

Η Φούσκα του Χρηματιστηρίου:
Μια Μαθηματική Περιγραφή

Ευτυχία Λόλα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών



Η Φούσκα του Χρηματιστηρίου:
Μια Μαθηματική Περιγραφή

Ευτυχία Λόλα

Επιβλέπων Καθηγητής: Σπύρος Δ. Συμεωνίδης

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2018

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	ii
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	vi
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	vii
1 ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΧΩΡΙΣ ΦΟΥΣΚΑ	1
1.1 Είδη Περιουσιακών Στοιχείων	2
1.2 Δεδομένα της Αγοράς	3
1.3 Συμπεριφορά του Αντιπροσωπευτικού Επενδυτή	6
1.4 Υπολογισμός Αποτελεσματικών βαρών	9
1.4.1 Αποτελεσματικά βάρη δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο	9
1.4.2 Αποτελεσματικά βάρη με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο	11
1.5 Αποτελεσματικά σύνορα	13
1.5.1 Αποτελεσματικό σύνορο δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο.	13
1.5.2 Αποτελεσματικό σύνορο με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο.	14
1.6 Δύο οριακές περιπτώσεις χαρτοφυλακίων	15
1.7 Επιλογή Βέλτιστου Χαρτοφυλακίου	17
2 ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΦΟΥΣΚΑ	18
2.1 Δεδομένα της Αγοράς υπό την Επίδραση της Φούσκας	19

2.2	Συμπεριφορά του Αντιπροσωπευτικού Επενδυτή υπό την Επίδραση της Φούσκας	22
2.3	Υπολογισμός Αποτελεσματικών βαρών υπό την Επίδραση της Φούσκας	23
2.3.1	Αποτελεσματικά βάρη δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας	23
2.3.2	Αποτελεσματικά βάρη με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας	25
2.4	Αποτελεσματικό Σύνορο υπό την Επίδραση της Φούσκας	27
2.4.1	Αποτελεσματικό σύνορο δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας.	27
2.4.2	Αποτελεσματικό σύνορο με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας	28
2.5	Δύο Οριακές Περιπτώσεις Χαρτοφυλακίων υπό την Επίδραση της Φούσκας	29
2.6	Επιλογή Βέλτιστου Χαρτοφυλακίου υπό την Επίδραση της Φούσκας	31
2.7	Παραδείγματα	32
2.7.1	Παράδειγμα 1	32
2.7.2	Παράδειγμα 2	33
2.7.3	Παράδειγμα 3	34
3	ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ	36
3.1	Σύγκριση των b και b_*	37
3.2	Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E , E' , E_* και E'_*	37
3.2.1	Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E και E'	39
3.2.2	Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E_* και E'_*	40
3.2.3	Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E και E'_*	41

3.2.4	Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E' και E_*	44
4	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	48
4.1	Ανάλυση των χαρτοφυλακίων E , E' , E_* και E'_*	49
4.2	Κύκλος Κινήσεων του Αντιπροσωπευτικού Επενδυτή	49
4.3	Οικονομικώς Δρώντες	51
4.3.1	Η Συμπεριφορά του Αναλυτή	51
4.3.2	Διαχειριστές Κεφαλαίων	52
4.3.3	Οι Ευθύνες των Αρχών Κεφαλαιαγοράς	52
4.3.4	Η Συμπεριφορά των Εκδοτών Περιουσιακών Στοιχείων Χωρίς Κίνδυνο	52
4.4	Συμπερασματικά Σχόλια	55
	Βιβλιογραφικές Αναφορές	56

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της διπλωματικής εργασίας, κύριο Σπύρο Συμεωνίδη, για την εμπιστοσύνη και την υπομονή που έδειξε, όπως και για τις εποικοδομητικές και καταλυτικές συμβουλές του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους: Απόστολο Τσιούρη και Σωτήρη Αργύρη, για την συνδρομή τους στην επεξεργασία του διαγράμματος που περιέχεται στην εργασία.

Τέλος θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στον Αντώνη, στην Δάφνη, στον Αλέξανδρο και στους γονείς μου, Μαρία και Χρήστο, οι οποίοι στήριξαν τις μεταπτυχιακές μου σπουδές με κάθε τρόπο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την εργασία ερευνάται η Χρηματιστηριακή Αποτίμηση πρίν και κατά την διάρκεια της φούσκας. Αναφέρονται τα δεδομένα της αγοράς όπως και η συμπεριφορά του αντιπροσωπευτικού επενδυτή πρίν και κατά την διάρκεια της φούσκας. Επιπλέον υπολογίζονται τα αποτελεσματικά βάρη, τα αποτελεσματικά σύνορα, οι δύο οριακές περιπτώσεις χαρτοφυλακίων f (χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο) και M (χαρτοφυλάκιο της αγοράς) και το βέλτιστο, για τον αντιπροσωπευτικό επενδυτή, χαρτοφυλάκιο, πρίν και κατά την διάρκεια της φούσκας. Ακόμα γίνονται συγκρίσεις των χαρακτηριστικών και των αναμενόμενων χρησιμότητων τεσσάρων βασικών χαρτοφυλακίων (E , E' , E_* και E'_*). Τέλος, αναφέρονται οι οικονομικώς δρώντες και η συμπεριφορά τους ως προς την φούσκα, καθώς και το βασικό συμπέρασμα σύμφωνα με το οποίο η μόνη εφικτή λύση είναι η κατάρρευση της φούσκας.

Λέξεις κλειδιά: Αγορά, αντιπροσωπευτικός επενδυτής, αποδόσεις, αποτελεσματικό σύνορο, κίνδυνος, περιουσιακά στοιχεία, φούσκα, χαρτοφυλάκιο, χρηματιστήριο .

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η φούσκα του χρηματιστηρίου εμφανίστηκε πρώτη φορά περί τα 1600 με την κρίση της τουλίπας, γνωστή ως “μανία της τουλίπας.” Μετέπειτα, ακολούθησαν πολλές χρηματιστηριακές κρίσεις που αποδόθηκαν στην ύπαρξη φούσκας [1]. Στην Ελλάδα υπάρχουν πολλά παραδείγματα φούσκας, με γνωστότερο εξ αυτών το Κραχ του 1999 στο χρηματιστήριο Αθηνών.

Σε αυτή την εργασία αναλύεται το χαρτοφυλάκιο του αντιπροσωπευτικού επενδυτή πριν, κατά την διάρκεια και μετά την κατάρρευση της φούσκας, καθώς και η απαραίτητη διαδρομή μέχρις ότου βρεθεί στο χαρτοφυλάκιο ισορροπίας (βέλτιστο χαρτοφυλάκιο). Ακόμα αναφέρονται οι λόγοι που οδηγούν στην δημιουργία φούσκας καθώς και τρόποι αποφυγής της. Η παρούσα εργασία διορθώνει και γενικεύει το άρθρο των Σ. Συμεωνίδη και Γ. Σαπουντζόγλου: “*On financial bubbles, investment and investor’s utility.*”

Το πρώτο κεφάλαιο ασχολείται με την χρηματιστηριακή αποτίμηση χωρίς φούσκα και περιλαμβάνει τα είδη περιουσιακών στοιχείων που διατίθενται στον αντιπροσωπευτικό επενδυτή, την συμπεριφορά του καθώς και την περιγραφή της αγοράς. Επιπρόσθετα, υπολογίζονται τα αποτελεσματικά βάρη, μέσω των οποίων υπολογίζονται τα αποτελεσματικά σύνορα. Στη συνέχεια περιγράφονται οι δύο οριακές περιπτώσεις χαρτοφυλακίων f (χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο) και M (χαρτοφυλάκιο της αγοράς). Το πρώτο κεφάλαιο κλείνει με την επιλογή του βέλτιστου, για τον αντιπροσωπευτικό επενδυτή, χαρτοφυλακίου, το οποίο είναι, εξ ορισμού, το χαρτοφυλάκιο του αποτελεσματικού συνόρου με την μεγαλύτερη δυνατή αναμενόμενη χρησιμότητα.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται την χρηματιστηριακή αποτίμηση υπό την επίδραση της φούσκας επαναλαμβάνοντας τις προηγούμενες αναλύσεις.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθενται οι συγκρίσεις των χαρακτηριστικών και των αναμενόμενων χρησιμότητων τεσσάρων βασικών χαρτοφυλακίων (E , E' , E_* και E'_*) που απαρτίζουν τον κύκλο κινήσεων του αντιπροσωπευτικού επενδυτή, πρίν, κατά την διάρκεια και μετά την κατάρρευση της φούσκας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα καθώς και προτάσεις πολιτικής για την αποτροπή δημιουργίας φούσκας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

ΧΩΡΙΣ ΦΟΥΣΚΑ

§ 1.1 Είδη Περιουσιακών Στοιχείων

Κάθε επένδυση ανταμοίβει τον επενδυτή για τον χρόνο κατά τον οποίο δεσμεύει τα κεφάλαια του καθώς και για τον κίνδυνο που αναλαμβάνει. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε δύο ειδών περιουσιακά στοιχεία τα οποία ορίζονται ως εξής:

1. **Περιουσιακά Στοιχεία με κίνδυνο** (risky assets): Είναι οι επενδύσεις που ανταμοίβονται με το ασφάλιστρο κινδύνου.
2. **Περιουσιακά Στοιχεία χωρίς κίνδυνο** (risk free assets): Είναι οι επενδύσεις που ανταμοίβονται με την αξία του χρόνου.

§ 1.2 Δεδομένα της Αγοράς

Ορίζουμε τρία περιουσιακά στοιχεία, το μη στοχαστικό f και τα στοχαστικά “1” και “2” και P το χαρτοφυλάκιο που τα περιέχει.

Έστω r_f η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο, f , με αναμενόμενη (μέση) τιμή $E(r_f) = r_f$ και διακύμανση, $\sigma_f^2 = \text{var}(r_f) = 0$.

Επίσης, έστω r_1, r_2 οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο, “1” και “2” αντίστοιχα, με αναμενόμενη (μέση) τιμή $E(r_i) = \bar{r}_i$ και διακύμανση, $\sigma_i^2 = \text{var}(r_i)$, $i = 1, 2$.

Οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ των r_1, r_f , όπως και μεταξύ των r_2, r_f συμβολίζονται ως σ_{1f}, σ_{2f} , οι οποίες ισούνται με $\text{cov}(r_1, r_f), \text{cov}(r_2, r_f)$, αντίστοιχα, είναι ίσες με το 0. Εν αντιθέσει, η συνδιακύμανση μεταξύ των r_1, r_2 που συμβολίζεται ως σ_{12} και ισούται με $\text{cov}(r_1, r_2)$ λόγω της στοχαστικότητας είναι ίση με $\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$, όπου, ρ_{12} ο συντελεστής συσχέτισης τους.

Έστω w_0 το ποσοστό του κεφαλαίου (βάρος) που επενδύει ο επενδυτής στο περιουσιακό στοιχείο f και w_1, w_2 τα ποσοστά (βάρη) του κεφαλαίου που επενδύει στα περιουσιακά στοιχεία “1” και “2” αντίστοιχα.

Για το άθροισμα των ποσοστών κεφαλαίου ισχύει ότι:

$$w_0 + w_1 + w_2 = 1, \quad (1.1)$$

το οποίο δηλώνει ότι το προς επένδυση κεφάλαιο επενδύεται εξ ολοκλήρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. *Χαρτοφυλάκιο είναι το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων που έχει ένας επενδυτής στην κατοχή του [2].*

Ορίζουμε ως r_p την απόδοση του χαρτοφυλακίου P για την οποία ισχύει:

$$r_p = w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 \quad (1.2)$$

με αναμενόμενη (μέση) τιμή:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_p) &= \bar{r}_p = \mathbb{E}(w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2) \Rightarrow \\ \bar{r}_p &= \mathbb{E}(w_0 r_f) + \mathbb{E}(w_1 r_1) + \mathbb{E}(w_2 r_2) \Rightarrow \\ \bar{r}_p &= w_0 r_f + w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 \Rightarrow \\ \bar{r}_p &= (1 - w_1 - w_2) r_f + w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 \Rightarrow \\ \bar{r}_p &= r_f + w_1 (\bar{r}_1 - r_f) + w_2 (\bar{r}_2 - r_f) \end{aligned} \quad (1.3)$$

και διακύμανση:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = \text{var}(r_p) &= \text{var}(w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2) \\ &= \text{var}(w_0 r_f) + \text{var}(w_1 r_1) + \text{var}(w_2 r_2) \\ &\quad + 2 \text{cov}(w_0 r_f, w_1 r_1) + 2 \text{cov}(w_0 r_f, w_2 r_2) + 2 \text{cov}(w_1 r_1, w_2 r_2) \\ &= w_0^2 \text{var}(r_f) + w_1^2 \text{var}(r_1) + w_2^2 \text{var}(r_2) \\ &\quad + 2w_0 w_1 \text{cov}(r_f, r_1) + 2w_0 w_2 \text{cov}(r_f, r_2) + 2w_1 w_2 \text{cov}(r_1, r_2) \\ &= 0 + w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 0 + 0 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τα 2×1 διανύσματα

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{r}} := \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}} := \begin{bmatrix} \bar{r}_1 - r_f \\ \bar{r}_2 - r_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

και την 2×2 μήτρα

$$\mathbf{\Sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

όπου, \mathbf{w} το διάνυσμα των βαρών, $\bar{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα των αναμενόμενων τιμών των αποδόσεων, $\tilde{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα των ασφαλιστρών κινδύνου, $\mathbf{1}$ το διάνυσμα των μονάδων και $\mathbf{\Sigma}$ η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης.

Επομένως η αναμενόμενη (μέση) απόδοση του χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{r}_p = r_f + [w_1, w_2] \begin{bmatrix} \bar{r}_1 - r_f \\ \bar{r}_2 - r_f \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (1.6)$$

$$\bar{r}_p = r_f + \mathbf{w}' \tilde{\mathbf{r}} \quad (1.7)$$

και η διακύμανση του χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma_p^2 = [w_1, w_2] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (1.8)$$

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}' \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}. \quad (1.9)$$

§ 1.3 Συμπεριφορά του Αντιπροσωπευτικού Επενδυτή

Η συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού επενδυτή είναι τετραγωνικής μορφής και ορίζεται ως εξής:

$$U(r_p) = a_0 + a_1 r_p - \frac{1}{2} a_2 r_p^2 \quad (1.10)$$

$$\text{όπου } a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ και } r_p < \frac{a_1}{a_2}. \quad (1.11)$$

Το r_p είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή $r_p \sim N(\bar{r}_p, \sigma_p^2)$.

Μπορούμε να μετρήσουμε την αποστροφή του επενδυτή στον κίνδυνο χρησιμοποιώντας τους συντελεστές Arrow-Pratt (Σχετικό και Απόλυτο). Για τον υπολογισμό των Arrow-Pratt συντελεστών χρειαζόμαστε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης χρησιμότητας που είναι οι εξής:

$$U'(\bar{r}_p) = a_1 - a_2 \bar{r}_p, \quad (1.12)$$

$$U''(\bar{r}_p) = -a_2. \quad (1.13)$$

ΛΗΜΜΑ 1.1. Ισχύει ότι $a_1 - a_2 \bar{r}_p > 0$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $r_p < \frac{a_1}{a_2}$ από το οποίο προκύπτει ότι $a_2 r_p - a_1 < 0$.

Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή αυτής της σχέσης καταλήγουμε στην

$$E(a_2 r_p - a_1) = a_2 E(r_p) - a_1 < 0 \Rightarrow a_2 \bar{r}_p - a_1 < 0 \Rightarrow a_1 - a_2 \bar{r}_p > 0.$$

□

Ο Απόλυτος συντελεστής αποστροφής κινδύνου ισούται με:

$$R_A(\bar{r}_p) = -\frac{U''(\bar{r}_p)}{U'(\bar{r}_p)} = \frac{-(-a_2)}{a_1 - a_2 \bar{r}_p} = \frac{a_2}{a_1 - a_2 \bar{r}_p} > 0. \quad (1.14)$$

Ο Σχετικός συντελεστής αποστροφής κινδύνου ισούται με:

$$R_R(\bar{r}_p) = -\frac{U''(\bar{r}_p)\bar{r}_p}{U'(\bar{r}_p)} = \frac{-(-a_2)\bar{r}_p}{a_1 - a_2\bar{r}_p} = \frac{a_2\bar{r}_p}{a_1 - a_2\bar{r}_p} > 0. \quad (1.15)$$

Αντιστρέφοντας τους προαναφερθέντες συντελεστές μπορούμε να βρούμε τα μέτρα ανοχής στον κίνδυνο τα οποία είναι:

$$\frac{1}{R_A(\bar{r}_p)} = \frac{a_1}{a_2} - \bar{r}_p \quad (1.16)$$

και

$$\frac{1}{R_R(\bar{r}_p)} = \frac{a_1}{a_2\bar{r}_p} - 1. \quad (1.17)$$

Επειδή ισχύει $E(r_p^2) = \bar{r}_p^2 + \sigma_p^2$ [Λαμπράκης σελίδα 43, Πρόταση 2.4, Εξίσωση (2.12)] η συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E(U(r_p)) &= E(a_0 + a_1r_p - \frac{1}{2}a_2r_p^2) \Rightarrow \\ E(U(r_p)) &= E(a_0) + E(a_1r_p) - \frac{1}{2}E(a_2r_p^2) \Rightarrow \\ E(U(r_p)) &= a_0 + a_1\bar{r}_p - \frac{1}{2}a_2E(r_p^2) \Rightarrow \\ E(U(r_p)) &= a_0 + a_1\bar{r}_p - \frac{1}{2}a_2(\bar{r}_p^2 + \sigma_p^2). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα εξαρτάται από τη μέση τιμή και την διακύμανση της r_p , επομένως μπορούμε να την μετονομάσουμε σε:

$$V(\bar{r}_p, \sigma_p^2) = a_0 + a_1\bar{r}_p - \frac{1}{2}a_2(\bar{r}_p^2 + \sigma_p^2). \quad (1.19)$$

Σταθεροποιώντας την αναμενόμενη χρησιμότητα $V = \bar{V}$ έχουμε:

$$\bar{V} = a_0 + a_1\bar{r}_p - \frac{1}{2}a_2(\bar{r}_p^2 + \sigma_p^2)$$

και λύνοντας ως προς σ_p βρίσκουμε την καμπύλη αδιαφορίας που αντιστοιχεί σε αναμενόμενη χρησιμότητα \bar{V} :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_2\sigma_p^2 &= a_0 + a_1\bar{r}_p - \frac{1}{2}a_2\bar{r}_p^2 - \bar{V} \Rightarrow \\ \sigma_p^2 &= \frac{2a_0 + 2a_1\bar{r}_p - a_2\bar{r}_p^2 - 2\bar{V}}{a_2} \Rightarrow \\ \sigma_p &= \sqrt{\frac{2a_0 + 2a_1\bar{r}_p - a_2\bar{r}_p^2 - 2\bar{V}}{a_2}}.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε την καμπύλη αδιαφορίας λύνοντας το τριώνυμο:

$$\frac{1}{2}a_2\bar{r}_p^2 - a_1\bar{r}_p + \left(\frac{1}{2}a_2\sigma_p^2 + \bar{V} - a_0\right) = 0 \text{ ως προς } \bar{r}_p.\tag{1.21}$$

§ 1.4 Υπολογισμός Αποτελεσματικών βαρών

Το κριτήριο επιλογής επενδύσεων που χρησιμοποιούμε κάτω από αβεβαιότητα είναι το κριτήριο μέσου-διακύμανσης. Επομένως καλούμαστε να ελαχιστοποιήσουμε την διακύμανση για δεδομένη μέση τιμή απόδοσης.

1.4.1 Αποτελεσματικά βάρη δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο

Ελαχιστοποιούμε την διακύμανση

$$\min_{w_1, w_2} \sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} \quad (1.22)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\bar{r}_p = \mu = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 \quad (1.23)$$

και

$$w_1 + w_2 = 1. \quad (1.24)$$

Η διανυσματική μορφή είναι:

$$\min_{\mathbf{w}} \sigma_p^2 = \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (1.25)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\bar{r}_p = \mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}} = \mu \quad (1.26)$$

και

$$\mathbf{w}' \mathbf{1} = 1. \quad (1.27)$$

Η εύρεση του διανύσματος βαρών που ελαχιστοποιούν την διακύμανση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης του *Lagrange*:

$$\min_{\mathbf{w}} L = \frac{1}{2} \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda_1 [\mu - \mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}}] + \lambda_2 [1 - \mathbf{w}' \mathbf{1}], \quad (1.28)$$

όπου, λ_1 και λ_2 οι πολλαπλασιαστές *Lagrange*.

Οι συνθήκες 1ης τάξης είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda_1 \bar{\mathbf{r}} - \lambda_2 \mathbf{1} = 0 \Rightarrow \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} = \lambda_1 \bar{\mathbf{r}} + \lambda_2 \mathbf{1} \Rightarrow \quad (1.29)$$

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} + \lambda_2 \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_1} = \mu - \mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \mu = \mathbf{w}' \bar{\mathbf{r}} \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{w}' \mathbf{1} = 0 \Rightarrow 1 = \mathbf{w}' \mathbf{1}. \quad (1.32)$$

Η συνθήκη 2ης τάξης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}^2} = \frac{\partial(\mathbf{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda_1 \bar{\mathbf{r}} - \lambda_2 \mathbf{1})}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{\Sigma} > 0, \quad (1.33)$$

δηλαδή, επειδή η μήτρα $\mathbf{\Sigma}$ είναι θετικά ορισμένη, έχουμε ελάχιστο.

Για να προσδιορίσουμε τα αποτελεσματικά βάρη αρκεί να βρούμε τους πολλαπλασιαστές *Lagrange*, λ_1 και λ_2 .

Από τις (1.30) και (1.31) προκύπτει ότι:

$$\mu = \lambda_1 \bar{\mathbf{r}}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} + \lambda_2 \mathbf{1}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} = \lambda_1 b_0 + \lambda_2 b_1 \quad (1.34)$$

και από τις (1.30) και (1.32) προκύπτει ότι:

$$1 = \lambda_1 \bar{\mathbf{r}}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{1}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \quad (1.35)$$

όπου

$$b_0 = \bar{\mathbf{r}}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}},$$

$$b_1 = \mathbf{1}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1},$$

$$b_2 = \mathbf{1}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}.$$

Λύνοντας το σύστημα των (1.34) και (1.35) έχουμε ότι:

$$\lambda_1 = \frac{b_2\mu - b_1}{b_0b_2 - b_1^2} \text{ και } \lambda_2 = \frac{b_0 - b_1\mu}{b_0b_2 - b_1^2}.$$

Άρα τα αποτελεσματικά βάρη είναι:

$$\mathbf{w}_\bullet = \begin{bmatrix} w_{1\bullet} \\ w_{2\bullet} \end{bmatrix} = \frac{b_2\mu - b_1}{b_0b_2 - b_1^2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} + \frac{b_0 - b_1\mu}{b_0b_2 - b_1^2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}. \quad (1.36)$$

1.4.2 Αποτελεσματικά βάρη με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο

Ελαχιστοποιούμε την διακύμανση

$$\min_{w_1, w_2} \sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} \quad (1.37)$$

υπό τον περιορισμό

$$\bar{r}_p = \mu = r_f + w_1(\bar{r}_1 - r_f) + w_2(\bar{r}_2 - r_f). \quad (1.38)$$

Η διανυσματική του μορφή είναι:

$$\min_{\mathbf{w}} \sigma_p^2 = \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (1.39)$$

υπό τον περιορισμό

$$\bar{r}_p = \mu = r_f + \mathbf{w}' \tilde{\mathbf{r}}. \quad (1.40)$$

Η εύρεση του διανύσματος βαρών που ελαχιστοποιούν την διακύμανση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης του *Lagrange*:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda [\mu - r_f - \mathbf{w}' \tilde{\mathbf{r}}], \quad (1.41)$$

όπου λ ο πολλαπλασιαστής *Lagrange*.

Οι συνθήκες 1ης τάξης είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda \tilde{\mathbf{r}} = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda} = \mu - r_f - \mathbf{w}' \tilde{\mathbf{r}} = 0. \quad (1.43)$$

Η συνθήκη 2ης τάξης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}^2} = \frac{\partial(\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda \tilde{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{w}} = \boldsymbol{\Sigma} > 0, \quad (1.44)$$

δηλαδή, επειδή η μήτρα $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι θετικά ορισμένη, έχουμε ελάχιστο.

Από την (1.42) προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \lambda \tilde{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{w} = \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}. \quad (1.45)$$

Από την (1.43) προκύπτει ότι:

$$\mu - r_f = \mathbf{w}' \tilde{\mathbf{r}}. \quad (1.46)$$

Για να προσδιορίσουμε τα αποτελεσματικά βάρη αρκεί να βρούμε τον πολλαπλασιαστή *Lagrange*, λ . Αντικαθιστώντας την σχέση (1.45) στην σχέση (1.46) έχουμε

$$\begin{aligned} \mu - r_f &= \lambda \tilde{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{\mu - r_f}{b} \end{aligned} \quad (1.47)$$

όπου

$$b = \tilde{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} = b_0 - 2b_1 r_f + b_2 r_f^2. \quad (1.48)$$

Επομένως τα αποτελεσματικά βάρη είναι τα εξής:

$$\mathbf{w}_\bullet = \begin{bmatrix} w_{1\bullet} \\ w_{2\bullet} \end{bmatrix} = \frac{(\mu - r_f)}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}. \quad (1.49)$$

§ 1.5 Αποτελεσματικά σύνορα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Αποτελεσματικό σύνορο λέγεται το σύνολο όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων [4].

1.5.1 Αποτελεσματικό σύνορο δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο.

Αντικαθιστώντας τα αποτελεσματικά βάρη στην διακύμανση μπορούμε να βρούμε το αποτελεσματικό σύνορο:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \\
 &= \mathbf{w}' \Sigma \left(\frac{b_2 \mu - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{r}} + \frac{b_0 - b_1 \mu}{b_0 b_2 - b_1^2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \right) \\
 &= \frac{b_2 \mu - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} \mathbf{w}' \cdot \bar{\mathbf{r}} + \frac{b_0 - b_1 \mu}{b_0 b_2 - b_1^2} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{1} \\
 &= \frac{b_2 \mu - b_1}{b_0 b_2 - b_1^2} \mu + \frac{b_0 - b_1 \mu}{b_0 b_2 - b_1^2} 1 \\
 &= \frac{b_0 - 2b_1 \mu + b_2 \mu^2}{b_0 b_2 - b_1^2}.
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Επομένως το αποτελεσματικό σύνορο στο επίπεδο $\bar{r}_p \times \sigma_p$ είναι

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{b_0 - 2b_1 \mu + b_2 \mu^2}{b_0 b_2 - b_1^2}}. \tag{1.51}$$

1.5.2 Αποτελεσματικό σύνορο με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο.

Αντικαθιστώντας τα αποτελεσματικά βάρη στην διακύμανση μπορούμε να βρούμε το αποτελεσματικό σύνορο:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}. \\
 &= \frac{(\mu - r_f)}{b} \tilde{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \frac{(\mu - r_f)}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \\
 &= \left(\frac{\mu - r_f}{b} \right)^2 \tilde{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \\
 &= \frac{(\mu - r_f)^2}{b}.
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Από την (1.52) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{b}}(\mu - r_f) \text{ και } \mu = r_f + \sqrt{b}\sigma_p, \tag{1.53}$$

οι οποίες δίνουν το αποτελεσματικό σύνορο στο επίπεδο $\bar{r}_p \times \sigma_p$. Το αποτελεσματικό σύνορο με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο ταυτίζεται με την γραμμή κεφαλαιαγοράς (*Capital Market Line*). Λόγω αυτού, από εδώ και στο εξής το αποτελεσματικό σύνορο με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο θα συμβολίζεται ως *CML*.

Η κλίση του αποτελεσματικού συνόρου με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο είναι η εξής:

$$\sqrt{b} = \frac{\mu - r_f}{\sigma_p}.$$

§ 1.6 Δύο οριακές περιπτώσεις χαρτοφυλακίων

Υπάρχουν δύο οριακές περιπτώσεις χαρτοφυλακίων οι οποίες είναι οι εξής: Το χαρτοφυλάκιο f με απόδοση r_f και $w_0 = 1$ όπου,

$$\mu_f = r_f \text{ και } \sigma_f^2 = 0 \text{ και}$$

το επαπτόμενο χαρτοφυλάκιο T που ταυτίζεται με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς M εφόσον έχουμε αποτελεσματική αγορά. Για το χαρτοφυλάκιο M ισχύει ότι:

$$w_0 = 0 \text{ και } w_1 + w_2 = 1.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\mathbf{w}'_M \mathbf{1} = 1$ και $\mathbf{w}_M = \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}$, τα βάρη του επαπτόμενου χαρτοφυλακίου ή χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι ίσα με

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_T = \mathbf{w}_M &= \frac{\lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}}{\mathbf{w}'_T \mathbf{1}} = \frac{\lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}}{\lambda \tilde{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{(\bar{\mathbf{r}}' - \mathbf{1}' r_f) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{\bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} - \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} r_f} \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{b_1 - b_2 r_f}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου $M = T$ είναι ίση με

$$\begin{aligned} \mu_T = \mu_M = \mathbf{w}'_T \bar{\mathbf{r}} &= \frac{(\bar{\mathbf{r}}' - \mathbf{1}' r_f) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}}}{b_1 - b_2 r_f} \\ &= \frac{\bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} r_f}{b_1 - b_2 r_f} \\ &= \frac{b_0 - b_1 r_f}{b_1 - b_2 r_f}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου $M = T$ είναι ίση με

$$\begin{aligned}
 \sigma_T^2 = \sigma_M^2 = \mathbf{w}'_T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_T &= \frac{(\bar{\mathbf{r}}' - \mathbf{1}' r_f) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{(b_1 - b_2 r_f)(b_1 - b_2 r_f)} \\
 &= \frac{\bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} - 2 \bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} r_f + \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} r_f^2}{(b_1 - b_2 r_f)^2} \\
 &= \frac{b_0 - 2b_1 r_f + b_2 r_f^2}{(b_1 - b_2 r_f)^2} \\
 &= \frac{b}{(b_1 - b_2 r_f)^2}. \tag{1.56}
 \end{aligned}$$

Κάθε χαρτοφυλάκιο μπορεί να εκφραστεί ως σταθμικός μέσος των δύο οριακών χαρτοφυλακίων [3]. Η πρόταση αυτή αποτελεί το θεώρημα του διαχωρισμού των χαρτοφυλακίων του αποτελεσματικού συνόρου στην περίπτωση που υπάρχουν περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο. Πράγματι, έστω K ένα χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται ανάμεσα στο f και το $M = T$. Τότε, η μέση τιμή της απόδοσης του K είναι η εξής:

$$\mu_K = \phi r_f + (1 - \phi) \mu_M,$$

όπου, ϕ βάρος για το οποίο ισχύει ότι:

$$0 < \phi < 1.$$

Η διακύμανση του K είναι η εξής:

$$\sigma_K^2 = \phi^2 \text{var}(r_f) + (1 - \phi)^2 \text{var}(r_M) + 2\phi(1 - \phi) \text{cov}(r_M, r_f) = (1 - \phi)^2 \sigma_M^2.$$

Όταν το χαρτοφυλάκιο βρίσκεται ανάμεσα στα χαρτοφυλάκια f και $M = T$ για το ϕ ισχύει ότι $0 < \phi < 1$ ενώ όταν βρίσκεται δεξιά του $M = T$ για το ϕ ισχύει ότι $\phi < 0$.

§ 1.7 Επιλογή Βέλτιστου Χαρτοφυλακίου

Το αποτελεσματικό σύνολο είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων. Όμως η επιλογή του επενδυτή εξαρτάται από τις προτιμήσεις του σχετικά με τον κίνδυνο.

Οι προτιμήσεις του επενδυτή μπορούν να ληφθούν υπόψη αν χρησιμοποιήσουμε τις καμπύλες αδιαφορίας.

Ως βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ορίζουμε αυτό με την μεγαλύτερη δυνατή αναμενόμενη χρησιμότητα μεταξύ όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων [3].

Οι συντεταγμένες του σημείου ισορροπίας που ορίζουν το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο προσδιορίζονται πλήρως εξισώνοντας την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας με την κλίση του αποτελεσματικού συνόρου.

Η κλίση του αποτελεσματικού συνόρου είναι η εξής:

$$\frac{d(\sigma_p^2)^{\frac{1}{2}}}{d\mu} = \frac{1}{2}(\sigma_p^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\sigma_p^2}{d\mu} = \frac{1}{2}(\sigma_p^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{b}(\mu - r_f). \quad (1.57)$$

Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας είναι η εξής:

$$\frac{d(\sigma_p^2)^{\frac{1}{2}}}{d\mu} = \frac{1}{2}(\sigma_p^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\sigma_p^2}{d\mu} = \frac{1}{2}(\sigma_p^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2(a_1 - a_2\mu)}{a_2}. \quad (1.58)$$

Τις εξισώνουμε και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_p^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{b}(\mu - r_f) &= \frac{1}{2}(\sigma_p^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2(a_1 - a_2\mu)}{a_2} \Rightarrow \\ \frac{1}{b}(\mu - r_f) &= \frac{(a_1 - a_2\mu)}{a_2} \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η

$$\mu_E = \frac{a_1 b + a_2 r_f}{a_2(1 + b)}, \quad (1.59)$$

που είναι η αναμενόμενη (μέση) τιμή της απόδοσης ισορροπίας και η

$$\sigma_E = \frac{\sqrt{b}}{1 + b} \frac{(a_1 - a_2 r_f)}{a_2}, \quad (1.60)$$

που είναι η τυπική απόκλιση ισορροπίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕ ΦΟΥΣΚΑ

§ 2.1 Δεδομένα της Αγοράς υπό την Επίδραση της Φούσκας

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. Φούσκα χρηματιστηριακών τιμών είναι μια κατάσταση στην οποία οι τιμές των μετοχών (ή άλλων εμπορεύσιμων αξιών) αυξάνονται πάρα πολύ και φτάνουν σε επίπεδα υπερβολικά υψηλά σε σχέση με την θεμελιώδη αξία τους, δηλαδή την τιμή που δημιουργείται με βάση τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά τους [4].

Η δημιουργία της φούσκας κάνει τον επενδυτή να πιστεύει ότι οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων “1” και “2” είναι πολλαπλασιασμένες με l_1 και l_2 αντίστοιχα, όπου $l_1 \geq 1$, $l_2 \geq 1$. Επομένως οι αποδόσεις υπό την επίδραση φούσκας γίνονται ως εξής:

$$r_{i*} = l_i r_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Η αναμενόμενη (μέση) τιμή των αποδόσεων είναι η εξής:

$$\bar{r}_{i*} = E(r_{i*}) = l_i \bar{r}_i \geq \bar{r}_i. \quad (2.2)$$

Η διακύμανση των αποδόσεων είναι η εξής:

$$\sigma_{i*}^2 = \text{var}(r_{i*}) = \text{var}(l_i r_i) = l_i^2 \sigma_i^2 \geq \sigma_i^2. \quad (2.3)$$

Η συνδιακύμανση μεταξύ των r_{1*} και r_{2*} είναι η εξής:

$$\sigma_{12*} = \rho_{12} l_1 l_2 \sigma_1 \sigma_2 = l_1 l_2 \sigma_{12} \geq \sigma_{12}. \quad (2.4)$$

Ορίζουμε 2×2 μήτρα

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (1.4) ορίζουμε τα 2×1 διανύσματα

$$\mathbf{w}_* := \begin{bmatrix} w_{1*} \\ w_{2*} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} \\ \bar{r}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \bar{r}_1 \\ l_2 \bar{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} - r_f \\ \bar{r}_{2*} - r_f \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{r}}_* - \mathbf{1}r_f = \mathbf{L}\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1}r_f, \quad (2.7)$$

καθώς και την 2×2 μήτρα

$$\begin{aligned} \Sigma_* &:= \begin{bmatrix} \sigma_{1*}^2 & \sigma_{12*} \\ \sigma_{12*} & \sigma_{2*}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 \sigma_1^2 & l_1 l_2 \sigma_{12} \\ l_1 l_2 \sigma_{12} & l_2^2 \sigma_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\Sigma\mathbf{L}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

όπου, \mathbf{w}_* το διάνυσμα των βαρών, $\bar{\mathbf{r}}_*$ το διάνυσμα των αποδόσεων, $\tilde{\mathbf{r}}_*$ το διάνυσμα των ασφαλίσεων κινδύνου και Σ_* η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης, υπό την επίδραση της φούσκας. Ισχύει ότι:

$$\tilde{r}_{i*} = l_i \bar{r}_i - r_f \geq \bar{r}_i - r_f = \tilde{r}_i, \quad \text{δεδομένου ότι } l_i \geq 1. \quad (2.9)$$

ΛΗΜΜΑ 2.1. *Ισχύει ότι: $\|\tilde{\mathbf{r}}_*\| \geq \|\tilde{\mathbf{r}}\|$.*

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $l_i \geq 1$ προκύπτει ότι $l_i \bar{r}_i \geq \bar{r}_i$, απ' όπου συνεπάγεται ότι $l_i \bar{r}_i - r_f \geq \bar{r}_i - r_f \Rightarrow (l_i \bar{r}_i - r_f)^2 \geq (\bar{r}_i - r_f)^2$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{r}}_*\| &= (\tilde{\mathbf{r}}_*' \tilde{\mathbf{r}}_*)^{\frac{1}{2}} = \left([l_1 \bar{r}_1 - r_f, l_2 \bar{r}_2 - r_f] \begin{bmatrix} l_1 \bar{r}_1 - r_f \\ l_2 \bar{r}_2 - r_f \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(l_1 \bar{r}_1 - r_f)^2 + (l_2 \bar{r}_2 - r_f)^2} \\ &\geq \sqrt{(\bar{r}_1 - r_f)^2 + (\bar{r}_2 - r_f)^2} = \|\tilde{\mathbf{r}}\|. \end{aligned}$$

□

Για την απόδοση χαρτοφυλακίου υπό την επίδραση της φούσκας, **πριν** μεταβληθούν τα βάρη, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} r'_p &= w_0 r_f + w_1 r_{1*} + w_2 r_{2*} \\ &= w_0 r_f + w_1 l_1 r_1 + w_1 l_2 r_2 \\ &\geq w_0 r_f + w_1 r_1 + w_2 r_2 = r_p \end{aligned} \quad (2.10)$$

Για την αναμενόμενη (μέση) τιμή υπό την επίδραση της φούσκας, **πριν** μεταβληθούν τα βάρη, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \bar{r}'_p = E(r'_p) &= w_0 r_f + w_1 \bar{r}_{1*} + w_2 \bar{r}_{2*} \\ &= w_0 r_f + w_1 l_1 \bar{r}_1 + w_1 l_2 \bar{r}_2 \\ &\geq w_0 r_f + w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 = \bar{r}_p \end{aligned} \quad (2.11)$$

Για το άθροισμα των ποσοστών κεφαλαίου, υπό την επίδραση της φούσκας, ισχύει ότι:

$$w_{0*} + w_{1*} + w_{2*} = 1, \quad (2.12)$$

το οποίο δηλώνει ότι το προς επένδυση κεφάλαιο επενδύεται εξ ολοκλήρου.

Ορίζουμε ως r_{p*} την απόδοση του χαρτοφυλακίου, P_* , υπό την επίδραση της φούσκας, για την οποία ισχύει

$$r_{p*} = w_{0*} r_f + w_{1*} r_{1*} + w_{2*} r_{2*} \quad (2.13)$$

με αναμενόμενη (μέση) τιμή

$$E(r_{p*}) = \bar{r}_{p*} = r_f + w_{1*}(\bar{r}_{1*} - r_f) + w_{2*}(\bar{r}_{2*} - r_f)$$

και διακύμανση

$$\sigma_{p*}^2 = \text{var}(r_{p*}) = w_{1*}^2 \sigma_{1*}^2 + w_{2*}^2 \sigma_{2*}^2 + 2w_{1*} w_{2*} \sigma_{12*}.$$

§ 2.2 Συμπεριφορά του Αντιπροσωπευτικού Επενδυτή υπό την Επίδραση της Φούσκας

Η συνάρτηση χρησιμότητας του αντιπροσωπευτικού επενδυτή υπό την επίδραση της φούσκας είναι η εξής:

$$U(r_{p^*}) = a_0 + a_1 r_{p^*} - \frac{1}{2} a_2 r_{p^*}^2 \quad (2.14)$$

$$\text{όπου } a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ και } r_{p^*} < \frac{a_1}{a_2}. \quad (2.15)$$

Η συνάρτηση αναμενόμενης χρησιμότητας υπό την επίδραση της φούσκας είναι εξής:

$$E(U(r_{p^*})) = a_0 + a_1 \bar{r}_{p^*} - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_{p^*}^2 + \sigma_{p^*}^2). \quad (2.16)$$

Η οποία μετονομάζεται σε:

$$V_*(r_{p^*}, \sigma_{p^*}^2) = a_0 + a_1 \bar{r}_{p^*} - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_{p^*}^2 + \sigma_{p^*}^2). \quad (2.17)$$

Η καμπύλη αδιαφορίας που αντιστοιχεί σε αναμενόμενη χρησιμότητα \bar{V}_* είναι η εξής:

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{2a_0 + 2a_1 \bar{r}_{p^*} - a_2 \bar{r}_{p^*}^2 - 2\bar{V}_*}{a_2}}, \quad (2.18)$$

την οποία εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε λύνοντας το τριώνυμο:

$$\frac{1}{2} a_2 \bar{r}_{p^*}^2 - a_1 \bar{r}_{p^*} + \left(\frac{1}{2} a_2 \sigma_{p^*}^2 + \bar{V}_* - a_0 \right) = 0 \text{ ως προς } \bar{r}_{p^*}. \quad (2.19)$$

§ 2.3 Υπολογισμός Αποτελεσματικών βαρών υπό την Επίδραση της Φούσκας

2.3.1 Αποτελεσματικά βάρη δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας

Υπό την επίδραση της φούσκας τα αποτελεσματικά βάρη αποτελούν λύση του ακόλουθου προβλήματος ελαχιστοποίησης.

$$\min_{w_{1*}, w_{2*}} \sigma_{p*}^2 = w_{1*}^2 \sigma_{1*}^2 + w_{2*}^2 \sigma_{2*}^2 + 2w_{1*} w_{2*} \sigma_{12*} \quad (2.20)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\bar{r}_{p*} = \mu_* = w_{1*} \bar{r}_{1*} + w_{2*} \bar{r}_{2*} \quad (2.21)$$

και

$$w_{1*} + w_{2*} = 1. \quad (2.22)$$

Η διανυσματική μορφή είναι:

$$\min_{\mathbf{w}_*} \sigma_{p*}^2 = \mathbf{w}'_* \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* \quad (2.23)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\bar{r}_{p*} = \mathbf{w}'_* \bar{\mathbf{r}}_* = \mu_* \quad (2.24)$$

και

$$\mathbf{w}'_* \mathbf{1} = 1. \quad (2.25)$$

Η εύρεση του διανύσματος βαρών που ελαχιστοποιούν την διακύμανση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης του *Lagrange*:

$$\min_{\mathbf{w}_*} L = \frac{1}{2} \mathbf{w}'_* \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* + \lambda_{1*} [\mu_* - \mathbf{w}'_* \bar{\mathbf{r}}_*] + \lambda_{2*} [1 - \mathbf{w}'_* \mathbf{1}], \quad (2.26)$$

όπου, λ_{1*} και λ_{2*} οι πολλαπλασιαστές *Lagrange*.

Οι συνθήκες 1ης τάξης είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\partial \mathbf{L}_*}{\partial \mathbf{w}_*} = \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* - \lambda_{1*} \bar{\mathbf{r}}_* - \lambda_{2*} \mathbf{1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* = \lambda_{1*} \bar{\mathbf{r}}_* + \lambda_{2*} \mathbf{1} \Rightarrow \quad (2.27)$$

$$\mathbf{w}_* = \lambda_{1*} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* + \lambda_{2*} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}_*}{\partial \lambda_{1*}} = \mu_* - \mathbf{w}'_* \bar{\mathbf{r}}_* = 0 \Rightarrow \mu_* = \mathbf{w}'_* \bar{\mathbf{r}}_* \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}_*}{\partial \lambda_{2*}} = 1 - \mathbf{w}'_* \mathbf{1} = 0 \Rightarrow 1 = \mathbf{w}'_* \mathbf{1}. \quad (2.30)$$

Η συνθήκη 2ης τάξης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{L}_*}{\partial \mathbf{w}_*^2} = \frac{\partial (\boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* - \lambda_{1*} \bar{\mathbf{r}}_* - \lambda_{2*} \mathbf{1})}{\partial \mathbf{w}_*} = \boldsymbol{\Sigma}_* > 0, \quad (2.31)$$

δηλαδή, επειδή η μήτρα $\boldsymbol{\Sigma}_*$ είναι θετικά ορισμένη, έχουμε ελάχιστο.

Για να προσδιορίσουμε τα αποτελεσματικά βάρη αρκεί να βρούμε τους πολλαπλασιαστές *Lagrange*, λ_{1*} και λ_{2*} .

Από τις (2.28) και (2.29) προκύπτει ότι:

$$\mu_* = \lambda_{1*} \bar{\mathbf{r}}'_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* + \lambda_{2*} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* = \lambda_{1*} b_{0*} + \lambda_{2*} b_{1*} \quad (2.32)$$

και από τις (2.28) και (2.30) προκύπτει ότι:

$$1 = \lambda_{1*} \bar{\mathbf{r}}'_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{2*} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} = \lambda_{1*} b_{1*} + \lambda_{2*} b_{2*} \quad (2.33)$$

όπου

$$b_{0*} = b_0 = \bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}'_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_*,$$

$$b_{1*} = \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* = \bar{\mathbf{r}}'_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1},$$

$$b_{2*} = \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1}.$$

Λύνοντας το σύστημα των (2.32) και (2.33) έχουμε ότι:

$$\lambda_{1*} = \frac{b_{2*} \mu_* - b_{1*}}{b_{0*} b_{2*} - b_{1*}^2} \text{ και } \lambda_{2*} = \frac{b_{0*} - b_{1*} \mu_*}{b_{0*} b_{2*} - b_{1*}^2}.$$

Άρα τα αποτελεσματικά βάρη είναι:

$$\mathbf{w}_{\bullet*} = \begin{bmatrix} w_{1\bullet*} \\ w_{2\bullet*} \end{bmatrix} = \frac{b_{2*}\mu_* - b_{1*}}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* + \frac{b_{0*} - b_{1*}\mu_*}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1}. \quad (2.34)$$

2.3.2 Αποτελεσματικά βάρη με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας

Υπό την επίδραση της φούσκας τα αποτελεσματικά βάρη αποτελούν λύση του ακόλουθου προβλήματος ελαχιστοποίησης.

$$\min_{w_{1*}, w_{2*}} \sigma_{p*}^2 = w_{1*}^2 \sigma_{1*}^2 + w_{2*}^2 \sigma_{2*}^2 + 2w_{1*}w_{2*}\sigma_{12*} \quad (2.35)$$

υπό τον περιορισμό

$$\bar{r}_{p*} = \mu_* = r_f + w_{1*}(\bar{r}_{1*} - r_f) + w_{2*}(\bar{r}_{2*} - r_f). \quad (2.36)$$

Η διανυσματική του μορφή είναι:

$$\min_{\mathbf{w}_*} \sigma_{p*}^2 = \mathbf{w}_*' \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* \quad (2.37)$$

υπό τον περιορισμό

$$\bar{r}_{p*} = \mu_* = r_f + \mathbf{w}_*' \tilde{\mathbf{r}}_*. \quad (2.38)$$

Η εύρεση του διανύσματος βαρών που ελαχιστοποιούν την διακύμανση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης του *Lagrange*:

$$\min_{\mathbf{w}_*} L_* = \frac{1}{2} \mathbf{w}_*' \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* + \lambda_* [\mu_* - r_f - \mathbf{w}_*' \tilde{\mathbf{r}}_*], \quad (2.39)$$

όπου λ_* ο πολλαπλασιαστής *Lagrange*.

Οι συνθήκες 1ης τάξης είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\partial \mathbf{L}_*}{\partial \mathbf{w}_*} = \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* - \lambda_* \tilde{\mathbf{r}}_* = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}_*}{\partial \lambda_*} = \mu_* - r_f - \mathbf{w}_*' \tilde{\mathbf{r}}_* = 0. \quad (2.41)$$

Η συνθήκη 2ης τάξης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{L}_*}{\partial \mathbf{w}_*^2} = \frac{\partial (\boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* - \lambda_* \tilde{\mathbf{r}}_*)}{\partial \mathbf{w}_*} = \boldsymbol{\Sigma}_* > 0, \quad (2.42)$$

δηλαδή, επειδή η μήτρα $\boldsymbol{\Sigma}_*$ είναι θετικά ορισμένη, έχουμε ελάχιστο. Από την (2.40) προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* = \lambda_* \tilde{\mathbf{r}}_* \Rightarrow \mathbf{w}_* = \lambda_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_*. \quad (2.43)$$

Από την (2.41) προκύπτει ότι:

$$\mu_* - r_f = \mathbf{w}_*' \tilde{\mathbf{r}}_*. \quad (2.44)$$

Για να προσδιορίσουμε τα αποτελεσματικά βάρη αρκεί να βρούμε τον πολλαπλασιαστή *Lagrange*, λ_* . Αντικαθιστώντας την σχέση (2.43) στην σχέση (2.44) έχουμε

$$\mu - r_f = \lambda \tilde{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tilde{\mathbf{r}} \Rightarrow \quad (2.45)$$

$$\lambda_* = \frac{\mu_* - r_f}{b_*}$$

όπου

$$b_* = \tilde{\mathbf{r}}_*' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_*. \quad (2.46)$$

Επομένως, τα αποτελεσματικά βάρη είναι τα εξής:

$$\mathbf{w}_{.*} = \begin{bmatrix} w_{1.*} \\ w_{2.*} \end{bmatrix} = \frac{(\mu_* - r_f)}{b_*} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_*. \quad (2.47)$$

§ 2.4 Αποτελεσματικό Σύνορο υπό την Επίδραση της Φούσκας

2.4.1 Αποτελεσματικό σύνορο δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας.

Αντικαθιστώντας τα αποτελεσματικά βάρη στην διακύμανση μπορούμε να βρούμε το αποτελεσματικό σύνορο:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p^*}^2 &= \mathbf{w}'_{.*} \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_{.*} \\
 &= \mathbf{w}'_{.*} \boldsymbol{\Sigma}_* \left(\frac{b_{2*}\mu_* - b_{1*}}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* + \frac{b_{0*} - b_{1*}\mu_*}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} \right) \\
 &= \frac{b_{2*}\mu_* - b_{1*}}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \mathbf{w}'_{.*} \bar{\mathbf{r}}_* + \frac{b_{0*} - b_{1*}\mu_*}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \mathbf{w}'_{.*} \mathbf{1} \\
 &= \frac{b_{2*}\mu_* - b_{1*}}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \mu_* + \frac{b_{0*} - b_{1*}\mu_*}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \\
 &= \frac{b_{0*} - 2b_{1*}\mu_* + b_{2*}\mu_*^2}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Επομένως, το αποτελεσματικό σύνορο στο επίπεδο $\bar{r}_p \times \sigma_p$ είναι

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{b_{0*} - 2b_{1*}\mu_* + b_{2*}\mu_*^2}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2}}. \tag{2.49}$$

2.4.2 Αποτελεσματικό σύνορο με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας .

Αντικαθιστώντας τα αποτελεσματικά βάρη στην διακύμανση μπορούμε να βρούμε το αποτελεσματικό σύνορο:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p^*}^2 &= \mathbf{w}'_* \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_* \\
 &= \frac{(\mu_* - r_f)}{b_*} \tilde{\mathbf{r}}_*' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_* \frac{(\mu_* - r_f)}{b_*} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_* \\
 &= \left(\frac{\mu_* - r_f}{b_*} \right)^2 \tilde{\mathbf{r}}_*' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_* \\
 &= \frac{(\mu_* - r_f)^2}{b_*}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Απο την (2.50) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{p^*} = \frac{1}{\sqrt{b_*}} (\mu_* - r_f) \text{ και } \mu_* = r_f + \sqrt{b_*} \sigma_{p^*}, \tag{2.51}$$

οι οποίες δίνουν το αποτελεσματικό σύνορο στο επίπεδο $\bar{r}_p \times \sigma_p$.

Το αποτελεσματικό σύνορο με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας, ταυτίζεται με την νέα γραμμή κεφαλαιαγοράς (*Capital Market Line*). Λόγω αυτού απο εδώ και στο εξής θα συμβολίζεται ως CML_* .

Η κλίση του αποτελεσματικού συνόρου είναι ίση με

$$\sqrt{b_*} = \frac{\mu_* - r_f}{\sigma_{p^*}}. \tag{2.52}$$

§ 2.5 Δύο Οριακές Περιπτώσεις Χαρτοφυλακίων υπό την Επίδραση της Φούσας

Υπάρχουν δύο οριακές περιπτώσεις χαρτοφυλακίων οι οποίες είναι οι εξής: Το χαρτοφυλάκιο f με απόδοση r_f και $w_{0*} = 1$ όπου,

$$\mu_f = r_f \text{ και } \sigma_f^2 = 0$$

και το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο T_* που ταυτίζεται με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς M_* εφόσον έχουμε αποτελεσματική αγορά. Για το χαρτοφυλάκιο M_* ισχύει

$$w_{0*} = 0 \text{ και } w_{1*} + w_{2*} = 1.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\mathbf{w}'_{T_*} \mathbf{1} = 1$ και $\mathbf{w}_{T_*} = \lambda_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_*$, τα βάρη του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου ή χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι ίσα με

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{T_*} = \mathbf{w}_{M_*} &= \frac{\lambda_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_*}{\mathbf{w}'_{T_*} \mathbf{1}} = \frac{\lambda_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_*}{\lambda_* \tilde{\mathbf{r}}_*' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} (\mathbf{L} \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{(\bar{\mathbf{r}}' \mathbf{L} - \mathbf{1}' r_f) \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} (\mathbf{L} \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{(\bar{\mathbf{r}}' \mathbf{L} - \mathbf{1}' r_f) \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} (\mathbf{L} \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{\bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1} - \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1} r_f} \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} (\mathbf{L} \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{b_{1*} - b_{2*} r_f}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου $M_* = T_*$ είναι ίση με

$$\begin{aligned} \mu_{T_*} = \mathbf{w}'_{T_*} \bar{\mathbf{r}}_* &= \frac{(\bar{\mathbf{r}}' \mathbf{L} - \mathbf{1}' r_f) \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{L} \bar{\mathbf{r}}}{b_{1*} - b_{2*} r_f} \\ &= \frac{\bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}} r_f}{b_{1*} - b_{2*} r_f} \\ &= \frac{b_{0*} - b_{1*} r_f}{b_{1*} - b_{2*} r_f}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου $M_* = T_*$ είναι ίση με

$$\begin{aligned}
 \sigma_{T_*}^2 = \mathbf{w}'_{T_*} \boldsymbol{\Sigma}_* \mathbf{w}_{T_*} &= \frac{(\bar{\mathbf{r}}' \mathbf{L} - \mathbf{1}' r_f) \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_* \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} (\mathbf{L} \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f)}{(b_{1*} - b_{2*} r_f)(b_{1*} - b_{2*} r_f)} \\
 &= \frac{\bar{\mathbf{r}}' \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \bar{\mathbf{r}}}{(b_{1*} - b_{2*} r_f)(b_{1*} - b_{2*} r_f)} \\
 &= \frac{2 \bar{\mathbf{r}}' \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1} r_f}{(b_{1*} - b_{2*} r_f)(b_{1*} - b_{2*} r_f)} \\
 &\quad + \frac{\mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1} r_f^2}{(b_{1*} - b_{2*} r_f)^2} \\
 &= \frac{b_{0*} - 2b_{1*} r_f + b_{2*} r_f^2}{(b_{1*} - b_{2*} r_f)^2} \\
 &= \frac{b_*}{(b_{1*} - b_{2*} r_f)^2}. \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Κάθε χαρτοφυλάκιο μπορεί να εκφραστεί ως σταθμικός μέσος των δύο οριακών χαρτοφυλακίων. Η πρόταση αυτή αποτελεί το θεώρημα του διαχωρισμού των χαρτοφυλακίων του αποτελεσματικού συνόρου στην περίπτωση που υπάρχουν περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο. Επομένως ισχύει ότι:

$$P_* = \phi_* f + (1 - \phi_*) M_* \text{ όπου, } \phi_*, \text{ βάρος.}$$

Η αναμενόμενη (μέση) τιμή της απόδοσης του P_* είναι

$$\mu_{p_*} = \phi_* r_f + (1 - \phi_*) \mu_{M_*},$$

και η διακύμανση της απόδοσης του P_* είναι

$$\sigma_{p_*}^2 = (1 - \phi_*)^2 \sigma_{M_*}^2.$$

§ 2.6 Επιλογή Βέλτιστου Χαρτοφυλακίου υπό την Επίδραση της Φούσκας

Έστω E_* το σημείο ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας. Τότε για να βρούμε το σημείο ισορροπίας αρκεί να εξισώσουμε την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας με την κλίση του αποτελεσματικού συνόρου.

Η κλίση του αποτελεσματικού συνόρου είναι η εξής:

$$\frac{d(\sigma_{p^*}^2)^{\frac{1}{2}}}{d\mu_*} = \frac{1}{2}(\sigma_{p^*}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\sigma_{p^*}^2}{d\mu_*} = \frac{1}{2}(\sigma_{p^*}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{b_*}(\mu_* - r_f). \quad (2.56)$$

Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας είναι η εξής:

$$\frac{d(\sigma_{p^*}^2)^{\frac{1}{2}}}{d\mu_*} = \frac{1}{2}(\sigma_{p^*}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\sigma_{p^*}^2}{d\mu_*} = 2 = \frac{1}{2}(\sigma_{p^*}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2(a_1 - a_2\mu_*)}{a_2}. \quad (2.57)$$

Τις εξισώνουμε και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{p^*}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{b_*}(\mu_* - r_f) &= \frac{1}{2}(\sigma_{p^*}^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{2(a_1 - a_2\mu_*)}{a_2} \Rightarrow \\ \frac{1}{b_*}(\mu_* - r_f) &= \frac{(a_1 - a_2\mu_*)}{a_2} \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η

$$\mu_{E^*} = \frac{a_1 b_* + a_2 r_f}{a_2(1 + b_*)}, \quad (2.58)$$

που είναι η αναμενόμενη (μέση) τιμή της απόδοσης ισορροπίας και η

$$\sigma_{E^*} = \frac{\sqrt{b_*}}{1 + b_*} \frac{(a_1 - a_2 r_f)}{a_2}, \quad (2.59)$$

που είναι η τυπική απόκλιση ισορροπίας.

§ 2.7 Παραδείγματα

2.7.1 Παράδειγμα 1

Έστω $l_1 = l_2 = l$ τότε η μήτρα \mathbf{L} γίνεται

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix},$$

τα διανύσματα $\bar{\mathbf{r}}_*$, $\tilde{\mathbf{r}}_*$ γίνονται

$$\bar{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} \\ \bar{r}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\bar{r}_1 \\ l\bar{r}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix} = l\bar{\mathbf{r}},$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} - r_f \\ \bar{r}_{2*} - r_f \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{r}}_* - \mathbf{1}r_f = \mathbf{L}\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1}r_f = l\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1}r_f,$$

και η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης Σ_* γίνεται

$$\begin{aligned} \Sigma_* &:= \begin{bmatrix} \sigma_{1*}^2 & \sigma_{12*} \\ \sigma_{12*} & \sigma_{2*}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2\sigma_1^2 & l^2\sigma_{12} \\ l^2\sigma_{12} & l^2\sigma_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l^2 & 0 \\ 0 & l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = l^2 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^2 \Sigma = \mathbf{L} \Sigma \mathbf{L} = l^2 \Sigma. \end{aligned}$$

Τα αποτελεσματικά βάρη δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φύσκας γι' αυτό το παράδειγμα είναι :

$$\mathbf{w}_{.*} = \begin{bmatrix} w_{1.*} \\ w_{2.*} \end{bmatrix} = \frac{b_{2*}\mu_* - b_{1*}}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \Sigma_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_* + \frac{b_{0*} - b_{1*}\mu_*}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \Sigma_*^{-1} \mathbf{1}.$$

όπου

$$\begin{aligned} b_{0*} &= b_0 = \bar{\mathbf{r}}_*' \Sigma_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_* = l\bar{\mathbf{r}}' l^{-2} \Sigma^{-1} l\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}' \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{r}}, \\ b_{1*} &= \mathbf{1}' \Sigma_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_* = \bar{\mathbf{r}}_*' \Sigma_*^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \Sigma^{-1} l\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}' \Sigma^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{l} b_1, \end{aligned}$$

$$b_{2*} = \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{l_2^2} b_2.$$

Ενώ τα αποτελεσματικά βάρη με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φούσκας γί' αυτό το παράδειγμα είναι :

$$\mathbf{w}_{.*} = \begin{bmatrix} w_{1.*} \\ w_{2.*} \end{bmatrix} = \frac{(\mu_* - r_f)}{b_*} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_*$$

όπου

$$b_* = b_{0*} - 2b_{1*}r_f + b_{2*}r_f^2 = b_0 - 2\frac{1}{l}b_1r_f + \frac{1}{l^2}b_2r_f^2.$$

2.7.2 Παράδειγμα 2

Έστω $l_1 = 1$ τότε η μήτρα \mathbf{L} γίνεται

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix},$$

τα διανύσματα $\bar{\mathbf{r}}_*$, $\tilde{\mathbf{r}}_*$ γίνονται

$$\bar{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} \\ \bar{r}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ l_2 \bar{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} - r_f \\ \bar{r}_{2*} - r_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 - r_f \\ l_2 \bar{r}_2 - r_f \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{r}}_* - \mathbf{1}r_f = \mathbf{L}\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{1}r_f$$

και η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης $\boldsymbol{\Sigma}_*$ γίνεται

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_* &:= \begin{bmatrix} \sigma_{1*}^2 & \sigma_{12*} \\ \sigma_{12*} & \sigma_{2*}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\sigma_1^2 & l_2\sigma_{12} \\ l_2\sigma_{12} & l_2^2\sigma_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}. \end{aligned}$$

Τα αποτελεσματικά βάρη δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φύσκας γί' αυτό το παράδειγμα είναι :

$$\mathbf{w}_{.*} = \begin{bmatrix} w_{1.*} \\ w_{2.*} \end{bmatrix} = \frac{b_{2*}\mu_* - b_{1*}}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* + \frac{b_{0*} - b_{1*}\mu_*}{b_{0*}b_{2*} - b_{1*}^2} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1}.$$

όπου

$$\begin{aligned} b_{0*} &= b_0 = \bar{\mathbf{r}}_*' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_*, \\ b_{1*} &= \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \bar{\mathbf{r}}_* = \bar{\mathbf{r}}_*' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1}, \\ b_{2*} &= \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Ενώ τα αποτελεσματικά βάρη με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φύσκας γί' αυτό το παράδειγμα είναι :

$$\mathbf{w}_{.*} = \begin{bmatrix} w_{1.*} \\ w_{2.*} \end{bmatrix} = \frac{(\mu_* - r_f)}{b_*} \boldsymbol{\Sigma}_*^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_* \quad (2.60)$$

όπου

$$b_* = b_{0*} - 2b_{1*}r_f + b_{2*}r_f^2.$$

2.7.3 Παράδειγμα 3

Έστω $l_1 = l_2 = 1$ τότε η μήτρα \mathbf{L} γίνεται

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

τα διανύσματα $\bar{\mathbf{r}}_*$, $\tilde{\mathbf{r}}_*$ γίνονται

$$\bar{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} \\ \bar{r}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\bar{r}_1 \\ 1\bar{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{r}},$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_* := \begin{bmatrix} \bar{r}_{1*} - r_f \\ \bar{r}_{2*} - r_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 - r_f \\ \bar{r}_2 - r_f \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{r}}$$

και η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης Σ_* γίνεται

$$\begin{aligned}\Sigma_* &:= \begin{bmatrix} \sigma_{1*}^2 & \sigma_{12*} \\ \sigma_{12*} & \sigma_{2*}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\sigma_1^2 & 1\sigma_{12} \\ 1\sigma_{12} & 1\sigma_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \Sigma\end{aligned}$$

Τα αποτελεσματικά βάρη δίχως περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φύσκας γί αυτό το παράδειγμα είναι :

$$\mathbf{w}_{.*} = \begin{bmatrix} w_{1.*} \\ w_{2.*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1.} \\ w_{2.} \end{bmatrix} = \mathbf{w}.$$

όπου

$$b_{0*} = b_0$$

$$b_{1*} = b_1$$

$$b_{2*} = b_2.$$

Ενώ τα αποτελεσματικά βάρη με περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, υπό την επίδραση της φύσκας γί αυτό το παράδειγμα είναι :

$$\mathbf{w}_{.*} = \begin{bmatrix} w_{1.*} \\ w_{2.*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1.} \\ w_{2.} \end{bmatrix} = \mathbf{w}. \quad (2.61)$$

όπου

$$b_* = b.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

§ 3.1 Σύγκριση των b και b_*

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.11) έχουμε

$$\bar{r}'_p \geq \bar{r}_p, \quad (3.1)$$

οπότε αφαιρώντας το r_f και διαιρώντας την παράσταση με σ_p έχουμε

$$\frac{\bar{r}'_p - r_f}{\sigma_p} \geq \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}. \quad (3.2)$$

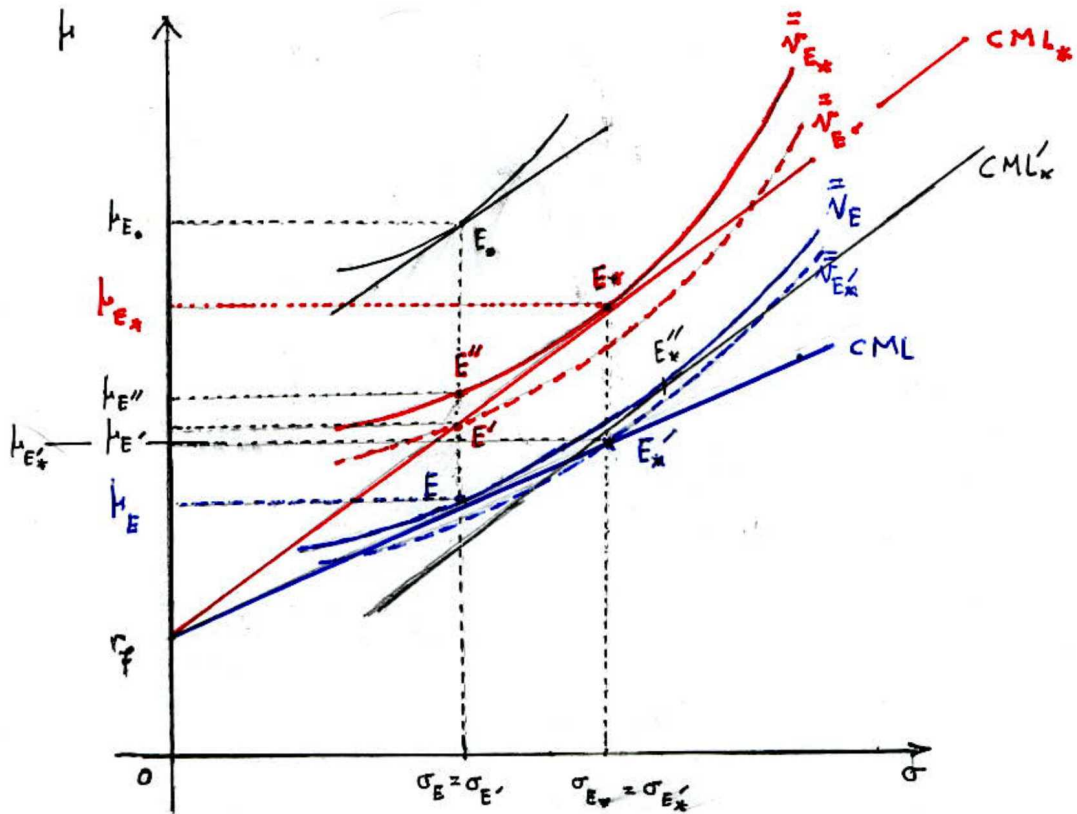
Από την ανισότητα (3.2) έπεται ότι

$$\sqrt{b_*} \geq \sqrt{b}. \quad (3.3)$$

§ 3.2 Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E , E' , E_* και E'_*

Σε αυτή την ενότητα θα συγκρίνουμε τα χαρτοφυλάκια E , E' , E_* και E'_* . Καθένα από αυτά τα χαρτοφυλάκια αντιστοιχεί σ' ένα ζεύγος κινδύνου-απόδοσης ως εξής:

1. χαρτοφυλάκιο E : σ_E , $\bar{r}_E = r_f + \sqrt{b}\sigma_E$
2. χαρτοφυλάκιο E' : $\sigma_{E'}$, $\bar{r}_{E'} = r_f + \sqrt{b_*}\sigma_E$
3. χαρτοφυλάκιο E_* : σ_{E_*} , $\bar{r}_{E_*} = r_f + \sqrt{b_*}\sigma_{E_*}$
4. χαρτοφυλάκιο E'_* : $\sigma_{E'_*}$, $\bar{r}_{E'_*} = r_f + \sqrt{b}\sigma_{E_*}$



Σχήμα 3.1: Ο κύκλος κινήσεων του αντιπροσωπευτικού επενδυτή.

1. χαρτοφυλάκιο E : σ_E , $\bar{r}_E = r_f + \sqrt{b}\sigma_E$
2. χαρτοφυλάκιο E' : $\sigma_{E'} = \sigma_E$, $\bar{r}_{E'} = r_f + \sqrt{b_*}\sigma_E$
3. χαρτοφυλάκιο E_* : σ_{E_*} , $\bar{r}_{E_*} = r_f + \sqrt{b_*}\sigma_{E_*}$
4. χαρτοφυλάκιο E'_* : $\sigma_{E'_*} = \sigma_{E_*}$, $\bar{r}_{E'_*} = r_f + \sqrt{b}\sigma_{E_*}$

3.2.1 Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E και E'

Θα συγκρίνουμε τις συντεταγμένες των σημείων E και E' :

Κάνουμε την εικασία ότι, λόγω ύπαρξης της φούσκας, ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής αναμένει να λάβει αποδόσεις r_f , r_{1*} και r_{2*} για το αρχικό χαρτοφυλάκιο E με βάρη w_{0E} , w_{1E} και w_{2E} , αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής παρμερμηνεύει την πραγματική κατάσταση, με αποτέλεσμα, να μπερδεύει το αρχικό χαρτοφυλάκιο E , που βρίσκεται στην CML , με το χαρτοφυλάκιο E' , που βρίσκεται στην CML_* , το οποίο διατηρεί τα βάρη του E , καθώς και την τυπική του απόκλιση. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$\sigma_{E'} = \sigma_E. \quad (3.4)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής αναμένει να λάβει αυξημένες αποδόσεις για τα περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο του. Επειδή από την (3.3) έχουμε $\sqrt{b_*} \geq \sqrt{b}$, παίρνουμε:

$$\bar{r}_{E'} = r_f + \sigma_E \sqrt{b_*} \geq r_f + \sigma_E \sqrt{b} = \bar{r}_E. \quad (3.5)$$

ΛΗΜΜΑ 3.1. *Ισχύει ότι $a_1 - \frac{1}{2}a_2(\bar{r}_{E'} + \bar{r}_E) > 0$.*

Απόδειξη. Από την συμπεριφορά του αντιπροσωπευτικού επενδυτή γνωρίζουμε ότι $r_E < \frac{a_1}{a_2}$ και $r_{E'} < \frac{a_1}{a_2}$. Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες έχουμε

$$r_{E'} + r_E < \frac{2a_1}{a_2} \quad (3.6)$$

και παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή της τελευταίας ανισότητας έχουμε

$$\begin{aligned} E(r_{E'} + r_E) = \bar{r}_{E'} + \bar{r}_E &< \frac{2a_1}{a_2} \Rightarrow \\ -\frac{1}{2}a_2(\bar{r}_{E'} + \bar{r}_E) &> -a_1 \Rightarrow \\ a_1 - \frac{1}{2}a_2(\bar{r}_{E'} + \bar{r}_E) &> 0. \end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας την (3.4), την (3.5) και το Λήμμα 3.1 μπορούμε να συγκρίνουμε τις αναμενόμενες χρησιμότητες των σημείων E και E' :

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_{E'} - \bar{V}_E &= a_0 + a_1 \bar{r}_{E'} - \frac{1}{2} a_2 \bar{r}_{E'}^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 \\
 &\quad - a_0 - a_1 \bar{r}_E + \frac{1}{2} a_2 \bar{r}_E^2 + \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 \\
 &= a_1 (\bar{r}_{E'} - \bar{r}_E) - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_{E'}^2 - \bar{r}_E^2) \\
 &= (\bar{r}_{E'} - \bar{r}_E) \left(a_1 - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_{E'} + \bar{r}_E) \right) > 0 \Rightarrow \\
 \bar{V}_{E'} &> \bar{V}_E.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Στην (3.7) βλέπουμε ότι η ύπαρξη της φούσκας αυξάνει την αναμενόμενη χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού επενδυτή. Ως συνέπεια ύπαρξης της φούσκας, ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής παρερμηνεύει την πραγματική κατάσταση της αγοράς και πιστεύει ότι το αρχικό του χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο E' . Όμως αυτό δεν είναι σημείο ισορροπίας, επομένως, έχει κίνητρο να πάει στο χαρτοφυλάκιο E_* ώστε να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα του.

3.2.2 Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E_* και E'_*

Θα συγκρίνουμε τις συντεταγμένες των σημείων E_* και E'_* :

Κάνουμε την εικασία ότι, λόγω ύπαρξης της φούσκας και των αντίστοιχων αναμενόμενων τιμών των αποδόσεων r_f , r_{1*} και r_{2*} , ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής αναλαμβάνει μεγαλύτερο κίνδυνο ίσο με σ_{E_*} επενδύοντας το κεφάλαιο του στο χαρτοφυλάκιο E_* . Όμως, η κεφαλαιαγορά αδυνατεί, μακροχρόνια, να αποζημιώσει κίνδυνο τέτοιου μεγέθους, με αποτέλεσμα, ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής να πιστεύει ότι επένδυσε στο E_* , που βρίσκεται στην CML_* , ενώ στην πραγματικότητα έχει επενδύσει στο E'_* , που βρίσκεται στην CML , το οποίο διατηρεί τα βάρη του E_* καθώς και την τυπική του απόκλιση. Συνεπώς ισχύει

ότι:

$$\sigma_{E'_*} = \sigma_{E_*}. \quad (3.8)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής ενώ αναμένει να λάβει αποδόσεις στην CML_* με κλίση $\sqrt{b_*}$ θα λάβει αποδόσεις στην CML με κλίση \sqrt{b} . Επειδή από την (3.3) έχουμε $\sqrt{b_*} \geq \sqrt{b}$, παίρνουμε:

$$\bar{r}_{E_*} = r_f + \sigma_{E_*} \sqrt{b_*} \geq r_f + \sigma_{E_*} \sqrt{b} = \bar{r}_{E'_*}. \quad (3.9)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.8), την (3.9) και το Λήμμα 3.1 μπορούμε να συγκρίνουμε τις αναμενόμενες χρησιμότητες των σημείων E_* και E'_* :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{E'_*} - \bar{V}_{E_*} &= a_0 + a_1 \bar{r}_{E'_*} - \frac{1}{2} a_2 \bar{r}_{E'_*}^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_{E_*}^2 \\ &\quad - a_0 - a_1 r_{E_*} + \frac{1}{2} a_2 \bar{r}_{E_*}^2 + \frac{1}{2} a_2 \sigma_{E_*}^2 \\ &= a_1 (\bar{r}_{E'_*} - \bar{r}_{E_*}) - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_{E'_*}^2 - \bar{r}_{E_*}^2) \\ &= (\bar{r}_{E'_*} - \bar{r}_{E_*}) (a_1 - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_{E'_*} + \bar{r}_{E_*})) < 0 \Rightarrow \\ \bar{V}_{E'_*} &< \bar{V}_{E_*}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Στην (3.10) βλέπουμε ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού επενδυτή στο χαρτοφυλάκιο E_* υπερβαίνει την αναμενόμενη χρησιμότητα του E'_* .

3.2.3 Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E και E'_*

Τα χαρτοφυλάκια E , E' και E'' έχουν την ίδια τυπική απόκλιση σ_E . Η μετακίνηση από το χαρτοφυλάκιο E στο χαρτοφυλάκιο E_* ενσωματώνει το αποτέλεσμα εισοδήματος και το αποτέλεσμα υποκατάστασης. Η μετακίνηση από το χαρτοφυλάκιο E στο χαρτοφυλάκιο E'' είναι το αποτέλεσμα εισοδήματος, ενώ η μετακίνηση από το E'' στο E_* είναι το αποτέλεσμα υποκατάστασης. Εναλλακτικά το αποτέλεσμα υποκατάστασης μπορεί να μετρηθεί επί της αρχικής καμπύλης αδιαφορίας \bar{V}_E

στο σημείο που αυτή εφάπτεται με την CML'_* η οποία είναι παράλληλη με την CML_* . Σε αυτό το σημείο επαφής η κλίση της \bar{V}_E ισούται με $\sqrt{b_*} \geq \sqrt{b}$ που είναι η κλίση της \bar{V}_E στο σημείο E . Άρα, στο χαρτοφυλάκιο $E'_* : \bar{r}_{E'_*}, \sigma_{E'_*}$, η κλίση της \bar{V}_E ισούται με $\sqrt{b_*} \geq \sqrt{b}$ απ' όπου έπεται ότι $\sigma_{E'_*} > \sigma_E$. Άρα, το αποτέλεσμα υποκατάστασης οδηγεί σε μεγαλύτερο κίνδυνο και συνεπώς στο E_* ισχύει $\sigma_{E_*} > \sigma_E$.

Θα συγκρίνουμε τις συντεταγμένες των σημείων E και E'_* :

Για τις διακυμάνσεις ισχύει ότι:

$$\sigma_{E'_*} = \sigma_{E_*} = \frac{\sqrt{b_*}}{1+b_*} \frac{(a_1 - a_2 r_f)}{a_2} = \frac{\sqrt{b_*}(1+b)}{\sqrt{b}(1+b_*)} \sigma_E = k_2 \sigma_E > \sigma_E, \quad (3.11)$$

όπου $k_2 = \frac{\sqrt{b_*}(1+b)}{\sqrt{b}(1+b_*)}$.

ΛΗΜΜΑ 3.2. *Ισχύει ότι $k_2 > 1$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\sigma_{E_*} > \sigma_E$. Όμως $\sigma_{E'_*} = \sigma_{E_*} = k_2 \sigma_E$ απ' όπου έπεται ότι $k_2 > 1$. □

Για τις αναμενόμενες (μέσες) τιμές των αποδόσεων ισχύει ότι:

$$\bar{r}_{E'_*} = r_f + \sigma_{E_*} \sqrt{b} = r_f + k_2 \sigma_E \sqrt{b} = \bar{r}_E + (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b} \geq \bar{r}_E, \quad (3.12)$$

$$\bar{r}_{E'_*}^2 = \bar{r}_E^2 + 2\bar{r}_E(k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b} + (k_2 - 1)^2 \sigma_E^2 b. \quad (3.13)$$

ΛΗΜΜΑ 3.3. *Ισχύει ότι $-(1 + k_2) < -2$.*

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $k_2 > 1 \Rightarrow 1 + k_2 > 2 \Rightarrow -(1 + k_2) < -2$. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3 μπορούμε να συγκρίνουμε τις αναμενόμενες χρησιμότητες των σημείων E και E'_* :

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_{E'_*} &= a_0 + a_1 \bar{r}_{E'_*} - \frac{1}{2} a_2 \bar{r}_{E'_*}^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_{E'_*}^2 \\
 &= a_0 + a_1 (\bar{r}_E + (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_E^2 + 2 \bar{r}_E (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b} + (k_2 - 1)^2 \sigma_E^2 b) \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 (\sigma_E^2 + (k_2^2 - 1) \sigma_E^2) \\
 &= \bar{V}_E + a_1 (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b} \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 (2(k_2 - 1) (r_f + \sigma_E \sqrt{b}) \sigma_E \sqrt{b} + (k_2 - 1)^2 \sigma_E^2 b) \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 ((k_2^2 - 1) \sigma_E^2) \\
 &= \bar{V}_E + a_1 ((k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b}) - a_2 (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b} r_f \\
 &\quad - a_2 (k_2 - 1) \sigma_E^2 b - \frac{1}{2} a_2 (k_2^2 - 2k_2 + 1) \sigma_E^2 b \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 k_2^2 + \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 \\
 &= \bar{V}_E + ((k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b}) (a_1 - a_2 r_f) \\
 &\quad - a_2 k_2 b \sigma_E^2 + a_2 b \sigma_E^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 k_2^2 b \\
 &\quad + a_2 k_2 b \sigma_E^2 - \frac{1}{2} a_2 b \sigma_E^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 k_2^2 + \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{E'_*} - \bar{V}_E &= (k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f) + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 b \\
&\quad + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 - \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 k_2^2 b - \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 k_2^2 \\
&= (k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f) \\
&\quad + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2(b + 1) - \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 k_2^2(b + 1) \\
&= (k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f) \\
&\quad + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2(b + 1)(1 - k_2^2) \\
&= (k_2 - 1)\sigma_E (\sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2}a_2\sigma_E(b + 1)(1 + k_2)) \\
&= (k_2 - 1)\sigma_E (\sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2}a_2 \frac{\sqrt{b}}{b + 1} \frac{(a_1 - a_2 r_f)}{a_2} (b + 1)(1 + k_2)) \\
&= (k_2 - 1)\sigma_E (\sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2}\sqrt{b}(1 + k_2)(a_1 - a_2 r_f)) \\
&< (k_2 - 1)\sigma_E (\sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2}2\sqrt{b}(a_1 - a_2 r_f)) = 0 \Rightarrow \\
\bar{V}_{E'_*} &< \bar{V}_E. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Στην (3.14) βλέπουμε ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού επενδυτή στο χαρτοφυλάκιο E υπερβαίνει την αναμενόμενη χρησιμότητα του E'_* .

3.2.4 Σύγκριση των χαρτοφυλακίων E' και E_*

Θα συγκρίνουμε τις συντεταγμένες των σημείων E' και E_* :

Για τις διακυμάνσεις ισχύει ότι:

$$\sigma_{E_*} = k_2\sigma_{E'} = k_2\sigma_E > \sigma_{E'} \tag{3.15}$$

Για την αναμενόμενες (μέσες) τιμές των αποδόσεων ισχύει ότι:

$$\bar{r}_{E_*} = r_f + \sigma_{E_*} \sqrt{b_*} = r_f + k_2\sigma_E \sqrt{b_*} = \bar{r}_{E'} + (k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b_*} \geq \bar{r}_{E'} \tag{3.16}$$

$$\bar{r}_{E_*}^2 = \bar{r}_{E'}^2 + 2\bar{r}_{E'}(k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b_*} + (k_2 - 1)^2\sigma_E^2 b_* \tag{3.17}$$

ΛΗΜΜΑ 3.4. *Ισχύει ότι $-\frac{(1+b_*)\sqrt{b}}{(1+b)} > -\sqrt{b_*}$*

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $k_2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{k_2} < 1 \Rightarrow \frac{(1+b_*)\sqrt{b}}{(1+b)\sqrt{b_*}} < 1 \Rightarrow \frac{(1+b_*)\sqrt{b}}{(1+b)} < \sqrt{b_*} \Rightarrow -\frac{(1+b_*)\sqrt{b}}{(1+b)} > -\sqrt{b_*}$ \square

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4 μπορούμε να συγκρίνουμε τις αναμενόμενες χρησιμότητες των σημείων E_* και E' :

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_{E_*} &= a_0 + a_1 \bar{r}_{E_*} - \frac{1}{2} a_2 \bar{r}_{E_*}^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_{E_*}^2 \\
 &= a_0 + a_1 (\bar{r}_{E'} + (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b_*}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 (\bar{r}_{E'}^2 + 2 \bar{r}_{E'} (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b_*} + (k_2 - 1)^2 \sigma_E^2 b_*) \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 (\sigma_E^2 + (k_2^2 - 1) \sigma_E^2) \\
 &= \bar{V}_{E'} + a_1 (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b_*} \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 (2(k_2 - 1) (r_f + \sigma_E \sqrt{b_*}) \sigma_E \sqrt{b_*} + (k_2 - 1)^2 \sigma_E^2 b_*) \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 ((k_2^2 - 1) \sigma_E^2) \\
 &= \bar{V}_{E'} + a_1 ((k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b_*}) - a_2 (k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b_*} r_f \\
 &\quad - a_2 (k_2 - 1) \sigma_E^2 b_* - \frac{1}{2} a_2 (k_2^2 - 2k_2 + 1) \sigma_E^2 b_* \\
 &\quad - \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 k_2^2 + \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 \\
 &= \bar{V}_{E'} + ((k_2 - 1) \sigma_E \sqrt{b_*}) (a_1 - a_2 r_f) \\
 &\quad - a_2 k_2 b_* \sigma_E^2 + a_2 b_* \sigma_E^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 k_2^2 b_* \\
 &\quad + a_2 k_2 b_* \sigma_E^2 - \frac{1}{2} a_2 b_* \sigma_E^2 - \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 k_2^2 + \frac{1}{2} a_2 \sigma_E^2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_{E_*} - \bar{V}_{E'} &= (k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 b_* \\
 &\quad + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 - \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 k_2^2 b_* - \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 k_2^2 \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \\
 &\quad + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 (b_* + 1) - \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 k_2^2 (b_* + 1) \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \\
 &\quad + \frac{1}{2}a_2\sigma_E^2 (b_* + 1)(1 - k_2^2) \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \left(\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2}a_2\sigma_E (b_* + 1)(1 + k_2) \right) \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \left(\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}a_2 \frac{\sqrt{b}}{b+1} \frac{(a_1 - a_2 r_f)}{a_2} (b_* + 1)(1 + k_2) \right) \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \left(\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}a_2 \frac{\sqrt{b}}{b+1} \frac{(a_1 - a_2 r_f)}{a_2} (b_* + 1) \left(1 + \frac{\sqrt{b_*}(1+b)}{\sqrt{b}(1+b_*)} \right) \right) \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \left(\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}a_2 \frac{1}{b+1} \frac{(a_1 - a_2 r_f)}{a_2} (\sqrt{b_*}(1+b) + \sqrt{b}(1+b_*)) \right) \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \left(\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{b+1} (a_1 - a_2 r_f) (\sqrt{b_*}(1+b) + \sqrt{b}(1+b_*)) \right) \\
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \left(\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}(1+b_*)}{(b+1)} (a_1 - a_2 r_f) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (k_2 - 1)\sigma_E \left(\frac{1}{2}\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}(1 + b_*)}{(b + 1)}(a_1 - a_2 r_f) \right) \\
 &> (k_2 - 1)\sigma_E \left(\frac{1}{2}\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) - \frac{1}{2}\sqrt{b_*}(a_1 - a_2 r_f) \right) = 0 \Rightarrow \\
 \bar{V}_{E_*} &> \bar{V}_{E'}. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Στην (3.18) βλέπουμε ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού επενδυτή στο χαρτοφυλάκιο E_* υπερβαίνει την αναμενόμενη χρησιμότητα του E' . Ως συνέπεια ύπαρξης της φούσκας, το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας E_* βρίσκεται σε υψηλότερη καμπύλη αδιαφορίας συγκριτικά με το E' . Αυτό κάνει τον αντιπροσωπευτικό επενδυτή να αναλαμβάνει μεγαλύτερο κίνδυνο και να επενδύει μεγαλύτερο ποσοστό κεφαλαίου σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο ενώ παράλληλα επενδύει μικρότερο ποσοστό κεφαλαίου σε περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο. Όμως, στην πραγματικότητα οι μόνες αποζημιώσεις που μπορεί να λάβει ο επενδυτής προκύπτουν από την CML με κλίση \sqrt{b} .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

§ 4.1 Ανάλυση των χαρτοφυλακίων E , E' , E_* και E'_*

Τα τέσσερα χαρτοφυλάκια που συγκρίθηκαν παραπάνω δηλώνουν τις κινήσεις του αντιπροσωπευτικού επενδυτή πριν, κατά την διάρκεια και μετά την κατάρρευση της φούσκας και περιγράφονται ως εξής [5]:

1. Χαρτοφυλάκιο E : Είναι το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας πριν την ύπαρξη φούσκας, το οποίο βρίσκεται στην CML .
2. Χαρτοφυλάκιο E' : Είναι το χαρτοφυλάκιο που περιγράφει την παρερμηνεία των συνθηκών της Αγοράς, εκ μέρους του αντιπροσωπευτικού επενδυτή υπό την επίδραση της φούσκας, το οποίο βρίσκεται στην CML_* .
3. Χαρτοφυλάκιο E_* : Είναι το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας, το οποίο βρίσκεται στην CML_* .
4. Χαρτοφυλάκιο E'_* : Είναι το χαρτοφυλάκιο που περιγράφει τις πραγματικές αναμενόμενες αποδόσεις του αντιπροσωπευτικού επενδυτή μακροχρόνια, δηλαδή μετά την κατάρρευση της φούσκας, το οποίο βρίσκεται στην CML .

§ 4.2 Κύκλος Κινήσεων του Αντιπροσωπευτικού Επενδυτή

Ο κύκλος κινήσεων του αντιπροσωπευτικού επενδυτή πριν, κατά την διάρκεια και μετά την κατάρρευση της φούσκας είναι ο ακόλουθος:

Πριν την ύπαρξη φούσκας, ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής κρατεί το χαρτοφυλάκιο ισορροπίας E . Όμως, η επίδραση της φούσκας κάνει τον αντιπροσωπευτικό επενδυτή να πιστεύει ότι κρατεί το χαρτοφυλάκιο E' , που του δίνει υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση. Εφόσον τα ασφάλιστρα κινδύνου υπό την

επίδραση της φούσκας είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα πραγματικά ασφάλιστρα κινδύνου, ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής έχει κίνητρο να αναλάβει μεγαλύτερο κίνδυνο προκειμένου να μεγιστοποιήσει τις αναμενόμενες αποδόσεις, με δεδομένο τον κίνδυνο που ανελήφθη. Ως αποτέλεσμα, ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής κινείται κατά μήκος της CML_* ώστε να καταλήξει στο χαρτοφυλάκιο ισορροπίας υπό την επίδραση της φούσκας, E_* . Ωστόσο, το E_* περιγράφει τις βραχυχρόνιες αναμενόμενες αποδόσεις του αντιπροσωπευτικού επενδυτή, τις οποίες θα εισπράξει αν ρευστοποιήσει την επένδυση του πριν την κατάρρευση της φούσκας. Στην περίπτωση που ο επενδυτής διατηρήσει την επένδυση του μακροχρόνια (μετά την κατάρρευση της φούσκας), οι αναμενόμενες αποδόσεις που θα εισπράξει περιγράφονται από το E'_* που βρίσκεται στην CML . Συνεπώς, οι μόνες αναμενόμενες αποδόσεις που μπορούν να εισπραχθούν μακροχρόνια είναι αυτές που καθορίζονται από την CML . Αυτό σημαίνει ότι, ενώ ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής πιστεύει ότι θα εισπράξει τις αναμενόμενες αποδόσεις του E_* , στην πραγματικότητα εισπράττει αυτές του E'_* που βρίσκεται στην CML . Με βάση αυτόν τον κύκλο ο αντιπροσωπευτικός επενδυτής επωμίζεται απώλειες αναμενόμενης χρησιμότητας λόγω της υπερβολικής έκθεσης του στον κίνδυνο υπό την επίδραση της φούσκας.

§ 4.3 Οικονομικώς Δρώντες

Υπάρχουν τέσσερις οικονομικώς δρώντες στην αγορά χρηματοοικονομικών επενδύσεων:

- Αρχές Κεφαλαιαγοράς
- Αναλυτές
- Διαχειριστές Κεφαλαίων
- Εκδότες Περιουσιακών Στοιχείων Χωρίς Κίνδυνο,

των οποίων η συμπεριφορά αναλύεται παρακάτω.

4.3.1 Η Συμπεριφορά του Αναλυτή

Σε ακμάζουσες οικονομικά κοινωνίες, δημιουργείται έντονος ανταγωνισμός γύρω από τον επενδυτικό τομέα, καθώς παίζει αναπτυξιακό ρόλο στην οικονομία. Οι αναλυτές λειτουργούν “ως εάν ήθελαν να προσελκύσουν κεφάλαια σε συγκεκριμένους κλάδους επενδύσεων.” Ο ανταγωνισμός για προσέλκυση επενδυτικών κεφαλαίων επηρεάζεται σημαντικά από τις γνώμες που διατυπώνουν οι αναλυτές, ιδιαίτερος σε κλάδους καινοτόμων επιχειρήσεων. Ωστόσο, οι προβλέψεις των αναλυτών οδηγούν σε υπεραισιόδοξες προσδοκίες εκ μέρους των επενδυτών, που με την σειρά τους αναμένουν υψηλότερες των κανονικών αποδόσεις. Όμως η πραγματικότητα δεν επιβεβαιώνει πάντα την αισιοδοξία των δηλώσεων των αναλυτών, με αποτέλεσμα την δημιουργία φούσκας. Ωστόσο, ο ρόλος των αναλυτών δεν έχει ενεργό επίδραση στην αγορά, καθότι, δίνουν προβλέψεις χωρίς να διαχειρίζονται κεφάλαια.

4.3.2 Διαχειριστές Κεφαλαίων

Οι διαχειριστές κεφαλαίων είναι αυτοί που είτε διαχειρίζονται αμοιβαία κεφάλαια είτε κάνουν διακριτική διαχείριση χαρτοφυλακίων για ιδιώτες. Ως οικονομικώς δρώντες δεν έχουν κίνητρο να μειωθούν οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων, βραχυχρόνια. Επομένως δεν έχουν, βραχυχρόνια, ως κίνητρο την αποφυγή της φούσκας.

4.3.3 Οι Ευθύνες των Αρχών Κεφαλαιαγοράς

Επειδή δεν μπορεί να εξασφαλιστεί ο αυτοπεριορισμός των αναλυτών, αυτή η απαίτηση πρέπει να είναι ευθύνη των Αρχών της Κεφαλαιαγοράς. Εντούτοις, στις σύγχρονες καπιταλιστικές οικονομίες, οι αρχές κεφαλαιαγοράς, συχνά, ρέπουν προς την επίταση της απορύθμισης— ή μέτριας ρύθμισης—των χρηματοοικονομικών αγορών, καθώς στόχος τους είναι να μεγεθύνουν τον όγκο των επενδύσεων στην Κεφαλαιαγορά, προκειμένου να επιτύχουν τη μέγιστη δυνατή αποτελεσματικότητα του τέλει ανταγωνισμού. Οι Αρχές Κεφαλαιαγοράς είναι ρυθμιστική δύναμη και δεν συμμετέχουν ενεργά στις αγοραπωλησίες επενδυτικών αγαθών.

Συνεπώς, δεδομένων των κινήτρων των αναλυτών και τις συγχρονές πρακτικές των Αρχών Κεφαλαιαγοράς, ο σημαντικότερος παράγοντας που είναι ικανός να αποτρέψει την δημιουργία φούσκας, φαίνεται να είναι η συμπεριφορά των εκδοτών περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο που αναλύεται παρακάτω.

4.3.4 Η Συμπεριφορά των Εκδοτών Περιουσιακών Στοιχείων Χωρίς Κίνδυνο

Η προτιμότερη προσέγγιση είναι η πειθαρχηση των εκδοτών περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο, προκειμένου να διατηρούνται οι αποδόσεις χωρίς κίνδυνο στο επίπεδο r_f , κάτι το οποίο, όπως εξηγείται διεξοδικά παρακάτω, φαίνεται να οδηγεί στην λήξη της φούσκας. Η επίδραση της φούσκας, η οποία “φουσκώνει”

τα ασφάλιστρα κινδύνου, κάνει τις επικίνδυνες επενδύσεις, φαινομενικά, πιο ελκυστικές συγκριτικά με τις αντίστοιχες ακίνδυνες. Επομένως, οι εκδότες περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο έχουν κίνητρο να φουσκώσουν την απόδοση χωρίς κίνδυνο, από r_f σε r_{f*} , προκειμένου να διατηρήσουν το μερίδιο τους στην προσέλκυση επενδυτικών κεφαλαίων. Στην πραγματικότητα, δεδομένης της νέας απόδοσης χωρίς κίνδυνο, r_{f*} , τα υπό την επίδραση της φούσκας ασφάλιστρα θα μειωθούν σε ένα χαμηλότερο επίπεδο, $\tilde{r}_{i*} = \bar{r}_{i*} - r_{f*} < \bar{r}_{i*} - r_f$. Επομένως, υπάρχει το κίνητρο οι αποδόσεις χωρίς κίνδυνο να συνεχίσουν να αυξάνουν μέχρι ότου τα ασφάλιστρα κινδύνου μειωθούν στο αρχικό προ φούσκας επίπεδο. Η αύξηση της απόδοσης χωρίς κίνδυνο r_{f*} οδηγεί στην μείωση των “φουσκωμένων ασφαλίσεων,” η οποία, αν συνεχιστεί, θα καταλήξει στην ταύτιση των “φουσκωμένων ασφαλίσεων” με τα πραγματικά ασφάλιστρα.

Παρότι η αύξηση των αποδόσεων χωρίς κίνδυνο φαίνεται να επιλύει το πρόβλημα της φούσκας, η λύση αυτή είναι εξαιρετικά επικίνδυνη, εφόσον δεν επιτρέπει στην Αγορά να επανέλθει στην προ φούσκας ισορροπία. Αυτό αποδίδεται σε δύο αιτίες: Πρώτον, βραχυχρόνια, η διαρκής αύξηση της απόδοσης χωρίς κίνδυνο καταλήγει στην ταύτιση των “φουσκωμένων” ασφαλίσεων κινδύνου με τα πραγματικά. Αυτό επισκιάζει την ύπαρξη φούσκας κάτι που καθιστά δυσκολότερη την αντίληψη της από τον αντιπροσωπευτικό επενδυτή, οδηγώντας τον στην ανάληψη όλο και μεγαλύτερου (εκτός ισορροπίας) κινδύνου. Δεύτερον, εφόσον η νέα, υπό την επίδραση της φούσκας απόδοση χωρίς κίνδυνο, r_{f*} , θεωρείται, εσφαλμένα, ότι αναπαριστά την αξία χρόνου των επενδυτικών κεφαλαίων, είναι πιθανόν να παράγει καταστροφικά αποτελέσματα στην οικονομία, μακροχρόνια. Αυτό συμβαίνει επειδή αυτή η αυξημένη αξία χρόνου του χρήματος προκαλεί την αύξηση των πραγματικών αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο σε ακόμη υψηλότερα επίπεδα προκειμένου να διατηρήσει το επίπεδο ισορροπίας των ασφαλίσεων κινδύνου. Όμως αυτές οι υψηλότερες πραγματικές αποδόσεις

σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο καθιστούν μη επικερδή έναν μεγάλο αριθμό επενδυτικών σχεδίων κατά την ώρα που η υλοποίηση αυτών των επενδύσεων αποτελεί επιτακτική ανάγκη για την οικονομία. Αυτό συμβαίνει διότι μια αύξηση των επενδύσεων θα μείωνε τις επικίνδυνες αποδόσεις στο μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας.

Για την αποφυγή των αρνητικών συμβάντων που έπονται της αύξησης της απόδοσης χωρίς κίνδυνο είναι σημαντικό οι εκδότες περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο να μην μεταβάλλουν το r_f από το πραγματικό προ φύσικας επίπεδο ισορροπίας. Η απόδοση χωρίς κίνδυνο είναι η αξία χρόνου του χρήματος. Επομένως, οποιαδήποτε αύξησή της κάνει τις ακίνδυνες επενδύσεις να φαίνονται επικίνδυνες. Συνεπώς, οι εκδότες περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο μπορούν να διατηρήσουν μόνο το μακροχρόνιο μερίδιο τους στην αγορά επενδυτικών κεφαλαίων. Τέλος, συμπεραίνεται ότι μόνο οι εκδότες περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο μπορούν να δυσχεράνουν την δημιουργία φύσικας, άρα είναι στην κρίση τους να αποδεχθούν βραχυχρόνιες μειώσεις του μεριδίου στην αγορά επενδυτικών κεφαλαίων, προκειμένου να επωφεληθεί μακροχρόνια η οικονομία. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί λόγω των ανύπαρκτων σχετικών κινήτρων.

§ 4.4 Συμπερασματικά Σχόλια

Η φύσκα είναι ένα φαινόμενο που αποπροσανατολίζει τον αντιπροσωπευτικό επενδυτή και τον οδηγεί σε εσφαλμένες αποφάσεις με αποτέλεσμα την χρηματική απώλεια άρα και απώλεια ευημερίας. Οι αναλυτές, οι Αρχές της Κεφαλαιαγοράς, όπως και οι εκδότες περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο μπορούν είτε να δυσχαιράνουν είτε να διευκολύνουν την δημιουργία φύσκας. Σημειωτέον, το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι εκδότες περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο, οι οποίοι μπορούν ενεργά να δυσχαιράνουν την δημιουργία φύσκας δεν έχουν κίνητρο να το κάνουν επομένως η φύσκα δεν μπορεί να αποφευχθεί παρά μόνο να μεγεθυνθεί μέχρις ότου καταρρεύσει. Άρα, το ερώρημα που ανακύπτει είναι πως μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα κίνητρο το οποίο να παρακινεί τους εκδότες περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο προς την αποτροπή δημιουργίας φύσκας.

Βιβλιογραφικές Αναφορές:

- [1] https://oikonomica.com/2012/01/14/tulip_mania/
- [2] <https://www.euretirio.com/xartofylakio-portfolio/>
- [3] Α. Πετραλιάς, Η. Τζαβαλής (2009), ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ, Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών
- [4] <https://www.euretirio.com/?s=bubble>
- [5] Σ. Συμεωνίδης και Γ. Σαπουντζόγλου (2016), “On financial bubbles, investment and investor’s utility”
- [6] Δ. Λαμπράκης (1980), ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, Β΄ Έκδοση (Αθήνα)