



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ



ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

Άννα Ριζάκη

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2019

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα “Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική” που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 29/10/2019 από την εξεταστική επιτροπή:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
Θεόδωρος Χωρίκης	Αναπληρωτής Καθηγητής
Δημήτριος Νούτσος	Καθηγητής
Μιχαήλ Ξένος	Αναπληρωτής Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Άννα Ριζάκη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διατριβή έχει πραγματοποιηθεί στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Θέλω να ευχαριστήσω τους ακόλουθους ανθρώπους χωρίς τους οποίους δεν θα μπορούσα ποτέ να ολοκληρώσω αυτή τη μελέτη. Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θεόδωρο Χωρίκη για τη βοήθεια, τις πολύτιμες συμβουλές, τον χρόνο, την καθοδήγηση, την ενθάρρυνση και αμέριστη συμπαράσταση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας. Χωρίς την υπομονή και την υποστήριξη του δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση αυτής της εργασίας. Η επιστημονική καθοδήγηση που μου παρείχε, οι γόνιμες παρατηρήσεις του και οι εποικοδομητικές συναντήσεις που είχαμε αποτέλεσαν πολύτιμη βοήθεια σε όλη τη διάρκεια της έρευνας.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Μιχαήλ Ξένο και τον Καθηγητή κ. Δημήτριο Νούτσο για το ενδιαφέρον που έδειξαν, τον χρόνο που διέθεσαν αλλά και για τις πολύ ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις και σχόλια. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάσκοντες Καθηγητές του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών για τις γνώσεις υψηλού επιπέδου που αποκόμισα και το κίνητρο που μου προσέφεραν για να ολοκληρώσω τον κύκλο σπουδών του συγκεκριμένου προγράμματος.

Τέλος, το μεγαλύτερο ίσως ευχαριστώ, το οφείλω στους γονείς μου, διότι είναι οι άνθρωποι που με στηρίζουν πάντα, με όποιο τρόπο μπορούν.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι αναλυτικές λύσεις σε κλειστή μορφή είναι πολύ σπάνιες στην θεωρία των μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ακόμα και στις γραμμικές εξισώσεις οι τεχνικές που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι αρκετά περιορισμένες, ειδικά όταν δουλεύουμε σε μεγαλύτερες διαστάσεις ή σε σύνθετα χωρία ολοκλήρωσης. Έτσι, χρειαζόμαστε εναλλακτικές λύσεις με σκοπό να λάβουμε, έστω και, ποιοτικές απαντήσεις για τις ιδιότητες των λύσεων των μη γραμμικών συστημάτων.

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η ανάλυση ποιοτικών χαρακτηριστικών των μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα φάσης. Στην θεωρία των δυναμικών συστημάτων, ένας χώρος φάσης είναι ένας χώρος στον οποίο παρουσιάζονται όλες οι πιθανές καταστάσεις ενός συστήματος, με κάθε πιθανή κατάσταση να αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο στο χώρο φάσης. Μέσα από τα διαγράμματα φάσης μπορούμε να διακρίνουμε τα χαρακτηριστικά των λύσεων πολύ αποτελεσματικά χωρίς να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές τεχνικές οι οποίες συνήθως δεν υπάρχουν. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή μπορούμε να λάβουμε διάφορα χαρακτηριστικά των λύσεων: μονοτονία, περιοδικότητα, ασυμπτωτική συμπεριφορά κλπ.

Στην θεωρία των εξισώσεων μη γραμμικής εξέλιξης ξεχωρίζει ένα συγκεκριμένο σύνολο εξισώσεων λόγω των αξιοσημείωτων ιδιοτήτων τους: οι ολοκληρώσιμες εξισώσεις μέσω του Μετασχηματισμού της Αντίστροφης Σκέδασης (Inverse Scattering Transform). Αυτές οι εξισώσεις είναι σχετικά περιορισμένες σε αριθμό αλλά παρουσιάζουν πλούσια πηγή μελέτης μέσω των ιδιοτήτων τους. Κύρια παραδείγματα είναι η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger και η εξίσωση Korteweg-de Vries. Εμφανίζονται σε πολλά φυσικά φαινόμενα που κυμαίνονται από τα υδάτινα κύματα έως την οπτική και το πλάσμα καθώς και σε πολλά άλλα, κερδίζοντας δικαιωματικά τον τίτλο *Καθολικές εξισώσεις* (Universal equations). Αυτές οι σημαντικές εξισώσεις μαζί με την πλήρη εξίσωση του απλού εκκρεμούς θα αποτελέσουν το κύριο αντικείμενο της μελέτης μας: χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα φάσης θα κατασκευάσουμε όλες τις πιθανές λύσεις σε αυτά τα συστήματα αποφεύγοντας πολύπλοκες μαθηματικές τεχνικές και ειδικές συναρτήσεις, οι οποίες εμφανίζονται αναπόφευκτα κατά την μελέτη τους.

ABSTRACT

Closed form solutions are very rare in the theory of nonlinear partial differential equations. Even in linear equations the techniques we have to obtain them are rather limited, especially when working in higher dimensions and complicated domains. As such, alternatives are often sought to obtain qualitative answers for the properties of the solutions of nonlinear systems. The objective of the present study is to analyze the quantitative features of common nonlinear partial differential equations by using phase diagrams.

In dynamical system theory, a phase space is a space in which all possible states of a system are represented, with each possible state corresponding to one unique point in the phase space. Through phase diagrams we can distinguish the features of the equations' solutions very efficiently without employing analytical techniques that usually do not even exist. Using this method several features of the solution may be obtained: monotonicity, periodicity, asymptotic behavior etc.

In the theory of nonlinear evolution equations a particular set of equations stands out due to their remarkable properties: the integrable equations under the Inverse Scattering Transform. These equations are rather limited in numbers but exhibit an abundant source of study through their properties. Prime examples are the nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries equations. They appear in many physical contexts ranging from water waves to optics, plasmas and many others, rightfully gaining the title *Universal* equations. These important equations along with the full pendulum equation will be the focus of our study: using phase diagrams we will construct all possible solutions to these systems avoiding complicated mathematical techniques and special functions that appear, inevitably, otherwise in their study.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	i
Abstract	ii
1 Εισαγωγή	5
2 Η Εξίσωση του Απλού Εκκρεμούς	13
2.1 Η πλήρης λύση του Απλού Εκκρεμούς	15
2.2 Η Διαχωρίστρια Καμπύλη	19
2.3 Το Διάγραμμα Φάσης	19
2.4 Οι λύσεις ανά περιοχές των παραμέτρων	20
2.5 Σύγκριση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων	23
3 Ελλειπτικές Συναρτήσεις	27
3.1 Ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi	28
3.1.1 Γενικά στοιχεία των Ελλειπτικών Συναρτήσεων Jacobi	28
3.1.2 Περιοδικότητα, Πόλοι και Υπόλοιπα	29
3.1.3 Η Έλλειψη Jacobi	30
3.1.4 Ειδικές Τιμές	31
3.1.5 Θεμελιώδεις Ιδιότητες	32
3.1.6 Παράγωγοι και Διαφορικές Εξισώσεις	33
3.1.7 Ελλειπτικά Ολοκληρώματα	34
3.1.8 Αντίστροφες Συναρτήσεις	35

3.2	Ελλειπτικές Συναρτήσεις Weierstrass	35
3.2.1	Ορισμός Ελλειπτικών Συναρτήσεων Weierstrass	36
3.2.2	Αναλλοίωτες	37
3.2.3	Οι Σταθερές e_1, e_2, e_3	37
3.2.4	Ειδικές Τιμές	39
3.2.5	Διαφορική Εξίσωση	40
3.2.6	Ολοκληρωτική Συνάρτηση	40
3.2.7	Σχέση μεταξύ Jacobi και Weierstrass Ελλειπτικών συναρτήσεων	41
4	Η Εξίσωση Korteweg–de Vries	43
4.1	Το Διάγραμμα Φάσης	44
4.2	Η Διαχωρίστρια Καμπύλη	46
4.3	Περιοχές για την εξίσωση Korteweg-de Vries	46
4.4	Λύσεις της εξίσωσης KdV μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων	50
4.4.1	Περιοχή Τριών Ριζών	50
4.4.2	Περιοχή Μίας Διπλής και Μίας Απλής Ρίζας	56
4.4.3	Περιοχή Μίας Ρίζας	62
5	Η μη Γραμμική Εξίσωση Schrödinger	65
5.1	Το Διάγραμμα Φάσης	66
5.1.1	Η εστιασμένη εξίσωση: $d_0 = 1$	69
5.1.2	Η αφεστιασμένη εξίσωση: $d_0 = -1$	70
5.2	Η Διαχωρίστρια Καμπύλη	72
5.3	Περιοχές για την εξίσωση NLS	77
5.4	Λύσεις της εξίσωσης NLS μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων	112
5.4.1	Περιοχή Έξι Πραγματικών Ριζών	112
5.4.2	Περιοχή Τεσσάρων Πραγματικών Ριζών	128
5.4.3	Περιοχή Δύο Πραγματικών Ριζών	143

6 Συμπεράσματα	149
Βιβλιογραφία	153
Παράρτημα Α: Οι ρίζες της τριτοβάθμιας εξίσωσης	155
Παράρτημα Β: Ταξινόμηση ριζών για την NLS	157

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην διατριβή αυτή, θα ασχοληθούμε με την μελέτη μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Τα συστήματα αυτά περιγράφουν πληθώρα φυσικών φαινομένων που απατώνται στην φύση, γεγονός που κάνει τη μελέτη τους ενδιαφέρουσα και σημαντική. Τις περισσότερες φορές είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο να λυθούν αναλυτικά. Επομένως, στην ενότητα αυτή, θα σας παρουσιάσουμε εργαλεία τα οποία μας εξασφαλίζουν επαρκείς πληροφορίες για την λύση των συστημάτων αυτών χωρίς να απαιτείται η πλήρης λύση τους.

Βάση της μελέτης μας θα είναι τα εργαλεία της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων. Στα μαθηματικά, ένα δυναμικό σύστημα είναι ένα σύστημα στο οποίο μια συνάρτηση περιγράφει την εξάρτηση της θέσης ενός σημείου από το χρόνο σε ένα γεωμετρικό χώρο. Παραδείγματα αποτελούν τα μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν την ταλάντωση ενός εκκρεμούς, τη ροή του νερού σε ένα σωλήνα, και τον αριθμό των ψαριών κάθε άνοιξη σε μία λίμνη.

Οποιαδήποτε δεδομένη στιγμή ένα δυναμικό σύστημα περιλαμβάνει μία κατάσταση που δίνεται από ένα σύνολο πραγματικών αριθμών (διάνυσμα) που μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα γεωμετρικό σημείο στο κατάλληλο χώρο καταστάσεων (γεωμετρική πολλαπλότητα). Η εξέλιξη του δυναμικού συστήματος είναι μια συνάρτηση που περιγράφει τους μελλοντικούς χώρους καταστάσεων που απορρέουν από τον τρέχοντα χώρο καταστάσεων. Συχνά η συνάρτηση είναι ντετερμινιστική, με άλλα λόγια η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος ορίζει μονοσήμαντα την εξέλιξή του στο χώρο των καταστάσεων. Ωστόσο, ορισμένα συστήματα είναι στοχαστικά και σε αυτά τα τυχαία γεγονότα επηρεάζεται η εξέλιξη των μεταβλητών της κατάστασης.

Η έννοια του δυναμικού συστήματος έχει τις ρίζες της στη Νευτώνεια μηχανική. Εκεί, όπως και σε άλλες φυσικές επιστήμες, η εξέλιξη των δυναμικών συστημάτων είναι μια πεπλεγμένη σχέση, που δίνει την κατάσταση του συστήματος για ένα μόνο σύντομο χρονικό διάστημα στο μέλλον. Η σχέση είναι είτε

Κεφάλαιο 1

μια διαφορετική εξίσωση, εξίσωση διαφορών ή άλλη χρονική κλίμακα. Για να προσδιορίσουμε την κατάσταση για όλους τους μελλοντικούς χρόνους απαιτείται η επανάληψη της σχέσης πολλές φορές – κάθε φορά από ένα μικρό βήμα. Η επαναληπτική διαδικασία αναφέρεται ως επίλυση του συστήματος ή ολοκλήρωση του συστήματος. Αν το σύστημα μπορεί να λυθεί, δίνοντας ένα αρχικό σημείο είναι δυνατόν να καθοριστούν όλες οι μελλοντικές του θέσεις, μια συλλογή από σημεία που είναι γνωστή ως τροχιά.

Συνήθως παριστάνουμε την κίνηση ενός σωματιδίου, ή γενικότερα ενός μηχανικού συστήματος, σε ένα χώρο τόσων διαστάσεων όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας που απαιτούνται για να καθοριστεί πλήρως η θέση αυτού. Για παράδειγμα, ένα σωματίδιο σε ένα μονοδιάστατο κόσμο παρουσιάζεται ως ένα σημείο πάνω σε μια ευθεία, ενώ την τροχιά μιας μύγας σε ένα δωμάτιο την παριστάνουμε με μια καμπύλη στον τρισδιάστατο χώρο με παράμετρο το χρόνο. Ο χώρος αυτός καλείται θεσεογραφικός χώρος (configuration space). Φυσικά, αν το μηχανικό σύστημα απαρτίζεται από δύο ή περισσότερα σωματίδια, η κίνησή του στο θεσεογραφικό χώρο περιγράφεται από τόσες καμπύλες όσα και τα σωματίδια.

Ένας άλλος χώρος ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγραφεί η κίνηση ενός μηχανικού συστήματος είναι ο χώρος των φάσεων (phase space), ένας χώρος αποτελούμενος από τη θέση και την αντίστοιχη ορμή για κάθε βαθμό ελευθερίας του συστήματος. Για παράδειγμα, το σωματίδιο στο μονοδιάστατο κόσμο περιγράφεται με μια καμπύλη στο διδιάστατο χώρο, ενώ η μύγα, θεωρούμενη ως σωματίδιο, περιγράφεται με μια καμπύλη στον εξαδιάστατο χώρο. Μια βασική διαφορά από τον θεσεογραφικό χώρο αποτελεί το γεγονός ότι ένα μηχανικό σύστημα αποτελούμενο από πολλά σωματίδια περιγράφεται στο χώρο των φάσεων από μία καμπύλη αφού για τον κάθε βαθμό ελευθερίας του κάθε σωματιδίου υπάρχει το αντίστοιχο ζεύγος μεταβλητών θέσης – ορμής.

Ο χώρος της φάσης, όντας μεγαλύτερης διάστασης από τον αντίστοιχο θεσεογραφικό χώρο, εμπεριέχει πολύ περισσότερες πληροφορίες όσον αφορά την κίνηση του μηχανικού συστήματος. Η τροχιά ενός σωματιδίου μπορεί να είναι απολύτως όμοια με την τροχιά κάποιου άλλου, αλλά να εξελίσσεται με εντελώς διαφορετικό τρόπο (για παράδειγμα ένα μπαλόνι που ανεβαίνει στον ουρανό κατακόρυφα, προφανώς κινείται πολύ διαφορετικά από ένα νόμισμα που πετάτε κατακόρυφα προς τα επάνω παρόλο που η τροχιά τους είναι πανομοιότυπη). Στο χώρο των φάσεων κάθε καμπύλη αντιπροσωπεύει μια μοναδική εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος (το μπαλόνι και το νόμισμα του προηγούμενου παραδείγματος θα ακολουθούσαν εντελώς διαφορετικές πορείες στο χώρο των φάσεων). Μάλιστα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι παρατηρώντας μια καμπύλη στο χώρο των φάσεων είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε πλήρως την ιστορία του μηχανικού συστήματος.

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικά ένα τυπικό δυναμικό σύστημα ικανοποιεί, σε απλή μορφή, τη σχέση:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = X_2(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

όπου X_1 και X_2 είναι γνωστές συναρτήσεις των x, y και $x = x(t)$, $y = y(t)$. Το σύστημα συνοδεύεται και από κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Τα φυσικά φαινόμενα αντιπροσωπεύονται σχεδόν πάντα από μη γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες έχουν ως ανεξάρτητη μεταβλητή τον χρόνο t και η λύση τους αντιπροσωπεύει την εξέλιξη του φαινομένου στον χρόνο.

Η διαφορά μεταξύ ενός γραμμικού και ενός μη γραμμικού συστήματος συνίσταται στην γραμμικότητα των όρων x των X_i της εξίσωσης (1.1). Γραμμικοί είναι οι όροι οι οποίοι εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη, ενώ μη γραμμικοί όροι θεωρούνται τα γινόμενα, οι δυνάμεις και οι συναρτήσεις του x , για παράδειγμα τέτοιοι όροι είναι το x^3 ή το $\cos x$. Όπως είναι γνωστό, τα μη γραμμικά προβλήματα είναι πολύ πιο δύσκολο να λυθούν σε σχέση με τα γραμμικά προβλήματα. Τα γραμμικά προβλήματα μπορούν να χωριστούν σε τμήματα και να συντεθούν δίνοντας μας την λύση. Με τον τρόπο αυτό, σύνθετα προβλήματα μπορούν να απλοποιηθούν με μεθόδους όπως μετασχηματισμός Laplace, ανάλυση Fourier, χωρισμός μεταβλητών κτλ. Επομένως ψάχνουμε μεθόδους οι οποίες θα μας βοηθήσουν να υπερβούμε το εμπόδιο που σχετίζεται με την λύση των μη γραμμικών συστημάτων.

Μία τέτοια μέθοδος είναι η ανάλυση των διαγραμμάτων φάσης, μέσω της οποίας μπορούμε να αντλήσουμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης ενός δυναμικού συστήματος χωρίς να απαιτείται η πλήρης λύση. Το διάγραμμα φάσης για το σύστημα (1.1) μπορεί να κατασκευαστεί λύνοντας την διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X_2(x, y)}{X_1(x, y)}$$

της οποίας η λύση $y = y(x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά στο επίπεδο xy . Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα διαγράμματα φάσης, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο στο γραμμικό πρόβλημα:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.2)$$

Ας θεωρήσουμε $\dot{x} = y$. Επομένως, για την εξίσωση (1.2) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Κεφάλαιο 1

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

το σύστημα μετατρέπεται στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega^2 x}{y} \Leftrightarrow y dy = -\omega^2 x dx$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} &= k \Leftrightarrow \\ \omega^2 x^2 + y^2 &= 2k \end{aligned}$$

Ή αλλιώς έχουμε,

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = 2k \tag{1.3}$$

με $k \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά.

Η εξίσωση (1.3) είναι της μορφής $\dot{x} = f(t, x)$ και είναι αυτόνομη διότι η f είναι ανεξάρτητη από την (ανεξάρτητη) μεταβλητή t . Το σύνολο των καμπυλών της εξίσωσης (1.3) αποτελούν το διάγραμμα φάσης για όλες τις σταθερές $k \in \mathbb{R}$.

Ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε στο διάγραμμα φάσης είναι αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (1.2) με \dot{x} . Άρα έχουμε το εξής:

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega^2 x\dot{x} = 0$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει τελικά:

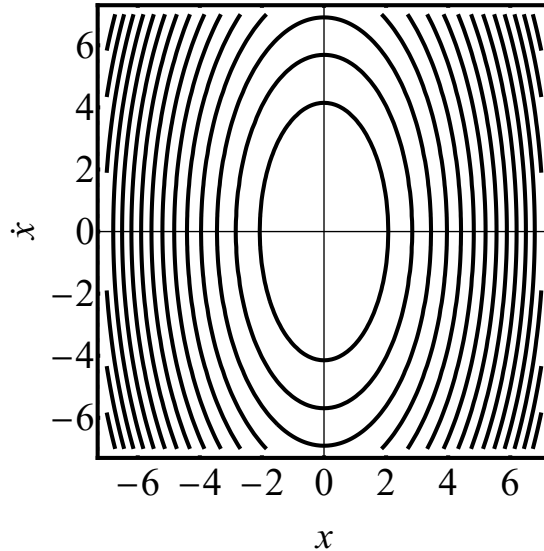
$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} - k = 0 \tag{1.4}$$

με $k \in \mathbb{R}$ μία αυθαίρετη σταθερά. Επομένως καταλήγουμε στο ίδιο διάγραμμα φάσης.

Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζεται ένα $x\dot{x}$ -διάγραμμα ή όπως ονομάζεται αλλιώς ένα διάγραμμα φάσης που αντιστοιχεί σε διάγραμμα μετατόπισης – ταχύτητας στην περίπτωση ενός μηχανικού συστήματος. Οι λύσεις του διαγράμματος φάσης ονομάζονται τροχιές. Μπορούμε να βγάλουμε πολλά συμπεράσματα για την λύση της εξίσωσης (1.2) από το διάγραμμα φάσης.

Παρατηρούμε ότι όλες οι τροχιές είναι κλειστές και τα $x(t)$ και $\dot{x}(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις με τον χρόνο t . Αυτό συμβαίνει διότι αν ξεκινήσουμε από

Κεφάλαιο 1



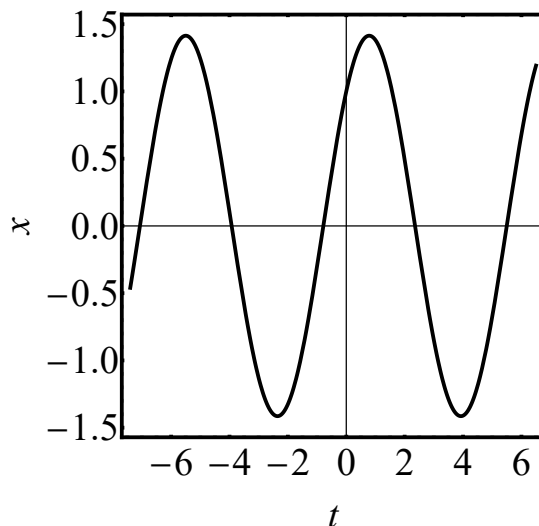
Σχήμα 1.1: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (1.3) για $\omega = 2$.

ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς, με την εξέλιξη του χρόνου θα καταλήξουμε, σε ορισμένο χρόνο $T > 0$, στο ίδιο σημείο. Δηλαδή ισχύει $x(t) = x(t + T)$, όπου T ο χρόνος που απαιτείται ώστε το υλικό σημείο να φτάσει στην αρχική του θέση. Ο χρόνος T ονομάζεται περίοδος της εξίσωσης (1.2). Από φυσικής άποψης η εξίσωση (1.4) αποτελεί την αρχή διατήρησης της ενέργειας καθώς ο όρος $\frac{\dot{x}^2}{2}$ αποτελεί την κινητική ενέργεια, ο όρος $\frac{\omega^2 x^2}{2}$ αποτελεί την δυναμική ενέργεια και το k είναι η ολική ενέργεια του μηχανικού συστήματος. Κάθε τροχιά αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή της ενέργειας k . Επίσης, παρατηρούμε ότι όταν το x παίρνει την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή του τότε το \dot{x} μηδενίζεται, δηλαδή στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης η κινητική ενέργεια του συστήματος μηδενίζεται και όλη η ενέργεια μετατρέπεται σε δυναμική. Όμοια όταν το \dot{x} παίρνει την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή του τότε το $x = 0$, δηλαδή στην θέση ισορροπίας η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται και όλη η ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική. Αυτή η συμπεριφορά μας θυμίζει τις περιοδικές συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από την λύση της εξίσωσης (1.2), η οποία είναι $x(t) = q_1 \cos(\omega t) + q_2 \sin(\omega t)$, με q_1 και q_2 αυθαίρετες σταθερές.

Αντίστοιχα αν θέλουμε να μελετήσουμε τα διαγράμματα φάσης για τις ανοιχτές τροχιές, το γραμμικό πρόβλημα που θα επιλέξουμε είναι το παρακάτω:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad (1.5)$$

Κεφάλαιο 1



Σχήμα 1.2: Λύση της εξίσωσης (1.2) για $\omega = 2$.

Έτσι λοιπόν αν $\dot{x} = y$ προκύπτει το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega^2 x \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας για το παραπάνω σύστημα προκύπτει το εξής:

$$y dy = \omega^2 x dx$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} &= r \Leftrightarrow \\ \dot{x}^2 - \omega^2 x^2 &= 2r \end{aligned} \quad (1.6)$$

όπου $r \in \mathbb{R}$ μία αυθαίρετη σταθερά. Έτσι η εξίσωση (1.6) αποτελεί το διάγραμμα φάσης για όλες τις σταθερές r .

Ο άλλος τρόπος για φτάσουμε στο διάγραμμα φάσης είναι αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (1.5) με \dot{x} . Επομένως έχουμε:

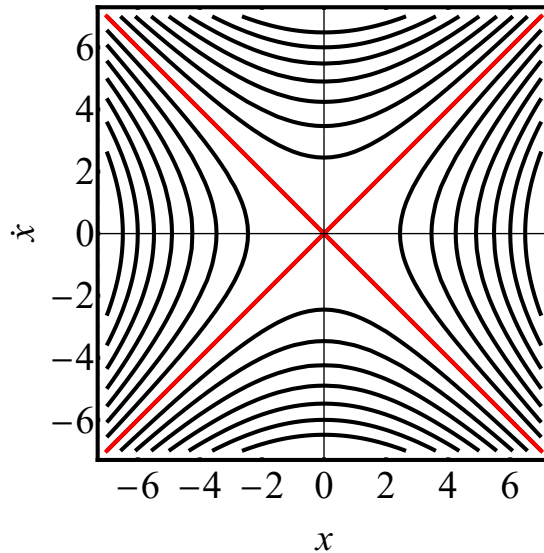
$$\ddot{x}\dot{x} - \omega^2 x\dot{x} = 0$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει τελικά:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} = r$$

Κεφάλαιο 1

όπου $r \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά. Άρα καταλήγουμε στην ίδια εξίσωση και με την μέθοδο αυτή. Επομένως το διάγραμμα φάσης για την εξίσωση (1.6) και για $\omega = 1$ είναι το παρακάτω:

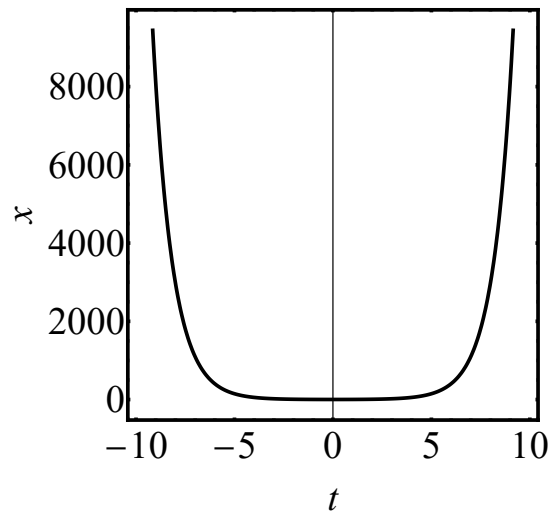


Σχήμα 1.3: Διάγραμμα φάσης για την εξίσωση (1.6) με $\omega = 1$.

Παρατηρούμε ότι καμπύλες του διαγράμματος φάσης για $\omega = 1$ και $r = 0$ έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$, διότι αν θεωρήσουμε $g(x) = \dot{x} = \pm x$, τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \pm 1 = \lambda$ και το $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \lambda x] = 0 = \beta$. Επομένως οι ασύμπτωτες ευθείες είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Επιπλέον όσο το $x \rightarrow \pm\infty$ και το $\dot{x} \rightarrow \pm\infty$ και προσεγγίζει τις ασύμπτωτες ευθείες $y = \pm x$. Για τον λόγο αυτό, το \dot{x} απειρίζεται με τρόπο γραμμικό. Η λύση της εξίσωσης (1.5) είναι $x(t) = w_1 e^{\omega t} + w_2 e^{-\omega t}$, όπου w_1 και w_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Παρατηρούμε ότι τα συμπεράσματα του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης (1.6) συμφωνούν με την λύση της, καθώς ο όρος $w_1 e^{\omega t}$ αυξάνεται ενώ ταυτόχρονα ο όρος $w_2 e^{-\omega t}$ μειώνεται όταν $t > 0$ και αυξάνεται. Αντίστοιχα, όταν $t < 0$ και μειώνεται, ο όρος $w_2 e^{-\omega t}$ αυξάνεται και ο όρος $w_1 e^{\omega t}$. Επιπλέον η λύση της εξίσωσης (1.5) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x καθώς η λύση $x(t)$ είναι άρτια συνάρτηση.

Κεφάλαιο 1



Σχήμα 1.4: Λύση της εξίσωσης (1.5) με $\omega = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΕΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ

Έχοντας αντλήσει χρήσιμα συμπεράσματα από τα διαγράμματα φάσης, στο προηγούμενο κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε με τον ίδιο τρόπο να εργαστούμε και για πιο πολύπλοκα προβλήματα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και το απλό εκκρεμές στην πλήρη του περιγραφή. Το απλό εκκρεμές αποτελείται από ένα σωματίδιο που βρίσκεται αναρτημένο από ένα νήμα μήκους α , το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο O . Αν δεν υπάρχει τριβή η εξίσωση της κίνησης είναι:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \quad (2.1)$$

όπου x είναι η κλίση του νήματος από το κάθετο επίπεδο, g είναι η σταθερά της βαρύτητας, και $\omega = \sqrt{g/\alpha}$. Η σχέση (2.1) μπορεί να λυθεί αναλυτικά με όρους ελλειπτικών συναρτήσεων. Παρόλα αυτά η επίλυσή της αποτελεί δύσκολη διαδικασία, όπως θα δείξουμε παρακάτω, και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιήσουμε την ποιοτική ανάλυση της λύσης μέσω των διαγραμμάτων φάσης.

Παρατηρούμε για το πρόβλημα (2.1) όταν αναφερόμαστε σε μικρές γωνίες x , ισχύει $\sin x \approx x$, δηλαδή η εξίσωση (2.1) προσεγγίζει το γραμμικό πρόβλημα (1.2).

Επομένως θα μετατρέψουμε την εξίσωση (2.1) σε μία εξίσωση που συνδέει τα \dot{x} και x και γράφουμε:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right)$$

Αυτή η μετατροπή του \ddot{x} ονομάζεται **μετασχηματισμός ενέργειας**. Η εξίσωση (2.1) τότε γίνεται:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) + \omega^2 \sin x = 0.$$

Κεφάλαιο 2

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε τελικά:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega^2 \cos x = E, \quad (2.2)$$

όπου E είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Παρατηρούμε ότι αυτή η εξίσωση εκφράζει την **αρχή διατήρησης της ενέργειας**. Η εξίσωση (2.2) έχει τη μορφή $E = \text{Κινητική Ενέργεια} + \text{Δυναμική Ενέργεια}$, όπου συγκεκριμένη τιμή του E αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη κίνηση.

Από την εξίσωση (2.1) μπορούμε να θεωρήσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

Επομένως εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στο σύστημα προκύπτει:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-\omega^2 \sin x} \Leftrightarrow y dy = -\omega^2 \sin x dx \quad (2.3)$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση (2.3) έχουμε:

$$\frac{y^2}{2} = \omega^2 \cos x + z_1 \Leftrightarrow y^2 = 2\omega^2 \cos x + 2z_1$$

Ή αλλιώς,

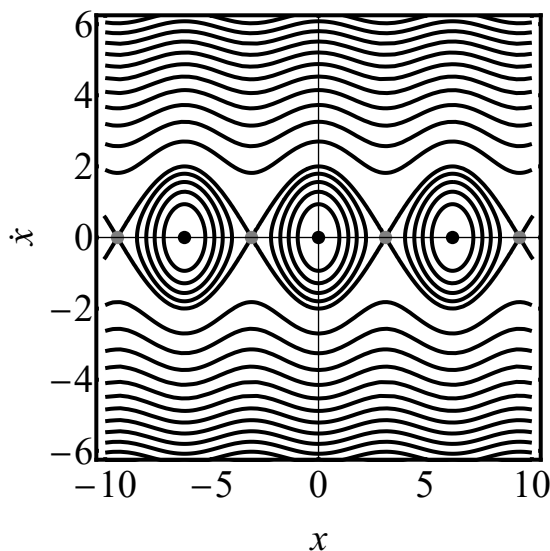
$$\dot{x}^2 = 2\omega^2 \cos x + 2z_1 \quad (2.4)$$

όπου z_1 είναι αυθαίρετη σταθερά. Η εξίσωση (2.4) είναι της μορφής $\dot{x} = f(t, x)$, αυτόνομη και το σύνολο των καμπυλών της εξίσωσης (2.4) αποτελεί το διάγραμμα φάσης.

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα φάσης έχουμε τροχιές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της ενέργειας E . Παρατηρούμε ότι όσο προσεγγίζουμε τον άξονα x οι τροχιές γίνονται κλειστές άρα έχουμε περιοδική κίνηση. Τα σημεία πάνω στον άξονα x είναι οι καταστάσεις με την ελάχιστη κινητική ενέργεια (μέγιστη δυναμική), με $\dot{x} = 0$. Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν σε κατάσταση ισορροπίας ή στα ακραία σημεία της ταλάντωσης.

Αν αρχίσουμε να αυξάνουμε την τιμή της κινητικής ενέργειας έχουμε μικρές κλειστές τροχιές, οι οποίες αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Στην ειδική περίπτωση της οριακής συνθήκης της κλειστής τροχιάς έχουμε μία διαχωρίστρια καμπύλη. Η συγκεκριμένη τροχιά ονομάζεται ετεροκλινική τροχιά



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα φάσης για την εξίσωση (2.4) με $\omega = 1$.

διότι η τροχιά δεν καταλήγει στο ίδιο σταθερό σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Η καμπύλη αυτή αντιστοιχεί σε κινήσεις στις οποίες το εκκρεμές επιβραδύνεται καθώς προσεγγίζει τις ακραίες θέσεις.

Τέλος, σε τιμές ενέργειας μεγαλύτερες της τιμής που αντιστοιχεί στη διαχωριστική καμπύλη, το εκκρεμές περιστρέφεται γύρω από το άκρο στο οποίο είναι στερεωμένο. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες αυτές είναι φραγμένες ως προς την \dot{x} -κατεύθυνση. Επιπλέον, παρόλο που στην x -κατεύθυνση, οι καμπύλες αυτές απειρίζονται, παρατηρούμε ότι παρουσιάζουν περιοδική συμπεριφορά. Έτσι, οι περιστροφές αυτές θεωρούνται ως περιοδικές κινήσεις καθώς τα $x = -\pi$ και $x = \pi$ αντιστοιχούν στην ίδια φυσική θέση.

2.1 Η πλήρης λύση του Απλού Εκκρεμούς

Στην ενότητα αυτή θα λύσουμε αναλυτικά την εξίσωση του εκκρεμούς. Θα δούμε ότι η επίλυση της είναι αρκετά πολύπλοκη και συμφωνεί με τα συμπεράσματα που προκύπτουν από το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης.

Ξεκινώντας λοιπόν, από την σχέση (2.2)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega^2 \cos x = E$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.5)$$

όπου x_0 είναι η αρχική γωνιακή μετατόπιση. Το παραπάνω σύστημα αρχικών τιμών αντιστοιχεί σε ένα εκκρεμές που εκτρέπεται κατά x_0 και αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα. Το μηχανικό σύστημα κινείται μεταξύ των θέσεων $(-x_0, x_0)$.

Έτσι η εξίσωση (2.2) μετατρέπεται ως εξής:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 (\cos x - \cos x_0) \quad (2.6)$$

όπου η σχέση (2.6) μπορεί να γραφεί επίσης ως:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4\omega^2 \left[\sin^2\left(\frac{x_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right] \quad (2.7)$$

η οποία προκύπτει από την τριγωνομετρική σχέση:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Τώρα ας είναι

$$y = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.8)$$

και

$$k = \sin^2\left(\frac{x_0}{2}\right) \quad (2.9)$$

Από τις εξισώσεις (2.5), (2.8) και (2.9) έχουμε

$$y(0) = \sqrt{k}$$

Είναι εύκολο να βρούμε την ποσότητα $\frac{dx}{dt}$ ως μία συνάρτηση του $\frac{dy}{dt}$. Αρχικά, η εξίσωση (2.8) γίνεται

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

και στην συνέχεια

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4} \left[1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - y^2) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

Τότε έχουμε,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{4}{1-y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (2.10)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (2.8), (2.9) και (2.10) με την εξίσωση (2.7) έχουμε:

$$\frac{4}{1-y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4\omega^2 (k - y^2)$$

Η οποία μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \omega^2 k (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k}\right) \quad (2.11)$$

Μπορούμε να ορίσουμε νέες παραμέτρους τ και z ως:

$$\tau = \omega t \quad \text{και} \quad z = \frac{y}{\sqrt{k}} \quad (2.12)$$

Τότε η εξίσωση (2.11) γίνεται:

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = (1 - z^2) (1 - kz^2) \quad (2.13)$$

όπου $0 < k < 1$ και

$$z(0) = 1, \quad \left(\frac{dz}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0$$

Η εξίσωση (2.13) για $d\tau$ μας δίνει:

$$d\tau = \pm \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}}$$

Ο χρόνος τ πηγαίνει από το σημείο $(0, 1)$ στο σημείο $(z, \frac{dz}{d\tau})$ είναι το κατώτερο ημιεπίπεδο του γραφήματος του $\frac{dz}{d\tau}$ ως συνάρτηση του z είναι:

$$\tau = - \int_1^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k\zeta^2)}} \quad (2.14)$$

Η εξίσωση (2.14) μπορεί να γραφτεί ξανά ως εξής:

$$\tau = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k\zeta^2)}} - \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k\zeta^2)}}$$

το οποίο μας επιτρέπει να αποκτήσουμε το τ ως συνάρτηση του z και του k ως εξής:

$$\tau(z) = K(k) - F(\arcsin z; k) \quad (2.15)$$

όπου $K(m)$ και $F(\varphi; m)$ είναι το πλήρες και το μη πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους, ορίζουμε ως εξής:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}$$

$$F(\varphi; m) = \int_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}$$

και $z = \sin \varphi$.

Η περίοδος της ταλάντωσης T είναι τέσσερις φορές ο χρόνος που χρειάζεται το εκχρεμές να πάει από την θέση $x = 0$ ($z = 0$) στην θέση $x = x_0$ ($z = 1$).

Επομένως,

$$T_0 = 4t(0) = \frac{4\tau(0)}{\omega} = \frac{4}{\omega} K(k) = \frac{2}{\pi} T_0 K(k)$$

όπου

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{g}}$$

είναι η περίοδος του εκχρεμούς για μικρές ταλαντώσεις.

Η εξίσωση (2.15) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$F(\arcsin z; k) = K(k) - \tau \quad (2.16)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί σε όρους ελλειπτικών συναρτήσεων $\operatorname{sn}(u; m)$ (θα αναπτύξουμε πιο αναλυτικά τις ελλειπτικές συναρτήσεις στο επόμενο κεφάλαιο)

$$z = \operatorname{sn}(K(k) - \tau; k)$$

Σε όρους από τις αρχικές μεταβλητές λαμβάνουμε υπόψιν τις εξισώσεις (2.8), (2.9), (2.12) και (2.16) η εξίσωση γίνεται

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) \operatorname{sn}\left[K\left(\sin^2 \frac{x_0}{2}\right) - \omega t; \sin^2 \frac{x_0}{2}\right]$$

η οποία μας επιτρέπει να εκφράζουμε με x ως συνάρτηση του t ως:

$$x(t) = 2 \arcsin\left\{\sin \frac{x_0}{2} \operatorname{sn}\left[k\left(\sin^2 \frac{x_0}{2}\right) - \omega t; \sin^2 \frac{x_0}{2}\right]\right\}$$

2.2 Η Διαχωρίστρια Καμπύλη

Θέλουμε να βρούμε την ειδική καμπύλη για την οποία ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $\dot{x} = 0$ και $\ddot{x} = 0$. Αρχικά θα ψάξουμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 \sin x = 0$$

Επομένως η λύση που προκύπτει από την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης είναι η εξής: $x = k\pi$, με $k \in \mathbb{N}$. Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τις λύσεις αυτές στην εξίσωση $\dot{x} = 0$ και έχουμε:

$$2\omega^2 \cos x + E = 0$$

όπου $E = 2z_1$.

Έτσι όταν k είναι άρτιος τότε το $E = -2\omega^2$ και όταν k είναι περιττός τότε το $E = 2\omega^2$. Η διαχωρίστρια καμπύλη είναι η καμπύλη που διαιρεί στο επίπεδο φάσης τις καμπύλες σε ξεχωριστές περιοχές, οι οποίες περιέχουν τροχιές διακεκριμένης συμπεριφοράς. Στην περίπτωση μας διαχωρίζει τις κλειστές καμπύλες από τις ανοιχτές καμπύλες.

2.3 Το Διάγραμμα Φάσης

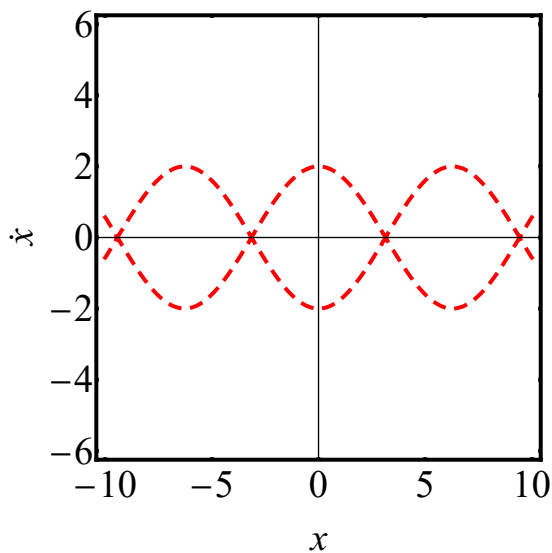
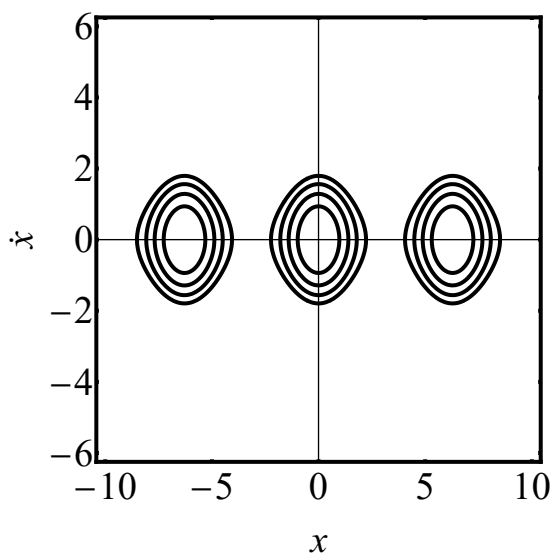
Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα για την διαχωρίστρια καμπύλη ισχύει $E = 2\omega^2$.

Για τις καμπύλες που βρίσκονται εντός της διαχωρίστριας καμπύλης ισχύει ότι $-2\omega^2 < E < 2\omega^2$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε κλειστές καμπύλες, δηλαδή έχουμε περιοδικές κινήσεις.

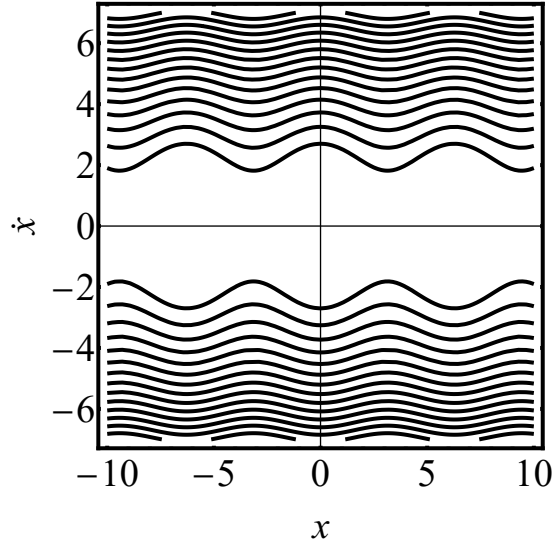
Για τις καμπύλες που βρίσκονται εκτός της διαχωρίστριας καμπύλης ισχύει ότι $E > 2\omega^2$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε ανοιχτές καμπύλες φραγμένες, ως προς την \dot{x} -κατεύθυνση, που αναφέρονται σε περιστροφικές κινήσεις γύρω από το στερεωμένο άκρο του εκκρεμούς.

Σχήμα 2.2: Διαχωρίστρια καμπύλη με $\omega = 1$.Σχήμα 2.3: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (2.3) για τις κλειστές καμπύλες με $-2\omega^2 < E < 2\omega^2$.

2.4 Οι λύσεις ανά περιοχές των παραμέτρων

Στην περίπτωση των κλειστών καμπυλών, θεωρούμε συνθήκες $x(0) = \frac{\pi}{2}$ και $E = \omega^2$ για $\omega = 1$. Επομένως επιλύοντας την εξίσωση:



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (2.3) για τις ανοιχτές καμπύλες με $E > 2\omega^2$.

$$\dot{x}^2 - 2\omega^2 \cos x = E \quad (2.17)$$

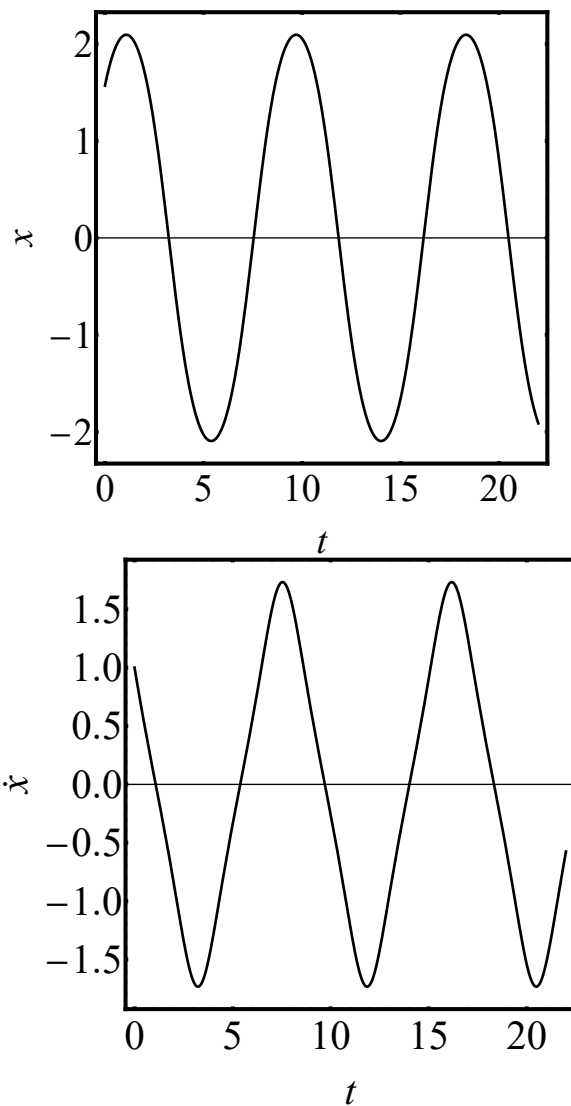
για τις συγκεκριμένες συνθήκες προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι $\dot{x}(0) = 1$.

Παρατηρούμε ότι τόσο η γωνιακή μετατόπιση όσο και η γωνιακή ταχύτητα (Σχήμα 2.5) μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα φάσης του απλού εκκρεμούς καθώς οι κλειστές καμπύλες αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές.

Στην περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης, θεωρούμε τις συνθήκες $x(0) = \frac{\pi}{2}$ και $E = 2\omega^2$ για $\omega = 1$. Άρα επιλύοντας την εξίσωση (2.17) προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι $\dot{x}(0) = \sqrt{2}$.

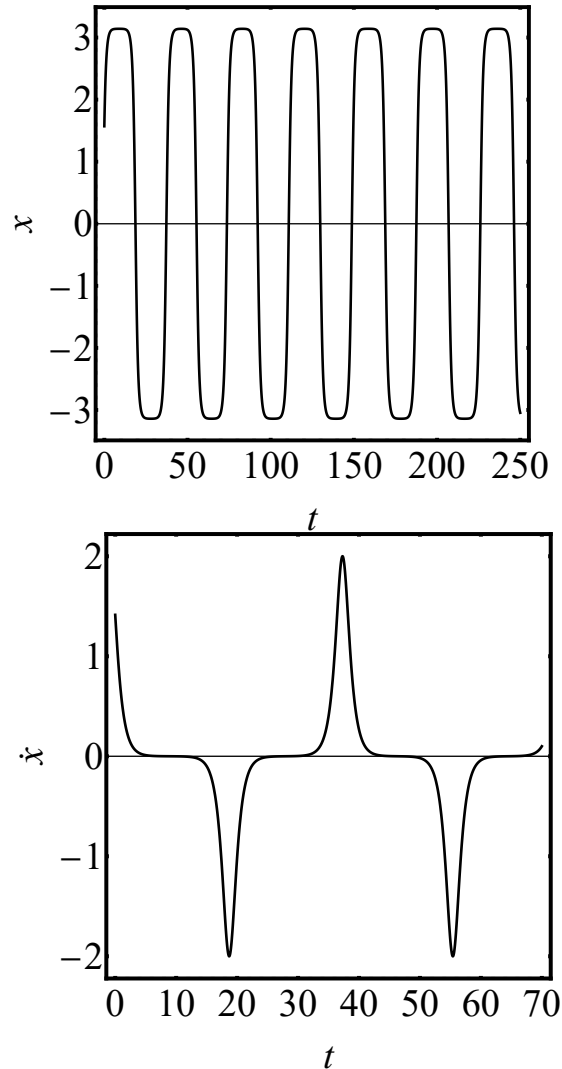
Παρατηρούμε ότι, η γωνιακή μετατόπιση (Σχήμα 2.6), παρουσιάζει περιοδική συμπεριφορά και επιπλέον ότι η δυναμική ενέργεια γίνεται η μέγιστη σε μία περιοχή γύρω από τις ακραίες θέσεις. Επίσης, η γωνιακή ταχύτητα παρουσιάζει περιοδική συμπεριφορά και η κινητική ενέργεια μηδενίζεται σε περιοχή γύρω από το σημείο ισοροπίας.

Στην περίπτωση των ανοιχτών καμπυλών, θεωρούμε τις συνθήκες $x(0) = \frac{\pi}{2}$ και $E = 3\omega^2$ για $\omega = 1$. Άρα επιλύοντας την εξίσωση (2.17) προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι $\dot{x}(0) = \sqrt{3}$.



Σχήμα 2.5: Αριθμητική λύση της εξίσωσης (2.1) για τις κλειστές καμπύλες με $E = \omega^2$.

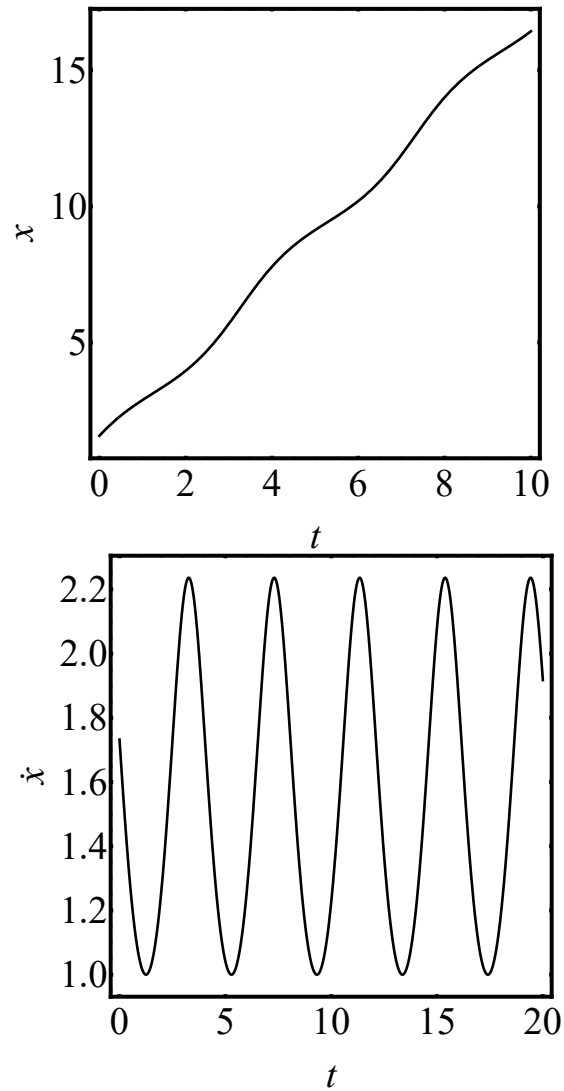
Στο Σχήμα 2.7 παρατηρούμε ότι η γωνιακή μετατόπιση αυξάνεται με τον χρόνο. Επιπλέον βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι φραγμένη και ότι παρουσιάζει περιοδική συμπεριφορά.



Σχήμα 2.6: Αριθμητική λύση της εξίσωσης (2.1) για την διαχωρίστρια καμπύλη με $E = 2\omega^2$.

2.5 Σύγκριση αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων

Σε αυτή την ενότητα θα σας παρουσιάσουμε το διάγραμμα φάσης μέσω ενός κώδικα που υπολογίζει αριθμητικά τις τροχιές του διαγράμματος φάσης που

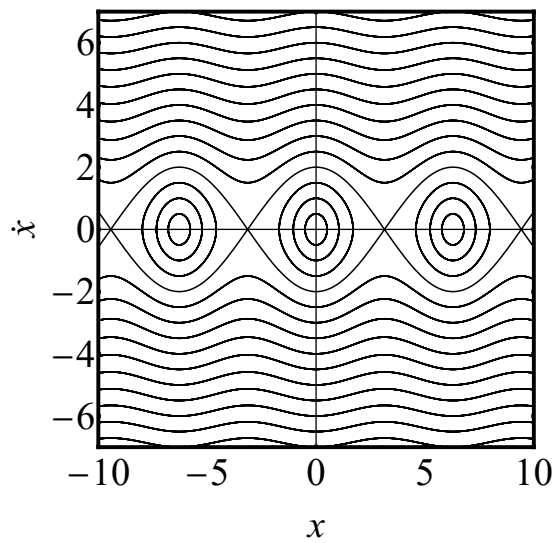


Σχήμα 2.7: Αριθμητική λύση της εξίσωσης (2.1) για τις ανοιχτές καμπύλες με $E = 3\omega^2$.

αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές ενέργειας. Στην συνέχεια υπολογίζουμε αναλυτικά τις τροχιές του διαγράμματος φάσης και τέλος συγκρίνουμε τα αριθμητικά και αναλυτικά αποτελέσματα.

Πιο συγκεκριμένα για το σύστημα μας:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -\omega^2 \sin[x(t)] \\ x(0) = d_0 \\ y(0) = v_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

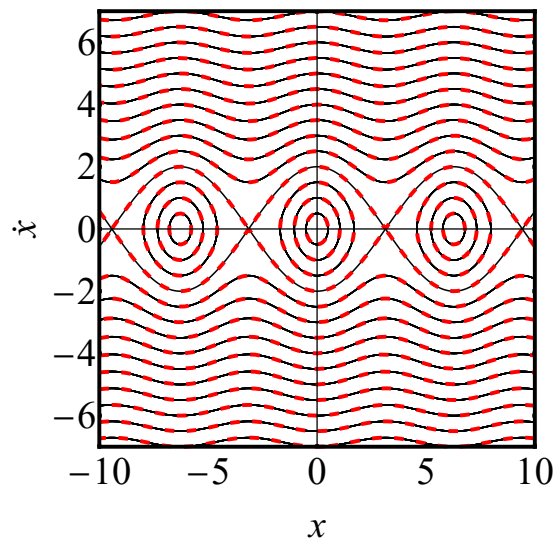


Σχήμα 2.8: Διάγραμμα φάσης του συστήματος (2.18) με αριθμητική επίλυση και συνοριακές συνθήκες $x(0) = 8\pi$ με βήμα 8 και $y(0) = 2\pi$ με βήμα 0.5.

Στο Σχήμα 2.8 παρουσιάζεται το διάγραμμα φάσης, το οποίο υπολογίζει διάφορες τροχιές αριθμητικά με συνοριακές συνθήκες $x(0) = 8\pi$ και $y(0) = 2\pi$. Η διαχωρίστρια καμπύλη αντιστοιχεί στην τιμή ενέργειας $E = 2\omega^2$. Οι ανοιχτές καμπύλες αντιστοιχούν σε τιμές ενέργειας $E > 2\omega^2$, ενώ οι κλειστές καμπύλες αντιστοιχούν σε τιμές ενέργειας $E < 2\omega^2$.

Τέλος, συγκρίνουμε τα αναλυτικά και τα αριθμητικά αποτελέσματα για το διάγραμμα φάσης του απλού εκκρεμούς.

Παρατηρούμε ότι τα αριθμητικά και τα αναλυτικά αποτελέσματα ταυτίζονται.



Σχήμα 2.9: Σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων για το διάγραμμα φάσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια συνοπτική περιγραφή των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi και των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass καθώς και των βασικών τους ιδιοτήτων.

Στην μιγαδική ανάλυση, μία ελλειπτική συνάρτηση είναι μία μερόμορφη συνάρτηση η οποία είναι περιοδική σε δύο κατευθύνσεις. Ακριβώς όπως μία περιοδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής ορίζεται από τις τιμές της σε ένα διάστημα, έτσι και μία ελλειπτική συνάρτηση καθορίζεται από τις τιμές της σε ένα πλέγμα. Μία τέτοια διπλά περιοδική συνάρτηση δεν μπορεί να είναι ολόμορφη, καθώς θα ήταν ολικά φραγμένη συνάρτηση και σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville κάθε τέτοια συνάρτηση θα ήταν σταθερή. Στην πραγματικότητα, μία ελλειπτική συνάρτηση πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο πόλους σε ένα θεμελιώδες παραλληλόγραμμο, καθώς είναι εύκολο να δείξουμε μέσω της περιοδικότητας, ότι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω στο σύνορο του μπορεί να απαλειφθεί, υποδηλώνοντας ότι τα υπόλοιπα από όλους τους απλούς πόλους πρέπει να διαγραφούν.

Ιστορικά, οι ελλειπτικές συναρτήσεις ανακαλύφθηκαν πρώτα από τον Niels Henrik Abel ως αντίστροφες συναρτήσεις των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και η θεωρία του βελτιώθηκαν από τον Carl Gustav Jacobi. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις μελετήθηκαν στην συνέχεια σε συνδυασμό με το πρόβλημα του μήκους τόξου μίας έλλειψης, από όπου προέρχεται και το όνομα τους. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi έχουν πολλές εφαρμογές στην φυσική και χρησιμοποιούνται για να αποδείξουν κάποια αποτελέσματα στη θεμελίωση της θεωρίας αριθμών. Μία πιο ολοκληρωμένη μελέτη των ελλειπτικών συναρτήσεων έγινε από τον Karl Weierstrass, ο οποίος βρήκε μία απλή ελλειπτική συνάρτηση όπου όλοι οι όροι της οποίας μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά. Εκτός από την πρακτική τους χρησιμότητα, η εκτίμηση των ολοκληρωμάτων και η αναλυτική λύση συγκεκριμένων διαφορικών εξισώσεων συνδέονται με τις ελλειπτικές καμπύλες και με μοδιακές μορφές.

Θα παρουσιάσουμε λοιπόν τον γενικό ορισμό των ελλειπτικών συναρτήσεων.

Μία ελλειπτική συνάρτηση είναι μία συνάρτηση f μερόμορφη στο \mathbb{C} για την οποία υπάρχουν δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί ω_1 και ω_2 με $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, έτσι ώστε $f(z) = f(z + \omega_1)$ και $f(z) = f(z + \omega_2)$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε το πλέγμα περιόδων $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ και τότε γράφουμε $f(z) = f(z + \omega)$, $\forall \omega \in \Lambda$.

Υπάρχουν δύο οικογένειες από ελλειπτικές συναρτήσεις: οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi και οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass. Αν και ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi είναι παλιότερες και πιο σχετικές με τις εφαρμογές, οι σύγχρονοι συγγραφείς ακολουθούν κυρίως τις συναρτήσεις Weierstrass όταν παρουσιάζουν την στοιχειώδη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων επειδή οι συναρτήσεις αυτές είναι απλούστερες και οποιοδήποτε ελλειπτική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί από αυτές.

3.1 Ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi είναι ένα σύνολο από βασικές ελλειπτικές συναρτήσεις και είναι βοηθητικές συναρτήσεις των ϑ -συναρτήσεων, οι οποίες έχουν τεράστια ιστορική σημασία. Ενώ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις καθορίζονται με αναφορά σε ένα κύκλο, οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi αποτελούν μία γενίκευση που αναφέρεται στις κωνικές τομές, ιδιαίτερα στην ελλειπτική. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi χρησιμοποιούνται συχνότερα σε πρακτικά προβλήματα από τις ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass επειδή δεν απαιτούν κατανόηση μιγαδικής ανάλυσης. Εισήχθησαν από τον Carl Gustav Jakob Jacobi το 1829.

3.1.1 Γενικά στοιχεία των Ελλειπτικών Συναρτήσεων Jacobi

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Η πρώτη μεταβλητή μπορεί να δοθεί σε όρους γωνιακής μετατόπισης φ και πιο συχνά, σε όρους u που θα δούμε παρακάτω. Η δεύτερη μεταβλητή μπορεί να δοθεί σε όρους της παραμέτρου m , ή ως ελλειπτικό μόδιο k , όπου $k^2 = m$, ή σε όρους γωνιακού μόδιου α , όπου $m = \sin^2 \alpha$. Τα συμπληρώματα των k και m και ορίζονται ως $m' = 1 - m$ και $k' = \sqrt{m'}$. Αυτοί οι τέσσερις όροι περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω.

Οι δώδεκα ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi γενικά γράφονται ως $pq(u, m)$ όπου p και q είναι ένα από τα γράμματα c, s, n και d . Οι κύριες συναρτήσεις γενικά θεωρούνται $cn(u, m)$, $sn(u, m)$ και $dn(u, m)$ από τις οποίες όλες οι άλλες συναρτήσεις μπορούν να εξαχθούν και οι υπόλοιπες εκφράσεις συχνά γράφονται αποκλειστικά με βάση αυτές τις τρεις συναρτήσεις.

3.1.2 Περιοδικότητα, Πόλοι και Υπόλοιπα

Στο μιγαδικό επίπεδο οι όροι u , οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi σχηματίζουν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο από πόλους και μηδενικά. Τα κατάλοιπα των πόλων έχουν όλα το ίδιο εύρος και διαφέρουν μόνο ως προς το πρόσημο. Κάθε συνάρτηση $pq(u, m)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση $qp(u, m)$ στην οποία οι θέσεις των πόλων και των μηδενικών αντιστρέφονται. Οι περίοδοι των επαναλήψεων είναι γενικά διαφορετικές στις πραγματικές και φανταστικές διευθύνσεις, για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τον όρο διπλά περιοδική για να την περιγράψουμε.

Η διπλή περιοδικότητα για τις ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi μπορεί να εκφραστεί ως:

$$pq(u + 2\alpha K(m) + 2i\beta K(1 - m), m) = (-1)^\gamma pq(u, m)$$

όπου α και β είναι οποιοδήποτε ζεύγος ακεραίων. Το K είναι το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα του πρώτου είδους. Η δύναμη της αρνητικής μονάδας (γ) δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

		q			
		c	s	n	d
p	c	0	β	$\alpha + \beta$	α
	s	β	0	α	$\alpha + \beta$
	n	$\alpha + \beta$	α	0	β
	d	α	$\alpha + \beta$	β	0

Πίνακας 3.1: Οι πιθανές τιμές της δύναμης γ .

Όταν ο όρος $(-1)^\gamma$ είναι ίσος με -1 , η εξίσωση εκφράζει οιονεί περιοδικότητα. Όταν είναι ίσος με την μονάδα, εκφράζει πλήρη περιοδικότητα. Μπορούμε να δούμε για παράδειγμα, για θέσεις που περιέχουν μόνο το α , όταν το α είναι άρτιο, η πλήρης περιοδικότητα εκφράζεται από την παραπάνω εξίσωση και η συνάρτηση έχει πλήρεις περιόδους $4K(m)$ και $2iK(1 - m)$. Όμοια, οι συναρτήσεις με θέσεις που περιέχουν μόνο β έχει πλήρεις περιόδους $2K(m)$ και $4iK(1 - m)$, ενώ εκείνες με $\alpha + \beta$ έχουμε πλήρεις περιόδους $4K(m)$ και $4iK(1 - m)$.

3.1.3 Η Έλλειψη Jacobi

Όπως τα $\cos \varphi$ και $\sin \varphi$ ορίζονται στον μοναδιαίο κύκλο, με ακτίνα $r = 1$ και γωνία $\varphi =$ μήκος τόξου του κύκλου, μονάδας που μετράτε από τον θετικό άξονα x , όμοια και οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi ορίζονται στην μοναδιαία έλλειψη, με $a = 1$. Έστω

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \quad b > 1, \\m &= 1 - \frac{1}{b^2}, \quad 0 < m < 1, \\x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi\end{aligned}$$

Τότε:

$$r(\varphi, m) = \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}}$$

Για κάθε γωνία φ η γωνιακή συνιστώσα του μήκους τόξου μπορεί να υπολογιστεί. Ένα πλεονέκτημα της γωνιακού μήκους τόξου είναι ότι μπορούμε να το υπολογίσουμε το ολικό μήκος τόξου για τις υπερβολές. Για την έλλειψη το γωνιακό μήκος τόξου είναι:

$$u = u(\varphi, m) = \int_0^\varphi r(\theta, m) d\theta.$$

Έστω $P = (x, y)$ το σημείο στην έλλειψη με γωνιακό μήκος τόξου $u(\varphi, m)$ και επιπλέον $P' = (x', y')$ το σημείο στον μοναδιαίο κύκλο με γωνιακό μήκος τόξου φ (τα σημεία O, P' και P βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία). Οι σχετικές σχέσεις για τον μοναδιαίο κύκλο:

$$x' = \cos \varphi, \quad y' = \sin \varphi$$

καθορίζουν τις σχέσεις για την έλλειψη:

$$x' = \operatorname{cn}(u, m), \quad y' = \operatorname{sn}(u, m).$$

Έτσι οι προβολές του σημείου τομής P' στην γραμμή OP με τον μοναδιαίο κύκλο στο x και στο y άξονα είναι οι $\operatorname{cn}(u, m)$ και $\operatorname{sn}(u, m)$. Αυτές οι προβολές αποτελούν τον ορισμό των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi. Επομένως, οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\operatorname{cn}(u, m) = \frac{x(u, m)}{r(u, m)}, \quad \operatorname{sn}(u, m) = \frac{y(u, m)}{r(u, m)}, \quad \operatorname{dn}(u, m) = \frac{1}{r(u, m)}.$$

Για τις τιμές x και y του σημείου P με u και παράμετρο m έχουμε από την παραπάνω σχέση:

$$r(\varphi, m) = \frac{1}{\operatorname{dn}(u, m)}$$

και όταν $x = r(\varphi, m) \cos \varphi$, $y = r(\varphi, m) \sin \varphi$, επομένως προκύπτει:

$$x = \frac{\operatorname{cn}(u, m)}{\operatorname{dn}(u, m)}, \quad y = \frac{\operatorname{sn}(u, m)}{\operatorname{dn}(u, m)}.$$

Οι τελευταίες σχέσεις για τις συντεταγμένες x και y της μοναδιαίας έλλειψης μπορούν να γενικευτούν στις σχέσεις $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ για τις συντεταγμένες των σημείων πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει όλες τις ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi $pq(u, m)$ με μεταβλητές (x, y, r) και $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

		q			
		c	s	n	d
p	c	1	$\frac{x}{y} = \cot \varphi$	$\frac{x}{r} = \cos \varphi$	$x = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{dn}}$
	s	$\frac{y}{x} = \tan \varphi$	1	$\frac{y}{r} = \sin \varphi$	$y = \frac{\sin \varphi}{\operatorname{dn}}$
	n	$\frac{r}{x} = \sec \varphi$	$\frac{r}{y} = \csc \varphi$	1	$r = \frac{1}{\operatorname{dn}}$
	d	$\frac{1}{x} = \operatorname{dn} \sec \varphi$	$\frac{1}{y} = \operatorname{dn} \csc \varphi$	$\frac{1}{r} = \operatorname{dn}$	1

Πίνακας 3.2: Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi συναρτήσει του x, y, r και του $\operatorname{dn}, \varphi$

3.1.4 Ειδικές Τιμές

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi μπορούν να μετατραπούν σε απλοποιημένες τριγωνομετρικές συναρτήσεις όταν η παράμετρος m λαμβάνει τις οριακές τιμές $m = 0$ ή $m = 1$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε αναλυτικά την μετατροπή των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi όταν το $m = 1$ και το $m = 0$.

		q			
		c	s	n	d
p	c	0	$\cot z$	$\cos z$	$\cos z$
	s	$\tan z$	0	$\sin z$	$\sin z$
	n	$\sec z$	$\csc z$	0	1
	d	$\sec z$	$\csc z$	1	0

Πίνακας 3.3: Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi για $k = 0$.

		q			
		c	s	n	d
p	c	0	$\operatorname{csch} z$	$\operatorname{sech} z$	1
	s	$\sinh z$	0	$\tanh z$	$\sinh z$
	n	$\cosh z$	$\coth z$	0	$\cosh z$
	d	1	$\operatorname{csch} z$	$\operatorname{sech} z$	0

Πίνακας 3.4: Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi για $k = 1$.

3.1.5 Θεμελιώδεις Ιδιότητες

Αρχίζουμε με τις τριγωνομετρικές ταυτότητες για τις ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi οι οποίες μπορούν να διακριθούν σε δύο σχέσεις (για συντομία παραλείπουμε το όρισμα (u, m)):

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 + \operatorname{cn}^2 &= 1 \\ \operatorname{cn}^2 + m' \operatorname{sn}^2 &= \operatorname{dn}^2 \end{aligned}$$

όπου $m + m' = 1$ και $m = k^2$. Πολλαπλασιάζοντας με οποιαδήποτε συνάρτηση του τύπου nq με δίνει τις πιο γενικές εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} cq^2 + sq^2 &= nq^2 \\ cq^2 + m'sq^2 &= dq^2 \end{aligned}$$

Όταν $q = d$, οι παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχούν γεωμετρικά στις εξισώσεις για τον μοναδιαίο κύκλο και την μοναδιαία έλλειψη με $x = cd$, $y = sd$ και $r = nd$. Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν άλλες σχέσεις. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2 + m' &= -m \operatorname{cn}^2 = m \operatorname{sn}^2 - m \\ -m' \operatorname{nd}^2 + m' &= m m' \operatorname{sd}^2 = m c d^2 - m \\ m' s c^2 + m' &= m' n c^2 = \operatorname{dn}^2 - m \\ c s^2 + m' &= d s^2 = n s^2 - m \end{aligned}$$

3.1.6 Παράγωγοι και Διαφορικές Εξισώσεις

Οι παράγωγοι των τριών βασικών ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi είναι:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sn}(z) = \operatorname{cn}(z) \operatorname{dn}(z),$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cn}(z) = -\operatorname{sn}(z) \operatorname{dn}(z),$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{dn}(z) = -k^2 \operatorname{sn}(z) \operatorname{cn}(z)$$

Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι παράγωγοι όλων των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi:

		q			
		c	s	n	d
p	c	0	$-\operatorname{ds} \operatorname{ns}$	$-\operatorname{dn} \operatorname{sn}$	$-m' \operatorname{nd} \operatorname{sd}$
	s	$\operatorname{dc} \operatorname{nc}$	0	$\operatorname{cn} \operatorname{dn}$	$\operatorname{cd} \operatorname{nd}$
	n	$\operatorname{dc} \operatorname{sc}$	$-\operatorname{cs} \operatorname{ds}$	0	$m \operatorname{cd} \operatorname{sd}$
	d	$m' \operatorname{nc} \operatorname{sc}$	$-\operatorname{cs} \operatorname{ns}$	$-m \operatorname{cn} \operatorname{sn}$	0

Πίνακας 3.5: Οι παράγωγοι των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi : $\frac{d}{du} pq(u, m)$

Για δοθέν k και όταν $0 < k < 1$ οι κύριες ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi αποτελούν λύσεις των παρακάτω μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

- Η συνάρτηση $\operatorname{sn}(x)$ λύνει τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (1 + k^2) y - 2k^2 y^3 = 0$$

και

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$$

- Η συνάρτηση $\operatorname{cn}(x)$ λύνει τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - 2k^2) y + 2k^2 y^3 = 0$$

και

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 + k^2 y^2)$$

- Η συνάρτηση $\operatorname{dn}(x)$ λύνει τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (2 - k^2)y + 2y^3 = 0$$

και

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y^2 - 1)(1 - k^2 - y^2)$$

3.1.7 Ελλειπτικά Ολοκληρώματα

Ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα είναι κάθε ολοκλήρωμα της γενικής μορφής:

$$f(x) = \int \frac{A(x) + B(x)}{C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}} dx$$

όπου $A(x), B(x), C(x)$ και $D(x)$ είναι πολυώνυμα του x και $S(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τρίτου ή τετάρτου βαθμού. Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα μπορούν να παρουσιαστούν ως γενικεύσεις των αντίστροφων ελλειπτικών συναρτήσεων. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα ελλειπτικά ολοκληρώματα του πρώτου και δεύτερου είδους.

Ελλειπτικά Ολοκληρώματα Πρώτου Είδους

Έστω το μόνιο k ικανοποιεί την σχέση $0 \leq k^2 < 1$. Το μη πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα του πρώτου είδους γράφεται ως

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} dt, \quad 0 \leq k^2 \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \sin \varphi \leq 1$$

Αν έχουμε $t = \sin \theta$ και $dt = \cos \theta d\theta = \sqrt{1-t^2} d\theta$, τότε

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Η παραπάνω σχέση αντιστοιχεί στο μη πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα Legendre. Το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα το αποκτάμε αν θέσουμε στο άνω όριο του ολοκληρώματος την μέγιστη τιμή του, δηλαδή $\sin \varphi = 1$ ή $\varphi = \frac{\pi}{2}$, άρα τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

Ελλειπτικά ολοκληρώματα Δεύτερου Είδους

Το μη πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E(\varphi, k) &= \int_0^{\sin \varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Όμοια, το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα προκύπτει από την αντικατάσταση του άνω ορίου του ολοκληρώματος με την μέγιστη τιμή και έχουμε:

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

3.1.8 Αντίστροφες Συναρτήσεις

Οι αντίστροφες ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi μπορούν ορισθούν όμοια με τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Αν $x = \operatorname{sn}(\xi, k)$ τότε $\xi = \operatorname{arcsn}(x, k)$ και με τον τρόπο αυτό μπορούν να παρουσιαστούν ως ελλειπτικά ολοκληρώματα. Οι κυριότερες αντίστροφες συναρτήσεις παρουσιάζονται παρακάτω:

- $\operatorname{arcsn}(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$
- $\operatorname{arccn}(x, k) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 + k^2 t^2)}}$
- $\operatorname{arcdn}(x, k) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(t^2 + k^2 - 1)}}$

3.2 Ελλειπτικές Συναρτήσεις Weierstrass

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass είναι ελλειπτικές συναρτήσεις με ιδιαίτερα απλή μορφή και πήραν το όνομα τους από τον Karl Weierstrass. Αυτή η κλάση συναρτήσεων ονομάζεται επίσης p -συναρτήσεις και γενικά χρησιμοποιούνται με το σύμβολο \wp . Οι \wp συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την

παραμετροποίηση των ελλειπτικών καμπυλών σε μιγαδικούς αριθμούς, δημιουργώντας έτσι μία ισοδυναμία με τον μιγαδικό τόρο.

3.2.1 Ορισμός Ελλειπτικών Συναρτήσεων Weierstrass

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass μπορούν να ορισθούν με τρεις τρόπους, καθένας από τους οποίους έχει ορισμένα πλεονεκτήματα. Ο ένας από αυτούς είναι ως συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z και ενός πλέγματος Λ στο μιγαδικό επίπεδο. Ο άλλος τρόπος ορισμού είναι σε όρους z και δύο μιγαδικούς αριθμούς ω_1 και ω_2 που ορίζουν ένα ζεύγος γεννητριών ή περιόδων για το πλέγμα. Στον τρίτο ορισμό έχουμε όρους του z και ένα μόδιο τ στο άνω ημιεπίπεδο. Ο τρίτος σχετίζεται με τον προηγούμενο ορισμό με $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, η οποία είναι μια συμβατική επιλογή ενός ζεύγους περιόδων στο άνω ημιεπίπεδο. Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση, για συγκεκριμένο z οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass γίνονται μοδιανές συναρτήσεις του τ .

Σε όρους δύο περιόδων, οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass είναι ελλειπτικές συναρτήσεις με περιόδους ω_1 και ω_2 ορίζονται ως

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n^2+m^2 \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right\}$$

Τότε $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ τα σημεία από το πλέγμα της περιόδου, έτσι ώστε $\wp(z; \Lambda) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ για κάθε ζεύγος των γεννητόρων για το πλέγμα, καθορίζει την συνάρτηση Weierstrass ως συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής.

Αν τ ένας μιγαδικός αριθμός στο άνω ημιεπίπεδο, τότε

$$\wp(z; \tau) = \wp(z; 1, \tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n^2+m^2 \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z + m + n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2} \right\}.$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι ομογενές βαθμού μείον δύο, από την οποία μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση Weierstrass \wp για οποιοδήποτε ζεύγος περιόδων, ως εξής

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{\wp\left(\frac{z}{\omega_1}; \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\omega_1^2}.$$

Από τους παραπάνω ορισμούς συμπεραίνουμε, ότι η \wp συνάρτηση είναι μία άρτια συνάρτηση και η παράγωγος της συναρτήσεως z , \wp' , είναι μία περιττή συνάρτηση.

3.2.2 Αναλλοίωτες

Αναπτύσσοντας την σειρά Laurent για τη συνάρτηση \wp έχουμε

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = z^{-2} + \frac{1}{20}g_2z^2 + \frac{1}{28}g_3z^4 + O(z^6)$$

όπου

$$g_2 = 60 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}$$

$$g_3 = 140 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m\omega_1 + n\omega_2)^{-6}$$

Οι αριθμοί g_2 και g_3 καλούνται αναλλοίωτες. Τα αθροίσματα μετά τις σταθερές 60 και 140 είναι τα δύο πρώτα από τις σειρές Einstein, τα οποία έχουν μοδιακή μορφή όταν θεωρήσουμε ως συναρτήσεις $G_4(\tau)$ και $G_6(\tau)$ αντίστοιχα του $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ με $\text{Im}\{\tau\} > 0$.

Σημειώνουμε ότι g_2 και g_3 είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού -4 και -6 , οι οποίες είναι οι εξής:

$$g_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-4}g_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$g_3(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-6}g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Συμβατικά, συχνά γράφουμε g_2 και g_3 σε όρους $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ που αποτελεί τον λόγο των περιόδων και θεωρούμε ότι τ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Επομένως, $g_2(\tau) = g_2\left(1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ και $g_3(\tau) = g_3\left(1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$.

Οι σειρές Fourier για g_2 και g_3 μπορεί να γραφτεί σε όρους $q = \exp(i\pi\tau)$ ως

$$g_2(\tau) = \frac{4}{3}\pi^4 \left[1 + 240 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_3(k) q^{2k} \right]$$

$$g_3(\tau) = \frac{8}{27}\pi^6 \left[1 - 504 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_5(k) q^{2k} \right]$$

όπου $\sigma_\alpha(k)$ είναι συνάρτηση διαιρέτου.

3.2.3 Οι Σταθερές e_1, e_2, e_3

Θεωρούμε την πολυωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού $4t^3 - g_2t - g_3 = 0$ με ρίζες e_1, e_2 και e_3 . Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι 16 φορές η μοδιανή διακρίνουσα

$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Αν η διακρίνουσα είναι μη μηδενική, οι ρίζες αυτές δεν είναι ανά δύο ίσες. Όταν ο τετραγωνικός όρος της πολυωνυμικής εξίσωσης τρίτου βαθμού είναι μηδέν, οι ρίζες της εξίσωσης συνδέονται από την παρακάτω σχέση:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Οι γραμμικοί και οι σταθεροί συντελεστές συνδέονται με τις ρίζες όπως παρουσιάζεται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} g_2 &= -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \\ g_3 &= 4e_1e_2e_3 \end{aligned}$$

Οι ρίζες e_1, e_2 και e_3 για την εξίσωση $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ που εξαρτάται από το τ μπορεί να εκφραστεί μέσω των θήτα συναρτήσεων. Ας είναι

$$\begin{aligned} a &= \theta_2(0; e^{\pi i \tau}) = \vartheta_{10}(0; \tau) \\ b &= \theta_3(0; e^{\pi i \tau}) = \vartheta_{00}(0; \tau) \\ c &= \theta_4(0; e^{\pi i \tau}) = \vartheta_{01}(0; \tau) \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} e_1(\tau) &= \frac{\pi^2}{3}(b^4 + c^4) \\ e_2(\tau) &= \frac{\pi^2}{3}(-a^4 - b^4) \\ e_3(\tau) &= \frac{\pi^2}{3}(a^4 - c^4) \end{aligned}$$

Όταν $g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$ και $g_3 = 4e_1e_2e_3$, τότε αυτές μπορούν να εκφραστούν και σε θήτα συναρτήσεις. Σε απλοποιημένη μορφή έχουμε:

$$\begin{aligned} g_2(\tau) &= \frac{2}{3}\pi^4(a^8 + b^8 + c^8) \\ g_3(\tau) &= \frac{4}{27}\pi^6 \sqrt{\frac{(a^8 + b^8 + c^8)^3 - 54(abc)^8}{2}} \\ \Delta &= g_2^3 - 27g_3^2 = 16\pi^{12}a^8b^8c^8 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση των πραγματικών αναλλοίωτων, το πρόσημο της $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ ορίζει την φύση των ριζών. Αν η $\Delta > 0$, όλες οι ρίζες είναι πραγματικές και συμβατικά τις ονομάζουμε $e_1 > e_2 > e_3$. Αν $\Delta < 0$ τότε η $e_1 = -\alpha + \beta i$ όπου $\alpha \geq 0, \beta > 0$, η δεύτερη ρίζα είναι $e_2 = \bar{e}_1$ και η τρίτη ρίζα είναι μία πραγματική μη αρνητική ρίζα.

3.2.4 Ειδικές Τιμές

Θεωρούμε την εξίσωση

$$4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 0$$

που αποτελεί το δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης που είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα. Όταν η διακρίνουσα Δ της παραπάνω εξίσωσης είναι ίση με το μηδέν οι λύσεις της συνάρτησης \wp απλοποιούνται και ανάγονται σε γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οι λύσεις αυτές διακρίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις που εξαρτώνται από τα πρόσημα των g_2 και g_3 .

Πρώτη Περίπτωση: $g_2 > 0$ και $g_3 < 0$

Θεωρώντας μία σταθερά $c > 0$ και όταν το $g_2 > 0$ και $g_3 < 0$ οι τρεις ρίζες της εξίσωσης e_1, e_2 και e_3 είναι:

- $e_1 = c$
- $e_2 = c$
- $e_3 = -2c$

και η λύση της συνάρτησης \wp συναρτήσει του z είναι η εξής:

$$\wp(z; 12c^2, -8c^3) = c + 3c \left\{ \sinh \left[(3c)^{\frac{1}{2}} z \right] \right\}^{-2}$$

Δεύτερη Περίπτωση: $g_2 > 0$ και $g_3 > 0$

Για σταθερά $c > 0$ και όταν το g_2 και το g_3 είναι θετικά οι τρεις ρίζες της εξίσωσης είναι οι εξής:

- $e_1 = 2c$
- $e_2 = -c$
- $e_3 = -c$

και επιπλέον η λύση της συνάρτησης \wp είναι:

$$\wp(z; 12c^2, 8c^3) = -c + 3c \left\{ \sin \left[(3c)^{\frac{1}{2}} z \right] \right\}^{-2}$$

Τρίτη Περίπτωση: $g_2 = 0$ και $g_3 = 0$

Για σταθερά $c > 0$ και όταν το g_2 και το g_3 ίσα με το μηδέν οι τρεις ρίζες της εξίσωσης είναι οι εξής:

- $e_1 = 0$
- $e_2 = 0$
- $e_3 = 0$

και επιπλέον η λύση της συνάρτησης \wp είναι:

$$\wp(z; 0, 0) = z^{-2}$$

3.2.5 Διαφορική Εξίσωση

Η συνάρτηση \wp ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

όπου η εξάρτηση από τα ω_1 και ω_2 καταστέλλεται.

Αυτή η σχέση μπορεί να επαληθευτεί εύκολα συγκρίνοντας τους πόλους και των δύο πλευρών, για παράδειγμα, ο πόλος στο $z = 0$ έχουμε επίσης

$$[\wp'(z)]^2 \Big|_{z=0} \sim \frac{4}{z^6} - \frac{24}{z^2} \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4} - 80 \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6}$$

όταν ο πόλος στο $z = 0$ έχουμε

$$[\wp(z)]^3 \Big|_{z=0} \sim \frac{1}{z^6} + \frac{9}{z^2} \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} + 15 \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6}$$

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές τιμές προκύπτει η παραπάνω διαφορική εξίσωση.

3.2.6 Ολοκληρωτική Συνάρτηση

Η ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass μπορεί να δοθεί ως αντίστροφη ενός ελλειπτικού ολοκληρώματος. Έτσι λοιπόν είναι:

$$u = \int_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}}$$

όπου η g_2 και η g_3 στην περίπτωση αυτή μπορούν να θεωρηθούν ως σταθερές. Τότε

$$y = \wp(u)$$

3.2.7 Σχέση μεταξύ Jacobi και Weierstrass Ελλειπτικών συναρτήσεων

Είναι συχνά πιο εύκολο να υπολογίσουμε αριθμητικά τις συναρτήσεις Weierstrass μέσω των όρων των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi. Οι κύριες σχέσεις είναι οι εξής:

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 w} = e_2 + (e_1 - e_3) \frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w} = e_1 + (e_1 - e_2) \frac{\operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{sn}^2 w}$$

όπου e_i με $i = 1, 2, 3$ είναι οι τρεις ρίζες που περιγράφονται παραπάνω και όπου k το μόνιο από τις συναρτήσεις Jacobi ισούται με:

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$$

και η μεταβλητή w ισούται με :

$$w = z\sqrt{e_1 - e_3}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΕΙΣΩΣΗ KORTEWEG–DE VRIES

Πριν εκατό πενήντα χρόνια, ενώ διεξήγαγαν πειράματα για να καθορίσουν ένα πιο αποτελεσματικό σχεδιασμό για πλοία ένας νεαρός Σκοτσέζος μηχανικός, ο John Scott Russell (1808 – 1882), έκανε μία αξιοθαύμαστη ανακάλυψη. Πιο συγκεκριμένα, ο Russell έκανε την πρώτη παρατήρηση ενός σολιτονίου (ή όπως λέγεται συνήθως ενός μοναχικού κύματος) το 1834 στο κανάλι που συνδέει το Εδιμβούργο με τη Γλασκόβη. Ήταν τόσο εντυπωσιασμένος από το εξαιρετικά σταθερό σχήμα και ταχύτητα του κύματος που ακολούθησε την διάδοσή του για κάποια μίλια κατά μήκος του καναλιού.

Με αυτό τον ενθουσιασμό άρχισε την έρευνα για τα μοναχικά κύματα κατά τη διάρκεια της επόμενης δεκαετίας. Τα αποτελέσματα του Russell προβλημάτισαν την επιστημονική κοινότητα καθώς ήταν δύσκολο να κατανοήσουν τις παρατηρήσεις του. Ο λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι οι παρατηρήσεις του ήταν συνέπεια μη γραμμικών αποτελεσμάτων που θεωρούταν δευτερεύουσας σημασίας στο παρελθόν. Ανεξάρτητα από την κριτική που δέχτηκε, συνέχισε την έρευνα του και αποφάσισε να σταματήσει τα πειράματα του μόνο όταν δύο διάσημοι μαθηματικοί, οι G. B. Airy και G. G. Stokes του επεσήμαναν ότι οι παρατηρήσεις του έρχονται σε αντίθεση με τις θεωρίες για τα κύματα στα ρηχά ύδατα. Πέντε χρόνια αργότερα ο Rayleigh επιβεβαίωσε τα αποτελέσματα του Russell. Το 1895 ο Diederik Johannes Korteweg και ο Gustav de Vries συνέχισαν την δουλειά του Rayleigh συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση της επιφανειακής τάσης που οδήγησε στην διάσημη σήμερα εξίσωση Korteweg-de Vries.

Έτσι λοιπόν η εξίσωση Korteweg-de Vries ή εν συντομία KdV είναι η παρακάτω:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

η οποία είναι μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση για μία συνάρτηση u , για δύο πραγματικές μεταβλητές, τον χώρο x και τον χρόνο t , όπου με δείκτες ορίζουμε τις μερικές παραγώγους για x και t αντίστοιχα. Σκοπός του κεφαλαίου

ου είναι να μελετήσουμε τις πιθανές λύσεις της εξίσωσης σε μορφή οδεύοντος κύματος.

4.1 Το Διάγραμμα Φάσης

Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 2 θα χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα φάσης καθώς η εξίσωση KdV αποτελεί μία πολύπλοκη μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση και η γενική της λύση είναι δύσκολο να βρεθεί. Έτσι μέσω των διαγραμμάτων φάσης θα εξάγουμε σημαντικά ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης. Επομένως θεωρώντας την εξίσωση KdV

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

με τον μετασχηματισμό $\xi = x - ct$, όπου c η ταχύτητα του κύματος, μετατρέπεται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$-cu' + u'u + u''' = 0 \quad (4.1)$$

Ολοκληρώνοντας την (4.1) προκύπτει η σχέση:

$$-cu + \frac{u^2}{2} + u'' = k_1$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} u'(\xi) = y(\xi) \\ y'(\xi) = cu(\xi) - \frac{u^2(\xi)}{2} + k_1 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{cu - \frac{u^2}{2} + k_1}{y} \Leftrightarrow \\ ydy &= cu - \frac{u^2}{2} + k_1 du \end{aligned} \quad (4.2)$$

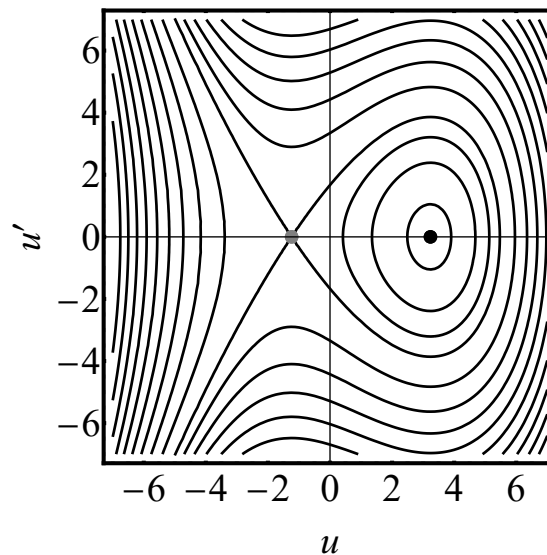
Ολοκληρώνοντας την σχέση (4.2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= c\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + k_1u + k_2 \Leftrightarrow \\ y^2 &= cu^2 - \frac{u^3}{3} + 2k_1u + 2k_2 \end{aligned}$$

όπου k_1 και k_2 αυθαίρετες σταθερές. Τελικά,

$$(u')^2 = cu^2 - \frac{u^3}{3} - 2k_1u - 2k_2 \Leftrightarrow u' = \pm \sqrt{(cu^2 - \frac{u^3}{3} - 2k_1u - 2k_2)} \quad (4.3)$$

Η εξίσωση (4.3) που προκύπτει είναι της μορφής $u' = f(\xi, u)$ και ονομάζεται αυτόνομη επειδή η f είναι ανεξάρτητη του ξ . Το συνολικό διάγραμμα φάσης για τις διάφορες τιμές των σταθερών k_1 και k_2 δίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα Φάσης της εξίσωσης (4.3) με $c = 1$.

Παρατηρούμε ότι οι τροχιές του διαγράμματος φάσης παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Οι τροχιές που αντιστοιχούν σε μικρές τιμές ενέργειας αντιπροσωπεύονται από μία κλειστή και μία ανοιχτή καμπύλη. Οι κλειστές καμπύλες όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2 αντιστοιχούν σε περιοδική κίνηση ενώ η ανοιχτή καμπύλη απειρίζεται ως προς την κατεύθυνση u' . Η διαχωρίστρια καμπύλη, αυτή τη φορά, έχει δυο υπο-περιοχές να χωρίσει: περιοχή κλειστών αλλά και ανοιχτών καμπυλών. Καθώς προχωράμε σε τιμές ενέργειας μεγαλύτερες από την ενέργεια της διαχωρίστριας καμπύλης έχουμε ανοιχτές καμπύλες όσο προχωράμε στην θετική κατεύθυνση του u οι ανοιχτές καμπύλες είναι φραγμένες και ως προς την κατεύθυνση του u και ως προς την κατεύθυνση του u' .

4.2 Η Διαχωρίστρια Καμπύλη

Θέλουμε να βρούμε την ειδική καμπύλη για την οποία ισχύουν ταυτόχρονα $u' = 0$ και $u'' = 0$. Αρχικά θα ψάξουμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$u'' = 0 \Leftrightarrow u^2 - 2cu - 2k_1 = 0$$

Επομένως η λύση που προκύπτει από την επίλυση της παραπάνω εξίσωση είναι η εξής:

$$u = c - \sqrt{c^2 + 2k_1} \quad \text{ή} \quad u = c + \sqrt{c^2 + 2k_1}$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε την λύση $u = c - \sqrt{c^2 + 2k_1}$ στην εξίσωση $u' = 0 \Leftrightarrow u^3 - 3cu^2 - 6k_1 - 6k_2 = 0$ και λύνοντας ως προς k_2 έχουμε:

$$k_2 = \frac{1}{3} \left(-c^3 + c^2 \sqrt{c^2 + 2k_1} + 2k_1 \sqrt{c^2 + 2k_1} - 3ck_1 \right).$$

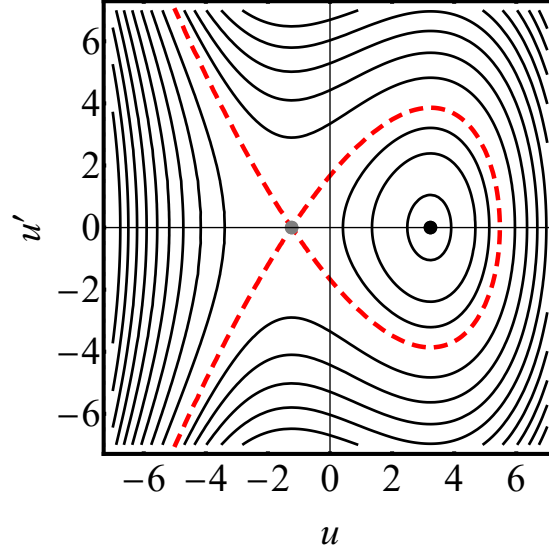
Και όμοια, κάνοντας αντικατάσταση την λύση $u = c + \sqrt{c^2 + 2k_1}$ στην εξίσωση $u' = 0 \Leftrightarrow u^3 - 3cu^2 - 6k_1 - 6k_2 = 0$ και λύνοντας ως προς k_2 έχουμε:

$$k_2 = \frac{1}{3} \left(-c^3 - c^2 \sqrt{c^2 + 2k_1} - 2k_1 \sqrt{c^2 + 2k_1} - 3ck_1 \right)$$

Επομένως για οποιαδήποτε πραγματική τιμή του c για τιμές του $k_1 > -\frac{c^2}{2}$ και για $k_2 = \frac{1}{3} \left(-c^3 - c^2 \sqrt{c^2 + 2k_1} - 2k_1 \sqrt{c^2 + 2k_1} - 3ck_1 \right)$ η εξίσωση KdV για τις τιμές αυτές αντιστοιχεί στην ειδική καμπύλη, την διαχωρίστρια καμπύλη. Η διαχωρίστρια καμπύλη όπως είδαμε και στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς στο κεφάλαιο 2, είναι η καμπύλη που διαιρεί το επίπεδο φάσης σε ξεχωριστές περιοχές, οι οποίες περιέχουν καμπύλες διακεκριμένης συμπεριφοράς. Στην περίπτωση μας διαχωρίζει το ζεύγος της μίας κλειστής και μίας ανοιχτής καμπύλης από τις ανοιχτές καμπύλες. Δηλαδή η διαχωρίστρια καμπύλη διαχωρίζει τις περιοχές στις οποίες έχουμε τρία σημεία τομής με τον άξονα u από τις περιοχές με ένα σημείο τομής με τον άξονα u .

4.3 Περιοχές για την εξίσωση Korteweg-de Vries

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση $(u')^2 = cu^2 - \frac{u^3}{3} - 2k_1u - 2k_2$. Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης αποτελείται από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Στην ενότητα αυτή θα προσδιορίσουμε τις τιμές των σταθερών της διαφορικής εξίσωσης KdV για κάθε περιοχή της εξίσωσης. Ο αριθμός των πραγματικών ριζών



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) στο οποίο η διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί στην διαχωρίστρια καμπύλη με $c = 1$.

για το πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P_3(u) = \frac{u^3}{3} - cu^2 - 2k_1u - 2k_2$ διακρίνεται σε περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσα του πολυώνυμου.

Η πρώτη περίπτωση για τις ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου τρίτου βαθμού είναι οι τρεις πραγματικές ρίζες. Για να έχω τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες πρέπει η διακρίνουσα του πολυωνύμου $P_3(u) = \frac{u^3}{3} - cu^2 - 2k_1u - 2k_2$ να είναι θετική. Η διακρίνουσα του $P_3(u)$ είναι:

$$\Delta = \frac{1}{12} (3c^2k_1^2 + 8k_1^3 - 6c^3k_2 - 18ck_1k_2 - 9k_2^2).$$

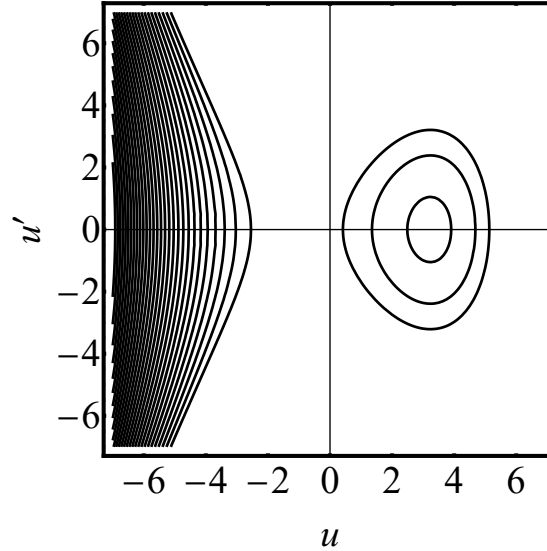
Επομένως η διακρίνουσα είναι θετική όταν $k_1 > -\frac{c^2}{2}$ και

$$k_{\min} < k_2 < k_{\max},$$

$$k_{\min} = \frac{1}{3} \left(-c^3 - \sqrt{c^6 + 6c^4k_1 + 12c^2k_1^2 + 8k_1^3 - 3ck_1} \right),$$

$$k_{\max} = \frac{1}{3} \left(-c^3 + \sqrt{c^6 + 6c^4k_1 + 12c^2k_1^2 + 8k_1^3 - 3ck_1} \right).$$

Η δεύτερη περίπτωση για τις ρίζες του πολυωνύμου $P_3(u)$ είναι όταν έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα. Τότε πρέπει η διακρίνουσα



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) για την περίπτωση του ζεύγους ανοιχτών και κλειστών καμπυλών.

του πολωνύμου $P_3(u) = \frac{u^3}{3} - cu^2 - 2k_1u - 2k_2$ να είναι μηδέν. Επομένως η διακρίνουσα είναι μηδέν όταν

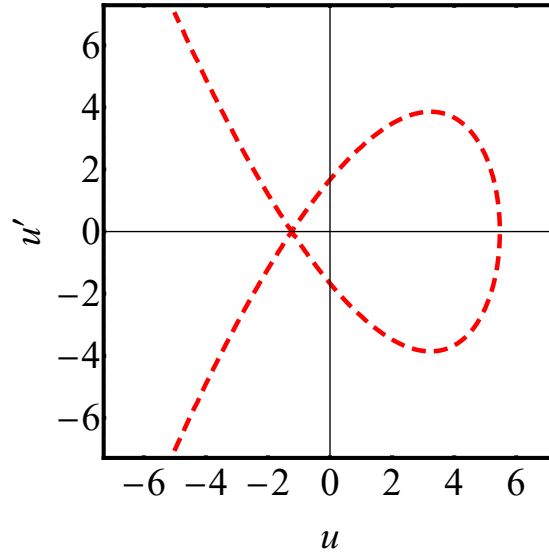
$$k_1 > -\frac{c^2}{2}, \text{ και, } k_2 = \frac{1}{3} \left(-c^3 + \sqrt{c^6 + 6c^4k_1 + 12c^2k_1^2 + 8k_1^3 - 3ck_1} \right).$$

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην ειδική καμπύλη, στην διαχωρίστρια καμπύλη.

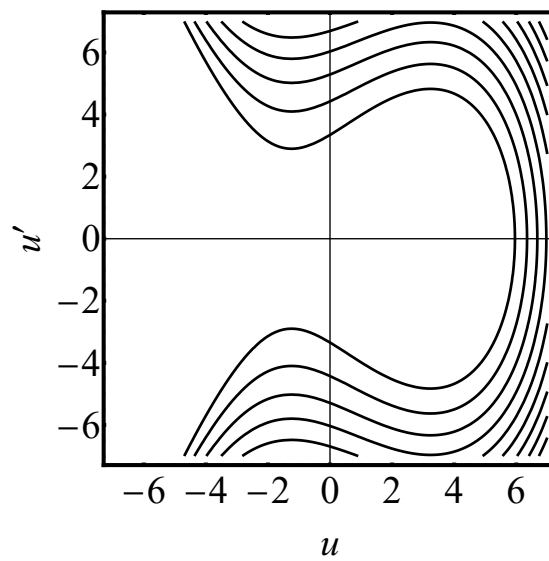
Η τελευταία περίπτωση αντιστοιχεί στην μία απλή πραγματική ρίζα. Για να υπάρχει μία απλή πραγματική ρίζα και δύο μιγαδικές ρίζες πρέπει η διακρίνουσα του πολωνύμου του $P_3(u) = \frac{u^3}{3} - cu^2 - 2k_1u - 2k_2$ να είναι αρνητική.

Επομένως η διακρίνουσα είναι αρνητική όταν

$$k_1 > -\frac{c^2}{2}, \text{ και, } k_2 > \frac{1}{3} \left(-c^3 + \sqrt{c^6 + 6c^4k_1 + 12c^2k_1^2 + 8k_1^3 - 3ck_1} \right)$$



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) για την περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) για την περίπτωση των ανοιχτών καμπυλών.

4.4 Λύσεις της εξίσωσης KdV μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την λύση της εξίσωσης Korteweg-de Vries Στην προηγούμενη ενότητα διακρίναμε περιοχές για την εξίσωση KdV με βάση τον αριθμό των ριζών. Θα διακρίνουμε τις λύσεις της εξίσωσης με την χρήση των ελλειπτικών συναρτήσεων σε καθεμία από τις περιοχές που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

4.4.1 Περιοχή Τριών Ριζών

Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε τις λύσεις της εξίσωσης KdV για την περιοχή των τριών πραγματικών διακριτών ριζών. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο είδη περιοχών. Μία φραγμένη περιοχή και μία ανοιχτή περιοχή. Την φραγμένη περιοχή θα την εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi ενώ την ανοιχτή περιοχή θα την εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Φραγμένη Περιοχή

Θέλουμε να αντιστοιχίσουμε την διαφορική μας εξίσωση

$$(u')^2 = cu^2 - \frac{u^3}{3} - 2k_1u - 2k_2$$

με μία από τις διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στις τρεις βασικές ελλειπτικές συναρτήσεις : $\text{sn}(\xi)$, $\text{cn}(\xi)$, $\text{dn}(\xi)$.

Για τον λόγο αυτό, κάνουμε την θεώρηση : $u(\xi) = A + Bv^2(\Gamma\xi)$, με Γ ελεύθερη παράμετρος. Επομένως, η διαφορική μας εξίσωση μετατρέπεται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$v^2v'^2 = -\frac{B}{12\Gamma^2}v^6 + \frac{-A+c}{4\Gamma^2}v^4 + \frac{-A^2+2Ac-2k_1}{4B\Gamma^2}v^2 + \frac{-A^3+3A^2c-6Ak_1-6k_2}{12B^2\Gamma^2}$$

Την παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με την διαφορική εξίσωση της $\text{cn}(\Gamma\xi)$:

$$\left(\frac{dv(\Gamma\xi)}{d\xi}\right)^2 + k^2v^4(\Gamma\xi) - (2k^2 - 1)v^2(\Gamma\xi) + (k^2 - 1) = 0$$

με $0 \leq k \leq 1$.

Έτσι λοιπόν για την σταθερά A έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$A = c + 4\Gamma^2 - 8\Gamma^2 k^2 \quad (4.4)$$

Όμοια για την σταθερά B έχουμε:

$$B = 12\Gamma^2 k^2 \quad (4.5)$$

Για το k_1 έχουμε:

$$k_1 = \frac{1}{2} \left(4B\Gamma^2 - 4B\Gamma^2 k^2 + (4\Gamma^2 - 8\Gamma^2 k^2 + 1)^2 - 2(4\Gamma^2 - 8\Gamma^2 k^2 + 1) \right) \quad (4.6)$$

Και τέλος για την σταθερά k_2 έχουμε:

$$k_2 = \frac{1}{6} \left((4\Gamma^2 - 8\Gamma^2 k^2 + 1)^3 - 3(4\Gamma^2 - 8\Gamma^2 k^2 + 1)^2 - 12(4\Gamma^2 - 8\Gamma^2 k^2 + 1) \right) \quad (4.7)$$

Στην συνέχεια θα βρούμε τις τιμές του μόδιου k για τις οποίες η διακρίνουσα $\Delta = \frac{1}{12}(3c^2 k_1^2 + 8k_1^3 - 6c^3 k_2 - 18ck_1 k_2 - 9k_2)$ είναι θετική. Έτσι θεωρώντας τα k_1 και k_2 σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστώντας στην διακρίνουσα, η διακρίνουσα που προκύπτει είναι η εξής:

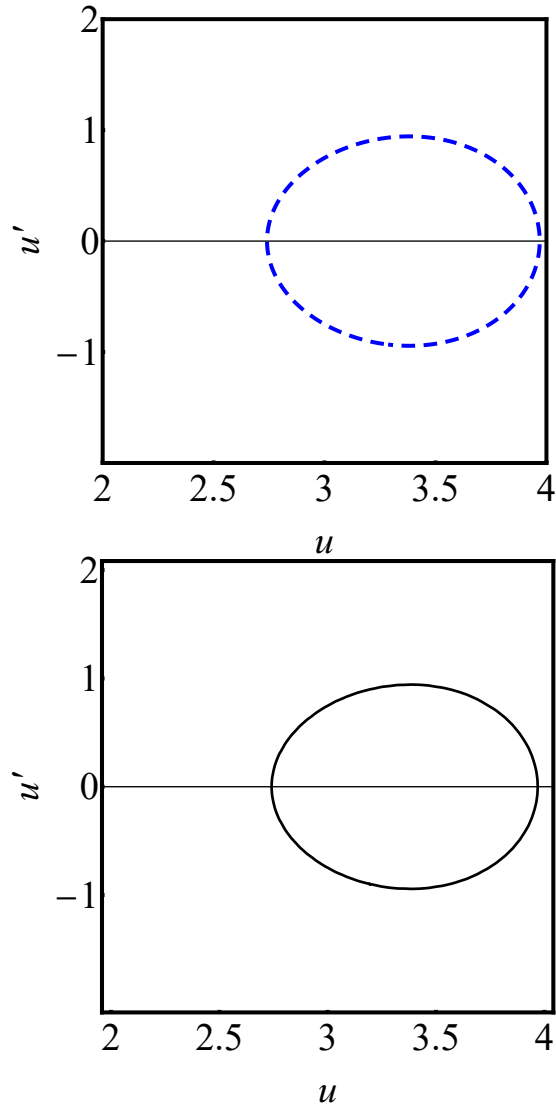
$$\Delta = 2304\Gamma^{12} k^4 (k^2 - 1)^2$$

Η παραπάνω διακρίνουσα είναι πάντα θετική. Άρα όταν το $k \in (0, 1)$ βρισκόμαστε στην περιοχή των τριών ριζών.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $u(\xi) = A + B \operatorname{cn}^2(\Gamma\xi; k^2)$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης KdV που αντιστοιχεί στην κλειστές τροχιές. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης η οποία είναι $u'(\xi) = -2B\Gamma \operatorname{cn}(\Gamma\xi; k^2) \operatorname{dn}(\Gamma\xi; k^2) \operatorname{sn}(\Gamma\xi; k^2)$. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $u(\xi)$. Το αποτέλεσμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) για τις ίδιες σταθερές όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

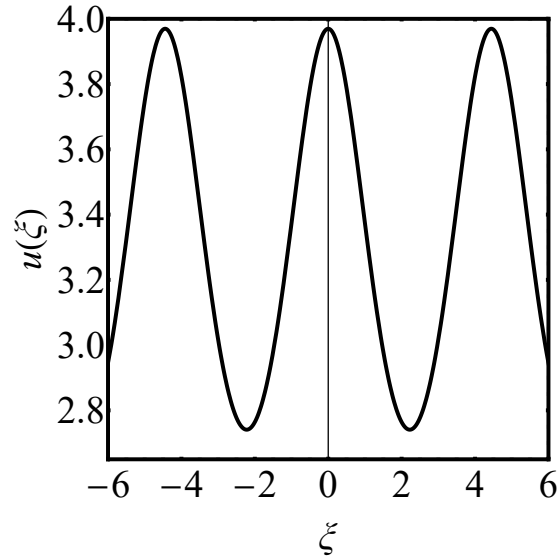
Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε αυθαίρετες τιμές για τις σταθερές c, Γ , με $c = 1$ και $\Gamma = 0.8$. Επιπλέον οι σταθερές A, B, k_1, k_2 καθορίζονται από τις παραπάνω σχέσεις και τέλος επιλέγουμε την τιμή $k = 0.4$ η οποία ανήκει εντός του διαστήματος $(0, 1)$. Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συμπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi cn περιγράφει τις κλειστές τροχιές στην περιοχή των τριών ριζών του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης (4.3).

Κεφάλαιο 4 4.4. Λύσεις της εξίσωσης KdV μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα φάσης στην περίπτωση των δύο ριζών. Επάνω το διάγραμμα μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων και κάτω το διάγραμμα μέσω της διαφορικής εξίσωσης.

Τέλος για την κλειστή περιοχή θα παρουσιάσουμε και την γραφική παράσταση της λύσης της εξίσωσης KdV, δηλαδή την γραφική παράσταση της συνάρτησης $u(\xi) - \xi$.



Σχήμα 4.7: Η λύση της εξίσωσης KdV για τις κλειστές τροχιές στην περιοχή των τριών ριζών.

Ανοιχτή Περιοχή

Αφού προσδιορίσαμε την λύση της κλειστής περιοχής μέσω της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi cn για την περίπτωση των τριών ριζών, τώρα θα προσδιορίσουμε την λύση της ανοιχτής περιοχής της περίπτωσης αυτής. Πιο συγκεκριμένα, η λύση της ανοιχτής περιοχής θα προσδιοριστεί μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση:

$$(p')^2 - 4p^3 + g_2p + g_3 = 0 \quad (4.8)$$

Θα αντιστοιχίσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση με την εξίσωση (4.3). Για τον λόγο αυτό κάνουμε την ακόλουθη θεώρηση για την εξίσωση (4.1):

$$u(\xi) = Ap(\Gamma\xi) + B$$

Επομένως, η εξίσωση KdV μετατρέπεται ως εξής:

$$p'^2 = -\frac{A}{3\Gamma^2}p^3 + \frac{-B+c}{\Gamma^2}p^2 + \frac{-B^2+2Bc-2k_1}{A\Gamma^2}p + \frac{-B^3+3B^2c-6Bk_1-6k_2}{3A^2\Gamma^2} \quad (4.9)$$

Κεφάλαιο 4 4.4. Λύσεις της εξίσωσης KdV μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων

Έτσι λοιπόν μέσω των σχέσεων (4.8) και (4.9) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές A, B, g_2 και την k_2 .

Για την σταθερά A έχουμε:

$$A = -12\Gamma^2 \quad (4.10)$$

Όμοια για την σταθερά B έχουμε:

$$B = c \quad (4.11)$$

Για την g_2 :

$$g_2 = \frac{c^2 + 2k_1}{12\Gamma^4} \quad (4.12)$$

Τέλος για την k_2 :

$$k_2 = \frac{1}{3} (-c^3 - 3ck_1 - 216\Gamma^6 g_3) \quad (4.13)$$

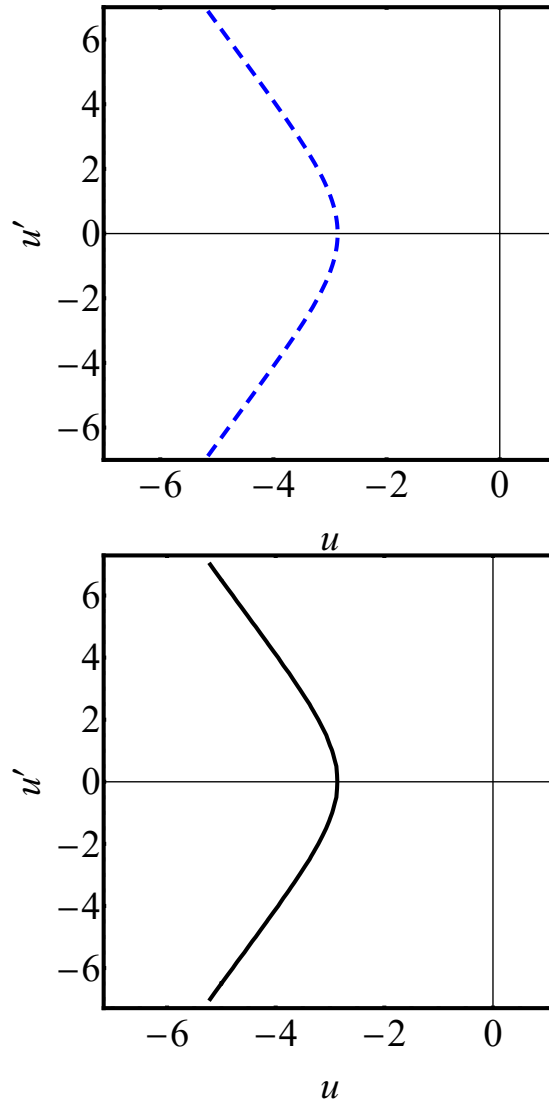
Στην συνέχεια θα βρούμε την σχέση που συνδέει το g_2 με το g_3 όταν η διακρίνουσα της εξίσωσης του πολυωνύμου $\frac{cx^2}{2} + k_1x + k_2 - \frac{x^3}{6} = 0$ είναι θετική, ώστε το πολυώνυμο να έχει τρεις πραγματικές ρίζες. Επομένως η διακρίνουσα από τις παραπάνω σχέσεις για τις σταθερές γίνεται:

$$\Delta = 144 (\Gamma^{12} g_2^3 - 27\Gamma^{12} g_3^2)$$

Για να είναι η διακρίνουσα θετική θα πρέπει η σταθερά g_3 να παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(-\frac{g_2^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}, \frac{g_2^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}\right)$.

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτησης $u(\xi) = A\wp(\Gamma\xi; g_2, g_3) + B$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης KdV που αντιστοιχεί στις ανοιχτές περιοχές. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης η οποία είναι $u'(\xi) = A\wp'(\Gamma\xi; g_2, g_3)$. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης $u' - u$. Αυτό το διάγραμμα φάσης μας δίνει την ανοιχτή καμπύλη την οποία την συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) το οποίο το υπολογίζουμε με βάση τις σχέσεις των σταθερών παραπάνω. Η σύγκριση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

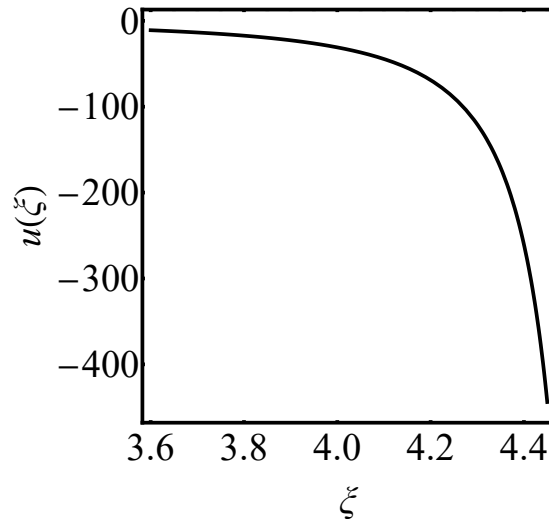
Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε αυθαίρετες τιμές για σταθερές c, Γ με $c = 1$ και $\Gamma = 0.8$. Επιπλέον οι σταθερές A, B, g_2, k_2 δίνονται από τις παραπάνω σχέσεις και τέλος επιλέγουμε ένα g_3 στην περιοχή όπου η διακρίνουσα είναι θετική. Επιλέγουμε τις ίδιες τιμές για τις σταθερές c, Γ, k_1 με την περίπτωση της φραγμένης περιοχής.



Σχήμα 4.8: Διάγραμμα φάσης στην περίπτωση της μίας ρίζας. Επάνω φαίνεται το διάγραμμα μέσω της συνάρτησης Weierstrass και κάτω μέση της διαφορικής εξίσωσης.

Για την ανοιχτή περιοχή θα παρουσιάσουμε την λύση της εξίσωσης KdV, δηλαδή την γραφική παράσταση της συνάρτησης $u(\xi) - \xi$.

Τέλος θα παρουσιάσουμε το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) συγκρίνο-



Σχήμα 4.9: Η λύση της εξίσωσης KdV για τις ανοιχτές τροχιές στην περιοχή των τριών ριζών.

ντας ταυτόχρονα τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi για την κλειστή τροχιά και τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass για την ανοιχτή τροχιά.

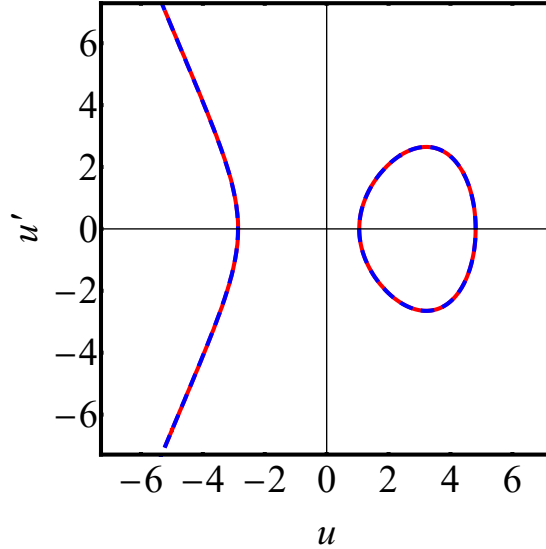
4.4.2 Περιοχή Μίας Διπλής και Μίας Απλής Ρίζας

(A) Διαχωρίστρια Καμπύλη

Σε αυτή την υποενότητα θα δούμε τις λύσεις μέσω ελλειπτικών συναρτήσεων για διαχωρίστρια καμπύλη στην εξίσωση KdV η οποία αποτελεί την μοναδική καμπύλη που αποτελείται από δύο σημεία τομής με τον άξονα u στο διάγραμμα φάσης. Όπως και στην περίπτωση των τριών ριζών έτσι και η διαχωρίστρια καμπύλη αποτελείται από δύο περιοχές την φραγμένη και την ανοιχτή. Έτσι λοιπόν όπως και πριν την φραγμένη περιοχή θα την εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi ενώ την ανοιχτή περιοχή θα την εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Φραγμένη Περιοχή

Όπως και πριν η διαφορική εξίσωση KdV αντιστοιχεί με την διαφορική εξίσωση της ελλειπτικής συνάρτησης $\operatorname{cn}(\xi)$. Έτσι για την θεώρηση: $u(\xi) = A + Bu^2(\Gamma\xi)$, με Γ ελεύθερη παράμετρος ισχύουν για τις σταθερές $A, B, k_1,$



Σχήμα 4.10: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3). Οι κόκκινες τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης της (4.3) η μπλε διακεκομμένη κλειστή τροχιά αντιστοιχεί στο διάγραμμα φάσης της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $u(\xi) = A + B \operatorname{cn}(\Gamma\xi; k^2)$ ενώ η μπλε διακεκομμένη ανοιχτή καμπύλη αντιστοιχεί στο διάγραμμα φάσης για την ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass $u(\xi) = A\wp(\Gamma\xi; g_2, g_3) + B$.

k_2 οι σχέσεις (4.4), (4.5), (4.6) και (4.7) αντίστοιχα. Όμως όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα στην περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης η σταθερά $k_2 = \frac{1}{3} \left(-c^3 + \sqrt{c^6 + 6c^4k_1 + 12c^2k_1^2 + 8k_1^3} - 3ck_1 \right)$. Έτσι λοιπόν θέλουμε να βρούμε τις τιμές του k για τις οποίες έχουμε την διαχωρίστρια καμπύλη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για τις σταθερές, έχουμε την διαχωρίστρια καμπύλη όταν η σταθερά k_2 της σχέσης (4.7) είναι ίση με αυτή την τιμή. Δηλαδή θέλουμε να ισχύει:

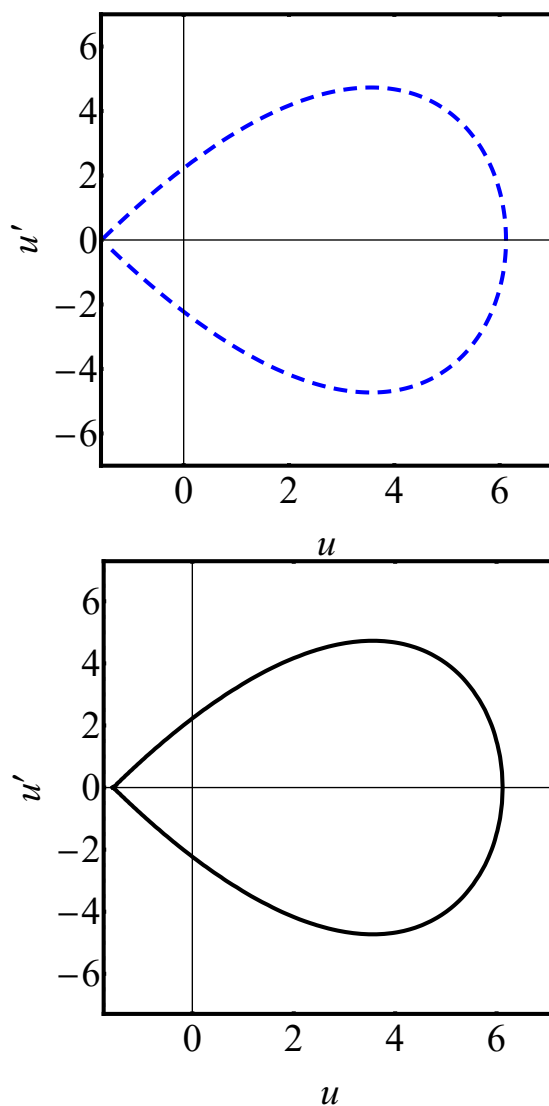
$$-\frac{32}{3}\Gamma^6 \left(2k^6 - 3k^4 - 3k^2 + 2(k^4 - k^2 + 1)^{3/2} + 2 \right) = 0.$$

Άρα για να είναι η παραπάνω σχέση ίση με το μηδέν πρέπει $k = 1$ ή το $k = -1$, όμως επειδή το k παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$, δεχόμαστε την τιμή $k = 1$. Άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης όταν $k = 1$.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $u(\xi) = A + B \operatorname{cn}^2(\Gamma\xi; k^2)$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης KdV που αντιστοιχεί στην κλειστή τροχιά της διαχωρίστριας καμπύλης. Βρίσκοντας την παράγωγο της $u(\xi)$ κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης $u' - u$ για $k = 1$ και με βάση τις σχέσεις των σταθερών. Στα

Κεφάλαιο 4 4.4. Λύσεις της εξίσωσης KdV μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων

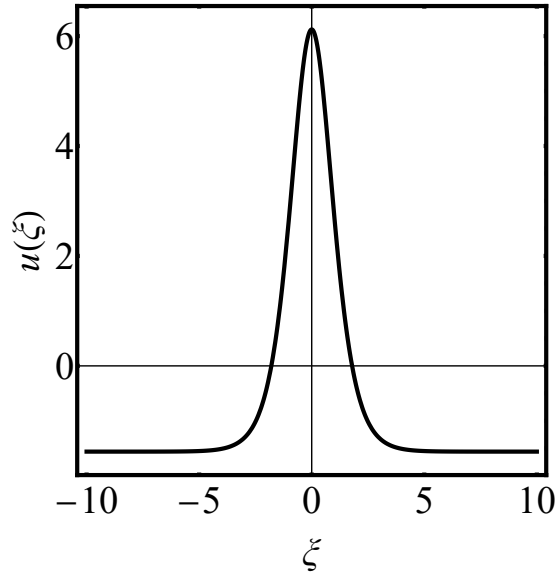
παρακάτω σχήματα συγκρίνουμε αυτό το διάγραμμα φάσης με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3).



Σχήμα 4.11: Η διαχωρίστρια καμπύλη για κλειστές τροχιές, μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων (επάνω) και της διαφορικής εξίσωσης (κάτω).

Παρατηρούμε ότι τα δύο διαγράμματα φάσης ταυτίζονται και συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση cn περιγράφει την κλειστή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης.

Τέλος για την κλειστή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης θα παρουσιάσουμε για την γραφική παράσταση της λύσης της εξίσωσης KdV.



Σχήμα 4.12: Η λύση της εξίσωσης KdV για την κλειστή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης.

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο των ελλειπτικών συναρτήσεων η τιμή του μόνιου $k = 1$ θεωρείται ειδική τιμή και για την τιμή αυτή έχουμε ότι η συνάρτηση $\operatorname{cn}(\xi; k)$ μετατρέπεται στην γνωστή τριγωνομετρική συνάρτηση $\operatorname{sech}\xi$.

Ανοιχτή Περιοχή

Σε αυτή την υποενότητα θα προσδιορίσουμε την λύση της ανοιχτής περιοχής της διαχωρίστριας καμπύλης μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Έτσι λοιπόν όπως και στην περίπτωση των τριών ριζών αν αντιστοιχούμε την διαφορική εξίσωση Weierstrass με την διαφορική εξίσωση KdV κάνοντας την θεώρηση: $u(\xi) = Ap(\Gamma\xi) + B$ για τις σταθερές A , B , g_2 και k_2 ισχύουν οι σχέσεις (4.10)-(4.13) αντίστοιχα.

Στην συνέχεια ψάχνουμε την σχέση που συνδέει το g_2 με το g_3 . Γνωρίζουμε ότι για την διαχωρίστρια καμπύλη γενικά ισχύει ότι η σταθερά

$$k_2 = \frac{1}{3} \left(-c^3 + \sqrt{c^6 + 6c^4k_1 + 12c^2k_1^2 + 8k_1^3 - 3ck_1} \right)$$

και θέλουμε ταυτόχρονα για την σταθερά k_2 να ισχύει η σχέση (4.13). Με άλλα

λόγια θέλουμε να ισχύει:

$$\sqrt{3}g_2^{3/2} + 9g_3 = 0$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει όταν $g_3 = -\frac{g_2^{3/2}}{3\sqrt{3}}$ και αυτή η σχέση περιγράφει τη ανοιχτή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης.

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $u(\xi) = A\wp(\Gamma\xi; g_2, g_3) + B$ και υπολογίζοντας την παράγωγο του $u'(\xi)$ κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης $u' - u$. Το διάγραμμα φάσης αυτό το συγκρίνουμε το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3). Η σύγκριση των ανοιχτών περιοχών της διαχωρίστριας καμπύλης φαίνεται στα ακόλουθα σχήματα.

Η λύση της $u(\xi)$ της ανοιχτής περιοχής της διαχωρίστριας καμπύλης απειρίζεται με όμοιο τρόπο με την περίπτωση της ανοιχτής περιοχής των τριων ριζών.

Παρόλα αυτά, η περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης αντιστοιχεί σε διακρίνουσα του πολυωνύμου $P_3(u)$ η οποία είναι ίση με το μηδέν. Όταν η διακρίνουσα είναι ίση με το μηδέν έχουμε ειδικές περιπτώσεις και για τις ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή το $g_2 > 0$ και το $g_3 < 0$. Άρα οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass απλοποιούνται και μετατρέπονται ως εξής:

$$\wp(\xi; 12\alpha^2, -8\alpha^3) = \alpha + 3\alpha \left\{ \sinh \left[(3\alpha)^{\frac{1}{2}} \xi \right] \right\}^{-2}$$

με α μια σταθερά και οι ρίζες του πολυωνύμου τρίτου βαθμού $4p(\xi) - g_2p'(\xi) - g_3 = 0$ είναι $e_1 = e_2 = \alpha$ και $e_3 = -2\alpha$.

Τέλος παρουσιάσουμε στο ίδιο διάγραμμα φάσης το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) καθώς και το διάγραμμα φάσης για την κλειστή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi και το διάγραμμα για την ανοιχτή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

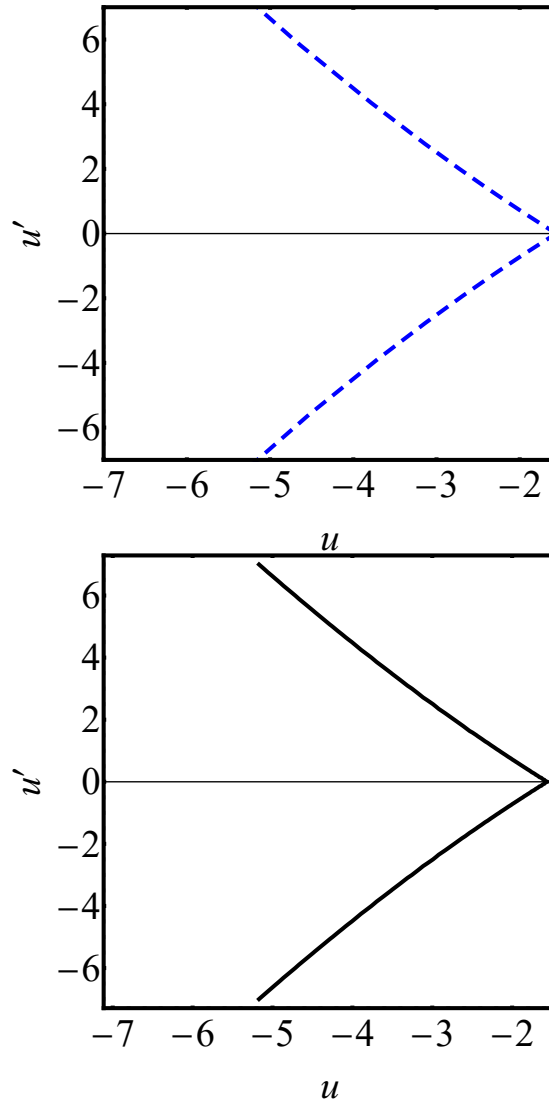
(B) Μία Ανοιχτή Καμπύλη και ένα Σημείο

Σε αυτή την υποενότητα θα δούμε μία ακόμα περίπτωση της γενικής περιοχής της μίας διπλής και μίας απλής ρίζας. Η περιοχή αυτή αντιστοιχεί σε μία καμπύλη και ένα σημείο η οποία όπως και η διαχωρίστρια καμπύλη είναι μοναδική. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόνο ένα είδος περιοχής, την ανοιχτή περιοχή την οποία θα περιγράψουμε μέσω ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Ανοιχτή Περιοχή

Σύμφωνα με την περιγραφή και τον υπόλοιπων ανοιχτών περιοχών θα κάνουμε

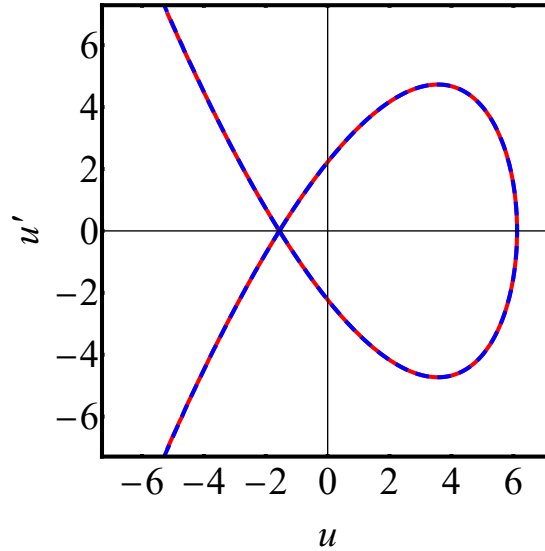
Κεφάλαιο 4 4.4. Λύσεις της εξίσωσης KdV μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων



Σχήμα 4.13: Η διαχωρίστρια καμπύλη για ανοιχτές τροχιές, μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων (επάνω) και της διαφορικής εξίσωσης (κάτω).

την θεώρηση ότι $u(\xi) = Ap(\Gamma\xi) + B$ και έτσι για τις σταθερές A, B, g_2 και k_2 ισχύουν οι σχέσεις (4.10)-(4.13) αντίστοιχα.

Θα βρούμε την σχέση που συνδέει το g_2 με το g_3 . Στην περίπτωση αυτή θέλουμε η διακρίνουσα του $P_3(u)$ να είναι ίση με το μηδέν. Η διακρίνουσα σύμφωνα



Σχήμα 4.14: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3). Η κόκκινη τροχιά αντιστοιχεί στο διάγραμμα φάσης (4.3) η μπλε διακεκομμένη κλειστή τροχιά αντιστοιχεί στο διάγραμμα φάσης της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $u(\xi) = A + B \operatorname{cn}(\Gamma \xi; k^2)$ ενώ η μπλε διακεκομμένη ανοιχτή καμπύλη αντιστοιχεί στο διάγραμμα φάσης για την ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass $u(\xi) = A \wp(\Gamma \xi; g_2, g_3) + B$.

με τις σχέσεις των σταθερών είναι:

$$\Delta = 144 (\Gamma^{12} g_2^3 - 27 \Gamma^{12} g_3^2)$$

και σε αυτή την περίπτωση το $g_3 = \frac{g_2^{3/2}}{3\sqrt{3}}$.

4.4.3 Περιοχή Μίας Ρίζας

Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε τις ανοιχτές καμπύλες στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) που περιγράφουν τις καμπύλες που βρίσκονται εκτός της διαχωρίστριας καμπύλης. Οι καμπύλες αυτές αποτελούνται από ένα είδος περιοχής, την ανοιχτή περιοχή. Άρα για να περιγράψουμε τις λύσεις της περίπτωσης αυτής χρειαζόμαστε μόνο τις ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass καθώς έχουμε μόνο την ανοιχτή περιοχή.

Ανοιχτή Περιοχή

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις όταν περιγράφαμε τις ανοιχτές περιο-

Κεφάλαιο 4 4.4. Λύσεις της εξίσωσης KdV μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων

χές έτσι και σε αυτή την περίπτωση κάνοντας την θεώρηση ότι $u(\xi) = Ap(\Gamma\xi) + B$ για τις σταθερές A, B, g_2 και k_2 ισχύουν οι σχέσεις (4.10)-(4.13) αντίστοιχα.

Θα βρούμε λοιπόν την σχέση που συνδέει το g_2 με το g_3 . Για να έχουμε μία πραγματική ρίζα θα πρέπει η διακρίνουσα του πολυωνύμου $\frac{cx^2}{2} + k_1x + k_2 - \frac{x^3}{6} = 0$ είναι αρνητική. Έτσι θεωρώντας τις σταθερές σύμφωνα τις σχέσεις και αντικαθιστώντας στην διακρίνουσα, η διακρίνουσα μετατρέπεται ως εξής:

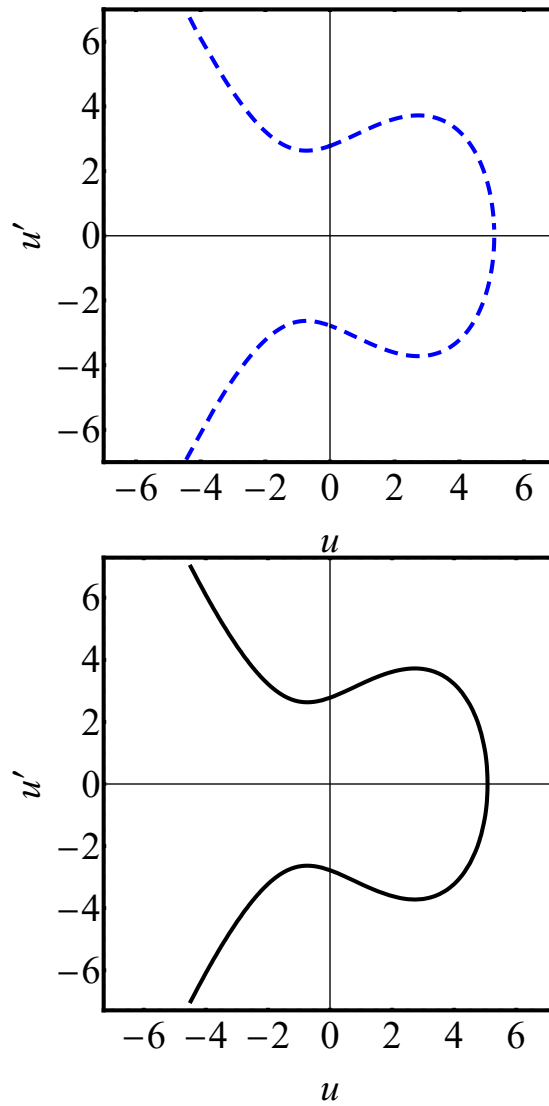
$$\Delta = 144(\Gamma^{12}g_2^3 - 27\Gamma^{12}g_3^2)$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι αρνητική και είναι εκτός του διαστήματος της διαχωρίστριας καμπύλης όταν το g_3 λαμβάνει τιμές στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{g_2^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}\right)$.

Έτσι για $g_3 \in \left(-\infty, -\frac{g_2^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}\right)$ βρισκόμαστε στην περιοχή της μίας ρίζας.

Θεωρώντας την συνάρτηση $u(\xi) = A\wp(\Gamma\xi; g_2, g_3) + B$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης KdV που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες και υπολογίζοντας την παράγωγο $u'(\xi)$ κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης $u' - u$. Αυτό το διάγραμμα το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (4.3) όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε ότι πράγματι η ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass περιγράφει την εξίσωση KdV. Τα διαγράμματα αυτά κατασκευάστηκαν θεωρώντας αυθαίρετες σταθερές $\Gamma = 1$ και $c = 1$, οι σταθερές A, B, g_2 και k_2 έχουν υπολογιστεί με βάση τις σχέσεις (4.10)-(4.13) και επιλέγουμε το $g_3 = -\frac{g_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{g_2^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}\right)$.



Σχήμα 4.15: Διάγραμμα φάσης στην περίπτωση της μίας ρίζας. Επάνω φαίνεται το διάγραμμα μέσω της συνάρτησης Weierstrass και κάτω μέση της διαφορικής εξίσωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER

Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) παίζει κεντρικό ρόλο για τέσσερις σχεδόν δεκαετίες σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών και της Φυσικής. Κάποιες από τις πολλές εφαρμογές της εξίσωσης σχετίζονται με τα συμπυκνώματα Bose-Einstein, με την μη γραμμική οπτική, την διάδοση του ηλεκτρικού πεδίου στις οπτικές ίνες, την κατάρρευση των κυμάτων Langmuir, την συμπεριφορά των κυμάτων των βαθέων υδάτων και αλλού. Στην αδιάστατή της μορφή γράφεται ως

$$iq_z + \frac{d_0}{2} q_{TT} + |q|^2 q = 0$$

όπου υιοθετούμε το συμβολισμό της οπτικής (ώστε να ξεχωρίσουμε τα αποτελέσματα και από την προηγούμενη ενότητα), όπου η διάδοση γίνεται στη μεταβλητή Z . Σημαντικό ρόλο έχει το πρόσημο της σταθεράς d_0 . Αν $d_0 > 0$ η εξίσωση ονομάζεται εστιάζουσα (focusing), ενώ αν $d_0 < 0$ η εξίσωση ονομάζεται αφεστιάζουσα (defocusing). Η διαφορά αυτή δεν έχει να κάνει μόνο με τις φυσικές παραδοχές, κάτω από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση αλλά κυρίως με τις λύσεις που προκύπτουν. Η πιο γνωστή τέτοια διαφορά είναι τα λεγόμενα σολιτόνια: η εστιάζουσα εξίσωση έχει σολιτονικές λύσεις που ικανοποιούν μηδενικές συνοριακές συνθήκες στο άπειρο (φωτεινά σολιτόνια), ενώ η αφεστιάζουσα επιδέχεται σολιτονικές λύσεις με μη-μηδενικές (σταθερές) συνοριακές συνθήκες (σκοτεινά σολιτόνια). Μια συνολική εικόνα των διαφόρων λύσεων, όχι μόνο των σολιτονικών, θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

5.1 Το Διάγραμμα Φάσης

Θεωρούμε την εξίσωση NLS:

$$iq_Z + \frac{d_0}{2}q_{TT} + |q|^2q = 0 \quad (5.1)$$

όπου d_0 είναι μία αυθαίρετη σταθερά.

Θέτοντας $q = fe^{i\Phi}$ με $f = \sqrt{\rho}$ και $f > 0$ και με αντικατάσταση στην (5.1) έχουμε:

$$i(2f_Z + 2d_0f_T\Phi_T + d_0f\Phi_{TT}) + (2f^3 + d_0f_{TT} - 2f\Phi_Z - d_0f\Phi_T^2) = 0 \quad (5.2)$$

Επομένως για το φανταστικό μέρος της σχέσης (5.2) έχουμε:

$$2f_Z + 2d_0f_T\Phi_T + d_0f\Phi_{TT} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2ff_Z + 2d_0ff_T\Phi_T + d_0f^2\Phi_{TT} = 0$$

Άρα προκύπτει:

$$2f_Zf + d_0\frac{\partial}{\partial T}\left(f^2\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right) = 0 \quad (5.3)$$

Και αντίστοιχα για το πραγματικό μέρος έχουμε:

$$2f^3 + d_0f_{TT} - 2f\Phi_Z - d_0f\Phi_T^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2f^2 + d_0f^{-1}f_{TT} - 2\Phi_Z - d_0\Phi_T^2 = 0 \quad (5.4)$$

Αναζητάμε τις λύσεις για $\frac{\partial}{\partial Z}f = 0$ και $\frac{\partial}{\partial Z}|q|^2 = 0$ δηλαδή θέλουμε $f = f(T)$ και επομένως $\rho = \rho(T)$ και $\Phi = \Phi(T, Z)$.

Ο λόγος που κάνουμε αυτή την επιλογή των παραπάνω λύσεων είναι ότι αν η $q(T, Z)$ ικανοποιεί την (5.1) τότε η $\vartheta(T, Z) = q(T - uZ, Z) \exp[i(kT - \omega Z)]$ με $u = -d_0k$ και $\omega = \frac{k^2}{2}$, όπου $k \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά, επίσης ικανοποιεί την (5.1).

Πράγματι, θέτοντας $T \rightarrow T - uZ$ και $Z' \rightarrow Z$ η σχέση (5.1) μετατρέπεται ως εξής:

$$i(q_Z - uq_T) + \frac{d_0}{2}q_{TT} + |q|^2q = 0$$

Και αναζητούμε λύση της μορφής:

$$\vartheta(T, Z) = q(T, Z) \exp[i(kT - \omega Z)]$$

Όμως ισχύει:

$$i\vartheta_Z = iq_Z + \omega q, \quad \vartheta_{TT} = q_{TT} + 2ikq_T - k^2q, \quad |\vartheta|^2\vartheta = |q|^2q$$

Έτσι λοιπόν από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$i\vartheta_Z + \frac{d_0}{2}\vartheta_{TT} + |\vartheta|^2\vartheta = iq_Z + \omega q - iuq_T + \frac{d_0}{2}q_{TT} + d_0ikq_T - \frac{d_0}{2}k^2q + |q|^2q$$

Επομένως επιλέγοντας $u = -d_0k$ και $\omega = \frac{k^2}{2}$ τότε η ϑ ικανοποιεί την σχέση (5.1).

Άρα για $f = f(T)$ τότε η (5.3) μετατρέπεται:

$$d_0 \frac{\partial}{\partial T} \left(f^2 \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) = 0 \quad (5.5)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς T την σχέση (5.5) προκύπτει:

$$d_0 f^2 \frac{\partial \Phi}{\partial T} = c(Z)$$

Τελικά έχουμε:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{c(Z)}{d_0 f^2} \quad (5.6)$$

Από την σχέση (5.4) έχουμε:

$$d_0 \Phi_T^2 + 2\Phi_Z = 2f^2 + d_0 f^{-1} f_{TT} \quad (5.7)$$

Άρα εάν την (5.6) την παραγωγίσουμε δύο φορές ως προς το Z προκύπτει:

$$f^2 \Phi_{ZZT} = \frac{c_{ZZ}}{d_0} \Leftrightarrow \Phi_{TZZ} = \frac{1}{d_0 f^2} c_{ZZ} \quad (5.8)$$

Και επιπλέον παραγωγίζοντας την σχέση (5.7) ως προς το TZ και σε συνδυασμό με την σχέση (5.6) έχουμε:

$$2\Phi_{ZZT} + \left(\frac{c^2(Z)}{d_0^2 f^4} \right)_{ZT} = 0 \Leftrightarrow \Phi_{ZZT} + \frac{1}{2} [c(Z)]_Z^2 \left(-\frac{4f_T}{d_0^2 f^5} \right) = 0$$

Επομένως καταλήγουμε στο εξής:

$$\Phi_{ZZT} = \frac{2c_Z^2 f_T}{d_0^2 f^5} \quad (5.9)$$

Από την σχέση (5.8) και (5.9) έχουμε:

$$\frac{1}{d_0 f^2} c_{ZZ} = \frac{2c_Z^2 f_T}{d_0^2 f^5} \Leftrightarrow \frac{c_{ZZ}}{c_Z^2} = \frac{2f_T}{d_0 f^3}$$

Αφού $f_T f^{-3} \neq$ σταθερό πρέπει $c(Z) = c_1 =$ σταθερό. Έτσι η (5.6) γίνεται:

$$\Phi_T = \frac{c_1}{d_0 f^2}$$

και συνεπώς η συνάρτηση Φ_T είναι συνάρτηση του T , δηλαδή:

$$\Phi = \int \frac{c_1}{d_0 f^2} dT + A(Z) \quad (5.10)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς Z προκύπτει:

$$\Phi_Z = \int \frac{c_1}{d_0 f^2} dT + A_Z$$

Από την εξίσωση (5.7) δείξαμε ότι η Φ_Z είναι συνάρτηση του T και άρα συμπεραίνουμε ότι το $A_Z = \Omega =$ σταθερό. Τελικά,

$$\Phi(T, Z) = \int \frac{c_1}{d_0 f^2} dT + \Omega Z + \theta_0 \quad (5.11)$$

με Ω και θ_0 αυθαίρετες σταθερές. Τότε για την (5.7) έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi_Z + \frac{d_0}{2} \Phi_T &= f^2 + \frac{d_0}{2} f^{-1} f_{TT} \Leftrightarrow \\ \Omega + \frac{d_0}{2} \frac{c_1^2}{d_0^2 f^4} &= f^2 + \frac{d_0}{2} f^{-1} f_{TT} \Leftrightarrow \\ f_{TT} &= \frac{2}{d_0} \Omega f + \frac{c_1^2}{d_0^2 f^3} - \frac{2}{d_0} f^3 = -\frac{\partial V}{\partial f} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Και συνάρτηση δυναμικού την ακόλουθη:

$$V(f) = -\frac{\Omega}{d_0} f^2 + \frac{c_1^2}{2d_0^2 f^2} + \frac{f^4}{2d_0} \quad (5.13)$$

Από τις (5.12) και (5.13) ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{2} f_T^2 + V(f) = E \quad (5.14)$$

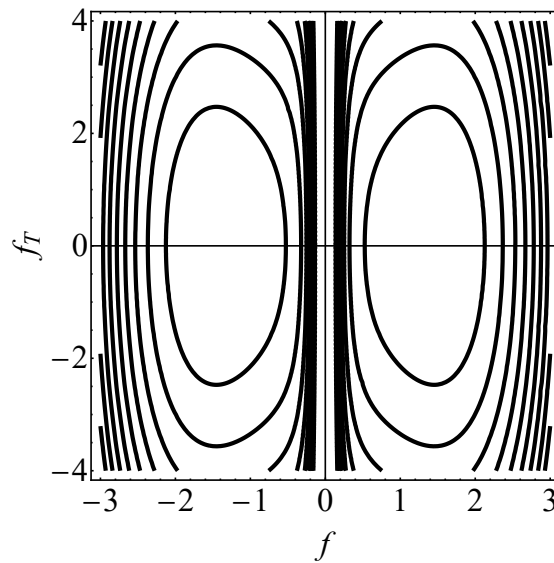
όπου E η στάθμη ενέργειας.

Για τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.14) θα διακρίνουμε δύο κύριες περιπτώσεις με βάση την σταθερά d_0 με $d_0 = \pm 1$ και τις αντίστοιχες υποκατηγορίες για τις τιμές Ω και του c_1 για κάθε περίπτωση:

5.1.1 Η εστιασμένη εξίσωση: $d_0 = 1$

(A) Για $c_1 \neq 0$

Στο διάγραμμα φάσης 5.1 παρατηρούμε ότι έχουμε ζεύγη κλειστών καμπυλών. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για την περίπτωση αυτή έχουμε περιοδική λύση της εξίσωσης NLS.



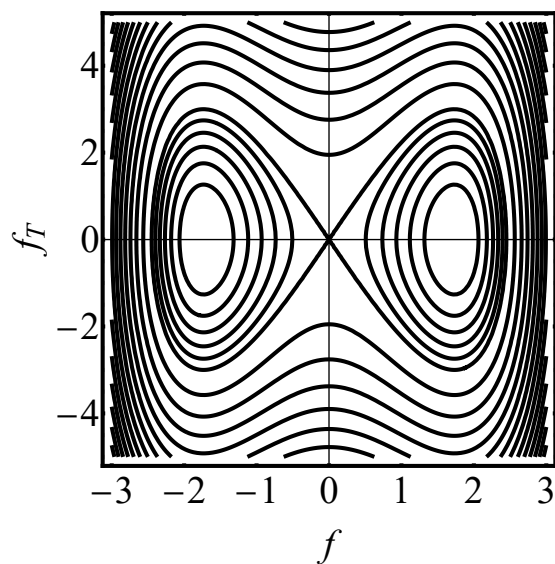
Σχήμα 5.1: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) με $\Omega = 2$ και $c_1 = 1$.

(B) Για $\Omega > 0$ και $c_1 = 0$

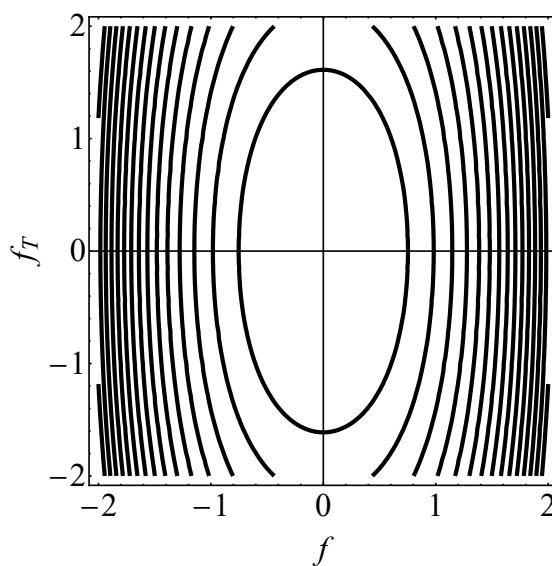
Το διάγραμμα φάσης 5.2 αποτελείται από τρεις περιοχές καμπυλών, το ζεύγος κλειστών καμπυλών την διαχωρίστρια καμπύλη και τις κλειστές καμπύλες. Τα ζεύγη κλειστών καμπυλών έχουν τέσσερα σημεία τομής με τον άξονα f και αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις της εξίσωσης NLS. Η διαχωρίστρια καμπύλη στην συνέχεια διαχωρίζει τις δύο περιοχές καμπυλών και αποτελεί την μοναδική καμπύλη όπου διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Τέλος οι ανοιχτές καμπύλες όπως και το ζεύγος καμπυλών αντιστοιχούν πάλι σε περιοδικές λύσεις της εξίσωσης μας.

(Γ) Για $\Omega < 0$ και $c_1 = 0$

Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα φάσης 5.3 αποτελείται από μία περιοχή καμπυλών τις κλειστές καμπύλες οι οποίες όπως έχουμε δει αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις.



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) με $\Omega = 3$ και $c_1 = 0$.

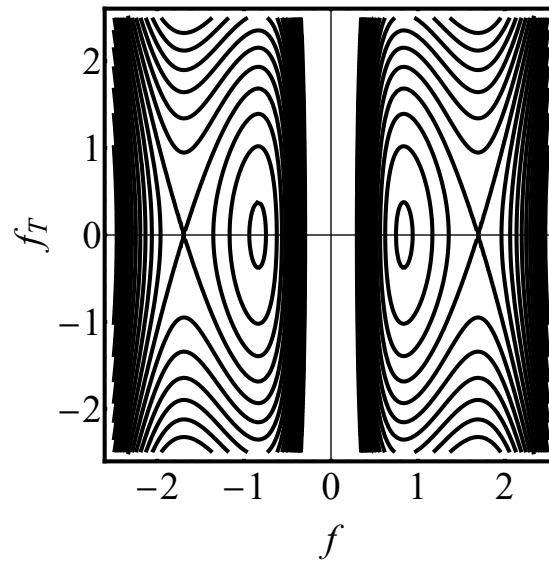


Σχήμα 5.3: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) με $\Omega = -2$ και $c_1 = 0$.

5.1.2 Η αφεστιασμένη εξίσωση: $d_0 = -1$

(A) Για $\Omega > 0$ και $c_1 \neq 0$

Στο διάγραμμα φάσης 5.4 διακρίνουμε τρεις περιοχές την διαχωρίστρια καμπύλη, τις καμπύλες εντός της διαχωρίστριας καμπύλης και τις καμπύλες εκτός της διαχωρίστριας καμπύλης. Οι καμπύλες εντός της διαχωρίστριας καμπύλης είναι κλειστές και ανοιχτές καμπύλες όπου οι κλειστές καμπύλες αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις ενώ οι ανοιχτές είναι φραγμένες την κατεύθυνση f_T και απειρίζονται στην κατεύθυνση της f . Η διαχωρίστρια καμπύλη απειρίζεται όσο το $f \rightarrow \infty$. Τέλος οι ανοιχτές καμπύλες εκτός της διαχωρίστριας καμπύλης είναι φραγμένες ως προς την κατεύθυνση του f .

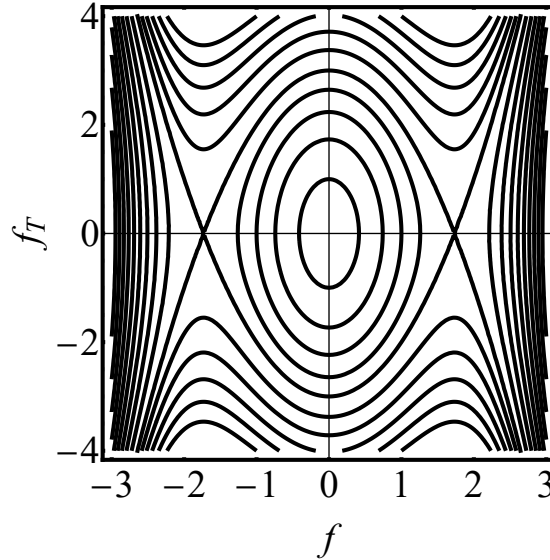


Σχήμα 5.4: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) με $\Omega = 3.5$ και $c_1 = 3$.

(B) Για $\Omega > 0$ και $c_1 = 0$

Στο διάγραμμα φάσης 5.5 διακρίνουμε τρεις περιοχές, την διαχωρίστρια καμπύλη τις κλειστές και ανοιχτές καμπύλες εντός της διαχωρίστριας καμπύλης και τις ανοιχτές καμπύλες εκτός της διαχωρίστριας καμπύλης. Για τις καμπύλες εντός της διαχωρίστριας καμπύλης γνωρίζουμε ότι οι κλειστές καμπύλες αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις της εξίσωσης NLS ενώ οι ανοιχτές καμπύλες είναι φραγμένες ως προς την f και απειρίζονται ως προς την κατεύθυνση f_T . Η διαχωρίστρια καμπύλη απειρίζεται όταν το $f \rightarrow \infty$. Τέλος, οι ανοιχτές καμπύλες εκτός της διαχωρίστριας καμπύλης είναι φραγμένες ως προς την κατεύθυνση του f_T ενώ απειρίζονται θετικά προς την κατεύθυνση του f .

(Γ) Για $\Omega < 0$ και $c_1 \neq 0$



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) με $\Omega = 3$ και $c_1 = 0$.

Στο διάγραμμα φάσης 5.6 διακρίνουμε μόνο ένα είδος καμπυλών τις ανοιχτές καμπύλες. Παρατηρούμε ότι όσο το f απομακρύνεται από την περιοχή του μηδενός έχουμε πιο γραμμική συμπεριφορά των τροχιών στο διάγραμμα φάσης.

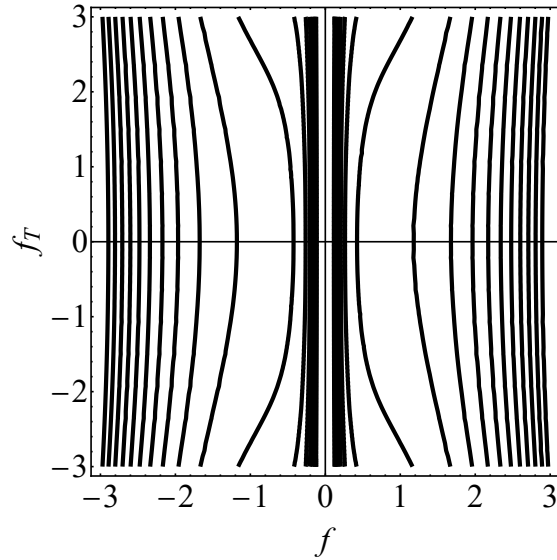
(Δ) Για $\Omega < 0$ και $c_1 = 0$

Στο διάγραμμα φάσης 5.7 έχουμε δύο μοναδικές καμπύλες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και επιπλέον όλες οι τροχιές αντιστοιχούν σε ανοιχτές καμπύλες. Όταν το f και το f_T απειρίζονται οι τροχιές προσεγγίζουν τις καμπύλες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

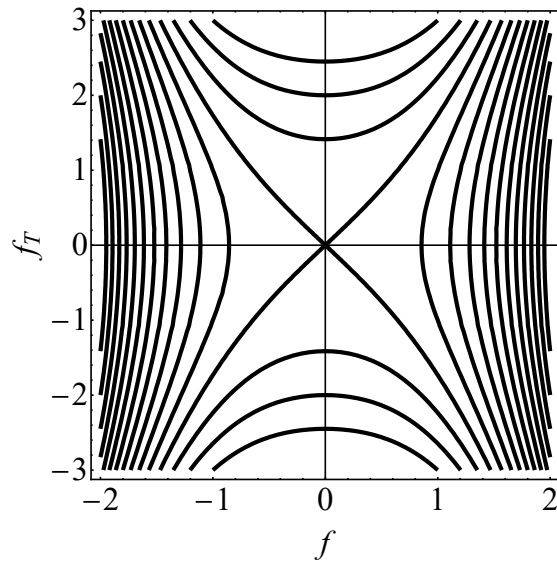
5.2 Η Διαχωρίστρια Καμπύλη

Από την προηγούμενη ενότητα θα ταξινομήσουμε τις διαχωρίστριες καμπύλες των διαφορετικών περιπτώσεων των διαγραμμάτων φάσης. Οι διαχωρίστριες καμπύλες όπως έχουμε δει είναι οι ειδικές καμπύλες στις οποίες ισχύουν ταυτόχρονα: $f_{TT} = 0$ και $f_T = 0$. Έτσι λοιπόν από την σχέση (5.12) αν θέσουμε $f^2 = \rho$ η εξίσωση $f_{TT} = 0$ μετατρέπεται ως εξής:

$$c_1^2 - 2d_0\rho^3 + 2d_0\rho^2\Omega = 0$$



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) με $\Omega = -1$ και $c_1 = 1$.



Σχήμα 5.7: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) με $\Omega = -1$ και $c_1 = 0$.

και επιπλέον από την σχέση (5.14) η εξίσωση $f_T = 0$ μετατρέπεται ως εξής:

$$c_1^2 + \rho^3 d_0 - 2\rho^2 \Omega d_0 - 2E\rho d_0^2 = 0$$

Οι περιπτώσεις που έχουμε διαχωρίστρια καμπύλη είναι οι ακόλουθες:

(Α) Για $d_0 = 1, \Omega > 0$ και $c_1 = 0$

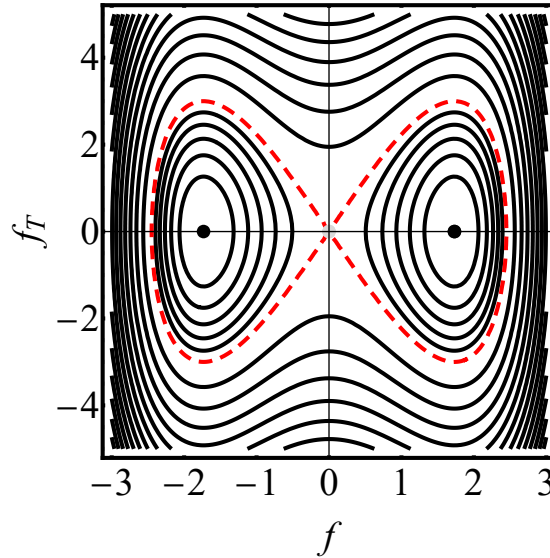
Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε $d_0 = 1$ και $\Omega = 3$. Έτσι λοιπόν θα λύσουμε αρχικά το σύστημα των εξισώσεων ως προς c_1 και E :

$$\begin{cases} c_1^2 - 2d_0\rho^3 + 2d_0\rho^2\Omega = 0 \\ c_1^2 + \rho^3d_0 - 2\rho^2\Omega d_0 - 2E\rho d_0^2 = 0 \end{cases}$$

Άρα τελικά προκύπτει:

$$\begin{cases} E = 1.5(-4\rho + \rho^2) \\ c_1 = \pm 1.41421\sqrt{-3\rho^2 + \rho^3} \end{cases}$$

Έτσι για $c_1 = 0$ μία λύση είναι $\rho = 0$ άρα προκύπτει ότι και $E = 0$. Επομένως η διαχωρίστρια καμπύλη που προκύπτει παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) στο οποίο η διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί στην διαχωρίστρια καμπύλη για την περίπτωση $\Omega = 3, d_0 = 1$ και $E = 0$.

Παρατηρούμε ότι η διαχωρίστρια καμπύλη διαχωρίζει δύο περιοχές καμπυλών στο διάγραμμα φάσης. Η μία περιοχή αποτελείται από το σύνολο του ζεύγους των

κλειστών καμπυλών και η διαχωρίστρια καμπύλη τις διαχωρίζει από το σύνολο των κλειστών καμπυλών.

(B) Για $d_0 = -1$, $\Omega > 0$ και $c_1 \neq 0$

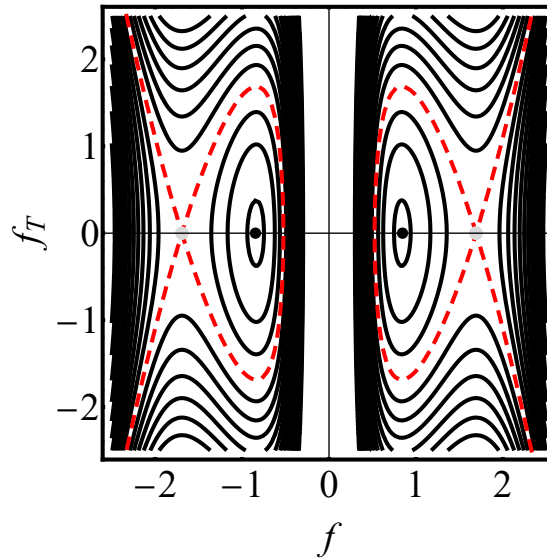
Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε $d_0 = -1$ και $\Omega = 3$. Έτσι λοιπόν θα λύσουμε αρχικά το σύστημα των εξισώσεων ως προς c_1 και E :

$$\begin{cases} c_1^2 - 2d_0\rho^3 + 2d_0\rho^2\Omega = 0 \\ c_1^2 + \rho^3d_0 - 2\rho^2\Omega d_0 - 2E\rho d_0^2 = 0 \end{cases}$$

Άρα τελικά προκύπτει:

$$\begin{cases} E = -1.5(-4\rho + \rho^2) \\ c_1 = \pm 1.41421\sqrt{3\rho^2 - \rho^3} \end{cases}$$

Θέλουμε για τις ρίζες να ισχύει $0 < \rho < 3$. Θεωρώντας $c_1 = 1.5$ προκύπτει μία δεκτή ρίζα $\rho = 2.86272$ και άρα $E = 4.88356$. Επομένως η διαχωρίστρια καμπύλη που προκύπτει παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.9.



Σχήμα 5.9: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) στο οποίο η διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί στην διαχωρίστρια καμπύλη για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = 4.88356$.

Παρατηρούμε ότι οι διαχωρίστριες καμπύλες διαχωρίζουν δύο περιοχές καμπυλών στο διάγραμμα φάσης. Η μία περιοχή αποτελείται από το σύνολο του ζεύγους

μίας κλειστής καμπύλης και μίας ανοιχτής καμπύλης και η διαχωρίστρια καμπύλη τις διαχωρίζει από το σύνολο των ανοιχτών καμπυλών.

(Γ) Για $d_0 = -1$, $\Omega > 0$ και $c_1 = 0$

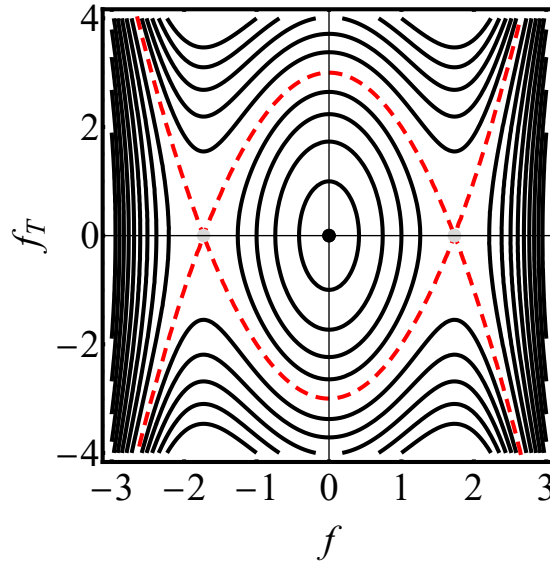
Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε $d_0 = -1$ και $\Omega = 3$. Έτσι λοιπόν θα λύσουμε αρχικά το σύστημα των εξισώσεων ως προς c_1 και E :

$$\begin{cases} c_1^2 - 2d_0\rho^3 + 2d_0\rho^2\Omega = 0 \\ c_1^2 + \rho^3d_0 - 2\rho^2\Omega d_0 - 2E\rho d_0^2 = 0 \end{cases}$$

Άρα τελικά προκύπτει:

$$\begin{cases} E = -1.5(-4\rho + \rho^2) \\ c_1 = \pm 1.41421\sqrt{3\rho^2 - \rho^3} \end{cases}$$

Θέλουμε για τις ρίζες να ισχύει $0 < \rho \leq 3$. Θεωρώντας $c_1 = 0$ προκύπτει μία δεκτή ρίζα $\rho = 3$ και άρα $E = 4.5$. Επομένως η διαχωρίστρια καμπύλη που προκύπτει παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.10.



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) στο οποίο η διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί στην διαχωρίστρια καμπύλη για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = 4.5$.

Παρατηρούμε ότι οι διαχωρίστριες καμπύλες διαχωρίζουν δύο περιοχές καμπυλών στο διάγραμμα φάσης. Η μία περιοχή αποτελείται από το σύνολο μίας κλειστής καμπύλης και ενός ζεύγους ανοιχτών καμπυλών και η διαχωρίστρια καμπύλη τις διαχωρίζει από το σύνολο των ανοιχτών καμπυλών.

(Δ) Για $d_0 = -1$, $\Omega < 0$ και $c_1 = 0$

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε $d_0 = -1$ και $\Omega = -3$. Έτσι λοιπόν θα λύσουμε αρχικά το σύστημα των εξισώσεων ως προς c_1 και E :

$$\begin{cases} c_1^2 - 2d_0\rho^3 + 2d_0\rho^2\Omega = 0 \\ c_1^2 + \rho^3d_0 - 2\rho^2\Omega d_0 - 2E\rho d_0^2 = 0 \end{cases}$$

Άρα τελικά προκύπτει:

$$\begin{cases} E = -1.5(\rho + \rho^2) \\ c_1 = \pm 1.41421\sqrt{-3\rho^2 - \rho^3} \end{cases}$$

Θέλουμε για τις ρίζες να ισχύει $0 \leq \rho < 3$. Θεωρώντας $c_1 = 0$ προκύπτει η οριακή τιμή της ρίζας $\rho = 0$ και άρα $E = 0$. Επομένως η διαχωρίστρια καμπύλη που προκύπτει παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 5.11.

Παρατηρούμε ότι οι διαχωρίστριες καμπύλες διαχωρίζουν δύο περιοχές καμπυλών στο διάγραμμα φάσης. Η μία περιοχή αποτελείται από το σύνολο ζεύγους ανοιχτών καμπυλών που αντιστοιχούν σε πραγματικές ρίζες και η διαχωρίστρια καμπύλη τις διαχωρίζει από το σύνολο ζεύγους ανοιχτών καμπυλών που αντιστοιχούν σε μιγαδικές ρίζες.

5.3 Περιοχές για την εξίσωση NLS

Θεωρούμε την εξίσωση NLS:

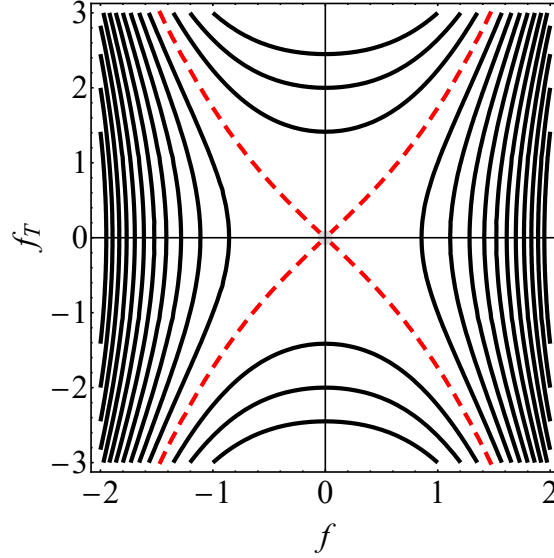
$$iq_Z + \frac{d_0}{2}q_{TT} + |q|^2q = 0$$

Θέλουμε να βρούμε τα σταθερά σημεία της εξίσωσης. Δηλαδή όταν $f_T = 0$, επομένως πρέπει:

$$c_1^2 + f^6d_0 - 2f^4\Omega d_0 - 2Ef^2d_0^2 = 0 \quad (5.15)$$

Θέτοντας στην σχέση (5.15) $f^2 = \rho$ με $\rho > 0$ και έχουμε τελικά:

$$c_1^2 + \rho^3d_0 - 2\rho^2\Omega d_0 - 2E\rho d_0^2 = 0 \quad (5.16)$$



Σχήμα 5.11: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) στο οποίο η διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί στην διαχωρίστρια καμπύλη για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = -1$ και $E = 0$.

Με τον τρόπο αυτό η εξίσωση (5.15) που είναι έκτου βαθμού μετατρέπεται σε μία εξίσωση τρίτου βαθμού και μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις ρίζες της με τη χρήση διακρινουσών.

Στην συνέχεια θα βρούμε την διακρίνουσα της εξίσωσης (5.16) η οποία είναι η ακόλουθη:

$$\Delta = -27c_1^4 + 32\Omega^3 c_1^2 d_0^3 + 72E\Omega c_1^2 d_0^4 + 16E^2\Omega^2 d_0^6 + 32E^3 d_0^7 \quad (5.17)$$

Στην περίπτωση όπου το $d_0 = 1$ παρατηρούμε ότι για πολύ μικρές τιμές του E , η διακρίνουσα (5.17) είναι αρνητική ενώ για πολύ μεγάλες τιμές του E , η διακρίνουσα είναι θετική. Αντίστροφα, στην περίπτωση όπου το $d_0 = -1$ για πολύ μικρές τιμές του E η διακρίνουσα είναι θετική ενώ όταν το E παίρνει πολύ μεγάλες τιμές η διακρίνουσα είναι αρνητική. Επομένως το πρόσημο της διακρίνουσας (5.17) καθορίζεται από το πρόσημο του γινομένου $d_0 E$. Τώρα θα υπολογίσουμε την διακρίνουσα της εξίσωσης $\Delta = 0 \Leftrightarrow -27c_1^4 + 32\Omega^3 c_1^2 d_0^3 + 72E\Omega c_1^2 d_0^4 + 16E^2\Omega^2 d_0^6 + 32E^3 d_0^7 = 0$ ως προς E και επομένως έχουμε:

$$\Delta' = -1024c_1^2 d_0^{18} (27c_1^4 + 8\Omega^3 d_0)^3 \quad (5.18)$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της Δ' καθορίζεται από το πρόσημο του γινομένου

$d_0\Omega$. Επομένως θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις με βάση το πρόσημο του γινομένου $d_0\Omega$.

Θετικές ποσότητες: $d_0 = 1$ και $\Omega = 3$

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (5.16) μετατρέπεται ως εξής:

$$-2E\rho - 6\rho^2 + \rho^3 + c_1 = 0 \quad (5.19)$$

και χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta για τις τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 της (5.19) ισχύει ότι:

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = -c_1^2 < 0$$

που σημαίνει ότι είτε οι τρεις ρίζες είναι αρνητικές, όμως επειδή το $\rho > 0$ η περίπτωση αυτή απορρίπτεται, η άλλη περίπτωση είναι όταν η μία ρίζα είναι αρνητική και δύο είναι θετικές ρίζες τις οποίες δεχόμαστε. Οι δύο θετικές ρίζες μπορεί να είναι διακριτές είτε να αποτελούν μία θετική διπλή ρίζα άρα δεχόμαστε τις περιοχές όπου η διακρίνουσα $\Delta > 0$ και $\Delta = 0$ αντίστοιχα. Έχουμε το πολυώνυμο τρίτου βαθμού του E :

$$32E^3 + 144E^2 + 216c_1^2E + 864c_1^4 - 27c_1^4 = 0 \quad (5.20)$$

Επομένως η σχέση (5.18) γίνεται ως εξής:

$$\Delta' = -20155392c_1^2 (8 + c_1^2)^3 \quad (5.21)$$

Από την σχέση (5.21) η Δ' σε αυτή την περίπτωση είναι πάντα αρνητική, επομένως το E θα έχει μόνο μία αρνητική ρίζα σε αυτή την περίπτωση. Άρα όταν το E έχει τιμή μικρότερη από την πραγματική ρίζα τότε η $\Delta < 0$ επομένως τις τιμές αυτές για το E τις απορρίπτουμε. Αν το E είναι ίσο με την πραγματική ρίζα τότε $\Delta = 0$. Τέλος αν το E ισούται με τιμή μεγαλύτερη της πραγματικής τότε $\Delta > 0$.

Θεωρώντας $c_1 = 1$ τότε λύνοντας την (5.20) προκύπτει ότι η πραγματική ρίζα για το E είναι $E_1 = -4.33482$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E = -4.33482$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.19) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\rho_1 = -0.107 \quad \rho_2 = 3.05362 \quad \rho_3 = 3.05362$$

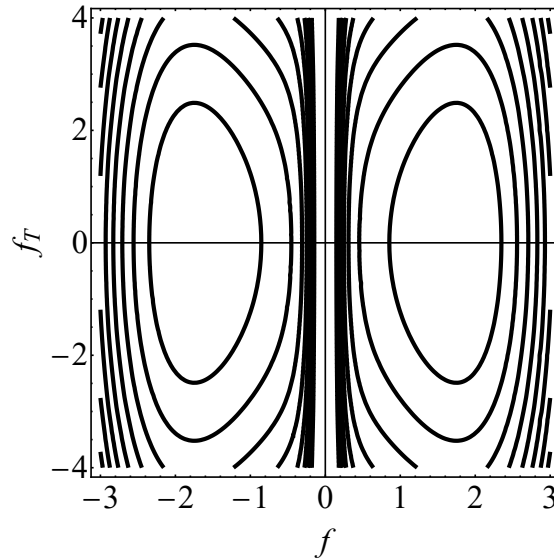
Θα απορρίψουμε την ρ_1 διότι $\rho_1 < 0$ και δέχομαι την διπλή θετική ρίζα $\rho_2 = \rho_3 = 3.05362$. Έτσι με αντικατάσταση στην σχέση (5.15) η περίπτωση αυτή ανάγεται σε ένα είδος ταυτότητας που τελικά το απορρίπτουμε.

(B) Για $E > -4.33482$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση εφόσον $\Delta > 0$ αναμένω τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.19). Πράγματι, οι ρίζες που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση (5.19) για $E = -2$ είναι οι ακόλουθες:

$$\varrho_1 = 1 \quad \varrho_2 = -0.192582 \quad \varrho_3 = 5.19258$$

Επομένως απορρίπτουμε την ϱ_2 διότι είναι αρνητική και δέχομαι τις ρίζες $\varrho_1 = 1$ και $\varrho_3 = 5.19258$ οι οποίες είναι θετικές. Έτσι επειδή $\varrho = f^2$ για την f έχουμε τελικά τέσσερις διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.12.



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = 1$ και $E > -4.33482$.

Ειδική Περίπτωση: $c_1 = 0$

Στην περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε την περιοχή των ριζών όταν $c_1 = 0$ για $\Omega = 3$ και $d_0 = 1$. Η ιδιαιτερότητα αυτής της περίπτωσης έγκειται στο γεγονός ότι η διακρίνουσα Δ' είναι ίση με το μηδέν και επομένως αναμένουμε ότι το E θα έχει μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όπως και στην γενική περίπτωση χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta για τις τρεις ρίζες $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ της (5.19) ισχύει ότι:

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = -c_1^2 = 0$$

που σημαίνει ότι τουλάχιστον η μία από τις τρεις ρίζες είναι μηδέν όμως επειδή το $\varrho > 0$ οι μηδενικές και οι αρνητικές ρίζες απορρίπτονται.

Λύνοντας την εξίσωση (5.20) για αυτή την περίπτωση ως προς E έχουμε:

$$E_1 = -4.5 \quad E_2 = 0 \quad E_3 = 0$$

Επομένως για $E < E_1$ τότε $\Delta < 0$ και άρα θα έχουμε μία πραγματική ρίζα η οποία θα είναι μηδενική άρα η περίπτωση αυτή απορρίπτεται. Όταν $E = E_i$ όπου $i = 1, 2, 3$ τότε $\Delta = 0$ και άρα θα έχουμε μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όταν $E \in (E_1, E_2)$ τότε $\Delta > 0$ και άρα έχουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες. Τέλος, όταν $E > E_3$ τότε $\Delta > 0$ και άρα θα έχουμε τρεις πραγματικές ρίζες. Επομένως διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(Α) Για $E = -4.5$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.19) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = 3 \quad \rho_3 = 3$$

Θα απορρίψουμε την ρ_1 διότι $\rho_1 = 0$ και δέχομαι την διπλή θετική ρίζα $\rho_2 = \rho_3 = 3$. Έτσι με αντικατάσταση στην σχέση (5.15) η περίπτωση αυτή ανάγεται σε ένα είδος ταυτότητας που τελικά απορρίπτουμε.

(Β) Για $E \in (-4.5, 0)$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση εφόσον $\Delta > 0$ αναμένουμε τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.19). Πράγματι, οι ρίζες που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση (5.19) για $E = -2$ είναι οι ακόλουθες:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = 0.763932 \quad \rho_3 = 5.23607$$

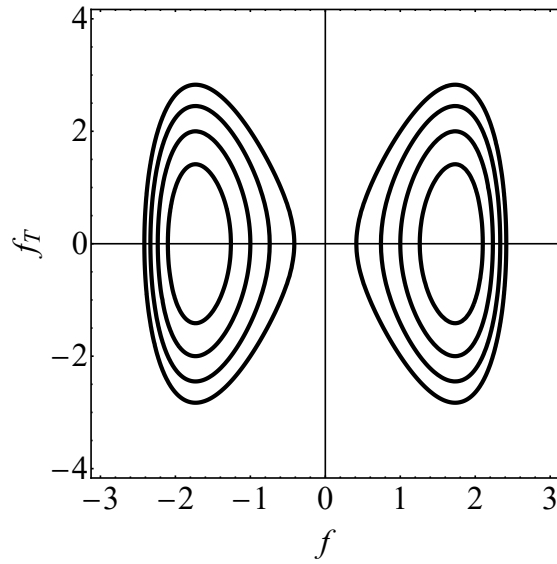
Επομένως απορρίπτουμε την ρ_1 διότι είναι μηδενική και δεχόμαστε τις ρίζες $\rho_2 = 0.763932$ και $\rho_3 = 5.23607$ οι οποίες είναι θετικές. Έτσι επειδή $\rho = f^2$ για την f έχουμε τελικά τέσσερις διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13.

(Γ) Για $E = 0$ και $\Delta = 0$

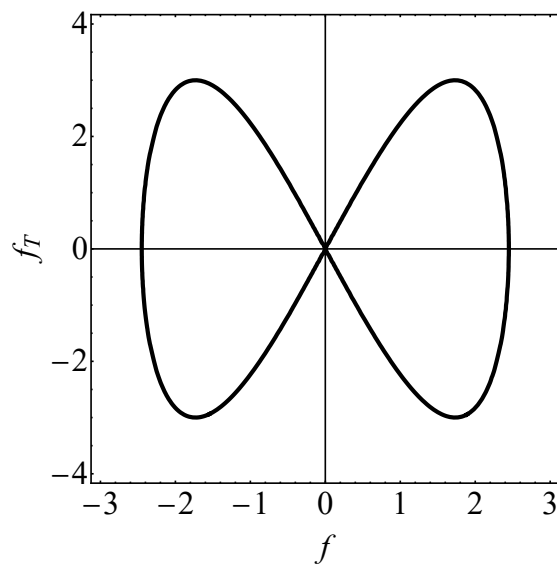
Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.19) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = 0 \quad \rho_3 = 6$$

Θα δεχτούμε κατ' εξαίρεση σαν οριακή συνθήκη την $\rho_1 = \rho_2 = 0$ και δέχομαι την απλή θετική ρίζα $\rho_3 = 6$. Έτσι με αντικατάσταση στην σχέση (5.15) προκύπτουν τελικά δύο απλές πραγματικές ρίζες και μία διπλή ρίζα για την f όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.14.



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = 1$ και $-4.5 < E < 0$.



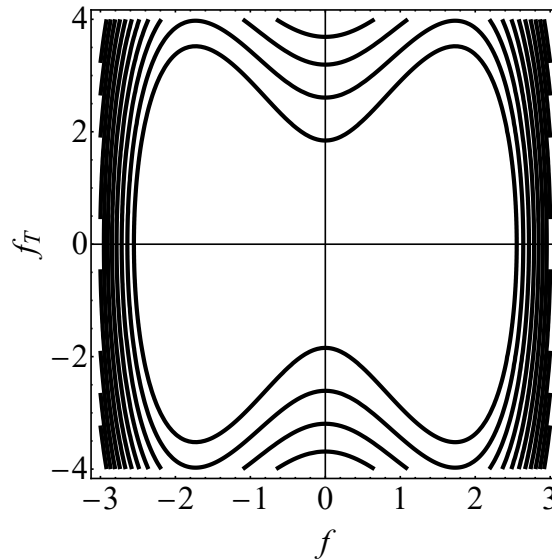
Σχήμα 5.14: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = 1$ και $E = 0$.

(Δ) Για $E > 0$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση εφόσον $\Delta > 0$ αναμένουμε τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.19). Πράγματι, οι ρίζες που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση (5.19) για $E = 2$ είναι οι ακόλουθες:

$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = -0.605551 \quad \varrho_3 = 6.60555$$

Επομένως απορρίπτουμε την ϱ_1 διότι είναι μηδενική και την ϱ_2 διότι είναι αρνητική και δέχομαι την ρίζα $\varrho_3 = 6.60555$ οι οποίες είναι θετικές. Έτσι επειδή $\varrho = f^2$ για την f έχουμε τελικά δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.15.



Σχήμα 5.15: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = 1$ και $E > 0$.

Ετερόσημες ποσότητες: $d_0 = 1$ και $\Omega = -3$

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (5.16) μετατρέπεται ως εξής:

$$-2E\varrho + 6\varrho^2 + \varrho^3 + c_1^2 = 0 \quad (5.22)$$

και από τους τύπους Vieta για τις τρεις ρίζες $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ της εξίσωσης (5.22) έχουμε ότι:

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = -c_1^2 < 0$$

γεγονός που σημαίνει ότι είτε και οι τρεις ρίζες είναι αρνητικές, όπου την περίπτωση αυτή την απορρίπτουμε διότι θέλουμε $\rho > 0$, η άλλη περίπτωση είναι όταν η μία ρίζα είναι αρνητική και δύο είναι θετικές ρίζες τις οποίες δεχόμαστε. Οι δύο θετικές ρίζες μπορεί να είναι διακριτές είτε να αποτελούν μία θετική διπλή ρίζα άρα δεχόμαστε τις περιοχές όπου η διακρίνουσα $\Delta > 0$ και $\Delta = 0$ αντίστοιχα. Έχουμε το πολυώνυμο τρίτου βαθμού του E :

$$32E^3 + 144E^2 - 864c_1^2 - 216Ec_1^2 - 27c_1^4 = 0 \quad (5.23)$$

Έτσι η σχέση (5.18) μετατρέπεται ως εξής:

$$\Delta' = 20155392c_1^2 (-8 + c_1^2)^3 \quad (5.24)$$

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο του Δ' :

[1] Όταν $\Delta' < 0$ και μία πραγματική ρίζα για το E

Για να ισχύει αυτή η περίπτωση θα πρέπει $c_1^2 - 8 > 0$ δηλαδή $c_1 < -2\sqrt{2}$ ή $c_1 > 2\sqrt{2}$. Έστω ότι $c_1 = 3$. Στην περίπτωση αυτή το E θα έχει μία πραγματική ρίζα. Όταν το E παίρνει τιμές μικρότερες από την πραγματική ρίζα τότε $\Delta < 0$ η οποία απορρίπτεται. Όταν το E παίρνει τιμές ίσες με την πραγματική ρίζα τότε $\Delta = 0$ και όταν E παίρνει τιμές μεγαλύτερες από την πραγματική ρίζα τότε $\Delta > 0$. Έστω για $c_1 = 3$ τότε λύνοντας την (5.23) προκύπτει ότι η πραγματική ρίζα για το E ισούται $E = 7.98691$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E = 7.98691$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική και μία απλή πραγματική ρίζα. Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση (5.22) έχω:

$$\rho_1 = -8.10724 \quad \rho_2 = 1.05362 \quad \rho_3 = 1.05362$$

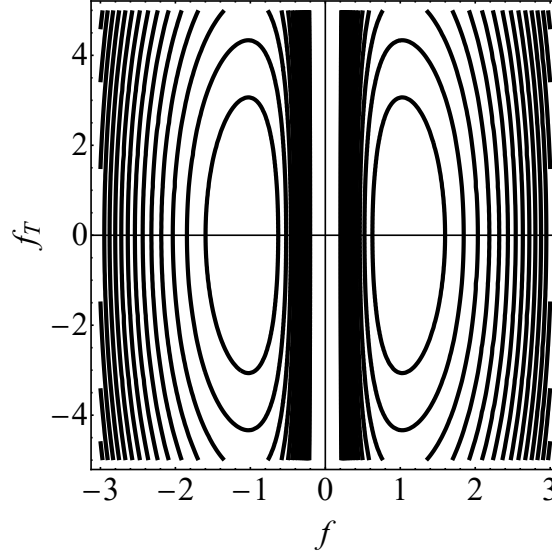
Άρα απορρίπτουμε την ρ_1 , διότι είναι αρνητική και δεχόμαστε την διπλή θετική ρίζα $\rho_2 = \rho_3 = 1.05362$. Η περίπτωση αυτή όμως ανάγεται σε ένα είδος ταυτότητας και τελικά απορρίπτεται.

(B) Για $E > 7.98691$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.22) και λύνοντας την για $E = 15$ προκύπτει:

$$\rho_1 = 3 \quad \rho_2 = -9.32183 \quad \rho_3 = 0.321825$$

Επομένως απορρίπτουμε την ρ_2 , διότι είναι αρνητική και δεχόμαστε τις $\rho_1 = 3$ και $\rho_3 = 0.321825$ που είναι θετικές. Αφού $\rho = f^2$ για την f έχουμε τελικά τέσσερις διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.16.



Σχήμα 5.16: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = 1$ και $E > 7.98691$.

[2] Όταν $\Delta' = 0$ και μία απλή και μία διπλή ρίζα για το E

Για αυτή την περίπτωση πρέπει $c_1^2 - 8 = 0$ δηλαδή το $c_1 = \pm 2\sqrt{2}$. Επιλέγω το $c_1 = 2\sqrt{2}$. Συμβατικά, θεωρούμε για τις ρίζες της εξίσωσης (5.23) $E_1 = E_2 < E_3$. Όταν το $E < E_1 = E_2$ τότε το $\Delta < 0$ που απορρίπτεται. Όταν το $E = E_1 = E_2$ ή $E = E_3$ τότε η $\Delta = 0$ και όταν το $E > E_3$ τότε $\Delta > 0$. Επιλέγοντας $c_1 = 2\sqrt{2}$ τότε λύνοντας την εξίσωση (5.23) οι ρίζες που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$E_1 = -6 \quad E_2 = -6 \quad E_3 = 7.5$$

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της διακρίνουσας Δ όταν $E \in (-6, 7.5)$ έστω $E = 5$ και έχουμε $\Delta = -9680 < 0$ άρα η περιοχή αυτή απορρίπτεται. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E = -6$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την (5.22) και λύνοντας προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = -2 \quad \varrho_2 = -2 \quad \varrho_3 = -2$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτει μία τριπλή πραγματική ρίζα η οποία επειδή είναι αρνητική απορρίπτεται.

(B) Για $E = 7.5$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένω όπως και στην προηγούμενη μία απλή και μία διπλή πραγματική ρίζα και έτσι λύνοντας την (5.22) οι ρίζες που προκύπτουν είναι οι ακόλουθες:

$$\varrho_1 = -8 \quad \varrho_2 = 1 \quad \varrho_3 = 1$$

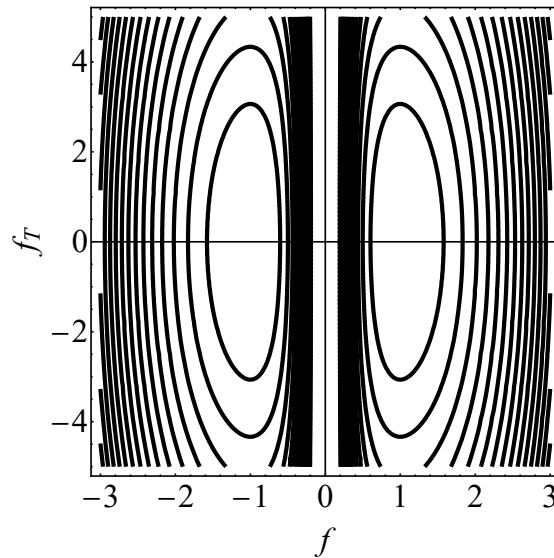
Θα απορρίψουμε την ϱ_1 διότι είναι αρνητική και θα δεχτούμε την διπλή θετική ρίζα $\varrho_2 = \varrho_3 = 1$. Όμως η περίπτωση αυτή ανάγεται σε ένα είδος ταυτότητας και τελικά απορρίπτεται.

(Γ) Για $E > 7.5$ και $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε ότι θα προκύψουν τρεις πραγματικές ρίζες για την εξίσωση (5.22). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση οι ρίζες που προκύπτουν είναι οι ακόλουθες:

$$\varrho_1 = 2 \quad \varrho_2 = -8.47214 \quad \varrho_3 = 0.472136$$

Η ϱ_2 απορρίπτεται διότι είναι αρνητική και δέχομαι τις ρίζες $\varrho_1 = 2$ και $\varrho_3 = 0.472136$ που είναι θετικές. Αφού $\varrho = f^2$ για την f έχουμε τελικά τέσσερις διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.17.



Σχήμα 5.17: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = 1$ και $E > 7.5$.

[3] Όταν $\Delta' > 0$ και τρεις διακριτές ρίζες για το E

Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ισχύει $c_1^2 - 8 < 0$ δηλαδή $c_1 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Συμβατικά, θεωρούμε τις ρίζες του E να είναι $E_1 < E_2 < E_3$. Ανάλογα με το διάστημα των τιμών του E καθορίζεται και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ . Αν το $E < E_1$ τότε $\Delta < 0$ που απορρίπτεται. Αν $E_1 < E < E_2$ τότε $\Delta > 0$. Αν όμως $E_2 < E < E_3$ τότε $\Delta < 0$ και άρα απορρίπτεται. Επιπλέον, αν $E = E_i$ όπου $i = 1, 2, 3$ τότε $\Delta = 0$. Τέλος, όταν $E > E_3$ τότε $\Delta > 0$. Επομένως, για $c_1 = 1.5$ τότε λύνοντας την εξίσωση (5.23) προκύπτει ότι οι ρίζες για το E είναι:

$$E_1 = -4.88356 \quad E_2 = -3.46214 \quad E_3 = 3.8457$$

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E ως εξής:

(Α) Για $E = -4.88356$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένω μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.22) και λύνοντας την προκύπτουν οι παρακάτω ρίζες:

$$\rho_1 = -2.86272 \quad \rho_2 = -2.86272 \quad \rho_3 = -0.274551$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η διπλή πραγματική ρίζα $\rho_1 = \rho_2 = -2.86272$ όσο και η απλή πραγματική ρίζα $\rho_3 = -0.274551$ είναι αρνητικές άρα η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

(Β) Για $E \in (-4.88356, -3.46214)$ και $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.22) και λύνοντας την για $E = -4$ θα προκύψουν τελικά οι ακόλουθες ρίζες:

$$\rho_1 = -4.23733 \quad \rho_2 = -1.37707 \quad \rho_3 = -0.385597$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όλες οι ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι αρνητικές άρα αυτή περίπτωση απορρίπτεται.

(Γ) Για $E = -3.46214$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.22) και λύνοντας την προκύπτουν τελικά οι ακόλουθες ρίζες:

$$\rho_1 = -4.60147 \quad \rho_2 = -0.699267 \quad \rho_3 = -0.699267$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η διπλή πραγματική ρίζα $\rho_2 = \rho_3 = -0.699267$ όσο και η απλή πραγματική ρίζα $\rho_1 = -4.60147$ είναι αρνητικές άρα η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

(Δ) Για $E = 3.8457$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή όπως και στην προηγούμενη αναμένουμε μία απλή πραγματική ρίζα και μία διπλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.22), την οποία λύνοντας την προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = -7.12398 \quad \varrho_2 = 0.561992 \quad \varrho_3 = 0.561992$$

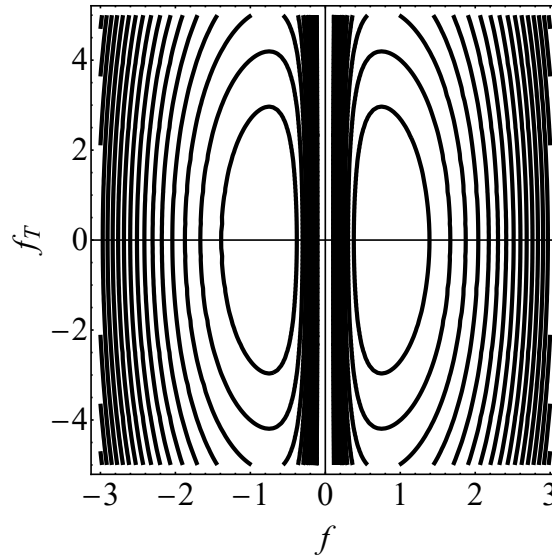
Παρατηρούμε ότι η ρίζα ϱ_1 απορρίπτεται διότι είναι αρνητική ενώ γίνεται δεκτή η διπλή ρίζα $\varrho_2 = \varrho_3 = 0.561992$. Όμως η περίπτωση αυτή ανάγεται σε ένα είδος ταυτότητας και για τον λόγο αυτό απορρίπτεται.

(E) Για $E > 3.8457$ και $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες για την εξίσωση (5.22) και λύνοντας την για $E = 5$ θα προκύψουν τελικά οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = -7.39367 \quad \varrho_2 = 0.271084 \quad \varrho_3 = 1.12258$$

Θα απορρίψουμε την ρίζα $\varrho_1 = -7.39367$ διότι είναι αρνητική ενώ θα κάνουμε δεκτές τις θετικές ρίζες $\varrho_2 = 0.271084$ και $\varrho_3 = 1.12258$. Έτσι επειδή $f^2 = \varrho$ προκύπτουν τελικά τέσσερις πραγματικές διακριτές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.18.



Σχήμα 5.18: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = 1$ και $E > 3.8457$.

Ειδική Περίπτωση: $c_1 = 0$

Στην περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε την περιοχή των ριζών όταν $c_1 = 0$ για $\Omega = -3$ και $d_0 = 1$. Η ιδιαιτερότητα αυτής της περίπτωσης έγκειται στο γεγονός ότι η διακρίνουσα Δ' είναι ίση με το μηδέν και επομένως αναμένουμε ότι το E θα έχει μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όπως και στην γενική περίπτωση χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta για τις τρεις ρίζες $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ της (5.22) ισχύει ότι:

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = -c_1^2 = 0$$

που σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις ρίζες είναι μηδενική όμως επειδή το $\varrho > 0$ οι αρνητικές και οι μηδενικές ρίζες απορρίπτονται. Λύνοντας την εξίσωση (5.23) για αυτή την περίπτωση ως προς E έχουμε:

$$E_1 = -4.5 \quad E_2 = 0 \quad E_3 = 0$$

Επομένως για $E < E_1$ τότε $\Delta < 0$ και άρα θα έχουμε μία πραγματική ρίζα η οποία θα είναι μηδενική άρα η περίπτωση αυτή απορρίπτεται. Όταν $E = E_i$ όπου $i = 1, 2, 3$ τότε $\Delta = 0$ και άρα θα έχουμε μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όταν $E \in (E_1, E_2)$ τότε $\Delta > 0$ και άρα έχουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες. Τέλος, όταν $E > E_3$ τότε $\Delta > 0$ και άρα θα έχουμε τρεις πραγματικές ρίζες. Επομένως διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E = -4.5$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.22) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = -3 \quad \varrho_3 = -3$$

Θα απορρίψουμε την ϱ_1 διότι $\varrho_1 = 0$ και απορρίπτουμε επίσης και την διπλή ρίζα $\varrho_2 = \varrho_3 = -3$ η οποία είναι αρνητική άρα αυτή η περίπτωση δεν γίνεται δεκτή.

(B) Για $E \in (-4.5, 0)$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση εφόσον $\Delta > 0$ αναμένω τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.22). Πράγματι, οι ρίζες που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση (5.22) για $E = -2$ είναι οι ακόλουθες:

$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = -0.763932 \quad \varrho_3 = -5.23607$$

Επομένως απορρίπτουμε την ϱ_1 διότι είναι μηδενική και απορρίπτουμε επίσης τις ρίζες $\varrho_2 = -0.763932$ και $\varrho_3 = -5.23607$ οι οποίες είναι αρνητικές άρα τελικά αυτή η περίπτωση δεν γίνεται δεκτή.

(Γ) Για $E = 0$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.22) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = 0 \quad \rho_3 = -6$$

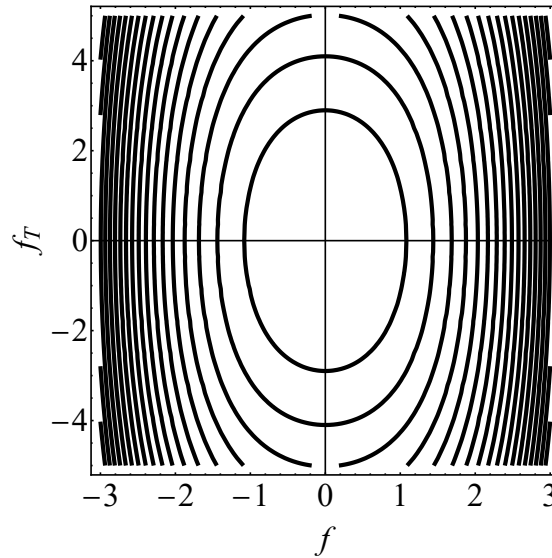
Θα απορρίψουμε την $\rho_1 = \rho_2$ διότι $\rho_1 = \rho_2 = 0$ και απορρίπτουμε επίσης και την απλή ρίζα $\rho_3 = -6$ η οποία είναι αρνητική άρα τελικά αυτή η περίπτωση δεν γίνεται δεκτή.

(Δ) Για $E > 0$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση εφόσον $\Delta > 0$ αναμένω 3 πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.22). Πράγματι, οι ρίζες που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση (5.22) για $E > 0$ είναι οι ακόλουθες:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = 0.605551 \quad \rho_3 = -6.60555$$

Επομένως απορρίπτουμε την ρ_1 διότι είναι μηδενική και την ρ_3 διότι είναι αρνητική και δέχομαι την ρίζα $\rho_2 = 0.605551$ η οποία είναι θετική. Έτσι επειδή $\rho = f^2$ για την f έχουμε τελικά δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.19.



Σχήμα 5.19: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = 1$ και $E > 0$.

Ετερόσημες ποσότητες: $d_0 = -1$ και $\Omega = 3$

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (5.16) μετατρέπεται ως εξής:

$$-\rho^3 + 6\rho^2 - 2E\rho + c_1^2 = 0 \quad (5.25)$$

και χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta για τις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 της εξίσωσης (5.25) προκύπτει η σχέση:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = c_1^2 > 0$$

γεγονός που σημαίνει ότι είτε και οι τρεις ρίζες θα είναι θετικές είτε μία ρίζα θα είναι θετική και οι δύο ρίζες θα είναι αρνητικές. Και στις δύο περιπτώσεις δεχόμαστε τις θετικές ρίζες διότι θέλουμε $\rho > 0$. Για την περίπτωση αυτή το πολυώνυμο τρίτου βαθμού του E είναι το ακόλουθο:

$$-32E^3 + 144E^2 - 864c_1^2 + 216c_1^2E - 27c_1^4 = 0 \quad (5.26)$$

Επομένως η σχέση (5.18) γίνεται ως εξής:

$$\Delta' = -20155392c_1^2 (-8 + c_1^2)^3 \quad (5.27)$$

Στην συνέχεια θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο της Δ' ως εξής:

[1] Όταν $\Delta' < 0$ και μία πραγματική ρίζα για το E

Για να ισχύει αυτή η περίπτωση θα πρέπει $c_1^2 - 8 > 0$ δηλαδή όταν $c_1 < -2\sqrt{2}$ ή $c_1 > 2\sqrt{2}$. Θεωρούμε ότι ρίζα της εξίσωσης (5.26) είναι η E_1 . Έτσι όταν $E < E_1$ τότε $\Delta > 0$. Αν $E = E_1$ τότε ισχύει $\Delta = 0$. Ενώ τέλος, αν $E > E_1$ τότε έχουμε $\Delta < 0$. Επιλέγοντας $c_1 = 3$ και λύνοντας την εξίσωση (5.26) προκύπτει η ότι η πραγματική ρίζα είναι η $E_1 = -7.98691$. Στην συνέχεια για διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

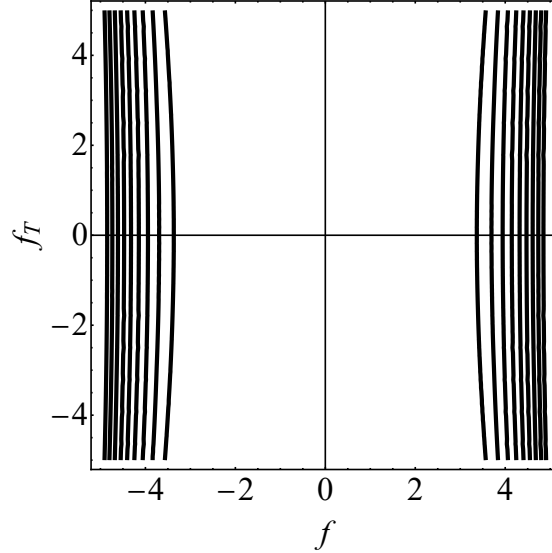
(A) Για $E < -7.98691$ και $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες. Πράγματι, θεωρώντας $E = -15$ και λύνοντας την εξίσωση (5.26) προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\rho_1 = -3 \quad \rho_2 = -0.321825 \quad \rho_3 = 9.32183$$

Θα απορρίψουμε τις ρίζες $\rho_1 = -3$ και $\rho_2 = -0.321825$ επειδή οι ρίζες αυτές είναι αρνητικές και δέχομαι την θετική ρίζα $\rho_3 = 9.32183$. Επειδή $\rho = f^2$ τότε για την f έχουμε δύο πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.20.

(B) Για $E = -7.98691$ και $\Delta = 0$



Σχήμα 5.20: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E < -7.98691$.

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.25). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = -1.05362 \quad \varrho_2 = -1.05362 \quad \varrho_3 = 8.10724$$

Θα απορρίπτουμε την διπλή ρίζα $\varrho_1 = \varrho_2 = -1.05362$ επειδή είναι αρνητική και δεχόμαστε την θετική ρίζα $\varrho_3 = 8.10724$. Επειδή $\varrho = f^2$ τότε για την f έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.21.

(Γ) Για $E > -7.98691$ και $\Delta < 0$

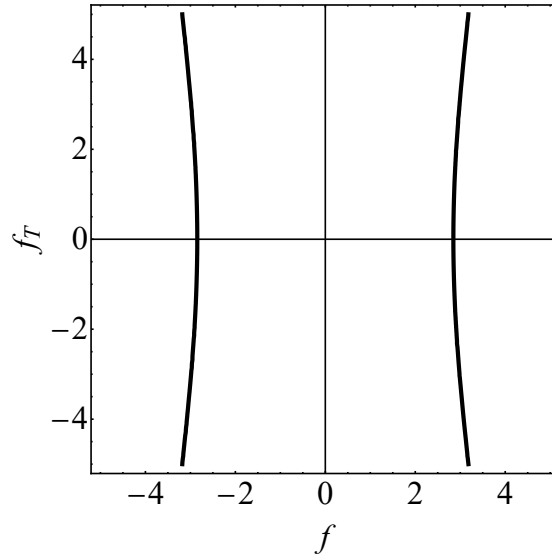
Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.25). Πράγματι, θεωρώντας $E = 2$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτει η εξής πραγματική ρίζα:

$$\varrho_1 = 5.557201$$

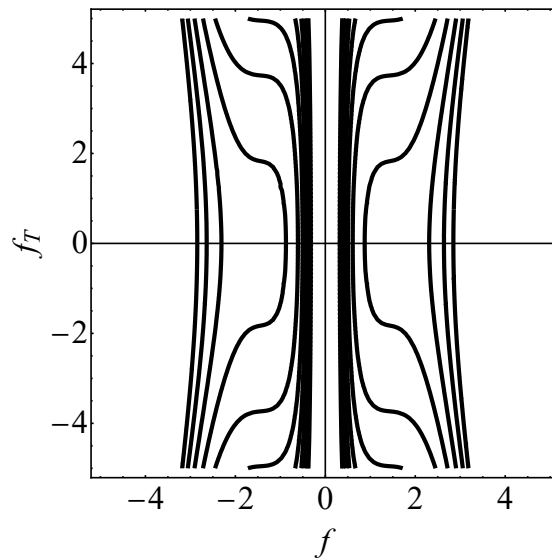
Την ρίζα αυτή την δεχόμαστε διότι είναι θετική και άρα για την f επειδή ισχύει $f^2 = \varrho$ έχουμε δύο πραγματικές διακριτές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.22.

[2] Όταν $\Delta' = 0$ και μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για το E

Για να ισχύει αυτή η περίπτωση θα πρέπει $c_1^2 - 8 = 0$, δηλαδή $c_1 = \pm 2\sqrt{2}$. Συμβατικά, θα θεωρήσουμε τις ρίζες για την εξίσωση (5.27) ως $E_1 < E_2 = E_3$.



Σχήμα 5.21: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = -7.98691$.



Σχήμα 5.22: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E > -7.98691$.

Επομένως, όταν $E < E_1$ τότε $\Delta > 0$. Όταν $E = E_1$ ή $E = E_2 = E_3$ τότε $\Delta = 0$. Τέλος, όταν $E > E_2 = E_3$ τότε $\Delta < 0$. Θεωρώντας $c_1 = 2\sqrt{2}$ και λύνοντας την (5.27) προκύπτουν οι πραγματικές ρίζες για το E είναι:

$$E_1 = -7.5 \quad E_2 = 6 \quad E_3 = 6$$

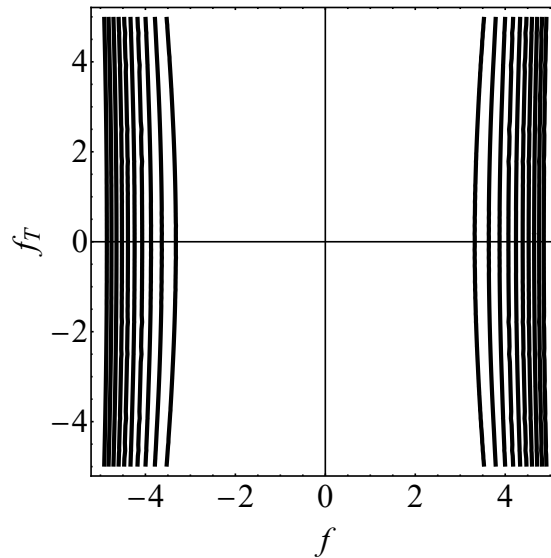
Θα εξετάσουμε το πρόσημο της διακρίνουσας Δ όταν $E \in (-7.5, 6)$. Θεωρώντας $E = 1$ έχουμε $\Delta = -6800 < 0$ άρα στην περιοχή αυτή έχουμε μία πραγματική ρίζα.

(A) Για $E < -7.5$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε τρεις διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση και θεωρώντας $E = -15$ προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\rho_1 = -3.0299 \quad \rho_2 = -0.2835 \quad \rho_3 = 9.3134$$

Άρα απορρίπτουμε τις ρίζες $\rho_1 = -3.0299$ και το $\rho_2 = -0.2835$ αφού $\rho_1, \rho_2 < 0$ και δέχομαι την ρίζα $\rho_3 = 9.3134$. Επειδή $f^2 = \rho$ έχουμε για την f δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.23.



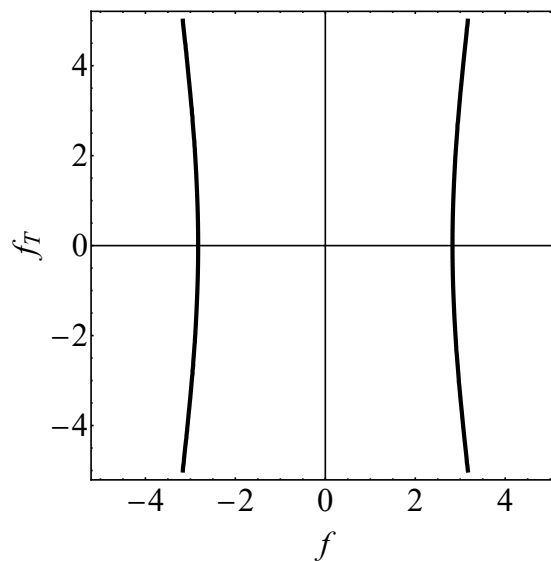
Σχήμα 5.23: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E < -7.5$.

(B) Για $E = -7.5$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = -1 \quad \varrho_2 = -1 \quad \varrho_3 = 8$$

Άρα απορρίπτουμε την διπλή ρίζα $\varrho_1 = \varrho_2 = -1$ αφού η ρίζα αυτή είναι αρνητική και δεχόμαστε την ρίζα $\varrho_3 = 8$. Έτσι επειδή $f^2 = \varrho$ για την f έχω δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.24.



Σχήμα 5.24: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = -7.5$.

(Γ) Για $E \in (-7.5, 6)$ και $\Delta < 0$

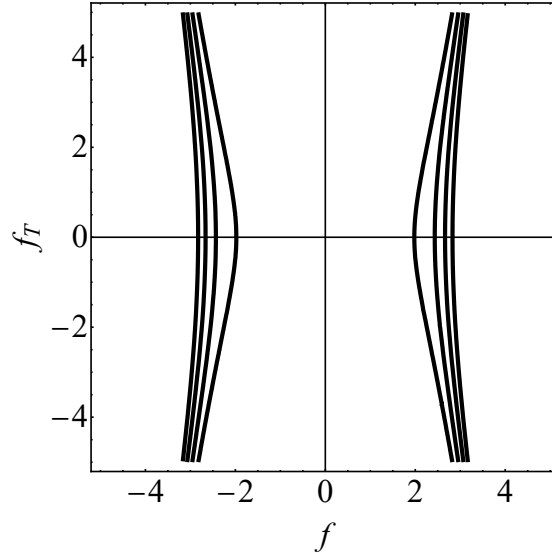
Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, θεωρώντας $E = 1$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτει η πραγματική ρίζα:

$$\varrho_1 = 5.89102$$

Την ρίζα αυτή την δεχόμαστε και επειδή $f^2 = \varrho$ για την f έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.25.

(Δ) Για $E = 6$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες



Σχήμα 5.25: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E \in (-7.5, 6)$.

ρίζες:

$$\varrho_1 = 2 \quad \varrho_2 = 2 \quad \varrho_3 = 2$$

Έχουμε μία τριπλή ρίζα την οποία την δεχόμαστε διότι είναι θετική και επειδή $f^2 = \varrho$ για την f έχουμε 2 τριπλές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.26.

(E) Για $E > 6$ και $\Delta < 0$

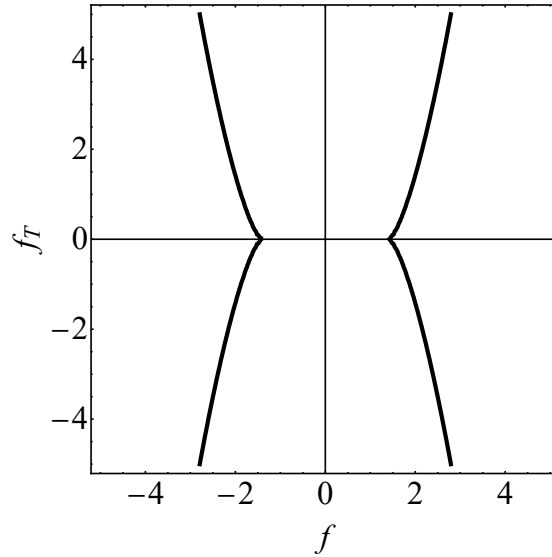
Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, θεωρώντας $E = 10$ και λύνοντας την εξίσωση έχουμε την ακόλουθη πραγματική ρίζα:

$$\varrho_1 = 0.458166$$

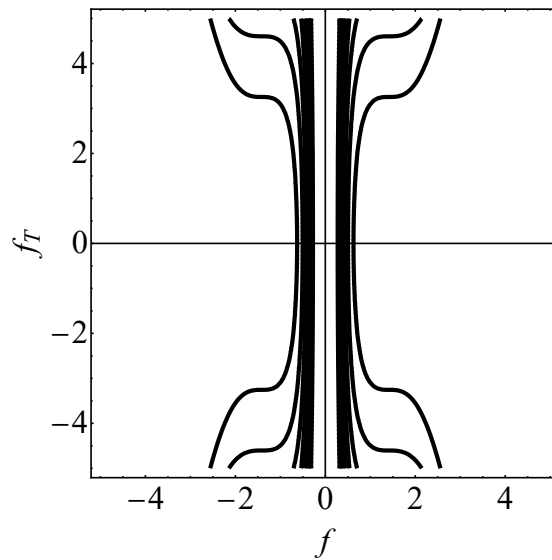
την οποία την δεχόμαστε επειδή είναι θετική. Επιπλέον, επειδή $f^2 = \varrho$ για την f έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.27.

[3] Όταν $\Delta' > 0$ και τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για το E

Για να ισχύει αυτή η περίπτωση θα πρέπει $c_1^2 - 8 < 0$ δηλαδή $-2\sqrt{2} < c_1 < 2\sqrt{2}$. Θα θεωρήσουμε τις ρίζες για την εξίσωση (5.27) ως $E_1 < E_2 < E_3$. Όταν $E < E_1$ τότε $\Delta > 0$. Όταν το $E \in (E_1, E_2)$ τότε $\Delta < 0$. Όταν $E \in (E_2, E_3)$ τότε $\Delta > 0$. Όταν το $E = E_i$ όπου $i = 1, 2, 3$ τότε το $\Delta = 0$. Και τέλος, όταν $E > E_3$ τότε $\Delta < 0$. Θεωρώντας ότι $c_1 = 1.5$ τότε λύνοντας την εξίσωση (5.27)



Σχήμα 5.26: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = 6$.



Σχήμα 5.27: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E > 6$.

προκύπτουν ότι οι πραγματικές ρίζες για το E είναι οι ακόλουθες:

$$E_1 = -3.8457 \quad E_2 = 3.46214 \quad E_3 = 4.88356$$

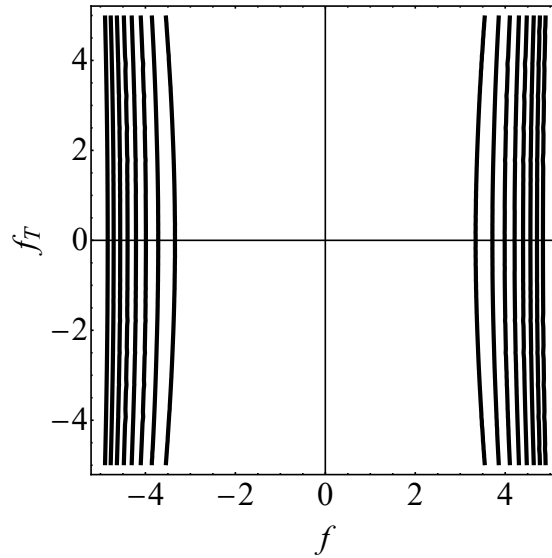
Επομένως διακρίνω τις ακόλουθες περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E < -3.8457$ και $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, θεωρώντας $E = -5$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = -1.12258 \quad \varrho_2 = -0.271084 \quad \varrho_3 = 7.39367$$

Επομένως απορρίπτουμε τις ρίζες $\varrho_1 = -1.12258$ και $\varrho_2 = -0.271084$ επειδή είναι αρνητικές και δεχόμαστε την θετική ρίζα $\varrho_3 = 7.39367$. Επειδή ισχύει $f^2 = \varrho$ για την f έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.28.



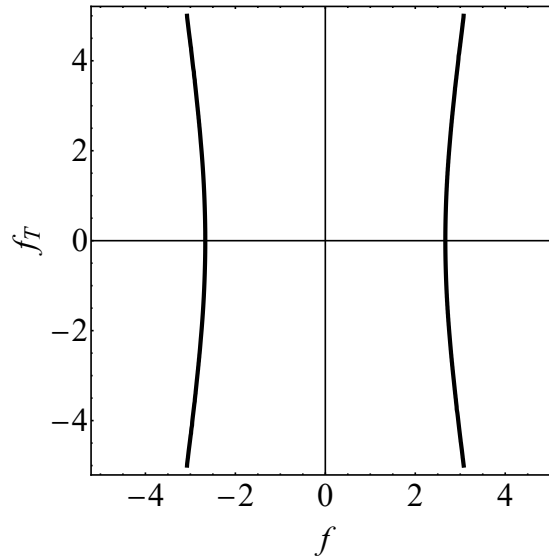
Σχήμα 5.28: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E < -3.8457$.

(B) Για $E = -3.8457$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία διπλή και μία απλή ρίζα για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = -0.561992 \quad \varrho_2 = -0.561992 \quad \varrho_3 = 7.12398$$

Άρα απορρίπτουμε την διπλή ρίζα $\rho_1 = \rho_2 = -0.561992$ επειδή είναι αρνητική και δεχόμαστε την θετική ρίζα $\rho_3 = 7.12398$. Επειδή $f^2 = \rho$ για την f έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες, όπως στο Σχήμα 5.29.



Σχήμα 5.29: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = -3.8457$.

(Γ) Για $E \in (-3.8457, 3.46214)$ και $\Delta < 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, θεωρώντας $E = 1$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτει η ακόλουθη πραγματική ρίζα:

$$\rho = 5.71908$$

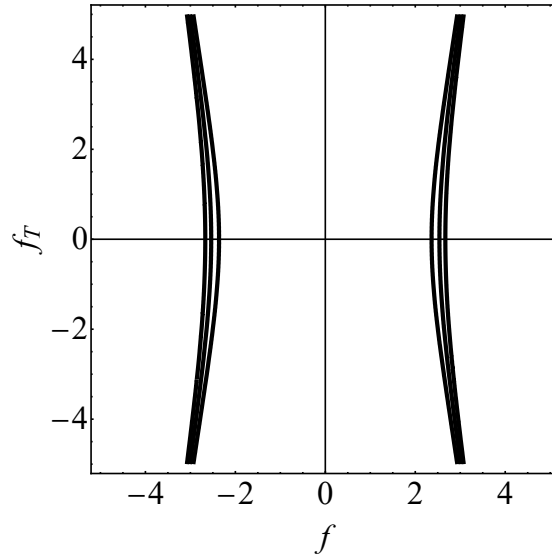
Την παραπάνω ρίζα την δεχόμαστε διότι είναι θετική και επομένως για την f προκύπτουν δύο πραγματικές διακριτές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.30.

(Δ) Για $E = 3.46214$ και $\Delta = 0$

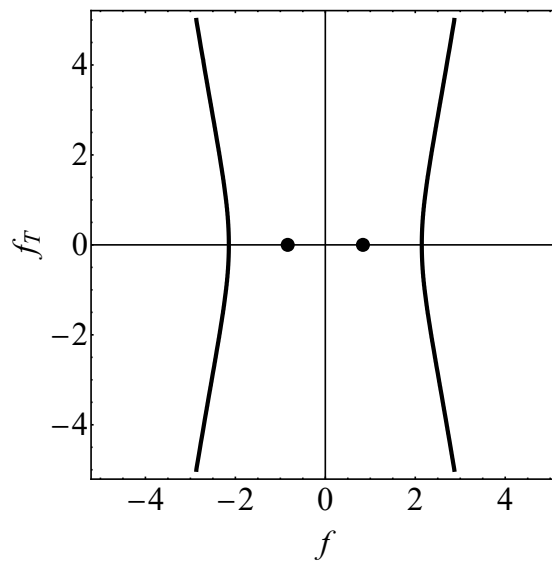
Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες λύσεις:

$$\rho_1 = 0.699267 \quad \rho_2 = 0.699267 \quad \rho_3 = 4.60147$$

Δεχόμαστε όλες τις παραπάνω ρίζες διότι είναι θετικές. Άρα για την f έχουμε δύο διπλές πραγματικές ρίζες και δύο απλές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.31.



Σχήμα 5.30: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E \in (-3.8457, 3.46214)$.



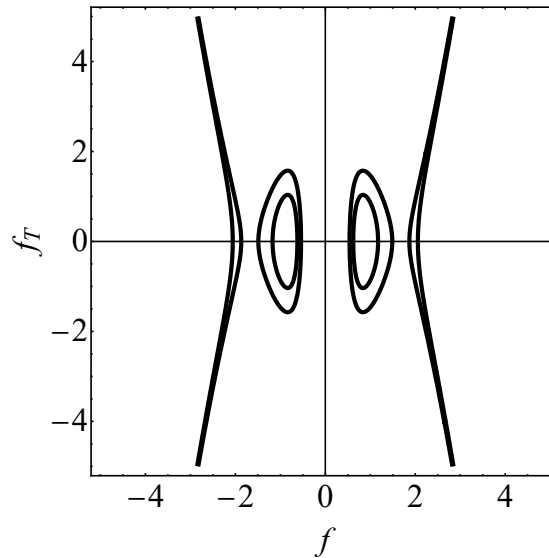
Σχήμα 5.31: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = 3.46214$.

(E) Για $E \in (3.46214, 4.88356)$ και $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, θεωρώντας $E = 4$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = 0.274551 \quad \varrho_2 = 2.86272 \quad \varrho_3 = 2.86272$$

Όλες οι ρίζες γίνονται δεχτές διότι είναι θετικές. Άρα για την f έχουμε έξι διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.32.



Σχήμα 5.32: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E \in (3.46214, 4.88356)$.

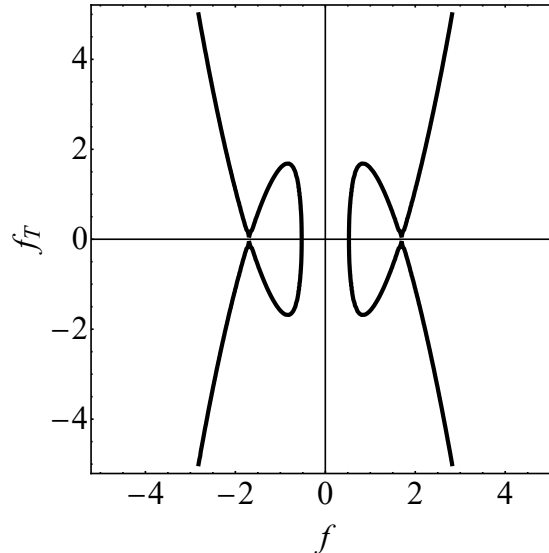
(ΣΤ) Για $E = 4.88356$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Λύνοντας επομένως την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\varrho_1 = 0.274551 \quad \varrho_2 = 2.86272 \quad \varrho_3 = 2.86272$$

Όλες οι ρίζες γίνονται δεχτές διότι είναι θετικές. Έτσι για την f έχουμε δύο διπλές πραγματικές ρίζες και δύο απλές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.33.

(Ζ) Για $E > 4.88356$ και $\Delta < 0$



Σχήμα 5.33: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = 4.88356$.

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26). Θεωρώντας $E = 10$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτει η ακόλουθη πραγματική ρίζα:

$$\varrho = 0.116492$$

την οποία την δέχομαι και για την f έχω δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.34.

Ειδική Περίπτωση: $c_1 = 0$

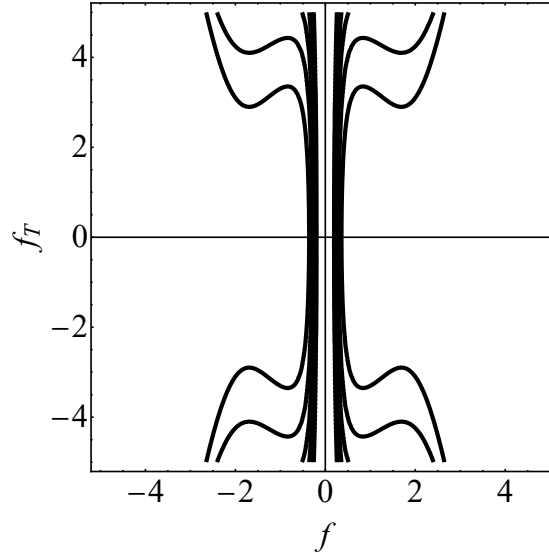
Στην περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε την περιοχή των ριζών όταν $c_1 = 0$ για $\Omega = 3$ και $d_0 = -1$. Η ιδιαιτερότητα αυτής της περίπτωσης έγκειται στο γεγονός ότι η διακρίνουσα Δ' είναι ίση με το μηδέν και επομένως αναμένουμε ότι το E θα έχει μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όπως και στην γενική περίπτωση χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta για τις τρεις ρίζες $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ της (5.26) ισχύει ότι:

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = c_1^2 = 0$$

που σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις τρεις ρίζες είναι μηδενική. Τις μόνες ρίζες που δεχόμαστε είναι οι θετικές διότι $\varrho > 0$.

Λύνοντας την εξίσωση (5.27) για αυτή την περίπτωση ως προς E έχουμε:

$$E_1 = 0 \quad E_2 = 0 \quad E_3 = 4.5$$



Σχήμα 5.34: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E > 4.88356$.

Επομένως για $E < E_1$ τότε $\Delta > 0$ και άρα θα έχουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες. Όταν $E = E_i$ όπου $i = 1, 2, 3$ τότε $\Delta = 0$ και άρα θα έχουμε μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όταν $E \in (E_1, E_3)$ τότε $\Delta > 0$ και άρα έχουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες. Τέλος, όταν $E > E_3$ τότε $\Delta < 0$ και άρα θα έχουμε μία πραγματική ρίζα η οποία θα είναι ίση με μηδέν και άρα απορρίπτεται. Επομένως διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E < 0$ και $\Delta > 0$

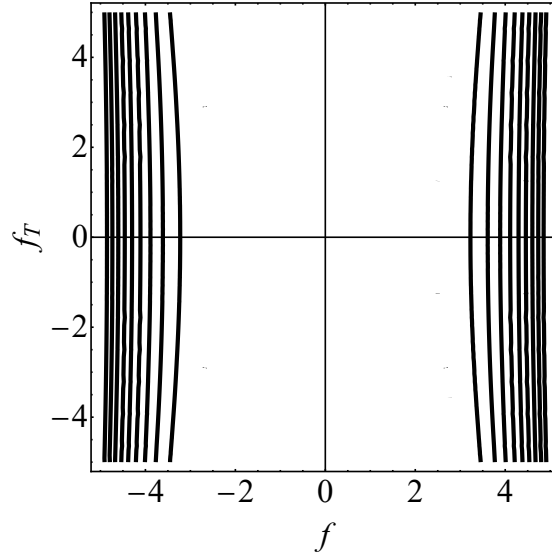
Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες για την εξίσωση (5.26) αφού $\Delta = 0$. Θεωρώντας $E = -2$ και λύνοντας προκύπτει:

$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = -0.605551 \quad \varrho_3 = 6.60555$$

Θα απορρίψουμε την ϱ_1 διότι $\varrho_1 = 0$ και απορρίπτουμε επίσης και την ρίζα $\varrho_2 = -0.605551$ η οποία είναι αρνητική και δεχόμαστε την $\varrho_3 = 6.60555$ η οποία είναι θετική. Έτσι επειδή $\varrho = f^2$ για την f έχουμε τελικά δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.35.

(B) Για $E = 0$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή



Σχήμα 5.35: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E < 0$.

πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = 0 \quad \varrho_3 = 6$$

Θα απορρίψουμε την διπλή ρίζα $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ και δεχόμαστε την ρίζα $\varrho_3 = 3$ η οποία είναι θετική. Έτσι επειδή $\varrho = f^2$ για την f έχουμε τελικά δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.36.

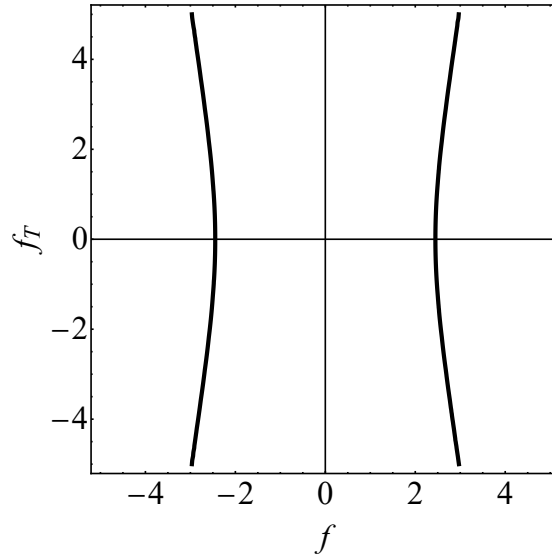
(Γ) Για $E \in (0, 4.5)$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση εφόσον $\Delta > 0$ αναμένω τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.26). Πράγματι, οι ρίζες που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση (5.26) για $E = 2$ είναι οι ακόλουθες:

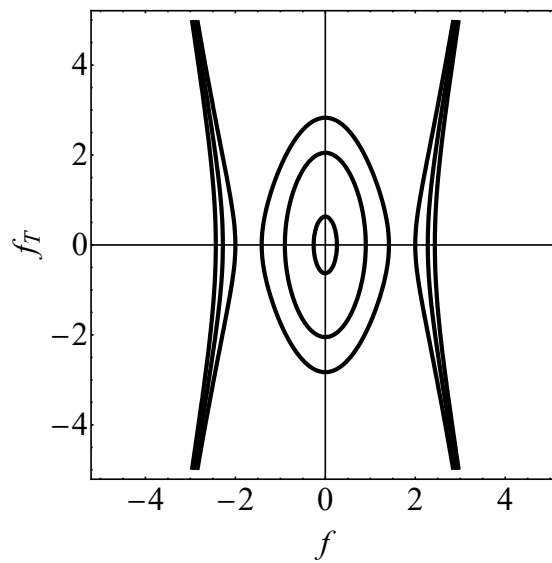
$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = 0.763932 \quad \varrho_3 = 5.23607$$

Επομένως απορρίπτουμε την ϱ_1 διότι είναι μηδενική και δεχόμαστε τις ρίζες $\varrho_2 = 0.763932$ και $\varrho_3 = 5.23607$ οι οποίες είναι θετικές. Έτσι επειδή $\varrho = f^2$ για την f έχουμε τελικά τέσσερις διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.37.

(Δ) Για $E = 4.5$ και $\Delta = 0$



Σχήμα 5.36: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = 0$.

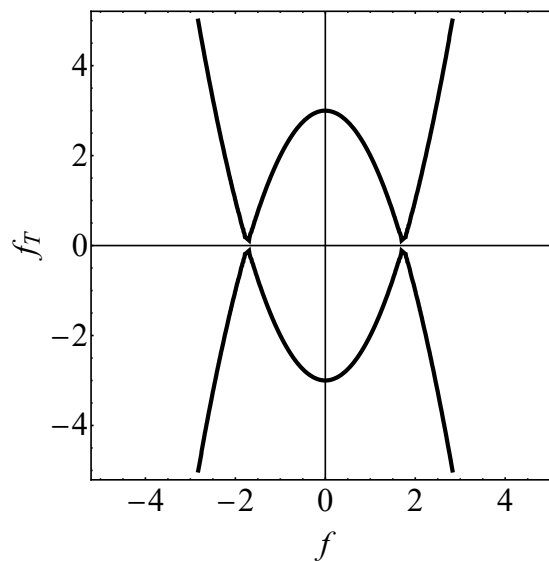


Σχήμα 5.37: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E \in (0, 4.5)$.

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.26) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = 3 \quad \rho_3 = 3$$

Θα απορρίψουμε την ρ_1 διότι $\rho_1 = 0$ και δεχόμαστε την διπλή ρίζα $\rho_2 = \rho_3 = 3$ η οποία είναι θετική. Έτσι επειδή $\rho = f^2$ για την f έχουμε τελικά δύο διπλές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.38.



Σχήμα 5.38: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = 3$, $d_0 = -1$ και $E = 4.5$.

Αρνητικές ποσότητες: $d_0 = -1$ και $\Omega = -3$

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (5.16) μετατρέπεται ως εξής:

$$-2E\rho - 6\rho^2 - \rho^3 + c_1^2 = 0 \quad (5.28)$$

και από τους τύπους Vieta γνωρίζουμε ότι για τις τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 της εξίσωσης (5.28) προκύπτει η σχέση:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = c_1^2 > 0$$

γεγονός που σημαίνει ότι είτε και οι τρεις ρίζες θα είναι θετικές είτε μία ρίζα θα είναι θετική και οι δύο ρίζες θα είναι αρνητικές. Και στις δύο περιπτώσεις

δεχόμαστε τις θετικές ρίζες διότι θέλουμε $\rho > 0$. Για την περίπτωση αυτή το πολυώνυμο τρίτου βαθμού του E είναι το ακόλουθο:

$$-32E^3 + 144E^2 - 216c_1^2E + 864c_1^2 - 27c_1^4 = 0 \quad (5.29)$$

Επομένως η σχέση (5.18) γίνεται ως εξής:

$$\Delta = -20155392c_1^2 (8 + c_1^2)^3 \quad (5.30)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (5.30) είναι πάντα αρνητική, επομένως το E θα έχει μόνο μία πραγματική ρίζα σε αυτή την περίπτωση. Θεωρούμε την ρίζα της εξίσωσης (5.29) το E_1 . Επομένως, όταν $E < E_1$ τότε $\Delta > 0$. Όταν το $E = E_1$ τότε $\Delta = 0$. Και τέλος, όταν $E > E_1$ τότε $\Delta < 0$.

Θεωρώντας $c_1 = 1$ και λύνοντας την (5.29) προκύπτει ότι η πραγματική ρίζα για το E είναι $E = 4.33482$. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E < 4.33482$ και $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.28). Πράγματι, θεωρώντας $E = 1$ και λύνοντας την εξίσωση και προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

$$\rho_1 = 0.270534 \quad \rho_2 = -0.658675 \quad \rho_3 = -5.61186$$

Από τις παραπάνω ρίζες απορρίπτουμε τις $\rho_2 = -0.658675$ και $\rho_3 = -5.61186$ αφού $\rho_1, \rho_2 < 0$ και δέχομαι την ρίζα $\rho_1 = 0.270534$ και άρα για την f θα έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.39.

(B) Για $E = 4.33482$ και $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία διπλή και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.28). Πράγματι, λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν οι ακόλουθες ρίζες:

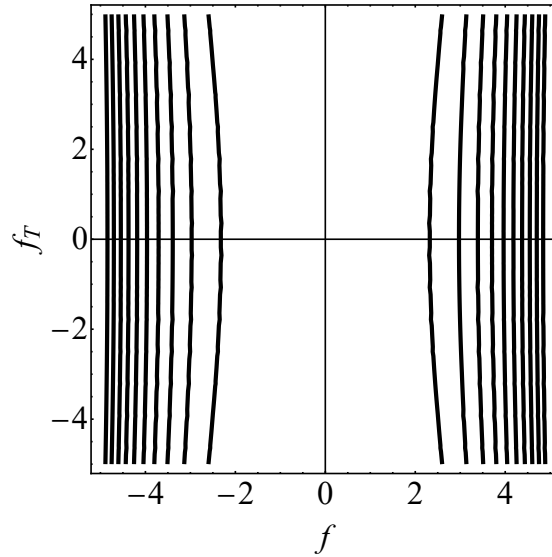
$$\rho_1 = -3.05362 \quad \rho_2 = -3.05362 \quad \rho_3 = 0.107243$$

Άρα απορρίπτω τις ρίζες $\rho_2 = \rho_3 = -3.05362$ επειδή είναι αρνητικές και δεχόμαστε την ρίζα $\rho_1 = 0.107243$ και άρα για την f θα έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.40.

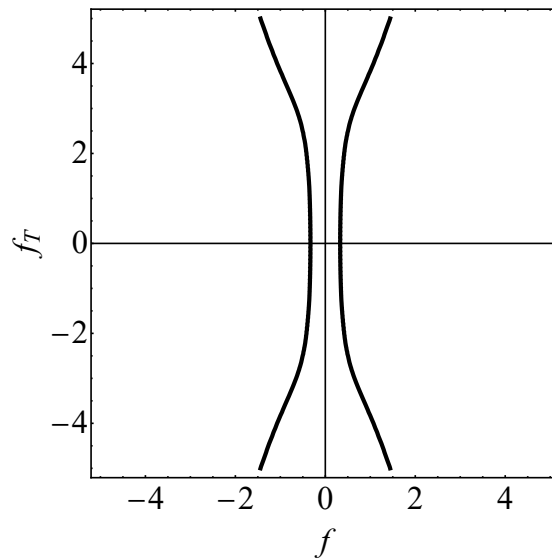
(Γ) Για $E > 4.33482$ και $\Delta < 0$

Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε μία απλή πραγματική ρίζα για εξίσωση (5.28). Πράγματι, θεωρώντας $E = 10$ και λύνοντας την εξίσωση προκύπτει η παρακάτω πραγματική ρίζα:

$$\rho_1 = 0.0492659$$

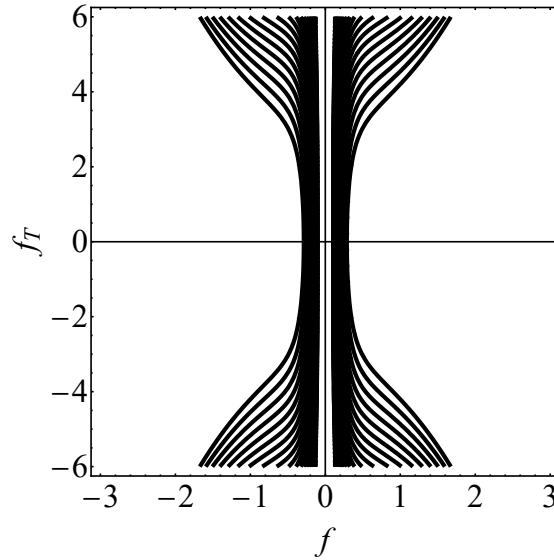


Σχήμα 5.39: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = -1$ και $E < 4.33482$.



Σχήμα 5.40: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = -1$ και $E = 4.33482$.

την οποία την δεχόμαστε διότι είναι θετική και άρα για την f έχουμε δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.41.



Σχήμα 5.41: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = -1$ και $E > 4.33482$.

Ειδική Περίπτωση: $c_1 = 0$

Στην περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε την περιοχή των ριζών όταν $c_1 = 0$ για $\Omega = -3$ και $d_0 = -1$. Η ιδιαιτερότητα αυτής της περίπτωσης έγκειται στο γεγονός ότι η διακρίνουσα Δ' είναι ίση με το μηδέν και επομένως αναμένουμε ότι το E θα έχει μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όπως και στην γενική περίπτωση χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta για τις τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 της (5.28) ισχύει ότι:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = c_1^2 = 0$$

που σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις τρεις ρίζες είναι μηδενική. Τις μόνες ρίζες που δεχόμαστε είναι οι θετικές διότι $\rho > 0$.

Λύνοντας την εξίσωση (5.29) για αυτή την περίπτωση ως προς E έχουμε:

$$E_1 = 0 \quad E_2 = 0 \quad E_3 = 4.5$$

Επομένως για $E < E_1$ τότε $\Delta > 0$ και άρα θα έχουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες. Όταν $E = E_i$ όπου $i = 1, 2, 3$ τότε $\Delta = 0$ και άρα θα έχουμε μία διπλή και μία απλή ρίζα. Όταν $E \in (E_1, E_3)$ τότε $\Delta > 0$ και άρα έχουμε τρεις διακριτές

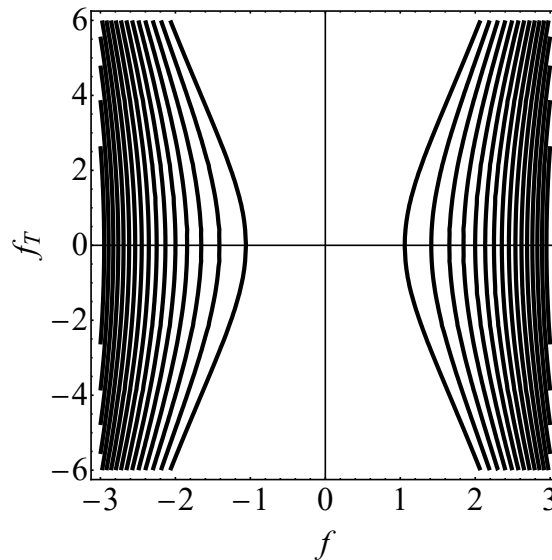
πραγματικές ρίζες. Τέλος, όταν $E > E_3$ τότε $\Delta < 0$ και άρα θα έχουμε μία πραγματική ρίζα η οποία θα είναι ίση με μηδέν και άρα απορρίπτεται. Επομένως διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του E :

(A) Για $E < 0$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες για την εξίσωση (5.28) αφού $\Delta = 0$. Θεωρώντας $E = -2$ και λύνοντας προκύπτει:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_2 = 0.605551 \quad \rho_3 = -6.60555$$

Θα απορρίψουμε την ρ_1 διότι $\rho_1 = 0$ και απορρίπτουμε επίσης και την ρίζα $\rho_3 = -6.60555$ η οποία είναι αρνητική και δεχόμαστε την $\rho_2 = 0.605551$ η οποία είναι θετική. Έτσι επειδή $\rho = f^2$ για την f έχουμε τελικά δύο διακριτές πραγματικές ρίζες όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.42.



Σχήμα 5.42: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = -1$ και $E < 0$.

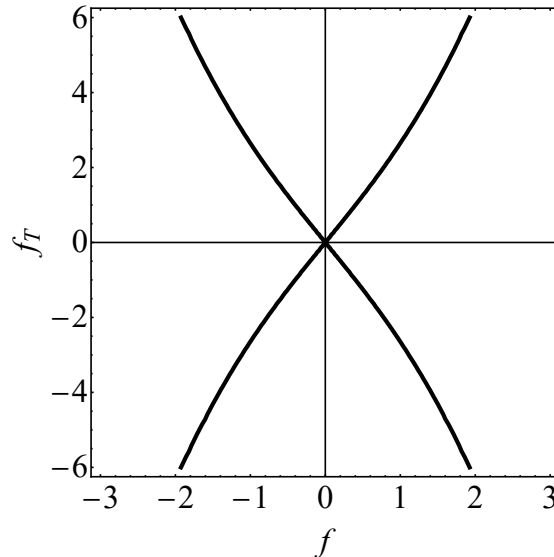
(B) Για $E = 0$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.28) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\rho_1 = -6 \quad \rho_2 = 0 \quad \rho_3 = 0$$

Θα δεχτούμε κατ' εξαίρεση την διπλή ρίζα $\rho_2 = \rho_3 = 0$ και απορρίπτουμε την ρίζα

$\varrho_3 = -6$ η οποία είναι αρνητική. Έτσι επειδή $\varrho = f^2$ για την f έχουμε τελικά τέσσερις πραγματικές ρίζες ίσον με το μηδέν όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.43.



Σχήμα 5.43: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (5.14) για την περίπτωση $\Omega = -3$, $d_0 = -1$ και $E = 0$.

(Γ) Για $E \in (0, 4.5)$ και $\Delta > 0$

Σε αυτή την περίπτωση εφόσον $\Delta > 0$ αναμένω τρεις πραγματικές διακριτές ρίζες για την εξίσωση (5.28). Πράγματι, οι ρίζες που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση (5.28) για $E = 2$ είναι οι ακόλουθες:

$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = -0.763932 \quad \varrho_3 = -5.23607$$

Επομένως απορρίπτουμε την ϱ_1 διότι είναι μηδενική και απορρίπτουμε επίσης τις ρίζες $\varrho_2 = -0.763932$ και $\varrho_3 = -5.23607$ οι οποίες είναι αρνητικές, επομένως η περίπτωση αυτή δεν γίνεται δεκτή.

(Δ) Για $E = 4.5$ και $\Delta = 0$

Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε μία διπλή πραγματική ρίζα και μία απλή πραγματική ρίζα για την εξίσωση (5.28) αφού $\Delta = 0$. Λύνοντας προκύπτει:

$$\varrho_1 = 0 \quad \varrho_2 = -3 \quad \varrho_3 = -3$$

Θα απορρίψουμε την ϱ_1 διότι $\varrho_1 = 0$ και απορρίπτουμε επίσης την διπλή ρίζα $\varrho_2 = \varrho_3 = -3$ η οποία είναι αρνητική, επομένως η περίπτωση αυτή δεν γίνεται αποδεκτή.

Τα παραπάνω αποτελέσματα με βάση τον αριθμό των ριζών είναι συγκεντρωμένα στον πίνακα του Παραρτήματος Β.

5.4 Λύσεις της εξίσωσης NLS μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την λύση της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger

$$iq_Z + \frac{d_0}{2}q_{TT} + |q|^2q = 0$$

Στην προηγούμενη ενότητα διακρίναμε περιοχές για την εξίσωση NLS με βάση τον αριθμό των ριζών. Θα διακρίνουμε τις λύσεις της εξίσωσης με την χρήση των ελλειπτικών συναρτήσεων σε καθεμία από τις περιοχές που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

5.4.1 Περιοχή Έξι Πραγματικών Ριζών

Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε τις λύσεις της εξίσωσης NLS για την περιοχή των έξι πραγματικών ριζών. Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τον τύπο των ριζών.

(Α) Έξι Διακριτές Πραγματικές Ρίζες

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο είδη περιοχών. Δύο φραγμένες και δύο ανοιχτές περιοχές. Τις φραγμένες περιοχές θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi ενώ τις ανοιχτές περιοχές θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Φραγμένη Περιοχή

Θέλουμε να αντιστοιχίσουμε την διαφορική μας εξίσωση

$$\frac{1}{2}(f')^2 + \left(\frac{f^4}{2d_0} - \frac{\Omega}{d_0}f^2 + \frac{c_1^2}{2d_0^2f^2} \right) = E \quad (5.31)$$

με μία από τις διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στις τρεις βασικές ελλειπτικές συναρτήσεις: $\text{sn}(T)$, $\text{cn}(T)$, $\text{dn}(T)$.

Για τον λόγο αυτό, κάνουμε την θεώρηση: $f(T) = \sqrt{A + Bv^2(\Gamma T)}$, με Γ ελεύθερη παράμετρος. Επομένως, η διαφορική μας εξίσωση μετατρέπεται όπως

φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{A(3A - 4\Omega) + B\Gamma^2 d_0 v'^2}{B\Gamma^2 d_0} + \frac{B}{\Gamma^2 d_0} v^4 + \frac{(3A - 2\Omega)}{\Gamma^2 d_0} v^2 \\ + \frac{A^2 d_0 (A - 2\Omega) + c_1^2}{B^2 \Gamma^2 d_0} \frac{1}{v^2} = E \end{aligned} \quad (5.32)$$

Την παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με την διαφορική εξίσωση της $\operatorname{sn}(\Gamma T)$:

$$\left(\frac{dv(\Gamma T)}{dT} \right)^2 - 1 + (1 + k^2) (v(\Gamma T))^2 - k^2 (v(\Gamma T))^4$$

με $0 \leq k \leq 1$. Έτσι λοιπόν για την σταθερά B έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$B = -k^2 \Gamma^2 d_0 \quad (5.33)$$

Όμοια για την σταθερά A έχουμε:

$$A = \frac{1}{3} (\Gamma^2 d_0 + \Gamma^2 d_0 k^2 + 2\Omega) \quad (5.34)$$

Για το E έχουμε:

$$E = \frac{3A^2 - 4A\Omega + B\Gamma^2 d_0}{2d_0} \quad (5.35)$$

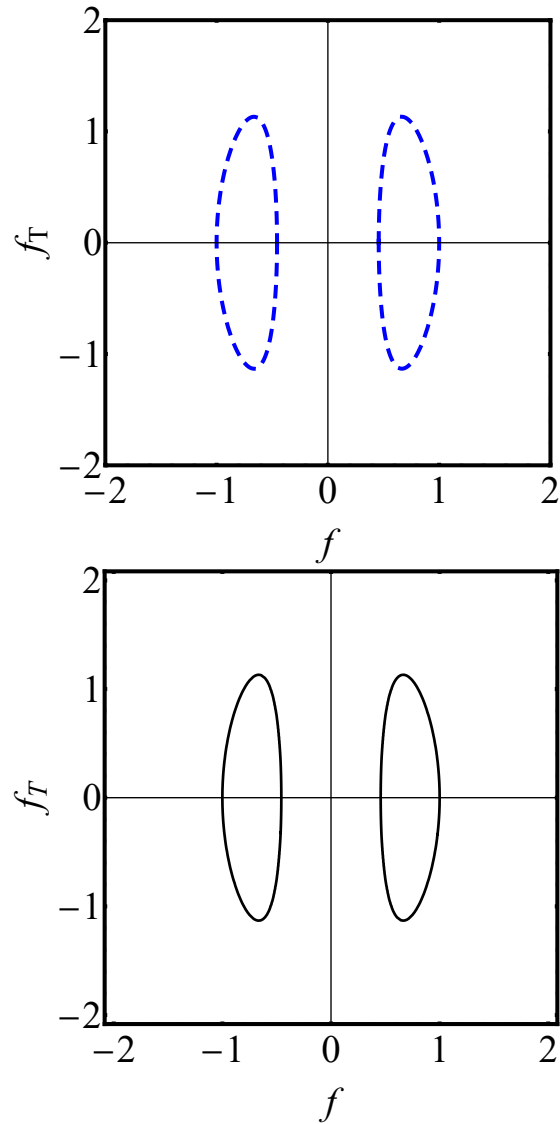
Από την προηγούμενη ενότητα γι' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες για τις σταθερές $d_0 = -1$, $\Omega = 3$, $c_1 = 1$ και $E = 3$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω συνθήκες για τις σταθερές και λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3A^2 B d_0 - 4A B d_0 \Omega - 2B d_0^2 e}{B^2 \Gamma^2 d_0^2} = -1 \\ A^3 d_0 - 2A^2 d_0 \Omega - 2A d_0^2 e + c_1^2 = 0 \end{cases}$$

Αποδεχόμαστε το ζεύγος τιμών $\Gamma = -2.140695$ και $k = 0.415539$ διότι $k \in (0, 1)$.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A + B \operatorname{sn}(\Gamma T; k^2)^2}$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις κλειστές τροχιές. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $f(T)$. Το αποτέλεσμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) για τις ίδιες σταθερές όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.44.

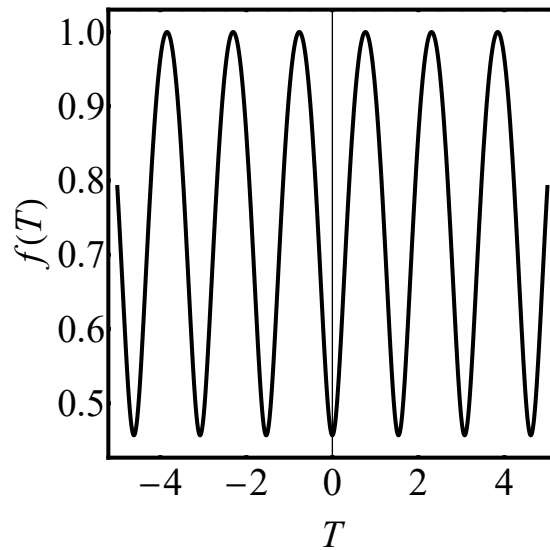


Σχήμα 5.44: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των τεσσάρων ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συμπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn περιγράφει τις κλειστές τροχιές της περίπτωσης των έξι διακριτών ριζών στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης

(5.31).

Τέλος για τις κλειστές περιοχές θα παρουσιάσουμε και την γραφική παράσταση της λύσης της εξίσωσης NLS, δηλαδή την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο Σχήμα 5.45.



Σχήμα 5.45: Η λύση της εξίσωσης NLS για τις κλειστές τροχιές της περίπτωσης των έξι διακριτών ριζών.

Ανοιχτή Περιοχή

Αφού προσδιορίσαμε την λύση των κλειστών καμπυλών μέσω της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $\text{sn}(T; k)$ για την περίπτωση των έξι διακριτών πραγματικών ριζών, τώρα θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής. Πιο συγκεκριμένα, η λύση των ανοιχτών καμπυλών θα προσδιοριστεί μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass όπως είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση:

$$(\wp')^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 = 0 \quad (5.36)$$

Θα αντιστοιχίσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση με την εξίσωση NLS. Για τον λόγο αυτό κάνουμε την ακόλουθη θεώρηση για την εξίσωση (5.31)

$$f(T) = \sqrt{Ap(\Gamma T) + B}$$

Επομένως η εξίσωση (5.31) μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{4 [B^2 d_0 (B - 2\Omega) + c_1^2] A^2 \Gamma^2 d_0^2 p'^2}{A^2 \Gamma^2 d_0^2} + \frac{4A}{\Gamma^2 d_0} p^3 + \frac{4(3B - 2\Omega)}{\Gamma^2 d_0} p^2 \\ + \frac{4B(3B - 4\Omega)}{A \Gamma^2 d_0} p = E \end{aligned} \quad (5.37)$$

Έτσι λοιπόν μέσω των σχέσεων (5.36) και (5.37) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές A, B, E, g_2 και την g_3 .

Για την σταθερά A έχουμε:

$$A = -\Gamma^2 d_0 \quad (5.38)$$

Όμοια για την σταθερά B έχουμε:

$$B = \frac{2\Omega}{3} \quad (5.39)$$

Για το E :

$$E = \frac{-A \Gamma^2 d_0 g_2 + 12B^2 - 16B\Omega}{8d_0} \quad (5.40)$$

Τέλος για την g_3 :

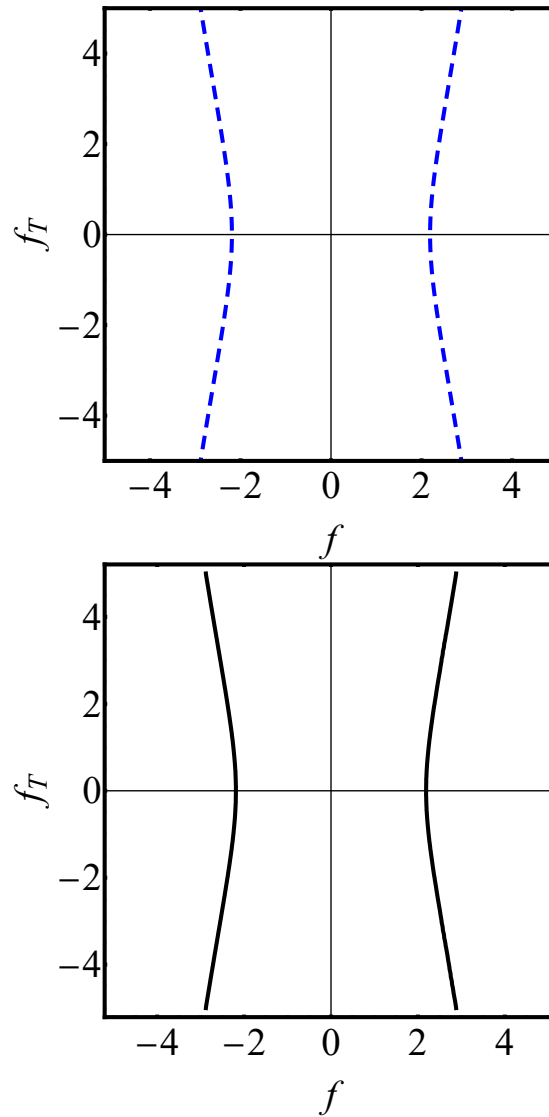
$$g_3 = \frac{4 (B^3 d_0 - 2B^2 d_0 \Omega - 2B d_0^2 e + c_1^2)}{A^2 \Gamma^2 d_0^2} \quad (5.41)$$

Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 1$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 3$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = \frac{24}{\Gamma^4} \quad (5.42)$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A \wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης $f_T - f$. Αυτό το διάγραμμα φάσης μας δίνει τις ανοιχτές καμπύλες τις οποίες τις συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) το οποίο το υπολογίζουμε βάση των παραπάνω σταθερών. Η σύγκριση φαίνεται στο Σχήμα 5.46.

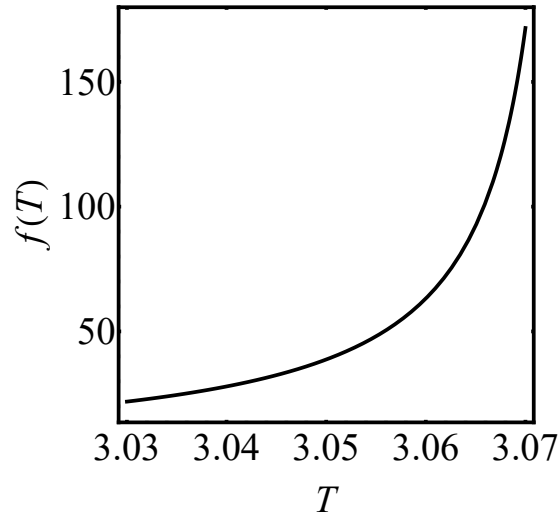
Στα παραπάνω σχήματα επιλέγουμε τις ίδιες σταθερές d_0, Ω, c_1 και E με τις κλειστές τροχιές καθώς και τις σταθερές g_2 και g_3 που προκύπτουν από τις σχέσεις (5.42) και (5.41) αντίστοιχα.



Σχήμα 5.46: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Για τις ανοιχτές καμπύλες παρουσιάζουμε την λύση της εξίσωσης NLS, στο Σχήμα 5.47.

Τέλος θα παρουσιάσουμε το διάγραμμα φάσης 5.48 της εξίσωσης (5.31) συ-



Σχήμα 5.47: Η λύση της εξίσωσης NLS για τις ανοιχτές τροχιές στην περίπτωση των έξι διακριτών πραγματικών ριζών.

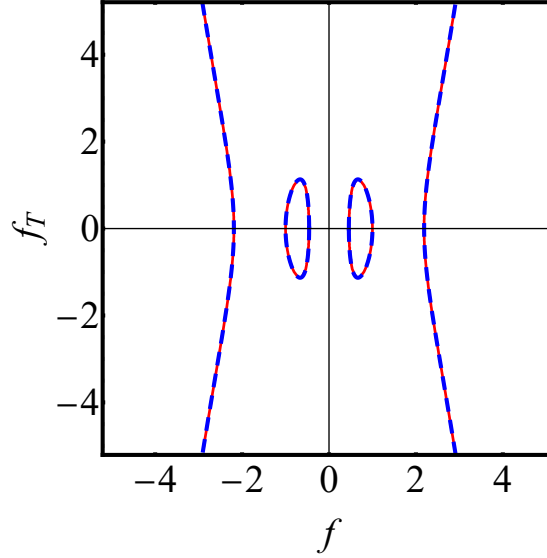
γκρίνοντας ταυτόχρονα τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi για τις κλειστές τροχιές και τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass για τις ανοιχτές τροχιές.

(B) Δύο Διπλές και Δύο Απλές Ρίζες (Διαχωρίστρια Καμπύλη)

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο είδη περιοχών. Δύο φραγμένες και δύο ανοιχτές περιοχές. Τις φραγμένες περιοχές θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi ενώ τις ανοιχτές περιοχές θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Επιπλέον αυτή η καμπύλη είναι διαχωρίστρια καμπύλη και διαχωρίζει το σύνολο των καμπυλών που περιέχουν ένα ζεύγος κλειστών και ένα ζεύγος ανοιχτών καμπυλών από το σύνολο των καμπυλών που περιέχουν ένα ζεύγος ανοιχτών καμπυλών.

Φραγμένη Περιοχή

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση των έξι διακριτών ριζών την διαφορική μας εξίσωση (5.31) μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi $\operatorname{sn}(T)$ μέσω της θεώρησης που κάνουμε για την συνάρτηση f : $f(T) = \sqrt{A + Bv^2(\Gamma T)}$, με Γ ελεύθερη παράμετρο. Επομένως για την διαφορική μας εξίσωση μέσω της θεώρησης ισχύει η σχέση (5.32). Έτσι με αυτή την αντιστοιχία καταλήγουμε στις σχέσεις (5.33)-(5.35) για τις σταθερές A, B και E .



Σχήμα 5.48: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31). Οι κόκκινες τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης της (5.31) η μπλε διακεκομμένες κλειστές τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $f(T) = \sqrt{A + B \operatorname{sn}(\Gamma T; k^2)^2}$ ενώ η μπλε διακεκομμένες ανοιχτές τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης για την ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

Από την προηγούμενη ενότητα γι' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες για τις σταθερές $d_0 = -1$, $\Omega = 3$, $c_1 = 1.5$ και $E = 4.883559$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω συνθήκες για τις σταθερές και λύνοντας το σύστημα:

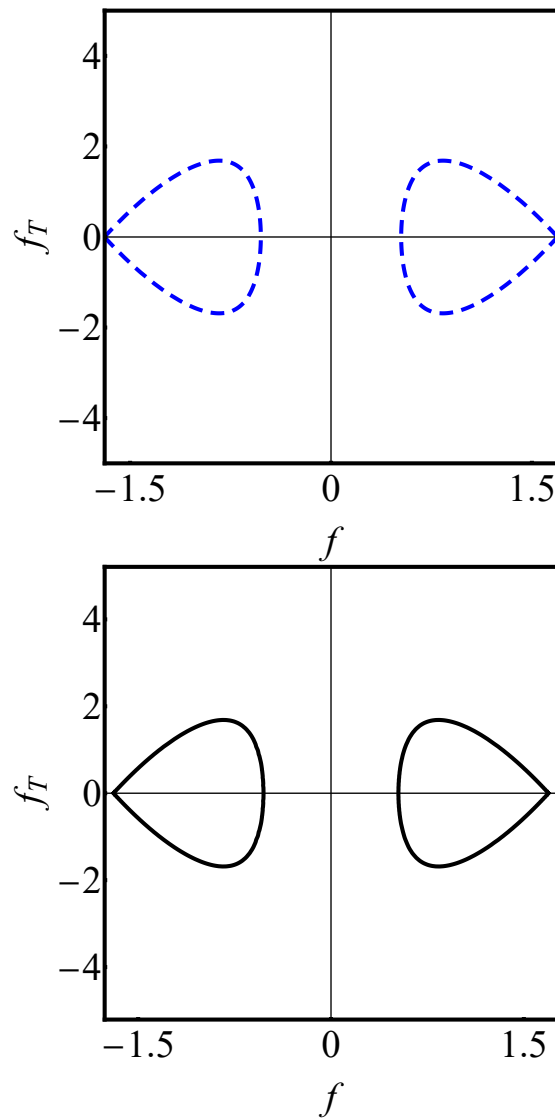
$$\begin{cases} \frac{3A^2 B d_0 - 4A B d_0 \Omega - 2B d_0^2 e}{B^2 \Gamma^2 d_0^2} = -1 \\ A^3 d_0 - 2A^2 d_0 \Omega - 2A d_0^2 e + c_1^2 = 0 \end{cases}$$

Αποδεχόμαστε το ζεύγος τιμών $\Gamma = 1.60878$ και $k = 1$. Παρατηρούμε ότι το μόδιο k παίρνει την ειδική οριακή τιμή $k = 1$, γεγονός που μας προϋποθέτει για ειδική λύση της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A + B \operatorname{sn}(\Gamma T; k^2)}$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις κλειστές τροχιές. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω της εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $f(T)$. Το αποτέλε-

Κεφάλαιο 5 5.4. Λύσεις της εξίσωσης NLS μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων

σμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) για τις ίδιες σταθερές όπως στο Σχήμα 5.49.

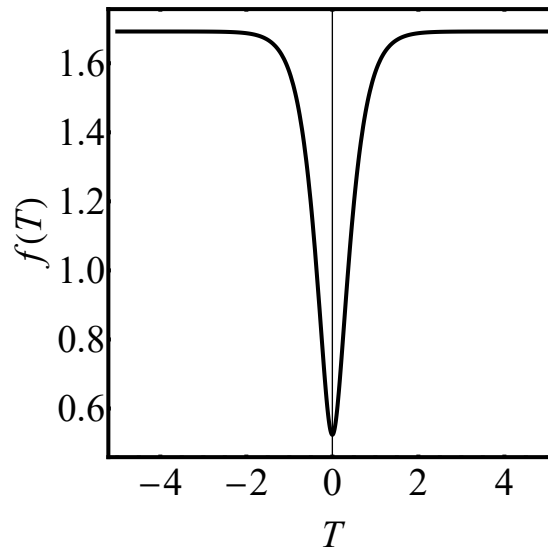


Σχήμα 5.49: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των τεσσάρων ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συ-

μπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn περιγράφει τις κλειστές περιοχές της διαχωρίστριας καμπύλης στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31).

Τέλος για τις κλειστές περιοχές θα παρουσιάσουμε και την γραφική παράσταση της λύσης της εξίσωσης NLS, στο Σχήμα 5.50.



Σχήμα 5.50: Η λύση της εξίσωσης NLS για τις κλειστές τροχιές της περίπτωσης των δύο διπλών και δύο απλών ριζών.

Επειδή το μόδιο στην περίπτωση αυτή παίρνει την οριακή ειδική τιμή $k = 1$ όπως έχουμε δει και στο τρίτο κεφάλαιο η ελλειπτική συνάρτηση $\operatorname{sn}(T; k)$ μετατρέπεται στην γνωστή συνάρτηση $\tanh T$.

Ανοιχτή Περιοχή

Αφού προσδιορίσαμε την λύση των κλειστών καμπυλών μέσω της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $\operatorname{sn}(T; k)$ για την περίπτωση των δύο διπλών και των δύο απλών ριζών, τώρα θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής. Πιο συγκεκριμένα η λύση των ανοιχτών καμπυλών θα προσδιοριστεί μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση (5.36). Και εδώ όπως και στην περίπτωση των κλειστών περιοχών θέλουμε να αντιστοιχίσουμε την διαφορική εξίσωση (5.36) με την διαφορική εξίσωση (5.31) μέσω της θεώρησης για την εξίσωση (5.31):

$$f(T) = \sqrt{Ap(\Gamma T) + B}$$

Η εξίσωση (5.31) μέσω της παραπάνω θεώρησης μετατρέπεται στην σχέση (5.37). Επιπλέον από αυτή την αντιστοίχιση προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 4.883559$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = \frac{8.93152}{\Gamma^4} \quad (5.43)$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές περιοχές της διαχωρίστριας καμπύλης. Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης $f_T - f$. Στο Σχήμα 5.51 βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

Στο παραπάνω σχήμα επιλέγουμε τις ίδιες σταθερές d_0, Ω, c_1 και E με τις κλειστές περιοχές της διαχωρίστριας καμπύλης καθώς και τις σταθερές g_2 και g_3 που προκύπτουν από τις σχέσεις (5.43) και (5.41) αντίστοιχα.

Για τις ανοιχτές περιοχές της διαχωρίστριας καμπύλης η λύση της εξίσωσης NLS είναι όμοια με την λύση της NLS για τις ανοιχτές καμπύλες στην περίπτωση των έξι ανοιχτών ριζών. Για το λόγο αυτό η γραφική της παράσταση παραλείπεται.

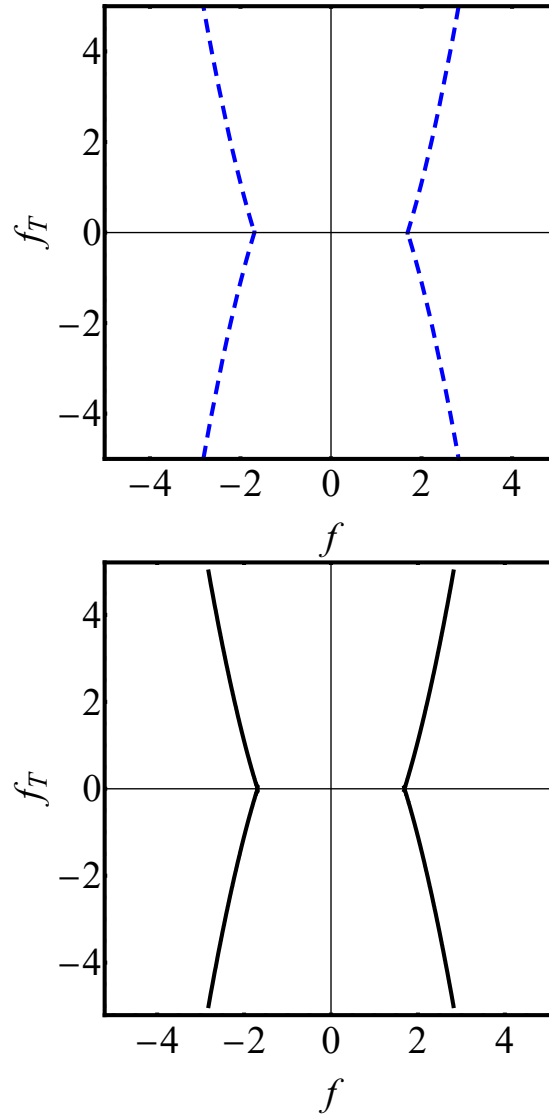
Η περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης αντιστοιχεί σε διακρίνουσα της εξίσωσης $c_1^2 + f^6 d_0 - 2f^4 \Omega d_0 - 2E f^2 d_0^2 = 0$, η οποία είναι ίση με το μηδέν. Για διακρίνουσα ίση με το μηδέν έχουμε ειδικές περιπτώσεις και για τις ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass όπως είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή το $g_2 > 0$ και το $g_3 < 0$. Άρα οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass απλοποιούνται και μετατρέπονται ως εξής:

$$\wp(T; 12\alpha^2, -8\alpha^3) = \alpha + 3\alpha \left\{ \sinh \left[(3\alpha)^{\frac{1}{2}} T \right] \right\}^{-2}$$

με α μια σταθερά και ρίζες του πολυωνύμου τρίτου βαθμού $c_1^2 + \varrho^3 d_0 - 2\varrho^2 \Omega d_0 - 2E \varrho d_0^2 = 0$ όπου $\varrho = f^2$ είναι $e_1 = e_2 = \alpha$ και $e_3 = -2\alpha$.

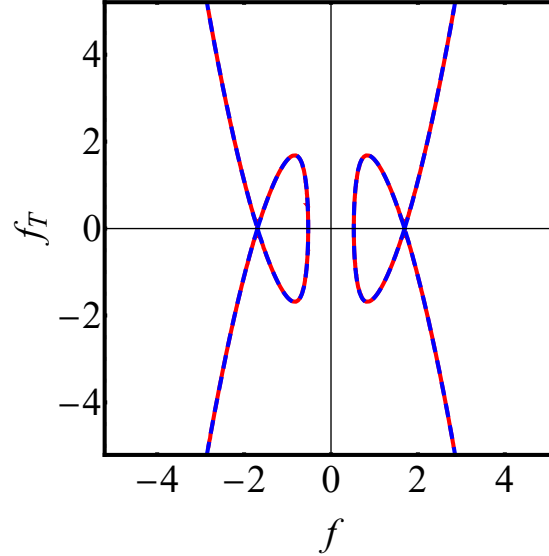
Τέλος θα παρουσιάσουμε το διάγραμμα φάσης 5.52 της εξίσωσης (5.31) συγκρίνοντας ταυτόχρονα τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi για τις κλειστές περιοχές και τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass για τις ανοιχτές περιοχές της διαχωρίστριας καμπύλης.

(Γ) Δύο Τριπλές Ρίζες



Σχήμα 5.51: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα είδος περιοχής, δύο ανοιχτές καμπύλες. Τις ανοιχτές καμπύλες θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.



Σχήμα 5.52: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31). Οι κόκκινες τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης της (5.31) η μπλε διακεκομμένες κλειστές τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $f(T) = \sqrt{A + B \operatorname{sn}(\Gamma T; k^2)^2}$ ενώ η μπλε διακεκομμένες ανοιχτές τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης για την ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

Ανοιχτή Περιοχή

Θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής, οι οποίες θα προσδιοριστούν μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις για την ανοιχτή περιοχή αντιστοιχούμε την διαφορική εξίσωση (5.31) με την διαφορική εξίσωση των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass (5.36). Κάνοντας την θεώρηση για την συνάρτηση f :

$$f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T) + B}$$

και με την αντιστοίχιση των δύο διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 2\sqrt{2}$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 6$ με την χρήση των παραπάνω σχέσεων. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = 0 \tag{5.44}$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες. Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης $f_T - f$. Στο Σχήμα 5.53 βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

(Δ) Δύο Διπλές και Δύο Απλές Πραγματικές Ρίζες

Σε αυτή την περίπτωση σε αντίθεση με την περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης έχουμε ένα είδος περιοχής, δύο ανοιχτές καμπύλες. Επιπλέον οι δύο απλές ρίζες αντιστοιχούν στα σημεία $(-0.836221, 0)$ και $(0.836221, 0)$. Τις ανοιχτές καμπύλες θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Ανοιχτή Περιοχή

Θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής, οι οποίες θα προσδιοριστούν μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις για την ανοιχτή περιοχή αντιστοιχούμε την διαφορική εξίσωση (5.31) με την διαφορική εξίσωση των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass (5.36). Κάνοντας την θεώρηση για την συνάρτηση f :

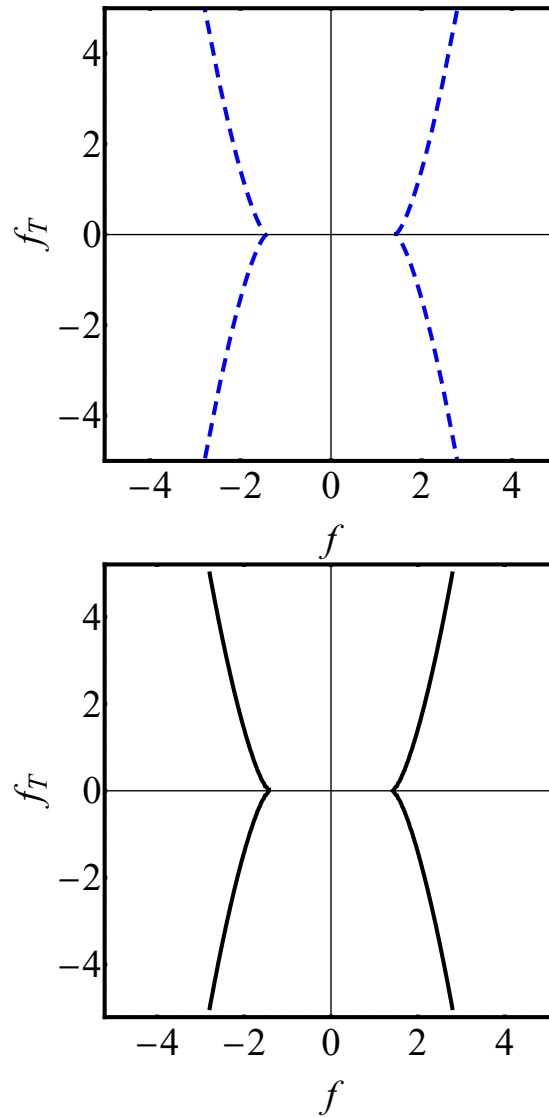
$$f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T) + B}$$

και με την αντιστοίχιση των δύο διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 2\sqrt{2}$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 3.462141$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = \frac{20.3029}{\Gamma^4} \quad (5.45)$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες. Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης $f_T - f$. Στο Σχήμα 5.54 βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

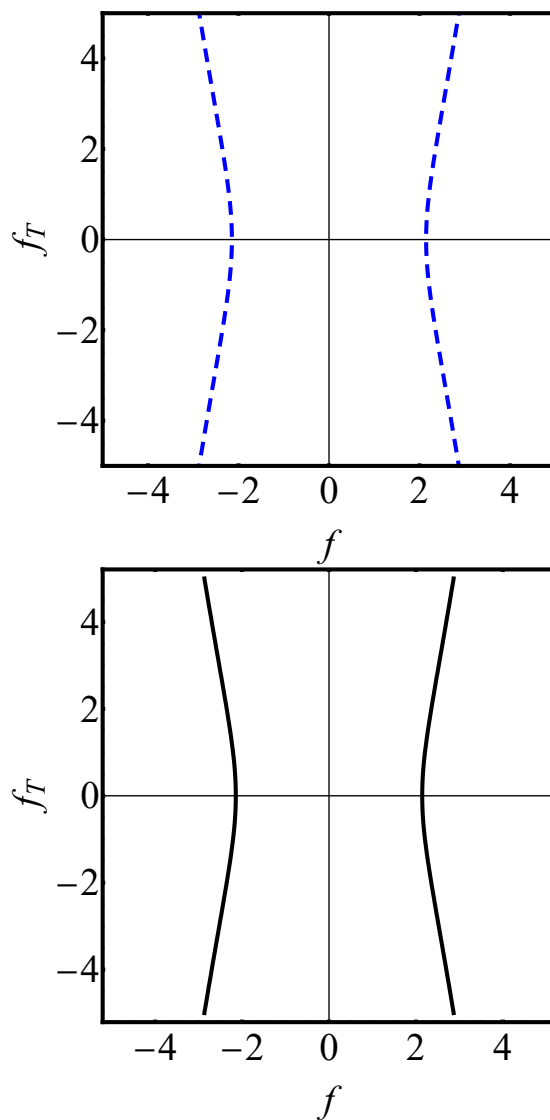
Για την λύση της εξίσωσης NLS, η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε διακρίνουσα της εξίσωσης $c_1^2 + f^6 d_0 - 2f^4 \Omega d_0 - 2E f^2 d_0^2 = 0$ η οποία είναι ίση με το μηδέν. Για διακρίνουσα ίση με το μηδέν έχουμε ειδικές περιπτώσεις και για τις ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass όπως είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή το $g_2 > 0$ και το $g_3 > 0$. Άρα οι ελλειπτικές συναρτήσεις



Σχήμα 5.53: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των έξι ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Weierstrass απλοποιούνται και μετατρέπονται ως εξής:

$$\wp(T; 12\alpha^2, 8\alpha^3) = -\alpha + 3\alpha \left\{ \sin \left[(3\alpha)^{\frac{1}{2}} T \right] \right\}^{-2}$$



Σχήμα 5.54: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

με α μία σταθερά και ρίζες του πολυωνύμου τρίτου βαθμού $c_1^2 + \varrho^3 d_0 - 2\varrho^2 \Omega d_0 - 2E\varrho d_0^2 = 0$ όπου $\varrho = f^2$ είναι $e_1 = e_2 = -\alpha$ και $e_3 = 2\alpha$.

5.4.2 Περιοχή Τεσσάρων Πραγματικών Ριζών

Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε τις λύσεις της εξίσωσης NLS για την περιοχή των τεσσάρων πραγματικών ριζών. Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τον τύπο των ριζών. Ακολουθώντας τα στοιχεία του πίνακα του Παραρτήματος Β θα περιγράψουμε τις λύσεις για κάθε μία από τις βασικές κατηγορίες λύσεων επειδή ποιοτικά οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι ίδιες.

(A.1) Τέσσερις Διακριτές Ρίζες

Σε αυτή την κατηγορία θα δούμε ενδεικτικά την περίπτωση με σταθερές $d_0 = 1, \Omega = 3, c_1 = 1$ και $E > -4.3348223$. Σε αυτή την περίπτωση όπως και σε όλες τις περιπτώσεις που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία έχουμε ένα είδος καμπυλών. Δύο κλειστές καμπύλες. Τις καμπύλες αυτές θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi.

Φραγμένη Περιοχή

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, για τις φραγμένες περιοχές, την περίπτωση των τεσσάρων διακριτών ριζών μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi $\text{sn}(T)$ μέσω της θεώρησης που κάνουμε για την συνάρτηση f : $f(T) = \sqrt{A + Bv^2(\Gamma T)}$ με Γ ελεύθερη παράμετρο. Επομένως για την διαφορική μας εξίσωση μέσω της θεώρησης ισχύει η σχέση (5.32). Έτσι με αυτή την αντιστοιχία καταλήγουμε στις σχέσεις (5.33)-(5.35) για τις σταθερές A, B και E .

Από την προηγούμενη ενότητα γι' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες για τις σταθερές $d_0 = 1, \Omega = 3, c_1 = 1$ και $E = 2$.

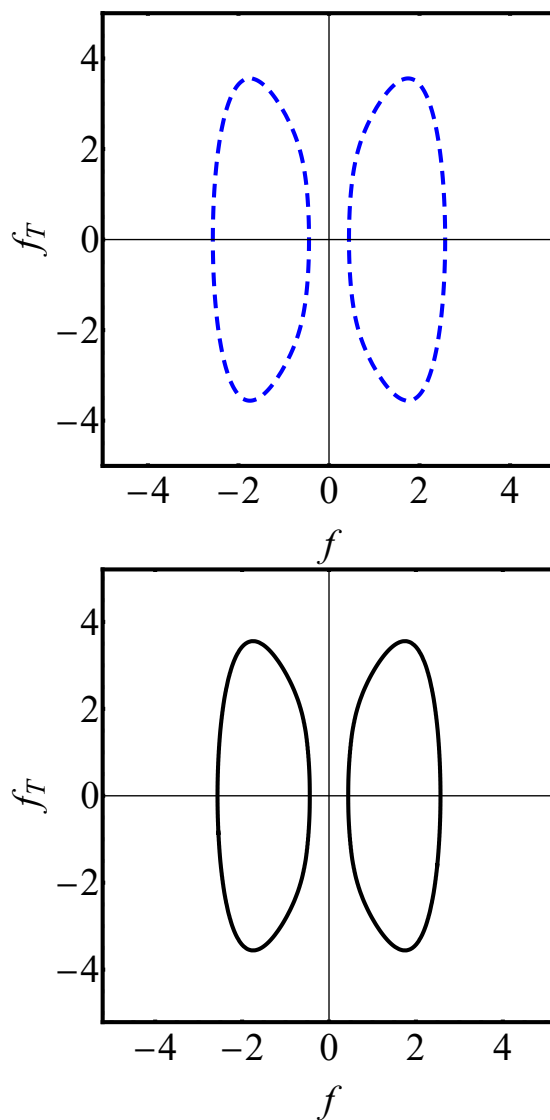
Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω συνθήκες για τις σταθερές και λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3A^2 B d_0 - 4AB d_0 \Omega - 2B d_0^2 e}{B^2 \Gamma^2 d_0^2} = -1 \\ A^3 d_0 - 2A^2 d_0 \Omega - 2A d_0^2 e + c_1^2 = 0 \end{cases}$$

Αποδεχόμαστε το ζεύγος τιμών $\Gamma = 2.71362$ και $k = 0.931506$.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A + B \text{sn}(\Gamma T; k^2)}$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις κλειστές τροχιές. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω της εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $f(T)$. Το αποτέλεσμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) για τις ίδιες σταθερές όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.55.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συ-



Σχήμα 5.55: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των τεσσάρων ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

μπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn περιγράφει τις κλειστές καμπύλες στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31).

Τέλος για τις κλειστές καμπύλες, η λύσης της εξίσωσης NLS είναι περιοδική

για τον λόγο αυτό παραλείπεται.

(A.2) Τέσσερις Διακριτές Ρίζες (Ειδική Περίπτωση $c_1 = 0$)

Σε αυτή την κατηγορία ανήκει η ειδική περίπτωση όπου έχουμε σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 0$ και $E \in \left(0, \frac{\Omega^2}{2}\right)$. Σε αυτή την περίπτωση σε αντίθεση με την προηγούμενη έχουμε δύο είδη καμπυλών. Δύο ανοιχτές καμπύλες και μία κλειστή καμπύλη. Την κλειστή καμπύλη αυτή θα την εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi ενώ τις ανοιχτές καμπύλες θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Φραγμένη Περιοχή

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, για τις φραγμένες περιοχές, και την κλειστή καμπύλη της περίπτωσης αυτής θα την αντιστοιχίσουμε με την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi $\text{sn}(T)$ μέσω της θεώρησης που κάνουμε για την συνάρτηση f : $f(T) = \sqrt{A + Bv^2(\Gamma T)}$ με Γ ελεύθερη παράμετρο. Επομένως για την διαφορική μας εξίσωση μέσω της θεώρησης ισχύει η σχέση (5.32). Έτσι με αυτή την αντιστοιχία καταλήγουμε στις σχέσεις (5.33)-(5.35) για τις σταθερές A, B και E .

Από την προηγούμενη ενότητα γι' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες για τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 0$ και $E = 2$.

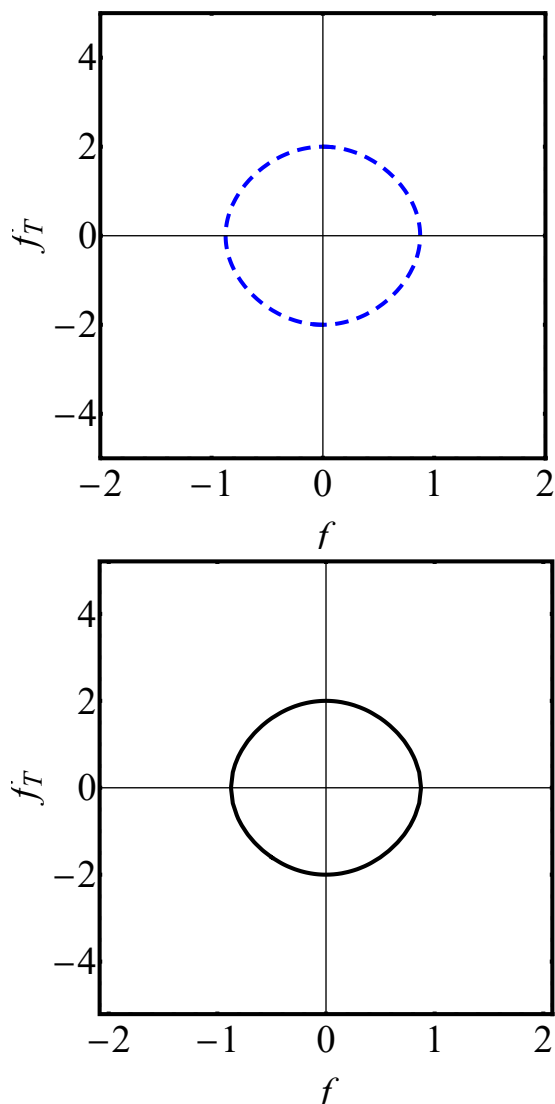
Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω συνθήκες για τις σταθερές και λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3A^2Bd_0 - 4ABd_0\Omega - 2Bd_0^2e}{B^2\Gamma^2d_0^2} = -1 \\ A^3d_0 - 2A^2d_0\Omega - 2Ad_0^2e + c_1^2 = 0 \end{cases}$$

Αποδεχόμαστε το ζεύγος τιμών $\Gamma = 2.28824$ και $k = 0.381966$.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A + B\text{sn}(\Gamma T; k^2)}$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις κλειστές τροχιές. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω της εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $f(T)$. Το αποτέλεσμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) για τις ίδιες σταθερές όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.56.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συμπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn περιγράφει την κλειστή καμπύλη στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31).



Σχήμα 5.56: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Ανοιχτή Περιοχή

Αφού προσδιορίσαμε την λύση της κλειστής καμπύλης μέσω της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $\text{sn}(T; k)$ για την ειδική περίπτωση των τεσσάρων διακριτών ριζών, τώρα θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής. Πιο συγκεκριμένα η λύση των ανοιχτών καμπυλών θα προσδιοριστεί μέσω

των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση (5.36). Και εδώ όπως και στην περίπτωση της κλειστής καμπύλης θέλουμε να αντιστοιχήσουμε την διαφορική εξίσωση (5.37) με την διαφορική εξίσωση (5.31) μέσω της θεώρησης:

$$f(T) = \sqrt{Ap(\Gamma T) + B}$$

Η εξίσωση (5.31) μέσω της παραπάνω θεώρησης μετατρέπεται στην σχέση (5.37). Επιπλέον από αυτή την αντιστοίχιση προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 0$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 2$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = \frac{32}{\Gamma^4} \quad (5.46)$$

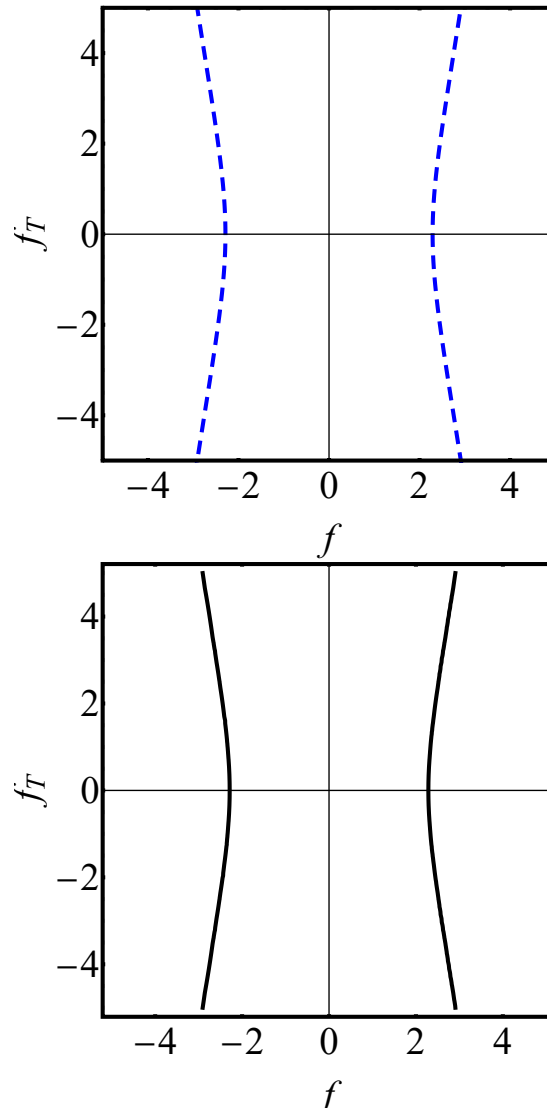
Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες. Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης. Στο Σχήμα 5.57 βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

Στο σχήμα επιλέγουμε τις ίδιες σταθερές d_0, Ω, c_1 και E με την κλειστή καμπύλη καθώς και τις σταθερές g_2 και g_3 που προκύπτουν από τις σχέσεις (5.46) και (5.41) αντίστοιχα.

Τέλος θα παρουσιάσουμε το διάγραμμα φάσης 5.58 της εξίσωσης (5.31) συγκρίνοντας ταυτόχρονα τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi για την κλειστή καμπύλη και τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass για τις ανοιχτές καμπύλες στην ειδική περίπτωση των τεσσάρων διακριτών ριζών.

(B.1) Μία Διπλή και Δύο Απλές Ρίζες (Ειδική Περίπτωση $c_1 = 0$ —Διαχωρίστρια Καμπύλη)

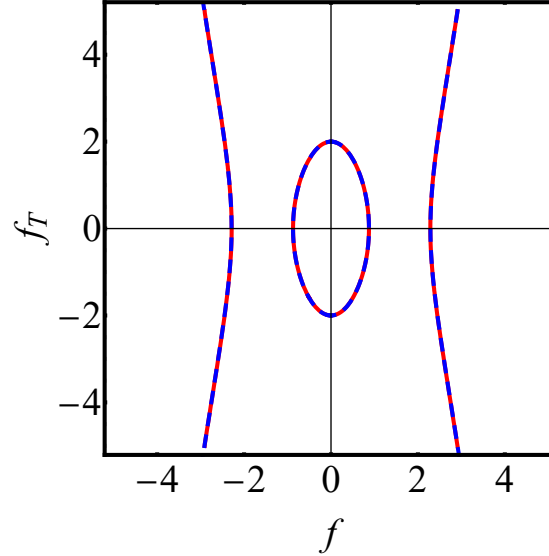
Σε αυτή την κατηγορία ανήκει η ειδική περίπτωση όπου έχουμε σταθερές $d_0 = 1, \Omega = 3, c_1 = 0$ και $E = 2$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα είδος περιοχών, τις δύο κλειστές καμπύλες. Τις κλειστές καμπύλες θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi. Επιπλέον αυτή η καμπύλη είναι διαχωρίστρια καμπύλη και διαχωρίζει το σύνολο των καμπυλών που περιέχουν ένα ζεύγος κλειστών καμπυλών από το σύνολο που περιέχει μονές κλειστές καμπύλες.



Σχήμα 5.57: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Φραγμένη Περιοχή

Και στην περίπτωση αυτή, την διαφορική μας εξίσωση (5.31) μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi $\text{sn}(T)$ μέσω της θεώρησης που κάνουμε για την συνάρτηση f : $f(T) = \sqrt{A + Bv^2}(\Gamma T)$, με Γ ελεύθερη



Σχήμα 5.58: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31). Οι κόκκινες τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης της (5.31) η μπλε διακεκομμένη κλειστή τροχιά αντιστοιχεί στο διάγραμμα φάσης της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $f(T) = \sqrt{A + B \operatorname{sn}(\Gamma T; k^2)^2}$ ενώ η μπλε διακεκομμένες ανοιχτές τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης για την ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

παράμετρο. Επομένως για την διαφορική μας εξίσωση μέσω της θεώρησης ισχύει η σχέση (5.32). Έτσι με αυτή την αντιστοιχία καταλήγουμε στις σχέσεις (5.33)-(5.35) για τις σταθερές A, B και E .

Από την προηγούμενη ενότητα γι' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες για τις σταθερές $d_0 = 1, \Omega = 3, c_1 = 0$ και $E = 0$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω συνθήκες για τις σταθερές και λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3A^2 B d_0 - 4A B d_0 \Omega - 2B d_0^2 e}{B^2 \Gamma^2 d_0^2} = -1 \\ A^3 d_0 - 2A^2 d_0 \Omega - 2A d_0^2 e + c_1^2 = 0 \end{cases}$$

Αποδεχόμαστε το ζεύγος τιμών $\Gamma = 2.449489$ και $k = 1$. Παρατηρούμε ότι το μόδιο k παίρνει την ειδική οριακή τιμή $k = 1$, γεγονός που μας προϊδεάζει για ειδική λύση της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A + B\text{sn}(\Gamma T; k^2)}$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις κλειστές τροχιές. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω της εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $f(T)$. Το αποτέλεσμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) για τις ίδιες σταθερές όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.59.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συμπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn περιγράφει τις κλειστές περιοχές της διαχωριστριας καμπύλης στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31).

Για τις κλειστές περιοχές θα παρουσιάσουμε και την γραφική παράσταση της λύσης της εξίσωσης NLS, στο Σχήμα 5.60.

Επειδή το μόδιο στην περίπτωση αυτή παίρνει την οριακή ειδική τιμή $k = 1$ όπως έχουμε δει και στο τρίτο κεφάλαιο η ελλειπτική συνάρτηση $\text{sn}(T; k)$ μετατρέπεται στην γνωστή συνάρτηση $\text{sech}T$.

(B.2) Μία Διπλή και Δύο Απλές Ρίζες

Στην κατηγορία αυτή ανήκει η ειδική περίπτωση με σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 0$ και $E = 0$. Σε αυτή εδώ την περίπτωση σε αντίθεση με την προηγούμενη έχουμε ένα είδος περιοχής και η διπλή ρίζα αντιστοιχεί στο σημείο $(0, 0)$. Πιο συγκεκριμένα η περίπτωση αυτή αποτελείται από δύο ανοιχτές καμπύλες. Τις ανοιχτές καμπύλες θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

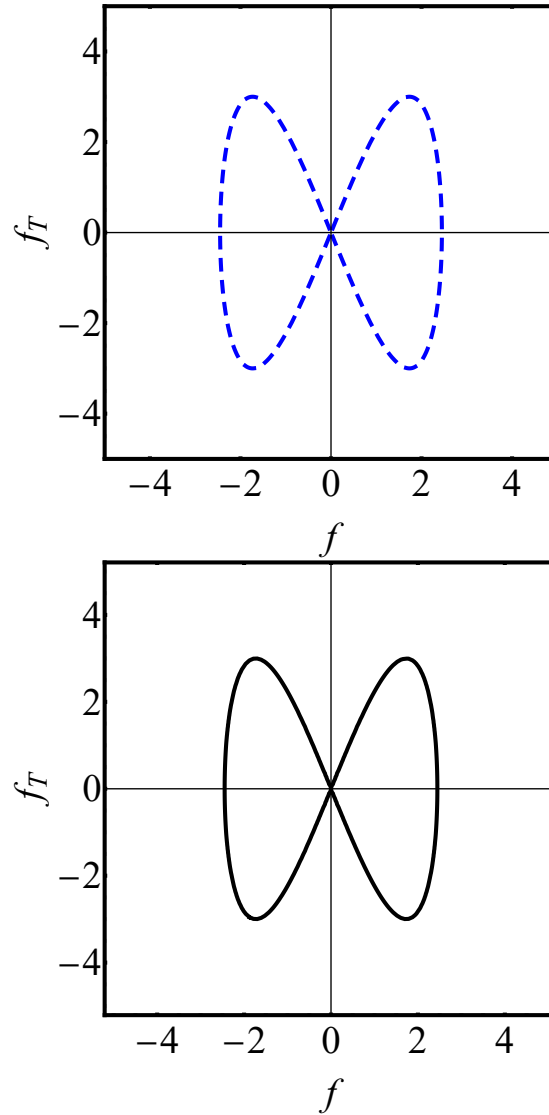
Ανοιχτή Περιοχή

Θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής, οι οποίες θα προσδιοριστούν μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις για την ανοιχτή περιοχή αντιστοιχούμε την διαφορική εξίσωση (5.31) με την διαφορική εξίσωση των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass (5.36). Κάνοντας την θεώρηση για την συνάρτηση f :

$$f(T) = \sqrt{Ap(\Gamma T) + B}$$

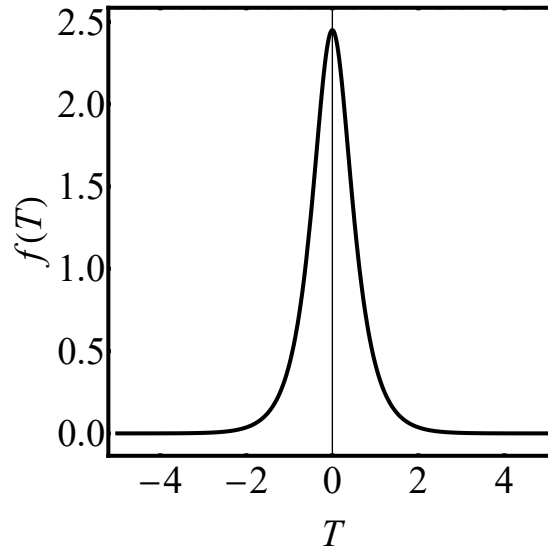
και με την αντιστοίχιση των δύο διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 0$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 0$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = \frac{48}{\Gamma^4}$$



Σχήμα 5.59: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση της μία διπλής και μίας απλής ρίζας. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες. Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κα-



Σχήμα 5.60: Η λύση της εξίσωσης NLS για τις κλειστές τροχιές της περίπτωσης των δύο απλών ριζών και μίας διπλής ρίζας.

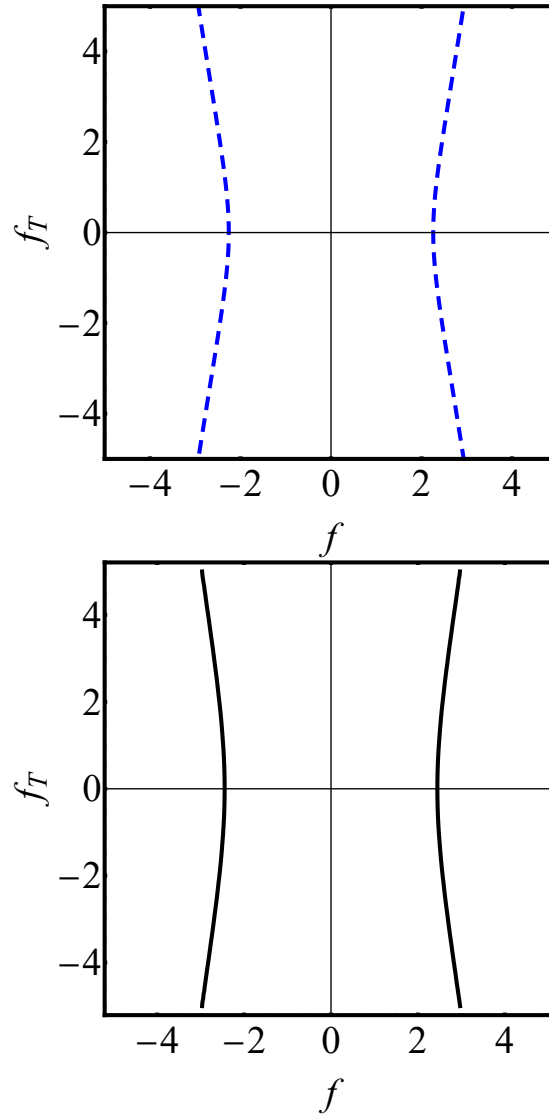
τασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης. Στο Σχήμα 5.61 βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

(Γ) Δύο Διπλές Ρίζες (Διαχωρίστρια Καμπύλη)

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο είδη περιοχών. Μία φραγμένη και δύο ανοιχτές περιοχές. Την φραγμένη περιοχή θα την εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi ενώ τις ανοιχτές περιοχές θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Επιπλέον αυτή η καμπύλη είναι διαχωρίστρια καμπύλη και διαχωρίζει το σύνολο των καμπυλών που περιέχουν κλειστές καμπύλες και με ένα ζεύγος ανοιχτών καμπυλών από το σύνολο των καμπυλών που περιέχουν ένα ζεύγος ανοιχτών καμπυλών.

Φραγμένη Περιοχή

Σε αυτή την περίπτωση όπως και στις προηγούμενες, την διαφορική μας εξίσωση (5.31) μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi $\operatorname{sn}(T)$ μέσω της θεώρησης που κάνουμε για την συνάρτηση f : $f(T) = \sqrt{A + Bv^2(\Gamma T)}$, με Γ ελεύθερη παράμετρο. Επομένως για την διαφορική μας εξίσωση μέσω της θεώρησης ισχύει η σχέση (5.32). Έτσι με αυτή την αντιστοιχία καταλήγουμε στις σχέσεις (5.33)-(5.35) για τις σταθερές A, B και E .



Σχήμα 5.61: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Από την προηγούμενη ενότητα γι' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες για τις σταθερές $d_0 = -1$, $\Omega = 3$, $c_1 = 0$ και $E = 4.5$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω συνθήκες για τις σταθερές και λύνοντας

το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3A^2Bd_0 - 4ABd_0\Omega - 2Bd_0^2e}{B^2\Gamma^2d_0^2} = -1 \\ A^3d_0 - 2A^2d_0\Omega - 2Ad_0^2e + c_1^2 = 0 \end{cases}$$

Αποδεχόμαστε το ζεύγος τιμών $\Gamma = 1.73205$ και $k = 1$. Παρατηρούμε ότι το μόδιο k παίρνει την ειδική οριακή τιμή $k = 1$, γεγονός που μας προϊδεάζει για ειδική λύση της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A + B\text{sn}(\Gamma T; k^2)}$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στην κλειστή τροχιά. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω της εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $f(T)$. Το αποτέλεσμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) για τις ίδιες σταθερές όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.62.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συμπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn περιγράφει την κλειστή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης NLS.

Ανοιχτή Περιοχή

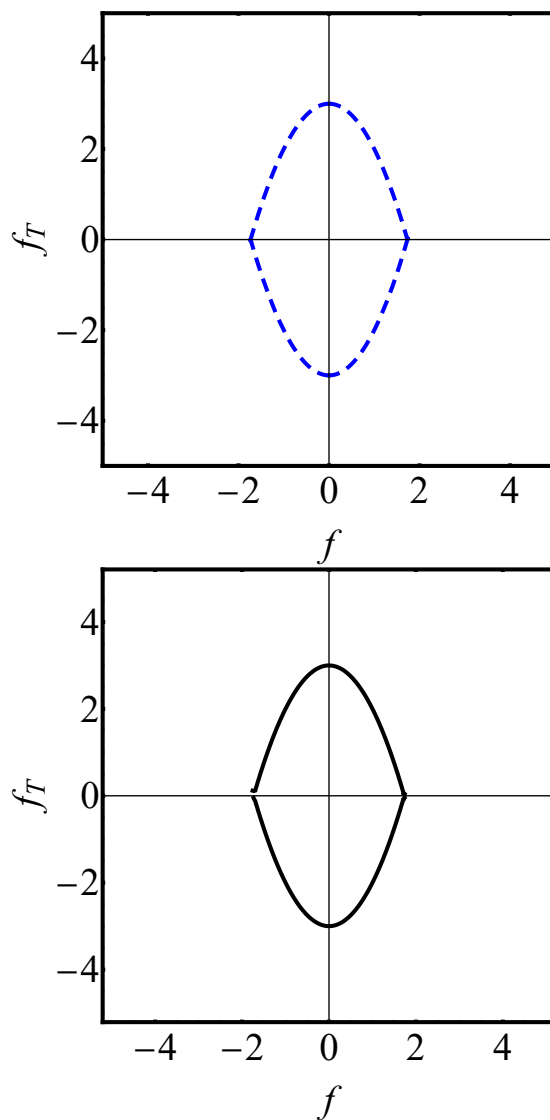
Αφού προσδιορίσαμε την λύση της κλειστής καμπύλης μέσω της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $\text{sn}(T; k)$ για την περίπτωση των δύο διπλών ριζών, τώρα θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής. Πιο συγκεκριμένα η λύση των ανοιχτών καμπυλών θα προσδιοριστεί μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση (5.36). Και εδώ όπως και στην περίπτωση των κλειστών περιοχών θέλουμε να αντιστοιχίσουμε την διαφορική εξίσωση (5.36) με την διαφορική εξίσωση (5.31) μέσω της θεώρησης:

$$f(T) = \sqrt{Ap(\Gamma T) + B}$$

Η εξίσωση (5.31) μέσω της παραπάνω θεώρησης μετατρέπεται στην σχέση (5.37). Επιπλέον από αυτή την αντιστοίχιση προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 0$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 4.5$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = \frac{12}{\Gamma^4} \quad (5.47)$$

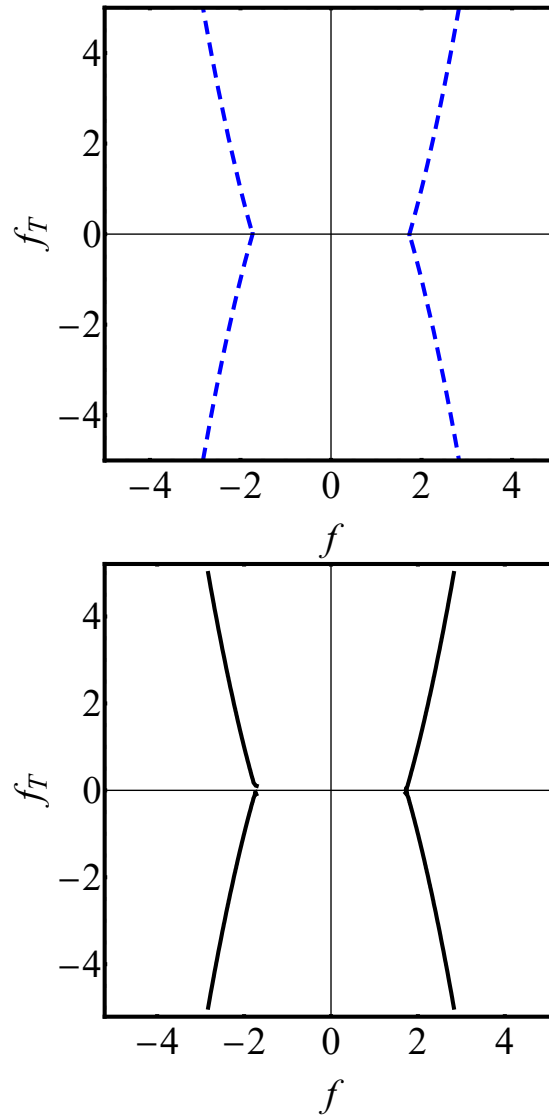
Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές περιοχές της



Σχήμα 5.62: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο διπλών ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

διαχωρίστριας καμπύλης. Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης. Στο Σχήμα 5.63 βλέπουμε την σύγκριση των διαγράμματων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του

διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.



Σχήμα 5.63: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο διπλών ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Στα σχήμα επιλέγουμε τις ίδιες σταθερές d_0, Ω, c_1 και E με την κλειστή περιοχή της διαχωρίστριας καμπύλης καθώς και τις σταθερές g_2 και g_3 που προκύπτουν

από τις σχέσεις (5.47) και (5.42) αντίστοιχα.

Η περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης αντιστοιχεί σε διακρίνουσα της εξίσωσης $c_1^2 + f^6 d_0 - 2f^4 \Omega d_0 - 2E f^2 d_0^2 = 0$ η οποία είναι ίση με το μηδέν. Για διακρίνουσα ίση με το μηδέν έχουμε ειδικές περιπτώσεις και για τις ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass όπως είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή το $g_2 > 0$ και το $g_3 < 0$. Άρα οι ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass απλοποιούνται και μετατρέπονται ως εξής:

$$\wp(T; 12\alpha^2, -8\alpha^3) = \alpha + 3\alpha \left\{ \sinh \left[(3\alpha)^{\frac{1}{2}} T \right] \right\}^{-2}$$

με α μια σταθερά και ρίζες του πολωνύμου τρίτου βαθμού $c_1^2 + \rho^3 d_0 - 2\rho^2 \Omega d_0 - 2E \rho d_0^2 = 0$ όπου $\rho = f^2$ είναι $e_1 = e_2 = \alpha$ και $e_3 = -2\alpha$.

Τέλος θα παρουσιάσουμε το διάγραμμα φάσης 5.64 της εξίσωσης (5.31) συγκρίνοντας ταυτόχρονα τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi για την κλειστή περιοχή και τα αποτελέσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass για τις ανοιχτές περιοχές της διαχωρίστριας καμπύλης.

(Δ) Τέσσερις Ρίζες Ίσες με Μηδέν

Σε αυτή την περίπτωση ένα είδος περιοχής, δύο ανοιχτές καμπύλες. Τις ανοιχτές καμπύλες θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Ανοιχτή Περιοχή

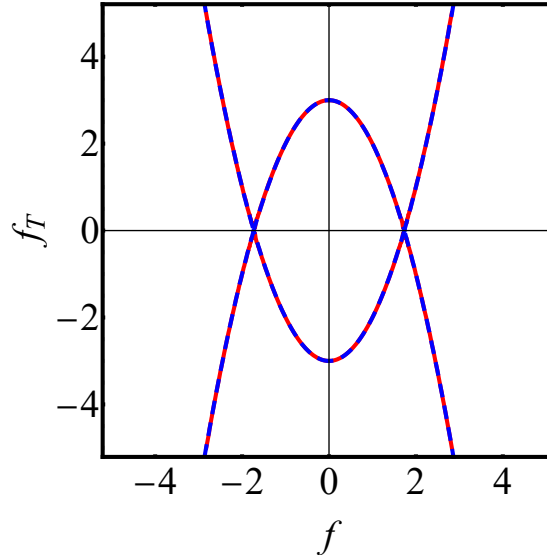
Θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής, οι οποίες θα προσδιοριστούν μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις για την ανοιχτή περιοχή αντιστοιχούμε την διαφορική εξίσωση (5.31) με την διαφορική εξίσωση των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass (5.36). Κάνοντας την θεώρηση για την συνάρτηση f :

$$f(T) = \sqrt{Ap(\Gamma T) + B}$$

και με την αντιστοίχιση των δύο διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 0, c_1 = 0$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 0$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = 0$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες.



Σχήμα 5.64: Διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31). Οι κόκκινες τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης της (5.31) η μπλε διακεκομμένη κλειστή τροχιά αντιστοιχεί στο διάγραμμα φάσης της ελλειπτικής συνάρτησης Jacobi $f(T) = \sqrt{A + B \operatorname{sn}(\Gamma T; k^2)^2}$ ενώ η μπλε διακεκομμένες ανοιχτές τροχιές αντιστοιχούν στο διάγραμμα φάσης για την ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

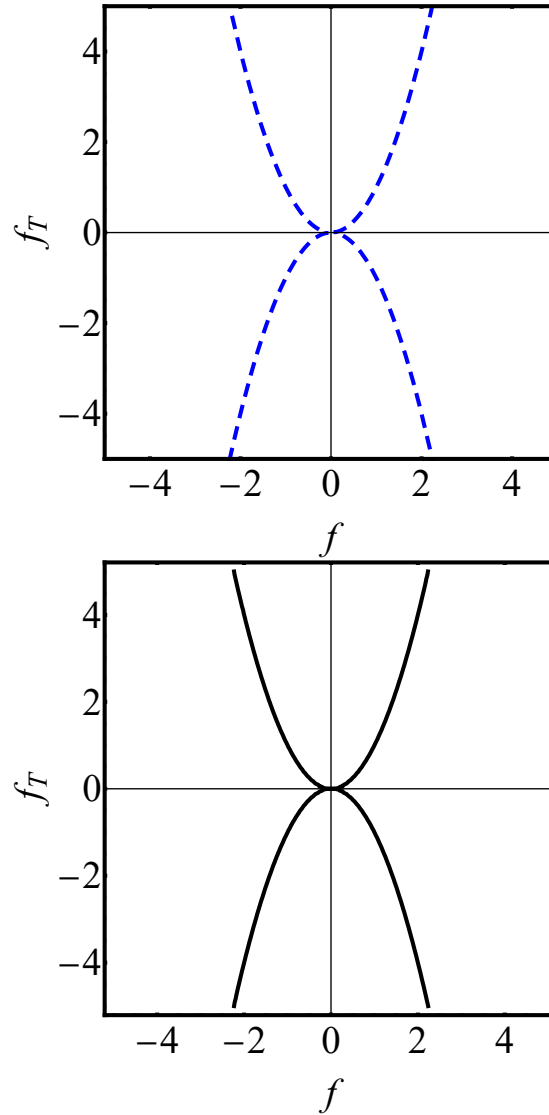
Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης. Στο Σχήμα 5.65 βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

5.4.3 Περιοχή Δύο Πραγματικών Ριζών

Στην υποενότητα αυτή θα περιγράψουμε τις λύσεις της εξίσωση NLS για την περιοχή των δύο πραγματικών ριζών. Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τον τύπο των ριζών. Ακολουθώντας τα στοιχεία του πίνακα του Παραρτήματος Β θα περιγράψουμε τις λύσεις για κάθε μία από τις βασικές κατηγορίες λύσεων επειδή ποιοτικά οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι ίδιες.

(A.1) Δύο Διακριτές Ρίζες (Δύο Ανοιχτές Καμπύλες)

Σε αυτή την κατηγορία θα πάρουμε ενδεικτικά την περίπτωση $d_0 = -1, \Omega =$



Σχήμα 5.65: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των τεσσάρων ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

$3, c_1 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Σε αυτή την κατηγορία έχουμε ένα είδος περιοχής, δύο ανοιχτές καμπύλες. Τις ανοιχτές καμπύλες θα τις εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass.

Ανοιχτή Περιοχή

Θα προσδιορίσουμε την λύση των ανοιχτών καμπυλών της περίπτωσης αυτής, οι οποίες θα προσδιοριστούν μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις για την ανοιχτή περιοχή αντιστοιχούμε την διαφορική εξίσωση (5.31) με την διαφορική εξίσωση των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass (5.36). Κάνοντας την θεώρηση για την συνάρτηση f :

$$f(T) = \sqrt{Ap(\Gamma T) + B}$$

και με την αντιστοίχιση των δύο διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν οι σχέσεις (5.38)-(5.41) για τις σταθερές A, B, E και g_3 . Θεωρώντας τις σταθερές $d_0 = -1, \Omega = 3, c_1 = 3$, για την περίπτωση αυτή θέλουμε να βρούμε την τιμή του g_2 όταν $E = 2$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις. Άρα προκύπτει τελικά:

$$g_2 = \frac{32}{\Gamma^4}$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$ η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στις ανοιχτές καμπύλες. Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα φάσης. Στο Σχήμα 5.66 βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων φάσης της εξίσωσης (5.31) και του διαγράμματος φάσης της εξίσωσης $f(T) = \sqrt{A\wp(\Gamma T; g_2, g_3) + B}$.

(A.2) Δύο Διακριτές Ρίζες (Κλειστή Καμπύλη)

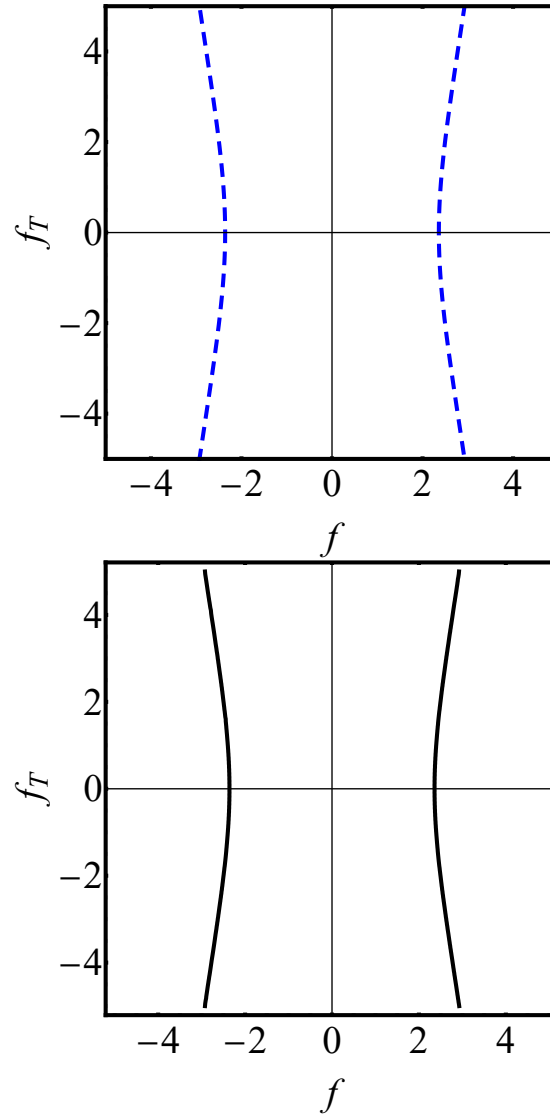
Σε αυτή την κατηγορία θα δούμε ενδεικτικά την ειδική περίπτωση με σταθερές $d_0 = 1, \Omega = -3, c_1 = 0$ και $E > 0$. Σε αυτή την περίπτωση όπως και σε όλες τις περιπτώσεις που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία έχουμε ένα είδος καμπυλών η οποία αποτελείται από μία κλειστή καμπύλη. Την κλειστή καμπύλη θα την εκφράσουμε μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi.

Φραγμένη Περιοχή

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, για την φραγμένη περιοχή, την περίπτωση των δύο διακριτών ριζών μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi $\text{sn}(T)$ μέσω της θεώρησης που κάνουμε για την συνάρτηση f : $f(T) = \sqrt{A + Bv^2(\Gamma T)}$ με Γ ελεύθερη παράμετρο. Επομένως για την διαφορική μας εξίσωση μέσω της θεώρησης ισχύει η σχέση (5.32). Έτσι με αυτή την αντιστοιχία καταλήγουμε στις σχέσεις (5.33)-(5.35) για τις σταθερές A, B και E .

Από την προηγούμενη ενότητα γι' αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες για τις σταθερές $d_0 = 1, \Omega = -3, c_1 = 0$ και $E = 2$.

Κεφάλαιο 5 5.4. Λύσεις της εξίσωσης NLS μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων



Σχήμα 5.66: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω συνθήκες για τις σταθερές και λύνοντας

Κεφάλαιο 5 5.4. Λύσεις της εξίσωσης NLS μέσω Ελλειπτικών Συναρτήσεων

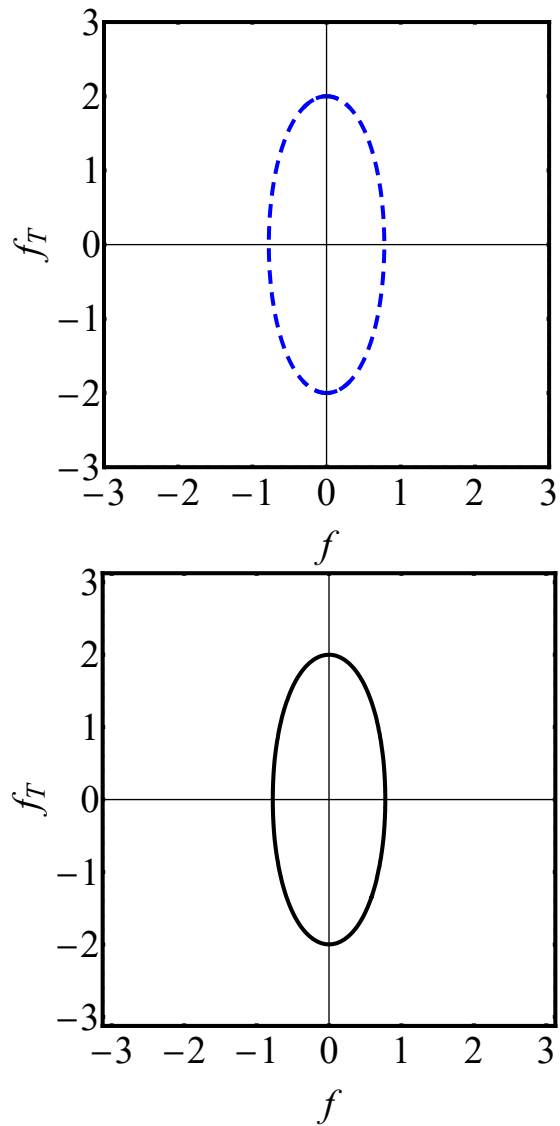
το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3A^2Bd_0 - 4ABd_0\Omega - 2Bd_0^2e}{B^2\Gamma^2d_0^2} = -1 \\ A^3d_0 - 2A^2d_0\Omega - 2Ad_0^2e + c_1^2 = 0 \end{cases}$$

Αποδεχόμαστε το ζεύγος τιμών $\Gamma = 2.685349$ και $k = 0.2897$.

Στην συνέχεια θεωρούμε ως συνάρτηση $f(T) = \sqrt{A + B\text{sn}(\Gamma T; k^2)}$ η οποία είναι η λύση της εξίσωσης NLS που αντιστοιχεί στην κλειστή τροχιά. Επιπλέον υπολογίζουμε την παράγωγο της παραπάνω της εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης για την συνάρτηση $f(T)$. Το αποτέλεσμα αυτού του διαγράμματος φάσης το συγκρίνουμε με το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31) για τις ίδιες σταθερές όπως στο Σχήμα 5.67.

Παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις ταυτίζονται και επομένως συμπεραίνουμε ότι η ελλειπτική συνάρτηση Jacobi sn περιγράφει την κλειστή καμπύλη στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.31).



Σχήμα 5.67: Διάγραμμα φάσης για την περίπτωση των δύο ριζών. Στο επάνω διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν οι ελλειπτικές συναρτήσεις, ενώ στο κάτω η διαφορική εξίσωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διατριβή ασχοληθήκαμε με την ποιοτική ανάλυση διαφορικών εξισώσεων. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να προσδιορίσουμε χαρακτηριστικά των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων και κυρίως των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων χωρίς να χρειάζεται να καταφύγουμε στην αναλυτική λύση. Η ανάγκη αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι η αναλυτική λύση των περισσότερων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων αποτελεί μία πολύπλοκη διαδικασία ή πολλές φορές είναι ακόμα και αδύνατη η αναλυτική τους επίλυση. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε στη μελέτη των διαγραμμάτων φάσης που αποτελεί μία μέθοδο που μας δίνει πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά των λύσεων των μη γραμμικών συστημάτων χωρίς να προχωρήσουμε σε αναλυτική επίλυση κατά ανάγκη. Η βάση μελέτης των διαγραμμάτων φάσης στηρίζεται σε μία απλή διαφορική εξίσωση γεγονός που τα κάνει πολύ εύχρηστα.

Για να κατανοήσουμε, λοιπόν, την χρήση των διαγραμμάτων φάσης αρχικά ξεκινήσαμε με την εύρεση των διαγραμμάτων φάσης για δύο απλά γραμμικά προβλήματα και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των διαγραμμάτων φάσης με τις αντίστοιχες αναλυτικές λύσεις και με τον τρόπο αυτό παρουσιάζουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της λύσης που προκύπτουν μέσω των διαγραμμάτων φάσης όπως περιοδικότητα και ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Στην συνέχεια, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα προηγούμενα παραδείγματα τα χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τα διαγράμματα φάσης που αντιστοιχούν στην εξίσωση του απλού εκκρεμούς που αποτελεί μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση. Το διάγραμμα φάσης που αντιστοιχεί στο απλό εκκρεμές αποτελείται από τρία είδη καμπυλών. Στο διάγραμμα φάσης παρατηρούμε μία πολύ ξεχωριστή καμπύλη η οποία ονομάζεται διαχωρίστρια καμπύλη. Η διαχωρίστρια καμπύλη είναι μοναδική σε ένα διάγραμμα φάσης και έχει την ιδιότητα να διαχωρίζει δύο περιοχές καμπυλών. Επίσης η συνθήκη που ισχύει για την διαχωρίστρια καμπύλη μας βοηθάει να προσδιορίσουμε την περιοχή που ανήκουν να άλλα δύο είδη καμπυλών του διαγράμματος φάσης. Επιπλέον επιλύουμε αναλυτικά την εξί-

σωση του απλού εκκρεμούς η οποία δίνεται μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων και αποτελεί πολύπλοκη διαδικασία.

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις είναι ειδικές συναρτήσεις και αποτελούν σημαντικό μέρος της μελέτης μας για την επίλυση των μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Για τον λόγο αυτό στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε κάποιες βασικές ιδιότητες τους καθώς και τις διαφορικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις αυτές.

Μία άλλη πολύ ενδιαφέρουσα εξίσωση που μελετάμε είναι η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV) η οποία είναι μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει τα αβαθή υδάτινα κύματα. Ταξινομούμε τις τρεις περιοχές του διαγράμματος φάσης που αντιστοιχούν στα οδεύοντα κύματα με βάση των αριθμό των ριζών στο διάγραμμα φάσης και με το τρόπο αυτό βρίσκουμε τις περιοχές για τα διάφορα είδη καμπυλών. Στην συνέχεια με βάση αυτή την ταξινόμηση βρίσκουμε τις λύσεις της KdV με την βοήθεια των ελλειπτικών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας τις διαφορικές εξισώσεις των ελλειπτικών συναρτήσεων κάνουμε αντιστοίχιση των όρων αυτών των εξισώσεων με την εξίσωση KdV για τα οδεύοντα κύματα. Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν συνθήκες για τις σταθερές των ελλειπτικών συναρτήσεων που μας προσδιορίζουν τα διαστήματα που κυμαίνονται η λύσεις κάθε περιοχής καμπυλών. Πιο συγκεκριμένα, τις ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi τις χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την αναλυτική λύση των κλειστών περιοχών ενώ τις ελλειπτικές συναρτήσεις Weierstrass τις χρησιμοποιούμε για την περιγραφή των ανοιχτών περιοχών. Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση που κάνουμε στην ενότητα αυτή για την περίπτωση της διαχωρίστριας καμπύλης είναι ότι καταλήγουμε σε ειδικές τιμές των ελλειπτικών συναρτήσεων οι οποίες απλοποιούνται και μετατρέπονται σε γνωστές υπερβολικές συναρτήσεις.

Τέλος, άλλη μία σημαντική εξίσωση που μελετήσαμε είναι η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS). Σημαντικό ρόλο στην εξίσωση αυτή παίζει το πρόσημο της σταθεράς της χρονικής παραγωγού d_0 . Αν $d_0 > 0$ η εξίσωση ονομάζεται εστιάζουσα (focusing), ενώ αν $d_0 < 0$ η εξίσωση ονομάζεται αφεστιάζουσα (defocusing). Από τις πιο σημαντικές διαφορές των δύο αυτών περιπτώσεων είναι τα λεγόμενα σολιτόνια: η εστιάζουσα εξίσωση έχει σολιτονικές λύσεις που ικανοποιούν μηδενικές συνοριακές συνθήκες στο άπειρο (φωτεινά σολιτόνια), ενώ η αφεστιάζουσα επιδέχεται σολιτονικές λύσεις με μη-μηδενικές (σταθερές) συνοριακές συνθήκες (σκοτεινά σολιτόνια). Έτσι ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο ήταν παρουσιάσαμε μία συνολική εικόνα για τις διάφορες λύσεις της NLS.

Έτσι όπως και στην KdV υπολογίζουμε το διάγραμμα φάσης αναζητώντας λύσεις για τα οδεύοντα κύματα. Ξεκινώντας θεωρώντας περιπτώσεις για την σταθερά d_0 οδηγούμαστε και σε περιπτώσεις για τις υπόλοιπες σταθερές της NLS.

Με αυτόν τρόπο καταλήγουμε σε πληθώρα περιπτώσεων και συνεπώς σε πληθώρα διαγραμμάτων φάσης. Έχοντας κάνει την ανάλυση αυτή προχωρήσαμε σε ομαδοποίηση των περιπτώσεων αυτών με βάση τον αριθμό των ριζών στο διάγραμμα φάσης. Η ομαδοποίηση αυτή μας βοήθησε στην συνέχεια να προχωρήσουμε στην εύρεση των λύσεων μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων της κάθε κατηγορίας ριζών χωρίς να επαναλαμβάνουμε τις ίδιες περιπτώσεις. Χρησιμοποιώντας τις διαφορικές εξισώσεις των ελλειπτικών συναρτήσεων και αντιστοιχώντας αυτές τις εξισώσεις με κάθε περίπτωση για την NLS καταλήγουμε σε συνθήκες για τις σταθερές των ελλειπτικών συναρτήσεων. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζουμε τις περιοχές των λύσεων για την κάθε περίπτωση. Και στην περίπτωση της NLS οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι διαχωριστικές καμπύλες αντιστοιχούν σε ειδικές τιμές των ελλειπτικών συναρτήσεων και έτσι οι ελλειπτικές συναρτήσεις στην περίπτωση των διαχωριστικών καμπυλών ανάγονται σε γνωστές υπερβολικές συναρτήσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. Beléndez, C. Pascual, D. I. Méndez, T. Beléndez, C. Neipp, *Exact solution for the nonlinear pendulum*, Revista brasileira de ensino de física **29**, 645-648, 2007.
2. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1965.
3. H. Hancock, *Lectures on the Theory of Elliptic Functions*, Dover Publications, 2004.
4. J. C. Eilbeck, *Generalised Weierstrass elliptic functions and nonlinear wave equations*, International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA2016), 683-684, 2016.
5. A. Hasegawa, Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Clarendon Press, 1995.
6. D. W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, 2007.
7. M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, 2002.
8. M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves*, Cambridge University Press, 2011.
9. S. H. Strogatz, M. Dichter, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, CRC Press, 2018.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Οι ρίζες της τριτοβάθμιας εξίσωσης

Η τριτοβάθμια εξίσωση μίας μεταβλητής είναι μία εξίσωση της μορφής:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

με $a \neq 0$. Για τις ανάγκες της εργασίας αυτής θεωρούμε ότι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί (γενικά αυτό δεν χρειάζεται).

Αν και οι ρίζες της εξίσωσης μπορούν να γραφούν σε κλειστή μορφή ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η διερεύνησή τους μέσω διακρινουσών, δηλαδή, μέσω ιδιαίτερων ποσοτήτων μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης (πραγματικές, μιγαδικές, πολλαπλές κτλ). Ορίζουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$$

και έτσι αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τις ρίζες της εξίσωσης:

- $\Delta > 0$, η τριτοβάθμια εξίσωση έχει τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες.
- $\Delta < 0$, η τριτοβάθμια εξίσωση έχει μία πραγματική και δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες.
- $\Delta = 0$:
 - Αν $b^2 = 3ac$, η τριτοβάθμια εξίσωση έχει μία τριπλή ρίζα.
 - Αν $b^2 \neq 3ac$, η τριτοβάθμια εξίσωση έχει μία διπλή και μια απλή ρίζα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Αριθμός Ριζών	Γενική Περίπτωση	Περιοχή Και Τύπος Ριζών
Έξι Πραγματικές Ρίζες	$d_0 = -1$ και $\Omega > 0$	1. Έξι Διακριτές Ρίζες: $\Delta' > 0$ και $E \in (E_2, E_3)$ 2. Δύο Απλές και Δύο Διπλές Ρίζες: $\Delta' > 0$ και $E = E_2$ και $E = E_3$ 3. Δύο Τριπλές Ρίζες: $\Delta' = 0$ και $E = E_2$
	$d_0 = 1$ και $\Omega > 0$	1. Τέσσερις Διακριτές Ρίζες: (A.1) $\Delta' < 0$ και $E > E_1$ (Δύο Κλειστές Καμπύλες) (A.2) $\Delta' = 0$ και $c_1 = 0$ και $E \in (E_1, E_2)$ (Δύο Ανοιχτές Καμπύλες και Μία Κλειστή Καμπύλη) 2. Δύο Απλές και Μία Απλή Ρίζα: $\Delta' = 0$ και $c_1 = 0$ και $E = E_2$
	$d_0 = 1$ και $\Omega < 0$	1. Τέσσερις Διακριτές Ρίζες: (A.3) $\Delta' < 0$ και $E > E_1$ (A.4) $\Delta' = 0$ και $E = E_3$ (A.5) $\Delta' > 0$ και $E > E_3$
Δύο Πραγματικές Ρίζες	$d_0 = -1$ και $\Omega > 0$	1. Δύο Διπλές Ρίζες: $\Delta' = 0$ και $c_1 = 0$ και $E = E_2$ (Διαχωρίστρια Καμπύλη)
	$d_0 = -1$ και $\Omega = 0$	1. Τέσσερις Ρίζες Ίσες με Μηδέν: $\Delta' = 0$ και $c_1 = 0$ και $E = E_2$
	$d_0 = -1$ και $\Omega > 0$	$\Delta' < 0$ σε όλες τις περιπτώσεις (Δύο Ανοιχτές Καμπύλες) $\Delta' = 0$ και $E \in (-\infty, E_2) \cup (E_2, +\infty)$ $\Delta' > 0$ και $E \in (-\infty, E_2) \cup (E_3, +\infty)$ $\Delta' = 0$ και $c_1 = 0$ και $E < E_1$
Δύο Πραγματικές Ρίζες	$d_0 = -1$ και $\Omega < 0$	$\Delta' < 0$ σε όλες τις περιπτώσεις
	$d_0 = 1$ και $\Omega > 0$	$\Delta' = 0$ και $c_1 = 0$ και $E > E_2$ (Μία Κλειστή Καμπύλη)
	$d_0 = 1$ και $\Omega > 0$	$\Delta' = 0$ και $c_1 = 0$ και $E < E_1$

Πίνακας για την ταξινόμηση των ριζών στο διάγραμμα φάσης της εξίσωσης (5.14).