ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Γιάννης Δαχής
Αρχιτέκτονας Μηχανικός Α.Π.Θ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΟΜΩΝ ΣΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΚΕΛΥΦΗ

Ιωάννινα, 2019

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην εξειδίκευση:

Υλικά Κατασκευών & Δομές - Σύνθετα Υλικά

που απονέμει το Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την ……………………………. από την εξεταστική επιτροπή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	**ΒΑΘΜΙΔΑ**
1. Ευάγγελος Χατζηγεωργίου,	Αναπληρωτής Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων, Επιβλέπων
2. Βασίλειος Καλπακίδης,	Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων
3. Κωνσταντίνος Μπέλτσιος,	Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία εκπονήθηκε στο τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Ο συντελεστής που βοήθησε είναι ο επιβλέπων της διπλωματικής, ο κ. Χατζηγεωργίου, ο οποίος έδωσε την κύρια κατεύθυνση για τη δημιουργία του συστήματος και με την βοήθειά του πήρε τη συγκεκριμένη μορφή η τελική εργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η 4D εκτύπωση είναι η διαδικασία παραγωγής αντικειμένων όπου πέρα από τις τρεις διαστάσεις (x,y,z) του χώρου, κύρια παράμετρος κατασκευής είναι και η τέταρτη διάσταση (t) του χρόνου. Δηλαδή έχουμε υλικά τα οποία πέρα από την αρχική τους μορφοποίηση σε χρόνο t_0 έχουν τη δυνατότητα μεταβολής, δηλαδή σε χρόνο t’, να οδηγηθούν στην τελική τους μορφή.

Οπότε η συζήτηση αφορά πλέον υλικά με τη δυνατότητα προγραμματισμού της μεταβολής των φυσικών ιδιοτήτων τους (programmable matter). Αυτή η μεταβολή από μία σταθερή κατάσταση σε μία άλλη σταθερή κατάσταση με την επιβολή εξωτερικού ερεθίσματος (θερμότητα, τάση, δύναμη, κ.ά.) μπορεί να παρομοιαστεί με την αλλαγή φάσης των υλικών. Σκοπός της διπλωματικής είναι η δημιουργία ενός συστήματος που θα πραγματοποιεί αυτή την αλλαγή και ενός μαθηματικού μοντέλου που θα περιγράφει τη φυσική διαδικασία, δίνοντάς μας όλες τις απαραίτητες πληροφορίες.

Η διπλωματική εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση του θέματος της εργασίας και το δεύτερο την εφαρμογή - επίλυση ενός συγκεκριμένου προβληματισμού.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελείται από τα βασικά στοιχεία της διαφορικής γεωμετρίας· τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της καμπυλότητας σε καμπύλες και επιφάνειες. Κύριο στοιχείο είναι οι ισομετρίες όπου αντιλαμβανόμαστε τη μεταβολή μιας επιφάνειας και το theorema egregium του Gauss που αποδεικνύει πως η καμπυλότητα Gauss σχετίζεται με τις ισομετρίες.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιγράφει τα πολύτοπα των δύο και τριών διαστάσεων, δηλαδή τα πολύγωνα και τα πολύεδρα που θα βοηθήσουν για να μεταβούμε από τη συνεχή στη διακριτή μορφή.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται ορισμένα στοιχεία της διακριτής διαφορικής γεωμετρίας και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας σε διακριτές επιφάνειες όπως τα πολύεδρα.

Το τέταρτο κεφάλαιο αναλύει τα στοιχεία της θεωρίας γραφών που χρησιμοποιούνται στην εργασία για την ανάλυση του αναπτύγματος, καθώς και σε ποια κομμάτια δημιουργούνται τομές.

Το πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνει ορισμένα στοιχεία από την υπολογιστική γεωμετρία που είναι απαραίτητα για τον σχεδιασμό καμπυλών και επιφανειών, όπως και μικρό τμήμα από τη θεωρία που έχει δημιουργηθεί για την ανάλυση των αναπτυγμάτων.

Το έκτο κεφάλαιο περιγράφει τα αυξητικά υλικά, τις δομές που οδηγούν σε αρνητικό λόγο Poisson και τις ιδιότητές τους.

Το έβδομο κεφάλαιο αποτελείται από ορισμένα στοιχεία της μηχανικής των μετα-υλικών που εφαρμόζονται στην εργασία, όπως η μνήμη σχήματος.

Το όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζει τη μηχανική του απαραμόρφωτου σώματος με τη χρήση της γραφοστατικής. Ο σκοπός είναι να μπορεί να δημιουργηθεί μια μορφή τέτοια ώστε το φορτίο που ασκείται πάνω της να μπορεί να αναλυθεί με τη γραμμή ωθήσεων και να μεταφερθεί θλιπτικά στο έδαφος ώστε να μπορεί να κάνει το σύστημα να ξανά αλλάξει φάση και να επιστρέψει στην επίπεδη μορφή του.

Από το ένατο κεφάλαιο ξεκινάει το Β’ μέρος όπου αρχικά αναλύεται με τη χρήση κόμβων η συνδεσμολογία της αυξητικής δομής.

Στο δέκατο κεφάλαιο κατασκευάζεται γεωμετρικά η μοναδιαία κυψελίδα της αυξητικής δο-

μής και παράγονται οι τύποι της παραμόρφωσής της.

Το ενδέκατο κεφάλαιο παρουσιάζει το σύστημα αλλαγής φάσης, το οποίο αποτελείται από την αυξητική δομή σε συνδυασμό με τρία ελατήρια έλξεως και περιγράφει με τη χρήση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος την αλλαγή φάσης και τη μνήμη του συστήματος.

Το δωδέκατο κεφάλαιο περιγράφει γεωμετρικά το μετασχηματισμό του συστήματος από μία επίπεδη επιφάνεια μηδενικής καμπυλότητας σε μία θολωτή κατασκευή με θετική καμπυλότητα Gauss. Δίνοντας την αρχική διακριτή καμπυλότητα, ο αλγόριθμος υπολογίζει τα διαφορετικά μεγέθη σε όλα τα στοιχεία και τις υπόλοιπες διακριτές καμπυλότητες σε όλους τους κόμβους του συστήματος. Επίσης υπολογίζονται όλοι οι άξονες περιστροφής της αυξητικής δομής, οι γωνίες και παρουσιάζονται γεωμετρικές επιλύσεις για όλους τους αγνώστους.

Το δέκατο τρίτο κεφάλαιο χρησιμοποιεί τη θεωρία γραφών για τη δημιουργία του γενετικού δέντρου του αναπτύγματος.

Το παράρτημα αποτελείται από διαγράμματα και σχέδια που επεξηγούν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου.

Το τελικό αποτέλεσμα της εργασίας είναι:

Η κατασκευή γεωμετρικών μοντέλων που κάνουν εφικτή την ισομετρία ενός επιπέδου σε μία επιφάνεια θετικής διακριτής καμπυλότητας.

Η δημιουργία ενός συστήματος που έχει τη δυνατότητα αλλαγής φάσης σε προσχεδιασμένες τελικές καταστάσεις.

Η ιδιότητα των αυξητικών δομών να παράγουν επιφάνειες θετικής καμπυλότητας Gauss είναι γνωστή και παράγεται με την κάμψη των δομών. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται εφελκυσμός για την παραγωγή συνκλαστικών επιφανειών το οποίο είναι κάτι που δεν έχει εντοπισθεί στη βιβλιογραφία.

Επίσης γίνεται μια περαιτέρω ανάλυση των περιστρεφόμενων τριγωνικών αυξητικών δομών.

Όλα τα παραπάνω χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία ενός αλγόριθμου που μπορεί, δοθέντος το μέγεθος του αρχικού στοιχείου Lo και της αρχικής διακριτής καμπυλότητας, να παράγει όλα τα απαραίτητα γεωμετρικά μεγέθη για τη δημιουργία του συστήματος.

Οι βασικές εφαρμογές μιας τέτοιας κατασκευής ξεκινούν από τη δημιουργία προγραμματισμένων υλικών που παράγουν συγκεκριμένα τελικά αποτελέσματα και την ενσωμάτωση της τέταρτης διάστασης του χρόνου στις 3D εκτυπώσεις. Το κύριο χαρακτηριστικό που επιφέρει το μετασχηματισμό στο σύστημα είναι η γεωμετρία, που μπορεί να διατηρηθεί ανεξαρτήτως κλίμακας. Σαν αποτέλεσμα το σύστημα μπορεί να βρει εφαρμογές από τη μικροκλίμακα και την επιστήμη των υλικών μέχρι τη μακροκλίμακα και τις κατασκευές.

Περαιτέρω μελλοντική έρευνα μπορεί να πραγματοποιηθεί προκειμένου να γίνει πιο αυστηρά μαθηματική η επίλυση του προβλήματος και να δημιουργήσει ένα πιο γενικό πλαίσιο για περισσότερο πολύπλοκες μορφές. Επίσης θα μπορούσε να αναπτυχθεί και να συνδυαστεί η στατική της κατασκευής στον αλγόριθμο για μεγαλύτερη εποπτεία που θα μπορούσε να αναλύσει την τάση που χρειάζεται σύμφωνα με τις σταθερές κάθε ελατηρίου για την αλλαγή φάσης του συστήματος.

ABSTRACT

4D printing is the process of producing objects in which time, i.e the fourth dimension, is a basic construction parameter together with the three dimensions (x,y,z) of space. In other words, we have materials which, besides their initial form at time t0, have the ability to transform at time t' into their final form.

So we are talking about programmable matter,that is, materials with the ability to program their physical properties. This change from one state to another with the imposition of an external stimulus (heat, voltage, force, etc.) can be likened to phase transition. The aim of the thesis is to create a system that can perform this transition, and a mathematical model that will describe the physical process by giving us all the essential data.

The diploma thesis is divided into two parts. The first part includes the essential theoretical background, and the second part the application, that is, an algorithm for an isometry from a flat surface to a double curvature surface using an auxetic structure.

The first chapter consists of the basic elements of differential geometry which are the mathematical tools used to describe curvature on curves and surfaces. The main element is the isometry where we perceive the transformation of the surface and Gauss's theorema egregium that demonstrates that Gauss curvature is associated with isometries.

The second chapter describes the polytopes of two and three dimensions, i.e. polygons and polyhedra, which will help the transition from the continuous to the discrete form.

The third chapter describes elements of discrete differential geometry in order to use concepts of differential geometry on discrete surfaces such as polyhedra.

The fourth chapter analyzes graph theory which is used in the thesis for the analysis of the unfolding, as well as in which place the cuts will be created.

The fifth chapter contains some elements of computational geometry that are necessary for the design of curves and surfaces, and a small part of the theory developed for the unfolding of surfaces.

The sixth chapter describes the auxetic materials, that is, the structures with negative Poisson ratio and their properties.

The seventh chapter consists of some elements of the mechanics of meta-materials that are applied to the thesis, such as shape memory.

The eighth chapter presents statics with the use of graphstatic. The goal is to be able to create a form that the load exerted on it can be analyzed with the thurst line so that it can make the system change phase and return to its flat shape.

From the ninth chapter begins the second part where the linking of the auxetic structure is initially analyzed using the nodes of the system.

In the tenth chapter, the unit cell of the auxetic structure is constructed geometrically and the formula of its deformation is produced.

The eleventh chapter presents the phase transition system which consists of the auxetic structure in combination with three springs, and describes the phase transition and the system memory using the system's dynamic energy.

The twelfth chapter describes geometrically the transformation of the system from a flat surface of zero curvature into a vaulted structure with positive Gauss curvature. Given the initial principal distinct curvature, the algorithm calculates the different sizes in all the elements and the distinct curvatures at all the nodes of the system. All the rotation axes of the auxetic structure, the angles and the unknown variables are calculated geometrically.

The thirteenth chapter uses graph theory to create the tree of the unfolding.

The appendix consists of diagrams and drawings illustrating the results of the algorithm.

The final result of the work is:

The construction of geometric models that make possible the isometry of a plane on a surface of positive distinct curvature.

Creating a system that has the ability to change phase in pre-designed final forms.

The property of the auxetic structures to produce positive Gauss curvature surfaces is known and is produced by bending the structures. In the present work, tensile strength is used to produce synclastic surfaces.

Also a further analysis of the rotating triangular auxetic structures is made.

All the above are used to create an algorithm that, given the size of the original Lo element and the original discrete curvature, has all the necessary geometric dimensions for creating the system.

The basic applications of such a construction start from the creation of programmable materials that produce specific final results and the incorporation of the fourth dimension of time into 3D prints. The main feature that transforms the system is geometry, which can be maintained regardless of scale. As a result, the system can find applications from the microscale and the science of materials to the macroscale and structures.

Further future research can be carried out to make a more strict mathematical solution and to extend it to a more general framework for more complex forms. Also, the static construction of the algorithm could be developed and combined with the stiffness of the springs, which could analyze the stress required for phase transition of the system.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

time becomes space
R. Wagner, Parsifal, Act I (1882)

ΜΕΡΟΣ Α'

1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μια ομαλή απεικόνιση $\boldsymbol{x}: D \rightarrow \boldsymbol{R}^3$ της οποίας η εικόνα βρίσκεται πάνω σε μια επιφάνεια *M* καλείται παραμέτρηση της περιοχής ***x(D)*** της *M*. Η ομαλότητα της x είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ότι το $\boldsymbol{x_u} \times \boldsymbol{x_v}$ δεν μηδενίζεται ποτέ ή ότι σε κάθε σημείο (*u, v*) της *D* τα διανύσματα των μερικών ταχυτήτων της x είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω ***p*** ένα σημείο της επιφάνειας *M* του $\boldsymbol{R^3}$ και ***x*** μια συντεταγμενική περιοχή της M τέτοια ώστε $\boldsymbol{x}(u_0, v_0) = \boldsymbol{p}$. Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα ***v*** του $\boldsymbol{R^3}$ στο p είναι εφαπτόμενο στην M εάν και μόνο εάν το v μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{x_u}(u_0, v_0)$ και $\boldsymbol{x_v}(u_0, v_0)$. [1]

1.1 Καμπυλότητα

Η καμπυλότητα είναι μια αριθμητική συνάρτηση. Είναι το μέτρο απόκλισης της καμπύλης από την ευθεία, δηλαδή η καμπυλότητα ορίζεται ως ρυθμός μεταβολής της εφαπτομένης της ευθείας.[2] Η καμπυλότητα μαζί με τη στρέψη, που είναι το μέτρο του κατά πόσο μια καμπύλη δεν περιέχεται σε ένα επίπεδο, προσδιορίζουν το σχήμα μιας καμπύλης.

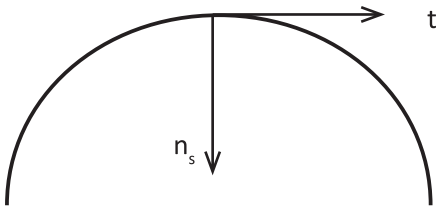
Αν θεωρήσουμε ότι **γ**(t) είναι η θέση ενός κινούμενου σημείου τη χρονική στιγμή t πάνω στην καμπύλη $\boldsymbol{\gamma} \in R^n$, η $d\gamma/dt$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο που δίνει την ταχύτητα του σημείου τη χρονική στιγμή t (ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης κατά μήκος της καμπύλης). Δηλαδή εάν $\gamma:(\alpha, \beta) \rightarrow R^n$ είναι μια παραμετρική καμπύλη, η ταχύτητά της στο σημείο γ(t) είναι $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$. Λέμε ότι η **γ** είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας εάν το $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$. Εάν **γ** είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με παράμετρο *t*, η καμπυλότητα της κ(t) στο σημείο γ(t) είναι η ποσότητα $\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$. Εάν η **γ** δεν είναι μοναδιαίας ταχύτητας, δηλαδή εάν **γ**(t) είναι μια κανονική καμπύλη του R^3, τότε η καμπυλότητά της είναι

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\boldsymbol{\gamma}} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^3}$$

Για καμπύλη ταχύτητας $\mathbf{n}_s$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ είναι $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{t}$, οπότε το $\dot{\boldsymbol{t}} = \ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι κάθετο στο **t** και άρα παράλληλο στο $\mathbf{n}_s$. Επομένως υπάρχει αριθμός κ_s που ονομάζεται προσημασμένη καμπυλότητα της γ τέτοιος ώστε

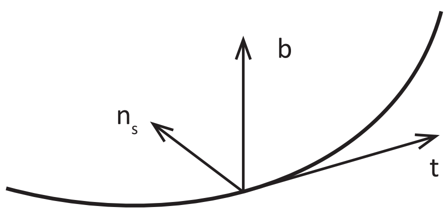
$$\kappa = \|\kappa_s \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} \boldsymbol{n_s}\|$$

Η προσημασμένη καμπυλότητα είναι ο ρυθμός περιστροφής του εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης. Είναι θετική ή αρνητική αναλόγως του εάν το t περιστρέφεται κατά την αντιωρολογιακή ή την ωρολογιακή φορά κατά την κατεύθυνση αύξησης του s. [3]



εικόνα 1.1 εφαπτόμενο διάνυσμα t και κάθετο διάνυσμα n καμπύλης

1.2 Στοιχεία Frenet



εικόνα 1.2 τρίακμο Frenet

Έστω γ(s) μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του R^3 και έστω $\boldsymbol{t} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμά της. Εάν η καμπυλότητα κ(s) είναι μη μηδενική, ορίζουμε ως κύριο κάθετο διάνυσμα της **γ** στο σημείο **γ**(s) το διάνυσμα

$$\boldsymbol{n}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\dot{\boldsymbol{t}}(s)$$

Αφού $\|\dot{\boldsymbol{t}}(s)\|=\kappa$, το n είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Επιπλέον, έχουμε $\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{t}=0$, άρα τα t και n είναι κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα. Έπεται ότι το $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε αμφότερα τα t και n. Επομένως το σύνολο **{t,n,b}** είναι μια ορθοκανονική βάση του R^3 που ονομάζεται τρίακμο Frenet και είναι δεξιόστροφη, δηλαδή : $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}$. Έχουμε ότι το $\dot{\boldsymbol{b}}$ είναι παράλληλο στο **n**, άρα $\dot{\boldsymbol{b}}=-\tau\boldsymbol{n}$ για κάποιο αριθμό τ, ο οποίος καλείται στρέψη της γ και ορίζεται μόνο αν η καμπυλότητα είναι μη μηδενική. Ορίζουμε ως στρέψη **τ** μιας τυχούσας κανονικής καμπύλης **γ** ,

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}\times\ddot{\boldsymbol{\gamma}})\cdot\dddot{\boldsymbol{\gamma}}}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\times\ddot{\boldsymbol{\gamma}}\|^2}$$

Αν **γ** είναι μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας του R^3 με πουθενά μηδενική καμπυλότητα, τότε $\dot{\boldsymbol{t}}=\kappa\,\boldsymbol{n}$, $\dot{\boldsymbol{n}}=-\kappa\,\boldsymbol{t}+\tau\,\boldsymbol{b}$, $\dot{\boldsymbol{b}}=-\tau\boldsymbol{n}$ δηλαδή :

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{t}}\\ \dot{\boldsymbol{n}}\\ \dot{\boldsymbol{b}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$$

οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις Frenet-Serret. [3]

1.3 Πρώτη θεμελιώδης μορφή

Το μαθηματικό αντικείμενο που μας επιτρέπει να μετρούμε μήκη πάνω σε μια επιφάνεια, καθώς επίσης γωνίες και εμβαδά, είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή. Το μήκος μιας καμπύλης ***γ*** πάνω σε μια επιφάνεια *S* είναι $\int\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|dt$. Αν $\boldsymbol{\sigma}(u,v)$ είναι ένα τμήμα επιφάνειας της *S,* τότε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της S σε ένα σημείο p της εικόνας του σ μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{\sigma_u}$ και $\boldsymbol{\sigma_v}$, οπότε έχουμε :

$$\gamma(t)=\sigma(u(t),v(t)) \quad \text{και} \quad \dot{\gamma}(t)=\dot{u}\sigma_u+\dot{v}\sigma_v \quad \text{επομένως :}$$

$$\langle\dot{\boldsymbol{\gamma}},\dot{\boldsymbol{\gamma}}\rangle=\dot{u}^2\langle\boldsymbol{\sigma_u},\boldsymbol{\sigma_u}\rangle+2\dot{u}\dot{v}\langle\boldsymbol{\sigma_u},\boldsymbol{\sigma_v}\rangle+\dot{v}^2\langle\boldsymbol{\sigma_v},\boldsymbol{\sigma_v}\rangle$$

Αν θέσουμε $E=\|\boldsymbol{\sigma_u}\|^2$, $F=\boldsymbol{\sigma_u}\cdot\boldsymbol{\sigma_v}$, $G=\|\boldsymbol{\sigma_v}\|^2$ προκύπτει ότι $\langle\dot{\boldsymbol{\gamma}},\dot{\boldsymbol{\gamma}}\rangle=E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2$, όπου η έκφραση $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ ονομάζεται πρώτη θεμελιώδης μορφή του τμήματος επιφάνειας σ. Οπότε σε μια καμπύλη γ που ανήκει στην εικόνα τμήματος επιφάνειας σ, το μήκος της δίνεται από

$$\int(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)^{1/2}dt$$ [3]

1.4 Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Ας υποθέσουμε ότι σ είναι ένα τμήμα επιφάνειας του $\boldsymbol{R^3}$ με πρότυπο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα N. Καθώς οι παράμετροι (u,v) του σ μεταβάλλονται σε $(u+\Delta u,v+\Delta v)$, η επιφάνεια απομακρύνεται από το εφαπτόμενο επίπεδό της στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(u,v)$ κατά απόσταση $(\boldsymbol{\sigma}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\boldsymbol{\sigma}(u,v))\cdot\boldsymbol{N}$ η οποία σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor ισούται με :

$$(\boldsymbol{\sigma_u}\Delta u+\sigma_v\Delta v+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma_{uu}}(\Delta u)^2+2\boldsymbol{\sigma_{uv}}\Delta u\Delta v+\sigma_{vv}(\Delta v)^2)+\textit{υπόλοιπο})\cdot\boldsymbol{N}$$

όπου η ποσότητα $\textit{υπόλοιπο}/((\Delta u)^2+(\Delta v)^2)$ τείνει στο μηδέν, καθώς το $((\Delta u)^2+(\Delta v)^2)$ τείνει στο μηδέν. Τα $\boldsymbol{\sigma_u},\boldsymbol{\sigma_v}$ είναι εφαπτόμενα στην επιφάνεια άρα κάθετα στο ***N,*** επομένως έχουμε $\frac{1}{2}(L(\Delta u)^2+2M\Delta u\Delta v+N(\Delta v)^2)$ με $L=\boldsymbol{\sigma_{uu}}\cdot\boldsymbol{N},M=\boldsymbol{\sigma_{uv}}\cdot\boldsymbol{N},N=\sigma_{vv}\cdot\boldsymbol{N}$. Έτσι οδηγούμαστε στην έκφραση $L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2$ που καλείται δεύτερη θεμελιώδης μορφή ενός τμήματος επιφάνειας ***σ***. [3]

1.5 Γωνία τομής θ

Δύο καμπύλες $\boldsymbol{\gamma}$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ μιας επιφάνειας *S* τέμνονται σε ένα σημείο **p**. Ως γωνία τομής θ των $\boldsymbol{\gamma}$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ στο **p** ορίζεται η γωνία των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ και $\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}$ τα οποία υπολογίζονται στα $t=t_0$ και $t=\tilde{t}_0$ αντίστοιχα. Η γωνία θ δίνεται από τη σχέση

$$\cos\vartheta=\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}\|}=\frac{\langle\dot{\boldsymbol{\gamma}},\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}\rangle}{\langle\dot{\boldsymbol{\gamma}},\dot{\boldsymbol{\gamma}}\rangle^{1/2}\langle\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}},\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}\rangle^{1/2}}$$

Αν υποθέσουμε ότι οι $\boldsymbol{\gamma}$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ ανήκουν σε ένα τμήμα επιφάνειας σ της S, θα έχουμε $\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{\sigma}(u(t),v(t))$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)=\boldsymbol{\sigma}(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t))$. Εάν $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή του σ, τότε θα έχουμε :

$$\cos\vartheta=\frac{E\dot{u}\dot{\tilde{u}}+F(\dot{u}\dot{\tilde{v}}+\dot{\tilde{u}}\dot{v})+G\dot{v}\dot{\tilde{v}}}{(E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2)^{1/2}(E\dot{\tilde{u}}^2+2F\dot{\tilde{u}}\dot{\tilde{v}}+G\dot{\tilde{v}}^2)^{1/2}}$$

1.6 Απεικόνιση Gauss - Απεικόνιση Weingarten

Ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ***N*** αντανακλά τον τρόπο με τον οποίο καμπυλώνει μια επιφάνεια *S*. Το ***N*** μεταβάλλεται γρήγορα κοντά στα σημεία όπου η επιφάνεια είναι πολύ καμπυλωμένη, ενώ μεταβάλλεται αργά εκεί όπου η επιφάνεια είναι λιγότερο καμπυλωμένη. Οι τιμές που παίρνει το ***N*** στα διάφορα σημεία της επιφάνειας *S* καταγράφονται από την απεικόνιση Gauss (Gs) της S. Η απεικόνιση αυτή είναι από την επιφάνεια S στη μοναδιαία σφαίρα S^2 που αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο $\boldsymbol{p}\in S$ το σημείο $\boldsymbol{N_p}\in S^2$, όπου $\boldsymbol{N_p}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της *S* στο ***p***.

εικόνα 1.3 απεικόνιση Gauss κάθετου διανύσματος από την επιφάνεια S στη μοναδιαία σφαίρα.

Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται το ***N*** επάνω στην S μετριέται από την παράγωγο της Gs. Η απεικόνιση Weingarten ορίζεται από τη σχέση $W_{\boldsymbol{p},S}=-D_{\boldsymbol{p}}G$ και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της *S* στο $\boldsymbol{p}\in S$ είναι η διγραμμική μορφή του T_pS που δίνεται από τη σχέση $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle_{\boldsymbol{p},S}=\langle W_{p,S}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w}\rangle,\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in T_pS$ και τελικά έχουμε :

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\rangle=L\,du(\boldsymbol{u})du(\boldsymbol{w})+M(du(\boldsymbol{u})dv(\boldsymbol{w})+du(\boldsymbol{w})dv(\boldsymbol{u}))+N\,dv(\boldsymbol{u})dv(\boldsymbol{w})$$

1.7 Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα

Ορίζουμε τους συμμετρικούς 2×2 πίνακες

$$F_I=\begin{pmatrix}E\,F\\F\,G\end{pmatrix}\quad,\quad F_{II}=\begin{pmatrix}L\,M\\M\,N\end{pmatrix}$$

Έστω W η απεικόνιση Weingarten της επιφάνειας S, τότε με τον παραπάνω συμβολισμό προκύπτει ότι $W=F_I^{-1}F_{II}$. Η καμπυλότητα Gauss *K* και η μέση καμπυλότητα *H* της *S* ορίζονται από τις σχέσεις

$$K=det(W)\quad,\quad H=\frac{1}{2}trace(W)$$

Αν $\boldsymbol{p}$ ένα σημείο μιας επιφάνειας S και {$\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}$} η ορθοκανονική βάση του εφαπτόμενου επιπέδου $T_p S$, τότε υπάρχουν αριθμοί κ_1, κ_2 τέτοιοι ώστε $W(\boldsymbol{t_1}) = \kappa_1 \boldsymbol{t_1}$. Οι ιδιοτιμές κ_1, κ_2 ονομάζονται κύριες καμπυλότητες και τα ιδιοδιανύσματα t_1, t_2 κύρια διανύσματα που αντιστοιχούν στις κ_1, κ_2 . Εάν $\kappa_1 = \kappa_2$ τότε το $\boldsymbol{p}$ ονομάζεται ομφαλικό σημείο. Αν υπολογίσουμε την ορίζουσα και το ίχνος της απεικόνισης Weingarten χρησιμοποιώντας τη βάση που αποτελείται από τα κύρια διανύσματα, ο πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

οπότε η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα δίνονται από τις σχέσεις

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \qquad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad .$$

Οι κύριες καμπυλότητες σε ένα σημείο μιας επιφάνειας είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της κάθετης καμπυλότητας όλων των επιφανειακών καμπυλών που διέρχονται από το συγκεκριμένο σημείο και τα κύρια διανύσματα είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών που δίνουν αυτές τις ακρότατες τιμές.

Στα σημεία που η μέγιστη και η ελάχιστη καμπυλότητα είναι ίδιες , $\kappa_1 = \kappa_2$. Προκύπτει ότι η κάθετη καμπυλότητα $k(\boldsymbol{u})$ είναι σταθερή, δηλαδή η Μ κάμπτεται ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις στο $\boldsymbol{p}$. Ένα σημείο $\boldsymbol{p}$ είναι ομφαλικό εάν η $k(\boldsymbol{u})$ είναι σταθερή σε όλα τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα $\boldsymbol{u}$ στο $\boldsymbol{p}$.

Γενικά μπορούμε να παίρνουμε μια ιδέα για το ποιο είναι το πρόσημο της καμπυλότητας Gauss απλά κοιτάζοντας την επιφάνεια Μ το πρόσημο αυτό έχει σημαντική γεωμετρική έννοια.

(α) Εάν $K(\boldsymbol{p}) > 0$ τότε οι κύριες καμπυλότητες $k_1(\boldsymbol{p})$ και $k_2(\boldsymbol{p})$ είναι ομόσημες. Δηλαδή $k(\boldsymbol{u}) < 0$ ή $k(\boldsymbol{u}) > 0$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{u}$ στο $\boldsymbol{p}$. Αν π.χ. $k(\boldsymbol{u}) < 0$, η Μ κάμπτεται απομακρυνόμενη από το εφαπτόμενο επίπεδό της $T_p(M)$ προς όλες τις εφαπτόμενες κατευθύνσεις στο $\boldsymbol{p}$.

(β) Εάν $K(\boldsymbol{p}) < 0$ τότε οι κύριες καμπυλότητες $k_1(\boldsymbol{p})$ και $k_2(\boldsymbol{p})$ είναι ετερόσημες, οπότε η Μ έχει σαγματοειδές σχήμα κοντά στο p.

(γ) Εάν $K(\boldsymbol{p}) = 0$ τότε υπάρχουν δυο περιπτώσεις: είτε η μία κύρια καμπυλότητα να είναι μηδέν είτε και οι δύο. Στην πρώτη περίπτωση η τετραγωνική προσέγγιση $2z = k_1(\boldsymbol{p}) x^2$ είναι ο κύλινδρος, ενώ στη δεύτερη είναι το επίπεδο $z = 0$.

1.8 Έξωθεν γεωμετρία και έσωθεν γεωμετρία

Μπορούμε να χωρίσουμε τη μελέτη της γεωμετρίας μιας επιφάνειας σε δύο κατηγορίες, την έξωθεν γεωμετρία και την έσωθεν γεωμετρία. Στην έξωθεν γεωμετρία γίνεται χρήση κυρίως των φυσικών ευκλείδειων συντεταγμένων (x, y, z) του $\boldsymbol{R^3}$, ενώ στην έσωθεν γεωμετρία χρησιμοποιούνται οι συντεταγμένες {u, v} της ίδιας της επιφάνειας. Είναι φανερό ότι ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες ανήκουν στην επιφάνεια και όχι στον περιβάλλοντα ευκλείδειο χώρο. Η μέση καμπυλότητα Η και ο τελεστής σχήματος είναι παράδειγμα έξωθεν γεωμετρίας, μας δείχνουν πώς μεταβάλλεται η καμπυλότητα στο χώρο και μας βοηθούν να αντιληφθούμε το σχήμα. Παραδείγματος χάριν σε έναν κύλινδρο η μέση καμπυλότητα μεταβάλλεται ανάλογα με το πώς είναι ο κύλινδρος στον χώρο και ποιο σημείο μελετάμε.

Μετρήσεις γεωμετρικού χαρακτήρα επί της επιφάνειας, δηλαδή της έσωθεν γεωμετρίας, είναι η μέτρηση εμβαδού πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας ή η μέτρηση του μήκους μιας καμπύλης.[2] Ενώ η καμπυλότητα Gauss είχε αρχικά οριστεί ως ποσότητα της έξωθεν γεωμετρίας, τελικά είναι ποσότητα της έσωθεν γεωμετρίας, εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή. Με αυτόν το τρόπο η καμπυλότητα έχει εφαρμογή στις ισομετρίες, δηλαδή το μετασχηματισμό μιας πολλαπλότητας Μ σε μία πολλαπλότητα Ν διατηρώντας τα μήκη των καμπύλων σταθερά. Ένας μετασχηματισμός είναι ισομετρικός αν και μόνο αν τα αντίστοιχα σημεία των δύο πολλαπλοτήτων έχουν τους ίδιους συντελεστές του μετρικού τανυστή. [4]

1.9 Ισομετρίες και αμφιδιαφόριση

Εάν τα $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ είναι σημεία της $M \subset \boldsymbol{R^3}$, η εσωτερική απόσταση $\rho(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ γενικά θα είναι μεγαλύτερη από την ευθύγραμμη ευκλείδεια απόσταση $d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ επειδή οι καμπύλες ρ είναι υποχρεωμένες να βρίσκονται πάνω στην Μ. Εάν η $F: M \to \bar{M}$ είναι μια ισομετρία μεταξύ δύο επιφανειών στον $\boldsymbol{R^3}$, τότε θα διατηρείται η εσωτερική απόσταση

$$\rho(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \bar{\rho}(F(\boldsymbol{p}), F(\boldsymbol{q}))$$

για δύο οποιαδήποτε σημεία $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ της Μ, όπου $\rho, \bar{\rho}$ συναρτήσεις της εσωτερικής απόστασης των $M, \bar{M}$ αντιστοίχως. Επίσης μια ισομετρία $F: M \to \bar{M}$ μεταξύ δύο επιφανειών του R^3 είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση της Μ επί της $\bar{M}$ η οποία διατηρεί το βαθμωτό γινόμενο των εφαπτόμενων διανυσμάτων. Εάν η $F*$ είναι η παράγωγος απεικόνισης της F, τότε $F*(\boldsymbol{v}) \cdot F*(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ για οποιοδήποτε ζεύγος εφαπτόμενων διανυσμάτων $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ στην Μ.

Έστω $F: M \to N$ μια απεικόνιση. Για κάθε συντεταγμενική περιοχή $\boldsymbol{x}: D \to M$ θεωρούμε τη σύνθετη απεικόνιση $\bar{x} = F(x): D \to N$. Στην περίπτωση αυτή η F είναι μια τοπική ισομετρία εάν και μόνο εάν για κάθε συντεταγμενική περιοχή $\boldsymbol{x}$ έχουμε $E=\bar{E}, F=\bar{F}, G=\bar{G}$, δηλαδή έχουν την ίδια πρώτη θεμελιώδη μορφή.

Μια ισομετρία δεν διατηρεί αναγκαστικά τις κύριες καμπυλότητες, ούτε το άθροισμά τους, διατηρεί όμως το γινόμενό τους $(K = k_1 k_2)$. Συνεπώς, οι ισομετρικές επιφάνειες έχουν ίδια τιμή για την καμπυλότητα Gauss. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια ισομετρία κάμπτει την επιφάνεια, δίνοντάς της ένα διαφορετικό σχήμα, χωρίς όμως να αλλάζει την εσωτερική απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε σημείων της.

Ένα επίπεδο κομμάτι χαρτιού μπορεί να τυλιχθεί επάνω σε έναν κύλινδρο χωρίς να τσαλακωθεί. Το επίπεδο με τον κύλινδρο έχουν ίδια καμπυλότητα Gauss. Εάν σχεδιάσουμε μια καμπύλη επάνω στο επίπεδο, μετά το τύλιγμα η καμπύλη μετατρέπεται σε καμπύλη του κυλίνδρου. Επειδή το χαρτί δεν τσαλακώνεται, οι δύο αυτές καμπύλες θα έχουν το ίδιο μήκος. Εφόσον τα μήκη είναι το ολοκλήρωμα της πρώτης θεμελιώδους μορφής, οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές αυτών των δύο επιφανειών πρέπει να είναι ίδιες. Από την άλλη είναι αδύνατο να τυλίξουμε ένα επίπεδο φύλλο χαρτιού επάνω σε μία σφαίρα χωρίς να το τσαλακώσουμε.

Είναι προφανές ότι κάθε σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία. Αν F είναι μια ισομετρία του R^n τέτοια ώστε $F(0)=0$ και $F(\mathbf{e}_i)=\mathbf{e}_i$ για i=1,…,n, τότε η F είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Επίσης κάθε ισομετρία είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση, και η αντίστροφη κάθε ισομετρίας είναι ισομετρία.

Αν P είναι ένας $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας και $\boldsymbol{\alpha} \in R^n$, τότε η απεικόνιση $\boldsymbol{F}: R^n \to R^n$ που ορίζεται από την $\boldsymbol{F}(\upsilon) = P\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\alpha}$ είναι ισομετρία του R^n . Η απλούστερη κατηγορία ισομετριών είναι η μεταφορά. Οι μεταφορές είναι οι ευθείες ισομετρίες $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ που δίνονται από την $T_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\upsilon}) = \boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\alpha}$, όπου α είναι ένα δοθέν διάνυσμα του R^n .

Εάν S_1 και S_2 είναι δύο επιφάνειες, μια σύμμορφη απεικόνιση $f: S_1 \to S_2$ είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση εάν με $\boldsymbol{\gamma_1}$, $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}_1$ καμπύλες της S_1 που τέμνονται σε ένα σημείο $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{S_1}$ και $\boldsymbol{\gamma_2}$ $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}_2$ οι εικόνες τους μέσω της f , τότε η γωνία τομής των $\boldsymbol{\gamma_1}$ και $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}_1$ στο p είναι ίση με τη γωνία τομής των $\boldsymbol{\gamma_2}$ και $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}_2$ στο $f(\mathbf{p})$. Το εμβαδό ενός τμήματος επιφάνειας $\sigma: U \to R^3$ είναι $\iint_R \|\boldsymbol{\sigma_u} \times \boldsymbol{\sigma_\upsilon}\| du d\upsilon$ με $\|\boldsymbol{\sigma_u} \times \boldsymbol{\sigma_\upsilon}\| = (EG - F^2)^{1/2}$. Μια τοπική αμφιδιαφόριση $f: S_1 \to S_2$ είναι ισεμβαδική αν απεικονίζει κάθε χωρίο της S_1 σε ένα χωρίο ίσου εμβαδού της S_2, δηλαδή εάν οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές των τμημάτων επιφάνειας σ της S_1 και $f \circ \sigma$ της S_2 ικανοποιούν τη σχέση $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$

1.10 Γεωδαισιακές

Μια καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ μιας επιφάνειας *S* ονομάζεται γεωδαισιακή εάν η επιτάχυνση $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ είναι μηδενική ή κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t)$, δηλαδή παράλληλη στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμά της, για όλες τις τιμές της παραμέτρου *t*. Κάθε γεωδαισιακή έχει σταθερή ταχύτητα. Μια επιφανειακή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν η γεωδαισιακή καμπυλότητά της (κ_g) είναι παντού μηδέν. Κάθε ευθεία (ή τμήμα ευθείας) μιας επιφάνειας είναι γεωδαισιακή, δηλαδή μπορεί να παραμετρηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι γεωδαισιακή. Μια καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ μιας επιφάνειας *S* είναι γεωδαισιακή εάν και μόνο εάν για οποιοδήποτε τμήμα $\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{\sigma}(u(t),v(t))$ της $\boldsymbol{\gamma}$ που περιέχεται σε ένα τμήμα επιφάνειας $\boldsymbol{\sigma}$ της *S* , ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο εξισώσεις :

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u}+F\dot{u})=\frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2+2F_u\dot{u}\dot{v}+G_u\dot{v}^2) \qquad \frac{d}{dt}(F\dot{u}+G\dot{u})=\frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2+2F_u\dot{u}\dot{v}+G_u\dot{v}^2)$$

όπου $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή του $\boldsymbol{\sigma}$. Οι παραπάνω μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις καλούνται γεωδαισιακές εξισώσεις. Από κάθε σημείο μιας επιφάνειας διέρχεται μοναδική γεωδαισιακή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Μια τοπική ισομετρία μεταξύ δύο επιφανειών απεικονίζει τις γεωδαισιακές της μίας επιφάνειας στις γεωδαισιακές της άλλης.

1.11 Μετρικός τανυστής

Στη διαφορική γεωμετρία ο μετρικός τανυστής είναι μια συνάρτηση που δέχεται ως δεδομένα εισόδου τα εφαπτόμενα διανύσματα u,v σε κάποιο σημείο μιας επιφάνειας και παράγει το βαθμωτό γινόμενο. Ο μετρικός τανυστής ορίζει το μήκος και τη γωνία των καμπυλών. Θεωρούμε μια επιφάνεια παραμετρική όταν έχουμε δύο βοηθητικές μεταβλητές u, v που περιγράφουν τις καρτεσιανές συντεταμένες x,y,z των σημείων της επιφάνειας

r(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))

Ο Gauss ήθελε να μπορεί να περιγραφεί μια επιφάνεια από μία συνάρτηση που οι μεταβλητές της δεν θα επηρεάζονταν από την αλλαγή της παραμετρικής της μορφής στο χώρο (π.χ. λυγίζουμε μία επιφάνεια χωρίς να την τεντώνουμε). Τέτοιες σταθερές ποσότητες είναι το μήκος μιας καμπύλης πάνω στην επιφάνεια, η γωνία μεταξύ δύο καμπυλών της ίδιας επιφάνειας και το εμβαδό ενός κομματιού της επφάνειας. [5]

Μια γεωμετρική επιφάνεια είναι μια αφηρημένη επιφάνεια *M* εφοδιασμένη με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\,,\rangle$ σε κάθε εφαπτόμενο επίπεδό της. Αυτά τα εσωτερικά γινόμενα πρέπει να μεταβάλλονται με λείο τρόπο, υπό την έννοια ότι εάν τα *u* και *v* είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία στην *M*, τότε η $\langle u,v\rangle$ είναι μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση στην *M*.

Σε αυτόν τον ορισμό, το $\langle u,v\rangle$ είναι η συνάρτηση στην M η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο $\boldsymbol{p}$ τον αριθμό $\langle u(\boldsymbol{p}),v(\boldsymbol{p})\rangle$.

Η γεωμετρική δομή που παρέχεται από αυτή τη συλλογή εσωτερικών γινομένων μπορεί να περιγραφεί ως ένας μετρικός τανυστής g στην *M*, δηλαδή μια συνάρτηση ορισμένη σε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη εφαπτόμενων διανυσμάτων u,v στα σημεία $\boldsymbol{p}$ της *M*, για τα οποία $g_p(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_p$. Ο ορισμός μπορεί να συνοψιστεί ως εξής : επιφάνεια + μετρικός τανυστής = γεωμετρική επιφάνεια. Τονίζουμε ότι η ίδια επιφάνεια εφοδιασμένη με δύο διαφορετικούς μετρικούς τανυστές δίνει δύο διαφορετικές γεωμετρικές επιφάνειες. [6]

1.12 Theorema Egregium

Μια από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις του Gauss είναι ότι η καμπυλότητα Gauss παραμένει αναλλοίωτη όταν η επιφάνεια κάμπτεται χωρίς να τεντώνεται, δηλαδή η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας είναι αναλλοίωτη ως προς τις τοπικές ισομετρίες.[3] Εάν S_1, S_2 είναι δύο επιφάνειες και $f: S_1 \to S_2$ μια τοπική ισομετρία, τότε για κάθε σημείο $\boldsymbol{p} \in S_1$ η καμπυλότητα Gauss της S_1 στο $\boldsymbol{p}$ είναι ίση με την καμπυλότητα Gauss της S_2 στο $f(\boldsymbol{p})$. Μπορούμε να γράψουμε τον τύπο της καμπυλότητας Gauss συναρτήσει των E, F και G της πρώτης θεμελιώδους μορφής

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{\upsilon\upsilon} + F_{u\upsilon} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_\upsilon \\ F_\upsilon - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_\upsilon & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_\upsilon & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}$$

1.13 Θεώρημα Gauss – Bonnet

Μια καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(u(t), v(t))$ ενός τμήματος επιφάνειας $\boldsymbol{\sigma}: U \to R^3$ καλείται απλή κλειστή καμπύλη με περίοδο *T* εάν η $\boldsymbol{\pi}(t) = (u(t), v(t))$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη του R^2 με περίοδο T, τέτοια ώστε το χωρίο int($\boldsymbol{\pi}$) του R^2 που περικλείεται από την $\boldsymbol{\pi}$ να περιέχεται πλήρως στο *U*. Λέμε ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ είναι θετικά προσανατολισμένη εάν η $\boldsymbol{\pi}$ είναι θετικά προσανατολισμένη.[7]

Έστω $\boldsymbol{\gamma}(s)$ μια απλή κλειστή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας ενός τμήματος επιφάνειας $\boldsymbol{\sigma}$, μήκους $l(\boldsymbol{\gamma})$. Αν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι θετικά προσανατολισμένη, τότε

$$\int_0^{l(\boldsymbol{\gamma})} \kappa_g ds = 2\pi - \iint_{int(\boldsymbol{\gamma})} K d A_{\boldsymbol{\sigma}}$$

όπου κ_g είναι η γεωδαισιακή καμπυλότητα της $\boldsymbol{\gamma}$, *K* η καμπυλότητα Gauss του $\boldsymbol{\sigma}$ και $dA_{\boldsymbol{\sigma}}$ το στοιχείο εμβαδού του $\boldsymbol{\sigma}$. Το διπλό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της εξίσωσης ονομάζεται ολική καμπυλότητα του χωρίου int($\boldsymbol{\gamma}$).

1.13.1 Gauss Bonnet για καμπυλόγραμμα πολύγωνα

Γενικεύοντας το θεώρημα Gauss-Bonnet για καμπυλόγραμμα πολύγωνα έχουμε ότι ένα καμπυλόγραμμο πολύγωνο του R^2 είναι μια συνεχής απεικόνιση $\boldsymbol{\pi}: R \to R^2$ τέτοια ώστε, για κάποιον πραγματικό αριθμό *T* και κάποια σημεία $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, να ισχύουν τα εξής :

(i) $\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t')$ αν και μόνο αν το $t' - t$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του *T*.

(ii) Η $\boldsymbol{\pi}$ είναι λεία σε καθένα από τα ανοικτά διαστήματα

$$(t_0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$$

(iii) Οι πλευρικές παράγωγοι

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}^- = \lim_{t \uparrow t_i} \frac{\boldsymbol{\pi}(t) - \boldsymbol{\pi}(t_i)}{t - t_i} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\pi}}^+ = \lim_{t \downarrow t_i} \frac{\boldsymbol{\pi}(t) - \boldsymbol{\pi}(t_i)}{t - t_i}$$

υπάρχουν για i=1…,*n* και είναι διάφορες του μηδενός και μη παράλληλες.

Τα σημεία $\boldsymbol{\pi}(t_i)$ για i=1,…,*n* καλούνται κορυφές του καμπυλόγραμμου πολυγώνου $\boldsymbol{\pi}$ και τα τμήματά του που αντιστοιχούν στα ανοικτά διαστήματα (t_{i-1}, t_i) καλούνται ακμές του πολυγώνου. Αν $\boldsymbol{\gamma}$ είναι θετικά προσανατολισμένο καμπυλόγραμμο πολύγωνο μοναδιαίας ταχύτητας ενός τμήματος επιφάνειας $\boldsymbol{\sigma}$ με *n* ακμές και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι οι εσωτερικές γωνίες στις κορυφές του, τότε

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_{int(\gamma)} K dA_\sigma$$

1.13.2 Gauss Bonnet για συμπαγείς επιφάνειες

Έστω S μια επιφάνεια με άτλαντα που αποτελείται από τα τμήματα επιφάνειας $\boldsymbol{\sigma}_i : U_i \rightarrow R^3$. Ένας τριγωνισμός της S είναι μια συλλογή καμπυλόγραμμων πολυγώνων, καθένα από τα οποία περιέχεται μαζί με το εσωτερικό του σε ένα από τα $\boldsymbol{\sigma}_i(U_i)$ και για το οποίο ισχύουν τα εξής :

(i) Κάθε σημείο της S ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα καμπυλόγραμμα πολύγωνα.
(ii) Δύο καμπυλόγραμμα πολύγωνα είτε είναι ξένα μεταξύ τους, είτε η τομή τους είναι μία κοινή ακμή ή μία κοινή κορυφή.
(iii) Κάθε ακμή είναι ακμή ακριβώς δύο πολυγώνων.

Κάθε συμπαγής επιφάνεια επιδέχεται έναν τριγωνισμό με πεπερασμένο πλήθος πολύγωνων.

Ο αριθμός Euler (ή χαρακτηριστική Euler) χ ενός τριγωνισμού μιας συμπαγούς επιφάνειας S με πεπερασμένα σε πλήθος πολύγωνα είναι ο $\chi = V - E + F$, όπου
V = το συνολικό πλήθος των κορυφών του τριγωνισμού
E = το συνολικό πλήθος των ακμών του τριγωνισμού
F = το συνολικό πλήθος των πολυγώνων του τριγωνισμού.

Αν S είναι μια συμπαγής επιφάνεια, τότε, για κάθε τριγωνισμό της S, έχουμε

$$\iint_S K\, dA = 2\pi\chi$$

όπου χ ο αριθμός Euler του τριγωνισμού. Επειδή το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι ανεξάρτητο του τριγωνισμού, έπεται ότι ο αριθμός Euler ενός τριγωνισμού μιας συμπαγούς επιφάνειας S εξαρτάται μόνο από την S και όχι από την επιλογή του τριγωνισμού. Ο αριθμός Euler είναι αναλλοίωτος από κάθε συνεχή παραμόρφωση της επιφάνειας, είναι δηλαδή μια τοπολογική αναλλοίωτη.

2 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

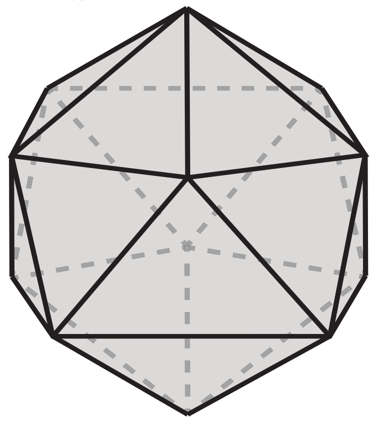
2.1 Πολύγωνο

Στη στοιχειώδη γεωμετρία ένα πολύγωνο είναι μια επίπεδη μορφή που οριοθετείται από μια πεπερασμένη αλυσίδα από ευθύγραμμα τμήματα που κλείνουν σε ένα βρόγχο για να σχηματίσουν μια κλειστή πολυγωνική αλυσίδα ή κύκλωμα. Αυτά τα τμήματα ονομάζονται άκρα ή πλευρές του πολυγώνου και τα σημεία στα οποία συναντώνται δύο άκρα είναι οι κορυφές, κόμβοι ή γωνίες του πολυγώνου. Τα πολύγωνα ταξινομούνται κατά κύριο λόγο από τον αριθμό των πλευρών τους (π.χ. τετράπλευρα, εξάπλευρα, κ.ο.κ.). Οποιοδήποτε πολύγωνο έχει τόσες γωνίες όσες και πλευρές.[9]

2.2 Πολύτοπο

Στη στοιχειώδη γεωμετρία ένα πολύτοπο είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο με «επίπεδες» πλευρές. Είναι μια γενίκευση σε οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων του δισδιάστατου πολυγώνου. Τα πολύτοπα μπορεί να υπάρχουν σε οποιοδήποτε γενικό αριθμό διαστάσεων n ως n-διάστατο πολύτοπο ή n-πολύτοπο. Οι επίπεδες πλευρές σημαίνουν ότι οι πλευρές ενός (k + 1) -πολύτοπου αποτελούνται από k-πολύτοπα που μπορεί να έχουν κοινά (k-1) -πολύτοπα. Ένα πολύτοπο περιλαμβάνει στοιχεία με διαφορετικές διαστάσεις όπως κορυφές (vertex) , ακμές (edge) , επίπεδες επιφάνειες (face) , κελιά (cell) κ.ο.κ.. Για παράδειγμα, ένα δισδιάστατο πολύγωνο είναι ένα 2-πολύτοπο και ένα τρισδιάστατο πολύεδρο είναι ένα 3-πολύτοπο.

Ένα πολύεδρο είναι ένα τρισδιάστατο παράδειγμα του γενικότερου πολύτοπου, είναι ένα στερεό σε τρεις διαστάσεις με επίπεδες επιφάνειες και ορθές έδρες. [10]



εικόνα 2.1 τρισδιάστατο πολύτοπο

2.2.1 Πολυεδρική επιφάνεια

Ένα καθοριστικό χαρακτηριστικό σχεδόν όλων των ειδών των πολύεδρων είναι ότι μόλις δύο έδρες ενώνονται κατά μήκος οποιασδήποτε κοινής ακμής. Αυτό εξασφαλίζει ότι η πολυεδρική επιφάνεια είναι συνεχώς συνδεδεμένη και δεν τελειώνει απότομα ή δεν διασπάται σε διαφορετικές κατευθύνσεις.

2.2.2 Ακμές

Οι ακμές έχουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά (εκτός εάν το πολύεδρο είναι πολύπλοκο):
(i) Μία ακμή ενώνει μόνο δύο κορυφές.
(ii) Μία ακμή ενώνει μόνο δύο έδρες.

Η χαρακτηριστική Euler χ σχετίζει τον αριθμό των κορυφών V, των ακμών E, και των εδρών F ενός πολυέδρου: $\chi = V - E + F$.

Για ένα κυρτό πολύεδρο ή γενικότερα για οποιοδήποτε απλώς συνεκτικό πολύεδρο του οποίου οι έδρες είναι επίσης απλώς συνεκτικές και του οποίου το όριο είναι μία πολλαπλότητα, η χαρακτηριστική Euler ισούται με 2 (χ = 2).

Για πιο περίπλοκα σχήματα, η χαρακτηριστική Euler σχετίζεται με τον αριθμό των δακτυλιοειδών οπών, λαβών ή σταυροειδών καπακιών στην επιφάνεια και θα είναι μικρότερο από 2.

Ικανότητα προσανατολισμού

Μερικά πολύεδρα, όπως όλα τα κυρτά πολύεδρα, έχουν δύο διακεκριμένες πλευρές στην επιφάνειά τους, για παράδειγμα η μία πλευρά κατά συνέπεια μπορεί να βαφτεί μαύρη και η άλλη άσπρη. Λέμε ότι το σχήμα είναι προσανατολίσιμο.

Στη γεωμετρία ένα πολύεδρο είναι παραδοσιακά ένα τρισδιάστατο σχήμα που αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό πολυγωνικών εδρών οι οποίες είναι τμήματα των επιπέδων· οι έδρες χωρίζονται σε ζεύγη κατά μήκος των ακμών που είναι ευθείες γραμμές, και οι ακμές τέμνονται σε σημεία που λέγονται κορυφές. Κύβοι, πρίσματα και πυραμίδες είναι παραδείγματα πολύεδρων. Το πολύεδρο περιβάλλει ένα φραγμένο όγκο σε τρισδιάστατο χώρο, μερικές φορές αυτός ο εσωτερικός όγκος θεωρείται ότι είναι μέρος του πολύεδρου, μερικές άλλες θεωρείται μόνο η επιφάνεια και περιστασιακά μόνο ο σκελετός των ακμών.

Ένα πολύεδρο λέγεται κυρτό εάν η επιφάνειά του (η οποία περιλαμβάνει έδρες, ακμές και κορυφές) δεν τέμνει τον εαυτό της και αν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει οποιαδήποτε δύο σημεία του πολύεδρου περιέχεται στο εσωτερικό ή στην επιφάνεια.

Ένα τρισδιάστατο στερεό είναι ένα κυρτό σύνολο εάν περιέχει κάθε τμήμα γραμμής που συνδέει δύο από τα σημεία του. Ένα κυρτό πολύεδρο είναι ένα πολύεδρο που, ως στερεό, σχηματίζει ένα κυρτό σύνολο.[11]

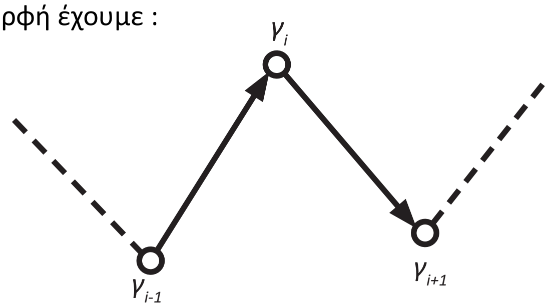
3 ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η διακριτή θεωρία χρησιμοποιεί μερικές δομές (όπως τα mesh) που λείπουν από την ομαλή θεωρία. Επίσης είναι απλούστερη, χρησιμοποιεί εξισώσεις διαφορών και στοιχειώδη γεωμετρία αντί για λογισμό και ανάλυση. Ενώ το μήκος μιας ομαλής καμπύλης είναι $\int_I \|\dot{\gamma}(t)\| dt$, με $\gamma : I \rightarrow R^n$ στη διακριτή της μορφή έχουμε :

$$\sum_{k, k+1 \in I} \|\gamma_{k+1} - \gamma_k\|$$

όπου $k+1, k$ οι κόμβοι των ακμών της καμπύλης και το εφαπτόμενο διάνυσμα στην ακμή με $\Delta\gamma_k > 0$ έχει την μορφή

$$\frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{\|\gamma_{k+1} - \gamma_k\|}$$

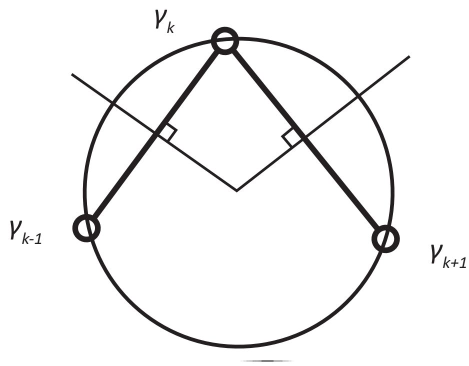


εικόνα 3.1 διακριτή καμπύλη

3.1 Εφαπτόμενος κύκλος στους κόμβους

Ο συγκεκριμένος κύκλος εφάπτεται σε κόμβο γ_k και στους διπλανούς κόμβους $\gamma_{k+1}, \gamma_{k-1}$.Το κέντρο του βρίσκεται στη διασταύρωση των δύο διχοτόμων γραμμών των παρακείμενων ακμών. Η ακτίνα από τον τύπο $2 R_k \sin\varphi_\kappa = \|\gamma_{k+1}, \gamma_{k-1}\|$ οδηγεί στο τύπο της καμπυλότητας

$$\frac{2 \sin\varphi_\kappa}{\|\gamma_{k+1}, \gamma_{k-1}\|} = \frac{1}{R_k} = \kappa_k$$



εικόνα 3.2 εφαπτόμενος κύκλος στους κόμβους της καμπύλης

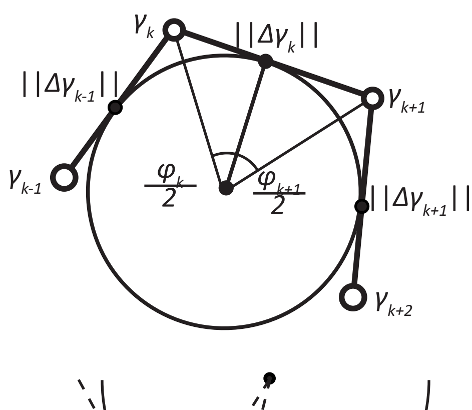
3.2 Εφαπτόμενος κύκλος στις ακμές

Ο παρών κύκλος έχει την προϋπόθεση των τριών επίπεδων διαδοχικών καμπυλών $\Delta\gamma_{k-1}, \Delta\gamma_k, \Delta\gamma_{k+1}$. Ο προσανατολισμός του κύκλου στα σημεία επαφής αντιστοιχεί στον προσανατολισμό των ακμών. Ο κύκλος ορίζεται με μοναδικό τρόπο όσο οι τρεις διαδοχικές ακμές είναι διαφορετικής κατεύθυνσης, ακόμη και αν η καμπύλη είναι μη κυρτή. Το κέντρο του είναι η τομή των δύο γωνιακών διχοτόμων. Η ακτίνα δίνεται από

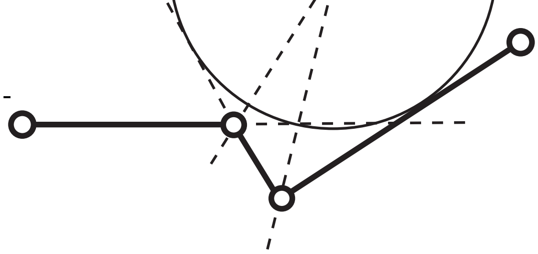
$$\frac{\|\Delta\gamma_k\|}{\tan\frac{\varphi_k}{2} + \tan\frac{\varphi_{k+1}}{2}} = R_k$$

και η καμπυλότητα από

$$\kappa_k = \frac{1}{R_k}$$



εικόνα 3.3 εφαπτόμενος κύκλος στις ακμές της καμπύλης



εικόνα 3.4 εφαπτόμενος κύκλος στις ακμές της μη κυρτής καμπύλης

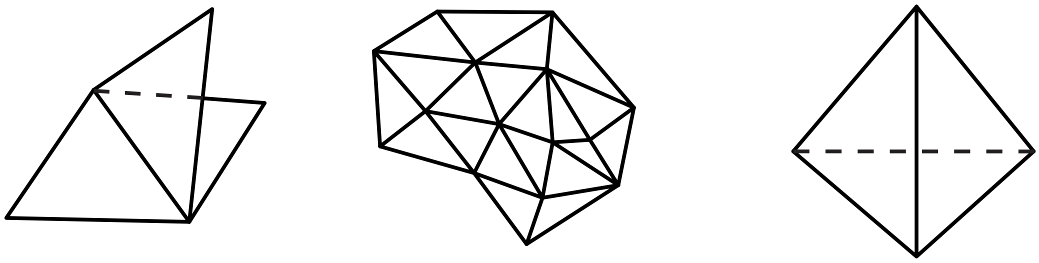
3.3 Διακριτές επιφάνειες

Συνήθως ορίζουμε ως διακριτές επιφάνειες τις επιφάνειες που κατασκευάζονται από κόμβους, ακμές και όψεις. Αυτές κατηγοριοποιούνται ως εξής:

(α) Απλές επιφάνειες. Επιφάνειες που δημιουργούνται από τη σύνδεση τριγώνων με συγκεκριμένα κριτήρια.

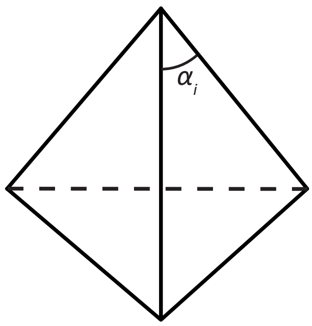
(β) Πολυεδρικές επιφάνειες. Επιφάνειες που δημιουργούνται από την σύνδεση πολυγώνων.
- Επιφάνειες με όλους τους κόμβους να έχουν τιμή σθένους ίση με τρία.
- Επιφάνειες που δημιουργούνται από τετράπλευρα.

εικόνα 3.5
α) μη διακριτή επιφάνεια
β) διακριτή επιφάνεια
γ) πολύεδρο



3.4 Διακριτή καμπυλότητα Gauss

εικόνα 3.6
γωνία πλευράς i σε πολύεδρο



Για μια πολυεδρική επιφάνεια η καμπυλότητα Gauss ορίζεται στους κόμβους. Για έναν κόμβο p είναι ίση με την προσανατολισμένη περιοχή του αντίστοιχου σφαιρικού πολυγώνου.

Αν N_i είναι τα κάθετα διανύσματα των πλευρών που είναι προσκείμενα στον κόμβο p, κάθε ζεύγος διπλανών κάθετων διανυσμάτων ορίζουν τη γεωδαιτική γραμμή του επιπέδου S^2 τα οποία όλα μαζί αποτελούν ένα σφαιρικό πολύγωνο.

Η γωνία α_i της προσκείμενης πλευράς του κόμβου p με κάθετο διάνυσμα N_i είναι ίση με την εξωτερική γωνία του σφαιρικού πολυγώνου στο διάνυσμα N_i. Η γωνιακή διαφορά

$$2\pi - \sum_i \alpha_i$$

ονομάζεται καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας S στο σημείο p $K(p)$, η ολική καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας ορίζεται ως το άθροισμα των τοπικών καμπυλοτήτων

$$K(S)=\sum_{p\in V} K(p)$$

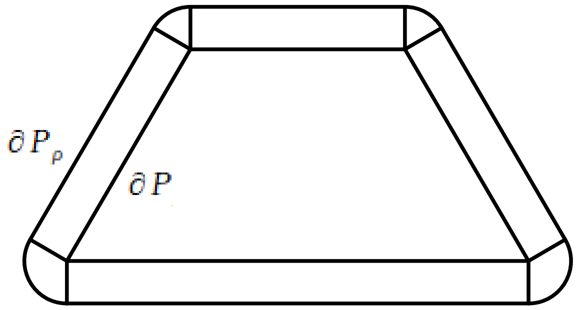
Οι ιδιότητες που προκύπτουν από το πρόσημο της καμπυλότητας Gauss στη διαφορική γεωμετρία εφαρμόζονται και στη διακριτή διαφορική γεωμετρία. Όπως επίσης ισχύουν και τα θεωρήματα Egregium και Gauss-Bonnet .

3.5 Διακριτή μέση καμπυλότητα

Η διακριτή μέση καμπυλότητα σε μία ακμή $H(e)$ ισούται με το γινόμενο $\frac{1}{2}\vartheta(e)\, l(e)$, όπου l(e) το μήκος της ακμής e και θ(e) η γωνία μεταξύ των κάθετων διανυσμάτων. Η ολική διακριτή μέση καμπυλότητα είναι το άθροισμα $H(S)=\sum_{e\in E} H(e)=\frac{1}{2}\sum_{e\in E}\vartheta(e)\, l(e)$

3.5.1 Τύπος του Steiner για κυρτά πολύεδρα

Αν P είναι ένα πολύεδρο με οριακή επιφάνεια $S=\partial P$ και P_ρ είναι το παράλληλο σώμα σε απόσταση ρ με $P_\rho:=\{p\in R^3 | d(p,P)\le\rho\}$, η μετατοπισμένη οριακή επιφάνεια $S_\rho=\partial P_\rho$ έχει εμβαδό $A(S_\rho)=A(S)+2H(S)\rho+K(S)p^2$



εικόνα 3.7 διακριτή καμπυλότητα σε πολύγωνο

3.5.2 Μετρικός τανυστής

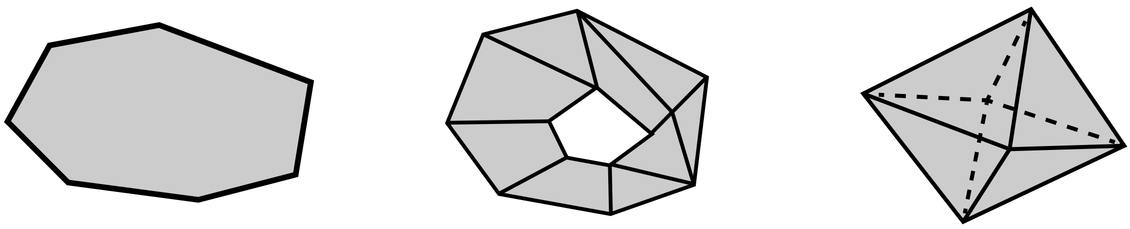
Η ελάχιστη διαδρομή είναι μια ιδιότητα του μετρικού τανυστή. Οι ελάχιστες διαδρομές είναι οι γεωδαιτικές σε ένα πολύεδρο. Εάν σημείο $p\in M$ σε μία όψη $A\in F$, τότε μια αρκετά μικρή γειτονιά του $p\in M$ στο $f(M)$ περιέχεται εξολοκλήρου στην επίπεδη όψη $f(A)$. Η γειτονιά μπορεί να χαρτογραφηθεί ισομετρικά σε έναν τοπολογικό δίσκο D^2 .

Ο μετρικός τανυστής d σε μια επιφάνεια M καλείται πολυεδρικός μετρικός τανυστής αν η κατά τμήματα επίπεδη επιφάνεια (M,d) είναι τοπικά ισομετρική με έναν κώνο σε πεπερασμένα πολλά σημεία $V=\{P_1,P_2,\dots,P_N\}\subset M$ (κωνική ιδιομορφία) και τοπικά ισομετρική στο επίπεδο οπουδήποτε αλλού.

Μια απλή επιφάνεια μαζί με έναν τριγωνισμό T επιφέρει μια τμηματική επίπεδη επιφάνεια (M,d) τέτοια ώστε το σύνολο των κόμβων να ικανοποιεί την κωνική ισομετρία και όλες οι ακμές να είναι γεωδαιτικές.[12][13]

3.6 Τοπολογία

Ένας τοπολογικός δίσκος είναι οποιοδήποτε σχήμα μπορούμε να πάρουμε παραμορφώνοντας το δίσκο χωρίς να το σκίσουμε, να τον τρυπήσουμε ή να κολλήσουμε τις άκρες του μαζί. Ένας πολυγωνικός δίσκος είναι κάθε τοπολογικός δίσκος κατασκευασμένος από απλά πολύγωνα. Ομοίως, μια τοπολογική σφαίρα είναι οποιαδήποτε μορφή μπορεί να παραμορφωθεί στην τυπική σφαίρα, διατηρώντας τους παραπάνω περιορισμούς.[14] Και ένα πολύεδρο είναι μια σφαίρα κατασκευασμένη από πολύγωνα. Γενικότερα, μια τμηματική γραμμική επιφάνεια είναι οποιαδήποτε επιφάνεια που παράγεται συνδέοντας μεταξύ τους πολύγωνα κατά μήκος



εικόνα 3.8 α) τοπολογικός δίσκος β) επιφάνεια γένους 1 γ) τοπολογική σφαίρα

των ακμών τους. Η απλή επιφάνεια είναι μια ειδική περίπτωση όπου όλα τα πολύγωνα είναι τρίγωνα. Το όριο μιας τμηματικής γραμμικής επιφάνειας είναι το σύνολο των ακμών που περιέχονται σε μία μόνο όψη (όλες οι άλλες άκρες μοιράζονται με ακριβώς δύο όψεις). Για παράδειγμα, ένας δίσκος έχει ένα όριο ενώ ένα πολύεδρο δεν έχει.

Για όλους τους πολυγωνικούς δίσκους με V κόμβους, E ακμές και F όψεις, βάσει της χαρακτηριστικής του Euler έχουμε ότι

$$V - E + F = 1$$

και για τα πολύεδρα αντίστοιχα

$$V - E + F = 2$$

Δεν ταυτίζονται όλες οι επιφάνειες με τοπολογικούς δίσκους ή σφαίρες. Στην τοπολογία ορίζουμε ως λαβές (handles) την τιμή του γένους g κάθε επιφάνειας. Ανάμεσα στις επιφάνειες που δεν έχουν σύνορα και είναι συνδεδεμένες (δηλαδή ένα ενιαίο κομμάτι), συμπαγείς (δηλαδή κλειστές που περιέχονται σε μια σφαίρα πεπερασμένου μεγέθους) και προσανατολισμένες (με δύο ξεχωριστές πλευρές), το γένος είναι το μόνο πράγμα που ξεχωρίζει δύο επιφάνειες. Ο τύπος που ισχύει για τέτοιες επιφάνειες, είναι ο Euler-Poincare

$$V-E+F=2-2g$$

3.6.1 Κανονικό πλέγμα και μέσο σθένος

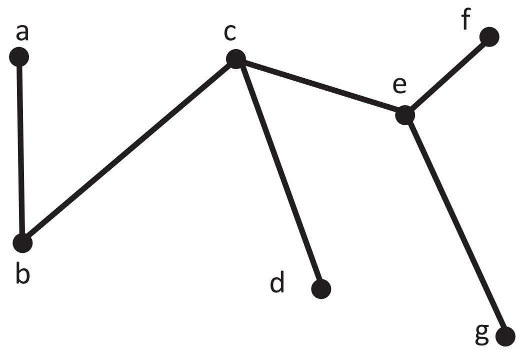
Το σθένος κόμβου σε μια τμηματική επίπεδη επιφάνεια είναι ο αριθμός των όψεων που περιέχουν τον συγκεκριμένο κόμβο. Ο κόμβος μιας απλής επιφάνειας είναι κανονικός όταν το σθένος του έχει τιμή έξι. Πολλοί αριθμητικοί αλγόριθμοι έχουν καλύτερη συμπεριφορά όταν ο αριθμός των μη κανονικών κόμβων που διαχειρίζονται είναι μικρός. Συνήθως είναι μη εφικτό να παραμετροποιήσει κανείς μια επιφάνεια σε ένα επίπεδο διατηρώντας ταυτόχρονα και το μήκος των καμπυλών και τις γωνίες τους.

4 ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

4.1 Γραφήματα

Ένα γράφημα (graph) είναι ένα μαθηματικό ή συνδυαστικό (combinatorial) αντικείμενο που έχει μια εικονογραφημένη αναπαράσταση. Κάθε γράφημα G είναι ένα ζεύγος συνόλων (V, E) όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και E ένα σύνολο υποσυνόλων του V, το καθένα εκ των οποίων έχει δύο στοιχεία του V .

Καλούμε τα στοιχεία του V κόμβους (vertices) του G και τα στοιχεία του E ακμές (edges) του G. Τις ακμές ενός γραφήματος $G=(V, E)$ μπορούμε να τις συμβολίσουμε ισοδύναμα {x,y}, (x,y) ή xy, όπου x, y είναι οι κόμβοι του γραφήματος G .Τα στοιχεία του συνόλου $V(G)$ τα αναπαριστούμε με σημεία (σχηματικά, με μικρούς κύκλους), ενώ τα στοιχεία του συνόλου $E(G)$ με ευθείες ή τεθλασμένες γραμμές.



εικόνα 4.1
γράφημα εφτά κόμβων

Αναπαριστούμε επίσης ένα γράφημα G με $V(G)=(v_1, \ldots, v_n)$ με τη βοήθεια ενός πίνακα $n \times n$ που ονομάζεται πίνακας αναπαράστασης του G.

$$A=|\alpha_{i,j}|, \quad i, j \in [n]^2 \quad \text{όπου} \quad \alpha_{i,j}=\begin{cases} 1 & \alpha\nu(v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \alpha\nu(v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases}$$

Το πλήθος των κόμβων $V(G)$ και το πλήθος των ακμών $E(G)$ ενός γραφήματος τα ονομάζουμε τάξη *n* και μέγεθος *m* του γραφήματος και ισχύει ότι $0 \leq m \leq n(n-1)/2$. Εάν $x, y \in E(G)$, θα λέμε ότι ο κόμβος y γειτνιάζει με τον κόμβο x ή ότι η ακμή xy είναι προσπίπτουσα στους κόμβους x και y. Με *Adj*(*x*) συμβολίζουμε το σύνολο γειτνίασης του κόμβου x. Ο βαθμός εξόδου $d_{out}(x)$ ορίζεται ως $d_{out}(x)=|Adj(x)|$. Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα έχουμε $d_{out}(x)=d_{in}(x)$ για κάθε κόμβο $x \in V$ και τον ονομάζουμε απλώς βαθμό του κόμβου x.

Ένα γράφημα $G=(V, E)$ ονομάζεται έμβαρο εάν σε κάθε ακμή $e \in E(G)$ έχει ανατεθεί ένας πραγματικός αριθμός $w(e)$, που ονομάζεται βάρος της ακμής e. Σε μια εφαρμογή τα βάρη ενός γραφήματος θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύουν αποστάσεις.

Μια ακολουθία κόμβων $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ ενός γραφήματος ονομάζεται περίπατος εάν $v_{i-1}, v_i \in E$ για κάθε $i=1,2,\ldots,k$. Εάν ταυτόχρονα δεν υπάρχει ζεύγος διαδοχικών κόμβων που να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές, η ακολουθία ονομάζεται ίχνος.

Μια ακολουθία κόμβων $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ ενός γραφήματος ονομάζεται διαδρομή (path) εάν $v_{i-1}, v_i \in E$ για κάθε $i=1,2,\ldots,k$ και δεν υπάρχει κόμβος που να επαναλαμβάνεται. Το μήκος του περίπατου, του ίχνους και της διαδρομής ισούται με το πλήθος των ακμών τους. Συνεκτικό καλείται το γράφημα που μεταξύ οποιωνδήποτε κόμβων του x, y υπάρχει μια διαδρομή από το x στο y. Ως απόσταση μεταξύ δύο κόμβων *v* και *u* ενός γραφήματος (*dist(v, u)*) ορίζεται το μήκος της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ των κόμβων *v* και *u.*

Εκκεντρότητα E(v) ενός κόμβου v ονομάζεται η απόσταση του κόμβου v από τον πλέον απομακρυσμένο κόμβο.

$$E(v)=max\{dist(v, u) | u \in V(G)\}$$

Αν ένα γράφημα δεν περιέχει κύκλους, τότε καλείται άκυκλο ή αλλιώς δάσος. Αν ένα γράφημα είναι άκυκλο και συνεκτικό, καλείται δέντρο. Μια κορυφή βαθμού 1 σε ένα δέντρο καλείται φύλλο του δέντρου. Ένα δέντρο *T* τάξης n ονομάζεται επιγραφημένο, εάν σε κάθε κόμβο του έχει ανατεθεί ένας μοναδικός θετικός ακέραιος (επιγραφή) μεταξύ 1 και n, έτσι ώστε να μην υπάρχουν στο T δύο κόμβοι με την ίδια επιγραφή.

Έστω $G=(V,E)$ ένα γράφημα τάξης n. Ένα υπογράφημα του G είναι ένα γράφημα $H=(V',E')$ τέτοιο ώστε $V'\subseteq V$ και $E'\subseteq E$. Από κάθε συνεκτικό γράφημα τάξης n μπορούν να παραχθούν 2^n διαφορετικά υπογραφήματα. Εάν έχουμε ένα δέντρο *T*, τέτοιο ώστε το *T* να είναι υπογράφημα ενός συνεκτικού γραφήματος G και $V(T)=V(G)$, τότε το *T* ονομάζεται γενετικό δέντρο (spanning tree) του γραφήματος *G*. Το πλήθος των γενετικών δέντρων ενός γραφήματος *G* καλείται πολυπλοκότητα και συμβολίζεται με *τ(G).*

Δοθέντος ενός γενετικού δένδρου *T* κάποιου γραφήματος *G,* μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα γενετικά δένδρα του G με τη μέθοδο του στοιχειώδους δενδρικού μετασχηματισμού (elementary tree transformation) ή των κυκλικών ανταλλαγών (cyclic interchange).

Έστω G ένα έμβαρο συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα τάξης n και μεγέθους m και έστω $w(e)$ το βάρος ή κόστος της ακμής $e\in E(G)$. Ως βάρος $w(e)$ ενός υπογραφήματος *G'* του γραφήματος G ορίζουμε το άθροισμα των βαρών των ακμών του, δηλαδή:

$$w(G')=\sum_{e\in E(G')} w(e)$$

Ένα γενετικό δέντρο T του έμβαρου γραφήματος G ονομάζεται *ελάχιστο γενετικό δέντρο* (Minimum Spanning Tree ή MST) του G, εάν $w(T)\leq w(T')$ για κάθε γενετικό δέντρο T' του έμβαρου γραφήματος G. Ο πλέον γνωστός τρόπος για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος είναι ο αλγόριθμος του Kruskal (1956). Η βασική ιδέα του αλγόριθμου είναι η εξής: Ταξινομεί τις ακμές του G σε αύξουσα τάξη ως προς τα βάρη τους . Στη συνέχεια, παίρνει με τη σειρά της ταξινόμησης μία-μία τις ακμές , ξεκινώντας από αυτήν με το μικρότερο βάρος και εισάγει την επόμενη σε ένα δέντρο T , εάν δε δημιουργεί κύκλο στο T . Το τελικό δέντρο που υπολογίζει είναι ένα ελάχιστο γενετικό δέντρο T του G.

Η συνεκτικότητα ενός γραφήματος ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός ξένων μεταξύ τους μονοπατιών που συνδέουν οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του γραφήματος. Τα μονοπάτια είναι ξένα μεταξύ τους ως προς τις ακμές ή ως προς τους κόμβους, ανάλογα με τον τύπο συνεκτικότητας που μας ενδιαφέρει.

Έστω $G=(V,E)$ ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα. Ένας κόμβος $x\in V$ αποτελεί *άρθρωση* (ή κόμβο τομής) του *G* , εάν η διαγραφή του αποσυνδέει το γράφημα. Ομοίως, μία ακμή $e\in E$ αποτελεί *γέφυρα* (ή ακμή τομής) του *G*, εάν η διαγραφή της αποσυνδέει το γράφημα. Ένα γράφημα χωρίς αρθρώσεις ονομάζεται *δισυνεκτικό*. [15][16][17]

4.2 Γραφήματα πολύεδρων

Η έκδοση του θεωρήματος του Steinitz που σχετίζεται με τη θεωρία γραφημάτων διατυπώνεται ως εξής : Ένα γράφημα G είναι ισομορφικό με τον 1-σκελετό ενός τρισδιάστατου κυρτού πολύεδρου P αν και μόνο αν το G είναι επίπεδο και 3-συνδεδεμένο. Ένα γράφημα λέγεται ότι είναι 3-συνδεδεμένο αν οποιεσδήποτε δύο κορυφές μπορούν να συνδεθούν με τρεις διαδρομές, με την προϋπόθεση ότι δύο από αυτές έχουν κοινές τις δύο κορυφές.

Μεγάλο ενδιαφέρον και δυνατότητα εφαρμογής παρουσιάζει το ακόλουθο θεώρημα του Koebe-Andreev-Thurston: Αν το G είναι ένα επίπεδο 3-συνδεδεμένο γράφημα τότε το G μπορεί να υλοποιηθεί από ένα κυρτό πολύεδρο P με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) όλες οι άκρες του P είναι εφαπτόμενες σε μια σφαίρα S και το κέντρο των σημείων επαφής είναι το κέντρο του S,

(ii) το γράφημα G* διπλό στο G πραγματοποιείται από ένα κυρτό πολύεδρο P* διπλό στο P, με όλες τις άκρες του P* εφαπτόμενες στο S,

(iii) τα άκρα των P και P* που αντιστοιχούν μεταξύ τους με τη δυαδικότητα των G και G* (και των P και P*) είναι αμοιβαία κάθετα.

(iii) Επιπλέον, εάν δίνεται το S, τότε τα P και P* προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο, μέχρι ισομετρίας.

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούνται τεχνικές από τη θεωρία γραφών στα κυρτά πολύεδρα είναι απλά ότι μπορούμε να δικαιολογήσουμε και να πάρουμε πιο εύκολα αποτελέσματα σε γραφήματα απ’ ότι σε σύνθετα κυρτά πολύεδρα .

Υπάρχει διαφορά μεταξύ πολύεδρων ως στερεών και ως επιφανειών. Στο κυρτό πολύεδρο δεν έχει διαφορά ποια από τις ερμηνείες επιλέξαμε. Το στερεό και η επιφάνεια καθορίζονται αδιαμφισβήτητα και με απλό τρόπο. Επομένως γι' αυτούς η επιλεγμένη προσέγγιση εξαρτάται από το τι είναι πιο βολικό για ένα συγκεκριμένο θέμα. Η κατάσταση είναι διαφορετική όταν εξετάζουμε τα μη κυρτά (nonconvex) πολύεδρα, καθώς παρατηρούνται δυσκολίες στην ερμηνεία των πολύεδρων.

Υπάρχουν δυσκολίες στην εξεύρεση κατάλληλου ορισμού για τα πολύεδρα. Από τη μία πλευρά, η έννοια που ορίζεται θα πρέπει να είναι αρκετά γενική ώστε να περιλαμβάνει τα πολλά διαφορετικά είδη αντικειμένων που έχουν παραδοσιακά θεωρηθεί πολύεδρα. Αυτό περιλαμβάνει τα πολύεδρα που είναι τοπολογικές σφαίρες, πολύεδρα υψηλότερου γένους, αυτοσυνδεόμενα πολύεδρα όπως το Kepler-Poinsot, και πολλά άλλα είδη. Ωστόσο, από την άλλη πλευρά, ο ορισμός δεν θα πρέπει να είναι υπερβολικά γενικός, προκειμένου να αποφευχθούν αντικείμενα τα οποία γενικά δεν θα θεωρούνταν πολύεδρα, όπως δύο αποκομμένα τετράεδρα.

Πιθανότατα οι περισσότεροι γεωμέτρες συμφωνούν ότι ένα πολύεδρο θα πρέπει να αποτελείται κατά κάποιον τρόπο από έναν πεπερασμένο αριθμό πολυγώνων.

Ένα αφηρημένο πολύεδρο είναι ένα πεπερασμένο γράφημα με μια συλλογή από αφηρημένα πολύγωνα - που ονομάζονται επίπεδες επιφάνειες (faces) - τα οποία σχηματίζονται από τις κορυφές και τις ακμές του. Οι κορυφές, οι ακμές και τα πολύγωνα πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(1) Κάθε ακμή προσπίπτει με ακριβώς δύο ξεχωριστές κορυφές και δύο ξεχωριστές επιφάνειες.

(2) Αν μια κορυφή και μία επιφάνεια προσπίπτουν, υπάρχουν ακριβώς δύο ξεχωριστές ακμές που προσπίπτουν και με την κορυφή και με την επιφάνεια.

(3) Για κάθε επιφάνεια οι κορυφές και οι ακμές που προσπίπτουν σε αυτήν σχηματίζουν ένα απλό κύκλωμα.

(4) Κάθε ζεύγος επιφανειών συνδέεται μέσω μίας πεπερασμένης αλυσίδας προσπίπτουσων ακμών και επιφανειών.

Ένα γεωμετρικό πολύεδρο είναι η εικόνα ενός αφηρημένου πολύεδρου κάτω από μια χαρτογράφηση στην οποία οι κορυφές αντιστοιχίζονται σε σημεία στον Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο, οι ακμές χαρτογραφούνται σε τμήματα με τα κατάλληλα τελικά σημεία και οι επιφάνειες χαρτογραφούνται στα (γεωμετρικά) πολύγωνα. Το γεωμετρικό πολύεδρο είναι μια υλοποίηση του αφηρημένου πολύεδρου. [18]

5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

5.1 Ψηφιακή αναπαράσταση

Η τρισδιάστατη μοντελοποίηση είναι η διαδικασία ανάπτυξης μιας μαθηματικής αναπαράστασης μέσω εξειδικευμένου λογισμικού, ενός οποιουδήποτε τρισδιάστατου αντικειμένου που ονομάζεται "3D μοντέλο". Τα μοντέλα μπορεί να δημιουργούνται αυτόματα ή χειροκίνητα. Η διαδικασία χειροκίνητης μοντελοποίησης για τη δημιουργία γεωμετρικών δεδομένων είναι παρόμοια με τις πλαστικές τέχνες, όπως η γλυπτική. Τα τρισδιάστατα μοντέλα μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιώντας διάφορες προσεγγίσεις, όπως η χρήση NURBS για τη δημιουργία ομαλών επιφανειών, ή με πολυγωνική mesh μοντελοποίηση, όπου χρησιμοποιούνται πολύεδρα για την αναπαράσταση της επιθυμητής γεωμετρίας.[19]

Τα συστήματα CAD / CAM χρησιμοποιούν τρεις τύπους γεωμετρίας:

α) Τις κανονικές επιφάνειες που περιλαμβάνουν επιφάνειες εκ περιστροφής, όπως κυλίνδρους, κώνους, σφαίρες, τόρους και επιφάνειες γραμμικές προς μια κατεύθυνση, όπως επιφάνειες εξώθησης.

β) Τις επιφάνειες ελεύθερης μορφής (συνήθως NURBS) που επιτρέπουν την αναπαράσταση πιο πολύπλοκων σχημάτων μέσω μοντελοποίησης.

γ) Και τις επιφάνειες που χρησιμοποιούν πολυγωνικά πλέγματα και με ένα πλήθος από κόμβους, ακμές και έδρες, ορίζουν τη μορφή. [20]

Οπότε η μοντελοποίηση μπορεί να χωριστεί κυρίως σε δύο είδη :

(α) Μοντελοποίηση καμπυλών

Στη μοντελοποίηση καμπυλών οι επιφάνειες ορίζονται από καμπύλες, οι οποίες επηρεάζονται από σημεία ελέγχου. Η καμπύλη ακολουθεί, αλλά δεν παρεμβάλεται απαραίτητα στα σημεία. Η αύξηση της επιρροής ενός σημείου θα φέρει την καμπύλη πιο κοντά σε αυτό το σημείο. Οι τύποι καμπυλών περιλαμβάνουν τα NURBS, spline, patches και γεωμετρικά primitive (σφαίρα, κύβος, κύλινδρος, πυραμίδα, τόρος).

(β) Πολυγωνική μοντελοποίηση

Τα σημεία στον τρισδιάστατο χώρο, που ονομάζονται κόμβοι (vertex), συνδέονται με τμήματα γραμμής - ακμές (edge)- για να σχηματίσουν ένα πλέγμα πολυγώνων (mesh). Η μεγάλη πλειοψηφία των τρισδιάστατων μοντέλων σήμερα είναι κατασκευασμένα ως πολυγωνικά μοντέλα, επειδή είναι περισσότερο ευέλικτα και επειδή οι υπολογιστές μπορούν να τα επεξεργάζονται και να τα αναπαριστουν (render) πιο γρήγορα. Ωστόσο, τα πολύγωνα είναι επίπεδα και μπορούν να προσεγγίσουν καμπύλες επιφάνειες μόνο χρησιμοποιώντας μεγάλο αριθμό πολυγώνων. [21]

5.2 Μοντελοποίηση καμπυλών

5.2.1 Piecewise

Στα μαθηματικά μια τμηματικά καθορισμένη συνάρτηση (piecewise-defined function), που ονομάζεται επίσης τετραγωνική συνάρτηση ή υβριδική συνάρτηση, είναι μια συνάρτηση που ορίζεται από πολλαπλές υπο-συναρτήσεις. Κάθε υπο-συνάρτηση εφαρμόζεται σε ένα συγκεκριμένο διάστημα του πεδίου ορισμού της κύριας συνάρτησης. Το Piecewise είναι στην πραγματικότητα ένας τρόπος έκφρασης της συνάρτησης και όχι ένα χαρακτηριστικό της. Μια τμηματική πολυωνυμική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση που είναι ένα διαφορετικό πολυώνυμο σε κάθε υπο-τομέα του.[22]

5.2.2 Bezier

Μια καμπύλη Bezier ορίζεται από ένα σύνολο σημείων ελέγχου $\mathbf{b}_0$ εώς $\mathbf{b}_n$, όπου n ο βαθμός της καμπύλης με τιμή τάξης n+1. Η Bezier είναι μια παραμετρική αναπαράσταση και έχει συνάρτηση

$$\boldsymbol{r}(t)=\sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t) \quad \text{με} \quad 0 \le t \le 1$$

Οι συντελεστές b_i είναι τα σημεία ελέγχου και μαζί με τη συνάρτηση $B_{i,n}(t)$ καθορίζουν το σχήμα της καμπύλης. Οι Bezier επιφάνειες είναι ένα τανυστικό γινόμενο που δημιουργείται μετακινώντας μια καμπύλη στο χώρο, χωρίς να είναι απαραίτητο να διατηρηθεί η αρχική της μορφή. Αν αυτή η επιφάνεια αναπαρασταθεί χρησιμοποιώντας Bernstein πολυώνυμα τότε θα έχει συνάρτηση

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \quad \text{με} \quad 0 \le u, v \le 1$$ [23]

5.2.3 Spline

Στα μαθηματικά spline είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση ορισμένη κατά τμήματα (piecewise). Σε προβλήματα παρεμβολής, η παρεμβολή spline προτιμάται συχνά από την παρεμβολή πολυωνύμων επειδή δίνει παρόμοια αποτελέσματα, ακόμη και όταν χρησιμοποιούνται πολυώνυμα χαμηλού βαθμού.

Στον ψηφιακό σχεδιασμό (CAD) και στα γραφικά υπολογιστών ο όρος spline αναφέρεται συχνότερα σε μια τμηματικά καθορισμένη παραμετρική καμπύλη. Η spline είναι δημοφιλής λόγω της απλότητας της κατασκευής, της ευκολίας, της ακρίβειας της αξιολόγησης και της ικανότητάς της να προσεγγίζει πολύπλοκα σχήματα.[24]

5.2.4 B-spline

Στην αριθμητική ανάλυση, μία B-spline, ή μια βάση spline, είναι μια συνάρτηση spline που έχει ελάχιστα σημεία στα οποία η συνάρτηση είναι μη μηδενική. Στον ψηφιακό σχεδιασμό, οι συναρτήσεις κατασκευάζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των B-spline με ένα σύνολο σημείων ελέγχου . Η B-spline συνάρτηση είναι ένας συνδυασμός εύκαμπτων ζωνών που διατρέχει τον αριθμό των σημείων που καλούνται σημεία ελέγχου και δημιουργεί ομαλές καμπύλες. Αυτές οι συναρτήσεις επιτρέπουν τη δημιουργία και τη διαχείριση πολύπλοκων σχημάτων και επιφανειών με τη χρήση πολλών σημείων. Οι B-spline και οι Bézier συναρτήσεις εφαρμόζονται εκτενώς στις μεθόδους βελτιστοποίησης σχήματος.

Μια παραμετρική καμπύλη μερικών πραγματικών παραμέτρων spline μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ή τρεις ξεχωριστές συναρτήσεις συντεταγμένων

$$(x(t), y(t)), \text{ή } (x(t), y(t), z(t))$$

Οι συναρτήσεις x, y, z είναι συναρτήσεις spline, με ένα κοινό σύνολο κόμβων $t_0, t_1, \ldots, t_n$.[25] Μία τάξης k B-spline κατασκευάζεται συνδυάζοντας κομμάτια πολυωνύμων βαθμού k-1. Τα σημεία ένωσης ορίζουν τον διανυσματικό κόμβο $\boldsymbol{T}=(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ με $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n$ που καθορίζει την παραμετροποίηση της βασικής συνάρτησης $N_{i,k}(t)$ με

$$N_{i,k}(t)=\begin{cases} 1 & \text{για } t_i \le t < t_{i+1} \\ 0 & \end{cases} \quad \text{για k=1 και}$$

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t) \quad \text{για k>1 με} \quad i=0,1,\ldots,n$$

Μια καμπύλη B-spline ορίζεται ως ο γραμμικός συνδυασμός των σημείων ελέγχου $\boldsymbol{p_i}$ όπου έχουμε $\boldsymbol{p_i}=(x_i, y_i, z_i)$ στον τρισδιάστατο χώρο, και της βασικής συνάρτησης B-spline $N_{i,k}(t)$. οπότε κάθε μία από τις συναρτήσεις συντεταγμένων μπορεί να εκφραστεί ως ,

$$x(t)=\sum_i x_i N_{i,k}(t) \qquad y(t)=\sum_i y_i N_{i,k}(t) \qquad z(t)=\sum_i z_i N_{i,k}(t)$$, δηλαδή έχουμε

$$\boldsymbol{r}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{p_i}N_{i,k}(t) \quad \text{με} \quad n\geq k-1 \quad , \quad t\in[t_{k-1}, t_{n+1}]$$ [23]

Η αναπαράσταση μιας καμπύλης από σημεία ελέγχου έχει πολλές χρήσιμες ιδιότητες:

α) Τα σημεία ελέγχου $\boldsymbol{P_i}$ ορίζουν μία καμπύλη. Αν τα σημεία μετασχηματιστούν με οποιονδήποτε τρόπο, π.χ. αν περιστραφούν, μεγεθυνθούν ή μετακινηθούν, τότε η αντίστοιχη καμπύλη μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο.

β) Επειδή τα σημεία ελέγχου B-splines είναι μη μηδενικά για ένα μόνο πεπερασμένο πεδίο ορισμού, η αλλαγή που προκύπτει από τον μετασχηματισμό ενός μόνο σημείου ελέγχου, είναι στην αντίστοιχη μη μηδενική περιοχή.

γ) Εξαιτίας του αθροίσματος

$$\sum_i (N_{i,k}(x))=1 \quad \text{και} \quad N_{i,k}(x)\geq 0$$

η καμπύλη μένει εντός του πλαισίου οριοθέτησης των σημείων ελέγχου.

Έπίσης, ένα λιγότερο επιθυμητό χαρακτηριστικό είναι ότι η παραμετρική καμπύλη δεν περνάει από τα σημεία ελέγχου.[25] Η επιφάνεια B-spline είναι ένα τανυστικό γινόμενο που ορίζεται από έναν ορθογωνικό κάναβο σημείων ελέγχου $\boldsymbol{p_{ij}}$, $0\leq i\leq m$, $0\leq j\leq n$ και δύο διανυσματικούς κόμβους $\boldsymbol{U}=(u_0, u_1, \ldots, u_{m+k})$ και $\boldsymbol{V}=(v_0, v_1, \ldots, v_{n+l})$. Η αντίστοιχη συνάρτηση της επιφάνειας είναι η

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p_{ij}}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)$$ [23]

5.2.5 Non-uniform rational b-spline (NURBS)

Τα NURBS είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία και την απεικόνιση καμπυλών και επιφανειών στον ψηφιακό σχεδιασμό (CAD), στην κατασκευή (CAM) και στη μηχανική (CAE). Οι επιφάνειες NURBS είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών που αντιστοιχούν σε μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο. Το σχήμα της επιφάνειας καθορίζεται από τα σημεία ελέγχου. Οι επιφάνειες NURBS μπορούν να αναπαριστούν απλά γεωμετρικά σχήματα. Μια καμπύλη NURBS ορίζεται από την τάξη της, από ένα σύνολο σημείων ελέγχου και από έναν διανυσματικό κόμβο. Οι καμπύλες και οι επιφάνειες NURBS είναι γενικεύσεις των B-spline και Bézier, καμπυλών και επιφανειών. Οι επιφάνειες NURBS χρησιμοποιούν έναν δισδιάστατο κάναβο σημείων ελέγχου.

Η τάξη μιας καμπύλης NURBS ορίζει τον αριθμό των κοντινών σημείων ελέγχου που επηρεάζουν περιοχές της καμπύλης. Η καμπύλη αναπαριστάται μαθηματικά από ένα πολυώνυμο βαθμού ν-1, όπου ν η τάξη της καμπύλης. Επομένως, οι καμπύλες δεύτερης τάξης (που αντιπροσωπεύονται από γραμμικά πολυώνυμα) ονομάζονται γραμμικές καμπύλες, οι καμπύλες τρίτης τάξης τετραγωνικές καμπύλες και οι καμπύλες τετάρτης τάξης κυβικές καμπύλες. Ο αριθμός των σημείων ελέγχου πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος με την τάξη της καμπύλης. Στην πράξη, οι κυβικές καμπύλες είναι αυτές που χρησιμοποιούνται συχνότερα. Οι καμπύλες πέμπτης και έκτης τάξης είναι μερικές φορές χρήσιμες, ειδικά για τη λήψη συνεχών παραγώγων υψηλότερης τάξης, αλλά οι υψηλότερες καμπύλες δεν χρησιμοποιούνται, επειδή οδηγούν σε εσωτερικά αριθμητικά προβλήματα και τείνουν να απαιτούν δυσανάλογα μεγάλους χρόνους υπολογισμού.

Τα σημεία ελέγχου καθορίζουν το σχήμα της καμπύλης. Τυπικά, κάθε σημείο της καμπύλης υπολογίζεται λαμβάνοντας ένα σταθμισμένο άθροισμα ενός αριθμού σημείων ελέγχου. Το βάρος κάθε σημείου ποικίλλει ανάλογα με την παράμετρο που το διέπει. Για μια καμπύλη βαθμού d, το βάρος οποιουδήποτε σημείου ελέγχου είναι μόνο μηδενικό σε d + 1 διαστήματα του χώρου παραμέτρων. Σε αυτά τα διαστήματα το βάρος μεταβάλλεται σύμφωνα με μια πολυωνυμική συνάρτηση (συνάρτηση βάσης) βαθμού d. Στα όρια των διαστημάτων οι βασικές λειτουργίες μηδενίζονται ομαλά, η ομαλότητα καθορίζεται από το βαθμό του πολυωνύμου.

Ο διανυσματικός κόμβος είναι μια ακολουθία παραμέτρων που καθορίζει το πού και πώς τα σημεία ελέγχου επηρεάζουν την καμπύλη. Ο αριθμός των κόμβων είναι ίσος με το άθροισμα των σημείων ελέγχου με την τάξη της καμπύλης. Ο διανυσματικός κόμβος διαιρεί τον παραμετρικό χώρο σε διαστήματα. Κάθε φορά που η τιμή παραμέτρου εισέρχεται σε ένα νέο πεδίο ορισμού κάποιου κόμβου, ένα νέο σημείο ελέγχου ενεργοποιείται, ενώ ένα παλιό απενεργοποιείται.

Κατασκευή των βασικών συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις βάσης B-spline που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή καμπυλών NURBS συνήθως συμβολίζονται ως $\boldsymbol{N}_{i,n}(t)$, όπου το i αντιστοιχεί στο i σημείο ελέγχου (control point) και το n αντιστοιχεί στον βαθμό της βασικής συνάρτησης. Η συνάρτηση ισούται με τη μονάδα στο αντίστοιχο εύρος κόμβων με το μηδέν στα υπόλοιπα σημεία. Το $\boldsymbol{N}_{i,n}$ είναι μια γραμμική παρεμβολή του $\boldsymbol{N}_{i,n-1}$ και του $\boldsymbol{N}_{i+1,n-1}$. Η συνάρτηση $\boldsymbol{N}_{i,n}$ υπολογίζεται από το άθροισμα $\boldsymbol{N}_{i}, n=f_{i,n}N_{i,n-1}+g_{i+1,n}N_{i+1,n-1}$. Το $\boldsymbol{f}_i$ αυξάνεται γραμμικά από το μηδέν στο ένα, στο διάστημα όπου $\boldsymbol{N}_{i,n-1}$ είναι διάφορο του μηδενός, ενώ το $\boldsymbol{g}_{i+1}$ μεταβάλλεται από το ένα στο μηδέν στο ίδιο διάστημα. Η $\boldsymbol{N}_{i,1}$ είναι μια τριγωνική συνάρτηση, διάφορη του μηδενός στο διάστημα μεταξύ δύο κόμβων, που αυξάνεται από το μηδέν στο ένα στον πρώτο κόμβο και πέφτει στο μηδέν στον δεύτερο. Οι βασικές λειτουργίες υψηλότερης τάξης είναι μη μηδενικές σε σχέση με τις αντίστοιχες μεγαλύτερες διαστάσεις κόμβων και έχουν αντίστοιχα υψηλότερο βαθμό. Αν το u είναι η παράμετρος και k_i είναι ο κόμβος i , μπορούμε να γράψουμε τις συναρτήσεις *f, g* ως

$$\boldsymbol{f}_{i,n}(t)=\frac{t-k_i}{k_{i+n}-k_i} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{g}_{i,n}(t)=1-f_{i,n}(t)$$

Οι συναρτήσεις *f* και *g* είναι θετικές όταν οι αντίστοιχες βασικές συναρτήσεις είναι μη μηδενικές.

Γενική μορφή καμπύλης NURBS

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των συναρτήσεων βάσης $\boldsymbol{N}_{i,n}$, μια καμπύλη NURBS παίρνει την μορφή :

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{k} N_{i,n}w_i}{\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{N}_{i,n}w_i}\boldsymbol{P}_i$$

όπου *k* είναι ο αριθμός των σημείων ελέγχου $\boldsymbol{P}_i$ και w_i είναι το αντίστοιχο βάρος στο σημείο ελέγχου. Ο παρονομαστής είναι ένας συντελεστής ομαλοποίησης που παίρνει την τιμή 1 εάν το βάρος έχει την ίδια τιμή.

Γενική μορφή επιφάνειας NURBS

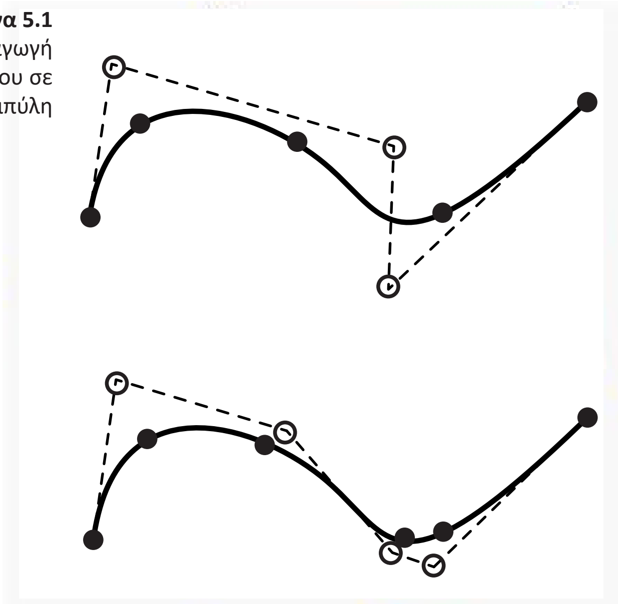
Μια επιφάνεια NURBS αναπαρίσταται ως το τανυστικό γινόμενο δύο καμπυλών NURBS, που χρησιμοποιούν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές *u* και *v* (με δείκτες i και j αντίστοιχα):

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\widetilde{N}_{i,j}(u,v)\boldsymbol{P}_{i,j}¿ \quad ,\text{όπου} \quad \widetilde{N}_{i,j}(u,v)=\frac{N_{i,n}(u)N_{j,m}(v)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^{k}N_{j,n}(u)w_j}$$

είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις βάσης.[26][27][28][29][23]

5.2.6 Διανυσματικοί κόμβοι

εικόνα 5.1 εισαγωγή κόμβου σε καμπύλη



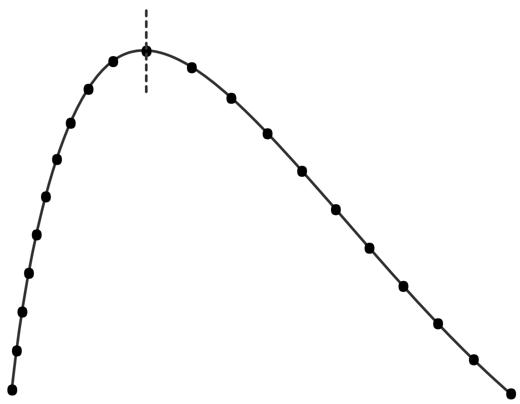
Η εισαγωγή κόμβων αποτελεί θεμελιώδη αλγόριθμο στον σχεδιασμό καμπυλών και επιφανειών. Στόχος είναι η προσθήκη ενός ή περισσότερων κόμβων t_i στον διανυσματικό κόμβο $\boldsymbol{T}$ χωρίς να αλλάξει το σχήμα της καμπύλης. Λόγω της θεμελιώδους ταυτότητας έχουμε m = n + p + 1, όπου m + 1 είναι ο αριθμός των κόμβων, n + 1 ο αριθμός των σημείων ελέγχου και p ο βαθμός της καμπύλης (B-spline / NURBS). Αυξάνοντας τον αριθμό των κόμβων, αυξάνονται αντίστοιχα και τα σημεία ελέγχου. Η αλλαγή του βαθμού της καμπύλης θα μεταβάλει το σχήμα της. Επομένως, η εισαγωγή ενός νέου κόμβου προκαλεί την προσθήκη ενός νέου σημείου ελέγχου. Στην πραγματικότητα, ορισμένα υπάρχοντα σημεία ελέγχου αφαιρούνται και αντικαθίστανται από νέα .[30]

5.2.7 Υποδιαίρεση της NURBS αναπαράστασης

Υπάρχουν δύο γενικές μέθοδοι υποδιαίρεσης, η ομοιόμορφη και η γεωμετρική.

Ομοιόμορφη υποδιαίρεση

εικόνα 5.2 ομοιόμορφη υποδιαίρεση τμηματικής καμπύλης



Η ομοιόμορφη υποδιαίρεση μιας καμπύλης διαιρεί το πεδίο ορισμού των παραμέτρων σε ίσα διαστήματα. Η παράμετρος για την υποδιαίρεση u_0 της καμπύλης είναι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμού των βημάτων, υπολογίζεται στον γεωμετρικό χώρο της καμπύλης και έχει μια ορισμένη από τον χρήστη ανοχή. Αν η καμπύλη NURBS ορίζεται εντός του πεδίου ορισμού $[u_{min}, u_{max}]$ και ο αριθμός των βημάτων στα οποία η καμπύλη πρέπει να διαχωριστεί είναι $step_u$, τότε η παράμετρος u_0 για την υποδιαίρεση ορίζεται ως

$$u_0=\frac{u_{max}-u_{min}}{step_u}$$

Παρά την απλότητα της μεθόδου, η υποδιαίρεση μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα σε καμπύλες NURBS εξαιτίας της τμηματικής μορφής με πολλαπλές καμπύλες στο ίδιο πεδίο ορισμού που έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία άνισης παραμετροποίησης. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, κάθε διάστημα καμπύλης μπορεί να υποδιαιρεθεί με τη χρήση μιας διαφορετικής παραμέτρου.

Bezier ομοιόμορφη υποδιαίρεση

Ένα πλεονέκτημα της αναπαράστασης με NURBS είναι ότι εμπεριέχει μια άλλη ισχυρή και ευρέως χρησιμοποιούμενη αναπαράσταση που ονομάζεται Bézier ως υποσύνολο. Επομένως, οι καμπύλες και οι επιφάνειες NURBS μπορούν να μετασχηματιστούν σε Bézier μορφή. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που έχει χρησιμοποιηθεί σε αρκετούς αλγόριθμους τριγωνικής διακριτοποίησης.

Μια εναλλακτική προσέγγιση για τη βελτίωση της υποδιαίρεσης των NURBS καμπυλών είναι η μετατροπή κάθε μέρους της καμπύλης σε καμπύλη bezier, χρησιμοποιώντας την εισαγωγή κόμβων. Μια καμπύλη bezier αντιπροσωπεύει μια ενιαία καμπύλη που κατανέμεται ομοιόμορφα στο πεδίο ορισμού [0,1]. Συνεπώς, κάθε καμπύλη bezier μπορεί να υποδιαιρεθεί ανεξάρτητα για να εξασφαλιστεί ότι τα τμήματα που προκύπτουν έχουν το ίδιο μήκος σε όλο το πεδίο ορισμού της αρχικής καμπύλης NURBS.

Γεωμετρική υποδιαίρεση

Η γεωμετρική (γνωστή και ως προσαρμοστική) υποδιαίρεση είναι μια μέθοδος που είναι κατάλληλη τόσο για Bézier όσο και για NURBS καμπύλες, δεδομένου ότι εκτελείται σε σχέση με το γεωμετρικό σχήμα της πραγματικής καμπύλης. Ο κύριος στόχος της γεωμετρικής υποδιαίρεσης είναι να έχουμε όσο το δυνατόν λιγότερα γραμμικά τμήματα. Ως εκ τούτου, η μέθοδος υποδιαιρεί μια καμπύλη σε ανομοιόμορφα διαστήματα τα οποία υπολογίζονται με βάση διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά, όπως το μήκος τόξου ή την εφαπτόμενη γωνία. Η γεωμετρική υποδιαίρεση μεταβάλλει την προσέγγιση των καμπυλών και των επιφανειών ανάλογα με την τοπική γεωμετρία μειώνοντας τον αριθμό των απαιτούμενων στοιχείων και μπορεί να γίνει περίπλοκη στην εφαρμογή της.[31]

5.3 Πολυγωνική μοντελοποίηση (mesh)

Ένα πολύεδρο είναι η φυσική γενίκευση ενός δισδιάστατου πολυγώνου στις τρεις διαστάσεις. Αποτελεί μια περιοχή του χώρου που περικλείεται από ένα πεπερασμένο πλήθος επίπεδων πολυγωνικών εδρών, οι οποίες ανά δύο είτε έχουν κοινά σημεία, είτε συναντώνται σε κοινές κορυφές ή ακμές. Το σύνορο ενός πολύεδρου αποτελείται από τρεις τύπους αντικειμένων: κόμβους, ακμές και έδρες. Ένα πολύεδρο είναι κυρτό εάν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία του ανήκει σε αυτό. Στα κυρτά πολύεδρα οι εσωτερικές δίεδρες γωνίες είναι μικρότερες ή ίσες με 180° και για κάθε κόμβο το άθροισμα των γωνιών όλων των προσκείμενων εδρών είναι μικρότερο ή ίσο με 360°.

Η πολυγωνική μοντελοποίηση είναι μια προσέγγιση για την αναπαράσταση γεωμετριών με τη χρήση πολυγώνων. Το βασικό στοιχείο που χρησιμοποιείται στη μοντελοποίηση πλέγματος (mesh modeling) είναι ο κόμβος, ο οποίος αντιπροσωπεύει ένα σημείο στον τρισδιάστατο χώρο. Δύο κόμβοι που συνδέονται με μια ευθεία γραμμή δημιουργούν μια ακμή. Τρεις κόμβοι, που συνδέονται μεταξύ τους με τρεις ακμές, ορίζουν ένα τρίγωνο, το οποίο είναι το απλούστερο πολύγωνο στον Ευκλείδειο χώρο. Πιο περίπλοκα πολύγωνα μπορούν να δημιουργηθούν με το συνδυασμό περισσότερων κόμβων. Τα τετράπλευρα και τα τρίγωνα είναι τα πιο κοινά σχήματα που χρησιμοποιούνται στην πολυγωνική μοντελοποίηση. [32]

Ένας πεπερασμένος αριθμός κόμβων, ακμών και επιφανειών ονομάζεται πλέγμα (mesh). Ένα πολύεδρο περικλείει μια οριοθετημένη περιοχή του χώρου και δεν έχει περιττούς κόμβους. Το πιο απλό παράδειγμα είναι ένα τετράεδρο.

Το κλασικό τετράεδρο έχει κόμβους:

$$\boldsymbol{V_0}=(0,0,0),\ \boldsymbol{V_1}=(1,0,0),\ \boldsymbol{V_2}=(0,1,0),\ \boldsymbol{V_3}=(0,0,1)\ ,$$

ακμές:

$$E_{01}=\langle V_0,V_1\rangle,\ E_{02}=\langle V_0,V_2\rangle,\ E_{03}=\langle V_0,V_3\rangle,\ E_{12}=\langle V_1,V_2\rangle,\ E_{01}=\langle V_2,V_3\rangle,\ E_{13}=\langle V_1,V_3\rangle$$

και έδρες :

$$F_{012}=\langle V_0,V_1,V_2\rangle,\ F_{013}=\langle V_0,V_1,V_3\rangle,\ F_{023}=\langle V_0,V_2,V_3\rangle,\ F_{123}=\langle V_1,V_2,V_3\rangle$$

Για να αναπαριστά ένα πλέγμα ένα πολύεδρο πρέπει :

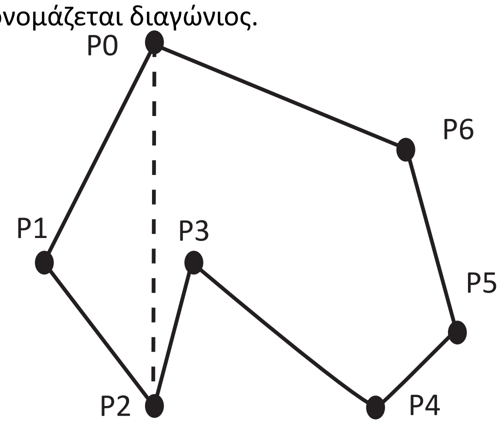
α) Το πλέγμα να δημιουργεί ένα συνδεδεμένο γράφημα των οποίων οι κόμβοι να είναι οι έδρες του πλέγματος και οι ακμές να είναι οι ακμές που μοιράζονται δυο έδρες.

β) Κάθε ακμή να χωρίζει δύο έδρες. Αυτή η κατάσταση αναγκάζει το πλέγμα να είναι κλειστό και οριοθετημένο. [33]

Υπάρχουν ορισμένα μειονεκτήματα όσο αναφορά την απεικόνιση ενός αντικειμένου με τη χρήση πολυγώνων. Τα πολύγωνα δεν είναι ικανά να αναπαραστήσουν με ακρίβεια καμπύλες επιφάνειες, οπότε εάν θέλουμε να προσεγγίσουμε τη γεωμετρία μιας καμπυλωμένης επιφάνειας χρειάζεται ένας μεγάλος αριθμός στοιχείων. Έτσι, η χρήση σύνθετων μοντέλων έχει αυξημένο υπολογιστικό κόστος .[34]

5.4 Τριγωνισμός πολυγώνου

Το αυτί ενός πολυγώνου είναι ένα τρίγωνο που σχηματίζεται από διαδοχικές κορυφές p_i, p_{i+1}, p_{i+2} όπου καμία άλλη κορυφή πολυγώνου δεν βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο. Οι κορυφή p_{i+1} είναι το άκρο του αυτιού και η γραμμή που ενώνει τις κορυφές p_i και p_{i+2} ονομάζεται διαγώνιος.



εικόνα 5.3 αρχή τριγωνοποίησης πολυγώνου με τη χρήση του αυτιού

Μόλις βρεθεί ένα αυτί στο πολύγωνο, το τρίγωνο κατασκευάζεται εισάγοντας μια διαγώνιο. Στη συνέχεια παραλείπουμε το τρίγωνο που δημιουργήθηκε και αυτομάτως σχηματίζεται ένα νέο πολύγωνο με -1 κορυφές. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να παραμείνουν μόνο τρεις κορυφές. Λόγω της φύσης αυτής της μεθόδου, η παραγόμενη τριγωνοποίηση δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδική, αφού με διαφορετική αρχική κορυφή υπάρχει πιθανότητα να αφαιρεθούν τα αυτιά με διαφορετική σειρά, τροποποιώντας έτσι τον τελικό τριγωνισμό.[31]

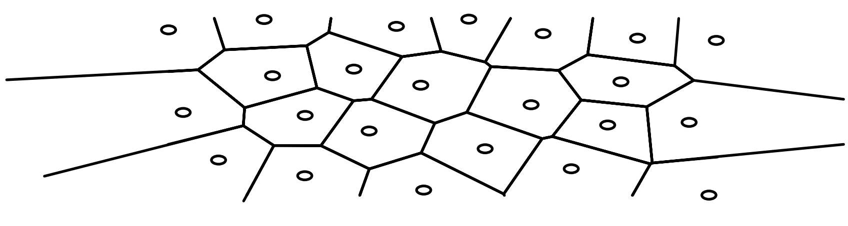
5.4.1 Voronoi διάγραμμα – Delaunay τριγωνοποίηση

Voronoi

Έστω $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ένα σύνολο από σημεία στο επίπεδο. Σε κάθε ένα από τα σημεία αναθέτουμε το χώρο του επιπέδου που είναι πιο κοντά σε αυτά παρά σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο. Όλοι αυτοί οι χώροι σχηματίζουν την αντίστοιχη περιοχή Voronoi του κάθε σημείου.

$$V(p_i)=\{x \mid \forall\, j\neq i,\ d(x,p_i)\leq d(x,p_j)\}$$

εικόνα 5.4 διάγραμμα voronoi



όπου $d(a, b)$ η ευκλείδεια απόσταση των σημείων α και b. Κάθε περιοχή Voronoi είναι ένα κλειστό σύνολο. Το σύνορο του κάθε συνόλου δημιουργεί ένα πλέγμα το οποίο δεν έχει μοναδικό κοντινότερο σημείο, αλλά ισαπέχει από δύο ή περισσότερα σημεία. Το πλέγμα αυτό σχηματίζει το Voronoi διάγραμμα του συνόλου των σημείων.

Το διάγραμμα Voronoi χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Κάθε περιοχή Voronoi $V(p_i)$ είναι κυρτή.

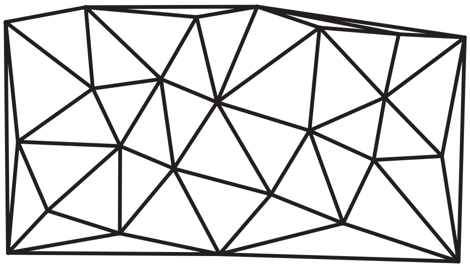
(ii) Η περιοχή $V(p_i)$ είναι ανοικτή εάν το σημείο p_i ανήκει στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του συνόλου των σημείων.

(iii) Εάν ν είναι μια κορυφή Voronoi στο σημείο που συναντώνται οι περιοχές $V(p_i)$, $V(p_j)$, $V(p_k)$ τότε η ν είναι το κέντρο του κύκλου $C(v)$ που περνά από τους κόμβους p_i, p_j, p_k.

(iv) Ο κύκλος $C(v)$ δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του.

Delaunay

Έχοντας ένα σύνολο σημείων P και το αντίστοιχο Voronoi διάγραμμα $V(P)$, κατασκευάζουμε το γράφημα G του $V(P)$ όπου οι κόμβοι του G αντιστοιχούν στα σημεία του P και οι δύο κόμβοι του G που έχουν κοινό σύνορο συνδέονται με μία ακμή. Επειδή κάθε κορυφή Voronoi έχει βαθμό τρία, όλες οι περιοχές του αντίστοιχου G γραφήματος είναι τρίγωνα .



εικόνα 5.5
διάγραμμα Delaunay

Η Delaunay τριγωνοποίηση χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) Η Delaunay τριγωνοποίηση $D(P)$ είναι το δυικό γράφημα (με ευθείες ακμές) του διαγράμματος Voronoi.

(ii) Η $D(P)$ είναι διαίρεση σε τρίγωνα εάν δεν υπάρχουν τέσσερις ή περισσότεροι ομοκυκλικοί κόμβοι.

(iii) Οι ακραίες ακμές της $D(P)$ σχηματίζουν το κυρτό περίβλημα του P.

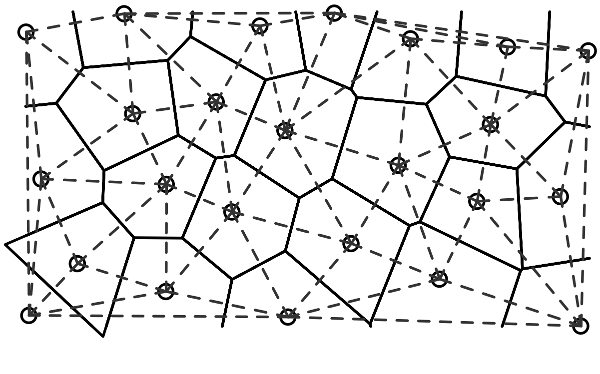
(iv) Το εσωτερικό κάθε περιοχής της $D(P)$ δεν περιέχει κόμβους.

(v) Για κάθε ακμή Delaunay υπάρχει κύκλος που περνά από τις κορυφές που πρόσκεινται στην ακμή και δεν περιέχει κόμβους στο εσωτερικό του.

(vi) Το ελάχιστο συνδετικό δέντρο ενός συνόλου σημείων είναι υποσύνολο της Delaunay τριγωνοποίησης. Δηλαδή αν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ακμή του ελάχιστου συνδετικού δέντρου, τότε είναι και ακμή της Delaunay τριγωνοποίησης.

Μεταξύ των διαιρέσεων σε τρίγωνα που μπορούμε να ορίσουμε με κορυφές ένα δοσμένο σύνολο σημείων, η Delaunay τριγωνοποίηση είναι αυτή που μεγιστοποιεί τη μικρότερη από τις γωνίες των τριγώνων.

Το διάγραμμα Voronoi και οι τριγωνοποίηση Delaunay παρέχουν την ίδια πληροφορία, απλά την αναπαριστούν με διαφορετική μορφή. Οι πολλές εφαρμογές του διαγράμματος Voronoi οδήγησαν σε μια ποικιλία από αλγόριθμους για τον υπολογισμό του και συνεπώς για τον υπολογισμό της τριγωνοποίησης Delaunay.[35]



εικόνα 5.6
υπέρθεση διαγραμμάτων Voronoi και Delaunay

5.4.2 Τριγωνική αναπαράσταση

Οι σχέσεις μεταξύ των τοπολογικών στοιχείων μιας τριγωνικής αναπαράστασης παρατίθενται παρακάτω:

(i) Κάθε κόμβος (vertex) έχει n δείκτες στις προσπίπτουσες ακμές και n δείκτες στα προσπίπτοντα τρίγωνα.

(ii) Κάθε ακμή έχει 2 δείκτες στους κόμβους που καθορίζουν τα τελικά της σημεία και 2 δείκτες για τα προσπίπτοντα τρίγωνα σε αυτήν την ακμή.

(iii) Κάθε τρίγωνο έχει 3 δείκτες στους κόμβους και στις ακμές που το ορίζουν.

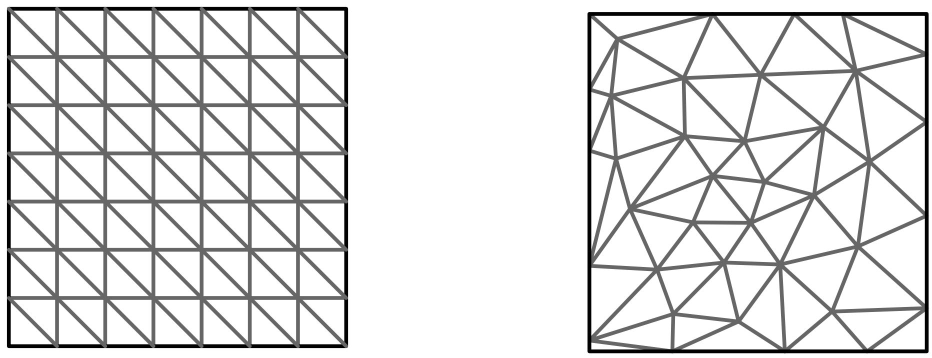
Απαιτείται επίσης κάθε τρίγωνο να έχει έναν συνεπή προσανατολισμό των σημείων, δηλαδή αριστερόστροφο ή δεξιόστροφο. Συνήθως χρησιμοποιείται ο αριστερόστροφος προσανατολισμός, καθώς αυτό εξασφαλίζει ότι το κάθετο διάνυσμα σε μία τριγωνική έδρα δείχνει προς τα έξω, το οποίο είναι χρήσιμο για μετέπειτα επεξεργασία των επιφανειών όπως η τοποθέτηση υφής κάποιου υλικού και η δημιουργία φωτισμού.

Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός αλγορίθμων που έχουν αναπτυχθεί για την τριγωνοποίηση μιας επιφάνειας. Αυτοί μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως οργανωμένοι και μη οργανωμένοι.

Οργανωμένες τριγωνοποιήσεις χρησιμοποιούνται συχνά για τη δημιουργία αναπτυγμάτων επιφανειών. Μικρές μεταβολές στη διακριτοποίηση επηρεάζουν τα αναπτύγματα.

Κάθε απλό πολύγωνο (επίπεδο αποτελούμενο από ίσια, μη τεμνόμενα τμήματα γραμμής που ενώνονται σε ζεύγη για να σχηματίσουν μια κλειστή διαδρομή) με n κόμβους μπορεί να διακριτοποιηθεί σε n-2 τρίγωνα. Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για την τριγωνοποίηση ενός πολυγώνου.

εικόνα 5.7
οργανωμένη και μη οργανωμένη τριγωνοποίηση



Ομογενής τριγωνοποίηση

Οι αλγόριθμοι ομογενούς τριγωνοποίησης ξεκινούν υποδιαιρώντας το πεδίου ορισμού ομοιόμορφα σε έναν κάναβο στοιχείων. Όποια στοιχεία βρίσκονται ολόκληρα στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού γίνονται ορθογώνια τρίγωνα με την προσθήκη μιας διαγωνίου.

Ένα πλεονέκτημα του οργανωμένου τριγωνισμού είναι ότι τυχόν ακανόνιστα διαμορφωμένα τρίγωνα είναι περιορισμένα στα όρια της επιφάνειας, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα μια πιο ομοιόμορφη δομή στο εσωτερικό αυτής. [31]

Μια γεωμετρία μπορεί να περιγραφεί με αναλυτικές ή παραμετρικές εξισώσεις. Οι αναλυτικές έχουν τη μορφή $f(\boldsymbol{x})=0$, όπου x είναι ένα σημείο που περιγράφεται από τη συνάρτηση f. Για παράδειγμα η αναλυτική εξίσωση σφαίρας είναι

$$(x_1-\kappa_1)^2+(x_2-\kappa_2)^2+(x_3-\kappa_3)^2-r^2=0$$

με x_1, x_2, x_3 συντεταγμένες του σημείου x, $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ συντεταγμένες του κέντρου της σφαίρας και r η ακτίνα της. Οι παραμετρικές έχουν τη μορφή $\boldsymbol{x}=f(u,\upsilon)$ με x να είναι ένα σημείο και u,υ ανεξάρτητες μεταβλητές (μπορούν να είναι περισσότερες ή λιγότερες από δύο) που ονομάζονται παράμετροι. Για μια δισδιάστατη επιφάνεια ενσωματωμένη στις τρεις διαστάσεις έχουμε ότι $\boldsymbol{x}=f_x(u,\upsilon)$, $\boldsymbol{y}=f_y(u,\upsilon)$, $\boldsymbol{z}=f_z(u,\upsilon)$. Παραδείγματος χάρη οι παραμετρικές εξισώσεις σφαίρας με πολικές συντεταγμένες είναι

$$x_1 = r\cos u \sin \upsilon \quad , \quad x_2 = r\sin u \sin \upsilon \quad , \quad x_3 = r\cos \upsilon \quad \text{με} \quad 0 \leqslant u < 2\pi \quad , \quad 0 \leqslant \upsilon \leqslant \pi$$

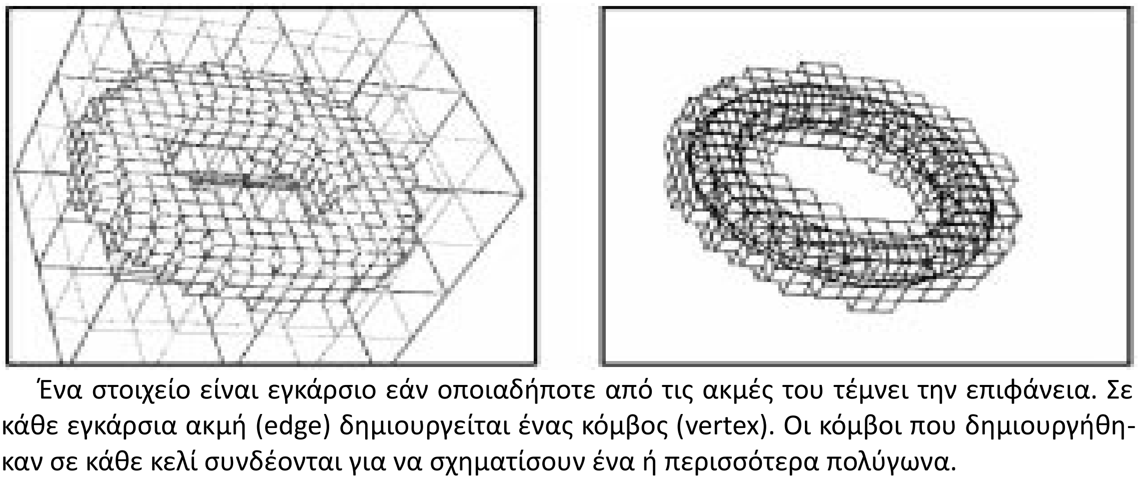
Η παραμετρική αναπαράσταση επιτρέπει την άμεση παραγωγή σημείων, όπου δίνοντας τιμές για το u, υ από το πεδίο ορισμού τους παίρνουμε ένα αντίστοιχο σύνολο σημείων x στην επιφάνεια. Ενώ είναι δυσκολότερο να ελέγξουμε τη σχέση ενός οποιουδήποτε σημείο με την επιφάνεια. Επειδή μια παραμετρική αναπαράσταση μας επιτρέπει να δημιουργούμε συστηματικά σημεία σε μια επιφάνεια, μπορούμε να δημιουργήσουμε εύκολα μία τριγωνοποίηση που προσεγγίζει τη μαθηματική επιφάνεια. Εντούτοις, τα τρίγωνα μπορεί να ποικίλουν ως προς το σχήμα και την επέκταση στο χώρο των αντικειμένων, δημιουργώντας ένα πιθανό μειονέκτημα. Αυτό μπορεί να ελαχιστοποιηθεί μέσω προσαρμοστικών μεθόδων που λαμβάνουν υπόψη το πλάτος του βήματος.

Η αναλυτική αναπαράσταση επιτρέπει εύκολα τον έλεγχο ενός σημείου με την επιφάνεια. Αν ξαναγράψουμε την εξίσωση της σφαίρας σε διανυσματική μορφή, όπου $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ και θεωρήσουμε ως κέντρο την αρχή των αξόνων (0,0,0) τότε έχουμε: $\vec{\boldsymbol{x}}^2 - r^2 = 0$, αν το σημείο βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, αν $\vec{\boldsymbol{x}}^2 - r^2 < 0$ το σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας και αν $\vec{\boldsymbol{x}}^2 - r^2 > 0$ τότε το σημείο βρίσκεται έξω από τη σφαίρα. Ωστόσο, δεν υπάρχει κανένας άμεσος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να δημιουργήσει διαδοχικά σημεία στην επιφάνεια, όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Οπότε για τη διακριτοποίηση της γεωμετρίας χρειαζόμαστε άλλες μεθόδους. Υπάρχουν ουσιαστικά δύο κύριες μέθοδοι, η *cutting cube method* και η *marching method*.

Cutting cube method

Παρ' ότι είναι κατά προσέγγιση, το mesh είναι μια πρακτική αναπαράσταση . Η μετατροπή σε γεωμετρία mesh, ευρέως γνωστή ως πολυγωνοποίηση, συνήθως περιλαμβάνει το διαχωρισμό του χώρου σε στοιχεία ευθύγραμμου πλέγματος γνωστού ως συστοιχία βαθμιδωτού πλέγματος ή voxel με σχήμα συνήθως κύβου ή τετράεδρου.

Αν η απόσταση μεταξύ των αρχικών στοιχείων είναι μεγάλη σε σχέση με την καμπυλότητα της επιφάνειας, χάνεται η λεπτομέρεια της γεωμετρίας. Αν το μέγεθος του στοιχείου είναι αντιστρόφως ανάλογο της τοπικής καμπυλότητας, η τελική προσαρμοσμένη πολυγωνοποίηση ελαχιστοποιεί τον αριθμό των πολυγώνων ενώ διατηρεί τη γεωμετρική ακρίβεια .



εικόνα 5.8 διαχωρισμός voxel

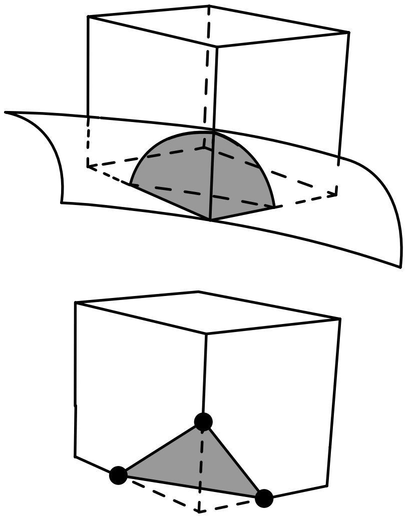
πηγή: Jules Bloomenthal, *«Polygonization of implicit surfaces»*. Journal of Computer Aided Geometric Design 5 (1988) 341–355

Ένα στοιχείο είναι εγκάρσιο εάν οποιαδήποτε από τις ακμές του τέμνει την επιφάνεια. Σε κάθε εγκάρσια ακμή (edge) δημιουργείται ένας κόμβος (vertex). Οι κόμβοι που δημιουργήθηκαν σε κάθε κελί συνδέονται για να σχηματίσουν ένα ή περισσότερα πολύγωνα.

Οποιοδήποτε (πιθανώς μη επίπεδο) πολύγωνο *n* -πλευρών μπορεί να αποσυντεθεί σε n+2 τρίγωνα ή, εναλλακτικά, *n* τρίγωνα μπορούν να δημιουργηθούν με κοινό κόμβο το κέντρο του πολυγώνου. [36][37]

Για την παραγωγή ενός οργανωμένου τριγωνισμού σε μια επιφάνεια πολλοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν μι*α παραλλαγή της cutting cube method*. Οι προαναφερθέντες αλγόριθμοι συνήθως λειτουργούν εντός του δισδιάστατου πεδίου ορισμού των παραμέτρων της επιφάνειας και με αυτόν τον τρόπο μειώνεται σημαντικά η πολυπλοκότητα του προβλήματος.

εικόνα 5.9
δημιουργία πολυγώνου από voxel επιφάνειας

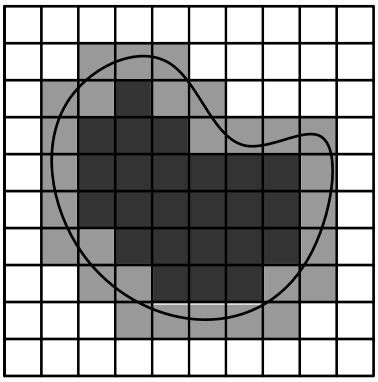


Το πεδίο ορισμού υποδιαιρείται, είτε ομοιόμορφα είτε γεωμετρικά, σε ένα πλέγμα σημείων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, τα σημεία δημιουργούνται στρατηγικά για να κατασκευάζουν ένα πλέγμα ορθογωνικών κελιών. Η επιφάνεια NURBS χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του αριθμού των διαστημάτων στα οποία πρέπει να υποδιαιρεθεί το πεδίο ορισμού και διέπεται από τα χαρακτηριστικά της, όπως η καμπυλότητα.

Η καμπύλη ορίου που περικλείει την επιφάνεια και, στην περίπτωση που υπάρχουν εσωτερικές οπές, η καμπύλη του εσωτερικού ορίου, υποδιαιρείται και αυτή είτε ομοιόμορφα είτε γεωμετρικά.

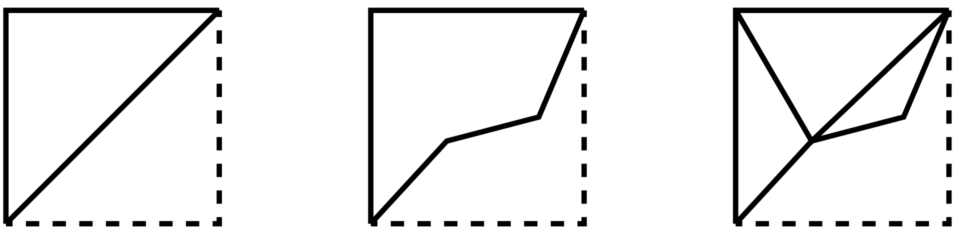
Τα γραμμικά τμήματα που προκύπτουν από την υποδιαίρεση του ορίου τοποθετούνται πάνω στο πλέγμα ορθογωνικών κελιών για να διαπιστωθεί πια κελιά βρίσκονται εντός ή εκτός της περιοχής. Ουσιαστικά, αν ένα κελί είναι πλήρως τοποθετημένο μέσα σε έναν εξωτερικό βρόγχο και δεν περιέχεται σε κανέναν εσωτερικό κύκλο, τότε αυτό το κελί βρίσκεται εντός της περιοχής κοπής. Κελιά εντός της περιοχής κοπής αποθηκεύονται για τριγωνισμό, ενώ τα υπόλοιπα απορρίπτονται.

εικόνα 5.10
εσωτερικά κελιά, κελιά ορίου και εξωτερικά κελιά



Ορισμένα από τα κελιά θα βρίσκονται εν μέρει εντός του πεδίου ορισμού. Αυτό προκύπτει επειδή μια καμπύλη ορίου θα διασταυρωθεί και θα περάσει μέσα από ένα κελί. Επομένως, τα κελιά που βρίσκονται κατά μήκος των ορίων της επιφάνειας απαιτούν λίγο περισσότερη προσοχή πριν αυτά μπορέσουν να τριγωνιστούν. Οι αλγόριθμοι που βασίζονται σε κελιά καταγράφουν τις διασταυρώσεις μεταξύ κελιών / καμπυλών ορίου και έπειτα μετατρέπουν αυτά τα κελιά σε πολύγωνα. Αυτά τα πολύγωνα αποθηκεύονται στη συνέχεια για τριγωνισμό, μαζί με τα υπολοιπα κελιά στο εσωτερικό της επιφάνειας.

εικόνα 5.11
τριγωνοποίηση κελιού ορίου

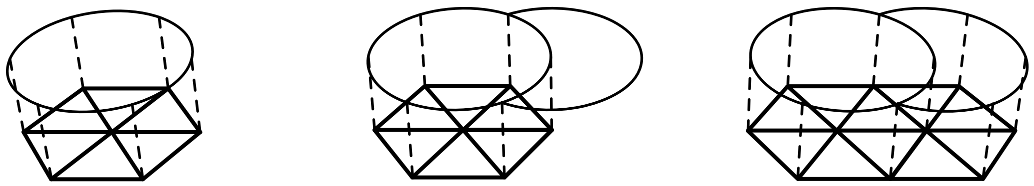


Τα αποθηκευμένα πολύγωνα τριγωνοποιούνται για να σχηματίσουν μια συνολική δισδιάτατη τριγωνική αναπαράσταση του αρχικού μοντέλου. Ο τριγωνισμός ενός πολυγώνου με τέσσερα σημεία (π.χ. ολόκληρο το κελί περιέχεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού) είναι μια ειδική περίπτωση που κατασκευάζεται προσθέτοντας μια διαγώνιο στο εσωτερικό του κελιού. Στα υπόλοιπα που έχουν μετατραπεί σε πολύγωνα με περισσότερες ακμές χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος για τριγωνοποίηση πολυγώνου.

Το τελικό στάδιο ενός αλγορίθμου τριγωνισμού είναι να χαρτογραφηθεί η δισδιάστατη τριγωνοποίηση στις τρεις διαστάσεις. Αυτό γίνεται με την αντικατάσταση των 2D συντεταγμένων των κορυφών των τριγώνου, που ορίζονται με u και v παραμέτρους, στην αρχική συνάρτηση της 3D επιφάνειας για να πάρουμε τις αντίστοιχες 3D συντεταγμένες. [31]

Marching method

Η διατύπωση του αλγορίθμου τριγωνισμού δεν χρησιμοποιεί καμία ειδική αναπαράσταση της επιφάνειας που πρόκειται να διακριτοποιηθεί. Ξεκινώντας με ένα τυχαίο σημείο $\boldsymbol{p_1}$ δημιουργούμε ένα εξάγωνο $\boldsymbol{p_1} \dots \boldsymbol{p_7}$ με κέντρο το $\boldsymbol{p_1}$. Τα τρίγωνα του εξάγωνου με κοινό κόμβο το $\boldsymbol{p_1}$ είναι τα πρώτα έξι τρίγωνα της διακριτοποίησης. Θεωρούμε το εξάγωνο ως το αρχικό πολύγωνο και για κάθε κόμβο που βρίσκεται στο περίγραμμά του, μετράμε την υπολειπόμενη γωνία εξωτερικά του πολυγώνου. Καθορίζουμε τον κόμβο με τη μικρότερη γωνία και δημιουργούμε τρίγωνα με γωνίες γύρω στις 60^o και μήκος ακμών ορισμένο από την αρχή, τον ελεύθερο χώρο γύρω από τον κόμβο. Επαναπροσδιορίζουμε τα όρια-περίγραμμα του αρχικού πολυγώνου και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου διακριτοποιήσουμε ολόκληρη την επιθυμητή γεωμετρία. [36][37]

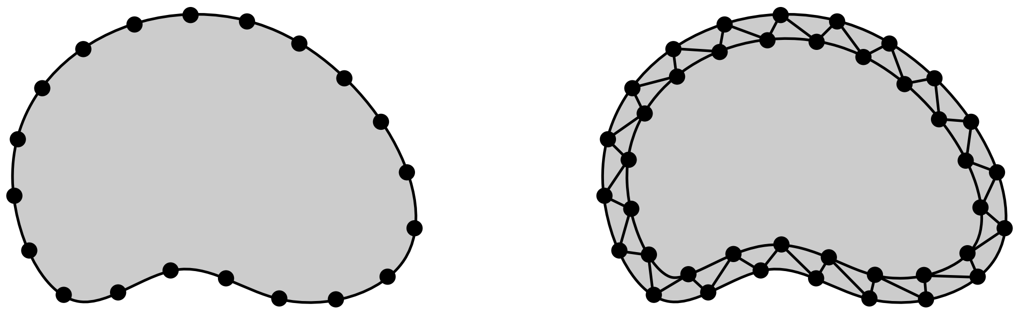


εικόνα 5.12
διακριτοποίηση με την marching method

Advancing front method

Η advancing front method (AFM) μπορεί να θεωρηθεί παραλλαγή της *marching method* και χρησιμοποιείται για να δημιουργήσει μη οργανωμένη τριγωνοποίηση σε μια επιφάνεια. Στην αρχή ορίζεται το εξωτερικό όριο της επιφάνειας και έπειτα το υποδιαιρούμαι σε γραμμικά τμήματα. Στόχος είναι τα γραμμικά τμήματα να έχουν περίπου το ίδιο μήκος, όταν έχει γίνει η 3d αντιστοιχία.

Το επόμενο στάδιο είναι η δημιουργία νέων σημείων στο εσωτερικό της επιφάνειας. Μόλις αυτά δημιουργηθούν, θα συνδεθούν με τα σημεία του μετώπου για να σχηματίσουν τρίγωνα. Το γραμμικό τμήμα που δημιουργήθηκε θα αποτελέσει το νέο όριο στον αλγόριθμο. Η παραγωγή σημείων πραγματοποιείται ξεκινώντας από ένα γραμμικό τμήμα του ορίου με ακριανά σημεία $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}$ και μετά τοποθετώντας το $\boldsymbol{p_2}$ σε τέτοια θέση ώστε οι τιμές του μήκους των ακμών και των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου $(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ να είναι εντός του ορίου που έχει προκαθοριστεί. Όταν καθοριστεί η θέση του $\boldsymbol{p_2}$ τότε η ακμή $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}$ αντικαθίσταται από τις ακμές $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_2}$ και $\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_1}$.



εικόνα 5.13
advancing front διακριτοποίηση

Αυτή η διαδικασία παραγωγής τριγώνων και η ενημέρωση του ορίου επαναλαμβάνεται μέχρι να καλυφθεί πλήρως η επιθυμητή γεωμετρία από τρίγωνα. Το τελικό στάδιο ενός αλγορίθμου τριγωνισμού είναι να χαρτογραφηθεί η δισδιάστατη τριγωνοποίηση στον τρισδιάστατο χώρο. Αυτό γίνεται λαμβάνοντας τις 2d συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου, σε όρους u και v, και αντικαθιστώντας τους στον αρχικό ορισμό της τρισδιάστατης γεωμετρίας για να λάβουμε τις αντίστοιχες 3D συντεταγμένες.

Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για την κατασκευή ενός AFM τριγωνισμού σε μια επιφάνεια. Ο AFM έχει τη χρήσιμη ιδιότητα να παράγει τρίγωνα υψηλής ποιότητας. Ωστόσο, το τελικό αποτέλεσμα της τριγωνοποίησης καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το εξωτερικό σύνορο της επιφάνειας. Επομένως, τυχόν μορφές ακανόνιστων τριγώνων τείνουν να βρίσκονται στο κέντρο της γεωμετρίας.[31]

5.5 Ανάπτυγμα

Θεωρούμε δύο επίπεδα τρίγωνα με μία κοινή ακμή. Με το ισομετρικό ξεδίπλωμα των δύο τριγώνων κατά μήκος της κοινής ακμής δημιουργείται ένα επίπεδο τετράπλευρο.

εικόνα 5.14
ανάπτυγμα επιφάνειας

Το ανάπτυγμα ενός πολύεδρου μπορεί να δημιουργηθεί κυρίως με δύο τρόπους. Ο ένας (edge unfolding) είναι να μπορέσουμε να κόψουμε μόνο ορισμένες από τις υπάρχουσες ακμές του πολύεδρου και να ξεδιπλώσουμε τη γεωμετρία. Ο δεύτερος (general unfolding) δίνει την ελευθερία να δημιουργήσουμε ένα καινούργιο δίκτυο τομών πάνω στην επιφάνεια και να πάρουμε το επιθυμητό ανάπτυγμα. Προαπαιτούμενο και στους δύο τρόπους θεωρείται να μην υπάρξει αλληλοεπικάλυψη του αναπτύγματος διατηρώντας ταυτόχρονα ένα ενιαίο στοιχείο.

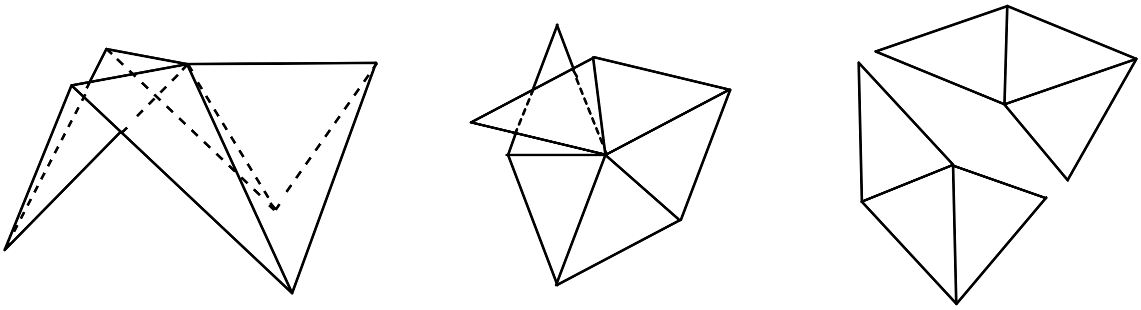
Ανάλογα με τη γεωμετρία του πολύεδρου μεταβάλλονται και τα αποτελέσματα που έχουμε για τους προηγούμενους τρόπους. Έχει αποδειχθεί ότι όλα τα κυρτά πολύεδρα (convex) έχουν γενικό ανάπτυγμα (general unfolding), καθώς επίσης ότι έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν μη-κυρτά, κοίλα πολύεδρα (non-convex) που δεν έχουν ανάπτυγμα ακμών (edge unfolding). Για τις άλλες δύο περιπτώσεις, δηλαδή εάν όλα τα κυρτά πολύεδρα έχουν ανάπτυγμα ακμών ή αν όλα τα κοίλα πολύεδρα έχουν γενικό ανάπτυγμα, δεν έχει μπορέσει να υπάρξει ακόμα κάποιο θεώρημα που τα αποδεικνύει και θεωρούνται ανοιχτά προβλήματα στην υπολογιστική γεωμετρία.

εικόνα 5.15
πίνακας unfolding

αναπτύγματα / πολύεδρα	general unfolding	edge unfolding
convex	✓	—
non - convex	—	✗

Βέβαια, στην περίπτωση των κοίλων πολύεδρων υπάρχει ο περιορισμός ότι το πολύεδρο δεν πρέπει να έχει ανοικτό όριο. Διότι στην περίπτωση που έχουμε ένα πολύεδρο που δεν είναι κλειστό (έχει ανοικτό όριο) και έχει μία κορυφή με αρνητική καμπυλότητα, έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει ούτε το γενικό ανάπτυγμά του χωρίς αλληλοεπικάλυψη διατηρώντας μία μοναδική επιφάνεια. [38][39]

εικόνα 5.16
ανάπτυγμα επιφάνειας



6 ΑΥΞΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

6.1 Εισαγωγή

Η μηχανική του συνεχούς θεωρεί ότι τα υλικά δεν αποτελούνται από ξεχωριστά σωματίδια αλλά από συνεχή μέσα και εξετάζει τη μηχανική συμπεριφορά τους υπό την επίδραση διαφόρων φορτίσεων. Η συμπεριφορά ενός στερεού που υποβάλλεται σε κάποιο εξωτερικό φορτίο ή στο ίδιο βάρος του μπορεί να είναι ελαστική ή πλαστική. Η φόρτιση ενός υλικού επιφέρει την παραμόρφωσή του. Η ανοιγμένη παραμόρφωση (τροπή) είναι ο αδιάστατος λόγος της παραμόρφωσης προς την αρχική διάσταση του υλικού.

$$\varepsilon=\frac{\Delta x}{x_o}=\frac{x-x_o}{x_o}$$

Στην ελαστική συμπεριφορά όταν αφαιρεθεί το φορτίο το υλικό επανέρχεται στην αρχική μορφή του, ενώ στην πλαστική συμπεριφορά διατηρούνται παραμένουσες παραμορφώσεις.

Με τη θεωρία ελαστικότητας μπορούν να υπολογιστούν οι τάσεις και οι τροπές ενός στερεού σώματος συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητάς του. Αναλόγως της τάσης που δημιουργείται σε ένα σώμα μπορούν να εμφανιστούν ελαστικές παραμορφώσεις. Όταν η τιμή της τάσης ξεπεράσει το όριο διαρροής, τότε θα έχουμε μόνιμες παραμορφώσεις ανάλογες του μέτρου ελαστικότητας του υλικού.

Ένα υλικό μπορεί να συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά ή μη γραμμικά ελαστικά. Σε ένα γραμμικά ελαστικό υλικό η σχέση της τάσης με την τροπή είναι γραμμική, δηλαδή μπορεί να περιγραφεί με το νόμο του Hooke

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

όπου σ: τανυστής των τάσεων, C: μητρώο ακαμψίας, ε: τανυστής των τροπών.[40]

Ένα γραμμικό ελαστικό υλικό κατηγοριοποιείται βάσει των αξόνων και των επιπέδων συμμετρίας που το χαρακτηρίζουν. Στην πιο γενική περίπτωση έχουμε τα Τρικλινικά Υλικά, τα οποία είναι ανισότροπα υλικά που δεν παρουσιάζουν καμία συμμετρία ως προς τις μηχανικές ιδιότητές τους. Έχουμε ακόμα μονοκλινικά υλικά τα οποία παρουσιάζουν ένα επίπεδο συμμετρίας, τα ορθρότροπα υλικά που εμφανίζουν τρία επίπεδα συμμετρίας, ανά δύο ορθογώνια, τα Εγκαρσίως ισότροπα υλικά που διαθέτουν τρία επίπεδα συμμετρίας και έναν άξονα συμμετρίας και τέλος τα ισότροπα υλικά των οποίων η μηχανική συμπεριφορά είναι ίδια σε όλες τις διευθύνσεις.

Οι ελαστικές σταθερές είναι τα ανεξάρτητα στοιχεία που διαθέτει το μητρώο ακαμψίας και περιγράφονται με τις μηχανικές ελαστικές σταθερές. Για ένα ισότροπο υλικό οι σταθερές αυτές είναι το μέτρο του Young E, το μέτρο διάτμησης G και ο λόγος Poisson v.

Το μέτρο του Young E είναι μια μηχανική ιδιότητα που μετρά την ακαμψία ενός στερεού υλικού. Καθορίζει τη σχέση μεταξύ της τάσης (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) και της τροπής (ανηγμένη παραμόρφωση) σε ένα υλικό όταν υπόκειται σε μονοαξονική φόρτιση και είναι στη γραμμικά ελαστική περιοχή. Το μέτρο διάτμησης G ορίζεται ως ο λόγος της διατμητικής τάσης προς τη διατμητική τροπή. Το μέτρο ελαστικότητας όγκου K ορίζεται ως η αντίσταση ενός υλικού στη μεταβολή του όγκου του και ισούται με τον λόγο της τάσης προς τη μεταβολή του όγκου που επιφέρει η εφαρμοζόμενη τάση.

Η σχέση μεταξύ E, G, K, v, είναι :

$$G=\frac{E}{2(1+v)} \quad , \quad K=\frac{E}{3(1-2v)} \quad \text{από όπου προκύπτει ότι : } \quad \frac{1+v}{1-2v}=\frac{3K}{2G}$$

Για συνήθη δομικά υλικά η τιμή του K είναι μεγαλύτερη από την τιμή του G, οπότε οδηγούμαστε στον τύπο :

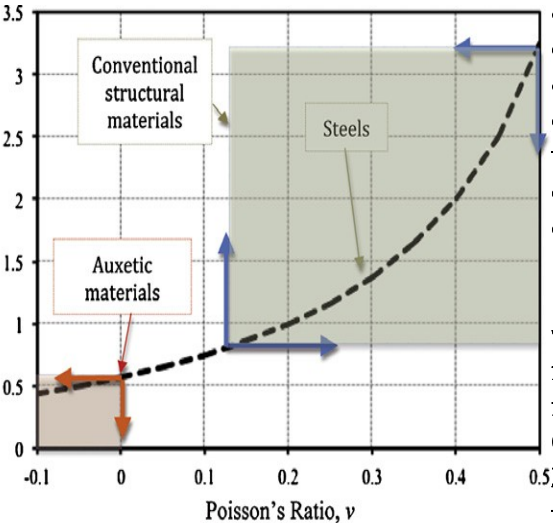
$$\frac{1+v}{1-2v}\geqslant\frac{3}{2}$$

6.2 Λόγος Poisson

Ένα τρισδιάστατο υλικό σύμφωνα με τον νόμο του Hooke παραμορφώνεται αξονικά προς τη διεύθυνση της φόρτισης που του επιβάλλεται, ταυτόχρονα όμως παραμορφώνεται και κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Ο λόγος Poisson είναι ο αρνητικός λόγος της εγκάρσιας τροπής προς την αξονική τροπή

$$v=-\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{axial}}$$

Ένα σώμα συναντάει μικρότερες αντιστάσεις στη μεταβολή του σχήματός του, παρά του όγκου του, οπότε στις τρεις διαστάσεις για να διατηρηθεί αυτή η αναλογία κατά την επιβολή φορτίσεων συνήθως εμφανίζονται αντίθετες παραμορφώσεις στην αξονική και στην εγκάρσια διεύθυνση της φόρτισης. Όπως αναφέρθηκε, συνήθως οι παραμορφώσεις είναι αντίθετες, δηλαδή όταν εφελκύεται αξονικά ένα σώμα στην παράλληλη διεύθυνση έχουμε επιμήκυνση του στοιχείου και στην εγκάρσια διεύθυνση εμφανίζεται συστολή. Το αντίστοιχο συμβαίνει όταν επιβάλλονται θλιπτικά φορτία. Η παραμόρφωση λόγω εφελκυσμού έχει θετικό πρόσημο, ενώ λόγω θλίψης αρνητικό. Έτσι συνδυάζοντας το λόγο εγκάρσιας με αξονική ανοιγμένη παραμόρφωση, που συνήθως θα έχει αρνητικό πρόσημο, με ένα αρνητικό πρόσημο έχουμε το θετικό χαρακτήρα του λόγου Poisson. Όσο μεγαλύτερη είναι ατομική πυκνότητα του υλικού, τόσο μεγαλύτερη η τιμή του λόγου Poisson. [41]



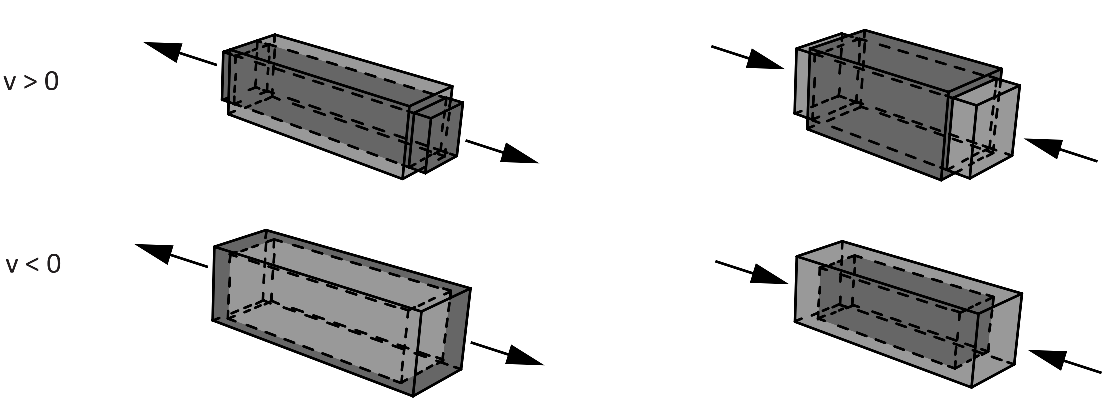
εικόνα 6.1 διαγραμμα λόγου Poisson

πηγή: Yunan Prawoto, *«Seeing auxetic materials from the mechanics point of view»,* Journal of Computational Materials Science 58 (2012) 140–153

6.3 Αυξητικά υλικά

Τα αυξητικά υλικά είναι κυψελοειδείς δομές με αρνητικό λόγο Poisson. Δηλαδή ταυτόχρονα με την αξονική παραμόρφωση δημιουργείται μια παρόμοιου πρόσημου παραμόρφωση στον διαμήκη άξονα. Τα αυξητικά υλικά ανήκουν στην κατηγορία των μηχανικών μετα-υλικών, στην πλειοψηφία τους είναι υλικά που δημιουργούνται με μηχανικό σχεδιασμό της δομής τους. Η αυξητική συμπεριφορά μιας δομής προκύπτει από τον μηχανισμό παραμόρφωσής της και εξαρτάται από την εσωτερική γεωμετρία της.

Ο λόγος Poisson είναι ανεξάρτητος από την κλίμακα, οπότε η αυξητική συμπεριφορά εμφανίζεται σε όποιες δομές εφαρμόζονται οι εσωτερικοί γεωμετρικοί μηχανισμοί που προκαλούν παρόμοια παραμόρφωση στην αξονική και διαμήκη διεύθυνση.

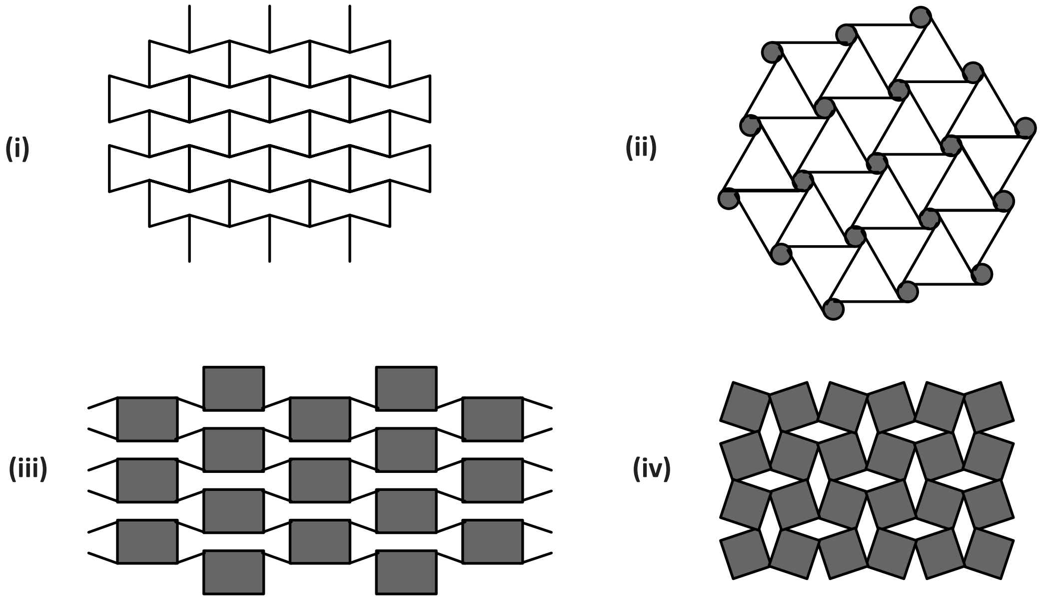


εικόνα 6.2 παραμόρφωση υλικών με θετικό και αρνητικό λόγο Poisson από όμοια φόρτιση

6.3.1 Γεωμετρικά μοντέλα και αυξητικοί μηχανισμοί

Οι αυξητικές δομές ποικίλουν σε τάξη μεγέθους, μηχανισμούς και μεθόδους παραγωγής. Οι δομές αποτελούνται από επαναλαμβανόμενες μονάδες που κατηγοριοποιούνται σε :

(I) Δομές επανεισόδου
(ii) Χειρόμορφες δομές
(iii) Διφασικές δομές
(iv) Περιστρεφόμενες δομές



εικόνα 6.3
αυξητικές δομές
i) επανεισόδου
ii) χειρόμορφες
iii) διφασικές
iv) περιστρεφό-μενες

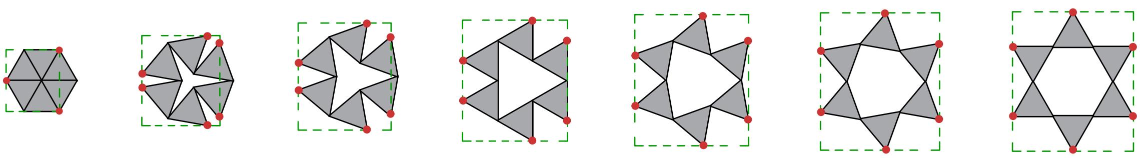
Η συμπεριφορά των αυξητικών υλικών επιτυγχάνεται μέσω της κίνησης στην εσωτερική δομή τους. Η κίνηση μπορεί να επέλθει με κάμψη των στοιχείων που την αποτελούν, με τη δημιουργία αρθρώσεων, με συστροφή ή με κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της δομής.

6.4 Περιστρεφόμενες τριγωνικές δομές

Οι περιστρεφόμενες δομές αποτελούνται από επαναλαμβανόμενες μονάδες που συνδέονται μεταξύ τους με αρθρώσεις ή ελαστικές ενώσεις σε επιλεγμένες κορυφές. Σε μια αυξητική δομή που αποτελείται από άκαμπτα ή ημιάκαμπτα τρίγωνα η επίδραση εφελκυστικής ή θλιπτικής φόρτισης προκαλεί την αυξητική συμπεριφορά από την περιστροφή των μονάδων και τη μεταβολή της πυκνότητας της γεωμετρίας με τη δημιουργία αρθρώσεων στις κορυφές των τριγώνων. Η διαδικασία αυτή δημιουργεί αρνητικό λόγο Poisson με τιμή -1 και σταθερά του Young E ίση με :

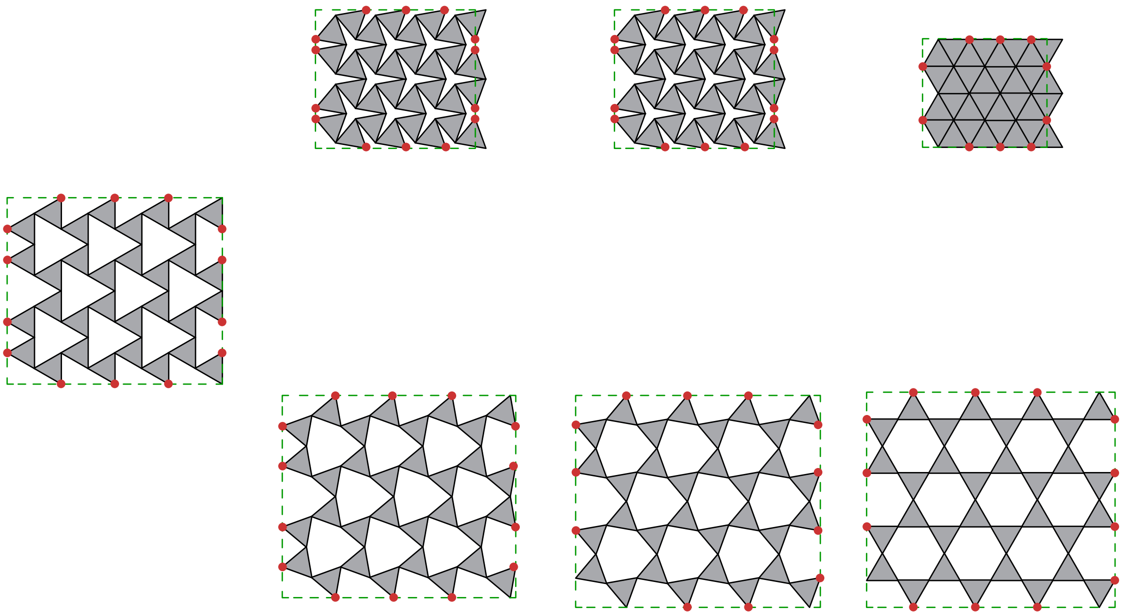
$$E_1 = E_2 = \frac{4\sqrt{3}K_h}{l^2[1+\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)]}$$

Με K_h τον συντελεστή στροφικής ακαμψίας και l το μήκος της πλευράς του τριγώνου έχουμε τις ακόλουθες ελαστικές ιδιότητες $v_{12} = v_{21} = -1$ [42][43]



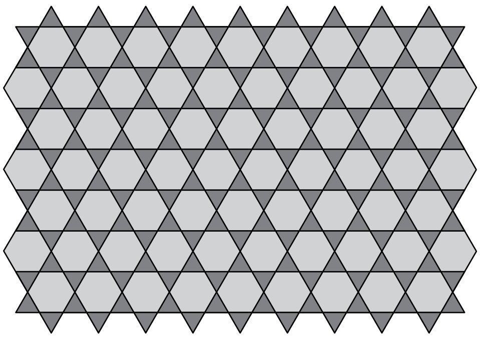
εικόνα 6.4
παραμόρφωση μοναδιαίας κυψελίδας τριγωνικής περιστρεφό-μενης δομής

εικόνα 6.5
παραμόρφωση τριγωνικής περιστρεφόμενης δομής



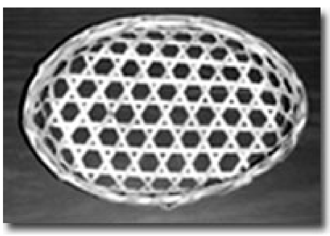
6.4.1 Γεωμετρία

εικόνα 6.6
Τρίγωνοεξαγωνική διακριτοποίηση



εικόνα 6.7
kagome καλάθι

πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Trihexagonal_tiling#Kagome_lattice



Στη γεωμετρία ο τριεξαγωνικός κάναβος είναι ένας από τους 11 ομοιόμορφους κανάβους με κανονικά πολύγωνα του Ευκλείδειου επιπέδου. Αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα και κανονικά εξάγωνα, διατεταγμένα έτσι ώστε κάθε εξάγωνο να περιβάλλεται από τρίγωνα και αντίστροφα. Δύο εξάγωνα και δύο τρίγωνα εναλλάσσονται γύρω από κάθε κορυφή και οι άκρες του σχηματίζουν μια άπειρη διάταξη γραμμών.

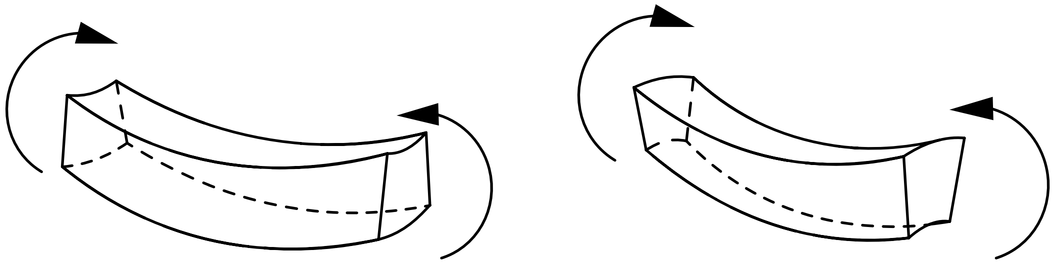
Ο κάναβος αυτός χρησιμοποιείται στην ιαπωνική κατασκευή καλαθιών, που ονομάζεται kagome. Ο ιαπωνικός αυτός όρος έχει εφαρμογές και στη φυσική, όπου χρησιμοποιείται ο όρος πλέγμα Kagome. Εμφανίζεται επίσης στις κρυσταλλικές δομές ορισμένων ορυκτών. [44]

6.5 Ιδιότητες

Ο αρνητικός λόγος Poisson στα αυξητικά υλικά έχει ως επακόλουθο αυξημένες φυσικές και μηχανικές ιδιότητες, όπως: η αντίσταση στη διάτμηση, αυξημένη σκληρότητα, αντίσταση στη διάδοση ρωγμών, απόσβεση ταλαντώσεων, μεταβλητή διαπερατότητα, συγκλαστική καμπυλότητα και μνήμη σχήματος.

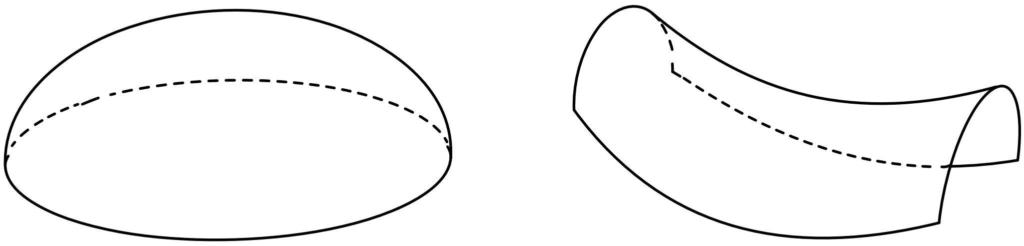
6.5.1 Συγκλαστική καμπυλότητα

Πέρα από τις υπόλοιπες σημαντικές ιδιότητες η συγκλαστική καμπυλότητα είναι αυτή που χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη διπλωματική, ωστόσο με διαφορετικό και πρωτότυπο τρόπο, γιαυτό και θα αναλυθεί περαιτέρω.



εικόνα 6.8
μηχανισμός δημιουργίας διπλής καμπυλότητας

Επιφάνειες που έχουν διπλή καμπυλότητα, δηλαδή είναι διάφορες του μηδενός, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε συνκλαστικές (διαθέτουν θετική καμπυλότητα Gauss) και αντικλαστικές (αρνητική καμπυλότητα Gauss). Αν εφαρμόσουμε κάμψη σε ένα αυξητικό υλικό, η επιφανειακή αυξητική δομή τείνει να καμπυλώσει με τον ίδιο τρόπο προς όλες τις διευθύνσεις οπότε δημιουργείται μια επιφάνεια με θετική καμπυλότητα Gauss. Έτσι σε όλα τα παραδείγματα στη βιβλιογραφία καταπονείται με κάμψη το υλικό προκειμένου να δημιουργηθεί μια επιφάνεια διπλής καμπυλότητας. Ωστόσο στην παρούσα εργασία η δομή εφελκύεται, περνάει στη δεύτερη σταθερή κατάσταση και δημιουργείται μια επιφάνεια με διπλή καμπυλότητα Gauss. [45][46][47]

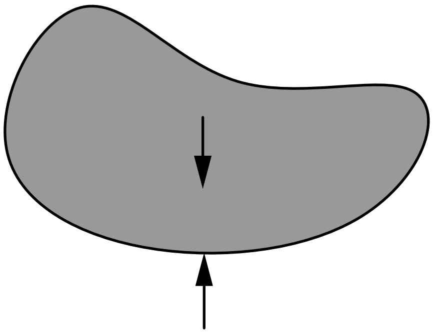


εικόνα 6.9
συνκλαστική και αντικλαστική επιφάνεια

7 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΕΤΑ -ΥΛΙΚΩΝ

7.1 Μηχανική ισορροπία

εικόνα 7.1
σώμα σε ισορροπία



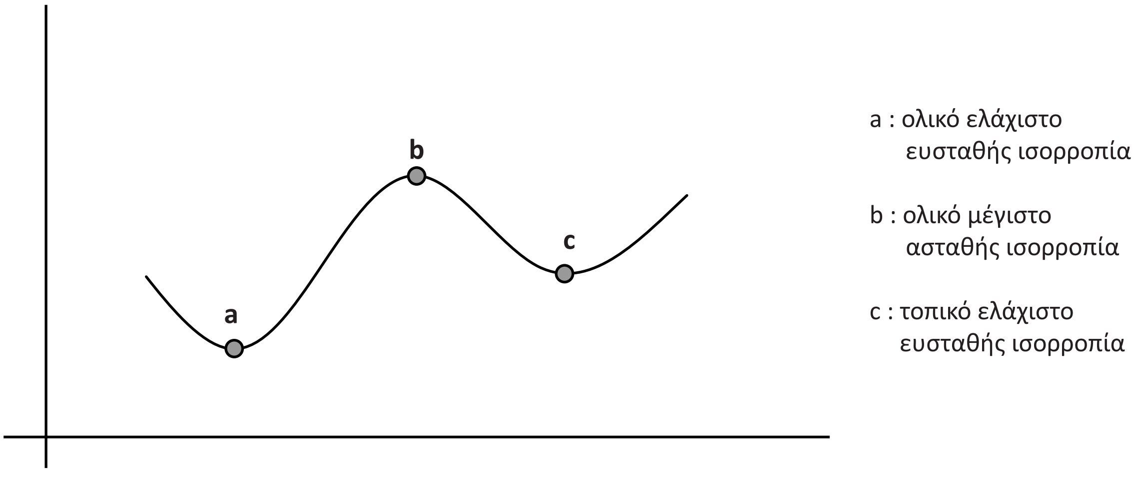
Ένα σύστημα βρίσκεται σε μηχανική ισορροπία, όταν το άθροισμα των δυνάμεων και των ροπών σε κάθε σωματίδιό του είναι μηδέν. Για την αντίληψη του παραπάνω ορισμού στη μηχανική του συνεχούς μέσου, χρησιμοποιούμε τη σταθερότητα της δυναμικής ενέργειας. Δηλαδή, το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία στα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειάς του. Σύμφωνα με τον Λογισμό, στα σημεία αυτά η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται. Έτσι χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παράγωγο βρίσκουμε αν στα σημεία αυτά δημιουργούνται τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Όταν η δεύτερη παράγωγος είναι μικρότερη του μηδενός τότε η δυναμική ενέργεια βρίσκεται σε ένα τοπικό μέγιστο, που σημαίνει ότι το σύστημα βρίσκεται σε μια ασταθή κατάσταση. Αν το σύστημα μετατοπιστεί ελάχιστα από την κατάσταση ισορροπίας, οι δυνάμεις του συστήματος το εξαναγκάζουν να μετακινηθεί ακόμη μακρύτερα από αυτήν.

Όταν η δεύτερη παράγωγος είναι μεγαλύτερη του μηδενός, η δυναμική ενέργεια βρίσκεται σε τοπικό ελάχιστο. Αυτή είναι κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας. Όταν υπάρξει κάποια μικρή μεταβολή της ισορροπίας, οι δυνάμεις που επιδρούν στο σύστημα τείνουν να το επαναφέρουν στην ισορροπία. Εάν υπάρχουν περισσότερες από μία καταστάσεις ευσταθούς ισορροπίας τότε κάθε κατάσταση με υψηλότερη δυναμική ενέργεια από το ολικό ελάχιστο αποτελεί μια μετασταθή κατάσταση.

Όταν η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν ή δεν ορίζεται τότε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Όλες οι παραπάνω καταστάσεις είναι δυνατές σε αυτήν την περίπτωση, όπως και η ύπαρξη μιας περιοχής όπου η ενέργεια δεν μεταβάλλεται. Σε αυτήν την περίπτωση η ισορροπία λέγεται ουδέτερη. Εδώ, αν το σύστημα μετατοπιστεί λίγο, θα παραμείνει στη νέα του κατάσταση.

εικόνα 7.2
ακρότατα γραφικής συνάρτησης



Σε συστήματα με διαστάσεις περισσότερες της μίας, είναι δυνατό να λάβουμε διαφορετικά αποτελέσματα για διαφορετικές κατευθύνσεις. Η ισορροπία σε αυτά τα συστήματα είναι ευσταθής όταν είναι ευσταθής προς όλες τις κατευθύνσεις.

7.2 Έξυπνα υλικά

Τα έξυπνα υλικά αναφέρονται σε δομές που χαρακτηρίζονται από τη δυνατότητα να μεταβάλλουν ορισμένες ιδιότητές τους με προκαθορισμένο τρόπο μετά από την επίδραση εξωτερικών ερεθισμάτων, όπως η μηχανική επιβάρυνση, η μεταβολή του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου, η αλλαγή της θερμοκρασίας, η ακτινοβολία κ.ά. Οι ιδιότητες που μπορούν να μεταβληθούν συμπεριλαμβάνουν τη μεταβολή του ιξώδους, της μορφής και της ακαμψίας. Θεωρητικά τα έξυπνα υλικά αποτελούνται από τρία βασικά στοιχεία, από τους αισθητήρες που θα αντιληφθούν το εξωτερικό ερέθισμα, τους επεξεργαστές που θα επεξεργαστούν την πληροφορία που δέχονται και τους ενεργοποιητές που αναλαμβάνουν την απόκριση και μεταβάλλουν τις προκαθορισμένες ιδιότητες.

Έχει δημιουργηθεί μια πληθώρα δομών που παρουσιάζουν τις ιδιότητες των έξυπνων υλικών, ορισμένες από τις οποίες είναι: τα πιεζοηλεκτρικά υλικά, φωτοβολταϊκά, διηλεκτρικά ελαστομερή και τα υλικά με μνήμη σχήματος.[48][49]

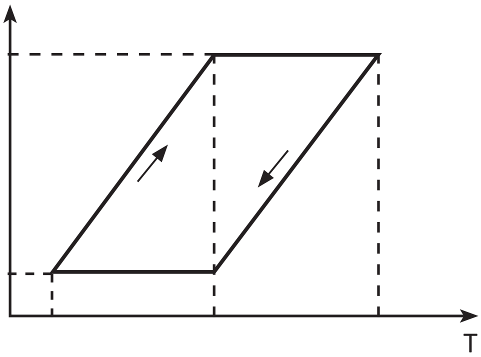
7.3 Δομές με μνήμη σχήματος

7.3.1 Αλλαγή φάσης

Η μνήμη σχήματος είναι μια ιδιότητα που παρουσιάζουν ορισμένες δομές και έχει ως κύριο χαρακτηριστικό την αλλαγή φάσης μέσω ενός εξωτερικού ερεθίσματος. Ο όρος ‘‘αλλαγή φάσης’’ περιγράφει την αλλαγή ορισμένων χαρακτηριστικών εξαιτίας κάποιας εξωτερικής επιβολής (π.χ. η θέρμανση ενός ρευστού πάνω από το σημείο βρασμού το μεταβάλλει σε αέριο).[50]

7.3.2 Μαρτενσιτικός μετασχηματισμός

Ο μαρτενσιτικός μετασχηματισμός που παρουσιάζεται σε ορισμένα μέταλλα είναι μια στερεό προς στερεό αλλαγή φάσης που δημιουργείται από τη μεταβολή της κρυσταλλικής δομής του υλικού με μικρές μετατοπίσεις των ατόμων. Ο μαρτενσιτικός μετασχηματισμός πραγματοποιείται μεταβάλλοντας τη θερμοκρασία ή ασκώντας κάποια εξωτερική φόρτιση. Ο μετασχηματισμός είναι αναστρέψιμος και μπορεί να επανέλθει σε μια θερμοδυναμικά σταθερά κατάσταση που έχει προηγουμένως καθοριστεί με την επαναφορά της θερμοκρασίας ή της τάσης.[51][52]

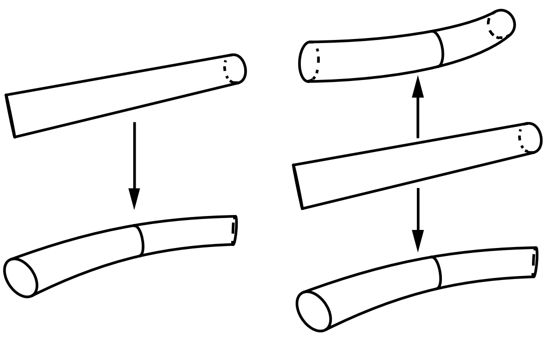


εικόνα 7.3
αλλαγή φάσης μετά από θέρμανση

Οι δομές με μνήμη σχήματος έχουν δύο χαρακτηριστικές ομάδες, τις δομές μονής μνήμης και τις δομές διπλής μνήμης.[53]

(α) Με τη μονή μνήμη σχήματος η δομή μπορεί να επανέλθει μετά την αλλαγή φάσης σε μία προκαθορισμένη μορφή. Το σύστημα μπορεί να ξαναμεταβληθεί, αλλά δεν έχει δεύτερη σταθερή κατάσταση για να επανέλθει. Μετά την οποιαδήποτε μεταβολή μπορεί να ξαναεπανέλθει στη μοναδική σταθερή κατάσταση.

(β) Με τη διπλή μνήμη σχήματος η δομή διατηρεί δύο σταθερές καταστάσεις. Μετά από την αλλαγή φάσης μπορεί να επανέλθει στη σταθερή κατάσταση που αντιστοιχεί στην αντίστοιχη φάση.



εικόνα 7.4
μονή μνήμη σχήματος, διπλή μνήμη σχήματος

7.3.3 Υπερελαστικότητα / Ψευδοελαστικότητα

Μια ιδιότητα που μοιράζονται ορισμένα υλικά με μνήμη σχήματος είναι η υπερελαστικότιτα και η ψευδοελαστικότητα.[54]

Στην υπερελαστικότητα παρατηρείται επαναφορά μεγάλων παραμορφώσεων (άνω του 10%) με τη δημιουργία μιας φάσης λόγω της τάσης που αναπτύσσεται στη δομή. Με την απομάκρυνση της φόρτισης ή νέα φάση γίνεται ασταθής και η δομή επανέρχεται στην αρχική της μορφή χωρίς να είναι απαραίτητη η μεταβολή της θερμοκρασίας.

Στην ψευδοελαστικότητα δημιουργείται η μετατόπιση του πεδίου ορισμού της ελαστικής συμπεριφοράς εξαιτίας της αλλαγής φάσης. Το προηγούμενο πεδίο ορισμού μπορεί να επανέλθει μετά επιβολή του εξωτερικού ερεθίσματος (π.χ. αύξηση της θερμοκρασίας).[55]

7.4 Προσθετική μορφοποίηση

7.4.1 Τρισδιάστατη εκτύπωση

Η τρισδιάστατη (3D) εκτύπωση είναι μια εξέλιξη της τεχνολογίας αναπαραγωγής αντικειμένων που με τη χρήση CNC (Computerized Numerical Control) συστημάτων παράγονται τρισδιάστατα αντικείμενα. Χρησιμοποιώντας ως δεδομένο εισαγωγής ένα ψηφιακό μοντέλο που έχει δημιουργηθεί σε κάποιο CAD πρόγραμμα, έχουμε τη δυνατότητα, μέσω της χρήσης πολλών τεχνολογιών που έχουν αναπτυχθεί πλέον, να κατασκευάσουμε το προϊόν με το επιθυμητό υλικό. Δηλαδή έχουμε τη δυνατότητα να μετατρέψουμε ψηφιακή πληροφορία σε υλική μορφή. Η 3D εκτύπωση χρησιμοποιεί τεχνικές προσθετικής κατασκευής (additive manufacture) στην οποία δημιουργούνται αντικείμενα μέσω της πρόσθεσης επάλληλων στρώσεων υλικού. Το αντικείμενο δεν περιορίζεται σε πολυπλοκότητα για τη μορφή και το υλικό, αφού μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέταλλο, κεραμικό, πολυμερές, βιοϋλικά, ακόμα και σύνθετα υλικά ή συνδυασμός υλικών.

7.4.2 Τετραδιάστατη εκτύπωση

Με τη χρήση έξυπνων υλικών ή μετα-υλικών μπορούμε να προσθέσουμε και την παράμετρο του χρόνο σε έναν 3D εκτυπωτή και έτσι να μιλάμε για 4D εκτύπωση. Δηλαδή, θεωρώντας t_0 τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η μορφή από τον εκτυπωτή, με την πάροδο του χρόνου και μετά από κάποιο εξωτερικό ερέθισμα αρχίζει η μορφοποίηση / μετακίνηση των μερών του αντικειμένου. Μετά από χρόνο t έχουμε την επιθυμητή μορφή, διαφορετική από αυτήν που δημιουργήθηκε στο χρόνο t_0. Οπότε η διαφορά βρίσκεται στα υλικά και στο σχεδιασμό που προϋποθέτουν και προβλέπουν ένα μεταβαλλόμενο σύστημα, κάνοντας τον προγραμματισμό των μετα-υλικών μία απαραίτητη προϋπόθεση αφού χάρη σε αυτόν θα επιτευχθεί η επιθυμητή απόκριση για την τελική μορφοποίηση. Ο σχεδιασμός είναι απαραίτητος για τη δημιουργία όχι απλά μιας μορφής, αλλά για την επίβλεψη μιας ολόκληρης κινητικής διαδικασίας που προβλέπει τη δυνατότητα ενός αρχικού αναπτύγματος που μπορεί χωρίς εμπόδια να μετασχηματιστεί σε μία τελική μορφή. Η χρήση της παραδοσιακής τέχνης του οριγκάμι και του κιριγκάμι βρίσκουν πολλές εφαρμογές σε αυτόν τον τομέα.

Οι πιθανές εφαρμογές της 4D εκτύπωσης μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις βασικές κατηγορίες: αυτο-συναρμολόγηση, πολυ-λειτουργικότητα και αυτο-επισκευή. Στην αυτο-συναρμολόγηση μπορούν να χρησιμοποιηθούν υλικά με μεγάλο μέτρο ελαστικότητας μαζί με έξυπνα υλικά για να δημιουργηθούν περιοχές που λειτουργούν ως αρθρώσεις που θα επιφέρουν την τελική παραμόρφωση. Η κατασκευή μπορεί να γίνει πιο έξυπνη και να επιλύσει προβλήματα σπατάλης μεγάλων ποσοτήτων ενέργειας, υλικών, χρημάτων και χρόνου.[56]

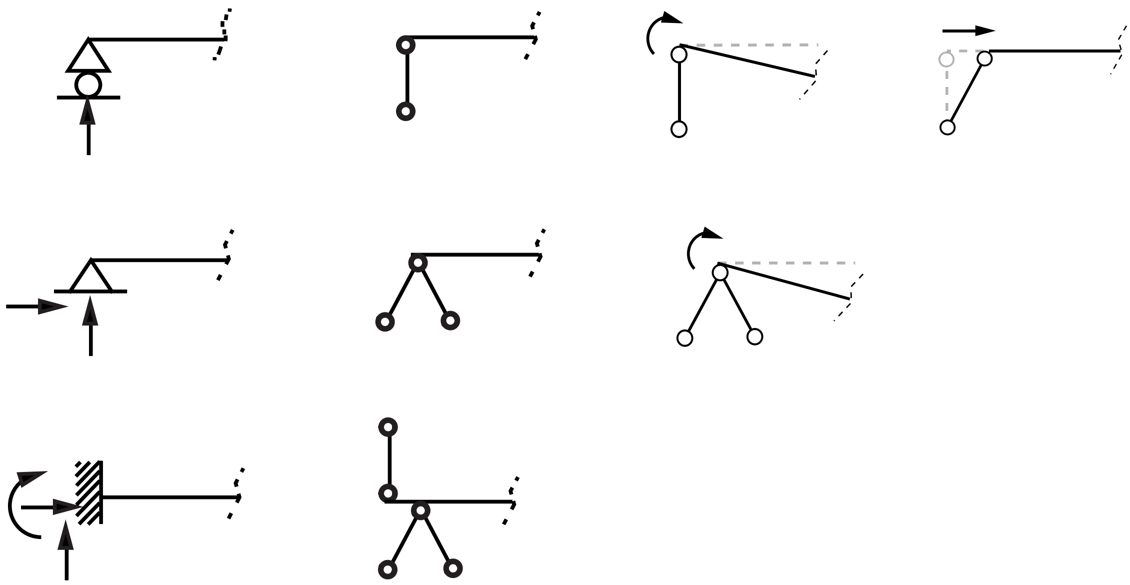
8 ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΠΑΡΑΜΟΡΦΩΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

8.1 Στατική ισορροπία

8.1.1 Δεσμικές ράβδοι

Σε ένα θεωρητικό δισδιάστατο προσομοίωμα φορέα τα δομικά στοιχεία που το αποτελούν συνδέονται μεταξύ τους και με το υπόβαθρο με “μηχανισμούς” που απαγορεύουν ελευθερίες κίνησης. Ο “μηχανισμός” που χρησιμοποιείται για τη θεωρητική αναπαράσταση είναι η δεσμική ράβδος η οποία απαγορεύει μία ελευθερία κίνησης.

Μία κύλιση ισοδυναμεί με μία δεσμική ράβδο που αποτρέπει τη μετακίνηση προς την κάθετη διεύθυνση, ενώ επιτρέπει την παράλληλη μεταφορά και την περιστροφή. Δύο δεσμικές ράβδοι που τέμνονται στην προέκτασή τους αναπαριστούν μια άρθρωση. Η άρθρωση αποτρέπει τη μετακίνηση στους δύο άξονες και επιτρέπει μόνο την περιστροφή του σώματος ως προς το σημείο στο οποίο τέμνονται οι δεσμικές ράβδοι. Τρεις δεσμικές ράβδοι με τις δύο εξ αυτών να τέμνονται αναπαριστούν μια πάκτωση που δεν έχει κανέναν βαθμό ελευθερίας και το σώμα αποτελεί ένα ακίνητο στερεό.



εικόνα 8.1 στηρίξεις, αντιδράσεις, δεσμικές ράβδοι, βαθμοί ελευθερίας

8.1.2 Laman γράφημα - Henneberg χαρακτηρισμός

Για να προσδιοριστεί η στατική ισορροπία ενός συστήματος στις δυο διαστάσεις, χρησιμοποιούνται έννοιες της θεωρίας γραφημάτων έτσι ώστε η ακαμψία να προσδιορίζεται σαν ιδιότητα του γραφήματος, θεωρώντας το γράφημα ως τη χαρτογράφηση του δικτυώματος που θέλουμε να αναλύσουμε. Laman γράφημα θεωρείται το σύστημα που είναι άκαμπτο με τη χρήση του ελάχιστου αριθμού κόμβων και συνδέσμων, ικανοποιεί δηλαδή τη σχέση $e=2v-3$, όπου e ο αριθμός των συνδέσμων και v ο αριθμός των κόμβων. Αυτή είναι η ειδικής μορφής σχέση που προκύπτει από τον γενικό τύπο

$$e=dv-\frac{d(d+1)}{2}$$

όπου d η τιμή των διαστάσεων που εξετάζουμε. Ταυτόχρονα θα πρέπει κάθε υποσύνολο του συστήματος G να διαθέτει $e\leq 2v-3$ συνδέσμους.

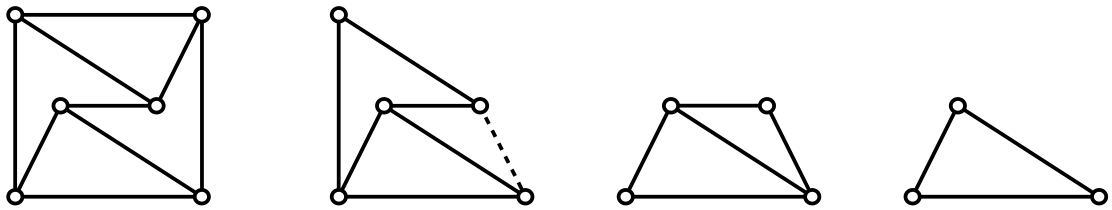
Παράλληλα με το συγκεκριμένο χαρακτηρισμό, αν είναι ένα σύστημα άκαμπτο στις δύο διαστάσεις θα ικανοποιείται και η Henneberg κατασκευή του γραφήματος. Η κατασκευή αυτή χρησιμοποιεί δύο διαδικασίες για την εξέλιξη ενός δισδιάστατου άκαμπτου γραφήματος.

α) προσθέτουμε έναν ακόμα κόμβο στο άκαμπτο γράφημα συνδέοντάς τον με δύο προϋπάρχοντες κόμβους.

β) προσθέτουμε έναν ακόμα κόμβο στο άκαμπτο γράφημα συνδέοντάς τον με τρεις προϋπάρχοντες κόμβους όπου υπάρχει τουλάχιστον ένας κοινός σύνδεσμος σε δύο από αυτούς, αφαιρώντας ταυτόχρονα ένα σύνδεσμο που ενώνει δύο από τους προϋπάρχοντες κόμβους

Όπου είναι λογικό γιατί είναι προέκταση του τύπου $e=2v-3$ όπου για κάθε κόμβο χρειάζεται δύο συνδέσμους. [57]

εικόνα 8.2 απόδειξη Henneberg κατασκευής σε ένα γράφημα



8.1.3 Εσωτερική στατικότητα

Ένα ελεύθερο σώμα χωρίς στηρίξεις στο έδαφος ή σε κάποιο άλλο άκαμπτο στοιχείο καλείται εσωτερικό ενός συστήματος. Ένα σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί εσωτερικά ως στατικά ισοστατικό, υπερστατικό ή μηχανισμός.

Ένα σύστημα το οποίο είναι εσωτερικά ισοστατικό θα είναι ένα laman γράφημα, δηλαδή θα έχει αριθμό συνδέσμων που ικανοποιούν τη σχέση $e=2v-3$ (για τις δύο διαστάσεις) και την Henneberg κατασκευή. Εάν έχει $e\geq 2v-3$ τότε είναι υπερστατικό, ενώ αν έχει $e\leq 2v-3$ είναι κινηματικός μηχανισμός.

8.1.4 Εξωτερική στατικότητα

Ένα σύστημα θεωρείται εξωτερικά ισοστατικό εάν οι εξισώσεις ισορροπίας επαρκούν για την ανάλυσή του. Για τις τρεις διαστάσεις έχουμε :

$$\sum F_x=0 \ , \ \sum F_y=0 \ , \ \sum F_z=0, \ , \ \sum M_{xy}=0 \ , \ \sum M_{yz}=0 \ , \ \sum M_{xz}=0$$

Για τις δύο διαστάσεις έχουμε :

$$\sum F_x=0, \quad \sum F_y=0, \quad \sum M_{xy}=0$$

Στατικά αόριστο (υπερστατικό) είναι ένα σύστημα εάν δεν μπορεί να αναλυθεί μόνο με τις εξισώσεις ισορροπίας, οι εξωτερικές αντιδράσεις δηλαδή είναι περισσότερες από τις εξισώσεις. Σε περίπτωση που είναι λιγότερες το σύστημα θεωρείται μηχανισμός. Μπορούμε ακόμα να το αναλύσουμε με την έννοια του laman γραφήματος παίρνοντας υπόψη τις δεσμικές ράβδους των στηρίξεων (κύλιση, άρθρωση, πάκτωση) και έχοντας αριθμό συνδέσμων $e=2v$ για ισοστατικό φορέα.

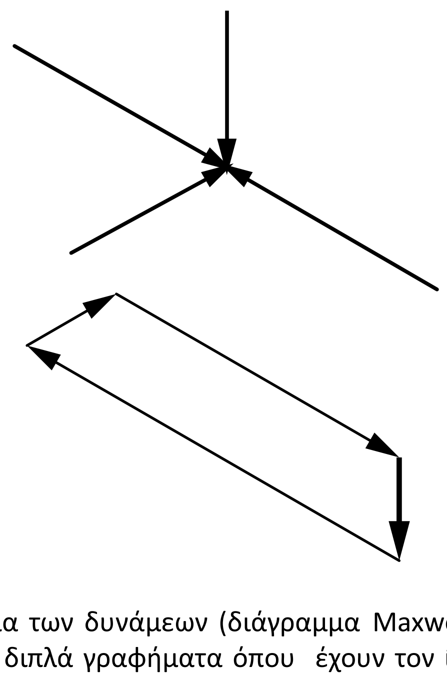
8.2 Θεωρία πλαστικότητας

Οι θεωρίες ελαστικότητας και πλαστικότητας είναι οι δύο προσεγγίσεις που υπάρχουν για το σχεδιασμό ενός φορέα και την επιθυμητή του ανταπόκριση σε εξωτερικές φορτίσεις. Στο σχεδιασμό με τη θεωρία ελαστικότητας υποθέτουμε ότι το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικά ελαστικά, δηλαδή θα πάρει παραμορφώσεις από τη φόρτισή του οι οποίες θα ανακτηθούν όταν αυτή απομακρυνθεί. Ως μέγιστο βαθμό παραμόρφωσης θεωρούμε το όριο διαρροής. Το υλικό όμως μπορεί να δεχθεί μεγαλύτερα φορτία χωρίς να αστοχήσει, παίρνοντας πλαστικές παραμορφώσεις ή λόγω της υπερστατικότητας της κατασκευής. Οπότε δε γνωρίζουμε για το μέγιστο φορτίο της κατασκευής που μπορεί να οδηγήσει στον μηχανισμό κατάρρευσης.

Στο σχεδιασμό με τη θεωρία πλαστικότητας θεωρούμε ότι η κατασκευή βρίσκεται σε στατική ισορροπία όταν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των εξωτερικών φορτίσεων και των εσωτερικών δυνάμεων. Στο θεώρημα χαμηλού ορίου ή στατικό θεώρημα, βρίσκεται μια γραμμή ωθήσεων που ικανοποιεί τη συνθήκη ισορροπίας και το όριο διαρροής είναι μικρότερο από το όριο θραύσης. Στο θεώρημα άνω ορίου το φορτίο που θα οδηγήσει στην κατασκευή μηχανισμού και την αστοχία της κατασκευής είναι μεγαλύτερο από το όριο θραύσης του υλικού. Έτσι, με τον πλαστικό σχεδιασμό και τα θεωρήματα ορίου έχουμε έναν γρήγορο τρόπο για να υπολογίζουμε τα φορτία αστοχίας. Το θεώρημα χαμηλού ορίου παρέχει μια ασφαλή εκτίμηση των φορτίων κατάρρευσης για ένα ψαθυρό στερεό και διευκολύνει τη χρήση γραφικών μεθόδων για την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων. Επίσης, λόγω της υπερστατικότητας της κατασκευής, το θεώρημα χαμηλού ορίου επιτρέπει πληθώρα λύσεων εντός του ορίου θραύσης και άρα πληθώρα διαφορετικών γεωμετρικών κατασκευών που ανταποκρίνονται στις ίδιες φορτίσεις.

8.3 Γραφοστατική

Το 1675 ο Robert Hooke δημοσίευσε το γνωστό θεώρημα στατικής: “ As hangs the flexible line, so but inverted will stand the rigid arch” δηλαδή ότι οι αναρτημένες μορφές, οι οποίες διαμορφώνουν το σχήμα τους από ίδιον βάρος ή κάποιο εξωτερικό φορτίο και δουλεύουν αποκλειστικά σε εφελκυσμό, αν μεταφερθούν αντίστροφα η ίδια μορφή θα μεταφέρει ξανά το φορτίο με θλιπτικές δυνάμεις. Ο Cullman προσάρμοσε όλη την προηγούμενη έρευνα που είχε γίνει από τους Varignon, Maxwell, Cremona και την εφάρμοσε σε προβλήματα στατικής. Στο βιβλίο του “Die grafische Statik” χρησιμοποίησε τον διανυσματικό λογισμό και τη γεωμετρία για να προσεγγίσει την στατική ανάλυση.



εικόνα 8.3 διανύσματα δυνάμεων σε σημείο και το αντίστοιχο δυναμοπολύγωνο

Η γραφοστατική είναι μία διανυσματική μέθοδος στατικής ανάλυσης. Βασίζεται στη γεωμετρική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη γεωμετρία της κατασκευής και τις δυνάμεις που επιδρούν επάνω της και παρέχει μια γραφική προσέγγιση στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Το κύριο στοιχείο στη γραφοστατική είναι το δυναμοπολύγωνο, το οποίο αναπαριστά διανυσματικά τις δυνάμεις, επιτρέποντας τη διαμόρφωση της γεωμετρίας ανάλογα με το μέγεθος των δυνάμεων.

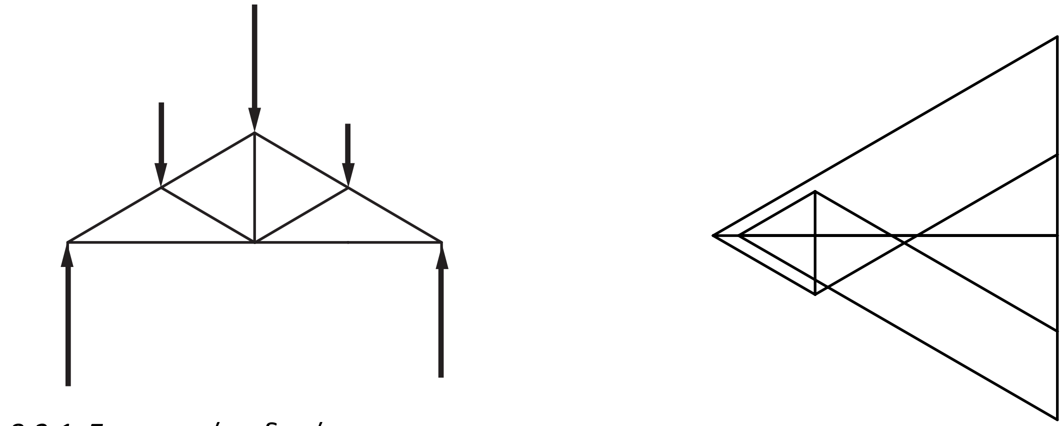
Η γεωμετρία αναπαρίσταται από ένα διάγραμμα μορφής στο οποίο με μοναδιαία διανύσματα απεικονίζονται οι δυνάμεις και οι αντιδράσεις του φορέα. Η ισορροπία των δυνάμεων με τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται εντός της κατασκευής απεικονίζεται με το διάγραμμα των δυνάμεων (διάγραμμα Maxwell - Cremona). Τα δύο διαγράμματα αναπαρίστανται με διπλά γραφήματα όπου έχουν τον ίδιο αριθμό από ακμές και κάθε κόμβος με σθένος μεγαλύτερο του ενός στο ένα διάγραμμα ανταποκρίνεται σε ένα κλειστό πολύγωνο στο άλλο.

Κάθε ακμή στο διάγραμμα Maxwell-Cremona αναπαριστά μια δύναμη με μέτρο την τιμή της δύναμης και ίδια φορά και διεύθυνση όπως η αντίστοιχη ακμή στο διάγραμμα μορφής. Αυτά τα διαγράμματα ονομάζονται αμοιβαία (reciprocal), από την εργασία του Maxwell.

Εξαιτίας της αρχικής κλίμακας που υιοθετείται για την απεικόνιση των εξωτερικών δυνάμεων και αντιδράσεων υπάρχει αντιστοιχία και στις εσωτερικές δυνάμεις σε κάθε μέλος, μετρώντας απλά το μήκος της γραμμής στο διάγραμμα δυνάμεων.

Όταν η κατασκευή είναι υπερστατική διακρίνεται από στατική αοριστία, οπότε επιτρέπει περισσότερες από μία καταστάσεις ισορροπίας με αποτέλεσμα να αντιστοιχούν περισσότερα διαγράμματα δύναμης στο ίδιο διάγραμμα μορφής. Τα μειονεκτήματα της γραφοστατικής, λόγω του ότι είναι γραφική μέθοδος, είναι η ανάλυση πολύπλοκων φορέων. Μπορεί δηλαδή να δημιουργηθούν προβλήματα λόγω της σύνθετης πολυπλοκότητας που θα έχουν τα διαγράμματα (ωστόσο, αυτό καταπολεμείται πλέον με τη χρήση του Η/Υ). Επίσης, εξαιτίας του ότι πραγματοποιεί κυρίως στατική ανάλυση, δεν παίρνει υπόψη της ιδιότητες του υλικού οπότε χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση για τη διαστασιολόγηση.

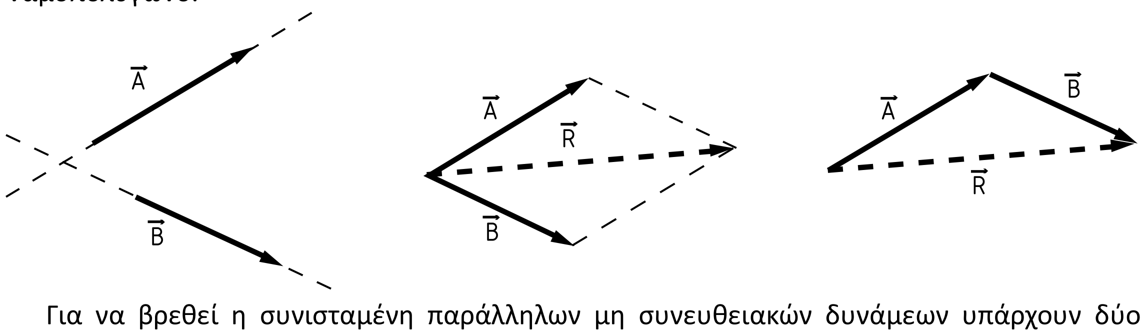
εικόνα 8.4 διάγραμμα μορφής, διάγραμμα Maxwell - Cremona



8.3.1 Συνισταμένη δυνάμεων

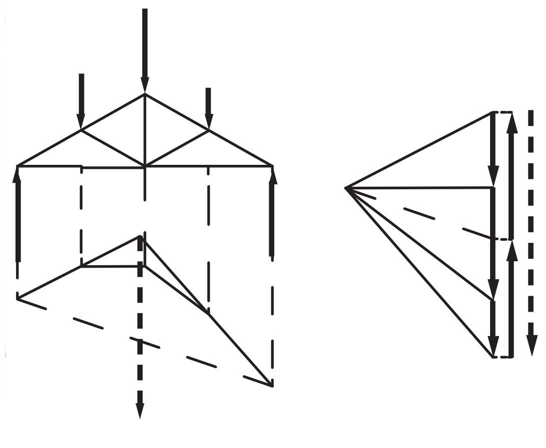
Μία δύναμη είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, άρα αποτελείται από μέτρο, διεύθυνση και φορά. Η συνισταμένη είναι το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα και μπορεί παραδοσιακά να βρεθεί με τον κανόνα του παραλληλογράμμου ή κατασκευάζοντας το δυναμοπολύγωνο.

εικόνα 8.5 συνισταμένη δυνάμεων



Για να βρεθεί η συνισταμένη παράλληλων μη συνευθειακών δυνάμεων υπάρχουν δύο τρόποι που χρησιμοποιούνται στη γραφοστατική. Ο ένας είναι, παίρνοντας τα παραλληλόγραμμα με ύψος το μέτρο της δύναμης και μήκος την απόσταση μεταξύ δύο δυνάμεων, η συνισταμένη θα διέρχεται από το σημείο που τέμνονται οι διαγώνιες των δύο παραλληλογράμων. Σταδιακά (δύο - δύο) βρίσκουμε τη συνισταμένη ολόκληρου του συστήματος. Ο δεύτερος τρόπος είναι, ξεκινώντας από το δυναμοπολύγωνο το οποίο στην περίπτωση παράλληλων δυνάμεων θα είναι μια ευθεία και από τυχαίο σημείο Ο, φέρνουμε ευθείες που ενώνουν την αρχή και το πέρας των δυνάμεων. Έπειτα, κατασκευάζοντας το σχοινοειδή φορέα η συνισταμένη των δυνάμεων θα διέρχεται από το σημείο τομής της αρχικής και τελικής ευθείας, οι οποίες είναι και οι αντιδράσεις του υποθετικού συστήματος.

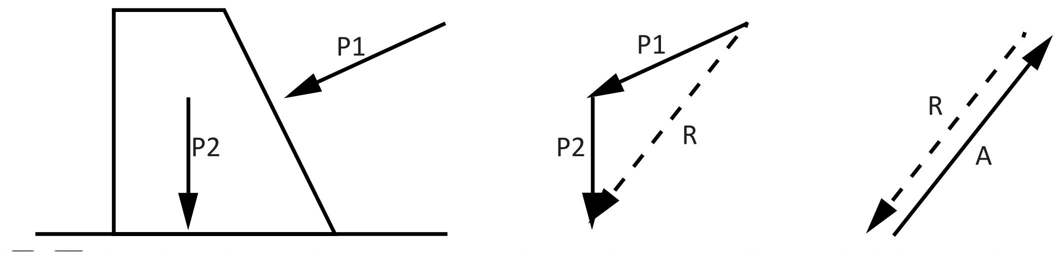
εικόνα 8.6 συνισταμένη παράλληλων μη συνευθειακών δυνάμεων



8.3.2 Ισορροπία δυνάμεων

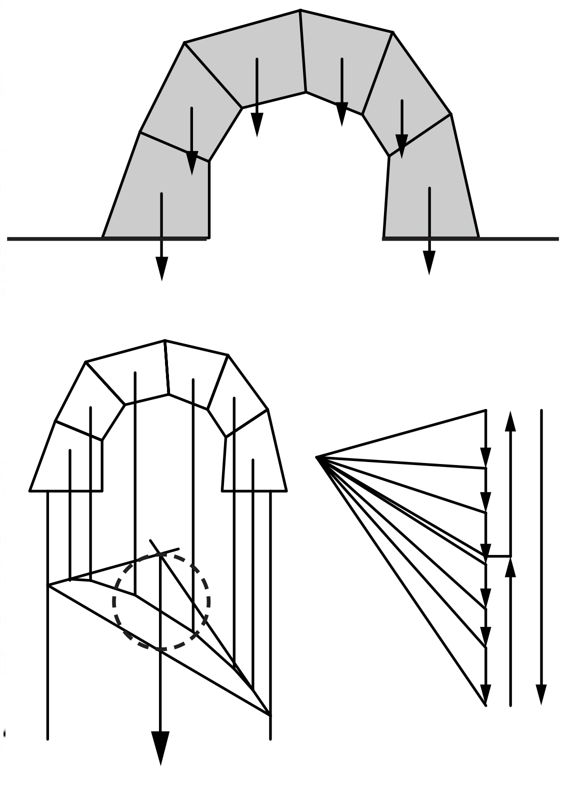
Η αναγκαία συνθήκη για να ισορροπεί ένα σώμα υπό τη δράση δυνάμεων είναι αυτές να διέρχονται από το ίδιο σημείο και να συνθέτουν ένα κλειστό δυναμοπολύγωνο. Αν οι δυνάμεις δεν διέρχονται από κοινό σημείο τότε προκαλείται ροπή $m_o = \sum n_i \times p_i$, όπου n το διάνυσμα της απόστασης από το σημείο o έως το διάνυσμα της δύναμης p . Εάν το δυναμοπολύγωνο δεν είναι κλειστό, τότε η συνισταμένη των δυνάμεων δεν είναι μηδέν και άρα προκαλείται μεταφορική κίνηση κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης $r = \sum p_i$. Οπότε ικανή συνθήκη για να ισορροπεί το σώμα είναι η συνισταμένη των δυνάμεων και η συνισταμένη των ροπών να είναι αμφότερες μηδέν.

Έχοντας ένα σώμα μπορούμε να βρούμε τις αντιδράσεις που θα οδηγήσουν σε ισορροπία, θεωρώντας ότι καλύπτονται οι δύο προαναφερθείσες συνθήκες. Βρίσκοντας τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό $r = \sum p_i$, όπου p οι δυνάμεις που διέρχονται από το σώμα και r η συνισταμένη τους, θεωρούμε ότι υπάρχει ίση και αντίθετη αντίδραση. Έτσι καταφέρνουμε να έχουμε το σύνολο πλέον των δυνάμεων να διέρχονται από το ίδιο σημείο, εξαλείφοντας οποιαδήποτε ροπή, λόγω του ότι η αντίδραση είναι αντίθετη από τη συνισταμένη οδηγούμαστε σε κλειστό δυναμοπολύγωνο.[58]



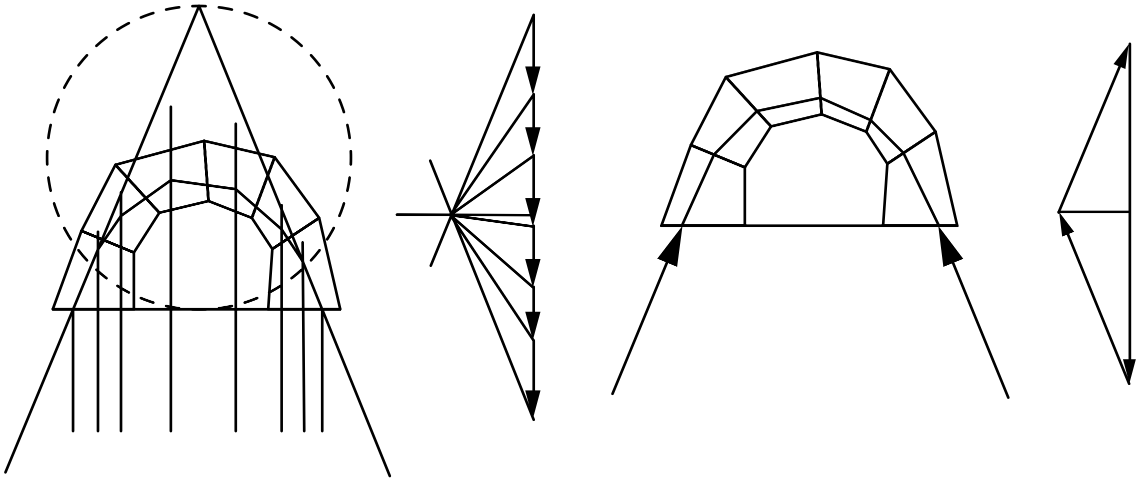
εικόνα 8.7
αντίδραση σύνθετης φόρτισης

Ο Heyman το 1966 χρησιμοποίησε τις παραδοχές ότι η τοιχοποιία έχει μηδενική εφελκυστική αντοχή, άπειρη θλιπτική αντοχή και δεν συμβαίνει ολίσθηση ανάμεσα στους λίθους. Στο θεώρημα του κάτω και άνω ορίου εάν μπορεί να βρεθεί μια γραμμή ώθησης εξολοκλήρου μέσα στα όρια της διατομής, τότε εξασφαλίζεται η ευστάθεια του τόξου με ένα κάτω όριο ασφαλείας. Επίσης εάν συγχρόνως βρεθεί ένας μηχανισμός αστοχίας και υπάρχει ισορροπία δυνάμεων - αντιδράσεων τότε ορίζεται ένα άνω όριο κατάρρευσης.[59] Οπότε η λύση είναι μοναδική και το τόξο στέκεται οριακά. Διατυπώνει επίσης και το γεωμετρικό συντελεστή ασφαλείας στο 1/3 της εσωτερικής διατομής. Στο κάτω όριο ευστάθειας (lower bound theorem) έχουμε την απαίτηση η γραμμή ωθήσεων να διέρχεται μέσα στα όρια της διατομής. Η γραμμή ωθήσεων είναι μια ερμηνεία του σχηνοειδή φορέα που δημιουργείται στη γραφοστατική με τη χρήση του διαγράμματος Maxwell-Cremona. Μετά τη διαδικασία για την εύρεση της συνισταμένης των δυνάμεων εκμεταλλευόμαστε το διάγραμμα για να τοποθετήσουμε τις επιθυμητές στηρίξεις σε αντίθεση με τις αρχικές τυχαίες που προέκυψαν από το αρχικό τυχαίο σημείο. Ξεκινώντας από τη διεύθυνση που δημιουργεί η σύνδεση των στηρίξεων, η ακτίνα που δημιουργείται από το τόξο του σχηνοειδή φορέα είναι η απόσταση του σημείου πάνω στην επιθυμητή διεύθυνση.



εικόνα 8.8
ανάλυση τοξοτής κατασκευής

εικόνα 8.9
γραμμή ωθήσεων και αντιδράσεις τοξοτής κατασκευής



Ο Antoni Gaudi, όντας καλός γνώστης της γεωμετρίας και της μηχανικής, χρησιμοποίησε το σχοινοειδή φορέα, που εκείνη την περίοδο είχε εφαρμογή στη γεφυροποιία, για τη δημιουργία μορφών οι οποίες με θλιπτικές δυνάμεις μεταφέρουν τα φορτία στην έδρασή τους χωρίς να είναι απαραίτητες οι αντηρίδες που χρησιμοποιούνταν στη γοτθική αρχιτεκτονική. Για την εύρεση αυτών των μορφών κατασκεύασε φυσικά μοντέλα με αλυσίδες και προσομοιώνοντας το βάρος της κατασκευής, οδηγήθηκε στις βέλτιστες μορφές. Οι αναρτημένες αλυσίδες λειτουργούν αποκλειστικά στον εφελκυσμό οπότε αναστρέφοντας τη μορφή έχουμε ένα θλιπτικό φορέα. Αυτά τα ανάποδα μοντέλα μπορούσε να τα μελετήσει για να ανακαλύψει τη διασπορά των δυνάμεων και να τα φωτογραφήσει για να σχεδιάσει την εξωτερική μορφή του αρχιτεκτονήματος.

Σπουδαίοι αρχιτέκτονες, όπως ο Heinz Isler και ο Frei Otto, χρησιμοποιούσαν επίσης φυσικά μοντέλα για να εξάγουν συμπεράσματα για την τελική μορφή της κατασκευής τους. Προσπαθούσαν να προβλέψουν τη μηχανική συμπεριφορά της κατασκευής και να βρουν τον βέλτιστο φορέα. Η εξέλιξη αυτών των τεχνικών με τη χρήση φυσικών μοντέλων είναι η δημιουργία μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν τη συμπεριφορά της εκάστοτε δομής. Στην αρχή με γραφικές μεθόδους και μετά με αριθμητικές, προσομοίωναν τη φυσική διαδικασία.

Η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών ώθησε και τη μελέτη αριθμητικών μεθόδων όπως η force density method, η οποία βρίσκει την ισορροπία τον δομών που υπόκεινται σε εφελκυσμό χρησιμοποιώντας πυκνότητα δυνάμεων (force density), δηλαδή τον λόγο της αξονικής δύναμης στο μήκος του εκάστοτε δομικού στοιχείου, για να δημιουργήσει γραμμικές σχέσεις που οδηγούν στην ισορροπία. Η dynamic relaxation, όπου έχοντας ένα δεδομένο φορέα οδηγούμαστε σε μια βελτιστοποίησή του. Η Particle spring system, μια εφαρμογή της προηγούμενης μεθόδου που δίνει μεγαλύτερη δυνατότητα αλληλεπίδρασης του συστήματος με το χρήστη, κάτι που στην αρχική μέθοδο λείπει. Αυτά τα μοντέλα διευκολύνουν τη χρονοβόρα διαδικασία της γραφικής μεθόδου, δεν δίνουν μεγάλη ελευθερία και αλληλεπίδραση με το σχεδιαστικό κομμάτι και έτσι απομακρυνόμαστε από μία εποπτική μέθοδο με την οποία μπορούμε να εντοπίσουμε άμεσα την επίπτωση της αλλαγής της μορφής στις εσωτερικές δυνάμεις της κατασκευής.[60]

ΜΕΡΟΣ Β'

9 ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ ΑΥΞΗΤΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ

9.1 Εισαγωγή

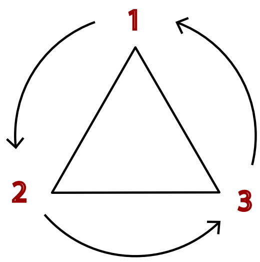
Η συνδεσμολογία της αυξητικής δομής αποτελείται από τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

k_v : κορυφές του κάθε τριγώνου, $v = 1,2,3$

j : τρίγωνα του εξαγώνου, $j \in [1\,,\,6]$

i : εξαγωνικά στοιχεία, $i \in [0\,,\,6]$

$$k_v^{(i,j)}$$



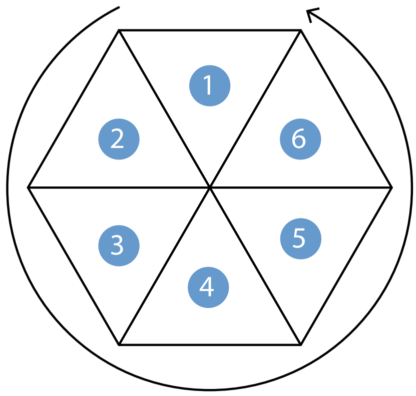
εικόνα 9.1 αρίθμηση κορυφών τριγωνικού τμήματος

9.2 Συνδεσμολογία στο εσωτερικό κάθε εξαγωνικού στοιχείου

Για κάθε i έχουμε :

$$j = 1\,,\,3 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k_3^{(i,j)} \equiv k_2^{(i,j+1)} \\ k_1^{(i,j+1)} \equiv k_1^{(i,j+2)} \end{array} \right.$$

$$j = 5 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k_3^{(i,j)} \equiv k_2^{(i,j+1)} \\ k_1^{(i,j+1)} \equiv k_1^{(i,j-4)} \end{array} \right.$$



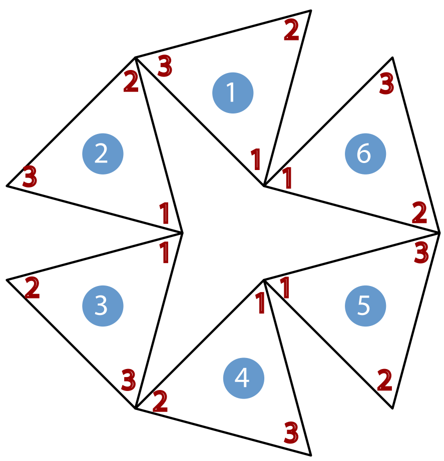
εικόνα 9.2 αρίθμηση τριγωνικών τμημάτων εξαγωνικού στοιχείου

9.3 Συνδεσμολογία κεντρικού στοιχείου με περιμετρικά

Για $i = 0$ έχουμε:

$$j = 1\,,\,3 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k_2^{(0,j)} \equiv k_3^{(j,j+3)} \\ k_3^{(0,j+3)} \equiv k_2^{(j+3,j)} \end{array} \right.$$

$$j = 2 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k_3^{(0,j)} \equiv k_2^{(j,j+3)} \\ k_2^{(0,j+3)} \equiv k_3^{(j+3,j)} \end{array} \right.$$



εικόνα 9.3 συνολική απεικόνιση στοιχείου

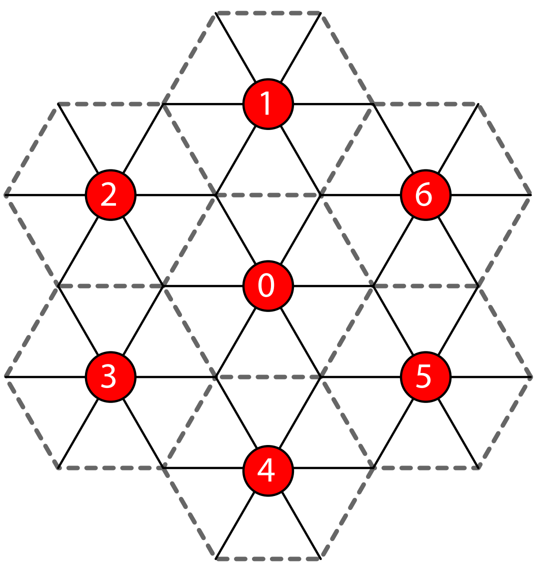
9.4 Συνδεσμολογία περιμετρικών στοιχείων

Για κάθε $i \neq 0$ έχουμε:

$$i = 1\,,\,3 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k_2^{(i,i+2)} \equiv k_3^{(i+1,i-1)} \\ k_3^{(i+1,i+3)} \equiv k_2^{(i+2,i)} \end{array} \right.$$

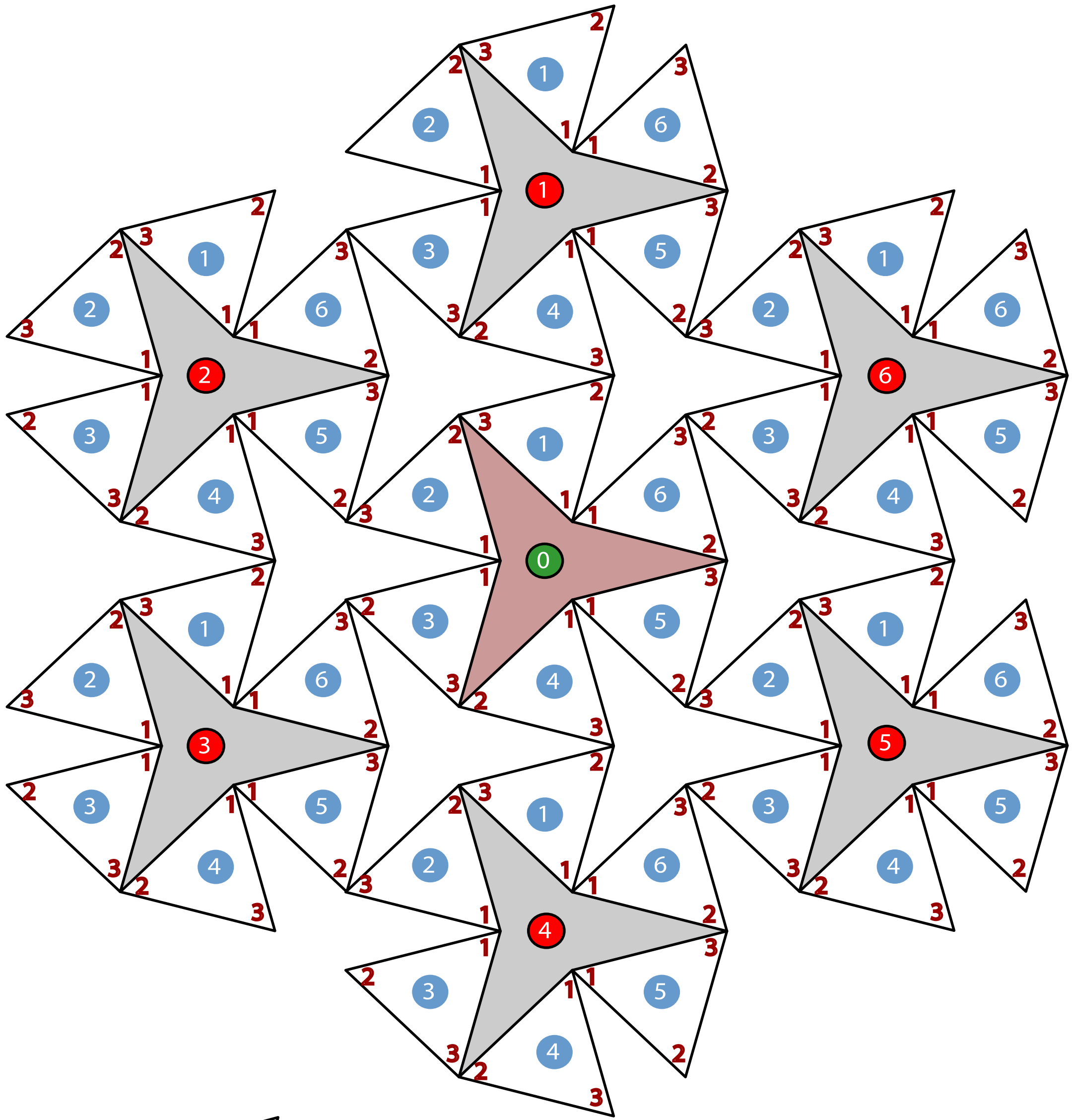
$$i = 5 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k_2^{(i,i-4)} \equiv k_3^{(i+1,i-1)} \\ k_3^{(i+1,i-3)} \equiv k_2^{(i-4,i)} \end{array} \right.$$

Εάν $j < 1$ τότε έχουμε $j = 6$

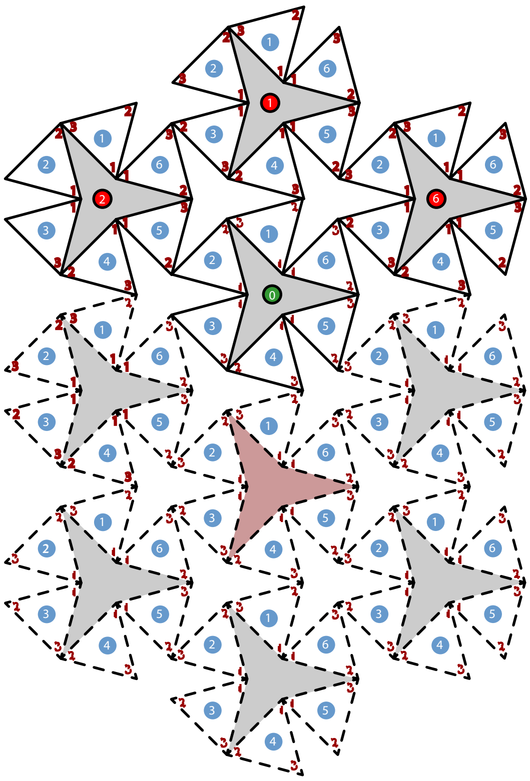


εικόνα 9.4 αρίθμηση στοιχείων αυξητικής δομής

εικόνα 9.5
συνολική αρίθμηση αυξητικής δομής



εικόνα 9.6
ανάπτυξη αυξητικής δομής



9.5 Εξάπλωση του συστήματος

Η περαιτέρω εξάπλωση του συστήματος πραγματοποιείται μεταφέροντας το κεντρικό στοιχείο 0 σε νέα θέση και υπολογίζοντας τα στοιχεία που υπολείπονται.

Στο διάγραμμα το στοιχείο 1 παίρνει την τιμή μηδέν και δημιουργούνται τρία επιπλέον στοιχεία.

10 ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΚΥΨΕΛΙΔΑ

Η πλευρά c δημιουργεί το τρίγωνο ΑΒΓ με μήκος πλευράς

$$c^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos(\gamma)$$

Έχουμε $\gamma = \vartheta + \frac{\pi}{3}$ οπότε

$$c^2 = 2 \cdot l^2 - 2 \cdot l^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right) \Rightarrow$$

$$c = l \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}$$

Η γωνία β που σχηματίζεται στο τρίγωνο ΑΒΑ’ διατηρεί πάντα σταθερή τιμή ίση με $\frac{2\pi}{3}$ και δεν επηρεάζεται από την περιστροφή των αρθρώσεων. Οπότε το μήκος της πλευράς ΑΑ’ ισούται με :

$$(AA')^2 = c^2 \cdot c^2 - 2 \cdot c \cdot c \cdot \cos(b) \Rightarrow$$

$$(AA')^2 = 2 \cdot c^2 - 2 \cdot c^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$(AA')^2 = c^2 \left[2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$AA' = c \cdot \sqrt{3}$$

οπότε

$$AA' = l \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$AA' = l \cdot \sqrt{6 - 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}$$

Ενώνοντας τους δύο κόμβους που βρίσκονται απέναντι από το σημείο Β, δημιουργούμε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο ΑΑ’ με γωνία δ ίση με

$$\delta = \frac{\vartheta + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{6}$$

Ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στην ΑΑ’ που διέρχεται από τον κόμβο Ε δημιουργεί το τρίγωνο ΔΖΕ. Επειδή το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο, ξέρουμε ότι $\zeta = \frac{\pi}{2}$ και έχουμε το άθροισμα των γωνιών να ισούται με

$$\pi = \zeta + \delta + \varepsilon \Rightarrow$$

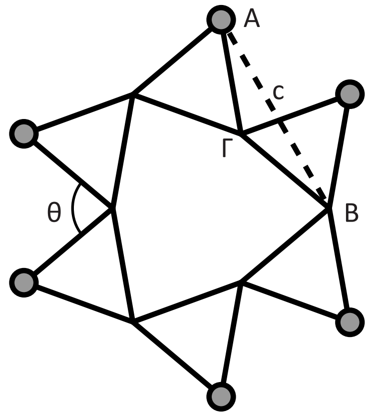
$$\pi = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{2}$$

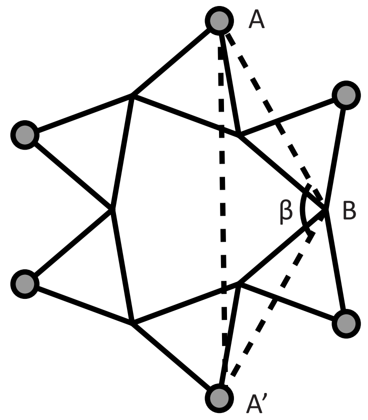
οπότε το μήκος της πλευράς ΖΕ ισούται με :

$$ZE = \Delta E \cdot \cos(\varepsilon) \Rightarrow$$

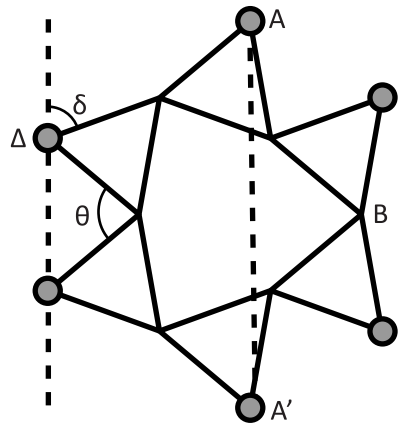
$$ZE = \Delta E \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{2}\right)$$



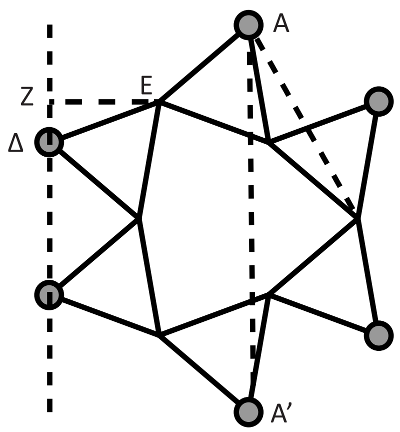
εικόνα 10.1 εξερεύνηση γεωμετρίας στοιχείου



εικόνα 10.2 ύψος μοναδιαίας κυψελίδας

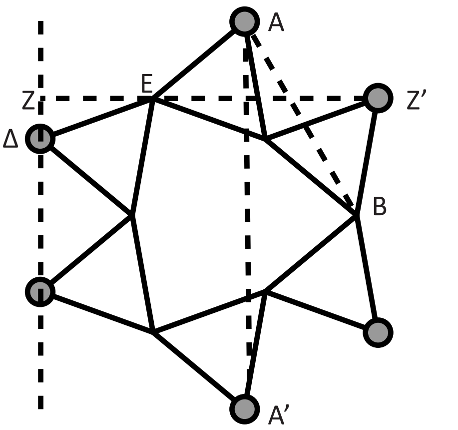


εικόνα 10.3 εξερεύνηση γεωμετρίας στοιχείου



εικόνα 10.4 εξερεύνηση γεωμετρίας στοιχείου

εικόνα 10.5 πλάτος μοναδιαίας κυψελίδας



Ακόμα, επειδή ΔΕ είναι η πλευρά με μήκος l του τριγωνικού στοιχείου έχουμε ότι :

$$ZE = l \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{2}\right)$$

Η απόσταση ΕΖ' λόγω ομοίων τριγώνων ισούται με

$$EZ' = c = l \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}$$

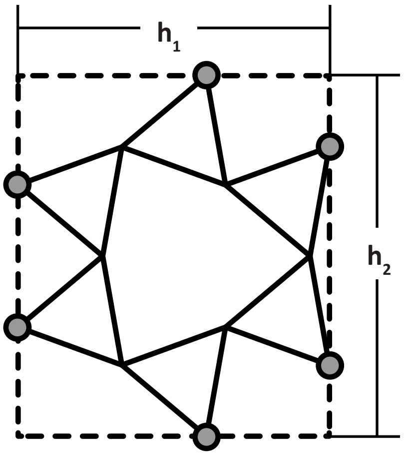
οπότε

$$ZZ' = ZE + EZ' \Rightarrow$$

$$ZZ' = l \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{2}\right) + l \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)} \Rightarrow$$

$$ZZ' = l \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{2}\right) + \sqrt{2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}\right]$$

εικόνα 10.6 διαστάσεις μοναδιαίας κυψελίδας



Η μοναδιαία κυψελίδα της αυξητικής δομής είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις h1 = ZZ' και h2 = AA' οπότε έχουμε :

$$h_1 = l\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta}{2}\right) + \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}\right]$$

$$h_2 = l\sqrt{6 - 6\cos\left(\frac{\pi}{3} + \vartheta\right)}$$

όπου l το μήκος της πλευράς του τριγώνου και θ η γωνία του στοιχείου καθώς παραμορφώνεται με πεδίο ορισμού

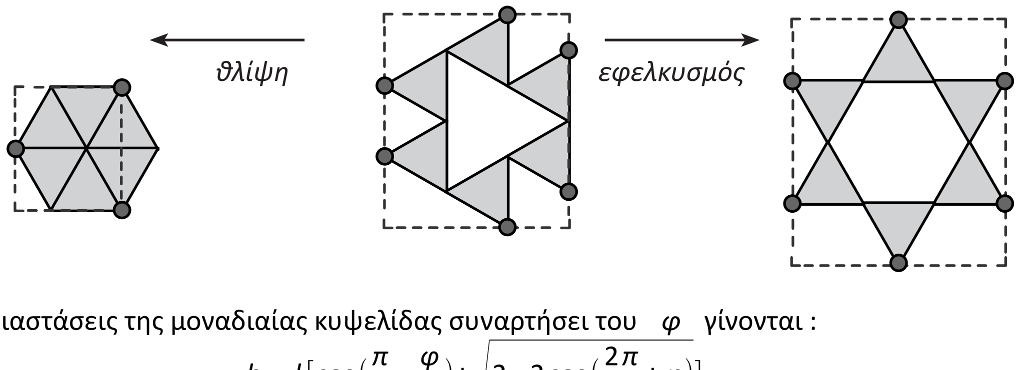
$$\vartheta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$$

Η μοναδιαία κυψελίδα της αυξητικής δομής αποτελείται από άκαμπτα τρίγωνα που συνδέονται με αρθρώσεις, οπότε η φόρτιση (εφελκυσμός - θλίψη) που θα ασκηθεί στο σύστημα εξαιτίας της άρθρωσης δεν δημιουργεί τάση αλλά επιφέρει την περιστροφή των αρθρώσεων κατά γωνία φ. Θεωρώντας το σύστημα στην απαραμόρφωτη κατάσταση όταν $\varphi_o = 0$, έχουμε $\varphi = \vartheta - \frac{\pi}{3}$ οπότε $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\text{με} \quad \varphi = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{ μέγιστη θλίψη}$$

$$\text{και} \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{ μέγιστο εφελκυσμό}$$

εικόνα 10.7 μέγιστη θλιψη, απαραμόρφωτη κατάσταση, μέγιστος εφελκυσμός



Οι διαστάσεις της μοναδιαίας κυψελίδας συναρτήσει του φ γίνονται :

$$h_1 = l\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right)}\right]$$

$$h_2 = l\sqrt{6 - 6\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right)}$$

Για $\varphi_o = 0$ έχουμε την απαραμόρφωτη κατάσταση με h_{1o}, h_{2o} διαστάσεις μοναδιαίας κυψελίδας

$$\varphi_o = 0 \Rightarrow h_{1o} = l\left[\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 0\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 0\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$h_{1o}=l[\sqrt{2-2\cdot(-\frac{1}{2})}+\frac{\sqrt{3}}{2}] \Leftrightarrow$$
$$h_{1o}=l\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\varphi_o=0 \Rightarrow h_{2o}=l\sqrt{6-6\cos(\frac{2\pi}{3}+0)} \Leftrightarrow$$
$$h_{2o}=l\sqrt{6-6\cdot(-\frac{1}{2})} \Leftrightarrow$$
$$h_{2o}=l\cdot 3$$

Για $\varphi_\varepsilon=\frac{\pi}{3}$ έχουμε το μέγιστο εφελκυσμό με διαστάσεις μοναδιαίας κυψελίδας

$$h_{1\varepsilon}=l[\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\frac{\pi}{3}}{2})+\sqrt{2-2\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3})}] \Leftrightarrow$$
$$h_{1\varepsilon}=l[\cos(0)+\sqrt{2-2\cos(\pi)}] \Leftrightarrow$$
$$h_{1\varepsilon}=l[1+\sqrt{2-2\cdot(-1)}] \Leftrightarrow$$
$$h_{1\varepsilon}=l\cdot 3$$

$$h_{2\varepsilon}=l\sqrt{6-6\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3})} \Leftrightarrow$$
$$h_{2\varepsilon}=l\sqrt{6-6\cos(\pi)} \Leftrightarrow$$
$$h_{2\varepsilon}=l\sqrt{6-6\cdot(-1)} \Leftrightarrow$$
$$h_{2\varepsilon}=l\cdot 2\cdot\sqrt{3}$$

απ’ όπου προκύπτει ότι η ανηγμένη παραμόρφωση κατά το μέγιστο εφελκυσμό είναι προς τη διεύθυνση 1:

$$\varepsilon_{1\varepsilon}=\frac{h_{1\varepsilon}-h_{1o}}{h_{1o}}=\frac{3\cdot l-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot l}{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot l}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=0.1547$$

προς τη διεύθυνση 2:

$$\varepsilon_{2\varepsilon}=\frac{h_{2\varepsilon}-h_{2o}}{h_{2o}}=\frac{2\sqrt{3}\cdot l-3\cdot l}{3\cdot l}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}=0.1547$$

οπότε έχουμε το λόγο Poisson

$$v_{12\varepsilon} = v_{21\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_{1\varepsilon}}{\varepsilon_{2\varepsilon}} = -1$$

Για $\varphi_\vartheta=-\frac{\pi}{3}$ έχουμε τη μέγιστη θλίψη με διαστάσεις μοναδιαίας κυψελίδας

$$h_{1\vartheta}=l[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2\cdot 3})+\sqrt{2-2\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})}] \Leftrightarrow$$
$$h_{1\vartheta}=l[\cos(\frac{\pi}{3})+\sqrt{2-2\cos(\frac{\pi}{3})}] \Leftrightarrow$$
$$h_{1\vartheta}=l[\frac{1}{2}+\sqrt{2-1}] \Leftrightarrow$$
$$h_{1\vartheta}=l\cdot\frac{3}{2}$$

$$h_{2\vartheta}=l\sqrt{6-6\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})} \Leftrightarrow$$
$$h_{2\vartheta}=l\sqrt{6-6\cdot\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$
$$h_{2\vartheta}=l\sqrt{3}$$

απ’ όπου προκύπτει ότι η ανηγμένη παραμόρφωση κατά τη μέγιστη θλίψη είναι προς τη διεύθυνση 1:

$$\varepsilon_{1\vartheta}=\frac{h_{1\vartheta}-h_{1o}}{h_{1o}}=\frac{\frac{3}{2}\cdot l-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot l}{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot l}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-0.4226$$

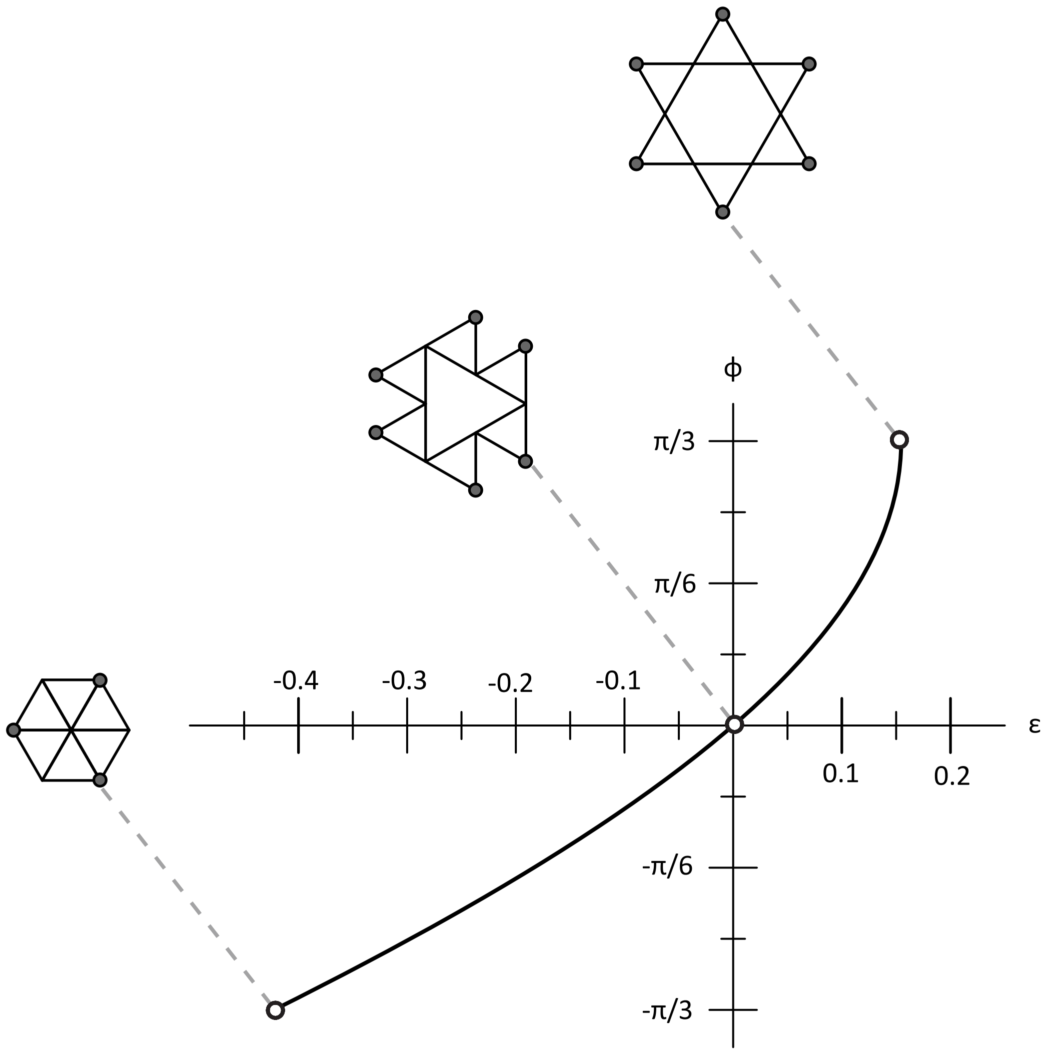
προς τη διεύθυνση 2 :

$$\varepsilon_{2\vartheta}=\frac{h_{2\vartheta}-h_{2o}}{h_{2o}}=\frac{l\cdot\sqrt{3}-3\cdot l}{3\cdot l}=-0.4226$$

και τελικά ξανά ο λόγος Poisson ισούται με :

$$v_{12\vartheta} = v_{21\vartheta} = -\frac{\varepsilon_{1\vartheta}}{\varepsilon_{2\vartheta}} = -1$$

εικόνα 10.8
διάγραμμα
παραμόρφωσης



11 ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΛΛΑΓΗΣ ΦΑΣΗΣ

Τοποθετούνται ελατήρια συνδέοντας ανά δύο τα τριγωνικά στοιχεία της αυξητικής δομής. Τα ελατήρια προσαρμόζονται στις αρθρώσεις των τριγωνικών στοιχείων και έτσι καταλήγουμε με ένα σύστημα με έξι τριγωνικά στοιχεία και τρία ελατήρια που αποτελούν κάθε αυξητόνιο.

Εξαιτίας της θέσης του ελατηρίου δημιουργείται το τρίγωνο ΕΒ’Ε’, οπότε το μήκος του ελατηρίου είναι συνάρτηση της γωνίας θ και του μήκους των πλευρών των τριγωνικών στοιχείων. Επομένως, σύμφωνα με το τρίγωνο ΕΒ’Ε’ έχουμε ότι το μήκος x του ελατηρίου ισούται με

$$x^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos(\beta') \Rightarrow$$
$$x^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos(\beta') \Rightarrow$$
$$x = l\sqrt{2 - 2\cos(\beta')}$$

Επειδή τα τριγωνικά στοιχεία είναι ισόπλευρα, έχουμε επίσης ότι

$$\beta' = \vartheta + 2\frac{\pi}{3}$$

και σύμφωνα με τη σχέση $\vartheta = \varphi + \frac{\pi}{3}$ καταλήγουμε ότι

$$\beta' = \left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + 2\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$
$$\beta' = \varphi + \pi \quad , \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

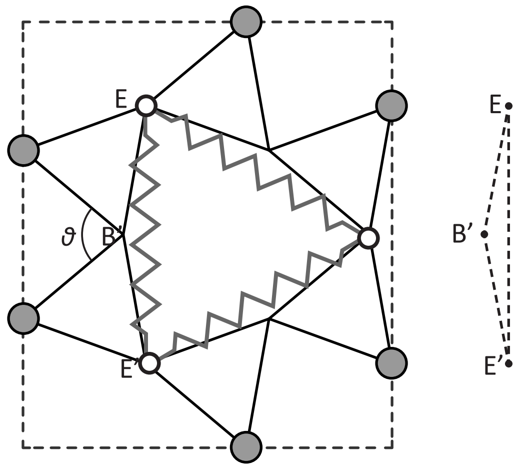
οπότε έχουμε

$$x = l\sqrt{2 - 2\cos(\beta')} \Rightarrow$$
$$x = l\sqrt{2 - 2\cos(\varphi + \pi)} \Rightarrow$$
$$x = l\sqrt{2 - 2 \cdot (-\cos(\varphi))} \Rightarrow$$
$$x = l\sqrt{2 + 2\cos(\varphi)}$$

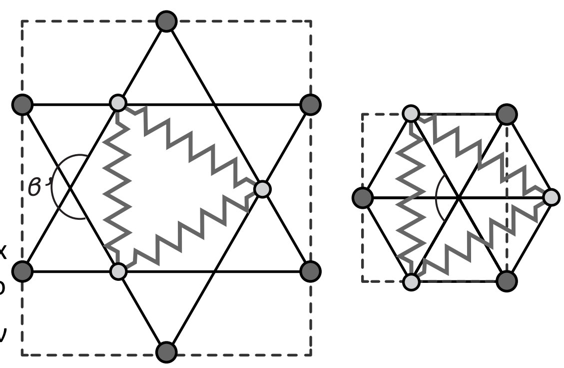
Βάσει των παραπάνω προκύπτει ότι το μήκος x της πλευράς ΕΕ’ του τριγώνου ΕΒ’Ε’ έχει το ελάχιστο μήκος όταν το $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ έχει την ακραία τιμή, δηλαδή όταν $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$. Οπότε το ελάχιστο μήκος είναι

$$x_0 = l\sqrt{2 + 2\cos(\varphi_0)} \Rightarrow$$
$$x_0 = l\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \Rightarrow$$
$$x_0 = l\sqrt{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$x_0 = l\sqrt{3}$$

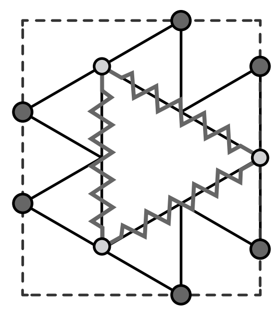
εικόνα 11.1
ελατήριο σε εφελκυσμό και θλίψη



εικόνα 11.2
διάγραμμα συστήματος με ελατήριο



εικόνα 11.3
σύστημα με το ελατήριο στο ελάχιστο μήκος



εικόνα 11.4
σύστημα με το ελατήριο στη μέγιστη παραμόρφωση

Θεωρώντας ότι το ελάχιστο μήκος βρίσκεται στην απαραμόρφωτη κατάσταση, έχουμε την παραμόρφωση του ελατηρίου να είναι

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow$$
$$\Delta x = l\sqrt{2 + 2\cos(\varphi)} - l\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Delta x = l\left[\sqrt{2 + 2\cos(\varphi)} - \sqrt{3}\right]$$

Η αυξητική δομή με την προσθήκη των ελατηρίων έχει μετασχηματιστεί σε ένα σύστημα με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος να ισούται με το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας των επιμέρους στοιχείων, δηλαδή $U_Σ=U_A+U_E$. Όμως, λόγω όμως της σύνδεσης των τριγωνικών στοιχείων με απλές αρθρώσεις, δεν δημιουργείται επιμέρους δυναμική ενέργεια στην αυξητική δομή, δηλαδή $U_A=0$, οπότε έχουμε $U_Σ=U_E$,όπου U_E : η δυναμική ενέργεια των ελατηρίων.

Η δυναμική ενέργεια των ελατηρίων ισούται με $U_E=(\frac{1}{2}k_1 Δx_1^2)+(\frac{1}{2}k_2 Δx_2^2)+(\frac{1}{2}k_3 Δx_3^2)$ για τα τρία ελατήρια που αποτελούν κάθε σύστημα. Έχουμε όμως ότι $k_1=k_2=k_3$ και $Δx_1=Δx_2=Δx_3$ Οπότε καταλήγουμε με

$$U_E=\frac{3}{2}k\,Δx^2 \;=\; \frac{3}{2}k[\,l(\sqrt{2+2\cos(φ)}-\sqrt{3})]^2 \;\Rightarrow$$

$$U_E=\frac{3}{2}k\,l^2(2\cos(φ)-2\sqrt{6+6\cos(φ)}+5) \;\Rightarrow$$

$$U_E=3\,k\,l^2(\cos(φ)-\sqrt{6+6\cos(φ)}+\frac{5}{2})$$

Έχουμε

$$\frac{dU_E}{dφ}=\frac{d}{dφ}[3\,k\,l^2(\cos(φ)-\sqrt{6+6\cos(φ)}+\frac{5}{2})] \;\Rightarrow$$

$$\frac{dU_E}{dφ}=3kl^2[-\sin(φ)-\frac{-6(-\sin(φ))}{2\sqrt{6+6\cos(φ)}}] \;\Rightarrow$$

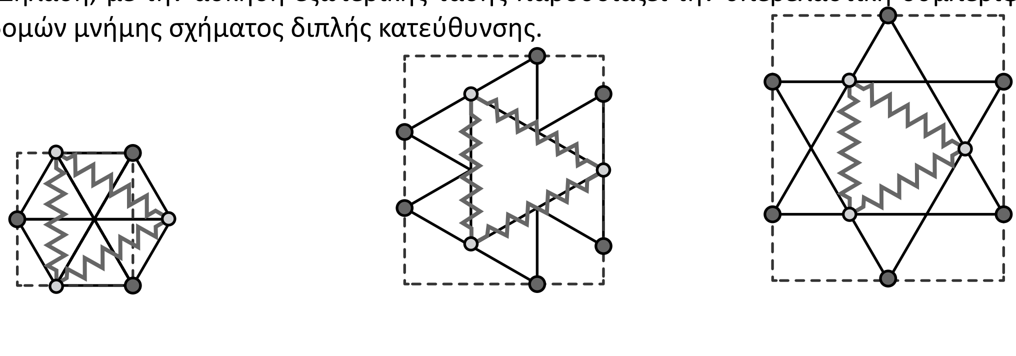
$$\frac{dU_E}{dφ}=3kl^2\sin(φ)[\frac{-3}{\sqrt{6+6\cos(φ)}}-1]$$

Γνωρίζουμε ότι $kl^2>0$ οπότε, βάσει της μονοτονίας της συνάρτησης, έχουμε τρία κρίσιμα σημεία: $φ=-\frac{π}{3}$, $φ=0$, $φ=\frac{π}{3}$. Με τη συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{π}{3}, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{π}{3})$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η δυναμική ενέργεια παρουσιάζει μια κατάσταση ασταθούς ισορροπίας για $φ=0$ και ευσταθή ισορροπία στις θέσεις $φ=-\frac{π}{3}$, $φ=\frac{π}{3}$.

Δηλαδή το σύστημα αποτελείται από δύο φάσεις, η μία για τιμές του $φ$ από $-\frac{π}{3}$ έως 0 ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της θλίψης στην αυξητική δομή και η δεύτερη για τιμές του $φ$ από 0 έως $\frac{π}{3}$ ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού του εφελκυσμού.

Επομένως το σύστημα δεν μπορεί να βρίσκεται σε κάποια ενδιάμεση κατάσταση χωρίς να ασκείται εξωτερική φόρτιση. Μόλις περάσει την απαραμόρφωτη κατάσταση προς τη θλίψη ή τον εφελκυσμό και διακοπεί η φόρτιση, θα βρεθεί στις ακραίες τιμές όπου το σύστημα παρουσιάζει ισορροπία. Όταν βρισκόμαστε σε μία από τις ευσταθείς καταστάσεις του συστήματος (πλήρης εφελκυσμός $φ=-\frac{π}{3}$ ή πλήρης θλίψη $φ=\frac{π}{3}$) και φορτίσουμε το σύστημα τόσο ώστε να περάσει την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση της αυξητικής δομής για $φ_0=0$, τότε το σύστημα θα ισορροπήσει στην αντίθετη πλήρη παραμόρφωση (εφελκυσμός ή θλίψη). Δηλαδή, με την άσκηση εξωτερικής τάσης παρουσιάζει την υπερελαστική συμπεριφορά των δομών μνήμης σχήματος διπλής κατεύθυνσης.

εικόνα 11.5 οριακές καταστάσεις συστήματος



12 ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

12.1 Γεωμετρική προσέγγιση

Δημιουργούμε ένα εξάγωνο περίγραμμα στην πλήρως εφελκυόμενη κατάσταση του αυξητικού συστήματος. Βάσει της συνδεσμολογίας παίρνουμε τον άξονα περιστροφής των στοιχείων **Ax** και τα κάθετα διανύσματα **N** στην επιφάνεια του εξαγωνικού περιγράμματος.

Για τη διακριτή γεωμετρία μεταφέρουμε τα κάθετα διανύσματα στους κόμβους του αντίστοιχου εξαγωνικού περιγράμματος. Οπότε, περιστρέφοντας τα στοιχεία γύρω από τον άξονα περιστροφής τους, παίρνουμε την διακριτή καμπυλότητα **κ** σε κάθε κόμβο ως τη διαφορά των αντίστοιχων κάθετων διανυσμάτων από το επίπεδο.

$$\boldsymbol{N_0}=\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{N_1}=\vartheta,\ \boldsymbol{\kappa}=\vartheta-\frac{\pi}{2}$$

Δημιουργούμε τρία διανύσματα :

(i) με αρχή τον κόμβο $k_2^{(0,1)}$ και πέρας τον $k_2^{(1,3)}$,

(ii) με αρχή τον $k_2^{(0,1)}$ και πέρας τον $k_3^{(0,2)}$

(iii) με αρχή τον $k_2^{(0,1)}$ και φορά τον άξονα περιστροφής $\mathbf{Ax_1}$

Τοποθετώντας τα διανύσματα στο κέντρο μιας μοναδιαίας σφαίρας, παίρνουμε το σφαιρικό τρίγωνο abc.

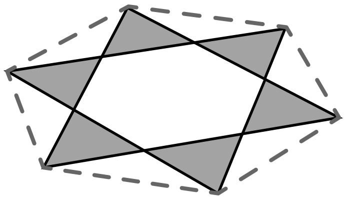
Από το νόμο των συνημίτονων για τη σφαιρική τριγωνομετρία έχουμε :

$$\cos(a)=\cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

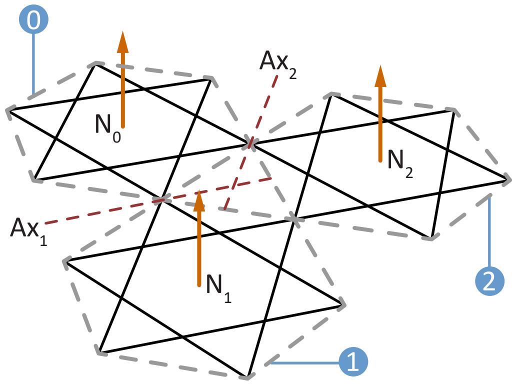
Για τον αλγόριθμο δίνουμε ως δεδομένα το μήκος του αρχικού στοιχείου L_0 και τη διαφορά θ_1 που έχουν τα κάθετα διανύσματα των L_0 -L_1 στοιχείων.

Επειδή ο $\mathbf{Ax_1}$ είναι ο άξονας περιστροφής δύο εξάγωνων, προκύπτει ότι $c=b=\frac{\pi}{6}$

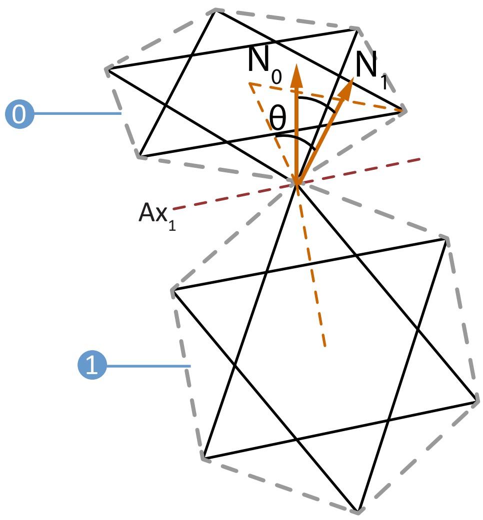
Επειδή η γωνία θ παίρνει τιμές μεγαλύτερες από $\frac{\pi}{2}$, η εσωτερική γωνία που δημιουργείται από τα επίπεδα των περιγραμμάτων των στοιχείων ισούται με $A=\pi-\kappa$, όπου κ η διακριτή καμπυλότητα.



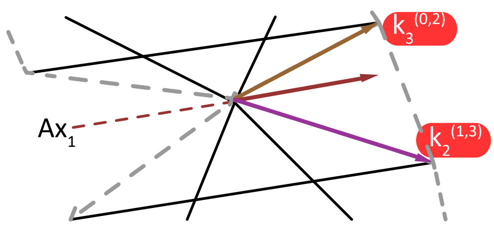
εικόνα 12.1 εξαγωνικό περίγραμμα στοιχείου



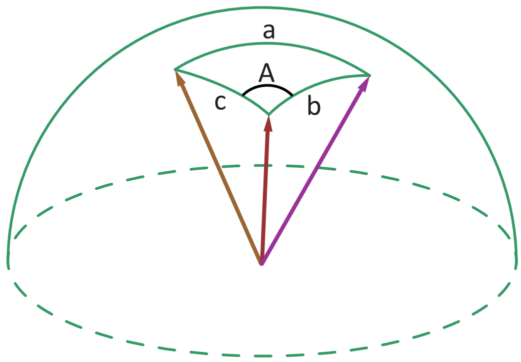
εικόνα 12.2 σύστημα στην επίπεδη κατάσταση



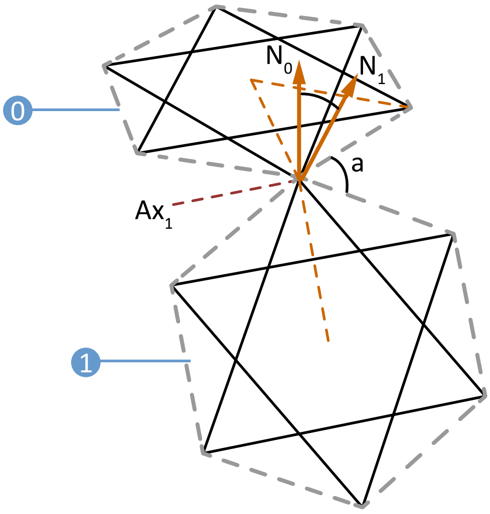
εικόνα 12.3 στοιχεία με διακριτή καμπυλότητα



εικόνα 12.4 διανύσματα σφαιρικής γεωμετρίας



εικόνα 12.5 διανύσματα στη μοναδιαία σφαίρα



εικόνα 12.6
γωνία a μεταξύ στοιχείων με διακριτή καμπυλότητα

Έτσι έχουμε:

$$\cos(a)=\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi-\kappa) \Rightarrow$$

$$\cos(a)=\frac{[3+\cos(\pi-\kappa)]}{4}$$

Άρα, γνωρίζοντας τη διαφορά των κάθετων διανυσμάτων (γωνία περιστροφής), βρίσκουμε τη γωνία a που δημιουργείται ανάμεσα στα δύο στοιχεία.

Το δεύτερο στοιχείο με ίδια διακριτή καμπυλότητα ως προς το αρχικό (0), δημιουργεί, όπως και το πρώτο, προβλήματα στην συνδεσιμότητα στον επιθυμητό κόμβο, εξαιτίας του μεγέθους των πλευρών τους.

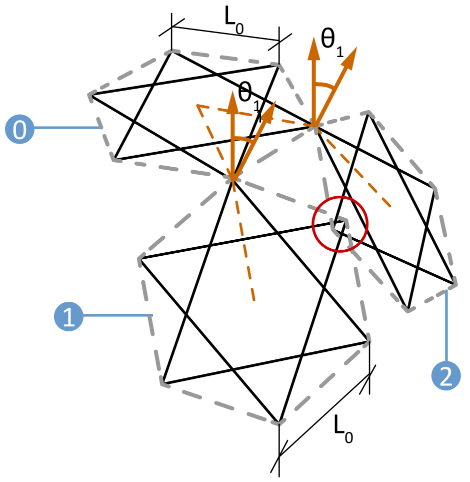
Επειδή το περίγραμμα των στοιχείων είναι κανονικό εξάγωνο (ίσα μήκη πλευρών και ίδιες γωνίες), θέτοντας L_0 το μήκος της πλευράς του αρχικού στοιχείου και γνωρίζοντας τη γωνία a από τον σφαιρικό νόμο των συνημίτονων, βρίσκουμε το επιθυμητό μήκος L_1 του περιγράμματος των πλευρών των 1 έως 6 στοιχείων.

Έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γνωστή γωνία a και μήκος πλευράς

$$AB=\frac{L_0}{2} \quad ,$$

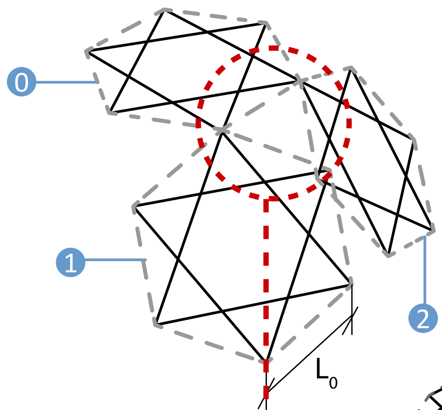
οπότε από την τριγωνομετρική συνάρτηση προκύπτει ότι :

$$A\Gamma=\frac{AB}{\cos(a)}$$, όπου ΑΓ το μήκος L_1

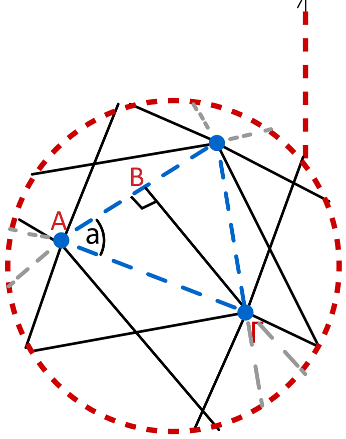


εικόνα 12.7
ασυνέχεια στη σύνδεση των στοιχείων

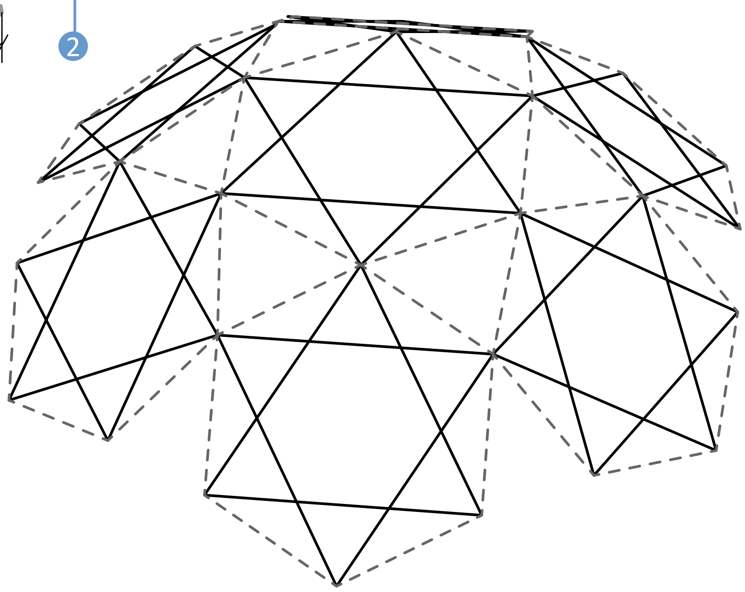
Έτσι για τον αλγόριθμο δίνουμε ως δεδομένα το μήκος του αρχικού στοιχείου L_0 και τη διαφορά θ_1 που έχουν τα κάθετα διανύσματα $N_1 - N_0$ και βρίσκουμε το μήκος L_1 των περιμετρικών στοιχείων 1,2...,6.



εικόνα 12.8
μελέτη ασυνέχειας



εικόνα 12.9
λεπτομέρεια



εικόνα 12.10
κέλυφος με μία σειρά στοιχείων L_1

Το μήκος L_2 του στοιχείου 7 προκύπτει από την απόσταση των κόμβων $k_3^{(1,2)} - k_2^{(2,1)}$.

Σύμφωνα με τον άξονα περιστροφής, για το στοιχείο 7 δημιουργείται ο κύκλος ΚΟ που αντιστοιχεί στην κίνηση του κόμβου $k_3^{(7,6)}$.

Βάσει του άξονα περιστροφής και του μεγέθους του στοιχείου 18 δημιουργείται ο κώνος ΚΩ που αντιστοιχεί στις δυνατές θέσεις για τον κόμβο $k_2^{(18,3)}$.

Ο κύκλος ΚΟ και ο κώνος ΚΩ έχουν δύο σημεία τομής. Το σημείο που προκύπτει με θετική διαφορά στα κάθετα διανύσματα των στοιχείων N_2 - N_7 και $N_1 - N_{18}$ είναι η επιθυμητή θέση.

Γνωρίζοντας το σημείο σύνδεσης των στοιχείων, δημιουργούμε τα διανύσματα:

a με αρχή τον κόμβο $k_3^{(1,2)}$ και πέρας το σημείο σύνδεσης

b με αρχή τον κόμβο $k_3^{(1,2)}$, φορά παράλληλη στον άξονα περιστροφής και μέτρο ίσο με L_2

c με αρχή τον κόμβο $k_3^{(1,2)}$, φορά κάθετη στο κάθετο διάνυσμα N_0, δηλαδή παράλληλη στο επίπεδο και διεύθυνση προς το σημείο τομής.

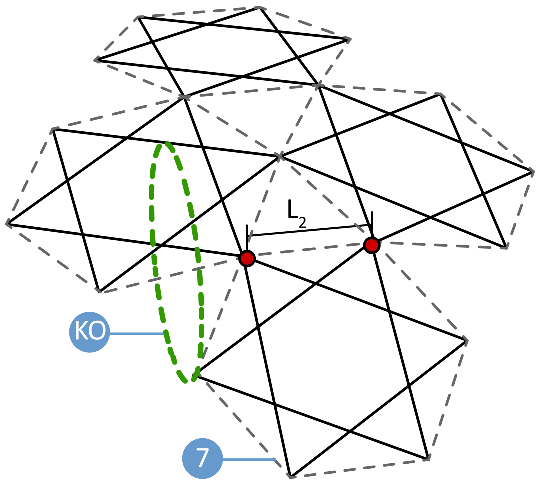
Από το νόμο των συνημιτόνων για τη σφαιρική τριγωνομετρία έχουμε:

$$\cos(\gamma)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\Gamma)\Leftrightarrow$$

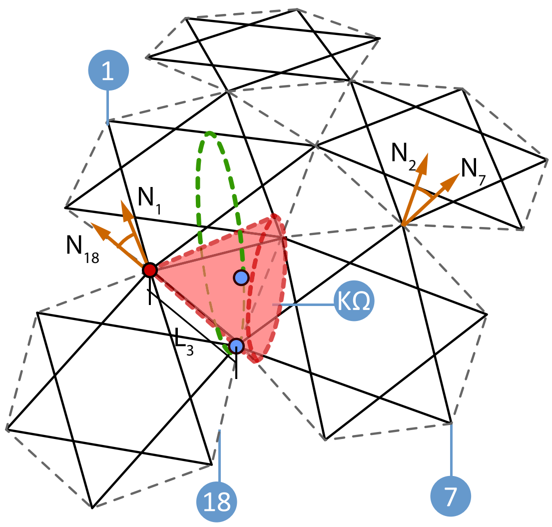
$$\cos(\Gamma)=\frac{\cos(\gamma)-\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

Οπότε βρίσκουμε τη γωνία Γ που είναι η γωνία περιστροφής του στοιχείου 7.

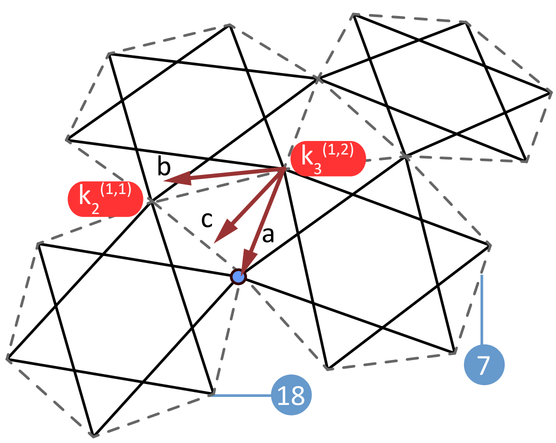
Με τη διαφορά των κάθετων διανυσμάτων N_1, N_2, N_7 βρίσκουμε τη διακριτή καμπυλότητα στους κοινούς κόμβους των στοιχείων 1, 2 και 7 αντίστοιχα.



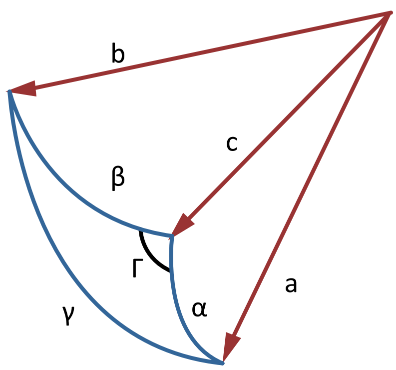
εικόνα 12.11 σύνδεση στοιχείου με L_2 μέγεθος και δημιουργία κύκλου ΚΟ



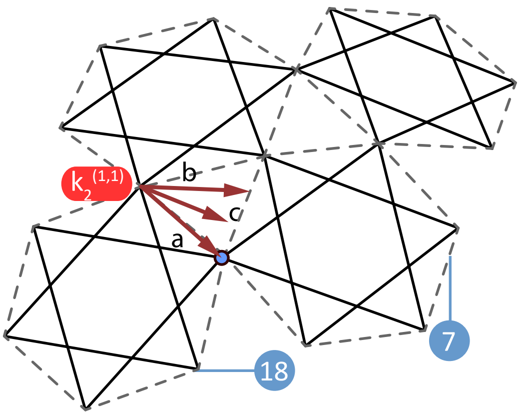
εικόνα 12.12 σύνδεση στοιχείου με L_3 μέγεθος και δημιουργία κύκλου κώνου ΚΩ και εύρεση σημείου τομής με κύκλο ΚΟ



εικόνα 12.13 χρήση σφαιρικής γεωμετρίας και σημείου τομής για εύρεση γωνιας περιστροφής για στοιχείο με μέγεθος L_2



εικόνα 12.14 διανύσματα για τη σφαιρική γεωμετρία του στοιχείου με μέγεθος L_2



εικόνα 12.15
χρήση σφαιρικής γεωμετρίας και σημείου τομής για εύρεση γωνίας περιστροφής για στοιχείο με μέγεθος L_3

Ομοίως κατασκευάζουμε τρία διανύσματα στο σημείο $k_2^{(1,1)}$:

a με αρχή τον κόμβο $k_2^{(1,1)}$ και πέρας το σημείο τομής

b με αρχή τον κόμβο $k_2^{(1,1)}$, φορά τον άξονα του κώνου ΚΩ και μέτρο ίσο με το μήκος L_3

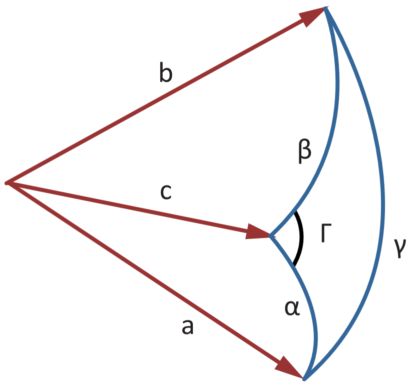
c με αρχή τον κόμβο $k_2^{(1,1)}$ και πέρας τον κόμβο $k_2^{(18,3)}$, όταν το κάθετο διάνυσμα N_{18} είναι παράλληλο στο N_0

Χρησιμοποιούμε ξανά τον νόμο των συνημίτονων για τη σφαιρική τριγωνομετρία :

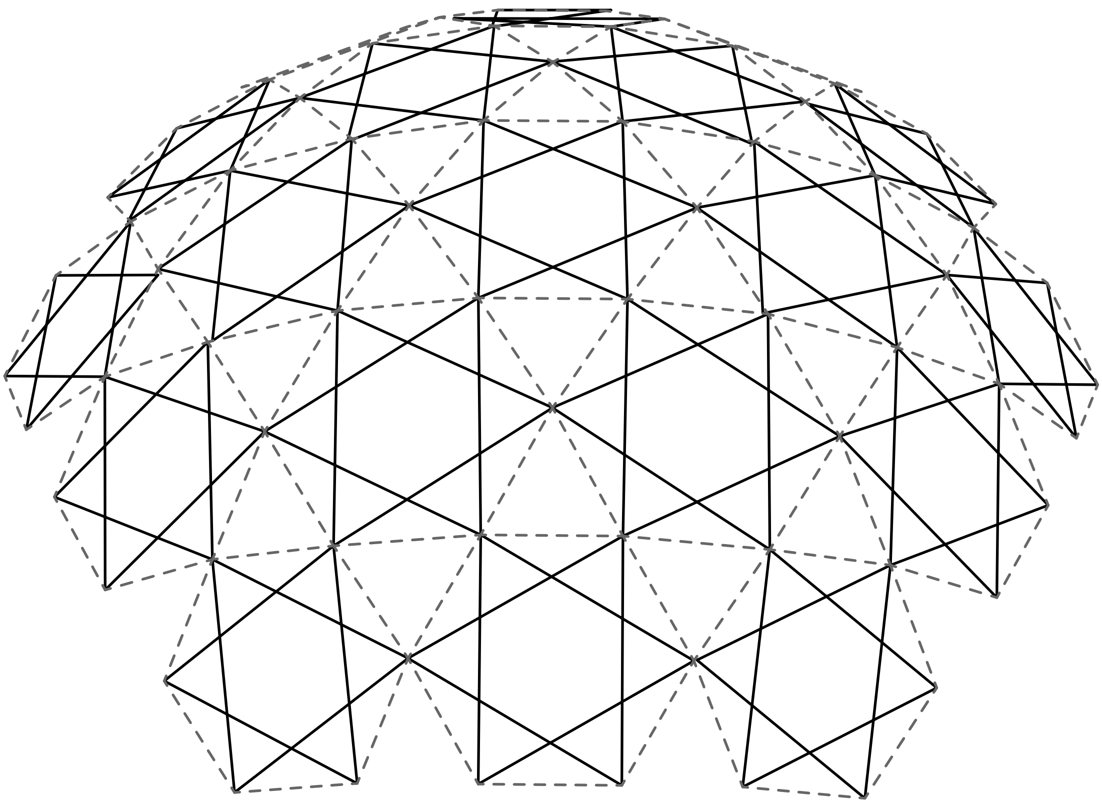
$$\cos(\gamma)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\Gamma)\Leftrightarrow$$
$$\cos(\Gamma)=\frac{\cos(\gamma)-\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

και βρίσκουμε τη γωνία περιστροφής Γ του στοιχείου 18.

Με όλα τα παραπάνω παίρνουμε τη γωνία περιστροφής για το στοιχείο 7, που εφαρμόζεται και στα στοιχεία 9, 11, 13, 15, 17, καθώς και τη γωνία περιστροφής και το μήκος L_3 για το στοιχείο 18, που εφαρμόζονται και στα στοιχεία 8, 10, 12, 14, 16, 18.



εικόνα 12.16
διανύσματα σφαιρικής γεωμετρίας για στοιχείο με μέγεθος L_3



εικόνα 12.17
κέλυφος με στοιχεία με μέγεθος L_0, L_1, L_2, L_3

Το μήκος L_4 του στοιχείου 19 προκύπτει από την απόσταση των κόμβων $k_3^{(18,2)} - k_2^{(7,1)}$.

Σύμφωνα με τον άξονα περιστροφής, για το στοιχείο 19 δημιουργείται ο κύκλος Κ1 που αντιστοιχεί στην κίνηση του κόμβου $k_2^{(19,3)}$.

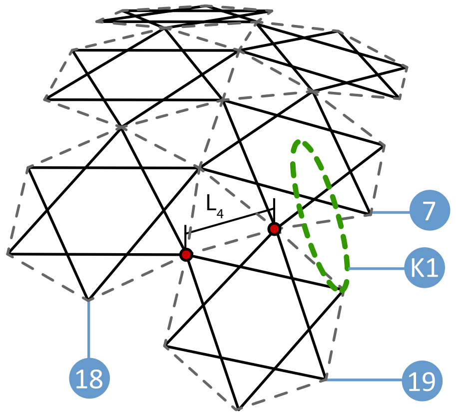
Με μήκος L_4 για το στοιχείο 20 και βάσει του άξονα περιστροφής δημιουργείται ο κύκλος Κ2 που αντιστοιχεί στις δυνατές θέσεις για τον κόμβο $k_3^{(20,6)}$.

Οι κύκλοι Κ1 και Κ2 έχουν δύο σημεία τομής. Το πρώτο σημείο που προκύπτει με θετική διαφορά στα κάθετα διανύσματα $N_{19} - N_7$ και $N_{20} - N_8$ είναι η επιθυμητή θέση.

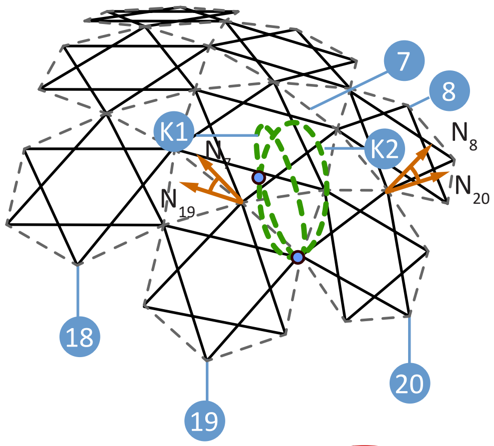
Έτσι παίρνουμε το μήκος N_4 και ξανά με τη χρήση του νόμου των συνημίτονων για τη σφαιρική τριγωνομετρία βρίσκουμε τη γωνία περιστροφής για τα στοιχεία 19, 20, ...,30.

Με τη διαφορά από τα κάθετα διανύσματα βρίσκουμε τη διακριτή καμπυλότητα στους κόμβους.

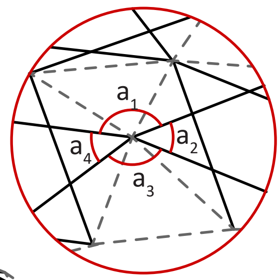
Βάσει τριγωνομετρίας βρίσκουμε τη γωνιακή διαφορά σε κάθε κόμβο που ισούται με τη διακριτή καμπυλότητα Gauss, $K_G = 2\pi - \sum \alpha_i$. Επειδή $K_G > 0$ σε κάθε κόμβο, γνωρίζουμε ότι η επιφάνεια είναι κυρτή.



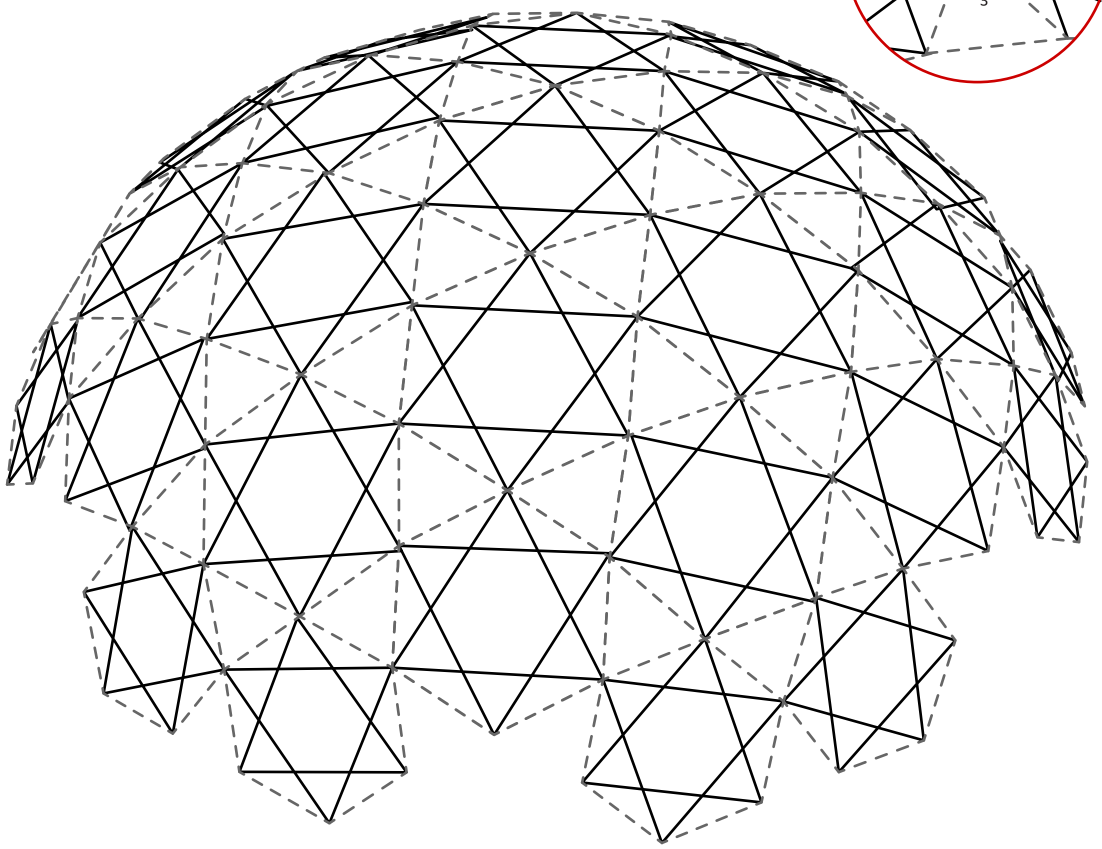
εικόνα 12.18
σύνδεση στοιχείου με μέγεθος L_4 και δημιουργία κύκλου Κ1



εικόνα 12.19
ευρεση σημείου τομής των κύκλων Κ1 και Κ2



εικόνα 12.20
λεπτομέρεια σημείου σύνδεσης στοιχείων μεγέθους L_4



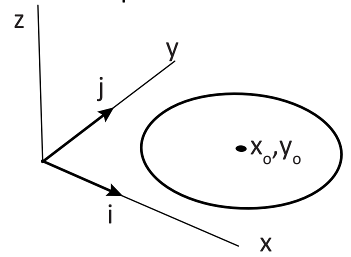
εικόνα 12.21
κέλυφος με στοιχεία με μέγεθος L_0, L_1, L_2, L_3, L_4

12.2 Συναρτήσεις

12.2.1 Εξίσωση κύκλου στον R^3 χώρο

Για να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω προσέγγιση υπολογιστικά είναι απαραίτητη η συνάρτηση του κύκλου και του κώνου που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των κοινών σημείων και κατ' επέκταση των διαστάσεων και της γωνίας περιστροφής κάθε στοιχείου.

εικόνα 12.22 κύκλος στο επίπεδο x,y



Όπως γνωρίζουμε, οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου στο (x, y) επίπεδο είναι :

$$x = x_o + \rho\cos(\vartheta)\boldsymbol{i} \quad , \quad y = y_o + \rho\sin(\vartheta)\boldsymbol{j}$$
$$\vartheta \in [0,2\pi)$$

όπου ρ η ακτίνα του κύκλου, (x_o, y_o) το κέντρο του και (i, j) τα μοναδιαία διανύσματα των x, y αξόνων.

Για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο στον R^3 χώρο αντικαθιστούμε τα (i, j) μοναδιαία διανύσματα με δύο καινούργια (i', j') διανύσματα της επιλογής μας που πληρούν τους παρακάτω κανόνες:

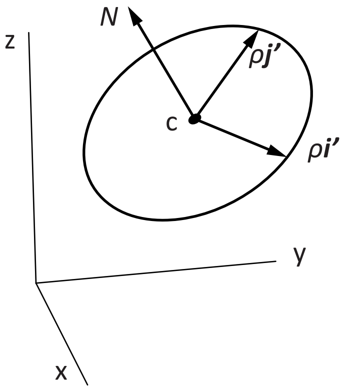
(I) είναι μοναδιαία, δηλαδή το μέτρο τους ισούται με τη μονάδα: $|i'| = |j'| = 1$

(ii) είναι κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο τους ισούται με το μηδέν: $\vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0$

(iii) είναι παράλληλα με το επίπεδο που θέλουμε να βρίσκεται ο κύκλος

Για να εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο στη γεωμετρική προσέγγιση που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος, έχουμε ως δεδομένα το κέντρο του κύκλου $c = x_o, y_o$ και ένα τυχαίο σημείο $r = x_r, y_r$. Έτσι μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα $\vec{i}'$ στο επίπεδο που θέλουμε να κατασκευάσουμε τον κύκλο $i' = \dfrac{\vec{r} - \vec{c}}{|\vec{r} - \vec{c}|}$. Επίσης, γνωρίζουμε τον άξονα περιστροφής του

εικόνα 12.23 κύκλος στον R^3 χώρο



στοιχείου και άρα γνωρίζουμε το κάθετο διάνυσμα N' στο επίπεδο του κύκλου που είναι παράλληλο στον άξονα περιστροφής. Οπότε με τη χρήση του εξωτερικού γινομένου εύκολα βρίσκουμε το δεύτερο διάνυσμα που είναι παράλληλο στο επίπεδο $j' = N' \times i'$. Έτσι έχουμε όλα τα απαραίτητα δεδομένα και κατασκευάζουμε τον κύκλο με εξίσωση

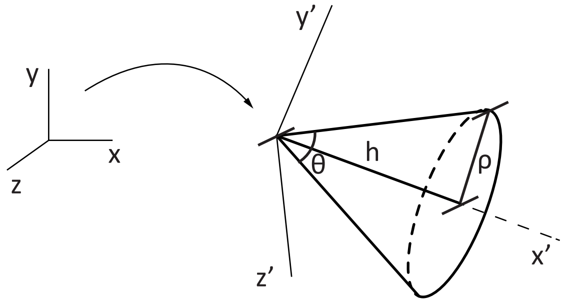
$$x = x_o + \rho\cos(\vartheta)\boldsymbol{i}' \qquad x = x_o + \rho\cos(\vartheta)\boldsymbol{j}'$$
$$\vartheta \in [0,2\pi)$$

12.2.1 Εξίσωση κυκλικού κώνου

Ο κώνος με κυκλική βάση και άξονα κάθετο σε αυτήν ονομάζεται ορθός κυκλικός κώνος και έχει παραμετρικές εξισώσεις :

$$x = \frac{h-t}{h}\rho\cos(\vartheta) \quad , \quad y = \frac{h-t}{h}\rho\sin(\vartheta) \quad , \quad z = t$$

εικόνα 12.24 μεταφορά συστήματος συντεταγμένων και δημιουργία κώνου

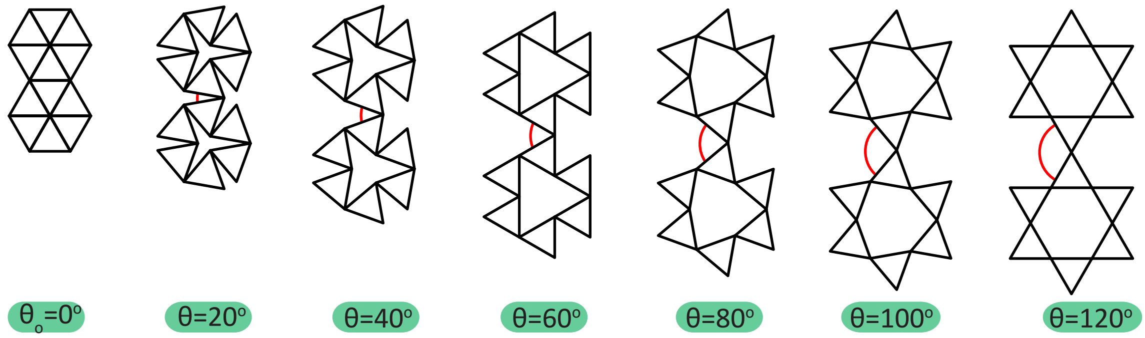


με $t \in [0, h]$ και $\vartheta \in [0,2\pi)$

Με τη χρήση ενός μητρώου μετασχηματισμού μπορούμε να μεταφέρουμε το σύστημα συντεταγμένων στο σημείο σύνδεσης των στοιχείων και να του δώσουμε την επιθυμητή κλίση.

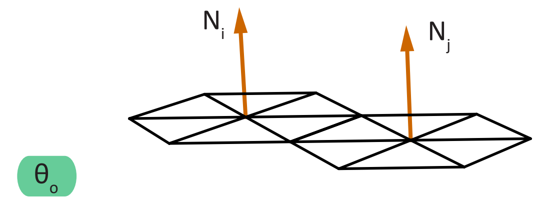
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

12.3 Κίνηση και διακριτή καμπυλότητα



εικόνα 12.25 μεταβολή γωνίας στην παραμόρφωση αυξητικής δομής

Επειδή ο επιθυμητός στόχος είναι η κατασκευή μιας επιφάνειας που καθώς εφελκύεται αποκτάει θετική διακριτή καμπυλότητα Gauss, πρέπει η διαφορά των κάθετων διανυσμάτων των στοιχείων να αυξάνεται καθώς αυξάνεται η γωνία ϑ μεταξύ των στοιχείων.



εικόνα 12.26 παράλληλα κάθετα διανύσματα

Όσο αυξάνεται βέβαια η τελική διακριτή καμπυλότητα σε κάθε κόμβο τόσο μειώνεται η τελική γωνία ϑ_τ .

Επειδή τα τρίγωνα που αποτελούν τα στοιχεία είναι ισόπλευρα, οι γωνίες τους είναι ίσες με $\frac{\pi}{3}$. Η γωνιακή διαφορά σε κάθε κόμβο που συνδέει δύο στοιχεία ισούται με:

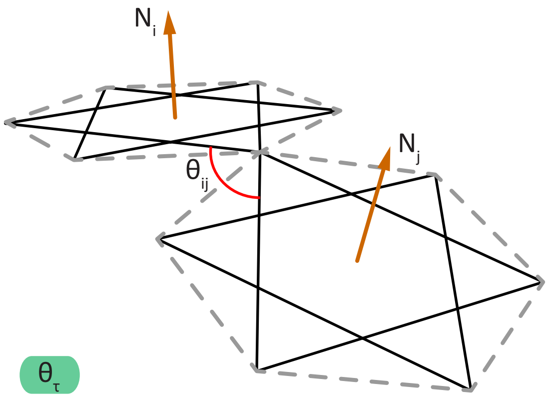
$$2\pi-\sum\alpha_i=2\pi-\left(2\vartheta+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-2\vartheta$$

και επειδή $\vartheta\leqslant\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{4\pi}{3}-2\vartheta=0 \quad \text{: επίπεδη επιφάνεια}$$

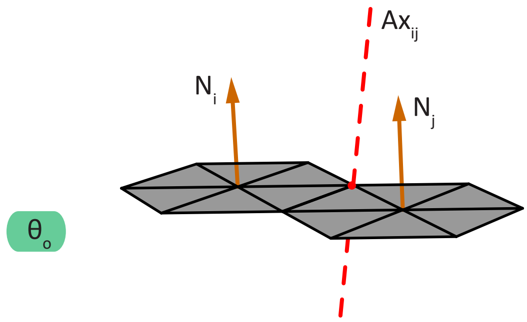
ή

$$\frac{4\pi}{3}-2\vartheta>0 \quad \text{: κυρτή επιφάνεια}$$



εικόνα 12.27 μεταβολή γωνίας στην παραμόρφωση αυξητικής δομής και στην πρόσθεση διακριτής καμπυλότητας στα στοιχεία

Όσο εφελκύεται η κατασκευή τα στοιχεία περιστρέφονται γύρω από άξονα $\boldsymbol{Ax_{ij}}$ που διέρχεται από τον κόμβο σύνδεσής τους.



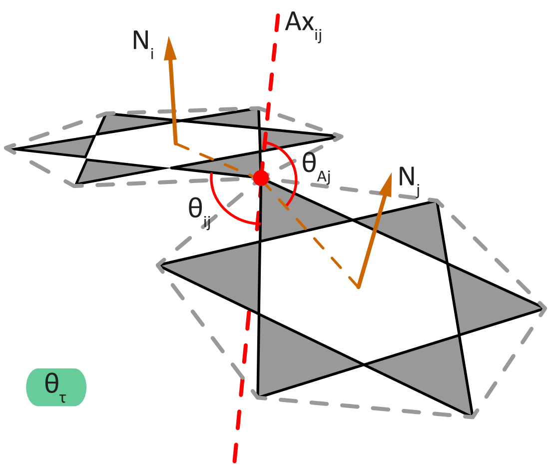
εικόνα 12.28 επίπεδη επιφάνεια στοιχείων και άξονας περιστροφής

Για να αυξάνεται αντίστοιχα η διακριτή καμπυλότητα όσο αυξάνεται η γωνία ϑ , ο άξονας δεν είναι παράλληλος στο κάθετο διάνυσμα N_i .

Για να είναι παράλληλα τα κάθετα διανύσματα N_i, N_j των στοιχείων για $\vartheta_{ij}=0$ και να αποκλίνουν όταν τα στοιχεία εφελκύονται $(\vartheta\leq120)$, τα στοιχεία δεν είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής

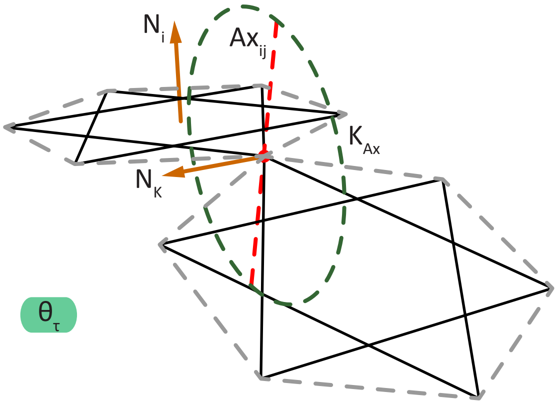
$$N_i\times N_j=0\Rightarrow K_G=0\Rightarrow\vartheta_{Aj}=\frac{\pi}{2}$$

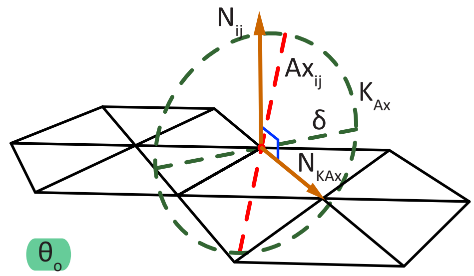
$$N_i\times N_j\neq0\Rightarrow K_G>0\Rightarrow\vartheta_{Aj}\neq\frac{\pi}{2}$$



εικόνα 12.29 γωνίες περιστροφής στοιχείων και γωνία άξονα περιστροφής σε διακριτή καμπυλότητα και παραμόρφωση αυξητικής δομής.

εικόνα 12.30 κύκλος με διάμετρο τον άξονα περιστροφής των στοιχείων και το κάθετο διάνυσμα του κύκλου





Η κλίση του άξονα περιστροφής Ax_{ij}, όσο μεταβάλλεται η διακριτή καμπυλότητα Gauss, ακολουθεί τόξο κύκλου K_{Ax} με κέντρο τον κόμβο $k_v^{(i,j)}$ σύνδεσης των στοιχείων, διάμετρο δ που διχοτομεί το τριγωνικό κομμάτι του στοιχείου και επίπεδο κάθετο στο κάθετο διάνυσμα N_i. Έχουμε για :

$$K_G=0 \;\Rightarrow\; Ax_{ij}\times N_i \;=\; 0$$
$$K_G>0 \;\Rightarrow\; Ax_{ij}\times N_i \;\neq\; 0$$

Για να βρούμε τον άξονα περιστροφής ανάλογα με την επιθυμητή διακριτή καμπυλότητα δημιουργούμε κύκλο K_{abc} που διέρχεται:

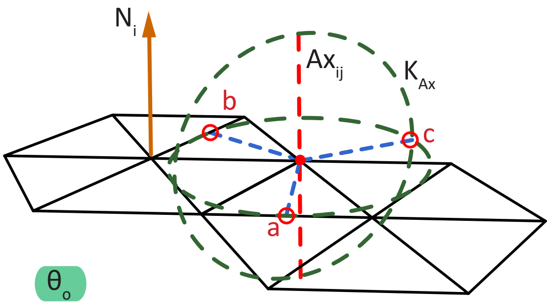
(i) από το σημείο a, που τέμνει η διχοτόμος της γωνίας την απέναντι πλευρά του τριγωνικού στοιχείου, όπου ανήκει ο κόμβος σύνδεσης στην αρχική θέση ϑ_0

(ii) από το σημείο b, που τέμνει η διχοτόμος της γωνίας την απέναντι πλευρά του τριγωνικού στοιχείου, όπου βρίσκεται δίπλα στον κόμβο σύνδεσης στην αρχική θέση ϑ_0

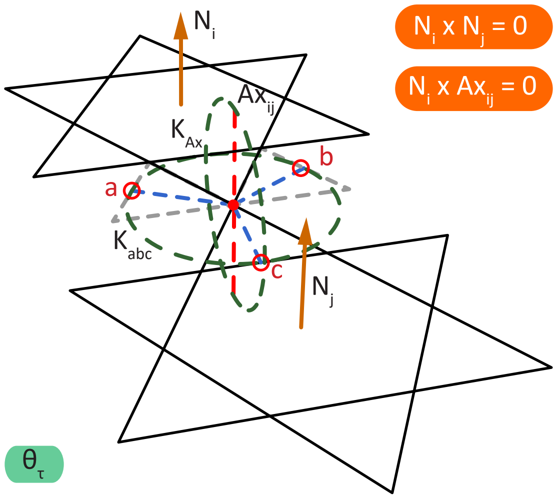
(iii)και από το σημείο c, όπου βρίσκεται πάνω στον αρχικό κύκλο K_{Ax} και δημιουργώντας ευθύγραμμο τμήμα με τον κόμβο σύνδεσης, έχει την τελική επιθυμητή διακριτή καμπυλότητα.

Όταν $N_i \times N_j \;=\; 0$, δηλαδή όταν ανάμεσα στα δύο στοιχεία η διακριτή καμπυλότητα στην τελική θέση ϑ_τ είναι μηδέν, τότε ο κύκλος που δημιουργούν τα τρία σημεία abc αποτελεί μια γεωδαισιακή, είναι δηλαδή ένας μέγιστος κύκλος σφαίρας. Όταν η διακριτή καμπυλότητα είναι διάφορη του μηδενός, τότε ο κύκλος που περιγράφεται από τα τρία σημεία abc' εφάπτεται στην ίδια σφαίρα αλλά το κέντρο του δεν ταυτίζεται με αυτό της σφαίρας.

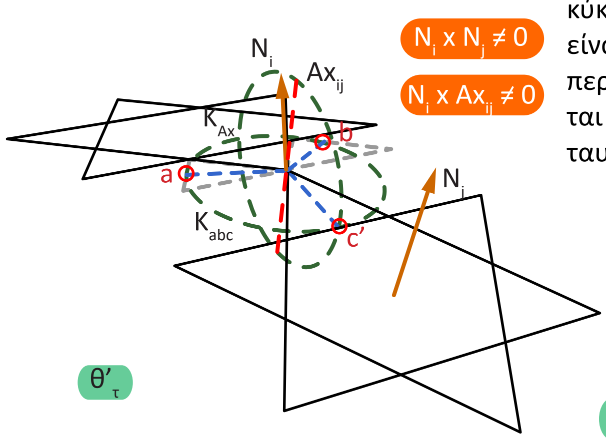
εικόνα 12.31 σημεία αναφοράς συστήματος περιστροφής

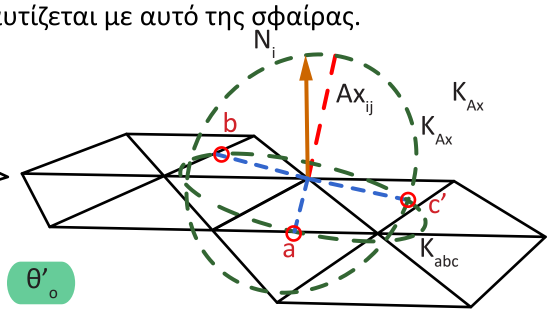


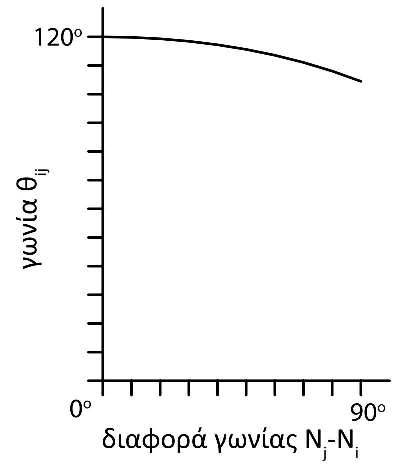
εικόνα 12.32 σύστημα αναφοράς μετά από περιστροφή της αυξητικής δομής άλλα με μηδενική διακριτή καμπυλότητα

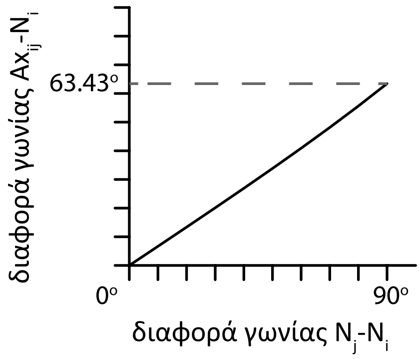


εικόνα 12.33 σύστημα αναφοράς μετά από περιστροφή της αυξητικής δομής και με διακριτή καμπυλότητα

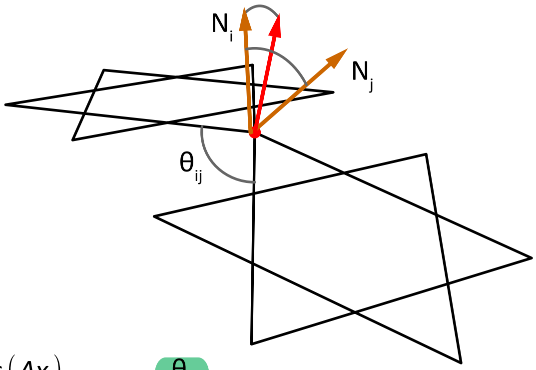








εικόνα 12.34 διαγράμματα γωνίας συστήματος με διακριτή καμπυλότητα



εικόνα 12.35 δημιουργία διανυσμάτων για χρήση νόμου συνημιτόνων της σφαιρικής γεωμετρίας

Ο άξονας περιστροφής Ax_{ij} δημιουργείται από το κάθετο διάνυσμα του κύκλου K_{abc} και διέρχεται από τον κόμβο σύνδεσης.

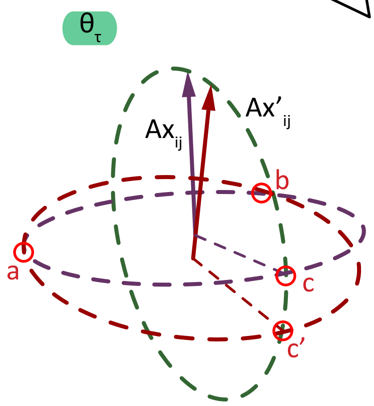
Έπειτα χρησιμοποιούμε το νόμο των συνημίτονων για τη σφαιρική τριγωνομετρία :

$$\cos(ac)=\cos(aAc)\cos(cAx)+\sin(aAx)\sin(cAx)\cos(Ax)$$

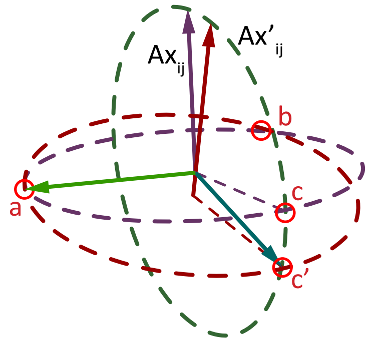
$$\Leftrightarrow \cos(Ax)=\frac{\cos(ac)-\cos(aAx)\cdot\cos(cAx)}{\sin(aAx)\cdot\sin(cAx)}$$

Βρίσκουμε έτσι τη γωνία περιστροφής των στοιχείων για να έρθουν στο ίδιο επίπεδο.

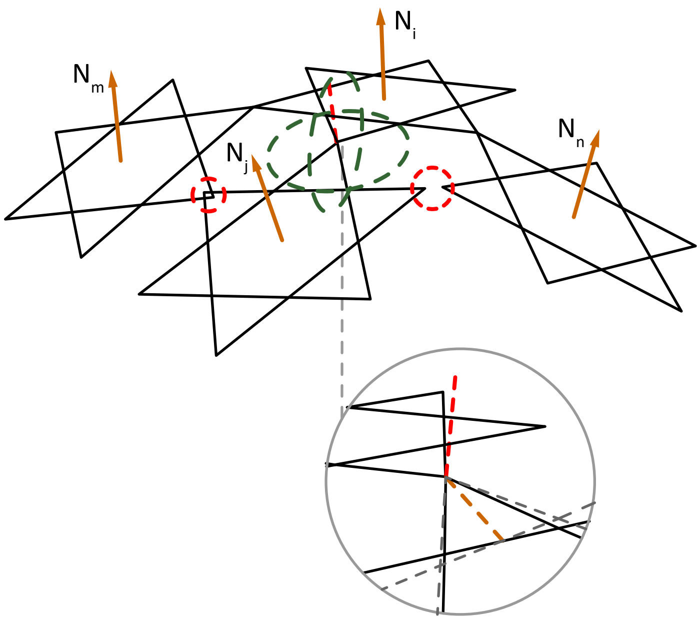
Μετά τον εφελκυσμό και την περιστροφή των στοιχείων, όταν δηλαδή από την αρχική θέση ϑ_0 όπου $N_i \times N_j = 0$ μεταβαίνουμε στην τελική θέση ϑ_τ όπου $N_i \times N_j \neq 0$, τα κάθετα διανύσματα έχουν μετακινηθεί και δεν είναι πλέον συνεπίπεδα. Έτσι εμποδίζεται η σύνδεση των κόμβων των περιμετρικών στοιχείων.



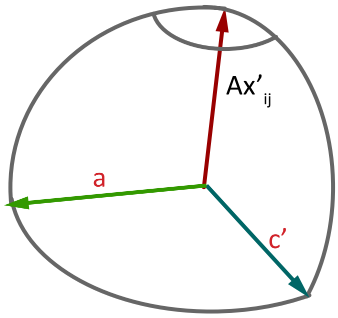
εικόνα 12.36 μεταβολή συστήματος αναφοράς περιστροφής με διακριτή κμπυλότητα



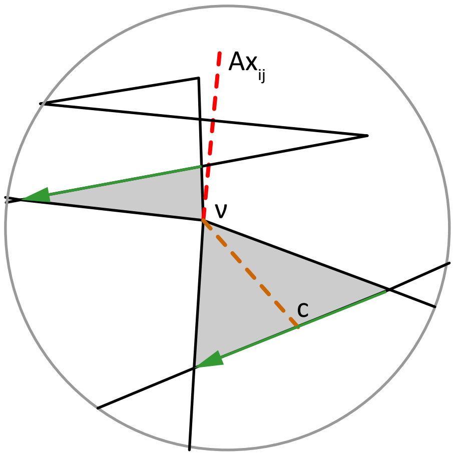
εικόνα 12.37 δημιουργία διανυσμάτων για τη σφαιρική γεωμετρία



εικόνα 12.38 σύστημα στοιχείων



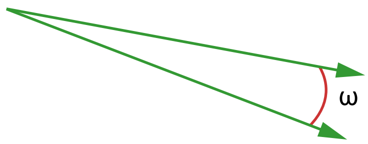
εικόνα 12.39 διανύσματα σφαιρικής γεωμετρίας



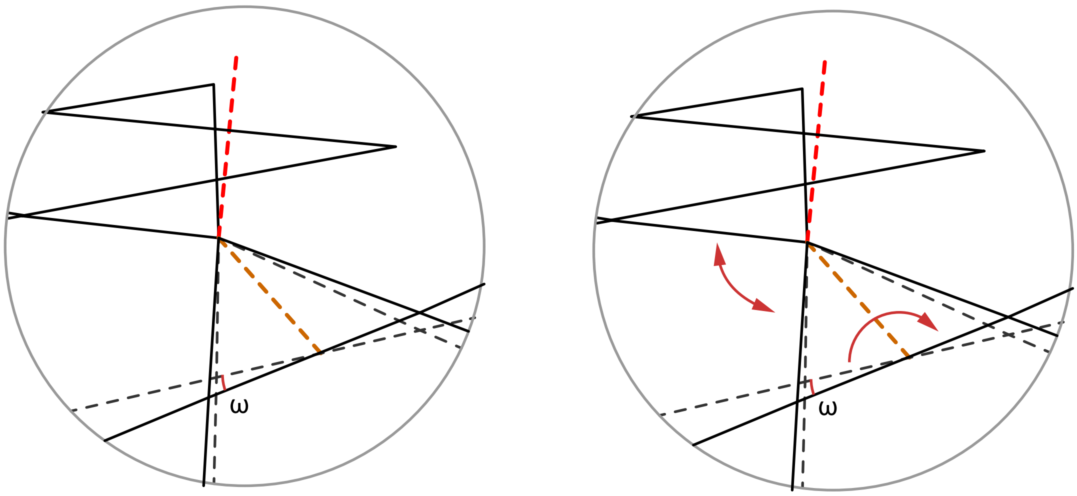
εικόνα 12.40
διανύσματα ευθυγράμμισης στοιχείων

Στα τριγωνικά τμήματα του στοιχείου που ανήκει ο κόμβος σύνδεσης δημιουργούνται διανύσματα με αρχή και πέρας τους άλλους δύο κόμβους. Στόχος είναι η παραλληλία των διανυσμάτων, οπότε βρίσκεται η διαφορά της γωνίας **ω** που έχουν τα διανύσματα από την παράλληλο και το στοιχείο j (όπου j>1) περιστρέφεται σύμφωνα με τον άξονα περιστροφής cv.

Για αυτήν την περιστροφή απαιτείται κατασκευή άρθρωσης στον κόμβο, ώστε να μπορέσει να επέλθει η παραλληλία.



εικόνα 12.41
διαφορά ευθυγράμμισης

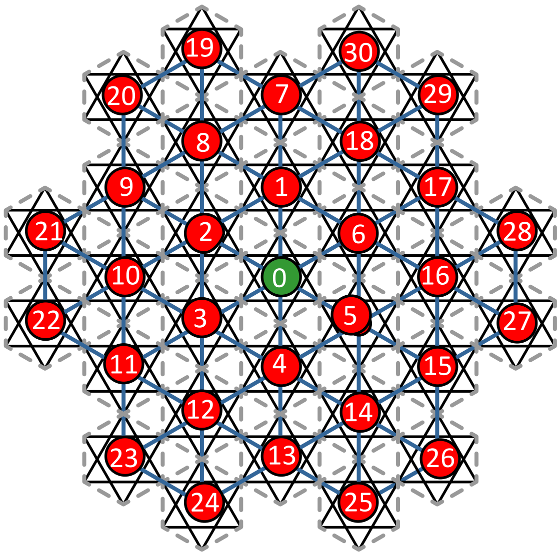


εικόνα 12.42
τελική στρέψη στοιχείου

13 ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ

13.1 Γενικό γράφημα συνδεσμολογίας

Στο γράφημα G η μπλε γραμμή αναπαριστά τη σύνδεση κάθε στοιχείου με τα διπλανά του. Οι κόμβοι V είναι το κέντρο βάρους κάθε στοιχείου. Στο διάγραμμα φαίνεται η ϑ_τ κατάσταση για μηδενική διακριτή καμπυλότητα Gauss. Ο πίνακας αναπαράστασης έχει την τιμή 1 όταν υπάρχει ακμή που συνδέει τους δύο κόμβους και 0 όταν δεν υπάρχει σύνδεση.

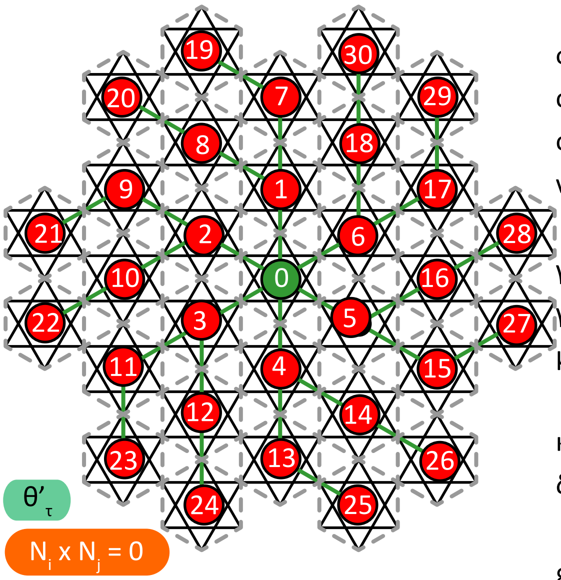


εικόνα 13.1
γράφημα συνδεσμολογίας

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0		1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1		1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1		1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1		1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	1	1	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
18	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
19	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1
30	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

εικόνα 13.2
πίνακας αναπαράστασης γραφήματος G

13.2 Γενετικό δέντρο αναπτύγματος



εικόνα 13.3
γενετικό δέντρο αναπτύγματος ισομεγέθων στοιχείων

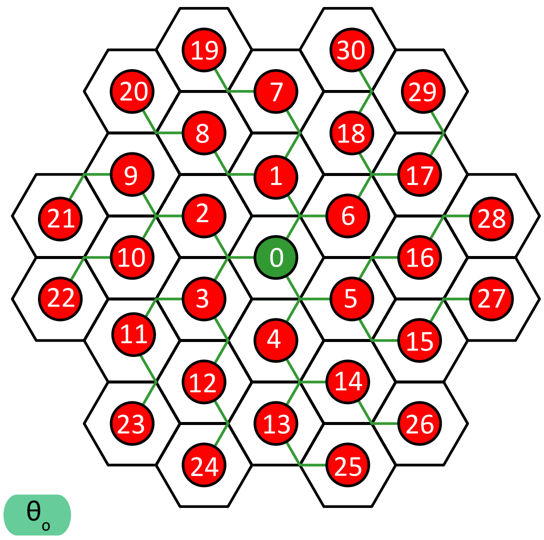
Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε μια επιφάνεια με διπλή καμπυλότητα, τα στοιχεία, όπως είδαμε, δεν έχουν το ίδιο μέγεθος. Έτσι όταν η επιφάνεια είναι επίπεδη, δημιουργούνται ασυνέχειες λόγω των αναγκαίων τομών.

Το γενετικό δέντρο T (πράσινη γραμμή) του γραφήματος G είναι ένα άκυκλο και συνεκτικό γράφημα που περιέχει όλους τους κόμβους V(G) με τον ελάχιστο αριθμό ακμών.

Οι ακμές που έχουν επιλεχθεί αποτελούν την κοντινότερη διαδρομή που ενώνει έναν οποιοδήποτε κόμβο με τον κόμβο 0.

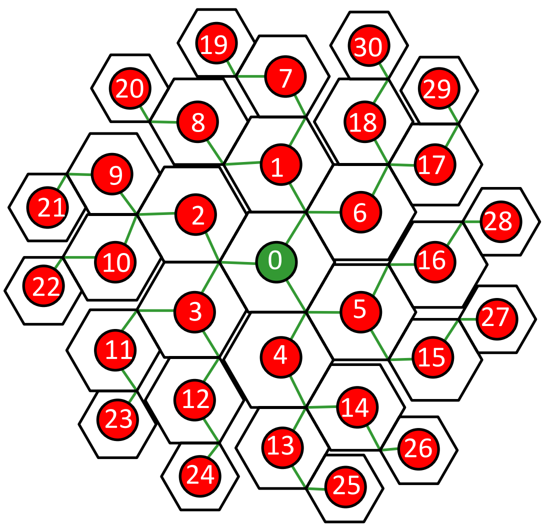
Βάσει της συνδεσμολογίας που αναλύθηκε ξέρουμε ότι υπάρχει μοναδικός κόμβος $k_v^{(i,j)}$ που συνδέει τα στοιχεία. Διατηρούμαι από τις συνδέσεις αυτήν, που πραγματοποιείται με το στοιχείο με την μικρότερη τιμή.

Οι κόμβοι σύνδεσης εσωτερικά σε κάθε εξαγωνικό στοιχείο δεν εμφανίζονται στο γράφημα G. Το σημαντικό είναι ότι με αυτό το γενετικό δέντρο, όταν βλέπουμε το διάγραμμα για ϑ_o και έχουμε διακριτή καμπυλότητα διάφορη του μηδενός, μπορούμε να προβλέψουμε σε ποια σημεία θα δημιουργηθούν “τομές” έτσι ώστε να μπορεί να δημιουργηθεί επίπεδη επιφάνεια για τη ϑ_o κατάσταση.



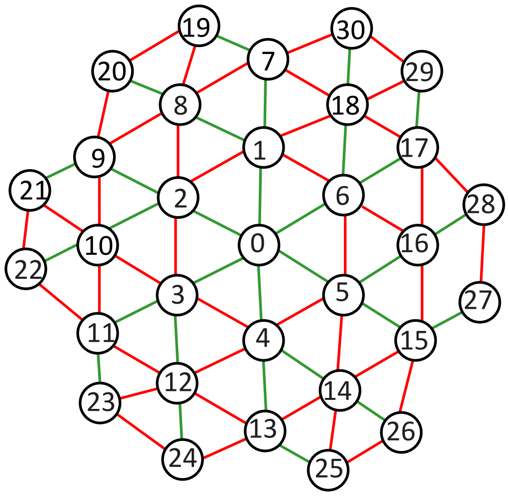
εικόνα 13.4
γενετικό δέντρο αναπτύγματος με εξαγωνικό περίγραμμα ισομεγέθων στοιχείων

13.3 Εξέλιξη συστήματος



εικόνα 13.5
γενετικό δέντρο T αναπτύγματος με εξαγωνικό περίγραμμα ανισομεγέθων στοιχείων που μπορούν να παραλάβουν διακριτή καμπυλότητα

Οι συνδέσεις που υπήρχαν στο γράφημα *G* και δεν διατηρήθηκαν στο γενετικό δέντρο T είναι οι θέσεις όπου θα προστεθεί στο σύστημα ένα επιπλέον στοιχείο. Αυτό το στοιχείο μπορεί να έχει τις ιδιότητες ενός ελατηρίου που συνδέει τους κόμβους $k_v^{(i,j)}$ που συνδέονταν στο *G* αλλά όχι στο T. Με το νέο στοιχείο πραγματοποιείται η ρύθμιση της γωνίας ω που αναλύεται στη σελίδα 64 και στις εικόνες 12.40, 12.41, 12.42. Επίσης, μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια του συστήματος, όπως αυτή αναλύεται στη σελίδα 54, και μετατρέπει το σημείο για $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ σε τοπικό ελάχιστο και για $\varphi = \frac{\pi}{3}$ σε ολικό ελάχιστο. Έτσι αν το σύστημα φθάσει στην απαραμόρφωτη κατάσταση για $\varphi_0 = 0$, η δυναμική ενέργεια το οδηγεί στην τελική μορφή, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.



εικόνα 13.6
γράφημα με το γενετικό δέντρο Τ (πράσινο) και συνδέσεις νέων στοιχείων (κόκκινο)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0		1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1		1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1		1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1		1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	1	1	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
18	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
19	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1
30	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

εικόνα 13.7
πίνακας αναπαράστασης γραφήματος G. γενετικό δέντρο Τ (πράσινο). γράφημα νέων στοιχείων (κόκκινο)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] O'Neil, B. (2010). *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[2] Βλάχος, Θ. (2017). *Διαφορική γεωμετρία καμπυλών και επιφανειών.* Ιωάννινα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

[3] Pressley, A. (2012). *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[4] Deserno, D. (2004). *Notes on differential geometry.* USA: Department of Chemistry and Biochemistry, UCLA, Los Ageles.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Metric_tensor. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[6] http://mathworld.wofram.com/MetricTensor.html. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[7] Αρβανιτογεώργος, Α. (2015) *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία.* Αθήνα: ΣΕΑΒ.

[8] Callens, S. Zadpoor, A. (2018) *From flat sheets to curved geometries: Origami and kirigami approaches.* Materials Today 21 (3) (241-264).

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Polygon Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Polytope. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Polyhedron. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[12] Bobenko, A. (2015). *Discrete Differential Geometry.* Germany: TU Berlin

[13] Crane, K. (2018). *Discrete differential geometry : an applied introduction.* USA: Caltech

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Topology. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[15] Νικολόπουλος, Σ. Γεωργιάδης, Λ. Παληός, Λ. (2015). *Αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων.* Αθήνα: ΣΕΑΒ

[16] Θηλυκός, Δ. (2017) Σημειώσεις στη θεωρία γραφημάτων. Αθήνα: Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

[17] Κολουντζάκης, Μ. Παπαχριστόδουλος, Χ. (2015). *Διακριτά Μαθηματικά.* Αθήνα: ΣΕΑΒ

[18] Grunbaum, B. (2007). *Graphs of polyhedra; polyhedra as graphs.* Journal of Discrete Mathematics, 307, (445-463)

[19] https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_graphics Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[20] https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_representation_of_surfaces. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[21] https://en.wikipedia.org/wiki/3D_modeling. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[22] https://en.wikipedia.org/wiki/Piecewise. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[23] Patrikalakis, N. Maekawa, T. (2002). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Germany: Springer

[24] https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics). Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[25] https://en.wikipedia.org/wiki/B-spline. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[26] https://en.wikipedia.org/wiki/Non-uniform_rational_B-spline. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[27] https://www.rhino3d.com/nurbs/. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[28] Gershenfeld, N. (1999). *The Nature of Mathematical Modeling.* UK: Cambridge University Press

[29] Les, P. Wayne, T. (1997). *The NURBS Book (2 ed.).* Germany: Springer

[30] https://pages.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/NURBS-knot-insert.html. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[31] Parawana, S. (2010). *Surface triangulation and the downstream effects on surface flattening* (Διδακτορική Διατριβή). University of Birmingham, UK

[32] https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_modeling. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[33] Schneider, P. Eberly, D. (2003). *Geometric tools for computer graphics.* USA: Morgan Kaufmann Publishers

[34] https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_modeling. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[35] Παληός, Λ. (2005). *Υπολογιστική γεωμετρία.* Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

[36] Bloomenthal, J (1988). *Polygonization of implicit surfaces*. Journal of Computer Aided Geometric Design, 5, (341–355)

[37] Hartmann, E. (2003). Geometry and algorithms for computer aided design, Germany: Department of Mathematics, Darmstadt University of Technology

[38] Demaine, E. O'Rourke, J. (2005). A survey of folding and unfolding in computational geometry. Στο J. Goodman, J. Pach and E. Welzl, (Επιμ.), *Combinatorial and Computational Geometry* (167-211), UK: Cambridge University Press

[39] Bern, M. Demaine, E. Eppstein, D. Kuo, E. Mantler, A. and Snoeyink, J. (2003) *Ununfoldable Polyhedra with Convex Faces.* Journal of Computational Geometry: Theory and Applications, volume 24, (2), (51–62)

[40] Χατζηγεωργίου, Ε.Π. (2015) *Μηχανική ανισότροπων και σύνθετων υλικών.* Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

[41] Prawoto, Y. (2012). *Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson's ratio*. Journal of Computational Materials Science, 58, (140 – 153)

[42] Carneiro, V. Meireles, J. Puga, H. (2013) *Auxetic Materials – A Review.* Journal of Materials Science, 31 (4), (561-571)

[43] Novak, N. Vesenjak, M. Zoran Ren, Z. (2016) *Auxetic Materials – A Review*. Journal of Mechanical Engineering, 62, (9), (485-493)

[44] https://en.wikipedia.org/wiki/Trihexagonal_tiling. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[45] Alderson, A. Alderson, K. L. Chirima, G. Ravirala, N. and Zied, K.M. (2010) *The in-plane linear elastic constants and out-of-plane bending of 3-coordinated ligament and cylinder-ligament honeycombs.* Journal of Composites Science and Technology. 70, (7), (1034-1041)

[46] Naboni, R. Mirante, L. (2016) *Computational design and simulation of bending – active auxetic structures,* Gestγo e Tecnologia de Projetos, Sγo Carlos, 11, (2), (59-71)

[47] La Magna, R. Knippers, J. (2018). Tailoring the bending behaviour of material patterns for the induction of double curvature. Στο de Rycke, K. Gengnagel, C. Baverel, O. Burry, J. Mueller, C. Man N. Rahm, P. & Thomsen, M. (Επιμ.), *Humanizing Digital Reality.* (441-452). Germany: Springer

[48] Kamila, S. (2013). *Introduction, classification and applications of smart materials: an overview.* American Journal of Applied Sciences. 10, (876)

[49] https://en.wikipedia.org/wiki/Smart_material. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[50] https://en.wikipedia.org/wiki/Phase_transition. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[51] https://www.iucr.org/news/newsletter/volume-7/number-2/martensitic-transformations. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[52] Cederström, J. Van Humbeeck, J. (1995) *Relationship Between Shape Memory Material Properties and Applications*. Journal de Physique IV Colloque, 05 (C2), (335-341).

[53] Zanaboni, E. (2008) *One Way and Two Way–ShapeMemory Effect: Thermo–Mechanical-Characterization of Ni–Ti wires ,* Italy: Universit`a degli Studi di Pavia

[54] Daly, S. Ravichandran, G. Bhattacharya, K. (2007) *Stress-induced martensitic phase transformation in thin sheets of Nitinol* , Acta Materialia 55 (3593–3600)

[55] https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudoelasticity. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[56] Nkomo, N. (2018). *A Review of 4D Printing Technology and Future Trends.* Στο Conference: Eleventh South African Conference on Computational and Applied Mechanics, 17-19 Σεπτεμβρίου 2018

[57] https://en.wikipedia.org/wiki/Laman_graph. Ανακτήθηκε Μάρτιο 6, 2019

[58] Κουμούσης, Β. (2008) *Σχηνοειδής φορέας, στοιχεία γραφοστατικής,* Αθήνα: ΕΜΠ

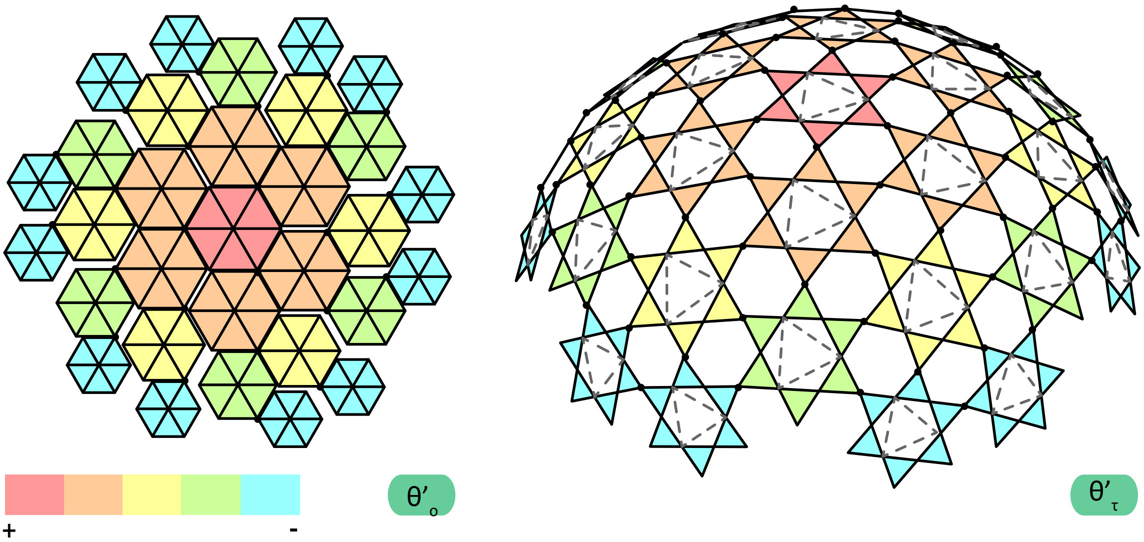
[59] Αλεξάκη, Χ. (2013) *Ανάλυση οριακής κατάστασης και σεισμικής επάρκειας λίθινων αψιδών.* (Διδακτορική Διατριβή) Τμήμα Πολιτικων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

[60] Rippman, M. (2016) Furnicular shell Design. (Διδακτορική Διατριβή), ETH Zurich, Switzerland

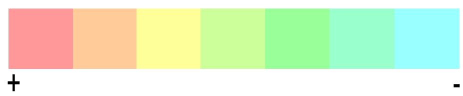
Π1 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Π1.1 Μεγέθη - αντιστοιχία στοιχείων

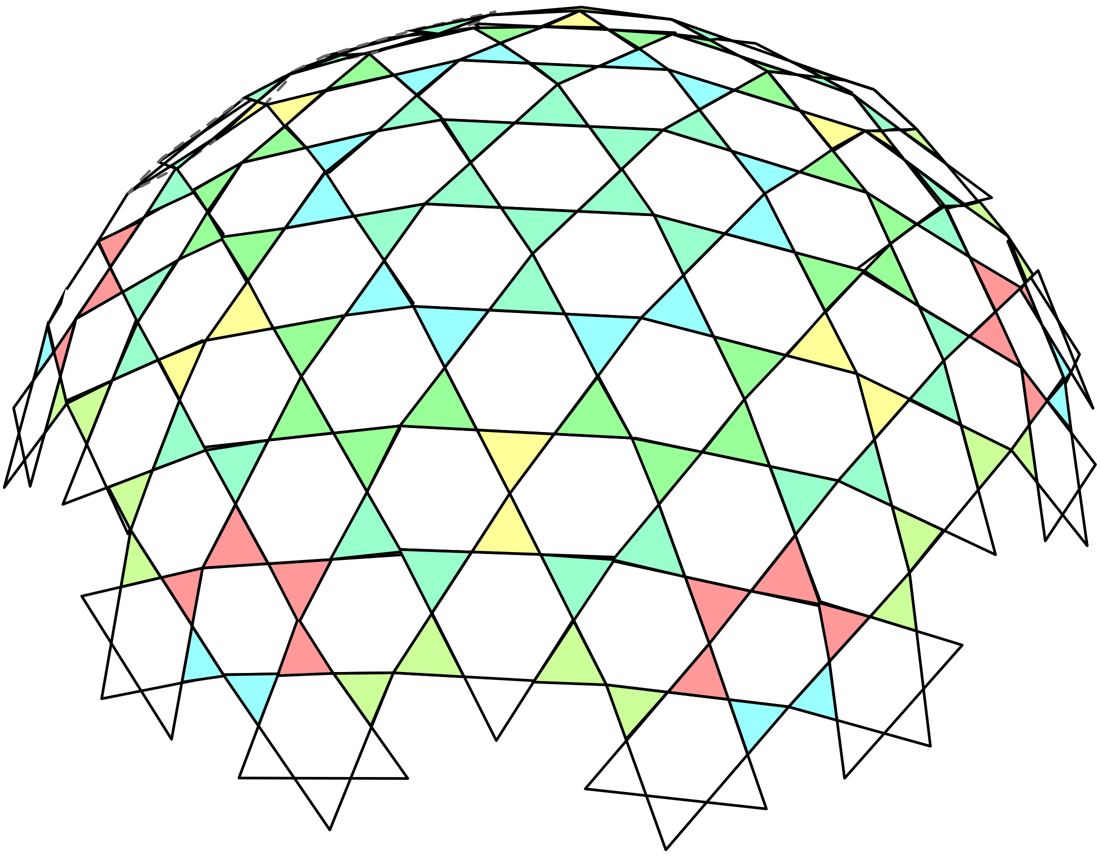
εικόνα Π1.1
διάγραμμα μεταβολής μεγέθους στοιχείων



Π1.2 Διακριτή καμπυλότητα

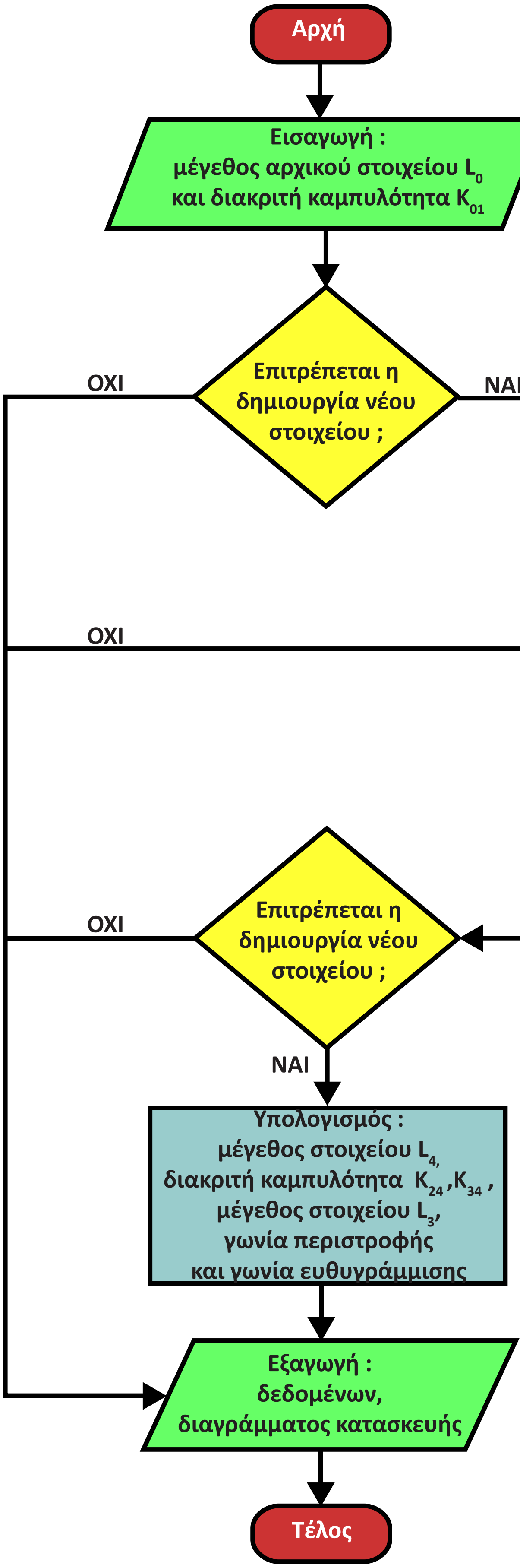


εικόνα Π1.2
διάγραμμα διακριτής καμπυλότητας στοιχείων

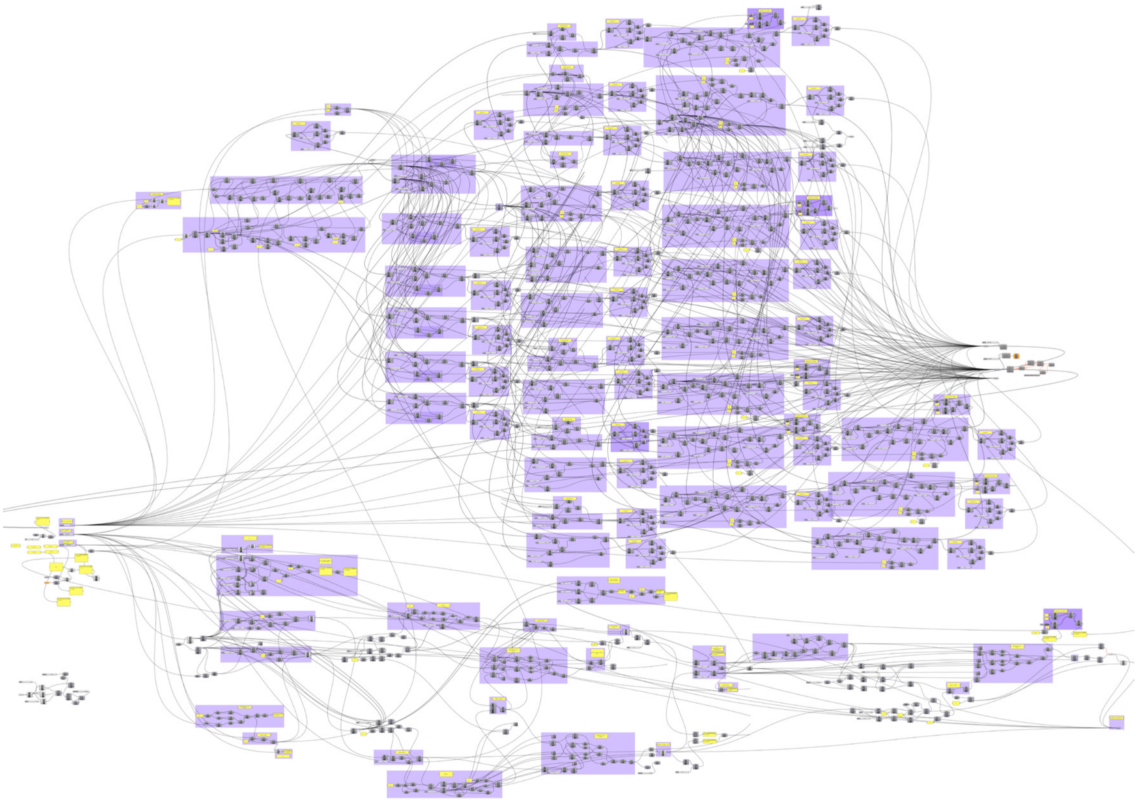


Π1.3 Αλγόριθμος

εικόνα Π1.3
διάγραμμα
αλγορίθμου

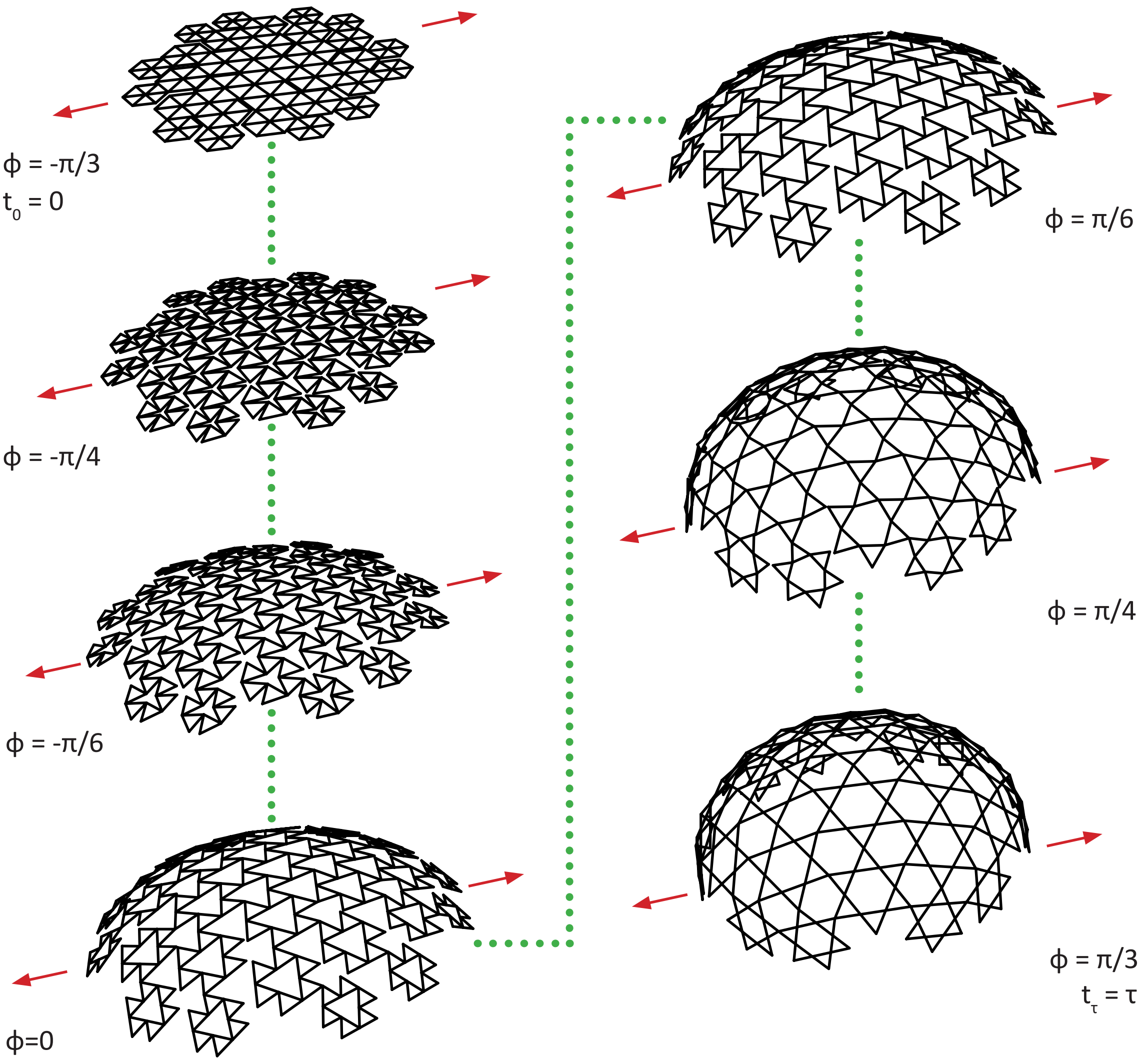


εικόνα Π1.4
grasshopper
definition



Π1.4 Ισομετρία

εικόνα Π1.5
διαδικασία
εφελκυσμού



Π1.5 Εφαρμογή αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος δέχεται ως δεδομένα εισαγωγής το μήκος της πλευράς του κεντρικού (0) εξαγωνικού περιγράμματος του αυξητικού στοιχείου και την κύρια διακριτή καμπυλότητα μεταξύ του κεντρικού στοιχείου και των περιμετρικών (1,2,...,6).

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή το μήκος L_0 τέθηκε ίσο με 2 m και η κύρια διακριτή καμπυλότητα ίση με $\kappa_{01} = \pi/8 = 22.5^o$.

Οπότε έχουμε ως έξοδο:

Αi) Τη γωνιακή διαφορά στους κόμβους σύνδεσης του κεντρικού στοιχείου με τα περιμετρικά, η οποία ταυτίζεται με την διακριτή καμπυλότητα Gauss και στη συγκεκριμένη εφαρμογή έχει τιμή $K_{01} = 7.42^o$.
Αii) Το μήκος του εξαγωνικού περιγράμματος των στοιχείων 1 έως 6 που έχει τιμή $L_1 = 1.927$m
Αiii) Τη γωνία περιστροφής της αυξητικής δομής των στοιχείων 1 έως 6, με τιμή 116.29^o.
Αiv) Την απόκλιση του άξονα περιστροφής από την κάθετο, 15.04^o.

Βi) Το μήκος του εξαγωνικού περιγράμματος των στοιχείων 8, 10, 12, 14, 16, 18, με τιμή $L_2 =$ 1.780 m.
Βii) Τη γωνιακή διαφορά στους κόμβους σύνδεσης των L_1 στοιχείων με τα L_2 στοιχεία, η οποία ταυτίζεται με τη διακριτή καμπυλότητα Gauss και στη συγκεκριμένη εφαρμογή έχει τιμή $K_{12} = 8.29^o$.
Βiii) Τη γωνία περιστροφής της αυξητικής δομής, με τιμή 119.54^o για τα στοιχεία που ταυτίζεται ο κόμβος K_3 του L_2 στοιχείου με τον K_2 κόμβο του L_1 στοιχείου και 112.17^o για τα στοιχεία που ταυτίζεται ο κόμβος K_2 του L_2 στοιχείου με τον K_3 κόμβο του L_1.
Βiv) Την απόκλιση του άξονα περιστροφής από την κάθετο, 16.06^o.

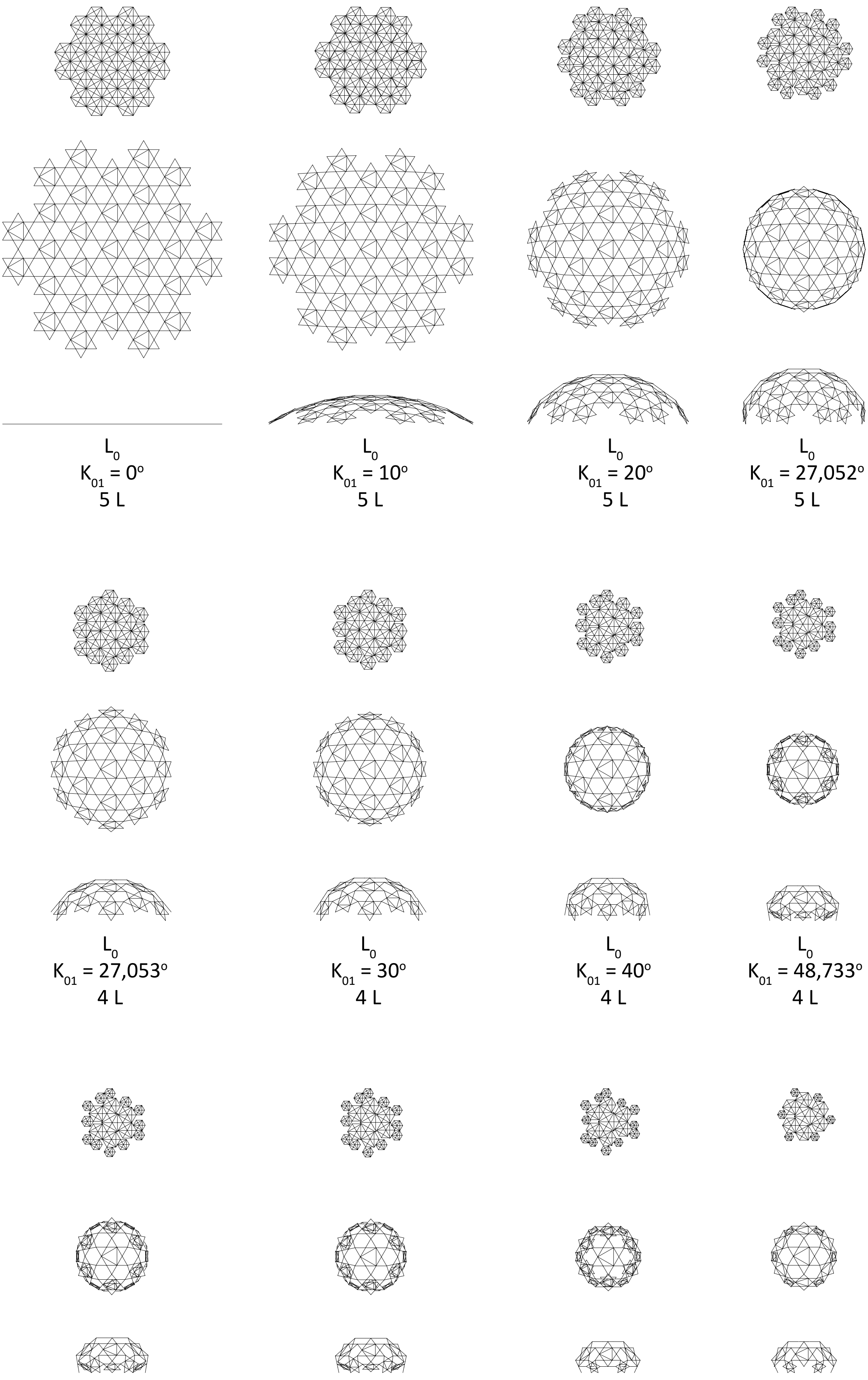
Γi) Το μήκος του εξαγωνικού περιγράμματος των στοιχείων 7, 9, 11, 13, 15, 17, με τιμή $L_3 =$ 1.708 m.
Γii) Τη γωνιακή διαφορά στους κόμβους σύνδεσης των L_1 στοιχείων με τα L_3 στοιχεία, η οποία ταυτίζεται με τη διακριτή καμπυλότητα Gauss και στη συγκεκριμένη εφαρμογή έχει τιμή $K_{13} = 10.04^o$.
Γiii) Τη γωνιακή διαφορά στους κόμβους σύνδεσης των L_3 στοιχείων με τα L_2 στοιχεία, η οποία ταυτίζεται με τη διακριτή καμπυλότητα Gauss και στη συγκεκριμένη εφαρμογή έχει τιμή $K_{23} = 7.42^o$.
Γiv) Τη γωνία περιστροφής της αυξητικής δομής των στοιχείων L_3, με τιμή 114.98^o.
Γv) Την απόκλιση του άξονα περιστροφής από την κάθετο, 17.58^o.

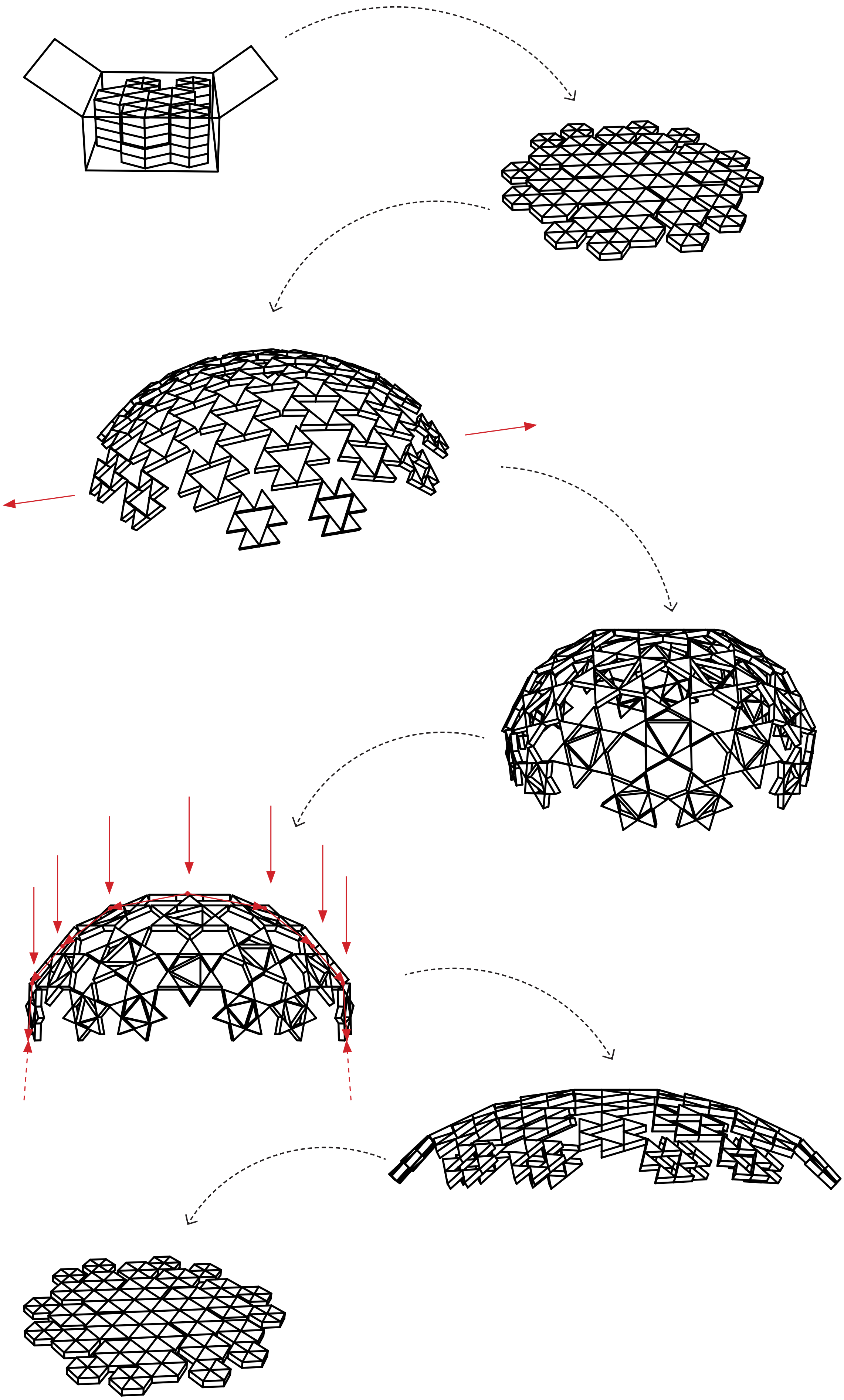
Δi) Το μήκος του εξαγωνικού περιγράμματος των στοιχείων 19, 20, 21, με τιμή $L_4 = 1.490$m.
Δii) Τη γωνιακή διαφορά στους κόμβους σύνδεσης των L_2 στοιχείων με τα L_4 στοιχεία, που ταυτίζεται με τη διακριτή καμπυλότητα Gauss και στη συγκεκριμένη εφαρμογή έχει τιμή $K_{24} = 13,25^o$.
Δiii) Τη γωνιακή διαφορά στους κόμβους σύνδεσης των L_3 στοιχείων με τα L_4 στοιχεία, που ταυτίζεται με τη διακριτή καμπυλότητα Gauss και στη συγκεκριμένη εφαρμογή έχει τιμή $K_{34} = 9.82^o$.
Δiv) Τη γωνία περιστροφής της αυξητικής δομής, με τιμή 106.98^o για τα στοιχεία που ταυτίζεται ο κόμβος K_2 του L_4 στοιχείου με τον K_3 κόμβο του L_3 στοιχείου, 123.23^o για τα στοιχεία που ταυτίζεται ο κόμβος K_3 του L_4 στοιχείου με τον K_2 κόμβο του L_3 στοιχείου, 117.48^o για για τα στοιχεία που ταυτίζεται ο κόμβος K_3 του L_4 στοιχείου με τον K_2 κόμβο του L_2 στοιχείου και 109.27^o για τα στοιχεία που ταυτίζεται ο κόμβος K_2 του L_4 στοιχείου με τον K_3 κόμβο του L_2 στοιχείου.
Δv) Την απόκλιση από την κάθετο του άξονα περιστροφής των στοιχείων L_3,L_4 ίση με 17.73^o και των στοιχείων L_3, L_2 ίση με $20,48^o$.

εικόνα Π1.6
διαγράμματα με L_0 σταθερό
- κάτοψη σε σταθερή φάση με μηδενική διακριτή καμπυλότητα

- κάτοψη σε σταθερή φάση με επιθυμητή διακριτή καμπυλότητα

- πλάγια όψη σε σταθερή φάση με επιθυμητή διακριτή καμπυλότητα





εικόνα Π1.7
διάγραμμα κατασκευής για αποστολή σε συσκευασία