Διερεύνηση της συλλογικής δημιουργικότητας μαθητών Δημοτικού μέσω δραστηριοτήτων κατασκευής μαθηματικού προβλήματος αξιοποιώντας ως πλαίσιο την Αρχαία Ελληνική Ιστορία

υπό

Κωνσταντίνα-Παυλίνα Καραμάνη

Μεταπτυχιακή εργασία

Υποβληθείσα για την εκπλήρωση των προϋποθέσεων απονομής Μεταπτυχιακού Διπλώματος Εξειδίκευσης «Φυσικές επιστήμες στην εκπαίδευση» του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

2018

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Σχολή Επιστημών της Αγωγής
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Επιστήμες της Αγωγής»
Κατεύθυνση: Φυσικές Επιστήμες στην Εκπαίδευση

Διερεύνηση της συλλογικής δημιουργικότητας μαθητών Δημοτικού μέσω δραστηριοτήτων κατασκευής μαθηματικού προβλήματος αξιοποιώντας ως πλαίσιο την Αρχαία Ελληνική Ιστορία

Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία

Κωνσταντίνα-Παυλίνα Καραμάνη
Α.Μ. 461

Συμβουλευτική επιτροπή
Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Τάτσης
Μέλη: Μαρία Καλδρυμίδου
Ξανθή Βαμβακούση

Ιωάννινα 2018

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πολλοί ερευνητές προτείνουν τη σύνδεση της δημιουργικότητας με δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων. Συχνά αναφερόμενοι δείκτες της δημιουργικής κατασκευής προβλημάτων από τους μαθητές, αποτελούν η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία. Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση της συλλογικής δημιουργικότητας των μαθητών δημοτικού. Η αξιολόγηση της δημιουργικότητας πραγματοποιήθηκε με τη χρήση δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος. Το πλαίσιο των δραστηριοτήτων αποτέλεσε η Αρχαία Ελληνική Ιστορία, την οποία οι μαθητές είχαν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Η έρευνα διεξήχθη στην πόλη Rzeszow της Πολωνίας και συμμετείχαν συνολικά 24 μαθητές της πέμπτης τάξης. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε 6 ομάδες και ανά τρεις ομάδες εργάσθηκαν σε διαφορετική δραστηριότητα. Οι ομάδες ήταν ομοιογενείς ως προς τη μαθηματική επίδοση. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι όλες οι ομάδες ήταν ικανές να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα. Διαφοροποιήσεις παρατηρήθηκαν ως προς το βαθμό δημιουργικότητας των επιμέρους ομάδων. Όσον αφορά τη διαφορετική δραστηριότητα που δόθηκε στους μαθητές, δεν εντοπίστηκαν διαφορές ως προς τον βαθμό δημιουργικότητας που σημείωσαν οι ομάδες.

Λέξεις κλειδιά: *συλλογική δημιουργικότητα, κατασκευή προβλήματος, διεπιστημονικότητα, μαθηματική ικανότητα*

ABSTRACT

Many researchers suggest linking creativity with problem posing activities. Frequently mentioned indicators of creative problem posing by students are fluency, flexibility and originality. The purpose of this research was to investigate the collective creativity of elementary students. The evaluation of creativity was carried out using problem posing activities. The context of the activities was Ancient Greek History, which the students had been taught in previous classes. The survey was conducted in the city of Rzeszow in Poland and a total of 24 students of the fifth grade participated. The students were divided into 6 groups and each group worked in a different activity. The groups were homogeneous regarding the mathematical ability. The results of the survey indicated that all groups were able to construct mathematical problems. Differences were observed in the degree of creativity of individual groups. Concerning the different activity which was given to the students there were no differences in the degree of creativity which was observed by the groups.

Key words: *collective creativity, problem posing, interdisciplinarity, mathematical ability*

Εισαγωγή

Η δημιουργικότητα είναι ένα προσωπικό και κοινωνικό χαρακτηριστικό που ενδυναμώνει την ανθρώπινη πρόοδο σε όλα τα επίπεδα και τα σημεία της Ιστορίας. Η τεχνολογική πρόοδος, οι εφευρέσεις και η ανάπτυξη των Μαθηματικών είναι στενά συνδεδεμένες. Οι μαθηματικές εξελίξεις διευκολύνουν την τεχνολογική πρόοδο, ενώ η ανάπτυξη της τεχνολογίας και της επιστήμης απαιτούν την εξέλιξη των Μαθηματικών. Μερικές από τις ιδέες των αρχαίων επιστημόνων και φιλοσόφων συνειδητοποιήθηκαν μόνο μετά τη σημαντική πρόοδο που σημειώθηκε στα Μαθηματικά και την επιστήμη.

Η δημιουργικότητα, ωστόσο, αποτελεί έναν μακροχρόνια παραμελημένο τομέα της έρευνας. Οι Sternberg και Lubart (1999) ανέφεραν ότι κατά τη διάρκεια των ετών μεταξύ 1975 και 1994 μόνο το 5% των άρθρων που αναγράφονταν στο *Psychological Abstracts* σχετίζονταν με τη δημιουργικότητα. Η καθιέρωση του περιοδικού *Journal of Creative Behavior* κατευθύνθηκε, κυρίως, ως προς τη διδασκαλία των ατόμων να είναι πιο δημιουργικοί. Η ανάγκη εμπειρικής έρευνας για τη δημιουργικότητα οδήγησε στη δημιουργία του περιοδικού *Creativity Research Journal*. Στην εκπαίδευση των Μαθηματικών μόνο ένα ύστερο ενδιαφέρον για την έρευνα της δημιουργικότητας μπορεί να παρατηρηθεί. Ο Haylock (1987) ισχυρίστηκε ότι πρέπει να αποδοθεί μεγαλύτερη έμφαση στη δημιουργικότητα εντός του σχολικού πλαισίου, ενώ ο Silver (1994) πρότεινε τη σύνδεση των δραστηριοτήτων επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων με τις κατηγορίες δημιουργικότητας του Torrance (1966). Ο Haylock (1987) κατά την ανασκόπηση της εκπαιδευτικής βιβλιογραφίας των ετών 1966 έως 1985, απέδειξε ότι το θέμα της δημιουργικότητας δεν έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνών. Δύο δεκαετίες αργότερα, η Leikin (2009a) ανέλυσε τις δημοσιεύσεις από το 1999 έως το 2009 και απέδειξε ότι πολύ λίγες δημοσιεύσεις σχετίζονται με την δημιουργικότητα. Ωστόσο, η μαθηματική κοινότητα έχει αποδώσει πρόσφατα μεγαλύτερη προσοχή σε αυτό το θέμα.

Η παρούσα ερευνητική εργασία, βασιζόμενη στη θέση του Silver (1994), προτείνει τη σύνδεση της δημιουργικότητας με τις δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων, τα οποία αποτελούν σημαντικά θέματα των σύγχρονων συζητήσεων στη μαθηματική εκπαίδευση. Εκτός από την επίλυση προβλημάτων, η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων κρίνεται εξίσου αναγκαία (Silver, 1994). Η δραστηριότητα κατασκευής προβλήματος αποτελεί μια εργασία που απαιτεί τη διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος (ή περισσότερων), βάσει ενός δεδομένου συνόλου συνθηκών, το οποίο είναι καινούργιο τουλάχιστον στου κατασκευαστές (Silver, 1994). Τα οφέλη της ενσωμάτωσης των δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών αναγνωρίζονται ευρέως από τη μαθηματική κοινότητα των μαθηματικών (π.χ. Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005·English, 1997·Silver, 1994).

Στη συγκεκριμένη έρευνα διερευνήθηκε η συλλογική δημιουργικότητα των μαθητών με τη χρήση δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος. Προτιμήθηκε η αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας, καθώς δεν έχει ερευνηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία. Επιπλέον, η ομαδοσυνεργατική μέθοδος κατέχει, πλέον, κεντρικό ρόλο στον τομέα της εκπαίδευσης. Ως πλαίσιο των δραστηριοτήτων αξιοποιήθηκε η Αρχαία Ελληνική Ιστορία. Πολλές φορές, τα Μαθηματικά θεωρούνται σημαντικό εργαλείο των Φυσικών Επιστημών, ωστόσο, η συσχέτισή τους με τις Κοινωνικές και Ανθρωπιστικές Επιστήμες δεν έχει διερευνηθεί σε μεγάλο βαθμό. Η διεπιστημονικότητα επιτρέπει στους μαθητές να δουν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων πεδίων (McComas & Wang, 1998), και να μειώσουν την «ψυχολογική απόσταση» μεταξύ των των Μαθηματικών και των άλλων κλάδων.

Θεωρητικό πλαίσιο

1. Δημιουργικότητα

1.1. Ο ορισμός της δημιουργικότητας

Ο σκοπός οποιουδήποτε εκπαιδευτικού συστήματος οφείλει να είναι η καλλιέργεια δημιουργικών ατόμων. Η δημιουργικότητα είναι μια δυναμική ιδιότητα του ανθρώπινου μυαλού, η οποία μπορεί να βελτιωθεί και πρέπει να εκτιμηθεί. Παραδοσιακά, συνδέεται με την τέχνη και τη λογοτεχνία, ωστόσο, στη σύγχρονη εποχή και η ουσιαστική επιστήμη θεωρείται δημιουργική πράξη. Στους τομείς της τέχνης και της λογοτεχνίας, η δημιουργία ενός ασυνήθιστου και πρωτότυπου έργου θεωρείται επαρκής, εν αντιθέσει με τη δημιουργική επιστημονική ιδέα, η οποία πρέπει παράλληλα να είναι και χρήσιμη (Neumann, 2007). Οι τεχνολογικές εξελίξεις στη σημερινή κοινωνία οφείλονται στη δημιουργικότητα των επιστημόνων και των μαθηματικών κι επομένως η μελέτη των διαδικασιών της δημιουργικής τους σκέψης κρίνεται απαραίτητη.

Υπάρχει διάκριση μεταξύ της γενικής και της ειδικής δημιουργικότητας (Leikin, 2009b). Η γενική δημιουργικότητα συνδέεται με τη χρήση μοτίβων επίλυσης προβλημάτων από ένα πεδίο για την επίλυση προβλημάτων σε ένα άλλο πεδίο, ενώ η ειδική δημιουργικότητα περιλαμβάνει τη δημιουργικότητα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο, λαμβάνοντας υπόψη τη λογική αφηρημένη φύση του πεδίου. Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στη μαθηματική δημιουργικότητα. Η μαθηματική δημιουργικότητα διασφαλίζει την ανάπτυξη του πεδίου των Μαθηματικών ως σύνολο. Η σταθερή αύξηση του αριθμού των περιοδικών που είναι αφιερωμένα στη μαθηματική έρευνα αποτελούν ένδειξη της ανάπτυξης των Μαθηματικών. Εντούτοις, η μαθηματική δημιουργικότητα δεν έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνών. Συνήθως, οι περισσότεροι μαθηματικοί δεν ενδιαφέρονται για την ανάλυση των διαδικασιών σκέψης που οδηγούν στη μαθηματική δημιουργία (Ervynck, 1991).

Η πρώτη γνωστή προσπάθεια μελέτης της μαθηματικής δημιουργικότητας ήταν ένα εκτεταμένο ερωτηματολόγιο που δημοσιεύθηκε το 1902 στο γαλλικό περιοδικό *L'Enseigement Mathematique* (Sriraman, 2004). Το ερωτηματολόγιο αυτό, καθώς και μια διάλεξη για τη δημιουργικότητα από τον καταξιωμένο μαθηματικό Henri Poincare στο *Societe΄ de Psychologie*, ενέπνευσε τον, επίσης, αναγνωρισμένο μαθηματικό του 20^{ου} αιώνα, Jacques Hadamard, να ερευνήσει την ψυχολογία της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ο Hadamard (1945) πραγματοποίησε μια άτυπη έρευνα μεταξύ σημαντικών επιστημόνων, όπως τους George Birkhoff, George Polya, και Albert Einstein, αναφορικά με τις νοητικές εικόνες που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά. Επηρεαζόμενος από την ψυχολογία Gestalt, θεώρησε ότι η δημιουργική διαδικασία των μαθηματικών ακολουθεί το μοντέλο Gestalt των τεσσάρων σταδίων (Wallas, 1926): 1) προετοιμασία (preparation), 2) επώαση (incubation), 3) διαφώτιση (illumination), και 4) επαλήθευση (verification).

Οι ορισμοί της δημιουργικότητας που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία είναι αρκετοί. Η πλειοψηφία των υπαρχόντων ορισμών είναι ασαφείς ή δυσνόητοι με αποτέλεσμα να μην υπάρχει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός. Βασιζόμενος στην ερευνητική βιβλιογραφία, ο Mann (2006) υποστηρίζει ότι υπάρχουν πάνω από 100 σύγχρονοι ορισμοί της δημιουργικότητας.

Η δημιουργικότητα έχει περιγραφεί απλά ως διάκριση, «επιλογή» (Poincare, 1948). Σύμφωνα με τον Poincare (1948), το να δημιουργείς συνίσταται στο να μην κάνεις άχρηστους συνδυασμούς, αλλά εκείνους που είναι χρήσιμους κι αποτελούν τη μειοψηφία. Μια ερμηνεία της μεταφοράς «επιλογή» μπορεί να είναι η ικανότητα ενός μαθηματικού να επιλέξει προσεχτικά μεταξύ των ερωτήσεων (ή προβλημάτων) που αποφέρουν καρπούς, σε αντίθεση με εκείνες που δε συνεισφέρουν σε κάτι νέο (Sriraman, 2004). Ωστόσο, ο συγκεκριμένος ορισμός παραβλέπει το πρόβλημα τη πρωτοτυπίας. Με άλλα λόγια, ο χαρακτηρισμός της δημιουργικότητας ως δυνατότητα επιλογής μεταξύ χρήσιμων και άχρηστων συνδυασμών είναι παρόμοια με το χαρακτηρισμό της τέχνης της γλυπτικής ως μιας διαδικασίας περικοπής των περιττών (Sriraman, 2004).

Το πρώτο στάδιο της δημιουργικότητας, όπως ορίζεται από τον Poincare (1948), αποτελείται από την σκληρή προσπάθεια απόκτησης μιας εικόνας του προβλήματος, η οποία αποκαλείται ως προκαταρκτική περίοδο συνειδητής δουλειάς. Αυτό αναφέρεται, επίσης, ως προπαρασκευαστικό στάδιο (preparatory stage) (Hadamard, 1945). Στο δεύτερο στάδιο το πρόβλημα παραμερίζεται για κάποιο χρονικό διάστημα και το μυαλό απασχολείται με άλλα προβλήματα. Ο Hadamard (1945) το αναφέρει ως στάδιο επώασης (incubatory stage). Το τρίτο στάδιο αφορά στην εύρεση της λύσης ξαφνικά παράλληλα με την ενασχόληση άλλων άσχετων δραστηριοτήτων. Το στάδιο αυτό ονομάζεται στάδιο διαφώτισης (illumination stage) (Hadamard, 1945). Το τέταρτο και τελευταίο στάδιο συνίσταται στην έκφραση των αποτελεσμάτων με τη γλώσσα ή τη γραφή. Σε αυτό το στάδιο επαληθεύεται το αποτέλεσμα, καθίσταται ακριβές και γίνεται αναζήτηση για πιθανές επεκτάσεις μέσω της χρήσης του αποτελέσματος. Το μοντέλο Gestalt, όμως, παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα (Sriraman, 2004). Αναλυτικότερα, το μοντέλο εφαρμόζεται, κυρίως, σε προβλήματα που έχουν τεθεί a priori από μαθηματικούς, αγνοώντας, έτσι, τη συναρπαστική διαδικασία με την οποία προέκυψαν τα πραγματικά ερωτήματα. Δεύτερον, το μοντέλο αποδίδει ένα μεγάλο μέρος του τι συμβαίνει στο δεύτερο και τρίτο στάδιο σε υποσυνείδητες ωθήσεις. Το πρόβλημα των ερωτημάτων αντιμετωπίζεται μερικώς στο μοντέλο των τριών σταδίων του Ervynck (1991).

Ο Ervynck (1991) περιέγραψε τη μαθηματική δημιουργικότητα σε τρία στάδια. Το πρώτο στάδιο (στάδιο 0), αναφέρεται ως προκαταρκτικό τεχνικό στάδιο, το οποίο αποτελείται από κάποιου είδους τεχνικές ή πρακτικές εφαρμογές μαθηματικών κανόνων και διαδικασιών, χωρίς ο χρήστης να έχει κάποια γνώση της θεωρητικής βάσης. Το δεύτερο στάδιο αποτελεί το στάδιο της αλγοριθμικής δραστηριότητας (στάδιο 1), το οποίο αφορά, κυρίως, στην εκτέλεση μαθηματικών τεχνικών. Το τρίτο στάδιο (στάδιο 2) αναφέρεται ως δημιουργική (εννοιολογική, εποικοδομητική) δραστηριότητα. Αποτελεί το στάδιο εμφάνισης της πραγματικής μαθηματικής δημιουργικότητας και συνίσταται στη λήψη μη αλγοριθμικών αποφάσεων. Οι αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν μπορεί να είναι ευρείας αποκλίνουσας φύσης και περιλαμβάνουν πάντα μια επιλογή. Αν και ο Ervynck (1991) προσπαθεί να περιγράψει τη διαδικασία με την οποία ένας μαθηματικός φθάνει στα ερωτήματα μέσω του χαρακτηρισμού των σταδίων 0 και 1, η περιγραφή της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι παρόμοια με εκείνη των Poincare και Hadamard (Sriraman, 2004). Ειδικότερα, η χρήση του όρου «μη αλγοριθμική λήψη αποφάσεων» είναι ανάλογη της χρήσης της μεταφοράς «επιλογή» από τον Poincare.

Ο Guilford (1967) συνέδεσε τη δημιουργική σκέψη με την αποκλίνουσα σκέψη (ή παραγωγή). Η αποκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει τη δημιουργική παραγωγή πολλαπλών λύσεων σε ένα πρόβλημα ή φαινόμενο, και συχνά περιγράφεται και ως ευέλικτη σκέψη. Συγκεκριμένα, τη διαφοροποιεί από την συγκλίνουσα σκέψη, η οποία στοχεύει σε μία μοναδική και σωστή λύση σε ένα πρόβλημα. Ο Torrance (1966) έδωσε τον ακόλουθο ορισμό της δημιουργικότητας:

> Η δημιουργικότητα είναι μια διαδικασία ευαισθητοποίησης σε προβλήματα, ελλείψεις, κενά γνώσεων, ελλιπών στοιχείων, δυσαρμονιών κ.ο.κ., αναγνώρισης της δυσκολίας, αναζήτησης λύσεων, δημιουργίας εικασιών ή διατύπωσης υποθέσεων για τις ελλείψεις, ελέγχου κι επανελέγχου αυτών των υποθέσεων, κι ενδεχομένως, τροποποίησης κι επανεξέτασης αυτών, και τέλος, μετάδοσης των αποτελεσμάτων. (σελ. 8)

Ο ορισμός βασίστηκε σε τέσσερα σχετικά στοιχεία: α) ευχέρεια (fluency), β) ευελιξία (flexibility), γ) πρωτοτυπία (originality), και δ) ανάπτυξη (elaboration). Η ευχέρεια αναφέρεται στη συνοχή των ιδεών, τη ροή των σχέσεων και τη χρήση της βασικής και καθολικής γνώσης. Η ευελιξία συνδέεται με την αλλαγή των ιδεών, την προσέγγιση του προβλήματος με ποικίλους τρόπους και την παραγωγή πολλών λύσεων. Η πρωτοτυπία χαρακτηρίζεται από τον μοναδικό τρόπο σκέψης και τα μοναδικά προϊόντα της πνευματικής ή καλλιτεχνικής δραστηριότητας. Η ανάπτυξη αναφέρεται στην ικανότητα περιγραφής, επεξήγησης και γενίκευσης των ιδεών. Από τους τέσσερις αυτούς παράγοντες, η πρωτοτυπία είναι ευρέως αποδεκτή, καθώς η δημιουργικότητα θεωρείται ως διαδικασία παραγωγής πρωτότυπων ιδεών, προσεγγίσεων ή δράσεων και εκδηλώνεται με νέα και πρωτότυπα προϊόντα (π.χ. μια επιστημονική υπόθεση ή ένα καινούργιο έργο τέχνης) (Leikin, 2009b).

Η Τριαρχική Θεωρία της Νοημοσύνης (Sternberg & Lubart, 2000) ορίζει τη δημιουργικότητα ως ικανότητα παραγωγής απροσδόκητου και πρωτότυπου έργου, το οποίο είναι χρήσιμο και προσαρμοστικό και υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα είναι από τα κεντρικά στοιχεία της ευφυούς ανθρώπινης συμπεριφοράς. Η συμπεριφορά αυτή προκύπτει από την ισορροπία μεταξύ αναλυτικών, δημιουργικών και πρακτικών ικανοτήτων λειτουργώντας συλλογικά για την ενεργοποίηση των ατόμων να επιτύχουν μέσω συγκεκριμένων κοινωνικοπολιτισμικών περιεχομένων (Cianciolo & Sternberg, 2004). Ενώ οι δημιουργικές ικανότητες είναι υπεύθυνες για την επινοητικότητα, την ανακάλυψη, καθώς και άλλα δημιουργικά εγχειρήματα, οι αναλυτικές ικανότητες παρέχουν τη δυνατότητα στο άτομο να αξιολογήσει, να αναλύσει και να συγκρίνει τις πληροφορίες. Οι πρακτικές ικανότητες συνδέουν τα πάντα μαζί επιτρέποντας στο άτομο να εφαρμόσει ό,τι έχει μάθει στο κατάλληλο περιβάλλον. Σύμφωνα με τους Cianciolo και Sternberg (2004), για να θεωρηθεί κάποιος επιτυχημένος στη ζωή θα πρέπει να κάνει την καλύτερη χρήση των αναλυτικών, δημιουργικών και πρακτικών του δυνάμεων και συγχρόνως να αντισταθμίζει τις αδυναμίες σε αυτές τις περιοχές. Οι μαθηματικοί θα προέβαλλαν αντιρρήσεις για το συγκεκριμένο ορισμό, καθώς τα αποτελέσματα της δημιουργικής εργασίας μπορεί να μην περιέχουν πάντα υπαινιγμούς που είναι «χρήσιμοι» όσον αφορά την εφαρμογή τους στον πραγματικό κόσμο (Sriraman, 2004). Για παράδειγμα η απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat από τον AndrewWile, αναγνωρίζεται από τη μαθηματική κοινότητα ως δημιουργικό έργο. Ήταν απροσδόκητο και πρωτότυπο, όμως δεν είχε καμιά δυνατότητα εφαρμογής με την έννοια που προτείνουν οι Sternberg και Lubart.

Ο Runco (1993) περιέγραψε τη δημιουργικότητα ως μια πολύπλευρη δομή που περιλαμβάνει αποκλίνουσα και συγκλίνουσα σκέψη, εξεύρεση και επίλυση προβλημάτων, αυτό-έκφραση, εσωτερικό κίνητρο, στάση αμφισβήτησης και αυτοπεποίθηση. Ο Haylock (1987) συνόψισε πολλές από τις προσπάθειες ορισμού της δημιουργικότητας και αναφέρει τη δημιουργικότητα ως ικανότητα να βλέπεις νέες σχέσεις μεταξύ των τεχνικών και των περιοχών εφαρμογής και να δημιουργείς συνδέσεις μεταξύ των ενδεχομένως άσχετων ιδεών.

Ο Ρώσος ψυχολόγος Krutetskii (1976) χαρακτηρίζει τη δημιουργικότητα στο πλαίσιο του σχηματισμού προβλήματος (εύρεση προβλήματος), της ανεξαρτησίας, της πρωτοτυπίας και της επινοητικότητας. Ο Krutetskii φαίνεται να ταυτίζει τη μαθηματική δημιουργικότητα στους μαθητές με τη μαθηματική χαρισματικότητα και χρησιμοποιεί τους δύο όρους συνώνυμα (Haylock, 1987). Υποστηρίζει ότι η απλή εκμάθηση του μαθηματικού υλικού πρέπει να επεκταθεί σε μια δημιουργική μάθηση των Μαθηματικών υπό τις προϋποθέσεις των σχολικών Μαθηματικών. Τότε, διαβεβαιώνει ότι η μαθηματική δημιουργικότητα θα αναγνωρίζεται στον ανεξάρτητο σχηματισμό απλών μαθηματικών προβλημάτων, στην εύρεση τρόπων και μέσων επίλυσης αυτών των προβλημάτων, στην επινόηση αποδείξεων και θεωρημάτων και στην εύρεση πρωτότυπων μεθόδων επίλυσης μη τυποποιημένων προβλημάτων.

Οι Chamberlin και Moon (2005) όρισαν την δημιουργικότητα ως μια ασυνήθιστη ικανότητα παραγωγής καινοτόμων και χρήσιμων λύσεων σε προβλήματα προσομοίωσης ή ρεαλιστικά εφαρμοσμένα προβλήματα με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων. Η Leikin (2009b) προσδιορίζει τη δημιουργικότητα ως μια δυναμική ιδιότητα του ανθρώπινου νου που μπορεί να βελτιωθεί και να εκτιμηθεί ή αντιθέτως να στερηθεί. Ο Sriraman (2005) προτείνει ότι η μαθηματική δημιουργικότητα μπορεί να ορισθεί σε επαγγελματικό επίπεδο ως η ικανότητα παραγωγής πρωτότυπης δουλειάς, η οποία επεκτείνει σημαντικά τον τομέα των γνώσεων ή ανοίγει ορίζοντες νέων ερωτήσεων για άλλους μαθηματικούς. Θεωρεί τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ένα από τα χαρακτηριστικά των προηγμένων μαθηματικών. Η θέση αυτή είναι παρόμοια με τη θεώρηση της δημιουργικότητας ως ένα από τα χαρακτηριστικά της προηγμένης μαθηματικής σκέψης (Ervynck, 1991). Ο Mann (2006) επισήμανε ότι αν και η σχέση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της ομορφιάς ή χάρης μιας λύσης είναι περίπλοκη, το μαθηματικό μυαλό κρύβει εκλεπτυσμένα προϊόντα και διαδικασίες, τα οποία, συνήθως, επεκτείνονται πέρα των αλγορίθμων, κι επομένως η ομορφιά και η χάρη της λύσης είναι ένδειξη δημιουργικότητας. Ωστόσο, ο Sriraman (2004) θεωρεί ότι η δημιουργικότητα δε συνδέεται μόνο με την πρωτότυπη δουλειά των μαθηματικών, αλλά και με την ανακάλυψη ενός πράγματος που δεν είναι γνωστό από έναν, ακόμη κι αν το αποτέλεσμα είναι μέχρι τώρα γνωστό σε όλους. Η γνώμη αυτή είναι σύμφωνη με την άποψη του Hadamard (1945), ο οποίος αναφέρει ότι μεταξύ της δουλειάς ενός μαθητή που προσπαθεί να επιλύσει ένα πρόβλημα γεωμετρίας ή άλγεβρας κι ενός εφευρέτη, η διαφορά έγκειται στο βαθμό και το επίπεδο και τα δύο έργα είναι παρόμοιας φύσης.

Ο ορισμός της δημιουργικότητας στηριζόμενος στην πρωτοτυπία και τη χρησιμότητα δεν είναι πρακτικός για την αναγνώριση και την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης των μαθητών, για αυτό ορισμένοι ερευνητές έχουν κάνει διάκριση ανάμεσα στον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας σε επαγγελματικό και σχολικό επίπεδο (Shriki, 2010). Σε σχολικό επίπεδο, προφανώς, δεν αναμένεται η παραγωγή έργων εξαιρετικής δημιουργικότητας, όμως είναι εφικτό για τους μαθητές να προσφέρουν νέες διορατικότητες σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Σε συζήτηση αναφορικά με την έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας (Liljedahl & Sriraman, 2006), ο Sriraman προτείνει τον εξής ορισμό για τη μαθηματική δημιουργικότητα σε σχολικό επίπεδο:

1. Η διαδικασία που οδηγεί σε ασυνήθιστες και διορατικές λύσεις σε ένα συγκεκριμένο ή ανάλογο πρόβλημα ή/και
2. Η διατύπωση νέων ερωτήσεων και/ ή δυνατοτήτων που επιτρέπουν την εξέταση ενός παλιού προβλήματος υπό νέα οπτική.

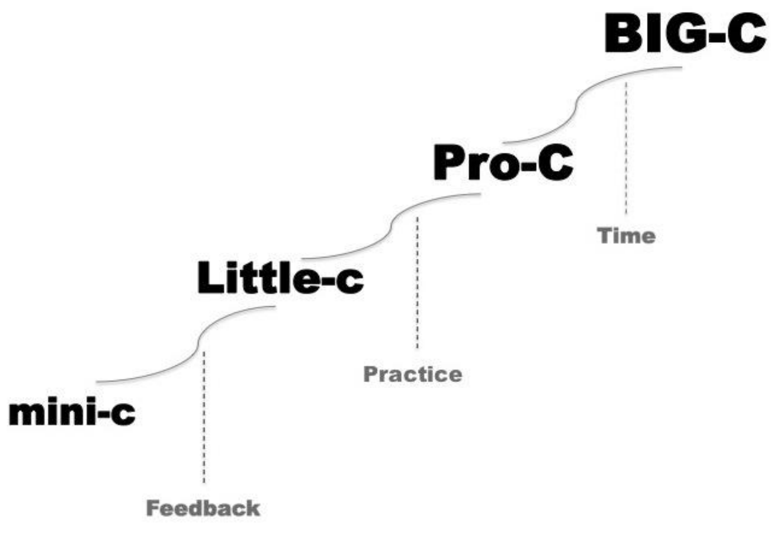
Η μαθηματική δημιουργικότητα στους μαθητές αξιολογείται αναφορικά με τις προηγούμενες εμπειρίες τους και τις επιδόσεις άλλων μαθητών με παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό. Ο Liljedahl (Liljedahl & Sriraman, 2006) υποστηρίζει ότι οποιοσδήποτε ορισμός της δημιουργικότητας είναι σχετικός.

Η θεώρηση της προσωπικής δημιουργικότητας ως χαρακτηριστικό που μπορεί να αναπτυχθεί στους μαθητές, απαιτεί τη διάκριση μεταξύ της σχετικής (relative) κι απόλυτης (absolute) δημιουργικότητας. Η απόλυτη δημιουργικότητα συνδέεται με μεγάλα ιστορικά έργα (Vygotsky 1982) και με ανακαλύψεις παγκόσμιου επιπέδου. Παραδείγματα της μπορούν να εντοπιστούν στις εφευρέσεις των Fermat, Hilbert, Riemann, καθώς και άλλων σημαντικών μαθηματικών (Sriraman, 2005). Η σχετική δημιουργικότητα αναφέρεται στις ανακαλύψεις από έναν συγκεκριμένο άτομο μέσα σε μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς, στην ανθρώπινη φαντασία που δημιουργεί κάτι νέο (Vygotsky, 1982). Οι Liljedahl και Sriraman (2006) συμφωνούν ότι το σχολείο και οι φοιτητές μπορούν να προσφέρουν νέες διορατικότητες/λύσεις στα Μαθηματικά, οι οποίες είναι, συνήθως καινούργιες, όσον αφορά τα Μαθηματικά που οι μαθητές έχουν ήδη μάθει και τα προβλήματα που έχουν επιλύσει. Με άλλα λόγια, οι ιδέες των μαθητών θεωρούνται δημιουργικές με βάση τη συμβολή τους στη μαθηματική γνώση της τάξης ή μιας ομάδας συνομηλίκων, παρά με βάση τη συμβολή τους στη μαθηματική γνώση της κοινότητας των μαθηματικών.

Το μοντέλο των 4 C προσφέρει, επίσης, ένα αναπτυξιακό πλαίσιο για την κατανόηση της έννοιας της δημιουργικότητας.

1.2. Επίπεδα δημιουργικότητας: 4 C's model

Οι περισσότερες έρευνες για τη δημιουργικότητα τείνουν να επικεντρώνονται σε δύο επίπεδα δημιουργικότητας: στην καθημερινή δημιουργικότητα (ή little-C) και στη δημιουργικότητα σε επίπεδο μεγαλοφυΐας (ή Big-C). Η Big-C δημιουργικότητα αναπαριστά τη δημιουργική έκφραση σε πολύ υψηλό επίπεδο επίτευξης, η οποία είναι εφικτή από μικρό αριθμό ατόμων. Καθορίζεται σε συγκεκριμένους τομείς (π.χ. τέχνη) και από ειδικούς του τομέα αυτού (όπως κριτικούς, επιμελητές, συλλέκτες, συναδέλφους). Η δημιουργικότητα Big-C απονέμεται στους δημιουργούς και τα δημιουργικά επιτεύγματα μετά από πολύ χρόνο. Από την άλλη πλευρά, η little-C δημιουργικότητα αναφέρεται στη δημιουργικότητα στις καθημερινές εργασίες και, συνεπώς, είναι προσβάσιμη σχεδόν από όλους (Beghetto & Kaufman, 2007). Για παράδειγμα το έργο του Einstein και του Shakespeare θεωρούνται παραδείγματα Big-C δημιουργικότητας, ενώ η little-C δημιουργικότητα μπορεί να εντοπιστεί στη δουλειά ενός σχεδιαστή μόδας. Οι Beghetto και Kaufman (2007) πρότειναν στο μοντέλο των 4 C της δημιουργικότητας δύο πρόσθετες κατηγορίες, τη mini-C για να συμπεριλάβουν τις αρχικές δημιουργικές ερμηνείες και την Pro-C ως κατάλληλη κατηγορία για τα άτομα που είναι επαγγελματίες δημιουργοί, όμως δεν έχουν φτάσει ακόμη στο επίπεδο της Big-C δημιουργικότητας. Υποστηρίζουν ότι όλοι είναι δημιουργικοί και ότι η δημιουργικότητα αυτή ξεκινάει στο mini-C και τις περισσότερες φορές μπορεί να φτάσει στο little-C. Σε εξαιρετικές περιπτώσεις μπορεί να μετατραπεί σε Pro-C ή Big-C, ενώ σε άλλες η mini-C μπορεί να μην εξελιχθεί ποτέ (Beghetto & Kaufman, 2007).



Εικόνα 1.1. Η αναπτυξιακή πορεία της δημιουργικότητας (Beghetto & Kaufman, 2014, σ. 55)

Όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.1, η mini-C δημιουργικότητα χρησιμεύει ως γένεση των μεταγενέστερων επιπέδων δημιουργικής έκφρασης. Η δημιουργική έκφραση, όμως, δεν ακολουθεί πάντα μια γραμμική εξέλιξη (Beghetto & Kaufman, 2014). Ολοκληρωμένοι δημιουργοί μπορεί να μεταβούν απευθείας από ιδέες mini-C σε Pro-C καινοτομίες. Ακόμη και αρχάριοι που εργάζονται με έναν ειδικό μπορούν να δημιουργήσουν ιδέες mini-C που οδηγούν σε Pro-C συνεισφορές. Για παράδειγμα, μαθητές που εργάζονται σε ένα ερευνητικό σχέδιο συνοδευόμενοι από έναν επαγγελματία επιστήμονα, μπορούν να δημιουργήσουν ιδέες mini-C και να οδηγηθούν σε επιστημονικές συνεισφορές.

Το μοντέλο των 4 C μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν τα επίπεδα δημιουργικής έκφρασης που είναι πιο συναφή με το περιβάλλον της τάξης (mini-C, little-C) και να προσδιορίσουν τους βασικούς παράγοντες που είναι απαραίτητοι για την υποστήριξη της ανάπτυξης της δημιουργικότητας από το ένα επίπεδο στο άλλο (Beghetto & Kaufman, 2014). Όπως φαίνεται στην εικόνα (Εικόνα 1.1) η ανατροφοδότηση αποτελεί ένα από τα πιο βασικά στοιχεία που βοηθούν στη διαμόρφωση των mini-C ιδεών σε little-C συνεισφορές, οι οποίες μπορούν να εκτιμηθούν από άλλους ως δημιουργικές. Στο little-C επίπεδο, η σκόπιμη πρακτική είναι ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες για την εξέλιξη της καθημερινής δημιουργικότητας σε δημιουργικότητα επαγγελματικού επιπέδου, ενώ, τέλος, στο επίπεδο Pro-C, ο χρόνος αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς παράγοντες για την επίτευξη της Big-C δημιουργικότητας.

Οι Beghetto και Kaufman (2007) υποστηρίζουν ότι η περαιτέρω υποδιαίρεση της little-C δημιουργικότητας σε mini-C συντελεί στην επισήμανση του αναπτυξιακού χαρακτήρα της δημιουργικότητας. Η συμπερίληψη της mini-C δημιουργικότητας θεωρήθηκε ότι προσφέρει ένα επιπλέον στοιχείο ανάλυσης για του ερευνητές που ενδιαφέρονται να μελετήσουν τη δημιουργική δυνατότητα και την εξέλιξη των παιδιών και των αρχαρίων. Ειδικότερα, η ένταξή της γίνεται αντιληπτή στην εξέταση των προτύπων που χρησιμοποιούνται για να κρίνουν τις δημιουργικές ιδέες των μαθητών πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην περίπτωση αυτή, η mini-C δημιουργικότητα αντιπροσωπεύει τις αρχικές, δημιουργικές ερμηνείες που όλοι οι δημιουργοί έχουν, οι οποίες αργότερα εκδηλώνονται σε αναγνωρίσιμες δημιουργίες. Το συγκεκριμένο επίπεδο δημιουργικότητας φαίνεται ιδιαίτερα κατάλληλο για τον εκπαιδευτικό τομέα, όπου προτεραιότητα είναι η ενθάρρυνση όλων των μαθητών, που δεν έχουν φθάσει ακόμη στην πνευματική τους κορύφωση, να αξιοποιήσουν πλήρως τις δυνατότητές τους (Mholo, 2017). Σύμφωνα με αυτήν την ιδέα, δημιουργική δυνατότητα μπορεί να εντοπιστεί σε κάθε παιδί, μπορεί να ενθαρρυνθεί ή να περιορισθεί και η εξέλιξή της βασίζεται στο είδος της εκπαίδευσης που λαμβάνουν οι άνθρωποι (Mholo, 2017).

1.3. Προσεγγίσεις στη μελέτη της δημιουργικότητας

Η δημιουργικότητα έχει αποτελέσει αντικείμενο ερευνών στα πεδία της ψυχολογίας, της εκπαιδευτικής ψυχολογίας και της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το *Εγχειρίδιο της Δημιουργικότητας* (Sternberg, 2000), περιέχει μια περιεκτική ανασκόπηση όλων των διαθέσιμων ερευνών στον τομέα της δημιουργικότητας και προτείνει ότι οι περισσότερες από τις προσεγγίσεις που αξιοποιήθηκαν στη μελέτη της δημιουργικότητας μπορούν να ενταχθούν σε έξι κατηγορίες: 1) μυστικιστική (mystical), 2) πραγματιστική (pragmatic), 3) ψυχοδυναμική (psychodynamic), 4) ψυχομετρική (psychometric), 5) γνωστική (cognitive), 6) κοινωνική-προσωπικότητα (social-personality). Ακολουθεί μια σύντομη ανάλυση των συγκεκριμένων προσεγγίσεων.

1. **Μυστικιστική προσέγγιση:** Αρχικά, η γέννηση των δημιουργικών ιδεών θεωρήθηκε ότι γίνεται μυστικά. Συγκεκριμένα, η προσέγγιση αυτή αναφέρει ότι η δημιουργικότητα είναι αποτέλεσμα θείας έμπνευσης ή αποτελεί μια πνευματική διαδικασία. Στην ιστορία των Μαθηματικών, ο Blaise Pascal ισχυρίστηκε ότι πολλές από τις μαθηματικές του ιδέες προήλθαν απευθείας από το Θεό.
2. **Πραγματιστική προσέγγιση:** Η μυστικιστική προσέγγιση αντικαταστάθηκε από μια πραγματιστική, η οποία ασχολήθηκε, κυρίως, με τους τρόπους ανάπτυξης της δημιουργικότητας. Η προσέγγιση αυτή εμπεριέχει, αρχικά, τον προβληματισμό για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας κι όχι την κατανόησή της. Αυτές οι τεχνικές για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας περιελάμβαναν τον καταιγισμό ιδεών, τη βασιζόμενη στην αναλογία σκέψη και το παιχνίδι ρόλων. Η έμφαση του Polya (1954) στη χρήση μιας ποικιλίας ευρετικών για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ευρείας πολυπλοκότητας, αποτελεί παράδειγμα πραγματιστικής προσέγγισης. Οι ευρετικές αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως μηχανισμοί λήψης αποφάσεων, οι οποίοι οδηγούν το μαθηματικό σε μια συγκεκριμένη πορεία, το αποτέλεσμα της οποίας μπορεί να είναι ή να μην είναι αποδοτικό. Ωστόσο, οι μέθοδοι αυτές αποδείχθηκαν μη παραγωγικές, δεδομένου ότι δεν υπήρχαν διαθέσιμα εργαλεία για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013).
3. **Ψυχοδυναμική προσέγγιση:** Βασίζεται στην ιδέα ότι η δημιουργικότητα προέρχεται από την ένταση μεταξύ της συνειδητής πραγματικότητας και των ασυνείδητων ωθήσεων. Το μοντέλο Gestalt αποτελεί παράδειγμα της χρήσης μιας ψυχοδυναμικής προσέγγισης μελέτης της δημιουργικότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί ως ερέθισμα πολλών σύγχρονων μοντέλων επίλυσης προβλημάτων. Παρ’ όλα αυτά, η συγκεκριμένη προσέγγιση έχει δεχθεί έντονες

κριτικές από τους συμπεριφοριστές λόγω της δυσκολίας μέτρησης των προτεινόμενων θεωρητικών δομών.

4. **Ψυχομετρική προσέγγιση:** Η προσέγγιση αυτή αφορά στην ποσοτικοποίηση της έννοιας της δημιουργικότητας με τη βοήθεια χαρτιού και μολυβιού. Το 1950 ο Guilford πρότεινε την εφαρμογή ψυχομετρικών εργαλείων για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας σε όλα τα άτομα και εισήγαγε εργαλεία «αποκλίνουσας σκέψης». Για την αξιολόγηση της αποκλίνουσας σκέψης πρότεινε την εφαρμογή εργασιών πολλών χρήσεων, όπου ζητήθηκε από τα υποκείμενα να παρουσιάσουν όσες το δυνατόν περισσότερες χρήσεις από ορισμένα συνηθισμένα αντικείμενα. Εμπνεόμενος από τον Guilford, ο Torrance (1966) σχεδίασε ένα τεστ δημιουργικής σκέψης, το οποίο χρησιμοποιήθηκε από πολλά προγράμματα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για την αναγνώριση χαρισματικών/δημιουργικών μαθητών. Το τεστ αυτό αποτελείται από εργασίες που απαιτούν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και αποκλίνουσα σκέψη. Το τεστ βαθμολογείται με γνώμονα την ευχέρεια (τον συνολικό αριθμό των κατάλληλων απαντήσεων), την ευελιξία (τον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών απαντήσεων), την πρωτοτυπία (την σπανιότητα των απαντήσεων) και την ανάπτυξη (το ποσό των λεπτομερειών που χρησιμοποιήθηκαν στις απαντήσεις). Ωστόσο, υπάρχει μια συζήτηση για το αν αυτή η αξιολόγηση αποτυπώνει την ουσία της δημιουργικότητας. Ο Sternberg (2000) υποδηλώνει την ύπαρξη θετικών κι αρνητικών πλευρών στην ψυχομετρική προσέγγιση. Αναλυτικότερα, αναφέρει ως πλεονεκτήματα την ευκολία χορήγησης, την αντικειμενική βαθμολογία, καθώς και τη δυνατότητα έρευνας με μη επιφανείς ανθρώπους. Από την άλλη πλευρά, υποστηρίζει ότι η αριθμητική βαθμολογία βασιζόμενη σε σύντομες εργασίες παρουσιάζει αδυναμίες στη σύλληψη της έννοιας της δημιουργικότητας.
5. **Γνωστική προσέγγιση:** Επικεντρώνεται στις νοητικές αναπαραστάσεις και διαδικασίες που υποβόσκουν στην ανθρώπινη σκέψη. Η δημιουργικότητα προϋποθέτει τη χρήση συνηθισμένων γνωστικών διαδικασιών και καταλήγει σε προϊόντα πρωτότυπα κι απροσδόκητα. Τα προϊόντα αυτά είναι αποτέλεσμα γνωστικών διαδικασιών που δρουν στην ήδη αποθηκευμένη γνώση στη μνήμη του ατόμου.
6. **Κοινωνική-προσωπικότητα:** Στην κατηγορία αυτή δίνεται έμφαση στους συναισθηματικούς παράγοντες που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα, καθώς και στα κοινωνικοπολιτιστικά χαρακτηριστικά. Μια δημιουργική διαδικασία από κοινωνική σκοπιά μπορεί να θεωρηθεί ως συλλογικός αυτοσχεδιασμός, μέσα στον οποίο

αναδύεται η δημιουργικότητα από μια πολύπλοκη διαδραστική διαδικασία (Sawyer, 1995). Οι Shani-Zinovich και Zeidner (2009) αναφέρονται στις ευρείες διαστάσεις της προσωπικότητας, όπως η δεκτικότητα, η ευσυνειδησία, η εξωστρέφεια, η νευρικότητα, καθώς και σε δύο μεταβλητές της προσωπικότητας (αυτοαντίληψη και άγχος) κι υποστηρίζουν ότι και οι δύο τύποι μεταβλητών της προσωπικότητας επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την συνειδητοποίηση των διανοητικών ταλέντων. Τα μοντέλα των Subotnik, Pillmeier και Jarvin (2009) περιλαμβάνουν προσωπικά-ψυχολογικά χαρακτηριστικά μεταξύ των παραγόντων που επηρεάζουν την ανάπτυξη των ταλέντων, συμπεριλαμβανομένης της διδασκαλίας, της αυτοαξιολόγησης, της μαθηματικής κλίσης, της απόκρισης σε εξωτερικές ανταμοιβές, της αυτοπροβολής, Υπογραμμίζουν, επιπλέον, την ανάληψη ρίσκου ως ένα από τα προσωπικά χαρακτηριστικά που προωθούν την καινοτομία.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας υποδηλώνει ότι η δημιουργικότητα είναι αποτέλεσμα της συμβολής ενός ή περισσότερων παραγόντων που εμπεριέχονται στις έξι προαναφερθείσες κατηγορίες. Οι τρεις πιο ευρέως αναφερόμενες προσεγγίσεις είναι: α) **η προσέγγιση των συστημάτων** (the systems approach) (Csikszentmihalyi, 1988, 2000), β) **η μελέτη περίπτωσης ως εξελισσόμενη προσέγγιση συστημάτων** (the case study as evolving systems approach) (Gruber & Wallace, 2000), και γ) **η θεωρητική προσέγγιση της επένδυσης** (investment theory approach) (Sternberg & Lubart, 1996).

Η προσέγγιση των συστημάτων λαμβάνει υπόψη τις κοινωνικές και πολιτιστικές διαστάσεις της δημιουργικότητας, αντί της απλής θεώρησης της δημιουργικότητας ως μιας απλής ατομικής ψυχολογικής διαδικασίας. Μελετά την αλληλεπίδραση μεταξύ του ατόμου, του κλάδου (domain) και του πεδίου (field). Το πεδίο αποτελείται από άτομα που έχουν επιρροή σε έναν κλάδο. Ο κλάδος είναι κατά κάποιον τρόπο πολιτιστικός οργανισμός, ο οποίος διατηρεί και μεταδίδει δημιουργικά προϊόντα σε άλλα άτομα του πεδίου. Το μοντέλο των συστημάτων υποδηλώνει ότι η δημιουργικότητα είναι μια διαδικασία παρατηρήσιμη στο σημείο όπου το άτομο, ο κλάδος και το πεδίο αλληλεπιδρούν (Csikszentmihalyi, 2000). Δηλαδή, η συγκεκριμένη προσέγγιση προτείνει ότι για να συμβεί η δημιουργικότητα ένα σύνολο κανόνων και πρακτικών πρέπει να μεταδοθεί από τον κλάδο στο άτομο. Στη συνέχεια, το άτομο πρέπει παράγει μια δημιουργική παραλλαγή στο περιεχόμενο του κλάδου και η παραλλαγή αυτή πρέπει να επιλεχθεί από το πεδίο για συμπερίληψή της στον κλάδο.

Οι Gruber και Wallace (2000) πρότειναν μια προσέγγιση που αντιμετωπίζει κάθε άτομο ως ένα μοναδικό εξελισσόμενο σύστημα δημιουργικότητας και ιδεών, και ως εκ τούτου η δημιουργική δουλειά κάθε ατόμου πρέπει να μελετηθεί μόνη της. Το μοντέλο αυτό έρχεται σε αντίθεση με το επιχείρημα του Csikszentmihalyi (2000), ο οποίος ζήτησε να δοθεί έμφαση στις κοινότητες όπου η δημιουργικότητα εκδηλώνεται. Η προσέγγιση αυτή επικεντρώνεται στο πώς λειτουργεί η δημιουργικότητα κι όχι στην εξήγηση της προέλευσης της δημιουργικότητας και της προσωπικότητας του δημιουργικού ατόμου. Οι Gruber και Wallace (2000) ισχυρίζονται ότι η δημιουργική δουλειά είναι αποτέλεσμα σκόπιμης συμπεριφοράς και μακράς δέσμευσης. Ο Sriraman (2004) διαφωνεί με τον άνωθεν ισχυρισμό, και παραθέτει το παράδειγμα της πενικιλίνης, η οποία ανακαλύφθηκε τυχαία. Η μελέτη περίπτωσης ως εξελισσόμενο σύστημα θεωρεί τη δημιουργική εργασία πολύπλευρη. Έτσι, κατά την κατασκευή μιας μελέτης περίπτωσης ενός δημιουργικού έργου, κάποιος πρέπει να επιλέξει τις πτυχές που είναι σχετικές και να κατασκευάσει τη μελέτη περίπτωσης με βάση αυτές τις επιλεγμένες πτυχές. Κάποιες πτυχές που μπορούν να αξιοποιηθούν είναι οι εξής: 1) μοναδικότητα του έργου, 2) σύστημα πεποιθήσεων, 3) πολλαπλά χρονοδιαγράμματα, 4) αφήγηση αυτών που ο δημιουργός πέτυχε, 5) επίλυση προβλήματος, 6) πλαίσιο (οικογένεια, σχολική φοίτηση, επιρροές εκπαιδευτικών). Με λίγα λόγια, η κατασκευή μιας μελέτης περίπτωσης ενός δημιουργικού έργου ως εξελισσόμενο σύστημα περιλαμβάνει την ενσωμάτωση των πολλών πτυχών που προτείνονται από τους Gruber και Wallace (2000).

Σύμφωνα με το μοντέλο θεωρίας των επενδύσεων, οι δημιουργικοί άνθρωποι είναι σαν τους καλούς επενδυτές, δηλαδή αγοράζουν χαμηλά και πωλούν ψηλά (Sternberg & Lubart, 1996). Συγκεκριμένα, παρουσιάζουν ιδέες που δεν είναι δημοφιλείς, αλλά επενδύουν σημαντικό χρόνο στο να πείσουν τους άλλους ανθρώπους για την εγγενή αξία αυτών των ιδεών. Η θεωρία επενδύσεων υποστηρίζει ότι η δημιουργικότητα συνίσταται στη συμβολή έξι στοιχείων: 1) νοημοσύνη, 2) γνώση, 3) τρόποι σκέψης, 4) προσωπικότητα, 5) κίνητρο, 6) περιβάλλον. Παράλληλα, θεωρεί ότι η δημιουργικότητα είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ του ατόμου, της εργασίας και του περιβάλλοντος και αποτελεί κάτι περισσότερο από ένα απλό άθροισμα του επιπέδου λειτουργίας που έχει επιτευχθεί σε καθένα από τα έξι στοιχεία. Ανεξάρτητα από τα επίπεδα λειτουργίας σε άλλα στοιχεία, απαιτείται ένα ορισμένο επίπεδο ή όριο γνώσης, χωρίς το οποίο η δημιουργικότητα είναι αδύνατη. Η υψηλή νοημοσύνη και το κίνητρο μπορούν να ενισχύσουν θετικά τη δημιουργικότητα και η αδυναμία των άλλων στοιχείων να εξουδετερωθεί μέσω αντισταθμίσεων. Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να ανήκει σε ένα περιβάλλον που δεν στηρίζει τις δημιουργικές προσπάθειες, όμως ένα υψηλό επίπεδο κινήτρων ενδέχεται να το ξεπεράσει και να οδηγήσει σε δημιουργικά εγχειρήματα.

1.4. Η σχέση της δημιουργικότητας με τη χαρισματικότητα και την ικανότητα στα Μαθηματικά

1.4.1. Δημιουργικότητα και χαρισματικότητα (giftedness)

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αποκαλύπτει την πολυπλοκότητας της σχέσης της δημιουργικότητας με τη χαρισματικότητα. Πολλοί ερευνητές ισχυρίζονται ότι η δημιουργικότητα αποτελεί έναν συγκεκριμένο τύπο χαρισματικότητας, άλλοι θεωρούν ότι είναι ένας από τους παράγοντες που ορίζει τη χαρισματικότητα, ενώ κάποιοι προτείνουν τη θεώρησή τους ως δύο ανεξάρτητα χαρακτηριστικά του ανθρώπου (Leikin, 2009a). Σε έρευνά του ο Landau (1981) εντόπισε ότι η συσχέτιση μεταξύ της νοημοσύνης, των προσωπικών χαρακτηριστικών και της δημιουργικότητας των χαρισματικών μαθητών σε σύγκριση με τους μη χαρισματικούς ήταν μηδέν. Ωστόσο, το 1998 (Landau & Wiessler), με τη χρήση διαφορετικής μέτρησης της δημιουργικότητας (Torrance τεστ), παρατηρήθηκε θετική συσχέτιση. Συνεπώς, η ανάλυση της σχέσης μεταξύ της δημιουργικότητας και της χαρισματικότητας, με ειδική εστίαση στα διάφορα πεδία των Μαθηματικών, είναι σημαντική για την καλύτερη κατανόηση της φύσης των δύο εννοιών.

Ο Piirto (1999) αναφέρεται στη διάκριση μεταξύ της γενικής και ειδικής χαρισματικότητας. Η γενική χαρισματικότητα συνδέεται με την ικανότητα παραγωγής αφηρημένων εννοιών υψηλού επιπέδου και επίλυσης σύνθετων προβλημάτων. Από την άλλη πλευρά, η ειδική αναφέρεται στη σαφή και ξεχωριστή διανοητική ικανότητα σε μια συγκεκριμένη περιοχή, για παράδειγμα στα Μαθηματικά (Kruteskii, 1976·Piirto, 1999). Οι ορισμοί που έχουν αποδοθεί στην έννοια της χαρισματικότητας ποικίλλουν, χωρίς, ωστόσο, να έχει συμφωνηθεί ένας κοινός ορισμός στο πεδίο (Mholo, 2017). Ίσως, ο πιο ευρέως αναφερόμενος ορισμός της μαθηματικής χαρισματικότητας είναι εκείνος του Krutetskii (1976), ο οποίος θεωρεί ότι η χαρισματικότητα είναι ένα μοναδικό σύνολο μαθηματικών ικανοτήτων που δίνουν τη δυνατότητα υψηλής επίδοσης στα Μαθηματικά. Αντιθέτως, άλλοι εστιάζουν στην επίδοση παρά στις εγγενείς ιδιότητες του ατόμου κι αναφέρονται στην ανάπτυξη του μαθηματικού ταλέντου κι όχι σε έναν μαθηματικά χαρισματικό μαθητή (Sheffield, 2017).

Για δεκαετίες η χαρισματικότητα θεωρούταν ισοδύναμη με τις έννοιες της ευφυΐας και του IQ (Renzulli, 2005). Η έρευνα έχει αποδείξει επανειλημμένα ότι η βαθμολογία σε ένα μόνο IQ τεστ δεν αποτελεί αξιόπιστο δείκτη της μελλοντικής επίδοσης του μαθητή (Sheffield, 2017). Τα παραδοσιακά τεστ για την αναγνώριση της μαθηματικής χαρισματικότητας δεν αναγνωρίζουν ή δε μετρούν τη χαρισματικότητα, αλλά συχνά ανταμείβουν την ακρίβεια και την ταχύτητα. Συγκεκριμένα, οι αξιολογήσεις αυτές αναγνωρίζουν τους μαθητές που έχουν καλές επιδόσεις στα Μαθηματικά και είναι υπολογιστικά άπταιστοι παραμελώντας, ωστόσο, τους δημιουργικά ταλαντούχους στα Μαθηματικά (Mann, 2006). Σήμερα, οι ερευνητές θεωρούν τη χαρισματικότητα ως μια περισσότερο πολύπλευρη έννοια, στην οποία η νοημοσύνη αποτελεί μόνο μία από τις διάφορες πτυχές (Renzulli, 2005). Ο Kruteskii (1976) σε έρευνα του για τους χαρισματικούς μαθητές παρέθεσε τα εξής χαρακτηριστικά: α) ικανότητα λογικής σκέψης όσον αφορά ποσοτικές και χωρικές σχέσεις, αριθμούς και σύμβολα, β) την ικανότητα ταχείας και ευρείας γενίκευσης των μαθηματικών σχέσεων και πράξεων, γ) την ευελιξία των νοητικών διαδικασιών, και δ) τη μαθηματική μνήμη. Παρόμοια χαρακτηριστικά έχουν εντοπισθεί κι από άλλους, όπως ο Sriraman (2005).

Οι ερευνητές προτείνουν μια ποικιλία μοντέλων που εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της χαρισματικότητας και την ανάπτυξη της δημιουργικότητας. Το μοντέλο των «τριών δακτυλίων» (three-ring model) για τη χαρισματικότητα του Renzulli (1978) θεωρεί τη δημιουργικότητα έναν από τους παράγοντες που συμβάλλει στην ανάπτυξη της χαρισματικής συμπεριφοράς: α) ικανότητα άνω του μέσου όρου, β) δημιουργικότητα, και γ) δέσμευση στη εργασία. Ως δημιουργικότητα ο Renzulli αντιλαμβάνεται την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία της σκέψης, τη δεκτικότητα στην εμπειρία, την ευαισθησία στα ερεθίσματα και την προθυμία ανάληψης ρίσκων. Η ικανότητα άνω του μέσου όρου περιλαμβάνει την επεξεργασία πληροφοριών, την ενσωμάτωση εμπειριών και την αφαιρετική σκέψη, καθώς και την ικανότητα απόκτησης γνώσεων κι εκτέλεσης μιας δραστηριότητας. Ο τρίτος παράγοντας, δέσμευση στη εργασία, βασίζεται στο κίνητρο που μετατρέπεται σε δράση, χωρίς το οποίο, σύμφωνα με τον Renzulli, το υψηλό επίτευγμα είναι απλά ανέφικτο. Ο Renzulli (2006) δίνει, επιπλέον, έμφαση σε παράγοντες που αφορούν το υπόβαθρο, όπως τα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας και τις συνθήκες του περιβάλλοντος.

Ένα ολοκληρωμένο μοντέλο της χαρισματικότητας (Milgram & Hong, 2009) θεωρεί το δημιουργικό ταλέντο ως έναν από δύο ξεχωριστούς τύπους: ειδικό ταλέντο και δημιουργικό ταλέντο. Οι τύποι αυτοί μοιράζονται διαφορετικά είδη ικανοτήτων, με το ειδικό ταλέντο να περιλαμβάνει περισσότερο αναλυτική και νοητική ικανότητα σκέψης παρά δημιουργική. Σύμφωνα με τους Milgram και Hong (2009) το ειδικό ταλέντο στηρίζεται στη λογική και συστηματική ικανότητα σκέψης που χρησιμοποιεί αντιστοίχιση μοτίβων, βασιζόμενη στη μαζική γνώση από τα χρόνια της μάθησης και της εργασιακής εμπειρίας. Το δημιουργικό ταλέντο αντανακλά την ικανότητα παραγωγής ιδεών που είναι ευφάνταστες, έξυπνες, κομψές ή απροσδόκητες πέρα από την αναλυτική σκέψη που απαιτείται ως μέρος της δημιουργικής διαδικασίας. Διαφορετικοί άνθρωποι έχουν διαφορετικούς συνδυασμούς δημιουργικών κι αναλυτικών ταλέντων, τα οποία μπορούν να εμφανιστούν σε διαφορετικά επίπεδα. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, οι δημιουργικοί μαθηματικοί χρησιμοποιούν τόσο δημιουργικές όσο και αναλυτικές ικανότητες σκέψης σε διαφορετικά επίπεδα επίτευξης. Οι Milgram και Hong (2009) τονίζουν ότι τα προσωπικά-ψυχολογικά χαρακτηριστικά και οι περιβαλλοντικοί-κοινωνικοί παράγοντες είναι κρίσιμοι παράγοντες για την ανάπτυξη ταλέντων.

Στο Actiotope μοντέλο εκφράζεται μια επιπλέον άποψη για τη δημιουργικότητα, η οποία επικεντρώνεται σε δημιουργικές ενέργειες (Ziegler, 2005). Το μοντέλο αυτό, καθώς και οι ιδέες των Csikszentmihalyi και Wolfe (2000), δείχνουν ότι η τοποθεσία της δημιουργικότητας δεν περιορίζεται στο μυαλό ενός ατόμου, αλλά ότι η δημιουργικότητα είναι επίσης ενσωματωμένη σε ένα σύστημα όπου το άτομο αλληλεπιδρά με έναν πολιτισμικό κι έναν κοινωνικό τομέα. Το Actiotope μοντέλο (Ziegler, 2005) ταιριάζει με τις αντιλήψεις της δημιουργικότητας και θεωρεί ότι η αρίστευση, η καινοτομία και οι δημιουργικές πράξεις αποτελούν μέρος των μόνιμων επεκτάσεων του ρεπερτορίου δράσης των ατόμων.

Παρά τις διαφορές μεταξύ των μοντέλων και της επίδρασης που επιφέρουν σε διάφορους παράγοντες που συμβάλλουν στην ανάπτυξη του ταλέντου, όλοι οι ερευνητές συμφωνούν ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των προσωπικών χαρακτηριστικών και των περιβαλλοντικών παραγόντων, καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη (realization) του δημιουργικού ταλέντου.

Η εξέταση της ιεραρχίας των οκτώ επιπέδων του Usiskin (2000) μπορεί να βοηθήσει στην αποσαφήνιση των βαθμών της χαρισματικότητας και της δημιουργικότητας όσον αφορά τα Μαθηματικά. Ο Usiskin επινόησε μια ιεραρχία, που κυμαίνεται από το 0 έως το 7, για να ταξινομήσει το μαθηματικό ταλέντο. Στην ιεραρχία του, το επίπεδο 0 (καθόλου ταλέντο) αντιπροσωπεύει τους ενήλικες που γνωρίζουν πολύ λίγα Μαθηματικά, ενώ το επίπεδο 1 (επίπεδο καλλιέργειας) αντιπροσωπεύει εκείνους που έχουν στοιχειώδη αριθμητική αίσθηση ως συνάρτηση της πολιτιστικής χρήσης και η μαθηματική τους γνώση είναι συγκρίσιμη με εκείνη των μαθητών του γυμνασίου. Σαφώς, ένα πολύ μεγάλο ποσοστό του γενικού πληθυσμού κατατάσσεται στα δύο πρώτα επίπεδα.

Ο υπόλοιπος πληθυσμός εξαπλώνεται μεταξύ των επιπέδων 2 και 7 με βάση το μαθηματικό ταλέντο. Στο επίπεδο 2 ανήκουν οι διακριθέντες μαθητές λυκείου που είναι ικανοί να σπουδάσουν Μαθηματικά, καθώς κι εκείνοι που τελικά γίνονται καθηγητές Μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο επόμενο επίπεδο, το επίπεδο 3, κατατάσσονται εκείνοι που πετυχαίνουν υψηλή βαθμολογία στις εξετάσεις SAT. Αυτοί οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ασχοληθούν με τα Μαθηματικά σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Το επίπεδο 4 (εξαιρετικός φοιτητής) αντιπροσωπεύει τους μαθητές που διαπρέπουν σε διαγωνισμούς Μαθηματικών και λαμβάνουν δικαίωμα εισόδου σε θερινές κατασκηνώσεις Μαθηματικών ή Φυσικής και/ή σε ακαδημίες λόγω του ταλέντου τους. Οι μαθητές αυτοί μπορούν να κατασκευάσουν μαθηματικές αποδείξεις και είναι σε θέση να συνομιλήσουν με μαθηματικούς. Το επίπεδο 5 απευθύνεται στον παραγωγικό μαθηματικό. Αν και η περιγραφή του Usiskin (2000) στο επίπεδο αυτό είναι ασαφής, κάποιος μπορεί να συμπεράνει ότι αντιπροσωπεύει τους φοιτητές που έχουν ολοκληρώσει επιτυχώς διδακτορικό στα Μαθηματικά ή σε σχετικές μαθηματικές επιστήμες και είναι είναι σε θέση να δημοσιεύσουν σε αυτόν τον τομέα. Το επίπεδο 6 αποτελεί την σπάνια περιοχή του εξαιρετικού μαθηματικού, δηλαδή εκείνου που έχει συνεισφέρει στην ανάπτυξη του τομέα με αξιοσημείωτες κατακτήσεις και θα βρίσκεται στην ιστορία του τομέα που έχει εργασθεί. Τέλος, στο επίπεδο 7, ανήκουν οι σπουδαιότεροι όλων των εποχών, οι νικητές μεταλλίων στα Μαθηματικά. Το επίπεδο αυτό είναι η αποκλειστική περιοχή των υποδειγματικών ιδιοφυών όπως είναι οι Leonard Euler, Karl Friedrich Gauss, Bernhard Riemmann, Srinivasa Ramanujan, David Hilbert, Henri Poincaré και άλλοι.

Στην ιεραρχία του Usiskin (2000) ο επαγγελματίας (χαρισματικός) μαθηματικός βρίσκεται στο επίπεδο 5, ενώ ο δημιουργικός μαθηματικός στα επίπεδα 6 και 7. Συνεπώς, στον επαγγελματικό χώρο, η μαθηματική δημιουργικότητα συνεπάγεται μαθηματική χαρισματικότητα, αλλά το αντίστροφο δεν είναι απαραιτήτως αληθές. Στη συγκεκριμένη ταξινόμηση, οι μαθητές που είναι χαρισματικοί και/ή δημιουργικοί εντοπίζονται στα επίπεδα 3 και 4. Ο Usiskin τονίζει ότι οι μαθητές αυτοί έχουν τη δυνατότητα να ανέλθουν στο επαγγελματικό επίπεδο (επίπεδο 5) με την κατάλληλη διδακτική ενίσχυση, καθώς προχωρούν από την δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην τριτοβάθμια.

1.4.2. Δημιουργικότητα και ικανότητα στα Μαθηματικά

Η έρευνα σχετικά με την εξέταση της γνώσης του περιεχομένου και της δημιουργικής ικανότητας διακρίνει δύο απόψεις: 1) την άποψη της τάσης (tension view), και 2) την άποψη του θεμελίου (foundation view) (Weisberg, 1999). Η άποψη της τάσης υποθέτει ότι η σχέση μεταξύ της γνώσης και της δημιουργικότητας καθορίζεται ως ένα ανεστραμμένο U, όπου η μέγιστη δημιουργικότητα εμφανίζεται στη μεσαία κλίμακα γνώσης, ενώ από την άλλη πλευρά, η άποψη του θεμελίου υπαινίσσεται θετική σχέση μεταξύ της δημιουργικής υπεροχής και της γνώσης (Weisberg, 1999). Δεδομένου ότι η σχέση μεταξύ της γενικής γνώσης του περιεχομένου και της δημιουργικότητας είναι ακόμη ασαφής, η αντίστοιχη σχέση στον τομέα των Μαθηματικών είναι, επίσης, παρόμοια.

Πολλοί ερευνητές προτείνουν ότι η γνώση του περιεχομένου αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για τη μαθηματική δημιουργικότητα όπως οι Sak και Maker (2006). Οι Sak και Maker (2006) ισχυρίζονται ότι η γνώση του περιεχομένου αποτελεί τη μεταβλητή που συμβάλλει περισσότερο από κάθε άλλη στη δημιουργικότητα των μαθητών. Η σημασία της μαθηματικής δημιουργικότητας στη μαθηματική ικανότητα προτείνεται, επίσης, από τους Hong και Aqui (2004), οι οποίοι σε έρευνά τους εξέτασαν τις διαφορές ανάμεσα στους υψηλά ακαδημαϊκούς και υψηλά δημιουργικούς μαθητές στα Μαθηματικά. Οι συγγραφείς διαπίστωσαν ότι οι δημιουργικοί μαθητές ήταν περισσότερο γνωστικά επινοητικοί από τους συνομηλίκους τους με υψηλούς βαθμούς στα σχολικά Μαθηματικά. Ο Haylock (1997) υποστηρίζει ότι η γνώση και η εξοικείωση των μαθητών με τεχνικές και κανόνες μπορεί να περιορίσει της δημιουργική τους δυνατότητα. Οι αντιλήψεις των μαθητών, όπως ότι κάθε ερώτηση έχε μόνο μία σωστή απάντηση, η οποία μπορεί να επιτευχθεί εφαρμόζοντας γνωστούς αλγορίθμους, ενδέχεται να περιορίσει τη φαντασία τους και να εμποδίσει την περιέργεια και τον πειραματισμό τους. Σύμφωνα με τον Pehkonen (1997), το φαινόμενο αυτό συμβαίνει, καθώς όταν η γνώση και η λογική υπερτονίζονται, το αριστερό ημισφαίριο του εγκεφάλου αναπτύσσεται, ενώ το αριστερό, το οποίο φαίνεται να σχετίζεται περισσότερο με τη δημιουργικότητα, παραμελείται.

Οι πρώτες προσπάθειες απεικόνισης της συσχέτισης μεταξύ της δημιουργικότητας και της μαθηματικής ικανότητας εντοπίζονται το 1970. Μεταξύ των πρώτων μελετών που διερεύνησαν αυτή τη συσχέτιση, υπήρξε η έρευνα που διεξήχθη από τον Jansen το 1973. Ειδικότερα, ο Jansen χορήγησε σε μαθητές 11-12 ετών ένα τεστ αριθμητικής έφεσης, ένα μαθηματικό τεστ αποκλίνουσας παραγωγής για τη μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας κι ένα μαθηματικό τεστ επίδοσης για τη μέτρηση της μαθηματικής ικανότητας, όσον αφορά τον υπολογισμό και την επίλυση προβλημάτων. Τα αποτελέσματα της έρευνας αποκάλυψαν υψηλές και σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των αριθμητικών ικανοτήτων και των βαθμολογιών της μαθηματικής επίδοσης, ενώ δεν υπήρξε σημαντική σχέση ανάμεσα στη μαθηματική δημιουργικότητα και τη βαθμολογία στο τεστ επίδοσης. Τα ευρήματα του Haylock (1997) είναι σύμφωνα με αυτή τη μελέτη. Στην έρευνα του Haylock μαθητές με παρόμοιο βαθμό μαθηματικής επίδοσης είχαν σημαντικές διαφορές στη βαθμολογία της μαθηματικής τους δημιουργικότητας. Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι αρκετοί παράγοντες διαφοροποιούν τη μαθηματική δημιουργικότητα από τη μαθηματική ικανότητα γενικά. Παρόμοια αποτελέσματα βρέθηκαν από τους Baran, Erdogan και Cakmak (2011), οι οποίοι διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της μαθηματικής ικανότητας σε μαθητές ηλικίας 6 ετών. Σε αυτή τη μελέτη, η συλλογή των δεδομένων για τη δημιουργική ικανότητα πραγματοποιήθηκε με τη χρήση ενός εργαλείου γενικής δημιουργικότητας (Torrance τεστ), ενώ τα δεδομένα για τη μαθηματική ικανότητα συλλέχθηκαν με τη χρήση ενός μαθηματικού τεστ, μετρώντας πτυχές των άτυπων και τυπικών Μαθηματικών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της μαθηματικής δημιουργικότητας ή ακόμη και μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και των δεικτών της δημιουργικότητας (όπως ευχέρεια και πρωτοτυπία).

Υπάρχουν, όμως, και κάποιες αντιτιθέμενες απόψεις. Για παράδειγμα ο Silver (1997) υπογραμμίζει ότι η δημιουργικότητα είναι στενά συνδεδεμένη με τη βαθιά κι ευέλικτη γνώση του περιεχομένου, τονίζοντας τη συσχέτιση μεταξύ των δύο εννοιών. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με εκείνα των μελετών των Sak και Maker (2006) και Bahar και Maker (2011). Στην πρώτη ερευνητική μελέτη χρησιμοποιήθηκε ένα μαθηματικό τεστ, αποτελούμενο από ανοιχτού και κλειστού τύπου μαθηματικά προβλήματα, για τη μέτρηση της μαθηματικής γνώσης συγκεκριμένων τομέων και της αποκλίνουσας παραγωγής (πρωτοτυπία, ευελιξία, ευχέρεια, ανάπτυξη). Η ανάλυση των δεδομένων απέδειξε ότι η γνώση είχε στατιστικά σημαντική συνεισφορά στην εξήγηση της διακύμανσης στην πρωτοτυπία, την ευελιξία και την ανάπτυξη σε μαθητές πέμπτης και έκτης τάξης (Sak & Maker 2006). Στην ερευνητική μελέτη που πραγματοποιήθηκε από τους Bahar και Maker (2011), οι ερευνητές διερεύνησαν αν η βαθμολογία των μαθητών σε ένα μαθηματικό εργαλείο παρόμοιο με εκείνο που εφαρμόσθηκε στην προηγούμενη μελέτη σχετίζεται με τη βαθμολογία των μαθητών σε Iowa Tests of Basic Skills (ITBS) και σε Comprehensive Tests of Basic Skills (CTBS). Στο ITBS τεστ αξιοποιήθηκε ο μαθηματικός τομέας, ο οποίος περιελάμβανε μέτρα επίλυσης προβλημάτων, ερμηνείας δεδομένων, μαθηματικών εννοιών, εκτιμήσεων και υπολογισμών. Το CTBS τεστ χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη ως μέτρο της μαθηματικής επίδοσης σε μαθηματικές έννοιες, εκτιμήσεις και υπολογισμούς. Οι Bahar και Maker (2011) συμπέραναν ότι υπάρχει σημαντική συσχέτιση της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας, της ευελιξίας, της ανάπτυξης και της συνολικής μαθηματικής δημιουργικότητας με τη μαθηματική επίδοση και στα δύο τεστ.

Σημαντική, ωστόσο, είναι και η διερεύνηση της φύσης της σχέσης μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της μαθηματικής ικανότητας, δηλαδή αν η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί υπο-στοιχείο της μαθηματικής ικανότητας ή το αντίστροφο. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας. Σύμφωνα με τον Starko (1994), οι μαθητές που χρησιμοποιούν το περιεχόμενο δημιουργικά το μαθαίνουν καλά. Οι δημιουργικές ικανότητες στα

Μαθηματικά περιλαμβάνουν την εναλλαγή αναπαραστάσεων, τη σύγκριση στρατηγικών λύσης, τη σύνδεση πολλών εννοιών και ιδεών, καθώς και την εξέταση του μαθηματικού περιεχομένου από διαφορετικές οπτικές. Οι πτυχές αυτές θεωρούνται πολύτιμη ένδειξη της ανάπτυξης του μαθηματικού συλλογισμού και των ικανοτήτων (Leikin, 2007). Με άλλα λόγια, η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί σημαντική διάσταση στην ανάπτυξη του μαθηματικού ταλέντου (Mann, 2005). Η σχέση αυτή επαληθεύεται από το έργο των Bahar και Maker (2011). Συγκεκριμένα, η ανάλυση πολλαπλής παλινδρόμησης επαλήθευσε ότι η ευχέρεια, η ευελιξία, η πρωτοτυπία και η ανάπτυξη αποτελούν σημαντικούς προβλεπτικούς δείκτες της μαθηματικής ικανότητας. Την άποψη αυτή ενστερνίζονται και οι Sak και Maker (2006), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι βαθμολογία στη μαθηματική δημιουργικότητα μπορεί να προβλέψει τη μαθηματική ικανότητα.

Άλλοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι η μαθηματική γνώση είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας (Mann, 2005). Η εξαιρετική γνώση του περιεχομένου βοηθάει τα άτομα να ανακαλέσουν, να επεξεργαστούν και να ενσωματώσουν την πληροφορία, καθώς και να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών εννοιών και τύπων πληροφοριών (Chi, Glaser & Farr, 1988·Sheffield, 2009). Οι Leung και Silver (1997) ισχυρίζονται ότι ένα άτομο μπορεί να δημιουργήσει μια πρωτότυπη μαθηματική ιδέα εάν είναι γνώστης των μαθηματικών γεγονότων και των σχέσεων που είναι ενσωματωμένες στην κατάσταση. Πράγματι, η δημιουργική δουλειά περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο σύνολο προϋπάρχουσας γνώσης του τομέα και μετασχηματισμού της σε καινούρια γνώση (Nakakoji, Yamamoto & Ohira, 1999). Η σημασία της μαθηματικής γνώσης και των ικανοτήτων επισημάνθηκε από τον Mann (2005), ο οποίος χαρακτήρισε τη μαθηματική πρόοδο ως το σημαντικότερο προβλεπτικό παράγοντα της δημιουργικής μαθηματικής επίδοσης. Σε έρευνά του, πραγματοποίησε ανάλυση παλινδρόμησης γα να προβλέψει τη συνεισφορά της γνώσης των μαθητών στη δημιουργική μαθηματική τους επίδοση. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι η μέτρηση της επιτυχίας των μαθητών στα Μαθηματικά συμβάλλει στην πρόβλεψη της επίδοσής τους σε ένα μαθηματικό δημιουργικό τεστ. Ως εκ τούτου, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που δεν έχουν αποκτήσει ακόμη επαρκείς μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες δεν είναι ικανοί να επιδείξουν δημιουργική μαθηματική σκέψη.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας καθιστά σαφές ότι δεν υπάρχει συμφωνία στο βαθμό συσχέτισης της μαθηματικής δημιουργικότητας με τη μαθηματική ικανότητα, καθώς και στον τρόπο σύνδεσης αυτών των εννοιών. Παράλληλα, υπάρχει σύγχυση ως προς την σχέση της δημιουργικότητας με τη χαρισματικότητα. Οι μαθηματικοί ισχυρίζονται ότι η δημιουργικότητα είναι επιρρεπής στην αλλαγή, ενώ θεωρούν τη μαθηματική χαρισματικότητα ως υπάρχουσα (εγγενή) ικανότητα η οποία μπορεί να ευδοκιμήσει κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Η άποψη αυτή εμπεριέχει δύο σημαντικούς υπαινιγμούς για τη διδασκαλία των Μαθηματικών: ο ένας σχετίζεται με το πρόγραμμα σπουδών και τη διδασκαλία κι ο άλλος με τη φύση και την αναγνώριση των στοχευόμενων ομάδων του πληθυσμού αυτής της διδασκαλίας (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Αναφορικά με τη διδασκαλία, θεωρείται ότι η δημιουργικότητα σε μια μαθηματική τάξη μπορεί να βελτιωθεί μέσω των κατάλληλων διδακτικών μεθόδων (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Όσον αφορά τον πληθυσμό στόχο, η προσοχή δε θα πρέπει να επικεντρώνεται σε μια υποομάδα μαθητών που έχουν αναγνωρισθεί ως δημιουργικοί, αλλά στην παροχή εκείνων των συνθηκών που θα προωθήσουν τη δημιουργικότητα σε όλα τα παιδιά (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009).

1.5. Μαθησιακά περιβάλλοντα και μαθηματική δημιουργικότητα

Ο Binet (1909) επισήμανε ότι η νοημοσύνη δεν είναι σταθερή, αλλά μπορεί να αυξηθεί με εκπαίδευση κι εμπειρία. Συνεπώς, και η δημιουργικότητα μπορεί να θεωρηθεί «ευαίσθητη» ως προς την αλλαγή. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν να είναι μαθηματικά δημιουργικοί, κι ο εγκέφαλός τους μπορεί να αλλάξει και να αυξηθεί, καθώς αντιμετωπίζουν δύσκολα προβλήματα με δημιουργικό τρόπο. Διαφορετικά μέρη του εγκεφάλου φαίνονται να εμπλέκονται κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων από ότι στην επίλυση κλειστών προβλημάτων, στην ανάκτηση απομνημονευμένων πληροφοριών προσθήκης σε σχέση με την ανάγνωση αριθμών ή στον καθορισμό του μεγαλύτερου από δύο σύνολα αντικειμένων (Jausovec, 2000).

Ο Jensen (2000) επισημαίνει ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος διατηρεί μια εκπληκτική πλαστικότητα καθ’ όλη τη διάρκεια της ζωής (ικανότητα αλλαγής του εγκεφάλου μέσω οποιουδήποτε τύπου μάθησης), ενώ είναι εφικτή η αύξηση καινούργιων νευρικών συνδέσεων με διέγερση, ακόμη και σε προχωρημένη ηλικία. Αυτό σημαίνει ότι σχεδόν οποιοσδήποτε μαθητευόμενος μπορεί να αυξήσει τη νοημοσύνη του, χωρίς περιορισμούς, χρησιμοποιώντας τη σωστή ενίσχυση (Jensen, 2000). Σύμφωνα με τον Dweck (2006), η διαφορά ανάμεσα στους μαθητές που επιτυγχάνουν κι εκείνους που αποτυγχάνουν εξαρτάται από την αντίληψη τους αναφορικά με το εάν το ταλέντο είναι εγγενές και πρέπει να αποδειχθεί ή κάτι που χρειάζεται να αναπτυχθεί. Σε έρευνα του με μαθητές πρώτης γυμνασίου, οι οποίοι παρουσίαζαν δυσκολίες στο μάθημα των Μαθηματικών, διαπιστώθηκε βελτίωση της μαθηματικής τους επίδοσης, αφότου έμαθαν για την πλαστικότητα του εγκεφάλου, καθώς κι ότι η νοημοσύνη είναι πιθανό να αναπτυχθεί. Καθίσταται, λοιπόν, αναγκαίο οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν όχι μόνο ότι μπορούν να είναι πετυχημένοι στα Μαθηματικά, αλλά και ότι μπορούν να επιλύσουν προβλήματα με μοναδικούς και δημιουργικούς τρόπους, αναπτύσσοντας, έτσι, τις γνώσεις τους και τον εγκέφαλό τους (Sheffield, 2009).

Οι έρευνες για τη φύση της δημιουργικότητας υποδεικνύουν ότι η καλλιέργειά της εξαρτάται έντονα από τα μαθησιακά περιβάλλοντα (Kaufman & Sternberg, 2006). Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι εκπαιδευτικοί αποτελούν ένα από τα αποτελεσματικότερα στοιχεία προώθησης της μαθηματικής δημιουργικότητας όχι μόνο στο σχολείο αλλά και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Ο Haylock (1987) επισημαίνει την ανάγκη αναγνώρισης, ενθάρρυνσης και βελτίωσης από τους καθηγητές των Μαθηματικών της μαθηματικής δημιουργικότητας σε όλα τα επίπεδα. Παράλληλα, υποστηρίζει ότι:

> Φαίνεται ότι υπάρχει κάτι σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο διδάσκεται κι αξιολογείται το μάθημα των Μαθηματικών, το οποίο ενθαρρύνει τα παιδιά να σκέφτονται σε στενούς τομείς, να βασίζονται σε διαδικασίες ρουτίνας κι αλγορίθμους και να σκέφτονται κατά κύριο λόγο με συγκλίνοντα τρόπο για τα μαθηματικά προβλήματα, ενώ οι ευκαιρίες και η ενθάρρυνση να ξεφύγουν από τα στερεότυπα, να ξεπεράσουν τις σταθεροποιήσεις στην σκέψη, να δείξουν λιγότερο άκαμπτη προσκόλληση στις πετυχημένες ρουτίνες, ή να σκέφτονται ευέλικτα και με αποκλίνοντα τρόπο, ιδιότητες της μαθηματικής σκέψης που μάλλον δικαιολογούν την περιγραφή «δημιουργικός», δυστυχώς, παραμελούνται. (σελ. 59-60)

Επομένως, θα πρέπει να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν το σχεδιασμό και την εφαρμογή μαθησιακών περιβαλλόντων που υποστηρίζουν την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Έρευνες δείχνουν ότι οι δάσκαλοι έχουν αποκλειστικά την τάση να διδάσκουν με τον τρόπο που διδασκόντουσαν στο σχολείο (Shriki, 2010). Ο Sinitsky (2008) θεωρεί ότι οι δημιουργικές εμπειρίες των δασκάλων στα Μαθηματικά παίζουν σημαντικό ρόλο στην αυτοπεποίθησή τους να εισάγουν δημιουργικές μαθηματικές δραστηριότητες για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Για να μπορέσουν οι δάσκαλοι να ενισχύσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών τους, μπορούν να θέσουν στους εαυτούς τους τις ακόλουθες ερωτήσεις (Sheffield, 2009):

1. Περιμένω όλοι οι μαθητές να επιλύσουν προβλήματα με μοναδικούς και δημιουργικούς τρόπους ή τους ζητώ να απομνημονεύσουν τις μεθόδους που χρησιμοποιώ;
2. Ενθαρρύνω τους μαθητές να κάνουν μαθηματικές ερωτήσεις για τις οποίες μπορεί να μην έχω άμεση απάντηση;

3. Μπορώ να αναγνωρίζω εάν μια μοναδική απάντηση είναι η σωστή λύση στο πρόβλημα; Κατέχω τεχνικές για την κατανόηση και την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να δικαιολογούν τις λύσεις τους;
4. Είμαι καλό πρότυπο, δείχνοντας τη χαρά επίλυσης δύσκολων προβλημάτων και δημιουργίας μαθηματικής κατανόησης που είναι καινούργια σε εμένα;
5. Οι αξιολογήσεις μου παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να δημιουργήσουν προβλήματα, να γενικεύσουν μοτίβα, να επιλύσουν προβλήματα με μοναδικό τρόπο και να συνδέσουν διαφορετικές όψεις των Μαθηματικών;
6. Αναγνωρίζω και χρησιμοποιώ βοηθήματα, συμπεριλαμβανομένων συναδέλφων στην ανάπτυξη των μαθημάτων, τα οποία ενθαρρύνουν τη μαθηματική δημιουργικότητα;
7. Έχω λύσει πλούσια προβλήματα κατά την προετοιμασία για την παρουσίασή τους στους μαθητές; Προετοίμασα ερωτήσεις για τη διερεύνηση της σκέψης των μαθητών;

Οι δάσκαλοι θα πρέπει να προσφέρουν καθοδήγηση μέσω κατάλληλων ερωτήσεων, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν αρκετές εμπειρίες για την κατασκευή μαθηματικών ιδεών και εννοιών μόνοι τους (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Παράλληλα, θα πρέπει να τους δίνουν την ευκαιρία να προβληματιστούν αναφορικά με αυτές και τις σχέσεις τους, με σκοπό την εμφάνιση μιας καινούργιας ιδέας για την επίλυση του προβλήματος. Ειδικότερα, οι δάσκαλοι μπορούν να ενθαρρύνουν την επέκταση των μαθηματικών εξερευνήσεων των μαθητών θέτοντας τις παρακάτω ερωτήσεις (Sheffield, 2009):

1. **Ποιος;** Ποιος μπορεί να το επαναδιατυπώσει με δικά του λόγια; Ποιος χρησιμοποίησε μια διαφορετική μέθοδο ή έχει διαφορετική λύση; Ποιος έχει μια νέα ή μοναδική λύση ή πρόταση; Ποιος είναι σωστός; Ποιος συμφωνεί η διαφωνεί;
2. **Τι/ποιο-α ή και αν;** Τι νόημα μπορώ να εξάγω από αυτό το πρόβλημα; Ποια είναι η απάντηση; Ποια είναι τα σημαντικά στοιχεία του προβλήματος; Τι μοτίβα διακρίνω σε αυτά τα δεδομένα; Τι γενικεύσεις μπορώ να κάνω από αυτά τα μοτίβα; Τι απόδειξη έχω; Κι αν αλλάξω ένα ή περισσότερα μέρη του προβλήματος;
3. **Πότε;** Πότε αυτό λειτουργεί; Πότε δεν λειτουργεί;
4. **Πού;** Από πού προήλθαν αυτά; Από πού πρέπει να αρχίσω; Πού μπορώ να πάω μετά; Πού μπορώ να βρω επιπλέον πληροφορίες;
5. **Γιατί ή γιατί όχι;** Γιατί αυτό λειτουργεί; Εάν αυτό δε λειτουργεί, γιατί όχι;
6. **Πώς/πόσο-α;** Πώς αυτό μοιάζει με άλλα μοτίβα ή προβλήματα που έχω δει; Πώς διαφέρει; Πώς σχετίζεται με καταστάσεις ή μοντέλα της καθημερινής ζωής; Πόσες λύσεις είναι δυνατές; Πόσους τρόπους μπορώ να χρησιμοποιήσω για να αναπαραστήσω, να προσομοιώσω, να μοντελοποιήσω ή να οπτικοποιήσω τα

δεδομένα; Με πόσους τρόπους μπορώ να ομαδοποιήσω, να οργανώσω και να παρουσιάσω την πληροφορία;

Γίνεται, λοιπόν, κατανοητό, ότι πρέπει να δίνονται στους μαθητές ευκαιρίες να μάθουν να ψάχνουν, να εξερευνούν, να κάνουν εικασίες, να υποθέτουν, να εξετάζουν, να αντικρούουν, να προσαρμόζουν στρατηγικές, να σχεδιάζουν πλάνα, να εξάγουν και να αιτιολογούν τα συμπεράσματά τους, να παρακολουθούν και να βιώνουν τις διαδικασίες που έχουν περάσει οι μαθηματικοί. Συνεπώς, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να προσαρμόσουν διδακτικές προσεγγίσεις που να αναγνωρίζουν τις δυνατότητες των μαθητών να παράγουν πολλαπλές λύσεις σε ένα δοθέν πρόβλημα κι όχι να υπερτονίζουν τη χρήση κανόνων, αλγορίθμων και διαδικασιών για την εύρεση μίας μόνο σωστής απάντησης (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Η ουσία των Μαθηματικών δεν είναι μόνο η παραγωγή σωστών απαντήσεων, αλλά και η δημιουργική σκέψη (Ginsburg, 1996).

Η δημιουργικότητα χρειάζεται χρόνο για να αναπτυχθεί κι ευδοκιμεί με την εμπειρία. Ο Silver (1997) θεωρεί ότι η δημιουργικότητα είναι στενά συνδεδεμένη με τη βαθιά, ευέλικτη γνώση του περιεχομένου και συχνά συνδέεται με μακρές περιόδους εργασίας και προβληματισμού παρά με τη γρήγορη κι εξαίρετη διορατικότητα. Παράλληλα, τονίζει ότι είναι επιρρεπής σε εκπαιδευτικές και βιωματικές επιδράσεις. Δηλαδή, η ταχύτητα, η ακρίβεια στους υπολογισμούς ή η αναλυτική ικανότητα εφαρμογής γνωστών στρατηγικών σε προσδιορισμένα προβλήματα δεν αποτελούν μέτρα της δημιουργικότητας. Σύμφωνα με αυτό, οι δάσκαλοι δε θα πρέπει να επικεντρώνονται, απλώς, στις διαδικασίες, την ταχύτητα και την ακρίβεια επίλυσης ενός προβλήματος, αλλά στην προσπάθεια παροχής μιας ασφαλούς ατμόσφαιρας, όπου οι μαθητές μπορούν να ξεπεράσουν τη γνωστή αλήθεια, και στην προσφορά ευκαιριών για ροή των σκέψεων (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Οι εκπαιδευτικοί αυτοί βοηθούν τους μαθητές να ανακαλύψουν τη μαθηματική γνώση και να την εφαρμόσουν σε νέες προβληματικές καταστάσεις για να δημιουργήσουν διορατικές λύσεις σε ένα πρόβλημα.

Οι προσεγγίσεις που βασίζονται στην καθοδήγηση των μαθητών να σκέφτονται δημιουργικά κι ευέλικτα για μαθηματικές ιδέες, δημιουργούν περιβάλλοντα τάξεων όπου οι μαθητές μοιράζονται τις ιδέες και τις γνώσεις τους. Στα περιβάλλοντα αυτά δε δίνεται η λύση στους μαθητές, αλλά παρέχονται τα απαραίτητα στοιχεία για την ενίσχυση της ενασχόλησης των μαθητών με απαιτητικές προβληματικές καταστάσεις. Επιπλέον, βοηθούν τους μαθητές να προβληματιστούν για τις δικές τους ιδέες προκειμένου να αποκτήσουν μια νέα εικόνα του προβλήματος. Με αυτό τον τρόπο, ενθαρρύνονται να αναλαμβάνουν κινδύνους, να κάνουν λάθη κι έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν εναλλακτικούς τρόπους. Ο Silver (1997) χαρακτηριστικά αναφέρει ότι η αποθάρρυνση της λήψης ρίσκου περιορίζει την έκθεση των μαθητών σε γνήσια μαθηματική δραστηριότητα κι επιβραδύνει την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Οι Csikszentmihalyi, Rathunde και Whalen (1993) διαπίστωσαν ότι η απόλαυση (enjoyment) έχει κεντρική σημασία στην αιχμαλώτιση του ενδιαφέροντος του μαθητή και στην ανάπτυξη του ταλέντου του. Ο Starko (2010) αναφέρθηκε, επίσης, στο ρόλο του ενδογενούς ενδιαφέροντος στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας. Όσο μεγαλύτερο είναι το εγγενές κίνητρο του παιδιού, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα δημιουργικών εφαρμογών και ανακαλύψεων. Το ενδογενές κίνητρο, όμως, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το κοινωνικό περιβάλλον και κατ' επέκταση από την σχολική τάξη όπου δεσπόζοντα ρόλο κατέχει ο δάσκαλος. Όταν οι δάσκαλοι δεν κοιτούν πέρα από τη λανθασμένη απάντηση, δημιουργούν την πεποίθηση ότι οι απαντήσεις διαιρούνται σε σωστές και λανθασμένες και μπορεί να απορρίψουν τις δημιουργικές εφαρμογές, προωθώντας, έτσι, ένα περιβάλλον τάξης που αποθαρρύνει την ανάπτυξη της δημιουργικότητας (Balka, 1974· Ginsburg, 1996).

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό των αποτελεσματικών περιβαλλόντων για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας είναι το διαδραστικό περιβάλλον (Neumann, 2007). Αν και συνήθως μια νέα ιδέα αποδίδεται στο δημιουργό της, εντούτοις είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με άλλους και των προηγούμενων εμπειριών των ανθρώπων που εργάσθηκαν σε αυτή την ιδέα. Μετά τη μελέτη των διαδικασιών σκέψης δημιουργικών ανθρώπων, όπως του Einstein, διαπιστώθηκε ότι πολλές από τις δημιουργικές ιδέες στηρίζονται στη συνεργασία και την κοινωνική υποστήριξη (John-Steiner, 2000). Ο Sawyer (2007) αναφέρει ότι η συνεργασία αποτελεί το μυστικό κλειδί των δημιουργικών ανακαλύψεων. Ο Sriraman (2009) πραγματοποίησε μια ποιοτική μελέτη, η οποία περιελάμβανε πέντε μαθηματικούς, αναφορικά με τις διαδικασίες που χρησιμοποιούσαν κατά τη διάρκεια της μελέτης των Μαθηματικών. Σκοπός ήταν η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθηματικοί δημιουργούν Μαθηματικά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλοι οι μαθηματικοί της εν λόγω έρευνας εκτίμησαν την αλληλεπίδραση που είχαν με τους μεταπτυχιακούς φοιτητές τους και, επίσης, όλοι αποτίμησαν τον ρόλο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης ως σημαντική πτυχή, η οποία μπορεί να ωθήσει σε μαθηματικές δημιουργικές δραστηριότητες. Για παράδειγμα, πολλοί από τους μαθηματικούς ανέφεραν τα οφέλη της επικοινωνίας με τους συναδέλφους τους μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου και της διεξαγωγής συνεδρίων και συναντήσεων.

Οι περισσότερες έρευνες που αφορούν στη δημιουργικότητα επικεντρώνονται στους τρόπους αναγνώρισης και προώθησης της ατομικής μαθηματικής δημιουργικότητας. Ωστόσο, οι μαθητές που εντάσσονται σε μια κοινότητα τάξης, δεν λειτουργούν απαραίτητα ατομικά. Οι ιδέες ανταλλάσσονται, αξιολογούνται και ενσωματώνεται συχνά υπό την καθοδήγηση του δασκάλου. Συνεπώς, η προκύπτουσα μαθηματική δημιουργικότητα ενός ατόμου ενδέχεται να είναι αποτέλεσμα της συλλογικής πρακτικής της κοινότητας. Το ερώτημα, λοιπόν, που τίθεται είναι: ποιος είναι μαθηματικά δημιουργικός, το άτομο ή κοινότητα; Αν και πολλές από τις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί αναγνωρίζουν την επίδραση της κουλτούρας της τάξης στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, εντούτοις δεν διερευνούν τη μαθηματική δημιουργικότητα ως μια συλλογική διαδικασία ή ως προϊόν συμμετοχής σε μια συλλογική προσπάθεια. Συνεπώς, η διερεύνηση της συλλογικής δημιουργικότητας πέρα της ατομικής καθίσταται αναγκαία.

1.6. Συλλογική δημιουργικότητα

Η δημιουργικότητα εξακολουθεί να θεωρείται ευρέως ένα ατομικό φαινόμενο (Paulus & Nijstad, 2003). Η αναγνώριση μεγάλων καινοτομιών συχνά συσσωρεύεται σε ένα άτομο, παρά την ύπαρξη μιας συλλογικής προσπάθειας πίσω από αυτήν.

Η συνεργασία αναπτύσσει την ικανότητα των μαθητών να σκέφτονται ανεξάρτητα και με άλλους, λαμβάνοντας υπόψη τους μια ευρεία ποικιλία αντιλήψεων και οδηγώντας στην ανάπτυξη της δημιουργικής προοπτικής τους. Η δημιουργική σκέψη δεν είναι χαρακτηριστικό των ατόμων, αλλά και των ομάδων (Kampylis & Berki, 2014). Τα δημιουργικά προϊόντα δεν προκύπτουν μόνο από άτομα, αλλά και από ομάδες, οργανώσεις, κοινότητες, ακόμη και από ολόκληρες κοινωνίες. Αρκετοί όροι, όπως συλλογική/συνεργατική και ομαδική δημιουργικότητα, έχουν αποδοθεί για να περιγράψουν την κοινή προσπάθεια δύο ή περισσότερων ατόμων να επιτύχουν ένα καινοτόμο αποτέλεσμα που δεν μπορεί να επιτευχθεί μόνο από ένα άτομο (Kampylis & Berki, 2014). Οι ερευνητές συμφωνούν ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές, αλλά και αλληλεξαρτήσεις μεταξύ της ατομικής και συλλογικής δημιουργικότητας. Ως εκ τούτου, για τη διερεύνηση της συλλογικής δημιουργικότητας δεν αρκεί η μελέτη της ατομικής δημιουργικότητας. Σημαντική κρίνεται η εξέταση του ρόλου του ατόμου μες στην ομάδα, η δυναμική της ομάδας και οι κοινωνικοπολιτιστικοί και περιβαλλοντικοί παράγοντες.

Η δημιουργικότητα μιας ομάδας ορίζεται ως μια συλλογική διαδικασία, όπου οι ποικίλες δεξιότητες, γνώσεις και αντιλήψεις των μελών μιας κοινότητας συντονίζονται για την παραγωγή ενός αποτελέσματος πρωτότυπου και κατάλληλου για τους προβλεπόμενους σκοπούς της (Bolinger, Bonner & Okhuysen, 2009). Τα βασικά στοιχεία που εμπεριέχονται σε αυτόν τον ορισμό είναι δύο. Πρώτον, η θεώρηση της δημιουργικότητας της ομάδας ως μια συλλογική διαδικασίας, η οποία προϋποθέτει τη συνεργασία ατόμων διαφορετικών ικανοτήτων και αντιλήψεων, ώστε να διευκολυνθεί η αποδοτικότητα της ομάδας (Sawyer, 2003·Taggar, 2002). Οι Hargadon και Bechky (2006) υποστηρίζουν ότι μεγάλο μέρος της συλλογικής δημιουργικότητας εμφανίζεται στις αλληλεπιδράσεις ατόμων με διαφορετικές αντιλήψεις και πλαίσια αναφοράς. Το δεύτερο στοιχείο βασίζεται στον ορισμό της δημιουργικότητας του Amabile (1996) ως διαδικασία παραγωγής ενός προϊόντος καινοτόμου και κατάλληλου.

Οι Tan, Caleon, Pooh και Koh (2018) βασιζόμενη στην υπάρχουσα βιβλιογραφία για την δημιουργικότητα των ομάδων όρισαν τη συλλογική δημιουργικότητα ως την παραγωγή, την αξιολόγηση και την εφαρμογή καινοτόμων λύσεων σε κακώς καθορισμένα προβλήματα μέσω μιας διαδικασίας αμοιβαίας θεμελίωσης και συνεργατικής διαπραγμάτευσης εντός μιας ομάδας. Καθοδηγούμενοι από αυτόν τον ορισμό θεώρησαν τη συλλογική δημιουργικότητα ως μια πολυδιάστατη σύνθεση ικανοτήτων που περιλαμβάνει γνωστικές, μεταγνωστικές και κοινωνικο-επικοινωνιακές δεξιότητες, και συγκεκριμένα: αντανακλαστικότητα, συγκλίνουσα και αποκλίνουσα παραγωγή και προ-κοινωνική αλληλεπίδραση. Ο Paulus (2000) συνέδεσε την ομαδική δημιουργικότητα με την συλλογική εργασία ατόμων με στόχο την παραγωγή καινοτόμων και χρήσιμων ιδεών.

Οι γνωστικές διαδικασίες που προάγουν τη δημιουργικότητα μπορεί να είναι παρόμοιες σε ατομικά και ομαδικά επίπεδα, ωστόσο η συλλογική δημιουργικότητα είναι μοναδική λόγω των τρόπων με τους οποίους οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις επηρεάζουν τη δημιουργικότητα. Για παράδειγμα, οι κοινωνικές διαδικασίες που βελτιώνουν τη δημιουργικότητα των ομάδων περιλαμβάνουν ανταλλαγή πληροφοριών, συνεργατικό συντονισμό και καθορισμό του κινήτρου και των στόχων (Paulus, 2000·Thompson, 2003· West, 2002). Συνεπώς, η ομαδική δημιουργικότητα μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορεί να προκύψει από τις συνολικές προσπάθειες των δημιουργικών ατόμων, όπως στην περίπτωση που τα άτομα εργάζονται ανεξάρτητα και στη συνέχεια συγκεντρώνουν τα ξεχωριστά στοιχεία τους. Δεύτερον, η αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας μπορεί να ενισχύσει συνεργατικά τις δημιουργικές διαδικασίες (Pirola-Merlo & Mann, 2004).

Πέρα από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί η συλλογική δημιουργικότητα, μπορεί, επιπλέον, να αξιολογηθεί με διαφορετικά κριτήρια. Η τυπολογία των ομαδικών εργασιών του Steiner (1972) εντοπίζει τις διακριτές εργασίες, όπου το καλύτερο μέλος της ομάδας καθορίζει τη συνολική απόδοση και τις πρόσθετες εργασίες, στις οποίες ο ατομικές επιδόσεις των μελών της ομάδας μπορούν να αθροιστούν για να καθορίσουν την ομαδική επίδοση. Η τυπολογία αυτή είναι χρήσιμη για την κατηγοριοποίηση της ομαδικής δημιουργικότητας. Στην διακριτή δημιουργικότητα, η πιο δημιουργική ιδέα ενός μεμονωμένου μέλους καθορίζει τη συνολικό δημιουργικό αποτέλεσμα της ομάδας (Pirola-Merlo & Mann, 2004). Παραδείγματα διακριτής δημιουργικότητας περιλαμβάνουν ομάδες που εργάζονται στην επίλυση διορατικών προβλημάτων, στα οποία υπάρχει μόνο ένας περιορισμένος αριθμός λύσεων. Στα συγκεκριμένα προβλήματα, η δημιουργική ιδέα ενός μόνο ατόμου ενδέχεται να οδηγήσει στην επιτυχία ολόκληρης της ομάδας. Στην περίπτωση αυτή, τα διαφορετικά υπόβαθρα και η βάση γνώσεων μιας ποικιλόμορφης ομάδας μπορεί να συνεισφέρει σε διαφορετικές προοπτικές προς εξέταση. Ωστόσο, ενδέχεται η ποικιλομορφία να είναι τόσο ευρεία που να εμποδίζει τα άτομα που προσπαθούν να κατανοήσουν διαφορετικές ιδέες να καταλήξουν σε μια συμφωνημένη λύση.

Όσον αφορά την πρόσθετη δημιουργικότητα, οι δημιουργικές ιδέες των μεμονωμένων μελών μπορούν να συγκεντρωθούν για να προσδιοριστεί η συλλογική επίδοση της δημιουργικότητας (Pirola-Merlo & Mann, 2004). Παραδείγματα πρόσθετης ομαδικής δημιουργικότητας εντοπίζονται στις εργασίες δημιουργίας ιδεών (π.χ. καταιγισμός ιδεών), όπου η δημιουργική απόδοση εξαρτάται από τη συμβολή ολόκληρης της ομάδας. Τα αποτελέσματα ερευνών αναφορικά με τον ομαδικό καταιγισμό ιδεών έδειξαν ότι το δημιουργικό προϊόν δεν βελτιώνεται αναγκαστικά σε ένα ομαδικό περιβάλλον. Οι Paulus και Yang (2000) ισχυρίστηκαν ότι τα ανεπαρκή αποτελέσματα της ομαδικής δημιουργικότητας οφείλονται στα μέλη που δεν είναι συγκεντρωμένα στις ιδέες της ομάδας. Τα άτομα ενδέχεται να δυσκολεύονται να ακούσουν τις ιδέες των άλλων, ενώ παράλληλα παράγουν τις δικές τους ιδέες. Ένας ακόμη λόγος ενδέχεται να είναι ο περιορισμένος χρόνος των μελών να προβληματιστούν αναφορικά με αυτές τις ιδέες.

Αρκετές μελέτες έχουν προτείνει τρόπους ενίσχυσης των διαπροσωπικών σχέσεων ή της συλλογικής δημιουργικότητας. Ένα υποστηρικτικό κοινωνικό πλαίσιο, όπου οι συμμετέχοντες της ομάδας αισθάνονται άνετα να δημιουργήσουν νέες ιδέες, ενδέχεται να επηρεάσει την ομαδική δημιουργική προσπάθεια (Amabile, 1996). Οι Hargadon και Bechky (2006) πρότειναν τέσσερις τύπους κοινωνικής αλληλεπίδρασης που μπορούν να βελτιώσουν τη συλλογική δημιουργικότητα: βοήθεια στην αναζήτηση, βοήθεια στη συνεισφορά, αντανακλαστική αναπλαισίωση και ενίσχυση. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές βοηθούν τους συμμετέχοντες να αντλήσουν και να επαναπροσδιορίσουν τις εμπειρίες του παρελθόντος με τρόπους που μπορούν να οδηγήσουν σε νέες και πολύτιμες ιδέες. Ο Family (2003) επεσήμανε ότι η αίσθηση της υπευθυνότητας από το άτομο ως προς το σύνολο μπορεί να ενθαρρύνει τα άτομα από διαφορετικά πλαίσια να συνεργαστούν προκειμένου να λύσουν ένα κοινό πρόβλημα. Δηλαδή, η συλλογική δημιουργικότητα οδηγεί σε μια συνάθροιση ιδεών για την επίλυση ενός προβλήματος.

Σύμφωνα με τους Martin, Towers και Pirie (2006), η συλλογική μαθηματική κατανόηση προκύπτει από τις αλληλενέργειες. Οι αλληλενέργειες αφορούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές πράξεις που διεξάγονται από ένα άτομο αλλά είναι εξαρτημένες με τις ενέργειες των άλλων μελών της ομάδας. Η συλλογική κατανόηση δεν συμβαίνει απαραίτητα όταν δύο ή περισσότερα άτομα συνεργάζονται ή αλληλεπιδρούν. Αντιθέτως, αλληλενέργεια είναι η διαδικασία κατά την οποία οι μαθηματικές ιδέες που προέρχονται από ένα άτομο ανακατασκευάζονται και επεξεργάζονται από άλλους. Η ιδέα αυτή βασίζεται στη θεωρία της ομαδικής αυτοσχεδιαστικής επίδοσης του Sawyer (2004), η οποία δίνει έμφαση στην απρόβλεπτη ροή των ιδεών και των δράσεων που προκύπτουν από τους συμμετέχοντες που εργάζονται μαζί.

Συμπερασματικά, διαπιστώνεται ότι η αλληλεπίδραση και η συνεργασία μεταξύ των ατόμων ενδέχεται να συμβάλλει σε δημιουργικά επιτεύγματα σε ένα κατάλληλο υποστηρικτικό πλαίσιο. Η συνεργασία των μαθητών εντός της τάξης, καθώς και η εμπλοκή σε συγκεκριμένες δραστηριότητες μπορεί να συμβάλλει στην προώθηση της δημιουργικότητάς τους. Στο επόμενο κεφάλαιο, αναλύεται η φύση των δραστηριοτήτων προώθησης της δημιουργικότητας, τα επιθυμητά χαρακτηριστικά τους και οι τύποι των δραστηριοτήτων που έχουν θεωρηθεί ότι κατέχουν αυτά τα χαρακτηριστικά. Ειδικότερα, η επίλυση και η κατασκευή προβλημάτων έχουν καθιερωθεί ως σημαντικές πτυχές της δημιουργικότητας και περιλαμβάνονται συχνά στην αξιολόγησή της.

2. Είδη δραστηριοτήτων προώθησης της δημιουργικότητας

2.1. Τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων

Ο σκοπός των δραστηριοτήτων αφορά στην προώθηση της δημιουργικότητας, η οποία ορίζεται και αναγνωρίζεται μέσω της ευελιξίας, της ευχέρειας και της πρωτοτυπίας (Silver, 1997). Οι δραστηριότητες, επομένως, πρέπει να ενδυναμώνουν αυτά τα τρία χαρακτηριστικά.

Σύμφωνα με τον Sheffied (2008), το βάθος της κατανόησης, η δυνατότητα γενίκευσης μιας λύσης κι επέκτασης του προβλήματος μέσω ερωτήσεων, αποτελούν επιθυμητά στοιχεία. Οι Jirotkova και Littler (2008) αναφέρουν την ανάγκη των μαθητών για λήψη αποφάσεων αναφορικά με τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος, ως ένα πρόσθετο χαρακτηριστικό. Ένα κεντρικό στοιχείο αποτελεί και ο βαθμός της πρόκλησης που δημιουργείται από τις δραστηριότητες. Η σημασία της πρόκλησης υπογραμμίσθηκε από τον Jaworski (1994), ο οποίος αναπαρέστησε τη διδασκαλία μέσω μιας διδακτικής τριάδας, που περιλαμβάνει την πρόκληση ως μία από τις κύριες διδακτικές ενέργειες. Ο Ching (1997) δηλώνει ρητά ότι στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων που ωθούν τους μαθητές στην εμφάνιση δημιουργικότητας, θα πρέπει να υπάρχει μια ελάχιστη υπόδειξη αναφορικά με τη λύση. Επιπλέον, τα προβλήματα θα πρέπει να έχουν ένα κατάλληλο επίπεδο δυσκολίας, ώστε η δημιουργικότητα να επέλθει σε υψηλότερο επίπεδο (Ching, 1997). Η ανάγκη για πρόκληση θεωρείται υψίστης σημασίας σε τέτοιο βαθμό, όπου μερικοί ερευνητές επισημαίνουν ότι η ενασχόληση των μαθητών με ποικιλία δραστηριοτήτων ανοιχτού τύπου, ενδέχεται να συμβάλλει στη μετέπειτα απώλεια της προκλητικής πτυχής αυτών των προβλημάτων καθιστώντας τα συνηθισμένα. Το επίπεδο της πρόκλησης ή της δυσκολίας αποτελεί ένα λεπτό ζήτημα κατά το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων που στοχεύουν στην ενθάρρυνση της δημιουργικότητας όλων των μαθητών. Αναλυτικότερα, η δραστηριότητα θα πρέπει να είναι απαιτητική προκειμένου να ενθαρρύνει την εύρεση ενδιαφερουσών λύσεων, κι από την άλλη πλευρά, θα πρέπει να επιτρέπει στους αδύναμους μαθητές να οδηγούνται σε μερικές λύσεις λιγότερο εκλεπτυσμένες.

Παρακάτω παρουσιάζονται χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων, που υποδηλώνουν τη δυνατότητά τους να συμβάλλουν θετικά στην προώθηση της δημιουργικότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι μια δοθείσα δραστηριότητα δεν είναι απαραίτητο να εμπεριέχει όλα τα αναγνωρισμένα χαρακτηριστικά. Οι Hershkovitz, Peled και Littler (2009) αναφέρουν ότι οι δραστηριότητες αυτές πρέπει να:

1. Επιτρέπουν πολλαπλές λύσεις
2. Έχουν διαφορετικές απαντήσεις ή διαφορετικές μεθόδους επίλυσης
3. Έχουν λύσεις που κυμαίνονται από απλές κι άμεσες σε λιγότερο άμεσες και περισσότερο πρωτότυπες

4. Είναι απαιτητικές ακόμα κι εάν μπορούν να λυθούν με απλούς τρόπους
5. Μπορούν να επεκταθούν με περαιτέρω ερωτήσεις, όπως «Γιατί;» και «Κι αν δεν;»
6. Επιτρέπουν τη γενίκευση και την αφαίρεση
7. Ενθαρρύνουν τη διερεύνηση διαφόρων περιπτώσεων
8. Ενθαρρύνουν τη συζήτηση και την επιχειρηματολογία
9. Ενθαρρύνουν τη χρήση βαθύτερων μαθηματικών αρχών
10. Χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών στα Μαθηματικά και την επεκτείνουν

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και η κατασκευή προβλημάτων κατέχουν κεντρική θέση στη μάθηση των Μαθηματικών και η δημιουργικότητα εντοπίζεται στη μεταξύ τους αλληλεπίδραση.

2.2. Επίλυση προβλημάτων (Problem Solving)

Ένας από τους σημαντικότερους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι η βελτίωση των πνευματικών ικανοτήτων των ατόμων. Μια πτυχή που συντελεί στην επίτευξη αυτού του σκοπού είναι η επίλυση προβλημάτων στη σχολική τάξη. Οι Αρχές και τα Πρότυπα για τα Μαθηματικά (NCTM, 2000) δηλώνουν ότι η επίλυση προβλημάτων (**P**robem **S**olving, **PS**) αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι στη μάθηση των Μαθηματικών και, συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί κεντρικό θέμα της εκπαίδευσης των μαθητών. Οι μαθητές μαθαίνουν να είναι ικανοί λύτες προβλημάτων μέσω της επίλυσης αξιόλογων προβλημάτων και μαθηματικών δραστηριοτήτων που μπορούν να οδηγήσουν στην ανάπτυξη των γνώσεών τους.

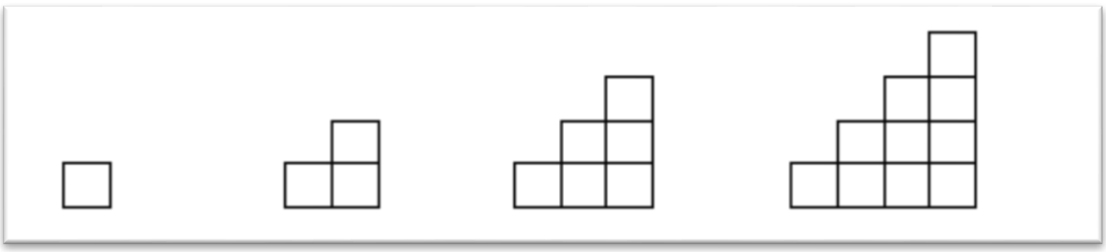
Ένας ευρέως χρησιμοποιούμενος ορισμός της έννοιας του προβλήματος στη μαθηματική βιβλιογραφία δηλώνει ότι ο όρος «πρόβλημα» αναφέρεται σε μια κατάσταση εργασιών, όπου το άτομο υποχρεούται να συνδέσει τις γνωστές πληροφορίες με τρόπο που είναι καινούριος (για εκείνον) για να κάνει το έργο (Kantowski, 1980). Δηλαδή, εάν αναγνωρίζει αμέσως τις ενέργειες που απαιτούνται για την εκτέλεση του έργου, τότε θα αποτελέσει εργασία ρουτίνας για εκείνον. Συνεπώς, το πρόβλημα συνδέεται με το χρόνο και το άτομο. Στην ουσία, τα προβλήματα ορίζονται ως εκείνα που δεν έχουν προφανή λύση ή ακόμη προφανή μέθοδο λύσης και οι μαθητές αναμένονται να χρησιμοποιήσουν μια ποικιλία στρατηγικών για να τα επιλύσουν (Sheffield, 2009).

Σε πολλές χώρες στον κόσμο η επίλυση προβλημάτων περιέχεται ρητά εντός του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών. Εντούτοις, οι απαντήσεις στην ερώτηση γιατί η επίλυση προβλημάτων κατέχει κεντρική θέση στη διδασκαλία δεν είναι ικανοποιητικές. Ο Penkonen (1997) διερεύνησε αυτή την προβληματική κατάσταση κι ανέφερε τέσσερις κατηγορίες στις οποίες μπορούν να ενταχθούν οι λόγοι διδασκαλίας της επίλυσης προβλημάτων:

1. Η επίλυση προβλημάτων αναπτύσσει γενικές γνωστικές δεξιότητες
2. Η επίλυση προβλημάτων προάγει τη δημιουργικότητα
3. Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί μέρος της μαθηματικής διαδικασίας εφαρμογής
4. Η επίλυση προβλημάτων παρακινεί τους μαθητές να μάθουν Μαθηματικά

Γενικές απόψεις για τη σημασία της επίλυσης προβλημάτων δε λήφθηκαν υπόψη στην παρούσα ταξινόμηση. Για παράδειγμα, στις Ηνωμένες Πολιτείες, μια μεγάλη μελέτη των απόψεων διαφόρων ομάδων σχετικά με τον τρόπο που μπορεί να δοθεί έμφαση στη διδασκαλία των Μαθηματικών, διεξήχθη το 1979 (NCTM, 1981). Οι ερωτηθέντες ήταν δάσκαλοι πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, σχολικοί διευθυντές, αντιπρόσωποι των γονέων, σχολικά συμβούλια και εκπαιδευτές δασκάλων. Σκοπός της μελέτης ήταν να προσδιοριστούν τα τμήματα του αναλυτικού προγράμματος με την υψηλότερη κατάταξη σύμφωνα με τη γνώμη των διάφορων ομάδων. Σε όλες τις ομάδες η επίλυση προβλημάτων έλαβε την υψηλότερη κατάταξη. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα επίλυσης προβλήματος (Rosli et al., 2015. σελ. 350).

Παράδειγμα προβλήματος

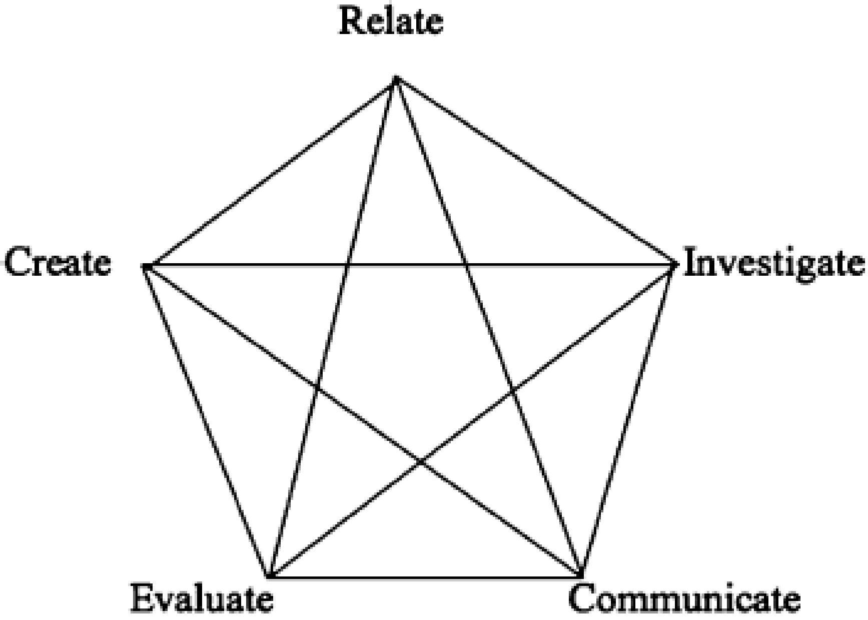


1. Πόσα τούβλα χρειάζονται για να χτιστεί μια σκάλα των 5 σκαλοπατιών; Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.
2. Πόσα τούβλα χρειάζονται για να χτιστεί μια σκάλα των 20 σκαλοπατιών; Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.
3. Βασιζόμενος στην πρώτη και δεύτερη ερώτηση γράψε έναν κανόνα που να γενικεύει τη λύση για οποιοδήποτε αριθμό σκαλοπατιών ή περίγραψε με λόγια πώς βρίσκεις των αριθμό των τούβλων που χρησιμοποιούνται σε κάθε σκαλοπάτι.

Υπάρχουν πολλά μοντέλα που περιγράφουν τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Το μοντέλο του Polya (1945) επικεντρώνεται στην περιγραφή του τρόπου με τον οποίο μπορούν οι εκπαιδευτικοί να βοηθήσουν τους μαθητές στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων. Το μοντέλο αυτό, το οποίο εξακολουθεί ακόμα και σήμερα να εμφανίζεται στα βιβλία των Μαθηματικών, απαρτίζεται από τέσσερα βήματα:

1. Κατανόηση του προβλήματος
2. Σχεδίαση ενός πλάνου
3. Εκτέλεση του πλάνου
4. Έλεγχος

Ο Polya (1945) θεωρεί ότι η διδακτική συνιστώσα είναι ουσιώδης. Για το λόγο αυτό οι εξηγήσεις διαφέρουν ανάλογα τον τομέα (π.χ. άλγεβρα, γεωμετρία) και το επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος. Ωστόσο, δεδομένου ότι τα μαθηματικά προβλήματα ορίζονται συνήθως ως καταστάσεις όπου κάποιος δε γνωρίζει αμέσως την επίλυσή τους, ένα μοντέλο που υποδηλώνει ότι η επίλυση προβλημάτων ακολουθεί μια γραμμική διαδικασία επιλογής και υλοποίησης ενός ενιαίου σχεδίου, δεν αντικατοπτρίζει την πραγματική δημιουργική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων (Sheffield, 2009). Μια ευρετική που συλλαμβάνει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη διαδικασία της δημιουργικής επίλυσης προβλημάτων κι αναπτύχθηκε από τη Sheffield εμφανίζεται στην Εικόνα 2.1.



Εικόνα 2.1. Μοντέλο επίλυσης προβλημάτων (Sheffield, 2009, σ. 95)

Στο μοντέλο αυτό, οι λύτες των προβλημάτων μπορούν να ξεκινήσουν από οποιοδήποτε σημείο του διαγράμματος και να προχωρήσουν με οποιαδήποτε σειρά, επαναλαμβάνοντας συχνά αρκετές διαδικασίες (Sheffield, 2009). Ειδικότερα, μπορούν να κάνουν τα ακόλουθα (Sheffield, 2009):

1. Να συσχετίσουν το πρόβλημα με άλλα προβλήματα που έχουν επιλύσει
2. Να διερευνήσουν το πρόβλημα. Να σκεφτούν βαθιά και να κάνουν ερωτήσεις
3. Να αξιολογήσουν τα ευρήματα τους
4. Να μεταφέρουν τα αποτελέσματά τους
5. Να δημιουργήσουν μια ποικιλία λύσεων

Καθώς ξεκινούν να μαθαίνουν να σκέφτονται όπως οι μαθηματικοί, οι μαθητές μπορούν να αλλάξουν τη σειρά των βημάτων και των ερωτήσεων που θέτουν στην αρχή της διερεύνησης του προβλήματος. Καθ’ όλη τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος, οι μαθητές πρέπει να αξιολογούν τη δουλειά τους, να κάνουν συνδέσεις, να θέτουν ερωτήσεις, και να μεταδίδουν τα αποτελέσματά τους.

Ένα άλλο κλασικό μοντέλο είναι η ιεραρχία ανάλυσης σφαλμάτων του Newman, που χρησιμοποιείται για την ανίχνευση των λαθών των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων (Newman, 1977). Σε αυτό το μοντέλο, η επίλυση προβλημάτων περιγράφεται ως αποτέλεσμα των παρακάτω επιμέρους δραστηριοτήτων:

1. Ανάγνωση του προβλήματος
2. Κατανόηση του προβλήματος
3. Πραγματοποίηση μιας διανοητικής μετατροπής από τις λέξεις της ερώτησης στην επιλογή της κατάλληλης μαθηματικής στρατηγικής
4. Εφαρμογή των διαδικαστικών δεξιοτήτων που απαιτούνται από την επιλεγμένη στρατηγική
5. Κωδικοποίηση της απάντησης σε αποδεκτή γραπτή μορφή

Το μοντέλο αυτό έχει μια πιο ανεπτυγμένη γνωστική συνιστώσα, αλλά η κατασκευή του περιορίζεται από τον στόχο, την περιγραφή επίλυσης τυπικών λεκτικών προβλημάτων ενός βήματος (Singer & Voica, 2013). Ενώ το μοντέλο του Polya (1945) περιγράφεται με συμπεριφορικούς όρους, ο Newman συγχωνεύει τα γνωστικά και συμπεριφορικά επίπεδα. Για παράδειγμα οι λέξεις ανάγνωση και κατανόηση αναφέρονται σε συγκεκριμένες συμπεριφορές, ενώ η φράση πραγματοποίηση μιας διανοητικής μετατροπής απευθύνεται στη γνωστική λειτουργία.

Ο Ervynk (1991) θεωρεί ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι η ικανότητα διατύπωσης μαθηματικών στόχων κι εύρεσης των έμφυτων σχέσεών τους. Ισχυρίζεται ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων σύμφωνα με την καταλληλότητα της ενσωμάτωσης τόσο της φύσης της λογικής-αφαίρεσης στη μαθηματική εκπαίδευση όσο και των εξελισσόμενων εννοιών στον πυρήνα της. Ο Haylock (1987) χώρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα σε δύο τύπους ικανοτήτων: την ικανότητα υπερπήδησης της σταθεροποίησης των σκέψεων ή των συμβατικών νοοτροπιών και την ικανότητα επίδειξης δημιουργικών απαντήσεων σε ανοιχτού τύπου μαθηματικά περιεχόμενα ή προβλήματα.

Η σχέση ανάμεσα στη μαθηματική δημιουργικότητα και την επίλυση προβλήματος συζητήθηκε και από τους Kwon, Park και Park (2006), οι οποίοι πρότειναν δύο σημαντικούς ορισμούς της μαθηματικής δημιουργικότητας: τη δημιουργία νέας γνώσης και τις ευέλικτες ικανότητες επίλυσης προβλημάτων. Οι συγγραφείς ανέπτυξαν ένα πρόγραμμα ενίσχυσης της αποκλίνουσας σκέψης στα Μαθηματικά βασιζόμενο στην επίλυση προβλημάτων ανοιχτού τύπου, το οποίο αποδείχτηκε χρήσιμο για τη βελτίωση των ικανοτήτων δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Οι Chamberlin και Mood (2005) πρότειναν τη χρήση δραστηριοτήτων μοντελοποίησης ως εργαλείο ανάπτυξης και αναγνώρισης των δημιουργικά χαρισματικών μαθητών. Διατύπωσαν την άποψη ότι οι δημιουργικά χαρισματικοί μαθητές διαθέτουν την ασυνήθιστη ικανότητα να δημιουργούν καινούργιες και χρήσιμες λύσεις σε προσομοιωμένα ή ρεαλιστικά προβλήματα, χρησιμοποιώντας τη μαθηματική μοντελοποίηση. Ο Chiu (2009) συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την επίλυση καθημερινών και μη καθημερινών προβλημάτων, καθώς και με την προσέγγιση κακώς δομημένων προβλημάτων (ill-structured problems).

Ακολουθώντας τον Torrance (1966), ο Silver (1997) πρότεινε την ανάπτυξη της δημιουργικότητας μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Αναλυτικότερα, θεωρεί ότι η ευχέρεια αναπτύσσεται μέσω της δημιουργίας πολλαπλών ιδεών και απαντήσεων σε ένα πρόβλημα, καθώς και μέσω της διερεύνησης καταστάσεων. Αντίστοιχα, η ευελιξία εξελίσσεται μέσω της δημιουργίας νέων λύσεων όταν έχει ήδη παραχθεί τουλάχιστον μία, ενώ η πρωτοτυπία προάγεται με τη διερεύνηση πολλών λύσεων σε ένα πρόβλημα και με την δημιουργία ενός καινούργιου.

Η διεθνής βιβλιογραφία υπογραμμίζει τη σημασία ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών να κατανοούν πώς πολλές προσεγγίσεις του ίδιου προβλήματος μπορεί να οδηγήσουν σε ισοδύναμα αποτελέσματα (NCTM, 2000). Ο Polya (1973) θεωρεί ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους χαρακτηρίζει τους έμπειρους μαθηματικούς. Ο Silver (1997) συνέδεσε αυτή την ικανότητα με τη μαθηματική δημιουργικότητα. Οι Leikin και Lev (2007) έδειξαν ότι οι τρόποι με τους οποίους η χαρισματικοί και μη μαθητές βρίσκουν πολλαπλές λύσεις σε ένα πρόβλημα διαφέρουν σημαντικά. Η χρήση προβλημάτων ανοιχτού τύπου (open-ended problems) επιτρέπει σε κάθε μαθητή να προσφέρει τη δική του λύση σύμφωνα με τις δικές τους ικανότητες, καλλιεργώντας κι ενισχύοντας της δημιουργικότητά τους.

2.2.1. Προβλήματα ανοιχτού τύπου (open-ended problems)

Ένα πρόβλημα ανοιχτού τύπου είναι ένα πρόβλημα ανοιχτό σε πολλές διαφορετικές λύσεις (Becker, 1997·Nohda, 2000). Ο ορισμός τους, ωστόσο, ποικίλλει μεταξύ των ερευνητών. Ο Pehkonen (1995) όρισε αρχικά τα προβλήματα κλειστού τύπου (closed problems). Ένα κλειστό πρόβλημα έχει πολύ σαφή αρχή και στόχους και δεν προσφέρει τη δυνατότητα αποκλίνουσας σκέψης. Ως εκ τούτου, ένα πρόβλημα «ανοιχτό» όσον αφορά την εισαγωγή του ή τους στόχους είναι, κατά συνέπεια, ανοιχτό στην αποκλίνουσα σκέψη και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα ανοιχτού τύπου. Υπό αυτή την έννοια, ένα ανοιχτό πρόβλημα ορίζεται ως ένα πρόβλημα που μπορεί να έχει πολύ σαφές αρχικό πλαίσιο, αλλά είναι ανοιχτό σε πολλές διαφορετικές πιθανές λύσεις (Kwon, Park & Park, 2006).

Η χρήση ανοιχτού τύπου προβλημάτων είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στην Ιαπωνία και περιγράφεται από τον Hino (2007) ως μία από τις κύριες αιτίες της επιτυχημένης ανάπτυξης των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων των Ιαπώνων μαθητών. Ο Hino αποδίδει το αρχικό σχέδιο αυτών των προβλημάτων στις προσπάθειες των Ιαπώνων ερευνητών να αναπτύξουν μια μέθοδο αξιολόγησης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Η έρευνα προσφέρει ανοιχτά προβλήματα πολλών διαφορετικών τύπων. Τα προβλήματα αυτά διαφέρουν ανάλογα με το βαθμό που είναι ανοιχτά, το περιεχόμενο, στην έκταση των ρεαλιστικών σκέψεων και το ύφος του προβλήματος (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009).

Αναφορικά με το περιεχόμενο του προβλήματος, κάποιες δραστηριότητες μπορεί να είναι καθαρά μαθηματικές, δηλαδή παρουσιάζονται εντός του κόσμου των Μαθηματικών, ενώ άλλες περιλαμβάνουν λεκτικά προβλήματα ή καταστάσεις της πραγματικής ζωής (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Μια μαθηματική δραστηριότητα μπορεί να ζητήσει μια μαθηματική λύση ή διαφορετικές διαδρομές για την απόκτηση της μαθηματικής λύσης. Για παράδειγμα, ο Ching (1997) χρησιμοποίησε ανοιχτά υπολογιστικά προβλήματα σε τάξεις του Δημοτικού. Συγκεκριμένα, ζήτησε από μαθητές πέμπτης τάξης να βρουν το άθροισμα των πρώτων δέκα φυσικών αριθμών, και στη συνέχεια να εντοπίσουν μεθόδους υπολογισμού αυτού του αθροίσματος δίχως την πρόσθεση αυτών των αριθμών έναν έναν. Οι μαθητές παρήγαγαν μια ευρεία ποικιλία απαντήσεων, αποδεικνύοντας ότι το πρόβλημα συμβάλλει στην προώθηση της δημιουργικότητας και ταυτόχρονα στην αναγνώριση των εξαιρετικά δημιουργικών μαθητών.

Μια δραστηριότητα που δεν είναι καθαρά μαθηματική μπορεί να περιλαμβάνει διαφορετικούς τύπους περιεχομένου και διαφορετικά επίπεδα αυθεντικότητας (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Ένα παράδειγμα προβλήματος με ημι-ρεαλιστικό περιεχόμενο είναι το ακόλουθο: «Ο Roni επισκέφθηκε μια φάρμα. Είδε αγελάδες και κοτόπουλα. Δε θυμάται πόσα ήταν, αλλά θυμάται τον οδηγό να αναφέρει ότι όλα μαζί είχαν 100 πόδια. Πόσες αγελάδες και πόσα κοτόπουλα υπήρχαν στη φάρμα;» (Hershkovitz & Nesher, 2003). Στο πρόβλημα αυτό υπάρχει ένα ευρύ διάστημα λύσεων και διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης, ενώ παράλληλα είναι δυνατή η επέκτασή του σε νέα απαιτητικά προβλήματα.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των ανοιχτών προβλημάτων περιλαμβάνει τη χρήση ρεαλιστικών ιδεών, καταστάσεων της καθημερινής ζωής, ή εννοιών από άλλα θέματα πέρα των Μαθηματικών. Αυτές είναι κυρίως δραστηριότητες μοντελοποίησης, προβλήματα που απαιτούν την οργάνωση της κατάστασης και την πραγματοποίηση επιλογών και συχνά κάποια ενσωμάτωση έννοιας στην προσαρμογή μαθηματικών μοντέλων σε δοθείσες καταστάσεις (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν διαφορετικό βαθμό απαίτησης και πολυπλοκότητας.

Ο Feedman (1994) θεωρεί ότι τα ανοιχτά προβλήματα επιτρέπουν στους μαθητές να χρησιμοποιούν υψηλών διαστάσεων δεξιότητες σκέψης μέσω της χρήσης διαφορετικών μεθόδων γραφής. Ο London (1993) προσδιόρισε ορισμένα γνωρίσματα των προβλημάτων ανοιχτού τύπου. Για παράδειγμα, απαιτούν τα τρία στάδια αναγνώρισης του προβλήματος, δοκιμής και επιμονής. Πρέπει να έχουν αποκλίνουσες λύσεις και να μπορούν να αξιολογούν τους μαθητές. Ο Sawada (1997) απαριθμεί τα πέντε πλεονεκτήματα των ανοιχτών προβλημάτων. Αρχικά, οι μαθητές ενθαρρύνονται να συμμετέχουν ενεργά στην τάξη και να εκφράζουν τις ιδέες τους πιο ελεύθερα. Δεύτερον, τους δίνεται μεγαλύτερη ευκαιρία να να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και δεξιότητες ευρύτερα. Τρίτον, όλοι οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν στο πρόβλημα με τους δικούς τους ουσιαστικούς τρόπους. Τέταρτον, οι τάξεις που κάνουν χρήση ανοιχτών προβλημάτων παρέχουν στους μαθητές μια ορθολογική εμπειρία. Επιπλέον, προσφέρεται η ευκαιρία στους μαθητές να αισθανθούν την εκπλήρωση της ανακάλυψης και την αποδοχή των συμμαθητών τους.

Τα ανοιχτά προβλήματα μπορούν να δώσουν στους μαθητές μια αίσθηση επιτυχίας κι εκπλήρωσης, καθώς είναι δυνατόν ακόμη και οι μαθητές με πιο περιορισμένη μαθηματική ικανότητα, να εκθέσουν τις δικές τους λύσεις εντός των δυνατοτήτων τους. Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αισθανθούν πώς είναι να μαθαίνεις πραγματικά Μαθηματικά κατά τη δημιουργία των δικών τους προβλημάτων. Στη συνέχεια, ακολουθεί παράδειγμα προβλήματος ανοιχτού τύπου και οι λύσεις που δόθηκαν από μαθητές. Το πρόβλημα παρουσιάστηκε από τους Prusak και Levenson (2008) σε ένα συμπόσιο.

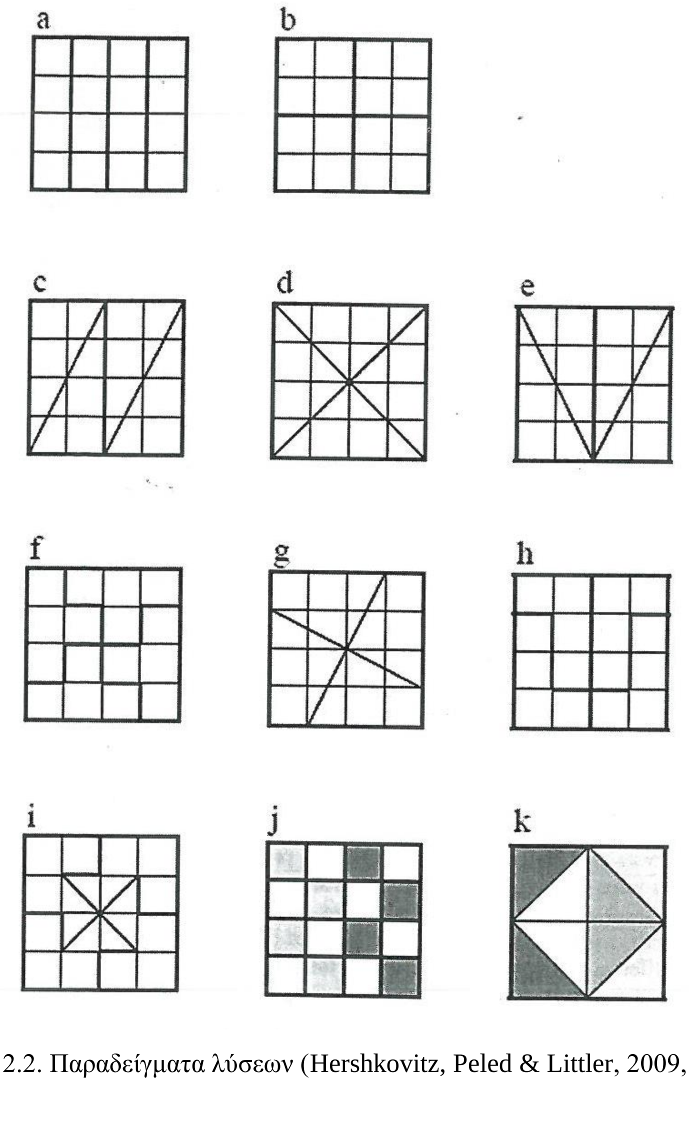
Παράδειγμα ανοιχτού προβλήματος

Μοιράζοντας ένα κέικ

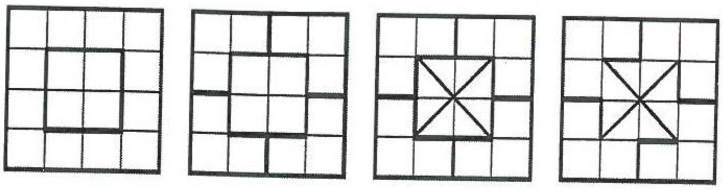
Τέσσερις μαθητές πρέπει να μοιράσουν ένα τετράγωνο κέικ δίκαια. Πώς θα κόψουν το κέικ;

Το πρόβλημα δόθηκε σε μαθητές δημοτικού. Οι λύσεις ανακτήθηκαν κατά τη διάρκεια συζητήσεων εντός της τάξης και παραδείγματά τους παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.2. Οι Prusak και Levenson (2008) περιέγραψαν μια τυπική διαδικασία εξελισσόμενων λύσεων ξεκινώντας με κάποιο ειδικό παράδειγμα που παρουσιάστηκε από ένα παιδί και συνεχίζοντας με τη δημιουργία μιας ολόκληρης σειρά παραδειγμάτων της ίδιας φύσης. Για παράδειγμα, ενώ οι περισσότεροι μαθητές ξεκίνησαν με παραδείγματα απλών ευθειών γραμμών, όπως διαφαίνεται στο σχήμα a και b της Εικόνας 2.2, στη συνέχεια κινήθηκαν στη δημιουργία νέων παραδειγμάτων ακολουθώντας ένα «τριγωνικό» παράδειγμα όπως απεικονίζεται στα σχήματα c, d και e.

Το πρόβλημα αυτό, αρχικά, φαίνεται απλό και όχι ιδιαίτερα απαιτητικό, ωστόσο η περαιτέρω διερεύνηση αποδεικνύει το αντίθετο. Τα παραδείγματα j και k, δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο το τετράγωνο μπορεί να χωριστεί σε μη συνεχόμενα σχήματα. Στα παραδείγματα f, g και h διαφαίνονται πιο δημιουργικοί τρόποι διαχωρισμού της τούρτας. Ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος αποτελεί το παράδειγμα στην Εικόνα 2.3. Ο μαθητής ξεκίνησε δημιουργώντας ένα εσωτερικό τετράγωνο. Συνεχίζοντας, χώρισε το μεγάλο τετράγωνο σε 4 μέρη με έναν σχετικά συμβατικό τρόπο. Έπειτα, χώρισε το εσωτερικό τετράγωνο με έναν άλλο συμβατικό τρόπο, αλλά συνδύασε τις δύο ενέργειες με τη διαγραφή ορισμένων γραμμών. Το τελικό ενδιαφέρον σχήμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.2. Παραδείγματα λύσεων (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009, σ. 261)



Εικόνα 2.3. Η σειρά των βημάτων του μαθητή (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009, σ. 262)

Το σύνολο των λύσεων της Εικόνας 2.2, καθώς και η περιγραφή των βημάτων του μαθητή στην Εικόνα 2.3, αποδεικνύουν ότι η δραστηριότητα αυτή μπορεί να συμβάλλει στην προώθηση της ευχέρειας και της ευελιξίας, προτρέποντας τα παιδιά το ένα το άλλο ή μέσω της προτροπής του δασκάλου για δημιουργία περισσότερων παραδειγμάτων και πιο ενδιαφερόντων. Επιπλέον, το πρόβλημα ενθαρρύνει την πρωτοτυπία, όπως απεικονίζεται στην ποικιλία των κατηγοριών λύσεων και στο υψηλό επίπεδο πρωτοτυπίας της δουλειάς των μαθητών.

Οι «ανοιχτές» δραστηριότητες μπορεί να είναι διαφορετικών ειδών. Κάποιες παρουσιάζουν δεδομένα και θέτουν συγκεκριμένες ερωτήσεις, όπως το παραπάνω πρόβλημα. Άλλα είδη, όμως, μπορεί να αφορούν σε δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος (problem posing). Στην επόμενη ενότητα γίνεται εκτενής αναφορά στις δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος και στα χαρακτηριστικά τους.

2.3. Κατασκευή προβλήματος (Problem Posing)

Στην καθημερινή ζωή, οι άνθρωποι επιλύουν προβλήματα για την ικανοποίηση των διάφορων αναγκών τους. Η επίλυση προβλημάτων εξασκείται, όπως αναφέρθηκε, στο σχολείο. Σε αντίθεση, όμως με τα προβλήματα στο σχολικό πλαίσιο, τα ζητήματα της καθημερινής ζωής είναι λιγότερο δομημένα. Έτσι, ενώ ένα «σχολικό πρόβλημα» συνήθως περιέχει ρητές παραδοχές και περιορισμούς, τα προβλήματα της καθημερινότητας απαιτούν αναγνώριση και αναδιατύπωση για την αντιμετώπισή τους με τους διαθέσιμους πόρους. Ως εκ τούτου, στην καθημερινή ζωή δεν είναι χρήσιμη μόνο η επίλυση προβλημάτων. Συγκεκριμένα, η ικανότητα σύνθεσης της πολυπλοκότητας των καταστάσεων φαίνεται, επίσης, σημαντική για την πρόβλεψη ενδεχόμενων προβλημάτων. Πράγματι, η αναγνώριση τέτοιων προβληματικών καταστάσεων, η αξιολόγηση των πιθανών συνεπειών, η εξεύρεση λύσεων για την αποφυγή διάφορων συνεπειών ή τουλάχιστον για να μετριάσουν τις επιπτώσεις τους στο περιβάλλον ή στο άτομο, μπορεί μερικές φορές να είναι ζωτικής σημασίας.

Στη συνηθισμένη πρακτική διδασκαλίας, η δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών δραστηριοτήτων της τάξης και του πραγματικού κόσμου επικεντρώνεται κυρίως σε δραστηριότητες λεκτικών προβλημάτων. Τα παραδοσιακά λεκτικά προβλήματα εστιάζουν, συνήθως, στην εφαρμογή λειτουργικών κανόνων που περιλαμβάνουν αντιστοίχιση μεταξύ της δομής της προβληματικής κατάστασης και της δομής μιας συμβολικής μαθηματικής έκφρασης. Συχνά, η επίλυση τέτοιων λεκτικών προβλημάτων δεν αποτελεί δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος για τους μαθητές, αλλά μια άσκηση που βασίζεται σε συντακτικά σήματα για λύση, όπως είναι οι λέξεις-κλειδιά ή φράσεις σε ένα πρόβλημα (π.χ. «φορές», «λιγότερα»). Ωστόσο, χωρίς να αγνοείται η σημασία αυτών των προβλημάτων στο πρόγραμμα σπουδών, δε συμβάλλουν επαρκώς στην προώθηση της μαθηματικής γνώσης, των διαδικασιών, της αντιπροσωπευτικής ευχέρειας και των επικοινωνιακών δεξιοτήτων που χρειάζονται οι μαθητές του 21^{ου} αιώνα.

Το Εθνικό Συμβούλιο των διδασκόντων των Μαθηματικών (**N**ational **C**ouncil of **T**eachers of **M**athematics, 1989) υπογράμμισε ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν εμπειρία στην οργάνωση και το σχηματισμό των δικών τους προβλημάτων, μια δραστηριότητα που αποτελεί το κέντρο της μάθησης των Μαθηματικών. Το 1991 το NCTM πρότεινε τη σημασία παροχής από τους εκπαιδευτικούς ευκαιριών στους μαθητές για κατασκευή δικών τους προβλημάτων. Συγκεκριμένα, τονίζει ότι οι μαθητές θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να σχηματίσουν δικά τους προβλήματα από δοθείσες καταστάσεις και να δημιουργούν καινούρια προβλήματα μέσω της τροποποίησης των συνθηκών σε ένα δοθέν πρόβλημα. Οι Αρχές και τα Πρότυπα για τα Σχολικά Μαθηματικά στις Η.Π.Α. (NCTM, 2000) ζητούν από του μαθητές να διατυπώνουν ενδιαφέροντα προβλήματα βασιζόμενοι σε μια μεγάλη ποικιλία καταστάσεων, τόσο εντός όσο κι εκτός των Μαθηματικών. Παράλληλα, συνιστούν οι μαθητές να κάνουν και να διερευνούν μαθηματικές υποθέσεις, καθώς και να μάθουν πώς να γενικεύουν και να επεκτείνουν τα προβλήματα θέτοντας ερωτήσεις (NCTM, 2000).

Η κατασκευή προβλήματος (Problem Posing) κατέχει, λοιπόν, κεντρικό ρόλο στο μάθημα των Μαθηματικών και στη φύση της μαθηματικής σκέψης (Kilpatrick, 1987). Η πρόοδος των Μαθηματικών απαιτεί δημιουργική φαντασία, η οποία είναι αποτέλεσμα της δημιουργίας νέων ερωτήσεων, νέων δυνατοτήτων και της θεώρησης των παλιών ερωτήσεων υπό νέα οπτική γωνία (Ellerton & Clarkson, 1996). Η διατύπωση προβλημάτων θα πρέπει να θεωρείται όχι μόνο στόχος, αλλά και μέσο της διδασκαλίας. Η εμπειρία της ανακάλυψης και της δημιουργίας μαθηματικών προβλημάτων οφείλει να αποτελεί μέρος της εκπαίδευσης των μαθητών. Σύμφωνα με τον Einstein, η δημιουργία ενός ενδιαφέροντος προβλήματος είναι συχνά πιο σημαντική από τη λύση του (Einstein & Infeld, 1938).

Υπάρχουν διάφοροι όροι που χρησιμοποιούνται αναφορικά με την κατασκευή προβλήματος: εύρεση προβλήματος (problem finding), ανίχνευση προβλήματος (problem sensing), διατύπωση προβλήματος (problem formulating), δημιουργική εξεύρεση προβλημάτων (creative-problem discovering), προβληματοποίηση (problematizing), δημιουργία προβλήματος (problem creating), πρόβλεψη προβλήματος (problem envisaging) (Dillon, 1982·Jay & Perkins, 1997). Οι Stoyanova και Ellerton (1996) ορίζουν την κατασκευή προβλήματος ως διαδικασία με την οποία οι μαθητές, με βάση τη μαθηματική τους εμπειρία, κατασκευάζουν τις προσωπικές τους ερμηνείες αληθινών καταστάσεων και τις διατυπώνουν ως σημαντικά μαθηματικά προβλήματα. Σε μεγάλο βαθμό και σύμφωνα με πολυάριθμες μελέτες κατασκευή προβλήματος σημαίνει σχηματισμός καινούργιων προβλημάτων, με λύσεις άγνωστες τουλάχιστον σε εκείνον που τα διατυπώνει (π.χ. Mamona-Downs, 1993). Σύμφωνα με τον ορισμό του Silver (1994), η κατασκευή προβλήματος αναφέρεται τόσο στη δημιουργία καινούργιων προβλημάτων, όσο και στον ανασχηματισμό δοθέντων προβλημάτων.

Η κατασκευή προβλήματος και η επίλυση προβλήματος, συχνά, θεωρούνται συμπληρωματικές, αλλά διαφορετικής φύσεως, μαθηματικές δραστηριότητες (English, 1998, 2003·Silver, 1994). Από την άλλη πλευρά, η κατασκευή προβλήματος μπορεί να εξετασθεί ως ειδική περίπτωση επίλυσης προβλημάτων. Πράγματι, ο Kilpatrick (1985) ορίζει την επίλυση προβλημάτων ως τη διαδικασία μετακίνησης από μια δοθείσα κατάσταση σε μια κατάσταση- στόχο, όπου εμπλέκεται ένα άτομο με κίνητρο. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, καθώς και τους ορισμούς που έχουν δοθεί στη διαδικασία κατασκευής προβλήματος παραπάνω, η κατασκευή προβλήματος είναι μια ειδική περίπτωση προβλήματος με την ακόλουθη σημασία: η δοθείσα κατάσταση είναι η δραστηριότητα κατασκευής προβλήματος, δηλαδή κάποια σύνολα συνθηκών και οδηγιών από τις οποίες πρέπει να ξεκινήσει η διαδικασία κατασκευής προβλήματος (Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman, 2011). Η κατάσταση-στόχος είναι η διατύπωση ενός νέου προβλήματος το οποίο ικανοποιεί τις απαιτήσεις της δραστηριότητας κατασκευής προβλήματος. Επιπλέον, οι μέθοδοι διαμόρφωσης νέων προβλημάτων δεν είναι, κατά κανόνα, γνωστές εκ των προτέρων στους κατασκευαστές προβλημάτων (Kontorovich et al., 2011).

Ο Silver (1994) κατηγοριοποίησε την κατασκευή προβλήματος ανάλογα με το αν πραγματοποιείται πριν (presolution), κατά τη διάρκεια (within-solution), ή μετά (post-solution). Υποστήριξε, δηλαδή, ότι η κατασκευή προβλήματος μπορεί να συμβεί:

1. Πριν την επίλυση ενός προβλήματος, όταν τα προβλήματα δημιουργήθηκαν από ένα συγκεκριμένο ερέθισμα (π.χ. μια ιστορία, μια εικόνα, ένα διάγραμμα, μια αναπαράσταση κλπ).
2. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος, όταν ένα άτομο σκόπιμα αλλάζει τους στόχους και τις συνθήκες του προβλήματος.
3. Μετά την επίλυση ενός προβλήματος, όταν οι εμπειρίες από ένα πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων αλλάζουν ή εφαρμόζονται σε νέες καταστάσεις.

Επιπλέον, οι Stoyanova και Ellerton (1996) εντόπισαν τρεις κατηγορίες καταστάσεων κατασκευής προβλήματος. Αυτές είναι οι εξής:

1. Ελεύθερες (free): στις ελεύθερες καταστάσεις οι μαθητές θέτουν προβλήματα χωρίς περιορισμούς. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα δύσκολο πρόβλημα, ή απλούστερα να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που τους αρέσει.
2. Ημιδομημένες (semi-structured): στις καταστάσεις αυτές παρέχεται στους μαθητές μια ανοιχτή κατάσταση και καλούνται να διερευνήσουν τη δομή της και να την ολοκληρώσουν, χρησιμοποιώντας γνώσεις, δεξιότητες, έννοιες και σχέσεις από τις προηγούμενες μαθηματικές τους εμπειρίες.
3. Δομημένες (structured): αναφέρονται σε καταστάσεις όπου οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα ανασχηματίζοντας ήδη επιλυμένα προβλήματα ή αλλάζοντας τις συνθήκες ή την ερώτηση του δοθέντος προβλήματος.

Οι Stoyanova (2000) και Silver (1994) κατηγοριοποίησαν τις δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος ανάλογα με τις καταστάσεις και τις εμπειρίες, οι οποίες παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να συμμετάσχουν στη μαθηματική δραστηριότητα. Και οι δύο κατηγοριοποιήσεις περιλαμβάνουν πέντε κατηγορίες δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος. Οι δραστηριότητες αυτές απαιτούν από τους μαθητές να θέσουν:

1. Ένα πρόβλημα γενικά (ελεύθερες καταστάσεις)
2. Ένα πρόβλημα με δοθείσα απάντηση
3. Ένα πρόβλημα που περιέχει συγκεκριμένες πληροφορίες
4. Ερωτήσεις για μια προβληματική κατάσταση
5. Ένα πρόβλημα που εφαρμόζει έναν συγκεκριμένο υπολογισμό

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται παραδείγματα δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος. Οι δραστηριότητες αυτές προέρχονται από έρευνα των Pittalis, Christou, Mousoulides και Pitta-Pantazi (2004).

Παραδείγματα δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος

Παράδειγμα 1ο

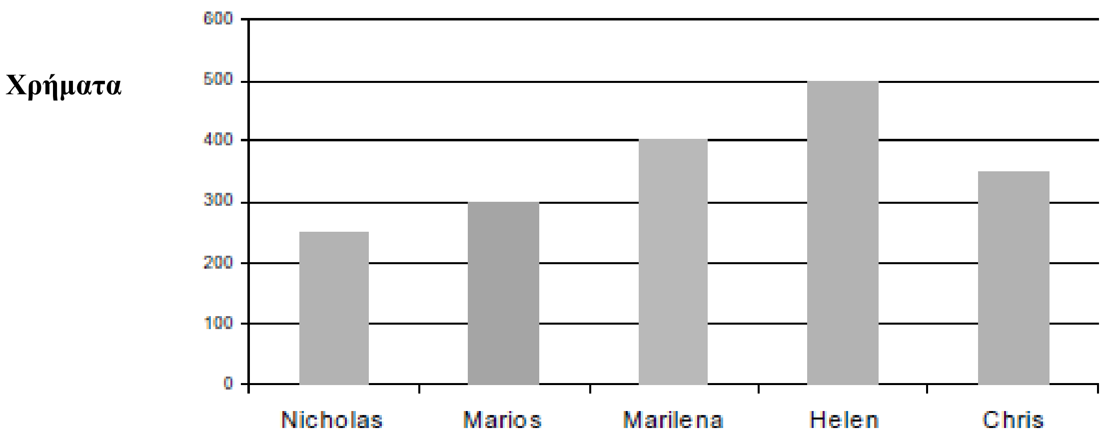
Να γράψεις μια ερώτηση στην ιστορία, της οποίας η απάντηση να είναι «285 γραμματόσημα».

Ο Χρήστος έχει 135 γραμματόσημα, ενώ η Ελένη έχει 15 παραπάνω από τον Χρήστο.

Παράδειγμα 2ο

Γράψε μία ερώτηση βασιζόμενος στο παρακάτω διάγραμμα.

Αποταμιεύσεις στην τράπεζα



Παράδειγμα 3ο

Γράψε ένα κατάλληλο πρόβλημα για (1.300+2.100) -790=n

Παράδειγμα 4ο

Γράψε ένα πρόβλημα βασιζόμενο στην παρακάτω εικόνα.

O Getzels (1979) υποστήριξε ότι σε αντίθεση με την επίλυση προβλημάτων, η κατασκευή προβλημάτων αποτελεί έναν παραμελημένο τομέα της έρευνας. Τα τελευταία χρόνια, ωστόσο, τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι ερευνητές έχουν αρχίσει να επικεντρώνουν περισσότερο την προσοχή τους στην κατασκευή προβλημάτων.

Η έρευνα αναφορικά με την κατασκευή προβλημάτων έχει παρουσιάσει θετικά αποτελέσματα στη γνώση των μαθητών, στις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων, στη δημιουργικότητα και στη στάση τους ως προς τα Μαθηματικά. Σύμφωνα με την English (1997), όταν οι μαθητές θέτουν τα δικά τους προβλήματα, μπορούν να ενισχύσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, να διεγείρουν την κριτική τους σκέψη και να βελτιώσουν τις υπολογιστικές τους δεξιότητες, διερευνώντας την περιέργειά τους σχετικά με συγκεκριμένες έννοιες των Μαθηματικών. Η κατασκευή προβλημάτων θεωρείται ένα αναπτυξιακό εργαλείο για την κριτική σκέψη, καθώς βοηθάει τους μαθητές να επεκτείνουν αυτό που γνωρίζουν προκειμένου να αναπτύξουν τη μαθηματική τους ευχέρεια και να εμπλακούν σε υψηλότερα επίπεδα σκέψης (English, 1997·Lowrie, 2002).

Οι Lavy και Bershadsky (2003) ανακάλυψαν ότι η χρήση δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης του ατόμου. Στη μελέτη τους, υιοθετήθηκε η στρατηγική «What if not?» σε δύο μαθησιακά εργαστήρια σχετικά με τη σύνθετη στερεά γεωμετρία. Η στρατηγική αυτή προτάθηκε από τους Brown και Walter (1993) και βασίστηκε στην ιδέα ότι η τροποποίηση των χαρακτηριστικών ενός δοθέντος προβλήματος μπορεί να οδηγήσει σε νέα ενδιαφέροντα προβλήματα. Σε αυτή την προσέγγιση, οι μαθητές ενθαρρύνονται να διανύσουν τρία επίπεδα, ξεκινώντας από την επανεξέταση ενός συγκεκριμένου προβλήματος προκειμένου να αποκομίσουν νέα στενά συνδεδεμένα προβλήματα. Στο πρώτο επίπεδο, οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν μια λίστα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Στη συνέχεια, στο δεύτερο επίπεδο πρέπει να θέσουν την ερώτηση «Κι αν δεν;» (What if not?) και να προτείνουν εναλλακτικές στα αναφερόμενα χαρακτηριστικά. Το τρίτο επίπεδο, αφορά στην κατασκευή νέων ερωτήσεων, εμπνευσμένες από τις εναλλακτικές. Η στρατηγική αυτή δίνει τη δυνατότητα απομάκρυνσης από μια άκαμπτη διδακτική μορφή που κάνει τους μαθητές να πιστεύουν ότι υπάρχει μόνο ένας σωστός τρόπος να αναφερθούν σε ένα δοθέν πρόβλημα. Η χρήση αυτής της προσέγγισης παρέχεις στους μαθητές τη δυνατότητα να συζητήσουν ένα ευρύ φάσμα ιδεών και να εξετάσουν το νόημα του προβλήματος αντί να εστιάζουν μόνο στην εξεύρεση της λύσης του. Τα αποτελέσματα της έρευνας των Lavy και Bershadsky (2003) έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν βαθύτερη κατανόηση της γεωμετρίας και ενδυνάμωσαν ορισμένες αλληλένδετες μαθηματικές έννοιες.

Πολλές εμπειρικές έρευνες αναφέρουν τις επιδράσεις των δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος στις στάσεις και τις πεποιθήσεις σχετικά με τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι Barlow και Cates (2006) διαπίστωσαν ότι όταν οι εκπαιδευτικοί ενσωματώνουν παρεμβάσεις κατασκευής προβλήματος, οι τάξεις γίνονται περισσότερο μαθητοκεντρικές και οι μαθητές συμμετέχουν πιο ενεργά στη δημιουργία και την επίλυση των δικών τους προβλημάτων. Από την άλλη πλευρά, η κατασκευή προβλήματος δίνει στους μαθητές την αίσθηση της κυριότητας του προβλήματος που έχουν δημιουργήσει ή διατυπώσει (Cunningham, 2004·Grundmeier, 2003·Within, 2006). Ο Cunningham ανέφερε ότι όταν οι μαθητές δημιούργησαν τα νέα προβλήματα η αίσθηση της υπευθυνότητάς τους αυξήθηκε, καθώς κατασκεύαζαν τη δική τους γνώση, ενώ παράλληλα αξιολογούσαν και βελτίωναν τα προβλήματα με τους συμμαθητές τους. Μέσω της ενθάρρυνσης των μαθητών να μοιράσουν και να αξιολογήσουν τις ιδέες τους κατά τη διάρκεια των μαθηματικών δραστηριοτήτων, ο δάσκαλος μπορεί να αναπτύξει τις κλίσεις και τις ερευνητικές ικανότητες των μαθητών που χρειάζονται για να γίνουν αποδοτικοί κατασκευαστές προβλημάτων (English, 1997·Gonzales, 1998·Silver, 1994). Παράλληλα, η κατασκευή προβλήματος μπορεί να συμβάλλει στη μείωση της εξάρτησης των μαθητών από τους δασκάλους και τα σχολικά βιβλία, δίνοντας τους την αίσθηση ότι εμπλέκονται περισσότερο στην εκπαίδευσή τους.

Παρά τη σημαντική συμβολή αυτής της γνωστικής δραστηριότητας στη βελτίωση της μάθησης των μαθητών στα Μαθηματικά, εντούτοις πολλοί λίγοι εκπαιδευτικοί επιλέγουν να εφαρμόσουν στην τάξη αυτού του είδους τις δραστηριότητες (Crespo & Sinclair, 2008·Silver, 1994). Στην πραγματικότητα, οι μαθητές όλων των ηλικιών, συμπεριλαμβανομένων των νέων εκπαιδευτικών, έχουν περιορισμένη εμπειρία στην κατασκευή των δικών τους μαθηματικών προβλημάτων (Crespo & Sinclair, 2008). Για παράδειγμα, οι Silver, Mamona-Downs, Leung και Kenney (1996) εντόπισαν ότι 53 καθηγητές γυμνασίου και 28 μελλοντικοί καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ήταν ικανοί να θέσουν τουλάχιστον ένα μαθηματικό πρόβλημα, όμως πολλά από αυτά ήταν κακώς διατυπωμένα. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας προτείνουν ότι παρ’ όλο που οι συμμετέχοντες δε διέθεταν εκπαιδευτική εμπειρία, αυτή δεν αποτέλεσε εμπόδιο για την υιοθέτηση δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων στην τάξη. Ωστόσο, οι Silver κ. συν. (1996) πιστεύουν ότι όταν οι εκπαιδευτικοί δε διαθέτουν ένα ορισμένο επίπεδο ευχέρειας στην κατασκευή προβλημάτων, είναι δύσκολο για αυτούς να εμπλακούν και να συμμετάσχουν σε αυτή τη δραστηριότητα.

Εφόσον οι εκπαιδευτικοί κατέχουν σημαντικό ρόλο στην υλοποίηση τέτοιων δραστηριοτήτων, οφείλουν να αναπτύξουν δεξιότητες κατασκευής προβλήματος και να είναι σε θέση να δημιουργούν δραστηριότητες που περιλαμβάνουν καταστάσεις κατάλληλες για τη συμμετοχή των μαθητών (Gonzales, 1996·Silver et al., 1996). Οι Αρχές και τα Πρότυπα για τα Σχολικά Μαθηματικά (NCTM, 2000) αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί είναι υπεύθυνοι για τη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων που προωθούν το λόγο των μαθητών και εγείρουν την κριτική τους σκέψη μέσω δραστηριοτήτων διατύπωσης προβλημάτων. Η Stoyanova (2005) υποστηρίζει ότι η κατασκευή προβλήματος είναι παρόμοια με άλλες δεξιότητες και μπορεί να αναπτυχθεί και να καλλιεργηθεί με την πάροδο του χρόνου, ξεκινώντας από δομημένες και προχωρώντας σε λιγότερο δομημένες δραστηριότητες. Με αρκετή έκθεση σε δραστηριότητες δημιουργίας προβλημάτων, ο καθένας μπορεί να είναι ικανός να θέσει τα δικά του προβλήματα που είναι μαθηματικά πλούσια, ρεαλιστικά και απαιτητικά (Chen, Van Dooren, Chen & Verschaffel, 2010).

Η ικανότητα κατασκευής προβλήματος στα Μαθηματικά, συχνά, χρησιμοποιείται ως μέσο αξιολόγησης της δημιουργικότητας. Προγενέστερες μελέτες (όπως αναφέρονται στον Silver, 1994), συσχέτισαν τη δημιουργικότητα με τις ικανότητες κατασκευής προβλήματος κι ανέφεραν την ευχέρεια (fluency), την ευελιξία (flexibility) και την πρωτοτυπία (originality) ως βασικούς παράγοντες. Η ευχέρεια (fluency) αναφέρεται στον αριθμό των προβλημάτων που δημιουργούνται, η ευελιξία στον αριθμό των διαφόρων κατηγοριών των προβλημάτων που τίθενται και η πρωτοτυπία σχετίζεται με τον βαθμό καινοτομίας του προβλήματος, σε σύγκριση με όλα τα άλλα προβλήματα. Παρ’ όλο που φαίνεται να υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ της διατύπωσης προβλημάτων και της δημιουργικότητας, η φύση της σχέσης παραμένει ασαφής (Haylock, 1987·Silver, 1994).

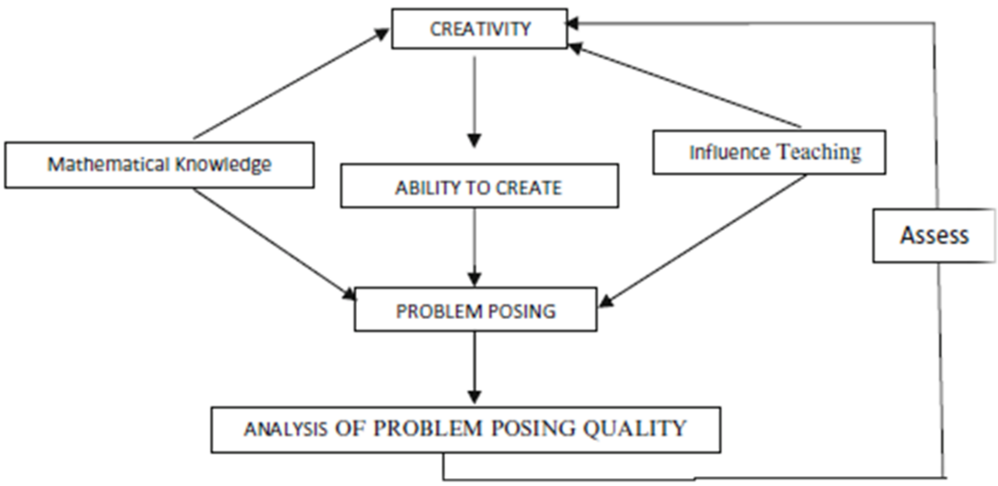
Κάποιοι ερευνητές έχουν διαπιστώσει θετική σχέση μεταξύ της μαθηματικής επίδοσης και των ικανοτήτων κατασκευής προβλημάτων (English, 1998·Leung & Silver, 1997). Άλλοι, θεωρούν ότι η διδασκαλία που περιλαμβάνει δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν πιο δημιουργικές προσεγγίσεις στα

Μαθηματικά (π.χ., Cifarelli & Cai, 2005·Singer, Ellerton, Cai & Leung, 2011·Singer, Pelczer & Voica, 2011). Υπάρχουν, επίσης, ερευνητές, οι οποίοι έχουν εκφράσει αμφιβολίες αναφορικά με τη σχέση της δημιουργικότητας με την κατασκευή προβλημάτων. Για παράδειγμα, οι Yuan και Sriraman (2011) συμπέραναν ότι μπορεί να μην υπάρχουν σχέσεις μεταξύ της δημιουργικότητας και των ικανοτήτων κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων ή τουλάχιστον η συσχέτισή τους είναι περίπλοκη. Ωστόσο, άλλες μελέτες, όπως για παράδειγμα του Haylock (1997) και του Leung (1997), δε συμφωνούν στην ύπαρξη σχέσης μεταξύ της δημιουργικότητας και της διατύπωσης προβλημάτων, όμως δεν υπολογίζουν τον παράγοντα της διδασκαλίας. Από εμπειρική άποψη, ο Silver (1997) προτείνει ότι η οποιαδήποτε σχέση μπορεί να είναι προϊόν των προηγούμενων διδακτικών μοτίβων.

Ο Jensen (1973) εξέτασε την ικανότητα των μαθητών να θέτουν μαθηματικές ερωτήσεις βασιζόμενοι σε ένα δοθέν σενάριο, ως ένα μέτρο της μαθηματικής δημιουργικότητας. Σύμφωνα με τον Jensen, οι μαθητές είναι δημιουργικοί στα Μαθηματικά όταν είναι σε θέση να θέτουν μαθηματικές ερωτήσεις, οι οποίες εμβαθύνουν και επεκτείνουν το αρχικό πρόβλημα, καθώς κι όταν επιλύουν προβλήματα με διάφορους τρόπους. Ο Silver (1997) ισχυρίζεται ότι η προσανατολισμένη στις ερωτήσεις διδασκαλία των Μαθηματικών, η οποία περιλαμβάνει δραστηριότητες επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν πιο δημιουργικές προσεγγίσεις στον τομέα των Μαθηματικών. Οι Jay και Perkins (1997) δηλώνουν ότι η ενέργεια της εύρεσης και της διατύπωσης ενός προβλήματος αποτελεί τη βασική πτυχή της δημιουργικής σκέψης και της δημιουργικής απόδοσης σε πολλούς τομείς, μια ενέργεια η οποία διαφέρει και είναι, ίσως, σημαντικότερη από την επίλυση προβλημάτων.

Ο Leung (1997), μελετώντας μαθητές Δημοτικού στην Ταϊβάν, ανέπτυξε ένα εργαλείο 18 δραστηριοτήτων, το οποίο ήταν χρήσιμο στη μέτρηση της γενικής ικανότητας κατασκευής προβλήματος των μαθητών, καθώς και στην επισήμανση της δημιουργικής τους κατασκευής προβλήματος. Παρομοίως, οι Van Harpen και Shriraman (2013) χρησιμοποίησαν ένα τεστ κατασκευής προβλήματος για να εξετάσουν τη δημιουργικότητα κατασκευής προβλήματος μεταξύ των μαθητών Λυκείου των Η.Π.Α. και της Κίνας αναφορικά με τις τρεις διαστάσεις της ευελιξίας, της ευχέρειας και της πρωτοτυπίας. Γενικά, οι επιδόσεις σε τέτοια τεστ αποκάλυψαν αδυναμίες στη διατύπωση προβλημάτων. Οι Voica και Singer (2012), όμως, έχουν προτείνει την ύπαρξη μικροδιαφορών στη σχέση ανάμεσα στην κατασκευή προβλήματος και τη δημιουργικότητα. Συγκεκριμένα, σε μελέτη τους σχετικά με τροποποιήσεις προβλημάτων μαθητών τετάρτης έως έκτης Δημοτικού, εντόπισαν ότι οι μαθητές που «έμειναν κοντά» στο πλαίσιο του προβλήματος επέδειξαν βαθύτερη κατανόηση των Μαθηματικών από εκείνους που κατασκεύασαν προβλήματα φαινομενικά πιο δημιουργικά. Η αιτία αφορά στο γεγονός ότι οι δεύτεροι απομακρύνθηκαν περισσότερο από το πλαίσιο του αρχικού προβλήματος. Ωστόσο, οι Voica και Singer (2013) διαπίστωσαν ότι με επαρκώς προσεκτική ανάλυση της γνώσης των μαθητών κατά την τροποποίηση του προβλήματος, η κατασκευή προβλήματος μπορεί να προσφέρει χρήσιμη απόδειξη της γνωστικής ευελιξίας των μαθητών.

Η Εικόνα 2.4 προέρχεται από άρθρο των Bonnoto και Del Santo (2015) και παρουσιάζει τις πιθανές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών που εμπλέκονται στην κατασκευή προβλήματος και στις διαδικασίες δημιουργικότητας σε σχολικό επίπεδο.



Εικόνα 2.4. Πιθανές σχέσεις μεταξύ της δημιουργικότητας και της κατασκευής προβλήματος (Bonotto & Dal Santo, 2015, σ. 110)

Συνοψίζοντας, οι δραστηριότητες επίλυσης και κατασκευής προβλήματος μπορούν να συμβάλλουν στην προώθηση της δημιουργικότητας των μαθητών. Οι Beghetto και Kaufman (2009) ισχυρίζονται ότι ο καθένας έχει δημιουργική προοπτική, ακόμη και εάν αυτή δεν έχει εκδηλωθεί. Επεκτείνοντας αυτό το επιχείρημα, μιλούν, επίσης, για το πολυ-δημιουργικό δυναμικό του καθενός. Θεωρούν ότι η δημιουργικότητα είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό στη μαθησιακή διαδικασία και ότι οι μαθητές μαθαίνουν μέσω ποικίλων επιστημονικών πεδίων. Συνεπώς, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι οι μαθητές δεν μαθαίνουν μόνο μέσω των διάφορων πεδίων, αλλά θα μπορούσε να υπάρξει δημιουργική προοπτική σε όλα τα πεδία. Υπό μια επιχειρηματολογία όπως αυτή, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ενεργοποιήσουν τη δημιουργικότητα των μαθητών τους. Έτσι, χρειάζεται να είναι προετοιμασμένοι να αναγνωρίσουν, να καλλιεργήσουν και να αξιοποιήσουν το δημιουργικό δυναμικό όλων των μαθητών, για παράδειγμα να βρουν κατάλληλα προβλήματα και να ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναλάβουν τους πνευματικούς κινδύνους που είναι απαραίτητοι για την ανταλλαγή μοναδικών μαθηματικών γνώσεων και ερμηνειών.

3. Διεπιστημονικότητα και δημιουργικότητα

Λαμβάνοντας υπόψη ότι όλοι οι μαθητές, με κάποιο τρόπο, είναι πολυ-δημιουργικοί και μαθαίνουν μέσα από μια ποικιλία επιστημονικών πεδίων, είναι πολύ σημαντικό να μελετηθεί η πολυ-δημιουργικότητα σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο. Πολύ συχνά η δημιουργικότητα συνδέεται με την διεπιστημονικότητα. Οι Plucker και Zabelina (2009) θεωρούν ότι το ζήτημα της διεπιστημονικότητας είναι μία από τις πιο ενδιαφέρουσες και αμφιλεγόμενες πτυχές της φύσης της δημιουργικότητας. Η διεπιστημονική μάθηση αποτελεί μια θεώρηση της γνώσης και προσέγγιση του προγράμματος σπουδών, όπου συνειδητά εφαρμόσθηκε η μεθοδολογία και η γλώσσα από περισσότερα από ένα πεδία, προκειμένου να εξετασθεί ένα κεντρικό θέμα (Jacobs, 1989). Ενώ συνήθως τα προγράμματα σπουδών που εμπεριέχονται στα σχολικά βιβλία δεν είναι έγκαιρα και σχετικά με τις ζωές των μαθητών, εντούτοις το διεπιστημονικό μοντέλο διδασκαλίας επιτρέπει στους μαθητές να δουν τους δεσμούς μεταξύ διαφορετικών θεμάτων και έτσι να αποκτήσουν γνώσεις με έναν ενιαίο τρόπο, ο οποίος είναι πιο συμβατό με την πραγματική ζωή.

Τα εκπαιδευτικά οφέλη της διεπιστημονικής προσέγγισης έχουν αναγνωρισθεί ευρέως. Οι McComas και Wang (1998), στη βιβλιογραφική ανασκόπησή τους, συνόψισαν αυτά τα οφέλη υπό τέσσερις οπτικές: α) από φιλοσοφική οπτική, μέσω μιας διεπιστημονικής προσέγγισης, οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από την ολιστική γνώση, καθώς η γνώση στη φύση είναι μια συνέχεια, β) από ψυχολογική άποψη, μια διεπιστημονική προσέγγιση θα επιτρέψει στους μαθητές να δουν τις συνδέσεις μεταξύ των κλάδων και να μειώσουν την «ψυχολογική απόσταση» μεταξύ των διαφόρων πεδίων, γ) από παιδαγωγική προοπτική, η διεπιστημονική εκπαίδευση μπορεί να αυξήσει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας δεδομένου ότι επιτρέπει στους μαθητές να αποδεσμεύονται από τους περιορισμούς των ορίων των κλάδων και να συνδέουν με ουσιαστικούς τρόπους τις γνώσεις με την προσωπική τους ζωή, δ) από μια ρεαλιστική προοπτική, ένα αυξανόμενο σύνολο αποδεικτικών στοιχείων υποστηρίζει τις πρακτικές αξίες της διεπιστημονικής εκπαίδευσης.

Αν και πολλοί ερευνητές επισημαίνουν τα πλεονεκτήματα της διεπιστημονικής μάθησης, η υλοποίησή της αντιμετωπίζει πολλές προκλήσεις. Για παράδειγμα, μια διεπιστημονική προσέγγιση είναι τυπικά πιο απαιτητική από τη βασιζόμενη σε πεδία μάθηση, καθώς απαιτεί όχι μόνο τη γνώση των εμπλεκόμενων πεδίων, αλλά και τη γνώση των «διασυνδεδεμένων» εννοιών και τη σύνθεση της γνώσης (Watkins, Coffey, Redish & Cooke, 2012). Επιπλέον, οι διαφορετικές επιστημολογίες, οι ασυνεπείς ορισμοί ή ακόμα και οι αντιφατικές προοπτικές συχνά οδηγούνται σε δυσκολίες και συγχύσεις όταν μελετούν διεπιστημονικά θέματα (Sung et al., 2015).

Τα Μαθηματικά αποτελούν τον άξονα όλων των επιστημών και συνδέονται με όλα τα επιστημονικά θέματα (Sidhu, 1995). Αν και αποτελούν βασικό συστατικό των Φυσικών Επιστημών, εντούτοις προσθέτουν συντομία και λογική σε μαθήματα των Κοινωνικών και Ανθρωπιστικών Επιστημών (π.χ. Οικονομία, Ιστορία). Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας μέσω μιας διεπιστημονικής προσέγγισης. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκε το γνωστικό αντικείμενο της Ιστορίας, το οποίο εντάχθηκε σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων. Οι μαθητές κλήθηκαν να διατυπώσουν τα δικά τους προβλήματα βασιζόμενοι στις εικόνες που τους δόθηκαν. Αναλυτικότερα, οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα που να συνδέονται με τον Παρθενώνα και την Αρχαία Αγορά. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε, καθώς και τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια.

Ερευνητικό μέρος

4. Μεθοδολογία και ανάλυση δεδομένων

4.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Ο ερευνητικός σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση της συλλογικής δημιουργικότητας των μαθητών δημοτικού μέσω δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος. Θέμα των δραστηριοτήτων αποτέλεσε η Αρχαία Ελληνική Ιστορία, την οποία οι μαθητές είχαν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Αναλυτικότερα, τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής:

- Είναι ικανοί οι μαθητές της πέμπτης τάξης να κατασκευάσουν κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα;
- Συνδέεται η μαθηματική δημιουργικότητα με τη μαθηματική ικανότητα;
- Η χρήση του μαθήματος της ιστορίας βοήθησε τους μαθητές στην κατασκευή κατάλληλων προβλημάτων;
- Η διαφορετική δραστηριότητα που δόθηκε στις επιμέρους ομάδες συνέβαλε στην εμφάνιση αποκλίσεων ως προς το βαθμό δημιουργικότητας των ομάδων;

4.2. Δείγμα έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δημοτικό σχολείο στα προάστια της πόλης Ζέσουφ της Πολωνίας τον Μάιο του 2017. Το Ζέσουφ αποτελεί τη μεγαλύτερη πόλη στην νοτιοανατολική Πολωνία και απαριθμεί 184.493 κατοίκους. Τα υποκείμενα ήταν 24 μαθητές της πέμπτης τάξης (10-11 χρονών), από τους οποίους οι 13 ήταν κορίτσια και οι 11 αγόρια. Πριν από τη διεξαγωγή της συγκεκριμένης μελέτης, οι μαθητές δεν είχαν εμπλακεί σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων. Πληροφορίες αναφορικά με την μαθηματική επίδοση των μαθητών δόθηκαν από την εκπαιδευτικό της τάξης. Η τάξη περιελάμβανε μαθητές όλου του εύρους μαθηματικών επιδόσεων. Σχετικά με το μαθηματικό υπόβαθρο των μαθητών, παρουσιάζονται οι μαθηματικές ενότητες που είχαν διδαχθεί οι μαθητές από την αρχή του σχολικού έτους. Οι ενότητες ήταν οι εξής:

- Κλάσματα και πράξεις κλασμάτων
- Φυσικοί αριθμοί, πράξεις με φυσικούς αριθμούς, αλγόριθμοι
- Γεωμετρία - γραμμές, γωνίες, πολύγωνα (τρίγωνα, ορθογώνια, τετράγωνα, ρόμβοι, παραλληλόγραμμα, τραπέζια)
- Γεωμετρία - εμβαδόν τετραγώνου και ορθογωνίου, μονάδες μέτρησης εμβαδού

- Δεκαδικοί αριθμοί
- Γεωμετρία - τραπέζια, τετράπλευρα, όμοια σχήματα
- Γεωμετρία – κύβοι, πρίσματα, εμβαδόν πρισμάτων, όγκος, λίτρα, χιλιοστόλιτρα
- Γεωμετρία – μονάδες μέτρησης εμβαδού, εμβαδόν ρόμβου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου

4.3. Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις συνολικής διάρκειας δύο διδακτικών ωρών. Οι φάσεις ήταν οι εξής:

- **Α΄ φάση έρευνας**: Στην πρώτη φάση οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με δύο προκαταρκτικές δραστηριότητες που απαιτούσαν τη δημιουργία νέων προβλημάτων. Η κατασκευή των νέων προβλημάτων πραγματοποιήθηκε με την βοηθητική κατεύθυνση του ερευνητή. Επιπλέον, διεξήχθη μια παρουσίαση αναφορικά με την Ακρόπολη και την Αρχαία Ελληνική Αγορά.
- **Β΄ φάση έρευνας**: Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν δικά τους προβλήματα βασιζόμενοι στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων που τους δόθηκε.

Οι φάσεις της έρευνας αναλύονται διεξοδικά παρακάτω.

4.3.1. Πρώτη φάση έρευνας- προκαταρκτικές δραστηριότητες

Η γλώσσα διεξαγωγής των προκαταρκτικών δραστηριοτήτων ήταν η πολωνική προκειμένου να αποφευχθούν οι τυχόν παρανοήσεις από τους μαθητές. Σκοπός ήταν να εξοικειωθούν τα υποκείμενα με τη διατύπωση καινούργιων προβλημάτων, ώστε να κατανοήσουν το ζητούμενο των εργασιών που θα τους δίνονταν κατά τη διάρκεια της δεύτερης φάσης της έρευνας.

Αρχικά, δόθηκε σε κάθε μαθητή η παρακάτω εικόνα (Εικόνα 4.1) με διάφορα είδη για πάρτι, τροφίμων και αναψυκτικών. Η ερευνήτρια παρότρυνε τους μαθητές να σκεφτούν το είδος των ερωτήσεων που μπορούν να θέσουν αναφορικά με τη συγκεκριμένη κατάσταση. Έπειτα, ακολούθησαν παραδείγματα μαθηματικών προβλημάτων που μπορούν διατυπωθούν με βάση το εν λόγω πλαίσιο, καθώς και οι αντίστοιχες λύσεις τους. Τα παραδείγματα ήταν τα ακόλουθα:

1. Η Zosia αγόρασε 1 λίτρο χυμό πορτοκάλι, 5 ντόνατς, 1 πακέτο τσιπς και ένα πακέτο αρκουδάκια με μαρέγκα. Πόσο πλήρωσε για τις αγορές της;

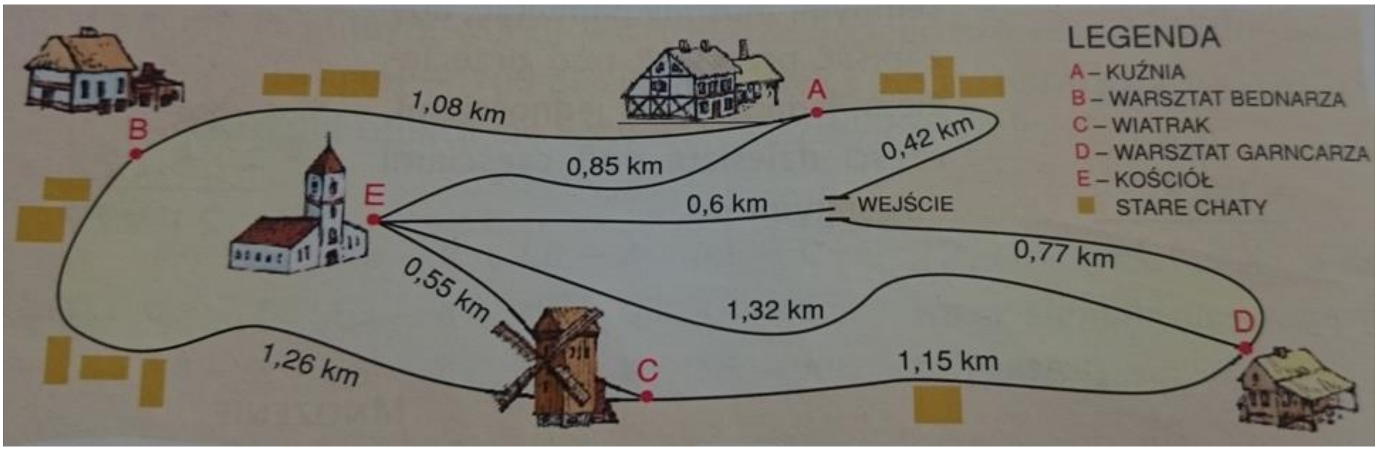
2. Η Zosia αγόρασε 1 λίτρο χυμό πορτοκάλι, 5 ντόνατς, 1 πακέτο τσιπς, ένα πακέτο αρκουδάκι με μαρέγκα και ένα κιλό πορτοκάλια. Πόσο κοστίζουν τα πορτοκάλια, εάν έδωσε 50 ζλότι και τα ρέστα ήταν 26.08 ζλότι;
3. Ο Jacek αγόρασε 1 λίτρο χυμού πορτοκαλιού, 1 λίτρο χυμού μήλου, marshmallow και ένα μείγμα Wedel. Πόσο ζυγίζουν τα ψώνια του;
4. Γιορτάζεις και κάνεις ένα πάρτι για τα γενέθλιά σου. Προσκαλείς 9 φίλους σου. Έχεις 90 ζλότι για να αγοράσεις γλυκά, αναψυκτικά και είδη πάρτι. Τι θα αγοράσεις;

Εικόνα 4.1. Πρώτη προκαταρκτική δραστηριότητα

Η δεύτερη προκαταρκτική δραστηριότητα αποτελούνταν από ένα διάγραμμα κτιρίων και των μεταξύ τους αποστάσεων (Εικόνα 4.2). Παραδείγματα προβλημάτων δόθηκαν και για αυτή την εικόνα είναι τα εξής:

1. Φανταστείτε ότι μόλις επισκεφτήκατε το εργαστήριο αγγειοπλαστών, στο οποίο πραγματοποιήθηκαν μαθήματα επίδειξης. Τα επόμενα μαθήματα που θα λάβετε μέρος θα γίνουν στο εργαστήριο βαρελοποιίας. Ποιο δρόμο θα επιλέξετε για να φτάσετε έως εκεί; Ποιος είναι ο πιο σύντομος;

2. Επισκέπτεστε το υπαίθριο μουσείο κάνοντας 1 χιλιόμετρο σε σε 15 λεπτά. Η επίσκεψη, ώστε να προσέξετε το κάθε αντικείμενο, διαρκεί 10 λεπτά. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να παρακολουθήσετε τη σφυρηλάτηση, την εκκλησία και το εργαστήριο του αγγειοπλάστη;
3. Επισκεφθήκατε την εκκλησία και έχετε 30 λεπτά μέχρι να φύγει το λεωφορείο από την είσοδο του υπαίθριου μουσείου. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον υπόλοιπο χρόνο σας;



Εικόνα 4.2. Δεύτερη προκαταρκτική δραστηριότητα

Οι παραπάνω δραστηριότητες εντάσσονται στην κατηγορία ημιδομημένων καταστάσεων κατασκευής προβλήματος σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των Stoyanova και Ellerton (1996). Στις δραστηριότητες αυτές δίνεται στους μαθητές μια ανοιχτή κατάσταση και καλούνται να διερευνήσουν τη δομή της και να την ολοκληρώσουν, χρησιμοποιώντας γνώσεις, δεξιότητες, έννοιες και σχέσεις από τις προηγούμενες μαθηματικές τους εμπειρίες. Η επιλογή των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων έγινε με στόχο την προετοιμασία των μαθητών για την δεύτερη ερευνητική φάση.

Η πρώτη φάση της έρευνας περιλάμβανε, επιπλέον, την ανάκληση των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών αναφορικά με την Αρχαία Ελληνική Ιστορία. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των πολωνικών σχολείων οι μαθητές της τρίτης τάξης διδάσκονται στο μάθημα της ιστορίας ένα κεφάλαιο για την Αρχαία Ελλάδα. Με τη χρήση του λογισμικού Prezi έγινε παρουσίαση των βασικών ιστορικών σημείων, τα οποία θα αποτελούσαν και το πλαίσιο των δραστηριοτήτων που θα δίνονταν στους μαθητές στη δεύτερη φάση της έρευνας. Πιο αναλυτικά, η παρουσίαση αφορούσε στον Παρθενώνα και την Αρχαία Αγορά. Η χρήση οπτικοακουστικού υλικού πραγματοποιήθηκε με στόχο να συμβάλει στην κατανόηση του ιστορικού άξονα από τους μαθητές. Πραγματοποιήθηκε επίδειξη εικόνων της Ακρόπολης, του Παρθενώνα και διάφορων κτιρίων της Αρχαίας

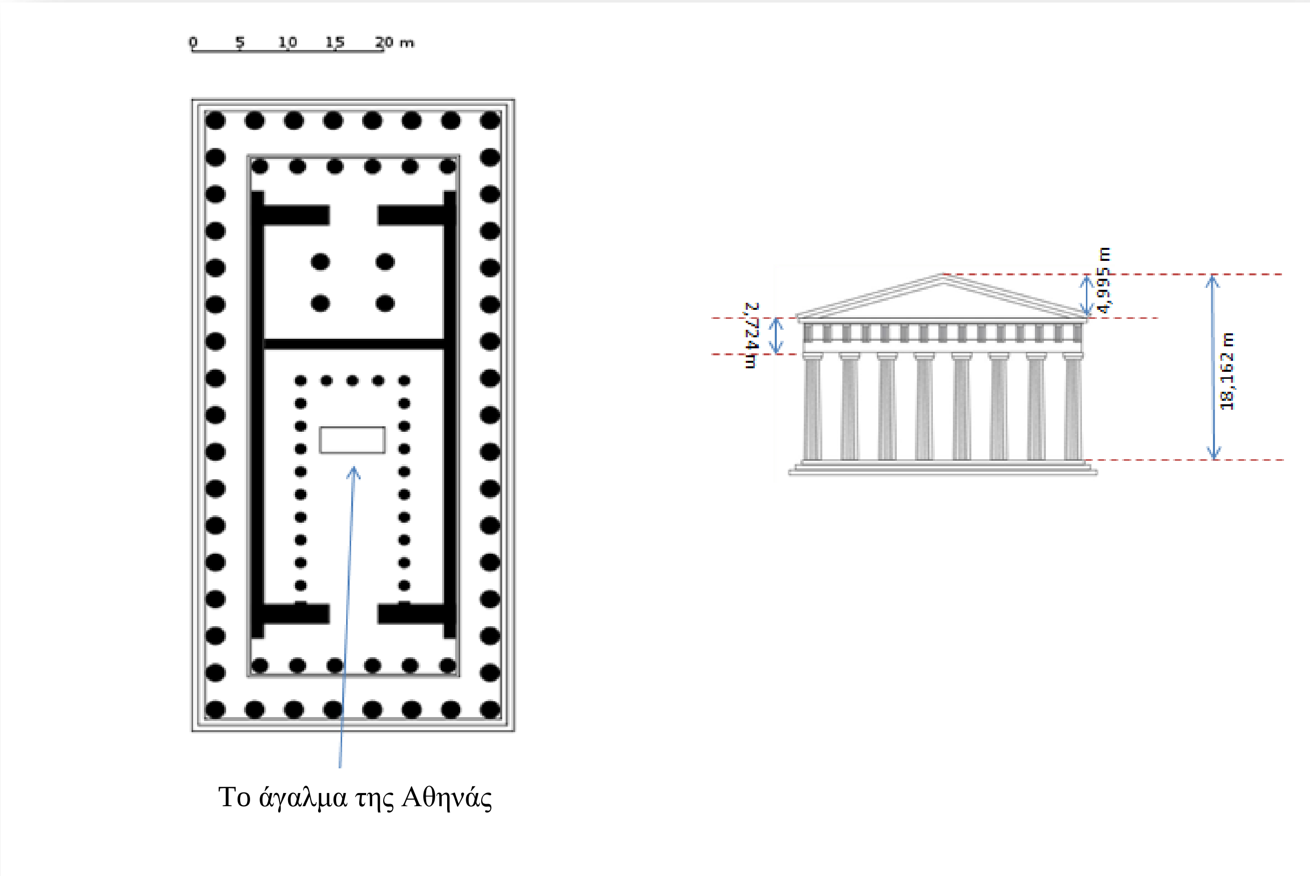
Αγοράς. Παράλληλα, προβλήθηκαν δύο βίντεο, όπου το ένα αποτελούσε μια τρισδιάστατη αναπαράσταση της Αρχαίας Ακρόπολης και το δεύτερο περιλάμβανε μια διαδραστική περιήγηση στην Αρχαία Αγορά. Η παρουσίαση έγινε στα Αγγλικά, ενώ παράλληλα γινόταν μετάφραση στους μαθητές στην πολωνική γλώσσα. Παρακάτω, παρεντίθενται τμήματα της παρουσίασης (Εικόνα 4.3).

Εικόνα 4.3. Η παρουσίαση του Παρθενώνα και της Αρχαίας Αγοράς με το λογισμικό Prezi

4.3.2. Δεύτερη φάση έρευνας- δραστηριότητες έρευνας

Για τη διεξαγωγή της δεύτερης φάσης της έρευνας οι μαθητές χωρίστηκαν σε έξι ομάδες των τεσσάρων ατόμων με σκοπό την αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας. Οι ομάδες ήταν ομοιογενείς ως προς το επίπεδο μαθηματικής ικανότητας. Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στις επιμέρους ομάδες δεν ήταν ίδιες. Σε τρεις ομάδες δόθηκε ένα πλαίσιο αναφορικά με τον Παρθενώνα και στις υπόλοιπες τρεις ένα πλαίσιο σχετιζόμενο με την Αρχαία Αγορά.

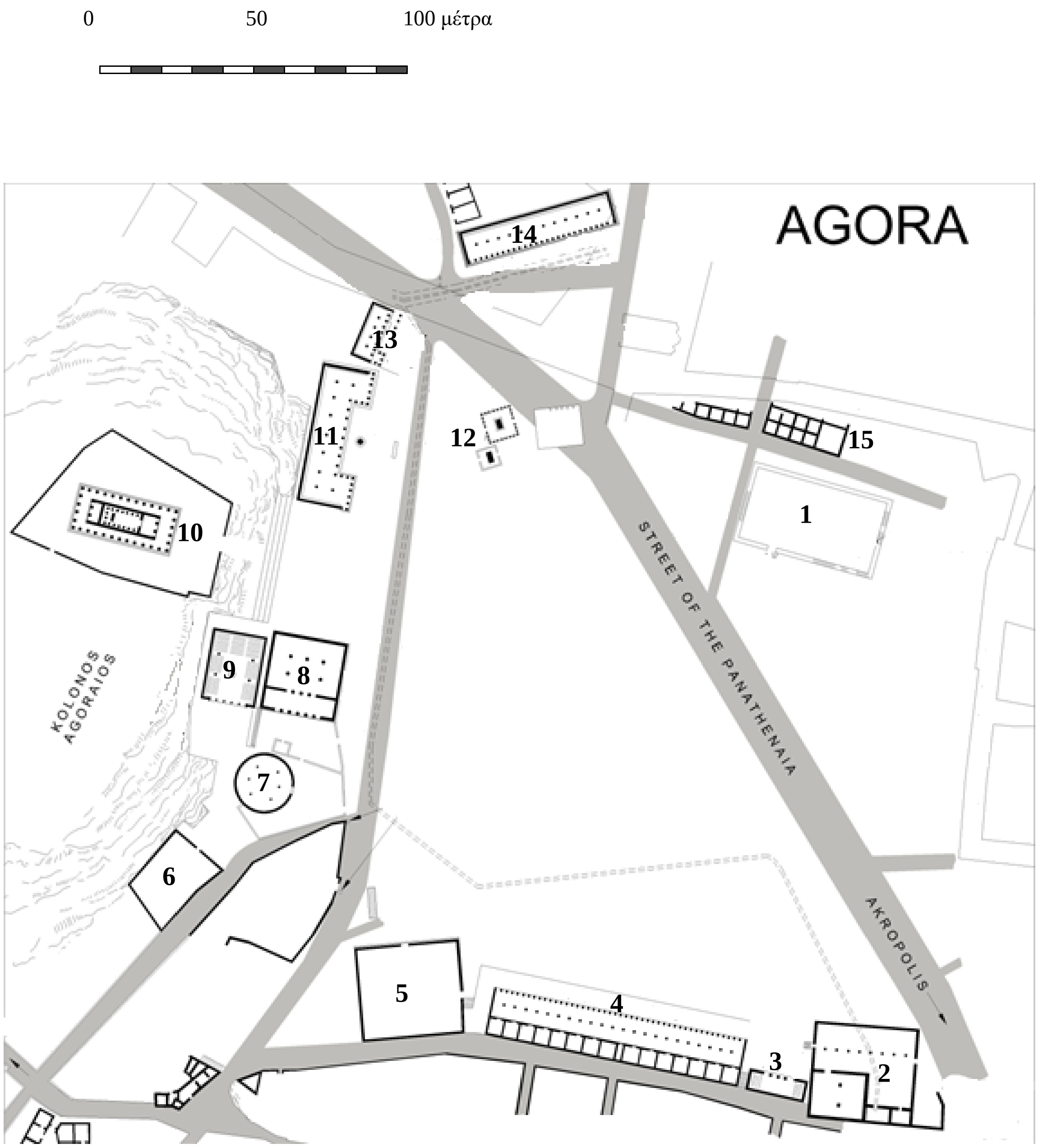
Στη δραστηριότητα με θέμα τον «Παρθενώνα» (Εικόνα 4.4), δόθηκε στους μαθητές η κάτοψη του κτιρίου, καθώς και η θέση του αγάλματος της Αθηνάς κατά τα αρχαία χρόνια μέσα σε αυτόν. Επιπλέον, δόθηκε η πρόσοψη του κτιρίου, καθώς και τα πραγματική ύψη των διάφορων τμημάτων του. Όσον αφορά τη κάτοψη του Παρθενώνα, οι μαθητές δεν είχαν στη διάθεσή τους τις πραγματικές διαστάσεις, ωστόσο αναγραφόταν η κλίμακα, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.4.



Εικόνα 4.4. Η δραστηριότητα με θέμα τον «Παρθενώνα»

Η δεύτερη δραστηριότητα αφορούσε στην Αγορά της Αρχαίας Αθήνας (Εικόνα 4.5). Ειδικότερα, η δραστηριότητα περιλάμβανε ένα χάρτη της Αγοράς με την αντίστοιχη κλίμακα. Κάθε κτίριο αποδόθηκε με έναν αριθμό. Στο υπόμνημα του χάρτη αναγράφεται ο αριθμός και το όνομα του κτιρίου.

Οι δύο δραστηριότητες ανήκουν στην κατηγορία ημιδομημένης κατασκευής προβλημάτων (Stoyanona & Ellerton, 1996). Οι δραστηριότητες αυτές επιλέχθηκαν διότι επιτρέπουν πολλαπλές απαντήσεις, ενώ παράλληλα αξιοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση των Μαθηματικών και την επεκτείνουν. Ζητούμενο ήταν οι μαθητές να συνεργασθούν για να διατυπώσουν όσα περισσότερα διαφορετικά και πρωτότυπα μαθηματικά προβλήματα μπορούσαν. Επιπλέον, τους ζητήθηκε να επιλύσουν τα επιμέρους προβλήματα. Η ανάλυση των λύσεων των προβλημάτων δεν αποτέλεσε αντικείμενο ανάλυσης της παρούσας εργασίας. Ωστόσο, εξετάσθηκαν σε περίπτωση ασαφών προβλημάτων ή προβλημάτων που δε διέθεταν τα απαραίτητα δεδομένα για την επίλυσή τους, προκειμένου να εντοπισθούν οι διαδικασίες σκέψης των μαθητών.



Χάρτης της Αρχαίας Ελληνικής Αγοράς

1. Δικαστήριο
2. Νομισματοκοπείο
3. Εννεάκρουνος
4. Νότια Στοά
5. Ηλιαία
6. Στρατηγείο
7. Θόλος – ο ναός στον οποίο βρισκόταν ο σύλλογος των 50 Αθηναίων συμβούλων
8. Παλιό Βουλευτήριο- κρατικό αρχείο
9. Καινούργιο Βουλευτήριο- το αθηναϊκό δημαρχείο
10. Ηφαίστειον (Ο ναός του Ηφαίστου)
11. Στοά Διός
12. Ο Βωμός των 12 θεών
13. Βασιλική στοά

14. Ποικίλη στοά
15. Καταστήματα

Επεξήγηση: Στοά –ένα κτίριο, η πρόσοψη είναι ανοικτή και καλύπτεται με κιονοστοιχία, η οποία προστατεύει από τη βροχή ή τον ήλιο

Εικόνα 4.5. Δραστηριότητα με θέμα την «Αρχαία Αγορά»

4.4. Κωδικοποίηση των δεδομένων

Το σύνολο των προβλημάτων που διατυπώθηκε από την κάθε ομάδα μαθητών αναλύθηκε σε σχέση με την ποιότητα και την ποσότητά του. Προκειμένου να αναλυθεί ο τύπος των προβλημάτων που προέκυψαν, αξιοποιήθηκε η μεθοδολογία που προτείνεται από τους Silver και Cai (1996).

Τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι ομάδες συγκεντρώθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν ως μαθηματικά και μη μαθηματικά προβλήματα. Για παράδειγμα, η ερώτηση «Σε ποιο λόφο βρίσκεται ο Ναός του Ηφαίστου;» θεωρήθηκε ένα μη μαθηματικό πρόβλημα, αφού η εύρεση της απάντησης δεν απαιτούσε τη χρήση μαθηματικών εννοιών και πράξεων. Στη συνέχεια, τα μαθηματικά προβλήματα αναλύθηκαν σε επιλύσιμα και μη επιλύσιμα. Ως μη επιλύσιμα προβλήματα θεωρήθηκαν εκείνα των οποίων η διατύπωση ήταν ασαφής ή δεν περιελάμβαναν σημαντικές υποθέσεις, οι οποίες ήταν απαραίτητες για την επίλυσή τους (Lin & Leng, 2008). Οι Silver και Cai (1996) αναφέρουν ως μη επιλύσιμα προβλήματα εκείνα που δε διαθέτουν επαρκείς πληροφορίες ή θέτουν έναν στόχο ασυμβίβαστο με τις δοθείσες πληροφορίες.

Η διεθνής βιβλιογραφία, βέβαια, αναφέρει τα προβλήματα με ελλιπή στοιχεία ως ανοιχτά προβλήματα. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη τις έρευνες των Silver και Cai (1996) και Lin και Leng (2008), καθώς και το γεγονός ότι κανένα από τα προβλήματα αυτά δεν λύθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές που τα έθεσαν, θεωρήθηκε ότι αποτελούν μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα. Ενδεικτικά, στην έρευνα των Silver και Cai (1996) δόθηκε στα υποκείμενα η ακόλουθη κατάσταση: «Οι Jerome, Elliot και Arturo οδήγησαν εναλλάξ προς το σπίτι από ένα ταξίδι. Ο Arturo οδήγησε 80 μίλια παραπάνω από την Elliot. Ο Elliot οδήγησε δύο φορές περισσότερα μίλια από τον Jerome. Ο Jerome οδήγησε 50 μίλια» (σ. 525). Η απάντηση «Ο Arturo οδηγεί γρηγορότερα από τον Jerome;», θεωρήθηκε ως αντιπροσωπευτικό παράδειγμα μη επιλύσιμου προβλήματος, καθώς οι πληροφορίες αναφορικά με τις σχετικές ταχύτητες οδήγησης ή τους χρόνους δε δίνονταν ούτε παρέχονταν από τον ίδιο το μαθητή.

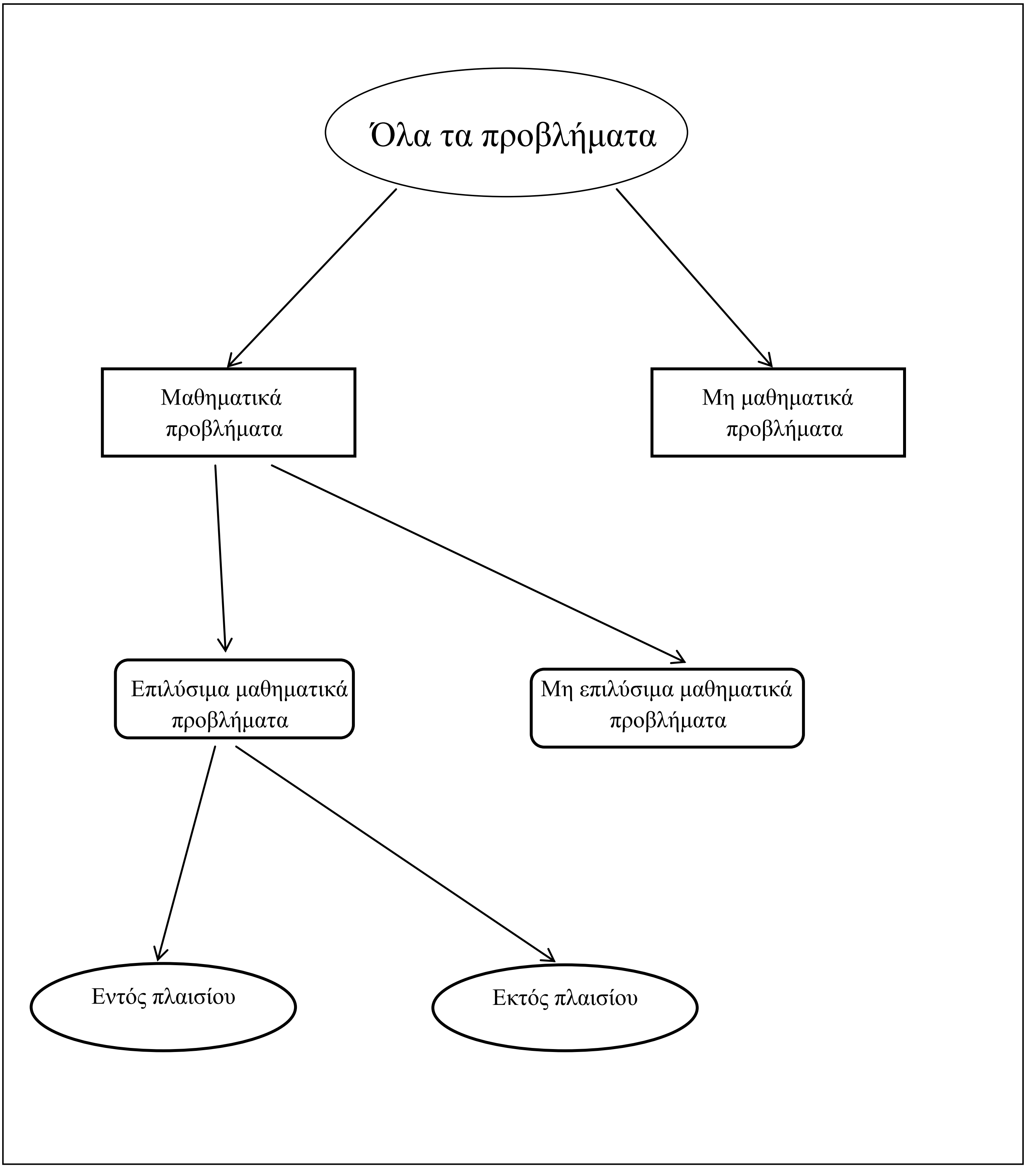
Όσον αφορά την παρούσα έρευνα, παρατηρήθηκαν προβλήματα ασαφή, καθώς και προβλήματα που δεν περιελάμβαναν όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την επίλυσή τους. Δύο ομάδες διατύπωσαν το εξής πρόβλημα: «Ποιο είναι το ύψος του αγάλματος της Αθηνάς». Στους μαθητές δόθηκε η δραστηριότητα με την κάτοψη του Παρθενώνα, όπου αναγράφεται η θέση του βάθρου του αγάλματος της Αθηνάς. Επομένως, είναι αδύνατον να υπολογισθεί το ύψος του αγάλματος με βάση τα δοθέντα στοιχεία. Ένα ακόμη παράδειγμα μη επιλύσιμου προβλήματος θεωρήθηκε το ακόλουθο: «Ο Darek, ο Marek και ο Damian θέλουν να επισκεφθούν το κτίριο του Δικαστηρίου και τον Εννεάκρουνο. Πόση ώρα χρειάζεται να περπατήσουν;». Οι μαθητές δεν ανέφεραν την ταχύτητα, δηλαδή την απόσταση που διανύουν οι ήρωες του προβλήματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή κι επομένως η λύση του με τα δεδομένα στοιχεία δεν καθίσταται εφικτή. Επιπλέον, το πρόβλημα δε λύθηκε από τους ίδιους τους μαθητές.

Επιλύσιμα προβλήματα κρίθηκαν εκείνα τα οποία μπορούσαν να επιλυθούν με τα δεδομένα των δραστηριοτήτων που δόθηκαν στους μαθητές (το φυλλάδιο της Ακρόπολης και της Αρχαίας Αγοράς) ή με τα δεδομένα που αναφέρονται από τους ίδιους τους μαθητές. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις, επειδή οι απαντήσεις των μαθητών δόθηκαν ως μια σειρά προβλημάτων, κάποιες πληροφορίες που ήταν αναγκαίες για την επίλυση τους κρίθηκαν προφανείς, διότι είχαν δοθεί στο προηγούμενο πρόβλημα που είχε τεθεί. Χαρακτηριστικά αναφέρεται το ακόλουθο πρόβλημα: «Η Ala θέλει να επισκεφθεί τα σημεία 1, 2 , 3, 4, 5, 6. Έχει για αυτό δύο ώρες. Η είσοδος είναι στο σημείο 1. Από το σημείο 6 έως το σημείο 1 πηγαίνει με το γρηγορότερο τρόπο. Πόση ώρα θα απομείνει όταν φτάσει στην είσοδο; (εννοεί την έξοδο μετά από όλη τη διαδρομή). Η ομάδα δεν δίνει την ταχύτητα, όμως την αναφέρει στο ακριβώς προηγούμενο πρόβλημα που έθεσε. Επομένως, η συγκεκριμένη απάντηση εντάχθηκε στην κατηγορία επιλύσιμων προβλημάτων.

Στην ανάλυση των προβλημάτων εντοπίστηκαν προβλήματα, τα οποία περιελάμβαναν επιπλέον στοιχεία. Προβλήματα με επιπλέον στοιχεία θεωρήθηκαν εκείνα των οποίων η επίλυση δεν απαιτούσε τη χρήση όλων των δεδομένων του προβλήματος,. Μια απάντηση που δόθηκε από μία ομάδα αποτελεί ενδεικτικό πρόβλημα με περιττά στοιχεία. Οι μαθητές διατυπώνουν: «Η Zosia, η Gosia και η Tosia πήγαν μια εκδρομή στην Ελλάδα. Ήθελαν να αγοράσουν μερικά αναμνηστικά στα μαγαζιά. Στα κορίτσια άρεσε περισσότερο μια φιγούρα του Παρθενώνα σε κλίμακα 1/1.000. Κόστιζε 25 ευρώ. Πόσο κόστιζε σε ζλότι, γνωρίζοντας ότι 1 ευρώ = 4 ζλότι περίπου. Έχουν αρκετά λεφτά, εάν ξέρουμε ότι μαζί έχουν 90 ζλότι;». Στο παραπάνω πρόβλημα αναφέρεται η κλίμακα της φιγούρας του Παρθενώνα, η οποία ωστόσο δεν συνεισφέρει στην επίλυση του προβλήματος. Τα προβλήματα αυτά δεν αποτέλεσαν αντικείμενο ξεχωριστής μελέτης, καθώς μπορούν να επιλυθούν μέσω της χρήσης ενός υποσυνόλου των δεδομένων.

Από τα επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα κάποια θεωρήθηκαν ότι δεν εντάσσονται στο πλαίσιο της δραστηριότητας που δόθηκε στους μαθητές. Οι μαθηματικές ερωτήσεις που κατασκευάσθηκαν θα έπρεπε να αναφέρονται σε τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία του δοθέντος πλαισίου. Κατ' επέκταση, το πρόβλημα με τα επιπλέον στοιχεία που διατυπώθηκε παραπάνω, δε συμπεριλήφθηκε στην ποσοτική ανάλυση, αφού κάνει αναφορά στον Παρθενώνα, στοιχείο που δεν περιεχόταν στον χάρτη της Αρχαίας Αγοράς που δόθηκε στη συγκεκριμένη ομάδα. Επιπλέον, ως μη ενταγμένα στο πλαίσιο της δραστηριότητας θεωρήθηκαν και τα μαθηματικά προβλήματα που κατασκευάσθηκαν χρησιμοποιώντας με λανθασμένο τρόπο τα δεδομένα της δοθείσας δραστηριότητας.

Στην Εικόνα 4.6 παρουσιάζεται το αναλυτικό σχήμα της ποιοτικής κατηγοριοποίησης των προβλημάτων.



Εικόνα 4.6. Ποιοτική ανάλυση των προβλημάτων

Τα επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα που εντάσσονταν στο πλαίσιο της δραστηριότητας που δόθηκε στους μαθητές, αναλύθηκαν περαιτέρω ως προς το περιεχόμενό τους, ώστε να αξιολογηθεί η συλλογική δημιουργικότητα. Για το σκοπό αυτό αξιοποιήθηκαν οι έρευνες των Silver και Cai (1996), των Kontorovich κ. συν. (2011) και της Bonotto (2013). Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για την κατηγοριοποίησή τους ήταν: ο αριθμός των βημάτων επίλυσης του προβλήματος, ο τύπος, καθώς και και ο αριθμός των δεδομένων του κάθε προβλήματος.

Αναλυτικότερα, τα προβλήματα εξετάσθηκαν ως προς την πολυπλοκότητα της επίλυσής τους. Εφόσον, τα δημιουργηθέντα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση ορισμένων συνδυασμών αριθμητικών πράξεων, ένα εύλογο μέτρο της μαθηματικής πολυπλοκότητας είναι ο αριθμός των πράξεων ή ο αριθμός των υπολογιστικών βημάτων που απαιτείται για τη λύση τους (Silver & Cai, 1996). Συγκεκριμένα, τα προβλήματα χωρίστηκαν σε: α) προβλήματα πολλαπλών βημάτων (multi-step), β) προβλήματα ενός βήματος (one-step), και γ) προβλήματα μηδενικών βημάτων (zero-step). Δεδομένου ότι οι ερευνητές συμπέραναν την πολυπλοκότητα ενός προβλήματος από τη λύση του και καθώς τα υποκείμενα της έρευνας δεν έλυσαν όλα τα προβλήματα που κατασκεύασαν, θεωρήθηκε προτιμότερη η χρήση μιας απλής ταξινόμησης παρά η εφαρμογή μιας περαιτέρω ταξινόμησης σε ένα πρόβλημα πολλαπλών βημάτων. Ο λόγος αυτής της ταξινόμησης έγκειται το γεγονός ότι η κατασκευή ενός προβλήματος πολλαπλών βημάτων είναι πιο πολύπλοκη σε σύγκριση με την κατασκευή προβλημάτων ενός βήματος (Leung & Silver, 1997). Ωστόσο, η κατασκευή ενός προβλήματος πέντε βημάτων δεν το καθιστά απαραίτητα πιο πολύπλοκο από ένα πρόβλημα τεσσάρων βημάτων (Leung & Silver, 1997). Αξίζει να επισημανθεί, επίσης, ότι οι διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων που περιλάμβαναν αθροίσματα πολλών όρων, καθώς και την απλή μέθοδο των τριών, η οποία απαιτούταν σε προβλήματα που ανέφεραν τη χρήση της κλίμακας, θεωρήθηκαν ως διαδικασίες ενός βήματος. Για παράδειγμα, προβλήματα που ζητούσαν την εύρεση της απόστασης δύο σημείων, των οποίων η λύση προϋπέθετε την μετατροπή της απόστασης από εκατοστά σε μέτρα με βάση τη δοθείσα κλίμακα, αποτέλεσαν προβλήματα ενός βήματος. Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται παραδείγματα προβλημάτων ανάλογα με τον αριθμό των βημάτων.

Πίνακας 4.1. Παραδείγματα προβλημάτων ανάλογα με την πολυπλοκότητα επίλυσής τους.

Αριθμός βημάτων	Πρόβλημα
Πολλαπλά βήματα	Η Μαρτίνα θέλει να δει τον Βωμό των 12 θεών (νούμερο 12). Το εισιτήριο εισόδου γι' αυτό κοστίζει 20 ζλότι και η Μαρτίνα έχει 150 ζλότι. Εάν πληρώσει το εισιτήριο, θα έχει αρκετά λεφτά για το εισιτήριο του λεωφορείου που είναι 100,25 ζλότι; Εάν ναι, πόσα θα της μείνουν;
Ένα βήμα	Ποιο είναι το ύψος της στέγης και των μικρών κολονών;
Μηδενικά βήματα	Ποιο είναι το σχήμα του χάρτη;

Όσον αφορά στις στρατηγικές κατασκευής προβλήματος, ορισμένες ομάδες αξιοποίησαν αποκλειστικά τα δεδομένα της παρεχόμενης δραστηριότητας, ενώ κάποιες άλλες εισήγαγαν κάποια πρόσθετα δεδομένα που δεν περιέχονταν στο πλαίσιο που δόθηκε στους μαθητές. Συνεπώς, προέκυψαν δύο κατηγορίες προβλημάτων ανάλογα τον τύπο των δεδομένων των δημιουργηθέντων προβλήματων. Στην πρώτη κατηγορία οι μαθητές αποδέχτηκαν και χρησιμοποίησαν μόνο τα δεδομένα των δραστηριοτήτων, ενώ στη δεύτερη εισήγαγαν νέα δεδομένα σε συνδυασμό με τα στοιχεία που περιελάμβαναν τα δύο πλαίσια (Bonotto, 2013·Kontorovich et al, 2011). Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα.

Πίνακας 4.2. Παραδείγματα προβλημάτων ανάλογα με τον τύπο των δεδομένων

Τύπος δεδομένων	Πρόβλημα
Αποδοχή των δεδομένων	Ποια είναι η περίμετρος ολόκληρου του Παρθενώνα. Καθώς ο ένας τοίχος είναι 35 μ. και ο δεύτερος είναι 66.5 μ.
Εισαγωγή νέων δεδομένων	Η Αμέλκα στέκεται δίπλα στο Άγαλμα της Αθηνάς και θέλει να κάνει έναν κύκλο γύρω από τον Παρθενώνα. Ξέρει ότι για να περπατήσεις 1 μέτρο χρειάζεται 1 δευτερόλεπτο, πόση ώρα θα της πάρει;

Εκτός από τον τύπο των δεδομένων, ένα ακόμη κριτήριο για την αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας αποτέλεσε ο αριθμός των δεδομένων των επιμέρους προβλημάτων (Bonotto, 2013). Για κάθε πρόβλημα υπολογίσθηκε ο αριθμός των δεδομένων που περιείχε. Τα επιπλέον δεδομένα που αναφέρονταν σε ορισμένες περιπτώσεις προβλημάτων, τα οποία δε συνεισέφεραν στην επίλυση του προβλήματος, δε λήφθηκαν υπόψη. Ανάλογα τον αριθμό των δεδομένων του κάθε προβλήματος προέκυψαν τρεις κατηγορίες προβλημάτων. Η πρώτη κατηγορία περιελάμβανε προβλήματα των οποίων ο αριθμός των δεδομένων ήταν μικρότερος ή ίσος του 2. Στη δεύτερη κατηγορία εντάχθηκαν προβλήματα με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 2 και μικρότερο ή ίσο του 4. Τέλος, η τρίτη κατηγορία αφορούσε σε προβλήματα των οποίων ο αριθμός των δεδομένων ξεπερνούσε τον αριθμό 4. Μια περαιτέρω κατηγοριοποίηση των προβλημάτων αναφορικά με τον αριθμό των δεδομένων δεν θεωρήθηκε χρήσιμη, καθώς ένα πρόβλημα με 6 δεδομένα δεν το καθιστά απαραίτητα πιο εύκολο από ένα πρόβλημα με 8 δεδομένα.

Σε προβλήματα εύρεσης εμβαδού ή περιμέτρου οι διαστάσεις των κτιρίων (μήκος και πλάτος) αποτέλεσαν δύο ξεχωριστά δεδομένα. Επιπλέον, σε ορισμένα προβλήματα απαιτούταν η εύρεση της απόστασης μεταξύ πολλών κτιρίων, όπως στο ακόλουθο: «Ένα εισιτήριο κοστίζει 20 ζλότι ανά ώρα. Περπατάμε 1 χιλιόμετρο σε 15 λεπτά. Θα καταφέρουμε να επισκεφθούμε τα σημεία 10, 5, 1 σε 15 λεπτά, εάν η είσοδος ξεκινάει από το σημείο 1;». Σε περιπτώσεις τέτοιων προβλημάτων, οι επιμέρους αποστάσεις μεταξύ των κτιρίων αποτέλεσαν τα δεδομένα του προβλήματος. Επομένως, στο συγκεκριμένο παράδειγμα ως δεδομένα αποστάσεων θεωρήθηκαν: η απόσταση του κτιρίου 1 από το 10, η απόσταση από του κτιρίου 10 από το 5, καθώς και η απόσταση του κτιρίου 5 από το κτίριο 1 με τη σειρά που αναγραφόταν από τους μαθητές. Για την εύρεση της συνολικής διανυόμενης απόστασης απαιτείται πρόσθεση των επιμέρους αποστάσεων και για αυτό δεν προτιμήθηκε μια ενιαία κατηγοριοποίηση αυτών των δεδομένων με την ονομασία συνολική διανυόμενη απόσταση.

Στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα προβλήματος και τα δεδομένα του. Ως δεδομένα του προβλήματος θεωρήθηκαν το μήκος του χάρτη, δηλαδή της Αρχαίας Αγοράς, καθώς και το πλάτος του. Επίσης, εφόσον το ζητούμενο ήταν η εύρεση του εμβαδού σε τετραγωνικά μέτρα, δεδομένο αποτέλεσε και η κλίμακα του χάρτη.

Πίνακας 4.3. Παράδειγμα προβλήματος και ο αριθμός δεδομένων του

Πρόβλημα	Αριθμός δεδομένων
Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι ολόκληρη η Αγορά;	1. Μήκος 2. Πλάτος 3. Κλίμακα

Για την αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας στα Μαθηματικά, ελήφθησαν υπόψη οι ακόλουθες τρεις κατηγορίες, όπως προτάθηκαν από τον Guilford (1950) και όπως χρησιμοποιήθηκαν σε δοκιμές από τον Torrance και άλλους ερευνητές, όπως ο Silver (1994) και οι Kontorovich κ. συν. (2011): α) ευχέρεια (fluency), β) ευελιξία (flexibility) και γ) πρωτοτυπία (originality).

Η ευχέρεια αναφέρεται στον συνολικό αριθμό των προβλημάτων που διατύπωσαν οι επιμέρους ομάδες. Αντίθετα, η ευελιξία αναφέρεται στον αριθμό των διαφορετικών και σχετικών ιδεών που δημιουργήθηκαν σε μια δεδομένη χρονική περίοδο. Προκειμένου να αξιολογηθεί η ευελιξία των μαθητών, τα επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα που εντάσσονταν στο πλαίσιο της δοθείσας δραστηριότητας κατηγοριοποιήθηκαν με βάση τον αριθμό των βημάτων, τον τύπο και τον αριθμό των δεδομένων, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Αφού τα προβλήματα κατηγοριοποιήθηκαν με βάση αυτό τον τρόπο, καταμετρήθηκαν οι διάφοροι τύποι προβλημάτων που προέκυψαν από την κάθε ομάδα.

Η πρωτοτυπία των μαθηματικών προβλημάτων που κατασκευάσθηκαν από τους μαθητές ήταν απόρροια της σπανιότητας του κάθε προβλήματος (Bonotto, 2013). Πιο αναλυτικά, για κάθε κατηγορία προβλημάτων που διαμορφώθηκε, υπολογίσθηκε ο αριθμός των ομάδων που διατύπωσε προβλήματα τέτοιου τύπου. Τα προβλήματα μηδενικού και ενός βήματος θεωρήθηκαν εξ αρχής προβλήματα απλά που δεν απαιτούσαν σύνθετες μαθηματικές διεργασίες και συνεπώς η βαθμολόγηση της πρωτοτυπίας τους ήταν 0. Για παράδειγμα, η δεύτερη ομάδα κατασκεύασε ένα πρόβλημα ενός βήματος, στο οποίο εισήγαγε νέα δεδομένα: «Το εισιτήριο για μια κυρία κοστίζει 10 ζλότι. Πόσο πλήρωσε μια κυρία για 20 άτομα;». Από τις υπόλοιπες ομάδες, καμία δεν κατασκεύασε πρόβλημα της συγκεκριμένης κατηγορίας. Ωστόσο, το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να θεωρηθεί πρωτότυπο, καθώς η διαδικασία επίλυσής του είναι ιδιαίτερα προφανής. Μια κατηγορία προβλήματος θεωρήθηκε πρωτότυπη, εφόσον το ποσοστό συχνότητας της εμφάνισής της ήταν μικρότερο του 33,3%, δηλαδή διατυπώθηκε από το πολύ δύο ομάδες. Στη συνέχεια, για κάθε πτυχή της δημιουργικότητας υπολογίσθηκε η σχετική βαθμολογία της και το συνολικό αποτέλεσμα της δημιουργικότητας για κάθε ομάδα προέκυψε από το άθροισμα των επιμέρους σχετικών βαθμολογιών, στις οποίες είχαν αποδοθεί διαφορετικοί συντελεστές βαρύτητας.

5. Αποτελέσματα έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ των ικανοτήτων κατασκευής προβλήματος και της δημιουργικής σκέψης των μαθητών στα Μαθηματικά. Για το σκοπό αυτό οι μαθητές χωρίστηκαν σε 6 ομάδες. Οι τρεις ομάδες εργάσθηκαν στο πλαίσιο που αναφερόταν στον Παρθενώνα και οι υπόλοιπες ασχολήθηκαν με τη δραστηριότητα της Αρχαίας Αγοράς. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω.

5.1. Αποτελέσματα ποιοτικής ανάλυσης δεδομένων

5.1.1 Σύνολο προβλημάτων

Οι μαθητές δημιούργησαν στο σύνολο τους 63 προβλήματα (βλ. Παράρτημα Ι). Αναλυτικότερα, η ομάδα 1 κατασκεύασε 10 προβλήματα, η 2η ομάδα 10 προβλήματα και η ομάδα 3 πέντε προβλήματα. Αντίστοιχα, η ομάδα 4 δημιούργησε με τη σειρά της 13 προβλήματα, η $5^{η}$ ομάδα 15 και η $6^{η}$ ομάδα 10 προβλήματα. Ο Πίνακας 5.1 παρουσιάζει το σύνολο των προβλημάτων που δημιούργησε η κάθε ομάδα, καθώς και τη δραστηριότητα που δόθηκε σε καθεμία από αυτές.

Πίνακας 5.1. Σύνολο προβλημάτων ανά ομάδα

Ομάδα	Δραστηριότητα	Σύνολο προβλημάτων ανά ομάδα
1	Παρθενώνας	10
2	Αρχαία Αγορά	10
3	Παρθενώνας	5
4	Αρχαία Αγορά	13
5	Παρθενώνας	15
6	Αρχαία Αγορά	10
	Σύνολο προβλημάτων	63

Εξετάζοντας τον Πίνακα 5.1 διαπιστώνεται ότι οι μαθητές που ενεπλάκησαν στην δραστηριότητα του Παρθενώνα κατασκεύασαν συνολικά 30 προβλήματα, ενώ οι μαθητές που ενεπλάκησαν στην δραστηριότητα με την Αρχαία Αγορά, δημιούργησαν 33 προβλήματα συνολικά. Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι δεν υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις ως προς τον αριθμό των προβλημάτων που διατύπωσαν οι ομάδες με τη διαφορετική δραστηριότητα. Συνεπώς, το διαφορετικό πλαίσιο που δόθηκε στους μαθητές δεν καθόρισε το σύνολο των προβλημάτων που διατύπωσαν οι επιμέρους ομάδες. Ως προς το σύνολο των προβλημάτων που δημιούργησε η κάθε ομάδα, μόνο μία ομάδα διατύπωσε περιορισμένο αριθμό προβλημάτων. Συγκεκριμένα, η ομάδα 3 δημιούργησε πέντε προβλήματα, ενώ οι υπόλοιπες ομάδες που σχημάτισαν τουλάχιστον 10 προβλήματα.

5.1.2. Μη μαθηματικά προβλήματα

Τα προβλήματα που διατύπωσαν οι μαθητές εξετάσθηκαν ως προς το μαθηματικό περιεχόμενό τους και διακρίθηκαν σε μαθηματικά και μη μαθηματικά προβλήματα. Ως μη μαθηματικά προβλήματα κρίθηκαν εκείνα τα οποία δεν επιλύονται μέσω μαθηματικών εργαλείων. Από την εξέταση των προβλημάτων των μαθητών, προέκυψε ότι μόνο μία ομάδα (4η) δημιούργησε ένα μη μαθηματικό πρόβλημα. Η μη μαθηματική ερώτηση, η οποία αναφέρθηκε και προηγουμένως, ήταν η εξής: «Σε ποιο λόφο βρίσκεται το Ηφαίστειον;». Το πρόβλημα παρουσιάζεται, όπως ακριβώς το έθεσε η ομάδα, στην Εικόνα 5.1.

Εικόνα 5.1. Μη μαθηματικό πρόβλημα

Στον πίνακα 5.2 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα ποσοτικά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν στο σύνολο των προβλημάτων που έθεσαν οι ομάδες.

Πίνακας 5.2. Ποσοτικά αποτελέσματα μαθηματικών και μη μαθηματικών προβλημάτων

Μαθηματικά προβλήματα	**Μη μαθηματικά προβλήματα**
62	1
98,4%	1,6%

Ο Πίνακας 5.3 παρουσιάζει τα ποσοτικά αποτελέσματα των μαθηματικών και μη μαθηματικών προβλημάτων ανά ομάδα.

Πίνακας 5.3. Ποσοτικά αποτελέσματα μαθηματικών μη μαθηματικών προβλημάτων ανά ομάδα

Ομάδα	Μαθηματικά προβλήματα	Μη μαθηματικά προβλήματα
1	100%	0%
2	100 %	0%
3	100%	0%
4	92,3%	7,7%
5	100%	0%
6	100%	0%

5.1.3. Επιλύσιμα και μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα

Τα μαθηματικά προβλήματα που δημιουργήθηκαν από το σύνολο των ομάδων εξετάσθηκαν ως προς την επιλυσιμότητά τους. Αναλυτικότερα, τα προβλήματα που δε διέθεταν επαρκή στοιχεία για την επίλυσή τους εντάχθηκαν στην κατηγορία των μη επιλύσιμων μαθηματικών προβλημάτων. Οι ομάδες δημιούργησαν συνολικά 62 μαθηματικά προβλήματα από τα οποία τα 8 κρίθηκαν ως μη επιλύσιμα (Πίνακας 5.4).

Πίνακας 5.4. Ποσοτικά αποτελέσματα επιλύσιμων και η επιλύσιμων μαθηματικών προβλημάτων

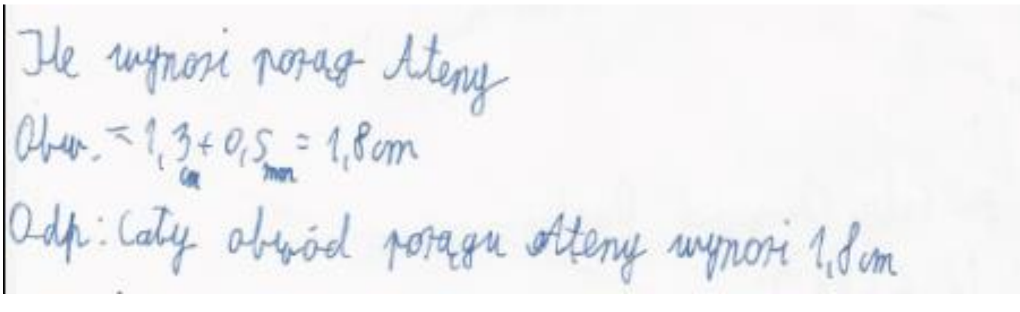
Επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα	Μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα
54	8
87,1%	12,9%

Στη συνέχεια, υπολογίσθηκε το ποσοστό των επιλύσιμων και μη επιλύσιμων προβλημάτων για κάθε ομάδα, όπως διαφαίνεται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 5.5). Η ομάδα 1 δημιούργησε ένα μη επιλύσιμο πρόβλημα, ενώ η ομάδα 2 τέσσερα. Η ομάδα 5 διατύπωσε δύο προβλήματα και η 6η ένα. Όπως γίνεται αντιληπτό και από τον πίνακα, η 4η και η 3η ομάδα κατασκεύασαν μόνο επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα. Η ομάδα με το μεγαλύτερο ποσοστό κατασκευής μη επιλύσιμων προβλημάτων ήταν η ομάδα 4 (40%) με μεγάλη διαφορά έναντι της 5 (13,3%).

Πίνακας 5.5. Ποσοτικά αποτελέσματα μαθηματικών μη μαθηματικών προβλημάτων ανά ομάδα

Ομάδα	Επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα	Μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα
1	90%	10%
2	60%	40%
3	100%	0%
4	100%	0%
5	86,7%	13,3%
6	90%	10%

Η ομάδα 1 διατύπωσε το εξής μη επιλύσιμο μαθηματικό πρόβλημα: «Πόσο μεγάλο είναι το άγαλμα της Αθηνάς;» (Εικόνα 5.2). Η εύρεση των διαστάσεων του αγάλματος με βάση τη δοθείσα δραστηριότητα καθίσταται μη εφικτή, καθώς στους μαθητές δόθηκε η κάτοψη του Παρθενώνα και η θέση του βάθρου του αγάλματος. Για την εύρεση της λύσης στο πρόβλημα που έθεσε, η ομάδα μέτρησε το μήκος και το πλάτος του βάθρου του αγάλματος της Αθηνάς και στη συνέχεια τα πρόσθεσε. Η απάντηση που δόθηκε από τους μαθητές είναι ότι η περίμετρος του αγάλματος της Αθηνάς είναι 1,8 εκατοστά. Διαπιστώνεται ότι η διατύπωση του προβλήματος ήταν ασαφής, καθώς οι μαθητές με τη χρήση της λέξης «μεγάλο» εννοούσαν την περίμετρο του αγάλματος. Ωστόσο, το πρόβλημα εξακολουθεί να παραμένει μη επιλύσιμο, αφού δεν μπορεί να υπολογισθεί η περίμετρος του αγάλματος με βάση τα δοθέντα στοιχεία. Για την εύρεση της λύσης οι μαθητές υπολόγισαν το άθροισμα του μήκους και του πλάτους του βάθρου του αγάλματος της Αθηνάς. Διαπιστώνεται, λοιπόν, αδυναμία αντίληψης της ιδέας της κάτοψης του κτιρίου, ενώ παράλληλα οι μαθητές στην προσπάθειά τους για την εύρεση της λύσης θέλησαν να υπολογίσουν την περίμετρο του βάθρου του αγάλματος προσθέτοντας μόνο τις δύο από τις τέσσερις πλευρές του ορθογωνίου.

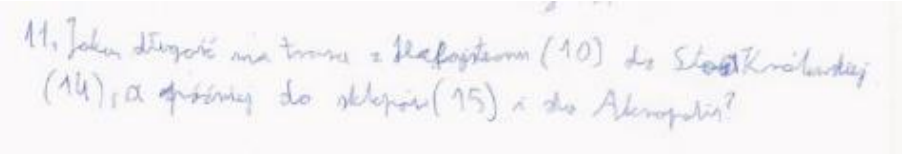


Εικόνα 5.2. Μη επιλύσιμο πρόβλημα ομάδας 1

Η ομάδα 2 διατύπωσε τον μεγαλύτερο αριθμό μη επιλύσιμων προβλημάτων. Στο σύνολό τους, τα προβλήματα αυτά προέκυψαν λόγω μη συμπερίληψης όλων των απαραίτητων δεδομένων ή λόγω λανθασμένης ερμηνείας των δεδομένων του χάρτη της Αρχαίας Αγοράς. Στην παρούσα έρευνα, δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στη σωστή ερμηνεία των δεδομένων των δραστηριοτήτων και για το λόγο αυτό δεν αναλύθηκαν περαιτέρω τα συγκεκριμένα προβλήματα. Ένα από τα προβλήματα που κατασκεύασε η συγκεκριμένη ομάδα ήταν το ακόλουθο: «Πόση ώρα χρειάζεται για να περπατήσεις από την Ποικίλη Στοά στην Ηλιαία;» (Εικόνα 5.3). Το πρόβλημα αυτό δεν μπορεί να επιλυθεί με βάση τα δοθέντα στοιχεία, αφού οι μαθητές δεν αναφέρουν την ταχύτητα. Οι μαθητές θα μπορούσαν να αναφέρουν τη διανυόμενη απόσταση σε ορισμένο χρονικό διάστημα, ωστόσο δεν την συμπεριέλαβαν στο πρόβλημά τους. Το γεγονός αυτό, ενδεχομένως να φανερώνει την αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν την έννοια της ταχύτητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι κανένα από τα προβλήματα που διατύπωσε η συγκεκριμένη ομάδα δεν επιλύθηκε από τους μαθητές.

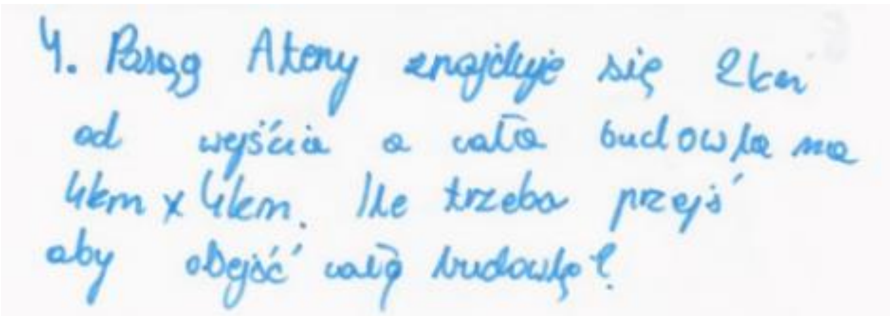
Εικόνα 5.3. Μη επιλύσιμο πρόβλημα ομάδας 2 (1)

Ένα άλλο παράδειγμα μη επιλύσιμου προβλήματος της ομάδας 2 αφορούσε στη λανθασμένη ερμηνεία των δεδομένων του χάρτη της Αρχαίας Αγοράς. Το πρόβλημα που έθεσαν οι μαθητές ήταν το ακόλουθο: «Πόση είναι η απόσταση από τον Ναό του Ηφαίστου (νούμερο 10) στην Ποικίλη Στοά (νούμερο 14) και μετά σ' ένα μαγαζί (νούμερο 15) και στην Ακρόπολη;» (Εικόνα 5.4). Η εύρεση της απόστασης ανάμεσα στον Ναό του Ηφαίστου και την Ποικίλη Στοά είναι εφικτή, αφού παρέχονται όλα τα δεδομένα στον χάρτη. Ωστόσο, η Ακρόπολη δε διαφαίνεται στο χάρτη της Αρχαίας Αγοράς. Οι μαθητές σύγχυσαν το βέλος που δείχνει την κατεύθυνση προς την Ακρόπολη με την τοποθεσία της ίδια της Ακρόπολης, γεγονός που, ενδεχομένως, υποδηλώνει την αδυναμία ορθής ερμηνείας των στοιχείων του χάρτη από τους μαθητές.



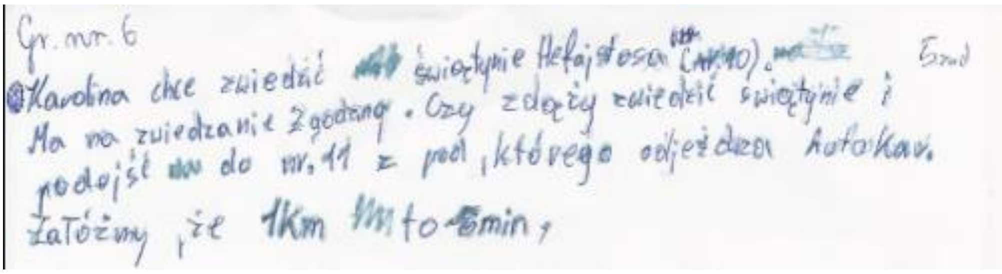
Εικόνα 5.4. Μη επιλύσιμο πρόβλημα ομάδας 2 (2)

Η ομάδα 5 διατύπωσε δύο μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα, από τα οποία το ένα ήταν παρόμοιο με εκείνο της πρώτης ομάδας («Ποιο είναι το ύψος του αγάλματος της Αθηνάς;»). Το δεύτερο πρόβλημα αναφέρεται ως εξής: «Το άγαλμα της Αθηνάς είναι τοποθετημένο 2 χιλιόμετρα από την είσοδο και ολόκληρο το κτίριο είναι 4 χλμ x 4 χλμ. Πόσο χρειάζεται για να περπατήσεις γύρω από όλο το κτίριο;» (Εικόνα 5.5). Η ομάδα δεν υπολόγισε την πραγματική απόσταση του αγάλματος από την είσοδο του Παρθενώνα και έκανε μια υπόθεση μη ρεαλιστική. Επιπλέον, υπέθεσε ότι οι διαστάσεις του κτιρίου είναι 4 χλμ x χλμ, οι οποίες δεν συμπίπτουν με τις πραγματικές διαστάσεις του κτιρίου. Παράλληλα, με βάση τις δοθείσες διαστάσεις από τους μαθητές προκύπτει ότι ο Παρθενώνας είναι τετράγωνος, ενώ στην δραστηριότητα διαφαίνεται καθαρά ότι το σχήμα του κτιρίου είναι ορθογώνιο. Επιπρόσθετα, οι μαθητές δεν αναφέρουν την ταχύτητα προκειμένου να υπολογισθεί το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί ο γύρος του κτιρίου. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι μαθητές αξιοποίησαν με λανθασμένο τρόπο τα δεδομένα της δραστηριότητας και επιπλέον δεν συμπεριέλαβαν μια σημαντική υπόθεση που ήταν η ταχύτητα.



Εικόνα 5.5. Μη επιλύσιμο πρόβλημα ομάδας 5

Όσον αφορά την ομάδα 6, οι μαθητές διατύπωσαν το ακόλουθο μη επιλύσιμο πρόβλημα: «Η Καρολίνα θέλει να επισκεφθεί το Ηφαίστειον (νούμερο 10). Έχει γι' αυτό 2 ώρες. Θα τα καταφέρει να φτάσει στο ναό και να πάει στο νούμερο 11, από όπου φεύγει το λεωφορείο; Ας υποθέσουμε ότι 1 χιλιόμετρο είναι 15 λεπτά.» (Εικόνα 5.6). Σε αντίθεση με προηγούμενα μη επιλύσιμα προβλήματα, όπου οι μαθητές δεν ανέφεραν την ταχύτητα, στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές υποθέτουν ότι η διανυόμενη απόσταση σε 15 λεπτά ισούται με ένα χιλιόμετρο. Όμως, οι μαθητές δεν αναφέρουν το σημείο έναρξης της ξενάγησης της Καρολίνας. Επομένως, το πρόβλημα δεν αναφέρει όλα τα δεδομένα που είναι απαραίτητα για την επίλυσή του.


Gr. nr. 6
Karolina chce zwiedzić świątynie Hefajstosa (nr. 10). Ma na zwiedzanie 2 godziny. Czy zdąży zwiedzić świątynie i podojść do nr. 11 z pod, którego odjeżdża autokar. Załóżmy, że 1km to ~~5~~min,

Εικόνα 5.6. Μη επιλύσιμο πρόβλημα ομάδας 6

5.1.4. Προβλήματα μη ενταγμένα στο πλαίσιο της δραστηριότητας

Τα επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα διερευνήθηκαν περαιτέρω ως προς τον τρόπο αξιοποίησης του πλαισίου της δραστηριότητας. Ειδικότερα, ορισμένα προβλήματα κρίθηκαν ότι δεν εντάσσονται στο πλαίσιο της δραστηριότητας που δόθηκε στους μαθητές. Κριτήριο για την συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση ήταν η συμπερίληψη ενός τουλάχιστον στοιχείου από εκείνα που παρουσιάζονται σε κάθε δραστηριότητα. Από τα 54 επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα που διατύπωσαν συνολικά οι ομάδες, πέντε θεωρήθηκαν προβλήματα εκτός του δοθέντος πλαισίου (Πίνακας 5.6).

Πίνακας 5.6. Ποσοτικά αποτελέσματα προβλημάτων εντός και εκτός πλαισίου της δοθείσας δραστηριότητας

Προβλήματα εντός πλαισίου	**Προβλήματα εκτός πλαισίου**
49	5
90,74%	9,26%

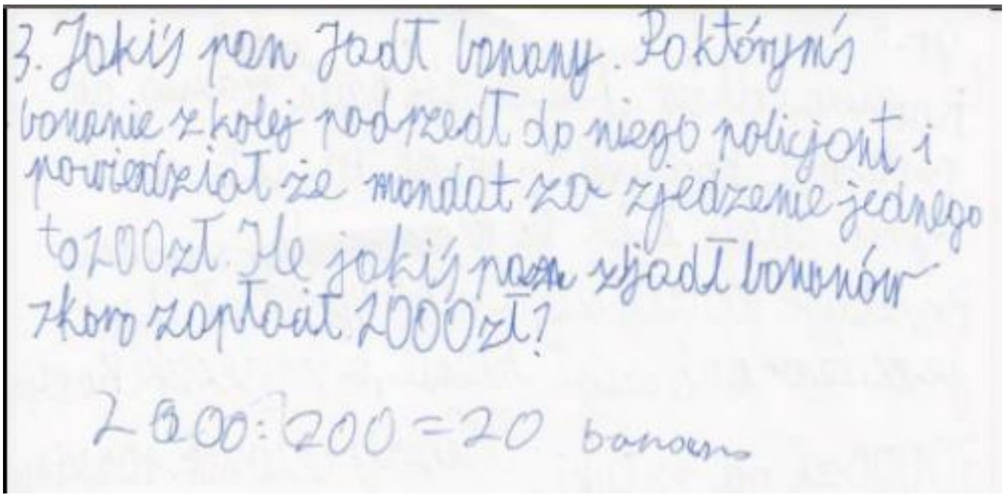
Αναφορικά με τον αριθμό των προβλημάτων εκτός πλαισίου της κάθε ομάδας, διαπιστώθηκε ότι οι τρεις πρώτες ομάδες δεν διατύπωσαν κανένα πρόβλημα που δεν εντάσσεται στο πλαίσιο της δραστηριότητας που τους δόθηκε. Η ομάδα 4 διατύπωσε ένα πρόβλημα εκτός πλαισίου, η ομάδα 5 τρία και η ομάδα 6 ένα. Στον Πίνακα 5.7 παρουσιάζονται τα ποσοτικά αποτελέσματα της κάθε ομάδας.

Πίνακας 5.7. Ποσοτικά αποτελέσματα προβλημάτων εντός και εκτός πλαισίου της δοθείσας δραστηριότητας ανά ομάδα

Ομάδα	Προβλήματα εντός πλαισίου	Προβλήματα εκτός πλαισίου
1	100%	0%
2	100%	0%
3	100%	0%
4	91,67%	8,33%
5	76,92%	23,08%
6	88,89%	11,11%

Από τον παραπάνω πίνακα διαπιστώνεται ότι η ομάδα με το μεγαλύτερο ποσοστό προβλημάτων εκτός πλαισίου είναι η ομάδα 5 (23,08%). Ακολουθεί η ομάδα 6 με ποσοστό 11,11% και η ομάδα 4 με ποσοστό 8,33%. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται παραδείγματα προβλημάτων που ανήκουν στη συγκεκριμένη κατηγορία.

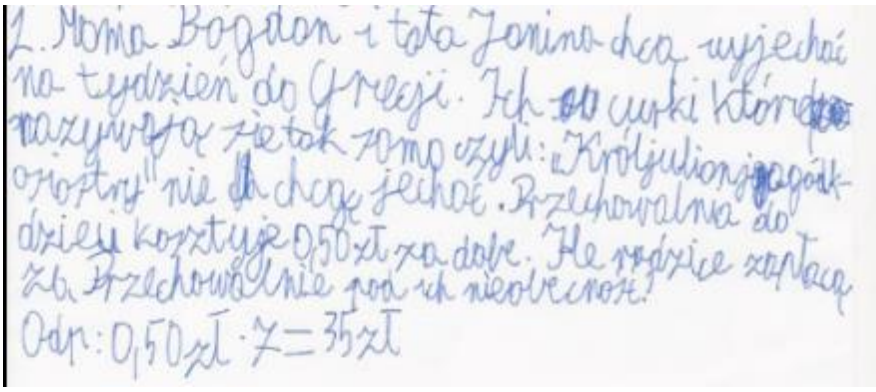
Η ομάδα 5 κατασκεύασε το εξής πρόβλημα: «Ένας άντρας έτρωγε μπανάνες. Αφού έφαγε μερικές ένας αστυνομικός ήρθε σε αυτόν και του είπε ότι το πρόστιμο επειδή έφαγε μια μπανάνα είναι 100 ζλότι. Πόσες μπανάνες έφαγε εφόσον πλήρωσε 2000 ζλότι;» (Εικόνα 5.7). Το συγκεκριμένο πρόβλημα, αποτελεί ένα μαθηματικό πρόβλημα, ενώ παράλληλα παρέχονται όλα τα δεδομένα που είναι αναγκαία για την επίλυσή του. Όμως, οι μαθητές δεν αξιοποίησαν κανένα από τα δεδομένα που προσφέρονται στα φυλλάδια των δραστηριοτήτων. Απαραίτητη προϋπόθεση ήταν οι μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα που να ανταποκρίνονται στο περιεχόμενο της εκάστοτε δραστηριότητας, προκειμένου να εξετασθεί η δημιουργική τους σκέψη ως προς το δοθέν πλαίσιο. Επομένως, το παραπάνω πρόβλημα δεν συμπεριλήφθηκε στη λίστα των προβλημάτων που αξιολογήθηκαν ως προς τη δημιουργικότητά τους.


3. Jakiś pan jadł banany. Po którymś banianie z kolei podszedł do niego policjant i powiedział że mandat za zjedzenie jednego to 200 zł. Ile jakiś pan zjadł bananów skoro zapłacił 2000 zł?

2000 : 200 = 20 banans

Εικόνα 5.8. Παράδειγμα προβλήματος μη ενταγμένο στο πλαίσιο της δραστηριότητας (1)

Ένα ακόμη παράδειγμα προβλήματος εκτός πλαισίου το οποίο κατασκευάσθηκε επίσης από την ομάδα 5 είναι: «Η μητέρα Janina και ο πατέρας Bogdan θέλουν να πάνε για μια εβδομάδα στην Ελλάδα. Οι κόρες του (δύο) δεν θέλουν να πάνε. Μια νταντά για παιδιά κοστίζει 0,50 ζλότι για 24 ώρες. Πόσο θα πληρώσουν για την νταντά οι γονείς, καθ' όλη τη διάρκεια που θα απουσιάζουν;» (Εικόνα 5.9). Οι μαθητές κάνουν αναφορά στην Ελλάδα, χωρίς όμως να χρησιμοποιούν κάποιο από τα δεδομένα της δραστηριότητας. Επιπλέον, το πρόβλημα κρίθηκε ως μη ρεαλιστικό, καθώς το κόστος της νταντάς για μία ημέρα δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.


1. Mama Bogdan i tata Janina chcą wyjechać na tydzień do Grecji. Ich córki które nazywają się tak samo czyli: „[illegible]" nie chcą jechać. Przechowalnia do dzieci kosztuje 0,50 zł za dobę. Ile rodzice zapłacą za przechowalnię pod ich nieobecność?

Odp: 0,50 zł · 7 = 35 zł

Εικόνα 5.9. Παράδειγμα προβλήματος μη ενταγμένο στο πλαίσιο της δραστηριότητας (2)

5.1.5. Συνοπτικοί πίνακες της κωδικοποίησης των δεδομένων

Στον Πίνακα 5.8 παρουσιάζονται συνοπτικά ο αριθμός των προβλημάτων της κάθε κατηγορίας.

Πίνακας 5.8. Αριθμός προβλημάτων ανά κατηγορία

Κατηγορία	Αριθμός προβλημάτων
Μη μαθηματικά προβλήματα	1
Μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα	8
Προβλήματα εκτός πλαισίου	5
Σύνολο	**14**

Το σύνολο των προβλημάτων του παραπάνω πίνακα δεν αποτέλεσε αντικείμενο αξιολόγησης της δημιουργικότητας. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός των προβλημάτων που εξετάσθηκαν περαιτέρω ως προς τη δημιουργικότητά τους ήταν 49.

Στον Πίνακα 5.9 παρουσιάζεται και ο αριθμός των προβλημάτων της κάθε κατηγορίας ανά ομάδα.

Πίνακας 5.9. Αριθμός προβλημάτων κάθε κατηγορίας ανά ομάδα

Κατηγορία	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4	Ομάδα 5	Ομάδα 6
Μη μαθηματικά προβλήματα	0	0	0	1	0	0
Μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα	1	4	0	0	2	1
Προβλήματα εκτός πλαισίου	0	0	0	1	3	1
Σύνολο	**1**	**4**	**0**	**2**	**5**	**2**

Επομένως, τα προβλήματα της κάθε ομάδας που εντάχθηκαν στις συγκεκριμένες κατηγορίες δεν συμπεριλήφθηκαν στην αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας. Ο αριθμός των προβλημάτων της κάθε ομάδας που αναλύθηκε περαιτέρω φαίνεται στον Πίνακα 5.10.

Πίνακας 5.10. Αριθμός προβλημάτων ανά ομάδα που συμπεριλήφθηκαν στην αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας

Ομάδα	Αριθμός προβλημάτων
1	9
2	6
3	5
4	11
5	10
6	8
Σύνολο	**49**

5.2. Αποτελέσματα ποσοτικής ανάλυσης δεδομένων

5.2.1. Προβλήματα πολλαπλών, ενός και μηδενικών βημάτων

Ο συνολικός αριθμός των προβλημάτων που προέκυψε ύστερα από την ποιοτική τους ανάλυση ήταν 49. Τα προβλήματα αυτά εξετάσθηκαν ως προς τον αριθμό των βημάτων που είναι απαραίτητα για την επίλυσή τους. Οι κατηγορίες είναι οι εξής: α) προβλήματα πολλαπλών βημάτων, β) προβλήματα ενός βήματος, και γ) προβλήματα μηδενικών βημάτων. Όπως αναγράφεται στον πίνακα οι μαθητές διατύπωσαν συνολικά 27 προβλήματα πολλαπλών βημάτων (55,1%), 12 προβλήματα ενός βήματος (26,5%) και 9 προβλήματα μηδενικών βημάτων (18,4%). Διαπιστώνεται, επομένως, ότι το μεγαλύτερο ποσοστό κατείχαν τα προβλήματα πολλαπλών βημάτων. Συγκεκριμένα, τα μισά περίπου προβλήματα που δημιούργησαν οι μαθητές απαιτούσαν περισσότερες από μία αριθμητικές πράξεις. Στη συνέχεια, ακολούθησαν τα προβλήματα ενός βήματος και τέλος τα προβλήματα μηδενικών βημάτων.

Πίνακας 5.11. Αριθμός προβλημάτων ανά κατηγορία με βάση των αριθμό βημάτων

Κατηγορία	Αριθμός προβλημάτων	Ποσοστό
Προβλήματα πολλαπλών βημάτων	27	55,1%
Προβλήματα ενός βήματος	13	26,5%
Προβλήματα μηδενικών βημάτων	9	18,4%

Τα αποτελέσματα για κάθε ομάδα αποτυπώνονται στους Πίνακες 5.12 και 5.13.

Πίνακας 5.12. Αριθμός προβλημάτων κάθε κατηγορίας με βάση των αριθμό βημάτων ανά ομάδα

	Προβλήματα		
Ομάδα	**Πολλαπλών βημάτων**	**Ενός βήματος**	**Μηδενικών βημάτων**
1	3	5	1
2	4	2	0
3	4	0	1
4	1	4	6
5	8	2	0
6	7	0	1

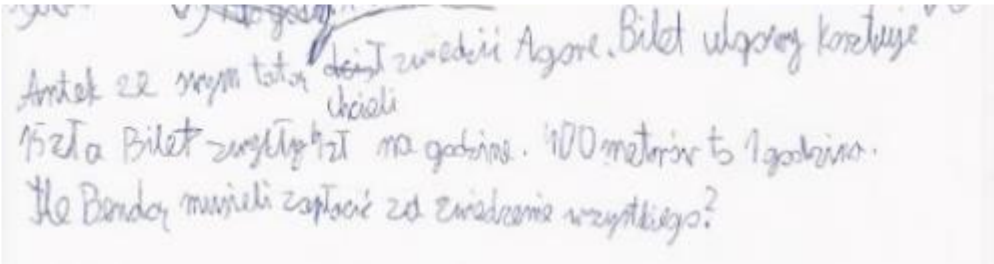
Πίνακας 5.13. Ποσοστό προβλημάτων κάθε κατηγορίας με βάση των αριθμό βημάτων ανά ομάδα

	Προβλήματα		
Ομάδα	**Πολλαπλών βημάτων**	**Ενός βήματος**	**Μηδενικών βημάτων**
1	33,3%	55,6%	11,1%
2	66,7%	33,3%	0%
3	80%	0%	20%
4	9,1%	36,4%	54,5%
5	80%	20%	0%
6	87,5%	0%	12,5%

Όσον αφορά την ομάδα 1, η πλειονότητα των δημιουργηθέντων προβλημάτων εντάχθηκε στην κατηγορία προβλημάτων ενός βήματος (55,6%). Η ομάδα 1 κατασκεύασε περισσότερα προβλήματα πολλαπλών βημάτων έναντι εκείνων που απαιτούσαν ένα βήμα επίλυσης, ενώ δεν δημιούργησε κανένα πρόβλημα μηδενικών βημάτων. Αναφορικά με την ομάδα 3, η πλειονότητα αφορούσε σε προβλήματα πολλαπλών βημάτων με ποσοστό 80%. Παράλληλα, το ποσοστό των μηδενικών προβλημάτων ήταν 20%, ενώ δεν δημιούργησε κανένα πρόβλημα ενός βήματος. Στην ομάδα 4 το μεγαλύτερο ποσοστό αποτέλεσαν τα προβλήματα μηδενικών βημάτων. Πιο αναλυτικά, το 54,5% των προβλημάτων δεν απαιτούσε κάποιο βήμα για την επίλυσή τους. Αντίστοιχα, τα προβλήματα ενός βήματος αποτέλεσαν το 36,4% και τα προβλήματα πολλαπλών βημάτων το 9,1%. Η ομάδα 5, όπως και η 2, δεν κατασκεύασαν κανένα πρόβλημα μηδενικών βημάτων. Το μεγαλύτερο μέρος των δημιουργηθέντων προβλημάτων προϋπέθεταν την εφαρμογή πολλαπλών πράξεων για την λύση τους (80%) και το 20% αναφερόταν σε προβλήματα ενός βήματος. Η ομάδα 6 κατασκεύασε το μεγαλύτερο ποσοστό προβλημάτων πολλαπλών βημάτων (87,5%), ενώ κανένα πρόβλημα δεν απαιτούσε την εφαρμογή μόνο μίας πράξης. Επιπλέον, το ποσοστό των προβλημάτων μηδενικών βημάτων ήταν 12,5%.

Από τα δοθέντα στοιχεία, παρατηρείται ότι η ομάδα 4 διατύπωσε τα λιγότερα προβλήματα πολλαπλών βημάτων με ποσοστό 9,1%, με μεγάλη διαφορά έναντι της ομάδας 1, η οποία κατείχε το δεύτερο χαμηλότερο ποσοστό (33,3%). Οι υπόλοιπες ομάδες σημείωσαν ιδιαίτερα υψηλά ποσοστά στη συγκεκριμένη κατηγορία, καθώς περισσότερα από τα μισά προβλήματα που κατασκεύασαν περιελάμβαναν περισσότερα από ένα βήματα. Συνεπώς, εύλογα μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι τα προβλήματα της ομάδας 4 είναι λιγότερο περίπλοκα έναντι των υπολοίπων ομάδων, καθώς η κατασκευή ενός προβλήματος πολλαπλών βημάτων θεωρείται πιο πολύπλοκη σε σύγκριση με την κατασκευή προβλημάτων ενός ή μηδενικού βήματος. Όσον αφορά την κατηγορία προβλημάτων ενός βήματος, το μεγαλύτερο ποσοστό προβλημάτων διατύπωσε η ομάδα 1 (55,6%) και ακολούθησαν η ομάδα 2 (33,3%), η ομάδα 4 (36,4%) και η ομάδα 5 (20%). Στην κατηγορία των μηδενικών προβλημάτων, τα ποσοστά των ομάδων ήταν χαμηλά με εξαίρεση την ομάδα 4, η οποία κατασκεύασε 6 προβλήματα (54,5%).

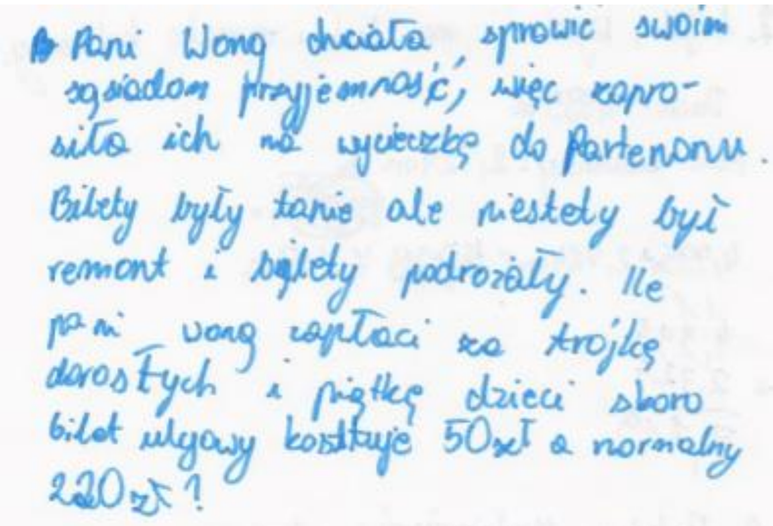
Αξίζει να σημειωθεί ότι ορισμένα από τα προβλήματα που δημιούργησαν οι ομάδες ήταν ανοιχτά προβλήματα ή προβλήματα που επιδέχονταν περισσότερες από μία διαφορετικές λύσεις. Χαρακτηριστικά αναφέρεται το εξής πρόβλημα που έθεσε η ομάδα 6: «Ο Anter μαζί με τον πατέρα και η μητέρα του θέλησαν να επισκεφθούν την Αγορά. Το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 15 ζλότι και των ενηλίκων κοστίζει 4 ζλότι ανά ώρα. Για να διανύσει κάποιος 400 μέτρα χρειάζεται μία ώρα. Πόσο πρέπει να πληρώσουν για να επισκεφθούν τα πάντα;» (Εικόνα 5.10). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο λύτης μπορεί να ακολουθήσει όποια διαδρομή επιθυμεί προκειμένου να υπολογίσει τη συνολική διανυόμενη απόσταση και κατ’ επέκταση να επιλύσει το πρόβλημα. Παραδείγματα περισσότερων προβλημάτων ανάλογα τον αριθμό των βημάτων επίλυσης αναφέρονται αναλυτικά παρακάτω.



Antek ze swym tatą chcieli dziś zwiedzić Agorę. Bilet ulgowy kosztuje
15zł a Bilet zwykły 42zł na godzinę. 100 metrów to 1 godzina.
Ile Bandy musieli zapłacić za zwiedzanie wszystkiego?

Εικόνα 5.10. Παράδειγμα ανοιχτού προβλήματος

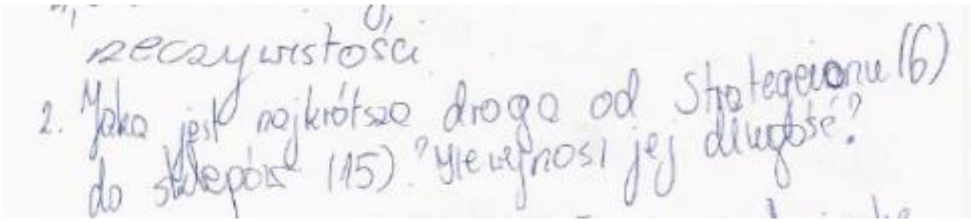
Η ομάδα 5 κατασκεύασε το ακόλουθο πρόβλημα (Εικόνα 5.11), το οποίο θεωρήθηκε πρόβλημα πολλαπλών βημάτων: «Η κυρία Wong θέλει να κάνει μια έκπληξη στους γείτονές της και τους προσκαλεί σε μια εκδρομή στον Παρθενώνα. Τα εισιτήρια ήταν φθηνά, όμως δυστυχώς υπήρχε ανακαίνιση και τα εισιτήρια έγιναν ακριβότερα. Πόσο θα πληρώσει η κυρία Wong για 3 ενηλίκους και 5 παιδιά, εφόσον το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 50 ζλότι και των ενηλίκων 220;». Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτούνται συνολικά τρεις πράξεις. Αρχικά, θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί ο αριθμός των ενηλίκων με την τιμή του εισιτηρίου, καθώς και ο αριθμός των παιδιών και της αντίστοιχης τιμής. Έπειτα, θα πρέπει να βρεθεί το άθροισμα αυτών των δύο γινομένων, ώστε να υπολογισθεί το συνολικό ποσό που θα πρέπει να πληρώσει η κυρία Wong.



Pani Wong chciała sprawić swoim
sąsiadom przyjemność, więc zapro-
siła ich na wycieczkę do Partenonu.
Bilety były tanie ale niestety był
remont i bilety podrożały. Ile
pani Wong zapłaci za trójkę
dorosłych i piątkę dzieci skoro
bilet ulgowy kosztuje 50zł a normalny
220zł?

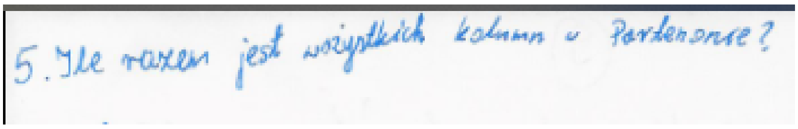
Εικόνα 5.11. Παράδειγμα προβλήματος πολλαπλών βημάτων

Αντίστοιχα, ως πρόβλημα ενός βήματος αξιολογήθηκε το πρόβλημα της Εικόνας 5.12. Αναλυτικότερα, η ομάδα 4 διατύπωσε: «Ποιος είναι ο πιο σύντομος δρόμος από το Στρατηγείο (νούμερο 6) προς τα μαγαζιά (νούμερο 15). Πόσο μακρύς είναι;». Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτεί μόνο μία πράξη, τη μετατροπή της απόστασης από εκατοστά σε μέτρα με την αξιοποίηση της κλίμακας.



Εικόνα 5.12. Παράδειγμα προβλήματος ενός βήματος

Αναφορικά με τα προβλήματα μηδενικών βημάτων παρατίθεται το ακόλουθο παράδειγμα: «Πόσες κολόνες υπάρχουν συνολικά στον Παρθενώνα;» (Εικόνα 5.13). Το συγκεκριμένο πρόβλημα διατυπώθηκε από δύο ομάδες, την 1 και την 3. Για την επίλυσή του δεν χρειάζεται η πραγματοποίηση κάποιας αριθμητικής πράξης και αρκεί η μέτρηση από τους μαθητές του αριθμού των κολονών. Ως αντίστοιχα προβλήματα αναφέρονται και τα εξής: «Πόσα μέτρα είναι η οδός Παναθήναια;» και «Υπολόγισε τα ορθογώνια κτίρια. Πόσα είναι;». Σε προβλήματα τέτοιου τύπου ο λύτης καλείται να πραγματοποιήσει διάφορες μετρήσεις, οι οποίες δεν απαιτούν περίπλοκη μαθηματική σκέψη και την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων.



Εικόνα 5.13. Παράδειγμα προβλήματος μηδενικών βημάτων

5.2.2. Αποτελέσματα προβλημάτων ανάλογα τον τύπο των δεδομένων τους

Ο τύπος των δεδομένων των προβλημάτων αποτέλεσε ένα ακόμη κριτήριο της κατηγοριοποίησής τους. Τα προβλήματα εκτός από την πολυπλοκότητα της επίλυσης τους εξετάσθηκαν περαιτέρω ως προς τα δεδομένα που περιελάμβαναν. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία ήταν εκείνη που αποδεχόταν τα δεδομένα των δοθεισών δραστηριοτήτων και η δεύτερη εκείνη στην οποία οι μαθητές εισήγαγαν νέα πρόσθετα δεδομένα. Ο αριθμός των προβλημάτων της κάθε κατηγορίας, καθώς και τα αντίστοιχα ποσοστά παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω (Πίνακας 5.14).

Πίνακας 5.14. Αριθμός και ποσοστό προβλημάτων ανάλογα τον τύπο των δεδομένων

Κατηγορία	Αριθμός προβλημάτων	Ποσοστό
Προβλήματα αποδοχής των δεδομένων	36	73,5%
Προβλήματα εισαγωγής νέων δεδομένων	13	26,5%
Σύνολο	49	100%

Από το σύνολο των 49 προβλημάτων, οι μαθητές διατύπωσαν 36 προβλήματα, των οποίων τα δεδομένα περιέχονταν στα φυλλάδια των δραστηριοτήτων και 13 προβλήματα, στα οποία οι μαθητές πρόσθεσαν δικά τους δεδομένα. Στην πλειοψηφία των προβλημάτων (73,5%), οι μαθητές περιορίστηκαν στα δεδομένα που παρέχονταν στις επιμέρους δραστηριότητες, ενώ το 26,5% των προβλημάτων περιελάμβανε επιπλέον δεδομένα πέρα των δεδομένων των φυλλαδίων.

Για κάθε ομάδα υπολογίσθηκε ξεχωριστά ο αριθμός των προβλημάτων κάθε κατηγορίας. Τα αποτελέσματα μαζί με τα αντίστοιχα ποσοστά ακολουθούν παρακάτω (Πίνακας 5.15, Πίνακας 5.16).

Πίνακας 5.15. Αριθμός προβλημάτων ανάλογα τον τύπο των δεδομένων ανά ομάδα

	Προβλήματα	
Ομάδα	**Αποδοχής των δεδομένων**	**Εισαγωγής νέων δεδομένων**
1	9	0
2	5	1
3	4	1
4	11	0
5	5	5
6	1	7

Πίνακας 5.16. Ποσοστό προβλημάτων κάθε κατηγορίας με βάση τον τύπο των δεδομένων ανά ομάδα

	Προβλήματα	
Ομάδα	**Αποδοχής των δεδομένων**	**Εισαγωγής νέων δεδομένων**
1	100%	0%
2	83,3%	16,7%

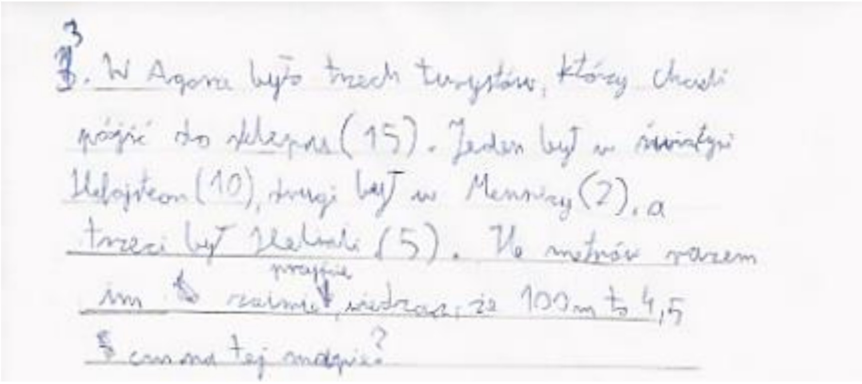
3	80%	20%
4	100%	0%
5	50%	50%
6	12,50%	87,5%

Όπως διαφαίνεται από τους πίνακες, οι ομάδες 1 και 4 δεν εισήγαγαν δικά τους δεδομένα στα προβλήματα που έθεσαν. Όλα τα προβλήματα των συγκεκριμένων ομάδων εντάχθηκαν στην κατηγορία προβλημάτων αποδοχής των δεδομένων. Το μεγαλύτερο ποσοστό των προβλημάτων της ομάδας 2 (83,3%) περιείχε αποκλειστικά τα δεδομένα της δραστηριότητας, ενώ μόλις το 16,7% συμπεριέλαβε νέα δεδομένα. Ανάλογα κυμάνθηκαν και τα ποσοστά στην ομάδα 3, όπου στην πρώτη κατηγορία άνηκε το 80% των προβλημάτων, ενώ στην ομάδα 2 το 20%. Αντίθετα με τις προαναφερθείσες ομάδες, οι ομάδες 5 και 6 κατασκεύασαν περισσότερα προβλήματα εισαγωγής νέων δεδομένων. Συγκεκριμένα, τα μισά προβλήματα της ομάδας 5 άνηκαν στην πρώτη κατηγορία και τα υπόλοιπα μισά στη δεύτερη. Η ομάδα 6 διατύπωσε το μεγαλύτερο ποσοστό προβλημάτων εισαγωγής νέων δεδομένων (87,5%), καθώς διατύπωσε μόλις ένα πρόβλημα βασισμένο στα δοθέντα δεδομένα της δραστηριότητας.

Το πρόβλημα που ακολουθεί δημιουργήθηκε από όλες τις ομάδες που ενεπλάκησαν στη δραστηριότητα του Παρθενώνα. Οι ομάδες διατύπωσαν: «Ποιο είναι το εμβαδόν του ναού;» (Εικόνα 5.14). Η κατασκευή του συγκεκριμένου προβλήματος βασίστηκε στα στοιχεία που παρέχονταν από την ίδια τη δραστηριότητα.

Εικόνα 5.14. Παράδειγμα προβλήματος αποδοχής των δεδομένων (2)

Αντίστοιχα, ως πρόβλημα αποδοχής των δεδομένων, το οποίο τέθηκε από την ομάδα 2, κρίθηκε το εξής: «Ήταν 3 τουρίστες στην Αγορά, οι οποίοι ήθελαν να πάνε σ' ένα μαγαζί (νούμερο 15). Ένας από αυτούς ήταν στον ναό του Ηφαίστου (Ηφαίστειον) (νούμερο 10). Ο δεύτερος τουρίστας ήταν στο Νομισματοκοπείο (νούμερο 2) και ο τρίτος τουρίστας ήταν στην Ηλιαία (νούμερο 5). Πόσα μέτρα συνολικά χρειάζεται να περπατήσουν όταν γνωρίζουν ότι 100 μέτρα είναι 4,5 εκατοστά στον χάρτη;» (Εικόνα 5.15). Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές περιορίστηκαν στα δεδομένα του φυλλαδίου. Η ομάδα χρησιμοποίησε ως δεδομένο την κλίμακα, η οποία, επίσης, περιεχόταν στη δραστηριότητα της Αρχαίας Αγοράς.

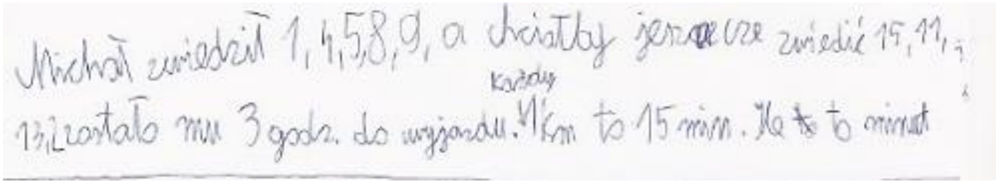


Εικόνα 5.15. Παράδειγμα προβλήματος αποδοχής των δεδομένων (2)

Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια αποτελούν προβλήματα εισαγωγής νέων δεδομένων. Οι μαθητές εκτός από τα στοιχεία που αναφέρονταν στις δραστηριότητες χρησιμοποίησαν και δικά τους δεδομένα. Στην πλειοψηφία των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας τα δεδομένα που εισήγαγαν οι μαθητές αφορούσαν στην ταχύτητα ή σε κόστος εισιτηρίων. Ενδεικτικά, αναφέρεται το εξής: «Η οικογένεια Markiewicz ήθελε να πάει στον Παρθενώνα να δοξάσει τη θεά Αθηνά. Το εισιτήριο κοστίζει 10 ζλότι και το εισιτήριο του παιδιού 5 ζλότι. Πόσο θα πληρώσει η οικογένεια Markiewicz για τους γονείς και τα 4 παιδιά; 50 ζλότι είναι αρκετά;» (Εικόνα 5.16). Στο εν λόγω πρόβλημα, το οποίο κατασκευάσθηκε από την ομάδα 5, οι μαθητές εισήγαγαν πρόσθετα δεδομένα που σχετίζονταν με τις τιμές των εισιτηρίων των ενηλίκων και των παιδιών, καθώς και τα αντίστοιχα πλήθη.

Εικόνα 5.16. Παράδειγμα προβλήματος εισαγωγής νέων δεδομένων (1)

Ένα ακόμη παράδειγμα τέτοιου προβλήματος της ομάδας 6 είναι: «O Michal επισκέφθηκε τα 1,4,5,8 και 9 και θα ήθελε να επισκεφθεί επίσης τα 15,11,13 και 2. Έχει γι αυτό 3 ώρες μέχρι την αναχώρηση. Κάθε χιλιόμετρο παίρνει 15 λεπτά. Πόσα λεπτά θα πάρει να επισκεφθεί όλα τα τα υπόλοιπα μέρη;» (Εικόνα 5.17). Τα δεδομένα του προβλήματος που δεν αναγράφονταν στη δραστηριότητα ήταν η ταχύτητα, καθώς και το χρονικό διάστημα μέχρι την αποχώρηση. Οι κατασκευαστές τους συγκεκριμένου προβλήματος δεν περιορίστηκαν στα παρεχόμενα στοιχεία και εισήγαγαν νέα.



Εικόνα 5.17. Παράδειγμα προβλήματος εισαγωγής νέων δεδομένων (2)

5.2.3. Αποτελέσματα προβλημάτων ανάλογα τον αριθμό των δεδομένων

Τα δημιουργηθέντα προβλήματα εξετάσθηκαν, επιπλέον, ως προς τον αριθμό των δεδομένων που διέθεταν. Ανάλογα τον αριθμό χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5.17, 22 προβλήματα περιελάμβαναν μέχρι και 2 δεδομένα, 17 διέθεταν από 3 έως και 4 δεδομένα, ενώ 10 προβλήματα περιείχαν περισσότερα από 4 δεδομένα. Το μεγαλύτερο ποσοστό των κατασκευασθέντων προβλημάτων διέθεταν έως και 2 δεδομένα (44,9%). Παράλληλα, μικρές σχετικά αποκλίσεις σημείωσε το ποσοστό των προβλημάτων της δεύτερης κατηγορίας (34,7%). Εν αντιθέσει, με τις δύο πρώτες κατηγορίες, τα προβλήματα με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 4 αποτέλεσαν τη μειοψηφία των προβλημάτων με ποσοστό 20,4 %.

Πίνακας 5.17. Αριθμός και ποσοστό προβλημάτων ανάλογα τον αριθμό των δεδομένων

Κατηγορία	Αριθμός προβλημάτων	Ποσοστό
Προβλήματα με αριθμό δεδομένων <=2	22	44,9%
Προβλήματα με αριθμό δεδομένων >2 και <=4	17	34,7%
Προβλήματα με αριθμό δεδομένων >4	10	20,4%

Για κάθε ομάδα πραγματοποιήθηκε ξεχωριστή διερεύνηση των προβλημάτων. Συγκεκριμένα, για τις επιμέρους ομάδες υπολογίσθηκε ο αριθμός των δεδομένων ανά πρόβλημα που κατασκεύασε. Στη συνέχεια, το κάθε πρόβλημα εντάχθηκε σε μία από τις τρεις κατηγορίες. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται παρακάτω (Πίνακας 5.18, Πίνακας 5.19).

Αναλυτικότερα, όσον αφορά την ομάδα 1, τα προβλήματα με αριθμό δεδομένων μικρότερο ή ίσο του 2 αποτέλεσαν τα προβλήματα με το μεγαλύτερο ποσοστό (66,7%). Τα προβλήματα με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 2 και μικρότερο ή ίσο του 4 αποτέλεσαν το 33,3% των προβλημάτων, ενώ η ομάδα δεν διατύπωσε κανένα πρόβλημα με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 4. Η ομάδα 2, όπως και η ομάδα 1, δημιούργησε περισσότερα προβλήματα της πρώτης κατηγορίας (50%), ενώ το 33,3% αφορούσε σε προβλήματα της δεύτερης κατηγορίας, ποσοστό ίδιο με εκείνο της ομάδας 1. Το 16,7% των προβλημάτων, αποτέλεσε προβλήματα με αριθμό δεδομένων που ξεπερνούσε το 4. Αναφορικά με την ομάδα 3, η πλειοψηφία των προβλημάτων άνηκε στην δεύτερη κατηγορία (60%). Στις υπόλοιπες δύο κατηγορίες η ομάδα διατύπωσε τον ίδιο αριθμό προβλημάτων. Παρόμοια αποτελέσματα με την ομάδα 3, παρουσίασε η ομάδα 5. Συγκεκριμένα, το 60% των προβλημάτων περιείχαν αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 2 και μικρότερο ή ίσο του 4, ενώ στην τρίτη κατηγορία το ποσοστό της ήταν 30%. Επιπλέον, τα προβλήματα της πρώτης κατηγορίας αποτέλεσαν το 10% των προβλημάτων της ομάδας 5. Όσον αφορά τα προβλήματα της ομάδας 4, σχεδόν όλα τα προβλήματα εντάχθηκαν στην πρώτη κατηγορία (90,9%). Η ομάδα διατύπωσε μόλις ένα πρόβλημα της δεύτερης κατηγορίας, ενώ, όπως και η ομάδα 1, δεν διατύπωσε κανέναν πρόβλημα με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 4. Τέλος, η ομάδα 6 κατασκεύασε το μεγαλύτερο ποσοστό προβλημάτων της τρίτης κατηγορίας (62,5%). Επιπλέον, το 25% των δημιουργηθέντων προβλημάτων εντάχθηκαν τη δεύτερη κατηγορία και μόλις το 12,5% στην πρώτη.

Συνοπτικά, διαπιστώνεται ότι η ομάδα 6 κατασκεύασε το μεγαλύτερο ποσοστό προβλημάτων με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 4, με μεγάλη διαφορά έναντι των επόμενων, που ήταν οι ομάδες 5 και 3 με ποσοστό 30% και 20% αντίστοιχα. Παράλληλα, υπήρξαν ομάδες (1 και 4) που δεν δημιούργησαν κανένα πρόβλημα της συγκεκριμένης κατηγορίας. Στη δεύτερη κατηγορία, τα μεγαλύτερα ποσοστά κατείχαν οι ομάδες 3 και 5 (60%) και ακολούθησαν οι ομάδες 1 και 2 με ποσοστό 33,3%. Αναφορικά με την πρώτη κατηγορία, η ομάδα 4 κατείχε το μεγαλύτερο ποσοστό (90,9%), ενώ τα ποσοστά των υπόλοιπων ομάδων κυμάνθηκαν σε αρκετά χαμηλότερα επίπεδα.

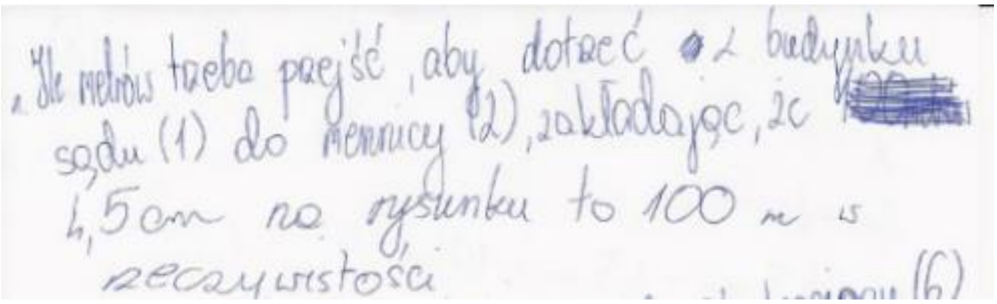
Πίνακας 5.18. Αριθμός προβλημάτων ανάλογα τον αριθμό των δεδομένων ανά ομάδα

Ομάδα	Αριθμός δεδομένων <=2	Αριθμός δεδομένων >2 και <=4	Αριθμός δεδομένων >4
1	6	3	0
2	3	2	1
3	1	3	1
4	10	1	0
5	1	6	3
6	1	2	5

Πίνακας 5.19. Ποσοστό προβλημάτων κάθε κατηγορίας με βάση τον αριθμό των δεδομένων ανά ομάδα

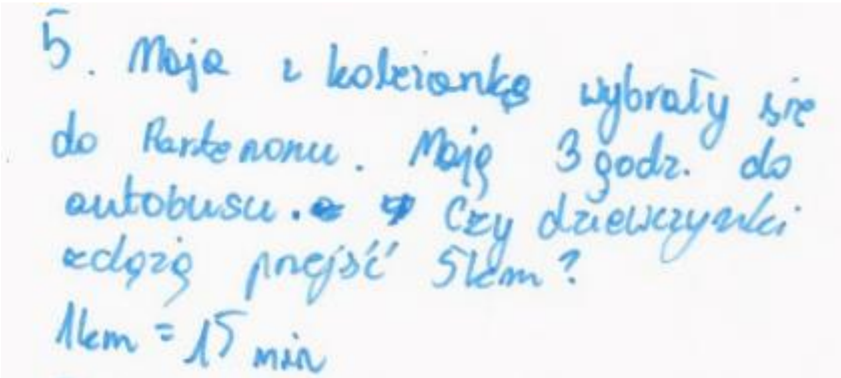
Ομάδα	Αριθμός δεδομένων <=2	Αριθμός δεδομένων >2 και <=4	Αριθμός δεδομένων >4
1	66,7%	33,3%	0%
2	50%	33,3%	16,7%
3	20%	60%	20%
4	90,9%	9,1%	0%
5	10%	60%	30%
6	12,5%	25%	62,5%

Το παράδειγμα που ακολουθεί αποτελεί πρόβλημα της πρώτης κατηγορίας προβλημάτων ανάλογα τον αριθμό των δεδομένων. Η ομάδα 4 διατύπωσε το εξής: «Πόσα μέτρα πρέπει να περπατήσεις για να πας από το κτίριο του Δικαστηρίου (1) στο Νομισματοκοπείο (2), υποθέτοντας ότι 4,5 εκατοστά στον χάρτη είναι 100 μέτρα στον πραγματικό κόσμο» (Εικόνα 5.18). Στο δοθέν πρόβλημα, ως δεδομένα θεωρήθηκαν η απόσταση του κτιρίου του Δικαστηρίου από το Νομισματοκοπείο, καθώς οι μαθητές μπορούσαν να την μετρήσουν από τον δοθέν χάρτη. Επιπλέον, η κλίμακα αποτέλεσε το δεύτερο δεδομένο του προβλήματος. Ωστόσο, ακόμη και σε περίπτωση που δεν αναφερόταν από την ομάδα, θα αποτελούσε δεδομένο, καθώς αναγράφεται στο φυλλάδιο της δραστηριότητας. Συνεπώς, ο αριθμός των δεδομένων του συγκεκριμένου προβλήματος ήταν δύο κι εντάχθηκε στην πρώτη κατηγορία.



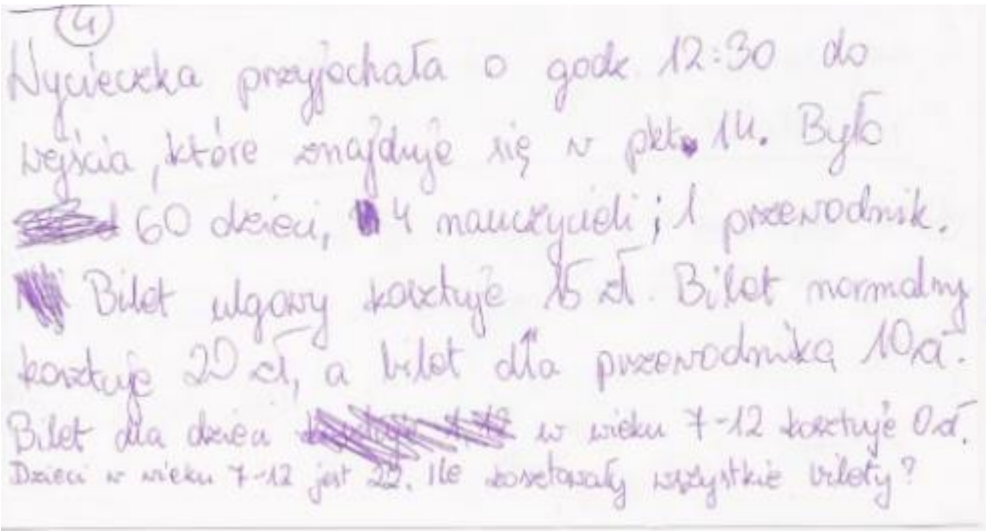
Εικόνα 5.18. Παράδειγμα προβλήματος με αριθμό δεδομένων έως και 2

Στην δεύτερη κατηγορία εντάχθηκε το ακόλουθο πρόβλημα της ομάδας 5: «Η Μάγια με τη φίλη της πήγαν στον Παρθενώνα. Έχουν 3 ώρες για το λεωφορείο. Θα προλάβουν τα κορίτσια να περπατήσουν 5 χμ; 1 χμ = 15 λεπτά» (Εικόνα 5.19). Τα δεδομένα του προβλήματος ήταν ο χρόνος αναμονής τους λεωφορείου, η ταχύτητα, καθώς και η απόσταση. Επομένως, τα δεδομένα ήταν τρία και το πρόβλημα αποτέλεσε μέρος των προβλημάτων της δεύτερης κατηγορίας.



Εικόνα 5.19. Παράδειγμα προβλήματος με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 2 και μικρότερο ή ίσο του 4

Όσον αφορά την τρίτη κατηγορία προβλημάτων χαρακτηριστικά αναφέρεται το εξής πρόβλημα της ομάδας 6: «Μια εκδρομή ήρθε στις 12.30 στην είσοδο, η οποία ήταν στο σημείο 14. Υπήρχαν 60 παιδιά, 4 δασκάλες κι ένας οδηγός. Το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 15 ζλότι. Το εισιτήριο των ενηλίκων κοστίζει 20 ζλότι και το εισιτήριο του οδηγού κοστίζει 10 ζλότι. Τα εισιτήρια για τα παιδιά 7-12 χρονών είναι δωρεάν. Υπάρχουν 22 παιδιά ηλικίας 7-12 χρονών. Ποιο ήταν το κόστος όλων των εισιτηρίων;» (Εικόνα 5.20). Όπως αναφέρθηκε στη μεθοδολογία έρευνας της παρούσας εργασίας, τα δεδομένα που δεν συνεισέφεραν στη λύση του προβλήματος δεν υπολογίσθηκαν. Συνεπώς, η ώρα και το σημείο εισόδου της εκδρομής δεν αποτέλεσαν δεδομένα του προβλήματος. Ο αριθμός των δεδομένων του προβλήματος ήταν ίσος με 8. Αναλυτικότερα, τα δεδομένα ήταν: η τιμή του εισιτηρίου των ενηλίκων,η τιμή του παιδικού εισιτηρίου, η τιμή του εισιτηρίου του οδηγού, η τιμή του εισιτηρίου των παιδιών 7-12 ετών, ο αριθμός των δασκάλων , ο αριθμός των παιδιών, ο αριθμός των παιδιών 7-12 ετών και ο αριθμός των οδηγών. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτέλεσε χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος με αριθμό δεδομένων που ξεπερνά το 4.


(4)
Wycieczka przyjechała o godz. 12:30 do Wejścia, które znajduje się w pkt. 14. Było 60 dzieci, 4 nauczycieli i 1 przewodnik. Bilet ulgowy kosztuje 15 zł. Bilet normalny kosztuje 20 zł, a bilet dla przewodnika 10 zł. Bilet dla dzieci w wieku 7-12 kosztuje 0 zł. Dzieci w wieku 7-12 jest 22. Ile kosztowały wszystkie bilety?

Εικόνα 5.20. Παράδειγμα προβλήματος με αριθμό δεδομένων μεγαλύτερο του 4

5.2.4. Αποτελέσματα αξιολόγησης της συλλογικής δημιουργικότητας

Η φύση της δημιουργικότητας είναι πολύπλευρη και είναι προφανές ότι η επιλογή ενός ορισμού, ο οποίος θα καλύπτει όλες τις μαθηματικές περιοχές ή τους τύπους των μαθηματικών εργασιών, είναι αδύνατη. Στην παρούσα έρευνα, το προτεινόμενο μοντέλο αποσκοπεί στην αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας μέσω ερευνητικών δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος αξιοποιώντας ως πλαίσιο την Αρχαία Ελληνική Ιστορία. Για τον σκοπό αυτό, η συλλογική δημιουργικότητα συσχετίστηκε με την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία των κατασκευασθέντων προβλημάτων. Από μελέτες των Guilford (1950), Torrance (1966) και άλλων ερευνητών, η ευχέρεια μετράται από τον αριθμό των διαφόρων προβλημάτων που διατυπώθηκαν, η ευελιξία μετράται από τον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών που εντάσσονται τα επιμέρους προβλήματα και η πρωτοτυπία από τη σχετική σπανιότητα των προβλημάτων. Όπως επισημάνθηκε από τους Brandau και Dossey (1979), όλες αυτές οι μεταβλητές είναι ιδιαίτερα σημαντικές και θετικά συσχετιζόμενες.

Ο προσδιορισμός της συνολικής βαθμολογίας της δημιουργικότητας της κάθε ομάδας προέκυψε μέσω της βαθμολόγησης της ευχέρειας, της ευελιξίας, της πρωτοτυπίας, δηλαδή, μέσω τη βαθμολόγησης των επιμέρους πτυχών της δημιουργικότητας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω.

5.2.4.1. Βαθμολογία συνολικής και σχετικής ευχέρειας

Ο συνολικός βαθμός ευχέρειας της κάθε ομάδας καθορίσθηκε από το συνολικό αριθμό των προβλημάτων που είχε κατασκευάσει. Ο αριθμός των προβλημάτων που διατύπωσε η κάθε ομάδα παρουσιάζεται στον Πίνακα. Για παράδειγμα, η ομάδα 1 δημιούργησε 9 προβλήματα, οπότε ο συνολικός βαθμός ευχέρειας ισούται με 9.

Πίνακας 5.20. Βαθμολόγηση ευχέρειας της κάθε ομάδας

Ομάδα	Βαθμός ευχέρειας
1	9
2	6
3	5
4	11
5	10
6	8

Στη συνέχεια, υπολογίσθηκε ο σχετικός βαθμός ευχέρειας των επιμέρους ομάδων. Η σχετική βαθμολόγηση της ευχέρειας πραγματοποιήθηκε ως εξής: η ομάδα με τον υψηλότερο αριθμό δημιουργηθέντων προβλημάτων έλαβε μια βαθμολογία 100 για τη σχετική ευχέρεια. Όλες οι σχετικές βαθμολογίες ευχέρειας των υπολοίπων ομάδων καθορίσθηκαν σύμφωνα με την υψηλότερη βαθμολογία. Για παράδειγμα, η ομάδα 4 διατύπωσε τον μεγαλύτερο αριθμό προβλημάτων (11) και ο σχετικός βαθμός ευχέρειας ήταν ίσος με 100. Όλες οι υπόλοιπες βαθμολογίες, συνεπώς, υπολογίσθηκαν σε σχέση με την ομάδα 4. Τα αποτελέσματα αναγράφονται στον Πίνακα 5.21.

Η ομάδα 5 είχε τον μεγαλύτερο σχετικό βαθμό ευχέρειας (91), μετά την ομάδα 4. Ακολούθησαν με τη σειρά η ομάδα 1 (81), η ομάδα 6 (73), η ομάδα 2 (55) και τέλος η ομάδα 3 με βαθμό 45.

Πίνακας 5.22. Σχετικός βαθμός ευχέρειας κάθε ομάδας

Ομάδα	Σχετικός βαθμός ευχέρειας
1	82
2	55
3	45
4	100
5	91
6	73

5.2.4.2. Βαθμολογία συνολικής και σχετικής ευελιξίας

Η βαθμολόγηση της ευελιξίας προέκυψε από τον αριθμό των κατηγοριών που εντάχθηκαν τα προβλήματα της κάθε ομάδας. Οι κατηγορίες αυτές βασίζονταν στον αριθμό των πράξεων, τον τύπο των δεδομένων, καθώς και τον συνολικό αριθμό των δεδομένων που περιελάμβανε το κάθε πρόβλημα. Η βαθμολόγηση της ευελιξίας για κάθε ομάδα παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα 5.23. Από τα δοθέντα στοιχεία γίνεται αντιληπτό ότι οι ομάδες με τον μεγαλύτερο αριθμό προβλημάτων διαφορετικών κατηγοριών ήταν η 2 και η 5 και ο βαθμός ευχέρειας ήταν ίσος με 6. Όλες οι υπόλοιπες ομάδες δημιούργησαν τον ίδιο αριθμό κατηγοριών.

Πίνακας 5.23. Βαθμός ευελιξίας της κάθε ομάδας

Ομάδα	Βαθμός ευελιξίας
1	3
2	5
3	3
4	3
5	5
6	3

Ο υπολογισμός της σχετικής βαθμολογίας της ευελιξίας πραγματοποιήθηκε όπως της σχετικής ευχέρειας. Δηλαδή, η ομάδα με το μεγαλύτερο αριθμό κατηγοριών στις οποίες αντιστοιχούσαν τα προβλήματά της, έλαβε σχετική βαθμολογία 100 για την ευελιξία. Στη συγκεκριμένη έρευνα, οι ομάδες αυτές ήταν η 2 και η 5, καθώς δημιούργησαν τον ίδιο αριθμό κατηγοριών. Οι υπόλοιπες σχετικές βαθμολογίες της ευελιξίας προσδιορίστηκαν σε σχέση με τις ομάδες αυτές. Για παράδειγμα, η ομάδα 3 διατύπωσε τρεις διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων, κι επομένως η σχετική βαθμολογία της ευελιξίας ήταν 60 [(3/5) × 100].

Πίνακας 5.24. Σχετικός βαθμός ευελιξίας κάθε ομάδας

Ομάδα	Σχετικός βαθμός ευελιξίας
1	60
2	100
3	60
4	60
5	100
6	60

5.2.4.3. Βαθμολογία συνολικής και σχετικής πρωτοτυπίας

Η πρωτοτυπία είναι από τη φύση της σχετική και υπάρχει ανάγκη προκαθορισμού της προϋπόθεσης της. Στη συγκεκριμένη εργασία, πρωτότυπα θεωρήθηκαν τα προβλήματα που τέθηκαν από το πολύ δύο ομάδες (33,3%). Το σύνολο των κατηγοριών που προέκυψε ήταν 9. Σε κάθε κατηγορία, υπολογίσθηκε ο αριθμός των ομάδων που κατασκεύασε προβλήματα τέτοιου τύπου. Τα προβλήματα μηδενικού και ενός βήματος δεν θεωρήθηκαν πρωτότυπα και έλαβαν βαθμό πρωτοτυπίας ίσο με 0. Στον Πίνακα 5.25, καταγράφονται οι κατηγορίες των προβλημάτων και ο αντίστοιχος αριθμός των ομάδων.

Όπως διαπιστώνεται από τα στοιχεία του πίνακα, από τις πέντε κατηγορίες προβλημάτων πολλαπλών βημάτων οι τέσσερις θεωρήθηκαν πρωτότυπες, καθώς τέθηκαν από λιγότερες από τρεις ομάδες. Συγκεκριμένα, η κατηγορία προβλημάτων που απαιτούσε πολλαπλά βήματα επίλυσης και κατά την οποία οι ομάδες χρησιμοποίησαν τα δεδομένα της δοθείσας δραστηριότητας, των οποίων ο αριθμός ήταν μεγαλύτερος του 2 και μικρότερος ή ίσος του 4, αποτέλεσε την πιο κοινή κατηγορία των κατασκευασθέντων προβλημάτων των ομάδων και, συνεπώς, δεν θεωρήθηκε πρωτότυπη.

Πίνακας 5.25. Κατηγορίες προβλημάτων και ο αριθμός των ομάδων που κατασκεύασε προβλήματα τέτοιου τύπου

Κατηγορία προβλημάτων	Αριθμός ομάδων
Πολλαπλών βημάτων-Αποδοχής δεδομένων-Αριθμός δεδομένων <=2	1

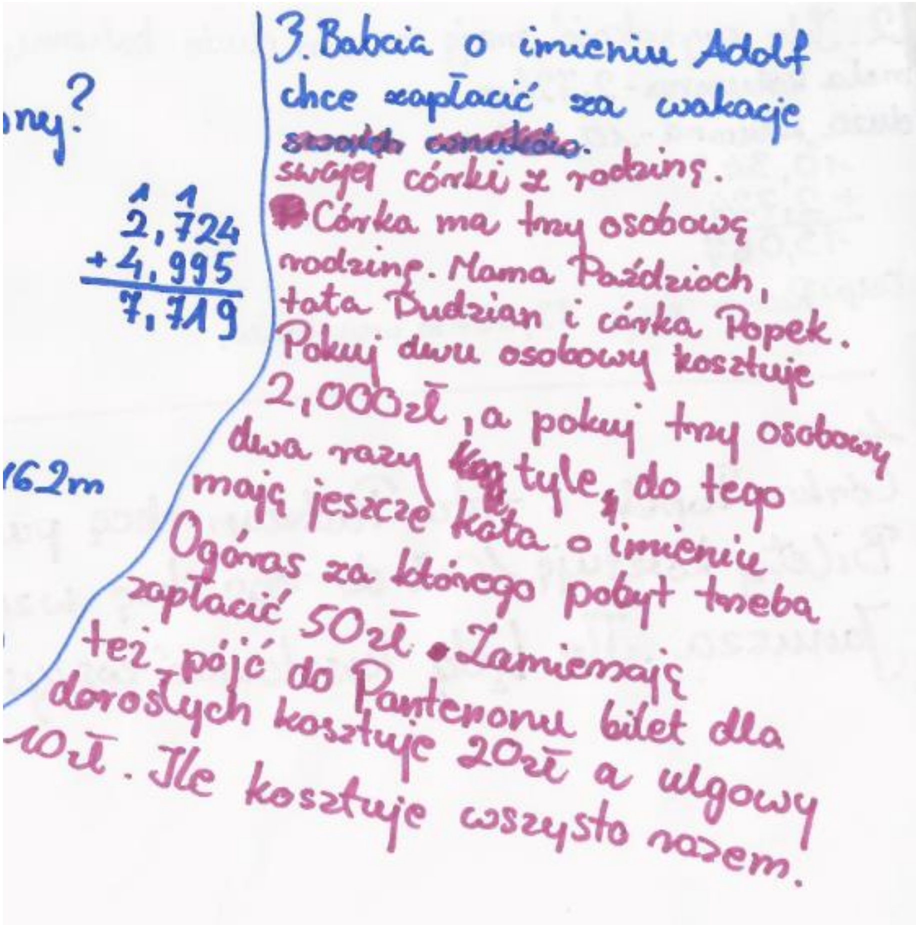
Πολλαπλών βημάτων-Αποδοχής δεδομένων-Αριθμός δεδομένων >2 και <=4	5
Πολλαπλών βημάτων-Αποδοχής δεδομένων_Αριθμός δεδομένων >4	2
Πολλαπλών βημάτων-Εισαγωγής δεδομένων-Αριθμός δεδομένων >2 και <=4	2
Πολλαπλών βημάτων-Εισαγωγής δεδομένων-Αριθμός δεδομένων >4	2

Ο συνολικός βαθμός πρωτοτυπίας της κάθε ομάδας, προέκυψε από τον αριθμό των πρωτότυπων προβλημάτων που κατασκεύασε. Αναλυτικότερα, η ομάδα 6 δημιούργησε τον μεγαλύτερο αριθμό πρωτότυπων προβλημάτων (7) με μεγάλη διαφορά έναντι των υπολοίπων (Πίνακας 5.26). Στη συνέχεια, ακολούθησε η ομάδα 5, η οποία διατύπωσε τέσσερα πρωτότυπα προβλήματα, ενώ από ένα πρωτότυπο πρόβλημα δημιούργησαν οι ομάδες 2 και 3. Όσον αφορά τις ομάδες 1 και 4, δεν κατασκεύασαν κανένα πρωτότυπο πρόβλημα.

Πίνακας 5.26. Βαθμός πρωτοτυπίας κάθε ομάδας

Ομάδα	Βαθμός πρωτοτυπίας
1	0
2	1
3	1
4	0
5	4
6	7

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια, αποτελούν παραδείγματα πρωτότυπων προβλημάτων. Η ομάδα 5 κατασκεύασε το εξής πρόβλημα: «Η γιαγιά Adolf θέλει να πληρώσει για τις διακοπές της κόρης της και της οικογένειάς της. Η κόρη έχει τριμελή οικογένεια: τη μητέρα Paździoch, τον πατέρα Dudzian και την κόρη Popek**.** Το δωμάτιο για 2 άτομα κοστίζει 2000 ζλότι και το δωμάτιο για τρία άτομα κοστίζει 2 φορές παραπάνω. Επίσης, έχουν μια γάτα τον Ogoras και χρειάζεται να πληρώσουν για τη διαμονή της 50 ζλότι. Σχεδιάζουν να πάνε στον Παρθενώνα. Το εισιτήριο για τους ενηλίκους κοστίζει 20 ζλότι και για το παιδί 10 ζλότι. Πόσο είναι το συνολικό κόστος;» (Εικόνα 5.21). Το συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτεί πολλαπλά βήματα για την επίλυσή του. Οι μαθητές δεν περιορίστηκαν στα δεδομένα της δοθείσας δραστηριότητας, αλλά αξιοποιώντας το πλαίσιο που τους δόθηκε, τον Παρθενώνα, εισήγαγαν νέα δικά τους δεδομένα. Επιπλέον, το πρόβλημα περιείχε πολλά δεδομένα, και μάλιστα ένα δεδομένο δινόταν με τη μορφή σχέσης (τιμή τρίκλινου δωματίου= 2 × τιμή δίκλινου δωματίου).



Εικόνα 5.21. Παράδειγμα πρωτότυπου προβλήματος (1)

Η ομάδα 2 διατύπωσε το εξής πρωτότυπο πρόβλημα: «Ποιο είναι το εμβαδόν του Θόλου;» (Εικόνα 5.22). Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος προϋποθέτει τη μέτρηση της ακτίνας του κτιρίου, καθώς και τη μετατροπή της σε μέτρα με βάση τη δοθείσα κλίμακα. Έπειτα, για τον υπολογισμό του εμβαδού απαιτείται η εφαρμογή του τύπου εύρεσης εμβαδού κύκλου. Το εν λόγω πρόβλημα, αποτέλεσε το μοναδικό πρόβλημα πολλαπλών βημάτων με αριθμό δεδομένων ίσο με 2. Παράλληλα, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα των πολωνικών σχολείων, οι μαθητές του Δημοτικού δεν διδάσκονται το εμβαδόν του κύκλου. Οπότε, το παρόν πρόβλημα συνέβαλε στην ανάδειξη νέας γνώσης από τους μαθητές.

Εικόνα 5.22. Παράδειγμα πρωτότυπου προβλήματος (2)

Εκτός από τον συνολικό βαθμό πρωτοτυπίας για κάθε ομάδα, υπολογίσθηκε και ο βαθμός σχετικής πρωτοτυπίας. Η ομάδα με τον μεγαλύτερο αριθμό πρωτότυπων προβλημάτων βαθμολογήθηκε με 100 στην πτυχή της πρωτοτυπίας. Δηλαδή, η συνολική βαθμολογία για την πρωτοτυπία της ομάδας 6 ήταν 7 και η σχετική βαθμολογία ήταν 100. Συνεπώς, οι σχετικές βαθμολογίες των υπόλοιπων ομάδων καθορίσθηκαν με βάση το βαθμό της ομάδας 6. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.27.

Πίνακας 5.27. Σχετικός βαθμός πρωτοτυπίας κάθε ομάδας

Ομάδα	Σχετικός βαθμός πρωτοτυπίας
1	0
2	14
3	14
4	0
5	57
6	100

5.2.4.4. Συνολική βαθμολογία δημιουργικότητας

Ο Πίνακας 5.28 παρουσιάζει τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα της κάθε ομάδας σε καθεμία από τις επιμέρους πτυχές της δημιουργικότητας.

Πίνακας 5.28. Σχετικοί βαθμοί κάθε ομάδας ανά πτυχή της δημιουργικότητας

Ομάδα	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία
1	82	60	0
2	55	100	14
3	45	60	14
4	100	60	0
5	91	100	57
6	73	60	100

Η συνολική βαθμολογία της δημιουργικότητας καθορίσθηκε αποδίδοντας έναν συντελεστή βαρύτητας σε καθεμία από τις τρεις σχετικές βαθμολογίες. Συγκεκριμένα, στις σχετικές βαθμολογίες της ευχέρειας και της ευελιξίας αποδόθηκε ο συντελεστής 0,3 και στη σχετική βαθμολογία για την πρωτοτυπία ο συντελεστής 0,4, καθώς θεωρήθηκε σημαντικότερη πτυχή της δημιουργικότητας. Στον Πίνακα 5.29 καταγράφεται η συνολική βαθμολογία της δημιουργικότητας για κάθε ομάδα.

Πίνακας 5.29. Συνολική βαθμολογία δημιουργικότητας κάθε ομάδας

Ομάδα	Συνολική βαθμολογία δημιουργικότητας
1	42,6
2	52,1
3	37,1
4	48
5	80,1
6	79,9

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα, διαπιστώνεται ότι η ομάδα με τον μεγαλύτερο βαθμό δημιουργικότητας ήταν η ομάδα 5 (80,1). Αναλυτικότερα, η ομάδα κατασκεύασε μεγάλο αριθμό προβλημάτων (10) και ήταν η δεύτερη ομάδα με τον μεγαλύτερο βαθμό ευχέρειας. Όσον αφορά την ευελιξία, τα προβλήματα που δημιούργησε χωρίστηκαν σε πέντε κατηγορίες, συγκεντρώνοντας τον μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας. Παράλληλα, ο βαθμός που έλαβε στην πρωτοτυπία ήταν 4 και αποτέλεσε τον δεύτερο μεγαλύτερο βαθμό. Με μικρή διαφορά από την ομάδα 5, η δεύτερη ομάδα με τον μεγαλύτερο βαθμό δημιουργικότητας ήταν η ομάδα 6 (79,9). Η συγκεκριμένη ομάδα κατασκεύασε τον μεγαλύτερο αριθμό πρωτότυπων προβλημάτων (7), με αρκετή διαφορά έναντι της ομάδας 5 που κατασκεύασε τέσσερα. Παράλληλα, δημιούργησε 8 διαφορετικά προβλήματα, τα οποία εντάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες προβλημάτων. Τρίτη στην κατάταξη του συνολικού βαθμού της δημιουργικότητας ήταν η ομάδα 2 με βαθμό 52,1. Ο βαθμός που έλαβε παρουσίασε μεγάλες αποκλίσεις από τον βαθμό της ομάδας 5 και 6 αντίστοιχα. Η ομάδα 2 κατασκεύασε σχετικά μικρό αριθμό προβλημάτων (6), τα οποία, ωστόσο, εντάχθηκαν σε πέντε κατηγορίες, αποτελώντας την ομάδα με το μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας μαζί με την ομάδα 5. Ο βαθμός δημιουργικότητα της ομάδας 4 ήταν ίσος με 48 και κατέλαβε την τέταρτη θέση. Η συγκεκριμένη ομάδα δημιούργησε τον μεγαλύτερο αριθμό προβλημάτων, τα οποία κατατάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Ωστόσο, κανένα πρόβλημα της δεν θεωρήθηκε πρωτότυπο και συνεπώς, ο βαθμός πρωτοτυπίας που έλαβε ήταν 0. Την ομάδα 4 ακολούθησε η ομάδα 1 με μικρή σχετικά διαφορά (42,6). Η ομάδα 1, αποτέλεσε την τρίτη ομάδα με τον μεγαλύτερο αριθμό προβλημάτων, όμως, όπως και η ομάδα 4, δεν κατασκεύασε κανένα πρωτότυπο πρόβλημα. Την τελευταία θέση στον πίνακα της συνολικής βαθμολογίας της δημιουργικότητας κατέλαβε η ομάδα 3. Η συγκεκριμένη ομάδα διατύπωσε μόλις πέντε προβλήματα και κατείχε τον χαμηλότερο βαθμό ευελιξίας. Επιπλέον, τα προβλήματά της εντάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες προβλημάτων και κανένα δεν θεωρήθηκε πρωτότυπο.

Όσον αφορά το είδος της δραστηριότητας, δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων. Οι ομάδες 5 και 6 ενεπλάκησαν σε διαφορετικές δραστηριότητες, ωστόσο, οι διαφορές στον βαθμό δημιουργικότητάς τους ήταν αμελητέες. Τον μικρότερο βαθμό δημιουργικότητας διέθετε η ομάδα 3 (37,1), η οποία ασχολήθηκε με τη δραστηριότητα του Παρθενώνα, χωρίς ωστόσο να παρουσιάζει σημαντικά μεγάλη διαφορά έναντι της ομάδας 4 που κατέλαβε τη χαμηλότερη βαθμολογία δημιουργικότητας στην δραστηριότητα της Αρχαίας Αγοράς (48). Για τις ομάδες των δύο δραστηριοτήτων, υπολογίσθηκε ο μέσος όρος των βαθμολογιών τους. Ο μέσος όρος του βαθμού δημιουργικότητας για τις ομάδες της Αρχαίας Αγοράς ήταν 60, έναντι 53,3 που ήταν ο μέσος όρος του βαθμού δημιουργικότητας των ομάδων με τη δραστηριότητα του Παρθενώνα. Διαπιστώνεται, επομένως, ότι το διαφορετικό πλαίσιο που δόθηκε στις ομάδες δεν αποτέλεσε παράγοντα επιρροής του βαθμού της δημιουργικότητας.

6. Συμπεράσματα- Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν δικά τους πρωτότυπα προβλήματα αξιοποιώντας ως πλαίσιο την Αρχαία Ελληνική Ιστορία. Πολλά μαθηματικά προβλήματα ήταν παρόμοια με εκείνα των σχολικών εγχειριδίων, ενώ αρκετά παρουσίαζαν ομοιότητες με τα ερωτήματα που τέθηκαν στις καταστάσεις των προκαταρκτικών δραστηριοτήτων. Ωστόσο, ορισμένες ομάδες δημιούργησαν πρωτότυπα και ανοιχτά προβλήματα που επέτρεπαν περισσότερες από μία λύσεις. Παρόμοια αποτελέσματα παρουσιάζονται και στην έρευνα των Bonotto και Del Santo (2015). Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αρκετά από τα προβλήματα που χαρακτηρίσθηκαν ως πρωτότυπα, οι ομάδες απομακρύνθηκαν περισσότερο από το δοθέν πλαίσιο και εισήγαγαν αρκετά δικά τους δεδομένα.

Από τη συλλογή των δεδομένων της ποιοτικής ανάλυσης. διαπιστώνεται ότι όλες οι ομάδες κατασκεύασαν μαθηματικά προβλήματα και μόνο ένα πρόβλημα χαρακτηρίσθηκε ως μη μαθηματικό. Η πλειονότητα των προβλημάτων αφορούσε σε επιλύσιμα προβλήματα, καθώς ο αριθμός των προβλημάτων που δεν επιδέχονταν λύση ήταν περιορισμένος. Συνεπώς, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι μαθητές στο τέλος της πέμπτης τάξης δεν γνωρίζουν μόνο τι είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα, αλλά είναι, επίσης, ικανοί να κατασκευάσουν κατάλληλα μαθηματικά προβλήματα. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι Bonotto και Del Santo (2015), οι οποίοι σε έρευνα που διεξήγαγαν διαπίστωσαν ότι η πλειονότητα των μαθητών της έκτης τάξης ήταν σε θέση να διατυπώνουν επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα. Σε μελέτη των Silver και Cai (1996), οι μαθητές μέσης εκπαίδευσης κατάφεραν, επίσης, να δημιουργήσουν μεγάλο αριθμό μαθηματικών προβλημάτων. Ωστόσο, το 25% των προβλημάτων δεν διέθεταν μαθηματικό περιεχόμενο, γεγονός που αποδόθηκε στη μη προηγούμενη εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων.

Όσον αφορά το περιεχόμενο των προβλημάτων, υπήρξαν προβλήματα που δεν ανταποκρίνονταν στο πλαίσιο που τους δόθηκε. Συγκεκριμένα, ορισμένες ομάδες δεν αξιοποίησαν τα στοιχεία των δραστηριοτήτων και κατασκεύασαν δικά τους προβλήματα με εξ ολοκλήρου νέα δεδομένα. Τα προβλήματα αυτά, όμως, ήταν ελάχιστα σε σχέση με τον συνολικό αριθμό των δημιουργηθέντων προβλημάτων. Επομένως, διαπιστώνεται ότι οι μαθητές μπόρεσαν να αποκωδικοποιήσουν το πλαίσιο που τους δόθηκε και να συνδυάσουν τα δεδομένα του για την δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων. Το πλαίσιο της Αρχαίας Ελληνικής Ιστορίας, δηλαδή, δεν απομάκρυνε τους μαθητές από την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Το γεγονός αυτό, βέβαια, διαπιστώνεται και από τον μεγάλο αριθμό μαθηματικών επιλύσιμων προβλημάτων που δημιούργησαν οι επιμέρους ομάδες. Η ένταξη της Ιστορίας σε δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος παρείχε, ενδεχομένως, ένα χρήσιμο πλαίσιο για τη δημιουργία προβλημάτων και τη μαθηματικοποίηση της πραγματικότητας.

Για την αξιολόγηση της συλλογικής δημιουργικότητας εξετάσθηκαν οι πτυχές της της, ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Τα ποσοτικά αποτελέσματα της συλλογικής δημιουργικότητας έδειξαν ότι οι επιμέρους ομάδες διέφεραν ως προς το βαθμό δημιουργικότητας. Συγκεκριμένα, η ομάδα με τον χαμηλότερο βαθμό δημιουργικότητας παρουσίασε σημαντική απόκλιση από την ομάδα με την υψηλότερη βαθμολογία. Οι ομάδες ήταν ομοιογενείς ως προς το επίπεδο μαθηματικής ικανότητας, καθώς περιελάμβαναν μαθητές με χαμηλή, μέτρια και υψηλή βαθμολογία στο μάθημα των Μαθηματικών. Ωστόσο, η ομοιογενής σύνθεση των ομάδων δεν συντέλεσε στην επίτευξη του ίδιου βαθμού δημιουργικότητας.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η μαθηματική ικανότητα, ενδεχομένως, δεν σχετίζεται με την δημιουργικότητα. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και ο Jensen (1973), ο οποίος διαπίστωσε την ύπαρξη μη σημαντικής σχέσης ανάμεσα στην μαθηματική δημιουργικότητα και την μαθηματική επίδοση. Τα ευρήματα του Haylock (1997) είναι, επίσης, σύμφωνα με αυτή τη μελέτη, ο οποίος παρατήρησε την ύπαρξη σημαντικών διαφορών στη βαθμολογία της μαθηματικής δημιουργικότητας μαθητών με παρόμοια μαθηματική ικανότητα. Παρόμοια αποτέλεσμα εντοπίστηκαν σε μελέτη των Baran, Erdogan και Cakmak (2011), η οποία έδειξε την ύπαρξη μη στατιστικά σημαντικής σχέσης ανάμεσα στην μαθηματική δημιουργικότητα και τη μαθηματική ικανότητα. Διαπιστώνεται, συνεπώς, ότι μπορεί να υπάρχουν αρκετοί παράγοντες που συμβάλλουν στη διαφοροποίηση της μαθηματικής δημιουργικότητας από την μαθηματική επίδοση. Ωστόσο, άλλοι ερευνητές επισημαίνουν την ύπαρξη συσχέτισης ανάμεσα στη δημιουργικότητα και τη μαθηματική ικανότητα και υποστηρίζουν ότι δημιουργικότητα είναι στενά συνδεδεμένη με την γνώση του περιεχομένου (Bahar & Maker, 2011·Sak & Maker, 2006·Silver, 1997). Μια διαφορετική ερμηνεία του διαφορετικού βαθμού δημιουργικότητας μεταξύ των ομάδων, ίσως, να αποτελεί το πλαίσιο που δόθηκε στους μαθητές. Η κατασκευή προβλημάτων αξιοποιώντας ως πλαίσιο την Αρχαία Ελληνική Ιστορία, μπορεί να μην αποτέλεσε κίνητρο για τη δημιουργία πρωτότυπων προβλημάτων, λόγω της απουσίας ενδιαφέροντος αναφορικά με το μάθημα της Ιστορίας.

Οι επιμέρους ομάδες ενεπλάκησαν σε δύο διαφορετικές δραστηριότητες ως προς το ιστορικό περιεχόμενο. Τα αποτελέσματα του βαθμού της συλλογικής δημιουργικότητας μεταξύ των ομάδων που ασχολήθηκαν με τις δύο διαφορετικές δραστηριότητες, δεν παρουσίασαν σημαντικές διαφορές. Αναλυτικότερα, ο μέσος όρος του βαθμού δημιουργικότητας των ομάδων που εργάσθηκαν σε διαφορετικό πλαίσιο κυμάνθηκε στα ίδια επίπεδα. Συνεπώς, οι διαφορετικές δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές δεν επηρέασαν το βαθμό δημιουργικότητας. Αυτό, ίσως, συνδέεται με το γεγονός ότι και οι δύο δραστηριότητες εμπεριείχαν τις ίδιες μαθηματικές έννοιες. Συγκεκριμένα, και οι δύο δραστηριότητες περιελάμβαναν μια εικόνα στην οποία δινόταν η κλίμακα και οι διαστάσεις αναφέρονταν ή μπορούσαν να μετρηθούν από του ίδιους τους μαθητές. Οι ευρείες κατηγορίες των προβλημάτων των ομάδων αφορούσαν σε προβλήματα εύρεσης εμβαδού ή περιμέτρου, εύρεση απόστασης, καθώς και υπολογισμού κόστους εισιτηρίων.

Συνοπτικά, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν στις δραστηριότητες κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Οι ομάδες διέφεραν ως προς τον βαθμό δημιουργικότητας, με αποτέλεσμα να διαπιστωθεί, η ενδεχόμενη απουσία συσχέτισης ανάμεσα στην μαθηματική επίδοση και τη δημιουργικότητα. Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι το διαφορετικό πλαίσιο δεν συνέβαλε στην παρουσία διαφορετικών αποτελεσμάτων ως προς τον βαθμό δημιουργικότητας.

Στους περιορισμούς της έρευνας περιλαμβάνεται το μικρό δείγμα των υποκειμένων, καθώς οι μαθητές που ενεπλάκησαν στις δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων ήταν 23. Παράλληλα, το σύντομο χρονικό διάστημα της παρέμβασης δεν επέτρεψε την περαιτέρω διερεύνηση της συλλογικής δημιουργικότητας και τη σύνδεσή της με άλλους παράγοντες. Ένας σημαντικός περιορισμός ήταν η γλώσσα, καθώς όλα τα προβλήματα μεταφράστηκαν από την πολωνική γλώσσα στην αγγλική, κι έπειτα στην ελληνική. Παρά τις προσπάθειες πιστής απόδοσης των προβλημάτων των ομάδων, ενδέχεται, να υπήρξαν παραλείψεις ως προς την ακριβή απόδοση των αρχικών προβλημάτων, καθώς οι μεταφράσεις πραγματοποιήθηκαν από ένα άτομο.

Στο μέλλον προτείνεται η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, προκειμένου να διερευνηθεί επαρκώς η δημιουργικότητά τους. Παράλληλα, σημαντική θα ήταν η συμμετοχή μεγαλύτερου δείγματος, ώστε να εξετασθούν τα χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων και η σύνδεσή τους με τη μαθηματική δημιουργικότητα (π.χ. μαθηματική ικανότητα και χαρισματικότητα). Επιπλέον, ενδιαφέρουσα θα ήταν η διερεύνηση της συμπεριφοράς των ατόμων μέσα σε μια ομάδα κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες προώθησης της δημιουργικότητας. Πολλές φορές το αποτέλεσμα κάποιας ομάδας οφείλεται στη δημιουργικότητα ενός ατόμου και δεν είναι απόρροια της συλλογικής εργασίας.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Amabile, T. M. (1996). *Creativity in context: Update to 'The Social Psychology of Creativity'*. Boulder, CO: Westview Press.

Bahar, A. K., & Maker, C. J. (2011). Exploring the relationship between mathematical creativity and mathematical achievement. *Asia-Pacific Journal of Gifted and Talented Education, 3*(1), 33–48.

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher, 21*, 633–636.

Baran, G., Erdogan, S., & Cakmak, A. (2011). A study on the relationship between six-year-old children's creativity and mathematical ability. *International Education Studies, 4*(1), 105–111.

Barlow, A. T., & Cates, J. M. (2006). The impacts of problem posing on elementary teachers' belief about mathematics and mathematics teaching. *School Science and Mathematics, 106*, 64-73.

Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.) (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2007). Toward a broader conception of creativity: A case for "mini-c" creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts, 1*, 73–79.

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2009) Do we all have multicreative potential? *ZDM: International Reviews on Mathematics Education, 41*, 39-44.

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2014). Classroom contexts for creativity. *High Ability Studies, 25*(1), 53–69.

Binet, A. (1909). *Les idees modernes sur les enfants*. Paris: Flammarion (Published in English as Modern ideas about children. Menlo Park: CA: Suzanne Heisler, 1984).

Bolinger, A. R., Bonner, B. L. & Okhuysen, G. A. (2009). Sticking Together: The Glue Role and Group Creativity. In E. A. Mannix, M. A. Neale, and J. A. Concalo (Eds.), *Research on Managing Groups and Teams*, UK: Emerald Group Publishing Limited.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1).

Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving and creativity in the primary school. In F. Singer, N. Ellerton, & J. Cai, (Eds.), *Mathematical Problem Posing* (pp.103-124). New York: Springer.

Brown , S. I. & Walter, M. I. (1993), Problem Posing in Mathematics Education. In Stephen I. Brown & Marion I. Walter (Eds.) *Problem Posing: Reflection and Applications*, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 16-27.

Cifarelli, V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open ended problem solving situations. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 302–324.

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 37–47.

Chen, L., Van Dooren, W., Chen, Q., & Verschaffel, L. (2010). An investigation on Chinese teachers' realistic problem posing and problem solving abilities and beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9,* 1-30.

Chi, M. T., Glaser, R., & Farr, M. J. (1988). *The nature of expertise*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ching, T. P. (1997). An experiment to discover mathematical talent in prmary school in Kampong Air. *ZDM- International Reviews on Mathematics Education, 29*(3), 94-96.

Chiu, M. S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 55-79.

Cianciolo, A. T., & Sternberg, R. J. (2004). *Intelligence: A brief history*. Malden, MA: Blackwell.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 395-415.

Csikszentmihalyi, M., & Wolfe, R. (2000). New conceptions and research approach to creativity. Implications of a systems perspective for creativity in education. In K. A. Heller, F. J. Monk, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent* (pp. 81–94). New York: Elsevier.

Cunningham, R. F. (2004). Problem posing: An opportunity for increasing student responsibility. *Mathematics and Computer Education, 38*(1), 83-39.

Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *The Journal of Creative Behavior, 16*(2), 97–111.

Dweck, C. (2006). *Mindset: The new psychology of success.* New York: Random House.

Einstein, A., & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York: Simon & Schuster.

Ellerton, N. F., & Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987–1053). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Research in Mathematics Education, 29*(1), 83-106.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83–106.

English, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. Lester & R. Charles (Eds.), *Teaching mathematics* *through problem solving* (pp. 187–198). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Dordrecht: Kluwer.

Family, G. (1993). *The moral responsibility of the artist*. Creativity Research Journal, *6*, 83–88.

Freedman, R. (1994). *Open-ended questioning: A handbook for educators*. Don Mills, OH: Addison-Wesley.

Getzels, J. W. (1979). Problem finding: a theoretical note. *Cognitive Science, 3*, 167-172.

Ginsburg, H. P. (1996). Toby's math. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 175–282). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gonzales, N.A. (1996). Problem formulation: Insights from student generated questions. *School Science and Mathematics, 96*(3), 152-157.

Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics, 98*, 448-453.

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). The case study method and evolving systems approach for understanding unique creative people at work. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93–115). New York: Cambridge University Press.

Grundmeier, T. A. (2003). *The effects of providing mathematical problem posing experiences for K-8 preservice teachers: Investigating teachers' beliefs and characteristics of posed problems* (Unpublished doctoral dissertation). University of New Hampshire, Durham, NH.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *The American Psychologist*, *5*(9), 444–454.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications.

Hargadon, A. B., & Bechky, B. A. (2006). When collections of creatives become creative collectives: A field study of problem solving at work. *Organization Science, 17,* 484–500.

Haylock, D.W. (1987): A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics, 18*(1), 59–74.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in school children. *International Reviews on Mathematical Education, 29*(3), 68–74.

Hershkovitz, S., & Nesher, P. (2003). The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator*, *7*(2), 1-24.

Hershkovitz, S., Peled, I., Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of the gifted students* (pp. 255-269). Sense Publishers.

Hino, K. (2007). Towards the problem-centered classroom: Trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM: International Reviews on Mathematics Education, 39*, 503-5014.

Hong, E., & Aqui, Y. (2004). Cognitive and motivational characteristics of adolescents gifted in mathematics: Comparisons among students with different types of giftedness. *Gifted Child Quarterly, 48*, 191–201.

Jacobs, H. H. (1989). *Interdisciplinary Curriculum: Design and Implementation*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Jausovec, N. (2000). Differences in cognitive processes between gifted, intelligent, creative and average individuals while solving complex problems: An EEG study. *Intelligence, 28*(3), 213-217.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London: The Falmer Press.

Jay, E. S., & Perkins, D. N. (1997). Problem finding: The search for mechanism. In M. A. Runco (Ed.), *The creativity research handbook* (pp. 257–293). Cresskill, New Jersey: Hampton Press.

Jensen, E. (2000). *Brain-based learning*. San Diego, CA: The brain Store.

Jensen, L. R. (1973). *The relationships among mathematical creativity, numerical aptitude and mathematical achievement*. Unpublished dissertation, The University of Texas, Austin, TX.

Jirotkova, D., & Littler, G. (2008). Mathematical tasks that promote creativity in elementary school mathematics. In R. Leikin (Ed.), *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 385-387). Haifa, Israel.

John-Steiner, V. (2000). *Creative collaboration*. Oxford: Oxford University Press.

Kampylis, P., & Berki, H. (2014). *Nurturing creative thinking*. UNESCO International Bureau of Education Educational Practices Series, 25.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. In S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics: 1980 yearbook* (pp. 195-203). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaufman, J. C., & Sternberg, R. J. (2006). *The international handbook of creativity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from?. *Cognitive science and mathematics education*, 123-147.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they? In M. Avotiņa, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield & E. Velikova (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (pp. 120-125). Latvia: Latvia University

Krutetskii, V. A. (1969). The structure of mathematical abilities. In J. Kilpatrick & I. Wierszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. II). Chicago, IL: University of Chicago.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach. *Asia Pacific Education Review, 7*(1), 51-61.

Mamona-Downs, J. (1993). On analyzing problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 41-48). Tsukuba, Japan.

Landau, E. (1981). The profile of the gifted child. In A. L. Kramer (Ed.), *Gifted children: Challenging their potential, new perspectives, and alternatives* (pp. 21-32). New York: Trillium Press.

Landau, E., & Weissler, K. (1998). The relationship between emotional maturity,intelligence and creativity in gifted children. *Gifted Education International, 13,* 100-105.

Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via “what if not?” strategy in solid geometry-a case study. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 369-387.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. *In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the fifth conference of the European Society for Research in Mathematics Education—CERME-5* (pp. 2330–2339).

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Leikin, R. (2009a). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 383–409). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R. (2009b). Exploring mathematical creativity using multiplesolution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45,* 159–166.

Leung, S. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 97*(3), 81–85.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24.

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For The Learning of Mathematics, 26*(1), 17-19.

Lin, K. M., & Leng, L. W. (2008). *Using problem-posing as an assessment tool*. Paper presented at the 10th AsiaPacific Conference on Giftedness, Singapore.

London, R. (1993). A curriculum of nonroutine problems. *Paper represented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Atlanta, GA, April. (ERIC Document Reproduction Service No. ED359213).

Lowrie, T. (2002). Designing a framework for problem posing: Young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood, 3*(3), 354–364.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students* (Doctoral dissertation). Ανακτήθηκε 25 Νοεμβρίου 2017 από www.gifted.uconn.edu/siegle/Dissertations/Eric%20Mann.pdf

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236-260.

Martin, L., Towers, J., & Pirie, S. (2006). Collective mathematical understanding as improvisation. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 149-183.

McComas, W. F., & Wang, H. A. (1998). Blended science: The rewards and challenges of integrating the science disciplines for instruction. *School Science and Mathematics, 98*(6), 340–348.

Mholo, M. K. (2017). Regular classroom teachers' recognition and support of the creative potential of mildly gifted mathematics learners. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *49*(1), 81-94.

Milgram, R., & Hong, E. (2009). Talent loss in mathematics: Causes and solutions. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 149–163). Rotterdam: Sense Publishers.

Nadjafikhaha, M., Yaftian, N., & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 31,* 285 – 291.

Nakakoji, K., Yamamoto, Y., & Ohira, M. (1999). A Framework that Supports Collective Creativity in Design using Visual Images. In E. Edmonds & L. Candy (Eds.), *Proceedings of the 3rd conference on Creativity & Cognition*, pp. 166 –173. New York: ACM Press. Ανακτήθηκε 18 Νοεμβρίου 2017 από http://www.informatik.unitrier.de/~ley/db/conf/candc/candc1999.html

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1981). *Priorities in School Mathematics. Executive Summary of the PRISM Project*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Neumann, C. J. (2007). Fostering creativity—A model for developing a culture of collective creativity in science. EMBO Reports, 8(3), 202–206.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin*, 39, 31—43.

Nohda, N. (1995). Teaching and evaluating using "open-ended problems" in classroom. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 27*(2), 57-61.

Paulus, P. (2000). Groups, teams and creativity: The creative potential of idea generating groups. *Applied Psychology: An International Review, 49*, 237-262.

Paulus, P. B. & Yang, H. C. (2000). Idea generation in groups: A basis for creativity in organizations. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 82*(1), 76–87.

Paulus, P. B., & Nijstad, B. A. (Eds). (2003). *Group creativity: Innovation through collaboration.* New York, NY: Oxford University Press.

Pehkonen, E. (1995). Using open-ended problem in mathematics. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *27(*2), 67-71.

Pehkonen, E. (1997). The state-of-the-art in mathematical creativity. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 63–67.

Piirto, J. (1999). Identification of creativity. In J. Piirto (Ed.), *Talented children and adults: Their development and education* (pp.136–184). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Pirola-Merlo, A., & Mann, L. (2004). The relationship between individual creativity and team creativity: Aggregating across people and time. *Journal of Organizational Behavior, 25*, 235–257.

Pittalis, M., Christou, C., Mousoulides, N., & Pitta-Pantazi, D. (2004). A structural model for problem posing. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp 49–56.

Plucker, J. & Zabelina, D. (2009). Creativity and interdisciplinarity: one creativity or many creativities? *ZDM: International Journal od Mathematics Education, 41*, 5–12.

Poincaré, H. (1948). *Science and method*. New York: Dover.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. II). Princeton: Princeton University Press.

Prusak, N., & Levenson, E. (2008). Developing mathematical tasks suitable for gifted elementary school students. In R. Leikin (Ed.), *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of the Gifted Students* (pp. 387-389). Haifa, Israel.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan, 60,* 180–184, 261.

Renzulli, J. S. (2005). The three-ring conception of giftedness: A developmental model for promoting creative productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 246–279). New York, NY: Cambridge University Press.

Renzulli, J. S. (2006). Swimming up-stream in a small river: Changing conceptions and practices about the development of giftedness. In M. A. Constas & R. J. Sternberg (Eds.), *Translating theory and research into educational practice: developments in content domains, large-scale reform, and intellectual capacity* (pp. 223–253). Mahway: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Rosli, R., Capraro, M., Goldsby, D., Gonzalez y Gonzalez, E., Onwuegbuzie, A., & Capraro, R. (2015). Middle grade pre-service teachers' mathematical problem solving and problem posing. In F. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 333-354). New York, NY: Springer.

Runco, M. A. (1993). Divergent thinking, creativity, and giftedness. *Gifted Child Quarterly, 37*(1), 16-22.

Sak, U., & Maker, C. J. (2006). Developmental variations in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age, and knowledge. *Creativity Research Journal, 18*(3), 279–291.

Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. In J. Becker, & S. Shimada (Eds.), *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. (p. 23-35). National Council of Teachers of Mathematics.

Sawyer, W. W. (1995*). Prelude to mathematics*. London: Penguin.

Sawyer, R. K. (2003). *Group creativity: Music, theatre, collaboration*. Mahwah, NJ: Lawrences Erlbaum Associates Publishers.

Sawyer, K. (2004). Evaluative processes during group improvisational performance. In M. A. Runco (Ed.), *Critical creative processes*: 303–327. Cresskill, NJ: Hampton

Sawyer, K. (2007). *Group genius: The creative power of collaboration*. New York: Basic Books.

Shani-Zinovich, I., & Zeidner, M. (2009). On being a gifted adolescent: Developmental, affective and social issues. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. Sense Publishers.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: a research agenda. In B. Ubuz (Ed.), *Developing mathematical thinking, vol 1* (pp. 137–166). Ankara, Turkey: PME. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity, In In T. Rowland & E. Swoboda (Eds.) *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)* University of Rzeszów, Poland, 9–13 February, 2011.

Sheffield, L. J. (2008). Questioning mathematical creativity – questions may be the answer. In *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 29-34). Haifa, Israel.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity—questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87–100). Rotterdam: Sense Publishers.

Sheffield, L. J. (2017). Dangerous myths about "gifted" mathematics students. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 49,* 13-23.

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*, 159-179.

Sidhu, K. S. (2015). *The Teaching of Mathematics*, (Fourth Edition). New Delhi: Sterling Publishers.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, 14 (1), 19–28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity though instruction rich mathematical problem solving and problem posing. *International Reviews on Mathematical Education, 29*(3), 75-80.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 521-539.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 293-309.

Singer, M., Ellerton, N., Silver, E. A., Cai, J., Pelczer, I., Imaoka, M., et al. (2009). Problem posing in mathematics learning: Establishing a theoretical base for research. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (p. 229). Thessaloniki, Greece: PME.

Sinitsky, I. (2008). Both for teachers and for Students: on some essential features of creativity- stimulating activities. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education Monterrey, Mexico*.

Sriraman, B. (2004). The Characteristics of Mathematical Creativity. *The Mathematics Educator, 14*(1), 19-34.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*, 20–36. Ανακτήθηκε 12 Νοεμβρίου 2017 από http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.4219/jsge-2005-389

Starko, J. A. (1994). *Creativity in the classroom*. New York: Longman.

Starko, A. J. (2010). *Creativity in the classroom: Schools of curious delight*. New York, NY: Routledge.

Steiner, I. D. (1972). *Group processes and productivity*. New York: Academic Press.

Sternberg, R. J. (2000). *Handbook of creativity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist, 51*, 677–688.

Sternberg, R. J., & Lubart, T.I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In: R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 3-15). Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press.

Stoyanona, E. (2000). Empowering students' problem solving via problem posing: The art of framing "Good" questions. *Australian-Mathematics-Teacher, 56*(1), 33-37.

Stoyanova, E. (2005). Problem-problem strategies used by years 8 and 9 students. *AAMT Standards for Excellence in Teaching Mathematics in Australian Schools, 61*(3), 6-11.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Subotnik, R. F., Pillmeier, E., & Jarvin, L. (2009). The psychosocial dimensions of creativity in mathematics: Implications for gifted education policy. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 165–179). Rotterdam: Sense Publishers.

Sung, S., Shen, J., Stanger-Hall, K. F., Wiegert, C., Li, W., Brown, S., & Robertson, T. (2015). Toward interdisciplinary perspectives: Using osmotic pressure as an example for analyzing textbook explanations. *Journal of College Science Teaching, 44*(4), 76–87.

Taggar, S. (2002). Individual creativity and group ability to utilize individual creative resources: A multilevel model. *Academy of Management Journal, 45*, 315–330.

Tan, J. P-L., Caleon, I., Ng, H.L., Pooh, C. L., & Koh, E. (2018). Collective creativity competencies and collaborative problem-solving outcomes: Insights from the dialogic interactions of Singapore student teams. InE.Care, P. Griffin & M. Wilson (Eds.), *Assessment and Teaching of 21stCentury Skills.* Educational *Assessment in an Information Age*.(pp. 95-118). Springer, Cham.

Thompson, L. (2003). Improving the creativity of organizational work groups. *Academy of Management Executive, 17*, 96–109.

Torrance, E. P. (1966). *The Torrance tests of creative thinking: Norms-technical manual. Research edition. Verbal tests, forms A and B. Figural tests, forms A and B*. Princeton, NJ: Personnel Press.

Usiskin, Z. (2000). The development into the mathematically talented. *Journal of Secondary Gifted Education, 11*, 152–162.

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 201-221.

Voica, C., & Singer, M. (2012). Creative contexts as ways to strengthen mathematics learning. In M. Aniţei, M. Chraif & C.Vasile (Guest Eds.), *Procedia—Social and Behavioral Sciences*, *PSIWORLD 2011*, Volume 33, 538–542.

Voica, C., & Singer, F. M. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 267–279.

Vygotsky, L. S. (1982). Imagination and its development in childhood. In V. V. Davydov (Ed.), Vol. 2*: General problems of psychology. The collected works of L.S. Vygotsky* (pp. 438–454). Moscow, SSSR: Pedagogika (In Russian).

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Harcourt, Brace.

Watkins, J., Coffey, J., Redish, E., & Cooke, T. (2012). Disciplinary authenticity: Enriching the reforms of introductory physics courses for life-science students. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *8*(1), 1–19.

Weisberg, R. W. (1999). Creativity and knowledge: A challenge to theories. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 226–250). Cambridge: Cambridge University Press.

West, M. A. (2002). Sparkling fountains or stagnant ponds: An integrative model of creativity and innovation implementation in work groups. *Applied Psychology: An International Review*, *51*, 355–424

Yuan, X., & Sriraman, B. (2010). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem posing abilities. In B. Sririman & K. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5–28). Rotterdam: Sense Publishers.

Ziegler, A. (2005). The actiotope model of giftedness. In R. Sternberg & J. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 411–434). Cambridge: Cambridge University Press.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Σύνολο προβλημάτων

Ομάδα 1η	
1.1	Ο Άνταμ και ο πατέρας του επισκέφθηκαν τον Παρθενώνα και θα ήθελαν να ξέρουν ποιο είναι το εμβαδόν ολόκληρου του Παρθενώνα.
1.2	Η στέγη μαζί με τις μικρές κολόνες έχουν ύψος 7,619 μέτρα. Σωστό ή Λάθος;
1.3	Η στέγη μαζί με τις μεγάλες κολόνες έχουν 15,538 μ. ύψος. Σωστό ή Λάθος;
1.4	Ποια είναι η περίμετρος ολόκληρου του Παρθενώνα;
1.5	Πόσο μεγάλο είναι το άγαλμα της Αθηνάς;
1.6	Πόσα εκατοστά έχουν οι μικρές κολόνες μαζί;
1.7	Ποια είναι η περίμετρος ολόκληρου του Παρθενώνα. Καθώς ο ένας τοίχος είναι 35 μ. και ο δεύτερος είναι 66,5 μ.
1.8	Πόσο ψηλή είναι μια μεγάλη κολόνα;
1.9	Το εμβαδόν του Παρθενώνα είναι 232,75 τ.μ. Σωστό ή Λάθος;
1.10	Πόσες κολόνες υπάρχουν συνολικά στον Παρθενώνα;
Ομάδα 2η	
2.1	Ποιο είναι το εμβαδόν του Θόλου;
2.2	Πόση ώρα χρειάζεται για να περπατήσεις από την Ποικίλη Στοά στην Ηλιαία;
2.3	Ποια είναι η περίμετρος του κτιρίου του Δικαστηρίου (νούμερο 1 στον χάρτη), του παλιού Βουλευτηρίου (νούμερο 8 στον χάρτη) και του καινούργιου Βουλευτηρίου (νούμερο 9 στον χάρτη);
2.4	Ο Darek, ο Marek και ο Damian θέλουν να επισκεφθούν το κτίριο του Δικαστηρίου (νούμερο 1 στον χάρτη) και τον Εννεάκρουνο (νούμερο 3 στον χάρτη). Πόση ώρα χρειάζεται να περπατήσουν;
2.5	Το εισιτήριο για την Αρχαία Αγορά κοστίζει 10 ζλότι. Πόσο πλήρωσε μια κυρία για 20 άτομα; (η κυρία μπορεί να είναι μια δασκάλα)
2.6	Ήταν 3 τουρίστες στην Αγορά, οι οποίοι ήθελαν να πάνε σ' ένα μαγαζί (νούμερο 15). Ένας από αυτούς ήταν στον ναό του Ηφαίστου (Ηφαίστειον) (νούμερο 10). Ο δεύτερος

	τουρίστας ήταν στο Νομισματοκοπείο (νούμερο 2) και ο τρίτος τουρίστας ήταν στην Ηλιαία (νούμερο 5). Πόσα μέτρα συνολικά χρειάζεται να περπατήσουν όταν γνωρίζουν ότι 100 μέτρα είναι 4,5 εκατοστά στον χάρτη;
2.7	Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι ολόκληρη η Αγορά;
2.8	Πόση είναι η απόσταση από τον Ναό του Ηφαίστου (νούμερο 10) στην Ποικίλη Στοά (νούμερο 14) και μετά σ’ ένα μαγαζί (νούμερο 10) και στην Ακρόπολη;
2.9	Ο Tomek με τη μητέρα του άρχισαν την επίσκεψη από το Νομισματοκοπείο (νούμερο 2). Μετά, πήγαν μέσα από ζώνη της Ακρόπολης στο κτίριο του Δικαστηρίου (νούμερο 1). Πόσα μέτρα περπάτησαν μαζί;
2.10	Σε μια σχολική εκδρομή η δασκάλα οργάνωσε μια εκδρομή: ξεκινώντας από το σημείο 3, διασχίζοντας τα σημεία 4 και 5, στρίβοντας δεξιά στο σημείο 12. Όμως, η Νίνα πήγε στη δεύτερη κατεύθυνση κι έφτασε το σημείο 13. Το γκρουπ πήγε μέσα από την Ακρόπολη και στάθηκε στην είσοδο 3. Η Νίνα γύρισε πίσω και πήγε μέσα από την Ακρόπολη, έστριψε και πήγε στην είσοδο 3, όπου όλη η ομάδα την περίμενε. Πόσα μέτρα παραπάνω έκανε η Νίνα από την ομάδα της;
Ομάδα 3η	
3.1	Τι ύψος έχει μια κολόνα;
3.2	Ποια είναι η περίμετρος του Παρθενώνα;
3.3	Ποιο είναι το εμβαδόν του Παρθενώνα;
3.4	Πόσες κολόνες έχει ο Παρθενώνας;
3.5	Η Αμέλκα στέκεται δίπλα στο Άγαλμα της Αθηνάς και θέλει να κάνει έναν κύκλο γύρω από τον Παρθενώνα. Ξέρει ότι για να περπατήσεις 1 μέτρο χρειάζεται 1 δευτερόλεπτο, πόση ώρα θα της πάρει;
Ομάδα 4η	
4.1	Σε ποιο λόφο βρίσκεται το Ηφαίστειον;
4.2	Πόσες οδοί υπάρχουν;
4.3	Η Αθηνά γυρνάει σπίτι από τη Βασιλική Στοά (νούμερο 13 στον χάρτη) μέσω της οδού (16 στον χάρτη). Πόσα μέτρα είναι αυτή η οδός;
4.4	Η Μαργαρίτα περπατάει μέσα από τον Εννεάκρουνο (νούμερο 3 στον χάρτη) δίπλα στην Ηλιαία (νούμερο 5 στον χάρτη). Πόσα μέτρα περπάτησε;
4.5	Πόσα μέτρα είναι η οδός Παναθήναια;
4.6	Υπολόγισε το εμβαδόν του κτιρίου νούμερο 4.
4.7	Υπολόγισε τα ορθογώνια κτίρια. Πόσα είναι;

4.8	Γιατί ο Εννεάκρουνος (νούμερο 3 στον χάρτη) είναι ορθογώνιο;
4.9	Ποιο κτίριο έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο;
4.10	Ποιο είναι το σχήμα του χάρτη; (ολόκληρη η Αγορά;)
4.11	Πόσα μέτρα πρέπει να περπατήσεις για να πας από το κτίριο του Δικαστηρίου-(νούμερο 1 στον χάρτη) στο Νομισματοκοπείο (νούμερο 2), υποθέτοντας ότι 4,5 εκατοστά στον χάρτη είναι 100 μέτρα στον πραγματικό κόσμο.
4.12	Ποιος είναι ο πιο σύντομος δρόμος από το Στρατηγείο (νούμερο 16) προς τα μαγαζιά (νούμερο 15). Πόσο μακρύς είναι;
4.13	Οι Zosia, Gosia και Tosia πήγαν μια εκδρομή στην Ελλάδα. Ήθελαν να αγοράσουν μερικά σουβενίρς στα μαγαζιά. Στα κορίτσια άρεσε περισσότερο το σχήμα του Παρθενώνα σε κλίμακα 1/1000. Κόστιζε 25 ευρώ. Πόσο κοστίζει σε ζλότι, γνωρίζοντας ότι 1 ευρώ = 4 ζλότι περίπου. Έχουν αρκετά λεφτά εάν ξέρουμε ότι έχουν μαζί 90 ζλότι;
Ομάδα 5η	
5.1	Ποιο είναι το ύψος στης στέγης και των μικρών κολονών;
5.2	Η οικογένεια Markiewicz ήθελε να πάει στον Παρθενώνα να δοξάσει τη θεά Αθηνά. Το εισιτήριο κοστίζει 10 ζλότι και το εισιτήριο του παιδιού 5 ζλότι. Πόσο θα πληρώσει η οικογένεια Markiewicz για τους γονείς και τα 4 παιδιά; 50 ζλότι είναι αρκετά;
5.3	Η κυρία Wong θέλει να κάνει μια έκπληξη στους γείτονές της και τους προσκαλεί σε μια εκδρομή στον Παρθενώνα. Τα εισιτήρια ήταν φθηνά, όμως δυστυχώς υπήρχε ανακαίνιση και τα εισιτήρια έγιναν ακριβότερα. Πόσο θα πληρώσει η κυρία Wong για 3 ενηλίκους και 5 παιδιά, εφόσον το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 50 ζλότι και των ενηλίκων 220;
5.4	Το άγαλμα της Αθηνάς είναι τοποθετημένο 2 χιλιόμετρα από την είσοδο και ολόκληρο το κτίριο είναι 4 χμ × 4 χμ. Πόσο χρειάζεται για να περπατήσεις γύρω από όλο το κτίριο;
5.5	Η Μάγια με τη φίλη της πήγαν στον Παρθενώνα. Έχουν 3 ώρες για το λεωφορείο. Θα προλάβουν τα κορίτσια να περπατήσουν 5 χμ; 1 χμ = 15 λεπτά
5.6	Πόσο ύψος έχουν οι κολόνες;
5.7	Η γιαγιά Adolf θέλει να πληρώσει για τις διακοπές της κόρης της και της οικογένειάς της. Η κόρη έχει τριμελή οικογένεια: τη μητέρα Paździoch, τον πατέρα Pudzian και την κόρη Popek**.** Το δωμάτιο για 2 άτομα κοστίζει 2000 ζλότι και το δωμάτιο για τρία

	άτομα κοστίζει 2 φορές παραπάνω. Επίσης, έχουν μια γάτα τον Ogoras και χρειάζεται να πληρώσουν για τη διαμονή της 50 ζλότι. Σχεδιάζουν να πάνε στον Παρθενώνα. Το εισιτήριο για τους ενηλίκους κοστίζει 20 ζλότι και για το παιδί 10 ζλότι. Πόσο είναι το συνολικό κόστος;
5.8	Ποιο είναι το ύψος των μικρών και μεγάλων κολονών μαζί;
5.9	Η κόρη Popek κι ο πατέρας της Dudzian θέλουν να πάνε σ' έναν αγώνα μποξ. Τα εισιτήρια κοστίζουν 10 ζλότι. Θέλουν να πάρουν μαζί έναν της φίλο της Popek-Janusz. Πόσο θα κοστίσουν όλα τα εισιτήρια;
5.10	Ποιο είναι το εμβαδόν του ναού;
5.11	Ποιο είναι το εμβαδόν του εσωτερικού του ναού;
5.12	Ποιο είναι το ύψος του αγάλματος της Αθηνάς;
5.13	Ολόκληρη η οικογένεια του Edek ήθελε να πάει στον Παρθενώνα. Η οικογένεια είναι: η μητέρα Ed, ο πατέρας Ed και ο γιος Eddy. Το εισιτήριο για τους ενηλίκους κοστίζει 1000000 ζλότι και για το παιδί 100 ζλότι. Θέλουν να δοξάσουν την Αθηνά και τα κεριά κοστίζουν 30000 ζλότι το ένα. Κάθε μέλος της οικογένειας θέλει να ανάψει ένα κερί. Πόσο θα πληρώσουν για όλα;
5.14	Η μητέρα Janina και ο πατέρα Bogdan θέλουν να πάνε για μια εβδομάδα στην Ελλάδα. Οι κόρες του (δύο) δεν θέλουν να πάνε. Μια νταντά για παιδιά κοστίζει 0,50 ζλότι για 24 ώρες. Πόσο θα πληρώσουν για την νταντά οι γονείς, καθ' όλη τη διάρκεια που θα απουσιάζουν;
5.15	Ένας άντρας έτρωγε μπανάνες. Αφού έφαγε μερικές ένας αστυνομικός ήρθε σε αυτόν και του είπε ότι το πρόστιμο επειδή έφαγε μια μπανάνα είναι 100 ζλότι. Πόσες μπανάνες έφαγε εφόσον πλήρωσε 2000 ζλότι;
Ομάδα 6η	
6.1	Πώς μπορείς να πας από το σημείο 2 στο σημείο 13 με το γρηγορότερο τρόπο;
6.2	Ένα εισιτήριο κοστίζει 20 ζλότι ανά ώρα. Περπατάμε 1 χιλιόμετρο σε 15 λεπτά. Θα καταφέρουμε να επισκεφθούμε τα σημεία 10, 5, 1 σε 15 λεπτά, εάν η είσοδος ξεκινάει από το σημείο 1;
6.3	Η Ala θέλει να επισκεφθεί τα σημεία 1, 2, 3, 4, 5, 6. Έχει γι' αυτό 2 ώρες. Η είσοδος είναι στο σημείο 1. Από το σημείο 6 στο σημείο 1 πηγαίνει με τον γρηγορότερο τρόπο. Πόση ώρα θα απομείνει όταν φτάσει στην είσοδο;
6.4	Μια εκδρομή ήρθε στις 12.30 στην είσοδο, η οποία ήταν στο σημείο 14. Υπήρχαν 60 παιδιά, 4 δασκάλες κι ένας οδηγός. Το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 15 ζλότι. Το

	εισιτήριο των ενηλίκων κοστίζει 20 ζλότι και το εισιτήριο του οδηγού κοστίζει 10 ζλότι. Τα εισιτήρια για τα παιδιά 7-12 χρονών είναι δωρεάν. Υπάρχουν 22 παιδιά ηλικίας 7-12 χρονών. Ποιο ήταν το κόστος όλων των εισιτηρίων;
6.5	Εάν περπατήσουμε μπρος πίσω 5 φορές από το σημείο 15 στο 13 (θα ξεχνάμε κάτι όλη την ώρα), πόσα μέτρα θα περπατήσουμε;
6.6	Σ' ένα μαγαζί (νούμερο 10) θα αγοράσουμε μπανάνες για 15 ζλότι, μια μπάλα για 8,5 ζλότι, καλαμπόκι για 2,99 και μια κόκα κόλα για 12, 89. Πόσο θα κοστίσουν τα ψώνια μας;
6.7	Ο Michal επισκέφθηκε τα 1, 4, 5, 8 και 9 και θα ήθελε να επισκεφθεί επίσης τα 15, 11, 13 και 2. Έχει γι αυτό 3 ώρες μέχρι την αναχώρηση. Κάθε χιλιόμετρο παίρνει 15 λεπτά. Πόσα λεπτά θα πάρει να επισκεφθεί όλα τα τα υπόλοιπα μέρη;
6.8	Ο Anter μαζί με τον πατέρα και η μητέρα του θέλησαν να επισκεφθούν την Αγορά. Το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 15 ζλότι και των ενηλίκων κοστίζει 4 ζλότι ανά ώρα. Για να διανύσει κάποιος 400 μέτρα χρειάζεται μία ώρα. Πόσο πρέπει να πληρώσουν για να επισκεφθούν τα πάντα;
6.9	Η Καρολίνα θέλει να επισκεφθεί το Ηφαίστειον (νούμερο 10). Έχει γι' αυτό 2 ώρες. Θα τα καταφέρει να φτάσει στο ναό και να πάει στο νούμερο 11, από όπου φεύγει το λεωφορείο; Ας υποθέσουμε ότι 1 χιλιόμετρο είναι 15 λεπτά.
6.10	Η Μαρτίνα θέλει να δεί τον Βωμό των 12 θεών (νούμερο 12). Το εισιτήριο εισόδου γι' αυτό κοστίζει 20 ζλότι και η Μαρτίνα έχει 150 ζλότι. Εάν πληρώσει το εισιτήριο, θα έχει αρκετά λεφτά για το εισιτήριο του λεωφορείου που είναι 100,25 ζλότι; Εάν ναι, πόσα θα της μείνουν;