



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΝΤΑΦΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

**ΜΕΛΕΤΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ
ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΜΕΓΑΛΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ**

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2018



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΝΤΑΦΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

**ΜΕΛΕΤΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ
ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ ΜΕ ΜΕΓΑΛΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Τ.Μ.Ε.Υ**

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2018

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην εξειδίκευση:

Υπολογιστική Επιστήμη & Μοντελοποίηση Υλικών

που απονέμει το Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε τηναπό την εξεταστική επιτροπή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΒΑΘΜΙΑ

1. Χατζηγεωργίου Ευάγγελος, Αναπληρωτής Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Σ.Θ.Ε. του Παν/μίου Ιωαννίνων, **Επιβλέπων**.

2. Καλπακίδης Βασίλειος, Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Σ.Θ.Ε. του Παν/μίου Ιωαννίνων.

3. Μπέλτσιος Κωνσταντίνος, Καθηγητής του ΤΜΕΥ της Σ.Θ.Ε. του Παν/μίου Ιωαννίνων.

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

(Υπογραφή υποψηφίου)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών του τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή, κ. Ευάγγελου Χατζηγεωργίου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, και συγκεκριμένα, τον Καθηγητή κ. Καλπακίδη Βασίλειο, τον Καθηγητή κ. Μπέλτσιο Κωνσταντίνο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χατζηγεωργίου Ευάγγελο, για την κριτική ανάγνωση του κειμένου, τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσαν και την τιμή που μου κάνανε να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή της διπλωματικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ, επίσης, τους μεταπτυχιακούς και διδακτορικούς συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Επιστημονικών Υπολογισμών του τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών για τη συνεργασία, τη συμπαράσταση και τη βοήθειά τους καθ' όλη τη διάρκεια ολοκλήρωσης της διατριβής μου. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τη φίλη και συνάδελφό μου, Υποψήφια Διδάκτωρ, κα Παπανικολάου Άννα για την αγάπη της, την υποστήριξή της και την πολύτιμη βοήθειά της σε όλους τους τομείς.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χατζηγεωργίου Ευάγγελο, για την υπόδειξη του θέματος της παρούσας εργασίας, την συνεχή επιστημονική καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη του καθ' όλη τη διάρκεια περάτωσης της συγκεκριμένης εργασίας, καθώς επίσης και για τη βοήθεια και την υποστήριξή του σε όλα τα εμπόδια που συνάντησα.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου οι οποίοι είναι πάντα δίπλα μου, ενθαρρύνουν και στηρίζουν τις επιλογές και τις προσπάθειές μου σε όλους τους τομείς της ζωής μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα προβλήματα ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις, οι μετατοπίσεις είναι ίδιας τάξης μεγέθους με το πάχος της δοκού. Στις περιπτώσεις αυτές, η γραμμική θεωρία δοκών δεν παράγει ακριβή αποτελέσματα καθώς δεν μπορεί να προβλέψει τις εντός επιπέδου μετατοπίσεις της δοκού. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαία μια γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων για την άρση των σχετικών ασυνεπειών και τη μελέτη τέτοιου είδους προβλημάτων.

Η εργασία, αυτή, μελετά γραμμικά και μη γραμμικά προβλήματα κάμψης με μεγάλες μετατοπίσεις τόσο για ελαστικές όσο και για πιεζοηλεκτρικές δοκούς. Αρχικά, παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες με εφαρμογή της «Αρχής Hamilton», με τη χρήση του λογισμού των μεταβολών. Στη συνέχεια, μελετάται η επίδραση των γεωμετρικών μη γραμμικοτήτων και γίνεται προσπάθεια αναλυτικής επίλυσης των γραμμικών και μη γραμμικών προβλημάτων στη στατική περίπτωση.

Πιο συγκεκριμένα, στο 1^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας και θεωρίες ελαστικής διάτμησης ανώτερης τάξης. Αρχικά, για τις θεωρίες δοκών Euler – Bernoulli, Timoshenko και για τις θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης, παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για στατικά και δυναμικά προβλήματα κάμψης δοκών. Επίσης, επιλύεται το στατικό πρόβλημα για όλες τις θεωρίες και παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα και γραφικές παραστάσεις συγκρίνοντας με δεδομένα από τη βιβλιογραφία.

Στο 2^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες στις μη γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας, μια σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση στη μη γραμμική ελαστικότητα, οι κύριες πηγές προέλευσης της μη γραμμικότητας και ο τρόπος εμφάνισής στα διάφορα προβλήματα. Στη συνέχεια, παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για τις γεωμετρικά μη γραμμικές θεωρίες ελαστικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις (θεωρία Von Kármán) με τη χρήση της «Αρχής Hamilton» και επιλύεται ένα σχετικό στατικό πρόβλημα κάμψης δοκού.

Στο 3^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια εισαγωγή στο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο και στα πιεζοηλεκτρικά υλικά. Περιγράφονται τα έξυπνα υλικά (*smart materials*), οι κατηγορίες υλικών που εμπίπτουν σε αυτά καθώς και οι κύριες εφαρμογές τους.

Στο 4^ο κεφάλαιο γίνεται η παραγωγή των γραμμικών εξισώσεων κίνησης και συνοριακών συνθηκών με βάση την «Αρχή Hamilton» για πιεζοηλεκτρικές δοκούς σε κάμψη σε συνδυασμό με ένα σύνολο ομαδοποιημένων θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης. Στη

συνέχεια, επιλύεται ένα σχετικό στατικό πρόβλημα πιεζοηλεκτρικής δοκού σε κάμψη και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και οι γραφικές παραστάσεις για το σύνολο των ομαδοποιημένων θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης για την κάμψη μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού.

Το 5^ο κεφάλαιο αναφέρεται σε μη γραμμικές θεωρίες πιεζοηλεκτρικών δοκών σε κάμψη σε συνδυασμό με ένα σύνολο ομαδοποιημένων θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης. Αρχικά, γίνεται η παραγωγή των μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών με τη χρήση της «Αρχής Hamilton». Στη συνέχεια, επιλύεται αναλυτικά ένα σχετικό πρόβλημα μη γραμμικών πιεζοηλεκτρικών δοκών και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

Βασικές εφαρμογές στις οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις και τα αποτελέσματα που εξάγαμε αποτελούν οι ακριβής μελέτες διατάξεων μαστευσής ενέργειας με βάση την ταλάντωση πιεζοηλεκτρικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις για μέγιστη εκμετάλλευση ενέργειας. Επίσης, γενικά, στην ιατρική τεχνολογία προβλέπεται η ακριβής μελέτη διατάξεων με εφαρμογές στην ιατρική (όπως το στεφανιαίο stent, ο βηματοδότης κ.α.) που στηρίζονται στη χρήση πιεζοηλεκτρικών δομών.

Μελλοντικά, η έρευνα μπορεί να επεκταθεί στην επίλυση δυναμικών προβλημάτων πιεζοηλεκτρικών δομών. Επίσης, στην επίλυση προβλημάτων όπου απαιτούνται διαφορετικές συνοριακές συνθήκες και σε προβλήματα συζευγμένων πεδίων όπως για παράδειγμα σε θέρμο-ελαστικά υλικά ή θέρμο-πίεζο-ελαστικά υλικά. Τέλος, θεωρείται απαραίτητη η προσπάθεια επίλυσης των μη γραμμικών θεωριών που έχουν παραχθεί τόσο για ελαστικές όσο και για πιεζοηλεκτρικές δοκούς με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων και ιδιαίτερα της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Συμπερασματικά, στην εργασία αυτή από τη μελέτη του στατικού προβλήματος μιας δοκού με ακίνητα άκρα με τη χρήση γραμμικής και μη γραμμικής θεωρίας σε ελαστικές και σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς, διαπιστώθηκε ότι οι μετατοπίσεις που προβλέπονται από τη μη γραμμική θεωρία είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες μετατοπίσεις που προβλέπονται για τη γραμμική θεωρία. Αυτό σημαίνει ότι στη μη γραμμική θεωρία, η δοκός εμφανίζεται περισσότερο άκαμπτη.

ABSTRACT

In problems of elastic and piezoelectric beams with large displacements, displacements are of the same order of magnitude as the beam thickness. In these cases, linear beam theory does not produce exact results as it cannot predict the in-plane beam displacements. For this reason, a geometrically non-linear theory of large deformations is necessary to remove the relevant inconsistencies and to study such problems.

This paper studies nonlinear bending problems with large displacements for both elastic and piezoelectric beams. Initially, the equations of motion and boundary conditions are produced by “Hamilton’s principle”, applying the Calculus of Variations. Subsequently, the effect of geometrical nonlinearities is studied and attempts are made to analytically solve linear and non-linear problems in the static case.

In particular, the first chapter presents the basic linear theories of elasticity and higher order elasticity theories. Initially, for Euler - Bernoulli, Timoshenko beams theory and for higher order shear theories, motion equations and corresponding boundary conditions are produced for both static and dynamic beam bending problems. It also solves the static problem for all theories and presents numerical results and graphs comparing with data from the literature.

The second chapter presents the basic concepts of nonlinear elasticity theories, a relative bibliographic review of non-linear elasticity, the main sources of origin of non-linearity and the way in which various problems arise. Then, the motion equations and the corresponding boundary conditions for geometrical non-linear theories of elastic beams with large displacements (Von Kármán theory) are produced using “Hamilton’s principle” and a relative static beam bending problem is solved.

In Chapter 3, there is an introduction to piezoelectric effect and piezoelectric materials. Smart materials, the categories of materials that fall into them and their main applications are described.

In the 4th chapter, the linear equations of motion and boundary conditions based on “Hamilton’s principle” for flexural piezoelectric beams in combination with a set of grouped upper-order shear theories are produced. Then, a relative static piezoelectric beam problem is solved and the results and graphs for all the grouped upper class shear theories for bending a piezoelectric beam are presented.

The 5th chapter refers to nonlinear flexural piezoelectric beams in combination with a set of grouped upper-order shear theories. Initially, the non-linear motion equations and

boundary conditions are produced using “Hamilton’s principle”. Subsequently, a relative problem of non-linear piezoelectric beams is solved and the resulting results are presented.

Basic applications in which the equations and results we have extracted can be used are the precise studies of energy metering devices based on the oscillation of piezo-electric beams with large displacements for maximum energy utilization. Also, in general, medical technology provides accurate study of devices with applications in medicine (such as coronary stent, pacemaker etc.) based on the use of piezoelectric structures.

In the future, research can be extended to solve dynamic piezoelectric problems. Also, research can be extended in problems where different boundary conditions are required and in coupled field problems such as for example thermo-elastic materials or thermo-piezo-elastic materials. Finally, it is considered necessary to solve nonlinear theories that have been produced for both elastic and piezoelectric beams using numerical methods and in particular the Finite Element Method.

In conclusion, in this paper the study of the static problem of a beam with immovable ends using linear and non-linear beam theory in elastic and piezoelectric beams has found that the offsets provided by the non-linear theory are smaller than the corresponding displacements predicted for linear theory. This means that in nonlinear theory, the beam is more rigid.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πίνακας Συμβολισμών	viii
Κατάλογος Σχημάτων	xi
Κατάλογος Πινάκων	xiii
1. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ	1
1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΟΚΩΝ EULER - BERNOULLI	2
1.1.1 Θεωρία Euler - Bernoulli: Στατική Περίπτωση	5
1.1.2 Θεωρία Euler - Bernoulli: Δυναμική Περίπτωση	8
1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΟΚΩΝ TIMOSHENKO	11
1.2.1 Θεωρία Timoshenko: Στατική Περίπτωση	12
1.2.2 Θεωρία Timoshenko: Δυναμική Περίπτωση	16
1.3 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΔΟΚΩΝ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ	20
1.3.1 Εξισώσεις Κίνησης – Συνοριακές Συνθήκες	22
1.3.2 Η Συνάρτηση $f(z)$	28
1.3.3 Επίλυση Στατικού Προβλήματος Κάμψης Δοκού	30
1.3.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα – Γραφικές Παραστάσεις	33
2. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ	36
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	36
2.1.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	37
2.1.2 Ο Von Kármán και το Έργο του	39
2.1.3 Η Προέλευση της Μη Γραμμικότητας	42
2.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΜΨΗΣ ΔΟΚΩΝ	44
2.2.1 Εξισώσεις Κίνησης – Συνοριακές Συνθήκες	45
2.2.2 Μη Γραμμική Θεωρία Euler – Bernoulli	51
2.2.3 Μη Γραμμική Θεωρία Timoshenko	52
2.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	53
2.3.1 Συνθήκη Ακλόνητων Άκρων	55
2.3.2 Επίλυση με τη Θεωρία Euler	57
2.3.3 Επίλυση με τη Θεωρία Timoshenko	61
2.3.4 Επίλυση με Διατμητική Θεωρία Ανώτερης Τάξης	67
2.3.5 Αριθμητικά Αποτελέσματα – Γραφικές Παραστάσεις	74

3.	ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ	78
3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	78
3.2	ΕΞΥΠΙΝΑ ΥΛΙΚΑ	81
3.2.1	Πιεζοηλεκτρικά και άλλα έξυπνα υλικά	81
3.2.2	Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες και εφαρμογές	83
3.3	ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ	85
3.3.1	Το Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο	85
3.3.2	Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με μορφή δοκών κάμψης	91
4.	ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ	96
4.1	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	96
4.1.1	Καταστατικές Εξισώσεις με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές (T, E)	99
4.1.2	Ηλεκτρική Ενθαλπία και Καταστατικές Εξισώσεις με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές (S, E)	101
4.1.3	Συμβολισμός των Ελαστικών και Πιεζοηλεκτρικών Τανυστών	103
4.2	ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ	104
4.2.1	Η Συνάρτηση $g(z)$	104
4.2.2	Εξισώσεις Κίνησης – Συνοριακές Συνθήκες	107
4.2.3	Επίλυση Στατικού Προβλήματος Κάμψης Δοκού	119
4.2.4	Αριθμητικά Αποτελέσματα – Γραφικές Παραστάσεις	129
5.	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ	134
5.1	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ – ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	136
5.2	ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΜΨΗΣ ΔΟΚΟΥ	148
5.3	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	160
	Συμπεράσματα	162
	Βιβλιογραφία	163
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	172
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	183

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

u_x, u_y, u_z	Μετατοπίσεις κατά τους άξονες x, y και z
u, v, w	Μετατοπίσεις μέσης επιφάνειας
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Παραμορφώσεις κατά τους άξονες x, y και z
e_x, e_y, e_z	Μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες x, y και z
σ_{ij}	Τάση
ε_{ij}	Τροπή
γ_{zx}	Εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση
τ_{zx}	Εγκάρσια διατμητική τάση
L	Μήκος της δοκού
b	Βάθος της δοκού
h	Πάχος της δοκού
E	Μέτρο ελαστικότητας (<i>Young's Modulus</i>)
G	Μέτρο διάτμησης (<i>Shear Modulus</i>)
ν	Λόγος Poisson
ρ	Πυκνότητα μάζας της δοκού
A	Διατομή της δοκού
I	Ροπή αδράνειας της δοκού
$q(x)$	Κατακόρυφη δύναμη (<i>εγκάρσια φορτίο</i>)
$p(x)$	Οριζόντια δύναμη (<i>αξονικό φορτίο</i>)

$M(x, y, t)$	Συνισταμένη ροπή κάμψης
$Q(x, y, t)$	Συνισταμένη διατμητική δύναμη
$N(x, y, t)$	Συνισταμένη αξονική δύναμη (<i>Membrane force</i>)
μ	Μάζα ανά μονάδα μήκους
θ	Κλίση της παραμορφωμένης δοκού
κ	Συντελεστής διάτμησης (<i>Shear coefficient</i>)
φ	Γωνιακή μετατόπιση / Στροφή (<i>Rotation</i>)
ω_c	Κρίσιμη γωνιακή συχνότητα
δ	Μεταβολικός τελεστής
U	Εσωτερική ενέργεια
W	Εξωτερικό έργο
t	Χρόνος
$f(z)$	Συνάρτηση κατανομής διατμητικής τάσης
A_0, B_0, C_0, D_0, H_0	Συντελεστές κατανομής διατμητικής τάσης
$w_m, \varphi_m, \tilde{\varphi}_m$	Άγνωστοι συντελεστές σειρών Fourier
m, k, l	Θετικοί ακέραιοι
p	Πόλωση
P_s	Αυθόρμητη πόλωση
T_c	Θερμοκρασία Curie
S	Διάνυσμα Τάσης
E	Διάνυσμα Παραμόρφωσης

- $\tilde{\phi}$ Ηλεκτρικό Δυναμικό
- D_x Αξονική Ηλεκτρική Μετατόπιση
- D_z Εγκάρσια Ηλεκτρική Μετατόπιση
- E_x, E_y, E_z Ηλεκτρικό πεδίο κατά τους άξονες x, y και z
- H Ενθαλπία
- H_e Ηλεκτρική Ενθαλπία
- $g(z)$ Συνάρτηση κατανομής ηλεκτρικού δυναμικού
- K_0, L_0, M_0, N_0, P_0 Συντελεστές κατανομής ηλεκτρικού δυναμικού
- S Αναλογία Διαστάσεων (*Aspect ratio*)

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση κάμψης δοκού του Leonardo da Vinci.	3
Σχήμα 1.2: Δοκός Euler – Bernoulli.	4
Σχήμα 1.3: Σύστημα συντεταγμένων κάμψης δοκού Euler – Bernoulli. Κάθε τμήμα βρίσκεται στις 90° προς τον άξονα.	7
Σχήμα 1.4: Κάμψη δοκού με πακτωμένο το αριστερό άκρο και ελεύθερο το δεξή άκρο.	10
Σχήμα 1.5: Παραμόρφωση δοκού με τη θεωρία Timoshenko σε αντιστοιχία με τη θεωρία Euler – Bernoulli	11
Σχήμα 1.6: Δοκός απλής στήριξης (<i>simply supported beam</i>).	15
Σχήμα 1.7: Δοκός πακτωμένη στα δύο άκρα (<i>clamped-clamped beam</i>).	15
Σχήμα 1.8: Παραμόρφωση δοκού Timoshenko. Η κάθετη στροφή είναι μια τιμή θ_x η οποία δεν είναι ακριβώς ίση με $\partial w/\partial x$.	16
Σχήμα 1.9: Κάμψη δοκού στο επίπεδο $x - z$.	21
Σχήμα 1.10: Δοκός απλής στήριξης που υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.	30
Σχήμα 1.11: Διάγραμμα μετατόπισης – μήκους ($w - L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.	35
Σχήμα 1.12: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi - L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.	35
Σχήμα 2.1: Theodore von Kármán (1881-1963).	39
Σχήμα 2.2: Διάγραμμα μετατόπισης – μήκους ($w - L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.	76
Σχήμα 2.3: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi - L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.	76
Σχήμα 2.4: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi - L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών εκτός της θεωρίας Ambartsumian.	77
Σχήμα 2.5: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi - L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών εκτός των θεωριών Ambartsumian και Soldatos.	77
Σχήμα 3.1: Διεγέρτες με τη μορφή στοίβας και τη μορφή δοκού κάμψης.	83
Σχήμα 3.2: Οι τρεις πηγές προέλευσης της πόλωσης.	86
Σχήμα 3.3: Κυβική δομή της μοναδιαίας κυψελίδας του $BaTiO_3$.	87

Σχήμα 3.4: Παραμόρφωση πλέγματος μοναδιαίας κυψελίδας του $BaTiO_3$ σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία και την κατεύθυνση της αυθόρμητης πόλωσης.	87
Σχήμα 3.5: Προσανατολισμός περιοχών σε απλό σιδηροηλεκτρικό κρύσταλλο. Από αριστερά: μη-πολωμένος, πολωμένος και αποπολωμένος κρύσταλλος.	88
Σχήμα 3.6: Αναπροσανατολισμός της πόλωσης και αλλαγή της παραμόρφωσης.	90
Σχήμα 3.7: Η παραμόρφωση που προκαλείται από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο πιεζοηλεκτρικό υλικό PZT .	90
Σχήμα 3.8: Εγκάρσια παραμορφωτική συμπεριφορά των PZT κεραμικών. Από αριστερά: κατάσταση πόλωσης, ηλεκτρικό πεδίο παράλληλα ευθυγραμμισμένο στην παραμένουσα πόλωση και ηλεκτρικό πεδίο αντιπαράλληλα ευθυγραμμισμένο στην παραμένουσα πόλωση.	92
Σχήμα 3.9: Αλληλουχία στρωμάτων σε μονόμορφη δομή.	92
Σχήμα 3.10: Συμπεριφορά μονόμορφης δομής που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο.	93
Σχήμα 3.11: Συμπεριφορά δίμορφης δομής, που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο. Επάνω φαίνεται η παράλληλη δίμορφη δομή και κάτω η σειριακή δίμορφη δομή.	94
Σχήμα 3.12: Δομή μονόμορφης δοκού κάμψης πολυστρωματικού τύπου.	94
Σχήμα 4.1: Διάγραμμα μετατόπισης – μήκους ($w - L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών.	132
Σχήμα 4.2: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi - L$) για όλες τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών.	132
Σχήμα 4.3: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi - L$) για όλες τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών εκτός της θεωρίας Ambartsumian.	133
Σχήμα 4.4: Διάγραμμα ηλεκτρικού δυναμικού – μήκους ($\tilde{\varphi} - L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών στο σημείο $z = 0$.	133

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1.1: Οι συναρτήσεις $f(z)$ για διάφορες κατανομές διατμητικής τάσης.	28
Πίνακας 1.2: Πίνακας συντελεστών για τις διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης.	29
Πίνακας 1.3: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w , της στροφής (<i>rotation</i>) φ , της αδιάστατης μετατόπισης \tilde{w} και του επί τοις εκατό % σφάλματος για γραμμικές ελαστικές δοκούς.	34
Πίνακας 2.1: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w για τις γραμμικές, μη γραμμικές μη συζευγμένες και μη γραμμικές συζευγμένες θεωρίες για ελαστικές δοκούς με $S = 10$ στο κέντρο της δοκού ($x = 0.5$).	75
Πίνακας 3.1: Οι κύριες ιδιότητες των έξυπνων υλικών.	81
Πίνακας 4.1: Η χρήση δεικτών κατά Voigt.	97
Πίνακας 4.2: Υλικές σταθερές πιεζοηλεκτρικών υλικών.	100
Πίνακας 4.3: Ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές σταθερές πιεζοηλεκτρικών υλικών.	102
Πίνακας 4.4: Μορφές συνάρτησης $g(z)$.	104
Πίνακας 4.5: Συντελεστές για $g(z) = \left[1 - (2z/h)^2\right]$.	106
Πίνακας 4.6: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w , της στροφής (<i>rotation</i>) φ και του ηλεκτρικού δυναμικού $\tilde{\varphi}$ στο κέντρο της δοκού ($x = 0.5$) για όλες τις γραμμικές θεωρίες σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς.	131
Πίνακας 5.1: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w για τις γραμμικές και μη γραμμικές - μη συζευγμένες θεωρίες για ελαστικές δοκούς με $S = 20$ στο κέντρο της δοκού ($x = 0.5$).	161

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές τεχνικές θεωρίες της γραμμικής ελαστικότητας δοκών. Με αφετηρία τη γραμμική θεωρία δοκών Euler – Bernoulli, γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή και αναφέρονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας, οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες για προβλήματα κάμψης δοκών. Έπειτα, γίνεται αναφορά στη θεωρία ελαστικών δοκών Timoshenko, μιας θεωρίας ευρύτερης χρήσης από τη θεωρία Euler – Bernoulli. Πάνω στη θεωρία αυτή, παρουσιάζεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή, παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες για τη στατική και τη δυναμική περίπτωση ελαστικών δοκών σε προβλήματα κάμψης και γίνεται αναφορά στο συντελεστή διάτμησης κ .

Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται οι διατμητικές θεωρίες ελαστικών δοκών ανώτερης τάξης. Παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες στη γενική τους μορφή ώστε να καλύπτουν κάθε θεωρία ανάλογα με τη εκάστοτε συνάρτηση $f(z)$ τόσο για τη στατική και τη δυναμική περίπτωση ελαστικών δοκών σε προβλήματα κάμψης. Τέλος, γίνεται επίλυση του στατικού προβλήματος στη γενική μορφή και λαμβάνονται αριθμητικά αποτελέσματα και γραφικές παραστάσεις για όλες τις θεωρίες.

Στο σημείο αυτό, να σημειωθεί ότι η βασική διαφορά των γραμμικών θεωριών είναι στις υποθέσεις τους. Στη θεωρία Euler – Bernoulli η διατομή είναι κάθετη στη γραμμή κάμψης. Αντίθετα, σε μια δοκό κάμψης Timoshenko επιτρέπεται η στροφή (*rotation*) μεταξύ της διατομής και της γραμμής κάμψης. Αυτή η στροφή προέρχεται από την παραμόρφωση, και δεν λαμβάνεται υπ' όψιν στη θεωρία Euler – Bernoulli. Επίσης, το τμήμα του μέσου επιπέδου της θεωρίας δοκών Euler – Bernoulli παραμένει επίπεδο και μετά την παραμόρφωση. Αυτό σημαίνει ότι οι παραμορφώσεις λόγω διάτμησης είναι μηδενικές. Επίσης, η τάση στο πάχος της δοκού (κατεύθυνση z) είναι μηδενική στη θεωρία δοκών Euler – Bernoulli, ενώ στη θεωρία δοκών Timoshenko λαμβάνεται υπ' όψιν. Επομένως, μια δοκός Euler – Bernoulli είναι πιο άκαμπτη. Ωστόσο, στην περίπτωση που η σχέση μεταξύ μήκους και πάχους είναι αρκετά μεγάλη, το σφάλμα μεταξύ των δύο μοντέλων είναι μικρό. Η χρήση της θεωρίας Timoshenko είναι σημαντική σε περιπτώσεις προβλημάτων και εφαρμογών όπου γίνεται λόγος σε μικρότερες δομές.

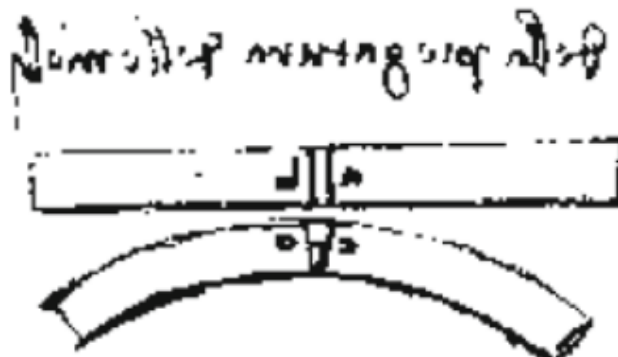
1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΟΚΩΝ EULER – BERNOULLI

Με τον όρο «δοκός» ορίζεται μια δομή στην οποία μία εκ των διαστάσεων της είναι πολύ μεγαλύτερη από τις άλλες δύο. Ο άξονας της δοκού ορίζεται κατά μήκος της μεγαλύτερης διάστασης και η διατομή της είναι κάθετη προς αυτόν τον άξονα, θεωρώντας πως μεταβάλλεται ομαλά κατά μήκος της δοκού. Οι κατασκευαστικές εφαρμογές αποτελούνται συχνά από μια ή περισσότερες δοκούς με διατομές που έχουν συνήθως σχήμα T ή I . Οι κατασκευές με τη μορφή δοκών συναντώνται σε μεγάλο αριθμό εξαρτημάτων των μηχανών όπως: βραχίονες, μοχλούς, άξονες κ.λπ. Επίσης, σε αεροναυτικές δομές, τα φτερά και οι άτρακτοι επίσης αντιμετωπίζονται ως δοκοί με λεπτά τοιχώματα.

Η θεωρία δοκών Euler – Bernoulli στη μηχανική, που συνήθως αναφέρεται ως «κλασική θεωρία δοκών», παίζει σημαντικό ρόλο στη δομική ανάλυση καθώς παρέχει στον σχεδιαστή ένα απλό εργαλείο για τον υπολογισμό πολυάριθμων δομών. Παρόλο που για την ανάλυση σύνθετων δομών είναι πλέον ευρέως διαθέσιμα πιο εξελιγμένα εργαλεία όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, τα μοντέλα δοκών χρησιμοποιούνται συχνά σε στάδιο προ-σχεδιασμού, καθώς παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες της συμπεριφοράς των δομών. Τέτοιοι υπολογισμοί είναι, επίσης, χρήσιμοι όταν επιχειρούμε να προσεγγίσουμε καθαρά υπολογιστικές λύσεις.

Κατά την περίοδο της Αναγέννησης, προκλήθηκε η αναζωογόνηση της επιστημονικής σκέψης (1400-1600) η οποία έδωσε τη σειρά της στην περίοδο της επιστημονικής επανάστασης. Στο *Leonardo da Vinci* (1452-1519) αποδίδεται η συνεισφορά στη μηχανική των στερεών (*solid mechanics*), στη μηχανική των ρευστών (*fluid mechanics*) και στον μηχανικό σχεδιασμό, πολύ πριν την επιστημονική επανάσταση. Η συνεισφορά του εμφανίζεται στο *Codex Madrid I*, ένα από τα δύο αξιοσημείωτα σημειωματάρια που ανακαλύφθηκαν το 1967 στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Ισπανίας (Ballarini, 2003). Ο *Da Vinci* ορθώς κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, κατά την κάμψη δοκών λόγω εγκάρσιων φορτίων, οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες πριν και μετά την κάμψη, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.1. Ο *Da Vinci* δεν διέθετε σαν εργαλείο στις έρευνές του τον νόμο του *Hooke* ώστε να ολοκληρώσει τη θεωρία του (Reti, 1974). Έπρεπε να περάσουν πολλά χρόνια ώσπου ο *Galileo Galilei* (1564–1642) να βελτιώσει περαιτέρω τη

θεωρία και στη συνέχεια ο *Euler* και ο *Bernoulli* τελικά να σχηματίσουν τις κατάλληλες εξισώσεις κίνησης σε δοκούς στην περίπτωση απλής κάμψης.



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση κάμψης δοκού του Leonardo da Vinci. (Rao, 2011).

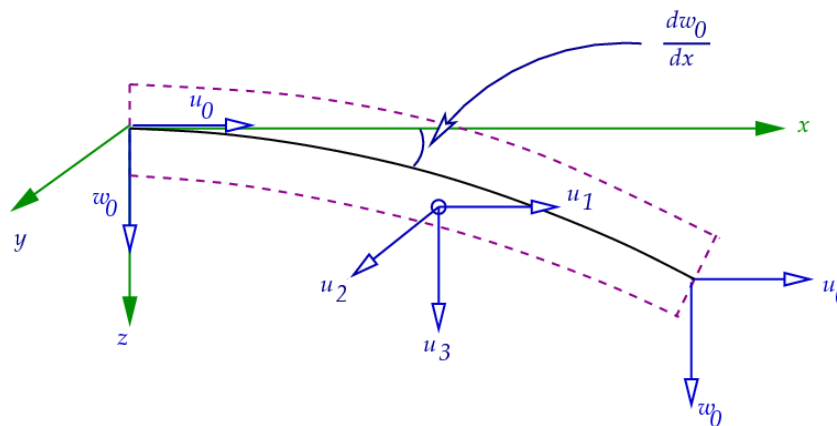
Η επικρατούσα γνώμη της επιστημονικής κοινότητας ήταν ότι ο *Galileo* έκανε τις πρώτες προσπάθειες για την ανάπτυξη μιας θεωρίας δοκών (Truesdell, 1953). Αναγνώρισε την Αρχή των Δυνατών Έργων ως γενικό νόμο. Ωστόσο, ο *Galileo* έκανε μια λανθασμένη υπόθεση στην ανάπτυξη της θεωρίας των δοκών. Δεν αναγνώρισε ότι σε οποιοδήποτε τμήμα της δοκού υπάρχει ισορροπία των τάσεων εφελκυσμού και θλίψεως. Αυτή η ισορροπία των εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων ανακαλύφθηκε χρόνια αργότερα, από τον *Mariotte* το 1686 στο Παρίσι (Mariotte, 1686).

Αρκετές θεωρίες δοκών έχουν αναπτυχθεί με βάση διάφορες υποθέσεις και οδηγούν σε διαφορετικά επίπεδα ακρίβειας (Han, Benaroya, & Wei, 1999). Μια από τις απλούστερες και πιο χρήσιμες περιγράφηκε για πρώτη φορά από τον *Jacob Bernoulli*, ο οποίος έκανε τις πρώτες σημαντικές ανακαλύψεις. Ο *Leonhard Euler* και ο *Daniel Bernoulli* στη συνέχεια ήταν οι πρώτοι που ανέπτυξαν μια χρήσιμη θεωρία περίπου το 1750 (Truesdell, 1960). Την εποχή εκείνη, η επιστήμη και η μηχανική θεωρούνταν πολύ διαφορετικά πεδία και υπήρχε μεγάλη αμφισβήτηση στο γεγονός ότι ένα μαθηματικό προϊόν του ακαδημαϊκού κόσμου θα μπορούσε να είναι χρήσιμο σε πρακτικές εφαρμογές. Οι γέφυρες και τα κτίρια συνέχισαν να σχεδιάζονται από μηχανικούς μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, όταν ο Πύργος του Άιφελ και οι ρόδες των Λούνα Παρκ έδειξαν την εγκυρότητα της θεωρίας σε μεγάλες κλίμακες.

Η θεωρία δοκών Euler – Bernoulli, γνωστή επίσης ως «θεωρία δοκών της μηχανικής» ή «κλασική θεωρία δοκών», (Truesdell, 1953) είναι μια απλούστευση της γραμμικής θεωρίας της ελαστικότητας που παρέχει ένα μέσο υπολογισμό των τάσεων και

των τροπών σε μια δοκό. Καλύπτει την περίπτωση μικρών παραμορφώσεων μιας δοκού που υπόκειται μόνο σε πλευρικά φορτία. Είναι επομένως μια ειδική περίπτωση της θεωρίας Timoshenko για δοκούς (*Timoshenko beam theory*) για την οποία θα γίνει λόγος στη συνέχεια. Στην αρχή δεν εφαρμόστηκε σε μεγάλη κλίμακα, όμως από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα και μετά έγινε γρήγορα ένας ακρογωνιαίος λίθος της μηχανικής και ένας σημαντικός παράγοντας της δεύτερης βιομηχανικής επανάστασης.

Μια θεμελιώδης υπόθεση αυτής της θεωρίας (Bauchau & Craig, 2009) είναι ότι η διατομή της δοκού είναι εντελώς άκαμπτη στο δικό της επίπεδο, με άλλα λόγια δεν υπάρχουν παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής. Αυτή η θεμελιώδης υπόθεση αφορά μόνο τις μετατοπίσεις της διατομής στο επίπεδο. Δύο επιπλέον υποθέσεις αφορούν τις μετατοπίσεις του τμήματος εκτός του επιπέδου: κατά την παραμόρφωση, θεωρείται ότι η διατομή παραμένει επίπεδη και κάθετη στον άξονα παραμόρφωσης της δοκού.



Σχήμα 1.2: Δοκός Euler – Bernoulli.

Έχουν αναπτυχθεί πολλά πρόσθετα εργαλεία ανάλυσης και πολλές περαιτέρω αναλύσεις στη θεωρία όπως η «Θεωρία Πλακών», που αναπτύχθηκε από τον *Gustav Robert Kirchhoff* (1824-1887) και αναφέρεται σε τρισδιάστατες δομές (3D) καθώς και η μελέτη της με την ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων. Ωστόσο, η απλότητα της συγκεκριμένης θεωρίας την καθιστά ένα σημαντικό εργαλείο στις επιστήμες, ακόμη και σήμερα, ειδικά σε τομείς της δομικής μηχανικής και της μηχανολογίας. Να σημειωθεί όμως ότι η θεωρία δίδει χρήσιμα αποτελέσματα σε συγκεκριμένου τύπου προβλήματα και πιο συγκεκριμένα σε προβλήματα με μικρές παραμορφώσεις.

1.1.1 Θεωρία Euler - Bernoulli: Στατική Περίπτωση

Για τη στατική περίπτωση δοκών της θεωρίας Euler – Bernoulli, την περίπτωση δηλαδή όπου δεν λαμβάνεται υπ’ όψιν ο χρόνος, οι συνιστώσες του πεδίου μετατόπισης μπορούν να γραφούν ως:

$$u_x = u_1 = u = -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$u_y = u_2 = v = 0, \quad (1.2)$$

$$u_z = u_3 = w = w(x,t), \quad (1.3)$$

όπου dw/dx είναι η κλίση παραμόρφωσης της δοκού.

Οι συνιστώσες του τανυστή της μηχανικής παραμόρφωσης που προκύπτουν ύστερα από ολοκλήρωση του πεδίου μετατοπίσεων, είναι:

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \quad (1.5)$$

Η σχέση τάσης – παραμόρφωσης για ένα ομοιογενές ιστροπικό γραμμικό ελαστικό υλικό, σχετίζεται με την παραμόρφωση από το νόμο του Hooke $\sigma = E\varepsilon$. Επομένως, η τάση σε μια δοκό Euler – Bernoulli δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{11} = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

Η εξίσωση κίνησης Euler – Bernoulli περιγράφει τη σχέση μεταξύ των τάσεων (φορτίων) που εφαρμόζονται σε μια δοκό και των τροπών (παραμορφώσεις) που δημιουργούνται σε αυτή (Gere, 2000):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q, \quad (1.7)$$

όπου η καμπύλη $w(x)$ περιγράφει την παραμόρφωση της δοκού στην κατεύθυνση z σε κάποια θέση x (υπενθυμίζουμε πως θεωρούμε τη δοκό ως μονοδιάστατο αντικείμενο). Το

q είναι το κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο, δηλαδή μια κατακόρυφη δύναμη ανά μονάδα μήκους. Μπορεί είτε να είναι συνάρτηση των x , w ή άλλων μεταβλητών, είτε να είναι ανεξάρτητο αυτών.

Σημειώνετε ότι E είναι το μέτρο ελαστικότητας (*μέτρο Young*) και I η ροπή αδράνειας της περιοχής στη διατομή της δοκού. Η ροπή αδράνειας πρέπει να υπολογιστεί σε σχέση με τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της διατομής και είναι κάθετη στην εφαρμοζόμενη φόρτιση. Είναι σαφές ότι για μια δοκό της οποίας ο άξονας είναι προσανατολισμένος κατά μήκος του x με φορτίο κατά μήκος του z , η διατομή της δοκού είναι στο επίπεδο yz και η αντίστοιχη ροπή αδράνειας είναι:

$$I = \iint z^2 dydz. \quad (1.8)$$

Συχνά, το γινόμενο EI , γνωστό ως ακαμψία κάμψης, είναι ανεξάρτητο του x , είναι δηλαδή μια σταθερή ποσότητα, συνεπώς μπορεί να βγει έξω από την παράγωγο:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x). \quad (1.9)$$

Η εξίσωση 1.9 περιγράφει την παραμόρφωση μιας ομοιόμορφης, στατικής δοκού, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στις εφαρμογές. Οι πινακοποιημένες εκφράσεις για την παραμόρφωση w για συνήθεις διαμορφώσεις δοκών υπάρχουν σε εγχειρίδια μηχανικής. Σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις, η παραμόρφωση μπορεί να προσδιοριστεί με επίλυση της εξίσωσης Euler - Bernoulli χρησιμοποιώντας τεχνικές όπως η «Αρχή Δυνατών Έργων», η «Μέθοδος Άμεσης Ολοκλήρωσης», η «Μέθοδος Castigliano», η «Μέθοδος Macaulay», η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων κ.α.

Παρατίθενται στη συνέχεια οι συμβάσεις των συμβολισμών σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Gere, 2000). Χρησιμοποιείται ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. Θεωρούμε $e_z \times e_x = e_y$, όπου e_z , e_x και e_y είναι τα μοναδιαία διανύσματα στην κατεύθυνση των αξόνων x , y και z αντίστοιχα. Οι δυνάμεις που δρουν στις κατευθύνσεις x και z θεωρούνται θετικές. Η ροπής κάμψης M είναι θετική όταν το διάνυσμα ροπής που σχετίζεται με τη ροπή κάμψης είναι στην θετική κατεύθυνση y (έτσι ώστε μια θετική τιμή του M να οδηγεί σε μια συμπιεστική τάση), προκειμένου να ισχύει $dM = Qdx$.

Η ροπή κάμψης ισούται με:

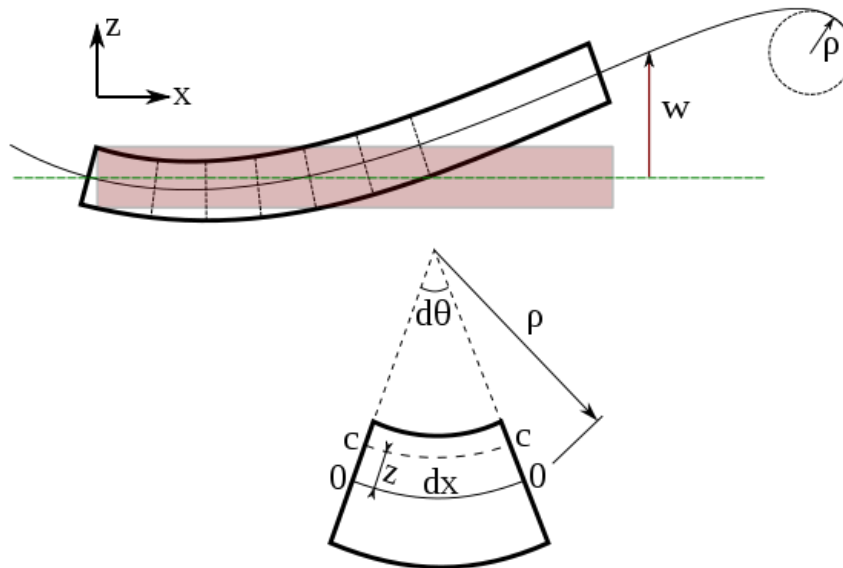
$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} . \quad (1.10)$$

Συνεπώς, είναι απαραίτητο η διατμητική δύναμη Q να είναι θετική στην κατεύθυνση z έτσι ώστε να υπάρχει στατική ισορροπία των ροπών.

$$Q = -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) . \quad (1.11)$$

Για να έχουμε ισορροπία δυνάμεων με $dQ = qdx$, θα πρέπει το φορτίο q να είναι θετικό στην κατεύθυνση μείον z .

Οι τάσεις σε μια δοκό μπορούν να υπολογιστούν από τις παραπάνω εκφράσεις μετά την παραμόρφωση που οφείλεται σε ένα δεδομένο φορτίο που ασκείται σε αυτή.



Σχήμα 1.3: Σύστημα συντεταγμένων σε δοκό κάμψης Euler – Bernoulli. Κάθε τμήμα βρίσκεται στις 90° προς τον άξονα.

1.1.2 Θεωρία Euler - Bernoulli: Δυναμική Περίπτωση

Δυναμικά θεωρούμε τα προβλήματα στα οποία λαμβάνεται υπ' όψιν ο χρόνος. Σε αυτή την περίπτωση, το πεδίο μετατοπίσεων είναι ίδιο με τη στατικό περίπτωση μόνο που τώρα οι μετατοπίσεις εξαρτώνται και από το χρόνο. Η εξίσωση της δοκού στη δυναμική περίπτωση είναι η εξίσωση Euler – Lagrange, η οποία εκφράζεται ως:

$$S = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + q(x) w(x, t) \right] dx, \quad (1.12)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια, όπου μ είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους. Ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει τη δυναμική ενέργεια που οφείλεται στις εσωτερικές δυνάμεις και ο τρίτος όρος αναφέρεται στην πιθανή ενέργεια που οφείλεται στο εξωτερικό κατακόρυφο φορτίο $q(x)$. Η εξίσωση Euler - Lagrange χρησιμοποιείται για τον καθορισμό συνάρτησης που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό S . Η παραγωγή της εξίσωσης Euler - Lagrange για δοκούς γίνεται με την ακόλουθη διαδικασία. Δεδομένου ότι είναι η Lagrangian εξίσωση είναι:

$$L = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + q(x) w(x, t), \quad (1.13)$$

$$L = \frac{\mu}{2} \dot{w}^2 - \frac{EI}{2} w_{,xx}^2 + qw \equiv L(x, t, w, \dot{w}, w_{,xx}).$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Euler - Lagrange είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w_{,xx}} \right) = 0, \quad (1.14)$$

όπου η αντιστοιχία των όρων της εξίσωσης Euler - Lagrange με την εξίσωση κίνησης Euler – Bernoulli είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = q, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} = \mu \dot{w} \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial w_{,xx}} = -EI w_{,xx}. \quad (1.15)$$

Συνδέοντας τις σχέσεις 1.14 και 1.12, για τη δυναμική περίπτωση δοκού Euler – Bernoulli, η εξίσωση Euler – Lagrange είναι:

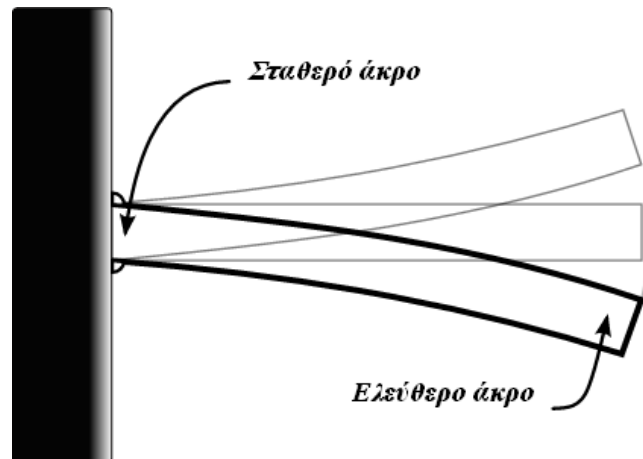
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x). \quad (1.16)$$

Σε περίπτωση που η δοκός είναι ομοιογενής, οι όροι EI είναι ανεξάρτητοι από το x , και η εξίσωση της δοκού γίνεται:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x). \quad (1.17)$$

Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, η εξίσωση κίνησης της δοκού περιέχει μια παράγωγο τέταρτης τάξης ως προς x . Για να βρούμε μια μοναδική λύση $w(x,t)$ χρειαζόμαστε τέσσερις συνοριακές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες συνήθως περιέχουν τη στήριξη, αλλά μπορούν επίσης να περιέχουν σημεία φορτίου, κατανεμημένα φορτία και ροπές. Οι συνοριακές συνθήκες στήριξης ή μετατόπισης χρησιμοποιούνται για να σταθεροποιηθούν οι τιμές μετατόπισης (w) και οι τιμές της παραγώγου ($\partial w/\partial x$) στο σύνορο. Αυτές οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται συνθήκες *Dirichlet*. Οι συνοριακές συνθήκες φόρτωσης και ροπής που περιλαμβάνουν παραγώγους της παραμόρφωσης w υψηλότερης τάξης, ονομάζονται συνθήκες *Neumann*.

Για παράδειγμα, θεωρήστε μια δοκό που είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο όπως φαίνεται στο σχ. 1.4. Στο πακτωμένο άκρο της δοκού δεν μπορεί να υπάρξει μετατόπιση ή στροφή. Αυτό σημαίνει ότι στο αριστερό άκρο η παραμόρφωση και η κλίση είναι μηδέν. Δεδομένου ότι δεν εφαρμόζεται εξωτερική ροπή κάμψης στο ελεύθερο άκρο της δοκού, η ροπή κάμψης στη θέση αυτή είναι μηδέν. Επιπλέον, εάν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη στην δοκό, η διάτμηση στο ελεύθερο άκρο είναι επίσης μηδενική.



Σχήμα 1.4: Κάμψη δοκού με πακτωμένο το αριστερό άκρο και ελεύθερο το δεξί άκρο.

Οι κινηματικές υποθέσεις στις οποίες βασίζεται η θεωρία δοκών Euler – Bernoulli επιτρέπουν την επέκτασή της σε πιο προηγμένη ανάλυση. Η απλή επέκταση επιτρέπει την τρισδιάστατη (3-D) εγκάρσια φόρτωση. Επίσης, η χρήση εναλλακτικών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα μπορεί να επιτρέψει την παραμόρφωση ιξωδοελαστικών ή πλαστικών δοκών.

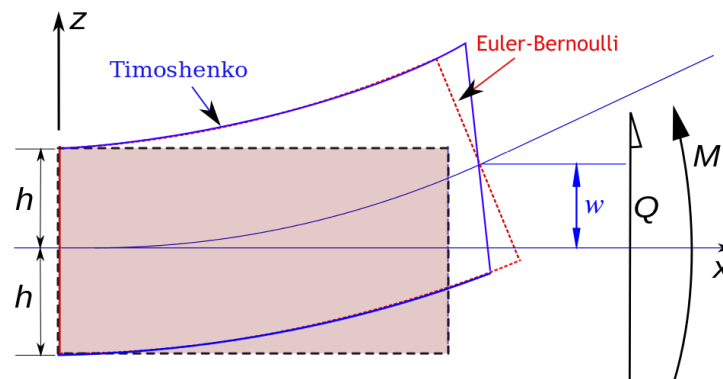
Η θεωρία δοκών Euler – Bernoulli μπορεί επίσης να επεκταθεί στην ανάλυση καμπύλων δοκών, σε προβλήματα λυγισμού μιας δοκού, σε προβλήματα σύνθετων δοκών και σε προβλήματα γεωμετρικά μη γραμμικών παραμορφώσιμων δοκών. Η θεωρία δοκών Euler – Bernoulli δεν λαμβάνει υπόψη τις επιδράσεις της εγκάρσιας διατμητικής τάσης. Ως αποτέλεσμα, υποβαθμίζει την έννοια της παραμόρφωσης και υπερτονίζει την έννοια της φυσικής συχνότητας.

Σε περιπτώσεις λεπτών δοκών, όπου η αναλογία μήκους - πάχους της δοκού είναι της τάξης του 20 ή παραπάνω, τα αποτελέσματα, αυτά, είναι ελάχιστης σημασίας, καθώς δεν μπορεί η θεωρία να κάνει σωστές προβλέψεις. Στην περίπτωση δοκών με μεγάλο πάχος, η θεωρία λειτουργεί καλά και τα αποτελέσματα που εξάγει είναι σημαντικά.

Πιο εξελιγμένες θεωρίες δοκών, όπως η θεωρία δοκών Timoshenko που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, έχουν αναπτυχθεί για να εξηγήσουν τα αποτελέσματα που δεν καλύπτει η θεωρία Euler – Bernoulli.

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΟΚΩΝ TIMOSHENKO

Η θεωρία δοκών Timoshenko αναπτύχθηκε από τον *Stephen Timoshenko* στις αρχές του 20^{ου} αιώνα (Timoshenko, 1921). Το μοντέλο λαμβάνει υπόψη παραμορφώσεις λόγω διάτμησης και περιστροφικές επιδράσεις λόγω κάμψης, καθιστώντας τη θεωρία κατάλληλη για την περιγραφή της συμπεριφοράς δοκών με μεγάλο πάχος, σύνθετων δοκών με τη μορφή «σάντουιτς» ή δοκών που υπόκεινται σε διέγερση υψηλής συχνότητας όταν το μήκος κύματος πλησιάζει το πάχος της δοκού (Timoshenko, 1922). Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει είναι 4^{ης} τάξης αλλά, σε αντίθεση με τη κλασική θεωρία δοκών Euler – Bernoulli, υπάρχει και μια 2^{ης} τάξης παράγωγο. Φυσικά, λαμβάνοντας υπόψη τους προστιθέμενους μηχανισμούς παραμόρφωσης, μειώνεται αποτελεσματικά η ακαμψία της δοκού, ενώ το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερη παραμόρφωση υπό την επίδραση ενός στατικού φορτίου και χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες για δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Η δεύτερη περίπτωση είναι περισσότερο αισθητή σε υψηλές συχνότητες καθώς το μήκος κύματος γίνεται συντομότερο και έτσι μειώνεται η απόσταση μεταξύ αντίθετων δυνάμεων διάτμησης.



Σχήμα 1.5: Παραμόρφωση δοκού με τη θεωρία Timoshenko σε αντιστοιχία με τη θεωρία Euler - Bernoulli.

Εάν το μέτρο διάτμησης G του υλικού της δοκού πλησιάζει το άπειρο – στην περίπτωση αυτή η δοκός γίνεται άκαμπτη στη διάτμηση - και αν παραλειφθεί η επίδραση της αδρανείας, η θεωρία δοκών Timoshenko καταλήγει στη θεωρία δοκών Euler – Bernoulli.

1.2.1 Θεωρία Timoshenko: Στατική Περίπτωση

Στη στατική περίπτωση της θεωρίας Timoshenko όπου δεν λαμβάνεται υπ όψιν ο χρόνος, για δοκούς χωρίς αξονικές επιδράσεις, από τις κινηματικές υποθέσεις για μια δοκό Timoshenko, το πεδίο μετατοπίσεων είναι:

$$u_x(x, y, z) = -z\varphi(x), \quad (1.18)$$

$$u_y(x, y, z) = 0, \quad (1.19)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x). \quad (1.20)$$

όπου (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στη δοκό, u_x, u_y, u_z είναι τα διανύσματα μετατόπισης στις τρεις κατευθύνσεις των συντεταγμένων, φ είναι η γωνία περιστροφής που είναι κάθετη στη μέση επιφάνεια της δοκού, και w είναι η μετατόπιση της μέσης επιφάνειας στην κατεύθυνση z .

Στη συνέχεια, από τις σχέσεις μετατόπισης και παραμόρφωσης, για μικρές παραμορφώσεις, οι μη μηδενικές παραμορφώσεις με βάση τις υποθέσεις του Timoshenko είναι οι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.22)$$

Δεδομένου ότι η πραγματική τάση διάτμησης στη δοκό δεν είναι σταθερή στη διατομή, εισάγουμε έναν συντελεστή διόρθωσης κ τέτοιο ώστε:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \kappa \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.23)$$

Η μεταβολή της εσωτερική ενέργεια δU της δοκού είναι ίση με:

$$\delta U = \int_L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dA dL,$$

$$\delta U = \int_L \int_A \left[-z\sigma_{xx} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} + \sigma_{xz} \kappa \left(-\delta\varphi + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) \right] dA dL . \quad (1.24)$$

Στη συνέχεια ορίζονται οι ποσότητες M_{xx} και Q_x :

$$M_{xx} = \int_A z\sigma_{xx} dA , \quad (1.25)$$

$$Q_x = \kappa \int_A \sigma_{xz} dA . \quad (1.26)$$

Έτσι, από τη σχέση 1.24, προκύπτει:

$$\delta U = \int_L \left[-M_{xx} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} + Q_x \left(-\delta\varphi + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) \right] dL . \quad (1.27)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, και σημειώνοντας ότι λόγω των συνοριακών συνθηκών οι μεταβολές είναι μηδενικές στα άκρα της δοκού, έχουμε:

$$\delta U = \int_L \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x \right) (\delta\varphi) - \frac{\partial Q_x}{\partial x} (\delta w) \right] dL . \quad (1.28)$$

Η μεταβολή του εξωτερικού έργου που παράγεται σε δοκό με εγκάρσιο φορτίο $q(x,t)$ είναι:

$$\delta W = \int_L q(\delta w) dL . \quad (1.29)$$

Στη συνέχεια, για μια στατική δοκό, η αρχή των δυνατών έργων δίδει:

$$\delta U = \delta W \Rightarrow \int_L \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x \right) (\delta\varphi) - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + q \right) (\delta w) \right] dL = 0 . \quad (1.30)$$

Οι εξισώσεις που διέπουν τη δοκό, από το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού των μεταβολών, είναι:

$$(\delta\varphi) : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = 0, \quad (1.31)$$

$$(\delta w): \frac{\partial Q_x}{\partial x} + q = 0. \quad (1.32)$$

Στην περίπτωση μιας γραμμικής ελαστικής δοκού, έχουμε:

$$M_{xx} = \int_A z \sigma_{xx} dA = \int_A z E \varepsilon_{xx} dA = - \int_A z^2 E \frac{\partial \varphi}{\partial x} dA = -EI \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1.33)$$

$$Q_x = \int_A \sigma_{xz} dA = \int_A 2G \varepsilon_{xz} dA = \int_A \kappa G \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA = \kappa AG \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.34)$$

Επομένως οι εξισώσεις που διέπουν τη δοκό μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) + \kappa AG \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) = 0, \quad (1.35)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa AG \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) \right] + q = 0. \quad (1.36)$$

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις μαζί, έχουμε:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) = q, \quad (1.37)$$

$$\frac{dw}{dx} = \varphi - \frac{1}{\kappa AG} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right). \quad (1.38)$$

Ο συνδυασμός των δύο εξισώσεων, για μια ομοιογενή δοκό σταθερής διατομής, δίδει:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{\kappa AG} \frac{d^2 q}{dx^2}. \quad (1.39)$$

Η θεωρία δοκών Timoshenko για τη στατική περίπτωση είναι ισοδύναμη με τη θεωρία Euler – Bernoulli όταν παραβλέπεται ο τελευταίος όρος. Η προσέγγιση αυτή ισχύει όταν:

$$\frac{EI}{\kappa L^2 AG} \ll 1, \quad (1.40)$$

όπου L είναι το μήκος της δοκού, A η διατομή της, E το μέτρο ελαστικότητας, G το μέτρο διάτμησης, I η ροπή αδράνειας και κ ο συντελεστής διάτμησης Timoshenko ο οποίος εξαρτάται από τη γεωμετρία. Για ένα ορθογώνιο τμήμα, ο συντελεστής κ είναι ίσο με $5/6$.

Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, πρέπει να συνυπολογισθούν μαζί με τις δύο εξισώσεις που περιγράφουν την παραμόρφωση μιας δοκού Timoshenko προς επίλυση του προβλήματος. Απαιτούνται τέσσερις συνοριακές συνθήκες για να είναι επιλύσιμο το πρόβλημα. Οι τυπικές συνοριακές συνθήκες είναι:

A) Περίπτωση δοκού απλής στήριξης (*simply supported beam*):

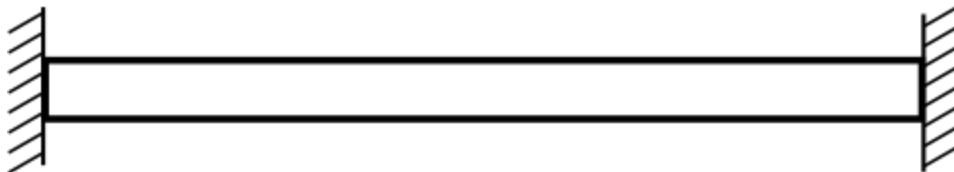
Η μετατόπιση w είναι μηδέν στις άκρες των δύο στηριγμάτων. Πρέπει επίσης να προσδιοριστεί η ροπή κάμψης M_{xx} που εφαρμόζεται στη δοκό. Η στροφή φ και η εγκάρσια δύναμη λόγω διατμήσεως Q_x δεν καθορίζονται.



Σχήμα 1.6: Δοκός απλής στήριξης (*simply supported beam*).

B) Περίπτωση πακτωμένης δοκού (*clamped - clamped beam*):

Η μετατόπιση w και η περιστροφή φ είναι μηδέν στα πακτωμένα άκρα. Εάν ένα άκρο είναι ελεύθερο, η δύναμη διάτμησης Q_x και η ροπή κάμψης M_{xx} πρέπει να καθοριστούν στο τέλος.



Σχήμα 1.7: Δοκός πακτωμένη στα δύο άκρα (*clamped-clamped beam*).

1.2.2 Θεωρία Timoshenko: Δυναμική Περίπτωση

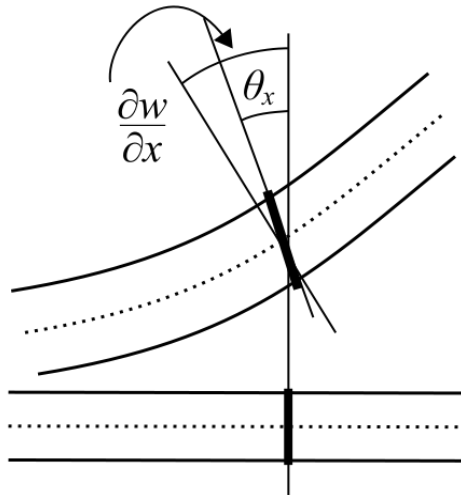
Στη δυναμική περίπτωση της θεωρίας Timoshenko από τις κινηματικές υποθέσεις για μια δοκό Timoshenko, το πεδίο μετατοπίσεων είναι ίδιο με τη στατική περίπτωση μόνο που στην περίπτωση αυτή οι μεταβλητές εξαρτώνται και από το χρόνο:

$$u_x(x, y, z, t) = -z\varphi(x, t), \quad (1.41)$$

$$u_y(x, y, z, t) = 0, \quad (1.42)$$

$$u_z(x, y, z, t) = w(x, t), \quad (1.43)$$

όπου (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στη δοκό, u_x, u_y, u_z είναι τα διανύσματα μετατόπισης στις τρεις κατευθύνσεις των συντεταγμένων, φ είναι η γωνία στροφής που είναι κάθετη στη μέση επιφάνεια της δοκού, και w είναι η μετατόπιση της μέσης επιφάνειας στην κατεύθυνση z .



Σχήμα 1.8: Παραμόρφωση δοκού Timoshenko. Η κάθετη στροφή είναι μια τιμή θ_x η οποία δεν είναι ακριβώς ίση με $\partial w/\partial x$.

Στη συνέχεια, ξεκινώντας από την παραπάνω παραδοχή, η θεωρία δοκών Timoshenko, επιτρέποντας τις δονήσεις, μπορεί να περιγραφεί με τις συζευγμένες γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (Timoshenko, 1932):

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa A G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right], \quad (1.44)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa A G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right), \quad (1.45)$$

όπου οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι οι: $w(x,t)$ η μετατόπιση μετατόπισης της δοκού και $\varphi(x,t)$ η γωνιακή μετατόπιση. Σημειώνεται ότι σε αντίθεση με τη θεωρία Euler – Bernoulli, η γωνιακή μετατόπιση είναι μια άλλη μεταβλητή και δεν προσεγγίζεται από την κλίση της παραμόρφωσης. Επίσης, ρ είναι η πυκνότητα του υλικού της δοκού (αλλά όχι η γραμμική πυκνότητα), A είναι η διατομή, E είναι το μέτρο ελαστικότητας, G είναι το μέτρο διάτμησης, I η ροπή αδράνειας και κ ο συντελεστής διάτμησης Timoshenko, ο οποίος εξαρτάται από τη γεωμετρία. Για ένα ορθογώνιο τμήμα, το κ είναι ίσο με $5/6$. Επίσης, $q(x,t)$ είναι το καταναμεημένο φορτίο (δύναμη ανά μήκος).

Οι εξισώσεις που διέπουν την κάμψη μιας ομοιογενούς δοκού Timoshenko σταθερής διατομής ($A = ct$), είναι:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \kappa A G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + q(x,t), \quad (1.46)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa A G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right). \quad (1.47)$$

Από την εξίσωση 1.44, έχουμε:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\rho A}{\kappa A G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{q}{\kappa A G}, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \kappa A G \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} \right). \quad (1.49)$$

Από την εξίσωση 1.46, έχουμε:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = -\frac{\rho A}{\kappa A G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \quad (1.50)$$

Κάνοντας τη διαφορίση στην εξίσωση 1.47 ως προς x έχουμε:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} = \frac{EI}{\rho I} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\kappa A G}{\rho I} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (1.51)$$

Από τις εξισώσεις 1.49 και 1.51 έχουμε:

$$\frac{I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\rho A}{\kappa A G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{EI}{\rho I} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\kappa A G}{\rho I} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (1.52)$$

Από τις εξισώσεις 1.48 και 1.52 έχουμε:

$$\frac{I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\rho A}{\kappa A G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{EI}{\rho I} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{m}{\rho I} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q}{\rho I}. \quad (1.53)$$

Συνδέοντας τις εξισώσεις 1.50 και 1.53 προκύπτει:

$$\frac{\rho I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\rho A \rho I}{\kappa A G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = -\frac{\rho A E I}{\kappa A G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q. \quad (1.54)$$

Με αναδιάταξη των όρων, τελικά, για μια γραμμική, ελαστική, ισότροπη, ομογενή δοκό σταθερής διατομής, οι δύο εξισώσεις κίνησης μπορούν να συνδυαστούν (Rosinger & Ritchie, 1977), (Thomson, 1981) και έτσι έχουμε:

$$E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\rho I + \frac{\rho A E I}{\kappa A G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho A \rho I}{\kappa A G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = q + \frac{\rho I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{E I}{\kappa A G} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \quad (1.55)$$

Η εξίσωση κίνησης, εξίσωση 1.55, της θεωρίας δοκών Timoshenko προβλέπει μια κρίσιμη συχνότητα ω_c η οποία είναι ίση με:

$$\omega_c = 2\pi f_c = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}} . \quad (1.56)$$

Για συνήθεις τρόπους ταλάντωσης, η εξίσωση Timoshenko μπορεί να λυθεί. Όντας μια εξίσωση τέταρτης τάξης, υπάρχουν τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις, δύο ταλαντωτικές και δύο ισοδύναμες για συχνότητες κάτω από το f_c . Για συχνότητες μεγαλύτερες από f_c , όλες οι λύσεις είναι ταλαντωτικές (Díaz de Anda et al., 2012).

Ο προσδιορισμός του συντελεστή διάτμησης κ δεν είναι μια απλή διαδικασία (ούτε οι καθορισμένες τιμές είναι ευρέως αποδεκτές, δηλαδή υπάρχουν περισσότερες από μία απαντήσεις). Γενικά πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$\int_A \tau dA = \kappa AG\varphi . \quad (1.57)$$

Ο συντελεστής διάτμησης εξαρτάται από το λόγο Poisson. Οι προσπάθειες για την ακριβή έκφραση έγιναν από πολλούς επιστήμονες, όπως τον *Stephen Timoshenko* (Timoshenko, 1932), τον *Raymond D. Mindlin* (Mindlin & Deresiewicz, 1953), τον *G. Cowper* (Cowper, 1966), τον *N. Stephen* (Stephen, 1980), τον *J. Hutchinson* (Hutchinson, 1981) κ.α. Η θεωρία δοκών Timoshenko ως πιο ανεπτυγμένη θεωρία δοκών με βάση τη μέθοδο του *Khanh C. Le* (Le, 1999), οδηγεί σε διάφορους συντελεστές διάτμησης στις στατικές και δυναμικές περιπτώσεις. Στην πράξη, οι εκφράσεις του *Timoshenko* (Gere, 2000) για το συντελεστή διάτμησης είναι αρκετές στις περισσότερες περιπτώσεις. Το 1975, ο *Kaneko* (Kaneko, 1975) δημοσίευσε μια εξαιρετική ανασκόπηση πάνω στις μελέτες του συντελεστή διάτμησης. Πιο πρόσφατα, νέα πειραματικά δεδομένα δείχνουν ότι ο συντελεστής διάτμησης υποεκτιμάται (Méndez, Morales, & Flores, 2005), (Franco & Méndez, 2016).

Σύμφωνα με τον *Cowper* (Cowper, 1966) για μια ορθογώνια διατομή, ισχύει:

$$\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} , \quad (1.58)$$

και για μια κυκλική διατομή ισχύει:

$$\kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu} . \quad (1.59)$$

1.3 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η κλασική θεωρία κάμψης δοκών υποτιμά τις παραμορφώσεις και υπερεκτιμά τις φυσικές συχνότητες, καθώς αγνοεί το φαινόμενο της εγκάρσιας παραμόρφωσης. Ο *Timoshenko* (Timoshenko, 1921) ήταν ο πρώτος που έλαβε αποτελέσματα όπως η αδράνεια λόγω περιστροφής και η παραμόρφωση λόγω διάτμησης στη θεωρία δοκών. Η θεωρία αυτή είναι γνωστή ως θεωρία δοκών Timoshenko ή θεωρία διατμητικής παραμόρφωσης πρώτης τάξης. Η ακρίβεια της θεωρίας δοκών Timoshenko επαληθεύτηκε από τον *Cowper* (Cowper, 1966), (Cowper, 1968) με μια ακριβή λύση ελαστικότητας υπό την επίδραση επίπεδης τάσης. Οι περιορισμοί της θεωρίας παραμόρφωσης πρώτης τάξης οδήγησαν στην ανάπτυξη θεωριών διατμητικής παραμόρφωσης υψηλότερης τάξης. Στη βιβλιογραφία είναι διαθέσιμες πολλές θεωρίες διατμητικής παραμόρφωσης υψηλότερης τάξης τόσο για τη στατική όσο και για τη δυναμική ανάλυση δοκών (Kruszewski, 1909), (Hildebrand, & Reissner, 1942), (Ambartsumian, 1958), (Baluch, Azad, & Khidir, 1984), (Bhimaraddi & Chandrashekhara, 1993).

Ο *Levinson* (Levinson, 1981) και ο *Bickford* (Bickford, 1982) ανέπτυξαν μια νέα θεωρία για ορθογώνιες δοκούς που λειτούργησε σωστά για συνοριακές συνθήκες χωρίς τάση στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού, τόσο για τη στατική όσο και για τη δυναμική περίπτωση. Οι θεωρίες τριγωνομετρικής διατμητικής παραμόρφωσης παρουσιάζονται από τους *Touratier* (Touratier, 1991), *Vlasov, Leont'ev* (Vlasov & Leont'ev, 1996) και *Stein* (Stein, 1989) για δοκούς με μεγάλο πάχος. Ωστόσο, με αυτές τις θεωρίες δεν πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες χωρίς διατμητική τάση στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού.

Οι *Ghugal* και *Shipmi* (Ghugal & Shipmi, 2002) και ο *Ghugal* (Ghugal, 2006) έχουν αναπτύξει μια θεωρία παραμόρφωσης τριγωνομετρικής διάτμησης η οποία ικανοποιεί την κατάσταση ελεύθερης διατμητικής τάσης στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού. Ο *Soldatos* (Soldatos, 1992) έχει αναπτύξει τη θεωρία της υπερβολικής διατμητικής παραμόρφωσης για ομοιογενείς μονοκλινείς πλάκες. Ο *Ghugal* και ο *Sharma* (Ghugal & Sharma, 2009) χρησιμοποίησαν τη θεωρία υπερβολικής διάτμησης παραμόρφωσης για τη στατική και δυναμική ανάλυση πυκνών ισοτροπικών δοκών.

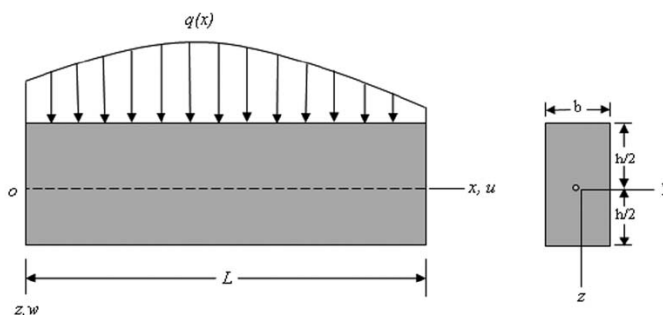
Η μελέτη στη βιβλιογραφία (Rehfield & Murthy, 1982), (Krishna Murty, 1984), (Heyliger & Reddy, 1988) και (Karama & Mistou, 2003) υποδεικνύει ότι η έρευνα που ασχολείται με την κάμψη δοκών με μεγάλο πάχος, χρησιμοποιώντας ανώτερες θεωρίες διατμητικής παραμόρφωσης, είναι πολύ μικρή και βρίσκεται ακόμη σε αρχικά στάδια. Πρόσφατα, ο Sayyad (Sayyad, 2011β) σύγκρινε διάφορες γραμμικές θεωρίες παραμόρφωσης λόγω διάτμησης για την ανάλυση ισότροπων δοκών με μεγάλο πάχος.

Σε αυτή την ενότητα γίνεται η παραγωγή και η διατύπωση των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών για γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας ανώτερης τάξης στη μονοδιάστατη περίπτωση δοκού σε κάμψη. Η διατύπωση των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών γίνεται με τη χρήση μιας συνάρτησης $f(z)$ η οποία όταν αλλάζει τύπο, προκύπτει μια διαφορετική διατμητική θεωρία ανώτερης τάξης για δοκούς υπό κάμψη. Η συνάρτηση $f(z)$ υπάρχει μέσα στο πεδίο μετατοπίσεων και πιο συγκεκριμένα στη μετατόπιση κατά τον οριζόντιο άξονα $u(x)$.

Στα παραδείγματα προς επίλυση, η δοκός αποτελείται από ισότροπο υλικό όπως φαίνεται στο σχ. 1.9. Γενικά, μια δοκός μπορεί να έχει οποιοσδήποτε συνοριακές συνθήκες και οποιοσδήποτε συνθήκες φόρτωσης, ανάλογα με το πρόβλημα προς επίλυση. Στην παρούσα εργασία, η δοκός καταλαμβάνει την περιοχή σύμφωνα με τις συντεταγμένες:

$$0 \leq x \leq L, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (1.60)$$

όπου x, y, z είναι οι συντεταγμένες στο καρτεσιανό επίπεδο, L είναι το μήκος της δοκού, b το βάθος και h το πάχος της. Η δοκός υποβάλλεται σε εγκάρσιο φορτίο $q(x)$.



Σχήμα 1.9: Κάμψη δοκού στο επίπεδο $x - z$. (Sayyad, 2011)

1.3.1 Εξισώσεις Κίνησης – Συνοριακές Συνθήκες

Στη θεωρητική διατύπωση του προβλήματος, γίνονται οι εξής υποθέσεις:

1. Οι μετατοπίσεις εντός του επιπέδου στην κατεύθυνση x αποτελούνται από δύο μέρη:
 - (α) τη συνιστώσα της μετατόπισης που είναι ανάλογη με τη μετατόπιση στην κλασσική θεωρία δοκών κάμψης και (β) τη μετατόπιση λόγω διατμητικής παραμόρφωσης ως προς τη συντεταγμένη του πάχους.
2. Η εγκάρσια μετατόπιση w στην κατεύθυνση z θεωρείται συνάρτηση του x .
3. Χρησιμοποιείται ο καταστατικός νόμος (*Νόμος του Hooke*) σε μια διάσταση.

Με βάση τις υποθέσεις που προαναφέρθηκαν, το πεδίο μετατοπίσεων για μια γενική γραμμική θεωρία ελαστικότητας ανώτερης τάξης είναι το εξής:

$$u_1 = u(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (1.61\alpha)$$

$$u_2 = v(x, z, t) = 0, \quad (1.62\beta)$$

$$u_3 = w(x, z, t) = w(x, t), \quad (1.62\gamma)$$

όπου u και w είναι οι αξονικές και εγκάρσιες μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της δοκού στις x και z κατευθύνσεις αντίστοιχα και t είναι ο χρόνος. Με φ αντιπροσωπεύεται η στροφή (*rotation*) της διατομής της δοκού στον ουδέτερο άξονα και είναι ίση με $\varphi(x, t) = \psi(x, t) + \partial w(x, t) / \partial x$. Επίσης, η συνάρτηση $f(z)$ αντιστοιχεί στην κατανομή της διατμητικής τάσης μέσω του πάχους της δοκού. Σε επόμενο υποκεφάλαιο θα γίνει αναλυτική περιγραφή της συνάρτησης ανάλογα με τη θεωρία στην οποία ανήκει.

Η επίδραση της παραμόρφωσης λόγω διάτμησης είναι πιο έντονη σε δοκούς με μεγάλο πάχος από ότι σε λεπτότερες δοκούς. Η επίδραση αυτή αγνοείται στην κλασσική θεωρία δοκών κάμψης (*Euler Beam Theory – ETB*). Για τη σωστή περιγραφή της συμπεριφοράς κάμψης των δοκών με μεγάλο πάχος, λαμβάνοντας υπ' όψιν την επίδραση της διατμητικής παραμόρφωσης, απαιτείται μια θεωρία διατμητικής παραμόρφωσης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την επιλογή κατάλληλων κινηματικών και καταστατικών μοντέλων.

Οι συναρτήσεις $f(z)$ περιλαμβάνονται στο πεδίο μετατόπισης των θεωριών υψηλότερης τάξης ώστε να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της εγκάρσιας παραμόρφωσης λόγω διάτμησης και να εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες μηδενικής διατμητικής τάσης στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού.

Από τις σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης, η κάθετη παραμόρφωση ε_x είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1.63)$$

και η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση γ_{zx} για τη δοκό είναι:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = f'(z) \varphi. \quad (1.64)$$

Σύμφωνα με το μονοδιάστατο καταστατικό νόμο (νόμο του *Hooke*), η αξονική τάση σ_x και η εγκάρσια διατμητική τάση τ_{zx} δίνονται από τις σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right], \quad (1.65)$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx} = G f'(z) \varphi. \quad (1.66)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.63) έως (1.66) και την Αρχή των Δυνατών Έργων, λαμβάνονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες για την εξεταζόμενη δοκό. Η Αρχή Hamilton όταν εφαρμόζεται σε μια δοκό οδηγεί στη σχέση (Sayyad, 2011a):

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dz dy dx + \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx = 0, \quad (1.67)$$

όπου το σύμβολο δ υποδηλώνει τον τελεστή δ -μεταβολών. Ο τελεστής δ -μεταβολών, από τις ιδιότητες του λογισμού των μεταβολών, αντιμετωπίζεται και μπαίνει μέσα στις παραγώγους. Κάνοντας αντικατάσταση, η εξίσωση 1.67 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ E \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \left[-z \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] + Gf'(z) \varphi [f'(z) \varphi] \right\} dz dy dx + \\ & + \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] \delta \left[-z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right\} dz dy dx - \\ & - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx = 0 . \end{aligned} \quad (1.68)$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη της παραπάνω σχέσης και τη συλλογή των συντελεστών δu , δw και $\delta \varphi$, θα προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες. Για ευκολία στις πράξεις, υπολογίζουμε το κάθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά. Στο 1^ο ολοκλήρωμα της σχέσης 1.68, εκτελείται η επιμεριστική ιδιότητα και η σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} E \left[z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - zf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + [f(z)]^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dz dy dx + \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [Gf'(z) \varphi f'(z) (\delta \varphi)] dz dy dx . \end{aligned} \quad (1.69)$$

Στη συνέχεια, γίνεται η ολοκλήρωση ως προς το βάθος y . Το μέτρο ελαστικότητας E που σχετίζεται με τις ιδιότητες του υλικού πηγαίνει σε όλους τους όρους και το ολοκλήρωμα ως προς το πάχος h εισάγεται σε κάθε όρο της σχέσης:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebz^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right] dz - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebzf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dz dx - \right. \\ & \left. - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebzf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right] dz + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Eb[f(z)]^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dz \right\} dx + \\ & + \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [Gb[f'(z)]^2 \varphi (\delta \varphi)] dz dx . \end{aligned} \quad (1.70)$$

Οι σταθεροί όροι, οι όροι δηλαδή που δεν εξαρτώνται από το πάχος z , βγαίνουν έξω από τα ολοκληρώματα. Να σημειωθεί επίσης ότι το ολοκλήρωμα $\int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz$ είναι ίσο με το μηδέν και η σχέση 1.70 γίνεται:

$$\int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz dx - \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)]^2 dz \right\} dx \\ + Gb \varphi (\delta \varphi) \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz dx . \quad (1.71)$$

Στη συνέχεια, ορίζονται οι συντελεστές A_0, B_0, C_0, D_0 :

$$A_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz , \quad (1.72\alpha)$$

$$B_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz , \quad (1.72\beta)$$

$$C_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz , \quad (1.72\gamma)$$

$$D_0 = Gb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz . \quad (1.72\delta)$$

Επομένως, η εξίσωση 1.71 με την εφαρμογή των σχέσεων 1.72α – 1.72δ, γίνεται:

$$\int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + D_0 \varphi (\delta \varphi) \right\} dx . \quad (1.73)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss ώστε να απελευθερωθούν τα δu και $\delta \varphi$ από τις παραγώγους (Παράρτημα Α), από το 1^ο ολοκλήρωμα της Αρχής Hamilton, προκύπτουν οι πρώτοι όροι των εξισώσεων κίνησης και η σχέση 1.73 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right\} (\delta w) + \left\{ B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi \right\} (\delta \varphi) dx + \\
 & + \left[A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \left[B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & - \left[B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται από την Αρχή Hamilton το δεύτερο ολοκλήρωμα που περιέχει τους αδρανειακούς όρους, τους όρους δηλαδή που εξαρτώνται από το χρόνο μαζί με το τρίτο ολοκλήρωμα που περιέχουν το έργο των εξωτερικών δυνάμεων. Κάνοντας αντικατάσταση, ακολουθούμε πράξεις και προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ \left[-z \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \left[-z \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + f(z) (\delta \varphi) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx.
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

Γίνονται οι πράξεις και η ολοκλήρωση ως προς το πλάτος και η σχέση 1.75 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \rho b \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ z^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - z f(z) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) - z f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + f^2(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dz dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx.
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

Κάνοντας πράξεις, και αντικαθιστώντας τους συντελεστές A_0, B_0, C_0, D_0 (σχέσεις 1.72α – 1.72δ), η σχέση 1.76 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\rho A_0}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - \frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) - \frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \frac{\rho C_0}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) + \right. \\
 & \left. + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) - q(\delta w) \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{1.77α}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α), απελευθερώνονται οι ποσότητες δw από τις παραγώγους.

$$\int_{x=0}^{x=L} \left[\left\{ -\frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \right\} (\delta w) - \left\{ \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\} (\delta \varphi) \right] dx + \left[\frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} \quad (1.77\beta)$$

Έτσι, συνολικά από τις σχέσεις 1.74 και 1.77β, προκύπτουν:

Εξισώσεις κίνησης:

$$(\delta w): A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (1.78)$$

$$(\delta \varphi): B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.79)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad w = \text{καθορισμένο}, \quad (1.80)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \text{καθορισμένο}, \quad (1.81)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi = \text{καθορισμένο}, \quad (1.82)$$

Οι σχέσεις 1.78 και 1.79 αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας για δοκούς κάμψης. Οι σχέσεις 1.80 – 1.82 αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα των δοκών κάμψης. Να σημειωθεί εδώ ότι οι σχέσεις αυτές ισχύουν για όλες τις γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας τόσο για στατικά όσα και για δυναμικά προβλήματα.

1.3.2 Η Συνάρτηση $f(z)$

Εφόσον έγινε η παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών τόσο για τις γραμμικές όσο και για τις μη γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας ανώτερης τάξης, στη συνέχεια θα αναφερθούμε στη συνάρτηση $f(z)$ η οποία περιέχεται μέσα στους συντελεστές A_0, B_0, C_0, D_0 σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Reddy, 1990), (Ambartsumian, 1958), (Kruszewski, 1949), (Touratier, 1991), (Soldatos, 1992), (Karama et. al., 2003). Ο τύπος της συνάρτησης $f(z)$ αναπαριστά τις διάφορες κατανομές της διατμητικής τάσης ανάλογα με τη θεωρία ανώτερης τάξης, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1: Οι συναρτήσεις $f(z)$ για διάφορες κατανομές διατμητικής τάσης.

ΘΕΩΡΙΑ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(z)$	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\varphi(x)$
Euler – Bernoulli	$f(z) = z$	$\varphi(x) = 0$
Timoshenko	$f(z) = z$	$\varphi(x) = \varphi(x)$
Reddy	$f(z) = z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$	$\varphi(x) = \varphi(x)$
Ambartsumian	$f(z) = \left[\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \right]$	$\varphi(x) = \varphi(x)$
Kruszewski	$f(z) = \left[\frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \right]$	$\varphi(x) = \varphi(x)$
Touratier	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$	$\varphi(x) = \varphi(x)$
Soldatos	$f(z) = \left[z \cosh \left(\frac{1}{2} \right) - h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) \right]$	$\varphi(x) = \varphi(x)$
Karama et. al.	$f(z) = z \exp \left[-2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$	$\varphi(x) = \varphi(x)$

Οι συντελεστές A_0, B_0, C_0, D_0 περιέχουν τη συνάρτηση $f(z)$, της οποίας ο τύπος αλλάζει ανάλογα με τη θεωρία. Παρατηρούμε ότι ο τύπος είναι απλός στις θεωρίες

Euler – Bernoulli και Timoshenko, ενώ στις θεωρίες ανώτερης τάξης γίνεται πιο περίπλοκος. Εάν το $f(z)$ γίνει ίσο με z και το $\varphi(x,t)$ γίνει μηδέν, καταλήγουμε στη κλασσική θεωρία δοκών *Euler – Bernoulli*. Στη συνέχεια, γίνεται ο υπολογισμός των συντελεστών για τις θεωρίες δοκών όπως αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Πίνακας 1.2: Πίνακας συντελεστών για τις διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης.

Συντελεστές Θεωρία $f(z)$	A_0	B_0	C_0	D_0
Euler	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	-
Timoshenko	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	Gbh
Kruszewski (1949)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{85Ebh^3}{1008}$	$\frac{5Gbh}{6}$
Ambartsumian (1958)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^5}{120}$	$\frac{17Ebh^7}{20160}$	$\frac{Gbh^5}{120}$
Reddy (1990)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{15}$	$\frac{17Ebh^3}{315}$	$\frac{8Gbh}{15}$
Touratier (1991)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{2Ebh^3}{\pi^3}$	$\frac{Ebh^3}{2\pi^2}$	$\frac{Gbh}{2}$
Soldatos (1992)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{(13e-35)Ebh^3}{24\sqrt{e}}$	$\frac{(-83-70e+37e^2)Ebh^3}{48e}$	$\left(1+\frac{1}{e}-\frac{e}{2}\right)Gbh$
Karama et. al. (2003)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{\left(\sqrt{2e\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2\right)Ebh^3}{8\sqrt{e}}$	$\frac{(e\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)-2)Ebh^3}{16e}$	$\frac{(3e\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)-2)Gbh}{8e}$

1.3.3 Επίλυση Στατικού Προβλήματος Κάμψης Δοκού

Για την επίλυση του στατικού προβλήματος στη γραμμική θεωρία ελαστικότητας, θα θεωρήσουμε πως το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 210GPa$, ο λόγος Poisson είναι $\nu = 0.3$, το μέτρο διάτμησης δίδεται από τον τύπο $G = E/2(1 + \nu)$ και η πυκνότητα της δοκού είναι $\rho = 7800kg / m^3$. Η αναλυτική επίλυση θα γίνει με άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων (σειρές Fourier).

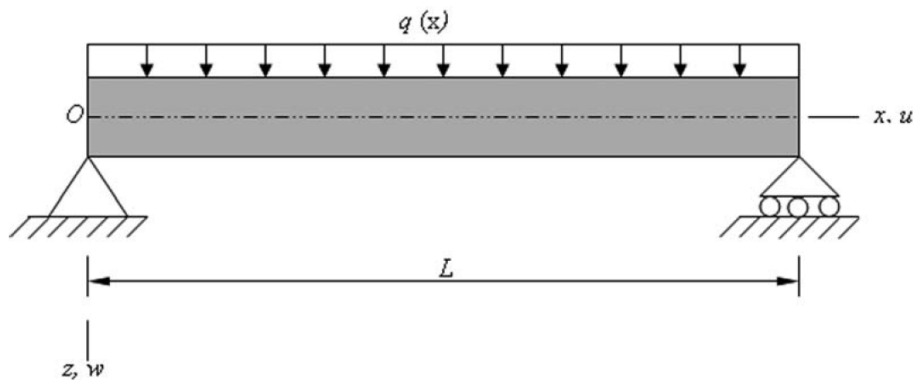
Έτσι το εξωτερικό φορτίο που ασκείται ομοιόμορφα στη δοκό θα δίδεται από τον τύπο:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \tag{1.83}$$

όπου

$$q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad \text{και}$$

$$q_m = 0, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$



Σχήμα 1.10: Δοκός απλής στήριξης που υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο (Sayyad, 2011β).

Παραλείποντας τους αδρανειακούς όρους, τους όρους δηλαδή που σχετίζονται με το χρόνο, οι δύο εξισώσεις κίνησης για τη στατική περίπτωση ανάλυσης μιας δοκού κάμψης απλής στήριξης, παίρνουν τη μορφή:

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = q, \quad (1.84)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi = 0. \quad (1.85)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθούν οι μορφές των λύσεων της παραμόρφωση $w(x)$ και της στροφής $\varphi(x)$. Οι λύσεις αυτές ικανοποιούν **ακριβώς** τις συνοριακές συνθήκες. Αν δεν ικανοποιούσαν ακριβώς τις συνοριακές συνθήκες, δεν θα μπορούσαμε να τις λάβουμε ως λύσεις στο πρόβλημά μας. Οι μορφές των λύσεων είναι:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad (1.86)$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad (1.87)$$

όπου w_m και φ_m είναι οι άγνωστοι συντελεστές της σειράς Fourier και m είναι ένας θετικός ακέραιος. Αντικαθιστώντας αυτές τις μορφές λύσης και το φορτίο $q(x)$ στις εξισώσεις κίνησης 1.84 και 1.85, λαμβάνονται οι ακόλουθες δύο αλγεβρικές εξισώσεις (Παράρτημα Α):

$$\left(A_0 \frac{m^4 \pi^4}{L^4}\right) w_m - \left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3}\right) \varphi_m = q_m, \quad (1.88)$$

$$-\left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3}\right) w_m + \left(C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0\right) \varphi_m = 0. \quad (1.89)$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις 1.88 και 1.89 ως προς τις δύο άγνωστες ποσότητες w_m και φ_m , έχουμε:

$$w_m = \frac{q_m \left(C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0\right)}{\left(A_0 \frac{m^4 \pi^4}{L^4}\right) \left(C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0\right) - \left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3}\right) \left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3}\right)}, \quad (1.90)$$

$$\varphi_m = \frac{q_m \left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right)}{\left(A_0 \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) \left(C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 \right) - \left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right)}. \quad (1.91)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, λαμβάνονται οι εκφράσεις για την αξονική μετατόπιση (axial displacement) u , την εγκάρσια μετατόπιση (transverse displacement) w , την αξονική τάση κάμψης (axial bending stress) σ_x και την εγκάρσια διατμητική τάση (transverse shear stress) τ_{zx} (Παράρτημα Α) είναι:

- Αξονική Μετατόπιση u :

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[-z \frac{m\pi}{L} w_m + f(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (1.92)$$

- Εγκάρσια Μετατόπιση w :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (1.93)$$

- Αξονική Τάση Κάμψης σ_x :

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E \left[z \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m - f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (1.94)$$

- Εγκάρσια Διατμητική Τάση τ_{zx} :

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[G f'(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (1.95)$$

1.3.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα – Γραφικές Παραστάσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσθηκαν οι αναλυτικοί τύποι για τις δύο άγνωστες ποσότητες w_m και φ_m . Στη συνέχεια, είναι δυνατή η δημιουργία ενός προγράμματος στο λογισμικό πακέτο *Matlab* όπου θα υπολογίζει τις ποσότητες αυτές. Συνεπώς, για τις γραμμικές ελαστικές θεωρίες δοκών, θα υπολογισθεί η συνολική εγκάρσια μετατόπιση w και η συνολική στροφή φ . Για πρακτικούς λόγους και λόγους σύγκρισης, ορίζεται ένα τρίτο μέγεθος, η συνολική μετατόπιση σε αδιάστατη μορφή \tilde{w} ως:

$$\tilde{w} = \frac{10Ebh^3w}{q_0L^4}. \quad (1.96)$$

Θεωρείται μια ισότροπη ελαστική δοκό απλής στήριξης που υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$ με σκοπό την κάμψη. Το μέτρο ελαστικότητας της δοκού είναι $E = 210 \text{ GPa}$, το μέτρο διάτμησης δίδεται από τον τύπο $G = E/2(1+\nu)$ και ο λόγος Poisson είναι $\nu = 0.3$. Το μήκος της δοκού είναι $L = 1 \text{ m}$ και το βάθος $b = 0.01 \text{ m}$. Η αναλογία διαστάσεων (*aspect ratio*) συμβολίζεται με S και ορίζεται ως ο λόγος μήκους προς πάχος (L/h). Το πάχος h προσαρμόζεται σύμφωνα με το λόγο S και για τα παραδείγματα χρησιμοποιούνται οι τιμές $h = 0.5, 0.25, 0.1 \text{ m}$.

Το ποσοστό σφάλματος, στα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τις θεωρίες (μοντέλα) των διαφόρων ερευνητών σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τη θεωρία των Timoshenko & Goodier η οποία θεωρείτε ως η ακριβής λύση, υπολογίζεται ως εξής:

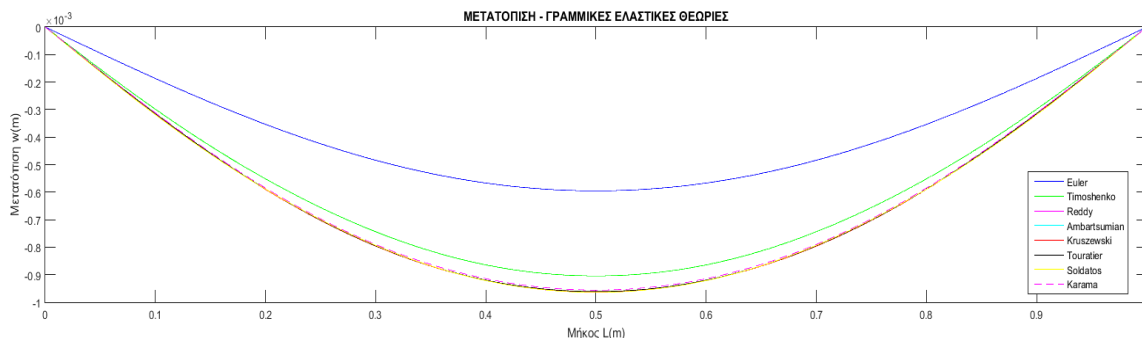
$$\%σφάλμα = \left(\frac{\text{τιμή θεωρίας} - \text{τιμή ακριβούς λύσης}}{\text{τιμή ακριβούς λύσης}} \right) \times 100\%. \quad (1.97)$$

Η σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης w , της στροφής φ , της αδιάστατης μετατόπισης \tilde{w} καθώς και του $\%σφάλμα$ ανάλογα με την κάθε γραμμική θεωρία, πραγματοποιήθηκαν για λόγους $S = 2, 4, 10$ και παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.3. Να σημειωθεί πώς η σύγκριση της αδιάστατης μετατόπισης \tilde{w} προκύπτει με την λύση που προτείνει στην εργασία του ο A. S. Sayyad (2011β).

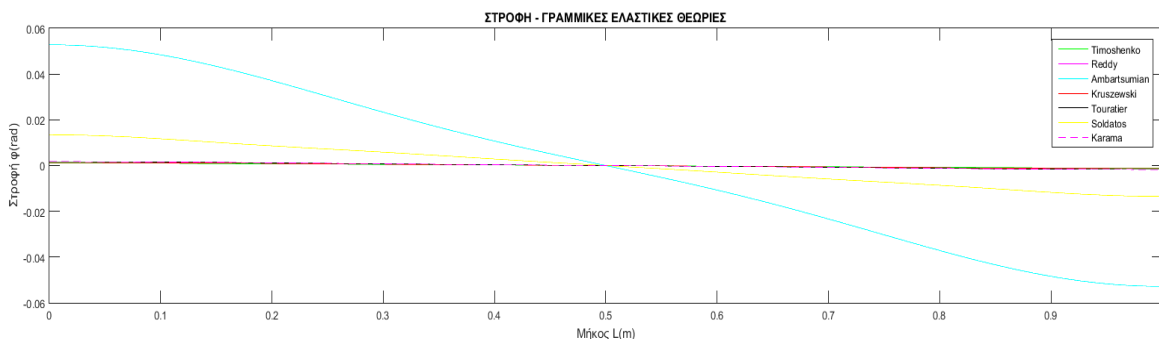
Πίνακας 1.3: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w , της στροφής (*rotation*) φ , της αδιάστατης μετατόπισης \tilde{w} και του επί τοις εκατό % σφάλματος για γραμμικές ελαστικές δοκούς.

$S = 2$	Θεωρίες	w	φ	\tilde{w}	%σφάλμα	\tilde{w} [Sayyad]
	Ambartsumian	$9.64 \cdot 10^{-4}$	0	2.531	3.179	2.357
	Kruszewski	$9.64 \cdot 10^{-4}$	0	2.5309	3.175	2.515
	Reddy	$9.64 \cdot 10^{-4}$	0	2.531	3.179	2.532
	Touratier	$9.63 \cdot 10^{-4}$	0	2.5281	3.061	2.529
	Soldatos	$9.64 \cdot 10^{-4}$	0	2.531	3.179	2.513
	Karama et. al.	$9.57 \cdot 10^{-4}$	0	2.5137	2.474	2.510
	Timoshenko	$9.02 \cdot 10^{-4}$	0	2.3702	-3.375	2.538
	Euler – Bernoulli	$5.95 \cdot 10^{-4}$	-	1.563	-36.28	1.563
	Timoshenko & Goodier [exact]	-	-	2.453	0.000	2.453
$S = 4$	Θεωρίες	w	φ	\tilde{w}	%σφάλμα	\tilde{w} [Sayyad]
	Ambartsumian	0.0055	0	1.8057	1.159	1.762
	Kruszewski	0.0055	0	1.8057	1.159	1.805
	Reddy	0.0055	0	1.806	1.176	1.806
	Touratier	0.0055	0	1.805	1.120	1.805
	Soldatos	0.0055	0	1.8057	1.159	1.802
	Karama et. al.	0.0054	0	1.802	0.952	1.801
	Timoshenko	0.0053	0	1.765	-1.120	1.806
	Euler – Bernoulli	0.0047	-	1.563	-12.43	1.563
	Timoshenko & Goodier [exact]	-	-	1.785	0.000	1.785
$S = 10$	Θεωρίες	w	φ	\tilde{w}	%σφάλμα	\tilde{w} [Sayyad]
	Ambartsumian	0.5989	0	1.572	-1.627	1.595
	Kruszewski	0.5989	0	1.572	-1.627	1.602
	Reddy	0.5989	0	1.572	-1.627	1.602
	Touratier	0.5989	0	1.572	-1.627	1.601
	Soldatos	0.5989	0	1.572	-1.627	1.601
	Karama et. al.	0.5988	0	1.572	-1.627	1.601
	Timoshenko	0.5983	0	1.570	-1.752	1.602
	Euler – Bernoulli	0.5954	-	1.563	-2.190	1.563
	Timoshenko & Goodier [exact]	-	-	1.598	0.000	1.598

Στη συνέχεια, κατασκευάστηκαν οι γραφικές παραστάσεις. Θεωρήθηκε σημαντική η απεικόνιση της αλλαγής της παραμόρφωσης w και της αλλαγής της στροφής φ στο συνολικό μήκος L της δοκού. Οι γραφικές παραστάσεις έγιναν για όλες τις γραμμικές θεωρίες δοκών σε δύο διαγράμματα ώστε να είναι άμεσα συγκρίσιμα όπως φαίνεται στα σχ. 1.11 και 1.12. Ο λόγος S στα διαγράμματα είναι ίσος με 2, δηλαδή το μήκος L της δοκού είναι $1m$ και το πάχος h είναι $0.5m$.



Σχήμα 1.11: Διάγραμμα μετατόπισης – μήκους ($w-L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.



Σχήμα 1.12: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi-L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις παρούσες θεωρίες συγκρίνονται με την κλασική θεωρία δοκών Euler – Bernoulli (ETB), τη θεωρία διάτμησης Timoshenko πρώτης τάξης (FSDT) (Timoshenko, 1921), θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης όπως των Heyliger, P., & Reddy, J. (Heyliger & Reddy, 1988), του Ghugal (Ghugal, 2006) και με τις ακριβείς λύσεις ελαστικότητας όπως τις έδωσαν οι Timoshenko και Goodier (Timoshenko & Goodier, 1970) και ο Cowper (Cowper, 1968).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ

2.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στις μη γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας. Όταν οι δοκοί και οι πλάκες παραμορφώνονται πέρα από ένα ορισμένο μέγεθος, η γραμμική θεωρία χάνει την ισχύ της και παράγει λανθασμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, η γραμμική θεωρία μπορεί να προβλέψει ότι η παραμόρφωση του σώματος μπορεί να υπερβαίνει το μήκος του σώματος, κάτι το οποίο δεν είναι ρεαλιστικό. Στις θεωρίες μεγάλων παραμορφώσεων πρέπει να συμπεριληφθεί η σύζευξη μεταξύ αξονικής και εγκάρσιας κίνησης της δοκού, η οποία είναι γεωμετρικά μη γραμμική.

Οι θεωρίες μη γραμμικών παραμορφώσεων συσχετίζουν τα αξονικά φορτία με τις εγκάρσιες παραμορφώσεις. Οι θεωρίες αυτές είναι χρήσιμες σε προβλήματα κάμψης, σε προβλήματα λυγισμού ή σε προβλήματα αξονικά φορτισμένων σωμάτων. Ένα εφαρμοζόμενο αξονικό φορτίο μπορεί να ενεργήσει ως αίτιο σκλήρυνσης ή αποσκλήρυνσης του σώματος. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι σημαντικό όταν η δομή περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, όπως για παράδειγμα μια έλικα ελικοπτέρου ή ένας δίσκος εγγραφή, όπου το σώμα βρίσκεται σε εντατική κατάσταση.

Στην περίπτωση όπου τα άκρα μπορούν να κινούνται ελεύθερα εντός του επιπέδου του μη παραμορφωμένου σώματος, τότε η συνοριακή συνθήκη που διέπει το πρόβλημα ονομάζεται συνθήκη «ελευθέρων τάσεων». Εάν τα άκρα της δοκού θεωρούνται ακίνητα, απαιτείται η παρουσία ενός ισοδύναμου αξονικού φορτίου ώστε να εμποδίσει την κίνηση, και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη ονομάζεται συνθήκη «ακλόνητων άκρων».

Η μέθοδος επίλυσης που προτείνεται στην παρούσα εργασία είναι αναλυτική με βάση τις άπειρες σειρές Fourier. Χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων της γραμμικής θεωρίας, ωστόσο μπορεί να επεκταθεί για λύσεις προβλημάτων μη γραμμικής θεωρίας. Εφόσον θεωρούμε δοκό με ακλόνητα άκρα, η λύση του προβλήματος θα έχει τη μορφή απείρου αθροίσματος ημιτόνου, το οποίο απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς. Στην παρούσα εργασία για μη γραμμικές θεωρίες, εξετάζονται δοκοί με ακλόνητα άκρα στη στατική περίπτωση, όμως η μέθοδος αυτή θα μπορούσε να επεκταθεί και σε δυναμικά προβλήματα ή σε προβλήματα με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες.

2.1.1 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση της γραμμικής και μη γραμμικής θεωρίας δοκών και πλακών περιλαμβάνεται στα δυο αξιόλογα βιβλία των *Chia* (Chia, 1980) και *Sathyamoorthy* (Sathyamoorthy, 1982). Ο *Kirchhoff* (Kirchhoff, 1850), καθιέρωσε την γραμμική θεωρία (κλασσική θεωρία) δοκών και πλακών και ο *von Kármán* (Kármán, 1910) ανέπτυξε την αντίστοιχη μη-γραμμική θεωρία.

Δύο από τους πρώτους που μελέτησαν δυναμικά προβλήματα πλακών με μη γραμμική θεωρία ήταν οι *Chu* και *Herrmann* (Chu & Herrmann, 1956), οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα των ταλαντώσεων σε ορθογώνιες πλάκες απλής στήριξης. Η θεωρία πλακών των *Reissner - Mindlin* (Mindlin, 1951) λαμβάνει υπόψη της τη διατμητική τάση η οποία είναι χρήσιμη σε προβλήματα δοκών και πλακών μεγάλου πάχους. Η θεωρία πλακών των *Reissner - Mindlin* θεωρείται μια θεωρία διάτμησης «πρώτης τάξης».

Οι *Leung* και *Mao* (Leung & Mao, 1995), σύγκριναν τη λύση μεταξύ κινούμενων και ακινήτων άκρων σε ορθογώνιες πλάκες απλής στήριξης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *Galerkin*. Οι *El Kadiri* και *Benamar* (El Kadiri & Benamar, 2003) χρησιμοποίησαν την υπόθεση των *Chu* και *Herrmann* (Chu & Herrmann, 1956) και δημιούργησαν ένα απλοποιημένο αναλυτικό μοντέλο.

Ο *Berger* (Berger, 1955) απλοποίησε τη μη-γραμμική θεωρία πλακών αγνοώντας κάποιους όρους από την έκφραση της ενέργειας παραμόρφωσης. Οι *Prathap* και *Pandalai* (Prathap & Pandalai, 1977) ενσωμάτωσαν τη ροπή αδράνειας και τη διόρθωση για τη διάτμηση στη μελέτη τους για τη μη γραμμική θεωρία πλακών. Οι *Yosibash* και *Kirby* (Yosibash & Kirby, 2005) σύγκριναν τρεις διαφορετικές εκδοχές της γεωμετρίας στη μη γραμμική θεωρία πλακών. Η πρώτη εκδοχή παραλείπει τον όρο της ροπής αδράνειας. Η δεύτερη απλοποιεί το μοντέλο, αγνοώντας τη ροπή αδράνειας καθώς και τους χρόνο-εξαρτώμενους όρους της πλάκας στο μέσο επίπεδο. Οι όροι, αυτοί, αγνοούνται με το σκεπτικό ότι πολλαπλασιάζοντας με το πάχος στο τετράγωνο, η ποσότητα θεωρείται πάρα πολύ μικρή. Επίσης, αγνοούνται και κάποιοι άλλοι όροι, παρόλο που δεν πολλαπλασιάζονται με το πάχος. Η τρίτη εκδοχή περιλαμβάνει το σύνολο των όρων αυτών. Ο *Amabili* (Amabili, 2004), θεώρησε πολλές διαφορετικές συνοριακές συνθήκες και σύγκρινε τα θεωρητικά με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Ο *Way* (Way, 1938) χρησιμοποίησε την ενεργειακή μέθοδο του Ritz, ο *Ribeiro* (Ribeiro, 2001) χρησιμοποίησε μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων και οι *Wei-Zang* και *Kai-Yuan* (Wei-Zhang & Kai-Yuan, 1956) χρησιμοποίησαν θεωρίες διαταραχών ως προσεγγιστική μέθοδο για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων.

Η διπλή σειρά Fourier χρησιμοποιήθηκε από τον *Levy* (Levy, 1942) για να μελετήσει προβλήματα πλακών απλής στήριξης κάτω από διάφορες συνθήκες. Οι *Iyengar* και *Naqvi* (Iyengar & Naqvi, 1966) χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων για να προσεγγίσουν τη μετατόπιση με πακτωμένα ή απλά στριγμένα άκρα και συνθήκες «άκρα ελευθέρων τάσεων» ή «ακλόνητα άκρα».

Ο *Leissa* (Leissa, 1969) μελέτησε γραμμικά προβλήματα πλακών με διάφορες συνοριακές συνθήκες. Το βιβλίο του *Timoshenko* (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959) «Θεωρία Πλακών και Κελυφών» αναφέρεται ιδιαίτερα στον τομέα αυτό και θα πρέπει να θεωρείται το σημαντικότερο που θα πρέπει να συμβουλευούνται όσοι μελετούν προβλήματα στη θεωρία δοκών και πλακών.

Σημαντική είναι, τέλος, η συμβολή των *Heylinger & Reddy* (Heylinger & Reddy, 1988) και του *Reddy* (Reddy, 1990) οι οποίοι ανέπτυξαν τη γνωστή θεωρία παραμόρφωσης τρίτης τάξης για τη μη γραμμική ανάλυση πλακών με μέτριο πάχος.

2.1.2 Ο Von Kármán και το Έργο του

Ο Theodore von Kármán (1881-1963) ήταν Ουγγαροαμερικανός μαθηματικός, μηχανικός στον τομέα της αεροδιαστημικής και φυσικός που δραστηριοποιήθηκε κυρίως στον τομέα της αεροναυτικής. Σημαντική είναι η συμβολή του στην αεροδυναμική, κυρίως με το έργο του για τον υπερηχητικό χαρακτηρισμό της ροής του αέρα. Θεωρείται ως ένας από τους σπουδαιότερους αεροδυναμικούς θεωρητικούς του 20^{ου} αιώνα. (Chang, 1996), (Greenberg & Goodstein, 1983), (O'Connor & Robertson), (Sears, 1965).



Theodore Kármán

Σχήμα 2.1: Theodore von Kármán (1881-1963).

Ο Kármán (Goldstein, 1966) γεννήθηκε στη Βουδαπέστη. Σπούδασε μηχανική στο Πανεπιστήμιο Royal Joseph, γνωστό σήμερα ως Πανεπιστήμιο Τεχνολογίας και Οικονομικών της Βουδαπέστης. Μετά την αποφοίτησή του, το 1902, μετακόμισε στη Γερμανική Αυτοκρατορία και μπήκε στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, όπου έλαβε το

διδασκαλικό του το 1908. Στο Göttingen δίδαξε για τέσσερα χρόνια. Το 1912 έγινε δεκτός ως διευθυντής του Αεροναυτικού Ινστιτούτου στο RWTH του Aachen της Γερμανίας.

Η αδερφή του, Josephine de Κάρμάν, τον ενθάρρυνε να επεκτείνει την επιστήμη του πέρα από τα εθνικά σύνορα. Διοργάνωσαν μαζί το πρώτο διεθνές συνέδριο στη μηχανική που πραγματοποιήθηκε το Σεπτέμβριο του 1922 στο Innsbruck. Ο Κάρμάν εγκατέλειψε τη θέση του στο RWTH το 1930. Ανησυχώντας για τις εξελίξεις στην Ευρώπη, την ίδια χρονιά αποδέχτηκε τη διεύθυνση του αεροναυτικού εργαστηρίου Guggenheim στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Καλιφόρνιας (GALCIT).

Η γερμανική δραστηριότητα, κατά τη διάρκεια του Β Παγκοσμίου Πολέμου, αύξησε το στρατιωτικό ενδιαφέρον των ΗΠΑ στην έρευνα πυραύλων. Στις αρχές του 1943, η Διεύθυνση Πειραματικής Τεχνικής της Υλικής Διοίκησης των Πολεμικών Αεροποριών των Ηνωμένων Πολιτειών διαβίβασε στον Κάρμάν αναφορές από βρετανικές πηγές που περιέγραφαν γερμανικές ρουκέτες ικανές να ταξιδεύουν σε απόσταση 160 χιλιομέτρων. Σε επιστολή του, με ημερομηνία 2 Αυγούστου 1943, ο Κάρμάν παρείχε στον στρατό την ανάλυση και τα σχόλια του σχετικά με το γερμανικό πρόγραμμα.

Το 1944, ο ίδιος και άλλοι συνεργάτες του στο GALCIT ίδρυσαν το JPL (Jet Propulsion Laboratory - Εργαστήριο εκτόξευσης αεριοθουμένων), το οποίο είναι μέχρι σήμερα ένα Κέντρο Έρευνας και Ανάπτυξης χρηματοδοτούμενο από την Ομοσπονδία, το οποίο διαχειρίζεται η Caltech βάσει σύμβασης με τη NASA. Το 1946, έγινε ο πρώτος πρόεδρος της επιστημονικής συμβουλευτικής ομάδας που μελέτησε αεροναυτικές τεχνολογίες για τις Πολεμικές Αεροπορίες των Ηνωμένων Πολιτειών. Επίσης, βοήθησε στην ίδρυση του AGARD, της ομάδας εποπτείας της αεροδυναμικής του NATO (1951), του Διεθνούς Συμβουλίου Αεροναυτικών Επιστημών (1956), της Διεθνούς Ακαδημίας Αστροναυτικής (1960) και του Ινστιτούτου «Fluid Dynamics Von Karman» στις Βρυξέλλες (1956).

Τον Ιούνιο του 1944, ο Κάρμάν υποβλήθηκε σε χειρουργική επέμβαση για καρκίνο του εντέρου στη Νέα Υόρκη. Η χειρουργική επέμβαση προκάλεσε δύο κήλες, και η ανάκαμψη του Κάρμάν ήταν αργή. Στις αρχές Σεπτεμβρίου, ενώ βρισκόταν στη Νέα Υόρκη, συναντήθηκε με τον Γενικό Αρχηγό της Πολεμικής Αεροπορίας των ΗΠΑ, Henry Arnold, και αυτός του πρότεινε να μετακομίσει στην Ουάσινγκτον για να ηγηθεί της Επιστημονικής Συμβουλευτικής Ομάδας στο στρατό. Ο Κάρμάν επέστρεψε στην Pasadena

στα μέσα Σεπτεμβρίου, διορίστηκε στη θέση SAG τον Οκτώβριο του 1944 και εγκατέλειψε την Caltech τον Δεκέμβριο του 1944 (Bluth, 1994).

Σε ηλικία 81 ετών, ο Κάρμάν έλαβε το πρώτο Εθνικό Μετάλλιο Επιστημών, που δόθηκε από τον Πρόεδρο John F. Kennedy σε τελετή στο Λευκό Οίκο. Ο Κάρμάν αναγνωρίστηκε: «Για την ηγεσία του στην επιστήμη και τη μηχανική στον τομέα της αεροναυτικής, για την αποτελεσματική διδασκαλία του και τις συνεισφορές σε πολλούς τομείς της μηχανικής, για τη διακεκριμένη συμβουλή του προς τις Ένοπλες Υπηρεσίες και για την προώθηση της διεθνούς συνεργασίας στην επιστήμη και τη μηχανική».

Έγινε τελικά μια σημαντική μορφή στην επιστήμη και ειδικότερα στη μελέτη της υπερηχητικής κίνησης, σημειώνοντας σε ένα σημαντικό έγγραφο ότι οι μηχανικοί στην αεροναυτική «χτυπούν δυνατά στην κλειστή πόρτα που οδηγεί στο πεδίο της υπερηχητικής κίνησης» (Hallion, 2011).

Η φήμη του Κάρμάν έγκειται στη χρήση μαθηματικών εργαλείων για τη μελέτη ροής ρευστών (Sears, 1986) και η ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων για την καθοδήγηση πρακτικών σχεδίων. Είχε καθοριστικό ρόλο στην αναγνώριση της σημασίας των φτερών που βρίσκονται σε όλα τα σύγχρονα αεριοθούμενα αεροπλάνα.

Τέλος, όσον αφορά τη συγκεκριμένη εργασία, σημαντική ήταν η συνεισφορά του στον τομέα της μηχανικής και πιο συγκεκριμένα στις μη γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας. Προσθέτοντας στις γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας και πιο συγκεκριμένα στις σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης τον γεωμετρικά μη γραμμικό όρο:

$$\frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (2.1)$$

γνωστό και ως όρο παραμορφώσεων Von Κάρμάν, κατάφερε να μετατρέψει τις γραμμικές θεωρίες για δοκούς, πλάκες και κελύφη σε γεωμετρικά μη γραμμικές, γνωστές ως θεωρίες των μεγάλων παραμορφώσεων. Για τις θεωρίες αυτές γίνεται λόγος στις επόμενες ενότητες.

2.1.3 Η Προέλευση της Μη Γραμμικότητας

Οι μη γραμμικότητες υπάρχουν στις εξισώσεις κίνησης και στις συνοριακές συνθήκες, όταν σε αυτές εμφανίζονται γινόμενα των μεταβλητών ή των παραγώγων τους. Εμφανίζονται, επίσης, όταν υπάρχουν ασυνέχειες ή άλματα στο σύστημα. Τα μη γραμμικά συστήματα χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης (*superposition principle*). Γενικά, οι μη γραμμικότητες στη μηχανική προκύπτουν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και παίρνουν διαφορετικές μορφές. Υπάρχουν διάφορες πηγές της μη γραμμικής συμπεριφοράς. Οι κυριότερες περιλαμβάνουν τις μη γραμμικότητες λόγω γεωμετρίας, τις μη γραμμικότητες λόγω των ιδιοτήτων του υλικού, τις μη γραμμικότητες λόγω αδράνειας, τις μη γραμμικότητες λόγω τριβής και τις μη γραμμικότητες λόγω συνοριακών συνθηκών (Emam, 2002), (Nishawala, 2011).

Η γεωμετρική μη γραμμικότητα. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι σημαντικό για τα συστήματα με μεγάλες παραμορφώσεις, ή για συστήματα που μπορεί να αστοχήσουν λόγω λυγισμού. Σε δοκούς και πλάκες, η μη γραμμικότητα προέρχεται από τις μη-γραμμικές εξισώσεις των τροπών, στις οποίες η εγκάρσια μετατόπιση είναι συζευγμένη με τις αξονικές τροπές. Ως αποτέλεσμα, το μέσο επίπεδο της δοκού ή της πλάκας μπορεί να υποστεί διάταση (*stretching*). Η θεωρία von Κάρμάν, ή θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων, περιλαμβάνει τη γεωμετρική μη-γραμμικότητα. Η μη γραμμική σχέση ροπής - καμπυλότητας γίνεται σημαντική όταν θεωρούμε μεγάλες παραμορφώσεις χωρίς διάταση. Στην ανάλυση αυτή, η κλίση της μετατόπισης της μέσης επιφάνειας δεν θεωρείται μικρή σε σύγκριση με τη μονάδα. Αυτός ο τύπος μη γραμμικότητας συναντάται πιο συχνά στη βιβλιογραφία.

Μια άλλη αιτία εμφάνισης της μη γραμμικότητας είναι οι ιδιότητες του υλικού. Η μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού καθιστά άκυρο το νόμο του *Hooke*, καθώς η σχέση $\sigma = E\varepsilon$ είναι μια γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης. Ο νόμος του *Hooke* θα πρέπει να τροποποιηθεί προκειμένου να ληφθεί υπόψη η μη γραμμική συμπεριφορά. Στην ελαστική περιοχή του υλικού, μπορούμε να ορίσουμε την κλίση της γραμμικής περιοχής ως μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Ωστόσο, ο ορισμός αυτός είναι μόνο μια προσέγγιση που χρησιμοποιούμε για να απλοποιηθεί το σύστημα. Επίσης, το υλικό θεωρείται ισότροπο, με ίδιες ιδιότητες σε όλες τις κατευθύνσεις, αλλά αυτό είναι επίσης μια προσέγγιση των ιδιοτήτων του υλικού. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει

στην φύση υλικό που να έχει απόλυτα γραμμική ελαστική συμπεριφορά ή να είναι απόλυτα ισότροπο. Τα παραπάνω είναι προσεγγίσεις, αρκετά ικανοποιητικές, για τις περισσότερες περιπτώσεις. Μοντέλα υλικών με μη-γραμμικές ελαστικές ιδιότητες, όπως το καουτσούκ, ή ανισότροπα υλικά, όπως τα σύνθετα υλικά, περιλαμβάνουν μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης.

Οι μη γραμμικότητες λόγω αδράνειας προκύπτουν ως αποτέλεσμα συμπυκνωμένων ή κατανεμημένων μαζών. Αυτός ο τύπος μη γραμμικότητας συναντάται στις αρχές που διέπουν το πρόβλημα από πλευράς χρονικών παραγώγων των μετατοπίσεων.

Ένας άλλος λόγος εμφάνισης της μη γραμμικότητας είναι οι μη γραμμικότητες λόγω τριβής. Ο συγκεκριμένος τύπος μη γραμμικότητας είναι εξαιρετικά μη γραμμικός και προκύπτει, για παράδειγμα, από την ξηρή τριβή, την ολίσθηση και την υστέρηση σε ένα σύστημα. Οι μη γραμμικότητες λόγω τριβής εμφανίζονται στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης που διέπουν το πρόβλημα.

Επίσης, μια ακόμη πηγή της μη γραμμικότητας είναι τα μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων, τα οποία προκαλούνται από μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Αυτή η μη γραμμικότητα οφείλεται στο γεγονός ότι οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να έχουν τη μορφή μη γραμμικών ισοδυναμιών ή ανισοτήτων. Ένα παράδειγμα της ανισότητας είναι η επαφή μεταξύ των ελαστικών σωμάτων, όπου η σχετική μετατόπιση των σημείων επαφής στην κατεύθυνση της επαφής πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με το αρχικό κενό μεταξύ αυτών των σημείων.

Τα παραπάνω είδη μη γραμμικότητας αποτελούν μερικά κλασσικά παραδείγματα που δεν καλύπτουν όμως, το σύνολο των περιπτώσεων. Υπάρχουν πολλές πηγές μη γραμμικής συμπεριφοράς και η γραμμική συμπεριφορά, όπως προαναφέρθηκε, είναι απλά μια προσέγγιση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η γραμμικοποίηση έχει αμελητέα αποτελέσματα. Είναι σημαντικό να προσπαθούμε να κατανοούμε κάθε φορά το σύστημα με βάση το υλικό του, τις φορτίσεις που δέχεται και την αναμενόμενη απόκρισή του, ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί εάν μια γραμμική προσέγγιση είναι επαρκής ή αν απαιτείται η χρήση μιας μη γραμμικής θεωρίας.

2.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΜΨΗΣ ΔΟΚΩΝ

Για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών στη γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία ελαστικότητας ή θεωρία ελαστικότητας μεγάλων μετατοπίσεων, στο πεδίο παραμορφώσεων προστίθεται ο όρος των μεγάλων παραμορφώσεων, όρος Von Κάρμάν (εξ. 2.1). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγήθηκε στην παράγραφο 1.3.1, ορίζονται οι συντεταγμένες x, y, z του προβλήματος:

$$0 \leq x \leq L, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (2.2)$$

και το πεδίο μετατοπίσεων, ίδιο με τη γραμμική περίπτωση:

$$u_1 = u(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (2.3\alpha)$$

$$u_2 = v(x, z, t) = 0, \quad (2.3\beta)$$

$$u_3 = w(x, z, t) = w(x, t). \quad (2.3\gamma)$$

Στην περίπτωση αυτή θεωρείτε πως ασκείται στο σώμα μια κατακόρυφα ομοιόμορφη δύναμη $q(x, t)$. Η πυκνότητα ρ θεωρείτε πως παραμένει σταθερή και δεν μεταβάλλεται. Έτσι, οι σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (2.4)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \varphi(x, t). \quad (2.5)$$

Οι σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης έχουν τη μορφή:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (2.6)$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx} = G f'(z) \varphi(x, t). \quad (2.7)$$

2.2.1 Εξισώσεις Κίνησης – Συνοριακές Συνθήκες

Για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών για τις μη γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας, η Αρχή Hamilton είναι:

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dz dy dx + \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx = 0. \quad (2.8)$$

Ξεκινώντας τον υπολογισμό από το πρώτο ολοκλήρωμα της Αρχής Hamilton, με την εισαγωγή των σχέσεων 2.4 – 2.7, το πρώτο ολοκλήρωμα της σχ. 2.8 γίνεται:

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ E \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dz dy dx + \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ [Gf'(z)\varphi(x,t)] \delta [f'(z)\varphi(x,t)] \right\} dz dy dx. \quad (2.9)$$

Κάνοντας πράξεις, η σχ. 2.9 γίνεται:

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[E \left[z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - zf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + [f(z)]^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - z \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + f(z) \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] + G [f'(z)]^2 \varphi (\delta \varphi) \right] dz dx. \quad (2.10)$$

Γίνεται η ολοκλήρωση ως προς το βάθος (*width*) y και το ολοκλήρωμα ως προς το πάχος z πηγαίνει σε κάθε όρο της σχ.2.10:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebz^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right] dz - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebzf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dz - \right. \\
 & - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebz \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] dz - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebzf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right] dz + \\
 & + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Eb [f(z)]^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dz + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] dz - \\
 & - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebz \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right] dz + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Ebf(z) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dz + \\
 & \left. + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Eb \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] dz + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[Gb [f'(z)]^2 \varphi (\delta \varphi) \right] dz \right\} dx. \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

Βγάζοντας έξω από τα ολοκληρώματα τους σταθερούς όρους που δεν εξαρτώνται από το πάχος z , η σχέση 2.11, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \right. \\
 & - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \\
 & + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [[f(z)]^2] dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz - \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [1] dz + \varphi (\delta \varphi) Gb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [[f'(z)]^2] dz \right\} dx. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz$ είναι ίσο με το μηδέν. Ορίζοντας τους συντελεστές

A_0, B_0, C_0, D_0 (εξ. 1.72α – 1.72δ) και τον συντελεστή H_0 :

$$H_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz, \tag{2.13}$$

η σχέση 2.12, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} A_0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} B_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} B_0 + \right. \\
 & + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} C_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} H_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} H_0 + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} Ebh + D_0 \varphi (\delta \varphi) \right\} dx. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α) ώστε να απελευθερωθούν οι ποσότητες δw και $\delta \varphi$ από τις παραγώγους τους, από το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \left[A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx - \left[B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \\
 & + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx - \left[B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx + \\
 & + \left[C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx + \left[H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & - \int_{x=0}^{x=L} \left(H_0 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right) (\delta w) dx + \left[\frac{H_0}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & - \int_{x=0}^{x=L} \left[H_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta \varphi) \right] dx + \left[\frac{Ebh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & - \frac{3Ebh}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) \right) dx + \int_{x=0}^{x=L} [D_0 \varphi (\delta \varphi)] dx. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός του δεύτερου και του τρίτου ολοκληρώματος της Αρχής Hamilton, σχ.2.8:

$$\rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx. \quad (2.16)$$

Κάνοντας αντικατάσταση τις μετατοπίσεις u και w , η σχ. 2.16 γίνεται:

$$\rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] \delta \left[-z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx. \quad (2.17)$$

Εκτελώντας τις δ – μεταβολές και τις σχετικές παραγωγίσεις από την σχ.2.17 προκύπτει:

$$\rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ \left[-z \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \left[-z \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + f(z)(\delta \varphi) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx. \quad (2.18)$$

Γίνονται οι σχετικές πράξεις και η σχ. 2.18 παίρνει τη μορφή:

$$\rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ z^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - z f(z) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) - z f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + f^2(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dz dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx. \quad (2.19)$$

Γίνεται η ολοκλήρωση ως προς το βάθος y και το ολοκλήρωμα ως προς το πάχος z πηγαίνει σε όλους τους όρους της αγκύλης:

$$\rho b \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \int_{z=-h/2}^{z=h/2} z^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} dz - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} z f(z) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) dz - \int_{z=-h/2}^{z=h/2} z f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} dz + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} f^2(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) dz + \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dz \right\} dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx. \quad (2.20)$$

Κάνοντας πράξεις, η σχ. 2.20 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \rho b \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \right. \\
 & - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz + \\
 & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [I] dz \right\} dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Με εισαγωγή των συντελεστών A_o, B_o, C_o (εξ. 1.72α – 1.72γ) και με σχετικές πράξεις, η σχ.2.21 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) - q(\delta w) \right\} dx. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α), η σχ.2.22 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} (\delta w) dx - \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) dx - \\
 & - \left[\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) dx + \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) dx + \\
 & + \int_{x=0}^{x=L} \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dx - \int_{x=0}^{x=L} q(\delta w) dx. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, συνολικά από την Αρχή Hamilton προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης w , φ και οι συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια, ορίζεται η ποσότητα $A = bh$, όπου A είναι η διατομή της δοκού και μεταφέρονται οι αδρανειακοί όροι στο δεύτερο μέλος των εξισώσεων κίνησης. Υπολογίζοντας τους συντελεστές για τις διάφορες $f(z)$ που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, παρατηρείται πως ο όρος H_o είναι ίσος με μηδέν για όλες τις θεωρίες της βιβλιογραφίας. Συνεπώς, με μεγάλη ασφάλεια μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης και τις συνοριακές συνθήκες χωρίς τον όρο H_o . Πολλαπλασιάζοντας με μείον εξίσου όλα τα μέλη των εξισώσεων κίνησης, συνολικά από την Αρχή Hamilton, έχουμε:

Εξισώσεις κίνησης:

(δw) :

$$-A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{3EA}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho A_0}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x}, \quad (2.24)$$

$(\delta \varphi)$:

$$C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_0 \varphi = -\frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\rho C_0}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.25)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$EA \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\rho A_0}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.26)$$

ή $(\delta w) = 0, \quad w : \text{καθορισμένο}$

$$C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{ή} \quad (\delta \varphi) = 0, \quad \varphi : \text{καθορισμένο} \quad (2.27)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} \quad (2.28)$$

Οι σχέσεις 2.24 – 2.25 αποτελούν τις μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης για ελαστικές δοκούς σε κάμψη και οι σχέσεις 2.26 – 2.28 αποτελούν τις μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα. Οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες αυτές βρίσκονται στην πιο γενική τους μορφή και μπορούν να εκφράσουν οποιαδήποτε θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης. Ανάλογα με την εκάστοτε θεωρία, γίνεται η κατάλληλη αντικατάσταση των συντελεστών A_0, B_0, C_0, D_0 της μη γραμμικής θεωρίας και προκύπτουν οι συγκεκριμένες εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες.

Στη συνέχεια, δίδονται αναλυτικά οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες για τις μη γραμμικές θεωρίες Euler – Bernoulli και Timoshenko.

2.2.2 Μη Γραμμική Θεωρία Euler - Bernoulli

Για να προκύψει η μη γραμμική θεωρία Euler - Bernoulli, γίνεται αντικατάσταση της κατανομής $f(z) = z$ και της στροφής $\varphi(x) = 0$ στις εξισώσεις κίνησης 2.24 – 2.25 και στις συνοριακές συνθήκες 2.26 – 2.28 που διέπουν το πρόβλημα.

Εφόσον δεν υπάρχει η στροφή στη θεωρία, αναμένεται μόνο μια εξίσωση κίνησης, αυτή που αφορά τη μετατόπιση w . Επίσης, για τη θεωρία Euler – Bernoulli, οι συντελεστές A_0, B_0, C_0 είναι ίσοι με $Ebh^3/12$ ενώ ο συντελεστής D_0 δεν εμφανίζεται εφόσον δεν υπάρχει διατμητική παραμόρφωση. Έτσι, θέτοντας τη ροπή αδράνειας $I = bh^3/12$, οι σχέσεις 2.24 – 2.28 γίνονται:

Εξισώσεις κίνησης:

(δw) :

$$-A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{3EA}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2}. \quad (2.29)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\bullet EA \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} = 0, \quad (2.30)$$

ή $\delta w = 0$, δηλαδή w : καθορισμένο,

$$\bullet EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο}, \quad (2.31)$$

Έτσι, προκύπτει η μη γραμμική θεωρία δοκών Euler - Bernoulli για μεγάλες μετατοπίσεις όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία (Nishawala, 2011).

2.2.3 Μη Γραμμική Θεωρία Timoshenko

Για τη μη γραμμική θεωρία Timoshenko, θεωρείται η κατανομή της διατμητικής τάσης $f(z) = z$ όπως και στη θεωρία Euler - Bernoulli, αλλά σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται και η στροφή $\varphi(x) = \varphi(x)$. Εφόσον υπάρχει στροφή στη θεωρία, αναμένονται δυο εξισώσεις κίνησης, μια που θα περιγράφει τη μετατόπιση w και μια που θα περιγράφει τη στροφή φ . Επίσης, για τη θεωρία Timoshenko, οι συντελεστές A_0, B_0, C_0 είναι ίσοι με $Ebh^3/12$ και ο συντελεστής D_0 είναι ίσος με Gbh εφόσον υπάρχει διατμητική παραμόρφωση. Έτσι, θέτοντας τη ροπή αδράνειας $I = bh^3/12$ και οι σχέσεις 2.24 – 2.28 γίνονται:

Εξισώσεις κίνησης:

$(\delta w):$

$$\frac{3EA}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + EI \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x}, \quad (2.32)$$

$(\delta \varphi):$

$$EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - GA\varphi = -\rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.33)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\bullet \quad EA \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.34)$$

$\dot{\eta}$ $\delta w = 0$, δηλαδή w : καθορισμένο

$$\bullet \quad EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \dot{\eta} \quad \delta \varphi = 0, \quad \text{δηλαδή } \varphi: \text{καθορισμένο} \quad (2.35)$$

$$\bullet \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \dot{\eta} \quad \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} = 0, \quad \text{δηλαδή } \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο} \quad (2.36)$$

Με τις ως άνω παραδοχές, προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες για τη θεωρία δοκών Timoshenko στην περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων.

2.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στα παραδείγματα που ακολουθούνε, γίνεται η προσπάθεια επίλυσης στατικών προβλημάτων κάμψης δοκών με μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες όπως, αυτές, προέκυψαν παραπάνω. Για τα παραδείγματα θεωρούνται, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το μέτρο ελαστικότητας της δοκού $E = 210GPa$, ο λόγος Poisson $\nu = 0.3$ και το μέτρο διάτμησης $G = E/2(1+\nu)$. Επίσης, θεωρείται δοκός απλής στήριξης που υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, σύμφωνα με τη σχέση 1.83, το οποίο δρα στην κατεύθυνση του πάχους z . Η ποσότητα q_m είναι ο συντελεστής του φορτίου στη σειρά Fourier όπου q_0 είναι η αρχική ένταση του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου. Η μορφή των λύσεων $w(x)$ και $\varphi(x)$ (σχέσεις 1.86 και 1.87) ικανοποιούν **ακριβώς** τις συνοριακές συνθήκες.

Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα στην περίπτωση της στατικής ανάλυσης κάμψης της δοκού και οι συνοριακές συνθήκες, απορρίπτοντας τους αδρανειακούς όρους, είναι:

Εξισώσεις κίνησης:

$$(\delta w): A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{3Ebh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q, \quad (2.37)$$

$$(\delta \varphi): B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi = 0. \quad (2.38)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 = 0, \quad \text{ή } \delta w = 0, \quad w: \text{καθορισμένο} \quad (2.39)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{ή } \delta \varphi = 0, \quad \varphi: \text{καθορισμένο} \quad (2.40)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{ή } \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο} \quad (2.41)$$

Κάνοντας αντικατάσταση τις σχέσεις 1.83, 1.86 και 1.87, οι εξισώσεις κίνησης 2.37 και 2.38 παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] - B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] - \\
 & - \frac{3Ebh}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right] = \\
 & = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right),
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] - C_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] + D_0 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0. \tag{2.43}$$

Στη συνέχεια, κάνοντας πράξεις, η σχέση 2.42 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - \frac{3Ebh}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(-w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right) \left(\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \left(\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right) \right\} = \tag{2.44} \\
 & = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right),
 \end{aligned}$$

και η σχέση 2.43, γίνεται:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\left\{ -B_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 \varphi_m \right\} \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0. \tag{2.45}$$

Από τη σχέση 2.45, τελικά, προκύπτει:

$$-B_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 \varphi_m = 0. \tag{2.46}$$

2.3.1 Συνθήκη Ακλόνητων Άκρων

Η εξίσωση 2.44 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3Ebh}{2} \left[-w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \left(\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right) \right\} \right] \right\} = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Από την εξίσωση 2.47, προκύπτει:

$$\begin{aligned} & A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) - \\ & - \frac{3Ebh}{2} \left(-w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \left(\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right) \right\} \right) = \\ & = q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Απλοποιώντας τους όρους $\sin(m\pi x/L)$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} & A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \\ & + \frac{3Ebh}{2} w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \left(\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right) \right\} = q_m. \end{aligned} \quad (2.49\alpha)$$

Στη συνέχεια, εισάγοντας τη σχέση (Boyce & DiPrima, 1999):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \left(\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right) \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 \quad (2.49\beta)$$

η σχέση 2.49α, γίνεται:

$$A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \frac{3Ebh}{4} w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 \right] = q_m. \quad (2.50)$$

Συνεπώς, για την επίλυση του στατικού προβλήματος, θεωρώντας συνθήκη ακλόνητων άκρων, και θέτοντας $a_m = m\pi/L$ και $a_k = k\pi/L$, οι εξισώσεις στην πιο γενική τους μορφή είναι:

$$A_0 w_m a_m^4 - B_0 \varphi_m a_m^3 + \frac{3Ebh}{4} w_m a_m^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m, \quad (2.51\alpha)$$

$$-B_0 w_m a_m^3 + C_0 \varphi_m a_m^2 + D_0 \varphi_m = 0. \quad (2.51\beta)$$

Επιλύοντας την εξίσωση 2.51β ως προς φ_m , έχουμε:

$$\varphi_m = \frac{B_0 w_m a_m^3}{(C_0 a_m^2 + D_0)}. \quad (2.52)$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης (2.52) στην εξίσωση (2.51α), τελικά προκύπτει:

$$A_0 w_m a_m^4 - B_0 \frac{B_0 w_m a_m^3}{(C_0 a_m^2 + D_0)} a_m^3 + \frac{3Ebh}{4} w_m a_m^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m. \quad (2.53)$$

Με τη διαδικασία αυτή, καταλήξαμε σε δυο εκφράσεις στις οποίες άγνωστοι είναι το w_m και το φ_m . Υπάρχει ωστόσο ακόμη ένα άπειρο άθροισμα μέσα στην εξίσωση 2.53 οπότε για να λυθεί το πρόβλημα, χρειάζεται μια προσέγγιση του k . Οι τρεις πρώτοι όροι του αθροίσματος θεωρούνται μια ικανοποιητική προσέγγιση. Επιλύοντας την εξίσωση 2.53 για $k=1,2,3$ και βρίσκοντας την άγνωστη ποσότητα w_m , με αντικατάσταση στην εξίσωση 2.52 μπορεί να βρεθεί και η δεύτερη άγνωστη ποσότητα φ_m .

2.3.2 Επίλυση με τη Θεωρία Euler

Όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.2 για τη θεωρία Euler – Bernoulli, οι συντελεστές A_0, B_0, C_0 είναι ίσοι με $Ebh^3/12$ ενώ ο συντελεστής D_0 δεν εμφανίζεται εφόσον δεν υπάρχει διατμητική παραμόρφωση. Θέτοντας τη διατομή της δοκού $A = bh$, η εξίσωση 2.51α γίνεται:

$$A_0 a_m^4 w_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m. \quad (2.54)$$

EULER - ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΕΝΑ ΟΡΟ

Στην προσέγγιση με ένα όρο, δηλαδή για $k = 1$ και $m = 1, 2, 3$ η εξίσωση 2.53 γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1, k=1} & EI a_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 = q_1, \\ \xrightarrow{m=2, k=1} & EI a_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = q_2, \\ \xrightarrow{m=3, k=1} & EI a_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 = q_3. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Κάνοντας τις πράξεις, και θέτοντας $q_2 = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} & EI a_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 = q_1, \\ \xrightarrow{m=2, q_2=0} & EI a_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = 0, \\ \xrightarrow{m=3} & EI a_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_3 w_1^2 = q_3. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Στη συνέχεια κάνοντας πράξεις, η πρώτη εξίσωση προκύπτει ως μια τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση. Για τη δεύτερη εξίσωση, η ποσότητα μέσα στη παρένθεση είναι θετική άρα διάφορη του μηδενός. Οπότε, η μόνη αποδεκτή λύση της δεύτερης εξίσωσης είναι $w_2 = 0$. Έτσι, οι τρεις εξισώσεις γίνονται:

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{m=1} w_1^3 \left[\frac{3EA}{4} a_1^4 \right] + w_1 [EIa_1^4] &= q_1, \\
 \xrightarrow{m=2} w_2 \left[EIa_2^4 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 \right] &= 0 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 0, \\
 \xrightarrow{m=3} w_3 \left(EIa_3^4 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 \right) &= q_3,
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις στις τρεις εξισώσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w_1^3 + w_1 \frac{4I}{3A} &= \frac{4q_1}{3EAa_1^4}, \\
 w_2 &= 0, \\
 w_3 &= \frac{4q_3}{4EIa_3^4 + 3EAa_3^2 a_1^2 w_1^2}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης $x^3 + cx = d$ γίνεται με την αναλυτική λύση του έδωσε ο Cardano, η οποία δίδει 2 μιγαδικές λύσεις και μια πραγματική λύση. Για το πρόβλημα που επιλύουμε, αποδεκτή λύση θεωρείται μόνο η πραγματική. Ο γενικός τύπος της λύσης σύμφωνα με τον Cardano είναι:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}, \tag{2.59}$$

όπου $c = 4I/A$ και $d = 4q_1/3EAa_1^4$. Έτσι το w_1 είναι ίσο με:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{3A}\right)^3} + \frac{4q_1}{3EAa_1^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{3A}\right)^3} - \frac{4q_1}{3EAa_1^4}} \\
 w_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} + \frac{2q_1}{3EAa_1^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} - \frac{2q_1}{3EAa_1^4}}
 \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας το w_1 , γίνεται αντικατάσταση στην τρίτη εξίσωση και προκύπτει το w_3 .

EULER - ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΟΡΟΥΣ

Για $k = 1, 2$ και $m = 1, 2, 3$, η εξίσωση 2.54 γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1, k=1, 2} EIa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2] &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2, k=1, 2} EIa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2] &= q_2, \\ \xrightarrow{m=3, k=1, 2} EIa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2] &= q_3. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Κάνοντας πράξεις, και θεωρώντας το $q_2 = 0$, οι τρεις εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} w_1^3 \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) + w_1 \left(EIa_1^4 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 \right) &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2} w_2 \left(EIa_2^4 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 0, \\ \xrightarrow{m=3} w_3 \left(EIa_3^4 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 \right) &= q_3. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Αποδεικνύοντας ότι η παρένθεση δεν μπορεί να είναι μηδέν, αποδεκτή λύση είναι το w_2 να είναι μηδέν. Η πρώτη εξίσωση είναι μια τριτοβάθμια πολυωνομική εξίσωση και επιλύεται με τη μέθοδο του Cardano.

$$\begin{aligned} w_1^3 + w_1 \frac{4I}{3A} &= \frac{4q_1}{3EAa_1^4}, \\ w_2 &= 0, \\ w_3 &= \frac{4q_3}{4EIa_3^4 + 3EAa_3^2 a_1^2 w_1^2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4q_1}{EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{3A}\right)^3} + \frac{4q_1}{EAa_1^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4q_1}{EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{3A}\right)^3} - \frac{4q_1}{EAa_1^4}}, \\ w_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} + \frac{2q_1}{3EAa_1^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} - \frac{2q_1}{3EAa_1^4}} \end{aligned}$$

Παρατηρείται πως για $k = 1, 2$, στην προσέγγιση με 2 όρους, λαμβάνονται οι ίδιες εξισώσεις όπως και στην προσέγγιση με ένα όρο. Για αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια, θα πρέπει να γίνει προσέγγιση τριών όρων.

EULER - ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΟΡΟΥΣ

Για $k = 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, 3$, η εξίσωση 2.54 γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1, k=1,2,3} EIa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2] &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2, k=1,2,3} EIa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2] &= q_2, \\ \xrightarrow{m=3, k=1,2,3} EIa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2] &= q_3. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Κάνοντας πράξεις, και θεωρώντας το $q_2 = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} EIa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1 w_3^2 &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2} EIa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 &= 0, \\ \xrightarrow{m=3} EIa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 &= q_3. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις και στις τρεις εξισώσεις και θεωρώντας $w_2 = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} w_1^3 \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) + w_1 \left(EIa_1^4 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) &= q_1, \\ w_2 \left(EIa_2^4 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 \right) &= 0 \Rightarrow w_2 = 0, \\ w_3^3 \left(\frac{3EA}{4} a_3^4 \right) + w_3 \left(EIa_3^4 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 \right) &= q_3. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Έτσι, καταλήγουμε σε δύο τριτοβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις που περιέχουν τόσο το w_1 όσο και το w_3 . Συνεπώς, δεν μπορούν να λυθούν με την λύση του Cardano.

$$\begin{aligned} w_1^3 + w_1 \left(\frac{4I}{3A} + \frac{a_3^2}{a_1^2} w_3^2 \right) &= \frac{4q_1}{3EAa_1^4}, \\ w_2 &= 0, \\ w_3^3 + w_3 \left(\frac{4I}{3A} + \frac{a_1^2}{a_3^2} w_1^2 \right) &= \frac{4q_3}{3EAa_3^4}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Για την επίλυση, θα λυθεί η πρώτη εξίσωση ως προς w_3 , θα γίνει αντικατάσταση του w_3 στην τρίτη εξίσωση και έτσι θα υπολογισθεί το w_1 . Στην συνέχεια, εφόσον βρέθηκε το w_1 , θα γίνει η αντικατάστασή του στην πρώτη εξίσωση για να βρεθεί το w_3 .

2.3.3 Επίλυση με τη Θεωρία Timoshenko

Όπως προαναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.3 για τη μη γραμμική θεωρία Timoshenko, οι συντελεστές A_0, B_0, C_0 είναι ίσοι με $Ebh^3/12$. Ο συντελεστής D_0 που δηλώνει την διατμητική παραμόρφωση είναι ίσος με Gbh . Θέτοντας τη διατομή της δοκού $A = bh$, οι εξισώσεις 2.51α και 2.51β γίνονται:

$$EIa_m^4 w_m - EIa_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 = q_m, \quad (2.67)$$

$$-EIa_m^2 \varphi_m + EIa_m^3 w_m - GA\varphi_m = 0. \quad (2.68)$$

TIMOSHENKO - ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΕΝΑ ΟΡΟ

Στην περίπτωση όπου το $k = 1$ και το $m = 1, 2, 3$, από την εξίσωση 2.67 έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1, k=1} & EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 = q_1, \\ \xrightarrow{m=2, k=1} & EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = q_2, \\ \xrightarrow{m=3, k=1} & EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 = q_3. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Κάνοντας πράξεις και θέτοντας $q_2 = 0$ όπως προβλέπει η θεωρία, έχουμε:

$$\begin{aligned} EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 &= q_1, \\ EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 &= 0, \\ EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 &= q_3. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Η εξίσωση 2.68 για $m = 1, 2, 3$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} & -EIa_1^2 \varphi_1 + EIa_1^3 w_1 - GA\varphi_1 = 0 & \Rightarrow \varphi_1 = \frac{EIa_1^3 w_1}{EIa_1^2 + GA}, \\ \xrightarrow{m=2} & -EIa_2^2 \varphi_2 + EIa_2^3 w_2 - GA\varphi_2 = 0 & \Rightarrow \varphi_2 = \frac{EIa_2^3 w_2}{EIa_2^2 + GA}, \\ \xrightarrow{m=3} & -EIa_3^2 \varphi_3 + EIa_3^3 w_3 - GA\varphi_3 = 0 & \Rightarrow \varphi_3 = \frac{EIa_3^3 w_3}{EIa_3^2 + GA}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ από τις σχέσεις 2.71 στις σχέσεις 2.70, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} & \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left(E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA} \right) w_1 = q_1 , \\ \xrightarrow{m=2} & E I a_2^4 w_2 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{E I a_2^2 + GA} w_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 = 0 , \\ \xrightarrow{m=3} & E I a_3^4 w_3 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} w_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 = q_3 . \end{aligned} \quad (2.72)$$

Η δεύτερη σχέση γίνεται:

$$\xrightarrow{m=2} \left(E I a_2^4 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{E I a_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 \right) w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 0 . \quad (2.73)$$

Η παρένθεση στη σχέση 2.73 είναι πάντα θετικός αριθμός, συνεπώς $w_2 = 0$. Συνεχίζοντας τις πράξεις στην πρώτη και στην τρίτη εξίσωση της σχέσης 2.72, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} & w_1^3 + \frac{E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA}}{\frac{3EA}{4} a_1^4} w_1 = \frac{4q_1}{3E A a_1^4} , \\ \xrightarrow{m=2} & w_2 = 0 , \\ \xrightarrow{m=3} & w_3 = \frac{q_3}{E I a_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2} . \end{aligned} \quad (2.74)$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης γίνεται με τη μέθοδο του Cardano όπου θα δώσει 2 μιγαδικές λύσεις και μια πραγματική. Για το πρόβλημα που επιλύουμε, αποδεκτή λύση είναι μόνο η πραγματική. Συνεχίζοντας τις πράξεις, οι τρεις εξισώσεις τελικά έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} & w_1^3 + \frac{4GA_0}{(A_0 a_1^2 + GA) E} w_1 - \frac{4q_1}{3E A a_1^4} = 0 , \\ \xrightarrow{m=2} & w_2 = 0 , \\ \xrightarrow{m=3} & w_3 = \frac{q_3}{A_0 a_3^4 - \frac{A_0^2 a_3^6}{A_0 a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2} . \end{aligned} \quad (2.75)$$

TIMOSHENKO - ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΟΡΟΥΣ

Από τις εξισώσεις 2.67 και 2.68 για την προσέγγιση με δυο όρους όπου $k = 1, 2$ και $m = 1, 2, 3$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1, k=1,2} EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 [(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2] &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2, k=1,2} EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 [(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2] &= q_2, \\ \xrightarrow{m=3, k=1,2} EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 [(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2] &= q_3, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} -EIa_1^2 \varphi_1 + EIa_1^3 w_1 - GA\varphi_1 &= 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{EIa_1^3 w_1}{EIa_1^2 + GA}, \\ \xrightarrow{m=2} -EIa_2^2 \varphi_2 + EIa_2^3 w_2 - GA\varphi_2 &= 0 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{EIa_2^3 w_2}{EIa_2^2 + GA}, \\ \xrightarrow{m=3} -EIa_3^2 \varphi_3 + EIa_3^3 w_3 - GA\varphi_3 &= 0 \quad \Rightarrow \varphi_3 = \frac{EIa_3^3 w_3}{EIa_3^2 + GA}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Κάνοντας τις πράξεις στις εξισώσεις της σχέσης 2.76 και θέτοντας $q_2 = 0$ όπως προβλέπει η θεωρία, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2} EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 &= 0, \\ \xrightarrow{m=3} EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 &= q_3. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Κάνοντας αντικατάσταση τις σχέσεις 2.77 στις σχέσεις 2.78, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} EIa_1^4 w_1 - \frac{E^2 I^2 a_1^6 w_1}{EIa_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2} EIa_2^4 w_2 - \frac{E^2 I^2 a_2^6 w_2}{EIa_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 &= 0, \\ \xrightarrow{m=3} EIa_3^4 w_3 - \frac{E^2 I^2 a_3^6 w_3}{EIa_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 &= q_3. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις στις σχέσεις 2.79, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{m=1} & \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left(E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 \right) w_1 = q_1 , \\
 \xrightarrow{m=2} & \left(E I a_2^4 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{E I a_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 \right) w_2 = 0 , \\
 \xrightarrow{m=3} & \left(E I a_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 \right) w_3 = q_3 .
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Ελέγχοντας την παρένθεση της δεύτερης εξίσωσης στη σχέση 2.80, διαπιστώνεται πως η παρένθεση είναι πάντα θετικός αριθμός συνεπώς διάφορος του μηδενός. Συνεπώς, η μόνη αποδεκτή τιμή είναι $w_2 = 0$. Συνεχίζοντας τις πράξεις στην πρώτη και τρίτη εξίσωση της σχέσης 2.80, τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 w_1^3 + \frac{E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA}}{\frac{3EA}{4} a_1^4} w_1 &= \frac{4q_1}{3EA a_1^4} , \\
 w_2 &= 0 , \\
 w_3 &= \frac{q_3}{E I a_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2} .
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Η επίλυση της πρώτης εξίσωσης η οποία είναι μια τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση, γίνεται με τη μέθοδο του Cardano. Η λύση αυτή δίδει 2 μιγαδικές λύσεις και μια πραγματική. Για το στατικό πρόβλημα προς επίλυση, αποδεκτή λύση είναι μόνο η πραγματική.

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι οι άρτιοι όροι είναι μηδενικοί και δεν συμβάλουν στην παραμόρφωση της δοκού. Συνεπώς το $w_2 = 0$. Για την τρίτη εξίσωση που περιέχει το w_3 , εφόσον γίνει η εύρεση του w_1 , με αντικατάσταση προκύπτει το w_3 .

Παρατηρείτε πως στην προσέγγιση με δύο όρους, προκύπτουν οι ίδιες εξισώσεις όπως στην περίπτωση της προσέγγισης με ένα όρο. Έτσι, χρειάζεται μια προσέγγιση με τρεις όρους ώστε να ληφθεί μια πιο ακριβής λύση στο πρόβλημά.

ΤΙΜΟΣΗΝΚΟ - ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΟΡΟΥΣ

Από τις εξισώσεις 2.67 και 2.68 για την προσέγγιση με δυο όρους όπου $k = 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, 3$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1, k=1,2,3} EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 \left[(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2, k=1,2,3} EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 \left[(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] &= q_2, \quad (2.82) \\ \xrightarrow{m=3, k=1,2,3} EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 \left[(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] &= q_3. \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις και θέτοντας $q_2 = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1 w_3^2 &= q_1, \\ EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 &= 0, \quad (2.83) \\ EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 &= q_3. \end{aligned}$$

Η εξίσωση 2.68 για $m = 1, 2, 3$, γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} -EIa_1^2 \varphi_1 + EIa_1^3 w_1 - GA\varphi_1 &= 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{EIa_1^3 w_1}{EIa_1^2 + GA}, \\ \xrightarrow{m=2} -EIa_2^2 \varphi_2 + EIa_2^3 w_2 - GA\varphi_2 &= 0 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{EIa_2^3 w_2}{EIa_2^2 + GA}, \quad (2.84) \\ \xrightarrow{m=3} -EIa_3^2 \varphi_3 + EIa_3^3 w_3 - GA\varphi_3 &= 0 \quad \Rightarrow \varphi_3 = \frac{EIa_3^3 w_3}{EIa_3^2 + GA}. \end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ από τη σχέση 2.84, έχουμε:

$$\begin{aligned} EIa_1^4 w_1 - \frac{E^2 I^2 a_1^6 w_1}{EIa_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1 w_3^2 &= q_1, \\ EIa_2^4 w_2 - \frac{E^2 I^2 a_2^6 w_2}{EIa_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 &= 0, \\ EIa_3^4 w_3 - \frac{E^2 I^2 a_3^6 w_3}{EIa_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 &= q_3. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left(EIa_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{EIa_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_1 = q_1 , \\ & \left(EIa_2^4 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{EIa_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_2 = 0 , \quad (2.86) \\ & \left(\frac{3EA}{4} a_3^4 \right) w_3^3 + \left(EIa_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{EIa_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 \right) w_3 = q_3 . \end{aligned}$$

Ελέγχοντας την παρένθεση της δεύτερης εξίσωσης στη σχέση 2.86, παρατηρούμε ότι η παρένθεση είναι πάντα θετικός αριθμός συνεπώς διάφορος του μηδενός. Άρα η μόνη αποδεκτή τιμή είναι $w_2 = 0$. Συνεχίζοντας τις πράξεις στην πρώτη και τρίτη εξίσωση της σχέσης 2.86, τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left(EIa_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{EIa_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_1 = q_1 , \\ & w_2 = 0 , \quad (2.87) \\ & \left(\frac{3EA}{4} a_3^4 \right) w_3^3 + \left(EIa_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{EIa_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 \right) w_3 = q_3 . \end{aligned}$$

Θέτοντας $A_0 = EI$ και $D_0 = GA = Gbh$, και τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left(A_0 a_1^4 - \frac{A_0^2 a_1^6}{A_0 a_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_1 = q_1 , \\ & w_2 = 0 , \quad (2.88) \\ & \left(\frac{3EA}{4} a_3^4 \right) w_3^3 + \left(A_0 a_3^4 - \frac{A_0^2 a_3^6}{A_0 a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 \right) w_3 = q_3 . \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει σύστημα δυο τριτοβάθμιων πολυωνυμικών εξισώσεων προς επίλυση οι οποίες είναι συζευγμένες.

2.3.4 Επίλυση με Διατμητική Θεωρία Ανώτερης Τάξης

Για την επίλυση του στατικού προβλήματος μιας δοκού κάμψης με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης, οι συντελεστές A_0, B_0, C_0, D_0 θα αλλάζουν ανάλογα με τη θεωρία που επιλέγουμε. Θέτοντας τη διατομή της δοκού $A = bh$, οι εξισώσεις 2.51α και 2.51β γίνονται:

$$A_0 w_m a_m^4 - B_0 \varphi_m a_m^3 + \frac{3EA}{4} w_m a_m^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m, \quad (2.51)$$

$$B_0 w_m a_m^3 - C_0 \varphi_m a_m^2 - D_0 \varphi_m = 0. \quad (2.46)$$

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ 1 ΟΡΟ

Στη συνέχεια για $k = 1$ και $m = 1, 2, 3$ η εξίσωση 2.51 γίνεται:

$$\begin{aligned} (w_1): \quad & A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 = q_1, \\ (w_2): \quad & A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = q_2, \\ (w_3): \quad & A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 = q_3. \end{aligned} \quad (2.89)$$

και από την εξίσωση 2.46 θα λάβουμε τρεις επιπλέον εξισώσεις:

$$\begin{aligned} (\varphi_1): \quad & -C_0 a_1^2 \varphi_1 + B_0 a_1^3 w_1 - D_0 \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{B_0 a_1^3 w_1}{C_0 a_1^2 + D_0}, \\ (\varphi_2): \quad & -C_0 a_2^2 \varphi_2 + B_0 a_2^3 w_2 - D_0 \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{B_0 a_2^3 w_2}{C_0 a_2^2 + D_0}, \\ (\varphi_3): \quad & -C_0 a_3^2 \varphi_3 + B_0 a_3^3 w_3 - D_0 \varphi_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = \frac{B_0 a_3^3 w_3}{C_0 a_3^2 + D_0}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Έτσι, έχουμε στη διάθεση μας έξι εξισώσεις με έξι αγνώστους. Κάνοντας αντικατάσταση τις εξισώσεις 2.90 στις εξισώσεις 2.89, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3 w_1}{C_0 a_1^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 &= q_1, \\
 A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3 w_2}{C_0 a_2^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 &= q_2, \\
 A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \frac{B_0 a_3^3 w_3}{C_0 a_3^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 &= q_3.
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Κάνοντας πράξεις στις τρεις εξισώσεις, και θεωρώντας $q_2 = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w_1^3 \left[\frac{3EA}{4} a_1^4 \right] + w_1 \left[A_0 a_1^4 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3}{C_0 a_1^2 + D_0} \right] - q_1 &= 0, \\
 w_2 \left[A_0 a_2^4 - \frac{B_0^2 a_2^6 w_2}{C_0 a_2^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 \right] &= 0, \\
 w_3 &= \frac{4q_3 (C_0 a_3^2 + D_0)}{4A_0 a_3^4 (C_0 a_3^2 + D_0) - 4B_0^2 a_3^6 + 3EA a_3^2 a_1^2 w_1^2 (C_0 a_3^2 + D_0)}.
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Ελέγχοντας την παρένθεση της δεύτερης εξίσωσης στη σχέση 2.92, παρατηρείται ότι η παρένθεση είναι πάντα θετικός αριθμός συνεπώς διάφορος του μηδενός. Συνεπώς, η μόνη αποδεκτή τιμή είναι $w_2 = 0$. Συνεχίζοντας τις πράξεις στην πρώτη και τρίτη εξίσωση της σχέσης 2.92, τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w_1^3 \left[\frac{3EA}{4} a_1^4 \right] + w_1 \left[A_0 a_1^4 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3}{C_0 a_1^2 + D_0} \right] - q_1 &= 0, \\
 w_2 &= 0, \\
 w_3 &= \frac{4q_3 (C_0 a_3^2 + D_0)}{4A_0 a_3^4 (C_0 a_3^2 + D_0) - 4B_0^2 a_3^6 + 3EA a_3^2 a_1^2 w_1^2 (C_0 a_3^2 + D_0)}.
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ 2 ΟΡΟΥΣ

Η εξίσωση κίνησης 2.51 για $k = 1, 2$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{k=2} A_0 a_m^4 w_m - B_0 a_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \left[(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 \right] &= q_m, \\ \xrightarrow{k=2} A_0 a_m^4 w_m - B_0 a_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2) &= q_m, \end{aligned} \quad (2.94)$$

και για $m = 1, 2, 3$ η ίδια σχέση είναι:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2) &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2} A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2) &= q_2, \\ \xrightarrow{m=3} A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2) &= q_3. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Η εξίσωση κίνησης 2.46 για $m = 1, 2, 3$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} -C_0 a_1^2 \varphi_1 + B_0 a_1^3 w_1 - D_0 \varphi_1 = 0 &\Rightarrow \varphi_1 = \frac{B_0 a_1^3}{(C_0 a_1^2 + D_0)} w_1, \\ \xrightarrow{m=2} -C_0 a_2^2 \varphi_2 + B_0 a_2^3 w_2 - D_0 \varphi_2 = 0 &\Rightarrow \varphi_2 = \frac{B_0 a_2^3}{(C_0 a_2^2 + D_0)} w_2, \\ \xrightarrow{m=3} -C_0 a_3^2 \varphi_3 + B_0 a_3^3 w_3 - D_0 \varphi_3 = 0 &\Rightarrow \varphi_3 = \frac{B_0 a_3^3}{(C_0 a_3^2 + D_0)} w_3. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Εφόσον βρήκαμε 3 εκφράσεις για τα $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, τις κάνουμε αντικατάσταση στις 3 πρώτες εξισώσεις και έχουμε: Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι τα άρτια φορτία q_2, q_4, q_6 είναι πάντα μηδέν. Άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3}{(C_0 a_1^2 + D_0)} w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 &= q_1, \\ A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3}{(C_0 a_2^2 + D_0)} w_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 &= 0, \\ A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \frac{B_0 a_3^3}{(C_0 a_3^2 + D_0)} w_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 &= q_3. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Στη συνέχεια κάνοντας πράξεις στην δεύτερη εξίσωση της σχέσης 2.97, για $q_2 = 0$, έχουμε:

$$w_2 \left(A_0 a_2^4 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3}{(C_0 a_2^2 + D_0)} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 \right) = 0. \quad (2.98)$$

Αποδεικνύοντας πως το $w_2 = 0$, οι εκφράσεις για τα w_1 και w_3 θα είναι οι εξής:

$$\left[\frac{3EA}{4} a_1^4 \right] w_1^3 + \left[A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{(C_0 a_1^2 + D_0)} \right] w_1 = q_1, \quad (2.99)$$

$$w_3 = \frac{4(C_0 a_3^2 + D_0) q_3}{(C_0 a_3^2 + D_0)(4A_0 a_3^4 + 3EA a_1^2 a_3^2 w_1^2 + 3EA a_2^2 a_3^2 w_2^2) - 4B_0^2 a_3^6}. \quad (2.100)$$

Η εξ. 2.99 είναι μια τριτοβάθμια εξίσωση όπου γράφεται στη μορφή $x^3 + cx = d$:

$$w_1^3 + \frac{4A_0(C_0 a_1^2 + D_0) - 4B_0^2 a_1^2}{3EA(C_0 a_1^2 + D_0)} w_1 = \frac{4q_1}{3EA a_1^4}. \quad (2.101)$$

Η αναλυτική λύση μιας τέτοιας εξίσωσης, δίδεται από τον Cardano ως εξής:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}, \quad (2.102)$$

$$\text{όπου } c = \frac{4A_0(C_0 a_1^2 + D_0) - 4B_0^2 a_1^2}{3EA(C_0 a_1^2 + D_0)} \text{ και } d = \frac{4q_1}{3EA a_1^4}$$

Συνεπώς, οι λύσεις για τα w_1 και w_3 είναι:

$$w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EA a_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4A_0(C_0 a_1^2 + D_0) - 4B_0^2 a_1^2}{9EA(C_0 a_1^2 + D_0)}\right)^3} + \frac{2q_1}{3EA a_1^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EA a_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4A_0(C_0 a_1^2 + D_0) - 4B_0^2 a_1^2}{9EA(C_0 a_1^2 + D_0)}\right)^3} - \frac{2q_1}{3EA a_1^4}}, \quad (2.103)$$

$$w_3 = \frac{4(C_0 a_3^2 + D_0) q_3}{(C_0 a_3^2 + D_0)(4A_0 a_3^4 + 3EA a_1^2 a_3^2 w_1^2) - 4B_0^2 a_3^6}. \quad (2.104)$$

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ 3 ΟΡΟΥΣ

Για $k = 1, 2, 3$, η εξίσωση 2.51 γίνεται:

$$\xrightarrow{k=3} A_0 a_m^4 w_m - B_0 a_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \left[(a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] = q_m, \quad (2.105)$$

$$\xrightarrow{k=3} A_0 a_m^4 w_m - B_0 a_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_m, \quad (2.106)$$

και για $m = 1, 2, 3$, η ίδια εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) &= q_1, \\ \xrightarrow{m=2} A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) &= q_2, \\ \xrightarrow{m=3} A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) &= q_3. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Η εξίσωση κίνησης 2.46 για $m = 1, 2, 3$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{m=1} -C_0 a_1^2 \varphi_1 + B_0 a_1^3 w_1 - D_0 \varphi_1 = 0 &\Rightarrow \varphi_1 = \frac{B_0 a_1^3}{(C_0 a_1^2 + D_0)} w_1, \\ \xrightarrow{m=2} -C_0 a_2^2 \varphi_2 + B_0 a_2^3 w_2 - D_0 \varphi_2 = 0 &\Rightarrow \varphi_2 = \frac{B_0 a_2^3}{(C_0 a_2^2 + D_0)} w_2, \\ \xrightarrow{m=3} -C_0 a_3^2 \varphi_3 + B_0 a_3^3 w_3 - D_0 \varphi_3 = 0 &\Rightarrow \varphi_3 = \frac{B_0 a_3^3}{(C_0 a_3^2 + D_0)} w_3. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Εφόσον βρέθηκαν 3 εκφράσεις για τις ποσότητες $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, γίνεται αντικατάσταση στις εξισώσεις κίνησης 2.107 και έχουμε:

$$\begin{aligned} A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3}{(C_0 a_1^2 + D_0)} w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) &= q_1, \\ A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3}{(C_0 a_2^2 + D_0)} w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) &= q_2, \\ A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \frac{B_0 a_3^3}{(C_0 a_3^2 + D_0)} w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) &= q_3. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Στη συνέχεια, κάνοντας πράξεις στις τρεις εξισώσεις της σχέσης 2.109 και θέτοντας $q_2 = 0$ από τη θεωρία, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A_0 a_1^4 w_1 - \frac{B_0^2 a_1^6}{(C_0 a_1^2 + D_0)} w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1 w_3^2 &= q_1, \\
 A_0 a_2^4 w_2 - \frac{B_0^2 a_2^6}{(C_0 a_2^2 + D_0)} w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 &= 0, \\
 A_0 a_3^4 w_3 - \frac{B_0^2 a_3^6}{(C_0 a_3^2 + D_0)} w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 &= q_3.
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις στη σχέση 2.110, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w_1^3 \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) + w_1 \left(A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{(C_0 a_1^2 + D_0)} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) &= q_1, \\
 w_2 \left(A_0 a_2^4 - \frac{B_0^2 a_2^6}{(C_0 a_2^2 + D_0)} + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 \right) &= 0, \\
 w_3^3 \left(\frac{3EA}{4} a_3^4 \right) + w_3 \left(A_0 a_3^4 - \frac{B_0^2 a_3^6}{(C_0 a_3^2 + D_0)} + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 \right) &= q_3.
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι το w_2 είναι ίσο με 0 ή ίσο με την παρένθεση. Έχοντας αποδείξει ότι δεν μπορεί να είναι ίσο με την παρένθεση, η μοναδική αποδεκτή τιμή είναι $w_2 = 0$. Έτσι, οι εξισώσεις 2.111, γίνονται:

$$\begin{aligned}
 w_1^3 \left(\frac{3EA}{4} a_1^4 \right) + w_1 \left(A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{(C_0 a_1^2 + D_0)} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) &= q_1, \\
 w_2 &= 0, \\
 w_3^3 \left(\frac{3EA}{4} a_3^4 \right) + w_3 \left(A_0 a_3^4 - \frac{B_0^2 a_3^6}{(C_0 a_3^2 + D_0)} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 \right) &= q_3.
 \end{aligned} \tag{2.112}$$

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει σύστημα δυο εξισώσεις τρίτους βαθμού. Θα πρέπει να λυθεί η πρώτη εξίσωση συναρτήσει του w_3 και στη συνέχεια να γίνει αντικατάσταση του w_1 στην τρίτη εξίσωση ώστε να βρεθεί ο πρώτος άγνωστος που είναι το w_3 . Έπειτα, κάνοντας αντικατάσταση του w_3 στην πρώτη εξίσωση ώστε να βρεθεί ο δεύτερος άγνωστος, το w_1 . Ύστερα από πράξεις, προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 & 4(C_0 a_1^2 + D_0)^2 (C_0 a_3^2 + D_0)^3 a_1^2 q_3^3 + \\
 & \left[-(C_0 a_1^2 + D_0)^2 (C_0 a_3^2 + D_0)^2 a_1^2 \left[4A_0 (C_0 a_3^2 + D_0) a_3^4 - 4B_0^2 a_3^6 \right] + \right. \\
 & \left. + 8(C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0)^2 a_1^2 a_3^2 \left[B_0^2 \left[(C_0 a_1^2 + D_0) a_3^4 - (C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 \right] + A_0 (C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0)(a_1^2 - a_3^2) \right] \right] q_3^2 w_3 + \\
 & + 4(C_0 a_3^2 + D_0) a_1^2 a_3^4 \\
 & \left[2A_0 B_0^2 (C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0) \left[-3(C_0 a_1^2 + D_0) a_3^6 + 2(C_0 a_1^2 + D_0) a_1^2 a_3^4 + 2(C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 a_3^2 - (C_0 a_3^2 + D_0) a_1^6 \right] \right. \\
 & \left. + A_0^2 (C_0 a_1^2 + D_0)^2 (C_0 a_3^2 + D_0)^2 \left[3a_3^4 + a_1^4 - 4a_1^2 a_3^2 \right] \right. \\
 & \left. + B_0^4 \left[3(C_0 a_1^2 + D_0)^2 a_3^8 + (C_0 a_3^2 + D_0)^2 a_1^8 - 4(C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 a_3^4 \right] \right] q_3 w_3 + \\
 & \left[a_1^2 a_3^4 \left[4A_0 (C_0 a_3^2 + D_0) a_3^4 - 4B_0^2 a_3^6 \right] \right. \\
 & \left. \left[2A_0 B_0^2 (C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0) \left[(C_0 a_1^2 + D_0) a_3^6 - (C_0 a_1^2 + D_0) a_1^2 a_3^4 \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - (C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 a_3^2 + (C_0 a_3^2 + D_0) a_1^6 \right] \right. \\
 & \left. - A_0^2 (C_0 a_1^2 + D_0)^2 (C_0 a_3^2 + D_0)^2 (a_1^2 - a_3^2)^2 \right. \\
 & \left. + B_0^4 \left[-(C_0 a_1^2 + D_0)^2 a_3^8 + (C_0 a_3^2 + D_0)^2 a_1^8 + 2(C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 a_3^4 \right] \right] w_3^3 + \\
 & \left[-EA(C_0 a_1^2 + D_0)^2 (C_0 a_3^2 + D_0)^3 a_1^4 \left[a_1^2 q_3^2 + a_3^2 q_1^2 \right] \right. \\
 & + 2EA(C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0)^2 a_1^2 a_3^6 \\
 & \left. \left[B_0^2 \left[-(C_0 a_1^2 + D_0) a_3^4 + (C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 \right] + A_0 (C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0)(a_3^2 - a_1^2) \right] q_3 w_3^4 + \right. \\
 & \left. + EA(C_0 a_3^2 + D_0) a_1^2 a_3^8 \right. \\
 & \left. \left[2A_0 B_0^2 (C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0) \left[(C_0 a_1^2 + D_0) a_3^6 - (C_0 a_1^2 + D_0) a_1^2 a_3^4 - (C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 a_3^2 + (C_0 a_3^2 + D_0) a_1^6 \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - A_0^2 (C_0 a_1^2 + D_0)^2 (C_0 a_3^2 + D_0)^2 (a_1^2 - a_3^2)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + B_0^4 \left[-(C_0 a_1^2 + D_0)^2 a_3^8 + (C_0 a_3^2 + D_0)^2 a_1^8 + 2(C_0 a_1^2 + D_0)(C_0 a_3^2 + D_0) a_1^4 a_3^4 \right] \right] w_3^5 \right. \\
 & = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.113}$$

Πρόκειται για μια πολυωνυμική εξίσωση 5^{ου} βαθμού. Επιλύεται με αριθμητικούς υπολογισμούς και προκύπτουν τέσσερις λύσεις. Οι δυο λύσεις είναι μιγαδικές, συζυγής και απορρίπτονται. Η τρίτη λύση είναι αρνητική, και επίσης απορρίπτεται, και η τέταρτη λύση είναι θετική και η μόνη αποδεκτή. Συνεπώς, η αποδεκτή λύση είναι η τιμή του w_3 .

Έπειτα, η τιμή του w_1 προκύπτει από τη σχέση:

$$w_1 = \sqrt{\frac{4(C_0 a_3^2 + D_0) q_3 - \left[4A_0 (C_0 a_3^2 + D_0) a_3^4 - 4B_0^2 a_3^6 \right] w_3 - 3EA(C_0 a_3^2 + D_0) a_3^4 w_3^3}{3EA(C_0 a_3^2 + D_0) a_1^2 a_3^2 w_3}}
 \tag{2.114}$$

2.3.5 Αριθμητικά Αποτελέσματα – Γραφικές Παραστάσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσθηκαν οι αναλυτικοί τύποι για τις δύο άγνωστες ποσότητες w_m και φ_m για την κλασσική θεωρία δοκών Euler – Bernoulli, για τη θεωρία Timoshenko και γενικά για διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης.

Θεωρείται μια ισότροπη ελαστική δοκό με ακλόνητα άκρα που υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο $q = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$ με σκοπό την κάμψη. Το μέτρο ελαστικότητας της δοκού είναι $E = 210 \text{ GPa}$, το μέτρο διάτμησης δίδεται από τον τύπο $G = E/2(1+\nu)$ και ο λόγος Poisson είναι $\nu = 0.3$. Το μήκος της δοκού είναι $L = 1 \text{ m}$, το πάχος $b = 0.01 \text{ m}$. Η αναλογία διαστάσεων (*aspect ratio*) συμβολίζεται με S και ορίζεται ως ο λόγος μήκους προς πλάτος (L/h). Το πλάτος h προσαρμόζεται σύμφωνα με το λόγο S . Στους υπολογισμούς που ακολουθούνε για κάθε μη γραμμική θεωρία, ο λόγος S επιλέχθηκε να είναι ίσος με 20 ώστε να γίνεται αισθητή η έννοια της μη γραμμικότητας, συνεπώς, το πλάτος h είναι 0.05 m . Τα αποτελέσματα που προκύπτουν, παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1.

Να σημειωθεί πως στα παρακάτω αποτελέσματα για κάθε θεωρία, περιλαμβάνεται η γραμμική θεωρία, η μη γραμμική μη συζευγμένη θεωρία, δηλαδή η προσέγγιση της μη γραμμικής θεωρίας με ένα όρο ($k=1$) και η μη γραμμική συζευγμένη θεωρία, δηλαδή η προσέγγιση της μη γραμμικής θεωρίας με τρεις όρους ($k=3$) στο σημείο όπου η μετατόπιση είναι μέγιστη και η στροφή μηδενική ($x=0.5$).

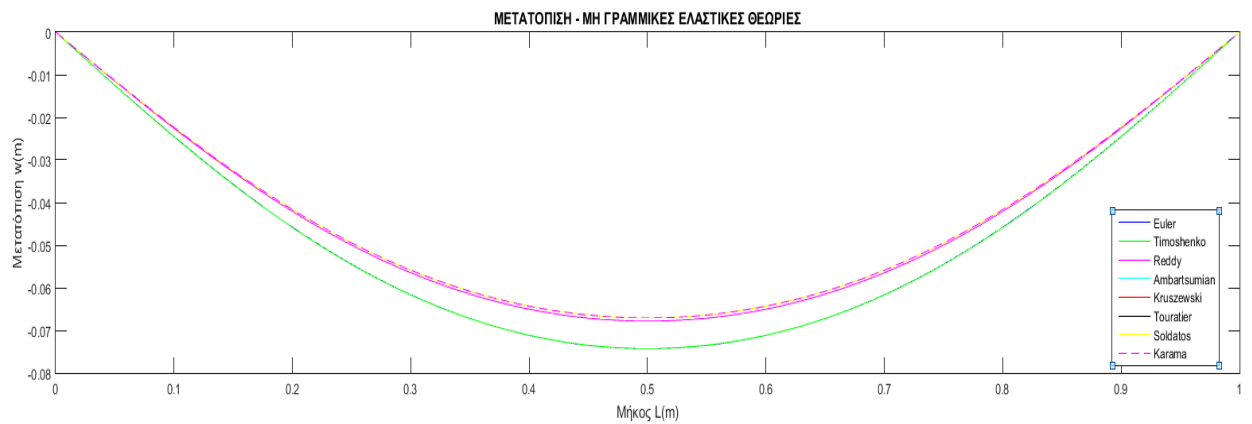
Στη συνέχεια, μέσο προγραμμάτων στο λογισμικό πακέτο *Matlab*, γίνεται ο υπολογισμός των ποσοτήτων αυτών. Συνεπώς, για τις μη γραμμικές ελαστικές θεωρίες δοκών, θα υπολογισθεί η συνολική εγκάρσια μετατόπιση w και η συνολική στροφή φ . Να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η μετατόπιση στα άκρα της δοκού είναι μηδενική εφόσον επιβάλλαμε συνθήκη ακλόνητων άκρων και η στροφή στα σημεία αυτά είναι μέγιστη. Επίσης, η μετατόπιση στο κέντρο της δοκού είναι μέγιστη ενώ η στροφή είναι μηδενική.

Πίνακας 2.1: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w για τις γραμμικές, μη γραμμικές μη συζευγμένες και μη γραμμικές συζευγμένες θεωρίες για ελαστικές δοκούς με $S = 20$ στο κέντρο της δοκού ($x = 0.5$).

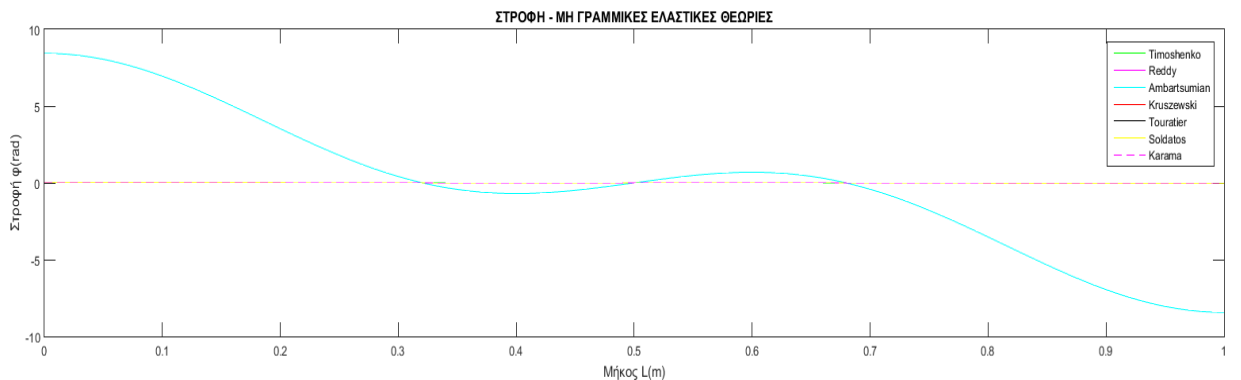
$S = 20$	Θεωρίες	w
	Euler Γραμμική	0.595074935962503
	Euler Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075685740133269
	Euler Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.074293416890883
	Timoshenko Γραμμική	0.598389186375920
	Timoshenko Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075022494186099
	Timoshenko Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.074272343404959
	Ambartsumian Γραμμική	0.598766090972241
	Ambartsumian Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075768563731264
	Ambartsumian Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.067060685720759
	Kruszewski Γραμμική	0.598766090972241
	Kruszewski Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075768563731264
	Kruszewski Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.067060685720759
	Reddy Γραμμική	0.598766090972242
	Reddy Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075768563731264
	Reddy Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.067060685720759
	Touratier Γραμμική	0.598760712229894
	Touratier Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075768531104000
	Touratier Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.067059422350215
	Karama Γραμμική	0.598712980994708
	Karama Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075768242439456
	Karama Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.067133432299118
	Soldatos Γραμμική	0.599007721987721
	Soldatos Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.075769976105226
	Soldatos Μη Γραμμική (Συζευγμένη)	0.067059574747818

Από τον Πίνακα 2.1 γίνεται φανερό πως οι γραμμικές θεωρίες χάνουν την ισχύ τους και παράγουν λανθασμένα αποτελέσματα. Συνεπώς, είναι απαραίτητη η χρήση μη γραμμικών θεωριών για καλύτερα προσεγγιστικά αποτελέσματα στις κάμψης δοκών.

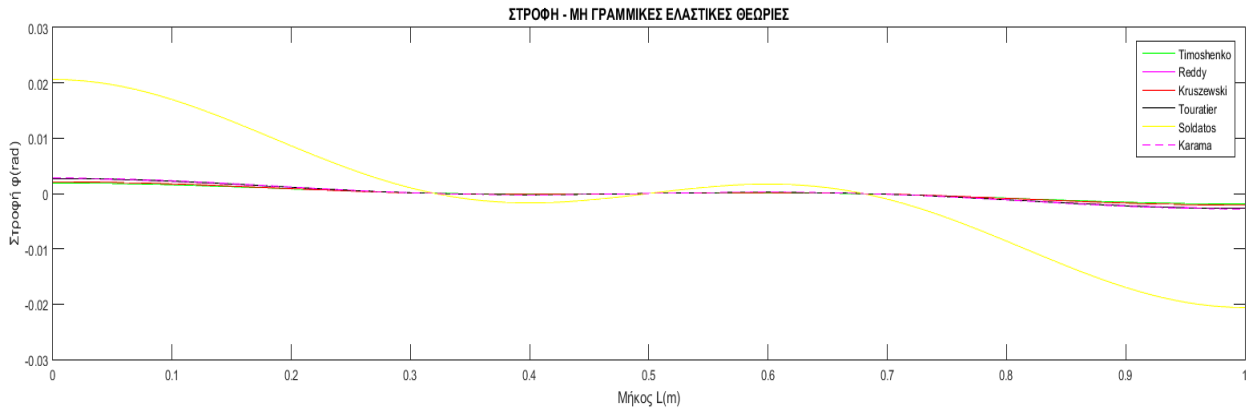
Στη συνέχεια, κατασκευάστηκαν οι γραφικές παραστάσεις με το λογισμικό πακέτο *Matlab*. Θεωρήθηκε σημαντική η απεικόνιση της αλλαγής της παραμόρφωσης w και της αλλαγής της στροφής φ στο συνολικό μήκος L της δοκού. Οι γραφικές παραστάσεις έγιναν για όλες τις μη γραμμικές θεωρίες δοκών με προσέγγιση τριών όρων σε δύο διαγράμματα ώστε να είναι άμεσα συγκρίσιμα. Ο λόγος S στα διαγράμματα είναι ίσος με 20 , δηλαδή το μήκος L της δοκού είναι $1m$ και το πλάτος h είναι $0.05m$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα σχ. 2.2 και 2.3.



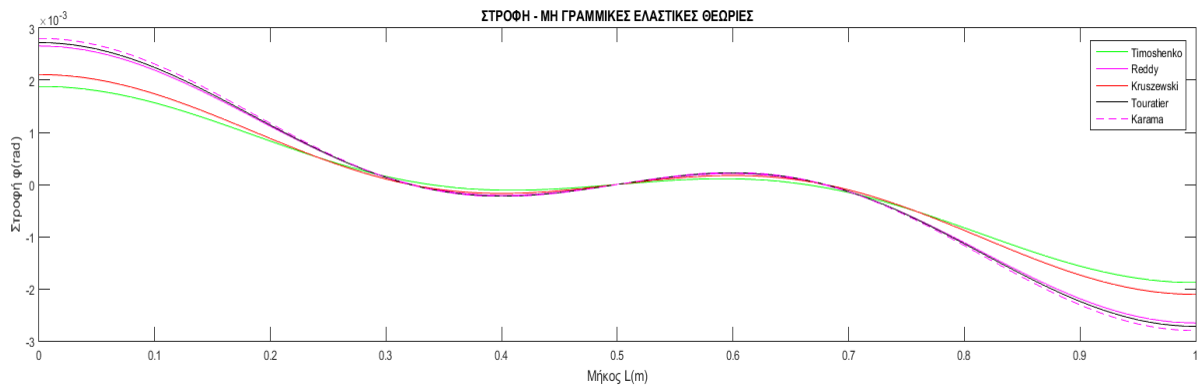
Σχήμα 2.2: Διάγραμμα παραμόρφωσης – μήκους ($w - L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi - L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών.



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi-L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών εκτός της θεωρίας Ambartsumian.



Σχήμα 2.5: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi-L$) για τις μη γραμμικές θεωρίες κάμψης ελαστικών δοκών εκτός των θεωριών Ambartsumian και Soldatos.

Παρατηρείτε πως η γραφική παράσταση της συνάρτησης της στροφής σε όλο το μήκος της δοκού είναι ίδια για όλες τις μη γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας. Η διαφορά βρίσκεται στο γεγονός πως η στροφή στη θεωρία του Ambartsumian προβλέπεται μεγάλη σε αντίθεση με τις υπόλοιπες θεωρίες και είναι της τάξης των $8rad$ έως $-8rad$ κατά μήκος της δοκού. Επίσης, η θεωρία του Soldatos προβλέπει μεγαλύτερη τη στροφή σε σχέση με τις υπόλοιπες θεωρίες και είναι της τάξης των $0.02rad$ έως $-0.02rad$. Οι υπόλοιπες θεωρίες προβλέπουν τη στροφή από $3 \times 10^{-3} rad$ έως $-3 \times 10^{-3} rad$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες του πιεζοηλεκτρισμού κυρίως όπως έχουν δοθεί στα ακόλουθα κείμενα και μελέτες (Jaffe et. al, 1971), (Lentzen, 2007), (Locatelli, 2001), (Marinković, 2007), (Piefort, 2001), (Tichy et al., 2010). Ήδη από την αρχαιότητα, οι ντόπιοι κάτοικοι της Ινδίας και της Κεϋλάνης είχαν παρατηρήσει μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των κρυστάλλων του ορυκτού τουρμαλίνη. Εάν το συγκεκριμένο ορυκτό το τοποθετούσαν μέσα σε ζεστή τέφρα, τότε απ' τη μια πλευρά προσέλκυε τα σωματίδια τέφρας ενώ απ' την αντίθετη πλευρά τα απέρριπτε.

Στις αρχές του 18ου αιώνα, μέσω του εμπορίου, οι κρύσταλλοι τουρμαλίνη εισήχθησαν στην Ευρώπη. Το 1747, ο *Linne* ονόμασε τους κρυστάλλους τουρμαλίνη *lapis electricus* (λατινική φράση που σημαίνει «η ηλεκτρική πέτρα»). Η ηλεκτρική προέλευση της συμπεριφοράς αυτής αποδείχθηκε από το Γερμανό φυσικό *Aepinus*, το 1754.

Ο *Charles Augustin de Coulomb* ήταν ο πρώτος που μελέτησε την παραγωγή ηλεκτρικού φορτίου από το μηχανικό χειρισμό της στερεάς ύλης στην πραγματεία του πάνω στον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό μεταξύ του 1781 και του 1806. Το 1817, το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο αναφέρθηκε από τον *René Just Haiÿ*, ο οποίος παρατήρησε την παρουσία ηλεκτρικών φορτίων στην επιφάνεια ενός κρυστάλλου *τουρμαλίνη* υπό τάση.

Το 1824, ο Σκωτσέζος φυσικός *D. Brewster* παρατήρησε την ίδια διαδικασία με διάφορους κρυστάλλους και έδωσε στο φαινόμενο την ονομασία *πυροηλεκτρισμός*. Πυροηλεκτρισμός είναι η ικανότητα ορισμένων υλικών να παράγουν προσωρινό ηλεκτρικό δυναμικό όταν υπόκεινται σε αλλαγή θερμοκρασίας. Η αλλαγή της θερμοκρασίας τροποποιεί ελαφρώς τις θέσεις των ατόμων μέσα στην κρυσταλλική δομή, έτσι ώστε να αλλάζει η πόλωση του υλικού. Αυτή η αλλαγή πόλωσης προκαλεί ένα προσωρινό ηλεκτρικό δυναμικό, το οποίο εξαφανίζεται μετά το διηλεκτρικό χρόνο χαλάρωσης.

Ωστόσο, η ανακάλυψη του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου αποδόθηκε στους *Pierre* και *Jacques Curie*, το 1880, κατά τη διάρκεια των πειραματικών τους εργασιών (*Curie &*

Curie, 1880α), (Curie & Curie 1880β), (Curie & Curie 1881) σχετικά με την κρυσταλλογραφία, με βασικό παράδειγμα το άλας Rochelle. Οι αδελφοί *Curie* προέβλεψαν τις κατηγορίες των κρυστάλλων καθώς και τις συνθήκες υπό τις οποίες θα παρατηρούσε κάποιος τον πιεζοηλεκτρισμό.

Ο όρος *πιεζοηλεκτρισμός* «piezoelectricity» προτάθηκε από τον *Hermann Hankel* το 1881 (Hankel, 1881). Την ίδια χρονιά, ο *Lippman* (Lippman, 1881) προέβλεψε μαθηματικά το αντίστροφο φαινόμενο βασιζόμενος στις θερμοδυναμικές αρχές. Το 1883, οι αδελφοί *Curie* επιβεβαίωσαν το αντίστροφο φαινόμενο μέσα από πειραματικές μελέτες και συνέχισαν ώστε να εξάγουν ποσοτική απόδειξη της πλήρους αναστρεψιμότητας των ηλεκτρο-ελαστο-μηχανικών παραμορφώσεων στους πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους. Οι αδελφοί *Curie* εφαρμόζοντας το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, εφεύραν διάφορα όργανα, όπως τον ηλεκτρομετρητή από χαλαζία, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε ευρέως στη συνέχεια σε πειράματα ραδιενέργειας.

Το 1893, ο *William Thomson Kelvin* παρουσίασε διάφορα αναλογικά μοντέλα και έθεσε μερικά από τα πιο βασικά πλαίσια που οδήγησαν στη σύγχρονη θεωρία του πιεζοηλεκτρισμού. Το 1894, ο *Woldemar Voigt* (Voigt, 1910) παρουσίασε τις εξισώσεις τάσης που περιγράφουν τη γραμμική συμπεριφορά των πιεζοηλεκτρικών κρυστάλλων με βάση τις ιδέες που έθεσε ο *Kelvin*. Ο *Voigt* χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τη λέξη *τανυστής* «tensor» για να περιγράψει τη μηχανική παραμόρφωση.

Μέχρι τις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ο πιεζοηλεκτρισμός συνέχισε να αναπτύσσεται τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά σε εργαστήρια. Ωστόσο, οι πρώτες σημαντικές εφαρμογές εμφανίστηκαν λόγω των στρατιωτικών απαιτήσεων του Α Παγκοσμίου Πολέμου. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια του 1914-1918, ο *Paul Langevin* χρησιμοποίησε τον πιεζοηλεκτρικό μετατροπέα χαλαζία ως υποβρύχιο ραντάρ (sonar) για την ανίχνευση υποβρυχίων. Από το 1920 μέχρι τον Β Παγκόσμιο Πόλεμο, το Πολεμικό Ναυτικό των ΗΠΑ χρησιμοποίησε μονοκρυσταλλικό άλας Rochelle ως τον πρότυπο υποβρύχιο κρυσταλλο-μετατροπέα (Pötsch, Fischer & Müller, 1989).

Το 1921, ο Αμερικανός καθηγητής *Walter G. Cady* εφεύρε τον ταλαντωτή από κρυστάλλους χαλαζία και το φίλτρο κρυστάλλων χαλαζία στενής ζώνης τα οποία χρησιμοποιούνται και σήμερα στα συστήματα επικοινωνίας. Σημαντική πρόοδος ήταν η παραγωγή κοπής $AT^{[1]}$ και $BT^{[2]}$ από τον κρυστάλλο του χαλαζία. Κατά τη διάρκεια της

δεκαετίας του 1920, ο *Max Born* παρήγαγε θεωρητικούς υπολογισμούς του πλέγματος ενός κρυστάλλου για τον πιεζοηλεκτρικό συντελεστή στο Göttingen. Μέχρι το 1936, συνέχισε τις έρευνές του σχετικά με τη δυναμική θεωρία των κρυσταλλικών πλεγμάτων στο Edinburgh. Το 1940, ο Αμερικανός επιστήμονας *Warren P. Mason* παρήγαγε περισσότερες κοπές κρυστάλλων για πιο ακριβή πρότυπα συχνοτήτων και ανέπτυξε ισοδύναμα μοντέλα κυκλωμάτων για πιεζοηλεκτρικούς συντονιστές.

Ένα πολύ σημαντικό στάδιο στην έρευνα των πιεζοηλεκτρικών υλικών και ειδικά στις εφαρμογές τους στις σύγχρονες εφαρμογές ήταν η ανακάλυψη του φαινομένου του σιδηροηλεκτρισμού από τον *J. Valasek* (Valasek, 1920). Τα σιδηροηλεκτρικά υλικά εμφανίζουν μία ή περισσότερες φάσεις και εμφανίζουν περιοχές πόλωσης στις οποίες η ηλεκτρική πόλωση μπορεί να αλλάξει κατεύθυνση με ένα κατάλληλα εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

Από το 2^ο Παγκόσμιο Πόλεμο, τα πιεζοηλεκτρικά υλικά χρησιμοποιήθηκαν όλο και περισσότερο εξαιτίας της ανάπτυξης ηλεκτρονικών εφαρμογών και της ανακάλυψης των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών. Μετά το τέλος του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου παρήχθη το πιεζοηλεκτρικό κεραμικό $BaTiO_3$, και αργότερα, δημιουργήθηκαν πιεζοηλεκτρικά κεραμικά από ζirkόνιο $PbZrO_3$, τιτάνιο $PbTiO_3$ ή *PZT* κεραμικά και αντικατέστησαν το $BaTiO_3$ σε όλους τους τομείς των πιεζοηλεκτρικών εφαρμογών εξαιτίας των εξαιρετικών τους ιδιοτήτων. Σήμερα, τα πιεζοηλεκτρικά υλικά που χρησιμοποιούνται κατά κόρον είναι τα πολυκρυσταλλικά σιδηροηλεκτρικά κεραμικά, όπως το *PZT*, και τα πιεζοηλεκτρικά πολυμερή, όπως το *PVDF* λόγω του χαμηλού κόστους κατασκευής τους και των σχεδόν αυθαίρετων πιθανών μορφών που μπορούν να πάρουν. Επιπλέον, τα υλικά αυτά έχουν πολύ καλές πιεζοηλεκτρικές και διηλεκτρικές ιδιότητες που τα κάνουν ιδιαίτερα χρήσιμα στην κατασκευή διεγερτών (Heartling, 1999), (Zhou, 2003).

[1] AT: Η κρυσταλλολογία AT είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική κοπής και χρησιμοποιείται ιδιαίτερα για ηλεκτρονικά όργανα κ.λπ. όπου οι ταλαντωτές πρέπει να λειτουργούν στην περιοχή από 500 kHz έως περίπου 300 MHz, αν και το ανώτατο όριο αυξάνεται όσο αναπτύσσεται η τεχνολογία.

[2] BT: Πρόκειται για μια άλλη τεχνική κοπής παρόμοια με την κοπή AT, που χρησιμοποιεί όμως διαφορετική γωνία: 49° από τον άξονα z. Παρέχει επαναλαμβανόμενα χαρακτηριστικά και έχει σταθερά συχνότητας 2,536 MHz/mm. Παρόλο που τα χαρακτηριστικά της δεν είναι τόσο καλά όσο στην κοπή AT, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευκολότερα για λειτουργία υψηλότερων συχνοτήτων λόγω της υψηλότερης σταθερότητάς της.

3.2 ΈΞΥΠΝΑ ΥΛΙΚΑ

3.2.1 Πιεζοηλεκτρικά και άλλα έξυπνα υλικά

Κάποια ξεχωριστά υλικά που αλλάζουν ριζικά τις ιδιότητες τους ύστερα από την επιβολή εξωτερικών ερεθισμάτων, όπως η τάση, η θερμοκρασία, η υγρασία, τα ηλεκτρικά ή τα μαγνητικά πεδία, ονομάζονται έξυπνα υλικά. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται συνοπτικά τα πιο σημαντικά έξυπνα υλικά καθώς και αυτά που χρησιμοποιούνται πιο συχνά σε εφαρμογές. Παραδείγματα τέτοιων έξυπνων υλικών είναι τα πιεζοηλεκτρικά υλικά, τα ηλεκτροσυστολικά υλικά, τα μαγνητοσυστολικά υλικά και τα κράματα μνήμης σχήματος (*shape memory alloys*). Στον πίνακα 3.1 παρουσιάζονται τα κύρια χαρακτηριστικά των έξυπνων αυτών υλικών.

Πίνακας 3.1: Οι κύριες ιδιότητες των έξυπνων υλικών.

	Πιεζοκεραμικά (PZT)	Πιεζοπολυμερή (PVDF)	Ηλεκτροσυστολικά (PMN)	Μαγνητοσυστολικά (Terfenol-D)	SMA (Nitinol)
Επίπεδη					
Μέγιστη	0.13%	0.07%	0.1%	0.2%	0.2% - 0.8%
Παραμόρφωση					
Μέτρο					
Ελαστικότητας	60.6	2	64.5	29.7	28 - 90
(GPA)					
Ποκνότητα					
(kg/m³)	7500	1780	7800	9250	7100
Ποκνότητα					
Ενέργειας	6.8	0.28	4.1	6.4	250-4000
(J/kg)					
Υστέρηση	10%	>10%	<1%	2%	Υψηλή
Εύρος					
θερμοκρασίας	-20 έως 120	-40 έως 140	0 έως 40	-50 έως 380	-
(°C)					
Εύρος					
ζώνης	100 kHz	100 kHz	100 kHz	< 10 kHz	< 5 kHz

Πιεζοηλεκτρικά υλικά

Ο πιεζοηλεκτρισμός είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο ορισμένα υλικά με την εφαρμογή τάσης αναπτύσσουν πόλωση. Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται σε υλικά που δεν έχουν κεντρική συμμετρική κρυσταλλική δομή. Παραδείγματα πιεζοηλεκτρικών υλικών είναι το άλας Rochelle, ο χαλαζίας και το πιο δημοφιλές, το *PZT* (*Lead Zirconate Titanate*). Ιστορικά, τα πιεζοηλεκτρικά υλικά που βρήκαν γόνιμο έδαφος στις εφαρμογές είναι το άλας Rochelle και ο χαλαζίας. Σήμερα, τα πιεζοκεραμικά υλικά, όπως το *PZT*, προσφέρουν ιδιότητες που επιτρέπουν την ανάπτυξη ενεργών δομικών συσκευών. Το *PZT* χρησιμοποιείται ευρέως ως διεγέρτης ή αισθητήρας για ευρύ φάσμα συχνοτήτων, συμπεριλαμβανομένων των εφαρμογών υπερήχων, και προσφέρει υψηλή ακρίβεια. Τα πιεζοπολυμερή, όπως το φθοριούχο πολυβινυλιδένιο (*PVDF* ή *PVF₂*), χρησιμοποιούνται κυρίως ως αισθητήρες λόγω της χαμηλής ακαμψίας τους και επομένως λειτουργούν ως αρχές ελέγχου σε δύσκαμπτες ελαφριές δομές. Τόσο το *PZT* όσο και το *PVDF* έχουν χαμηλή ανακτιήσιμη παραμόρφωση, αλλά ευρεία ζώνη συχνοτήτων.

Άλλα έξυπνα υλικά

Τα μαγνητοσυστολικά υλικά, όπως το γνωστό *Terfenol-D*, παρουσιάζουν χαμηλή ανακτιήσιμη παραμόρφωση υπό την επιβολή μαγνητικού πεδίου και ευρεία ζώνη συχνοτήτων. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως στοιχεία μεταφοράς φορτίου (μόνο υπό συμπίεση) για στατικές και δυναμικές εφαρμογές υψηλής ακρίβειας. Ωστόσο, η κατανάλωση ενέργειας στις στατικές εφαρμογές είναι υψηλότερη από την κατανάλωση των πιεζοκεραμικών, όπου απαιτείται να εφαρμοστεί μόνο μια στατική τάση. Τα ηλεκτροσυστολικά υλικά, όπως το *Lead Magnesium Niobate* (*PMN*), είναι παρόμοια με τα μαγνητοσυστολικά υλικά όμως λειτουργούν σε στενότερο εύρος θερμοκρασιών.

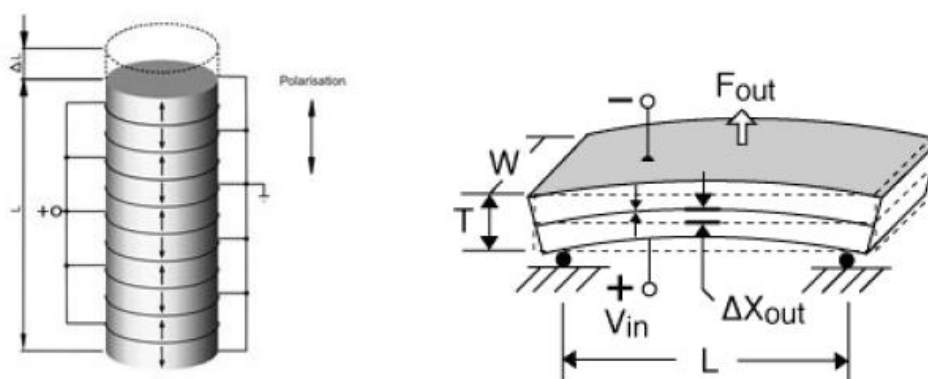
Μια ακόμη κατηγορία έξυπνων υλικών είναι τα κράματα μνήμης σχήματος (*SMA*). Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο υλικό στην κατηγορία αυτή είναι ένα κράμα νικελίου και τιτανίου που ονομάζεται *Nitinol*. Επιτρέπει την ανάκτηση υψηλής πίεσης από την αλλαγή φάσης που προκαλείται από τη θερμοκρασία. Λόγω της δύσκολης ψύξης του, λειτουργεί σε χαμηλές συχνότητες και σε εφαρμογές χαμηλής ακρίβειας. Το κύριο πλεονέκτημα των *SMA* είναι η δυνατότητα επίτευξης πολύπλοκων κινήσεων με πολύ λίγα στοιχεία, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με μικρή αλλαγή θερμοκρασίας (Piefort, 2001).

3.2.2 Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες και εφαρμογές

Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες εφαρμόζονται σε πλήθος συσκευών μαζικής παραγωγής, όπως είναι: οι συσκευές εκπομπής ήχου, οι μετατροπείς και αισθητήρες υπερηχητικής ισχύος, οι διεγέρτες κάμψης σε μηχανές ύφανσης, οι κεφαλές εκτυπωτών, οι διεγέρτες για την κάμψη δοκών σε βαλβίδες, τα οπτικά συστήματα και πρόσφατα, ως πολυστρωματικοί διεγέρτες στα συστήματα ψεκασμού στην αυτοκινητοβιομηχανία.

Μερικά από τα βασικά πλεονεκτήματα που τους επιτρέπουν την χρήση σε ένα τόσο ευρύ φάσμα εφαρμογών, είναι η δυνατότητα δημιουργίας συμπαγών κατασκευών που καταλαμβάνουν μικρό όγκο, η υψηλή ακρίβεια διέγερσης και οι πάρα πολύ μικροί χρόνοι απόκρισης που διαθέτουν, η απουσία φαινομένων τριβής, η ικανότητα χειρισμού σε συνθήκες κενού καθώς και σε πιθανές κρυογονικές θερμοκρασίες (Uchino, 2004).

Το μεγαλύτερο μέρος των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών έχει κυρίως τη μορφή στοίβας σωρευμένων λεπτών πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων και τη μορφή δοκών κάμψης όπως απεικονίζονται στο σχήμα 3.1. Οι διεγέρτες με τη μορφή στοίβας βασίζονται στο διάμηκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (*longitudinal piezoelectric effect*) (τύπου 33d) και αποτελούνται συνήθως από αρκετά κεραμικά πιεζοηλεκτρικά στρώματα με μεταβαλλόμενη διεύθυνση ηλεκτρικής πόλωσης.



Σχήμα 3.1: Διεγέρτες με τη μορφή στοίβας και τη μορφή δοκού κάμψης.

Οι επαφές των ηλεκτροδίων του κάθε στρώματος χρησιμοποιούνται για τη καθοδήγηση του διεγέρτη. Με αυτόν τον τύπο διεγέρτη μπορούν να επιτευχθούν πολύ

ισχυρές δυνάμεις (μηχανικές τάσεις) με ταυτόχρονες μικρές επιμηκύνσεις (ελαστικές παραμορφώσεις), της τάξης μερικών μικρομέτρων (μm), καθώς και πολύ υψηλά ηλεκτρικά δυναμικά λειτουργίας, της τάξης των kV . Οι σωρευμένοι διεγέρτες χρησιμοποιούνται συνήθως σε τεχνολογικές εφαρμογές της αυτοκινητοβιομηχανίας, ως οδηγοί βαλβίδων έγχυσης καυσίμου και σε οπτικά μέσα, ως οδηγοί υψηλής ακρίβειας.

Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με τη μορφή δοκών κάμψης βασίζονται στο εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (*transverse piezoelectric effect*) (τύπου $31d$) και εφαρμόζονται εκεί που απαιτούνται μεγάλες παραμορφώσεις. Τοποθετούνται συνήθως στην επιφάνεια εύκαμπτων ελαστικών δοκών.

Η εφαρμογή μικρής ηλεκτρικής τάσης, της τάξης των $24 - 200V$, στα ηλεκτρόδια του διεγέρτη προκαλεί παραμόρφωση του διεγέρτη, σε κατεύθυνση κάθετη προς την ηλεκτρική πόλωση. Η παραμόρφωση του πιεζοηλεκτρικού διεγέρτη αποτελεί την αιτία εμφάνισης ροπής κάμψης στην ελαστική δοκό επί της οποίας είναι τοποθετημένος. Έτσι, είναι εφικτές μεγάλες παραμορφώσεις της τάξης μερικών εκατοντάδων μικρομέτρων.

Τα πιο γνωστά και αντιπροσωπευτικά παραδείγματα πιεζοηλεκτρικών διεγερτών, με τη μορφή δοκών κάμψης, αποτελούν:

- οι *μονόμορφες δομές* (monomorph) που αποτελούνται από ένα ενεργό πιεζοηλεκτρικό στρώμα και ένα παθητικό ελαστικό στρώμα,
- οι *δίμορφες δομές* (bimorph) που αποτελούνται από δυο ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα
- και οι *τρίμορφες δομές* (trimorph) που αποτελούνται από ένα παθητικό ελαστικό στρώμα ανάμεσα σε δυο ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα.

Πρόσφατες τεχνικές εξελίξεις οδήγησαν στη δημιουργία μονόμορφων πιεζοηλεκτρικών δοκών με *πολυστρωματική τεχνολογία*, όπου ο διεγέρτης αποτελείται από αρκετά παθητικά ελαστικά εύκαμπτα και ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα. Η πολυστρωματική τεχνολογία έχει ως αποτέλεσμα το πλεονέκτημα της χρήσης ακόμα χαμηλότερων ηλεκτρικών δυναμικών λειτουργίας, επεκτείνοντας έτσι σημαντικά το πεδίο των βιομηχανικών εφαρμογών των πιεζοηλεκτρικών δοκών κάμψης.

3.3 ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

3.3.1 Το Πιεζοηλεκτρικό Φαινόμενο

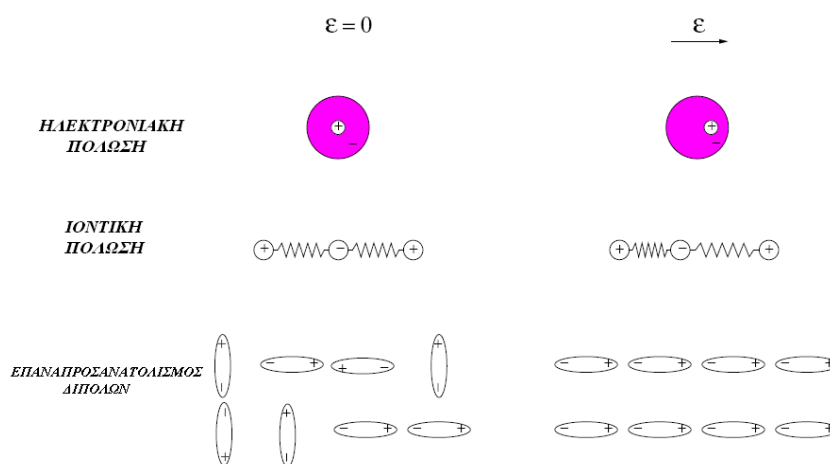
Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ένα χαρακτηριστικό για συγκεκριμένες κατηγορίες ανισότροπων κρυστάλλων και μπορεί να θεωρηθεί ως η «μεταφορά» μεταξύ ηλεκτρικής και μηχανικής ενέργειας. Τέτοιες μεταφορές συμβαίνουν μόνο αν το υλικό αποτελείται από φορτισμένα σωματίδια και μπορεί να είναι πολωμένο. Όταν το υλικό επιβάλλεται σε μηχανική παραμόρφωση, παράγεται ηλεκτρική πόλωση. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως *ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο*. Το *αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο* συμβαίνει όταν ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο οδηγεί σε μηχανική παραμόρφωση ενός υλικού.

Για ένα υλικό που παρουσιάζει μια ανισοτροπική ιδιότητα όπως η πιεζοηλεκτρική, η κρυσταλλική του δομή δεν πρέπει να έχει κέντρο συμμετρίας. Οι κρύσταλλοι αυτοί ταξινομούνται σε επτά συστήματα, ανάλογα με τους βαθμούς συμμετρίας τους και ξεκινώντας από το λιγότερο συμμετρικό, υπάρχουν τα τρικλινικά, τα μονοκλινικά, τα ορθορομβικά, τα τετραγωνικά, τα τριγωνικά, τα εξαγωνικά και τα κυβικά συστήματα. Διακρίνονται επίσης σε τριάντα δύο κατηγορίες ανάλογα με τη συμμετρία τους σε σχέση με ένα σημείο. Είκοσι μία κρυσταλλικές δομές από τις τριάντα δύο είναι μη κεντροσυμμετρικές και από αυτές οι είκοσι μπορούν να εμφανίσουν το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο κατά μήκος των κατευθυντήριων αξόνων. Εντούτοις, δέκα από τις είκοσι πιεζοηλεκτρικές κατηγορίες έχουν μοναδικό άξονα κατεύθυνσης κατά μήκος του οποίου εμφανίζουν *αυθόρμητη πόλωση* P_s , ανάλογα με το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας. Τέτοιοι κρύσταλλοι ονομάζονται πολικοί κρύσταλλοι και αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *πυροηλεκτρικό φαινόμενο* όπως αναφέραμε πιο πάνω. Μπορεί να διακριθεί μια ειδική υποομάδα, από την πυροηλεκτρική ομάδα, με βάση τον αναπροσανατολισμό και το μεταβλητό μέγεθος της κύριας κατάστασης πόλωσης υπό την επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. Τα πιο σημαντικά πιεζοηλεκτρικά υλικά προέρχονται σήμερα από αυτή την υποομάδα τα οποία χαρακτηρίζονται ως σιδηροηλεκτρικοί κρύσταλλοι.

Τα περισσότερα από τα πιεζοηλεκτρικά υλικά που ενδιαφέρουν τις τεχνολογικές εφαρμογές είναι τα κρυσταλλικά στερεά. Μπορούν να είναι απλοί κρύσταλλοι, όπως αυτοί που εμφανίζονται στη φύση ή δημιουργώντας τους με συνθετικές διεργασίες, ή πολυκρυσταλλικά υλικά όπως τα σιδηροηλεκτρικά κεραμικά, τα οποία μπορούν να γίνουν

πιεζοηλεκτρικά και να δοθούν, σε μακροσκοπική κλίμακα, κατά προσέγγιση ως απλοί κρύσταλλοι συμμετρίας με τη διαδικασία της πόλωσης, που συνίσταται στην υποβολή ενός κρυστάλλου σε ένα υψηλό ηλεκτρικό πεδίο, όχι πολύ κάτω από τη θερμοκρασία Curie. Όπως αναφέρθηκε, η ηλεκτρική πόλωση είναι σημαντική στην πιεζοηλεκτρική δράση. Ένα υλικό που μπορεί να είναι πολωμένο κάτω από ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο καλείται διηλεκτρικό. Μπορούν να διακριθούν τρεις πηγές της μακροσκοπικής πόλωσης ενός διηλεκτρικού υλικού όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2:

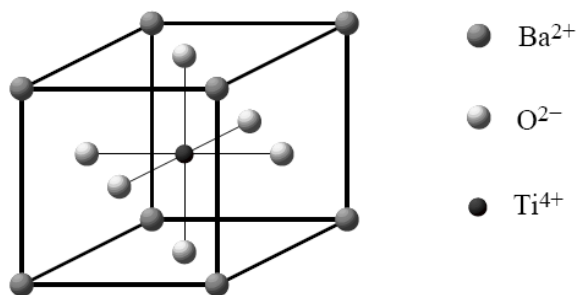
- *Ηλεκτρονιακή πόλωση*: όταν εφαρμόζεται ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, δημιουργείται μακροσκοπικό δίπολο από την παραμόρφωση του ηλεκτρονιακού νέφους. Η ηλεκτρονιακή πόλωση αντιπροσωπεύει την παραμόρφωση της κατανομής ηλεκτρονίων ή της κίνησης γύρω από τους πυρήνες σε ένα ηλεκτρικό πεδίο.
- *Ιονική πόλωση*: όταν εφαρμόζεται ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, τα ανιόντα προσελκύονται από την άνοδο και τα κατιόντα από την κάθοδο, δημιουργώντας ένα δίπολο από την παραμόρφωση των δεσμών μεταξύ ανιόντων και κατιόντων. Προκύπτει από τη μεταβολή της διπολικής ροπής που συνοδεύει την έκταση των χημικών δεσμών ανάμεσα σε ανόμοια άτομα στα μόρια.
- *Επαναπροσανατολισμός διπόλων*: όταν εφαρμόζεται ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, οι πολωμένες περιοχές επαναπροσανατολίζονται. Η πόλωση του προσανατολισμού προκαλείται από τη μερική ευθυγράμμιση των πολικών μορίων, δηλαδή των μορίων που έχουν μόνιμες διπολικές ροπές, σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αυτός ο μηχανισμός οδηγεί σε πόλωση, εξαρτώμενη από τη θερμοκρασία, σε χαμηλότερες συχνότητες.



Σχήμα 3.2: Οι τρεις πηγές προέλευσης της πόλωσης.

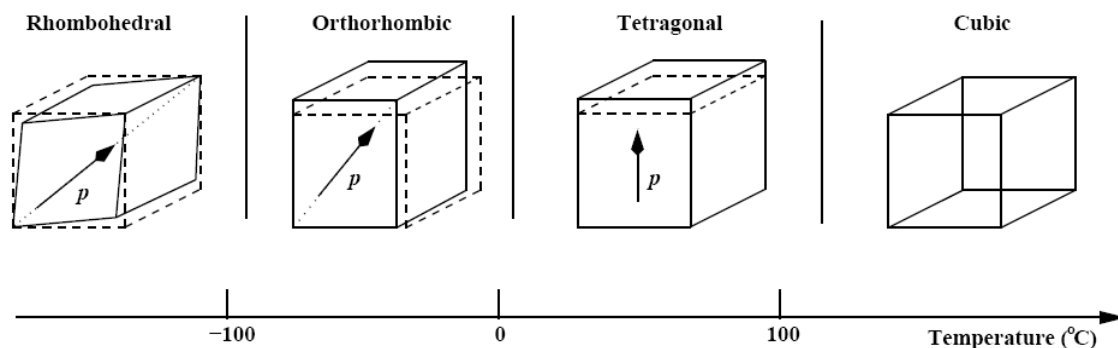
Σιδηροηλεκτρικά κεραμικά

Πολλά πιεζοηλεκτρικά (συμπεριλαμβανομένων και των σιδηροηλεκτρικών υλικών) κεραμικά όπως το $BaTiO_3$, το $PbTiO_3$, το PZT και το $PLZT$ έχουν τη δομή περοβσκίτη. Ένας τέτοιος κρύσταλλος απλής κυβικής δομής περοβσκίτη, όπως είναι το $BaTiO_3$, περιγράφεται στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Κυβική δομή της μοναδιαίας κυψελίδας του $BaTiO_3$.

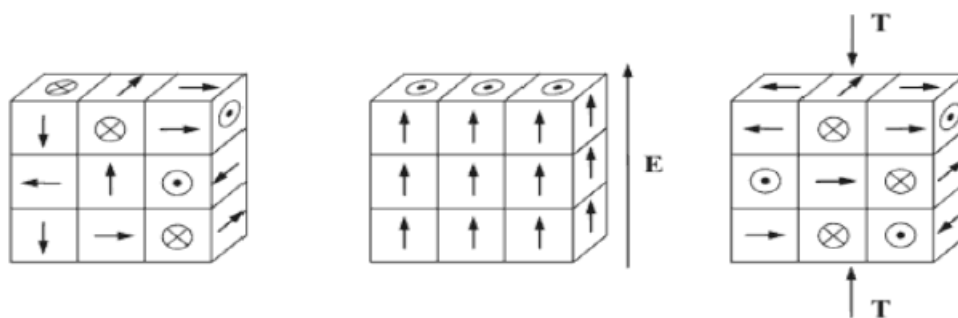
Πάνω από τη θερμοκρασία Curie ($T_c = 130^\circ C$ για το $BaTiO_3$), η κρυσταλλική δομή του είναι κυβική με το ιόν του τιτανίου να βρίσκεται στο κέντρο της συμμετρίας. Με μείωση της θερμοκρασίας κάτω από το σημείο Curie, η κρυσταλλική δομή αλλάζει σε μια πιο σύνθετη δομή η οποία δεν είναι κεντροσυμμετρική και παρουσιάζεται ένα φυσικό ηλεκτρικό δίπολο (*ferroelectricity*). Η μείωση της θερμοκρασίας προκαλεί μεταβολή της δομής του κρυστάλλου του τιτανικού βαρίου από κυβική ($T > +130^\circ C$), σε τετραγωνική ($+5^\circ C < T < +130^\circ C$), στη συνέχεια σε ορθορομβική ($-90^\circ C < T < +5^\circ C$) και τέλος σε



Σχήμα 3.4: Παραμόρφωση πλέγματος μοναδιαίας κυψελίδας του $BaTiO_3$ σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία και την κατεύθυνση της αυθόρμητης πόλωσης.

ρομβοεδρική ($T < -90^{\circ}\text{C}$). Ταυτόχρονα, εμφανίζεται μια αυθόρμητη πόλωση p . Η κατεύθυνση της πόλωσης είναι κατά μήκος μιας εκ των τριών ακμών της τετραγωνικής φάσης, κατά μήκος μιας εκ των έξι επιφανειακών διαγωνίων στην ορθορομβική φάση και κατά μήκος μιας εκ των τεσσάρων επίπεδων διαγωνίων στην ρομβοεδρική φάση όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4. Και οι δύο προσανατολισμοί κατά μήκος της επιτρεπόμενης κατεύθυνσης είναι δυνατοί σε κάθε περίπτωση. Η κατεύθυνση της p μπορεί να αλλάξει όταν εφαρμόζεται ένα υψηλό ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των επιτρεπόμενων κατευθύνσεων που χαρακτηρίζονται για κάθε σιδηροηλεκτρική φάση και ο προσανατολισμός μπορεί επίσης να αντιστραφεί.

Τα σιδηροηλεκτρικά κεραμικά διαθέτουν περιοχές με ομοιόμορφη πόλωση που ονομάζονται σιδηροηλεκτρικά πεδία ή περιοχές *Weiss* (*Weiss domains*). Τα σύνορα που διαχωρίζουν τις περιοχές σε ένα κρύσταλλο ονομάζονται τοιχώματα (*domain wall*). Σε μια περιοχή, όλα τα ηλεκτρικά δίπολα ευθυγραμμίζονται προς την ίδια κατεύθυνση. Συνήθως, ένας σιδηροηλεκτρικός μονοκρύσταλλος αποτελείται από πολλές περιοχές, σε κάθε μια από τις οποίες το ηλεκτρικό δίπολο είναι ευθυγραμμισμένο σε μια συγκεκριμένη επιτρεπόμενη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5. Κάθε επιτρεπόμενη κατεύθυνση έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Λόγω αυτού του γεγονότος, το καθαρό ηλεκτρικό δίπολο που αθροίζεται σε ολόκληρο τον κρύσταλλο είναι μηδέν.

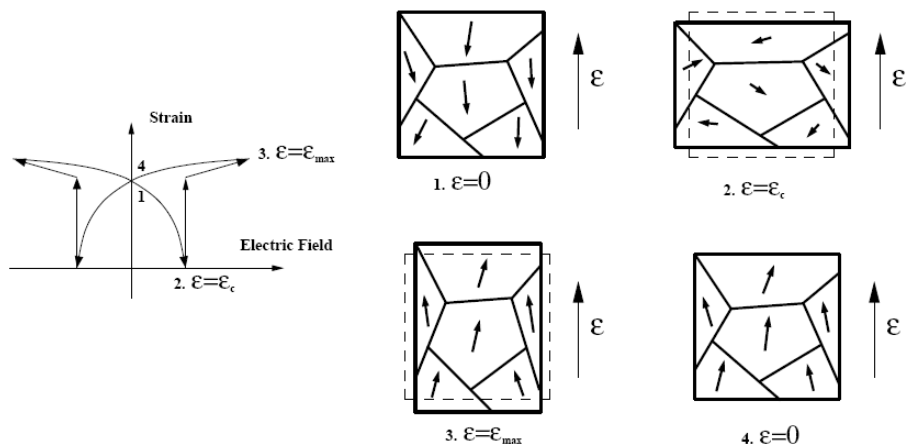


Σχήμα 3.5: Προσανατολισμός περιοχών σε απλό σιδηροηλεκτρικό κρύσταλλο. Από αριστερά: μη-πολωμένος, πολωμένος και αποπολωμένος κρύσταλλος.

Παρ' όλα αυτά, το βασικό χαρακτηριστικό του σιδηροηλεκτρικού είναι ο αναπροσανατολισμός των περιοχών στην κατάσταση πόλωσης. Τα σιδηροηλεκτρικά κεραμικά μπορούν να γίνουν πιεζοηλεκτρικά σε οποιαδήποτε επιλεγμένη πολική

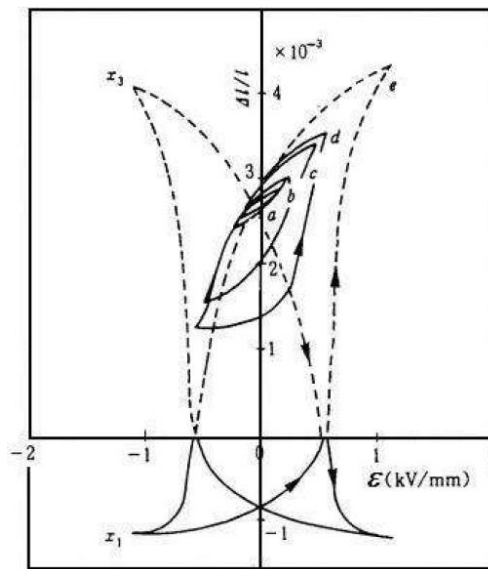
κατεύθυνση ανάλογα με την επεξεργασία της πολικότητας. Αυτή η επεξεργασία συνεπάγεται την έκθεση του υλικού σε υψηλό ηλεκτρικό πεδίο, σε θερμοκρασία όχι κατώτερη από το σημείο Curie, και έπειτα ψύξη στη θερμοκρασία δωματίου με το εφαρμοζόμενο πεδίο. Αυτό οδηγεί σε μια λογική ευθυγράμμιση του ηλεκτρικού διπόλου των επιμέρους περιοχών. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί μια τέλεια ευθυγράμμιση επειδή ο προσανατολισμός των τομέων είναι τυχαίος και επιτρέπονται μόνο ορισμένες διπολικές κατευθύνσεις εντός του κρυστάλλου. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετές επιτρεπόμενες κατευθύνσεις σε κάθε περιοχή και για το λόγο αυτό είναι εφικτός ένας λογικός βαθμός ευθυγράμμισης με το πεδίο. Μετά την ψύξη και την αφαίρεση του ηλεκτρικού πεδίου, τα δίπολα δεν μπορούν εύκολα να επιστρέψουν στις αρχικές τους κατευθύνσεις και επιτυγχάνεται μια παραμένουσα πόλωση του υλικού. Με αυτό τον τρόπο, το σιδηροηλεκτρικό υλικό έχει γίνει μόνιμα πιεζοηλεκτρικό και μπορεί να μετατρέψει τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια και αντίστροφα.

Το σχήμα 3.6 αναπαριστά σχηματικά την αλλαγή της παραμόρφωσης σε σχέση με το ηλεκτρικό πεδίο και τον αναπροσανατολισμό του πεδίου σε ένα σιδηροηλεκτρικό πιεζοκεραμικό με πολλές περιοχές. Ο αναπροσανατολισμός απαιτεί ο προσανατολισμός των πολικών περιοχών να είναι αντίθετος με την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Ως εκ τούτου, το υλικό αρχικά είναι πολωμένο κατά μήκος της αρνητικής κατεύθυνσης (σημείο 1) και εφαρμόζεται σε αυτό ένα ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης. Παρατηρείτε ότι ο κρύσταλλος διαθέτει μια αυθόρμητη παραμόρφωση στο $\varepsilon = 0$ (σημείο 1). Ο κρύσταλλος πρώτα συρρικνώνεται με την αύξηση του ηλεκτρικού πεδίου. Η αύξηση του πεδίου έχει σαν αποτέλεσμα την ακύρωση της αυθόρμητης παραμόρφωσης. Η παραμόρφωση φθάνει στο ελάχιστο σε ένα συγκεκριμένο πεδίο (καταναγκαστικό πεδίο ε_c) και η πόλωση του κάθε κόκκου αρχίζει να αντιστρέφεται (σημείο 2). Καθώς το ηλεκτρικό πεδίο αυξάνεται περαιτέρω, ο κρύσταλλος επεκτείνεται μέχρι το ε_{max} (σημείο 3). Κοντά στο σημείο όπου $\varepsilon = \varepsilon_{max}$, όλες οι αναστρέψιμες πολώσεις αντιστρέφονται. Με τη μείωση του ηλεκτρικού πεδίου, η παραμόρφωση μειώνεται μονοτονικά, καθώς δεν λαμβάνει χώρα αναστροφή πόλωση μέχρις ότου επιτευχθούν οι διαστάσεις που είχε στην αρχή της διαδικασίας (σημείο 4). Παρ'όλα αυτά, η πόλωση των περιοχών αντιστρέφεται και το υλικό τώρα είναι πολωμένο κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης.



Σχήμα 3.6: Αναπροσανατολισμός της πόλωσης και αλλαγή της παραμόρφωσης.

Στο σχήμα 3.7 φαίνονται οι τυπικές καμπύλες τάσης που προκαλούνται από το ηλεκτρικό πεδίο για το *PZT*. Σε έναν κύκλο με ένα σχετικά μικρό μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο, η καμπύλη παραμόρφωσης που προκαλείται από το πεδίο είναι σχεδόν γραμμική (καμπύλη α). Για τους σκοπούς της μοντελοποίησης χρησιμοποιούνται οι γραμμικές πιεζοηλεκτρικές καταστατικές εξισώσεις. Καθώς το ηλεκτρικό πεδίο αυξάνεται, η καμπύλη παραμορφώνεται και παρουσιάζει μεγαλύτερη υστέρηση (b, c, d). Όταν το ηλεκτρικό πεδίο υπερβεί το *καταναγκαστικό πεδίο*, η καμπύλη παραμόρφωσης που προκαλείται από το πεδίο μετασχηματίζεται τελικά σε συμμετρικό σχήμα πεταλούδας. Αυτό προκαλείται από την πόλωση που οφείλεται στον αναπροσανατολισμό του διπόλου.



Σχήμα 3.7: Η παραμόρφωση που προκαλείται από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο πιεζοηλεκτρικό υλικό PZT (Piefort, 2001).

Πολυμερή

Ο πιεζοηλεκτρισμός μπορεί επίσης να επιτευχθεί με προσανατολισμό των μοριακών διπόλων των πολικών πολυμερών στην ίδια κατεύθυνση. Στο πολυμερές *PVDF*, τα άτομα φθορίου είναι πολύ πιο ηλεκτροαρνητικά από τα άτομα άνθρακα και προσελκύουν ηλεκτρόνια από τα άτομα άνθρακα. Η έλξη ηλεκτρονίων έχει ως αποτέλεσμα την πόλωση των μοριακών τμημάτων. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την έκθεση του πολυμερούς σε επαρκώς υψηλό ηλεκτρικό πεδίο μετά από μηχανική διάταση (*stretching*). Το *PVDF* είναι πολύ ελαφρύ, εύκαμπτο και μπορεί εύκολα να μορφοποιηθεί. Έχει καλή σταθερότητα με την πάροδο του χρόνου και δεν εμφανίζει σοβαρή αποπόλωση όταν εκτίθεται σε πολύ υψηλά εναλλασσόμενα ηλεκτρικά πεδία. Το *PVDF* είναι το πλέον κατάλληλο για εφαρμογές ανίχνευσης, αλλά δεν είναι πολύ αποτελεσματικό ως διεγέρτης σε δύσκαμπτες δομές.

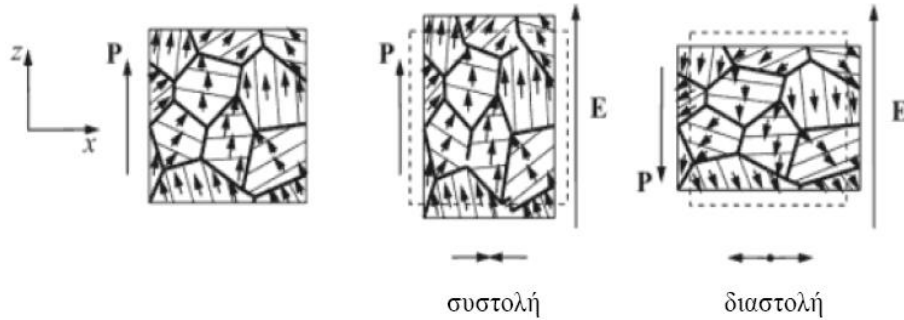
3.3.2 Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με μορφή δοκών κάμψης

Όλα τα είδη των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών, βασίζονται το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Εφαρμόζοντας δηλαδή ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο πιεζοηλεκτρικό υλικό, εμφανίζονται εκτάσεις και συμπίεσεις του υλικού οι οποίες εξαρτώνται απ' τον προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη κρυσταλλική δομή στην περίπτωση των μονοκρυσταλλικών υλικών και από τον προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη παραμένουσα πόλωση στην περίπτωση των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών. Η μεταβολή του μήκους του πιεζοηλεκτρικού υλικού, χρησιμοποιείται συνήθως για την δημιουργία γραμμικών διεγερτών (σωρευμένοι διεγέρτες), αξιοποιώντας το διάμηκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Αυτό το είδος ταλαντωτών, χαρακτηρίζονται από μικρές μετατοπίσεις και τη δημιουργία υψηλών δυνάμεων.

Γραμμικοί πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες, χρησιμοποιούνται σε διαφορετικά πεδία εφαρμογών (π.χ. ως υδάτινοι υπερηχητικοί ταλαντωτές, στην αυτοκινητοβιομηχανία, στην οπτική). Οι πολύ μικρές παραμορφώσεις σε υψηλά ηλεκτρικά δυναμικά (1-10kV), αποτελούν μειονέκτημα για το συγκεκριμένο είδος διεγερτών.

Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμόζοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση της παραμένουσας πόλωσης P_r του σιδηροηλεκτρικού κεραμικού, εκτός από τη χωρική ευθυγράμμιση των περιοχών πόλωσης του υλικού, αυτό έχει ως αποτέλεσμα και

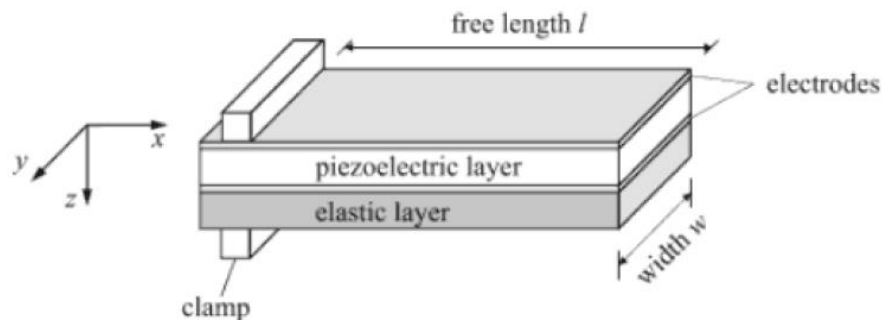
την αύξηση ή μείωση της συνολικής παραμόρφωσης κατά μήκος της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτές οι διαμήκεις εκτάσεις ή συμπίσεις του υλικού, συνδυάζονται με εγκάρσιες συμπίσεις ή εκτάσεις κάθετες στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο). Τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Εγκάρσια παραμορφωτική συμπεριφορά των PZT κεραμικών. Από αριστερά: κατάσταση πόλωσης, ηλεκτρικό πεδίο παράλληλα ευθυγραμμισμένο στην παραμένουσα πόλωση και ηλεκτρικό πεδίο αντιπαράλληλα ευθυγραμμισμένο στην παραμένουσα πόλωση.

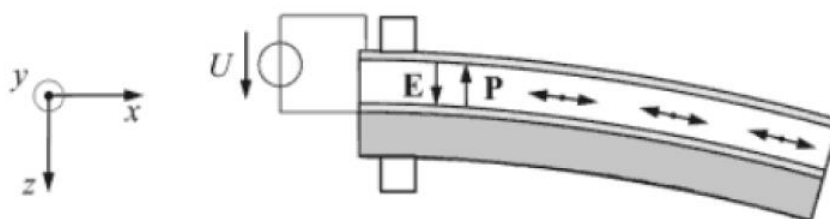
Αυτό το χαρακτηριστικό των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών από PZT, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία των λεγόμενων *μονόμορφων δομών* (σχήμα 3.9). Μια τέτοια δομή, αποτελείται από ένα ενεργό πιεζοκεραμικό και ένα παθητικό ελαστικό στρώμα.

Αν το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από ένα μόνο στρώμα, τότε αναφερόμαστε σε *μονοστρωματικό* τύπο. Αν όμως το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από περισσότερα ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα, τότε αναφερόμαστε σε *πολυστρωματικό* τύπο.



Σχήμα 3.9: Αλληλουχία στρωμάτων σε μονόμορφη δομή.

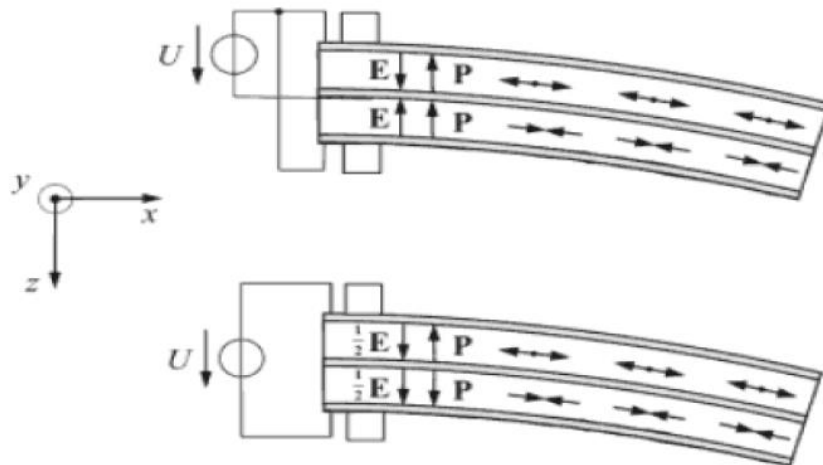
Η κίνηση του πιεζοκεραμικού στοιχείου, που οφείλεται στην έκταση ή την συμπίεση του, περιορίζεται απ' το παθητικό ελαστικό στοιχείο. Αυτό έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση μηχανικής ροπής με αποτέλεσμα την παραμόρφωση της συνολικής δομής (σχ. 3.10). Η παραμόρφωση της συνολικής δομής στη διεύθυνση z , είναι πολύ μεγαλύτερη απ' τη παραμόρφωση του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου στη διεύθυνση x . Έτσι οι μικρές μεταβολές του μήκους του πιεζοκεραμικού στοιχείου μετατρέπονται σε παραμόρφωση κάμψης. Με τον τρόπο αυτό, είναι δυνατό να δημιουργηθούν μεγάλες παραμορφώσεις στη διεύθυνση z , ακόμα και όταν ο διεγέρτης ενεργοποιείται με χαμηλά ηλεκτρικά δυναμικά (24-200V).



Σχήμα 3.10: Συμπεριφορά μονόμορφης δομής που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο.

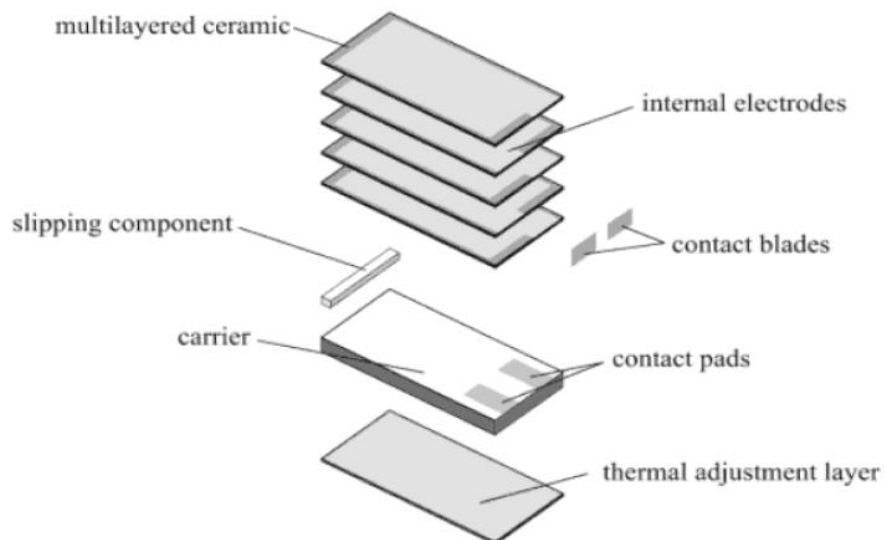
Για να αυξήσουμε τη παραμόρφωση κάμψης του συστήματος δοκού – διεγέρτη, το παθητικό ελαστικό στοιχείο μπορεί ν' αντικατασταθεί από ένα δεύτερο ενεργό πιεζοκεραμικό στοιχείο.

Αυτή είναι η λεγόμενη *δίμορφη δομή*. Θεωρούμε εδώ μια δίμορφη δομή μονοστρωματικού τύπου. Αν οι διευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης και των δυο πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων είναι οι ίδιες και τα στρώματα οδηγούνται με μια παράλληλη ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα καλείται *παράλληλη δίμορφη δομή*. Αν οι κατευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης των δυο στρωμάτων είναι αντίθετες και τα στρώματα οδηγούνται με μια σειριακή ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα ονομάζεται *σειριακή δίμορφη δομή* (σχ. 3.11).



Σχήμα 3.11: Συμπεριφορά δίμορφης δομής, που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο. Επάνω φαίνεται η παράλληλη δίμορφη δομή και κάτω η σειριακή δίμορφη δομή.

Το πλεονέκτημα στη σειριακή ηλεκτρική σύνδεση αποτελεί το γεγονός ότι δεν απαιτείται η παρουσία εσωτερικής επαφής και επομένως εσωτερικού ηλεκτροδίου. Το μειονέκτημα όμως είναι ότι στο εσωτερικό του κάθε πιεζοηλεκτρικού στρώματος, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι σχεδόν η μισή σε σχέση με αυτή στην παράλληλη δίμορφη δομή.



Σχήμα 3.12: Δομή μονόμορφης δοκού κάμψης πολυστρωματικού τύπου.

Στο παραπάνω σχήμα περιγράφεται η δομή μιας μονόμορφης δοκού κάμψης με πιεζοηλεκτρικό στρώμα πολυστρωματικού τύπου. Το πιεζοκεραμικό στοιχείο, αποτελείται από 5 ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα και το παθητικό στοιχείο αποτελείται από ένα στρώμα – φορέα και ένα θερμικά προσαρμοσμένο στρώμα.

Συνήθως, τα ηλεκτρόδια συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να διασφαλίζεται η εναλλασσόμενη πολικότητα μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων (ηλεκτρική παράλληλη σύνδεση). Συγκρίνοντας με τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά μονοστρωματικού τύπου, το χαμηλό ηλεκτρικό δυναμικό αποτελεί πλεονέκτημα των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών πολυστρωματικού τύπου (Schreiner, Binding & Helke, 2000). Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες μονοστρωματικού τύπου, απαιτούν ηλεκτρικό δυναμικό λειτουργίας τουλάχιστον 200V ενώ στους αντίστοιχους διεγέρτες πολυστρωματικού τύπου, το δυναμικό λειτουργίας μειώνεται στα 24V.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ

Στο κεφάλαιο, αυτό, παρουσιάζονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς, ορίζονται οι σταθερές του πιεζοηλεκτρικού υλικού που θα χρησιμοποιήσουμε στα παραδείγματά και γίνεται η αναλυτική επίλυση ενός στατικού προβλήματος κάμψης μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού. Οι τάσεις του υλικού δίδονται σε αυτή την ενότητα σε ένα ορθο-κανονικό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο ο τρίτος άξονας είναι το πάχος. (Vu, 2011). Θεωρούμε το ηλεκτρικό πεδίο και το ηλεκτρικό δυναμικό πολωμένα στην κατεύθυνση του πάχους.

4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Τα διανύσματα τάσεις και παραμόρφωσης εισάγονται με τη μορφή πινάκων ως:

$$\{\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{E}\} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

Γενικά, για ένα ελαστικό σώμα μέσα σε ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, το διάνυσμα τάσης $\{\mathbf{S}\}$ και το διάνυσμα παραμόρφωσης $\{\mathbf{E}\}$, σε ορθοκανονικές συντεταγμένες, δίδονται με τη μορφή πινάκων σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.2)$$

με

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= E_1 \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, & C_{2222} &= E_2 \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{\Delta}, & C_{3333} &= E_3 \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta}, \\
 C_{1122} &= E_1 \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta}, & C_{1133} &= E_3 \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta}, & C_{2233} &= E_2 \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta}, \\
 C_{2323} &= G_{23}, & C_{1313} &= G_{13}, & C_{1212} &= G_{12},
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad \text{και} \quad \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad \text{όπου } E_i \text{ είναι το μέτρο}$$

ελαστικότητας στην i κατεύθυνση, G_{ij} το μέτρο διάτμησης στο επίπεδο (ij) και ν_{ij} ο λόγος Poisson μεταξύ της εγκάρσιας παραμόρφωσης στην κατεύθυνση j και της διαμήκη παραμόρφωσης στην i κατεύθυνση. Αξιοποιώντας τις συμμετρίες των μηχανικών ταυιστών, εισάγεται η χρήση δεικτών κατά Voigt (Πίνακας 4.1).

Πίνακας 4.1: Η χρήση δεικτών κατά Voigt.

ij ή kl	11	22	33	23 ή 32	13 ή 31	12 ή 21
p ή q	1	2	3	4	5	6

Με τη χρήση αυτού του συμβολισμού εκμεταλλευόμαστε τις υλικές συμμετρίες ώστε να μειωθεί ο αριθμός των σταθερών του υλικού. Για παράδειγμα, η γραφή του πίνακα c_{ijkl} μπορεί να αντικατασταθεί με το c_{mn} . Με την παραδοχή αυτή έχουμε:

$$\left\{ \begin{matrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{matrix} \right\}, \tag{4.4}$$

Για να περιγράψουμε τη στατική και δυναμική συμπεριφορά των πιεζοηλεκτρικών δοκών κάμψης, είναι απαραίτητο να περιγράψουμε πρώτα την εντατική και παραμορφωτική κατάσταση καθώς και την ελαστική συμπεριφορά ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου. Με βάση αυτά, είναι δυνατή η κατασκευή των απαραίτητων θερμοδυναμικών δυναμικών και των πιεζοηλεκτρικών καταστατικών εξισώσεων που προκύπτουν. Οι καταστατικές εξισώσεις ενός πιεζοηλεκτρικού συνεχούς μέσου μπορούν

συνεπώς να ληφθούν με τη χρήση μιας θερμοδυναμικής προσέγγισης (Arfken & Weber, 1995), (Boas, 1983), (Piefort, 2001), (Solecki & Conant, 2003), (Tiersten, 1969). Η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας γράφεται ως εξής:

$$dU = \Theta d\Sigma + T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i . \quad (4.5)$$

Η σχέση 4.5 περιγράφει την σχέση ενός θερμοδυναμικά ορισμένου δυναμικού, με τις εκτατικές ποσότητες Σ , D_i και S_{ij} του συστήματος και αποτελεί τη βάση για τη θερμοδυναμική ανάλυση ελαστικών διηλεκτρικών με πιεζοηλεκτρικά χαρακτηριστικά. Στις παρακάτω θεωρήσεις, θα διατηρούνται αμετάβλητες είτε η θερμοκρασία Θ ή η πυκνότητα εντροπίας Σ του συστήματος. Κατά συνέπεια, οι σταθερές του υλικού που θα εμφανίζονται στις καταστατικές εξισώσεις θα ισχύουν για αδιαβατικές και ισόθερμες μεταβολές. Από τη σχέση 4.5, προκύπτει ότι, για αδιαβατικές μεταβολές ($d\Sigma = 0$), η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας θα έχει τη μορφή: $U = U(D_i, S_{ij})$, όποτε:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial D_i} \right)_S dD_i + \left(\frac{\partial U}{\partial S_{ij}} \right)_D dS_{ij} . \quad (4.6)$$

Ομοίως, οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές E_i και T_{ij} του συστήματος θα έχουν την μορφή: $E_i = E_i(D_i, S_{ij})$ και $T_{ij} = T_{ij}(D_i, S_{ij})$, όποτε:

$$dE_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial D_k} \right)_S dD_k + \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_{kl}} \right)_D dS_{kl} , \quad (4.7)$$

$$dT_{ij} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial D_k} \right)_S dD_k + \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_D dS_{kl} . \quad (4.8)$$

Οι σχέσεις 4.7 και 4.8, ονομάζονται γραμμικές καταστατικές εξισώσεις. Παρακάτω, τα ζεύγη (T, E) και (S, E) θεωρούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές.

4.1.1 Καταστατικές Εξισώσεις με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές (T, E)

Αναπτύσσοντας τα ακόλουθα ολικά διαφορικά (σχέσεις 4.9 – 4.10):

$$d(T_{ij}S_{ij}) = \frac{\partial(T_{ij}S_{ij})}{\partial T_{ij}} dT_{ij} + \frac{\partial(T_{ij}S_{ij})}{\partial S_{ij}} dS_{ij} ,$$

$$d(T_{ij}S_{ij}) = S_{ij}dT_{ij} + T_{ij}dS_{ij} , \quad (4.9)$$

και

$$d(E_iD_i) = \frac{\partial(E_iD_i)}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial(E_iD_i)}{\partial D_i} dD_i ,$$

$$d(E_iD_i) = D_i dE_i + E_i dD_i , \quad (4.10)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις 4.9 και 4.10, από την εξίσωση 4.5, προκύπτει:

$$d(U - T_{ij}S_{ij} - E_iD_i) = -D_i dE_i - S_{ij} dT_{ij} . \quad (4.11)$$

Ορίζοντας την ενθαλπία H ως:

$$H = U - T_{ij}S_{ij} - E_iD_i , \quad (4.12)$$

από την εξίσωση 4.11 προκύπτει ότι:

$$dH = -D_i dE_i - S_{ij} dT_{ij} , \quad (4.13)$$

και το συμπέρασμα ότι $H = H(E_i, T_{ij})$. Επομένως:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial E_i} \right)_T dE_i + \left(\frac{\partial H}{\partial T_{ij}} \right)_E dT_{ij} .$$

Συνεπώς, οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές D_i και S_{ij} είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών E_i και T_{ij} ενώ τα ολικά διαφορικά τους έχουν την μορφή:

$$dD_i = \left(\frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_T dE_k + \left(\frac{\partial D_i}{\partial T_{kl}} \right)_E dT_{kl} , \quad (4.14)$$

$$dS_{ij} = \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_k} \right)_T dE_k + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} \right)_E dT_{kl} . \quad (4.15)$$

Οι σχέσεις 4.14 και 4.15, αποτελούν ένα σύστημα καταστατικών εξισώσεων για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών (\mathbf{T}, \mathbf{E}) , απ' όπου μπορούν να εξαχθούν οι υλικές σταθερές που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.2: Υλικές σταθερές πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Υλική σταθερά	Ονομασία	Μονάδα στο SI
$\frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \varepsilon_{ik}$	Ηλεκτρική διαπερατότητα	$[\varepsilon_{ik}] = F/m$
$\frac{\partial D_i}{\partial T_{kl}} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_k} = d_{ikl}$	Πιεζοηλεκτρική σταθερά	$[d_{ikl}] = C/V$
$\frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} = s_{ijkl}$	Ελαστική σταθερά ακαμψίας	$[s_{ijkl}] = m^2/N$

Λαμβάνοντας υπόψη τις υλικές σταθερές, οι οποίες ορίζονται στον παραπάνω πίνακα, οι καταστατικές εξισώσεις για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών (\mathbf{T}, \mathbf{E}) , παίρνουν την μορφή:

$$D_i = \varepsilon_{ik}^T E_k + d_{ikl} T_{kl} , \quad (4.16)$$

$$S_{ij} = d_{ijk} E_k + s_{ijkl}^E T_{kl} . \quad (4.17)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις 4.16 και 4.17 θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια για την εξαγωγή της στατικής συμπεριφοράς μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού σε κάμψη (διεγέρτης). Η βάση για την περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς μιας τέτοιας δοκού, είναι η ηλεκτρική ενθαλπία H_e .

4.1.2 Ηλεκτρική Ενθαλπία και Καταστατικές Εξισώσεις με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές (S, E)

Με δεδομένο ότι οι μεταβλητές S και E θεωρούνται τώρα ως νέες ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος, αφαιρώντας την εξίσωση 4.10 από την 4.5, προκύπτει:

$$d(U - E_i D_i) = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i . \quad (4.18)$$

Ορίζοντας την ηλεκτρική ενθαλπία H_e ως:

$$H_e = U - E_i D_i , \quad (4.19)$$

προκύπτει ότι:

$$dH_e = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i , \quad (4.20)$$

και το συμπέρασμα ότι $H_e = H_e(S_{ij}, E_i)$. Επομένως, θα ισχύει:

$$dH_e = \left(\frac{dH_e}{dS_{ij}} \right)_E dS_{ij} - \left(\frac{dH_e}{dE_i} \right)_S dE_i . \quad (4.21)$$

Οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές T_{ij} και D_i θα είναι επίσης συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών E_i και S_{ij} , οπότε τα ολικά διαφορικά τους θα έχουν την μορφή:

$$dT_{ij} = \left(\frac{dT_{ij}}{dS_{kl}} \right)_E dS_{kl} + \left(\frac{dT_{ij}}{dE_k} \right)_S dE_k , \quad (4.22)$$

$$dD_i = \left(\frac{dD_i}{dS_{kl}} \right)_E dS_{kl} + \left(\frac{dD_i}{dE_k} \right)_S dE_k . \quad (4.23)$$

Οι σχέσεις 4.22 και 4.23, αποτελούν ένα σύστημα καταστατικών εξισώσεων για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών (S, E) , απ' όπου μπορούν να εξαχθούν οι υλικές σταθερές που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.3: Ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές σταθερές πιεζοηλεκτρικών υλικών.

Υλική σταθερά	Ονομασία	Μονάδα στο SI
$\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} = c_{ijkl}$	Ελαστικές σταθερές	$[c_{ijkl}] = IN/m^2$
$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} = -\frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} = -e_{ijk}$	Πιεζοηλεκτρικές σταθερές	$[e_{ijk}] = IC/m^2$

Λαμβάνοντας υπόψη τις υλικές σταθερές, που ορίζονται στον παραπάνω πίνακα, οι καταστατικές εξισώσεις για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών (S, E) , παίρνουν την μορφή:

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k, \quad (4.24)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} - \varepsilon_{ik}^S E_k. \quad (4.25)$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση 4.5, η οποία ισχύει για ισόθερμη ή αδιαβατική μεταβολή και με τη βοήθεια της 4.19, προκύπτει η μορφή της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e :

$$H_e = \frac{1}{2} T_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} E_i D_i. \quad (4.26)$$

Εισάγοντας και τις εξισώσεις 4.24 και 4.25, η 4.26 παίρνει τελικά τη μορφή:

$$H_e = \frac{1}{2} (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k) S_{ij} - \frac{1}{2} (e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k) E_i,$$

$$H_e = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{kl} S_{ij} - e_{ij} E_i S_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^S E_k E_i. \quad (4.27)$$

4.1.3 Συμβολισμός των Ελαστικών και Πιεζοηλεκτρικών Τανυστών

Όλες οι προηγούμενες εξισώσεις διατυπώθηκαν με βάση τον τανυστικό συμβολισμό. Παίρνοντας υπόψη και τις συμμετρικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών από *PZT*, ο συμβολισμός αυτός μπορεί να απλοποιηθεί και να μετατραπεί σε συμβολισμό πινάκων. Στη βιβλιογραφία, σχετικά με τη θεωρία του πιεζοηλεκτρισμού, είναι γενικά αποδεκτή η χρήση δεικτών που αντιστοιχούν σε πίνακες σε αντίθεση με τον αυστηρό τανυστικό συμβολισμό. Η συμμετρία των τανυστών τάσης και παραμόρφωσης το επιτρέπει αυτό. Σύμφωνα με τον πίνακα 4.1, εισάγοντας τους νέους δείκτες, οι γραμμικές καταστατικές εξισώσεις και η ηλεκτρική ενθαλπία, που διατυπώθηκαν προηγουμένως, μπορούν να εκφραστούν σε συμπυγμένη μορφή.

Οι γραμμικές καταστατικές εξισώσεις 4.16 και 4.17 με βάση το ζεύγος ανεξάρτητων μεταβλητών (\mathbf{T}, \mathbf{E}) , μπορούν να διατυπωθούν με τον ακόλουθο τρόπο:

$$D_i = \varepsilon_{ik}^T E_k + d_{iq} T_q, \quad (4.28)$$

$$S_p = d_{pk} E_k + s_{pq}^E T_q. \quad (4.29)$$

Οι γραμμικές καταστατικές εξισώσεις 4.24 και 4.25 με βάση το ζεύγος των ανεξάρτητων μεταβλητών (\mathbf{S}, \mathbf{E}) , μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$T_p = c_{pq}^E S_q - e_{pk} E_k, \quad (4.30)$$

$$D_i = e_{iq} S_q + \varepsilon_{ik}^S E_k. \quad (4.31)$$

Η ηλεκτρική ενθαλπία H_e , η οποία περιγράφεται στην εξίσωση 4.27, διατυπώνεται ανάλογα ως εξής:

$$H_e = \frac{1}{2} c_{pq}^E S_q S_p - e_{ip} E_i S_p - \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^S E_k E_i. \quad (4.32)$$

Το σύνολο των εξισώσεων 4.28 – 4.32, αποτελεί τη μαθηματική περιγραφή της γραμμικής συμπεριφοράς των πιεζοηλεκτρικών υλικών και αποτελεί τη βάση για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.

4.2 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ

4.2.1 Η Συνάρτηση $g(z)$

Η συνάρτηση $g(z)$ παριστάνει την κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην πιεζοηλεκτρική δοκό. Η γενική μορφή της συνάρτησης είναι $g(z) = kz$, όπου k είναι μια σταθερά. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Barondi, 2018), (Goldschmidtboeing, 2008), (Komeili, 2011), (Elshafei, 2013), (Fernandes & Pouget, 2001) και (Wang, 2001), οι πιο συνήθεις μορφές της συνάρτησης $g(z)$ δίδονται στον Πίνακα 4.4, οι περισσότερες εκ των οποίων είναι κατάλληλες για την κλασική θεωρία δοκών και για τη θεωρία Timoshenko. Στη μελέτη θα χρησιμοποιηθεί η έκφραση $g(z) = \left[1 - (2z/h)^2\right]$, η οποία είναι κατάλληλη για θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης.

Πίνακας 4.4: Μορφές συνάρτησης $g(z)$.

Βιβλιογραφία	Συνάρτηση $g(z)$
Goldschmidtboeing (2008)	$g(z) = \left(\pm \frac{z}{h}\right), \pm \frac{1}{h}z$
Komeili (2011)	$g(z) = \left(\frac{2z}{h}\right), \frac{2}{h}z$
Elshafei (2013)	$g(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right), \frac{1}{2} + \frac{1}{h}z$
Pouget (2001)	$g(z) = \frac{h}{\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Q. Wang et. al. (2001)	$g(z) = \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]$
S. Barondi et. al. (2018)	$g(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου για μια πιεζοηλεκτρική δοκό ορίζεται ως:

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{4.33}$$

επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο κατά τους άξονες x , y και z , δίδεται από τις σχέσεις:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad (4.34\alpha)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (4.34\beta)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \bar{\varphi}(x,t) = g'(z) \bar{\varphi}(x,t), \quad (4.34\gamma)$$

και η γενική μορφή του ηλεκτρικού δυναμικού είναι της μορφής:

$$\tilde{\varphi}(x, z, t) = g(z) \bar{\varphi}(x, t). \quad (4.35)$$

Ο τύπος του ηλεκτρικού δυναμικού στη γενική του μορφή για μια πλάκα (Q. Wang et al., 2001) είναι:

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \bar{\varphi}(x, y, t) + \frac{z}{h} \bar{\varphi}_2(t), \quad (4.36)$$

όπου ο όρος $\frac{z}{h} \bar{\varphi}_2(t)$ αναφέρεται στην επιβολή εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού με τη βοήθεια εξωτερικής πηγής. Στην περίπτωση απουσίας εξωτερικής πηγής, ο όρος μπορεί να αγνοηθεί. Συνεπώς, ο όρος το ηλεκτρικό δυναμικό στη μονοδιάστατη περίπτωση που θα μελετηθεί, θα είναι της μορφής:

$$\tilde{\varphi}(x, z, t) = \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \bar{\varphi}(x, t), \quad (4.37)$$

Έτσι, γίνεται σαφές πως η συνάρτηση $g(z)$ είναι της μορφής:

$$g(z) = \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]. \quad (4.38)$$

Στη συνέχεια, γίνεται υπολογισμός των συντελεστών K_0, L_0, M_0, N_0 και P_0 για όλες τις θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Οι συντελεστές ορίζονται ως εξής:

$$K_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zg'(z)] dz, \quad (4.39\alpha)$$

$$L_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)g'(z)] dz, \quad (4.39\beta)$$

$$M_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)] dz, \quad (4.39\gamma)$$

$$N_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)f'(z)] dz, \quad (4.39\delta)$$

$$P_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)] dz. \quad (4.39\epsilon)$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών L_0 και N_0 , εφόσον περιέχουν τη συνάρτηση $f(z)$ και την παράγωγο $f'(z)$, πρέπει να γίνει για κάθε θεωρία ξεχωριστά. Οι τιμές των συντελεστών για τις διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης φαίνονται στον Πίνακα 4.5.

Πίνακας 4.5: Συντελεστές για $g(z) = [1 - (2z/h)^2]$.

$g(z) = \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]$	K_0	M_0	P_0	L_0	N_0
Ambartsylian	$-\frac{2h}{3}$	0	$\frac{2h}{3}$	$-\frac{h^3}{15}$	$\frac{7h^3}{90}$
Kruzweski	$-\frac{2h}{3}$	0	$\frac{2h}{3}$	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{7h}{9}$
Reddy	$-\frac{2h}{3}$	0	$\frac{2h}{3}$	$-\frac{8h}{15}$	$\frac{8h}{15}$
Touratier	$-\frac{2h}{3}$	0	$\frac{2h}{3}$	$-\frac{16h}{\pi^3}$	$\frac{16h}{\pi^3}$
Soldatos	$-\frac{2h}{3}$	0	$\frac{2h}{3}$	$\frac{(35-13e)h}{3\sqrt{e}}$	$\frac{(-35+13e)h}{3\sqrt{e}}$
Karama	$-\frac{2h}{3}$	0	$\frac{2h}{3}$	$\frac{2h}{\sqrt{e}} - h\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{h\left(-2 + \sqrt{2e\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\sqrt{e}}$

4.2.2 Εξισώσεις Κίνησης – Συνοριακές Συνθήκες

Στην ενότητα αυτή, ορίζεται το πεδίο μετατοπίσεων και η μορφή του ηλεκτρικού δυναμικού. Από την Αρχή Hamilton παράγονται οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού σε κάμψη και επιλύεται ένα στατικό πρόβλημα με τη μέθοδο Fourier (χρησιμοποιώντας άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων). Το πεδίο μετατοπίσεων είναι:

$$u_1 = u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (4.40\alpha)$$

$$u_2 = v(x, y, z, t) = 0, \quad (4.40\beta)$$

$$u_3 = w(x, y, z, t) = w(x, t), \quad (4.40\gamma)$$

και το ηλεκτρικό δυναμικό είναι:

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(x, z, t) = g(z) \bar{\varphi}(x, t). \quad (4.41)$$

Παραγωγίζοντας την αξονική και την εγκάρσια μετατόπιση, προκύπτουν οι αντίστοιχες παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t) \right] = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4.42)$$

και

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t) \right] + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = f'(z) \varphi(x, t). \quad (4.43)$$

Η Αρχή Hamilton από την οποία θα εξαχθούν οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T - H_e + W_e) dt = 0. \quad (4.44)$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος, H_e η ηλεκτρική ενθαλπία του συστήματος και W_e το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα. Από το πρώτο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton που αφορά στην κινητική ενέργεια T του συστήματος, έχουμε:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} (w(x,t)) \right]^2 \right] dV dt \quad (4.45)$$

$$= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[\left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]^2 \right] dV dt . \quad (4.46)$$

Αναπτύσσοντας την ταυτότητα της πρώτης παρένθεσης, εισάγοντας τον μεταβολικό τελεστή δ μέσα στο ολοκλήρωμα ως προς τον όγκο και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες $\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2$ και $\delta(\kappa^2) = 2\kappa \delta\kappa$ του τελεστή δ – μεταβολών, η σχέση 4.46 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[z^2 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + f^2(z) 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - 2 z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - \right. \\ \left. - 2 z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right] dV dt . \quad (4.47)$$

Γίνεται απλοποίηση, το ολοκλήρωμα ως προς τον όγκο γίνεται τριπλό ολοκλήρωμα στις τρεις διαστάσεις και το ολοκλήρωμα ως προς z αναφέρεται σε κάθε όρο της αγκύλης:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz - \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z f(z)] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z f(z)] dz + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [I] dz \right\} dy dx dt . \quad (4.48)$$

Στη συνέχεια, θέτοντας τους συντελεστές A_0, B_0, C_0 (σχέσεις 1.72α, 1.72β, 1.72γ), και ολοκληρώνοντας ως προς την τρίτη διάσταση y , η σχέση 4.48 γίνεται:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + C_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - B_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - B_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} + bh \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right\} dx dt . \quad (4.49)$$

Έπειτα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α), απελευθερώνονται οι ποσότητες δw και $\delta \varphi$ από τις παραγώγους. Να σημειωθεί εδώ ότι εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στις παραγώγους που εξαρτώνται από το χρόνο, οι όροι που αφορούν το σύνορο δεν συμβάλλουν στις συνοριακές συνθήκες. Έτσι, από τη σχέση 4.49, έχουμε:

$$\rho b \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[\left\{ A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} (\delta w) + \left\{ -C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right\} (\delta \varphi) \right] dx dt - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} . \quad (4.50)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται το δεύτερο ολοκλήρωμα της Αρχής Hamilton που αναφέρεται στην ηλεκτρική ενθαλπία H_e (Hadjigeorgiou, 2006) του συστήματος:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (-H_e) dt = 0 . \quad (4.51)$$

Η ηλεκτρική ενθαλπία H γράφεται ως εξής:

$$H_e = \int_V \left(\frac{1}{2} \{ \varepsilon \}^T [Q] \{ \varepsilon \} - \{ \varepsilon \}^T [e]^T \{ E \} - \frac{1}{2} \{ E \}^T \{ \varepsilon^* \} \{ E \} \right) dV . \quad (4.52)$$

Κάνοντας πράξεις σε κάθε όρο του ολοκληρώματος, έχουμε:

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [Q] \{\varepsilon\} \right) dV = \int_V \frac{1}{2} [\varepsilon_x \quad \gamma_{xz}] \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} dV = \int_V \frac{1}{2} (Q_{11} \varepsilon_x^2 + Q_{55} \gamma_{xz}^2) dV , \quad (4.53\alpha)$$

$$-\int_V \left(\{\varepsilon\}^T [e]^T \{E\} \right) dV = -\int_V [\varepsilon_x \quad \gamma_{xz}] \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} dV = -\int_V (E_z e_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}) dV , \quad (4.53\beta)$$

$$-\int_V \left(\frac{1}{2} \{E\}^T \{\varepsilon^*\} \{E\} \right) dV = -\int_V \frac{1}{2} [E_x \quad E_z] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} dV = -\int_V \frac{1}{2} (E_x^2 \varepsilon_{11}^* + E_z^2 \varepsilon_{33}^*) dV . \quad (4.53\gamma)$$

Έτσι, η ηλεκτρική ενθαλπία από τις σχ. 4.51, 4.52 και 4.53α,β,γ παίρνει τη μορφή:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[\frac{1}{2} (Q_{11} \varepsilon_x^2 + Q_{55} \gamma_{xz}^2) - (E_z e_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}) - \frac{1}{2} (E_x^2 \varepsilon_{11}^* + E_z^2 \varepsilon_{33}^*) \right] dV dt = 0 . \quad (4.54)$$

Έπειτα, υπολογίζεται ο κάθε όρος του ολοκληρώματος της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e (σχέση 4.54) ξεχωριστά, και έχουμε:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left(\frac{1}{2} Q_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} Q_{55} \gamma_{xz}^2 \right) dV dt . \quad (4.55)$$

Κάνοντας αντικατάσταση τους όρους ε_x^2 και γ_{xz}^2 :

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ \frac{1}{2} Q_{11} \left[f^2(z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - 2zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi^2(x,t) \right\} dV dt , \quad (4.56)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ -\frac{1}{2} Q_{11} f^2(z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + Q_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} Q_{11} z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi^2(x,t) \right\} dV dt . \quad (4.57)$$

Κάνοντας πράξεις, η σχέση 4.57 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ -\frac{1}{2} Q_{11} f^2(z) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + Q_{11} z f(z) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \right. \\ \left. -\frac{1}{2} Q_{11} z^2 \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 \delta(\varphi^2(x,t)) \right\} dV dt . \quad (4.58)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τελεστή δ – μεταβολών, έχουμε:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ -\frac{1}{2} Q_{11} f^2(z) 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + Q_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\ \left. + Q_{11} z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} Q_{11} z^2 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 2 \varphi(x,t) (\delta \varphi) \right\} dV dt . \quad (4.59)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, η σχέση 4.59 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ -Q_{11} f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + Q_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + Q_{11} z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - Q_{11} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi(x,t) (\delta \varphi) \right\} dV dt \quad (4.60)$$

$$= \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -Q_{11} f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + Q_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + Q_{11} z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - Q_{11} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi(x,t) (\delta \varphi) \right\} dz dy dx dt . \quad (4.61)$$

Γίνεται η ολοκλήρωση ως προς το βάθος y και η σχέση 4.61 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -Q_{11} b f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + Q_{11} b z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + \right. \\
 & + Q_{11} b z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - Q_{11} b z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - \\
 & \left. - Q_{55} b [f'(z)]^2 \varphi(x,t) (\delta \varphi) \right\} dz dx dt .
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Το ολοκλήρωμα ως προς z αναφέρεται σε όλους τους όρους της αγκύλης και έτσι η σχ. 4.62 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[-Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz + Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z f(z)] dz + \right. \\
 & + Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z f(z)] dz - Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \\
 & \left. - Q_{55} b \varphi(x,t) (\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz \right] dx dt .
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Έπειτα, θέτοντας τους συντελεστές A_0 , B_0 , C_0 , D_0 (σχ. 1.72α – 1.72δ) και ολοκληρώνοντας ως προς το πάχος z , η σχέση 4.63 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ -C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - \right. \\
 & \left. - A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - D_0 Q_{55} b \varphi(x,t) (\delta \varphi) \right\} dx dt .
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α) ώστε να απελευθερωθούν οι ποσότητες (δw) και $(\delta \varphi)$ από τις παραγώγους, από το πρώτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e , προκύπτουν τα επόμενα κομμάτια των εξισώσεων κίνησης:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left[\left\{ -A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right\} (\delta w) + \left\{ C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) \right\} (\delta \varphi) \right] dx \\
 & - \left[C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\
 & + \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e είναι:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (-H_e) dt \tag{4.66a}$$

$$= -\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V [-(E_z e_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz})] dV dt \tag{4.66\beta}$$

$$= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V [E_z e_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}] dV dt . \tag{4.67}$$

Κάνοντας αντικατάσταση το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ g'(z) \bar{\varphi}(x, t) e_{31} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. + g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} e_{15} f'(z) \varphi(x, t) \right\} dV dt ,
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ -z g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + g(z) f'(z) e_{15} \varphi(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right\} dV dt .
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Ο τελεστής δ – μεταβολών πηγαίνει στους όρους του ολοκληρώματος και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ \delta \left[-z g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \delta \left[f(z) g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \right. \\
 & \left. + \delta \left[g(z) f'(z) e_{15} \varphi(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right] \right\} dV dt .
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Εκτελούνται οι πράξεις με τον τελεστή δ – μεταβολών:

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -e_{31} z g'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta(\bar{\varphi}(x,t)) - e_{31} z g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & + e_{31} f(z) g'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta(\bar{\varphi}(x,t)) + e_{31} f(z) g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\ & \left. + e_{15} g(z) f'(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \delta(\varphi(x,t)) + e_{15} g(z) f'(z) \varphi(x,t) \delta \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) \right\} dz dy dx dt . \end{aligned} \quad (4.71)$$

Στη συνέχεια, γίνονται οι πράξεις και η σχέση 4.71 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -e_{31} z g'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) - e_{31} z g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \right. \\ & + e_{31} f(z) g'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) + e_{31} f(z) g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \varphi) + \\ & \left. + e_{15} g(z) f'(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) + e_{15} g(z) f'(z) \varphi(x,t) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right\} dz dy dx dt . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Θέτοντας τους συντελεστές K_0 , L_0 , M_0 , N_0 (σχ. 4.39α – 4.39δ) και κάνοντας την ολοκλήρωση ως προς το βάθος y , έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) - e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + e_{31} b L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) + \right. \\ & \left. + e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + e_{15} b N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) + e_{15} b N_0 \varphi(x,t) \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right\} dz dy dx dt . \end{aligned} \quad (4.73)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α) για να απελευθερωθούν οι ποσότητες (δw) , $(\delta \varphi)$, $(\delta \bar{\varphi})$ από τις παραγώγους, από το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας, προκύπτουν οι επόμενοι όροι των εξισώσεων κίνησης:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left[\left\{ -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} \right\} (\delta w) + \left\{ +e_{15} b N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - e_{31} b L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right\} (\delta \varphi) \right. \\
 & + \left. \left\{ -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{31} b L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - e_{15} b N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} (\delta \bar{\varphi}) \right] dx \\
 & - \left[e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial(\delta w)}{\partial x^2} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[e_{31} b K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\
 & + \left[e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x, t) (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[e_{15} b N_0 \varphi(x, t) (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e είναι:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[-\frac{I}{2} (E_x^2 \varepsilon_{11}^* + E_z^2 \varepsilon_{33}^*) \right] dV dt . \tag{4.75}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τους όρους E_x^2 και E_z^2 , η σχέση 4.76 γίνεται:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{I}{2} \left[\left(g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)^2 \varepsilon_{11}^* + (g'(z) \bar{\varphi}(x, t))^2 \varepsilon_{33}^* \right] dV dt . \tag{4.76}$$

Κάνοντας πράξεις με τον τελεστή δ – μεταβολών, η σχέση 4.76 παίρνει τη μορφή:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{I}{2} \left[\delta \left(g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)^2 \varepsilon_{11}^* + \delta (g'(z) \bar{\varphi}(x, t))^2 \varepsilon_{33}^* \right] dV dt . \tag{4.77}$$

Εκτελούνται οι πράξεις με το τελεστή δ – μεταβολών:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{I}{2} \left[g(z) 2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial(\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \varepsilon_{11}^* + g'(z) 2 \bar{\varphi}(x, t) (\delta \bar{\varphi}) \varepsilon_{33}^* \right] dV dt . \tag{4.78}$$

Κάνοντας πράξεις:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \varepsilon_{11}^* + g'(z) \bar{\varphi}(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \varepsilon_{33}^* \right] dz dy dx dt . \quad (4.79)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, η σχέση 4.79, γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)] dz + b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)] dz \right] dx dt . \quad (4.80)$$

Στη συνέχεια, θέτοντας τους συντελεστές P_0, M_0 (σχέσεις 4.39γ και 4.39ε), η σχέση 4.80, γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} + M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \right] dx dt . \quad (4.81)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α) στη σχέση 4.81 ώστε να απελευθερωθεί η ποσότητα $\delta \bar{\varphi}$ από την παράγωγο, προκύπτουν οι επόμενοι όροι των εξισώσεων κίνησης και η σχέση γίνεται:

$$\int_{x=0}^{x=L} \left[\left\{ -P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x,t) \right\} (\delta \bar{\varphi}) \right] dx + \left[P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} \quad (4.82)$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton όπου αφορά το έργο των εξωτερικών δυνάμεων W_e , είναι:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (W_e) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} (q w(x,t)) dx dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} q (\delta w) dx dt . \quad (4.83)$$

Από τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, σχέσεις 4.50, 4.65, 4.82 και 4.83, της Αρχής Hamilton, έχουμε την πλήρη περιγραφή της γραμμικής ελαστικότητας σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς μέσω ενός πακέτου τριών εξισώσεων κίνησης και τεσσάρων συνοριακών συνθηκών (σχέσεις 4.86 – 4.92).

Οι εξισώσεις κίνησης περιγράφουν την μετατόπιση w , τη στροφή φ και την ηλεκτρική μετατόπιση $\bar{\varphi}$. Η παραγωγή των εξισώσεων αυτών μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για στατικά όσο και δυναμικά προβλήματα κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών. Στην παρούσα μελέτη, γίνεται επίλυση μόνο στατικών προβλημάτων κάμψης με δυνατότητα επέκτασης σε δυναμικά προβλήματα.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ:

$$\begin{aligned}
 (\delta w): & -A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \\
 & -B_0 \rho b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + q = 0,
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \varphi): & -B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) - C_0 \rho b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \\
 & + B_0 \rho b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - e_{31} b L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + e_{15} b N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \bar{\varphi}): & -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{31} b L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - \\
 & -e_{15} b N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x, t) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ:

$$\begin{aligned}
 A_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + e_{31} b K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \\
 \text{ή} \quad (\delta w) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad w: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{4.87\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 -A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x, t) = 0, \\
 \text{ή} \quad \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{4.87\beta}$$

$$\begin{aligned}
 B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x, t) = 0, \\
 \text{ή} \quad (\delta \varphi) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \varphi: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
 P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + e_{15} b N_0 \varphi(x, t) = 0. \\
 \text{ή} \quad (\delta \bar{\varphi}) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \bar{\varphi}: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

4.2.3 Επίλυση Στατικού Προβλήματος Κάμψης Δοκού

Για την επίλυση του στατικού προβλήματος κάμψης σε μια πιεζοηλεκτρική δοκό με τις γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης, παραλείπονται οι αδρανειακοί όροι, οπότε οι εξισώσεις ισορροπίας της δοκού, σχέσεις 4.84 – 4.86, έχουν τη μορφή:

$$A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = q, \quad (4.90\alpha)$$

$$B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) + L_0 e_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0 e_{15} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad (4.90\beta)$$

$$K_0 e_{31} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - L_0 e_{31} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + N_0 e_{15} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x, t) = 0. \quad (4.90\gamma)$$

Η επίλυση, όπως και στις περιπτώσεις των ελαστικών δοκών, γίνεται με τη μέθοδο Fourier (άπειρων αθροισμάτων ημιτόνων και συνημιτόνων). Ξεκινώντας από την πρώτη εξίσωση (4.90α), και εισάγοντας τα αναπτύγματα w , φ και q ως άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων (σχ.1.83, 1.86 και 1.87) και το ηλεκτρικό δυναμικό με τη μορφή $\bar{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin(m\pi x/L)$, η σχέση 4.90α γίνεται:

$$A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + e_{31} b K_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (4.91)$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις και η σχέση 4.91, γίνεται:

$$A_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + e_{31} b K_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (4.92)$$

Επειδή οι ποσότητες w_m , φ_m και $\bar{\varphi}_m$ είναι σταθερές ποσότητες, η σχέση 4.92 παίρνει τη μορφή:

$$A_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + e_{31} b K_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.93)$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις και η σχέση 4.93 γίνεται:

$$A_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + e_{31} b K_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.94)$$

Η σχέση 4.94, με αναδιάταξη όρων, παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - e_{31} b K_0 \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.95)$$

Από την ισότητα των αθροισμάτων της σχέσης 4.95, προκύπτει ισοδύναμα και η ισότητα των γενικών όρων των αθροισμάτων, δηλαδή:

$$A_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - e_{31} b K_0 \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) = q_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (4.96)$$

Ο όρος $(\sin m\pi x/L)$ μπορεί να απλοποιηθεί καθώς υπάρχει σε όλα τα μέλη της εξίσωσης 4.96, έτσι η σχέση 4.90α θα έχει τελικά τη μορφή:

$$\left(A_0 Q_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) w_m - \left(B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \varphi_m - \left(e_{31} b K_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \bar{\varphi}_m = q_m . \quad (4.97)$$

Στη δεύτερη εξίσωση ισορροπίας (σχ.4.90β), εισάγονται οι άγνωστες ποσότητες ως άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων και η σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} & B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\ & + D_0 Q_{55} b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + L_0 e_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - \\ & - N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (4.98)$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις και η σχέση 4.98 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - C_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\ & + D_0 Q_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - \\ & - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (4.99)$$

Επειδή οι ποσότητες w_m , φ_m και $\bar{\varphi}_m$ είναι σταθερές ποσότητες, η σχέση 4.99 γίνεται:

$$\begin{aligned} & B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - C_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + \\ & + D_0 Q_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right\} + L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - \\ & - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (4.100)$$

Εκτελούνται οι παραγωγίσεις στις αγκύλες και η σχέση 4.100, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - C_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + D_0 Q_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Το πρώτο μέρος της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως ένα μεγάλο άθροισμα:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -B_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + \right. \\
 & + D_0 Q_{55} b \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
 & \left. - N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Η σχέση 4.102 μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned}
 & -B_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + \\
 & + D_0 Q_{55} b \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
 & - N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

Ο όρος $\left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right)$ μπορεί να απλοποιηθεί και η εξίσωση 4.103, έχει τελικά τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & - \left(B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left(C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b \right) \varphi_m + \\
 & + \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \bar{\varphi}_m = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

Στην τρίτη εξίσωση ισορροπίας (εξ. 4.90γ), εισάγονται οι άγνωστες ποσότητες ως άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & K_0 e_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - L_0 e_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\
 & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - \\
 & - M_0 b \varepsilon_{33}^* \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

Εκτελούνται οι παραγωγίσεις και η σχέση 4.105 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\
 & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - \\
 & - M_0 b \varepsilon_{33}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

Επειδή οι ποσότητες w_m , φ_m και $\bar{\varphi}_m$ είναι σταθερές ποσότητες, η σχέση 4.106 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + \\
 & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - \\
 & - M_0 b \varepsilon_{33}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις στη σχέση 4.107 και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - M_0 b \varepsilon_{33}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Το πρώτο μέρος της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως ένα μεγάλο άθροισμα:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -K_0 e_{31} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \right. \\
 & - P_0 b \varepsilon_{11}^* \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
 & \left. - M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \quad (4.109)$$

Ισοδύναμα προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 & -K_0 e_{31} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
 & - P_0 b \varepsilon_{11}^* \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
 & - M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) = 0 .
 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Ο όρος $\left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)$ μπορεί να απλοποιηθεί και η τρίτη εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & - \left(K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) w_m + \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \varphi_m - \\
 & - \left(P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + M_0 b \varepsilon_{33}^* \right) \bar{\varphi}_m = 0 .
 \end{aligned} \quad (4.111)$$

Συνεπώς, συνολικά, έχουμε τρεις εξισώσεις (εξ. 4.97, 4.104 και 4.111) προς επίλυση με τρεις αγνώστους, τις ποσότητες w_m , φ_m και $\bar{\varphi}_m$:

$$\left(A_0 Q_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) w_m - \left(B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \varphi_m - \left(e_{31} b K_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \bar{\varphi}_m = q_m, \quad (4.97)$$

$$-\left(B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left(C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b \right) \varphi_m + \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \bar{\varphi}_m = 0, \quad (4.104)$$

$$-\left(K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) w_m + \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \varphi_m - \left(P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + M_0 b \varepsilon_{33}^* \right) \bar{\varphi}_m = 0. \quad (4.111)$$

Το σύστημα εξισώσεων 4.97, 4.104 και 4.111 είναι ένα γραμμικό σύστημα 3×3 (τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους). Η επίλυση του μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των οριζουσών (μέθοδος Cramer). Συνεπώς, η ορίζουσα D των συντελεστών του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} A_0 Q_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} & -B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & -K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \\ -B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b & L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \\ -K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} & L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} & -P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \end{vmatrix}, \quad (4.112)$$

και κάνοντας τις πράξεις, η ορίζουσα D παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} D = & \left(A_0 Q_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \left(C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b \right) - \left(B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right)^2 \right) \left(-P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \right) + \\ & + \left(-B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) - \left(C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b \right) \left(-K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \right) * \\ & * \left(-K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) + \left(\left(-B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \left(-K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) - A_0 Q_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \right) * \\ & * \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right). \end{aligned} \quad (4.112\beta)$$

και οι ορίζουσες των άγνωστων ποσοτήτων του συστήματος είναι:

$$D_{w_m} = \begin{vmatrix} q_m & -B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & -K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \\ 0 & C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b & L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \\ 0 & L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} & -P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \end{vmatrix}, \quad (4.113\alpha)$$

ή

$$D_{w_m} = q_m \left[-C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} M_0 b \varepsilon_{33}^* - \right. \\ \left. - D_0 Q_{55} b P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - D_0 Q_{55} b M_0 b \varepsilon_{33}^* - \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right], \quad (4.113\beta)$$

$$D_{\varphi_m} = \begin{vmatrix} A_0 Q_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} & q_m & -K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \\ -B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & 0 & L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \\ -K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} & 0 & -P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \end{vmatrix}, \quad (4.114\alpha)$$

ή

$$D_{\varphi_m} = -q_m \left[-B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \left(-P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \right) - \right. \\ \left. - \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \left(-K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \right], \quad (4.114\beta)$$

και

$$D_{\bar{\varphi}_m} = \begin{vmatrix} A_0 Q_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} & -B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & q_m \\ -B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b & 0 \\ -K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} & L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.115\alpha)$$

ή

$$D_{\bar{\varphi}_m} = q_m \left[-B_0 Q_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \left(L_0 e_{31} b \frac{m\pi}{L} - N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) - \left(C_0 Q_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 Q_{55} b \right) \left(-K_0 e_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \right]. \quad (4.115\beta)$$

Οι λύσεις του συστήματος στη γενική τους μορφή είναι:

$$w_m = \frac{D_{w_m}}{D}, \quad (4.116\alpha)$$

$$\varphi_m = \frac{D_{\varphi_m}}{D}, \quad (4.116\beta)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{D_{\bar{\varphi}_m}}{D}. \quad (4.116\gamma)$$

Στη συνέχεια, θέτοντας την ποσότητα $a_m = m\pi/L$, από τις εξισώσεις 4.112β, 4.113β, 4.114β, 4.115β και 4.116α, 4.116β, 4.116γ, έχουμε:

$$w_m = \frac{q_m \left[(C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) (-P_0 b \varepsilon_{11}^* a_m^2 - M_0 b \varepsilon_{33}^*) - (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m)^2 \right]}{\left(A_0 Q_{11} b a_m^4 (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) - (B_0 Q_{11} b a_m^3)^2 \right) (-P_0 b \varepsilon_{11}^* a_m^2 - M_0 b \varepsilon_{33}^*) +} \quad (4.117)$$

$$+ \left(-B_0 Q_{11} b a_m^3 (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) - (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) (-K_0 e_{31} b a_m^2) \right) (-K_0 e_{31} b a_m^2) +$$

$$+ \left((-B_0 Q_{11} b a_m^3) (-K_0 e_{31} b a_m^2) - A_0 Q_{11} b a_m^4 (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) \right) (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m)$$

$$\varphi_m = \frac{-q_m \left[-B_0 Q_{11} b a_m^3 (-P_0 b \varepsilon_{11}^* a_m^2 - M_0 b \varepsilon_{33}^*) - (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) (-K_0 e_{31} b a_m^2) \right]}{\left(A_0 Q_{11} b a_m^4 (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) - (B_0 Q_{11} b a_m^3)^2 \right) (-P_0 b \varepsilon_{11}^* a_m^2 - M_0 b \varepsilon_{33}^*) +} \quad (4.118)$$

$$+ \left(-B_0 Q_{11} b a_m^3 (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) - (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) (-K_0 e_{31} b a_m^2) \right) (-K_0 e_{31} b a_m^2) +$$

$$+ \left((-B_0 Q_{11} b a_m^3) (-K_0 e_{31} b a_m^2) - A_0 Q_{11} b a_m^4 (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) \right) (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{q_m \left[-B_0 Q_{11} b a_m^3 (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) - (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) (-K_0 e_{31} b a_m^2) \right]}{\left(A_0 Q_{11} b a_m^4 (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) - (B_0 Q_{11} b a_m^3)^2 \right) (-P_0 b \varepsilon_{11}^* a_m^2 - M_0 b \varepsilon_{33}^*) +} \quad (4.119)$$

$$+ \left(-B_0 Q_{11} b a_m^3 (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) - (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) (-K_0 e_{31} b a_m^2) \right) (-K_0 e_{31} b a_m^2) +$$

$$+ \left((-B_0 Q_{11} b a_m^3) (-K_0 e_{31} b a_m^2) - A_0 Q_{11} b a_m^4 (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) \right) (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, παράγονται οι αναλυτικές εκφράσεις της αξονικής μετατόπισης u , της εγκάρσιας μετατόπισης w , του ηλεκτρικού δυναμικού $\tilde{\varphi}$,

της αξονικής τάσης κάμψης σ_x , της εγκάρσιας διατμητικής τάσης τ_{zx} , της αξονικής ηλεκτρικής μετατόπισης D_x και της εγκάρσιας ηλεκτρικής μετατόπισης D_z .

Συγκεκριμένα, προκύπτουν:

Αξονική Μετατόπιση u :

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[-z \frac{m\pi}{L} w_m + f(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.120)$$

Εγκάρσια Μετατόπιση w :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.121)$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ g(z) \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.122)$$

Αξονική Τάση Κάμψης σ_x :

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m - e_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.123)$$

Εγκάρσια Διατμητική Τάση τ_{zx} :

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[G_{13} f'(z) \varphi_m + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.124)$$

Αξονική Ηλεκτρική Μετατόπιση D_x :

$$D_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[e_{15} f'(z) \varphi_m + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.125)$$

Εγκάρσια Ηλεκτρική Μετατόπιση D_z :

$$D_z = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[e_{31} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - e_{31} f(z) \varphi_m + \varepsilon_{33}^* g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (4.126)$$

4.2.4 Αριθμητικά Αποτελέσματα – Γραφικές Παραστάσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσθηκαν οι αναλυτικοί τύποι για τις τρεις άγνωστες ποσότητες w_m , φ_m και $\tilde{\varphi}_m$ (εξ. 4.117, 4.118 και 4.119) για όλες τις γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς. Στη συνέχεια, με βάση τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα, πραγματοποιούνται αριθμητικοί υπολογισμοί με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου *Matlab* για την παραγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων και γραφικών παραστάσεων. Συνεπώς, για τις γραμμικές θεωρίες πιεζοηλεκτρικών δοκών, θα υπολογισθεί η συνολική εγκάρσια μετατόπιση w , η συνολική στρόφη φ καθώς και το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\varphi}$.

Στα συγκεκριμένα παραδείγματα, θεωρούμε μια ισότροπη πιεζοηλεκτρική δοκό απλής στήριξης που υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο καμπτικό φορτίο $q_0 = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$. Το μήκος της δοκού είναι $L = 1 \text{ m}$ και το βάθος $b = 0.01 \text{ m}$. Ως αναλογία διαστάσεων (*aspect ratio*) ορίζεται ως ο λόγος μήκους προς πάχος (L/h) και συμβολίζεται με S . Για τα συγκεκριμένα παραδείγματα χρησιμοποιήθηκε λόγος $S = 2, 4, 10$.

Το πιεζοηλεκτρικό υλικό προς μελέτη είναι το *PZT-5A*. Το πιεζοηλεκτρικό κεραμικό *PZT*, παρουσιάζει εξαγωνική κρυσταλλική συμμετρία (ανήκει στην κρυσταλλική ομάδα $C_{6v} = 6mm$) και οι πίνακες των ελαστικών και ηλεκτρικών ιδιοτήτων του έχουν την εξής μορφή:

Ο πίνακας ελαστικής ακαμψίας του υλικού είναι ο εξής

$$C_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.127)$$

Ο πίνακας πιεζοηλεκτρικών σταθερών στη γενική του μορφή είναι:

$$e_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.128)$$

και ο πίνακας ηλεκτρικής επιδεκτικότητας είναι:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.129)$$

Για την περίπτωση πιεζοηλεκτρικής δοκού όπου θεωρείται ένα δισδιάστατο αντικείμενο, και πιο συγκεκριμένα για το πιεζοηλεκτρικό κεραμικό $PZT-5A$, οι παραπάνω σχέσεις 4.127, 4.128 και 4.129 παίρνουν συγκεκριμένες τιμές και έχουν τη μορφή:

$$C_{pq} = \begin{bmatrix} 105 & 54.6 & 52.7 & 0 & 0 & 0 \\ 54.6 & 105 & 52.7 & 0 & 0 & 0 \\ 52.7 & 52.7 & 86.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100.8 \end{bmatrix} \times 10^9 \frac{N}{m^2} \quad (4.130)$$

$$e_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{31} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12.2 \\ -9.78 & 0 \end{bmatrix} \frac{C}{m^2} \quad (4.131)$$

$$\varepsilon_{ik} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.4 & 0 \\ 0 & 15.1 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \frac{C}{Vm} \quad (4.132)$$

Η σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης w , της στροφής φ , καθώς και του ηλεκτρικού δυναμικού $\tilde{\varphi}$ για κάθε γραμμική θεωρία σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς, πραγματοποιήθηκαν για λόγους $S = 2, 4, 10$ και παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.6.

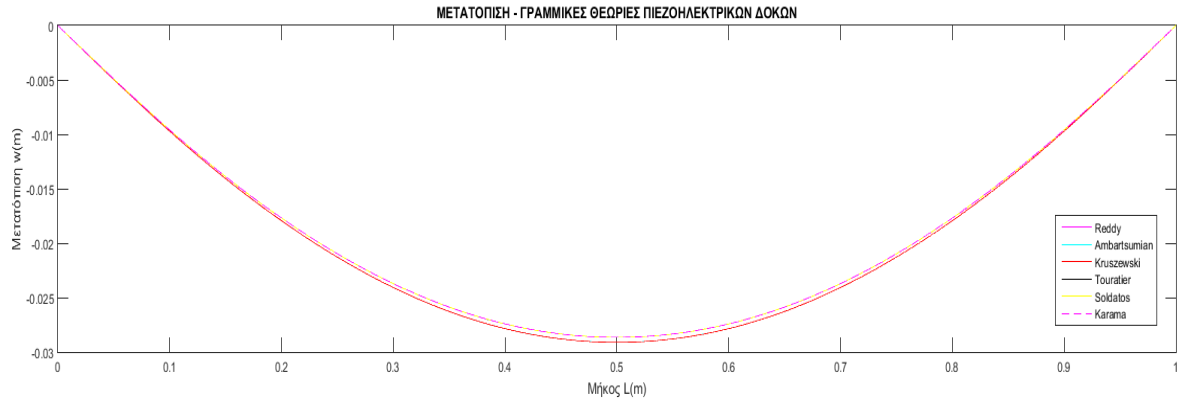
Πίνακας 4.6: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w , της στροφής (*rotation*) φ και του ηλεκτρικού δυναμικού $\tilde{\varphi}$ στο κέντρο της δοκού ($x=0.5$) για όλες τις γραμμικές θεωρίες σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς.

$S = 2$	Θεωρίες	w	φ	$\tilde{\varphi}$
	Ambartsumian	0.00191468	0	$-1.32294576 \cdot 10^6$
	Kruszewski	0.00191449	0	$-1.32294456 \cdot 10^6$
	Reddy	0.00201793	0	$-1.31656389 \cdot 10^6$
	Touratier	0.00201676	0	$-1.31560256 \cdot 10^6$
	Soldatos	0.00201806	0	$-1.31658685 \cdot 10^6$
	Karama et. al.	0.00201254	0	$-1.31232996 \cdot 10^6$
$S = 4$	Θεωρίες	w	φ	$\tilde{\varphi}$
	Ambartsumian	0.00710905	0	$-4.36480397 \cdot 10^6$
	Kruszewski	0.00710882	0	$-4.36463577 \cdot 10^6$
	Reddy	0.00725742	0	$-4.43839653 \cdot 10^6$
	Touratier	0.00725721	0	$-4.43811294 \cdot 10^6$
	Soldatos	0.00725763	0	$-4.43851543 \cdot 10^6$
	Karama et. al.	0.00725570	0	$-4.43658358 \cdot 10^6$
$S = 10$	Θεωρίες	w	φ	$\tilde{\varphi}$
	Ambartsumian	0.02910987	0	$-1.68475453 \cdot 10^7$
	Kruszewski	0.02911119	0	$-1.68472551 \cdot 10^7$
	Reddy	0.02864883	0	$-1.69792869 \cdot 10^7$
	Touratier	0.02864880	0	$-1.69794280 \cdot 10^7$
	Soldatos	0.02864866	0	$-1.69793500 \cdot 10^7$
	Karama et. al.	0.02864898	0	$-1.69798612 \cdot 10^7$

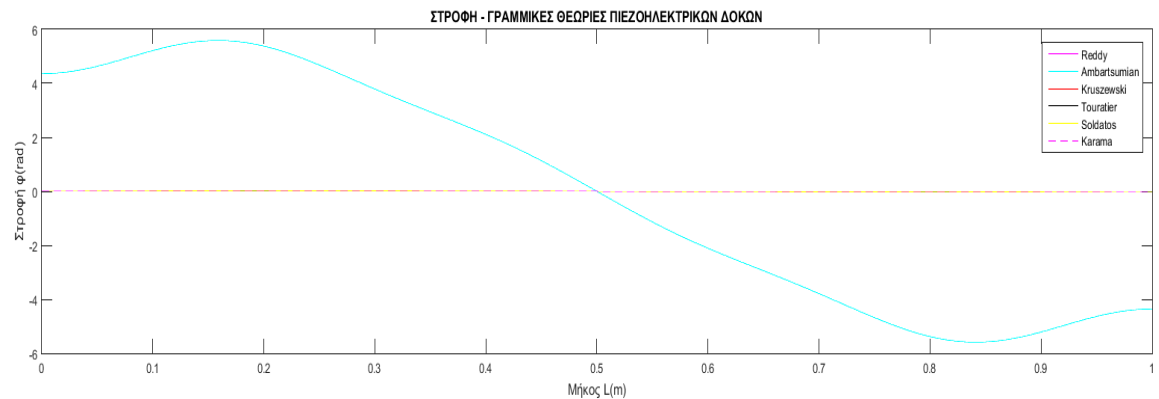
Παρατηρούμε ότι στο κέντρο της δοκού, η στροφή φ όπως αναμένεται είναι μηδενική για όλες τις γραμμικές θεωρίες. Επίσης, η εγκάρσια μετατόπιση w και το ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\varphi}$ είναι μέγιστα στο μέσο της δοκού. Ένα επίσης λογικό συμπέρασμα το οποίο είναι αναμενόμενο είναι το γεγονός πως καθώς αυξάνεται S και μειώνεται το h , η μετατόπιση και το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μεγαλύτερα.

Στη συνέχεια, κατασκευάζονται οι γραφικές παραστάσεις. Θεωρήθηκε σημαντική η απεικόνιση της αλλαγής της μετατόπισης w , της αλλαγής της στροφής φ και της αλλαγής του ηλεκτρικού δυναμικού $\tilde{\varphi}$ στο συνολικό μήκος L της δοκού. Οι γραφικές παραστάσεις (σχ. 4.1, 4.2, 4.3 και 4.4) έγιναν για όλες τις γραμμικές θεωρίες δοκών σε τρία διαγράμματα με σκοπό την άμεση σύγκρισή τους.

Οι γραφικές παραστάσεις έγιναν για λόγο $S=10$, δηλαδή για μήκος πιεζοηλεκτρικής δοκού $L=1m$ και πλάτος $h=0.1m$.

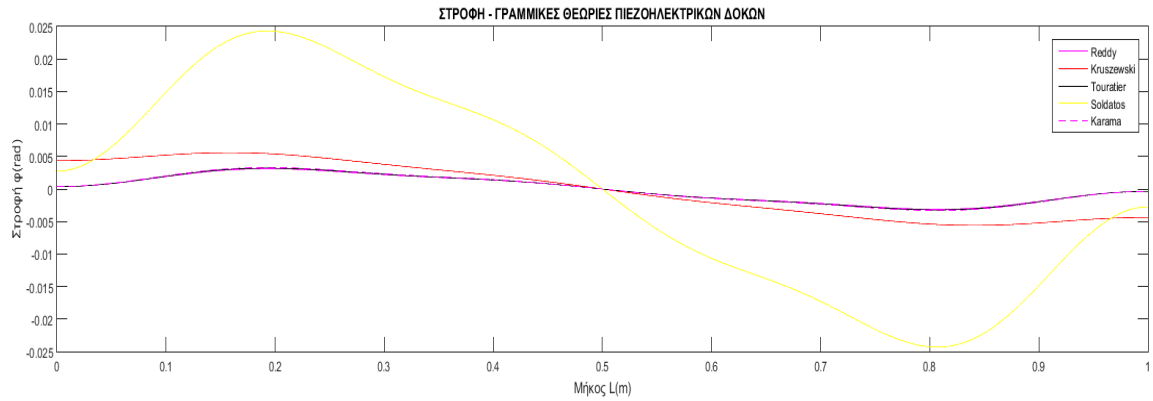


Σχήμα 4.1: Διάγραμμα μετατόπισης – μήκους ($w-L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών.

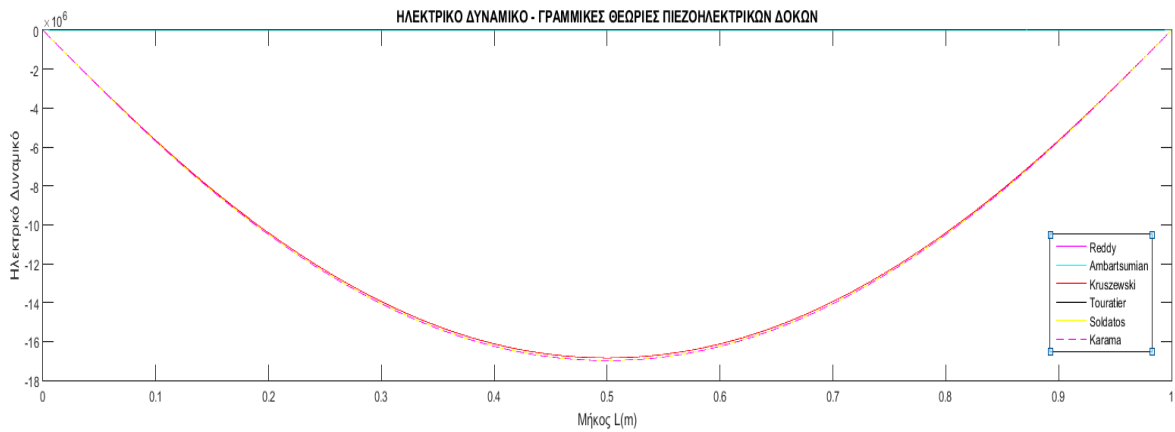


Σχήμα 4.2: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\varphi-L$) για όλες τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών.

Παρατηρείτε πως η γραφική παράσταση της συνάρτησης της στροφής σε όλο το μήκος της δοκού είναι ίδια για όλες τις γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας. Η διαφορά βρίσκεται στο γεγονός πως η στροφή στη θεωρία του Ambartsumian προβλέπεται μεγάλη σε αντίθεση με τις υπόλοιπες θεωρίες και είναι της τάξης των $4rad$ έως $-4rad$ κατά μήκος της δοκού. Επίσης, η θεωρία του Soldatos προβλέπει μεγαλύτερη τη στροφή σε σχέση με τις υπόλοιπες θεωρίες και είναι της τάξης των $0.02rad$ έως $-0.02rad$. Οι υπόλοιπες θεωρίες προβλέπουν τη στροφή από $3 \times 10^{-3} rad$ έως $-3 \times 10^{-3} rad$.



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα στροφής – μήκους ($\psi - L$) για όλες τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών εκτός της θεωρίας Ambartsumian.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα ηλεκτρικού δυναμικού – μήκους ($\tilde{\varphi} - L$) για τις γραμμικές θεωρίες κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών στο σημείο $z = 0$.

Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ηλεκτρικού δυναμικού σε όλο το μήκος της δοκού παρατηρείται ότι είναι ίδιας μορφής για όλες τις γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Να σημειώσουμε εδώ πως στο διάγραμμα υπολογίζεται το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο $z = 0$. Συνεπώς, αναμένουμε η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού να ακολουθεί την ίδια πορεία με την μετατόπιση της δοκού σε όλο το μήκος της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται η μελέτη του προβλήματος κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις σε συνδυασμό με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Στόχος μας είναι η παραγωγή των εξισώσεων κίνησης καθώς και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών και στη συνέχεια η επίλυση ενός στατικού προβλήματος κάμψης μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού.

Αρχικά, για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών, ορίζεται το πεδίο μετατοπίσεων και το ηλεκτρικό δυναμικό ως εξής:

$$u_1 = u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (5.1)$$

$$u_2 = v(x, y, z, t) = 0, \quad (5.2)$$

$$u_3 = w(x, y, z, t) = w(x, t), \quad (5.3)$$

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(x, z, t) = g(z) \bar{\varphi}(x, t). \quad (5.4)$$

Στη συνέχεια, διατυπώνονται οι σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης λαμβάνοντας υπόψη γεωμετρικές μη γραμμικότητες τύπου von Karman:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (5.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \varphi(x, t). \quad (5.6)$$

Έπειτα, γίνεται υπολογισμός των τετραγώνων των ποσοτήτων των σχέσεων 5.5 και 5.6, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

$$[\varepsilon_x]^2 = \left(f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2,$$

$$[\varepsilon_x]^2 = f^2(z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 -$$

$$- 2zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (5.7)$$

$$[\gamma_{xz}]^2 = (f'(z) \varphi(x,t))^2 = [f'(z)]^2 \varphi^2(x,t). \quad (5.8)$$

Οι σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης για μια πιεζοηλεκτρική δοκό (Hadjigeorgiou, 2006) έχουν τη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (5.9\alpha)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11}\varepsilon_x + 0\gamma_{xz} \\ 0\varepsilon_x + Q_{55}\gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0E_x + e_{31}E_z \\ e_{15}E_x + 0E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11}\varepsilon_x - e_{31}E_z \\ Q_{55}\gamma_{xz} - e_{15}E_x \end{Bmatrix}, \quad (5.9\beta)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (5.10\alpha)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\varepsilon_x + e_{15}\gamma_{xz} \\ e_{31}\varepsilon_x + 0\gamma_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}E_x + 0E_z \\ 0E_x + \varepsilon_{33}E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{15}\gamma_{xz} + \varepsilon_{11}E_x \\ e_{31}\varepsilon_x + \varepsilon_{33}E_z \end{Bmatrix}. \quad (5.10\beta)$$

Από τις σχέσεις 5.9β και 5.10β, προκύπτουν:

$$\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x - e_{31}E_z, \quad (5.11)$$

$$\tau_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} - e_{15}E_x, \quad (5.12)$$

$$D_x = e_{15}\gamma_{xz} + \varepsilon_{11}E_x, \quad (5.13)$$

$$D_z = e_{31}\varepsilon_x + \varepsilon_{33}E_z. \quad (5.14)$$

5.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ – ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες εξάγονται με βάση την Αρχή Hamilton (Hadjigeorgiou, 2006) η οποία εκφράζεται ως:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T - H_e + W_e) dt = 0 . \quad (5.15)$$

Ξεκινώντας από το πρώτο ολοκλήρωμα της Αρχής Hamilton που αφορά στην κινητική ενέργεια T του συστήματος και κάνοντας πράξεις, έχουμε:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T) dt \quad (5.16\alpha)$$

$$= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \{ \dot{u} \}^T \{ \dot{u} \} dV \right] dt \quad (5.16\beta)$$

$$= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} dV \right] dt \quad (5.16\gamma)$$

$$= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left[\frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dV \right] dt \quad (5.16\delta)$$

$$= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} (w(x,t)) \right]^2 \right] dV dt \quad (5.16\epsilon)$$

$$= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[\left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]^2 \right] dV dt . \quad (5.16\sigma\tau)$$

Αναπτύσσοντας την ταυτότητα εντός της πρώτης παρένθεσης της σχέσης 5.16στ, και εισάγοντας τον τελεστή δ - μεταβολών μέσα στο ολοκλήρωμα ως προς τον όγκο, έχουμε:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[z^2 \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + f^2(z) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - 2zf(z) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV dt . \quad (5.17)$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες $\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2$ και $\delta(\kappa^2) = 2\kappa \delta\kappa$ του τελεστή δ - μεταβολών, η σχέση 5.17, γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[z^2 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + f^2(z) 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - 2zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - \right. \\ \left. - 2zf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right] dV dt . \quad (5.18)$$

Κάνοντας τις σχετικές απλοποιήσεις, η σχέση 5.18 γίνεται:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - \right. \\ \left. - zf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right] dV dt . \quad (5.19)$$

Στη συνέχεια, το ολοκλήρωμα ως προς τον όγκο γίνεται τριπλό ολοκλήρωμα στις τρεις διαστάσεις και το ολοκλήρωμα ως προς z αναφέρεται σε κάθε όρο της αγκύλης:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz - \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [1] dz \right\} dy dx dt . \quad (5.20)$$

Έπειτα, θέτοντας τους συντελεστές A_0, B_0, C_0 σύμφωνα με τις εξ. 1.72α – 1.72γ και κάνοντας την ολοκλήρωση ως προς y , έχουμε:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + C_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - B_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - \right. \\ \left. - B_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} + bh \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right\} dx dt . \quad (5.21)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss, απελευθερώνονται οι ποσότητες δw και $\delta \varphi$ από τις παραγώγους (Παράρτημα Α). Να σημειωθεί εδώ, πως εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στις παραγώγους που εξαρτώνται μόνο από το χρόνο, οι όροι που αφορούν το σύνορο δεν συμβάλλουν στις συνοριακές συνθήκες. Συνεπώς, από το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας T , προκύπτουν η σχέση:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{x=L} \left[\left\{ A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - B_0 \rho b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} (\delta w) - \left\{ C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right\} (\delta \varphi) \right] dx + \\ & + \left[A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \left[B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \\ & + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \left[B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \left[\frac{\partial w}{\partial t} (\delta w) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζετε το δεύτερο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton που αναφέρεται στην ηλεκτρική ενθαλπία H_e του συστήματος:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (-H_e) dt . \quad (5.23)$$

Η ηλεκτρική ενθαλπία (Hadjigeorgiou, 2006) γράφεται ως εξής:

$$H_e = \int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [Q] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [e]^T \{E\} - \frac{1}{2} \{E\}^T \{\varepsilon^*\} \{E\} \right) dV . \quad (5.24)$$

Κάνοντας πράξεις σε κάθε όρο του ολοκληρώματος της σχ.5.24, έχουμε:

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [Q] \{\varepsilon\} \right) dV = \int_V \frac{1}{2} [\varepsilon_x \quad \gamma_{xz}] \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} dV = \int_V \frac{1}{2} (Q_{11} \varepsilon_x^2 + Q_{55} \gamma_{xz}^2) dV, \quad (5.25\alpha)$$

$$-\int_V \left(\{\varepsilon\}^T [e]^T \{E\} \right) dV = -\int_V [\varepsilon_x \quad \gamma_{xz}] \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} dV = -\int_V (E_z e_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}) dV, \quad (5.25\beta)$$

$$-\int_V \left(\frac{1}{2} \{E\}^T \{\varepsilon^*\} \{E\} \right) dV = -\int_V \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_x & E_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^* & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} dV = -\int_V \frac{1}{2} (E_x^2 \varepsilon_{11}^* + E_z^2 \varepsilon_{33}^*) dV . \quad (5.25\gamma)$$

Έτσι, η ηλεκτρική ενθαλπία H_e , από τις σχέσεις 5.24, 5.25α, 5.25β και 5.25γ, παίρνει τη μορφή:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[\frac{1}{2} (Q_{11} \varepsilon_x^2 + Q_{55} \gamma_{xz}^2) - (E_z e_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}) - \frac{1}{2} (E_x^2 \varepsilon_{11}^* + E_z^2 \varepsilon_{33}^*) \right] dV dt . \quad (5.26)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται ξεχωριστά ο κάθε όρος του ολοκληρώματος της ηλεκτρικής ενθαλπίας. Ξεκινώντας από τον πρώτο όρο:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left(\frac{1}{2} Q_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} Q_{55} \gamma_{xz}^2 \right) dV dt \quad (5.27\alpha)$$

$$\begin{aligned} &= -\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[\frac{1}{2} Q_{11} \left[f^2(z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 \right] - 2zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi^2(x,t) \Big] dV dt \end{aligned} \quad (5.27\beta)$$

$$\begin{aligned} &= \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[-\frac{1}{2} Q_{11} f^2(z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} Q_{11} z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} Q_{11} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} Q_{11} 2zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} Q_{11} f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} Q_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi^2(x,t) \right] dV dt \end{aligned} \quad (5.27\gamma)$$

Κάνοντας πράξεις, η σχέση 5.27γ γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[-\frac{1}{2} Q_{11} f^2(z) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} Q_{11} z^2 \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{8} Q_{11} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \right. \\
 & + Q_{11} z f(z) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} Q_{11} f(z) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} Q_{11} z \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - \\
 & \left. - \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 \delta(\varphi^2(x,t)) \right] dV dt . \quad (5.27\delta)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του τελεστή δ – μεταβολών, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[-\frac{1}{2} Q_{11} f^2(z) 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - \frac{1}{2} Q_{11} z^2 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - \right. \\
 & - \frac{1}{8} Q_{11} 4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + Q_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + Q_{11} z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \\
 & - \frac{1}{2} Q_{11} f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} Q_{11} f(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} Q_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} Q_{11} z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} Q_{55} [f'(z)]^2 2 \varphi(x,t) (\delta \varphi) \right] dV dt . \quad (5.28\alpha)
 \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, η σχέση 5.28 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[-Q_{11} f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - Q_{11} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} Q_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + \right. \\
 & + Q_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + Q_{11} z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - \frac{1}{2} Q_{11} f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \\
 & - \frac{1}{2} Q_{11} f(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + \frac{1}{2} Q_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} Q_{11} z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi(x,t) (\delta \varphi) \right] dV dt . \quad (5.28\beta)
 \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα του όγκου γράφεται ως ολοκλήρωμα στις τρεις διαστάσεις και η σχέση 5.28β γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[-Q_{11} f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - Q_{11} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - \right. \\
 & - \frac{1}{2} Q_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + Q_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + Q_{11} z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - \\
 & - Q_{11} f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \frac{1}{2} Q_{11} f(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + Q_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} Q_{11} z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - Q_{55} [f'(z)]^2 \varphi(x,t)(\delta \varphi) \right] dz dy dx dt . \tag{5.28\gamma}
 \end{aligned}$$

Γίνεται η ολοκλήρωση ως προς το πάχος y , και η σχ.5.28γ γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[-Q_{11} b f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - Q_{11} b z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - \right. \\
 & - \frac{1}{2} b Q_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + Q_{11} b z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + Q_{11} b z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - \\
 & - Q_{11} b f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \frac{1}{2} b Q_{11} f(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + Q_{11} b z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + \\
 & \left. + \frac{1}{2} Q_{11} b z \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - Q_{55} b [f'(z)]^2 \varphi(x,t)(\delta \varphi) \right] dz dx dt . \tag{5.28\delta}
 \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα ως προς z αναφέρεται σε όλους τους όρους της σχέσης 5.28δ:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[-Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz - Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \right. \\
 & - \frac{1}{2} b Q_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [1] dz + Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z f(z)] dz + \\
 & + Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z f(z)] dz - Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz - \\
 & - \frac{1}{2} b Q_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz + Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz + \\
 & \left. + \frac{1}{2} Q_{11} b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz - Q_{55} b \varphi(x,t)(\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz \right] dx dt . \tag{5.28\epsilon}
 \end{aligned}$$

Έπειτα, θέτοντας τους συντελεστές A_0, B_0, C_0, D_0, H_0 (εξ. 1.72α - 1.72δ και 2.13)

και ολοκληρώνοντας, η σχέση 5.28ε γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[-C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} b h Q_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \right. \\
 & + B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - H_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - \\
 & \left. - \frac{1}{2} H_0 b Q_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) (\delta \varphi) \right] dx dt . \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α), προκύπτουν οι επόμενοι όροι των εξισώσεων κίνησης από το πρώτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας και η σχέση 5.29 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & + \int_{x=0}^{x=L} \left\{ -A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{3}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right\} (\delta w) + \\
 & + \left\{ C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) \right\} (\delta \varphi) dx + \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & - \left[C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{1}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\
 & + \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e από τις σχέσεις 5.23 και 2.25β, γράφεται ως εξής:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V [E_z e_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}] dV dt . \quad (5.31\alpha)$$

Κάνοντας αντικατάσταση το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου από τις σχέσεις 4.34α, 4.34β και 4.34γ, η σχέση 5.31α γίνεται:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[g'(z) \bar{\varphi}(x,t) e_{31} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} e_{15} f'(z) \varphi(x,t) \right] dV dt, \end{aligned} \quad (5.31\beta)$$

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[-z g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x,t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + g(z) f'(z) e_{15} \varphi(x,t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right] dV dt. \end{aligned} \quad (5.31\gamma)$$

Κάνοντας πράξεις, η σχέση 5.31γ γίνεται:

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ \delta \left[-z g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \delta \left[f(z) g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \right. \\ & \left. + \delta \left[\frac{1}{2} g'(z) e_{31} \bar{\varphi}(x,t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \delta \left[g(z) f'(z) e_{15} \varphi(x,t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right] \right\} dV dt. \end{aligned} \quad (5.31\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τελεστή δ – μεταβολών, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -e_{31} z g'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta(\bar{\varphi}(x,t)) - e_{31} z g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & + e_{31} f(z) g'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta(\bar{\varphi}(x,t)) + e_{31} f(z) g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1}{2} e_{31} g'(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \delta(\bar{\varphi}(x,t)) + \frac{1}{2} e_{31} g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\ & \left. + e_{15} g(z) f'(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \delta(\varphi(x,t)) + e_{15} g(z) f'(z) \varphi(x,t) \delta \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) \right\} dz dy dx dt, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -e_{31} z g'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) - e_{31} z g'(z) \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \right. \\
 & + e_{31} f(z) g'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) + e_{31} f(z) g'(z) \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \varphi) + \\
 & + \frac{1}{2} e_{31} g'(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \bar{\varphi}) + e_{31} g'(z) \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \\
 & \left. + e_{15} g(z) f'(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) + e_{15} g(z) f'(z) \varphi(x, t) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right\} dz dy dx dt .
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Θέτοντας τους συντελεστές K_0, L_0, M_0, N_0 (σχ. 4.39α – 4.39ε) και ολοκληρώνοντας ως προς το πάχος y , η εξίσωση 5.33, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) - e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + e_{31} b L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) + \right. \\
 & + e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + \frac{1}{2} e_{31} b M_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \bar{\varphi}) + e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \\
 & \left. + e_{15} b N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) + e_{15} b N_0 \varphi(x, t) \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right\} dz dy dx dt .
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (*Παράρτημα Α*) από τη σχέση 5.34, προκύπτουν οι επόμενοι όροι των εξισώσεων κίνησης για το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e :

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{31} b M_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right\} (\delta w) + \\
 & + \left\{ e_{15} b N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - e_{31} b L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right\} (\delta \varphi) + \\
 & + \left\{ -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{31} b L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} e_{31} b M_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - e_{15} b N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} (\delta \bar{\varphi}) \Big] dx \\
 & - \left[e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial (\delta w)}{\partial x^2} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[e_{31} b K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x, t) (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} \\
 & + \left[e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[e_{15} b N_0 \varphi(x, t) (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας H_e από τις σχέσεις 5.23 και 5.25γ, γράφεται ως εξής:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{1}{2} [E_x^2 \varepsilon_{11}^* + E_z^2 \varepsilon_{33}^*] dV dt . \quad (5.36\alpha)$$

Κάνοντας πράξεις και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του δ – μεταβολών, η σχέση 5.36α, γίνεται:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{1}{2} \left[\left(g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)^2 \varepsilon_{11}^* + (g'(z) \bar{\varphi}(x,t))^2 \varepsilon_{33}^* \right] dV dt \quad (5.36\beta)$$

$$= \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{1}{2} \left[\delta \left(g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)^2 \varepsilon_{11}^* + \delta (g'(z) \bar{\varphi}(x,t))^2 \varepsilon_{33}^* \right] dV dt \quad (5.36\gamma)$$

$$= \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{1}{2} \left[g(z) 2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \varepsilon_{11}^* + g'(z) 2 \bar{\varphi}(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \varepsilon_{33}^* \right] dV dt \quad (5.36\delta)$$

$$= \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \varepsilon_{11}^* + g'(z) \bar{\varphi}(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \varepsilon_{33}^* \right] dz dy dx dt \quad (5.36\epsilon)$$

$$= \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)] dz + b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)] dz \right] dx dt . \quad (5.36\sigma\tau)$$

Στη συνέχεια, θέτοντας τους συντελεστές P_0 και M_0 (σχ.4.39ε και 4.39γ), η σχέση 5.36στ, γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} + M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \right] dx dt . \quad (5.37)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στη σχέση 5.37 (Παράρτημα Α), προκύπτουν οι επόμενοι όροι των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών και η σχέση 5.37 γίνεται:

$$\int_{x=0}^{x=L} \left[\left\{ -P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x, t) \right\} (\delta \bar{\varphi}) \right] dx + \left[P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} \quad (5.38)$$

Τέλος, από το τρίτο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton που αναφέρεται στο έργο των εξωτερικών δυνάμεων W_e , έχουμε:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (W_e) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} (q w(x, t)) dx dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} q (\delta w) dx dt . \quad (5.39)$$

Συνεπώς, συνολικά από την Αρχή Hamilton και πιο συγκεκριμένα από τις σχέσεις 5.22, 5.30, 5.35, 5.38 και 5.39 προκύπτουν τρεις εξισώσεις κίνησης και τέσσερις συνοριακές συνθήκες.

Το πακέτο εξισώσεων, αυτό, περιγράφει μια πιεζοηλεκτρική δοκό για όλες τις μη γραμμικές θεωρίες ελαστικότητας με σκοπό την κάμψη και παρουσιάζεται αναλυτικά από τις σχέσεις 5.40 - 5.46.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΟΚΩΝ:

$$\begin{aligned}
 (\delta w): & -A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{3}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \\
 & -B_0 \rho b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - e_{31} b M_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + q = 0
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \varphi): & -B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) - C_0 \rho b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0 \rho b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \\
 & -e_{31} b L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + e_{15} b N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \bar{\varphi}): & -e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{31} b L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} e_{31} b M_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - e_{15} b N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\
 & + M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x, t) = 0
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ:

$$\begin{aligned}
 & A_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \\
 & + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + e_{31} b K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
 & \text{ή } (\delta w) = 0, \text{ δηλαδή } w: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
 & -A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x, t) = 0 \\
 & \text{ή } \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \text{ δηλαδή } \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
 & B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x, t) = 0 \\
 & \text{ή } (\delta \varphi) = 0, \text{ δηλαδή } \varphi: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
 & P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + e_{15} b N_0 \varphi(x, t) = 0 \\
 & \text{ή } (\delta \bar{\varphi}) = 0, \text{ δηλαδή } \bar{\varphi}: \text{καθορισμένο}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

5.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στη συνέχεια, γίνεται επίλυση του στατικού προβλήματος μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού με μεγάλες παραμορφώσεις και συνοριακές συνθήκες πάκτωσης και μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού στα άκρα. Η λύση θα επιτευχτεί με τη μέθοδο Fourier (άπειρων αθροισμάτων ημιτόνων και συνημιτόνων). Εισάγονται τα αναπτύγματα με τη μορφή σειρών ημιτόνων και συνημιτόνων ώστε να ικανοποιούν **ακριβώς** τις συνοριακές συνθήκες, ως εξής:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (1.83)$$

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (1.86)$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L}, \quad (1.87)$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (5.48)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τρεις εξισώσεις κίνησης με ένα μείον και αγνοώντας τους αδρανειακούς όρους, οι τρεις εξισώσεις κίνησης σχ. 5.40, 5.41 και 5.42, έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} (\delta w): A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{3}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + K_0 e_{31} b \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \\ + M_0 e_{31} b \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_0 e_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = q, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$(\delta \varphi): B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) + L_0 e_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0 e_{15} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} (\delta \bar{\varphi}): K_0 e_{31} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - L_0 e_{31} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M_0 e_{31} b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + N_0 e_{15} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \\ - M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Ξεκινώντας από την πρώτη εξίσωση κίνησης (σχ.5.47), εισάγονται οι ποσότητες ως άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - \\
 & - \frac{3}{2} Q_{11} b h \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{l=1}^{\infty} w_l \sin \frac{l\pi x}{L} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + \\
 & + K_0 e_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + M_0 e_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] + \\
 & + M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right).
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις και η σχέση 5.50, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & A_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - \\
 & - \frac{3}{2} Q_{11} b h \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[w_l \sin \frac{l\pi x}{L} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + \\
 & + K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] + \\
 & + M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left(q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right).
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Επειδή οι ποσότητες w_m , φ_m και $\bar{\varphi}_m$ είναι σταθερές ποσότητες, η σχέση 5.51 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & A_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - \\
 & - \frac{3}{2} Q_{11} b h \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{l\pi x}{L} \right] \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{k\pi x}{L} \right] \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + \\
 & + K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{k\pi x}{L} \right] \right\} + \\
 & + M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{k\pi x}{L} \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις και η σχέση 5.52 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & A_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - \frac{3}{2} Q_{11} b h \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left(\cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{m\pi}{L} \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -w_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Κάνοντας τον υπολογισμό των συντελεστών στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρατηρήσαμε πώς για όλες τις θεωρίες ανώτερης τάξης, ο συντελεστής M_0 είναι ίσος με το μηδέν. Συνεπώς, με μεγάλη ασφάλεια μπορούμε να αφαιρέσουμε τους όρους που περιέχουν τον συντελεστή M_0 με σκοπό να μπορέσουν να συνεχίσουν οι πράξεις. Έτσι, η σχέση 5.53 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & A_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - \frac{3}{2} Q_{11} b h \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left(\cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Η σχέση 5.54, με αναδιάταξη όρων, παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) + \right. \\
 & + \frac{3}{2} Q_{11} b h w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left(\cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & \left. - K_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Από την ισότητα των αθροισμάτων της σχέσης 5.55, προκύπτει ισοδύναμα και η ισότητα των γενικών όρων των αθροισμάτων, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 & A_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) + \\
 & + \frac{3}{2} Q_{11} b h w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left(\cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - K_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \left. \right\} = q_m \sin \frac{m\pi x}{L} . \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Το διπλό άπειρο άθροισμα μπορεί να γραφεί (Boyce & DiPrima, 1999):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left(\cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 ,$$

και ο όρος $\left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)$ μπορεί να απλοποιηθεί εφόσον υπάρχει σε όλους τους όρους της εξίσωσης. Συνεπώς, η σχέση 5.56 μπορεί να γραφεί ως:

$$A_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - B_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \frac{3 Q_{11} b h}{4} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 - K_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 = q_m . \quad (5.57)$$

Θέτοντας $a_m = \left(\frac{m\pi}{L} \right)$, τελικά, η πρώτη εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή:

$$A_0 Q_{11} b w_m a_m^4 - B_0 Q_{11} b \varphi_m a_m^3 + \frac{3 Q_{11} b h}{4} a_m^2 w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 - K_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m a_m^2 = q_m . \quad (5.58)$$

Η δεύτερη εξίσωση ισορροπίας (σχ.5.48) γράφεται:

$$B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 Q_{55} b \varphi(x, t) + L_0 e_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0 e_{15} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 . \quad (5.59)$$

Εισάγοντας τις άγνωστες ποσότητες ως άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων, η σχέση 5.59 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\
 & + D_0 Q_{55} b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + L_0 e_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - \\
 & - N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις και η σχέση 5.60 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - C_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\
 & + D_0 Q_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - \\
 & - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Επειδή οι ποσότητες w_m , φ_m και $\bar{\varphi}_m$ είναι σταθερές ποσότητες, η σχέση 5.61 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - C_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + \\
 & + D_0 Q_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right\} + L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - \\
 & - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Εκτελούνται οι παραγωγίσεις στις αγκύλες και η σχέση 5.62, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & B_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - C_0 Q_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + D_0 Q_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

Το πρώτο μέρος της εξίσωσης μπορεί να γίνει ένα μεγάλο άθροισμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -B_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + \right. \\
 & + D_0 Q_{55} b \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
 & \left. - N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Η σχέση 5.64 μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned}
 & -B_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + \\
 & + D_0 Q_{55} b \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
 & - N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) = 0 ,
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

και ο όρος $\left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right)$ μπορεί να απλοποιηθεί:

$$\begin{aligned}
 & -B_0 Q_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 Q_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 Q_{55} b \varphi_m + \\
 & + L_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) - N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right) = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

Θέτοντας $a_m = \left(\frac{m\pi}{L}\right)$, τελικά η δεύτερη εξίσωση ισορροπίας έχει τη μορφή:

$$-(B_0 Q_{11} b a_m^3) w_m + (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) \varphi_m + (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) \bar{\varphi}_m = 0 . \quad (5.67)$$

Η τρίτη εξίσωση κίνησης (σχ.5.49) που αναφέρεται στο ηλεκτρικό δυναμικό, είναι:

$$\begin{aligned} & K_0 e_{31} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - L_0 e_{31} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - M_0 e_{31} b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\ & + N_0 e_{15} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \bar{\varphi}(x, t) = 0 . \end{aligned} \quad (5.68)$$

Εισάγοντας τις ποσότητες ως άπειρα αθροίσματα ημιτόνων και συνημιτόνων, η σχέση 5.68 γίνεται:

$$\begin{aligned} & K_0 e_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - L_0 e_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\ & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - \\ & - \frac{1}{2} M_0 e_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] + \\ & + N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - M_0 b \varepsilon_{33}^* \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (5.69)$$

Εκτελούνται οι παραγωγίσεις και η σχέση 5.69 γίνεται :

$$\begin{aligned} & K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \\ & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - \\ & - \frac{1}{2} M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] + \\ & + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - M_0 b \varepsilon_{33}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left[\bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (5.70)$$

Επειδή οι ποσότητες w_m , φ_m και $\bar{\varphi}_m$ είναι σταθερές ποσότητες, η σχέση 5.70 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + \\
 & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{k\pi x}{L} \right] \right\} + \\
 & + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

Εκτελούνται οι σχετικές παραγωγίσεις στη σχέση 5.71 και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} M_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{m\pi}{L} \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - M_0 b \varepsilon_{33}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Όμως, όπως και στην πρώτη εξίσωση κίνησης, για τη συγκεκριμένη συνάρτηση $g(z)$, υπολογίζοντας τους συντελεστές, βρέθηκε πως ο συντελεστής M_0 είναι ίσος με το μηδέν. Συνεπώς, η σχέση 5.72 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & K_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - L_0 e_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \\
 & + P_0 b \varepsilon_{11}^* \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης 5.73 μπορεί να γραφεί ως ένα μεγάλο άθροισμα ως εξής:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -K_0 e_{31} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \right. \\ \left. - P_0 b \varepsilon_{11}^* \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 . \quad (5.74)$$

Ισοδύναμα προκύπτει:

$$-K_0 e_{31} b w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) + L_0 e_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \\ - P_0 b \varepsilon_{11}^* \bar{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) = 0 , \quad (5.75)$$

και στη συνέχεια, ο όρος $\left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)$ απλοποιείται εφόσον υπάρχει σε όλους τους όρους της εξίσωσης. Επίσης, θέτοντας $a_m = \left(\frac{m\pi}{L} \right)$, τελικά η τρίτη εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή:

$$-K_0 e_{31} b a_m^2 w_m + L_0 e_{31} b a_m \varphi_m - P_0 b \varepsilon_{11}^* a_m^2 \bar{\varphi}_m - N_0 e_{15} b a_m \varphi_m = 0 . \quad (5.76)$$

Έτσι, προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$A_0 Q_{11} b w_m a_m^4 - B_0 Q_{11} b \varphi_m a_m^3 + \frac{3Q_{11} b h}{4} a_m^2 w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 - K_0 e_{31} b \bar{\varphi}_m a_m^2 = q_m , \quad (5.58)$$

$$-(B_0 Q_{11} b a_m^3) w_m + (C_0 Q_{11} b a_m^2 + D_0 Q_{55} b) \varphi_m + (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) \bar{\varphi}_m = 0 , \quad (5.67)$$

$$-K_0 e_{31} b a_m^2 w_m + (L_0 e_{31} b a_m - N_0 e_{15} b a_m) \varphi_m - P_0 b \varepsilon_{11}^* a_m^2 \bar{\varphi}_m = 0 . \quad (5.76)$$

Στη συνέχεια, στις σχέσεις 5.58, 5.67 και 5.76, θέτονται οι ποσότητες:

$$K_{11} = A_0 Q_{11} b \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4, \quad K_{12} = -B_0 Q_{11} b \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3, \quad (5.77\alpha)$$

$$K_{13} = -K_0 e_{31} b \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2, \quad \Lambda = \frac{3Q_{11} b h}{4} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2, \quad (5.77\beta)$$

$$K_{21} = -B_0 Q_{11} b \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3, \quad K_{22} = C_0 Q_{11} b \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 Q_{55} b, \quad (5.78\alpha)$$

$$K_{23} = L_0 e_{31} b \left(\frac{m\pi}{L} \right) - N_0 e_{15} b \left(\frac{m\pi}{L} \right), \quad (5.78\beta)$$

$$K_{31} = -K_0 e_{31} b \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2, \quad K_{32} = L_0 e_{31} b \left(\frac{m\pi}{L} \right) - N_0 e_{15} b \left(\frac{m\pi}{L} \right), \quad (5.79\alpha)$$

$$K_{33} = -P_0 \varepsilon_{11}^* b \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2. \quad (5.79\beta)$$

Παρατηρείται πως ισχύει ότι:

$$K_{12} = K_{21}, \quad K_{13} = K_{31}, \quad K_{23} = K_{32}. \quad (5.80\alpha)$$

Συνεπώς, οι σχέσεις 5.58, 5.67 και 5.76 γίνονται:

$$K_{11} w_m + \Lambda w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 + K_{12} \varphi_m + K_{13} \bar{\varphi}_m = q_m, \quad (5.81)$$

$$K_{21} w_m + K_{22} \varphi_m + K_{23} \bar{\varphi}_m = 0, \quad (5.82)$$

$$K_{31} w_m + K_{32} \varphi_m + K_{33} \bar{\varphi}_m = 0. \quad (5.83)$$

Παρατηρείται ότι οι εξισώσεις 5.82 και 5.83 αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα. Γίνεται επίλυση του συστήματος, θεωρώντας σταθερό τον όρο w_m , με τη μέθοδο των οριζουσών (μέθοδος Cramer).

Συνεπώς, η ορίζουσα D των συντελεστών του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} = K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32}, \quad (5.84)$$

και οι ορίζουσες των άγνωστων ποσοτήτων του συστήματος είναι:

$$D_{\varphi_m} = \begin{vmatrix} -K_{21}w_m & K_{23} \\ -K_{31}w_m & K_{33} \end{vmatrix} = w_m \begin{vmatrix} -K_{21} & K_{23} \\ -K_{31} & K_{33} \end{vmatrix} = w_m (-K_{21}K_{33} + K_{31}K_{23}), \quad (5.85)$$

$$D_{\bar{\varphi}_m} = \begin{vmatrix} K_{22} & -K_{21}w_m \\ K_{32} & -K_{31}w_m \end{vmatrix} = w_m \begin{vmatrix} K_{22} & -K_{21} \\ -K_{32} & -K_{31} \end{vmatrix} = w_m (-K_{22}K_{31} + K_{21}K_{32}). \quad (5.86)$$

Οι λύσεις του συστήματος στη γενική τους μορφή είναι:

$$\varphi_m = \frac{D_{\varphi_m}}{D} = w_m \frac{(K_{31}K_{23} - K_{21}K_{33})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})}, \quad (5.87)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{D_{\bar{\varphi}_m}}{D} = w_m \frac{(K_{21}K_{32} - K_{22}K_{31})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})}. \quad (5.88)$$

Έτσι, η σχέση 5.81 παίρνει τη μορφή:

$$\left\{ K_{11} + K_{12} \frac{(K_{31}K_{23} - K_{21}K_{33})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})} + K_{13} \frac{(K_{21}K_{32} - K_{22}K_{31})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})} \right\} w_m + \Lambda w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 = q_m. \quad (5.89)$$

Στη συνέχεια, θέτοντας την ποσότητα R :

$$R = K_{11} + K_{12} \frac{(K_{31}K_{23} - K_{21}K_{33})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})} + K_{13} \frac{(K_{21}K_{32} - K_{22}K_{31})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})}, \quad (5.90)$$

η σχέση 5.89, με τη βοήθεια της σχέσης 5.90, γίνεται:

$$Rw_m + Aw_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 = q_m. \quad (5.91)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης 5.91, είναι απαραίτητη η εκχώρηση τιμών στις ποσότητες w_m και w_k . Για την προσέγγιση με ένα όρο, δηλαδή για $m=1$ και $k=1$, η σχέση 5.91 γίνεται :

$$\left(A \frac{\pi^2}{L^2} \right) w_1^3 + (R) w_1 - q_1 = 0. \quad (5.92)$$

Προκύπτει μια πολυωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού. Βρίσκοντας τη λύση του w_1 , από τις σχέσεις 5.87 και 5.88 προκύπτουν οι λύσεις για τη στροφή φ_1 και για το ηλεκτρικό δυναμικό $\bar{\varphi}_1$ ως εξής:

$$\varphi_1 = w_1 \frac{(K_{31}K_{23} - K_{21}K_{33})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})}, \quad (5.87)$$

$$\bar{\varphi}_1 = w_1 \frac{(K_{21}K_{32} - K_{22}K_{31})}{(K_{22}K_{33} - K_{23}K_{32})}. \quad (5.88)$$

5.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσθηκαν οι αναλυτικοί τύποι για τις τρεις άγνωστες ποσότητες w_m , φ_m και $\tilde{\varphi}_m$ (εξ. 5.84, 5.85 και 5.86) για όλες τις μη γραμμικές θεωρίες ανώτερης τάξης σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς. Έπειτα, δημιουργείται πρόγραμμα στο λογισμικό πακέτο *Matlab* προς επίλυση και υπολογισμό των ποσοτήτων αυτών. Συνεπώς, για τις μη γραμμικές θεωρίες πιεζοηλεκτρικών δοκών, θα υπολογισθεί η εγκάρσια μετατόπιση w , η συνολική στροφή φ και το ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\varphi}$.

Στα συγκεκριμένα παραδείγματα, θεωρείται μια ισότροπη πιεζοηλεκτρική δοκό ακλόνητων άκρων η οποία υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο καμπτικό φορτίο $q_0 = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$. Το πιεζοηλεκτρικό υλικό της δοκού είναι το *PZT-5A* και έχει τις ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές σταθερές σύμφωνα με τις σχέσεις 4.130, 4.131 και 4.132. Το μήκος της δοκού είναι $L = 1\text{m}$ και το πάχος $b = 0.01\text{m}$. Η αναλογία διαστάσεων (*aspect ratio*) συμβολίζεται με S και ορίζεται ως ο λόγος μήκους προς πλάτος (L/h). Το πλάτος h προσαρμόζεται σύμφωνα με το λόγο S . Εφόσον πρόκειται για μη γραμμικές θεωρίες, θα πρέπει η αναλογία S να είναι μεγαλύτερη συγκριτικά με τις γραμμικές θεωρίες.

Για τα συγκεκριμένα παραδείγματα, η σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης w , για τις μη γραμμικές θεωρίες σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς, πραγματοποιήθηκε για λόγο $S = 20$. Συνεπώς, το πλάτος της πιεζοηλεκτρικής δοκού θα είναι $h = 0.05\text{m}$ και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1: Σύγκριση της συνολικής εγκάρσιας μετατόπισης w για τις γραμμικές και μη γραμμικές μη συζευγμένες θεωρίες για ελαστικές δοκούς με $S = 20$ στο κέντρο της δοκού ($x = 0.5$).

$S = 20$	Θεωρίες	w
	Ambartsumian Γραμμική	0.064725170617960
	Ambartsumian Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.007296707142058
	Kruszewski Γραμμική	0.064729535967239
	Kruszewski Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.007296784240339
	Reddy Γραμμική	0.063050794638924
	Reddy Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.007296795262133
	Touratier Γραμμική	0.0630
	Touratier Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.007296795142945
	Karama Γραμμική	0.063047684833920
	Karama Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.007296794532627
	Soldatos Γραμμική	0.0631
	Soldatos Μη Γραμμική (Μη συζευγμένη)	0.007296795300314

Παρατηρείται ότι στο κέντρο της δοκού, η στροφή φ όπως αναμένεται είναι μηδενική για όλες της μη γραμμικές θεωρίες. Επίσης, η εγκάρσια μετατόπιση w και το ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\varphi}$ είναι μέγιστα στο μέσο της δοκού. Ένα επίσης συμπέρασμα το οποίο είναι αναμενόμενο είναι το γεγονός πως καθώς αυξάνεται S και μειώνεται το h , η μετατόπιση και το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μεγαλύτερα.

Παρατηρείται, επίσης, το γεγονός ότι για λόγο $S = 20$ η γραμμική θεωρία χάνει την ισχύ της και παράγει λανθασμένα αποτελέσματα. Έτσι, χρειάζεται η εφαρμογή μη γραμμικών θεωριών. Να σημειωθεί στο σημείο αυτό πως η μη γραμμική θεωρία προβλέπει μικρότερες μετατοπίσεις από ότι η γραμμική θεωρία για τις πιεζοηλεκτρικές δοκούς κάμψης όπως φαίνεται από τον πίνακα 5.1.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Έγινε ομαδοποίηση των γραμμικών θεωριών κάμψης ελαστικών δοκών που λαμβάνουν υπόψη θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Με βάση το παραγόμενο μοντέλο, επιλύθηκε ένα στατικό πρόβλημα κάμψης δοκού και έγινε σύγκριση των παραγόμενων αποτελεσμάτων.
2. Έγινε παραγωγή και ομαδοποίηση μη - γραμμικών θεωριών κάμψης ελαστικών δοκών, που λαμβάνουν υπόψη θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Με βάση το παραγόμενο γενικό μοντέλο, επιλύθηκε ένα στατικό πρόβλημα κάμψης δοκού με μεγάλες μετατοπίσεις και έγινε σύγκριση των παραγόμενων αποτελεσμάτων.
3. Έγινε παραγωγή και ομαδοποίηση γραμμικών θεωριών κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών που λαμβάνουν υπόψη θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Με βάση το παραγόμενο γενικό μοντέλο, επιλύθηκε ένα στατικό πρόβλημα κάμψης δοκού και έγινε σύγκριση των παραγόμενων αποτελεσμάτων.
4. Έγινε παραγωγή και ομαδοποίηση μη - γραμμικών θεωριών κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών που λαμβάνουν υπόψη θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Με βάση το παραγόμενο γενικό μοντέλο, επιλύθηκε ένα στατικό πρόβλημα κάμψης πιεζοηλεκτρικής δοκού με μεγάλες παραμορφώσεις και έγινε σύγκριση των παραγόμενων αποτελεσμάτων.

Βιβλιογραφία

- [1] Amabili, M. (2004). Nonlinear Vibrations of Rectangular Plates with Different Boundary Conditions: Theory and Experiments, *Computers & Structures* (Vol.82, pp. 2587-2605).
- [2] Ambartsumyan, S. (1958). On the theory of bending of anisotropic plates, *Izv. AN SSSR. OTN* (Vol.5, pp. 69–77), in Russian.
- [3] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (1995). *Mathematical method for physicists*.
- [4] Ballarini, R. (2003). The Da Vinci - Euler-Bernoulli Beam Theory? *ME Magazine*.
- [5] Baluch, M., Azad, A., & Khidir, M. (1984). Technical theory of beams with normal strain, *Journal of Engineering Mechanics* (Vol.110, pp. 1233–1237).
- [6] Barondi, S. et. al., (2018). Static and dynamic analytical coupled field analysis of piezoelectric flexoelectric nanobeams: A strain gradient theory approach, *International Journal of Solid and Structures*, (Vol. 153, pp. 110-124).
- [7] Bauchau, O., & Craig, J. (2009). *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures*.
- [8] Berger, H. (1955). A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, *Journal of Applied Mechanics* (Vol. 22, pp. 465-472).
- [9] Bhimaraddi, A., & Chandrashekhara, K. (1993). Observations on higher-order beam theory, *Journal of Aerospace Engineering* (Vol. 6, pp. 408–413).
- [10] Bluth, J. (1994). Von Karman, Malina laid the groundwork for the future JPL, *Jet Propulsion Laboratory UNIVERSE* (Vol. 24).
- [11] Bickford, W. (1982). A consistent higher order beam theory, *Developments in Theoretical and Applied Mechanics* (Vol. 11, pp. 137-150).
- [12] Boas, M. (1983). *Mathematical Methods in the Physical Sciences*.

- [13] Boyce, E. W. & DiPrima, C. R., (1999), *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις Και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*.
- [14] Chang, I. (1996). *Thread of the silkworm*.
- [15] Chia, C.Y. (1980). *Nonlinear Analysis of Plates*.
- [16] Chu, H., & Herrmann, G. (1956). Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, (Vol.23, pp. 532-540).
- [17] Cowper, G. (1966). The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, *Journal of Applied Mechanics*, (Vol. 33, pp. 335–340).
- [18] Cowper, G. (1968). On the accuracy of Timoshenko's beam theory, *Journal of Engineering Mechanics* (Vol. 6, pp. 1447–1453).
- [19] Curie, J., & Curie, P. (1880). Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémihèdres faces inclinées, *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences* (Vol. 91, pp.294–295).
- [20] Curie, J., & Curie, P. (1880). Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémihèdres faces inclinées, *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences* (Vol. 91, pp. 383–386).
- [21] Curie, P., & Curie J. (1881). Contractions et dilations produits par des tensions electriques dans les cristaux hemieedres a faces inclinées, *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences*, (Vol. 93, pp. 1137-1140).
- [22] Díaz de Anda A., Flores J., Gutiérrez L., Méndez - Sánchez R.A., Monsivais G., & Morales A. (2012). Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions, *Journal of Sound and Vibration*, (Vol. 331, pp. 5732–5744).
- [23] El Kadiri, M., & Benamar, R. (2003), Improvement of the semi-analytical method, based on Hamilton's principle and spectral analysis, for determination of the geometrically non-linear response of thin straight structures. Part III: steady state periodic forced response of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, (Vol. 264, pp. 1-35).

- [24] Elshafei M. A., et. al. (2013). Modeling and analysis of smart piezoelectric beams using simple higher order shear deformation theory, *Smart materials and structures*, Vol.22.
- [25] Emam, S. (2002). A Theoretical and Experimental Study of Nonlinear Dynamics of Buckled Beams, *PhD thesis*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- [26] Fernandes, A. & Pouget, J. (2001). Accurate modeling of piezoelectric plates: single – layered plate, *Archive of Applied Mechanics*, (Vol.71, pp.509-524)
- [27] Franco-Villafañe, J., & Méndez-Sánchez, R. (2016). On the Accuracy of the Timoshenko Beam Theory Above the Critical Frequency: Best Shear Coefficient, *Journal of Mechanics*, (Vol.32, pp. 1–4).
- [28] Gere, J. M. (2000). *Mechanics of Materials*.
- [29] Ghugal, Y. M., & Sharma, R. (2009). Hyperbolic shear deformation theory for flexure and vibration of thick isotropic beams, *International Journal of Computational Methods*, (Vol.6, pp. 585–604).
- [30] Ghugal, Y. M., & Shimpi, R. (2002). A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams, *Journal of Reinforced Plastics and Composites* (Vol.21, pp. 775–813).
- [31] Ghugal, Y. M., (2006), A simple higher order theory for beam with transverse shear and transverse normal effect, Applied of Mechanics Department, Government College of Engineering, Aurangabad, India.
- [32] Goldschmidtboeing, F. & Woias, P. (2008). Characterization of different beam shapes for piezoelectric energy harvesting, *Journal of micromechanics and microengineering*.
- [33] Goldstein, S. (1966). Theodore von Karman 1881–1963. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*. (Vol.12, pp. 334–365).
- [34] Greenberg, J., & Goodstein, J. (1983). Theodore von Karman and Applied Mathematics in America, *Science* (Vol.222, pp.1300–1304).

- [35] Hadjigeorgiou, E. et. al. (2006). Shape control and damage identification of beams using piezoelectric actuation and genetic optimization, *International Journal of Engineering Science*, (Vol.44, pp.409-421).
- [36] Hallion, R. (2011). *The NACA, NASA, and the Supersonic-Hypersonic Frontier*, NASA. NASA Technical Reports Server.
- [37] Han, S., Benaroya, H., & Wei, T. (1999). Dynamics of Transversely Vibrating Beams using four Engineering Theories, *Journal of Sound and Vibration* (Vol. 225, pp. 935-988).
- [38] Hankel, W. (1881). Über die aktinound piezoelektrischen eigen schaften des bergkrystalles und ihre beziehung zi den thermoelektrischen, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, (Vol. 33, pp. 52-63).
- [39] Heartling, G. (1999). Ferroelectric Ceramics - History and Technology, *Journal of the American Ceramic Society* (Vol. 82, pp.797-818).
- [40] Heyliger, P., & Reddy, J. (1988). A higher order beam finite element for bending and vibration problems, *Journal of Sound and Vibration* (Vol. 126, pp.309–326).
- [41] Hildebrand, F., & Reissner, E. (1942). Distribution of stress in built-in beam of narrow rectangular cross section, *Journal of Applied Mechanics* (Vol.64, pp.109–116).
- [42] Hutchinson, J. (1981). Transverse vibration of beams, exact versus approximate solutions, *Journal of Applied Mechanics* (Vol. 48, pp. 923–928).
- [43] Iyengar, K.T.S.R., & Naqvi, M. (1966). Large Deflections of Rectangular Plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics* (Vol. 1, pp. 109-122).
- [44] Jaffe, G., Cook, W., & Jaffe, H. (1971). *Piezoelectric ceramics*.
- [45] Kaneko, T. (1975). On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams *J. Phys. D: Appl. Phys.* (Vol. 8, pp. 1927–1936).
- [46] Karama, M., & Mistou, K. (2003). Mechanical behavior of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures*, (Vol.40. pp. 1525–1546).

- [47] Kármán, T. (1910). Fesigkeitsprobleme in Maschinenbau *Encycl de Math Wiss* (Vol. 4, pp. 348-351).
- [48] Kirchhoff, G. (1850). Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elasischem scheibe, *J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik*, (Vol.49, pp. 51-88).
- [49] Komeili, A. (2011). Static Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Beams under Thermo-Electro-Mechanical Loads, *Advances in Mechanical Engineering*.
- [50] Krishna Murty, A. (1984). Toward a consistent beam theory, *AIAA Journal* (Vol.22. pp. 811–816).
- [51] Kruszewski, E. (1949). Effect of transverse shear and rotatory inertia on the natural frequency of a uniform beam, *NACA, No.1909, Washigton*.
- [52] Le, K. (1999). *Vibrations of shells and rods*.
- [53] Leissa, A. (1969). *Vibration of Plates*.
- [54] Lentzen, S. (2007). Nonlinearly coupled thermopiezoelectric modelling and FE - simualtion of smart structures, *PhD thesis*, Rheinisch - Westfalischen Technischen Hochschule Aachen Universitat.
- [55] Leung, A., & Mao, S. (1995). A symplectic Galerkin Method for Non-Linear Vibration of Beams and Plates, *Journal of Sound and Vibration* (Vol.183. pp. 475-491).
- [56] Levinson, M. (1981). A new rectangular beam theory, *Journal of Sound and Vibration* (Vol.74. pp. 81–87).
- [57] Levy, S. (1942). Bending of Rectangular Plates with Large Deflections, *NACA, No.846, Washington*.
- [58] Lippman, G. (1881). Principe de la conservation de l'électricité. *J. Phys. Theor. Appl.*, (Vol.10, pp.381-394).
- [59] Locatelli, G. (2001). Piezo-actuated adaptive structures for vibration damping and shape control - modeling and testing, *PhD thesis*, Technischen Universitat Muchen, Germany.

- [60] Marinković, D. (2007). A new finite composite shell element for piezoelectric active structures, *PhD thesis*, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg.
- [61] Mariotte, E. (1686). *Traits du mouvement des eaux*.
- [62] Méndez-Sánchez, R., Morales, A., & Flores J. (2005). Experimental check on the accuracy of Timoshenko's beam theory, *Journal of Sound and Vibration* (Vol.279, pp. 508–512).
- [63] Mindlin, R. (1951). Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics* (Vol.18, pp. 31-38).
- [64] Mindlin, R., & Deresiewicz, H., (1953). Timoshenko's Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams, Technical Report No. 10, ONR Project NR064-388, Department of Civil Engineering, Columbia University, New York, N.Y.
- [65] Nishawala, V. (2011). A Study of Large Deflection of Beams and Plates, *PhD Thesis*, New Brunswick, New Jersey.
- [66] O'Connor, J., & Robertson, E. "Theodore von Kármán", MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews.
- [67] Piefort, V. (2001). Finite element modelling of piezoelectric active structures, *PhD thesis*, Université Libre de Bruxelles.
- [68] Pötsch, W., Fischer, A., & Müller, W. (1989). *Lexikon bedeutender Chemiker*. Harri Deutsch, (pp.470).
- [69] Prathap, G., & Pandalai, K. (1977). Non-Linear Vibrations of Transversely Isotropic Rectangular Plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics* (Vol.13, pp. 285-294).
- [70] Rao, J., S. (2011). *History of Rotating Machinery Dynamics*.
- [71] Reddy, J. (1990). A general non-linear third order theory of plates with moderate thickness, *International Journal of Non-linear Mechanics* (Vol.25, pp. 677–686).
- [72] Reddy, J. (2007). *Nonlinear finite element analysis*.
- [73] Rehfield, L., & Murthy, P. (1982). Toward a new engineering theory of bending: fundamentals, *AIAA Journal* (Vol.20. pp. 693–699).

- [74] Reti, L. (1974). *The Unknown Leonardo*.
- [75] Ribeiro, P. (2001). Periodic Vibration of Plates with Large Displacements, *AIAA Journal*, (Vol. 40, pp. 185-188).
- [76] Rosinger, H., & Ritchie, I. (1977). On Timoshenko's correction for shear in vibrating isotropic beams, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, (Vol. 10, pp. 1461-1466).
- [77] Sathyamoorthy, M. (1982). Nonlinear Analysis of Beams Part I: A Survey of Recent Advances, *Shock and Vibration Digest*, (Vol. 14, pp. 19-35).
- [78] Sayyad, A. S., (2011) *Comparison of various shear deformation theories for the free vibration of thick isotropic beams*, International Journal of Civil and Structural Engineering, (vol.2, No.1, pp. 85–97).
- [79] Sayyad, A. S., (2011) *Comparison of various refined beam theories for the bending and free vibration analysis of thick beams*, Applied and Computational Mechanics, (vol.5, pp. 85–97).
- [80] Schreiner, H., Binding, R., & Helke, G. (2000). Characterization of Piezoelectric Multilayer Actuators: Low and High Field Behavior, 7th International Conference on New Actuators, Actuator 2000, Bremen.
- [81] Sears, W. (1965). Some Recollections of Theodore von Kármán, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- [82] Sears, W. (1986). Von Kármán: Fluid Dynamics and Other Things, *Physics Today*.
- [83] Soldatos, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, *Acta Mechanica* (Vol.94. pp. 195–200).
- [84] Solecki, R., & Conant, R. (2003). *Advanced Mechanics of Materials*.
- [85] Stein, M. (1989). Vibration of beams and plate strips with three-dimensional flexibility, *Journal of Applied Mechanics* (Vol.56. pp. 228–231).
- [86] Stephen, N. (1980). Timoshenko's shear coefficient from a beam subjected to gravity loading, *Journal of Applied Mechanics*, (Vol. 47, pp. 121–127).
- [87] Thomson, W. T. (1981). *Theory of Vibration with Applications*.

- [88] Tichy, J., Erhart, J., Kittinger, E., & Přivratska, J. (2010). *Fundamentals of Piezoelectric Sensorics: Mechanical, Dielectric, and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials*.
- [89] Tiersten, H. (1969). *Linear Piezoelectric Plate Vibrations - Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates*.
- [90] Timoshenko, S. (1921). On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine*, (p. 744).
- [91] Timoshenko, S. (1922). On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine*, (p. 125).
- [92] Timoshenko, S. (1932). *Schwingungsprobleme der Technik*.
- [93] Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*.
- [94] Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., (1979). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill 3rd Int. ed. Singapore.
- [95] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science* (Vol.29. pp. 901–916).
- [96] Truesdell, C. (1953). *Timoshenko's History of Strength of Materials*.
- [97] Truesdell, C. (1960). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788*.
- [98] Uchino, K. (2004). Piezoelectric Actuator's 2004 - Materials, Design, Drive/Control, Modeling and Applications, 9th International Conference on New Actuators, Bremen, (pp. 38-47).
- [99] Valasek, J. (1920). Piezoelectric and allied phenomena in Rochelle salt *Physical Review* (Vol.15, pp.537-538).
- [100] Vlasov, V., & Leont'ev, U. (1996). *Beams, Plates and Shells on Elastic foundation*, Israel Program for Scientific Translation Ltd, Jerusalem.
- [101] Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*.

- [102] Vu, D. (2011). Geometrically Nonlinear Higher-Order Shear Deformation FE Analysis of Thin-Walled Smart Structures, *PhD thesis*, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule, Aachen Universität.
- [103] Way, S. (1938). Uniformly loaded clamped rectangular plates with large deflection, *Proc. 5th Int. Congr. on Applied Mechanics* (pp. 123-128).
- [104] Wei-Zhang, C., & Kai-Yuan, Y. (1956). On the Large Deflection of Rectangular Plate, *Proceedings of IX International Congress of Applied Mechanics*, (pp. 387-394).
- [105] Yosibash, Z., & Kirby, R. (2005). Dynamic response of various von Karman Non-Linear Plate Models and their 3-D Counterparts, *International Journal of Solid and Structures*, (Vol. 42, pp. 2517-2531).
- [106] Zhou, D. (2003). Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics, *Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6869*, Dissertation, (pp. 6-12).
- [107] Zhou, Y. et. al. (2005). Analytical solutions to piezoelectric bimorphs based on improved FSDT beam model, *Smart Structures and Systems*, (Vol.1, No.3).
- [108] Wang, Q. et. al. (2001). Analysis of piezoelectric coupled circular plate, *Smart materials and structures*, (Vol.10, pp.229-239).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.3.1 Gauss στη σχέση 1.73 (σελ.25):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} dx = \left[A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} -B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} dx = - \left[B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} -B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} dx = - \left[B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} dx = \left[C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx$$

1.3.1 Gauss στη σχέση 1.77 (σελ.27):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} dx = \left[\frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} (\delta w) \right] dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} -\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} dx = - \left[\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right] dx$$

1.3.3 Σειρές Fourier σχέση 1.84 (σελ.31):

$$A_0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] - B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right)$$

$$A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right)$$

$$A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi_m \left[\cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right)$$

$$A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) = q_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)$$

$$A_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - B_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 = q_m$$

$$\left(A_0 \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) w_m - \left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \varphi_m = q_m$$

1.3.3 Σειρές Fourier σχέση 1.85 (σελ.31)

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi = 0$$

$$B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] - C_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] + D_0 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0$$

$$B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - C_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + D_0 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0$$

$$B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - C_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + D_0 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0$$

$$B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left[-\cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - C_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[-\cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + D_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right\} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -B_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left[\cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -C_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D_0 \varphi_m \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0$$

$$-B_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + D_0 \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) = 0$$

$$-B_0 w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 \varphi_m = 0$$

$$-\left(B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left(C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 \right) \varphi_m = 0$$

1.3.3 Σειρές Fourier σχέση 1.92 (σελ.32)

$$u_l = u(x, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t)$$

$$u = -z \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$u = -z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$u = -z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{m\pi}{L} \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-z \frac{m\pi}{L} w_m + f(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L}$$

1.3.3 Σειρές Fourier σχέση 1.93 (σελ.32)

$$u_3 = w(x, z, t) = w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Gf'(z) \varphi_m \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\}$$

1.3.3 Σειρές Fourier σχέση 1.94 (σελ.32)

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left[-z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right] =$$

$$\sigma_x = E \left[-z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} \right] =$$

$$\sigma_x = E \left[-z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(-\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left[-\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} \right] =$$

$$\sigma_x = E \left[z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \right]$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} E \left[z \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m - f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L}$$

1.3.3 Σειρές Fourier σχέση 1.95 (σελ.32)

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = Gf'(z) \varphi = Gf'(z) \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Gf'(z) \varphi_m \left[\cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.2.1 Gauss στη σχέση 2.14 (σελ.47):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = \left[A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx$$

$$\bullet - \int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = - \left[B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx$$

$$\bullet - \int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = - \left[B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = \left[C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{x=0}^{x=L} \left[H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] dx &= \left[H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[H_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{,x} (\delta w) \right] dx = \\ &= \left[H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(H_0 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right) (\delta w) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{x=0}^{x=L} \left[H_0 \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dx &= \left[H_0 \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(\left[H_0 \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{,x} (\delta \varphi) \right) dx = \\ &= \left[\frac{H_0}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[H_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta \varphi) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{Ebh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] dx &= \left[\frac{Ebh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(\left[\frac{Ebh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right]_{,x} (\delta w) \right) dx = \\ &= \left[\frac{Ebh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{Ebh}{2} 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) \right) dx = \\ &= \left[\frac{Ebh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \frac{3Ebh}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) \right) dx = \end{aligned}$$

2.2.1 Gauss στη σχέση 2.22 (σελ.49):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} dx = \left[\frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} (\delta w) \right] dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} -\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} dx = - \left[\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right] dx$$

2.3 Σχέση 2.37 και 2.42 (σελ.53-54)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{l=1}^{\infty} w_l \sin \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{k\pi}{L} w_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[\frac{l\pi}{L} w_l \cos \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.2.1 Gauss στη σχέση 4.49 (σελ.109):

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt = \left[A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial(\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} (\delta w) dx$$

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt = \left[C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) dx$$

$$- \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt = - \left[B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial(\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} (\delta w) dx$$

$$- \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt = - \left[B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta \varphi) dx$$

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right) dx dt = \left[\frac{\partial w}{\partial t} (\delta w) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dx$$

4.2.1 Gauss στη σχέση 4.64 (σελ.112):

$$-\int_{x=0}^{x=L} \left(C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = - \left[C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx$$

$$-\int_{x=0}^{x=L} \left(A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = - \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx$$

$$\int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx$$

$$\int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx$$

4.2.1 Gauss στη σχέση 4.73 (σελ.114):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(-e_{31} b K_0 \bar{\varphi} (x, t) \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = - \left[e_{31} b K_0 \bar{\varphi} (x, t) \frac{\partial (\delta w)}{\partial x^2} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[e_{31} b K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta w) \right) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b L_0 \bar{\varphi} (x, t) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = \left[e_{31} b L_0 \bar{\varphi} (x, t) (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) \right) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{15} b N_0 \varphi (x, t) \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = \left[e_{15} b N_0 \varphi (x, t) (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{15} b N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right) dx$$

4.2.1 Gauss στη σχέση 4.81 (σελ.116):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = \left[P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) \right) dx$$

4.2.3 Σειρές Fourier σχέσεις 4.120 – 4.126 (σελ.128)

Αξονική Τάση Κάμψης:

$$\sigma_x = Q_{11} \varepsilon_x - e_{31} E_z = Q_{11} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - e_{31} g'(z) \bar{\varphi}(x, t)$$

$$\sigma_x = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - e_{31} g'(z) \bar{\varphi}(x, t)$$

$$\sigma_x = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(-z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right) - e_{31} g'(z) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right]$$

$$\sigma_x = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \left[-z \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[-f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left[e_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} z \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - e_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left[z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \right] \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - e_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m - e_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}$$

Εγκάρσια Διατμητική Τάση:

$$\tau_{xz} = Q_{55} \gamma_{xz} + \varepsilon_{11}^* E_x$$

$$\tau_{xz} = G_{13} f'(z) \varphi(x, t) + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} = G_{13} f'(z) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right]$$

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[G_{13} f'(z) \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ G_{13} f'(z) \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[G_{13} f'(z) \varphi_m + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}$$

Αξονική Ηλεκτρική Μετατόπιση:

$$D_x = e_{15} \gamma_{xz} + \varepsilon_{11}^* E_x$$

$$D_x = e_{15} f'(z) \varphi(x, t) + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}$$

$$D_x = e_{15} f'(z) \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right]$$

$$D_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left[e_{15} f'(z) \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$D_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left[e_{15} f'(z) \varphi_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$D_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[e_{15} f'(z) \varphi_m + \varepsilon_{11}^* g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}$$

Εγκάρσια Ηλεκτρική Μετατόπιση:

$$D_z = e_{31} \varepsilon_x + \varepsilon_{33}^* E_z$$

$$D_z = e_{31} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \varepsilon_{33}^* g'(z) \bar{\varphi}(x, t)$$

$$D_z = -e_{31} z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + e_{31} f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + \varepsilon_{33}^* g'(z) \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$D_z = \sum_{m=1}^{\infty} \left[e_{31} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) - e_{31} f(z) \varphi_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) + \varepsilon_{33}^* g'(z) \bar{\varphi}_m \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$D_z = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[e_{31} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - e_{31} f(z) \varphi_m + \varepsilon_{33}^* g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1 Gauss στη σχέση 5.21 (σελ.138):

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt = \left[A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \left[A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} (\delta w) dx$$

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt = \left[C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) dx$$

$$- \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt = - \left[B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \left[B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} (\delta w) dx$$

$$- \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt = - \left[B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta \varphi) dx$$

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right) dx dt = \left[\frac{\partial w}{\partial t} (\delta w) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dx$$

5.1 Gauss στη σχέση 5.29 (σελ.142):

$$- \int_{x=0}^{x=L} \left(C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = - \left[C_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} C_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx$$

$$- \int_{x=0}^{x=L} \left(A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = - \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[A_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} A_0 Q_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx$$

$$- \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{1}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right) dx = - \left[\frac{1}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \frac{3}{2} Q_{11} b h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) dx$$

$$\int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx$$

$$\int_{x=0}^{x=L} \left(B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} \right) dx = \left[B_0 Q_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta\varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 Q_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta\varphi) dx$$

5.1 Gauss στη σχέση 5.34 (σελ.144):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(-e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = - \left[e_{31} b K_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial(\delta w)}{\partial x^2} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[e_{31} b K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta w) \right) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} \right) dx = \left[e_{31} b L_0 \bar{\varphi}(x,t) (\delta\varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta\varphi) \right) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) dx = \left[e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b M_0 \left(\bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) (\delta w) \right) dx$$

$$= \left[e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{31} b M_0 \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta w) + e_{31} b M_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right) dx$$

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{15} b N_0 \varphi(x,t) \frac{\partial(\delta\bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = \left[e_{15} b N_0 \varphi(x,t) (\delta\bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(e_{15} b N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta\bar{\varphi}) \right) dx$$

5.1 Gauss στη σχέση 5.37 (σελ.146):

$$\bullet \int_{x=0}^{x=L} \left(P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial(\delta\bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = \left[P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta\bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left(P_0 b \varepsilon_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta\bar{\varphi}) \right) dx$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Προγράμματα στο λογισμικό πακέτο *Matlab*

1) ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΔΟΚΟΙ (ΘΕΩΡΙΑ REDDY)

```
function w=Def_ReddyL
format long
q0=1*(10^6);
L=1;
h=0.5;
b=0.01;
x=0.5;
% Μέτρο Ελαστικότητας 210GPa
E=210*(10^9);
% Μέτρο Διάτμησης 80.76GPa
G=80.76923077*(10^9);
a1=pi/L;
a2=2*a1;
a3=3*a1;
a4=4*a1;
a5=5*a1;
a6=6*a1;
a7=7*a1;
% Συντελεστές για τη Θεωρία του Reddy
A0=(E*b*h^3)/12;
B0=(E*b*h^3)/15;
C0=(17*E*b*h^3)/315;
D0=(G*b*h^8)/15;
% Κατανομή Φορτίου
q1=(4*q0)/(pi);
q2=0;
q3=(4*q0)/(3*pi);
q4=0;
q5=(4*q0)/(5*pi);
q6=0;
q7=(4*q0)/(7*pi);
% Μετατοπίσεις
w1=q1*(C0*a1^2+D0)/((C0*a1^2+D0)*(A0*a1^4)-(B0*a1^3)*(B0*a1^3));
w2=q2*(C0*a2^2+D0)/((C0*a2^2+D0)*(A0*a2^4)-(B0*a2^3)*(B0*a2^3));
w3=q3*(C0*a3^2+D0)/((C0*a3^2+D0)*(A0*a3^4)-(B0*a3^3)*(B0*a3^3));
w4=q4*(C0*a4^2+D0)/((C0*a4^2+D0)*(A0*a4^4)-(B0*a4^3)*(B0*a4^3));
w5=q5*(C0*a5^2+D0)/((C0*a5^2+D0)*(A0*a5^4)-(B0*a5^3)*(B0*a5^3));
w6=q6*(C0*a6^2+D0)/((C0*a6^2+D0)*(A0*a6^4)-(B0*a6^3)*(B0*a6^3));
w7=q7*(C0*a7^2+D0)/((C0*a7^2+D0)*(A0*a7^4)-(B0*a7^3)*(B0*a7^3));
% Στροφές
f1=q1*(B0*a1^3)/((C0*a1^2+D0)*(A0*a1^4)-(B0*a1^3)*(B0*a1^3));
f2=q2*(B0*a2^3)/((C0*a2^2+D0)*(A0*a2^4)-(B0*a2^3)*(B0*a2^3));
f3=q3*(B0*a3^3)/((C0*a3^2+D0)*(A0*a3^4)-(B0*a3^3)*(B0*a3^3));
f4=q4*(B0*a4^3)/((C0*a4^2+D0)*(A0*a4^4)-(B0*a4^3)*(B0*a4^3));
f5=q5*(B0*a5^3)/((C0*a5^2+D0)*(A0*a5^4)-(B0*a5^3)*(B0*a5^3));
f6=q6*(B0*a6^3)/((C0*a6^2+D0)*(A0*a6^4)-(B0*a6^3)*(B0*a6^3));
f7=q7*(B0*a7^3)/((C0*a7^2+D0)*(A0*a7^4)-(B0*a7^3)*(B0*a7^3));
% Συνολικές Μετατοπίσεις και Στροφές
wtot=w1*sin((pi*x)/L)+w2*sin((2*pi*x)/L)+w3*sin((3*pi*x)/L)+w4*sin((4*pi*x)/L)+w5*sin((5*pi*x)/L)+w6*sin((6*pi*x)/L)+w7*sin((7*pi*x)/L)
ftot=f1*cos((pi*x)/L)+f2*cos((2*pi*x)/L)+f3*cos((3*pi*x)/L)+f4*cos((4*pi*x)/L)+f5*cos((5*pi*x)/L)+f6*cos((6*pi*x)/L)+f7*cos((7*pi*x)/L)
% Αδιάστατο w (Πίνακες Sayyad)
wexp=((10*E*b*h^3*wtot)/(q0*(L^4)))
```


2) ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΔΟΚΟΙ (ΘΕΩΡΙΑ REDDY)

```

%Reddy Μη γραμμική προσέγγιση με 3 όρους (k=1,2,3 , m=1,2,3)
format long

% Διαστάσεις Δοκού (S=2 --> L=1, h=0.5)
L=1;
h=0.5;
b=0.01;

%Επιβαλλόμενο φορτίο q0=1kN/m
q0=1*(10^6);

% Μέτρο Ελαστικότητας 210GPa
E=210*(10^9);

% Μέτρο Διάτμησης 80.76GPa
G=80.76923077*(10^9);

a1=pi/L;
a2=2*a1;
a3=3*a1;

% Κατανομή Φορτίου
q1=(4*q0)/(pi);
q2=0;
q3=(4*q0)/(3*pi);
x=0:0.001:1;
A=b*h;

% Συντελεστές για τη Θεωρία Reddy
A0=E*b*h^3/12;
B0=E*b*h^3/15;
C0=17*E*b*h^3/315;
D0=G*b*h^8/15;

y=x*L;

C1=(C0*a1^2+D0);
C3=(C0*a3^2+D0);

%Reddy Γραμμική Θεωρία
w1=q1*(C0*pi^2/L^2+D0)/(((C0*pi^2/L^2+D0)*(A0*pi^4/L^4)-(B0*pi^3/L^3)*(B0*pi^3/L^3)));
w2=q2*(C0*4*pi^2/L^2+D0)/(((C0*4*pi^2/L^2+D0)*(A0*2^4*pi^4/L^4)-(B0*8*pi^3/L^3)*(B0*8*pi^3/L^3)));
w3=q3*(C0*9*pi^2/L^2+D0)/(((C0*9*pi^2/L^2+D0)*(A0*3^4*pi^4/L^4)-(B0*27*pi^3/L^3)*(B0*27*pi^3/L^3)));
f1=q1*(B0*pi^3/L^3)/((C0*pi^2/L^2+D0)*(A0*pi^4/L^4)-(B0*pi^3/L^3)*(B0*pi^3/L^3));
f2=q2*(B0*8*pi^3/L^3)/(((C0*4*pi^2/L^2+D0)*(A0*2^4*pi^4/L^4)-(B0*8*pi^3/L^3)*(B0*8*pi^3/L^3)));
f3=q3*(B0*27*pi^3/L^3)/(((C0*9*pi^2/L^2+D0)*(A0*3^4*pi^4/L^4)-(B0*27*pi^3/L^3)*(B0*27*pi^3/L^3)));

wtot=w1*sin(pi*y/L)+w2*sin(2*pi*y/L)+w3*sin(3*pi*y/L)
ftot=f1*cos(pi*y/L)+f2*cos(2*pi*y/L)+f3*cos(3*pi*y/L)

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

%Reddy Μη γραμμική Προσέγγιση με 1 όρο

```
w111=(( ((2*q1)/(E*A*a1^4))^2+(4*A0/(3*E*A)-
4*(B0*a1)^2/(3*A*E*(C0*a1^2+D0)))^3)^(1./2)+2*q1/(E*A*a1^4))^^(1./3)-
(((2*q1)/(E*A*a1^4))^2+(4*A0/(3*E*A)-
4*(B0*a1)^2/(3*A*E*(C0*a1^2+D0)))^3)^(1./2)-2*q1/(E*A*a1^4))^^(1./3);
w222=q2/(A0*a2^4-(B0^2*a2^6)/(C0*a2^2+D0)+(E*A*a1^2*a2^2*w1^2));
w333=q3/(A0*a3^4-(B0^2*a3^6)/(C0*a3^2+D0)+(E*A*a1^2*a3^2*w1^2));
f111=(B0*a1.^3/(C0*a1.^2+D0))*w111;
f222=(B0*a2.^3/(C0*a2.^2+D0))*w222;
f333=(B0*a3.^3/(C0*a3.^2+D0))*w333;
```

```
wtot2=w111*sin(pi*y/L)+w222*sin(2*pi*y/L)+w333*sin(3*pi*y/L)
ftot2=f111*cos(pi*y/L)+f222*cos(2*pi*y/L)+f333*cos(3*pi*y/L)
```

%Reddy Μη Γραμμική Προσέγγιση με 3 όρους

```
x1=4*C1^2*C3^3*a1^2*q3^3
x2=-C1^2*C3^2*a1^2*(4*A0*C3*a3^4-
4*B0^2*a3^6)*q3^2+8*C1*C3^2*a1^2*a3^2*(B0^2*(C1*a3^4-
C3*a1^4)+A0*C1*C3*(a1^2-a3^2))*q3^2
x3=4*C3*a1^2*a3^4*(2*A0*B0^2*C1*C3*(-
3*C1*a3^6+2*C1*a1^2*a3^4+2*C3*a1^4*a3^2-
C3*a1^6)+A0^2*C1^2*C3^2*(3*a3^4+a1^4-
4*a1^2*a3^2)+B0^4*(3*C1^2*a3^8+C3^2*a1^8-4*C1*C3*a1^4*a3^4))*q3
x4=a1^2*a3^4*(4*A0*C3*a3^4-4*B0^2*a3^6)*(2*A0*B0^2*C1*C3*(C1*a3^6-
C1*a1^2*a3^4-C3*a1^4*a3^2+C3*a1^6)-A0^2*C1^2*C3^2*(a1^2-a3^2)^2+B0^4*(-
C1^2*a3^8+C3^2*a1^8+2*C1*C3*a1^4*a3^4))-
E*A*C1^2*C3^3*a3^4*(a1^2*q3^2+a3^2*q1^2)
x5=2*E*A*C1*C3^2*a1^2*a3^6*(B0^2*(-C1*a3^4+C3*a1^4)+A0*C1*C3*(a3^2-
a1^2))*q3
x6=E*A*C3*a1^2*a3^8*(2*A0*B0^2*C1*C3*(C1*a3^6-C1*a1^2*a3^4-
C3*a1^4*a3^2+C3*a1^6)-A0^2*C1^2*C3^2*(a1^2-a3^2)^2+B0^4*(-
C1^2*a3^8+C3^2*a1^8+2*C1*C3*a1^4*a3^4))
```

```
w22=0;
w33=roots([x6 x5 x4 x3 x2 x1]); % Get all the roots
w33=w33(imag(w33)==0) % Save only the real roots
w11=((4*A0*a3^2*q3+4*D0*q3-4*A0*D0*a3^4*w33-E*A*A0*a3^6*w33^3-
E*A*D0*a3^4*w33^3)/(E*A*(A0*a3^2+D0)*a1^2*a3^2*w33))^0.5;
f11=(B0*a1^3/(C0*a1^2+D0))*w11;
f22=(B0*a2^3/(C0*a2^2+D0))*w22;
f33=(B0*a3^3/(C0*a3^2+D0))*w33;
```

```
wtot3=w11*sin(pi*y/L)+w22*sin(2*pi*y/L)+w33*sin(3*pi*y/L)
ftot3=f11*cos(pi*y/L)+f22*cos(2*pi*y/L)+f33*cos(3*pi*y/L)
```

%Γραφικές παραστάσεις

```
ax1 = subplot(2,1,1);
plot(ax1, x,-wtot,'b--', x,-wtot2,'g-', x,-wtot3,'m-')
title(ax1, 'Μετατόπιση')
xlabel(ax1, 'Μήκος/m')
ylabel(ax1, 'Μετατόπιση/m')
```

```
ax2 = subplot(2,1,2);
plot(ax2, x,ftot,'b--', x,ftot2,'g-', x,ftot3,'m-')
title(ax2, 'Στροφή')
xlabel(ax2, 'Μήκος/m')
ylabel(ax2, 'Στροφή/rad')
```

3) ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΔΟΚΟΙ (ΘΕΩΡΙΑ REDDY)

```
function w=Def_reddyPL1
format long

% Επιβαλλόμενο Φορτίο q0
q0=1*10^6;
% Διαστάσεις της Δοκού
L=1;
h=0.1;
b=0.01;
x=0.5;
% Ελαστικές σταθερές PZT-5A
c11=105*10^9;
c22=105*10^9;
c12=54.6*10^9;
c21=54.6*10^9;
c13=52.7*10^9;
c31=52.7*10^9;
c32=52.7*10^9;
c23=52.7*10^9;
c33=86.8*10^9;
c44=22.2*10^9;
c55=22.2*10^9;
% Πιεζοηλεκτρικές σταθερές PZT-5A
e31=-9.78;
e15=12.2;
% Διηλεκτρικές σταθερές PZT-5A
e11=16.4*10^(-9);
e33=15.1*10^(-9);
c11a=c11-(c12^2/c22);
c13a=c13-(c12*c23/c22);
c33a=c33-(c23^2/c22);
% Μέτρο Ελαστικότητας Q11
Q11=c11a-(c13a^2/c33a);
% Μέτρο Διάτμησης Q55
Q55=22.2*10^9;
a1=pi/L;
a2=2*a1;
a3=3*a1;
a4=4*a1;
a5=5*a1;
a6=6*a1;
a7=7*a1;
y=x*L;
% Συντελεστές για τη Θεωρία του Reddy
A0=Q11*0.0833*b*h^3;
B0=Q11*0.06666*b*h^3;
C0=Q11*0.05396*b*h^3;
D0=Q55*0.53333*b*h;
K0=-0.6666*b*h;
M0=0;
P0=0.6666*b*h;
L0=-0.5333*b*h;
N0=0.5333*b*h;
% Κατανομή Φορτίου
q1=(4*q0)/(pi);
q2=0;
q3=(4*q0)/(3*pi);
q4=0;
```

```

q5=(4*q0)/(5*pi);
q6=0;
q7=(4*q0)/(7*pi);
% Μετατοπίσεις
w1=(q1*((C0*a1^2+D0)*(-P0*e11*a1^2-M0*e33)-(L0*e31*a1-
N0*e15*a1)^2))/(((A0*a1^4)*(C0*a1^2+D0)-(B0*a1^3)^2)*(-P0*e11*a1^2-
M0*e33)+(-B0*a1^3*(L0*e31*a1-N0*e15*a1)-(C0*a1^2+D0)*(-K0*e31*a1^2))*(-
K0*e31*a1^2)+((-B0*a1^3)*(-K0*e31*a1^2)-(A0*a1^4)*(L0*e31*a1-
N0*e15*a1))*(L0*e31*a1-N0*e15*a1));
w2=(q2*((C0*a2^2+D0)*(-P0*e11*a2^2-M0*e33)-(L0*e31*a2-
N0*e15*a2)^2))/(((A0*a2^4)*(C0*a2^2+D0)-(B0*a2^3)^2)*(-P0*e11*a2^2-
M0*e33)+(-B0*a2^3*(L0*e31*a2-N0*e15*a2)-(C0*a2^2+D0)*(-K0*e31*a2^2))*(-
K0*e31*a2^2)+((-B0*a2^3)*(-K0*e31*a2^2)-(A0*a2^4)*(L0*e31*a2-
N0*e15*a2))*(L0*e31*a2-N0*e15*a2));
w3=(q3*((C0*a3^2+D0)*(-P0*e11*a3^2-M0*e33)-(L0*e31*a3-
N0*e15*a3)^2))/(((A0*a3^4)*(C0*a3^2+D0)-(B0*a3^3)^2)*(-P0*e11*a3^2-
M0*e33)+(-B0*a3^3*(L0*e31*a3-N0*e15*a3)-(C0*a3^2+D0)*(-K0*e31*a3^2))*(-
K0*e31*a3^2)+((-B0*a3^3)*(-K0*e31*a3^2)-(A0*a3^4)*(L0*e31*a3-
N0*e15*a3))*(L0*e31*a3-N0*e15*a3));
w4=(q4*((C0*a4^2+D0)*(-P0*e11*a4^2-M0*e33)-(L0*e31*a4-
N0*e15*a4)^2))/(((A0*a4^4)*(C0*a4^2+D0)-(B0*a4^3)^2)*(-P0*e11*a4^2-
M0*e33)+(-B0*a4^3*(L0*e31*a4-N0*e15*a4)-(C0*a4^2+D0)*(-K0*e31*a4^2))*(-
K0*e31*a4^2)+((-B0*a4^3)*(-K0*e31*a4^2)-(A0*a4^4)*(L0*e31*a4-
N0*e15*a4))*(L0*e31*a4-N0*e15*a4));
w5=(q5*((C0*a5^2+D0)*(-P0*e11*a5^2-M0*e33)-(L0*e31*a5-
N0*e15*a5)^2))/(((A0*a5^4)*(C0*a5^2+D0)-(B0*a5^3)^2)*(-P0*e11*a5^2-
M0*e33)+(-B0*a5^3*(L0*e31*a5-N0*e15*a5)-(C0*a5^2+D0)*(-K0*e31*a5^2))*(-
K0*e31*a5^2)+((-B0*a5^3)*(-K0*e31*a5^2)-(A0*a5^4)*(L0*e31*a5-
N0*e15*a5))*(L0*e31*a5-N0*e15*a5));
w6=(q6*((C0*a6^2+D0)*(-P0*e11*a6^2-M0*e33)-(L0*e31*a6-
N0*e15*a6)^2))/(((A0*a6^4)*(C0*a6^2+D0)-(B0*a6^3)^2)*(-P0*e11*a6^2-
M0*e33)+(-B0*a6^3*(L0*e31*a6-N0*e15*a6)-(C0*a6^2+D0)*(-K0*e31*a6^2))*(-
K0*e31*a6^2)+((-B0*a6^3)*(-K0*e31*a6^2)-(A0*a6^4)*(L0*e31*a6-
N0*e15*a6))*(L0*e31*a6-N0*e15*a6));
w7=(q7*((C0*a7^2+D0)*(-P0*e11*a7^2-M0*e33)-(L0*e31*a7-
N0*e15*a7)^2))/(((A0*a7^4)*(C0*a7^2+D0)-(B0*a7^3)^2)*(-P0*e11*a7^2-
M0*e33)+(-B0*a7^3*(L0*e31*a7-N0*e15*a7)-(C0*a7^2+D0)*(-K0*e31*a7^2))*(-
K0*e31*a7^2)+((-B0*a7^3)*(-K0*e31*a7^2)-(A0*a7^4)*(L0*e31*a7-
N0*e15*a7))*(L0*e31*a7-N0*e15*a7));
% Στροφές
f1=(-q1*(-B0*a1^3*(-P0*e11*a1^2-M0*e33)-(L0*e31*a1-N0*e15*a1)*(-
K0*e31*a1^2)))/(((A0*a1^4)*(C0*a1^2+D0)-(B0*a1^3)^2)*(-P0*e11*a1^2-
M0*e33)+(-B0*a1^3*(L0*e31*a1-N0*e15*a1)-(C0*a1^2+D0)*(-K0*e31*a1^2))*(-
K0*e31*a1^2)+((-B0*a1^3)*(-K0*e31*a1^2)-(A0*a1^4)*(L0*e31*a1-
N0*e15*a1))*(L0*e31*a1-N0*e15*a1));
f2=(-q2*(-B0*a2^3*(-P0*e11*a2^2-M0*e33)-(L0*e31*a2-N0*e15*a2)*(-
K0*e31*a2^2)))/(((A0*a2^4)*(C0*a2^2+D0)-(B0*a2^3)^2)*(-P0*e11*a2^2-
M0*e33)+(-B0*a2^3*(L0*e31*a2-N0*e15*a2)-(C0*a2^2+D0)*(-K0*e31*a2^2))*(-
K0*e31*a2^2)+((-B0*a2^3)*(-K0*e31*a2^2)-(A0*a2^4)*(L0*e31*a2-
N0*e15*a2))*(L0*e31*a2-N0*e15*a2));
f3=(-q3*(-B0*a3^3*(-P0*e11*a3^2-M0*e33)-(L0*e31*a3-N0*e15*a3)*(-
K0*e31*a3^2)))/(((A0*a3^4)*(C0*a3^2+D0)-(B0*a3^3)^2)*(-P0*e11*a3^2-
M0*e33)+(-B0*a3^3*(L0*e31*a3-N0*e15*a3)-(C0*a3^2+D0)*(-K0*e31*a3^2))*(-
K0*e31*a3^2)+((-B0*a3^3)*(-K0*e31*a3^2)-(A0*a3^4)*(L0*e31*a3-
N0*e15*a3))*(L0*e31*a3-N0*e15*a3));
f4=(-q4*(-B0*a4^3*(-P0*e11*a4^2-M0*e33)-(L0*e31*a4-N0*e15*a4)*(-
K0*e31*a4^2)))/(((A0*a4^4)*(C0*a4^2+D0)-(B0*a4^3)^2)*(-P0*e11*a4^2-
M0*e33)+(-B0*a4^3*(L0*e31*a4-N0*e15*a4)-(C0*a4^2+D0)*(-K0*e31*a4^2))*(-
K0*e31*a4^2)+((-B0*a4^3)*(-K0*e31*a4^2)-(A0*a4^4)*(L0*e31*a4-
N0*e15*a4))*(L0*e31*a4-N0*e15*a4));

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

$$f5 = (-q5 * (-B0 * a5^3 * (-P0 * e11 * a5^2 - M0 * e33) - (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5) * (-K0 * e31 * a5^2))) / (((A0 * a5^4) * (C0 * a5^2 + D0) - (B0 * a5^3)^2) * (-P0 * e11 * a5^2 - M0 * e33) + (-B0 * a5^3 * (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5) - (C0 * a5^2 + D0) * (-K0 * e31 * a5^2)) * (-K0 * e31 * a5^2) + ((-B0 * a5^3) * (-K0 * e31 * a5^2) - (A0 * a5^4) * (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5)) * (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5));$$

$$f6 = (-q6 * (-B0 * a6^3 * (-P0 * e11 * a6^2 - M0 * e33) - (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6) * (-K0 * e31 * a6^2))) / (((A0 * a6^4) * (C0 * a6^2 + D0) - (B0 * a6^3)^2) * (-P0 * e11 * a6^2 - M0 * e33) + (-B0 * a6^3 * (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6) - (C0 * a6^2 + D0) * (-K0 * e31 * a6^2)) * (-K0 * e31 * a6^2) + ((-B0 * a6^3) * (-K0 * e31 * a6^2) - (A0 * a6^4) * (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6)) * (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6));$$

$$f7 = (-q7 * (-B0 * a7^3 * (-P0 * e11 * a7^2 - M0 * e33) - (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7) * (-K0 * e31 * a7^2))) / (((A0 * a7^4) * (C0 * a7^2 + D0) - (B0 * a7^3)^2) * (-P0 * e11 * a7^2 - M0 * e33) + (-B0 * a7^3 * (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7) - (C0 * a7^2 + D0) * (-K0 * e31 * a7^2)) * (-K0 * e31 * a7^2) + ((-B0 * a7^3) * (-K0 * e31 * a7^2) - (A0 * a7^4) * (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7)) * (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7));$$

% Ηλεκτρικό δυναμικό

$$f11 = (q1 * (-B0 * a1^3 * (L0 * e31 * a1 - N0 * e15 * a1) - (C0 * a1^2 + D0) * (-K0 * e31 * a1^2))) / (((A0 * a1^4) * (C0 * a1^2 + D0) - (B0 * a1^3)^2) * (-P0 * e11 * a1^2 - M0 * e33) + (-B0 * a1^3 * (L0 * e31 * a1 - N0 * e15 * a1) - (C0 * a1^2 + D0) * (-K0 * e31 * a1^2)) * (-K0 * e31 * a1^2) + ((-B0 * a1^3) * (-K0 * e31 * a1^2) - (A0 * a1^4) * (L0 * e31 * a1 - N0 * e15 * a1)) * (L0 * e31 * a1 - N0 * e15 * a1));$$

$$f22 = (q2 * (-B0 * a2^3 * (L0 * e31 * a2 - N0 * e15 * a2) - (C0 * a2^2 + D0) * (-K0 * e31 * a2^2))) / (((A0 * a2^4) * (C0 * a2^2 + D0) - (B0 * a2^3)^2) * (-P0 * e11 * a2^2 - M0 * e33) + (-B0 * a2^3 * (L0 * e31 * a2 - N0 * e15 * a2) - (C0 * a2^2 + D0) * (-K0 * e31 * a2^2)) * (-K0 * e31 * a2^2) + ((-B0 * a2^3) * (-K0 * e31 * a2^2) - (A0 * a2^4) * (L0 * e31 * a2 - N0 * e15 * a2)) * (L0 * e31 * a2 - N0 * e15 * a2));$$

$$f33 = (q3 * (-B0 * a3^3 * (L0 * e31 * a3 - N0 * e15 * a3) - (C0 * a3^2 + D0) * (-K0 * e31 * a3^2))) / (((A0 * a3^4) * (C0 * a3^2 + D0) - (B0 * a3^3)^2) * (-P0 * e11 * a3^2 - M0 * e33) + (-B0 * a3^3 * (L0 * e31 * a3 - N0 * e15 * a3) - (C0 * a3^2 + D0) * (-K0 * e31 * a3^2)) * (-K0 * e31 * a3^2) + ((-B0 * a3^3) * (-K0 * e31 * a3^2) - (A0 * a3^4) * (L0 * e31 * a3 - N0 * e15 * a3)) * (L0 * e31 * a3 - N0 * e15 * a3));$$

$$f44 = (q4 * (-B0 * a4^3 * (L0 * e31 * a4 - N0 * e15 * a4) - (C0 * a4^2 + D0) * (-K0 * e31 * a4^2))) / (((A0 * a4^4) * (C0 * a4^2 + D0) - (B0 * a4^3)^2) * (-P0 * e11 * a4^2 - M0 * e33) + (-B0 * a4^3 * (L0 * e31 * a4 - N0 * e15 * a4) - (C0 * a4^2 + D0) * (-K0 * e31 * a4^2)) * (-K0 * e31 * a4^2) + ((-B0 * a4^3) * (-K0 * e31 * a4^2) - (A0 * a4^4) * (L0 * e31 * a4 - N0 * e15 * a4)) * (L0 * e31 * a4 - N0 * e15 * a4));$$

$$f55 = (q5 * (-B0 * a5^3 * (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5) - (C0 * a5^2 + D0) * (-K0 * e31 * a5^2))) / (((A0 * a5^4) * (C0 * a5^2 + D0) - (B0 * a5^3)^2) * (-P0 * e11 * a5^2 - M0 * e33) + (-B0 * a5^3 * (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5) - (C0 * a5^2 + D0) * (-K0 * e31 * a5^2)) * (-K0 * e31 * a5^2) + ((-B0 * a5^3) * (-K0 * e31 * a5^2) - (A0 * a5^4) * (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5)) * (L0 * e31 * a5 - N0 * e15 * a5));$$

$$f66 = (q6 * (-B0 * a6^3 * (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6) - (C0 * a6^2 + D0) * (-K0 * e31 * a6^2))) / (((A0 * a6^4) * (C0 * a6^2 + D0) - (B0 * a6^3)^2) * (-P0 * e11 * a6^2 - M0 * e33) + (-B0 * a6^3 * (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6) - (C0 * a6^2 + D0) * (-K0 * e31 * a6^2)) * (-K0 * e31 * a6^2) + ((-B0 * a6^3) * (-K0 * e31 * a6^2) - (A0 * a6^4) * (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6)) * (L0 * e31 * a6 - N0 * e15 * a6));$$

$$f77 = (q7 * (-B0 * a7^3 * (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7) - (C0 * a7^2 + D0) * (-K0 * e31 * a7^2))) / (((A0 * a7^4) * (C0 * a7^2 + D0) - (B0 * a7^3)^2) * (-P0 * e11 * a7^2 - M0 * e33) + (-B0 * a7^3 * (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7) - (C0 * a7^2 + D0) * (-K0 * e31 * a7^2)) * (-K0 * e31 * a7^2) + ((-B0 * a7^3) * (-K0 * e31 * a7^2) - (A0 * a7^4) * (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7)) * (L0 * e31 * a7 - N0 * e15 * a7));$$

% Συνολικές Μετατοπίσεις και Στροφές

$$wtot = w1 * \sin(\pi * y / L) + w2 * \sin(2 * \pi * y / L) + w3 * \sin(3 * \pi * y / L) + w4 * \sin(4 * \pi * y / L) + w5 * \sin(5 * \pi * y / L) + w6 * \sin(6 * \pi * y / L) + w7 * \sin(7 * \pi * y / L)$$

$$ftot = f1 * \cos(\pi * y / L) + f2 * \cos(2 * \pi * y / L) + f3 * \cos(3 * \pi * y / L) + f4 * \cos(4 * \pi * y / L) + f5 * \cos(5 * \pi * y / L) + f6 * \cos(6 * \pi * y / L) + f7 * \cos(7 * \pi * y / L)$$

$$f1tot = f11 * \sin(\pi * y / L) + f22 * \sin(2 * \pi * y / L) + f33 * \sin(3 * \pi * y / L) + f44 * \sin(4 * \pi * y / L) + f55 * \sin(5 * \pi * y / L) + f66 * \sin(6 * \pi * y / L) + f77 * \sin(7 * \pi * y / L)$$

4) ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΔΟΚΟΙ (ΘΕΩΡΙΑ REDDY)

```

function w=Def_reddyNLP
% Επιβαλλόμενο Φορτίο q0
q0=1*10^6;
% Διαστάσεις της Δοκού
L=1;
h=0.05;
b=0.01;
x=0.5;
% Ελαστικές σταθερές PZT-5A
c11=105*10^9;
c22=105*10^9;
c12=54.6*10^9;
c21=54.6*10^9;
c13=52.7*10^9;
c31=52.7*10^9;
c32=52.7*10^9;
c23=52.7*10^9;
c33=86.8*10^9;
c44=22.2*10^9;
c55=22.2*10^9;
% Πιεζοηλεκτρικές σταθερές PZT-5A & Διηλεκτρικές σταθερές PZT-5A
e31=-9.78;
e15=12.2;
e11=16.4*10^(-9);
e33=15.1*10^(-9);
% Μέτρο Ελαστικότητας Q11 & Μέτρο Διάτμησης Q55
Q11=c11a-(c13a^2/c33a);
Q55=22.2*10^9;
a1=pi/L;
y=x*L;
% Συντελεστές για τη Θεωρία του Reddy
A0=Q11*0.0833*b*h^3;
B0=Q11*0.06666*b*h^3;
C0=Q11*0.05396*b*h^3;
D0=Q55*0.53333*b*h;
K0=-0.6666*b*h;
M0=0;
P0=0.6666*b*h;
L0=-0.5333*b*h;
N0=0.5333*b*h;
% Κατανομή Φορτίου
q1=(4*q0)/(pi);
%συντελεστες για w1:
K11=A0*a1.^4;
K12=-B0*a1.^3;
K13=-K0*e31*b*a1.^2;
X=((3*Q11*b*h*a1.^2*pi.^2)/(4*L^2))*(pi.^2/(L.^2));
K21=-B0*a1.^3;
K22=C0*a1.^2+D0;
K23=L0*e31*b*a1-N0*e15*b*a1;
K31=-K0*e31*b*a1.^2;
K32=L0*e31*b*a1-N0*e15*b*a1;
K33=-P0*b*e11*a1.^2;
R=(K11+K12*((K31*K23-K21*K33)/(K22*K33-K23*K32))+K13*((K21*K32-
K22*K31)/(K22*K33-K23*K32)));
H=-q1;
t=[X R H]; % Get all the roots
w1=roots(t)

```