



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΥΔΑΤΙΝΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΑΒΑΘΗ ΚΑΙ ΒΑΘΕΑ ΥΔΑΤΑ

Δανάη Γκαρτζονίκα

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2018

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική* που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 16/10/2018 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο **Βαθμίδα**

Θεόδωρος Χωρίκης Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)

Δημήτριος Νούτσος Καθηγητής

Μιχαήλ Ξένος Αναπληρωτής Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Δανάη Γκαρτζονίκα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, για την μεγάλη βοήθεια, τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Θ. Χωρίκη, καθώς και τους καθηγητές της τριμελούς επιτροπής μου Καθηγητή κ. Δ. Νούτσο και Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Μ. Ξένο. Τέλος ευχαριστώ την οικογένεια μου για την πολύτιμη στήριξη.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τη δημιουργία και διάδοση κυμάτων στο νερό. Τα υδάτινα κυματικά φαινόμενα περιγράφονται από ένα σύνολο οιονεί-γραμμικών, υπερβολικών εξισώσεων που διέπουν ροή ιδανικού ρευστού χωρίς τη χρήση ιξώδους και ονομάζονται εξισώσεις Euler. Αυτές οι εξισώσεις αντιπροσωπεύουν τη διατήρηση της μάζας (εξίσωση συνέχειας) και την ισορροπία ορμής και ενέργειας και μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes με μηδενικό ιξώδες και θερμική αγωγιμότητα. Λύσεις αυτών των εξισώσεων είναι δύσκολο να βρεθούν αναλυτικά καθώς είναι συζευγμένες και με ελεύθερο σύνορο (που σημαίνει ότι η λύση είναι επίσης μέρος των συνοριακών συνθηκών). Για το λόγο αυτό ο συνηθισμένος τρόπος μελέτης των λύσεων τους είναι με τη χρήση αριθμητικών τεχνικών.

Η δική μας προσέγγιση βασίζεται σε τεχνικές θεωρίας διαταραχών και πολλαπλών κλιμάκων που ελαττώνουν το σύστημα Euler, σε άλλες εξισώσεις ικανές να περιγράψουν τα φαινόμενα των υδάτινων κυμάτων και είναι, σημαντικά λιγότερο περίπλοκες ως προς τη μαθηματική τους περιγραφή. Με αυτόν τον τρόπο, λαμβάνονται υπόψη δύο ξεχωριστά όρια: ρηχά και βαθιά ύδατα. Η διάκριση μεταξύ βαθέων και ρηχών υδάτινων κυμάτων καθορίζεται από την αναλογία του βάθους των υδατων προς το μήκος κύματος. Δηλαδή με απλούς όρους, στα ρηχά ύδατα, τα κύματα αρχίζουν να επηρεάζονται από τον πυθμένα του ωκεανού, ενώ σε βαθιά νερά το βάθος του ωκεανού θεωρείται άπειρο. Στην πρώτη περίπτωση λαμβάνεται η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV), ενώ στη δεύτερη η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS).

Για κάθε εξίσωση παρέχουμε παραδείγματα από παρατηρήσιμα (πραγματικά) φαινόμενα που μπορούν να μοντελοποιηθούν με το ένα ή το άλλο σύστημα. Εξετάζουμε επίσης έναν ειδικό τύπο λύσης, το σολιτόνιο (ένα μοναδικό μοναχικό κύμα που διατηρεί το σχήμα και την ταχύτητά του κατά τη διάδοση ακόμη και μετά τη σύγκρουση με άλλα σολιτόνια) και παρέχουμε ένα διαταρακτικό σχήμα που συνδέει άμεσα τα δύο συστήματα και τις σχετικές λύσεις τους.

ABSTRACT

In the present thesis we study the equations that govern the generation and propagation of waves in water. Water wave phenomena are described by a set of quasi-linear hyperbolic equations governing adiabatic and inviscid flow termed the Euler equations. These equations represent equations of conservation of mass (continuity), and balance of momentum and energy, and can be seen as particular Navier-Stokes equations with zero viscosity and zero thermal conductivity. Solutions of these equations are difficult to obtain as they are coupled equations with a free boundary (meaning that the solution is also part of the boundary conditions). For this reason the usual way to study their solution is using numerical techniques.

Our approach will reduce the Euler system, using perturbation techniques and multiple scales methods, to other equations capable of describing water wave phenomena which are mathematically significantly less complex. In doing so, two distinct limits will be considered: shallow and deep waters. The distinction between deep and shallow water waves is determined by the ratio of the water's depth to the wavelength of the wave. In layman's terms, in shallow water, waves, begin to be affected by the ocean bottom whereas in deep water the depth of the ocean is taken to be infinite. In the first case, the Korteweg-de Vries (KdV) equation is obtained whereas in the latter the nonlinear Schrödinger (NLS) equation.

For each equation we provide examples from observable (real world) phenomena that can be modelled with one or the other system. We also briefly discuss a special type of solution, the soliton (a special solitary wave that maintains its shape and velocity during propagation even after it collides with other solitons), and provide a perturbative scheme to directly connect the two systems and their relative solutions.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | |
|---|-----------|
| Περίληψη | i |
| Abstract | ii |
| 1 Εισαγωγή | 3 |
| 1.1 Οι εξισώσεις των υδάτινων κυμάτων | 4 |
| 1.2 Γραμμικά Κύματα | 10 |
| 1.3 Αδιαστατοποίηση | 11 |
| 2 Αβαθή Ύδατα | 15 |
| 2.1 Εγκάρσιες μεταβολές | 15 |
| 2.2 Η εξίσωση Korteweg-de Vries | 19 |
| 2.3 Διαστατικές εξισώσεις | 22 |
| 2.4 Το σολιτόνιο της KdV | 24 |
| 2.5 Εφαρμογές της εξίσωσης Korteweg-de Vries | 27 |
| 3 Βαθέα Ύδατα | 33 |
| 3.1 Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger | 33 |
| 3.2 Τα σολιτόνια της NLS | 37 |
| 3.3 Εφαρμογές της εξίσωσης NLS | 40 |
| 4 Σύνδεση των εξισώσεων KdV και NLS | 43 |
| 4.1 Μια σημαντική διαφορά: Η αστάθεια διαμόρφωσης | 43 |

| | | |
|-----|--|----|
| 4.2 | Η εξαγωγή της NLS από την KdV | 46 |
| 4.3 | Η εξαγωγή της KdV από την NLS | 50 |
| 4.4 | Η σύνδεση των σολιτονικών λύσεων | 52 |
| 5 | Συμπεράσματα | 55 |
| | Βιβλιογραφία | 57 |

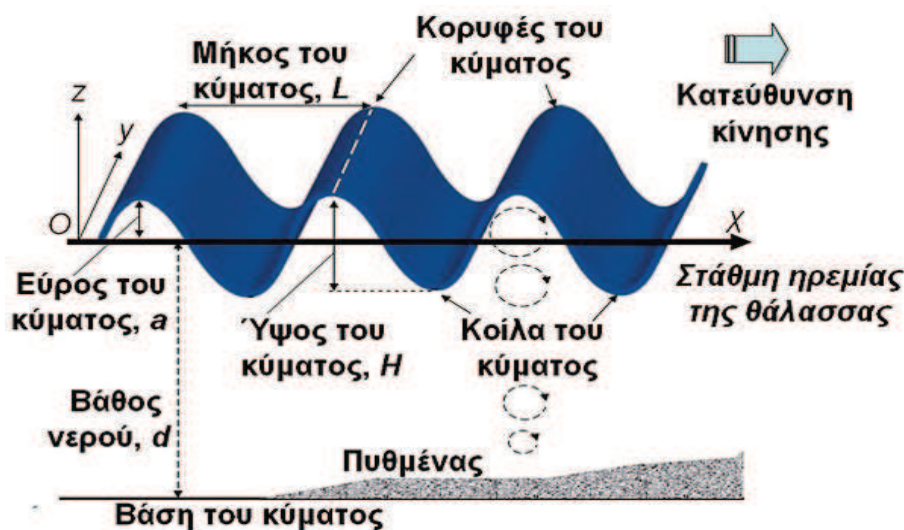
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κύμα ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο. Ο όρος κύμα (από το αρχαίο ελληνικό ρήμα κύω = φουσκώνομαι) χαρακτηρίζει τη μεταφορά της διαταραχής συνήθως διαμέσου ενός μέσου. Η μεταφορά αυτή (μετάδοση) γίνεται, στα υλικά μέσα, ως παλμική κίνηση μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου, όμως ορισμένα είδη κυμάτων, όπως τα ηλεκτρομαγνητικά, μπορούν να διαδίδονται και στο κενό.

Η διαταραχή αφορά ένα συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος, ανάλογα με το είδος του κύματος. Για παράδειγμα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα η διαταραχή αφορά την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Στα κύματα της θάλασσας αυτό που διαταράσσεται είναι το επιφανειακό στρώμα νερού. Υπάρχουν πολλά ακόμη είδη κυμάτων, όλα όμως έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: μεταφέρουν ενέργεια. Τα κύματα είναι περιοδικά φαινόμενα, δηλαδή επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και στην περίπτωση τους, αυτό που επαναλαμβάνεται, είναι η διαταραχή. Κάθε κύμα μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικό τρόπο από μια κυματική εξίσωση. Παρακάτω θα επικεντρωθούμε σε υδάτινα κύματα που εμφανίζονται στη θάλασσα.

Τα υδάτινα κύματα είναι επιφανειακά κύματα και στην ωκεανογραφία χαρακτηρίζονται ως αλλοιώσεις της επιφάνειας της θάλασσας. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος είναι το μήκος κύματος L , δηλαδή η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του κύματος, η περίοδος T του κύματος, δηλαδή το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μέχρι να περάσουν από το ίδιο σημείο δύο διαδοχικές κορυφές (ή δύο διαδοχικά κοίλα του κύματος), το εύρος a του κύματος που είναι η απόσταση ανάμεσα στην κορυφή του κύματος και στη στάθμη ηρεμίας της θάλασσας και το ύψος H του κύματος που είναι η κάθετη απόσταση ανάμεσα σε μία κορυφή και ένα κοίλο του κύματος. Ισχύει, προφανώς, ότι $H = 2a$. Τα μεγέθη αυτά περιγράφονται και στο ακόλουθο σχήμα, Σχ. 1.1.

Επίσης το κύμα εξαρτάται από το βάθος των υδάτων (την κάθετη απόσταση



Σχήμα 1.1: Παράμετροι περιγραφής ενός κύματος.

ανάμεσα στον πυθμένα και την στάθμη ηρεμίας της θάλασσας) και την κατεύθυνση κίνησης. Η σχέση αυτή παρέχει και την κατάλληλη συνθήκη ώστε να διαχωρίσουμε τις δύο περιπτώσεις που είναι το αντικείμενο της διατριβής: αβαθή και βαθιά ύδατα. Η διάκριση μεταξύ αυτών των κυμάτων δεν έχει καμία σχέση με το απόλυτο βάθος του νερού. Καθορίζεται από την αναλογία του βάθους του νερού προς το μήκος κύματος του κύματος. Πιο συγκεκριμένα, αν $d/L < 1/20$ είμαστε σε αβαθή, αν $1/20 < d/L < 1/2$ σε ενδιάμεσου (intermediate) βάθους, ενώ αν $d/L > 1/2$ σε βαθιά ύδατα. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις ο βυθός και η γεωμετρία του επηρεάζει τη μορφολογία του κύματος σημαντικά ενώ στα βαθιά ύδατα η γεωμετρία του πυθμένα μπορεί να αγνοηθεί. Για τον λόγο αυτό σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $d \rightarrow \infty$.

1.1 Οι εξισώσεις των υδάτινων κυμάτων

Ξεκινούμε τη μελέτη μας από την περιγραφή των βασικών εξισώσεων. Η μελέτη μας περιορίζεται σε κύματα $(1 + 1)$ διαστάσεων, δηλαδή μιας χωρικής και μιας χρονικής διάστασης. Συμβολίζουμε με $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, την πυκνότητα της μάζας του ρευστού, όπου $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ η ταχύτητα του ρευστού, P η πίεση, \mathbf{F} μια δοθείσα εξωτερική δύναμη, και \mathbf{v}_* το κινηματικό ιξώδες, το οποίο οφείλεται σε δυνάμεις τριβής. Με τη χρήση διανυσμάτων, τις σχετικές εξισώσεις της δυναμικής των

ρευστών, θα τις θεωρήσουμε ως εξής:

- διατήρηση της μάζας: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
- διατήρηση της ορμής: $\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{F} - \nabla P + v_* \Delta \mathbf{v}$,

όπου $\Delta \equiv \nabla^2$, είναι ο τελεστής Laplace ή Λαπλασιανή. Παραλείπουμε την εξίσωση ενέργειας, η οποία περιγράφει τη μεταβολή της θερμοκρασία (T) του ρευστού, έτσι μια εξίσωση κατάστασης, όπως $P = P(x, t)$, προστίθεται και με αυτή κλείνει το σύστημα εξισώσεων. Όταν $\rho = \rho_0$ είναι σταθερή, η πρώτη εξίσωση περιγράφει ένα ασυμπέστο ρευστό. Η εξίσωση $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, καλείται επίσης και εξίσωση απόκλισης. Η εξίσωση απόκλισης και η εξίσωση ορμής καλούνται συχνά και ασυμπέστες εξισώσεις Navier-Stokes. Οι εξισώσεις ενέργειας δεν είναι απαραίτητες ώστε να κλείσει αυτό το σύστημα εξισώσεων, οι οποίες σε τρεις διαστάσεις γίνονται τέσσερις εξισώσεις με τέσσερις αγνώστους: $\mathbf{v} = (u, v, w)$ και P .

Για να εξετάσουμε τα υδάτινα κύματα, θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ασυμπέστες εξισώσεις Navier-Stokes, σε σταθερή πυκνότητα $\rho = \rho_0$ και θα υποθέσουμε ένα ιδανικό ρευστό: δηλαδή ένα ρευστό με μηδενικό ιξώδες ($v_* = 0$). Έτσι, ένα ιδανικό, ασυμπέστο ρευστό, περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις Euler:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{F} - \nabla P). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η εξωτερική δύναμη που ασκείται είναι συντηρητική, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{F} = -\nabla U$, για κάποιο U . Μπορούμε, έτσι, να γράψουμε την εξίσωση ορμής ως

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{U + P}{\rho_0} \right).$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}),$$

έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{U + P}{\rho_0} \right). \quad (1.1)$$

Τώρα θα καθορίσουμε τον στροβιλισμό να είναι $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$, το οποίο είναι μία τοπική μέτρηση του βαθμού στον οποίο το ρευστό στροβιλίζεται· πιο συγκεκριμένα $\frac{1}{2} \|\nabla \times \mathbf{v}\|$ (όπου $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$) είναι η γωνιακή ταχύτητα ενός απειροστού στοιχείου του ρευστού. Παίρνοντας τον στροβιλισμό της τελευταίας εξίσωσης και σημειώνοντας ότι ο στροβιλισμός της κλίσης είναι μηδέν

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G}$, για τα διανύσματα \mathbf{F} και \mathbf{G} και ανακαλώντας ότι η απόκλιση του στροβιλισμού μηδενίζεται, φτάνουμε στο συμπέρασμα της αποκαλούμενης εξίσωσης στροβιλισμού:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}, \quad (1.2)$$

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

όπου εισάγουμε το συμβολισμό

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$$

για την αποκαλούμενη κυρτή ή υλική παράγωγο, η οποία κινείται με το ρευστό σωματίδιο ($\mathbf{v} = (u, v, w)$). Ως εκ τούτου $\boldsymbol{\omega} = 0$ είναι μία λύση· εξάλλου, από τη σχέση (1.3), αποδεικνύεται ότι εάν ο στροβιλισμός αρχικά είναι μηδέν, τότε, αν υπάρχει λύση, είναι μηδέν για όλες τις χρονικές στιγμές. Μια τέτοια ροή είναι αστρόβιλη. Από φυσικής άποψης, είναι ένα ιδανικό ρευστό, και δεν υπάρχει κανένας μηχανισμός που να προκαλέσει τοπική περιστροφή αφού το ρευστό είναι αρχικά αστρόβιλο. Συχνά είναι καλή προσέγγιση να θεωρούμε ότι το ρευστό μας είναι αστρόβιλο με τις επιπτώσεις του ιξώδους να εμφανίζονται μόνο σε λεπτές περιοχές της ροής του ρευστού, στο επονομαζόμενο οριακό στρώμα. Εδώ θα υποθέσουμε ότι η ροή είναι μη-περιστρεφόμενη, δηλαδή αστρόβιλη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι διευκόλυνση για εμάς να εισάγουμε το δυναμικό ταχύτητας $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Να σημειωθεί ότι η εξίσωση στροβιλισμού (1.3) ικανοποιείται προφανώς εφόσον:

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0.$$

Οι εξισώσεις Euler, μέσα στην περιοχή του ρευστού, μπορούν πλέον να απλοποιηθούν ως εξής:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi = 0,$$

που είναι η εξίσωση Laplace· η οποία πρέπει να ικανοποιείται εσωτερικά του ρευστού, $-h < z < \eta(x, y, t)$, όπου πλέον δηλώνουμε το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού, πάνω από το επίπεδο $z = 0$, να είναι $\eta(x, y, t)$ και ο πυθμένας του ρευστού να είναι $z = -h$. Σύντομα θα δώσουμε ένα σχετικό σχήμα και θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε τις συνοριακές συνθήκες που οδηγούν σε επιπλοκές, δηλαδή, μία άγνωστη ελεύθερη επιφάνεια και μη-γραμμικότητες. Θεωρούμε έναν επίπεδο, αδιαπέραστο πυθμένα στο σημείο $z = -h$, έτσι ώστε κανένα ρευστό να μην μπορεί να ρέει μέσα από αυτόν. Αυτό καταλήγει στη συνθήκη

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h,$$

όπου το w αναπαριστά την κατακόρυφη ταχύτητα. Στην ελεύθερη επιφάνεια $z = \eta(x, y, t)$ υπάρχουν δύο συνθήκες. Η πρώτη εξασφαλίζεται από τη σχέση (1.1). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το ∇ και το $\partial/\partial t$ εναλλάσσονται,

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{U+P}{\rho_0} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{U+P}{\rho_0} &= f(t), \end{aligned}$$

ανακαλώντας ότι $\mathbf{v} = (u, v, w)$ και $\|\mathbf{v}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2$. Εφόσον η φυσική ποσότητα είναι $\mathbf{v} = \nabla \phi$, μπορούμε να προσθέσουμε μια αυθαίρετη συνάρτηση του χρόνου (ανεξάρτητη του χώρου) στο ϕ ,

$$\phi \rightarrow \phi + \int_0^t f(t') dt',$$

ώστε να πάρουμε την αποκαλούμενη εξίσωση Bernoulli ή εξίσωση πίεσης,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{U+P}{\rho_0} = 0.$$

Προς το παρόν, θα αγνοήσουμε την επιφανειακή τάση και θα υποθέσουμε ότι η κυρίαρχη δύναμη είναι η δύναμη της πλευστότητας, $\mathbf{F} = -\nabla(\rho_0 g z)$, η οποία υποδηλώνει ότι $U = \rho_0 g z$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Για ευκολία, μηδενίζουμε την πίεση ($P = 0$) της ελεύθερης επιφάνειας, ώστε

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + g z = 0, \quad z = \eta(x, y, t)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια.

Η δεύτερη εξίσωση που κυριαρχεί στην ελεύθερη επιφάνεια, έχει παραχθεί από την υπόθεση ότι το ρευστό που βρίσκεται αρχικά στην ελεύθερη επιφάνεια, παραμένει εκεί. Από μαθηματική σκοπιά, υποδηλώνεται ότι αν $F = F(x, y, z, t)$, όπου το (x, y, z) είναι ένα σημείο της ελεύθερης επιφάνειας, τότε

$$\frac{DF}{Dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0.$$

Στην επιφάνεια, $F = z - \eta(x, y, z) = 0$. Τότε

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{D\eta}{Dt} \Rightarrow w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta,$$

χρησιμοποιήσαμε σαν $\mathbf{v} = \left(\frac{Dx}{Dt}, \frac{Dy}{Dt}, \frac{Dz}{Dt} \right) = (u, v, w)$. Με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας σαν $w = \partial\phi/\partial z$,

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (1.4)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια. Η σχέση (1.4) συχνά αναφέρεται ως η κινηματική συνθήκη. Πρέπει να σημειωθεί ότι για μία μοναδική επιφάνεια $z = \eta(x, y, t)$, η (1.4) γράφεται ως

$$\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial\eta}{\partial t},$$

για $\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\phi$ και $\mathbf{n} = (-\nabla\eta, 1)$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Έτσι, η ελεύθερη επιφάνεια $z = \eta(x, y, t)$ κινείται στη διεύθυνση της κανονικής ταχύτητας.

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις υδάτινων κυμάτων με ελεύθερη επιφάνεια και επίπεδο πυθμένα είναι οι παρακάτω:

- Ιδανική ροή κατά Euler:

$$\Delta\phi = 0, \quad -h < z < \eta(x, y, t). \quad (1.5)$$

- Καμία ροή μέσα από τον πυθμένα:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (1.6)$$

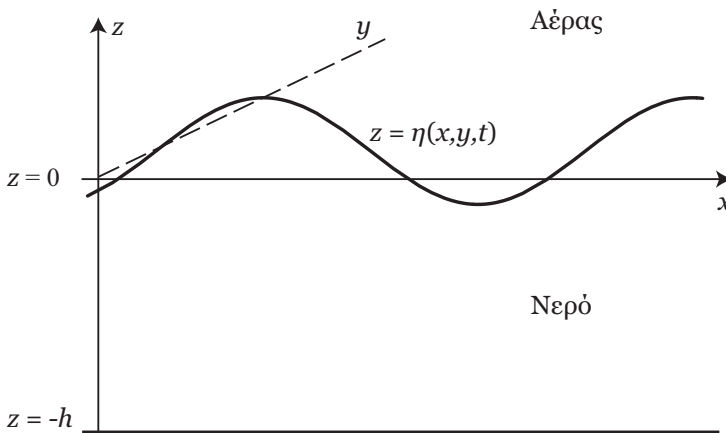
- Εξίσωση Bernoulli ή εξίσωση πίεσης:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + gz = 0, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (1.7)$$

- Κινηματική εξίσωση:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (1.8)$$

Αυτές οι τέσσερις εξισώσεις συγκροτούν τις εξισώσεις των υδάτινων κυμάτων με άγνωστες συναρτήσεις τις $\phi(x, y, z, t)$ και $\eta(x, y, z)$. Είναι ένα πρόβλημα ελεύθερου συνόρου. Σε αντίθεση με ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet ή Neumann, όπου το σύνορο είναι καθορισμένο και γνωστό, στα προβλήματα ελεύθερων συνόρων, μέρος της λύσης του προβλήματος είναι να καθοριστεί και η δυναμική του συνόρου. Αυτή η παράμετρος κάνει τη λύση των εξισώσεων υδάτινων κυμάτων ιδιαίτερα δύσκολη. Παρατηρούμε, επίσης, ότι αν μας δίνονταν ένα η , το οποίο θα ικανοποιούσε την εξίσωση Bernoulli της σχέσης (1.7), οι εναπομείναντες τρεις εξισώσεις, θα ικανοποιούσαν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Neumann. Η γεωμετρία του προβλήματος παρατηρείται στο παρακάτω γράφημα, Σχ. 1.2.



Σχήμα 1.2: Γεωμετρία των υδάτινων κυμάτων. Ο πυθμένας είναι σε σταθερή στάθμη $z = -h$, ενώ η ελεύθερη επιφάνεια $z = \eta(x, y, t)$, είναι υπό προσδιορισμό. Το αδιατάρακτο ρευστό είναι στο επίπεδο $z = 0$.

1.2 Γραμμικά Κύματα

Ξεκινάμε τη μελέτη του συστήματος Euler με το απλοποιημένο γραμμικό πρόβλημα, θεωρώντας $|\eta| \ll 1$ και $\|\nabla\phi\| \ll 1$. Οι δύο πρώτες εξισώσεις παραμένουν αμετάβλητες, εκτός ότι πλέον ικανοποιούνται στην γνωστή επιφάνεια $z = 0$. Οι δύο τελευταίες εξισώσεις, χρησιμοποιώντας

$$\begin{aligned}\phi(x, y, \eta, t) &= \phi(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0, t) + \dots, \\ &= \phi_0(x, y, t) + \eta \frac{\partial \phi_0}{\partial z}(x, y, t) + \dots,\end{aligned}$$

γίνονται

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -g\eta, \quad z = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \phi_0(x, y, t), \quad z = 0.\end{aligned}$$

Αναζητούμε λύσεις των εξισώσεων Euler της μορφής

$$\phi_s(x, y, z, t) = A(k, l, z, t)e^{(ikx+ily)},$$

δηλαδή, αναλύουμε τη λύση σε μορφή Fourier. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Laplace (1.5), έχουμε,

$$A_{zz} - (k^2 + l^2)A = 0.$$

Θέτοντας $\kappa^2 = k^2 + l^2$, η λύση δίνεται από

$$A = \tilde{A}(k, l, t) \cosh[\kappa(z + h)] + \tilde{B}(k, l, t) \sinh[\kappa(z + h)];$$

να σημειωθεί ότι μεταφέραμε τη λύση κατά h μονάδες, για να ικανοποιηθεί η συνοριακή συνθήκη του πυθμένα (1.6),

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad z = -h,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\tilde{B} = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια έχει τύπο της μορφής

$$\eta(x, y, t) = \tilde{\eta}(k, l, t)e^{(ikx+ily)},$$

τότε, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (1.7)-(1.8), οδηγούμαστε στις,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} \cosh(\kappa h) + g\tilde{\eta} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} - \kappa \sinh(\kappa h)\tilde{A} &= 0.\end{aligned}$$

Παίρνοντας την παράγωγο του χρόνου, της δεύτερης εξίσωσης, και αντικαθιστώντας στην πρώτη:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + g\kappa \tanh(\kappa h)\tilde{\eta} = 0.$$

Υποθέτοντας $\tilde{\eta}(k, l, t) = \tilde{\eta}(k, l, 0)e^{-i\omega t}$, βρίσκουμε τη σχέση διασποράς:

$$\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa h), \quad (1.9)$$

η οποία έχει δύο κλάδους καθώς $\kappa h \rightarrow \pm\infty$. Συνεπάγεται ότι η γενική λύση κατά Fourier, για μια ταχέως φθίνουσα λύση η , είναι

$$\eta = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \{ \tilde{\eta}_+ e^{i(kx+ly-\omega t)} + \tilde{\eta}_- e^{i(kx+ly+\omega t)} \} dkdl, \quad (1.10)$$

με $\tilde{\eta}_+, \tilde{\eta}_-$ να προσδιορίζονται από τα αρχικά δεδομένα, τα οποία είναι πραγματικά και φθίνουν επαρκώς γρήγορα στον χώρο.

Η σχέση διασποράς έχει αρκετά ενδιαφέροντα όρια. Η αποκαλούμενη σχέση διασποράς για βαθιά ύδατα, δηλαδή όταν $\kappa h \gg 1$, είναι

$$\omega^2 \simeq g|\kappa|,$$

ενώ για αβαθή ύδατα, δηλαδή όταν $\kappa h \ll 1$, είναι

$$\omega^2 \simeq g\kappa(\kappa h - \frac{(\kappa h)^3}{3} + \dots),$$

δηλαδή ο κυρίαρχος όρος στην σχέση διασποράς για αβαθή ύδατα είναι ο $\omega^2 \simeq g\kappa^2$.

1.3 Αδιαστατοποίηση

Για να αναλύσουμε τις πλήρεις εξισώσεις, θα πρέπει πρώτα να τις αδιαστατοποιήσουμε. Φέροντας αυτό εις πέρας, θα είναι ευκολότερο να συγκρίνουμε το

μέγεθος του κάθε όρου. Για παράδειγμα, μία ταχύτητα μπορεί να είναι μεγάλη εάν μετρηθεί σε μονάδες, παραδείγματος χάρη, microns ανά δευτερόλεπτο, αλλά σε μονάδες έτη φωτός ανά ώρα, θα ήταν μικρή. Μελετώντας, λοιπόν, αδιάστατες εξισώσεις, μπορούμε πιο εύκολα να αποφασίσουμε ποιοι όροι είναι αμελητέοι.

Για υδάτινα κύματα σε αβαθή ύδατα χρησιμοποιούμε την ακόλουθη αδιαστατοποίηση:

$$x = \lambda_x x', \quad y = \lambda_y y', \quad z = h z',$$

$$t = \frac{\lambda_x}{c_0} t', \quad \eta = a \eta', \quad \phi = \frac{\lambda_x g a}{c_0} \phi'$$

όπου $c_0 = \sqrt{gh}$ είναι η ταχύτητα που κινείται το κύμα στα αβαθή ύδατα και λ_x , λ_y είναι τα τυπικά μήκη κύματος με βάση τα αρχικά δεδομένα. Οι τονισμένες μεταβλητές είναι χωρίς διαστάσεις. Για την εξίσωση Laplace παίρνουμε:

$$\frac{1}{\lambda_x^2} \phi'_{x'x'} + \frac{1}{\lambda_y^2} \phi'_{y'y'} + \frac{1}{h^2} \phi'_{z'z'} = 0.$$

Στο εξής, και για λόγους απλότητας συμβολισμού, διαγράφουμε τους τόνους ούτως ώστε

$$\phi_{zz} + \left(\frac{h}{\lambda_x}\right)^2 \phi_{xx} + \left(\frac{h}{\lambda_y}\right)^2 \phi_{yy} = 0, \quad -1 < z < \frac{\alpha\eta}{h}.$$

Η εξίσωση πυθμένα μετατρέπεται

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -1,$$

η εξίσωση Bernoulli γράφεται

$$\phi_t + \frac{\alpha}{2h} \left[\phi_x^2 + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2 \phi_y^2 + \left(\frac{\lambda_x}{h}\right)^2 \phi_z^2 \right] + \eta = 0, \quad z = \frac{\alpha\eta}{h},$$

και τέλος η κινηματική συνθήκη γίνεται

$$\eta_t + \frac{\alpha}{h} \left[\phi_x \eta_x + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2 \phi_y \eta_y \right] = \left(\frac{\lambda_x}{h}\right)^2 \phi_z, \quad z = \frac{\alpha\eta}{h}.$$

Τώρα θα καθορίσουμε τις χωρίς διάσταση παραμέτρους $\epsilon \equiv \alpha/h$, $\delta \equiv \lambda_x/\lambda_y$ και $\mu \equiv h/\lambda_x$: ϵ είναι το μέτρο της μη-γραμμικότητας, ή του πλάτους, του υδάτινου κύματος· μ το μέτρο του βάθους σχετικά με το χαρακτηριστικό μήκος κύματος· και δ είναι το μέγεθος των εγκάρσιων μεταβολών. Περιληπτικά, οι αδιάστατες εξισώσεις για υδάτινα κύματα που διαδίδονται πάνω από επίπεδο πυθμένα είναι:

- Ιδανική ροή κατά Euler, εξίσωση Laplace:

$$\phi_{zz} + \mu^2 \phi_{xx} + \mu^2 \delta^2 \phi_{yy} = 0, \quad -1 < z < \epsilon\eta.$$

- Μηδενική ροή μέσω του πυθμένα:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -1.$$

- Εξίσωση Bernoulli ή εξίσωση πίεσης:

$$\phi_t + \frac{\epsilon}{2} [\phi_x^2 + \delta^2 \phi_y^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \phi_z^2] + \eta = 0, \quad z = \epsilon\eta.$$

- Κινηματική εξίσωση:

$$\mu^2 [\eta_t + \epsilon(\phi_x \eta_x + \delta^2 \phi_y \eta_y)] = \phi_z, \quad z = \epsilon\eta.$$

Σημειώνουμε ότι στις γραμμικές, ή μικρού πλάτους, περιπτώσεις $\epsilon \ll 1$, $\mu \sim O(1)$, και τότε οι παραπάνω εξισώσεις, αγνοώντας όρους $O(\epsilon)$, απλοποιούνται δραστηκά:

$$\begin{aligned} \phi_t + \eta &= 0, & z &= 0 \\ \mu^2 \eta_t &= \phi_z, & z &= 0. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΒΑΘΗ ΥΔΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την θεωρία των αβαθών υδάτων. Θα κάνουμε κάποιες υποθέσεις, όσο αναφορά το μέγεθος των ϵ , μ και δ , με σκοπό να εξάγουμε απλούστερες εξισώσεις που περιγράφουν κυματικά φαινόμενα σε αυτά τα βάθη:

- Θα θεωρήσουμε κύματα σε αβαθή ύδατα. Αυτό το σύστημα ανταποκρίνεται σε μικρά βάθη εξαρτώμενα από το μήκος κύματος του υδάτινου κύματος. Στο σύστημα των παραμέτρων μας, αυτό αντιστοιχεί σε: $\mu = h/\lambda_x \ll 1$.
- Θα θεωρήσουμε επίσης ότι το μήκος κύματος του υδάτινου κύματος, στην εγκάρσια κατεύθυνση, είναι πολύ μεγαλύτερο από ότι το μήκος κύματος στην κατεύθυνση της διάδοσης και έτσι: $\delta = \lambda_x/\lambda_y \ll 1$.
- Όπως και πριν στο γραμμικό σύστημα, υποθέτουμε μικρού πλάτους κύματα με $|\epsilon| = a/h \ll 1$.
- Θα κάνουμε την παραδοχή της μέγιστης ισορροπίας (οι μικροί όροι, δηλαδή μη-γραμμικότητα και διασπορά, είναι της ίδιας τάξης) θέτοντας $\epsilon = \mu^2$.

2.1 Εγκάρσιες μεταβολές

Αρχικά θα υποθέσουμε την ειδική περίπτωση των μη-εγκάρσιων υδάτινων κυμάτων και αργότερα θα τα ενσωματώσουμε στο μαθηματικό μοντέλο μας. Ας ξαναγράψουμε τις εξισώσεις του ρευστού, με βάση τις παραπάνω υποθέσεις και επιπλέον θεωρούμε διάδοση σε μία διάσταση, δηλαδή αφαιρούμε τους όρους, συμπεριλαμβανομένων και των αντίστοιχων παραγώγων, που είναι συναρτήσεις της

διάστασης y . Οι τέσσερις εξισώσεις, τότε, θα γίνουν

$$\varepsilon\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon\eta \quad (2.1)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -1 \quad (2.2)$$

$$\phi_t + \frac{\varepsilon}{2}(\phi_x^2 + \frac{1}{\varepsilon}\phi_z^2) + \eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(\eta_t + \varepsilon\phi_x\eta_x) = \phi_z, \quad z = \varepsilon\eta \quad (2.4)$$

Οι παραπάνω είναι συζευγμένες, μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις των ϕ και η με ελεύθερο σύνορο, και αποτελούν ένα μαθηματικό πρόβλημα για το οποίο είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί ακριβής λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε θεωρία διαταραχών, έτσι ώστε να αποκτήσουμε εξισώσεις, οι οποίες είναι περισσότερο διαχειρίσιμες. Θα αναπτύξουμε ασυμπτωτικά το ϕ ως εξής

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \dots$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω επέκταση στην (2.1), έχουμε

$$\phi_{0zz} + \varepsilon(\phi_{0xx} + \phi_{1zz}) + \varepsilon^2(\phi_{1xx} + \phi_{2zz}) + \dots = 0.$$

Εξισώνουμε όρους με ίδιες δυνάμεις του ε , βρίσκουμε ότι $\phi_{0zz} = 0$. Αυτό υποδηλώνει ότι $\phi_0 = A + B(z + 1)$, όπου τα A, B είναι συναρτήσεις των x, t . Αλλά η συνοριακή συνθήκη (2.2) οδηγεί στο $B = 0$. Επιπλέον η λύση του κυρίαρχου όρου για το δυναμικό ταχύτητας είναι ανεξάρτητη του z ,

$$\phi_0 = A(x, t)$$

Προχωρώντας στον επόμενης τάξης όρο του ε , διαπιστώνουμε ότι $\phi_{1zz} = -A_{xx}$. Ξανάχρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη (2.2),

$$\phi_1 = -A_{xx}(z + 1)^2/2.$$

Απορροφούμε τις ομογενείς λύσεις, οι οποίες εμφανίζονται σε υψηλότερης τάξης όρους, στον κυρίαρχο όρο (δηλαδή το ϕ_0). Ομοίως θα βρούμε και το $\phi_2 = A_{xxxx}(z + 1)^4/4!$. Έτσι θα πάρουμε την προσέγγιση

$$\phi = A - \frac{\varepsilon}{2}A_{xx}(z + 1)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4!}A_{xxxx}(z + 1)^4 + \dots, \quad (2.5)$$

η οποία ισχύει στο διάστημα $-1 < z < \varepsilon\eta$, και συγκεκριμένα, μπορεί να περιέχει και το ελεύθερο όριο $\varepsilon\eta$. Αυτό το ανάπτυγμα μπορεί να διεξαχθεί για κάθε όρο του ε , αλλά οι πρώτοι τρεις όροι είναι αρκετοί για τον σκοπό μας.

Αντικαθιστώντας την (2.5) στην εξίσωση Bernoulli (2.3) μαζί με το ελεύθερο σύνορο $z = \varepsilon\eta$, θα πάρουμε

$$\begin{aligned} A_t - \frac{\varepsilon}{2}A_{xxt}(1 + \varepsilon\eta)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4!}A_{xxxxt}(1 + \varepsilon\eta)^4 + \dots \\ + \frac{\varepsilon}{2}\left[A_x - \frac{\varepsilon}{2}A_{xxx}(1 + \varepsilon\eta)^2 + \dots\right]^2 \\ + \frac{1}{2}[-\varepsilon A_{xx}(1 + \varepsilon\eta) + \dots]^2 + \eta = 0. \end{aligned}$$

Κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$\eta = -A_t + \frac{\varepsilon}{2}(A_{xxt} - A_x^2) + \dots \quad (2.6)$$

Τώρα ας εφαρμόσουμε τα ίδια βήματα στην κινηματική εξίσωση (2.4). Αντικαθιστώντας στο ανάπτυγμά μας, για ϕ , και διατηρώντας τους δύο κατώτερης τάξης όρους, θα πάρουμε

$$\varepsilon\eta_t + \varepsilon^2\eta_x A_x = -\varepsilon A_{xx}(1 + \varepsilon\eta) + \frac{\varepsilon^2}{3!}A_{xxxx} + \dots \quad (2.7)$$

Θα θέλαμε να απεπλέξουμε το σύστημα των εξισώσεων που έχουν τα A και η . Από τη στιγμή που έχουμε μία έκφραση για το η σε όρους του A , αντικαθιστούμε την (2.6) στην (2.7) και διατηρώ μόνο τους δύο όρους χαμηλότερης τάξης:

$$\begin{aligned} \varepsilon\left[-A_{tt} + \frac{\varepsilon}{2}(A_{xxtt} - 2A_x A_{xt}) + \varepsilon^2(-A_{xt}A_x)\right] \\ = -\varepsilon A_{xx}(1 - \varepsilon A_t) + \frac{\varepsilon^2}{3!}A_{xxxx} + \dots \end{aligned}$$

Διαϊρώντας με ε και κρατώντας την $O(\varepsilon)$, θα πάρουμε

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon\left(\frac{A_{xxtt}}{2} - \frac{A_{xxxx}}{6} - 2A_x A_{xt} - A_{xx}A_t\right). \quad (2.8)$$

Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης η παραπάνω εξίσωση είναι ασυμπτωτικά η ίδια με την εξίσωση Boussinesq, η οποία παρήχθη το 1871. Μία άλλη μορφή, ίδιας ακρίβειας, $O(\varepsilon)$, παράγεται παρατηρώντας ότι στο αριστερό μέλος της (2.8) έχουμε $A_{tt} = A_{xx} + O(\varepsilon)$. Τότε, παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς x και αντικαθιστώντας τον όρο $A_{xxtt}/2$ στο μοντέλο θα έχουμε

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon\left(\frac{A_{xxxx}}{3} - 2A_x A_{xt} - A_{xx}A_t\right), \quad (2.9)$$

κάτι που είναι και πάλι ακρίβειας $O(\varepsilon)$.

Όπως και προηγούμενα, πρώτα θα αναφερθούμε στο γραμμικοποιημένο μοντέλο:

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} A_{xxtt} - \frac{1}{6} A_{xxxx} \right) \quad (2.10)$$

Υποθέτουμε μία λύση της μορφής $A(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ και αντικαθιστούμε στην (2.10), τότε

$$-\omega^2 + k^2 = \varepsilon \left(\frac{\omega^2 k^2}{2} - \frac{k^4}{6} \right) \Rightarrow \omega^2 = \frac{k^2 + \varepsilon k^4/6}{1 + \varepsilon k^2/2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\omega^2 > 0$ και για πολύ μεγάλα k , $\omega^2 \sim k^2/3$. Εάν αντικαταστήσουμε αυτό στην λύση του υδάτινου κύματος μας, τότε παρατηρούμε ότι $A(x, t) = \exp(i(kx \pm kt/\sqrt{3}))$ είναι φραγμένη για κάθε χρονική στιγμή.

Στρέφουμε και πάλι την προσοχή μας στα πλήρη μοντέλα Boussinesq. Έχουμε εξάγει μία προσεγγιστική εξίσωση για τον κυρίαρχο όρο στην επέκταση του δυναμικού της ταχύτητας ϕ (2.8) ή (2.9). Συνδυασμένη με την (2.5) καθορίζει το δυναμικό της ταχύτητας, με ακρίβεια $O(\varepsilon)$. Μπορούμε επιπλέον να καθορίσουμε μία εξίσωση για το πλάτος του υδάτινου κύματος, η . Πρώτα παραγωγίζουμε ως προς x την (2.6) και μετέπειτα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = A_x$ στις (2.6)-(2.7), για να βρούμε τις εξισώσεις:

$$\eta_x = -u_t + \frac{\varepsilon}{2}(u_{xxt} - 2uu_x) + \dots, \quad \text{Bernoulli} \quad (2.11)$$

και:

$$\eta_t = -u_x + \varepsilon(-\eta_x u - \eta u_x + \frac{u_{xxx}}{6}) + \dots \quad \text{κινηματική} \quad (2.12)$$

Αυτό ονομάζεται διπλό μοντέλο Boussinesq για τα η και u .

Από την άλλη πλευρά, διαφορίζοντας την (2.12) ως προς t , και την (2.11) ως προς x , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - \eta_{xx} = \varepsilon & (-\eta_{xt} u - \eta_x u_t - \eta_t u_x - \eta u_{xt} \\ & + \frac{u_{xxx} u_t}{6} - \frac{u_{xxx} u_x}{2} + \frac{(u^2)_{xx}}{2}) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $u_x = -\eta_t + O(\varepsilon)$ και $u_t = -\eta_x + O(\varepsilon)$ από την κινηματική εξίσωση Bernoulli και κάνουμε την αντικατάσταση $u =$

$-\int_{-\infty}^0 \eta_t dx'$. Έτσι βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - \eta_{xx} &= \varepsilon \left[\frac{1}{3} \eta_{xxxx} + \eta_{xt} \int_{-\infty}^0 \eta_t dx' + \eta_x^2 + \eta_t^2 \right. \\ &\quad \left. + \eta \eta_{xx} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_{-\infty}^0 \eta_t dx' \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon \left[\frac{\eta_{xxxx}}{3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_t \int_{-\infty}^0 \eta_t dx' + \eta \eta_x \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_{-\infty}^0 \eta_t dx' \right)^2 \right] \\ &= \varepsilon \left[\frac{\eta_{xxxx}}{3} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\eta^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^0 \eta_t dx' \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Η τελευταία εξίσωση (2.14) είναι το μοντέλο Boussinesq για το πλάτος του υδάτινου κύματος. Εάν παραλείψουμε τον ολοκληρωτικό όρο (το οποίο γίνεται με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό) η (2.14) μετατρέπεται στο μοντέλο Boussinesq (όπου $\eta = y_x$).

2.2 Η εξίσωση Korteweg-de Vries

Τώρα ας επιστρέψουμε στο μοντέλο Boussinesq για την εξίσωση του δυναμικού της ταχύτητας (2.9) και κάνουμε περαιτέρω ασυμπτωτική ανάλυση

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon \left(\frac{A_{xxxx}}{3} - 2A_x A_{xt} - A_{xx} A_t \right). \quad (2.15)$$

Αναπτύσσουμε και το A σε σειρά του ε :

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$$

και αντικαθιστώντας στην (2.15), παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_{0tt} + \varepsilon A_{1tt} - A_{0xx} - \varepsilon A_{1xx} + O(\varepsilon^2) &= \varepsilon \left(\frac{A_{0xxxx}}{3} \right. \\ &\quad \left. - 2A_{0x} A_{0xt} - A_{0xx} A_{0t} + O(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους κυρίαρχους όρους οδηγούμαστε στην κυματική εξίσωση:

$$A_{0tt} - A_{0xx} = 0,$$

η γενική λύση της οποίας είναι $A_0(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$, όπου F και G συναρτήσεις που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Εισάγουμε νέες μεταβλητές (πολλαπλές κλίμακες) ώστε, $A_0 = A_0(\xi, \zeta, T)$:

$$A_0 = F(\xi, T) + G(\zeta, T),$$

όπου

$$\xi = x - t, \quad \zeta = x + t, \quad T = \varepsilon t.$$

Οι καινούργιες μεταβλητές υποδηλώνουν

$$\partial_t = -\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon\partial_T, \quad \partial_x = \partial_\xi + \partial_\zeta.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τους διαφορικούς συντελεστές στην (2.15) οδηγούμαστε

$$\begin{aligned} & ((-\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon\partial_T)^2 - (\partial_\xi + \partial_\zeta)^2)A = \\ & \varepsilon\left(\frac{(\partial_\xi + \partial_\zeta)^4}{3}A - 2(\partial_\xi + \partial_\zeta)A(\partial_\xi + \partial_\zeta)(-\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon\partial_T)A \right. \\ & \left. - (\partial_\xi + \partial_\zeta)^2A(-\partial_\xi + \partial_\zeta + \varepsilon\partial_T)A\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Αρχικά θα δουλέψουμε μόνο με τα υδάτινα κύματα της δεξιάς κατεύθυνσης. Έτσι $A_0 = F(\xi, T)$. Αντικαθιστούμε

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$$

στην (2.16) και κρατούμε όλους τους όρους τάξης $O(\varepsilon)$ που θα πάρουμε

$$-4A_{1\xi\xi} = 2F_{\xi T} + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi\xi} + 3F_{\xi\xi}F_{\xi\xi}.$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί και να δώσει

$$A_1 \sim -\frac{1}{4}(2F_T + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}F_{\xi\xi}^2)\zeta + \dots,$$

ας θυμηθούμε ότι απορροφούμε ομογενής όρους στην λύση A_0 . Με σκοπό να αφαιρέσουμε αλγεβρικά αυξανόμενους όρους (που προκύπτουν από τις γραμμικά

εξαρτημένες λύσεις του μη ομογενούς μέρους της εξίσωσης), πιο συγκεκριμένα τον όρο ζ , απαιτούμε ότι

$$2F_T + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}F_{\xi}^2 = 0;$$

ή, εάν πάρουμε την παράγωγο, ως προς ξ , και κάνουμε την αντικατάσταση $U = F_{\xi}$, τότε παίρνουμε την εξίσωση Korteweg-de Vries

$$2U_T + \frac{1}{3}U_{\xi\xi\xi} + 3UU_{\xi} = 0.$$

Συνεχίζουμε με την πιο γενική περίπτωση της κίνησης υδάτινων κυμάτων προς τα αριστερά και δεξιά· ως εκ τούτου $A_0 = F(\xi, T) + G(\zeta, T)$, και παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για το A_1

$$\begin{aligned} -4A_{1\xi\zeta} &= 2(F_{\xi T} - G_{\zeta T}) + \frac{1}{3}(F_{\xi\xi\xi\xi} + G_{\zeta\zeta\zeta\zeta}) \\ &\quad + 3(F_{\xi}F_{\xi\xi} + \frac{1}{3}F_{\xi\xi}G_{\zeta} - \frac{1}{3}G_{\zeta\zeta}F_{\xi} - G_{\zeta}G_{\zeta\zeta}). \end{aligned}$$

Όταν ολοκληρώσουμε αυτή την έκφραση, οι αλγεβρικοί όροι εγείρονται από τα μέρη τα οποία είναι συναρτήσεις των ξ ή ζ ξεχωριστά, όχι ταυτόχρονα. Η αφαίρεση των όρων αυτών συνεπάγεται τις δύο ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{aligned} 2F_{\xi T} + \frac{1}{3}F_{\xi\xi\xi\xi} + 3F_{\xi\xi}F_{\xi} &= 0 \\ -2G_{\zeta T} + \frac{1}{3}G_{\zeta\zeta\zeta\zeta} - 3G_{\zeta\zeta}G_{\zeta} &= 0, \end{aligned}$$

οι οποίες είναι δύο μη συζευγμένες KdV εξισώσεις. Απλοποιώντας ελάχιστα τα πράγματα, μπορούμε να ξαναγράψουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις με όρους $U = F_{\xi}$ και $V = G_{\zeta}$:

$$2U_T + \frac{1}{3}U_{\xi\xi\xi} + 3UU_{\xi} = 0 \quad (2.17)$$

$$2V_T - \frac{1}{3}V_{\zeta\zeta\zeta} + 3VV_{\zeta} = 0. \quad (2.18)$$

Η λύση A_1 μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας τους εναπομείναντες όρους. Από τη στιγμή που ενδιαφερόμαστε μόνο για την ασυμπτωτική λύση του κυρίαρχου όρου, δεν χρειάζεται να επιλύσουμε την A_1 .

Ως επί το πλείστον έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα: η ασυμπτωτική ανάλυση των ρευστών κάτω από συνθήκες αβαθών υδάτων, παράγουν δύο Korteweg-de

Υπάρχει εξισώσεις, τις (2.17) και (2.18), για τα δεξιά και αριστερά οδεύοντα υδάτινα κύματα. Δίνοντας ραγδαία φθίνουσες αρχικές συνθήκες, μπορούμε να επιλύσουμε αυτές τις δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) για U και V , με τον μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης (Inverse Scattering Transform (IST)). Κρατώντας μόνο τους κυρίαρχους όρους, έχουμε μία προσεγγιστική λύση για το δυναμικό της ταχύτητας

$$\begin{aligned}\phi(x, z, t) &\sim A_0(x, t) = F(x - t, \varepsilon t) + G(x + t, \varepsilon t) \\ &= \int_{-\infty}^{x-t} U(\xi', \varepsilon t) d\xi' + \int_{-\infty}^{x+t} V(\zeta', \varepsilon t) d\zeta',\end{aligned}$$

ή για την ταχύτητα

$$u = \phi_x = F_x + G_x + \dots = U + V + \dots$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Bernoulli (2.6), έχουμε μία προσεγγιστική λύση για το πλάτος του υδάτινου κύματος του ελεύθερου ορίου

$$\eta(x, t) \sim -A_{0t}(x, t) \sim F_\xi(\xi, t) - G_\zeta(\zeta, t) = U(x - t, \varepsilon t) - V(x + t, \varepsilon t).$$

Έτσι το πλάτος του υδάτινου κύματος η , έχει αριστερά και δεξιά κινούμενα υδάτινα κύματα, τα οποία ικανοποιούν την KdV εξίσωση. Μπορούμε επίσης να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε μεγαλύτερης τάξης όρους και διορθώσεις για την εξίσωση αλλά αυτό είναι εκτός του σκοπού αυτής της εργασίας.

2.3 Διαστατικές εξισώσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο, μετατρέψαμε τις εξισώσεις των ρευστών σε αδιάστατες, με σκοπό να εξαλείψουμε τους μικρούς όρους της προσέγγισης μας σε αβαθή ύδατα. Από τη στιγμή που έχουμε τις εξισώσεις (2.17) και (2.18) θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τα αποτελέσματα και σε διαστατικές μονάδες. Θα μετατρέψουμε την (2.17) σε μία εξίσωση με διαστάσεις.

Ανακαλούμε ότι έχουμε κάνει δύο αλλαγές μεταβλητών. Πρώτα αλλάξαμε τις συντεταγμένες x, t, η σε αρχικές συντεταγμένες x', t', η' (παρόλο που άμεσα αφαιρέσαμε τους τόνους). Μετά αντικαταστήσαμε τους ανεξάρτητους συντελεστές $\xi = x' - t'$ και $T = \varepsilon t$. Αρχικά θα εξαλείψουμε την εξάρτηση από τα ξ, T . Ας

σημειωθεί ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'} U(\xi, T) &= -U_\xi + \varepsilon U_T \\ \frac{\partial}{\partial x'} U(\xi, T) &= U_\xi.\end{aligned}$$

Από τις δύο παραπάνω εκφράσεις συνεπάγεται ότι $\partial_T = (\partial_{t'} + \partial_{x'})/\varepsilon$. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (2.17), παίρνουμε

$$2(U_{t'} + U_{x'}) + \varepsilon\left(\frac{1}{3}U_{x'x'x'} + 3UU_{x'}\right) = 0.$$

Εάν αμελήσουμε τα αριστερός κινούμενα υδάτινα κύματα, V , τότε έχουμε $\eta' \sim U$. Ανακαλώντας την αρχική μας αδιαστατοποίηση $x = \lambda_x x'$, $t = \frac{\lambda_x}{c_0} t'$, $\varepsilon = \alpha/h$, $\eta = \alpha\eta'$, χρησιμοποιούμε τα $\partial_{x'} = \lambda_x \partial_x$ και $\partial_{t'} = \frac{\lambda_x}{c_0} \partial_t$ ώστε να μετατρέψουμε την προηγούμενη έκφραση του U σε

$$\begin{aligned}2\left(\frac{\lambda_x}{c_0} \frac{\eta_t}{\alpha} + \lambda_x \frac{\eta_x}{\alpha}\right) + \varepsilon\left(\frac{\lambda_x^3}{3\alpha} \eta_{xxx} + \frac{3\lambda_x}{\alpha^2} \eta\eta_x\right) &= 0 \Rightarrow \\ 2\left(\frac{\eta_t}{c_0} + \eta_x\right) + \frac{\alpha}{h}\left(\frac{\lambda_x^2}{3} \eta_{xxx} + \frac{3}{\alpha} \eta\eta_x\right) &= 0.\end{aligned}$$

Από τη μέγιστη ισορροπία, χρησιμοποιήσαμε $\varepsilon = \alpha/h = (h/\lambda_x)^2$ ώστε να μπορέσουμε να απλοποιήσουμε την αδιάστατη εξίσωση KdV (2.17) σε μορφή με διαστάσεις

$$\frac{1}{c_0} \eta_t + \eta_x + \frac{h^2}{6} \eta_{xxx} + \frac{3}{2h} \eta\eta_x = 0, \quad (2.19)$$

όπου $c_0 = \sqrt{gh}$, g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και h το βάθος των υδάτων. Αυτή η εξίσωση προήλθε από τους Diederik Korteweg και Gustav de Vries το 1885.

Και πάλι θα ασχοληθούμε πρώτα με το γραμμικό κομμάτι της (2.19)

$$\frac{1}{c_0} \eta_t + \eta_x + \frac{h^2}{6} \eta_{xxx} = 0.$$

Θα ερμηνεύσουμε την εξίσωση με όρους από τη σχέση διασποράς των υδάτινων κυμάτων, σημειώνοντας ότι $\kappa^2 = k^2 + l^2$ με $l = 0$ ώστε το $\kappa = k$:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) = gk[kh - \frac{1}{3}(kh)^3 + \dots].$$

Για υδάτινα κύματα σε αβαθή ύδατα, $kh \ll 1$ έτσι αν διατηρήσουμε μόνο τον κυρίαρχο όρο στο ανάπτυγμα της σειράς Taylor της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$$\omega = \pm k\sqrt{gh} = \pm kc_0.$$

Αυτή είναι η σχέση διασποράς για τη γραμμική εξίσωση του υδάτινου κύματος και c_0 είναι η ταχύτητα του κύματος. Διατηρώντας τον επόμενο όρο στη σειρά Taylor του $\tanh(kh)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\omega &\sim \pm k\sqrt{gh\left(1 - \frac{1}{3}(kh)^2\right)} \\ &\sim \pm k\sqrt{gh}\left(1 - \frac{1}{6}(kh)^2\right) \\ &= \pm(kc_0 - \frac{1}{6}c_0h^2k^3).\end{aligned}$$

Τώρα, ενδιαφερόμαστε να δούμε τι αποτέλεσμα θα μας δώσει η γραμμική εξίσωση για την παραπάνω σχέση διασποράς. Παίρνοντας το θετικό μέρος της ρίζας, αντικαθιστώντας το ω με $-i\partial_x$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}i\partial_t\eta &= c_0(-i\partial_x)\eta - \frac{1}{6}c_0h^2(-i\partial_x)^3\eta \Rightarrow \\ \frac{1}{c_0}\eta_t + \eta_x + \frac{h^2}{6}\eta_{xxx} &= 0.\end{aligned}$$

Αυτή είναι ακριβώς η γραμμική (με διαστάσεις) εξίσωση KdV (2.19).

2.4 Το σολιτόνιο της KdV

Στο εξής θα γράφουμε την εξίσωση KdV σε αδιάστατη μορφή ως

$$u_t \pm uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.20)$$

Μία ιδιαίτερος σημαντική λύση της εξίσωσης, είναι το λεγόμενο σολιτόνιο που προκύπτει ως λύση οδευόντος κύματος. Δηλαδή στην εξίσωση (2.20) θέτουμε $\xi = x - ct$ ώστε:

$$\begin{aligned}-cu_\xi \pm uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} &= 0 \Rightarrow \\ -cu_\xi \pm \frac{1}{2}(u^2)_\xi + u_{\xi\xi\xi} &= 0\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε μια φορά και απαιτούμε η λύση $u = u(\xi)$ και όλες οι παράγωγοι της να ικανοποιούν μηδενικές συνοριακές συνθήκες καθώς $|\xi| \rightarrow \infty$ ώστε

$$-cu \pm \frac{1}{2}u^2 + u_{\xi\xi} = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε με u_{ξ} και ολοκληρώνουμε ακόμα μια φορά (ίδιες συνοριακές συνθήκες μηδενίζουν οποιεσδήποτε σταθερές ολοκλήρωσης) και τότε:

$$\begin{aligned} -c\frac{u^2}{2} \pm \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}(u_{\xi})^2 &= 0 \Rightarrow \\ (u_{\xi})^2 &= cu^2 \mp \frac{1}{3}u^3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Η εξίσωση (2.21) είναι πρώτου βαθμού και μπορεί να λυθεί με χωρισμό μεταβλητών. Η γενική της λύση είναι (ικανοποιώντας μηδενικές συνοριακές συνθήκες):

$$u = \pm 12\eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta\xi), \quad c = 4\eta^2$$

Τελικά

$$u(x, t) = \pm 12\eta^2 \operatorname{sech}^2 [\eta(x - 4\eta^2 t)]$$

θέτοντας $\eta = \frac{\beta}{2}$ έχουμε τελικά

$$u(x, t) = \pm 3\beta^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\beta}{2}(x - \beta^2 t - x_0) \right]$$

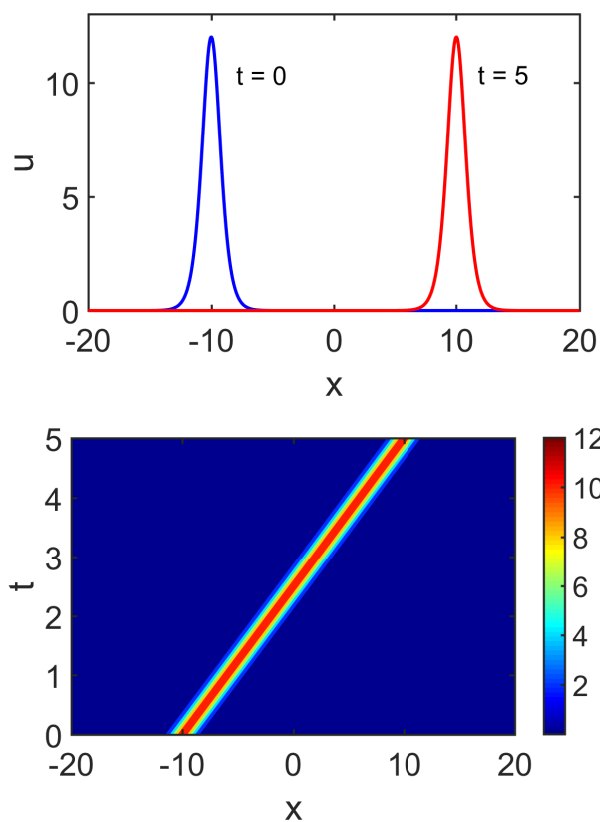
Ο όρος x_0 προκύπτει διότι η εξίσωση (2.20) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό μεταφοράς $x \rightarrow x - x_0$. Μια ιδιαίτερα σημαντική λύση της εξίσωσης, το λεγόμενο σολιτόνιο, δίνεται από

$$u(x, t) = \pm 3\beta^2 \operatorname{sech}^2[\beta/2(x - 8\beta^2 t - x_0)]. \quad (2.22)$$

όπου β μια ελεύθερη πραγματική παράμετρος. Να σημειωθεί ότι η ταχύτητα του κύματος είναι $c = \beta^2$, και σχετίζεται άμεσα με το πλάτος του κύματος (υψηλότερα κύματα οδεύουν με μεγαλύτερες ταχύτητες). Επίσης, το πρόσημο ‘+’ ανταποκρίνεται σε θετικό ανυψωτικό κύμα που ταξιδεύει στην επιφάνεια του, και αντιστοιχεί στο πρώτο σολιτόνιο που παρατηρήθηκε ιστορικά από τον Russell στα κανάλια του Εδιμβούργου. Το πρόσημο ‘-’ ανταποκρίνεται σε ένα βύθισμα της επιφάνειας των υδάτων.

Ο μαθηματικός και φυσικός ορισμός του σολιτονίου είναι ένα αυτο-ενισχυόμενο, μονήρες, οδεύων κύμα, το οποίο διατηρεί το σχήμα του καθώς διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα. Τρία βασικά χαρακτηριστικά των σολιτονίων είναι ότι διατηρούν τη

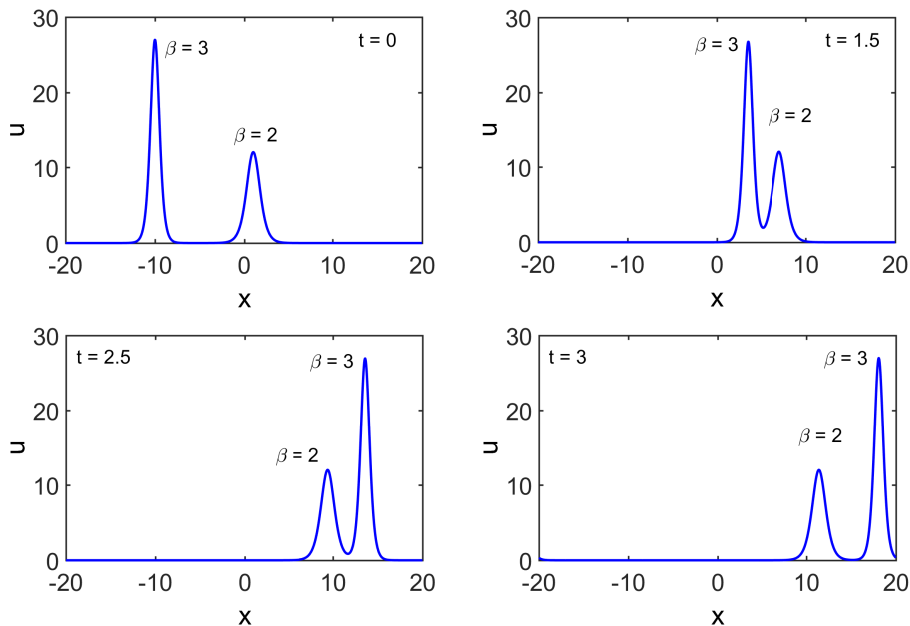
μορφή τους, είναι εντοπισμένα σε μία περιοχή και αλληλεπιδρούν με άλλα σολιτόνια παραμένοντας από τη σύγκρουση αμετάβλητα, εκτός μιας τετριμμένης αλλαγής στη φάση τους. Ελέγχουμε, λοιπόν, και αριθμητικά αυτούς τους ορισμούς για τα σολιτόνια της KdV όπως δίνονται από τη σχέση (2.22). Στο Σχ. 2.1, τη δυναμική ενός σολιτονίου.



Σχήμα 2.1: Η δυναμική ενός σολιτονίου της KdV για $\beta = 2$.

Παρατηρούμε από το σχήμα ότι το σολιτόνιο είναι όντως εντοπισμένο και διατηρεί το σχήμα του (επάνω σχήμα) και την ταχύτητά του (κάτω σχήμα). Πιο ενδιαφέρουσα όμως είναι η διαδικασία αλληλεπίδρασης, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.2.

Εδώ φαίνεται καθαρά ότι το ψηλότερο σολιτόνιο, που αναμένεται να έχει και μεγαλύτερη ταχύτητα (θυμηθείτε $c = \beta^2$), προσπερνά σύντομα το κοντύτερο και βραδύτερο, ενώ μετά την αλληλεπίδραση και τα δύο διατηρούν σχήμα και



Σχήμα 2.2: Η αλληλεπίδραση δύο τυπικών σολιτονίων της KdV.

ταχύτητα παραμένοντας ανεπηρέαστα από τη σύγκρουση.

2.5 Εφαρμογές της εξίσωσης Korteweg-de Vries

Η εξίσωση KdV, πέρα από τη φυσική και μαθηματική της σημασία, έχει και ποικίλες εφαρμογές στην φύση. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε μια ι-διαίτερως ενδιαφέρουσα εφαρμογή της εξίσωσης στα υδάτινα κύματα απότομου μετώπου, τα λεγόμενα bore waves. Η ετοιμολογία της λέξης bore προέρχεται από την Αγγλοσαξονική διάλεκτο, από την λέξη *bára*, η οποία σημαίνει κύμα ή φύσκιωμα!

Τα υδάτινα κύματα απότομου μετώπου (bore waves) ή αλλιώς παλιρροιακά υδάτινα κύματα (tidal waves), είναι παλιρροιακά φαινόμενα στα οποία η εισερχόμενη παλίρροια δημιουργεί ένα υδάτινο κύμα (ή και κύματα), το οποίο ταξιδεύει σε ένα ποτάμι ή σε κάποιο στενό όρμο αντίθετα από την κατεύθυνση των νερών του ποταμού ή του όρμου. Από μαθηματικής σκοπιάς, τα υδάτινα κύματα απότομου μετώπου, ικανοποιούν την εξίσωση KdV (τα χαρακτηριστικά μεγέθη τους αντιστοιχούν στις παραδοχές των αβαθών υδάτων που κάναμε), που συνοδεύεται από

μια ασυνεχή ή απότομη μεταβολή αρχική συνθήκη.

Τα υδάτινα κύματα απότομου μετώπου συναντώνται σε ποτάμια, λίμνες και ακτές. Συνήθως σε περιοχές με ισχυρές παλιρροιακές διακυμάνσεις (περισσότερο από έξι μέτρα μεταξύ υψηλών και χαμηλών υδάτων) και όπου οι εισερχόμενες παλιρροίες είναι διασκορπισμένες σε κάποιο αβαθές στενό ποτάμι ή λίμνη δια μέσου ενός ευρύ όρμου. Έχουν χωνοειδές σχήμα που όχι μόνο αυξάνει την παλιρροϊκή διακύμανση, αλλά επίσης μπορεί να μειώσει τη διάρκεια της παλιρροϊκής πλημμυρίδας, σε σημείο που να εμφανίζεται σαν μια ξαφνική και αναπάντεχη αύξηση της στάθμης του ύδατος. Ένα υδάτινο κύμα απότομου μετώπου λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της παλιρροιακής πλημμύρας και ποτέ κατά τη διάρκεια της άμπωτης. Μπορεί, επίσης, να έχει ποικίλες μορφές, από ένα απλό υδροδυναμικό άλμα μέχρι υδάτινα κύματα που παρουσιάζουν λείο αρχικό μέτωπο και ακολουθούνται από δευτερεύοντα υδάτινα κύματα. Μεγάλα υδάτινα κύματα απότομου μετώπου μπορεί να είναι επικίνδυνα για πλοία, αλλά ιδανικά για surf στον ποταμό. Μια χαρακτηριστική εικόνα ενός υδάτινου κύματος απότομου μετώπου δίνεται στο Σχ. 2.3.



Σχήμα 2.3: Υδάτινο κύμα απότομου μετώπου στην Αλάσκα!

Παρατηρούμε στην εικόνα το χωνοειδές σχήμα του κύματος που έχει δημιουργηθεί. Επίσης είναι εμφανείς οι περιβάλλουσες, όπως και η διάδοση του αντίθετα στη φορά του ποταμού. Δεν χάνει το σχήμα του και τη φορά του. Τέλος μπορούμε να παρατηρήσουμε και τα δευτερεύοντα κύματα που δημιουργούνται έξω από τις περιβάλλουσες.

Δύο χαρακτηριστικά των υδάτινων κυμάτων απότομου μετώπου είναι η έντονη βιαιότητα και ο ταραχώδης συγκερασμός, τα οποία δημιουργούνται κατά τη διάδοση του κύματος, όπως επίσης και ο βροντερός ήχος. Οι παρατηρήσεις όσο αφορά την ταχύτητα, υποδεικνύουν μία ταχεία επιβράδυνση της ροής, η οποία σχετίζεται με το πέρασμα του υδάτινου κύματος απότομου μετώπου όπως επίσης και με τις μεγάλες διακυμάνσεις της ταχύτητας. Επίσης ο ήχος που προκαλείται μοιάζει με δυνατό βρυχηθμό και μπορεί να ταξιδέψει σε μεγάλες αποστάσεις, εξαιτίας των χαμηλών συχνοτήτων ήχου που εκπέμπει.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι το φαινόμενο όντως μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση KdV, λύνουμε αριθμητικά την εξίσωση χρησιμοποιώντας ως αρχική συνθήκη

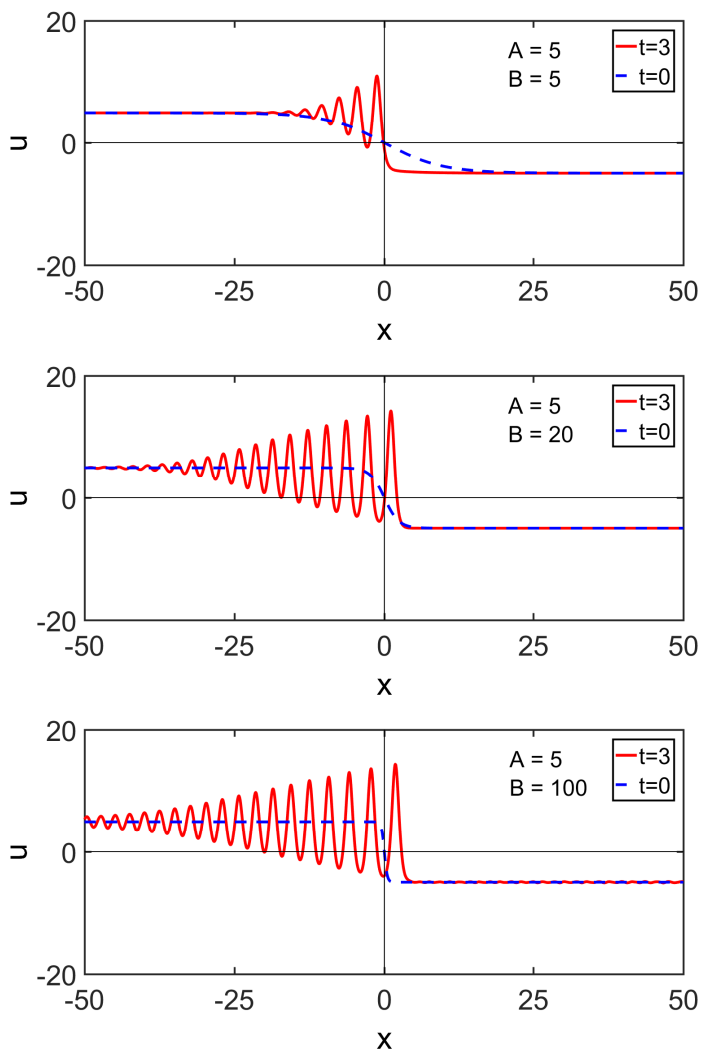
$$u(x, 0) = -A \tanh(Bx)$$

που βάση της παραμέτρου B μπορεί να γίνει λιγότερο ή περισσότερο απότομη στο $x = 0$ προσομοιάζοντας την ξαφνική έλευση της παλίρροιας. Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε είναι φασματικής ακρίβειας στη χωρική μεταβλητή, ώστε να μπορεί να επιλύσει προβλήματα με απότομες μεταβολές και τέταρτης τάξης implicit Runge Kutta στο χρόνο.

Θέλουμε να δούμε την επίδραση που έχει στη διάδοση του κύματος τόσο το μέγεθος της αρχικής συνθήκης, το πλάτος A καθώς και η κλίση της που περιγράφεται από την παράμετρο B . Σε κάθε περίπτωση μεταβάλλουμε είτε τη μια είτε την άλλη παράμετρο για το ίδιο χρονικό διάστημα. Ξεκινούμε από τις μεταβολές στο πλάτος, που φαίνονται στο Σχ. 2.4:

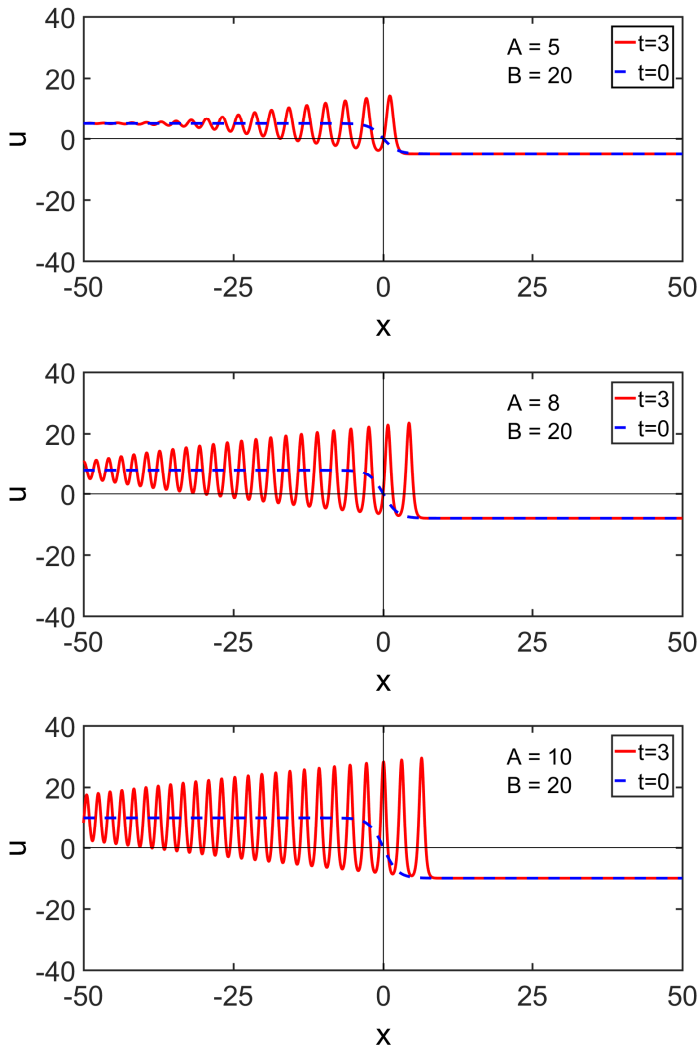
Παρατηρούμε ότι υπάρχει ευθεία αναλογία μεταξύ της κλίσης και της δημιουργίας τέτοιων κυμάτων. Δηλαδή, είναι εμφανές ότι όσο πιο απότομη η κλίση (η αρχική ασυνέχεια) τόσο πιο άμεσο είναι το φαινόμενο. Τα κύματα εμφανίζονται, σε μεγαλύτερες αρχικές κλίσεις, περισσότερο σε αριθμό και μεγαλύτερα σε πλάτος. Επίσης διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Τίδιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για την αύξηση του αρχικού πλάτους, μόνο που το φαινόμενο είναι ακόμα πιο άμεσο και οξύ όσο το αρχικό πλάτος αυξάνει. Αυτά τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ. 2.5.



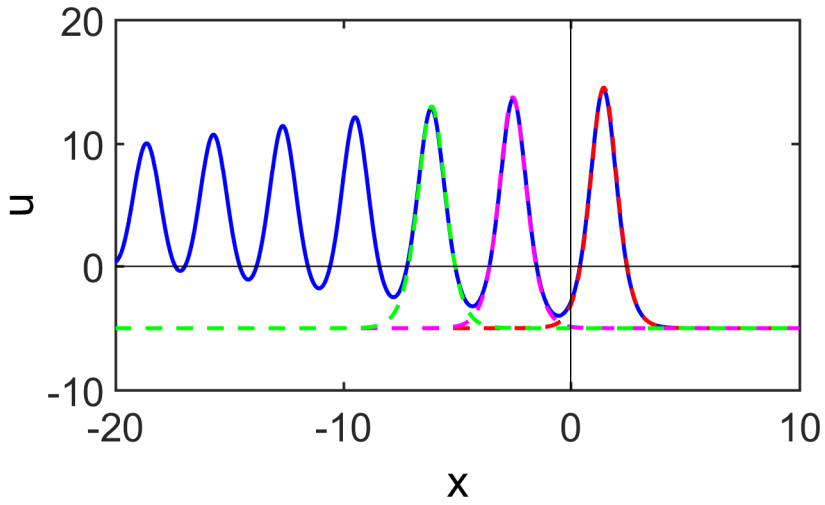
Σχήμα 2.4: Η διάδοση κύματος απότομου μετώπου για διάφορες τιμές της παραμέτρου B . Η αρχική συνθήκη δίνεται με διακεκομμένη.

Στο σημείο αυτό μπορεί να γίνει μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση. Οι κορυφές του κύματος περιγράφονται, ταυτίζονται με τις σολιτονικές λύσεις της KdV, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.6.



Σχήμα 2.5: Η διάδοση κύματος απότομου μετώπου για διάφορες τιμές της παραμέτρου A . Η αρχική συνθήκη δίνεται με διακεκομμένη.

Αν και το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί μέσω της πλήρους λύσης της εξίσωσης για αυτές τις αρχικές συνθήκες, η περιγραφή του τρόπου επίλυσης, δηλαδή της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης είναι εκτός του σκοπού της διατριβής. Θα συνεχίσουμε τη συζήτηση για αυτά τα φαινόμενα και στο επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 2.6: Σύγκριση των κορυφών του υδάτινου κύματος απότομου μετώπου με τα αντίστοιχα σολιτόνια της KdV.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΘΕΑ ΥΔΑΤΑ

Αφού μελετήσαμε τις εξισώσεις υδάτινων κυμάτων σε αβαθή ύδατα, σειρά έχει πλέον η θεωρία των βαθέων υδάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε για την εξαγωγή της εξίσωσης NLS από τις εξισώσεις Euler-Bernoulli, στο όριο των άπειρα βαθέων (1 + 1)-διάστασης υδάτινων κυμάτων, δηλαδή, από τις

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad -\infty < z < \varepsilon\eta(x, t) \quad (3.1)$$

$$\phi_z = 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (3.2)$$

$$\phi_t + \frac{\varepsilon}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (3.3)$$

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x\phi_x = \phi_z, \quad z = \varepsilon\eta \quad (3.4)$$

Υπάρχουν σημαντικότερες διαφορές μεταξύ αυτού του μοντέλου εξισώσεων και του αντίστοιχου για τα αβαθή ύδατα, όπως αναφερθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ξεκινώντας, οι σχέσεις (3.1) και (3.2) ορίζονται για $z \rightarrow -\infty$, σε αντίθεση με τις εξισώσεις σε αβαθή ύδατα, οι οποίες ορίζονται για $z = -1$. Επιπλέον, η παράμετρος $\mu = h/\lambda_x$, η οποία θεωρείται πολύ μικρή για κύματα σε αβαθή ύδατα, παίρνει μεγάλες τιμές στην περίπτωση των βαθέων υδάτων. Όντως, θεωρώντας $h \rightarrow \infty$, σε αυτή την περίπτωση, συνεπάγεται $\mu \rightarrow \infty$, το οποίο, όμως, δεν είναι κατάλληλο όριο, γι' αυτό το λόγο δεν θα χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο μ . Θα χρησιμοποιήσουμε τις (3.1)-(3.4) σε διαστατική μορφή και θα ξεκινήσουμε θεωρώντας ότι οι μη-γραμμικοί όροι είναι πολύ μικροί.

3.1 Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger

Εδώ, περιγράφουμε τον υπολογισμό όταν εμπεριέχονται αργές χρονικές και χωρικές μεταβλητές. Από τη στιγμή που η εξίσωση του υδάτινου κύματος έχει μία επιπλέον μεταβλητή βάθους, z , πρέπει να λάβουμε επιπλέον μέτρα. Επομένως θα συζητήσουμε τον υπολογισμό λεπτομερώς.

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τη δομή του υδάτινου κύματος για να προτείνουμε μια μεθοδολογία για τον υπολογισμό μας μέσω θεωρίας διαταραχών. Οι εξισώσεις που θα μελετήσουμε είναι οι εξής:

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad -\infty < z < \varepsilon\eta \quad (3.5)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_z = 0 \quad (3.6)$$

$$\phi_t + \frac{\varepsilon}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (3.7)$$

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x\phi_x = \phi_z, \quad z = \varepsilon\eta \quad (3.8)$$

Δηλαδή, η εξίσωση του υδάτινου κύματος στο όριο βαθέων υδάτων. Υπάρχουν τρία διακριτά βήματα στον υπολογισμό. Πρώτον, εξαιτίας του ελεύθερου ορίου, αναπτύσσουμε την $\phi = \phi(t, x, \varepsilon\eta)$ για $\varepsilon \ll 1$:

$$\phi = \phi(t, x, 0) + \varepsilon\eta\phi_z(t, x, 0) + \frac{(\varepsilon\eta)^2}{2}\phi_{zz}(t, x, 0) + \dots \quad (3.9)$$

Ομοίως επεκτείνουμε τα ϕ_t , ϕ_x και ϕ_z . Τότε οι εξισώσεις της ελεύθερης επιφάνειας (3.7) και (3.8) αναπτύσσονται γύρω από το $z = 0$ και παίρνουν την μορφή:

$$\left[\phi_t + \varepsilon\eta\phi_{tz} + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\phi_{tzz} \right] + \frac{\varepsilon}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2 + 2\varepsilon\eta\phi_x\phi_{xz} + 2\varepsilon\eta\phi_z\phi_{zz}) + g\eta = 0$$

και

$$\eta_t + \varepsilon\eta_x(\phi_x + \varepsilon\eta\phi_{xz}) = \phi_z + \varepsilon\eta\phi_{zz} + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2\phi_{zzz}$$

Δεύτερον, εισαγάγουμε αργές χρονικές και χωρικές κλίμακες:

$$\phi(t, x, z) = \phi(t, x, z, T, X, Z; \varepsilon),$$

$$\eta(t, x) = \eta(t, x, \varepsilon\eta, T, X, \varepsilon),$$

όπου $X = \varepsilon x$, $Z = \varepsilon z$ και $T = \varepsilon t$. Εξαιτίας της τετραγωνικής μη-γραμμικότητας, περιμένουμε και δεύτερους αρμονικούς όρους, να δημιουργηθούν. Αυτό υποδηλώνει λύσεις της μορφής

$$\phi = (Ae^{i\theta + |k|z} + c.c.) + \varepsilon(A_2e^{2i\theta + 2|k|z} + c.c. + \bar{\phi}) \quad (3.10)$$

$$\eta = (Be^{i\theta} + c.c.) + \varepsilon(B_2e^{2i\theta} + c.c. + \bar{\eta}) \quad (3.11)$$

Υπενθυμίζουμε ότι για $\varepsilon = 0$, έχουμε τη λύση του γραμμικού προβλήματος. Οι συντελεστές A , A_2 και $\bar{\phi}$, εξαρτώνται από τα X , Z και T , ενώ τα B , B_2 και $\bar{\eta}$ εξαρτώνται από τα X , T . Η ταχεία φάση δίνεται από το $\theta = kx - \omega t$, με

τη σχέση διασποράς $\omega^2 = g|k|$. Αντικαθιστώντας τη μεθοδολογία με ϕ στην εξίσωση Laplace (3.5) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} e^{i\theta} [2\varepsilon k(iAx + \text{sgn}(k)Az) + \varepsilon^2(A_{xx} + A_{zz}) + \dots] &= 0 \\ e^0 [\bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{zz}] &= 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση υποδηλώνει

$$\begin{aligned} A_z &= -i\text{sgn}(k)A_x - \frac{\varepsilon\text{sgn}(k)}{2k}(A_{xx} + A_{zz}) + O(\varepsilon^2) \\ &= -i\text{sgn}(k)A_x + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο της παραπάνω έκφρασης ως προς την αργή μεταβλητή Z θα πάρουμε

$$\begin{aligned} A_{zz} &= -i\text{sgn}(k)A_{xz} + O(\varepsilon) \\ &= -i\text{sgn}(k)(-i\text{sgn}(k))A_{xx} + O(\varepsilon) \\ &= -A_{xx} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.13)$$

όπου παραγωγίσαμε την σχέση (3.12), ως προς X , και αντικαταστήσαμε το αποτέλεσμα για A_{xz} , ώστε να προκύψει η τελική έκφραση. Από τη στιγμή που ο όρος $O(\varepsilon)$ στην (3.12), σχέση είναι ανάλογος του $A_{xx} + A_{zz}$, μπορούμε, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.13), να αποφανθούμε ότι

$$A_z = -i\text{sgn}(k)A_x + O(\varepsilon^2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.10), στην εξίσωση Bernoulli (3.7), και στην κινηματική εξίσωση (3.8), με την (3.9), βρίσκουμε αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \left\{ (-i\omega A + gB) + \varepsilon A_T + \varepsilon^2 [-i\omega k^2 A|B|^2 + 4k^2|k||A|^2 B + 2k^4|k|A^2 B^* \right. \\ \left. + \frac{i}{2}\omega k^2 B^2 A^* + 4k^2 A_2 A^* - i\omega|k|A\bar{\eta} + i\omega|k|B_2 A^* - \right. \\ \left. - 4i\omega|k|A_2 B^*] + \dots \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$e^{2i\theta} \left\{ A_2 - \varepsilon \frac{4k^2 A}{2|k|g} \left(A_T + \frac{\omega}{2k} A_X \right) + \dots \right\} = 0, \quad (3.15)$$

$$e^0 \left\{ \bar{\phi}_Z - \bar{\eta}_T - \frac{2\omega k}{g} \frac{\partial}{\partial X} |A|^2 + \dots \right\} = 0, \quad (3.16)$$

και

$$e^{i\theta} \left\{ (-i\omega B - |k|A) + \varepsilon [B_T + i \operatorname{sgn}(k)A_X] + \right. \quad (3.17)$$

$$\left. + \varepsilon^2 \left[\frac{k^2|k|}{2} (B^2 A^* - 2|B|^2 A) + k^2 (B_2 A^* - 2B^* A_2) - k^2 \bar{\eta} A \right] + \dots \right\} = 0,$$

$$e^{2i\theta} \left\{ B_2 + \frac{k^2 A^2}{g} - \varepsilon \frac{2ik}{g} A A_X + \dots \right\} = 0, \quad (3.18)$$

$$e^0 \{ \bar{\eta} + O(\varepsilon) \} = 0. \quad (3.19)$$

Να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα $A_z = -i \operatorname{sgn}(k)A_x$, το οποίο υπολογίσαμε παραπάνω. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (3.16) και (3.19) βρίσκουμε ότι

$$\bar{\phi}_z = \frac{2\omega k}{g} \frac{\partial}{\partial X} |A|^2.$$

Επίσης, αξίζει να σημειώσουμε ότι αν το A είναι ανεξάρτητο του X . Εξισώνοντας τους συντελεστές της κάθε δύναμης του ε στο μηδέν, στις σχέσεις (3.14) και (3.17), παίρνουμε σε κυρίαρχη τάξη $O(1)$

$$\begin{aligned} -i\omega A + gB &= 0 \\ -|k|A - i\omega B &= 0 \end{aligned}$$

η οποία, όσο ικανοποιείται η σχέση διασποράς $\omega^2 = g|k|$, έχει τη μη-τετριμμένη λύση $B = \frac{i\omega}{g}A$. Από τις σχέσεις (3.14)-(3.19) θα καταλήξουμε στο

$$\begin{aligned} B &= \frac{i\omega}{g}A - \frac{\varepsilon A_T}{g} + \varepsilon^2 \left[i \frac{\omega k^2}{g} A |B|^2 - 4 \frac{k^2 |k|}{g} |A|^2 B \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\omega k^2}{2g} B^2 A^* + \frac{i\omega |k| k^2}{g^2} A^2 A^* \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην σχέση (3.17) και με (3.14)-(3.19), οδηγούμαστε στο

$$2i\omega(A_T + v_g A_x) - \varepsilon(A_{TT} + 4k^4 |A|^2 A) + O(\varepsilon^2) = 0,$$

όπου έχουμε ορίσει την ταχύτητα ομάδος ως $v_g = \omega'(k) = \frac{\omega}{2k}$. Από αυτό και από την (3.15), διαπιστώνουμε ότι $A_2 \sim O(\varepsilon^2)$. Αν αγνοήσουμε τον όρο $O(\varepsilon^2)$, στην παραπάνω εξίσωση, και διαμορφώσουμε καταλλήλως τις μεταβλητές $\tau = \varepsilon T$, $\xi = X - v_g T$, παίρνουμε την εστιασμένη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS)

$$iA_\tau + \frac{\omega''}{2} A_{\xi\xi} - \frac{2k^4}{\omega} |A|^2 A = 0 \quad (3.20)$$

Όπου $\omega'' = -v_g^2/\omega$, η εξίσωση γράφεται και ως

$$iA_\tau - \left[\frac{v_g^2}{2\omega} A_{\xi\xi} + \frac{2k^4}{\omega} |A|^2 A \right] = 0, \quad (3.21)$$

η οποία είναι η τυπική διατύπωση της εξίσωσης, την οποία βρίσκουμε στην υδάτινη κυματική θεωρία. Παρατηρούμε, επίσης, ότι η εξίσωση του B , (3.21), το οποίο συσχετίζεται με τη στάθμη του νερού η , χρησιμοποιώντας $A = \frac{g}{i\omega} B$, μετατρέπεται σε

$$iB_\tau + \frac{\omega''}{2} B_{\xi\xi} - 2k^2 \omega |B|^2 B = 0.$$

Σημειώνουμε ότι μια διαφορετική αλλαγή συντεταγμένων, θέτοντας $t' = T - X/v_g$ και $\chi = \varepsilon X$, παίρνουμε

$$iA_\chi + \frac{\omega''}{2(\omega')^3} A_{t't'} - \frac{2k^4}{\omega\omega'} |A|^2 A = 0 \quad (3.22)$$

Η παραπάνω διατύπωση είναι ευρέως γνωστή στο πλαίσιο της μη-γραμμικής οπτικής.

Αυτή η παραγωγή της εξίσωσης NLS για κύματα σε βαθιά ύδατα έγινε το 1968 από τον Zakharov, συμπεριλαμβανομένης της επιφανειακής τάσης και στο πλαίσιο του πεπερασμένου βάθους από τους Benney και Roskes το 1969.

Η συγκεκριμένη εξίσωση NLS ονομάζεται *εστιασμένη* (focusing NLS), αυτό επειδή οι συντελεστές της διασποράς (δεύτερης παραγώγου) και του μη-γραμμικού όρου είναι ομόσημοι στην σχέση (3.21). Για να το διαπιστώσουμε αυτό στην (3.22), ανακαλούμε ότι $\omega^2(k) = g|k|$ και επομένως, για θετικά k , θα πάρουμε $\omega = \sqrt{gk}$, $v_g = \omega' = \sqrt{g/4k}$ και $\omega'' = -\sqrt{g/4k^3} = -v_g^2/\omega$ να σημειωθεί επίσης $\frac{\omega''}{2(\omega')^3} = -\frac{1}{\omega}$. Από τα αποτελέσματα αυτά συνεπάγεται ότι, ο συντελεστής του όρου της δευτέρας παραγώγου και ο μη-γραμμικός συντελεστής, έχουν το ίδιο πρόσημο. Όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, η εστιασμένη εξίσωση, εισάγει ως λύσεις της φωτεινά σολιτόνια, που φθίνουν εκθετικά στο άπειρο. Στην αντίθετη περίπτωση, έχουμε την αφεστιασμένη εξίσωση (defocusing NLS) και λύσεις της είναι τα σκοτεινά σολιτόνια που στα άπειρα τείνουν σε ένα συνεχές υπόβαθρο σταθερού πλάτους. Τι λύσεις αυτές συζητούμε εν συντομία και παρακάτω.

3.2 Τα σολιτόνια της NLS

Συνήθως η εξίσωση NLS δίνεται σε κανονικοποιημένη μορφή. Δηλαδή, από την (3.21), με μια αλλαγή μεταβλητών $\xi = \frac{v_g}{\sqrt{2}}x$, $A = k^2 u$ και $\tau = -2\omega^2 t$,

παίρνουμε την *εστιασμένη* (focusing) NLS στη μορφή:

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0. \quad (3.23)$$

Τέλος με την αλλαγή $t \rightarrow \frac{t}{2}$ η εξίσωση NLS γράφεται ως:

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = 0 \quad (3.24)$$

Αξιοσημείωτα, αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί αναλυτικά με τον επονομαζόμενο μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης (Inverse Scattering Transform). Κατ' αναλογία με το προηγούμενο κεφάλαιο, μια ειδική λύση εδώ είναι ένα *φωτεινό* σολιτόνιο, που προκύπτει αν επιλέξουμε λύσεις της NLS που δεν μεταβάλλουν το πλάτος τους με τον χρόνο. Δηλαδή:

$$u(x, t) = w(x)e^{i\mu t}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.24) βρίσκουμε

$$-\mu w + \frac{1}{2}w'' + w^3 = 0$$

ώστε πολλαπλασιάζοντας με w' και ολοκληρώνοντας μια φορά (εφαρμόζοντας μηδενικές συνοριακές συνθήκες για το w και τις παραγώγους του καθώς $|x| \rightarrow \infty$) να έχουμε τη εξίσωση:

$$(w')^2 = 2\mu w^2 - w^4$$

Όπως και στην περίπτωση της KdV και αυτή η εξίσωση είναι πρώτου βαθμού και μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών, με γενική λύση (που ικανοποιεί μηδενικές συνοριακές συνθήκες καθώς $|x| \rightarrow \infty$)

$$w(x) = \eta \operatorname{sech}(\eta x), \quad \mu = \frac{\eta^2}{2}$$

όπου η μία ελεύθερη παράμετρος. Επιπλέον η (3.24) είναι αναλλοίωτη κατά τον μετασχηματισμό μεταφοράς $x \rightarrow x - x_0$ και από τον Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό (Galilean invariance)

$$u(x, t) \rightarrow u(x - vt, t)e^{iv(x - v\frac{t}{2}) + i\sigma_0}$$

Τελικά η σολιτινική λύση της (3.24) στη γενική της μορφή γράφεται:

$$u(x, t) = \eta \operatorname{sech}[\eta(x - vt - x_0)]e^{i(\eta^2 - v^2)\frac{t}{2} + ivx + i\sigma_0}$$

όπου η σταθερή v αντιστοιχεί στο ρόλο της ‘ταχύτητας’ και σ_0 μία επίσης ελεύθερη σταθερά.

Για τα σκοτεινά σολιτόνια ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, μόνο που πρέπει να ικανοποιήσουμε τις μη-μηδενικές συνοριακές συνθήκες καθώς $|x| \rightarrow \infty$.

Επανερχόμαστε στην αφεστιασμένη εξίσωση NLS

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0$$

της οποίας οι λύσεις που καλούνται σκοτεινά σολιτόνια, των οποίων το πλάτος μηδενίζεται στο $x = 0$, γράφονται ως:

$$u = \eta \tan(\eta x) e^{i\eta^2 t}.$$

Να σημειωθεί ότι $u \rightarrow \pm \eta$ και $x \rightarrow \pm \infty$. Ένα γκρι σολιτόνιο δίνεται ως λύση από

$$u(x, t) = \eta e^{2i\eta^2 t + i\psi_0} [\cos \alpha + i \sin \alpha \tanh [\sin \alpha \eta (x - 2\eta \cos \alpha t - x_0)]]$$

όπου $\eta, \alpha, x_0, \psi_0$ αυθαίρετες πραγματικές παράμετροι. Ο υπολογισμός της λύσης είναι παρόμοιος με αυτού του φωτεινού σολιτονίου, λαμβάνοντας υπόψιν αντίστοιχες μη-μηδενικές συνοριακές συνθήκες. Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζονται ένα φωτεινό σολιτόνιο και τα δύο σκοτεινά σολιτόνια (μαύρο και γκρι).

Αυτές οι λύσεις ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

$$u(x, t) \rightarrow u_{\pm}(t) = \eta e^{2i\eta^2 t + i\psi_0 \pm i\alpha}, \quad x \rightarrow \pm \infty$$

και εμφανίζονται σαν εντοπισμένες βυθίσεις έντασης $\eta^2 \sin^2 \alpha$ στο πεδίο υποβάθρου η . Τα γκρι σολιτόνια κινούνται με ταχύτητα $2\eta \cos \alpha$ και μετατρέπονται σε σκοτεινά σολιτόνια όταν το $\alpha \rightarrow \pi/2$ με $\psi_0 = -\pi/2$. Σχηματικά οι δυο σολιτονικές λύσεις φαίνονται στο Σχ. 3.1.

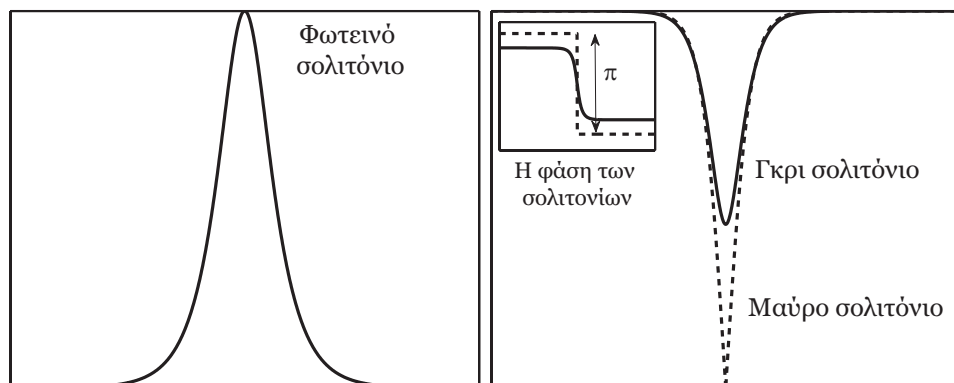
Τέλος, μια σημαντική ιδιότητα της εξίσωσης NLS είναι η ότι παραμένει αναλλοίωτη μετά από Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό (Galilean invariance). Δηλαδή, αν $u_1(x, t)$ είναι μια λύση της (3.23), και

$$u_2(x, t) = u_1(x - vt, t) e^{i(kx - \omega t)},$$

με $k = v/2$ και $\omega = k^2$. Αντικαθιστώντας την u_2 στην σχέση (3.23) βρίσκουμε ότι η u_1 ικανοποιεί τη σχέση:

$$i u_{1,t} + \omega u_1 - i v u_{1,x} + (u_{1,xx} + 2i k u_{1,x} - k^2 u_1) + 2|u_1|^2 u_1 = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η u_1 υποτίθεται ότι είναι λύση της (3.23) και χρησιμοποιώντας τις τιμές των k, ω , συνεπάγεται ότι και η u_2 ικανοποιεί την (3.23).



Σχήμα 3.1: Σχηματικά, οι μορφές των φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων της NLS.

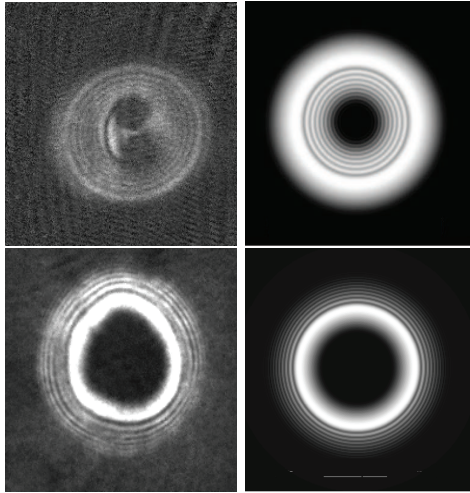
3.3 Εφαρμογές της εξίσωσης NLS

Σε συνέχεια από το προηγούμενο κεφάλαιο θα συζητήσουμε περαιτέρω κυματικά φαινόμενα απότομης μεταβολής, όπως αυτά που έχουμε ήδη δει, και που συνήθως αποκαλούνται ωστικά κύματα (shock waves). Τα ωστικά κύματα μπορούν να δημιουργηθούν από μια αρχική απότομη αλλαγή σε μια φυσική ποσότητα και που έχει ως συνέπεια τη δημιουργία ταχυτήτων διάδοσης μεγαλύτερων ακόμα και από την ταχύτητα του ήχου (τοπικά). Ένα ωστικό κύμα που διαδίδεται μέσω ενός μέσου, όπως ενός ρευστού, επιδεικνύει μία ταχεία μεταβολή στις ιδιότητες του υλικού που χαρακτηρίζουν το μέσο. Σε ιζώδη μέσα η αλλαγή αντιπροσωπεύεται από ένα σχεδόν ασυνεχές άλμα από τη μια τιμή στην άλλη.

Η δυναμική συμπεριφορά ενός μέσου, όπως ενός ρευστού, μπορεί συχνά να περιγραφεί μέσω ενός συνόλου νόμων διατήρησης (ενέργειας, ορμής, κ.τ.λ.) που τροποποιούνται από μια μικρή ποσότητα απωλειών ή διασποράς. Όταν παραλείπονται αυτές οι απώλειες ή η διασπορά, μια μεγάλη τάξη αρχικών δεδομένων μπορεί να οδηγήσει σε ασυνέχεια παραγώγου, την οποία αναπτύσσει η λύση σε πεπερασμένο χρόνο.

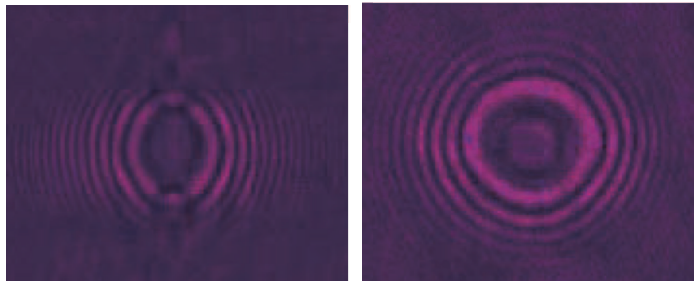
Στη φυσική και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, τα ωστικά κύματα αναφέρονται σε διάφορες περιοχές. Μία από τις πρώτες παρατηρήσεις των ωστικών κυμάτων, αν και δεν περιγράφηκε ως τέτοια, συνέβη στο πλαίσιο των υδατινών κυμάτων όπου μελετήθηκαν κύματα απότομου μετώπου αλλά με μικρό σχετικά πλάτος. Έκτοτε, έγιναν πολυάριθμες παρατηρήσεις σχετικά με τη συμπεριφορά τους. Στα εργαστηριακά πειράματα του 1970 παρατηρήθηκαν από την αλληλεπίδραση κυμάτων στο πλάσμα, στη διάδοση του φωτός μέσω μιας οπτικής ίνας το 1989 αλλά

και πιο πρόσφατα σε συμπύκνωμα Bose-Einstein, Σχ. 3.2, το 2006,



Σχήμα 3.2: Ωστικά κύματα της NLS σε συμπύκνωμα Bose-Einstein. Αριστερά φαίνεται το πειραματικό αποτέλεσμα και δεξιά η αντίστοιχη προσομοίωση του φαινομένου αριθμητικά.

και σε φωτοδιαθλαστικά μέσα, Σχ. 3.3, το 2007.



Σχήμα 3.3: Ωστικά κύματα της NLS σε φωτοδιαθλαστικά μέσα.

Πολλά έχουν επίσης γίνει και στην μαθηματική περιγραφή αυτών των φαινομένων. Κλειδί στη μελέτη τους είναι οι νόμοι διατήρησης διότι ως ολοκληρώματα δεν υπόκεινται στους περιορισμούς και τις ασυνέχειες των παραγώγων. Η θεωρία που τα περιγράφει βασίζεται στον Gerald Whitham, που πρώτος τη διατύπωσε το 1965 και φέρει το όνομά του (Whitham theory).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ KdV ΚΑΙ NLS

Λίγες μη-γραμμικές εξελικτικές εξισώσεις έχουν μελετηθεί τόσο όσο οι εξισώσεις μη-γραμμική Schrödinger (NLS) και Korteweg-de Vries (KdV). Στην αδιατάρακτη μορφή τους, και οι δύο είναι απολύτως ολοκληρώσιμες και μπορούν να λυθούν με τον μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης (Inverse Scattering Transform), καθώς έχουν και εφαρμογή σε μεγάλη ποικιλία φυσικών συστημάτων. Για παράδειγμα η εξίσωση NLS σχετίζεται με τη μη-γραμμική οπτική, τις κυματικές εξισώσεις σε βαθιά ύδατα και το ατομικό συμπύκνωμα των Bose-Einstein. Η εξίσωση KdV είναι μοντέλο για κυματικές εξισώσεις σε αβαθή ύδατα και κύματα σε πλάσμα.

Χρησιμοποιώντας μεθόδους πολλαπλών κλιμάκων, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια σύνδεση μεταξύ των δύο μοντέλων και να εξάγουμε την εξίσωση της NLS από την KdV και το αντίστροφο. Αυτό θα είναι και το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

4.1 Μια σημαντική διαφορά: Η αστάθεια διαμόρφωσης

Οι δύο εξισώσεις που μελετάμε καλούνται εξισώσεις εξελικτικού τύπου (evolution equations) διότι περιγράφουν φαινόμενα που αλλάζουν/εξελισσονται με την πάροδο του χρόνου. Κοινό χαρακτηριστικό τους είναι ότι και οι δύο είναι πρώτης τάξης ως προς τη χρονική παράγωγο. Άρα αν θέλαμε να μελετήσουμε την απλούστερη κλάση λύσεων θα ήταν να υποθέσουμε ότι οι λύσεις του είναι μόνο συναρτήσεις του χρόνου (οι αντίστοιχες παράγωγοι στο χώρο είναι και στις δύο ανώτερης τάξης). Λύσεις αυτής της μορφής στη θεωρία των διαφορικών

εξισώσεων καλούνται και εκφυλισμένες λύσεις (degenerate solutions). Όμως στην περίπτωση της KdV αυτό θα σήμαινε $u_t = 0$, δηλαδή μια τετριμμένη λύση. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι λύσεις αυτές στην περίπτωση της NLS.

Εστιάζουμε, λοιπόν στην NLS την οποία γράφουμε σε μορφή με γενικούς συντελεστές

$$iu_t + du_{xx} + g|u|^2u = 0$$

και υποθέτοντας λύσεις $u = u(t)$ αγνοούμε τη χωρική παράγωγο. Τότε η γενική λύση της εξίσωσης γράφεται στη μορφή $u = u_0 e^{igu_0^2 t}$, όπου u_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή πρόκειται για ημιτονοειδή κύματα στο χρόνο με πλάτος u_0 και φάση $gu_0^2 t$. Από μόνο του αυτό το γεγονός αποτελεί σημαντική διαφορά από την KdV, όμως εξαιρετική σημασία έχει και η ευστάθεια αυτών των κυμάτων.

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια θεωρούμε μικρές μεταβολές, διαταραχές, του πλάτους της λύσης στη μορφή

$$u(x, t) = [u_0 + \varepsilon u_1(x, t)] e^{igu_0^2 t}.$$

Αντικαθιστούμε στη γενική μορφή της NLS και σε $O(\varepsilon)$ έχουμε την εξίσωση για τη συνάρτηση u_1 :

$$iu_{1t} + du_{1xx} + gu_0^2(u_1 + u_1^*) = 0,$$

όπου u_1^* είναι ο μιγαδικός συζυγής. Η εξίσωση είναι πλέον γραμμική και αν υποθέσουμε λύσεις της μορφής

$$u_1(x, t) = c_1 e^{i(kx - \omega t)} + c_2 e^{-i(kx - \omega t)}$$

τότε

$$\omega^2 = k^2(d^2 k^2 - 2dg u_0^2),$$

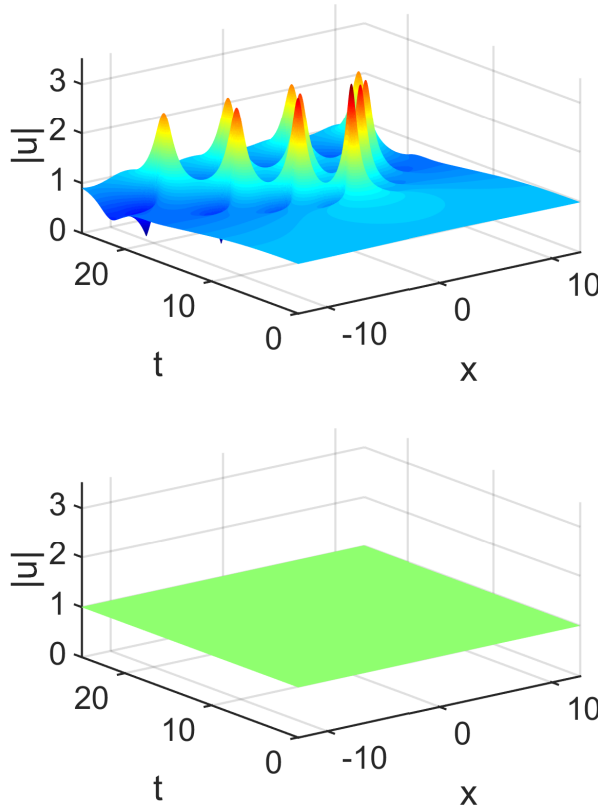
που αποτελεί και τη λεγόμενη σχέση διασποράς. Σημαντικό ρόλο στην εξίσωση έχει το πρόσημο του γινομένου dg . Πράγματι αν $dg < 0$ τότε η εξίσωση έχει πάντα πραγματικές λύσεις ω και η λύση u_1 παραμένει φραγμένη στο χρόνο. Στην αντίθετη όμως περίπτωση, δηλαδή για $dg > 0$, υπάρχουν διάφοροι κυματαριθμοί, k , για τους οποίους η λύση γίνεται μιγαδική. Αυτό σημαίνει ότι πλέον η λύση u_1 παρουσιάζει εκθετική αύξηση στο χρόνο με αποτέλεσμα την συνολική κατάρρευση της λύσης.

Αυτή η αστάθεια ονομάζεται αστάθεια Benjamin-Feir ή αστάθεια διαμόρφωσης (modulation instability). Το φαινόμενο ανακαλύφθηκε αρχικά για περιοδικά κύματα σε βαθιά νερά από τους T. B. Benjamin και J. E. Feir το 1967. Για να δούμε και οπτικά το φαινόμενο εξελίσσουμε αριθμητικά την NLS για $d = g = 1$

(η εξίσωση τότε καλείται εστιαζουσα) και για $d = -g = -1$ (η εξίσωση τότε καλείται αφεστιαζουσα) με αρχική συνθήκη

$$u(x, t) = 1 + 0.01e^{ix/4}.$$

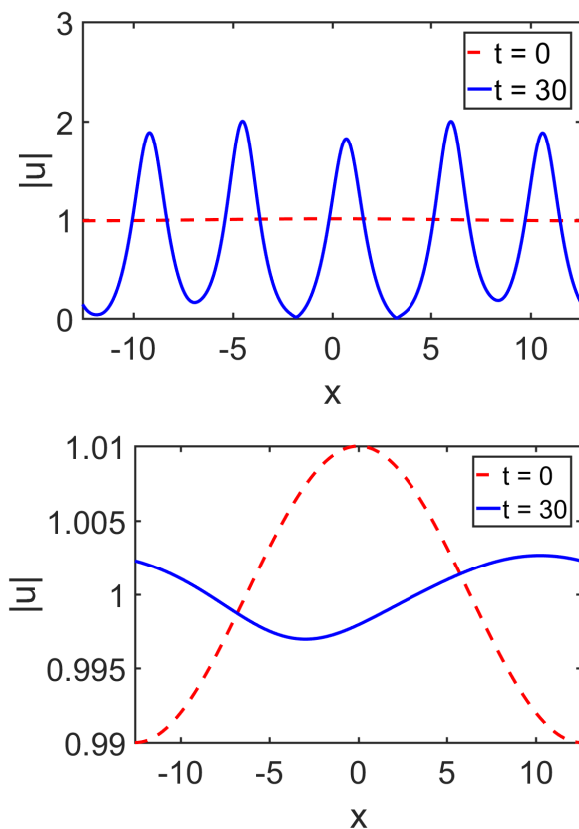
Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, Σχ. 4.1.



Σχήμα 4.1: Ασταθής (επάνω, εστιασμένη εξίσωση) και ευσταθής (κάτω, αφεστιασμένη εξίσωση) μιας χρονικά περιοδικής λύσης κάτω από την επίδραση μιας μικρής διαταραχής.

Και για να γίνει πιο αντιληπτό το φαινόμενο δίνουμε στο παρακάτω σχήμα, Σχ. 4.2, τις αρχικές και τελικές καταστάσεις των κυμάτων.

Είναι, πλέον, φανερό ότι στην πρώτη περίπτωση η μικρή διαταραχή πλάτους 0.01 αυξήθηκε θεαματικά, η λύση έχει καταρρεύσει και ούτε οι αρχικές συνοριακές συνθήκες δεν ισχύουν πλέον. Στην δεύτερη περίπτωση η αρχική διαταραχή



Σχήμα 4.2: Οι αρχικές και τελικές καταστάσεις μιας ασταθούς διάδοσης (επάνω, εστιασμένη εξίσωση) και ευσταθούς (κάτω, αφρεστιασμένη εξίσωση).

παραμένει αντίστοιχου πλάτους και μόνο μια αλλαγή (αναμενόμενη σύμφωνα με τα παραπάνω) παρατηρείται.

4.2 Η εξαγωγή της NLS από την KdV

Ξεκινούμε, λοιπόν, από την εξαγωγή της εξίσωσης NLS από την εξίσωση KdV ασυμπτωτικά για μικρά πλάτη. Για να το καταφέρουμε αυτό, αναπτύσσουμε τη λύση της εξίσωσης KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

ως (ο συντελεστής 6 του μη-γραμμικού όρου προστέθηκε χάριν ευκολίας και απλότητας των πράξεων)

$$u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots,$$

Από τη στιγμή που ο μη-γραμμικός όρος uu_{xx} , είναι τετραγωνικός και όχι κυβικός, περιμένουμε ότι η διαδικασία εξαγωγής της NLS θα είναι κάπως απαιτητική και θα χρειαστεί κάποια εφευρετικότητα.

Στην κυρίαρχη τάξη $O(1)$ έχουμε από τα παραπάνω

$$u_{0,t} + u_{0,xx} = 0,$$

της οποίας η πραγματική λύση δίνεται από

$$u_0 = A(X, T)e^{i\theta} + c.c. + M(X, T), \quad (4.1)$$

όπου ξανά το $T = \varepsilon t$ και $X = \varepsilon x$ οι αργές μεταβλητές, $\theta = kx - \omega t$ η γρήγορη μεταβλητή, με τη σχέση διασποράς $\omega = -k^3$, και $M(X, T)$ να είναι ένας πραγματικός, αργά μεταβαλλόμενος όρος. Η ποσότητα $A(X, T)$ είναι η αργά μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα της ραγδαίως μεταβαλλόμενης κυματικής συμβολής.

Αντικαθιστώντας $\partial_t = -\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T$ και $\partial_x = k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X$ στην εξίσωση KdV οδηγούμαστε στο παρακάτω

$$(-\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T)u + 6u(k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X)u + (k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X)^3 u = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω ανάπτυγμα, $u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} & (-\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T)(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots) \\ & + 6(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots)(k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X)(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots) \\ & + (k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X)^3(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Ο κυρίαρχος όρος της λύσης της $Lu_0 = 0$, όπου L ορίζεται παρακάτω, δίνεται από την σχέση (4.1). Ανακαλούμε ότι η σχέση διασποράς για τον εκθετικό όρο δίνεται από $\omega(k) = -k^3$. Η $O(\varepsilon^2)$ εξίσωση είναι η

$$\begin{aligned} Lu_1 &= -u_{0,T} - 3k^2 u_{0,\theta\theta X} - 6u_0 k u_{0,\theta} \\ &= (-A_T e^{i\theta} + c.c.) - M_T + (3k^2 A_X e^{i\theta} + c.c.) \\ &\quad - 6((A e^{i\theta} + c.c.) + M)(A i k e^{i\theta} + c.c.) \end{aligned}$$

όπου έχουμε προσδιορίσει τον γραμμικό όρο (χρησιμοποιώντας $\omega = -k^3$),

$$Lu = k^3(u_\theta + u_{\theta\theta}).$$

Επίσης, ξαναγράφουμε την εξίσωση του $O(\varepsilon)$ ως εξής

$$Lu_1 = (-A_T - \omega' A_X - 6iMkA)e^{i\theta} + c.c. - 6(ikA^2 e^{2i\theta} + c.c.) - M_T,$$

εδώ χρησιμοποιήσαμε τη σχέση διασποράς, από την οποία παίρνουμε $\omega'(k) = -3k^2$. Με σκοπό να αφαιρέσουμε γραμμικά εξαρτημένους όρους από τη λύση της $O(1)$ εξίσωσης (που θα οδηγήσουν σε πολυωνυμικές αποκλίσεις στα $\pm\infty$) απαιτούμε

$$A_T + \omega' A_X + 6iMkA = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots, \quad (4.2)$$

$$M_T = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (4.3)$$

και επιλύουμε την u_1 για ότι απέμεινε, δηλαδή λύνουμε,

$$Lu_1 = -6(ikA^2 e^{2i\theta} + c.c.).$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί με $u = \alpha e^{2i\theta} + c.c.$, από το οποίο παίρνουμε τελικά

$$u_1 = \frac{A^2}{k^2} e^{2i\theta} + c.c. = \alpha e^{2i\theta} + c.c.,$$

δηλαδή, $\alpha = A^2/k^2$. Ελέγχοντας την εξίσωση (4.3) παρατηρούμε ότι $M = O(\varepsilon)$.

Σε επόμενο βήμα, ελέγχουμε την εξίσωση $O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} Lu_2 + 6(u_0 k u_{1,\theta} + u_0 u_{0,X} + u_1 k u_{0,\theta}) + 3k^2 u_{1,\theta\theta X} + 3k u_{0,\theta X X} + u_{1T} \\ = -f_1 - (g_1 e^{i\theta} + c.c.), \end{aligned}$$

όπου τα f_1 και g_1 εξάγονται από τις σχέσεις (4.2) και (4.3). Χρησιμοποιώντας την (4.1) και το γεγονός ότι $M = O(\varepsilon)$, μας δίνεται

$$\begin{aligned} Lu_2 = & -6(Ae^{i\theta} + c.c.)(2ik\alpha e^{2i\theta} + c.c.) - 6(Ae^{i\theta} + c.c.)(A_X e^{i\theta} + c.c.) - \\ & -6(\alpha e^{i\theta} + c.c.)(ikAe^{i\theta} + c.c.) - 3k^2[(2i)^2 \alpha_X e^{2i\theta} + c.c.] - \\ & -3k(iA_{XX} e^{i\theta} + c.c.) - f_1 - (g_1 e^{i\theta} + c.c.) - (\alpha_T e^{2i\theta} + c.c.). \end{aligned}$$

Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι χρειάζεται κάποια σχετική προσοχή για τους όρους που περιέχουν τη φανταστική μονάδα (όρους i). Για παράδειγμα, $iA_{XX} e^{i\theta} + c.c. = iA_{XX} e^{i\theta} - iA_{XX}^* e^{-i\theta}$, όπου A^* είναι ο μιγαδικός συζυγής του A . Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\alpha = A^2/k^2$ οδηγούμαστε στις σχέσεις

$$g_1 = -3ikA_{XX} - 6ik\alpha A^* = -3ikA_{XX} - \frac{6i}{k} A^2 A^*,$$

$$f_1 = -6(AA_X^* + c.c.) = -6(|A|^2)_X,$$

Έτσι, από τις εξισώσεις (4.2) και (4.3) χρησιμοποιώντας τα f_1, g_1 , λαμβάνουμε τις

$$A_T + \omega' A_X + 6iMkA = \varepsilon(-3ikA_{XX} - \frac{6i}{k}A^2A^*), \quad (4.4)$$

$$M_T = -6\varepsilon(|A|^2)_X. \quad (4.5)$$

Παρόλα αυτά, για να καταφέρουμε να εξάγουμε την εξίσωση NLS ένα ακόμη βήμα είναι απαραίτητο. Θα χρειαστούμε, επιπλέον, να χρησιμοποιήσουμε ένα κινούμενο σύστημα αναφοράς, δηλαδή $A(X, T) = A(\xi, \tau)$, όπου οι νέες μεταβλητές δίνονται από

$$\xi = X - \omega'(k)T, \quad \tau = \varepsilon T. \quad (4.6)$$

έτσι οι εξισώσεις (4.4) και (4.5) μετατρέπονται

$$\varepsilon A_\tau + 6iMkA = \varepsilon(-3ikA_{\xi\xi} - \frac{6i}{k}A^2A^*), \quad (4.7)$$

$$\varepsilon M_\tau - \omega' M_\xi = -6\varepsilon(|A|^2)_\xi. \quad (4.8)$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας όπου $M = O(\varepsilon)$ και οδηγούμαστε

$$-\omega' M_\xi = -6\varepsilon(|A|^2)_\xi + O(\varepsilon^2),$$

της οποίας η λύση (του κυρίαρχου όρου) δίνεται (παραλείποντας τη σταθερά ολοκλήρωσης)

$$M \sim -\frac{2\varepsilon|A|^2}{k^2},$$

και έχουμε χρησιμοποιήσει $\omega' = -3k^2$. Επάνω, αντικαθιστώντας τη λύση για το M στην (4.7), λαμβάνουμε

$$A_\tau + 3ikA_{\xi\xi} + \frac{6i}{k}(-2|A|^2)A + \frac{6i}{k}|A|^2A = 0.$$

Άρα, καταλήγουμε στην παρακάτω μη-εστιασμένη εξίσωση της NLS

$$iA_\tau - 3kA_{\xi\xi} + \frac{6}{k}|A|^2A = 0.$$

Χρησιμοποιώντας $\omega'' = -6k$, οδηγούμαστε στην γενική μορφή της εξίσωσης NLS,

$$iA_\tau + \frac{\omega''(k)}{2}A_{\xi\xi} + \frac{6}{k}|A|^2A = 0.$$

4.3 Η εξαγωγή της KdV από την NLS

Μπορούμε, αντίστοιχα να εξάγουμε την εξίσωση KdV από την εξίσωση NLS. Ξεκινούμε, λοιπόν, από την αφεστιασμένη εξίσωση NLS, δηλαδή:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4.9)$$

Όπως και για την KdV, ο παράγοντας $1/2$ στη διασπορά προστίθεται για όλους ευκολίας των πράξεων. Γράφουμε τη λύση της εξίσωσης (4.9) σαν σύνθεση μιας συνάρτησης υποβάθρου $u_b(t)$ και μιας συνάρτησης $u(t, x)$, την οποία θέτουμε $\psi(t, x) = u_b(t)u(t, x)$, όπου η συνάρτηση του υποβάθρου ικανοποιεί την:

$$i \frac{du_b}{dt} + |u_b|^2 u_b = 0, \quad (4.10)$$

ενόσω η $u(t, x)$ ικανοποιεί την:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u_b|^2 (|u|^2 - 1) u = 0. \quad (4.11)$$

Εδώ η συνάρτηση του υποβάθρου παίρνει τη μορφή ενός σταθερού πλάτους κύματος, δηλαδή $u_b(t) = u_0 e^{i|u_0|^2 t}$ (όπου u_0 είναι μία αυθαίρετη μιγαδική σταθερά), η οποία είναι η γενική λύση της (4.10). Στο σημείο αυτό πρέπει να εξηγήσουμε το λόγο που επιλέγουμε την αφεστιασμένη εξίσωση για τους υπολογισμούς μας. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία έχει η συνάρτηση του υποβάθρου. Στην εστιασμένη εξίσωση οι λύσεις αυτές είναι ασταθείς οδηγώντας τις λύσεις σε εκθετικές αποκλίσεις στο χρόνο. Στην άλλη περίπτωση το υπόβαθρο είναι ευσταθές. Τονίζουμε, παρόλα αυτά, ότι η διαδικασία που παραθέτουμε μπορεί να γίνει και στις δύο περιπτώσεις.

Στη συνέχεια καθορίζουμε νέες ανεξάρτητες μεταβλητές τ και ξ τέτοιες ώστε:

$$d\tau = |u_b|^2 dt \quad \text{and} \quad d\xi = |u_b| dx, \quad (4.12)$$

έτσι η ακόλουθη εξίσωση

$$i \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (|u|^2 - 1) u = 0, \quad (4.13)$$

η οποία είναι ίδια με την (4.11), εκτός του υποβάθρου, το οποίο αποσπάστηκε. Να σημειωθεί ότι οι καινούργιες μεταβλητές είναι και οι δύο, προφανώς, πραγματικές.

Έπειτα, θα χρησιμοποιήσουμε τον αποκαλούμενο μετασχηματισμό Madelung $u(\tau, \xi) = \rho e^{i\phi}$ (ρ και ϕ αντιστοιχούν στο εύρος και στη φάση του u αντίστοιχα) ώστε να γράψουμε την εξίσωση (4.13) στις παρακάτω υδροδυναμικές εξισώσεις:

$$\rho_\tau - \frac{1}{2}(\rho\phi_{\xi\xi} + 2\phi_\xi\rho_\xi) = 0, \quad (4.14)$$

$$\rho\phi_\tau + \frac{1}{2}(\rho\xi\xi - \rho\phi_\xi^2) - (\rho^2 - 1)\rho = 0. \quad (4.15)$$

Καθορίζουμε νέες κλίμακες,

$$T = \varepsilon^3\tau, \quad X = \varepsilon(\xi - C\tau), \quad (4.16)$$

όπου το C είναι μία σταθερά η οποία προσδιορίζεται αργότερα· ο δεύτερος όρος, είναι η ταχύτητα του ήχου, συγκεκριμένα η ταχύτητα σε μακριού μήκους υδάτινα κύματα με μικρό εύρος, τα οποία διαδίδονται στο υπόβαθρο. Επιπροσθέτως, αναπτύσσουμε το πλάτος και τη φάση σε δυνάμεις του ε , όπως παρακάτω:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon^2\rho_2 + \varepsilon^4\rho_4 + \varepsilon^6\rho_6 + \dots, \quad (4.17)$$

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^3\phi_3 + \varepsilon^5\phi_5 + \varepsilon^7\phi_7 + \dots, \quad (4.18)$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (4.14) και (4.15), αποκτούμε τις παρακάτω εξισώσεις στις διάφορες τάξεις του ε :

$$O(\varepsilon) : \quad \rho_0^2 = 1, \quad (4.19)$$

$$O(\varepsilon^2) : \quad 2\rho_2 + C\frac{\partial\phi_1}{\partial X} = 0, \quad (4.20)$$

$$O(\varepsilon^3) : \quad C\frac{\partial\rho_2}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial X^2} = 0. \quad (4.21)$$

Η συνθήκη συμβατότητας αυτών των εξισώσεων καθορίζει την ταχύτητα του ήχου, δηλαδή, $C^2 = 1$: το γεγονός ότι το $C = \pm 1$ υποδηλώνει ότι η εξίσωση KdV (4.24) μπορεί να περιγράψει κυματομορφές οι οποίες διαδίδονται είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά. Σε ότι ακολουθεί διαλέγουμε $C = 1$, η ανάλυση είναι ίδια για το αντίθετο πρόσημο.

Επιπλέον, οι παραπάνω εξισώσεις μας οδηγούν σε μία απλή εξίσωση η οποία συνδέει τα ϕ_1 και ρ_2 , συγκεκριμένα: $\partial\phi_1/\partial X = -2\rho_2$.

Στους επόμενους όρους του ε έχουμε:

$$O(\varepsilon^4) : \quad 2\rho_4 + 3\rho_2^2 + \frac{\partial\phi_3}{\partial X} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial X^2} - \frac{\partial\phi_1}{\partial T} = 0, \quad (4.22)$$

$$O(\varepsilon^5) : \quad -\frac{\partial\rho_4}{\partial X} + 3\rho_2\frac{\partial\rho_2}{\partial X} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_3}{\partial X^2} + \frac{\partial\rho_2}{\partial T} = 0. \quad (4.23)$$

Η συνθήκη συμβατότητας των παραπάνω εξισώσεων βρέθηκε παραπάνω διαφορίζοντας την εξίσωση (4.22), ως προς X (επίσης χρησιμοποιώντας την (4.20) και διαλέγοντας $C = 1$) και προσθέτοντας την (4.23). Με αυτόν τον τρόπο η συνθήκη συμβατότητας, μας οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση KdV:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial T} + 3\rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} - \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \rho_2}{\partial X^3} = 0. \quad (4.24)$$

4.4 Η σύνδεση των σολιτονικών λύσεων

Συνεχίζουμε συνδέοντας τη σολιτονική λύση της KdV με αυτή της NLS. Υπενθυμίζουμε ότι εργαζόμαστε με την αφεστιασμένη εξίσωση

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi = 0$$

της οποίας η λύση έχει γραφεί ως (σκοτεινό σολιτόνιο):

$$\psi(x, t) = \eta [\cos a + i \sin a \tanh[\eta \sin a (x - \eta \cos at - x_0)]] e^{i\eta^2 t + i\psi_0}$$

για λόγους συνέπειας συμβολισμού θέτουμε $A = \eta \cos a$ και $B = \eta \sin a$, ώστε $A^2 + B^2 = \eta^2$ και τότε

$$\psi(x, t) = A + iB \tanh[B(x - At - x_0)] e^{i\eta^2 t + i\psi_0} \quad (4.25)$$

Προφανώς η μεταβλητή A αντιστοιχεί στην ταχύτητα του σολιτονίου ενώ η B στο πλάτος του, δηλαδή στο μέγεθος του 'βυθίσματος' από το σταθερό υπόβαθρο. Σε πολική μορφή η λύση γράφεται $\psi = \rho e^{i\vartheta}$ όπου:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{A^2 + B^2 \tanh^2[B(x - At - x_0)]} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 - B^2 \operatorname{sech}^2[B(x - At - x_0)]} \\ &= \sqrt{\eta^2 - B^2 \operatorname{sech}^2[B(x - At - x_0)]} \end{aligned}$$

και

$$\tan \vartheta = \frac{B}{A} \tanh[B(x - At - x_0)]$$

Στη συνέχεια οι όροι $e^{i\psi_0}$ και το X_0 θα αγνοούνται καθώς προκύπτουν από συμμετρίες και μετασχηματισμούς που αφήνουν την εξίσωση αναλλοίωτη (βλέπε

κεφάλαιο 3). Στη θεωρία διαταραχών χρησιμοποιήσαμε $B = O(\varepsilon)$, $A = \eta$, $x_0 = O(1)$ και $\theta = O(\varepsilon)$ ώστε τελικά:

$$\begin{aligned}\rho &= \eta \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 B^2}{\eta^2} \operatorname{sech}^2(\varepsilon Bx - \eta t)} \\ &\approx \eta \left[1 - \frac{\varepsilon^2 B^2}{2\eta^2} \operatorname{sech}^2(\varepsilon Bx - \eta t) \right] \\ &= \eta - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 B^2}{\eta} \operatorname{sech}^2(\varepsilon Bx - \eta t)\end{aligned}$$

Αντίστοιχα για τη φάση:

$$\tan(\varepsilon\vartheta) \approx \varepsilon\vartheta = \frac{\varepsilon B}{\eta} \tanh(\varepsilon Bx - \eta t)$$

Διαταρακτικά έχουμε γράψει τη λύση της NLS ως:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= u_0(t)u(t, x) \\ &= u_0 e^{iu_0^2 t} \rho e^{i\phi} \\ &\approx u_0 e^{iu_0^2 t} (\rho_0 + \varepsilon \rho_2) e^{i\varepsilon \phi_1}\end{aligned}$$

Ενώ βρήκαμε στη $\rho_0 = 1$ και η συνάρτηση ρ_2 ικανοποιεί την KdV (4.24) ώστε

$$\rho_2 = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[k \left(X + \frac{k^2}{2} T + X_0 \right) \right]$$

όπου k μια ελεύθερη παράμετρος (η σταθερά X_0 και πάλι θα αγνοηθεί), ενώ:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\partial \rho_2 \Rightarrow \phi_1 = k \tanh \left[k \left(X + \frac{k^2}{2} T \right) \right]$$

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\begin{cases} \tau = u_0^2 t, & T = \varepsilon^2 \tau \\ \xi = u_0 x, & X = \varepsilon(\xi - cT) \end{cases}$$

ώστε

$$\begin{cases} T = \varepsilon^3 u_0^2 t \\ X = \varepsilon(u_0 x - u_0^2 t) \end{cases}, \quad c = 1$$

Αγνοούμε όρους ανώτερης τάξης και τελικά :

$$\begin{aligned}\rho_2 &= -\frac{\eta^2}{2} \operatorname{sech}^2[\varepsilon h(u_0 x - u_0^2 t)] \\ \phi_1 &= k \tanh[\varepsilon k(u_0 x - u_0^2 t)]\end{aligned}$$

Συνολικά:

$$\psi = (u_0 + \varepsilon^2 u_0 \rho_2) e^{i\varepsilon \phi_1} e^{iu_0^2 t}$$

και θέτοντας $k = B/u_0, u_0 = \eta$

$$\rho = u_0 + \varepsilon^2 u_0 \rho_2 = \eta - \frac{B^2}{2\eta} \operatorname{sech}^2[\varepsilon B(x - \eta t)]$$

$$\phi_1 = \frac{B}{\eta} \tanh[\varepsilon B(x - \eta t)]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε τις κυματικές εξισώσεις σε βαθιά και αβαθή ύδατα. Τα υδάτινα κυματικά φαινόμενα, όπως είδαμε, περιγράφονται από ένα σύνολο εξισώσεων γνωστές ως εξισώσεις Euler. Οι εξισώσεις Euler διέπουν ροή ιδανικού ρευστού, με μηδενικό ιξώδες (ειδική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes), και αντιπροσωπεύουν τη διατήρηση της μάζας (εξίσωση συνέχειας) και την ισορροπία ορμής και ενέργειας. Λύσεις αυτών των εξισώσεων είναι δύσκολο να βρεθούν αναλυτικά καθώς είναι συζευγμένες και με ελεύθερο σύνορο, δηλαδή η λύση (το πλάτος του κύματος) είναι επίσης μέρος των συνοριακών συνθηκών. Για το λόγο αυτό η δική μας προσέγγιση βασίζεται σε τεχνικές θεωρίας διαταραχών και πολλαπλών κλιμάκων που ελαττώνουν το σύστημα Euler σε άλλες, απλούστερες, εξισώσεις, ικανές να περιγράψουν τα φαινόμενα των υδάτινων κυμάτων. Η μέθοδος αυτή έχει τη δυνατότητα να ελαττώνει τις εξισώσεις Euler σε άλλες, λιγότερο περίπλοκες ως προς τη μαθηματική τους περιγραφή, εξισώσεις, απολύτως όμως ικανές να περιγράψουν τα φαινόμενα των υδάτινων κυμάτων.

Με απλούς όρους στα ρηχά/αβαθή ύδατα, εκεί που τα κύματα αρχίζουν να επηρεάζονται από τον πυθμένα του ωκεανού, κυριαρχεί η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV). Μελετήσαμε το φαινόμενο των κυμάτων απότομου μετώπου, γνωστά ως Bore Waves. Τα Bore Waves είναι παλιρροϊκά κύματα (άρα διατηρούν ταχύτητα, ενέργεια κλπ) τα οποία κινούνται αντίθετα στη φορά του ποταμού/όρμου στον οποίο ταξιδεύουν. Η δυναμική τους, όπως αποδείξαμε αριθμητικά, περιγράφεται άριστα από την εξίσωση KdV. Ο κώδικάς μας είναι φασματικής ακρίβειας στη χωρική μεταβλητή, ώστε να μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα με απότομες μεταβολές και 4ης τάξης implicit Runge-Kutta στο χρόνο. Παρατηρήθηκε έτσι ότι όσο πιο απότομη η κλίση, τόσο πιο άμεσο το φαινόμενο και όσο πιο αυξημένο το αρχικό πλάτος, τόσο πιο οξύ και άμεσο το φαινόμενο. Παρατηρήθηκε επίσης κάτι πιο ενδιαφέρον και σημαντικό: οι κορυφές του Bore Wave περιγράφονται και ταυτίζονται μία προς μία με τις σολιτονικές λύσεις της KdV.

Περνάμε στη συνέχεια στη μελέτη των βαθέων υδάτων (σε βαθιά νερά το βάθος του ωκεανού θεωρείται άπειρο) και στη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS). Πάλι με τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων θα εξάγουμε την *εστιασμένη* (focusing) NLS. Η εξίσωση NLS μπορεί να λυθεί αναλυτικά με τον μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης (Inverse Scattering Transform). Μελετήσαμε, κατ'αντιστοιχία με τα αβανθή ύδατα, το φαινόμενο των ωστικών κυμάτων, γνωστών ως Shock Waves. Τα ωστικά κύματα μπορούν να δημιουργηθούν από μία αρχική απότομη αλλαγή σε μία φυσική ποσότητα, που έχει ως συνέπεια τη δημιουργία ταχυτήτων διάδοσης μεγαλύτερων ακόμα και από την ταχύτητα του ήχου. Ικανοποιούν την εξίσωση NLS και το πιο γνωστό φαινόμενο, το οποίο και παρουσιάσαμε στην παρούσα διατριβή σε δύο διαστάσεις, είναι το συμπύκνωμα Bose-Einstein.

Είναι επίσης σημαντικό, ότι οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να συσχετιστούν. Χρησιμοποιώντας για ακόμη μια φορά μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων, δημιουργήσαμε μία σύνδεση μεταξύ των δύο μοντέλων και εξάγαμε την εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV) από την μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS). Κατά συνέπεια υπάρχει σύνδεση και στις σολιτονικές τους λύσεις! Εργαζόμενοι με την αφεστιασμένη NLS, καταλήξαμε μαθηματικά στο συμπέρασμα ότι οι λύσεις της εξίσωσης Korteweg-de Vries (KdV) αντιστοιχούν πλήρως στις λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (NLS) στο όριο των μικρών μεταβολών από ένα ευσταθές συνεχές υπόβαθρο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. M. J. Ablowitz, *Nonlinear dispersive waves: Asymptotic analysis and solitons*, Cambridge University Press, 2011.
2. R. S. Johnson, *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge University Press, 1997.
3. A. Kassam, L. N. Trefethen, *Fourth-order time stepping for stiff PDEs*, SIAM J. Sci. Comput. **26**, 1214-1233, 2005.
4. V. E. Zakharov, E. A. Kuznetsov, *Multi-scale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform*, Physica D **18**, 455-463, 1986.
5. T.P. Horikis, D.J. Frantzeskakis, *On the NLS to KDV connection*, Rom. Journ. Phys. **59**, 195-203, 2014.