Ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία

Υπό

Lina Vraka

Μεταπτυχιακή εργασία
υποβληθείσα για την εκπλήρωση
των προϋποθέσεων απονομής του
Μεταπτυχιακού τίτλου από το
Παιδαγωγικό τμήμα Νηπιαγωγών
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

----------2018----------

Περίληψη

Η παρουσία ενδείξεων, από τη βρεφική κιόλας ηλικία, ικανοτήτων ποσοτικοποίησης τόσο συνεχών όσο και διακριτών ποσοτήτων, υποδηλώνει ότι η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν προσθετικές στρατηγικές σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, φαινόμενο γνωστό ως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της ποσοτικοποίησης που περιορίζεται στους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις που τους διέπουν. Τα αποτελέσματα πολυάριθμων ερευνών διδακτικής παρέμβασης υποδηλώνουν ότι η διδασκαλία της ποσοτικοποίησης μέσω της μοναδοποίησης βελτιώνει την κατανόηση των εννοιών όλων των ρητών αριθμών, όπως και της πολλαπλασιαστικής και της προσθετικής σκέψης. Ο στόχος της παρούσας έρευνας είναι να εξεταστεί εάν η μοναδοποίηση ‘όντος παρέχει το κατάλληλο πλαίσιο για την ανάπτυξη όλων των στοιχειωδών ικανοτήτων ποσοτικοποίησης κατά τη πρωτοσχολική ηλικία, διευκολύνει την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και της κατανόησης των ρητών αριθμών, όπως και αμβλύνει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Στη συνέχεια αναλύεται το πιο πρόσφατο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Νηπιαγωγείου (2011) ως προς την υποστήριξη της ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης και διατυπώνονται προτάσεις για την αποτελεσματικότερη διαχείριση της διδασκαλίας της ποσοτικοποίησης.

Abstract

Indications that rudimentary abilities of quantifying continuous as well as discrete amounts are present from infancy suggest that children's tendency to apply additive strategies to multiplicative problems, also known as natural number bias, results from teaching quantification with overemphasis on natural numbers and additive relations. Numerous intervention studies suggest that unitizing, with its inbuilt emphasis on the concept of unit of measurement, is an approach to quantification through which understanding of all types of rational numbers, multiplicative/analogical relations as well as of additive relations is greatly improved. The aims of this study were to research whether teaching quantification through unitizing during the years of early education would support of all rudimentary quantification abilities, facilitate multiplicative reasoning as well as reduce the difficulties students face. Subsequently, most recent Greek kindergarten curriculum was analyzed as to its support of development of multiplicative reasoning and suggestions were made as to how it could be improved.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος που απονέμει Παιδαγωγικό τμήμα Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών (Π.Μ.Σ.) με τίτλο «Προσχολική Εκπαίδευση στην κατεύθυνση «Θετικές Επιστήμες και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Προσχολική και Πρωτοσχολική Εκπαίδευση»

Εξεταστική Επιτροπή:

Ξανθή (Ξένια) Βαμβακούση, Επιβλέπουσα, Επίκ. Καθηγήτρια

Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Μαρία Καλδρυμίδου, Καθηγήτρια

Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Κωνσταντίνος Τάτσης, Επίκ. Καθηγητής

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου Ξένια Βαμβακούση για την υπομονή και επιμονή που υπέδειξε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας, καθώς και για την καθοδήγησή, τις παρατηρήσεις, και τις συμβουλές της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτρια Μαρία Καλδρυμίδου και τον καθηγητή Κωνσταντίνο Τάτση για την συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια μου για την συμπαράσταση και την υπομονή τους καθ' όλη την διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής αυτής εργασίας.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Οι πολλαπλασιαστικές και, πιο γενικά, οι αναλογικές σχέσεις, είναι εξαιρετικά σημαντικές στα μαθηματικά , τόσο τα στοιχειώδη, όσο και τα μαθηματικά ανώτερου επιπέδου. Βρίσκονται στον πυρήνα μιας πληθώρας καταστάσεων (π.χ., καταστάσεις μέτρησης ή καταστάσεις μοιρασιάς) και διαπερνούν πολλές διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών (π.χ., στοιχειώδη αριθμητική, άλγεβρα, συναρτήσεις, γεωμετρία, πιθανότητες). Όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια, οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις συνιστούν τη βάση της *ποσοτικοποίησης* που είναι κεφαλαιώδους σημασίας τόσο στα μαθηματικά, όσο και στις φυσικές επιστήμες γενικότερα. Ειδικότερα, η ποσοτικοποίηση συνδέεται στενά με τους αριθμούς, τους φυσικούς και τους μη φυσικούς, οι οποίοι αποτελούν διαχρονικά κεντρικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Έναυσμα για την παρούσα εργασία αποτέλεσαν οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς, οι οποίες συνδέονται και με τη διδακτική προσέγγιση των ρητών αριθμών.

Οι ρητοί αριθμοί συνήθως εισάγονται στη 3η ή 4η χρονιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, μετά από 4-5 χρόνια επικεντρωμένης διδασκαλίας στην εκμάθηση των φυσικών αριθμών, των ιδιοτήτων τους, όπως και των σχέσεων μεταξύ τους, με ιδιαίτερη έμφαση στις προσθετικές σχέσεις. Αντίθετα, δε δίνεται παρόμοια προσοχή στις πρώιμες ικανότητες ποσοτικοποίησης των παιδιών που περιλαμβάνουν ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης, παρά το γεγονός ότι υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για την ύπαρξή τους. Αυτή η ασυμμετρία έχει αρνητική επίδραση τόσο όσον αφορά την κατανόηση των ρητών, όσο και τη γενικότερη ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής/αναλογικής σκέψης. Πράγματι, η έρευνα τεκμηριώνει ότι ένα σημαντικό εμπόδιο στην κατανόηση των ρητών αριθμών και των πολλαπλασιαστικών σχέσεων που τους διέπουν προκύπτει από την καταχρηστική η μεταφορά της προϋπάρχουσας γνώσης και εμπειρίας των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς. Επιπλέον, η άνιση επικέντρωση στις προσθετικές σχέσεις έναντι των πολλαπλασιαστικών, προκαλεί δυσκολίες όχι μόνο στη κατανόηση των ρητών αριθμών, αλλά και σε ένα ευρύ φάσμα πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, όπως για παράδειγμα οι καταστάσεις πολλαπλασιαστικής σύγκρισης ή τα προβλήματα αναλογίας.

Βασική θέση της εργασίας αυτής αποτελεί η άποψη ότι η αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών μπορεί να γίνει από νωρίς, αρχίζοντας από το νηπιαγωγείο. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι η κατάλληλη υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης κατά τη πρωτοσχολική ηλικία μπορεί να αμβλύνει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και να διευκολύνει την κατανόηση των ρητών αριθμών. Στην παρούσα εργασία τεκμηριώνεται η θέση αυτή και διατυπώνονται προτάσεις για την μαθηματική εκπαίδευση στο νηπιαγωγείο.

Πιο συγκεκριμένα, στην Ενότητα 1 αποσαφηνίζονται οι όροι που υιοθετούνται στην εργασία. Στην Ενότητα 2 εξετάζονται οι θεωρίες σχετικά με τις πρώιμες ικανότητες ποσοτικοποίησης και συζητιούνται ερευνητικά δεδομένα που υποδεικνύουν ότι αυτές οι ικανότητες δεν περιορίζονται στο πλήθος και τις προσθετικές σχέσεις. Η Ενότητα 3 επικεντρώνει στην επίδραση του κοινωνικο-πολιτισμικού περιβάλλοντος, συμπεριλαμβανομένης της τυπικής εκπαίδευσης, στην ανάπτυξη των ικανοτήτων ποσοτικοποίησης. Υποστηρίζεται ότι το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον ευνοεί την ανάπτυξη γνώσεων και δεξιοτήτων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις, εις βάρος των μη φυσικών αριθμών και των πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Το γεγονός αυτό έχει μακροπρόθεσμα αρνητικές επιπτώσεις στη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών, οι οποίες και τεκμηριώνονται.

Η Ενότητα 4 αφιερώνεται στην ενέργεια της μοναδοποίησης, δηλ. της επιλογής ή κατασκευής μονάδας μέτρησης και ο νοερός ή πραγματικός ισομερισμός της υπό μέτρηση ποσότητας σε μονάδες. Η μοναδοποίηση θεμελιώνει τη βάση για το πέρασμα από την ποσοτικοποίηση χωρίς τη χρήση αριθμών, στην ποσοτικοποίηση με χρήση αριθμών. Αναδεικνύεται η σχέση της μοναδοποίησης με τις ενέργειες που θεωρούνται τα θεμέλια της πολλαπλασιαστικής σκέψης και εξετάζεται ο ρόλος της μονάδας σε καταστάσεις καταμέτρησης και μέτρησης.

Στην Ενότητα 5 παρουσιάζεται μια κριτική ανάλυση του πιο πρόσφατου ελληνικού αναλυτικού προγράμματος σπουδών για τη μαθηματικά του νηπιαγωγείου ως προς τον τρόπο που προσεγγίζεται η ποσοτικοποίηση και, ειδικότερα, ως προς την έμφαση που αποδίδεται στο προσθετικό και το πολλαπλασιαστικό πεδίο. Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι η έμφαση στο πρώτο είναι εμφανώς μεγαλύτερη σε σχέση με το δεύτερο.

Τέλος, στην Ενότητα 7 διατυπώνονται συγκεκριμένες προτάσεις για την αντιμετώπιση των ζητημάτων που προέκυψαν από την ανάλυση του αναλυτικού προγράμματος. Οι προτάσεις αυτές συνοδεύονται από ενδεικτικές δραστηριότητες, οι οποίες είναι συμβατές με το μαθηματικό περιεχόμενο του αναλυτικού και θα μπορούσαν να λειτουργήσουν συμπληρωματικά ως προς αυτό.

1. Μη Αριθμητική και Αριθμητική Ποσοτικοποίηση

1.1 Αποσαφήνιση των όρων

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται ο λειτουργικός ορισμός του Thompson (1993, σ.165), ο οποίος όρισε την ποσοτική σκέψη ως τη θεώρηση μιας κατάστασης ως μια ποσοτική δομή, δηλαδή ως ένα δίκτυο ποσοτήτων και σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων («the analysis of a situation into a quantitative structure - a network of quantities and quantitative relationships»), όπου οι όροι «ποσότητα» και «σχέση» αναφέρονται σε όλους τους τύπους ποσοτήτων και σχέσεων. Για τους σκοπούς της συγκεκριμένης εργασίας σημαντική είναι η διάκριση μεταξύ διακριτών ποσοτήτων (π.χ., πλήθος) και συνεχών ποσοτήτων (π.χ., μήκος). Όσον αφορά τις σχέσεις, εκτός από τις σχέσεις ισοδυναμίας/ισότητας και τις σχέσεις διάταξης, σημαντικές για τους σκοπούς της εργασίας είναι οι προσθετικές και οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι στις προσθετικές σχέσεις συμπεριλαμβάνονται σχέσεις που εμπλέκουν τόσο την πρόσθεση, όσο και την αφαίρεση. Παρόμοια, στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις συμπεριλαμβάνονται σχέσεις που εμπλέκουν τόσο τον πολλαπλασιασμό, όσο και τη διαίρεση.

Οι πιο απλές προσθετικές σχέσεις είναι της μορφής Α=Β+Γ (ισοδύναμα, Β=Α-Γ, Γ=Α-Β). Οι πιο απλές πολλαπλασιαστικές σχέσεις είναι της μορφής Α=κΓ (ισοδύναμα. Γ=1/κ.Γ) και είναι, σύμφωνα με την ταξινόμηση του Vergnaud (1982, 1984), ειδική περίπτωση της απλής αναλογίας.

Επισημαίνεται ότι ένα ιδιαίτερο είδος σχέσεων που θεωρείται σημαντικό στην ανάπτυξη της ποσοτικής σκέψης (quantitative reasoning), συγκεκριμένα , οι σχέσεις μέρους-όλου, μπορούν να ερμηνευτούν τόσο αθροιστικά όσο και πολλαπλασιαστικά (Vamvakoussi, unp.m). Για παράδειγμα, το παρακάτω σχήμα (Εικόνα 1.1) μπορεί να θεωρηθεί αθροιστικά ως 7 τετράγωνα που αποτελούνται από 3 πράσινα τετράγωνα και 4 μπλε. Αν θεωρήσουμε το ίδιο σχήμα πολλαπλασιαστικά, τότε έχουμε ότι τα πράσινα τετράγωνα αποτελούν τα 3/7 του σχήματος, ενώ τα μπλε τετράγωνα αποτελούν τα 4/7 του σχήματος. Παράλληλα, υπάρχει και η σχέση μεταξύ των πράσινων και των μπλε τετραγώνων (πράσινα τετράγωνα προς μπλε τετράγωνα: 3 προς 4). Πρόκειται για μια (πολλαπλασιαστική) σχέση μέρους-μέρους (Singer & Resnick, 1992)

Εικόνα 1.1 Κατάστασης μέρους-όλου η οποία μπορεί να ερμηνευτεί τόσο αθροιστικά όσο και πολλαπλασιαστικά (Vamvakoussi, unp.m)

Ξαναγυρνώντας στην αποσαφήνιση του όρου «ποσοτικοποίηση», είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι εμπλεκόμενες ποσότητες είναι μετρήσιμες και οι μεταξύ τους σχέσεις εκφράσιμες με αριθμητικά εργαλεία, δηλ., σύμφωνα με τον όρο που θα χρησιμοποιείται από εδώ και στο εξής, είναι *αριθμητικοποιήσιμες*. Η αριθμητικοποίηση είναι έκβαση της (πολλαπλασιαστικής) σύγκρισης κάποιου μετρήσιμου χαρακτηριστικού της εκάστοτε ποσότητας με μια κατάλληλη μονάδα μέτρησης, δηλαδή εκφράζει την πολλαπλασιαστική σχέση ανάμεσα στη μονάδα και την υπό μέτρηση ποσότητα.

Σύμφωνα με τον Thompson (2011), η αριθμητικοποίηση μιας κατάστασης, δηλαδή η χρήση αριθμών και αριθμητικών σχέσεων για την περιγραφή της, δεν αποτελεί το πρωτεύον χαρακτηριστικό της ποσοτικής σκέψης. Στο πλαίσιο αυτό οι αριθμοί νοούνται ως ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να εκφράσουμε το μέγεθος κάποιου συγκεκριμένου χαρακτηριστικού της ποσότητας, να το καταγράψουμε, να το επικοινωνήσουμε και να το αιτιολογήσουμε σε ένα ανώτερο, συμβολικό, επίπεδο (Davydov, 1975, Nunes & Csapo, 2011).

Η άποψη του Thompson (2011) που υιοθετείται σε αυτή την εργασία είναι συμβατή με την άποψη του Piaget, οποίος υποστήριζε ότι η κατανόηση του αριθμού εδράζεται στην κατανόηση των ποσοτήτων, των ιδιοτήτων τους και των σχέσεων τους (Nunes, Bryant & Watson, 2009). Η άποψη αυτή έχει αντέξει τη δοκιμασία του χρόνου και έχει βρει απήχηση σε πολλούς βασικούς ερευνητές του πεδίου (Confrey & Kazak, 2006; Lamon, 2006; Resnick, 1989; Thompson, 2011).

2. Πρώιμη Ποσοτικοποίηση: Αρχικοί Μηχανισμοί

Οι μηχανισμοί κωδικοποίησης και αναπαράστασής του μεγέθους κάποιου χαρακτηριστικού μιας ποσότητας είναι η γνωσιακή βάση της ποσοτικοποίησης και θεωρούνται θεμελιώδεις για την ανάπτυξη της αριθμητικής σκέψης (Berrett et al. 2012; Dehaene, 1992). Στο χώρο της γνωσιακής επιστήμης υπάρχει έντονη συζήτηση σχετικά με το πλήθος και τη λειτουργία των αρχικών, ενδεχομένως έμφυτων, μηχανισμών (Daheane & Brannon, 2011; Jacob & Neider; 2009, Ni & Zhou, 2005). Τρεις διαφορετικές απόψεις έχουν διατυπωθεί. Η πρώτη υποστηρίζει ότι υπάρχει μόνο ένας αρχικός μηχανισμός, ο οποίος αφορά την επεξεργασία του πλήθους. Η δεύτερη υποστηρίζει ότι υπάρχει ένας κοινός αρχικός μηχανισμός επεξεργασίας ποσοτικών πληροφοριών τόσο για τις διακριτές, όσο και τις συνεχείς ποσότητες. Τέλος, σύμφωνα με την τρίτη άποψη, υπάρχουν δύο αρχικοί μηχανισμοί: Ο ένας αφορά την επεξεργασία του πλήθους (για μικρές πληθικότητες) και ο δεύτερος αφορά την επεξεργασία ποσοτικών πληροφοριών για συνεχείς ποσότητες. Στη συνέχεια εξετάζονται αυτές οι απόψεις.

2.1 Έμφυτος μηχανισμός κωδικοποίησης της πληθικότητας;

Σύμφωνα με τους Leibovich, Kallai και Itamar (2016) κάποιες από τις επικρατέστερες θεωρίες στον τομέα της αριθμητικής σκέψης ανήκουν στην οικογένεια των θεωριών των «ευνοημένων πεδίων» γνώσης (privileged domains) και υποστηρίζουν ότι το ανθρώπινο (και όχι μόνο) είδος είναι βιολογικά προδιατεθειμένο να επεξεργάζεται ποσοτικές πληροφορίες που αφορούν διακριτές συλλογές αντικειμένων μέσω ενός αρχικού έμφυτου μηχανισμού. Αυτός ο μηχανισμός θεωρείται προγενέστερος της ικανότητας της ομιλίας (προλεκτικός) και αναπαριστά την πληθικότητα αναλογικά (π.χ. ☐ ως “__”, ☐ ☐ ως “____,”). Πολλοί αναφέρονται σε αυτή την αναπαράσταση ως «νοητή αριθμογραμμή» (mental number line) ή ως «αναλογικό συσσωρευτή» (analog accumulator) (Ni & Zhou, 2005). Ο δεύτερος όρος αναδεικνύει ένα χαρακτηριστικό της αναπαράστασης που υποτίθεται στο πλαίσιο των συγκεκριμένων θεωριών: Παρά το γεγονός ότι η αναπαράσταση είναι συνεχής, κατασκευάζεται με διακριτό τρόπο (π.χ. ένα __ για κάθε ένα ☐). Ο αρχικός αυτός μηχανισμός, κατά συνέπεια, αναπαριστά μόνο πληθικότητες. Θεωρείται, δε, είναι ισόμορφος της λεκτικής καταμέτρησης (υπό την έννοια ότι μεταγενέστερα οι αριθμολέξεις αντιστοιχίζονται σε αυτές τις αναπαραστάσεις των πληθικοτήτων). Πλήθος ευρημάτων σχετικά με την ικανότητα των βρεφών να «διακρίνουν το πλήθος διακριτών οντοτήτων σε μια ηχητική ακολουθία ή σε μια οπτική αναπαράσταση» (Starkey, Spelke & Gelman, 1990) (δηλαδή, να διαφοροποιούν σύνολα ως προς το πλήθος, που σημαίνει να αντιλαμβάνονται σε ένα αρχικό επίπεδο τις σχέσεις «ίδιο»/ «διαφορετικό»), καθώς και μια πρώιμη κατανόηση της επίδρασης των ενεργειών «βάζω»/ «βγάζω» στο πλήθος (Wynn, 1992) θεωρήθηκαν ως αποδεικτικά στοιχεία για την άποψη ότι η τάση εστίασης στην πληθικότητα και επεξεργασίας της είναι έμφυτη (και άρα ο φυσικός αριθμός είναι ένα ευνοημένο πεδίο). Η θεωρία αυτή υποστήριζε ότι ο αρχικός έμφυτος μηχανισμός ποσοτικοποίησης διευκολύνει την εκμάθηση φυσικών αριθμών αλλά όχι και την εκμάθηση άλλων τύπων αριθμών που από την φύση τους ανήκουν στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο (κλάσματα, δεκαδικοί κτλ.) (Wynn, 2002).

Η υπόθεση της ύπαρξης ενός έμφυτου μηχανισμού ποσοτικοποίησης που αφορά το πλήθος έγινε ευρέως αποδεκτή καθώς ήταν σε συμφωνία με προϋπάρχουσες πολιτισμικές αντιλήψεις για το θεμελιώδη ρόλο των φυσικών αριθμών[1], αλλά και με τις τάσεις διδασκαλίας της

[1] Η αρχική κατανόηση του αριθμού ως ένα μέσω απαρίθμησης υποστηρίζεται πολιτισμικά. Δηλαδή το περιβάλλον των παιδιών από πολύ νεαρή ηλικία είναι συνεχώς γεμάτο με φυσικούς αριθμούς (Slusser, Ditta & Sarnecka, 2013): διδάσκονται πώς να μετράνε ομάδες αντικειμένων, διδάσκονται πως να χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους για

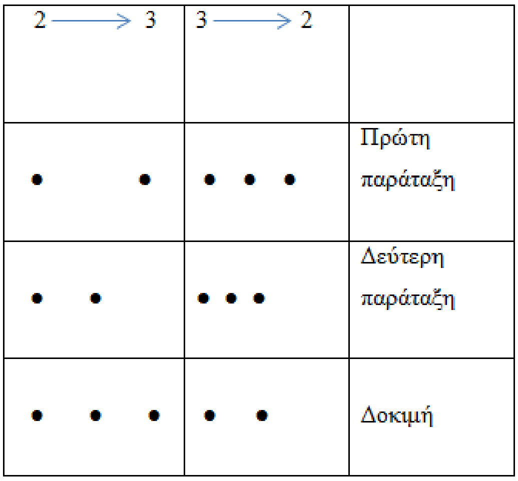
ποσοτικοποίησης. Ωστόσο, η υπόθεση αυτή δεν ήταν συμβατή με ερευνητικά δεδομένα που έδειχναν ότι ακόμα και τα βρέφη (αλλά και άλλα είδη του ζωικού βασιλείου) επεξεργάζονται ποσοτικές πληροφορίες που αφορούν συνεχείς ποσότητες και αναλογικές σχέσεις.

Κάνοντας κριτική στις απόψεις περί ευνοημένου πεδίου σχετικά με το φυσικό αριθμό, οι Mix, Huttenlocher και Levine (2002) παρατήρησαν ότι οι υποστηρικτές τους ήταν τόσο επικεντρωμένοι στο να αποδείξουν ότι τα βρέφη αντιλαμβάνονται την πληθικότητα των ποσοτήτων που απέτυχαν να λάβουν υπόψη μια πολύ σημαντική πτυχή των έργων που χρησιμοποιούσαν και αγνόησαν ότι η ποσοτικοποίηση δεν περιορίζεται απαραίτητα μόνο σε ενδείξεις σχετικά με το πλήθος. Πιο συγκεκριμένα, οι Mix et al. (2002) επεσήμαναν ότι κάθε αντικείμενο ή συλλογή αντικειμένων μπορούν να ποσοτικοποιηθούν με διάφορους τρόπους και όχι μόνο ως προς το πλήθος. Όταν μια ποσότητα παρουσιάζεται διαμιάς (και όχι σειριακά) υπάρχει μια ποικιλία διαθέσιμων χωρικών ενδείξεων όπως η επιφάνεια, ο όγκος, η περίμετρος και η πυκνότητα. Όταν μια ποσότητα παρουσιάζεται σειριακά, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συχνότητα, η διάρκεια, και ο ρυθμός. Στα ερευνητικά έργα που χρησιμοποιούσαν οι περισσότερες σχετικές έρευνες, όλες αυτές οι ποσοτικές ενδείξεις έτειναν να οδηγούν σχεδόν στην ίδια απάντηση στο πρόβλημα, της σύγκρισης δύο συνόλων (στα συγκεκριμένα ερευνητικά έργα. Επομένως, δεν ήταν ασφαλές το συμπέρασμα ότι όταν τα βρέφη και τα νήπια ποσοτικοποιούν απαραίτητα ως προς το πλήθος.

Λαμβάνοντας τα παραπάνω υπόψη, η Mix και οι συνεργάτες της (2002) εξέτασαν προσεκτικά τα έργα, τα υλικά και τις μεθόδους που είχαν

να μετρήσουν, διδάσκονται τις βασικές αρχές της απαρίθμησης, διδάσκονται τη σημασία των αριθμητικών συμβόλων, τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών και τις σχέσεις μεταξύ τους. Επίσης εξασκούνται συνεχώς στο να αναγνωρίζουν το σύνολο των αντικειμένων σε μια ομάδα. Εν συντομία, διδάσκονται να ποσοτικοποιούν διακριτές ποσότητες χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς. Επομένως, μέχρι να φτάσουν στην ηλικία να ενταχθούν στο εκπαιδευτικό σύστημα, έχουν σχεδόν αποκτήσει τις σταθερές της απαρίθμησης και εντάσσονται σε αυτό με μια εδραιωμένη αντίληψη «ότι οι αριθμοί είναι το εργαλείο για να απαριθμούμε σύνολα αντικειμένων» (Hartnett & Gelman, 1998).

χρησιμοποιήσει παλιότεροι ερευνητές. Για παράδειγμα, εξετάζοντας τα υποδείγματα των καρτών που χρησιμοποιήθηκαν σε μια από τις έρευνες παρατηρήθηκε ότι, καθώς το πλήθος των κουκκίδων μεταβάλλονταν, συνέβαιναν και άλλες μεταβολές, όπως στη συνολική επιφάνεια που κάλυπταν ή στην απόσταση μεταξύ τους. Η Mix et al. (2002) πρότειναν ότι ήταν πολύ πιθανόν τα βρέφη να αναγνώρισαν τη διαφορά μεταξύ των δύο και των τριών αντικειμένων λόγω της αλλαγής της επιφάνειας ή της διαφοράς του συνολικού μήκους του περιγράμματος της επιφάνειας που κάλυπταν, και όχι λόγω της μεταβολής στο πλήθος των αντικειμένων. Μια περαιτέρω ανάλυση της μεθοδολογίας και της ερμηνείας των αποτελεσμάτων πλέον των 15 ερευνητικών εργασιών, κατέδειξε ότι όλες οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με άλλους είδους ποσοτικές πληροφορίες, πέραν της πληθικότητας. Έπειτα, η Mix et al. (2002) ανέλυσε τη μεθοδολογία και τα ευρήματα 5 μελετών οι οποίες έλαβαν υπόψη τους ότι ίσως τα βρέφη να επεξεργάζονται πληροφορίες που αφορούν άλλα μεγέθη και όχι το πλήθος. Σε όλες τις έρευνες (Clearfield και Mix 1999; Clearfield και Mix 2001; Feigenson, Carey, και Spelke 2002; Gao, Levine, και Huttenlocher 2000; Newcombe, Huttenlocher, & Learmonth, 1999) γινόταν εμφανές ότι τα βρέφη ξεχώριζαν τα ποσά χρησιμοποιώντας μη-αριθμητικά ερεθίσματα όπως το μήκος του περιγράμματος και το εμβαδόν (Εικόνα 2.1). Οι Feigenson et al. (2002), επιπλέον σχεδίασαν έργα στα οποία μεταβαλλόταν το πλήθος, ενώ άλλα μεγέθη (π.χ. η συνολική επιφάνεια των ερεθισμάτων) παρέμεναν σταθερά. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν ότι, σε αυτή τη συνθήκη, βρέφη 6-7 μηνών παρέβλεψαν τις μεταβολές στο πλήθος. Αντιθέτως, ανταποκρίνονταν στη μεταβολή της επιφάνειας) ακόμη και αν το πλήθος παρέμενε σταθερή.



Εικόνα 2.1 Έργα από την έρευνα των Mix et al. (2002) που χρησιμοποιήθηκαν να ερευνήσουν σε τι είδους ποσοτικές μεταβολές εστιάζονται τα βρέφη.

Πιθανότατα το σημαντικότερο συμπέρασμα α αυτών των μελετών, σχετικά με τον σκοπό της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι ότι τα βρέφη φαίνεται ότι αξιοποιούν (και) άλλες ενδείξεις, πέραν της πληθικότητας, για να ποσοτικοποιήσουν ένα ερέθισμα. Για παράδειγμα, τα βρέφη φαίνεται να αναγνωρίζουν σε ποιο πιάτο υπάρχουν περισσότερα μπισκότα συγκρίνοντας την επιφάνεια των μπισκότων στο πιάτο με τη συνολική επιφάνεια του πιάτου, δηλαδή επεξεργαζόμενα σχέσεις μέρους-όλου μεταξύ συνεχών ποσοτήτων (Huttenlocher, Duffy, & Levine, 2000). Πηγαίνοντας ένα βήμα πιο πέρα, οι Mix et al. (2002) αξιοποιούν δεδομένα από έρευνες σε μικρές ηλικίες για να υποστηρίξουν ότι, υπό κατάλληλες συνθήκες, τα βρέφη και τα μικρά παιδιά όχι μόνο διακρίνουν μεταξύ συνεχών ποσοτήτων ως προς κάποιο μέγεθος (ίδιο/διαφορετικό), αλλά επεξεργάζονται λόγους και αναλογικές σχέσεις. Για παράδειγμα, οι McKrink και Wynn (2007) έδειξαν σε βρέφη 5-7 μηνών σχηματισμούς με κουκκίδες διαφορετικών χρωμάτων και τα εξοικείωσαν σε συγκεκριμένους λόγους. Στη συνέχεια τους έδειξαν σχηματισμούς με διαφορετικό λόγο μεταξύ των κουκκίδων των δύο χρωμάτων. Βρήκαν ότι τα βρέφη μπορούσαν να διακρίνουν τη διαφορά, όταν ο αρχικός και τελικός λόγος διέφεραν κατά ένα παράγοντα τουλάχιστον 2.

2.2. Εξελίξεις στις θεωρητικές προσεγγίσεις για τους αρχικούς μηχανισμούς ποσοτικοποίησης

Καθώς τα ερευνητικά ευρήματα έθεσαν εν αμφιβόλω τη θεωρητική θέση ότι υπάρχει (μόνο ένας) αρχικός, έμφυτος μηχανισμός ποσοτικοποίησης, εξειδικευμένος στην επεξεργασία του πλήθους, διαφορετικές θεωρίες διατυπώθηκαν προκειμένου να συμβαδίζουν με τα νέα δεδομένα.

Οι Gallistel, Gelman και Cordes (2006) πρότειναν ότι η ύπαρξη ενός κοινού μηχανισμού για την αναπαράσταση του μεγέθους τόσο διακριτών, όσο και συνεχών ποσοτήτων (χρησιμοποιώντας ευρήματα κυρίως σχετικά με τη χρονική διάρκεια). Ως κεντρική ιδέα διατηρούν την αναλογική αναπαράσταση των ποσοτήτων, επισημαίνοντας ότι το μοντέλο του «αναλογικού συσσωρευτή» (για άλλους, της «νοερής αριθμογραμμής») μπορεί, επί της αρχής, να αναπαραστήσει και συνεχείς ποσότητες (χρησιμεύοντας ως βάση για τη μεταγενέστερη αντιστοίχιση μη φυσικών αριθμών στις νοερές αυτές αναπαραστάσεις). Υποστηρικτικά στοιχεία γι' αυτή τη θέση προκύπτουν από έρευνες στο χώρο των νευροεπιστημών με τη βοήθεια νέων ερευνητικών εργαλείων και παραδειγμάτων. Για παράδειγμα, υπάρχουν δεδομένα από νευροαπεικονιστικές μεθόδους (π.χ., fMRI - Λειτουργική Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού) που δείχνουν πολλές ομοιότητες στον τρόπο με τον οποίο ο εγκέφαλος επεξεργάζεται ποσοτικές πληροφορίες όσον αφορά το πλήθος και τους λόγους ποσοτήτων, τόσο σε μη συμβολικά, όσο και σε συμβολικά έργα (Jacob & Nieder, 2009; Jacob, Vallentin & Nieder, 2012).

Τέτοια ευρήματα είναι πολύ σημαντικά για την έρευνα στο πεδίο της αριθμητικής ανάπτυξης (numerical development) καθώς θέτουν εν αμφιβόλω τον ισχυρισμό ότι ο έμφυτος μηχανισμός επεξεργασίας του μεγέθους δεν υποστηρίζει την αναπαράσταση των ρητών αριθμών.

Παρά το γεγονός ότι γενικά υπάρχει αποδοχή των μοντέλων αναλογικής αναπαράστασης του μεγέθους της ποσότητας, ορισμένοι ερευνητές θεωρούν ότι υπάρχουν φαινόμενα που δεν μπορούν να εξηγηθούν βάσει του μοντέλου αυτού (π.χ. LeCorre & Carey, 2007). Ένα τέτοιο φαινόμενο, το οποίο περιγράφεται στην έρευνα της Wynn (1992) με βρέφη ηλικίας 5 μηνών, είναι η ικανότητα άμεσης αναγνώρισης της πληθικότητας για σύνολα με το πολύ τέσσερα στοιχεία που είναι ανεξάρτητη του κοινωνικο-πολιτισμικού περιβάλλοντος (και των αριθμητικών και γλωσσικών εργαλείων που αυτό παρέχει) και είναι παρούσα από πολύ μικρές ηλικίες, ενδεχομένως και από τη βρεφική. Έχει λοιπόν προταθεί ένα δεύτερο έμφυτο σύστημα ποσοτικοποίησης, το οποίο αναπαριστά το πλήθος με διακριτά σύμβολα, για μικρές (μέχρι το 4) πληθικότητες.

2.3. Συμπερασματικά

Η συζήτηση για τις βάσεις της ποσοτικής σκέψης έχει υπάρξει και συνεχίζει να είναι έντονη, με πολλές αντικρουόμενες απόψεις σχετικά με τους αρχικούς μηχανισμούς της. Αυτό που φαίνεται να είναι επί του παρόντος γενικά αποδεκτό είναι ότι στοιχειώδεις ικανότητες ποσοτικοποίησης είναι παρούσες ήδη από τη βρεφική ηλικία και δεν περιορίζονται στις διακριτές ποσότητες και τις προσθετικές σχέσεις.

3. Πρώιμη Αριθμητικοποίηση

Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για τις πρώιμες ικανότητες ποσοτικοποίησης των παιδιών, τόσο όσον αφορά το πλήθος, όσο και συνεχή μεγέθη, το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον, τόσο μέσω της άτυπης, όσο και μέσω της τυπικής εκπαίδευσης στα πρώτα χρόνια, πριμοδοτεί την αριθμητικοποίηση του πλήθους. Πράγματι, πριν ακόμα ξεκινήσουν το σχολείο, τα παιδιά εκτίθενται σε καταστάσεις και εργαλεία σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς που τους συνδέουν με τις διακριτές ποσότητες. Καταστάσεις στις οποίες τα παιδιά πρέπει να αποφανθούν για το πλήθος μιας συλλογής αντικειμένων στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασης γονιού-παιδιού, γλωσσικά εργαλεία όπως η ακολουθία των αριθμολέξεων, ενέργειες όπως η ένα-προς-ένα αντιστοίχιση και τεχνικές όπως η χρήση των δακτύλων στην καταμέτρηση υποστηρίζουν τα παιδιά να οικοδομήσουν το σχήμα της καταμέτρησης με απλή μονάδα (Gellman & Galistel, 1978; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Το σχήμα αυτό, με τη σειρά του, υποστηρίζει τις προσθετικές σχέσεις. Πράγματι, οι αρχές της προσθετικής σκέψης, σύμφωνα με τον Piaget (1977, στο Kornilaki, 1999), είναι ριζωμένες στην ένα-προς-ένα αντιστοίχιση και, κατ' επέκταση, στην καταμέτρηση. Στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, οι προσθετικές σχέσεις οικοδομούνται στη βάση σχέσεων μέρους-όλου, όπου κάποιος πρέπει να κατανοήσει ότι δύο σύνολα πρέπει είτε να ενωθούν είτε να διαχωριστούν ώστε να σχηματιστούν νέες ποσότητες (Nunes & Csapo, 2011).

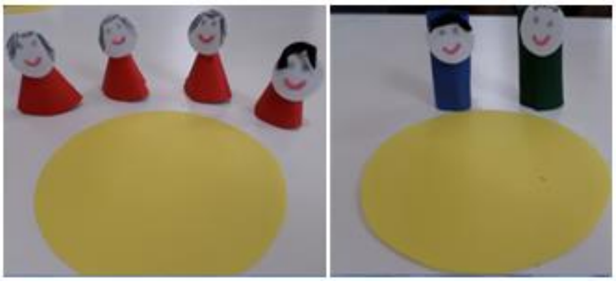
Αντίθετα, οι μη φυσικοί αριθμοί και οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις, στις οποίες αυτοί εδράζονται δεν υποστηρίζονται εξίσου. Η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης βασίζεται στην ανίχνευση, έκφραση και κατασκευή πολλαπλασιαστικών σχέσεων . Μέχρι και πρόσφατα, κυρίαρχη αντίληψη στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης ήταν ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη έπεται της προσθετικής. Η αντίληψη αυτή βασίζεται, εν μέρει, στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύθηκε και μεταφέρθηκε στην εκπαίδευση η Πιαζετιανή προσέγγιση στη γνωστική ανάπτυξη (Boyer & Levine, 2015). Πράγματι, ο Piaget και οι συνεργάτες του (Inhelder & Piaget, 1958) έδειξαν πειραματικά ότι τα παιδιά κάτω των 12 ετών δύσκολα μπορούσαν να διαχειριστούν σχέσεις ισοδυναμίας και διάταξης ανάμεσα σε δύο λόγους – όπως, για παράδειγμα, να αποφασίσουν ποιος από τους δύο χυμούς θα είναι πιο συμπυκνωμένος, αυτός που θα φτιάχνονταν με 1 ποτήρι συμπυκνωμένο χυμό και 2 ποτήρια νερό ή αυτός θα φτιάχνονταν με 2 ποτήρια συμπυκνωμένο χυμό και 2 ποτήρια νερό. Τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων φανέρωσαν ότι τα μικρότερα παιδιά χρησιμοποιούσαν λανθασμένα προσθετικές στρατηγικές για να αναλύσουν τις αναλογίες. Ως εκ τούτου, η αποτυχία των παιδιών να αναλύσουν και να συγκρίνουν τις αναλογικές σχέσεις στις δύο ποσότητες πολλαπλασιαστικά, χρησιμοποιήθηκε ως απόδειξη ότι τα παιδιά κάτω των 12 ετών δεν είναι σε θέση να σκέφτονται αναλογικά/πολλαπλασιαστικά, αν φυσικά γίνει αποδεκτή η θέση ότι η ικανότητα πολλαπλασιαστικής σκέψης τεκμαίρεται αποκλειστικά και μόνο από την ικανότητα αναγνώρισης σχέσεων ανάμεσα σε δύο λόγους.

Η αντίληψη αυτή είναι συμβατή και με τις (μεταγενέστερες του Piaget) θεωρίες που υποστηρίζουν τη βιολογική προτεραιότητα των φυσικών αριθμών που αναφέρθηκαν παραπάνω, από τις οποίες απορρέει ότι η κατανόηση των εννοιών των φυσικών αριθμών καθώς και των προσθετικών σχέσεων αποτελούν προαπαιτούμενα για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Olive, 2000). Σε αυτά πρέπει να συνυπολογιστεί το γεγονός ότι η αντίληψη αυτή δεν έρχεται σε αντίθεση με την παραδοσιακή σειρά με την οποία διδάσκονται οι αριθμοί και οι πράξεις τους στην τυπική εκπαίδευση. Έτσι, οι φυσικοί αριθμοί και οι προσθετικές σχέσεις αποτελούν ρητό στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων ήδη από το νηπιαγωγείο, ενώ οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις εισάγονται ρητά αργότερα, στο πλαίσιο της πράξης του πολλαπλασιασμού μεταξύ φυσικών αριθμών.

Στην επόμενη ενότητα θα εστιάσουμε στα προβλήματα που προκαλούνται από την επικέντρωση στην αριθμητικοποίηση του πλήθους στην πρωτοσχολική ηλικία.

3.1 Ασυμμετρίες στην πρώιμη αριθμητικοποίηση: Οι συνέπειες

Η επικέντρωση στην αριθμητικοποίηση του πλήθους στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και η έμφαση στις προσθετικές σχέσεις, ενώ παράλληλα οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις πρακτικά αγνοούνται, έχει

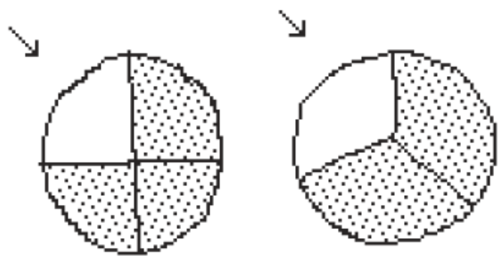


Εικόνα 3.1 Υλικό για την σύγκριση κλασματικών μονάδων από την εξερεύνηση της Βράκα

συνέπειες.

Πράγματι, οι Singer και Resnick (1992) επισημαίνουν ότι παρόλο που τα νήπια μπορούν να χειριστούν ικανοποιητικά αναλογίες και λόγους με έναν σχεσιακό και όχι αριθμητικό τρόπο, η ικανότητά τους αυτή μειώνεται δραστικά καθώς αυξάνεται η γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς. Οι Boyer & Levine (2015) προτείνουν ότι το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε προβλήματα που απαιτούν αναλογική σκέψη τα παιδιά συνήθως επικεντρώνονται στο πλήθος και επιλέγουν να χρησιμοποιούν προσθετικές στρατηγικές υπολογισμού. Ένα σχετικό παράδειγμα μπορεί να αντληθεί από τις επιλογές των παιδιών σε καταστάσεις μοιρασιάς. Σε παιδιά 5-6 ετών από την Ελλάδα (Βράκα, 2014), δόθηκε το υλικό της Εικόνας 3.1 και τους ζητήθηκε να αποφανθούν ποια παιδιά θα φάνε μεγαλύτερο κομμάτι τούρτας, αν η τούρτα μοιραστεί δίκαια. (τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα να επικαλύψουν την μια «τούρτα» με την άλλη για να διαπιστώσουν ότι είναι ίδιου μεγέθους). Μόνο το 44% των παιδιών, αφού πραγματοποίησαν τον διαμερισμό των τουρτών και είχαν μπροστά τους το μέγεθος των κομματιών ½ και ¼, απάντησαν ότι στο πάρτι με τα δύο παιδιά τα κομμάτια της τούρτας θα είναι μεγαλύτερα. Τα υπόλοιπα παιδιά ισχυρίστηκαν πως στο πάρτι με τα τέσσερα παιδιά θα φάνε περισσότερη τούρτα επειδή η τούρτα θα κοπεί σε 4 κομμάτια, που είναι περισσότερα από τα δύο. Δηλαδή, τα παιδιά αυτά επικεντρώθηκαν στο πλήθος των κομματιών, παρά στο σχετικό τους μέγεθος.

Παρόμοια προβλήματα παρατηρούνται και σε μεγαλύτερες ηλικίες, μετά την εισαγωγή των κλασμάτων στη διδασκαλία. Η Moss (2005) αναφέρει το παράδειγμα ενός παιδιού 5ης τάξης το οποίο, συγκρίνοντας τα κλάσματα 3/4 και το 2/3 είναι ίσα



Εικόνα 3.2. Έργο σύγκρισης κλασματικών μονάδων από την έρευνα της Moss (2005)

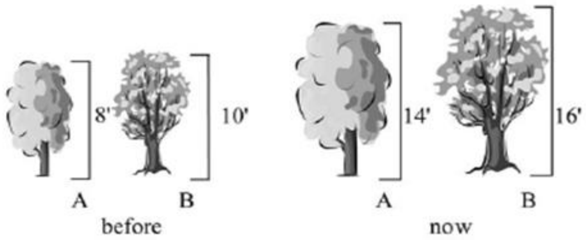
«επειδή και τα δύο χρειάζονται ένα κομμάτι για να γίνουν ολόκληρα», παρά το γεγονός ότι σχεδιάζει μια εικονική αναπαράσταση των κλασμάτων (Εικόνα 3.2).

Η επικέντρωση στις προσθετικές σχέσεις μεταξύ των όρων του κλάσματος έχει τεκμηριωθεί και από πολλούς άλλους ερευνητές (π.χ., Clarks & Roche, 2009; Pearn & Stephens, 2004). Οι Clark και Roche (2009), για παράδειγμα, βρήκαν ότι 31,3% του δείγματος στην ερευνά τους (323 μαθητές ηλικίας 11-12 ετών) θεωρούσαν το 3/4 μεγαλύτερο από 7/9 γιατί στο 3/4 έλλειπε ένα «κομμάτι» για να ολοκληρωθεί, δηλαδή να γίνει 4/4, ενώ στα 7/9 έλλειπαν δύο. Οι ερευνητές παρατήρησαν επίσης ότι παρόμοιο ποσοστό νεοδιόριστων καθηγητών των μαθηματικών αντιμετώπιζαν εννοιολογικές δυσκολίες σε έργα σύγκρισης κλασμάτων που δεν είχαν κοινούς παρανομαστές.

Η τάση να χειρίζονται τα παιδιά τους αριθμητές και τους παρανομαστές ξεχωριστά, παραβλέποντας την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ τους είναι πολύ εμφανής και σε άλλους τρόπους με τους οποίους τα παιδιά συγκρίνουν κλάσματα. Οι Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes και Dartnell (2014) υπογραμμίζουν ότι πάνω από το 80% των παιδιών από την 5ης τάξη δημοτικού έως τη 1ης γυμνασίου που έλαβαν μέρος στην έρευνά τους (n=450) χειρίστηκαν σωστά προβλήματα σύγκρισης κλασμάτων όταν αυτά εμπεριείχαν λογική συμβατή με τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά συγκρίνανε κλάσματα όπως το 5/17 με το 11/17 συλλογιζόμενα ότι αφού 5 < 11 και οι παρανομαστές είναι ίσοι τότε 5/17 < 11/17. Όταν ζητήθηκε να συγκρίνουν κλάσματα που δεν έχουν ίσους παρανομαστές αλλά αντικρούουν τη «προκατάληψη του φυσικού αριθμού», όπως 17/21 με το 9/14 τα παιδιά φαίνεται να σύγκριναν τους παρανομαστές 21 > 14 και τους αριθμητές 17 >

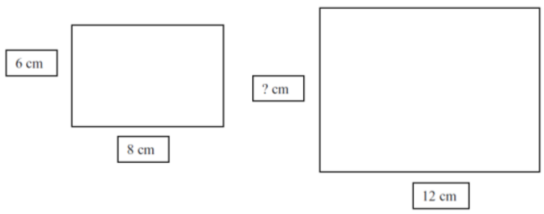
9 ξεχωριστά και να καταλήγουν στο σωστό αποτέλεσμα 17/21 > 9/14. Το σημαντικό σημείο αυτής της έρευνας είναι ότι οι σωστές απαντήσεις έπεσαν στο 14% μόλις τα κλάσματα προς σύγκριση απαιτούσαν αναλογικό τρόπο σκέψης: για παράδειγμα τα 5/8 > 5/17 παρόλο που 8 < 17, ή σε κλάσματα όπως τα 6/13 < 4/5 όπου στο μεγαλύτερο κλάσμα τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρανομαστής έχουν μικρότερες τιμές από τον αριθμητή και τον παρανομαστή του μικρότερου κλάσματος.

Πολύ συχνά τα παιδιά να ερμηνεύουν λανθασμένα πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ως προσθετικές και επομένως χρησιμοποιούν λανθασμένα προσθετικές στρατηγικές



Εικόνα 3.3 Έργο πηλοπλαστικής ανάλυσης μέσω μεγέθυνσης στην έρευνα της Moss (2005).

υπολογισμών Η Moss (2005) περιέγραψε το πώς σκέφτηκε ένα αγόρι όταν του ζητήθηκε να υπολογίσει το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είχε μεγεθυνθεί (Εικόνα 3.3). Το



Εικόνα 3.4 Έργο πολλαπλασιαστικής σύγκρισης από την έρευνα της Lamon (1993).

παιδί (6^{ης} τάξης δημοτικού) απέτυχε να εξετάσει τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που υπήρχαν στο πρόβλημα ώστε να μπορέσει αναγνωρίσει ότι το μεγεθυμένο αντικείμενο έχει και τις δύο πλευρές μεγαλύτερες κατά τον ίδιο λόγο και επομένως «η αναλογική σχέση μεταξύ των πλευρών παραμένει σταθερή» (η μικρότερη πλευρά είναι 3/4 της μεγαλύτερης). Αντιθέτως εστίασε στη διαφορά των τιμών των πλευρών του αρχικού ορθογωνίου (2cm) για να υπολογίσει την πλευρά του μεγεθυμένου σχήματος.

Η υπεροχή της αθροιστικής σκέψης φαίνεται να είναι η αιτία για τη τάση να θεωρούνται ως προσθετικές καταστάσεις που μπορούν να ερμηνευθούν και με τους δύο τρόπους, (Lamon, 2006, Moss, 2005). Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι καταστάσεις πολλαπλασιαστικής σύγκρισης. Η έρευνα της Lamon (1993) καταδεικνύει ότι τα παιδιά κατά το πλείστον αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν τις πολλαπλασιαστικές αλλαγές που υπάρχουν σε προβλήματα όπως τα παραπάνω, και εστιάζουν στις αθροιστικές πτυχές των καταστάσεων. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα που φανερώνει αυτή την αποτυχία υπήρξε ένα πρόβλημα που απαιτούσε να βρεθεί η μεγαλύτερη ποσοτική αύξηση. Ζητήθηκε από τα παιδιά να πουν ποιό δέντρο μεγάλωσε περισσότερο (Εικόνα 3.4). Τα αποτελέσματα φανερώνουν ότι τα παιδιά (96%) εστίασαν στην απόλυτη μεταβολή και κατ' επέκταση ανάλυσαν την κατάσταση μέσω των μεταβολών των απόλυτων τιμών (τελική τιμή – αρχική τιμή = απόλυτη μεταβολή). Έτσι, α) σύγκριναν την απόλυτη τιμή της αύξησης, οπότε και τα δύο δέντρα αυξήθηκαν το ίδιο καθώς και τα δύο αυξήθηκαν κατά το ίδιο πλήθος μονάδων, ή β) σύγκριναν την τελική απόλυτη τιμή και συμπέραναν ότι το Β δέντρο μεγάλωσε περισσότερο, επειδή το απόλυτο ύψος του είναι μεγαλύτερο. Η τάση να σκέφτονται τα παιδιά αθροιστικά μας φανερώνει ότι τα παιδιά εστιάζουν στο πόσες μονάδες μήκους θα προστεθούν, δηλαδή την διαφορά μεταξύ των ποσοτήτων, αλλά αποτυγχάνουν να λάβουν υπόψη τη σχετική αύξηση – δηλαδή την αναλογική αύξηση του αρχικού ύψους (Lamon, 2006).

Η επικέντρωση στις προσθετικές, αντί των πολλαπλασιαστικών σχέσεων, εκδηλώνεται και σε πλήθος άλλων καταστάσεων, όπως για παράδειγμα σε προβλήματα ανάλογων ποσών (Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2012).

Η ασυμμετρία υπέρ των αριθμητικοποίησης μέσω των φυσικών αριθμών και υπέρ των προσθετικών σχέσεων, που εδράζονται στο σχήμα της καταμέτρησης με απλή μονάδα (single-unit counting scheme), αποτελεί τη βάση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, 2015), η οποία προκαλεί σημαντικές δυσκολίες στα παιδιά όταν εισάγονται στους μη φυσικούς αριθμούς και επιμένει μέχρι και σε μορφωμένους ενήλικες, Πρόκειται για το φαινόμενο της αρνητικής επίδρασης της προϋπάρχουσας γνώσης και εμπειρίας των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς, καθώς προσπαθούν να αποδώσουν νόημα στους ρητούς αριθμούς, ιδιαίτερα στη κλασματική τους μορφή. Στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού αποδίδεται ένα πλήθος συστηματικών λαθών που δείχνουν ότι τα παιδιά, από την πρωτοβάθμια ως το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μεταφέρουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους ρητούς. Για παράδειγμα, «όσο μεγαλύτεροι οι όροι του κλάσματος, τόσο μεγαλύτερη η αξία του», «ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση πάντα μεγαλώνουν τους αριθμούς, ενώ η διαίρεση και η αφαίρεση τους μικραίνουν», «υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων ανάμεσα σε δύο ρητούς» (Clarks & Roche, 2009, Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vamvakoussi et al.,2012).

3.2 Συμπερασματικά

Το πλήθος των λαθών που πραγματοποιούν τα παιδιά καθώς εστιάζουν στις προσθετικές πτυχές μιας κατάσταση και χειρίζονται τους ρητούς αριθμούς ως φυσικούς έρχεται σε αντίθεση με ερευνητικά ευρήματα που υποδεικνύουν ότι τα παιδιά, ήδη από τη βρεφική ηλικία, επεξεργάζονται σε ένα στοιχειώδες επίπεδο ποσοτικές πληροφορίες τόσο για το πλήθος, όσο και για τις συνεχείς ποσότητες (π.χ. επιφάνεια, οι οποίες περιλαμβάνουν και αναλογικές σχέσεις (Jeong, Levine & Huttenlocher, 2007; Mix et al., 2002;), όπως επίσης και να αντιλαμβάνονται έννοιες σχετικές με τους ρητούς αριθμούς. Ωστόσο, το κοινωνικο-πολιτισμικό περβάλλον, μέσω τόσο της άτυπης, όσο και της τυπικής εκπαίδευσης, υποστηρίζει από νωρίς την ανάπτυξη και συστηματικοποίηση των γνώσεων για τους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις, παρέχοντας ένα πλήθος αναπαραστατικών εργαλείων, με πρωτεύοντα τα συμβολικά (γλωσσικά και αριθμητικά). Ταυτόχρονα, δε δίνεται η ίδια έμφαση στην ανάπτυξη εννοιών και διαδικασιών που αφορούν το πολλαπλασιαστικό πεδίο στις μικρές ηλικίες. Η ασυμμετρία αυτή προκαλεί σοβαρά προβλήματα στη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών. Στην επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε πώς και υπό ποιες συνθήκες το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί.

4. Μοναδοποίηση, Μέτρηση και Καταμέτρηση

Όπως έχει ήδη συζητηθεί, η έρευνα δείχνει ότι υπάρχουν πρώιμες — ενδεχομένως και έμφυτες — ικανότητες ποσοτικοποίησης, οι οποίες δεν περιορίζονται στις διακριτές ποσότητες και τις προσθετικές σχέσεις. Η περαιτέρω ανάπτυξή τους, καθώς και η ανάπτυξη της αριθμητικής ποσοτικοποίησης απαιτεί υποστήριξη από το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον και, ιδιαίτερα, από την εκπαίδευση. Η ασύμμετρη υποστήριξη της ποσοτικοποίησης στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, με έμφαση στις προσθετικές σχέσεις και την αριθμητικοποίηση με φυσικούς αριθμούς, αγνοεί τις πρώιμες ικανότητες σχετικά με τις πολλαπλασιαστικές/αναλογικές σχέσεις και υπονομεύει την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών, καθώς και την κατανόηση των ρητών αριθμών.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η μέτρηση ως ενέργεια που μπορεί να υποστηρίξει την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης, αλλά και της αριθμητικής ποσοτικοποίησης, προετοιμάζοντας το έδαφος για την επέκταση του συνόλου των φυσικών στο σύνολο των ρητών. Κεντρική θέση στη μέτρηση έχει η μοναδοποίηση, δηλαδή η επινόηση/κατασκευή της μονάδας μέτρησης και ο νοερός ή πραγματικός ισομερισμός της υπό μέτρηση ποσότητας σε μονάδες.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η μονάδα μέτρησης βρίσκεται σε πολλαπλασιαστική/αναλογική σχέση με την υπό μέτρηση ποσότητα. Το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης απαντά, στην ουσία, στο ερώτημα «πόσες φορές χωράει η μονάδα στην υπό μέτρηση ποσότητα;» (εξ ου και ο όρος «διαίρεση μέτρησης» στα σχολικά μαθηματικά) Αυτό, δε, ισχύει τόσο για τις συνεχείς, όσο και για τις διακριτές ποσότητες. Το τελευταίο δεν είναι προφανές, όπως επισημαίνει η Sophian (2004) και θα συζητηθεί στη συνέχεια.

4.1 Ποσοτικοποίηση και μοναδοποίηση

Η μοναδοποίηση είναι το κατ' εξοχήν εργαλείο της αριθμητικής ποσοτικοποίησης (Iannece, Mellone & Tortora, 2009; Olive, 2001; Sarama & Clements, 2009; Sophian, 2007; Thompson, 2011). Επιπλέον, υπάρχουν ερευνητές που υποστηρίζουν ότι η μοναδοποίηση βρίσκεται στον πυρήνα και της πρώιμης μη αριθμητικής ποσοτικοποίησης. Πράγματι, υποστηρίζεται ότι η πρώιμη αντίληψη του μεγέθους μιας (συνεχούς) ποσότητας βασίζεται στην αναλογική του σύγκριση με κάποια άλλη ποσότητα που λειτουργεί ως μέτρο σύγκρισης, δηλαδή ως μια πρώιμη «μονάδα μέτρησης» (Jeong et al., 2007; Gao et al.,2000; Mix et al., 2002). Την άποψη αυτή συμμερίζεται και η Ulrich (2015), η οποία θέτει ως προϋπόθεση τον πρώιμο ισομερισμό της ποσότητας σε «μονάδες μέτρησης» για τη στοιχειώδη επεξεργασία αναλογικών σχέσεων. Η ερευνήτρια τονίζει ότι η ανάπτυξη της ικανότητας της σύγκρισης ποσοτήτων (του χαρακτηριστικού της ποσότητας υπό μέτρηση με τον προέχον μέτρο σύγκρισης) οδηγεί στη δημιουργία και εξέλιξη των νοερών ικανοτήτων της αναλογικής σύγκρισης μιας μονάδας μέτρησης με την ποσότητα που μετράται για να βρεθεί το μέγεθος της ποσότητας.

Η αριθμητικοποίηση, δηλαδή ο προσδιορισμός της αριθμητικής αξίας σε μια ποσότητα με τη χρήση κοινωνικά αποδεκτών συμβολικών εργαλείων (αριθμολέξεων ή αριθμητικών συμβόλων) επιτυγχάνεται όταν μετριέται κάποιο χαρακτηριστικό (μέγεθος) της ποσότητας (Iannece et al., 2009; Nunes et al., 2009; Sophian, 2004; Thompson, 2011). Για παράδειγμα, ένα φυσικό αντικείμενο ή συλλογή αντικειμένων, όπως ένας σωρός από πέτρες, μπορεί να μετρηθεί ως προς την επιφάνεια, ως προς τον όγκο, ως προς το ύψος, ή ως προς το πλήθος. Για να μετρηθεί η επιφάνεια, ο όγκος, ή το ύψος, κάποιο μέτρο σύγκρισης, πρέπει να επιλεγεί μια κατάλληλη μονάδα μέτρησης. και να βρεθεί η πολλαπλασιαστική σχέση της μονάδας με την υπό μέτρηση ποσότητα. Στην περίπτωση που η μονάδα είναι μικρότερη από την ποσότητα, η ποσότητα μπορεί να ισομεριστεί σε μονάδες και να καταμετρηθούν οι μονάδες. Αυτή είναι και η περίπτωση μέτρησης που συναντούν τα παιδιά, τα οποία πρέπει καταρχήν να αναγνωρίσουν τι (ποιο μέγεθος) θα μετρήσουν και με ποιο εργαλείο (ποια μονάδα θα χρησιμοποιήσουν). Δηλαδή, απαιτείται από τα παιδιά να λάβουν υπόψη τους το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της ποσότητας που θα αριθμητικοποιήσουν, όπως και ποιον τύπο και μέγεθος της μονάδα μέτρησης θα χρησιμοποιήσουν για να το επιτύχουν. Παρόλο που οι μονάδες ποσοτικοποίησης συνεχών μεγεθών μπορεί να ποικίλουν ως προς το μέγεθος, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές μονάδες μεγέθους μαζί χωρίς καμία αναφορά ως προς το μέγεθος τους. Για παράδειγμα, αν μια κανάτα χωράει τέσσερα ποτήρια νερό, για να μετρήσουμε χρησιμοποιώντας το ποτήρι ως μονάδα, πρέπει τα ποτήρια να έχουν το ίδιο μέγεθος και να γεμίσουν μέχρι το ίδιο σημείο στη περίπτωση των πολλαπλών μονάδων, ή να χρησιμοποιηθεί ένα ποτήρι που θα γεμιστεί επανειλημμένα έως το ίδιο, ακριβώς, σημείο. Αν η κανάτα χωράει 3 γεμάτα ποτήρια και ένα μισό δεν μπορούμε να πούμε ότι χωράει 4, θα λέμε 3 ολόκληρα και 1 μισό ποτήρι.

Αντίθετα, αν στο παραπάνω παράδειγμα επιλεχθεί να αριθμητικοποιηθεί το πλήθος, τότε κατά την καταμέτρηση των πετρών θα πρέπει να παραβλεφθεί το μέγεθός τους. Η μονάδα, σε αυτή την περίπτωση, είναι ενδεχομένως σαφής σε έναν ενήλικα: Πρόκειται για το αφηρημένο «ένα», το οποίο αντιστοιχίζεται σε κάθε ένα στοιχείο του συνόλου, που έχει απογυμνωθεί από τα φυσικά του χαρακτηριστικά. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτό δεν είναι απαραίτητα σαφές στο παιδί που αντιστοιχίζει αριθμολέξεις σε φυσικά αντικείμενα και, ενδεχομένως, ταυτίζει τη μονάδα με το φυσικό αντικείμενο (Sophian, 2004), κάτι που μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες, ιδιαίτερα αν ληφθεί υπόψη ότι η ποσοτικοποίηση ως προς το πλήθος καταστάσεων που εμπλέκουν διακριτές συλλογές φυσικών αντικειμένων δεν αφορά απαραίτητα το πλήθος των φυσικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, σε μια κατάσταση στην οποία κάποιος έχει στην τσέπη του 1 νόμισμα των 2 ευρώ και 3 νομίσματα του 1 ευρώ, η ερώτηση «Πόσα νομίσματα έχει;» και η ερώτηση «Πόσα χρήματα έχει;» αφορούν διαφορετικές ποσότητες, απαιτούν τη χρήση διαφορετικής μονάδας και έχουν διαφορετικές απαντήσεις. Ας σημειωθεί, επιπλέον, ότι σε μια κατάσταση που κάποιος έχει 2 μεγάλα και 1 μικρό μπισκότο (3 φυσικά αντικείμενα στη συλλογή), η απάντηση στην ερώτηση «Πόσα μπισκότα έχει;» απαιτεί να αγνοηθεί το σχετικό μέγεθος των φυσικών αντικειμένων (ή να δοθεί απάντηση στη μορφή συμμιγούς, δηλ. «2 μεγάλα μπισκότα και 1 μικρό μπισκότο»). Σε μια κατάσταση, όμως, όπου κάποιος έχει 2 μεγάλα μπισκότο και 1 μισό μπισκότο (πάλι 3 φυσικά αντικείμενα στη συλλογή), αναμένεται να ληφθεί υπόψη το σχετικό μέγεθος των αντικειμένων.

4.2 Μοναδοποίηση και πολλαπλασιαστικές δομές

Η μοναδοποίηση μιας συνεχούς ποσότητας σχετίζεται άμεσα με την ανάγκη εισαγωγής κλασματικών μονάδων, η οποία θέτει τα θεμέλια των ρητών αριθμών (Baturo, 2004; Lamon, 2006; Schmittau, 2010). Αυτό συμβαίνει επειδή η μέτρηση συνεχών ποσοτήτων πολύ συχνά δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια μόνο με την χρήση ολόκληρων μονάδων μέτρησης. Για να γίνει δυνατόν να βρεθεί μια πιο ακριβής μέτρηση η μονάδα μέτρησης συχνά χρειάζεται να «σπάσει», δηλαδή να υποδιαιρεθεί σε ίσα μέρη. Η πράξη υποδιαίρεσης της μονάδας μέτρησης που χρησιμοποιείται για την μέτρηση συνεχών ποσοτήτων θέτει την αντιληπτική βάση για τους ρητούς αριθμούς (Empson, 1999; Mamede, 2009; Oléron & Piaget, 2014, p.181, Olive, 2001; Steffe & Olive, 2010) και των πολλαπλασιαστικών σχέσεων που τους διέπουν. Οι Mamede (2009) και Empson (1999) επίσης τονίζουν ότι η ενασχόληση με τον ισομερισμό των συνεχών ποσοτήτων προσφέρει καταστάσεις για την ανάπτυξη γλωσσικών εργαλείων που χρειάζονται για την περιγραφή των κλασματικών ποσών.

Η σύνδεση της μοναδοποίησης και μέτρησης συνεχών ποσοτήτων με τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις είναι προφανής. Η σύνδεση αυτή στο πλαίσιο της ποσοτικοποίησης μέσω της καταμέτρησης είναι λιγότερο εμφανής.

Ας θεωρήσουμε τέσσερις καταστάσεις καταμέτρησης, στις οποίες εμφανίζονται α) 3 μήλα, β) 3 ζευγάρια παπούτσια, γ) 2 μήλα ολόκληρα και ένα κομμένο στη μέση και δ) 3 μήλα και 2 πορτοκάλια (Βαμβακούση, 2017, σημειώσεις μαθήματος Διδακτική Μαθηματικών ΙΙ).

Στην πρώτη κατάσταση, η οποία αντιπροσωπεύει μια τυπική κατάσταση μέτρησης, σχεδόν επιβάλλεται η χρήση του 1 μήλου ως μονάδα για να απαντηθεί η ερώτηση «πόσα είναι;». Στη δεύτερη περίπτωση, διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν, αν επιλεγεί ως μονάδα το 1 παπούτσι (6 παπούτσια), ή το ζευγάρι (3 ζευγάρια παπούτσια). Παρόμοια, στην τρίτη περίπτωση, μπορεί ως μονάδα να επιλεγεί το μισό μήλο, επομένως το αποτέλεσμα είναι «6 μισά μήλα», ή το ολόκληρο μήλο, οπότε το αποτέλεσμα είναι «3 μήλα». Στην τέταρτη περίπτωση, το αποτέλεσμα της καταμέτρησης είναι «5 φρούτα»[2].

Οι καταστάσεις αυτές παρουσιάζονται για να αναδειχθεί ο ρόλος της μονάδας στην ποσοτικοποίηση μέσω της καταμέτρησης. Πιο συγκεκριμένα, παρόμοια με τη μέτρηση, η μονάδα πρέπει να επιλεγεί με βάση τόσο ποιοτικά, όσο και ποσοτικά κριτήρια. Η δυνατότητα επιλογής διαφορετικών μονάδων συνεπάγεται ότι το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης εξαρτάται τόσο από την ποσότητα, όσο και από τη μονάδα και η σχέση είναι πάλι πολλαπλασιαστική [α) 3 x (1 μήλο), β) 3 x (1 ζευγάρι παπούτσια) ή 6 x (1 παπούτσι), γ) 5 x (1 φρούτο)].

Επιπλέον, στην κατάσταση (β) εμφανίζεται η περίπτωση της σύνθετης μονάδας, δηλ. μιας μονάδας που αποτελείται από 2 τουλάχιστον απλές μονάδες (εδώ, το ζευγάρι).

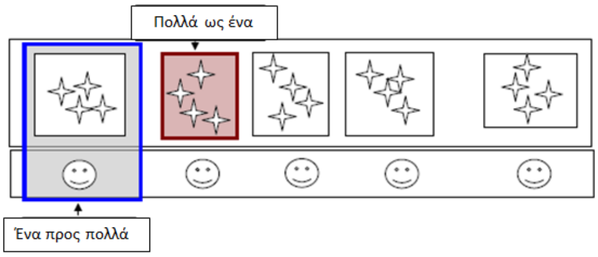
[2] Ο Thompson (2010) προτείνει ότι εδώ η μονάδα είναι η μονάδα «μήλο/πορτοκάλι», υπό την έννοια ενός αντικειμένου που μπορεί να είναι είτε μήλο, είτε πορτοκάλι.

Η μοναδοποίηση με σύνθετη μονάδα είναι εξαιρετικής σημασίας για την κατανόηση μιας πληθώρας μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όπως, για παράδειγμα, για την κατανόηση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος. Σύμφωνα με τους Tobias, Roy και Saffi (2015) η μοναδοποίηση προσφέρει μια πλατφόρμα για την κατανόηση της αξίας θέσης του αριθμού και των σχετικών αλγορίθμων στο δεκαδικό σύστημα (Cobb & Wheatley, 1988; Steffe, 2004, Olive, 2008). Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της κατανόησης ότι δέκα μονάδες του «ενός» σχηματίζουν μια σύνθετη μονάδα τη δεκάδα, και ότι το «ένα» είναι το 1/10 της σύνθετης μονάδας. Όπως επίσης η δυνατότητα μέτρησης σε μονάδες των δέκα για την δημιουργία ακόμη πιο περίπλοκων υπερ-μονάδων όπως η εκατοντάδα, ως δέκα μονάδες των δέκα κτλ[3].

Για τις ανάγκες τις παρούσας εργασίας, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι σύνθετες μονάδες εμπλέκονται σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και συνδέονται με λειτουργίες θεμελιώδεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης.

Στο παράδειγμα με τα παπούτσια, η καταμέτρηση των ζευγαριών προϋποθέτει την κατασκευή ισοπληθών ομάδων (ζευγάρια) και τη θεώρησή τους ως 1 αντικείμενο. Πρόκειται για τη θεώρηση του «πολλά ως ένα», σύμφωνα με την ορολογία της Confrey (2008), που αντιστοιχεί στον ισομερισμό διακριτής ποσότητας και συνδέεται με τη διαίρεση μέτρησης («μετράω το σύνολο των παπουτσιών με το ζευγάρι»), τις επαναλήψιμες μονάδες («3xζευγάρι = 6 παπούτσια») και τις κλασματικές μονάδες («το ένα ζευγάρι είναι το 1/3 των παπουτσιών»).

[3] Η χρήση της μονάδας στην διδασκαλία του δεκαδικού συστήματος αξιοποιείται αποτελεσματικά με το υλικό Dienes (Olive, 2008).



Εικόνα 4.1 καταστάσεις θεώρησης «ένα προς πολλά» και «πολλά προς ένα» στο έργο της Confrey (2008).

Η άλλη όψη της κατασκευής του «πολλά ως ένα» είναι η αντιστοιχία «ένα προς πολλά» (ή «πολλά προς ένα»), η οποία εξελίσσεται στην αντιστοιχία «πολλά προς πολλά» και υπόκειται της έννοιας του λόγου στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων.

Η αντιστοιχία «πολλά προς ένα» συνήθως συνδέεται με τις καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς (μέρος της καθημερινότητας των παιδιών) (Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica, & Myers, 2009; Nunes & Bryant, 1996; Sophian & Madrid, 2003). Για παράδειγμα, σε μια κατάσταση όπου 2 παιδιά πρέπει να μοιραστούν 10 καραμέλες το κάθε παιδί θα πάρει από 5 καραμέλες, δηλαδή 5 καραμέλες προς 1 παιδί. Η κατάσταση αυτή εισαγάγει και την εντατική ποσότητα, η οποία εκφράζεται μέσω του λόγου 4 καραμέλες για κάθε παιδί.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κατασκευή του «πολλά ως ένα», και η αντιστοιχία «πολλά προς ένα» συνυπάρχουν στην ίδια κατάσταση και αναδεικνύονται ανάλογα με το ερώτημα που τίθεται στην κατάσταση. Για παράδειγμα, στην παραπάνω κατάσταση, μπορούν να τεθούν δύο ακόμα ερωτήματα:

α) Δύο παιδιά μοιράζονται δίκαια ένα σακουλάκι καραμέλες και παίρνουν το καθένα 5 καραμέλες. Πόσες καραμέλες είχε το σακουλάκι;

Στην περίπτωση αυτή είναι δεδομένη η αντιστοιχία «πολλά προς ένα» και ζητείται η επανάληψη της σύνθετης μονάδας («πολλά ως ένα»).

β) Τα αδέλφια μοιράστηκαν 10 καραμέλες και πήρε το καθένα από 5. Πόσα ήταν τα αδέλφια;

Στην περίπτωση αυτή δίνεται η αντιστοιχία «πολλά προς ένα» και ζητείται ο ισομερισμός της ποσότητας σε ομάδες δεδομένου πλήθους (διαφορετικά, η μοναδοποίηση της ποσότητας σε σύνθετες μονάδες).

Επιπλέον, οι καταστάσεις αντιστοιχίας ένα προς πολλά εισαγάγουν τις έννοιες του λόγου, πολλαπλασιαστέου όπως επίσης και της απλής αναλογίας. Παραδείγματος χάριν, για να διατηρηθεί η σχέση σε κατάσταση αντιστοιχίας ένα προς πολλά σταθερή, τα παιδιά δεν μπορούν απλά να προσθέσουν ή να διαχωρίσουν αντικείμενα αλλά πρέπει να επαναλαμβάνουν της σύνθετες μονάδες. Οι Nunes και Bryant (1996, σελ. 145) σημειώνουν ότι η επανάληψη των σύνθετων μονάδων επιτυγχάνεται με «την πρόσθεση σε κάθε σύνολο των μονάδων που απαιτούνται ώστε η σχέση ένα προς πολλά να παραμείνει αμετάβλητη». Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο λόγος 1 ζώο/2 μάτια, δηλαδή: 1 σκυλάκι έχει 2 μάτια, 2 σκυλάκια θα είναι ένα σκυλάκι περισσότερο αλλά για να μείνει σταθερός ο λόγος χρειάζονται δύο μάτια περισσότερα, δηλαδή 4 συνολικά.

Όταν τα παιδιά πρέπει να μετρήσουν το πόσες φορές επαναλαμβάνεται η μονάδα θα πρέπει να χειριστούν και την έννοια του πολλαπλασιαστέου. Δηλαδή, για να μπορέσουν να βρουν πόσες ρόδες χρειάζονται για τρία ποδήλατα πρέπει να συγκρατήσουν ότι η σύνθετη μονάδα των δύο τροχών πρέπει να επαναληφτεί 3 φορές. Επίσης, θα πρέπει να καταλάβουν ότι ο αριθμός 3 δεν αναφέρεται στα ποδήλατα ή στους τροχούς, αλλά στις φορές που επαναλήφτηκε η σύνθετη μονάδα. Σε αυτή την κατάσταση ο αριθμός «3» αποκτά μια νέα έννοια – δεν είναι πλέον η συμβολική έκφραση του μεγέθους αλλά το πλήθος των επαναλήψεων της σύνθετης μονάδας – αυτή του πολλαπλασιαστέου.

Επομένως, φαίνεται πως η μοναδοποίηση προσφέρει ένα ευνοϊκό περιβάλλον για την συστηματοποίηση των προ-λεκτικών ικανοτήτων ποσοτικοποίησης χωρίς ασύμμετρη έμφαση σε φυσικούς αριθμούς ή αθροιστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων. Επιπλέον, λόγω της αναλογικής σχέσης της μονάδας προς το μέγεθος υπό μέτρηση παρέχει άφθονα ερεθίσματα για την ανάπτυξη των πολλαπλασιαστικών δομών μέσω των ενεργειών του ισομερισμού, της επανάληψης της μονάδας και της αντιστοιχίας ένα προς πολλά (Iannece et al., 2009; Kornilaki, 1999; Lamon, 2006; Sophian, 2013). Οι ενέργειες αυτές αποτελούν τη βάση της πολλαπλασιαστικής σκέψης και αξιολογούν τις αρχικές στρατηγικές των παιδιών σε προβλήματα μέτρησης ή μερισμού (Thompson, Carlson, Byerley & Hatfield, 2014).

Η έρευνα για τον τρόπο που αναπτύσσεται η πολλαπλασιαστική σκέψη υποδεικνύει ότι η μοναδοποίηση αποτελεί μια ευέλικτη, πρακτική, αλλά και θεωρητική προσέγγιση για τη απόκτηση των βασικών εννοιών της πολλαπλασιαστικής σκέψης και της κατανόησης των πραγματικών αριθμών (Barrett et al., 2012; Nunes et al., 2009; Sophian, 2013; Thompson et al., 2014).

4.3 Μέτρηση και καταμέτρηση: Ομοιότητες και διαφορές, αρχές και διαδικασίες

Η καταμέτρηση συνήθως νοείται ως καταμέτρηση με απλή μονάδα, η οποία βασίζεται στην ένα-προς-ένα αντιστοίχιση διακριτών αντικειμένων με τις αριθμολέξεις και διέπεται από ορισμένες αρχές: Οι αριθμολέξεις πρέπει να χρησιμοποιούνται με σταθερή σειρά, κάθε αριθμολέξη πρέπει να αντιστοιχείται με ένα (και μόνο ένα) αντικείμενο, η σειρά με την οποία καταμετρώνται τα αντικείμενα δεν έχει σημασία και, τέλος, η τελευταία αριθμολέξη εκφράζει το συνολικό πλήθος των αντικειμένων (Gelman & Gallistel, 1978). Τα παιδιά μαθαίνουν να καταμετρούν ανάμεσα στα 2 και 4 χρόνια και τους παίρνει 1 – 1 ½ χρόνο για να κατακτήσουν αυτές τις αρχές (Mix et al., 2002).

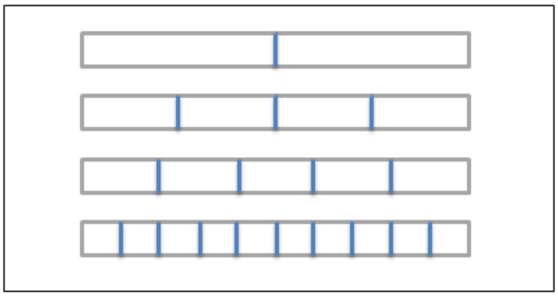
Από την άλλη μεριά, η ενέργεια της πράξης της μέτρησης έχει επίσης ένα πρωτόκολλο εκτέλεσης που πρέπει να τηρηθεί. Δηλαδή, πρέπει να επιλεχθεί η ιδιότητα της ποσότητας που θα μετρηθεί, να επιλεχθεί μια μονάδα μέτρησης για τη μέτρηση του επιλεγμένου μεγέθους της ποσότητας, η οποία πρέπει να χρησιμοποιηθεί με συνέπεια (όσον αφορά το μέγεθός της), να καθοριστεί το σημείο έναρξης και τέλους, να εφαρμοστεί η μονάδα μέτρησης χωρίς επικαλύψεις ή κενά διαστήματα και να υπολογιστεί το πλήθος των μονάδων που χρησιμοποιήθηκαν (Lamon, 1996; Sarama & Clements, 2009).

Με την εισαγωγή της μονάδας μέτρησης, οι συνεχείς ποσότητες «διακριτοποιούνται» και η μέτρηση ανάγεται στην καταμέτρηση. Έρευνες με παιδιά πρωτοσχολικής ηλικίας δείχνουν ότι μετά από μια σχετικά σύντομη κατάρτιση οι μαθητές εκτελούν το «πρωτόκολλο» της μέτρησης με άνεση και σχεδόν αυθόρμητα (Lamon, 2006; Barrett et al., 2012; Sarama & Clements, 2009).

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική περιπλοκότητα της κατάστασης και των εννοιών που εμπλέκονται είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, για να είναι η μέτρηση ωφέλιμη στην ανάπτυξη των ικανοτήτων της ποσοτικοποίησης, οι εμπειρίες μέτρησης ποσοτήτων χρήζει κατάλληλης καθοδήγησης. Η Lamon (2006) επισημάνει ότι είναι απαραίτητο να διακρίνουμε την πράξη της μέτρησης από τις έννοιες που εμπλέκονται στη μοναδοποίηση, διότι όπως αναφέρει η ερευνήτρια, η ικανότητα να εκτελούν τα παιδιά την πράξη της μέτρησης, τηρώντας όλους τους κανόνες της, δεν συνεπάγεται με την κατανόηση της έννοιας και τον ρόλο της απλής και της σύνθετης μονάδας μέτρησης ή των ποσοτικών σχέσεων μιας κατάστασης ποσοτικοποίησης.

Η θεμελιώδης αρχή που διέπει τη μέτρηση και σχετίζεται άμεσα με τον πολλαπλασιαστικό της χαρακτήρα είναι η λεγόμενη αντισταθμιστική αρχή (compensatory principle): «Όσο μικρότερη είναι η μονάδα μέτρησης, τόσο περισσότερες φορές πρέπει να εφαρμοστεί για να μετρηθεί κάτι, και αντιστρόφως, όσο μεγαλύτερη είναι η μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται, τόσο λιγότερες φορές χρειάζεται να εφαρμοστεί για να ποσοτικοποιηθεί η ίδια ποσότητα» (Lamon, 2006, σ. 42). Η κατανόηση της αντισταθμιστικής αρχής αναπτύσσεται καθώς τα παιδιά μαθαίνουν να συγκρίνουν μια ποσότητα «Α» με μονάδες μέτρησης διαφόρων μεγεθών. Για παράδειγμα, σε μια κατάσταση μέτρησης 1 κιλού σοκολάτας σε κομμάτια 100 γραμμαρίων και στη συνέχεια σε κομμάτια 25 γραμμαρίων παράγονται διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα, δηλαδή 10 και 40. Αυτή η διαφορά είναι το αποτέλεσμα της μεταβολής του μεγέθους της μονάδας μέτρησης.

Η κατανόηση της αντισταθμιστικής αρχής οδηγεί σε ακόμη μία σημαντική κατανόηση, ότι το μέγεθος μιας ποσότητας δεν επηρεάζεται από την μεταβολή της μονάδας μέτρησης. Η κατανόηση αυτής της αμεταβλητότητας του μεγέθους μιας ποσότητας είναι θεμελιώδης όχι μόνο για τα μαθηματικά αλλά και για όλα τα επιστημονικά πεδία, καθώς βοηθά τα παιδιά να είναι σε θέση να μεταβάλουν την μονάδα μέτρησης ευέλικτα. Έτσι, μπορούν να κατανοήσουν ότι το να γεμίσουν ένα δοχείο έως ένα συγκεκριμένο ύψος χρησιμοποιώντας ποτήρια θα παράγει ένα διαφορετικό αριθμητικό αποτέλεσμα από το εάν θα γέμιζαν το δοχείο χρησιμοποιώντας κουτάλια, αλλά η ποσότητα του νερού και στις δύο περιπτώσεις θα είναι η ίδια. Αργότερα η κατανόηση της αρχής αυτής επιτρέπει στα παιδιά να αντιληφθούν ότι ένα μήκος 5 μέτρων είναι επίσης 500 εκατοστά, ή ότι η μετατροπή της ταχύτητας από km/h σε m/s δεν την μεταβάλει. Η Εικόνα 4.2 επίσης δείχνει το γεγονός ότι το «ολόκληρο» παραμένει το ίδιο μέγεθος παρόλο που η μεταβολή του μεγέθους της μονάδας μέτρησης οδηγεί στη μεταβολή του πλήθους των μονάδων που χρειάζονται για να μετρηθεί η ποσότητα.



Εικόνα 3.2 Απεικόνιση της αντισταθμιστικής αρχής : Η αλλαγή στο μέγεθος της μονάδας μέτρησης αλλάζει το αριθμητικό αποτέλεσμα χωρίς να μεταβάλλεται η αρχική ποσότητα

Δεδομένης της σημασίας της κατανόησης της αντισταθμιστικής αρχής στη μέτρηση, αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα η επισήμανση της Sophian (2004.) σχετικά με το γεγονός ότι, ενώ η κατανόηση του ρόλου της μονάδας στη μέτρηση υποθάλπεται στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, ο αντίστοιχος ρόλος της μονάδας στην ποσοτικοποίηση μέσω της καταμέτρησης αγνοείται. Όπως έχει συζητηθεί στην περίπτωση αυτή, παρόμοια με τη μέτρηση, η μονάδα πρέπει να επιλεγεί, τόσο με ποιοτικά, όσο και ποσοτικά κριτήρια (μέγεθος). Ωστόσο, στην άτυπη και τυπική εκπαίδευση, η καταμέτρηση εφαρμόζεται σχεδόν αποκλειστικά στο πλαίσιο συλλογών διακριτών αντικειμένων, συνήθως ομοειδών, στο οποίο δεν αναδύεται η ανάγκη επιλογής της μονάδας ή η δυνατότητα καταμέτρησης με διαφορετικές μονάδες. Αυτό, σύμφωνα με τη Sophian (2004), οδηγεί τα παιδιά στο να ταυτίζουν τις μονάδα με φυσικά αντικείμενα, το οποίο λειτουργεί ικανοποιητικά σε περιπτώσεις τυπικής καταμέτρησης (π.χ., όταν πρέπει να καταμετρηθεί μια συλλογή από ολόκληρα μπισκότα), αλλά όχι σε περιπτώσεις μη τυπικής καταμέτρησης (π.χ. όταν πρέπει να καταμετρηθεί μια συλλογή από 3 ολόκληρα και 2 μισά μπισκότα). Στην τελευταία περίπτωση, η καταμέτρηση ολόκληρων και μισών μπισκότων μαζί απαντά στο ερώτημα «πόσα φυσικά αντικείμενα υπάρχουν στη συλλογή;», αλλά δεν έχει νόημα από την άποψη της ποσοτικοποίησης («πόσα μπισκότα είναι;»). Να σημειωθεί ότι το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται εξίσου και σε καταστάσεις μέτρησης, κατά τις οποίες τα παιδιά, για παράδειγμα, καλύπτουν ένα μήκος με ξυλάκια διαφορετικού μήκους και στη συνέχεια καταμετρούν όλα τα ξυλάκια μαζί για να «μετρήσουν» το μήκος (Sarama & Clements, 2009).

Ταυτόχρονα, η παραμέληση του ρόλου της μονάδας στην καταμέτρηση αποκρύπτει την αντισταθμιστική αρχή και, συνακόλουθα, τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που διέπουν την καταμέτρηση.

Η Sophian (2004.) αποδίδει στο ζήτημα αυτό πολλές από τις δυσκολίες που συναντούν τα παιδιά στο πολλαπλασιαστικό πεδίο, τόσο σε μικρές, όσο και σε μεγαλύτερες ηλικίες. Για παράδειγμα, σε καταστάσεις μοιρασιάς με υπόλοιπο , τα παιδιά μοιράζουν, για παράδειγμα, 3 μπισκότα σε 2 άτομα, φροντίζοντας κάθε άτομο να πάρει το ίδιο πλήθος από φυσικά αντικείμενα, αλλά παραμελώντας το σχετικό μέγεθός τους (π.χ., 2 ολόκληρα μπισκότα το ένα, 2 μισά μπισκότα το άλλο). Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, η Sophian (2004) προτείνει να επαναπροσδιοριστεί ο τρόπος που διδάσκεται η ποσοτικοποίηση μέσω καταμέτρησης, εκθέτοντας τα παιδιά σε καταστάσεις μη τυπικής καταμέτρησης, όπου η μονάδα ποσοτικοποίησης πρέπει να επιλεγεί.

4.5. Συμπέρασμα και εκπαιδευτικές προεκτάσεις

Για να μπορέσουν να αναπτυχθούν οι πρώιμες, ενδεχομένως έμφυτες, ικανότητες ποσοτικοποίησης από τις στοιχειώδες εκτιμήσεις και συγκρίσεις ποσοτήτων στη χρήση δομημένων αριθμητικών συστημάτων είναι απαραίτητη η πολιτισμική υποστήριξη, κυρίως μέσω της πρωτοσχολικής εκπαίδευσης.

Φαίνεται πως η μοναδοποίηση είναι θεμελιώδης για την συστηματοποίηση και ανάπτυξη των προ-λεκτικών ικανοτήτων ποσοτικοποίησης. Η έμφαση στη μοναδοποίηση στο πλαίσιο της ποσοτικοποίηση τόσο των διακριτών, όσο και των συνεχών ποσοτήτων με προσοχή στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που ενυπάρχουν, ενδεχομένως μπορεί να αντισταθμίσει την ασύμμετρη έμφαση (κοινωνικό-πολιτισμικής προέλευσης) σε φυσικούς αριθμούς και προσθετικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (Kalchman, Moss & Case, 2001; Gallistel et al., 2006; Sophian, 2004).

Ταυτόχρονα, η μοναδοποίηση στο πλαίσιο της μέτρησης και της καταμέτρησης παρέχει άφθονα ερεθίσματα για την ανάπτυξη των πολλαπλασιαστικών δομών μέσω των ενεργειών του ισομερισμού, της επανάληψης της μονάδας και της αντιστοιχίας ένα προς πολλά (Iannece et al., 2009; Lamon, 2006; Kornilaki, 1999; Sophian, 2013). Οι ενέργειες αυτές αποτελούν τη βάση της πολλαπλασιαστικής σκέψης και υποστηρίζουν την ανάδυση και ανάπτυξη των αρχικών στρατηγικών των παιδιών σε προβλήματα μέτρησης ή μερισμού (Thompson et al., 2014).

Συνοψίζοντας τα ευρήματα και τις προτάσεις για την οργάνωση των αναλυτικών προγραμμάτων και τη διδασκαλία που προκύπτουν από τη βιβλιογραφία, οι Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou (2018) επισημαίνουν καταρχήν την αναγκαιότητα αντιμετώπισης αυτής της ασυμμετρίας ήδη από τα πρώτα χρόνια της σχολικής ζωής. Αυτό προϋποθέτει την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης νωρίτερα και με πιο συστηματικό τρόπο. Επιπλέον, προϋποθέτει την επανεκτίμηση του τρόπου με τον οποίο αντιμετωπίζεται η ποσοτικοποίηση στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (Sophian, 2004). Πιο συγκεκριμένα, προτείνεται η έμφαση στο ρόλο της μονάδας στη καταμέτρηση και στη πολλαπλασιαστική σχέση που ενυπάρχει ανάμεσα στην ποσότητα υπό καταμέτρηση και τη μονάδα. Σε συμφωνία με τη Sophian (2004) αλλά και τη ρωσική σχολή της μαθηματικής εκπαίδευσης (Davydov, 1975) οι Vamvakoussi et al. (2018) προτείνουν τη μέτρηση ως κεντρική ενέργεια για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και των ρητών αριθμών.

Από τη μέχρι τώρα συζήτηση προκύπτει ότι η αποτελεσματική υποστήριξη της ανάπτυξης των ικανοτήτων ποσοτικοποίησης θα μπορούσε να βασιστεί α) στην ισορροπημένη αντιμετώπιση της ποσοτικοποίησης στο πλαίσιο των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων, β) στην έμφαση στο ρόλο της μονάδας στη μέτρηση, αλλά και την καταμέτρηση, γ) στην έμφαση στη μοναδοποίηση και στις ενέργειες με τις οποίες συνδέεται (π.χ., ισομερισμός διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, αντιστοίχιση πολλά-ένα, καταμέτρηση με σύνθετη μονάδα), δ) στην ανάδειξη των πολλαπλασιαστικών σχέσεων και την υποστήριξη της έκφρασής τους και ε) στην προετοιμασία της επέκτασης του συνόλου των φυσικών αριθμών στο πλαίσιο της μέτρησης, αλλά και της δίκαιης μοιρασιάς.

5. Ποσοτικοποίηση στο Ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Νηπιαγωγείου

Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει αντιληπτό ότι η υποστήριξη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης στις μικρές ηλικίες είναι κεφαλαιώδους σημασίας για την περαιτέρω μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών. Η συνειδητοποίηση αυτή αντανακλάται και στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών διεθνώς, όπου τα μαθηματικά προσεγγίζονται με μια μακροπρόθεσμη αναπτυξιακή προοπτική και δίνεται ιδιαίτερη προσοχή ώστε στις μικρές ηλικίες να μπαίνουν οι βάσεις που θα επιτρέψουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών και στις επερχόμενες βαθμίδες (Clements, Sarama, Wolfe, & Spitler, 2013).

Αναγνωρίζοντας το πόσο σημαντικό ρόλο έχει η σωστή κατανόηση της ποσοτικοποίησης για τις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών σε μεγαλύτερες βαθμίδες, θεωρήθηκε σκόπιμο να εξεταστεί το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Νηπιαγωγείου εξετάζοντας κατά πόσο διδάσκεται η μοναδοποίηση με ένα τρόπο που θα δομήσει σωστές βάσεις για την ανάπτυξη της αριθμητικής ποσοτικοποίησης.

Στον Ελληνικό χώρο, το Πιλοτικό Αναλυτικό Πρόγραμμα του Νηπιαγωγείου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011. Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-Πρώτη Σχολική Ηλικία (Β' μέρος), και αποδώ και πέρα ΑΠ, 2011) είναι συμβατό με την προσέγγιση που αποβλέπει μακροπρόθεσμη αναπτυξιακή προοπτική. Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι στο πιλοτικό ΑΠ (2011) εμφανίζονται οι ίδιοι άξονες περιεχομένου όπως και στις επόμενες βαθμίδες, ενώ ιδιαίτερη προσοχή δίνεται σε πτυχές της μαθηματικής σκέψης, όπως η αλγεβρική σκέψη, που μέχρι τώρα τυπικά αφορούσαν τις μεγαλύτερες βαθμίδες. Η συμβατότητα αυτή με τις διεθνείς τάσεις στη διδακτική των μαθηματικών στις μικρές ηλικίες είναι και ο κύριος λόγος που το πιλοτικό ΑΠ (2011) επιλέχθηκε για ανάλυση, παρά το γεγονός ότι δεν είναι το επίσημο ΑΠ του Νηπιαγωγείου, όπου εξακολουθεί να εφαρμόζεται το ΔΕΠΣ-ΑΠΣ[4] (αρχείο 27, ΦΕΚ 303Β/13-03-2003, ΦΕΚ 304Β/13-03-2003).

Στους Πίνακες 5.1 και 5.2 παρουσιάζονται το περιεχόμενο, οι μαθησιακοί στόχοι και οι κωδικοί των στόχων όπως ακριβώς αναφέρονται στο ΑΠ (2011) για τις Θεματική Ενότητα «Αριθμοί και Πράξεις» και την υποενότητα «Μέτρηση» της Θεματικής Ενότητας «Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση». Οι ενότητες είναι οι άμεσα σχετικές με την ποσοτικοποίηση. Ωστόσο, στόχοι που συνδέονται, είτε άμεσα, είτε έμμεσα, με την ποσοτικοποίηση υπάρχουν και σε άλλες ενότητες του αναλυτικού. Στον Πίνακα 5.3 παρουσιάζονται αυτοί οι στόχοι, η συνάφεια των οποίων με την ποσοτικοποίηση θα αναδειχθεί στη συνέχεια.

Αριθμοί και Πράξεις		
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	**ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ**	**ΚΩΔΙΚΟΣ**
Αριθμητικά σύμβολα	Απαγγέλλουν, διαβάζουν και γράφουν αριθμούς μέχρι το 10	**Αρ1**
Άμεση αναγνώριση	Αναγνωρίζουν αριθμητικές ποσότητες χρησιμοποιώντας στρατηγικές άμεσης αναγνώρισης	**Αρ2**
Καταμέτρηση ποσοτήτων	Καταμετρούν πραγματικά αντικείμενα και αντικείμενα σε εικόνες και άλλες μορφές συμβολικών παραστάσεων μέχρι το 10	**Αρ3**
Διάταξη ποσοτήτων και αριθμών	Συγκρίνουν και διατάσσουν ποσότητες όπως και αριθμούς που παριστούν στην αριθμογραμμή	**Αρ4**
	Διερευνούν πώς κατασκευάζονται οι αριθμοί μέχρι το 10, αναλύοντας και συγκρίνοντας ποσότητες	**Αρ5**
Πρόσθεση-Αφαίρεση	Διερευνούν καταστάσεις «βάζω μαζί», «βάζω ακόμα» και «συγκρίνω» για να προσεγγίσουν τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση και κατασκευάζουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης	**Αρ6**
	Διερευνούν συνδυασμούς που δίνουν τα αθροίσματα και τις διαφορές των αριθμών ως το 10	**Αρ7**
Πολλαπλασιασμός -Διαίρεση	Ομαδοποιούν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες	**Αρ8**
	Μοιράζουν αντικείμενα σε δυάδες, και τριάδες	**Αρ9**

Πίνακας 5.1: Περιεχόμενο, Μαθησιακοί Στόχοι και οι Κωδικοί τους για την Ενότητα «Αριθμοί και Πράξεις» (ΑΠ 2011, σελ. 163-166).

[4]Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-Πρώτη Σχολική Ηλικία (Β' μέρος).

Με μια πρώτη ματιά φαίνεται ότι στο ΑΠ (2011) υπάρχουν ήδη πολλά στοιχεία που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν ως βάσεις για την ανάπτυξη των ικανοτήτων της ποσοτικοποίησης, τόσο στο πλαίσιο του προσθετικού, όσο και στο πλαίσιο του πολλαπλασιαστικού πεδίου. Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι να εξετάσει κατά πόσο υπάρχει ασυμμετρία ως προς την έμφαση που δίνεται στο πρώτο, σε σχέση με το δεύτερο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ	ΚΩΔΙΚΟΣ
Μέτρηση Μήκους		
Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις	Πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις όπως και διατάξεις ίσων και άνισων μηκών.	**Μ1**
	Αναλύουν και συνθέτουν μήκη σε δύο μέρη	**Μ2**
Μέτρηση με επικαλύψεις, με και χωρίς επανάληψη μονάδας	Πραγματοποιούν επικαλύψεις μηκών και στη συνέχεια επικαλύψεις με επαναλήψεις με μη τυπικές και τυπικές μονάδες	**Μ3**
Χρήση τυπικών οργάνων μέτρησης μήκους	Προσεγγίζουν τη χρήση τυπικών εργαλείων μέτρησης	**Μ4**
Εκτιμήσεις αποστάσεων και μηκών	Κάνουν απλές εκτιμήσεις και συγκρίσεις	**Μ5**
Μέτρηση Επιφάνειας		
Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις	Πραγματοποιούν απλές άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών	**Μ6**
Δόμηση επιφανειών	Δομούν επιφάνειες με τετράγωνα σε γραμμές και στήλες και μετρούν το αποτέλεσμα	**Μ7**
Χρήση οργάνων (τετραγώνων) μέτρησης	Χρησιμοποιούν τετράγωνα για να μετρήσουν επιφάνειες	**Μ8**
Εκτιμήσεις επιφανειών	Εκτιμούν το μέγεθος απλών επιφανειών και κάνουν συγκρίσεις.	**Μ9**
Μέτρηση όγκου		
Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις με τη χρήση μη τυπικών μονάδων μέτρησης όγκου	Συγκρίνουν χωρητικότητες και όγκους με επανάληψη μη τυπικών μονάδων	**Μ10**
Εκτιμήσεις όγκων	Εκτιμούν τον όγκο απλών στερεών και κάνουν συγκρίσεις	**Μ11**

Πίνακας 5.2. Περιεχόμενο, Μαθησιακοί Στόχοι και οι Κωδικοί τους για την Υποενότητα «Μέτρηση» της Ενότητας «Χώρος και Γεωμετρία-Μέτρηση» (ΑΠ 2011, σελ. 180-184).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ	ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ / («Ενότητα»)	ΚΩΔΙΚΟΣ / σελ.
Γεωμετρικά Σχήματα («Χώρος και Γεωμετρία-Μέτρηση»)		
Ανάλυση ή σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε άλλα σχήματα ή μέρη	Συνθέτουν και αναλύουν απλά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε 2 ή περισσότερα μέρη	**Γ8 / 186**
Μετασχηματισμοί και συμμετρία («Χώρος και Γεωμετρία-Μέτρηση»)		

Αξονική Συμμετρία	Αναγνωρίζουν απλά συμμετρικά δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας κι εντοπίζουν τους άξονες	**Γ10 / 177**
Συναρτήσεις («Άλγεβρα»)		
Εξερεύνηση σχέσεων μεταξύ μεταβαλλόμενων μεγεθών	Εξερευνούν σχέσεις ανάμεσα σε συμμεταβαλλόμενα και αντίστροφα μεταβαλλόμενα μεγέθη σε απλές καταστάσεις	**Α3**
Ισότητα/ανισότητα («Άλγεβρα)		
Έννοια της ισότητας και ανισότητας	Διερευνούν την έννοια της ισότητας και ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια *(Στόχος από γεωμετρία, μέτρηση και αριθμούς)*	**Α4 / 181**

Πίνακας 5.3: Περιεχόμενο και Μαθησιακοί Στόχοι που σχετίζονται με την ποσοτικοποίηση από τις Θεματικές Ενότητες «Άλγεβρα και «Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση»

Για την ανάλυση του ΑΠ χρησιμοποιήθηκε ως βάση ο ορισμός του Thompson (1993, 2011), επομένως το ΑΠ αναλύθηκε α) ως προς το είδος των ποσοτήτων που μελετώνται (διακριτές/συνεχής) και β) ως προς το είδος των σχέσεων (ισοδυναμίας/διάταξης, προσθετικές/πολλαπλασιαστικές) που αναφέρονται ρητά στους στόχους του αναλυτικού. Εξετάστηκαν οι μαθηματικές ενέργειες που απαιτούνται (π.χ. σύγκριση/διάταξη, σύνθεση/ανάλυση ποσοτήτων), καθώς και οι καταστάσεις προβλήματος (προβλήματα προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής) που αναφέρονται στο αναλυτικό. Η ανάλυση διακρίνει την μη αριθμητική από την αριθμητική ποσοτικοποίηση. Λήφθηκαν υπόψη η σύντομη περιγραφή των στόχων, η επεξήγησή τους, καθώς και οι προτεινόμενες δραστηριότητες.

5.1 Είδη ποσοτήτων

Στο περιεχόμενο του ΑΠ (2011) εντάσσονται ρητά το πλήθος (διακριτό) καθώς και το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος (συνεχή). Το πλήθος εντάσσεται στη θεματική ενότητα «Αριθμοί και Πράξεις», ενώ τα υπόλοιπα στην ενότητα «Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση».

Συνακόλουθα, ο όρος «αριθμός» στο ΑΠ (2011) αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς και μόνο. Στη θεματική ενότητα «Αριθμοί & Πράξεις» αρχίζει η συστηματική ενασχόληση με τους φυσικούς αριθμούς ως το 10 και εισάγονται συμβολικά εργαλεία, τόσο γλωσσικά, όσο και αριθμητικά (Πίνακας 5.1, Αρ1), αλλά και το ισχυρό αναπαραστατικό εργαλείο της αριθμογραμμής (Πίνακας 5.1, Αρ4). Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο αριθμός χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την αριθμητικοποίηση του μήκους, της επιφάνειας και του όγκου (δηλαδή, την απόδοση αριθμητικής τιμής στο μέγεθός τους). Ωστόσο, όλα τα αποτελέσματα μέτρησης στην υποενότητα «Μέτρηση» της ενότητας «Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση» θεωρούνται φυσικοί αριθμοί.

5.2 Αριθμητικοποίηση ποσοτήτων

Η αριθμητικοποίηση του πλήθους γίνεται με δύο τρόπους: α) την άμεση αναγνώριση της πληθικότητας (για μικρές πληθικότητες ή για οικείους σχηματισμούς) και β) την καταμέτρηση (Πίνακας 5.1, Αρ2 και Αρ3, αντίστοιχα). Στην επεξήγηση του Αρ2 γίνεται σαφές ότι η άμεση αναγνώριση του πλήθους συνδέεται στενά και ρητά με την χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων (λεκτικών ή αριθμητικών) των φυσικών αριθμών: *Αναγνωρίζουν με μία ματιά και χωρίς καταμέτρηση ποσότητες σε διάφορους σχηματισμούς και τις αντιστοιχούν με τους σχετικούς αριθμούς* (ΑΠ, 2011, σελ.163).

Από τη διατύπωση του Αρ3 (Πίνακας 5.1) είναι σαφές ότι η καταμέτρηση νοείται ως καταμέτρηση με απλή μονάδα. Πρέπει να σημειωθεί ότι δε γίνεται αναφορά στο ρόλο της μονάδας στην καταμέτρηση, ούτε προτείνονται καταστάσεις στις οποίες είναι απαραίτητη η επιλογή της μονάδας βάσει κάποιου ποιοτικού ή ποσοτικού χαρακτηριστικού των αντικειμένων του συνόλου. Πρόκειται, δηλαδή, για «τυπικές» καταστάσεις καταμέτρησης που συνάδουν με την αντίληψη ότι κάθε διακριτό φυσικό αντικείμενο του συνόλου ισοδυναμεί με μια μονάδα.

Στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων, εισάγεται η μέτρηση με άτυπες και τυπικές (στην περίπτωση του μήκους) μονάδες[5], ως επέκταση της έμμεσης σύγκρισης. Ωστόσο, δεν αναφέρεται αν οι μονάδες επινοούνται από τα ίδια τα παιδιά ή τους παρέχονται (όπως στους στόχους M3 και M7 όπου ζητείται επικάλυψη αποστάσεων και επιφανίων). Όσον αφορά το μήκος, απαιτείται η επικάλυψη με απλή μονάδα (πολλά αντίγραφα της μονάδας), ή με επανάληψη της μονάδας (ένα αντίγραφο της μονάδας), και η καταμέτρηση μονάδων ή των επαναλήψεων (Πίνακας 5.2., M4).

Από τις επεξηγήσεις του στόχου M7 (Πίνακας 5.2) που αφορά τη μέτρηση επιφάνειας προκύπτει ότι η «δόμηση επιφάνειας σε γραμμές και στήλες», στην ουσία, αναφέρεται στην κάλυψή της με τετράγωνα και, στη συνέχεια, την καταμέτρησή τους: (Τα παιδιά) *επικαλύπτουν ορθογώνιες επιφάνειες με τετράγωνα και μετρούν το αποτέλεσμα*, (Οι εκπαιδευτικοί) *προτείνουν υλικό που ευνοεί τη δόμηση σε γραμμές και στήλες (π.χ. σχήματα από τετράγωνα που πρέπει να συμπληρωθούν και να καταμετρηθούν* (ΑΠ, 2011, σελ. 183). Πράγματι, η προτεινόμενη δραστηριότητα της Εικόνας 5.1, παρόλο που ενδεχομένως με μια πρώτη ματιά φαίνεται να ενθαρρύνει την αναγνώριση γραμμών και στηλών, καταλήγει στην ανάλυση της επιφάνειας σε τετράγωνα και την καταμέτρησή τους («*διάλυση της κατασκευής και μέτρηση των τετραγώνων»)* και όχι, για παράδειγμα, την ανάλυση σε γραμμές ή/και στήλες και την καταμέτρησή τους.

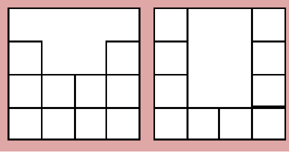
---

[5] Δεν είναι αρκετά σαφές με ποιο τρόπο εισάγεται η χρήση τυπικών μονάδων στη μέτρηση του μήκους. Από την επεξήγηση του αντίστοιχου στόχου (ΑΠ, 2011, σελ. 181) διαφαίνεται ότι συμβατικά εργαλεία μέτρησης (π.χ., ένα ξύλινο μέτρο) χρησιμοποιούνται ως μονάδες μέτρησης.

«Πόσα ακόμα;» Παιχνίδι ταχύτητας

Ο εκπαιδευτικός δίνει στα παιδιά που δουλεύουν σε ομάδες σχήματα από τετράγωνα στα οποία λείπουν ορισμένα. Τα παιδιά δοκιμάζουν να βρουν πόσα χρειάζεται να συμπληρώσουν. Ο έλεγχος γίνεται με τη διάλυση της κατασκευής και τη μέτρηση των τετραγώνων. Μετά το τέλος ο εκπαιδευτικός συζητά με τις ομάδες τους τρόπους που χρησιμοποίησαν για να βρουν τον αριθμό των τετραγώνων.

Υλικό: Κατασκευές από τετράγωνα ή σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Όσο περισσότερα λείπουν τόσο πιο δύσκολο είναι το πρόβλημα. Ο εκπαιδευτικός ξεκινά με εμπράγματο υλικό (τετράγωνα που καλύπτουν την επιφάνεια) και μικρά κενά και προχωράει σε πιο σύνθετα.



Εικόνα 4.1 Δόμηση επιφάνειας σε γραμμές και στήλες: Προτεινόμενη δραστηριότητα (ΑΠ, 2011, σελ. 198)

Όσον αφορά τον όγκο, η μέτρηση εμφανίζεται ως εργαλείο σύγκρισης (Πίνακας 5.2, Μ10). Προτείνεται η επανάληψη μη τυπικών μονάδων, με αναφορά στη σύγκριση χωρητικοτήτων με επανάληψη μη τυπικών μονάδων. Ενδεχομένως υπονοείται η χρήση της ίδιας μονάδας (π.χ. ένα ποτήρι νερό) για να γεμίσει ένα δοχείο. Στις προτεινόμενες δραστηριότητες, ωστόσο, για τη μέτρηση απαιτείται είτε το «γέμισμα» με μη τυπικές μονάδες και καταμέτρησή του (Τα παιδιά *καλούνται να διαλέξουν το μεγαλύτερο κουτί. Ο έλεγχος γίνεται γεμίζοντας το κουτί με κύβους* (ΑΠ, 2011, σελ. 184), είτε η άμεση καταμέτρηση, όταν ένα αντικείμενο αποτελείται ήδη από «μονάδες» (Τα παιδιά *υπολογίζουν τους κύβους που έχει μια κατασκευή ή τους κύβους που τη συμπληρώνουν*, σελ. 184).

Για όλες τις συνεχείς ποσότητες που ζητούνται στο ΑΠ (2011) ζητείται η εκτίμηση (Πίνακας 5.2, Μ5, Μ9, Μ11). Δεδομένου ότι ο στόχος αυτός δεν επεξηγείται και δεν υπάρχουν προτεινόμενες δραστηριότητες, δεν είναι σαφές αν απαιτείται η (προσεγγιστική) αριθμητικοποίηση των ποσοτήτων μέσω εκτίμησης, ή αν πρόκειται για σύγκριση μέσω εκτίμησης.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση του μήκους, αλλά όχι της επιφάνειας και του όγκου, ενθαρρύνεται ρητά η διερεύνηση της σχέσης της μονάδας με την υπό μέτρηση ποσότητα και το αριθμητικό αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, στις επεξηγήσεις για το στόχο Μ3 προτείνεται να συζητηθεί από τα παιδιά το γεγονός ότι η μέτρηση του ίδιου μήκους με διαφορετικές μονάδες δίνει διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα: (Οι εκπαιδευτικοί) *ενθαρρύνουν τα παιδιά να συνδέσουν τις επικαλύψεις ή τις επαναλήψεις με το αριθμητικό αποτέλεσμα* (σελ. 181) και *ενθαρρύνουν προβληματισμό σε μικρές ή σε μεγάλες ομάδες σχετικά με συγκρίσεις αποστάσεων που υλοποιήθηκαν με διαφορετικές μονάδες μέτρησης και κατέληξαν σε διαφορετικό αριθμητικό αποτέλεσμα* (σελ. 182). Πρόκειται για μια αρχική προσέγγιση της αντισταθμιστικής αρχής στη μέτρηση.

Παρόμοια, μόνο στην περίπτωση του μήκους υπάρχει αναφορά και επεξήγηση για τη μέτρηση με επανάληψη της μονάδας. Η διαδικασία αυτή, με κατάλληλη διαχείριση, μπορεί να αναδείξει πολλαπλασιαστικές πτυχές της μέτρησης (π.χ., με το ερώτημα «πόσες φορές χωράει η μονάδα στο υπό μέτρηση μέγεθος»). Αυτό δε γίνεται εμφανές στο κείμενο του ΑΠ (2001).

Ως εκ τούτου, φαίνεται πως στο πιλοτικό ΑΠ (2011) η επικρατούσα προσέγγιση στην αριθμητικοποίηση των συνεχών ποσοτήτων είναι η καταμέτρηση με απλή μονάδα. Επισημαίνεται ότι στο κείμενο του ΑΠ δεν υπάρχει καμία νύξη για τη διαχείριση καταστάσεων μέτρησης, στις οποίες η μονάδα δε χωράει ακριβώς στην υπό μέτρηση ποσότητα, παρά το γεγονός ότι τέτοιες καταστάσεις αναπόφευκτα θα προκύψουν στην πράξη. Δεν αναφέρεται η δυνατότητα χρήσης υπομονάδας, ή η έκφραση του αριθμητικού αποτελέσματος προσεγγιστικά (π.χ., «3 (μονάδες) και κάτι», «περίπου 4 (μονάδες)», «λίγο λιγότερο από 5 (μονάδες)»). Φαίνεται, λοιπόν, ότι η αριθμητικοποίηση των συνεχών ποσοτήτων γίνεται αποκλειστικά με χρήση των φυσικών αριθμών.

5.3 Σχέσεις ισοδυναμίας και διάταξης

Οι ενέργειες της σύγκρισης και διάταξης, οι οποίες συνδέονται με τις σχέσεις ισοδυναμίας και διάταξης, αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι του περιεχομένου του ΑΠ (2011). Οι ενέργειες αυτές, όπως είναι αναμενόμενο, αφορούν τόσο το πλήθος, όσο και το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο. Στις ενότητες «Αριθμοί και Πράξεις», «Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση», αναφέρονται ρητά η άμεση και η έμμεση σύγκριση ποσοτήτων (χωρίς αριθμούς), η σύγκριση ποσοτήτων μετά από καταμέτρηση/μέτρηση, η διάταξη ποσοτήτων (με και χωρίς αριθμούς), καθώς και η σύγκριση αριθμών.

Ωστόσο, οι ενέργειες αυτές δεν εντάσσονται στους στόχους των υποενοτήτων με ένα ενιαίο, συστηματικό τρόπο. Πράγματι, στη σύγκριση ως προς το πλήθος, ζητείται η σύγκριση και διάταξη (διακριτών) ποσοτήτων, χωρίς να γίνεται η διάκριση άμεσης/έμμεσης σύγκρισης (Πίνακας 5.1, Αρ4). Ο όρος «άμεση σύγκριση», αλλά όχι ο όρος «έμμεση σύγκριση», εμφανίζεται στην επεξήγηση του στόχου: (Τα παιδιά) *κάνουν άμεσες συγκρίσεις στις κάρτες που χρησιμοποίησαν για την αναγνώριση* (ΑΠ, 2011, σελ. 165). Διατάξεις ζητούνται ως προς το πλήθος (Πίνακας 5.1, Αρ.4) και ως προς το μήκος (Πίνακας 5.2, Μ1), αλλά όχι για την επιφάνεια και τον όγκο.

Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις (χωρίς αριθμούς) απαιτούνται όσον αφορά το μήκος και την επιφάνεια (Πίνακας 5.2, Μ1, Μ6). Στην περίπτωση του όγκου, όμως, η συγκρίσεις συνδέονται (μάλλον αδόκιμα, τουλάχιστον όσον αφορά τις άμεσες) με τη μέτρηση (Πίνακας 5.2, Μ10).

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι στη ενότητα «Άλγεβρα», οι στόχοι Α3 και Α4 (Πίνακας 5.3) είναι απόλυτα συναφείς με το γενικότερο στόχο της ποσοτικοποίησης, αλλά και το περιεχόμενο της ενότητας «Αριθμοί και πράξεις» και της υποενότητας «Χώρος-Γεωμετρία και Μέτρηση». Ιδιαίτερα η διερεύνηση της έννοιας της ισότητας και της ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια (για τον οποίο δεν παρατίθενται προτεινόμενες δραστηριότητες)

Τέλος, επισημαίνεται ότι στην ενότητα «Αριθμοί και Πράξεις» αναφέρεται ρητά ως στόχος η σύγκριση και διάταξη (φυσικών) αριθμών, ταυτόχρονα με την αναπαράστασή τους στην αριθμογραμμή. Επιδιώκεται, δηλαδή, η ανάπτυξη της κατανόησης του τακτικού χαρακτήρα του (φυσικού) αριθμού σε συμβολικό επίπεδο και, ταυτόχρονα, παρέχεται ένα ισχυρό αναπαραστατικό εργαλείο για τους αριθμούς που αξιοποιείται μόνο στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών.

5.4 Προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις

Οι προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και μεταξύ αριθμών συνδέονται με τις ενέργειες της ανάλυσης και σύνθεσης και αναδεικνύονται σε καταστάσεις προβλημάτων προσθετικής ή πολλαπλασιαστικής δομής. Με τον όρο «προσθετική ανάλυση/σύνθεση» θα εννοούμε οποιαδήποτε ανάλυση/σύνθεση της ποσότητας σε/από μέρη, όχι απαραιτήτως ίσα. Με τον όρο «πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση» θα εννοούμε την ανάλυση/σύνθεση σε/από ίσα μέρη (δηλ., η πολλαπλασιαστική ανάλυση είναι ο ισομερισμός της ποσότητας). Με αυτόν το ορισμό, η πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση είναι ειδική περίπτωση της προσθετικής. Ό λόγος που υιοθετήθηκε αυτός ο ορισμός είναι για να τονιστεί ότι σε μια κατάσταση που ζητείται ανάλυση/σύνθεση ποσοτήτων, αν η διαχείριση αναδεικνύει τις προσθετικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, τότε θα θεωρείται προσθετική, ακόμα και αν τα μέρη είναι ίσα. Για παράδειγμα, οποιαδήποτε κατάσταση μέτρησης με ακέραιο ή ρητό αποτέλεσμα εμπλέκει την ανάλυση της υπό μέτρηση ποσότητας σε ισομεγέθεις μονάδες (δηλ., το ισομερισμό της ποσότητας). Ωστόσο, αν η έμφαση δίνεται σε προσθετικές σχέσεις, ή στην απλή καταμέτρηση των μονάδων, τότε η κατάσταση θεωρείται προσθετική.

5.4.1 Προσθετικές σχέσεις και προσθετικές καταστάσεις

Στην ενότητα «Αριθμοί και Πράξεις» αναφέρονται ρητά οι καταστάσεις της προσθετικής σύνθεσης/ανάλυσης διακριτών ποσοτήτων (Πίνακας 5.1, Αρ5 – Αρ7), Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά καλούνται να αναλύσουν προσθετικά διακριτές ποσότητες: (Τα παιδιά) *βρίσκουν διαφορετικούς τρόπους για να χωρίσουν 6 κύβους, μπίλιες ή άλλα αντικείμενα σε δυο ομάδες*, σελ. 165). Οι ενέργειες αυτές συνδέονται ρητά με τους φυσικούς αριθμούς (Πίνακας 5.1, Αρ.5). Για παράδειγμα, τα παιδιά καλούνται να αναλύσουν και να συνθέσουν προσθετικά αριθμούς, χρησιμοποιώντας αναπαραστατικό υλικό (βλ. Εικόνα 5.2). Ο στόχος αυτός επεκτείνεται στη σύνθεση/ανάλυση αριθμών σε συμβολικό επίπεδο (Πίνακας 5.1 Αρ7).

«Βάζω μαζί ή βάζω κι άλλο»: Παιχνίδι

Η δραστηριότητα στοχεύει επίσης στην εξοικείωση με τα αθροίσματα στην πρώτη δεκάδα. Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Η κάθε ομάδα έχει υλικά (κυβάκια, ταινίες κλπ). Ο/η εκπ/κός δείχνει ή λέει ένα αριθμό και οι ομάδες δοκιμάζουν να ενώσουν τα υλικά για να έχουν αυτό το αποτέλεσμα. Ο χρόνος είναι περιορισμένος. Οι ομάδες ελέγχουν την ορθότητα των συνθέσεων. Κερδίζει η ομάδα που έκανε τους περισσότερους συνδυασμούς.
Μετά το τέλος της δράσης ο εκπαιδευτικός συγκεντρώνει τις συνθέσεις και συζητάει με τα παιδιά τους συνδυασμούς.

Υλικό: κύβοι που ενώνονται, κάρτες με δύο χρώματα ή τετράγωνα ή λωρίδες τετραγωνισμένο χαρτί

Εικόνα 5.2 Προτεινόμενη δραστηριότητα για την προσθετική σύνθεση αριθμού (ΑΠ 2011, σελ. 190).

Επιπλέον, στο ΑΠ (2011) προτείνεται η διερεύνηση προβλημάτων προσθετικής δομής (Πίνακας 5.1, Αρ6). Οι κατηγορίες προβλημάτων του τύπου «βάζω μαζί», «βάζω ακόμα» και «συγκρίνω» που προτείνονται καλύπτουν τους τρεις βασικούς τύπους προβλημάτων προσθετικής δομής (συνένωσης, μεταβολής και σύγκρισης) από τους οποίους μπορούν να προκύψουν πρακτικά όλα τα προβλήματα μιας πράξης (πρόσθεσης ή αφαίρεσης). Η αριθμητικοποίηση των ποσοτήτων που εμπλέκονται και των ποσοτήτων που προκύπτουν (π.χ. της διαφοράς δύο ποσοτήτων) ζητείται ρητά: (Οι εκπαιδευτικοί) *προτείνουν παιχνίδια όπου τα παιδιά* *μπορούν να βρουν πόσα ακόμα χρειάζονται για να είναι..., πόσα να βγάλουν για να μείνουν..., πόσα να βάλουν μαζί για να είναι….* (σελ. 166).

Όσον αφορά τα συνεχή μεγέθη, στην υποενότητα «Μέτρηση» αναφέρεται ρητά η ανάλυση/σύνθεση μήκους σε 2 μέρη (Πίνακας 5.2, Μ2) και, έμμεσα, η ανάλυση επιφανειών σε τετράγωνα (Πίνακας 5.2, Μ7). Δεν υπάρχει αντίστοιχος στόχος όσον αφορά τον όγκο. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην υποενότητα «Γεωμετρικά σχήματα» αναφέρεται ρητά η ανάλυση/σύνθεση επίπεδων και στερεών σχημάτων σε δύο ή περισσότερα μέρη, που συνδέεται στενά με τη σύνθεση/ανάλυση της επιφάνειας και του όγκου (Πίνακας5.3, Γ8), εφόσον υπάρξει η κατάλληλη διδακτική διαχείριση.

Προβλήματα προσθετικής δομής (δυνητικά) υπάρχουν στις επεξηγήσεις και προτεινόμενες δραστηριότητες στην περίπτωση της επιφάνειας και του όγκου: (Τα παιδιά) *υπολογίζουν τα τετράγωνα που χρειάζονται για να συμπληρωθεί το σχήμα σε μια επιφάνεια που έχει επικαλυφτεί κατά ένα μέρος* (σελ. 183). (Οι εκπαιδευτικοί) *προτείνουν στα παιδιά να υπολογίσουν τους κύβους που έχει μια κατασκευή ή τους κύβους που τους συμπληρώνουν* (σελ. 184).

5.4.2 Πολλαπλασιαστικές σχέσεις και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις

Στην ενότητα «Αριθμοί και Πράξεις» εισάγονται ρητά οι όροι «πολλαπλασιασμός» και «διαίρεση» στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, μέσω καταστάσεων μερισμού σε ισοπληθείς ομάδες και μερισμού σε ίσα μέρη («ομαδοποίηση» και «δίκαιη μοιρασιά». Πίνακας 5.1, Αρ8, Αρ9). Πρόκειται για καταστάσεις που, όπως έχει συζητηθεί, (βλ. Υποενότητα 4.2) συνδέονται με την ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης, μέσω ενεργειών όπως ο ισομερισμός, η αντιστοιχία ένα-πολλά και η κατασκευή και επανάληψη σύνθετης μονάδας («πολλά ως ένα).

Εμφανίζονται όλα τα απλά προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής του τύπου «αναλογία»: α) (Τα παιδιά) *δοκιμάζουν να εντοπίσουν πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν αν ομαδοποιήσουν αντικείμενα ή εικονιστικό υλικό σε δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες* (σελ. 168, διαίρεση μέτρησης / «πολλά ως ένα»), β) (Τα παιδιά) *γνωρίζοντας τον αριθμό των ομάδων και το πλήθος των αντικειμένων που περιέχουν δοκιμάζουν να βρουν πόσα είναι όλα μαζί* (σελ. 168, πολλαπλασιασμός / επανάληψη σύνθετης μονάδας) και γ) (Τα παιδιά) *καλούνται να βρουν τρόπους να μοιράσουν κάποιο διακριτό χειριστικό ή αναπαραστατικό υλικό στα δύο ή στα τρία* (…) *και να βρουν πόσα έχει ο καθένας* (σελ. 168, διαίρεση μερισμού / αντιστοιχία «ένα-πολλά»).

Στις επεξηγήσεις του στόχου Αρ8 εμφανίζεται μια νύξη σχετικά με την πολλαπλασιαστική ανάλυση αριθμών: (Οι εκπαιδευτικοί) *διατυπώνουν ερωτήσεις όπως: «πόσες δυάδες θα βάλετε για να κάνετε τον αριθμό 6»;* (σελ. 168). Στο ίδιο σημείο, αναφέρεται ρητά η αναγκαιότητα εξοικείωσης των παιδιών με λεκτικά εργαλεία σχετικά με το πολλαπλασιασμό: (Οι εκπαιδευτικοί) *χρησιμοποιούν συχνά τους όρους «δυάδες», «τριάδες»* (σελ. 168).

Στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων δεν υπάρχει ρητή αναφορά σε θέματα του πολλαπλασιαστικού πεδίου. Είναι χαρακτηριστικό ότι οι καταστάσεις «δίκαιης μοιρασιάς» δεν αναφέρονται στο ισομερισμό συνεχών ποσοτήτων. Ωστόσο, εξετάζοντας άλλες υποενότητες της ενότητας «Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση», προκύπτει ότι υπάρχουν εργαλεία που μπορούν να αξιοποιηθούν προς αυτή την κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, στην υποενότητα «Μετασχηματισμοί και συμμετρία» Πίνακας 5.3. Γ10), υπάρχουν προτεινόμενες δραστηριότητες στις οποίες τα παιδιά καλούνται να διερευνήσουν την ύπαρξη αξόνων συμμετρίας σε σχήματα με διπλώσεις. Η χρήση αξόνων συμμετρίας και η διαδικασία της δίπλωσης μπορούν να αξιοποιηθούν και για τον ισομερισμό συνεχών ποσοτήτων (βλ. και Καλδρυμίδου, 2009).

Τρεις επισημάνσεις μπορούν να γίνουν επί του περιεχομένου αυτού: Πρώτον, η «δίκαιη μοιρασιά» στο ΑΠ (2011) πραγματοποιείται μόνο με διακριτές ποσότητες, παρά το γεγονός ότι υπάρχει περιεχόμενο και στόχοι που επιτρέπουν τη διαχείριση καταστάσεων «δίκαιης μοιρασιάς» με συνεχείς ποσότητες. Δεύτερον, δεν υπάρχει αναφορά στις περιπτώσεις όπου υπάρχει υπόλοιπο και πώς μπορεί να διαχειριστεί κανείς αυτές τις καταστάσεις (π.χ., ανάλογα με το αν «σπάει» ή όχι η μονάδα). Τρίτον, ενώ αναγνωρίζεται η σημασία των συμβολικών εργαλείων και υπάρχει ρητή αναφορά στη χρήση του όρου «ν-άδα», δεν υπάρχει ρητή αναφορά σε όρους που μπορούν να εκφράσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, όπως «μισό» και «διπλάσιο».

5.5 Συμπερασματικά

Το ΑΠ (2011) έχει εκτεταμένο περιεχόμενο το οποίο, άμεσα ή έμμεσα, αναφέρεται στην ποσοτικοποίηση καταστάσεων που εμπλέκουν το πλήθος, το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο. Στον Πίνακα 5.4 παρουσιάζεται μια σύνοψη της ανάλυσης του ΑΠ (2001) που έχει προηγηθεί με χρωματικούς κωδικούς. Το κίτρινο χρώμα σημαίνει ότι η αντίστοιχη ενέργεια αναφέρεται ρητά στο κείμενο του αναλυτικού. Το πορτοκαλί χρώμα σημαίνει ότι η αντίστοιχη ενέργεια δεν αναφέρεται ρητά, αλλά υπάρχει δυνητικά. Το κόκκινο χρώμα σημαίνει ότι η αντίστοιχη ενέργεια δεν αναφέρεται ρητά, ούτε υπάρχει δυνητικά, ούτε θα μπορούσε να προκύψει από το περιεχόμενο του αναλυτικού. Το γκρι χρώμα σημαίνει ότι η αντίστοιχη ενέργεια δεν είναι σχετική.

Εξετάζοντας τον Πίνακα 5.4 και με βάση τη συζήτηση που προηγήθηκε φαίνεται ότι:

α) Η μονάδα δε λαμβάνει την αρμόζουσα προσοχή στο ΑΠ (2011). Δύο θέματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά: Το πρώτο αφορά το ρόλο της μονάδας στην ποσοτικοποίηση καταστάσεων που εμπλέκουν διακριτές ποσότητες. Το πλαίσιο στο οποίο τίθενται οι στόχοι, οι επεξηγήσεις τους και οι αντίστοιχες προτεινόμενες δραστηριότητες δεν αναδεικνύουν το γεγονός ότι η μονάδα επιλέγεται βάσει ποιοτικών, αλλά και ποσοτικών χαρακτηριστικών και ευνοούν την αντίληψη ότι οι μονάδες ταυτίζονται με τα φυσικά αντικείμενα μιας συλλογής (Sophian, 2004). Το δεύτερο θέμα αφορά το ρόλο της μονάδας στο πλαίσιο της μέτρησης συνεχών ποσοτήτων, στο οποίο δεν αναδεικνύεται η δυνατότητα (και αναγκαιότητα) υποδιαίρεσης της μονάδας (Barrett et al., 2012; Boyer et al., 2008). Τέλος, θα πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι η αντισταθμιστική αρχή στη μέτρηση (Barrett et al., 2012, Lamon, 2006, Chard et al., 2008) αναφέρεται μόνο αποσπασματικά (στην περίπτωση του μήκους).

β) Στο ΑΠ (2011) δίνεται μεγάλη έμφαση στο φυσικό αριθμό και υποστηρίζεται συστηματικά η ανάπτυξη σχετικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών. Ταυτόχρονα, όμως, δεν υπάρχει πρόνοια για την προετοιμασία της εισαγωγής μη φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει ρητή πρόνοια για την έκφραση αποτελεσμάτων μέτρησης, ή του μεριδίου που προκύπτει από τη «δίκαιη μοιρασιά» όταν αυτά δεν είναι ακέραιοι. Παρόμοια, η «δίκαιη μοιρασιά» περιορίζεται σε διακριτές συλλογές αντικειμένων.

Περιεχόμενο	**Ενέργειες- Διαδικασίες**	**Πλήθος**	**Μήκος**	**Επιφάνεια**	**Όγκος**
Μονάδα	Επιλογή – Αντισταθμιστική αρχή				
	Σύνθετη μονάδα («πολλά ως ένα»)				
	Σπάσιμο της μονάδας				
	Επανάληψη της μονάδας				
Αριθμός	Άμεση αναγνώριση				
	Εκτίμηση				
	Κατά-μέτρηση				
Σχέσεις διάταξης	Άμεση Σύγκριση				
	Έμμεση Σύγκριση				

	Σύγκριση μετά την αριθμητικοποίηση				
Προσθετικές σχέσεις	Προσθετική σύνθεση-ανάλυση				
	Επίλυση προβλημάτων προσθετικής δομής				
	Λεκτικοποίηση & αριθμητικοποίηση προσθετικών σχέσεων				
Πολλαπλασιαστι-κές σχέσεις	Πολλαπλασιαστική σύνθεση/ανάλυση				
	Επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής				
	Λεκτικοποίηση & αριθμητικοποίηση πολλαπλασιαστικών σχέσεων				

Πίνακας 5.4 Η σύνοψη της ανάλυσης του ΑΠ (2001) με χρωματικούς κωδικούς.

Κίτρινο χρώμα - η αντίστοιχη ενέργεια αναφέρεται ρητά στο κείμενο του αναλυτικού,
Πορτοκαλί χρώμα - η αντίστοιχη ενέργεια δεν αναφέρεται ρητά, αλλά υπάρχει δυνητικά,
Κόκκινο χρώμα - η αντίστοιχη ενέργεια δεν αναφέρεται ρητά, ούτε υπάρχει δυνητικά, ούτε θα μπορούσε να προκύψει από το περιεχόμενο του αναλυτικού,
Το γκρι χρώμα - η αντίστοιχη ενέργεια δεν είναι σχετική.

γ) Οι σχέσεις ισοδυναμίας και διάταξης έχουν κεντρική θέση, τόσο τις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες. Θα μπορούσε να επισημανθούν μικρές ασυνέπειες στους στόχους ή τη διατύπωσή τους στις διαφορετικές ενότητες. Πιο συγκεκριμένα, λείπει η εκτίμηση και η έμμεση σύγκριση στην περίπτωση του πλήθους. Επιπλέον, στην περίπτωση του όγκου/χωρητικότητας, η διατύπωση των στόχων της άμεσης και έμμεσης σύγκρισης τις συνδέουν με τη μέτρηση με τη χρήση μη τυπικών μονάδων μέτρησης, κάτι που δεν είναι αναγκαίο. Επισημαίνεται, επίσης, ότι δεν προτείνονται δραστηριότητες στις οποίες μια κατάσταση μπορεί να ποσοτικοποιηθεί (με σχέσεις ισοδυναμίας/διάταξης) ως προς διαφορετικά ποσοτικά χαρακτηριστικά (π.χ., ως προς το πλήθος ή ως προς το μήκος)

δ) Οι προσθετικές σχέσεις είναι αντικείμενο εντατικής επεξεργασίας στο ΑΠ (2011). Η σύνθεση/ανάλυση ποσοτήτων και τα προβλήματα προσθετικής δομής διατρέχουν και τις δύο μεγάλες θεματικές ενότητες «Αριθμοί και Πράξεις», «Χώρος και Γεωμετρία-Μέτρηση». Επισημαίνεται, ωστόσο, ότι οι στόχοι που σχετίζονται με τις προσθετικές σχέσεις παρουσιάζονται συστηματικά στην πρώτη ενότητα, με διακριτές ποσότητες και ρητή αναφορά στις προσθετικές σχέσεις μεταξύ αριθμών.

ε) Στόχοι που σχετίζονται με τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις εμφανίζονται μόνο στην ενότητα «Αριθμοί και Πράξεις», στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και των (φυσικών) αριθμών. Η πολλαπλασιαστική ανάλυση διακριτών ποσοτήτων και αριθμών και τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής που προτείνονται επιτρέπουν μια σειρά από ενέργειες που σχετίζονται με την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Ωστόσο, δεν υποστηρίζεται μέσω γλωσσικών ή άλλων εργαλείων η έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Συμπληρωματικά θα μπορούσε να αναφερθεί ότι οι πρώιμες ικανότητες των παιδιών στην ανίχνευση αναλογικών σχέσεων (κυρίως στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων) δεν αξιοποιείται επαρκώς στο ΑΠ (2011)[6].

Συμπερασματικά, το ΑΠ(2001) παρέχει δυνατότητες ανάπτυξης των ικανοτήτων ποσοτικοποίησης και της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Ωστόσο, οι καταστάσεις που εμπλέκουν διακριτές ποσότητες, οι φυσικοί αριθμοί και οι προσθετικές σχέσεις υποστηρίζονται περισσότερο και πιο συστηματικά και με την παροχή συμβολικών εργαλείων. Ειδικότερα, η παραμέληση του ρόλου της μονάδας στη μέτρηση (Boyer, Levine & Huttenlocher, 2008, Barrett et al., 2011), αλλά και την καταμέτρηση (Clements & Stephan, 2004; Sophian, 2004), καθώς και της δυνατότητας υποδιαίρεσης της μονάδας (Olive, 2001, Boyer et al., 2008, Clements & Stephan, 2004), δε βοηθούν την προετοιμασία για την επέκταση του συνόλου των φυσικών αριθμών. Τα ζητήματα αυτά φαίνεται ότι προκαλούν προβλήματα μακροπρόθεσμα (Chard et al., 2008; Moxhay, 2008; Lamon, 2006; Moss 2005, Dougherty & Zilliox 2003; Yoshida & Sawano, 2002; Olive, 2001; Steffe, 1992).

Στο επόμενο κεφάλαιο θα συζητηθούν στοχευόμενες παρεμβάσεις στο ΑΠ που αποβλέπουν στην αντιμετώπιση των θεμάτων αυτών.

[6] Ας σημειωθεί, ωστόσο, ότι η διαχείριση των μοντέλων του χώρου που ζητούνται στην υποενότητα «Χώρος» (ΑΠ, 2011, σελ. 172-173), έμμεσα, τις επικαλούνται.

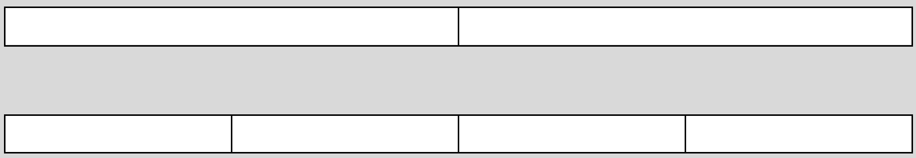
6. Προτάσεις και Δραστηριότητες

Η κριτική εξέταση του ΑΠ (2011) που παρουσιάστηκε και συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 5 ανέδειξε ορισμένα ζητήματα που επιδέχονται βελτίωση. Προς την κατεύθυνση αυτή στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται προτάσεις και παρατίθενται ενδεικτικές προτεινόμενες δραστηριότητες, οι οποίες είναι συμβατές με το περιεχόμενο του ΑΠ (2011) και θα μπορούσαν να ενσωματωθούν σε αυτό. Επισημαίνεται ότι οι προτεινόμενες δραστηριότητες δε συνιστούν ένα ολοκληρωμένο, αυτόνομο και πλήρες πρόγραμμα, αλλά αξιοποιούνται ως παραδείγματα εφαρμογής των προτάσεων. Ο βασικός στόχος είναι να αναδειχθούν πτυχές της μη αριθμητικής και αριθμητικής ποσοτικοποίησης (κυρίως, ο πολλαπλασιαστικός της χαρακτήρας) που συχνά παραμελούνται στην πρωτοσχολική εκπαίδευση, με τις συνέπειες που συζητήθηκαν στην Υποενότητα 3.1. Οι προτάσεις και οι προτεινόμενες δραστηριότητες βασίζονται στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τις βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης και, ιδιαίτερα, τον κρίσιμο ρόλο της μονάδας και της μοναδοποίησης που συζητήθηκαν στην Υποενότητα 4.2. Σε συμφωνία με όσα συζητήθηκαν στην Ενότητα 4, βασικές αρχές που καθοδηγούν τα επόμενα είναι α) στην ισορροπημένη αντιμετώπιση της ποσοτικοποίησης στο πλαίσιο των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων, β) στην έμφαση στο ρόλο της μονάδας στη μέτρηση, αλλά και την καταμέτρηση, γ) στην έμφαση στη μοναδοποίηση και στις ενέργειες με τις οποίες συνδέεται (π.χ., ισομερισμός διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, αντιστοίχιση πολλά-ένα, καταμέτρηση με σύνθετη μονάδα), δ) στην ανάδειξη των πολλαπλασιαστικών σχέσεων και την υποστήριξη της έκφρασής τους και ε) στην προετοιμασία της επέκτασης του συνόλου των φυσικών αριθμών στο πλαίσιο της μέτρησης, αλλά και της δίκαιης μοιρασιάς.

6.1 Άμεσες συγκρίσεις ως προς διαφορετικά μετρήσιμα χαρακτηριστικά

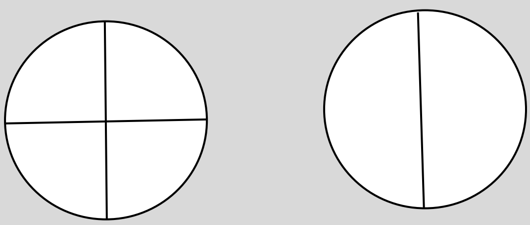
Η άμεση σύγκριση ποσοτήτων προτείνεται στο ΑΠ(2011) τόσο για το πλήθος, όσο και για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο/χωρητικότητα. Δεν εμφανίζονται, ωστόσο καταστάσεις στις οποίες να γίνεται σύγκριση ως προς διαφορετικά μετρήσιμα χαρακτηριστικά. Οι δραστηριότητες ΑΣ1 και ΑΣ2 παρουσιάζουν παραδείγματα τέτοιων συγκρίσεων, οι οποίες προετοιμάζουν τα παιδιά και για την κατανόηση της θεμελιώδους αρχής που διέπει τον ισομερισμό «όσο περισσότερα τα ίσα μέρη, τόσο μικρότερο το μέγεθός τους».

ΑΣ1 Υλικά: Λωρίδες χαρτιού, ίσου μήκους, ισομερισμένες σε διαφορετικό πλήθος μερών (Εικόνα 6.1). Τα παιδιά καλούνται να συγκρίνουν τις λωρίδες ως προς το μήκος, το πλήθος των μερών και την επιφάνεια των μερών. (π.χ. «Ο Κώστας λέει ότι η πάνω λωρίδα είναι πιο μακριά από την κάτω. Συμφωνείτε;» «Ποια λωρίδα έχει τα περισσότερα κομμάτια;», «Ποια λωρίδα έχει τα μεγαλύτερα κομμάτια;)



Εικόνα 6.1 Άμεση σύγκριση ως προς διαφορετικά μετρήσιμα χαρακτηριστικά: Μήκος, πλήθος, επιφάνεια.

ΑΣ2. Υλικά: Ομοιώματα πίτσας από χαρτόνι, ισομερισμένα σε διαφορετικό πλήθος μερών (Εικόνα 6.2). Τα παιδιά καλούνται α) να ελέγξουν ότι οι δύο πίτσες είναι ίσες, β) να αποφανθούν ποια πίτσα είναι κομμένη σε περισσότερα κομμάτια, γ) να αποφασίσουν ποια πίτσα έχει τα μικρότερα κομμάτια.



Εικόνα 6.2. Άμεση σύγκριση ως προς διαφορετικά μετρήσιμα χαρακτηριστικά: Πλήθος, επιφάνεια.

6.2 Προσέγγιση της μη αριθμητικής ποσοτικοποίησης με ένα συστηματικό και ενιαίο τρόπο για το πλήθος, το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο/χωρητικότητα

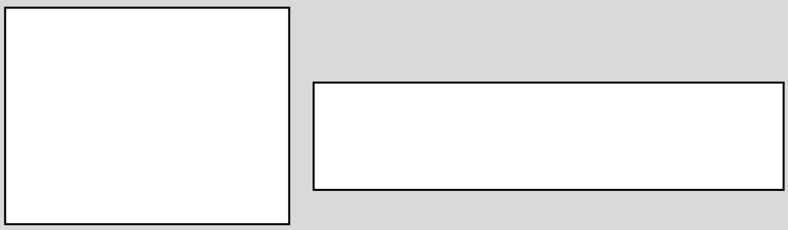
Οι ενέργειες της άμεσης και έμμεσης σύγκρισης μπορούν πραγματοποιηθούν με συνέπεια τόσο για το πλήθος, όσο και για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο/χωρητικότητα. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η έμμεση σύγκριση ως προς το πλήθος δεν αναφέρεται στο ΑΠ (2011). Επιπλέον, οι προτεινόμενες δραστηριότητες για την έμμεση σύγκριση επιφάνειας και όγκου/χωρητικότητας ανάγεται στη σύγκριση του πλήθους μονάδων, κάτι που έπεται των έμμεσων συγκρίσεων χωρίς τη χρήση μονάδας. Η εκτίμηση μπορεί να προηγείται συστηματικά των έμμεσων συγκρίσεων, ως μια ενέργεια που απαιτεί την ανάπτυξη στρατηγικών νοερής σύγκρισης που ευνοούν τη νοερή μοναδοποίηση. Στις προτεινόμενες δραστηριότητες που ακολουθούν, η Α1 δημιουργεί την ανάγκη για χρήση μετρητών ως εργαλείο έμμεσης σύγκρισης ως προς το πλήθος, μια ιδέα που μπορεί να αξιοποιηθεί στην Α2. Η ΕΣ-Ε3 και η ΕΣ-Σ4 είναι ενδεικτικές δραστηριότητες για την έμμεση σύγκριση επιφανειών και χωρητικότητας, αντίστοιχα, χωρίς να δίνονται μονάδες μέτρησης.

6.3 Έμμεσες συγκρίσεις ως προς το πλήθος, την επιφάνεια και τον όγκο/χωρητικότητα - Εκτιμήσεις (ΕΣ-Ε)

ΕΣ-Ε1: Υλικά: συλλογές αντικειμένων, μετρητές. Τα παιδιά χωρίζονται σε δύο ομάδες. Ένα εκπρόσωπος από κάθε ομάδα πρέπει να μεταδώσει την πληροφορία πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε μια συλλογή, χωρίς να χρησιμοποιήσει αριθμολέξεις ή αριθμητικά σύμβολα. Τα υπόλοιπα παιδιά της ομάδας δεν επιτρέπεται να δουν τη συλλογή. Ανάλογα με το πλήθος των αντικειμένων, μπορεί να χρησιμοποιήσει τα δάχτυλά του ή μετρητές (π.χ., ραβδάκια).

ΕΣ-Ε2: Υλικά: Ομοιώματα ή εικόνες χρυσών νομισμάτων. Δύο νάνοι μαζεύουν και αποθηκεύουν χρυσά νομίσματα στη σπηλιά του ο καθένας. Καθένας ισχυρίζεται ότι έχει μαζέψει περισσότερα από τον άλλο. Δεν ξέρουν τους αριθμούς, αρνούνται να βγάλουν τα νομίσματα από τη σπηλιά. Τσακώνονται και έχουν αναστατώσει όλο το νανοχωριό. Τα παιδιά καλούνται να βοηθήσουν τον αρχηγό νάνο να αποφασίσει δίκαια ποιος έχει τα περισσότερα νομίσματα για να λήξει ο καυγάς. Προηγείται εκτίμηση

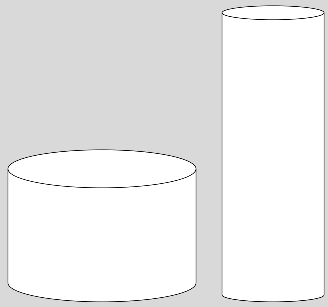
ΕΣ-Ε3. Υλικά: Δύο ορθογώνια από χαρτόνι, σε διαστάσεις που δεν επιτρέπουν την άμεση σύγκριση των επιφανειών τους (π.χ. Εικόνα 6.3). Τα ίδια ορθογώνια από χαρτί γλασέ. Τα παιδιά καλούνται να εκτιμήσουν ποιο σχήμα χρειάζεται περισσότερο χαρτί γλασέ για να καλυφθεί και να ελέγξουν την εκτίμησή τους. Ο έλεγχος μπορεί να γίνει αναλύοντας κατάλληλα μία από τις επιφάνειες (κόβοντας το γλασέ χαρτί).



Εικόνα 6.3 Κατάσταση που απαιτεί έμμεση σύγκριση επιφανειών.

Διαφοροποιήσεις: Η επιλογή των διαστάσεων είναι καθοριστική για το βαθμό δυσκολίας της δραστηριότητας: Όσα περισσότερα τα μέρη στα οποία πρέπει να αναλυθεί η μία επιφάνεια, τόσο δυσκολότερο το έργο.

ΕΣ-Ε4: Υλικά: Δύο δοχεία οι χωρητικότητες των οποίων δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα (Εικόνα 6.4). Άλλα διαθέσιμα δοχεία (π.χ., 1 άδειο δοχείο, ίδιο με ένα από τα υπό σύγκριση δοχεία ή 2 ίδια άδεια δοχεία, διαφορετικά από τα αρχικά). Τα παιδιά καλούνται να εκτιμήσουν ποιο δοχείο χωράει πιο πολύ νερό και στη συνέχεια να βρουν τρόπους να ελέγξουν την εκτίμησή τους.



Εικόνα 6.4 Κατάσταση που απαιτεί έμμεση σύγκριση χωρητικοτήτων

ΕΣ-Ε5. Υλικά: Ένας σωρός από μικρά χαλίκια και ένας ισοπληθής σωρός από μεγαλύτερα λεία βότσαλα. Τα παιδιά καλούνται να συγκρίνουν α) ως προς το πλήθος, β) ως προς το μήκος της γραμμής που μπορεί να φτιαχτεί εάν ευθυγραμμιστούν οι πέτρες η μία δίπλα στην άλλη, γ) ως προς την επιφάνεια που καλύπτουν αν απλωθούν η μία δίπλα από την άλλη, δ) ως προς τον όγκο που καταλαμβάνουν (π.χ. γεμίζοντας δύο ίδια κουτιά).

6.4 Αναπαράσταση πολλαπλασιαστικών σχέσεων στη μέτρηση

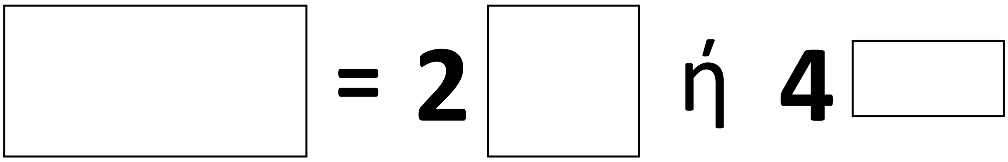
Ένα ζήτημα που προέκυψε από την εξέταση του ΑΠ (2011) είναι η απουσία εργαλείων έκφρασης πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Προς αυτή την κατεύθυνση προτείνεται καταρχήν η αναπαράσταση των αποτελεσμάτων μέτρησης και καταμέτρησης με τρόπο ώστε να αναδεικνύεται η πολλαπλασιαστική σχέση[7]. Η Εικόνες 6.5. και 6.6.

[7] Η πρόταση αυτή είναι εμπνευσμένη από το πρόγραμμα των Davydov και Elkonin (Davydov, 1975), οι οποίοι πρότειναν (και εφάρμοσαν) την αναπαράσταση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων με ένα αφηρημένο, συμβολικό τρόπο από την αρχή της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (π.χ., Α=Β, Γ =2 Δ, όπου Α, Β, Γ, Δ : ποσότητες). Στην

παρουσιάζουν παραδείγματα τέτοιας αναπαράστασης. Διευκρινίζεται ότι η αναπαράσταση γίνεται καταρχήν με εμπράγματο υλικό και κάρτες για τα αριθμητικά σύμβολα και το σύμβολο της ισότητας.

◊◊ ◊◊ ◊◊= 3◊◊ ή 6◊

Εικόνα 6.5. Παράδειγμα αναπαράστασης αποτελέσματος (κατά)μέτρησης με διακριτές ποσότητες

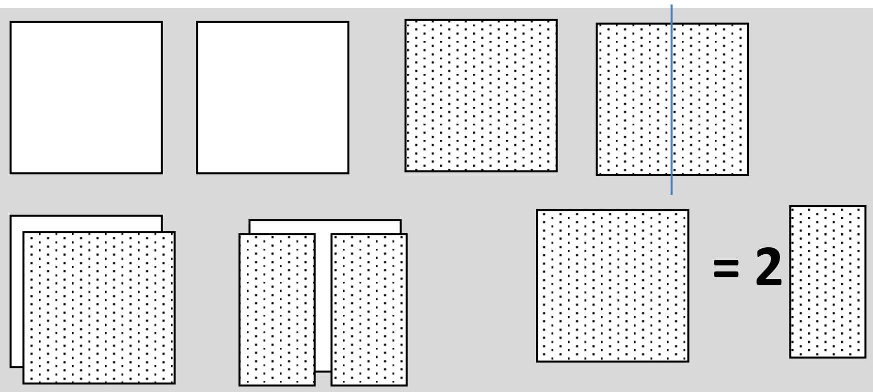


Εικόνα 6.6 Παράδειγμα έκφρασης αποτελέσματος μέτρησης επιφάνειας

6.5 Πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση στις συνεχείς ποσότητες (ΠΑΣ)

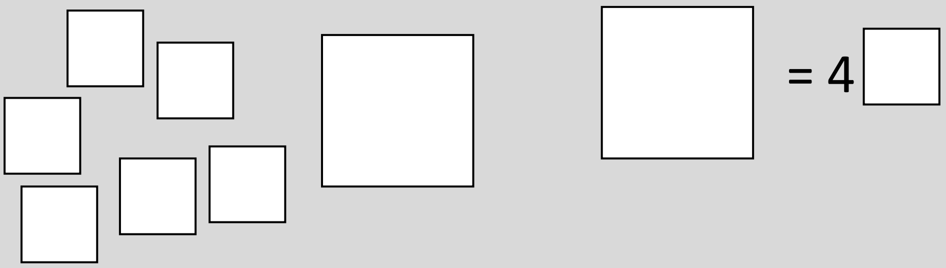
ΠΑΣ1. Υλικά: Σχήματα από χαρτόνι με άξονες συμμετρίας (π.χ. τετράγωνο), 2 αντίγραφα από κάθε σχήμα, σχήματα ίδιων διαστάσεων από χρωματιστό χαρτί, ίδια σχήματα διαφορετικών διαστάσεων από χαρτί (όπως στην εικόνα 6.7). Τα παιδιά καλούνται α) να ελέγξουν την ισότητα των σχημάτων από χαρτόνι π.χ. με ταύτιση, β) να επιλέξουν από τα χάρτινα σχήματα ποια μπορούν να καλύψουν ακριβώς τα πρώτα, γ) χωρίσουν ένα από τα χάρτινα σχήματα σε δύο ίσα μέρη (π.χ. με δίπλωση, αξιοποιώντας άξονες συμμετρίας), δ) να κόψουν το χάρτινο σχήμα πάνω στο σημάδι της δίπλωσης), ε) να καλύψουν το ένα από τα δύο αρχικά σχήματα με τα μέρη, στ) να αναπαραστήσουν τη σχέση ανάμεσα στη συνολική επιφάνεια και τα ίσα μέρη της .

παρούσα εργασία, διατηρείται η ιδέα της αναπαράστασης, αλλά χωρίς τη χρήση γραμμάτων).



Εικόνα 6.7. Πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση επιφάνειας

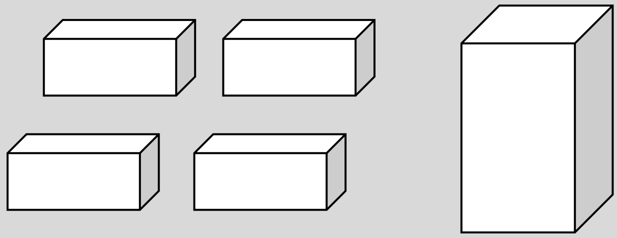
ΠΑΣ2: Υλικά: Σχήματα από χαρτόνι, ίσα μέρη του σχήματος (π.χ. τέταρτα) από γλασέ χαρτί (5 ή περισσότερα αντίγραφα) (Εικόνα 6.8). Τα παιδιά καλούνται α) να εκτιμήσουν πόσα ίσα μέρη θα χρειαστούν για να καλύψουν το ολόκληρο σχήμα, β) να ελέγξουν την εκτίμηση καλύπτοντας το σχήμα , γ) να εκφράσουν τη σχέση ανάμεσα στο ολόκληρο σχήμα και τα μέρη.



Εικόνα 6.8 Πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση επιφάνειας

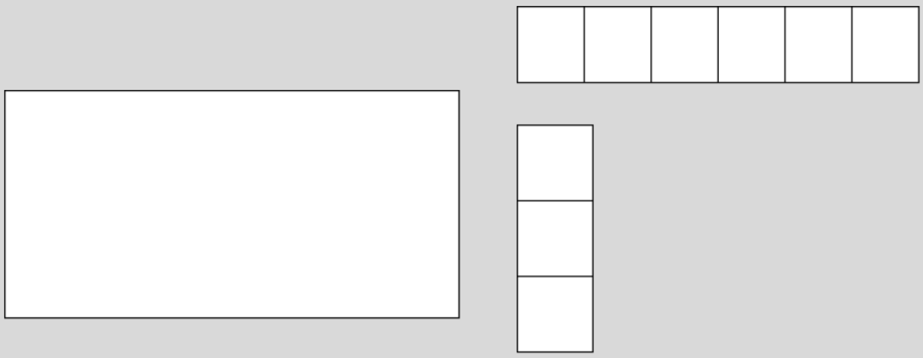
Παραλλαγές –Επεκτάσεις: α) Με εξοικείωση με τα κατάλληλα λεκτικά σύμβολα, η σχέση μπορεί να εκφραστεί με πολλαπλασιαστικούς όρους (π.χ. «τετραπλάσιο).

β) Παρόμοιας λογικής δραστηριότητες μπορούν να γίνουν για το μήκος και τον όγκο. Για παράδειγμα, με το υλικό της Εικόνας 6.9, και το ερώτημα «Πόσα τουβλάκια χρειάζονται για να φτιάξω τον πύργο;» ή «Πόσα τουβλάκια χωράνε στο κουτί»;



Εικόνα 6.5 Πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση του όγκου

ΠΑΣ3. Υλικά: Δύο ορθογώνια 6x3 από χαρτόνι, λωρίδες από χαρτί 6x1, 3x1 (Εικόνα 7.10). Τα παιδιά καλούνται α) να ελέγξουν ότι τα δύο ορθογώνια από χαρτόνι είναι ίσα (π.χ. με ταύτιση), β) να εκτιμήσουν πόσες λωρίδες 6x1 (αντ. 3x1) απαιτούνται για να καλύψουν το ένα ορθογώνιο και να ελέγξουν με επικάλυψη, γ) να εκφράσουν την επιφάνεια του ορθογωνίου μετρημένη με τη μία λωρίδα (6x1) και το άλλο με την άλλη (3x1), γ) να αναπαραστήσουν το αποτέλεσμα της μέτρησης της επιφάνειας του ορθογωνίου με τις δύο διαφορετικές λωρίδες και με το τετράγωνο 1x1.



Εικόνα 6.10 Πολλαπλασιαστική ανάλυση/σύνθεση της επιφάνειας

6.6 Ο ρόλος της μονάδας στην αριθμητικοποίηση διακριτών ποσοτήτων

Από την ανάλυση του ΑΠ (2011) προέκυψε ότι η ο ρόλος της μονάδας, ιδιαίτερα στην ποσοτικοποίηση καταστάσεων που εμπλέκουν διακριτές ποσότητες, δε λαμβάνει την αρμόζουσα προσοχή. Οι επόμενες δραστηριότητες αφορούν το ζήτημα αυτό, παρουσιάζοντας καταστάσεις όπου πρέπει να επιλεγεί η μονάδα μέτρησης με βάση ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά, καταστάσεις καταμέτρησης με σύνθετη μονάδα, αλλά και καταστάσεις στις οποίες η ποσοτικοποίηση δεν αφορά το πλήθος των φυσικών αντικειμένων που ενευπάρχουν στην κατάσταση.

Μ1: Υλικό: Εικόνα **6.11.** Ο Θωμάς λέει «βλέπω 5», αλλά η Άννα λέει «βλέπω 3».Τι μετράει ο Θωμάς; Τι μετράει η Άννα;

Εικόνα 6.11 Επιλογή της μονάδας βάση ποιοτικών χαρακτηριστικών

Μ2. Υλικό: 2 αυγοθήκες των 4 θέσεων, γεμάτες αυγά. Ο Θωμάς λέει «βλέπω 2», η Άννα λέει ότι «βλέπω 8». Τι μετράει ο Θωμάς; Τι μετράει η Άννα;

Μ3. Υλικό: 2 ολόκληρα και 2 μισά μήλα: Ο Κώστας λέει ότι υπάρχουν 3, αλλά η Άννα λέει πως είναι 6. Ποιος έχει δίκιο; Γιατί διαφωνούν; Με τι μετράει ο καθένας; Πόσα ολόκληρα μήλα; Πόσα μισά μήλα;

Μ4. Τα παιδιά καλούνται να μετρήσουν συλλογές αντικειμένων με απλή και σύνθετη μονάδα, για παράδειγμα 1 παπούτσι/ 1 ζευγάρι παπούτσια, 1 γάντι / 1 ζευγάρι γάντια και να εκφράσουν το αποτέλεσμα της καταμέτρησης.

Μ5. Υλικό: 1 νόμισμα των 2 ευρώ και 3 νομίσματα του 1 ευρώ (ή ομοιώματα). Δυο κούκλες μοιράζονται τα νομίσματα («ένα για σένα,

ένα για μένα»). Τα παιδιά καλούνται να αποφασίσουν αν είναι δίκαιη η μοιρασιά.

Μ6. Υλικό: 1 μεγάλο μπισκότο, 3 μικρά μπισκότα. Δυο κούκλες μοιράζονται τα μπισκότα («ένα για σένα, ένα για μένα»). Τα παιδιά καλούνται να αποφασίσουν αν είναι δίκαιη η μοιρασιά. Απαντούν σε ερωτήσεις όπως: «Πόσα είναι τα μπισκότα;», «Πόσα μπισκότα έχει το ένα;» «Πόσα μπισκότα έχει το άλλο»; «Ποιο θα φάει πιο πολύ;»

Μ7. Υλικό: 3 «μικρά» και 3 «μεγάλα» χάρτινα κομμάτια τούρτα. Η Μαρία λέει «Έφαγα 3 κομμάτια τούρτα!». Ο Γιάννης λέει «Κι εγώ έφαγα 3 κομμάτια τούρτα!». Έφαγαν το ίδιο; Γιατί;

Μ8. Υλικό: 1 μπουκάλι του 1 λίτρου και 1 του μισού λίτρου, κρυμμένα. Βρες λύση στο πρόβλημα που έχουν δύο φίλοι. Ο Κώστας λέει «ήπια 1 ολόκληρο μπουκάλι νερό». «Κι εγώ ήπια ένα ολόκληρο μπουκάλι νερό» φωνάζει ο Δημήτρης. Λέει ο Κώστας: «Εγώ ήπια περισσότερο!» Είναι δυνατόν;

Μ9.. Υλικό: 2 ίδιες πίτσες από χαρτόνι, μία κομμένη στα 4, μία κομμένη στα 8. Δύο φίλοι παραγγέλνουν πίτσα. Ο ένας τρώει 1 κομμάτι από την μία πίτσα και ο άλλος 1 κομμάτι από την άλλη. «Εσύ έφαγες περισσότερη!» φωνάζει θυμωμένος ο ένας. «Ένα κομμάτι έφαγα εγώ, ένα κομμάτι έφαγες κι εσύ!» αντιλέγει ο άλλος. Πώς γίνεται; Μπορείτε να μαντέψετε ποιος ήταν θυμωμένος;

6.7 Το «σπάσιμο» της μονάδας

Από την εξέταση του ΑΠ (2011), προέκυψε ότι δεν υπάρχει ρητή αναφορά σε καταστάσεις στις οποίες οι φυσικοί αριθμοί δεν επαρκούν. Τέτοιες καταστάσεις προκύπτουν, σχεδόν αναπόφευκτα, στη μέτρηση, αλλά και σε καταστάσεις μοιρασιάς. Η διαχείριση τέτοιων καταστάσεων μπορεί να γίνει στο επίπεδο του νηπιαγωγείου με τους εξής τρόπους: α) προσέγγιση του αποτελέσματος με φυσικό αριθμό και χρήση εκφράσεων όπως «περίπου», β) έκφραση του αποτελέσματος με χρήση εκφράσεων όπως «είναι λίγο περισσότερο/λιγότερο από», «είναι 5 ξυλάκια και κάτι», γ) την έκφραση του αποτελέσματος με «συμμιγή αριθμό» (π.χ. 3 «μεγάλα» ξυλάκια και 2 «μικρά» ξυλάκια). Μετά την εξοικείωση με το «μισό», οι προσεγγίσεις μπορούν να γίνουν πιο ακριβείς («είναι 3 ξυλάκια και μισό ξυλάκι»)

Μη ακέραια αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν και σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς (βλ. παρακάτω).

6.8 Πολλαπλασιαστικές σχέσεις και λεκτική έκφρασή τους (ΠΣ)

Όπως συζητήθηκε στην Ενότητα 2, τα παιδιά, από μικρή ηλικία, αναγνωρίζουν πολλαπλασιαστικές/αναλογικές σχέσεις σε ένα αντιληπτικό επίπεδο. Αυτή η πρώιμη ικανότητα δεν αξιοποιείται στο ΑΠ (2011), στο οποίο δεν υπάρχει υποστήριξη για τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Η δραστηριότητα ΠΣ1 παρουσιάζει ένα παράδειγμα για την αξιοποίηση και υποστήριξη αυτής της πρώιμης ικανότητας και η ΠΣ2 ένα παράδειγμα υποστήριξης της κατανόησης των σχέσεων «μισό», «διπλάσιο», της μεταξύ τους σχέσης, καθώς και της έκφρασής τους.

ΠΣ1[8]. Υλικά: 4 σχήματα από χαρτόνι (π.χ. κύκλος, τετράγωνο, τραπέζιο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), μέρη αυτών των σχημάτων με επιφάνεια σε σταθερή σχέση με το αρχικό σχήμα (π.χ. 1:2), μέρη ενός από τα ολόκληρα σχήματα σε εμφανώς διαφορετική σχέση. Τα ολόκληρα σχήματα μπαίνουν σε μια γραμμή. Κάτω από τα 3 πρώτα σχήματα τοποθετείται το αντίστοιχο μέρος («αυτό (το ολόκληρο σχήμα) ταιριάζει με αυτό (το αντίστοιχο μέρος)»). Τα παιδιά καλούνται να επιλέξουν ποιο μέρος ταιριάζει με το τέταρτο σχήμα και να εξηγήσουν γιατί. Η/Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τα παιδιά να μετρήσουν την επιφάνεια των ολόκληρων σχημάτων με τα μέρη τους

[8] Παρόμοια με έργο των Βαμβακούση, Βράκα, Λιολιούση & McMullen (2015).

(«πόσες φορές χωράει το… στο …), να αναπαραστήσουν τη σχέση (βλ. υποενότητα 6.4) και να παρατηρήσουν τις ομοιότητες.

○ ○	⭘⭘⭘⭘	◉◉◉◉◉◉	◎◎◎◎◎◎◎◎
○	⭘⭘	◉◉◉	;

○ ○=2○, ⭘⭘⭘⭘=2⭘⭘, ◉◉◉◉◉◉=2◉◉◉

Εικόνα 6.12 Πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ διακριτών ποσοτήτων

Παραλλαγές –Επεκτάσεις: α) Τα σχήματα της δεύτερης γραμμής έχουν ν-πλάσιο εμβαδόν από τα σχήματα της πρώτης γραμμής (με χρήση ορθογωνίων σε διαφορετικά μεγέθη) **β)** Αντί σχημάτων, χρησιμοποιούνται διακριτές ποσότητες (Εικόνα 6.12.) **γ)** Χρησιμοποιούνται όροι για να εκφραστούν οι σχέσεις (π.χ., «διπλάσιο», «μισό»).

ΠΣ2. Υλικά: Κυλινδρικά ανθρωπόμορφα κουκλάκια, παρόμοια με τους χαρακτήρες της «Τενεκεδούπολης». Τα κουκλάκια έχουν ίδια βάση και διαφέρουν μόνο ως προς το ύψος. Δύο είναι ίσα ως προς το ύψος (Τιμ και Τίμη). Ένα έχει διπλάσιο ύψος από τον Τιμ (Τομ). Τρία-τέσσερα ακόμα με εμφανείς διαφορές ύψους ως προς τα τρία πρώτα. Ασπρόμαυρη φωτογραφία του Τιμ δίπλα από τον Τομ, Ασπρόμαυρη φωτογραφία του Τιμ δίπλα από την Τίμη.

Σενάριο: Συστήνεται ο Τιμ στα παιδιά και τους δίνεται το αντίστοιχο κουκλάκι. Αναφέρεται ότι η Τίμη είναι η δίδυμη αδερφή του και ο Τομ ο καλύτερός του φίλιος.

α). Δίνεται η φωτογραφία του Τιμ με την Τίμη. Τα παιδιά καλούνται να επιλέξουν ποιο κουκλάκι είναι η Τίμη και να εξηγήσουν την επιλογή τους.Με βάση την πληροφορία ότι «ο Τιμ και η Τίμη είναι πολύ αγαπημένοι και μοιράζονται τα πάντα δίκαια», τα παιδιά καλούνται να μοιράσουν στα δύο κουκλάκια συνεχείς ποσότητες (π.χ., τάρτα ή σοκολάτα από χαρτόνι) και διακριτές ποσότητες (π.χ. καραμέλες, ή μπισκότα από χαρτόνι) με άρτιο ή περιττό πλήθος. Αντίστροφα, με δεδομένο ότι το ένα από τα δύο πήρε τη μισή ποσότητα, τα παιδιά καλούνται να αναπαραστήσουν με το υλικό τους την ποσότητα που πήρε το άλλο και τη συνολική ποσότητα.

Παράδειγμα 1: «Ο Τιμ και η Τίμη έκοψαν στη μέση μια σοκολάτα και πήραν από ένα κομμάτι. Ο Τιμ πήρε (ορθογώνιο από χαρτόνι π.χ. 5εκ x 2 εκ.). Δείξτε μου τι πήρε η Τίμη (από μια συλλογή ορθογωνίων από χαρτόνι, διαφορετικών διαστάσεων). Δείξτε μου πώς ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν (από μια συλλογή ορθογωνίων από χαρτόνι, διαφορετικών διαστάσεων). Πώς το βρήκατε;»

Παράδειγμα 2: «Η μαμά της Τίμη και του Τιμ έφτιαξε μπισκότα και τα παιδιά τα μοίρασαν στη μέση. Η Τίμη πήρε (3 μπισκότα από χαρτόνι). Πόσα πήρε ο Τιμ; Πόσα μπισκότα έφτιαξε η μαμά τους;» Ανακεφαλαιώνοντας, ο/η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί όρους που εκφράζουν το «μισό» και το συνδέει με τους αριθμούς (π.χ. «Δηλαδή, η μαμά τους έφτιαξε 6 μπισκότα. Ο Τιμ πήρε τα μισά. Πόσα πήρε ο Τιμ; Η Τίμη πήρε τα άλλα μισά. Πόσα πήρε η Τίμη;»)

β). Δίνεται η φωτογραφία του Τιμ με τον Τομ. Τα παιδιά καλούνται να επιλέξουν ποιο κουκλάκι είναι ο Τομ και να εξηγήσουν την επιλογή τους. Ο/Η εκπαιδευτικός τα προτρέπει να συζητήσουν το ύψος του Τομ, σε σχέση με αυτό του Τιμ (π.χ. «Ο Τιμ του φτάνει μέχρι τη μέση»). Τα κουκλάκια Τιμ και Τίμη και, στη συνέχεια, ο Τιμ αξιοποιούνται για «μετρηθεί» το ύψος του Τομ (π.χ. «Ο Τομ είναι όσο ο Τιμ και η Τίμη μαζί», «Ο Τομ είναι όσο δύο Τιμ»), με στόχο να εισαχθεί ο όρος «διπλάσιο». Στη συνέχεια, τα παιδιά καλούνται να βρουν την ποσότητα φαγητού που πρέπει να φάει ο ένας για να χορτάσει, δεδομένης της ποσότητας που τρώει ο άλλος. Η/Ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται αυτή την κατάσταση παρόμοια με την παραπάνω, αξιοποιώντας το παρακάτω σενάριο:

Σενάριο: Ο Τομ είναι λαίμαργος, τρώει περισσότερο απ’ όσο χρειάζεται και μετά πονάει η κοιλιά του. Η Τίμη του λέει «Τρως πάρα πολύ! Τρως πολύ περισσότερο απ’ όσο εγώ και ο Τιμ μαζί!» Ο Τομ λέει «Μα είμαι ψηλότερος, χρειάζομαι περισσότερο φαγητό». Η Τίμη λέει: «Είσαι διπλάσιος από τον Τιμ, θα τρως ακριβώς το διπλάσιο φαγητό. Να στο πω κι αλλιώς: Θα τρως όσο τρώμε ο Τιμ κι εγώ μαζί, όχι παραπάνω».

ΠΣ3[9]. Δίνονται υλικά μιας συνταγής για 1 κέικ (π.χ. 4 αυγά, 1 κεσεδάκι γιαούρτι, 4 φλυτζάνια αλεύρι, 3 φλυτζάνια ζάχαρη) Ζητούνται τα υλικά για να φτιαχτούν 2 κέικ.

[9] Για παρόμοιες δραστηριότητες βλ. Καπέλου (2004)

6.10 Προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής στις συνεχείς ποσότητες (ΠΠΔ)

Από την ανάλυση του ΑΠ (2011) προέκυψε ότι, ενώ υπάρχει ρητή αναφορά σε όλους τους τύπους προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής που αντιστοιχούν σε προβλήματα διαίρεσης ή πολλαπλασιασμού μιας πράξης (ειδική περίπτωση του τύπου «αναλογία») στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, δεν υπάρχει αντίστοιχη αναφορά για τις συνεχείς ποσότητες. Βεβαίως ισχύει ότι κάθε κατάσταση μέτρησης αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιαστικής δομής, με την τυπική κατάσταση μέτρησης να αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης. Παρακάτω παρατίθενται προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς και μέτρησης, τα οποία αντιστοιχούν σε απλά προβλήματα διαίρεσης (μέτρησης/μερισμού) και πολλαπλασιασμού. Όλα τα προβλήματα παρουσιάζονται με εμπράγματο υλικό και οι απαιτούμενες ενέργειες εμπλέκουν τον (νοερό ή πραγματικό) ισομερισμό της ποσότητας ή τη (νοερή ή πραγματική) επανάληψη της μονάδας.

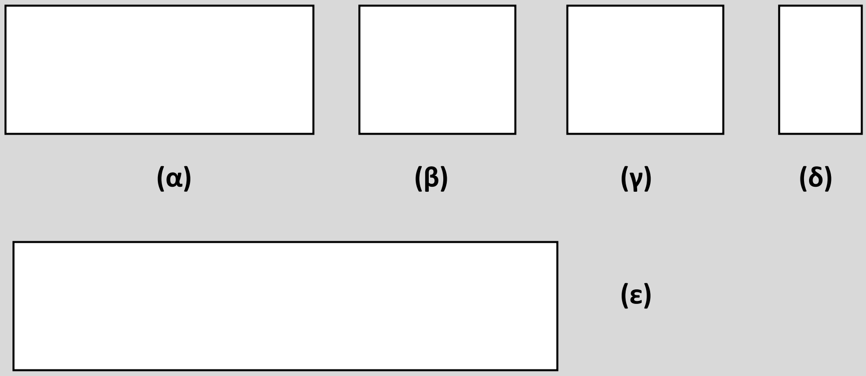
ΠΠΔ1: Ο Γιώργος και η Μαίρη μοιράζονται μια σοκολάτα

<u>Υλικά: σχήματα (α), (β), (γ), (δ), (ε) (Εικόνα 6.13) από χαρτόνι.</u>

1α. Ο Γιώργος και η Μαίρη μοιράστηκαν δίκαια τη σοκολάτα (α). Δείξτε τι μέρος της σοκολάτας θα πάρει το κάθε παιδί.

1.β. Ο Γιώργος και η Μαίρη μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα. Το (β) είναι το κομμάτι που πήρε ο Γιώργος. Ποιο είναι το κομμάτι που πήρε η Μαίρη, το (γ) ή το (δ); Ποια είναι η σοκολάτα που μοιράστηκαν, η (α) ή η (ε);

1.γ. Η κυρία Ελένη έδωσε στα παιδιά της, τη σοκολάτα (α). Τα παιδιά τη μοιράστηκαν δίκαια. Κάθε παιδί πήρε ένα κομμάτι σαν το (β). Πόσα κομμάτια σαν το (β) έχει η σοκολάτα; Πόσα είναι τα παιδιά της κυρίας Ελένης;

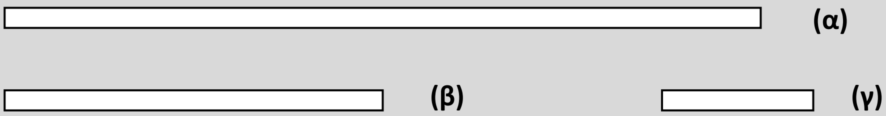


Εικόνα 6.13 Διαίρεση μέτρησης σε κατάσταση δίκαιας μοιρασιάς

ΠΠΔ2: Μέτρηση αποστάσεων

Υλικά: σχήματα σε διαστάσεις (α), (β)=1/2 (α), και (γ)=1/5 (α) σε χαρτόνι (Εικόνα 6.14)

2α. Η Μαρία μέτρησε με τα βήματά της την απόσταση (α) από τον ένα τοίχο στον άλλο και τη βρήκε 5 βήματα. Πόσο «μεγάλο» είναι το βήμα της Μαρίας, όσο τα (α) ή όσο το (β);



Εικόνα 6.14 Διαίρεση μέτρησης σε κατάσταση μέτρησης αποστάσεων.

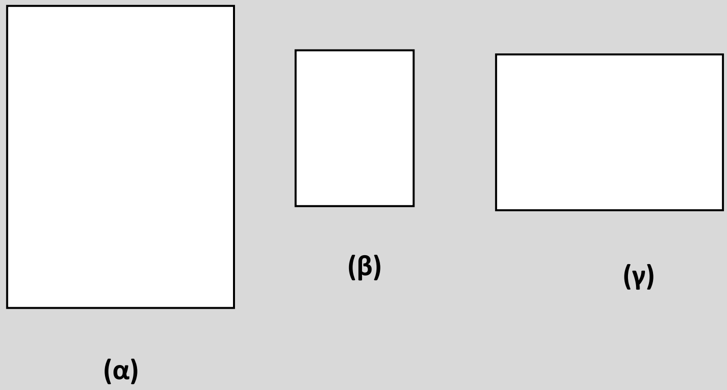
2.β. Αντίστροφο πρόβλημα: Το βήμα της Μαρίας είναι τόσο μακρύ, όσο το (β). Η Μαρία ξεκίνησε από εδώ (ένα συγκεκριμένο σημείο) και έκανε 5 βήματα προς (συγκεκριμένο σημείο). Μέχρι πού έφτασε;

ΠΠΔ23: Μέτρηση επιφανειών.

Υλικά: Ορθογώνια παραλληλόγραμμα σε διαστάσεις (α), (β)= 1/4(α), γ=1/2 (α). (Εικόνα 6.15)

3α. Ο Γιάννης κάλυψε τη σελίδα (α) με 4 ίδια αυτοκόλλητα με αυτοκίνητα. Πόσο μεγάλα

είναι τα αυτοκόλλητα του Γιάννη, όσο το (β) ή όσο το (γ);



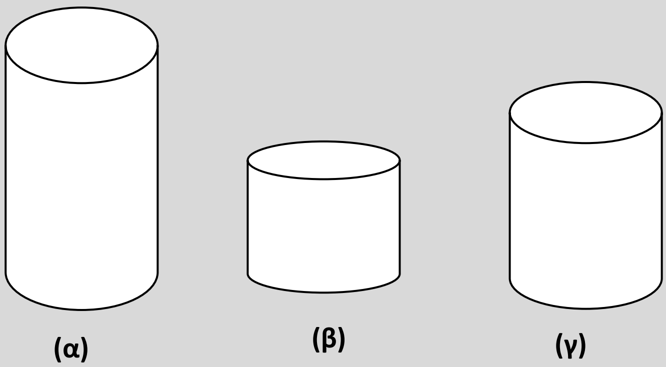
Εικόνα 6.15 Διαίρεση μέτρησης σε κατάσταση δόμησης επιφάνειας.

3β. Αντίστροφο πρόβλημα: Ο Γιάννης γέμισε μια σελίδα από το άλμπουμ του με 4 αυτοκόλλητα σαν το (β). Πόσο «μεγάλη» είναι αυτή η σελίδα, όσο η (α) ή όσο η (γ);

Κατάσταση 4η: Μέτρηση όγκου.

Υλικά: κύλινδροι σε διαστάσεις (α), (β)=1/2(α) και (γ)=2/3(α). (Εικόνα 6.16).

4α. Ο Παύλος βρήκε ότι το δοχείο (α) χωράει περίπου 2 ποτήρια νερό. Ποιο ποτήρι χρησιμοποίησε, το (β) ή το (γ);



Εικόνα 6.16 Διαίρεση μέτρησης στη μέτρηση όγκου

4β. Αντίστροφο πρόβλημα: Ο Παύλος γέμισε το δοχείο με δύο ποτήρια (β) νερό. Ποιο δοχείο γέμισε, το (α) ή το (γ);

7.Συζήτηση

Στην εργασία αυτή εστιάσαμε στην ποσοτικοποίηση στις μικρές ηλικίες. Στον πυρήνα της ποσοτικοποίησης βρίσκονται οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Η βασική θέση που υποστηρίχθηκε στην εργασία είναι ότι υπάρχει ασυμμετρία στις πρώιμες εμπειρίες των παιδιών στην ποσοτικοποίηση, που ευνοεί την αριθμητικοποίηση του πλήθους και τις προσθετικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων. Η ασυμμετρία αυτή δημιουργεί μακροπρόθεσμα πολλά προβλήματα στην κατανόηση των ρητών, αλλά και στην επεξεργασία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων.

Στην Ενότητα 2 συζητήθηκαν οι θεωρητικές απόψεις για τους αρχικούς, ενδεχομένως έμφυτους, μηχανισμούς ποσοτικοποίησης και αντιπαρατέθηκαν η για πολλά χρόνια επικρατούσα άποψη ότι υπάρχει ένας μόνο αρχικός μηχανισμός που εξειδικεύεται στην επεξεργασία πληροφοριών που αφορούν το πλήθος και με άλλες απόψεις που υποστηρίζουν ότι υπάρχει ένας ενιαίος μηχανισμός που επεξεργάζεται ποσοτικές πληροφορίες τόσο για τις διακριτές, όσο και για τις συνεχείς ποσότητες. Παρουσιάστηκαν στοιχεία που δείχνουν ότι, ήδη από τη βρεφική ηλικία, υπάρχουν στοιχειώδεις ικανότητες (μη αριθμητικής) ποσοτικοποίησης, οι οποίες δεν περιορίζονται στο πλήθος και τις προσθετικές σχέσεις. Πράγματι, η έρευνα στον τομέα της ανάπτυξης της ποσοτικοποίησης στον ανθρώπινο εγκέφαλο, παρέχει ενδείξεις ότι, από πολύ μικρές ηλικίες, τα παιδιά είναι ευαίσθητα σε πληροφορίες σχετικά με το σχετικό μέγεθος συνεχών ποσοτήτων. Η ευαισθησία αυτή αναδεικνύεται με την ικανότητα των βρεφών να εκτιμούν τις ποσότητες συγκρίνοντας τις συνολικές εκτάσεις των ποσοτήτων με κάποιο «μέτρο» αναφοράς στο οπτικό πεδίο τους (Huttenlocher et al.,2002; Mix et al., 2002).

Ανεξαρτήτως της θεωρητικής άποψη που υιοθετεί κανείς σχετικά με τα θεμέλια και τους αρχικούς μηχανισμούς της ποσοτικής σκέψης (Ni &

Zhou, 2005; Jacob et al., 2012), είναι σημαντικό να τονιστεί ότι το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον, τόσο μέσω της άτυπης όσο και μέσω της τυπικής εκπαίδευσης, ευνοεί την ποσοτικοποίηση στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, με έμφαση στις προσθετικές σχέσεις. Στην Ενότητα 3 συζητήθηκε η επίδραση του κοινωνικο-πολιτισμικού παράγοντα στην ανάπτυξη των πρώιμων ικανοτήτων ποσοτικοποίησης, καθώς και οι συνέπειες της ασύμμετρης έμφασης στους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές που εκδηλώνονται με πλήθος δυσκολιών των μαθητών στους ρητούς αριθμούς σχέσεις (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, 2015), αλλά και με κατάχρηση των προσθετικών σχέσεων σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010) .

Στην Ενότητα 4 εξετάστηκε ο ρόλος της μονάδας και της μοναδοποίησης στην ποσοτικοποίηση και αναλύθηκε η σχέση τους με τις πολλαπλασιαστικές δομές, αλλά και την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστική σκέψης. Το πέρασμα από τη μη αριθμητική στην αριθμητική ποσοτικοποίηση επιτυγχάνεται με τη κατασκευή της μονάδας (Tobias et al., 2015; Ulrich, 2015), τόσο στις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες. Η μοναδοποίηση, δηλαδή η επιλογή της μονάδας και ο ισομερισμός της ποσότητας σε μονάδες, αποτελεί θεμελιώδη λειτουργία κατά τη ποσοτικοποίηση (Confrey, 2008; Steffe, 1992; Steffe & Olive, 2010) αλλά και κατά την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και την εισαγωγή των ρητών αριθμών (Lamon, 2006; Sophian 2004; Thompson et al., 2014). Ειδικότερα, στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, η σύνθετη μονάδα και η επαναληπτική εφαρμογή της βρίσκονται στον πυρήνα της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Behr et al., 1983).

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας οδήγησε στη διατύπωση ορισμένων αρχών στις οποίες θα μπορούσε να βασιστεί η αποτελεσματική υποστήριξη της ανάπτυξης των ικανοτήτων ποσοτικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, αναδύθηκαν ως σημαντικές παράμετροι: α) η ισορροπημένη αντιμετώπιση της ποσοτικοποίησης στο πλαίσιο των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων, β) η έμφαση στο ρόλο της μονάδας στη μέτρηση, αλλά και την καταμέτρηση, γ) η έμφαση στη μοναδοποίηση και στις ενέργειες με τις οποίες συνδέεται (π.χ., ισομερισμός διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, αντιστοίχιση πολλά-ένα, καταμέτρηση με σύνθετη μονάδα), δ) η ανάδειξη των πολλαπλασιαστικών σχέσεων και η υποστήριξη της έκφρασής τους και ε) η προετοιμασία της επέκτασης του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Στην Ενότητα 5 παρουσιάστηκε μια κριτική ανάλυση του πιο πρόσφατου αναλυτικού προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά του νηπιαγωγείου (ΑΠ, 2011) ως προς α) το είδος των ποσοτήτων που μελετώνται (διακριτές/ συνεχείς) και β) το είδος των σχέσεων (ισοδυναμίας/διάταξης, προσθετικές/πολλαπλασιαστικές) που αναφέρονται ρητά στους στόχους του αναλυτικού. Εξετάστηκαν οι μαθηματικές ενέργειες που απαιτούνται (π.χ. σύγκριση/διάταξη, σύνθεση/ανάλυση ποσοτήτων), καθώς και οι καταστάσεις προβλήματος (προβλήματα προσθετικής και πολλαπλασιαστικής δομής) που αναφέρονται στο αναλυτικό. Όπως αναμενόταν, βρέθηκε ότι υπάρχει ασυμμετρία υπέρ των διακριτών ποσοτήτων και, συνακόλουθα, των φυσικών αριθμών, αλλά και τον προσθετικών σχέσεων. Για παράδειγμα, ενώ τα παιδιά εφοδιάζονται με συμβολικά εργαλεία για την αριθμητικοποίηση των διακριτών ποσοτήτων, παρατηρείται πλήρης έλλειψη αναπαραστατικών εργαλείων για την περιγραφή κλασματικών ποσοτήτων ή των πολλαπλασιαστικών σχέσεων που εμφανίζονται στο ΑΠ (2011) (π.χ., το μισό, διπλάσιο). Επιπλέον, η ποσοτικοποίηση στο πλαίσιο των διακριτών και συνεχών ποσοτήτων δεν αντιμετωπίζεται πάντα με ένα ενιαίο, συστηματικό τρόπο. (π.χ., ενέργειες που ζητούνται στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων δε ζητούνται στο πλαίσιο των συνεχών και αντίστροφα). Τέλος, η μονάδα και η μοναδοποίηση δεν λαμβάνουν την αρμόζουσα προσοχή. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται η παραμέληση του ρόλου της μονάδας στη μέτρηση (Barrett et al., 2011; Boyer, Levine & Huttenlocher, 2008), αλλά και την καταμέτρηση (Clements & Stephan, 2004; Sophian, 2004). Επιπλέον, οι προτεινόμενες καταστάσεις αριθμητικής ποσοτικοποίησης δεν φαίνεται να ευνοούν την ανάπτυξη των δομών για τους ρητούς αριθμούς καθώς δεν αναφέρεται η δυνατότητα υποδιαίρεσης της μονάδας. Πρέπει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι το συνολικό περιεχόμενο του ΑΠ(2011) παρέχει πολλές δυνατότητες που μπορούν να αξιοποιηθούν προς την κατεύθυνση της αποτελεσματικής ανάπτυξης των ικανοτήτων ποσοτικοποίησης και, ειδικότερα, των πολλαπλασιαστικών πτυχών της.

Με βάση τις επισημάνσεις αυτές, στην Ενότητα 6 διατυπώθηκαν προτάσεις για την αποτελεσματικότερη διαχείριση της ποσοτικοποίησης στο πλαίσιο του ΑΠ (2011). Οι προτάσεις αυτές είναι συμβατές με τις αρχές που συζητήθηκαν παραπάνω και συνοδεύονται από ενδεικτικές δραστηριότητες που δείχνουν πώς μπορούν οι προτάσεις να υλοποιηθούν στο νηπιαγωγείο. Επισημαίνεται ότι οι δραστηριότητες αυτές δε συνιστούν ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα. Η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου προγράμματος με βάση τις παραπάνω αρχές, αλλά και η αξιολόγησή του αποτελεί στόχο μελλοντικής έρευνας. Πράγματι, παρά το γεγονός ότι οι αρχές αυτές έχουν θεωρητικές και εμπειρικές βάσεις, απαιτείται εμπειρική τεκμηρίωση της αποτελεσματικότητας ενός προγράμματος που να στηρίζεται σε αυτές. Ειδικότερα, απαιτείται μακροχρόνια μελέτη προκειμένου να τεκμηριωθεί ότι η εφαρμογή ενός τέτοιου προγράμματος μπορεί να αντισταθμίσει την ασύμμετρη έμφαση (κοινωνικό-πολιτισμικής προέλευσης) σε φυσικούς αριθμούς και προσθετικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και να αμβλύνει τα προβλήματα που συναντούν μεταγενέστερα οι μαθητές με τους ρητούς αριθμούς και τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις..

8. Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Barrett, J. E., Cullen, C., Sarama, J., Clements, D. H., Klanderman, D., Miller, A. L., & Rumsey, C. (2011). Children's unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM*, *43*(5), 637.

Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 28-54.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to Help Year 5 Students Construct Fraction Understanding. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 296-333.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental psychology*, *44*(5), 1478.

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental psychology*, *51*(5), 615.

Chard, D. J., Baker, S. K., Clarke, B., Jungjohann, K., Davis, K., & Smolkowski, K. (2008). Preventing early mathematics difficulties: The feasibility of a rigorous kindergarten mathematics curriculum. *Learning Disability Quarterly*, *31* (1), 11-20.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127-138.

Clearfield, M. W., & Mix, K. S. (1999). Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science*, *10*(5), 408-411.

Clearfield, M. W., & Mix, K. S. (2001). Amount versus number: Infants' use of area and contour length to discriminate small sets. *Journal of Cognition and Development*, *2*(3), 243-260.

Clements, D. H., Sarama, J., Wolfe, C. B., & Spitler, M. E. (2013). Longitudinal evaluation of a scale-up model for teaching mathematics with trajectories and technologies: Persistence of effects in the third year. *American Educational Research Journal*, *50*(4), 812-850.

Clements, D. H.,& Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 299-317.

Cobb, P., & Wheatley, G. (1988). Children's initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 23*(10), 2–33.

Confrey, J. (2008). Workshop on Higher Cognition in Adolescents and Young Adults: Social, Behavioral, and Biological influences on Learning. National Science Foundation.

Πηγή: https://www.human.cornell.edu/sites/default/files/HD/nsfalw/Confrey-NSF.pdf

Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 305-345.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009, July). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece*.

Davydov, V. V. (1975). The psychological characteristics of the “prenumerical” period of mathematics instruction. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, *7*, 109-206.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1–42.

Dehaene, S., & Brannon, E. (Eds.). (2011). *Space, time and number in the brain: Searching for the foundations of mathematical thought*. Academic Press.

Dougherty, B. J., & Zilliox, J. (2003). Voyaging from Theory to Practice in Teaching and Learning: A View from Hawaii. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 17-32.

Empson S.(1999) Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in a First-Grade Classroom, *Cognition and Instruction*, 17:3, 283-342

Feigenson, L., Carey, S., & Spelke, E. (2002). Infants' discrimination of number vs. continuous extent. *Cognitive psychology*, *44*(1), 33-66.

Gao, F., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2000). What do infants know about continuous quantity?. *Journal of Experimental Child Psychology*, *77*(1), 20-29.

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings?. *Learning and instruction*, *8*(4), 341-374.

Huttenlocher, J., Duffy, S., & Levine, S. (2002). Infants and toddlers discriminate amount: Are they measuring?. *Psychological Science*, *13*(3), 244-249.

Iannece, D., Mellone, M., & Tortora, R. (2009). Counting vs. measuring: Reflections on number roots between epistemology and neuroscience. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209-216).

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking. *From childhood to adolescence*.

Jacob, S. N., & Nieder, A. (2009). Notation-independent representation of fractions in the human parietal cortex. *Journal of Neuroscience*, *29*(14), 4652-4657.

Jacob, N.J., Vallentin, D., & Nieder, A. (2012). Relating magnitudes: the brain's code for proportions. *Trends in Cognitive Science*, 16, 157-166.

Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development*, *8* (2), 237-256.

Gallistel, C. R., Gelman, R., & Cordes, S. (2006). 12 The Cultural and Evolutionary History of the Real Numbers. *Evolution and culture*, 247.

Gelman, R., & Gallistel, C.-R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C., & Dartnell, P. (2014). Exploring fraction comparison in school children. In *Proceedings of the Joint Meeting of PME* (Vol. 38, pp. 185-192).

Kalchman, M., Moss, J., & Case, R. (2001). Psychological models for the development of mathematical understanding: Rational numbers and functions. *Cognition and instruction: Twenty-five years of Lamon, S.J. (2007). The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies Author(s):.progress*, 1-38.

Kornilaki, E. (1999). *Young children's understanding of multiplicative concepts: A psychological approach* (Doctoral dissertation, Institute of Education, University of London).

Lamon, S.J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41–61.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 170-193.

Lamon, S. (2006). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2nd ed.). Mahwah: Erlbaum.

Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, 105, 395–438.

Leibovich, T., Kallai, A. Y., & Itamar, S. (2016). What do we measure when we measure magnitudes?. In *Continuous issues in numerical cognition* (pp. 355-373).

Mamede E. (2009), Early years mathematics – the case of fractions, Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st, Lyon France, 2010

McCrink, K. & Wynn, K. (2007) Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Psychological Science*, 18, 740–745.

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them?. *Psychological bulletin*, *128*(2), 278.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. *How students learn: Mathematics in the classroom*, 121-162.

Moxhay, P. (2008). Assessing the scientific concept of number in primary school children. International Society for Cultural and Activity Research. San Diego, CA: ISCAR.

Newcombe, N., Huttenlocher, J., & Learmonth, A. (1999). Infants' coding of location in continuous space. *Infant Behavior and Development*, *22*(4), 483-510.

Ni, Y. & Zhou, Y.(2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias*. Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Nunes, T., & Csapó, B. (2011). Developing and assessing mathematical reasoning.

Nunes, T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). Key understandings in mathematics learning. *London: Nuffield Foundation.*

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Wiley-Blackwell.

Oléron, P., & Piaget, J. (2014). *Experimental Psychology Its Scope and Method: Volume VII (Psychology Revivals): Intelligence*. Psychology Press.

Olive, J. (2000). Computer tools for interactive mathematical activity in the elementary school. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*(3), 241-262.

Olive, J. (2001). Connecting partitioning and iterating: A path to improper fractions. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-1).

Olive, J. (2008). From Dienes' Blocks to JavaBars: A Personal Odyssey in the use of artifacts, materials and tools for learning and teaching mathematics. In *From the symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, Rome*.

Steffe, L. P & Olive, J. (2010). The partitive, the iterative, and the unit composition schemes. In *Children's Fractional Knowledge* (pp. 171-223). Springer, Boston, MA.

Pearn, C., & Stephens, M. (2004, June). Why do you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. In *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Townsville* (pp. 27-30).

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, *44*(2), 162.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Schmittau, J. (2010). The relevance of Russian elementary mathematics education. In *Russian mathematics education: History and world significance* (pp. 253-278).

Singer, J. A., & Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners?. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 231-246.

Slusser, E., Ditta, A., & Sarnecka, B. (2013). Connecting numbers to discrete quantification: A step in the child's construction of integer concepts. *Cognition*, *129*(1), 31-41.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and individual differences*, *4*(3), 259-309.

Sophian, C. (2004). A prospective developmental perspective on early mathematics instruction. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 253-266.

Sophian, C. (2007, July). Measuring spatial factors in comparative judgments about large numerosities. In *International Conference on Foundations of Augmented Cognition* (pp. 157-165). Springer, Berlin, Heidelberg.

Sophian, C. (2013). Vicissitudes of children's mathematical knowledge: Implications of developmental research for early childhood mathematics education. *Early Education & Development*, *24*(4), 436-442.

Sophian, C., & Madrid, S. (2003). Young Children's Reasoning about Many-to-One Correspondences. *Child development*, *74*(5), 1418-1432.

Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, *36*(2), 97-127.

Steffe, L. P. (2004). PSSM from a constructivist perspective. In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (221–252). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tobias, J. M., Roy, G. J., & Safi, F. (2015). Prospective Elementary Teachers' Conceptions of Unitizing with Whole Numbers and Fractions. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational studies in Mathematics*, *25*(3), 165-208.

Thompson, P. W. (2010). Quantitative reasoning and mathematical modeling1, 2. *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*, 33.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOM* (p. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for Thinking with Magnitudes: A Hypothesis about Foundational Reasoning Abilities in Algebra. In *Epistemic algebraic students: emerging models of students' algebraic knowing papers from an invitational conference.*

Ulrich, C. (2015). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (Part 1). *For the Learning of Mathematics*, *35*(3), 2-7.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*, 360-381.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction*, *37*, 50-55.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 84-106.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the learning of Mathematics*, *3* (2), 31-41.

Vergnaud, G. (1984). Didactics as a Content-Oriented Approach to Research on the Learning of Physics, Mathematics and Natural Language.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*(6389), 749

Wynn, K. (2002). Do infants have numerical expectations or just perceptual preferences?. *Developmental Science*, *5* (2), 207-209.

Yoshida, H., & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, *44* (4), 183-195.

Ελληνική βιβλιογραφία

Βαμβακούση, Χ. (2017). Σημειώσεις μαθήματος Διδακτική Μαθηματικών ΙΙ. Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Βαμβακούση, Ξ., Βράκα, Λ., Λιολιούση, Α., & McMullen, J. (2015). Ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη τάση εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις στιςμικρές ηλικίες. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (Επιμ.), *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ελλήνων Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (ΕΝΕΔΙΜ) (σελ. 379-388). Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ (ψηφιακή έκδοση, ISBN: 978-618-82277-0-5).

Βράκα,Λ. (2014). Διερεύνηση της κατανόησης των νηπίων για τις απλές κλασματικές μονάδες. Αδημοσίευτη πτυχιακή εργασία. Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Καλδρυμίδου, Μ. (2009). *Διδακτική Μαθηματικών Ι*. Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Καπέλου, Α. (2004). Διδακτική των αριθμητικών εννοιών για παιδιά 5-6 ετών: Ανάδειξη των πολλαπλασιαστικών δομών. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή. Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-Πρώτη Σχολική Ηλικία (Β’ μέρος). Ανακτήθηκε από: http://ebooks.edu.gr/info/newps