Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Σχολή Επιστημών της Αγωγής
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Επιστήμες της Αγωγής»
Κατεύθυνση: Φυσικές Επιστήμες στην Εκπαίδευση

Διαδικασίες επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων από ενήλικες

Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία

Μπαλωμένου Λυδία

<u>Συμβουλευτική επιτροπή</u>
<u>Επιβλέπων:</u> Τάτσης Κωνσταντίνος
<u>Μέλη</u>: Καλδρυμίδου Μαρία
Βαμβακούση Ξανθή

Ιωάννινα 2018

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει παρουσιαστεί ενδιαφέρον από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα για την ανάδειξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των ενηλίκων, αλλά και την εκπαίδευσή τους. Μία από τις βασικές μαθηματικές δεξιότητες είναι η επίλυση προβλημάτων. Ωστόσο, δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες που σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων από ενήλικες. Η παρούσα εργασία αναφέρεται στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων από ενήλικες και στην ανάδειξη διαφορετικών παραγόντων που λαμβάνουν υπόψη τους κατά την επίλυσή τους. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις: στην πρώτη φάση οι ενήλικες έλυσαν γραπτά έξι ρεαλιστικά προβλήματα, ενώ στη δεύτερη φάση σχηματίστηκαν ομάδες εστίασης που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα. Επιπλέον, στόχος της έρευνας ήταν η ανάδειξη χαρακτηριστικών που πιθανόν επηρεάζουν τις απαντήσεις των συμμετεχόντων και η επιρροή της ομαδικής συζήτησης στην ανάδειξη ρεαλιστικών παραγόντων κατά την επίλυση προβλημάτων.

Λέξεις κλειδιά: *Αριθμητισμός, Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση, επίλυση προβλημάτων*

ABSTRACT

In recent decades, the international scientific community has shown interest in highlighting the mathematical skills of adults and their education. One of the basic mathematical skills is problem solving. However, there is not enough research related to adult problem solving. This study is about solving problems from adults and the different factors that adults take into account when solving them. The research was conducted in two phases: in the first phase the adults solved six realistic problems in written form, while in the second phase we formed focus groups that had to face a realistic problem. In addition, the aim of the research was to highlight features that affect participants' responses and the influence of group discussion on the emergence of realistic considerations in problem solving.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά αναγνωρίζονται ως τομέας που χτίζει συνδέσεις ανάμεσα στο άτομο και την κοινωνία (Wake 2014) και αποτελούν έναν επιστημονικό τομέα, οι εφαρμογές του οποίου επηρεάζουν τον τρόπο και την ποιότητα της ζωής των ατόμων. Σε μακροεπίπεδο, είναι ένας τομέας που στηρίζει την εξέλιξη της τεχνολογίας, ενισχύει την τεχνογνωσία και την πρόοδο της επιστήμης, βοηθά στην παγίωση της γνώσης και διευκολύνει την καθημερινότητα. Εν ολίγοις, τα Μαθηματικά επηρεάζουν κάθε έκφανση της ζωής του ανθρώπου, καθώς βρίσκονται παντού. Από την άλλη πλευρά, σε μικροεπίπεδο, σε επίπεδο ατόμου δηλαδή, τα Μαθηματικά επηρεάζουν το άτομο στο πώς αντιλαμβάνεται τα κοινωνικά δρώμενα, στη λήψη αποφάσεων και στην προσωπική του εξέλιξη. Η ικανότητα χρήσης των Μαθηματικών για τη λήψη αποφάσεων αυξάνει το επίπεδο αριθμητισμού ενός ατόμου, την ικανότητά του δηλαδή να χειρίζεται αριθμούς και δεδομένα με σωστό τρόπο (De Lange, 2003).

Σημείο τομής των Μαθηματικών της κοινωνίας και των Μαθηματικών του ατόμου αποτελούν στιγμιότυπα της καθημερινότητας που προσκαλούν το άτομα να πάρει αποφάσεις. Άλλωστε, τα Μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνο ως περιγραφικό εργαλείο, αλλά ως πηγή λήψης αποφάσεων και πράξης (Skovmose, 1998). Έξι τέτοιου είδους στιγμιότυπα κατασκευάστηκαν σε αυτή την εργασία με στόχο την ανάδειξη των απαντήσεων των υποκειμένων σε αυτές τις καταστάσεις. Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων στην έρευνα εξετάστηκαν ως προς την κριτική σκέψη των υποκειμένων, τη μαθηματική δραστηριότητα που ανέπτυξαν και τη ρεαλιστικότητα των απαντήσεων τους.

Η μαθηματική δραστηριότητα είναι μία διαδικασία που αναπτύσσεται και καλλιεργείται στο σχολείο και αποτελεί βασική μέριμνα του εκπαιδευτικού συστήματος. Το εκπαιδευτικό σύστημα όμως, ενδιαφέρεται και για την κριτική σκέψη των μαθητών σε όλες τις θεματικές περιοχές της εκπαίδευσης. Η κριτική σκέψη είναι η βασική ιδέα και έμπνευση της Κριτικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης που θέτει αρχές για την προώθηση της κριτικής σκέψης στο σχολικό περιβάλλον. Ένας ενάριθμος ενήλικας αύριο, ο σημερινός μαθητής, θα πρέπει να είναι σε θέση να βλέπει με κριτική ματιά τα κοινωνικά δρώμενα και να στοχάζεται (Askew, 2015). Επιπροσθέτως, ένα διαφορετικό ρεύμα, που επηρεάζει τη διδακτική πράξη και αναφέρεται στην εργασία, είναι εκείνο της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης που προσπαθεί να διδάξει τα Μαθηματικά μέσα από την καθημερινότητα των μαθητών.

Τέλος, έγινε μία προσπάθεια, με τη βοήθεια δημογραφικών στοιχείων και πεποιθήσεων των συμμετεχόντων, αναζήτησης των παραμέτρων που επηρεάζουν ένα άτομο στο να παραθέσει ενάριθμες απαντήσεις σε προβλήματα της καθημερινότητας. Αξίζει να σημειωθεί πως οι ενάριθμες απαντήσεις είναι εκείνες που στηρίχτηκαν σε κριτική σκέψη, άρτια μαθηματική δραστηριότητα και είναι ρεαλιστικές.

Γενικότερα, δύο ρεύματα που επηρεάζουν τη Διδακτική των Μαθηματικών αποτελούν, η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση και η Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση υποστηρίζουν δύο απαραίτητες δεξιότητες για έναν ενήλικα: τη λήψη ρεαλιστικών παραγόντων υπόψη κατά την επίλυση προβλημάτων και την κριτική σκέψη. Στην παρούσα εργασία, οι δεξιότητες αυτές αποτελούν προεκτάσεις του αριθμητισμού, ο οποίος εξετάζεται μέσα από έξι προβληματικές καταστάσεις της καθημερινότητας. Πρέπει να σημειωθεί πως τα προβλήματα συνιστούν βασικό αντικείμενο των εκπαιδευτικών συστημάτων.

Αφού ελέγχθηκε η επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων από ενήλικες με τη γραπτή συμπλήρωση ερωτηματολογίου, ακολούθησε η επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος από ομάδες στο πλαίσιο μίας συζήτησης συσχετιζόμενης με τα Μαθηματικά. Βασικός στόχος των ομάδων εστίασης είναι να παρατηρηθεί η αλληλεπίδραση των μελών μίας ομάδας και τα αποτελέσματα αυτής της αλληλεπίδρασης.

1.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1.1 Μαθηματικές δεξιότητες και κοινωνικό σύνολο

Η μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί την τομή πολλών επιστημών συμπεριλαμβανομένων των κοινωνικών επιστημών, της γλώσσας, των Μαθηματικών και της πολιτικής (Jablonka, Wagner & Walshaw, 2013). Επιπλεόν, δε συνιστά πλέον ζήτημα μόνο μεταφοράς μαθηματικής γνώσης στις επόμενες γενιές, αλλά και κατασκευής μιας επιθυμητής υποκειμενικότητας, αφού η μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί μία εκπαιδευτική διαδικασία με δυναμικό και αποτελεσματικό πολιτικό χαρακτήρα (Valero, 2015). Τα Μαθηματικά δηλαδή δεν περιορίζονται στη σχολική τάξη, αλλά αφορούν γενικότερα τη δυναμική του κοινωνικού συνόλου. Παρατηρείται όμως το εξής παράδοξο: παρά τον κεντρικό ρόλο των Μαθηματικών στην κοινωνία, δεν κατανοούν οι άνθρωποι ότι κάνουν Μαθηματικά, ενώ ελάχιστοι φαίνεται να κάνουν Μαθηματικά (Gravemeijer, Lin, Julie, Ohtani & Stephan, 2017).

Η αποτελεσματική εκμάθηση των Μαθηματικών αποτελεί θέμα δημοκρατίας, καθώς οι επαρκώς καταρτισμένοι πολίτες στα Μαθηματικά θα μπορούν να συμμετέχουν αποτελεσματικά στο οικονομικό και πολιτικό γίγνεσθαι της χώρας. Η κατανόηση της πολιτικής που ακολουθείται για τη μαθηματική εκπαίδευση οδηγεί σε μία συζήτηση σχετικά με την ισότητα και τη δημοκρατία, γεγονός που αγνοούν αρκετοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης (Skovmose, 1998). Πιο συγκεκριμένα, ο Skovmose (1998) αναφέρει τέσσερις έννοιες που επηρεάζουν τη σχέση μαθηματικής εκπαίδευσης και δημοκρατίας: την πολιτική ιδιότητα (citizenship), που θεωρεί τον εκπαιδευόμενο ένα νέο μέλος της κοινωνίας, τη μαθηματική αρχαιολογία (mathematical archeology), που περιλαμβάνει τις κοινωνικές λειτουργίες των μαθηματικών και τη χρήση τους στην καθημερινότητα, τη μαθηματικότητα (mathemacy), ένα ολοκληρωμένο πακέτο επαρκούς μαθηματικής γνώσης και τη συνειδητή αλληλεπίδραση (deliberative interaction), που αντιμετωπίζει τη σχολική τάξη σαν μικρο-κοινωνία και σχετίζεται με τις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης.

Από τη δεκαετία του 1980 έχει αναδείξει η βιβλιογραφία τη σχέση ανάμεσα στη μαθηματική εκπαίδευση και τη δημοκρατία. Τα Μαθηματικά αφορούν τον ευρύτερο πληθυσμό, όπως και η δημοκρατία. Επίσης, η έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει δεχτεί κοινωνιολογικό και φιλοσοφικό θεωρητικό υπόβαθρο, διαστάσεις που εξετάζουν τη δημοκρατία, ενώ επικρατεί η παγκόσμια τάση να γίνει η εκπαίδευση ο στύλος της δημοκρατίας (Valero, Garcia, Camelo, Mancera & Romero, 2012). Σύμφωνα με τον Vithal (1999) άλλωστε, τα παιδιά στην τάξη των Μαθηματικών έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν τη δημοκρατική ζωή. Όσο αφορά στους τρόπους με τους οποίους η μαθηματική εκπαίδευση επηρεάζει τη δημοκρατική ζωή των πολιτών, οι Aguilar και Zavaleta (2012) επισημαίνουν ότι η μαθηματική εκπαίδευση:

- μπορεί να προσφέρει στους μαθητές μαθηματικές δεξιότητες με τις οποίες μπορούν κριτικά να αναλύσουν το κοινωνικό περιβάλλον, να πιστοποιήσουν και να εκτιμήσουν τις χρήσεις, θετικές και αρνητικές, των Μαθηματικών στα κοινωνικά δρώμενα
- παρέχει στους μαθητές αξίες και στάσεις που είναι θεμελιώδεις για την ανάπτυξη και διατήρηση δημοκρατικών κοινωνιών
- μπορεί να λειτουργεί σαν φίλτρο που περιορίζει τις ευκαιρίες για ανάπτυξη και αστική συμμετοχή μερικών μαθητών.

Στην άποψη περί συσχέτισης της μαθηματικής εκπαίδευσης και της δημοκρατίας συγκλίνει και ο Niss (2003), ο οποίος επισημαίνει πως η δημοκρατία απαιτεί πολίτες που είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται και να κατανοούν τον κόσμο, να αντιμετωπίζουν με στοχαστικό τρόπο κοινωνικά φαινόμενα και νόρμες, και όχι απλά να κατανοούν πληροφορίες και να παίρνουν αποφάσεις. Η ουσία της δημοκρατίας είναι η λήψη αποφάσεων από την πλειονότητα του κοινωνικού συνόλου, ενώ οι πολίτες καθίστανται υπεύθυνοι για αυτή. Το κέντρο βάρους δηλαδή μετατίθεται στους πολίτες, οι οποίοι θα πρέπει να έχουν το κατάλληλο υπόβαθρο και κριτική σκέψη, για να εξετάσουν τα δεδομένα και να αποφανθούν αναλόγως.

Οι αρμοδιότητες των πολιτών που αναφέρθηκαν είναι στοιχεία της ιδιότητας τους ως πολίτες (citizenship). Σύμφωνα με τους Westheimer και Kahne (2004), η συγκεκριμένη ιδιότητα μπορεί να κατηγοριοποιήσει τους πολίτες σε τρεις κατηγορίες: στον προσωπικά υπεύθυνο (personally responsible), τον συμμετοχικό (participatory) και τον προς τη δικαιοσύνη προσανατολισμένο (justice oriented). Ο πρώτος τύπος πολίτη είναι σκληρά εργαζόμενος, νομοταγής και υπεύθυνος στην κοινότητά του. Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι πολίτες που συμμετέχουν ενεργά στην κυβέρνηση/κοινότητα, διαπλέκονται με το σύστημα και προσπαθούν να αλλάξουν τις κοινωνικές συνθήκες, ενώ στην τρίτη κατηγορία οι πολίτες που αναζητούν τη ρίζα των κοινωνικών αδικιών και προσπαθούν με μαζικές κινητοποιήσεις και στροφή στον ακτιβισμό να επιφέρουν αλλαγή στο κοινωνικό κατεστημένο. Σύμφωνα με τον Weiland (2017), οι δύο τελευταίες κατηγορίες οδηγούν στην κριτική ιδιότητα του πολίτη (critical citizenship), καθώς ο πολίτης καθίσταται ενεργός και μέτοχος στις κοινωνικές αλλαγές. Ο δρόμος, για να οδηγηθεί κάποιος σε αυτή, μπορεί είναι η μαθηματική εκπαίδευση ξεκινώντας από τα πρώιμα μαθηματικά χρόνια φέρνοντας αντιμέτωπα τα παιδιά με κοινωνικά γεγονότα και ασκώντας κριτική (Gustein, 2006).

Σύμφωνα με τον Gustein (2006) απαιτούνται τρία στοιχεία, η κατανόηση των Μαθηματικών, η «ανάγνωση» του κόσμου με Μαθηματικά και η «γραφή» του κόσμου με Μαθηματικά, ώστε να εμφυσήσει κάποιος την κοινωνική δικαιοσύνη στην παιδαγωγική και το αναλυτικό πρόγραμμα. Πέραν αυτού, η επαρκής μαθηματική κατάρτιση αποτελεί ζήτημα κοινωνικής δικαιοσύνης, καθώς αποτελεί μοχλό για την πρόσβαση στα επιθυμητά αγαθά (Valero, 2015). Σε ένα κράτος δικαίου λοιπόν, το ίδιο το κράτος θα πρέπει να παρέχει μέσα από το εκπαιδευτικό σύστημα που επιλέγει τα απαραίτητα εφόδια σε όλους τους μαθητές. Τα εφόδια αυτά θα ενισχύσουν τον μαθητή στη διεκδίκηση επιθυμητών αγαθών, είτε στην εφηβική, είτε στην ενήλικη ζωή του. Μόλις τα Μαθηματικά γίνουν ένα «εργαλείο σκέψης», για να βλέπει κανείς τον κόσμο κριτικά, θα συμβάλλουν στην κοινωνική και πολιτική ενδυνάμωση του μαθητή και θα προάγουν κοινωνική δικαιοσύνη και καλύτερη ζωή για όλους (Ernest, 2002).

Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθεί πως η σχολική τάξη των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει μία προσομοίωση της κοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεωρία του Bourdieu (1996), σε κοινωνικό επίπεδο η υπόσταση και η παρουσία ενός ατόμου εξαρτάται από το οικονομικό κεφάλαιο που διαθέτει. Έτσι και στη σχολική τάξη, για να κατέχει ο μαθητής μία ισχυρή θέση στο μάθημα των Μαθηματικών πρέπει να διαθέτει το κατάλληλο μαθηματικό κεφάλαιο, ενώ οι λιγότερο ισχυρές ομάδες θα πρέπει να αποδεχτούν την αποτυχία τους στα Μαθηματικά. Παρόλο που το σχολείο, δηλαδή, παρέχει μία ψευδαίσθηση κοινωνικής δικαιοσύνης, στην πραγματικότητα αναπαράγει την ανισότητα μεταξύ των κοινωνικών τάξεων. Επίσης, οι δυνατότητες που έχει ένας μαθητής να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του σχολείου, συμπεριλαμβανομένων των Μαθηματικών, εξαρτώνται από το πολιτιστικό κεφάλαιο που διαθέτει από την οικογένειά του (Bourdieu, 1977).

Η θεωρία του Bourdieu γίνεται αποδεκτή από σύγχρονους ερευνητές (Williams & Choudry, 2016), οι οποίοι υποστηρίζουν πως η συγκεκριμένη θεωρία μπορεί να ωφελήσει την κριτική εκπαίδευση προσφέροντας ερεθίσματα στις κυρίαρχες τάξεις, στους μαθητές με ικανοποιητικό μαθηματικό κεφάλαιο, ώστε να ανανεώσουν το ενδιαφέρον τους για τα Μαθηματικά. Επιπροσθέτως, η συγκεκριμένη θεωρία μπορεί να αναδείξει εναλλακτικές προσεγγίσεις στην κριτική εκπαίδευση που ανατρέπουν την καθιερωμένη εκπαιδευτική πολιτική.

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, τα Μαθηματικά μπορούν να καλλιεργήσουν και να ενδυναμώσουν την κριτική σκέψη των μαθητών καθιστώντας τους αργότερα ενεργούς πολίτες. Από την άλλη πλευρά, τα Μαθηματικά μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο αποπροσανατολισμού των πολιτών και να στηρίξουν παρερμηνείες. Μπορεί, δηλαδή, τα Μαθηματικά να αποτελούν την επιστήμη της απόδειξης και της αλήθειας, η γλώσσα τους όμως είναι κατάλληλα φτιαγμένη, για να ενσωματώνει υποκειμενικές κρίσεις (Porter, 1995). Πολιτικοί και άνθρωποι που κατασκευάζουν την κοινή γνώμη (opinion makers) συχνά χρησιμοποιούν, έως και καταχρώνται την επιστημονική γλώσσα στον λόγο τους, για να υποστηρίξουν τις προθέσεις τους, καθώς οι αριθμοί προσφέρουν στο ακροατήριο βεβαιότητα σχετικά με τη γνώση και τις ικανότητες του ομιλητή και τον τοποθετούν σε θέση ισχύος (Kalavasis, 2017). Παράδειγμα αυτής της απόφανσης, θεωρείται η επιλογή αριθμών σε επικεφαλίδες εφημερίδων, που στοχεύουν στον αποπροσανατολισμό του αναγνώστη και παίζουν σημαντικό ρόλο στη σχηματοποίηση και επιβολή ενός καθεστώτος αλήθειας (Chassapis, 2017). Κυρίως τα ποσοστά ενδείκνυνται για αριθμητικές αλχημείες και πολιτικούς χειρισμούς, καθώς δεν είναι αριθμοί, αλλά αριθμητικές εκφράσεις που δηλώνουν σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, γεγονός που αγνοεί ο αναγνώστης (Chassapis, 2017).

Η χρήση της μαθηματικής γλώσσας για την προώθηση απόψεων και επιρροή της κοινής γνώμης δεν είναι φαινόμενο ανεξάρτητο από το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών, τις παιδαγωγικές πρακτικές ή τις στερεοτυπικές πεποιθήσεις σχετικά με τη σχέση μαθηματικών και πραγματικότητας (Kalavasis, 2017). Γι’ αυτό τον λόγο, είναι απαραίτητο να καλλιεργηθεί στους πολίτες η κριτική σκέψη, από τα μαθητικά χρόνια ακόμη, για να είναι σε θέση να φιλτράρουν και να επεξεργάζονται επαρκώς τις πληροφορίες στις οποίες εκτίθενται. Η κριτική σκέψη και το είδος της εκπαίδευσης που την καλλιεργεί θα αναλυθούν σε επόμενη ενότητα.

1.2 Αριθμητισμός

1.2.1 Αριθμητισμός και καθημερινότητα

Στην προηγούμενη ενότητα παρατέθηκαν απόψεις που αφορούν τα Μαθηματικά σε σχέση με το κοινωνικό σύνολο και ειδικότερα, απόψεις που τεκμηριώνουν τη σχέση των μαθηματικών με θεμελιώδεις έννοιες, όπως η δημοκρατία και η κοινωνική δικαιοσύνη. Το ερώτημα που γεννάται όμως είναι σχετικά με το είδος του γνωστικού κεφαλαίου που πρέπει να φέρει το άτομο, ώστε να μπορέσει να ανταποκριθεί επαρκώς στις υπάρχουσες κοινωνικές συνθήκες. Η προβληματική δηλαδή αυτής της ενότητας είναι το απαραίτητο γνωστικό υπόβαθρο ενός πολίτη που περιλαμβάνει τις μαθηματικές ικανότητες. Οι μαθηματικές δεξιότητες εσωκλείονται στον όρο «αριθμητισμός».

Υπάρχουν διάφορες έννοιες που περιγράφουν το επίπεδο γνώσεων και τη σχέση ενός ατόμου με τα Μαθηματικά. Αρχικά, η ευφυΐα (intelligence) είναι η απαιτούμενη ικανότητα για λογική και αφηρημένη σκέψη, ενώ η μαθηματική ευφυΐα (mathematical intelligence) περιλαμβάνει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Ως αίσθηση του αριθμού (number sense) ορίζεται η κατανόηση της σημασίας αριθμών και πράξεων, η αναγνώριση της σπουδαιότητας των αριθμών, η ικανότητα χρήσης σημείων αναφοράς (benchmarks) για επίλυση προβλημάτων, η χρήση κατάλληλων στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων, αλλά και η εξέταση των αποτελεσμάτων ως προς τη λογική τους (Yang & Hang, 2004). Ως «κοινή λογική» (common sense) εννοούνται τα «αόρατα Μαθηματικά», δηλαδή τα Μαθηματικά που κάνει κάποιος χωρίς να τα σκέφτεται ως Μαθηματικά (Coben, 2002). Στην παρούσα εργασία θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά στην έννοια του «αριθμητισμού».

Σύμφωνα με το Εθνικό Ινστιτούτο Γραμματισμού (National Institute for Literacy) οι ενήλικες λειτουργούν ως πολίτες, γονείς και εργαζόμενοι. Λόγω των πολλών και καίριων ρόλων που κατέχουν, είναι απαραίτητο το κατάλληλο υπόβαθρο, στο οποίο συμπεριλαμβάνονται και οι μαθηματικές δεξιότητες. Οι μαθηματικές δεξιότητες αποτελούν θεμελιώδες στοιχείο του αριθμητισμού, έννοια που έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον των ερευνητών τις τελευταίες δεκαετίες και έχει αποτελέσει έναυσμα για πλήθος ερευνών.

Αρχικά, ως αριθμητισμός (numeracy) ορίζεται η ικανότητα χειρισμού αριθμών και δεδομένων με σωστό τρόπο (De Lange, 2003). Ιδιαίτερα για τα Μαθηματικά, μαθηματικός γραμματισμός (mathematical literacy) είναι η ικανότητα ενός ατόμου να αναγνωρίσει και να κατανοήσει το ρόλο που έχουν τα Μαθηματικά στον κόσμο, να διατυπώνει άρτια επιχειρηματολογημένες κρίσεις και να εμπλέκει τα Μαθηματικά στη ζωή του, με τρόπο που τον μετατρέπει σε δημιουργικό, ενδιαφερόμενο και στοχαστικό πολίτη (OECD, 1999). Ωστόσο, η έννοια μαθηματικός γραμματισμός έχει παρόμοια σημασία με την έννοια αριθμητισμός (OECD, 2015).

Η ενάριθμη συμπεριφορά σχετίζεται με το πλαίσιο, την ανταπόκριση στη μαθηματική δραστηριότητα, το μαθηματικό περιεχόμενο και τις αναπαραστάσεις (Evans, 2014). Τα θεμέλια της ενάριθμης συμπεριφοράς ξεκινούν από την παιδική ηλικία και το σχολείο είναι υπεύθυνο, να καλλιεργήσει στους μαθητές αυτή τη συμπεριφορά. Έχει παρατηρηθεί όμως, σε κάποιες χώρες πως το χάσμα σχολικών Μαθηματικών και μαθηματικής εγγραμματοσύνης είναι μεγάλο (De Lange, 2003). Φαίνεται δηλαδή, πως η επίσημη μαθηματική εκπαίδευση αποκλίνει από τον σκοπό της αυτό, να συμβάλλει στην ύπαρξη ενάριθμων πολιτών. Πρέπει να τονιστεί όμως πως για να είναι αποτελεσματική μια εκπαιδευτική πολιτική που προωθεί τον αριθμητισμό θα πρέπει να λαμβάνει χώρα σε πολλαπλά πλαίσια σε όλα τα μαθήματα και όχι μόνο στα Μαθηματικά (Steen, 2001). Με αυτόν τον τρόπο παρέχεται ολιστική προσέγγιση του αριθμητισμού και τα Μαθηματικά δεν απομονώνονται από τις υπόλοιπες θεματικές περιοχές. Αιτίες αυτού του φαινομένου, της απόκλισης μεταξύ εκπαίδευσης και αριθμητισμού, θα αναλυθούν σε επόμενη ενότητα.

Ειδικότερα, οι Maguire και O’ Donoghue (2002) ορίζουν τρεις διαστάσεις του ενήλικου αριθμητισμού: τον διαμορφωτικό (formative), που περιλαμβάνει τις αριθμητικές δεξιότητες, τον μαθηματικό (mathematical), που εμπεριέχει τα Μαθηματικά στην καθημερινότητα και τον ολοκληρωμένο (integrative), που τα Μαθηματικά εντάσσονται σε ένα γενικότερο πολιτισμικό πλαίσιο. Το τρίτο είδος ενήλικου αριθμητισμού είναι το πιο σημαντικό από τα τρία είδη, αλλά και το πιο δύσκολο να επιτευχθεί, καθώς τα Μαθηματικά δεν αντιμετωπίζονται σαν ένας απομονωμένος τομέας, αλλά σαν ένας τομέας ενσωματωμένος σε διάφορες οπτικές της ζωής και εντοπίζεται σε πολλά, αν όχι σε όλα, τα κοινωνικά γεγονότα.

Μπορεί λοιπόν, ο αριθμητισμός να είναι ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό για κάθε ενήλικα, είναι σημαντικό όμως να εξεταστεί τι μαθηματικές δεξιότητες συμπεριλαμβάνει. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στις διάφορες προσεγγίσεις του αριθμητισμού από την ερευνητική κοινότητα.

Ο αριθμητισμός είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται και περιλαμβάνει γνώσεις και δεξιότητες που χρειάζονται, για να διευκολύνουν τους ενήλικες στις μαθηματικές απαιτήσεις ιδιωτικής και δημόσιας ζωής, καθώς επίσης και για να τους βοηθήσει να συμμετέχουν στην κοινωνία σαν ενημερωμένοι και στοχαστικοί πολίτες (Geiger, Goos & Forgasz, 2015). Πιο συγκεκριμένα, ο αριθμητισμός αφορά στη χρήση βασικών υπολογισμών, στη μέτρηση, στη χρήση και ερμηνεία στατιστικών πληροφοριών, αλλά και στην κριτική σκέψη (Tout & Gal, 2015). Μία πιο σφαιρική οπτική διαθέτει ο Askew (2015), ο οποίος θεωρεί πως ο αριθμητισμός πρέπει να περιέχει δεξιότητες πέρα από τις βασικές και να ωθεί τον μαθητευόμενο να σκέφτεται κριτικά για τη χρήση και τη δύναμη των Μαθηματικών.

Η μαθηματική ικανότητα, και κατ' επέκταση ο μαθηματικός γραμματισμός προϋποθέτει τις εξής δεξιότητες: τη μαθηματική σκέψη, την κατασκευή και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, τη μαθηματική μοντελοποίηση, την αιτιολόγηση βάσει μαθηματικών, την αναπαράσταση πληροφοριών με μαθηματικά εργαλεία, τον χειρισμό μαθηματικών συμβόλων, την επικοινωνία με και για τα Μαθηματικά και τη χρήση εργαλείων και βοηθημάτων, συμπεριλαμβανομένων των τεχνολογικών κατασκευασμάτων (Niss, 2003). Επιπροσθέτως, η de Aguero (2007) κάνει λόγο για θεμελιώδεις γνώσεις Μαθηματικών που αφορούν στη μέτρηση, την απαρίθμηση, την αναλογία, τον όγκο και την επίλυση προβλημάτων.

Σύμφωνα με έρευνες (Duchhardt, Jordan & Ehmke, 2017) οι ενήλικες χρησιμοποιούν περισσότερο:

- πρόσθεση και αφαίρεση
- προπαίδεια
- μέτρηση
- ποσοστά
- κλάσματα
- στατιστική.

Στη μελέτη του PIAAC (2013) οι ικανότητες ενός ενάριθμου ενήλικα είναι: υπολογισμός τιμών, χρήση κλασμάτων/δεκαδικών/ποσοστών, χρήση υπολογιστή τσέπης, προετοιμασία γραφημάτων, χρήση προηγμένων Μαθηματικών ή στατιστικής. Σύμφωνα με τους Geiger, Goos και Forgasz (2015), η ενάριθμη συμπεριφορά, πέρα από αριθμητικές δεξιότητες, περιλαμβάνει και τη συσχέτιση με ρεαλιστικά προβλήματα, την κριτική σκέψη και την ικανότητα εξαγωγής νοήματος από μη μαθηματικά πλαίσια ιδωμένα από μαθηματική οπτική.

Σύμφωνα με τον Steen (1997), οι μαθηματικές συμπεριφορές των ενηλίκων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:

- αναπαράσταση δεδομένων και ερμηνεία
- αίσθηση αριθμού και πράξεων
- ικανότητα μέτρησης
- αξίες και σχέσεις τους
- σχήματα και χωρική οπτικοποίηση
- πιθανότητα

Οι μαθηματικές δεξιότητες, όπως αναφέρθηκε, είναι απαραίτητο εφόδιο, ώστε να μπορέσει ένας ενήλικας θα ασκήσει επιτυχώς τις υποχρεώσεις του ως πολίτης που αποφασίσει, κρίνει, ψηφίζει, συμμετέχει στο πολιτικά γεγονότα. Βασικές πτυχές μαθηματικών που προσκρούουν στη basic citizenship είναι:

- αριθμητική (αριθμητικές δεξιότητες και εφαρμογές τους)
- βασικές γεωμετρικές έννοιες (μέτρηση, σχήματα, μοτίβα, σχέδια υπό κλίμακα)
- άλγεβρα (κύριους πίνακες, απλά γραφήματα, μερικούς τύπους)
- στατιστική (στατιστικά γραφήματα, χειρισμός δεδομένων, πιθανότητα) (Begg, 2005).

Παρόλο που η σημασία του αριθμητισμού ποικίλει σε διάφορες χώρες, το να είναι ενάριθμος ένας ενήλικος, είναι αποδεκτό, πως εκτείνεται από τη γνώση βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων στο πώς μπορεί να συνδέσει τα σχολικά Μαθηματικά με προβλήματα της καθημερινότητας, συμπεριλαμβανομένης της ικανότητας να βγάζει νόημα από μη μαθηματικά πλαίσια μέσα από μαθηματικό πρίσμα, να ασκεί κριτική σκέψη και να αναλύει προβλήματα του πραγματικού κόσμου (Geiger, Goos & Forgasz, 2015). Σύμφωνα με τους ίδιους συγγραφείς, η προσπάθεια ενός ενήλικα να είναι ενάριθμος, πρέπει να περιλαμβάνει τη σύνδεση των μαθηματικών ικανοτήτων με καταστάσεις της καθημερινότητας για την επίλυση ενός προβλήματος και την κριτική σκέψη σε μη μαθηματική πλαίσια, όπως προαναφέρθηκε.

Από την πλευρά των ενηλίκων, έρευνα της Helen Oughton (2008), τα δεδομένα δεν διαφέρουν, καθώς αυτό που θέλουν οι ενήλικες από ένα τμήμα αριθμητισμού (numeracy course) είναι μαθηματικές γνώσεις που συνάδουν με καθημερινή ζωή. Για παράδειγμα: ποσοστά (εκπτώσεις σε αγορές), εμβαδό/όγκος (μαγειρική), λογαριασμοί νοικοκυριού (λίστες για ψώνια) κ.ά. Γενικότερα, οι πιο κοινές πρακτικές, που συναντώνται τα Μαθηματικά εκτός σχολικής τάξης, σχετίζονται με: αγορές, διαδικασίες που σχετίζονται με την αποταμίευση και τη χρήση χρημάτων, λογαριασμούς, διακοπές, μαγειρική, βοήθεια των παιδιών στα μαθήματα και διακόσμηση (Swain, Baker, Holder, Newmarch, & Coben, 2005).

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί πως υπάρχει διεθνές ενδιαφέρον για επιμόρφωση των ενηλίκων. Η εκπαίδευση δηλαδή δεν σταματά με την ενηλικίωση του ατόμου ή την ακαδημαϊκή πορεία, αλλά παρέχεται η δυνατότητα για συνεχή εξέλιξη και κατάρτιση. Η δια βίου μάθηση (lifelong learning) απευθύνεται σε όλους τους τύπους των ανθρώπων και γίνεται απαραίτητη, καθώς ενισχύει την προσωπική εξέλιξη, αναγκαία για το σημερινό ανταγωνιστικό οικονομικό περιβάλλον, αλλά εξαρτάται μόνο από τη θέληση του καθενός (Siivonen, 2012). Επιπλέον, σαν ιδέα σημαίνει ότι οι υποχρεώσεις και τα δικαιώματα, σχετικά με την εκπαίδευση, δεν σταματούν στην παιδική ή νεανική ηλικία, αλλά συναντώνται και στην ενήλικη ζωή (Evans, Wedege & Yasukawa, 2013). Οι βασικοί λόγοι που επιλέγουν να επιμορφώνονται στα Μαθηματικά οι ενήλικες είναι: να αποδείξουν ότι μπορούν να τα καταφέρουν στα Μαθηματικά, να επιτύχουν την κατανόηση και εμπλοκή τους με τα Μαθηματικά ή να βοηθήσουν τα παιδιά τους με εργασίες που έχουν στο σπίτι (Evans et al., 2013).

1.2.2 Αριθμητισμός στον εργασιακό χώρο

Βασικό πεδίο δράσης ενός ενήλικα, και κατ' επέκταση πεδίο που αναδεικνύονται μαθηματικές απαιτήσεις, είναι ο χώρος εργασίας, στον οποίο αφιερώνουν οι ενήλικες μεγάλο μέρος της καθημερινότητάς τους. Τα Μαθηματικά στον εργασιακό χώρο έχουν δεχτεί αξιόλογη προσοχή από τους ερευνητές τις τελευταίες δεκαετίες, ενώ πολλές ομάδες έχουν μελετηθεί ως προς τις μαθηματικές τους πρακτικές (Χούτου, 2015). Στον εργασιακό χώρο χρησιμοποιούνται Μαθηματικά, τα οποία εμφανίζονται σε ποικίλα πλαίσια, ενώ συχνά δημιουργούνται συχνά μαθηματικά μοντέλα για διαφορετικούς σκοπούς (Frejd & Bergstein, 2015).

Σε σχέση με τα σχολικά Μαθηματικά, τα Μαθηματικά που συναντώνται στον εργασιακό είναι πιο πολύπλοκα, καθώς περιλαμβάνουν συγκεκριμένες τεχνολογίες και πολιτικές, πολιτιστικές και κοινωνικές διαστάσεις που δεν απαντώνται σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα (Frejd & Bergstein, 2015). Επιπροσθέτως, οι μαθηματικές έννοιες που συναντώνται στον εργασιακό χώρο δεν είναι εύκολα περιγράψιμες στη γλώσσα που χρησιμοποιείται στο σχολείο (Keogh, Maguire & O' Donoghue, 2010). Για τον λόγο αυτό, ο υποψήφιος εργαζόμενος θα πρέπει να έχει καλλιεργήσει δεξιότητες που θα τον βοηθήσουν να ανταποκριθεί σε νέες απαιτήσεις και επαγγελματικές προκλήσεις.

Σύμφωνα με τους Duchhardt et al. (2017) οι ενήλικες συναντούν τα εξής Μαθηματικά στον εργασιακό χώρο:

- υπολογισμός και εκτίμηση
- κατανόηση ποσοστών
- αναλογία
- δημιουργία φόρμουλας
- επίλυση προβλημάτων (multi step).

Ενώ, τα Μαθηματικά που συναντώνται στον εργασιακό χώρο δεν είναι πολύ διαφορετικά σε περιεχόμενο από τα σχολικά Μαθηματικά, εκείνο που τα καθιστά πιο δύσκολα είναι το πλαίσιο που εμφανίζονται και η κριτική σκέψη που απαιτείται από τον εργαζόμενο στη διαχείριση της (μαθηματικής) πληροφορίας. Ο εργαζόμενος, όπως και ο μαθητής, επιλύει καθημερινά προβληματικές καταστάσεις που απαιτούν Μαθηματικά πολλές φορές ίδιου επιπέδου, αλλά με διαφορετικές απαιτήσεις και μεγαλύτερο κόστος στη λάθος επίλυση.

Τα προβλήματα μπορούν να διαχωριστούν σε δομημένα και μη δομημένα (Dalby, 2015). Τα μη δομημένα προβλήματα είναι πιο δύσκολα και απαιτούν καλύτερη προετοιμασία από τον εκπαιδευτικό. Παρατηρείται το φαινόμενο ότι, ενώ στην σχολική τάξη οι μαθητές εξοικειώνονται με την επίλυση δομημένων προβλημάτων, στον εργασιακό χώρο χρειάζεται να έρθουν σε επαφή με μη δομημένα. Είναι απαραίτητο λοιπόν, να εξοικειωθούν οι μαθητές με μη δομημένα προβλήματα (Dalby, 2015). Με τον όρο μη δομημένα προβλήματα εννοούνται τα προβλήματα που δεν αποτελούν προέκταση της διδασκαλίας ενός συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου και, άρα, είναι προδιαγεγραμμένος ο τρόπος λύσης τους. Στα μη δομημένα προβλήματα ο λύτης πρέπει να ανατρέξει στο γνωστικό μαθηματικό υπόβαθρο ώστε να βρει εργαλεία και μεθόδους που θα τον βοηθήσουν στην επίλυση τους. Πέρα από το μαθηματικό υπόβαθρο ωστόσο, απαιτείται η ικανότητα ευελιξίας και κριτικής σκέψης για το αποτέλεσμα.

Τη διαφορά των μαθηματικών δραστηριοτήτων σε εργασιακό και σχολικό περιβάλλον επισημαίνει και ο Wake (2014), καθώς και οι Gravemeijer et al. (2017), οι οποίοι αφενός τονίζουν τη σημαντική διαφορά των σχολικών Μαθηματικών με τα Μαθηματικά που συναντώνται στο εργασιακό περιβάλλον, αλλά επισημαίνουν και πλήθος επαγγελμάτων που δεν χρησιμοποιεί τα σχολικά Μαθηματικά, όπως οι νοσοκόμες. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτείται επιπλέον εκπαίδευση επί των Μαθηματικών, για να μπορούν να ανταποκριθούν στις εργασιακές απαιτήσεις. Σύμφωνα με τον Wake (2014), συχνά οι εργαζόμενοι δεν αντιλαμβάνονται ότι εκτελούν μία μαθηματική δραστηριότητα, επειδή στοχεύουν στην επαγγελματική αποδοτικότητα. Με αυτόν τον τρόπο, τα Μαθηματικά δεν αποτελούν στόχο του ατόμου, όπως στο σχολείο, αλλά εργαλείο και δίοδο, για την επίτευξη μίας επαγγελματικής εκκρεμότητας.

Για να εξερευνήσουν τα Μαθηματικά στο χώρο εργασίας οι Keogh, Maguire και O' Donoghue (2010) κατασκεύασαν ένα εργαλείο που δίνει πληροφορίες για τη μαθηματική συμπεριφορά και τις στάσεις των υποκειμένων. Πιο αναλυτικά, σκοπός τους ήταν να εκμαιεύσουν τις στάσεις των υποκειμένων απέναντι στα Μαθηματικά είτε με δηλώσεις που έκαναν κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, είτε μέσα από παρατηρήσεις που έκαναν οι ερευνητές. Γενικότερα, αν και οι άνθρωποι/εργαζόμενοι χρησιμοποιούν καθημερινά τα Μαθηματικά στο σπίτι και τη δουλειά τους, δε γίνεται σαφής η χρήση τους, επειδή η χρήση και η αποτελεσματικότητα της χρήσης των Μαθηματικών εκτός σχολείου διαφέρει από το πώς και το πόσο αποτελεσματικά χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά στο σχολείο (Naresh, 2015).

Μία διαφορετική προσέγγιση για την ανάδειξη των Μαθηματικών εννοιών στον εργασιακό χώρο επιχειρεί η Seabright (2010), η οποία εξέτασε τη σχέση πρακτικών, επαγγελματικών και μαθηματικών γνώσεων και πώς αυτές χρησιμοποιούνται στη δουλειά μαζί ή ξεχωριστά. Για τον λόγο αυτό, πήρε συνεντεύξεις από επτά άτομα, διαφορετικών επαγγελμάτων, ως προς τις στάσεις και τις αντιλήψεις τους απέναντι στα Μαθηματικά, το μαθηματικό ιστορικό τους, τη σύνδεση Μαθηματικών του σχολείου και Μαθηματικών στη δουλειά και το σπίτι και διαπίστωσε μεγάλη ποικιλία στις απαντήσεις των υποκειμένων. Στον εργασιακό χώρο στράφηκε και η έρευνα της Χούτου (2015) που μελέτησε τις μαθηματικές πρακτικές που χρησιμοποιεί μία κεραμίστρια. Παρά την άμεση χρήση των Μαθηματικών, το υποκείμενο θεωρούσε πως δε χρησιμοποιούσε μαθηματικές πρακτικές, ενώ στο τέλος της έρευνας και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης αντιλήφθηκε τη χρήση ορισμένων μαθηματικών δεξιοτήτων. Σε παρόμοια θέση βρέθηκαν και πέντε εισπράκτορες λεωφορείων, στους οποίους η χρήση νοερών Μαθηματικών ήταν αόρατη, λόγω πίεσης στον εργασιακό χώρο (Naresh, 2015).

Η δυσκολία στη χρήση ή τον εντοπισμό των Μαθηματικών στον εργασιακό χώρο δεν παρατηρείται μόνο σε επαγγέλματα που απαιτούν βασικές δεξιότητες στα Μαθηματικά. Ακόμα και ενήλικες με εξειδικευμένες γνώσεις στα Μαθηματικά συναντούν δυσκολίες στο εργασιακό περιβάλλον. Σε έρευνα της η Wood (2012), πήρε συνεντεύξεις από 18 απόφοιτους σχολών που περιλάμβαναν πλήθος μαθημάτων σχετιζόμενων με τα Μαθηματικά, όπως το πολυτεχνείο ή η μαθηματική σχολή, και έδειξε πως οι απόφοιτοι ήταν ανεπαρκώς προετοιμασμένοι για να συμμετέχουν στην αγορά εργασίας. Το πρόβλημα εστιαζόταν κυρίως σε ζητήματα επικοινωνίας, καθώς ήταν υποχρεωμένοι να συνεργαστούν με ανθρώπους δεν ήταν μαθηματικοί ή δεν είχαν αντίστοιχο μαθηματικό υπόβαθρο και δυσκολεύονταν στην κατάλληλη χρήση της γλώσσας και στην επικοινωνία πολλαπλών επιπέδων. Προέκταση αυτής της δυσκολίας ήταν η μη αποδοτικότητά τους και η εμφάνιση προβλημάτων σε προσωπικό επίπεδο.

Σύμφωνα με τον Bernstein (2000), η γνώση απαρτίζεται από δύο δομές, δύο πυλώνες, τον κάθετο και τον οριζόντιο. Η γνώση που έχει ως βάση τον κάθετο πυλώνα εστιάζει στην επίσημη γνώση, κυρίως σε θεωρητικές και γενικευμένες προσεγγίσεις, και σε στρατηγικές που διδάσκονται στο σχολείο, ενώ ο οριζόντιος πυλώνας στηρίζει τη γνώση που αφορά την καθημερινότητα, συνδέει επιστημονικούς τομείς, είναι λειτουργική για το άτομα και, είναι πιθανό, να απαιτεί πλήθος στρατηγικών, ώστε να είναι εφαρμόσιμη. Για να μπορέσει ένας εργαζόμενος να είναι αποδοτικός, είναι απαραίτητη η γνώση βάσει και των δύο δομών, καθώς είναι αναγκαία η μαθηματική γνώση που προσφέρει το εκπαιδευτικό σύστημα (κάθετος πυλώνας), αλλά και η δυνατότητα να συνδυάζει γνώσεις και στρατηγικές, ανάλογα με το πλαίσιο που κάθε φορά χειρίζεται (οριζόντιος πυλώνας) (FitzSimons & Boistrup, 2017).

1.2.3 Ανταπόκριση ενηλίκων σε προβλήματα

Στη συνέχεια, γίνεται σύντομη αναφορά σε έρευνες που ανταποκρίθηκαν ενήλικες με στόχο την ανάδειξη των μαθηματικών δεξιοτήτων και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Παρ' όλο που υπάρχει αυξανόμενο ενδιαφέρον για τη σύνδεση των σχολικών Μαθηματικών με καθημερινές πρακτικές, δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες που να εξετάζουν την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων από ενήλικο πληθυσμό (Gazit & Patkin, 2012), αν και η ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης ποσοτικών προβλημάτων που σχετίζονται με την καθημερινή ζωή αναφέρεται ως στόχος σχεδόν σε όλα τα σχολικά προγράμματα Μαθηματικών στον κόσμο (Hoogland, Bakker, De Koning & Gravemeijer, 2012).

Σε έρευνά τους οι Gazit και Patkin (2012) εξέτασαν την ικανότητα 87 ενηλίκων, δασκάλων μαθηματικών, μελλοντικών δασκάλων μαθηματικών και ακαδημαϊκών, να ανταποκριθούν γραπτά σε μερικά ρεαλιστικά προβλήματα (word problems). Από το σύνολο των υποκειμένων, περίπου το 1/3 δεν απάντησε σωστά, ενώ μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας παρατηρήθηκαν στα υποκείμενα μικρότερης ηλικίας και με λιγότερη διδακτική εμπειρία. Φοιτητές, μεταπτυχιακοί, συμμετείχαν και σε έρευνα των Zacharos και Koustourakis (2011). Οι φοιτητές, εκ των οποίων κάποιοι ήταν ήδη διδάσκοντες σε δημοτικό σχολείο, κλήθηκαν να επιλύσουν 3 προβλήματα από το βιβλίο της δευτέρας δημοτικού σχετικά με χρηματικές συναλλαγές. Η έρευνα έδειξε πως η ερμηνεία του πλαισίου ενός προβλήματος σχετίζεται με το πολιτισμικό κεφάλαιο του λύτη, ενώ φάνηκε ότι η προσπάθεια αναδόμησης καθημερινών πρακτικών από την οπτική των σχολικών μαθηματικών δημιουργεί μία εικονική πραγματικότητα. Αξίζει να σημειωθεί, πως ατέλειες προβλημάτων μπορεί να οδηγήσουν σε παρανοήσεις εκ μέρους των δασκάλων, οι οποίοι, κατ' επέκταση, δυσκολεύονται στη διδασκαλία τους. Μελλοντικοί φοιτητές νοσηλευτικής ήταν οι συμμετέχοντες στην έρευνα των Jenkins, Harvey, Lake, Murphy, Cavanna και Tait (2006), στην οποία παρατήρησαν ότι στο μάθημα που αφορούσε τον υπολογισμό της δοσολογίας φαρμάκων οι μαθητές δεν είχαν βασικές δεξιότητες αριθμητικής.

Τη μεγάλη βαρύτητα που δίνουν στα σχετιζόμενα με την καθημερινότητα προβλήματα οι μελλοντικοί δάσκαλοι έδειξε η έρευνα του Ji-Eun Lee (2012), αν και οι ίδιοι δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τον τρόπο ενσωμάτωσης της «πραγματικής ζωής» (real life) στην εκπαιδευτική πράξη. Η ίδια έρευνα φανέρωσε πως τα υποκείμενα αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο την έννοια «πραγματικότητα» και το 98% των προβλημάτων που κατασκεύασαν, στηρίζονταν σε υπολογιστικές ικανότητες, κυρίως σε ώρα και χρήματα. Επιπροσθέτως, ο Inoue (2008) πραγματοποίησε έρευνα σε 60 προπτυχιακούς φοιτητές, οι οποίοι αντιμετώπισαν δύο ρεαλιστικά προβλήματα και υποβλήθηκαν σε ατομική ημι-δομημένη συνέντευξη. Από το σύνολο των απαντήσεων, το 68,3% κρίθηκαν μη ρεαλιστικές και στηρίχθηκαν σε υπολογισμούς. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός πως τα υποκείμενα διευκολύνθηκαν με προβλήματα που έδιναν λιγότερα δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, είναι σημαντικό να αφήνουν τα προβλήματα χώρο στον λύτη να αξιοποιεί τη φαντασία του .

Επιπροσθέτως, η διερεύνηση των ικανοτήτων μαθητών (15-16 χρονών) και μελλοντικών δασκάλων στην επίλυση προκλήσεων που απαιτούν λογικο-μαθηματική σκέψη ήταν ο στόχος έρευνας του Gazit (2011). Τα υποκείμενα, στο σύνολό τους 35, αντιμετώπισαν τρία προβλήματα. Ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων για τους μαθητές (20 υποκείμενα) ήταν 43,4%, ενώ από το σύνολο των μελλοντικών δασκάλων (15 υποκείμενα) το 20% ανταποκρίθηκαν επιτυχώς σε όλα τα προβλήματα. Εν συνεχεία, παρατηρήθηκε πως οι μελλοντικοί δάσκαλοι είχαν περιορισμένη ικανότητα στην επίλυση λογικο-μαθηματικών προκλήσεων και παρουσίασαν κατώτερη σκέψη από τους μαθητές. Μία διαφορετική προσέγγιση επιχείρησαν οι Roux και Adler (2016), οι οποίοι πραγματοποίησαν μία μικρο-ανάλυση και μακρο-ανάλυση ενός πρωτότυπου και πρακτικού προβλήματος από προπτυχιακούς φοιτητές μαθηματικού τμήματος στη νότια Αφρική. Το πρόβλημα αφορούσε στην εξάπλωση ενός ιού γρίπης. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τρεις έννοιες: την αναπαράσταση (representation), την πράξη (action) και την αναγνώριση (identification) και τόνισαν την αναγκαιότητα ύπαρξης πρακτικών προβλημάτων στη σπουδές των φοιτητών μαθηματικών τμημάτων.

Μελλοντικοί δάσκαλοι συμμετείχαν και σε έρευνα της Ersoy (2016), οι οποίοι επίλυσαν δύο προβλήματα, αφού πρώτα διδάχθηκαν επί 13 εβδομάδες τα στάδια επίλυσης του Polya. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι περισσότεροι φοιτητές ήταν σε θέση να κατανοήσουν τα ζητούμενα και τα δεδομένα των προβλημάτων, ενώ υπήρχε η τάση να προχωρούν στη διαδικασία επίλυσης χωρίς να εστιάζουν στον άγνωστο, για να προχωρήσουν γρήγορα στο επόμενο πρόβλημα. Η διδασκαλία των στρατηγικών επίλυσης είχε ως αποτέλεσμα τη βελτίωση των ικανοτήτων επίλυσης και γενικότερα, την καλύτερη επίδοσή τους στα Μαθηματικά.

Σε έρευνά τους οι Βρυώνης και Μπαραλής (2015) μελέτησαν την ικανότητα επίλυσης τριών ρεαλιστικών προβλημάτων από μαθητές έκτης δημοτικού και τους γονείς τους. Συνολικά, συμμετείχαν 57 μαθητές, 34 γονείς και 4 εκπαιδευτικοί. Η έρευνα κατέδειξε τη δυσκολία μαθητών, αλλά και ενήλικων γονέων να ανταποκριθούν επιτυχώς σε ρεαλιστικές δοκιμασίες. Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι σε κανένα από τα τρία προβλήματα δεν σημειώθηκε ποσοστό επιτυχίας μεγαλύτερο από 50% για τους γονείς, ενώ για οι μαθητές δεν ξεπέρασαν το 10% σε κανένα πρόβλημα.

Θετικά αποτελέσματα για την υπολογιστική εκτίμηση των ενηλίκων έδωσε έρευνα των Ανεστάκη και Λεμονίδη (2015) που βασίστηκε σε συνέντευξη 15 ενηλίκων και έδειξε πως η κυρίαρχη ενέργεια είναι η στρογγυλοποίηση και πως οι παράγοντες που την επηρεάζουν είναι: οι προϋπάρχουσες εμπειρίες και γνώσεις, το είδος της απαιτούμενης πράξης και οι δυσκολίες που έχουν τα υποκείμενα κατά τη μάθηση.

Τον στατιστικό γραμματισμό, τη συγκεκριμένη γνώση δηλαδή που χρειάζονται οι πολίτες για να αντιλαμβάνονται και να παίρνουν αποφάσεις βάσει στατιστικών πληροφοριών, έλεγξαν σε έρευνά τους οι Κοντογιάννη και Τάτσης (2015). Στην έρευνα συμμετείχαν 43 ενήλικες που φοιτούσαν σε σχολείο δεύτερης ευκαιρίας. Αρχικά, οι συμμετέχοντες εστίαζαν μόνο στους αριθμούς, ενώ μετά από διδασκαλία εννέα ωρών, υπήρξε βελτίωση και ήταν σε θέση να εξάγουν συμπεράσματα.

Σε διεθνές επίπεδο, έχουν πραγματοποιηθεί από το 1990 τρεις έρευνες για τις ικανότητες και τα επίπεδα αριθμητισμού των ενηλίκων: η Διεθνής Έρευνα Αριθμητισμού των Ενηλίκων (International Adult Literacy Survey, IALS), η Έρευνα για τον Αριθμητισμό των Ενηλίκων και τις Δεξιότητες Ζωής (Adult Literacy and Lifeskills Survey, ALL) και το Πρόγραμμα για τη Διεθνή Εκτίμηση των Ικανοτήτων των Ενηλίκων (Programme for the International Assessment of Adults Competencies, PIAAC). Δεδομένα από τις δύο πρώτες έρευνες καταδεικνύουν χαμηλές δεξιότητες σε χώρες και αυτές οι χαμηλές δεξιότητες δημιουργούν προβλήματα σε άτομα που προσπαθούν να ανταπεξέλθουν στην εργασία τους και στις απαιτήσεις των σύγχρονων κοινωνιών, όπου οι δεξιότητες εγγραμματισμού αυξάνονται διαρκώς.

1.4 Δύο ρεύματα της Διδακτικής των Μαθηματικών

Η προηγούμενη ενότητα εστίασε στις απαιτούμενες δεξιότητες που θα πρέπει να έχει ένας ενάριθμος ενήλικας, για να ανταποκρίνεται επιτυχώς στα κοινωνικά δρώμενα, και κυρίως στον εργασιακό χώρο, αλλά και σε έρευνες που στράφηκαν στο επίπεδο αριθμητισμού ενηλίκων. Ο αριθμητισμός όμως είναι μία ευρεία έννοια που περιλαμβάνει δεξιότητες, αποκυήματα ρευμάτων που επηρέασαν τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών και αναφέρονται σε αυτή την ενότητα.

Ενώ υπάρχουν πολλοί ορισμοί για τον αριθμητισμό (numeracy), όλοι συγκλίνουν στο ότι η εκπαίδευση που προωθεί τον αριθμητισμό (numeracy education) πρέπει να είναι λειτουργική για την καθημερινότητα των εκπαιδευόμενων, άρα τα Μαθηματικά θα πρέπει να είναι συνδεδεμένα με την πραγματική ζωή. Τα προβλήματα αριθμητισμού δηλαδή, είναι ερωτήσεις που αφορούν τον πραγματικό κόσμο και μπορούν να απαντηθούν με μαθηματικές τεχνικές (Hoogland, 2009). Υπάρχουν λοιπόν, δύο προσεγγίσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών που μπορούν, σε συνδυασμό, να καλλιεργήσουν και να ενισχύσουν τον αριθμητισμό σε έναν πολίτη: η προσέγγιση των Ρεαλιστικών Μαθηματικών και της Κριτικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

1.4.1 Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση

Η θεωρία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών βασίζεται σε τέσσερις βασικές αρχές, μία εκ των οποίων είναι η αρχή της «καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης». Ο όρος *καθοδηγούμενη επανεφεύρεση* υπονοεί πως η διδασκαλία στοχεύει στην επανεφεύρεση της εκάστοτε διαδικασίας ή μαθηματικής έννοιας από τους μαθητές και ακολουθεί συγκεκριμένα βήματα:

1. Επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων που θα βοηθήσουν το μαθητή να κατασκευάσει τη διδακτέα έννοια ή διαδικασία.
2. Ενίσχυση των διάφορων στρατηγικών που αναπτύσσουν οι μαθητές μέσα από ερωτήσεις ή δραστηριότητες και έμφαση στην επικοινωνία.
3. Ανάδειξη της έννοιας ή διαδικασίας ως κοινού χαρακτηριστικού των δραστηριοτήτων που πραγματοποιούν οι μαθητές και σύνδεση αυτού με άλλες μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες που ανήκουν στην ίδια μαθηματική δομή.
4. Διατύπωση, συμβολισμός και μελέτη σε βάθος της έννοιας ή διαδικασίας.

Σύμφωνα με τη Ρεαλιστική Εκπαίδευση των Μαθηματικών, ο μαθητής και οι δραστηριότητες που αναπτύσσει βρίσκονται στο επίκεντρο της διδασκαλίας, καθώς οι μαθητές θεωρούνται ενεργοί συμμέτοχοι της διαδικασίας μάθησης στην οποία αναπτύσσουν μαθηματικά εργαλεία και απόψεις (Κολέζα, 2009).

Εμπνευστής της ρεαλιστικής προσέγγισης των Μαθηματικών ήταν ο Ολλανδός μαθηματικός Hans Freudenthal. Σύμφωνα με αυτόν, τα Μαθηματικά πρέπει να είναι συνδεδεμένα με την πραγματικότητα, να παραμένουν κοντά στα παιδιά και να σχετίζονται με την κοινωνία, προκειμένου να είναι μία ανθρωπιστική αξία. Όπως προαναφέρθηκε, η εκπαίδευση θα πρέπει να δίνει την *καθοδηγούμενη* ευκαιρία στους μαθητές να *επαν-εφεύρουν* τα Μαθηματικά μέσα από την εξάσκηση. Κάτι τέτοιο σημαίνει, πως η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να αντιμετωπίζει τα Μαθηματικά σαν μία ενέργεια, σαν διαδικασία της μαθηματικοποίησης και όχι σαν ένα κλειστό σύστημα. Λίγο καιρό αργότερα, ο Treffers κατηγοριοποίησε την έννοια της μαθηματικοποίησης σε «οριζόντια» και «κάθετη». Ο Freudenthal επεσήμανε πως η «οριζόντια μαθηματικοποίηση» περιέχει ενέργειες που οδηγούν από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των μαθηματικών συμβόλων, ενώ η «κάθετη μαθηματικοποίηση» αντιπροσωπεύει ενέργειες μέσα στον κόσμο των συμβόλων. Ο ίδιος ωστόσο, τονίζει ότι ο διαχωρισμός ανάμεσα στους δύο τύπους δεν είναι ξεκάθαρος και οι δύο όμως είναι εξίσου σημαντικοί (Panhuizen, 2001).

Η σπουδαιότητα των Ρεαλιστικών Μαθηματικών τονίστηκε και τα επόμενα χρόνια από πολλούς μαθηματικούς και δασκάλους, Σε άρθρο της η Chapman επισημαίνει τον σημαντικό ρόλο των πλαισίων που τοποθετούνται τα σχολικά μαθηματικά προβλήματα στην ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης από τους μαθητές (Chapman, 2006). Τα προβλήματα μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για την εφαρμογή και τη μεταφορά του πραγματικού κόσμου στον κόσμο των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, τα ρεαλιστικά προβλήματα (word problems) ορίζονται, σύμφωνα με τον Palm, ως κείμενα που περιγράφουν καταστάσεις κατανοητές στον αναγνώστη και περιλαμβάνουν μαθηματικές ερωτήσεις (Verschaffel et al., 2009). Επιπλέον, μπορούν να ενισχύσουν τη μαθηματική σκέψη μέσα από προβλήματα που ανακύπτουν στην καθημερινότητα, να δώσουν κίνητρο στους μαθητές να κατανοήσουν τη σημασία των μαθηματικών ιδεών και να τους βοηθήσουν να καλλιεργήσουν τις δημιουργικές, κριτικές και προς επίλυση προβλημάτων ικανότητες. Η Boaler προσθέτει πως ανάλογα με το πλαίσιο των προβλημάτων μπορεί να προκληθεί το ενδιαφέρον των μαθητών και να επιτευχθεί η γνώση μέσα από σχολικά παραδείγματα στα Μαθηματικά και προβλήματα που αφορούν την καθημερινή ζωή (Chapman, 2006). Οι ερευνητές υποστηρίζουν πως η εμπλοκή των ρεαλιστικών καταστάσεων στα προβλήματα από τη μία πλευρά ενισχύει το κριτικό πνεύμα των μαθητών, συμβάλλει στην κοινωνική επαγρύπνηση και την πολιτισμική συνείδηση και από την άλλη προάγει την κατασκευή των μαθηματικών εννοιών (Τάτσης & Σκουμπουρδή, 2009).

Η σημασία της καταλληλότητας των πλαισίων στα οποία κινούνται τα σχολικά μαθηματικά προβλήματα παρατηρείται και σε μελέτη των Zacharos και Koustourakis (2011). Σύμφωνα με τους συγγραφείς, στόχος των υπαρχόντων προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια είναι να έχουν αντικείμενα κοντά στο μαθητή και να εγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών ανακαλώντας στη σκέψη του μαθητή εμπειρίες και προϋπάρχουσες γνώσεις. Τα προβλήματα ωστόσο θα πρέπει να συνάδουν και με το γνωστικό επίπεδο των μαθητών. Έτσι, η νέα γνώση ενσωματωμένη στα σχολικά προβλήματα θα πρέπει να διευρύνει τον τρόπο σκέψης και εργασίας των μαθητών. Σύμφωνα με την ρεαλιστική προσέγγιση, πραγματοποιήσιμες καταστάσεις και πλαίσια εκτός μαθηματικών (π.χ. σπίτι, δουλειά κ.ά.) αποτελούν πηγή για μαθηματικοποίηση (Geoff, 2014). Τα πλαίσια που συναντούν οι μαθητές στο σχολείο επιλύοντας προβλήματα μπορούν να είναι στιγμιότυπα της καθημερινότητας και να περιλαμβάνουν καταστάσεις σχετικές με τα βιώματα ων μαθητών. Τα Μαθηματικά της καθημερινότητας (everyday mathematics) άλλωστε, περιέχουν ιδέες, διαδικασίες και γνώση, που μπορούν να συνδυαστούν με τη σχολική γνώση (Tomaz & David, 2015).

Η εισαγωγή ρεαλιστικών καταστάσεων στα Μαθηματικά επηρέασε και την ελληνική σχολική πραγματικότητα (Τάτσης & Σκουμπουρδή, 2009). Οι Τάτσης και Σκουμπουρδή (2009) κατηγοριοποίησαν τις 289 δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου της πρώτης δημοτικού για τα Μαθηματικά. Οι κατηγορίες ήταν: μαθηματικό πλαίσιο (28%), μαθηματικό-τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο (31%), τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο (32%) και ρεαλιστικό πλαίσιο (9%). Οι συγγραφείς επεσήμαναν την απουσία της ύπαρξης μίας ομάδας δραστηριοτήτων γύρω από μία καθημερινή προβληματική κατάσταση που ωθεί τον μαθητή να εμπλακεί σε μία κατευθυνόμενη πορεία μαθηματικοποίησης από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο.

Η ρεαλιστική εφαρμογή στην εκπαίδευση λοιπόν, είναι μία διαμεσολάβηση ανάμεσα στο συγκεκριμένο και το αφηρημένο και δίνει έμφαση στην ανάπτυξη ικανοτήτων μοντελοποίησης από τους μαθητές. Η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στη ρεαλιστική προσέγγιση και τη μηχανιστική/τυπική προσέγγιση είναι πως η ρεαλιστική προσέγγιση δε στηρίζεται σε αφηρημένα αξιώματα και κανόνες που στοχεύουν σε συγκεκριμένες εφαρμογές. Ακόμη, η ρεαλιστική προσέγγιση δίνει έμφαση στη διαδικασία μάθησης από τους μαθητές, πώς δηλαδή οι ίδιοι οι μαθητές «χτίζουν» τη γνώση.

Στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου ή ρεαλιστικά προβλήματα (real world problems) οι μαθητές πρέπει να κάνουν απλουστεύσεις, να κατασκευάσουν μοντέλο, να επιλέξουν την κατάλληλη γνώση και να ελέγξουν αν η απάντηση είναι αρκετά καλή (Dalby, 2015). Απαιτείται δηλαδή μία μεταγνωστική δεξιότητα από τον μαθητή που πρέπει να χαρακτηρίσει την απάντηση ως προς την ποιότητά της. Επίσης, χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων προβλημάτων είναι η ύπαρξη μη αριθμητικών κρυμμένων μηνυμάτων, που αν αποκρυπτογραφηθούν σωστά, μπορούν να ενισχύσουν τη δημιουργική σκέψη (Frankenstein, 2009). Ο μαθητής δηλαδή καλείται να ανατρέξει σε προσωπικά βιώματα και εμπειρίες για να προσθέσει αριθμητικά δεδομένα στην προβληματική κατάσταση ή να κρίνει, αν όλες οι δεδομένες πληροφορίες του είναι χρήσιμες για την επίλυση. Ακόμη, τα ζητούμενα, τα δεδομένα και οι συνθήκες σε ένα πρακτικό πρόβλημα είναι περισσότερο σύνθετες και ασαφέστερα προσδιορισμένες από ό, τι σε ένα μαθηματικό πρόβλημα (Polya, 1998).

Θα πρέπει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο, πως τα λεκτικά προβλήματα αποτελούν τα τελευταία χρόνια τον κυρίαρχο τρόπο σύνδεσης των Μαθηματικών και της πραγματικής ζωής (Hoogland, 2009). Υπάρχει δηλαδή η τάση να αναδεικνύονται οι μαθηματικές έννοιες και να εδραιώνεται η μαθηματική γνώση, μέσα από προβλήματα που είναι κοντά στα βιώματα των μαθητών. Σε πολλές χώρες τονίζεται η σύνδεση σχολικών Μαθηματικών και καθημερινής ζωής των μαθητών (Lee, 2012). Άλλωστε, παραδείγματα και αναφορές από την καθημερινή ζωή βοηθούν περισσότερο τους μαθητές στη μαθησιακή διαδικασία και τους δίνουν πρωταγωνιστικό ρόλο. Επιπλέον, κατανοούν πως τα Μαθηματικά δεν είναι ένας τομέας που αφορά αποκλειστικά τη σχολική τάξη, αλλά εκτείνεται σε κάθε ανθρώπινη εφαρμογή.

1.4.2 Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση

Από την άλλη πλευρά, η μαθηματική εκπαίδευση επηρεάστηκε και επηρεάζεται από ένα σύνολο αρχών και αξιών που διέπουν την Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση, της οποίας κύριο μέλημα είναι η κριτική σκέψη των εκπαιδευόμενων και η κριτική σκέψη αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό ενός ενάριθμου ατόμου. Η Κριτική Εκπαίδευση έχει πολλές πηγές έμπνευσης. Υπάρχει μία σημαντική σχέση με την κατανόηση του Καρλ Μαρξ για τους ανθρώπους και τον κόσμο, ιδιαίτερα όπως ερμηνεύθηκε στη Σχολή της Φρανκφούρτης. Οι ιδρυτές της Σχολής ήταν οι T. Adorno, M. Horkheimer και H. Marcuse, οι οποίοι εργάζονταν στο Ινστιτούτο Κοινωνικής Έρευνας και κατά τη διάρκεια της ναζιστικής κυβέρνησης εργάστηκαν εκτός Γερμανίας. Άλλη σημαντική πηγή για την κριτική Εκπαίδευση είναι η Παιδαγωγική των Ανθρωπιστικών Επιστημών, που επηρέασε την εκπαίδευση στη Γερμανία στο χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο παγκόσμιων πολέμων. Σημαντικές μορφές της Κριτικής Εκπαίδευσης είναι οι H. Blankertz, W. Lembert, K. Mollenhauer και W. Klafki (Skovmose, 1985).

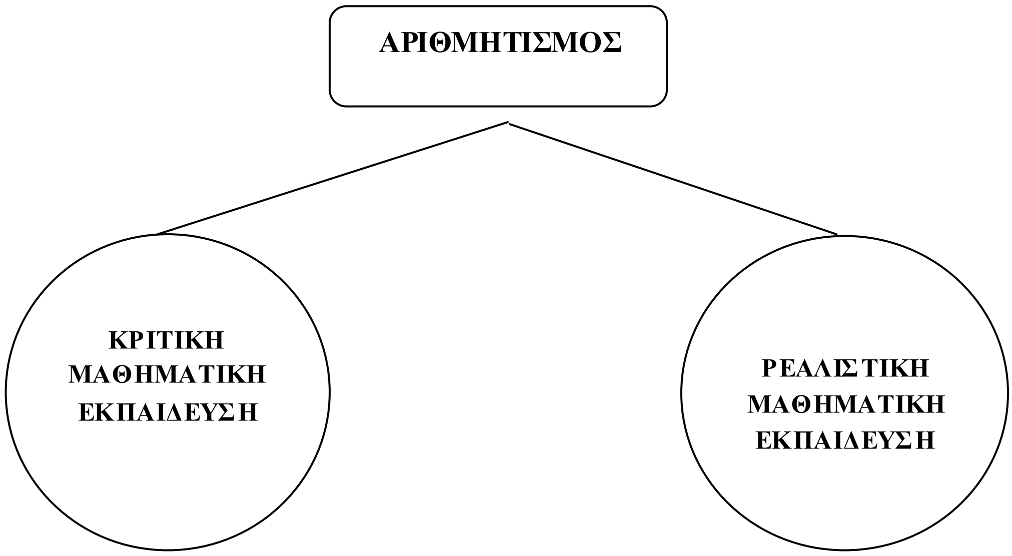
Σχετικά με την Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση, υπάρχουν θεμελιώδεις αρχές που τη διέπουν. Μία από αυτές είναι ότι οι πρωταγωνιστές της μαθησιακής διαδικασίας, μαθητές και δάσκαλος, είναι ίσοι. Ο μαθητής δηλαδή, εμπλέκεται ενεργά στην εκπαιδευτική πράξη (Skovmose, 1985). Επιπροσθέτως, θα πρέπει μαθητές και δάσκαλοι να υιοθετήσουν μία κριτική οπτική για το περιεχόμενο της διδακτικής πράξης. Η τρίτη και τελευταία αρχή σχετίζεται αποκλειστικά με το περιεχόμενο της μάθησης, το οποίο στρέφεται στην επίλυση προβλημάτων, και επισημαίνει πως τα προβλήματα θα πρέπει να έχουν σχέση με το εξωσχολικό περιβάλλον, ώστε να εμπλέκεται με κριτικό τρόπο ο μαθητής μαζί τους (Skovmose, 1985). Το τρίτο σημείο που αναφέρθηκε είναι κοινό με τις αρχές της Ρεαλιστικής Εκπαίδευσης που αναφέρθηκε πρωτύτερα. Και οι δύο θεωρίες δηλαδή, συγκλίνουν στην ανάγκη αναφοράς εξωσχολικών πλαισίων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών, κυρίως μέσα από την επίλυση προβλημάτων.

Επιπλέον, σύμφωνα με τη Frankenstein (1998), ένα πρόγραμμα που εστιάζει στην κριτική μαθηματική σκέψη, θέτει τέσσερις στόχους: την κατανόηση των Μαθηματικών, την κατανόηση των Μαθηματικών της πολιτικής γνώσης, την κατανόηση της πολιτικής της μαθηματικής γνώσης και την κατανόηση της πολιτικής γνώσης. Πέρα από τα Μαθηματικά που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να εντοπίζουν τα Μαθηματικά στην πολιτική ζωή, στην καθημερινότητα δηλαδή, να σκέφτονται για τη φιλοσοφία και τη χρησιμότητα των Μαθηματικών και να κατανοούν την καθημερινότητα στηριζόμενοι στη μαθηματική τους γνώση.

Οι κριτικές μαθηματικές δεξιότητες αναφέρονται σε μαθηματική γνώση που επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα Μαθηματικά για ανάλυση κοινωνικών προβλημάτων ή να διευθετήσουν θέματα σχετικά με τις προσωπικές τους ζωές (Aguilar & Zavaleta, 2012). Με αυτό τον τρόπο, τα Μαθηματικά μετατρέπονται σε σημαντικό εργαλείο για την ευημερία των ατόμων είτε σε ατομικό, είτε σε κοινωνικό επίπεδο. Επιπλέον, οι κριτικές μαθηματικές δεξιότητες δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να αναγνωρίσουν και να κρίνουν πώς εφαρμόζονται τα Μαθηματικά στη διευθέτηση κοινωνικών θεμάτων (Aguilar & Zavaleta, 2012). Μπορούν δηλαδή οι μαθητές, ακόμα και στη σχολική τάξη, να μάθουν για τις εφαρμογές των Μαθηματικών στην κοινωνική ζωή ερχόμενοι σε επαφή με κοινωνικές καταστάσεις. Το σχολείο έτσι, δεν απομονώνεται από την κοινωνία, αλλά αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της. Ακόμη, η κριτική μαθηματική εκπαίδευση φαίνεται να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να διευρύνουν τους ορίζοντές τους για μελλοντικές εφαρμογές, τόσο σε σχολικό περιβάλλον, όσο και σε κοινωνικό, δεδομένων των πεποιθήσεων των μαθητών για τον κόσμο που θα ήθελαν να ζουν. Οι αρχές λοιπόν, της Κριτικής Μαθηματικές Εκπαίδευσης, καθώς και τα αποτελέσματα της μάθησης που βασίζεται σε αυτή, συνδέουν άρρηκτα το σχολείο με την κοινωνία και καθιστούν τον μαθητή έναν μελλοντικό σκεπτόμενο πολίτη.

O Weiland (2017) διαχωρίζει τις δεξιότητες του κριτικά εγγράμματου ατόμου (critical literate) σε δεξιότητες που αφορούν την ανάγνωση και σε δεξιότητες που αφορούν τη γραφή. Σε επίπεδο κριτικής ανάγνωσης, το κάθε άτομο θα πρέπει να αναγνωρίζει και να κατανοεί το συμβολικό σύστημα, να διερωτάται επί των κοινωνικών δομών του κόσμου και να κατανοεί την κοινωνική τοποθέτηση κάποιου, την υποκειμενικότητα του λόγου και το πολιτικό πλαίσιο. Επίσης, θα πρέπει να διαθέτει μία κοινωνικοϊστορική και πολιτική γνώση του κόσμου. Αντίστοιχα, σε επίπεδο γραφής, ο κριτικά εγγράμματος άνθρωπος θα πρέπει να επικοινωνεί χρησιμοποιώντας σωστά το συμβολικό σύστημα, να επηρεάζει και να διαμορφώνει τις δομές στην κοινωνία, να διαπραγματεύεται και να διαχειρίζεται διαλεκτικές συγκρούσεις στην κοινωνία (Weiland, 2017).

Οι δύο θεωρίες που αναφέρθηκαν, αν και επιλέγουν διαφορετικές προσεγγίσεις και έχουν διαφορετικές αφετηρίες, αποτελούν σκέλη του αριθμητισμού και μπορούν και οι δύο να συμβάλουν στην ανάδειξη ενάριθμων πολιτών. Η παρακάτω εικόνα απεικονίζει αυτή τη σχέση.



1.5 Σχολική πραγματικότητα

Οι προηγούμενες ενότητες αφιερώθηκαν στην ανάδειξη της σημασίας της μαθηματικής γνώσης τόσο για τον καθένα πολίτη χωριστά, όσο και για το κοινωνικό σύνολο γενικότερα. Επίσης, έγινε αναφορά στο επίπεδο μαθηματικής επάρκειας του καθενός, που χαρακτηρίζεται από το επίπεδο αριθμητισμού του, ενώ αναλύθηκαν οι αρχές δύο ρευμάτων που προσφέρουν στους πολίτες δύο σημαντικά χαρακτηριστικά του αριθμητισμού που είναι η κριτική σκέψη και η σύνδεση της μαθηματικής γνώσης με την καθημερινότητα. Τα δύο ρεύματα είναι αντίστοιχα η Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση και η Ρεαλιστική Μαθηματική εκπαίδευση. Στην ενότητα αυτή, θα παρατεθούν κάποιες διδακτικές προσεγγίσεις που σχετίζονται με τα προαναφερθέντα ρεύματα ή με τη διδασκαλία των Μαθηματικών γενικότερα.

Αρχικά, πρέπει να σημειωθεί πως υπάρχει χάσμα ανάμεσα στα Μαθηματικά, εντός και εκτός σχολείου, το οποίο οφείλεται στη στερεοτυπική προσέγγιση των προβλημάτων στον σχολικό χώρο (Gazit & Patkin, 2012). Τα προβλήματα δηλαδή, στο σχολικό περιβάλλον διδάσκονται με τρόπο που εστιάζει στη μαθηματική επίλυση ανεξάρτητα από το πλαίσιο του ή τη συσχέτιση με την κοινωνία και τα βιώματα των μαθητών. Θα αναφερθούν δύο παραδείγματα για την επιβεβαίωση αυτής της τοποθέτησης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, που επιβεβαιώνει το χάσμα σχολικής γνώσης και καθημερινών πρακτικών, αποτελεί εύρημα της έρευνας των Tomaz και David (2015) που επισημαίνει τον διαφορετικό τρόπο χρήσης της μεθόδου των τριών εντός και εκτός του σχολικού χώρου. Επιπλέον, η καθημερινή εμπειρία δεν περιλαμβάνει τα περισσότερα κλάσματα που γίνονται στο σχολείο και γενικότερα, σε πολλές περιπτώσεις η καθομιλουμένη περιέχει λέξεις σχετικές με τον αριθμητισμό και μαθηματικούς όρους που δεν είναι μέρος του επίσημου εκπαιδευτικού προγράμματος (Bose, 2017).

Απόκλιση των Μαθηματικών που διδάσκονται οι μαθητές στο σχολικό περιβάλλον και των Μαθηματικών που θα χρησιμοποιήσουν στο μελλοντικό εργασιακό περιβάλλον στο επίπεδο της μοντελοποίησης αναδεικνύουν σε έρευνά τους οι Frejd και Bergsten (2016). Κατά τη διάρκεια κατασκευής μοντέλων στο σχολείο οι μαθητές σπάνια θέτουν σε εφαρμογή το μοντέλο τους ή, με άλλα λόγια, δε ρισκάρουν, γεγονός που θα λάμβανε χώρα στο εργασιακό περιβάλλον. Επίσης, η κατασκευή μοντέλων είναι εν πολλοίς κατευθυνόμενη από τον εκπαιδευτικό και περιορίζει τη δημιουργικότητα των μαθητών. Γενικότερα, η κατασκευή μοντέλων στο σχολείο μοιάζει με μη ρεαλιστική ουτοπία (Frejd & Bergsten, 2016). Τα προβλήματα, επίσης, που αντιμετωπίζονται στον πραγματικό κόσμο είναι πολύπλοκα, όχι ως προς τις μαθηματικές απαιτήσεις, αλλά ως προς την επιρροή από την υποκειμενικότητα, τις εμπειρίες του λύτη, την επικοινωνία,, τη διαδικασία και το περιεχόμενο (Boaler, 1993).

Επιπλέον, το χάσμα που υπάρχει ανάμεσα στην επίσημη εκπαίδευση και τις απαιτήσεις του εργασιακού περιβάλλοντος και πρέπει να γεφυρωθεί επισημαίνουν οι FitzSimons και Boistrup (2017). Η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να είναι σε θέση να προσεγγίζει την καθημερινότητα των εκπαιδευομένων και τις ανάγκες ενός πιθανού εργασιακού περιβάλλοντος. Βασική δεξιότητα που πρέπει να μεταδίδει είναι η αναδιαμόρφωση της μαθηματικής γνώσης. Ο μαθητής δηλαδή, που διαθέτει τη μαθηματική γνώση, να είναι σε θέση να την προσαρμόσει στις ανάγκες του εργασιακού περιβάλλοντος που θα βρεθεί.

Η Bishop (1988) κατηγοριοποιεί τα Μαθηματικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα "small-m" mathematics που βασίζονται στην καθημερινότητα και τα "big-M" mathematics που είναι τα Μαθηματικά που συναντώνται στην επίσημη εκπαίδευση, σε έναν επίσημα οργανωμένο φορέα, όπως το σχολείο. Η μεγάλη απόκλιση αυτών των Μαθηματικών δυσκολεύει τον μαθητή να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της κοινωνίας, αλλά και να αφομοιώσει τη νέα μαθηματική γνώση, καθώς αδυνατεί να τη στηρίξει σε προσωπικά του βιώματα. Παρατηρείται λοιπόν, μία διαφοροποίηση στις μαθηματικές απαιτήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στον σχολικό χώρο με εκείνες που συναντούν εκτός αυτού, αλλά και με εκείνες που θα συναντήσουν στη μελλοντική τους εργασία. Ένας τομέας που συμβάλλει στη διαφοροποίηση αυτή είναι η επίλυση προβλημάτων.

Σχετικά με τη ενσωμάτωση προβλημάτων στη σχολική τάξη, η επίλυση προβλημάτων κατέχει σημαντική θέση στα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και στις απαιτούμενες δεξιότητες ενός ατόμου. Η επίλυση προβλημάτων είναι κύριο αντικείμενο προς διδασκαλία στα ελληνικά σχολεία, είτε ως αυτόνομο αντικείμενο, είτε ως μέσο διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών (Zacharos & Koustourakis, 2011). Επίσης, η επίλυση προβλημάτων αποτελεί την αφετηρία της δουλειάς στα Μαθηματικά και αποτελεί μία μαθησιακή προοπτική μέσω της οποίας οι εκπαιδευτικοί στοχεύουν στην ενθάρρυνση των μαθητών και φοιτητών, ώστε να «κάνουν» Μαθηματικά και να αποκτήσουν μία αίσθηση δημιουργίας του αντικειμένου (Μαμωνά-Downs, 2017). Γενικότερα, η επίλυση προβλημάτων αποτελεί κάτι το θεμελιώδες για το ανθρώπινο είδος, δεδομένου ότι το μεγαλύτερο μέρος της συνειδητής σκέψης του ανθρώπου αφορά τα προβλήματα (Polya, 1998). Όμως, ενώ η επίλυση προβλήματος κατέχει κυρίαρχη θέση στα αναλυτικά προγράμματα, δεν ενισχύεται η ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων στην καθημερινότητά τους. Το γεγονός αυτό οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας και ενσωμάτωσης των προβλημάτων στη μαθησιακή διαδικασία.

Τα Μαθηματικά που διδάσκονται οι μαθητές, σε σχέση με τον πραγματικό κόσμο, μπορούν να εκφραστούν σε τέσσερα βήματα: στην αναγνώριση των σημείων που είναι εφαρμόσιμα, στη μετάφραση πρακτικών προβλημάτων σε Μαθηματικά, στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με υπολογισμούς και στην ερμηνεία/αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Από το σύνολο των βημάτων, εκείνο που σχετίζεται με την επίλυση και τους υπολογισμούς είναι το μόνο που πραγματοποιείται από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, αλλά είναι και εκείνο που εστιάζει η μαθηματική εκπαίδευση (Wolfram, 2010). Βέβαια, η τοποθέτηση αυτή δεν απαξιώνει τη διδασκαλία των υπολογιστικών διαδικασιών, η ενσωμάτωση των οποίων στη διδακτική πράξη είναι απαραίτητη όχι με επιφανειακό τρόπο, αλλά μέσα από καταστάσεις που έχουν νόημα (Ανεστάκης και Λεμονίδης, 2015). Λόγω πίεσης που δημιουργούν τα αναλυτικά προγράμματα, αλλά και της ελλιπούς κατάρτισης των διδασκόντων, η μαθηματική εκπαίδευση εστιάζει κυρίως στη μάθηση αλγεβρικών διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων, ενώ ο χρόνος που αφιερώνεται για την κατανόηση των προβλημάτων και την αξιολόγηση των πιθανών απαντήσεων είναι περιορισμένος. Ένας καλός δάσκαλος θα πρέπει να καταλάβει και να εντυπώσει στους μαθητές τους την άποψη ότι κανένα πρόβλημα δεν έχει εξαντληθεί και πως πάντα υπάρχει κάτι που μπορεί να γίνει· μελετώντας αρκετά και εμβαθύνοντας μπορεί ο μαθητής να βελτιώσει οποιαδήποτε λύση ή, τουλάχιστον, να την κατανοήσει καλύτερα (Polya, 1998). Η ανεπαρκής κατάρτιση καθηγητών τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στη διδασκαλία προβλημάτων, παρά την αρτιότητα της διδασκαλίας τεχνικών και την εμπειρία, αναδείχθηκε σε έρευνα του Jozwiak (2004).

Από την άλλη πλευρά, οι μαθητές τείνουν να αποφεύγουν να χρησιμοποιήσουν τη ρεαλιστική σκέψη, γεγονός που αναδείχθηκε και σε έρευνα των Ανδρέου, Μενελάου και Λεμονίδη (2007). Οι συγκεκριμένοι μαθητές αντιμετώπισαν τέσσερα ρεαλιστικά προβλήματα. Οι μισοί από αυτούς διάβασαν μία νύξη για την ποσότητα των λύσεων, η οποία ωστόσο δεν έφερε μεγάλη διαφορά στα αποτελέσματα. Από την έρευνα φάνηκε η ισχυρή πεποίθηση των μαθητών για την ύπαρξη μοναδικής λύσης και η τάση τους να μην χρησιμοποιούν πληροφορίες από την καθημερινή ζωή. Την έλλειψη ρεαλιστικού συλλογισμού των μαθητών επισημαίνει και ο Inoue (2008), ο οποίος ισχυρίζεται πως τα προβλήματα πρέπει να είναι όντως προβληματικά στο μυαλό των λυτών. Τα συγκεκριμένα ευρήματα έρχονται να επιβεβαιώσουν τη αποτελέσματα άλλων ερευνών διεθνούς εμβέλειας.

Επιπλέον, οι απόψεις για τα μαθηματικά προβλήματα αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας των Clarkeκαι Clarke (2004), η έρευνα των οποίων κατέδειξε τα εξής:

- οι μαθητές θεωρούν ότι τα προβλήματα έχουν μοναδική λύση και σχετίζονται με το πρόσφατα διδαχθέν μάθημα
- οι μαθητές υποστηρίζουν ότι υπάρχει μοναδικός τρόπος για να λύσουν τα προβλήματα
- συνεπείς μαθητές αναμένεται να μην κατανοήσουν τα Μαθηματικά.
- τα Μαθηματικά είναι ατομική δραστηριότητα
- οποιοδήποτε μαθηματικό πρόβλημα, σύμφωνα με τους μαθητές, μπορεί να επιλυθεί σε πέντε λεπτά ή λιγότερο.

Το βασικό ερώτημα και πρόκληση για τον κάθε εκπαιδευτικό είναι η διαιώνιση ή η αναθεώρηση αυτών των πεποιθήσεων των μαθητών. Το πώς θα διδάξει και θα εντάξει στη μαθησιακή διαδικασία ο εκπαιδευτικός την επίλυση προβλήματος, επηρεάζει άμεσα το πώς αντιμετωπίζει ο μαθητής τα προβλήματα. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σχετικά με την επίλυση προβλημάτων είναι διττός, αφού πρέπει να βοηθήσει τον μαθητή να πλησιάσει στη λύση του προβλήματος, αλλά και να αναπτύξει την ικανότητα του μαθητή να λύνει μόνος του προβλήματα (Polya, 1998). Για να γίνει πιο άμεση η εκπαιδευτική προσέγγιση, είναι σημαντική η κατανόηση της φύσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Για να κατανοηθεί καλύτερα η εκπαιδευτική προσέγγιση, είναι ωφέλιμο να γίνει αναφορά στην έννοια και σημασία του προβλήματος, καθώς και στην επίλυσή του.

Γενικότερα, πρόβλημα αποτελεί το πλαίσιο εκείνο που στην ανάγνωση του ο αναγνώστης/λύτης δεν είναι άμεσα σε θέση να επιλέξει μεθόδους και στρατηγικές, για να απαντήσει επαρκώς (Blum & Niss, 1991). Το γεγονός αυτό, έρχεται σε αντιπαραβολή με την πεποίθηση των μαθητών ότι η επίλυση ενός προβλήματος σχετίζεται με το πρόσφατα διδαχθέν μάθημα. Επειδή έγινε αναφορά στη Ρεαλιστική Εκπαίδευση και το αντικείμενο της παρούσας έρευνας είναι τα ρεαλιστικά προβλήματα, σημειώνεται ότι τα ρεαλιστικά προβλήματα (word problems) αποτελούν όχημα που συνδέει τη σχολική τάξη με προβλήματα της καθημερινότητας (Hoogland, Bakker, De Koning & Gravemeijer, 2012). Είναι, δηλαδή, ο βασικότερος τρόπος, για να αποτελέσουν τα σχολικά Μαθηματικά προέκταση των καθημερινών βιωμάτων και αντίστροφα.

Σχετικά με την επίλυση ενός προβλήματος, ο Polya (1998) επισημαίνει πως υπάρχουν τέσσερα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει ο λύτης και είναι τα εξής:

- κατανόηση του προβλήματος: ο λύτης πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίσει τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις
- επινόηση ενός σχεδίου: δεδομένου ότι ο λύτης έχει εντοπίσει τις σχέσεις ανάμεσα στα δεδομένα και τα ζητούμενα καταστρώνει ένα σχέδιο επίλυσης
- εκτέλεση του σχεδίου: κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του σχεδίου ο λύτης πρέπει να ελέγχει κάθε βήμα και να είναι βέβαιος για την ορθότητά του
- κοιτάζοντας προς τα πίσω: στο τελευταίο βήμα ο λύτης ελέγχει την ορθότητα της λύσης του.

Διαφορετική είναι η προσέγγιση για τα στάδια δημιουργικής επίλυσης ενός προβλήματος που είναι τέσσερα, σύμφωνα με τον Gazit (2011):

- προετοιμασία (planning): προσπάθεια να φωτιστεί το πρόβλημα από διάφορες πλευρές
- επώαση (incubation): το πρόβλημα υφίσταται εσωτερική επεξεργασία
- διαφώτιση (enlightment): στο στάδιο αυτό αναπτύσσεται μία πρωτότυπη ιδέα
- έλεγχος (validation): γίνεται η αξιολόγηση της ιδέας, για να ελεγχθεί η εγκυρότητά της, η λειτουργικότητα και η χρησιμότητά της.

Τα τέσσερα στάδια, όπως αναφέρονται από τον Wallas (1926), θα πρέπει να αλληλεπιδρούν, ενώ κανένα από αυτά δεν υπάρχει σε απομόνωση από τα υπόλοιπα. Επιπλέον, σχετικά με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, ο Gazit (2011) επισημαίνει πως με τον δημιουργικό τρόπο επίλυσης οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν έναν συγκεκριμένο αλγόριθμο, αλλά αναζητούν νέες σχέσεις, βασισμένες σε υπάρχουσα γνώση. Με αυτόν τον τρόπο, ο μαθητής χτίζει στην πρότερη γνώση και την προεκτείνει. τοποθετώντας τη σε ένα πλαίσιο που συνάδει με τα προσωπικά του βιώματα. Το σχολείο όμως, δεν ενισχύει τη συγκεκριμένη προσέγγιση, λόγω έλλειψης χρόνου και, γενικότερα δεν προετοιμάζει επαρκώς τους μαθητές για σκέψη και παραγωγή ευρετικών διαδικασιών.

Για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος κρίνεται απαραίτητη η ρεαλιστική σκέψη του λύτη, που στηρίζεται στις εμπειρίες του. Μαθηματικές εμπειρίες καθημερινής ζωής είναι κατάλληλη προσέγγιση για μείωση μαθησιακών εμποδίων και ανάπτυξη μαθηματικής κατανόηση και αντίληψης (Schlogmann, 2002). Η τυπική/υπολογιστική προσέγγιση των Μαθηματικών, δεδομένου ότι απομονώνεται από καθημερινά βιώματα των μαθητών, μπορεί να αποθαρρύνει πλήθος μαθητών από την ενασχόληση με αυτά. Για τον λόγο αυτό, είναι ωφέλιμη η προσθήκη καθημερινών εμπειριών για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι καθημερινές εμπειρίες επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό ως έναυσμα για τη μαθησιακή διαδικασία (Langpaap, 2005). Ο εκπαιδευτικός δηλαδή, μπορεί να πάρει αφορμή από συνθήκες που επηρεάζουν τους μαθητές καθημερινά, να εντοπίσει τις μαθηματικές έννοιες σε αυτές και να θέσει ένα πλαίσιο, από το οποίο μπορεί να ξεκινήσει ή η προέκταση των υπαρχουσών γνώσεων ή η διδασκαλία μίας νέας μαθηματικής δραστηριότητας.

Είναι λοιπόν σημαντικό να συμπεριλαμβάνονται οικείες καταστάσεις στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και να θέτουν στους λύτες-μαθητές πραγματικούς στόχους (Inoue, 2008). Με τον όρο «πραγματικοί στόχοι» εννοείται μία λύση ή μία διαδικασία που δεν είναι προκαθορισμένη και αποτελεί πρόκληση για τους μαθητές. Επιπροσθέτως, οι Tomaz και David (2015) τονίζουν πως οι καταστάσεις της καθημερινότητας δεν πρέπει να υπεισέρχονται στη διδακτική πράξη ως μερική πηγή, αλλά ως μέρος της σχολικής δραστηριότητας που απαιτεί την ετοιμότητα του εκπαιδευτικού. Οι καθημερινές καταστάσεις δεν πρέπει να είναι αποσπασματική προσθήκη στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά κυρίαρχο μέρος, δεδομένου ότι η καθημερινότητα αποτελεί επηρεάζει τη μάθηση, αλλά και το αντίθετο.

Πέραν αυτού, έχει αποδειχτεί ότι η χρήση ρεαλιστικών εικόνων/φωτογραφιών, μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την καλύτερη επίδοση των μαθητών (Hoogland, Bakker, De Koning & Gravemeijer, 2012). Στη χρήση εικόνων όμως ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι προσεκτικός, καθώς οι αυθεντικές εικόνες συνδέουν αμέσως τα Μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο, ενώ οι ζωγραφιές στέλνουν απλώς ένα μήνυμα ότι τα Μαθηματικά είναι κρυμμένα σε ένα τυποποιημένο, φτιαγμένο πλαίσιο (Hoogland, 2009). Ιδιαίτερα στα προβλήματα αριθμητισμού (numeracy problems) οι αυθεντικές εικόνες (real life images) έχουν καθοριστικό ρόλο για την επίλυση, αφού στα συγκεκριμένα προβλήματα χρησιμοποιούνται ελάχιστες λέξεις και πολλές εικόνες.

Μία διαφορετική προσέγγιση προτείνει ο Evans (2002), που επισημαίνει την ωφέλεια της συζήτησης κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Ο ίδιος συγγραφέας τονίζει πως η δυνατότητα κάποιου να σκέφτεται, να λύνει προβλήματα, να τα εφαρμόζει σε πραγματικές καταστάσεις και να μιλά γι' αυτά, είναι χαρακτηριστικό των καλών μαθηματικών. Μία σημαντική διάσταση στον κατάλληλο σχεδιασμό της διδακτικής πράξης είναι η πορεία που ακολουθεί ο νους κατά τη διάρκειά της.

Μία μέθοδος που ταιριάζει με την παραγωγική μάθηση είναι οι ιστορίες αριθμών (number stories), που προσφέρουν πτυχές και σχέσεις μεταξύ των με πιο καθαρό τρόπο, σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία, και με νόημα για τους μαθητές (Langpaap, 2005). Στις ιστορίες αριθμών δίνεται μία πράξη στους μαθητές (π.χ. 4032:3) και την επιλύουν δημιουργώντας μία ιστορία. Με βάση έρευνα του, ο Langpaap (2005) συμπεραίνει ότι οι μαθητές έχουν την τάση να ταυτίζουν τους εαυτούς τους με χαρακτήρες, αντικείμενα και πράξεις της ιστορίας και να αναπαράγουν τις ιστορίες αντανακλώντας επιπτώσεις/αντικείμενα/πράξεις, ώστε να αυξήσουν την αξιοπιστία της ιστορίας και να τοποθετούν σε αυτή νόμιμα στοιχεία.

Κλείνοντας την ενότητα που σχετίζεται με τη σχολική πραγματικότητα αξίζει να αναφερθεί ότι ένας από τους βασικούς στόχους του εκπαιδευτικού προγράμματος είναι η καλλιέργεια μαθηματικής εγγραμματοσύνης στους μαθητές. Ο De Lange (2003) επισημαίνει, για την ανάπτυξη της μαθηματικής εγγραμματοσύνης στο σχολείο, τις εξής παραμέτρους:

- οι μαθηματικές έννοιες να κατακτώνται μέσα από την επίλυση προβλημάτων σε κατάλληλα πλαίσια
- τα Μαθηματικά να είναι συνδεδεμένα με τον πραγματικό κόσμο
- οι εκπαιδευτικοί στόχοι να μην εγκλωβίζονται σε θεματικές περιοχές, αλλά να σχετίζονται με ικανότητες
- η μαθηματική εγγραμματοσύνη συνεπάγεται διαφορετικά προγράμματα στις διαφορετικές χώρες
- τα αναλυτικά προγράμματα πρέπει να ανανεώνονται κάθε πέντε με δέκα χρόνια
- θα πρέπει να υπάρξει ομοφωνία για την ουσία και την ποιότητα της μαθηματικής εγγραμματοσύνης από τη διεθνή μαθηματική κοινότητα.

Κοινή βάση όμως όλων των προσεγγίσεων είναι η επένδυση στην ψυχοσύνθεση των μαθητών. Αντιλήψεις που «περνά» το σχολείο επηρεάζουν τις αντιλήψεις κάθε ατόμου για την ικανότητα εκπαίδευσής του. Πιο ειδικά, η πεποίθηση ενός ατόμου σχετικά με την ικανότητά του να χρησιμοποιήσει τις ικανότητες και γνώσεις του (self-efficacy), για να ολοκληρώσει επιτυχώς ένα πλαίσιο σχετίζεται θετικά με την επίδοσή του, ιδιαίτερα στα Μαθηματικά (Stevens, Harris, Aguirre-Munoz & Cobbs, 2009). Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν και οι Hassi, Hannula και Nevado (2008), τονίζοντας ότι οι καλύτερες δεξιότητες στα μαθηματικά δεν βοηθούν τους μαθητές μόνο στην αποτελεσματική κατανόηση και στη δράση στη μοντέρνα κοινωνία, αλλά αυξάνουν την αυτοπεποίθηση τους και την ποιότητα ζωής τους γενικότερα. Το ασφαλές και φιλικό κλίμα στην τάξη και η καλή επικοινωνία με τον εκπαιδευτικό της τάξης μπορούν να ενισχύσουν την αυτοπεποίθηση του μαθητή και να του δώσουν αφορμή για συνεχή πρόοδο και κατάρτιση. Επιπλέον, όταν οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι ο εκπαιδευτικός πιστεύει στις δυνάμεις τους και έχει προσδοκίες για τη μάθησή τους, είναι σε θέση να εγκαταλείψουν αρνητικές πεποιθήσεις που στηρίχθηκαν σε πρότερες αρνητικές εμπειρίες (Frankenstein, 2009).

Στόχος των μαθητών, που ενισχύεται από γονείς και εκπαιδευτικούς, είναι η καλή επίδοση. Οι καλές επιδόσεις σε γραπτές δοκιμασίες είναι πιθανό να μην αντιπροσωπεύουν ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση της Ταϊβάν, όπου παρατηρείται αυξημένη επίδοση των μαθητών στις γραπτές δοκιμασίες, οι οποίες όμως δεν συνάδουν με καλή αίσθηση αριθμού και βαθιά κατανόηση των Μαθηματικών (Yang & Huang, 2004). Άλλωστε, οι σωστές απαντήσεις δεν συνιστούν ασφαλή δείκτη καλή σκέψης (Sowder, 1988). Για τον λόγο αυτό, στόχος των εκπαιδευτικών θα πρέπει να είναι η ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και η ανάδειξη μαθηματικής σκέψης από τους μαθητές, απαλλαγμένη από βαθμοθηρικές τάσεις.

Δεδομένου ότι απαιτείται το σχολικό περιβάλλον να προετοιμάζει τους μαθητές για την ένταξη στη κοινωνία, πρέπει οι δεξιότητες που καλλιεργεί να ανταποκρίνονται στις μεταβαλλόμενες απαιτήσεις. Στις σύγχρονες κοινωνίες είναι αυξανόμενη και πιο διαδεδομένη η χρήση των υπολογιστών, ενώ πολυάριθμες δουλειές αναλαμβάνονται πλέον από αυτούς, αντικαθιστώντας το ανθρώπινο δυναμικό. Από την άλλη πλευρά, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές δημιουργούν νέες θέσεις εργασίας, που απαιτούν διαφορετικές δεξιότητες. Η συμβολή λοιπόν της εκπαίδευσης κρίνεται κρίσιμη, καθώς θα πρέπει οι μαθητές να προετοιμάζονται για την ψηφιακή εποχή και για τα Μαθηματικά που θα συναντήσουν στο εργασιακό περιβάλλον, γεγονός που επιτυγχάνεται με επίλυση προβλημάτων τοποθετημένα σε αυθεντικά πλαίσια, να είναι σε θέση να κατανοήσουν τις ενέργειες που μπορούν να αναλάβουν οι υπολογιστές, να εξοικειώνονται με διαδικασίες μοντελοποίησης, αλλά παράλληλα να αντιλαμβάνονται την αξία των Μαθηματικών ως μέρος της πολιτισμικής κληρονομιάς (Gravemeijer et al., 2017).

Οι νεότερες γενιές είναι σε θέση να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις που δημιουργούνται με καινοτόμα εργαλεία. Σε πολλές περιπτώσεις, κατακτούν τον αριθμητισμό που απαιτεί το εργασιακό περιβάλλον (numeracy work) με τρόπους που διαφέρουν από τις απαιτήσεις της ευρύτερης κοινωνίας (Zevenbergen, 2011). Είναι πιο πιθανό οι νέοι εργαζόμενοι να προσεγγίσουν ολιστικά ένα πλαίσιο, να εκτιμήσουν, να επιλύσουν προβλήματα, να χρησιμοποιήσουν τεχνολογικά εργαλεία, για να ενισχύσουν τη δουλειά και τη σκέψη τους, και να χρησιμοποιήσουν διαισθητικές μεθόδους. Οι νέοι εργαζόμενοι, με τη βοήθεια της τεχνολογίας, είναι σε θέση να εκτιμήσουν και να επιλύσουν προβλήματα, σε αντίθεση με παλαιότερες γενιές που εστιάζουν σε ακριβείς νοερούς υπολογισμούς, γεγονός που τους βοηθά να ανταποκριθούν καλύτερα στις σύγχρονες απαιτήσεις ενός εργασιακού περιβάλλοντος (Zevenbergen, 2011).

2. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Η παρούσα εργασία στηρίζεται στην παραδοχή ότι η κριτική σκέψη, αποκύημα της Κριτικής Εκπαίδευσης, και η ρεαλιστική σκέψη, αποκύημα της Ρεαλιστικής σκέψης, αποτελούν θεμελιώδη χαρακτηριστικά του ενάριθμου ενήλικα. Ως εκ τούτου, ο ενάριθμος ενήλικας θα πρέπει να είναι σε θέση να αντλήσει τα δεδομένα από μία προβληματική κατάσταση, αφού έχει πραγματοποιήσει κριτική ανάγνωση, και να προχωρήσει στη χρήση των δεδομένων και να απαντήσει, αφού έχει λάβει υπόψη του ρεαλιστικούς παράγοντες. Για να αναδειχτεί το επίπεδο αριθμητισμού 100 ενηλίκων, κατασκευάστηκαν έξι ρεαλιστικά προβλήματα, των οποίων η απάντηση απαιτούσε κριτική ανάγνωση και ρεαλιστική θεώρηση.

2.1 Μεθοδολογία

Χρησιμοποιείται μεικτή μέθοδος έρευνας, που συμπεριλαμβάνει ποσοτικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά. Το πρώτο μέρος της έρευνας αποτελεί μία συσχετιστική μελέτη επισκόπησης, που απαιτεί την ανάδειξη στάσεων και γνώσεων. Ενώ, το δεύτερο μέρος της έρευνας αποτελεί μία φαινομενολογική έρευνα, που εστιάζει στις εμπειρίες των συμμετεχόντων, αλλά και στην αλληλεπίδραση που έχουν προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος της έρευνας οι 100 ενήλικες κλήθηκαν να επιλύσουν προβλήματα, οι απαντήσεις των οποίων αναλύθηκαν ποιοτικά και ποσοτικά, ενώ στο δεύτερο μέρος δημιουργήθηκαν ομάδες εστίασης που συζήτησαν για τα Μαθηματικά και αλληλεπίδρασαν με στόχο την κοινή λύση ενός ρεαλιστικού προβλήματος.

2.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας διαμορφώνονται ως εξής:

1. Πόσο ενάριθμοι είναι οι ενήλικες;

- Έλαβαν υπόψη οι λύτες ρεαλιστικές παραμέτρους για την επίλυση προβλημάτων και ποιες;
- Ήταν σε θέση να κατανοήσουν οι λύτες τις απαιτούμενες πληροφορίες από κείμενο/εικόνες;

- Τι μαθηματική δραστηριότητα ανέπτυξαν οι ενήλικες; Έκαναν σωστή χρήση των μαθηματικών;

2. Η επίδοση των ενηλίκων σχετίζεται με πεποιθήσεις ή δημογραφικά χαρακτηριστικά;

3. Η αλληλεπίδραση ατόμων ενισχύει τη ρεαλιστική σκέψη;

2.3. Πρώτη φάση της έρευνας

2.3.1 Το δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 100 υποκείμενα, 54 γυναίκες και 46 άντρες, με ηλικιακό εύρος από 25 έως 40 ετών (μ.ο.= 31,37). Έγινε προσπάθεια, ώστε να είναι αντιπροσωπευτικό το δείγμα με ποικιλία επαγγελματικής και οικογενειακής κατάστασης, μορφωτικού επιπέδου και προσωπικών ενδιαφερόντων. Για τον λόγο αυτό, οι ερευνητές απευθύνθηκαν σε φορείς της πόλης των Ιωαννίνων και σε επιχειρήσεις, των οποίων το εργατικό δυναμικό ήταν πρόθυμο να συμμετέχει στην έρευνα. Παραδείγματα χώρων από όπου προήλθαν οι συμμετέχοντες είναι: χορευτικοί και αθλητικοί σύλλογοι, ωδεία, προσωπικό φυλακών, ιατρικός σύλλογος, πανεπιστήμιο κ. ά. Στοιχεία για τα υποκείμενα αναγράφονται στους Πίνακες 1, 2, 3 και 4:

Πίνακας 1 Στοιχεία για το μορφωτικό επίπεδο των συμμετεχόντων

ΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	**ΠΛΗΘΟΣ**
ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ/ ΜΕΤΑΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	32
ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	50
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ	18

Πίνακας 2 Στοιχεία για το φύλο των συμμετεχόντων

ΦΥΛΟ	ΠΛΗΘΟΣ
ΑΝΤΡΕΣ	46
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	54

Πίνακας 1 Στοιχεία για την επαγγελματική κατάσταση των συμμετεχόντων

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	ΠΛΗΘΟΣ
ΔΗΜΟΣΙΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΟΣ	19
ΙΔΙΩΤΙΚΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΟΣ	34
ΕΛΕΥΘΕΡΟΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΑΣ	20
ΟΙΚΙΑΚΑ	3
ΦΟΙΤΗΤΗΣ/ΡΙΑ	15
ΑΝΕΡΓΟΣ	9

Πίνακας 2 Στοιχεία για την οικογενειακή κατάσταση των συμμετεχόντων

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	ΠΛΗΘΟΣ
ΑΝΥΠΑΝΤΡΟΣ/Η	57
ΠΑΝΤΡΕΜΕΝΟΣ/Η	40
ΔΙΑΖΕΥΓΜΕΝΟΣ	3

Για την εξαγωγή των πρώτων αποτελεσμάτων έγινε διαχωρισμός των απαντήσεων σε τρεις κατηγορίες που χαρακτηρίστηκαν «λίγο καλές απαντήσεις», «καλές απαντήσεις» και «πολύ καλές απαντήσεις». Γενικά, η κατηγοριοποίηση έγινε με βάση του πόσο ενάριθμοι κρίθηκαν οι λύτες για κάθε πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, θα αναλυθεί η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων για κάθε πρόβλημα ξεχωριστά και θα δοθεί μία ενάριθμη απάντηση-πρότυπο για κάθε πρόβλημα. Αξίζει να σημειωθεί πως με τον όρο ενάριθμη εννοείται η απάντηση που έχει διατυπωθεί μετά από κριτική ανάγνωση της προβληματικής κατάστασης, έχουν ληφθεί στοιχεία της καθημερινότητας υπόψη του λύτη και έχουν χρησιμοποιηθεί τα Μαθηματικά με σωστό τρόπο.

2.3.2 Το εργαλείο

Για να απαντηθεί το αρχικό ερευνητικό ερώτημα της εργασίας, σχετικά με το πόσο ενάριθμοι κρίνονται οι ενήλικες που συμμετέχουν στην έρευνα, κατασκευάστηκε ένα ερωτηματολόγιο αποτελούμενο από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος τα υποκείμενα κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις για το φύλο, την οικογενειακή και την επαγγελματική τους κατάσταση, το μορφωτικό τους επίπεδο, τους τρόπους που αξιοποιούν τον ελεύθερο χρόνο τους, αλλά και να απαντήσουν ερωτήσεις σχετικά με τη χρήση των Μαθηματικών και τις πεποιθήσεις τους απέναντι σε αυτά. Οι απαντήσεις που αντλήθηκαν από τις έξι ερωτήσεις που αφορούν τις πεποιθήσεις και στάσεις των συμμετεχόντων ταξινομήθηκαν βάσει της πεντάβαθμης κλίμακας Likert.

Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου αποτελούνταν από έξι ρεαλιστικά προβλήματα, τα οποία οι λύτες έπρεπε να λύσουν καταγράφοντας τον τρόπο σκέψης τους. Πρέπει να τονιστεί πως η προτροπή για αναλυτική καταγραφή του τρόπου σκέψης υπήρχε στο ερωτηματολόγιο, αλλά ήταν και προφορική επισήμανση. Τα προβλήματα όμως, πέρα από τον ρεαλιστικό τους χαρακτήρα, έπρεπε να περιέχουν και στοιχεία που θα αναδείκνυαν το επίπεδο αριθμητισμού των υποκειμένων. Δεδομένων των απόψεων περί αριθμητισμού που αναφέρθηκαν στο θεωρητικό μέρος της εργασίας, στη συγκεκριμένη έρευνα ο «άριστα ενάριθμος ενήλικας» είναι εκείνος που:

- εκτελεί τις βασικές πράξεις
- εντοπίζει αναλογίες
- χρησιμοποιεί και κατανοεί τα ποσοστά
- κάνει εκτιμήσεις
- αντλεί απαιτούμενες πληροφορίες από ένα γράφημα
- κατανοεί τις πληροφορίες από ένα πρόβλημα
- επιλύει το πρόβλημα
- λαμβάνει υπόψη δεδομένα από την καθημερινή ζωή.

Έγινε προσπάθεια λοιπόν, να κατασκευαστούν προβλήματα που μπορούν να δώσουν πληροφορίες για το επίπεδο αριθμητισμού των υποκειμένων και βασίζονται στις προδιαγραφές που τέθηκαν. Στη συνέχεια, θα γίνει ανάλυση για κάθε πρόβλημα σχετικά με τις απαιτήσεις που δημιουργούν στους συμμετέχοντες και τους λόγους που επιλέχθηκαν.

Πρόβλημα 1

Για να πας και να γυρίσεις στη δουλειά με το αστικό λεωφορείο, κοστίζει 2,20 ευρώ, ενώ η εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών κοστίζει 15 ευρώ. Συμφέρει να πληρώνεις καθημερινά το αντίτιμο του εισιτηρίου ή να αγοράσεις την εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών;

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι τροποποίηση προβλήματος που χρησιμοποίησε η Frankenstein (2009). Πλαισιώνεται από εικόνα, καθώς οι εικόνες βοηθούν τον υποψήφιο λύτη (Hoogland, 2009). Επιπλέον, η κατάσταση που παρουσιάζει το πρόβλημα σχετίζεται με την κοινωνία και προκαλεί τον λύτη να πρωταγωνιστήσει στο πρόβλημα, αφού χρησιμοποιεί δεύτερο πρόσωπο (αρχές κριτικής εκπαίδευσης).
Από τον ενήλικα-υποκείμενο απαιτείται:

- να αντλήσει τις απαιτούμενες πληροφορίες

- να κάνει πράξεις
- να συγκρίνει
- να λάβει υπόψη καθημερινούς παράγοντες που θα επηρεάσουν την απάντησή του.

Πρόβλημα 2

Ενδιαφέρεσαι να αγοράσεις ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια και αποφασίζεις να επισκεφτείς τα καταστήματα την περίοδο των εκπτώσεων. Στο πρώτο τοπικό κατάστημα (εικόνα 1) βρίσκεις τα παπούτσια με αρχική τιμή 120 ευρώ, ενώ στο πολυκατάστημα της πόλης (εικόνα 2) τα ίδια παπούτσια κοστίζουν 140 ευρώ. Από πού θα επιλέξεις να αγοράσεις τα παπούτσια και γιατί;

Εικόνα 1

Την ίδια μέρα, έκανες ανάληψη από την τράπεζα και πήρες πέντε χαρτονομίσματα των 50 ευρώ. Πόσα ρέστα θα πάρεις από την αγορά των παπουτσιών;

Εικόνα 2

Εικόνα 3

Οι αγορές είναι πεδίο που «φαίνονται» τα Μαθηματικά και χρησιμοποιούνται ευρέως. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τα ποσοστά σε συνδυασμό με τις αγορές είναι από τα κυριότερα και συχνότερα Μαθηματικά που αντιμετωπίζουν οι ενήλικες στην καθημερινότητά τους. Για τον λόγο αυτό, η συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση κρίθηκε οικεία στα υποκείμενο, γεγονός που θα τους βοηθούσε. Και σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα πλαισιώνεται με εικόνες, για να γίνει πιο ρεαλιστικό.

Για να ανταποκριθεί επιτυχώς ο ενήλικας, θα πρέπει:

- να συνδυάσει δεδομένα του κειμένου και των εικόνων
- να εκτελέσει πράξεις

- να συγκρίνει
- να σκεφτεί κριτικά, να παρατηρήσει δηλαδή τις εικόνες (**ΕΩΣ**)
- να αναλογιστεί πώς θα δρούσε σε αντίστοιχη κατάσταση.

Πρόβλημα 3

Ο φίλος σου σου προτείνει να παρακολουθήσετε μία ταινία στο σινεμά. Η προβολή που επιλέγει είναι στις 20:20, αλλά εσύ έχεις ραντεβού στον οδοντίατρο στις 18:30 και κυκλοφορείς με ποδήλατο. Τι θα απαντήσεις στον φίλο σου; (απόσταση σινεμά από το κέντρο της πόλης: 3 km)

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι παραλλαγή προβλήματος του Inoue (2008). Παρουσιάζει μία κατάσταση οικεία στην πλειονότητα των ενηλίκων και εγείρει την έννοια της *εκτίμησης*. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός, ότι δίνονται αρκετές πληροφορίες και αριθμητικά δεδομένα, τα οποία δεν είναι απαραίτητα για την τελική απάντηση, αλλά έγκειται η επιλογή τους στην κρίση του λύτη. Η χρήση δεύτερου προσώπου στοχεύει στη διευκόλυνση του λύτη να αποκριθεί πιο ρεαλιστικά.
Για να δώσει επαρκή απάντηση το υποκείμενο, θα πρέπει:

- να διαβάσει το κείμενο προσεκτικά
- να αντλήσει τις απαιτούμενες πληροφορίες
- να εκτιμήσει
- να προσθέσει στοιχεία από την καθημερινότητα.

Πρόβλημα 4

Ένα νεαρό συγγενικό σου πρόσωπο αγόρασε ένα μηχανάκι με 1.400 ευρώ, αλλά σύντομα συνειδητοποίησε ότι δυσκολευόταν στη συντήρησή του και αποφάσισε να το πουλήσει με την προοπτική να το ανακτήσει, όταν θα έπιανε δουλειά. Το πούλησε σε έναν φίλο του 1.200 ευρώ. Μετά από λίγο καιρό, και αφού απέκτησε δουλειά, το αγόρασε 1.000 ευρώ. Τελικά όμως, λόγω οικονομικών δυσκολιών, το έδωσε οριστικά για 700 ευρώ. Πόσο ήταν το συνολικό κέρδος ή η συνολική ζημία από όλες τις συναλλαγές;

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι παραλλαγή ενός προβλήματος των Maier και Burke (1967), όπως αναφέρεται στους Gazit και Patkin (2012). Αξίζει να αναφερθεί ότι το 40% απάντησε επιτυχώς στο πρόβλημα στην έρευνα των Maier και Burke. Το υποκείμενο πρέπει:

- να ανταποκριθεί σε ένα multi step πρόβλημα
- να ασχοληθεί με οικονομικά δεδομένα
- να αναφέρει την έννοια της απόσβεσης που έρχεται αντιμέτωπη με τον όρο ζημία ή κέρδος.

Πρόβλημα 5

Την Κυριακή το μεσημέρι θα έχετε οικογενειακό τραπέζι και το κυρίως πιάτο θα είναι τα μαντηλάκια. Υπολογίζετε πως θα είστε συνολικά 15 άτομα. Εσύ αναλαμβάνεις να κάνεις τις αγορές από τον μανάβη. Τι θα αγοράσεις και σε ποια ποσότητα;

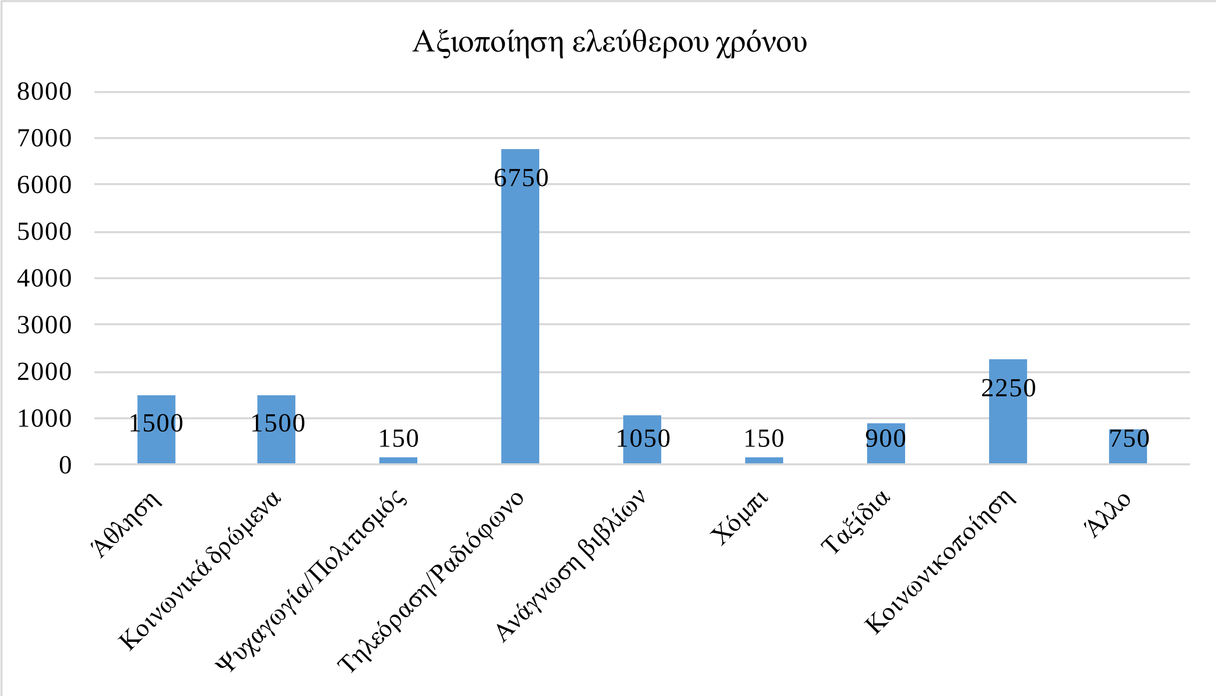
Εικόνα 4

Η μαγειρική είναι ένας τομέας, στον οποίο γίνεται χρήση των μαθηματικών, ακόμα κι αν γίνεται ασυνείδητα (Kenschaft, 2014) και έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας, η μαγειρική σε συνδυασμό με τον αριθμητισμό, σε έρευνα της de Aguero (2008). Παρόμοια προβλήματα με αυτό χρησιμοποιούνται σε διάφορους εκπαιδευτικούς ιστότοπους που στοχεύουν αφενός να διδάξουν την αναλογία, αφετέρου να συνδέσουν τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή, όπως το Annenberg Learner-teacher Professional Development, το Math Central (University of Regina) και το Khan Academy. Η λογική της επιλογής του προσώπου και των εικόνων είναι όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Στην προκειμένη περίπτωση, ο ενήλικας θα πρέπει:

- να κατανοήσει τις πληροφορίες του κειμένου
- να επιλέξει τα απαραίτητα υλικά.
- να κάνει χρήση των αναλογιών.

Πρόβλημα 6



Το συγκεκριμένο γράφημα παρουσιάζει την αξιοποίηση ελεύθερου χρόνου από ενήλικες 20-64 χρονών, σύμφωνα με έρευνα που έγινε το 2013.

Πόσοι περισσότεροι ενήλικες ασχολούνται με Τηλεόραση/Ραδιόφωνο σε σχέση με εκείνους που αθλούνται;

Πόσοι είναι οι ενήλικες που συμμετείχαν στην έρευνα;

Πόσοι ενήλικες ασχολούνται με Ταξίδια, Ανάγνωση βιβλίων και Χόμπι;

Ποιος είναι ο πιο δημοφιλής τρόπος αξιοποίησης ελεύθερου χρόνου;

Ποιος είναι ο πέμπτος δημοφιλής τρόπος αξιοποίησης ελεύθερου χρόνου;

Απαραίτητη δεξιότητα για έναν ενήλικα κρίνεται και η εξαγωγή πληροφοριών από ένα γράφημα, καθώς και η επεξεργασία τους. Σύμφωνα με τον Evans (2014), η συμπεριφορά κάποιου απέναντι στα γραφήματα, και γενικότερα στις αναπαραστάσεις, σχετίζεται άμεσα με τον χαρακτηρισμό του ως ενάριθμο. Τα γραφήματα περιέχουν συμπυκνωμένες πληροφορίες και συναντώνται καθημερινά, κυρίως σε ειδησεογραφικά άρθρα ή ιστοσελίδες. Η σειρά ερωτήσεων είναι επηρεασμένη από την ιστοσελίδα Khan Academy.

2.3.3 Κριτήρια κατηγοριοποίησης απαντήσεων ανά πρόβλημα

Σε πρώτη φάση, οι απαντήσεις των συμμετεχόντων αναλύθηκαν ως προς το επίπεδο αριθμητισμού. Αφού συλλέχθηκαν οι απαντήσεις, ανά πρόβλημα, κατασκευάστηκαν τρεις κατηγορίες: «πολύ καλές απαντήσεις», «καλές απαντήσεις» και «λιγότερο καλές απαντήσεις». Αν και τα κριτήρια με τα οποία τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις στην αντίστοιχη κατηγορία διαφέρουν σε κάθε πρόβλημα, κοινός παρονομαστής για τις «πολύ καλές απαντήσεις» ήταν η χρήση ρεαλιστικών παραγόντων, η κριτική ανάγνωση της προβληματικής κατάστασης και η άρτια μαθηματική δραστηριότητα. Ειδικότερα, τα κριτήρια χαρακτηρισμού των απαντήσεων για κάθε πρόβλημα αναφέρονται στη συνέχεια. Για την καλύτερη κατανόηση, παρατίθενται παραδείγματα από τις απαντήσεις των λυτών (Λ.), οι οποίες παρατίθενται αυτούσιες, χωρίς να υπάρξει δηλαδή ορθογραφική, γραμματική ή συντακτική διόρθωση.

Στο πρώτο πρόβλημα ο λύτης θα πρέπει να προσέξει την εικόνα για να μάθει την τιμή του εισιτηρίου και να πληροφορηθεί για την προσφορά των 23 εισιτηρίων (κριτική ανάγνωση). Για να προβεί στην απάντηση θα πρέπει να σκεφτεί τη συχνότητα χρήσης της αστικής συγκοινωνίας, τη δυνατότητα χρήσης του λεωφορείου πέρα από τη μεταφορά στον επαγγελματικό χώρο, τη διπλή μεταφορά κ.ά. (ρεαλιστική προσέγγιση). Τέλος, ο λύτης θα μπορούσε να οριστικοποιήσει την απάντησή του περνώντας από διάφορες μαθηματικές διόδους, όπως η αναγωγή στη μονάδα, η χρήση ανισοτήτων κ.ά. (χρήση μαθηματικών). Τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, έχουν ως εξής:

- *Πολύ καλές απαντήσεις*: Οι απαντήσεις που στηρίχθηκαν σε υποθετικό λογισμό και τεκμηριώθηκαν με μαθηματικά άρτιο τρόπο κρίθηκαν πολύ καλές απαντήσεις. Τον ίδιο χαρακτηρισμό είχαν και απαντήσεις που στηρίχτηκαν σε μαθηματική ανισότητα (λέξη κλειδί: τουλάχιστον) και περιείχαν μία από τις δύο επιλογές. Πρέπει να σημειωθεί, πως ο μαθηματικός συλλογισμός μπορεί να ήταν άμεσος ή έμμεσος (δεν αναγράφονται οι μαθηματικές πράξεις, αλλά εννοήθηκαν).

> Συμφέρει να αγοράσεις την κάρτα μεταφορών που κοστίζει 15€, γιατί ημερησίως με τον άλλο τρόπο θέλεις 2,40€, οπότε για 7 μέρες σου κοστίζει 16,8€. Επιπλέον, με την κάρτα έχεις περισσότερες από 2 μετακινήσεις την ημέρα. (Λ. 75)

Αν υποθέσουμε ότι για την εργασία μας θα χρησιμοποιούμε το αστικό 2 φορές την ημέρα τότε θα πληρώνουμε 12€ σε εισιτήρια. Στην περίπτωση αυτή συμφέρει να αγοράσουμε τα εισιτήρια. Αν χρησιμοποιούμε το αστικό και το Σαββατοκύριακο ή περισσότερες φορές κάθε μέρα τότε θα συνέφερε η εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών που κοστίζει 15€. Αν πάλι λάβουμε υπόψιν την προσφορά 20+3 Δώρο, δηλαδή με 1,20×20=24€ αγοράσαμε 23 εισιτήρια (που αντιστοιχούν σε 1,04€ το εισιτήριο) τότε χρησιμοποιώντας μέχρι 2 εισιτήρια την ημέρα μας συμφέρει το πακέτο αυτό αφού αντιστοιχεί σε 14,56€ την εβδομάδα. (Λ. 94)

15€ : 7ημ.= 2,14

1,20€ × 20 εισ. = 24€

24€ : 23 = 0,96

Καθημερινά θα χρειαστώ τουλάχιστον 2.

0,96 × 2 = 1,92

1,92 × 7 = 13,44

Συμφέρει το εισιτήριο εκτός κι αν κάνω περισσότερες από 2 διαδρομές. (Λ. 95)

- *Καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή συμπεριλήφθηκαν απαντήσεις που στηρίχθηκαν σε υπόθεση (εξαρτάται…), αλλά δεν είχαν μαθηματική τεκμηρίωση ή απαντήσεις που είχαν μαθηματική τεκμηρίωση, αλλά δεν μαρτυρούσαν ευέλικτο/υποθετικό τρόπο σκέψης. Επίσης, στην ίδια κατηγορία ανήκουν και απαντήσεις που προσφέρουν άλλες ρεαλιστικές παραμέτρους, όπως η μεταφορά με άλλο μέσο ή οι συναλλαγές.

Ανάλογα την χρήση της εβδομαδιαίας κάρτας την ημέρα συμφέρει ή όχι. Π.χ. αν την χρησιμοποιούμε πάνω από μία φορά την ημέρα συμφέρει, διαφορετικά όχι. (Λ. 16)

Συμφέρει να αγοράσεις την εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών, γιατί: την ημέρα θα χρειαστείς 2 εισιτήρια. Άρα 7×2=14 εισιτήρια/εβδομάδα, 14×1,20=16,80 €. (Λ. 46)

Νομίζω συμφέρει να παίρνω κάθε μέρα, γιατί μπορεί να βρω κάποιον να με πάει. (Λ. 4)

- *Λιγότερο καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις που δεν είχαν νόημα ή που έδιναν απλή απάντηση, χωρίς αιτιολόγηση. Επίσης, οι απαντήσεις που στηρίχθηκαν στην πράξη 1,20 επί 7 θεωρήθηκαν λιγότερο καλές, καθώς δε στηρίχτηκαν στη διπλή μετακίνηση και κρίθηκαν μη ρεαλιστικές.

> Να πληρώνεις εισιτήριο. (Λ. 79)

Στο δεύτερο πρόβλημα, ο λύτης θα πρέπει να εκτιμήσει τον χρόνο που θα χρειαστεί όντας ασθενής στον οδοντίατρο και τον χρόνο που θα χρειαστεί για να μεταβεί στον χώρο του σινεμά σκεπτόμενος τις δεδομένες χρονικές στιγμές (κριτική ανάγνωση). Στη συνέχεια, θα πρέπει να μπει στη θέση του πρωταγωνιστή και να λάβει υπόψη παράγοντες που θα τον επηρέαζαν ως ασθενή, π.χ. πόνος (ρεαλιστική προσέγγιση). Επιπρόσθετα, ο λύτης θα πρέπει να δώσει την τελική απάντηση υπολογίζοντας τα χρονικά διαστήματα που επιλέγει (χρήση Μαθηματικών). Τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, έχουν ως εξής:

- *Πολύ καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή συγκαταλέχθηκαν οι απαντήσεις που περιέχουν παραμέτρους πέρα από τον χρόνο. Δηλαδή, ο λύτης έλαβε υπόψη παραμέτρους πέρα από τον χρόνο που θα χρειαστεί κάποιος στον οδοντίατρο και τον χρόνο μετάβασης στο σινεμά.

> Επειδή η επίσκεψη στον οδοντίατρο δεν ξέρουμε πόσο θα διαρκέσει ούτε αν θα υπάρχουν παρενέργειες (μούδιασμα κλπ.), θα ζητήσω από τον φίλο μου να επικοινωνήσουμε ξανά μετά την επίσκεψη στον οδοντίατρο. (Λ. 13)

> Θα του απαντούσα πως 20.15 θα ήμουν στο ραντεβού μου και λόγω διαφημίσεων πριν την ταινία θα προλάβαινα εγκαίρως και την προβολή! Χα! (Λ. 78)

- *Καλές απαντήσεις*: Οι απαντήσεις που στηρίχθηκαν σε ρεαλιστική αιτιολόγηση, κυρίως στα χρονικά διαστήματα που σχετίζονται με την επίσκεψη και τη μετάβαση στο σινεμά, κρίθηκαν καλές.

> Αν είναι η ταινία είναι ενδιαφέρουσα και το ραντεβού διάρκειας < 1 ώρας θα απαντήσω θετικά. (Λ. 12)

> Θα του απαντούσα, ναι. Ο μέγιστος χρόνος που θα μπορούσε να σε κρατήσει ο οδοντίατρος είναι 1 ώρα και 30 λεπτά, οπότε με το ποδήλατο προλαβαίνεις σε 20 λεπτά να πας στο σινεμά. (Λ. 75)

- *Λιγότερο καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι απλές, σύντομες απαντήσεις που δεν στηρίχθηκαν σε κάποια δικαιολόγηση.

> Θα απαντήσω ότι δεν προλαβαίνω να πάω στο σινεμά. (Λ. 15)

Στο τρίτο πρόβλημα, ο λύτης πρέπει να κατανοήσει πως οι δεδομένες τιμές είναι αρχικές και οι αντίστοιχες εκπτώσεις αναγράφονται στις εικόνες που πρέπει να παρατηρήσει. Όμως, στην περίπτωση του πολυκαταστήματος ο λύτης θα πρέπει να προσέξει τη λέξη «ΕΩΣ», για να κατανοήσει πως το ποσοστό 50% δεν αναφέρεται σε όλα τα προϊόντα του πολυκαταστήματος (κριτική ανάγνωση). Στη συνέχεια, το δεύτερο μέρος του προβλήματος σχετίζεται με την οικονομική συναλλαγή. Ο λύτης πρέπει να σκεφτεί πως, από τα 5 τουλάχιστον χαρτονομίσματα που έχει, θα δώσει τα 3 και όχι τα 5, όπως θα έκανε και στην καθημερινότητά του (ρεαλιστική προσέγγιση). Για να δοθεί ολοκληρωμένη απάντηση, ο λύτης πρέπει να είναι σε θέση να χειριστεί τα ποσοστά και να εκτελέσει πράξεις (χρήση μαθηματικών). Τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων, για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχουν ως εξής:

- *Πολύ καλές απαντήσεις*: Οι λύτες που έλαβαν υπόψιν τους τη λέξη ΕΩΣ της δεύτερης εικόνας και υπολόγισαν με σωστό τρόπο τα ρέστα μετά την αγορά, έδωσαν πολύ καλές απαντήσεις.

> Στο τοπικό κατάστημα αν τα παπούτσια κάνουν 120€ με την έκπτωση που τρέχει αυτό τον καιρό 405 κοστίζουν 72€. Το πολυκατάστημα έχει έως 50%. Αν πάρουμε το σενάριο ότι τα παπούτσια έχουν τη μεγαλύτερη έκπτωση 50% θα κοστίζουν 70€ οπότε συμφέρει να τα πάρω από το πολυκατάστημα. Αν όμως έχει λιγότερη έκπτωση συμφέρει από το τοπικό κατάστημα. Τώρα αν έχει 50% έκπτωση και το πολυκατάστημα είναι πάνω από 10km έξω από την πόλη δε συμφέρει. Στο τοπικό κατάστημα θα δώσω 100€ - 72€ = 28€ ρέστα. Στο πολυκατάστημα θα δώσω 100€ - 70€ = 30€ ρέστα. (Λ. 47)

- *Καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι απαντήσεις που είναι ολοκληρωμένες ως προς ένα σκέλος. Πιο συγκεκριμένα, οι απαντήσεις των υποκειμένων που έλαβαν υπόψιν τη λέξη ΕΩΣ ή υπολόγισαν σωστά τα ποσοστά, αλλά δεν υπολόγισαν σωστά τα ρέστα ανήκουν στη συγκεκριμένη κατηγορία. Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και οι απαντήσεις που στηρίχθηκαν σε σωστό υπολογισμό των ποσοστών ή είναι ανεξάρτητες από τις εικόνες, αλλά υπολόγισαν με σωστό τρόπο τα ρέστα.

> Εννοείτε πως θα πάρω παππούτσια από τοπική επιχείρηση διότι τα στηρίζω περισσότερο. Θα πάρω ρέστα 30€ εφόσον από την τοπική επιχείρηση κοστίζει 120€. Άρα θα χρησιμοποιήσω τα 3 από τα 5 χαρτονομίσματα των 50€. Άρα τα ρέστα είναι 30€. Υποτίθεται ότι τα παππούτσια κοστίζουν τόσο με την έκπτωση μαζί. (Λ. 30)

Η έκπτωση 50% στο (αν ισχύει στο συγκεκριμένο προϊόν) πολυκατάστημα είναι συμφέρουσα θα πληρώσω 70 ευρώ, ενώ στο τοπικό 72 ευρώ. Άρα θα πιω κι ένα καφέ. Θα πάρω 250-70 = 180 και θα χαλάσω και το 10άρικο στον καφέ. (Λ. 17)

- *Λιγότερο καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή συμπεριλήφθηκαν οι απαντήσεις των λυτών που δεν έλαβαν υπόψιν τις εικόνες και επιπλέον, υπολόγισαν λάθος τα ρέστα. Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και οι ελλιπείς απαντήσεις, που δεν απαντούν στο δεύτερο ερώτημα.

5×5 = 250 - 120 = 130€ ρέστα από το τοπικό κατάστημα. (Λ. 39)

Στη συνέχεια, το τέταρτο πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα πολλαπλών οικονομικών συναλλαγών, στο οποίο ο λύτης πρέπει να κατανοήσει την αλληλουχία των συναλλαγών (κριτική ανάγνωση). Δεδομένου ότι γίνεται αναφορά σε οικονομικές συναλλαγές και οικονομικούς όρους (ζημία ή κέρδος), ο λύτης θα πρέπει να σκεφτεί παραμέτρους που σχετίζονται με τη χρήση του προϊόντος και τα επιπλέον έξοδα που επηρεάζουν τη συντήρηση και αγοροπωλησία του προϊόντος (ρεαλιστική προσέγγιση). Για να δοθεί ολοκληρωμένη απάντηση, ο λύτης πρέπει να γνωρίζει τις έννοιες κέρδος και ζημία και να εκτελεί πράξεις (χρήση μαθηματικών). Τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχουν ως εξής:

- *Πολύ καλές απαντήσεις*: Οι λύτες που έλαβαν υπόψιν τους τη διαδικασία αγοροπωλησίας και τη συντήρηση του οχήματος έδωσαν πολύ καλές απαντήσεις. Οι συγκεκριμένοι λύτες δεν περιορίστηκαν στις μαθηματικές πράξεις, αλλά προέκτειναν τη σκέψη τους δίνοντας μία πιο ρεαλιστική υπόσταση στην απάντησή τους.

Το κέρδος ήταν η ευχαρίστηση στο να αποκτήση μηχανάκι. Τώρα η συνολική ζημιά με μαθηματικά είναι 500 ευρώ αλλά κανονικά είναι περισσότερα λόγο συντήρισης στο μηχανάκι, ασφάλειες, καύσιμα, ΚΤΕΟ, κάρτα καυσαερίων, άρα ανεβαίνει το ποσό της ζημιάς.. (Λ. 37)

- *Καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι απαντήσεις των λυτών που υποστήριξαν πως η ζημία του συγγενικού προσώπου είναι 500€.

Τα λεφτά που ξόδεψε είναι 1.400 + 1.000 = 2.400€. Τα λεφτά που απέκτησε είναι 1.200 + 700 = 1.900€. Άρα είναι ζημιωμένος 500€. (Λ. 22)

\- 1.400 + 1.200 - 1.000 + 700 = - 500€. Η συνολική ζημία των αγοροπωλησιών ήταν 500€. (Λ. 21)

- *Λιγότερο καλές απαντήσεις:* Στη συγκεκριμένη κατηγορία συμπεριλήφθηκαν οι απαντήσεις που έδωσαν σαν αποτέλεσμα οποιαδήποτε τιμή, διαφορετική από 500€ για ζημία ή κέρδος.

  300€ ζημιά. (Λ. 12)

Το πέμπτο πρόβλημα στηρίζεται στις αγορές που πρέπει να κάνει ο λύτης βασιζόμενος σε μία συνταγή. Αρχικά, ο λύτης πρέπει να μελετήσει τη συνταγή και να προσέξει ότι, από το σύνολο των υλικών, πρέπει να εστιάσει μόνο στα υλικά που θα αγόραζε από τον μανάβη (κριτική ανάγνωση). Στη συνέχεια, πρέπει να επιλέξει ποσότητες που θα ήταν οικείες στην καθημερινότητά του. Δηλαδή, δεδομένου ότι τα άτομα για το τραπέζι είναι 15 και η συνταγή αναφέρεται σε 4 άτομα, ο λύτης μπορεί να σκεφτεί ότι 15 είναι κοντά στο 16, που είναι τετραπλάσιο του 4, άρα θα χρειαστεί τετραπλάσια ποσότητα υλικών. Με άλλα λόγια, οι αγορές κατά προσέγγιση είναι στοιχείο της καθημερινότητας και η μεταφορά του συγκεκριμένου τρόπου σκέψης είναι επιθυμητή για την επίλυση του προβλήματος (ρεαλιστική προσέγγιση). Η τελική απάντηση μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια διαφορετικών μαθηματικών δραστηριοτήτων (χρήση Μαθηματικών). Τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, έχουν ως εξής:

- *Πολύ καλές απαντήσεις*: Στις περιπτώσεις που τα υποκείμενα στήριξαν τις απαντήσεις τους στα σωστά υλικά και σε ενδεδειγμένη ποσότητα, δόθηκαν οι πολύ καλές απαντήσεις.

  - Θα χρειαστούν περίπου τα υλικά x4, αφού η συνταγή είναι για 4 άτομα. Άρα:
  - Για 4 άτομα → 4-5 μελιτζάνες
  - Για 15 άτομα → 18 μελιτζάνες
  - Για 4 άτομα → 4 ντομάτες
  - Για 15 άτομα → 15 ντομάτες
  - Για 4 άτομα → 1 κρεμμύδι
  - Για 15 άτομα → 4 κρεμμύδια
  - 1 σκόρδο
  - λίγο μαϊντανό (Λ. 84)

  Όλα τα υλικά που αναγράφονται και πωλούνται στο μανάβικο (βλ. λαχανικά) x4 (ας μείνει και 1 μερίδα για τη νοικοκυρά!) (Λ. 100)

- *Καλές απαντήσεις*: Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν δύο ειδών απαντήσεις. Αφενός ανήκουν οι απαντήσεις που περιέχουν περισσότερα υλικά από τα ενδεδειγμένα και αφετέρου, ανήκουν οι απαντήσεις που περιέχουν τα σωστά υλικά, αλλά σε ακατάλληλη ποσότητα, σε ποσότητα δηλαδή που δεν προκύπτει από φανερή μαθηματική δραστηριότητα.

- 4 κιλά μοσχαρίσιο κρέας
- 20 μελιτζάνες μακριές
- 16 ώριμες ντομάτες
- 4 μέτρια κρεμμύδια
- 4 σκελίδες σκόρδο
- 1 ματσάκι μαϊντανό
- λίγο ελαιόλαδο
- 1 μπουκάλι ερυθρό ξηρό
- 200gr φέτα τριμμένη (Λ. 60)

- 20 μελιτζάνες
- 16 ώριμες ντομάτες
- 2 κρεμίδια
- 2 σκελίδες σκόρδο (Λ. 89)

• *Λιγότερο καλές απαντήσεις*: Οι απαντήσεις που κρίθηκαν μη ρεαλιστικές ανήκουν στη συγκεκριμένη κατηγορία, καθώς επίσης και οι απαντήσεις που περιείχαν περισσότερα από τα απαραίτητα υλικά (ντομάτες, μελιτζάνες, σκόρδα, κρεμμύδια, μαϊντανό) και σε ποσότητα που δεν προέκυπτε από διατυπωμένο συλλογισμό και κρίθηκε ακατάλληλη.

1. 15 ΜΕΛΙΤΖΑΝΕΣ, 13 ΝΤΟΜΑΤΕΣ, 5 ΚΡΕΜΜΥΔΙΑ ΚΑΙ ΛΙΓΟ ΜΑΪΝΤΑΝΟ (Λ. 4)

2. 1 ΚΙΛΟ ΓΙΑ 4 ΑΤΟΜΑ = 250gr/άτομο 250gr ΕΠΙ 15 = 3.750gr
3. 4 ΜΕΛΙΤΖΑΝΕΣ/άτομο = 15 ΜΕΛΙΤΖΑΝΕΣ
4. 4 ΤΟΜΑΤΕΣ/άτομο = 15 ΝΤΟΜΑΤΕΣ
5. 3,5 ΚΡΕΜΜΥΔΙΑ
6. 3,5 ΣΚΛΙΔΕΣ ΣΚΟΡΔΟ
7. 1 ΜΑΤΣΑΚΙ ΜΑΙΝΤΑΝΟ
8. 500gr ΕΛΑΙΟΛΑΔΟ
9. 1 ΜΠΟΥΚΑΛΙ ΚΡΑΣΙ (750ml)

100 γραμμάρια ΦΕΤΑ (Λ. 59) (Η συγκεκριμένη απάντηση κρίθηκε λιγότερο καλή, γιατί περιέχει μη ρεαλιστικά στοιχεία.)

Ο λύτης στο έκτο πρόβλημα θα πρέπει να μελετήσει το γράφημα, να εκμαιεύσει πληροφορίες, να κατανοήσει τι συμβολίζουν οι ράβδοι και να προσδιορίσει τη σημασία των τιμών στους άξονες. Στη συνέχεια, μπορεί να προβεί σε απάντηση των ερωτήσεων. Ωστόσο, η εκφώνηση δεν προσδιορίζει το αν οι συμμετέχοντες της έρευνες δήλωναν έναν ή παραπάνω τρόπους αξιοποίησης ελεύθερου χρόνου. Για τον λόγο αυτό, θεωρήθηκαν δεκτές οι απαντήσεις των λυτών που έθεσαν προβληματισμό στο συγκεκριμένο ζήτημα. Τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των απαντήσεων, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, έχουν ως εξής:

- *Πολύ καλές απαντήσεις*: Πολύ καλές κρίθηκαν οι απαντήσεις που περιείχαν σωστά και τα πέντε ερωτήματα, ακόμα και αν έθεταν προβληματισμό για την ποσότητα επιλογών που είχαν τα υποκείμενα στη δεδομένη έρευνα.
  1. 5250
  2. 15.000
  3. 2.100
  4. Ραδιόφωνο/Τηλεόραση
  5. Ανάγνωση βιβλίων (Λ.11)
- *Καλές απαντήσεις*: Οι απαντήσεις που περιείχαν τρία ή τέσσερα σωστά ερωτήματα κρίθηκαν καλές.

  6.750 - 1.500 = 5.250 άτομα

  15.000 ενήλικες

  2.100 ενήλικες

  Η τηλεόραση/Ραδιόφωνο

  Τα ταξίδια (Λ.93)
- *Λιγότερο καλές απαντήσεις*: Στην κατηγορία αυτή συγκαταλέχθηκαν οι απαντήσεις που περιείχαν ένα ή δύο ή κανένα σωστό ερώτημα.
  1. 6.750 - 1500 = 5.250 ενήλικες
  2. 8.000
  3. 1.05.
  4. Τηλεόραση/Ραδιόφωνο
  5. Ταξίδια (Λ.51)

2.3.4 Ανάλυση δεδομένων

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας εστιάζει σε δημογραφικά χαρακτηριστικά και πεποιθήσεις που, πιθανόν, μπορεί να επηρέασαν την επίδοση των συμμετεχόντων στο ερωτηματολόγιο. Για να γίνει η ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο IBM SPSS v.23.0.

Για να ελεγχθεί η ανεξαρτησία των μεταβλητών πραγματοποιήθηκε χ^2 έλεγχος. Προκειμένου να ελεγχθούν οι διαφορές στην επίδοση των συμμετεχόντων βάσει των δημογραφικών χαρακτηριστικών τους αξιοποιήθηκε ο έλεγχος μέσων όρων για ανεξάρτητα δείγματα και η ανάλυση διακύμανσης μονής κατεύθυνσης.

Επιπλέον, στις περιπτώσεις που τα δεδομένα δεν ακολουθούσαν κανονική κατανομή, πραγματοποιήθηκαν μη παραμετρικοί έλεγχοι (Kruskal-Wallis και Mann-Whitney), ενώ οι έλεγχοι κανονικής κατανομής πραγματοποιήθηκαν με τους ελέγχους Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk. (Κατσής, Σιδερίδης και Εμβαλωτής, 2011).

2.3.5 Αποτελέσματα

2.3.5.1 Κατηγοριοποίηση απαντήσεων

Οι απαντήσεις που δόθηκαν κατηγοριοποιήθηκαν στις τρεις κατηγορίες που προαναφέρθηκαν βάσει των αντίστοιχων ανά πρόβλημα κριτηρίων. Αποτέλεσμα αυτής της κατηγοριοποίησης είναι ο Πίνακας 5:

Πίνακας 3 Συγκεντρωτικός πίνακας ενάριθμων απαντήσεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ	ΛΙΓΟΤΕΡΟ ΚΑΛΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	ΚΑΛΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	ΠΟΛΥ ΚΑΛΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΕΙΣΙΤΗΡΙΟ	**30**	**46**	**24**
ΣΙΝΕΜΑ	**24**	**61**	**15**
ΕΚΠΤΩΣΕΙΣ	**30**	**64**	**6**
ΜΗΧΑΝΑΚΙ	**44**	**53**	**3**
ΣΥΝΤΑΓΗ	**17**	**50**	**32**
ΓΡΑΦΗΜΑ	**10**	**50**	**39**

Όπως φαίνεται στον πίνακα, το πρόβλημα που έδωσε τις περισσότερες «πολύ καλές απαντήσεις» είναι το πρόβλημα με το γράφημα (39 απαντήσεις). Αντίθετα, οι λιγότερες «πολύ καλές απαντήσεις» παρουσιάζονται στο πρόβλημα με το μηχανάκι (3) και τις εκπτώσεις (6). Τα υπόλοιπα τρία προβλήματα έδωσαν «πολύ καλές απαντήσεις» από 15 μέχρι και 32. Είναι αξιοσημείωτο το εύρος του πλήθους των απαντήσεων που παρατηρείται, δεδομένου ότι στο πρόβλημα με το μηχανάκι οι «πολύ καλές απαντήσεις» είναι τρεις, ενώ στο πρόβλημα με το γράφημα είναι 39 (εύρος = 36).

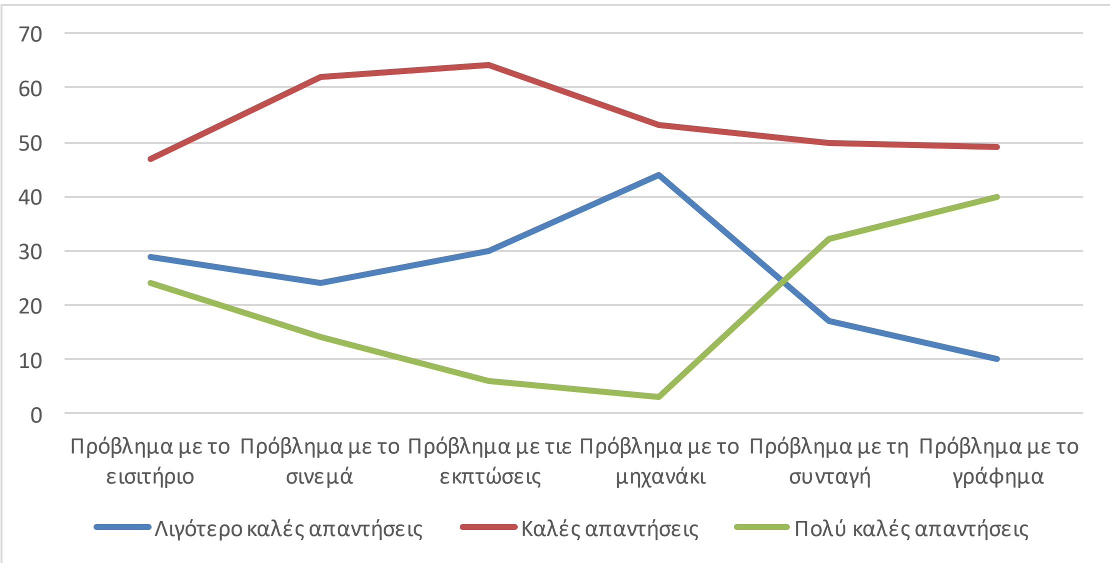
Στην κατηγορία των «καλών απαντήσεων» υπάρχει μεγαλύτερη ομοιομορφία στις απαντήσεις σε σχέση με την προηγούμενη κατηγορία, καθώς το εύρος του πλήθους των απαντήσεων είναι 15. Περισσότερες απαντήσεις σε αυτή την κατηγορία είναι οι απαντήσεις του προβλήματος με τις εκπτώσεις. Έπονται οι απαντήσεις του προβλήματος με το σινεμά (61), με το μηχανάκι (53), με το γράφημα (50) και τη συνταγή (50) και με το εισιτήριο (46).

Εν συνεχεία, στην κατηγορία των «λιγότερων καλών απαντήσεων» περισσότερες είναι οι απαντήσεις από το πρόβλημα με το μηχανάκι (44), ενώ έπονται οι απαντήσεις από τα προβλήματα με το εισιτήριο και τις εκπτώσεις, που είναι 30. Ακολουθούν οι απαντήσεις από το πρόβλημα με το σινεμά (24), με τη συνταγή (17) και από το γράφημα (10).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 1, οι συμμετέχοντες έδωσαν τις λιγότερο ενάριθμες απαντήσεις στο πρόβλημα με το μηχανάκι. Το γεγονός αυτό πιθανόν να οφείλεται στη δυσκολία των υποκειμένων να κατανοήσουν και να επιλύσουν ένα πρόβλημα πολλών βημάτων αφενός και, αφετέρου, να λάβουν υπόψη ρεαλιστικούς παράγοντες σε θέματα αγοροπωλησίας. Το επόμενο πρόβλημα που είχε τις λιγότερο «πολύ καλές απαντήσεις» και παράλληλα αυξημένες «λιγότερο καλές απαντήσεις» είναι το πρόβλημα με τις εκπτώσεις. Αν και οι εκπτώσεις είναι μία πολυσύχναστη έννοια, οι συμμετέχοντες είχαν δυσκολία στην πλήρη κατανόηση των δεδομένων και στη διαδικασία να γίνουν οι πρωταγωνιστές της προβληματικής κατάστασης.

Από την άλλη πλευρά, το πρόβλημα, στο οποίο οι συμμετέχοντες παρουσίασαν τη μεγαλύτερη επιτυχία, ήταν το πρόβλημα με το γράφημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα παρατηρήθηκαν οι περισσότερες «πολύ καλές απαντήσεις» και, παράλληλα, οι λιγότερες «λιγότερο καλές απαντήσεις». Οι συμμετέχοντες δηλαδή, ήταν στην πλειονότητά τους σε θέση να κατανοήσουν και να επεξεργαστούν τα δεδομένα του γραφήματος.

Η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων παρουσιάζεται στο Γράφημα 1.



Γράφημα 1 Κατηγοριοποίηση απαντήσεων ανά πρόβλημα

2.3.5.2 Έλεγχος απαντήσεων ως προς την κριτική ανάγνωση

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα που σχετιζόταν με την Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση , για την επίλυση των προβλημάτων κρίνεται απαραίτητη η κριτική σκέψη. Σε κάθε περίπτωση ο λύτης θα πρέπει να μελετήσει προσεκτικά την εκάστοτε προβληματική κατάσταση, να συγκρατήσει τις σημαντικές πληροφορίες, να τις επεξεργαστεί και να προβεί στη λύση. Το είδος της κριτικής ανάγνωσης που απαιτείται σε κάθε πρόβλημα αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Εν συντομία, επισημαίνεται ότι στο πρόβλημα με το εισιτήριο οι συμμετέχοντες πρέπει να προσέξουν την τιμή του εισιτήριου ή και το πακέτο προσφοράς από τη δεδομένη εικόνα και στο πρόβλημα με το σινεμά να απαντήσουν βασιζόμενοι στις δεδομένες χρονικές στιγμές. Επίσης, στο πρόβλημα με τις εκπτώσεις οι συμμετέχοντες πρέπει να παρατηρήσουν τις εικόνες και ιδιαίτερα την εικόνα που σχετίζεται με το πολυκατάστημα στην οποία αναγράφεται η λέξη «ΕΩΣ», στο πρόβλημα με το μηχανάκι να κατανοήσουν την αλληλουχία των αγοροπωλησιών, στο πρόβλημα με τη συνταγή να περιορίσουν τις αγορές στα υλικά που βρίσκονται στο μανάβικο και στο τελευταίο πρόβλημα να κατανοήσουν τα δεδομένα του γραφήματος.

Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει το σύνολο των απαντήσεων που μαρτυρούν κριτική ανάγνωση ανά πρόβλημα. Πρέπει να σημειωθεί πως στην κατηγοριοποίηση δεν συμπεριλαμβάνονται οι μονολεκτικές απαντήσεις, όπως επίσης και οι απαντήσεις που δεν διαφαίνεται αν οι συμμετέχοντες εντόπισαν τα απαραίτητα σημεία μέσω κριτικής ανάγνωσης. Τα δύο είδη απαντήσεων συμπεριλαμβάνονται στην κατηγορία «αβέβαιες απαντήσεις».

Όπως φαίνεται και στον πίνακα, η πλειονότητα των απαντήσεων στηρίχθηκε σε κριτική ανάγνωση των συμμετεχόντων. Στα δύο πρώτα προβλήματα είναι αυξημένος αριθμός των αβέβαιων απαντήσεων. Αυτό συμβαίνει, γιατί από τις περισσότερες απαντήσεις δεν έγινε αντιληπτό αν ο λύτης είχε κριτική στάση στα δεδομένα των προβλημάτων. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα με το εισιτήριο, απαντήσεις της μορφής: *«..αν χρησιμοποιώ το αστικό μία φορά τη μέρα θα πάρω εισιτήριο…»* ή *«…θα επιλέξω την κάρτα, για να έχω πολλές μετακινήσεις…»* κρίθηκαν αβέβαιες, γιατί δεν φαίνεται αν ο λύτης έλαβε υπόψη την τιμή του εισιτηρίου ή το πακέτο προσφοράς. Αντίστοιχα, στο πρόβλημα με το σινεμά, το μεγαλύτερο ποσοστό των συμμετεχόντων, το 75%, φάνηκε πως έλαβε υπόψη τις χρονικές στιγμές του προβλήματος, για να απαντήσει. Για παράδειγμα, απαντήσεις της μορφής: *«Θα* *προλάβω να είμαι στην ώρα μου!»* κρίθηκε ότι δόθηκαν μετά από κριτική ανάγνωση του προβλήματος.

Ωστόσο, στην περίπτωση του τρίτου προβλήματος, μόλις το 15% των συμμετεχόντων παρατήρησε αρκετά τις εικόνες, ενώ 16 συμμετέχοντες δεν άντλησαν καμία πληροφορία από τις εικόνες. Εν συνεχεία, στο πρόβλημα με το μηχανάκι, η συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων ήταν σε θέση να κατανοήσει την αλληλουχία των συναλλαγών και να απαντήσει στο ερώτημα. Διαφορετικά αποτελέσματα υπάρχουν στο πρόβλημα με τη συνταγή, στο οποίο οι συμμετέχοντες απάντησαν με άνεση και αμεσότητα παραβλέποντας τον περιορισμό για τις αγορές από τον μανάβη. Τέλος, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων ήταν σε θέση να κατανοήσει τις πληροφορίες που δίνει το γράφημα και να δώσει σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 4 Κριτική ανάγνωση ανά πρόβλημα

Πρόβλημα	Κριτική ανάγνωση	Μη κριτική ανάγνωση	Αβέβαιες απαντήσεις
Εισιτήριο	**48**	**1**	**51**
Σινεμά	**75**	**-**	**25**
Εκπτώσεις	**15**	**79**	**6**
Μηχανάκι	**82**	**17**	**1**
Συνταγή	**47**	**48**	**4**
Γράφημα	**78**	**20**	**1**

2.3.5.3 Έλεγχος απαντήσεων ως προς τη ρεαλιστικότητά τους

Μετά το στάδιο της ανάγνωσης και της κατανόησης του προβλήματος ακολουθεί η επίλυσή του. Στο σημείο αυτό το κάθε υποκείμενο αναμένεται να σκεφτεί παράγοντες από την καθημερινότητά του για να δώσει ολοκληρωμένες απαντήσεις. Πιο συγκεκριμένα, όσο πιο κοντά ήταν η οποιαδήποτε απάντηση στην καθημερινότητα, όσο πιο ρεαλιστική είναι δηλαδή, τόσο πιο ενάριθμη κρίθηκε. Από τα έξι προβλήματα, το πρόβλημα με το γράφημα απαιτεί τη μικρότερη σύνδεση με την πραγματική ζωή. Στη συνέχεια θα γίνει ανάλυση των απαντήσεων ως προς τη ρεαλιστικότητά τους για κάθε πρόβλημα.

Αρχής γενομένης με το πρώτο πρόβλημα, ρεαλιστικές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που στηρίχτηκαν στη διπλή μετακίνηση, τη συχνότητα χρήσης του αστικού και τη δυνατότητα χρήσης του αστικού για διαδρομές ανεξάρτητες από τη μεταφορά στον επαγγελματικό χώρο. Πέρα από τους συγκεκριμένους παράγοντες, υπήρξαν και άλλες προσεγγίσεις που κρίθηκαν ρεαλιστικές και ενίσχυσαν τον χαρακτηρισμό της συγκεκριμένης απάντησης ως ενάριθμη και είναι οι εξής:

…με την κάρτα θα έχω λιγότερες συναλλαγές… (Λ. 2)

…υπάρχει η περίπτωση να βρω κάποιον να με πηγαίνει… (Λ. 4)

…μπορεί να έχεις δικό σου ΙΧ… (Λ. 32)

…τα ΜΜΜ είναι προσωπικός τρόπος μετακίνησης… (Λ. 42)

…κάρτα, για να μην αγχώνεσαι να βρίσκεις κατάστημα… (Λ. 53)

…κάρτα, γιατί κερδίζεις χρόνο και χρήμα… (Λ. 90)

Αντίθετα, ως μη ρεαλιστικές κρίθηκαν οι απαντήσεις που βασίστηκαν στην πράξη $7\times1{,}20 = 8{,}40$ €, γιατί οι συμμετέχοντες σε αυτή την περίπτωση έλαβαν υπόψη τη μετακίνηση προς μία μόνο κατεύθυνση, χωρίς δηλαδή επιστροφή. Το σύνολο αυτών των απαντήσεων ήταν 4. Από το πλήθος των υπόλοιπων απαντήσεων, ρεαλιστικές κρίθηκαν εκείνες που περιείχαν υπόθεση για τη συχνότητα των δρομολογίων, εκείνες που στηρίχτηκαν σε άλλες παραμέτρους και αναφέρθηκαν ή εκείνες που περιείχαν πρωτοπρόσωπο συλλογισμό. Με την έννοια πρωτοπρόσωπος συλλογισμός εννοείται η χρήση πρώτου ενικού προσώπου από τον λύτη. Επιπλέον, στην κατηγορία των «αβέβαιων απαντήσεων» ανήκουν οι απλές, μονολεκτικές απαντήσεις και οι απαντήσεις χωρίς νόημα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 7.

Εν συνεχεία, στο πρόβλημα με το σινεμά, η μόνη απάντηση που χαρακτηρίστηκε μη ρεαλιστική, ήταν η απάντηση που στηρίχτηκε σε 45λεπτη διαδρομή με το ποδήλατο, χρονικό διάστημα που θεωρήθηκε υπερβολικό. Οι υπόλοιπες απαντήσεις κρίθηκαν ρεαλιστικές, εκτός από εκείνες που ήταν μονολεκτικές ή δεν περιείχαν κάποια δικαιολόγηση, οπότε τοποθετήθηκαν στην κατηγορία των αβέβαιων απαντήσεων. Στις περιπτώσεις που οι λύτες λάμβαναν υπόψη τους παράγοντες, πέρα της χρονικής διάρκειας της θεραπείας στον γιατρό ή στη διαδρομή, όπως ο πόνος, η κίνηση ή το ενδεχόμενο επικοινωνίας μετά το ραντεβού οι απαντήσεις χαρακτηρίστηκαν ενάριθμες, πέρα από ρεαλιστικές. Παραδείγματα αυτών των απαντήσεων είναι τα εξής:

…λόγω διαφημίσεων πριν την ταινία θα προλάβαινα εγκαίρως… (Λ. 78)

……συνήθως μετά τον οδοντίατρο θέλω να πάω σπίτι, γιατί πονάωωω!... (Λ. 70)

…θα πήγαινα στον οδοντίατρο και σινεμά καθώς δεν θα χρειαζόταν να περιμένω ή λεωφορείο ή να κολλήσω στην κίνηση… (Λ. 52)

…αφήνω κάπου το ποδήλατό μου και έρχομαι με ταξί να σε βρω… (Λ. 28)

…ταινία με δόντι που πονάει δεν βλέπω… (Λ. 17)

Σε αντίθεση με το δεύτερο πρόβλημα, στο πρόβλημα με τις εκπτώσεις υπήρχαν αρκετές μη ρεαλιστικές απαντήσεις. Από το σύνολο των συμμετεχόντων, 57 άτομα δήλωσαν πως τα ρέστα από την οικονομική συναλλαγή προέρχονται από την εξής αφαίρεση: **ρέστα = σύνολο χρημάτων - κόστος παπουτσιών**. Οι εν λόγω συμμετέχοντες δηλαδή, θεώρησαν ότι θα έδιναν στο ταμείο και τα πέντε χαρτονομίσματα, ενώ, αν αντιμετώπιζαν την ίδια κατάσταση στην καθημερινότητά τους, θα έδιναν δύο ή τρία, ανάλογα που το κόστος που υπολόγισαν για τα παπούτσια. Οι απαντήσεις λοιπόν, που στηρίχτηκαν στον συγκεκριμένο αλγόριθμο, κρίθηκαν μη ρεαλιστικές.

Στο σύνολο των απαντήσεων, υπήρξαν απαντήσεις που περιείχαν παράγοντες διαφορετικούς από το κόστος των αθλητικών παπουτσιών. Σε 36 απαντήσεις δηλαδή, οι αντίστοιχοι λύτες έδωσαν απάντηση λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες, ανεξάρτητους από το δεδομένο κόστος. Από αυτούς, οι 27 επεσήμαναν ότι θα επιλέξουν το τοπικό κατάστημα, με σκοπό να ενισχύσουν την τοπική αγορά. Επιπλέον, 8 συμμετέχοντες έδειξαν να επηρεάζονται από την απόσταση του πολυκαταστήματος από την πόλη και το κόστος των απαιτούμενων καυσίμων, να μεταβούν εκεί. Ένας συμμετέχοντας, τέλος, πρότεινε την αγορά των παπουτσιών μέσω διαδικτύου, ώστε να επιτευχθεί καλύτερη τιμή. Παρακάτω παρατίθενται ενδεικτικές απαντήσεις, που περιέχουν διάφορες παραμέτρους:

> Θα πάω στο τοπικό που είναι κοντά χωρίς έξοδα μεταφοράς που θα γλιτώσω από το να πάω στην πόλη. Το κέρδος της πόλης με το κατάστημα το τοπικό είναι 2€ κόστος που θα χρειαζόταν να ξοδέψω για να πάω στην πόλη. Θα δώσω δύο χαρτονομίσματα των 50€ και θα πάρω 28€ ρέστα και θα μου μείνουν άλλα 3 χαρτονομίσματα των 50€ συν 28€ από τα ρέστα σύνολο 178€. (Λ. 85)
>
> Παρόλο που στο πολυκατάστημα είναι λίγο φθηνότερα, θα τα αγόραζα από το τοπικό κατάστημα για να ενισχύσω την 'τοπική' οικονομία… (Λ. 13)
>
> …θα προτιμηθεί το τοπικό κατάστημα για ενίσχυση των μικρών και τοπικών επιχειρήσεων… (Λ. 62)
>
> …Θα επιλέξω να αγοράσω τα παπούτσια από το τοπικό κατάστημα για 3 λόγους. ($1^{ον}$ για να ενισχύσω την τοπική αγορά, $2^{ον}$ γιατί για να πάω στην πόλη θα δώσω σίγουρα 2€ για καύσιμα ή εισιτήρια, $3^{ον}$ γιατί δεν γνωρίζω αν η έκπτωση είναι στο συγκεκριμένο ζευγάρι παπούτσια.)… (Λ. 94)

Στο πρόβλημα με τη συνταγή, το πλήθος των μη ρεαλιστικών απαντήσεων προέκυψε από την αναφορά μη δυνατών ποσοτήτων, π.χ. 3,75 σκελίδες σκόρδο. Οι απαντήσεις αυτές, αν και βασίστηκαν σε άρτια μαθηματική δραστηριότητα, κρίθηκαν μη ρεαλιστικές.

Πίνακας 5 Ρεαλιστικές απαντήσεις ανά πρόβλημα

Πρόβλημα	Ρεαλιστικές απαντήσεις	Μη ρεαλιστικές απαντήσεις	Αβέβαιες απαντήσεις
Εισιτήριο	**42**	**40**	**18**
Σινεμά	**74**	**1**	**25**
Εκπτώσεις	**36**	**57**	**7**
Μηχανάκι	**82**	**17**	**1**
Συνταγή	**77**	**18**	**4**
Γράφημα	**78**	**20**	**1**

2.3.5.4 Έλεγχος των απαντήσεων ως προς τη μαθηματική δραστηριότητα

Ακόμα και στις περιπτώσεις που ο λύτης πέτυχε κριτική ανάγνωση και έκανε χρήση ρεαλιστικών παραμέτρων, η τελική απάντηση δε θα μπορούσε να δοθεί, αν δεν γινόταν χρήση μαθηματικών δραστηριοτήτων. Αν, δηλαδή, ο λύτης δεν είχε ένα βασικό μαθηματικό υπόβαθρο, δε θα μπορούσε να απαντήσει επιτυχώς στις προβληματικές καταστάσεις. Για τις μαθηματικές δεξιότητες, που είναι απαραίτητες για έναν ενάριθμο ενήλικα, έγινε λόγος στη μεθοδολογία της έρευνας. Ειδικότερα, για το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης και το πλήθος των απαιτούμενων μαθηματικών εννοιών, αναφέρεται ότι οι λύσεις των προβλημάτων απαιτούν τις τέσσερις βασικές πράξεις, τη χρήση αναλογιών και ποσοστών, την προπαίδεια και την κατανόηση γραφήματος. Στη συνέχεια θα εξεταστεί η μαθηματική δραστηριότητα που ανέπτυξαν οι συμμετέχοντες για το κάθε πρόβλημα.

Πρόβλημα 1

Σύμφωνα με την πιο κοινή απάντηση, το συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτούσε έναν πολλαπλασιασμό. Ο λύτης δηλαδή, θα μπορούσε να πολλαπλασιάσει το χρηματικό αντίτιμο του εισιτηρίου με το πλήθος των χρήσεων και να δώσει απάντηση. Πρέπει να αναφερθεί όμως, ότι οι απαντήσεις 38 συμμετεχόντων δεν φανερώνουν άμεσα ή έμμεσα κάποια πράξη. Από το σύνολο των υπόλοιπων απαντήσεων, οι τέσσερις στηρίχτηκαν στην πράξη $7 \times 1,2 = 8,4$ €, ποσό που είναι μικρότερο από το αντίτιμο της εβδομαδιαίας κάρτας, άρα οι συγκεκριμένοι λύτες επέλεξαν την καθημερινή αγορά εισιτηρίου. Επίσης, τρεις απαντήσεις βασίστηκαν στον πολλαπλασιασμό 5x2,40 = 12, ποσό που είναι μικρότερο από το κόστος της εβδομαδιαίας κάρτας, γεγονός που οδήγησε τους λύτες να επιλέξουν την καθημερινή αγορά εισιτηρίου. Στο ίδιο αποτέλεσμα κατέληξαν και οι λύτες, ένας κάνοντας επιτόπου την πράξη και τρεις με τη βοήθεια νοερών υπολογισμών, που έκαναν την πράξη $12 \times 1,20 = 14,40 < 15$.

Η πράξη που παρατηρήθηκε, άμεσα ή έμμεσα, σε μεγαλύτερο βαθμό είναι ο πολλαπλασιασμός 1,20x14 = 16,80. Στηριζόμενοι σε αυτή την πράξη, 15 συμμετέχοντες επέλεξαν την εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών, ενώ εννιά συμμετέχοντες υπέθεσαν ότι, αν οι μετακινήσεις υπερβαίνουν τις 14 εβδομαδιαίως, συμφέρει η αγορά της κάρτας. Από το σύνολο των πράξεων που έγιναν, παρατηρήθηκαν τρεις λανθασμένες. Η μία αφορούσε το κέρδος από την αγορά της κάρτας (αφαίρεση με δεκαδικό μειωτέο), ενώ η δεύτερη και η τρίτη σχετίζονταν με το κόστος της αγοράς των εισιτηρίων (πολλαπλασιασμός δεκαδικού με ακέραιο).

Από το σύνολο των απαντήσεων ξεχώρισαν τέσσερις απαντήσεις, οι οποίες στηρίχτηκαν στην εύρεση του κόστους μίας διαδρομής (αναγωγή στη μονάδα), είτε με τη χρήση του πακέτου προσφοράς, είτε με τη χρήση της εβδομαδιαίας κάρτας μεταφορών. Οι συγκεκριμένες απαντήσεις καταγράφονται στη συνέχεια.

Εξαρτάται το πόσες διαδρομές θα κάνουμε κάθε μέρα. Το κόστος ανά εισιτήριο βγαίνει περίπου 1,05 ευρώ. Με την κάρτα αν πάει 1 ευρώ το εισιτήριο στις 15 διαδρομές, ενώ στις 14 1,07. Άρα για διαδρομές πάνω από 14 κάρτα. Μέχρι και 14 εισιτήρια πακέτο. (Λ. 71)

…Αν πάλι λάβουμε υπόψην μας την προσφορά 20+3 Δώρο δηλαδή με 1,20 ×x20 = 24 € αγοράσαμε 23 εισιτήρια (που αντιστοιχούν σε 1,04 € το εισιτήριο) τότε χρησιμοποιώντας μέχρι 2 εισιτήρια την ημέρα μας συμφέρει το πακέτο αυτό αφού αντιστοιχεί σε 14,56 € την εβδομάδα. (Λ. 94)

15 € : 7 ημ. = 2,14
1,20 € × 20 εισ. = 24 €
24 € : 23 = 0,96
Καθημερινά θα χρειαστώ τουλάχιστον 2.
0,95 × 2 = 1,92
1,92 × 7 = 13,44
Συμφέρει το εισιτήριο εκτός κι αν κάνω περισσότερες από 2 διαδρομές. (Λ. 95)

20 × 1,20 = 24 € → 23 διαδρομές. Άρα 1,10 € η διαδρομή. Έστω: 2 διαδρομές τη μέρα επί 7 μέρες → 2,20 × 7 = 15,40 τη βδομάδα
Άρα: συμφέρει η κάρτα, ακόμη κ σε περίπτωση που κάνεις παραπάνω διαδρομές τη βδομάδα (Λ. 67)

Επιπροσθέτως, τρεις συμμετέχοντες εκτίμησαν τα έξοδα μεταφοράς σε χρονικό διάστημα μεγαλύτερο της μίας εβδομάδας. Οι απαντήσεις αυτών παρατίθεται στη συνέχεια.

Εάν χρειάζομαι 14 εισιτήρια την εβδομάδα τότε η τιμή των 14 εισητ. με 1,20 € είναι 16,80 και η τιμή της εβδομαδιαίας κάρτας είναι 15,00 και η τιμή των 20+3 (είναι 24,00 ευρώ0 αλλά μου μένουν 9 εισητήρια για την επόμενη εβδομάδα (άρα θα χρειαστώ + 5 εισητήρια επί 1,20 = 6,00 €).
Δηλαδή οι 2 εβδομάδες θα κάνουν 24 € + 6,00 = 30 άρα 15 ευρώ η εβδομάδα. Με συμφέρει η εβδομαδιαία εάν μιλώ για μία εβδομάδα. (Λ. 19)

2 × 1,20 = 2,40 την ημέρα
Την εβδομάδα αν χρησιμοποιήσω αστικό 6 μέρες κοστίζει:
2 εισ. × 6 μέρες = 12 εισητήρια (εβδομ.)
12 εισ. × 1,20 = (12 + 2,40) = 14,40
20 × 1,20 = 24 € (23 εισητήρια)
Στον μήνα λοιπόν 4 εβδομάδες 4 × 12 εισ. = 48 εισ.
Με 57,60 αγοράζεις 46 εισητήρια + 2,40 = 60 € οπότε αν αγοράσεις για 6 μέρες κάρτα ή εισητήρια είναι το ίδιο άρα έχει να κάνει με τις διαδρομές και τον προγραμματισμό της

εβδομάδας αν θέλω να κινούμαι όλες τις ημέρες και τις 7 με συμφέρει η κάρτα για 5 μέρες και λιγότερες τα εισητήρια. (Λ. 38)

Συμφέρει να αγοράσεις την εβδομαδιαία κάρτα. Με την προϋπόθεση φυσικά ό,τι χρησιμοποιείς καθημερινά για τις μετακινήσεις σου το Αστικό ΚΤΕΛ. Το μήνα η κάρτα θα μου κοστίσει 60 € ενώ το καθημερινό εισιτήριο θα μου κοστίσει περίπου 72 € (πήγαινε-έλα) και στην περίπτωση που για κάποιο λόγο αυξήσω τις μετακινήσεις μου θα αυξηθεί και το κόστος. (Λ. 56)

Τέλος, μία διαφορετική προσέγγιση προτάθηκε από ένα συμμετέχοντα, ο οποίος αναζήτησε τον ελάχιστο αριθμό διαδρομών που είναι κερδοφόρα η εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών. Η απάντηση που έδωσε ήταν η εξής:

15 : 1,2 = 12, 5 Λογικά καθημερινά θα κάνεις 2 διαδρομές, άρα 14 τη βδομάδα. 14 > 12,5 άρα συμφέρει η κάρτα. Αν κάνεις μία τη μέρα συμφέρει το εισιτήριο. Γενικά αν κάνεις 12 διαδρομές κ κάτω συμφέρει εισιτήριο. (Λ. 63)

Γενικότερα, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, οι ενήλικες συμμετέχοντες απάντησαν στην πλειονότητά τους χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά με σωστό τρόπο. Οι περισσότεροι χρησιμοποίησαν τα Μαθηματικά για να απαντήσουν, αφού άντλησαν τις απαιτούμενες πληροφορίες από το κείμενο και την εικόνα. Είναι αξιοσημείωτο ότι αρκετοί συμμετέχοντες πραγματοποίησαν νοερούς υπολογισμούς, καθώς δεν επιτρεπόταν ο υπολογιστής τσέπης και το μόνο υλικό που είχαν ήταν το ερωτηματολόγιο.

Πρόβλημα 2

Στη συνέχεια, το πρόβλημα με το σινεμά απαιτούσε από τους λύτες την εκτίμησή τους για χρονικά διαστήματα και τη διαδρομή με το ποδήλατο. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων εκτίμησαν πως η επίσκεψη στον οδοντίατρο θα διαρκέσει από 30 έως 60 λεπτά, ενώ η μετάβαση στο σινεμά από 10 έως 30 λεπτά. Έξι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν την πιθανή ταχύτητα του ποδηλάτου. Δύο άτομα έδωσαν την τιμή 15 km/h, δύο άτομα την τιμή 20 km/h, ένα άτομο την τιμή 10 km/h και ένας συμμετέχοντας επινόησε την τιμή δεδομένης της απόστασης και του αντίστοιχου χρόνου (50 λεπτά) και βρήκε πως χρειάζεται μέση ταχύτητα στο ποδήλατο ίση με 3,61 km/h. Τέσσερις από αυτούς τους συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των τριών, για να βρουν τον απαιτούμενο χρόνο. Ένας λύτης θεώρησε πως η ταχύτητα του ποδηλάτου είναι 15 km/h και θα χρειαστεί 45 λεπτά για μετακίνηση τριών χιλιομέτρων. Παραδείγματα τέτοιων απαντήσεων είναι τα εξής:

Έστω ότι το ποδήλατο διανύει 20 km/h.
Στη 60 min → 20 km
Στις x h → 3 km
60 × 3 = x20 → x = 180/20 → x = 9 min ... (Λ. 46)

Αν η επίσκεψη στον οδοντίατρο είναι μια ώρα δηλαδή 19:30 προλαβαίνω να διανήσω την απόσταση τον 3 km σε 50 λεπτά. Αν ο μέσος όρος μου είναι 15 km/h θα χρειαστώ 45 λεπτά. Αρα θα απαντήσω στον φίλο μου 20:15 θα είμαι εκεί. (Λ. 85)

Πρόβλημα 3

Τα ποσοστά αποτελέσαν την κύρια μαθηματική έννοια στο πρόβλημα με τις εκπτώσεις. Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτούσε τη χρήση των ποσοστών, που αναγράφονταν στις εικόνες, και μία αφαίρεση, που θα έδινε το τελικό αποτέλεσμα. Από το σύνολο των συμμετεχόντων, 46 δεν χρησιμοποιήσαν τα ποσοστά, αλλά συνέκριναν τις τιμές και έδωσαν απάντηση. Από τους υπόλοιπους συμμετέχοντες δύο έκαναν λανθασμένη χρήση του ποσοστού, ενώ παρατηρήθηκαν πέντε λάθη στον νοερό υπολογισμό των ρέστων. Ένας συμμετέχοντας, τέλος, έγραψε 250-72 = 278 €, απάντηση που χαρακτηρίζεται ως μη λογική, καθώς τα ρέστα υπερβαίνουν το ποσό ανάληψης. Οι υπόλοιποι συμμετέχοντες έκαναν σωστή χρήση των ποσοστών. Ενδεικτικές απαντήσεις παρατίθενται παρακάτω.

Στο τοπικό : 120,00 € × 40% = 48,00 € άρα 120,00 - 48,00 = 72,00 €
Στο πολυκατάστημα: 140,00 € × 50% = 70,00 €
Αγορά από το πολυκατάστημα.
Έχω 5 × 50,00 € = 250,00 € - 70,00 € = 180,00 € (Λ. 87)

Θα αγοράσω τα παπούτσια από το πολυκατάστημα της πόλης γιατί εκεί θα επιλέξω να πάω πρώτα και με 50% εκπτωσει θα τα πάρω 70 € οπότε θα δώσω δύο χαρτονομίσματα των 50 € και θα πάρω ρέστα 30 € (Λ. 49)

Φυσικά από το τοπικό κατάστημα με τα 120 ευρώ, γιατί πρώτον είναι πιο οικονομικά παρ' όλο που δεν είναι στις εκπτώσεις και δεύτερον ενισχύεις τις μικρές επιχειρήσεις.

250 - 120 = 130 → Πήρα ρέστα 130 €. (Λ. 28)

Πρόβλημα 4

Το πρόβλημα με το μηχανάκι στηριζόταν στο κέρδος ή τη ζημία μετά από τέσσερις αγοραπωλησίες. 18 συμμετέχοντες έδωσαν απάντησαν χωρίς δικαιολόγηση, χωρίς δηλαδή να κάνουν κάποια πράξη. Από αυτούς, 13 υποστήριξαν ότι το συγγενικό τους πρόσωπο είχε ζημία, δύο υποστήριξαν ότι είχε κέρδος και ένας έδωσε απλά μία τιμή. Επίσης, εφτά άτομα δεν έδωσαν σαφή απάντηση, καθώς υποστήριξαν πως το υποκείμενο του προβλήματος είχε ζημία και κέρδος. Ακολουθούν παραδείγματα από ενδεικτικές απαντήσεις των συμμετεχόντων.

έδωσε 1.400	πουλάει 1.200
<u>έδωσε 1.100</u>	<u>πουλάει 700</u>
2.400	1.900

2.400 - 1.900 = 500 ευρώ χάνει

Αλλά έχει το μηχανάκι με αρχική αξία 1.400 ευρώ

Δηλαδή του στοίχισε τελικά το μηχανάκι 500 ευρώ. Κέρδισε 500 ευρώ. (Λ. 19)

Αγορά 1.400

⟹ 200 € έχασε, έχει 1.200 στην «τσέπη του» του μείνανε 200 €.

Πούλησε 1.200

Αγορά 1.000

⟹ 300 €, έβγαλε 500 €, η ζημιά του είναι: 700 €. (Λ. 38)

Πούλησε 700

- 200 + 200 - 300 = 300

χάνει 300 €. (Λ. 63)

ΑΓΟΡΕΣ	ΠΩΛΗΣΗ	
1400	1200	
<u>1000</u>	<u>700</u>	
2400	1900	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΖΗΜΙΑ 500 €. (Λ. 85)

$1^{η}$ συναλλαγή: - 1400 €

$2^{η}$ συναλλαγή: + 1200 €

$3^{η}$ συναλλαγή: - 1000 €

4η συναλλαγή: + 700 €

- 500 € Άρα η συνολική ζημιά είναι ίση με: 500 €. (Λ. 57)

200 € κόστος

200 € κέρδος Συνολικό κέρδος 200 €

300 € κόστος Συνολική ζημιά 500 € (Λ. 24)

Πρόβλημα 5

Οι αναλογίες ήταν η κυρίαρχη μαθηματική έννοια στο πρόβλημα με τη συνταγή. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων, 56 ενήλικες, χρησιμοποίησε την αναλογία, για να απαντήσει στο πρόβλημα. Οι 46 από αυτούς τετραπλασίασαν την ποσότητα των όλων των υλικών ή μόνο των λαχανικών, καθώς οι καλεσμένοι στο τραπέζι ήταν 15, σχεδόν τετραπλάσιοι από τα τέσσερα άτομα στα οποία αναφέρεται η συνταγή. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο τετραπλασιασμός της ποσότητας των λαχανικών ήταν η ενδεδειγμένη και αναμενόμενη προσέγγιση για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Από τους υπόλοιπους συμμετέχοντες που χρησιμοποίησαν την αναλογία, οι τρεις πενταπλασίασαν τις ποσότητες των υλικών και οι εφτά πολλαπλασίασαν τις ποσότητες με τον αριθμό 3,75. Η τελευταία προσέγγιση κρίθηκε μη ρεαλιστική, αν και ήταν άρτια μαθηματικά. Ακολουθούν παραδείγματα από τις συγκεκριμένες απαντήσεις.

Η συνταγή μας έχει υλικά για 4 άτομα για να υπολογίσουμε πόσα υλικά θέλουμε για τα 15 άτομα θα πολ/με με το 4 όλα τα υλικά μας. Θα έχουμε άθροισμα 16 άρα τα υλικά μας θα φτάσουν για 15 άτομα. Άρα θέλουμε: … (Λ. 85)

16 μελιτζάνες

16 ντομάτες

4 κρεμμύδια

1 κεφάλι σκόρδο

1 ματσάκι μαϊντανό (Λ. 12)

18 μελιτζάνες μακριές

16 ώριμες ντομάτες

4 μέτρια κρεμμύδια

1 σκόρδο

Μαϊντανό θα κόψω από τον κήπο. Εννοείται πως το φαγητό που θα περισσέψει δε θα το πετάξουμε. (Λ. 13)

3 + ¾ κιλά μοσχαρίσιο κρέας
15 - 18 μελιτζάνες
15 ντομάτες
3 + ¾ κρεμμύδι
3 + ¾ σκελίδα
λίγο μαϊντανό
ελαιόλαδο
3 + ¾ κούπα νερό
3 + ¾ ποτήρι ξηρ.
7,5 κουταλιές τριμ. φέτα, αλάτι, πιπέρι (Λ. 47)

Η συνταγή που έχουμε είναι για 4 άτομα, εμείς όμως θα ήμαστε 15 άτομα. Οπότε: 15/4 = 3,75.
Άρα θα πολλαπλασιάσω τα υλικά της συνταγής με το 3,75. Έτσι θα έχουμε:
1 × 3,75 = 3,75 κιλά μοσχαρίσιο κρέας σε μερίδες
4 × 3,75 - 5 × 3,75 = 15 - 18,75 μελιτζάνες μακριές
4 × 3,75 = 15 ώριμες ντομάτες ψιλοκομμένες
1 × 3,75 = 3,75 μέτριο κρεμμύδι ψιλοκομμένο
1 × 3,75 = 3,75 σκελίδα σκόρδο
λίγο (παραπάνω) μαϊντανό ψιλοκομμένο χαχαχα
λίγο × 3,75 ελαιόλαδο
1 × 3,75 = 3,75 κούπα νερό
1 × 3,75 = 3,75 ποτηράκι ερυθρό ξηρό κρασί
2 × 3,75 = 7,5 κουταλιές τριμμένη φέτα, αλάτι, πιπέρι (Λ. 57)

Μία διαφορετική μαθηματική προσέγγιση για το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν η αναγωγή στη μονάδα ή η αναγωγή στη μονάδα σε συνδυασμό με την αναλογία. Εννιά συμμετέχοντες δηλαδή, αναζήτησαν τις ποσότητες των υλικών που θα απαιτούνταν για ένα άτομο και στη συνέχεια βρήκαν τις απαιτούμενες ποσότητες για τα 15 άτομα. Παραδείγματα των εν λόγω απαντήσεων παρατίθενται στη συνέχεια.

15-19 μελιτζάνες
15 ντομάτες

4 κρεμμύδια

4 σκόρδα

2 ματσάκια μαϊντανό (Λ. 33)

Ο συγκεκριμένος λύτης στηρίχτηκε στο εξής συλλογισμό: τα τέσσερα άτομα χρειάζονται από τέσσερις ντομάτες και μελιτζάνες, άρα το ένα άτομο θα χρειαστεί από μία. Δεδομένου ότι στο τραπέζι θα είναι 15 άτομα, θα χρειαστούν από 15 ντομάτες και μελιτζάνες. Επίσης, με τη βοήθεια της αναλογίας πρόσθεσε στα υλικά από τέσσερα σκόρδα και μελιτζάνες. Πρέπει να σημειωθεί πως η συγκεκριμένη απάντηση κρίθηκε μη ρεαλιστική, λόγω της μεγάλης ποσότητας σκόρδου (σκόρδα και όχι σκελίδες), αν και στηρίχτηκε σε κριτική ανάγνωση.

Θα αγοράσω όλα τα υλικά σε τετραπλάσια ποσότητα, αφού αυτά τα υλικά είναι για 4 άτομα, ενώ εγώ έχω καλέσει 15, περίπου 16. Με ακρίβεια υπολογίζοντας θα αγοράσω (με τη μέθοδο των τριών, υπολογίζοντας για ένα άτομο)

3,75 μοσχαρίσιο κιμά

15 μελιτζάνες

15 ντομάτες

4 κρεμμύδια

2 σκόρδο

λίγο μαϊντανό (Λ. 66)

Παρόλο που ο λύτης υποστηρίζει ότι πραγματοποιεί τη μέθοδο των τριών, ο τρόπος εργασίας του προδίδει την αναγωγή στη μονάδα.

Έστω ότι τα υλικά για 4 άτομα τα χωρίζω σε υλικά για 1 άτομο. Οπότε έχω τα εξής υλικά: ¼ μοσχ. κρέας, 1 μελιτζάνα μακρυά, 1 ώριμη ντομ. ψιλοκ., ¼ μέτριο κρεμμ. ψιλοκ., ¼ σκελίδα σκόρδο, ¼ κούπα νερό, ¼ ποτηράκι ερυθρό ξηρό κρασί, 2/4 κουταλιές τριμ. φέτα, ελάχιστο μαϊντανό ψιλοκομ. και ελαιόλαδο.

Οπότε για 15 άτομα θα αγόραζα τα εξής:

3,75 κιλά μοσχαρίσιο κρέας, 15 μελιτζάνες μακρυές, 15 ώριμες ντομάτες ψιλοκομμένες, 3,75 μέτρια κρεμμύδια ψιλοκομμένα, 3,75 σκελίδες σκόρδο, 3,75 κούπες νερό, 3,75 ποτηράκια ερυθρό ξηρό κρασί, 7,5 κουταλιές τριμμένη φέτα, αρκετό μαϊντανό ψιλοκομμένο και αρκετό ελαιόλαδο και αλάτι και πιπέρι. (Λ. 29)

Πρέπει να σημειωθεί πως η συγκεκριμένη απάντηση κρίθηκε ως «λιγότερο καλή» απάντηση. Παρόλο που είναι μαθηματικά άρτια, δεν βασίστηκε σε κριτική ανάγνωση και περιέχει μη ρεαλιστικά στοιχεία (π.χ. 3,75 σκελίδες σκόρδο).

Πέρα από την αναλογία και την αναγωγή στη μονάδα, μία μαθηματική δραστηριότητα που παρατηρήθηκε ήταν η μέθοδος των τριών. Τη συγκεκριμένη προσέγγιση επέλεξαν δύο συμμετέχοντες. Οι απαντήσεις τους καταγράφονται στη συνέχεια.

1kg για 4
x 15

x = 15/4 kg μοσχαρίσιο κρέας
Με τη ίδια διαδικασία της μεθόδου των 3 θα υπολόγιζα και τις άλλες ποσότητες. (Λ. 74)

Μελιτζάνες
Για 4 άτομα → 5 μελιτζάνες   5 × 15 = 4x → x = (5 × 15)/4 → x = 18,75
Για 15 άτομα → x μελιτζάνες   Άρα θα αγοράσω 19 μελιτζάνες.
Ντομάτες
Για 4 άτομα → 4 ντομάτες   x = (4× 15)/4 → x = 15 ντομάτες
Για 15 άτομα → x ντομάτες   Άρα θα αγοράσω 15 ντομάτες.
Κρεμμύδι
Για 4 άτομα → 1 κρεμμύδι   x = 15/4 → x = 3,75
Για 15 άτομα → x κρεμμύδια   Άρα θα αγοράσω 4 κρεμμύδια.
Όπως προκύπτει από πιο πάνω θα χρειαστώ 4 σκελίδες σκόρδο και λίγο περισσότερο μαϊντανό. (Λ. 46)

Τέλος, 28 συμμετέχοντες επέλεξαν τα προϊόντα που θα αγόραζαν με τη βοήθεια της προσέγγισης. Οι συγκεκριμένες απαντήσεις δηλαδή, δεν φαινόταν ότι ήταν αποτελέσματα κάποιας συγκεκριμένης μαθηματικής δραστηριότητας. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα.

4 κιλά κρέας
18 μελιτζάνες
15 ντομάτες
2 κρεμμύδια

3 σκελίδες

4 κούπες νερό

4 ποτηράκια κρασί

8 κουταλιές φέτα (Λ. 77)

Στο οικογενειακό μας τραπέζι, θα έχουμε καλεσμένους τον παππού, τις 2 γιαγιάδες, τους γονείς (2), τα πεθερικά (2), τα αδέρφια (3), τα ξαδέρφια (2) και τα τρία παιδιά ετών 6 μηνών - 3 ετών. Άρα υπολογίζουμε γεύμα περίπου 12 - 13 ατόμων.

Οι αγορές στον μανάβη θα έχουν ως εξής:

15 μελιτζάνες μακριές

20 ντομάτες (13 ώριμες για σάλτσα + 7 για σαλάτα)

5 κρεμμύδια (θα βάλουμε και στη χωριάτικη σαλάτα 2 κρεμμύδια ξερά)

1 κεφάλι σκόρδο

1 ματσάκι μαϊντανό

3 πιπεριές πράσινες (για τη σαλάτα)… Και καλή μας όρεξη! (Λ. 94)

3,5 κιλά κρέας

16 μελιτζάνες

15 ντομάτες

3 κρεμίδια

3 σκόρδα

Τα υπόλοιπα τα ‘χω σπίτι (Λ. 23)

1) εξαρτατε τι ηλικίες είναι τα άτομα

2) Αν έχει παιδιά πιο μικρή ποσότητα

3) Αν έχει ηλικιωμένους

4) Πόσο φαει καταναλώνει ο κάθε ένας

Αν είναι όλη σε ηλικία 20 - 30 τότε:

3,5 kg μοσχαρίσιο κρέας

18 μελιτζάνες μακριές

15 ώριμες ντομάτες ψιλοκομένες

3 κρεμμύδια ψιλοκομένα

3 σκελίδες σκόρδο

Αρκετό μαϊντανό ψιλοκομένο

Αρκετό ελαιόλαδο

3,5 κούπες νερό

4 ποτηράκια ερυθρό ξηρό κρασί

8 κουταλιές τριμμένη φέτα

περισσότερο αλάτι και πιπέρι (Λ. 37)

Πρόβλημα 6

Το τελευταίο πρόβλημα της έρευνας ήταν το πρόβλημα με το γράφημα που απαιτούσε την κατανόηση των δεδομένων που δίνει ένα γράφημα σχετικό με τον τρόπο εκμετάλλευσης του ελεύθερου χρόνου. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δε διαφοροποιείται ο τρόπος επίλυσης σε κάθε υποκείμενο. Οι πράξεις που απαιτούσε η επίλυση του προβλήματος ήταν μία αφαίρεση και δύο προσθέσεις. Βασικά σημεία που απαιτούν μαθηματικό υπόβαθρο είναι η κατανόηση του πλήθους των συμμετεχόντων στην έρευνα του γραφήματος και η κατανόηση της σειράς αξιοποίησης χρόνου από τον πιο δημοφιλή στον λιγότερο δημοφιλή.

Από το σύνολο των συμμετεχόντων, οχτώ ενήλικες δήλωσαν πως ο συνολικός αριθμός των συμμετεχόντων στην έρευνα είναι 8.000, επειδή αυτή ήταν η ανώτερη τιμή στον κάθετο άξονα. Επίσης, 30 συμμετέχοντες ανέφεραν πως ο πέμπτος δημοφιλέστερος τρόπος διασκέδασης είναι τα ταξίδια και όχι η ανάγνωση βιβλίων. Η συγκεκριμένη άποψη, πιθανότερα, στηρίχτηκε στο γεγονός ότι η «Άθληση» και τα «Κοινωνικά δρώμενα» ήταν επιλογή ίσων υποκειμένων. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα, οι 30 συμμετέχοντες να τοποθετήσουν την «Άθληση» και τα «Κοινωνικά δρώμενα» στην τρίτη θέση, την «Ανάγνωση βιβλίων» στην τέταρτη και τα «Ταξίδια» στην πέμπτη, που ήταν και η ζητούμενη. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι 21 συμμετέχοντες έκαναν λάθος σε αφαίρεση ή πρόσθεση.

Πίνακας 6 Μαθηματική δραστηριότητα ανά πρόβλημα

Πρόβλημα	**Σωστή χρήση**	**Λανθασμένη χρήση**	**Αβέβαιη χρήση**
Εισιτήριο (τέλεση πράξεων)	**84**	**3**	**13**
Σινεμά (εκτίμηση)	**75**	**1**	**24**
Εκπτώσεις (χρήση ποσοστών/πράξεις)	**54**	**8**	**38**
Μηχανάκι (multi step πρόβλημα)	**56**	**42**	**2**
Συνταγή (αναλογία)	**56**	**-**	**43**
Γράφημα (κατανόηση γραφήματος)	**71**	**28**	**-**

2.3.5.5 Διαφορές στη συνολική επίδοση

1. Πεποιθήσεις

Κανονική κατανομή για τους ενήλικες που δήλωσαν στις ερωτήσεις σχετικά με τις πεποιθήσεις από «λίγο» έως «πολύ» (2 έως 4), p = 0.193. Μη κανονική κατανομή για τους ενήλικες που δήλωσαν στις ερωτήσεις σχετικά με τις πεποιθήσεις από «πολύ» έως «πάρα πολύ» (4 έως 5), p = 0.

Η επίδοση των ενηλίκων που δήλωσαν στις ερωτήσεις σχετικά με τις πεποιθήσεις από «λίγο» έως «πολύ» (M = 11.36, $S.E.$ = 0.330) δεν διαφέρει σημαντικά από την επίδοση των ενηλίκων που δήλωσαν στις ερωτήσεις σχετικά με τις πεποιθήσεις από «πολύ» έως «πάρα πολύ» (M = 11.71, $S.E.$ = 0.249), U = 1062, z = -1.196, p = 0.232.

2. Χρήση

Κανονική κατανομή για τους ενήλικες που δήλωσαν στις ερωτήσεις σχετικά με τη χρήση από «καθόλου» έως «συχνά» (1 έως 4), p = 0.096, αλλά και για εκείνους που δήλωσαν στις ερωτήσεις σχετικά με τη χρήση από «συχνά» έως «πολύ συχνά» (4 έως 5), p = 0.364.

Η επίδοση των ενηλίκων που δήλωσαν στις ερωτήσεις σχετικά με τη χρήση από «καθόλου» έως «συχνά» (M = 11.42, $S.E.$ = 0.277) δεν διαφέρει σημαντικά από την επίδοση των ενηλίκων που δήλωσαν από «συχνά» έως «πολύ συχνά» (M = 11.78, $S.E.$ = 0.283), $t(98)$ = -0.872, p = 0.386.

3. Φύλο

Κανονική κατανομή για το φύλο των συμμετεχόντων με p = 0.154 για τους άντρες και p = 0.074 για τις γυναίκες.

Η επίδοση των αντρών (M = 11.54, $S.E.$ = 0.291) δεν διαφέρει σημαντικά από την επίδοση των γυναικών (M = 11.57, $S.E.$ = 0.281), $t(98)$ = -0.075, p = 0.940.

4. Επαγγελματική κατάσταση

Κανονική κατανομή για τους συμμετέχοντες που δήλωσαν δημόσιοι υπάλληλοι, p = 0.758, ιδιωτικοί υπάλληλοι, p = 0.170, ελεύθεροι επαγγελματίες, p = 0.751, οικιακά, p = 0.463, φοιτητές, p = 0.721, και άνεργοι, p = 0.679.

Δεν υπάρχει διαφορά στην επίδοση των δημοσίων υπαλλήλων, των ιδιωτικών υπαλλήλων, των ελεύθερων επαγγελματιών, των φοιτητών, των ανέργων ή εκείνων που ασχολούνται με τα οικιακά, $F(6,93)$ = 2.047, p = 0.067.

5. Μορφωτικό επίπεδο

Μη κανονική κατανομή για τους συμμετέχοντες που έχουν ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, $p = 0.004$, και κανονική κατανομή για εκείνους που έχουν ολοκληρώσει τις προπτυχιακές σπουδές, $p = 0.326$, και για εκείνους που έχουν μεταπτυχιακό ή διδακτορικό δίπλωμα, $p = 0.739$.

Δεν υπάρχει διαφορά στην επίδοση των συμμετεχόντων βάσει του μορφωτικού τους επιπέδου, $H(2) = 0.273$, $p = 0.872$.

6. Ελεύθερος χρόνος

Κανονική κατανομή για εκείνους που δήλωσαν ότι στον ελεύθερο χρόνο τους προτιμούν την Άθληση, $p = 0.076$, ή όχι, $p = 0.099$, για εκείνους που προτιμούν την Τηλεόραση/Ταινίες, $p = 0.119$, ή όχι, $p = 0.056$, για εκείνους που επέλεξαν την ενασχόληση με τον Υπολογιστή, $p = 0.113$, ή όχι, $p = 0.149$, και για εκείνους που επέλεξαν τη Μουσική, $p = 0.286$, ή όχι, $p = 0.061$. Μη κανονική κατανομή για τις μεταβλητές Ανάγνωση βιβλίων και Έξοδος με φίλους.

Η επίδοση των ενηλίκων που δήλωσαν ότι προτιμούν την Άθληση ($M = 11.52$, $S.E. = 0.291$) δε διαφέρει σημαντικά από την επίδοση των ενηλίκων που δε δήλωσαν αότι προτιμούν την Άθληση ($M = 11.64$, $S.E. = 0.303$), $t(86) = 0.288$, $p = 0.774$. Παρόμοια είναι και τα αποτελέσματα από τις υπόλοιπες επιλογές του ελεύθερου χρόνου. Γενικότερα, ο τρόπος αξιοποίησης του ελεύθερου χρόνου δεν επηρέασε τη συνολική τους επίδοση τους στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων.

2.3..5.6 Διαφορές ανά πρόβλημα

1. Το πρόβλημα με το εισιτήριο

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Φύλο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 1.890$, $p = 0.389$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Μορφωτικό επίπεδο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(4) = 3.525$, $p = 0.474$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στη Χρήση των μαθηματικών και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 1.172$, $p = 0.556$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στις Πεποιθήσεις των συμμετεχόντων και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 6.009$, $p = 0.05$.

2. Το πρόβλημα με το σινεμά

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Φύλο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 2.216$, $p = 0.330$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Μορφωτικό επίπεδο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(4) = 1.272$, $p = 0.866$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στη Χρήση των μαθηματικών και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 0.877$, $p = 0.645$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στις Πεποιθήσεις των συμμετεχόντων και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 2.036$, $p = 0.011$.

3. Το πρόβλημα με τις εκπτώσεις

Υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Φύλο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(1) = 6.449$, $p = 0.389$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Μορφωτικό επίπεδο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 0.826$, $p = 0.662$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στη Χρήση των μαθηματικών και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(1) = 0.794$, $p = 0.373$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στις Πεποιθήσεις των συμμετεχόντων και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(1) = 2.791$, $p = 0.095$.

4. Το πρόβλημα με το μηχανάκι

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Φύλο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(1) = 0.506$, $p = 0.477$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Μορφωτικό επίπεδο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 0.190$, $p = 0.909$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στη Χρήση των μαθηματικών και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 1.172$, $p = 0.556$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στις Πεποιθήσεις των συμμετεχόντων και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(1) = 0.433$, $p = 0.511$.

5. Το πρόβλημα με τη συνταγή

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Φύλο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 2.125$, $p = 0.346$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Μορφωτικό επίπεδο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(4) = 4.523$, $p = 0.340$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στη Χρήση των μαθηματικών και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 5.916$, $p = 0.052$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στις Πεποιθήσεις των συμμετεχόντων και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 2.918$, $p = 0.233$.

6. Το πρόβλημα με το γράφημα

Υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Φύλο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 6.835$, $p = 0.033$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στο Μορφωτικό επίπεδο και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(4) = 0.972$, $p = 0.914$.

Υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στη Χρήση των μαθηματικών και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 8.753$, $p = 0.013$.

Δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στις Πεποιθήσεις των συμμετεχόντων και την επίδοση στο πρόβλημα $\chi^2(2) = 0.489$, $p = 0.783$.

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα, το φύλο είναι μία παράμετρος που σχετίζεται με την επίδοση στα προβλήματα με τις εκπτώσεις και το γράφημα. Επιπλέον, το μορφωτικό επίπεδο δε σχετίζεται με την επίδοση σε κανένα πρόβλημα. Το μορφωτικό επίπεδο δηλαδή, δεν επηρέασε τους συμμετέχοντες στο να δώσουν ενάριθμες απαντήσεις. Ακόμη, δεν παρατηρήθηκε σχέση ανάμεσα στις πεποιθήσεις των υποκειμένων και την επίδοσή τους, ενώ η χρήση των μαθηματικών φαίνεται να έχει σχέση μόνο στο πρόβλημα με το γράφημα.

2.4 Δεύτερη φάση της έρευνας

Κατά τη διάρκεια της έρευνας, παρατηρήθηκε πως σε αρκετές περιπτώσεις τα υποκείμενα προέβαιναν σε ένα διάλογο με αφορμή τα δοθέντα προβλήματα. Ο διάλογος αυτός κρίθηκε γόνιμος, καθώς για την ίδια κατάσταση υπήρχαν διαφορετικές οπτικές που στηρίζονταν σε Μαθηματικά ή περιείχαν μαθηματικές εκφράσεις. Έτσι, πραγματοποιήθηκαν δέκα ομάδες εστίασης στις οποίες δόθηκε ένα πλαίσιο προς λύση και συζήτηση. Οι ομάδες εστίασης αποτελούν μία ερευνητική μέθοδο παραγωγής πλούσιων ποιοτικών δεδομένων μέσα από μία διαδικασία διάδρασης ανάμεσα στους συμμετέχοντες μίας ομάδας που εστιάζουν σε ένα θέμα. Πρέπει να σημειωθεί πως οι ομάδες εστίασης διαφοροποιούνται από την ομαδική συνέντευξη. Στην ομαδική συνέντευξη οι συμμετέχοντες αποκρίνονται στις ερωτήσεις του συνεντευκτή, ενώ στις ομάδες εστίασης υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών της ομάδας.

Στην παρούσα έρευνα, το θέμα αλληλεπίδρασης των μελών της ομάδας ήταν η επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος. Επιπροσθέτως, υπήρξε «κάθετη αλληλεπίδραση», μεταξύ της ερευνήτριας και των συμμετεχόντων, αλλά και «οριζόντια αλληλεπίδραση», ανάμεσα στους συμμετέχοντες. Η «οριζόντια αλληλεπίδραση» βοήθησε στην αποστασιοποίηση της ερευνήτριας, με αποτέλεσμα να δοθεί βαρύτητα στις απόψεις των συμμετεχόντων. Τα διαφορετικό ερευνητικό ερώτημα σε σχέση με το πρώτο μέρος της έρευνας είναι το εξής:

Επηρεάζει η αλληλεπίδραση με άλλους τη ρεαλιστική σκέψη και πώς;

2.4.1 Συμμετέχοντες των ομάδων εστίασης

Οι ομάδες ήταν τεσσάρων ή έξι ατόμων. Πρέπει να σημειωθεί, πως οι ομάδες περιλάμβαναν τουλάχιστον δύο άτομα που συμμετείχαν στο πρώτο μέρος της έρευνας. . Επίσης, σε κάθε ομάδα συμμετείχαν άτομα που ήδη γνωρίζονταν μεταξύ τους, ώστε να εξασφαλιστεί η διευκόλυνση στην επικοινωνία, αλλά και η οικειότητα και η αυθεντικότητα των απαντήσεων. Ο χώρος συνάντησης ορίστηκε σε μέρος οικείο για τα μέλη της κάθε ομάδας και ήσυχο, ενώ ανάμεσα στα μέλη υπήρχε οικειότητα, γεγονός που συνέβαλε στην αποβολή αρνητικών συναισθημάτων. Η συζήτηση μαγνητοφωνήθηκε. Ακολουθεί πίνακας με τα στοιχεία των συμμετεχόντων. Για λόγους ανωνυμίας, χρησιμοποιήθηκαν ψευδώνυμα.

Πίνακας 7 Στοιχεία συμμετεχόντων στις ομάδες εστίασης

Όνομα	**Ηλικία**	**Επάγγελμα**	**Εκπαίδευση** (ανώτατη ολοκληρωμένη βαθμίδα)
ΟΜΑΔΑ 1			
Φίλιππος	34	Φυσικός	Μεταπτυχιακές Σπουδές (Φυσικό- Ιστορικό)
Ουρανία	34	Φυσικός/Μουσικός	Μεταπτυχιακές Σπουδές (Φυσικό)
Γιώργος	34	Φυσικός	Μεταπτυχιακές Σπουδές (Φυσικό- Ιστορικό)
Βλάσης	34	Φυσικός	Προπτυχιακές Σπουδές (Φυσικό- ΦΠΨ)
ΟΜΑΔΑ 2			
Άρης	29	Σερβιτόρος	Δευτεροβάθμια
Φανή	26	Δασκάλα/ Υπάλληλος σε ΚΔΑΠ	Μεταπτυχιακές Σπουδές (Παιδαγωγικό)
Νάντια	29	Άνεργη/ Φιλόλογος	Προπτυχιακές Σπουδές (Φιλολογία)
Γεράσιμος	31	Υπάλληλος στο δημαρχείο	Προπτυχιακές Σπουδές (Οικονομικό)
ΟΜΑΔΑ 3			
Κυριάκος	26	Οδηγός ταξί	Προπτυχιακές Σπουδές (Μαθηματικό)
Νέστορας	26	Γραφίστας	Προπτυχιακές Σπουδές
Ματθαίος	26	Φαρμακοποιός	Προπτυχιακές Σπουδές (Φαρμακευτική)
Έφη	26	Φαρμακοποιός	Προπτυχιακές Σπουδές (Φαρμακευτική)
Θύμιος	26	Άνεργος	Προπτυχιακές Σπουδές (Λογιστική)
Εριέττα	26	Υπάλληλος σε γραφείο	Προπτυχιακές Σπουδές (Πληροφορική)
ΟΜΑΔΑ 4			
Μιλτιάδης	35	Μαθηματικός	Προπτυχιακές Σπουδές (Μαθηματικό)
Ελπινίκη	30	Σερβιτόρα/ Πωλήτρια ρούχων	Προπτυχιακές Σπουδές (Καλών Τεχνών)
Αλέξανδρος	36	Ιδιοκτήτης καφέ	Δευτεροβάθμια
Νίκος	34	Έμπορος κρεάτων	Δευτεροβάθμια
ΟΜΑΔΑ 5			
Σωτήρης	39	Πολιτικός μηχανικός	Προπτυχιακές Σπουδές (Πολιτικών Μηχανικών)

Θένια	30	Παιδοψυχολόγος/ Ειδική παιδαγωγός	Μεταπτυχιακές Σπουδές (Ψυχολογία)
Ευτυχία	40	Βοηθός σχολικού λεωφορείου	Δευτεροβάθμια
Κώστας	39	Μεταλλικές κατασκευές	Δευτεροβάθμια
Αχιλλέας	38	Πολιτικός μηχανικός	Προπτυχιακές Σπουδές (Πολιτικών Μηχανικών)
Αφροδίτη	37	Οικονομολόγος	Προπτυχιακές Σπουδές (Οικονομικό)
ΟΜΑΔΑ 6			
Ελεάνα	26	Ιδιαίτερα μαθήματα	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)
Κατερίνα	26	Φύλαξη παιδιών/ Ιδιαίτερα μαθήματα	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)
Ελπίδα	26	Οικιακά	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)
Αγγελική	26	Baby sitting/ Μουσικός	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)
ΟΜΑΔΑ 7			
Κίμωνας	32	Προπονητής	Δευτεροβάθμια
Σπύρος	33	Παρκαδόρος/ Λογιστής	Προπτυχιακές Σπουδές (ΤΕΙ Λογιστικής)
Θεμιστοκλής	45	Μικροβιολόγος	Προπτυχιακές Σπουδές (Ιατρική)
Βαλάντης	30	Άνεργος	Δευτεροβάθμια
ΟΜΑΔΑ 8			
Κάτια	26	Νοσηλεύτρια/ Υπάλληλος φαρμακείου	Προπτυχιακές Σπουδές (ΤΕΙ Νοσηλευτικής)
Ευγενία	34	Τραπεζικός Υπάλληλος	Προπτυχιακές Σπουδές (Διοίκηση Επιχειρήσεων)
Ευτυχία	26	Οικιακά	Προπτυχιακές Σπουδές (ΤΕΙ Πολιτικών Μηχανικών ΤΕ)
Γεωργία	28	Οικιακά	Δευτεροβάθμια
ΟΜΑΔΑ 9			
Δημοσθένης	30	Πτηνοτρόφος	Δευτεροβάθμια
Έλλη	25	Άνεργη	Μεταπτυχιακές Σπουδές (Μαθηματικό)
Δήμητρα	26	Γυμνάστρια	Μεταπτυχιακές Σπουδές (Μαθηματικό)
Αλκμήνη	30	Οικιακά	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΝ)

ΟΜΑΔΑ 10			
Φαίη	26	Ιδιαίτερα μαθήματα	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)
Ερατώ	25	Baby sitting/ Ιδιαίτερα μαθήματα	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)
Καλλιόπη	25	Άνεργη	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)
Κερασία	26	Άνεργη	Προπτυχιακές Σπουδές (ΠΤΔΕ)

2.4.2 Ερωτήσεις για τις ομάδες εστίαση

Στόχος της διαδικασίας ήταν να αναδειχτούν διάφοροι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τα υποκείμενα προκειμένου να πάρουν μία απόφαση για ένα πρόβλημα της καθημερινότητας χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά. Το υλικό που δόθηκε στους συμμετέχοντες ήταν το ακόλουθο.

Εικόνα 5

Συσκευασία: 15 τεμάχια

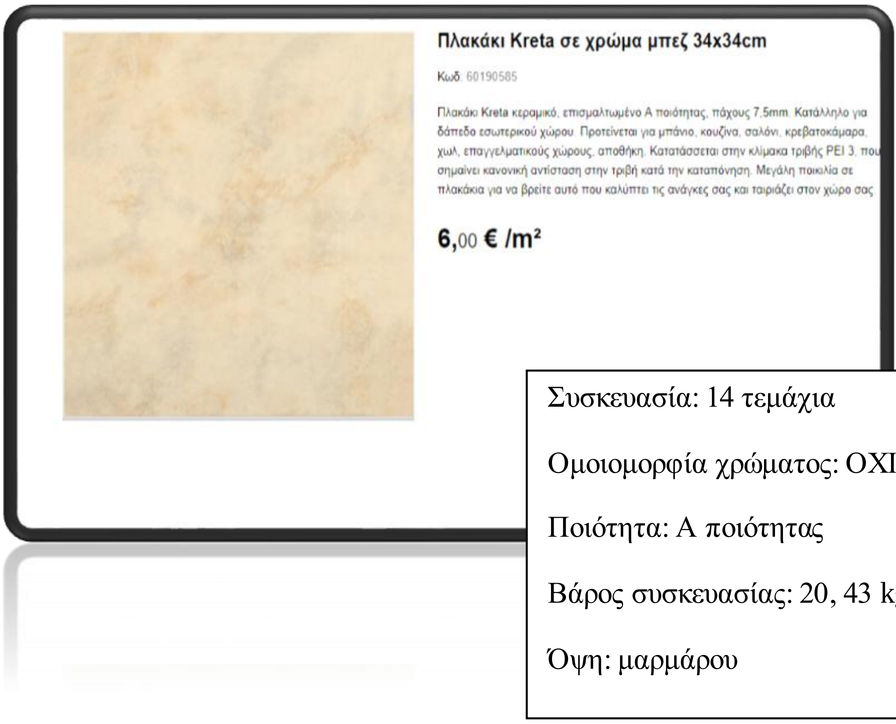
Ομοιομορφία χρώματος: ΟΧΙ

Ποιότητα: Α ποιότητας

Βάρος συσκευασίας: 21, 84 kg

Πάχος: 7,5 mm

Εικόνα 6



Συσκευασία: 14 τεμάχια

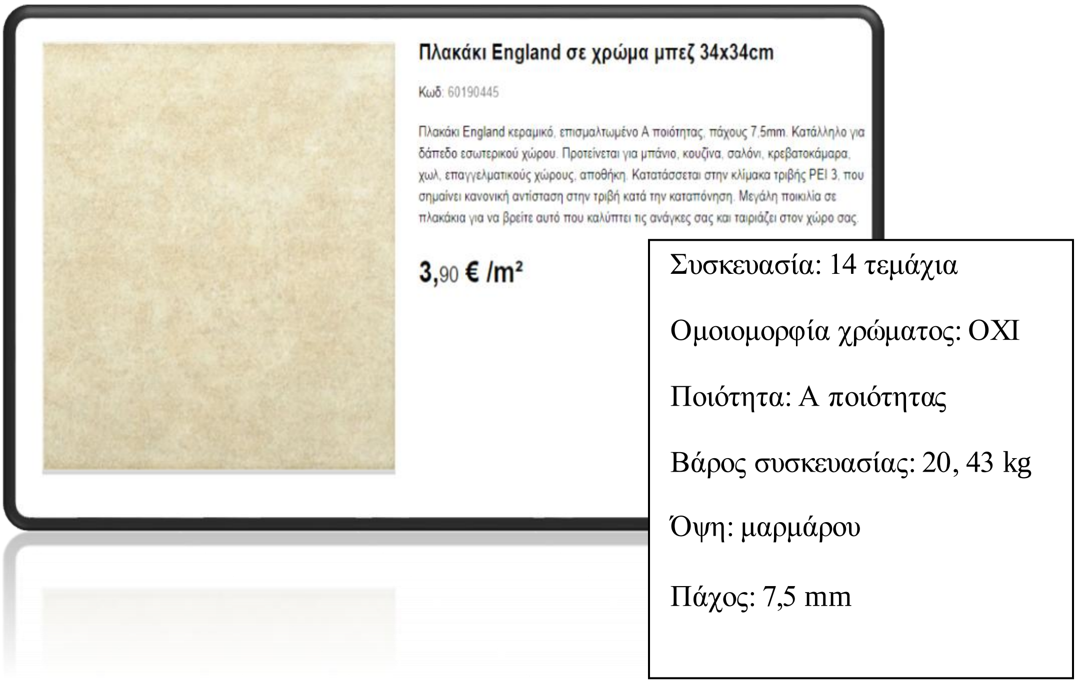
Ομοιομορφία χρώματος: ΟΧΙ

Ποιότητα: Α ποιότητας

Βάρος συσκευασίας: 20, 43 kg

Όψη: μαρμάρου

Εικόνα 7



Εικόνα 8

Το βασικό ζητούμενο της συνάντησης ήταν να συζητήσουν οι συμμετέχοντες και να αποφανθούν σχετικά με την πλακόστρωση του σπιτιού που τους δόθηκε. Η πλακόστρωση θα πραγματοποιούνταν σε όλους τους χώρους εκτός του μπάνιου. Πριν εκτεθούν οι συμμετέχοντες στην προβληματική κατάσταση απάντησαν σε μία σειρά ερωτήσεων που, στις περισσότερες περιπτώσεις, οδήγησαν σε συζήτηση. Οι ερωτήσεις βασίστηκαν στην κατηγοριοποίηση που διατύπωσε ο Krueger (1998) για τις ερωτήσεις που απευθύνονται σε ομάδες εστίασης. Σύμφωνα με τον Krueger (1998) στην αρχή γίνονται οι ερωτήσεις έναρξης, που βοηθούν τους συμμετέχοντες να νιώσουν άνετα, και οι ερωτήσεις εισαγωγής, που τους εισάγουν στο θέμα της συζήτησης. Έπονται οι μεταβατικές ερωτήσεις, που ωθούν τη συζήτηση στο κεντρικό θέμα, και οι ερωτήσεις κλειδιά, που αποτελούν την ουσία της συζήτησης. Η συζήτηση ολοκληρώνεται με τις τελικές ερωτήσεις, που συνιστούν την περίληψη των όσων ειπώθηκαν και δίνουν μία τελευταία ευκαιρία στους συμμετέχοντες να προσθέσουν κάτι. Οι ερωτήσεις, λοιπόν, που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα, ήταν οι εξής:

1. Πείτε μου το όνομά σας και με τι ασχολείστε. (Opening question)

2. Ποια ήταν τα αρχικά σας αισθήματα, όταν ακούσατε ότι η συζήτηση θα έχει μαθηματικό περιεχόμενο; (Introduction question)

3. Θεωρείτε ότι σχετίζονται τα αισθήματα αυτά με σχολικές εμπειρίες; Πείτε μας μία χαρακτηριστική ανάμνηση! (Introduction question)

4. Θεωρείτε ότι τα σχολικά Μαθηματικά σχετίζονται με μαθηματικές ενέργειες που εκτελείτε τώρα; Πώς; (Transition question)

5. Ένας κοινός σας φίλος, ας τον πούμε Γιώργο, θέλει να αλλάξει τα πλακάκια στο σπίτι του, σε όλους τους χώρους, εκτός από το μπάνιο. Σκέφτεται όμως το κόστος. Πόσο εκτιμάτε το κόστος της αλλαγής; (Key question)

6. Παρέλειψα μήπως κάτι; (η συγκεκριμένη ερώτηση πραγματοποιήθηκε μετά από την περίληψη που έκανε η ερευνήτρια) (Ending question)

2.4.3 Αποτελέσματα των ομάδων εστίασης

Ομάδα 1

Η πρώτη ομάδα περιλάμβανε τέσσερις συμμετέχοντες, μία γυναίκα και τρεις άντρες: τον Φίλιππο, την Ουρανία, τον Γιώργο και τον Βλάση. Καθένας από αυτούς είχε τουλάχιστον τρία πτυχία τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, εκ των οποίων το ένα ήταν πτυχίο Φυσικής. Επίσης, κοινό σημείο και των τεσσάρων ήταν η παράδοση ιδιαίτερων μαθημάτων Φυσικής σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ή φοιτητές, πέρα από άλλες επαγγελματικές υποχρεώσεις.

Τα αισθήματα που κυριάρχησαν ήταν η περιέργεια και η απορία για την ποιότητα των ερωτήσεων, αλλά και το ενδιαφέρον για συμμετοχή. Μέσα από τα αισθήματα για την έρευνα, αναδείχθηκαν και οι απόψεις των συμμετεχόντων για τα Μαθηματικά. Οι τρεις συμμετέχοντες κατέληξαν, έπειτα από συζήτηση, ότι τα Μαθηματικά είναι ένα εργαλείο και μία πανανθρώπινη γλώσσα, ενώ ο τέταρτος τόνισε πως τα Μαθηματικά δεν ξεκίνησαν σαν εργαλείο, αλλά στην πορεία έγιναν. Τα αισθήματα και οι απόψεις για τα Μαθηματικά, σύμφωνα με τους συμμετέχοντες, επηρεάστηκαν άμεσα από τα σχολικά βιώματά τους. Αναφέρονται χαρακτηριστικά παραδείγματα:

…στο λύκειο είχα έναν καταπληκτικό καθηγητή και εξαιτίας του αγαπώ τους μιγαδικούς… (Ουρανία)
…μία λέξη που τον χαρακτήριζε (τον καθηγητή μαθηματικών στο γυμνάσιο) ήταν αθλιότητα… ήταν αλλοπρόσαλλος… (Φίλιππος)
…ταφόπλακα για τα μαθηματικά ήταν ένας καθηγητής στην πρώτη λυκείου…(Γιώργος)

Και οι τέσσερις συμμετέχοντες ήταν σε θέση να θυμηθούν ευχάριστα περιστατικά που σχετίζονταν είτε με καθηγητές μαθηματικών είτε με προσωπικές κατακτήσεις και επιτυχίες στο μάθημα των μαθηματικών, που είχαν εντυπωθεί στη μνήμη τους και τα διηγηθήκαν με ζωντάνια και παραστατικότητα.

Σχετικά με τα Μαθηματικά που αφορούν την καθημερινότητα, και οι τέσσερις συμμετέχοντες δήλωσαν ότι τα Μαθηματικά του σχολείου δεν είναι στην πλειονότητά τους χρήσιμα στις καθημερινές εμπειρίες και είναι αποσυνδεδεμένα από τα βιώματά τους, όπως το σχήμα Horner, ενώ θεώρησαν απαραίτητα τα Μαθηματικά του δημοτικού και λίγα από τα Μαθηματικά του γυμνασίου. Από την άλλη πλευρά, η συμμετέχουσα επεσήμανε ότι η εκμάθηση ανώτερων μαθηματικών, όπως ο μιγαδικός λογισμός, δεν είναι άχρηστη, γιατί προσφέρει τη δυνατότητα να έχει κάποιος μία σφαιρική αντίληψη της μαθηματικής επιστήμης.

Η απάντηση για την πλακόστρωση, από τη συγκεκριμένη ομάδα, δόθηκε πολύ γρήγορα. Στη διαδικασία της επίλυσης συμμετείχαν πιο ενεργά τρεις συμμετέχοντες και κατέληξαν πως η ελάχιστη τιμή για την αγορά πλακακιών είναι $3{,}90 \times 146 = 569$ € και η μέγιστη είναι $6.00 \times 146 = 876$ €. Ένας από το συμμετέχοντες προβληματίστηκε για το αν θα τοποθετηθεί το ίδιο πλακάκι σε όλο το σπίτι ή αν θα υπάρχουν συνδυασμοί. Για τον λόγο αυτό, κατέληξαν σε ένα ανώτατο και ένα κατώτατο όριο τιμών. Τα δεδομένα για το βάρος και το πλήθος των τεμαχίων ανά συσκευασία προβλημάτισαν τη συμμετέχουσα, αλλά πείστηκε για την κάλυψη ανά m^2 και συμφώνησε με τους υπόλοιπους.

Έπειτα από νύξη της ερευνήτριας για κόστος αλλαγής και όχι για κόστος πλακακιών, όπως είχαν καταλάβει οι συμμετέχοντες, οι συμμετέχοντες τόνισαν πως δεν έχουν επαρκή δεδομένα κι έτσι δεν μπορούσαν να προβούν ούτε σε εκτίμηση του κόστους αλλαγής. Χαρακτηριστικές αντιδράσεις αναφέρονται στη συνέχεια.

…το μαθηματικό μέρος είναι αυτό. Τα υπόλοιπα είναι εμπειρία!... (Γιώργος)

…το πρόβλημα δεν είναι μαθηματικά προσδιορισμένο… επιδέχεται περισσότερες από μία λύσεις.. (Βλάσης)

…υλικά… πολλά άλλα… είναι εντελώς ανοιχτό πρόβλημα, εξαρτάται από μη μαθηματικούς παράγοντες… η εκτίμηση θα είναι εντελώς αυθαίρετη και αστοιχείωτη… (Φίλιππος)

Ομάδα 2

Η δεύτερη ομάδα περιλάμβανε τέσσερις συμμετέχοντες, δύο γυναίκες και δύο άντρες, τον Άρη, τη Φανή, τη Νάντια και τον Γεράσιμο. Οι δύο από αυτούς ολοκλήρωσαν την τριτοβάθμια εκπαίδευση σε προπτυχιακό επίπεδο (ο Γεράσιμος και η Νάντια), η μία σε μεταπτυχιακό επίπεδο (η Φανή) και ο ένας έχει ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (ο Άρης). Σε επαγγελματικό επίπεδο, ο Γεράσιμος είναι δημόσιος υπάλληλος στο Δημαρχείο, ο Άρης είναι σερβιτόρος, η Νάντια φιλόλογος/άνεργη και η Φανή δασκάλα/υπάλληλος σε ΚΔΑΠ.

Τα αισθήματα που εκδήλωσαν για τη συμμετοχή τους στη συζήτηση ταυτίστηκαν με τα αισθήματα που εξέφρασαν για τα Μαθηματικά γενικότερα. Πιο συγκεκριμένα, ο Άρης και η Νάντια εξέφρασαν αδιαφορία και φόβο αντίστοιχα, ενώ η Φανή και ο Γεράσιμος ήταν πιο θετικοί τόσο για τη συζήτηση, όσο και για τη χρησιμότητα των μαθηματικών. Σύμφωνα με τους συμμετέχοντες, τα αισθήματά τους είναι απόρροια των σχολικών βιωμάτων. Αναφορές σε σχολικά βιώματα είναι τα παρακάτω σχόλια.

… ξεκάθαρα το σχολείο και ο δάσκαλος στο δημοτικό. Μου διέγραφε όλα τα τεστ… χτύπαγε… είχα όλο εφτά και οχτώ… (Νάντια)

…δευτέρα γυμνασίου είχα μάθει μαθηματικά. Εκείνη τη χρονιά πολύ εύκολα τα μαθηματικά… πολύ καλή καθηγήτρια.. στην Τρίτη δυσκόλεψαν πολύ, γιατί άλλαξε ο καθηγητής… (Φανή)

…αδιαφορία γενικά για το σχολείο… δεν ασχολήθηκα καν… (Άρης)

…όλα μια χαρά! Τα μαθηματικά ήταν από τα αγαπημένα μου μαθήματα… (Γεράσιμος)

…μου αρέσουν πολύ τα μαθηματικά εν τέλει και ανακάλυψα τη σημαντικότητά τους όταν, αφού πήρα πτυχίο, αναγκάστηκα να διδάξω μαθηματικά σε κάποια παιδιά… (Φανή)

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε μία συζήτηση γύρω από τις μαθηματικές ενέργειες και έννοιες που συναντάει κανείς στην καθημερινότητα και το πλαίσιο που συναντώνται. Οι συμμετέχοντες επεσήμαναν την αριθμητική, τις πράξεις, τα ποσοστά, τη μέτρηση βάρους, τη βασική απαρίθμηση ως μαθηματικές ενέργειες και έννοιες που χρησιμοποιούνται καθημερινά, ενώ τα Μαθηματικά συναντώνται στις συναλλαγές, στις εκπτώσεις, στη μαγειρική, στις χειροτεχνίες και τα εικαστικά. Ομόφωνη η ομάδα κατέληξε πως τα Μαθηματικά που απαιτούνται στην καθημερινότητα είναι Μαθηματικά που διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αντιπροσωπευτική είναι η εξής έκφραση:

…εμένα η μάνα μου δημοτικό τελείωσε και τα κάνει όλα!... (Φανή)

Οι πρώτες σκέψεις σχετικά με την πλακόστρωση που ειπώθηκαν σχετίζονταν με βιώματα των υποκειμένων και πώς θα αντιδρούσαν σε αντίστοιχη περίπτωση. Στη συνέχεια, ξεκίνησε η διαδικασία επίλυσης. Αφού βρήκαν το εμβαδόν, 176-30 = 146 m^2, κατέληξαν πως το κόστος θα κυμανθεί από 570 € μέχρι 876 €, ανάλογα με το είδος του πλακακιού. Αυθόρμητα ο Άρης αναρωτήθηκε για την πληρωμή του μάστορα, με αποτέλεσμα να ξεκινήσει μία συζήτηση που σχετιζόταν με τα υλικά (κόλλες, τσιμέντα, λάσπες, πλακάκια), το πλήθος και την πληρωμή των εργατών. Δεδομένου ότι επρόκειτο για αλλαγή και όχι για απλή προσθήκη, οι συμμετέχοντες κατέληξαν στο ποσό των 2000 €. Αποσπάσματα από τη συζήτηση παρατίθενται στη συνέχεια.

Γιατί να μετρήσω; Θα έρθει ο μάστορας να μετρήσει, να βγάλει μια τιμή κι εσύ θα πάρεις προσφορές! (Άρης)
Εγώ λέω στα 1000 €! (Νάντια)
Ο μάστορας δε θέλει λεφτά; (Άρης)
…τα σοβατοπιά; (Γεράσιμος)
Άσε τα χωρίσματα, θα σου μείνουν για τα σοβατοπιά! (Γεράσιμος)
…ανάλογα με τον μάστορα… δεν πάνε με μεροκάματο οι πλακατζήδες… (Φανή)
Το πρόβλημα δε λύνεται, γιατί έχουμε ελλιπή δεδομένα! (Γεράσιμος)
Θέλει να αλλάξει! Δε θα σπάσει τα παλιά; (Φανή)

Ομάδα 3

Η τρίτη ομάδα αποτελούνταν από τον Κυριάκο, τον Νέστορα, τον Ματθαίο, την Έφη, τον Θύμιο και την Εριέττα. Όλοι οι συμμετέχοντες, πλην της Έφης, υπήρξαν συμμαθητές στα σχολικά χρόνια, με αποτέλεσμα να έχουν αρκετά κοινά βιώματα. Επαγγελματικά ακολούθησαν διαφορετικές πορείες, με εξαίρεση τον Ματθαίο και την Έφη που είναι φαρμακοποιοί. Και οι έξι συμμετέχοντες είχαν συμπληρώσει τις προπτυχιακές σπουδές τους.

Η συγκεκριμένη συζήτηση προξένησε κυρίως ουδέτερα και αδιάφορα αισθήματα, αλλά και πολύ αρνητικά αισθήματα, τα οποία αποδόθηκαν άμεσα σε σχολικά βιώματα. Τα αρνητικά βιώματα που εξέφρασαν οι συμμετέχοντες σχετίζονταν με τους καθηγητές και τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών, αλλά και τη δυσκολία που παρουσιάζουν τα Μαθηματικά στο Λύκειο. Ακολουθούν αποσπάσματα από τη συζήτηση.

…μίσος!... Φυσικά! (εξαρτάται το αίσθημα από σχολικές εμπειρίες)… μου τα έκαναν φοβιστικά… απωθητικά… διάφοροι δάσκαλοι κυρίως στο λύκειο… (Έφη)

…όχι άλλους αριθμούς, κάθε μέρα με αυτούς ασχολούμαι… (Ματθαίος)

…όχι αρνητικές εμπειρίες. Έχω οχτώ χρόνια να ακουμπήσω μαθηματικά!... (Νέστορας)

…στο πανεπιστήμιο καλή σχέση λόγω καθηγητή… στο λύκειο ήθελα να δείρω πολλούς… (Εριέττα)

…καμία σχέση τα μαθηματικά του σχολείου, ενώ τα οικονομικά πιο ουσιώδη και ενδιαφέρον… (Θύμιος)

…μου άρεσαν τα μαθηματικά… απλή μέθοδο των τριών και ποσοστά μόνο χρησιμοποιούμε εμείς… (Ματθαίος)

…ανάμνηση πολύ κακού καθηγητή, σιχαμένου ανθρώπου… η κοπέλα που είχε ιδιαίτερο πήρε πολύ καλό βαθμό, ενώ εγώ με το ίδιο γραπτό… (Έφη)

Οι μαθηματικές ενέργειες/έννοιες που αναδείχτηκαν από τη συζήτηση ως αναγκαίο εφόδιο για την αξιοπρεπή διαβίωση ενός ενήλικα είναι η στατιστική, οι τέσσερις βασικές πράξεις, η μέθοδος των τριών και η βασική γεωμετρία. Επιπλέον, ένας ενήλικας στην καθημερινότητά του, σύμφωνα με τους συμμετέχοντες, συναντάει τα Μαθηματικά στις οικονομικές συναλλαγές, στις εκπτώσεις (ποσοστά) και στη μέτρηση ποσοτήτων, ενώ χρησιμοποιεί συχνά τις διαστάσεις, την περίμετρο και το εμβαδόν.

Το πρόβλημα που δόθηκε στην ομάδα δεν προκάλεσε δυσκολία. Αρχικά, υπολόγισαν την έκταση που χρειαζόταν πλακόστρωση (παρατηρήθηκε ότι δύο συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν στην εύρεση του εμβαδού) και ευθύς, αναφέρθηκε ότι επρόκειτο για αλλαγή και ότι θα χρειαστούν εργάτες. Μετά την επιλογή του πλακακιού, που στηρίχτηκε σε αισθητικούς παράγοντες, απασχόλησε τους συμμετέχοντες το πλήθος των εργατών και, στη συνέχεια, η πληρωμή τους. Εν τέλει, κατέληξαν πως το συνολικό κόστος θα είναι περίπου στα 2000 €. στην τιμή αυτή περιλήφθηκε το κόστος των πλακακιών (900 €), η πληρωμή των δύο εργατών (7 μέρες × 100 € = 700 €) και τα έξτρα υλικά (300 € - 400 €).

Η συζήτηση έληξε με κατάθεση απόψεων που αφορούσαν τα Μαθηματικά του σχολείου και τα Μαθηματικά που θα έπρεπε να συμπεριληφθούν στο αναλυτικό πρόγραμμα. Οι πέντε συμμετέχοντες, εκτός του Κυριάκου, υποστήριξαν θερμά πως τα Μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο είναι αχρείαστα και θα έπρεπε να είναι πιο κοντά στην καθημερινότητα.

…φαίνεται ότι τίποτα από τα ιδιαίτερα που μάθαμε δε χρησιμοποιήσαμε εδώ… (Θύμιος)
…στο σχολείο πρέπει να κάνουμε παραπάνω πράγματα, αλλά με σωστό τρόπο.. εγώ έμαθα τα πάντα από την αρχή… ξέχασα τα πάντα από το λύκειο… (Κυριάκος)

Ομάδα 4

Οι τρεις συμμετέχοντες της συγκεκριμένης ομάδας, ο Μιλτιάδης, ο Νίκος και ο Αλέξανδρος έχουν κοινό σημείο την ενασχόληση με το ποδόσφαιρο, ενώ στην ομάδα προστέθηκε μία ζωγράφος, η Ελπινίκη. Οι επαγγελματικές δραστηριότητες τους ήταν διαφορετικές, όπως και το μορφωτικό τους επίπεδο. Ο Μιλτιάδης και η Ελπινίκη έχουν ολοκληρώσει την τριτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ οι υπόλοιποι συμμετέχοντες τη δευτεροβάθμια.

Στην ανάδειξη των αισθημάτων τους για την επικείμενη συζήτηση, αλλά και τα Μαθηματικά γενικότερα, υπήρξε ποικιλία. Αφενός υπήρξαν έντονα θετικά αισθήματα, αφετέρου ακούστηκαν και αρνητικά. Στη συνέχεια, ακολουθούν αποσπάσματα.

…απέχθεια (για μαθηματικά)… (Ελπινίκη)
…τα μαθηματικά είναι καθημερινά για μένα… με το εμπόριο πρέπει να ασχοληθώ με τα μαθηματικά… (Νίκος)
…γενικά τα μαθηματικά τα σιχαίνομαι… στα απλά, τα πρακτικά είμαι καλός… (Αλέξανδρος)

…εγώ είχα την ευτυχία να έχω πολύ καλούς καθηγητές και στο δημοτικό και στο γυμνάσιο και στο λύκειο και ίσως ήταν ένας λόγος που μου προκάλεσαν αυτή την αγάπη για τα μαθηματικά… (Μιλτιάδης)

…στα μαθηματικά τα πήγαινα καλά… γενικά το σχολείο το βαριόμουν πάρα πολύ… (Νίκος)

…όχι… ήμουν πάρα πολύ καλή μαθήτρια και έγραφα τέλεια στα μαθηματικά… αλλά τα βαριέμαι… (Ελπινίκη)

Για μένα τα μαθηματικά είναι τρόπος ζωής!... (Μιλτιάδης)

Όπως φαίνεται και από τα αποσπάσματα, οι σχολικές εμπειρίες επηρέασαν την εικόνα του Αλέξανδρου και του Μιλτιάδη για τα Μαθηματικά, γεγονός που δεν ισχύει για τους υπόλοιπους. Και οι τέσσερις συμμετέχοντες, ωστόσο, ανεξάρτητα από τα αισθήματά τους για τα Μαθηματικά, δήλωσαν με έμφαση ότι χρησιμοποιούν καθημερινά τα Μαθηματικά. Κατά τη διάρκεια αναζήτησης εφαρμογών που απαιτούν Μαθηματικά, αναφέρθηκε το ζύγισμα/ισοζύγιο, οι συναλλαγές, η διαχείριση οικονομικών, η μετεωρολογία, οι αγορές, ο τζόγος, η ποσότητα αέρα που θα βάλει κάποιος στα λάστιχα του αυτοκινήτου και η χρήση στο γκάζι, κατά τη διάρκεια της οδήγησης, σχετικά με την κατανάλωση βενζίνης. Άλλες μαθηματικές έννοιες που αναφέρθηκαν ήταν η ισότητα/ανισότητα και οι πιθανότητες. Στο σημείο αυτό ο Μιλτιάδης ανέφερε πως «όταν κάποιος σκέφτεται μαθηματικά, φαίνεται στο καθετί που θα κάνει».

Κατά τη διάρκεια ανάλυσης του προβλήματος και του αντίστοιχου υλικού, η συγκεκριμένη ομάδα επεξεργάστηκε αρκετή ώρα τα χαρακτηριστικά των τριών πλακακιών, αν και εν τέλει συμφώνησαν πως και οι τέσσερις για το σπίτι τους θα επέλεγαν το ακριβότερο. Ο πρώτος υπολογισμός του εμβαδού ήταν λανθασμένος ($60 \times 11 = 630\ m^2$), αλλά έπειτα υπολογίστηκε σωστά και κατέληξαν πως το κόστος θα είναι 876 €. Ύστερα από νύξη για αλλαγή των πλακακιών, προστέθηκαν και τα ενδεχόμενα έξοδα για τα υπόλοιπα υλικά και το εργατικό δυναμικό. Στο σημείο αυτό προβληματίστηκε ο Αλέξανδρος που αναρωτήθηκε αν η συζήτηση αφορούσε τη μαθηματική άσκηση ή την πραγματικότητα.

Την τελική απάντηση, την οποία αποδέχτηκαν όλοι, έδωσε ο Νίκος που κοστολόγησε την αλλαγή περίπου στα 1500 €. Από αυτά, 900 € θα χρειάζονταν για τα πλακάκια (μπορεί να έπαιρναν και κανένα παραπάνω, ώστε να υπάρχουν εφεδρικά σε περίπτωση θραύσης), 150 € για τα υλικά και 700 € για τους εργάτες. Η αλλαγή, συνολικά, θα απαιτούσε δουλειά δύο εργατών και πέντε ημερών, ενώ ο κάθε εργάτης θα πληρώνονταν με 35 €, συμπεριλαμβανομένου του ΙΚΑ, την κάθε μέρα.

Στη συνέχεια, ο Αλέξανδρος πρόσθεσε ότι οι πλακατζήδες πληρώνονται με το m^2 και πρόχειρα υπολόγισε πως οι εργάτες θα χρειάζονταν 1000 €. Η άποψή του, όμως, δεν επηρέασε την τελική απάντηση, την οποία αποδέχτηκε και ο ίδιος. Κλείνοντας, ο Νίκος επεσήμανε τα εξής:

…μάθαμε ότι μπορούμε να στήσουμε ένα σπίτι με μαθηματικά, χωρίς γυναίκα…
άμα ξέρεις μαθηματικά, πιστεύω εγώ, δεν μπορεί να σε κλέψει ο εργολάβος…

Ομάδα 5

Η πέμπτη ομάδα αποτελούνταν από έξι συμμετέχοντες, εκ των οποίων δύο ήταν πολιτικοί μηχανικοί, μία οικονομολόγος, μία παιδοψυχολόγος, μία βοηθός σχολικού λεωφορείου και ένας κύριο ασχολείται με μεταλλικές κατασκευές. Το ηλικιακό φάσμα ήταν δέκα χρόνια (30 - 40 χρονών) και τα ονόματα των συμμετεχόντων είναι: ο Σωτήρης, η Θένια, η Αφροδίτη, ο Αχιλλέας, η Ευτυχία και ο Κώστας.

Στη συνέχεια ακολουθούν αποσπάσματα που μαρτυρούν τα ποικίλα αισθήματα των συμμετεχόντων και συσχέτιση με τα σχολικά βιώματα.

…αδιάφορα αισθήματα… (Θένια και Ευτυχία)

…χάρηκα… μου αρέσουν πολύ τα μαθηματικά, είναι κομμάτι απ’ τη ζωή μου… (Σωτήρης)

…θα με ενδιέφερε μία συζήτηση για τα μαθηματικά… (Κώστας)

…ερωτικά… (Αχιλλέας)

…και βέβαια! Γιατί τη γνωριμία με τα μαθηματικά την κάναμε μέσα από το σχολείο και μετά έγινε τρόπος σκέψης… σίγουρα και οι καθηγητές παίζουν ρόλο, αλλά το αντικείμενο πιο πολύ… (Σωτήρης)

…μόνο οι αριθμοί που έβλεπα μου άρεσαν… μου άρεσε να ασχολούμαι και να τα διαβάζω… (Αχιλλέας)

…Στα μαθηματικά δεν παίζει ρόλο το σχολείο, υπάρχουν άνθρωποι που είναι αγράμματοι που ξέρουν να λογαριάζουν, ξέρουν μαθηματικά… (Κώστας)

Γενικότερα, οι περισσότεροι συμμετέχοντες ήταν θετικά διακείμενοι απέναντι στη συζήτηση, αλλά και στα Μαθηματικά γενικότερα, γεγονός που επηρεάστηκε από τη σχολική τους ζωή. Η άποψη αυτή επαληθεύεται από το είδος των αναμνήσεων που ανακάλεσαν, που, εκτός της Ευτυχίας, ήταν όλες θετικές.

Επόμενο θέμα της συζήτησης ήταν οι τομείς της καθημερινότητας που συναντάει ένας ενήλικας τα Μαθηματικά, αλλά και οι απαιτούμενες γνώσεις για αξιοπρεπή διαβίωση. Οι καθημερινές δραστηριότητες που περιέχουν Μαθηματικά, σύμφωνα με τους συμμετέχοντες, είναι: οι οικονομικές συναλλαγές, η πληρωμή λογαριασμών, η εκτέλεση συνταγής (χρήση αναλογιών στα υλικά), η κατανάλωση φαρμάκων, οι τραπεζικές διαπραγματεύσεις, η επίσκεψη στο κομμωτήριο (αναλογία στη βαφή), διάφορες ενέργειες στον εργασιακό χώρο του καθενός, οι διάφορες καταμετρήσεις (μετρικό σύστημα/εμβαδόν/μέτρηση ενός χωραφιού μόνο με κορδέλα). Για να ανταποκριθεί ένας ενήλικας στις παραπάνω δραστηριότητες θα πρέπει να γνωρίζει τις βασικές πράξεις, τα επιτόκια, την αναλογία, τα σχήματα και να έχει βασικές γνώσεις στις πιθανότητες και τη στατιστική.

Η πρώτη απάντηση στο δοθέν πρόβλημα ήρθε αυθόρμητα από τον Σωτήρη.

…146:14 = 1,10
11×4 = 44
44-1,10 = 32,90 €…

Με τη νύξη των υπόλοιπών μελών κατανόησε το λάθος του και προχώρησαν στη μέτρηση του επιθυμητού προς πλακόστρωση εμβαδού και βρήκαν ότι τα πλακακιά θα κοστίσουν περίπου 900 €. Ο Αχιλλέας, βλέποντας το πρόβλημα σαν μηχανικός, πρόσθεσε πως το συνολικό κόστος θα είναι 3000 € περίπου, δεδομένων των υλικών, των πληρωμών και του ξηλώματος. Πιο συγκεκριμένα, θεώρησε πως το 1 m^2 θα κοστίσει 8 €, άρα τα 150 θα κοστίσουν 1200 €. 1000 € είναι το κόστος για τις κόλλες, τους αρμούς κλπ και το ΙΚΑ των εργατών. Αθροιστικά είναι:

1200 € (πληρωμή τριών εργατών για 5 μέρες δουλειά) + 800 € (πλακάκια) +
1000 € (υλικά και ΙΚΑ) = 3000 € περίπου

Οι γυναίκες της ομάδας τόνισαν πως, επειδή δε γνωρίζουν από αυτές τις διαδικασίες, θα επικοινωνούσαν με ειδικούς και θα έπαιρναν προσφορές. Γενικότερα, το πρόβλημα συζητήθηκε περισσότερο από τους τρεις άντρες της ομάδας και, εν τέλει, η απάντηση του Αχιλλέα έγινε αποδεκτή από όλους πλην του Κώστα, ο οποίος κοστολόγησε την αλλαγή στα 2200 € - 2300 €.

Στο τέλος της συζήτησης, μετά την περίληψη από την ερευνήτρια, παρατέθηκαν οι εξής απόψεις:

…χάνουν την πρακτικότητά τους (τα μαθηματικά στο σχολείο), γιατί κοιτάμε τις Πανελλήνιες και τελειώνει κάποιος και δεν ξέρει να υπολογίσει το ΦΠΑ… (Θένια)
…αν δεν κάναμε τα μαθηματικά του γυμνασίου και του λυκείου, δε θα φτάναμε στο φεγγάρι… (Σωτήρης)

Ομάδα 6

Η έκτη ομάδα αποτελούνταν από τέσσερις γυναίκες (Ελεάνα, Ελπίδα, Κατερίνα και Αγγελική), απόφοιτες του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Καμία από αυτές δεν εργαζόταν σε σχολείο, αλλά επαγγελματικά ασχολούνταν με τα παιδιά ως φύλαξη παιδιών ή παρέχοντας βοήθεια στη μελέτη στο σπίτι ή παραδίδοντας μαθήματα μουσικής. Η συγκεκριμένη συζήτηση πραγματοποιήθηκε μέσω Skype, λόγω διαμονής των συμμετεχουσών σε διαφορετικές πόλεις.

Οι συμμετέχουσες ξεκίνησαν τη συζήτηση με ουδέτερα αισθήματα, με απορία, αλλά και άγχος ως προς περιεχόμενο, μήπως χρειάζονταν να απαντήσουν σε δύσκολες μαθηματικές ερωτήσεις. Το άγχος ήταν το κυρίαρχο αίσθημα που εξέφρασε η Ελεάνα στηριζόμενη σε δυσάρεστες εμπειρίες από τον δάσκαλό της, αλλά και της Ελπίδας. Η Ελπίδα, ωστόσο, πρόσθεσε πως στο λύκειο η αντιληπτική της ικανότητα στα Μαθηματικά βελτιώθηκε πολύ, ενώ οι καθηγητές δεν έπαιξαν θετικό ή αρνητικό ρόλο, άλλα όσο κατανοούσε τα Μαθηματικά, τόσο τα αγαπούσε και ασχολούνταν. Η Αγγελική και η Κατερίνα μελετούσαν τα Μαθηματικά, για να μπορέσουν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της τάξης, αλλά η στάση τους ήταν ουδέτερη. Κοινός τόπος όλων ήταν η πεποίθησή τους σύμφωνα με την οποία ο δάσκαλος/καθηγητής των Μαθηματικών επηρεάζει άμεσα την άποψη και τη σχέση των μαθητών με τα Μαθηματικά. Από το σύνολο των συμμετεχουσών, η Ελπίδα ακολούθησε θετική κατεύθυνση στο λύκειο, ενώ οι υπόλοιπες ακολούθησαν θεωρητική κατεύθυνση, με αποτέλεσμα να χάσουν την επαφή τους με τα Μαθηματικά. Στη συνέχεια παρατίθενται αποσπάσματα από τις σχολικές εμπειρίες των συμμετεχουσών.

…είναι πολύ αρνητική… έκτη δημοτικού και ήμασταν στο κεφάλαιο με τους τόκους… και εγώ είχα καταλάβει κάποια πράγματα, αλλά δεν το είχα πολύ… στο διάλειμμα λέει η κυρία (απευθυνόμενη στην Ελεάνα και έναν συμμαθητή της) «Καθίστε μέσα και θα διαβάσεις ξανά όσα γράψαμε στον πίνακα, για να τα καταλάβατε και την επόμενη ώρα που θα μπω μέσα θέλω να τα έχεις καταλάβει…»… εγώ δεν μπόρεσα να κάνω την άσκηση που μας άφησε η κυρία… και ακόμα και τώρα όταν ακούω τη λέξη τόκος ή επιτόκιο μου έρχεται εκείνη η εικόνα… (Ελεάνα)

…όταν ήμουν πέμπτη, ήμουν στον πίνακα και με έβαλε να λύσω την άσκηση… η κόρη της δασκάλας φώναξε: «Μας γκάστρωσες! Τέλειωνε επιτέλους!» και η μητέρα της ποτέ δεν της φώναξε κι εγώ αισθάνθηκα πολύ άσχημα που άργησα… (Κατερίνα)

…στο δημοτικό έτυχε να κάνουμε κάτι με τον μπαμπά… παρακάτω… και σηκώθηκα στον πίνακα και πήγαινε καλά και την έλυσα την άσκηση και ήξερα να πω ότι ήταν μικτά κλάσματα, ενώ η υπόλοιπη τάξη δεν ήξερε και χάρηκα πολύ… (Αγγελική)

Στη συνέχεια, ακολούθησε συζήτηση για τα Μαθηματικά που συναντάει ένας ενήλικας στην καθημερινότητά του. Αρχικά, αναφέρθηκαν οι εκπτώσεις, ο τόκος και το επιτόκιο (εφαρμογές σε αγορές και τραπεζικές συναλλαγές) και οι μετατροπές στις μονάδες μέτρησης του μήκους. Έπειτα, οι συμμετέχουσες ανέφεραν εφαρμογές των μαθηματικών στη μαγειρική (δόσεις, αναλογία, μέτρηση γραμμαρίων) και στη μουσική (αξίες). Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στις αγορές του σούπερ μάρκετ, στην εύρεση προσφορών που συμφέρουν τον καταναλωτή. Τόνισαν την ανάγκη να βρει ο καταναλωτής πόσο κοστίζει το ένα τεμάχιο, ώστε να μπορέσουν να καταλήξουν σε κάποια προσφορά και ανέφεραν παραδείγματα. Ένας άλλος τομέας που επηρεάζεται από τα Μαθηματικά είναι η οδήγηση, ο χρόνος σε σχέση με την απόσταση ή η κατανάλωση καυσίμων σε σχέση με την απόσταση. Η Ελέανα και η Ελπίδα, ούσες σύζυγοι και μητέρες, επεσήμαναν την ανάγκη να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο, για να στηρίξουν την οικονομία του σπιτιού. Επίσης, η Ελπίδα υποστήριξε την άποψη ότι τα Μαθηματικά απέκτησαν για εκείνη πρακτικότητα αρκετά χρόνια αφού τελείωσε το δημοτικό, ίσως επειδή είναι η ανάγκη που οδηγεί τη νοικοκυρά ή η φοιτήτρια να χρησιμοποιήσει τα Μαθηματικά, και οι υπόλοιπες συμφώνησαν σε αυτή την άποψη.

Το πρόβλημα που τέθηκε στις συμμετέχουσες ήταν η αλλαγή πλακακιών στο σπίτι που θα θεωρούσαν δικό τους. Παρατίθενται αποσπάσματα από τις αντιδράσεις τους.

…αχ το καφέ δεν είναι ωραίο… (Αγγελική)

…το άλλο λερώνει πολύ… (Ελπίδα)

…το Kreta σε χρώμα μπεζ λέω εγώ… (Αγγελική)

…να μη φαίνονται τα ψίχουλα… (Ελεάνα)

…αυτό που διαλέξαμε είναι πολύ ακριβό… έχει 6 €!... (Ελπίδα)

…δεν πρέπει να συνυπολογίσουμε και το κόστος της εργασίας αυτού που θα βάλει τα πλακάκια ή θα τα βάλουμε εμείς;… (Ελεάνα)

…προφανώς θα ζητήσουμε από κάποιον ειδικό να μας τα βάλει… (Ελπίδα)

…άμα έχουμε έναν παππού να μας τα βάλει; Εμάς ο παππούς μας μας τα έβαλε! (Αγγελική)

…άμα το πλακάκι είναι λεπτό θα σπάει πιο εύκολα… (Ελεάνα)

…είναι πολύ ανοιχτό το μπεζ, θα λερώνει… έχουμε και τρίχες εμείς οι γυναίκες… (Ελέανα)

Οι συμμετέχουσες μελέτησαν προσεκτικά όλα τα χαρακτηριστικά των πλακακιών για μερικά λεπτά και, αφού προβληματιστήκαν για την πρακτικότητά του και την ευκολία στην καθαριότητα, κατέληξαν στο ακριβό πλακάκι με τα 6 €. Στη συνέχεια, υπολόγισαν την επιφάνεια που θα γινόταν η αλλαγή, τη βρήκαν ίση με 146 m^2 και την πολλαπλασίασαν με το κόστος της πλακόστρωσης για κάθε είδος πλακακιού. Η διαφορά, ανάλογα με το πλακάκι, βρέθηκε γύρω στα 300 € και πρότειναν να αγοράσουν τα φτηνά πλακάκια και να καθαρίζουν πιο συχνά, αλλά εξαρτάται η επιλογή από την οικονομική κατάσταση του ιδιοκτήτη.

Σχετικά με το εργατικό δυναμικό, θεώρησαν πως θα χρειάζονταν δύο εργάτες που θα δούλευαν τέσσερις μέρες (δύο μέρες για το ξήλωμα και δύο μέρες για την τοποθέτηση). Δεδομένου ότι το μεροκάματο είναι περίπου 50 €, το κόστος για τους εργάτες θα ήταν 400 €. Επίσης, πρόσθεσαν στο συνολικό κόστος 100 € - 200 € για τα επιπλέον υλικά.

Εν τέλει, οι συμμετέχουσες δήλωσαν πως 500 € θα χρειάζονταν για τους εργάτες και τα υλικά και 900 € ή 600 € για τα πλακάκια, ανάλογα με το πλακάκι που θα επέλεγε κανείς. Άρα, ο ιδιοκτήτης θα πλήρωνε 1100 € ή 1400 €. Η συζήτηση ολοκληρώθηκε με απόψεις σχετικές με τη διδασκαλία των μαθηματικών.

…είναι και θέμα ψυχολογίας αυτό με τα μαθηματικά… (Ελεάνα)

Ομάδα 7

Στην έβδομη ομάδα συμμετείχαν τέσσερις άνδρες, των οποίων η κοινή ενασχόληση ήταν το ποδόσφαιρο, και ήταν ο Θεμιστοκλής, ο Σπύρος, ο Κίμωνας και ο Βαλάντης. Η επαγγελματική τους δραστηριότητα διαφοροποιούνταν, καθώς ο Θεμιστοκλής ήταν μικροβιολόγος, ο Κίμωνας ήταν προπονητής σε ακαδημίες ποδοσφαίρου, ο Σπύρος εργαζόταν σε χώρο στάθμευσης και απασχολούταν ενίοτε με λογιστικές εργασίες, ενώ ο Βαλάντης δήλωσε άνεργος. Εκείνος που ξεχώριζε ηλικιακά ήταν ο Θεμιστοκλής, καθώς ήταν κατά 12 χρόνια περίπου μεγαλύτερος από τους υπόλοιπους.

Η συζήτηση στην οποία κλήθηκαν, δεδομένου του μαθηματικού περιεχομένου, προκάλεσε κυρίως αδιάφορα αισθήματα, τα οποία αφορούσαν και τα Μαθηματικά γενικότερα. Εξαίρεση αποτέλεσε η άποψη του Βαλάντη, ο οποίος υποστήριξε ότι έβρισκε ενδιαφέρουσα μία συζήτηση που να σχετίζεται με τα Μαθηματικά, καθώς αποτελούν έναν ολόκληρο κόσμο και είναι μία γλώσσα.

Οι απόψεις των συμμετεχόντων για Μαθηματικά, όπως δήλωσαν, σχετίζονταν με σχολικές εμπειρίες. Κοινή άποψη τους ήταν πως τα σχολικά Μαθηματικά, κυρίως τα Μαθηματικά που διδάχθηκαν στις τελευταίες τάξεις της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ήταν «άχρηστα» και ανεξάρτητα από τις καθημερινές πρακτικές. Ωστόσο, ο Σπύρος εξέφρασε την άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι ευχάριστα, γιατί έχουν τρόπο λύσης στα προβλήματα που θέτουν, άποψη που βρήκε σύμφωνο και τον Θεμιστοκλή. Στη συνέχεια, παρατίθενται αποσπάσματα από τον διάλογο των συμμετεχόντων και δύο αναμνήσεις, του Σπύρου και του Κίμωνα.

…εννοείται, γιατί στο σχολείο μας μάθανε τα μαθηματικά που δε θα χρειαστούμε ποτέ στη ζωή μας, των τελευταίων ετών στο Λύκειο… (Θεμιστοκλής)

…δεν τα παρακολουθούσα ποτέ… αν εξαιρέσεις πρόσθεση, πολλαπλασιασμό κλπ που χρειάζονται στην καθημερινότητά μας, όλα τ' άλλα είναι παντελώς, μα παντελώς αδιάφορα… (Κίμωνας)

…είχα έναν καθηγητή που συμπαθούσα… ξεχάστηκαν, γιατί δεν τα χρειαστήκαμε στην καθημερινότητα…

…το να βρεις μία λύση σε εξιτάρει… (Θεμιστοκλής)

…(θυμάμαι) το παράδειγμα της διαμέσου... ήταν έξτρα στην ερώτηση (της καθηγήτριας)… (Κίμωνας)

…19,7 στις πανελλήνιες και ποτέ δεν έμαθα πού έχασα το 0,3… (Σπύρος)

Επόμενο θέμα στη συζήτηση ήταν η σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με τα Μαθηματικά που χρησιμοποιεί ένας ενήλικας στην καθημερινότητά του, αλλά και οι τομείς που απαντώνται τα Μαθηματικά. Γενικότερα, και οι τέσσερις συμμετέχοντες τόνισαν ότι είναι απαραίτητα τα βασικά Μαθηματικά για έναν ενήλικα, οι τέσσερις πράξεις δηλαδή και η απλή μέθοδος των τριών. Ειδικότερα, ο Κίμωνας δήλωσε πως είναι απαραίτητα τα Μαθηματικά που διδάσκονται μέχρι τη δευτέρα δημοτικού, ενώ ο Βαλάντης τόνισε πως γνωρίζοντας κάποιος Μαθηματικά γίνεται πιο πρακτικός στην καθημερινότητά του. Επιπλέον, ένας ενήλικας μπορεί να συναντήσει τα Μαθηματικά και να ωφεληθεί από αυτά στην εφορία, στις τραπεζικές και οικονομικές συναλλαγές, στη χρήση του ΦΠΑ, στις χωρικές διατάξεις, στο παρκάρισμα (γεωμετρία) και στα προγνωστικά των αγώνων (στατιστική). Σημαντική γνώση θεωρήθηκε, επίσης, η χρήση της απλής μεθόδου των τριών και των πηλίκων (πχ 2/3).

Το πρόβλημα που δόθηκε στους συμμετέχοντες σχετικά με την αλλαγή πλακακιών σε δεδομένο σπίτι που θα θεωρούσαν δικό τους προκάλεσε έντονη συζήτηση και διχογνωμία στην ομάδα. Ο πρώτος που πήρε τον λόγο ήταν ο Σπύρος, ο οποίος αναρωτήθηκε για το ύψος του οικήματος, και δήλωσε με βεβαιότητα πως το ελάχιστο κόστος θα ήταν 90 €. Η απάντηση αυτή, όπως φάνηκε, προέκυψε από παρερμηνεία της εκφώνησης του προβλήματος. Επόμενο βήμα ήταν ο υπολογισμός της επιφάνειας που θα πλακοστρωνόταν. Στη συνέχεια, παρατίθεται αυτούσια αποσπάσματα από τον διάλογο των συμμετεχόντων.

Κάτι οι κόλλες, να σου σπάσει και κανένα… 700 € - 800 € δεν τα γλιτώνεις! (Βαλάντης)
Το σοβατοπί; (Σπύρος)
Κάτι τα σάντουιτς των μαστόρων; (Κίμωνας)
Πόσο παίρνει ο μάστορας το τετραγωνικό; (Θεμιστοκλής)
Αναλόγως. (Βαλάντης)
Αν τα έχεις όλα τσάμπα, το λιγότερο 569 €! (Σπύρος)
Μία κόλλα κάνει 6 €. (Βαλάντης)
Με προσωπική εργασία 700 € - 800 €. (Κίμωνας)

…καφέδες, σάντουιτς, πλακάκια, σταυροί, αρμοί…. 600 € - 650 € το ελάχιστο… (Σπύρος)
Αν πάρεις εργαλεία και τέτοια, φτάνεις 1500 €… ρεύματα… (Βαλάντης)

Πρέπει να σημειωθεί πως όλοι θεώρησαν πως θα αγόραζαν το πλακάκι England, επειδή ήταν το φθηνότερο και οι τοποθετήσεις τους βασίστηκαν στην υπόθεση ότι θα έκαναν προσωπική εργασία και δε θα χρειάζονταν εργάτες. Μετά από νύξη της ερευνήτριας για παρουσία εργατών, ο Θεμιστοκλής επεσήμανε πως, όταν κάποιος υπολογίζει το κόστος ανάλογα με το τετραγωνικό μέτρο, δε θα πρέπει να τον απασχολεί ούτε η ποσότητα των ημερών, ούτε το πλήθος των εργατών. Ο Βαλάντης πρόσθεσε πως η πληρωμή των εργατών κυμαίνεται από 7 € έως 12 € ανά m^2. Τέλος, οι συμμετέχοντες εξέφρασαν δύο διαφορετικές γνώμες για το συνολικό κόστος, συναθροισμένης της πληρωμής εργατών. Ο Βαλάντης και ο Θεμιστοκλής υποστήριξαν πως η συνολική διαδικασία θα κόστιζε «λίαν επιεικώς» 2000 €, ενώ ο Κίμωνας και ο Σπύρος κοστολόγησαν τη διαδικασία με 1200€.

Ομάδα 8

Η όγδοη ομάδα απαρτίστηκε από τέσσερις γυναίκες που έχουν συγγενικές σχέσεις και είναι γειτόνισσες. Ήταν η Κάτια, η Ευγενία, η Ευτυχία και η Γεωργία. Από το σύνολο των μελών της ομάδας, οι δύο εργάζονταν, η Κάτια σε φαρμακείο και η Ευγενία σε τράπεζα, ενώ η Ευτυχία και η Γεωργία ασχολούνταν με τα οικιακά. Επιπλέον, οι τρεις συμμετέχουσες είχαν ολοκληρώσει τις προπτυχιακές σπουδές τους, ενώ η Γεωργία είχε ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στη συνέχεια παρατίθενται αποσπάσματα από τις απαντήσεις που έδωσαν οι συμμετέχουσες, όταν ρωτήθηκαν για τα αισθήματα που προκάλεσε μία συζήτηση με μαθηματικό περιεχόμενο και η σχέση αυτών με σχολικά βιώματα.

Η αλήθεια είναι ότι πάθαμε ένα εγκεφαλικό…! (Ευτυχία)

Ανάλογα… αν ήταν σαν το ερωτηματολόγιο εντάξει, αλλά αν είχε τίποτα ολοκληρώματα τότε θα είχα πρόβλημα! (Κάτια)

Δε με άγχωσε, γιατί το έχω στην καθημερινότητά μου. (Ευγενία)

Εγώ είναι η αλήθεια πως αγχώθηκα…! (Ευτυχία)

Νομίζω πως ναι… απ' το δημοτικό ξεκίνησε. Αγχωνόμουν πολύ με τον δάσκαλο, με τα μαθηματικά. Στο γυμνάσιο άρχισαν να μου αρέσουν, γιατί είχα πολύ καλούς καθηγητές… (Ευτυχία)

Δεν τα πήγαινα καθόλου καλά με τα μαθηματικά… στο δημοτικό, όχι σχέση με τον δάσκαλο, αλλά με τη μάνα μου που με διάβαζε… μονόδρομος για μένα η θεωρητική… (Ευγενία)

Εγώ είχα καλή σχέση με τα μαθηματικά… και στο δημοτικό και στο γυμνάσιο μου άρεσαν… με βοηθούσαν οι δάσκαλοι (για να έχω καλή σχέση)… (Γεωργία)

Δημοτικό, γυμνάσιο και πρώτη λυκείου ήμουν πάρα πολύ στα μαθηματικά… αν με ρωτούσες, μαθηματικός ήθελα να γίνω… (μετά) πάρα πολύ δύσκολα… είχα και κάποιες κρίσεις πανικού και άγχους… έχασα κάποια επεισόδια… (Κάτια)

Γενικότερα, θετικές εντυπώσεις και αναμνήσεις εξέφρασε κυρίως η Γεωργία, ενώ η Ευγενία δήλωσε πως η σχέση της με τα Μαθηματικά βελτιώθηκε κατά τη διάρκεια των σπουδών της, παρόλο που δυσκολεύτηκε αρκετά.

Το επόμενο θέμα στη συζήτηση ήταν η εφαρμογή των σχολικών μαθηματικών στην καθημερινότητα και οι μαθηματικές έννοιες/δραστηριότητες που χρησιμοποιεί ένας ενήλικας καθημερινά. Η ομάδα ήταν ομόφωνη στην άποψη ότι η αξιοπρεπής διαβίωση ενός ενήλικα προϋποθέτει τις μαθηματικές γνώσεις που παρέχονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Τομείς που συναντάει ένας ενήλικας τα Μαθηματικά, καθώς και οι αντίστοιχες απαιτούμενες γνώσεις είναι: οι οικονομικές συναλλαγές (μαθηματικές πράξεις), μαγειρική (αναλογίες), εκπτώσεις/αγορές (ποσοστά), διαχείριση οικονομικών στο σπίτι, μισθοδοσία και χρήση βενζίνης.

Το πρόβλημα αφορούσε στην πλακόστρωση ενός σπιτιού που θα θεωρούσαν ότι τους ανήκει και προκάλεσε, αρχικά, σύγχυση και αρκετή σιωπή ανάμεσα στα μέλη της συγκεκριμένης ομάδας. Σε πρώτη φάση, αναζήτησαν την πιο οικονομική λύση, βασισμένη στο πιο οικονομικό πλακάκι, γιατί θεώρησαν πως αυτό ήταν το ζητούμενο. Επιπλέον, εστίασαν στις διαστάσεις των πλακακιών, μέχρι να τονίσει η Γεωργία πως αυτό που ενδιαφέρει τον αγοραστή είναι η τιμή για κάθε m^2. Παρακάτω δίνεται ο διάλογος που ακολούθησε.

Γύρω στα 150 € - 140 €. (Κάτια)

Εγώ με το πλακάκι αυτό (το England) 570 €… (Γεωργία)

Πώς το βρήκες αυτό; (ερευνήτρια)

Έκανα τις πράξεις! Βρήκα το εμβαδόν, αφαίρεσα το μπάνιο και έκανα επί την τιμή του τετραγωνικού. (Γεωργία)

Κι εγώ αυτό έκανα, αλλά δεν ήξερα πώς να αφαιρέσω το μπάνιο. (Ευτυχία)

Μα αφού είναι 37 μέτρα! (Ευγενία)

Γύρω - γύρω θα βάλουμε πλακάκι ή σε όλο το σπίτι; (Γεωργία)

Δε θυμάμαι πώς κάνεις τα μέτρα, τετραγωνικά μέτρα! (Κάτια)

Πρέπει να σημειωθεί πως, παρόλο που η Γεωργία είχε ορθή προσέγγιση στο θέμα, ήταν διστακτική, όπως και η Ευτυχία. Επίσης, όταν ρωτήθηκαν οι συμμετέχουσες αν η τελική τους είναι «570 €» η Γεωργία τόνισε πως η ανακαίνιση απαιτεί μάστορες και επιπλέον υλικά. Η Κάτια ανέφερε πως το κόστος θα εξαρτηθεί από την ποσότητα ημερών που θα εργαστεί ο πλακάς, από το είδος της κόλλας που θα χρησιμοποιήσει κλπ. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης που έγινε το συνολικό ποσό μεταβαλλόταν ανάλογα με το κόστος που υπέθεταν για τα επιπλέον υλικά και την πληρωμή του εργάτη βάσει των ημερών που θα δούλευε. Στο σημείο αυτό, η Ευγενία τόνισε πως επρόκειτο για αλλαγή και όχι απλή τοποθέτηση.

Κλείνοντας, οι συμμετέχουσες κατέληξαν πως το συνολικό θα ήταν περίπου 1200 € - 1500 €, δεδομένου ότι υπολόγισαν το κόστος με το οικονομικότερο πλακάκι, και εξέφρασαν τις εξής απόψεις:

…γι' αυτό δεν πάει καμία γυναίκα μόνη της…! (Κάτια)
Σαν γυναίκες θα θέλαμε κάτι όμορφο, ενώ ο άντρας θα ' λέγε αυτό με τα 3,90… (Ευτυχία)
Να μην κάναμε την ανακαίνιση…! Κοστίζει πολλά! (Ευτυχία)

Ομάδα 9

Στην ένατη ομάδα συμμετείχαν τρεις γυναίκες και ένας άντρας, η Δήμητρα, η Έλλη, η Αλκμήνη και ο Δημοσθένης. Οι συμμετέχοντες συνδέονταν με συγγενικές και φιλικές σχέσεις, ενώ οι επαγγελματικές και ακαδημαϊκές τους πορείες εμφάνιζαν ποικιλία. Η Έλλη και η Δήμητρα είναι κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, η Αλκμήνη είναι νηπιαγωγός, αλλά ασχολείται με τα οικιακά, ενώ ο Δημοσθένης έχει ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και είναι πτηνοτρόφος.

Με εξαίρεση την τοποθέτηση του Δημοσθένη, οι υπόλοιποι ανέφεραν αισθήματα ενδιαφέροντος και περιέργειας για τη συζήτηση, ενώ ο Δημοσθένης δήλωσε πως είχε «τάσεις φυγής». Την άποψη αυτή συνέδεσε με σχολικά βιώματα, καθώς δεν τα πήγαινε ανέκαθεν καλά με τα Μαθηματικά και, γενικότερα, με τα μαθήματα. Σχέση ανάμεσα στα αισθήματά τους απέναντι στα Μαθηματικά και τα σχολικά βιώματα εξέφρασαν και τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Πιο συγκεκριμένα, η Έλλη και η Δήμητρα είχαν από την παιδική ηλικία πολύ καλή σχέση με τα Μαθηματικά. Στην περίπτωση της Έλλης έπαιξαν σημαντικό ρόλο οι καθηγητές, ενώ στην περίπτωση της Δήμητρας οι καθηγητές είχαν αποθαρρυντική στάση και δημιουργούσαν αφορμές για διαπληκτισμό. Η Αλκμήνη, τέλος, είχε ουδέτερες εμπειρίες και μέτριους βαθμούς, ενώ δήλωσε πως «το αντικείμενο είναι ενδιαφέρον, γιατί από το πρωί μέχρι το βράδυ κάνουμε Μαθηματικά».

Επόμενο θέμα στη συζήτηση ήταν η ανάδειξη πτυχών της καθημερινότητας ενός ενήλικα όπου χρησιμοποιούνται Μαθηματικά ή απαιτούνται μαθηματικές γνώσεις και οι μαθηματικές έννοιες/δραστηριότητες που είναι απαραίτητες για έναν ενήλικα. Η πρώτη απάντηση των συμμετεχόντων ήταν οι οικονομικές συναλλαγές ως διαδικασία που στηρίζεται στα Μαθηματικά και τη χρήση πιθανοτήτων. Επιπλέον, ένας ενήλικας χρησιμοποιεί τα Μαθηματικά στις αγορές του και στις περιπτώσεις που θέλει να εκτιμήσει χρονικά διαστήματα ή να προγραμματίσει κάποια συνάντηση, ενώ οι μαθηματικές απαραίτητες γνώσεις για έναν ενήλικα περιλαμβάνουν τις τέσσερις πράξεις, τη χρήση των ποσοστών, την απλά μέθοδο των τριών και τις βασικές έννοιες της γεωμετρίας. Στο σημείο αυτό ακούστηκαν οι εξής απόψεις:

…άξιζε η γνώση, αλλά καθημερινά δεν τα χρειαζόμαστε… (Αλκμήνη)

…τα μαθηματικά γενικά βοηθάνε στον κριτικό τρόπο σκέψης… (Έλλη)

…μαθαίναμε πολλά πράγματα που δεν τα χρειαστήκαμε πουθενά… (Αλκμήνη)

Σχετικά με το πρόβλημα, η πρώτη απάντηση που δόθηκε για το κόστος της πλακόστρωσης σε ένα σπίτι που θεώρησαν δικό τους ήταν από τη Δανάη και την Έλλη. Σύμφωνα με την προσέγγισή τους το κόστος για τα πλακάκια θα ήταν περίπου 730 €. Η τιμή αυτή είναι το γινόμενο των τετραγωνικών μέτρων που θα αλλαχτούν τα πλακάκια, 146 m^2, και μίας μέσης τιμής για το κόστος των πλακακιών ανά m^2. Στη συνέχεια παρατίθεται απόσπασμα από τον διάλογο των συμμετεχόντων.

Συμφωνώ… αλλά δε θα έπαιρνα μέση τιμή, θα διάλεγα μία από αυτές… (Αλκμήνη)

Ας υποθέσουμε ότι θα βασιστείτε σε αυτά τα πλακάκια. Ποιο θα διαλέγατε και γιατί; (ερευνήτρια)

…στο δικό μου σπίτι το ακριβό… (Δήμητρα)

…κάτι ενδιάμεσο… ούτε πολύ ακριβό, ούτε πολύ φθηνό… (Αλκμήνη)

…θα διαλέγαμε το καλύτερο! (Δημοσθένης)

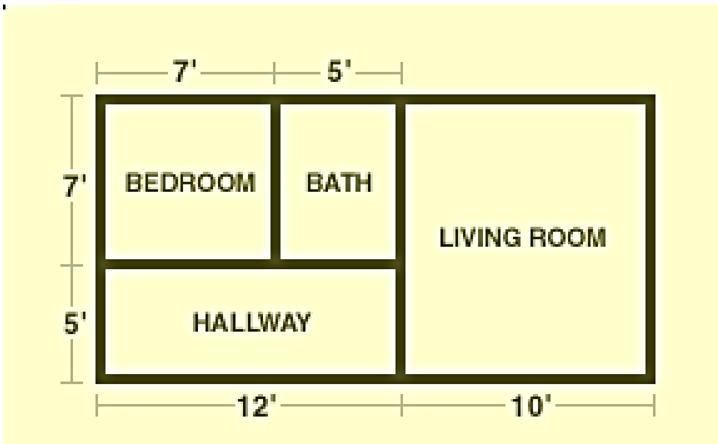
…εξαρτάται από την ποιότητα του πλακιδίου και την οικονομική κατάσταση… (Αλκμήνη)

Για λόγους αισθητικές, ποιότητας και τιμής διάλεξαν όλοι το καφέ πλακάκι, το Spatolato. Όταν ερωτήθηκαν αν έχουν καταλήξει στο συνολικό ποσό, η Έλλη τόνισε πως υπάρχουν και άλλα έξοδα σε μία τέτοιου είδους αλλαγή. Στη συνέχεια, η Αλκμήνη έθεσε το θέμα της πληρωμής του εργάτη και ο Δημοσθένης επεσήμανε πως επρόκειτο για αλλαγή και όχι απλή τοποθέτηση πλακακιών. Έπειτα από συζήτηση, κατέληξαν πως θα χρειάζονταν δύο εργάτες, για δέκα εργάσιμες μέρες και με 25 € ημερομίσθιο έκαστος. Το συνολικό κόστος εκτιμήθηκε περίπου στα 2000 €:

900 (κόστος πλακακιών) + 500 (πληρωμή εργατών) + 600 (έξτρα υλικά) = 2000 €

Ομάδα 10

Η δέκατη ομάδα αποτελούνταν από τέσσερις γυναίκες που έχουν ολοκληρώσει τις προπτυχιακές τους σπουδές στο Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης, είχαν φιλικές σχέσεις και ήταν η Φαίη, η Ερατώ, η Καλλιόπη και η Κερασία. Οι δύο από αυτές ασχολούνταν ιδιωτικά με την εκπαίδευση, ενώ η Καλλιόπη και η Κερασία δεν απασχολούνταν επαγγελματικά. Η συγκεκριμένη ομάδα ήταν η πρώτη ομάδα με την οποία πραγματοποιήθηκε συνάντηση και η κάτοψη του σπιτιού που τους δόθηκε ήταν διαφορετική από τις άλλες ομάδες. Η βασική διαφορά με την κάτοψη που δόθηκε στις υπόλοιπες εννιά ομάδες ήταν στις διαστάσεις. Η κάτοψη που τους δόθηκε ήταν η εξής:



Εικόνα 9

Η συζήτηση προκάλεσε ουδέτερα αισθήματα στις συμμετέχουσες. Εξαίρεση αποτέλεσε η Ερατώ, η οποία εξέφρασε άγχος, γιατί δεν έχει καλή σχέση με τα Μαθηματικά και φοβήθηκε πως έρθει αντιμέτωπη με ένα πρόβλημα που δε θα μπορούσε να λύσει. Σε μία αναζήτηση για το αν τα αισθήματα επηρεάστηκαν από σχολικά βιώματα πραγματοποιήθηκε ο κάτωθι διάλογος, στον οποίο φαίνεται πως οι στάσεις των μελών της ομάδας καθορίστηκαν από τα σχολικά τους βιώματα και τις αναμνήσεις τους.

Σίγουρα! (Κερασία)

Είχα θέμα στο δημοτικό και μου έχει μείνει σαν βίωμα… άγχος σε κυρίευε και φόβος… μετά άλλαξα πολύ, είχαμε μία πολύ καλή καθηγήτρια που μας έμαθε μαθηματικά από την αρχή… (Φαίη)

Αγαπημένο μου μάθημα… είμαι λίγο καμένη… από την πρώτη δημοτικού μέχρι την Τρίτη λυκείου πολύ καλούς καθηγητές… (Κερασία)

Αγαπημένο μου μάθημα… εκτός από τη δευτέρα γυμνασίου… δεν είχα μάθει μαθηματικά…. μ’ έκανε (ο καθηγητής) να τα μισήσω εκείνη τη χρόνια… (Καλλιόπη)

Σίγουρα! Είχα έναν δάσκαλο πέμπτη και έκτη δημοτικού που είχε τελειώσει και μαθηματικός και αν κάποιος ήταν αδύναμος των μείωνε μέχρι αηδίας… στο γυμνάσιο είχα ενθουσιαστεί… (Ερατώ)

Ήμασταν το μόνο σχολείο που έγραψε διαγώνισμα στις συναρτήσεις στη Δευτέρα γυμνασίου… έγραψα 15… με είχε πειράξει πάρα πολύ ο βαθμός τότε… (Καλλιόπη)

Θετικές αναμνήσεις… μόνο ένα διαγώνισμα μία εβδομάδα πριν τις πανελλήνιες και είχα πάρει 10 στα μαθηματικά κατεύθυνσης… δεν ήθελα να δώσω… (Κερασία)

…εικόνα φροντιστηρίου… πολύ αυστηρός… μας ρωτούσε πράγματα που δεν είχαμε κάνει και περίμενε να απαντήσουμε… εμείς σκύβαμε να μην απαντήσει κανείς τίποτα… (Φαίη)

Δημοτικό πάλι, διαγώνισμα… όλα τα παιδιά είχαν γράψει 10 και εγώ 8,5 και το είχε τονίσει ιδιαίτερα μέσα στην τάξη… (Ερατώ)

Έπειτα από την αναφορά σε σχολικά βιώματα και αναμνήσεις σειρά είχαν οι μαθηματικές έννοιες/ενέργειες που έχουν καθημερινή εφαρμογή και είναι απαιτούμενες για έναν ενήλικα. Οι συμμετέχουσες ανέφεραν τις τέσσερις πράξεις, τα κλάσματα, τις μετατροπές και τα ποσοστά. Επιπλέον, η Φαίη ανέφερε και τη στατιστική ως τομέα που βοηθάει κάποιον να σκέφτεται πιο κριτικά. Γενικότερα, οι συμμετέχουσες τόνισαν πως απαραίτητες γνώσεις είναι οι γνώσεις που παρέχονται με την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Σχετικά με την επίλυση του προβλήματος οι συμμετέχουσες είχαν μία διαφορετική προσέγγιση σε σχέση με τις άλλες ομάδες. Αντιμετώπισαν το πρόβλημα σαν ένα πρόβλημα που απαιτούσε ακριβή λύση την οποία εξήγαγαν μετά από κάποια βήματα. Το πρώτο βήμα ήταν να βρουν την επιφάνεια στην οποία θα τοποθετούνταν τα πλακάκια (229 m^2). Έπειτα, βρήκαν την ποσότητα των πλακακιών από κάθε είδος που θα χρειάζονταν, αφού υπολόγισαν την επιφάνεια του κάθε πλακακιού, με τη βοήθεια της διαίρεσης (1988 πλακάκια England, 1988 πλακάκια Kreta, 2103 πλακάκια Spatolato). Στη συνέχεια, υπολόγισαν το συνολικό κόστος των πλακακιών, αφού είχαν βρει την τιμή του κάθε πλακακιού από κάθε είδος, με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού. Πιο συγκεκριμένα:

Επικάλυψη επιφάνειας με πλακάκι Kreta

$$0,69 \times 1.988 = 1372 \text{ €}$$

Επικάλυψη επιφάνειας με πλακάκι England

$$0,45 \times 1.988 = 894,6 \text{ €}$$

Επικάλυψη επιφάνειας με πλακάκι Spatolato

$$0,65 \times 2.103 = 1367 \text{ €}$$

Πρέπει να σημειωθεί πως πραγματοποιήθηκε εκτενής συζήτηση για την επιλογή ενός πλακακιού. Οι παράμετροι που αναφέρθηκαν ήταν το γούστο, η τιμή, η ανθεκτικότητα, η γνώμη του πωλητή και η ποιότητα του πλακακιού. Εν τέλει, δεν αποφάσισαν από κοινού κάποιο συγκεκριμένο είδος, αλλά έδωσαν διαφορετικές απαντήσεις. Έπειτα από νύξη της ερευνήτριας για επιπλέον έξοδα, οι συμμετέχουσες ανέφεραν το εργατικό δυναμικό. Επικρατέστερη ήταν η άποψη της Κερασίας, η οποία στηριζόμενη σε προσωπικά βιώματα δήλωσε πως ο ιδιοκτήτης επικοινωνεί με έναν μάστορα και συμφωνούν σε μία τιμή βάσει της επιφάνειας του σπιτιού. Το πλήθος εργατών και η ποσότητα των απαιτούμενων ημερών για να ολοκληρωθούν οι εργασίες είναι θέματα που αναλαμβάνει ο μάστορας. Επίσης, σαν επιπλέον έξοδο αναφέρθηκε και το κόστος διαμονής σε ξενοδοχείο κατά τη διάρκεια της αλλαγής. Κλείνοντας, εκτιμήθηκε πως το συνολικό κόστος θα κυμαίνεται από 2000 € έως 2500 €, ανάλογα με το πλακάκι που θα επιλέξει ο ιδιοκτήτης, δεδομένου ότι η πληρωμή του εργατικού δυναμικού κοστολογείται στα 1000 € και τα έξτρα υλικά (ασβέστης, τσιμέντο κλπ) στα 150 €.

2.4.4 Συμπεράσματα από τις ομάδες εστίασης

Η προέκταση της έρευνας, που εστίασε στην γραπτή επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων από ενήλικες, ήταν η αντιμετώπιση ενός ρεαλιστικού προβλήματος από μία ομάδα, αφού είχε προηγηθεί μία συζήτηση για τα Μαθηματικά γενικότερα και τα σχολικά βιώματα των μελών της ομάδας σε σχέση με τα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες θα έπρεπε να αποφανθούν για το συνολικό κόστος που θα είχε η αλλαγή στα πλακάκια ενός σπιτιού με δεδομένη κάτοψη. Η κυρίαρχη μαθηματική έννοια στο συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν το εμβαδόν.

Αρχικά, οι συζητήσεις προκάλεσαν κυρίως ουδέτερα αισθήματα, αρνητικά αισθήματα ή αίσθημα περιέργειας στους περισσότερους συμμετέχοντες, ενώ σε ελάχιστες περιπτώσεις οι συμμετέχοντες εξέφρασαν ευχάριστα αισθήματα ή αίσθημα ανυπομονησίας. Κοινός τόπος όμως της πλειονότητας των συμμετεχόντων ήταν το γεγονός ότι τα αισθήματα που εξέφρασαν για τα Μαθηματικά ήταν απόρροια σχολικών βιωμάτων, ευχάριστων ή δυσάρεστων. Το συγκεκριμένο γεγονός επαληθεύτηκε από εξιστορήσεις αναμνήσεων και αποτέλεσε αφορμή για σχολιασμό της διδασκαλίας των μαθηματικών στο ελληνικό σχολείο. Με εξαίρεση ελάχιστους συμμετέχοντες, όλοι οι υπόλοιποι επεσήμαναν πως το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα παρέχει μαθηματική γνώση περιττή και αποστασιοποιημένη από την καθημερινότητα των μαθητών, ενώ τόνισαν πως ένας ενήλικας μπορεί να έχει μία αξιοπρεπή διαβίωση έχοντας κατακτήσει τις μαθηματικές γνώσεις που παρέχονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Σχετικά με τα Μαθηματικά που συναντάει ένας ενήλικας στην καθημερινότητά του, αναδείχθηκαν συνολικά οι εξής εφαρμογές: οικονομικές συναλλαγές, χρήση πιθανοτήτων, χρήση ώρας/χρονικών διαστημάτων, μαγειρική, αγορές/εκπτώσεις, διαχείριση οικονομίας ενός νοικοκυριού, μισθοδοσία, τραπεζικές συναλλαγές, ΦΠΑ, παρκάρισμα (αίσθηση χώρου), φορολογικές υποχρεώσεις, προγνωστικά αγώνων (στατιστική), μέτρηση ποσοτήτων, δοσολογία φαρμάκων, λογαριασμοί, κατασκευές/χειροτεχνίες, μετεωρολογία, τζόγος, ισοζύγιο, συντήρηση αμαξιού (χρήση βενζίνης σε σχέση με το κόστος, χρήση στο γκάζι σε σχέση με το κόστος, συμπλήρωμα αέρα στα λάστιχα).

Ειδικότερα, στο πρόβλημα που δόθηκε στις ομάδες σχετικά με τον υπολογισμό του συνολικού κόστους, αναδείχθηκαν οι εξής παράγοντες: το είδος και η τιμή του πλακακιού που επιλεχθεί, πληρωμή και ασφάλιση των εργατών που θα διεκπεραιώσουν τη δουλειά, κόστος για την παραμονή της οικογένειας εκτός του σπιτιού και κόστος των υπόλοιπων υλικών (ασβέστης, σταυροί, αρμοί κλπ).

Το βασικό συμπέρασμα όμως που βγήκε από τις συζητήσεις είναι πως η συζήτηση είναι μία διαδικασία που προάγει και πετυχαίνει την ανάδειξη ρεαλιστικών παραγόντων σε ένα πρόβλημα, ιδιαίτερα όταν οι συμμετέχοντες έχουν διαφορετικές οπτικές για το ίδιο ζήτημα. Στις περιπτώσεις δηλαδή, που ένα μέλος της ομάδας ήθελε να πείσει τα υπόλοιπα μέλη για μία τοποθέτηση, προκειμένου να δοθεί μία κοινή λύση, επικαλούνταν πλήθος βιωμάτων και παραδειγμάτων από την καθημερινότητα. Έτσι, το πρόβλημα αντιμετωπίσθηκε από τις περισσότερες ομάδες με τη βοήθεια δεδομένων που προέρχονταν από την καθημερινότητα των μελών τους. Πρέπει να σημειωθεί πως η πρώτη ομάδα αρνήθηκε να δώσει απάντηση για το συνολικό κόστος, γιατί θεώρησε πως δεν επαρκούσαν τα δεδομένα.

Επιπροσθέτως, στις περισσότερες ομάδες η συζήτηση για την πληρωμή των εργατών προέκυψε χωρίς τη νύξη της ερευνήτριας και αποτέλεσε αφορμή για την ανάδειξη άλλων παραμέτρων (π.χ. επιπλέον υλικά). Το ενδεχόμενο για την πληρωμή των εργατών δεν προέκυψε από τους συμμετέχοντες που δήλωσαν ότι ήταν καλοί στα Μαθηματικά και είχαν ενεργό ρόλο στη συζήτηση. Αντίθετα, μέλη των ομάδων με μικρότερη συμμετοχή στη διαδικασία έδωσαν αφορμή για περαιτέρω συζήτηση. Επίσης, παρατηρήθηκε πως οι συμμετέχοντες που δήλωσαν καλοί στα Μαθηματικά δυσκολεύτηκαν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα σαν πρόβλημα του οποίου η λύση στηριζόταν σε πληροφορίες που δεν ήταν δεδομένες.

2.5 Συζήτηση - Συμπεράσματα

Το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας ήταν η ανάδειξη του επιπέδου αριθμητισμού των ενηλίκων. Στην παρούσα έρευνα, η ενάριθμη συμπεριφορά των ενηλίκων χαρακτηρίζεται από την κριτική και ρεαλιστική σκέψη, καθώς και τη σωστή χρήση των Μαθηματικών και, εν προκειμένω, ελέγχθηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση 100 ενήλικες αντιμετώπισαν έξι ρεαλιστικά προβλήματα και απάντησαν σε ερωτήσεις που σχετίζονται με δημογραφικά χαρακτηριστικά, ενώ στη δεύτερη φάση σχηματίστηκαν δέκα ομάδες εστίασης με στόχο την επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος. Επιπλέον, στόχος της εργασίας ήταν η ανάδειξη πιθανής σχέσης της ενάριθμης συμπεριφοράς με δημογραφικά χαρακτηριστικά ή με την αλληλεπίδραση.

Στην πρώτη φάση της έρευνας, οι απαντήσεις των συμμετεχόντων ήταν στην πλειονότητα τους καλές. Μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας παρατηρήθηκαν στο πρόβλημα με το γράφημα και στο πρόβλημα με τη συνταγή, ενώ το πρόβλημα με το μηχανάκι, ένα πρόβλημα πολλαπλών βημάτων, φάνηκε να δυσκόλεψε περισσότερο τους λύτες. Διεθνώς όμως αναγνωρίζεται ότι εκατοντάδες χιλιάδων ενηλίκων έχουν μαθηματικές και στατιστικές γνώσεις σε χαμηλό επίπεδο που θα ήθελαν να βελτιώσουν (Pratt et al., 2016). Σχετικά με την κριτική σκέψη που επέδειξαν οι συμμετέχοντες, τα αποτελέσματα ήταν πολύ θετικά, καθώς οι περισσότερες απαντήσεις στηρίχτηκαν σε σωστή αποκωδικοποίηση των δεδομένων των προβλημάτων. Τα προβλήματα που δυσκόλεψαν τους λύτες ήταν το πρόβλημα με τις εκπτώσεις, που περιείχε δεδομένα στις εικόνες που το συνόδευαν, και το πρόβλημα με τη συνταγή, που περιόριζε τον λύτη καταναλωτή στις αγορές του. Το πρόβλημα με τις εκπτώσεις και το πρόβλημα με το εισιτήριο ανέδειξαν τις περισσότερες μη ρεαλιστικές απαντήσεις, αν και σε γενικότερο πλαίσιο οι συμμετέχοντες έδωσαν ρεαλιστικές απαντήσεις και έλαβαν υπόψη επιπλέον στοιχεία της καθημερινότητας, για να πλαισιώσουν τις απαντήσεις τους, παρ' όλο που έχει επισημανθεί δυσκολία στη ρεαλιστική σκέψη των ενήλικων λυτών (Inoue, 2008; Gazit, 2012). Επιπλέον, η μαθηματική δραστηριότητα των υποκειμένων ήταν σωστή στις περισσότερες περιπτώσεις, ενώ η πλειονότητα των λανθασμένων απαντήσεων παρατηρήθηκε στην επίλυση ενός προβλήματος πολλαπλών βημάτων.

Σχετικά με τα δημογραφικά χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων, τις πεποιθήσεις και τη χρήση των Μαθηματικών και την επιρροή τους στην ενάριθμη συμπεριφορά των ενηλίκων, οι έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν έδειξαν πως το μορφωτικό επίπεδο, το φύλο, οι πεποιθήσεις και η χρήση των Μαθηματικών δεν επηρέασαν τους συμμετέχοντες στην καταγραφή ενάριθμων απαντήσεων. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της έρευνας των Duchhardt et al. (2015) και τα αποτελέσματα του PIAAC (2013) που καταδεικνύουν σχέση ανάμεσα στην επίδοση των ενηλίκων στα Μαθηματικά και τη καθημερινή χρήση των Μαθηματικών. Ειδικότερα, έπειτα από ελέγχους που πραγματοποιήθηκαν για κάθε πρόβλημα ξεχωριστά, αναδείχτηκε σημαντική σχέση ανάμεσα στο φύλο και στα προβλήματα με το γράφημα και τις εκπτώσεις, ενώ στο πρόβλημα με το γράφημα φάνηκε να υπάρχει σχέση με τη χρήση των Μαθηματικών που κάνει ο εκάστοτε λύτης.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας τα συμπεράσματα είναι παρόμοια. Τα μέλη των ομάδων δηλαδή, ήταν σε θέση να λάβουν υπόψη τους πολλές παραμέτρους προκειμένου να δώσουν μία λύση στο δοθέν πρόβλημα. Πριν προβούν στη λύση του προβλήματος, έγιναν συζητήσεις για τα Μαθηματικά που συναντώνται στην καθημερινότητα και οι απόψεις των συμμετεχόντων συγκλίνουν με τη διεθνή βιβλιογραφία (Begg, 2005; Oughton, 2008; Swain, Baker, Holder, Newmarch, & Coben, 2005), καθώς οι αγορές, τα ποσοστά και οι οικονομικές συναλλαγές ήταν οι κυρίαρχες μαθηματικές έννοιες που συζητήθηκαν. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθούν δύο παρατηρήσεις σχετικά με τις ομάδες εστίασης. Πρώτον, οι πεποιθήσεις, το μορφωτικό επίπεδο και η άποψη των συμμετεχόντων για τα Μαθηματικά δεν επηρέασαν τόσο τη συμμετοχή τους στην επίλυση και τη συζήτηση, όσο τα προσωπικά τους βιώματα, που ήταν σχετικά με την προβληματική κατάσταση. Έπειτα, η αλληλεπίδραση μεταξύ των συμμετεχόντων προήγαγε τον διάλογο, με αποτέλεσμα την ανάδειξη ρεαλιστικών παραμέτρων που οδήγησαν την επίλυση τους προβλήματος.

Οι παρατηρήσεις αυτές μπορούν να είναι πολύ ωφέλιμες και στη σχολική τάξη. Όταν οι μαθητές δηλαδή έρχονται αντιμέτωποι με προβληματικές καταστάσεις που είναι κοντά στα βιώματά τους, μπορούν να δώσουν πιο ρεαλιστικές απαντήσεις και να σκεφτούν το πρόβλημα πολύπλευρα. Επίσης, η συζήτηση και η ομαδική επίλυση προβλημάτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δουν μία διαφορετική οπτική για το ίδιο πρόβλημα, την οπτική του συμμαθητή τους, και να την αντικρούσουν, να την προεκτείνουν ή να την υιοθετήσουν. Με αυτό τον τρόπο η επίλυση του προβλήματος γίνεται πιο ρεαλιστική, οι μαθητές αποκομίζουν τα θετικά της ομαδικότητας και ενισχύεται η κριτική τους σκέψη, καθώς θα πρέπει να επιχειρηματολογήσουν απέναντι στους συμμαθητές τους.

Τα συμπεράσματα από τη συγκεκριμένη έρευνα δεν ευνοούν τη γενίκευση, καθώς υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί. Αρχικά, το δείγμα της έρευνας δεν ήταν αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, ενώ δεν ζητήθηκαν δεδομένα για το επάγγελμα των συμμετεχόντων. Επιπλέον, υπήρχαν περιπτώσεις που οι γραπτές απαντήσεις των συμμετεχόντων ήταν μονολεκτικές, με αποτέλεσμα να μη φαίνεται η πραγματική επίδοση τους στα προβλήματα και να υπάρχουν ασαφή δεδομένα στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

Οι περιορισμοί της παρούσας έρευνας μπορούν να γίνουν και οι προεκτάσεις για επόμενες έρευνες. Αρχικά, μπορεί να πραγματοποιηθεί αντίστοιχη έρευνα με μεγαλύτερο δείγμα, το οποίο θα αναφέρει την επαγγελματική του ιδιότητα. Με αυτό τον τρόπο θα μπορεί να γίνει συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση των Μαθηματικών στον επαγγελματικό χώρο και την ενάριθμη συμπεριφορά. Επιπροσθέτως, θα ήταν ωφέλιμη η πραγματοποίηση συνέντευξης μαζί με τις απαντήσεις των λυτών, γιατί έτσι θα ανέλυαν πιο ολοκληρωμένα τον τρόπο σκέψης τους. Σχετικά με τις ομάδες εστίασης, καλό θα ήταν να αντιμετώπιζε η ομάδα δύο ή τρία προβλήματα, γιατί η ύπαρξη ενός μόνο προβλήματος μπορεί να περιορίσει ένα μέλος που δεν έχει άποψη ή βίωμα σχετικό με τη δοθείσα προβληματική κατάσταση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρέου, Ξ., Μενελάου, Α., Λεμονίδης, Χ., (2007). Αντιμετώπιση ρεαλιστικών προβλημάτων από μαθητές Ε' Δημοτικού. *Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης (197-206).* Πάφος

Ανεστάκης, Π., & Λεμονίδης, Χ. (2015). Διδασκαλία υπολογιστικών εκτιμήσεων σε ενήλικες: μια μελέτη περίπτωσης σε ένα σχολείο δεύτερης ευκαιρίας. Σε Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλο, Μ. Τζεκάκη (επιμ). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις.* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Βρυώνης, Ν., & Μπαραλής, Γ. (2015). Τα αυθεντικά – ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινής ζωής ως πηγή δημιουργικότητας στη μαθηματική εκπαίδευση. Σε Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλο, Μ. Τζεκάκη (επιμ). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις.* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Κάτσης, Α., Σιδερίδης, Γ., & Εμβαλωτής, Α. (2010). Στατιστικές μέθοδοι στις κοινωνικές επιστήμες. Αθήνα: Τόπος.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Αθήνα: Τόπος.

Κοντογιάννη, Α., & Τάτσης, Κ. (2015). Κατανόηση γραφημάτων από ενήλικες σε σχολείο δεύτερης ευκαιρίας. Σε Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλο, Μ. Τζεκάκη (επιμ). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις.* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Μαμωνά-Downs, Γ. (2017). Ορίζουμε, επιλύουμε, αποδεικνύουμε, αναπτύσσουμε θεωρίες ... όψεις της μαθηματικής παιδείας. Σε Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ.). *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές.* Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Χούτου, Χ. (2015). Η μαθηματική πρακτική μίας κεραμίστριας. Σε Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλο, Μ. Τζεκάκη (επιμ). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις.* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Τάτσης, Κ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2009). Μελέτη του Πλαισίου των Δραστηριοτήτων του Σχολικού Εγχειριδίου των Μαθηματικών της Α΄ Δημοτικού. Σε Φ. Καλαβάση, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή, Γ. Φεσάκη (επιμ). *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματική εκπαίδευση και οικογενειακές πρακτικές*. Ρόδος: ΕΝΕΔΙΜ.

Aguilar, M. S., & Zavaleta, J. G. M. (2012). On the links between mathematics education and democracy: A literature review, *Pythagoras, 33*(2), 1-15.

Annenberg Learner - Teacher Professional Development. (2017, April 5). Ανακτήθηκε από http://www.learner.org/

Askew, M. (2015). Numeracy for the 21st century: a commentary. *ZDM, 47*(4), 707-712.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Boaler, J. (1993). Enouraging the transfer of 'school' mathematics to the 'real world' through the integration of process and content, context and culture. *Educational studies in mathematics, 25*(4), 341-373.

Begg, A. (2005). Adult numeracy: What is it, and who teaches it? In M. Horne, B. Marr (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference of Adults Learning Mathematics*. Melbourne.

Bernstein, B. 2000. "Official knowledge and pedagogic identities: the politics of recontexualising". In *The Sociology of Education: major themes*, Edited by: Ball, S. J. London: Routledge Falmer.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68.

Bourdieu, P. (1977). Outline of a theory of practice. Cambridge: Cambridge University Press.

Bourdieu, P. & Passeron, J. C. (1996). Reproduction in education, society and culture. (2nd Ed.). London: Sage.

Coben, D. (2002). Use value and exchange value in discursive domains of adult numeracy teaching. *Literacy and Numeracy Studies, 11*(2), 25-35.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 211-230.

Chassapis, D. (2017). "Numbers have the power" or the key role of numerical discourse in establishing a regime of truth about crisis in Greece. In Chronaki, A. (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference*. Volos, Greece: MES9.

Clarke, D. M., & Clarke, B. A. (2004). Mathematics teaching in Grades K-2: Painting a picture of challenging, supportive, and effective classrooms. In R. N. Rubenstein & G. W. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics (66th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 67-81).* Reston, VA: NCTM.

De Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75–89). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.

Duchhardt, C., Jordan, A., & Ehmke, T. (2015). Adults' Use of Mathematics and Its Influence on Mathematical Competence. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15,* 155-174.

Frankenstein, M. (2009). Developing a Critical mathematical Numeracy through Real Real-life Word Problems.In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.) .*Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations*. Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Ernest, P. (2002). Empowerment in mathematics education. United Kingdom: University of Exeter.

Evans, J., Wedege, T., & Yasukawa, K. (2013). Critical perspectives on adults' mathematics Education. In K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 203–242). Dordrecht: Springer.

FitzSimons, G. E., & Boistrup, L.B. (2017). In the workplace mathematics does not announce itself: Towards overcoming the hiatus between mathematics education and work. *Educational Studies in Mathematics, 95* (.3), 329-349.

Frankenstein, M. (1998). Reading the world with math: Goals for a criticalmathematical literacy curriculum. In E. Lee, D. Menkart, & M. Okazawa-Rey (Eds.), Beyond heroes and holidays: A practical guide to K-12 anti-racist, multicultural education and staff development (pp. 306-313). Washington D.C.: Network of Educators on the Americas.

Frejd, P, Bergsten, C. (2016). Mathematical modelling as a professional task. *Educational Studies on Mathematics, 91*(1), 11-35.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gazit, A. (2012). Carpenter, tractors and microbes for the development of logical–mathematical thinking – the way 10th graders and pre-service teachers solve thinking challenges. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 43*(8), 1033-1040.

Gazit, A., & Patkin, D. (2012). The way adults with orientation to mathematics teaching cope with the solution of everyday real world problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 43*(2), 167-176.

Geiger, V., Forgasz, H., & Goos, M. (2015). A critical orientation to numeracy across the curriculum. *ZDM Math. Education, 47,* 611–624.

Gravemeijer K., Lin FL., Stephan M., Julie C., Ohtani M. (2017) Reconsidering Mathematics Education for the Future. In: Kaiser G. (eds) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. Hamburg, Germany: Springer.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics*. New York, NY: Routledge.

de Aguero, M. (2008). When women cook mole and men build a wall. In T. Maguire, N. Colleran, O. Gill, J. O' Donoghue and K. Safford-Ramus (Eds), *The Changing Face of Adults Mathematics Education: Learning from the Past, Planning for the Future. Proceedings of the 14th International Conference of Adults Learning Mathematics-A Research Forum*. Dublin: ALM/CAMET/ITT.

Harvey, S., Murphy, F., Lake, R., Jenkins, L., Cavanna, A., and Tait, M (2009). Diagnosing the problem: using a tool to identify pre-registration nursing students' mathematical ability. *Nurse Education in Practice, 11,* 119–123.

Hassi, M. L., Hannula, A., & Saló i Nevado, L. (2010). Basic mathematical skills and empowerment: Challenges and opportunities, Finnish adult education. *Adults Learning Mathematics—An International Journal, 5*(1), 6–22.

Hoogland, K. (2009). Beyond word problems. In G. Griffiths, D. Kaye (Eds.), *Proceedings of the 16th International Conference of Adults Learning Mathematics.* London.

Hoogland, K., Bakker, A., & De Konning, K. (2012). Comparing Students' Results On Word Problems With Their Results On Image-Rich Numeracy Problems. In Cho, Sung Je (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* Seoul, Korea: COEX.

Inoue, N. (2008).Minimalism as a guiding principle: Linking Mathematical Learning to Everyday Knowledge. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 36-67.

Jablonka, E., Wagner, D., & Walshaw, M. (2013). Theories for studying social, political and cultural dimensions of mathematics education. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education*. New York: Springer.

Jozwiak, J. (2004). Teaching problem-solving skills to adults. *Journal of Adult Education, 33*(1), 19-34.

Kalavasis, F. (2017). Mathematical language in the political discourse: epistemological and educational reflections. In Chronaki, A. (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference*. Volos, Greece: MES9.

Kenschaft, P. (2014). *Math Power: How to Help Your Child Love Math Even if You Don't*. New York: Dover Publications.

Keogh, J., Maguire, T., & O'Donoghue, J. (2010). Looking at the workplace through mathematical eyes - an Innovative Approach. In A. Araujo, A. Fernandes, J. F. Rodrigues, & A. Azevedo (Eds), *EIMI 2010: Educational Interfaces between Mathematics and Industry.* Lisbon, Portugal.Khan Academy. (2017, April 4). Ανακτήθηκε από https://el.khanacademy.org/

Krueger, Richard A. (1998). Developing questions for focus groups. Thousand Oaks, CA: Sage.

Langpaap, J. (2005). Teaching innumerate adults: using everyday life experience to develop proceptual thinking. In L. Lindberg (Ed.) "Bildning" and/or Training. *Proceedings of the 11th international conference on adults learning mathematics in Kungälv (ALM 11)* (pp. 107-117).. Göteborg, Sweden.

Lee, J. (2012).Prospective elementary teacher's perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Math teacher Education, 15,* 429-452.

le Roux, K., & Adler, A. (2016). A critical discourse analysis of practical problems in a foundation mathematics course at a South African university. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 227–246.

Maier, N. & Burke, R. (1967). Response availability as a factor in the problem-solving performance of males and females. *J. Pers. Social Psychol.*, 5, 304–310.

Maguire, T., & O'Donoghue, J. (2002). A grounded approach to practitioner training in Ireland: Some findings from a national survey of practitioners in Adult Basic Education. In L. Ø.Johansen & T. Wedege (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference of Adult Learning Mathematics - A Research Forum (ALM8).* Danmark, Roskilde: Roskilde University, Centre for Research in Learning Mathematics.

Math Central. (2017, April 5). Ανακτήθηκε από http://mathcentral.uregina.ca/BB/

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In Gagatsis, A., & Papastavridis, S. (Eds.), *3 rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, (pp. 115–124). Athens, Greece: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

OECD (1999).Measuring student knowledge and skills: a new assessment framework. Paris: Author.

OECD (2013). Technical Report of the Survey of Adult Skills (PIAAC). Paris, France: Author.

Oughton, H. (2008). Mapping the Adult Numeracy Curriculum: Cultural Capital and Conscientization. *Literacy & Numeracy studies, 16*(1), 39-62.

Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, (1-43).* Taiwan.

Polya, G. (1998). *How to solve it: A new aspect of Mathematical Method.* (2nd ed.). New Jersey: Princeton University Press.

Porter, T. M. (1995). Trust in numbers: The pursuit of objectivity in science and public life. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pratt, D., Griffiths, D., Jennings, D., & Schmoller, S. (2016). Tensions and compromises in the design of a MOOC for adult learners of mathematics and statistics. *Proceedings of 13th International Congress on Mathematical Education,* (256-263). Hamburg.

Schlogmann, W (2002). Mathematics and society- must all people learn mathematics? In L.Ostergaard;T. Wedege (Eds), Numeracy for empowerment and Democracy? *Proceedings of the 8th International Conference of Adults learning mathematics (ALM8).* Roskiple (Denmark): Roskilde University printing.

Seabright, V. (2010). Use of Numeracy-Mathematics at work. In H. Christensen & J. Diez-Palomar (Eds), Maths at work-Mathematics in a Changing World. *Proceedings of the 17th International Conference of Adults learning mathematics (ALM17).*

Skovsmose, O. (1985). Mathematical education versus critical education. *Educational Studies in Mathematics, 16*(4), 337-354.

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy. *ZDM, 30*(6), 195–203.

Sowder, L. (1988). Children's solutions of story problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 7*(3), 227-238.

Steen, L. A. (Ed.). (1997). *Why numbers count: Quantitative literacy for tomorrow's America*. New York, NY: College Entrance Examination Board.

Steen, L. (2001). Mathematics and Numeracy: Two Literacies, One Language. *The Mathematics Educator, 6*(1), 10-16.

Stevens, T., Harris, G., Aguirre-Munoz, Z., & Cobbs, L. (2009). A case study approach to increasing teachers' mathematics knowledge for teaching and strategies for building students' maths self-efficacy. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, 40*(7), 903-914.

Swain, J., Baker, E., Holder, D., Newmarch, B., & Coben. D (2005). *'Beyond the daily application': making numeracy teaching meaningful to adult learners*. NRDC: London.

Tomaz, V, & David, V. (2015). How Students' Everyday Situations Modify Classroom Mathematical Activity: The Case of Water Consumption. *Journal for Research in Mathematics Education 46*(4), 455-496.

Tout, D., & Gal, I. (2015). Perspectives on numeracy: reflections from international assessments. *ZDM Mathematics Education, 47(4).*

Valero, P. (2015).In(ex)clusion in mathematics education and the fabrication of the modern citizen. Σε Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλο, Μ. Τζεκάκη (επιμ). *Πρακτικά του*

6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις. Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Valero, P., García, G., Camelo, F., Mancera, G., & Romero, J. (2012). Mathematics education and the dignity of being. *Pythagoras. Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa, 33*(2), 171–179.

Verschaffel, L., Greer, B., van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (Eds) (2009). *Words and Worlds.* Boston: Sense Publishers

Vithal, R. (1999). Democracy and authority: A complementarity in mathematics education? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 98*(6), 27–36.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: the interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics, 86*(2), 271-290.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York Harcourt.

Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 33-47.

Westheimer, J., & Kahne, J. (2004). What Kind of Citizen? The Politics of Educating for Democracy. *American Educational Research Journal, 41*(2), 237 - 269.

Williams, J., & Choudry, S. (2016). Mathematics capital in the educational field: Bourdieu and beyond. Research in Mathematics Education, 18(1), 3-21.

Wolfram, C. (2010). Teaching kids real math with computers. Youtube, uploaded by TedTalks, 15 November 2010, https://www.youtube.com/watch?v=60OVlfAUPJg.

Wood, L. (2012). Practice And Conceptions: Communicating Mathematics In The Workplace. *Educational Studies In Mathematics, 79*(1), 109-125.

Yang, D., & Huang, F. (2004). Relationships among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth-grade students in Taiwan. *Educational Studies, 30*(4), 373-389.

Zacharos, K., & Koustourakis, G. (2011).A critical approach to school mathematical knowledge: the case of "realistic" problems in Greek primary school textbooks for seven-year-old pupils. *Acta Didactica Napocensia, 4*(1), 39-50.

Zevenbergen, R. J. (2011). Young workers and their dispositions towards mathematics: Tensions of a mathematical habitus in the retail industry. *Educational Studies in Mathematics, 76,* 87-100.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΜΕΡΟΣ Α’

Ηλικία:

Παρακαλώ απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις, συμπληρώνοντας ένα **X** στα τετράγωνα που σας εκφράζουν.

Ερώτηση Ι.1 ***Φύλο:***

Άνδρας	
Γυναίκα	

Ερώτηση Ι.2 ***Ποια είναι η οικογενειακή σας κατάσταση;***

Ανύπαντρος-η	
Παντρεμένος-η	
Διαζευγμένος-η	
Χήρος-α	

Ερώτηση Ι.3 ***Σε ποια από τις παρακάτω κατηγορίες επαγγελμάτων ανήκει το δικό σας;***

Δημόσιος Υπάλληλος	
Ιδιωτικός Υπάλληλος	
Ελεύθερος Επαγγελματίας	
Οικιακά	
Φοιτητής/-τρια	
Άνεργος	

Ερώτηση Ι.4 ***Το μορφωτικό σας επίπεδο σε ποια από τις παρακάτω κατηγορίες ανήκει; (<u>σημείωση</u>: επιλέξτε το επίπεδο που έχετε ΗΔΗ ολοκληρώσει)***

Δημοτικό	
Γυμνάσιο	
Λύκειο	
ΙΕΚ – Ανώτερη Σχολή	
ΤΕΙ-Πανεπιστήμιο	
Μεταπτυχιακό	
Διδακτορικό	

Ερώτηση Ι.5 ***Πώς αξιοποιείτε τον ελεύθερο χρόνο σας; (σημείωση: επιλέξτε όσες επιλογές σας εκφράζουν με σειρά προτεραιότητας, δηλαδή 1,2,3, κ.ο.κ.)***

Αθλούμαι	
Παρακολουθώ τηλεόραση/ταινίες	
Διαβάζω βιβλία	
Βγαίνω με φίλους	
Ασχολούμαι με τον υπολογιστή	
Ασχολούμαι με τη μουσική	
Ασχολούμαι με το θέατρο	
Ασχολούμαι με τη μόδα/αγορές	
Άλλο ……………………	

Ερώτηση Ι.6 ***Χρησιμοποιείτε τα μαθηματικά στην καθημερινότητά σας;***

Καθόλου	
Σπάνια	
Μερικές φορές	
Συχνά	
Πολύ συχνά	

Ερώτηση Ι.7 ***Θεωρείτε ότι τα μαθηματικά είναι σημαντική επιστήμη;***

Καθόλου	
Λίγο	
Αρκετά	
Πολύ	
Πάρα πολύ	

Ερώτηση Ι.8 ***Χρησιμοποιείτε τα μαθηματικά στο εργασιακό σας περιβάλλον;***

Καθόλου	
Σπάνια	
Μερικές φορές	
Συχνά	
Πολύ συχνά	

Ερώτηση Ι.9 ***Οι εμπειρίες σας από τα μαθηματικά του σχολείου είναι θετικές;***

Καθόλου	
Λίγο	
Αρκετά	
Πολύ	
Πάρα πολύ	

Ερώτηση Ι.10 ***Θα θέλατε να είχατε περισσότερες μαθηματικές γνώσεις;***

Καθόλου	
Λίγο	
Αρκετά	
Πολύ	
Πάρα πολύ	

Ερώτηση Ι.11 ***Θεωρείτε απαραίτητες τις μαθηματικές δεξιότητες για έναν ενήλικα;***

Καθόλου	
Λίγο	
Αρκετά	
Πολύ	
Πάρα πολύ	

ΜΕΡΟΣ Β’

Παρακαλείσθε να αντιμετωπίσετε τα παρακάτω προβλήματα και ***<u>να αποτυπώσετε τον τρόπο σκέψης σας</u>***.

1

Η εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών κοστίζει 15 ευρώ. Συμφέρει να πληρώνεις καθημερινά το αντίτιμο του εισιτηρίου ή να αγοράσεις την εβδομαδιαία κάρτα μεταφορών;

2

Ο φίλος σου σου προτείνει να παρακολουθήσετε μία ταινία στο σινεμά. Η προβολή που επιλέγει είναι στις 20:20, αλλά εσύ έχεις ραντεβού στον οδοντίατρο στις 18:30 και κυκλοφορείς με ποδήλατο. Τι θα απαντήσεις στον φίλο σου; *(απόσταση σινεμά από το κέντρο της πόλης: 3 km)*

3

Ενδιαφέρεσαι να αγοράσεις ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια και αποφασίζεις να επισκεφτείς τα καταστήματα την περίοδο των εκπτώσεων. Στο πρώτο τοπικό κατάστημα βρίσκεις τα παπούτσια με αρχική τιμή 120 ευρώ, ενώ στο πολυκατάστημα της πόλης τα ίδια παπούτσια κοστίζουν 140 ευρώ. Από πού θα επιλέξεις να αγοράσεις τα παπούτσια και γιατί;

Την ίδια μέρα, έκανες ανάληψη από την τράπεζα και πήρες πέντε χαρτονομίσματα των 50 ευρώ. Πόσα ρέστα θα πάρεις από την αγορά των παπουτσιών;

ΤΟΠΙΚΟ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑ

\\\\\\\\\\\\ ΠΟΛΥΚΑΤΑΣΤΗΜΑ

4

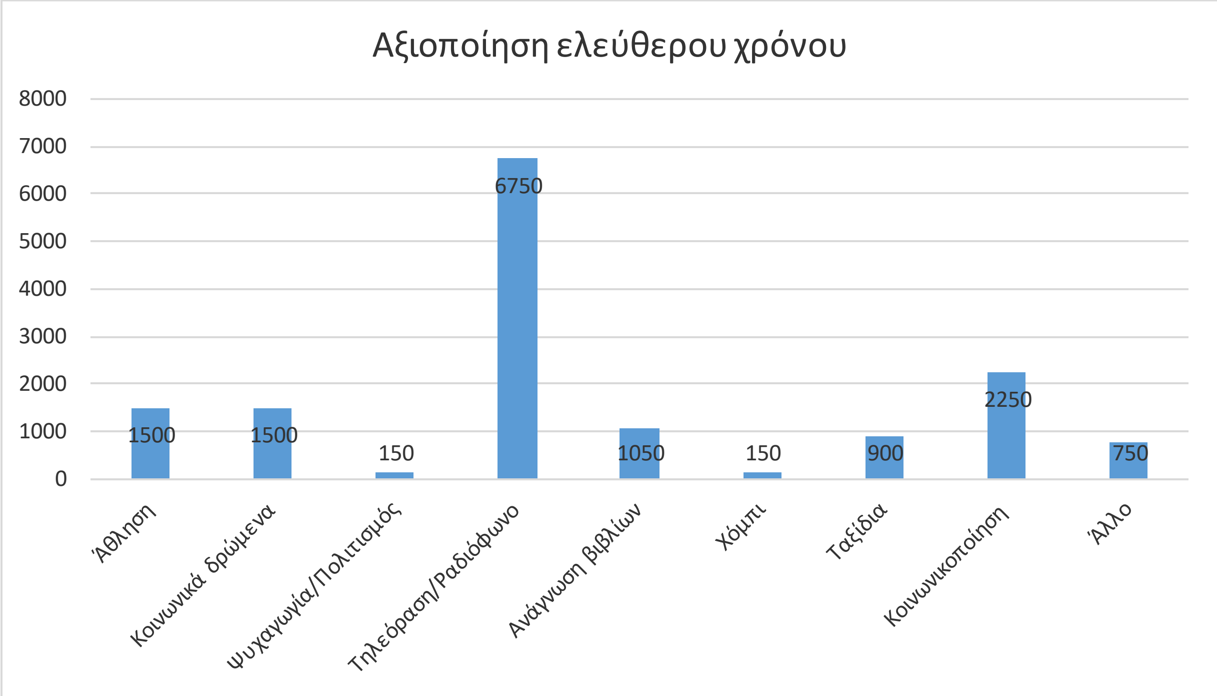
Ένα νεαρό συγγενικό σου πρόσωπο αγόρασε ένα μηχανάκι με 1.400 ευρώ, αλλά σύντομα συνειδητοποίησε ότι δυσκολευόταν στη συντήρησή του και αποφάσισε να το πουλήσει με την προοπτική να το ανακτήσει, όταν θα έπιανε δουλειά. Το πούλησε σε έναν φίλο του 1.200 ευρώ. Μετά από λίγο καιρό, και αφού απέκτησε δουλειά, το αγόρασε 1.000 ευρώ. Τελικά όμως, λόγω οικονομικών δυσκολιών, το έδωσε οριστικά για 700 ευρώ. Πόσο ήταν το συνολικό κέρδος ή η συνολική ζημία από όλες τις συναλλαγές;

5

Την Κυριακή το μεσημέρι θα έχετε οικογενειακό τραπέζι και το κυρίως πιάτο θα είναι τα μαντηλάκια. Υπολογίζετε πως θα είστε συνολικά 15 άτομα.

Εσύ αναλαμβάνεις να κάνεις τις αγορές από τον μανάβη. Τι θα αγοράσεις και σε ποια ποσότητα;

6



1. Το συγκεκριμένο γράφημα παρουσιάζει την αξιοποίηση ελεύθερου χρόνου από ενήλικες 20-64 χρονών, σύμφωνα με έρευνα που έγινε το 2013.
2. Πόσοι περισσότεροι ενήλικες ασχολούνται με Τηλεόραση/Ραδιόφωνο σε σχέση με εκείνους που αθλούνται;
3. Πόσοι είναι οι ενήλικες που συμμετείχαν στην έρευνα;
4. Πόσοι ενήλικες ασχολούνται με Ταξίδια, Ανάγνωση βιβλίων και Χόμπι;
5. Ποιος είναι ο πιο δημοφιλής τρόπος αξιοποίησης ελεύθερου χρόνου;
6. Ποιος είναι ο πέμπτος δημοφιλής τρόπος αξιοποίησης χρόνου;