ανάμεσα σε κορυφές τύπου b, ακμές ανάμεσα σε κορυφές τύπου c και ακμές ανάμεσα σε κορυφές τύπου d.

2 Για $(p, q) \in R_i$ και $1 \leqslant i \leqslant 4$, επιλέγουμε τις τύπου x κορυφές $x_{a_p p}, x_{p b_p}, x_{a_p b_p}$, $x_{q c_q}, x_{q d_q}$ και $x_{d_q c_q}$. Έπειτα δημιουργούμε τις εξής κορυφές τύπου x. Για $(p, q) \in R_1$ διαλέγουμε $x_{q c_q}$, για $(p, q) \in R_2$ $x_{q b_p}$, για $(p, q) \in R_3$ $x_{a_p c_q}$ και για $(p, q) \in R_4$ διαλέγουμε $x_{d_q b_p}$. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε δημιουργήσει κορυφές τύπου x για κάθε ακμή του $E_G \backslash E_H$.

3 Προσθέτουμε ακμή ανάμεσα στη κορυφή h_0 και σε κάθε κορυφή τύπου x που δημιουργήσαμε στο βήμα 2. Επίσης προσθέτουμε ακμή ανάμεσα στην ακμή h_2 και κάθε τέτοια κορυφή.

Ονομάζουμε το γράφημα που προκύπτει **semi-compactor** του G.

Λήμμα 3.2.11. *Έστω G ένα $\mathcal{D}$-γράφημα. Κάθε semi-compactor του G έχει διάμετρο 2 και dominating non-edge.*

Λήμμα 3.2.12. *Έστω G'' ένας semi-compactor ενός $\mathcal{D}$-γραφήματος του G. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i Το G κάνει retract στο H,

ii Το G'' κάνει retract στο H,

iii Το G'' κάνει compact στο H,

iv Το G'' έχει vertex-surjective ομομορφισμό στο H.

Λαμβάνοντας υπόψην το Λήμμα 3.2.11, το Λήμμα 3.2.12 και το Θεώρημα 3.2.10 καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.13. *Το πρόβλημα του surjective C_4 ομομορφισμού είναι NP πλήρες για γραφήματα με διάμετρο 2 ακόμα και αν έχουν dominating non-edge.*

Να σημειωθεί οτι όλες οι κατασκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν σε πολυωνυμικό χρόνο.

Πόρισμα 3.2.14. *Όπως αποδείχθηκε στην ενότητα 2.3 , το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή και το πρόβλημα του surjective C_4 ομομορφισμού είναι ισοδύναμα. Άρα, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή είναι NP πλήρες για γραφήματα με $diam(G) = 2$, ακόμα κ αν αυτά έχουν dominating non-edge.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κλάσεις γραφημάτων όπου το πρόβλημα έχει πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα

Όπως δείξαμε στις προηγούμενες ενότητες το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή έχει πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα για γραφήματα με διάμετρο διάφορη του δύο. Για διάμετρο ίση του δύο το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP. Παρακάτω θα δείξουμε οτι υπάρχουν κλάσεις γραφημάτων όπου το πρόβλημα έχει πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα ακόμα και όταν η διάμετρος τους είναι ίση με δύο.

4.1 H-free γραφήματα

Για να ορίσουμε τις παρακάτω κλάσεις γραφημάτων θα χρειαστεί να κατανοήσουμε την έννοια του H-free γραφήματος.

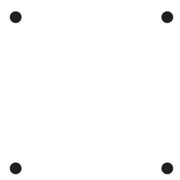
Ορισμός 4.1.1. *Έστω ένα γράφημα G και ένα γράφημα H. Εάν το G δεν περιέχει επαγώμενο υπογράφημα ισόμορφο του H τότε το G λέγεται* **H-free** *γράφημα.*

Ορισμός 4.1.2. *Η ένωση απο r αντίγραφα του γραφήματος G συμβολίζεται ως rG.*

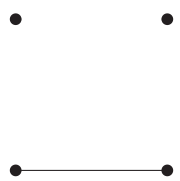
Για να δείξουμε οτι το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή για το γράφημα G λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο θα δείξουμε πρώτα οτι το πρόβλημα του $2K_2$-διαχωρισμού για το γράφημα $\overline{G}$ λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, αφού τα δύο προβλήματα είναι ισοδύναμα.

4.1.1 $4P_1$-free γραφήματα και $(2P_1 + P_2)$-free γραφήματα (ή co-diamond-free γραφήματα)

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό το γράφημα $4P_1$ είναι ένα γράφημα με τέσσερις κορυφές και καμία ακμή, δηλαδή:

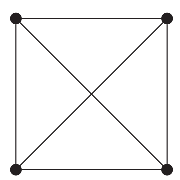


και το γράφημα $2P_1 + P_2$ ή co-diamond-free είναι ένα γράφημα με τέσσερις κορυφές και μια ακμή, δηλαδή:

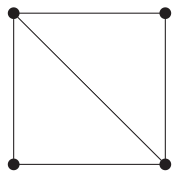


Εάν το γράφημα G είναι ένα $(4P_1)-$free γράφημα, τότε το $\overline{G}$ θα είναι ένα K_4-free γράφημα, αφού $\overline{4P_1}$=K_4. Εάν το G είναι ένα $(2P_1+P_2)-$free γράφημα, τότε το $\overline{G}$ θα είναι ένα $(\overline{2P_1 + P_2})-$free γράφημα ή αλλιως ένα diamond-free γράφημα.

Το γράφημα K_4 είναι το:



Και το γράφημα $(\overline{2P_1 + P_2})$ (ή diamond) είναι το γράφημα K_4 από το οποίο έχουμε αφαιρέσει μια ακμή, δηλαδή:



Παρακάτω θα δώσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.3. *Ονομάζουμε* **σταθερό σύνολο** *ένα σύνολο μη γειτονικών κορυφών.*

Ορισμός 4.1.4. *Ονομάζουμε* **universal pair** *το ζεύγος $\{u, v\}$ για το οποίο ισχύει οτι $V \backslash \{u, v\} \subseteq N(u) \cup N(v)$*

Πρόταση 4.1.5. *[2] Έστω G ένα μη συνεκτικό γράφημα.Το G έχει $2K_2$ διαχωρισμό αν και μόνο αν το G έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες όπου η κάθε μια συνιστώσα είναι μη συνεκτική στο συμπλήρωμα*

Πρόταση 4.1.6. *[3] Εαν κάποια απο τις παρακάτω συνθήκες ισχύει, τότε μπορούμε να απαντήσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει ή δεν έχει $2K_2$ διαχωρισμό.*

Σ1. $| V | \leqslant 3$,

Σ2. Το G είναι μη συνεκτικό γράφημα,

Σ3. Το G είναι αστέρας.

Απόδειξη. (Σ1) Αν το γράφημα έχει το πολύ 3 κορυφές. τότε δεν έχει $2K_2$ διαχωρισμό, αφού χρειάζονται 4 κορυφές.

(Σ2) Ο έλεγχος της πρότασης 4.1.5 εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο.

(Σ3) Έστω οτι το γράφημα G είναι αστέρας με κορυφές $u, x_1, x_2, ..., x_k$ και ακμές $ux_1, ux_2, ..., ux_k$. Έστω τοποθετώ στο σύνολο V_1 την κορυφή u, στο σύνολο V_2 την κορυφή x_1 και στο σύνολο V_3 την κορυφή x_i, με $i \neq 1$. Στο σύνολο V_4 δεν μπορώ να τοποθετήσω καμία άλλη κορυφή, οφού η μόνη που είναι γειτονική με το x_i είναι η κορυφή u και έχει ήδη τοποθετηθεί στο σύνολο V_1. Άρα το γράφημα G δεν έχει $2K_2$ διαχωρισμό. ∎

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε οτι οι συνθήκες (Σ1)-(Σ3) δεν ισχύουν.

Πρόταση 4.1.7. *[3] Αν ένα γράφημα έχει universal pair τότε έχει $2K_2-$διαχωρισμό.*

Απόδειξη. Δοκιμάζουμε κάθε ζεύγος για να δούμε αν είναι universal pair. Έστω οτι έχει universal pair το $\{u, v\}$. Θεωρούμε τα σύνολα $V_1 = \{u\}$, $V_2 = N(u)$, $V_3 = \{v\}$ και $V_4 = N(v) \backslash N[u]$. Εάν το σύνολο V_4 είναι κένο, μεταφέρουμε έναν γείτονα του v από το σύνολο V_2 στο σύνολο V_4. Θα υπάρχει ένας τέτοιος γείτονας αφού το γράφημα G δεν είναι αστέρας. ∎

Ορισμός 4.1.8. *Μια κορυφή u καλείται **nice** είτε αν η u έχει το πολύ μια κορυφή με την οποία δεν είναι γειτονική, είτε αν $\overline{G}[\overline{N}(u)]$ είναι μη συνεκτικό, είτε αν υπάρχει κορυφή $v \in N(u)$ τέτοια ώστε $\overline{N}(u) \subseteq N(v)$.*

Παρατήρηση 4.1.9. [3] Εάν το ζεύγος $\{u, v\}$ είναι universal pair, τότε οι κορυφές u και v είναι nice.

Πρόταση 4.1.10. *[3] Εάν το γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό όπου κάθε σύνολό του είναι κλίκα, τότε το γράφημα έχει nice κορυφή.*

Απόδειξη. Έστω το γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό (A, B, C, D) όπου το σύνολο A είναι κλίκα. Έστω $u \in A$ και ορίζω τα σύνολα $A' = \{u\}$ και $B = B' \cup (A \backslash \{u\})$. Ο διαχωρισμός (A', B', C, D) είναι επίσης $2K_2-$διαχωρισμός του G.

Υποθέτουμε οτι $C \subseteq N(u)$. Επιλέγουμε κάποιο $v \in C$ και ορίζουμε $B'' = B' \cup (C \backslash \{v\})$ και $C' = \{v\}$. Τότε ο διαχωρισμός (A', B'', C', D) είναι επίσης $2K_2-$διαχωρισμός του G. Υπενθυμίζουμε οτι $\overline{N}(u) = D \backslash N(u)$. Εάν $\mid D \backslash N(u) \mid \leqslant 1$, τότε η κορυφή u είναι nice κορυφή. Σε διαφορετική περίπτωση, οποιαδήποτε κορυφή $v \in N(u)$ είναι γειτονική σε όλες τις κορυφές του συνόλου $\overline{N}(u)$, και έτσι η κορυφή u είναι nice.

Υποθέτουμε οτι $C \nsubseteq N(u)$. Επίσης υποθέτουμε οτι $D \nsubseteq N(u)$. Ορίζουμε $B'' = B'' \cup (N(u) \cap (C \cup D)), C' = C \backslash N(u)$ και $D' = D \backslash N(u)$. Τότε ο διαχωρισμός (A', B'', C', D') είναι επίσης $2K_2-$διαχωρισμός του G. Υπενθυμίζουμε οτι $\overline{N}(u) = C' \cup D'$ και οτι $\overline{G}[C' \cup D']$ είναι μη συνεκτικά. Άρα η κορυφή u είναι nice. ∎

(Σ4) Το G έχει κορυφή nice.

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε οτι η συνθήκη (Σ4) δεν ισχύει.

Θεώρημα 4.1.11. *[3] Σε πολυωνυμικό χρόνο μπορεί να ελεγχθεί εαν ένα γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό (A, B, C, D) τέτοιο ώστε τα B και C να είναι σταθερά σύνολα.*

Απόδειξη. Παρακάτω θα περιγράψουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο ο οποίος ελέγχει το παραπάνω θεώρημα. Έστω b και c ένα ζεύγος κορυφών του G. Θέλουμε να αποφασίσουμε εαν υπάρχει ένας $2K_2-$διαχωρισμός τέτοιος ώστε τα B και C είναι σταθερά σύνολα και $b \in B$ και $c \in C$.Εάν η απάντηση είναι ναι, τότε η απάντηση και στο αρχικό ερώτημα είναι ναι. Εάν η απάντηση είναι όχι, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για διαφορετικό ζεύγος κορυφών του G. Εάν η απάντηση είναι όχι για κάθε ζεύγος, τότε η απάντηση στο αρχικό ερώτημα είναι όχι. Ο αλγόριθμος έχει χρόνο εκτέλεσης $O(n^3)$.

Τοποθετούμε την κορυφή b στο B και την κορυφή c στο C. Έστω w μια κορυφή η οποία ανήκει στο σύνολο $V \backslash \{b, c\}$. Αρχικά δημιουργούμε μια λίστα για την κορυφή w, $\{A, B, C, D\}$. Εάν η w είναι γειτονική με την b, τότε αφαιρούμε από την λίστα το σύνολο B, αλλιώς αφαιρούμε το A. Ομοίως, εάν η w είναι γειτονική με την c, τότε αφαιρούμε από την λίστα το σύνολο C, αλλιώς αφαιρούμε το D. Με αυτόν τον τρόπο η λίστα θα έχει πάντα δύο στοιχεία, έτσι το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα 2-ικανοποιησιμότητας το οποίο μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. ■

Πόρισμα 4.1.12. *[3] Σε πολυωνυμικό χρόνο μπορεί να ελεγχθεί εάν ένα K_4-free ή ένα diamond-free γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό.*

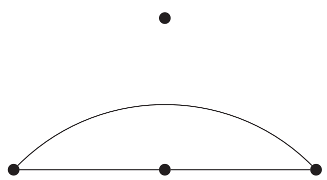
Απόδειξη. Έστω G ένα K_4-free ή ένα diamond-free γράφημα και έστω οτι έχει έναν $2K_2-$διαχωρισμό (A, B, C, D). Υπενθυμίζουμε οτι οι συνθήκες (Σ1)-(Σ4) δεν ισχύουν. Επειδή δεν ισχύει η συνθήκη (Σ4) μπορούμε να συμπεράνουμε οτι κάθε σύνολο A, B, C, D θα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές διότι αν υπήρχε μόνο μια κορυφή u σε κάποιο από τα σύνολα αυτά τότε το γράφημα $\overline{G}[\overline{N}(u)]$ θα ήταν μη συνεκτικό, και άρα η κορυφή u θα ήταν nice. Εάν κανένα από τα σύνολα A και B δεν είναι σταθερό, τότε δημιουργείτε ένα K_4 μεταξύ δύο κορυφών του A και δύο κορυφών του B. Άτοπο, αφού το G είναι ένα K_4-free γράφημα. Άρα τουλάχιστον ένα από τα δύο θα πρέπει να είναι σταθερό σύνολο. Όμοια για την περίπτωση όπου τα C και D είναι σταθερά σύνολα. Τώρα στην περίπτωση όπου το G είναι ένα diamond-free γράφημα. Τα (A, B, C, D) δεν είναι το καθένα μια κλίκα διότι σε αυτη τη περίπτωση θα υπήρχε nice κορυφή λόγω της πρότασης 4.1.10. Έστω b και b' μη γειτονικές κορυφές του συνόλου B. Εάν το σύνολο A δεν είναι σταθερό σύνολο, τότε οι κορυφές b, b' και δύο γειτονικές κορυφές του συνόλου A θα σχημάτιζαν ένα diamond γράφημα. Άτοπο, αφού το G είναι diamond-free γράφημα. Άρα το σύνολο A είναι σταθερό σύνολο. Όμοια για τα σύνολα B,C και D,μπορούμε να συμπεράνουμε οτι είναι σταθερά σύνολα. Οι συνθήκες του θεωρήματος 4.1.11 ικανοποιούνται, άρα το συμπέρασμα βγαίνει μέσω αυτού.

■

4.1.2 $(C_3 + P_1)$-free γραφήματα (ή co-claw-free γραφήματα)

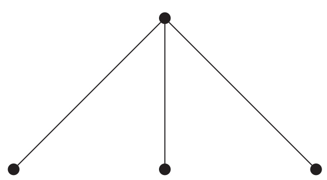
Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τα $(C_3 + P_1)$-free ή co-claw-free γραφήματα και εάν μπορούμε να βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο έναν μη συνεκτικό διαχωριστή.

Το γράφημα co-claw είναι το γράφημα το οποίο έχει ένα K_3 και μια απομονωμένη κορυφή, δηλαδή:



Εάν το γράφημα G είναι ένα co-claw-free γράφημα, τότε το $\overline{G}$ θα είναι ένα claw-free γράφημα αφού το co-claw είναι το συμπλήρωμα του claw.

Το γράφημα claw ή αλλιώς $K_{1,3}$ είναι το γράφημα αστέρας με $q = 3$, δηλαδή:



Ορισμός 4.1.13. *Ορίζουμε με* **α(**G**)** *το μέγιστο πλήθος μη γειτονικών κορυφών, δηλαδή το μέγιστο μέγεθος ένας σταθερού συνόλου.*

Λήμμα 4.1.14. *[2] Έστω G ένα γράφημα με α(G) $\leqslant 2$. Τότε το γράφημα G θα έχει έναν $2K_2-$διαχωρισμό αν και μόνο αν το G έχει universal pair.*

Λήμμα 4.1.15. *[3] Έστω G ένα claw-free γράφημα. Αν α(G) $\geqslant 5$, τότε το G δεν έχει $2K_2-$διαχωρισμό. Αν α(G) $\leqslant 2$, τότε το G έχει universal pair και λόγω του Λήμματος 4.1.14 θα έχει και $2K_2-$διαχωρισμό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι α(G) $\geqslant 5$ και οτι το γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό (A, B, C, D). Έστω $u_1, u_2, ..., u_5$ είναι οι πέντε κορυφές που αποτελούν το μεγαλύτερο σταθερό σύνολο. Τουλάχιστον τρεις από αυτές βρίσκονται σε ένα από τα σύνολα $A \cup B$ ή $C \cup D$. Έστω u_1, u_2, u_3 βρίσκονται στο σύνολο $A \cup B$. Όμως, σύνολο A είναι complete στο σύνολο B, άρα μπορούμε να υποθέσουμε οτι και οι τρεις κορυφές βρίσκονται σε ένα από τα δύο σύνολα. Έστω οτι βρίσκονται στο σύνολο A. Θεωρώ κορυφή $u \in B$, τότε οι κορυφές $\{b, u_1, u_2, u_3\}$ δημιουργούν ένα claw υπογράφημα. Άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει οτι το γράφημα G είναι claw-free. Άρα το γράφημα G δεν έχει $2K_2-$διαχωρισμό.

Για το δεύτερο μέρος του λήμματος υποθέτουμε οτι α(G) $\leqslant 2$.

Εάν α(G) $= 1$ τότε το γράφημα G είναι κλίκα. Αυτό σημαίνει οτι έχει universal pair και άρα θα έχει $2K_2-$διαχωρισμό.

Εάν α(G) $= 2$ τότε παίρνουμε τις δύο κορυφές u, v οι οποίες αποτελούν το μέγιστο σταθερό σύνολο. Όμως κάθε άλλη κορυφή του γραφήματος είναι γειτονική είτε με την u είτε με την v, διότι αν υπήρχε κορυφή w η οποία δεν είναι γειτονική με καμία απο τις δύο θα ίσχυε α(G) $= 3$. Άρα οι κορυφές u, v είναι universal pair και άρα το γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό.

■

Θεώρημα 4.1.16. *[3] Σε πολυωνυμικό χρόνο μπορεί να ελεγχθεί εάν ένα claw-free γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό.*

Απόδειξη. Παρακάτω θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει σε πολυωνυμικό χρόνο εάν το γράφημα G έχει έναν $2K_2-$διαχωρισμό (A, B, C, D). Υπενθυμίζουμε οτι οι συνθήκες (Σ1)-(Σ4) δεν ισχύουν. Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα το α(G) είναι ίσο ή με 3 ή με 4. Μπορούμε να ελέγξουμε σε χρόνο $O(n^5)$ να ένα γράφημα G έχει α(G) $\leqslant 4$, ελέγχοντας όλα τα υποσύνολα των κορυφών μεγέθους το πολύ 5.

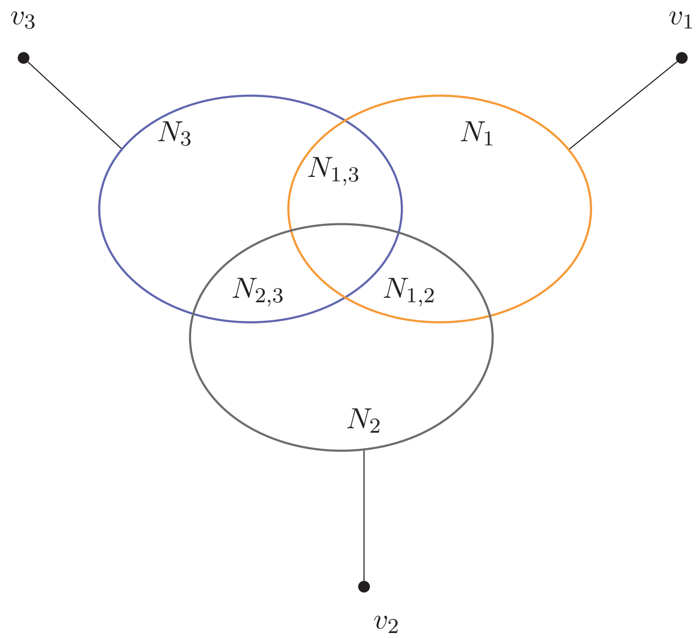
Στην αρχή θα τοποθετήσουμε κάποιες κορυφές στα σύνολα B και C , και στη συνέχεια για κάθε κορυφή που δεν την έχουμε τοποθετήσει ακόμα θα δημιουργήσουμε μια λίστα με τα σύνολα στα οποία μπορεί να τοποθετηθεί.Στόχος μας είναι η λίστα αυτή να έχει μέγεθος το πολύ δύο.

Έστω $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ το σταθερό σύνολο μεγέθους 3. Ορίζουμε τα σύνολα:

$N_i = N(v_i) \backslash (N(v_j) \cup N(v_k))$ για $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

$N_{i,j} = \{u \in N(v_i) \cap N(v_j)\}$ για $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$

$\overline{N} = \overline{N}(S)$



Παρατηρούμε οτι:

$i.$ Δεν υπάρχουν ακμές ανάμεσα στα σύνολα N_i και $N_{j,k}$ για $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ διότι αν υπήρχαν, τότε δύο γειτονικές κορυφές $x \in N_i$ και $y \in N_{j,k}$ μαζί με τις κουφές v_j και v_k θα δημιουργούσαν ένα claw υπογράφημα.

$ii.$ Το $N(x) \cap N_{1,2}$ είναι κλίκα για κάθε $x \in N_{i,3}, i = 1, 2$ διότι αν υπήρχε κορυφή $x \in N_{i,3}(i \in \{1, 2\})$ και μη γειτονικές κορυφές $y, z \in N(x) \cap N_{1,2}$ τότε οι κορυφές αυτές μαζι με την κορυφή v_3 θα δημιουργούσαν ένα claw υπογράφημα.

Υποθέτουμε οτι το γράφημα G έχει $2K_2-$διαχωρισμό (A, B, C, D). Οι κορυφές του συνόλου S δεν μπορούν να βρίσκονται σε τρία διαφορετικά σύνολα, διότι τα σύνολα A και B είναι complete. Το ίδιο ισχύει και για τα σύνολα C και D. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $v_1, v_2 \in B$ και $v_3 \in C$. Συνεπώς $A \subseteq N_{1,2}$ και $D \subseteq N_{1,3} \cup N_{2,3} \cup N_3$. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $\overline{N} \cup N_1 \cup N_2 \subseteq B \cup C$. Στη συνέχεια, αφού $A \subseteq N_{1,2}$ και λόγω της (i) δεν υπάρχουν ακμές ανάμεσα στα σύνολα $N_{1,2}$ και N_3, έχουμε οτι $N_3 \cap B = \emptyset$. Τώρα υποθέτουμε οτι $x \in B$ για κάποια $x \in N_{i,3}, i = 1$ ή $i = 2$. Λόγω της (ii) και του οτι $A \subseteq N_{1,2}$ καταλήγουμε στο οτι το σύνολο A είναι μια κλίκα. Λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 4.1.10 μπορούμε να συμπεράνουμε οτι το γράφημα G έχει μια nice κορυφή. Άτοπο, διότι έχουμε υποθέσει οτι η συνθήκη (Σ4) δεν ισχύει. Άρα έχουμε οτι $N_{1,3} \cup N_{2,3} \subseteq C \cup D$. Συνοψίζοντας έχουμε:

1. $N_{1,2} \subseteq A \cup B \cup C$
2. $N_{1,3} \cup N_{2,3} \cup N_3 \subseteq C \cup D$
3. $\overline{N} \cup N_1 \cup N_2 \subseteq B \cup C$

Παρατηρούμε οτι όλες οι κορυφές,εκτός αυτές του συνόλου $N_{1,2}$, έχουν λίστα μεγέθους δύο. Υποθέτουμε οτι, αν υπάρχει $2K_2-$διαχωρισμός για το γράφημα G με $v_1, v_2 \in B$ και $v_3 \in C$, τότε υπάρχει $2K_2-$διαχωρισμός για το γράφημα G όπου $N_{1,2} \subseteq A \cup B$. Παρατηρούμε οτι, αν αποδείξουμε την υπόθεση, τότε όλες οι κορυφές θα έχουν λίστα μεγέθους δύο, και έτσι το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα 2-ικανοποιησιμότητας το οποίο μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Απόδειξη υπόθεσης: Μεταξύ όλων των $2K_2-$διαχωρισμών όπου $v_1, v_2 \in B$ και $v_3 \in C$ ας εξετάσουμε αυτόν που μεγιστοποιεί το πλήθος p των κορυφών του συνόλου $N_{1,2}$ στο $(B \cup C)$, και μεταξύ όλων αυτών επιλέγουμε εκείνο που μεγιστοποιεί το πλήθος q των κορυφών του N_1 στο B. Αυτός ο $2K_2-$διαχωρισμός δεν έχει καμία κορυφή του $N_{1,2}$ στο C.

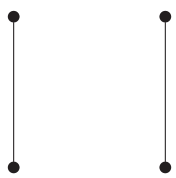
Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή οτι $u \in N_{1,2} \cup C$. Αν η κορυφή u είναι γειτονική με κάθε κορυφή στο A τότε μεταφέρουμε την κορυφή u στο σύνολο B. Ο αριθμός p δεν θα αλλάξει, όμως ο αριθμός q θα αυξηθεί, άτοπο διότι έχουμε θεωρήσει οτι το q είναι το μέγιστο. Άρα υπάρχει κορυφή $z \in A$ με την οποία η κορυφή u δεν είναι γειτονική. Η κορυφή z έχει μια κορυφή $t \in A$ με την οποία δεν είναι γειτονική, διότι σε διαφορετική περίπτωση η κορυφή z θα ήταν nice. Τότε η t είναι γειτονική με την u διότι σε αντίθετη περίπτωση οι κορυφές v_1, u, t, z δημιουργούν ένα claw υπογράφημα. Επειδή ο αριθμός p είναι μέγιστος, γνωρίζουμε οτι η t έχει μια κορυφή $x \in D$ με την οποία δεν είναι γειτονική, διότι σε διαφορετική περίπτωση θα μπορούσαμε να την μετακινήσουμε στο σύνολο D και έτσι ο αριθμός p θα αυξάνονταν. Παρατηρούμε οτι η κορυφή x είναι γειτονική σε κάποια απο τις κορυφές v_1, v_2, διότι σε διαφορετική περίπτωση οι κορυφές u, x, v_1, v_2 δημιουργούν ένα claw υπογράφημα. Για λόγους συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε οτι η κορυφή x είναι γειτονική με την v_1. Τότε η x είναι γειτονική με την z, διότι σε διαφορετική περίπτωση οι κορυφές v_1, z, t, x δημιουργούν ένα claw υπογράφημα. Τότε όμως και οι κορυφές x, v_3, u, z δημιουργούν ένα claw υπογράφημα. Άρα σε κάθε περίπτωση δημιουργείτε ένα claw υπογράφημα, όμως αυτό απο την υπόθεση είναι άτοπο.

Άρα αποδείχθηκε η υπόθεση, συνεπώς και το θεώρημα. ■

4.1.3 $2P_2$-free γραφήματα

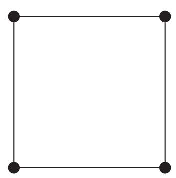
Θα ασχοληθούμε τώρα με τα $(2P_2)$-free γραφήματα και αν μπορούμε να βρούμε μη συνεκτικό διαχωριστή σε πολυωνυμικό χρόνο.

Το γράφημα $2P_2$ είναι το γράφημα με τέσσερις κορυφές, το οποίο αποτελείται από δύο μονοπάτια μεγέθους δύο, δηλαδή:



Εάν το γράφημα G είναι ένα $(2P_2)$-free γράφημα, τότε το $\overline{G}$ θα είναι ένα $C_4 - free$ γράφημα αφού το $2P_2$ είναι το συμπλήρωμα του C_4.

Υπενθυμίζουμε οτι το γράφημα C_4 είναι ο κύκλος με τέσσερις κορυφές, δηλαδή:



Θεώρημα 4.1.17. *[2] Έστω G ένα C_4-free γράφημα. Το γράφημα G έχει $2K_2$-διαχωρισμό αν και μόνο άν έχει universal pair.*

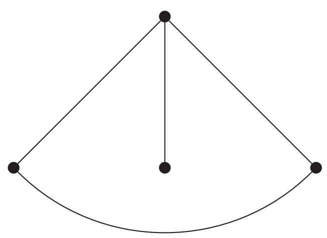
Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Για κάθε $2K_2$-διαχωρισμό του G το ένα σύνολο από κάθε ζεύγος $\{A, B\}$ και $\{C, D\}$ θα σχηματίζει κλίκα, διότι σε διαφορετική περίπτωση θα υπάρχουν κορυφές $x, y \in A$ μη γειτονικές και κορυφές $u, v \in B$ μη γειτονικές, οι οποίες δημιουργούν έναν κύκλο C_4, αφού τα σύνολα A και B είναι complete και από την υπόθεση αυτό είναι άτοπο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε οτι τα σύνολα A και C είναι κλίκες. Έστω $w \in A$ και $z \in C$. Άρα $(A \cup B)\backslash\{w\} \subseteq N(w)$ και $(C \cup D)\backslash\{z\} \subseteq N(z)$, άρα $V\backslash\{w, z\} \subseteq N(w) \cup N(z)$, άρα οι κορυφές $\{w, z\}$ είναι universal pair.

($\Leftarrow$) Πρόταση 4.1.7 ∎

4.1.4 $(\overline{P_1 + P_3})$-free γραφήματα (ή paw-free γραφήματα)

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το γράφημα paw ή αλλιώς $\overline{P_1 + P_3}$ και ποία είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα για το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή στα paw-free γραφήματα.

Το γράφημα αυτό είναι ένα γράφημα με τέσσερις κορυφές το οποίο περιέχει ένα C_3 και η τέταρτη κορυφή έχει μόνο έναν γείτονα, δηλαδή:



Πριν προχωρήσουμε στην υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος για τα paw-free γραφήματα θα δώσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς και λήμματα.

Ορισμός 4.1.18. *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται* **complete k-partite** *αν το σύνολο των κορυφών V μπορεί να διαχωριστεί σε k ανεξάρτητα σύνολα $A_1, ..., A_k$ για κάποιον ακέραιο $k \geqslant 2$, τέτοια ώστε δύο κορυφές μπορεί να είναι γειτονικές αν και μόνο αν βρίσκονται σε διαφορετικά σύνολα A_i.*

Λήμμα 4.1.19. *[1] Κάθε paw-free γράφημα είναι είτε C_3-free είτε complete k-partite για κάποιον ακέραιο $k \geqslant 3$.*

Λήμμα 4.1.20. *[1] Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα paw-free ή ($\overline{(P_1 + P_3)}$-free) γραφήματα.*

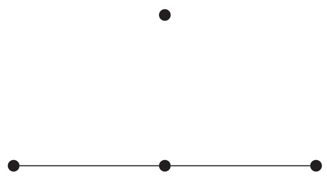
Απόδειξη. Έστω G ένα paw-free γράφημα. Με την μέθοδο της ωμής βίας ελέγχουμε σε χρόνο $O(n^3)$ εαν το γράφημα G περιέχει ως επαγώμενο υπογράφημα το C_3. Αν δεν το περιέχει, δηλαδή αν το γράφημα είναι C_3-free, τότε εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.1.6. Αν το γράφημα G δεν είναι C_3-free, λόγω του Λήμματος 4.1.19 το γράφημα G είναι complete k-partite για κάποιον ακέραιο $k \geqslant 3$.

Θέλουμε να δείξουμε οτι το G δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Έστω οτι έχει μη συνεκτικό διαχωριστή και οι κορυφές χωρίζονται στα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4. Αφού το γράφημα G έιναι complete k-partite τότε οι κορυφές του χωρίζονται επίσης στα σύνολα $A_1, ..., A_k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι $V_1 \cap A_1 \neq \varnothing$. Γνωρίζοντας οτι το σύνολο A_1 είναι complete στο σύνολο A_i για κάθε $i \neq 1$ και οτι το σύνολο V_1 είναι anti-complete στο σύνολο V_3 μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $V_3 \cap A_i = \varnothing$ για κάθε $i \neq 1$. Άρα $\varnothing \subset V_3 \subseteq A_1$. Για τον ίδιο λόγο, το σύνολο $V_1 \cap A_i = \varnothing$ άρα $\varnothing \subset V_1 \subseteq A_1$. Όμοια, υποθέτοντας οτι $V_2 \cap A_2 \neq \varnothing$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα $\varnothing \subset V_2 \subseteq A_2$ και $\varnothing \subset V_4 \subseteq A_2$. Τότε ισχύει οτι $A_3 \cap (V_1, V_2, V_3, V_4) = \varnothing$. Άτοπο, άρα το γράφημα G δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. ∎

4.1.5 $(P_1 + P_3)$-free γραφήματα (ή co-paw-free γραφήματα)

Η κλάση γραφημάτων της οποίας η υπολογιστική πολυπλοκότητα θα μας απασχολήσει είναι η $P_1 + P_3$-free ή co-paw-free.

Το γράφημα $P_1 + P_3$ είναι το γράφημα με τέσσερις κορυφές το οποίο περιέχει ένα μονοπάτι με 3 κορυφές και μια τέταρτη κορυφή η οποία δεν έχει κανέναν γείτονα, δηλαδή:



Όπως και στις προηγούμενες ενότητες η απόδειξη θα γίνει μέσω του προβλήματος του $2K_2$ διαχωρισμού. Εάν το γράφημα G είναι ένα $(P_1 + P_3)$-free γράφημα, τότε το $\overline{G}$ θα είναι ένα $(\overline{P_1 + P_3})$-free γράφημα.

Ορισμός 4.1.21. *Ένα* **spanning** *υπογράφημα είναι ένα υπογράφημα το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές το αρχικού γραφήματος.*

Λήμμα 4.1.22. *[1] Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα co-paw-free ή ($(P_1 + P_3)$-free) γραφήματα.*

Απόδειξη. Έστω ένα $(P_1 + P_3)$-free γράφημα G. Θα ελέγξουμε αν το $\overline{G}$,το οποίο είναι $(\overline{P_1 + P_3})$-free γράφημα, έχει $2K_2$ διαχωρισμό.

Αν το γράφημα $\overline{G}$ έχει περισσότερες από δύο συνεκτικές συνιστώσες, τότε το γράφημα $\overline{G}$ δεν έχει $2K_2$ διαχωρισμό.

Υποθέτουμε οτι το γράφημα $\overline{G}$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες D_1 και D_2.Τότε κάθε $\overline{G(D_i)}$ πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο κορυφές και επίσης το γράφημα G πρέπει να περιέχει ένα spanning πλήρες διμερές υπογράφημα αφού τα D_1 και D_2 είναι μη συνεκτικές συνιστώσες και στο συμπλήρωμά τους θα έχουμε οτι κάθε κορυφή του D_1 θα είναι γειτονική με κάθε κορυφή του D_2. Έστω οτι το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή S. Αν $S \cap D_1 \neq \emptyset$ και $S \cap D_2 \neq \emptyset$ τότε το γράφημα $G \backslash S$ θα είναι συνεκτικό αφού D_1 και D_2 είναι complete. Άρα το S δεν είναι διαχωριστής. Αν $S \subset D_1$ και $S \cap D_2 = \emptyset$ (αντίστοιχα αν $S \cap D_1 = \emptyset$ και $S \subset D_2 \neq \emptyset$) τότε πάλι το σύνολο S δεν είναι διαχωριστής αφού $G \backslash S$ θα είναι συνεκτικό αφού D_1 και D_2 είναι complete.Η τελευταία περίπτωση είναι $S = D_1$ (αντίστοιχα $S = D_2$) η οποία είναι αληθής αν και μόνο αν κάθε $\overline{D_i}$ είναι μη συνεκτικό.

Υποθέτουμε οτι το γράφημα $\overline{G}$ έχει ακριβώς μια συνεκτική συνιστώσα. Τότε, αφού το $\overline{G}$ είναι $(\overline{P_1 + P_3})$-free γράφημα, σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.19, το $\overline{G}$ θα είναι είτε C_3-free είτε complete k-partite. Στην πρώτη περίπτωση όπου το γράφημα είναι C_3-free θα είναι και K_4-free,άρα συμφωνα με το Πόρισμα 4.1.12 μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο αν έχει $2K_2$ διαχωρισμό.

Στην δεύτερη περίπτωση όπου το γράφημα είναι complete k-partite και αφού $n \geqslant 4$, τότε έχει $2K_2-$ διαχωρισμό. Ο παραπάνω αλγόριθμος έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα $O(n^3)$. ∎

4.1.6 $(\overline{2P_1 + P_2})$-free γραφήματα (ή diamond-free γραφήματα)

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με την κλάση γραφημάτων τα οποία είναι $(\overline{2P_1 + P_2})$-free.

Το γράφημα $\overline{2P_1 + P_2}$ ή diamond, υπενθυμίζουμε είναι το γράφημα K_4 απο το οποίο έχουμε αφαιρέσει μια ακμή.

Λήμμα 4.1.23. *[1] Αν ένα γράφημα G περιέχει dominating vertex, τότε το γράφημα δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.*

Ορισμός 4.1.24. *Μια κορυφή $u \in V$ λέμε οτι έχει* **μη συνεκτική γειτονιά** *αν το $N(u)$ δημιουργεί ένα μη συνεκτικό γράφημα*

Λήμμα 4.1.25. *[1] Αν ένα γράφημα G περιέχει μια κορυφή u η οποία δεν είναι dominating και έχει μη συνεκτική γειτονία, τότε το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.*

Απόδειξη. Έστω $A_1, ..., A_r$ οι συνεκτικές συνιστώσες του $G[N(u)]$ για κάποιο $r \geqslant 2$. Αφού η κορυφή u δεν είναι dominating, το σύνολο $G - (N(u) \cup \{u\})$ δεν είναι κενό. Ορίζουμε $V_1 = \{u\}, V_2 = V(A_1), V_3 = V(A_2) \cup ..... \cup V(A_r)$ και $V_4 = V(G) - (N(u) \cup \{u\})$. Το $V_1 \cup V_4$ ή ($V_2 \cup V_3$) αποτελούν μη συνεκτικό διαχωριστή. ∎

Κάνοντας χρήση των δύο παραπάνω λημμάτων, θα αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.1.26. *[1] Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα diamond-free ή ($\overline{2P_1 + P_2}$-free) γραφήματα.*

Απόδειξη. Έστω G ένα ($\overline{2P_1 + P_2}$-free) γράφημα. Σε χρόνο $O(n^2)$ ελέγχουμε αν το γράφημα έχει dominating vetrex. Αν έχει, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.23 το γράφημα δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Υποθέτουμε οτι το γράφημα δεν έχει dominating vetrex. Αφού το γράφημα είναι $\overline{2P_1 + P_2}$-free θα ισχύει οτι η γειτονία $N(u)$ κάθε κορυφής θα είναι P_3-free άρα το γράφημα $G[N(u)]$είναι η ένωση απο ένα ή περισσότερα πλήρη γραφήματα. Στην περίπτωση όπου το γράφημα $G[N(u)]$είναι η ένωση από δύο ή περισσότερα πλήρη γραφήματα, η κορυφή u έχει μη συνεκτική γειτονία, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.25 το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Ελέγχουμε σε χρόνο $O(n^3)$ αν το γράφημα έχει κορυφή της οποίας η γειτονία είναι η ένωση από δύο πλήρη γραφήματα. Στην άλλη περίπτωση, όπου το γράφημα $G[N(u)]$είναι πλήρες γράφημα, επειδή ισχύει για κάθε κορυφή, συμπεραίνουμε οτι το ίδιο το γράφημα G είναι πλήρες, άρα δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. ∎

4.1.7 P_4-free γραφήματα(ή cograph)

Παρακάτω θα γνωρίσουμε μια άλλη κλάση γραφημάτων, τα cograph ή αλλιώς τα P_4-free, δηλαδή εκείνα τα γραφήματα τα οποία δεν περιέχουν ως επαγώμενο υπογράφημα το μονοπάτι με τέσσερις κορυφές. Αυτά τα γραφήματα μπορούμε να τα δώσουμε και με έναν διαφορετικό ορισμό, ο οποίος θα μας φανεί χρήσιμος στη συνέχεια.

Ορισμός 4.1.27. *Κάθε cograph μπορεί να κατασκευαστεί από τους παρακάτω κανόνες,ξεκινόντας από ένα γράφημα με μία κορυφή:*

1. *μια απομονωμένη κορυφή είναι cograph*
2. *αν G_1 και G_2 είναι cographs, τότε και η ένωση $G_1 \cup G_2$ είναι ένα cograph*
3. *αν G_1 και G_2 είναι cographs, τότε και η σύνδεση $G_1 * G_2$ είναι ένα cograph*

Πρόταση 4.1.28. [4] *Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα cograph γραφήματα.*

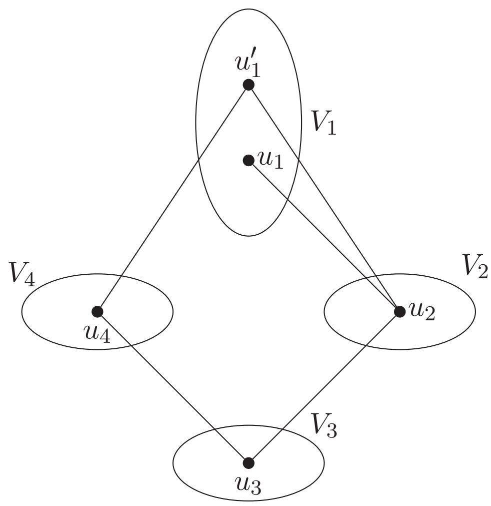
Απόδειξη. Έστω G ένα συνεκτικό cograph. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η τελευταία ενέργεια που έχει εφαρμοστεί για την κατασκευή του G είναι η τρίτη, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα ήταν μη συνεκτικό. Άρα, έχουμε δύο γραφήματα G_1 και G_2 τα οποία είναι cographs και παίρνω την σύνδεσή τους $G_1 * G_2$. Κάθε ακμή xy με $x \in G_1$ και $y \in G_2$ είναι dominating και σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.6 σε πολυωνυμικό χρόνο μπορούμε να αποφασίσουμε αν το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. ∎

4.2 $(C_4, C_5, ...)$-free γραφήματα (ή chordal)

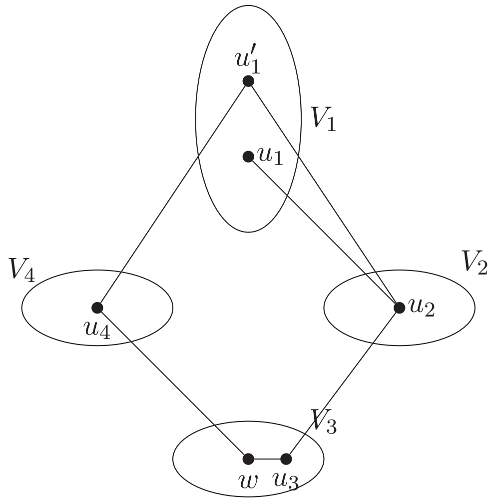
Τώρα θα δούμε μια ακόμα κλάση γραφημάτων, η οποία είναι τα chordal γραφήματα ή αλλιώς τα $(C_4, C_5, ...)$-free , δηλαδή δεν περιέχει ως επαγώμενο υπογράφημα κύκλο με n κορυφές, $n \geqslant 4$.

Λήμμα 4.2.1. *[1] Έστω V_1, V_2, V_3, V_4 ένας διαχωρισμός των κορυφών του γραφήματος G για το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή και έστω οτι το γράφημα G έχει διάμετρο ίση με δύο. Τότε το γράφημα έχει ως επαγώμενο υπογράφημα έναν κύκλο C με $4 \leqslant \mid V(C) \mid \leqslant 5$ τέτοια ώστε $V(C) \cap V_i \neq \emptyset$ για $i = 1, ..., 4$.*

Απόδειξη. Έστω $u_1 \in V_1$ και $u_3 \in V_3$. Αφού το γράφημα έχει διάμετρο δύο, τότε υπάρχει κορυφή $u_2 \in V_2$ ή $u_2 \in V_4$, έστω οτι $u_2 \in V_2$, η οποία είναι γειτονική με την u_1 και με την u_3. Έστω $u_4 \in V_4$. Αφού το γράφημα έχει διάμετρο δύο τότε υπάρχει κορυφή $u_1' \in V_1$ ή V_3, έστω οτι $u_1' \in V_1$, η οποία είναι γειτονική με την u_2 και με την u_4. Αν οι κορυφές u_3 και u_4 είναι γειτονικές τότε δημιουργείται ένας κύκλος C με τις κορυφές u_1', u_2, u_3, u_4.



Στην περίπτωση όπου οι κορυφές u_3 και u_4 δεν είναι γειτονικές , επειδή το γράφημα έχει διάμετρο δύο, θα υπάρχει κορυφή $w \in V_3 \cup V_4$, τέτοια ώστε η κορυφή w να είναι γειτονική με τις κορυφές u_3 και u_4. Τότε δημιουργείται ένας κύκλος C με τις κορυφές u_1', u_2, u_3, w, u_4.



■

Πρόταση 4.2.2. *Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα chordal γραφήματα.*

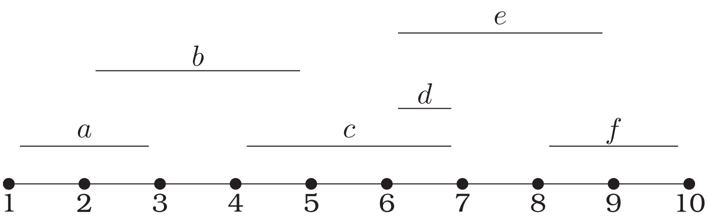
Την απόδειξη για την παραπάνω πρόταση μπορούμε να την βρούμε στο [6]. Παρακάτω θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη.

Απόδειξη. Έστω G ένα chordal γράφημα.Υπενθυμίζουμε οτι το G έχει διάμετρο ίση με δύο. Έστω οτι το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή και άρα θα έχει διαχωρισμό V_1, V_2, V_3, V_4. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.1 θα έχει και επαγώμενο κύκλο C_4 ή C_5. Άτοπο, αφού το γράφημα είναι chordal.Άρα το γράφημα G δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. ■

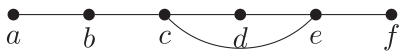
Μια υποκλάση των chordal γραφημάτων είναι εκείνη των interval γραφημάτων.

Ορισμός 4.2.3. *Ένα* **interval** *γράφημα είναι το γράφημα το οποίο έχει μια αναπαράσταση στην οποία κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε ένα διάστημα στον χώρο των πραγματικών αριθμών, έτσι ώστε δύο κορυφές είναι γειτονικές αν και μόνο αν η τομή των αντίστοιχων διαστημάτων είναι μη κενή. Ένα γράφημα ονομάζεται* **proper interval** *αν είναι interval και επίσης ισχύει ότι κανένα διάστημα δεν περιέχει κάποιο άλλο διάστημα.*

Παράδειγμα 4.2.4. Παρακάτω βλέπουμε ένα interval γράφημα με οικογένειες διαστημάτων τα a, b, c, d, e, f.



Παρατηρούμε οτι τα διαστήματα για τα οποία ,ανα δύο, η τομή τους είναι διάφορη του κενού είναι τα : ab, bc, cd, ce, de, ef Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό αυτές θα είναι και οι ακμές του γραφήματος, δηλαδή έχουμε:



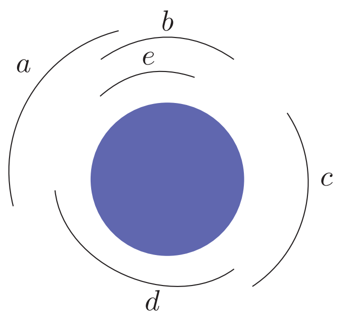
Παρατήρηση 4.2.5. Παρατηρούμε οτι τα interval γραφήματα δεν μπορούν να απεικονίσουν γραφήματα που περιέχουν επαγώμενους κύκλου μεγαλύτερους του C_3. Άρα τα interval γραφήματα είναι και chordal,άρα το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο και για τα interval γραφήματα.

4.3 Circular-Arc γραφήματα

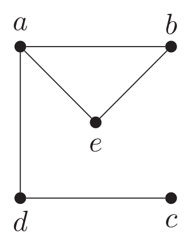
Στις επόμενες ενότητες οι κλάσεις γραφημάτων που θα μας απασχολήσουν δεν είναι πλέον εκείνες των H-free γραφημάτων. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε την κλάση των Circular-Arc γραφημάτων η οποία έχει μελετηθεί στα [12], [17], [18] και [14].

Ορισμός 4.3.1. *Ένα* **circular-arc** *γράφημα είναι το γράφημα το οποίο έχει μια αναπαράσταση στην οποία κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε ένα τόξο ενός κύκλου, έτσι ώστε δύο κορυφές είναι γειτονικές αν και μόνο αν η τομή των αντίστοιχων* *τόξων είναι μη κενή. Ένα γράφημα ονομάζεται* **proper circular-arc** *αν είναι circular-arc και επίσης ισχύει ότι κανένα τόξο δεν περιέχει κάποιο άλλο τόξο.*

Παράδειγμα 4.3.2. Παρακάτω βλέπουμε ένα circular-arc γράφημα με οικογένειες τόξων τα a, b, c, d, e.



Παρατηρούμε οτι τα τόξα για τα οποία ,ανα δύο, η τομή τους είναι διάφορη του κενού είναι τα : ab, be, cd, ae, da. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό αυτές θα είναι και οι ακμές του γραφήματος, δηλαδή έχουμε:



Στόχος αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε οτι το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο και για τα circular-arc γραφήματα. Για να φτάσουμε σε αυτο το συμπέρασμα θα χρειαστούμε δύο λήμματα. Πρώτα όμως θα πρέπει να συμβολίσουμε τα άκρα κάθε τόξου.

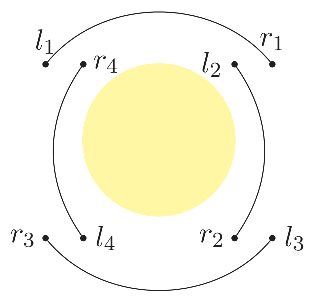
Έστω G ένα circular-arc γράφημα. Για κάθε κορυφή $u \in V(G)$ μπορούμε να συμβολίσουμε το τόξο που αντιστοιχεί σε αυτή ως $[l_u, r_u]$ όπου, σύμφωνα με την φορά του ρολογιού, το l_u είναι το αριστερό άκρο του τόξου, ενώ το r_u είναι το δεξί άκρο του τόξου. Η ανάθεση των αριστερών και των δεξιών άκρων ενός τόξου μου αντιστοιχεί σε μια κορυφή, είναι μοναδική.

Λήμμα 4.3.3. *[18] Ένα circular-arc γράφημα με n κορυφές και m ακμές μπορεί να αναγνωριστεί σε χρόνο $O(n+m)$.Στον ίδιο χρόνο, μια αναπαράσταση του γραφήματος G μπορεί να κατασκευαστεί με διακριτά άκρα τόξων τα οποία αριθμούμε σύμφωνα με την φορά του ρολογιού:* $1, 2, ..., 2n$.

Λήμμα 4.3.4. *[1] Έστω G ένα circular-arc γράφημα διαμέτρου δύο, το οποίο έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Τότε το γράφημα G έχει μη συνεκτίκο διαχωρισμό τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 τέτοια ώστε κάθε V_i να είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.3 το γράφημα G έχει αναπαράσταση με διακριτά άκρα τόξων τα οποία αριθμούμε σύμφωνα με την φορά του ρολογιού $1, 2, ..., 2n$. Έστω V_1, V_2, V_3, V_4 ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός συνόλων των κορυφών του G. Από το Λήμμα 4.2.1 μπορούμε να συμπεράνουμε το γράφημα έχει ως επαγώμενο υπογράφημα έναν κύκλο C με κορυφές u_i, όπου $i = 1, ..., j$ ($u_{j+1} = u_1$) και $j \in \{4, 5\}$, τέτοια ώστε $V(C) \cap V_i \neq \emptyset$ για $i = 1, ..., 4$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι αν $j = 5$ τότε $u_5 \in V_4$.

Έστω D_i η συνεκτική συνιστώσα του $G[V_i]$ η οποία περιέχει την κορυφή u_i για $i = 1, ..., 4$. Παρατηρούμε οτι αν $j = 5$ τότε $u_5 \in D_4$. Συμβολίζουμε ως $[l_i, r_i]$ το τόξο το οποίο καλύπτεται απο τα τόξα του D_i. Τα τόξα $[i_1, r_1], ..., [l_4, r_4]$ καλύπτουν όλο τον κύκλο, αφού αντιστοιχούν στις κορυφές του κύκλου C. Επίσης, το τόξο $[l_i, r_i]$ τέμνει το τόξο $[l_{i-1}, r_{i-1}]$ καθώς και το τόξο $[l_{i+1}, r_{i+1}]$ για $i = 1, ..., 4$ ($[l_0, r_0] = [l_5, r_5] = [l_1, r_1]$).



Ορίζουμε το σύνολο $V_i' := V(D_i)$. Αν $V_i' = V_i$ για $i = 1, 2, 3, 4$, τότε ο διαχωρισμός για τον μη συνεκτικό διαχωριστή είναι ο V_1, V_2, V_3, V_4. Υποθέτουμε οτι δεν είμαστε σε αυτή την περίπτωση. Τότε $V_1' \cap V_2' \cap V_3' \cap V_4' \subset V$. Θεωρούμε μια αυθαίρετη κορυφή $v \in V(G)$ η οποία δεν ανήκει σε κανένα V_i'. Έστω p το πλήθος των τόξων $[l_i, r_i]$ τα οποία τέμνουν το τόξο $[l_v, r_v]$ για $i = 1, 2, 3, 4$.

Ισχυριζόμαστε οτι $p \leqslant 1$. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό παίρνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Έστω $p = 4$. Τότε η κορυφή v είναι γειτονική με μια κορυφή απο κάθε V_i. Άτοπο, αφού διότι τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 είναι μη συνεκτικός διαχωρισμός του G.

Έστω $p = 3$, τότε το τόξο $[l_v, r_v]$ τέμνει τρία διαδοχικά τόξα $[l_i, r_i]$. Έστω οτι αυτά είναι τα $[l_1, r_1], [l_2, r_2], [l_3, r_3]$. Επειδή τα σύνολα V_1 και V_3 είναι anti-complete, η κορυφή v θα ανήκει στο σύνολο V_2 και αφού D_2 η συνεκτική συνιστώσα του $G[V_2]$ η οποία περιέχει την κορυφή u_2, μπορούμε να συμπεράνουμε οτι η κορυφή v τοποθετείται στο D_2. Άτοπο, αφού υποθέσαμε οτι η κορυφή αυτή δεν ανήκει σε κανένα V_i'.

Έστω $p = 2$. Λόγω κατασκευής, το τόξο $[l_v, r_v]$ τέμνει δύο διαδοχικά τόξα. Έστω οτι αυτά είναι τα $[l_1, r_1], [l_2, r_2]$. Τότε $v \in V_1$ ή $v \in V_2$. Αν $v \in V_1$ τοποθετούμε την κορυφή v στο σύνολο D_1 και αν $v \in V_2$ τοποθετούμε την κορυφή v στο σύνολο D_2. Όπως και στην παραπάνω περίπτωση, έτσι και εδώ αυτό καταλήγει σε άτοπο.

Άρα $p \leqslant 1$, δηλαδή για κάθε κορυφή v, για την οποία ισχύει οτι $v \notin V_1' \cap V_2' \cap V_3' \cap V_4'$, έχουμε το αντίστοιχο τόξο της $[l_v, r_v]$ μπορεί να τέμνει μόνο ένα $[l_i, r_i]$ με $i = 1, 2, 3, 4$. Επίσης, για τον λόγο οτι τα τόξα $[i_1, r_1], ..., [l_4, r_4]$ καλύπτουν όλο τον κύκλο, μπορούμε να συμπεράνουμε οτι το τόξο $[l_v, r_v]$ καλύπτεται από κάποιο $[l_i, r_i]$, μπορούμε να τοποθετήσουμε την κορυφή v στο V_i' χωρίς να επηρεάσουμε την συνεκτικότητα και παράλληλα τα σύνολα V_1, V_3 και V_2, V_4 να συνεχίσουν να είναι anti-complete. Έτσι, τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 σχηματίζουν μη συνεκτικό διαχωρισμό με κάθε V_i να είναι συνεκτικό. ■

Πρίν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το θεώρημα για τον πολυωνυμικό χρόνο του προβλήματος, θα χρειαστεί πρώτα να ορίσουμε το πρόβλημα 2-Satisfiability (ή 2-SAT).

Ορισμός 4.3.5. *Όρο ορίζουμε μια λογική μεταβλητή ή την άρνησή της και πρόταση ορίζουμε μια διάζευξη προτάσεων. Το πρόβλημα* **2-SAT** *ορίζεται ως το πρόβλημα το οποίο δεδομένης μιας προτασιακής μορφής Φ η οποία αποτελείται από σύζευξη προτάσεων 2 ακριβών όρων, αποφασίζει αν υπάρχει μια ανάθεση αληθοτιμών στους όρους που να την ικανοποιούν.*

Παράδειγμα 4.3.6. Φ=$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3})$

Άρα η ανάθεση x_1=αληθής, x_2=ψευδής και x_3=ψευδής ικανοποιεί την πρόταση Φ.

Πρόταση 4.3.7. *Το πρόβλημα 2-SAT λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Θεώρημα 4.3.8. *[1] Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε $O(n^2)$-χρόνο για τα circular-arc γραφήματα.*

Απόδειξη. Έστω ένα circular-arc γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές. Μπορούμε να υπολογίσουμε την διάμετρό του σε χρόνο $O(n^2)$. Λόγω του Λήμματος 3.1.4, αν η διάμετρος είναι ίση με ένα τότε το γράφημα δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή και αν η διάμετρος είναι μεγαλύτερη ή ίση του τρία τότε το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Άρα παρακάτω θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η διάμετρος είναι ίση με δύο. Απο το Λήμμα 4.3.4 παίρνουμε οτι αν το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή, τότε θα έχει και μη συνεκτικό διαχωρισμό τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 τέτοια ώστε κάθε V_i ναι είναι συνεκτικό για $i = 1, 2, 3, 4$. Αφού η διάμετρος είναι ίση με δύο, τότε η ένωση των τόξων των συνόλων V_i καλύπτει όλο τον κύκλο. Επίσης, τα τόξα των συνόλων V_1, V_3 δεν τέμνονται. Το ίδιο ισχύει και για τα τόξα των συνόλων V_2, V_4. Στη συνέχεια, σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.3, σε γραμμικό χρόνο μπορούμε να αναπαραστήσουμε το γράφημα G με διακριτά άκρα, αριθμημένα σύμφωνα με την φορά του ρολογιού ως 1,2,...,$2n$. Έπειτα, σε χρόνο $O(nlogn)$, τα ταξινομούμε και εφαρμόζουμε την παρακάτω διαδικασία για κάθε κορυφή $v \in V$. Παίρνουμε έναν γείτονα v' της κορυφής v, ο οποίος έχει το πιο δεξιά άκρο. Στη συνέχεια, παίρνουμε έναν γείτονα v'' της κορυφής v'. Ελέγχουμε αν η κορυφή v'' είναι γειτονική και με την κορυφή v. Αν είναι τότε είτε οι κορυφές v, v', v'' σχηματίζουν τρίγωνο για $v \neq v''$, είτε θα σχηματίζουν μια ακμή για $v = v''$. Υποθέτουμε οτι αυτές οι τρεις κορυφές καλύπτουν όλο τον κύκλο. Σε αυτή την περίπτωση, το γράφημα G δεν έχει μη συνεκτικό διαχωρισμό V_1, V_2, V_3, V_4, αφού οι τρεις αυτές κορυφές ενώνονται με όλες τις άλλες κορυφές, και έτσι η τοποθέτησή τους στα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 θα χαλάσει την προϋπόθεση οτι τα σύνολα V_1, V_3 και V_2, V_4 είναι anti-complete. Η παραπάνω διαδικασία χρειάζεται $O(n^2)$ χρόνο.

Υποθέτουμε οτι το γράφημα G δεν έχει ένα ζεύγος ή τρεις κορυφές οι οποίες να καλύπτουν όλο τον κύκλο.
Διαλέγουμε μια κορυφή v_1 του γραφήματος και παίρνουμε τον γείτονα της v_2 με το πιο δεξιό άκρο. Έπειτα παίρνουμε τον γείτονα της κορυφής v_2 με το πιο δεξιό άκρο. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Αν αυτή η διαδικασία τελειώσει έχοντας χωρίς να έχει σχηματιστεί ένας επαγώμενος κύκλος, τότε το γράφημα G δεν έχει μη συνεκτικό διαχωρισμό λόγω του Λήμματος 4.2.1. Στην άλλη περίπτωση, έχει βρεθεί σε χρόνο $O(n)$ ένας επαγώμενος κύκλος C με κορυφές $v_1, v_2, ..., v_k$ με

$k \geqslant 4$. Όμως, επειδή το γράφημα έχει διάμετρο ίση με δύο πρέπει $k \in \{4,5\}$. Λόγω κατασκευής, αφού το γράφημα είναι circular- arc, τα τόξα που αντιστοιχούν στις κορυφές του κύκλου C, θα καλύπτουν όλο τον κύκλο.
Αν το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωρισμό V_1, V_2, V_3, V_4, όπου κάθε V_i είναι συνεκτικό για $i = 1, .., 4$ τότε, από τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε τα ακόλουθα. Αν $k = 4$, τότε υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι για κάθε κορυφή v_i του κύκλου C ισχύει $v_i \in V_i$ για $i = 1, ..., 4$. Αν $k = 5$ τότε δύο κορυφές του κύκλου v_i, v_{i+1} ανήκουν στο ίδιο σύνολο V_h ενώ τα άλλα σύνολα $V_i \neq V_h$ περιέχουν μόνο μια κορυφή του κύκλου C.Έτσι υποθέτουμε ποιές κορυφές θα τοποθετηθούν στο ίδιο σύνολο. Ας είναι οι v_1, v_5. Αυτό δεν επηρεάζει τον χρόνο εκτέλεσης. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τα σύνολα V_i τοποθετώντας πρώτα τις κορυφές $\{v_1, ..., v_k\}$. Υπενθυμίζουμε οτι το γράφημα που σχηματίζεται από κάθε σύνολο V_i είναι ένα συνεκτικό γράφημα και έτσι η ένωση των τόξων που αντιστοιχούν στις κορυφές του V_i σχηματίζουν ένα τόξο. Λέμε οτι μια κορυφή u τέμνει το σύνολο V_i αν το τόξο της u τέμνει το τόξο του συνόλου V_i. Επίσης, τα τόξα των κορυφών $\{v_1, ..., v_k\}$ καλύπτουν όλο τον κύκλο, άρα το ίδιο ισχύει και για τα τόξα των συνόλων V_i που θα κατασκευάσουμε. Στην περίπτωση όπου υπάρχει κορυφή x η οποία τέμνει κάθε σύνολο V_i που έχει κατασκευαστεί μέχρι στιγμής μπορούμε να συμπεράνουμε οτι δεν υπάρχει μη συνεκτικός διαχωριστής για κάθε V_i συνεκτικό. Αν $k = 4$ τότε η κορυφή x συσχετίζεται με κάθε V_i άρα πρέπει να συμπεριληφθεί στον διαχωρισμό. Όμως, αφού τα V_i είναι συνεκτικά, ο διαχωρισμός που έχουμε επιλέξει, μέσω του x, δεν θα είναι μη συνεκτικό. Άρα σε αυτή τη περίπτωση δεν έχω μη συνεκτικό διαχωριστή. Αν $k = 5$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε αμέσως οτι δεν υπάρχει μη συνεκτικός διαχωριστής. Η κορυφή x, η οποία τέμνει όλα τα V_i, υπάρχει πιθανότητα να μην τέμνει την κορυφή u_5 η οποία έχει τοποθετηθεί στο σύνολο V_1. Έτσι στον μη συνεκτικό διαχωριστή μπορώ να τοποθετήσω την κορυφή x, την κορυφή u_3 και την κορυφή u_5. Οι κορυφές u_2 και u_4 μη γειτονικές, άρα το σύνολο $\{x, u_3, u_5\}$ είναι όντως διαχωρισμός. Επίσης, οι κορυφές u_3 και u_5 δεν είναι γειτονικές. Το ίδιο ισχύει και για τις κορυφές x και u_5. Άρα ο διαχωρισμός αυτός είναι όντως μη συνεκτικός. Άρα για να βγάλω συμπέρασμα θα χρειαστεί να ελέγξω ποιες κορυφές του κύκλου βρίσκονται στο ίδιο V_i. Κάθε κορυφή u η οποία τέμνει τα δύο σύνολα V_i και V_{i+2} για κάποιο i, τότε θα τέμνει είτα το σύνολο V_{i+1} είτε το V_{i+3} (όπου $V_5 = V_1$). Τοποθετούμε την κορυφή u στο σύνολο V_{i+1} εάν αυτή τέμνει το σύνολο V_{i+1} ή αλλιώς την τοποθετούμε στο σύνολο V_{i+3} εαν αυτή τέμνει το σύνολο V_{i+3}.
Έστω T το σύνολο των κορυφών του γραφήματος G τα οποία δεν έχουμε τοποθετήσει ακόμα σε κάποιο σύνολο V_i.

Ισχυρισμός: Κάθε κορυφή του συνόλου T τέμνει ακριβώς δύο σύνολα V_i και

V_j τέτοια ώστε $j = i + 1$.
Θέλοντας να καταλήξουμε σε άτοπο υποθέτουμε οτι ο ισχυρισμός δεν ισχύει για κάποια κορυφή $u \in T$. Τότε η κορυφή u τέμνει ακριβώς ένα σύνολο το V_i, έστω το V_1. Τότε πρέπει να υπάρχει ένα μονοπάτι από την κορυφή u στην κορυφή u_3 με απόσταση δύο, αφού η διάμετρος του G είναι δύο. Άρα θα πρέπει να υπάρχει κάποια κορυφή w η οποία είναι γειτονική και με την κορυφή u και με την κορυφή u_3. Αυτό σημαίνει οτι το τόξο που αντιστοιχεί στην κορυφή w τέμνει τα σύνολα V_1 και V_3. Άρα η κορυφή w έχει ήδη τοποθετηθεί σε κάποιο σύνολο από την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω. Τα σύνολα στα οποία έχει τοποθετηθεί η κορυφή w είναι είτε το V_2 είτε το V_4 και άρα η κορυφή u, εκτός από το σύνολο V_1, τέμνει και το σύνολο V_2 ή V_4 αφού είναι γειτονική με την w. Άτοπο, άρα αποδείχθηκε ο ισχυρισμός.

Όλες οι κορυφές του συνόλου T σχετίζονται με δύο σύνολα, τα V_i και V_{i+1}, άρα μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα με τις κορυφές που έχουν περισσέψει, στο πρόβλημα 2-SAT. Έστω $u \in T$ η οποία πρέπει να τοποθετηθεί στο V_i ή V_{i+1}. Εισάγουμε δύο μεταβλητές, τις x_u^i και x_u^{i+1} και τις προτάσεις $(x_u^i \vee x_u^{i+1})$ και $(\overline{x}_u^i \vee \overline{x}_u^{i+1})$. Επίσης, για κάθε ακμή uv όπου η κορυφή u πρέπει να τοποθετηθεί στο σύνολο V_i ή στο V_{i+1} και η κορυφή v πρέπει να τοποθετηθεί στο σύνολο V_{i+1} ή στο V_{i+2}, εισάγουμε την πρόταση $(\overline{x}_u^i \vee \overline{x}_u^{i+2})$. Για κάθε ακμή uv όπου η κορυφή u πρέπει να τοποθετηθεί στο σύνολο V_i ή στο V_{i+1} και η κορυφή v πρέπει να τοποθετηθεί στο σύνολο V_{i+2} ή στο V_{i+3}, εισάγουμε τις προτάσεις $(\overline{x}_u^i \vee \overline{x}_u^{i+2})$ και την $(\overline{x}_u^{i+1} \vee \overline{x}_u^{i+3})$. Άρα με αυτόν τον τρόπο δημιουργείτε μια Φ όπου οι προτάσεις της έχουν ακριβώς δύο όρους.
Η ανάθεση των κορυφών στα σύνολα V_i χρειάζεται $O(n^2)$ χρόνο. Επίσης η επίλυση του 2-SAT χρειάζεται $O(n^2)$ χρόνο. Τον ίδιο χρόνο χρειάζεται και ο υπολογισμός της διαμέτρου του γραφήματος, όπως και όλα τα υπόλοιπα βήματα της παραπάνω διαδικασίας. Άρα, ο συνολικός χρόνο εκτέλεσης είναι $O(n^2)$.

■

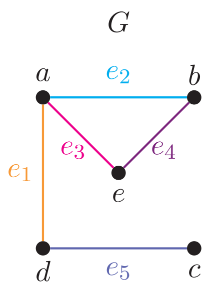
4.4 Γραμμικά γραφήματα

Μια άλλη κλάση γραφημάτων, για την οποία θα αποδείξουμε οτι ο χρόνος εύρεσης μη συνεκτικού διαχωριστή είναι πολυωνυμικός, είναι τα line γραφήματα. Ένα line γράφημα κατασκευάζεται από ένα άλλο γράφημα G μετατρέποντας τις ακμές του G σε κορυφές για το line γράφημα του G.

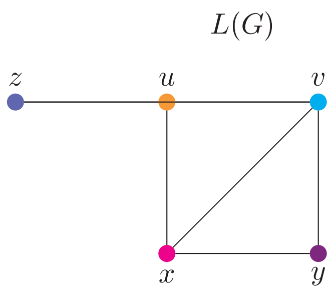
Ορισμός 4.4.1. *Το* **line** *(ή γραμμικό) γράφημα ενός γραφήματος G με ακμές $e_1, e_2, ..., e_p$ είναι το $L(G)$ με κορυφές $u_1, u_2, ..., u_p$ στο οποίο υπάρχει ακμή ανά-*

μεσα σε δύο κορυφές u_i και u_j αν και μόνο αν οι ακμές e_i και e_j στο γράφημα G ενώνουν κοινό άκρο.

Παράδειγμα 4.4.2. Παρακάτω έχουμε το γράφημα G με ακμές τις e_1, e_2, e_3, e_4, e_5.



Για να φτιάξουμε το αντίστοιχο line γράφημα $L(G)$ θα δημιουργήσουμε 5 κορυφές , τις u, v, x, y, z. Η κορυφή u αντιστοιχεί στην ακμή e_1, η κορυφή v στην ακμή e_2, η κορυφή x στην ακμή e_3,η κορυφή y στην ακμή e_4 και η κορυφή z στην ακμή e_5. Η ακμή e_1 έχει κοινό άκρο με τις ακμές e_2, e_3, e_5 άρα στο γράφημα $L(G)$ δημιουργούνται οι ακμές uv, uz, ux. Η ακμή e_2 εκτός από την e_1 έχει κοινό άκρο με τις ακμές e_3, e_4, άρα στο γράφημα $L(G)$ δημιουργούνται ακόμα οι ακμές vx, vy. Η ακμή e_3 έχει κοινό άκρο και με την ακμή e_4,άρα δημιουργείτε και η ακμή xy. Για τις ακμές e_4 και e_5 δεν υπάρχουν άλλες ακμές με κοινά άκρα από αυτές που ήδη έχουμε αναφέρει. Άρα το γράφημα $L(G)$ έχει ακμές uv, uz, ux, vx, vy, xy, δηλαδή έχουμε:



Παρατήρηση 4.4.3. [1] Κάθε line γράφημα είναι claw-free γράφημα.

Ορισμός 4.4.4. *Ονομάζουμε το γράφημα G ως* **preimage** *του $L(G)$.*

Παρατήρηση 4.4.5. [9] Κάθε συνεκτικό line γράφημα, εκτός απο το K_3, έχει μοναδικό preimage.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα για το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή. Πρώτα όμως θα χρειαστεί να διατυπώσουμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 4.4.6. *[6] Έστω G ένα γράφημα με διάμετρο δύο, του οποίου το line γράφημα $L(G)$ έχει επίσης διάμετρο ίση με δύο. Τότε το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή αν και μόνο αν το $L(G)$ έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.*

Λήμμα 4.4.7. *[1] Έστω G ένα γράφημα το οποίο δεν είναι ούτε τρίγωνο ούτε αστέρας. Τότε το $L(G)$ έχει διάμετρο δύο αν και μόνο αν το γράφημα G είναι $2P_2$-free.*

Απόδειξη. Έστω G ένα γράφημα το οποίο δεν είναι ούτε τρίγωνο ούτε αστέρας.

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε οτι το γράφημα $L(G)$ έχει διάμετρο δύο. Για να καταλήξουμε σε άτοπο υποθέτουμε οτι το γράφημα G δεν είναι $2P_2$-free. Άρα το γράφημα G περιέχει ένα επαγώμενο υπογράφημα H με κορυφές s, t, u, v και ακμές $e_1 = st$ και $e_2 = uv$. Παρατηρούμε οτι οι αντίστοιχες κορυφές e_1, e_2 στο γράφημα $L(G)$ δεν είναι γειτονικές. Το γράφημα $L(G)$ έχει διάμετρο ίση με δύο, άρα υπάρχει κορυφή e_3 η οποία είναι γειτονική και με την e_1 και με την e_2. Όμως, η αντίστοιχη ακμή e_3 στο γράφημα G θα πρέπει να έχει ένα άκρο στο $\{s, t\}$ για να είναι γειτονική με την e_1 και άλλο άκρο στο $\{u, v\}$ για να είναι γειτονική με την e_2. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο, διότι έτσι το γράφημα $2P_2$ δεν είναι επαγώμενο. Άρα το γράφημα G είναι $2P_2$-free.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε οτι το γράφημα G είναι $2P_2$-free. Επίσης υποθέτουμε οτι το γράφημα $L(G)$ δεν έχει διάμετρο ίση με δύο.
Αν η διάμετρος είναι ίση με ένα, τότε το γράφημα $L(G)$ είναι ένα πλήρες γράφημα, δηλαδή στο γράφημα G υπάρχει κορυφή η οποία είναι το ένα άκρο για όλες τις άλλες ακμές ή αν το $L(G)$ είναι το K_3 τότε και το γράφημα G θα είναι το K_3. Άρα το γράφημα G είναι ή τρίγωνο ή αστέρας. Άτοπο λόγω της υπόθεσης.
Αν η διάμετρος του γραφήματος $L(G)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση με τρία τότε υπάρχουν κορυφές e_1 και e_2 με απόσταση τουλάχιστον τρία. Αυτό όμως δημιουργεί ένα επαγώμενο υπογράφημα $2P_2$. Άτοπο, άρα η διάμετρος του γραφήματος G είναι ίση με δύο.

■

Θεώρημα 4.4.8. *[1] Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε $O(n^4)$-χρόνο για τα line γραφήματα με n κορυφές.*

Απόδειξη. Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές και m ακμές. Θα αποδειχθεί οτι σε χρόνο $O(n^4)$ μπορεί να αποφανθεί αν το γράφημα $L(G)$ έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.Ελέγχω σε χρόνο $O(n)$ αν το γράφημα G είναι τρίγωνο ή αστέρας. Και στις δύο περιπτώσεις, το γράφημα $L(G)$ είναι ένα πλήρες γράφημα, άρα η διάμετρός του είναι ίση με ένα άρα το γράφημα δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Πρώτη υπόθεση: Το γράφημα G δεν είναι ούτε τρίγωνο ούτε αστέρας.
Λόγω του Λήμματος 4.4.7, μπορώ να ελέγξω αν το γράφημα $L(G)$ έχει διάμετρο ίση με δύο ελέγχοντας αν το γράφημα G είναι $2P_2$-free. Ο χρόνος που απαιτείται για τον έλεγχο αυτό είναι $O(n^4)$. Ας υποθέσουμε οτι το γράφημα $L(G)$ έχει διάμετρο διάφορη του δύο. Από την πρώτη υπόθεση έχουμε οτι το γράφημα G δεν είναι ούτε τρίγωνο ούτε αστέρας, άρα η διάμετρος του $L(G)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση με τρία. Όμως, από το Λήμμα 3.1.4 μπορούμε να συμπεράνουμε οτι το γράφημα $L(G)$ έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Δεύτερη υπόθεση: Το γράφημα $L(G)$ έχει διάμετρο ίση με δύο.
Στη συνέχεια ελέγχουμε σε χρόνο $O(n^3)$ αν το γράφημα G έχει μια ακμή uv τέτοια ώστε κάθε άλλη κορυφή του συνόλου $V(G)\backslash\{u,v\}$ να είναι γειτονική με μια απο τις δύο κορυφές u, v και κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο $\{u, v\}$. Αν είναι, τότε η κορυφή uv στο γράφημα $L(G)$ θα είναι dominating και σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.23, το γράφημα $L(G)$ δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Αν δεν είναι, τότε το γράφημα $L(G)$ δεν έχει dominating κορυφές και προχωράμε ως εξής.

Τρίτη υπόθεση: Το γράφημα $L(G)$ δεν έχει dominating κορυφές.
Ελέγχουμε σε χρόνο $O(n^3)$ αν το γράφημα $L(G)$ έχει κορυφή uv της οποίας η γειτονιά είναι μη συνεκτική (ή αντίστοιχα, αν το γράφημα G έχει ακμή uv τέτοια ώστε οι κορυφές u και v έχουν βαθμό τουλάχιστον δύο και κανέναν κοινό γείτονα). Αν το γράφημα $L(G)$ έχει τέτοια κορυφή, τότε λόγω του Λήμματος 4.1.25 μπορούμε να συμπεράνουμε οτι το γράφημα $L(G)$ έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Τέταρτη υπόθεση: Το γράφημα $L(G)$ δεν έχει κορυφή με μη συνεκτική γειτονία.
Η πρώτη και η δεύτερη υπόθεση ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 4.4.7, άρα μπορούμε να συμπεράνουμε οτι το γράφημα G είναι $2P_2-$free. Άρα η διάμετρος του G είναι το πολύ τρία. Οπότε παίρνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 Το γράφημα G έχει διάμετρο ίση με ένα.
Υποστηρίζουμε οτι το γράφημα $L(G)$ δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Ας υποθέσουμε οτι έχει μη συνεκτικό διαχωριστή με μη συνεκτικό διαχωρισμό τα σύνολα V_1', V_2', V_3', V_4'. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.1 το γράφημα $L(G)$ περιέχει κύκλο C' με κορυφές $u_i u_{i+1}$ για $i = 1, ..., j$ (με $u_{j+1} = u_1$) και $j \in \{4, 5\}$ τέτοια ώστε $V(C') \cap V_i' \neq \emptyset$ για $i = 1, ..., 4$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι $u_i u_{i+1} \in V_i'$ για $i = 1, ..., 4$ και $u_j u_{j+1} \in V_4'$. Απο την υπόθεση έχουμε οτι το γράφημα G έχει διάμετρο ίση με ένα και άρα θα υπάρχει η ακμή $u_1 u_3$, άρα στο γράφημα $L(G)$ θα υπάρχει η κορυφή $u_1 u_3$. Απο την υπόθεση οτι $u_i u_{i+1} \in V_i'$ μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $u_1 u_2 \in V_1$, $u_2 u_3 \in V_2$ και $u_3 u_4 \in V_3$, άρα αφού αυτές οι κορυφές στο $L(G)$ έχουν το ένα άκρο τους είτε το u_1 είτε το u_3 σημαίνει οτι στο $L(G)$ θα είναι γειτονικές με την $u_1 u_3$. Επίσης υποθέσαμε οτι $u_j u_{j+1} \in V_4'$ και $u_{j+1} = u_1$ άρα η κορυφή $u_1 u_3$ είναι γειτονική και με την κορυφή $u_j u_{j+1}$. Άρα η κορυφή $u_1 u_3$ είναι γειτονική με κορυφή απο κάθε V_i'. Άτοπο, το γράφημα $L(G)$ δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή για $diam(G) = 1$.

Περίπτωση 2 Το γράφημα G έχει διάμετρο ίση με δύο.

Σε αυτή τη περίπτωση και το γράφημα G και το γράφημα $L(G)$ έχουν διάμετρο ίση με δύο. Λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 4.4.6 αρκεί να βρούμε αν το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Από τη πρώτη υπόθεση και το Λήμμα 4.4.7 έχουμε οτι το γράφημα G είναι $2P_2$-free. Ας θυμηθούμε το Θεώρημα 4.1.17 του Κεφαλαίου 4 το οποίο μας λέει οτι το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή αν και μόνο αν το $\overline{G}$ έχει universal pair. Αυτό απαιτεί $O(n^3)$ χρόνο.

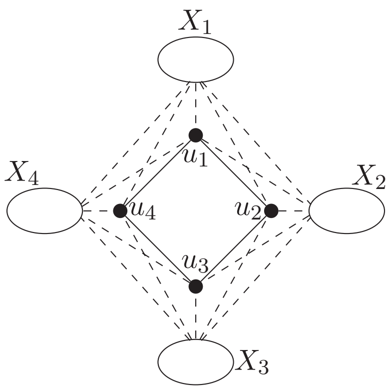
Περίπτωση 3 Το γράφημα G έχει διάμετρο ίση με τρία.

Υποστηρίζουμε οτι το γράφημα $L(G)$ δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Από το Λήμμα 3.1.4 μπορούμε να συμπεράνουμε οτι το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

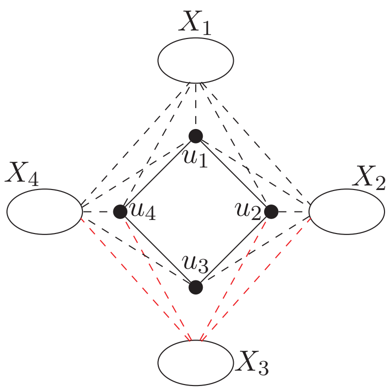
Ισχυρισμός: Έστω V_1, V_2, V_3, V_4 ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός για το γράφημα G. Τότε κάθε κύκλος C του G με $4 \leqslant \mid V(C) \mid \leqslant 5$ περιέχει κορυφές από το πολύ τρία σύνολα του $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι το G έχει έναν κύκλο C με κορυφές $u_1, ..., u_j$ για $j \in \{4, 5\}$ τέτοιον ώστε $V(C) \cap V_i \neq \emptyset$ για $i = 1, ..., 4$.

Στην περίπτωση που $k = 4$, θέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $u_i \in V_i$ και οτι $u_j \in V_4$. Άρα το γράφημα μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή, όπου με διακεκομμένες γραμμές συμβολίζουμε τις ακμές οι οποίες μπορεί να υπάρχουν στο γράφημα.



Το παραπάνω γράφημα όμως δεν είναι $2P_2$-free, αφού διαγράφοντας τις κορυφές $\{u_2, u_4\}$, τα σύνολα X_2, X_4 κα τις κορυφές των συνόλων X_1, X_3 αφήνοντας μια η οποία είναι γειτονική με τα u_1, u_3 αντίστοιχα, μένει ένα $2P_2$. Άρα κάποιο u_i πρέπει να είναι συνεκτική συνιστώσα στο V_i. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι αυτή η κορυφή είναι η u_3. Άρα το γράφημα παίρνει την παρακάτω μορφή.

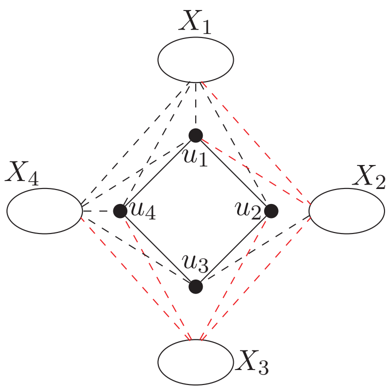


Υπενθυμίζουμε οτι το γράφημα G είναι συνεκτικό, άρα κάποιες απο τις κόκκινες διακεκομμένες γραμμές πρέπει να υπάρχουν. Όμως το γράφημα πάλι δεν είναι $2P_2$-free, αφού διαγράφοντας τις κορυφές $\{u_1, u_3\}$, τα σύνολα X_1, X_3 και τις κορυφές των συνόλων X_2, X_4 αφήνοντας μια η οποία είναι γειτονική με τα u_2, u_4 αντίστοιχα, μένει ένα $2P_2$.

Άρα κάποιο u_2 ή u_4 πρέπει να είναι συνεκτική συνιστώσα στο V_2 ή V_4 αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι αυτή η κορυφή είναι η u_2.

Στην περίπτωση όπου $k = 5$ η διαδικασία είναι ίδια, μόνο που στο τελευταίο βήμα οι επιλογές που έχουμε μόνο το u_2 να είναι μια συνεκτική συνιστώσα, αφού το u_4 δεν μπορεί να είναι λόγω της ακμής u_4u_5.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις το γράφημα θα πάρει την παρακάτω μορφή η οποία είναι $2P_2$-free.



Παρατηρούμε από το γράφημα οτι οι γειτονικές κορυφές της κορυφής u_2 μπορεί να είναι από τα σύνολα $\{X_3, X_1, u_1, u_3\}$. Επίσης, οι γειτονικές κορυφές της κορυφής u_3 μπορεί να είναι από τα σύνολα $\{X_4, X_2, u_4, u_2\}$. Τα σύνολα αυτά δεν έχουν καμία κοινή κορυφή, αυτό σημαίνει ότι η κορυφή u_2u_3 στο γράφημα $L(G)$ θα έχει μη συνεκτική γειτονία. Άτοπο, απο την τέταρτη υπόθεση. Άρα ισχύει ο ισχυρισμός. ■

Τώρα υποθέτουμε οτι το γράφημα $L(G)$ έχει μη συνεκτικό διαχωριστή με μη συνεκτικό διαχωρισμό τα σύνολα V_1', V_2', V_3', V_4'. Από το Λήμμα 4.2.1 το γράφημα $L(G)$ περιέχει έναν κύκλο C' με κορυφές u_iu_{i+1} για $i = 1, ..., j$ (με $u_1 = u_{j+1}$) και $j \in \{4, 5\}$ τέτοια ώστε $V(C) \cap V_i \neq \varnothing$ για $i = 1, ..., 4$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $u_iu_{i+1} \in V_i'$ για $i = 1, ..., 4$ και $u_ju_{j+1} \in V_4'$. Ορίζουμε την διαμέριση V_1, V_2, V_3, V_4 του $V(G)$. Έστω $u \in V(G)$. Αν η κορυφή u έχει σχέση μόνο με τις ακμές του V_i' τότε τοποθετούμε την u στο σύνολο V_i'. Υποθέτουμε οτι η κορυφή u έχει σχέση με περισσότερες από μια ακμές των συνόλων V_i'. Αφού τα σύνολα V_1', V_2', V_3', V_4' είναι μη συνεκτικός διαχωρισμός του $L(G)$ τότε η κορυφή u έχει σχέση με τις ακμές από τα σύνολα V_i' και V_{i+1}' για κάποιο $1 \leqslant i \leqslant 4$ (όπου $V_5 = V_1$) και με κανένα άλλο σύνολο V_j' διότι οι ακμές που σχετίζονται με την u θα δημιουργούν ένα πλήρες υπογράφημα στο $L(G)$ και δεν μπορούν να τοποθετηθούν σε περισσότερα από δύο σύνολα. Σε αυτήν την περίπτωση τοποθετούμε την κορυφή u στο σύνολο V_{i+1}.

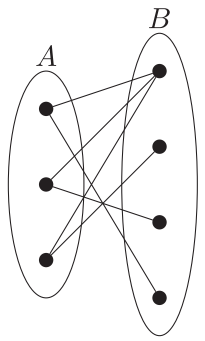
Τώρα θέλουμε να δείξουμε οτι τα σύνολα V_1 και V_3 είναι anti-complete. Θα υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή οτι υπάρχει κορυφή $u \in V_1$ και κορυφή $v \in V_3$ τέτοιες ώστε $uv \in E(G)$. Αφού η κορυφή $u \in V_1$, λόγω κατασκευής των V_i, θα έχει σχέση με τις ακμές από τα σύνολα V_4' και V_1' ή V_2' και V_1'. Αναφέραμε παραπάνω οτι τοποθετούμε την κορυφή u στο σύνολο V_{i+1} άρα $i+1 = 1$ άρα $i = 0$, δηλαδή η κορυφή u έχει σχέση είναι τα $V_0' = V_4'$ και V_1'. Άρα $uv \in V_1' \cup V_4'$. Επίσης η κορυφή $v \in V_3$, για τον ίδιο λόγο έχει σχέση με τις ακμές απο τα σύνολα V_2' και V_3'. Άρα $uv \in V_2' \cup V_3'$. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα οτι $uv \in V_4' \cup V_1'$ και $uv \in V_2' \cup V_3'$ το οποίο είναι άτοπο. Όμοια τα σύνολα V_2 και V_4 είναι anti-complete. Έστω C ο κύκλος με κορυφές $u_1, ..., u_j$ στο G. Τότε $V(C) \cap V_i \neq \emptyset$ και $V_i \neq \emptyset$ για $i = 1, ..., 4$. Άρα ο διαχωρισμός V_1, V_2, V_3, V_4 είναι μη συνεκτικός διαχωρισμός για το γράφημα G με κύκλο C για τον οποίο ισχύει $V(C) \cap V_i \neq \emptyset$ για κάθε i. Αυτό είναι άτοπο λόγω του ισχυρισμού που αποδείχθηκε παραπάνω.

Περιληπτικά, αν η διάμετρος του γραφήματος G είναι ίση με ένα ή ίση με τρία, δεν υπάρχει κάποια αλλαγή στον χρόνο εκτέλεσης. Η περίπτωση όπου η διάμετρος είναι ίση με δύο χρειάζεται χρόνο εκτέλεσης $O(n^3)$. Επίσης χρειάστηκε $O(n^4)$ χρόνος για να ελεγχθεί αν το γράφημα G είναι $2P_2-$free. Άρα η παραπάνω διαδικασία απαιτεί $O(n^4)$ χρόνο.

■

4.5 Διμερή γραφήματα

Στην παρακάτω ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή για τα διμερή γραφήματα. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.2.14 ένα διμερές γράφημα είναι το:



Λήμμα 4.5.1. *Έστω G ένα διμερές γράφημα. Τότε μπορούμε να βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.*

Απόδειξη. Έστω G ένα διμερές γράφημα με διαμερίσεις τα σύνολα A και B, τέτοια ώστε
$| A | + | B | \geqslant 4$.

Περίπτωση 1: $| A | \geqslant 2$ και $| B | \geqslant 2$

Το σύνολο A, όπως και το σύνολο B είναι μη συνεκτικά, αφού για κάθε ακμή $xy \in E(G)$ ισχύει οτι $x \in A$ και $y \in B$. Άρα, παίρνοντας το σύνολο A, το γράφημα $G[V \backslash A] = G[B]$ είναι και αυτό μη συνεκτικό. Άρα το σύνολο A είναι μη συνεκτικός διαχωριστής. Όμοια για το σύνολο B.

Περίπτωση 2: $| A | = 1$ ή $| B | = 1$

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in A$ και $\forall y \in B, \exists xy \in E(G)$ διότι σε διαφορετική περίπτωση η διάμετρος του G θα ήταν άπειρη. Άρα το G είναι ένας αστέρας και άρα δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

■

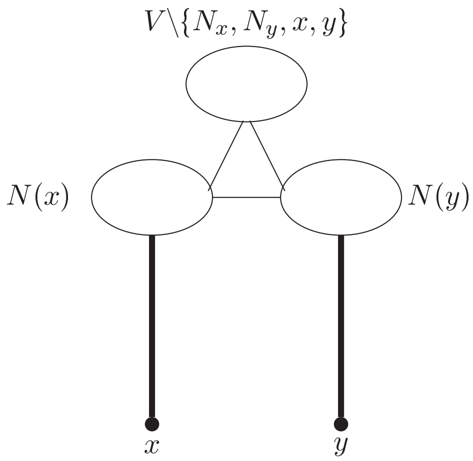
4.6 Συμπλήρωμα Διμερούς (ή co-bipartite)

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδειχθεί ότι το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή, για τα γραφήματα τα οποία είναι το συμπλήρωμα διμερούς γραφήματος (από εδώ και πέρα θα τα ονομάζουμε co-bipartite), λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Η απόδειξη θα γίνει μέσω του προβλήματος $2K_2-$ διαχωρισμού. Πρώτα όμως θα χρειαστεί να αποδείξουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.6.1. *[4] Το πρόβλημα του $2K_2-$ διαχωρισμού μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για τα γραφήματα τα οποία περιέχουν δύο μη γειτονικές κορυφές οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό γείτονα.*

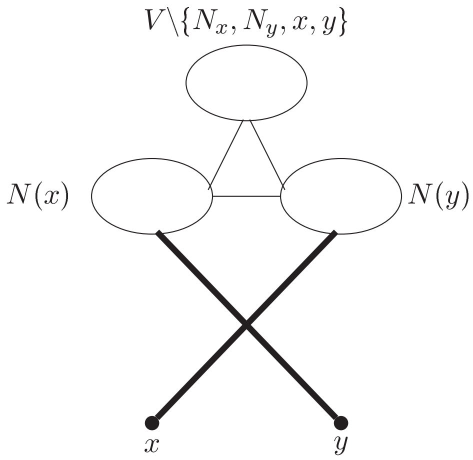
Την απόδειξη για την παραπάνω πρόταση μπορούμε να την βρούμε στο [4]. Παρακάτω θα δώσουμε μια διαφορετική προσέγγιση.

Απόδειξη. Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο περιέχει δύο μη γειτονικές κορυφές x, y οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό γείτονα. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα ως εξής:



Κάθε κορυφή του συνόλου $N(x)$ είναι γειτονική με το x και κάθε κορυφή του συνόλου $N(y)$ είναι γειτονική με το y. Μπορεί να υπάρχουν κάποιες ακμές ανάμεσα στα σύνολα $N(x)$, $N(y)$ και $V\backslash\{N(x), N(y), x, y$.

Το γράφημα $\overline{G}$ θα έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το γράφημα G, δηλαδή κάθε κορυφή του συνόλου $N(y)$ θα είναι γειτονική με την κορυφή x και κάθε κορυφή του συνόλου $N(x)$ θα είναι γειτονική με την κορυφή y. Οι ακμές ανάμεσα στα σύνολα $N(x)$, $N(y)$ και $V \backslash \{N(x), N(y), x, y$ οι οποίες δεν υπήρχαν το γράφημα G θα υπάρχουν στο γράφημα $\overline{G}$. Άρα το γράφημα $\overline{G}$ είναι και αυτό ένα γράφημα το οποίο περιέχει δύο μη γειτονικές κορυφές οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό γείτονα.



Το γράφημα $\overline{G}$ είναι ένα γράφημα με διάμετρο μεγαλύτερη του δύο, αφού η μικρότερη απόσταση που μπορεί να υπάρξει για τις κορυφές x και y είναι τρία. Άρα το γράφημα $\overline{G}$ λόγω του Λήμματος 3.1.4 έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Όμως, όπως έχουμε πει το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή και του πρόβλημα του $2K_2$-διαχωρισμού είναι ισοδύναμα λόγω της Πρότασης 2.4.1. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το γράφημα G το οποίο περιέχει δύο μη γειτονικές κορυφές x, y οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό γείτονα, έχει $2K_2$-διαχωρισμό.

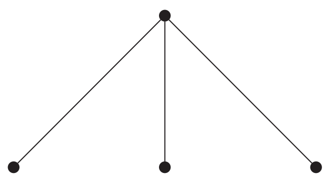
■

Πόρισμα 4.6.2. *[4] Το πρόβλημα του $2K_2-$ διαχωρισμού μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για τα διμερή γραφήματα.*

Απόδειξη. Έστω G ένα διμερές γράφημα με διαχωρισμούς τα σύνολα A και B. Αν το G έχει δύο μη γειτονικές κορυφές $x \in A$ και $y \in B$, τότε οι κορυφές x και y είναι δύο μη γειτονικές κορυφές με κανέναν κοινό γείτονα, αφού $N(x) \subseteq B$ και $N(y) \subseteq A$, άρα λόγω του παραπάνω πορίσματος το γράφημα έχει $2K_2$-διαχωρισμό. Σε διαφορετική περίπτωση, το γράφημα είναι ένα πλήρες διμερές, άρα θα έχει $2K_2$-διαχωρισμό. ■

4.7 $K_{1,3}$-free γραφήματα (ή claw-free γραφήματα)

Η τελευταία ενότητα που θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο αφορά τα claw-free γραφήματα. Η κλάση γραφημάτων αυτή είναι εκείνη στην οποία τα γραφήματα δεν περιέχουν ως επαγώμενο υπογράφημα το γράφημα claw, το οποίο υπενθυμίζουμε είναι το :

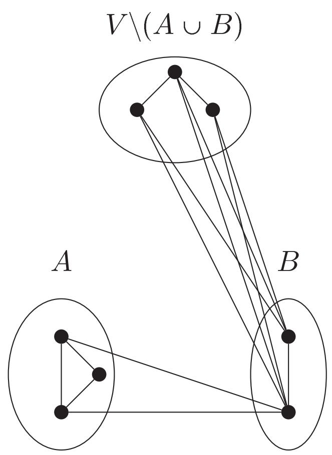


Στόχος αυτής της ενότητας είναι η απόδειξη οτι το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα claw-free γραφήματα. Το πρώτο μέρος έχει ως στόχο την απαλλαγή συγκεκριμένων co-bipartite δομών του γραφήματος, τα λεγόμενα W-join. Μπορεί η περίπτωση για τα co-bipartite γραφήματα να είναι πολυωνυμική, όμως για την επεξεργασία των claw-free γραφημάτων είναι απαραίτητη η προϋπόθεση απαλλαγής των W-join. Στο δεύτερο μέρος θα δοθούν θεωρήματα τα οποία σε συνδυασμό με το πρώτο μέρος θα μας δώσουν το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Ορισμός 4.7.1. *Ένα ζεύγος ξένων, μη κενών συνόλων κορυφών (A,B) ονομάζεται* **W-join** *σε ένα γράφημα G αν:*

- $\mid A \mid + \mid B \mid > 2$,
- *τα A και B είναι πλήρη γραφήματα,*
- *το σύνολο A δεν είναι complete ούτε anti-complete στο B, και*
- *κάθε κορυφή στο σύνολο $V(G) \backslash (A \cup B)$ είναι είτε complete είτε anti-complete στο A και είτε complete είτε anti-complete στο B.*

Παράδειγμα 4.7.2. Ένα παράδειγμα ενός W-join γραφήματος είναι το παρακάτω.



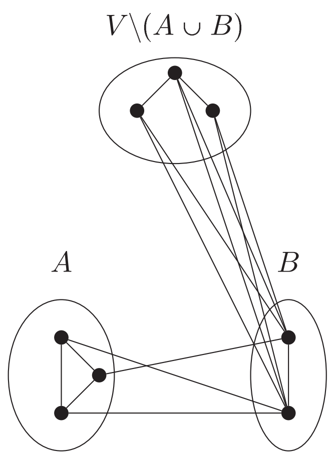
Οι κορυφές των συνόλων A και B είναι σε πλήθος περισσότερες από δύο. Το σύνολο A είναι το K_3 και το σύνολο B είναι το K_2. Το σύνολο A δεν είναι ουτε complete ούτε anti-complete στο σύνολο B, αφού υπάρχουν κορυφές x, y με $x \in A$ και $y \in B$ οι οποίες είναι γειτονικές και υπάρχουν κορυφές u, v με $u \in A$ και $v \in B$ οι οποίες δεν είναι γειτονικές και τέλος το σύνολο $V(G)\backslash(A \cup B)$ είναι anti-complete στο A και complete στο B.

Ορισμός 4.7.3. *Ένα W-join ονομάζεται* **proper** *αν κάθε κορυφή στο σύνολο A δεν είναι ούτε complete ούτε anti-complete στο B και κάθε κορυφή στο B δεν είναι complete ούτε anti-complete στο A.*

Να τονίσουμε οτι για ένα proper W-join (A,B) πρέπει να ισχύει οτι $\mid A \mid, \mid B \mid >$ 2 διότι σε διαφορετική περίπτωση η μοναδική κορυφή θα ήταν είτε complete είτε anti-complete στο άλλο σύνολο.

Παράδειγμα 4.7.4. Στο προηγούμενο παράδειγμα 4.7.2 το W-join δεν είναι proper διότι υπάρχει μια κορυφή του συνόλου B η οποία είναι anti-complete με το σύνολο A. Επίσης, υπάρχει μια κορυφή στο σύνολο A η οποία είναι anti-complete με το σύνολο B.

Στο παρακάτω παράδειγμα όμως, οι κορυφές του A είναι είτε complete είτε anti-complete στο B. Το ίδιο ισχύει και για κάθε κορυφή στο σύνολο B.



Σχόλιο 4.7.5. Για κάθε W-join ισχύει ότι το γράφημα $G[A \cup B]$ είναι cobipartite επαγώμενο υπογράφημα του G, αφού κάθε A, B είναι πλήρες γράφημα και άρα στο συμπλήρωμα το καθένα θα είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο και αφού το σύνολο A δεν είναι ούτε complete ούτε anti-complete στο B, στο συμπλήρωμα θα υπάρχουν ακμές xy για τις οποίες ισχύει οτι $x \in A$ και $y \in B$.

Παρακάτω θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και ένα λήμμα, το οποίο θα μας βοηθήσει να ξεχωρίσουμε κάποιες περιπτώσεις.

Ορισμός 4.7.6. *Δύο γειτονικές κορυφές u και v ενός γραφήματος $G = (V, E)$ έχουν* **nested** *γειτονιά αν $N(u)\backslash\{v\} \subseteq N(v)\backslash\{u\}$ ή $N(v)\backslash\{u\} \subseteq N(u)\backslash\{v\}$. Λέμε ότι το γράφημα G έχει* **distinct γειτονιές** *αν το γράφημα G δεν έχει δύο κορυφές οι οποίες έχουν nested γειτονιές.*

Λήμμα 4.7.7. *[1] Έστω γράφημα G με διάμετρο ίση με δύο, το οποίο περιέχει δύο κορυφές u και v τέτοιες ώστε $N(u)\backslash\{v\} \subseteq N(v)\backslash\{u\}$. Τότε το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή αν και μόνο αν το γράφημα $G - u$ έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Επιπλέον, το γράφημα $G - u$ έχει διάμετρο το πολύ δύο.*

Απόδειξη. Αφού διάμετρος του G είναι δύο και ισχύει η σχέση $N(u)\backslash\{v\} \subseteq N(v)\backslash\{u\}$ τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και το γράφημα $G - u$ έχει διάμετρο δύο, αφού κάθε κορυφή στο σύνολο $N(u)$ είναι γειτονική και με την κορυφή v, άρα κάθε μονοπάτι το οποίο περιείχε την κορυφή u μπορεί στην θέση της να περιέχει την κορυφή v.

($\Rightarrow$) Έστω οτι το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή με μη συνεκτικό διαχωρισμό τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $v \in V_1$.
Πρώτα ας υποθέσουμε ότι $u \in V_1$. Τότε $\{u, v\} \subset V_1$ και άρα $V_1\backslash\{u\}, V_2, V_3, V_4$ είναι ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός και για το γράφημα $G - u$.
Τώρα υποθέτουμε ότι $v \notin V_1$. Αφού οι κορυφές u και v είναι γειτονικές η κορυφή u δεν μπορεί να ανήκει στο σύνολο V_3. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $u \in V_2$. Αφού η κορυφή $v \in V_1$ και τα σύνολα V_1 και V_3 είναι anti-complete τότε η κορυφή v δεν έχει κανέναν γείτονα στο σύνολο V_3. Από την σχέση $N(u)\backslash\{v\} \subseteq N(v)\backslash\{u\}$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ούτε η κορυφή u έχει κάποιον γείτονα στο σύνολο V_3, αφού έτσι θα είχε και η κορυφή v. Στη συνέχεια, λόγω της διαμέτρου του G, το σύνολο V_2 πρέπει να περιέχει μια κορυφή w η οποία είναι γειτονική με κάποια κορυφή από το σύνολο V_3. Έτσι, το σύνολο $V_2\backslash\{u\}$ δεν είναι κενό, άρα μπορούμε να πάρουμε ως μη συνεκτικό διαχωρισμό τα σύνολα $V_1, V_2\backslash\{u\}, V_3, V_4$.
Άρα το γράφημα $G - u$ έχει μη συνεκτικό διαχωρισμό σε κάθε περίπτωση.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το γράφημα $G - u$ έχει μη συνεκτικό διαχωριστή με μη συνεκτικό διαχωρισμό τα σύνολα V_1', V_2', V_3', V_4'. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η κορυφή $v \in V_1'$. Άρα οι γείτονες της κορυφής v ανήκουν στα σύνολα V_1, V_2, V_4. Αφού όμως ισχύει η σχέση $N(u)\backslash\{v\} \subseteq N(v)\backslash\{u\}$, το ίδιο θα ισχύει και για τους γείτονες της κορυφής u. Άρα τοποθετώντας την κορυφή u στο σύνολο V_1 έχουμε ότι ο διαχωρισμός $V_1' \cup \{u\}, V_2', V_3', V_4'$ είναι μη συνεκτικός διαχωρισμός. Άρα το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

■

Με την βοήθεια του παραπάνω Λήμματος και του Λήμματος 3.1.4 υποθέτουμε ότι το γράφημα G έχει διάμετρο δύο και ότι έχει distinct γειτονιές. Ο επόμενος στόχος μας είναι, χρησιμοποιώντας αυτές τις υποθέσεις, να αφαιρέσουμε όλα τα W-join από ένα claw-free γράφημα και να πάρουμε ένα ισοδύναμο γράφημα με το οποίο μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή. Προς το παρόν όμως θα επικεντρωθούμε στα proper W-join.

Λήμμα 4.7.8. *[1] Έστω G ένα γράφημα με distinct γειτονιές. Αν το γράφημα έχει ένα W-join (A,B), τότε το (A,B) είναι ένα proper W-join.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδειχθεί οτι καμία κορυφή του συνόλου A (αντίστοιχα του B) είναι complete ή anti-complete στο σύνολο B (αντίστοιχα στο B). Υποθέτουμε ότι υπάρχει κορυφή $a \in$ A τέτοια ώστε να είναι anti-complete στο σύνολο B. Από τον ορισμό του W-join γνωρίζουμε ότι το σύνολο A δεν είναι anti-complete στο σύνολο B, άρα υπάρχει κορυφή $a' \in$ A$\backslash\{a\}$ τέτοια ώστε η κορυφή a' να είναι γειτονική σε κάποιες κορυφές του συνόλου B. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $N(a)\backslash\{a'\} \subseteq N(a')\backslash\{a\}$, το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι το γράφημα G έχει distinct γειτονιές. Όμοια αποδεικνύεται ότι καμία κορυφή του συνόλου B δεν είναι anti-complete στο σύνολο A.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει κορυφή $a \in$ A τέτοια ώστε να είναι complete στο σύνολο B. Τότε, για κάθε $a' \in$ A$\backslash\{a\}$ ισχύει ότι $N(a')\backslash\{a\} \subseteq N(a)\backslash\{a'\}$. Αφού όμως έχουμε υποθέσει οτι το γράφημα G δεν έχει distinct γειτονιές, τότε δεν υπάρχει τέτοια κορυφή a' άρα $\min A \mid = 1$. Απο τον ορισμό του W-join γνωρίζουμε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση $\mid A \mid + \mid B \mid > 2$, άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\mid B \mid \geqslant 2$. Όμως καμία κορυφή του B δεν είναι anti-complete στο A άρα κάθε κορυφή του B θα είναι γειτονική με την μια κορυφή του A. Αυτό όμως μας βγάζει το συμπέρασμα ότι το B είναι complete στο A. Όμοια με πρίν, αυτό βγάζει το συμπέρασμα ότι $\mid B \mid = 1$, άτοπο. Άρα καμία κορυφή του A δεν είναι complete στο B. Όμοια αποδεικνύεται ότι καμία κορυφή του B δεν είναι complete στο A. ■

Παρακάτω θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς για κάποια είδη W-join.

Ορισμός 4.7.9. *Ένα W-join (A,B) ονομάζεται* **partitionable** *αν υπάρχουν διαμερίσεις του A σε δύο μη κενά σύνολα A' και A''και του B σε δύο μη κενά σύνολα B', B'' τέτοια ώστε το σύνολο A' είναι anti-complete στο B'' και το σύνολο B' είναι anti-complete στο A''. Ένα proper W-join (A,B) ονομάζεται* **shatterable** *αν είναι partitionable με τα σύνολα A', A'', B', B'' και καθένα από τα $(A', B'), (A'', B'')$ είναι επίσης proper W-join. Σε άλλη περίπτωση λέγεται* **unshatterable**.

Λήμμα 4.7.10. *[1] Έστω G ένα γράφημα με distinct γειτονιές και έστω (A,B) ένα proper W-join στο G. Αν το (A,B) είναι partitionable και unshatterable, τότε το $G[A \cup B]$ είναι ισομορφικό με το C_4.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι το (A,B) είναι partitionable στα σύνολα A′,A’,B′,B’.Εξ ορισμού, έχουμε ότι $| A' |, | A'' |, | B' |, | B'' | \geqslant 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $| A' | + | B' | \geqslant | A'' | + | B'' |$. Αφού το (A,B)είναι unshatterable, τότε το (A', B') δεν είναι proper W-join.

Υποθέτουμε ότι $| A' | + | B' | > 2$. Αφού όμως το G δεν έχει distinct γειτονίες τότε το σύνολο A′ θα πρέπει να μην είναι ούτε complete ούτε anti-complete στο B′ διότι έτσι δύο κορυφές του A′ (ή του B′) θα είχαν την ίδια γειτονία, άρα το (A', B') είναι ένα W-join. Λόγω του Λήμματος **;;** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το (A′,B′) είναι proper W-join, άτοπο. Άρα $| A' | = | B' | = | A'' | = | B'' | = 1$. Αφού όμως το (A,B) είναι proper, σημαίνει ότι η κορυφή x του A′ είναι γειτονική είτε με την κορυφή του συνόλου B′ είτε με την κορυφή του συνόλου B’, αλλά όχι και με τις δύο. Άρα, το $G[A \cup B]$ είναι ισομορφικό με το C_4. ■

Λήμμα 4.7.11. *[1] Έστω G ένα claw-free γράφημα το οποίο δεν είναι cobipartite, έχει distinct γειτονιές και έχει διάμετρο ίση με δύο. Έστω (A,B) ένα proper W-join στο G το οποίο είναι unshatterable. Αν το G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή, τότε υπάρχει μη συνεκτικός διαχωρισμός V_1, V_2, V_3, V_4 του γραφήματος G τέτοιος ώστε $V_i \cap (A \cup B) = \varnothing$ για κάποιο $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Απόδειξη. Έστω τα V_1, V_2, V_3, V_4 είναι ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός του γραφήματος G και υποθέτουμε οτι $V_1 \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ για κάθε $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Εξ ορισμού το σύνολο V_1 είναι anti-complete στο σύνολο V_3 και το σύνολο V_2 είναι anti-complete στο σύνολο V_4. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $V_1 \cap A \neq \varnothing$ και $V_2 \cap A \neq \varnothing$. Από το πρώτο μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $V_3 \cap (A \cup B) \subseteq B$ αφού το σύνολο A είναι κλίκα και τα σύνολα V_1 και V_3, όπως είπαμε, είναι anti-complete. Άρα ισχύει επίσης οτι $V_1 \cap (A \cup B) \subseteq A$. Από το τελευταίο μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $V_4 \cap (A \cup B) \subseteq B$ και όμοια με πριν οτι $V_2 \cap (A \cup B) \subseteq A$. Άρα υπάρχει διαχωρισμός των A, B στα σύνολα $V_1 \cap A$,$V_2 \cap A$,$V_3 \cap B$,$V_4 \cap B$ για τα οποία ισχύει οτι $V_1 \cap A$ είναι anti-complete στο $V_3 \cap B$ και οτι $V_A \cap A$ είναι anti-complete στο $V_4 \cap B$, άρα το (A, B) είναι partitionable. Από την υπόθεση έχουμε οτι το γράφημα G έχει distinct γειτονιές, οτι το (A, B) είναι proper W-join και unshatterable. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 4.7.10, άρα το γράφημα $G[A \cup B]$ είναι ισομορφικό του C_4. Για κάθε $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ υπάρχει μια μοναδική κορυφή v_i στο $V_i \cap (A \cup B)$, έτσι κάθε v_i είναι γειτονικό με το v_{i+1} όπου $v_5 = v_1$ και επίσης ισχύει οτι $A = \{v_1, v_2\}$ και $B = \{v_3, v_4\}$.

Θεωρώ τα σύνολα $P = N(A) \backslash N[B], Q = N(B) \backslash N[A], M = N[A \cup B] \backslash (P \cup Q)$ και $R = V(G) \backslash (P \cup Q \cup M)$. Για τα παραπάνω σύνολα ισχύει οτι το P είναι complete στο A και anti-complete στο B, το Q είναι complete στο B και anti-complete στο A, το M είναι complete στο $A \cup B$ και το R είναι anti-complete στο $A \cup B$.

Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $P \subseteq V_1 \cup V_2$ αφού το P είναι complete στο A και άρα θα έχει γειτονικές τις κορυφές v_1, v_2 άρα δεν μπορεί να τοποθετηθεί σε κάποιο από τα σύνολα V_3, V_4. Όμοια, $Q \subseteq V_3 \cup V_4$. Επίσης ισχύει οτι $M = \varnothing$ αφού το σύνολο M είναι γειτονικό και με τις τέσσερις κορυφές v_1, v_2, v_3, v_4 άρα αν δεν ήταν κενό δεν θα υπήρχε μη συνεκτικός διαχωριστής. Επιπλέον παρατηρούμε οτι το γράφημα $G[P]$ είναι κλίκα διότι αν υπάρχουν δύο κορυφές u, v στο P οι οποίες δεν είναι τότε οι κορυφές v_1, v_4, v, u δημιουργούν ένα claw. Όμοια, το γράφημα $G[Q]$ είναι κλίκα.

Παρατηρούμε οτι μια από τις παρακάτω κινήσεις οδηγεί στο ζητούμενο διαχωρισμό ($V_i \cap (A \cup B) = \varnothing$ για κάποιο $i \in \{1, 2, 3, 4\}$).

- μετακινώ την κορυφή v_1 στο σύνολο V_2 και την κορυφή v_4 στο σύνολο V_3, εκτός αν $\mid V_1 \mid= 1$ ή $\mid V_4 \mid= 1$
- μετακινώ την κορυφή v_2 στο σύνολο V_1 και την κορυφή v_3 στο σύνολο V_4, εκτός αν $\mid V_2 \mid= 1$ ή $\mid V_3 \mid= 1$

Μένει να δείξουμε οτι $\mid V_1 \mid, \mid V_4 \mid > 1$ ή $\mid V_2 \mid, \mid V_3 \mid > 1$. Θεωρούμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

(i) Υποθέτουμε οτι $R = \varnothing$. Το $M = \varnothing$ άρα τα σύνολα $P \cup A$ και $Q \cup B$ σχηματίζουν ένα cobipartite αφού στο συμπλήρωμα τα σύνολα $P \cup A$ και $Q \cup B$ δεν έχουν καμία εσωτερική ακμή και είναι complete μεταξύ τους. Άτοπο λόγω της υπόθεσης, άρα $\underline{R \neq \varnothing}$.

(ii) Υποθέτουμε οτι $P = \varnothing$. Αφού $R \neq \varnothing$ τότε υπάρχει κορυφή $v \in R$. Κάθε μονοπάτι από την κορυφή v στην κορυφή v_1 πρέπει να περιέχει κορυφές και από το σύνολο B και από το σύνολο Q. Τα δύο σύνολα αυτά όμως είναι ξένα μεταξύ τους, άρα το μονοπάτι έχει την μορφή v, u, x, v_1 όπου $u \in Q$ και $x \in B$ άρα η διάμετρος είναι μεγαλύτερη του δύο. Άτοπο λόγω της υπόθεσης, άρα $\underline{P \neq \varnothing}$. Όμοια αποδεικνύεται οτι $\underline{Q \neq \varnothing}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι $\underline{P \cap V_1 \neq \varnothing}$ άρα έστω οτι $x \in P \cap V_1$. Υποθέτουμε οτι $\underline{\mid V_4 \mid= 1}$ άρα $V_4 = \{v_4\}$.Υπενθυμίζουμε οτι $Q \subseteq V_3 \cup V_4$, άρα σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει οτι $Q \subseteq V_3$. Επίσης, αφού $R \neq \varnothing$ υπάρχει $j \in \{1, 2, 3\}$ τέτοιο ώστε $R \cap V_j \neq \varnothing$.

Θεωρούμε τις παρακάτω υποθέσεις:

1. Υποθέτουμε οτι $R \cap V_1 \neq \emptyset$. Αφού το σύνολο V_1 είναι anti-complete στο σύνολο V_3 κάθε μονοπάτι από μια κορυφή στο σύνολο $R \cap V_1$ στο v_4 πρέπει να περιέχει κορυφές και από το σύνολο V_2 και από το σύνολο V_3, άρα η διάμετρος του μονοπατιού θα είναι μεγαλύτερη του δύο. Άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει οτι το γράφημα G έχει διάμετρο ίση με δύο.

2. Υποθέτουμε οτι $R \cap V_2 \neq \emptyset$. Τότε ισχύει οτι $\mid V_2 \mid > 1$. Γνωρίζοντας όμως οτι $Q \neq \emptyset$ και οτι $Q \subseteq V_3$ μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $\mid V_3 \mid > 1$. Άρα μετακινώντας την κορυφή v_2 στο σύνολο V_1 και την κορυφή v_3 στο σύνολο V_4 οδηγούμαστε στον ζητούμενο μη συνεκτικό διαχωριστή.

3. Υποθέτουμε οτι $R \cap V_3 \neq \emptyset$. Έστω $v \in R \cup V_3$. Υπενθυμίζουμε οτι V_1 είναι anti-complete με το σύνολο V_3. Τότε αν πάρουμε το συντομότερο μονοπάτι από το v στο v_1 το οποίο περιέχει κορυφές από τα σύνολα Q και B, δεν έχει διάμετρο δύο. Άρα, το συντομότερο μονοπάτι διαμέτρου 2 πρέπει να περιέχει κορυφή από το σύνολο $P \cup V_2$ και έπειτα την κορυφή v_1. Αυτό σημαίνει οτι $P \cup V_2 \neq \emptyset$. Άρα $\mid V_2 \mid > 1$ και $\mid V_3 \mid > 1$ μπορούμε να μετακινήσουμε την κορυφή v_2 στο σύνολο V_1 και την κορυφή v_3 στο σύνολο V_4 οδηγούμαστε στον ζητούμενο μη συνεκτικό διαχωριστή.

Τώρα θα πάρουμε την περίπτωση όπου $\underline{\mid V_4 \mid > 1}$. Αφού $\mid V_1 \mid > 1$, μετακινώντας την κορυφή v_1 στο σύνολο V_2 και την κορυφή v_4 στο σύνολο V_3 οδηγούμαστε στον ζητούμενο μη συνεκτικό διαχωριστή.

■

Έστω (A, B) ένα proper W-join ενός γραφήματος G. Για κάθε δύο γειτονικές κορυφές $a \in A$ και $b \in B$ θεωρούμε το γράφημα G_{ab} το οποίο δημιουργείται από το G αφαιρώντας τις κορυφές $A \backslash a$ και $B \backslash b$. Παρατηρούμε ότι το γράφημα G_{ab} είναι το ίδιο ανεξάρτητα από την επιλογή των a, b, αφού κάθε κορυφή στο $V(G) \backslash \{A \cup B\}$ θα είναι ή complete ή anti-complete με τις κορυφές των συνόλων A και B, από τον ορισμό του proper W-join.

Λήμμα 4.7.12. *[1] Έστω G ένα claw-free γράφημα το οποίο δεν είναι cobipartite, έχει distinct γειτονιές και έχει διάμετρο ίση με 2. Έστω οτι το (A, B) είναι ένα proper W-join του G το οποίο είναι unshatterable. Τότε το G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή αν και μόνο αν το G_{ab} έχει μη συνεκτικό διαχωριστή για δύο οποιεσδήποτε γειτονικές κορυφές $a \in A$ και $b \in B$.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$)Αρχικά υποθέτουμε οτι το γράφημα G_{ab} έχει μη συνεκτικό διαχωρισμό τα V_1, V_2, V_3, V_4 για κάθε δύο κορυφές a, b. Έστω $a \in V_i$ και $b \in V_j$ για κάποια $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Τότε τα σύνολα V_1', V_2', V_3', V_4', τα οποία δημιουργούνται από τα V_1, V_2, V_3, V_4 προσθέτοντας τις κορυφές του A στο σύνολο V_i και του B στο V_j, είναι μη συνεκτικός διαχωρισμός του G.

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή με μη συνεκτικό διαχωρισμό τα V_1, V_2, V_3, V_4. Για το γράφημα G πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του Λήμματος **;;**, άρα συμπεραίνουμε οτι $V_i \cap (A \cup B) = \emptyset$ για κάποιο $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι $V_4 \cap (A \cup B) = \emptyset$. Υπενθυμίζουμε οτι το σύνολο A είναι κλίκα στο G και οτι το σύνολο V_1 είναι anti-complete στο σύνολο V_3. Από αυτά τα δύο μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $A \subseteq V_1 \cup V_2$ ή $A \subseteq V_2 \cup V_3$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε το πρώτο. Επίσης διαλέγουμε ο διαχωρισμός V_1, V_2, V_3, V_4 να είναι αυτός που ελαχιστοποιεί το $\mid A \cap V_1 \mid$.

Θα θεωρήσουμε αρκετές περιπτώσεις. Σε κάθε περίπτωση θα βρούμε δύο κορυφές a, b για τις οποίες μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν μη συνεκτικό διαχωρισμό για το γράφημα G_{ab}. Αυτό αρκεί για να αποδειχθεί το ζητούμενο αφού το γράφημα G_{ab} είναι το ίδιο ανεξάρτητα από την επιλογή των a, b.

Υποθέτουμε ότι $\underline{A \subseteq V_1}$. Από τον ορισμό του proper W-join έχουμε ότι καμία κορυφή του B δεν είναι anti-complete στο A, άρα αφού το σύνολο V_1 είναι anti-complete στο σύνολο V_3 συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν κορυφές του σύνολο B που να ανήκουν στο σύνολο V_3, δηλαδή έχουμε ότι $B \subseteq V_1 \cup V_2$. Αν ισχύει ότι $B \subseteq V_1$, τότε έστω $a \in A$ και $b \in B$ δύο αυθαίρετες γειτονικές κορυφές (ο ορισμός του proper W-join μας εξασφαλίζει οτι υπάρχουν δύο τέτοιες κορυφές) τότε $V \backslash ((A \backslash \{a\}) \cup (B \backslash \{b\})), V_2, V_3, V_4$ είναι ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός του G_{ab}. Αλλιώς, έστω $b \in B \cap V_2$ και έστω a μια τυχαία κορυφή του A η οποία είναι γειτονική με το b (ο ορισμός του proper W-join μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει τέτοια κορυφή). Τότε $V \backslash ((A \backslash \{a\}) \cup B), V_2(\backslash B \backslash \{b\}), V_3, V_4$ είναι ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός του G_{ab}.

Υποθέτουμε ότι $\underline{A \subseteq V_2}$. Παρατηρούμε ότι $B \subseteq V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Υπενθυμίζουμε όμως ότι το σύνολο B είναι κλίκα και αφού το σύνολο V_1 είναι anti-complete στο σύνολο V_3 συμπεραίνουμε ότι $B \subseteq V_1 \cup V_2$ ή $B \subseteq V_2 \cup V_3$. Πρώτα υποθέτουμε ότι $B \subseteq V_2$. Έστω $a \in A$ και $b \in B$ είναι δύο αυθαίρετες κορυφές, οι οποίες τονίζουμε ότι ανήκουν στο σύνολο V_2. Τότε $V_1, V_2 \backslash ((A \backslash \{a\}) \cup (B \backslash \{b\})), V_3, V_4$ είναι ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός του G_{ab}. Οπότε υποθέτουμε ότι $B \nsubseteq V_2$. Τότε $B \cap V_1 \neq \emptyset$ ή $B \cap V_3 \neq \emptyset$.Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε το πρώτο. Έστω $b \in B \cap V_1$ και έστω $a \in A$ κάποιος γείτονας του b.Παρατηρούμε ότι $a \in V_2$. Τότε $V_1 \backslash (B \backslash \{b\}), V_2 \backslash ((A \backslash \{a\}) \cup B), V_3, V_4$ είναι ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός του G_{ab}.

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $A \cup V_1 \neq \emptyset$ και $A \cup V_2 \neq \emptyset$.Θεωρούμε τα σύνολα $P = N(A) \backslash N[B]$,$Q = N(B) \backslash N[A]$,$M = N[A \cup B] \backslash (P \cup Q)$ και $R = V(G) \backslash (P \cup Q \cup M)$.Παρατηρούμε ότι το P είναι complete στο A και είναι anti-complete στο B,ενώ το Q είναι complete στο B και anti-complete στο A. Επίσης, το M είναι complete στο $A \cup B$ ενώ το R είναι anti-complete στο $A \cup B$. Τότε, συμπεραίνουμε ότι $P \subseteq V_1 \cup V_2$. Επίσης ισχύει ότι $B \subseteq V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Αφού όμως το B είναι κλίκα και το V_1 είναι anti-complete στο V_3, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $B \subseteq V_1 \cup V_2$ ή $B \subseteq V_2 \cup V_3$. Επιπλέον, αφού ισχύει ότι $A \cap V_1 \neq \emptyset$ και από τον ορισμό του proper W-join συμπεραίνουμε ότι $B \nsubseteq V_3$. Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι $B \subseteq V_1 \cup V_2$.

Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι $B \cap V_3 \neq \emptyset$. Τότε θα ισχύει ότι $B \cap V_2 \neq \emptyset$. Αφού το σύνολο M είναι complete στα σύνολα A, B και $A \cup B$ θα έχει μη κενή τομή με καθένα από τα σύνολα V_1, V_2, V_3. Όμως, γνωρίζουμε ότι το V_1 είναι anti-complete στο V_3, άρα συμπεραίνουμε ότι $M \subseteq V_2$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $Q \subseteq V_2 \cup V_3$. Υποθέτουμε ότι $V_1 \backslash A \neq \emptyset$. Τότε τα $V_1 \backslash A, V_2 \cup A, V_3, V_4$ είναι επίσης μη συνεκτικός διαχωριστής. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι ο μη συνεκτικός διαχωρισμός V_1, V_2, V_3, V_4 ελαχιστοποιεί το $\mid V_1 \cap A \mid$. Άρα ισχύει ότι $V_1 \backslash A = \emptyset$ και άρα $V_1 \subseteq A$. Από το τελευταίο συμπεραίνουμε επίσης ότι $P \subseteq V_2$. Αν θυμηθούμε τον ορισμό του συνόλου R και του proper W-join συμπεραίνουμε ότι κάθε μονοπάτι μήκους 2 από κάποια κορυφή του συνόλου R σε μια κορυφή του συνόλου A θα πρέπει να περνάει πρώτα από κάποια κορυφή του συνόλου P ή του συνόλου M. Υπενθυμίζουμε ότι $M \cup P \subseteq V_2$ και ότι το σύνολο V_2 είναι anti-complete στο σύνολο V_4. Άρα $R \cap V_4 = \emptyset$, αφού η διάμετρος του γραφήματος είναι 2 και άρα θα υπάρχει ακμή ανάμεσα σε κάποια κορυφή του συνόλου R και του συνόλου P ή M. Από την στιγμή όμως που $A \cup B \cup P \cup M \cup Q \cup R = V(G)$ και όλα αυτά τα σύνολα έχουν κενή τομή με το V_4 συμπεραίνουμε ότι το V_4 είναι κενό, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $B \cap V_3 = \emptyset$.

Άρα υποθέτουμε ότι $B \subseteq V_1 \cup V_2$. Πρώτα θα υποθέσουμε ότι υπάρχουν γειτονικές κορυφές $a \in A$ και $b \in B$ τέτοιες ώστε $\mid V_1 \cap \{a, b\} \mid = 1$ (και άρα $\mid V_2 \cap \{a, b\} \mid = 1$).Τότε, $V_1 \backslash ((A \cup B) \backslash \{a, b\}), V_2 \backslash ((A \cup B) \backslash \{a, b\}), V_3, V_4$ είναι ένας μη συνεκτικός διαχωριστής του γραφήματος G_{ab}. Τώρα θα υποθέσουμε ότι δύο τέτοιες κορυφές δεν υπάρχουν. Από τον ορισμό του proper W-join έχουμε ότι ούτε $B \subseteq V_1$ ούτε $B \subseteq V_2$, ειδάλλως θα υπήρχε κορυφή του A η οποία θα ήταν anti-complete στο σύνολο B. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το (A, B) είναι partitionable στα σύνολα $A \cap V_1, A \cap V_2, B \cap V_1, B \cap V_2$. Έτσι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 4.7.10, άρα το $G[A \cup B]$ είναι ισομορφικό του C_4.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $| A |=| B |= 2$ και άρα καθένα από τα V_1, V_2 ακριβώς μια κορυφή του A και ακριβώς μια κορυφή του B. Το γράφημα G δεν είναι cobipartite και είναι συνεκτικό, άρα τουλάχιστον ένα από τα σύνολα P, M, Q είναι μη κενά. Επίσης, κάθε κορυφή του συνόλου $P \cup M \cup Q$ είναι γειτονική σε μια κορυφή του V_1 και του V_2.Άρα λόγω του ορισμού του μη συνεκτικού διαχωρισμού παίρνουνε ότι $P \cup M \cup Q \subseteq V_1 \cup V_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $(P \cup M \cup Q) \cap V_1 \neq \emptyset$. Έστω a η μοναδική κορυφή του συνόλου $A \cup V_2$ και b η μοναδική κορυφή του συνόλου $B \cup V_2$. Τότε το $V_1 \backslash (A \cup B), V_2, V_3, V_4$ είναι μη συνεκτικός διαχωρισμός του G_{ab}.

Σε κάθε περίπτωση αποδείχθηκε ότι αν το G έχει έναν μη συνεκτικό διαχωρισμό τότε και το G_{ab} έχει έναν μη συνεκτικό διαχωρισμό. Άρα το λήμμα αποδείχθηκε.

■

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να αφαιρέσουμε όλα τα W-join από ένα claw-free γράφημα με διάμετρο 2. Ωστόσο είναι σημαντικό να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο με πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης ο οποίος θα βρίσκει ένα unshatterable proper W-join αν αυτό υπάρχει. Ο αλγόριθμος που θα δοθεί στηρίζεται στον αλγόριθμο των King και Reed ο οποίος έχει $O(n^2m)$ χρόνο εκτέλεσης και βρίσκει ένα proper W-join.

Λήμμα 4.7.13. *[1] Έστω G ένα γράφημα με distinct γειτονιές. Τότε σε χρόνο $O(n^2m)$ μπορούμε να βρούμε ένα unshatterable proper W-join ή να αναφερθεί ότι το G δεν έχει ένα proper W-join .*

Απόδειξη. Οι King και Reed απέδειξαν ότι σε χρόνο $O(n^2m)$ μπορεί να βρεθεί ένα proper W-join στο G ή να αναφερθεί ότι το γράφημα G δεν έχει ένα.

Παρακάτω θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγορίθμου ο οποίος θα βρίσκει ένα unshatterable proper W-join αν αυτό υπάρχει, αλλιώς θα απαντάει ότι δεν υπάρχει. Έστω ότι έχει βρεθεί ένα (A, B) το οποίο είναι proper W-join από τον αλγόριθμο των King και Reed. Αν το $G[A \cup B]$ είναι ισομορφικό με το C_4 (το οποίο μπορεί να ελεγχθεί σε σταθερό χρόνο) τότε θα είναι και unshatterable, άρα ο αλγόριθμος επιστρέφει το (A, B).

Τώρα υποθέτουμε το αντίθετο. Μπορούμε να ελέγξουμε σε γραμμικό χρόνο πότε το (A, B) είναι partitionable με την παρακάτω διαδικασία.
Έστω H το γράφημα το οποίο κατασκευάζεται από το $G[A \cup B]$ αφαιρώντας όλες τις ακμές οι οποίες έχουν και τα δύο τους άκρα είτε στο A είτε στο B. Παρατηρούμε ότι μετά από αυτή την διαδικασία το γράφημα H θα είναι διμερές.

Επίσης, το γράφημα H δεν μπορεί να περιέχει απομονωμένες κορυφές, διότι αν είχε μια απομονωμένη κορυφή $a \in A$ η κορυφή αυτή θα ήταν anti-complete και στο σύνολο B, το οποίο είναι άτοπο λόγο του ορισμού το proper W-join. Αφού από το γράφημα H έχω αφαιρέσει όλες τις εσωτερικές ακμές των συνόλων A και B τότε συμπεραίνω ότι το (A, B) είναι partitionable αν και μόνο αν το H έχει δύο ή περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες.
Αν το H έχει μια συνεκτική συνιστώσα, το οποίο μπορούμε να το ελέγξουμε σε γραμμικό χρόνο, τότε το (A, B) δεν είναι partitionable και άρα είναι unshatterable.
Αν το H έχει τρεις ή περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες, τότε έστω C μια τέτοια συνιστώσα. Τότε το (A, B) είναι partitionable με διαμερίσεις τα $V(C) \cap A, V(C) \cap B, (V(H) \backslash V(C)) \cap A, (V(H) \backslash V(C)) \cap B$, και αφού το H δεν έχει απομονωμένες κορυφές τότε $\mid V(H) \backslash V(C) \mid > 3$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι το γράφημα G έχει distinct γειτονίες, άρα το $((V(H) \backslash V(C)) \cap A, (V(H) \backslash V(C)) \cap B)$ είναι W-join στο G αφού ισχύουν όλες οι υποθέσεις του ορισμού του W-join. Από το Λήμμα 4.7.8 παίρνουμε ότι το $((V(H) \backslash V(C)) \cap A, (V(H) \backslash V(C)) \cap B)$ είναι proper W-join. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε μειώσει τις συνεκτικές συνιστώσες και έτσι επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο για το $((V(H) \backslash V(C)) \cap A, (V(H) \backslash V(C)) \cap B)$.
Αν το H έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, έστω C η συνεκτική συνιστώσα με τις περισσότερες κορυφές. Αφού το $G[A \cup B]$ δεν είναι ισομορφικό με το C_4 συμπεραίνουμε ότι το C έχει τουλάχιστον 3 κορυφές διότι αν είχε δύο τότε και η άλλη συνεκτική συνιστώσα θα είχε δύο κορυφές και άρα θα ήταν ισομορφικό με το C_4. Τότε, χρησιμοποιώντας ότι το γράφημα G έχει distinct γειτονίες, το $(V(C) \cap A, V(C) \cap B)$ είναι W-join στο G αφού ισχύουν όλες οι υποθέσεις του ορισμού του W-join. Από το Λήμμα 4.7.8 παίρνουμε ότι το $(V(C) \cap A, V(C) \cap B)$ είναι proper W-join. Επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο για το $(V(C) \cap A, V(C) \cap B)$. Αυτό μας δίνει τον ζητούμε αλγόριθμο.

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος τρέχει το πολύ n φορές, αφού σε κάθε αναδρομικό βήμα το proper W-join είναι μικρότερο από το προηγούμενο. Επίσης, κάθε αναδρομικό βήμα εκτελείται σε γραμμικό χρόνο. Άρα ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(n^2 m)$.

■

Παρακάτω στόχος μας είναι η αποσύνθεση των claw-free γραφημάτων με διάμετρο ίση με δύο. Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστούμε κάποιους ορισμούς οι οποίοι διατυπώθηκαν πρώτη φορά από τους Chudnovsky και Seymour αλλά επαναδιατυπώθηκαν από τον Hermelin.

Ορισμός 4.7.14. *Ένα* **trigraph** *ορίζεται από ένα σύνολο κορυφών και μια σχέση γειτνίασης όπου κάθε δύο κορυφές θα είναι είτε strongly adjacent είτε semi-adjacent είτε strongly anti-adjacent, και κάθε κορυφή είναι semi-adjacent με το πολύ μια κορυφή. Μπορεί κάποιος να φανταστεί ένα trigraph ως ένα συνηθισμένο γράφημα που όμως κάποιες κορυφές υπάρχουν και δεν υπάρχουν ταυτόχρονα.*

Ορισμός 4.7.15. *Οι κορυφές u, v ενός trigraph ονομάζονται* **adjacent** *αν αυτές είναι strongly adjacent ή semi-adjacent και* **anti-adjacent** *αν αυτές είναι strongly anti-adjacent ή semi-adjacent.*

Ορισμός 4.7.16. *Ονομάζουμε δύο σύνολα X, Y* **(strongly) complete** *αν κάθε ζεύγος κορυφών $x \in X, w \in Y$ είναι (strongly) adjacent, και* **(strongly) anti-complete** *αν κάθε ζεύγος κορυφών $x \in X, w \in Y$ είναι (strongly) anti-adjacent.*

Παρατήρηση 4.7.17. [1] Ένα trigraph που δεν έχει κανένα ζεύγος κορυφών, οι οποίες να είναι semi-adjacent, είναι ένα απλό γράφημα.

Ορισμός 4.7.18. *Ένα γράφημα H είναι ένα* **thickening** *ενός trigraph G αν υπάρχει διαχωρισμός του συνόλου $V(H)$ σε μη κενά σύνολα X_v για κάθε $v \in V(G)$ τέτοια ώστε:*

1. *το X_v είναι κλίκα για κάθε $v \in V(G)$,*
2. *αν v, w είναι strongly adjacent στο G, τότε το X_v είναι complete στο X_w,*
3. *αν v, w είναι strongly anti-adjacent στο G, τότε το X_v είναι anti-complete στο X_w,*
4. *αν v, w είναι semi-adjacent στο G, τότε το X_v δεν είναι ούτε complete ούτε anti-complete στο X_w,*

Ορισμός 4.7.19. *Ένα ζεύγος κορυφών v, w σε ένα γράφημα H δημιουργούν* **twins** *αν $N[u] = N[w]$.*

Παρατήρηση 4.7.20. [1] Έστω H ένα thickening ενός trigraph G. Αν $v \in V(G)$ δεν είναι semi-adjacent σε κάποια άλλη κορυφή, τότε οι κορυφές του συνόλου X_v δημιουργούν twins. Επίσης, αν v, w είναι semi-adjacent, τότε το (X_v, X_w) είναι ένα W-join στο G (υπενθυμίζουμε ότι οι κορυφές v, w δεν είναι semi-adjacent σε καμία άλλη κορυφή του G). Επιπλέον, αν το H δεν περιέχει ούτε twins ούτε W-join, τότε το G είναι ισομορφικό με το H.

Ορισμός 4.7.21. *Ένα* **strip-structure** *ενός συνεκτικού γραφήματος G αποτελείται από a)ένα πολυγράφημα H (παράλληλες ακμές και βρόγχους) b) ένα μη κενό σύνολο $X_e \subseteq V(G)$ για κάθε $e \in E(H)$ και c) ένα μη κενό σύνολο $X_{e,y} \subseteq X_e$ για κάθε ακμή $e \in E(H)$ και κορυφή $y \in V(H)$ τέτοια ώστε η e προσπίπτει στη y, και ισχύει ότι:*

1. *τα σύνολα X_e διαχωρίζουν το $V(G)$,*
2. *για κάθε $e \in E(H)$ η οποία προσπίπτει σε δύο κορυφές $y, y' \in V(H)$, κάθε κορυφή στο $X_{e,y} \cap X_{e,y'}$ είναι anti-complete στο $X_e \backslash (X_{e,y} \cup X_{e,y'})$,*
3. *για κάθε $y \in V(H)$, το γράφημα που δημιουργείται από την ένωση,των $e \in E(H)$ που προσπίπτουν στο y, των συνόλων $X_{e,y}$ είναι κλίκα στο G,*
4. *αν v, w είναι adjacent στο G, τότε είτε $v, w \in X_e$ για κάποια ακμή $e \in E(H)$ είτε υπάρχουν ακμές $e, e' \in E(H)$ οι οποίες προσπίπτουν με την ίδια κορυφή $y \in V(H)$ για την οποία έχουμε ότι $y \in X_{e,y}$ και $w \in X_{e',y}$.*

Ορισμός 4.7.22. *Για κάθε ακμή $e \in E(H)$, το* **strip** *που αντιστοιχεί στην e είναι ένα ζεύγος (J, Z), όπου 1)το Z είναι ένα σύνολο νέων κορυφών μια για κάθε κορυφή $y \in V(H)$ η οποία προσπίπτει στην e και 2) το γράφημα J δημιουργείται από το $G[X_e]$ προσθέτοντας το Z και για κάθε $z \in Z$ κάνουμε το z είναι complete στο $X_{e,y}$ όπου $y \in V(H)$ είναι η κορυφή που αντιστοιχεί στο z.*

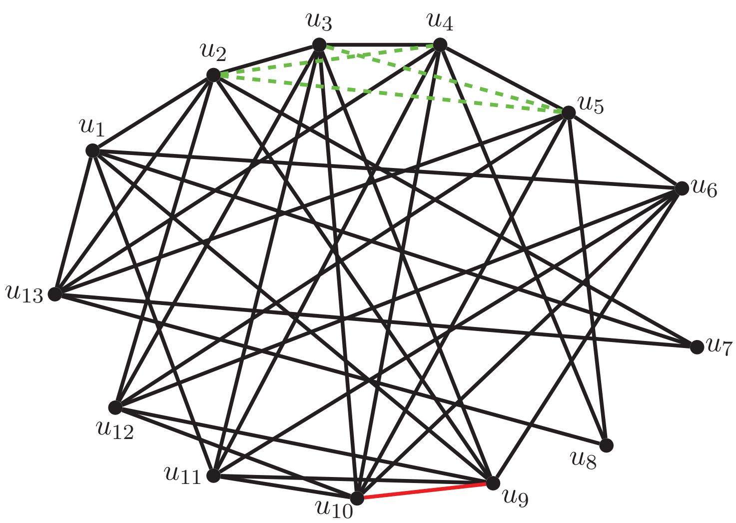
Παρατήρηση 4.7.23. [1] Από τον ορισμό του strip-structure παρατηρούμε ότι για κάθε strip (J, Z) ισχύει είτε ότι $\mid Z \mid = 1$ (στην περίπτωση που η e είναι βρόγχος) είτε ότι $\mid Z \mid = 2$ (αλλιώς). Να σημειωθεί ότι οι κορυφές του Z δεν είναι κορυφές του γραφήματος.

Ορισμός 4.7.24. *Ένα strip (J, Z) είναι ένα* **trivial line graph strip** *αν $\mid Z \mid = 1$ και J είναι ένα μονοπάτι με δύο κορυφές, ή αν $\mid Z \mid = 2$ και J είναι ένα μονοπάτι με δύο κορυφές.*

Ορισμός 4.7.25. *Ένα strip (J, Z) είναι ένα* **stripe** *αν καμία κορυφή στο $V(J)\backslash Z$ δεν είναι adjacent με πάνω από μια κορυφή του Z. Επιπλέον, το (J, Z) είναι ένα stripe αν $\mid Z \mid = 1$ και επίσης, αν $J, Z)$ είναι ένα stripe με $\mid Z \mid = 2$ για $e = yy'$, τότε τα $X_{e,y}$ και $X_{e,y'}$ είναι ξένα.*

Παρατήρηση 4.7.26. [1] Το thickening ενός stripe (J, Z) ορίζεται κανονικά, μόνο που πρέπει να ισχύει ότι $\mid X_z \mid = 1$ για κάθε $z \in Z$.

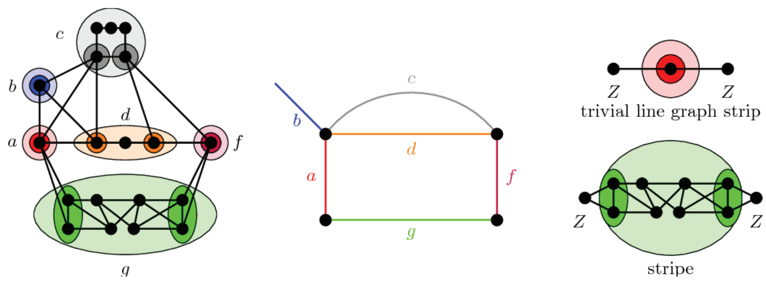
Παρακάτω θα ορίσουμε τα γραφήματα **XX-trigraph**,**XX-graphs** και **XX-trigraph stripes**. Για τα παραπάνω γραφήματα γνωρίζουμε ότι είναι γραφήματα με το πολύ 13 κορυφές. Οι υπόλοιπες λεπτομέρειες θα παραληφθούν καθώς δεν θα μας απασχολήσουν παρακάτω.
Έστω G το παρακάτω γράφημα, όπου με κόκκινη ακμή έχουμε ενώσει τις κορυφές οι οποίες είναι adjacent, μαύρη ακμή αυτές που είναι strongly adjacent και με πράσινη διακεκομμένη ακμή αυτές που είναι anti-adjacent. Τονίζουμε ότι οι κορυφες u_8 και u_7 είναι πιθανότατα adjacent. Υπάρχει περίπτωση όμως να είναι και anti-adjacent.



Τότε ονομάζουμε το $G - X$, για κάθε $X \subseteq \{u_7, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}$, ως ένα XX-trigraph. Ονομάζουμε το $G - X$ ως ένα XX-graph αν δεν έχει semi-adjacent κορυφές. Και τέλος, ονομάζουμε το stripe (J, Z) ενός strip-structure ως ένα XX-(tri)graph stripe αν το J είναι ένα XX-(tri)graph με κορυφές $\{u_1, ..., u_{13}\} \backslash X$ για κάποιο $X \subseteq \{u_7, u_{11}, u_{12}, u_{13}\}$ έτσι ώστε οι κορυφές u_7 και u_8 να είναι strongly anti-adjacent και το $Z = \{u_7, u_8\} \backslash X$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε (thickening ενός) XX-(tri)graph stripe ισχύει ότι $V(J) \backslash N[Z] \neq \varnothing$ (παίρνουμε το u_6 ή το X_{u_6}).

Ένα παράδειγμα ενός strip-structure και ενός trivial line graph δίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Θεώρημα 4.7.27. *Έστω G ένα συνεκτικό claw-free γράφημα με $a(G) > 3$, τέτοιο ώστε το G να μην έχει twins ή W-join. Τότε*

- *το G είναι ένα XX-graph*
- *το G είναι ένα proper circular-arc,ή*
- *το G επιτρέπει ένα strip-structure τέτοιο ώστε για κάθε strip (J, Z)*
  - *(J, Z) είναι ένα trivial line graph, ή*
  - *(J, Z) είναι ένα stripe στο οποίο το J είναι συνεκτικό και*
    - *$a(J) \leqslant 3$ και $V(J) \backslash N_J[Z] \neq \emptyset$,*
    - *$\mid Z \mid = 1$ και το J είναι ένα proper circular-arc γράφημα,*
    - *$\mid Z \mid = 2$ και το J είναι ένα proper interval γράφημα ή*
    - *το (J, Z) είναι ένα XX-graph stripe.*

Ένα παρόμοιο θεώρημα με το παραπάνω μπορούμε να δούμε στα [10] και [11]

Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να δώσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι ότι το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για τα claw-free γραφήματα.

Θεώρημα 4.7.28. *[1] Κάθε claw-free γράφημα G με διάμετρο ίση με δύο, με distinct γειτονίες, χωρίς W-joins, με $a(G) > 3$ και $\mid V(G) \mid > 13$ είναι είτε proper circular-arc γράφημα είτε line γράφημα.*

Απόδειξη. Έστω G ένα γράφημα το οποίο πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος. Υποθέτουμε ότι το G δεν είναι proper circular-arc γράφημα. Για να αποδείξουμε ότι το G είναι όντως line γράφημα, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.7.27 στο G.

Από τις υποθέσεις του G, παίρνουμε ότι το G θα έχει ένα strip-structure που αποτελούνται από πολλούς πιθανούς τύπους strips. Θα υποστηρίξουμε ότι αυτό το strip structure μπορεί να διαμορφωθεί έτσι ώστε να περιέχει μόνο trivial line graph strips.Αυτό θα μας δώσει ότι το G είναι ένα line γράφημα.

Ισχυρισμός:Αν το strip-structure περιέχει ένα stripe (J, Z) τέτοιο ώστε $V(J)\backslash N_J[Z] \neq \emptyset$ και $1 \leqslant \mid Z \mid \leqslant 2$ τότε:

- $\mid Z \mid = 1$ και το G είναι ισόμορφο το J ή του $J - Z$, ή
- $\mid Z \mid = 2$ και το G είναι ισόμορφο το $J - Z'$ για κάποιο $Z' \subseteq Z$ ή του J όπου οι κορυφές του Z έχουν ταυτοποιηθεί με ήδη υπάρχουσες κορυφές του G ή έχουν γίνει γειτονικές με τις κορυφές.

Απόδειξη ισχυρισμού:Έστω (J, Z) ένα stripe τέτοιο ώστε $V(J)\backslash N_J[Z] \neq \emptyset$ και $1 \leqslant \mid Z \mid \leqslant 2$. Έστω $x \in V(J)\backslash N_J[Z]$. Αφού το G έχει διάμετρο ίση με δύο, κάθε κορυφή του $V(G)\backslash(V(J)\backslash Z)$ πρέπει να βρίσκεται στο σύνολο $N_G(N_J(Z))$. Παρατηρούμε ότι το $N_G(N_J(z))\backslash V(J)$, από τον ορισμό του strip-structure είναι μια κλίκα για κάθε $z \in Z$.

- Στην περίπτωση που $\mid Z \mid = 1$, παίρνω το $X = N_G(N_J(Z))\backslash V(J)$. Η γειτονία κάθε κορυφής στο X είναι κλίκα στο $N_J(Z)$.Αφού όμως το X είναι κλίκα και γνωρίζουμε ότι το G έχει distinct γειτονιές, τότε ισχύει ότι $\mid X \mid \leqslant 1$. Άρα ισχύει ο ισχυρισμός, αφού όπως είπαμε παραπάνω κάθε κορυφή του $V(G)\backslash(V(J)\backslash Z)$ πρέπει να βρίσκεται στο σύνολο $N_G(N_J(Z))$, άρα το G είναι ισόμορφο με το J ή με το $J - Z$.
- Στην περίπτωση που $\mid Z \mid = 2$ παίρνω $Z = \{z_1, z_2\}$. Έστω $X = N_G(N_J(z_1))\backslash V(J)$ και $Y = N_G(N_J(z_2))\backslash V(J)$.
  - Περίπτωση 1: $\mid X \cap Y \mid = 0$
    - ∗ Υποθέτουμε ότι τα X και Y είναι anti-complete.
      Τότε συμπεραίνουμε ότι $\mid X \mid < 2$ και $\mid Y \mid < 2$, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα είχε δύο κορυφές με nested γειτονιά. Άρα ισχύει ο ισχυρισμός.
    - ∗ Υποθέτουμε ότι τα X και Y είναι complete.
      Τότε συμπεραίνουμε ότι $\mid X \mid < 2$ και $\mid Y \mid < 2$, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα είχε δύο κορυφές με nested γειτονιά. Άρα ισχύει ο ισχυρισμός.

* Υποθέτουμε ότι τα X και Y δεν είναι ούτε complete ούτε anti-complete.
  Υποθέτουμε ότι $\mid X \mid + \mid Y \mid > 2$. Τότε το (X, Y) είναι ένα W-join στο G. Άτοπο. Άρα $\mid X \mid + \mid Y \mid \leqslant 2$. Τότε τα X και Y θα είναι είτε complete είτε anti-complete.Έτσι πάμε στις δύο παραπάνω περιπτώσεις.

– Περίπτωση 2: $X \equiv Y$

Τότε συμπεραίνουμε ότι $\mid X \mid < 2$, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα είχε δύο κορυφές με nested γειτονιά. Άρα ισχύει ο ισχυρισμός.

– Περίπτωση 3: $X \subseteq Y$ ή $Y \subseteq X$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω ότι $Y \subseteq X$. Τότε συμπεραίνουμε ότι $\mid X \mid < 2$, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα είχε δύο κορυφές με nested γειτονιά. Άρα $Y \leqslant 1$ και έτσι πάμε στην προηγούμενη περίπτωση.

– Περίπτωση 3: $X \cap Y \neq \varnothing$

Θεωρούμε τα σύνολα $A = X \backslash Y$ και $B = Y \backslash X$.
Τότε συμπεραίνουμε ότι $\mid X \cap Y \mid = 1$, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα είχε δύο κορυφές με nested γειτονιά.

* Υποθέτουμε ότι τα A και B είναι anti-complete. Τότε συμπεραίνουμε ότι $\mid A \mid = 1$ και$\mid B \mid = 1$, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα είχε δύο κορυφές με nested γειτονιά.
  Έστω $A = \{u\}, B = \{x\}$ και $X \cap Y = v$. Τότε $N(u) \backslash \{v\} \subseteq N(v) \backslash \{u\}$, άρα οι κορυφές u, v έχουν nested γειτονιά. Άτοπο.
* Υποθέτουμε ότι τα A και B είναι complete. Τότε συμπεραίνουμε ότι $\mid A \mid = 1$ και$\mid B \mid = 1$, διότι σε διαφορετική περίπτωση το γράφημα θα είχε δύο κορυφές με nested γειτονιά.
  Έστω $A = \{u\}, B = \{x\}$ και $X \cap Y = v$. Τότε $N(u) \backslash \{v\} \subseteq N(v) \backslash \{u\}$, άρα οι κορυφές u, v έχουν nested γειτονιά. Άτοπο.
* Υποθέτουμε ότι τα X και Y δεν είναι ούτε complete ούτε anti-complete. Υποθέτουμε ότι $\mid A \mid + \mid B \mid > 2$. Τότε το (A, B) είναι ένα W-join στο G. Άτοπο. Άρα $\mid A \mid + \mid B \mid \leqslant 2$. Τότε τα A και

B θα είναι είτε complete είτε anti-complete.Έτσι πάμε στις δύο παραπάνω περιπτώσεις.

Τώρα θα εξετάσουμε τα πιθανά stripes των strip-stucture. Αν $1 \leqslant \mid Z \mid \leqslant 2$, α$(J) \leqslant 3$ και $V(J) \backslash N[Z] \neq \emptyset$, τότε εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό έχω ότι α$(G) \leqslant 3$, το οποίο είναι άτοπο. Αν το (J, Z) είναι ένα XX-graph stripe, τότε $V(J) \backslash N[Z] \neq \emptyset$, και εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, έχουμε ότι το γράφημα G έχει πάνω από 13 κορυφές, το οποίο είναι άτοπο.

Υποθέτουμε ότι $\mid Z \mid = 1$ και J είναι έναν proper circular-arc γράφημα. Αν $V(J) \backslash N[Z] = \emptyset$, τότε το stripe μπορεί να διαμεριστεί σε $\mid V(J) \mid -1$ trivial line graph strips, ένα για κάθε κορυφή του συνόλου $V(J) \backslash Z$.Σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή αν $V(J) \backslash N[Z] \neq \emptyset$, εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό παίρνουμε ότι το G είναι ένα proper circular-arc γράφημα, το οποίο είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης που πήραμε στην αρχή της απόδειξης.

Υποθέτουμε ότι $\mid Z \mid = 2$ και J είναι έναν proper interval γράφημα. Θεωρώ $Z = \{z_1, z_2\}$. Αν $V(J) \backslash N[Z] = \emptyset$, τότε το $(N_J(z_1), N_J(z_2))$ δημιουργεί ένα W-join στο G, αφού το J είναι ένα proper interval γράφημα και κανένα διάστημα δεν μπορεί να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο άλλο.Άτοπο, εκτός αν $\mid N_J(z_1) \mid = \mid N_J(z_2) \mid = 1$. Έτσι παίρνουμε το συμπέρασμα ότι $\mid V(J) \mid = 4$ και άρα το J είναι ένα μονοπάτι με 4 κορυφές, το οποίο μπορεί να διαμεριστεί σε δύο trivial line graph strips προσθέτοντας μια καινούρια κορυφή στο strip-structure η οποία είναι γειτονική και με τα δύο. Σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή αν $V(J) \backslash N[Z] \neq \emptyset$, εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό παίρνουμε ότι το G είναι ένα proper interval γράφημα ή ένα proper circular-arc γράφημα, διότι παίρνοντας την αναπαράσταση του J ως ένα proper interval γράφημα,τα διαστήματα που αντιστοιχούν στο Z επεκτείνονται αριστερά και δεξιά. Αυτήν την αναπαράσταση μπορούμε να την δούμε και σε έναν κύκλο, δηλαδή να πάρουμε ένα proper circular-arc γράφημα, το οποίο είναι άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι κάθε strip στο (τροποποιημένο) strip-structure είναι ένα tivial line graph strip. Από αυτό παίρνουμε ότι το G είναι ένα line γράφημα.

■

Θεώρημα 4.7.29. *[1] Το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε χρόνο $O(n^3 m)$ για τα claw-free γραφήματα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το G είναι ένα claw-free γράφημα με n κορυφές και m ακμές.

Υποθέτουμε ότι $n \geqslant 14$. Υπολογίζουμε την διάμετρο του G σε $O(n^2)$ χρόνο. Από το Λήμμα 3.1.4 παίρνουμε ότι αν η διάμετρος είναι ίση με 1, τότε το γράφημα G δεν έχει μη συνεκτικό διαχωριστή και αν η διάμετρος είναι μεγαλύτερη του 2 τότε έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Υποθέτουμε ότι η διάμετρος του G είναι ίση με 2. Ελέγχουμε σε $O(n(m + n\log n))$ αν $\alpha(G) \leqslant 3$. Αν ισχύει, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το γράφημα G είναι ένα $4P_1$-free γράφημα, άρα σύμφωνα με το Πόρισμα 4.1.12 μπορούμε να αποφασίσουμε σε $O(n^3)$ χρόνο αν το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Υποθέτουμε ότι $\alpha(G) > 3$. Τότε το γράφημα G δεν μπορεί να είναι cobipartite διότι κάθε σύνολο A και B είναι κλίκα και έτσι όποιες τουλάχιστον 3 κορυφές και να πάρω από αυτά τα δύο σύνολα θα έχω έστω και μια ακμή μεταξύ τους. Ελέγχουμε σε $O(n^3)$ χρόνο αν το G έχει κορυφές u και v για τις οποίες ισχύει $N(u)\backslash\{v\} \subseteq N(v)\backslash\{u\}$. Αν υπάρχουν τέτοιες κορυφές, αφαιρούμε την κορυφή u από το G και ξεκινάμε τον αλγόριθμο από την αρχή με είσοδο το γράφημα $G\backslash\{u\}$. Το καινούριο γράφημα είναι και αυτό συνεκτικό και claw-free. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.7.7, αν το τελικό γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή, τότε και το αρχικό θα έχει.

Υποθέτουμε ότι το γράφημα G έχει distinct γειτονίες. Τώρα θέλουμε να ξεφορτωθούμε όλα τα W-join στο G. Αυτό θα γίνει ως εξής: Αφού έχουμε υποθέσει ότι το G έχει distinct γειτονίες από το Λήμμα 4.7.8 παίρνουμε ότι κάθε W-join του γραφήματος θα είναι proper W-join.Επίσης, σύμφωνα με το Λήμμα 4.7.13, σε χρόνο $O(n^2m)$ μπορούμε να βρούμε ένα unshatterable W-join ή να αποφανθούμε ότι το γράφημα G δεν έχει ένα proper W-join και άρα δεν θα έχει και W-join. Στην πρώτη περίπτωση, παρατηρώ ότι ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του Λήμματος 4.7.12, άρα μπορώ να το εφαρμόσω στο unshatterable proper W-join το οποίο βρήκαμε προηγουμένως. Αυτό απαιτεί γραμμικό χρόνο. Έπειτα εφαρμόζουμε από την αρχή τον αλγόριθμο με είσοδο το γράφημα G_{ab}, το οποίο βρέθηκε παραπάνω. Να αναφερθεί ότι το γράφημα G_{ab} είναι ένα συνεκτικό και claw-free γράφημα. Από τον ορισμό του W-join παίρνουμε ότι $\mid A \mid + \mid B \mid \geqslant 3$, και άρα $\mid V(G_{ab}) \mid < \mid V(G) \mid$ οπότε θα γίνουν το πολύ n επαναλήψεις.

Υποθέτουμε ότι γράφημα G δεν έχει $W - joins$. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.3, σε γραμμικό χρόνο μπορούμε να αναγνωρίσουμε αν το γράφημα G είναι circular-arc γράφημα. Αν είναι, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.3.8 με το οποίο μπορούμε να αποφανθούμε αν το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Υποθέτουμε ότι το γράφημα G δεν είναι $circular - arc$ γράφημα. Παρατηρούμε ότι από τις υποθέσεις μας ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.7.28. Αφού έχουμε υποθέσει ότι το γράφημα δεν είναι circular-arc και άρα ούτε proper circular-arc, από το Θεώρημα 4.7.28 έχουμε ότι το γράφημα G είναι ένα line γράφημα. Άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.4.8, το οποίο απαιτεί $O(n^4)$ χρόνο, μπορούμε να αποφασίσουμε αν το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή.

Έτσι έχουμε εξετάσει κάθε περίπτωση και έχουμε αποφασίσει σε πολυωνυμικό χρόνο αν το γράφημα G έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Συγκεκριμένα ο χρόνο εκτέλεσης του παραπάνω αλγορίθμου είναι $O(n^3m)$. ■

Πόρισμα 4.7.30. *Έστω G ένα claw-free γράφημα . Τότε τα προβλήματα $2S_2$-διαχωρισμός και surjective C_4-ομομορφισμός λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Αν το γράφημα G έχει επιπλέον διάμετρο ίση με δύο τότε τα προβλήματα C_4-compaction και biclique contractibility λύνονται και αυτά σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Πόρισμα 4.7.31. *Έστω G ένα co-claw-free (ή $C_3 + P_1$-free) γράφημα . Τότε τα προβλήματα $2K_2$-διαχωρισμός και 2-biclique κάλυμμα κορυφών λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα-Επεκτάσεις

5.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή, δηλαδή πόσο εύκολο είναι, δοθέντος ενός γραφήματος G, να απαντηθεί αν αυτό το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με κάποια άλλα προβλήματα τα οποία δίνονται στο Κεφάλαιο 2. Μέσω αυτών των προβλημάτων μπορούμε να πάρουμε συμπεράσματα και για το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή.

Το πρόβλημα στην γενική του μορφή είναι NP-πλήρες. Το Κεφάλαιο 4 μας δίνει κάποιες κλάσεις γραφημάτων, για τις οποίες το πρόβλημα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να απαντήσουμε αν ένα γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή για όλα τα H-free γραφήματα με H ένα γράφημα με τέσσερις κορυφές, εκτός όμως από την περίπτωση όπου H=K_4. Αυτή η περίπτωση παραμένει ανοιχτό πρόβλημα.

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας ο οποίος αναφέρει τις κλάσεις γραφημάτων και την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα για το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή.

Κλάση γραφημάτων	υπολογιστική πολυπλοκότητα	Θεώρημα
$4P_1 - free$	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [3]	4.1.12
$(2P_1 + P_2) - free$ ή co-diamond-free	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [3]	4.1.12
$(C_3 + P_1) - free$ ή co-claw-free	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [3]	4.1.16
$2P_2 - free$	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [2]	4.1.17
$(\overline{P_1 + P_3}) - free$ ή paw-free	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [1]	4.1.20
$(P_1 + P_3) - free$ ή co-paw-free	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [1]	4.1.22
$(\overline{2P_1 + P_2}) - free$ ή diamond-free	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα ($O(n^3)$) [1]	4.1.26
$P_4 - free$	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [4]	4.1.28
$K_{1,3} - free$ ή claw-free	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα ($O(n^3 m)$) [1]	4.7.29
$K_4 - free$	ανοιχτό πρόβλημα	
$(C_4, C_5, ...) - free$ ήchordal	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [6]	4.2.2
Interval	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [6]	4.2.2
Circular-arc	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα ($O(n^2)$) [1]	4.3.8
Γραμμικά	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα ($O(n^4)$) [1]	4.4.8
Διμερή	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα	4.5.1
Συμπλήρωμα διμερούς	πολυωνυμική υπολογιστική πολυπλοκότητα [4]	4.6.1

5.2 Distance-Hereditary γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μια ακόμα κλάση γραφημάτων, για την οποία θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή σε πολυωνυμικό χρόνο. Πρώτα όμως πρέπει να δώσουμε κάποιους ορισμούς.

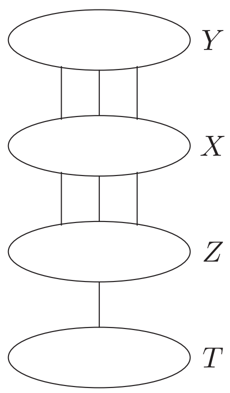
Ορισμός 5.2.1. *Μια κορυφή u ενός γραφήματος G ονομάζεται* **pendant** *αν έχει βαθμό 1.*

Ορισμός 5.2.2. *Δύο κορυφές u και v ονομάζονται* **true twins** *αν είναι γειτονικές και έχουν ακριβώς την ίδια γειτονία.*

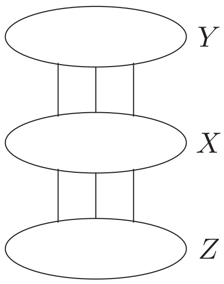
Ορισμός 5.2.3. *Δύο κορυφές u και v ονομάζονται* **false twins** *αν δεν είναι γειτονικές και έχουν ακριβώς την ίδια γειτονία.*

Ορισμός 5.2.4. *Distance-Hereditary ονομάζουμε ένα γράφημα G το οποίο κατασκευάζεται από μια απομονωμένη κορυφή u και από μια ακολουθία των ενεργειών: 1. προσθέτουμε μια pendant κορυφή στο γράφημα G, 2. αντικαθιστούμε μια οποιαδήποτε κορυφή του γραφήματος G με δύο true twins κορυφές οι οποίες έχουν ακριβώς την ίδια γειτονία με την κορυφή που αντικατέστησαν συν την άλλη κορυφή από το ζευγάρι, 3. αντικαθιστούμε μια οποιαδήποτε κορυφή του γραφήματος G με δύο false twins κορυφές οι οποίες έχουν την ίδια γειτονία με την κορυφή που αντικατέστησαν .*

Παρατήρηση 5.2.5. Σε κάθε distance hereditary γράφημα μπορούμε να χωρίσουμε το σύνολο των κορυφών του στα σύνολα X, Y, Z, T έτσι ώστε τα σύνολα Y και Z να είναι complete στο σύνολο X, το σύνολο Y να είναι anti-complete στο σύνολο Z και το σύνολο T να έχει γείτονες μόνο στο σύνολο Z, δηλαδή να παίρνει την παρακάτω μορφή:



Παρατήρηση 5.2.6. Έστω G ένα γράφημα με διάμετρο δύο. Αν το G είναι distance-hereditary τότε το σύνολο T είναι κενό. Άρα σχηματικά έχω:



Λήμμα 5.2.7. *Έστω G ένα συνεκτικό distance-hereditary γράφημα με διάμετρο ίση με δύο, τότε το πρόβλημα του μη συνεκτικού διαχωριστή λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για το γράφημα G.*

Απόδειξη. Έστω G ένα συνεκτικό distance-hereditary γράφημα με διάμετρο ίση με δύο, τότε το γράφημα παίρνει την μορφή της Παρατήρησης 5.2.6.

Αν το σύνολο X είναι κενό τότε το γράφημα G θα ήταν μη συνεκτικό. Άτοπο λόγω της υπόθεσης.

Ελέγχω σε πολυωνυμικό χρόνο αν το σύνολο X είναι συνεκτικό.

Πρώτη περίπτωση: Το X είναι μη συνεκτικό.

Υποθέτω ότι τα σύνολο Y, Z είναι διάφορα του κενού.

Αφού το σύνολο X είναι μη συνεκτικό, τότε θα έχω τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες του X, τις $X_1, X_2, .., X_h$. Παίρνω τα σύνολα $V_1 = Y, V_2 = X_1, V_3 = Z$ και $V_4 = X_2 \cup .... \cup X_h$. Τα V_1, V_2, V_3, V_4 είναι ένας μη συνεκτικός διαχωρισμός του G αφού το σύνολο V_1 είναι anti-complete στο σύνολο V_3 και το σύνολο V_2 είναι anti-complete στο σύνολο V_4.

Αν το Z είναι κενό σύνολο, τότε το γράφημα έχει μη συνεκτικό διαχωριστή αν το σύνολο Y είναι μη συνεκτικό. Αυτό μπορώ να το ελέγξω σε πολυωνυμικό χρόνο. Όμοια αν το σύνολο Y είναι κενό. Δεν γίνεται όμως και το Y και το Z να είναι κενά σύνολα, διότι σε αυτή την περίπτωση το γράφημα G θα ήταν μη συνεκτικό διότι $G = G(X)$. Άτοπο

Δεύτερη περίπτωση: Το σύνολο X είναι συνεκτικό.

Έστω ότι το G έχει έναν μη συνεκτικό διαχωρισμό V_1, V_2, V_3, V_4.

Αν και τα δύο σύνολα Y και Z είναι κενά, τότε πρέπει να ελέγξω αν το $G[X]$ έχει έναν μη συνεκτικό διαχωριστή. Όμως τα γραφήματα $G[X], G[Y], G[Z]$ είναι το καθένα cograph, οπότε μπορώ σε πολυωνυμικό χρόνο να βρω αν το $G[X]$ έχει μη συνεκτικό διαχωρισμό σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.28.

Υποθέτω ότι κάποιο από τα σύνολα Y ή Z είναι διάφορο του κενού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω ότι το σύνολο Y είναι διάφορο το κενού και έστω ότι $X \cap V_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, 3, 4$. Έστω $y \in Y$. Η κορυφή y ανήκει και αυτή σε κάποιο από τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4, έτσι όμως τα V_1, V_3 ή V_2, V_4 δεν θα είναι anti-complete επειδή τα σύνολα X και Y είναι complete. Άτοπο. Άρα τα στοιχεία του X δεν ανήκουν σε όλα τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4.

Υπενθυμίζουμε ότι τα σύνολα Y και Z είναι complete με το σύνολο X. Έτσι, σε όποια από τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 βρίσκονται κορυφές του X, στα ίδια ακριβώς θα βρίσκονται και οι κορυφές των συνόλων Y και Z, διότι σε διαφορετική περίπτωση τα σύνολα V_1, V_3 ή V_2, V_4 δεν θα ήταν anti-complete. Παραπάνω δείξαμε ότι οι κορυφές του X δεν ανήκουν σε όλα τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4, άρα αφού και οι κορυφές των συνόλων Y και Z βρίσκονται στα ίδια σύνολα, τότε κάποιο V_i θα είναι κενό. Άτοπο. (Το παραπάνω ισχύει ανεξάρτητα με το αν κάποιο από τα σύνολα Y ή Z είναι κενό). ■

Πόρισμα 5.2.8. *Έστω G ένα distance-hereditary γράφημα . Τότε τα προβλήματα $2S_2$-διαχωρισμός και surjective C_4-ομομορφισμός λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Αν το γράφημα G έχει επιπλέον διάμετρο ίση με δύο τότε τα προβλήματα C_4-compaction και biclique contractibility λύνονται και αυτά σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] M. Barnaby, D.Paulusma and , E. J.van Leeuwen. *Disconnected cuts in claw-free graphs*, Proceedings of ESA 2018 (2018).

[2] K.Cook, S. Dantas, E.M. Eschen,L. Faria, C.M.H. De Figueiredo, and S.Klein. *$2K_2$ vertex-set partition into nonempty parts*, Discrete Mathematics (2010).

[3] S. Dantas, F. Maffray, and A. Silva,. *$2K_2$-partition of some classes of graphs*, Discrete Applied Mathematics(2012).

[4] H. Fleischner, E. Mujuni, D. Paulusma, and S. Szeider. *Covering graphs with few complete bipartite subgraphs*, Theoretical Computer Science(2009).

[5] B. Martin and D. Paulusma. *The Computational Complexity of Disconnected Cut and $2K_2$-Partition*, Journal of Combinatiorial Theory(2011).

[6] T.Ito, M. Kamiński, D. Paulusma and D.M. Thilikos. *Parameterizing cut sets in a graph by the number of their components*, Theoretical Computer Science(2011).

[7] J. Kleinberg and E. Tardos. *Algorithm Design*, Pearson Education(2006).

[8] R.M. McConnell. *Linear-time recognition of circular-arc graphs*, Algorithmica(2003).

[9] H. Harary. *Graph Theory*, Reading MA(1969).

[10] D. Hermelin, M. Mnich, E. J. van Leeuwen and G.J. Woeginger. *Domination when the stars are out*(2010).

[11] D. Hermelin, M. Mnich, E. J. van Leeuwen and G.J. Woeginger. *Domination when the stars are out*, International Colloquium on Automata, Languages, and Programming(2011).

[12] M.J. Atallah, D.Z. Chen and D.T. Lee. *An optimal algorith for shortest path on weighted interval and circular-arc graphs, with applications*, Algorithmica(1995).

[13] M. Bodirsky, J. Kara and B. Martin. *The complexity of surjective homomorphism problems-a survey*, Discrete Applied Mathematics(2012).

[14] D. Z. Chen, D. T. Lee, R. Sridhar and C.N. Sekharan. *Solving the all-pair shortest path query problem on interval circular-arc graphs*, Networks(1998).

[15] T.Ito, M. Kamiński, D. Paulusma and D.M. Thilikos. *On disconnected cuts and separators*, Discrete Applied Mathematics(2011).

[16] M. Kamiński, D. Paulusma, A. Stewart and D.M. Thilikos. *Minimal disconnected cuts in planar graphs*, Networks(2016).

[17] S. Mandal, A. Pal and M. Pal. *An optimal algorith to find centres and diameter of a circular-arc graph*, Electronic International Journal of Advanced Modeling And Optimization(2007).

[18] R.M McConnell. *Linear-time recognition of circular-arc graphs*, Algorithmica(2003).