



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ»**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΨΥΧΟΓΥΙΟΣ**

**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΔΟΜΩΝ ΤΥΠΟΥ SANDWICH ΜΕ
ΚΥΨΕΛΟΕΙΔΗ ΠΥΡΗΝΑ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2019

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην εξειδίκευση:

Υπολογιστική Επιστήμη και Μοντελοποίηση Υλικών

που απονέμει το Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε τηναπό την εξεταστική επιτροπή:

- 1. Ευάγγελος Χατζηγεωργίου**, Αναπληρωτής Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων, **Επιβλέπων**
- 2. Βασίλειος Καλπακίδης**, Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων
- 3. Αλκιβιάδης Παϊπέτης**, Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

(Υπογραφή υποψηφίου)

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, στα πλαίσια της ολοκλήρωσης του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Προηγμένα Υλικά». Το θέμα της εργασίας αφορά τη δυναμική ανάλυση με την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μιας από τις πιο διαδεδομένες δομές σύνθετων υλικών στις αεροναυπηγικές κατασκευές, της δομής sandwich με κυψελοειδή honeycomb πυρήνα.

Η ενασχόληση μου με το αντικείμενο της υπολογιστικής επιστήμης και μοντελοποίησης υλικών μου προσέφερε εμπειρία και γνώση, όχι μόνο όσον αφορά τις τεχνικές σχεδιασμού και προσομοίωσης μοντέλων σε σύγχρονα περιβάλλοντα λογισμικού CAD αλλά και του τρόπου που αυτές οι μέθοδοι συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση του φυσικού υπόβαθρου της μηχανικής συμπεριφοράς ενός δομικού στοιχείου.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ολόθερμες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας μου, τον κ. Ευάγγελο Χατζηγεωργίου, που αποδέχτηκε τη πρότασή μου για το θέμα της εργασίας, για την παροχή εκπαιδευτικού υλικού, μα κυρίως, για τις συμβουλές, τις υποδείξεις, την ενθάρρυνση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη συνεργασία μας.

Ευχαριστώ τους κυρίους Αλκιβιάδη Παϊπέτη και Βασίλειο Καλπακίδη, καθηγητές του τμήματος και μέλη της εξεταστικής επιτροπής, για την τιμή που μου κάνουν να αξιολογήσουν την εργασία μου, αλλά και για το ευχάριστο κλίμα κατά την διδασκαλία των μαθημάτων τους. Ειδικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Παϊπέτη που όντας μέλος της επιτροπής για την συνέντευξη και την επιλογή των υποψηφίων του μεταπτυχιακού προγράμματος, μου έδωσε την ευκαιρία να πραγματοποιήσω αυτό τον κύκλο σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Όθωνα και Αθανασία, για την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξη, υλική και ψυχολογική, που μου πρόσφεραν κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Κατά πάσα πιθανότητα, χωρίς αυτούς δεν θα είχε γίνει τίποτα. Για αυτό το λόγο, ως ένα ελάχιστο δείγμα ευγνωμοσύνης το μόνο που μπορώ να κάνω είναι να τους αφιερώσω αυτή την εργασία.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά τη μελέτη και την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς σύνθετων δομών τύπου sandwich με κυψελοειδή honeycomb πυρήνα. Ο κύριος σκοπός της ανάλυσης είναι η εξαγωγή των αποτελεσμάτων των φυσικών συχνοτήτων και των ιδιομορφών που παρουσιάζει η δομή κατά την διάρκεια των ελεύθερων ταλαντώσεων της. Οι αναλυτικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό αυτών των μεγεθών σε αυτού του είδους τα δομικά στοιχεία είναι συχνά αδύνατες, για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό τους με προεξέχουσα τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η μοντελοποίηση και η προσομοίωση της δομής γίνεται στο σύγχρονο περιβάλλον του εμπορικού υπολογιστικού πακέτου ANSYS. Σε πρώτο στάδιο, γίνεται η μελέτη της «υγιούς» πλάκας sandwich, ώστε να ληφθούν οι κατάλληλες επιλογές για τον σχεδιασμό της και σε δεύτερο στάδιο γίνεται η μελέτη της πλάκας με τη παρουσία της βλάβης αποκόλλησης ανάμεσα στα στρώματα του κελύφους και του πυρήνα, ώστε να διερευνηθεί η επίδραση της στην δυναμική συμπεριφορά με απώτερο στόχο την εύρεση κάποιου «σήματος» που θα ειδοποιεί για την παρουσία της αποκόλλησης.

Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μια γενική παρουσίαση των κυψελοειδών υλικών και των υλικών honeycomb, συνοδευμένη με μια περίληψη του τρόπου παραγωγής τους, που αιτιολογούν την ευρεία χρήση τους στις ελαφρές κατασκευές. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η μηχανική συμπεριφορά των υλικών honeycomb και η θεωρία των Ashby και Gibson που είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος ομογενοποίησης τους, από την οποία εξάγονται οι ισοδύναμες ελαστικές ιδιότητες τους. Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδιότητες μπορεί να απλοποιηθεί η μελέτη των δομών που εμπεριέχουν υλικά honeycomb, λαμβάνοντας αξιόπιστα αποτελέσματα, όπως έχει προκύψει τουλάχιστον από την βιβλιογραφία. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η αρχιτεκτονική, οι ιδιότητες και οι συνηθέστεροι τύποι αστοχίας των δομών sandwich, κάνοντας ακόμα και μια περιληπτική αναφορά στις θεωρίες για την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται μια εκτενής παρουσίαση της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, αρχικά για την στατική και κατόπιν για δυναμική συμπεριφορά των δομικών στοιχείων. Αφού γίνεται μια περίληψη του φαινομένου των ταλαντώσεων, των μεγεθών που το περιγράφουν και της σημασίας του για τις κατασκευές, αναπτύσσεται όλη η διαδικασία ανάπτυξης της μεθόδου μέσω των ενεργειακών θεωρημάτων ελαστικότητας και εξηγούνται οι τρόποι επίλυσης των εξισώσεων που καταλήγει η μέθοδος, τόσο για τα στατικά όσο και για τα δυναμικά προβλήματα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι δύο κύριες κατηγορίες των ισοδύναμων μακρομηχανικών μοντέλων για τη μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των δομών sandwich με πυρήνα honeycomb. Στη πρώτη κατηγορία ανήκει το μοντέλο της ισοδύναμης πλάκας, όπου δημιουργείται μια πλάκα από ένα ομογενές και ισότροπο υλικό, ενώ στη δεύτερη κατηγορία ανήκει το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich, όπου κάθε στρώση προσεγγίζεται από ένα ομογενές υλικό οι ιδιότητες του οποίου προκύπτουν από κατάλληλες θεωρίες ομογενοποίησης.

Στο έκτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα βήματα που ακολουθούνται για την δημιουργία των παραπάνω μοντέλων και για την προσομοίωση της

δυναμικής συμπεριφοράς τους στο περιβάλλον του ANSYS. Εκτός από τα ισοδύναμα μοντέλα, παρουσιάζεται και η διαδικασία κατασκευής ενός μοντέλου με την ακριβή γεωμετρία του πυρήνα honeycomb, αξιοποιώντας έτσι τις δυνατότητες που περιέχει το εμπορικό πρόγραμμα, που επιτρέπουν τον λεπτομερή σχεδιασμό ακόμα και περίπλοκων γεωμετριών. Δίνεται επίσης και ο τύπος των πεπερασμένων στοιχείων βάση των οποίων γίνεται η διακριτοποίηση των στρώσεων και της δομής και τα οποία θεωρούνται τα πιο ικανά για την προσέγγιση της κινηματικής των sandwich.

Στο έβδομο κεφάλαιο, γίνεται η παρουσία των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης της δυναμικής συμπεριφοράς των τριών μοντέλων, που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Τα αποτελέσματα προκύπτουν για τρεις διαφορετικές μελέτες περιπτώσεων, ώστε να εξακριβωθεί η αξιοπιστία των μοντέλων για την πρόβλεψη της πραγματικής δυναμικής συμπεριφοράς της δομής sandwich.

Στο όγδοο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά στην πιο συχνή βλάβη που εμφανίζεται στο sandwich με πυρήνα honeycomb κατά τη δυναμική συμπεριφορά του, της αποκόλλησης μεταξύ των στρωμάτων του κελύφους και του πυρήνα και τις προσπάθειες για την μοντελοποίηση της και τον εντοπισμό της πριν γίνει επικίνδυνη, μέσω της μεταβολής των φυσικών συχνοτήτων της πλάκας sandwich.

Στο ένατο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των φυσικών συχνοτήτων της δυναμικής συμπεριφοράς του sandwich με αποκόλληση. Όπως φαίνεται η παρουσία της βλάβης έχει ως συνέπεια τη μείωση των συχνοτήτων, κάτι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως της σήμα της ύπαρξης της. Η επίδραση της παρουσίας της αποκόλλησης διερευνάται σε σχέση με το μέγεθος της περιοχής της, τις συνθήκες σύνδεσης της πλάκας με τα άλλα τμήματα της κατασκευής που ανήκει, καθώς και με το σχήμα της περιοχής αποκόλλησης, ώστε να αποκομιστούν πληροφορίες για την κατάσταση μιας μη καταστροφικής μεθοδολογίας για τον εντοπισμό της ατέλειας της πλάκας.

Με την παρατήρηση των αποτελεσμάτων για την δυναμική συμπεριφοράς του sandwich με πυρήνα honeycomb βγαίνει το συμπέρασμα πως το μοντέλο που παρουσιάζει τον καλύτερο συνδυασμό ακρίβειας και αριθμού πεπερασμένων στοιχείων, είναι το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich. Ακόμα, μπορεί να συλλάβει τις ιδιαιτερότητες της κάθε στρώσης και να ενσωματώσει και άλλα χαρακτηριστικά που μπορεί να δώσουν ακόμα περισσότερη ακρίβεια, όπως το στρώμα κόλλας. Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την διεξαγωγή μελετών βελτιστοποίησης του σχεδιασμού και της επίδρασης βλαβών στα δυναμικά χαρακτηριστικά, δίνοντας αξιόπιστα αποτελέσματα.

Όσον αφορά την δυναμική συμπεριφορά των πλακών που περιέχουν αποκόλληση μεταξύ των στρώσεων του κελύφους και του πυρήνα, παρατηρείται πως οι ιδιοσυχνότητες τους μειώνονται όσο αυξάνει το μέγεθος της βλάβης και όσο οι συνοριακές συνθήκες τους γίνονται πιο περιοριστικές. Αυτή η συμπεριφορά γίνεται ιδιαίτερα εμφανής στις μεγάλες ιδιοσυχνότητες. Ακόμα, ως ένδειξη της παρουσίας της βλάβης μπορεί να θεωρηθεί και η εμφάνιση και των άλλων φαινομένων που παρατηρούνται, όπως η αντιστροφή της σειράς των ιδιομορφών με την αύξηση της ζώνης της ατέλειας. Τέλος, η πλάκα με τη ζώνη αποκόλλησης με κυκλικού σχήματος παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία στη μεταβολή των δυναμικών χαρακτηριστικών της σε σχέση με τις πλάκες που περιέχουν ζώνη τετραγωνικού σχήματος και ζώνη σχήματος λωρίδας.

Abstract

In the present work, the free vibration of honeycomb cored sandwich plates is studied. The main purpose is to obtain the results of natural frequencies and eigenmodes that appear during the dynamical behavior of plates. The analytical methods for their determination for this kind of structures are usually impossible. Thus, numerical methods are applied, the finite element method being the most significant. The modelling and simulation of the structure are carried out in ANSYS commercial package. In the first place, a healthy sandwich panel is analyzed in order to take the proper decisions for its design. In the second place, the behavior of the same panel containing a debonding between the skin and the core is examined in order to investigate the damage influence on the panel's modal characteristics and to find a signal that informs about the presence of the damage.

In the first chapter, a general presentation of cellular and honeycomb materials takes place along with a summary of their manufacturing process giving the reasons for their wide application in lightweight structures. In the second chapter, the mechanical behavior of honeycomb materials is presented along with their most common homogenization technique based on Ashby – Gibson theory. The resulted effective properties can simplify the analysis of honeycomb structures. In the third chapter, the architecture, the properties and the most common types of failure of sandwiches are presented, making a brief reference on their mechanics.

In the fourth chapter, an extensive presentation of finite element numerical method takes place, for both static and dynamic analysis of structural components. After a synopsis of vibrations phenomenon, the whole procedure of the method is developed through elasticity energy theorems and the solution of its equation is explained, both for static and dynamic problems. In the fifth chapter, the two main categories of equivalent macro – mechanical behavior of honeycomb composite plates are presented. The equivalent plate model, formed by a plate of isotropic and homogenous material, belongs in the first category of equivalent single layer models, while, the equivalent sandwich model, formed by every layer considering its effective properties, belongs in the second category of discrete layer models.

In the sixth chapter, the steps of equivalent models' creation and simulation in ANSYS are presented, along with the formation of the exact geometrical model of honeycomb sandwich plate, utilizing the program's capabilities. The types of finite elements used for the discretization of the layers are also presented. Those elements are considered the most suitable for the kinematics of layers.

In the seventh chapter, the results of the modal analysis of the previous models are presented for three different case studies, in order to verify the validity of the models for the prediction of the real modal behavior. In the eighth chapter, the most common damage that appears in the free vibration state is mentioned, as well as the attempts for its finite element modelling and its detection through natural frequencies shift before it poses a threat for the safety of the structure.

In the ninth chapter, the natural frequency results of a sandwich containing a debonding are presented. It seems that the presence of damage leads to the natural frequencies' reduction, which can be treated as a 'signal' of its existence. The influence of skin to core debonding is investigated in conjunction with its size,

its shape and the plate's boundary conditions so to gather adequate information for a non-destructive method scheme.

In the case of healthy honeycomb sandwich plate, we can come to the conclusion that the model which exhibits the best accuracy in combination with the number of finite elements is the equivalent sandwich model. Even more, this model can grasp the special features of each layer and embed new ones, just like the adhesive layer. This model is suitable for the conduction of plate design optimization, as well as, for the investigation of damage influence.

In regard with the modal behavior of sandwich panels containing a skin to core debonding, it is clearly observed that the natural frequencies are decreased with the increase of damage area and the restraint of the boundary conditions. This attitude is eminent especially in higher frequencies. Moreover, as an indication of a damage existence can be the sudden appearance of phenomena, just like the "cross - over" where the inversion of eigenmodes series shows up. Lastly, the plate with circular debonding zone is more sensitive in comparison with the plates with the square or through-the-width zone.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	iv
Περίληψη	v
Abstract	vii
Περιεχόμενα	ix
Κατάλογος Εικόνων	xiii
Κατάλογος Πινάκων	xvii
Κεφάλαιο 1: Κυψελοειδή Υλικά και Υλικά Honeycomb	2
1.1 Κατασκευαστικές Δομές και Υλικά.....	2
1.2 Κυψελοειδή Υλικά.....	3
1.2.1 Ιστορική αναδρομή.....	3
1.2.2 Περιγραφή των κυψελοειδών υλικών.....	3
1.2.3 Κατηγοριοποίηση Κυψελοειδών Υλικών.....	4
1.2.4 Ιδιότητες Κυψελοειδών Υλικών.....	5
1.2.5 Εφαρμογές Κυψελοειδών Υλικών.....	6
1.3 Υλικά Honeycomb.....	7
1.3.1 Ιστορική αναδρομή.....	8
1.3.2 Οι λόγοι για την χρήση τους.....	10
1.3.3 Υλικά για τη παραγωγή honeycomb.....	12
1.3.4 Μέθοδοι Παραγωγής Honeycomb.....	13
1.3.5 Σχηματισμοί Κυψελών.....	16
1.3.6 Επιλογή Πυρήνα Honeycomb.....	17
Κεφάλαιο 2: Μηχανική των Υλικών Honeycomb	18
2.1 Εισαγωγή.....	18
2.2 Ανασκόπηση των βασικών θεωριών για την μελέτη της Μηχανικής Συμπεριφοράς και των Ελαστικών Ιδιοτήτων των Honeycomb.....	19
2.3 Μηχανισμοί και Παράγοντες Παραμόρφωσης των Honeycombs.....	20
2.3.1 Εντός του επιπέδου (in-plane) παραμορφώσεις.....	21
2.3.2 Εντός του επιπέδου (in-plane) παραμορφώσεις.....	22
2.4 Θεωρία των Ashby – Gibson για τον προσδιορισμό των Ισοδύναμων Ελαστικών Ιδιοτήτων ενός Εξαγωνικού Honeycomb.....	23
2.4.1 Η εξάρτηση των ιδιοτήτων του honeycomb από την διεύθυνση.....	23
2.4.2 Εντός του επιπέδου (in – plane) ελαστικές ιδιότητες.....	25
2.4.3 Εκτός επιπέδου (out-of-plane) ελαστικές ιδιότητες.....	27
2.5 Παρατηρήσεις.....	30
Κεφάλαιο 3: Σύνθετες Δομές Τύπου Sandwich	32
3.1 Περιγραφή της Λειτουργίας της Δομής.....	32
3.2 Εφαρμογές της Δομής.....	33
3.3 Παραγωγική Διαδικασία των Δομών Sandwich.....	34
3.4 Τύποι Αστοχίας Δομής Sandwich.....	35

3.5 Στοιχεία Μηχανικής των Δομών Sandwich.....	35
3.5.1 Μηχανική Θεωρία Sandwich (Engineering Sandwich Theory).....	36
3.5.2 Γραμμική Θεωρία Sandwich.....	37
3.5.3 Ενεργειακές Μέθοδοι.....	38
3.6 Συμπεριφορά σε Δυναμική Φόρτιση.....	38
Κεφάλαιο 4: Δυναμική Ανάλυση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων	39
4.1 Εισαγωγή.....	39
4.1.1 Ταλαντώσεις σε Διακριτά και Συνεχή Συστήματα.....	39
4.1.2 Η ανάγκη για την μελέτη των ταλαντώσεων.....	40
4.1.3 Είδη Συστημάτων.....	41
4.2 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	41
4.2.1 Ορισμός της Μεθόδου.....	41
4.2.2 Τα στάδια της ανάλυσης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	42
4.3 Διαδικασία Σχηματισμού των Εξισώσεων Πεπερασμένων Στοιχείων.....	43
4.3.1 Τάσεις και Ισορροπία.....	43
4.3.2 Καταστατικές Εξισώσεις.....	44
4.3.3 Εξισώσεις Συμβατότητας.....	44
4.3.4 Συνοριακές Συνθήκες.....	44
4.3.5 Μεταβαλλόμενες Μορφές των Εξισώσεων Ισορροπίας.....	45
4.4 Δυναμική Ανάλυση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	46
4.4.1 Εξισώσεις Κίνησης Διακριτοποιημένου Συστήματος.....	46
4.4.2 Μητρώα Μάζας.....	48
4.5 Μέθοδοι Επίλυσης των Εξισώσεων Κίνησης.....	49
4.5.1 Μέθοδοι Ευθείας Ολοκλήρωσης των Εξισώσεων Κίνησης (Direct Integration Methods).....	49
4.5.2 Μέθοδοι Υπέρθωσης των Ιδιομορφών (Mode Superposition).....	51
Κεφάλαιο 5: Μοντέλα Μηχανικής Συμπεριφοράς Δομών Sandwich με Πυρήνα Honeycomb.....	53
5.1 Μακρομηχανικά Μοντέλα Μηχανικής Συμπεριφοράς Δομών Sandwich με Πυρήνα Honeycomb.....	53
5.1.1 Θεωρία της Ισοδύναμης Μονής Στρώσης (Equivalent Single Layer Theory).....	53
5.1.2 Θεωρία Διακριτών Στρώσεων (Discrete Layer Theory).....	54
5.2 Θεωρία Ισοδύναμης Πλάκας (Equivalent Plate Theory).....	55
5.3 Θεωρία Sandwich (Sandwich Theory).....	57
Κεφάλαιο 6: Προσομοίωση Μορφικής Δυναμικής Απόκρισης.....	59
6.1 Μορφική Δυναμική Ανάλυση στα Υπολογιστικά Προγράμματα CAD.....	59
6.2 Κατασκευή της Γεωμετρίας.....	59
6.2.1 Ακριβές Γεωμετρικά Μοντέλο.....	60
6.2.2 Μοντέλο Ισοδύναμης Πλάκας.....	64
6.2.3 Μοντέλο Ισοδύναμου Sandwich.....	64
6.3 Ορισμός των Ιδιοτήτων των Υλικών.....	65

6.4 Διακριτοποίηση των Μοντέλων.....	66
6.4.1 Ακριβές Γεωμετρικά Μοντέλο.....	66
6.4.2 Μοντέλο Ισοδύναμης Πλάκας.....	67
6.4.3 Μοντέλο Ισοδύναμου Sandwich.....	68
6.4.4 Τύποι Πεπερασμένων Στοιχείων.....	69
6.5 Συνθήκες Σύνδεσης των Δομικών Συνιστωσών.....	70
6.6 Συνοριακές Συνθήκες.....	71
6.7 Ορισμός Αποτελεσμάτων.....	72
Κεφάλαιο 7: Αποτελέσματα Μορφικής Δυναμικής Ανάλυσης.....	73
7.1 Εισαγωγή.....	73
7.2 Σύγκριση Μεταξύ των Μοντέλων (Case Study 1).....	74
7.3 Σύγκριση Μεταξύ Πειραματικών και Αριθμητικών Μοντέλων (Case Study 2).....	78
7.3.1 Πειραματική Διαδικασία.....	78
7.3.2 Μοντελοποίηση και προσομοίωση των αριθμητικών μοντέλων.....	79
7.3.3 Αποτελέσματα των προσομοιώσεων.....	80
7.4 Παραμετρική Μελέτη.....	84
7.4.1 Επίδραση του Πάχους του Πυρήνα.....	84
7.4.2 Αλλαγή του Υλικού του Honeycomb.....	86
7.4.3 Επίδραση του Πάχους των Κελυφών.....	88
7.4.4 Επίδραση του μεγέθους της κυψέλης.....	88
7.5 Μοντέλα με Θεώρηση του Στρώματος της Κόλλας (Case Study 3).....	89
Κεφάλαιο 8: Μελέτη της Επίδρασης της Αποκόλλησης Κελύφους στη Δυναμική Συμπεριφορά Πλάκας Τύπου Sandwich.....	93
8.1 Η αποκόλληση μεταξύ του πυρήνα και του κελύφους και εντοπισμός της μέσω των μεταβολών των δυναμικών χαρακτηριστικών.....	93
8.2 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας.....	94
8.3 Μοντελοποίηση της ατέλειας.....	96
8.3.1 Παραδοχές του Μοντέλου.....	96
8.3.2 Επιλογή του Τύπου των Πεπερασμένων Στοιχείων.....	97
8.3.3 Διακριτοποίηση.....	97
8.3.4 Η Περιοχή της Ατέλειας και τα Στοιχεία Ελατηρίου.....	98
8.3.5 Μεταβολή των συνθηκών σύνδεσης μεταξύ της υγιούς περιοχής της του κελύφους και της περιοχής αποκόλλησης.....	100
Κεφάλαιο 9: Αποτελέσματα της Δυναμικής Συμπεριφοράς των Sandwich με Αποκόλληση.....	103
9.1 Εισαγωγή.....	103
9.2 Αποτελέσματα για την Συμπεριφορά της «Υγιούς» Πλάκας Sandwich.....	103
9.3 Η Επίδραση του Μεγέθους της Αποκόλλησης.....	105
9.4 Η Επίδραση των Συνοριακών Συνθηκών.....	111
9.5 Επίδραση του Σχήματος της Αποκόλλησης.....	115
Κεφάλαιο 10: Συμπεράσματα – Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα.....	121
10.1 Συμπεράσματα.....	121

10.1.1 Μορφική Δυναμική Συμπεριφορά της Πλάκας Sandwich με Πυρήνα Honeycomb.....	121
10.1.2 Δυναμική Συμπεριφορά του Sandwich με Αποκόλληση Μεταξύ του Πυρήνα και του Κελύφους.....	122
10.2 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα.....	123
Βιβλιογραφία.....	125

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1.1: Παραδείγματα κυψελοειδών υλικών (a) δισδιάστατο honeycomb, (b) τρισδιάστατο αφρώδες με ανοιχτά κελιά, (c) τρισδιάστατο αφρώδες με κλειστά κελιά.....	4
Εικόνα 1.2: Περιοδικές τοπολογίες κυψελοειδών υλικών.....	5
Εικόνα 1.3: Το εύρος των ιδιοτήτων που είναι διαθέσιμο στον μηχανικό μέσω των αφρωδών υλικών, (a) πυκνότητα, (b) θερμική αγωγιμότητα, (c) μέτρο του Young, (d) θλιπτική αντοχή.....	7
Εικόνα 1.4: Honeycomb με εξαγωνικές κυψέλες.....	8
Εικόνα 1.5: Σύνθετη δομή sandwich με πυρήνα honeycomb.....	9
Εικόνα 1.6: Συγκριτική αντίσταση σε ηχητική κόπωση συμβατικών δομών και δομών sandwich.....	10
Εικόνα 1.7: Παραγωγική διαδικασία επιμήκυνσης.....	13
Εικόνα 1.8: Προσανατολισμός γραμμών που θα περάσει η κόλλα.....	14
Εικόνα 1.9: Προσανατολισμοί ύφανσης.....	14
Εικόνα 1.10: Παραγωγική διαδικασία αυλάκωσης.....	15
Εικόνα 1.11: Διαμορφώσεις κυψελών honeycomb.....	16
Εικόνα 2.1: Honeycomb με εξάγωνες κυψέλες. Οι επίπεδες ιδιότητες σχετίζονται με τα φορτία στο επίπεδο $X_1 - X_2$. Οι αποκρίσεις που αντιστοιχούν στα φορτία που εφαρμόζονται στις πλευρές που είναι κάθετες στην διεύθυνση X_3 αναφέρονται ως οι εγκάρσιες ιδιότητες.....	20
Εικόνα 2.2: Θλιπτικά και εφελκυστικά διαγράμματα τάσης - παράμορφωσης για honeycomb από (a),(b) ελαστομερές (c),(d) μεταλλικό και (e),(f) κεραμικό υλικό.....	21
Εικόνα 2.3: Διάγραμμα που δείχνει την ελαστική περιοχή, την διαρροή και την περιοχή πύκνωσης των honeycomb συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας τους κατά την φόρτιση στο επίπεδο $X_1 - X_2$	22
Εικόνα 2.4: Καμπύλες τάσεις - παραμόρφωσης για φόρτιση του honeycomb σε θλίψη (a) και σε εφελκυσμό (b) κατά την διεύθυνση X_3	22
Εικόνα 2.5: Διάγραμμα που δείχνει την ελαστική περιοχή, την διαρροή και την περιοχή πύκνωσης των honeycomb συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας τους κατά την φόρτιση στο επίπεδο X_3	23
Εικόνα 2.6: Η απαράμορφωτη κυψέλη ενός τυπικού εξαγωνικού honeycomb....	24
Εικόνα 2.7: Παραμόρφωση της κυψέλης ως αποτέλεσμα της κάμψης, του εφελκυσμού ή της θλίψης των τειχών της.....	25
Εικόνα 2.8: Οι παραμορφώσεις και οι εσωτερικές αντιδράσεις των τειχών της κυψέλης κατά την διάτμηση του φύλλου honeycomb.....	26
Εικόνα 2.9: Honeycomb που φέρει φορτία στις πλευρές κάθετες στην διεύθυνση X_3	28
Εικόνα 2.10: Συμπεριφορά της κυψέλης σε φορτίο συμπίεσης.....	30
Εικόνα 3.1: Σχηματικό διάγραμμα της τομής ενός πάνελ sandwich.....	32

Εικόνα 3.2: Τα τμήματα της δομής sandwich με πυρήνα honeycomb.....	33
Εικόνα 3.3: Η τοποθέτηση του πυρήνα σε σχέση με τα κελύφη.....	33
Εικόνα 3.4: Τύποι αστοχίας των πάνελ sandwich (a) φόρτιση (b) διαρροή του κελύφους (c) «ζάρωμα» του κελύφους (d) αστοχία πυρήνα (e) αστοχία συνδέσμου κελύφους – πυρήνα.....	35
Εικόνα 3.5: Κάμψη δοκού χωρίς να ληφθεί υπόψιν η διάτμηση του πυρήνα (θεωρία 1ης τάξης).....	37
Εικόνα 3.6: Κάμψη δοκού λαμβάνοντας υπόψιν τη διάτμηση του πυρήνα. Η ολική βύθιση είναι άθροιση της καμπτικής και διατμητικής συνιστώσας.....	37
Εικόνα 4.1: Κατάρρευση της γέφυρας Τακόμα (1940).....	41
Εικόνα 4.2: Φαινόμενο Συντονισμού, όπου το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο σε μια συγκεκριμένη συχνότητα για σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με ιξώδη απόσβεση.....	41
Εικόνα 4.3: Η συνήθης διαδικασία ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία.....	42
Εικόνα 4.4: Τρισδιάστατο παραμορφώσιμο σώμα.....	43
Εικόνα 4.5: Ισορροπία στοιχειώδους όγκου.....	44
Εικόνα 5.1: Ισοδυναμία μεταξύ των μοντέλων της δομής sandwich και της ισοδύναμης πλάκας.....	55
Εικόνα 5.2: Ισοδυναμία μεταξύ των αξονικών (membrane) και καμπτικών (bending) δυσκαμψιών των δύο στοιχείων.....	55
Εικόνα 6.1: Η «εργαλειοθήκη» Modal και το περιβάλλον της κατασκευής της γεωμετρίας.....	60
Εικόνα 6.2: Ορθογώνιο πλαίσιο που καλύπτει το honeycomb.....	61
Εικόνα 6.3: Σκαρίφημα της μοναδιαίας κυψέλης του honeycomb.....	61
Εικόνα 6.4: Σκαρίφημα του honeycomb.....	61
Εικόνα 6.5: Ορισμός του πάχους των τειχών των κυψελών.....	62
Εικόνα 6.6: Στερεό μοντέλο του φύλλου honeycomb.....	62
Εικόνα 6.7: Πρόσθεση του κάτω κελύφους.....	63
Εικόνα 6.8: Πρόσθεση του άνω κελύφους – Στερεό μοντέλο του sandwich.....	63
Εικόνα 6.9: Στέρεο Μοντέλο Ισοδύναμης Πλάκας.....	64
Εικόνα 6.10: Στέρεο Μοντέλο Ισοδύναμου Sandwich.....	65
Εικόνα 6.11: Ορισμός των ιδιοτήτων του ισότροπου υλικού.....	65
Εικόνα 6.12: Ορισμός των ιδιοτήτων του ορθότροπου υλικού.....	66
Εικόνα 6.13: Διακριτοποίηση Ακριβούς Γεωμετρικού Μοντέλου.....	67
Εικόνα 6.14: Επιλογή και διαίρεση των διαμηκών ακμών.....	67
Εικόνα 6.15: Ορισμός των διαιρέσεων των πλευρών της πρώτης ομάδας.....	68
Εικόνα 6.16: Διακριτοποίηση του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας.....	68
Εικόνα 6.17: Διακριτοποίηση του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich.....	69
Εικόνα 6.18: Στοιχείο SOLID186.....	69
Εικόνα 6.19: Στοιχείο SHELL181.....	69
Εικόνα 6.20: Ορισμός των παραμέτρων των επιφανειών σύνδεσης.....	70
Εικόνα 6.21: Ορισμός πακτωμένων επιφανειών στο ακριβές μοντέλο.....	70

Εικόνα 6.22: Ορισμός πακτωμένων επιφανειών στο ισοδύναμο μοντέλο sandwich.....	71
Εικόνα 6.23: Ορισμός του αριθμού φυσικών συχνοτήτων που υπολογίζονται από το πρόγραμμα.....	71
Εικόνα 6.24: Ανάθεση φυσικής συχνότητας σε κάθε ολική παραμόρφωση.....	72
Εικόνα 7.1: Σύγκριση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων των μοντέλων για το εύρος [0 – 5000Hz].....	72
Εικόνα 7.2.a: 1η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας.....	75
Εικόνα 7.2.b: 1η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich.....	75
Εικόνα 7.3.a: 2η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας.....	76
Εικόνα 7.3.b: 2η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich.....	76
Εικόνα 7.4.a: 3η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας.....	76
Εικόνα 7.4.b: 3η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich.....	77
Εικόνα 7.5.a: 4η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας.....	77
Εικόνα 7.5.b: 4η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich.....	77
Εικόνα 7.6.a: 7η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας.....	78
Εικόνα 7.6.b: 7η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich.....	78
Εικόνα 7.7.a: 1η Ιδιομορφή του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας.....	80
Εικόνα 7.7.b: 1η Ιδιομορφή του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich.....	81
Εικόνα 7.8.a: 2η Ιδιομορφή του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας.....	81
Εικόνα 7.8.b: 2η Ιδιομορφή του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich.....	81
Εικόνα 7.9.a: 3η Ιδιομορφή του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας.....	82
Εικόνα 7.9.b: 3η Ιδιομορφή του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich.....	82
Εικόνα 7.10: Σύγκριση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων των μοντέλων για το εύρος [0 – 5000Hz].....	83
Εικόνα 7.11: Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει του πάχους του πυρήνα.....	85
Εικόνα 7.12.a: 3η Καμπτική Ιδιομορφή του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 10mm.....	85
Εικόνα 7.12.b: 4η Ιδιομορφή (Lateral Mode) του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 10mm.....	86
Εικόνα 7.13.a: 3η Ιδιομορφή (Lateral Mode) του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 15mm.....	86
Εικόνα 7.13.b: 4η Καμπτική Ιδιομορφή του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 10mm.....	86
Εικόνα 7.14: Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει των υλικών του πυρήνα.....	87
Εικόνα 7.15: Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει του πάχους των κελυφών.....	88
Εικόνα 7.16: Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει του μεγέθους της κυψέλης.....	89
Εικόνα 7.17: Μοντέλο της πλάκας sandwich με πυρήνα honeycomb της τρίτης περίπτωσης.....	90
Εικόνα 7.18: Πρώτη Στρεπτική Ιδιομορφή.....	91
Εικόνα 7.19: Δεύτερη Καμπτική Ιδιομορφή.....	91

Εικόνα 8.1: Οι βλάβες σε ένα πάνελ sandwich και η εντατική κατάσταση στην περιοχή της αποκόλλησης.....	94
Εικόνα 8.2: Διάγραμμα ροής των κατηγοριών μοντελοποίησης της δυναμικής ανάλυσης των πάνελ με βλάβη.....	95
Εικόνα 8.3: Οι περιοχές της διακριτοποίησης της πλάκας του sandwich στα στρώματα του κελύφους και της κόλλας που εμπεριέχουν την ατέλεια (αποκόλληση).....	98
Εικόνα 8.4: Η πλάγια όψη στην περιοχή της αποκόλλησης που δείχνει την διαφορά πάχους στο στρώμα της κόλλας, μεταξύ της περιοχής καλής σύνδεσης και της περιοχής αποκόλλησης.....	98
Εικόνα 8.5: Τα ελατήρια στην περιοχή της αποκόλλησης. Για την εμφάνιση τους πρέπει να γίνει πολύ μεγάλη εστίαση.....	99
Εικόνες 8.6: Τοποθέτηση των ελατηρίων στην (a) κυκλική ζώνη.....	99
(b) τετραγωνική ζώνη.....	100
(c) κατά το πλάτος της πλάκας.....	100
Εικόνα 8.7: Συνοριακή περιοχή όπου γίνεται αλλαγή στις συνθήκες σύνδεσης.....	101
Εικόνα 8.8: Η παραμετρική αλλαγή των συνθηκών επαφής.....	101
Εικόνες 9.1: Οι έξι πρώτες ιδιομορφές της ανέπαφης πλάκας sandwich που εμφανίζονται στις ιδιοσυχνότητες:	
(a) 616.82 Hz (b) 1220.7Hz.....	104
(c) 1514.4 Hz, (d) 1565.3 Hz.....	105
(e) 1724.0 Hz και (f) 2278.8 Hz.....	105
Εικόνα 9.2: Οι απόλυτες τιμές των μειώσεων των ιδιοσυχνοτήτων ανά ιδιομορφή για βλάβη μεγέθους 5%.....	107
Εικόνες 9.3: Οι έξι πρώτες ιδιομορφές για πλάκα με κυκλική αποκόλληση μεγέθους 5% στο κέντρο της με ιδιοσυχνότητες:	
(a) 611.64 Hz, (b) 1204.9 Hz.....	107
(c) 1507.3 Hz, (d) 1519.3 Hz.....	107
(e) 1715.5 Hz, (f) 2241.9 Hz.....	108
Εικόνα 9.4: Οι ιδιοσυχνότητες ως συνάρτηση του μεγέθους βλάβης και η εμφάνιση του φαινομένου cross – over.....	110
Εικόνες 9.5: Διαγράμματα των αριθμητικών ιδιοσυχνοτήτων σε συνάρτηση με το μέγεθος βλάβης για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την:	
(a) 1 ^η , (b) 2 ^η ιδιομορφή.....	113
(c) 3 ^η , (d) 4 ^η ιδιομορφή.....	114
Εικόνες 9.6: Οι διάφοροι τύποι της γεωμετρίας της περιοχής αποκόλλησης:	
(a) κυκλική ζώνη.....	115
(b) τετράγωνη ζώνη.....	116
(c) κατά το πλάτος της πλάκας ζώνης αποκόλλησης.....	116
Εικόνες 9.7: Η απόλυτη τιμή της πτώσης των φυσικών συχνοτήτων για τις διάφορες περιπτώσεις μορφών της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους:	
(a) 1%, (b) 5%.....	119
(c) 15%,(d) 25%.....	120

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1: Αποτελεσματικότητα honeycomb sandwich.....	11
Πίνακας 1.2: Σύγκριση μεταξύ των πυρήνων honeycomb και αφρών.....	12
Πίνακας 1.3: Σύγκριση ιδιοτήτων μεταξύ ορθών και πλάγιων υφάνσεων των υφασμάτων honeycombs.....	15
Πίνακας 5.1: Ισοδυναμία μεταξύ των αξονικών (membrane) και καμπτικών (bending) δυσκαμψιών των δύο στοιχείων.....	56
Πίνακας 7.1: Διαστάσεις της πλάκας με πυρήνα honeycomb.....	74
Πίνακας 7.2: Αποτελέσματα των μοντέλων της εργασίας.....	74
Πίνακας 7.3: Διαστάσεις της πλάκας με πυρήνα honeycomb.....	78
Πίνακας 7.4: Ο αριθμός των στοιχείων για τα οποία παρουσιάστηκε σύγκλιση σε κάθε μοντέλο.....	79
Πίνακας 7.5: Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και των αριθμητικών αποτελεσμάτων.....	80
Πίνακας 7.6: Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών μοντέλων.....	83
Πίνακας 7.7: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για διάφορα πάχη.....	84
Πίνακας 7.8: Ιδιότητες των υλικών.....	87
Πίνακας 7.9: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για διάφορα υλικά.....	87
Πίνακας 7.10: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για την αλλαγή του πάχους των κελυφών.....	88
Πίνακας 7.11: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για την αλλαγή του μεγέθους της κυψέλης.....	89
Πίνακας 7.12: Διαστάσεις της πλάκας με πυρήνα honeycomb.....	90
Πίνακας 7.13: Ιδιότητες των Υλικών.....	90
Πίνακας 7.14: Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων.....	91
Πίνακας 9.1: Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων για τις πρώτες έξι ιδιοσυχνότητες.....	104
Πίνακας 9.2: Αποτελέσματα της προσομοίωσης για την πλάκα με μέγεθος αποκόλλησης της τάξης του 5%.....	106
Πίνακας 9.3: Μεγέθη της παραμέτρου βλάβης και η αντιστοιχία τους με την ακτίνα της κυκλικής περιοχής αποκόλλησης.....	109
Πίνακας 9.4: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις πλάκες με κυκλική αποκόλληση διαφόρων μεγεθών βλάβης.....	109
Πίνακας 9.5: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 1η ιδιομορφή.....	111
Πίνακας 9.6: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 2η ιδιομορφή.....	112
Πίνακας 9.7: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 3η ιδιομορφή.....	112

Πίνακας 9.8: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 4η ιδιομορφή.....	112
Πίνακας 9.9: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 1%.....	117
Πίνακας 9.10: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 5%.....	117
Πίνακας 9.11: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 15%.....	118
Πίνακας 9.12: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 25%.....	118

Στον Όθωνα και στην Αθανασία

Κεφάλαιο 1

Κυψελοειδή Υλικά και Υλικά Honeycomb

1.1 Κατασκευαστικές Δομές και Υλικά

Όταν γίνεται αναφορά στις δομές που αφορούν το πεδίο του μηχανικής (engineering), το πρώτο πράγμα που έρχεται συνήθως στο μυαλό είναι τα κτήρια, οι μηχανολογικές κατασκευές, οι μηχανές και ούτω καθεξής. Οι μηχανικοί έχουν επιτύχει ευφυή και ευφάνταστα έργα στον τομέα των κατασκευών εξαιτίας των μεγάλων εξελίξεων στην επιστήμη των υλικών και στην ανάλυση των κατασκευών. Όλες αυτές οι δομές αποτελούνται από στοιχεία διαφορετικού τύπου όπως είναι οι δοκοί, οι πλάκες, τα τόξα, τα κελύφη και οι αλυσίδες. Σε αυτή τη κλίμακα, τα στοιχεία αυτά ονομάζονται **μακροδομές**. Αυτά τα δομικά στοιχεία έχουν διάφορες μορφές και φτιάχνονται από υλικά με ειδικές ιδιότητες.

Οι ιδιότητες των υλικών μπορούν να οριστούν από τα συστατικά τους στοιχεία και από τον τρόπο διαμόρφωσής τους. Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιότητες ενός υλικού μπορούν να αποκομιστούν σχεδιάζοντας την μορφή των συστατικών στοιχείων τους. Έτσι, ένα υλικό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος δομής σε μικροσκοπικό επίπεδο που ονομάζεται **μικροδομή**.

Ένας πολύ μεγάλος επιστήμονας των υλικών, ο Michael Ashby, έχει γράψει: «Όταν ο σύγχρονος άνθρωπος κατασκευάζει μεγάλες δομές που φέρνουν φορτίο, χρησιμοποιεί συμπαγή υλικά, όπως είναι ο χάλυβας, το τσιμέντο, το γυαλί. Όταν οι φύση κάνει το ίδιο, χρησιμοποιεί κυψελοειδή υλικά, όπως είναι το ξύλο, τα κόκκαλα, τα κοράλλια. Θα πρέπει να υπάρχει κάποιος καλός λόγος γι' αυτό». Πολλά φυσικά και χειροποίητα υλικά επιδεικνύουν ξεχωριστές δομές σε περισσότερες κλίμακες, με μερικά υλικά να κατέχουν στοιχεία που έχουν δικές τους, ιδιαίτερες, εσωτερικές δομές. Αυτή η δομική ιεραρχία μπορεί να επηρεάσει τις ιδιότητες των υλικών. Ως αποτέλεσμα αυτού, η διαφορά μεταξύ μιας δομής και ενός υλικού να μην μπορεί να ξεκαθαριστεί επακριβώς. Υπάρχουν βέβαια προσπάθειες να χαραχθούν γραμμές μεταξύ αυτών που αντιλαμβάνονται και αυτών που δεν αντιλαμβάνονται τα υλικά ως ομογενή, αλλά όταν παρατηρούνται καλύτερα τα ομογενοποιημένα υλικά, χαρακτηρίζονται και αυτά από μία καθορισμένη γεωμετρία ή ανάμειξη υλικών. Για παράδειγμα, ένα σύνθετο υλικό είναι εξ ορισμού ένα υλικό που αποτελείται από δύο ή παραπάνω συστατικά υλικά, όπως και ένας πυρήνας από υλικό *honeycomb* που προκύπτει από μια γεωμετρική μικροσκοπική διαμόρφωση.

Επομένως, η καλή κατανόηση της σχέσης μεταξύ μικροσκοπικών και μακροσκοπικών ιδιοτήτων μπορεί να οδηγήσει στην σύνθεση νέων υλικών με φυσικές και τεχνικές ιδιότητες κατάλληλες για ειδικές εφαρμογές, που σε συνδυασμό με την σχεδίαση νέων δομών και νέων κατασκευαστικών τεχνολογιών αποτελούν θεμέλιο για την εξέλιξη των σύγχρονων τομέων της τεχνολογίας όπως της αεροναυπηγικής, της αυτοκινητοβιομηχανίας και της βιοτεχνολογίας.

Τα κυψελοειδή υλικά και οι δομές sandwich έχει αποδειχθεί ότι μπορούν να ενσωματωθούν με πολύ καλό τρόπο σε μια τέτοια σχέση υλικού - δομής, με αποτέλεσμα η σύνθεσή τους να δίνει εξαιρετικές ιδιότητες.

1.2 Κυψελοειδή Υλικά

Ένα κυψελοειδές υλικό είναι φτιαγμένο από ένα δίκτυο από συμπαγείς δοκούς ή πλάκες ή μεμβράνες οι οποίες σχηματίζουν τις γωνίες και τις πλευρές των κυψελών – των δομικών μονάδων του υλικού. Αυτό το δίκτυο μπορεί να εμφανίζει περιοδικότητα από σημείο σε σημείο, όπως είναι στα honeycombs, στα πρισματικά και στα δικτυωτά κυψελοειδή ή το σχήμα του δικτύου να διαφέρει σε όλη την έκταση του υλικού, όπως είναι στα στοχαστικά κυψελοειδή (Voronoι). Παρακάτω γίνεται μια ιστορική αναδρομή και μια πιο εκτεταμένη περιγραφή των κυψελοειδών υλικών.

1.2.1 Ιστορική αναδρομή

Η λέξη κυψέλη (*cell* που σημαίνει επίσης και «κύτταρο» στα αγγλικά) προέρχεται από την λατινική λέξη *cella* που σημαίνει μικρό τμήμα, εσώκλειστος χώρος. Το ενδιαφέρον μας είναι σε μια ομάδα κυψελίδων – για τους Ρωμαίους, *cellarium*, για εμάς κυψελοειδή υλικά (*cellular solids* ή *cellular materials* είναι ο αντίστοιχος όρος στην αγγλική βιβλιογραφία). Με αυτό εννοούμε μια συναρμογή κυψελών με συμπαγείς άκρες ή πλευρές, τοποθετημένες μεταξύ τους έτσι ώστε να καλύψουν τον χώρο. Τέτοια υλικά είναι κοινά στην φύση: ξύλο, φελλοί, σπόγγοι, κοράλλια είναι μερικά παραδείγματα (ακόμα και η κυτταρίνη – cellulose βγαίνει από το λατινικό υποκοριστικό *cellula*, που σημαίνει «γεμάτος από μικρές κυψέλες»).

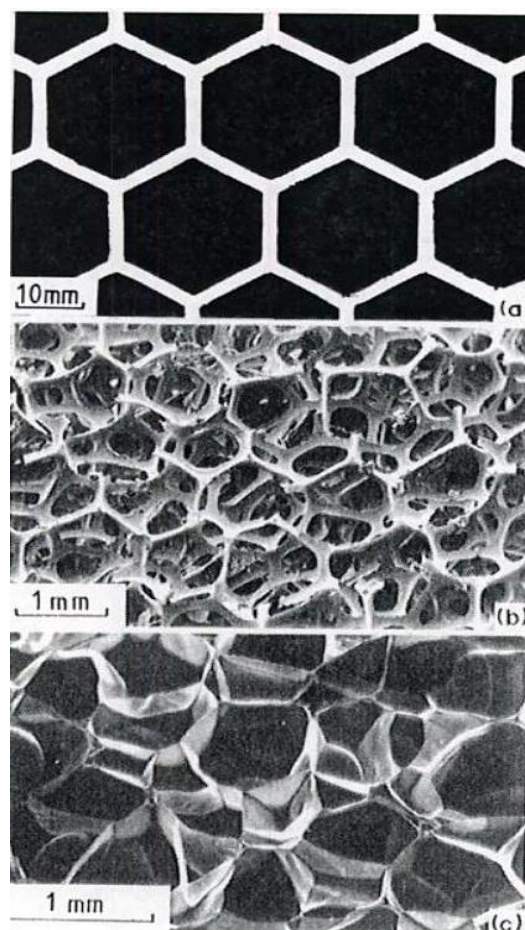
Ο άνθρωπος χρησιμοποίησε αυτά τα φυσικά κυψελοειδή υλικά για αιώνες: στις πυραμίδες της Αιγύπτου έχουν βρεθεί ξύλινα αντικείμενα τουλάχιστον 5000 ετών και οι φελλοί χρησιμοποιήθηκαν ως πώματα στα μπουκάλια κρασιού στους Ρωμαϊκούς Χρόνους (Οράτιος, 27 π.Χ.). Πιο πρόσφατα δημιουργήθηκαν τα χειροποίητα κυψελοειδή υλικά. Στο απλούστερο επίπεδο είναι υλικά, φτιαγμένα από παράλληλες, πρισματικές κυψέλες που χρησιμοποιούνται για δομικά στοιχεία ελαφρών κατασκευών. Τα πιο κοινά είναι οι πολυμερικοί αφροί που χρησιμοποιούνται σχεδόν παντού, από τα κυπελάκια καφέ μιας χρήσης έως το προστατευτικό υλικό για τις συγκρούσεις που χρησιμοποιείται στα πιλοτήρια των αεροπλάνων. Τεχνικές σήμερα υπάρχουν για την δημιουργία αφρού όχι μόνο από πολυμερή, αλλά και από μέταλλα, κεραμικά αλλά και ακόμα από γυαλιά. Αυτοί οι νεότεροι τύποι αφρών χρησιμοποιούνται όλο και πιο πολύ σε δομικές εφαρμογές – στην μόνωση, στα προστατευτικά στρώματα και στα συστήματα απορρόφησης της κινητικής ενέργειας κατά τις συγκρούσεις.

Είναι μια σημαντική κατηγορία υλικών της μηχανικής, ακόμα κι αν είναι για κάποιο λόγο παραμελημένα. Από οικονομική σκοπιά, είναι μακράν φτηνότερα από τα ινώδη σύνθετα υλικά, αλλά η βιβλιογραφία για αυτά είναι συγκριτικά πολύ μικρή. Παράγονται και χρησιμοποιούνται σε μια πολύ μεγάλη κλίμακα και αν συμπεριλάβουμε και το ξύλο, τα οικονομικά αυτού του τομέα παραγωγής συγκρίνονται με αυτά της βιομηχανίας αλουμινίου ή γυαλιού, ακόμη και αν είναι λιγότερο ερευνημένα, λιγότερο κατανοητά και με λιγότερη επάρκεια καταγεγραμμένα σε σχέση με τις υπόλοιπες κατηγορίες υλικών.

1.2.2 Περιγραφή των κυψελοειδών υλικών

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του εδαφίου, ένα κυψελοειδές υλικό είναι φτιαγμένο από διασυνδεδεμένο δίκτυο από συμπαγή στοιχεία τα οποία σχηματίζουν μια κυψέλη που επαναλαμβάνεται με ένα καθορισμένο ή ακαθόριστο τρόπο στον χώρο. Τρεις χαρακτηριστικές δομές φαίνονται στην εικόνα 1.1. Το απλούστερο (Εικ.1.1a) είναι ένα δισδιάστατο σύνολο από πολύγωνα τα οποία έχουν τοποθετηθεί μεταξύ τους ώστε να γεμίσουν μια επίπεδη περιοχή όπως οι εξάγωνες κυψέλες των μελισσών και για αυτό το λόγο ονομάζουμε αυτά τα δισδιάστατα κυψελοειδή υλικά **κερηθροειδή (honeycomb)**, από εδώ και πέρα στην εργασία τα υλικά αυτά θα αποκαλούμαι με τον αγγλικό τους όρο, καθώς στην ελληνική βιβλιογραφία συναντώνται ευρέως με τον όρο κυψελοειδή, κάτι

που δεν αποδίδει με ακρίβεια την κατηγορία και το σχήμα τους). Πιο κοινά, οι κυψέλες είναι πολύεδρα τα οποία τοποθετούνται σε τρεις διαστάσεις για να γεμίσουν τον χώρο και μπορούμε να ονομάσουμε αυτά τα τρισδιάστατα κυψελοειδή υλικά **αφρούς (foams)**. Εάν το στέρεο από το οποίο είναι φτιαγμένος ο αφρός αποτελείται από τις πλευρές των κελιών που είναι διάτρητες, ο αφρός θα ονομάζεται ανοιχτών κυψελών (open celled) (Εικ.1.1.b). Εάν οι πλευρές είναι συμπαγείς, έτσι ώστε κάθε κυψέλη να είναι σφραγισμένη από τους γείτονες της, λέγεται ότι είναι κλειστών κυψελών (closed cell) (Εικ.1.1.c) και φυσικά υπάρχουν και οι αφροί που είναι κατά ένα μέρος ανοιχτοί και κατά ένα άλλο μέρος κλειστοί. Η γεωμετρία και ο χαρακτηρισμός των κυψελών είναι από μόνο του ένα ενδιαφέρον θέμα και έχει οδηγήσει σε ευφρείς αναλύσεις που είναι πέρα από τους σκοπούς αυτής της παρουσίασης.



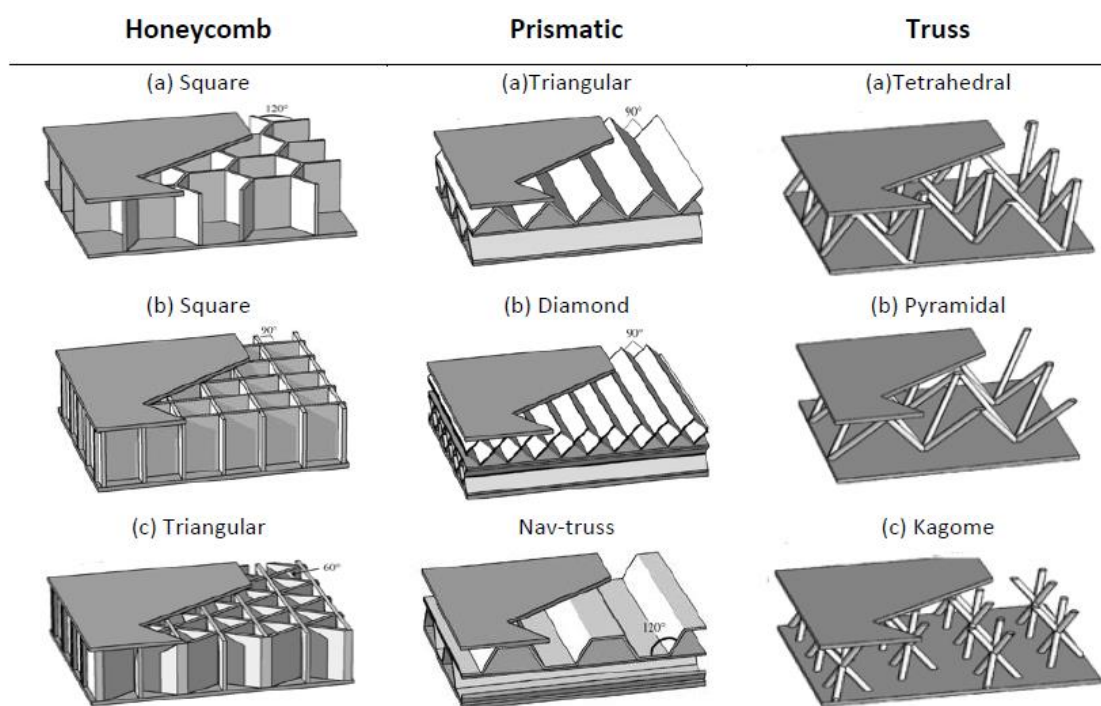
Εικόνα 1.1: Παραδείγματα κυψελοειδών υλικών (a) δισδιάστατο honeycomb, (b) τρισδιάστατο αφρώδες με ανοιχτά κελιά, (c) τρισδιάστατο αφρώδες με κλειστά κελιά (Gibson, Ashby, 1997)

1.2.3 Κατηγοριοποίηση Κυψελοειδών Υλικών

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η διαμόρφωση του δικτύου των στοιχείων που αποτελούν την κάθε κυψέλη μπορεί να επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο στον χώρο, να εμφανίζει δηλαδή περιοδικότητα ή να είναι τελείως αυθαίρετη και ανομοιογενής σε οποιοδήποτε σημείο του υλικού. Στην πρώτη περίπτωση ανήκουν τα περιοδικά κυψελοειδή υλικά ενώ στην δεύτερη τα στοχαστικά κυψελοειδή υλικά.

- *Περιοδικά Κυψελοειδή Υλικά*

Τα περιοδικά κυψελοειδή υλικά κατέχουν μια κανονικοποιημένη δομή. Αυτές οι δομές μπορούν να κατασκευαστούν ώστε να επιδείξουν μαζί υψηλή αντοχή και χαμηλή πυκνότητα. Εμπνευσμένα από τις ελαφρές κυψελοειδείς δομές που συναντώνται στην φύση είναι ικανά να συνδυάσουν τις συχνά αντιτιθέμενες απαιτήσεις της μείωσης του βάρους, διατηρώντας παράλληλα υψηλή δομική απόδοση τους. Συνήθως, αυτά τα υλικά είναι ελαφρύτερα από τους παραδοσιακούς τύπους μεταλλικών υλικών. Η δομή των περιοδικών κυψελοειδών υλικών είναι ελαστικά κυριαρχούμενη, που σημαίνει πως οι αντοχές αυξάνονται γραμμικά με την σχετική πυκνότητα. Επίσης, επιδεικνύουν υψηλό πορώδες που έχει 20% ή λιγότερο όγκο από τον εσωτερικό όγκο που καταλαμβάνεται από το στερεό. Ακόμα, είναι διαμορφωμένα από μοναδιαίες κυψελίδες οι οποίες επαναλαμβάνονται σε τρεις διαστάσεις, κάτι που βοηθά στην εξαγωγή των ισοδύναμων ελαστικών και άλλων φυσικών ιδιοτήτων με τις μαθηματικές μεθόδους ομογενοποίησης, μερικές από τις οποίες θα τις δούμε παρακάτω. Η πλειοψηφία των περιοδικών τοπολογιών στο κυψελοειδές υλικό είναι πιο κοινά κατηγοριοποιημένη σε τρεις τύπους, τα honeycomb, τα πρισματικά και τα δικτυωτά όπως φαίνεται στην εικόνα 1.2.



Εικόνα 1.2: Περιοδικές τοπολογίες κυψελοειδών υλικών (Wadley, 2006)

- *Στοχαστικά Κυψελοειδή Υλικά*

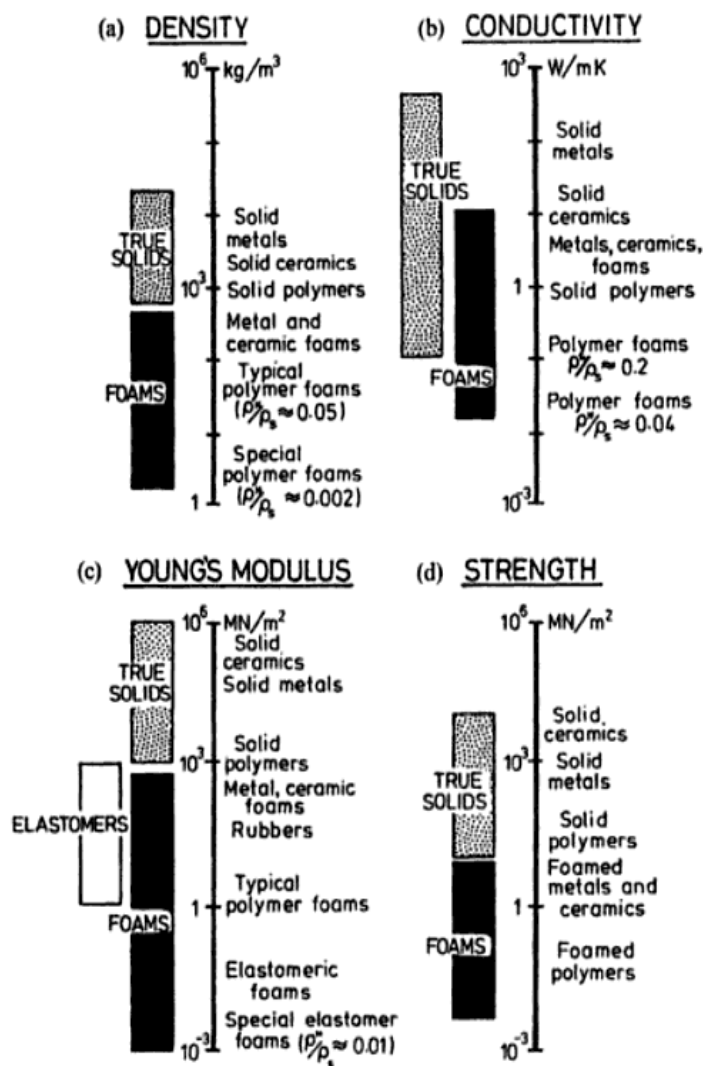
Τα στοχαστικά κυψελοειδή υλικά κατέχουν μια αυθαίρετη αρχιτεκτονική. Αυτή η αυθαίρετη γεωμετρία συναντιέται στην φύση σε υλικά όπως το ξύλο, τα κόκκαλα και τα σφουγγάρια, καθώς επίσης και στους χειροποίητους πολυμερείς και μεταλλικούς αφρούς, που αποτελούν και τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα στοχαστικών κυψελοειδών υλικών. Οι πόροι και τα κενά τους κατανέμονται τυχαία στον όγκο τους και οι υποκατηγορίες τους είναι τα ανοιχτών - και τα κλειστών - κελιών (open and closed cells) (εικόνα 1.1.a και 1.1.b), όπως αναφέρθηκαν πιο πάνω. Όλες τους οι ιδιότητες εξαρτώνται από την σχετική τους πυκνότητα, όπως σε όλα τα κυψελοειδή.

Παρόλο που έχουν γίνει εκτενείς μελέτες για αυτή την κατηγορία, ειδικά για τους αφρούς από μέταλλα, πολυμερή και κεραμικά, η ακριβή τους συμπεριφορά είναι πολύ

δύσκολο να προσδιοριστεί λόγω της ακανόνιστης δομής τους, των μη προβλεπόμενων ατελειών τους και της ανόμοιας κοιλότητας των τειχών των κελιών τους, ακόμα και λαθών κατά την παραγωγή τους. Γι' αυτό η δυσκαμψία και η αντοχή τους μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, κάνοντας την χρήση τους πολύ σπάνια στις απαιτητικές δομικές εφαρμογές, παρόλο που γίνονται ερευνητικές προσπάθειες προς αυτήν την κατεύθυνση.

1.2.4 Ιδιότητες Κυψελοειδών Υλικών

Ο αφρός επεκτείνει δραστικά το εύρος των ιδιοτήτων που είναι διαθέσιμες στον μηχανικό. Τα κυψελοειδή υλικά έχουν φυσικές, μηχανικές και θερμικές ιδιότητες που μετρούνται με τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται στα απολύτως πυκνά στερεά. Η εικόνα 1.3 δείχνει το εύρος τεσσάρων από αυτές τις ιδιότητες: της πυκνότητας, της θερμικής αγωγιμότητας, του μέτρου ελαστικότητας και της θλιπτικής αντοχής. Η μπάρα με τη μαυρισμένη απόχρωση δείχνει το εύρος της ιδιότητας που περιλαμβάνεται από τα συμβατικά υλικά ενώ η ενιαία μπάρα δείχνει την επέκταση αυτού του εύρους που είναι πιθανό να γίνει από τον αφρό. Αυτή η μεγάλη επέκταση των ιδιοτήτων δημιουργεί εφαρμογές για τα κυψελοειδή που δεν μπορούν εύκολα να καλυφθούν από τα απολύτως συμπαγή υλικά και δίνει χώρο για την ευρηματικότητα του/της μηχανικού που θα τα χρησιμοποιήσει. Οι χαμηλές πυκνότητες επιτρέπουν τον σχεδιασμό ελαφρών, δύσκαμπτων στοιχείων όπως τα *sandwich panels* και των μεγάλων φορητών δομών, ακόμα και των πλεούμενων στοιχείων όλων των ειδών. Η χαμηλή θερμική αγωγιμότητα επιτρέπει τη φθηνή, αξιόπιστη θερμική μόνωση η οποία μπορεί να υπερκεραστεί μόνο από τις ακριβές μεθόδους κενού. Επίσης, η χαμηλή δυσκαμψία κάνει τους αφρούς ιδανικούς για μια ευρεία ποικιλία προστατευτικών εφαρμογών, όπως οι ελαστομερείς αφροί που είναι τυπικά υλικά για καθίσματα. Οι χαμηλές αντοχές και οι υψηλές παραμορφώσεις κάνουν τους αφρούς ελκυστικούς για εφαρμογές απορρόφησης ενέργειας, όπου υπάρχει μια πλατιά αγορά για κυψελοειδή υλικά για την προστασία πολλών προϊόντων, από τους υπολογιστές έως τους μεταλλικούς κυλινδρικούς κάδους για τα επιβλαβή λύματα.



Εικόνα 1.3: Το εύρος των ιδιοτήτων που είναι διαθέσιμο στον μηχανικό μέσω των αφρωδών υλικών, (a) πυκνότητα, (b) θερμική αγωγιμότητα, (c) μέτρο του Young, (d) θλιπτική αντοχή (Gibson, Ashby, 1997)

1.2.5 Εφαρμογές Κυψελοειδών Υλικών

Τα τέσσερα διαγράμματα της εικόνας 1.3 σχετίζονται απευθείας σε τέσσερις κύριες περιοχές εφαρμογής κυψελοειδών υλικών: τη θερμική μόνωση, τις συσκευασίες, τις δομικές χρήσεις και την άνωση. Αυτές είναι οι κυριότερες περιοχές χρήσης τους, αλλά υπάρχουν και άλλες, μικρότερες περιοχές εφαρμογών που είναι σημαντικές όπως είναι οι διαδικασίες χύτευσης μετάλλων, τα πατώματα, η ακουστική και η ραδιοφωνία.

1.3 Υλικά Honeycomb

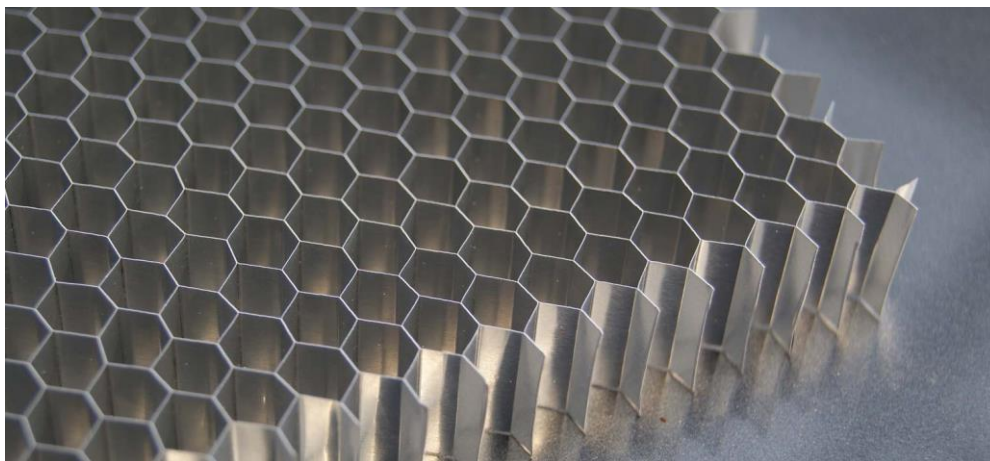
Τα υλικά honeycomb είναι η πιο χαρακτηριστική περίπτωση χειροποίητων περιοδικών κυψελοειδών υλικών, που βρίσκουν εφαρμογή σε δομικά στοιχεία. Αποτελούνται από κυψέλες διάφορων μορφών, εξαγωνικών, τετραγωνικών και τριγωνικών, που επαναλαμβάνονται ώστε να γεμίσουν τον χώρο που καταλαμβάνει το υλικό, καταλήγοντας να σχηματίσουν ένα σχήμα κερήθρας (honeycomb), εξ ου και το όνομα τους. Η παρούσα εργασία ασχολείται με την μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς αυτών των υλικών σε σύνθετες δομές, κάτι που καθιστά απαραίτητη μια αναδρομή στην ιστορία τους, μια περιγραφή του τρόπου παραγωγής τους, των ειδών τους και των κριτηρίων για την επιλογή τους.

1.3.1 Ιστορική αναδρομή

Τα honeycomb αποτελούνται από ένα σύνολο ανοιχτών κελιών, που έχουν μορφοποιηθεί από πολύ λεπτά φύλλα, συνήθως μετάλλου, κολλημένα μεταξύ τους. Πιο συνηθισμένα, οι κυψέλες σχηματίζουν εξάγωνα αλλά υπάρχουν και άλλες μορφές.

Μπορούν να φτιαχτούν από οποιοδήποτε λεπτό επίπεδο υλικό και έχουν κατασκευαστεί έως σήμερα πάνω από πενήντα διαφορετικά είδη honeycomb. Χάρτινα honeycombs φτιάχτηκαν πριν από 2000 χρόνια από τους Κινέζους, οι οποίοι τα χρησιμοποίησαν ως διακοσμητικά στοιχεία και όχι ως συστατικά υλικά των δομικών στοιχείων όπως σήμερα. Παρόλα αυτά, ακόμα και σήμερα, εμφανίζονται χρήσεις honeycombs ως διακοσμητικά στοιχεία.

Η πρώτη πατέντα για τον πυρήνα honeycomb, κατοχυρώθηκε στον Budwing στην Γερμανία το 1905 και αφορούσε την παραγωγή του honeycomb από χαρτί Kraft. Μια από τις πρώτες χειροποίητες δομές sandwich που έχουν καταγραφεί, ήταν μια σωληνοειδής σιδηροδρομική γέφυρα στην Ουαλία χτισμένη το 1845. Αποτελούνταν από έναν μεγάλο, ορθογώνιας διατομής, σωλήνα στο δάπεδο του οποίου ήταν τοποθετημένες οι ράγες πάνω στις οποίες έτρεχε το τραίνο. Το άνω μέρος της σωληνοειδούς κατασκευής αποτελούνταν από δύο επίπεδες πλάκες συνδεδεμένες μεταξύ τους με τετραγωνικές ξύλινες κυψελίδες.



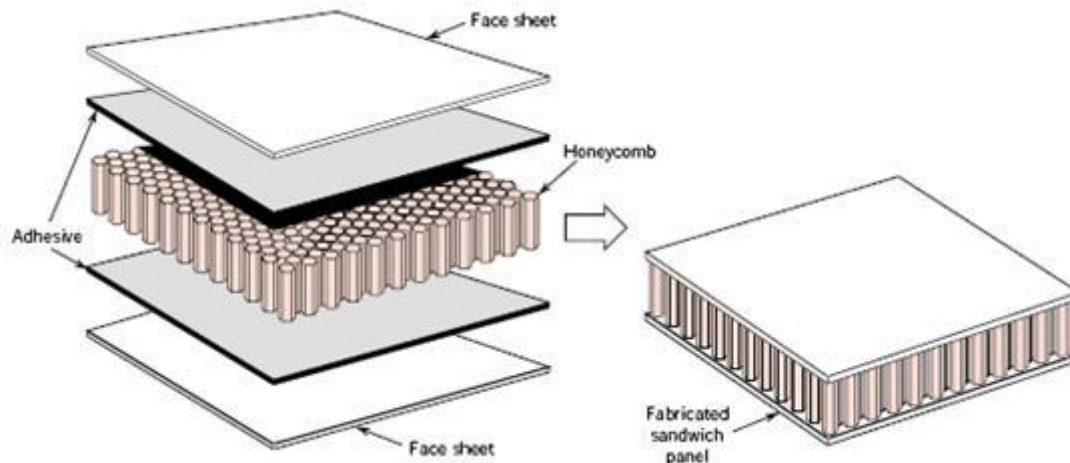
Εικόνα 1.4: Honeycomb με εξαγωνικές κυψέλες (Πηγή: Agrosy International)

Το 1919 κατασκευάστηκε το πρώτο πάνελ sandwich για αεροσκάφη χρησιμοποιώντας πλάκες από ξύλο μαόνι συνδεδεμένες μεταξύ τους με πυρήνα ξύλου balsa και χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την σχεδία στήριξης της πλωτής γέφυρας στα υδροπλάνα. Αργότερα, μεταξύ των δύο Παγκοσμίων Πολέμων, πλάκες από κόντρα πλακέ συνδεδεμένες με πυρήνα balsa, αποτέλεσαν κύριο δομικό στοιχείο των ιταλικών υδροπλάνων. Ένα ολόκληρο σμήνος από αυτά τα αεροσκάφη πέταξαν στην Βραζιλία την δεκαετία του 1920 και άλλο ένα πέταξε στην έκθεση του Σικάγου την δεκαετία του 1930 – μια πραγματικά αξιοσημείωτη επίδειξη πτήσης για εκείνη την περίοδο.

Η παραγωγή των σύγχρονων δομικών honeycomb πιθανώς ξεκίνησαν στα τέλη της δεκαετίας του 1930 όταν ο J.D.Lincoln παρασκεύασε ένα χάρτινο honeycomb για χρήση σε έπιπλα της εταιρίας του στην πολιτεία της Βιρτζίνια των Η.Π.Α. Το υλικό χρησιμοποιήθηκε επίσης και σε πάνελ sandwich ως ένα παχύ στρώμα honeycomb που συνέδεε πλάκες σκληρού ξύλου.

Με το ξέσπασμα του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου τα χάρτινα honeycombs χρησιμοποιήθηκαν από την εταιρία Glen L. Martin στα προστατευτικά των κεραιών ραντάρ, οι οποίες τότε βρισκόντουσαν στα σπάργανα. Παρόλο που ήταν αρκετά επιτυχημένη η χρήση τους, ο πυρήνας μάζευε αρκετή υγρασία. Ο Martin αργότερα ανέπτυξε ένα honeycomb από βαμβακερό ύφασμα και έως το τέλος του πολέμου ανέπτυξε έναν πυρήνα honeycomb γυαλί και φύλλα αλουμινίου.

Την ίδια εποχή η αεροπορική εταιρία de Havilland σχεδίασε και κατασκεύασε το βομβαρδιστικό Mosquito, που είχε πάνελ sandwich σε μέρη της δομής του. Η εξαιρετική απόδοση που εμφάνισε αυτό το αεροσκάφος οδήγησε στην αποδοχή από πολλούς σχεδιαστές, ειδικά στην Αγγλία, των δομών sandwich ως μέσα για πιο αποδοτικά και υψηλότερων απαιτήσεων αεροπλάνα. Ως αποτέλεσμα, πολλές ομάδες σχεδιαστών άρχισαν να εξετάζουν καλύτερους τρόπους για την δημιουργία δομών sandwich και καλύτερα υλικά για τους πυρήνες και τις πλάκες.



Εικόνα 1.5: Σύνθετη δομή sandwich με πυρήνα honeycomb

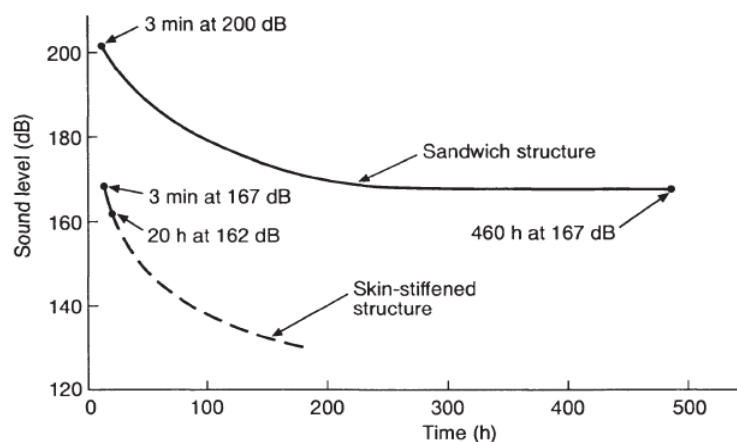
Δεν ήταν όμως πριν το 1945 που το πρώτο αποτελούμενο εξ ολοκλήρου φτιαγμένο από αλουμίνιο sandwich πάνελ παρασκευάστηκε. Η πραγματική υπέρβαση ήρθε εξαιτίας της ανάπτυξης κολλών για την σύνδεση των πλακών με τον πυρήνα. Οι κόλλες που αναπτύχθηκαν είχαν τις σωστές ρεολογικές ιδιότητες για χρήση στο honeycomb. Αυτές οι κόλλες παρέμεναν στις άκρες των κελιών των honeycombs όταν συνδεόντουσαν με τις εξωτερικές πλάκες. Τα προηγούμενα κολλητικά δεν παρέμεναν στην άνω επιφάνεια των honeycomb και έρεαν στους τοίχους των κελιών, συνεπώς, δεν ήταν εφικτό να επιτευχθεί καλός δεσμός με τις εξωτερικές επιφάνειες. Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειωθεί πως εκείνη την περίοδο τα περισσότερα κολλητικά ανάδυσαν επικίνδυνες οσμές κατά το στέγνωμα τους, έτσι οι honeycomb πυρήνες αλουμινίου έπρεπε να τρυπηθούν πριν τοποθετηθούν ώστε να επιτρέψουν την απόδραση των αερίων κατά την διάρκεια του στεγνώματος. Εάν τα τείχη δεν τρυπιόντουσαν, η ανάπτυξη πίεσης λόγω των αερίων μπορεί να απέτρεπε την σωστή σύνδεση και να οδηγούσε στην έκρηξη του πυρήνα λόγω εσωτερικής συμπίεσης. Σήμερα, τα περισσότερα σύγχρονα κολλητικά είναι 100% στέρεα και δεν αναδύουν επικίνδυνα αέρια, γι' αυτό τον λόγο, τα honeycomb δεν είναι ανάγκη να διατρηθούν. Αυτή την περίοδο, ο πυρήνας τρυπιέται μόνο για χρήση του σε κάποιες αεροδιαστημικές εφαρμογές.

Η εικόνα 1.5 δείχνει ένα τυπικό πάνελ sandwich με πυρήνα honeycomb το οποίο αποτελείται από τις εξωτερικές επιφάνειες, την κόλλα και τον πυρήνα. Τα honeycombs δεν χρησιμοποιούνται μόνο στα sandwich πάνελ, αλλά έχουν πολλές άλλες εφαρμογές, όπως στην απορρόφηση ενέργειας, στον προσανατολισμό του αέρα, στα θερμικά και ακουστικά πάνελ, στην διάχυση του φωτός και στην προστασία των ραδιοφωνικών συχνοτήτων.

1.3.2 Οι λόγοι για την χρήση τους

Γιατί και πότε θα έπρεπε να χρησιμοποιείται μια δομή sandwich με honeycomb πυρήνα; Ο βασικός λόγος για να ελαττώσουμε το βάρος, με τις λείες επιφάνειες και την εξαιρετική αντίσταση στην κόπωση να είναι επίσης χαρακτηριστικά ενός πάνελ honeycomb.

Η εξαιρετική αντίσταση τους σε κόπωση ένα πραγματικό πλεονέκτημα για την κατασκευή ενός sandwich. Η εικόνα 1.6 δείχνει τα αποτελέσματα του τεστ ηχητικής κόπωσης, συγκρίνοντας ένα πάνελ honeycomb με μια δομή δύσκαμπτης επιφάνειας. Σημειώστε πως το honeycomb πάνελ άντεξε 460 ώρες στα 167dB ενώ το συμβατικό δομικό στοιχείο άντεξε μόλις 3 λεπτά. Δηλαδή, το honeycomb πάνελ άντεξε 9200 φορές περισσότερο. Ο λόγος για την μεγαλύτερη αντοχή σε κόπωση του honeycomb είναι ότι στην κατασκευή με τα φύλλα και τα δοκάρια χρησιμοποιούνται ηλώσεις, που προκαλούν συγκεντρώσεις τάσεων και οδηγούν σε πρόωρη αστοχία. Οι εξωτερικές πλάκες των πάνελ honeycomb είναι συνεχώς συνδεδεμένες με τον πυρήνα και παρουσιάζονται μικρότερες συγκεντρώσεις τάσεων.

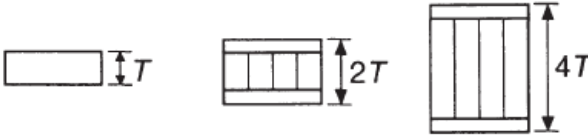


Εικόνα 1.6: Συγκριτική αντίσταση σε ηχητική κόπωση συμβατικών δομών και δομών sandwich (Bitzer,1997)

Αλλά ο κύριος λόγος για την χρησιμοποίηση honeycomb είναι η ελάττωση του βάρους. Ο πίνακας 1.1 συγκρίνει τις τιμές της αντοχής και της δυσκαμψίας από διαφορετικές δομές honeycomb που φτιάχτηκαν χρησιμοποιώντας ένα κομμάτι αλουμινίου πάχους 0.064 in. (1.6mm) χωρισμένο στα δύο, ως τις πάνω και κάτω πλάκες του sandwich. Το sandwich στην άκρη δεξιά είναι 37 φορές πιο δύσκαμπτο από το επίπεδο φύλλο αλουμινίου και 7 φορές πιο δυνατό ως προς την καμπτική δυσκαμψία, ακόμα ζυγίζει μόνο 9% περισσότερο από την συμπαγή πλάκα. Παρόλα αυτά, κοστίζει περισσότερο.

Όταν το χαμηλότερο βάρος είναι κριτήριο σχεδιασμού, το honeycomb θα πρέπει να χρησιμοποιείται εάν τα κελύφη έχουν πρόβλημα λυγισμού. Εάν τα φορτία είναι πολύ μεγάλα και απαιτούνται παχιές εξωτερικές πλάκες (χωρίς προβλήματα λυγισμού), ένα φύλλο ενισχυμένο με μια δοκό (sheet and stringer structure) ή ένα σχήμα που να προέρχεται από εξώθηση μπορεί να είναι η πιο οικονομική λύση. Άλλη κατάσταση όπου το honeycomb μπορεί να μην είναι η καλύτερη εναλλακτική είναι όταν τα φορτία είναι πολύ μικρά και ένα πολύ λεπτό κέλυφος πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη αστοχίας. Για παράδειγμα, εάν το ελάχιστο στρώμα που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί είναι πάχους 0.040 in. (1mm), η μονόπλευρη δομή φύλλου με ενισχυτική δοκό θα πρέπει να είναι ελαφρύτερη από ένα δίπλευρο πάνελ honeycomb με στρώματα πάχους 0.040 in. (1mm). Όμως, αυτές οι καταστάσεις δεν είναι ο κανόνας και στις περισσότερες περιπτώσεις, με συνέπεια ένα πάνελ honeycomb μπορεί να εξοικονομήσει πολύ μεγάλο βάρος.

Πίνακας 1.1: Αποτελεσματικότητα honeycomb sandwich (Bitzer,1997)



Relative stiffness	1	7	37
Deflection (in.)	1.000	0.140	0.027
Relative bending strength	1	3	7
Weight (psf)	0.910	0.978	0.994

Assumes 0.064 in. (1.626 mm) aluminum, 3.0 pcf (48 kg/m³) core, 0.03 psf (1.4 N/m²) adhesive.

Σε σχέση με τις δομές που χρησιμοποιούν αφρό, οι αντοχές των δομών honeycomb είναι πολύ καλύτερες και το μέτρο διάτμησης είναι σημαντικά μεγαλύτερο. Συνεπώς, όταν οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού του πυρήνα κυριαρχούν τον σχεδιασμό του sandwich, το honeycomb είναι η καλύτερη επιλογή. Ο αφρός έχει τη θέση του στα ελαφρώς φορτισμένα πάνελ και στα μονωτικά πάνελ, παρόλα αυτά, το honeycomb μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτές τις περιπτώσεις, γειμίζοντας τις κυψέλες με αφρό ή με ένα άλλο μονωτικό υλικό. Αυτό αποδίδει ένα καλό δομικό πάνελ με καλές μονωτικές ιδιότητες.

Ακόμα σε σχέση με τα πάνελ αφρού, τα πάνελ honeycomb υπερτερούν και όταν υπάρχει πρόβλημα λυγισμού του εξωτερικού στρώματος, καθώς ένα sandwich με πυρήνα honeycomb είναι δύσκολο να κερδίσει τα κριτήρια για το βάρος. Ο πίνακας 1.3 συγκρίνει μερικές τυπικές κατασκευές πάνελ για ένα δοσμένο φορτίο. Όλα αυτά τα πάνελ πάχους 1 in. (2.5mm) και βάρους ίσο με 3.0 psf (14.6 kg/m³), αντικαθιστώντας τις συμπαγείς δοκούς κόντρα πλακέ. Τα αποτελέσματα θα είναι ελαφρώς διαφορετικά ανάλογα με το άνοιγμα, το φορτίο και το πάχος του πάνελ που έχουν επιλεγεί, αλλά αυτός ο πίνακας δεν δείχνει τις γενικές αρχές που χρησιμοποιεί. Ο αφρός έχει μικρότερη διατμητική αντοχή και μικρότερο μέτρο διάτμησης από το honeycomb, γι' αυτό το λόγο έχει χαμηλότερη ικανότητα φορτίου και δίνει μεγαλύτερη μετατόπιση. Τα φύλλα και οι ενισχυτικές δοκοί και οι εξωθήσεις έχουν λεπτά φύλλα τα οποία μπορούν να λυγίσουν, επομένως δεν μπορούν να φέρουν τόσο φορτίο όσο μια δοκός honeycomb.

Πίνακας 1.2: Σύγκριση μεταξύ των πυρήνων honeycomb και αφρών (Bitzer,1997)

<i>Material</i>	<i>Compression</i>			<i>Shear</i>	
	<i>Density (pcf)</i>	<i>Strength (psi)</i>	<i>Modulus (ksi)</i>	<i>Strength (psi)</i>	<i>Modulus (ksi)</i>
Aluminum honeycomb	3.1	300	75	210	45
Nomex honeycomb	3.0	325	20	175	6
Fiberglass honeycomb	3.0	410	23	195	19
Rohacell foam	3.1	128	10	114	3
Klegecell foam	3.0	69	2.7	51	1.1
Rigicell foam	3.0	80	2.5	70	2.5
Divinycell foam	3.1	100	10.2	73	2.5

1 ksi = 1000 psi.

Συνήθως, οι ενισχύσεις ή τα δίκτυα εξώθησης ζυγίζουν περισσότερο από τον πυρήνα honeycomb χαμηλής πυκνότητας. Για να διατηρηθούν όλες οι δοκοί στο ίδιο βάρος μερικά από τα υλικά για τα εξωτερικά στρώματα πρέπει να μειωθούν, επομένως αυτές οι δοκοί παραμορφώνονται λίγο περισσότερο ή για να το θέσουμε διαφορετικά, είναι λιγότερο δύσκαμπτες.

1.3.3 Υλικά για τη παραγωγή honeycomb

Από την δεκαετία του 1940 τα honeycomb φτιάχνονται από διαφορετικά υλικά, καθώς τα honeycomb μπορούν να φτιαχτούν από οποιοδήποτε λεπτό επίπεδο υλικό. Μερικά από τα πιο κοινά υλικά που είναι σήμερα σε χρήση είναι:

- Μεταλλικά: Αλουμίνιο, ανοξείδωτος χάλυβας, τιτάνιο.
- Μη – Μεταλλικά: Ίνες γυαλιού, χαρτί Nomex, χαρτί Kraft.

Μερικά από τα πιο ασυνήθιστα υλικά που χρησιμοποιούνται είναι ο χαλκός, το μολύβι, ο ασβέστης, το Karton, το Mylar και το Kevlar. Ένα νέο υλικό είναι το ύφασμα άνθρακα (carbon fabric), το οποίο παράγει honeycomb που έχει εξαιρετικά υψηλές μηχανικές ιδιότητες, ειδικά για ένα μη μεταλλικό πυρήνα. Στην πραγματικότητα, είναι ο μόνος μη μεταλλικός πυρήνας με μέτρο διάτμησης τόσο μεγάλο όσο ένας πυρήνας αλουμινίου.

Τα κράματα αλουμινίου που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι τα 3003 για τα εμπορικής ποιότητας honeycomb και τα 5052, 5056, 2024 για συγκεκριμένες ποιότητες με το 5052 να είναι το πιο κοινό. Το κράμα 2024 χρησιμοποιείται όταν συναντιούνται υψηλές θερμοκρασίες λειτουργίας. Μπορεί να αντέξει στους 420 °F (216°C) ενώ οι άλλοι πυρήνες κραμάτων αλουμινίου έχουν θερμοκρασία λειτουργίας 350 °F (177°C). Το χαρτί Nomex εμφανίζει εμπορική ποιότητα, E -78 (τώρα T - 722) και ειδική ποιότητα 412. Το χαρτί Nomex παράγει honeycomb με λίγο μικρότερες μηχανικές ιδιότητες, αλλά δεν περνά την απαίτηση για την απομένουσα πυράκτωση και μπορεί να αναφλέγεται εύκολα.

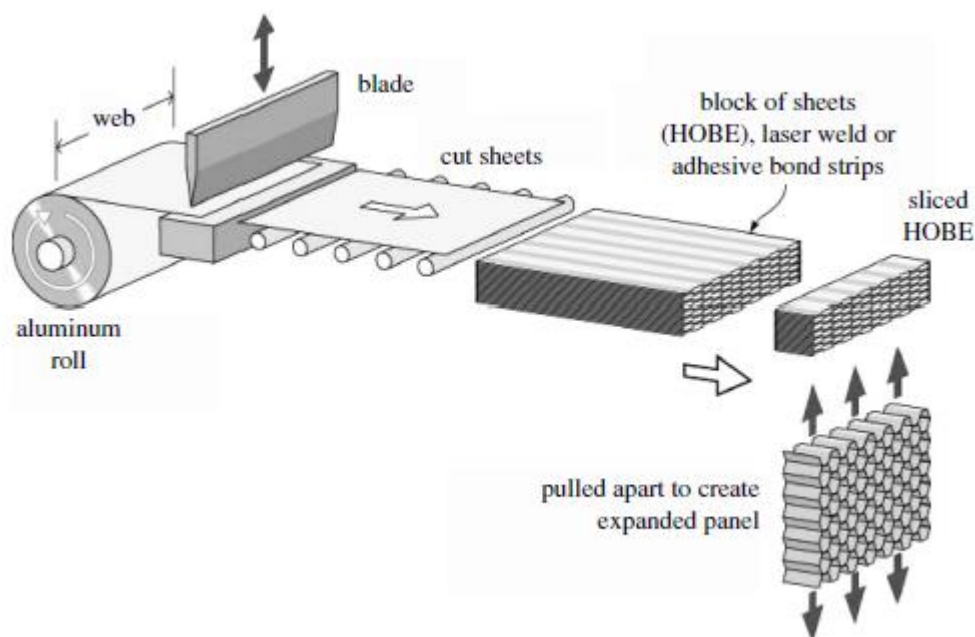
Οι πυρήνες honeycomb από ίνες γυαλιού φτιάχνονται από τις ακόλουθες επίπεδες υφάνσεις: 106,108,116,117 και 1526. Το 106 είναι το λεπτότερο και το ελαφρύτερο, επομένως, χρησιμοποιείται για πυρήνες χαμηλής πυκνότητας. Το χαρτί Kraft χρησιμοποιείται χωρίς προσμίξεις ή με πρόσμιξη ρητίνης από 11 έως 25% στο ολικό βάρος του, με πρόσθεση αλάτων που επιβραδύνουν την φλόγα μπορούν να προστεθούν για να επιτρέψουν στο honeycomb από χαρτί Kraft να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις για την έκταση της αυτανάφλεξης. Τα κράματα ανοξείδωτων χαλύβων που χρησιμοποιούνται στους πυρήνες είναι τα 17 - PH, PH 15 - 7, AM 350, AM 355, 316L και 347. Οι πυρήνες τιτανίου φτιάχνονται από το εμπορικά καθαρά φύλλα κραμάτων 6Al -

4V, 6Al – 2Sn – 4Zr – 2Mo και 3Al – 2.5V. Τέλος, τα Inconel και Hastelloy – X είναι δύο βασισμένα στο νικέλιο κράματα τα οποία χρησιμοποιούνται κι αυτά για να φτιαχτούν πυρήνες honeycomb.

1.3.4 Μέθοδοι Παραγωγής Honeycomb

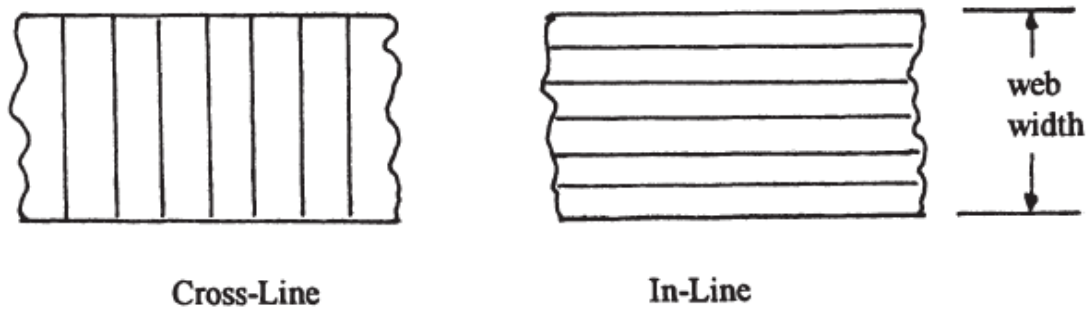
Υπάρχουν πέντε βασικοί τρόποι για την παραγωγή των πάνελ honeycomb: σύνδεση με κόλλα, συγκόλληση με αντίσταση, σύνδεση με διάχυση και θερμική συνένωση. Αυτές οι μέθοδοι βασίζονται στο πως προσκολλώνται οι επιφάνειες σύνδεσης. Με διαφορά ο πιο κοινός τρόπος παραγωγής είναι η σύνδεση με κόλλα, ίσως το 95% των πάνελ honeycombs φτιάχνονται με αυτόν τον τρόπο. Η συγκόλληση με αντίσταση ή η σύνδεση με διάχυση χρησιμοποιούνται μόνο για πυρήνες που θα συναντήσουν υψηλές θερμοκρασίες ή ακραίες περιβαλλοντικές συνθήκες καθώς είναι οι πιο ακριβές διαδικασίες. Η υψηλότερη θερμοκρασία που μπορούν να αντέξουν οι επιφάνειες σύνδεσης με σύνδεση από κόλλα είναι γύρω στους 750°F (339°C) και αυτό επιτυγχάνεται με κόλλες πολυαμιδίου. Συνήθως χρησιμοποιούνται τα κολλητικά του εποξικού νάιλον και των φενολικών νιτριλίου και μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους είναι γύρω στους 400°F (204°C). Σε μερικά θερμοπλαστικά υλικά έχουν θερμανθεί οι επιφάνειες σύνδεσης τους έτσι ώστε να λιώσουν και κατόπιν πιέζονται μαζί με τις δύο λωρίδες φύλλων να τήκονται πάνω σε αυτές. Σε αυτή την μέθοδο δεν απαιτείται κολλητικό.

Όσον αφορά την μετατροπή ενός φύλλου υλικού σε honeycomb, υπάρχουν δύο βασικές τεχνικές: η διαδικασία της επιμήκυνσης και η διαδικασία της αυλάκωσης.



Εικόνα 1.7: Παραγωγική διαδικασία επιμήκυνσης (Wadley, 2006)

Σχεδόν όλοι οι συνδεδεμένοι με κόλλα πυρήνες φτιάχνονται από τις πιο αποδοτικές μεθόδους επιμήκυνσης (*expansion*) όπως παρουσιάζονται στην εικόνα 2.1. Για μεταλλικούς πυρήνες, μια επικάλυψη που αντιστέκεται στην διάβρωση εφαρμόζεται στα φύλλα, και οι γραμμές που θα περάσει η κόλλα είναι τυπωμένες. Τα φύλλα κόβονται και τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο και η κόλλα στεγνώνει υπό πίεση σε αυξημένη θερμοκρασία. Μετά τα κομμάτια που σχηματίζονται, κόβονται στο απαιτούμενο πάχος και επιμηκώνονται. Όταν οι μεταλλικοί πυρήνες επιμηκώνονται, τα φύλλα διαρρέουν πλαστικά στις συνδέσεις των ελεύθερων από κόλλα επιφανειών και επομένως διατηρούν το επιμηκυμένο γεωμετρικό σχήμα.

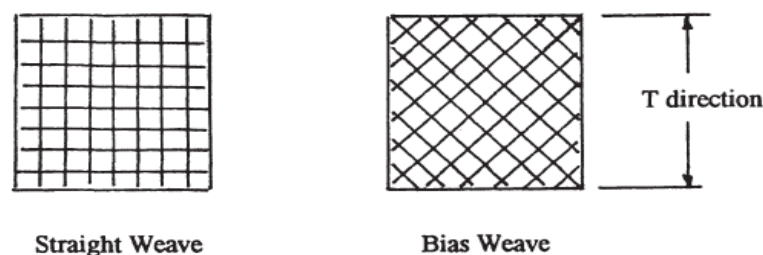


Εικόνα 1.8: Προσανατολισμός γραμμών που θα περάσει η κόλλα (Bitzer,1997)

Η διαδικασία για τα honeycomb από μη μεταλλικά υλικά είναι ελαφρώς διαφορετική. Εδώ το honeycomb δεν διατηρεί το σχήμα του μετά την επιμήκυνση και πρέπει να κρατηθεί σε μια σχάρα. Το κομμάτι από το υλικό διατηρεί μια μικρή ποσότητα ρητίνης που λιώνει στον φούρνο. Έπειτα το κομμάτι honeycomb, συνήθως με διαστάσεις 4ft x 8ft και 3ft πάχος (1.2m x 2.4m και 0.9m παχύ), βουτιέται σε ένα υγρό ρετσίνι (συνήθως από φενόλιο ή πολυαμίδιο) και ψήνεται σε φούρνο. Ο κύκλος βουτήγματος – ίασης επαναλαμβάνεται έως ότου το κομμάτι να βρεθεί στην επιθυμητή πυκνότητα. Συνήθως μόνο δύο με τρεις βουτιές απαιτούνται, αλλά μερικές φορές το κομμάτι πρέπει να βουτηχτεί πάνω από 30 φορές. Οι περισσότεροι πυρήνες από ίνες γυαλιού πρέπει να παραμείνουν στην σχάρα ενώ οι διαδικασίες βουτήγματος και της ίασης στον φούρνο πραγματοποιούνται.

Οι γραμμές των επιφανειών κόλλησης μπορούν να τυπωθούν παράλληλα και κάθετα στο μήκος του κομματιού, όπως φαίνεται στην εικόνα 1.8. Στην πρώτη μέθοδο η διαμήκης διεύθυνση του πυρήνα δεν περιορίζεται στο πλάτος του υλικού όπως είναι στην τελευταία περίπτωση. Αυτό μπορεί να είναι σημαντικό στις εφαρμογές που απαιτούν ένα κομμάτι honeycomb με μακριά διαμήκη διεύθυνση.

Το πρώτο honeycomb από ίνες γυαλιού φτιάχτηκε από ύφασμα, όπως αυτό προήλθε από κύλιση ή από την $0^\circ - 90^\circ$ τετράγωνη πλέξη. Αργότερα ανακαλύφθηκε ότι μέτρο διάτμησης του honeycomb από ίνες γυαλιού ήταν πολύ μεγαλύτερο, μερικές φορές έως και τρεις φορές μεγαλύτερο, εάν το ύφασμα που χρησιμοποιούνταν είχε ύφανση στην διεύθυνση $\pm 45^\circ$, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.3. Είναι πιο ακριβό όμως να κάνεις πυρήνα με αυτό τον τρόπο καθώς το ύφασμα πρέπει να κοπεί και να ανακατασκευαστεί για να δώσει αυτή την κλίση κατά την κύλισης του υλικού. Ο πίνακας 2.1 δίνει τις μηχανικές ιδιότητες δύο πυρήνων honeycomb ινών γυαλιού/ phenolic 4.0 *psf* (64 kg/m^3) – με ευθεία και 45° πλέξη. Παρατηρήστε την μεγάλη διαφορά στο μέτρο διάτμησης. Οι άλλες μηχανικές ιδιότητες είναι σχεδόν ίδιες εκτός από το θλιπτικό ελαστικό μέτρο της τετράγωνης ή ευθείας πλέξης που είναι μεγαλύτερο όπως αναμενόταν καθώς οι ίνες γυαλιού είναι παράλληλες στο θλιπτικό φορτίο. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα του πυρήνα με συγκεκριμένη διεύθυνση είναι ότι είναι πιο δυνατός και πιο ανεκτικός στην βλάβη.



Εικόνα 1.9: Προσανατολισμοί ύφανσης (Bitzer,1997)

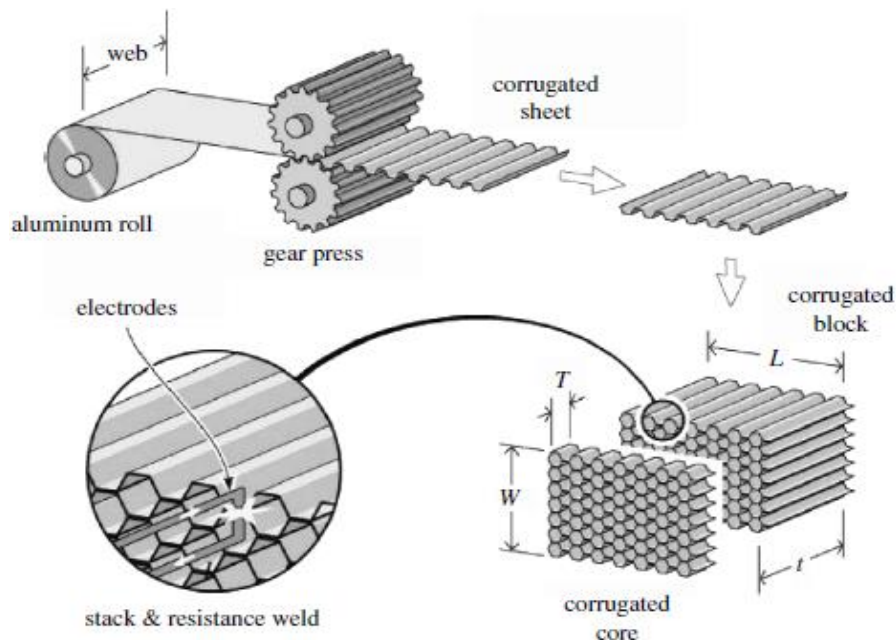
Κατά την διαδικασία της αυλάκωσης, τα φύλλα πρώτα αυλακώνονται και μετά το κολλητικό εφαρμόζεται στις επιφάνειες κόλλησης με τα φύλλα κατόπιν να τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο και να θερμαίνονται σε ένα φούρνο. Καθώς μόνο ελαφριά πίεση μπορεί να εφαρμοστεί στο πακέτο, οι κόμβοι επικόλλησης θα είναι πιο παχιοί από τον επιμηκυμένο πυρήνα. Στην πραγματικότητα, οι αυλακωτοί κόμβοι επικόλλησης μπορεί να είναι το 10% του ολικού βάρους του honeycomb ενώ μόνο το 1% ή λιγότερο από τον επιμηκυμένο πυρήνα. Μερικά μη μεταλλικά αυλακωτά κομμάτια πρέπει να φτάσουν στην τελική τους πυκνότητα βουτώντας τα στο ρετσίνι για να πετύχουν τον βέλτιστο λόγο ρετσίνοιου – ενίσχυσης.

Αντί της χρησιμοποίησης κολλών για την σύνδεση των κόμβων μερικοί μεταλλικοί αυλακωτοί πυρήνες έχουν τους κόμβους τους συνδεδεμένους με διάχυση ή σημειακή συγκόλληση. Αυτό επιτρέπει σε μερικούς πυρήνες φτιαγμένους από ανοξείδωτο χάλυβα να αντέχουν σε θερμοκρασίες έως και 1300 °F (704°C).

Πίνακας 1.3: Σύγκριση ιδιοτήτων μεταξύ ορθών και πλάγιων υφάνσεων των υφασμάτων honeycombs (Bitzer,1997)

<i>Property</i>	<i>HFT-3/16-4.0 45° bias</i>	<i>HRP-3/16-4.0 0°-90° straight</i>
Compression strength	550 psi	590 psi
Compression modulus	44 ksi	57 ksi
L shear strength	275 psi	310 psi
L shear modulus	23 ksi	13 ksi
W shear strength	140 psi	160 psi
W shear modulus	14 ksi	7 ksi

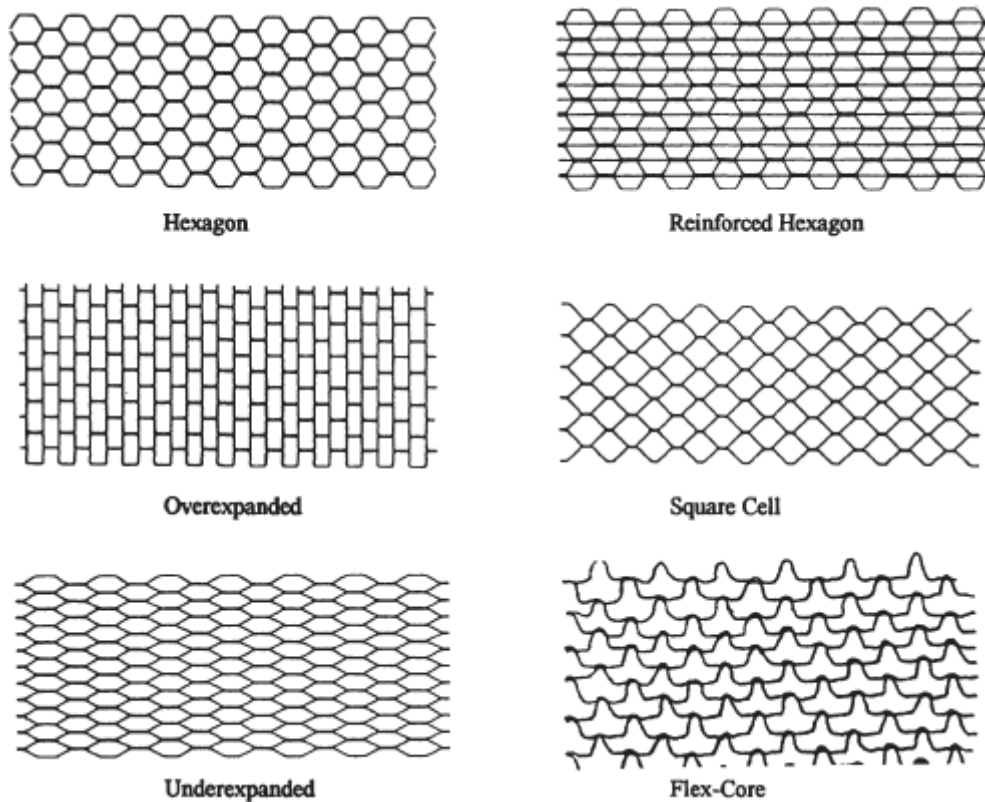
1 ksi = 1000 psi.



Εικόνα 1.10: Παραγωγική διαδικασία αυλάκωσης (Wadley, 2006)

1.3.5 Σχηματισμοί Κυψελών

Οι βασικές μορφές των κυψελών είναι εξάγωνες, τετράγωνες και με εύκαμπτο - πυρήνα. Μερικές ποικιλίες από αυτές τις διαμορφώσεις είναι τα υπέρ - εκτεταμένα, υπό - εκτεταμένα και τα ενισχυμένα honeycomb. Η εικόνα 2.8 δείχνει όλες αυτές τις διαμορφώσεις.



Εικόνα 1.11: Διαμορφώσεις κυψελών honeycomb (Bitzer,1997)

Η εξάγωνη κυψέλη είναι με διαφορά η πιο κοινή στα συνδεδεμένα με κόλλα honeycomb ενώ οι πυρήνες που είναι συνδεδεμένοι με συγκολλήσεις έχουν τετραγωνικές κυψέλες. Ο υπερεκτεταμένος πυρήνας δεν είναι παρά το συνηθισμένο εξάγωνο υπέρ - επιμηκυμένο σε μορφή ορθογωνίου. Αυτό επιτρέπει στον πυρήνα εύκολα να μορφωθεί σε κύλινδρο στην L διεύθυνση. Οι συνήθεις πυρήνες με εξαγωνικές κυψέλες δεν διαμορφώνονται εύκολα σε κοίλα σχήματα και πρέπει να περάσουν από κύλιση ή μορφωθούν θερμικά. Ο εύκαμπτος πυρήνας χρησιμοποιείται όταν το honeycomb πρέπει να μορφωθεί με σύνθετες καμπύλες καθώς αυτοί οι σχηματισμοί μπορούν να τυλιχθούν γύρω από ένα σφαιρικό σχήμα τόσο μικρό όσο μια μπάλα του baseball (χαμηλή πυκνότητα πυρήνα αλουμινίου).

Ενισχυμένα honeycomb έχουν ένα επιπλέον επίπεδο φύλλο τοποθετημένο στους κόμβους για να αυξήσουν την πυκνότητα και τις αντίστοιχες μηχανικές ιδιότητες. Ένας πυρήνας αλουμινίου με μεγάλη πυκνότητα όσο 55 psf (880 kg/m^3), έχει φτιαχτεί με αυτόν τον τρόπο. Ο σωληνένιος πυρήνας και ο πυρήνας ελικοειδούς πλέγματος κατασκευάζονται από ένα ελικοειδές τύλιγμα ενός αυλακωτού φύλλου με κολλητικό να εφαρμόζεται στους κόμβους και ένα επίπεδο φύλλο γύρω από μια βέργα και κατόπιν θερμαίνεται στο φούρνο. Αυτός ο τύπος πυρήνα χρησιμοποιείται αποκλειστικά ως απορροφητής ενέργειας.

1.3.6 Επιλογή Πυρήνα Honeycomb

Η επιλογή πυρήνα honeycomb για μια εφαρμογή μπορεί να γίνει ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Δεν είναι μόνο οι απαιτήσεις που αφορούν τις μηχανικές ιδιότητες των αντοχών και μέτρων ελαστικότητας, αλλά και ο περιβαλλοντικός παράγοντας που θα πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη: η έκθεση στην θερμοκρασία, η υγρασία, η μεταφορά νερού, η αντίσταση στην απορρόφηση υγρών, η ανοχή στην βλάβη, η αντίσταση στην κρούση. Συνήθως πρέπει να λαμβάνεται και το συνολικό κόστος του τμήματος.

Ακόμα, τα τεχνικά χαρακτηριστικά του πυρήνα εξαρτώνται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις παραγωγικές μεθόδους που θα ακολουθηθούν για την παρασκευή τους και τις ατέλειες που θα προκύψουν κατά την διάρκεια τους, κάνοντας την επιλογή πυρήνων με ιδιαίτερη γεωμετρία απαραίτητη μόνο σε ιδιαίτερες περιπτώσεις, όπως αυτές αναφέρονται πιο πάνω, υπό από αυστηρά τεχνικά πρότυπα.

Γενικά, οι πυρήνες αλουμινίου προσφέρουν τις καλύτερες μηχανικές ιδιότητες για το χαμηλότερο βάρος και κόστος και οι πυρήνες θερμοπλαστικών και Nomex προσφέρουν μεγαλύτερη αντοχή και ανοχή στην βλάβη. Οι εμπορικοί πυρήνες από χαρτί Kraft κοστίζουν λιγότερο.

Κεφάλαιο 2

Μηχανική των Υλικών Honeycomb

2.1 Εισαγωγή

Η ολοένα και αυξανόμενη χρήση των υλικών honeycomb στις κατασκευές, έκρινε την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς τους ως επιτακτική. Τα χειροποίητα πολυμερή, μεταλλικά και κεραμικά honeycombs διατίθενται σήμερα ως τυποποιημένα προϊόντα διαφόρων μεγεθών και διαστάσεων. Χρησιμοποιούνται όπως έχει αναφερθεί, σε μια ποικιλία εφαρμογών. Τα πολυμερή και τα μεταλλικά honeycombs ως πυρήνες των πάνελ sandwich που αποτελούν δομικά στοιχεία σε πολλές εφαρμογές από φτηνές πόρτες έως προηγμένες αεροναυπηγικές κατασκευές. Συγκεκριμένα, τα μεταλλικά honeycombs έχουν βρει εφαρμογή ως στοιχεία απορρόφησης ενέργειας, όπως για παράδειγμα, στα πέλματα του συγκροτήματος προσεδάφισης του διαστημοπλοίου Apollo 11, όπου χρησιμοποιήθηκαν αλουμινένια honeycombs που είχαν την ικανότητα να συνθλίβονται ως απορροφητές των συγκρούσεων. Από την άλλη πλευρά, τα κεραμικά honeycombs βρίσκουν χρήση στις παραγωγικές διαδικασίες υψηλής θερμοκρασίας, είτε ως μεταφορείς των καταλυτών και είτε ως ανταλλάκτες θερμότητας. Ακόμα, πολλά φυσικά υλικά, όπως είναι το ξύλο, μπορούν να εξιδανικευτούν και να αναλυθούν ως υλικά honeycomb. Εάν τέτοια υλικά χρησιμοποιούνται στα κατασκευές που φέρουν φορτία, η κατανόηση της μηχανικής τους είναι σημαντική.

Η μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των honeycomb είναι σημαντική όχι μόνο για την ευρεία εφαρμογή που έχουν αποκτήσει, αλλά και γιατί αποτελεί κατώφλι για την μελέτη και ανάλυση περισσότερων πολύπλοκων και ακανόνιστων δομών υλικών, όπως είναι οι αφροί (foams) και οι βιολογικοί ιστοί (tissues). Η μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς αυτών υλικών είναι πολύ δύσκολη, καθώς σχηματίζουν ένα περίπλοκο τρισδιάστατο δίκτυο που παραμορφώνεται με τρόπους που είναι δύσκολο να αναγνωριστούν. Αντιθέτως, τα honeycombs (και εν γένη τα περιοδικά κυψελοειδή υλικά), λόγω της κανονικοποιημένης γεωμετρίας και περιοδικότητας τους, παραμορφώνονται με τρόπους που είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμοι, με συνέπεια να μελετούνται και να δίνουν σχετικά ακριβείς εξισώσεις που περιγράφουν τις επιμέρους παραμορφώσεις τους. Τα αποτελέσματα κάθε ανάλυσης μπορούν να συγκριθούν με πειραματικά αποτελέσματα που έχουν προκύψει από δοκιμές σε φυσικά μοντέλα. Στην παρούσα εργασία, μελετώνται δομές honeycomb με συνέπεια να δίνεται χώρος μόνο στην δική τους μηχανική συμπεριφορά.

Η πειραματική διαδικασία που ακολουθείται συνήθως είναι η ακόλουθη. Το στρώμα ή στρώση honeycomb θλίβεται στο επίπεδο που κείτονται οι κυψέλες με τα τείχη των κυψελών αρχικά να λυγίζουν, δίνοντας ελαστική παραμόρφωση. Πέρα από μια κρίσιμη παραμόρφωση, διαρρέουν λόγω ελαστικού λυγισμού, πλαστικής διαρροής, ερπυσμού ή ψαθυρής θραύσης, φαινόμενα που εξαρτώνται από την φύση του υλικού των τειχών της κυψέλης. Η κατάρρευση της κυψέλης ολοκληρώνεται όταν τα απέναντι τείχη των κυψελών αγγίζουν το ένα το άλλο, καθώς οι κυψέλες μαζεύονται μεταξύ τους, η δομή τους πυκνώνει και η δυσκαμψία τους αυξάνεται απότομα. Τα υπό εντατική κατάσταση τείχη των κυψελών στην αρχή λυγίζουν, αλλά ο ελαστικός λυγισμός δεν είναι δυνατός. Εάν το υλικό των τειχών της κυψέλης διαρρέει πλαστικά το honeycomb επιδεικνύει εκτεταμένη πλαστικότητα, εάν τα τείχη είναι ψαθυρά αστοχεί. Στην εκτός αυτού του επιπέδου φόρτιση, τα τείχη των κυψελών υποφέρουν από εφελκυσμό ή από συμπίεση, με το μέτρο ελαστικότητας και τις τάσεις διαρροής να είναι πολύ μεγαλύτερες.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρατεθούν οι πιο σύγχρονες και τεκμηριωμένες αναλύσεις για την συμπεριφορά των honeycomb στην ελαστική περιοχή, που δίνουν τις ισοδύναμες ελαστικές σταθερές, μελετώντας την συμπεριφορά ενός αντιπροσωπευτικού στοιχείου που θεωρητικά είναι αρκετό για τον προσδιορισμό όλων των ελαστικών χαρακτηριστικών του honeycomb. Τα αποτελέσματα αυτών των αναλύσεων έχουν συγκριθεί με τα πειραματικά και έχει προκύψει αρκετά ικανοποιητική συμφωνία. Θα παρατεθούν ακόμη, κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των honeycomb, κυρίως όσον αφορά το λόγο Poisson που όπως είναι σημαντικά για την μοντελοποίηση, καθώς και μια περίληψη των διαθέσιμων στοιχείων που υπάρχουν σε σχέση με την συμπεριφορά τους σε κόπωση και ερπυσμό, που τα κάνουν ελκυστικά για τα πάνελ sandwich.

2.2 Ανασκόπηση των βασικών θεωριών για την μελέτη της Μηχανικής Συμπεριφοράς και των Ελαστικών Ιδιοτήτων των Honeycomb

Τα μοντέλα που έχουν βρει πλατιά αποδοχή και χρήση για τον προσδιορισμό των ελαστικών ιδιοτήτων είναι αυτά του Michael Ashby, της Joanna Gibson και των συνεργατών τους (1982,1988 και 1989). Οι αρχικές μελέτες τους (1982 και 1988) για το επίπεδο μέτρο ελαστικότητας επικεντρωνόντουσαν στην καμπτική παραμόρφωση των τειχών των κελιών με ενιαίο πάχος, δίνοντας μια καλή περιγραφή του μέτρου ελαστικότητας για honeycombs με σχετικά χαμηλή σχετική πυκνότητα. Έβρισκαν επίσης και το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας. Γενικά, αναφέρθηκε καλή συμφωνία μεταξύ των πειραματικών αποτελεσμάτων και των αποτελεσμάτων μοντελοποίησης για όλες τις ιδιότητες, παρόλο που παρατηρήθηκαν αρκετές ασυμφωνίες, ειδικά για τις επίπεδες διατμητικές ιδιότητες οι οποίες αποδόθηκαν στις αρπάγες της πειραματικής διάταξης. Αργότερα (1997), επέκτειναν τα μοντέλα ώστε να περιληφθούν και οι αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις στο επίπεδο μέτρο ελαστικότητας, καθώς επίσης και για τα τείχη με διπλό πάχος, που είναι αντιπροσωπευτικά πολλών honeycombs και που φτιάχνονται από παραγωγικές διαδικασίες αυλάκωσης και επιμήκυνσης, όπως αυτές αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1.

Οι παραπάνω προσθήκες έγιναν για να κυρίως συμπεριλάβουν τα φαινόμενα που αναφέρονται στα honeycombs με τα κάθετα τείχη διπλού πάχους, που έχουν μεγαλύτερη σχετική πυκνότητα και είναι οι καμπτικές, οι αξονικές και οι διατμητικές παραμορφώσεις των τειχών, καθώς και οι στρέψεις των συμβολών των τειχών κατά την παραμόρφωση τους. Αυτό έγινε αντικείμενο και πολλών άλλων μοντέλων, που τις λάμβαναν υπόψη με διαφορετικό τρόπο, αλλά όλα στηριζόντουσαν στην θεωρία των Ashby – Gibson. Ωστόσο, για τις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις οι σχέσεις που βασιζόντουσαν στην καμπτική συμπεριφορά των τειχών ήταν αρκετά επαρκείς.

Υπήρχαν αρκετοί περιορισμοί σε αυτά τα μοντέλα. Μια ακριβής έκφραση για το εγκάρσιο μέτρο διάτμησης (out-of-plane shear modulus) δεν προσδιορίζονταν, παρά μόνο τα άνω και κάτω όρια. Επιπρόσθετα, η εγκυρότητα των μοντέλων των ιδιοτήτων του επιπέδου (in-plane properties) για την διατμητική και αξονική παραμόρφωση των τειχών δεν διερευνήθηκε ποτέ σε βάθος, όπως επίσης και η ικανότητα τους να συλλάβουν την ελαφρά ανισοτροπία των τειχών διπλού πάχους καθώς αυξάνεται η σχετική πυκνότητα.

Με το πέρασμα των ετών και την ανάπτυξη των εμπορικών πακέτων μοντελοποίησης με πεπερασμένα στοιχεία, όλα τα προηγούμενα μοντέλα μπόρεσαν να ελεγχθούν ως προς την εγκυρότητα τους με αντίστοιχα αριθμητικά και να προσδιοριστούν τα όρια τους. Τα αριθμητικά μοντέλα επίσης ελέγχθηκαν ως προς την εγκυρότητα τους, με διαρκή αλλαγή των παραμέτρων σχηματισμού τους και τη σύγκρισή τους με τα πειραματικά αποτελέσματα.

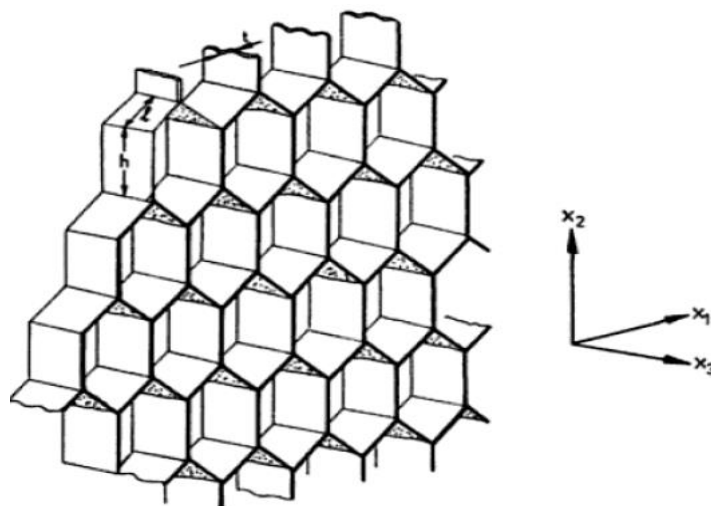
Το τελευταίο, πιο ικανοποιητικό μοντέλο, που έχει ελεγχθεί ως προς την δομική και ποσοτική εγκυρότητα του (structural and quantitative validity) είναι το προτεινόμενο από τους Gibson – Malek (2016) και έχει προκύψει από την επέκταση της

αρχικής θεωρίας των Ashby - Gibson. Τόσο τα πειραματικά όσο και τα αριθμητικά αποτελέσματα που συγκρίθηκαν συμφώνησαν πάρα πολύ με το συγκεκριμένο αναλυτικό μοντέλο, κάνοντας το ικανό να προσδιορίσει αναλυτικά τις ελαστικές σταθερές του honeycomb. Παρόλα αυτά, για τις περισσότερες εφαρμογές πρακτικού ενδιαφέροντος η ακρίβεια των μοντέλων των Ashby - Gibson είναι επαρκής και πολύ πιο απλή ως προς τους υπολογισμούς της.

2.3 Μηχανισμοί και Παράγοντες Παραμόρφωσης των Honeycombs

Το μόνο πιο σημαντικό δομικό χαρακτηριστικό των κυψελοειδών υλικών είναι η σχετική τους πυκνότητα ρ^*/ρ_s , η πυκνότητα του honeycomb διαιρεμένη με αυτή του υλικού από το οποίο παράγεται. Το τμήμα του κενού χώρου στα honeycomb είναι το πορώδες του (porosity) και δίνεται από την σχέση $(1 - \rho^*/\rho_s)$. Ακόμα, το μέγεθος της κυψέλης είναι πολύ σημαντικός παράγοντας, όχι μόνο για τις μηχανικές αλλά και για τις θερμικές ιδιότητες (εφαρμογές αγωγής θερμότητας) και την ακουστική. Ειδικά, στις κανονικοποιημένες κυψέλες οι ιδιότητες στο επίπεδο (in-plane properties) είναι ισότροπες. Αυτό το χαρακτηριστικό τους είναι πολύ χρήσιμο καθώς οδηγεί στην δισδιάστατη μοντελοποίηση, που είναι πιο απλή και πιο γρήγορη.

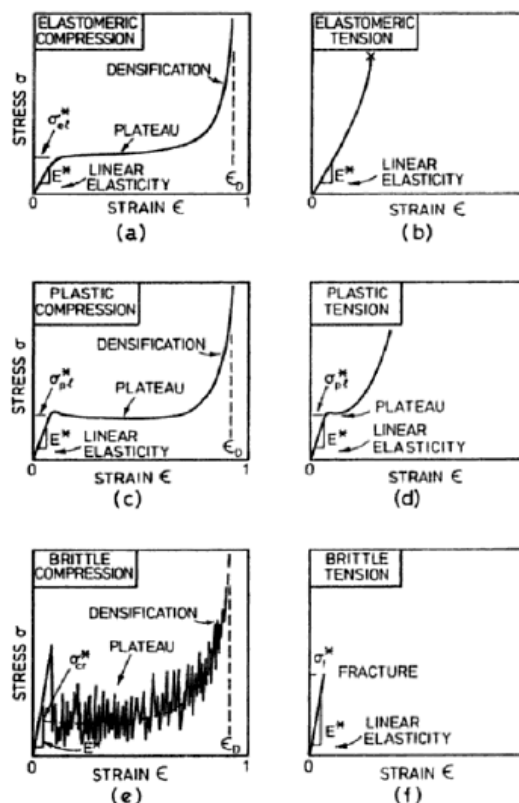
Η εικόνα 2.1 δείχνει ένα εξαγωνικό honeycomb και το σύστημα συντεταγμένων που έχει ληφθεί για την ανάλυση του. Οι επίπεδες δυσκαμψίες και αντοχές (που είναι αυτές στο επίπεδο $X_1 - X_2$) είναι οι μικρότερες επειδή οι τάσεις σε αυτό το επίπεδο κάνουν τα τείχη των κυψελών να λυγίσουν. Οι εκτός επιπέδου δυσκαμψίες και αντοχές (αυτές στην διεύθυνση X_3) είναι πολύ μεγαλύτερες επειδή απαιτούν την αξονική επιμήκυνση ή συμπίεση των τειχών των κυψελών. Παρακάτω, θα γίνει διάκριση μεταξύ των επιπέδων και των εγκάρσιων ιδιοτήτων λόγω των διαφορετικών επιδράσεων που παρουσιάζουν. Η μελέτη των επιπέδων ιδιοτήτων αναδεικνύει τους μηχανισμούς με τους οποίους τα honeycomb παραμορφώνονται και αστοχούν και πάνω σε αυτή την μελέτη βασίζεται η μελέτη για τους τρισδιάστατους αφρούς και για τα φυσικά κυψελοειδή υλικά, όπως το ξύλο, το κόκκαλο και ο φελλός. Από την άλλη πλευρά, η εκτός επιπέδου ανάλυση δίνει τις επιπρόσθετες δυσκαμψίες που χρειάζονται για τον σχεδιασμό των πυρήνων των honeycombs στα πάνελ sandwich και για την πλήρη περιγραφή της συμπεριφοράς των φυσικών κυψελοειδών.



Εικόνα 2.1: Honeycomb με εξάγωνες κυψέλες. Οι επίπεδες ιδιότητες σχετίζονται με τα φορτία στο επίπεδο $X_1 - X_2$. Οι αποκρίσεις που αντιστοιχούν στα φορτία που εφαρμόζονται στις πλευρές που είναι κάθετες στην διεύθυνση X_3 αναφέρονται ως οι εγκάρσιες ιδιότητες (Gibson, Ashby, 1997)

2.3.1 Εντός του επιπέδου (in-plane) παραμορφώσεις

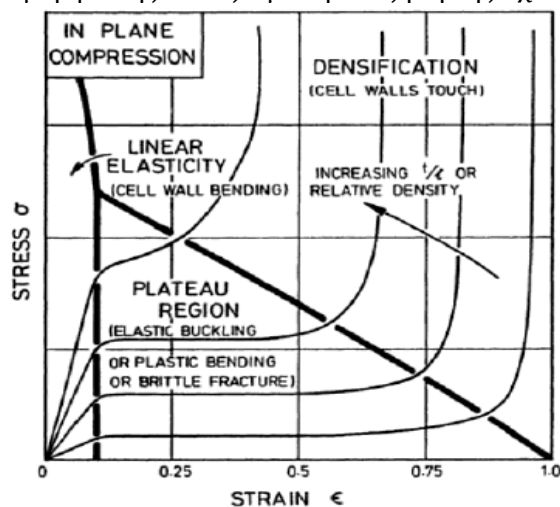
Η εικόνα 2.2 δείχνει τις θλιπτικές και τις εφελκυστικές καμπύλες τάσης – παραμόρφωσης για ένα ελαστομερές, ένα μεταλλικό και ένα κεραμικό honeycomb. Έχουν κατά πολύ το ίδιο σχήμα, αλλά για διαφορετικούς λόγους. Κατά την θλίψη, όλα δείχνουν μια γραμμική ελαστική περιοχή ακολουθείται από ένα επίπεδο – πλατό μιας περίπου σταθερής τάσης, που οδηγείται σε μια τελική περιοχή απότομης αυξημένης τάσης. Κάθε περιοχή είναι συσχετισμένη με έναν μηχανισμό παραμόρφωσης ο οποίος μπορεί να αναγνωριστεί από τη φόρτιση και την παρατήρηση των φυσικών μοντέλων των honeycombs. Στην αρχική φόρτιση, τα τείχη των κυψελών λυγίζουν, δίνοντας γραμμική ελαστικότητα, με την προϋπόθεση, φυσικά, ότι το υλικό των τειχών της κυψέλης είναι γραμμικά ελαστικό. Αλλά όταν φτάσει σε μια κρίσιμη τάση οι κυψέλες ξεκινούν να καταρρέουν: στην περίπτωση των ελαστομερών, η διαρροή οφείλεται στον ελαστικό λυγισμό των τειχών της κυψέλης και έτσι είναι ανακτήσιμη, στα υλικά με πλαστικό σημείο διαρροής (μέταλλα) είναι η διαμόρφωση των πλαστικών ακρών στο τμήμα της μέγιστης ροπής στα μέρη του λυγισμού και στα ψαθυρά υλικά (κεραμικά) είναι η ψαθυρή θραύση των τειχών της κυψέλης, η τελευταία φυσικά περίπτωση δεν είναι αντιστρεπτή. Τελικά, σε υψηλές παραμορφώσεις, οι κυψέλες καταρρέουν και τα απέναντι τείχη ή τα ραγισμένα τμήματα τους ακουμπούν και η επιπλέον παραμόρφωση συμπιέζει το υλικό του τείχους της κυψέλης. Αυτό δίνει το τελικό, απότομα αυξημένο τμήμα της καμπύλης τάσης – παραμόρφωσης που ονομάζεται *πύκνωση* (densification).



Εικόνα 2.2: Θλιπτικά και εφελκυστικά διαγράμματα τάσης – παραμόρφωσης για honeycomb από (a),(b) ελαστομερές (c),(d) μεταλλικό και (e),(f) κεραμικό υλικό (Gibson, Ashby, 1997)

Η αύξηση της σχετικής πυκνότητας ενός honeycomb αυξάνει το σχετικό πάχος των τειχών της κυψέλης. Η αντίσταση στην κάμψη του τείχους της κυψέλης και η διαρροή της κυψέλης συμβαίνει, δίνοντας ένα μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας και μεγαλύτερη τάση στο πλατό και τα τείχη της κυψέλης ακουμπούν πιο γρήγορα μειώνοντας την παραμόρφωση κατά την οποία συμβαίνει η πύκνωση. Η εικόνα 2.3 συνοψίζει τους

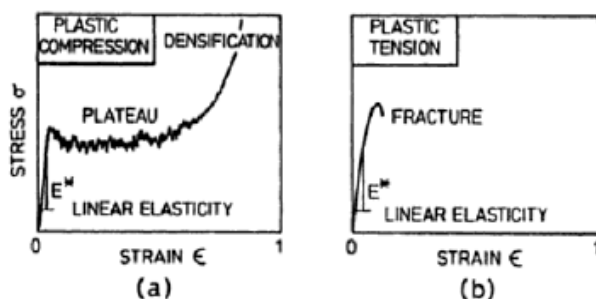
μηχανισμούς για την συμπιεστική παραμόρφωση των honeycombs και δείχνει πως η καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης αλλάζει με την αύξηση της σχετικής πυκνότητας.



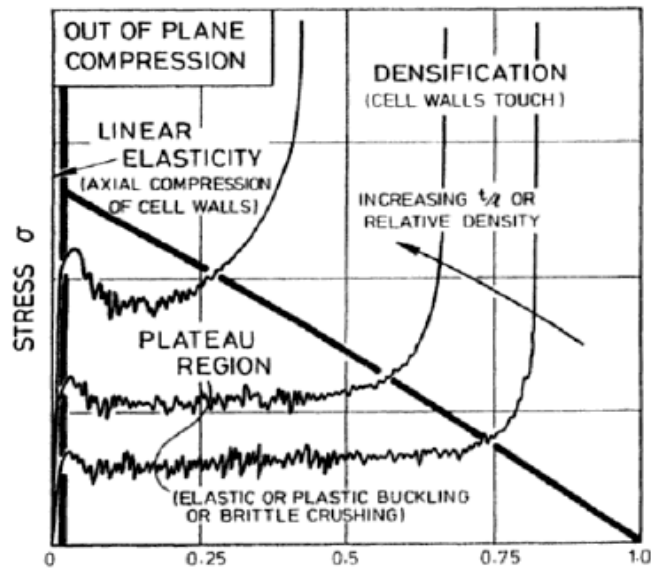
Εικόνα 2.3: Διάγραμμα που δείχνει την ελαστική περιοχή, την διαρροή και την περιοχή πύκνωσης των honeycomb συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας τους κατά την φόρτιση στο επίπεδο $X_1 - X_2$ (Gibson, Ashby, 1997)

2.3.2 Εκτός επιπέδου (out-of-plane) παραμορφώσεις

Τα honeycombs είναι πολύ πιο δύσκαμπτα και δυνατότερα όταν φορτίζονται κατά μήκος του άξονα της κυψέλης - η διεύθυνση X_3 . Το ίδιο ισχύει για τα honeycombs που φορτίζονται σε εκτός επιπέδου διάτμηση, όπως είναι στα sandwich panels που φορτίζονται σε κάμψη. Σε αυτές τις περιπτώσεις η αρχική γραμμικά ελαστική παραμόρφωση περιλαμβάνει αξονικές ή διατμητικές παραμορφώσεις των τειχών των κυψελών. Στην συμπίεση η γραμμικά ελαστική περιοχή αποκόπτεται από τον λυγισμό (ελαστικό για ελαστομερές, πλαστικό για μέταλλο ή στιβαρό πολυμερές) και η τελική αστοχία γίνεται από το σκίσιμο ή την κρούση, δίνοντας μια καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης όπως αυτή που φαίνεται στην εικόνα 2.4. Σε εφελκυσμό (tension) το honeycomb είναι ελαστικό έως ότου σκίζεται, διαρρέει πλαστικά ή αστοχεί. Οι καμπύλες τάσης - παραμόρφωσης για τα honeycombs με ένα εύρος σχετικών πυκνοτήτων σχηματίζουν ξανά μια οικογένεια όπως φαίνεται στην εικόνα 2.5.



Εικόνα 2.4: Καμπύλες τάσεις - παραμόρφωσης για φόρτιση του honeycomb σε θλίψη (a) και σε εφελκυσμό (b) κατά την διεύθυνση X_3 (Gibson, Ashby, 1997)



Εικόνα 2.5: Διάγραμμα που δείχνει την ελαστική περιοχή, την διαρροή και την περιοχή πύκνωσης των honeycomb συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας τους κατά την φόρτιση στο επίπεδο X_3 (Gibson, Ashby, 1997)

2.4 Θεωρία των Ashby – Gibson για τον προσδιορισμό των Ισοδύναμων Ελαστικών Ιδιοτήτων ενός Εξαγωνικού Honeycomb

Στο εδάφιο αυτό θα γίνει μια περιγραφή των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά την παραμόρφωση των honeycombs και θα δοθούν οι σχέσεις των ισοδύναμων ελαστικών ιδιοτήτων, όπως αυτές προκύπτουν από τις θεωρίες των Ashby – Gibson (1997). Θα πρέπει να διευκρινιστεί πως οι ιδιότητες προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη την γραμμική ελαστική συμπεριφορά του honeycomb. Η συμπεριφορά της μη γραμμικής περιοχής που περιλαμβάνει φαινόμενα λυγισμού και πλαστικότητας των τειχών της κυψέλης είναι εκτός του σκοπού της παρούσας εργασίας.

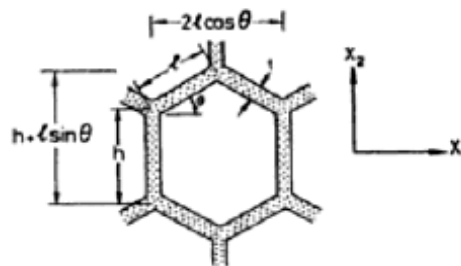
Οι ιδιότητες αυτές χρησιμοποιούνται αρκετές φορές σε μεθόδους ομογενοποίησης, που βοηθούν στην μελέτη των υλικών, που αναιρούν τα ιδιαίτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ή τις επιμέρους συνιστώσες των υλικών και τα αντικαθιστούν με ισοδύναμα ομογενή υλικά που έχουν αντιπροσωπευτικές ελαστικές ιδιότητες, απλοποιώντας έτσι την ανάλυση τους. Τέτοιες τεχνικές είναι πολύ χρήσιμες στην μελέτη διάφορων δομικών στοιχείων, όπως οι σύνθετες δομές sandwich ή γενικότερα στα σύνθετα υλικά.

Παρόλο που η θεωρία των Ashby – Gibson έχει τα όρια της ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων, οι απλές μορφές των τύπων και ο εποπτικός τρόπος ανάπτυξης τους, την καθιστά επαρκή για χρήση σε γρήγορους και πρακτικούς υπολογισμούς.

2.4.1 Η εξάρτηση των ιδιοτήτων του honeycomb από την διεύθυνση

Η εικόνα 2.6 δείχνει την κυψέλη ενός εξαγωνικού (hexagonal) honeycomb. Εάν το honeycomb είναι κανονικό, δηλαδή όλες οι πλευρές του είναι ίσες και οι γωνίες που σχηματίζουν είναι 120° και τα τείχη της κυψέλης έχουν το ίδιο πάχος, τότε οι ιδιότητες εντός του επιπέδου είναι ισότροπες, είναι δηλαδή ανεξάρτητες από την διεύθυνση. Μια τέτοια διαμόρφωση έχει δύο ανεξάρτητες σταθερές, το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας E^* και το ισοδύναμο μέτρο διάτμησης G^* και μια μοναδική τιμή για την σταθερή σ^* τάση

- πλατό που εμφανίζεται στο διάγραμμα τάσης - παραμόρφωσης. Σε αντίθετη περίπτωση, όταν το εξάγωνο είναι μη κανονικό, δηλαδή έχει όλες τις πλευρές του διαφορετικές και διαφορετικές γωνίες σχηματισμού μεταξύ των δομικών του στοιχείων, οι ιδιότητες του είναι τελείως ανισότροπες και εμφανίζει δύο τιμές για την σταθερή τάση - πλατό. Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με κανονικά εξαγωνικά honeycomb, που όπως φανερώνει και η παραπάνω περιγραφή είναι ορθότροπα καθώς εμφανίζουν δύο επίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους κάτι που συνεπάγεται και την ύπαρξη κι ενός τρίτου επιπέδου συμμετρίας. Στα ορθότροπα υλικά, οι ελαστικές ανεξάρτητες σταθερές είναι εννιά και αυτές θα προσδιοριστούν ακολουθως.



Εικόνα 2.6: Η απαράμορφωτη κυψέλη ενός τυπικού εξαγωνικού honeycomb (Gibson, Ashby, 1997)

Η πυκνότητα του honeycomb θεωρείται πολύ μικρή και δίνεται από την σχέση:

$$\left(\frac{\rho^*}{\rho_s}\right) = \left(1 - \frac{A_{void}}{A_{cell}}\right) = \frac{t/l(h/l + 2)}{2\cos\theta(h/l + \sin\theta)} \quad (2.1)$$

Σχέση που απλοποιείται στην περίπτωση των κανονικών κυψελών ($h = l, \theta = 30^\circ$) και γίνεται:

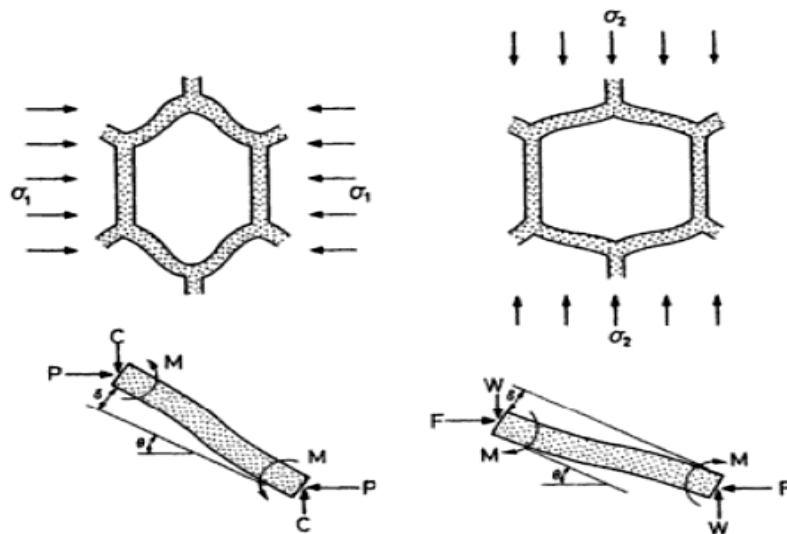
$$\frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t}{l} \quad (2.2)$$

Για να προκύψει η παραπάνω σχέση, γίνεται η παραδοχή πως οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές και οι διαφορές στην γεωμετρία αμελητέες. Βελτιώσεις μπορούν να γίνουν στην μελέτη, αλλά τα αποτελέσματα θα είναι πιο περίπλοκα και θα αφορούν τις περιπτώσεις όπου $t/l > 1/4$ ή οι τροπές είναι μεγαλύτερες από το 20%.

Πολλά εμπορικά φύλλα honeycomb συναντώνται με τέσσερα τείχη πάχους t και δύο τα οποία είναι διπλά και έχουν πάχος $2t$. Ο διπλασιασμός του πάχους αυτών των τειχών που προκύπτει από αυτό το ζεύγος τειχών δεν αλλάζει, προς έκπληξη, τις τιμές των εντός επιπέδου μέτρων του Young και των λόγων Poisson που υπολογίζονται παρακάτω, ακόμα κι αν αλλάζουν με πολύ μικρές μεταβολές το εντός επιπέδου μέτρο διάτμησης και το εκτός επιπέδου μέτρο ελαστικότητας και φυσικά την πυκνότητα. Παρόλα αυτά, επειδή οι μεταβολές είναι πολύ μικρές, θεωρούνται αμελητέες και οι ιδιότητες τους υπολογίζονται με βάση τις παρακάτω σχέσεις.

Ο υπολογισμός των ισοδύναμων ελαστικών ιδιοτήτων εξαρτάται επίσης από το υλικό που χρησιμοποιείται για την παρασκευή του honeycomb. Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν θεωρώντας το μητρικό υλικό ομογενές και ισότροπο, παραδοχές που τις ικανοποιούν σε μεγάλο βαθμό τα μέταλλα. Αν το μητρικό υλικό είναι κάποιο κεραμικό ή πολυμερές, οι παρακάτω σχέσεις έχουν πολύ μεγάλη πιθανότητα να απέχουν από τις πραγματικές τιμές των ιδιοτήτων του honeycomb, λόγω του πορώδους που χαρακτηρίζει αυτά τα υλικά, κάνοντας την πειραματικό προσδιορισμό των ιδιοτήτων απαραίτητο.

2.4.2 Εντός του επιπέδου (in - plane) ελαστικές ιδιότητες



Εικόνα 2.7: Παραμόρφωση της κυψέλης ως αποτέλεσμα της κάμψης, του εφελκυσμού ή της θλίψης των τειχών της (Gibson, Ashby, 1997)

Όταν ένα honeycomb, φορτίζεται στην διεύθυνση X_1 ή στην X_2 , παραμορφώνεται με ένα γραμμικά ελαστικό τρόπο και τα τείχη της κυψέλης κάμπτονται. Η απόκριση περιγράφεται με επάρκεια από πέντε ελαστικά μέτρα: δύο μέτρα του Young E_1^* και E_2^* , ένα μέτρο διάτμησης G_{21}^* και δύο λόγους Poisson ν_{12}^* και ν_{21}^* . Τα μέτρα αυτά δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η αμοιβαία σχέση που τα συνδέει είναι :

$$E_1^* \nu_{21}^* = E_2^* \nu_{12}^* \quad (2.3)$$

που μειώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών σε τέσσερις. Είναι οι ίδιες τόσο σε εφελκυσμό όσο και σε θλίψη.

Τα δύο μέτρα του Young υπολογίζονται σύμφωνα με την μέθοδο του σχήματος 2.7. Μια τάση σ_1 παράλληλη στον άξονα X_1 προκαλεί μια ομάδα τειχών της κυψέλης - αυτά με μήκος l - να καμφθούν, ένα τείχος της κυψέλης παρουσιάζεται με λεπτομέρεια κάτω από την κυψέλη. Η ισορροπία απαιτεί την συνιστώσα της δύναμης C που είναι παράλληλη με τον άξονα X_2 να είναι μηδέν. Η ροπή που τείνει να κάμψει το τείχος της κυψέλης (το οποίο το αντιμετωπίζουμε ως μια δοκό, μήκους l , πάχους t , βάθους b και μέτρου ελαστικότητας E_s) είναι:

$$M = \frac{Pl \sin \theta}{2} \quad (2.4)$$

όπου

$$P = \sigma_1 (h + l \sin \theta) b \quad (2.5)$$

Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία δοκού το τείχος βυθίζεται κατά:

$$\delta = \frac{Pl^3 \sin \theta}{12E_s I} \quad (2.6)$$

όπου I είναι η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας του τείχους της κυψέλης ($I = bt^3/12$, για ένα τείχος με ενιαίο πάχος t). Από αυτό, μια συνιστώσα $\delta \sin \theta$ είναι παράλληλη στον άξονα X_1 δίνοντας μια τροπή:

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta \sin \theta}{l \cos \theta} = \frac{\sigma_1 (h + l \sin \theta) b l^2 \sin^2 \theta}{12E_s I \cos \theta} \quad (2.7)$$

Το μέτρο του Young που είναι παράλληλο στον άξονα X_1 δίνεται από την απλή σχέση $E_1^* = \sigma_1 / \varepsilon_1$, που αναπτύσσεται και προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{E_1^*}{E_s} = \left(\frac{t}{l} \right)^3 \frac{\cos \theta}{(h/l + \sin \theta) \sin^2 \theta} \quad (2.8)$$

Με όμοιο τρόπο μπορεί να και το μέτρο του Young κατά την διεύθυνση X_2 δίνοντας:

$$\frac{E_2^*}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{(h/l + \sin\theta)}{\cos^3\theta} \quad (2.9)$$

Η σχέση για κανονικά εξάγωνα με τείχη ενιαίου πάχους, και τα δύο τα μέτρα του Young, E_1^* και E_2^* , απλοποιούνται και γίνονται ίσα:

$$\frac{E_1^*}{E_s} = \frac{E_2^*}{E_s} = 2.3 \left(\frac{t}{l}\right)^3 \quad (2.10)$$

όπως αναμενόταν, καθώς τα honeycomb από κανονικά εξάγωνα είναι ισότροπα.

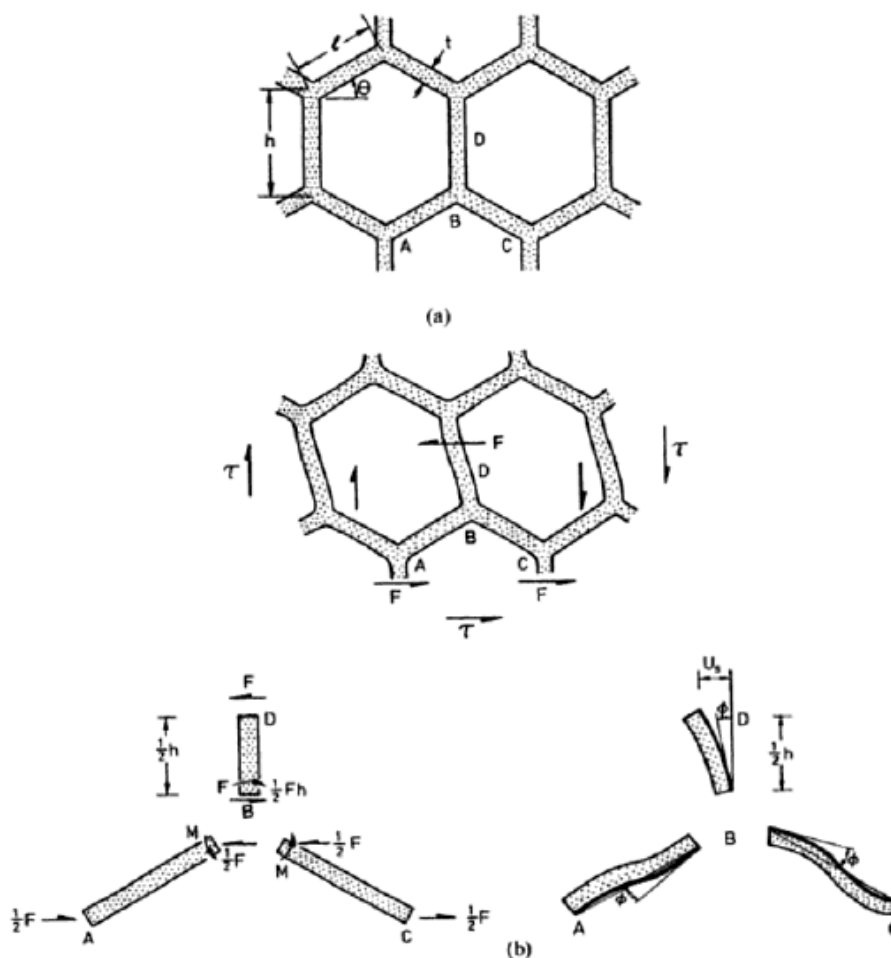
Οι λόγοι Poisson υπολογίζονται παίρνοντας τον αρνητικό λόγο των τροπών που είναι κάθετες και παράλληλες ως προς την διεύθυνση του φορτίου. Έτσι, για την φόρτιση ως προς την X_1 διεύθυνση:

$$v_{12}^* = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\sin^2\theta}{(h/l + \sin\theta)\sin\theta} \quad (2.11)$$

ή για κανονικά εξάγωνα, $v_{12}^* = 1$. Για την φόρτιση ως προς την X_2 διεύθυνση έχουμε:

$$v_{21}^* = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{(h/l + \sin\theta)\sin\theta}{\sin^2\theta} \quad (2.12)$$

που για κανονικά εξάγωνα γίνεται κι αυτός $v_{21}^* = 1$. Υπάρχει ένα ασυνήθιστο χαρακτηριστικό σε αυτά τα αποτελέσματα. Όταν το θ είναι μικρότερο του μηδενός, που συμβαίνει όταν οι κυψέλες αντιστρέφονται, ο λόγος Poisson είναι αρνητικός, υπονοώντας πως μια θλιπτική τάση σε μια διεύθυνση παράγει μια συστολή στην κάθετη – εντός του επιπέδου – διεύθυνση, αντί της συνήθους διαστολής.



Εικόνα 2.8: Οι παραμορφώσεις και οι εσωτερικές αντιδράσεις των τειχών της κυψέλης κατά την διάτμηση του φύλλου honeycomb (Gibson, Ashby, 1997)

Η τέταρτη ανεξάρτητη ελαστική σταθερά εντός του επιπέδου είναι το μέτρο διάτμησης, G_{21}^* , που υπολογίζεται όπως φαίνεται στην εικόνα 2.8. Αθροίζοντας τις ροπές των δυνάμεων ως προς το σημείο B βρίσκεται η ροπή που εφαρμόζεται στα στοιχεία AB και BC:

$$M = \frac{Fh}{4} \quad (2.13)$$

Τότε, λαμβάνοντας το σύννηθες αποτέλεσμα $\delta = MI^2/6E_sI$, η γωνία περιστροφής είναι:

$$\varphi = \frac{Fhl}{24E_sI} \quad (2.14)$$

Η μετατόπιση u_s του σημείου D ως προς το B λόγω της διάτμησης είναι:

$$u_s = \frac{1}{2}\varphi h + \frac{F}{3E_sI} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{Fh^2}{48E_sI}(l + 2h) \quad (2.15)$$

Η διατμητική παραμόρφωση, γ , δίνεται από:

$$\gamma = \frac{2u_s}{(h/l + \sin\theta)} = \frac{Fh^2}{24E_sI} \frac{(l + 2h)}{(h/l + \sin\theta)} \quad (2.16)$$

Το μέτρο διάτμησης G_{21}^* , θεωρώντας την διατμητική τάση ίση με $\tau = F/2lb\cos\theta$, ισούται με $G_{21}^* = \tau/\gamma$, που καταλήγει στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{G_{21}^*}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{(h/l + \sin\theta)}{(h/l)^2(1 + 2h/l)\cos\theta} \quad (2.17)$$

Που απλοποιείται για κανονικά, ενιαίου πάχους εξάγωνα στην σχέση:

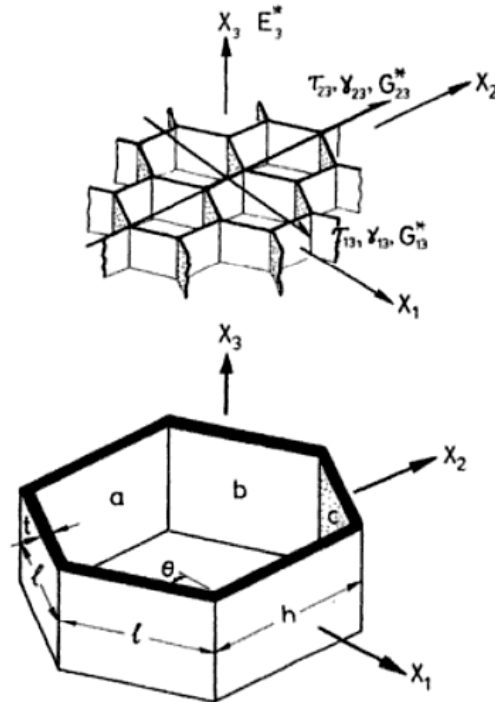
$$\frac{G_{21}^*}{E_s} = 0.57 \left(\frac{t}{l}\right)^3 = \frac{1}{4} \frac{E^*}{E_s} \quad (2.18)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με αυτό της σχέσης $G = E/(2(1 + \nu))$, για τα ισότροπα στερεά.

Παρόλο που τα πειράματα που έχουν γίνει για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων των παραπάνω σχέσεων, σε honeycomb από μεταλλικά και ελαστομερή υλικά, έχουν εμφανίσει μικρές αποκλίσεις που αρχικά είχαν αποδοθεί στην χαμηλή ποιότητα του ποιοτικού ελέγχου, οι αποκλίσεις αυτές είναι γενικά αμελητέες για τους περισσότερους πρακτικούς σκοπούς.

2.4.3 Εκτός επιπέδου (out-of-plane) ελαστικές ιδιότητες

Τα honeycomb συχνά χρησιμοποιούνται ως πυρήνες σε πάνελ sandwich. Σανίδες σκι, αεροσκάφη και διαστημικά οχήματα, όλα σήμερα εκμεταλλεύονται αυτού του τύπου τις ελαφρές, αλλά δύσκαμπτες δομές. Εδώ θα σημειώσουμε ότι η λειτουργία του πυρήνα honeycomb είναι να φέρει τα ορθά και τα διατμητικά φορτία στα επίπεδα που περιέχουν τον άξονα των εξαγωνικών πρισμάτων – την διεύθυνση X_3 , όπως φαίνεται στην εικόνα 4.36. Όταν φορτίζονται σε αυτή την διεύθυνση τα τείχη της κυψέλης εφελκούνται ή συστέλλονται (παρά κάμπτονται) και το μέτρο, για τα εξάγωνα honeycomb, είναι πολύ μεγαλύτερα από αυτά που υπολογίζονται στο εδάφιο 4.3 για την εντός επιπέδου φόρτιση.



Εικόνα 2.9: Honeycomb που φέρει φορτία στις πλευρές κάθετες στην διεύθυνση X_3 (Gibson, Ashby, 1997)

Πέντε επιπλέον μέτρα χρειάζεται να υπολογιστούν για να περιγράψουν την εκτός επιπέδου παραμόρφωση, δίνοντας ένα σύνολο εννιά σταθερών για την περιγραφή του honeycomb. Η μία είναι προφανής, το μέτρο του Young, E_3^* για την φόρτιση στην διεύθυνση X_3 απλά αντανακλά το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, E_s , που ανάγεται στην στο εμβαδόν του τμήματος που φέρει το φορτίο:

$$\frac{E_3^*}{E_s} = \left\{ \frac{h/l + 2}{2(h/l + \sin\theta)\cos\theta} \right\} \frac{t}{l} = \frac{\rho^*}{\rho_s} \cong \frac{t}{l} \quad (2.19)$$

ο όρος στην παρένθεση δίνει μια πιο ακριβή περιγραφή της προβαλλόμενης επιφάνειας των τειχών της κυψέλης σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα X_3 , η τιμή της ποσότητας για τα κανονικά εξάγωνα είναι περίπου ίση με 1.15. Οι λόγοι Poisson v_{31}^* και v_{32}^* είναι απλά ίσοι με αυτούς του μητρικού υλικού του honeycomb:

$$v_{31}^* = v_{32}^* = v_s \quad (2.20)$$

Οι λόγοι Poisson βρίσκονται από τις αμοιβαίες σχέσεις:

$$v_{13}^* = \frac{E_1^*}{E_3^*} v_s \approx 0, \quad v_{23}^* = \frac{E_2^*}{E_3^*} v_s \approx 0 \quad (2.21)$$

Ο υπολογισμός των μέτρων διάτμησης είναι πιο περίπλοκος. Η κατανομή των τάσεων σε ένα honeycomb που υφίσταται διάτμηση δεν είναι απλή, κάθε όψη της κυψέλης υποφέρει μια μη ενιαία παραμόρφωση εξαιτίας των περιορισμών που υφίσταται από τους γείτονες της και το αρχικά επίπεδο honeycomb δεν παραμένει επίπεδο. Ακριβείς υπολογισμοί είναι εφικτοί μόνο μέσω των αριθμητικών μεθόδων. Αλλά τα άνω και κάτω όρια των δύο διατμητικών μέτρων ελαστικότητας μπορούν να βρεθούν σχετικά πιο εύκολα, χρησιμοποιώντας την ενέργεια παραμόρφωσης, πρώτον, με μια κατανομή των τροπών που επιτρέπει τη συμβατή παραμόρφωση και δεύτερον, με μια κατανομή τάσεων που ικανοποιεί την ισορροπία. Εάν οι δύο ταυτίζονται τότε η λύση είναι ακριβής, αλλιώς βρίσκεται κάπου ανάμεσα τους.

Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και της ελάχιστης συμπληρωματικής ενέργειας. Το πρώτο θεώρημα δίνει το άνω όριο. Δηλώνει πως η ενέργεια παραμόρφωσης υπολογισμένη από οποιαδήποτε αυθαίρετο σετ μετατοπίσεων που είναι συμβατό με τις

εξωτερικές συνοριακές συνθήκες και με το ίδιο θα είναι ελάχιστη για την ακριβή κατανομή των παραμορφώσεων. Θεωρώντας, τότε, μια ενιαία διάτμηση γ_{13} , που οφείλεται από μια διατμητική τάση τ_{13} που δρα στην επιφάνεια κάθετη στον άξονα X_3 με διεύθυνση κατά τον άξονα X_1 . Απομονώνοντας ένα μοναδιαίο στοιχείο που θεωρείται πως επαναλαμβάνεται επακριβώς για χτίσει όλο το honeycomb. Σχεδόν όλη η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης αποθηκεύεται στις μετατοπίσεις λόγω διάτμησης στα τείχη των κυψελών, οι καμπτικές δυσκαμψίες και οι ενέργειες που σχετίζονται με την κάμψη είναι μικρότερες. Οι διατμητικές τροπές στα τείχη a, b και c είναι:

$$\gamma_a = 0 \quad (2.22.a)$$

$$\gamma_b = \gamma_{13} \cos\theta \quad (2.22.b)$$

$$\gamma_c = \gamma_{13} \cos\theta \quad (2.22.c)$$

Το θεώρημα μπορεί να εκφραστεί ως μια ανισότητα για την οποία, η διάτμηση κατά την διεύθυνση X_1 , έχει την μορφή:

$$\frac{1}{2} G_{13}^* \gamma_{13}^* V \leq \frac{1}{2} \sum_i (G_s \gamma_i^2 V_i) \quad (2.23)$$

όπου G_s είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού του τείχους της κυψέλης, γ_i οι διατμητικές τροπές στα τρία τείχη της κυψέλης και το άθροισμα διεξάγεται πάνω στα τρία τείχη της κυψέλης a, b και c, όγκου V_a , V_b και V_c . Υπολογίζοντας το άθροισμα προκύπτει:

$$\frac{G_{13}^*}{G_s} \leq \frac{\cos\theta}{h/l + \sin\theta} \left(\frac{t}{l}\right) \quad (2.24)$$

Επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό για μια διάτμηση γ_{23} στην διεύθυνση X_2 καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{G_{23}^*}{G_s} \leq \frac{1}{2} \frac{h/l + 2\sin^2\theta}{(h/l + \sin\theta)\cos\theta} \left(\frac{t}{l}\right) \quad (2.25)$$

Το δεύτερο θεώρημα δίνει το κάτω όριο για το μέτρο. Αυτό δηλώνει, ότι μεταξύ των κατανομών των τάσεων που ικανοποιούν την ισορροπία σε κάθε σημείο και βρίσκονται σε ισορροπία με τα εξωτερικά φορτία, η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης είναι ελάχιστη για την ακριβή κατανομή των τάσεων. Εκφρασμένη ως ανισότητα δίνει:

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{13}^2}{G_{13}^*} V \leq \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\tau_i^2}{G_s} V_i \right) \quad (2.26)$$

που σε συνδυασμό με την εξίσωση ισορροπίας δίνει το κάτω όριο:

$$\frac{G_{13}^*}{G_s} \geq \frac{\cos\theta}{(h/l + \sin\theta)} \left(\frac{t}{l}\right) \quad (2.27)$$

που είναι ακριβώς το ίδιο με άνω όριο, το αποτέλεσμα είναι ακριβές. Για κανονικά εξάγωνα απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{G_{13}^*}{G_s} = 0.577 \left(\frac{t}{l}\right) \quad (2.28)$$

Με την ίδια διαδικασία μπορεί να προκύψει και η ανισότητα για το μέτρο διάτμησης G_{23}^* :

$$\frac{G_{23}^*}{G_s} \geq \frac{h/l + \sin\theta}{(1 + 2h/l)\cos\theta} \left(\frac{t}{l}\right) \quad (2.29)$$

Σε αυτή την περίπτωση τα δύο όρια δεν συμπίπτουν για ένα γενικό, ανισότροπο honeycomb, παρόλο που είναι κοντά. Αλλά, στην περίπτωση των κανονικών εξάγωνων συμπίπτουν και η σχέση απλοποιείται ως:

$$\frac{G_{23}^*}{G_s} = 0.577 \left(\frac{t}{l}\right) \quad (2.30)$$

Είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το G_{13}^* , όπως θα έπρεπε: τα κανονικά εξάγωνα είναι ισότροπα στο επίπεδο $X_1 - X_2$.

Η πειραματική επιβεβαίωση των παραπάνω αποτελεσμάτων υπήρξε αρκετά ικανοποιητική, αν και εμφανίστηκαν αποκλίσεις για τα μέτρα διάτμησης, γεγονός που αποδόθηκε κυρίως στην δυσκολία μέτρησης τους από τις διατάξεις.

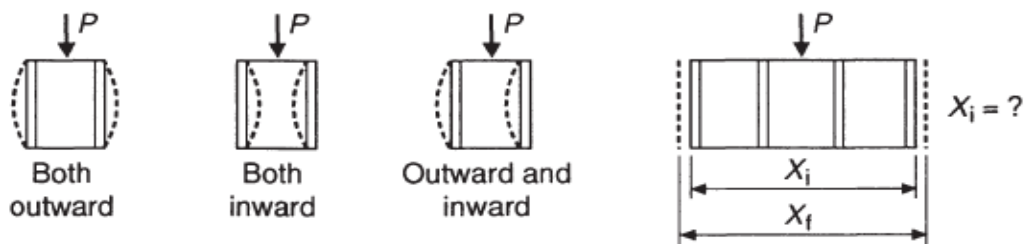
2.4 Παρατηρήσεις

Παρόλο που το μοντέλο των Gibson - Ashby δίνει πολύ καλές προβλέψεις για την συμπεριφορά των honeycombs, έχουν παρουσιάστηκαν μερικές αποκλίσεις, ειδικά με το επίπεδο μέτρο διάτμησης, όπου δινόντουσαν χαμηλότερες τιμές σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα για όλα τα δείγματα. Αρχικά, αυτή η ανακολουθία αποδόθηκε στον τρόπο άσκησης και μεταφοράς του φορτίου από τις μέγγες της διάταξης. Στην πραγματικότητα όμως, όπως έδειξε η διαδικασία της επιβεβαίωσης του μοντέλου με τα αριθμητικά μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων, η ανακολουθία αυτή οφειλόταν στην παραδοχή που είχε γίνει αρχικά για την κατανομή των διατμητικών τάσεων εντός των τειχών της κυψέλης κατά την διατμητική φόρτιση της μοναδιαίας κυψελίδας. Με την θεώρηση της συμβολής των τειχών (Gibson, Malek, 2015), γίνεται και η αναγκαία παραδοχή για την κατανομή των διατμητικών τάσεων που οδηγεί στην ύστερα από δοκιμές διάφορων κατανομών, στην συμφωνία των αναλυτικών, των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν είναι ιδιαίτερα πρακτικά και οι μεταβολές στις τιμές που δίνουν είναι πολύ μικρές για να δικαιολογούν την χρήση τους σε απλές εφαρμογές.

Όσον αφορά τις επιμέρους ισοδύναμες ελαστικές ιδιότητες, τα μέτρα ελαστικότητας κατά τις διευθύνσεις X_1 και X_2 είναι πολύ πιο μικρά από αυτό στην διεύθυνση X_3 . Το ίδιο ισχύει και για το μέτρο διάτμησης που αναφέρεται στο επίπεδο $X_1 - X_2$, είναι πολύ μικρότερο από τα μέτρα διάτμησης που αναφέρονται σε επίπεδα που περιλαμβάνουν την διεύθυνση X_3 . Αυτό ισχύει γιατί γενικά το honeycomb παρουσιάζει μεγαλύτερη αντοχή και δυσκαμψία κατά τον εγκάρσιο - ως προς το επίπεδο που κείται η κυψέλη - άξονα X_3 , όπως έχει δείχθει τόσο από πειράματα όσο και από τις αναλυτικές θεωρίες του και αυτή του η ιδιότητα είναι που το κάνει δελεαστικό στην εκτός επιπέδου τοποθέτηση του πυρήνα honeycomb (*out-of-plane honeycomb core*).

Όσον αφορά τους λόγους Poisson, για τα honeycomb με κανονική εξαγωνική κυψέλη γενικά ισχύει $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* \approx 1.0$, που σημαίνει ότι στο επίπεδο $X_1 - X_2$ οι παραμορφώσεις $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ είναι ίσες, ενώ, αντίθετα, οι λόγοι Poisson που αναφέρονται στο επίπεδο που είναι κάθετο στην διεύθυνση X_3 , ν_{31}^*, ν_{32}^* , είναι ίσοι με το λόγο Poisson του υλικού παρασκευής του honeycomb. Ακόμα, οι λόγοι ν_{13}^* και ν_{23}^* είναι πολύ μικροί κοντά στο 0, που σημαίνει οι παραμορφώσεις στις διευθύνσεις X_1 και X_2 δεν επηρεάζουν την παραμόρφωση κατά την διεύθυνση X_3 .

Παρόλο που οι προβλέψεις από την θεωρία συμφωνούν με τις πειραματικές παρατηρήσεις στα ποιοτικά τουλάχιστον χαρακτηριστικά, εν τούτοις πειραματικά έχει βγει το εξής συμπέρασμα. Όταν στα honeycomb γίνονται πειράματα εφελκυσμού ή θλίψης με σκοπό να μετρηθούν οι πλευρικές και οι αξονικές παραμορφώσεις και κατόπιν να υπολογιστεί ο λόγος, παρουσιάζονται τα εξής φαινόμενα και τίθενται τα εξής ερωτήματα. Όταν τα τείχη του honeycomb συμπίεστούν μπορεί να λυγίσουν εσωτερικά ή εξωτερικά, μπορεί επίσης, ένα τείχος να λυγίσει εσωτερικά και το άλλο εξωτερικά (εικόνα 2.10). Ακόμα όμως και στην περίπτωση που τα τείχη συμπεριφέρονται ως στιβαρό υλικό και επιμηκύνονται, ποια διάσταση θα χρησιμοποιηθεί ως αρχικό μήκος; Ποιο από τα τείχη θα χρησιμοποιηθεί;



Εικόνα 2.10: Συμπεριφορά της κυψέλης σε φορτίο συμπίεσης (Bitzer, 1997)

Οι παραπάνω παρατηρήσεις αφορούν την συμπεριφορά κατά την εγκάρσια διεύθυνση X_3 . Επειδή όμως στις δομές sandwich οι ιδιότητες κατά μήκος αυτής της κυριαρχούνται από τις ιδιότητες των κελυφών (*faces*) και ο πυρήνας κινείται με τα κελύφη, χωρίς σχεδόν καμία αντίσταση, δεν έχει σημασία ποια τιμή του λόγου Poisson ν_3 υποτίθεται. Συνέπεια, αυτού να μπορεί να υποτεθεί πως:

$$\nu_{13}^* = \nu_{31}^*, \nu_{23}^* = \nu_{32}^* \quad (2.31)$$

Στα πακέτα πεπερασμένων στοιχείων λοιπόν, όταν γίνεται ο ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού το υλικό θεωρείται ως καθαρό ορθότροπο υλικό και όταν ορίζονται οι παραπάνω λόγοι Poisson γίνονται δοκιμές μεταξύ των προτεινόμενων τιμών του αναλυτικού μοντέλου για να ελεγχθεί η ευαισθησία των αποτελεσμάτων της αριθμητικής μοντελοποίησης.

Συνοπτικά λοιπόν, το εξαγωνικό honeycomb με κανονική κυψέλη είναι ένα ορθότροπο υλικό, με τρεις άξονες συμμετρίας και η συμπεριφορά του περιγράφεται επακριβώς από εννιά ελαστικές σταθερές, οι οποίες είναι:

E_1^*, E_2^*, E_3^* , τα μέτρα ελαστικότητας

$G_{12}^*, G_{23}^*, G_{31}^*$, τα μέτρα διάτμησης

$\nu_{12}^*, \nu_{23}^*, \nu_{31}^*$, οι λόγοι Poisson

Σύμφωνα όμως με ότι καταγράφηκε στις προηγούμενες σχέσεις, για τα χαρακτηριστικά της κανονικής κυψέλης ($l = h$, $\theta = 120^\circ$), προκύπτει:

$$E_1^* = E_2^*, G_{13}^* = G_{23}^*, \nu_{12}^* = \nu_{21}^*, \nu_{13}^* = \nu_{23}^* \text{ και } \nu_{31}^* = \nu_{32}^*$$

Συνεπώς, η συμπεριφορά του εκφυλίζεται έχοντας πλέον ως ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές τις:

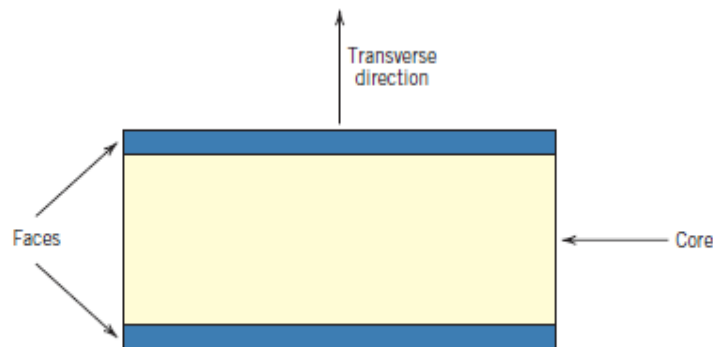
$$E_1^*, E_3^*, G_{12}^*, G_{23}^*, \nu_{12}^*, \nu_{23}^*$$

Οι παραπάνω παρατηρήσεις απλοποιούν την περιγραφή του υλικού με ισοδύναμες ελαστικές ιδιότητες κάνοντας την τεχνική ομογενοποίησης με τη θεωρία των Ashby – Gibson ιδιαίτερα ελκυστική στις αριθμητικές μοντελοποιήσεις (μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων) καθώς μειώνουν κατά πολύ τις απαιτήσεις για το μέγεθος της προσομοίωσης από την σκοπιά των υπολογιστικών πόρων.

Σύνθετες Δομές Τύπου Sandwich

3.1 Περιγραφή της Λειτουργίας της Δομής

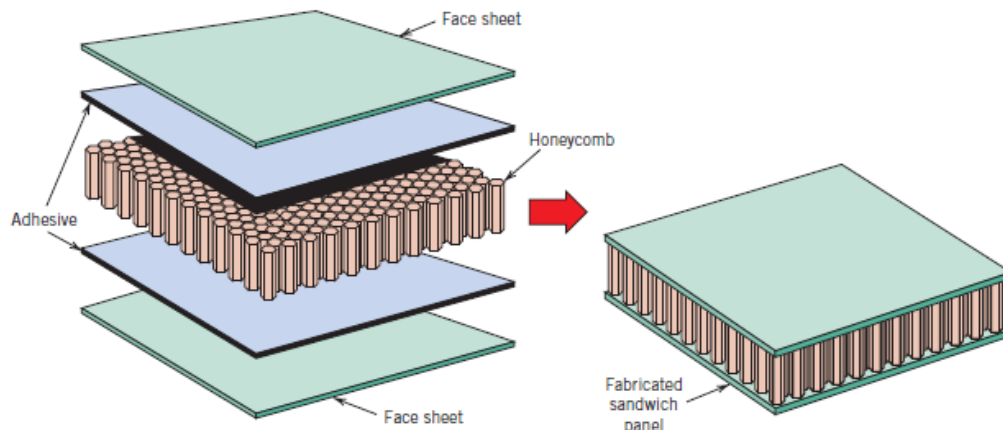
Οι σύνθετες δομές τύπου sandwich ή πιο απλά πάνελ sandwich ή sandwich, θεωρούνται ότι είναι μια κατηγορία σύνθετων δομών που σχεδιάζονται ώστε να είναι ελαφρές δοκοί ή πλάκες με σχετικά υψηλές δυσκαμψίες και αντοχές. Ένα πάνελ sandwich αποτελείται από δυο εξωτερικά φύλλα ή κελύφη που χωρίζονται από έναν παχύτερο πυρήνα που είναι συνδεδεμένος με κόλλα με αυτά (εικόνα 3.1). Ο χωρισμός των στρωμάτων από τον πυρήνα αυξάνει την ροπή αδράνειας του πάνελ με μια μικρή αύξηση στο βάρος, παράγοντας ένα δομικό στοιχείο με επαρκή αντίσταση σε κάμψη και σε φορτία λυγισμού. Εξαιτίας αυτού, χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές που η εξοικονόμηση βάρους είναι πολύ σημαντική, όπως στα αεροσκάφη και στον αθλητικό εξοπλισμό.



Εικόνα 3.1: Σχηματικό διάγραμμα της τομής ενός πάνελ sandwich (Callister, Rethwisch, 2014)

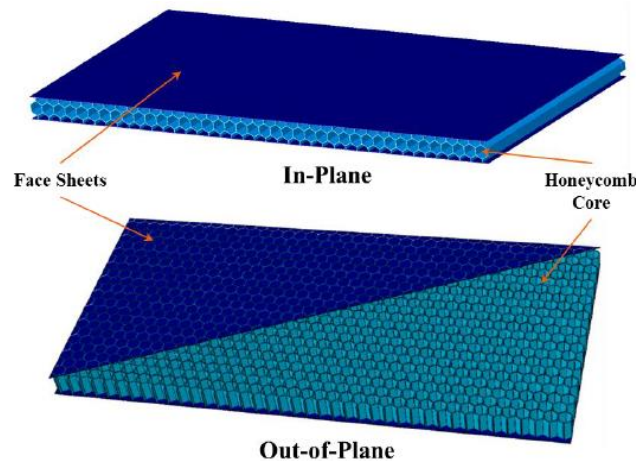
Τα κελύφη φτιάχνονται από ένα σχετικά δύσκαμπτο και ισχυρό υλικό, συνήθως από κράματα αλουμινίου, ενισχυμένα με ίνες πλαστικά, τιτάνιο, χάλυβα ακόμα και κόντρα πλακέ, που μεταφέρουν τις υψηλές δυσκαμψίες και αντοχές τους στην δομή και πρέπει να είναι αρκετά παχιά για να αντέξουν τις εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις που ενδεχομένως να δεχτεί το δομικό στοιχείο.

Δομικά ο πυρήνας υπηρετεί διάφορες λειτουργίες. Πρώτα από όλα, παρέχει συνεχή στήριξη για τα κελύφη. Επιπροσθέτως, πρέπει να έχει επαρκή διατμητική αντοχή για να αντέξει τις εγκάρσιες διατμητικές τάσεις και επίσης να είναι αρκετά παχύς για να παρέχει υψηλή διατμητική δυσκαμψία, ώστε να αντέξει τον λυγισμό του πάνελ. Θα πρέπει να σημειωθεί πως οι εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις, γενικά οι ορθές τάσεις στον πυρήνα, είναι πολύ χαμηλότερες από ότι στα κελύφη. Το υλικό του πυρήνα πρέπει να είναι ελαφρύ και να έχει χαμηλό μέτρο ελαστικότητας. Οι πυρήνες είναι συνήθως από honeycombs φτιαγμένα από κράματα αλουμινίου ή διάφορα πολυμερή, πολυμερικούς αφρούς και ξύλο balsa, αλλά ακόμα και από γενικότερα κυψελοειδή υλικά. Η εικόνα 3.2 δείχνει την κατασκευή ενός πάνελ με πυρήνα honeycomb.



Εικόνα 3.2: Τα τμήματα της δομής sandwich με πυρήνα honeycomb (Callister, Rethwisch, 2014)

Ο πυρήνας honeycomb μπορεί να έχει διαφορετικό προσανατολισμό σε σχέση με τα κελύφη, ανάλογα με την επιθυμητή δομική λειτουργία του πάνελ. Μπορεί το επίπεδο που κείται η κυψέλη να είναι παράλληλο με τα κελύφη (in-plane) ή κάθετο σε αυτά (out-of-plane) (εικόνα 3.3)



Εικόνα 3.3: Η τοποθέτηση του πυρήνα σε σχέση με τα κελύφη (Cinar et al., 2001)

Η μηχανική συμπεριφορά ενός πάνελ sandwich εξαρτάται από τις ιδιότητες των υλικών των κελυφών και του πυρήνα και από τη γεωμετρία του. Στις περισσότερες περιπτώσεις το πάνελ πρέπει να έχει μια ελάχιστη απαιτούμενη δυσκαμψία, που δεν πρέπει να αστοχεί κάτω από κάποιο μέγιστο φορτίο λειτουργίας και πρέπει να είναι όσο το δυνατόν ελαφρύτερο. Έτσι, ο σχεδιασμός του μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, που ο σκοπός του πάνελ με το ελάχιστο βάρος είναι να συναντήσει τα κριτήρια της δυσκαμψίας και της αντοχής. Η ελαχιστοποίηση μπορεί να διεξαχθεί σε σχέση με το πάχος του πυρήνα και των επιστρώσεων, σε σχέση με τα υλικά του πυρήνα και των στρώσεων και σε σχέση με την σχετική πυκνότητα του πυρήνα.

3.2 Εφαρμογές της Δομής

Η εφαρμογή της δομής sandwich χρονολογείται από το 1845 με την χρήση της στην σωληνοειδή γέφυρα στην Ουαλία (εδάφιο 1.3.1). Η χρήση της στο βομβαρδιστικό Mosquito από την βρετανική πολεμική αεροπορία κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο σηματοδότησε την έναρξη της ευρείας αποδοχής της δομής στις προηγμένες αεροναυπηγικές κατασκευές. Αξίζει να σημειωθεί πως και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις εφαρμογής ο πυρήνας του sandwich ήταν από υλικό honeycomb (εδάφιο 1.3.1). Το 1943 το ερευνητικό κέντρο της αεροπορικής βάσης Wright Patterson στις

Η.Π.Α σχεδίασε και παρήγαγε ένα sandwich με κελύφη από ενισχυμένο με ίνες σύνθετο υλικό και πυρήνα από ξύλινο honeycomb.

Στις κατοπινές δεκαετίες υπήρξε μια έκρηξη της χρήσης των sandwich σε αεροναυπηγικές, ναυπηγικές, σιδηροδρομικές και οικοδομικές κατασκευές σε πρωτεύουσα και δευτερεύουσα δομικά στοιχεία, εξέλιξη που συνοδεύτηκε από αντίστοιχες ερευνητικές εργασίες σε αυτούς τους τομείς. Πιο συγκεκριμένα, ένα μεγάλο μέρος των ατράκτων στα σύγχρονα αεροπλάνα (Boeing 747 και 757/767) αποτελείται από δομές sandwich με πυρήνα από Nomex honeycomb. Ακόμα, τα πατώματα, τα ταβάνια του εσωτερικού τους μέρους και τα πλάγια πάνελ είναι φτιαγμένα από δομές sandwich. Πλοίαρρα, αγωνιστικά σκάφη αλλά και πολύ μεγάλα πλοία και υποβρύχια εκμεταλλεύονται τα πλεονεκτήματα αυτών των δομών με πυρήνα από αφρό, καθώς έχει αποδειχθεί πως παρουσιάζουν καλύτερη άνωση. Το κουβούκλιο των αμαξιών των σύγχρονων τρένων παρουσιάζουν καλύτερη συμπεριφορά σε κρούση επωφελούμενα των δομών sandwich, όπως επίσης τα καταστρώματα των γεφυρών που έχουν γίνει πιο δύσκαμπτα και απορροφούν πιο εύκολα τους κραδασμούς από τα οχήματα που διέρχονται πάνω τους.

Από τις παραπάνω εφαρμογές μπορεί να βγει το συμπέρασμα πως οι δομές sandwich (ειδικά αυτές με πυρήνα honeycomb) είναι κατάλληλες για τον βέλτιστο συνδυασμό δυσκαμψίας – βάρους στις προηγμένες κατασκευές, για την απορρόφηση ενέργειας, την θερμική μόνωση αλλά και άλλες λειτουργίες που αφορούν τις ιδιαιτερότητες των εκάστοτε περιπτώσεων.

3.3 Παραγωγική Διαδικασία των Δομών Sandwich

Οι τεχνολογικές μέθοδοι για την παραγωγή των δομών sandwich είναι περιορισμένες σε αριθμό, με εξιδεικευμένες διαδικασίες που απαιτούν αρκετή χειρωνακτική (manual) εργασία. Όταν αναφερόμαστε σε αυτές συνήθως εννοούμε τις μεθόδους για την ένωση των δομικών συνιστωσών του sandwich (πυρήνας, κελύφη). Εδώ, θα γίνει αναφορά μόνο σε αυτή που ακολουθείται για την παραγωγή του sandwich με πυρήνα honeycomb, που είναι η **σύνδεση με κόλλα (adhesive bonding)**. Σε σχέση με τις άλλες μεθόδους παραγωγής των δομών sandwich, η μέθοδος της σύνδεσης με κόλλα περιλαμβάνει περισσότερα του ενός στάδια. Αυτό γίνεται για να διασφαλιστεί η καλή σύνδεση των συνιστωσών υλικών της δομής, ώστε αυτή να είναι όσο το δυνατότερο ασφαλής κατά την διάρκεια της λειτουργίας της.

Συνοπτικά, τα στάδια είναι τα εξής:

1ο στάδιο

- Λείανση των επιφανειών των στρώσεων και ξέπλυμα με διάλυμα
- Εφαρμογή των στρώσεων της κόλλας εποξικής ρητίνης στις επιφάνειες των κελυφών και σύνδεση με τον πυρήνα τους

2ο στάδιο

- Τοποθέτηση του sandwich σε κατάλληλο κλίβανο και εφαρμογή πίεσης κενού
- Αύξηση της θερμοκρασίας με συγκεκριμένο ρυθμό έως μια συγκεκριμένη τιμή
- Διατήρηση των συγκεκριμένων συνθηκών πίεσης και θερμοκρασίας για μια συγκεκριμένη περίοδο

3ο στάδιο

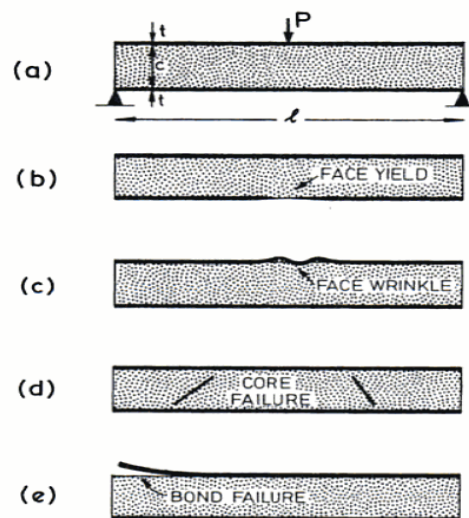
- Ψύξη με συγκεκριμένο ρυθμό

Μέσω αυτών των τριών σταδίων επιτυγχάνονται εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες, καλά συνδεδεμένες επιφάνειες και μειώνεται η πιθανότητα για αποχωρισμό μεταξύ των κελυφών και του πυρήνα σε διαμορφώσεις που δεν παρουσιάζεται καμπυλότητα. Ωστόσο, λόγω των εγγενών χαρακτηριστικών της αυτή η μέθοδος είναι

κατάλληλη για μικρές παρτίδες δομών μικρού και μεσαίου μεγέθους, απαιτεί ιδιαίτερα εξειδικευμένη εργασία και σχετικά υψηλή θερμοκρασία για την επίτευξη των απαιτούμενων ιδιοτήτων του στρώματος της εποξικής ρητίνης.

3.4 Τύποι Αστοχίας Δομής Sandwich

Οι τύποι αστοχίας ενός πάνελ sandwich φαίνονται στην εικόνα 3.6. Το πάνελ μπορεί να αστοχήσει λόγω της διαρροής ή της θραύσης των κελυφών (εικόνα 3.6(b)). Το κέλυφος που δέχεται θλιπτικό φορτίο μπορεί να «ζαρωθεί» ή να «τσαλακωθεί», εξαιτίας ενός τοπικού λυγισμού του κελύφους ως προς τον πυρήνα ή μπορεί να βαθουλωθεί (εικόνα 3.6(c)). Ο πυρήνας μπορεί επίσης να αστοχήσει, συνήθως σε διάτμηση, αν και η αστοχία εξαιτίας θλίψης ή εφελκυσμού είναι επίσης εφικτή (εικόνα 3.6(d)). Ακόμα μπορεί να αστοχήσει ο δεσμός μεταξύ του πυρήνα και των κελυφών (delamination) καθώς η κόλλα της εποξικής ρητίνης που τα συνδέει είναι αρκετά ψαθυρή (εικόνα 3.6(e)). Τέλος, το κρίσιμο σημείο φόρτισης της διατομής μπορεί να είναι στην συμβολή των κελυφών και του πυρήνα (διεπιφάνεια), αλλά αυτό συνήθως αποφεύγεται με σχεδιασμό που επιτρέπει την κατανομή του φορτίου σε όλη την διατομή του πάνελ. Παρόμοιοι τύποι αστοχίας εμφανίζονται και στους φορτισμένους στα άκρα στύλους sandwich, πέρα από το γεγονός ότι οι στύλοι μπορούν να αστοχήσουν εξαιτίας ενός καθολικού λυγισμού. Συνήθως ένας από αυτούς είναι ο κύριος τύπος και αυτός ο τύπος αυτός θεωρείται κατά το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού.



Εικόνα 3.4: Τύποι αστοχίας των πάνελ sandwich (a) φόρτιση (b) διαρροή του κελύφους (c) «ζάρωμα» του κελύφους (d) αστοχία πυρήνα (e) αστοχία συνδέσμου κελύφους - πυρήνα (Gibson, Ashby, 1997)

3.5 Στοιχεία Μηχανικής των Δομών Sandwich

Η πιο κοινά χρησιμοποιημένη θεωρία για την μηχανική ανάλυση των δομών sandwich είναι η **γραμμική θεωρία** και αποτελεί προέκταση της πρώτης τάξης θεωρίας δοκού (μηχανική θεωρίας δοκού). Κατά τον σχεδιασμό και την ανάλυση των πάνελ sandwich λαμβάνεται υπόψιν συνήθως η γραμμική θεωρία.

Η συμπεριφορά της δοκού με διατομή sandwich κάτω από φόρτιση διαφέρει από μια δοκό με μια ενιαία ελαστική διατομή. Εάν η ακτίνα καμπυλότητας είναι μεγάλη σε σύγκριση με το πάχος της δοκού sandwich και οι παραμορφώσεις των συνιστωσών

υλικών είναι μικρές, τότε η παραμόρφωση της σύνθετης δοκού sandwich μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη:

- Παραμορφώσεις εξαιτίας των καμπτικών ροπών ή παραμορφώσεων
- Παραμορφώσεις εξαιτίας των διατμητικών δυνάμεων, επίσης ονομάζονται διατμητικές παραμορφώσεις

Οι θεωρίες της δοκού, πλάκας ή κελύφους sandwich θεωρούν ως κατάσταση αναφοράς των τάσεων ως την κατάσταση μηδενικών τάσεων. Παρόλα αυτά, σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις μπορεί να υπάρχουν παραμένουσες τάσεις εξαιτίας της μεθόδου παραγωγής, όπως για παράδειγμα αυτές που εμφανίζονται στις επιφάνειες επαφής των στρώσεων εξαιτίας των συνδέσεων, οι οποίες κατά την γραμμική θεώρηση του προβλήματος μπορούν αθροιστούν ως επαλληλία με τις τάσεις που αναπτύσσονται λόγω εξωτερικής φόρτισης.

3.5.1 Μηχανική Θεωρία Sandwich (*Engineering Sandwich Theory*)

Η μηχανική θεωρία sandwich είναι η βάση για την ανάπτυξη της γραμμικής θεωρίας και εδώ παρουσιάζονται εν συντομία τα χαρακτηριστικά της. Στη μηχανική θεωρία δοκού sandwich, η αξονική παραμόρφωση υποτίθεται ότι μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος της διατομής, όπως στην θεωρία *Euler - Bernoulli*:

$$\varepsilon_{xx}(x, z) = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.1)$$

Συνεπώς, η αξονική τάση στην δοκό sandwich δίνεται:

$$\sigma_{xx}(x, z) = -zE(z) \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.2)$$

Όπου $E(z)$ είναι το μέτρο του Young το οποίο είναι συνάρτηση της θέσης κατά μήκος του πάχους της δοκού. Η καμπτική ροπή της δοκού δίνεται από:

$$M_x(x) = \iint z \sigma_{xx} dz dy = - \left(\iint z^2 E(z) dz dy \right) \frac{d^2 w}{dx^2} = -(EI)_{eq} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.3)$$

όπου $(EI)_{eq}$ είναι η καμπτική δυσκαμψία της δοκού sandwich. Η διατμητική δύναμη είναι Q_x ορίζεται ως:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} \quad (3.4)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις, οι τάσεις στην δοκό sandwich με πυρήνα πάχους $2h$ και μέτρο ελαστικότητας E^c και δύο κελύφη πάχους f το καθένα και μέτρο ελαστικότητας E^f δίνεται από τις σχέσεις:

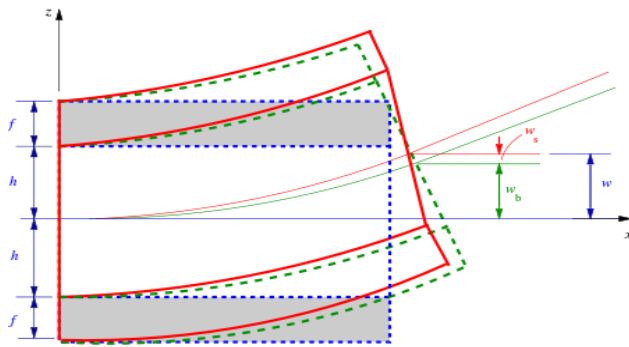
$$\sigma_{xx}^f = \frac{zE^f M_x}{D} \quad (3.5)$$

$$\sigma_{xx}^c = \frac{zE^c M_x}{D} \quad (3.6)$$

$$\tau_{xx}^f = \frac{Q_x E^f}{2D} [(h+f)^2 - z^2] \quad (3.7)$$

$$\tau_{xx}^c = \frac{Q_x}{2D} [E^c (h^2 - z^2) + E^f f(f+2h)] \quad (3.8)$$

Η εικόνα 3.5 δείχνει την κινηματική της δοκού από την μελέτη της οποίας προκύπτουν οι παραπάνω σχέσεις.



Εικόνα 3.5: Κάμψη δοκού χωρίς να ληφθεί υπόψη η διάτμηση του πυρήνα (θεωρία 1ης τάξης) (Πηγή: Wikipedia)

3.5.2 Γραμμική Θεωρία Sandwich

Η γραμμική θεωρία sandwich αποτελεί προέκταση της θεωρίας πρώτης τάξης και διαφοροποιείται από αυτή επειδή θεωρεί πλέον και την διάτμηση του στρώματος του πυρήνα. Οι κύριες υποθέσεις της γραμμικής θεωρίας δοκών sandwich με λεπτά κελύφη είναι:

- η εγκάρσια κάθετη δυσκαμψία του πυρήνα είναι άπειρη, που σημαίνει ότι το πάχος του πυρήνα δεν αλλάζει κατά την διάρκεια της κάμψης
- οι συνιστώσες της δυσκαμψίας του πυρήνα στο επίπεδο yx είναι μικρές σε σχέση με αυτές των κελυφών στο ίδιο επίπεδο, με συνέπεια ο πυρήνας να μην μπορεί να επιμηκυνθεί ή να συμπιεστεί κατά την διεύθυνση x
- τα κελύφη συμπεριφέρονται σύμφωνα με τις υποθέσεις Bernoulli - Euler, με συνέπεια να μην υπάρχει διάτμηση στο επίπεδο xz στα κελύφη και το πάχος στην διεύθυνση z των κελυφών να μην αλλάζει

Παρόλα αυτά, οι διατμητικές τάσεις του πυρήνα στο επίπεδο xz δεν αμελούνται. Με αυτές τις παραδοχές η δομή έχει ως συνέπεια ένα δισδιάστατο ορθότροπο υλικό οι καταστατικές σχέσεις του οποίου για την γραμμική περιοχή είναι:

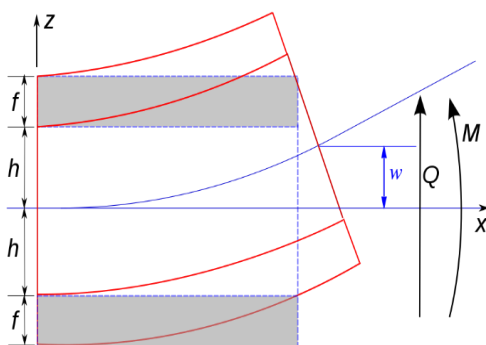
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Οι παραδοχές της θεωρίας sandwich οδηγούν στις εξής απλές σχέσεις:

$$\sigma_{xx}^{face} = C_{11}^{face} \varepsilon_{xx}^{face}, \sigma_{zx}^{core} = C_{55}^{core} \varepsilon_{zx}^{core}, \sigma_{zz}^{face} = \sigma_{xz}^{face} = 0, \sigma_{zz}^{core} = \sigma_{xx}^{core} = 0 \quad (3.10)$$

και

$$\varepsilon_{zz}^{face} = \varepsilon_{xz}^{face} = 0, \quad \varepsilon_{zz}^{core} = \varepsilon_{xx}^{core} = 0 \quad (3.11)$$



Εικόνα 3.6: Κάμψη δοκού λαμβάνοντας υπόψη τη διάτμηση του πυρήνα. Η ολική βύθιση είναι άθροιση της καμπτικής και διατμητικής συνιστώσας (Πηγή: Wikipedia)

3.5.3 Ενεργειακές Μέθοδοι

Στις περισσότερες των περιπτώσεων ενδιαφέροντος που αφορούν το πεδίο της μηχανικής, οι δομές sandwich βρίσκονται υπό την επίδραση περίπλοκων φορτίων, συννοριακών συνθηκών και έχουν ιδιαίτερη γεωμετρία. Οι αναλυτικές λύσεις που προτάθηκαν πιο πάνω δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση του πάνελ και χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές αριθμητικές μέθοδοι, που η ανάπτυξη τους βασίζεται στα ενεργειακά θεωρήματα της *Ελάχιστης Δυναμικής Ενέργειας* (Minimum Potential Energy) και της *Αρχής των Δυνατών Έργων* (Principle of Virtual Displacements). Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι πως μπορούν να λάβουν υπόψιν όχι μόνο τα μηχανικά, αλλά και τα θερμικά και τα ηλεκτρομαγνητικά φορτία, που ενυπάρχουν στις σύγχρονες δομές.

3.6 Συμπεριφορά σε Δυναμική Φόρτιση

Όπως και κάθε άλλη δομή, έτσι και οι δομές sandwich σπάνια υπόκεινται μόνο σε στατικά φορτία. Τις περισσότερες φορές δέχονται δυναμικά φορτία, που ποικίλουν σε ταλαντωτικά, κρουστικά και σεισμικά. Στη γραμμική ελαστική περιοχή μπορούν να διαχωριστούν σε δυο κατηγορίες: τις φυσικές ταλαντώσεις και εξαναγκασμένες κινήσεις. Η τελευταία κατηγορία μπορεί να διαχωριστεί επιπροσθέτως σε γεγονότα που γίνονται μια φορά (one – time events) και επαναληπτική φόρτιση.

Όταν μια δομή διεγείρεται επαναληπτικά σε μια από τις φυσικές συχνότητες, χρειάζεται πολύ μικρή ενέργεια ώστε το εύρος της ταλάντωσης να μεγαλώσει ώστε ένα από τα ακόλουθα τέσσερα πράγματα να συμβεί:

1. Το πλάτος αυξάνεται τόσο ώστε η κρίσιμη τάση που αναπτύσσεται να φτάσει το όριο θραύσης και η δομή να αστοχήσει.
2. Στα τμήματα της δομής που οι τάσεις υπερβαίνουν το όριο διαρροής, συμβαίνει πλαστική παραμόρφωση και η μηχανική τους συμπεριφορά αλλάζει πάρα πολύ.
3. Το πλάτος αυξάνει έως τα μη γραμμικά φαινόμενα να γίνονται σημαντικά.
4. Εξαιτίας της απόσβεσης το εύρος του πλάτους περιορίζεται, αλλά αν το φορτίο συνεχίζει να δέχεται επαναληπτικά φορτία η αστοχία θα επέλθει λόγω κόπωσης.

Γι' αυτό, οι διεγέρσεις κοντά στις ιδιοσυχνότητες πρέπει να αποφεύγονται όσο το δυνατόν είναι εφικτό. Στις δομές sandwich, οι φυσικές συχνότητες επηρεάζονται από τα από την αρχιτεκτονική της ίδιας της δομής, τις εντός (in-plane) και εκτός (out-of-plane) ιδιότητες της δομής και τις φυσικές συχνότητες των κελυφών και του πυρήνα.

Για την πρόληψη τους έχουν προταθεί διάφορες μεθοδολογίες, που αφορούν είτε τη χρήση πιεζοηλεκτρικών στρώσεων για την αποφυγή των μεγάλων παραμορφώσεων, είτε την χρήση καινοτόμων συστημάτων ελέγχου και παρακολούθησης της υγείας της κατασκευής (structural health monitoring systems).

Δυναμική Ανάλυση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

4.1 Εισαγωγή

4.1.1 Ταλαντώσεις σε Διακριτά και Συνεχή Συστήματα

Η μελέτη των κατασκευών και των υλικών μπορεί να είναι στατική ή δυναμική. Η στατική μελετά τα σώματα που βρίσκονται σε ισορροπία και διερευνά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες βρίσκονται σε ισορροπία. Αντιθέτως, η δυναμική μελέτη αφορά την συμπεριφορά των σωμάτων σε συνάρτηση με τον χρόνο. Η ανάγκη για αυτού του είδους την μελέτη προκύπτει όταν τα φορτία εφαρμόζονται απότομα ή όταν είναι μεταβλητά, που έχει ως αποτέλεσμα την εισαγωγή της επίδρασης της μάζας και της επιτάχυνσης των υλικών που συνιστούν ένα σώμα ή μια κατασκευή.

Μια χαρακτηριστική περίπτωση δυναμική συμπεριφοράς είναι η ταλάντωση, που χαρακτηρίζεται ως η παλινδρομική – γύρω από μια θέση ισορροπίας – κίνηση των υλικών που απαρτίζουν ένα ελαστικό μέσο, σώμα ή κατασκευή. Δύο χαρακτηριστικές κατηγορίες ταλαντώσεων είναι οι ελεύθερες και εξαναγκασμένες. Οι ελεύθερες ταλαντώσεις προκύπτουν όταν το ελαστικό σώμα που συγκρατείται αφήνεται απότομα ελεύθερο και αρχίζει να δονείται γύρω από την θέση ισορροπίας του. Αντίθετα, οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις προκαλούνται όταν το ελαστικό σώμα διεγείρεται συνεχώς από κάποιο εξωτερικό αίτιο, δηλαδή δέχεται συνεχώς εξωτερική ενέργεια.

Τα πλέον χαρακτηριστικά μεγέθη για την περιγραφή της ταλαντωτικής κίνησης ενός σώματος ή μιας κατασκευής είναι η **συχνότητα** και το **πλάτος** της ταλάντωσης. Ως συχνότητα μπορεί να οριστεί ο αριθμός επαναλήψεων της παλινδρομικής κίνησης (κύκλοι) στην μονάδα του χρόνου και εξαρτάται από φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Ως πλάτος της ταλάντωσης ενός σώματος ή ενός υλικού του σημείου, μπορεί να οριστεί ως η μέγιστη μετατόπιση του από την θέση ισορροπίας του και εξαρτάται από την αρχική ενέργεια που εισάγεται στο σύστημα και από τον τρόπο που στηρίζεται.

Κατά την μελέτη των ταλαντώσεων γίνεται η μελέτη της ταλαντωτικής κίνησης των στοιχείων που απαρτίζουν το σύστημα, όπως είναι τα στοιχεία αδράνειας, τα ελαστικά στοιχεία και τα στοιχεία απόσβεσης. Στα διακριτά συστήματα, αυτά τα στοιχεία έχουν διακριτή μορφή και μπορούν να περιγραφούν ξεχωριστά έχοντας αντιστοιχία με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, ενώ, στα συνεχή συστήματα αυτά τα στοιχεία είναι πεπλεγμένα μεταξύ τους και καταναμημένα στον χώρο του συστήματος. Τέτοιου είδους συστήματα είναι τα πλέον συνήθη στο πεδίο ενδιαφέροντος της μηχανικής.

Στα συνεχή συστήματα η περιγραφή των αποκρίσεων τους γίνεται με έναν γραμμικό συνδυασμό των **ιδιοσυχνοτήτων** τους που ο αριθμός τους είναι ίσος με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος, δηλαδή ίσος με το άπειρο. Οι ιδιοσυχνότητες εξαρτώνται από φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Ακόμα, το σχήμα του ταλαντούμενου συνεχούς συστήματος προκύπτει από ένα άθροισμα γραμμικών συναρτήσεων, των **ιδιομορφές** – ίσες στον αριθμό με τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος – οι οποίες εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά και τις συνοριακές συνθήκες του συστήματος.

Για μια σειρά από απλά δομικά στοιχεία όπως είναι οι ράβδοι, οι δοκοί και οι χορδές έχουν καταφέρει να βρεθούν αναλυτικές λύσεις που να περιγράφουν την ταλαντωτική τους συμπεριφορά κάτω απλές φορτίσεις και συνοριακές συνθήκες. Για πιο περίπλοκα συστήματα με πιο σύνθετα δομικά χαρακτηριστικά και συνοριακές συνθήκες, όπως είναι οι πλάκες από σύνθετα υλικά, πόσο μάλλον οι σύνθετες πλάκες με πυρήνα honeycomb, είναι σχεδόν αδύνατο να διατυπωθούν αναλυτικές εκφράσεις για την δυναμική τους συμπεριφορά. Γι' αυτό τον λόγο, η συμπεριφορά αυτού του είδους των συστημάτων γίνεται αρχικά με μετατροπή του συνεχούς συστήματος σε διακριτό με πολλούς βαθμούς ελευθερίας του οποίου η επίλυση γίνεται προσεγγιστικά με υπολογιστικές - αριθμητικές μεθόδους.

Οι αριθμητικές μέθοδοι συνήθως βασίζονται στην χρήση ενεργειακών θεωρημάτων που προκύπτουν από την θεωρία ελαστικότητας (αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, αρχή των δυνατών έργων) και μετατρέπουν τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων που επιλύονται με μια σειρά από αριθμητικές μεθόδους. Η πιο χαρακτηριστική υπολογιστική μέθοδος που έχει βρει ευρεία εφαρμογή και σε υπολογιστικά προγράμματα είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων τα βασικά χαρακτηριστικά της οποίας θα δοθούν στα επόμενα εδάφια.

4.1.2 Η ανάγκη για την μελέτη των ταλαντώσεων

Οι ταλαντώσεις και εν γένει η δυναμική συμπεριφορά υλικών και κατασκευών είναι αντικείμενο με πολύ μεγάλη σημασία για την τεχνολογία. Όσον αφορά την ασφάλεια των κατασκευών, οι ταλαντώσεις μπορούν να επιφέρουν την κατάρρευση μιας κατασκευής κάτω συγκεκριμένες συνθήκες και φαινόμενα, το πιο σημαντικό εκ των οποίων είναι συντονισμός. Ο συντονισμός επέρχεται όταν η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης συμπίπτει με τη φυσική συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, εισρέει στο σύστημα ενέργεια με πολύ ταχύ ρυθμό με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να αυξάνει συνεχώς και οδηγεί τις περισσότερες φορές στην κατάρρευση της κατασκευής. Μια τέτοια περίπτωση αφορούσε την κατάρρευση της Γέφυρας Τακόμα στην πολιτεία της Ουάσιγκτον στις ΗΠΑ το 1940 (εικόνα 4.1), περιστατικό που επανακαθόρισε τα κριτήρια σχεδιασμού δομικών κατασκευών, συμπεριλαμβάνοντας πλέον την δυναμική απόκριση. Βέβαια υπάρχει μια σειρά τεχνολογικών εφαρμογών που η λειτουργία τους βασίζεται στις ταλαντώσεις, όπως οι υπέρηχοι και οι τομογραφίες και πολλές άλλες προηγμένες τεχνολογίες.

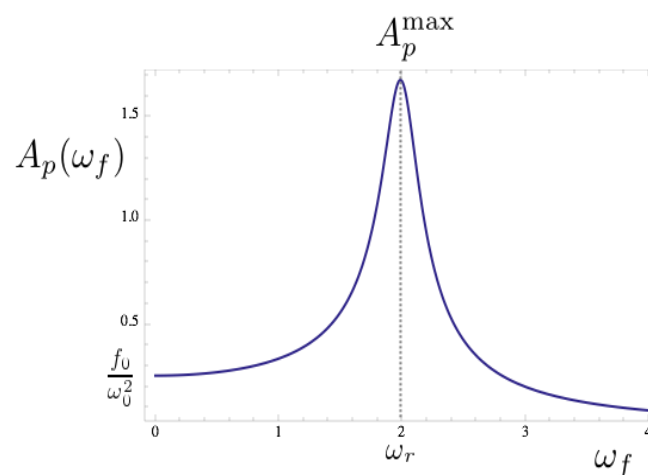
Για τους παραπάνω λόγους είναι σημαντικό να είναι γνωστά τα δυναμικά χαρακτηριστικά υλικών και κατασκευών, ειδικά στις περιπτώσεις που είναι γνωστό από τα αρχικά στάδια του σχεδιασμού τους ότι πρόκειται να δεχτούν δυναμικά φορτία. Για παράδειγμα, τα αεροπλάνα δέχονται ως επί το πλείστον στοχαστικά δυναμικά φορτία και ο σχεδιασμός της φέρουσας δομής πρέπει να τα λάβει σοβαρά υπόψιν. Σε αυτές τις κατασκευές είναι απαραίτητο να προσδιορίζονται τα δυναμικά χαρακτηριστικά των δομών που χρησιμοποιούνται, που είναι τις περισσότερες φορές οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές τους.



Εικόνα 4.1: Κατάρρευση της γέφυρας Τακόμα (1940) (Πηγή: University of Washington Libraries, Digital Collections)

4.1.3 Είδη Συστημάτων

Χονδρικά τα δυναμικά συστήματα που μελετώνται μπορεί να είναι γραμμικά και μη γραμμικά, ανάλογα με την μορφή των εξισώσεων κίνησης. Στα γραμμικά συστήματα συναντώνται τα συντηρητικά και τα μη συντηρητικά συστήματα. Τα συντηρητικά συστήματα δεν εμπεριέχουν στοιχεία ενεργειακής διάχυσης (δυναμική απόσβεση) και διατηρούν την ενέργεια τους. Στα μη συντηρητικά συστήματα εμπεριέχονται όροι δυναμικής απόσβεσης (ιξώδης απόσβεση, δομική απόσβεση) και δίνουν ως επί το πλείστον μη συμμετρικά προβλήματα ιδιομορφών και ιδιοσυχνοτήτων.



Εικόνα 4.2: Φαινόμενο Συντονισμού, όπου το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο σε μια συγκεκριμένη συχνότητα για σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με ιξώδη απόσβεση (Πηγή: Wikipedia)

4.2 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

4.2.1 Ορισμός της Μεθόδου

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method) είναι μια υπολογιστική μέθοδος η οποία επιλύει με προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους τις θεμελιώδεις εξισώσεις που διέπουν μια ευρεία ομάδα προβλημάτων συνεχούς μέσου τα οποία έχουν αυθαίρετη γεωμετρία, συνοριακές συνθήκες και φόρτιση. Ανάμεσα στα κύρια

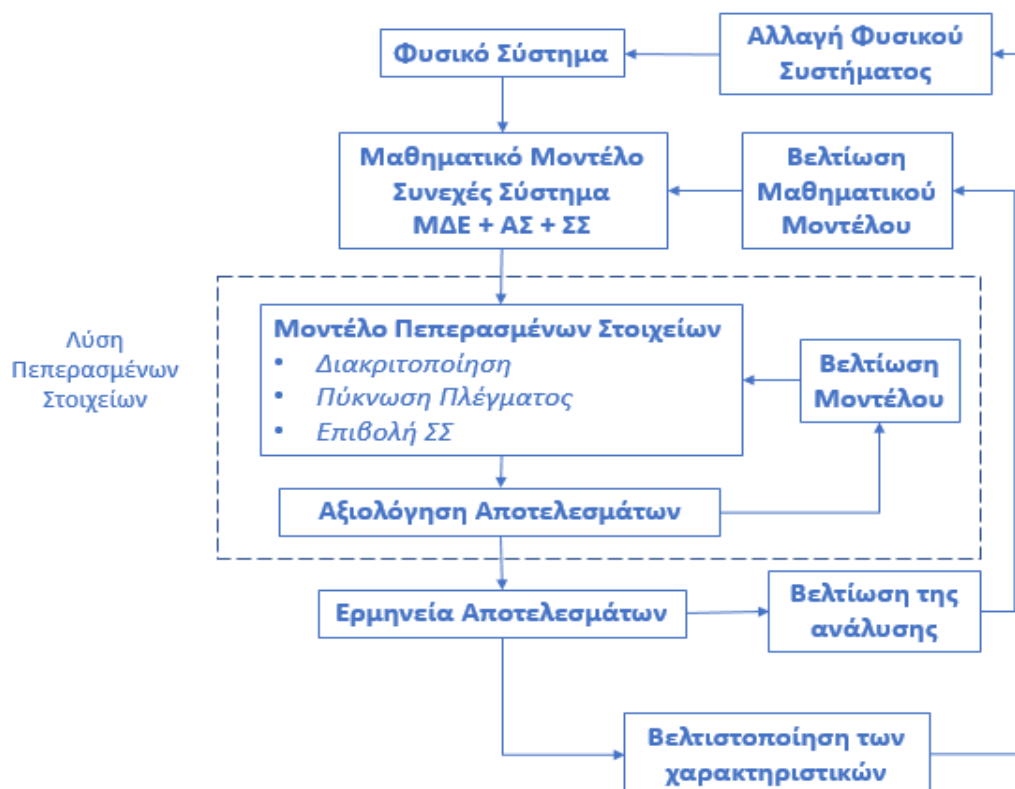
χαρακτηριστικά τα οποία την ξεχωρίζουν από άλλες προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους, είναι ότι για την διακριτοποίηση του προβλήματος βασίζεται στον συνδυασμό μεταβαλλόμενων (variational) μορφών εξισώσεων ισορροπίας και τοπικών προσεγγίσεων που ισχύουν σε μια περιορισμένη ή πεπερασμένη περιοχή του μέσου, η οποία ονομάζεται πεπερασμένο στοιχείο. Η επανάληψη της τοπικής διακριτοποίησης στον υπόλοιπο χώρο του μέσου καταλήγει στην διακριτοποίηση όλου του μέσου και την περιγραφή του από ισοδύναμες διακριτές εξισώσεις που λύνονται με τις αριθμητικές τεχνικές γραμμικής άλγεβρας.

4.2.2 Τα στάδια της ανάλυσης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Τα τυπικά βήματα για τον σχηματισμό των εξισώσεων πεπερασμένων στοιχείων είναι:

1. Ορισμός του φυσικού προβλήματος.
2. Διατύπωση του μαθηματικού μοντέλου.
3. Επιβολή ενεργειακών μεθόδων στο μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, με πιο συνηθισμένη την Αρχή των Δυνατών Έργων (Principle of Virtual Displacements).
4. Διακριτοποίηση των μεταβλητών κατάστασης (State Variables).
5. Μητρική μορφή των εξισώσεων ισορροπίας (σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων).
6. Επιβολή των συνοριακών συνθηκών (Boundary Conditions).
7. Επίλυση του συστήματος με αριθμητικές μεθόδους γραμμικής άλγεβρας.

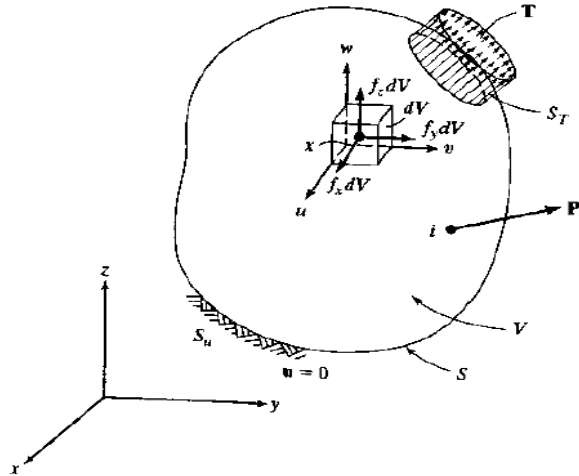
Σε κάθε ανάλυση ακολουθεί σε πρώτο επίπεδο η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της επίλυσης που οδηγεί στην μεταβολή των χαρακτηριστικών του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων και σε δεύτερο επίπεδο διερμηνεία των αποτελεσμάτων που δίνει συμπεράσματα που μπορούν να οδηγήσουν στην βελτιστοποίηση του φυσικού μοντέλου και στην ακόλουθη μοντελοποίηση του. Η όλη ακολουθία παρουσιάζεται στο διάγραμμα ροής της εικόνας 4.2.



Εικόνα 4.3: Η συνήθης διαδικασία ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία

4.3 Διαδικασία Σχηματισμού των Εξισώσεων Πεπερασμένων Στοιχείων

4.3.1 Τάσεις και Ισορροπία



Εικόνα 4.4: Τρισδιάστατο παραμορφώσιμο σώμα (Chandrupatla, Belegundu, 2002)

Ας θεωρήσουμε το σώμα με όγκο V και επιφάνεια S , τα σημεία του οποίου προσδιορίζονται από τις συντεταγμένες x, y, z . Όπως φαίνεται κι από το σχήμα ένα μέρος της επιφάνειας του περιορίζεται και σε κάποιο άλλο μέρος της επιφάνειας του ασκείται μια δύναμη που κατανέμεται εντός αυτής. Το σώμα παραμορφώνεται εξαιτίας αυτής της δύναμης. Η παραμόρφωση κάποιου σημείου $\mathbf{x} (= [x, y, z]^T)$ δίνεται από τις τρεις συνιστώσες της μετατόπισης:

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \quad (4.1)$$

Ας θεωρηθεί ακόμα ότι στο σώμα επιδρά μια πεδιακή δύναμη ανά μονάδα όγκου \mathbf{f} , της οποίας το διάνυσμα περιγράφεται από:

$$\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T \quad (4.2)$$

Η επιφανειακή δύναμη \mathbf{T} ορίζεται από διάνυσμα της στα σημεία της επιφάνειας:

$$\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T \quad (4.3)$$

Οι τάσεις που ενεργούν σε έναν στοιχειώδη όγκο που αναφέρεται σε ένα στοιχείο του υλικού φαίνονται στην εικόνα 4.4. Η περιγραφή αυτής της εντατικής κατάστασης γίνεται με έναν τανυστή δεύτερης τάξης. Η τάση περιγράφεται με έξι ανεξάρτητες συνιστώσες, όπως:

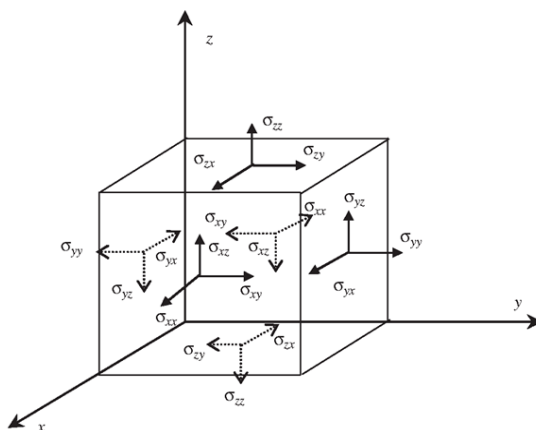
$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \quad (4.4)$$

όπου οι $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ είναι οι ορθές τάσεις και οι $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ είναι οι διατμητικές τάσεις. Θεωρώντας την ισορροπία του στοιχειώδους όγκου, λαμβάνονται οι εξισώσεις ισορροπίας σε όρους τάσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned}$$

ή σε συμπυκνωμένη μορφή:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \text{για } i, j = x, y, z \quad (4.5)$$



Εικόνα 4.5: Ισορροπία στοιχειώδους όγκου (Bathe, 1996)

4.3.2 Καταστατικές Εξισώσεις

Οι καταστατικές εξισώσεις εκφράζουν εν γένει την φαινομενολογική συμπεριφορά του υλικού ή των υλικών από τα οποία αποτελείται το παραμορφώσιμο σώμα. Στην γενικότερη περίπτωση, οι καταστατικές εξισώσεις είναι μη γραμμικές και συνδέουν τις τάσεις σε ένα σημείο του υλικού με τις παραμορφώσεις και τους ρυθμούς της χρονικής μεταβολής τους, μέσα από σχέσεις που έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\dot{\sigma} = f(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (4.6)$$

Οι ανωτέρω έκφραση λαμβάνει πιο συγκεκριμένες μορφές ανάλογα με το υλικό και τα όρια της μηχανικής και θερμικής του φόρτισης (μη γραμμική ελαστικότητα, βισκοελαστικότητα, πλαστικότητα, βισκοπλαστικότητα, κλπ.) Τα περισσότερα υλικά όταν υφίστανται μικρές τάσεις και παραμορφώσεις συμπεριφέρονται συνήθως γραμμικά. Όταν έχουμε γραμμικά υλικά, η καταστατική εξίσωση εκφράζεται από τον ελαστικότητα του Hooke, ο οποίος συνδέει γραμμικά τις τάσεις με τις παραμορφώσεις μέσω του μητρώου ελαστικότητας του υλικού $[C]$, όπως εκφράζεται από την σχέση:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad i, j = 1, \dots, 6 \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = [C]\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.7)$$

4.3.3 Εξισώσεις Συμβατότητας

Οι εξισώσεις συμβατότητας εκφράζουν την σχέση μεταξύ παραμορφώσεων και μετατοπίσεων. Η μορφή των σχέσεων συμβατότητας εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης και της παραμόρφωσης του σώματος, καθώς και από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται (καρτεσιανό, κυλινδρικό, γενικευμένο καμπυλόγραμμο, κτλ.). Στην γενικότερη περίπτωση η σχέση εκφράζεται μέσα από έναν κατάλληλο διαφορικό τελεστή:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L(\mathbf{u}) \quad (4.8)$$

Στην περίπτωση που έχουμε είτε μεγάλες είτε μικρές μετατοπίσεις ή ακόμα και έναν συνδυασμό αυτών, τότε ο διαφορικός τανυστής είναι μη γραμμικός. Στην περίπτωση μικρών (απειροελάχιστων) μετατοπίσεων και παραμορφώσεων, σχέση παραμορφώσεων – μετατοπίσεων είναι γραμμική και έχει τη μορφή:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.9)$$

όπου e_{ij} είναι ο τανυστής των τροπών (παραμορφώσεων).

4.3.4 Συνοριακές Συνθήκες

Επιπλέον των ανωτέρων εξισώσεων, θα πρέπει να ικανοποιούνται και η ισορροπία μεταξύ των εξωτερικών και των εσωτερικών δυνάμεων στην συνοριακή επιφάνεια του

σώματος, καθώς και η συμβατότητα των επιβαλλόμενων μετατοπίσεων. Οι συνθήκες αυτές ορίζουν δύο σετ συνοριακών συνθηκών οι οποίες είναι απαραίτητες για την επίλυση των θεμελιωδών εξισώσεων και περιγράφονται ακριβώς πιο κάτω.

- *Φυσικές Συνοριακές Συνθήκες*

Εκφράζουν την ισορροπία των εξωτερικών δυνάμεων στο τμήμα της επιφάνειας S_T . Οι εφαρμοσμένες δυνάμεις (tractions) \mathbf{T} οι οποίες εφαρμόζονται πάνω στο τμήμα της επιφάνειας S_T θα πρέπει να εξισορροπούνται από τις επιφανειακές τάσεις στο αντίστοιχο σημείο. Θεωρώντας το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ στην επιφάνεια, η σχέση ισορροπίας μεταξύ κάθε συνιστώσας των εξωτερικών δυνάμεων (ανά μονάδα επιφάνειας S), δίνεται από την σχέση:

$$T_i^{S_T} = \overline{\sigma_{ij}} n_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.10)$$

όπου,

$T_i^{S_T}$, η εξωτερική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας κατά οποιονδήποτε ορθογώνιο άξονα $\overline{\sigma_{ij}}$, η επιφανειακή τάση στην συνοριακή επιφάνεια S

n_j , συνιστώσα του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος στην επιφάνεια S

- *Συμβατότητα Επιβαλλόμενων Μετατοπίσεων*

Οι σχέσεις αυτές εκφράζουν την ύπαρξη στηρίξεων στο τμήμα της εξωτερικής επιφάνειας S_u όπου υπάρχουν στηρίξεις, δηλαδή:

$$u_i^{S_u} = \bar{u}_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

Στα σημεία όπου έχουμε επιβεβλημένες μετατοπίσεις, θα υπάρχουν αντιδράσεις οι οποίες θα πρέπει να εξισορροπούνται από τις εσωτερικές τάσεις που θα αναπτύσσονται στην επιφάνεια S_u :

$$T_i^{S_u} = \overline{\sigma_{ij}} n_j, \quad (4.12)$$

4.3.5 Μεταβαλλόμενες Μορφές των Εξισώσεων Ισορροπίας

Οι παραπάνω εξισώσεις συνδυαζόμενες εκφράζουν ένα σύστημα πεπλεγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων που εφαρμόζεται σε κάθε σημείο του στερεού και εκφράζουν την ισχυρή μορφή (strong form) των εξισώσεων ισορροπίας και που είναι αδύνατο να λυθούν αναλυτικά, παρά μόνο για συγκεκριμένα προβλήματα με απλή γεωμετρία και συνοριακές συνθήκες. Ως βάση για την ανάπτυξη νέων μορφών εξισώσεων που οδηγούν σε εναλλακτικές προσεγγιστικές μορφές επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων με αριθμητικές και υπολογιστικές μεθόδους, είναι οι μεταβαλλόμενες μορφές των εξισώσεων ισορροπίας (variational formulations) που αποκαλούνται και ως αδύναμες μορφές (weak formulations). Η χαρακτηριστικότερη μέθοδος είναι η αρχή των δυνατών έργων (principle of virtual displacements).

Σε αυτές τις μεθόδους οι καταστατικές μεταβλητές (state variables) $\bar{u}(x, y, z)$ προσεγγίζονται με σύνολο μεταβλητών $u_i(x, y, z)$ που πλέον δεν ικανοποιούν την εξίσωση ισορροπίας επακριβώς αλλά της δίνουν ένα μικρό σφάλμα:

$$R(\bar{u}) = \sigma_{ij,j}(u_i) + f_i \neq 0 \quad (4.13)$$

Οι συναρτήσεις που θα ελαχιστοποιούν ή ακόμα καλύτερα θα μηδενίζουν τα υπόλοιπα R_i σε όλα τα σημεία του σώματος, μπορούν να θεωρηθούν ως αποδεκτές λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας. Οι συναρτήσεις αυτές θα λέγονται συναρτήσεις δοκιμής $\varphi_i(x, y, z)$. Όσον αφορά την αρχή των δυνατών έργων ως συναρτήσεις δοκιμής επιλέγονται να είναι οι αυθαίρετες μεταβολές των μετατοπίσεων $\delta \mathbf{u} = \{\delta u, \delta v, \delta w\}^T$, δηλαδή $\varphi_i(x, y, z) = \delta u_i$. Κατόπιν, επιχειρείται ο μηδενισμός του ολοκληρώματος του σταθμισμένου σφάλματος στον όγκο του στερεού:

$$\int_V \delta u_i R_i dV = 0$$

ή

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i) dV = 0 \quad (4.14)$$

όπου V ο όγκος του στερεού. Αυτή η μέθοδος ελαχιστοποίησης των σταθμισμένων υπολοίπων ονομάζεται Galerkin και χρησιμοποιεί τις ίδιες συναρτήσεις βάσης $N_i(x, y, z)$ που εκφράζουν την συνάρτηση δοκιμής σαν συναρτήσεις στάθμισης των υπολοίπων, $\varphi_i = N_i(x, y, z)$. Η ικανοποίηση λοιπόν, της μεταβαλλόμενης εξίσωσης θα διαφέρει από την άμεση επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων επιβάλλοντας αθροιστικά τον μηδενισμό του σφάλματος στον όγκο του σώματος και όχι σε κάθε σημείο, εξ ου και ο χαρακτηρισμός «αδύναμη μορφή».

Η ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων ισορροπίας, η οποία ουσιαστικά εκφράζει την Αρχή των Δυνατών Έργων είναι:

$$-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV + \oint_{S_T} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{T}^{S_T} dS = 0 \quad (4.15)$$

η οποία αποτελεί βάση για την ανάπτυξη της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Το φυσικό νόημα της παραπάνω εξίσωσης είναι ότι επέρχεται ισορροπία μεταξύ του έργου των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων, καθώς ο πρώτος όρος αφορά την μεταβολή του έργου των εσωτερικών δυνάμεων ή αλλιώς την μεταβολή της ελαστικής ενέργειας, ενώ οι άλλοι δύο αφορούν την μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων και συγκεκριμένα του έργου των πεδριακών και των επιφανειακών δυνάμεων. Είναι αλλιώς, η ισοδύναμη μορφή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και ισχύει τόσο για γραμμικά όσο και μη γραμμικά προβλήματα ανάλυσης κατασκευών, αφού ουσιαστικά εκφράζει την ισορροπία των δυνάμεων.

Στην περίπτωση της γραμμικής συμπεριφοράς υλικού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Hooke με την εξίσωση πλέον να λαμβάνει την μορφή:

$$-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV + \oint_{S_T} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{T}^{S_T} dS = 0 \quad (4.16)$$

Η μητρική μορφή της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από την σχέση:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (4.17)$$

όπου $[K]$ το μητρώο δυσκαμψίας του ελαστικού σώματος, $\{u\}$ το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων και $\{F\}$ το ολικό διάνυσμα των δυνάμεων. Αυτή είναι και η κλασική μορφή εξισώσεων που καταλήγει η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για τα στατικά προβλήματα.

Να σημειωθεί πως η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων δίνει λύσεις μόνο για τις μετατοπίσεις. Οι παραμορφώσεις, οι τάσεις και οι επιφανειακές δυνάμεις, υπολογίζονται έμμεσα από την λύση των μετατοπίσεων με αυξημένο σφάλμα.

4.4 Δυναμική Ανάλυση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

4.4.1 Εξισώσεις Κίνησης Διακριτοποιημένου Συστήματος

Η προηγούμενη διαδικασία σχηματισμού των εξισώσεων πεπερασμένων στοιχείων αφορούσε τα στατικά γραμμικά και μη γραμμικά προβλήματα, όπου τα φορτία είναι

σταθερά ή μεταβάλλονται πολύ αργά με τον χρόνο. Στα δυναμικά προβλήματα τα φορτία μεταβάλλονται πολύ γρήγορα με τον χρόνο, με συνέπεια πλέον να μην ισχύει η ισορροπία μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \neq 0, \text{ για } i, j = x, y, z \quad (4.18)$$

Πλέον οι μετατοπίσεις, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συναρτήσεις του χρόνου. Η διαδικασία για να προκύψουν οι εξισώσεις πεπερασμένων στοιχείων ενός δυναμικού προβλήματος περιγράφεται παρακάτω.

Υποθέτοντας την μετατόπιση των κόμβων των στοιχείων ως συναρτήσεις του χρόνου, ισχύει:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = N_i(x, y, z, t)\mathbf{q}(t) \quad (4.19)$$

όπου \mathbf{u} είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων, N_i το μητρώο των συναρτήσεων μορφής και \mathbf{q} είναι το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων που είναι συναρτήσεις του χρόνου. Ο προσδιορισμός του μητρώου δυσκαμψίας γίνεται από τις καταστατικές εξισώσεις και τις εξισώσεις συμβατότητας, καθώς οι τάσεις και οι παραμορφώσεις εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [B]\mathbf{q} \quad (4.20)$$

και

$$\boldsymbol{\sigma} = [C][B]\mathbf{q} \quad (4.21)$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο την σχέση (4.19) δίνεται το πεδίο των ταχυτήτων των υλικών του σώματος:

$$\dot{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = N_i(x, y, z, t)\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (4.22)$$

όπου το $\dot{\mathbf{q}}$ είναι το διάνυσμα των κομβικών ταχυτήτων. Για να προκύψουν οι δυναμικές εξισώσεις ενός σώματος χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Lagrange. Οι εξισώσεις Lagrange δίνονται από την σχέση:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial \dot{Q}} \right\} = \{0\} \quad (4.23)$$

όπου,

$$L = T - \Pi \quad (4.24)$$

είναι η συνάρτηση Lagrange, με T να δηλώνεται η κινητική ενέργεια, με Π να δηλώνεται η δυναμική ενέργεια, με R να δηλώνεται η συνάρτηση των κατανεμημένων δυνάμεων, με Q το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων και \dot{Q} το διάνυσμα των κομβικών ταχυτήτων του συστήματος. Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ενός στοιχείου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$T^i = \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV \quad (4.25)$$

και

$$\Pi^i = \frac{1}{2} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \oint_{S_T} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{T}^S r dS \quad (4.26)$$

όπου V είναι ο όγκος, ρ η πυκνότητα και $\dot{\mathbf{u}}$ το διάνυσμα των ταχυτήτων του στοιχείου e . Υποθέτοντας την ύπαρξη κατανεμημένων δυνάμεων (dissipative forces) ανάλογων με τις σχετικές ταχύτητες, μπορούμε τις εκφράσουμε ως:

$$R^i = \frac{1}{2} \int_V \mu \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV \quad (4.27)$$

όπου μ είναι ο συντελεστής απόσβεσης. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lagrange οι εκφράσεις για την δυναμική και την κινητική ενέργεια καθώς και για τις κατανεμημένες δυνάμεις, μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$T = \sum_{i=1}^N T^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \left(\sum_{i=1}^n \int_V \rho N^T N dV \right) \dot{\mathbf{Q}} \quad (4.28)$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \Pi^i = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \left(\sum_{i=1}^N \int_V [B]^T [C] [B] dV \right) \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \left(\sum_{i=1}^N \oint_{S_r} N^T \mathbf{T}^{S_r} dS + \sum_{i=1}^N \int_V N^T \mathbf{f} dV \right) \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{P}_c(t) \quad (4.29)$$

$$R = \sum_{i=1}^N R^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \left[\int_V \mu N^T N dV \right] \dot{\mathbf{Q}} \quad (4.30)$$

όπου \mathbf{Q} είναι το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων και $\dot{\mathbf{Q}}$ είναι το διάνυσμα των κομβικών ταχυτήτων εκφρασμένα και τα δύο στο ολικό σύστημα συντεταγμένων και \mathbf{P}_c είναι το διάνυσμα των συγκεντρωμένων κομβικών δυνάμεων που έχουν προστεθεί για χάρη ακρίβειας. Με τον ορισμό των μητρώων του στοιχείου:

$$[M^i] = \text{μητρώο μάζας του στοιχείου} = \int_{V_e} \rho N^T N dV \quad (4.31)$$

$$[K^i] = \text{μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου} = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dV \quad (4.32)$$

$$[C^i] = \text{μητρώο απόσβεσης στοιχείου} = \int_{V_e} \mu N^T N dV \quad (4.33)$$

μπορεί να γίνει σύνθεση των μητρώων και των διανυσμάτων της εξίσωσης κίνησης όλου του σώματος από τις συνεισφορές του κάθε στοιχείου. Οι εξισώσεις (4.28) - (4.30) μπορούν να γραφτούν ως:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T [M] \dot{\mathbf{Q}} \quad (4.34)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [K] \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{P}_c \quad (4.35)$$

$$R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T [C] \dot{\mathbf{Q}} \quad (4.36)$$

και κατόπιν να αντικατασταθούν στην (4.23), ώστε να καταλήξουμε στην εξίσωση κίνησης του διακριτού μέσου που καταλήγει η εφαρμογή των ενεργειακών μεθόδων:

$$[M] \ddot{\mathbf{Q}}(t) + [C] \dot{\mathbf{Q}}(t) + [K] \mathbf{Q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.37)$$

όπου $\ddot{\mathbf{Q}}$ το διάνυσμα των κομβικών επιταχύνσεων του σώματος. Εάν αγνοηθεί η απόσβεση καταλήγουμε:

$$[M] \ddot{\mathbf{Q}}(t) + [K] \mathbf{Q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.38)$$

4.4.2 Μητρώα Μάζας

Η εξίσωση (4.31) για το μητρώο μάζας προέκυψε από τον Archer και ονομάζεται «συνεπές» (consistent) μητρώο μάζας του στοιχείου. Ονομάζεται έτσι επειδή το ίδιο μοντέλο μετατόπισης που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό του μητρώου δυσκαμψίας χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του μητρώου μάζας. Αξίζει να σημειωθεί πως αρκετά δυναμικά προβλήματα που έχουν λυθεί και λύνονται με απλούστερες μορφές μητρώων μάζας. Η απλούστερη μορφή του μητρώου μάζας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκύπτει τοποθετώντας συγκεντρωμένες μάζες m_i στα σημεία των κόμβων στις διευθύνσεις των υποτιθέμενων βαθμών ελευθερίας. Οι συγκεντρωμένες μάζες αναφέρονται στις μεταφορικές και περιστροφικές αδράνειες του

στοιχείου και υπολογίζονται υποθέτοντας ότι το υλικό εντός των μέσω θέσεων συμπεριφέρεται ως στέρεο σώμα ενώ το εναπομένον υλικό δεν συμμετέχει στην κίνηση. Με αυτό τον τρόπο, αποκλείεται η δυναμική σύζευξη που υπάρχει μεταξύ των μετατοπίσεων του στοιχείου και ως εκ τούτου το μητρώο δυσκαμψίας που προκύπτει είναι καθαρά διαγώνιο και ονομάζεται «συγκεντρωμένο» (lumped) μητρώο μάζας.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα των δύο κατηγοριών των μητρώων μάζας είναι αυτά των δίκομβων αξονικών στοιχείων, που παρουσιάζονται παρακάτω:

$$m^e_{consistent} = \int_{V_e} \rho N^T N dV = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{συνεπές μητρώο μάζας}$$

και

$$m^e_{lumped} = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{συγκεντρωμένο μητρώο μάζας}$$

που έχουν προκύψει από την εφαρμογή των προηγούμενων τύπων.

Τα συγκεντρωμένα μητρώα μάζας μπορούν να οδηγήσουν σε σχεδόν ακριβή αποτελέσματα εάν μικρά αλλά με μεγάλη μάζα αντικείμενα τοποθετηθούν στους κόμβους μιας ελαφράς κατασκευής. Τα συνεπή μητρώα μάζας θα είναι ακριβή εάν το πραγματικό παραμορφωμένο σχήμα (υπό τις δυναμικές συνθήκες) περιλαμβάνεται στις συναρτήσεις μορφής [N]. Από την στιγμή που το παραμορφωμένο σχήμα κάτω από τις δυναμικές συνθήκες δεν είναι γνωστό συχνά η στατική κατανομή των παραμορφώσεων χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις μορφής [N]. Έτσι, η κατανομή μάζας που προκύπτει θα είναι δεν θα είναι παρά προσεγγιστική, παρόλο που η ακρίβεια που προκύπτει θα είναι γενικά επαρκής για τους περισσότερους πρακτικούς σκοπούς. Από την στιγμή που τα μητρώα συγκεντρωμένης μάζας είναι διαγώνια, το ολικό μητρώο της κατασκευής απαιτεί λιγότερο αποθηκευτικό χώρο σε σχέση με το συνεπές μητρώο μάζας. Επιπλέον, τα διαγώνια συγκεντρωμένα μητρώα μάζας διευκολύνουν πάρα πολύ τους επιθυμητούς υπολογισμούς.

4.5 Μέθοδοι Επίλυσης των Εξισώσεων Κίνησης

Οι μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων κίνησης χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τις **μεθόδους ευθείας ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης (direct integration methods)** και τις **μεθόδους υπέρθεσης των ιδιομορφών (mode superposition)**. Αν και αυτές οι μέθοδοι μπορεί να φαίνονται αρκετά διαφορετικές με την πρώτη ματιά, στην πραγματικότητα, είναι πολύ στενά συνδεδεμένες και επιλογή τους κάθε φορά εξαρτάται αποκλειστικά από την αριθμητική τους αποδοτικότητα.

4.5.1 Μέθοδοι Ευθείας Ολοκλήρωσης των Εξισώσεων Κίνησης (Direct Integration Methods)

Στις μεθόδους ευθείας ολοκλήρωσης οι εξισώσεις κίνησης ολοκληρώνονται αριθμητικά με μια διαδικασία βήματος – βήματος (step by step), με τον όρο «ευθεία» να δηλώνει ότι πριν την αριθμητική ολοκλήρωση δεν πραγματοποιείται καμιά αλλαγή στην μορφή της εξίσωσης. Αυτή η αριθμητική ολοκλήρωση βασίζεται σε δύο ιδέες. Πρώτον, αντί να ικανοποιείται η (4.37) σε κάθε χρονική στιγμή t , στοχεύετε να ικανοποιείται σε διακριτά χρονικά διαστήματα Δt . Αυτό σημαίνει ότι η (δυναμική) ισορροπία, η οποία περιλαμβάνει την επίδραση των αδρανειακών δυνάμεων και των δυνάμεων απόσβεσης λύνεται σε διακριτά χρονικά σημεία εντός των ορίων της ολοκλήρωσης της λύσης. Επομένως, όλες οι τεχνικές που εφαρμόζονται στην στατική ανάλυση εφαρμόζονται και στα διακριτά χρονικά βήματα. Η δεύτερη ιδέα πάνω στην οποία βασίζονται αυτές οι μέθοδοι είναι ότι γίνεται υπόθεση για τη μεταβολή των μετατοπίσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων σε κάθε χρονικό διάστημα. Όπως γίνεται κατανοητό, ο τύπος της υπόθεσης κάθε φορά επηρεάζει την ακρίβεια, την ευστάθεια και το κόστος της επίλυσης.

Παρακάτω, θα αναφερθούν οι βασικές μέθοδοι και τα βασικότερα χαρακτηριστικά τους. Χονδρικά, αυτές χωρίζονται σε «ρητές» (explicit) και «άρρητες» (implicit) μεθόδους.

- **Μέθοδος κεντρικών διαφορών (Central Difference Method)**

Σε αυτή τη μέθοδο οι εξισώσεις κίνησης θεωρούνται ως ένα σύνολο συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, όποτε μπορούν να διακριτοποιηθούν στο πεδίο του χρόνου με την μέθοδο των (πεπερασμένων) κεντρικών διαφορών. Αρχικά, γίνεται η προσέγγιση των επιταχύνσεων και των ταχυτήτων και κατόπιν, ο υπολογισμός των μετατοπίσεων. Ακολουθεί ο αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος:

$$\ddot{\mathbf{u}}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}^t + \mathbf{u}^{t+\Delta t}) \quad (4.39)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^{t-\Delta t}) \quad (4.40)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{\Delta t} C \right) \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} M \right) \mathbf{u}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right) \mathbf{u}^{t-\Delta t} \quad (4.41)$$

όπου υπολογίζεται η τιμή $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$. Να σημειωθεί πως η λύση του συστήματος την χρονική στιγμή $t + \Delta t$, $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ βασίζεται στις συνθήκες ισορροπίας την χρονική στιγμή t . Για αυτό το λόγο αυτή η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος «ρητής» ολοκλήρωσης, και δεν χρειάζεται να γίνει αντιστροφή του μητρώου δυσκαμψίας σε κάθε χρονικό βήμα. Ακόμα, το μητρώο μάζας διαγωνοποιείται και η επίδραση της απόσβεσης αμελείται, με προφανή υπολογιστικά κέρδη κατά τον υπολογισμό, ειδικά για συστήματα πολύ μεγάλου μεγέθους. Παρόλα αυτά, το χρονικό βήμα πρέπει να είναι πολύ μικρό και να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη, ώστε να μην επέρχεται αστάθεια στο σύστημα:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (4.42)$$

όπου T_n είναι η μικρότερη περίοδος του συστήματος που υπολογίζεται με βάση τα χαρακτηριστικά του μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτή η συνθήκη είναι χαρακτηριστική για τις ρητές μεθόδους ολοκλήρωσης, καθώς αποτρέπουν την αστάθεια του συστήματος.

- **Μέθοδος Houbolt**

Η μέθοδος κεντρικών διαφορών μπορεί να εμφανίζει λύσεις με μεγάλες διακυμάνσεις εξαιτίας των φαινομένων αστάθειας. Για αυτό τον λόγο έχουν αναπτυχθεί σχήματα που είναι ευσταθή και η επιλογή του χρονικού διαστήματος δεν είναι τόσο σημαντική. Όμως, σε αυτές τις μεθόδους, που ονομάζονται άρρητες μέθοδοι ολοκλήρωσης, η αντιστροφή του πίνακα δυσκαμψίας είναι απαραίτητη για κάθε χρονικό βήμα. Οι μέθοδοι αυτοί διαφοροποιούνται βάση των σημείων που παίρνουν για την προσέγγιση των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων.

Η μέθοδος Houbolt υπολογίζει τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις συναρτήσει των συνιστωσών των μετατοπίσεων, όπως δείχνει και η παρακάτω ακολουθία:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\Delta t^2} M + \frac{1}{6\Delta t} C + K \right) \mathbf{u}^{t+\Delta t} \\ & = \mathbf{F}^{t+\Delta t} + \left(\frac{5}{\Delta t^2} M + \frac{3}{\Delta t} C \right) \mathbf{u}^t - \left(\frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{3}{\Delta t} C \right) \mathbf{u}^{t-\Delta t} \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{3\Delta t} C \right) \mathbf{u}^{t-2\Delta t} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Στην έκφραση μπορεί να παρατηρηθεί πως για την εύρεση του $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$, απαιτούνται να είναι γνωστές οι τιμές \mathbf{u}^t , $\mathbf{u}^{t-\Delta t}$, $\mathbf{u}^{t-2\Delta t}$. Για τον υπολογισμό των $\ddot{\mathbf{u}}^0$, $\dot{\mathbf{u}}^0$, \mathbf{u}^0 απαιτούνται ειδικές υπολογιστικές διαδικασίες έναρξης του αλγορίθμου, κάτι που είναι επίπονο σε υπολογισμούς. Για αυτό τον λόγο, αναπτύχθηκαν άρρητες μέθοδοι με λιγότερους υπολογισμούς για την έναρξη του αλγορίθμου όπως η μέθοδος Newmark, που χρειάζεται τρία σημεία.

4.5.2 Μέθοδοι Υπέρθεσης των Ιδιομορφών (*Mode Superposition*)

Ο αριθμός των υπολογισμών που απαιτείται σε μια μέθοδο ευθείας ολοκλήρωσης είναι ευθεία ανάλογος με τον αριθμό των χρονικών βημάτων και η χρήση τους αναμένεται να είναι αποδοτική μόνο για αποκρίσεις με σχετικά μικρή διάρκεια (λίγα χρονικά βήματα). Εάν η ολοκλήρωση πρέπει να διεξαχθεί για αρκετά χρονικά βήματα, ίσως να είναι πιο αποτελεσματικό αρχικά να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας σε μια μορφή όπου η βήμα-προς-βήμα λύση να κοστίζει υπολογιστικά λιγότερο. Ο μετασχηματισμός αυτός βασίζεται στον σκοπό της ανάλυσης που διεξάγεται. Το γενικό πρόβλημα στην ελεύθερη ταλάντωση είναι ο υπολογισμός των ιδιοτιμών $\lambda (= \omega^2)$, που είναι γενικά μέτρο της συχνότητας της ταλάντωσης και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος \mathbf{U} που υποδηλώνει την ιδιομορφή.

Για να δειχθεί η όλη διαδικασία, $\boldsymbol{\varphi}$ ως θεωρηθεί η ελεύθερη ταλάντωση ενός συντηρητικού συστήματος:

$$M\ddot{\mathbf{U}} + K\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

Η λύση του προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί της μορφής:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi} \sin \omega(t - t_0) \quad (4.45)$$

Αντικαθιστώντας την (4.45) στην (4.44), προκύπτει το γενικότερο πρόβλημα των ιδιομορφών:

$$K\boldsymbol{\varphi} = \lambda M\boldsymbol{\varphi} \quad (4.46)$$

η στάνταρντ μορφή του προβλήματος δίνεται από την σχέση:

$$K\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i M\boldsymbol{\varphi}_i \quad (4.47)$$

όπου τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια σε σχέση με τα μητρώα μάζας και ακαμψίας:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T M \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{0}, \quad \text{εάν } i \neq j \quad (4.48\alpha)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T K \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{0}, \quad \text{εάν } i \neq j \quad (4.48\beta)$$

Γενικά, τα μήκη των ιδιοδιανυσμάτων κανονικοποιούνται έτσι ώστε:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T M \boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{1} \quad (4.49\alpha)$$

Με συνέπεια την σχέση:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T K \boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{1} \quad (4.49\beta)$$

Ακόμα, οι ιδιοτιμές τακτοποιούνται σε αύξουσα σειρά ως:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \quad (4.50)$$

Οι διαδικασίες για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων χωρίζονται στις παρακάτω τέσσερις ομάδες:

1. **Μέθοδος επαναληπτικού διανύσματος**, που όπως φανερώνει και το όνομα της είναι μια επαναληπτική μέθοδος όπου δοκιμάζεται ένα αρχικό διάνυσμα \mathbf{u}^0 και μέσω της αντίστροφης επανάληψης, συγκλίνει στη μικρότερη ιδιοτιμή και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές μπορούν να ληφθούν με μετατόπιση. Πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ο υπολογισμός μερικών ιδιοτιμών, αλλά η σύγκλιση είναι γραμμική και ανάλογη με τον λόγο λ_1/λ_2 .
2. **Μέθοδοι μετασχηματισμού**, όπου η βασική προσέγγιση εδώ είναι ο μετασχηματισμός των μητρώων σε απλούστερη μορφή και έπειτα ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Οι βασικότερες μέθοδοι αυτής της κατηγορίας είναι η γενικευμένη μέθοδος Jacobi και η μέθοδος QR (ή IR), που γενικά είναι κατάλληλες για προβλήματα μεγάλης κλίμακας. Έχουν μεγάλη ακρίβεια, αλλά χρειάζεται να υπολογίσουν όλες τις ιδιομορφές και τα ιδιοδιανύσματα.
3. **Αριθμητική εξίσωση επίλυσης της χαρακτηριστικής εξίσωσης:**

$$\det(K - \lambda M) = 0 \quad (4.51)$$

όπου αναπαρίσταται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο στο λ .

4. **Μέθοδοι βασιζόμενοι στην ιδιότητα της ακολουθίας Sturm των χαρακτηριστικών πολυωνύμων**, όπως προκύπτουν από την σχέση:

$$\det([K^r] - \lambda^r [M^r]) = 0 \quad (4.52)$$

Θυμίζει κάποιες από τις μεθόδους μετασχηματισμού αλλά λειτουργεί σε έναν υποχώρο (subspace) των ιδιομορφών, υπολογίζοντας μόνο μερικές από τις αυτές με αρκετά μεγάλη ακρίβεια.

Αξίζει να γίνει αναφορά και σε μια σχετικά πρόσφατη άρρητη μέθοδο την Lanczos, η οποία έχει βρει ευρεία εφαρμογή σε εμπορικά πακέτα πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος περιλαμβάνει μια επαναληπτική διαδικασία προσδιορισμού των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων σε έναν υποχώρο των ιδιοτιμών, με ταυτόχρονο μετασχηματισμό τριδιαγώνιων μητρώων, χαρακτηριστικά που επιτρέπουν τον υπολογισμό μερικών ιδιοτιμών με πολύ καλή ακρίβεια και με την μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με όλες τις προηγούμενες αναφερθείσες μεθόδους.

Κεφάλαιο 5

Μοντέλα Μηχανικής Συμπεριφοράς Δομών Sandwich με Πυρήνα Honeycomb

5.1 Μακρομηχανικά Μοντέλα Μηχανικής Συμπεριφοράς Δομών Sandwich με Πυρήνα Honeycomb

Με βάση όσα παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, οι δομές sandwich κύρια βρίσκουν εφαρμογή σε κατασκευές που δέχονται δυναμικά φορτία. Συνεπώς, η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς τους καθίσταται αναγκαία από τα πρώτα κιόλας στάδια του σχεδιασμού τους. Οι αποκρίσεις που ενδιαφέρουν κατά το στάδιο του σχεδιασμού είναι οι ιδιοσυχνότητες, οι ιδιομορφές και τα πλάτη των ταλαντώσεων που ενδέχεται να εκτελέσουν. Αυτά τα μεγέθη αποκομίζονται συνήθως με την βοήθεια αναλυτικών ή αριθμητικών μοντέλων της μηχανικής συμπεριφοράς τους και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα. Ακόμα όμως και στις πιο απλές περιπτώσεις μελέτης, λόγω της ιδιαίτερης αρχιτεκτονικής της δομής αλλά και των εγγενών χαρακτηριστικών των υλικών που συνθέτουν το πάνελ sandwich, η ανάλυση μπορεί να γίνει αρκετά δύσκολη και δυσκολεύει βέβαια πιο πολύ με την επιβολή περίπλοκων εξωτερικών φορτίων και συνοριακών συνθηκών και με την μη γραμμική συμπεριφορά υλικών. Συνεπώς, η μελέτη τους γίνεται με διάφορα απλοποιημένα και ισοδύναμα μοντέλα που κάνουν τέτοιες παραδοχές, ώστε τα αποτελέσματα τους να προκύψουν γρήγορα και να είναι αξιόπιστα.

Όσον αφορά, τα πάνελ sandwich με πυρήνα honeycomb, η συμπεριφορά τους μπορεί να μοντελοποιηθεί λαμβάνοντας υπόψιν τις μικρομηχανικές ή τις μακρομηχανικές ιδιότητες των συνιστωσών υλικών. Μέχρι σήμερα, τα μοντέλα που περιγράφουν την μηχανική τους απόκριση βασίζονται στην μικρομηχανική συμπεριφορά των υλικών είναι δύσχρηστα για τις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις, καθώς περιέχουν πολλούς και επίπονους υπολογισμούς υπό τη μορφή περίπλοκων φορμαλισμών (Park, Gao, 2008). Για αυτό το λόγο, έχουν γίνει προσπάθειες να αναπτυχθούν ισοδύναμα μοντέλα που να βασίζονται στην μακρομηχανική συμπεριφορά της δομής. Τα μοντέλα αυτής της κατηγορίας μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες ανάλογα με την θεωρία που βασίστηκαν: τη *Θεωρία της Ισοδύναμης Μονής ή Ενιαίας Στρώσης* (Equivalent Single Layer Theory – ESL) και την *Θεωρία Διακριτών Στρώσεων* (Discrete Layer Theory – DLT).

5.1.1 Θεωρία της Ισοδύναμης Μονής Στρώσης (*Equivalent Single Layer Theory*)

Με την Θεωρία της Ισοδύναμης Μονής Στρώσης ολόκληρη η δομή sandwich, που θεωρείται ως ένα πολύστρωτο υλικό, αντιμετωπίζεται ως μία πλάκα ή δοκός από *ένα* ομογενές ισότροπο ή ανισότροπο υλικό, οι μακρομηχανικές ιδιότητες του οποίου υπολογίζονται ως σταθμισμένος μέσος όρος των αντίστοιχων μηχανικών ιδιοτήτων κάθε στρώσης. Ο τρόπος που υπολογίζονται αυτοί οι σταθμισμένοι μέσοι όροι προκύπτουν από τις διάφορες τεχνικές ομογενοποίησης που μπορεί να χρησιμοποιηθούν, ανάλογα με το επίπεδο ακρίβειας που είναι επιθυμητό σε κάθε περίπτωση.

Για την κινηματική αυτής της ισοδύναμης δοκού θεωρείται συνήθως η κλασική θεωρία των Kirchhoff – Love λεπτών πλακών και κελυφών που είναι γνωστή και ως Κλασική Θεωρία των Στρώσεων (Classical Lamination Theory) ή θεωρίες ανώτερης

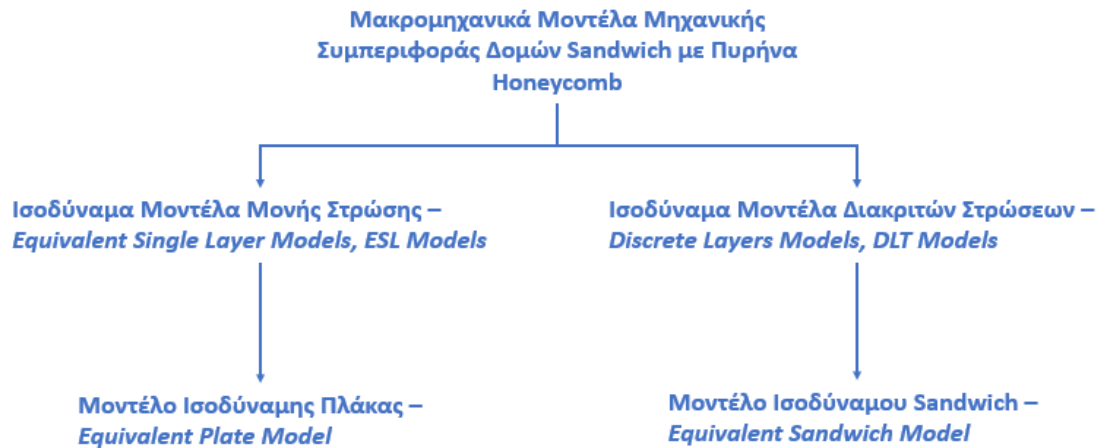
τάξης που κάνουν καλύτερες παραδοχές για την κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διατομής της πλάκας.

5.1.2 Θεωρία Διακριτών Στρώσεων (*Discrete Layer Theory*)

Παρόλο που η συμπεριφορά των μοντέλων ισοδύναμης μονής στρώσης μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά με το να συμπεριληφθούν διάφορες συναρτήσεις για την κατανομή των διατμητικών τάσεων, είναι σχεδόν αδύνατο να κατασκευαστεί ένα ολοκληρωτικό μοντέλο ενιαίας στρώσης το οποίο να συμπεριλαμβάνει τις ιδιαιτερότητες κάθε στρώματος με επαρκή και αξιόπιστο τρόπο. Επομένως, το επόμενο βήμα στην κατεύθυνση να αυξηθεί η ακρίβεια της ανάλυσης της δυναμικής συμπεριφοράς των πάνελ με πυρήνα honeycomb είναι η μετάβαση στην θεώρηση κάθε στρώματος ξεχωριστά με ισοδύναμες ιδιότητες τους όπως προκύπτουν από τις τεχνικές ομογενοποίησης. Η κύρια διαφορά μεταξύ των μοντέλων μιας μονής στρώσης με ισοδύναμες ιδιότητες και του σχηματισμού διακριτών στρώσεων είναι ότι με τις διακριτές στρώσεις θεωρούνται οι τοπικές ιδιαιτερότητες των τμημάτων της δομής μέσα από την θεώρηση της κάθε στρώσης ξεχωριστά, με συνέπεια ο αριθμός των ισοδύναμων ιδιοτήτων των υλικών να εξαρτάται από τον αριθμό των στρώσεων. Οι στρώσεις που αντιστοιχούν στον πυρήνα και τα κελύφη θεωρούνται τέλεια συνδεδεμένες μεταξύ τους και σε μερικές περιπτώσεις λαμβάνονται υπόψη ακόμα και οι στρώσεις κόλλας με τις ιδιότητες τους στην μοντελοποίηση της δομής για περισσότερη ακρίβεια κατά τους υπολογισμούς (Burlayenko, Sadowski, 2008,2009). Ακόμα, με τα μοντέλα πολλαπλών στρώσεων μπορεί να γίνει πιο εύκολα μια παραμετρική ανάλυση ώστε να διερευνηθούν ποια χαρακτηριστικά είναι ευαίσθητα στις μεταβολές των τιμών τους, ώστε να γίνει η κατάλληλη επιλογή τους και να προκύψει ένα βελτιστοποιημένο δομικό στοιχείο.

Τα μοντέλα που προκύπτουν από τις παραπάνω μεθοδολογίες μπορούν να επιλυθούν είτε με αναλυτικούς τρόπους, στην περίπτωση των απλών μοντέλων είτε με προσεγγιστικούς - αριθμητικούς τρόπους, στην περίπτωση των πολύπλοκων μοντέλων, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων να είναι η πιο συνηθισμένη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης. Στις περισσότερες σύγχρονες σχεδιαστικές διαδικασίες, αλλά και στα ερευνητικά προγράμματα, για την επίλυση των παραπάνω μοντέλων γίνεται εκμετάλλευση των πλεονεκτημάτων των εμπορικών υπολογιστικών πακέτων υποστήριξης της εργασίας του μηχανικού (Computer Aided Engineering - CAD) και οι περισσότερες αναλύσεις των υπό μελέτη δομικών στοιχείων γίνεται με την βοήθεια αυτών των προγραμμάτων με γρήγορο και αξιόπιστο τρόπο.

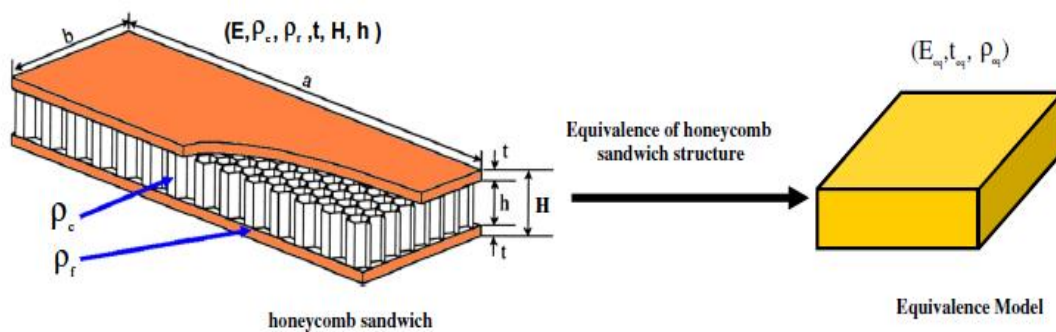
Ακολούθως θα παρουσιαστούν οι θεωρίες της ισοδύναμης πλάκας και της ισοδύναμης πλάκας sandwich που ανήκουν στις θεωρίες της ισοδύναμης μονής στρώσης και των διακριτών στρώσεων αντίστοιχα. Αυτές οι ισοδύναμες θεωρίες έχουν αποδειχθεί πως μπορούν να προσεγγίσουν με μια σχετικά καλή ακρίβεια την ταλαντωτική συμπεριφορά της δομής sandwich με πυρήνα honeycomb, όπως προκύπτει από σύγκριση τους με τα πειραματικά αποτελέσματα (Roggero, Ceroqli, 1996 και Xia, Jing, Wang, 2003).



Εικόνα 5.1: Κατηγορίες των Ισοδύναμων Μακρομηχανικών Μοντέλων της Μηχανικής Συμπεριφοράς των Sandwich με Πυρήνα Honeycomb

5.2 Θεωρία Ισοδύναμης Πλάκας (Equivalent Plate Theory)

Το μοντέλο που βασίζεται την *Θεωρία Ισοδύναμης Πλάκας* ανήκει στην κατηγορία μοντέλων ισοδύναμης μονής στρώσης (ESL). Αναπτύχθηκε από τους Xia, Jin και Wang (2003) και ανάγει τη μελέτη μιας δομής sandwich με πυρήνα honeycomb στη μελέτη μιας ομογενούς πλάκας από ισότροπο υλικό (εικόνα 5.1). Αυτό το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά το προκαταρκτικό στάδιο του σχεδιασμού, ώστε να γίνει μια αρχική και γρήγορη εκτίμηση της ταλαντωτικής συμπεριφοράς της πλάκας. Εξαιτίας της απλότητας του μπορεί να επιλυθεί ακόμα και με αναλυτικό τρόπο, χωρίς να χρειάζεται η εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων.



Εικόνα 5.2: Ισοδυναμία μεταξύ των μοντέλων της δομής sandwich και της ισοδύναμης πλάκας (Boudjemai et al., 2010)

Οι μηχανικές ιδιότητες της ισοδύναμης πλάκας προκύπτουν ως εξής. Ας θεωρήσουμε πως τα κελύφη της πλάκας αποτελούνται από ένα ομογενές και ισότροπο υλικό μέτρου ελαστικότητας E και λόγου Poisson ν . Το ολικό πάχος της δομής sandwich είναι:

$$H = 2t + h \quad (5.1)$$

όπου t το πάχος του καθενός από τα εξωτερικά κελύφη και h είναι το πάχος του πυρήνα honeycomb. Η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας I του sandwich μπορεί να προκύψει από το άθροισμα των δευτεροβάθμιων ροπών αδράνειας ως προς τον ουδέτερο άξονα των επιμέρους συνιστωσών στοιχείων που συνθέτουν την δομή. Αν υποθεθεί πως η κινηματική του honeycomb sandwich πάνελ και της ισοδύναμης πλάκας ικανοποιούν την

θεωρία του Kirchhoff μπορεί να ληφθεί η ισοδυναμία μεταξύ των καμπτικών δυσκαμψιών των δύο στοιχείων σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$E_{eq}I_{eq} = (EI)_{sandwich} \Rightarrow$$

$$\frac{E_{eq}t_{eq}^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2E}{1-\nu^2} \left[\frac{t^3}{12} + \left(\frac{H-t}{2} \right)^2 t \right] \quad (5.2)$$

όπου t_{eq} , E_{eq} , I_{eq} , ν είναι το πάχος, το μέτρο ελαστικότητας, η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας και ο λόγος Poisson της ισοδύναμης πλάκας, αντίστοιχα. Να σημειωθεί πως ο λόγος Poisson της ισοδύναμης πλάκας είναι ίσος με τον λόγο Poisson του υλικού του κελύφους.

Ομοίως μπορεί να ληφθεί η ισοδυναμία μεταξύ των αξονικών δυσκαμψιών μεταξύ του sandwich και της ισοδύναμης πλάκας:

$$E_{eq}A_{eq} = (EA)_{sandwich} \Rightarrow$$

$$E_{eq}t_{eq} = 2Et \quad (5.3)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5.2) και (5.3), προκύπτει:

$$t_{eq} = \sqrt{4t^2 + 6th + 3h^2} \quad (5.4)$$

$$E_{eq} = \frac{2t}{\sqrt{3}h} E \quad (5.5)$$

Από την αρχή διατήρησης της μάζας που εφαρμόζεται για τα δύο μηχανικά συστήματα, μπορεί να προκύψει η πυκνότητα της ισοδύναμης πλάκας ρ_{eq} :

$$m_{eq} = m_{sandwich} \Rightarrow$$

$$\rho_{eq}V_{eq} = (\rho V)_{sandwich} \Rightarrow$$

$$\rho_{eq}t_{eq} = 2\rho_1t + \rho_2h \Rightarrow$$

$$\rho_{eq} = \frac{2\rho_1t + \rho_2h}{t_{eq}} \quad (5.6)$$

Ο φορμαλισμός της σχέσης για την ισοδύναμη πυκνότητα της πλάκας μπορεί να θεωρηθεί ανάλογος του κανόνα των μιγμάτων (Rule of Mixtures) που χρησιμοποιείται ευρέως στα ινώδη σύνθετα. Στον πίνακα 5.1 φαίνονται συνοπτικά οι ισοδυναμίες μεταξύ των μοντέλων που προκύπτουν από την θεωρία της ισοδύναμης πλάκας.

Πίνακας 5.1: Ισοδυναμία μεταξύ των αξονικών (membrane) και καμπτικών (bending) δυσκαμψιών των δύο στοιχείων (Boudjemai et al.,2010)

	Honeycomb sandwich plate	Equivalent isotropic plate
Membrane stiffness	$\frac{2Et}{1-\nu^2}$	$\frac{E_{eq}t_{eq}}{1-\nu^2}$
Bending stiffness	$\frac{Eht^2}{2(1-\nu^2)}$	$\frac{E_{eq}t_{eq}^3}{12(1-\nu^2)}$

Αξίζει να γίνουν μερικές παρατηρήσεις σε σχέση με το φυσικό υπόβαθρο και τα όρια της θεωρίας. Κατά την ισοδυναμία των δύο δομών, για την πλάκα sandwich λήφθηκαν κυρίως οι μηχανικές ιδιότητες των κελυφών, ενώ, ο πυρήνας συμμετείχε γεωμετρικά μόνο με το πάχος του. Αυτό συνέβη επειδή στη θεωρία χρησιμοποιείται μια μέθοδος ομογενοποίησης που βασίζεται στην κάμψη γύρω από τον κάθετο άξονα και τον εφελκυσμό της πλάκας sandwich κατά μήκος του διαμήκους άξονα της πλάκας, αντίστοιχα. Σε αυτές τις καταπονήσεις η συνεισφορά του πυρήνα στην δυσκαμψία της δομής είναι πολύ μικρή σε σχέση με αυτή των κελυφών που είναι κυρίαρχες. Αυτό είναι βασικό χαρακτηριστικό των δομών sandwich για οποιοδήποτε τύπο πυρήνα, ο οποίος χρησιμοποιείται κυρίως για την παραλαβή των διατμητικών φορτίων, όπως ειπώθηκε στο Κεφάλαιο 3. Για αυτό το λόγο είναι πολύ πιθανό το μοντέλο να προσεγγίζει με αρκετά καλή ακρίβεια τις ιδιομορφές που περιέχουν καμπτικές και αξονικές παραμορφώσεις και να παρουσιάζει σφάλματα στις ιδιομορφές που εμπεριέχουν διατμητικές παραμορφώσεις. Επίσης, στην περίπτωση που για τα κελύφη χρησιμοποιούνται γενικώς ανισότροπα υλικά, για παράδειγμα ορθότροπα υλικά, η μεθοδολογία δεν μπορεί να εφαρμοστεί, καθώς θεωρεί πως τα κελύφη αποτελούνται από ομογενή και ισότροπα υλικά.

5.3 Θεωρία Sandwich (*Sandwich Theory*)

Το πιο κοινά χρησιμοποιούμενο μοντέλο για την μελέτη των δομών sandwich, μεταξύ αυτών και αυτά με πυρήνα honeycomb, προκύπτει από την *Θεωρία Sandwich* που είναι και η χαρακτηριστικότερη από τις θεωρίες Διακριτών Στρώσεων (DLT). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, το μοντέλο για το sandwich λαμβάνεται θεωρώντας όσες διακριτές στρώσεις υπάρχουν χρησιμοποιώντας όσο επί το πλείστον για τις ιδιότητες των συνιστωσών υλικών τους τις ισοδύναμες ιδιότητες, όπως αυτές προκύπτουν από τις τεχνικές ομογενοποίησης. Παρόλο, που οι στρώσεις θεωρούνται τις περισσότερες ως τέλεια συνδεδεμένες μεταξύ τους, στα λεπτομερή μοντέλα θεωρούνται και τα στρώματα της κόλλας με τις ελαστικές ιδιότητες τους.

Το πλεονέκτημα του παραπάνω μοντέλου βρίσκεται στο ότι αντιμετωπίζει κάθε στρώση ξεχωριστά, επιτρέποντας έτσι την προσέγγιση τοπικών φαινομένων που αφορούν την συμπεριφορά των συνιστωσών υλικών, που μπορεί να είναι η μη-γραμμική, ανισότροπη ή ετερογενής. Επίσης, με την εισαγωγή αυτών των μοντέλων στα σύγχρονα εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων η ανάλυση και η επίλυση τους μπορεί να γίνει πολύ εύκολη, κάνοντας εφικτή ακόμα και την μελέτη της επίδρασης διάφορων ατελειών στην στατική και δυναμική συμπεριφορά τους. Μερικές από αυτές είναι οι ρωγμές που μπορεί να υπάρχουν είτε στον πυρήνα είτε στα κελύφη, οι αποκολλήσεις μεταξύ των στρώσεων και ο τρόπος ή η ταχύτητα που αυτές οι ατέλειες διαδίδονται με την μεταβολή των εξωτερικών επιδράσεων.

Στην περίπτωση του honeycomb πυρήνα το υλικό θεωρείται σύμφωνα με τις ισοδύναμες ελαστικές σταθερές σύμφωνα με το είδος ομογενοποίησης που ακολουθήθηκε, με πιο κοινή μέθοδο αυτή που προτείνεται από τους Ashby – Gibson. Έτσι, απαλείφεται η εγγενής ετερογένεια του honeycomb και προκύπτει ένα ισοδύναμο **ομογενές και ορθότροπο**, όπως περιγράφεται και στο εδάφιο 2.4. Η καταστατική σχέση μεταξύ των τροπών και των τάσεων που περιγράφει την συμπεριφορά ενός ορθότροπου υλικού είναι:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

όπου C_{ij} είναι οι ελαστικές σταθερές του υλικού, οι οποίες εκφράζονται μέσω των ισοδύναμων ελαστικών ιδιοτήτων του ομογενούς υλικού $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{31}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ και για τις οποίες ισχύει:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (5.8)$$

που σημαίνει ότι το μητρώο δυσκαμψίας είναι συμμετρικό και αντιστρέψιμο. Η αντιστροφή της παραπάνω σχέσης δίνει:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (5.9)$$

όπου $[S]$ είναι το μητρώο ενδοτικότητας του υλικού, εκφρασμένο σύμφωνα με τις ισοδύναμες ιδιότητες του υλικού όπως δείχνει το παρακάτω μητρώο:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Οι «ενεργές» ιδιότητες του honeycomb, όπως προκύπτουν από την μελέτη της στοιχειώδους κυψελίδας είναι αντίστοιχες με αυτές ενός ορθότροπου υλικού, κάτι που δικαιολογείται από τα επίπεδα συμμετρίας της αντιπροσωπευτικής στοιχειώδους κυψελίδας και απλοποιούνται ακόμα πιο πολύ λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει κυψέλη στο επίπεδο που κείται (εδάφιο 2.4). Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν και τα υλικά των κελυφών που δεν είναι ομογενή και ισότροπα, όπως για παράδειγμα, τα ενισχυμένα με ίνες σύνθετα υλικά, που είναι ένα υλικό που χρησιμοποιείται συχνά σε τέτοιου είδους δομές. Οι ισοδύναμες μηχανικές ιδιότητες τους μπορούν να προκύψουν από τις αντίστοιχες τεχνικές ομογενοποίησης που χρησιμοποιούνται για αυτού του είδους τα υλικά, όπως είναι ο *Κανόνας των Μιγμάτων (Rule Of Mixtures)*, το *Θεώρημα των Tsai - Hill* και *Θεώρημα του Τσάμψ*.

Η ερευνητικές εργασίες για τα honeycomb sandwich που έχουν χρησιμοποιήσει αυτό το μοντέλο είναι πολλές και έχουν επιδείξει εξαιρετική συμφωνία με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα. Ειδικά στα προγράμματα CAD που απαιτείται όσο το δυνατό μεγαλύτερη εξοικονόμηση υπολογιστικών πόρων, το μοντέλο αυτό είναι το πλέον κατάλληλο για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του sandwich, ορίζοντας τις «ενεργές» ιδιότητες των υλικών και κάνοντας μια διακριτοποίηση που δεν θα απαιτεί πολλά στοιχεία, δίνοντας αξιόπιστα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 6

Προσομοίωση Μορφικής Δυναμικής Απόκρισης

6.1 Μορφική Δυναμική Ανάλυση στα Υπολογιστικά Προγράμματα CAD

Στην **Μορφική Δυναμική Ανάλυση (Modal Dynamic Analysis)** αναζητείται η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών ενός δομικού στοιχείου, το οποίο αφού έχει δεχτεί μια αρχική ενέργεια εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις, χωρίς την επίδραση καμίας εξωτερικής δύναμης. Εν ολίγοις, διερευνώνται τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος που δρα χωρίς τη συνεχόμενη εισαγωγή εξωτερικής ενέργειας. Η χαμηλότερη συχνότητα του συστήματος ονομάζεται *θεμελιώδης φυσική συχνότητα ή φυσική συχνότητα*.

Η **προσομοίωση (simulation)** της μορφικής δυναμικής απόκρισης των μηχανικών μοντέλων των δομών sandwich με πυρήνα honeycomb, μπορεί να γίνει σε ένα από διαθέσιμα εμπορικά προγράμματα μοντελοποίησης και προσομοίωσης των κατασκευών. Σε αυτά περιλαμβάνεται ένα γραφικό περιβάλλον που μπορούν να σχεδιαστούν τα υπό μελέτη μοντέλα, φύλλα εργασίας όπου ορίζονται ή επιλέγονται οι ιδιότητες των υλικών, να γίνει η διακριτοποίηση των μοντέλων, να οριστούν οι συνοριακές συνθήκες και τα επιθυμητά αποτελέσματα. Τα μοντέλα επιλύονται με αριθμητικές μεθόδους, συνήθως με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και τα αποτελέσματα τους απεικονίζονται γραφικά, που διευκολύνει την εποπτεία και την κατανόηση τους. Η διαδικασία για την προσομοίωση της απόκρισης είναι περίπου η ίδια για σχεδόν όλα τα εμπορικά προγράμματα CAD. Το εμπορικό πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία είναι το ANSYS, η έκδοση 15.0.

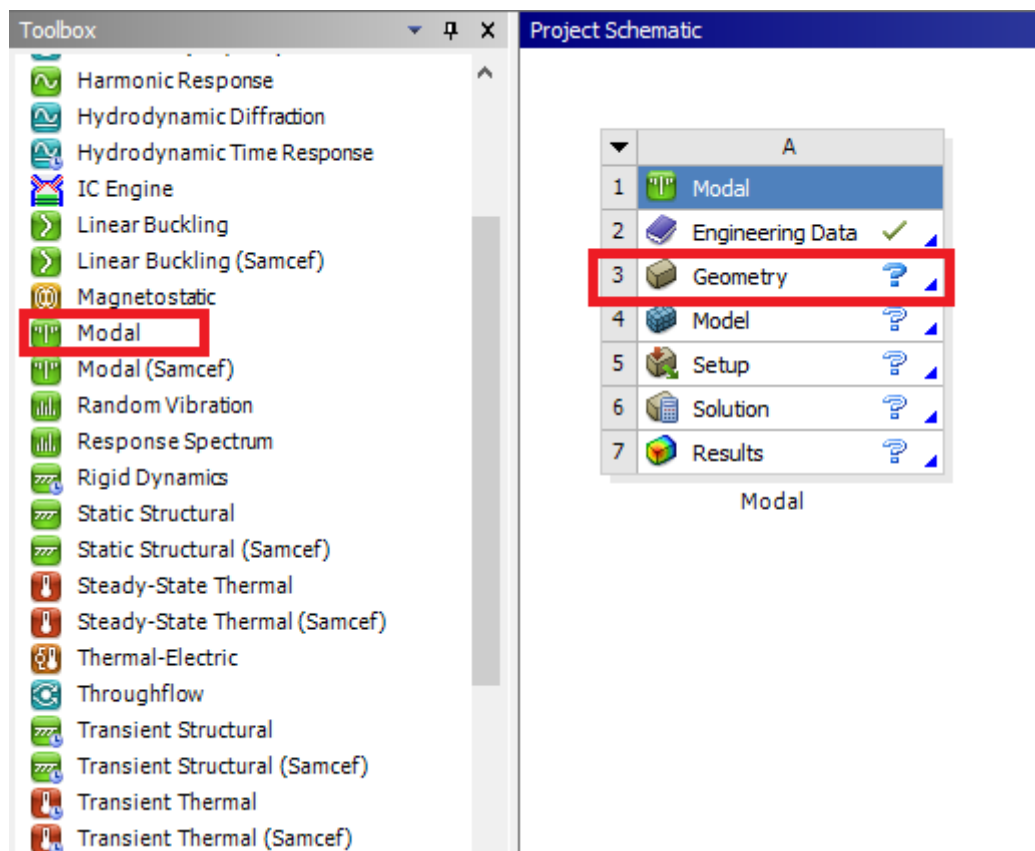
Πρέπει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο πως η επίλυση των μοντέλων για την εξαγωγή των μορφικών αποτελεσμάτων είναι γραμμική (linear) και *μη* πολύ – βηματική (one – step). Συνεπώς, οι μη γραμμικές συμπεριφορές υλικών και τα άλλα είδη μη γραμμικών φαινομένων δεν είναι εφικτό να οριστούν με κάποιο τρόπο σε αυτό το είδος της ανάλυσης στο περιβάλλον του ANSYS. Αυτό δείχνει και τα όρια που είναι δυνατά με αυτού του είδους την ανάλυση.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα επιμέρους στάδια που ακολουθήθηκαν για την δημιουργία και την προσομοίωση των ισοδύναμων μοντέλων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 6, αλλά και ενός μοντέλου με την ακριβή γεωμετρία του honeycomb στο περιβάλλον του ANSYS. Θα γίνει περιγραφή των παραμέτρων της ανάλυσης και εξήγηση των χαρακτηριστικών των στοιχείων που επιλέχθηκαν, καθώς και οι δυνατότητες παραμετροποίησης των διάφορων μοντέλων.

6.2 Κατασκευή της Γεωμετρίας

Το πρώτο βήμα για οποιαδήποτε μοντελοποίηση στα εμπορικά προγράμματα είναι η κατασκευή της γεωμετρίας του μοντέλου. Στο περιβάλλον εργασίας του ANSYS, το Workbench, υπάρχει η «εργαλειοθήκη» (Toolbox) με τον τίτλο *Modal* που είναι το τμήμα του προγράμματος για την αντιμετώπιση των μορφικών δυναμικών προβλημάτων. Σε αυτό, υπάρχει ένα «κελί» για την δημιουργία και τροποποίηση της γεωμετρίας των υπό

εξέταση μοντέλων (εικόνα 6.1). Αρχικά θα δειχθεί η διαδικασία για την δημιουργία του ακριβούς γεωμετρικά μοντέλου honeycomb sandwich και η διαδικασία για την δημιουργία των ισοδύναμων μοντέλων.

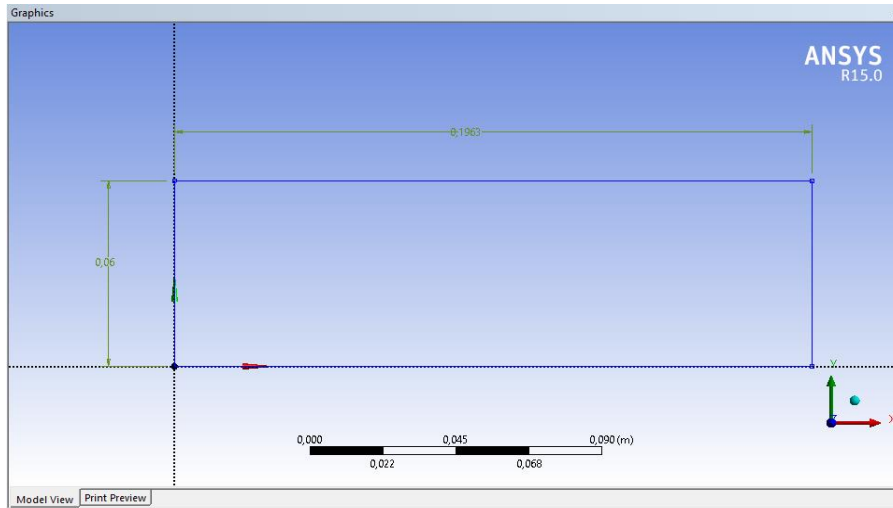


Εικόνα 6.1: Η «εργαλειοθήκη» Modal και το περιβάλλον της κατασκευής της γεωμετρίας

6.2.1 Ακριβές Γεωμετρικά Μοντέλο

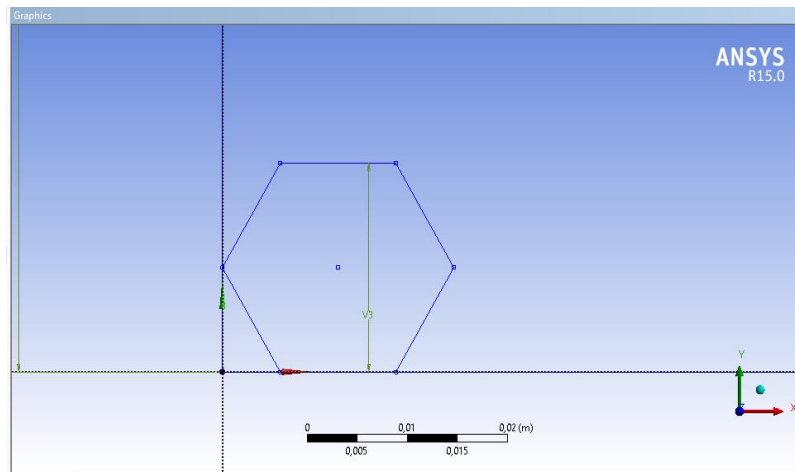
Ένα από τα πιο σημαντικά πλεονεκτήματα των σύγχρονων εμπορικών πακέτων μοντελοποίησης και προσομοίωσης είναι πως μπορούν να ανακατασκευάσουν πολύπλοκες γεωμετρίες με πολύ καλή προσέγγιση, αρκεί να είναι διαθέσιμη η αναγκαία υπολογιστική ισχύς. Στα φύλλα από υλικό honeycomb (honeycomb sheets) γίνεται η επανάληψη της μοναδιαίας κυψελίδας, με τη παραγόμενη γεωμετρία να θυμίζει ένα δικτύωμα. Στο ANSYS η γεωμετρία μπορεί να αναπαραχθεί ως εξής.

Αν υποτεθεί ένα στρώμα honeycomb πάχους 9 mm με τη μοναδιαία κυψέλη του να είναι ένα εξάγωνο με όλες τις πλευρές του ίσες, μεγέθους 20 mm (μήκος πλευράς $l = 11.55 \text{ mm}$) και τείχη πάχους 1 mm . Οι διαστάσεις της στρώσης του πυρήνα honeycomb είναι 60 mm πλάτος και 196.3 mm μήκος. Αρχικά, σχεδιάζεται το ορθογώνιο πλαίσιο που θα καταλάβει ο πυρήνας (εικόνα 6.2).



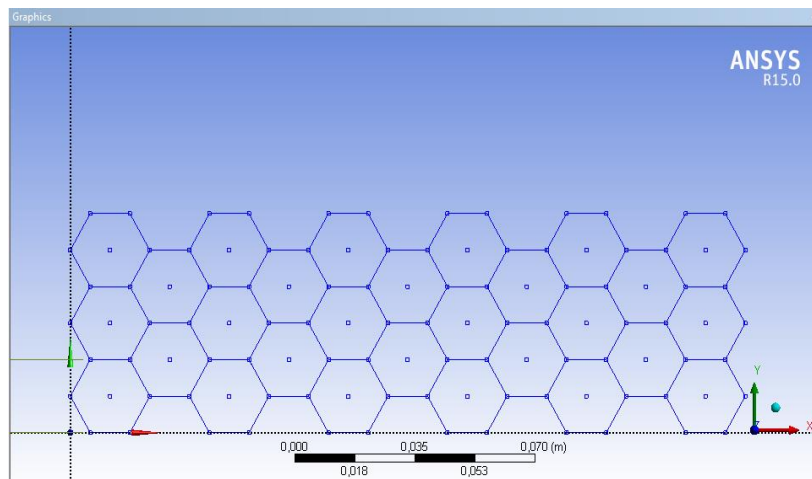
Εικόνα 6.2: Ορθογώνιο πλαίσιο που καλύπτει το honeycomb

Κατόπιν, σχεδιάζεται η πρώτη κυψέλη, με τις διαστάσεις που αναφέρθηκαν και τοποθετείται στο κάτω άκρο του πλαισίου (εικόνα 6.3).



Εικόνα 6.3: Σκαρίφημα της μοναδιαίας κυψέλης του honeycomb

Η κυψέλη επαναλαμβάνεται ώστε να καλύψει όλη την έκταση του ορθογωνίου πλαισίου. Δημιουργείται έτσι το σχέδιο (sketch) του honeycomb (εικόνα 6.4).



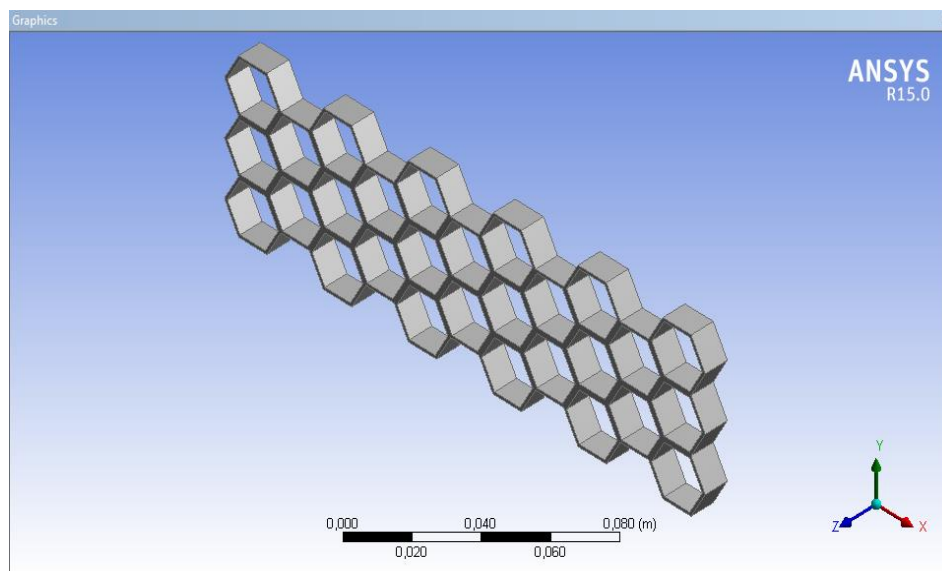
Εικόνα 6.4: Σκαρίφημα του honeycomb

Το στερεό μοντέλο δημιουργείται από την εντολή Extrude, όπου ορίζονται τα πάχη των τειχών και του στρώματος του πυρήνα (εικόνα 6.5).

Details View	
Details of Extrude1	
Extrude	Extrude1
Geometry	Sketch1
Operation	Add Material
Direction Vector	None (Normal)
Direction	Normal
Extent Type	Fixed
<input type="checkbox"/> FD1, Depth (>0)	0,009 m
<input type="checkbox"/> FD2, Inward Thickness (>=0)	0,001 m
<input type="checkbox"/> FD3, Outward Thickness (>=0)	0 m
Merge Topology?	Yes

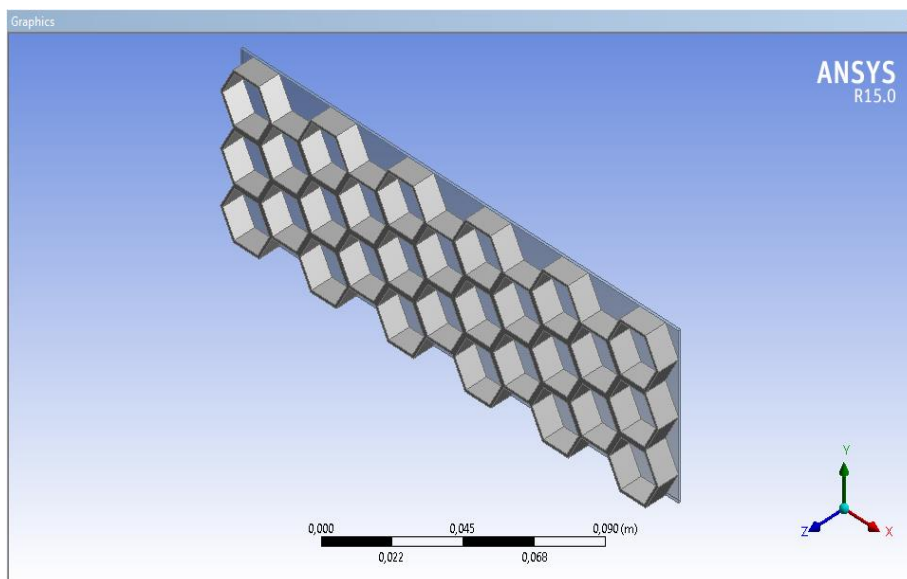
Εικόνα 6.5: Ορισμός του πάχους των τειχών των κυψελών

Το στερεό που δημιουργείται δείχνεται στην εικόνα 6.6.



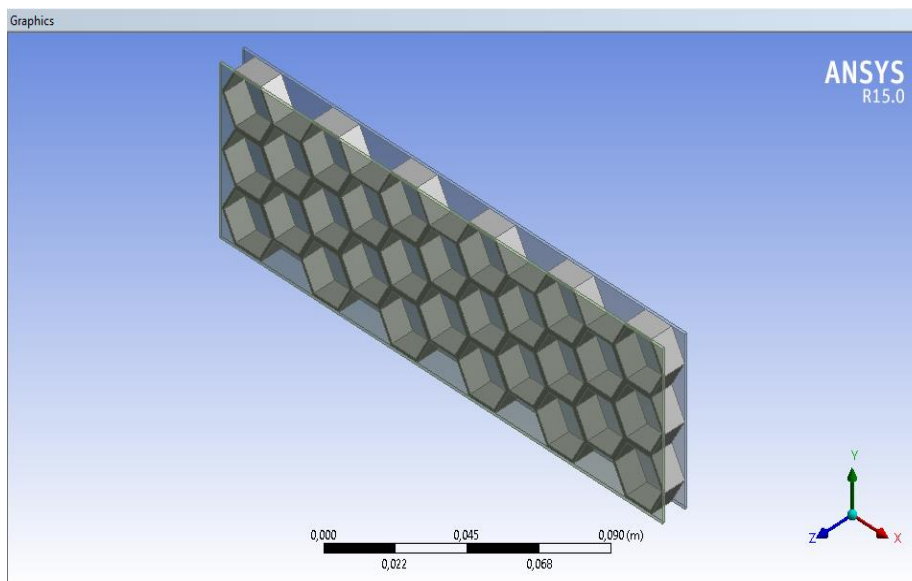
Εικόνα 6.6: Στερεό μοντέλο του φύλλου honeycomb

Το σχέδιο του πυρήνα honeycomb φτιάχτηκε στο επίπεδο XY. Τα σχέδια των κελυφών θα φτιαχτούν στο επίπεδο YZ. Τα κελύφη έχουν τις ακόλουθες διαστάσεις: 1 mm πάχος, 60 mm πλάτος και 196.3 mm μήκος. Αρχικά, φτιάχνεται το σκαρίφημα της διατομής του κάτω κελύφους (διαστάσεις: 60x1mm) και κατόπιν από την εντολή Extrude δημιουργείται το στερεό σώμα (εικόνα 6.7).



Εικόνα 6.7: Πρόσθεση του κάτω κελύφους

Το κάτω κέλυφος που εφάπτεται με τον πυρήνα honeycomb. Με τον ίδιο τρόπο δημιουργείται και το άνω κέλυφος. Η δομή του sandwich παρουσιάζεται στην εικόνα 6.8.



Εικόνα 6.8: Πρόσθεση του άνω κελύφους - Στερεό μοντέλο του sandwich

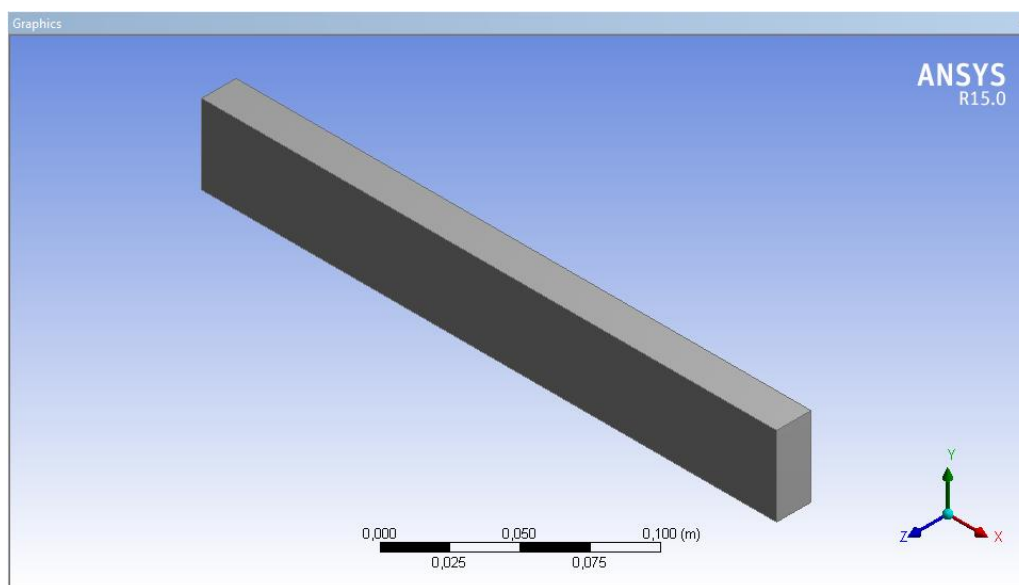
Να σημειωθεί πως αυτό το honeycomb παρουσιάζει μια αρκετά αραιή πυκνότητα και οι κλίμακα των διαστάσεων της δομής βρίσκονται σε αυτό των πειραματικών δοκιμίων. Οι διαστάσεις αυτές επιλέχθηκαν λόγω της διαθέσιμης υπολογιστικής ισχύς που δεν επέτρεψε την δημιουργία ενός πιο πυκνού και ρεαλιστικού honeycomb που ταίριαζε περισσότερο με τις ολικές διαστάσεις της δομής. Το μοντέλο αυτό δημιουργήθηκε για να δείξει την δυνατότητα που υπάρχει, της κατασκευής της ακριβής γεωμετρίας και για να γίνει μια σύγκριση των αποτελεσμάτων της μορφικής δυναμικής απόκρισης του με αυτά των αντίστοιχων ισοδύναμων μοντέλων, ώστε να γίνει μια πρώτη εκτίμηση της αξιοπιστίας των εκάστοτε μοντέλων.

Γενικά, για την δημιουργία μοντέλων honeycomb με ακριβή γεωμετρία απαιτείται αρκετή υπολογιστική ισχύς, τόσο για τον σχεδιασμό τους όσο και για την ανάλυση τους. Για αυτό το λόγο, σε υπολογιστές μέσης ισχύος χρησιμοποιούνται τα ισοδύναμα μοντέλα, καθώς, οι ακριβείς αναλύσεις από ένα σημείο και μετά δεν είναι

αποδοτικές ακόμα και για συστήματα με μεγάλη υπολογιστική ισχύ (Burlayenko, Altenbach, Sadowski, 2015).

6.2.2 Μοντέλο Ισοδύναμης Πλάκας

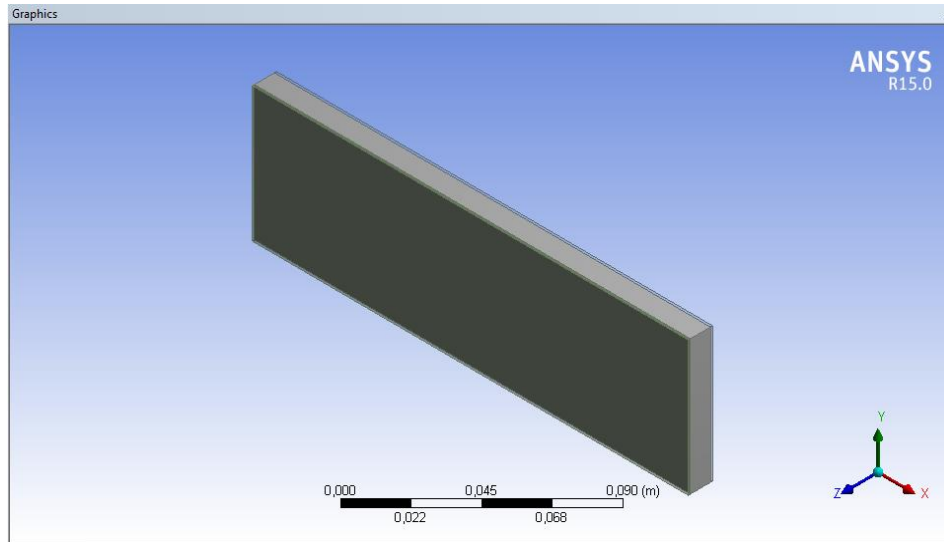
Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάστηκε το μοντέλο της ισοδύναμης πλάκας για την μηχανική συμπεριφορά του υπό μελέτη sandwich. Αποτελείται από μια πλάκα ενός ομογενούς υλικού με ιδιότητες ισοδύναμες με αυτές του sandwich. Η γεωμετρία του είναι πολύ απλή και εύκολη στην κατασκευή της. Αρκεί να φτιαχτεί το σκαρίφημα της διατομής της πλάκας και κατόπιν να γίνει εξόγκωση ώστε να γίνει το στερεό. Οι διαστάσεις της ισοδύναμης πλάκας είναι 60 mm για το πλάτος, 196.3 mm για το μήκος και 17.35 mm για το πάχος, που προκύπτει από τη σχέση (5.4). Το στερεό που προκύπτει φαίνεται στην εικόνα 6.9.



Εικόνα 6.9: Στερεό Μοντέλο Ισοδύναμης Πλάκας

6.2.3 Μοντέλο Ισοδύναμου Sandwich

Το μοντέλο ισοδύναμου sandwich αποτελείται από τρεις στρώσεις, με αυτή που περιγράφει τον πυρήνα να αποτελείται από ένα ομογενές υλικό. Η κατασκευή της γεωμετρίας γίνεται αρχικά κάνοντας ένα σκαρίφημα των διατομών των στρώσεων και μέσω της λειτουργίας του Extrude γίνεται επέκταση των στρώσεων και δημιουργείται το sandwich. Η γεωμετρία του μοντέλου παρουσιάζεται στην εικόνα 6.10.



Εικόνα 6.10: Στέρεο Μοντέλο Ισοδύναμου Sandwich

6.3 Ορισμός των Ιδιοτήτων των Υλικών

Ο ορισμός των ελαστικών ιδιοτήτων των υλικών γίνεται στο περιβάλλον *Engineering Data*. Τα υλικά που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία μπορεί να είναι είτε ισότροπα με δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές, είτε ορθότροπα με εννιά ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές. Ένα από τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για τις συνιστώσες της δομής, που εμφανίζεται στη βιβλιογραφία (Boudjemai et al., 2011) είναι το κράμα αλουμινίου με ιδιότητες:

$$\rho = 2,800 \text{ kg/m}^3, \quad E = 72 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.33$$

Να σημειωθεί ότι τα κράματα αλουμινίου είναι τα πιο διαδεδομένα υλικά τόσο για τον πυρήνα honeycomb όσο και για τα κελύφη. Αυτές οι ιδιότητες ορίζονται στο ANSYS στην καρτέλα *Linear Isotropic Elasticity*, όπως φαίνεται στην εικόνα 6.11.

Properties of Outline Row 3: Aluminium				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Density	2800	kg m ⁻³	
3	Isotropic Elasticity			
4	Derive from	Young's...		
5	Young's Modulus	7,2E+10	Pa	
6	Poisson's Ratio	0,33		
7	Bulk Modulus	7,0588E+10	Pa	
8	Shear Modulus	2,7068E+10	Pa	

Εικόνα 6.11: Ορισμός των ιδιοτήτων του ισότροπου υλικού

Οι ιδιότητες του υλικού της ισοδύναμης πλάκας προκύπτουν σύμφωνα με τις σχέσεις (5.4) έως (5.6) και είναι:

$$\rho = 470.45 \text{ kg/m}^3, \quad E = 9.238 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.33$$

και ορίζονται στο ANSYS με τον ίδιο τρόπο που ορίζονται ιδιότητες του κράματος αλουμινίου.

Όσον αφορά το ορθότροπο ομογενές υλικό που αντικαθιστά το ετερογενές honeycomb οι ιδιότητες του προκύπτουν σύμφωνα με την θεωρία των Ashby – Gibson (Κεφάλαιο 2):

$$\begin{aligned}
 E_1 = E_2 &= 107.56 \text{ MPa}, E_3 = 6.23 \text{ GPa}, \\
 G_{12} = G_{23} &= 26.636 \text{ MPa}, G_{31} = 1.352 \text{ GPa}, \\
 \nu_{12} = \nu_{23} &= 0.9846, \nu_{23} = \nu_{31} = 0.00014 \\
 \rho^* &= 280 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

Οι λόγοι Poisson παρουσιάζουν πολύ μικρές αποκλίσεις από αυτούς που υπολογίστηκαν από την θεωρία των Ashby – Gibson και αυτό γίνεται ώστε να είναι εφικτή η αντιστροφή του μητρώου δυσκαμψίας. Στο ANSYS οι ιδιότητες του ορθότροπου υλικού ορίζονται επιλέγοντας το *Orthotropic Elasticity* και τοποθετούνται οι παραπάνω τιμές (εικόνα 6.12). Στο περιβάλλον *Model* για κάθε στερεό σώμα μπορεί να γίνει η επιλογή του αντίστοιχου υλικού.

Properties of Outline Row 4: Equivalent Material				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Density	280	kg m ⁻³	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3	Orthotropic Elasticity			<input type="checkbox"/>
4	Young's Modulus X direction	1,0756E+08	Pa	<input type="checkbox"/>
5	Young's Modulus Y direction	1,0756E+08	Pa	<input type="checkbox"/>
6	Young's Modulus Z direction	6,23E+09	Pa	<input type="checkbox"/>
7	Poisson's Ratio XY	0,9846		<input type="checkbox"/>
8	Poisson's Ratio YZ	0,00014		<input type="checkbox"/>
9	Poisson's Ratio XZ	0,00014		<input type="checkbox"/>
10	Shear Modulus XY	2,6636E+07	Pa	<input type="checkbox"/>
11	Shear Modulus YZ	1,352E+09	Pa	<input type="checkbox"/>
12	Shear Modulus XZ	1,352E+09	Pa	<input type="checkbox"/>

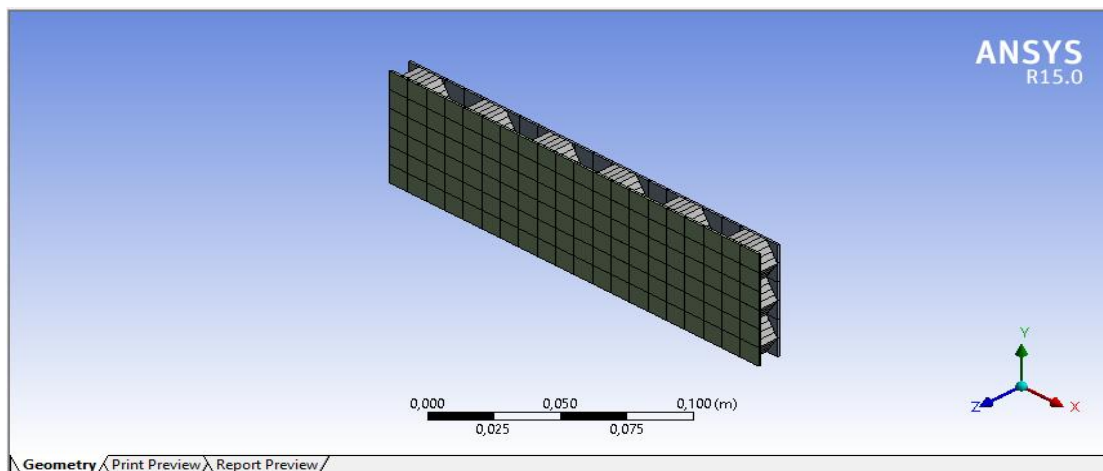
Εικόνα 6.12: Ορισμός των ιδιοτήτων του ορθότροπου υλικού

6.4 Διακριτοποίηση των Μοντέλων

Η διακριτοποίηση του μοντέλου γίνεται στο περιβάλλον *Model*. Για κάθε μοντέλο που δημιουργήθηκε, ακολουθήθηκε διαφορετική διαδικασία διακριτοποίησης εξαιτίας της διαφορετικής γεωμετρίας τους, που επέβαλε την αντίστοιχη προσέγγιση με τα ανάλογα στοιχεία.

6.4.1 Ακριβές Γεωμετρικό Μοντέλο

Για το ακριβές γεωμετρικά μοντέλο επιλέχθηκε η Default επιλογή του πλέγματος. Το πλέγμα που δημιουργήθηκε αυτόματα είναι αρκετά επαρκές για την προκαταρκτική ανάλυση που πρόκειται να γίνει.

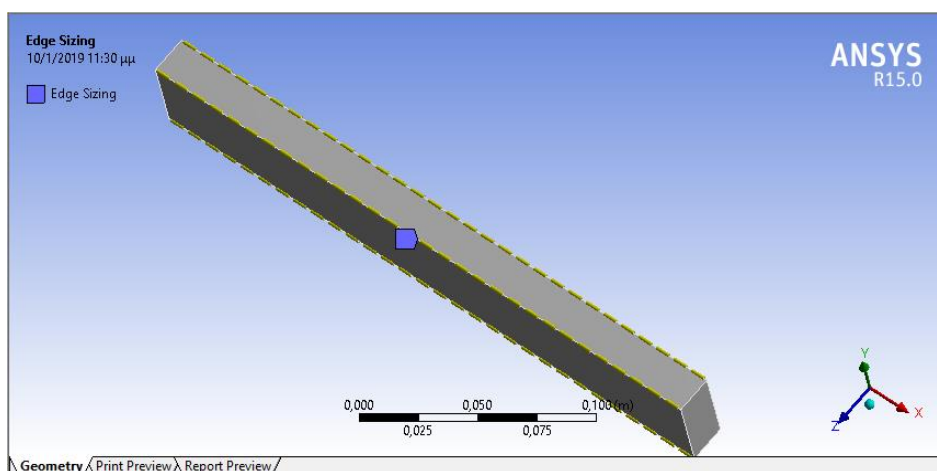


Εικόνα 6.13: Διακριτοποίηση Ακριβούς Γεωμετρικού Μοντέλου

Ο αριθμός των στοιχείων που δημιουργήθηκαν είναι 739 και ο αριθμός των κόμβων 7443. Τα κελύφη έχουν διακριτοποιηθεί με τρισδιάστατα στοιχεία (3D elements) ενώ τα τείχη του honeycomb έχουν διακριτοποιηθεί με στοιχεία «κελύφους» (shell elements).

6.4.2 Μοντέλο Ισοδύναμης Πλάκας

Λόγω της γεωμετρίας του μοντέλου μπορεί να επιλεγθεί ένα δομημένο πλέγμα (structured mesh) που με κατάλληλη διακριτοποίηση δίνει τα πιο βέλτιστα αποτελέσματα για την δυναμική συμπεριφορά του στοιχείου. Εξαιτίας της απλότητας της γεωμετρίας του μοντέλου η σύγκλιση με την μεταβολή της διακριτοποίησης μπορεί να επιτευχθεί γρήγορα. Η διακριτοποίηση του μοντέλου γίνεται ως εξής. Επιλέγονται αρχικά οι διαμήκεις ακμές του μοντέλου δημιουργείται μια ομάδα παρόμοιας διακριτοποίησης που βασίζεται στην διαίρεση των πλευρών (Sizing) με τον τίτλο *Edge Sizing 1* (εικόνα 6.14). Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τις ακμές κατά το πλάτος και το πάχος της πλάκας, με την δημιουργία των ομάδων *Edge Sizing 2* και *Edge Sizing 3*.



Εικόνα 6.14: Επιλογή και διαίρεση των διαμήκων ακμών

Οι διαιρέσεις (Number of Divisions) που επιλέχθηκαν για τις παραπάνω ομάδες πλευρών είναι οι εξής:

$$Edge\ Sizing = 30$$

$$Edge\ Sizing\ 2 = 10$$

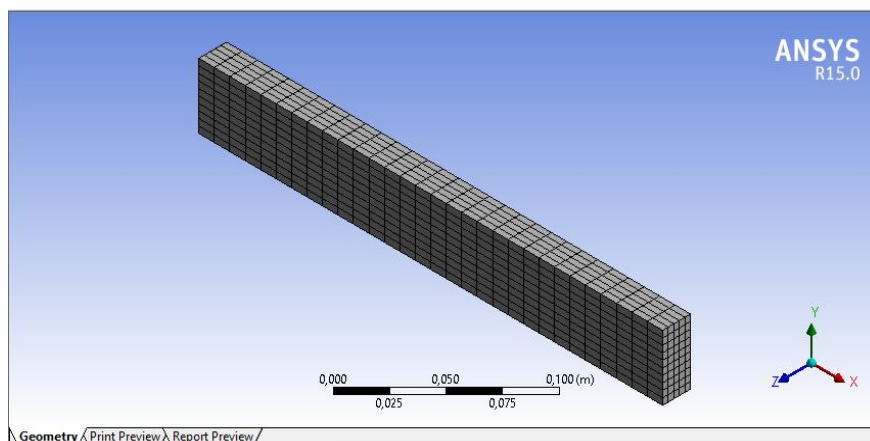
$$Edge\ Sizing\ 3 = 5$$

Στην εικόνα 6.15 φαίνονται τα κελιά παραμετροποίησης του αριθμού των διαιρέσεων των πλευρών για την ομάδα *Edge Sizing 1*.

Details of "Edge Sizing" - Sizing	
[-] Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	4 Edges
[-] Definition	
Suppressed	No
Type	Number of Divisions
<input type="checkbox"/> Number of Divisions	30
Behavior	Hard
Bias Type	No Bias

Εικόνα 6.15: Ορισμός των διαιρέσεων των πλευρών της πρώτης ομάδας

Για να διασφαλιστεί το δομημένο πλέγμα, για όλες τις επιφάνειες του στερεού ορίζεται το *Mapped Face Meshing*, ώστε να μην επιτρέψει στοιχεία με τυχόν μη παράλληλη γεωμετρία. Το πλέγμα του μοντέλου φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

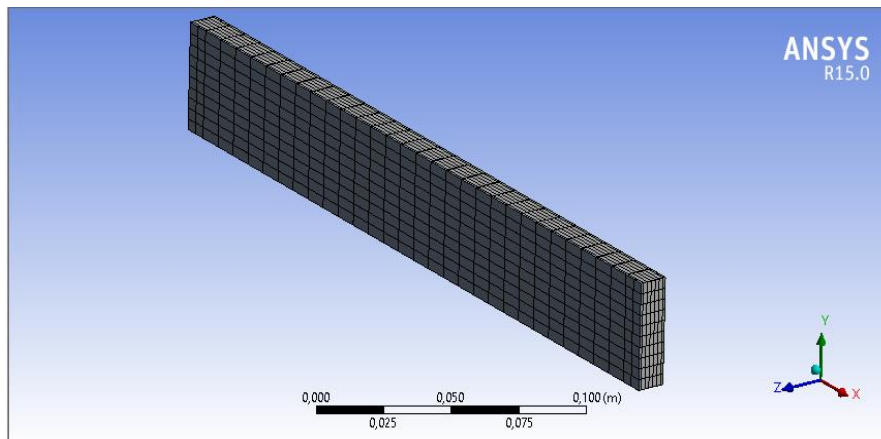


Εικόνα 6.16: Διακριτοποίηση του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας

Ο αριθμός των τρισδιάστατων στοιχείων που δημιουργήθηκαν είναι 1500 και ο αριθμός των κόμβων 7591.

6.4.3 Μοντέλο Ισοδύναμου Sandwich

Η διαδικασία που ακολουθείται για τη διακριτοποίηση για μοντέλο του ισοδύναμου sandwich είναι η ίδια με αυτή του μοντέλου της ισοδύναμης πλάκας. Μόνο που εδώ, πρέπει να εξασφαλιστεί πως οι ακμές των στοιχείων που γειτνιάζουν πρέπει να έχουν τις ίδιες διαιρέσεις, ώστε να μην υπάρχει άνιση κατανομή στοιχείων μεταξύ των επιφανειών που συνορεύουν, που μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα. Το πλέγμα της δομής φαίνεται στην εικόνα 6.17.

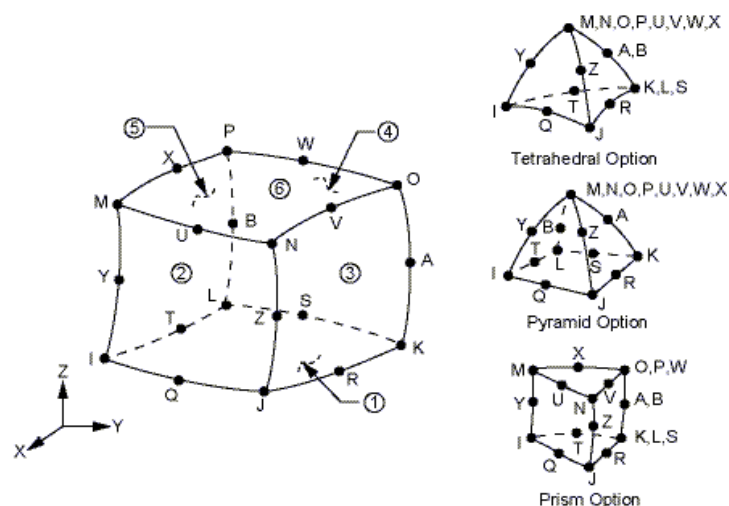


Εικόνα 6.17: Διακριτοποίηση του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich

Ο αριθμός των τρισδιάστατων στοιχείων που δημιουργήθηκαν είναι 720 και ο αριθμός των κόμβων 4599.

6.4.4 Τύποι Πεπερασμένων Στοιχείων

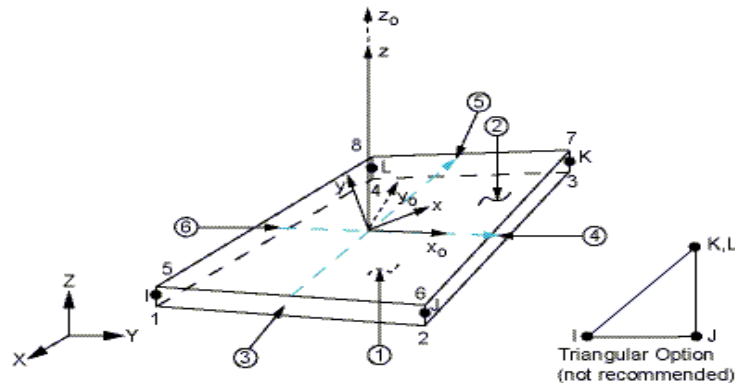
Το τρισδιάστατο στοιχείο που επιλέχθηκε είναι για τις διακριτοποιήσεις με αυτού του είδους τα στοιχεία είναι το SOLID186. Το SOLID186 είναι ένα υψηλής τάξης τρισδιάστατο στοιχείο με 20 κόμβους που χρησιμοποιεί για την προσέγγισή των μετατοπίσεων τετραγωνικές συναρτήσεις μορφής. Κάθε κόμβος έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, τις μετατοπίσεις κατά μήκος των ορθογωνίων αξόνων x , y και z . Το στοιχείο είναι κατάλληλο για πολλών ειδών αναλύσεις (πλαστικότητα, μεγάλες παραμορφώσεις, ερπυσμός, υπερελαστικότητα). Είναι επίσης κατάλληλο και για ακανόνιστα γεωμετρικά πλέγματα (irregular meshes), καθώς με κατάλληλους μετασχηματισμούς οι κόμβοι και οι γωνίες μπορούν να συγχωνευτούν στις ακμές και το στοιχείο να λάβει άλλες μορφές, κατά κύριο λόγο πυραμιδοειδείς (ισοπαραμετρικά στοιχεία). Με αυτό το στοιχείο αποφεύγεται και το φαινόμενο του διατμητικού κλειδώματος (shear locking), όπου αποτυγχάνεται να συλληφθούν οι διατμητικές παραμορφώσεις που μπορεί να εμφανιστούν κατά την δυναμική συμπεριφορά των στοιχείων.



Εικόνα 6.18: Στοιχείο SOLID186

Το στοιχείο κελύφους που χρησιμοποιήθηκε για την διακριτοποίηση των τειχών του κελύφους του honeycomb είναι το SHELL181. Το στοιχείο αυτό χρησιμοποιείται για τα λεπτότοιχα στερεά (thin-walled solids), έχει τέσσερις κόμβους με έξι βαθμούς

ελευθερίας, τις μετατοπίσεις και τις περιστροφές γύρω από τους ορθογώνιους άξονες. Η ολοκλήρωση των συναρτήσεων μορφής μπορεί να είναι μειωμένη ή ολοκληρωμένη, ανάλογα με την συναρμογή που τοποθετούνται. Μπορεί να εφαρμοστεί κι αυτό σε προβλήματα με μεγάλες παραμορφώσεις ή περιστροφές.



Εικόνα 6.19: Στοιχείο SHELL181

Οι δυναμικές αναλύσεις sandwich που έχουν γίνει με αυτά τα στοιχεία έχουν παρουσιάσει πολύ καλά αποτελέσματα και έχουν προταθεί για την διακριτοποίηση τέτοιων δομών (Burlayenko, Altenbach, Sadowski, 2015).

6.5 Συνθήκες Σύνδεσης των Δομικών Συνιστωσών

Στις δομές όπου υπάρχουν διακριτές στρώσεις, οι δομικές συνιστώσες συνδεόντουσαν μεταξύ τους με έναν τρόπο κατά τον οποίο δεν θα μπορούσαν να αποχωριστούν μεταξύ τους κατά την ελεύθερη ταλαντωτική κίνηση τους. Η παραμετροποίηση της σύνδεσης τους γίνεται από το δένδροειδή ομάδα *Connections - Contacts*. Επιλέγοντας αυτή την ομάδα εμφανίζονται αυτόματα οι επιφάνειες επαφής υπό την ονομασία *Contact Region*. Για κάθε επιφάνεια επαφής γίνεται η επιθυμητή παραμετροποίηση ανάλογα με τις συνθήκες που είναι επιθυμητές. Στην εικόνα 6.20 φαίνεται η παραμετροποίηση για τις επιφάνειες των sandwich.

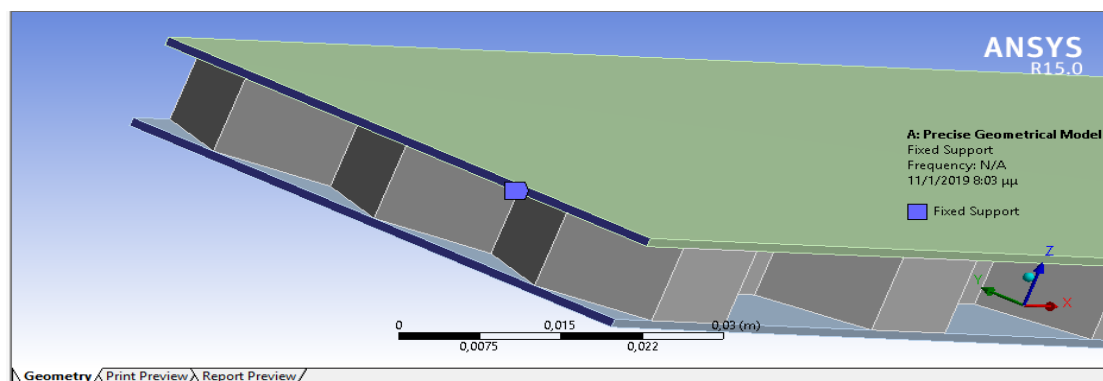
Details of "Contact Region"	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Contact	1 Face
Target	1 Face
Contact Bodies	Solid
Target Bodies	Solid
Definition	
Type	Bonded
Scope Mode	Automatic
Behavior	Program Controlled
Trim Contact	Program Controlled
Trim Tolerance	5,139e-004 m
Suppressed	No
Advanced	
Formulation	Program Controlled
Detection Method	Program Controlled
Penetration Tolerance	Program Controlled
Elastic Slip Tolerance	Program Controlled
Normal Stiffness	Program Controlled
Update Stiffness	Program Controlled
Pinball Region	Program Controlled
Geometric Modification	
Contact Geometry Correction	None

Εικόνα 6.20: Ορισμός των παραμέτρων των επιφανειών σύνδεσης

Όπως φαίνεται και στην εικόνα 6.20, ο τύπος της σύνδεσης είναι *Bonded* που δεν επιτρέπει κανένα διαχωρισμό των σωμάτων κατά την γραμμική συμπεριφορά των στοιχείων, ενώ, όλες οι παράμετροι είναι αυτόματα καθορισμένες από το πρόγραμμα. Γίνεται αυτή η επιλογή καθώς στην απλή δυναμική ανάλυση δεν ενός δομικού στοιχείου που αποτελείται από αρκετές συνιστώσες υλικών οι προκαθορισμένες συνθήκες είναι τέτοιες που δεν θα επιτρέψουν την αποχωρισμό των επιμέρους στοιχείων.

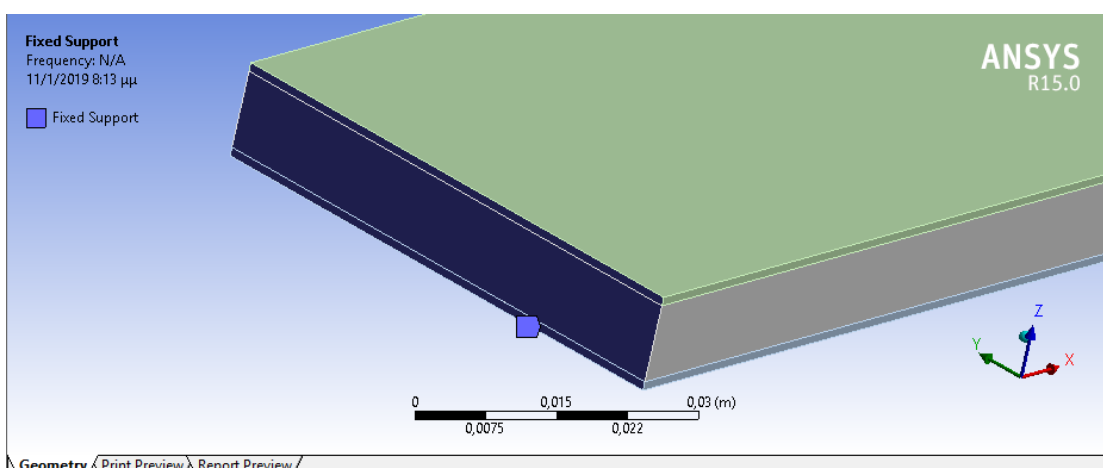
6.6 Συνοριακές Συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες των μοντέλων βασίζονται στις εργασίες της βιβλιογραφίας (Boudjemai et al., 2011 και Sakar, Bolat, 2015). Το πάνελ είτε μπορεί να είναι πακτωμένο (*clumped*) στο ένα άκρο του, είτε μπορεί να μην του επιβάλλεται κανένας περιορισμός στην κίνηση, δηλαδή να μην υπάρχουν συνοριακές συνθήκες. Όσον αφορά την τελευταία περίπτωση δεν χρειάζεται καμία περαιτέρω τροποποίηση στα βήματα που έχουν γίνει μέχρι στιγμής στο μοντέλο. Για τα πακτωμένα μοντέλα, επιλέγεται από τη λειτουργία *Supports* το *Fixed Support*. Για το ακριβές μοντέλο στο κελί της γεωμετρίας επιλέγονται οι επιφάνειες των κελυφών που θεωρούνται ακίνητες (εικόνα 6.21).



Εικόνα 6.21: Ορισμός πακτωμένων επιφανειών στο ακριβές μοντέλο

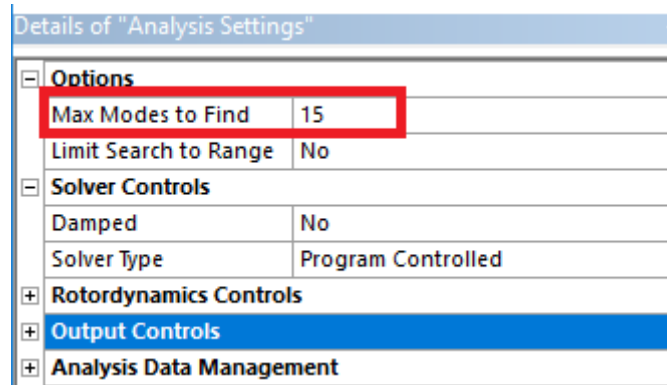
Για το ισοδύναμο μοντέλο *sandwich*, προστίθεται στις παραπάνω επιφάνειες και η επιφάνεια του ομογενούς υλικού που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο (επίπεδο της διατομής) με τις παραπάνω (εικόνα 6.22).



Εικόνα 6.22: Ορισμός πακτωμένων επιφανειών στο ισοδύναμο μοντέλο *sandwich*

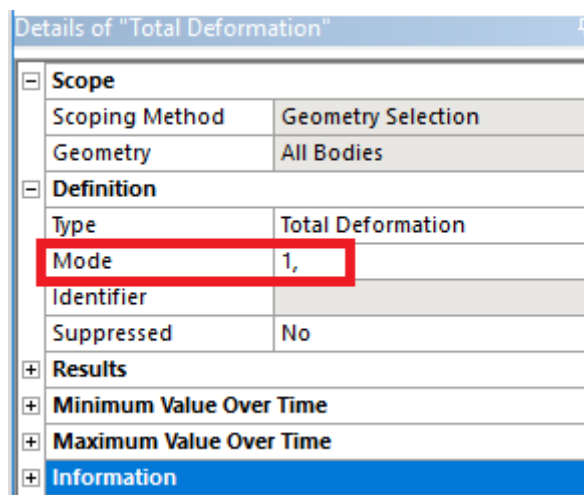
6.7 Ορισμός Αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις προσομοιώσεις που γίνονται στην εργαλειοθήκη *Modal* είναι οι φυσικές συχνότητες. Όλα τα άλλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εξαχθούν (τάσεις, παραμορφώσεις, ενέργεια παραμόρφωσης), βρίσκονται σε άμεση σχέση με κάθε φυσική συχνότητα ξεχωριστά. Ο αριθμός των φυσικών συχνοτήτων που υπολογίζονται από το πρόγραμμα ορίζεται από το περιβάλλον *Analysis Settings* (εικόνα 6.23). Ο αριθμός φυσικών συχνοτήτων που υπολογίζεται για όλα τα μοντέλα είναι 15.



Εικόνα 6.23: Ορισμός του αριθμού φυσικών συχνοτήτων που υπολογίζονται από το πρόγραμμα

Για κάθε φυσική συχνότητα είναι απαραίτητο να βρεθούν και οι αντίστοιχες ιδιομορφές. Αυτές μπορούν να εξαχθούν μέσω της επιλογής του *Total Deformation* (ολική παραμόρφωση). Καθεμιά από τις ολικές παραμορφώσεις που ορίζονται, αναφέρονται στην αντίστοιχη φυσική συχνότητα, όπως ορίζεται για παράδειγμα για την πρώτη ιδιοσυχνότητα στην εικόνα 6.24.



Εικόνα 6.24: Ανάθεση φυσικής συχνότητας σε κάθε ολική παραμόρφωση

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τις υπόλοιπες φυσικές συχνότητες. Αφού οριστούν όλα τα αποτελέσματα, το μοντέλο είναι έτοιμο να επιλυθεί με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και να παρουσιαστούν στο γραφικό περιβάλλον εργασίας τα αποτελέσματα, δηλαδή να πραγματοποιηθεί η προσομοίωση.

Αποτελέσματα Μορφικής Δυναμικής Ανάλυσης

7.1 Εισαγωγή

Με τη διεξαγωγή της προσομοίωσης των μοντέλων που κατασκευάστηκαν στο περιβάλλον του ANSYS, αποκομίζονται τα αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης. Στο παρόν στάδιο της μελέτης, τα αποτελέσματα που ενδιαφέρουν είναι οι *ιδιοσυχνότητες* και οι *ιδιομορφές*. Από την σύγκριση τους κρίνεται η ικανότητα των μοντέλων που εξετάζονται για την πρόβλεψη της δυναμικής συμπεριφοράς των δομών sandwich με κυψελοειδή πυρήνα honeycomb.

Για να αποδειχθεί η εγκυρότητα των μοντέλων που προτείνονται και δημιουργούνται στα Κεφάλαια 5 και 6, δηλαδή του *ισοδύναμου μοντέλου μονής στρώσης*, του *ισοδύναμου μοντέλου sandwich* και του *ακριβούς γεωμετρικά μοντέλου* που σχεδιάζεται στα σύγχρονα γραφικά περιβάλλοντα, εξετάζονται τρεις διαφορετικές μελέτες περιπτώσεων (*case studies*). Ο στόχος αυτής πολλαπλότητας των συγκρίσεων είναι να δοκιμασθούν τα μοντέλα σε διαφορετικές περιπτώσεις και να διαπιστωθεί η ικανότητα τους να προβλέπουν τη δυναμική συμπεριφορά σε άλλου είδους συνθήκες. Μέσω μιας τέτοιας σύγκρισης μπορεί αποδειχθεί η ευρωστία των μοντέλων και η καταλληλότητα τους για την ευρύτερη χρήση τους σε διάφορα προβλήματα.

Στη **πρώτη περίπτωση (case study 1)** συγκρίνονται τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 6. Τα αποτελέσματα της ισοδύναμης πλάκας, του ισοδύναμου sandwich και ακριβούς μοντέλου, παρουσιάζονται και συγκρίνονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές, ώστε να ελεγχθούν κατά πόσο τα μοντέλα συμφωνούν μεταξύ τους.

Στη **δεύτερη περίπτωση (case study 2)** τα παραπάνω αριθμητικά μοντέλα συγκρίνονται με αντίστοιχα φυσικά μοντέλα. Γίνεται σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων των αριθμητικών μοντέλων με τα αποτελέσματα των πειραμάτων των αντίστοιχων μοντέλων (πειραματικών δοκιμίων), όπως δίνονται από την βιβλιογραφία. Έτσι, μπορεί να εξακριβωθεί κατά πόσο τα μοντέλα είναι ικανά να περιγράψουν την πραγματική συμπεριφορά των δομών σε προκαθορισμένες πειραματικές συνθήκες.

Στη **τρίτη περίπτωση (case study 3)** το αριθμητικό μοντέλο που συνδυάζει τον μικρό αριθμό στοιχείων και τη συνεισφορά της κάθε στρώσης, το ισοδύναμο sandwich χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της δυναμικής συμπεριφοράς μιας αντίστοιχης πειραματικής δομής. Σε αυτή τη περίπτωση, για το αριθμητικό μοντέλο λαμβάνεται υπόψη και το στρώμα της κόλλας, κάνοντας μια ακριβή παραδοχή για τις συνιστώσες της δομής. Με αυτό τον τρόπο, επιβεβαιώνεται ακόμα πιο πολύ η αξιοπιστία αυτού του είδους του μοντέλου και η δυνατότητα που έχει να χρησιμοποιηθεί σε περαιτέρω αναλύσεις της δυναμικής συμπεριφοράς της δομής του κυψελοειδούς sandwich.

Ακόμα, κατά την παρουσίαση των παραπάνω συγκρίσεων, γίνεται και μια παρουσίαση μιας μικρής έκτασης παραμετρικής μελέτης, για τον έλεγχο της δυναμικής συμπεριφοράς του honeycomb sandwich κατά την μεταβολή των βασικών χαρακτηριστικών της δομής, ώστε να δώσει μια πρώτη εικόνα της ενδεχόμενης μεταβολής των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών. Είναι το πρώτο βήμα για μια μελέτη βελτιστοποίησης από την οποία μπορούν να εξαχθούν οι διαστάσεις και τα υλικά για το sandwich, που θα δώσουν την καλύτερη απόδοση κατά την εφαρμογή του σε κατασκευές.

7.2 Σύγκριση Μεταξύ των Μοντέλων (*Case Study 1*)

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των μοντέλων γίνεται για να διερευνηθούν οι αποκλίσεις που παρουσιάζουν μεταξύ τους και να ελεγχθεί κατά πόσο συμφωνούν μεταξύ τους. Με αυτό τον τρόπο, θα επιβεβαιωθεί η ισοδυναμία τους και θα πιστοποιηθεί η δυνατότητα που παρουσιάζεται στα σύγχρονα υπολογιστικά περιβάλλοντα εργασίας για την δημιουργία αξιόπιστων μοντέλων.

Οι διαστάσεις της δομής που εξετάζουν αυτά τα μοντέλα παρουσιάζεται στον πίνακα 7.1 :

Πίνακας 7.1: Διαστάσεις της πλάκας με πυρήνα honeycomb

<i>Μήκος</i>	<i>Πλάτος</i>	<i>Πάχος Κελύφους</i>	<i>Πάχος Πυρήνα</i>	<i>Μήκος Πλευράς Κυψέλης</i>	<i>Πάχος Τείχους Κυψέλης</i>
196.3 mm	60 mm	1 mm	9 mm	11.55 mm	1 mm

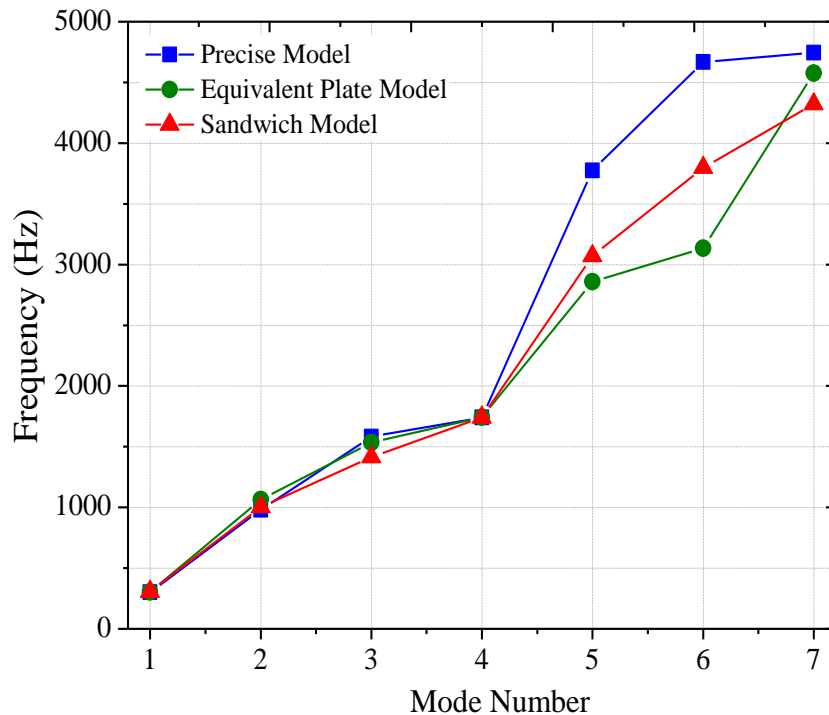
Οι ιδιότητες του υλικού του honeycomb, που είναι ένα κράμα αλουμινίου όπως και οι διαστάσεις και οι ιδιότητες του κάθε μοντέλου, αναφέρονται στο Κεφάλαιο 6. Να γίνει η υπενθύμιση πως τα μοντέλα θεωρούνται πακτωμένα στο ένα τους άκρο.

Τα αποτελέσματα τεχνικής σημασίας που αφορούν την μορφική δυναμική συμπεριφορά των δομών sandwich με κυψελοειδή πυρήνα honeycomb, συνήθως εστιάζουν στις 5 με 10 πρώτες ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές, που βρίσκονται στο εύρος συχνοτήτων [0 – 5000 Hz] (Boudjemai et al., 2011). Στο πίνακα 7.2 καταγράφονται τα αποτελέσματα των 7 πρώτων ιδιοσυχνοτήτων, για τα όλα τα μοντέλα.

Πίνακας 7.2: Αποτελέσματα των μοντέλων της εργασίας

<i>Mode</i>	<i>Frequency [Hz] – Precise Model</i>	<i>Frequency [Hz] – Equivalent Plate Model</i>	<i>Frequency [Hz] – Equivalent Sandwich Model</i>
1	301,8	303,47	306,62
2	981,11	1064	1003
3	1582,2	1532,9	1415,2
4	1740,1	1742,3	1741,8
5	4377,8	2857,5	3070,8
6	4668,1	3134,5	3798,7
7	4744,5	4577	4322

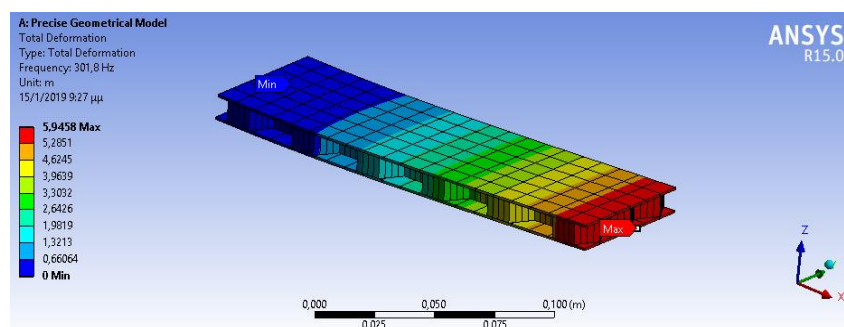
Το διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζει τη διακύμανση των συχνοτήτων ανάλογα με τις ιδιομορφές που ανήκουν.



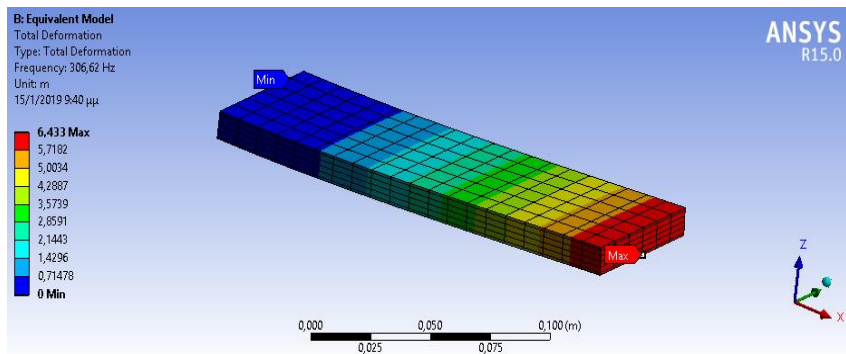
Εικόνα 7.1: Σύγκριση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων των μοντέλων για το εύρος [0 – 5000Hz]

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί τόσο από τον πίνακα όσο και από το διάγραμμα, τα αποτελέσματα των μοντέλων παρουσιάζουν πολύ μικρή απόκλιση μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει, πρώτον, ότι κατά πάσα πιθανότητα τα μοντέλα προσεγγίζουν την ίδια δυναμική συμπεριφορά και δεύτερον, τα ισοδύναμα μοντέλα που κάνουν παραδοχές τόσο ως προς τα υλικά (*Equivalent Sandwich Model*) όσο και ως προς την γεωμετρία (*Equivalent Plate Model*) μπορούν να αντικαταστήσουν το ακριβές γεωμετρικό μοντέλο είτε στα προκαταρκτικά στάδια της ανάλυσης, είτε στις περιπτώσεις που απαιτείται οικονομία τόσο στην υπολογιστική διάρκεια όσο και στην υπολογιστική ισχύ.

Παρακάτω, θα παρουσιαστούν οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές για τα μοντέλα της ακριβούς γεωμετρίας και του ισοδύναμου sandwich και θα δοθεί μια περιληπτική περιγραφή τους.

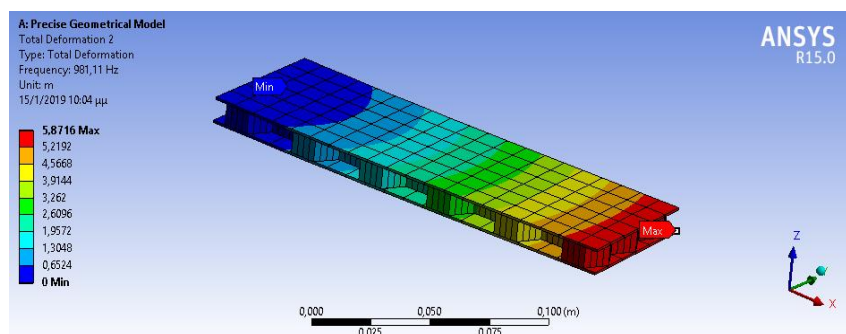


Εικόνα 7.2.a: 1η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας

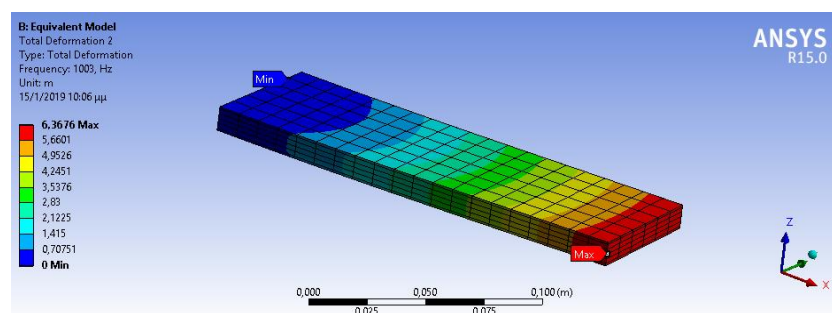


Εικόνα 7.2.b: 1η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich

Η πρώτη ιδιομορφή αφορά την καμπτική παραμόρφωση ως προς τον άξονα Y.

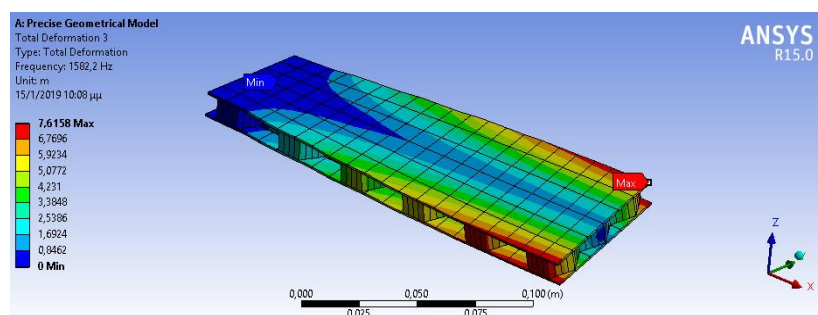


Εικόνα 7.3.a: 2η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας

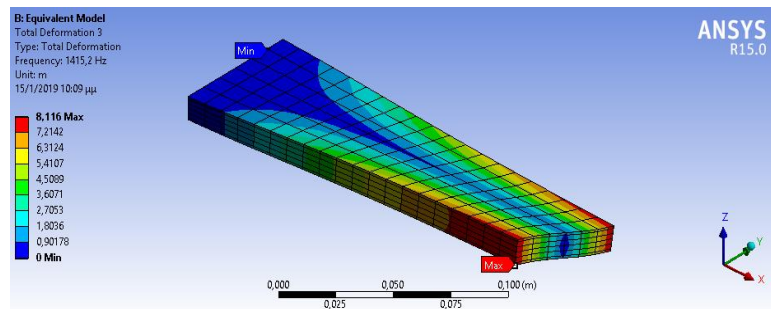


Εικόνα 7.3.b: 2η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich

Η δεύτερη ιδιομορφή αφορά την καμπτική παραμόρφωση ως προς τον άξονα Z.

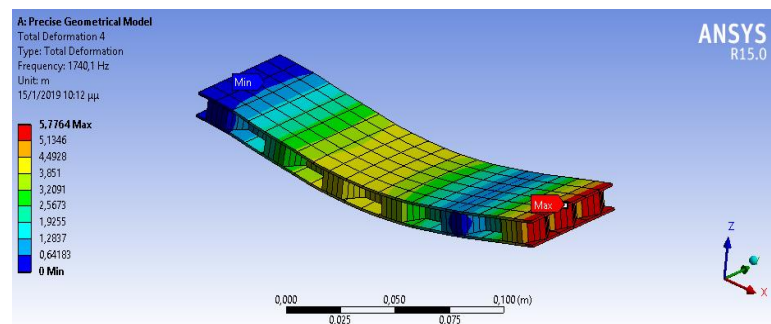


Εικόνα 7.4.a: 3η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας

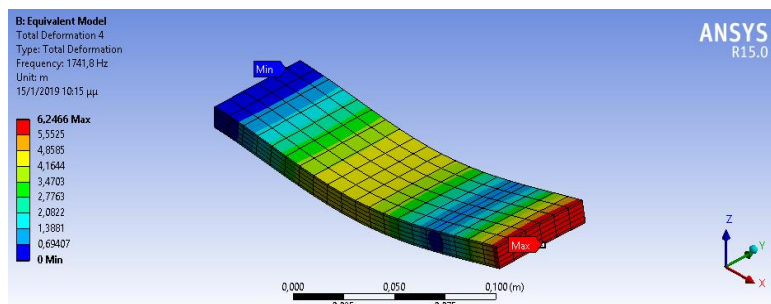


Εικόνα 7.4.b: 3η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich

Η τρίτη ιδιομορφή αφορά την στρεπτική παραμόρφωση γύρω από τον άξονα X.



Εικόνα 7.5.a: 4η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας

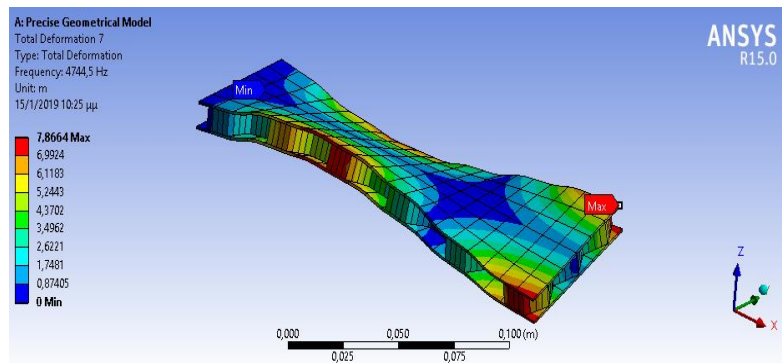


Εικόνα 7.5.b: 4η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich

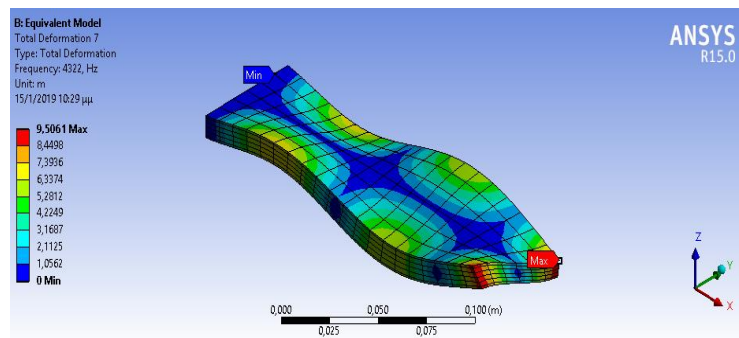
Η τέταρτη ιδιομορφή αφορά την καμπτική παραμόρφωση γύρω από τον άξονα Y, σύμφωνα με μια ελαστική γραμμή μιας πλάκας που βρίσκεται σε απλή στήριξη δίπλα από το ελεύθερο άκρο.

Εκτός όμως από τις παραπάνω ιδιομορφές που έχουν μια καθορισμένη και σχετικά απλή μορφή, υπάρχουν και αυτές που είναι με πιο ιδιαίτερη παραμόρφωση που προκύπτουν από την σύζευξη διαφορετικού είδους παραμορφώσεων, όπως αυτή της έβδομης ιδιομορφής, όπου το σχήμα του πάνελ δεν προέρχεται ούτε από την καθαρή κάμψη ούτε όμως και από την καθαρή διάτμηση του. Αυτό συμβαίνει επειδή στις υψηλότερες ιδιοσυχνότητες οι ιδιομορφές εμφανίζονται ως επαλληλία αυτών που εμφανίζονται σε μικρότερες συχνότητες.

Σε κάθε περίπτωση πάντως, το σημαντικό είναι πως οι ιδιομορφές είναι της ίδιας μορφής κατά αντιστοιχία για κάθε μοντέλο στο εύρος συχνοτήτων από 0 έως 5000 Hz.



Εικόνα 7.6.a: 7η Ιδιομορφή του μοντέλου της ακριβούς γεωμετρίας



Εικόνα 7.6.b: 7η Ιδιομορφή του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich

7.3 Σύγκριση Μεταξύ Πειραματικών και Αριθμητικών Μοντέλων (Case Study 2)

Τα αριθμητικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν με βάση τις μεθοδολογίες του Κεφαλαίου 5, μπορούν να συγκριθούν με αντίστοιχα πειραματικά, για να εξακριβωθεί η δυνατότητα τους να προσομοιάζουν πραγματικές συμπεριφορές.

7.3.1 Πειραματική Διαδικασία

Τα πειραματικά αποτελέσματα που πάρθηκαν για σύγκριση, δίνονται από την εργασία των (Boudjemai et al., 2011). Σε αυτή, έγινε η πειραματική και υπολογιστική μελέτη μια σύνθετης κυψελοειδούς honeycomb sandwich δομής που προορίζονταν για εφαρμογή σε έναν δορυφόρο ενός προγράμματος του κέντρου της γαλλικής αεροδιαστημικής τεχνολογίας.

Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για όλες τις συνιστώσες του πειραματικού δοκιμίου είναι ένα κράμα αλουμινίου με ιδιότητες:

$$\rho = 2,800 \text{ kg/m}^3, \quad E = 72 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.33$$

το ίδιο υλικό που βρήκε χρήση και στην προηγούμενη μελέτη (case study 1), ενώ οι διαστάσεις του δοκιμίου δίνονται από τον πίνακα 7.3:

Πίνακας 7.3: Διαστάσεις της πλάκας με πυρήνα honeycomb (Boudjemai et al., 2011)

Μήκος	Πλάτος	Πάχος Κελύφους	Πάχος Πυρήνα	Μήκος Πλευράς Κυψέλης	Πάχος Τείχους Κυψέλης
290 mm	40 mm	1 mm	9 mm	2 mm	0.2 mm

Το δοκίμιο κατά την διέγερσή του ήταν πακτωμένο στο ένα του άκρο και στο άλλο εφαρμόστηκε μια κρουστική δύναμη από ένα μικρό σφυρί. Το πιεζοηλεκτρικό επιταχυνσιόμετρο που ήταν τοποθετημένο πάνω στο δοκίμιο, με την μηχανική παραμόρφωση του δοκιμίου παρήγαγε μια ανάλογη ηλεκτρική τάση, που μέσω ενός κυκλώματος έδινε ένα ηλεκτρικό σήμα σε έναν ενισχυτή που με την σειρά το έστειλε σε έναν υπολογιστή όπου γινόταν η ανάλυση του μέσω ενός μετασχηματισμού Fourier και προέκυψαν τα παρακάτω πειραματικά αποτελέσματα:

- Mode 1, $f_1 = 134.5 \text{ Hz}$ (1^η Καμπτική Ιδιομορφή, First Bending Mode)
- Mode 2, $f_2 = 311 \text{ Hz}$ (2^η Καμπτική, Lateral Mode)
- Mode 3, $f_3 = 711 \text{ Hz}$ (3^η Καμπτική, Second Bending Mode)

Οι συχνότητες βρέθηκαν εντός ενός εύρους που ενδιέφερε τους συγγραφείς της εργασίας, καθώς θεώρησαν πως τα φορτία που θα δεχτεί το δομικό στοιχείο βρισκόταν σε αυτό το εύρος συχνοτήτων.

7.3.2 Μοντελοποίηση και προσομοίωση των αριθμητικών μοντέλων

Με βάση την μεθοδολογία που προτάθηκε στο Κεφάλαιο 5 κατασκευάστηκαν τα αριθμητικά μοντέλα της ισοδύναμης πλάκας και του ισοδύναμου sandwich που αντιστοιχούν στο αντίστοιχο πειραματικό, όπως αυτό περιγράφεται από τον πίνακα 7.1. Η διαθέσιμη υπολογιστική ισχύς δεν επαρκούσε για την δημιουργία του ακριβούς γεωμετρικού μοντέλου, με συνέπεια τα αποτελέσματα για αυτού του μοντέλου να παρθούν από την εργασία των (Boudjemai et al., 2011). Το μοντέλο τους δημιουργήθηκε και προσομοιώθηκε στο περιβάλλον του MSC Nastran.

Για το μοντέλο της ισοδύναμης πλάκας, οι ισοδύναμες ιδιότητες του προκύπτουν από τις σχέσεις (5.4) – (5.6) δίνονται από τις παρακάτω τιμές:

$$t_{eq} = 17.35 \text{ mm}, E_{eq} = 8.30 \text{ GPa}, \rho_{eq} = 490.48 \text{ kg/m}^3$$

Για το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich, οι διαστάσεις της δομής είναι ίδιες με αυτές που δίνονται στον πίνακα 7.3, το υλικό του πυρήνα όμως ομογενοποιείται και οι ιδιότητες του βάσει της θεωρίας των Ashby – Gibson (Κεφάλαιο 2) και σύμφωνα με τις διαστάσεις της κυψέλης δίνονται από τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = 166 \text{ MPa}, E_z = 8.31 \text{ GPa} \\ v_{xy} = 0.9581, v_{yz} = 7.622 \times 10^{-3} \\ G_{xy} = 41.04 \text{ MPa}, G_{xz} = G_{yz} = 1.56 \text{ GPa} \\ \rho = 323.32 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Το δομημένο πλέγμα ακολουθήθηκε για την διακριτοποίηση και αυτών των μοντέλων. Οι πλευρές διαιρέθηκαν όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 6, χρησιμοποιήθηκαν κι εδώ τρισδιάστατα στοιχεία (3D Elements), συγκεκριμένα το SOLID186. Το ακριβές γεωμετρικό μοντέλο των (Boudjemai et al., 2011) χρησιμοποιεί στοιχεία κελύφους (shell elements) για τα τείχη των honeycomb και τρισδιάστατα στοιχεία για τα κελύφη του sandwich. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των στοιχείων και των κόμβων κατά τα οποία παρουσιάστηκε σύγκλιση στα αποτελέσματα των μοντέλων:

Πίνακας 7.4: Ο αριθμός των στοιχείων για τα οποία παρουσιάστηκε σύγκλιση σε κάθε μοντέλο

	Number of Elements	Number of Nodes
<i>Equivalent Plate Model</i>	1500	7591
<i>Equivalent Sandwich Model</i>	2140	12497
<i>Precise Geometrical Model</i> [19]	23221	40426

Η διακριτοποίηση των δομών sandwich με τρισδιάστατα στοιχεία είναι μια επιλογή με σχετικά υψηλό υπολογιστικό κόστος, που ωστόσο δίνει τα πιο ακριβή αποτελέσματα σε σχέση με διακριτοποιήσεις με στοιχεία κελύφους ή με συνδυασμούς στοιχείων (solid – shell elements). Το μοναδικό που θα χρειαστεί να διασφαλιστεί είναι η αποφυγή φαινομένων μη σύλληψης της κατάλληλης παραμορφωτικής κίνησης, όπως είναι το διατμητικό κλείδωμα (shear locking). Για αυτό το λόγο πρέπει να γίνει η κατάλληλη επιλογή του τύπου των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν. Στη παρούσα μελέτη, το στοιχείο SOLID186 έχει τα χαρακτηριστικά που αρκούν για τις ανάγκες της.

Στον πίνακα 7.4, παρατηρείται πως ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για το ακριβές γεωμετρικό μοντέλο είναι πάρα πολύ μεγάλος σε σύγκριση με τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για τα ισοδύναμα μοντέλα, γεγονός που δηλώνει τις μεγάλες απαιτήσεις από την άποψη υπολογιστικών πόρων για τον υπολογισμό της δυναμικής συμπεριφοράς των μοντέλων της ακριβούς γεωμετρίας των κυψελοειδών honeycomb δομών. Λόγω αυτού του κόστους, για την προσομοίωση αυτών των δομών στις περισσότερες περιπτώσεις επιλέγονται τα ισοδύναμα μοντέλα και κατά κύριο λόγο το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich.

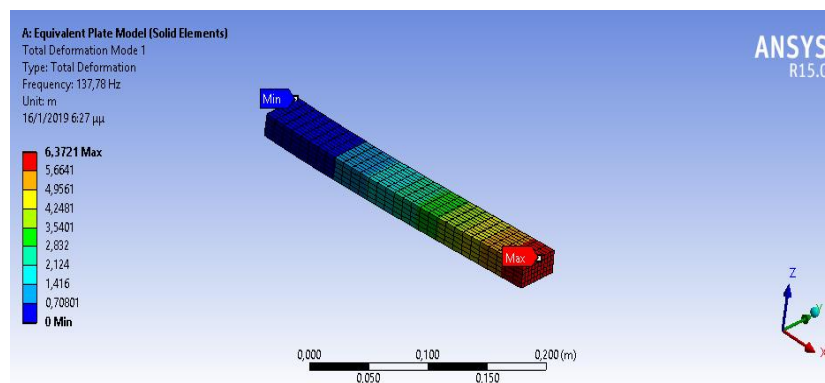
7.3.3 Αποτελέσματα των προσομοιώσεων

Στο παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα του πειραματικού μοντέλου και των προσομοιώσεων των αριθμητικών μοντέλων για τις τρεις πρώτες ιδιοσυχνότητες.

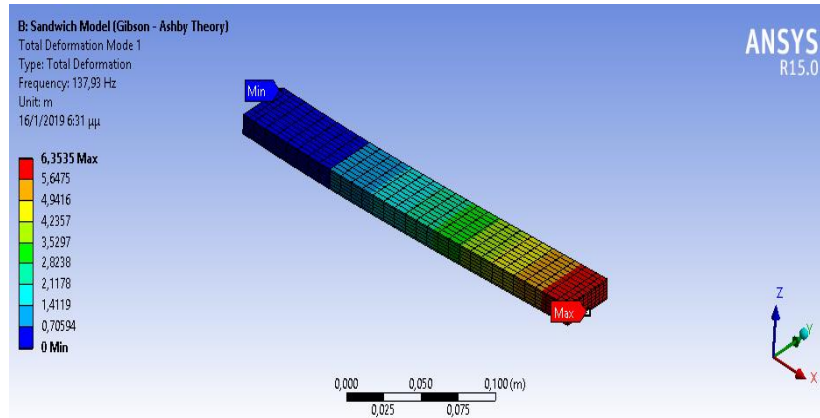
Πίνακας 7.5: Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και των αριθμητικών αποτελεσμάτων

<i>Mode</i>	<i>Experimental [Hz]</i>	<i>Frequency [Hz] - Precise Model [19]</i>	<i>Frequency [Hz] - Equivalent Sandwich Model</i>	<i>Frequency [Hz] - Equivalent Model</i>
1	134,5	130,66	137,93	137,78
2	311	304,67	317,5	312,87
3	711	790,34	831,05	849,12

Όπως φαίνεται τα όλα τα μοντέλα προσεγγίζουν με μικρά σφάλματα τη πειραματική δυναμική απόκριση. Συγκεκριμένα, για την 1^η ιδιοσυχνότητα το ακριβές μοντέλο δίνει ένα πιο συντηρητικό αποτέλεσμα σε σχέση με την πειραματική μέτρηση, με σφάλμα 2.9%, ενώ τα ισοδύναμα μοντέλα δίνουν μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με την πειραματική μέτρηση με σφάλματα 2.4% και 2.6% για την ισοδύναμη πλάκα και το ισοδύναμο sandwich, αντίστοιχα.

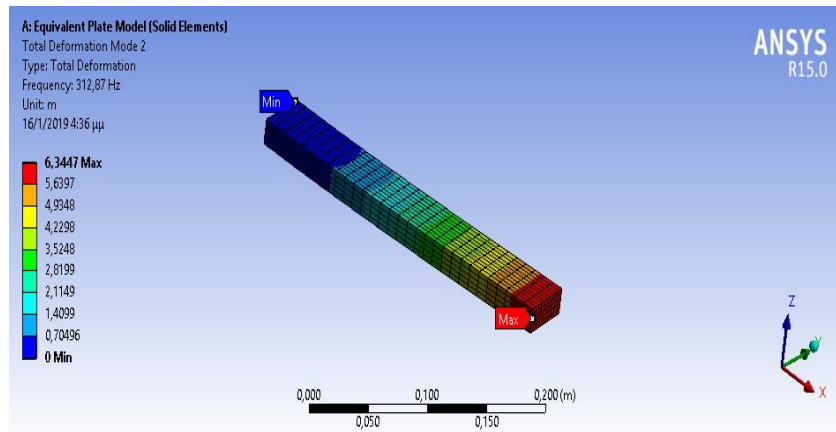


Εικόνα 7.7.a: 1η Ιδιομορφή του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας

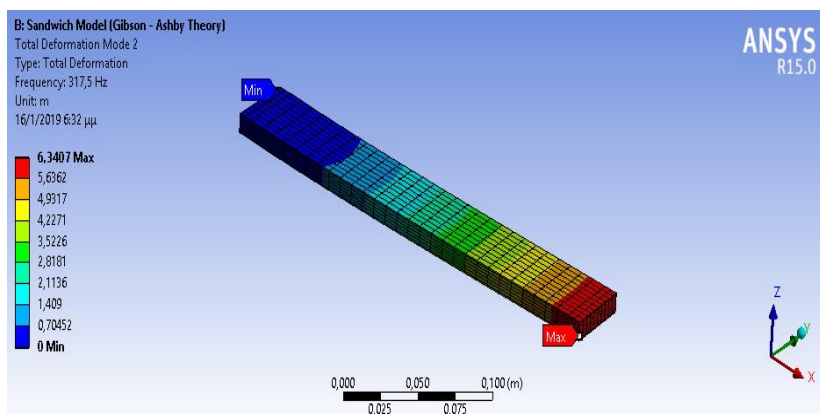


Εικόνα 7.7.b: 1η Ιδιομορφή του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich

Η ίδια σχέση μεταξύ των αποτελεσμάτων ακολουθείται και για την 2^η ιδιοσυχνότητα. Το ακριβές γεωμετρικό μοντέλο δίνει ένα πιο συντηρητικό αποτέλεσμα σε σχέση με το πειραματικό με σφάλμα 2%, ενώ τα ισοδύναμα μοντέλα δίνουν μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τα πειραματικά με σφάλματα 0.06% για το μοντέλο της ισοδύναμης πλάκας και 2.1% για το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich.



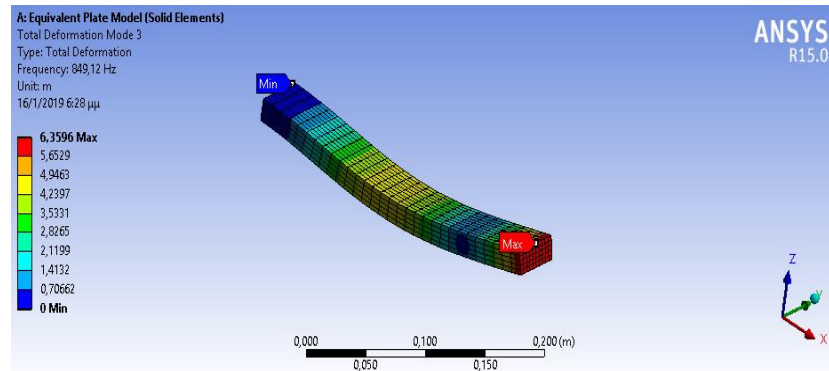
Εικόνα 7.8.a: 2η Ιδιομορφή του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας



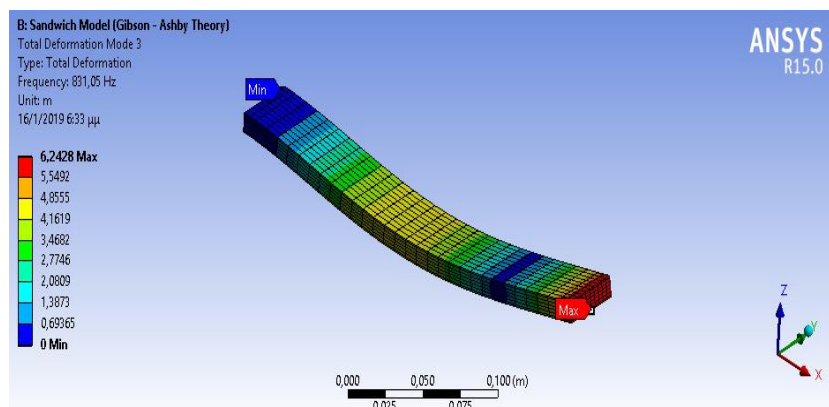
Εικόνα 7.8.b: 2η Ιδιομορφή του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich

Στη 3^η ιδιοσυχνότητα όλα τα μοντέλα δίνουν πολύ μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με την πειραματική. Τα σφάλματα είναι 11.2% για το ακριβές μοντέλο, 19.4% για το μοντέλο της ισοδύναμης πλάκας και 16.9% για το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich. Πιθανές εξηγήσεις για αυτή τη μεγάλη απόκλιση μπορεί να είναι είτε η αγνόηση της απόσβεσης

των υλικών, είτε η αγνόηση του στρώματος της κόλλας μεταξύ των κελυφών και του πυρήνα κατά την μοντελοποίηση. Ακόμα, ένας παράγοντας που μπορεί να επηρεάζει αυτή την απόκλιση είναι η προσέγγιση των συνοριακών συνθηκών, καθώς η πάκτωση του άκρου της δοκού μπορεί να μην προσεγγίζει σωστά τις πραγματικές συνθήκες στήριξης.



Εικόνα 7.9.a: 3η Ιδιομορφή του Μοντέλου της Ισοδύναμης Πλάκας

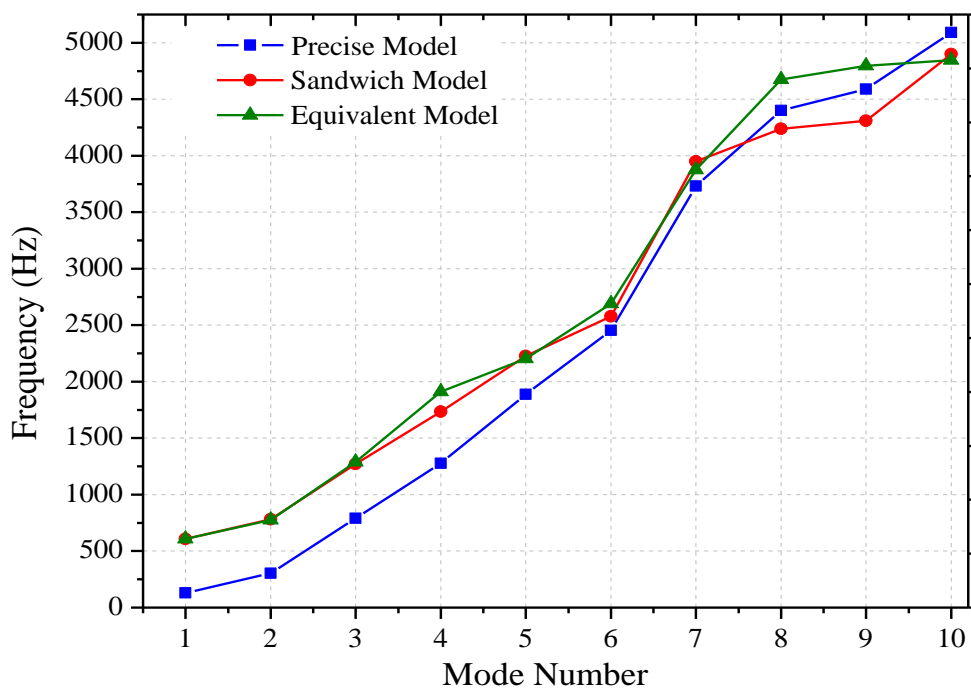


Εικόνα 7.9.b: 3η Ιδιομορφή του Μοντέλου του Ισοδύναμου Sandwich

Ακολουθούν ο πίνακας και το διαγράμμα της μεταβολής των συχνοτήτων σε συνάρτηση με τις αντίστοιχες ιδιομορφές για όλα τα αριθμητικά μοντέλα στο εύρος από 0 έως 5000 Hz. Στο διάγραμμα αυτό μπορεί να εμφανιστούν με πιο εμφανή τρόπο, το μέγεθος των αποκλίσεων των αποτελεσμάτων των μοντέλων μεταξύ τους.

Πίνακας 7.6: Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών μοντέλων

<i>Mode</i>	<i>Frequency [Hz] - Precise Model [19]</i>	<i>Frequency [Hz] - Equivalent Sandwich Model</i>	<i>Frequency [Hz] - Equivalent Model</i>
1	130,66	137,93	137,78
2	304,67	317,5	312,87
3	790,34	831,05	849,12
4	1278	1316,9	1503,5
5	1888,4	1834	1809,3
6	2452,6	2199,5	2319,5
7	3731,7	3637,2	3558,6
8	4401,7	3941	4396,1
9	4589,9	4013,2	4524,5
10	5091,7	4633,5	4576,5



Εικόνα 7.10: Σύγκριση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων των μοντέλων για το εύρος [0 – 5000Hz]

Μέχρι την 7^η ιδιόμορφη και το επίπεδο των 4000 Hz, το ακριβές γεωμετρικό μοντέλο δίνει μικρότερες συχνότητες σε σχέση με τα άλλα μοντέλα, τα οποία μέχρι αυτό το όριο παρουσιάζουν πολύ μικρές αποκλίσεις μεταξύ τους. Κατόπιν, στην 8^η έως και στην 9^η ιδιόμορφη, το μοντέλο της ισοδύναμης πλάκας εμφανίζεται να δίνει μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τα άλλα δύο μοντέλα ενώ το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich δίνει τις μικρότερες τιμές. Στη 10^η ιδιόμορφη το ακριβές μοντέλο εμφανίζεται να δίνει υψηλότερη τιμή σε σχέση με τα άλλα δύο, οι τιμές των οποίων εμφανίζουν πολύ μικρή απόκλιση μεταξύ τους.

Αυτή η διακύμανση που παρουσιάζεται σε αυτές τις ιδιομορφές οφείλεται κατά κύριο λόγο, εξαιτίας του τρόπου σχηματισμού τους. Αυτές οι ιδιοσυχνότητες δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο σχήμα ή μορφή παραμόρφωσης, αλλά αποτελούν σύζευξη διάφορων μορφών που προκύπτουν κυρίως από την επαλληλία των ιδιομορφών που εμφανίζονται σε χαμηλότερες συχνότητες. Ανάλογα λοιπόν, με το ποια μορφή υπερτερεί κατά την σύζευξη τους εμφανίζεται και η αντίστοιχη συμπεριφορά που επηρεάζει και το μέγεθος της συχνότητας. Συνεπώς, αναμένεται στις υψηλότερες συχνότητες να παρουσιάζεται μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ των αριθμητικών μοντέλων, λόγω της διαφορετικής συνεισφοράς που θα έχουν οι ιδιομορφές που θα βρίσκονται σε επαλληλία.

7.4 Παραμετρική Μελέτη

Στην εργασία των (Boudjemai et al., 19) πραγματοποιήθηκε ακόμα μια παραμετρική υπολογιστική μελέτη, όπου με την αλλαγή των χαρακτηριστικών των δομικών συνιστωσών παρατηρήθηκαν οι ενδεχόμενες αλλαγές στα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Σε αυτή τη παράγραφο θα παρουσιαστεί μια τέτοιου είδους μελέτη, που έγινε μέσω της αλλαγής των χαρακτηριστικών του μοντέλου του ισοδύναμου sandwich. Οι αλλαγές αφορούσαν τα πάχη του πυρήνα και των κελυφών, το είδος του υλικού και το μέγεθος της κυψέλης του honeycomb. Σε όλες αλλαγές, τα αποτελέσματα του ισοδύναμου μοντέλου παρουσίασαν πολύ μικρές αποκλίσεις από τα αντίστοιχα του ακριβούς γεωμετρικά μοντέλου.

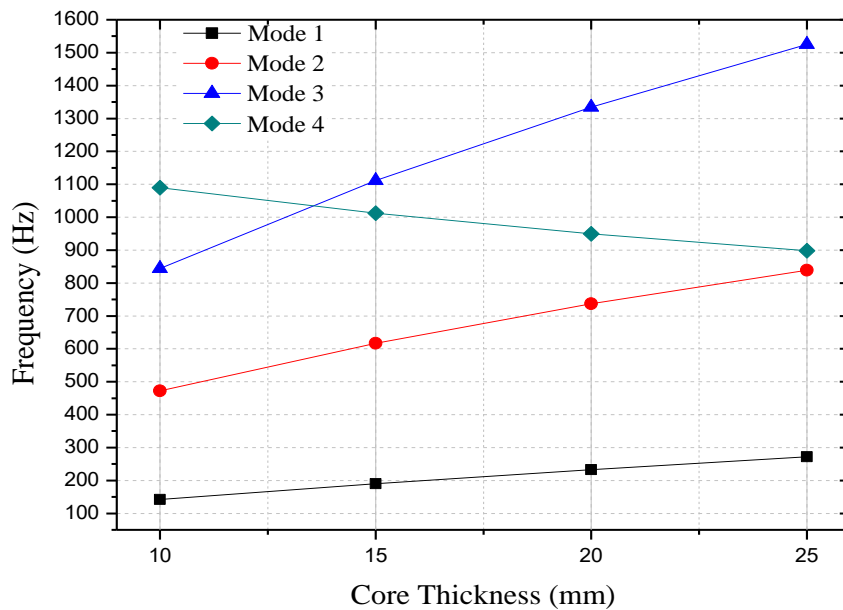
Το μοντέλο που θεωρήθηκε ως βάση για αυτού του είδους τη μελέτη είχε τις ίδιες συνοριακές συνθήκες και ακολουθήθηκε η ίδια μεθοδολογία για την διακριτοποίηση του με τα προηγούμενα μοντέλα. Οι διαστάσεις του πάνελ όμως ήταν διαφορετικές με μήκος 302 mm και πλάτος 183 mm. Οι διαστάσεις της κυψέλης του honeycomb παρέμεναν ίδιες και η ομογενοποίηση βασίστηκε στη θεωρία των Ashby – Gibson.

7.4.1 Επίδραση του Πάχους του Πυρήνα

Σε αυτή την ανάλυση υποτίθεται πως γίνεται η αλλαγή του πάχους του πυρήνα θεωρώντας όλες τις άλλες ιδιότητες της δομής σταθερές. Το υλικό όλων των συνιστωσών είναι το κράμα αλουμινίου που παρουσιάστηκε στη παράγραφο 7.3. Στο πίνακα 7.6 και την εικόνα 7.10 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τις τέσσερις πρώτες ιδιομορφές.

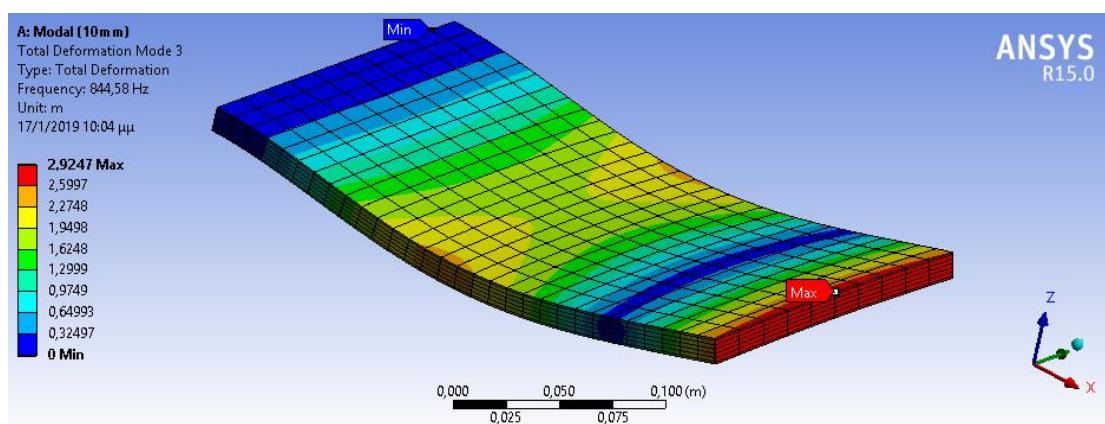
Πίνακας 7.7: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για διάφορα πάχη

Thickness (mm)	Mode 1 (Hz)	Mode 2 (Hz)	Mode 3 (Hz)	Mode 4 (Hz)
10	141,88	471,9	844,58	1089,5
15	190,35	616,83	1012,1	1111,1
20	233,19	737,18	949,89	1334,6
25	271,79	839,02	898,32	1525,4

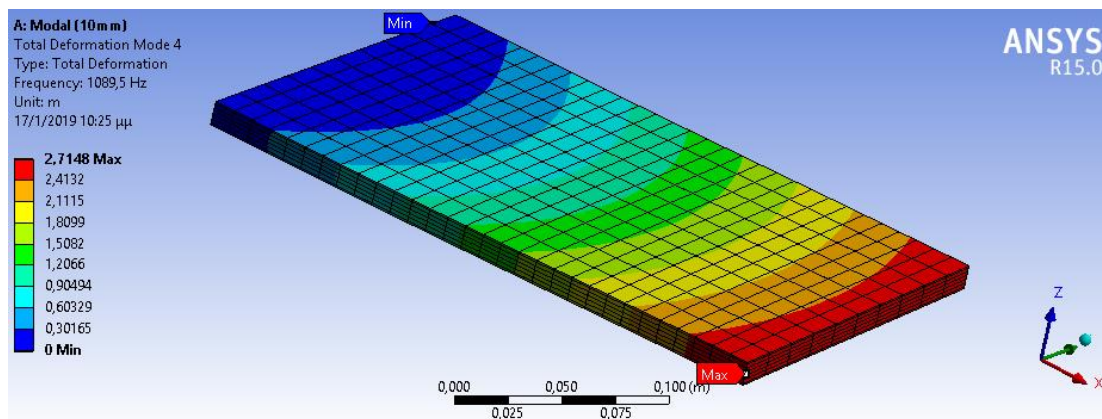


Εικόνα 7.11: Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει του πάχους του πυρήνα

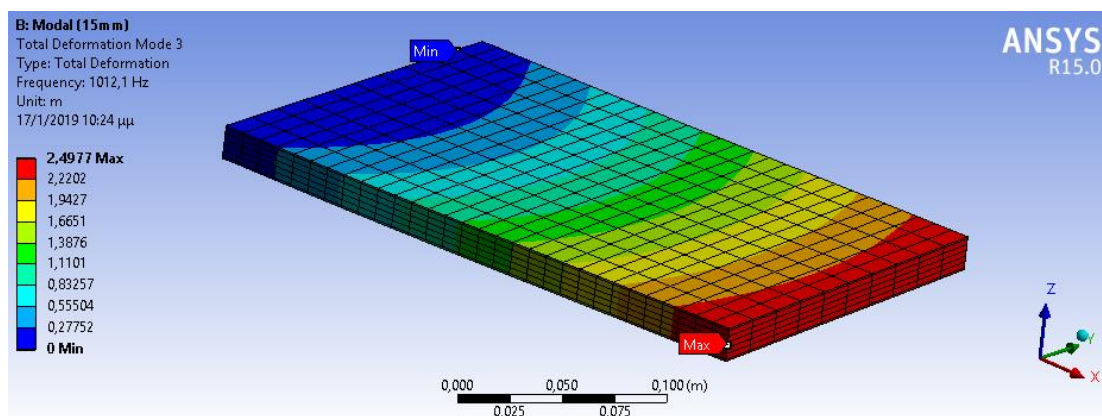
Εδώ παρατηρείται ένα πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο. Είναι εμφανές πως για την πρώτη, τη δεύτερη και την τρίτη ιδιομορφή οι συχνότητες αυξάνονται με το πάχος του πυρήνα ενώ για την τέταρτη ιδιομορφή μειώνονται. Συγκεκριμένα, από το πάχος των 15 mm και άνω η τρίτη ιδιομορφή εμφανίζεται σε συχνότητες υψηλότερες σε σχέση με την τέταρτη, με τη μία να παίρνει τη θέση της άλλης κατά τη σειρά εμφάνισής τους. Αυτό το φαινόμενο απαντάται στη βιβλιογραφία ως φαινόμενο “cross - over” και συμβαίνει όταν κατά τη δυναμική συμπεριφορά ενός πάνελ με γενικά ανισότροπη συμπεριφορά, κάποιες υλικές ιδιότητες κυριαρχούν επί κάποιων άλλων, όπως στη δεδομένη περίπτωση που η αύξηση του πάχους έχει ως συνέπεια η διαμήκης ελαστική συμπεριφορά του (Mode 4) να γίνεται πιο έντονη και να παρουσιάζει πιο νωρίς σε σχέση με την καμπτική που είχε προηγηθεί (Mode 3). Στις επόμενες εικόνες εμφανίζονται αυτές οι διαφορές.



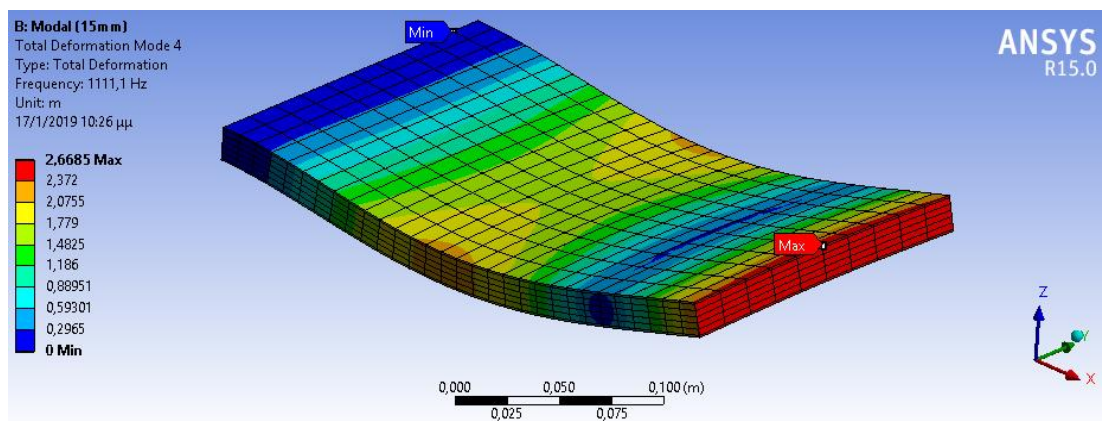
Εικόνα 7.12.a: 3η Καμπτική Ιδιομορφή του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 10mm



Εικόνα 7.12.b: 4η Ιδιομορφή (Lateral Mode) του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 10mm



Εικόνα 7.13.a: 3η Ιδιομορφή (Lateral Mode) του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 15mm



Εικόνα 7.13.b: 4η Καμπτική Ιδιομορφή του Μοντέλου για πάχος πυρήνα 10mm

7.4.2 Αλλαγή του Υλικού του Honeycomb

Εδώ θα εξεταστούν οι αλλαγές στη δυναμική συμπεριφορά της δομής με την αλλαγή του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο το honeycomb. Μερικά από πιο δημοφιλή υλικά για το honeycomb είναι τα κράματα τιτανίου (συγκεκριμένα το Ti-6Al-4Vn) και αλουμινίου, όσον αναφορά τα μέταλλα και τα σύνθετα υλικά για τα μη μεταλλικά υλικά. Τα υλικά που θα εξεταστούν με τις ιδιότητες τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

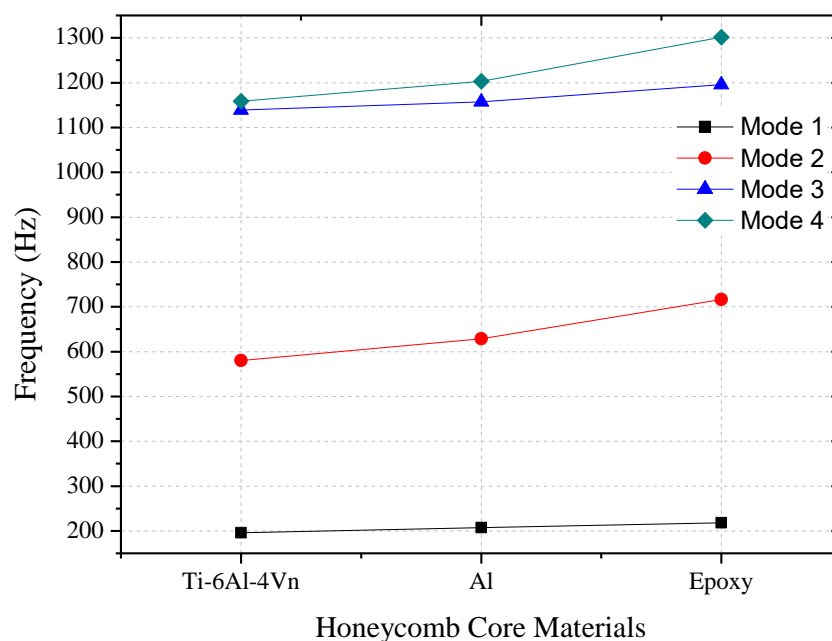
Πίνακας 7.8: Ιδιότητες των υλικών [19]

<i>Materials</i>	<i>Young Modulus (GPa)</i>	<i>Density (kg/m³)</i>	<i>Poisson's Ratio</i>
<i>Aluminium</i>	72	2,800	0.33
<i>Ti - 6Al -4Vn</i>	120	4,500	0.3
<i>Epoxy Carbon</i>	143	1,600	0.33

Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης φαίνονται στον πίνακα 7.8 και το διάγραμμα της εικόνας 7.11.

Πίνακας 7.9: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για διάφορα υλικά

<i>Honeycomb Core Material</i>	<i>Mode 1 (Hz)</i>	<i>Mode 2 (Hz)</i>	<i>Mode 3 (Hz)</i>	<i>Mode 4 (Hz)</i>
<i>Ti - 6Al - 4Vn</i>	195,56	579,78	1139,3	1158,7
<i>Aluminium</i>	207,5	628,38	1157,2	1202,9
<i>Epoxy Resin</i>	218,09	716,32	1195,4	1301,7

**Εικόνα 7.14:** Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει των υλικών του πυρήνα

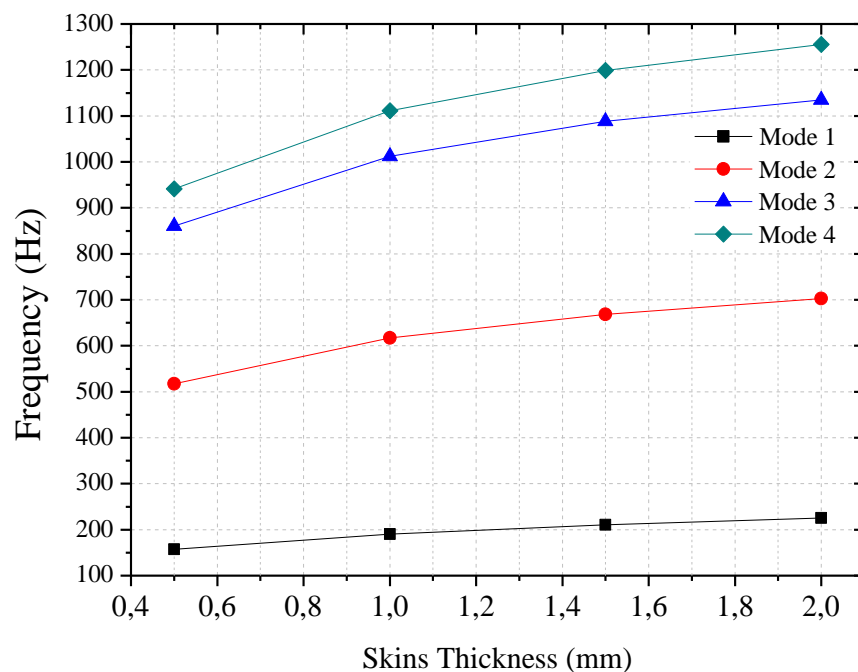
Εδώ παρατηρείται μια μικρή αύξηση στις συχνότητες με την μείωση της πυκνότητας του υλικού για κάθε ιδιομορφή, αλλά γενικά οι αυξήσεις είναι πολύ μικρές. Οπότε, για τα υλικά του honeycomb πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι άλλες φυσικές και μηχανικές ιδιότητες όπως η θερμική αγωγιμότητα, η ανθεκτικότητα και η αντίσταση στην διάβρωση.

7.4.3 Επίδραση του Πάχους των Κελυφών

Τα πάχη των κελυφών που μελετώνται είναι: 0.5, 1, 1.5 και 2 mm. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζονται στον πίνακα 7.9 και το διάγραμμα της εικόνας 7.12.

Πίνακας 7.10: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για την αλλαγή του πάχους των κελυφών

<i>Thickness (mm)</i>	<i>Mode 1 (Hz)</i>	<i>Mode 2 (Hz)</i>	<i>Mode 3 (Hz)</i>	<i>Mode 4 (Hz)</i>
0,5	157,44	517,46	860,33	941,45
1	190,35	616,83	1012,1	1111,1
1,5	210,33	668,56	1088,3	1199,1
2	225,16	702,53	1134,6	1255,6



Εικόνα 7.15: Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει του πάχους των κελυφών

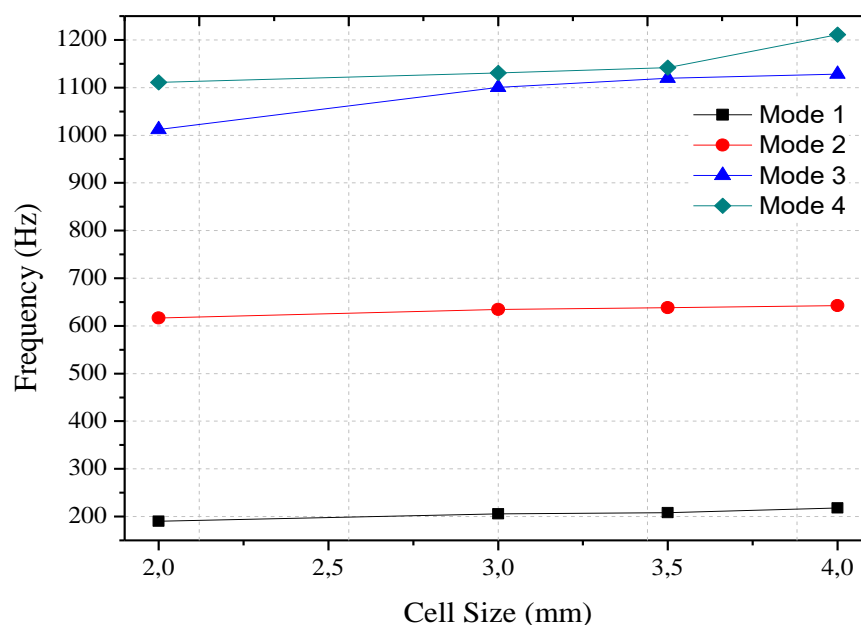
Παρατηρείται πως με την αύξηση του πάχους των κελυφών αυξάνονται και οι ιδιοσυχνότητες του sandwich, κάτι που καθιστά αυτή τη παράμετρο πολύ σημαντική για τον σχεδιασμό των sandwich.

7.4.4 Επίδραση του μεγέθους της κυψέλης

Το μέγεθος της κυψέλης του honeycomb επηρεάζει τις ισοδύναμες ιδιότητες του ομογενοποιημένου υλικού, σύμφωνα με τη θεωρία των Ashby – Gibson. Συνεπώς, για κάθε κυψέλη οι ιδιότητες του ομογενούς και ορθότροπου υλικού αλλάζουν. Τα μεγέθη της κυψέλης και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζονται στον πίνακα 7.10 και το διάγραμμα της εικόνας 7.13.

Πίνακας 7.11: Αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για την αλλαγή του μεγέθους της κυψέλης

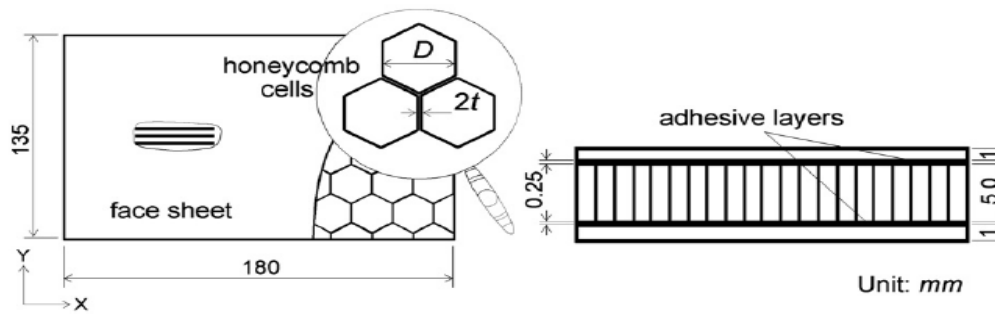
<i>Cell Wall Length (mm)</i>	<i>Mode 1 (Hz)</i>	<i>Mode 2 (Hz)</i>	<i>Mode 3 (Hz)</i>	<i>Mode 4 (Hz)</i>
2	190,35	616,83	1012,1	1111,1
3	205,53	634,64	1100,3	1130,8
3,5	208,18	638,2	1119,9	1141,6
4	217,71	642,51	1128,3	1210,9

**Εικόνα 7.16:** Μεταβολή της συχνότητας των ιδιομορφών συναρτήσει του μεγέθους της κυψέλης

Παρατηρούνται μικρές διαφορές κατά την μεταβολή του μεγέθους της κυψέλης σχεδόν για όλες τις ιδιομορφές, κάνοντας αυτή τη παράμετρο όχι και τόσο ευαίσθητη όσον αφορά την επίδραση της στην δυναμική συμπεριφορά του πάνελ.

7.5 Μοντέλα με Θεώρηση του Στρώματος της Κόλλας (Case Study 3)

Στα προηγούμενα αριθμητικά μοντέλα δεν συμπεριλήφθηκε η στρώση της κόλλας είτε γιατί η στρώση θεωρήθηκε πολύ λεπτή με συνέπεια η επίδραση της να θεωρηθεί αμελητέα, είτε γιατί οι στρώσεις του sandwich θεωρήθηκαν ως τέλεια συνδεδεμένες μεταξύ τους. Έχουν προταθεί όμως και μοντέλα στα οποία οι στρώσεις της κόλλας με τις ιδιότητες τους πάρθηκαν υπόψη κατά την μοντελοποίηση (Burlyayenko, Sadowski, 2009 και 2018). Σε αυτή τη περίπτωση θα εξεταστεί η δυναμική συμπεριφορά ενός τέτοιου μοντέλου και αποτελέσματα θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα πειραματικά της εργασίας (Tanimoto et al., 2001) αλλά και με τα υπολογιστικά της εργασίας (Burlyayenko, Sadowski, 2009). Το σχήμα και οι διαστάσεις του πάνελ που μελετάται δίνονται από την επόμενη εικόνα και τον επόμενο πίνακα:



Εικόνα 7.17: Μοντέλο της πλάκας sandwich με πυρήνα honeycomb της τρίτης περίπτωσης (Burlayenko, Sadowski, 2009)

Πίνακας 7.12: Διαστάσεις της πλάκας με πυρήνα honeycomb (Burlayenko, Sadowski, 2009)

Μήκος	Πλάτος	Πάχος Κελύφους	Πάχος Πυρήνα	Πάχος Κόλλας	Μήκος Πλευράς Κυψέλης	Πάχος Τείχους Κυψέλης
180 mm	130 mm	1 mm	5 mm	0.25 mm	3 mm	0.25 mm

Σε αυτή τη περίπτωση, για τα κελύφη χρησιμοποιούνται πλαστικά ενισχυμένα με ίνες άνθρακα (CFRP) ενώ για το honeycomb χρησιμοποιείται το κράμα αλουμινίου 5052. Το CFRP είναι ένα ινώδες σύνθετο υλικό οι ελαστικές ιδιότητες του οποίου προκύπτουν από τον *Κανόνα των Μιγμάτων (Rule Of Mixtures)*. Το κράμα αλουμινίου και η κόλλα παρουσιάζουν ομογενή και ισότροπη συμπεριφορά.

Για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του μοντέλου χρησιμοποιείται το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich, καθώς είναι το μόνο μοντέλο που μπορεί να συλλάβει τις ιδιαιτερότητες της κάθε στρώσης ξεχωριστά. Οι ιδιότητες του ισοδύναμου ομογενούς υλικού που αντικαθιστά το honeycomb προκύπτουν από την θεωρία των Ashby – Gibson. Οι ιδιότητες παρουσιάζονται συνοπτικά στον πίνακα 7.12.

Πίνακας 7.13: Ιδιότητες των Υλικών [21]

Materials	Properties of Materials
CFRP	$E_x = 140 \text{ GPa}, E_y = E_z = 10 \text{ GPa}, \nu_{xy} = 0.25$ $G_{xy} = 3.8 \text{ GPa}, G_{xz} = G_{yz} = 4.4 \text{ GPa}$ $\rho = 1650 \text{ kg/m}^3$
5052 Aluminium	$E = 70 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 2680 \text{ kg/m}^3$
Adhesive Resin	$E = 1.5 \text{ GPa}, G = 1.5 \text{ GPa}, \nu = 0.4, \rho = 141.31 \text{ kg/m}^3$
Equivalent Homogenous Honeycomb Material	$E_x = E_y = 0.430 \text{ MPa}, E_z = 1.493 \text{ GPa}$ $G_{xy} = 0.108 \text{ MPa}, G_{xz} = G_{yz} = 205.4 \text{ MPa}$ $\rho = 57.17 \text{ kg/m}^3$

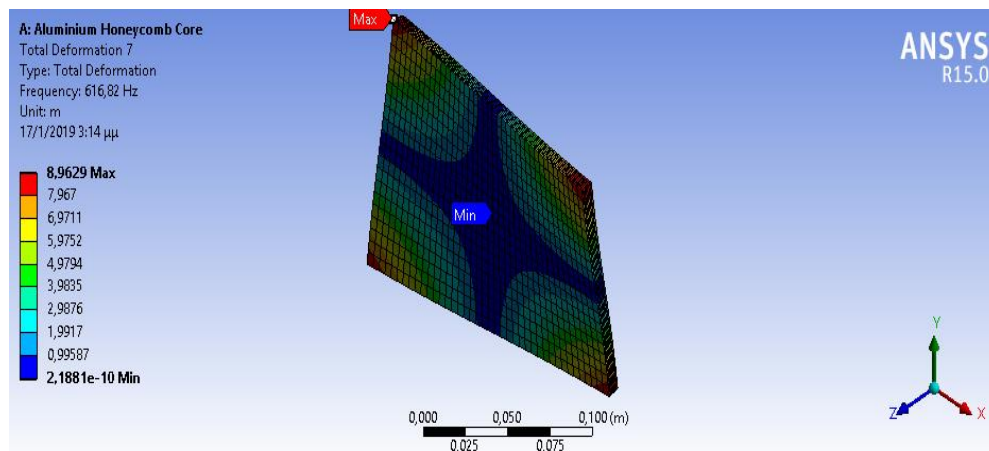
Η διαδικασία μοντελοποίησης που ακολουθήθηκε για τη δημιουργία του μοντέλου ήταν ίδια με αυτή που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 6. Χρησιμοποιήθηκαν τρισδιάστατα

στερεά πεπερασμένα στοιχεία (Solid Elements) για την διακριτοποίηση των στρώσεων. Το μοντέλο θεωρείται πως δεν έχει κάποια στήριξη, η πειραματική διάταξη επέτρεψε στο δοκίμιο την ελεύθερη χωρίς κανένα σχεδόν περιορισμό ταλαντωτική κίνηση του [19]. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα πειραματικά και τα υπολογιστικά αποτελέσματα για τις δύο πρώτες ιδιομορφές:

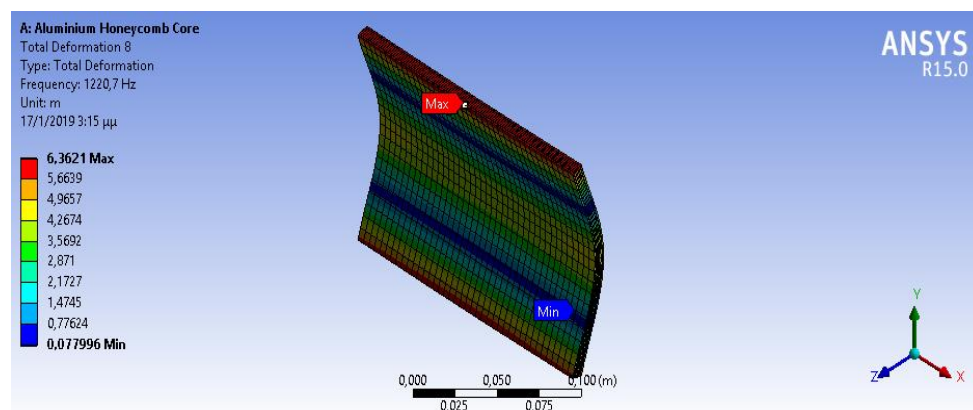
Πίνακας 7.14: Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων

<i>Mode Type</i>	<i>Experiment [Hz]</i>	<i>FEM Model [21] [Hz]</i>	<i>FEM Model [Hz]</i>
<i>Mode 1 (Torsional Mode)</i>	603.4	637.7	616.82
<i>Mode 2 (Bending Mode)</i>	1212.8	1300.1	1220.7

Για την πρώτη ιδιομορφή το σφάλμα του μοντέλου [21] είναι 5.7% και του παρόντος μοντέλου είναι 2.2% και για την δεύτερη ιδιομορφή το σφάλμα του μοντέλου [21] είναι 7.2% και του παρόντος είναι 0.7%. Η καλύτερη προσέγγιση που παρουσιάζει το παρόν μοντέλο οφείλεται στο ότι επιλέχθηκαν αποκλειστικά τρισδιάστατα στοιχεία για την διακριτοποίηση των στρώσεων ενώ οι Burlayenko και Sadowski επέλεξαν πεπερασμένα στοιχεία κελύφους για την διακριτοποίηση των στρώσεων της κόλλας και των εξωτερικών στρωμάτων. Συνέπεια αυτού, είναι η όχι και τόσο καλή προσέγγιση της παραμόρφωσης του sandwich. Στις παρακάτω εικόνες φαίνονται τα σχήματα των ιδιομορφών.



Εικόνα 7.18: Πρώτη Στρεπτική Ιδιομορφή



Εικόνα 7.19: Δεύτερη Καμπτική Ιδιομορφή

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα πως η συνεισφορά του στρώματος της κόλλας στο μοντέλο, δίνει πολύ καλά αποτελέσματα για τη δυναμική συμπεριφορά του honeycomb sandwich και μπορεί να ληφθεί υπόψιν εκεί που υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα και μετρήσεις για περισσότερη ακρίβεια.

Μελέτη της Επίδρασης της Αποκόλλησης Κελύφους στη Δυναμική Συμπεριφορά Πλάκας Τύπου Sandwich

8.1 Η αποκόλληση μεταξύ του πυρήνα και του κελύφους και εντοπισμός της μέσω των μεταβολών των δυναμικών χαρακτηριστικών

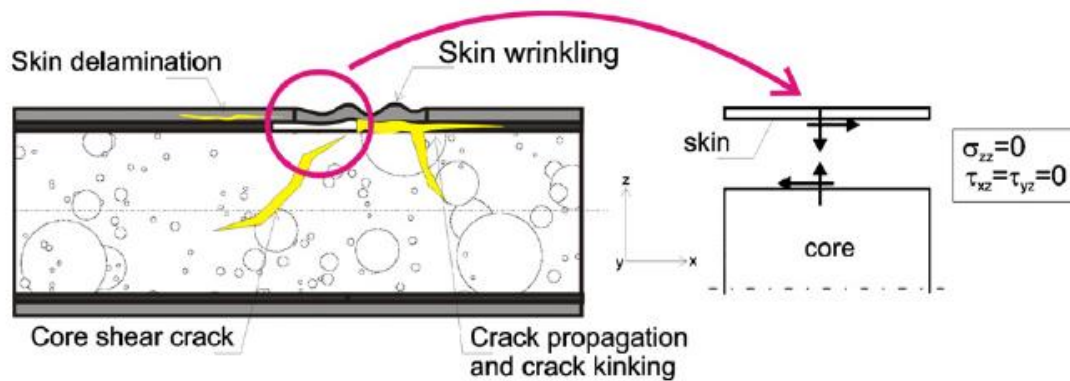
Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα της μορφικής δυναμικής απόκρισης της σύνθετης δομής sandwich με πυρήνα honeycomb. Μια τέτοια μελέτη έχει ως βασικό στόχο τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών του δομικού στοιχείου, ώστε να χρησιμοποιηθούν σε επόμενο στάδιο για τον σχεδιασμό του. Ο στόχος του σχεδιασμού ενός δομικού στοιχείου με βάση αυτά τα δυναμικά χαρακτηριστικά είναι η απομάκρυνση από τις φυσικές ιδιοσυχνότητες του ώστε να αποφευχθεί το φαινόμενο του συντονισμού που θα επιφέρει την κατάρρευση του. Ωστόσο, μια τέτοια ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποκομιστούν πληροφορίες και για άλλου είδους αναλύσεις που θα έχουν σχέση με την δυναμική συμπεριφορά του δομικού στοιχείου που περιέχει κάποιου είδους βλάβη.

Όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, οι σύνθετες δομές sandwich με πυρήνα honeycomb είναι αρκετά διαδεδομένες στις σύγχρονες κατασκευές, μόνο που περιορίζονται στα δευτερεύοντα δομικά στοιχεία και εξαρτήματα. Ο λόγος βρίσκεται στο γεγονός πως η αξιοπιστία της λειτουργίας τους εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό την ακρίβεια της παραγωγικής διαδικασίας που έχει ακολουθηθεί για την κατασκευή τους. Κατά τις παραγωγικές διαδικασίες των συνιστωσών στοιχείων, ειδικά του πυρήνα honeycomb, εμφανίζονται αρκετές ατέλειες και βλάβες, εξαιτίας της περίπλοκης δομής τους.

Οι περισσότερες βλάβες στα sandwich αυτού του είδους εμφανίζονται στη στρώση της κόλλας που συνδέει τον honeycomb πυρήνα με τα εξωτερικά κελύφη. Όπως παρουσιάστηκε στα πρώτα κεφάλαια, αφού γίνει επικάλυψη του πυρήνα με κόλλα ακολουθεί μια διαδικασία ίασης (co-curing) στον κλίβανο κάτω από κατάλληλη πίεση. Ακόμα κι αν έχει γίνει πρόοδος στον ποιοτικό έλεγχο αυτής της διαδικασίας, οι κατασκευαστικές ατέλειες κάνουν την εμφάνιση τους. Αυτές μπορεί να είναι το ανολοκλήρωτο στέγνωμα και οι παγιδευμένες φυσαλίδες στην κόλλα ρητίνης που έχουν ως συνέπεια τη μη ενιαία επικόλληση μεταξύ των κελυφών και του πυρήνα honeycomb που μπορεί να οδηγήσει στην αποκόλληση των δύο στρώσεων κατά την διάρκεια λειτουργίας του δομικού στοιχείου. Επιπροσθέτως, οι επισκευές συντήρησης πολλές φορές οδηγούν στον τοπικό διαχωρισμό των στρώσεων, λόγω της χρήσης των εργαλείων που δημιουργεί τοπικές αμυχές και βαθουλώματα στην κόλλα. Στη διάρκεια λειτουργίας της δομής μπορεί επίσης να προκληθεί και μερική υποβάθμιση της διεπιφάνειας της στρώσης και τοπικός διαχωρισμός στο πιο αδύνατο σημείο της σύνδεσης λόγω της έκθεσης της στον ήλιο, της τάσης για απορρόφηση της υγρασίας, της φόρτισης πάνω από τα επίπεδα του σχεδιασμού και των υψηλών θερμοκρασιών.

Η κατάσταση βλάβης που σχετίζεται με την ύπαρξη της τοπικής αποκόλλησης (debonding) έχει βρεθεί ότι επηρεάζει την δομική ακεραιότητα των δομών sandwich, μειώνοντας την ολική δυσκαμψία, την αντοχή τους και τα δυναμικά χαρακτηριστικά τους. Θεωρείται πως με την αποκόλληση παύει η σύνδεση των δύο στρωμάτων και η

εντατική. Ακόμα, στη κατάσταση των συνθηκών λειτουργίας η αποκόλληση μπορεί να διαδοθεί και προκαλέσει νέους τύπους βλαβών που είναι και οι χαρακτηριστικοί των δομών sandwich με πυρήνα honeycomb που είναι το ζάρωμα των κελυφών (wrinkling), η εκτεταμένη αποκόλληση του στρώματος του κελύφους (delamination) και οι διατμητικές ρωγμές του πυρήνα (core cracks) (εικόνα 8.1). Αυτοί οι τύποι μπορεί να αλληλοεπιδράσουν μεταξύ τους και να οδηγήσουν σε πρόωρη αστοχία των κατασκευών σε φορτία πολύ χαμηλότερα από τα αυτά που έχουν σχεδιαστεί να αντέξουν.



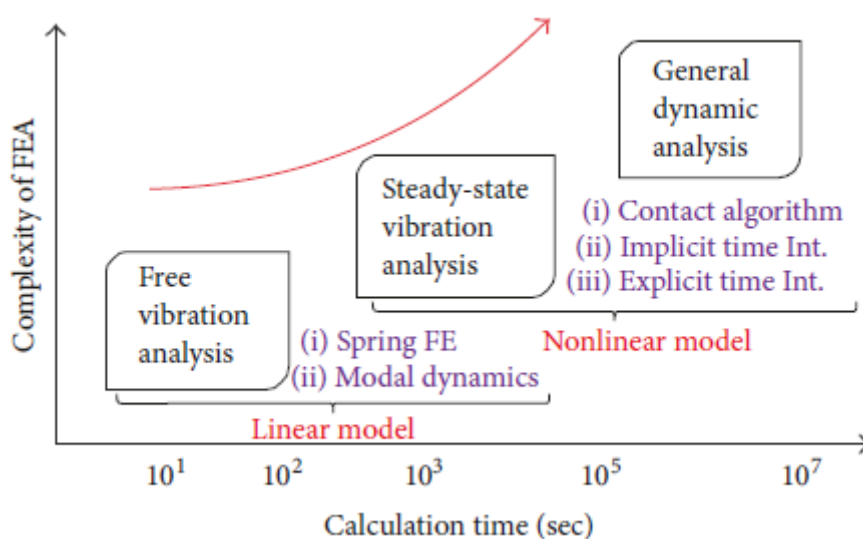
Εικόνα 8.1: Οι βλάβες σε ένα πάνελ sandwich και η εντατική κατάσταση στην περιοχή της αποκόλλησης (Burlayenko, Sadowski, 2010)

Οι περισσότερες δομές sandwich βρίσκουν χρήση σε προηγμένες κατασκευές, συνήθως αεροναυπηγικές, που απαιτούν υψηλό επίπεδο αξιοπιστίας με συνέπεια την απαίτηση του άμεσου εντοπισμού της παρουσίας της αποκόλλησης για τη διασφάλιση της ανθεκτικότητας της κατασκευής. Η πιο συχνή μεθοδολογία για την αναγνώριση της παρουσίας της αποκόλλησης είναι ο Μη Καταστροφικός Έλεγχος (Non Destructive Evaluation – NDE) με τις τεχνικές που βασίζονται στα δυναμικά χαρακτηριστικά να είναι οι πιο κοινές. Βάσει αυτών των τεχνικών κάθε κατασκευή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δυναμικό σύστημα, με τις μεταβολές των αποκρίσεων του να μπορούν να ερμηνευτούν ως ένα σήμα παρουσίας βλάβης, τον εντοπισμό και την σοβαρότητα της. Στις πιο πολλές περιπτώσεις, οι συμπεριφορές διερευνώνται μέσω πειραμάτων. Ωστόσο, για την μείωση του αριθμού τους και τον συσχετισμό τους με άλλου είδους αποτελέσματα, πραγματοποιούνται ακριβείς μοντελοποιήσεις και προσομοιώσεις των δομικών στοιχείων με αριθμητικές, κυρίως, μεθόδους. Για την ελεύθερη ταλάντωση των σύνθετων πλακών sandwich με πυρήνα honeycomb που περιέχουν αποκόλληση έχουν αναφερθεί πολυάριθμες μελέτες στη βιβλιογραφία, παρόλα αυτά, μόνο λίγες διερευνήσεις των επιδράσεων της αποκόλλησης στα ταλαντωτικά χαρακτηριστικά των πλακών sandwich έχουν διεξαχθεί.

8.2 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας

Η δυναμικές αναλύσεις των δομών με εσωτερικές ατέλειες ή βλάβες, όπως είναι οι αποκολλήσεις, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να είναι διαφορετικού είδους ανάλογα με τις συμπεριφορές των στοιχείων που χρησιμοποιούνται. Οι κατηγορίες ανάλυσης παρουσιάζονται κατά τη σειρά του υπολογιστικού κόστους και της πολυπλοκότητας της μοντελοποίησης. Στη πρώτη κατηγορία, ανήκουν οι γραμμικές αναλύσεις, που χρησιμοποιούν γραμμικά μοντέλα και περιλαμβάνουν την μελέτη των ελεύθερων ταλαντώσεων με σκοπό την εύρεση των φυσικών ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών. Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι μη γραμμικές αναλύσεις, που χρησιμοποιούν μη γραμμικά μοντέλα και κατάλληλες μεθόδους για την επίλυση τους, όπως είναι τα ρητά και άρρητα σχήματα χρονικά

ολοκλήρωσης (Κεφάλαιο 4). Σε αυτή ανήκουν οι αναλύσεις της μόνιμης – ταλαντωτικής – κατάστασης (steady state vibration analysis), όπου εξετάζεται η συμπεριφορά του sandwich υπό την άσκηση εξωτερικών αρμονικών διεγέρσεων και οι αναλύσεις της γενικότερης δυναμικής συμπεριφοράς (general dynamic analysis), όπως είναι τα φαινόμενα κρούσης. Στην εικόνα 8.2, παρουσιάζει το διάγραμμα ροής που συνοψίζει τις προαναφερθείσες κατηγορίες. Οι προσομοιώσεις των μοντέλων με βλάβη συνοδεύονται, συνήθως, με τις προσομοιώσεις των «υγείων» μοντέλων, ώστε να εντοπιστούν οι διαφορές μεταξύ των δυναμικών αποκρίσεων και να εκτιμηθεί η επίδραση της αποκόλλησης στη γραμμική και μη γραμμική δυναμική συμπεριφορά των πάνελ sandwich. Επιπροσθέτως, κάνοντας σύγκριση ακόμα και μεταξύ των γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων για το ίδιο πάνελ sandwich, μπορεί να αποκαλυφθεί η επίδραση του διαφορετικού είδους στοιχείων κατά την μοντελοποίηση και προσομοίωση της αποκόλλησης.



Εικόνα 8.2: Διάγραμμα ροής των κατηγοριών μοντελοποίησης της δυναμικής ανάλυσης των πάνελ με βλάβη (Burlayenko, Sadowski, 2018)

Στη παρούσα εργασία, πραγματοποιείται μορφική δυναμική ανάλυση, του πάνελ sandwich με αποκόλληση, ώστε να αποκομιστούν πληροφορίες για την αποκόλληση μέσω των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών τους. Συνεπώς, η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γίνεται για αυτού του είδους της γραμμικής μοντελοποίησης.

Η πρώτη μελέτη προσομοίωσης δομών sandwich με αποκόλληση έγινε από τους (Ramkumar et al., 1979). Το μοντέλο τους αγνοούσε την σύζευξη των καμπτικών και εφελκυστικών ιδιομορφών που εισάγεται από την αποκόλληση στις φυσικές συχνότητες των δομών με αποκόλληση και τα αποτελέσματα του εμφάνισαν σημαντικές αποκλίσεις από τα πειραματικά δεδομένα που βασίστηκαν. Ακολούθησε, το βελτιωμένο «ελεύθερο μοντέλο» (free model) των (Wang et al., 1982) που κατάφερε καλύτερη συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα των συχνοτήτων, αλλά περιείχε από φυσικής άποψης, μη ρεαλιστικές αλληλοεπικαλύψεις (physical unreal overlapping), δηλαδή εμφανιζόντουσαν αλληλοδιεισδύσεις μεταξύ των στερεών επιφανειών του μοντέλου. Οι αλληλοδιεισδύσεις απαλείφθηκαν με το μοντέλο των περιορισμένων ιδιομορφών (constrained mode model) των (Majumdar, Suryanarayana, 1988) που αργότερα υιοθετήθηκε από τους (Tracy, Pardoan, 1989). Παρόλα αυτά, αυτό το μοντέλο αποκλείει κάποιες συζευγμένες ιδιομορφές που εμφανίστηκαν με την πειραματική και υπολογιστική μοντελοποίηση των πάνελ. Στα προηγούμενα μοντέλα το μέγεθος της αποκόλλησης ήταν σχετικά μεγάλο και δεν αντιστοιχούσε με το μέγεθος των αποκολλήσεων που είχαν εντοπιστεί από πειράματα. Οι (Tenek et al., 1993) έκαναν τις απαραίτητες διορθώσεις όσο αφορά το

μέγεθος της αποκόλλησης, που το υπέθεσαν πολύ μικρό ανάμεσα στις στρώσεις του sandwich.

Με βάση τα παραπάνω μοντέλα οι (Ju et al., 1995) πραγματοποίησε μια ανάλυση του πάνελ με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε συνδυασμό με αναλυτικά μοντέλα βασιζόμενος στη θεωρία πλάκας του Mindlin για να αναλύσει την επίδραση της αποκόλλησης στην ελεύθερη ταλάντωση των σύνθετων πλακών. Βρέθηκε ότι η επίδραση της αποκόλλησης στις φυσικές συχνότητες είναι εξαρτημένη από τις ιδιομορφές (mode dependent) και σε μερικές περιπτώσεις η αποκόλληση έχει σημαντική επίδραση στις φυσικές συχνότητες του πάνελ sandwich, ακόμα κι αν τα σχήματα των ιδιομορφών της πλάκας δεν επηρεάζονται σημαντικά από την αποκόλληση. Σε αυτό το μοντέλο πάρθηκαν για πρώτη φορά υπόψη και οι εγκάρσιες διατμητικές τάσεις. Την επίδραση της τοπικής πύκνωσης του υλικού κατά την ταλαντωτική απόκριση του πάνελ sandwich μελετήθηκε από τους (Hou, Jeronimidis, 1999), κυρίως πειραματικά αλλά και υπολογιστικά. Έδειξαν ότι αυτή η επίδραση αυτού του φαινομένου, γίνεται πιο έντονη με την αύξηση της περιοχής της αποκόλλησης σε αυτές τις πλάκες. Ακόμα, έδειξαν ότι αποκολλημένη αστήρικτη περιοχή είναι επαρκώς εύκαμπτη σε κάμψη και μπορεί να επιτρέψει μια αύξηση στον τοπικό διαχωρισμό των στρώσεων με την αύξηση της δυσκαμψίας της πλάκας ως σύνολο, παρόλη την τοπική μείωση των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού με βλάβη. Οι (Kim, Chattopadhyay, Ghoshal, 2003) χρησιμοποίησαν το διαστρωματικό μοντέλο για την μελέτη των σύνθετων πλακών με ενσωματωμένες πολλαπλές αποκολλήσεις. Ο (Krueger, 1999) χρησιμοποίησε στοιχεία κελύφους για την μοντελοποίηση των κελυφών των πάνελ τα οποία είχαν τέσσερις κόμβους και συναρτήσεις μορφής τετραγωνικής παρεμβολής. Η πιο πρόσφατη καινοτομία για την μοντελοποίηση και προσομοίωση της μορφικής δυναμικής συμπεριφοράς των δομών sandwich, προέρχεται από τους (Yam et al., 2004), που χρησιμοποίησαν εικονικά/τεχνητά γραμμικά στοιχεία ελατηρίου για να προσομοιώσουν την αλληλεπίδραση εντός της διεπιφάνειας μεταξύ της άνω και κάτω στρώσης της περιοχής αποκόλλησης στα πολυστρωματικά σύνθετα υλικά. Τέλος, οι (Burlayenko, Sadowski, 2010) χρησιμοποίησαν αυτή την τεχνική για τη μελέτη ενός πάνελ sandwich με πυρήνα honeycomb και πυρήνα αφρού, ως συνέχεια της μελέτης τους για την δυναμική συμπεριφορά των πάνελ sandwich με διάφορα είδη κυψελοειδούς πυρήνα.

8.3 Μοντελοποίηση της ατέλειας

Το μοντέλο για το πάνελ με την αποκόλληση που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία βασίζεται στα μοντέλα των εργασιών των (Yam et al., 2004) και των (Burlayenko, Sadowski, 2010). Αυτά προέκυψαν από μια σύνθεση των καλύτερων χαρακτηριστικών των μοντέλων της βιβλιογραφίας, ώστε να γίνει μια ρεαλιστική προσέγγιση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των επιφανειών των δύο στρωμάτων στην περιοχή της αποκόλλησης, κατά την δυναμική συμπεριφορά του πάνελ sandwich.

8.3.1 Παραδοχές του Μοντέλου

Για τη μοντελοποίηση του sandwich με την αποκόλληση πρέπει να γίνουν κάποιες βασικές παραδοχές για την συμπεριφορά της βλάβης κατά την ταλαντωτική συμπεριφορά. Αυτές είναι:

- Η αποκόλληση θεωρείται ως ένα **κενό** (void) μεταξύ των στρωμάτων του κελύφους και του πυρήνα, που βρίσκεται στο στρώμα της κόλλας. Το σχήμα της περιοχής αυτής είναι εξιδανικευμένο και θεωρείται ως ένα βαθούλωμα εντός της κόλλας.
- Η αλληλεπίδραση των επιφανειών στη περιοχή της αποκόλλησης περιγράφεται μηχανικά με την θεώρηση την εισαγωγή στην προσομοίωση **ΕΙΚΟΝΙΚΩΝ**

ελατηρίων (virtual/artificial springs). Επιπλέον, η παρουσία των ελατηρίων αυτών αποτρέπει την ενδεχόμενη *μη ρεαλιστική αλληλοδιείσδυση* (physical unreal overlapping) των επιφανειών κατά την διαδικασία της υπολογιστικής προσομοίωσης.

- Οι διαστάσεις και το πάχος της αποκόλλησης θεωρούνται αρχικά **προκαθορισμένα** και παραμένουν σταθερά κατά την διάρκεια των ταλαντώσεων.
- Η περίπλοκη γεωμετρία της ζώνης αποκόλλησης θεωρείται **κυκλική, τετραγωνική** ή ως **λωρίδα κατά το πλάτος της πλάκας**.
- Ο πυρήνας και οι στρώσεις του sandwich **δεν** περιέχουν βλάβη. Ο πυρήνας honeycomb θεωρείται ως ένα ισοδύναμο ορθότροπο και ομογενές υλικό, οι ιδιότητες του οποίου προκύπτουν από την θεωρία των Ashby – Gibson.

8.3.2 Επιλογή του Τύπου των Πεπερασμένων Στοιχείων

Ο τύπος πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο για την διακριτοποίηση των στρώσεων του sandwich στο ANSYS είναι τα τρισδιάστατα στερεά στοιχεία (3D Solid Elements), τα ίδια που χρησιμοποιήθηκαν και για την ανάλυση της ανέπαφης πλάκας sandwich. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το SOLID186 τα χαρακτηριστικά του οποίου περιγράφονται στη παράγραφο 6.4.4.

Η επιλογή για την ολική διακριτοποίηση του μοντέλου με στερεά στοιχεία, βασίστηκε στις μελέτες των εργασιών των (Burlayenko, Altenbach, Sadowski, 2015) και (Burlayenko, Sadowski, 2010). Στην πρώτη εργασία βρέθηκε ότι η καλύτερη συμπεριφορά των δομών sandwich και γενικά των πολύστρωτων δομών την δίνουν διακριτοποιήσεις με αυτά τα στοιχεία λόγω της ακρίβειας της προσέγγισης της κίνησης των στρώσεων με τους τρεις βαθμούς ελευθερίας. Στη δεύτερη εργασία, επιχειρήθηκε η διακριτοποίηση των στρώσεων των κελυφών και της κόλλας, με στοιχεία κελύφους που είχε ως συνέπεια τη σχετικά μεγάλη απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα, ενώ, η προσέγγιση που επιχειρήθηκε στην αντίστοιχη ανάλυση της παρούσας εργασίας παρουσίασε πολύ καλό συσχετισμό με τα ίδια πειραματικά αποτελέσματα.

Το μειονέκτημα αυτών των στοιχείων είναι το σχετικά μεγάλο υπολογιστικό κόστος τους και η ανάγκη για σχετικά υψηλή υπολογιστική ισχύς τόσο από πλευρά του μεγέθους της μνήμης, όσο και από την ταχύτητα του επεξεργαστή του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

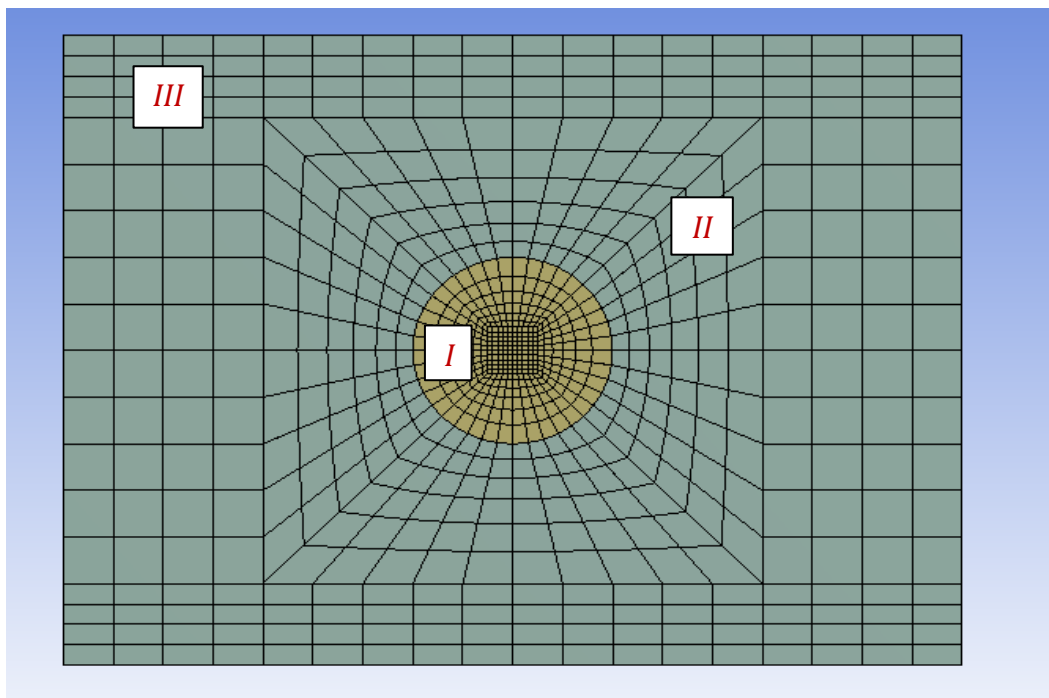
8.3.3 Διακριτοποίηση

Οι διαστάσεις της δομής και οι ιδιότητες των συνιστωσών υλικών δίνονται από τους πίνακες 7.12 και 7.13, αντίστοιχα. Για να γίνει καλύτερη προσέγγιση της δυναμικής συμπεριφοράς του sandwich, χωρίς να είναι υπολογιστικά εξαιρετικά δαπανηρή, πρέπει να γίνει μια κατάλληλη διακριτοποίηση του πάνελ. Μια τέτοια θα μπορούσε να θεωρήσει το δομημένο πλέγμα που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 6.4.3, για τον πυρήνα και για τις στρώσεις της κόλλας και του κελύφους, ενώ, για τις στρώσεις του εξωτερικού κελύφους και της κόλλας που εμπεριέχουν την αποκόλληση θα χρησιμοποιούνταν ένα πιο εκλεπτυσμένο πλέγμα.

Το πλέγμα αυτό θα αποτελείται από τρεις περιοχές:

- Τη πυκνή περιοχή (**Περιοχή I**) με το κατάλληλο πλέγμα για την διακριτοποίηση της περιοχής της αποκόλλησης.
- Τη περιοχή που περιβάλλει τη περιοχή της αποκόλλησης (**Περιοχή II**) με βαθμιαία πιο αραιό πλέγμα.
- Την αραιή περιοχή (**Περιοχή III**) που περιβάλλει τις άλλες δύο και βρίσκεται η πιο αραιή διακριτοποίηση.

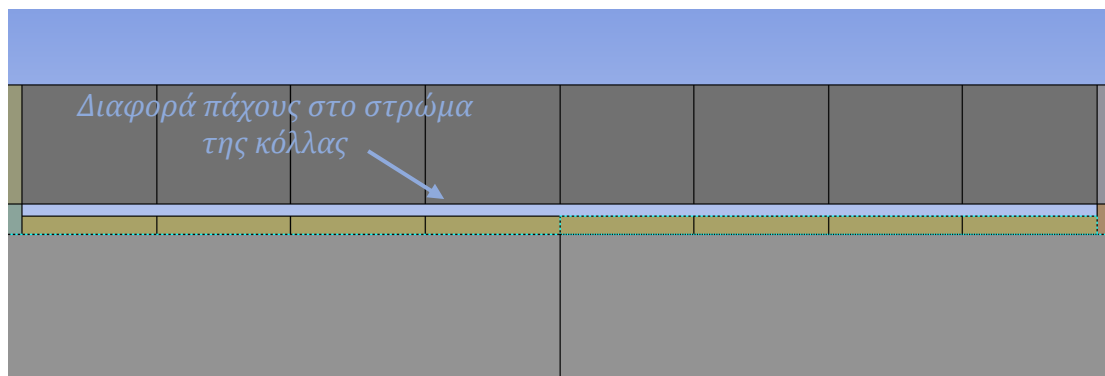
Στην εικόνα 8.3 παρουσιάζεται το πλέγμα για την πλάκα sandwich για την περιοχή της αποκόλλησης με κυκλικό σχήμα. Το πλέγμα ακολουθείται για το κέλυφος αλλά και την στρώση κόλλας με την οποία συνδέεται.



Εικόνα 8.3: Οι περιοχές της διακριτοποίησης της πλάκας του sandwich στα στρώματα του κελύφους και της κόλλας που εμπεριέχουν την ατέλεια (αποκόλληση)

8.3.4 Η Περιοχή της Ατέλειας και τα Στοιχεία Ελατηρίου

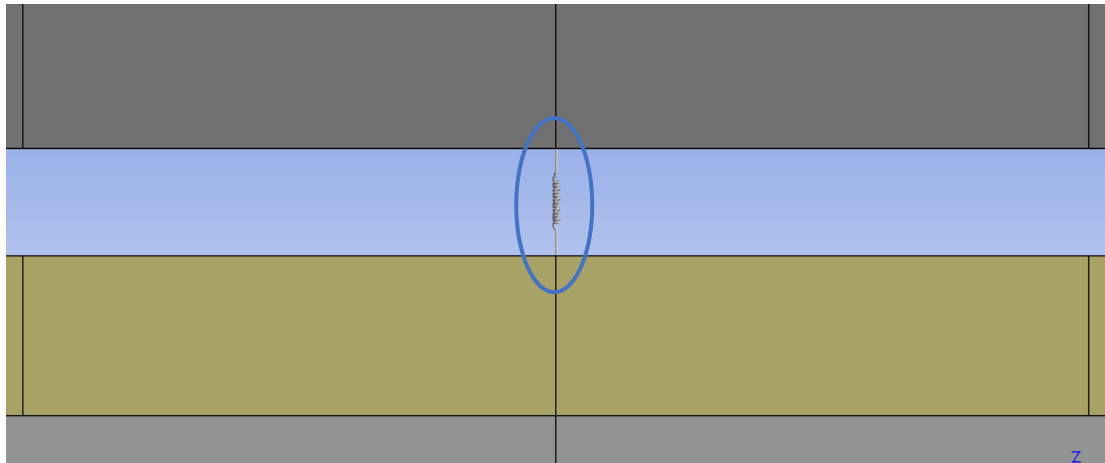
Όπως αναφέρθηκε και στις παραδοχές, η έλλειψη της καλής σύνδεσης με κόλλα, θεωρείται ως ένα κενό ή βαθούλωμα που βρίσκεται στην στρώση της κόλλας και έχει ένα εξιδανικευμένο σχήμα. Το πάχος του κενού αυτού εντός της κόλλας θεωρείται ως το 10% περίπου του πάχους του κελύφους, δηλαδή περίπου 1mm. Η διαφορά πάχους σημειώνεται στο σχήμα 8.4, όπου παρουσιάζεται η διαφορά πάχους στο στρώμα της κόλλας μεταξύ της περιοχής όπου υπάρχει καλή σύνδεση και της περιοχής της αποκόλλησης.



Εικόνα 8.4: Η πλάγια όψη στην περιοχή της αποκόλλησης που δείχνει την διαφορά πάχους στο στρώμα της κόλλας, μεταξύ της περιοχής καλής σύνδεσης και της περιοχής αποκόλλησης

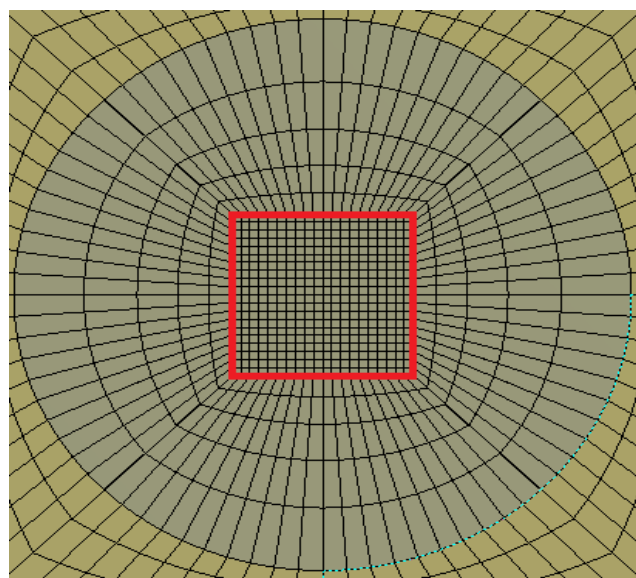
Για την αποτροπή της αλληλοδιείσδυσης των επιφανειών του κελύφους και της κόλλας, αλλά και για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης του ανοίγματος και του κλεισίματος της περιοχής της αποκόλλησης κατά την ταλαντωτική κατάσταση, χρησιμοποιούνται **τριδιάστατα στοιχεία ελατηρίου** για την σύνδεση των απέναντι επιφανειών στην περιοχή της ατέλειας. Η συμπεριφορά των ελατηρίων είναι **γραμμική ελαστική** με την σταθερά δυσκαμψίας του να παίρνει τέτοια αυθαίρετη τιμή ώστε να μην επιτρέψει την ενδοτικότητα τους έως το σημείο της διείσδυσης των επιφανειών.

Κατά τη μοντελοποίηση δεν λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα τριβής και απόσβεσης, καθώς σύμφωνα με την εργασία των (Kwon, Lannamann, 2002), η επίδραση τους κατά την δυναμική συμπεριφορά των δομών sandwich με αποκόλληση είναι τόσο μικρή ώστε να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

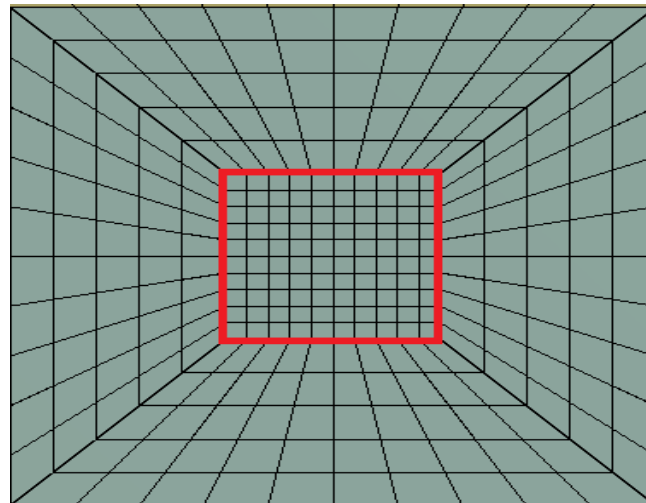


Εικόνα 8.5: Τα ελατήρια στην περιοχή της αποκόλλησης. Για την εμφάνισή τους πρέπει να γίνει πολύ μεγάλη εστίαση

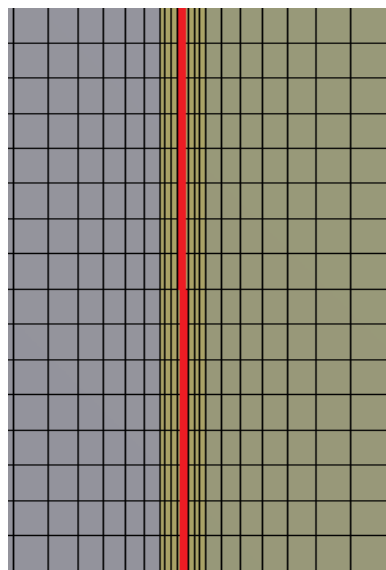
Τα ελατήρια τοποθετούνται σε συγκεκριμένες θέσεις ώστε να επιτρέψουν την ομοιόμορφη αλληλεπίδραση και παραμόρφωση στην περιοχή της αποκόλλησης. Οι θέσεις των ελατηρίων δίνονται στα επόμενα σχήματα.



(a)



(b)

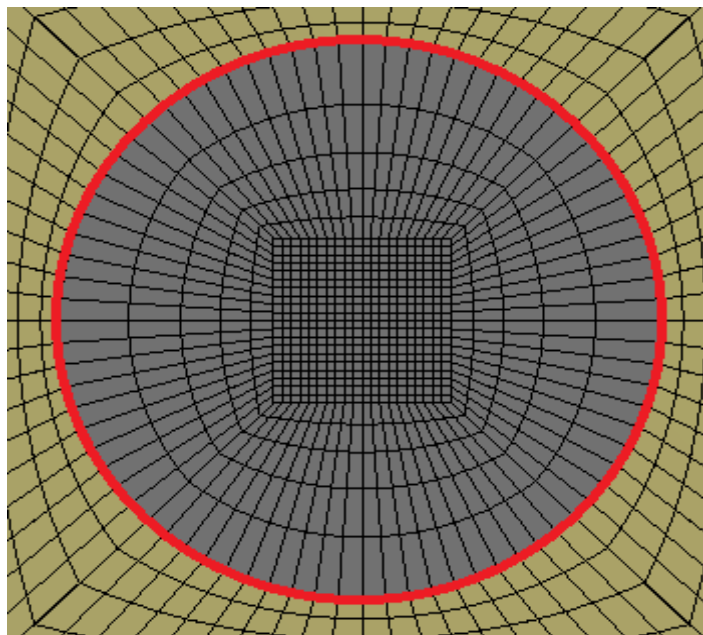


(c)

Εικόνες 8.6: Τοποθέτηση των ελατηρίων στην (a) κυκλικής, (b) τετραγωνικής και (c) κατά το πλάτος της πλάκας ζώνης.

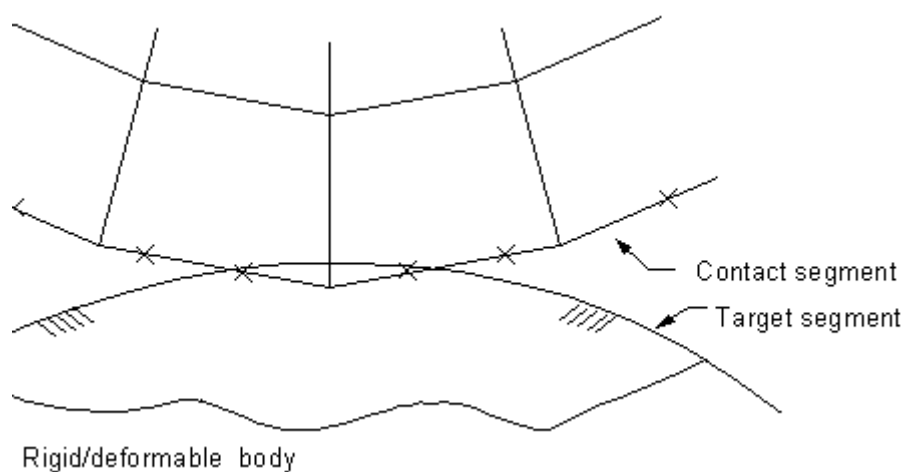
8.3.5 Μεταβολή των συνθηκών σύνδεσης μεταξύ της υγιούς περιοχής της του κελύφους και της περιοχής αποκόλλησης

Η ασυνέχεια της συμπεριφοράς μεταξύ της υγιούς περιοχής του κελύφους και της περιοχής που περιέχει την αποκόλληση μοντελοποιείται μέσω της αλλαγής των συνθηκών σύνδεσης τους. Η συνθήκες σύνδεσης σε αυτή τη περίπτωση πρέπει να είναι τέτοιες που θα επιτρέψουν ένα μικρό ποσοστό διείσδυσης μεταξύ των περιοχών αυτών, που είναι μεν φυσικά μη συνεπείς αλλά είναι τόσο μικρές που πρακτικά θεωρούνται αμελητέες. Η εικόνα 8.7 παρουσιάζει την συνοριακή περιοχή στην οποία γίνεται αλλαγή των συνοριακών συνθηκών.



Εικόνα 8.7: Συνοριακή περιοχή όπου γίνεται αλλαγή στις συνθήκες σύνδεσης

Οι αλλαγές στις συνθήκες γίνονται μέσω της αλλαγής του μεγέθους που ορίζει την ισχυρή σύνδεση της περιοχής σύνδεσης, που είναι το μέγεθος του *Normal Stiffness Factor*. Το μέγεθος αυτό ουσιαστικά είναι συντελεστής επιβάρυνσης (penalty factor), που μεταβάλλοντας τις τιμές του μπορεί να μεταβάλλει την ενδοτικότητα μεταξύ των συνοριακών επιφανειών. Κατά την επαφή δύο επιφανειών στο ANSYS θεωρείται πως αυτές αλληλεπιδρούν με την βοήθεια ελατηρίων οι σταθερές των οποίων καθορίζουν τα επίπεδα διείδυσης. Το επόμενο σχήμα περιγράφει με χαρακτηριστικό τρόπο αυτή τη συμπεριφορά.



Εικόνα 8.8: Η μοντελοποίηση της επαφής δύο σωμάτων στο ANSYS

Η αλλαγή αυτού μεγέθους γίνεται στο περιβάλλον Connections όπου ορίζεται η τιμή στο κελί του *Normal Stiffness Factor*. Η τιμή λαμβάνεται μικρή και ίση με 0.001 και προέκυψε από τη μελέτη σύγκλισης μεταξύ των αποτελεσμάτων για διάφορους συντελεστές. Να σημειωθεί πως στο σχήμα παρουσιάζεται η κατάσταση της σύνδεσης μεταξύ των δύο επιφανειών (*Bonded*) και της μεθόδου επιβολής των συνθηκών τους (*Pure Penalty*).

Definition	
Type	Bonded
Scope Mode	Automatic
Behavior	Program Controlled
Trim Contact	Program Controlled
Trim Tolerance	5,628e-004 m
Suppressed	No
Advanced	
Formulation	Pure Penalty
Detection Method	Program Controlled
Penetration Tolerance	Program Controlled
Elastic Slip Tolerance	Program Controlled
Normal Stiffness	Manual
Normal Stiffness Factor	1,e-003
Update Stiffness	Program Controlled
Pinball Region	Program Controlled

Εικόνα 8.9: Η παραμετρική αλλαγή των συνθηκών επαφής

Αποτελέσματα της Δυναμικής Συμπεριφοράς των Sandwich με Αποκόλληση

9.1 Εισαγωγή

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων παρέχουν μια ικανοποιητική πρόβλεψη για την κατανόηση της συμπεριφοράς της ελεύθερης ταλάντωσης των πλακών sandwich με πυρήνα honeycomb με αποκόλληση στη διεπιφάνεια του κελύφους και του πυρήνα. Η προσομοίωση της συμπεριφοράς διεξάγεται στο περιβάλλον του ANSYS, όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος Lanczos για τη επίλυση των δυναμικών εξισώσεων. Οι επιδράσεις της παρουσίας της αποκόλλησης μεταξύ των στρωμάτων στα δυναμικά χαρακτηριστικά της πλάκας, αξιολογούνται μέσω της σύγκρισης των δυναμικών αποκρίσεων μεταξύ μιας «υγιούς» πλάκας sandwich και των πλακών που περιέχουν τη ζώνη αποκόλλησης. Η μελέτη της συμπεριφοράς των sandwich γίνεται για πλάκες με διαφορετικά ιδεατά σχήματα για την περιοχή της αποκόλλησης, για διαφορετικό μέγεθος (έκτασης) της περιοχής της ατέλειας και για διαφορετικές συνοριακές συνθήκες.

9.2 Αποτελέσματα για την Συμπεριφορά της «Υγιούς» Πλάκας Sandwich

Αρχικά, γίνεται η μελέτη της υγιούς πλάκας sandwich ώστε τα αποτελέσματα της να συγκριθούν με τα αντίστοιχα της πλάκας με την αποκόλληση. Τα αποτελέσματα που ενδιαφέρουν είναι οι φυσικές συχνότητες και οι διαφορές που θα παρουσιαστούν μεταξύ τους θα θεωρηθούν ως ένδειξη (σήμα) βλάβης της δομής. Η προσομοίωση της πλάκας αυτής γίνεται ακόμα και για να βρεθεί το μέγεθος της διακριτοποίησης στο οποίο παρουσιάζεται σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Η πλάκα που μοντελοποιείται και προσομοιώνεται είναι ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε στη τρίτη περίπτωση μελέτης του Κεφαλαίου 7, οι διαστάσεις και τα υλικά των συνιστωσών στοιχείων της οποίας δίνονται από τους πίνακες 7.12 και 7.13. Αξίζει να σημειωθεί πως σε αυτή τη πλάκα τα κελύφη αποτελούνται από ενισχυμένο με ίνες σύνθετο υλικό (CFRP), οι οποίες ήταν προσανατολισμένες κατά την διαμήκη διεύθυνση της πλάκας και ο πυρήνας honeycomb είναι φτιαγμένος από το κράμα αλουμινίου 5052. Ο πυρήνας με τα κελύφη είναι συνδεδεμένος με κόλλα εποξικής ρητίνης. Οι ισοδύναμες ιδιότητες των υλικών δίνονται από τον Κανόνα των Μιγμάτων για την περίπτωση του ινώδους σύνθετου υλικού και από την θεωρία των Ashby – Gibson για την περίπτωση του honeycomb.

Στο Κεφάλαιο 7, ενδιέφερε κατά πόσο η συμπεριφορά του μοντέλου που θα περιλάμβανε τη στρώση της κόλλας θα συμφωνούσε με τα πειραματικά αποτελέσματα. Το μοντέλο θεωρήθηκε ελεύθερο στηρίξεων (perfect free boundary conditions) κατά την ελεύθερα ταλαντωτική συμπεριφορά του και τα πειραματικά δεδομένα αφορούσαν την πρώτη στρεπτική και καμπτική ιδιομορφή της πλάκας sandwich. Παρουσιάστηκε πολύ μικρή απόκλιση μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων δείχνοντας πως η κατάλληλη θεώρηση της στρώσης της κόλλας μπορεί να ενισχύσει την ακρίβεια της ανάλυσης. Η σύγκριση έγινε για τις δύο πρώτες ιδιοσυχνότητες της πλάκας. Ακολουθεί ο πίνακας που παρουσιάζει τα διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα

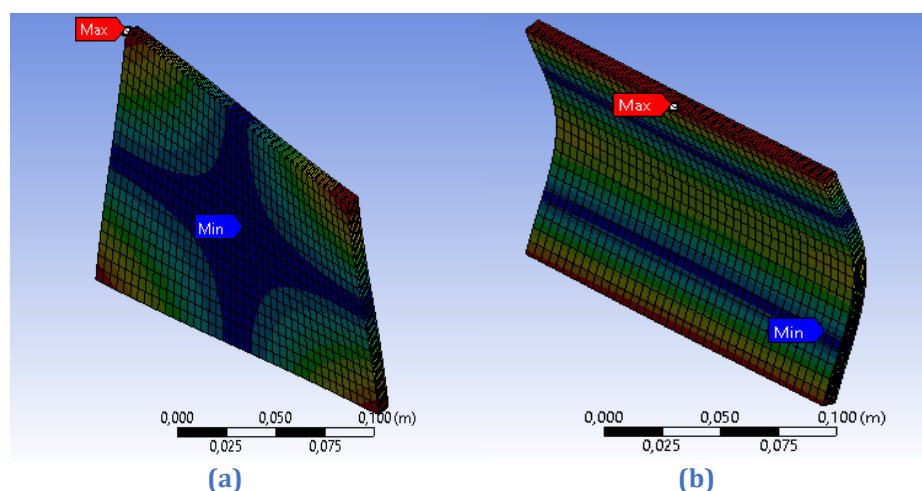
(Tanimoto, 2001) και τα αριθμητικά αποτελέσματα από την παρούσα μοντελοποίηση και από την προσομοίωση της εργασίας (Burlayenko, Sadowski, 2009).

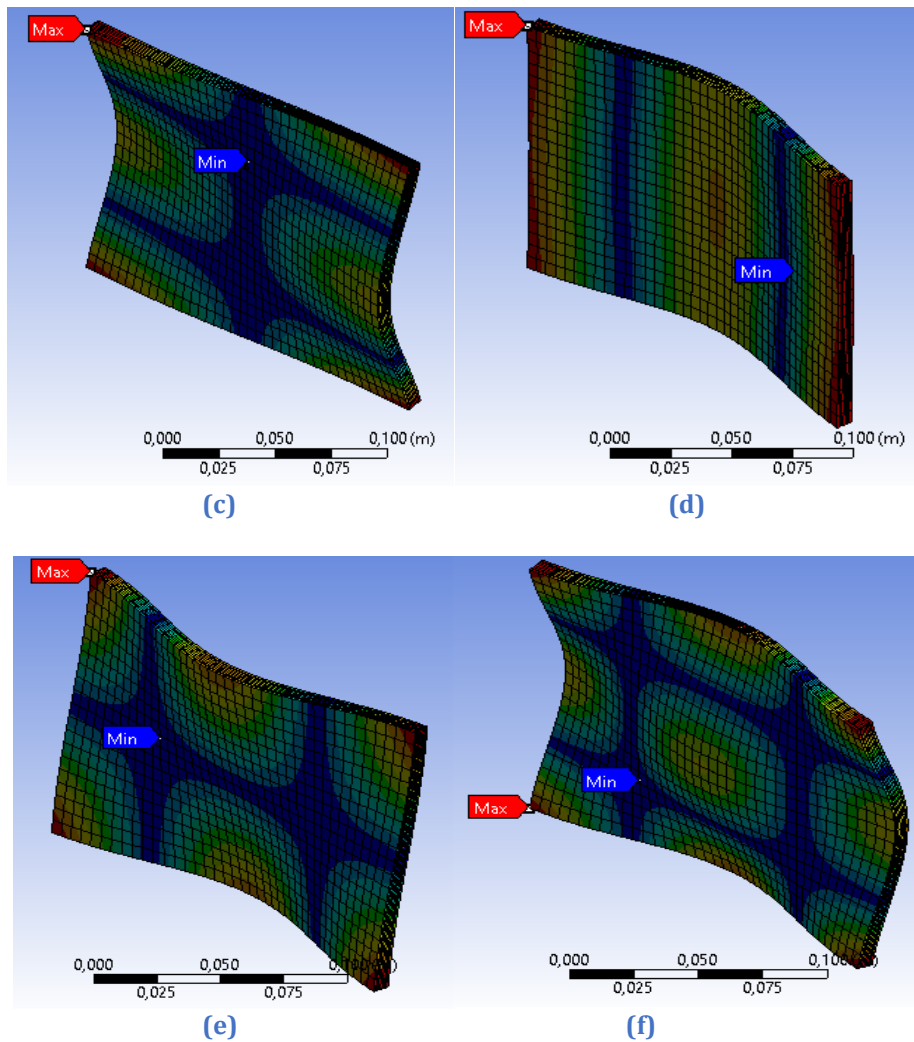
Πίνακας 9.1: Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων για τις πρώτες έξι ιδιοσυχνότητες

<i>Frequency</i>	<i>Experimental Results [Hz] [23]</i>	<i>FEM Results [Hz] [21]</i>	<i>FEM Results [Hz]</i>
f_1	603.4	637.7	616.82
f_2	1212.8	1300.1	1220.7
f_3	-	1803.0	1514.4
f_4	-	2449.6	1565.3
f_5	-	2675.6	1724.0
f_6	-	3244.4	2278.8

Όπως παρουσιάζονται στον πίνακα τα αριθμητικά αποτελέσματα της παρούσας ανάλυσης είναι μικρότερα από τα αποτελέσματα της εργασίας των (Burlayenko, Sadowski, 2009) και παρουσιάζουν πολύ μικρό σφάλμα με τα αντίστοιχα πειραματικά διαθέσιμα δεδομένα, της τάξης του 2.2% και του 0.7%, για την πρώτη και δεύτερη ιδιοσυχνότητα αντίστοιχα. Αυτό οφείλεται στη διακριτοποίηση με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία που λαμβάνουν καλύτερα υπόψη την κινηματική των στρώσεων και διασφαλίζουν την ορθή σύνδεση των κόμβων των στοιχείων στις συνοριακές επιφάνειες μεταξύ των στρώσεων. Αυτή η συναρμογή επιτρέπει μια ρεαλιστικότερη προσέγγιση της κίνησης της πλάκας, που έχει ως συνέπεια συντηρητικότερα αποτελέσματα, κάτι που είναι ευνοϊκό για τον σχεδιασμό του δομικού στοιχείου, επειδή κινείται προς την πλευρά της ασφάλειας όσον αφορά του συντελεστή ασφαλείας και τις διαστάσεις που θα προέλθουν από αυτόν.

Στις επόμενες εικόνες παρουσιάζονται τα σχήματα των ιδιομορφών όπως προκύπτουν από την προσομοίωση για τις πρώτες έξι ιδιοσυχνότητες, που τα αποτελέσματα τους παρουσιάζονται στον πίνακα 9.1.





Εικόνες 9.1: Οι έξι πρώτες ιδιομορφές της ανέπαφης πλάκας sandwich που εμφανίζονται στις ιδιοσυχνότητες: (a) 616.82 Hz, (b) 1220.7Hz, (c) 1514.4 Hz, (d) 1565.3 Hz, (e) 1724.0 Hz και (f) 2278.8 Hz

9.3 Η Επίδραση του Μεγέθους της Αποκόλλησης

Από τις στατικές μελέτες για την συμπεριφορά των πάνελ sandwich γνωστό πως το μέγεθος της περιοχής αποκόλλησης επηρεάζει το ποσοστό του φορτίου που μεταφέρεται μέσω της περιοχής της ατέλειας, με συνέπεια η περιοχή της αποκόλλησης να καθορίζει σε μεγάλο βαθμό το τελικό τύπο αστοχίας. Για να εξεταστεί η ευαισθησία αυτού του φαινομένου κατά την δυναμική συμπεριφορά της πλάκας sandwich με πυρήνα honeycomb, μπορεί να πραγματοποιηθεί μια παραμετρική ανάλυση για ένα εύρος μεγεθών ατέλειας. Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του πάνελ sandwich που περιέχει μια κυκλική περιοχή στο κέντρο του άνω κελύφους ως αναπαράσταση της αποκόλλησης. Το επίπεδο μέγεθος της προκαθορισμένης αποκόλλησης ορίζεται από μια παράμετρο βλάβης $D\%$ που δηλώνει το λόγο του εμβαδού της περιοχής αποκόλλησης A_d προς το ολικό εμβαδόν της επιφάνειας του κελύφους A_{total} στο επίπεδο που ορίζεται από την εξωτερική επιφάνεια του άνω κελύφους:

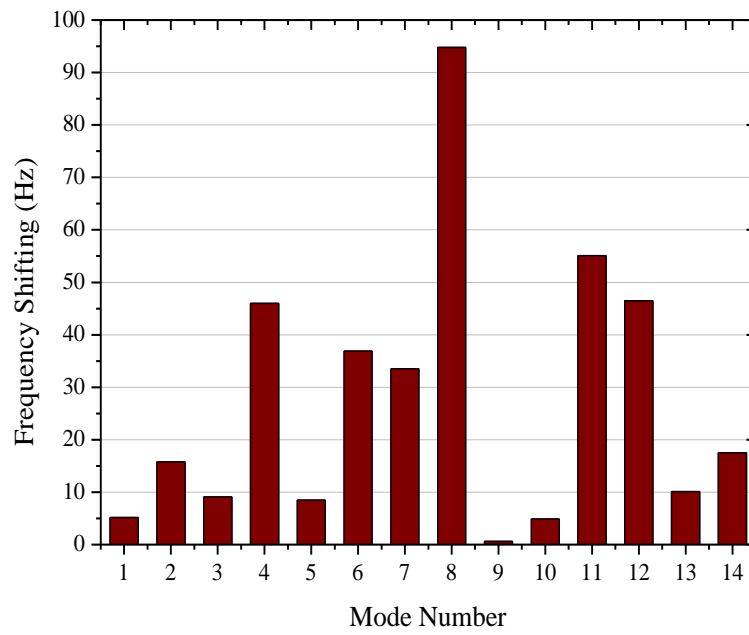
$$D\% = \frac{A_d}{A_{total}} 100\% \quad (9.1)$$

Για κάθε μέγεθος βλάβης κατασκευάζονται τα αντίστοιχα μοντέλα και τα αποτελέσματα για τις ιδιοσυχνότητες τους συγκρίνονται με αυτά του μοντέλου χωρίς βλάβη. Από τη σύγκριση και την διαφορά τους μπορεί να βγουν συμπεράσματα για το μέγεθος της

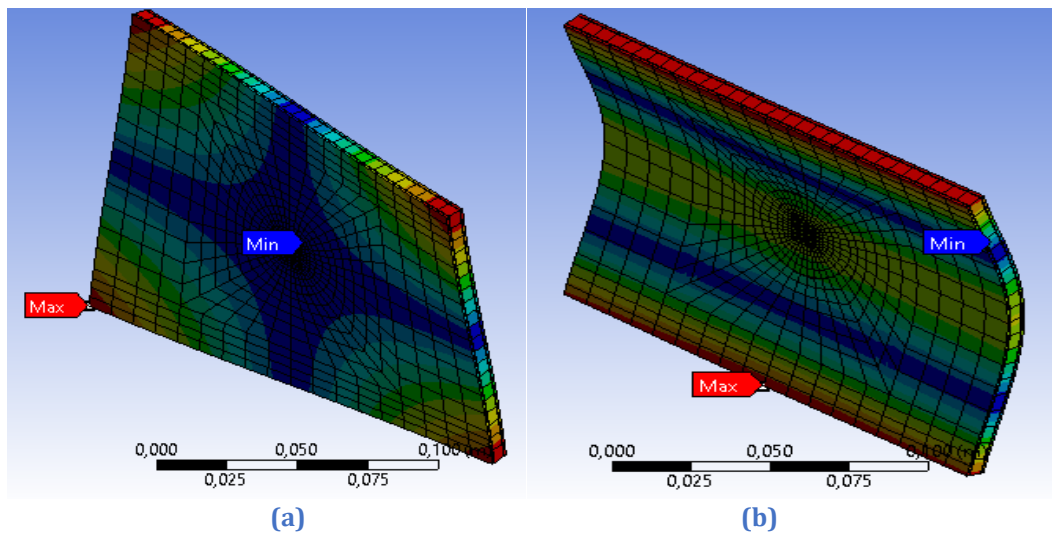
βλάβης. Στον πίνακα 9.2 και στο σχήμα 9.2, παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των φυσικών συχνοτήτων για την «υγιή» πλάκα και την πλάκα με βλάβη μεγέθους 5% που αντιστοιχεί σε κυκλική περιοχή αποκόλλησης με ακτίνα 20 mm, καθώς και οι απόλυτες τιμές των διαφορών τους (shifting). Παρουσιάζονται ακόμα οι πρώτες έξι ιδιομορφές του πάνελ sandwich που προκύπτουν από την προσομοίωση στο ANSYS.

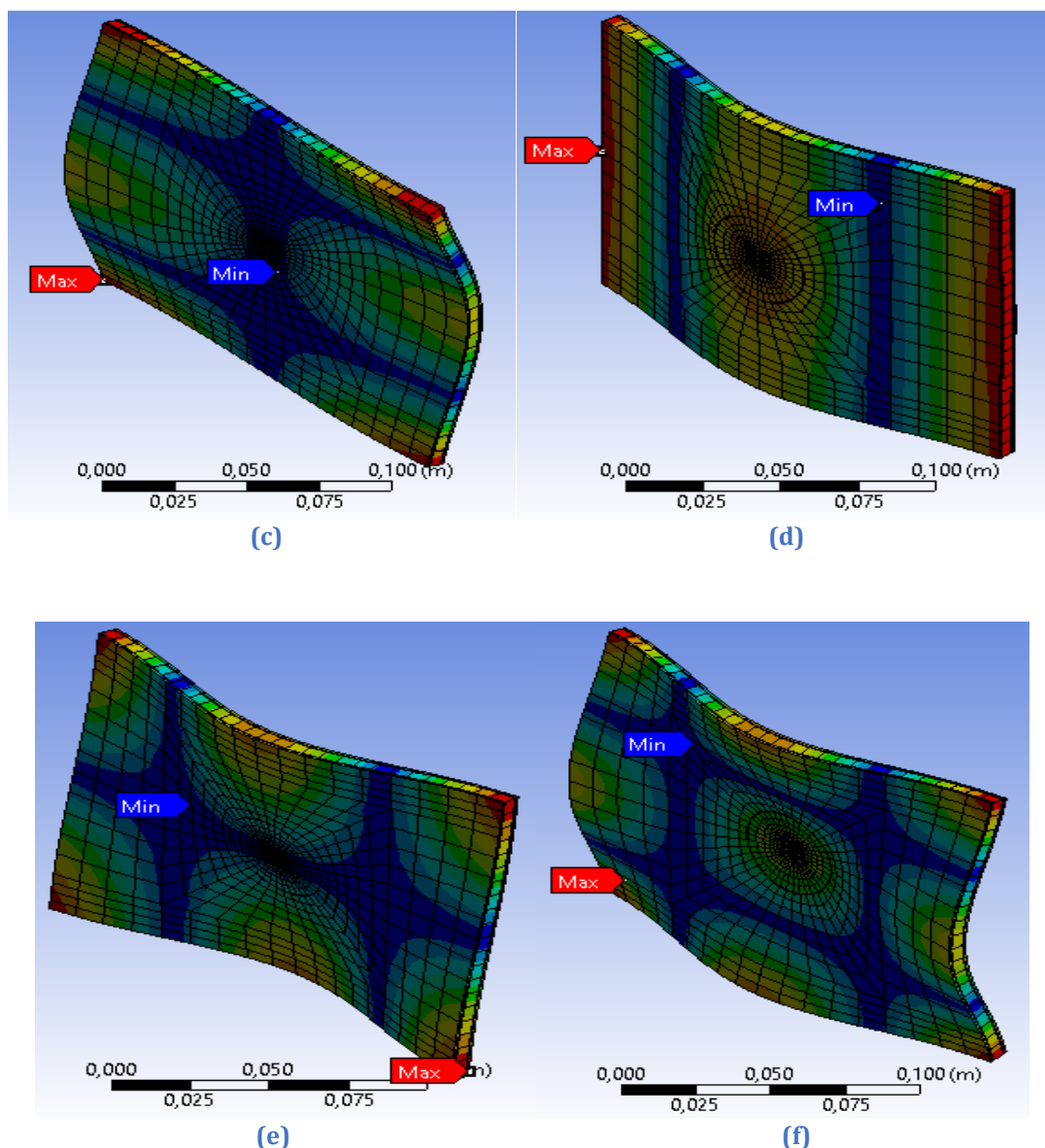
Πίνακας 9.2: Αποτελέσματα της προσομοίωσης για την πλάκα με μέγεθος αποκόλλησης της τάξης του 5%

<i>Mode</i>	<i>Natural Frequencies of Intact Sandwich [Hz]</i>	<i>Natural Frequencies of Sandwich D=5% [Hz]</i>	<i>Shifting [Hz]</i>	<i>Decrease (%)</i>
1	616.82	611.64	5.18	0.84
2	1220.7	1204.9	15.8	1.40
3	1516.4	1507.3	9.1	0.6
4	1565.3	1519.3	46	2.9
5	1724	1715.5	8.5	0.5
6	2278.8	2241.9	36.9	1.62
7	2486.6	2453.1	33.5	1.35
8	2521.6	2460.3	94.8	3.76
9	2665.6	2665	0.6	0.02
10	2717.5	2712.6	4.9	0.18
11	3151.5	3096.4	55.1	1.75
12	3178.2	3131.7	46.5	1.46
13	3752.6	3742.5	10.1	0.30
14	3802.2	3784.7	17.5	0.46



Εικόνα 9.2: Οι απόλυτες τιμές των μειώσεων των ιδιοσυχνοτήτων ανά ιδιομορφή για βλάβη μεγέθους 5%





Εικόνες 9.3: Οι έξι πρώτες ιδιομορφές για πλάκα με κυκλική αποκόλληση μεγέθους 5% στο κέντρο της με ιδιοσυχνότητες: (a) 611.64 Hz, (b) 1204.9 Hz, (c) 1507.3 Hz, (d) 1519.3 Hz, (e) 1715.5 Hz και (f) 2241.9 Hz

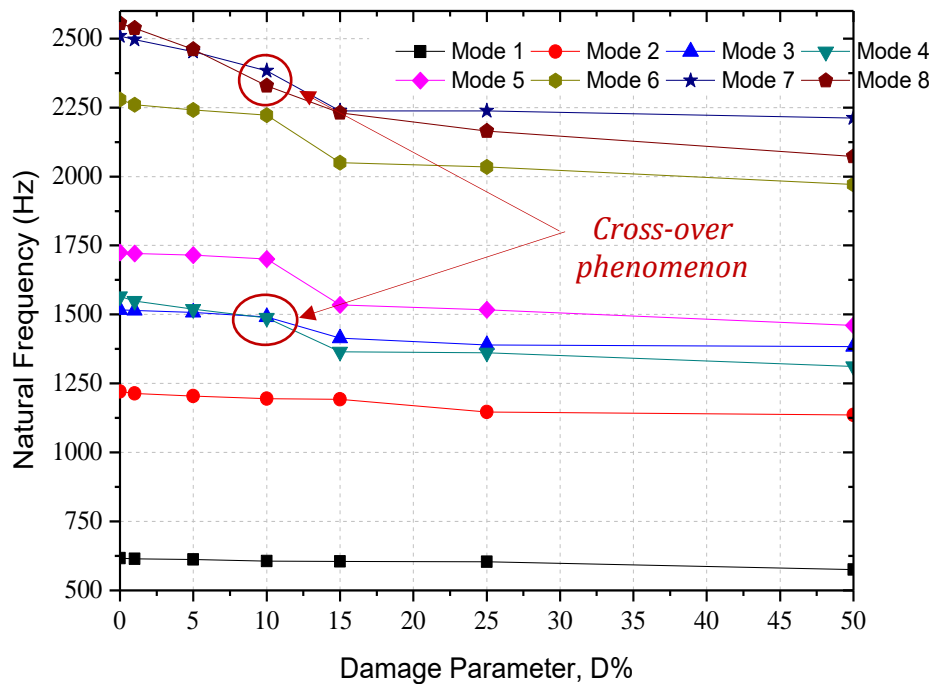
Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα, οι συχνότητες μειώνονται με την παρουσία της αποκόλλησης με την μεγαλύτερη απόλυτη μεταβολή της μείωσης να εμφανίζεται στην όγδοη ιδιομορφή, για το εύρος των συχνοτήτων που έχει βρεθεί. Από το ιστόγραμμα φαίνεται πως η απόλυτη μεταβολή του μεγέθους των συχνοτήτων δεν ακολουθεί κάποια μονότονη συμπεριφορά καθώς αυξάνονται οι συχνότητες δείχνοντας πως οι μεταβολές είναι ισχυρά εξαρτημένες από τον τύπο της ιδιομορφής. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται τα μεγέθη των αποκολλήσεων που εξετάζονται και οι αντίστοιχες διάμετροι τους.

Πίνακας 9.3: Μεγέθη της παραμέτρου βλάβης και η αντιστοιχία τους με την ακτίνα της κυκλικής περιοχής αποκόλλησης

<i>Παράμετρος Βλάβης, D</i>	<i>Ακτίνα της Κυκλικής Περιοχής Βλάβης (mm)</i>
1%	9
5%	20
10%	28
15%	34
25%	44
50%	63

Πίνακας 9.4: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις πλάκες με κυκλική αποκόλληση διαφόρων μεγεθών βλάβης

<i>Damage Parameter, D%</i>	<i>Mode 1 [Hz]</i>	<i>Mode 2 [Hz]</i>	<i>Mode 3 [Hz]</i>	<i>Mode 4 [Hz]</i>	<i>Mode 5 [Hz]</i>	<i>Mode 6 [Hz]</i>	<i>Mode 7 [Hz]</i>	<i>Mode 8 [Hz]</i>
0	616.82	1220.7	1516.4	1565.3	1724	2278.8	2486.6	2555.1
1	614.73	1213.9	1514.1	1549.2	1720,8	2260.7	2495.7	2537.5
5	611.64	1204.9	1507.3	1519.3	1715,5	2241.9	2453.1	2460.3
10	606.72	1195.3	1487.1	1491	1700,5	2222.9	2328.6	2382.6
15	605.54	1192.2	1364.6	1414.4	1534,4	2049.8	2230.5	2237.6
25	604.1	1146.4	1361.6	1389.2	1517,5	2035.4	2165	2237.5
50	575.69	1135.9	1311.1	1383.2	1460,1	1971.4	2073	2211.5



Εικόνα 9.4: Οι ιδιοσυχνότητες ως συνάρτηση του μεγέθους βλάβης και η εμφάνιση του φαινομένου cross - over

Η ακτίνα της περιοχής αποκόλλησης αυξάνεται από τα 9 έως τα 63 mm κατά αντιστοιχία με την αύξηση της μεταβλητής της παραμέτρου βλάβης $D\%$ από το 1 έως το 50%, όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 9.3. Στον πίνακα 9.4 και το σχήμα 9.4 παρουσιάζεται η μεταβολή των φυσικών συχνοτήτων συναρτήσει του μεγέθους της βλάβης, για τις πρώτες οκτώ ιδιοσυχνότητες. Είναι εύκολο να παρατηρηθεί πως γενικά οι συχνότητες μειώνονται με την αύξηση της παραμέτρου βλάβης. Πρακτικά όμως, η πρώτη στρεπτική ιδιομορφή δεν επηρεάζεται κατά τόσο σημαντικό τρόπο από την παρουσία και την αύξηση της βλάβης της αποκόλλησης σε σχέση με τις άλλες ιδιομορφές. Ακόμα, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η εμφάνιση μιας σχετικά μικρής περιοχής αποκόλλησης, μικρότερης του 5%, δεν επηρεάζει τόσο τις χαμηλότερες φυσικές συχνότητες όσο, με έντονο τρόπο, τις υψηλότερες φυσικές συχνότητες. Παρόλα αυτά, φαίνεται πως από ένα σημείο - που μπορεί να εντοπιστεί περίπου στο 25% της βλάβης - και μετά, η μείωση γίνεται τόσο μικρή ώστε να θεωρηθεί αμελητέα σε σχέση με το μέγεθος της βλάβης. Φαίνεται δηλαδή, πως η φυσική συχνότητα σταθεροποιείται με την αύξηση της βλάβης.

Με την παρατήρηση και κατόπιν τη σύγκριση των εικόνων των ιδιομορφών, μεταξύ της «υγιούς» πλάκας και της πλάκας με αποκόλληση μεγέθους 5%, φαίνεται πως η παρουσία της αποκόλλησης επηρεάζει και τη μορφή των ιδιομορφών ως αποτέλεσμα των τοπικών ταλαντώσεων γύρω από την περιοχή της αποκόλλησης. Πιο αξιοσημείωτο γίνεται αυτό το φαινόμενο των τοπικών ταλαντώσεων στις υψηλότερες ιδιοσυχνότητες, με την αύξηση όμως της περιοχής βλάβης να το εμφανίζει και στις πιο χαμηλές. Το πιο χαρακτηριστικό παράγωγο φαινόμενο αυτών των τοπικών ταλαντώσεων, είναι το φαινόμενο cross - over, που εμφανίστηκε και κατά την παραμετρική μελέτη για το πάχος της «υγιούς» πλάκας (παρ. 7.4.1). Κατά το φαινόμενο αυτό, γίνεται αλλαγή της σειράς των ιδιομορφών που παρουσιάζονται με την ταλάντωση των πλακών sandwich από ορθότροπα υλικά και συμβαίνει όταν κάποιες υλικές ιδιότητες κυριαρχούν επί κάποιων άλλων. Οι αλλαγές στις ιδιότητες μπορεί να οφείλεται είτε σε κάποια αλλαγή μιας δομικής συνιστώσας του sandwich, όπως είναι η μεταβολή του πάχους του πυρήνα

(παρ. 7.4.1), είτε εξαιτίας κάποιας βλάβης που μπορεί να παρουσιαστεί, όπως είναι μια ρωγμή ή μια αποκόλληση. Στα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται, το φαινόμενο cross – over παρουσιάζεται μεταξύ της τρίτης και της τέταρτης και της έκτης και έβδομης ιδιομορφής για το 5% της παραμέτρου βλάβης. Τέτοια φαινόμενα είναι πολύ σημαντικά, καθώς με την ξαφνική εμφάνιση τους κατά παρατήρηση της συμπεριφοράς της πλάκας, μπορεί να δώσουν πληροφορία για την θέση και την σοβαρότητα της βλάβης της αποκόλλησης.

9.4 Η Επίδραση των Συνοριακών Συνθηκών

Μια παραμετρική μελέτη σε σχέση με την επιβολή των συνοριακών συνθηκών στις πλευρές της πλάκας sandwich μπορεί να αναδείξει τη σημασία των τοπικών φαινομένων στις δομικές αποκρίσεις του στοιχείου. Θεωρώντας πως η πλάκα sandwich αποτελεί τμήμα μιας κατασκευαστικής δομής, που μπορεί να είναι για παράδειγμα το πτερό ενός αεροπλάνου ή ενός ελικοπτερού, οι επιβαλλόμενες σε αυτή συνοριακές συνθήκες αποκαλύπτουν τον τρόπο σύνδεσης της με τα υπόλοιπα τμήματα της δομής. Οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν τον τρόπο σύνδεσης ενός δομικού στοιχείου, εκφράζονται συνήθως με τον περιορισμό κάποιων βαθμών ελευθερίας. Η επίδραση του διαφορετικού τρόπου σύνδεσης για την παρούσα πλάκα γίνεται συγκρίνοντας τις φυσικές συχνότητες της που προκύπτουν από την ανάλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία για τέσσερις διαφορετικούς τύπους συνοριακών συνθηκών, με την ονομασία 'FFFF', 'SSSS', 'CSCS' και 'CCCC'. Το 'F' δηλώνει ελεύθερη πλευρά, το 'S' απλά στηριγμένη πλευρά και το 'C' πακτωμένη πλευρά. Με την άνω κωδικοποίηση κάθε γράμμα αντιστοιχεί σε κάθε πλευρά της πλάκας και δηλώνει τον περιορισμό που έχει επιβληθεί σε κάθε σημείο της επιφάνειας της αντίστοιχης πλευράς.

Η γεωμετρία και οι ιδιότητες των υλικών της πλάκας sandwich παραμένουν τα ίδια με τις προηγούμενες αναλύσεις. Τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις φυσικές συχνότητες καθώς επίσης και η απόλυτη τιμή της μείωσης των φυσικών συχνοτήτων σε σχέση με το μέγεθος της παραμέτρου βλάβης (περιοχής αποκόλλησης) για κάθε τύπο συνοριακών συνθηκών για τις πρώτες τέσσερις ιδιομορφές παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

Πίνακας 9.5: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 1^η ιδιομορφή

Mode 1					
<i>Damage Parameter %</i>	<i>FFFF</i>	<i>CSCS</i>	<i>SSSS</i>	<i>CCCC</i>	
0	616.82	980.61	746.35	1618.4	
1	614.73	976.94	734.41	1583	
5	611.64	973.89	731.45	1575.1	
10	606.72	970.68	730.83	1553.6	
15	605.54	891.2	724.24	1510.5	
25	604.1	870.61	685.83	1444.7	
50	575.69	861.25	664.02	1417.2	

Πίνακας 9.6: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 2^η ιδιομορφή

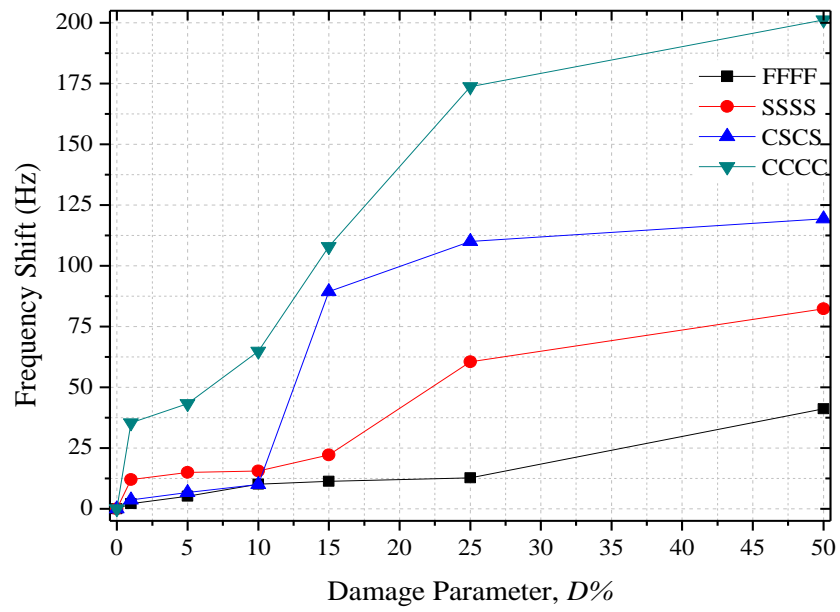
Mode 2				
<i>Damage Parameter %</i>	<i>FFFF</i>	<i>CSCS</i>	<i>SSSS</i>	<i>CCCC</i>
0	1220.7	1206	813.95	2666.8
1	1213.9	1203.8	812.93	2608.3
5	1204.9	1197.5	801.59	2561.6
10	1195.3	1184.6	778.87	2468.6
15	1192.2	1150.8	769.42	2413.4
25	1146.4	1088.3	722.17	2351.6
50	1135.9	1075.8	668.32	2318.6

Πίνακας 9.7: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 3^η ιδιομορφή

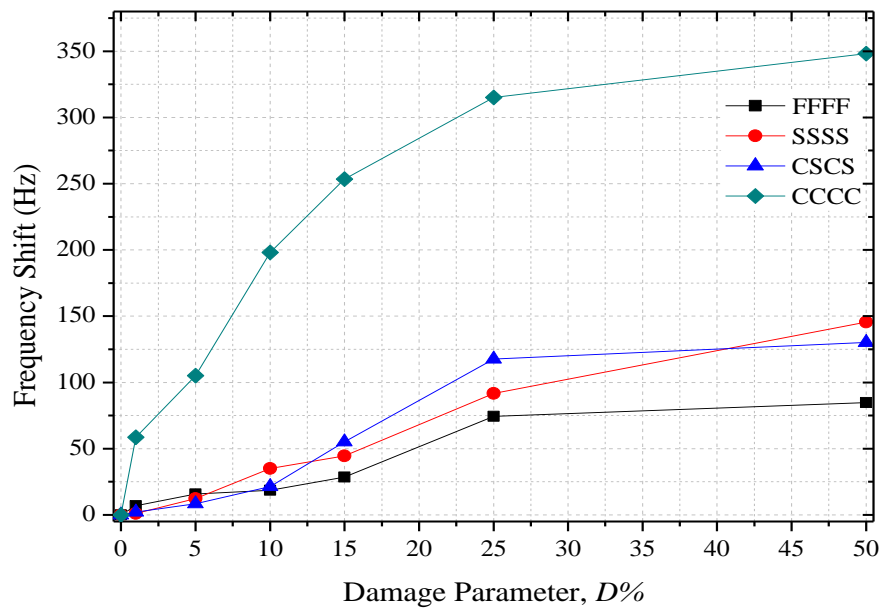
Mode 3				
<i>Damage Parameter %</i>	<i>FFFF</i>	<i>CSCS</i>	<i>SSSS</i>	<i>CCCC</i>
0	1516.4	2007	1299.6	2717.1
1	1514.1	1993.9	1283.5	2624.4
5	1507.3	1990.3	1281.9	2507.1
10	1491	1964.5	1277.2	2373.1
15	1414.4	1885.2	1250	2311.6
25	1389.2	1824.7	1184.5	2247.9
50	1383.2	1734	1149.7	2201.2

Πίνακας 9.8: Αποτελέσματα για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την 4^η ιδιομορφή

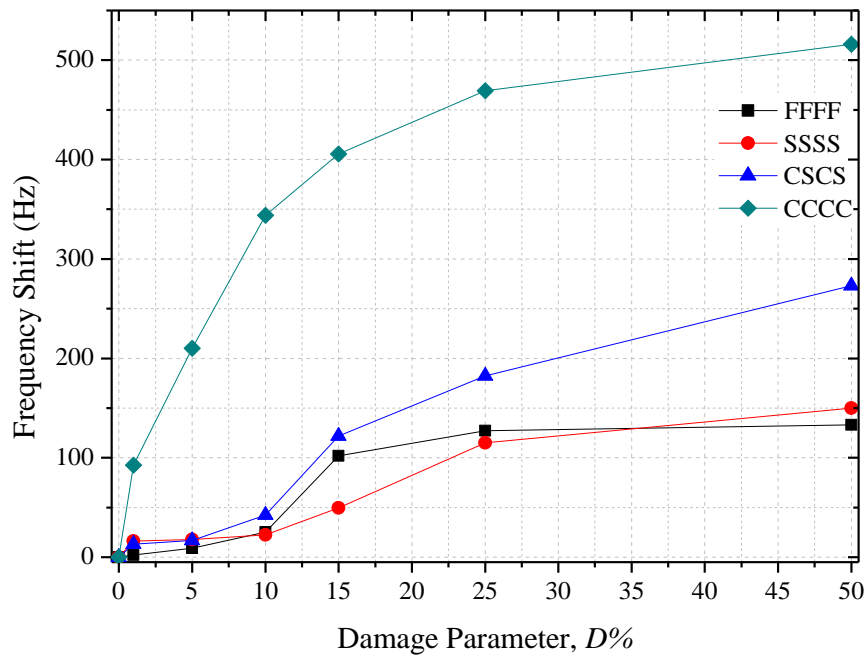
Mode 4				
<i>Damage Parameter %</i>	<i>FFFF</i>	<i>CSCS</i>	<i>SSSS</i>	<i>CCCC</i>
0	1565.3	2012.6	1803.7	3491
1	1549.2	2001.5	1792.1	3419
5	1519.3	1989.9	1780	3403.5
10	1487.1	1879.5	1762.3	3309.5
15	1364.6	1811.1	1632.4	3255.7
25	1361.6	1735.2	1609.2	3018
50	1311.1	1703.3	1526.3	2876.4



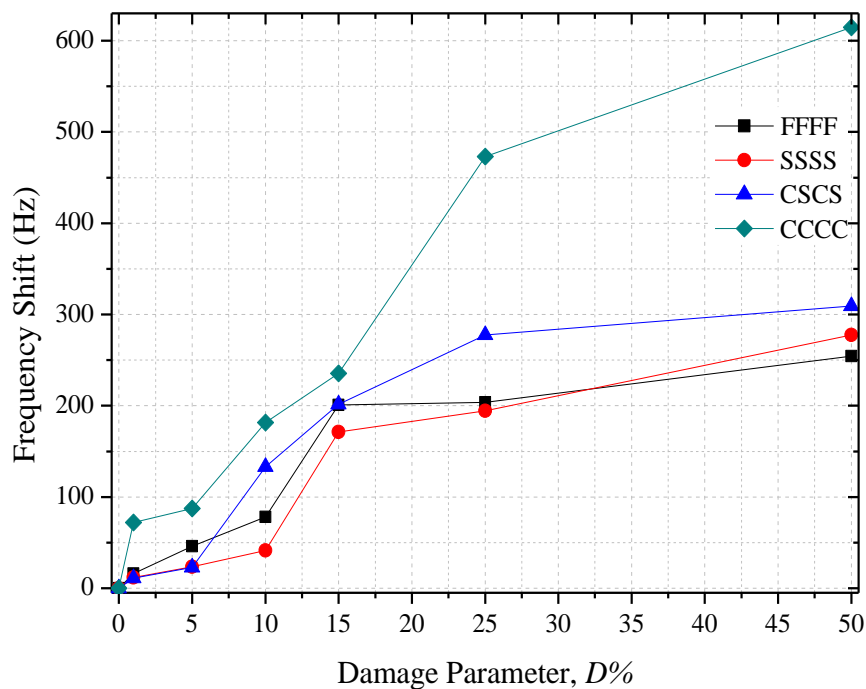
(a)



(b)



(c)



(d)

Εικόνες 9.5: Διαγράμματα των αριθμητικών ιδιοσυχνοτήτων σε συνάρτηση με το μέγεθος βλάβης για τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για την (a) 1η, (b) 2η, (c) 3η και (d) 4η ιδιομορφή

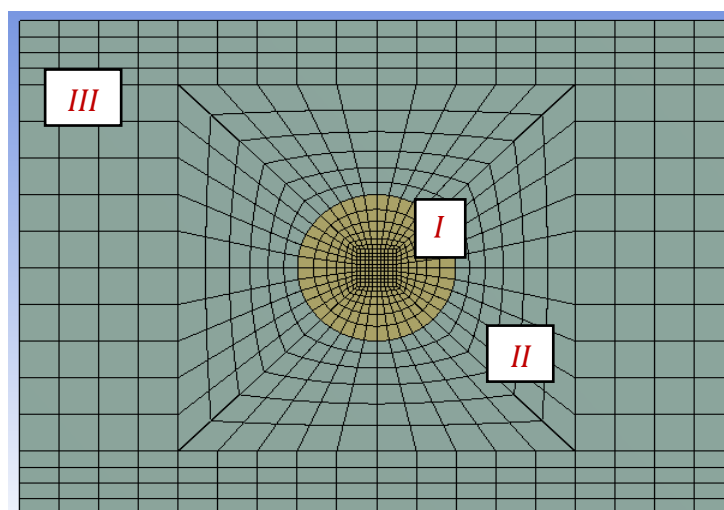
Εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί από το διάγραμμα της απόλυτης τιμής της μείωσης για την θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα πως με τον περιορισμό των βαθμών ελευθερίας των

πλευρών της πλάκας η μετατόπιση σε πιο χαμηλές συχνότητες είναι μεγαλύτερη. Πιο απλά, στην περίπτωση που και οι τέσσερις πλευρές είναι πλήρως πακτωμένες η πτώση της συχνότητας είναι μεγαλύτερη με αύξηση του ποσοστού βλάβης. Ίδια συμπεριφορά παρουσιάζεται και στις επόμενες ιδιομορφές. Οι διαφορές μεταξύ των μεταβολών για τις πτώσεις των συχνοτήτων, στην περίπτωση των συνθηκών CSCS και SSSS είναι σχετικά μικρές για την 2^η, 3^η και 4^η ιδιομορφή, ενώ, μόνο για την 1^η ιδιομορφή παρουσιάζεται σημαντική διαφορά από ένα όριο βλάβης και πάνω. Ακόμα, για όλες τις συνοριακές συνθήκες, όλες οι συχνότητες δεν μειώνονται σημαντικά όταν το μέγεθος της αποκόλλησης είναι πολύ μικρό ($D < 5\%$). Όσο το μέγεθος της αποκόλλησης αυξάνει, τόσο μειώνονται συχνότητες για κάθε τύπο συνοριακών συνθηκών. Αξιοπρόσεκτη είναι η μεταβολή της συμπεριφοράς πακτωμένης και στις τέσσερις πλευρές πλάκας, ειδικά για την δεύτερη και τρίτη ιδιομορφή, όπου φαίνεται να ακολουθεί μια εκθετική καμπύλη. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να διερευνηθεί ακόμα περισσότερο πειραματικά και αριθμητικά, ώστε να δοθεί σε περίπτωση που είναι εφικτό κάποιος κανόνας για την μεταβολή.

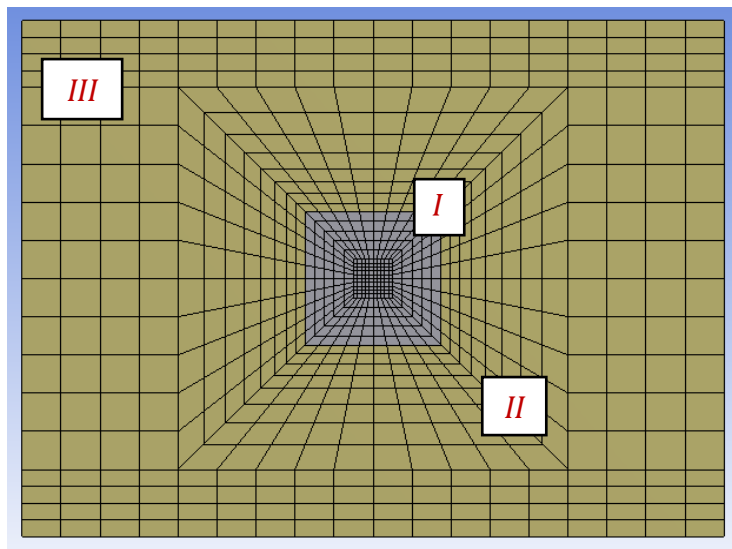
Συνοπτικά, μπορεί να ειπωθεί πως η πτώση των συχνοτήτων εντοπίζεται πιο εύκολα με την αύξηση της περιοχής αποκόλλησης για την περίπτωση της πλάκας που έχει και τις τέσσερις πλευρές πακτωμένες.

9.5 Επίδραση του Σχήματος της Αποκόλλησης

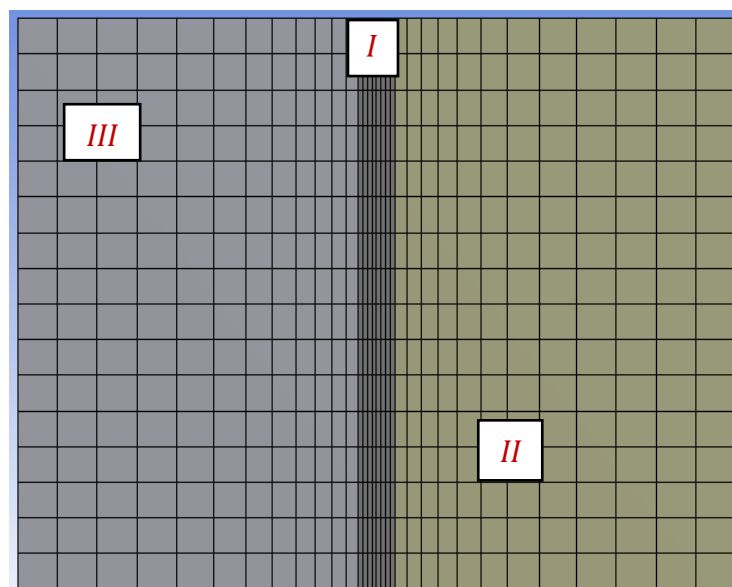
Η τελευταία παραμετρική μελέτη γίνεται για πάνελ sandwich με διαφορετική γεωμετρία της ζώνης αποκόλλησης, ώστε να διερευνηθεί η ευαισθησία της δυναμικής συμπεριφοράς της πλάκας ως προς τις διαφορετικές παραδοχές που γίνονται για την περιοχή της αποκόλλησης. Σύμφωνα με αυτή τη μελέτη, η γεωμετρία της περιοχής αποκόλλησης εξιδανικεύεται με σχήματα κύκλου, τετραγώνου ή μιας ζώνης κατά το πλάτος της πλάκας. Η αποκόλληση θεωρείται πως βρίσκεται στο κέντρο της πλάκας και αναπτύσσεται συμμετρικά ως προς αυτό και η αλληλεπίδραση στην διεπιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων που υπάρχει η αποκόλληση μοντελοποιείται με την βοήθεια ελατηρίων και την αλλαγή των συνθηκών επαφής γύρω από την ζώνη στο σύνορο με την «υγιή» περιοχή. Στις πλευρές των μοντέλων των πλακών που εξετάζονται δεν επιβάλλεται κανένας περιορισμός στην κίνηση τους (perfect free boundary conditions). Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζονται οι μορφές της αποκόλλησης με μέγεθος, όπως εκφράζεται από την παράμετρο βλάβης, ίσο με 5%.



(a)



(b)



(c)

Εικόνες 9.6: Οι διάφοροι τύποι της γεωμετρίας της περιοχής αποκόλλησης (a) κυκλική ζώνη, (b) τετράγωνη ζώνη και (c) κατά το πλάτος της πλάκας ζώνης αποκόλλησης

Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους αφορούσαν τα μοντέλα με την κυκλική περιοχή της αποκόλλησης, τα οποία θα παρουσιαστούν συγκριτικά με τα αποτελέσματα των άλλων μοντέλων. Αξίζει να σημειωθεί πως ο τρόπος της διακριτοποίησης των μοντέλων είναι ίδιος με τον τρόπο που ακολουθήθηκε για την πλάκα με την κυκλική αποκόλληση, με μια πυκνή περιοχή πλέγματος για το κέντρο της στρώσης που υπάρχει η αποκόλληση, μια περιοχή ενδιάμεσης πύκνωσης του πλέγματος που καλύπτει ή βρίσκεται περιμετρικά της περιοχής αποκόλλησης και μια περιοχή με αραιό πλέγμα του βρίσκεται εξωτερικά της προηγούμενης.

Το μέγεθος της βλάβης καθορίζεται σύμφωνα με την παράμετρο βλάβης που έχει οριστεί από την σχέση (9.1). Η συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τις τρεις μορφές της αποκόλλησης γίνεται για τα μεγέθη του 1%, 5%, 10% και 15%. Οι επόμενοι πίνακες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων και τα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζουν την απόλυτη τιμή της πτώσης των ιδιομορφών για κάθε μέγεθος βλάβης.

Πίνακας 9.9: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 1%

<i>Damage Parameter 1%</i>			
<i>Frequency</i>	<i>Circular Debonding (Hz)</i>	<i>Square Debonding (Hz)</i>	<i>Through-the-width Debonding (Hz)</i>
1	614.73	615.21	612.85
2	1213.9	1214.9	1220.3
3	15141	1515.4	1513.4
4	1549.2	1554	1517.5
5	1720.8	1722.1	1689.9
6	2260.7	2269	2263.8
7	2495.7	2511.9	2505.6
8	2537.5	2543.8	2539.7

Πίνακας 9.10: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 5%

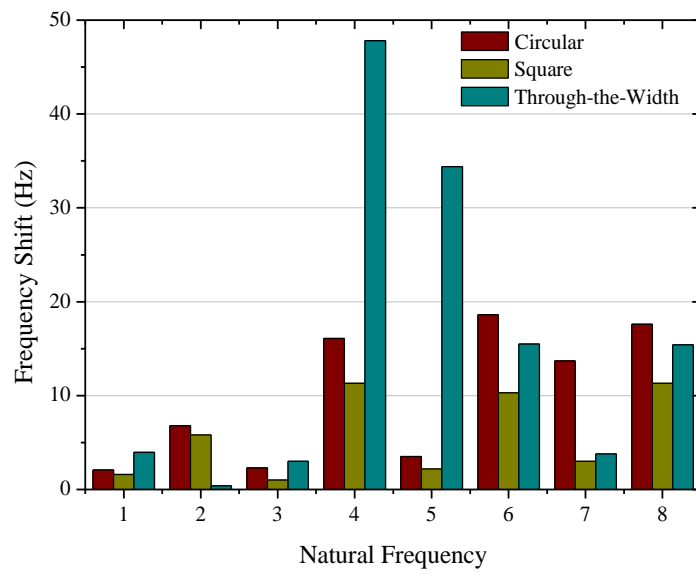
<i>Damage Parameter 5%</i>			
<i>Frequency</i>	<i>Circular Debonding (Hz)</i>	<i>Square Debonding (Hz)</i>	<i>Through-the-width Debonding (Hz)</i>
1	611.64	611.16	612.26
2	1204.9	1204.6	1219.3
3	1507.3	1514	1512.1
4	1519.3	1522.3	1516.7
5	1715.5	1720.5	1688.7
6	2241.9	2247.5	2260.8
7	2453.1	2485.9	2500.4
8	2460.3	2528.5	2537.7

Πίνακας 9.11: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 15%

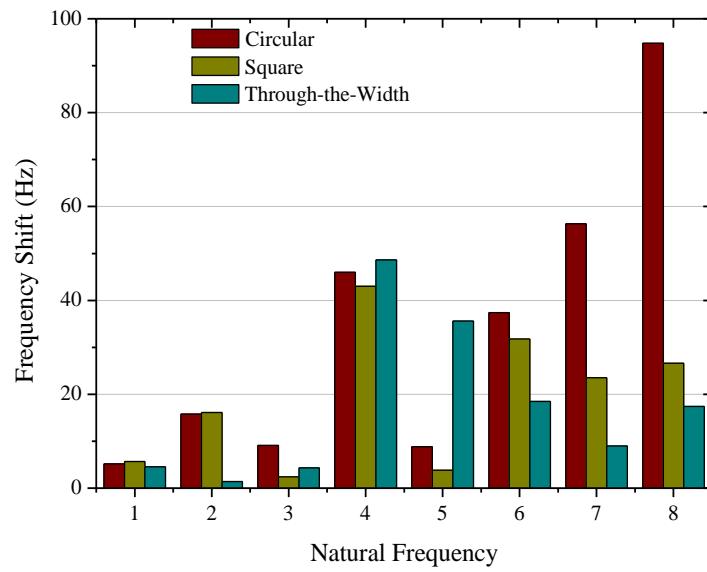
<i>Damage Parameter 15%</i>			
<i>Frequency</i>	<i>Circular Debonding (Hz)</i>	<i>Square Debonding (Hz)</i>	<i>Through-the-width Debonding (Hz)</i>
1	605.54	605.35	598.2
2	1192.2	1196.8	1213.2
3	1414.4	1490.7	1332.8
4	1364.6	1501	1499.7
5	1534.4	1706.1	1555.8
6	2049.8	2234.6	2202.4
7	2237.6	2392.9	2426.3
8	2230.5	2414.7	2482

Πίνακας 9.12: Αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων για τις διάφορες μορφές της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους 25%

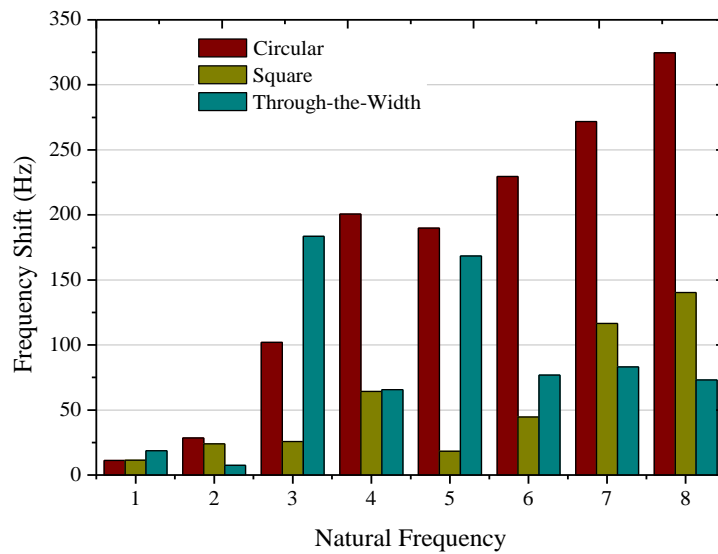
<i>Damage Parameter 25%</i>			
<i>Frequency</i>	<i>Circular Debonding (Hz)</i>	<i>Square Debonding (Hz)</i>	<i>Through-the-width Debonding (Hz)</i>
1	604.1	599.91	593.93
2	1146.4	1191.6	1206.6
3	1389.2	1462.7	1340.4
4	1361.6	1482.7	1490.8
5	1517.5	1681.5	1551.3
6	2035.4	2201.6	2188.4
7	2237.5	2272.8	2298.9
8	2165	2374.8	2457.8



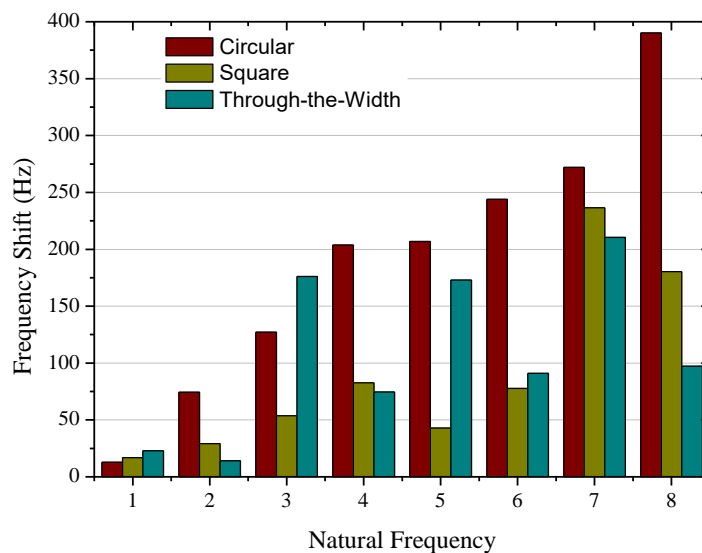
(a)



(b)



(c)



(d)

Εικόνες 9.7: Η απόλυτη τιμή της πτώσης των φυσικών συχνοτήτων για τις διάφορες περιπτώσεις μορφών της ζώνης αποκόλλησης για βλάβη μεγέθους: (a) 1%, (b) 5%, (c) 15% και (d) 25%

Το πιο εμφανές χαρακτηριστικό των παραπάνω διαγραμμάτων είναι πως με την αύξηση του μεγέθους της βλάβης αυξάνονται και οι απόλυτες τιμές των μειώσεων των συχνοτήτων για κάθε μορφή αποκόλλησης. Ακόμα, παρόλο που φαίνεται πως η ζώνη αποκόλλησης με κυκλικό σχήμα επιδεικνύει μεγαλύτερη ευαισθησία σε σχέση με τις άλλες μορφές, αυτό δεν ισχύει για όλες τις περιπτώσεις. Στις περιπτώσεις των ιδιομορφών όπου εμφανίζεται μεγάλη βύθιση στο κέντρο της πλάκας, φαίνεται πως η πλάκα με την ζώνη αποκόλλησης κατά το μήκος της να επηρεάζεται στον ίδιο ή και μεγαλύτερο βαθμό. Η ζώνη αποκόλλησης με τετράγωνο σχήμα φαίνεται πως έχει τη μικρότερη μεταβολή στις συχνότητες της, κάτι που μπορεί να κάνει σχετικά δύσκολο τον εντοπισμό της μέσω των φυσικών συχνοτήτων, τουλάχιστον στις περιπτώσεις του μικρού μεγέθους της βλάβης. Γενικά όμως, φαίνεται πως η μεταβολή των φυσικών συχνοτήτων όσο αυξάνει το μέγεθος της βλάβης δεν ακολουθεί κάποιον κανόνα.

Κεφάλαιο 10

Συμπεράσματα – Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

10.1 Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται σε δύο παραγράφους. Στη πρώτη παράγραφο, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από τη μελέτη με την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων της δυναμικής συμπεριφοράς του sandwich με πυρήνα honeycomb, που είχε ως στόχο τον υπολογισμό των φυσικών συχνοτήτων της πλάκας. Στη δεύτερη παράγραφο, συζητούνται τα αποτελέσματα της δυναμικής συμπεριφοράς του sandwich με την βλάβη αποκόλλησης και την δυνατότητα που παρέχουν οι φυσικές συχνότητες της πλάκας για τον εντοπισμό και την επιδιόρθωση της ατέλειας πριν γίνει επικίνδυνη.

10.1.1 Μορφική Δυναμική Συμπεριφορά της Πλάκας Sandwich με Πυρήνα Honeycomb

Από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων της απόκρισης των μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων για την δυναμική συμπεριφορά των sandwich, μπορεί να βγουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων των τριών τύπων μοντέλων, του ακριβούς γεωμετρικά μοντέλου, του ισοδύναμου μοντέλου μονής στρώσης και του ισοδύναμου μοντέλου sandwich, με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα, προκύπτει πως προβλέπουν με αρκετά μεγάλη ακρίβεια τις πρώτες – τουλάχιστον – ιδιοσυχνότητες, που είναι και αυτές που ενδιαφέρουν πιο πολύ τον σχεδιασμό του στοιχείου.
- Το μοντέλο της ακριβούς γεωμετρίας παρουσιάζει μικρή απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα. Τα αποτελέσματα του είναι συντηρητικότερα έναντι των άλλων δύο, κάτι που είναι ευεργετικό για τον σχεδιασμό επειδή κινούνται προς την πλευρά της ασφάλειας, ωστόσο, οι υπολογιστικοί πόροι που χρειάζονται για την προσομοίωση αυτού του μοντέλου είναι πολύ μεγάλοι, αλλά και η διακριτοποίηση του πρέπει να είναι αρκετά εκλεπτυσμένη. Ως συνέπεια, η μοντελοποίηση της πλάκας με αυτό τον τρόπο είναι η πλέον δύσχρηστη και δαπανηρή.
- Τα αποτελέσματα των ισοδύναμων μοντέλων της μονής στρώσης και του sandwich, παρουσιάζουν μικρές διαφορές μεταξύ τους για την περιοχή συχνοτήτων που μελετήθηκε. Το ισοδύναμο μοντέλο μονής στρώσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο προκαταρκτικό στάδιο του σχεδιασμού, λόγω όμως του περιορισμού των παραδοχών του για τις ιδιότητες του υλικού δε μπορεί να ενσωματώσει τα μη συμβατικά χαρακτηριστικά που μπορεί να υπάρχουν στις δομές. Το μοντέλο του ισοδύναμου sandwich μπορεί να ενσωματώσει τέτοιες αλλαγές και να δώσει εξαιρετικά αποτελέσματα, με μικρότερες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ σε σχέση με αυτή του ακριβούς μοντέλου. Έτσι, δύναται να χρησιμοποιηθεί για παραμετρικές μελέτες που ως στόχο θα έχουν τη διερεύνηση της ευαισθησίας των διάφορων δομικών συνιστωσών του sandwich.

- Για την παραμετρική μελέτη που πραγματοποιήθηκε, προέκυψε πως για συγκεκριμένα υλικά πυρήνα και κελύφους, το δομικό χαρακτηριστικό με την σημαντικότερη επίδραση στην δυναμική συμπεριφορά του sandwich είναι το πάχος του πυρήνα. Ακολουθεί το πάχος των κελυφών, με το μέγεθος της κυψέλης να μην επηρεάζει και τόσο την δυναμική συμπεριφορά.
- Για τις περιπτώσεις των sandwich με πυρήνα honeycomb, όπου υπάρχουν επαρκείς πληροφορίες για το πάχος και τις ιδιότητες της στρώσης της κόλλας, η συμπερίληψη αυτών των στρωμάτων στα μοντέλα των ισοδύναμων sandwich με την κατάλληλη διακριτοποίηση μπορεί να δώσει πιο ακριβή αποτελέσματα για την συμπεριφορά της δομής. Όταν δεν λαμβάνονται υπόψη, πρέπει να διασφαλιστεί πως οι συνθήκες σύνδεσης δεν θα επιτρέψουν τον αποχωρισμό των στρώσεων κατά την ταλαντωτική κίνησης του πάνελ.

10.1.2 Δυναμική Συμπεριφορά του Sandwich με Αποκόλληση Μεταξύ του Πυρήνα και του Κελύφους

Στη προσπάθεια εύρεσης μεθόδων για τον εντοπισμό της αποκόλλησης μεταξύ των στρωμάτων του πυρήνα και του κελύφους, η μη καταστροφική μέθοδος που βασίζεται στην μεταβολή των φυσικών συχνοτήτων είναι η πιο φθηνή και πιο εύκολη στην υλοποίηση της. Από τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης και προσομοίωσης με πεπερασμένα στοιχεία της πλάκας sandwich με την ατέλεια, με την μέθοδο της αλληλεπίδρασης με ελατήρια και της αλλαγής των συνθηκών επαφής, μπορούν να βγουν τα εξής συμπεράσματα που μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της μη καταστροφικής μεθόδου:

- Για τον συγκεκριμένο τρόπο μοντελοποίησης της βλάβης, οι φυσικές συχνότητες της πλάκας sandwich μειώνονται.
- Για δεδομένο το μέγεθος και τη θέση της βλάβης, η μείωση των συχνοτήτων δεν είναι ανάλογη της σειράς που εμφανίζονται, δηλαδή η πτώση τους για τις ιδιομορφές που εμφανίζονται σε υψηλότερες συχνότητες μπορεί να είναι μικρότερη από την πτώση που συναντάται σε αυτές που εμφανίζονται σε μικρότερες. Δεν εμφανίζεται δηλαδή κάποια μονοτονία για την μείωση σε σχέση με τη σειρά των ιδιομορφών και κάθε μείωση εξαρτάται από το σχήμα της αντίστοιχης ιδιομορφής.
- Όσο αυξάνεται το μέγεθος της βλάβης αυξάνει και η απόλυτη μείωση της πτώσης των συχνοτήτων. Η πτώση αυτή εξαρτάται από το σχήμα των ιδιομορφών και μπορεί να είναι μεγαλύτερη για υψηλότερες ιδιομορφές, που δείχνει πως αυτές είναι και οι πιο κατάλληλες για την ένδειξη βλάβης. Για μικρές βλάβες δεν εμφανίζεται πολύ μεγάλη πτώση στις ιδιοσυχνότητες.
- Με την αύξηση του μεγέθους της βλάβης εμφανίζεται το φαινόμενο της αντιστροφής της σειράς που εμφανίζονται οι ιδιομορφές, το επονομαζόμενο “cross – over”. Η εμφάνιση του είναι σήμα για την παρουσία βλάβης και μπορεί από μόνο του να δώσει πληροφορία για την ένταση ή σοβαρότητα της βλάβης, αναλόγως από το σημείο που εμφανίζεται.
- Όταν η πλάκα είναι πακτωμένη και στις τέσσερις πλευρές η πτώση των ιδιοσυχνοτήτων είναι μεγαλύτερη. Γενικότερα, όταν επιβάλλεται κάποιος περιορισμός στους βαθμούς ελευθερίας των πλευρών της πλάκας, υπάρχει αύξηση της πτώσης συχνοτήτων.
- Όσον αφορά τη παραμετρική μελέτη για το σχήμα της αποκόλλησης, η κυκλική ζώνη αποκόλλησης παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία, αν και για συγκεκριμένες ιδιομορφές μπορεί η κατά το πλάτος της πλάκας ζώνη αποκόλλησης να παρουσιάσει ίδιου βαθμού ευαισθησία. Αυτές είναι συνήθως οι

καμπτικές ιδιομορφές με μεγάλη βύθιση λόγω της κάμψης. Η ζώνη τετράγωνου σχήματος είναι αυτή που είναι πιο δύσκολο να εντοπιστεί.

10.2 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Οι προτάσεις για την μελλοντική έρευνα, χωρίζονται σε δύο σκέλη. Το πρώτο σκέλος αφορά τις προτάσεις που μπορούν να γίνουν για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς της πλάκας sandwich με πυρήνα honeycomb και το δεύτερο σκέλος αφορά τις προτάσεις για την επέκταση της μελέτης της επίδρασης της αποκόλλησης στη δυναμική συμπεριφορά του sandwich.

Για την δυναμική συμπεριφορά της πλάκας sandwich με πυρήνα honeycomb μπορούν:

- Να πραγματοποιηθούν πειράματα για άλλες συνθήκες και κατασκευή αντίστοιχων μοντέλων με αυτά που παρουσιάστηκαν, για να επικυρωθεί ακόμα πιο πολύ η ισχύς τους για την πρόβλεψη της πραγματικής συμπεριφοράς τους.
- Δοκιμή άλλων θεωριών ή ακόμα και αριθμητικών μεθοδολογιών για την ομογενοποίηση του πυρήνα honeycomb, πέρα από την θεωρία των Ashby και Gibson, ώστε να ελεγχθεί αν υπάρχει κάποια καλύτερη μέθοδος που να βρίσκει εφαρμογή στα δυναμικά προβλήματα.
- Χρησιμοποίηση honeycomb διαφορετικού είδους, με κυψέλες που δεν είναι κανονικά εξάγωνα, αλλά έχουν άλλα σχήματα και σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με αυτών της παρούσας εργασίας.
- Συμπερίληψη της όποιας μορφής απόσβεσης που μπορεί να συναντηθεί σε αυτού του είδους τα sandwich, είτε αυτή προκύπτει από πειραματικά δεδομένα είτε από αποτελέσματα κάποιου είδους μοντελοποίησης.
- Ενδελεχής μελέτη για την βελτιστοποίηση της πλάκας σε δυναμική συμπεριφορά, ώστε να παρθούν οι κατάλληλες διαστάσεις των δομικών συνιστωσών και να γίνει η καλύτερη επιλογή υλικών.

Για την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του πάνελ sandwich με αποκόλληση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μπορούν:

- Να πραγματοποιηθούν πειράματα για την δυναμική συμπεριφορά της πλάκας sandwich με αποκόλληση με τα δεδομένα που θα συλλεχθούν να τεθούν σε σύγκριση με τα αποτελέσματα μοντέλων που παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία, ώστε να ελεγχθεί κατά πόσο αυτά συμφωνούν μεταξύ τους και ενισχυθεί η εγκυρότητα της παρούσας ανάλυσης.
- Μοντελοποίηση της αποκόλλησης με άλλη μεθοδολογία από αυτή που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία και σύγκριση των αποτελεσμάτων τους.
- Παραμετρική μελέτη που εξετάζει την μεταβολή των δυναμικών χαρακτηριστικών συναρτήσεων της θέσης της ατέλειας.
- Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε και τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για το πέρασμα σε μη γραμμικές δυναμικές αναλύσεις, όπου γίνονται διαφορετικές μοντελοποιήσεις για την περιοχή της αποκόλλησης.
- Τα μη γραμμικά μοντέλα θα βοηθήσουν στη προσπάθεια του προσδιορισμού της έκτασης και του ρυθμού της διάδοσης της αποκόλλησης στην διεπιφάνεια της σύνδεσης των στρωμάτων. Σε αυτά μπορεί να υπάρχουν πλέον γραμμικά στοιχεία ελατηρίου, αλλά μη γραμμικές συνθήκες σύνδεσης και αποκόλλησης, που μπορεί να οριστούν με διάφορες μεθόδους. Η πιο χαρακτηριστική είναι η μέθοδος CZE (Cohesive Zone Element Method), που χρησιμοποιείται κατά κόρον για την μη γραμμική μελέτη της αποκόλλησης των σύνθετων υλικών στα

σύγχρονα εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων. Τα αποτελέσματα αυτών των μεθόδων μπορούν συγκριθούν με αυτά της παρούσας μελέτης.

- Τέλος, θα μπορούσε να γίνει μια προσπάθεια σχεδιασμού μιας δομής ενός υλικού όπου θα τοποθετείται μέσα στο sandwich και θα ειδοποιεί για την παρουσία βλάβης. Αυτό θα μπορούσε να είναι κατά κύριο λόγο ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό, η συμπεριφορά του οποίου θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί σε συνάρτηση με τη δομή του sandwich της οποίας θα αποτελεί μέρος. Αυτά τα έξυπνα υλικά έχουν βρει πλατιά εφαρμογή σε τέτοιου είδους εφαρμογές, αλλά η μοντελοποίηση τους σε σχέση με τις αλληλεπιδράσεις που έχουν σε αυτές δεν έχει μελετηθεί ακόμα πλήρως.

Βιβλιογραφία

- [1] Lorna J. Gibson, Michael F. Ashby. (1997). *Cellular Solids, Structure and Properties – Second Edition*. Cambridge University Press.
- [2] Tom Bitzer. (1997). *Honeycomb Technology. Materials, design, manufacturing, applications and testing*. Springer – Science + Business Media, B.V.
- [3] Haydn N.G. Wadley. (2006). *Multifunctional periodic cellular metals*. Philosophical Transactions of The Royal Society (Vol. 364, pp.31 – 68).
- [4] Kepeng Qiu. (2008). *Analysis and optimal design of lightweight sandwich structures and materials*. Thèse pour obtenir le grade de docteur. Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur et Microtechniques Université de Technologie Belfort-Montbéliard.
- [5] Lorna Gibson, Sardar Malek. (2015). *Effective Elastic Properties of Periodic Hexagonal Honeycombs*. Journal of Mechanics of Materials (Vol. 91, Part 1, pp.226-240).
- [6] Στέφανος Α. Παϊπέτης, Δημοσθένης Κ. Πολύζος. (2003). *Ταλαντώσεις και κύματα*. Εκδόσεις Ίων.
- [7] Tirupathi R. Chandrupatla, Ashok D. Belegundu. (2002). *Introduction to Finite Elements in Engineering (3rd Edition)*. Pearson.
- [8] Singiresu Rao. (2017). *The Finite Element Method in Engineering*. Butterworth-Heinemann.
- [9] Klaus-Jurgen Bathe. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- [10] Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai. (2003). *Composite Materials: Design and Applications*. CRC Press.
- [11] J.R. Vinson. (2001). *Sandwich Structures*. Applied Mechanics Review (Vol. 54, pp. 201 – 214).
- [12] Jack R. Vinson. (2005). *Sandwich Structures: Past, Present, and Future*. Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials (pp. 3 – 12).
- [13] K.F. Karlsson, B.T. Astrom. (1997). *Manufacturing and application of structural sandwich components – Part A*, Journal of Composites A (Vol.28, pp.97–111).
- [14] William D. Callister Jr., David G. Rethwisch. (2014). *Materials Science and Engineering: An Introduction, 9th Edition SI Version*, Wiley.
- [15] J. N. Reddy. (2003). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition*. CRC Press.
- [16] E. Roggero, M. Ceroccli. (1996). *Analysis and design of a new alternative for satellite platform*. 10th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites.
- [17] Xia Li-Juan, Jin Xian-Ding, Wan Yang-Bao. (2003). *The Equivalent Analysis of Honeycomb Sandwich Plates for Satellite Structure*. Scientific Journal of Shanghai Jiao Tong University (Vol.37, pp.999–1001).

- [18] S.K. Park, X.L. Gao. (2008). *Micromechanical Modeling of Honeycomb Structures Based on a Modified Couple Stress Theory*. Journal of Mechanics of Advanced Materials and Structures (Vol. 15, pp. 574 -593).
- [19] A. Boudjemai, R. Amri, A. Mankour, H. Salem, M.H. Bouanane, D. Boutchicha. (2011). *Modal analysis and testing of hexagonal honeycomb plates used for satellite structural design*. Journal of Materials and Design (Vol.35, pp. 266–275).
- [20] G. Sakar, F. C. Bolat. (2015). *The Free Vibration Analysis of Honeycomb Sandwich Beam Using 3D and Continuum Model*. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering (Vol.9, pp. 1077 – 1081).
- [21] Vyacheslav N. Burlayenko, Tomasz Sadowski. (2009). *Analysis of structural performance of sandwich plates with foam-filled aluminum hexagonal honeycomb core*. Journal of Computational Materials Science (Vol. 45, pp. 658–662).
- [22] Vyacheslav N. Burlayenko, Tomasz Sadowski. (2010). *Influence of skin/core debonding on free vibration behavior of foam and honeycomb cored sandwich plates*. International Journal of Non-Linear Mechanics (Vol. 45, pp. 959 – 968).
- [23] Y. Tanimoto, T. Nishiwaki, T. Shiomi, Z. Maekawa. (2001). *A numerical modeling for eigenvalue analysis of honeycomb sandwich panels*. Journal of Composite Interfaces (Vol. 8, pp. 393 – 402).
- [24] Okan Cinar, Merve Erdal, Altan Kayran. (2015). *Accurate equivalent models of sandwich laminates with honeycomb core and composite face sheets via optimization involving modal behavior*. Journal of Sandwich Structures and Materials (Volume 2015, pp.1 – 28).
- [25] V.N. Burlayenko, H. Altenbach, T. Sadowski. (2015). *An evaluation of displacement-based finite element models used for free vibration analysis of homogeneous and composite plates*. Journal of Sound and Vibration (Vol. 582, pp. 152 – 175).
- [26] Vyacheslav N. Burlayenko, Tomasz Sadowski. (2018). *Linear and Nonlinear Dynamic Analyses of Sandwich Panels with Face Sheet-to-Core Debonding*. Journal of Shock and Vibration (Volume 2018, pp. 92 -118).
- [27] ANSYS User Manual: Version 15.0. (2014). ANSYS Inc., Southpointe 275 Technology Drive, Canonsburg, PA, USA.
- [28] R.L. Ramkumar, S.V. Kulkarni, R.B. Pipes. (1979). *Free vibration frequencies of a delaminated beam*. 34th Annual Technical Conference of Reinforced Plastic/Composite Institute. The Society of the Plastics Industry.
- [29] T.S. Wang, Y.Y. Lin, J.A. Gibby. (1982). *Vibration of split beams*. Journal of Sound and Vibration. (Vol.84. pp.491–520).
- [30] P.M. Majumdar, S. Suryanarayn. (1988). *Flexural vibration of beams with delaminations*. Journal of Sound and Vibration (Vol.125, pp. 441–461).
- [31] J.J. Tracy, G.C. Pardo. (1989). *Effect of delamination on the natural frequencies of composite laminates*. Journal of Composite Materials (Vol.23 1200–1215).

- [32] L.H. Tenek, E.G. Henneke II, M.D. Gunzbhurger. (1993). *Vibration of delaminated composite plates and some applications to non-destructive testing*. Journal of Composite Structures (Vol. 23, pp. 253–262).
- [33] F. Ju, H.P. Lee, K.H. Lee. (1995). *Free vibration of composite plates with delamination around cutouts*. Journal of Composite Structures (Vol.31. pp. 177–183).
- [34] J.P. Hou, G. Jeronimidis. (1999). *Vibration of delaminated thin composite plates*. Journal of Composites Part B (Vol. 30, pp. 989–995).
- [35] H.S. Kim, A. Chattopadhyay, A. Ghoshal. (2003). *Characterization of delamination effect on composite laminates using a new generalized layerwise approach*. Journal of Computers and Structures (Vol. 81, pp.1555–1566).
- [36] R. Krueger. (1999). *A shell/3D modeling technique for delaminations in composite laminates*. Proceeding of American Society of Composites (pp. 843 – 852).
- [37] L.H. Yam, Z. Wie, Z. Cheng, W.O. Wong. (2004). *Numerical analysis of multi-layer composite plates with internal delamination*. Journal of Computers and Structures (Vol.82, pp. 627–637).
- [38] Y.W. Kwon, D.L. Lannamann. (2002). *Dynamic numerical modeling and simulation of interfacial cracks in sandwich structures for damage detection*. Journal of Sandwich Structures and Materials (Vol.4, pp.175–199).