ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κατηγοριες Μοντελα

Βασιλικη Πετρωτου

Μεταπτυχιακη Διατριβη

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2015

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, υπό την επίβλεψη του **Καθηγητή κ. Απόστολου Μπεληγιάννη**.

Εγκρίθηκε την 19/1/2016 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

1. Μπεληγιαννης Αποστολος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
(Επιβλέπων Καθηγητής)
2. Αποστολος Θωμα, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
3. Σταυρος Παπαδακης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.»

Βασιλική Πετρωτού

Αφιερώνεται στον καθηγητή μου κ. Απόστολο Μπεληγιάννη
και στη γιαγιά μου Ανδρονίκη.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Οι κατηγορίες μοντέλα εισήχθησαν από τον Daniel Quillen το 1967 ως το κατάλληλο εννοιολογικό πλαίσιο για την θεμελίωση και ανάπτυξη μιας θεωρίας ομοτοπίας σε κατάλληλες κατηγορίες αλγεβρικής, γεωμετρικής ή τοπολογικής προέλευσης. Το ενδεικτικό παράδειγμα για την ανάπτυξη μιας αφηρημένης θεωρίας ομοτοπίας σε γενικά πλαίσια, αποτέλεσε η κατηγορία των τοπολογικών χώρων.

Εν συντομία, μια κατηγορία μοντέλο (model category) είναι μια κατηγορία $\mathcal{C}$ εφοδιασμένη με τρείς κλάσεις μορφισμών, τις ασθενείς ισοδυναμίες (*weak equivalences*), τις νηματώσεις (*fibrations*), και τις συννηματώσεις (*cofibrations*) έτσι ώστε να ικανοποιούνται πέντε Αξιώματα $\mathsf{MC}(1)$ - $\mathsf{MC}(5)$, (βλέπε Ορισμό 3.1.5).

Ο όρος «κατηγορία μοντέλο» είναι συντομογραφία του «κατηγορία μοντέλο για μια θεωρία ομοτοπίας». Το κεντρικό πρόβλημα σε μια θεωρία ομοτοπίας αποτελεί η ανάλυση της δομής της επαγόμενης ομοτοπικής κατηγορίας. Μια κατηγορία μοντέλο η οποία επάγει την ομοτοπική θεωρία αποτελεί το κατάλληλο πλαίσιο το οποίο μας επιτρέπει την ανάλυση και βαθύτερη κατανόηση της δομής της ομοτοπικής κατηγορίας. Σημειώνουμε ότι την ίδια θεωρία ομοτοπίας μπορούν να επάγουν διαφορετικές κατηγορίες μοντέλα.

Συμβολίζουμε με Top την κατηγορία των τοπολογικών χώρων και των συνεχών απεικονίσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων, στην οποία τους ισομορφισμούς αποτελούν οι ομοιομορφισμοί.

- **Κεντρικό πρόβλημα της Τοπολογίας**: Η ταξινόμηση, με ακρίβεια ομοιομορφισμού, όλων ή σημαντικών κλάσεων τοπολογικών χώρων. Ωστόσο, μία τέτοια ταξινόμηση θεωρείται *αδύνατη* τόσο πρακτικά όσο και θεωρητικά. Έτσι, στρεφόμαστε σε μια διαφορετικής μορφής ταξινόμηση, η οποία βασίζεται στην θεμελιώδη έννοια της ομοτοπίας.

Η βασική Αρχή η οποία διέπει την έννοια της ομοτοπίας μπορεί να συνοψισθεί στην ακόλουθη φράση:

« *Σε όποιο πλαίσιο εμφανίζεται μια έννοια ομοτοπίας, είναι κρυμμένη μια κατηγορία μοντέλο η οποία την επάγει* »

Η **ομοτοπική κατηγορία** $\mathsf{Ho}(\mathsf{Top})$ των τοπολογικών χώρων έχει ως αντικείμενα τους τοπολογικούς χωρούς και ως μορφισμούς από τον τοπολογικό χώρο X στον τοπολογικό χώρο Y, το σύνολο πηλίκο $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)/\!\sim$, όπου $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ είναι το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων $: X \longrightarrow Y$ και «$\sim$» είναι η σχέση ομοτοπίας μεταξύ δύο συνεχών απεικονίσεων η οποία είναι πάντα μια σχέση ισοδυναμίας. Οι ισομορφισμοί στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathsf{Top})$ είναι οι ομοτοπικές ισοδυναμίες μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Το «πέρασμα» στην ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathsf{Top})$ των τοπολογικών χώρων μπορεί να περιγραφεί ως αντικατάσταση των μορφισμών με τις ομοτοπικές τους κλάσεις. Στην κλασική θεωρία ομοτοπίας των τοπολογικών χώρων, τα CW-συμπλέγματα είναι οι τοπολογικοί χώροι με τις πλέον ευχάριστες ιδιότητες. Ωστόσο, ακόμη και όταν μια κατασκευή οδηγεί σε έναν τοπολογικό χώρο ο οποίος δεν είναι ένα CW-σύμπλεγμα, ο χώρος μπορεί να αντικατασταθεί από έναν ασθενώς ισοδύναμο χώρο ο οποίος είναι ένα CW-σύμπλεγμα. Έτσι, ασθενώς ισοδύναμοι χώροι θεωρούνται κατά κάποιο τρόπο ως «ισοδύναμοι» και σ' αυτό το πλαίσιο είναι χρήσιμη η θεώρηση των ασθενών ισοδυναμιών ως ισομορφισμών σε μια νέα κατηγορία. Η διαδικασία μετατροπής των ασθενών ισοδυναμιών σε ισομορφισμούς αποτελεί ένα θεμελιώδες παράδειγμα τοπικοποίησης και η παραγόμενη τοπικοποιημένη κατηγορία «συμπίπτει» με την κλασική ομοτοπική κατηγορία των τοπολογικών χώρων. Έτσι ομοτοπικοί μορφισμοί επάγουν τον ίδιο μορφισμό στην τοπικοποιημένη κατηγορία, και ένα κυτταρικό σύμπλεγμα ασθενώς ισοδύναμο με έναν χώρο γίνεται ισόμορφο στην ομοτοπική κατηγορία με αυτόν τον χώρο το οποίο δεν θα ήταν αληθές εάν απλώς αντικαθιστούσαμε τους μορφισμούς με τις ομοτοπικές τους κλάσεις.

• **Κεντρικό πρόβλημα της Θεωρίας Ομοτοπίας**: Η ταξινόμηση όλων ή σημαντικών κλάσεων τοπολογικών χώρων με ακρίβεια ομοτοπικής ισοδυναμίας.

Για να εξασφαλίσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα και ισχυρότερα εργαλεία και μεθόδους για την μελέτη της ομοτοπικής κατηγορίας, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ποιές συνεχείς απεικονίσεις επάγουν ομοτοπικές ισοδυναμίες, και γενικότερα ποιές κλάσεις μορφισμών στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων μας επιτρέπουν την βαθύτερη κατανόηση της δομής της ομοτοπικής κατηγορίας. Στο πλαίσιο αυτό, σχετικά νωρίς στην ανάπτυξη της θεωρίας ομοτοπίας, ξεχώρισαν τρεις κλάσεις μορφισμών μεταξύ τοπολογικών χώρων:

1. Οι *ασθενείς ομοτοπικές ισοδυναμίες*, δηλαδή οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων οι οποίες επάγουν ισομορφισμούς στις ομάδες ομοτοπίας.

2. Οι *νηματώσεις του Serre*, δηλαδή οι συνεχείς απεικονίσεις οι οποίες ικανοποιούν την ιδιότητα της ομοτοπικής ανύψωσης ως προς τα CW-συμπλέγματα.

3. Τα *σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα*, δηλαδή οι συμπτύξεις συνεχών εγκλείσεων τοπολογικών χώρων $X \longrightarrow Y$, όπου ο τοπολογικός χώρος Y προκύπτει από τον τοπολογικό χώρο X, προσαρτώντας στον X κελιά, με χρήση υπερπεπερασμένων συνθέσεων.

Ο Quillen απέδειξε στο θεμελιώδες βιβλίο του [32], ότι οι παραπάνω κλάσεις μορφισμών στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων ικανοποιούν έναν μικρό αριθμό αξιωμάτων. Επιπλέον απέδειξε ότι η ομοτοπική κατηγορία Ho(Top) είναι ισοδύναμη με την κατηγορία τοπικοποίησης Top$[\mathcal{W}^{-1}]$ η οποία προκύπτει από την κατηγορία Top, αντιστρέφοντας με τυπικό τρόπο την κλάση W των ασθενών ομοτοπικών ισοδυναμιών. Η παραπάνω θεώρηση αποδείχθηκε θεμελιώδους σημασίας στην περαιτέρω μελέτη και ανάλυση της δομής της ομοτοπικης κατηγορίας των τοπολογικών χώρων.

Ειδικότερα, επιθυμώντας να αντιστρέψει την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών με σκοπό να λάβει την ομοτοπική κατηγορία, χωρίς ωστόσο να χάσει τον έλεγχο των μορφισμών στην τοπικοποιημένη κατηγορία και επιπλέον να ορίσει την έννοια της ομοτοπίας στην αρχική κατηγορία $\mathcal{C}$, ο Quillen συνειδητοποιήσε ότι πέρα από την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών θα χρειαζόταν δύο επιπλέον κλάσεις μορφισμών: αυτές των συννηματώσεων και των νηματώσεων.

Με βάση το παράδειγμα των τοπολογικών χώρων, ο Quillen εισήγαγε τα αξιώματα τα οποία πρέπει να πληρούν οι ασθενείς ισοδυναμίες, οι νηματώσεις και συννηματώσεις μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ έτσι ώστε να είναι εφοδιασμένη με μια «ομοτοπική δομή» ανάλογη της ομοτοπικής δομής της κατηγορίας των τοπολογικών χώρων. Τα εν λόγω αξιώματα είναι ανάλογα των ιδιοτήτων των προαναφερθέντων τριών κλάσεων μορφισμών μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Όπως προαναφέραμε ένας μορφισμός $p\colon E \longrightarrow B$ καλείται **νημάτωση του Serre (Serre fibration)** εάν για κάθε μεταθετικό διάγραμμα (χωρίς το διακεκομμένο βέλος)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

όπου X είναι ένα CW-σύμπλεγμα, υπάρχει μορφισμός $h\colon X \times I \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $h \circ j = f$ και $p \circ h = g$ ο οποίος καλείται **ανύψωση (lift)**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο μορφισμός p έχει την **ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης (right lifting property (RLP))** ως προς τον j και ο μορφισμός j έχει την **ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης (left lifting property (LLP))** ως προς τον p.

Ο Quillen γενίκευσε τα παραπάνω, απαιτώντας:

- Κάθε νημάτωση σε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ να έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε τετριμμένη συννημάτωση (δηλαδή ως προς κάθε μορφισμό ο οποίος είναι εξίσου συννημάτωση και ασθενής ισοδυναμία).
- Κάθε τετριμμένη νημάτωση (δηλαδή κάθε μορφισμός ο οποίος είναι εξίσου νημάτωση και ασθενής ισοδυναμία) σε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ να έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε συννημάτωση.

διατυπώνοντας έτσι το λεγόμενο lifting Axiom. Ανάλογα, διατυπώθηκαν και τα υπόλοιπα Αξιώματα μιας κατηγορίας μοντέλο.

Στις περισσότερες κατηγορίες μοντέλα η έννοια της ομοτοπίας δεν έχει τις «καλές» ιδιότητες που έχει στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων. Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό επιλύεται εάν περιοριστούμε στην υποκατηγορία των συνινωδών-ινωδών αντικειμένων. Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο διαφορετικές σχέσεις ομοτοπίας στο σύνολο των μορφισμών μεταξύ δύο αντικειμένων X και Y:

- Η αριστερή ομοτοπία, η οποία ορίζεται μέσω του κυλινδρικού αντικειμένου για το X, και
- Η δεξιά ομοτοπία, η οποία ορίζεται μέσω του μονοπάτι αντικειμένου για το Y.

Για τυχαία αντικείμενα X και Y οι σχέσεις αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας διαφέρουν και καμία από αυτές δεν είναι σχέση ισοδυναμίας. Ωστόσο, για συνινώδη-ινώδη αντικείμενα ταυτίζονται δίνοντας μας την σχέση ομοτοπίας. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή κάθε μια από τις σχέσεις αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η έννοια της ομοτοπίας μεταξύ μορφισμών είναι ανάλογη με την έννοια της ομοτοπίας μεταξύ συνεχών απεικονίσεων.

Είναι γεγονός ότι κάθε αντικείμενο μιας κατηγορίας μοντέλο είναι ασθενώς ισοδύναμο με ένα συνινώδες-ινώδες αντικείμενο. Έτσι, ορίζεται η ομοτοπική κατηγορία των συνινωδών-ινωδών αντικειμένων $\mathsf{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$, η οποία έχει ως αντικείμενα τα συνινώδη-ινώδη αντικείμενα της κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τις κλάσεις ομοτοπίας των μορφισμών της. Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο αποτελεί γενίκευση του θεμελιώδους Θεωρήματος του Whitehead στην κατηγορία μοντέλο των τοπολογικών χώρων, πιστοποιεί ότι περιοριζόμενοι σε συνινώδη-ινώδη αντικείμενα μιας κατηγορίας μοντέλο, οι ασθενείς ισοδυναμίες συμπίπτουν με τις ομοτοπικές ισοδυναμίες.

Θεώρημα [J.H.C. Whitehead (1949)] *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ μεταξύ συνινωδών-ινωδών αντικειμένων σε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν είναι ομοτοπική ισοδυναμία.*

Ο **συναρτητής συνινώδους-ινώδους προσέγγισης** $RQ\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ στέλνει ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ στο συνινώδες-ινώδες αντικείμενο RQX της $\pi\mathcal{C}_{cf}$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην ομοτοπική κλάση του $RQ(f)\colon RQX \longrightarrow RQY$. Με χρήση του Θεωρήματος του Whitehead αποδεικνύεται ότι ο συναρτητής συνινώδους-ινώδους προσέγγισης στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες σε ισομορφισμούς και ακριβώς με αυτόν τον τρόπο ορίζεται η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$, (βλέπε Ορισμό 3.2.41).

Η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$, καθώς περιέχει μόνο τα συνινώδη-ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ δεν επαρκεί. Αυτό συμβαίνει διότι οι περισσότερες θεωρήσεις στην θεωρία ομοτοπίας απαιτούν κατασκευές οι οποίες δημιουργούν αντικείμενα τα οποία δεν είναι συνινώδη-ινώδη ακόμη και εάν ξεκινάμε μόνο με συνινώδη-ινώδη αντικείμενα. Έτσι, είναι απαραίτητη η εύρεση μιας ομοτοπικής κατηγορίας η οποία περιέχει όλα τα αντικείμενα της κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$. Η ομοτοπική κατηγορία η οποία ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα είναι η ομοτοπική κατηγορία του Quillen. Η ομοτοπική κατηγορία του Quillen $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ η οποία συνήθως αναφέρεται απλώς ως ομοτοπική κατηγορία, ορίζεται να είναι η τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών και μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα και ως κατάλληλη κατηγορία πηλίκο ώς προς τη σχέση Ομοτοπίας.

Παραδείγματα κατηγοριών μοντέλο εμφανίζονται και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε όλες τις περιοχές των Μαθηματικών, ενδεικτικά αναφέρουμε στην Άλγεβρα, στην Γεωμετρία, στην Ανάλυση, και φυσικά στην Τοπολογία.

Ένα από τα κύρια προβλήματα που επιλύουν οι κατηγορίες μοντέλο, υπογραμμίζοντας την χρησιμότητα τους, είναι το ακόλουθο: Δοθείσης μιας κατηγορίας συχνά έχουμε συγκεκριμένους μορφισμούς (ασθενείς ισοδυναμίες) οι οποίοι δεν είναι ισομορφισμοί μολονότι για δομικούς λόγους θα θέλαμε να τους θεωρούμε έτσι. Μέσω της θεωρίας τοπικοποίησης τυπικά κάποιος μπορεί να αντιστρέψει τις ασθενείς ισοδυναμίες και να τις υλοποιήσει ως ισομορφισμούς σε μια νέα κατηγορία, την κατηγορία τοπικοποίησης, ωστόσο στην περίπτωση αυτή χάνει τον έλεγχο των μορφισμών στην τοπικοποιημένη κατηγορία. Πιο συγκεκριμένα, οι μορφισμοί μεταξύ δύο αντικειμένων στην κατηγορία τοπικοποίησης μπορεί να μην είναι καν σύνολο. Ωστόσο εάν η κατηγορία είναι εφοδιασμένη με την δομή κατηγορίας μοντέλο, τους μορφισμούς στην κατηγορία τοπικοποίησης απο ένα αντικείμενο της X σε ένα αντικείμενο της Y αποτελούν οι ομοτοπικές κλάσεις των μορφισμών από μια συνινώδη προσέγγιση του X σε μια ινώδη προσέγγιση του Y, και επομένως η κλάση μορφισμών στην κατηγορία τοπικοποίησης αποτελούν σύνολο με δομή που μπορεί να περιγραφεί. Έτσι, καταλήγουμε ότι ο κυρίαρχος ρόλος της ιδέας της αντιστροφής των ασθενών ισοδυναμιών στα Μαθηματικά υποδηλώνει τη μεγάλη σημασία των κατηγοριών μοντέλο. Η χρησιμότητα τους είναι ιδιαίτερα εμφανής ως επι το πλείστον σε περιοχές οι οποίες σχετίζονται ιστορικά με την Αλγεβρική Τοπολογία, όπως η Ομολογική Άλγεβρα, η Αλγεβρική K-Θεωρία, η Αλγεβρική Γεωμετρία, και η Αλγεβρική Τοπολογία καθ' εαυτού. Όσον αφορά τις ομοτοπικές θεωρίες οι οποίες σχετίζονται με κατηγορίες μοντέλά είναι καθαρά αλγεβρικές και έχουν πραγματικές εφαρμογές στους προαναφερθέντες κλάδους καθώς επίσης και στον κλάδο της Αλγεβρικής Γεωμετρίας, της Θεωρίας Αριθμών, και της Θεωρίας Αναπαραστάσεων. Ιδιαίτερα οι κατηγορίες μοντέλα είναι θεμελιώδεις στην ανάπτυξη της αλγεβρικής ομοτοπικής θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα δοθέντος ενός τοπολογικού προβλήματος όπως για παράδειγμα αυτό της ανύψωσης ή της παραγοντοποίησης μιας συνεχούς απεικόνισης επιλέγουμε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ και έναν συναρτητή $F\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathcal{C}$ ο οποίος διατηρεί την σχέση ομοτοπίας. Κατόπιν μεταφράζουμε το τοπολογικό πρόβλημα με αλγεβρικούς όρους μέσω του συναρτητή F και εν συνεχεία μελετάμε το αλγεβρικό πρόβλημα που προκύπτει με σκοπό να αντλήσουμε κάποιες πληροφορίες για το τοπολογικό πρόβλημα.

Δύο από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των κατηγοριών μοντέλα είναι:

- Η κατασκευή της κλειστής συμμετρικής μονοειδούς κατηγορίας μοντέλο της οποίας η ομοτοπική κατηγορία είναι η ευσταθής ομοτοπική κατηγορία.

- Η δημιουργία της motivic ευσταθούς ομοτοπικής κατηγορίας από τον Vladimir Voevodsky μέσω της οποίας απέδειξε την εικασία του Milnor.

Και στις δύο περιπτώσεις το κύριο πλεονέκτημα της έννοιας της κατηγορίας μοντέλο είναι η εστίαση της προσοχής στην κατασκευή της σωστής κατηγορίας με την πεποίθηση ότι η θεωρία των κατηγοριών μοντέλα θα μπορούσε να «χειριστεί» την θεωρία ομοτοπίας.

• • •

Η μελέτη της γενικής θεωρίας των κατηγοριών μοντέλο καθώς και η ανάλυση βασικών παραδειγμάτων τέτοιων κατηγοριών αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας διατριβής. Η διατριβή είναι συνθετικού χαρακτήρα και οι κύριες πηγές στις οποίες βασίστηκε το κείμενο που ακολουθεί είναι το θεμελιώδες βιβλίο του Quillen [32], και οι σύγχρονες αναπτύξεις της θεωρίας οι οποίες περιέχονται στα βιβλία του Hovey [18] και του Hirschhorn [16].

Η διατριβή έχει οργανωθεί σε έξι Κεφάλαια και ένα Παράρτημα.

Στο πρώτο κεφάλαιο το οποίο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα αναπτύσουμε βασικές έννοιες της θεωρίας κατηγοριών. Παρουσιάζουμε την έννοια μιας κατηγορίας και μελετάμε βασικές ιδιότητες. Στην συνέχεια ορίζουμε την έννοια του συναρτητή και αναφερόμαστε σε φυσικούς μετασχηματισμούς καθώς και σε συζυγή ζεύγη συναρτητών. Κατόπιν εισάγουμε τις έννοιες του εξισωτή και του συνεξισωτή, οι οποίες αποτελούν γενίκευση του πυρήνα ενός ομομορφισμού και ενός πηλίκου με μια σχέση ισοδυναμίας αντίστοιχα. Επιπροσθέτως, ασχολούμαστε με δύο θεμελιώδεις κατασκευές αυτές των pullbacks και των pushouts οι οποίες με την σειρά τους αποτελούν γενικεύσεις της τομής και της ένωσης. Κλείνουμε το κεφάλαιο με μια αναφορά στα ενέσιμα και προβολικά πρότυπα, έννοιες κεντρικής σημασιάς για την Ομολογική Άλγεβρα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε την τοπικοποίηση μιας κατηγορίας εφοδιασμένης με μια κλάση μορφισμών. Ιδιαίτερα, αποδεικνύουμε την ύπαρξη της τοπικοποίησης της κατηγορίας όταν η κλάση των μορφισμών είναι τυχαία. Στην συνέχεια επικεντρωνόμαστε σε ειδικούς τύπους κλάσεων μορφισμών και αποδεικνύουμε την ύπαρξη της τοπικοποίησης στην ειδική αυτή περίπτωση. Τέλος ολοκληρώνουμε με μια αναφορά στην τοπικοποίηση της δυϊκής μιας κατηγορίας, καθώς και στην τοπικοποίηση των υποκατηγοριών.

Στο τρίτο κεφάλαιο παραθέτουμε τον ορισμό της κατηγορίας μοντέλο και παρουσιάζουμε την γενική τους θεωρία. Στην συνέχεια ορίζουμε την έννοια της ομοτοπίας μεταξύ μορφισμών σε μια κατηγορία μοντέλο και εξετάζουμε κατά πόσο αποτελεί σχέση ισοδυναμίας. Κατόπιν παρουσιάζουμε την κλασική ομοτοπική κατηγορία π_{cf} μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ δηλαδή την κατηγορία πηλίκο ως προς μια σχέση ομοτοπίας. Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο μελετώντας τις κατηγορίες των αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο υπεράνω και υπό ενός αντικειμένου της καθώς και την ομοτοπία αυτών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο ορίζουμε τις προσεγγίσεις σε αντικείμενα και σε μορφισμούς μιας κατηγορίας μοντέλο. Κατόπιν μελετάμε την κατασκευή της ομοτοπικής κατηγορίας, με την έννοια του Quillen, δηλαδή της κατηγορίας που προκύπτει αντιστρέφοντας τις ασθενείς ισοδυναμίες μέσω της τοπικοποίησης. Επιπλέον, μελετάμε την ομοτοπική κατηγορία η οποία προκύπτει εάν στραφούμε στην υποκατηγορία των συνινωδών-ινωδών αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$ μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι φυσικά ισόμορφη με την ομοτοπική κατηγορία η οποία προκύπτει εάν στραφούμε στην υποκατηγορία των συνινωδών-ινωδών αντικειμένων της $\mathcal{C}$ και ισοδύναμη με την ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ με την έννοια του Quillen.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στους συναρτητές του Quillen οι οποίοι αποτελούν την κατάλληλη έννοια μορφισμού μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλο. Κατόπιν μελετάμε τους παράγωγους συναρτητές οι οποίοι επάγονται από τους συναρτητές Quillen μεταξύ κατηγοριών μοντέλο και αποτελούν συναρτητές μεταξύ των επαγόμενων ομοτοπικών κατηγοριών. Ολοκληρώνουμε το παρόν κεφάλαιο μελετώντας τις ισοδυναμίες του Quillen οι οποίες καθορίζουν εάν δύο κατηγορίες είναι δομικά ίδιες.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα κατηγοριών μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι η κατηγορία των (δεξιών) προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου, μια κατηγορία Frobenius, η κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$ καθώς και η κατηγορία των τοπολογικών χώρων εφοδιάζονται με την δομή μιας κατηγορίας μοντέλο, και περιγράφουμε την επαγόμενη ομοτοπική κατηγορία.

Στο Παράρτημα παραθέτουμε τα στοιχεία από τη θεωρία συνόλων (διατακτικοί αριθμοί, πληθικοί αριθμοί, υπερπεπερασμένες συνθέσεις, κλπ) και τη θεωρία κατηγοριών (μικρά αντικείμενα, σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα, κλπ) τα οποία χρειαζόμαστε στην ανάπτυξη της θεωρίας κατηγοριών μοντέλα. Ιδιαίτερα αναλύουμε τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου ο οποίος έχει ευρύτατη εφαρμογή στην ομοτοπική άλγεβρα.

Ευχαριστίες:

Η πορεία σε ένα μεταπτυχιακό είναι αρκετά επίπονη. Έτσι, με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου διατριβής αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με στήριξαν, ο καθένας με τον δικό του ξεχωριστό τρόπο.

Πάνω απ' όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθηγητή κ. Απόστολο Μπεληγιάννη, για τη συνεργασία μας και την αδιάκοπη καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την συμπαράσταση του και το πραγματικό ενδιαφέρον του για κάθε πρόβλημα που παρουσιαζόταν. Πέρα από τα μαθηματικά ευχαριστώ, ευχαριστώ πολύ τον δάσκαλό μου για το κίνητρο που μου έδινε όλα αυτά τα χρόνια να γίνομαι καλύτερη καθώς και για τις αρχές και τις ηθικές αξίες που είχα την τιμή να διδαχθώ δίπλα του.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Απόστολο Θωμά για τις ωραίες μαθηματικές μας συζητήσεις, τις νουθεσίες του και τη γενικότερη συμπαράσταση του.

Ένα ξεχωριστό ευχαριστώ στον καθηγητή κ. Σταύρο Παπαδάκη, για τη διακριτική παρουσία του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής μου. Η αμέριστη συμπαράσταση του και η πίστη του σ' εμένα έκαναν τα καθημερινά προβλήματα να φαίνονται μικρά και ασήμαντα. Ιδιαίτερα, οι μαθηματικές του γνώσεις και ο τρόπος προσέγγισης του αντικειμένου διεύρυναν τους ορίζοντες μου και μ' έκαναν να αγαπήσω τα μαθηματικά ακόμη περισσότερο. Ο θαυμασμός μου στο έργο του αποτέλεσε κινητήριο δύναμη για μένα και μου εμφύσησε την ελπίδα ότι ίσως κάποια μέρα του μοιάσω.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου προπτυχιακού και μεταπτυχιακού.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Χρήστο Τατάκη καθώς και στη σύζυγο του, Μαρία Παπαριστείδη.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους φίλους-αδέρφια μου Πέτρο, Μαριλένα και Γρηγόρη Ταχυρίδη που ξεκινήσαμε μαζί το όμορφο ταξίδι στα μαθηματικά και συνεχίζουμε ακόμη καθώς επίσης και στους νεότερους αλλά όχι λιγότερο αγαπητούς Βάϊο και Παναγιώτα.

Θα ήθελα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω τη Φανή η οποία με αγκάλιασε από την πρώτη στιγμή που ξεκίνησα το μεταπτυχιακό και με την οποία μοιραζόμουν το ίδιο γραφείο και κατ' επέκταση τις αγωνίες μου, καθώς επίσης τον Γρηγόρη Κάτσιο για τις πολύτιμες συμβουλές του όλο αυτό το διάστημα. Θερμές ευχαριστίες στις φίλες μου και συνοδοιπόρους μου Κλειώ και Λαμπρινή που χωρίς τη συμβολή τους πιστεύω ότι δεν θα τα είχα καταφέρει. Επιπλέον, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον συμφοιτητή και φίλο μου Χρήστο Μακάτη για τη συμπαράσταση του στο κοινό μας αγώνα. Επίσης, τους φίλους μου Αλίνα, Κλεάνθη, Χρήστο Όντι, Χρήστο Σαρακασίδη και Θοδωρή που έκαναν την καθημερινότητα μου όμορφη. Ακόμη Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου Φωτεινή, Βασίλη, Ελευθερία, Μαρίνα, Τόνια, Κώστα, Δημήτρη καθώς και την νεότερη συγκάτοικο μου στο γραφείο, Σοφία για την διακριτικότητα και την κατανόηση της.

Από τα βάθη της καρδιάς μου ευχαριστώ την κυρία Καλλιθέα που φρόντιζε πάντα ο χώρος του γραφείου μου να είναι όμορφος και καθαρός.

Τέλος, ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ στους γονείς μου Κωνσταντίνο και Μαρία για όλα αυτά που μου παρείχαν.

Βασιλική Πετρωτού

Ιωάννινα, Νοέμβριος 2015

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών και Προτύπων

Στο παρόν κεφάλαιο αναφέρουμε βασικές έννοιες της θεωρίας κατηγοριών και προτύπων τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Αρχικά θα μελετήσουμε την έννοια της κατηγορίας, η οποία όπως θα δούμε αποτελεί δομικό λίθο για τον ορισμό της έννοιας του συναρτητή, καθώς και κάποιες βασικές ιδιότητες που τις διέπουν. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα επικεντρωθούμε στη μελέτη συναρτητών και των μορφισμών μεταξύ αυτών. Τέλος, αναφερόμαστε στα ενέσιμα και προβολικά πρότυπα τα οποία αποτελούν κεντρικές έννοιες της Ομολογιακής Άλγεβρας και μελετάμε τις ιδιότητες αυτών.

1.1 Κατηγορίες

Κάθε μαθηματική δομή σε ένα σύνολο είναι στενά συνδεδεμένη με μία απεικόνιση η οποία έχει την ιδιότητα να είναι συμβατή με αυτή την δομή. Με παρόμοιο τρόπο συμπεριφέρονται και οι κατηγορίες. Οι κατηγορίες είναι το εργαλείο το οποίο μας επιτρέπει να μελετάμε αντικείμενα εφοδιασμένα με μια συγκεκριμένη δομή, καθώς και τον τρόπο μετάβασης από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο εις τρόπον ώστε να διατηρείται η σχετική δομή. Ο όρος κατηγορία εισήχθη για πρώτη φορά από τους Samuel Eilenberg και Saunders Mac Lane στην επιστημονική τους δημοσίευση με τίτλο «Γενική Θεωρία Των Φυσικών Ισοδυναμίων», βλέπε [12] το 1945.

Ορισμός 1.1.1. *Μια* **κατηγορία (category)** $\mathcal{C}$ *αποτελείται από τα ακόλουθα:*

1. *Μία κλάση* $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$*, της οποίας τα στοιχεία θα καλούνται* <u>*αντικείμενα*</u> *της κατηγορίας* $\mathcal{C}$.
2. *Για κάθε ζευγάρι* X, Y *αντικειμένων, ένα σύνολο* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *του οποίου τα στοιχεία θα καλούνται* <u>*μορφισμοί*</u> *ή* <u>*βέλη*</u> *από το X στό Y.*
3. *Για κάθε* X , Y, $Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$*, μία πράξη σύνδεσης:*

$$\circ\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\times\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\ \longrightarrow\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z),\quad (f,g)\ \longmapsto\ g\circ f$$

4. *Για κάθε* $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *έναν μορφισμό* $1_{\mathrm{X}} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$*, ο οποίος ονομάζεται* <u>*ταυτοτικός μορφισμός*</u> *του* X .

   Αυτά τα δεδομένα ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

   (a) *(Το Αξίωμα Τής Προσεταιριστικότητας): Εάν* X, Y, $Z \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$ *και δοθέντων μορφισμών* $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ *και* $h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$*,ισχύει ότι :*

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

(b) *(Ύπαρξη Ταυτοτικών Μορφισμών): Δοθέντων μορφισμών* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ *ο ταυτοτικός μορφισμός* $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ *ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

$$f \circ 1_X = f \quad \& \quad 1_X \circ g = g$$

Σχόλιο 1.1.2. 1. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ της οποίας το σύνολο των αντικειμένων της είναι μη κενό καλείται **μη κενή (non empty)**.

2. Ένας μορφισμός $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ συχνά θα συμβολίζεται με $f : X \longrightarrow Y$ είτε με $f : Y \longleftarrow X$. Το X καλείται **πηγή (source)** και το Y καλείται **στόχος (target)**.

3. Για $X, Y, Z, W \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, οι μορφισμοί $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ και $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ μπορούν να αναπαρασταθούν με την βοήθεια του ακόλουθου διαγράμματος :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \end{tikzcd}$$

Το διαγράμμα είναι μεταθετικό εάν ισχύει:

$$k \circ g = h \circ f$$

4. Ο μορφισμός 1_X είναι ο μοναδικός μορφισμός από το X στο X ο οποίος παίζει τον ρόλο της ταυτότητας για την πράξη της σύνθεσης. Για να το διαπιστώσουμε αυτό υποθέτουμε ότι υπάρχει και ένας άλλος μορφισμός $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ ο οποίος επίσης ικανοποιεί το αξίωμα της ταυτότητας που αναφέραμε στον ορισμό της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Τότε κανόντας χρήση των ιδιότητων που ικανοποιούν οι μορφισμοί 1_X και id_X έχουμε:

$$1_X = 1_X \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι $1_X = \mathrm{id}_X$.

Ευθύς αμέσως θα δώσουμε κάποια βασικά παραδείγματα κατηγοριών

Παράδειγμα 1.1.3. 1. Η κατηγορία Set των συνόλων: η κλάση ob(Set) αποτελείται απο όλα τα σύνολα, τους μορφισμούς αποτελούν οι απεικονίσεις μεταξύ συνόλων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση των απεικονίσεων.

2. Η κατηγορία Grp των ομάδων: η κλάση ob(Grp) αποτελείται από όλες τις ομάδες, τους μορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί ομάδων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφισμών ομάδων.

3. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων: η κλάση ob(Ab) αποτελείται από όλες τις αβελιανές ομάδες, οι μορφισμοί είναι οι ομομορφισμοί (αβελιανών) ομάδων, η σύνθεση είναι η σύνθεση ομομορφισμών ομάδων.

4. Η κατηγορία Mod-R: Εάν R είναι ένας δακτύλιος με μονάδα τότε ορίζεται η κατηγορία Mod-R τών δεξιών R προτύπων: η κλάση ob(Mod-R) αποτελείται από όλα τα δεξιά R-πρότυπα, τους μορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί δεξιών R-προτύπων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφισμών δεξιών R-προτύπων.

Παρόμοια ορίζεται η κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων.

5. Η κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων: η κλάση ob(Top) αποτελείται από όλους τους τοπολογικούς χώρους, τους μορφισμούς αποτελούν οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

6. Η κατηγορία CTop των συμπαγών τοπολογικών χώρων: η κλάση ob(CTop), αποτελείται από όλους τους συμπαγείς τοπολογικούς χώρους, οι μορφισμοί είναι οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ συμπαγών τοπολογικών χώρων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

7. Η κατηγορία MS των μετρικών χώρων: η κλάση ob(MS) αποτελείται από όλους τους μετρικούς χώρους, τους μορφισμούς αποτελούν είτε οι συνεχείς απεικονίσεις είτε οι ισομετρίες μεταξύ μετρικών χώρων, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

8. Η κατηγορία Ban των χώρων Banach: η κλάση ob(Ban) αποτελείται από όλους τους χώρους Banach, τους μορφισμούς αποτελούν είτε οι συνεχείς (φραγμένες) απεικονίσεις (γραμμικές) είτε οι (ασθενείς) συστολές (γραμμικές), η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

9. Η κατηγορία $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ των πραγματικών διανυσματικών χώρων: η κλάση $\mathsf{ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})$ αποτελείται από όλους τους διανυσματικούς χώρους υπεράνω του $\mathbb{R}$, τους μορφισμούς αποτελούν οι γραμμικές απεικονίσεις, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

10. Η κατηγορία Ring, αντίστοιχα CRing, των δακτυλίων, αντίστοιχα μεταθετικών δακτυλίων, με μονάδα: η κλάση ob(Ring), αντίστοιχα ob(CRing), αποτελείται από όλους τους δακτυλίους, αντίστοιχα μεταθετικούς δακτυλίους, με μονάδα, τους μορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί μεταξύ δακτυλίων με μονάδα, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση ομομορφισμών δακτυλίων με μονάδα.

11. Αν $(X, \leqslant)$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε ορίζεται η κατηγορία $\underline{\underline{X}}$: η κλάση $\mathsf{ob}(\underline{\underline{X}})$ είναι το σύνολο X, και αν x και y είναι δύο οποιοδήποτε στοιχεία του συνόλου X, τότε το σύνολο όλων των μορφισμών από το x στο y είναι:

$$\mathsf{Hom}_{\underline{\underline{X}}}(x, y) = \begin{cases} \{\star\} & , \text{ αν } x \leqslant y \\ \varnothing & , \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

   Η πιθανότητα ορισμού μίας μοναδικής πράξης σύνθεσης είναι απλώς το αξίωμα της μεταβατικότητας της μερικής διάταξης. Η ύπαρξη ταυτοτικού μορφισμού είναι απλώς το αξίωμα της ανακλαστικότητας.

   Μια κατηγορία, όπως η $\underline{\underline{X}}$, στην οποία η κλάση αντικειμένων της είναι σύνολο καλείται **μικρή κατηγορία (small category)**.

12. Κάθε μονοειδές $(M, \bullet)$ μπορεί να ιδωθεί ως μια κατηγορία $\mathcal{M}$ με ένα μόνο αντικείμενο $*$ και μορφισμούς $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(*, *) = M$ στην οποία η σύνθεση ορίζεται να είναι ο πολλαπλασιασμός του μονοειδούς και ο ταυτοτικός μορφισμός του αντικειμένου $*$ είναι ο το ουδέτερο στοιχείο του M.

   Επιπλέον ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{M}$ είναι αντιστρέψιμος εάν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του μονοειδούς M. Ως ειδική περίπτωση κάθε ομάδα η οποία είναι μονοειδές μπορεί να ιδωθεί ως κατηγορία στην οποία ικανοποιείται μια επιπλέον ιδιότητα, κάθε μορφισμός της είναι ισομορφισμός. Η περίπτωση αυτή θα αναλυθεί εκτενέστερα παρακάτω.

13. Η κατηγορία Mon των μονοειδών: η κλάση ob(Mon) αποτελείται από όλα τα μονοειδή, τους μορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί μεταξύ μονοειδών, η σύνθεση είναι η συνήθης σύνθεση απεικονίσεων.

14. Κάθε σύνολο C μπορεί να ιδωθεί ως μια κατηγορία $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$: η κλάση $\mathsf{ob}(\underline{\underline{\mathcal{C}}})$ των αντικειμένων της αποτελείται από τα στοιχεία του συνόλου C και αν x και y είναι δύο οποιαδήποτε στοιχεία

του συνόλου C τότε το σύνολο όλων των μορφισμών από το x στο y είναι:

$$\mathsf{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(x,y) = \begin{cases} \{\star\} & , \text{ αν } x = y \\ \varnothing & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

δηλαδή οι μοναδικοί μορφισμοί είναι οι ταυτοτικοί μορφισμοί.

Μια κατηγορία της οποίας οι μοναδικοί μορφισμοί είναι οι ταυτοτικοί καλείται **διακριτή κατηγορία (discrete category)**.

Ορισμός 1.1.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Η* **δυϊκή (dual)** *κατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία συμβολίζεται ως $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Η $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ έχει ως αντικείμενα τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$, δηλαδή ισχύει ότι $\mathsf{ob}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}) = \mathsf{ob}(\mathcal{C})$*

2. *Για όλα τα αντικείμενα X, Y της $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ έχουμε ότι*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

δηλαδή οι μορφισμοί της $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ορίζονται να είναι οι μορφισμοί της $\mathcal{C}$ με αντεστραμμένα τα βέλη. Για να αποφύγουμε τον κίνδυνο σύγχυσης θα συμβολίζουμε με $f^{\mathsf{op}}\colon X \longrightarrow Y$ έναν μορφισμό της $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ο οποίος αντιστοιχεί στον μορφισμό $f\colon Y \longrightarrow X$ της $\mathcal{C}$.

3. *Η πράξη της σύνθεσης στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ορίζεται ως:*

$$f^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}} = (g \circ f)^{\mathsf{op}}$$

όπου $\circ$ είναι η σύνθεση της $\mathcal{C}$.

Σχόλιο 1.1.5. Συχνά στην βιβλιογραφία η πράξη της σύνθεσης στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ ορίζεται ως: $g \circ^{\mathsf{op}} f = f \circ g$. Ωστόσο ο ορισμός αυτός δεν διαφέρει από αυτόν που δώσαμε παραπάνω.

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποια παραδείγματα δυϊκών κατηγοριών.

Παράδειγμα 1.1.6.
1. Ας είναι $A = (X, \leqslant)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο το οποίο έχει ιδωθεί ως κατηγορία όπως είδαμε προηγουμένως. Τότε $A^{\mathsf{op}} = (X, \geqslant)$, όπου η σχέση μερικής διάταξης ορίζεται ως $X \geqslant Y$ αν και μόνο αν $X \leqslant Y$.

2. Ας είναι $A = (M, \star, e)$ ένα μονοειδές το οποίο έχει ιδωθεί ως κατηγορία όπως είδαμε προηγουμένως τότε $A^{\mathsf{op}} = (M, \star', e)$, όπου $x \star' y = y \star x$.

Παρατήρηση 1.1.7. Από τον τρόπο ορισμού των δυϊκών κατηγοριών κάθε πρόταση $P_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}}(X)$ η οποία αφορά ένα αντικείμενο X στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ μπορεί να μεταφραστεί σε μία λογικά ισοδύναμη πρόταση $P_{\mathcal{C}}{}^{\mathsf{op}}(X)$ η οποία αφορά ένα αντικείμενο X στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η δυϊκότητα στην θεωρία κατηγοριών η οποία εκφράζεται μέσω της αρχής της δυϊκότητας που θα αναπτύξουμε ευθύς αμέσως.

Η **Αρχή της Δυϊκότητας για κατηγορίες (Duality Principle for categories)** υποστηρίζει ότι εάν μια πρόταση η οποία περιλαμβάνει την ύπαρξη κάποιων αντικειμένων, μορφισμών και συνθέσεων μεταξύ μορφισμών ισχύει για κάθε κατηγορία τότε ισχύει και η δυϊκή αυτής η οποία λαμβάνεται από την αρχική αντιστρέφοντας την φορά των βελών των μορφισμών και αντικαθιστώντας την σύνθεση $f \circ g$ δύο μορφισμών με την σύνθεση $g \circ f$ αυτών.

Η απόδειξη της παραπάνω αρχής απορρέει από το γεγονός ότι για όλες τις κατηγορίες $\mathcal{C}$ και όλες τις προτάσεις P ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $(\mathcal{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} = \mathcal{C}$

2. Η ${P_{\mathcal{C}}}^{\mathrm{op}}$ ισχύει αν και μόνο αν η $P_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ ισχύει. Δηλαδή το να αποδείξουμε την πρόταση P^{op} στην κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε την πρόταση P στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Ο νόμος της σύνθεσης σε ορισμένες μαθηματικές δομές μας ωθεί να στρέψουμε την προσοχή μας σε στοιχεία τα οποία είναι αντιστρέψιμα ή διαγράψιμα ως προς την σύνθεση. Σε μια τυχαία κατηγορία τον ρόλο αυτό παίζουν οι μονομορφισμοί, οι επιμορφισμοί και οι ισομορφισμοί όπως γίνεται άμεσα κατανοητό από τους ορισμούς τους.

Ορισμός 1.1.8. *Δύο μορφισμοί f και g οι οποίοι εκκινούν από το ίδιο αντικείμενο και καταλήγουν στο ίδιο αντικείμενο καλούνται* **παράλληλοι** *και παριστάνονται ως $f, g\colon X \rightrightarrows Y$.*

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του μονομορφισμού. Η συγκεκριμένη κλάση των μορφισμών σε μια τυχαία κατηγορία γενικεύει την έννοια των «1-1» απεικονίσεων μεταξύ συνόλων.

Ορισμός 1.1.9. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **μονομορφισμός (monomorphism)** *εάν για κάθε αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και κάθε ζευγάρι παράλληλων μορφισμών $g_1, g_2\colon Z \rightrightarrows X$ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα*

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 = g_2$$

δηλαδή εάν ο μορφισμός f είναι **αριστερά διαγράψιμος** *ως προς την σύνθεση.*

Σχόλιο 1.1.10. Στην βιβλιογραφία ένας μονομορφισμός παριστάνεται είτε ως $f\colon X \rightarrowtail Y$ είτε ως $f\colon X \hookrightarrow Y$.

Ορισμένα παραδείγματα μονομορφισμών είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.1.11. 1. Στην κατηγορία Set των συνόλων τους μονομορφισμούς αποτελούν οι «1-1» απεικονίσεις.

Δηλαδή ισχύει: η απεικόνιση συνόλων $f\colon Y \longrightarrow Z$ είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε διάγραμμα απεικονίσεων $X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{f} Z$ ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$f \circ g = f \circ h \quad \Longrightarrow \quad g = h.$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού υπενθυμίζουμε:

Στην κατηγορία Set μια απεικόνιση συνόλων $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι «1-1» $\iff$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

για όλα τα στοιχεία x_1, x_2 του συνόλου X.

Τώρα είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού. Υποθέτουμε ότι $f\colon Y \longrightarrow Z$ είναι «1-1». Ας είναι $g, h\colon X \longrightarrow Y$ δύο απεικονίσεις συνόλων με $f \circ g = f \circ h$. Τότε $f(g(x)) = f(h(x)), \forall x \in X$. Εφόσον η f είναι «1-1» έπεται ότι $g(x) = h(x)$, $\forall x \in X$. Έτσι $g = h$.

Για την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης θα χρησιμοποιήσουμε ότι ένα οποιοδήποτε στοιχείο $\alpha \in Y$ μπορεί να ιδωθεί ως μια απεικόνιση $g\colon \{\star\} \longrightarrow Y$ από ένα τυχόν μονοσύνολο στο Y. Ουσιαστικά ταυτίζουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο $\alpha \in Y$ με την απεικόνιση $g\colon \{\star\} \longrightarrow Y$ όπου $g(\star) = \alpha$. Αντίστροφα, ας είναι $\alpha, b \in Y$ με $f(\alpha) = f(b)$. Υποθέτουμε ότι $X = \{x\}$ ένα τυχόν μονοσύνολο και $g, h\colon X \longrightarrow Y$ με $g(x) = \alpha$ και $h(x) = b$. Οι συνθέσεις ικανοποιούν

$$(f \circ g)(x) = f(\alpha) = f(b) = (f \circ h)(x), \forall x \in X$$

έτσι $f \circ g = f \circ h$ και σύμφωνα με την υπόθεση $g = h$. Επομένως καταλήγουμε $\alpha = g(x) = h(x) = b$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η f είναι «1-1».

2. Στην κατηγορία Grp των ομάδων τους μονομορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί ομάδων οι οποίοι είναι «1-1».

3. Στην κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R με μονάδα τους μονομορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί (δεξιών) R-προτύπων οι οποίοι είναι «1-1».

4. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων τους μονομορφισμούς αποτελούν οι συνεχείς απεικονίσεις οι οποίες είναι «1-1».

5. Στην κατηγορία Ring, αντίστοιχα CRing, των, αντίστοιχα μεταθετικών, δακτυλίων με μονάδα τους μονομορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί δακτυλίων οι οποίοι είναι απεικονίσεις «1-1».

   Μέχρις στιγμής τα παραδείγματα που αναφέραμε μας έχουν δημιουργήσει την εντύπωση ότι οι μονομορφισμοί ταυτίζονται με τους «1-1» μορφισμούς μεταξύ αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ όταν τα αντικείμενα της είναι σύνολα ενδεχομένως με επιπλέον δομή. Ωστόσο την λανθασμένη αυτή εντύπωση καταρρίπτει το επόμενο παράδειγμα.

6. Στην κατηγορία Div με αντικείμενα τις διαιρετές αβελιανές ομάδες και μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων μεταξύ αυτών, ένας μονομορφισμός δεν είναι κατ' ανάγκη «1-1» απεικόνιση.

   Υπενθυμίζουμε ότι μια αβελιανή ομάδα H καλείται **διαιρετή (divisible)** εαν $nH = H$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, δηλαδή για κάθε στοιχείο $h \in H$ και n υπάρχει ένα στοιχείο $h' \in H$ τέτοιο ώστε $nh' = h$.

   Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\varpi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ από την προσθετική ομάδα των ρητών στην προσθετική ομάδα-πηλίκο των ρητών ως προς την ομάδα των ακεραίων. Οι $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι διαιρετές αβελιανές ομάδες.
   Ο ομομορφισμός ϖ δεν είναι απεικόνιση «1-1», ωστόσο είναι μονομορφισμός στην Div.

   Πράγματι, ας είναι G μια διαιρετή αβελιανή ομάδα και $f, g\colon G \longrightarrow \mathbb{Q}$ ομομορφισμοί τέτοιοι ώστε $f \neq g$. Τότε υπάρχει $x \in G$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq g(x)$. Δηλαδή υπάρχει στοιχείο $p/q \in \mathbb{Q}$ με $p/q \neq 0$ και $q \neq \pm 1$ τέτοιο ώστε $f(x) - g(x) = p/q$. Ας είναι $y \in G$ τέτοιο ώστε $x = py$. Τότε $py = p(f(y) - g(y)) = f(x) - g(x) = p/q$, έτσι $f(y) - g(y) = 1/q$. Επομένως, $f(y) + \mathbb{Z} \neq g(y) + \mathbb{Z}$ ως στοιχεία του $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, και επομένως $\varpi f \neq \varpi g$. Λαμβάνοντας την άρνηση της παραπάνω πρότασης έχουμε $\varpi f = \varpi g \Longrightarrow f = g$. Έτσι, ο ϖ είναι μονομορφισμός.

Στο πλαίσιο αυτό θα αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητες οι οποίες αφορούν τους μονομορφισμούς.

Πρόταση 1.1.12. *Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \to Z$ μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}$.*

1. *Εάν οι f, g είναι μονομορφισμοί τότε και η σύνθεση τους $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι μονομορφισμός.*

2. *Ας είναι $h\colon Y \longrightarrow W$ ένας άλλος μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Εάν η σύνθεση $h \circ f\colon X \longrightarrow W$ είναι μονομορφισμός τότε ο f είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη. 1. Δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $h_1, h_2\colon D \rightrightarrows X$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$. Τότε $g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2)$ το οποίο συνεπάγεται ότι $f \circ h_1 = f \circ h_2$ καθώς g μονομορφισμός. Από την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι f μονομορφισμός προκύπτει ότι $h_1 = h_2$. Ως εκ τούτου, η σύνθεση $g \circ f$ είναι μονομορφισμός.

2. Δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $g_1, g_2\colon E \rightrightarrows X$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Τότε $h \circ (f \circ g_1) = h \circ (f \circ g_2)$ από όπου λαμβάνοντας υπ' όψιν την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης έπεται ότι $(h \circ f) \circ g_1 = (h \circ f) \circ g_2$. Εφόσον η σύνθεση $h \circ f$ είναι μονομορφισμός συμπεραίνουμε ότι $g_1 = g_2$. Έτσι, ο f είναι μονομορφισμός. ∎

Σχόλιο 1.1.13. Από τον ορισμό του μονομορφισμού απορρέει η ακόλουθη ισοδυναμία:
$f\colon X \longrightarrow Y$ είναι μονομορφισμός $\Longleftrightarrow$ η απεικόνιση $f\circ\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ με $(f\circ)g = f \circ g$ είναι «1-1» για οποιοδήποτε αντικείμενο Z της $\mathcal{C}$.

Ορισμός 1.1.14. *Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow X$ δύο μορφισμοί σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$. Εάν για τους μορφισμούς f και g ισχύει $f \circ g = 1_Y$ τότε ο μορφισμός f καλείται* **αριστερά αντίστροφος (left inverse)** *ή* **συστολή (retraction)** *του g και ο g καλείται* **δεξιά αντίστροφος (right inverse)** *ή* **section**.

Πρόταση 1.1.15. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία.*

1. *Κάθε ταυτοτικός μορφισμός είναι μονομορφισμός.*
2. *Κάθε δεξιά αντίστροφος μορφισμός είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι 1_X ο ταυτοτικός μορφισμός του X. Δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $g_1, g_2\colon Y \rightrightarrows X$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $1_X \circ g_1 = 1_X \circ g_2$. Από την τελευταία ισότητα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X έπεται άμεσα ότι $g_1 = g_2$. Συνεπώς, ο 1_X είναι μονομορφισμός.

2. Ας είναι $g\colon Y \longrightarrow X$ ένας δεξιά αντίστροφος του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$. Τότε $f \circ g = 1_Y$. Δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $h_1, h_2\colon Z \rightrightarrows Y$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $g \circ h_1 = g \circ h_2$. Τότε, $h_1 = (f \circ g) \circ h_1 = f \circ (g \circ h_1) = f \circ (g \circ h_2) = (f \circ g) \circ h_2 = h_2$. Έτσι, ο g είναι μονομορφισμός. ∎

Δυϊκή έννοια του μονομορφισμού αποτελεί ο επιμορφισμός. Η συγκεκριμένη κλάση των μορφισμών σε μια τυχαία κατηγορία γενικεύει την έννοια των απεικονίσεων οι οποίες είναι «επί».

Ορισμός 1.1.16. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **επιμορφισμός (epimorphism)** *εάν για κάθε αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και κάθε ζευγάρι παράλληλων μορφισμών $g_1, g_2\colon Y \rightrightarrows Z$ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα*

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2$$

δηλαδή εάν ο μορφισμός f είναι **δεξιά διαγράψιμος** *ως προς την σύνθεση.*

Σχόλιο 1.1.17. Στην βιβλιογραφία ένας επιμορφισμός παριστάνεται και ως $f\colon X \twoheadrightarrow Y$

Κάνοντας χρήση της ορολογίας των δυϊκών κατηγοριών ο ορισμός μετασχηματίζεται διασαφηνίζοντας την δυϊκότητα των εννοιών του επιμορφισμού και του μονομορφισμού ως εξής:

Ορισμός 1.1.18. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι* **επιμορφισμός (epimorphism)** *εάν ο μορφισμος $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ είναι μονομορφισμός στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.*

Στην συνέχεια παραθέτουμε μερικά παραδείγματα επιμορφισμών:

Παράδειγμα 1.1.19. 1. Στην κατηγορία Set των συνόλων τους επιμορφισμούς αποτελούν οι απεικονίσεις οι οποίες είναι «επί».

Δηλαδή ισχύει: Η απεικόνιση συνόλων $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι «επί» αν και μόνον αν για κάθε διάγραμμα απεικονίσεων $X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$ ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού υπενθυμίζουμε:

Στην κατηγορία Set μια απεικόνιση συνόλων $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι «επί» $\Leftrightarrow$

για κάθε στοιχείο y του συνόλου Y υπάρχει στοιχείο x του συνόλου X τέτοιο ώστε $f(x) = y$

Τώρα είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού

Υποθέτουμε ότι $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι «επί».

Ας είναι $g, h\colon Y \longrightarrow Z$ απεικονίσεις συνόλων με $g \circ f = h \circ f$. Τότε $g(f(x)) = h(f(x)), \forall x \in X$.

Εφόσον f είναι «επί» έπεται ότι $g(y) = h(y), \forall y \in Y$. Έτσι $g = h$.

Για την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης υποθέτουμε ότι η f είναι επιμορφισμός και θεωρούμε το σύνολο $\{0, 1\}$ το οποίο αποτελείται από δύο στοιχεία και τις απεικονίσεις $g, h\colon Y \rightrightarrows \{0,1\}$ τέτοιες ώστε:

$$g(y) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } y \in \operatorname{Im} f \\ 0 & , \text{ αν } y \notin f(x) \end{cases}$$

και

$$h(y) = 1 \text{ για όλα τα } y \in Y$$

Τότε $(g \circ f)(x) = 1$ και $(h \circ f)(x) = 1, \ \forall x \in X$. Άρα $g \circ f = h \circ f$. Έτσι, σύμφωνα με την υπόθεση $g = h$. Επομένως καταλήγουμε $\operatorname{Im} f = f(X) = Y$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η f είναι «επί».

2. Στην κατηγορία Grp των ομάδων τους επιμορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί ομάδων οι οποίοι είναι «επί».

3. Στην κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R με μονάδα τους επιμορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί (δεξιών) R-προτύπων οι οποίοι είναι απεικονίσεις «επί». Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε ως δακτύλιο R τον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Σε αυτή την ειδική περίπτωση οι ομομορφισμοί οι οποίοι είναι «επί» αποτελούν τους επιμορφισμούς στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα ένας ομομορφισμός ο οποίος είναι «επί» είναι ένας επιμορφισμός. Αντίστροφα ας είναι $f\colon M_R \longrightarrow N_R$ ένας επιμορφισμός δεξιών R-προτύπων. Υποθέτουμε ότι ο f δεν είναι «επί». Τότε $Imf \neq N$. Η εικόνα του f, Imf είναι υποπρότυπο του N συνεπώς ορίζεται το πηλίκο N/Imf. Έτσι έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$M \xrightarrow{\ f\ } N \underset{0}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}} N/\operatorname{Im} f \longrightarrow 0.$$

στο οποίο π είναι η κανονική προβολή και 0 είναι η μηδενική απεικόνιση Οι συνθέσεις ικανοποιούν:

$$(\pi \circ f)(m) = \pi(f(m)) = f(m) + \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f = 0 = (0 \circ f)(m), \ \forall m \in M$$

Τότε, $\pi \circ f = 0 \circ f$. Εφόσον f επιμορφισμός έπεται ότι $\pi = 0$. Έτσι $\forall x \in N, \ \ \pi(x) = \operatorname{Im} f$ το οποίο έχει ως συνέπεια $x + \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f$. Επομένως, καταλήγουμε $x \in \operatorname{Im} f$ το οποίο είναι άτοπο. Ως εκ τούτου, ο f είναι «επί».

4. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων τους επιμορφισμούς αποτελούν οι συνεχείς απεικονίσεις οι οποίες είναι «επί».

Ανάλογα με τους μονομορφισμούς οι επιμορφισμοί δεν ταυτίζονται απαραίτητα με τους μορφισμούς μεταξύ αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ οι οποίοι είναι «επί». Το γεγονός αυτό πιστοποιεί το ακόλουθο παράδειγμα:

5. Στην κατηγορία Ring των μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα ένας μορφισμός $f: X \longrightarrow Y$ είναι επιμορφισμός εάν δοθέντος οποιουδήποτε στοιχείου $y \in Y$ ισχύει η ισότητα $1 \otimes y = y \otimes 1$ στο $Y \otimes_X Y$ ή ισοδύναμα εάν ο μορφισμός $Y \longrightarrow Y \otimes_X Y$ είναι «επί». Ωστόσο ένας επιμορφισμός δακτυλίων δεν είναι απαραίτητα «επί». Ας είναι $i: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ η απεικόνιση έγκλεισης από τον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων στον δακτύλιο $\mathbb{Q}$ των ρητών. Η απεικόνιση έγκλεισης i δεν είναι «επί» ωστόσο είναι επιμορφισμός στην κατηγορία Ring. Πράγματι ας είναι R ένας δακτύλιος και $g_1, g_2: \mathbb{Q} \longrightarrow R$ ομομορφισμοί δακτυλίων με $g_1(n) = g_2(n)$ για κάθε ακέραιο n. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $n \neq 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} g_1(n^{-1}) &= g_1(n^{-1})g_1(1) = g_1(n^{-1})g_2(1) = g_1(n^{-1})g_2(n)g_2(n^{-1}) = \\ &= g_1(n^{-1})g_1(n)g_2(n^{-1}) = g_1(1)g_2(n^{-1}) = g_2(1)g_2(n^{-1}) = g_2(n^{-1}) \end{aligned}$$

Έτσι, για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$ με $n \neq 0$ προκύπτει:

$$g_1(m/n) = g_1(mn^{-1}) = g_1(m)g_1(n^{-1}) = g_2(m)g_2(n^{-1}) = g_2(mn^{-1}) = g_2(m/n)$$

για κάθε $m/n \in \mathbb{Q}$. Επομένως καταλήγουμε οτι $g_1 = g_2$ γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός i είναι επιμορφισμός.

Ευθύς αμέσως θα αναφερθούμε σε κάποιες ιδιότητες των επιμορφισμών οι οποίες είναι δυϊκές των αντίστοιχων ιδιοτήτων των μονομορφισμών.

Πρόταση 1.1.20. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ισχύουν τα ακόλουθα: Ας είναι $f: X \longrightarrow Y$ και $g: Y \to Z$ μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}$.*

1. *Εάν οι f, g είναι επιμορφισμοί τότε και η σύνθεση τους $g \circ f: X \longrightarrow Z$ είναι επιμορφισμός.*
2. *Ας είναι $k: Z \longrightarrow X$ ένας άλλος μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Εάν η σύνθεση $f \circ k: Z \longrightarrow Y$ είναι επιμορφισμός τότε ο f είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.1.12. . ■

Πρόταση 1.1.21. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία.*

1. *Κάθε ταυτοτικός μορφισμός είναι επιμορφισμός.*
2. *Κάθε αριστερά αντίστροφος μορφισμός είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.1.15. . ■

Ολοκληρώνουμε τις κλάσεις των μορφισμών σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ δίνοντας την έννοια του ισομορφισμού. Η συγκεκριμένη κλάση των μορφισμών σε μια τυχαία κατηγορία γενικεύει την έννοια των «1-1» και «επί» απεικονίσεων.

Ορισμός 1.1.22. *Ένας μορφισμός $f: X \longrightarrow Y$ σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **ισομορφισμός (isomorphism)** *εάν υπάρχει ένας μορφισμός $g: Y \longrightarrow X$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $f \circ g = 1_Y$ και $g \circ f = 1_X$. Ένας τέτοιος μορφισμός καλείται αντίστροφος του f .*

Σχόλιο 1.1.23. Στην βιβλιογραφία ένας ισομορφισμός παριστάνεται ως $f: X \xrightarrow{\cong} Y$.

Παρατήρηση 1.1.24. Η πρόταση « f είναι ισομορφισμός » είναι αυτοδυϊκή (self-dual) δηλαδή όπως είναι προφανές από τον ορισμό, ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν ο f είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Χάρις στην ακόλουθη πρόταση μπορούμε να μιλάμε για «τον» αντίστροφο ενός ισομορφισμού τον οποίο συμβολίζουμε με f^{-1}.

Πρόταση 1.1.25. *Ο αντίστροφος μορφισμός ενός μορφισμού f, αν υπάρχει, είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Ας είναι $g\colon Y \longrightarrow X$ ο αντίστροφος του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$. Τότε $g \circ f = 1_X$ και $f \circ g = 1_Y$. Υποθέτουμε ότι $h\colon Y \longrightarrow X$ είναι ένας άλλος μορφισμός ο οποίος εξίσου είναι αντίστροφος του μορφισμού f. Τότε $h \circ f = 1_X$ και $f \circ h = 1_Y$. Έτσι, προκύπτει: $g = g \circ 1_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_X \circ h = h$. Επομένως, ο μορφισμός g είναι μοναδικός. ■

Παραθέτουμε τα ακόλουθα παραδείγματα ισομορφισμών:

Παράδειγμα 1.1.26.

1. Στην κατηγορία Set των συνόλων τους ισομορφισμούς αποτελούν οι απεικονίσεις οι οποίες είναι «1-1» και «επί».
2. Στην κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R με μονάδα τους ισομορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί δεξιών R-προτύπων οι οποίοι είναι «1-1» και «επί».
3. Στην κατηγορία Grp των ομάδων τους ισομορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί ομάδων οι οποίοι είναι «1-1» και «επί» . Το ίδιο ισχύει και στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων.
4. Στην κατηγορία Ring των μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα τους ισομορφισμούς αποτελούν οι ομομορφισμοί δακτυλίων οι οποίοι είναι «1-1» και «επί».
   Σε αντίθεση με τα προηγούμενα παραδείγματα:
5. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων ένας μορφισμός ο οποίος είναι «1-1» και «επί» δεν είναι απαραίτητα ισομορφισμός αφού για παράδειγμα ο μορφισμός

$$f : [0,1) \longrightarrow \big\{x \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\big\}, \quad f(t) = e^{2\pi i t}$$

   είναι «1-1» και «επί» ωστόσο δεν είναι ομοιομορφισμός. Στην κατηγορία Top τους ισομορφισμούς αποτελούν οι ομοιομορφισμοί.

Εν συνεχεία θα αναφερθούμε σε ισόμορφα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ τα οποία ουσιαστικά είναι ίδια μεταξύ τους.

Ορισμός 1.1.27. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και X, Y αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Καλούμε τα X και Y* **ισόμορφα (isomorphic)** *και θα συμβολίζουμε με $X \backsimeq Y$, εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός $f\colon X \xrightarrow{\backsimeq} Y$.*

Σχόλιο 1.1.28. Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ η «$\backsimeq$» είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση ob$(\mathcal{C})$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$.

Ακολούθως παραθέτουμε ορισμένες ιδιότητες των ισομορφισμών:

Πρόταση 1.1.29. *Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}$.*

1. *Εάν οι f, g είναι ισομορφισμοί τότε και η σύνθεση τους $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι ισομορφισμός.*
2. *Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε ο αντίστροφος $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ του f είναι ισομορφισμός.*
3. *Ένας ισομορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός.*

Απόδειξη.

1. Ας είναι f και g δύο ισομορφισμοί. Τότε υπάρχουν μορφισμοί $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ και $g^{-1}\colon Z \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ με $f^{-1} \circ f = 1_X$, $f \circ f^{-1} = 1_Y$, $g^{-1} \circ g = 1_Y$ και $g \circ g^{-1} = 1_Z$ αντίστοιχα. Λόγω της προσεταιριστικότητας της σύνθεσης, των ιδιοτήτων του ταυτοτικού μορφισμού και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ 1_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = 1_Z$$

και

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ(g\circ f)) = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f = f^{-1}\circ 1_{\mathrm{Y}}\circ f = f^{-1}\circ f = 1_{\mathrm{X}}.$$

Επομένως, ο μορφισμός $g\circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

2. Ας είναι f ένας ισομορφισμός. Τότε υπάρχει μορφισμός $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ με $f^{-1}\circ f = 1_{\mathrm{X}}$ και $f\circ f^{-1} = 1_{\mathrm{Y}}$. Έτσι, σύμφωνα με τον ορισμό του ισομορφισμού ο μορφισμός f^{-1} είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $(f^{-1})^{-1} = f$.

3. Ας είναι f ισομορφισμός. Τότε υπάρχει μορφισμός $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ με $f^{-1}\circ f = 1_{\mathrm{X}}$ και $f\circ f^{-1} = 1_{\mathrm{Y}}$. Από την πρώτη ισότητα έπεται ότι ο f είναι δεξιά αντίστροφος του f^{-1} και κατ' επέκταση σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.1.15 είναι μονομορφισμός. Αντίστοιχα, από τη δεύτερη ισότητα ο f είναι αριστερά αντίστροφος του f^{-1} και έτσι σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.1.21 είναι επιμορφισμός. Συνεπώς ο f είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός. ■

Παρατήρηση 1.1.30. Το αντίστροφο του τρίτου σκέλους της Πρότασης 1.1.29. δεν ισχύει, δηλαδή ένας μορφισμός ο οποίος είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός δεν είναι κατ' ανάγκη ισομορφισμός, βλέπε το σκέλος (5) του Παραδείγματος 1.1.26.

Πρόταση 1.1.31. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία.*

1. *Κάθε ταυτοτικός μορφισμός είναι ισομορφισμός.*

2. *Κάθε δεξιά αντίστροφος μορφισμός ο οποίος είναι επιμορφισμός είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. 1. Έστω 1_{X} ο ταυτοτικός μορφισμός του X. Από τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού έπεται:

$$1_{\mathrm{X}}\circ 1_{\mathrm{X}} = 1_{\mathrm{X}}$$

Έτσι, ο ταυτοτικός μορφισμός 1_{X} του X είναι ισομορφισμός με αντίστροφο ${1_{\mathrm{X}}}^{-1} = 1_{\mathrm{X}}$.

2. Έστω $g\colon Y \longrightarrow X$ ένας δεξιά αντίστροφος του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$. Τότε $f\circ g = 1_{\mathrm{Y}}$. Συνθέτοντας από αριστερά με τον μορφισμό g στην παραπάνω ισότητα έπεται ότι $g\circ(f\circ g) = g\circ 1_{\mathrm{Y}}$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού προκύπτει $(g\circ f)\circ g = g = 1_{\mathrm{X}}\circ g$. Από υπόθεση ο δεξιά αντίστροφος g είναι επιμορφισμός. Ως εκ τούτου, $g\circ f = 1_{\mathrm{X}}$. Από τις ισότητες $f\circ g = 1_{\mathrm{Y}}$ και $g\circ f = 1_{\mathrm{X}}$ έπεται ότι ο g είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $g^{-1} = f$. ■

Στην αρχή του κεφαλαίου είδαμε παραδείγματα στα οποία η κλάση αντικειμένων και οι μορφισμοί μιας κατηγορίας περιέχονται στην κλάση αντικειμένων και στους μορφισμούς μιας άλλης. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την κατηγορία Ab των αβελιανών ομαδων η οποία εμπεριέχεται στην κατηγορία Grp των ομάδων και την κατηγορία CTop των συμπαγών τοπολογικών χώρων η οποία περιλαμβάνεται στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε αυτό το φαινόμενο πιο διεξοδικά.

Ορισμός 1.1.32. *Μια κατηγορία $\mathcal{C}'$ καλείται* **υποκατηγορία (subcategory)** *της κατηγορίας $\mathcal{C}$, εάν:*

1. $\mathsf{ob}(\mathcal{C}') \subseteq \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.

2. *Για κάθε ζεύγος αντικειμένων X, Y της $\mathcal{C}'$, ισχύει ότι*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ συμπίπτει με την σύνθεση αυτών των μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}$.*

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός 1_X είναι ο ίδιος στις κατηγορίες $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}'$.*
Αν η κατηγορία $\mathcal{C}'$ είναι υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, συνήθως θα γράφουμε: $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

Ορισμός 1.1.33. *Μια υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ της $\mathcal{C}$, καλείται* **πλήρης υποκατηγορία (full subcategory)** *της $\mathcal{C}$, εάν $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ για κάθε ζεύγος αντικειμένων X, Y της $\mathcal{C}'$.*

Ο ορισμός της πλήρους υποκατηγορίας γίνεται περισσότερο κατανοητός με την βοήθεια των ακολούθων παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 1.1.34. 1. Κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι πλήρης υποκατηγορία του εαυτού της.

2. Η κλάση Ab των αβελιανών ομάδων αποτελεί πλήρη υποκατηγορία της κατηγορίας Grp των ομάδων.

3. Η κλάση CTop των συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας Top των τοπολογικών χώρων.

4. Η κλάση Hauss των τοπολογικών χώρων Hausdorff είναι πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας Top των τοπολογικών χώρων.

5. Η κατηγορία Rel των διμελών σχέσεων ορίζεται ως εξής: $\mathsf{ob}(\mathsf{Rel}) = \mathsf{ob}(\mathsf{Set})$ και $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Rel}}(X,Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ όπου $\mathcal{P}(X \times Y)$ είναι το σύνολο των υποσυνόλων του $X \times Y$. Η πράξη της σύνθεσης ορίζεται ακολούθως: Δοθέντων μορφισμών $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$, ο μορφισμός $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\{(x,z) \in X \times Z;$ υπάρχει y τέτοιο ώστε $(x,y) \in f,\ (y,z) \in g\}$ και $1_X = \{(x,x) : x \in X\}$ το διαγώνιο σύνολο του $X{\times}X$. Η κατηγορία Set των συνόλων αποτελεί υποκατηγορία της κατηγορίας Rel των διμελών σχέσεων, ωστόσο δεν είναι πλήρης υποκατηγορία της αφού η κατηγορία Set έχει λιγότερους μορφισμούς από την κατηγορία Rel καθώς ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ στην Set είναι μια διμελής σχέση με την επιπλέον ιδιότητα εάν $(x,y) \in f$ και $(x,y') \in f$ τότε $y = y'$.

Ορισμός 1.1.35. *Μια πλήρης υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται* **υπερπλήρης (replete)** *εάν για κάθε ισομορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ το αντικείμενο Y ανήκει στην $\mathcal{C}'$ όταν το αντικείμενο X ανήκει στην $\mathcal{C}'$.*

Παράδειγμα 1.1.36. 1. Κάθε υποκατηγορία της κατηγορίας των τοπολογικών χώρων τα αντικείμενα της οποίας έχουν μια τοπολογική αναλλοίωτη (δηλαδή μια ιδιότητα η οποία εξαρτάται μόνο από την τοπολογία του χώρου και ως εκ τούτου είναι κοινή σε οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο ομοιομορφικό με αυτόν όπως για παράδειγμα η συμπάγεια, η συνεκτικότητα, η ιδιότητα να είναι Hausdorff, η διάσταση καθώς και αλγεβρικές αναλλοίωτες όπως η ομολογία και οι ομοτοπικές ομάδες), είναι υπερπλήρης.

2. Η κατηγορία των μετρικών χώρων και των ομοιόμορφα συνεχών απεικονίσεων δεν είναι υπερπλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας των μετρικών χώρων και των απεικονίσεων μεταξύ μετρικών χώρων (ισομετρίες) καθώς δύο μετρικοί χώροι μπορεί να είναι τοπολογικά ισόμορφοι ωστόσο η κατηγορία των μετρικών χώρων και των ομοιόμορφα συνεχών απεικονίσεων δεν είναι πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας των μετρικών χώρων και των απεικονίσεων μεταξύ μετρικών χώρων (ισομετρίες) αφού μια ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση δεν είναι κατ' ανάγκη ισομετρία γεγονός που οφείλεται στο ότι η ιδιότητα του να είναι ένας χώρος μετρικός δεν είναι τοπολογική αναλλοίωτη.

Ορισμός 1.1.37. *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **ομαδοειδές (groupoid)** *εάν κάθε μορφισμός της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ισομορφισμός.*

Ορισμένα παραδείγματα ομαδοειδών είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.1.38. 1. Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια σχέση ισοδυναμίας «$\backsimeq$» γίνεται ομαδοειδές με μοναδικό αντικείμενο της κατηγορίας το σύνολο X και μοναδικό μορφισμό $x \longrightarrow y$ όταν $x \backsimeq y$. Ένα τέτοιο ομαδοειδές είναι ισοδύναμο με τη διακριτή κατηγορία την οποία ορίζει το σύνολο πηλίκο $X/\backsimeq$.

2. Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος. Το θεμελιώδες ομαδοειδές (fundamental groupoid) του X είναι το ομαδοειδές του οποίου τα αντικείμενα είναι τα σημεία του X και του οποίου οι μορφισμοί $x \longrightarrow y$ είναι οι κλάσεις ομοτοπίας των συνεχών μονοπατιών $\{[0,1] \backsimeq I \longrightarrow X\}$ που ξεκινούν απο το x και τελειώνουν στο y με την σύνθεση να δίνεται από την αλληλουχία των μονοπατιών. Το θεμελιώδες ομαδοειδές είναι μια φυσική γενίκευση της θεμελιώδους ομάδας η οποία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των σημείων της βάσης και εξαιτίας αυτού του λόγου πολλές προτάσεις σχετικά με τις θεμελιώδεις ομάδες διατυπώθηκαν αρχικά ως προτάσεις σχετικά με τα θεμελιώδη ομαδοειδή.

3. Η δράση μιας ομάδας G σε ένα σύνολο S ορίζει ένα ομαδοειδές, την δράση ομαδοειδούς (action groupoid) του οποίου τα αντικείμενα είναι τα στοιχεία του S και του οποίου οι μορφισμοί $x \longrightarrow y$ είναι τα ζευγάρια $(g, x) \in G \times S$ τέτοια ώστε $gx = y$ με την σύνθεση να επάγεται απο τον πολλαπλασιασμό στην ομάδα G. Συχνά στην βιβλιογραφία αναφέρεται και ως ασθενές πηλίκο.

Σχόλιο 1.1.39. Το θεώρημα Seifert-Van Kampen το οποίο εμφανίζεται στην αλγεβρική τοπολογία έχει μια πιο γενική μορφή που περιλαμβάνει θεμελιώδη ομαδοειδή σε ένα σύνολο σημείων της βάσης το οποίο επιτρέπει μεταξύ άλλων τον άμεσο υπολογισμό της πρωταρχικής ομάδας του κύκλου χωρίς να γίνει χρήση της θεωρίας χώρων κάλυψης.

Ορισμός 1.1.40. *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **πεπερασμένη (finite)** *εάν το σύνολο μορφισμών της είναι πεπερασμένο.*

Η απάντηση σχετικά με το τι ισχύει για τα αντικείμενα μιας πεπερασμένης κατηγορίας δίνεται από την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.1.41. Στον Ορισμό 1.1.40. το γεγονός ότι το σύνολο των μορφισμών της πεπερασμένης κατηγορίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο έχει ως αποτέλεσμα το σύνολο των αντικειμένων της να είναι πεπερασμένο σύνολο. Αυτό συμβαίνει διότι για κάθε αντικείμενο υπάρχει ο αντίστοιχος ταυτοτικός μορφισμός.

Μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε παραδείγματα πεπερασμένων κατηγοριών παίρνοντας αντικείμενα και θεωρώντας μορφισμούς μεταξύ των αντικειμένων φροντίζοντας να λάβουμε τις απαραίτητες συνθέσεις και ταυτότητες έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα της κατηγορίας. Εάν υπάρχουν βρόγχοι χρειάζεται να αποκοπούν για να διατηρήσουμε την κατηγορία πεπερασμένη. Κάποια παραδείγματα πεπερασμένων κατηγοριών είναι τα εξής:

Παράδειγμα 1.1.42. 1. Η κατηγορία **0 ή κενή κατηγορία (empty category)** η οποία δεν διαθέτει αντικείμενα ή μορφισμούς, αποτελεί πεπερασμένη κατηγορία.

2. Η κατηγορία **1 ή τελική κατηγορία (terminal category)** η οποία διαθέτει ένα αντικείμενο και τον ταυτοτικό μορφισμό, και παριστάνεται ως $*$, αποτελεί πεπερασμένη κατηγορία.

3. Η κατηγορία **2** η οποία διαθέτει δύο αντικείμενα και τους αντίστοιχους ταυτοτικούς μορφισμούς τους και ακριβώς έναν μορφισμό μεταξύ των αντικειμένων, η οποία παριστάνεται ως: $* \longrightarrow \bigstar$, αποτελεί πεπερασμένη κατηγορία.

4. Η κατηγορία **3** η οποία διαθέτει τρία αντικείμενα και τους αντίστοιχους ταυτοτικούς μορφισμούς τους και ακριβώς έναν μορφισμό από το πρώτο στο δεύτερο αντικείμενο, ακριβώς έναν μορφισμό από το δεύτερο στο τρίτο αντικείμενο, και ακριβώς έναν μορφισμό από το πρώτο στο τρίτο αντικείμενο η οποία παριστάνεται ως:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[dr] & \bigstar \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

αποτελεί πεπερασμένη κατηγορία.

5. Η κατηγορία η οποία διαθέτει δύο αντικείμενα και τους αντίστοιχους ταυτοτικούς μορφισμούς τους και έναν μορφισμό από το πρώτο αντικείμενο στο δεύτερο και έναν μορφισμό από το δεύτερο αντικείμενο στο πρώτο η οποία παριστάνεται ως:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

στην οποία $g \circ f \neq 1_X$ και $f \circ g \neq 1_Y$ είναι μια κατηγορία ωστόσο δεν είναι μια πεπερασμένη κατηγορία καθώς διαθέτουμε άπειρους μορφισμούς $g \circ f, g \circ f \circ g \circ f, g \circ f \circ g \circ f \circ g \circ f \ldots$

Ορισμός 1.1.43. *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **συνεκτική (connected)** *εάν είναι μη κενή και δοθέντων δύο αντικειμένων $X, Y \in \mathcal{C}$ είναι δυνατόν να μεταβούμε από το αντικείμενο X στο αντικείμενο Y μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθιας μορφισμών οι οποίοι συντίθενται ανεξαρτήτως της φοράς των βελών όπως παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.*

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_{2n-1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X = X_0 & & X_2 & & X_{2n-2} & & X_{2n} = Y \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 1.1.44. 1. Κάθε κατηγορία η οποία διαθέτει είτε αρχικό είτε τελικό αντικείμενο έννοιες που θα αναφερθούν στην συνέχεια αποτελεί συνεκτική κατηγορία.

2. Η κενή κατηγορία δεν είναι συνεκτική.

Στο Σχόλιο 1.1.2. χρησιμοποιήσαμε ένα διάγραμμα για να αναπαραστήσουμε ορισμένους μορφισμούς μεταξύ αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Γενικότερα,

Ορισμός 1.1.45. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ένα* **διάγραμμα (diagram)** *είναι ένα διάγραμμα το οποίο αποτελείται από κορυφές και βέλη μεταξύ των κορυφών, όπου οι κορυφές αναπαριστάνουν αντικείμενα της κατηγορίας και τα βέλη αναπαριστάνουν μορφισμούς μεταξύ αυτών των αντικειμένων.*

Κάποια άλλα παραδείγματα διαγραμμάτων είναι τα εξής:

Παράδειγμα 1.1.46. 1. Ένας μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ αποτελεί την πιο απλή μορφή διαγράμματος.

2. Το ακόλουθο σχήμα αντικειμένων και μορφισμών σε μια κατηγορία

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "l"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

αποτελεί διάγραμμα το οποίο είναι <u>μεταθετικό</u> αν και μόνον αν $l \circ f = g$.

3. Το ακόλουθο σχήμα αντικειμένων και μορφισμών σε μια κατηγορία

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

αποτελεί διάγραμμα το οποίο είναι μεταθετικό αν και μόνο αν $g \circ f = h$.

4. Το ακόλουθο σχήμα αντικειμένων και μορφισμών σε μια κατηγορία

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

αποτελεί διάγραμμα το οποίο είναι μεταθετικό αν και μόνο αν $f \circ g = f \circ h$.

Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ το σύνολο των μορφισμών της μπορεί να εφοδιαστεί με την δομή κατηγορίας ως εξής:

Ορισμός 1.1.47. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Συμβολίζουμε με $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ την κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τους μορφισμούς στην $\mathcal{C}$ και στην οποία οι μορφισμοί έχουν την ακόλουθη περιγραφή: Εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon X' \longrightarrow Y'$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$, δηλαδή αντικείμενα της $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ τότε $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Mor}(\mathcal{C})}(f,g) = \{u\colon X \longrightarrow X', v\colon Y \longrightarrow Y' \mid g \circ u = v \circ f\}$. Διαγραμματικά ένας μορφισμός $f \longrightarrow g$ στην $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ περιγράφεται από το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Η σύνθεση στην $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ορίζεται ως εξής: $(w,k) \circ (u,v) = (w \circ u, k \circ v)$ με την προϋπόθεση ότι οι επιμέρους συνθέσεις των μορφισμών ορίζονται και παριστάνεται διαγραμματικά ως εξής:

$$(w,k) \circ (u,v) \qquad = \qquad (w \circ u, k \circ v)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g"] & X'' \arrow[d, "h"] & & X \arrow[r, "w \circ u"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Y' \arrow[r, "k"'] & Y'' \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow"] & {} & Y \arrow[r, "k \circ v"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

Ο ταυτοτικός μορφισμός 1_{f} του αντικειμένου $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ορίζεται: $1_{\mathrm{f}} = (1_{\mathrm{X}}, 1_{\mathrm{Y}})$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ειδικές κλάσεις αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ οι οποίες αποτελούνται από αντικείμενα τα οποία είναι εφοδιασμένα με μια επιπρόσθετη δομή.

Ορισμός 1.1.48. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα αντικείμενο P της $\mathcal{C}$ καλείται* **αρχικό (initial object)** *το οποίο συνήθως συμβολίζεται με $\varnothing$, εάν για κάθε αντικείμενο X αυτής υπάρχει μοναδικός μορφισμός από το P στο X. Δηλαδή, το σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P,X)$ είναι μονοσύνολο για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.*

Δυϊκή έννοια του αρχικού αντικειμένου αποτελεί αυτή του τελικού αντικειμένου.

Ορισμός 1.1.49. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα αντικείμενο P της $\mathcal{C}$ καλείται* **τελικό (terminal object)** *το οποίο συνήθως συμβολίζεται με $*$, εάν για κάθε αντικείμενο X αυτής υπάρχει μοναδικός μορφισμός από το X στο P. Δηλαδή το σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P)$ είναι μονοσύνολο για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.*

Όταν ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι συγχρόνως αρχικό και τελικό προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1.1.50. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα αντικείμενο P της $\mathcal{C}$ καλείται* **μηδενικό (zero object)** *και συμβολίζεται με 0, εάν είναι ταυτόχρονα αρχικό και τελικό αντικείμενο.*

Παρατήρηση 1.1.51.

1. Εάν η κατηγορία $\mathcal{C}$ διαθέτει ένα μηδενικό αντικείμενο 0 τότε για οποιαδήποτε αντικείμενα X, Y της ο μοναδικός μορφισμός ο οποίος προκύπτει ως σύνθεση

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$$

συμβολίζεται επίσης με $0 \colon X \longrightarrow Y$. Η σύνθεση οποιουδήποτε άλλου μορφισμού $f \colon Y \longrightarrow Z$ με τον μορφισμό $0 \colon X \longrightarrow Y$ είναι ο μορφισμός $0 \colon X \longrightarrow Z$.

2. Όπως και στην περίπτωση του ισομορφισμού η πρόταση «Το 0 είναι μηδενικό αντικείμενο» είναι αυτοδυϊκή δηλαδή το 0 είναι μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν είναι μηδενικό αντικείμενο στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Παράδειγμα 1.1.52.

1. Στην κατηγορία Set των συνόλων, το κενό σύνολο είναι το μοναδικό αρχικό αντικείμενο ενώ κάθε μονοσύνολο είναι ένα τελικό αντικείμενο. Επομένως στην κατηγορία Set δεν υπάρχει μηδενικό αντικείμενο.

2. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων, ο κενός τοπολογικός χώρος είναι το μοναδικό αρχικό αντικείμενο ενώ κάθε τοπολογικός χώρος του οποίου το υποκείμενο σύνολο έχει ακριβώς ένα σημείο δηλαδή ουσιαστικά ένα μονοσύνολο $\{x\}$ με την μόνη δυνατή τοπολογία (οι χώροι αυτοί ονομάζονται one-point spaces και είναι μη κενοί χώροι οι οποίοι είναι εφοδιασμένοι με μια τοπολογία η οποία είναι εξίσου διακριτή και τετριμμένη δηλαδή υπάρχει μοναδική τοπολογία τέτοια ώστε όλα τα υποσύνολα να είναι εξίσου ανοικτά και κλειστά) είναι ένα τελικό αντικείμενο. Ως εκ τούτου στην κατηγορία Top όπως και στην κατηγορία Set δεν υπάρχει μηδενικό αντικείμενο.

3. Στην κατηγορία CRing των μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα, ο δακτύλιος των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι ένα αρχικό αντικείμενο αφού για κάθε δακτύλιο R ο ομομορφισμός $f \colon \mathbb{Z} \longrightarrow R$ ο οποίος ορίζεται ώς:

$$f(n) = \begin{cases} 1_R + \cdots + 1_R \quad [n - \text{φορές}] & , \text{ αν } n > 0 \\ \qquad 0 & , \text{ αν } n = 0 \\ (-1_R) + \cdots + (-1_R) \quad [(-n) - \text{φορές}] & , \text{ αν } n < 0 \end{cases}$$

είναι ο μοναδικός ομομορφισμός από τον $\mathbb{Z}$ στον R ενώ ο τετριμμένος δακτύλιος ο οποίος αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο $0 = 1$ είναι ένα τελικό αντικείμενο αφού υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f \colon R \longrightarrow 0$ τέτοιος ώστε $f(r) = 0$. Εάν οι ομομορφισμοί δακτυλίων δεν διατηρούν την μονάδα τότε ο τετριμμένος δακτύλιος δεν είναι τελικό αντικείμενο. Στην κατηγορία CRing δεν υπάρχει μηδενικό αντικείμενο.

4. Στη κατηγορία Grp των ομάδων κάθε τετριμμένη ομάδα $\{e\}$ όπου με e συμβολίζουμε το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας είναι αρχικό, τελικό και συνεπώς και μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας Grp. Το ίδιο ισχύει και για την κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων.

5. Στην κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων (αντίστοιχα στην κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων), όπου ο R συμβολίζει έναν δακτύλιο με μονάδα το μηδενικό πρότυπο είναι ένα αρχικό, τελικό και συνεπώς μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας Mod-R (αντίστοιχα R-Mod).

Σε μία τυχαία κατηγορία $\mathcal{C}$ όπως έγινε κατανοητό από τα παραπάνω παραδείγματα δεν υπάρχουν πάντα αρχικά, τελικά ή μηδενικά αντικείμενα. Ωστόσο η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι εάν υπάρχει κάποιο αντικείμενο στην υποκείμενη κατηγορία που ανήκει σε κάποια από τις προαναφερθείσες κλάσεις αντικειμένων είναι ουσιαστικά μοναδικό.

Πρόταση 1.1.53. *Σε μια τυχαία κατηγορία $\mathcal{C}$:*

1. *Ένα αρχικό αντικείμενο, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικό με ακρίβεια ισομορφισμού.*

2. *Ένα τελικό αντικείμενο, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικό με ακρίβεια ισομορφισμού.*

3. *Ένα μηδενικό αντικείμενο, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικό με ακρίβεια ισομορφισμού.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι P και P' δύο αρχικά αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $\alpha\colon P \longrightarrow P'$ και $\beta\colon P' \longrightarrow P$ στην $\mathcal{C}$. Οι συνθέσεις $\beta \circ \alpha$ και $\alpha \circ \beta$, ανήκουν στα μονοσύνολα $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P)$ και $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P', P')$, αντίστοιχα. Όμως, οι ταυτοτικοί μορφισμοί $1_{\mathrm{P}} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P)$ και $1_{\mathrm{P'}} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P', P')$. Συνεπώς, έπεται ότι $\beta \circ \alpha = 1_{\mathrm{P}}$ και $\alpha \circ \beta = 1_{\mathrm{P'}}$, το οποίο σύμφωνα με τον ορισμό του ισομορφισμού μας εξασφαλίζει ότι ο μορφισμός α είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$, με αντίστροφο μορφισμό $\alpha^{-1} = \beta$. Επομένως, τα αρχικά αντικείμενα P και P' της $\mathcal{C}$, είναι ισόμορφα.

2. Λόγω της δυϊκότητας του αρχικού και τελικού αντικειμένου η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.

3. Ας είναι P και P' δύο μηδενικά αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό τα P και P' είναι εξίσου αρχικά και τελικά αντικείμενα της. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο και δεύτερο σκέλος της παρούσας Πρότασης είναι άμεσο ότι τα P και P' είναι ισόμορφα. ■

Πρόταση 1.1.54. *Σε μια τυχαία κατηγορία $\mathcal{C}$:*

1. *Κάθε αντικείμενο το οποίο είναι ισόμορφο με ένα αρχικό αντικείμενο της είναι αρχικό.*

2. *Κάθε αντικείμενο το οποίο είναι ισόμορφο με ένα τελικό αντικείμενο της είναι τελικό.*

3. *Κάθε αντικείμενο το οποίο είναι ισόμορφο με ένα μηδενικό αντικείμενο της είναι μηδενικό.*

Απόδειξη. 1. Έστω P ένα αρχικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και P' ένα άλλο οποιοδήποτε αντικείμενο της το οποίο είναι ισόμορφο με το P. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει μοναδικος μορφισμός $f\colon P \longrightarrow B$ για κάθε αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ και ένας ισομορφισμός $k\colon P' \longrightarrow P$. Ο μορφισμός $f \circ k$ ανήκει στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P', B)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $f \circ k\colon P' \longrightarrow B$ είναι μοναδικός. Ας είναι $h\colon P' \longrightarrow B$ ένας άλλος μορφισμός. Τότε $h \circ k^{-1}$ ανήκει στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B)$. Όμως ο f είναι ο μοναδικός μορφισμός που ανήκει στο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B)$. Ως εκ τούτου $h \circ k^{-1} = f$ από όπου έπεται ότι $h = f \circ k$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το P' είναι αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$.

2. Λόγω της δυϊκότητας του αρχικού και του τελικού αντικειμένου η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.

3. Έστω P ένα μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και P' ένα άλλο οποιοδήποτε αντικείμενο της το οποίο είναι ισόμορφο με το P. Τότε εξ' ορισμού το P είναι συγχρόνως αρχικό και τελικό αντικείμενο της. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το P' είναι ισόμορφο με το P από το πρώτο και δεύτερο σκέλος της παρούσας Πρότασης έπεται ότι το P' είναι εξίσου αρχικό και τελικό αντικείμενο. Συνεπώς, το P' είναι μηδενικό αντικείμενο. ■

1.2 Συναρτητές

Στην ενότητα αυτή, ορίζουμε συναλλοίωτους και αντισυναλλοίωτους συναρτητές και μελετάμε τις ιδιότητες που τους διέπουν. Ο όρος «συναρτητής», όπως και ο όρος «κατηγορία», έχει τις ρίζες του στο έργο των φιλόσοφων R. Carnap και E. Kant, και υιοθετήθηκε από τους μαθηματικούς οι οποίοι τον χρησιμοποίησαν σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και ιδιαίτερα στην θεωρία κατηγοριών. Κυρίαρχο ρόλο στην θεωρία κατηγοριών παίζουν οι μορφισμοί και όχι τόσο τα αντικείμενα καθώς είναι δυνατόν να ορίσουμε μια κατηγορία παραλείποντας να χρησιμοποιήσουμε την έννοια των αντικειμένων. Έτσι, εάν εξετάσουμε τις κατηγορίες αφ' εαυτών ως αντικείμενα εφοδιασμένα με κάποια δομή οι συναρτητές αποτελούν τους μορφισμούς οι οποίοι διατηρούν τη δομή μεταξύ τους.

Ορισμός 1.2.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δυο κατηγορίες. Ένας* **συναλλοίωτος συναρτητής (covariant functor)** $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *αποτελείται από τα ακόλουθα:*

1. *Μια απεικόνιση*
$$F\colon\ \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{ob}(\mathcal{C}')$$
$$X \longmapsto F(X).$$
μεταξύ των κλάσεων των αντικειμένων η οποία στέλνει κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ σε ένα αντικείμενο $F(X)$ της κατηγορίας $\mathcal{C}'$.

2. *Για κάθε δύο αντικείμενα X και Y της $\mathcal{C}$, υπάρχει μια απεικόνιση συνόλων*
$$F_{X,Y}\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$$
$$f \longmapsto F(f),$$
η οποία στέλνει κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ σε έναν μορφισμό $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ έτσι ώστε:

   (a) *Ο F να διατηρεί την σύνθεση δηλαδή για κάθε μορφισμό $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ και για κάθε μορφισμό $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ να ισχύει: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

   (b) *Ο F να διατηρεί ταυτοτικούς μορφισμούς δηλαδή $F(1_{\mathrm{X}}) = 1_{\mathrm{F(X)}}$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.*

Μερικά παραδείγματα συναλλοίωτων συναρτητών είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.2.2. 1. **Οι Ταυτοτικοί Συναρτητές (Identity Functors):** Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ υπάρχει ένας συναλλοίωτος ταυτοτικός συναρτητής $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}$.

2. **Οι Συναρτητές Φυσικής Έγκλεισης (Embedding Functors):** Ας είναι $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, τότε ο συναλλοίωτος συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ ορίζεται ως $i(X) = X$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}'$ και $i(f) = f$ για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}'$.

3. **Οι Λησμονικοί Συναρτητές (Forgetful Functors)** ή **Συναρτητές Υποκείμενου Συνόλου (Underlying Set Functors)** $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$: Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ της οποίας τα αντικείμενα είναι σύνολα εφοδιασμένα με κάποια δομή και οι μορφισμοί είναι απεικονίσεις οι οποίες διατηρούν αυτή την δομή υπάρχει ένας συναρτητής υποκείμενου συνόλου $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ο οποίος στέλνει κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}$ στο υποκείμενο σύνολο στοιχείων του και κάθε μορφισμό της $\mathcal{C}$ στην αντίστοιχη απεικόνιση μεταξύ συνόλων. Καλείται επίσης λησμονικός καθώς όπως βλέπουμε «ξεχνάει» την επιπλέον δομή. Από τον τρόπο ορισμού του γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι είναι συναλλοίωτος.

4. **Ο Σταθερός Συναρτητής (Constant Functor):** Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες. Σταθεροποιούμε ένα αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$. Ο συναλλοίωτος σταθερός συναρτητής του Y, $\Delta_Y : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, ορίζεται ως $\Delta_Y(X) = Y$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και $\Delta_Y(f) = 1_{\mathrm{Y}}$ για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}$.

5. **Ο Αναπαραστάσιμος Συναρτητής (Representable Functor)** $\mathsf{Hom}(X, -)$ του X : Ας είναι $\mathcal{C}$ μια τοπικά μικρή κατηγορία. Σταθεροποιούμε ένα αντικείμενο της, X. Ο συναλλοίωτος αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathsf{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ορίζεται ως
$$\mathsf{Hom}(X, -)(Y) = \mathsf{Hom}(X, Y)$$
για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και
$$\mathsf{Hom}(X, -)(f) = \mathsf{Hom}(X, f)$$
για κάθε μορφισμό $f : Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}$ όπου
$$\mathsf{Hom}(X, f) \colon \mathsf{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}(X, Z), \quad g \longmapsto f \circ g.$$

6. **Ο Συναλλοίωτος Συναρτητής** $\mathsf{Hom}_R(X, -)$**:** Ας είναι X ένα δεξιό R-πρότυπο. Ο συναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(X, -) : \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ορίζεται ως
$$\mathsf{Hom}_R(X, -)(M) = \mathsf{Hom}_R(X, M)$$
για κάθε δεξιό R-πρότυπο M και
$$\mathsf{Hom}_R(X, -)(f) = \mathsf{Hom}_R(X, f) = f_\star^X$$
για κάθε ομομορφισμό δεξιών R-προτύπων $f : M \longrightarrow N$ όπου
$$f_\star^X : \mathsf{Hom}_R(X, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(X, N), \quad h \longmapsto f \circ h.$$

7. **Ο Συναλλοίωτος Συναρτητής** $X \otimes_R -$**:** Ας είναι X ένα δεξιό R-πρότυπο. Ο συναλλοίωτος συναρτητής $X \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ορίζεται ως
$$(X \otimes_R -)(M) = X \otimes_R M$$
για κάθε αριστερό R-πρότυπο M και
$$(X \otimes_R -)(f) = X \otimes_R f = 1_{\mathrm{X}} \otimes f,$$
για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f : M \longrightarrow N$ όπου
$$1_{\mathrm{X}} \otimes f : X \otimes_R M \longrightarrow X \otimes_R N$$
$$\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha (x_\alpha \otimes m_\alpha) \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha (x_\alpha \otimes f(m_\alpha)).$$

8. **Ο Συναλλοίωτος Συναρτητής** $-\otimes_R Y$: Ας είναι Y ένα αριστερό R-πρότυπο. Ο συναλλοίωτος συναρτητής $-\otimes_R Y : \ \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ορίζεται ως
$$(-\otimes_R Y)(M) = M \otimes_R Y$$
για κάθε δεξιό R-πρότυπο M και
$$(-\otimes_R Y)(f) = f \otimes_R Y = f \otimes 1_{\mathrm{Y}},$$
για κάθε ομομορφισμό δεξιών R-προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$ όπου
$$f \otimes 1_{\mathrm{Y}} \colon M \otimes_R Y \longrightarrow N \otimes_R Y$$
$$\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha (m_\alpha \otimes y_\alpha) \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha (f(m_\alpha) \otimes y_\alpha).$$

9. **Ο Συναρτητής Του Δυναμοσυνόλου (Power Set Functor)** $\mathcal{Q}$: $\mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$: Ο συναλλοίωτος συναρτητής του δυναμοσυνόλου $\mathcal{Q}$ στέλνει ένα σύνολο X στο δυναμοσύνολο του $\mathcal{Q}X$ και μια απεικόνιση $f\colon X \longrightarrow Y$ στην απεικόνιση $\mathcal{Q}(f)\colon \mathcal{Q}(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(Y)$ η οποία στέλνει ένα υποσύνολο X' του X στο $f(X')$.

Ευθύς αμέσως ορίζουμε την έννοια του αντισυναλλοίωτου συναρτητή. Ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{C}'$, ή ως ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'^{\mathsf{op}}$. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 1.2.3. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δυο κατηγορίες. Ένας* **αντισυναλλοίωτος συναρτητής (contravariant functor)** $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *αποτελείται από τα ακόλουθα:*

1. *Μία απεικόνιση*
$$F\colon \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{ob}(\mathcal{C}')$$
$$X \longmapsto F(X).$$
μεταξύ των κλάσεων των αντικειμένων η οποία στέλνει κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ σε ένα αντικείμενο $F(X)$ της κατηγορίας $\mathcal{C}'$.

2. *Για κάθε δύο αντικείμενα X και Y της $\mathcal{C}$, υπάρχει μια απεικόνιση συνόλων*
$$F_{X,Y}\colon \ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Y),F(X))$$
$$f \longmapsto F(f),$$
η οποία στέλνει κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ σε έναν μορφισμό $F(f)\colon F(Y) \longrightarrow F(X)$ της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ έτσι ώστε:

   (a) *Ο F να διατηρεί την σύνθεση δηλαδή για κάθε μορφισμό $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ και για κάθε μορφισμό $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ να ισχύει: $F(g\circ f) = F(f)\circ F(g)$.*

   (b) *Ο F να διατηρεί ταυτοτικούς μορφισμούς δηλαδή $F(1_{\mathrm{X}}) = 1_{\mathrm{F(X)}}$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.*

Μερικά παραδείγματα αντισυναλλοίωτων συναρτητών αποτελούν τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.2.4. 1. **Ο Αναπαραστάσιμος Συναρτητής (Representable Functor)** $\mathsf{Hom}(-,X)$ του X : Ας είναι $\mathcal{C}$ μια τοπικά μικρή κατηγορία. Σταθεροποιούμε ένα αντικείμενο της, X. Ο αντισυναλλοίωτος αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathsf{Hom}(-,X) : \ \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ορίζεται ως
$$\mathsf{Hom}(-,X)(Y) = \mathsf{Hom}(Y,X)$$

για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ και

$$\mathsf{Hom}(-, X)(f) = \mathsf{Hom}(f, X)$$

για κάθε μορφισμό $f\colon Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ όπου

$$\mathsf{Hom}(f, X)\colon \mathsf{Hom}(Z, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}(Y, X), \quad g \longmapsto g \circ f.$$

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το παράδειγμα αυτό προκύπτει δυϊκά από το πέμπτο σκέλος του Παραδείγματος 1.2.2.

2. **Ο Αντισυναλλοίωτος Συναρτητής** $\mathsf{Hom}_R(-, X)$**:** Ας είναι X ένα δεξιό R-πρότυπο. Ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, X) :\ \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ορίζεται ως

$$\mathsf{Hom}_R(-, X)(M) = \mathsf{Hom}_R(M, X)$$

για κάθε δεξιο R-πρότυπο M και

$$\mathsf{Hom}_R(-, X)(f) = \mathsf{Hom}_R(f, X) = f_X^{\star}$$

για κάθε ομομορφισμό δεξιών R-προτύπων $f\colon M \longrightarrow N$ όπου

$$f_X^{\star}\colon \mathsf{Hom}_R(N, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, X), \quad \alpha \longmapsto \alpha \circ f.$$

3. **Ο Συναρτητής Του Δυναμοσυνόλου (Power Set Functor)** $\mathcal{Q}^{\star}\colon \mathsf{Set}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$: Ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής του δυναμοσυνόλου $\mathcal{Q}^{\star}$ ορίζεται ως $\mathcal{Q}^{\star}X = \mathcal{Q}X$ για κάθε σύνολο X και $\mathcal{Q}^{\star}(f)\colon \mathcal{Q}(Y) \longrightarrow \mathcal{Q}(X)$ κάθε απεικόνιση $f\colon X \longrightarrow Y$, $\mathcal{Q}^{\star}f(Y') = f^{-1}(Y')$ για κάθε υποσύνολο Y' του Y όπου $\mathcal{Q}$ ο συνναλοίωτος συναρτητής του δυναμοσυνόλου.

4. **Ο Δυϊκός Συναρτητής Για Διανυσματικούς Χώρους (Duality Functor For Vector Spaces)** $()^{\star}\colon \mathsf{Vect}^{\mathsf{op}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{Vect}(\mathbb{R})$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών: Ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $()^{\star}$ στέλνει κάθε διανυσματικό χώρο V στον δυϊκό του $V^{\star}$, δηλαδή στον διανυσματικό χώρο $\mathsf{Hom}(V, \mathbb{R})$ με τις πράξεις να ορίζονται κατά σημείο και κάθε γραμμική απεικόνιση $f\colon V \longrightarrow W$ στον μορφισμό $f^{\star}\colon V^{\star} \longrightarrow W^{\star}$ ο οποίος ορίζεται ως εξής $f^{\star}(g) = g \circ f$ για $g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$. Ο παραπάνω συναρτητής ορίζεται επί της κατηγορίας $\mathsf{Vect}(\mathbb{K})$ των $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων υπεράνω οποιουδήποτε σώματος $\mathbb{K}$.

Παρατήρηση 1.2.5. Από τον ορισμό του συναρτητή συνάγεται ότι ένας συναρτητής είναι «τεχνικά» μια οικογένεια απεικονίσεων, μια από την κλάση $\mathsf{ob}(\mathcal{C})$ στην κλάση $\mathsf{ob}(\mathcal{C}')$ και μια από την κλάση $\mathsf{Hom}(X, Y)$ στην κλάση $\mathsf{Hom}(F(X), F(Y))$. Εφόσον οι συναρτητές διατηρούν τους ταυτοτικούς μορφισμούς και σε κάθε κατηγορία υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ της κλάσης των αντικειμένων και της κλάσης των ταυτοτικών μορφισμών το κομμάτι των αντικειμένων ενός συναρτητή καθορίζεται πράγματι από το κομμάτι των μορφισμών.

Ορισμός 1.2.6. *Ας είναι $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ τρείς κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ δύο συναρτητές μεταξύ αυτών. Η σύνθεση $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ των συναρτητών F και G είναι ένας συναρτητής ο οποίος ορίζεται ως εξής: $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ της $\mathcal{C}$.*

Πρόταση 1.2.7. 1. *Η σύνθεση δύο συναλλοίωτων συναρτητών είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής.*

2. *Η σύνθεση ενός συναλλοίωτου και ενός αντισυναλλοίωτου συναρτητή είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής. Ανάλογα, η σύνθεση ενός αντισυναλλοίωτου και ενός συναλλοίωτου συναρτητή είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ δύο συναλλοίωτοι συναρτητές. Τότε ορίζεται ο συναρτητής $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$, για τον οποίο ισχύει:

$$(G \circ F)(1_{\mathrm{X}}) = G(F(1_{\mathrm{X}})) = G(1_{\mathrm{F(X)}}) = 1_{\mathrm{G(F(X))}} = 1_{\mathrm{(G\circ F)(X)}}$$

και

$$(G\circ F)(h\circ k) = G(F(h\circ k)) = G(F(h)\circ F(k)) = G(F(h))\circ G(F(k)) = (G\circ F)(h)\circ(G\circ F)(k)$$

για κάθε μορφισμό $k\colon X \longrightarrow Y$ και $h\colon Y \longrightarrow Z$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Από τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι ο συναρτητής $G \circ F$ είναι συναλλοίωτος.

2. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναλλοίωτος και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής. Τότε ορίζεται ο συναρτητής $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$, για τον οποίο ισχύει:

$$(G \circ F)(1_{\mathrm{X}}) = G(F(1_{\mathrm{X}})) = G(1_{\mathrm{F(X)}}) = 1_{\mathrm{G(F(X))}} = 1_{\mathrm{(G\circ F)(X)}}$$

και

$$(G\circ F)(h\circ k) = G(F(h\circ k)) = G(F(h)\circ F(k)) = G(F(k))\circ G(F(h)) = (G\circ F)(k)\circ(G\circ F)(h)$$

για κάθε μορφισμό $k\colon X \longrightarrow Y$ και $h\colon Y \longrightarrow Z$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Από τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι ο συναρτητής $G \circ F$ είναι αντισυναλλοίωτος.
Ακριβώς την ίδια αποδεικτική διαδικασία ακολουθούμε εάν υποθέσουμε ότι ο $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας αντισυναλλοίωτος και ο $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής. ■

Ορισμός 1.2.8. *Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής. Θα λέμε ότι:*

1. *Ο συναρτητής F* **διατηρεί μια ιδιότητα (preserves a property)** *ενός αντικειμένου X ή ενός μορφισμού f της $\mathcal{C}$ εάν το αντικείμενο $F(X)$ ή ο μορφισμός $F(f)$ πληροί την ιδιότητα αυτή στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Ο συναρτητής F* **αντανακλά μια ιδιότητα (reflects a property)** *ενός αντικειμένου X ή ενός μορφισμού f της $\mathcal{C}$ εάν όταν το αντικείμενο $F(X)$ ή ο μορφισμός $F(f)$ της $\mathcal{C}'$ πληροί μια ιδιότητα τότε το αντικείμενο X ή ο μορφισμός f πληροί την ιδιότητα αυτή στην $\mathcal{C}$.*

Πρόταση 1.2.9. *1. Κάθε συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί ισομορφισμούς.*

2. *Κάθε συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί δεξιά αντίστροφους μορφισμούς.*

3. *Κάθε συναλλοίωτος συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί αριστερά αντίστροφους μορφισμούς.*

Απόδειξη. 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι F είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $f \circ f^{-1} = 1_{\mathrm{Y}}$ και $f^{-1} \circ f = 1_{\mathrm{X}}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στις παραπάνω ισότητες και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν προκύπτει ότι $F(f) \circ F(f^{-1}) = 1_{\mathrm{F(Y)}}$ και $F(f^{-1}) \circ F(f) = 1_{\mathrm{F(X)}}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $F(f)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ με αντίστροφο $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$. Συνεπώς, ο F διατηρεί τους ισομορφισμούς. Ανάλογη είναι η απόδειξη στην περίπτωση που ο συναρτητής F είναι αντισυναλλοίωτος.

2. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας δεξιά αντίστροφος στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $g \circ f = 1_{\mathrm{X}}$. Εφαρμόζοντας τον συναλλοίωτο συναρτητή F στην παραπάνω ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν έπεται ότι $F(g) \circ F(f) = 1_{\mathrm{F(X)}}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $F(f)$ είναι δεξιά αντίστροφος του μορφισμού $F(g)$ στην $\mathcal{C}'$. Επομένως, ο συναλλοίωτος συναρτητής F διατηρεί τους δεξιά αντίστροφους.

3. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας αριστερά αντίστροφος στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $f \circ g = 1_Y$. Εφαρμόζοντας τον συναλλοίωτο συναρτητή F στην παραπάνω ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν έπεται ότι έπεται ότι $F(f) \circ F(g) = 1_{F(Y)}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $F(f)$ είναι αριστερά αντίστροφος του μορφισμού $F(g)$ στην $\mathcal{C}'$. Έτσι, ο συναλλοίωτος συναρτητής F διατηρεί τους αριστερά αντίστροφους. ■

Παρατήρηση 1.2.10. 1. Το πρώτο σκέλος της Πρότασης 1.2.9. έχει σημαντικές συνέπειες καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι ορισμένα αντικείμενα μιας κατηγορίας δεν είναι ισόμορφα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο συναρτητής της πρωταρχικής ομάδας μέσω του οποίου μπορούμε να αποδείξουμε ότι ορισμένοι τοπολογικοί χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί δείχνοντας ότι οι πρωταρχικές τους ομάδες δεν είναι ισόμορφες.

2. Είδαμε ότι κάθε συναρτητής διατηρεί τους ισομορφισμούς ωστόσο δεν είναι απαραίτητο να τους αντανακλά. Για παράδειγμα, θεωρούμε τον λησμονικό συναρτητή $U\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$. Η ταυτοτική απεικόνιση από το σύνολο των πραγματικών αριθμών εάν το εφοδιάσουμε με την διακριτή τοπολογία στο σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με την συνήθη τοπολογία δεν είναι ισομορφισμός στην Top αφού δεν είναι ομοιομορφισμός, παρόλα αυτά η υποκείμενη απεικόνιση η οποία είναι η ταυτοτική είναι ένας ισομορφισμός στην Set.

Ορισμός 1.2.11. *Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναλλοίωτος συναρτητής και για κάθε ζεύγος αντικειμένων X, Y της κατηγορίας $\mathcal{C}$, η απεικόνιση*

$$F_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y)), \quad f \longmapsto F(f)$$

1. *Ο συναρτητής F καλείται* **πιστός (faithful)** *εάν η παραπάνω απεικόνιση είναι «1-1» για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

2. *Ο συναρτητής F καλείται* **πλήρης (full)** *εάν η παραπάνω απεικόνιση είναι «επί» για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

3. *Ο συναρτητής F καλείται* **πλήρης και πιστός (full and faithful)** *εάν η παραπάνω απεικόνιση είναι «1-1» και «επί» για κάθε $X, Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})$.*

4. *Ο συναρτητής F καλείται* **ισομορφισμός (isomorphism)** *μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ εάν είναι πλήρης, πιστός και ο επαγόμενος μορφισμός $F\colon \mathsf{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{ob}(\mathcal{C}')$ στις κλάσεις των αντικειμένων είναι «1-1» και «επί». Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι ο συναρτητής F καλείται* **ισομορφισμός (isomorphism)** *εάν υπάρχει ένας συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $F \circ G = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$ και $G \circ F = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$. Εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ οι κατηγορίες καλούνται* **ισόμορφες (isomorphic)**.

5. *Ο συναρτητής F καλείται* **ουσιωδώς επί (essentially surjective)** *εάν κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο της μορφής $F(X)$ για κάποιο αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.*

6. *Ο συναρτητής F καλείται* **διατηρητικός (conservative)** *εάν «αντανακλά» τους ισομορφισμούς δηλαδή εαν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι μορφισμός στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ να είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ τότε ο f είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

Οι παραπάνω έννοιες ορίζονται ανάλογα στην περίπτωση του αντισυναλλοίωτου συναρτητή.

Παρατήρηση 1.2.12. Η σχέση «είναι ισόμορφη με» είναι μια σχέση ισοδυναμίας στη κλάση όλων των κατηγοριών. Ανάλογα με τα ισόμορφα αντικείμενα, οι ισόμορφες κατηγορίες είναι ουσιαστικά ίδιες μεταξύ τους.

Ορισμένα παραδείγματα των εννοιών που αναφέρθηκαν στον Ορισμό 1.2.11. είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.2.13. 1. Ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι πιστός συναρτητής. Εάν επιπλέον η $\mathcal{C}'$ είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ και περιέχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο από κάθε κλάση ισομορφίας αντικειμένων της $\mathcal{C}$ τότε ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης i είναι πλήρης και ουσιωδώς επί. Σημαντικό παράδειγμα συναρτητή φυσικής έγκλεισης ο οποίος δεν είναι ουσιωδώς επί αποτελεί ο συναρτητής $i\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Grp}$ καθώς αυτή του η ιδιότητα μας επιτρέπει να κάνουμε τον διαχωρισμό μεταξύ αβελιανών και μη αβελιανών ομάδων.

2. Ο ταυτοτικός συναρτητής $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι πλήρης και πιστός.

3. Ο λησμονικός συναρτητής ή συναρτητής υποκείμενου συνόλου $U\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι πιστός συναρτητής αλλά συνήθως δεν είναι πλήρης.

   Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τον λησμονικό συναρτητή $U\colon \mathsf{Grp} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ο οποίος στέλνει κάθε ομάδα $(G,+)$ στο υποκείμενο σύνολο G και κάθε ομομορφισμό ομάδων f στην αντίστοιχη απεικόνιση f. Ο $U\colon \mathsf{Grp} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι πιστός καθώς κάθε ομάδα απεικονίζεται σε ένα μοναδικό σύνολο και ένας ομομορφισμός ομάδων είναι ένα υποσύνολο των απεικονίσεων μεταξύ συνόλων. Ωστόσο δεν είναι πλήρης καθώς υπάρχουν απεικονίσεις μεταξύ συνόλων οι οποίες δεν είναι ομομορφισμοί ομάδων όπως για παράδειγμα η $f\colon S_3 \longrightarrow S_3$ με $f(x) = x^2$ όπου S_3 η συμμετρική ομάδα, η οποία είναι απεικόνιση μεταξύ συνόλων ωστόσο δεν είναι ομομορφισμός ομάδων. Επιπλέον, δεν είναι ουσιωδώς επί αφού μια ομάδα δεν μπορεί να είναι κενή. Αντίθετα, ο λησμονικός συναρτητής $F\colon \mathsf{Grp} \longrightarrow \mathsf{Mon}$ ο οποίος στέλνει μια ομάδα G στον εαυτό της θεωρώντας την ως μονοειδές και κάθε ομομορφισμό ομάδων στον αντίστοιχο ομομορφισμό μεταξύ μονοειδών είναι εξίσου πλήρης και πιστός αφού κάθε ομομορφισμός ομάδων είναι ομομορφισμός μονοειδών και αντίστροφα.

4. Ο λησμονικός συναρτητής $U\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ο οποίος στέλνει κάθε τοπολογικό χώρο στο υποκείμενο σύνολο του και κάθε συνεχή απεικόνιση f μεταξύ τοπολογικών χώρων στην αντίστοιχη απεικόνιση συνόλων είναι πιστός και ουσιωδώς επί αφού κάθε σύνολο μπορεί να μετατραπεί σε έναν τοπολογικό χώρο. Ωστόσο δεν είναι πλήρης καθώς οποιαδήποτε απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής.

5. Ας είναι $\mathbb{Z}$ ο δακτύλιος των ακεραίων. Η κατηγορία $\mathbb{Z}$-Mod των $\mathbb{Z}$-προτύπων και των ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-προτύπων είναι ισόμορφη με την κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων αφού ο προφανής συναρτητής $F\colon \mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathbb{Z}$-Mod και Ab.

6. Ας είναι R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Η κατηγορία R-Mod είναι ισόμορφη με την κατηγορία Mod-R αφού ο προφανής συναρτητής $F\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}R$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών R-Mod και Mod-R.

7. Κάθε πλήρης και πιστός συναρτητής είναι διατηρητικός.

Οι ιδιότητες οι οποίες αναφέρθηκαν στον ορισμό 1.2.11. είναι κλειστές ως προς την σύνθεση των συναρτητών όπως υποδηλώνεται από την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.2.14. *Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ δύο συναρτητές. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Εάν οι συναρτητές F και G είναι πιστοί τότε ο συναρτητής $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι πιστός.*

2. *Εάν οι συναρτητές F και G είναι πλήρεις τότε ο συναρτητής $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι πλήρης.*

3. *Εάν οι συναρτητές F και G είναι πλήρεις και πιστοί τότε ο συναρτητής $G \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι πλήρης και πιστός.*

4. *Εάν ο συναρτητής F είναι ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ και ο συναρτητής G είναι ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}''$ τότε ο συναρτητής $G \circ F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}''$.*

5. *Εάν οι συναρτητές F και G είναι ουσιωδώς επί τότε ο συναρτητής $G \circ F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ουσιωδώς επί.*

6. *Εάν οι συναρτητές F και G είναι διατηρητικοί τότε ο συναρτητής $G \circ F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι διατηρητικός.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι πιστοί. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$(G \circ F)_{X,Y} \colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}''}((G \circ F)(X), (G \circ F)(Y)), \quad f \longmapsto G(F(f))$$

Υποθέτουμε ότι $(G \circ F)_{X,Y}(f) = (G \circ F)_{X,Y}(g)$ για κάθε $f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Τότε $G(F(f)) = G(F(g))$. Έτσι, από τον τρόπο ορισμού της απεικόνισης προκύπτει ότι $G_{F(X),F(Y)}(F(f)) = G_{F(X),F(Y)}(F(g))$. Από την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναρτητής G είναι πιστός έπεται ότι $F(f) = F(g)$. Τότε $F_{X,Y}(f) = F_{X,Y}(g)$. Όμως ο F είναι πιστός και ως εκ τούτου συνάγεται ότι $f = g$. Συνεπώς, η απεικόνιση $(G \circ F)_{X,Y}$ είναι «1-1» γεγονός που αποδεικνύει ότι ο συναρτητής $G \circ F$ είναι πιστός.

2. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι πλήρεις. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$(G \circ F)_{X,Y} \colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}''}((G \circ F)(X), (G \circ F)(Y))$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι συναρτητές G και F είναι πλήρεις για κάθε μορφισμό $\alpha \colon (G \circ F)(X) \longrightarrow (G \circ F)(Y)$ υπάρχει μορφισμός $\beta \colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ τέτοιος ώστε $G_{F(X),F(Y)}(\beta) = \alpha$ και αντίστοιχα για κάθε μορφισμό $\beta \colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ υπάρχει μορφισμός $\delta \colon X \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $F_{X,Y}(\delta) = \beta$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε ότι $G_{F(X),F(Y)}(F_{X,Y}(\delta)) = \alpha$. Έτσι, $(G \circ F)_{X,Y}(\delta) = \alpha$. Επομένως αποδείξαμε ότι για κάθε μορφισμό $\alpha \colon (G \circ F)(X) \longrightarrow (G \circ F)(Y)$ υπάρχει μορφισμός $\delta \colon X \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $(G \circ F)_{X,Y}(\delta) = \alpha$. Ως εκ τούτου η απεικόνιση $(G \circ F)_{X,Y}$ είναι «επί» γεγονός που αποδεικνύει ότι ο συναρτητής $G \circ F$ είναι πλήρης.

3. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι πλήρεις και πιστοί. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο και δεύτερο σκέλος της παρούσας Πρότασης έπεται ότι ο συναρτητής $G \circ F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι πλήρης και πιστός.

4. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ισομορφισμοί μεταξύ των αντίστοιχων κατηγοριών. Τότε υπάρχουν συναρτητές $F^{-1} \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ και $G^{-1} \colon \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιοι ώστε $F \circ F^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$, $F^{-1} \circ F = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$, $G \circ G^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}''}$, $G^{-1} \circ G = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες του ταυτοτικού συναρτητή καθώς και τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$(G \circ F) \circ (G \circ F)^{-1} = (G \circ F) \circ (F^{-1} \circ G^{-1}) = ((G \circ F) \circ F^{-1}) \circ G^{-1} = (G \circ (F \circ F^{-1})) \circ G^{-1} =$$
$$= (G \circ \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}) \circ G^{-1} = G \circ G^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}''}$$

και

$$(G \circ F)^{-1} \circ (G \circ F) = (F^{-1} \circ G^{-1}) \circ (G \circ F) = F^{-1} \circ (G^{-1} \circ (G \circ F)) = F^{-1} \circ ((G^{-1} \circ G) \circ F)) =$$
$$= F^{-1} \circ (\mathsf{Id}_{\mathcal{C}'} \circ F)) = F^{-1} \circ F = \mathsf{Id}_{\mathcal{C}}.$$

Επομένως ο συναρτητής $G \circ F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}''$ με αντίστροφο $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

5. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι ουσιωδώς επί. Τότε για κάθε αντικείμενο Z της $\mathcal{C}''$ υπάρχει αντικείμενο Y της $\mathcal{C}'$ και ένας ισομορφισμός $G(Y) \xrightarrow{\backsim} Z$ και για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{C}'$ υπάρχει αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και ένας ισομορφισμός $F(X) \xrightarrow{\backsim} Y$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι κάθε συναρτητής διατηρεί τους ισομορφισμούς έπεται ότι $(G \circ F)(X) = G(F(X)) \backsimeq G(Y) \backsimeq Z$. Συνεπώς, εφόσον για κάθε αντικείμενο Z της $\mathcal{C}''$ υπάρχει αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και ένας ισομορφισμός $(G \circ F)(X) \xrightarrow{\backsim} Y$ ο συναρτητής $G \circ F$ είναι ουσιωδώς επί.

6. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι διατηρητικοί και ότι ο $(G \circ F)(f)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}''$ για κάποιο μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$. Τότε ο $G(F(f))$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}''$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση έπεται ότι ο $F(f)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ και κατ' επέκταση ότι ο f είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου ο συναρτητής $G \circ F$ είναι διατηρητικός. ■

Πρόταση 1.2.15. *Κάθε πιστός συναλλοίωτος συναρτητής αντανακλά τους μονομορφισμούς και τους επιμορφισμούς.*

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας πιστός συναλλοίωτος συναρτητής και $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ ένας μονομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ για κάποιο μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$. Δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $g, h\colon Z \rightrightarrows X$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $f \circ g = f \circ h$. Εφαρμόζοντας τον συναλλοίωτο συναρτητή F στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $F(f)$ είναι μονομορφισμός έπεται ότι $F(g) = F(h)$. Όμως ο συναρτητής F είναι πιστός και ως εκ τούτου $g = h$. Επομένως ο f είναι μονομορφισμός.

Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος της παραπάνω Πρότασης ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας πιστός συναλλοίωτος συναρτητής και $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ ένας επιμορφισμός στην $\mathcal{C}'$ για κάποιο μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$. Δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $g, h\colon Y \rightrightarrows Z$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $g \circ f = h \circ f$. Εφαρμόζοντας τον συναλλοίωτο συναρτητή F στην τελευταία ισότητα έπεται ότι $F(g) \circ F(f) = F(h) \circ F(f)$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $F(f)$ είναι επιμορφισμός προκύπτει ότι $F(g) = F(h)$. Όμως ο συναρτητής F είναι πιστός και ως εκ τούτου $g = h$. Επομένως ο f είναι επιμορφισμός. ■

Προηγουμένως είδαμε ότι κάθε συναρτητής διατηρεί τους ισομορφισμούς καθώς επίσης ότι οι συναλλοίωτοι συναρτητές διατηρούν τους δεξιά και αριστερά αντίστροφους. Έτσι εγείρεται το ερώτημα ποιές είναι οι προϋποθέσεις τις οποίες πρέπει να πληροί ένας συναρτητής ώστε να αντανακλά τα προαναφερθέντα; Την απάντηση δίνει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.2.16. 1. *Κάθε πλήρης και πιστός συναρτητής αντανακλά τους ισομορφισμούς.*

2. *Κάθε πλήρης και πιστός συναλλοίωτος συναρτητής αντανακλά δεξιά αντίστροφους μορφισμούς.*

3. *Κάθε πλήρης και πιστός συναλλοίωτος συναρτητής αντανακλά αριστερά αντίστροφους μορφισμούς.*

4. *Κάθε πλήρης και πιστός συναλλοίωτος συναρτητής αντανακλά αρχικά (αντίστοιχα τελικά) αντικείμενα.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναλλοίωτος πλήρης και πιστός συναρτητής και $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ με αντίστροφο $w\colon F(Y) \longrightarrow F(X)$, για κάποιο μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$. Εφόσον ο συναρτητής F είναι πλήρης υπάρχει μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $F(g) = w$. Έτσι έχουμε $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = w \circ w^{-1} = 1_{\mathrm{F(X)}} = F(1_{\mathrm{X}})$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναρτητής F είναι πιστός έπεται ότι $g \circ f = 1_{\mathrm{X}}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $f \circ g = 1_{\mathrm{Y}}$. Συνεπώς, ο f είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $f^{-1} = g$. Η απόδειξη είναι ανάλογη στην περίπτωση του αντισυναλλοίωτου συναρτητή.

2. Ας είναι $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναλλοίωτος πλήρης και πιστός συναρτητής και $F(f): F(X) \longrightarrow F(Y)$ ένας δεξιά αντίστροφος στην $\mathcal{C}'$, για κάποιο μορφισμό $f: X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $g: F(Y) \longrightarrow F(X)$ τέτοιος ώστε $g \circ F(f) = 1_{\mathrm{F(X)}}$. Εφόσον ο συναρτητής F είναι πλήρης υπάρχει μορφισμός $k: Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $F(k) = g$. Έτσι έχουμε $F(k \circ f) = F(k) \circ F(f) = g \circ F(f) = 1_{\mathrm{F(X)}} = F(1_{\mathrm{X}})$. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναρτητής F είναι πιστός έπεται ότι $k \circ f = 1_{\mathrm{X}}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο f είναι δεξιά αντίστροφος.

3. Ας είναι $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναλλοίωτος πλήρης και πιστός συναρτητής και $F(f): F(X) \longrightarrow F(Y)$ ένας αριστερά αντίστροφος στην $\mathcal{C}'$ για κάποιο μορφισμό $f: X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $g: F(Y) \longrightarrow F(X)$ τέτοιος ώστε $F(f) \circ g = 1_{\mathrm{F(Y)}}$. Εφόσον ο συναρτητής F είναι πλήρης υπάρχει μορφισμός $k: Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $F(k) = g$. Έτσι έχουμε $F(f \circ k) = F(f) \circ F(k) = F(f) \circ g = 1_{\mathrm{F(Y)}} = F(1_{\mathrm{Y}})$. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναρτητής F είναι πιστός έπεται ότι $f \circ k = 1_{\mathrm{Y}}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο f είναι αριστερά αντίστροφος.

4. Ας είναι $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας πλήρης και πιστός συναλλοίωτος συναρτητής και $F(X)$ ένα αρχικό αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Τότε, για κάθε άλλο αντικείμενο $F(Y)$ της $\mathcal{C}'$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $k: F(X) \longrightarrow F(Y)$. Όμως ο συναρτητής F είναι πλήρης και ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $h: X \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $F(h) = k$. Μας απομένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα του μορφισμού h. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας άλλος μορφισμός $g: X \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $F(g) = k$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες έπεται ότι $F(h) = F(g)$ και εφόσον εξ' υποθέσεως ο συναρτητής F είναι πιστός προκύπτει άμεσα ότι $h = g$. Επομένως το αντικείμενο X είναι αρχικό. Δυϊκά, αποδεικνύεται ότι ο συναρτητής F αντανακλά την ιδιότητα του τελικού αντικειμένου. ■

Υπενθυμίζουμε ότι δύο ισόμορφες κατηγορίες είναι ουσιαστικά ίδιες. Ωστόσο η έννοια αυτής της «ομοιότητας» είναι πολύ «περιοριστική» και στην πράξη δεν εμφανίζεται σχεδόν ποτέ. Έτσι, είναι άμεση ανάγκη της εύρεσης μια έννοιας η οποία είναι ελαφρώς ασθενέστερη της έννοιας «ουσιαστικά ίδιες» και περισσότερο ευέλικτη. Η έννοια της ισοδυναμίας κατηγοριών, η οποία αποτελεί γενίκευση του ισομορφισμού, ικανοποιεί αυτή την ανάγκη καθώς οι ισοδύναμες κατηγορίες έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς όλες τις «ενδιαφέρουσες» ιδιότητες της θεωρίας κατηγοριών.

Ορισμός 1.2.17. *Ένας συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ καλείται* **ισοδυναμία κατηγοριών (equivalence of categories)** *εάν είναι πλήρης, πιστός και ουσιωδώς επί. Εάν υπάρχει μια ισοδυναμία από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}'$, οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ καλούνται* **ισοδύναμες (equivalent)** *και συμβολίζονται με $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$.*

Σχόλιο 1.2.18. Ένας ισοδύναμος ορισμός της ισοδυναμίας κατηγοριών εμπλέκει την έννοια του φυσικού ισομορφισμού γι' αυτό κρίνουμε σκόπιμο να αναφερθεί αφότου παραθέσουμε την σχετική θεωρία.

Παράδειγμα 1.2.19. Κάθε ισομορφισμός μεταξύ κατηγοριών είναι ισοδυναμία. Ως εκ τούτου οι ισόμορφες κατηγορίες είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 1.2.20. *Μια* **διακεκριμένη (concrete)** *κατηγορία είναι μια κατηγορία $\mathcal{C}$ εφοδιασμένη με έναν πιστό συναρτητή $U: \mathcal{C} \longrightarrow$* Set.

Παρατήρηση 1.2.21.

1. Ορισμένες φορές στην βιβλιογραφία οι διακεκριμένες κατηγορίες ορίζονται υπεράνω οποιασδήποτε κατηγορίας βάσης αντί της κατηγορίας Set των συνόλων που εμείς έχουμε υιοθετήσει στον Ορισμό 1.2.20. .

2. Μια διακεκριμένη κατηγορία είναι μία κατηγορία η οποία μοιάζει με την κατηγορία των συνόλων με μια επιπλέον δομή. Αυτό συμβαίνει διότι ο πιστός συναρτητής $U: \mathcal{C} \longrightarrow$ Set καθιστά δυνατό να σκεφτούμε τα αντικείμενα της κατηγορίας ως σύνολο με επιπλέον δομή και τους μορφισμούς της ως απεικονίσεις που διατηρούν αυτή την δομή. Ο συναρτητής

U παίζει τον ρόλο του λησμονικού συναρτητή, καθώς λησμονεί την επιπλέον δομή με την οποία είναι εφοδιασμένα τα σύνολα ως αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$.

3. Η απαίτηση ότι ο συναρτήτης $U\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι πιστός μας παρέχει την δυνατότητα να στέλνουμε διαφορετικούς μορφισμούς μεταξύ των ίδιων αντικειμένων σε διαφορετικές απεικονίσεις. Ωστόσο, ο U ίσως να απεικονίζει διαφορετικά αντικείμενα στο ίδιο σύνολο και αν αυτό συμβαίνει θα απεικονίζει επίσης διαφορετικούς μορφισμούς στην ίδια απεικόνιση. Για παράδειγμα, ας είναι S και T δύο διαφορετικές τοπολογίες στο ίδιο σύνολο X τότε (X,S) και (X,T) είναι διακεκριμένα αντικείμενα στην κατηγορία Top ωστόσο απεικονίζονται στο ίδιο σύνολο X από τον λησμονικό συναρτητή $U\colon$ Top $\longrightarrow$ Set. Επιπλέον, οι ταυτοτικοί μορφισμοί $(X,S) \longrightarrow (X,S)$ και $(X,T) \longrightarrow (X,T)$ μπορούν να θεωρηθούν ως διακεκριμένοι μορφισμοί στην Top αλλά έχουν την ίδια υποκείμενη απεικόνιση, την ταυτοτική απεικόνιση του X. Ένα επιπλέον παράδειγμα αποτελεί κάθε σύνολο με τέσσερα στοιχεία το οποίο μπορεί να δώσει δύο μη ισόμορφες ομάδες εκ των οποίων η μία είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και η άλλη ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_4$.

Μερικά παραδείγματα διακεκριμένων κατηγοριών αποτελούν τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.2.22. 1. Η κατηγορία Set των συνόλων εφοδιασμένη με τον ταυτοτικό συναρτητή $\mathsf{Id}_{\mathsf{Set}}\colon$ Set $\longrightarrow$ Set είναι διακεκριμένη κατηγορία.

2. Η κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων εφοδιασμένη με τον λησμονικό συναρτητή $U\colon$ Top $\longrightarrow$ Set είναι διακεκριμένη κατηγορία.

3. Η κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων (αντίστοιχα η R-Mod των αριστερών R-προτύπων) εφοδιασμένη με τον λησμονικό συναρτητή $U\colon$ Mod-$R \longrightarrow$ Set (με τον λησμονικό συναρτητή $U\colon R$-Mod $\longrightarrow$ Set) είναι διακεκριμένη κατηγορία.

4. Η κατηγορία Rel των διμελών σχέσεων *δεν* είναι διακεκριμένη κατά προφανή τρόπο δηλαδή μέσω ενός λησμονικού συναρτητή $U\colon$ Rel $\longrightarrow$ Set αλλά μπορεί να γίνει διακεκριμένη μέσω ενός συναρτητή U ο οποίος στέλνει κάθε σύνολο X στο δυναμοσύνολο 2^X και κάθε διμελή σχέση $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ στην $\rho\colon 2^X \longrightarrow 2^Y$ η οποία ορίζεται ως $\rho(A) = \{y \in Y : \exists x \in X \;\; xRy\}$.

5. Η ομοτοπική κατηγορία των τοπολογικών χώρων δεν είναι διακεκριμένη κατηγορία.

6. Εάν μια κατηγορία $\mathcal{C}$ εφοδιασμένη με έναν συναρτητή $U\colon \mathcal{C} \longrightarrow$ Set είναι διακεκριμένη τότε η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ εφοδιασμένη με τον συναρτητή $\mathcal{Q}^\star \circ U^{\mathsf{op}}$, όπου $\mathcal{Q}^\star\colon \mathsf{Set}^{\mathsf{op}} \longrightarrow$ Set είναι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής του δυναμοσυνόλου, είναι διακεκριμένη. Ως εκ τούτου η $\mathsf{Set}^{\mathsf{op}}$ εφοδιασμένη με τον συναρτητή $\mathcal{Q}^\star$ είναι διακεκριμένη.

Στην θεωρία κατηγοριών για οποιεσδήποτε κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ μπορούμε να σχηματίσουμε την κατηγορία γινόμενο $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$. Για πεπερασμένες πολλές κατηγορίες $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία γινόμενο $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$. Το γινόμενο δύο κατηγοριών αποτελεί επέκταση του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων και αντίστοιχα η κατηγορία γινόμενο επέκταση του καρτεσιανού γινομένου πεπερασμένου αριθμού συνόλων. Πιο αναλυτικά,

Ορισμός 1.2.23. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες. Το* **γινόμενο (product)** $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ *των κατηγορίων $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι μια κατηγορία η οποία ορίζεται ώς εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της αποτελούν τα ζεύγη (X,Y) με X να είναι αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και Y να είναι αντικείμενο της $\mathcal{C}'$.*

2. *Οι μορφισμοί της από το ζεύγος (X,Y) στο ζεύγος (X',Y') είναι τα ζεύγη (f,g) όπου $f\colon X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και $g\colon Y \longrightarrow Y'$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}'$.*

3. *Η σύνθεση επάγεται από τις συνθέσεις στις $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$, δηλαδή ορίζεται ως $(f_2,g_2) \circ (f_1,g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$.*

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός αποτελείται από τους επιμέρους ταυτότικούς μορφισμούς των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$, δηλαδή* $1_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = (1_\mathrm{X}, 1_\mathrm{Y})$.

Ορισμός 1.2.24. *Στην κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ορίζονται οι ακόλουθοι συναρτητές:*

$$\pi_1 \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} \ \text{ με } \ \pi_1(X,Y) = X \ \text{ και } \ \pi_1(f,g) = f$$

και

$$\pi_2 \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}' \ \text{ με } \ \pi_2(X,Y) = Y \ \text{ και } \ \pi_2(f,g) = g$$

οι οποίοι καλούνται **συναρτητές προβολής (projection functors)**.

Οι συναρτητές προβολής ικανοποιούν την ακόλουθη καθολική ιδιότητα:

Πρόταση 1.2.25. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες. Για κάθε κατηγορία $\mathcal{D}$ και κάθε ζεύγος συναρτητών (F,G) με $F \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ και $G \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}'$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $H \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $\pi_1 \circ H = F$ και $\pi_2 \circ H = G$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τον συναρτητή $H \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ως:

$$H(X) = (F(X), G(X)), \ \text{ όπου } X \text{ είναι αντικείμενο της κατηγορίας } \mathcal{D}$$

και

$$H(f) = (F(f), G(f)), \ \text{ όπου } f \text{ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία } \mathcal{D}.$$

Έτσι, πληρούνται οι ισότητες $\pi_1 \circ H = F$ και $\pi_2 \circ H = G$. Όσον αφορά την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας άλλος συναρτητής $M \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $\pi_1 \circ M = F$ και $\pi_2 \circ M = G$. Ως εκ τούτου ο συναρτητής $M \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ορίζεται ώς:

$$M(X) = (F(X), G(X)), \ \text{ όπου } X \text{ είναι αντικείμενο της κατηγορίας } \mathcal{D}$$

και

$$M(f) = (F(f), G(f)), \ \text{ όπου } f \text{ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία } \mathcal{D}.$$

Από τον τρόπο ορισμού των συναρτητών H και M είναι άμεσο ότι $H(X) = M(X)$ και $H(f) = M(f)$ για κάθε αντικείμενο X και κάθε μορφισμό f της κατηγορίας $\mathcal{D}$, γεγονός που αποδεικνύει την μοναδικότητα του συναρτητή H. ∎

Ένας συναρτητής $F \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ ο οποίος ορίζεται επί του γινομένου δύο κατηγοριών καλείται **δισυναρτητής (bifunctor)**. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε:

Ορισμός 1.2.26. *Ένας συναρτητής $F \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ καλείται* **δισυναρτητής (bifunctor)** *εάν για $X \in \mathcal{C}$ και $X' \in \mathcal{C}'$ οι $F(X,-) \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ και $F(-,X) \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι συναρτητές και επιπλέον για κάθε μορφισμό $f \colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό $g \colon X' \longrightarrow Y'$ στην $\mathcal{C}'$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
F(X,X') \arrow[r, "F(X,g)"] \arrow[d, "F(f,X')"'] & F(X,Y') \arrow[d, "F(f,Y')"] \\
F(Y,X') \arrow[r, "F(Y,g)"'] & F(Y,Y')
\end{tikzcd} .$$

Ορισμένα παραδείγματα δισυναρτητών είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.2.27. 1. Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι δισυναρτητής ο οποίος είναι συναλλοίωτος τόσο στην πρώτη όσο και στην δεύτερη μεταβλητή.

2. Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι δισυναρτητής ο οποίος είναι αντισυναλλοίωτος στην πρώτη μεταβλητή και συναλλοίωτος στην δεύτερη μεταβλητή.

3. Ας είναι R μια k-άλγεβρα. Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,-)\colon (\mathsf{Mod}\text{-}R)^{op} \times \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}k$ είναι δισυναρτητής ο οποίος είναι συναλλοίωτος τόσο στην πρώτη όσο και στην δεύτερη μεταβλητή.

4. Ας είναι R μια k-άλγεβρα. Ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,-)\colon \mathsf{Mod}\text{-}R \times \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}k$ είναι δισυναρτητής ο οποίος είναι αντισυναλλοίωτος στην πρώτη μεταβλητή και συναλλοίωτος στην δεύτερη μεταβλητή.

5. Ας είναι R μια k-άλγεβρα. Ο συναρτητής $-\otimes_R -\colon \mathsf{Mod}\text{-}R^{op} \times \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}k$ είναι δισυναρτητής ο οποίος είναι συναλλοίωτος τόσο στην πρώτη όσο και στην δεύτερη μεταβλητή.

Ορισμός 1.2.28. *Ας είναι $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια κατηγοριών από ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών I. Η* **κατηγορία γινόμενο (product category)** $\prod_{i\in I}\{\mathcal{C}_i\}$ *είναι μια κατηγορία η οποία ορίζεται ως εξής:*

1. $\mathsf{ob}(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i) = \prod_{i\in I}\mathsf{ob}(\mathcal{C}_i)$.
2. $\mathsf{Hom}_{\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i}(\{X_i\},\{Y_i\}) = \prod_{i\in I}\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i,Y_i)$.

Η σύνθεση και ο ταυτοτικός μορφισμός ορίζονται κατά προφανή τρόπο.

Ανάλογα, με το γινόμενο κατηγοριών είναι δυνατόν να ορίσουμε το γινόμενο συναρτητών.

Ορισμός 1.2.29. *Ας είναι $F_1\colon \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1'$ και $F_2\colon \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2'$ δύο συναρτητές. Το* **γινόμενο (product)** *τους $F_1\times F_2\colon \mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1'\times\mathcal{C}_2'$ ορίζεται ως:*

$$(F_1\times F_2)(X,Y) = (F_1(X),F_2(Y))$$

για κάθε διατεταγμένο ζεύγος αντικειμένων (X,Y) και

$$(F_1\times F_2)(f,g) = (F_1(f),F_2(g))$$

για κάθε διατεταγμένο ζεύγος μορφισμών (f,g).

Ορισμός 1.2.30. *Ας είναι $\{F_i\colon \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{C}_i'\}_{i\in I}$ μια οικογένεια συναρτητών, όπου $I = \{1,2,\cdots,n\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών. Ο συναρτητής-γινόμενο $\prod_{i\in I}\{F_i\} = F_1\times F_2\times\cdots\times F_n\colon \prod_{i\in I}\{\mathcal{C}_i\} \longrightarrow \prod_{i\in I}\{\mathcal{C}_i'\}$ ορίζεται ως:*

$$(F_1\times F_2\times\cdots\times F_n)(X_1,X_2,\dots X_n) = (F_1(X_1),F_2(X_2),\dots,F_n(X_n))$$

για κάθε n-αδα αντικειμένων $(X_1,X_2,\dots X_n)$ και

$$(F_1\times F_2\cdots\times F_n)(f_1,f_2,\dots f_n) = (F_1(f_1),F_2(f_2),\dots,F_n(f_n))$$

για κάθε n-αδα μορφισμών $(f_1,f_2,\dots f_n)$.

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο παραθέτοντας τους ορισμούς δύο κατηγοριών που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 1.2.31. *Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής και ας είναι A ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}'$. Η κατηγορία $\mathcal{C}_A$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα ζεύγη (X,s) με X να είναι αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και $s\colon F(X) \longrightarrow A$ να είναι μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}'$.*

2. *Ένας μορφισμός της* $(X,s) \longrightarrow (Y,t)$ *απο το ζεύγος* (X,s) *στο ζεύγος* (Y,t) *είναι ένας μορφισμός* $f\colon X \longrightarrow Y$ *στην* $\mathcal{C}$ *τέτοιος ώστε* $s = t \circ F(f)$, *δηλαδή* $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "s"'] & F(Y) \arrow[dl, "t"] \\ A & \end{tikzcd}$$

   να είναι μεταθετικό.

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών* $(X,s) \longrightarrow (Y,t)$ *και* $(Y,t) \longrightarrow (Z,e)$ *επάγει έναν νέο μορφισμό* $(X,s) \longrightarrow (Z,e)$ *δηλαδή έναν μορφισμό* $f = g_2 \circ g_1\colon X \longrightarrow Z$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}$ *όπου* $g_1\colon X \longrightarrow Y$ *και* $g_2\colon Y \longrightarrow Z$ *τέτοιον ώστε* $s = e \circ F(f)$.

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός ορίζεται κατά προφανή τρόπο.*

Στην κατηγορία $\mathcal{C}_A$ ορίζουμε έναν συναρτητή $J_A\colon \mathcal{C}_A \longrightarrow \mathcal{C}$ θέτοντας $J_A(X,s) = X$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο συναρτητής J_A είναι πιστός.

Ορισμός 1.2.32. *Ας είναι* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *ένας συναρτητής και* A *ένα αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathcal{C}'$. *Η κατηγορία* $\mathcal{C}^A$ *ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα ζευγάρια* (X,s) *με* X *να είναι αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *και* $s\colon A \longrightarrow F(X)$ *να είναι μορφισμός στην κατηγορία* $\mathcal{C}'$.

2. *Ένας μορφισμός της* $(X,s) \longrightarrow (Y,t)$ *από το ζεύγος* (X,s) *στο ζεύγος* (Y,t) *είναι ένας μορφισμός* $f\colon X \longrightarrow Y$ *στην* $\mathcal{C}$ *τέτοιος ώστε* $t = F(f) \circ s$ *δηλαδή* $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & F(X) \arrow[dl, "F(f)"] \\ F(Y) & \end{tikzcd}$$

   να είναι μεταθετικό.

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών* $(X,s) \longrightarrow (Y,t)$ *και* $(Y,t) \longrightarrow (Z,e)$ *επάγει έναν νέο μορφισμό* $(X,s) \longrightarrow (Z,e)$ *δηλαδή έναν μορφισμό* $f = g_2 \circ g_1\colon X \longrightarrow Z$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}$ *όπου* $g_1\colon X \longrightarrow Y$ *και* $g_2\colon Y \longrightarrow Z$ *τέτοιον ώστε* $e = F(f) \circ s$.

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός ορίζεται κατά προφανή τρόπο.*

Στην κατηγορία $\mathcal{C}^A$ ορίζουμε έναν συναρτητή $J^A\colon \mathcal{C}^A \longrightarrow \mathcal{C}$ θέτοντας $J^A(X,s) = X$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο συναρτητής J^A είναι πιστός.

Είναι προφανές από τον τρόπο ορισμού τους ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}_A$ και $\mathcal{C}^A$ εξαρτώνται άμεσα από τον συναρτητή F. Ωστόσο, όπως γίνεται κατανοητό από το ακόλουθο σχόλιο στον συμβολισμό παραλείπουμε την αναφορά του.

Σχόλιο 1.2.33. Συμβολίζουμε ένα αντικείμενο (X,s) στην κατηγορία $\mathcal{C}_A$ (αντίστοιχα στην κατηγορία $\mathcal{C}^A$) είτε με $F(X) \longrightarrow A$ (αντίστοιχα με $A \longrightarrow F(X)$) χωρίς ρητή αναφορά στο αντικείμενο, είτε με X χωρίς ρητή αναφορά στον μορφισμό.

Παρατήρηση 1.2.34. Σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ η σχέση «$\backsim$» η οποία ορίζεται ως «$X \backsim Y$ εαν $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \neq \varnothing$» παράγει μια σχέση ισοδυναμίας στα αντικείμενα. Η σχέση ισοδυναμίας η οποία γεννάται από την σχέση που ορίσαμε παραπάνω συμβολίζεται με « $\backsimeq$ ». Αντίστοιχα, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{C}$ με $\pi_0(\mathcal{C})$. Η χρησιμότητα της κατασκευής είναι μεγάλη καθώς καθορίζει πότε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι συνεκτική. Πιο συγκεκριμένα, η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι συνεκτική αν και μόνο αν η κλάση $\pi_0(\mathcal{C})$ αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.

Εάν θεωρήσουμε την κλάση $\pi_0(\mathcal{C})$ ως διακριτή κατηγορία εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός φυσικού συναρτητή $\mathcal{C} \longrightarrow \pi_0(\mathcal{C})$. Σ' αυτή την περίπτωση οι κατηγορίες $\mathcal{C}_\alpha$ και $\mathcal{C}^\alpha$ για $\alpha \in \pi_0(\mathcal{C})$ αποτελούν παραδείγματα ισοδύναμων και συνεκτικών κατηγορίων των οποίων το σύνολο των αντικειμένων τους είναι το σύνολο των αντικειμένων στην κλάση ισοδυναμίας α.

1.2.1 Φυσικοί Μετασχηματισμοί

Ο κλάδος της γενικής τοπολογίας μελετά κατά κόρον τους τοπολογικούς χώρους και τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ αυτών. Ωστόσο δοθέντων δύο συνεχών απεικονίσεων από έναν τοπολογικό χώρο σε έναν άλλο μπορούμε να «περνάμε» από την μια απεικόνιση στην άλλη με τη βοήθεια της έννοιας της ομοτοπίας. Κάτι ανάλογο συμβαίνει για τους συναρτητές. Πιο συγκεκριμένα ένας φυσικός μετασχηματισμός είναι ένας μορφισμός μεταξύ συναρτητών.

Ορισμός 1.2.35. *Ας είναι $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ δύο συναλλοίωτοι συναρτητές. Ένας* **φυσικός μετασχηματισμός (natural transformation)** *$\alpha\colon F \longrightarrow G$, είναι μια οικογένεια μορφισμών*

$$\alpha = \left\{\alpha_X : F(X) \longrightarrow G(X)\right\}_{X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})}$$

στην $\mathcal{C}'$ τέτοια ώστε για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Δοθέντος ενός τέτοιου φυσικού μετασχηματισμού $\alpha\colon F \longrightarrow G$ ο μορφισμός $\alpha_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ καλείται **συνιστώσα (component)** *του α στο X.*

Παρόμοια ορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ αντισυναλλοίωτων συναρτητών.

Παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα φυσικών μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 1.2.36.

1. Ας είναι $()^{\star\star}\colon \mathsf{Vect}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{Vect}(\mathbb{K})$ ο διπλά δυϊκός συναρτητής επί της κατηγορίας των $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ ο οποίος ορίζεται ως σύνθεση του δυϊκού συναρτητή $()^\star$ για διανυσματικούς χώρους με το δυϊκό του δυϊκού συναρτητή για διανυσματικούς χώρους $(\star)^{\mathsf{op}}$ και ας είναι $\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}}\colon \mathsf{Vect}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{Vect}(\mathbb{K})$ ο ταυτοτικός συναρτητής στην κατηγορία $\mathsf{Vect}(\mathbb{K})$. Τότε ορίζοντας το γραμμικό μετασχηματισμό $\alpha_V\colon V \longrightarrow V^{\star\star}$ ως $\alpha(v)(f) = f(v)$, ο α είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός απο τον ταυτοτικό συναρτητή $\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}}$ στο διπλά δυϊκό συναρτητή $()^{\star\star}$.

2. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Ο $\alpha_f\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ ο οποίος ορίζεται ως $\alpha_f(g) = g \circ f$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός.

3. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Ο $\beta_f\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$ ο οποίος ορίζεται ως $\beta_f(g) = f \circ g$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός.

4. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια διακριτή κατηγορία , $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία και $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ συναρτητές μεταξύ αυτών. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\alpha\colon F \longrightarrow G$, είναι μια οικογένεια μορφισμών $\left\{\alpha_X : F(X) \longrightarrow G(X)\right\}_{X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})}$ στην $\mathcal{C}'$. Η οικογένεια αυτή πρέπει να ικανοποιεί το μεταθετικό διάγραμμα του ορισμού 1.2.35 για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}$. Ωστόσο οι μοναδικοί μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ είναι οι ταυτοτικοί και κατά συνέπεια ο μορφισμός f είναι ο ταυτοτικός, ο οποίος κατά προφανή τρόπο κάνει το διάγραμμα μεταθετικό.

Ορισμός 1.2.37. *Ας είναι* $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *δύο συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός* $\alpha\colon F \longrightarrow G$ *μεταξύ των* F *και* G *καλείται* **φυσικός ισομορφισμός ή φυσική ισοδυναμία (natural isomorphism or natural equivalence)** *εάν κάθε* $\alpha_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ *είναι ισομορφισμός στην* $\mathcal{C}'$ *για κάθε αντικείμενο* X *στην* $\mathcal{C}$. *Εάν υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των συναρτητών* F *και* G, *οι συναρτητές* F *και* G *καλούνται* **φυσικά ισόμορφοι ή φυσικά ισοδύναμοι (naturally isomorphic or natural equivalent)** *και συμβολίζονται ως* $F \simeq G$.

Ορισμένα παραδείγματα φυσικών ισομορφισμών είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.2.38.
1. Για κάθε συναρτητή F ο ταυτοτικός μορφισμός του F, $1_{\mathrm{F}}\colon F \longrightarrow F$ ο οποίος είναι ο φυσικός μετασχηματισμός 1_{F} που δίνεται ως $(1_{\mathrm{F}})_X = 1_{\mathrm{FX}}\colon FX \longrightarrow FX$, είναι ένας φυσικός ισομορφισμός.

2. Ο φυσικός μετασχηματισμός $\alpha\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}} \longrightarrow ()^{**}$ (βλέπε παράδειγμα 1.2.36/(1)) γίνεται ένας φυσικός ισομορφισμός εάν περιορίσουμε τους παραπάνω συναρτητές στην πλήρη υποκατηγορία των πεπερασμένης διάστασης διανυσματικών χώρων.

3. Οι συναρτητές $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ και $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ (αντίστοιχα οι συναρτητές $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ και $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$) είναι φυσικά ισόμορφοι συναρτητές υπό την προϋπόθεση ότι τα αντικείμενα X και Y είναι ισόμορφα. Εάν οι παραπάνω συναρτητές είναι φυσικά ισόμορφοι έπεται ότι και τα αντικείμενα X και Y είναι ισόμορφα.

Εφόσον έχουμε αναπτύξει την έννοια των φυσικά ισοδύναμων συναρτητών είμαστε σε θέση να παραθέσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό του ορισμού 1.2.17.

Ορισμός 1.2.39. *Ένας συναρτητής* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *καλείται* **ισοδυναμία κατηγορίων (equivalence of categories)** *εάν υπάρχει συναρτητής* $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ *τέτοιος ώστε ο συναρτητής* $G \circ F$ *να είναι φυσικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό συναρτητή* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ *και ο συναρτητής* $F \circ G$ *να είναι φυσικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό συναρτητή* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$. *Στην περίπτωση αυτή ο συναρτητής* G *καλείται* **ημι-αντίστροφος συναρτητής (quasi-inverse functor)** *του* F.

Λήμμα 1.2.40. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *και* $\mathcal{C}'$ *δύο κατηγορίες και* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *ένας συναρτητής μεταξύ αυτών. Υποθέτουμε ότι* $\mathcal{C}'_0$ *είναι μια πλήρης υποκατηγορία της* $\mathcal{C}'$ *με την ιδιότητα για κάθε αντικείμενο* X *της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *υπάρχει αντικείμενο* Y *της κατηγορίας* $\mathcal{C}'_0$ *και ένας ισομορφισμός μεταξύ των αντικειμένων* $F(X)$ *και* Y. *Τότε υπάρχει ένας συναρτητής* $F_0\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ *και ένας ισομορφισμός συναρτητών* $\theta\colon F \longrightarrow i' \circ F_0$ *όπου* $i'\colon \mathcal{C}'_0 \longrightarrow \mathcal{C}'$ *είναι ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης από την υποκατηγορία* $\mathcal{C}'_0$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}'$. *Επιπλέον, ο συναρτητής* $F_0\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ *είναι μοναδικός μέχρις μοναδικού ισομορφισμού. Ειδικότερα, δοθέντος ενός άλλου ισομορφισμού* $\theta_1\colon F \longrightarrow i' \circ F_1$ *υπάρχει μοναδικος συναρτητής* $\theta_0\colon F_1 \longrightarrow F_0$ *τέτοιος ώστε* $\theta = (i' \circ \theta_0) \circ \theta_1$.

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής και $\mathcal{C}'_0$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}'$ με την ιδιότητα για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ να υπάρχει αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'_0$ και ένας ισομορφισμός μεταξύ των αντικειμένων $F(X)$ και Y. Κάνοντας χρήση του Αξιώματος της επιλογής για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ επιλέγουμε ένα αντικείμενο Y της πλήρους υποκατηγορίας $\mathcal{C}'_0$ και έναν ισομορφισμό $\psi_X\colon Y \longrightarrow F(X)$ και κατόπιν θέτουμε $F_0(X) = Y$. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow X'$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Ορίζουμε $F_0(f) = \psi_{X'}^{-1} \circ F(f) \circ \psi_X$ όπου $\psi_{X'}^{-1}\colon F(X') \longrightarrow F_0(X')$, $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(X')$ και $\psi_X\colon F_0(X) \longrightarrow F(X)$. Ο $F_0\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ αντιμετατίθεται με τη σύνθεση των μορφισμών όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
F_0(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "F_0(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
F_0(X') \arrow[r, "\psi_{X'}"] \arrow[d, "F_0(g)"'] & F(X') \arrow[d, "F(g)"] \\
F_0(X'') \arrow[r, "\psi_{X''}"] & F(X'')
\end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το τελευταίο διάγραμμα έπεται ότι ο $F_0 \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ είναι ένας συναρτητής. Θεωρούμε τον μορφισμό $\theta \colon i' \circ F_0 \longrightarrow F$. Ορίζουμε ως $\theta_X : i'(F_0(X)) = Y \longrightarrow F(X)$ να είναι ο ισομορφισμός ψ_X, δηλαδή $\theta_X = \psi_X : Y \longrightarrow F(X)$. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\theta_X = \psi_X"] \arrow[d, "F_0(f)"'] & FX \arrow[d, "F(f)"] \\
Y' \arrow[r, "\theta_{X'} = \psi_{X'}"'] & FX'
\end{tikzcd}$$

και κατ' επέκταση το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
i'(F_0(X)) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "i'F_0(f)"'] & FX \arrow[d, "F(f)"] \\
i'(F_0(X')) \arrow[r, "\theta_{X'} = \psi_{X'}"'] & FX'
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έτσι, ο $\theta \colon i' \circ F_0 \longrightarrow F$ είναι ένας ισομορφισμός συναρτητών. Μας απομένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα του συναρτητή $F_0 \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'_0$ μέχρις μοναδικού ισομορφισμού. Πιο συγκεκριμένα δοθέντος ενός άλλου ισομορφισμού $\theta_1 \colon F \longrightarrow i' \circ F_1$ υπάρχει μοναδικος συναρτητής $\theta_0 \colon F_1 \longrightarrow F_0$ τέτοιος ώστε $\theta = (i' \circ \theta_0) \circ \theta_1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $\theta_1 \colon F \longrightarrow i' \circ F_1$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ύπαρξη του ισομορφισμού $\theta \colon F \longrightarrow i' \circ F_0$ έπεται ότι $i' \circ F_1 \backsimeq i' \circ F_0$ και κατ' επέκταση ότι $F_1 \backsimeq F_0$. Έτσι, υπάρχει ισομορφισμός συναρτητών $\theta_0 \colon F_1 \longrightarrow F_0$ τέτοιος ώστε $\theta = (i' \circ \theta_0) \circ \theta_1$. Θα αποδείξουμε ότι ο $\theta_0 \colon F_1 \longrightarrow F_0$ είναι μοναδικός. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας άλλος ισομορφισμός συναρτητών $h \colon F_1 \longrightarrow F_0$ τέτοιος ώστε $\theta = (i' \circ h) \circ \theta_1$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

$$(i' \circ \theta_0) \circ \theta_1 = (i' \circ h) \circ \theta_1$$

και κατ' επέκταση ότι

$$\theta_0 \circ \theta_1 = h \circ \theta_1.$$

Εφόσον ο $\theta_1 \colon F \longrightarrow i' \circ F_1$ είναι ένας ισομορφισμός υπάρχει ο αντίστροφος θ_1^{-1} ο οποίος είναι εξίσου ισομορφισμός. Συνθέτοντας από τα δεξιά στην τελευταία ισότητα με τον θ_1^{-1} έπεται ότι $\theta_0 = h$. ■

Ορισμός 1.2.41. *Ένας συναρτητής $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ καλείται* **αναπαραστάσιμος (representable)** *εάν ο F είναι φυσικά ισόμορφος με τον συναρτητή* $\mathrm{Hom}(X, -) \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$.

Κάποια παραδείγματα αναπαραστάσιμων συναρτητών είναι τα ακόλουθα τα οποία δείχνουν ότι οι λησμονικοί συναρτητές είναι συχνά αναπαραστάσιμοι:

Παράδειγμα 1.2.42. 1. Ο λησμονικός συναρτητής $U\colon \mathsf{Vect}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι αναπαραστάσιμος και αναπαρίσταται από τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}$.

2. Ο λησμονικός συναρτητής $U\colon\ \mathsf{Grp} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι αναπαραστάσιμος και αναπαρίσταται από την ομάδα των ακεραίων $\mathbb{Z}$.

3. Ο λησμονικός συναρτητής $U\colon\ \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι αναπαραστάσιμος και αναπαρίσταται από οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο του οποίου το υποκείμενο σύνολο του έχει ακριβώς ένα σημείο.

Παρατήρηση 1.2.43. Αντικείμενα τα οποία αναπαριστούν τον ίδιο συναρτητή ή δύο φυσικά ισόμορφους συναρτητές είναι ισόμορφα.

Οι φυσικοί μετασχηματισμοί είναι ένα «είδος» μορφισμού, έτσι είναι αναμενόμενο να μπορούμε να τους συνθέσουμε. Ως εξής:

Παρατήρηση 1.2.44. Αν $F, G, H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι συναλλοίωτοι (αντίστοιχα αντισυναλλοίωτοι) συναρτητές, και $\alpha\colon F \longrightarrow G$ και $\beta\colon G \longrightarrow H$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί, τότε η σύνθεση τους $\beta \circ \alpha\colon F \longrightarrow H$ ορίζει έναν νέο φυσικό μετασχηματισμό, όπου η κλάση των μορφισμών δίνεται ως

$$\beta \circ \alpha = \big\{(\beta \circ \alpha)_X\big\} = \big\{\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \longrightarrow H(X)\big\}$$

για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$. Ο νόμος της σύνθεσης είναι προσεταιριστικός και για κάθε συναρτητή F ο ταυτοτικός μορφισμός του F δρά ως μονάδα.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν κανείς την παρατήρηση 1.2.44. θα μπορούσε να θεωρήσει εσφαλμένα την ύπαρξη μιας κατηγορίας η οποία έχει ως αντικείμενα τους συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ και ως μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών. Το λάθος έγκειται στο γεγονός ότι εφόσον οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ έχουν απλώς κλάσεις αντικειμένων, γενικά δεν υπάρχει τρόπος να αποδείξει κανείς την ύπαρξη ενός συνόλου φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ δύο συναρτητών. Ωστόσο εάν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μικρή το πρόβλημα αυτό εξαλείφεται και έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.45. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια μικρή κατηγορία και $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία. Τότε ορίζεται η* **κατηγορία συναρτητών (functor category)** *$Fun(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ να είναι η κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τους συναρτητές απο την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ και ως μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών.*

Ορισμός 1.2.46. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια μικρή κατηγορία, C ένα αντικείμενο της, $Fun(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set})$ η κατηγορία των συναρτητών από την κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ στην κατηγορία Set των συνόλων και $Fun(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ η κατηγορία των συναρτητών από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία Set των συνόλων.*

Ο **συναρτητής του Yoneda (Yoneda Functor)** *$h\colon \mathcal{C} \longrightarrow Fun(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set})$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής ο οποίος στέλνει το C στον αντισυναλλοίωτο αναπαραστάσιμο συναρτητή $hC = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στον φυσικό μετασχηματισμό $hf = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f)\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$.*

Ανάλογα ορίζεται ο **συναρτητής του Yoneda** *$k\colon \mathcal{C} \longrightarrow Fun(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ ο οποίος είναι ένας αντισυναλλοίωτος συναρτητής που στέλνει το C στον συναλλοίωτο αναπαραστάσιμο συναρτητή $kC = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στον φυσικό μετασχηματισμό $kf = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f, -)\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$.*

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο παραθέτοντας ένα σημαντικό λήμμα.

Λήμμα 1.2.47. **(Λήμμα του Yoneda)** *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια τοπικά μικρή κατηγορία.*

1. *Ας είναι C ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $F \in Fun(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set})$ ένας συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ στην κατηγορία* Set *των συνόλων και των απεικονίσεων μεταξύ των συνόλων. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$\eta_{C,F} \colon \mathsf{Hom}(hC, F) \longrightarrow FC$$

μεταξύ του συνόλου των φυσικών μετασχηματισμών απο τον συναρτητή hC στον συναρτητή F και των στοιχείων του συνόλου FC ο οποίος είναι φυσικός στις μεταβλητές F και C.

2. *Ας είναι C ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $G \in Fun(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ ένας συναρτητής από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία* Set *των συνόλων και των απεικονίσεων μεταξύ των συνόλων. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$\beta_{G,C} \colon \mathsf{Hom}(kC, G) \longrightarrow GC$$

μεταξύ του συνόλου των φυσικών μετασχηματισμών από τον συναρτητή G στον συναρτητή kC και των στοιχείων του συνόλου GC ο οποίος είναι φυσικός στις μεταβλητές G και C.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του λήμματος του Yoneda θα εξηγήσουμε τι σημαίνει η φυσικότητα στις μεταβλητές F και C που αναφέραμε στην διατύπωση του.

Η φυσικότητα στην μεταβλητή F σημαίνει ότι, δοθέντος οποιουδήποτε $\theta \colon F \longrightarrow H$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(hC, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(hC,\theta)"'] & FC \arrow[d, "\theta_C"] \\
\mathsf{Hom}(hC, H) \arrow[r, "\cong"'] & HC
\end{tikzcd}$$

Η φυσικότητα στην μεταβλητή C σημαίνει ότι, δοθέντος οποιουδήποτε φυσικού μετασχηματισμού $g \colon C \longrightarrow D$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(hD, F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(hg,F)"'] & FD \arrow[d, "Fg"] \\
\mathsf{Hom}(hC, F) \arrow[r, "\cong"'] & FC
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. 1. Για να ορίσουμε τον ζητούμενο ισομορφισμό $\eta_{C,F} \colon \mathsf{Hom}(hC, F) \longrightarrow FC$ δοθέντος ενός φυσικού μετασχηματισμού $\theta \colon hC \longrightarrow F$ ορίζουμε $\eta_{C,F}(\theta) = \theta_C(1_C)$ όπου $\theta_C \colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C) \longrightarrow FC$. Έτσι, $\theta_C(1_C) \in FC$.
Αντίστροφα, λαμβάνουμε ένα στοιχείο α το οποίο ανήκει στο σύνολο FC και ορίζουμε έναν φυσικό μετασχηματισμό $\theta_\alpha \colon hC \longrightarrow F$ ως εξής:
Δοθέντος οποιουδήποτε αντικειμένου C' ορίζουμε $(\theta_\alpha)_{C'} \colon \mathsf{Hom}(C', C) \longrightarrow FC'$ θέτοντας $(\theta_\alpha)_{C'}(h) = F(h)(\alpha)$ όπου $h \colon C' \longrightarrow C$. Για να αποδείξουμε ότι ο θ_α είναι φυσικός μετασχηματισμός λαμβάνοντας οποιοδήποτε μορφισμό $f \colon C'' \longrightarrow C'$ αρκεί να δείξουμε ότι το

ακόλουθο δίαγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(C',C) \arrow[r, "(\theta_\alpha)_{C'}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(f,C)"'] & FC' \arrow[d, "Ff"] \\ \mathsf{Hom}(C'',C) \arrow[r, "(\theta_\alpha)_{C''}"'] & FC'' \end{tikzcd}$$

Πράγματι, για οποιοδήποτε μορφισμό $h \in hC(C')$ έχουμε ότι
$((\theta_\alpha)_{C''} \circ \mathsf{Hom}(f,C))(h) = (\theta_\alpha)_{C''}(\mathsf{Hom}(f,C)(h)) = (\theta_\alpha)_{C''}(h \circ f) = F(h \circ f)(\alpha) = (F(f) \circ F(h))(\alpha) = F(f)(F(h)(\alpha)) = F(f)((\theta_\alpha)_{C'}(h)) = (F(f) \circ (\theta_\alpha)_{C'})(h)$
Εφόσον ορίσαμε τους μορφισμούς θ_α και $\eta_{C,F}(\theta)$ εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι ο ένας είναι αντίστροφος του άλλου. Δοθέντος $\theta\colon hC \longrightarrow F$ θα υπολογίσουμε $\theta_{(}\eta_{C,F}(\theta))$. Ο $\theta\colon hC \longrightarrow F$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός και ως εκ τούτου για κάθε μορφισμό $h\colon C' \longrightarrow C$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} hC(C) \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, "hC(h)"'] & FC \arrow[d, "Fh"] \\ hC(C') \arrow[r, "\theta_{C'}"'] & FC' \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς και την μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος έχουμε

$$(\theta_{(}\eta_{C,F}(\theta)))_{C'}(h) = F(h)(\theta_C(1_{\mathrm{C}})) = \theta_{C'} \circ hC(h)(1_{\mathrm{C}}) = \theta_{C'}(h).$$

Έτσι έπεται ότι $\theta_{(}\eta_{C,F}(\theta)) = \theta$.
Ας είναι α στοιχείο του FC. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\eta_{C,F}(\theta(\alpha)) = \eta_{C,F}(\theta_\alpha) = (\theta_\alpha)_C(1_{\mathrm{C}}) = F(1_{\mathrm{C}})(\alpha) = \alpha.$$

Επομένως ορίζεται ένας ισομορφισμός $\eta_{C,F}\colon \mathsf{Hom}(hC,F) \longrightarrow FC$. Μας απομένει να αποδείξουμε την φυσικότητα ως προς τις μεταβλητές C και F. Για την φυσικότητα ως προς την μεταβλητή F έχουμε:
Ας είναι $\phi\colon F \longrightarrow F'$ ένας μορφισμός μεταξύ των συναρτητών F και F'. Λαμβάνοντας $\theta \in \mathsf{Hom}(hC,F)$ σχηματίζουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(hC,F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(hC,\phi)"'] & FC \arrow[d, "\phi_C"] \\ \mathsf{Hom}(hC,F') \arrow[r, "\eta_{C,F'}"'] & F'C \end{tikzcd} .$$

Η μεταθετικότητα του διαγράμματος προκύπτει ως εξής:

$$(\eta_{C,F'} \circ \mathsf{Hom}(hC,\phi))(\theta) = \eta_{C,F'}(\phi \circ \theta) = (\phi\theta)_C(1_{\mathrm{C}}) = \phi_C(\theta_C(1_{\mathrm{C}})) = \phi_C(\eta_{C,F}(\theta)) = (\phi_C \circ \eta_{C,F})(\theta).$$

Όσον αφορά την φυσικότητα στην μεταβλητή C έχουμε:
Λαμβάνουμε έναν μορφισμό $f\colon C' \longrightarrow C$ και σχηματίζουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}(hC, F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}(hf,F)"'] & FC \arrow[d, "Ff"] \\
\mathsf{Hom}(hC', F) \arrow[r, "\eta_{C',F}"'] & FC'
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την φυσικότητα του μετασχηματισμού θ έχουμε

$$(\eta_{C',F} \circ \mathsf{Hom}(hf, F))(\theta) = \eta_{C',F}(\theta \circ hf) = (\theta \circ hf)_{C'}(1_{C'}) = \theta_{C'} \circ (hf)_{C'}(1_{C'}) = \theta_{C'}(1_{C'} \circ f) =$$

$$= \theta_{C'}(f) = \theta_{C'}(1_C \circ f) = \theta_{C'} \circ (hC)(f)((1_C)) = F(f) \circ \theta_C(1_C) = (F(f) \circ \eta_{C,F})(\theta)$$

γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του διαγράμματος και κατα συνέπεια την φυσικότητα στην μεταβλητή C.

2. Είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Παρατήρηση 1.2.48. Στο Λήμμα του Yoneda η προϋπόθεση η κατηγορία $\mathcal{C}$ να είναι τοπικά μικρή είναι ιδιαίτερα σημαντική. Στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathcal{C}$ δεν είναι τοπικά μικρή οι συναρτητές $h\colon \mathcal{C} \longrightarrow Fun(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set})$ και $k\colon \mathcal{C} \longrightarrow Fun(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ δεν ορίζονται και έτσι το Λήμμα του Yoneda δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Άμεση συνέπεια του Λήμματος Του Yoneda αποτελεί η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1.2.49. *Οι συναρτητές του Yoneda $h\colon \mathcal{C} \longrightarrow Fun(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set})$ και $k\colon \mathcal{C} \longrightarrow Fun(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ είναι πλήρεις και πιστοί.*

Απόδειξη. Παραθέτουμε την απόδειξη για τον συναρτητή h. Η ίδια αποδεικτική διαδικασία ακολουθείται για τον συναρτητή k.
Για οποιαδήποτε αντικείμενα X και Y στην κατηγορία $\mathcal{C}$ αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ισομοφισμού $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \backsimeq \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set})}(hX, hY)$. Απο το Λήμμα του Yoneda έπεται ότι $\mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set})}(hX, hY) \backsimeq hY(X) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Συνεπώς ο συναρτητής h είναι πλήρης και πιστός. ■

1.2.2 Συζυγή Ζεύγη Συναρτητών

Μια από τις σημαντικότερες έννοιες της θεωρίας κατηγοριών αποτελεί η έννοια του συζυγούς ζεύγους συναρτητών. Οι συζυγείς συναρτητές εμφανίζονται συχνά σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών ενώ αξιοσημείωτη είναι η σημασία των θεωρημάτων τους τα οποία έχουν εκπληκτικό εύρος εφαρμογών.

Ορισμός 1.2.50. *Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ δύο συναρτητές. Το διατεταγμένο ζεύγος (F, G) καλείται* **συζυγές ζεύγος (adjoint pair)**, *εάν για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{C}'$ υπάρχουν «1-1» και «επί» απεικονίσεις*

$$\eta_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)),$$

κάθε μια εκ των οποίων είναι φυσική στα αντικείμενα X και Y. Η συλλογή $\eta = \{\eta_{X,Y}\}_{(X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'}$ των «1-1» και «επί» απεικονίσεων καλείται **συζυγής μετασχηματισμός (adjoint transformation)**.

Επιπλέον θα λέμε ότι ο συζυγής μετασχηματισμός είναι **φυσικός (natural)** *στα αντικείμενα X και Y εάν για κάθε μορφισμό $f\colon X' \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$, και για κάθε μορφισμό $g\colon Y \longrightarrow Y'$ στην $\mathcal{C}'$, τα ακόλουθα διαγράμματα είναι μεταθετικά:*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y) \arrow[r, "(F(f))^{\star}"] \arrow[d, "\eta_{X,Y}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X'),Y) \arrow[d, "\eta_{X',Y}"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \arrow[r, "f^{\star}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X',G(Y))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y) \arrow[r, "g_{\star}"] \arrow[d, "\eta_{X,Y}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y') \arrow[d, "\eta_{X,Y'}"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \arrow[r, "(G(g))_{\star}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y'))
\end{tikzcd}$$

Όταν το ζεύγος συναρτητών (F,G) είναι συζυγές ζεύγος, ο συναρτητής F καλείται **αριστερός συζυγής (left adjoint)** *του G και ο συναρτητής G καλείται* **δεξιός συζυγής (right adjoint)** *του F.*

Ορισμένα παραδείγματα συζυγών συναρτητών είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.2.51. 1. Εάν R και S είναι δακτύλιοι και ${}_RX_S$ είναι ένα (R,S)-διπρότυπο, τότε το ζεύγος $(-\otimes_R X, \mathsf{Hom}_S(X,-))$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών : $\mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}S$, καθώς ο συζυγής μετασχηματισμός $\eta = \{\eta_{M,N}\}_{(M,N)\in \mathsf{Mod}\text{-}R\times \mathsf{Mod}\text{-}S}$, ο οποίος ορίζεται ως: $\eta_{M,N}(f)(m)(x) = f(m\otimes x)$ επάγει έναν φυσικό ισομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\eta_{M,N}\colon \mathsf{Hom}_S(M\otimes_R X, N) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_R(M, \mathsf{Hom}_S(X,N)),$$

για κάθε δεξιό R-πρότυπο M και για κάθε δεξιό S-πρότυπο N.

2. Εάν R και S είναι δακτύλιοι και ${}_SX_R$ είναι ένα (R,S)-διπρότυπο, τότε το ζεύγος $(X\otimes_R -, \mathsf{Hom}_S(X,-))$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών : $R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow S\text{-}\mathsf{Mod}$, καθώς για κάθε ${}_RM$, ${}_SN$, επάγεται ένας φυσικός ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\eta_{M,N}\colon \mathsf{Hom}_S(X\otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_R(M, \mathsf{Hom}_S(X,N)).$$

3. Ας είναι Set η κατηγορία των συνόλων και X, Y, Z αντικείμενα της. Τότε το ζεύγος $(-\times Y, \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(Y,-))$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών : $\mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$ καθώς για οποιαδήποτε σύνολα X και Z επάγεται ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\eta_{X,Z}\colon \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(X\times Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, \mathsf{Hom}_{\mathsf{Set}}(Y,Z)).$$

4. Ο λησμονικός συναρτητής $U\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$ έχει έναν αριστερό συζυγή συναρτητή $G\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Top}$ ο οποίος στέλνει κάθε σύνολο Y στον τοπολογικό χώρο που προκύπτει εάν εφοδιάσουμε το Y με την διακριτή τοπολογία και έναν δεξιό συζυγή συναρτητή $H\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Top}$ ο οποίος στέλνει κάθε σύνολο Y στον τοπολογικό χώρο που προκύπτει εάν εφοδιάσουμε το Y με την μη-διακριτή τοπολογία.

5. Ας είναι R μια k-άλγεβρα. Ο λησμονικός συναρτητής $U\colon \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}k$ ο οποίος στέλνει ένα R-πρότυπο σε ένα k-πρότυπο έχει έναν αριστερό συζυγή $R \otimes_k -\colon \mathsf{Mod}\text{-}k \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}R$ ο οποίος στέλνει ένα k-πρότυπο K σε ένα R-πρότυπο $R \otimes_k K$ και έναν δεξιό συζυγή συναρτητή $\mathsf{Hom}_k(R, -)\colon \mathsf{Mod}\text{-}k \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}R$ ο οποίος στέλνει ένα k-πρότυπο K σε ένα R-πρότυπο $\mathsf{Hom}_k(R, K)$.

6. Ο λησμονικός συναρτητής $U\colon \mathsf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathsf{Set}$ έχει έναν αριστερό συζυγή συναρτητή $G\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Mod}\text{-}R$ ο οποίος στέλνει κάθε σύνολο X στο ελεύθερο R-πρότυπο το οποίο γεννάται από τα στοιχεία του X, ωστόσο δεν έχει δεξιό συζυγή συναρτητή.

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι δύο φυσικοί μετασχηματισμοί μπορούν να συντεθούν και να μας δώσουν έναν νέο φυσικό μετασχηματισμό. Ανάλογα, ορίζεται η σύνθεση δύο ζευγών συζυγών συναρτητών όπως υποδηλώνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.52. *Ας είναι $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}''$ τρεις κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, $F'\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ και $G'\colon \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$ συναρτητές μεταξύ αυτών. Εάν (F, G) και (F', G') είναι ζεύγη συζυγών συναρτητών τότε η σύνθεση τους $(F' \circ F, G \circ G')$ είναι ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι (F, G) και (F', G') είναι ζεύγη συζυγών συναρτητών. Τότε εξ' ορισμού για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$, Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ και Z της κατηγορίας $\mathcal{C}''$ επάγονται οι ακόλουθοι ισομορφισμοί:

$$\eta_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)).$$

και

$$\beta_{Y,Z}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}''}(F'(Y), Z) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, G'(Z)).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους παραπάνω ισομορφισμούς προκύπτει ότι:

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}''}(F'(F(X)), Z) \backsimeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), G'(Z)) \backsimeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(G'(Z)))$$

Η ύπαρξη του τελευταίου ισομορφισμού υποδηλώνει ότι το ζεύγος $(F' \circ F, G \circ G')$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. ■

Εν συνεχεία εάν θεωρήσουμε ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών (F, G) με κατάλληλες επιλογές τον αντικείμενων X και Y προκύπτουν οι ακόλουθοι ισομορφισμοί

$$\eta_{X,F(X)}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(X)) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(F(X))).$$

και

$$\beta_{G(Y),G(Y)}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(G(Y)), Y) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)).$$

Ο ταυτοτικός μορφισμός του $F(X)$ ορίζει έναν μορφισμό $X \longrightarrow G \circ F(X)$ και αντίστοιχα ο ταυτοτικός μορφισμός του $G(Y)$ ορίζει έναν μορφισμό $F \circ G(Y) \longrightarrow Y$ οι οποιοί είναι φυσικοί στα X και Y όπως αποδεικνύεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.53. *Έστω (F, G) ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών, όπου $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, και $\eta_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ οι «1-1» και «επί» συζυγείς μετασχηματισμοί. Τότε επάγονται φυσικοί μετασχηματισμοί συναρτητών $\varepsilon\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$ και $\eta\colon F \circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$, όπου*

$$\varepsilon = \{\varepsilon_X := \eta_{X,F(X)}(1_{F(X)})\colon X \longrightarrow (G \circ F)(X)\}_{X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C})}$$

και

$$\eta = \{\eta_Y := \eta^{-1}_{G(Y),Y}(1_{G(Y)})\colon (F \circ G)(Y) \longrightarrow Y\}_{Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}')}.$$

Απόδειξη. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow X'$ τυχόν μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Για να αποδείξουμε ότι ο $\varepsilon\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, αρκεί να δείξουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_{X,F(X)}(1_{F(X)})"] \arrow[d, "f"'] & (G\circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X',F(X')}(1_{F(X')})"'] & (G\circ F)(X') \end{tikzcd}$$

δηλαδή

$$(G\circ F)(f)\circ \eta_{X,F(X)}(1_{F(X)}) = \eta_{X',F(X')}(1_{F(X')})\circ f.$$

Εφόσον οι μετασχηματισμοί $\eta_{X,Y}$ είναι φυσικοί στο Y, και ο $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(X')$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}'$, προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(X)) \arrow[r, "F(f)_\star"] \arrow[d, "\eta_{X,F(X)}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(X')) \arrow[d, "\eta_{X,F(X')}"] \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,(G\circ F)(X)) \arrow[r, "(G(F(f)))_\star"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,(G\circ F)(X')) \end{tikzcd}$$

Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} (G\circ F)(f)\circ \eta_{X,F(X)}(1_{F(X)}) &= ((G\circ F)(f))_\star(\eta_{X,F(X)}(1_{F(X)})) \\ &= ((G\circ F)(f))_\star\circ \eta_{X,F(X)})(1_{F(X)}) \\ &= (\eta_{X,F(X')}\circ F(f)_\star)(1_{F(X)}) \\ &= \eta_{X,F(X')}(F(f)_\star(1_{F(X)})) \\ &= \eta_{X,F(X')}(F(f)\circ 1_{F(X)}) \\ &= \eta_{X,F(X')}(F(f)). \end{aligned}$$

Ανάλογα, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι $\eta_{X,Y}$ είναι φυσικές στο X, καθώς και το γεγονός ότι ο $f\colon X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, έπεται ότι $\eta_{X',F(X')}(1_{F(X')})\circ f = (\eta_{X,F(X')}\circ F(f)^\star)(1_{F(X')})$, και ως εκ τούτου, προκύπτει ότι $\eta_{X',F(X')}(1_{F(X')})\circ f = \eta_{X,F(X')}(F(f))$. Έτσι τελικά, έχουμε ότι $(G\circ F)(f)\circ\eta_{X,F(X)}(1_{F(X)}) = \eta_{X',F(X')}(1_{F(X')})\circ f$, γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο. Ανάλογη αποδεικτική διαδικασία ακολουθούμε για να δείξουμε ότι ο μορφισμός η είναι φυσικός μετασχηματισμός. ■

Σχόλιο 1.2.54. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί ϵ και η της πρότασης 1.2.53, καλούνται αντίστοιχα **μονάδα (unit)**, και **συνμονάδα (counit)**, του συζυγούς ζεύγους (F,G).

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί κριτήριο για να χαρακτηριστεί ένα ζεύγος συναρτητών ως συζυγές ζεύγος.

Πρόταση 1.2.55. *Ας είναι (F,G) ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών, όπου $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, και $\eta_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$ οι «1-1» και «επί» συζυγείς μετασχηματισμοί. Τότε οι επαγόμενοι φυσικοί μετασχηματισμοί συναρτητών $\varepsilon\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow G\circ F$ και $\eta\colon F\circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$, όπως αυτοί ορίσθηκαν στην Πρόταση 1.2.53, ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$(\eta\circ F)\circ(F\circ\varepsilon) = \mathsf{Id}_F\colon F \longrightarrow F \quad \& \quad (G\circ\eta)\circ(\varepsilon\circ G) = \mathsf{Id}_G\colon G \longrightarrow G$$

Αντίστροφα αν $\varepsilon\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow G\circ F$ *και* $\eta\colon F\circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$, *είναι φυσικοί μετασχηματισμοί συναρτητών οι οποίοι ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις, τότε το ζεύγος συναρτητών* (F,G) *είναι συζυγές.*

Απόδειξη. Δοθέντος του φυσικού ισομορφισμού $\eta_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$ συμβολίζουμε με ε_X τον μορφισμό $\eta_{X,F(X)}(\mathsf{Id}_{F(X)})\colon X \longrightarrow GF(X)$ και με η_Y τον μορφισμό $\eta^{-1}_{GY,Y}(\mathsf{Id}_{G(Y)})\colon FG(Y) \longrightarrow Y$. Ένας μορφισμός της μορφής $f\colon F(X) \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(X)) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),f)"] \arrow[d, "\eta_{X,F(X)}"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y) \arrow[d, "\eta_{X,Y}"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,(G\circ F)(X)) \arrow[r, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(f))"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))
\end{tikzcd}$$

απο το οποίο προκύπτει η ισότητα $\eta_{X,Y}(f) = G(f)\circ\varepsilon_X$ και ως δυϊκή αυτής, η ισότητα $\eta^{-1}_{G(Y),Y}(f) = \eta_Y \circ F(f)$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ισχύει ότι $\eta_{FX}\circ F\varepsilon_X = \mathsf{Id}_{\mathsf{FX}}$. Η απόδειξη της τελευταίας ισότητας ανάγεται στο να αποδειχθεί η μεταθετικότητα του ακόλουθου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F\varepsilon_X"] \arrow[d, "\mathsf{Id}_{\mathsf{FX}}"'] & FGF(X) \arrow[dl, "\eta_{FX}"] \\
F(X) &
\end{tikzcd}$$

Έτσι, έχουμε:

$$\eta_{X,FX}(\eta_{FX}\circ F\varepsilon_X) = G(\eta_{FX}\circ F\varepsilon_X)\circ\varepsilon_X = (G(\eta_{FX})\circ\varepsilon_{GFX})\circ\varepsilon_X = \eta_{GFX,FX}(\eta_{FX})\circ\varepsilon_X =$$

$$= \eta_{GFX,FX}(\eta^{-1}_{GFX,FX}(\mathsf{Id}_{\mathsf{GFX}}))\circ\varepsilon_X = \mathsf{Id}_{\mathsf{GFX}}\circ\varepsilon_X = \varepsilon_X = \eta_{X,FX}(\mathsf{Id}_{\mathsf{FX}}).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο $\eta_{X,FX}$ είναι ισομορφισμός έπεται ότι $\eta_{FX}\circ F\varepsilon_X = \mathsf{Id}_{\mathsf{FX}}$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και ως εκ τούτου $(\eta\circ F)\circ(F\circ\varepsilon) = \mathsf{Id}_F$. Όσον αφορά τη δεύτερη ισότητα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ ισχύει ότι $G\eta_Y\circ\varepsilon_{GY} = \mathsf{Id}_{GY}$. Ανάλογα με προηγουμένως η απόδειξη της τελευταίας ισότητας ανάγεται στο να αποδειχθεί η μεταθετικότητα του ακόλουθου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\varepsilon_{GY}"] \arrow[d, "\mathsf{Id}_{\mathsf{GY}}"'] & GFG(Y) \arrow[dl, "G\eta_Y"] \\
G(Y) &
\end{tikzcd}$$

Εργαζόμενοι όπως παραπάνω έχουμε:

$$\eta^{-1}_{GY,Y}(G\eta_Y\circ\varepsilon_{GY}) = \eta_Y\circ F(G\eta_Y\circ\varepsilon_{GY}) = \eta_Y\circ\eta_{FGY}\circ F(\varepsilon_{GY}) = \eta_Y\circ\eta^{-1}_{GY,FGY}(\varepsilon_{GY}) =$$

$$= \eta_Y\circ\eta^{-1}_{GY,FGY}(\eta_{GY,FGY}(\mathsf{Id}_{FGY})) = \eta_Y\circ\mathsf{Id}_{FGY} = \eta_Y = \eta^{-1}_{GY,Y}(\mathsf{Id}_{GY}).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο $\eta^{-1}_{GY,Y}$ είναι ισομορφισμός έπεται ότι $G\eta_Y\circ\varepsilon_{GY} = \mathsf{Id}_{GY}$ για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ και ως εκ τούτου $(G\circ\eta)\circ(\varepsilon\circ G) = \mathsf{Id}_G$.
Αντίστροφα, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ο ακόλουθος ισομορφισμός

$$\eta_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$$

ο οποίος είναι φυσικός στα αντικείμενα X και Y.
Ας είναι $f\colon F(X) \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Ορίζουμε $\theta_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ ως $\theta_{X,Y} = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_X, G(Y)) \circ G$. Έτσι, $\theta_{X,Y}(f) = G(f) \circ \varepsilon_X$. Αντίστοιχα, ας είναι $g\colon X \longrightarrow G(Y)$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Ορίζουμε με $\tau_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y)$ ως $\tau_{X,Y} = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), \eta_Y) \circ F$. Έτσι, $\tau_{X,Y}(g) = \eta_Y \circ F(g)$. Για να έχουμε το ζητούμενο ισομορφισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι οι μορφισμοί $\theta_{X,Y}$ και $\tau_{X,Y}$ αποτελούν ο ένας αντίστροφο του άλλου. Λόγω της φυσικότητας του μετασχηματισμού $\eta\colon F \circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_Y$ έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
FG(F(X)) \arrow[r, "\eta_{FX}"] \arrow[d, "FG(f)"'] & F(X) \arrow[d, "f"] \\
FG(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

δηλαδή ισχύει ότι $\eta_Y \circ FG(f) = f \circ \eta_{F(X)}$. Επιπλέον εξ' υποθέσεως έχουμε $\eta_{FX} \circ F\varepsilon_X = \mathsf{Id}_{FX}$. Έτσι,

$$(\tau_{X,Y} \circ \theta_{X,Y})(f) = \eta_Y \circ FG(f) \circ F\varepsilon_X = f \circ \eta_{FX} \circ F\varepsilon_X = f \circ \mathsf{Id}_{FX} = f$$

για κάθε μορφισμό f στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ και ως εκ τούτου $\tau_{X,Y} \circ \theta_{X,Y} = \mathsf{Id}_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),Y)}$. Με ανάλογο τρόπο χρησιμοποιώντας την φυσικότητα του μετασχηματισμού $\varepsilon\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$ καθώς και την ισότητα $G\eta_Y \circ \varepsilon_{GY} = \mathsf{Id}_{GY}$ αποδεικνύεται επιπλέον ότι $\theta_{X,Y} \circ \tau_{X,Y} = \mathsf{Id}_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))}$ γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του ότι οι μορφισμοί $\theta_{X,Y}$ και $\tau_{X,Y}$ αποτελούν ο ένας αντίστροφο του άλλου. Εύκολα αποδεικνύεται η φυσικότητα του ισομορφισμού στα αντικείμενα X και Y. Έτσι, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω είναι άμεσο ότι (F, G) είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. ■

Παρατήρηση 1.2.56. Συχνά στη βιβλιογραφία εάν πληρούται η αντίστροφη της Πρότασης 1.2.55 η τετράδα $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle$ καλείται **συζυγία (adjunction)** και οι μορφισμοί η και ε καλούνται **συζυγείς μορφισμοί (adjunction morphisms)**.

Πρόταση 1.2.57. *Ας είναι $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle$ μια συζυγία. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ο συναρτητής G είναι πλήρης και πιστός αν και μόνο αν ο συζυγής μορφισμός $\eta\colon F \circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός.*

2. *Ο συναρτητής F είναι πλήρης και πιστός αν και μόνο αν ο συζυγής μορφισμός $\varepsilon\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι Y και Y' αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}'$. Υποθέτουμε ότι ο συζυγής μορφισμός $\eta\colon F \circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός. Τότε για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ ο μορφισμός $\eta_Y\colon FG(Y) \longrightarrow Y$ είναι ισομορφισμός. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό των απεικονίσεων $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(\eta_Y, Y')$, $G_{Y,Y'}$ και $\tau_{GY,Y'}$ καθώς και το γεγονός ότι ο η είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, επάγεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Y') \arrow[r, "G_{Y,Y'}"] \arrow[d, "\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(\eta_Y, Y')"'] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y')) \arrow[dl, "\tau_{GY,Y'}"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(FG(Y), Y') &
\end{tikzcd}$$

Απο τη μεταθετικότητα του διαγράμματος έπεται ότι $\tau_{GY,Y'} \circ G_{Y,Y'} = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(\eta_Y, Y')$. Η απεικόνιση $\tau_{GY,Y'}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της απόδειξης της Πρότασης 1.2.55. είναι ένας ισομορφισμός. Επιπλέον, η απεικόνιση $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(\eta_Y, Y')$ είναι ισομορφισμός καθώς ο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(-, Y')$ ως συναρτητής διατηρεί τους ισομορφισμούς. Έτσι, απο την τελευταία ισότητα έπεται ότι η απεικόνιση $G_{Y,Y'}$ είναι εξίσου ισομορφισμός και ως εκ τούτου ο συναρτητής G είναι πλήρης και πιστός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο συναρτητής G είναι πλήρης και πιστός. Τότε η απεικόνιση $G_{Y,Y'}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Y') \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(GY, GY')$ είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $\tau_{GY,Y'} \circ G_{Y,Y'} = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(\eta_Y, Y')$ είναι άμεσο ότι ο μορφισμός $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(\eta_Y, Y')\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Y') \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(FG(Y), Y')$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(\eta_Y, Y')^{-1}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(FG(Y), Y') \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Y')$ είναι ισομορφισμοί. Όμως ο συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(-, Y')$ ως συναρτητής του Yoneda είναι πλήρης και πιστός και ως εκ τούτου αντανακλά τους ισομορφισμούς. Συνεπώς ο μορφισμός $\eta_Y\colon FGY \longrightarrow Y$ είναι ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ γεγονός που αποδεικνύει ότι ο συζυγής μορφισμός $\eta\colon F \circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο με το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.2.58. *Ας είναι $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle$ μια συζυγία. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο συναρτητής F είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών.*
2. *Ο συναρτητής G είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών.*
3. *Οι συναρτητές F και G είναι πλήρεις και πιστοί. Σ' αυτή την περίπτωση οι συναρτητές F και G είναι ημι-αντίστροφοι ο ένας του άλλου και οι συζυγείς μορφισμοί η και ε είναι φυσικοί ισομορφισμοί.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι συναρτητές F και G είναι πλήρεις και πιστοί. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.57 αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί συναρτητών $\eta\colon F \circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}'}$ και $\varepsilon\colon \mathsf{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$. Συνεπώς (3) ⇔ (1) και (3) ⇔ (2). ■

Παρατήρηση 1.2.59. Εάν $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών και $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ημι-αντίστροφος του F, τότε ο συναρτητής G είναι ταυτόχρονα αριστερός και δεξιός συζυγής του F.

1.3 Εξισωτές και Συνεξισωτές

Στην ενότητα αυτή αναπτύσουμε τις έννοιες του εξισωτή και του συνεξισωτή και μελετάμε τις ιδιότητες που τους διέπουν. Σε τυχαίες κατηγορίες ο εξισωτής αποτελεί γενίκευση του πυρήνα ενός ομομορφισμού ενώ ο συνεξισωτής αποτελεί γενίκευση ενός πηλίκου με μια σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 1.3.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Ένας* **εξισωτής (equalizer)**, *ο οποίος συνήθως συμβολίζεται με $Equ(f, g)$, είναι ένα αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ μαζί με ένα μορφισμό $z\colon Z \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ ο οποίος πληροί την ισότητα $f \circ z = g \circ z$, έτσι ώστε το ζεύγος (Z, z) να ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα: για κάθε άλλο ζεύγος (B, b), όπου $b\colon B \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, έτσι ώστε $f \circ b = g \circ b$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\eta\colon B \longrightarrow Z$ τέτοιος ώστε $b = z \circ \eta$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "z"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ B \arrow[u, "\exists ! \eta"] \arrow[ur, "b"'] & & \end{tikzcd}$$

Εάν ο εξισωτής $Equ(f, g)$ υπάρχει για όλα τα ζεύγη μορφισμών στην $\mathcal{C}$ λέμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ **έχει εξισωτές.**

Χάρις στην ακόλουθη πρόταση μπορούμε να μιλάμε για «τον» εξισωτή δύο μορφισμών.

Πρόταση 1.3.2. *Ο εξισωτής δύο μορφισμών, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικός μέχρις ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Ας είναι $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών. Υποθέτουμε ότι (Z, z) και (W, w) είναι εξισωτές των μορφισμών f και g. Τότε υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $h\colon W \longrightarrow Z$ και $h'\colon Z \longrightarrow W$ τέτοιοι ώστε $w = z \circ h$ και $z = w \circ h'$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $w = w \circ (h' \circ h)$ και $z = z \circ (h \circ h')$. Επιπλέον, ισχύει ότι $w = w \circ 1_{\mathrm{W}}$ και $z = z \circ 1_{\mathrm{Z}}$. Έτσι, λόγω της μοναδικότητας η οποία εξασφαλίζεται απο την καθολική ιδιότητα έπεται ότι $h' \circ h = 1_{\mathrm{W}}$ και $h \circ h' = 1_{\mathrm{Z}}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός h είναι ένας ισομορφισμός με αντίστροφο $h^{-1} = h'$. Συνεπώς ο εξισωτής (Z, z) είναι μοναδικός μέχρις ισομορφισμού. ■

Παρατήρηση 1.3.3. Ο εξισωτής $Equ(f, g)$ δύο μορφισμών f και g όπως προαναφέραμε αποτελεί γενίκευση του πυρήνα ενός ομομορφισμού. Πιο συγκεκριμένα, εάν θεωρήσουμε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ η οποία διαθέτει μηδενικό αντικείμενο και ένα μορφισμό α στην κατηγορία $\mathcal{C}$ εάν κάποιο απο τα $Equ(\alpha, 0)$ και $\mathsf{Ker}\,\alpha$ ορίζεται τότε ορίζεται και το άλλο και είναι ίσα. Έτσι, εάν η $\mathcal{C}$ έχει εξισωτές έχει και πυρήνες.

Εν συνεχεία παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα εξισωτών.

Παράδειγμα 1.3.4.

1. Στην κατηγορία Set των συνόλων δοθέντων δύο απεικονίσεων $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ο εξισωτής τους είναι η έγκλειση του υποσυνόλου $S = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ στο X.

2. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων δοθέντων δύο συνεχών απεικονίσεων $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ο εξισωτής τους είναι είναι η έγκλειση στο X του υποσυνόλου $S = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ το οποίο είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία η οποία επάγεται από την τοπολογία του X και καλείται τοπολογία του υποχώρου. Η ίδια κατασκευή δίνει τον εξισωτή στην κατηγορία Hauss των τοπολογικών χώρων Hausdorff.

3. Στην κατηγορία των μερικά διατεταγμένων συνόλων δοθέντων δύο απεικονίσεων $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ο εξισωτής τους είναι η έγκλειση στο X του υποσυνόλου $S = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ στο οποίο έχουμε περιορίσει την διάταξη με την οποία είναι εφοδιασμένο το X.

4. Στην κατηγορία Grp των ομάδων δοθέντων δύο ομομορφισμών ομάδων $f, h\colon G \rightrightarrows G'$ ο εξισωτής τους είναι η έγκλειση στην G της υποομάδας $S = \{g \in G \mid f(g) = h(g)\}$.

5. Στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων δοθέντων δύο ομομορφισμών αβελιανών ομάδων ισχύει:
$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow (f - g)(x) = 0$$
Έτσι, μας παρέχεται η δυνατότητα να έχουμε μια εναλλακτική περιγραφή του εξισωτή. Πιο συγκεκριμένα ο εξισωτής των f και g είναι ο εξισωτής του $f - g\colon X \longrightarrow Y$ και του μηδενικού μορφισμού ο οποίος είναι η έγκλειση του πυρήνα $\mathsf{Ker}(f - g)$ του μορφισμού $f - g$ στο X.

6. Στην κατηγορία Rng των προσεταιριστικών δακτυλίων με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων δοθέντων δύο ομομορφισμών δακτυλίων $f, h\colon R \rightrightarrows R'$ ο εξισωτής τους είναι η έγκλειση στον R του υποδακτύλιου $K = \{r \in R \mid f(r) = h(r)\}$. Η ίδια κατασκευή δίνει τον εξισωτή στην κατηγορία CRing των μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα και στην κατηγορία DivRing των διαιρετικών δακτυλίων.

7. Στην κατηγορία των σημειακών συνόλων Set_* η οποία έχει ως αντικείμενα τα σημειακά σύνολα, δηλαδή διατεταγμένα ζεύγη της μορφής (X, x_0) όπου το X είναι ένα σύνολο και x_0 είναι ένα επιλεγμένο στοιχείο του συνόλου το οποίο καλείται **σημείο βάσης (basepoint)** και ως μορφισμούς τις απεικονίσεις οι οποίες στέλνουν το σημείο βάσης του πρώτου συνόλου στο σημείο βάσης του δεύτερου συνόλου, δηλαδή απεικονίσεις $f\colon X \longrightarrow Y$ με την ιδιότητα $f(x_0) = y_0$ οι οποίες καλούνται **απεικονίσεις που διατηρούν το σημείο βάσης (basepoint preserving maps)** και συνήθως συμβολίζονται ως $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, δοθέντων δύο τέτοιων απεικονίσεων $f, g\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, ο εξισωτής τους είναι η έγκλειση του υποσυνόλου $S = \big\{x \in X \mid f(x) = g(x)\big\}$ στο X.

Σχόλιο 1.3.5. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται κατανοητό ότι στις περισσότερες «διακεκριμένες» κατηγορίες ο εξισωτής δύο μορφισμών $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ δίνεται απο το $Equ(f, g) = \big\{x \in X \mid f(x) = g(x)\big\}$ εφοδιασμένο κάθε φορά με τη δομή η οποία επάγεται από αυτή του X.

Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε την ύπαρξη των εξισωτών στην κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων.

Πρόταση 1.3.6. *Ο εξισωτής δύο ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon X \longrightarrow Y \quad \& \quad g\colon X \longrightarrow Y$$

στην R-Mod υπάρχει.

Απόδειξη. Δοθέντων δύο ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon X \longrightarrow Y$ ορίζουμε $K = \big\{x \in X \mid f(x) = g(x)\big\}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το K είναι υποπρότυπο του προτύπου X. Ας είναι $\iota\colon K \longrightarrow X$ η απεικόνιση έγκλεισης. Τότε κατά προφανή τρόπο έχουμε ότι $f \circ \iota = g \circ \iota$. Υποθέτουμε ότι $\iota'\colon K' \longrightarrow X$ είναι ένας άλλος ομομορφισμός προτύπων τέτοιος ώστε $f \circ \iota' = g \circ \iota'$. Τότε για κάθε στοιχείο k' του K' ισχύει ότι $(f \circ \iota')(k') = (g \circ \iota')(k')$. Έτσι, $\iota'(K')$ είναι ένα R-υποπρότυπο του X. Ας είναι $u\colon \iota'(K') \longrightarrow K$ η απεικόνιση έγκλεισης και $\tilde{\iota}'\colon K' \longrightarrow \iota'(K')$ ο μορφισμός ο οποίος προκύπτει απο τον περιορισμό του πεδίου τιμών του ομομορφισμού ι'. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε ότι $\iota' = \iota \circ u \circ \tilde{\iota}'$. Όσον αφορά την μοναδικότητα του ομομορφισμού $u \circ \tilde{\iota}'$ προκύπτει άμεσα από τον τρόπο ορισμού των απεικονίσεων. ∎

Πρόταση 1.3.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Εάν (Z, z) είναι ένας εξισωτής των μορφισμών f και g, τότε ο μορφισμός $z\colon Z \longrightarrow X$ είναι ένας μονομορφισμός.*

Απόδειξη. Ας είναι (Z, z) ένας εξισωτής των μορφισμών f και g. Δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $\beta_1, \beta_2\colon W \rightrightarrows Z$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $z \circ \beta_1 = z \circ \beta_2$. Θέτουμε $b = z \circ \beta_1 = z \circ \beta_2$. Ο μορφισμός $z \circ \beta_1$ είναι τέτοιος ώστε $f \circ (z \circ \beta_1) = g \circ (z \circ \beta_1)$. Συνεπώς, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[d, shift right, "\beta_1"'] \arrow[d, shift left, "\beta_2"] \arrow[dr, "b"] & & \\
Z \arrow[r, "z"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Όμως, σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα που ικανοποιεί ο εξισωτής υπάρχει μοναδικός μορφισμός $t\colon W \longrightarrow Z$ τέτοιος ώστε $z \circ t = b$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ισότητες $b = z \circ \beta_1 = z \circ \beta_2$ και τη μοναδικότητα του μορφισμού t έπεται ότι $t = \beta_1 = \beta_2$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $z\colon Z \longrightarrow X$ είναι ένας μονομορφισμός. ∎

Παρατήρηση 1.3.8. Εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ο εξισωτής $Equ(f,f)$ υπάρχει πάντα και είναι ο ταυτοτικός μορφισμός στο X.

Πρόταση 1.3.9. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Εάν ο μορφισμός f είναι ταυτόχρονα ένας επιμορφισμός και ένας εξισωτής τότε ο μορφισμός f είναι ένας ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Ας είναι $h, g\colon Y \rightrightarrows Z$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι ο εξισωτής των μορφισμών h και g. Τότε εξ' ορισμού ισχύει ότι $h \circ f = g \circ f$. Επιπλέον, ο μορφισμός f είναι ένας επιμορφισμός. Έτσι, από την τελευταία ισότητα έπεται ότι $h = g$. Όμως ο εξισωτής του $h = g\colon Y \rightrightarrows Z$ είναι ο ταυτοτικός μορφισμός στο Y. Συνεπώς, ο μορφισμός f είναι ισόμορφος με τον ταυτοτικό μορφισμό στο Y, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός f είναι ένας ισομορφισμός. ■

Δυϊκή έννοια του εξισωτή αποτελεί ο συνεξισωτής.

Ορισμός 1.3.10. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Ένας* **συνεξισωτής (coequalizer)**, *ο οποίος συνήθως συμβολίζεται με $Coequ(f,g)$, είναι ένα αντικείμενο W της κατηγορίας $\mathcal{C}$ μαζί με ένα μορφισμό $w\colon Y \longrightarrow W$ στην $\mathcal{C}$ ο οποίος πληροί την ισότητα $w \circ f = w \circ g$, έτσι ώστε το ζεύγος (W, w) να ικανοποιεί την εξής καθολική ιδιότητα: για κάθε άλλο ζεύγος (Z, b), όπου $b\colon Y \longrightarrow Z$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ έτσι ώστε $b \circ f = b \circ g$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u\colon W \longrightarrow Z$ τέτοιος ώστε $b = u \circ w$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "b"'] & W \arrow[d, "\exists !\, u"] \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Εάν ο συνεξισωτής $Coequ(f,g)$ υπάρχει για όλα τα ζεύγη μορφισμών στην $\mathcal{C}$ λέμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ **έχει συνεξισωτές.**

Χάρις στην ακόλουθη πρόταση μπορούμε να μιλάμε για «τον» συνεξισωτή δύο μορφισμών.

Πρόταση 1.3.11. *Ο συνεξισωτής δύο μορφισμών, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικός μέχρις ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.3.2. . ■

Παρατήρηση 1.3.12. Λόγω της δυϊκότητας ένας συνεξισωτής δύο μορφισμών f και g στην κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ένας εξισωτής των μορφισμών f και g στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Ορισμένα παραδείγματα συνεξισωτών είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 1.3.13. 1. Στην κατηγορία Set των συνόλων δοθέντων δύο απεικονίσεων $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ο συνεξισωτής τους είναι το ζεύγος $(Y/\mathcal{R}, \pi)$ όπου $\mathcal{R}$ είναι η σχέση ισοδυναμίας η οποία γεννάται από τα ζεύγη $(f(x), g(x))$, δηλαδή εάν $\mathcal{S} = \{(f(x), g(x)) | x \in X\} \subset Y \times Y$ τότε $\mathcal{R} = \bigcap \{\mathcal{U} \subseteq Y \times Y |\ \mathcal{U} : \text{σχέση ισοδυναμίας}\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}\}$ είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας επί του Y η οποία περιέχει το $\mathcal{S}$ και $\pi\colon Y \longrightarrow Y/\mathcal{R}$ είναι η απεικόνιση η οποία στέλνει ένα στοιχείο $y \in Y$ στην κλάση ισοδυναμίας η οποία περιέχει αυτό το στοιχείο, δηλαδή $\pi(y) = [y]$.

2. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων δοθέντων δύο συνεχών απεικονίσεων $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ο συνεξισωτής τους είναι το ζεύγος $((Y/\mathcal{R}, O_{Y/\mathcal{R}}), \pi)$ όπου $\mathcal{R}$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε στο παρά 1 , $Y/\mathcal{R}$ είναι ο χώρος πηλίκο ο οποίος ορίζεται να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στοιχείων του Y εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο $O_{Y/\mathcal{R}}$ στην οποία τα ανοικτά σύνολα ορίζονται να είναι εκείνα τα σύνολα με ανοικτή προεικόνα κάτω από τη συνεχή απεικόνιση $\pi\colon Y \longrightarrow Y/\mathcal{R}$ η οποία είναι επί. Η ίδια κατασκευή δίνει τον συνεξισωτή στην κατηγορία Hauss των τοπολογικών χώρων Hausdorff.

3. Στην κατηγορία Grp των ομάδων δοθέντων δύο ομομορφισμών ομάδων $f, h\colon G \rightrightarrows G'$ ο συνεξισωτής τους είναι το ζεύγος $(G'/N, \pi)$ όπου $N = \{f(g)h(g)^{-1} \mid g \in G\}$ είναι η κανονική υποομάδα της G', G'/N είναι η ομάδα πηλίκο και $\pi\colon G' \longrightarrow G'/N$ είναι ο ομομορφισμός ομάδων ο οποίος ορίζεται ως $\pi(g') = [g']$.

4. Στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων δοθέντων ενός ομομορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ και του μηδενικού ομομορφισμού $0\colon X \longrightarrow Y$ ο συνεξισωτής τους είναι το ζεύγος $(Y/\operatorname{Im} f, \pi)$ όπου $Y/\operatorname{Im} f$ είναι ο συνπυρήνας του ομομορφισμού f και $\pi\colon Y \longrightarrow Y/\operatorname{Im} f$ είναι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων ο οποίος ορίζεται ως $\pi(y) = y + \operatorname{Im} f$. Ανάλογα με την περίπτωση των εξισωτών, ο συνεξισωτής δύο μορφισμών $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ είναι ο συνεξισωτής του μορφισμού $f - g\colon X \longrightarrow Y$ και του μηδενικού μορφισμού $0\colon X \longrightarrow Y$. Η ίδια κατασκευή δίνει τον συνεξισωτή σε κατηγορίες Vect($\mathbb{K}$) διανυσματικών χώρων και κατηγορίες Mod-R προτύπων.

5. Στην κατηγορία Rng των προσεταιριστικών δακτυλίων δοθέντων δύο ομομορφισμών δακτυλίων $f, h\colon R \rightrightarrows R'$ ο συνεξισωτής τους είναι το ζεύγος $(R'/U, \pi)$ όπου $U = \{f(r) - g(r) \mid r \in R\}$ είναι ιδεώδες του R', R'/U είναι ένας προσεταιριστικός δακτύλιος και $\pi\colon R' \longrightarrow R'/U$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων ο οποίος ορίζεται ως $\pi(r') = [r']$. Η ίδια κατασκευή δίνει τον εξισωτή στην κατηγορία CRing των μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα και στην κατηγορία DivRing των διαιρετικών δακτυλίων.

6. Στην κατηγορία των σημειακών συνόλων Set_* δοθέντων δύο απεικονίσεων $f, g\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ που διατηρούν το σημείο βάσης ο συνεξισωτής τους είναι το ζεύγος $((Y/\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{R}}\langle y_0\rangle), \pi)$ όπου $Y/\bar{\mathcal{R}}$ είναι το σύνολο στο οποίο $\bar{\mathcal{R}}$ είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας στο Y τέτοια ώστε $\mathcal{R} \subseteq \bar{\mathcal{R}}$ με $\mathcal{R}$ να είναι η διμελής σχέση στο σύνολο Y η οποία ορίζεται ως $(y, y') \in \mathcal{R}$ αν και μόνο αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$ και $g(x) = y'$, $\bar{\mathcal{R}}\langle y_0\rangle = \{y \in Y \mid (y_0, y) \in \bar{\mathcal{R}}\}$ είναι η κλάση η οποία λαμβάνεται ως σημείο βάσης στο σύνολο $Y/\bar{\mathcal{R}}$ καθώς $(y_0, y_0) \in \bar{\mathcal{R}}$ και $\pi\colon (Y, y_0) \longrightarrow (Y/\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{R}}\langle y_0\rangle)$ είναι η απεικόνιση η οποία προέρχεται από την απεικόνιση $\pi\colon Y \longrightarrow Y/\bar{\mathcal{R}}$ η οποία ορίζεται ως $\pi(y) = [y]$ εφοδιάζοντας την με το σημείο βάσης $\bar{\mathcal{R}}\langle y_0\rangle$ και διατηρεί το σημείο βάσης.

Σχόλιο 1.3.14. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το Παράδειγμα 1.3.13 γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ο συνεξισωτής στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων είναι ο συνεξισωτής στην κατηγορία Set των συνόλων εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο.

Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε την ύπαρξη των συνεξισωτών στην κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων.

Πρόταση 1.3.15. *Ο συνεξισωτής δύο ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon X \longrightarrow Y \quad \& \quad g\colon X \longrightarrow Y$$

στην R-Mod υπάρχει.

Απόδειξη. Ορίζουμε $C = Y/\operatorname{Im}(f - g)$ και $\pi\colon Y \longrightarrow Y/\operatorname{Im}(f - g)$ με $\pi(y) = y + \operatorname{Im}(f - g)$. Τότε έχουμε ότι, $\forall y \in Y$:

$$(\pi \circ f)(y) = \pi(f(y)) = f(y) + \operatorname{Im}(f - g) = g(y) + f(y) - g(y) + \operatorname{Im}(f - g) =$$

$$= g(y) + \mathsf{Im}\,(f-g) = (\pi \circ g)(y),$$

Επομένως, $\pi \circ f = \pi \circ g$. Ας είναι $\pi'\colon Y \longrightarrow C'$ ένας άλλος ομομορφισμός προτύπων με $\pi' \circ f = \pi' \circ g$. Έτσι, $\forall y \in Y$ ισχύει ότι:

$$(\pi' \circ f)(y) - (\pi' \circ g)(y) = \pi'(f(y)) - \pi'(g(y)) = \pi'(f(y) - g(y)) = \pi' \circ (f-g)(y) = 0.$$

Ως εκ τούτου $\pi' \circ (f-g) = 0$ γεγονός που αποδεικνύει ότι $\mathsf{Im}\,(f-g) \subseteq \mathsf{Ker}\,\pi'$. Από το factor theorem για πρότυπα μέσω των επί ομομορφισμών R-προτύπων, έπεται ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός R-προτύπων $p\colon Y/C = \mathsf{Im}\,(f-g) \longrightarrow C'$ τέτοιος ώστε $\pi' = p \circ \pi$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] & Y/C \arrow[dl, "p"] \\ C' & \end{tikzcd}$$

■

Πρόταση 1.3.16. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Εάν (Z, z) είναι ένας συνεξισωτής των μορφισμών f και g, τότε ο μορφισμός $z\colon Y \longrightarrow Z$ είναι ένας επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.3.7. ■

Παρατήρηση 1.3.17. Εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ο συνεξισωτής $Coequ(f, f)$ υπάρχει πάντα και είναι ο ταυτοτικός μορφισμός στο Y.

Πρόταση 1.3.18. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Εάν ο μορφισμός f είναι ταυτόχρονα ένας μονομορφισμός και ένας συνεξισωτής τότε ο μορφισμός f είναι ένας ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.3.9. ■

1.4 Pullbacks και Pushouts

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με δύο θεμελιώδεις κατασκευές, αυτές των pullbacks και των pushouts σε μια τυχαία κατηγορία $\mathcal{C}$. Οι έννοιες των pullbacks και των pushouts είναι γενικεύσεις της τομής και της ένωσης αντίστοιχα και η ύπαρξη τους εξαρτάται από τις δομικές ιδιότητες της εκάστοτε κατηγορίας.

Ορισμός 1.4.1. *Ας είναι C μια κατηγορία. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Το **pullback** *του παραπάνω διαγράμματος είναι μια τριάδα (P, h, k), όπου P είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $h\colon P \longrightarrow X$, $k\colon P \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:*

1. *Υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, dashed, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

2. *Για οποιοδήποτε αντικείμενο P' της $\mathcal{C}$ και για οποιουσδήποτε μορφισμούς $h'\colon P' \longrightarrow X$ και $k'\colon P' \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ με $f \circ h' = g \circ k'$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\sigma\colon P' \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "\exists!\sigma"] \arrow[drr, bend left, "h'"] \arrow[ddr, bend right, "k'"'] & & \\ & P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο πληροί την παραπάνω καθολική ιδιότητα, καλείται **pullback διάγραμμα**. *Σ' αυτή την περίπτωση ο μορφισμός k καλείται* **pullback** *ή* **αλλαγή βάσης (base change**) *του μορφισμού f κατά μήκος του μορφισμού g και ο μορφισμός h καλείται* **pullback** *ή* **αλλαγή βάσης (base change**) *του μορφισμού g κατά μήκος του μορφισμού f.*

Πρόταση 1.4.2. *Το pullback δύο μορφισμών, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Z$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι (P, h, k) και (P', h', k') είναι pullbacks των μορφισμών f και g. Τότε υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $\sigma\colon P' \longrightarrow P$ και $\sigma'\colon P \longrightarrow P'$ τέτοιοι ώστε $k' = k \circ \sigma$ και $h' = h \circ \sigma$, $k = k' \circ \sigma'$ και $h = h' \circ \sigma'$. Συνδυάζοντας την πρώτη με την τρίτη και τη δεύτερη με την τέταρτη ισότητα προκύπτει ότι $k = k \circ (\sigma \circ \sigma')$ και $h' = h' \circ (\sigma' \circ \sigma)$. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $h \circ \sigma \circ \sigma' = h' \circ \sigma' = h$ και $k' \circ \sigma' \circ \sigma = k \circ \sigma = k'$. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών 1_P και $1_{P'}$ έχουμε ότι $k = k \circ 1_{\mathrm{P}}$, $h = h \circ 1_P$, $h' = h' \circ 1_{\mathrm{P}'}$ και $k' = k' \circ 1_{P'}$. Ως εκ τούτου προκύπτουν τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, shift left, "1_P"] \arrow[dr, shift right, "\sigma\circ\sigma'"'] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\ & P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[dr, shift left, "1_{P'}"] \arrow[dr, shift right, "\sigma'\circ\sigma"'] \arrow[drr, bend left, "h'"] \arrow[ddr, bend right, "k'"'] & & \\ & P' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "k'"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Ωστόσο, λόγω της καθολικής ιδιότητας των pullbacks υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $\psi\colon P \longrightarrow P$ και $\phi\colon P' \longrightarrow P'$ αντίστοιχα, οι οποίοι κάνουν τα παραπάνω διαγράμματα μεταθετικά. Ως εκ τούτου $\sigma \circ \sigma' = \psi = 1_P$ και $\sigma' \circ \sigma = \phi = 1_{P'}$. Έτσι, από τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι ο μορφισμός σ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο μορφισμό $\sigma^{-1} = \sigma'$. Συνεπώς, το pullback δύο μορφισμών είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού. ■

Εν συνεχεία παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα pullbacks.

Παράδειγμα 1.4.3.

1. Στην κατηγορία Set των συνόλων δοθέντων δύο απεικονίσεων $f\colon X \longrightarrow Z$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$, το pullback τους είναι η τριάδα (P, π_1, π_2) όπου $P = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\big\}$ είναι το υποσύνολο του ευθέος γινομένου $X \times Y$ και $\pi_1\colon P \longrightarrow X$ και $\pi_2\colon P \longrightarrow Y$ είναι απεικονίσεις με $\pi_1(x,y) = x$ και $\pi_2(x,y) = y$ αντίστοιχα.

2. Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων δοθέντων δύο συνεχών απεικονίσεων $f\colon X \longrightarrow Z$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$, το pullback τους είναι η τριάδα (P, π_1, π_2) όπου $P = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\big\}$ είναι ο υπόχωρος του ευθέος γινομένου $X \times Y$ και $\pi_1\colon P \longrightarrow X$ και $\pi_2\colon P \longrightarrow Y$ είναι συνεχείς απεικονίσεις με $\pi_1(x,y) = x$ και $\pi_2(x,y) = y$ αντίστοιχα. Η ίδια κατασκευή δίνει το pullback στην κατηγορία Hauss των τοπολογικών χώρων Hausdorff.

3. Στην κατηγορία Rng των προσεταιριστικών δακτυλίων δοθέντων δύο ομομορφισμών δακτυλίων $f\colon X \longrightarrow Z$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$, το pullback τους είναι η τριάδα (P, π_1, π_2) όπου $P = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\big\}$ είναι υποδακτύλιος του ευθέος γινομένου $X \times Y$ και $\pi_1\colon P \longrightarrow X$ και και $\pi_2\colon P \longrightarrow Y$ είναι ομομορφισμοί δακτυλίων με $\pi_1(x,y) = x$ και $\pi_2(x,y) = y$ αντίστοιχα. Οι ίδιες κατασκευές δίνουν το pullback στις κατηγορίες CRing των μεταθετικών δακτυλίων με μονάδα και DivRing των διαιρετικών δακτυλίων.

4. Στην κατηγορία Grp των ομάδων δοθέντων δύο ομομορφισμών ομάδων $f\colon X \longrightarrow Z$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$, το pullback τους είναι η τριάδα (P, π_1, π_2) όπου $P = \big\{(x,y) \in X \times Y |\, f(x) = g(y)\big\}$ είναι η υποομάδα του ευθέος γινομένου $X \times Y$ και $\pi_1\colon P \longrightarrow X$ και $\pi_2\colon P \longrightarrow Y$ είναι ομομορφισμοί ομάδων με $\pi_1(x,y) = x$ και $\pi_2(x,y) = y$ αντίστοιχα. Οι ίδιες κατασκευές δίνουν το pullback στις κατηγορίες Ab των αβελιανών ομάδων και Vect των διανυσματικών χώρων.

5. Στην κατηγορία των σημειακών συνόλων Set_* δοθέντων δύο απεικονίσεων $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ και $g\colon (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ που διατηρούν το σημείο βάσης, το pullback τους είναι η τριάδα (P, π_1, π_2) όπου $P = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\big\}$ είναι το υποσύνολο του ευθέος γινομένου $X \times Y$ και π_1 και π_2 είναι απεικονίσεις που διατηρούν το σημείο βάσης οι οποίες προέρχονται από τις απεικονίσεις $\pi_1\colon P \longrightarrow X$ και $\pi_2\colon P \longrightarrow Y$ με $\pi_1(x,y) = x$ και $\pi_2(x,y) = y$ αντίστοιχα. Παρατηρώντας ότι $f(x_0) = z_0 = g(y_0)$ έπεται ότι $(x_0, y_0) \in P$ και αυτό θεωρείται ως σημείο βάσης.

Παρατήρηση 1.4.4.

1. Τα παραπάνω παραδείγματα μπορούν να ληφθούν βρίσκοντας τον εξισωτή των μορφισμών $f \circ \pi_1$ και $g \circ \pi_2$ όπου π_1 και π_2 είναι μορφισμοί από το $X \times Y$ στο X και στο Y αντίστοιχα. Έτσι, υπάρχει ένας εναλλακτικός ορισμός του pullback ως ο εξισωτής των μορφισμών $f \circ \pi_1$ και $g \circ \pi_2$. Ως εκ τούτου μια κατηγορία η οποία έχει πεπερασμένα γινόμενα και εξισωτές έχει εξίσου τελικό αντικείμενο και pullbacks. Επιπλέον εάν σε μια κατηγορία με τελικό αντικείμενο υπάρχουν pullbacks τότε υπάρχουν εξισωτές και πεπερασμένα γινόμενα. Στην πραγματικότητα από τα θεωρήματα ύπαρξης για όρια, σε μια κατηγορία με πεπερασμένα γινόμενα και εξισωτές και κατά συνέπεια με τελικό αντικείμενο και pullbacks υπάρχουν όλα τα πεπερασμένα όρια.

2. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο παράδειγμα, όταν το Y είναι υποσύνολο του Z και η απεικόνιση g είναι η κανονική έγκλειση τότε το σύνολο P είναι ισόμορφο με την αντίστροφη εικόνα του Y μέσω της f, $f^{-1}(Y)$. Εάν επιπλέον το X είναι υποσύνολο του Z και η απεικόνιση f είναι κανονική έγκλειση τότε το σύνολο P είναι ισόμορφο με την τομή $X \bigcap Y$.

Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε την ύπαρξη των pullbacks στην κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων.

Πρόταση 1.4.5. *Το pullback δύο ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon X \longrightarrow Z \quad \& \quad g\colon Y \longrightarrow Z$$

στην R-Mod υπάρχει.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$P = \{(y,x) \in Y \oplus X \mid g(y) = f(x)\},$$

και ας είναι $h\colon P \longrightarrow X$, $(y,x) \longmapsto x$ και $k\colon P \longrightarrow Y$, $(y,x) \longmapsto y$, οι φυσικές προβολές. Αν $(y,x) \in P$, τότε

$$(g \circ k)(y,x) = g(k(y,x)) = g(y) = f(x) = f(h(y,x)) = (f \circ h)(y,x).$$

Συνεπώς, έπεται ότι $g \circ k = f \circ h$. Υποθέτουμε ότι (P', h', k') είναι μια άλλη τριάδα τέτοια ώστε $g \circ k' = f \circ h'$, τότε ορίζουμε απεικόνιση

$$\sigma\colon P' \longrightarrow P, \quad p' \longmapsto (k'(p'), h'(p')).$$

Η σ είναι καλά ορισμένη, αφού $g(k'(p')) = f(h'(p'))$ για κάθε $p' \in P'$, και εξ' ορισμού, είναι προφανώς ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Παρατηρώντας ότι:

$$h \circ \sigma(p') = h(\sigma(p')) = h(k'(p'), h'(p')) = h'(p'),$$

και

$$k \circ \sigma(p') = k(\sigma(p')) = k(k'(p'), h'(p')) = k'(p'),$$

για κάθε $p' \in P'$, παίρνουμε ότι $h \circ \sigma = h'$ και $k \circ \sigma = k'$. Για να δείξουμε ότι ο ομομορφισμός σ με την προηγούμενη ιδιότητα είναι μοναδικός, υποθέτουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $\phi\colon P' \longrightarrow P$, τέτοιος ώστε $h \circ \phi = h'$ και $k \circ \phi = k'$. Αν $p' \in P'$, τότε $\phi(p') = (y,x)$ για κάποιο $(y,x) \in P$, και

$$h'(p') = (h \circ \phi)(p') = h(\phi(p')) = h(y,x) = x,$$

$$k(p') = (k \circ \phi)(p') = k(\phi(p')) = k(y,x) = y.$$

Άρα, $\phi = \sigma$. Συνεπώς, το P μαζί με τους ομομορφισμούς h, k είναι το pullback των ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων f, g. ■

Σύμφωνα με την ακόλουθη Πρόταση το pullback ενός μονομορφισμού ή ενός ισομορφισμού είναι εξίσου ένας μονομορφισμός ή ένας ισομορφισμός.

Πρόταση 1.4.6. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Θεωρούμε το pullback P του διαγράμματος:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, dashed, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} .$$

στην $\mathcal{C}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. *Εάν ο f είναι μονομορφισμός, τότε και ο k είναι μονομορφισμός.*

2. *Εάν ο f είναι ισομορφισμός, τότε και ο k είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Z$ είναι ένας μονομορφισμός. Θεωρούμε ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών $u, v\colon P' \rightrightarrows P$ τέτοιο ώστε $k \circ u = k \circ v$. Υποθέτουμε ότι (P', h', k') είναι μια άλλη τριάδα τέτοια ώστε $f \circ h' = g \circ k'$. Θέτουμε $k' = k \circ u$ και $h' = h \circ u$. Έτσι, $k \circ u = k \circ v = k'$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ότι η τριάδα (P, h, k) είναι pullback των μορφισμών $f\colon X \longrightarrow Z$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ καθώς και τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$f \circ h \circ v = g \circ k \circ v = g \circ k \circ u = g \circ k' = f \circ h'.$$

Από την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός f είναι ένας μονομορφισμός έπεται ότι $h \circ v = h'$. Συνοψίζοντας οι μορφισμοί $u\colon P' \longrightarrow P$ και $v\colon P' \longrightarrow P$ κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, shift left, "v"] \arrow[dr, shift right, "u"'] \arrow[drr, bend left, "h'"] \arrow[ddr, bend right, "k'"'] & & \\
& P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

Όμως, σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα των pullbacks υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi\colon P' \longrightarrow P$ ο οποίος κάνει το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό. Έτσι, $u = \phi = v$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός k είναι μονομορφισμός.

2. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Z$ είναι ισομορφισμός. Τότε υπάρχει ο αντίστροφος του $f^{-1}\colon Z \longrightarrow X$ και είναι εξίσου ισομορφισμός. Ας είναι $(P' = Y, h' = f^{-1} \circ g, k' = 1_{\mathrm{Y}})$ μια άλλη τριάδα τέτοια ώστε $f \circ h' = g \circ k'$. Τότε σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα των pullbacks υπάρχει μοναδικός μορφισμός $q\colon Y \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε $h \circ q = f^{-1} \circ g$ και $k \circ q = 1_{\mathrm{Y}}$. Ως εκ τούτου ισχύει ότι

$$k \circ q \circ k = 1_{\mathrm{Y}} \circ k = k \circ 1_{\mathrm{P}}$$

και

$$h \circ q \circ k = f^{-1} \circ g \circ k = f^{-1} \circ f \circ h = 1_{\mathrm{X}} \circ h = h = h \circ 1_{\mathrm{P}}$$

Έτσι, οι μορφισμοί $q \circ k\colon P \longrightarrow P$ και $1_P\colon P \longrightarrow P$ κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, shift left, "1_P"] \arrow[dr, shift right, "q \circ k"'] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
& P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

Όμως, σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα των pullbacks υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi\colon P \longrightarrow P$ ο οποίος κάνει το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό. Ως εκ τούτου $q \circ k = \phi = 1_P$. Από τις ισότητες $k \circ q = 1_{\mathrm{Y}}$ και $q \circ k = 1_{\mathrm{P}}$ έπεται ότι ο μορφισμός k είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $k^{-1} = q$. ∎

Παρατήρηση 1.4.7. Στην Πρόταση 1.4.6. είδαμε ότι το pullback ενός μονομορφισμού ή ενός ισομορφισμού είναι αντίστοιχα μονομορφισμός ή ισομορφισμός. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει στην περίπτωση των επιμορφισμών. Γενικά το pullback ενός επιμορφισμού δεν είναι επιμορφισμός όπως αποδεικνύει το ακόλουθο παράδειγμα:

Στην κατηγορία Hauss των χώρων Hausdorff και των συνεχών απεικονίσεων μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ χώρων Hausdorff είναι επιμορφισμός, όταν η εικόνα της $f(X)$ είναι πυκνό σύνολο στο Y. Παρ' όλα αυτά ο μορφισμός f δεν είναι κατ' ανάγκη επί. Υποθέτουμε ότι η συνεχής απεικόνιση f δεν είναι επί και επιλέγουμε ένα $y \in Y/f(X)$. Το ακόλουθο διάγραμμα είναι pullback

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \{*\} \arrow[r, "y"] & Y \end{tikzcd}$$

Έτσι, το pullback του y και του f είναι το κενό σύνολο $\varnothing$. Όμως, το κενό σύνολο δεν είναι σε καμία περίπτωση πυκνό στο μονοσύνολο. Συνεπώς, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \{*\}$ δεν είναι επιμορφισμός. Ωστόσο, όταν πρόκειται για αβελιανές κατηγορίες η Πρόταση 1.4.6. αληθεύει για τους επιμορφισμούς.

Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας στα pullbacks με την ακόλουθη Πρόταση η οποία χαρακτηρίζεται ως «προσεταιριστική ιδιότητα» των pullbacks.

Πρόταση 1.4.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "e"] \\ D \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & F \end{tikzcd}$$

1. *Εάν τα διαγράμματα (I) και (II) είναι pullbacks τότε το διάγραμμα (I)+(II) είναι pullback.*

2. *Εάν τα διαγράμματα (I)+(II) και (II) είναι pullbacks τότε το διάγραμμα (I) είναι pullback.*

Απόδειξη. 1. Δοθέντων των pullbacks διαγραμμάτων (I) και (II), υποθέτουμε ότι έχουμε ένα αντικείμενο X και μορφισμούς $h\colon X \longrightarrow C$, $k\colon X \longrightarrow D$ τέτοιους ώστε $g \circ f \circ k = e \circ h$. Από την καθολική ιδιότητα του pullback (II) υπάρχει μοναδικός μορφισμός $z\colon X \longrightarrow B$ τέτοιος ώστε $b \circ z = h$ και $d \circ z = f \circ k$. Αντίστοιχα, από την καθολική ιδιότητα του pullback (I) υπάρχει μοναδικός μορφισμός $w\colon X \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $\alpha \circ w = z$ και $c \circ w = k$. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $b \circ \alpha \circ w = b \circ z = h$. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός w είναι ο μοναδικός μορφισμός ο οποίος ικανοποιεί τις ισότητες $c \circ w = k$ και $b \circ \alpha \circ w = h$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει και ένας άλλος μορφισμός $w'\colon X \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $c \circ w' = k$ και $b \circ \alpha \circ w' = h$. Έτσι, έχουμε ότι $b \circ (\alpha \circ w) = h = b \circ (\alpha \circ w')$ και $d \circ (\alpha \circ w') = f \circ c \circ w' = f \circ k = f \circ c \circ w = d \circ (\alpha \circ w)$. Όμως σύμφωνα με τα παραπάνω ο μορφισμός z είναι ο μοναδικός μορφισμός τέτοιος ώστε $b \circ z = h$ και $d \circ z = f \circ k$. Ως εκ τούτου $\alpha \circ w = z = \alpha \circ w'$. Από την άλλη πλευρά $c \circ w = k = c \circ w'$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός w είναι ο μοναδικός μορφισμός ο οποίος ικανοποιεί τις ισότητες $\alpha \circ w = z$ και $c \circ w = k$ έπεται ότι $w = w'$. Συνεπώς, ο μορφισμός w είναι ο μοναδικός μορφισμός τέτοιος ώστε $c \circ w = k$ και $b \circ \alpha \circ w = h$, γεγονός που αποδεικνύει ότι το διάγραμμα (I)+(II) είναι pullback.

2. Δοθέντων των pullbacks διαγραμμάτων (I)+(II) και (II), υποθέτουμε ότι έχουμε ένα αντικείμενο X με μορφισμούς $k\colon X \longrightarrow D$ και $z\colon X \longrightarrow B$ τέτοιους ώστε $d \circ z = f \circ k$. Από την καθολική ιδιότητα του pullback (I)+(II) υπάρχει μοναδικός μορφισμό $w\colon X \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $c \circ w = k$ και $b \circ \alpha \circ w = b \circ z$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα του διαγράμματος (I) καθώς και τις παραπάνω ισότητες έχουμε ότι $d \circ \alpha \circ w = f \circ c \circ w = f \circ k = d \circ z$. Όμως

από την καθολική ιδιότητα του pullback (II) υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi\colon X \longrightarrow B$ τέτοιον ώστε $b \circ \phi = b \circ z$ και $d \circ \phi = f \circ k$. Έτσι, έχουμε $\alpha \circ w = \phi = z$. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο w είναι ο μοναδικός μορφισμός τέτοιος ώστε $c \circ w = k$ και $\alpha \circ w = z$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει και ένας άλλος μορφισμός $w'\colon X \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $c \circ w' = k$ και $\alpha \circ w' = z$. Έτσι, έχουμε $b \circ \alpha \circ w' = b \circ z$ και $c \circ w' = k$. Όμως όπως προείπαμε ο w είναι ο μοναδικός μορφισμός ο οποίος ικανοποιεί τις ισότητες $c \circ w = k$ και $b \circ \alpha \circ w = b \circ z$. Ως εκ τούτου $w = w'$, γεγονός που αποδεικνύει την μοναδικότητα του μορφισμού w. Συνεπώς, ο μορφισμός w είναι ο μοναδικός μορφισμός τέτοιος ώστε $c \circ w = k$ και $\alpha \circ w = z$, γεγονός που αποδεικνύει ότι το διάγραμμα (I) είναι pullback. ■

Δυϊκά,

Ορισμός 1.4.9. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Το **pushout** *του προηγούμενου διαγράμματος, είναι μια τριάδα (D, h, k), όπου το D είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $h\colon Y \longrightarrow D$, $k\colon Z \longrightarrow D$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:*

1. *Υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, dashed, "h"] \\ Z \arrow[r, dashed, "k"] & D \end{tikzcd}$$

2. *Για οποιοδήποτε αντικείμενο D' της $\mathcal{C}$ και για οποιουσδήποτε μορφισμούς $g'\colon Y \longrightarrow D'$, $f'\colon Z \longrightarrow D'$ με $g' \circ f = f' \circ g$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\phi\colon D \longrightarrow D'$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "g'"] & \\ Z \arrow[r, "k"'] \arrow[drr, bend right, "f'"'] & D \arrow[dr, dotted, "\exists!\,\phi"] & \\ & & D' \end{tikzcd}$$

Το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

το οποίο πληροί την παραπάνω καθολική ιδιότητα, καλείται **pushout διάγραμμα**. *Σ' αυτή την περίπτωση ο μορφισμός h καλείται* **pushout** *ή* **αλλαγή συν-βάσης (cobase change**) *του μορφισμού g κατά μήκος του μορφισμού f και ο μορφισμός k καλείται* **pushout** *ή* **αλλαγή συν-βάσης (cobase change**) *του μορφισμού f κατά μήκος του μορφισμού g.*

Πρόταση 1.4.10. *Το pushout δύο μορφισμών, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.4.2. ■

Εν συνεχεία παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα pushouts.

Παράδειγμα 1.4.11. 1. Στην κατηγορία Set των συνόλων δοθέντων δύο απεικονίσεων $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon X \longrightarrow Z$ το pushout τους είναι η τριάδα $(D = (Y \bigcup Z)/\bar{\mathcal{R}}, h, k)$ όπου $(Y \bigcup Z)/\bar{\mathcal{R}}$ το σύνολο στο οποίο $Y \bigcup Z = (\{1\} \times Y) \bigcup (\{2\} \times Z)$ είναι η ξένη ένωση των συνόλων Y και Z και $\bar{\mathcal{R}}$ η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας στο $Y \bigcup Z$ τέτοια ώστε $\mathcal{R} \subseteq \bar{\mathcal{R}}$ με $\mathcal{R}$ να είναι η διμελής σχέση στο σύνολο $Y \bigcup Z$ η οποία ορίζεται ως $(1, y)\mathcal{R}(2, z)$ αν και μόνο αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$ και $f(x) = z$ και $h\colon Y \longrightarrow D$, $k\colon Z \longrightarrow D$ είναι απεικονίσεις με $h(y) = \overline{(1, y)}$ και $k(z) = \overline{(2, z)}$ αντίστοιχα, όπου για τυχόν στοιχείο w του συνόλου $Y \bigcup Z$, συμβολίζουμε με $\bar{w} = \{m \in Y \bigcup Z \mid w\bar{\mathcal{R}}m\}$.

2. Μια από τις συνήθεις κατασκευές στην τοπολογία όπου ένας τοπολογικός χώρος «προσκολλάται» σε έναν άλλο είναι ο χώρος ταύτισης (adjunction space). Πιο συγκεκριμένα, δοθέντων δύο τοπολογικών χώρων X και Y ας είναι $f\colon S \longrightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση όπου ο S είναι υπόχωρος του Y. Παίρνοντας την ξένη ένωση $X \coprod Y$ των χώρων X και Y και ταυτίζοντας το σημείο x με το $f(x)$ δηλαδή θεωρώντας τον χώρο πηλίκο ο οποίος λαμβάνεται από την σχέση ισοδυναμίας $a \backsimeq b$ αν και μόνο αν $a = b$ ή $a = x$, $b = f(x)$ (ή εναλλακτικά $a = f(x)$, $b = x$) για κάθε στοιχείο x του υποχώρου S σχηματίζουμε τον adjunction space $X \bigcup_f Y$. Δηλαδή, $X \bigcup_f Y = (X \coprod Y)/\{f(S) \backsimeq S\}$.
Στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων η κατασκευή του adjunction space αποτελεί παράδειγμα pushout. Ειδικότερα, εάν Z είναι υπόχωρος του Y και $g\colon Z \longrightarrow Y$ είναι η απεικόνιση έγκλεισης μπορούμε να «προσκολλήσουμε» τον χώρο Y με έναν άλλο χώρο X μέσω του Z χρησιμοποιώντας την συνεχή απεικόνιση $f\colon Z \longrightarrow X$. Ως εκ τούτου ο χώρος ταύτισης $X \bigcup_f Y$ είναι pushout όπως υποδηλώνεται από το ακόλουθο pushout διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\phi_Y"] \\ X \arrow[r, "\phi_X"] & X \bigcup_f Y \end{tikzcd}$$

όπου οι μορφισμοί ϕ_X και ϕ_Y είναι οι συνθέσεις του μορφισμού πηλίκου με τις κανονικές εισαγωγές στην ξένη ένωση των X και Y. Γενικότερα αλλάζοντας την έγκλειση g με οποιαδήποτε άλλη συνεχή απεικόνιση προκύπτει ένα άλλο pushout. Κατ' αυτό τον τρόπο όλοι οι χώροι ταύτισης μπορούν να θεωρηθούν ως pushouts.

3. Στην κατηγορία Grp των ομάδων δοθέντων δύο ομομορφισμών ομάδων $f\colon G \longrightarrow G_1$ και $g\colon G \longrightarrow G_2$ το pushout τους είναι η τριάδα $(D = (G_1 * G_2)/N, g_1, g_2)$ όπου $(G_1 * G_2)/N$ είναι η ομάδα στην οποία $G_1 * G_2$ είναι το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων G_1 και G_2 και N είναι η κανονική υποομάδα η οποία γεννάται από το $\{f(y)g(y)^{-1} \in G_1 * G_2 \mid y \in G\}$ και $g_1\colon G_1 \longrightarrow D$, $g_2\colon G_2 \longrightarrow D$ είναι ομομορφισμοί ομάδων με $g_1(x_1) = x_1 N$ και $g_2(x_2) = x_2 N$ αντίστοιχα.

4. Στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων δοθέντων δύο ομομορφισμών αβελιανών ομάδων $f\colon G \longrightarrow G_1$ και $g\colon G \longrightarrow G_2$ το pushout τους είναι η τριάδα $(D = (G_1 \oplus G_2)/N, g_1, g_2)$ όπου $(G_1 \oplus G_2)/N$ είναι η αβελιάνη ομάδα στην οποία $G_1 \oplus G_2$ είναι το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα των ομάδων G_1 και G_2 και $N = \{(f(y), -g(y)) \in G_1 \oplus G_2 \mid y \in G\}$ είναι υποομάδα του ευθέος αθροίσματος $G_1 \oplus G_2$ και $g_1\colon G_1 \longrightarrow D$, $g_2\colon G_2 \longrightarrow D$ είναι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων με $g_1(x_1) = (x_1, 0) + N$ και $g_2(x_2) = (0, x_2) + N$ αντίστοιχα.

5. Στην κατηγορία Rng των προσεταιριστικών δακτυλίων με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων, δοθέντων ομομορφισμών δακτυλίων $f\colon R \longrightarrow R_1$ και $g\colon R \longrightarrow R_2$ το pushout τους είναι η τριάδα $(D = (R_1 * R_2)/I, g_1, g_2)$ όπου $(R_1 * R_2)/I$ είναι ο δακτύλιος στον οποίο $R_1 * R_2$ είναι το ελεύθερο γινόμενο των δακτυλίων R_1 και R_2 και I είναι το ιδεώδες το οποίο γεννάται από το $\{f(x) - g(x) \in R_1 * R_2 \mid x \in R\}$ και $g_1\colon R_1 \longrightarrow D$, $g_2\colon R_2 \longrightarrow D$ είναι ομομορφισμοί δακτυλίων με $g_1(x_1) = x_1 + I$ και $g_2(x_2) = x_2 + I$ αντίστοιχα.

6. Στην κατηγορία των σημειακών συνόλων Set_* δοθέντων δύο απεικονίσεων $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ και $g\colon (X, x_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ που διατηρούν το σημείο βάσης, το pushout τους είναι η τριάδα $(D = (Y \bigcup Z)/\bar{\mathcal{R}}, h, k)$ όπου $(Y \bigcup Z)/\bar{\mathcal{R}}$ το σημειακό σύνολο στο οποίο $Y \bigcup Z = (\{1\} \times Y) \bigcup (\{2\} \times Z)$ είναι η ξένη ένωση των συνόλων Y και Z και $\bar{\mathcal{R}}$ η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας στο $Y \bigcup Z$ τέτοια ώστε $R \subseteq \bar{\mathcal{R}}$ με $\mathcal{R}$ να είναι η διμελής σχέση στο σύνολο $Y \bigcup Z$ η οποία ορίζεται ως $(1, y)\mathcal{R}(2, z)$ αν και μόνο αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$ και $f(x) = z$ και $h\colon Y \longrightarrow D$, $k\colon Z \longrightarrow D$ είναι απεικονίσεις με $h(y) = \overline{(1, y)}$ και $k(z) = \overline{(2, z)}$ αντίστοιχα, όπου για τυχόν στοιχείο w του συνόλου $Y \bigcup Z$, συμβολίζουμε με $\bar{w} = \{m \in Y \bigcup Z \mid w\bar{\mathcal{R}}m\}$.

Παρατήρηση 1.4.12. 1. Ανάλογα με τα pullbacks, τα pushouts μπορούν να κατασκευαστούν από συνεξισωτές και συνγινόμενα. Δοθέντων δύο μορφισμών $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon X \longrightarrow Z$ σχηματίζουμε το συνγινόμενο των Y και Z. Το pushout των μορφισμών f και g είναι ο συνεξισωτής των μορφισμών $\iota_Y \circ f\colon X \longrightarrow Y \coprod Z$ και $\iota_Z \circ g\colon X \longrightarrow Y \coprod Z$ όπου $\iota_Y : Y \longrightarrow Y \coprod Z$ και $\iota_Z : Z \longrightarrow Y \coprod Z$ είναι μορφισμοί στο συνγινόμενο. Ως εκ τούτου μια κατηγορία η οποία έχει πεπερασμένα συνγινόμενα και συνεξισωτές έχει εξίσου αρχικό αντικείμενο και pushouts. Επιπλέον, εάν σε μια κατηγορία με αρχικό αντικείμενο υπάρχουν pushouts τότε υπάρχουν συνεξισωτές και πεπερασμένα συνγινόμενα. Στην πραγματικότητα, από τα θεωρήματα ύπαρξης για συνόρια σε μια κατηγορία με πεπερασμένα συνγινόμενα και συνεξισωτές και κατά συνέπεια με αρχικό αντικείμενο και pushouts υπάρχουν όλα τα πεπερασμένα συνόρια.

2. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος του Παραδείγματος 1.4.11. εάν το σύνολο X είναι υποσύνολο (για παράδειγμα η τομή) των συνόλων Y και Z και οι απεικονίσεις f και g είναι οι απεικονίσεις έγκλεισης τότε το pushout είναι απλώς η ένωση των Y και Z.

Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε την ύπαρξη των pushouts στην κατηγορία R-Mod των αριστερών R-προτύπων.

Πρόταση 1.4.13. *Το pushout δύο ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων*

$$f\colon X \longrightarrow Y \quad \& \quad g\colon X \longrightarrow Z$$

στην R-Mod υπάρχει.

Απόδειξη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το

$$K = \{(g(x), -f(x)) \in Z \oplus Y \mid x \in X\}$$

είναι υποπρότυπο του $Z \oplus Y$. Ορίζουμε

$$D = (Z \oplus Y)/K$$

Επιπλέον, ορίζουμε $h\colon Y \longrightarrow D,\ y \longmapsto (0, y) + K$ και $k\colon Z \longrightarrow D,\ z \longmapsto (z, 0) + K$. Ας είναι $x \in X$. Τότε

$$k \circ g(x) = h \circ f(x) \iff k(g(x)) = h(f(x)) \iff (g(x), 0) + K = (0, f(x)) + K$$

$$\iff (g(x), 0) - (0, f(x)) \in K \iff (g(x), -f(x)) \in K, \text{ το οποίο ισχύει } \forall x \in X.$$

Επομένως, $k \circ g = h \circ f$. Εάν (D', f', g') είναι άλλη τριάδα τέτοια ώστε $f' \circ g = g' \circ f$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi \colon D \longrightarrow D', \quad (z, y) + K \longmapsto f'(z) + g'(y).$$

Ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική διαδικασία με την Πρόταση 1.4.5. έπεται ότι $\phi \circ h = g', \phi \circ k = f'$ και ότι η απεικόνιση ϕ είναι μοναδική. Τότε η τριάδα (D, h, k) είναι ένα pushout των ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων f, g. ■

Σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση το pushout ενός επιμορφισμού ή ενος ισομορφισμού είναι εξίσου ένας επιμορφισμός ή ένας ισομορφισμός.

Πρόταση 1.4.14. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Θεωρούμε το pushout D του διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. *Εάν ο f είναι επιμορφισμός, τότε και ο k είναι επιμορφισμός.*
2. *Εάν ο f είναι ισομορφισμός, τότε και ο k είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.4.6. ■

Παρατήρηση 1.4.15. Στην Πρόταση 1.4.14 είδαμε ότι το pushout ενός επιμορφισμού ή ενός ισομορφισμού είναι αντίστοιχα επιμορφισμός ή ισομορφισμός. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει στην περίπτωση των μονομορφισμών. Γενικά, σε μια τυχαία κατηγορία το pushout ενός μονομορφισμού δεν είναι μονομορφισμός. Ωστόσο, σε κάποιες κατηγορίες, όπως για παράδειγμα οι adhesive κατηγορίες, η Πρόταση 1.4.14 αληθεύει για τους μονομορφισμούς.

Πρόταση 1.4.16. *Κάθε διάγραμμα της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_0"] \arrow[d, "f"'] & X \coprod X \arrow[d, "f \coprod 1_X"] \\ Y \arrow[r, "\iota n_0'"] & Y \coprod X \end{tikzcd}$$

είναι pushout διάγραμμα.

Απόδειξη. Λόγω της καθολικής ιδιότητας που ικανοποιεί η coproduct map $f \coprod 1_X \colon X \coprod X \longrightarrow Y \coprod X$ το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Δοθέντων μορφισμών $h \colon Y \longrightarrow Z$ και $g \colon X \coprod X \longrightarrow Z$ με $g \circ \iota n_0 = h \circ f$, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\lambda \colon Y \coprod X \longrightarrow Z$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_0"] \arrow[d, "f"'] & X \coprod X \arrow[d, "f \coprod 1_X"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ Y \arrow[r, "\iota n_0'"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & Y \coprod X \arrow[dr, dotted, "\lambda"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας του coproduct $Y\coprod X$ των αντικειμένων Y και X δοθέντων μορφισμών $h\colon Y \longrightarrow Z$ και $g\circ\iota n_0\colon X\longrightarrow Z$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\lambda\colon Y\coprod X\longrightarrow Z$ τέτοιος ώστε $\lambda\circ\iota n_0' = h$ και $\lambda\circ\iota n_1' = g\circ\iota n_0$ όπως παριστάνεται στα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\iota n_0'"] \arrow[d, "h"'] & Y\coprod X \arrow[dl, "\lambda"] \\ Z & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_1'"] \arrow[d, "g\circ\iota n_0"'] & Y\coprod X \arrow[dl, "\lambda"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lambda\circ(f\coprod 1_X)\circ\iota n_0 = \lambda\circ\iota n_0'\circ f = h\circ f = g\circ\iota n_0$$

Έτσι, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_0"] \arrow[d, "h\circ f"'] & X\coprod X \arrow[dl, shift right, "g"'] \arrow[dl, shift left, "\lambda\circ(f\coprod 1_X)"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας του coproduct ο μορφισμός $X\coprod X\longrightarrow Z$ είναι μοναδικός. Ως εκ τούτου έπεται ότι $g=\lambda\circ(f\coprod 1_X)$. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός λ είναι ο μοναδικός μορφισμός ο οποίος ικανοποιεί τις ισότητες $\lambda\circ\iota n_0' = h$ και $g=\lambda\circ(f\coprod 1_X)$. Υποθέτουμε ότι $\lambda'\colon Y\coprod X\longrightarrow Z$ είναι ένας άλλος μορφισμός τέτοιος ώστε $\lambda'\circ\iota n_0' = h$ και $g=\lambda'\circ(f\coprod 1_X)$. Ως εκ τούτου $\lambda\circ\iota n_0' = h = \lambda'\circ\iota n_0'$ και $\lambda\circ(f\coprod 1_X) = g = \lambda'\circ(f\coprod 1_X)$. Συνθέτοντας με τον μορφισμό $in_1\colon X\longrightarrow X\coprod X$ στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\lambda\circ(f\coprod 1_X)\circ\iota n_1 = g\circ\iota n_1 = \lambda'\circ(f\coprod 1_X)\circ\iota n_1$. Λόγω της καθολικής ιδιότητας του coproduct $X\coprod X$ των αντικειμένων X και X δοθέντος μορφισμού $in_1'\colon X\longrightarrow Y\coprod X$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f\coprod 1_X\colon X\coprod X\longrightarrow Y\coprod X$ τέτοιος ώστε $(f\coprod 1_X)\circ in_1 = in_1'$, όπως παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_1"] \arrow[d, "\iota n_1'"'] & X\coprod X \arrow[dl, "f\coprod 1_X"] \\ Y\coprod X & \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου, έπεται ότι $\lambda\circ\iota n_1' = g\circ\iota n_1 = \lambda'\circ\iota n_1'$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτουν τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\iota n_0'"] \arrow[d, "h"'] & Y\coprod X \arrow[dl, shift right, "\lambda'"'] \arrow[dl, shift left, "\lambda"] \\ Z & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_1'"] \arrow[d, "g\circ in_0"'] & Y\coprod X \arrow[dl, shift right, "\lambda'"'] \arrow[dl, shift left, "\lambda"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Όμως, ο μοναδικός μορφισμός με την ιδιότητα να κάνει τα τελευταία διαγράμματα μεταθετικά είναι ο λ. Ως εκ τούτου $\lambda=\lambda'$. Επομένως, ο μορφισμός $\lambda\colon Y\coprod X\longrightarrow Z$ είναι ο μοναδικός μορφισμός τέτοιος ώστε $\lambda\circ\iota n_0' = h$ και $\lambda\circ(f\coprod 1_X) = g$. Έτσι, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω το αρχικό διάγραμμα είναι pushout. ■

Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο με την «προσεταιριστική» ιδιότητα των pushouts.

Πρόταση 1.4.17. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "e"] \\ D \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & F \end{tikzcd}$$

1. *Εάν τα διαγράμματα (I) και (II) είναι pushouts τότε το διάγραμμα (I)+(II) είναι pushout.*

2. *Εάν τα διαγράμματα (I)+(II) και (I) είναι pushouts τότε το διάγραμμα (II) είναι pushout.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.4.8. ■

1.5 Ενέσιμα και Προβολικά Πρότυπα

Δοθέντος ενός υποχώρου U ενός διανυσματικού χώρου V υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου R ο U είναι ένας ευθύς προσθεταίος του V. Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το Λήμμα του Zorn μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνουμε μια βάση του U σε μια βάση του V. Ωστόσο υπάρχουν R-πρότυπα τα οποία έχουν την ιδιότητα να είναι ευθείς προσθεταίοι σε κάθε πρότυπο το οποίο τα περιέχει ως υποπρότυπα ακόμη και εάν δεν μπορούν να έχουν βάση. Τα πρότυπα αυτά συγκροτούν μια σημαντική κλάση προτύπων, την κλάση των ενέσιμων προτύπων. Δυϊκά, συγκροτείται η κλάση των προβολικών προτύπων. Εν συνεχεία ορίζουμε τα ενέσιμα και προβολικά πρότυπα και και μελετάμε τις ιδιότητες αυτών. Οι έννοιες των ενέσιμων και των προβολικών προτύπων θα διευκολύνουν την κατανόηση των βασικών εννοιών που αφορούν την ευσταθή κατηγορία προτύπων που θα αναπτύξουμε παρακάτω.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση της εν λόγω υποενότητας, δοθέντος ενός δακτυλίου R συμβολίζουμε με R-Mod την κατηγορία των αριστερών προτύπων.

Ορισμός 1.5.1. *Ένα αριστερό R-πρότυπο E καλείται* **ενέσιμο (injective)** *εάν για κάθε μονομορφισμό αριστερών R-προτύπων $i\colon A \longrightarrow B$, και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f\colon A \longrightarrow E$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon B \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 1.5.2. Ένα R-πρότυπο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν για κάθε R-πρότυπο B και κάθε υποπρότυπο A του B κάθε ομομορφισμός R-προτύπων $f\colon A \longrightarrow E$ μπορεί να επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό R-προτύπων $g\colon B \longrightarrow E$. Έτσι, στον Ορισμό 1.5.1. μπορούμε ασφαλώς να υποθέσουμε ότι το A είναι υποπρότυπο του B και ότι ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι η κανονική έγκλειση.

Η ακόλουθη Πρόταση υποδηλώνει ότι η κλάση όλων των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων είναι κλειστή στους ισομορφισμούς.

Πρόταση 1.5.3. *Ας είναι M και N δύο αριστερά R-πρότυπα τέτοια ώστε το M να είναι ισόμορφο με το N. Τότε το πρότυπο M είναι ενέσιμο αν και μόνο αν το πρότυπο N είναι ενέσιμο.*

Απόδειξη. Ας είναι M και N δύο αριστερά R-πρότυπα τέτοια ώστε το M να είναι ισόμορφο με το N. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $\sigma\colon M \longrightarrow N$ με αντίστροφο $\sigma^{-1}\colon N \longrightarrow M$ ο οποίος είναι εξίσου ισομορφισμός. Ως εκ τούτου $\sigma \circ \sigma^{-1} = 1_N$ και $\sigma^{-1} \circ \sigma = 1_M$. Υποθέτουμε ότι το πρότυπο M είναι ενέσιμο. Τότε για κάθε μονομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon A \longrightarrow H$ και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $\sigma^{-1} \circ h''\colon A \longrightarrow M$ υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $\beta\colon H \longrightarrow M$ τέτοιος ώστε $\beta \circ h = \sigma^{-1} \circ h''$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "\sigma^{-1}\circ h''"'] \arrow[d, "h''"] & H \arrow[dll, bend left, "\beta"] \\
M & N \arrow[l, "\sigma^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Συνθέτοντας από αριστερά με τον ισομορφισμό σ στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\sigma \circ \sigma^{-1} = 1_N$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_N\colon N \longrightarrow N$ προκύπτει ότι $h'' = \sigma \circ \beta \circ h$. Έτσι, για κάθε μονομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon A \longrightarrow H$ και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h''\colon A \longrightarrow N$ υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $\sigma \circ \beta\colon H \longrightarrow N$ τέτοιος ώστε $h'' = \sigma \circ \beta \circ h$, γεγονός που αποδεικνύει ότι το αριστερό R-πρότυπο N είναι ενέσιμο.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το πρότυπο N είναι ενέσιμο. Τότε για κάθε μονομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon A \longrightarrow H$ και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $\sigma \circ h'\colon A \longrightarrow N$ υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $\alpha\colon H \longrightarrow N$ τέτοιος ώστε $\alpha \circ h = \sigma \circ h'$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "\sigma\circ h'"'] \arrow[d, "h'"] & H \arrow[dll, bend left, "\alpha"] \\
N & M \arrow[l, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Συνθέτοντας από αριστερά με τον ισομορφισμό σ^{-1} στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\sigma^{-1} \circ \sigma = 1_M$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_M\colon M \longrightarrow M$ προκύπτει ότι $h' = \sigma^{-1} \circ \alpha \circ h$. Έτσι, για κάθε μονομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon A \longrightarrow H$ και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h'\colon A \longrightarrow M$ υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $\sigma^{-1} \circ \alpha\colon H \longrightarrow M$ τέτοιος ώστε $h' = \sigma^{-1} \circ \alpha \circ h$, γεγονός που αποδεικνύει ότι το αριστερό R-πρότυπο M είναι ενέσιμο. ∎

Ορισμός 1.5.4. *Ένα υποπρότυπο N ενός αριστερού R-προτύπυ M καλείται* **ευθύς προσθεταίος (direct summand)** *του M, αν υπάρχει υποπρότυπο K του M έτσι ώστε: $M = N \oplus K$.*

Έτσι αν M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο τέτοιο ώστε $M = \oplus_{j\in J}\Delta_j$, όπου $\{\Delta_j\}_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια αριστερών R-προτύπων, τότε καθένα απο τα Δ_j είναι ευθύς προσθεταίος (direct summand) του M.

Πρόταση 1.5.5. *Εάν M είναι ένα ενέσιμο υποπρότυπο ενός αριστερού R-προτύπου N τότε το M είναι ευθύς προσθετέος του N.*

Απόδειξη. Ας είναι M ένα ενέσιμο υποπρότυπο ενός αριστερού R-προτύπου N και $i\colon M \longrightarrow N$ η κανονική έγκλειση. Εφόσον το M είναι ενέσιμο, υπάρχει ένας ομομορφισμός αριστερών R-

προτύπων $g\colon N \longrightarrow M$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_M"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος προκύπτει ότι $g \circ i = 1_M$. Ως εκ τούτου ο μονομορφισμός i είναι διασπάσιμος και άρα υπάρχει κάποιο αριστερό R-πρότυπο K τέτοιο ώστε $N \cong M \bigoplus \mathsf{Ker}\, g$. Συνεπώς, το M είναι ένας ευθύς προσθετέος του N. ■

Το ακόλουθο θεώρημα οφείλεται στον Reinhold Baer και είναι γνωστό ως κριτήριο του Baer.

Θεώρημα 1.5.6. (Κριτήριο του Baer) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R-πρότυπο E.*

1. *Το E είναι ενέσιμο.*

2. *Κάθε ομομορφισμός $f\colon I \longrightarrow E$ όπου I είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R μπορεί να επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $g\colon R \longrightarrow E$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

3. *Για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f\colon I \longrightarrow E$ όπου I είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R υπάρχει ένα x το οποίο ανήκει στο E τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \alpha x$, $\forall \alpha \in I$.*

Απόδειξη. Ας είναι E ένα αριστερό R-πρότυπο. Θα αποδείξουμε ότι $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

- $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ Υποθέτουμε ότι το E είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Τότε εξ' ορισμού το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

  Ως εκ τούτου κάθε ομομορφισμός $f\colon I \longrightarrow E$ όπου I είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R μπορεί να επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $g\colon R \longrightarrow E$.

- $\underline{(2) \Rightarrow (3)}$ Υποθέτουμε ότι κάθε ομομορφισμός $f\colon I \longrightarrow E$ όπου I είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R μπορεί να επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $g\colon R \longrightarrow E$. Ας είναι g επέκταση της f. Υποθέτουμε ότι $g(1) = x$. Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός g είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων προκύπτει ότι

$$f(\alpha) = (g \circ i)(\alpha) = g(i(\alpha)) = g(\alpha) = g(\alpha 1) = \alpha g(1) = \alpha x$$

  , για κάθε $\alpha \in I$.

- $\underline{(3) \Rightarrow (1)}$ Ας είναι N_1 υποπρότυπο του N_2, $i\colon N_1 \longrightarrow N_2$ η κανονική έγκλειση και $f\colon N_1 \longrightarrow E$ ένας ομομορφισμός R-προτύπων. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon N_2 \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & N_2 \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το σύνολο S των διατεταγμένων ζευγών (X, g) όπου X είναι ένα υποπρότυπο του N_2 τέτοιο ώστε $N_1 \subseteq X$ και $g|_{N_1} = f$. Εισάγουμε μια μερική διάταξη στο σύνολο S ως εξής:

$$(X, g) \leqslant (X', g') \text{ εαν } X \subseteq X' \text{ και } g'|_X = g.$$

Το σύνολο S είναι μη κενό καθώς το ζεύγος (N_1, f) ανήκει στο S. Οι προϋποθέσεις του Λήμματος Zorn ισχύουν για κάθε αλυσίδα του S καθώς εάν C είναι τυχούσα αλυσίδα στο S τότε $\bigcup C$ όπου $C = \{(\Delta_i, f_i) | i \in I\}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο μιας υπό-οικογένειας του S, αποτελεί άνω φράγμα της C. Έτσι, θεωρούμε $\bigcup f_i\colon \bigcup \Delta_i \longrightarrow E$ το οποίο εξασφαλίζει τις προϋποθέσεις του Λήμματος του Zorn. Ως εκ τούτου το σύνολο S έχει μεγιστοτικό στοιχείο, ας είναι (X^*, g^*). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(a) Εάν $X^* = N_2$ τότε το ζητούμενο προκύπτει κατά προφανή τρόπο.

(b) Υποθέτουμε ότι $X^* \neq N_2$. Θεωρούμε $y \in N_2 - X^*$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να επεκτείνουμε την g^* σε μια απεικόνιση $h\colon X^* + Iy \longrightarrow E$ το οποίο αντίκειται στο ότι (X^*, g^*) είναι ένα μεγιστοτικό στοιχείο του S. Θεωρούμε το αριστερό ιδεώδες

$$(X^* : y) = \{\alpha \in I \mid \alpha y \in X^*\}$$

Τότε λαμβάνουμε την απεικόνιση

$$f\colon (X^* : y) \longrightarrow E, \qquad \alpha \longrightarrow g^*(\alpha y)$$

Εξ' υποθέσεως υπάρχει $z \in E$ τέτοιο ώστε $g^*(y_\alpha) = \alpha z$ για κάθε $\alpha \in (X^* : y)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h\colon X^* + Iy \longrightarrow M, \qquad (x + \alpha y) \longrightarrow g^*(x) + az.$$

Τότε $h|_{X^*} = g^*$ και $X^* \subseteq X^* + Iy$. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε μια επέκταση της g^* γεγονός που είναι άτοπο καθώς αντίκειται στο ότι (X^*, g^*) είναι ένα μεγιστοτικό στοιχείο του S. Έτσι, $X^* = N_2$. ■

Παρατήρηση 1.5.7. Το κριτήριο του Baer υποδηλώνει ότι η συλλογή των δεξιών ιδεωδών είναι ένα σύνολο ελέγχου για το εάν ένα R-πρότυπο είναι ενέσιμο.

Ευθύς αμέσως παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα ενέσιμων R-προτύπων καθώς και ένα παράδειγμα προτύπου το οποίο δεν είναι ενέσιμο.

Παράδειγμα 1.5.8. 1. Το μηδενικό πρότυπο είναι κατά τετριμμένο τρόπο ενέσιμο R-πρότυπο.

2. Κάθε διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου D είναι ένα ενέσιμο D-πρότυπο. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Baer καθώς και το γεγονός ότι τα μόνα (αριστερά) ιδεώδη ενός διαιρετικού δακτυλίου D είναι το μηδενικό καθώς και ο ίδιος ο δακτύλιος προκύπτει ότι κάθε διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός διαιρετικού δακτυλίου D εάν θεωρηθεί ως αριστερό D-πρότυπο είναι ένα ενέσιμο πρότυπο.

3. Το σώμα των ρητών $\mathbb{Q}$ ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο είναι ενέσιμο. Όσον αφορά τον συγκεκριμένο ισχυρισμό σημειώνουμε ότι κάθε διαιρετό, βλέπε τον Ορισμό 1.5.9 παρακάτω, R-πρότυπο είναι ενέσιμο. Το σώμα των ρητών $\mathbb{Q}$ ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο είναι προφανώς διαιρετό. Ως εκ τούτου το σώμα των ρητών $\mathbb{Q}$ ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο είναι ενέσιμο.

4. Το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $2\mathbb{Z}$ *δεν* είναι ενέσιμο. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, υποθέτουμε ότι το υποπρότυπο $2\mathbb{Z}$ του $\mathbb{Z}$ είναι ένα ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Τότε χάρις στην Πρόταση 1.5.5, το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $2\mathbb{Z}$ είναι ένας ευθύς προσθετέος του $\mathbb{Z}$. Ως εκ τούτου, υπάρχει ένας ακέραιος κ, τέτοιος ώστε $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + \kappa\mathbb{Z}$ και $2\mathbb{Z} \cap \kappa\mathbb{Z} = \{0\}$, γεγονός το οποίο είναι φυσικά αδύνατο.

5. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο *δεν* είναι ενέσιμο. Για να το διαπιστώσουμε αυτό υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο είναι ενέσιμο. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 2\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"] \\
 & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}
$$

όπου ως απεικόνιση $f\colon 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ορίζουμε την απεικόνιση η οποία στέλνει το στοιχείο 2α του $2\mathbb{Z}$ στο στοιχείο α του $\mathbb{Z}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταθετικότητα του διαγράμματος καθώς και ότι ο μορφισμός $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων προκύπτει ότι:

$$1 = f(2) = g(i(2)) = g(2) = g(2 \cdot 1) = 2g(1)$$

και κατ' επέκταση ότι $g(1) = \frac{1}{2}$, γεγονός το οποίο είναι φυσικά αδύνατο.

Εν συνεχεία εισάγουμε την έννοια του διαιρετού προτύπου υπεράνω μιας περιοχής κύριων ιδεωδών. Η έννοια του διαιρετού προτύπου είναι απαραίτητη στο να αποδείξουμε ότι κάθε πρότυπο εμφυτεύεται σε ένα ενέσιμο πρότυπο.

Ορισμός 1.5.9. *Ας είναι R μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Ένα αριστερό R-πρότυπο M καλείται* **διαιρετό (divisible)** *εάν για κάθε $m \in M$ και για κάθε μη μηδενικό $r \in R$, υπάρχει κάποιο $m' \in M$ έτσι ώστε $m = rm'$. Δηλαδή, $M = rM$ για κάθε μη μηδενικό $r \in R$.*

Πρόταση 1.5.10. *1. Κάθε ομομορφική εικόνα ενός διαιρετού R-προτύπου, είναι ένα διαιρετό R-πρότυπο.*

2. Ένα ευθύ άθροισμα διαιρετών R-προτύπων είναι διαιρετό R-πρότυπο και ένας ευθύς προσθετέος ενός διαιρετού R-προτύπου είναι διαιρετό R-πρότυπο.

Απόδειξη. 1. Ας είναι M ένα διαιρετό αριστερό R-πρότυπο και $g\colon M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Τότε $M = rM$ για κάθε μη μηδενικό $r \in R$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $g\colon M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων καθώς και την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$g(M) = g(rM) = rg(M), \text{ για κάθε μη μηδενικό } r \in R.$$

Ως εκ τούτου $g(M)$ είναι ένα διαιρετό R-πρότυπο.

2. Ας είναι $N_1, N_2, \ldots, N_k$ διαιρετά αριστερά R-πρότυπα και M το ευθύ άθροισμα αυτών. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$ υπάρχει στοιχείο $m \in M$ το οποίο γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ με $n_i \in N_i$ για $i = 1(1)k$. Δοθέντος ενός μη μηδενικού στοιχείου $r \in R$ και στοιχείων $n_i' \in N_i$ υπάρχουν στοιχεία $n_i \in N_i$ τέτοια ώστε $rn_i = n_i'$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω έπεται ότι

$$rm = r(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = rn_1 + rn_2 + \cdots + rn_k = n_1' + n_2' + \cdots + n_k' = m'.$$

Ως εκ τούτου $rM = M$. Έτσι, το $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$ είναι ένα διαιρετό R-πρότυπο. Όσον αφορά τον ευθύ προσθετέο ενός διαιρετού R-προτύπου υποθέτουμε ότι N είναι ευθύς προσθετέος ενός διαιρετού R-προτύπου M. Τότε $M = N \oplus K$ όπου K είναι ένα υποπρότυπο του M. Εφόσον το M είναι ένα διαιρετό R-πρότυπο εξ' ορισμού έπεται ότι $rM = M$ για κάθε μη μηδενικό $r \in R$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο ισότητες προκύπτει ότι

$$r(N \oplus K) = N \oplus K$$

και κατ' επέκταση ότι

$$rN \oplus rK = N \oplus K.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα έπεται ότι $rN = N$ για κάθε μη μηδενικό $r \in R$. Ως εκ τούτου το N είναι ένα διαιρετό R-πρότυπο. ∎

Ευθύς αμέσως παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα διαιρετών R-προτύπων.

Παράδειγμα 1.5.11. 1. Το σώμα των ρητών $\mathbb{Q}$ εάν ιδωθεί ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο είναι διαιρετό. Πράγματι, θεωρούμε το σύνολο των ρητών

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \in \mathbb{N} \right\}$$

Ας είναι $x = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ και $r \in \mathbb{Z}$. Τότε:

$$rx = r\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta}, \text{ όπου } \gamma = r\alpha \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, $rx = \frac{\gamma}{\beta} = x'$ με $x' \in \mathbb{Q}$. Ως εκ τούτου το σώμα των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι ένα διαιρετό $\mathbb{Z}$-πρότυπο.

2. Ας είναι p ένας πρώτος και $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{ \frac{b}{p^n} + \mathbb{Z} \mid b \in \mathbb{Z} \text{ και } n = 0, 1, 2, \dots \right\}$. Το $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ εάν ιδωθεί ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο είναι διαιρετό. Πράγματι, ας είναι $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ και $z \in \mathbb{Z}$. Τότε $x = \frac{b}{p^n} + \mathbb{Z}$. Έτσι,

$$zx = z(\frac{b}{p^n} + \mathbb{Z}) = \frac{zb}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{z'}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \text{ με } z' = zb \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς, $zx = \frac{z'}{p^n} + \mathbb{Z} = z''$ όπου $z'' \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Ως εκ τούτου $z\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ είναι διαιρετό.

Σχόλιο 1.5.12. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος του Παραδείγματος 1.5.11 καθώς και το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.5.10 έπεται ότι το ευθύ άθροισμα $Q^{(\Delta)}$ των $\mathbb{Z}$-διαιρετών προτύπων $\mathbb{Q}$ είναι $\mathbb{Z}$-διαιρετό πρότυπο για ένα αυθαίρετο σύνολο Δ. Επιπλέον δοθείσης μιας υποομάδας N του $Q^{(\Delta)}$ το $Q^{(\Delta)}/N$ είναι $\mathbb{Z}$-διαιρετό καθώς για κάθε στοιχείο $z \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι $\mathbb{Z}Q^{(\Delta)}/N = Q^{(\Delta)}/N$.

Η ακόλουθη Πρόταση υποδηλώνει ότι υπεράνω μιας περιοχής κυρίων ιδεωδών η έννοια του «ενέσιμου προτύπου» είναι ισοδύναμη της έννοιας του «διαιρετού προτύπου».

Πρόταση 1.5.13. *Ας είναι R μία περιοχή κύριων ιδεωδών. Ένα αριστερό R-πρότυπο M είναι ενέσιμο αν και μόνο αν είναι διαιρετό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το αριστερό R-πρότυπο M είναι ενέσιμο, και έστω $x \in M$ και $r \in R$, $r \neq 0$. Αν $s, s' \in R$, και $sr = s'r$, τότε $(s - s')r = 0$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο δακτύλιος R είναι μια περιοχή κύριων ιδεωδών και $r \neq 0$ έπεται ότι $s - s' = 0$ ή ισοδύναμα ότι $s = s'$. Ορίζουμε λοιπόν απεικόνιση

$$f : \langle r \rangle \longrightarrow M, \quad sr \longmapsto sx,$$

για κάθε $s \in R$. Η απεικόνιση f είναι προφανώς ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Εφόσον το M είναι ενέσιμο και το $\langle r \rangle$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες του R σύμφωνα με το κριτήριο του Baer μπορούμε να επεκτείνουμε τον f σε έναν ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $g\colon R \longrightarrow M$ έτσι ώστε $x = f(r) = g(r) = g(r \cdot 1) = rg(1)$. Ως εκ τούτου, το αριστερό R-πρότυπο M είναι διαιρετό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε τώρα ότι το αριστερό R-πρότυπο M είναι διαιρετό. Ας είναι I ένα μη μηδενικό αριστερό ιδεώδες του R και $f\colon I \longrightarrow M$ ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Εφόσον ο δακτύλιος R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, υπάρχει κάποιο $s \in R$, $s \neq 0$, έτσι ώστε $I = \langle s \rangle$. Επιπλέον, αφού το M είναι διαιρετό και το $s \neq 0$, υπάρχει κάποιο $x \in M$, τέτοιο ώστε $f(s) = sx$. Ορίζουμε έναν ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $g\colon R \longrightarrow M$, θέτοντας $g(r) = rx$ για κάθε $r \in R$. Τότε για κάθε $y = r's \in I$, έχουμε ότι

$$g(y) = g(r's) = (r's)x = r'(sx) = r'f(s) = f(r's) = f(y),$$

και άρα, ότι $g|I = f$. Έτσι, κάνοντας χρήση του κριτηρίου του Baer, συμπεραίνουμε ότι το M είναι ενέσιμο. ■

Πρόταση 1.5.14. 1. *Κάθε αβελιανή ομάδα μπορεί να εμφυτευτεί σε μία ενέσιμη αβελιανή ομάδα.*

2. *Εάν Q είναι ένα ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο τότε $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ είναι ένα ενέσιμο R-πρότυπο.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι M ένα αριστερό R-πρότυπο. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $\phi\colon F[x] \longrightarrow M$ όπου F είναι ένα ελεύθερο R-πρότυπο. Τότε $F \simeq \mathbb{Z}^{\Delta}$. Έτσι, ο $\phi\colon \mathbb{Z}^{(\Delta)} \longrightarrow M$ είναι «επί». Τότε από το πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών προκύπτει ότι

$$M \simeq \mathbb{Z}^{(\Delta)}/\,\mathsf{Ker}\,\phi \subsetneq \mathbb{Q}^{(\Delta)}/\,\mathsf{Ker}\,\phi$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το Σχόλιο 1.5.12. το $\mathbb{Q}^{(\Delta)}/\,\mathsf{Ker}\,\phi$ είναι $\mathbb{Z}$-διαιρετό πρότυπο. Ως εκ τούτου σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.13. το $\mathbb{Q}^{(\Delta)}/\,\mathsf{Ker}\,\phi$ είναι ένα ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο.

2. Ας είναι Q ένα ενέσιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο, $f\colon A \longrightarrow B$ ένας μονομορφισμός αριστερών R-προτύπων και $g\colon A \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $h\colon B \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"] \\
& \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q). &
\end{tikzcd}$$

Ορίζουμε τον $g'\colon A \longrightarrow Q$ ως $g'(\alpha) = g(\alpha)(1_R)$ για κάθε στοιχείο $\alpha \in A$. Υποθέτουμε ότι $\alpha = \alpha'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $g\colon A \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ είναι καλά ορισμένος έπεται ότι $g(\alpha) = g(\alpha')$. Ως εκ τούτου, $g(\alpha)(1_R) = g(\alpha')(1_R)$ και κατ' επέκταση $g'(\alpha) = g'(\alpha')$. Έτσι, ο μορφισμός $g'\colon A \longrightarrow Q$ είναι καλά ορισμένος. Εφόσον ο μορφισμός $g\colon A \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων για κάθε $\alpha, \alpha' \in A$ και $n \in \mathbb{Z}$ προκύπτει ότι

$$g(\alpha + \alpha') = g(\alpha) + g(\alpha')$$

και

$$g(n\alpha) = ng(\alpha)$$

Ως εκ τούτου

$$(g(\alpha + \alpha'))(1_R) = (g(\alpha) + g(\alpha'))(1_R) = g(\alpha)(1_R) + g(\alpha')(1_R)$$

και
$$g(n\alpha)(1_R) = (ng(\alpha))(1_R) = n(g(\alpha)(1_R)).$$
Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του g' από τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι
$$g'(\alpha + \alpha') = g'(\alpha) + g'(\alpha')$$
και
$$g'(n\alpha) = ng'(\alpha).$$
για κάθε $\alpha, \alpha' \in A$ και $n \in \mathbb{Z}$. Ως εκ τούτου $g' \colon A \longrightarrow Q$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων και κατ' επέκταση ανήκει στο $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, Q)$. Εφόσον το Q είναι ένα ενέσιμο R-πρότυπο δοθέντος του μονομορφισμού αριστερών R-προτύπων $f \colon A \longrightarrow B$ και του ομομορφισμού αριστερών R-προτύπων $g' \colon A \longrightarrow Q$ υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $h' \colon B \longrightarrow Q$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\, h'"] \\
& Q. &
\end{tikzcd}$$

Έτσι, $h' \circ f = g'$. Κατόπιν, ορίζουμε τον μορφισμό $h \colon B \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ ως $h(b)(r) = h'(rb)$, για κάθε $b \in B$ και $r \in R$. Υποθέτουμε ότι $b = b'$. Τότε $rb = rb'$. Εφόσον ο μορφισμός h' είναι καλά ορισμένος προκύπτει $h'(rb) = h'(rb')$. Ως εκ τούτου $h(b)(r) = h(b')(r)$ για κάθε $r \in R$. Έτσι, $h(b) = h(b')$ γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $h \colon B \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ είναι καλά ορισμένος. Ας είναι $b, b' \in B$ και $r, r' \in R$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $h' \colon B \longrightarrow Q$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων προκύπτει ότι
$$h(b + b')(r) = h'(r(b + b')) = h'(rb + rb') = h(b)(r) + h(b')(r) = (h(b) + h(b'))(r)$$
και
$$h(rb)(r') = h'(rr'b) = rh(r'b) = r(h(b)(r')) = (rh(b))(r')$$
για κάθε $r, r' \in R$. Έτσι,
$$h(b + b') = h(b) + h(b')$$
και
$$h(rb) = rh(b)$$
γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $h \colon B \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι $h \circ f = g$. Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ για κάθε $\alpha \in A$. Υποθέτουμε ότι $r \in R$. Τότε
$$h(f(\alpha))(r) = h'(rf(\alpha)) = h'(f(r\alpha)) = (h' \circ f)(r\alpha) = g'(r\alpha) = (rg(\alpha))(1_R) = g(\alpha)(r1_R) =$$
$$= g(\alpha)(r)$$
Σημειώνουμε ότι οι ισότητες $(rg(\alpha))(1_R) = g(\alpha)(r1_R) = g(\alpha)(r)$ προκύπτουν από το γεγονός ότι η αβελιανή ομάδα $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ είναι ένα αριστερό R-πρότυπο με αριστερή δράση
$$R \times \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q), \quad (r, f) \longmapsto rf$$
όπου $rf \colon R \longrightarrow Q$ με $(rf)(r') := f(rr')$. Έτσι, $h \circ f = g$. Συνεπώς $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ είναι ένα ενέσιμο R-πρότυπο. ■

Ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.5.14 λαμβάνουμε ότι:

Πόρισμα 1.5.15. *Ας είναι G μία διαιρετή αβελιανή ομάδα. Τότε για κάθε δακτύλιο R το $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ είναι ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

Έτσι, έχουμε θέσει τις βάσεις για την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.5.16. *Κάθε αριστερό R-πρότυπο M μπορεί να εμφυτευθεί σε ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο E.*

Απόδειξη. Ας είναι M ένα αριστερό R-πρότυπο. Εάν το M ιδωθεί ως αβελιανή ομάδα, τότε η Πρόταση 1.5.14 μας εξασφαλίζει μια ενέσιμη αβελιανή ομάδα G, και μια εμφύτευση αβελιανών ομάδων $i\colon M \longrightarrow G$. Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ είναι αριστερά ακριβής, ο επαγόμενος ομομορφισμός $i_*\colon \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ είναι μονομορφισμός. Όμως,

$$M \cong \mathsf{Hom}_R(R, M) \subseteq \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M).$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 1.5.15, έχουμε ότι το M εμφυτεύεται ως αβελιανή ομάδα, στο ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$. Επιπλέον, εύκολα προκύπτει ότι η εμφύτευση αυτή είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων και ως εκ τούτου λαμβάνουμε το ζητούμενο. ■

Πρόταση 1.5.17. *Ένα αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, E)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Ας είναι E ένα ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. Θα αποδείξουμε ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, E)$ είναι ακριβής. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο $\mathsf{Hom}_R(-, E)$ είναι πάντα αριστερά ακριβής, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\mathsf{Hom}_R(-, E)$ είναι δεξιά ακριβής. Έστω

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N, E) \xrightarrow{g^\star} \mathsf{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{f^\star} \mathsf{Hom}_R(L, E),$$

είναι ακριβής, καθώς ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, E)$ είναι αριστερά ακριβής. Εφόσον το E είναι ενέσιμο και ο μορφισμός f είναι μονομορφισμός, για κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $h\colon L \longrightarrow E$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $k\colon M \longrightarrow E$ έτσι ώστε $h = k \circ f = f^\star(k)$. Συνεπώς, ο $f^\star$ είναι ένας επιμορφισμός και κατ' επέκταση ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, E)$ είναι δεξιά ακριβής.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-, E)$ είναι ακριβής. Ας είναι $f\colon L \longrightarrow M$ ένας μονομορφισμός αριστερών R-προτύπων και $h\colon L \longrightarrow E$ ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_R(-, E)$, στην σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} M/L \longrightarrow 0,$$

εξ' υποθέσεως εξασφαλίζεται ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M/L, E) \xrightarrow{\pi^\star} \mathsf{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{f^\star} \mathsf{Hom}_R(L, E) \longrightarrow 0,$$

είναι ακριβής. Έτσι, εφόσον $h \in \mathsf{Hom}_R(L, E)$, υπάρχει ομομορφισμός $k \in \mathsf{Hom}_R(M, E)$ τέτοιος ώστε $h = f^\star(k) = k \circ f = h$. Ως εκ τούτου, το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dashed, "\exists\ k"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Συνεπώς, το αριστερό R-πρότυπο M είναι ενέσιμο. ■

Σχόλιο 1.5.18. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 1.5.17 προκύπτει ότι τα ενέσιμα αριστερά R-πρότυπα, είναι ακριβώς τα αριστερά R-πρότυπα E, για τα οποία ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_R(-,E)$ στέλνει μονομορφισμούς σε επιμορφισμούς. Διαφορετικά, το αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν για κάθε ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g} N_2$ αριστερών R-προτύπων, η ακολουθία αβελιανών ομάδων $\mathsf{Hom}_R(N_2,E) \xrightarrow{g^\star} \mathsf{Hom}_R(N_1,E) \longrightarrow 0$ είναι ακριβής.

Πρόταση 1.5.19. *Ας είναι $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ μία οικογένεια αριστερών R-προτύπων. Τότε για κάθε αριστερό R-πρότυπο N, ισχύει ότι:*

1. $\mathsf{Hom}_R\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, N\Big) \;\cong\; \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(M_\alpha, N)$.

2. $\mathsf{Hom}_R\Big(N, \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\Big) \;\cong\; \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)$.

Επιπλέον, για κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο N, ισχύει ότι:

3. $\mathsf{Hom}_R\Big(N, \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\Big) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)$.

Απόδειξη. 1. Ας είναι N ένα αριστερό R-πρότυπο. Ορίζουμε:

$$\Phi\colon \mathsf{Hom}_R\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, N\Big) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(M_\alpha, N), \quad f \longmapsto (f\circ i_\alpha),$$

όπου $i_\alpha\colon M_\alpha \longrightarrow \oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι η κανονική έγκλειση για κάθε $\alpha\in\Delta$. Για κάθε $f,g \in \mathsf{Hom}_R\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha, N\Big)$ έχουμε:

$$\Phi(f+g) = ((f+g)\circ i_\alpha) = (f\circ i_\alpha + g\circ i_\alpha) = (f\circ i_\alpha) + (g\circ i_\alpha) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

Ως εκ τούτου ο Φ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Υποθέτουμε ότι $(f_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(M_\alpha, N)$, όπου κάθε $f_\alpha\colon M_\alpha \longrightarrow N$ για $\alpha\in\Delta$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Τότε από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $f\colon \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow N$, τέτοιος ώστε $f\circ i_\alpha = f_\alpha$ για κάθε $\alpha\in\Delta$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\Phi(f) = (f\circ i_\alpha) = (f_\alpha)$. Εφόσον η επιλογή της ακολουθίας $(f_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(M_\alpha, N)$ ήταν τυχαία, έπεται ότι ο Φ είναι «επί». Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο Φ είναι «1-1». Υποθέτουμε ότι $\Phi(f) = 0 = (0)$. Τότε $(f\circ i_\alpha) = (0)$ και κατ' επέκταση $f\circ i_\alpha = 0$, $\forall \alpha\in\Delta$. Έστω $x \in \oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$. Τότε $x = \sum_{\alpha\in\Delta} i_\alpha(x_\alpha)$. Έτσι, $f(x) = f(\sum_{\alpha\in\Delta} i_\alpha(x_\alpha)) = \sum_{\alpha\in\Delta} f(i_\alpha(x_\alpha)) = 0$. Ως εκ τούτου, $f = 0$. Συνεπώς, ο Φ είναι «1-1». Συνοψίζοντας ο Φ ως «1-1» και «επί» ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, είναι ένας ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

2. Θεωρούμε ένα αριστερό R-πρότυπο N, και ορίζουμε:

$$\Psi\colon \mathsf{Hom}_R\Big(N, \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\Big) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha), \quad g \longmapsto (\varpi_\alpha \circ g),$$

όπου $\varpi_\alpha\colon \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha$ είναι η κανονική προβολή για κάθε $\alpha\in\Delta$. Για κάθε $f,g \in \mathsf{Hom}_R\Big(N, \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\Big)$ έχουμε:

$$\Psi(f+g) = (\varpi_\alpha\circ(f+g)) = (\varpi_\alpha\circ f + \varpi_\alpha\circ g) = (\varpi_\alpha\circ f) + (\varpi_\alpha\circ g) = \Psi(f) + \Psi(g).$$

Ως εκ τούτου ο Ψ είναι ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων. Υποθέτουμε ότι $(g_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)$, όπου κάθε $g_\alpha\colon N \longrightarrow M_\alpha$ για $\alpha\in\Delta$ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Τότε από την καθολική ιδιότητα του ευθέος γινομένου, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon N \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$, τέτοιος ώστε $\varpi_\alpha \circ g = g_\alpha$, $\forall \alpha\in\Delta$. Συνεπώς, παίρνουμε ότι $\Psi(g) = (\varpi_\alpha\circ g) = (g_\alpha)$. Εφόσον η επιλογή της ακολουθίας $(g_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)$ ήταν τυχαία, έπεται ότι ο Ψ είναι «επί». Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο Ψ είναι «1-1». Υποθέτουμε ότι $\Psi(f) = 0 = (0)$. Τότε $(\varpi_\alpha \circ f) = (0)$ και κατ' επέκταση $\varpi_\alpha \circ f = 0$, $\forall \alpha \in \Delta$. Έτσι, $\varpi_\alpha(f(x)) = 0$, $\forall x \in N$ και $\forall \alpha \in \Delta$. Όμως, $f(x) = (\psi_\beta) \in \prod_{\beta\in\Delta} M_\beta$. Άρα, $\varpi_\alpha(f(x)) = \varpi_\alpha((\psi_\beta)) = 0, \forall \alpha \in \Delta$. Έτσι,

$$\varpi_\alpha((\psi_\beta)) = \begin{cases} 0 & , \text{ εάν } \alpha \neq \beta \\ \psi_\beta & , \text{ εάν } \alpha = \beta \end{cases}$$

Συνεπώς, $\psi_\beta = 0$, $\forall \beta \in \Delta$. Έτσι, $f(x) = (\psi_\beta) = (0) = 0, \forall x \in N$ και κατ' επέκταση $f = 0$. Ως εκ τούτου ο Ψ είναι «1-1». Συνοψίζοντας ο Ψ ως «1-1» και «επί» ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, είναι ένας ισομορφισμός αβελιανών ομάδων.

3. Ας είναι N ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R-πρότυπο. Τότε η οικογένεια ομομορφισμών $M_\alpha \longrightarrow \oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ μεταξύ R-προτύπων, επάγει μια οικογένεια ομομορφισμών

$$\mathsf{Hom}_R(N, i_\alpha)\colon \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N, \oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha)$$

μεταξύ αβελιανών ομάδων. Από την καθολική ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος $\{j_\alpha\colon \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha) \longrightarrow \oplus_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$ της οικογένειας αβελιανών ομάδων $\{\mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$, έπεται ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$P\colon \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R\Big(N, \bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\Big)$$

τέτοιος ώστε: $P \circ j_\alpha = \mathsf{Hom}_R(N, i_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Delta$. Κατά προφανή τρόπο ο ομομορφισμός P ορίζεται ως εξής: Για τυχόν στοιχείο $\sum_{a\in\Delta} j_a(f_a) = (f_a)_{a\in\Delta} \in \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)$, όπου $f_a = 0$, $\forall a \in \Delta$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών, έχουμε:

$$P(\sum_{a\in\Delta} j_a(f_a))\colon N \longrightarrow \bigoplus_{a\in\Delta} M_a, \quad P(\sum_{a\in\Delta} j_a(f_a))(x) = \sum_{a\in\Delta} i_a(f_a(x)).$$

Ο ομομορφισμός P είναι πάντα μονομορφισμός αβελιανών ομάδων. Πράγματι, υποθέτουμε ότι $P(\sum_{a\in\Delta} j_a(f_a)) = 0$. Τότε για κάθε $x \in N$, θα έχουμε $P(\sum_{a\in\Delta} j_a(f_a))(x) = 0$ και επομένως $\sum_{a\in\Delta} i_a(f_a(x)) = 0$. Προφανώς τότε, $\forall a \in \Delta$: $f_a(x) = 0$, $\forall x \in N$. Αυτό σημαίνει ότι $f_a = 0$, $\forall a \in \Delta$ και επομένως $\sum_{a\in\Delta} j_a(f_a) = 0$. Ως εκ τούτου ο ομομορφισμός P είναι μονομορφισμός. Θα δείξουμε ότι εάν το R-πρότυπο N είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε ο ομομορφισμός P είναι επιμορφισμός. Έστω $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ένα σύνολο γεννητόρων του N. Τότε θα έχουμε $N = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$. Έστω $f\colon N \longrightarrow \oplus_{a\in\Delta} M_a$ ένας ομομορφισμός προτύπων. Τότε προφανώς, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$ το στοιχείο $f(x_i) \in \oplus_{a\in\Gamma_i} M_a$, όπου $\Gamma_i \subseteq \Delta$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Δ. Τότε το σύνολο $\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma_i$ είναι πεπερασμένο και επιπλέον θα έχουμε ότι $f(x_i) \in \oplus_{a\in\Gamma} M_a$. Επομένως χρησιμοποιώντας ότι η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων και ότι το σύνολο $\{x_1, \cdots, x_n\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του N, έπεται ότι $f(N) \subseteq \oplus_{a\in\Gamma} M_a$. Αυτό σημαίνει ότι ο ομομορφισμός f αναλύεται ως $f = \iota_\Gamma \circ g$, όπου $\iota_\Gamma\colon \oplus_{a\in\Gamma} M_a \longrightarrow \oplus_{a\in\Delta} M_a$ είναι η κανονική έγκλειση και $g(x) = f(x)$, $\forall x \in N$. Ορίζουμε ομομορφισμούς αριστερών R-προτύπων $f_a\colon N \longrightarrow M_a$, $\forall a \in \Delta$ ως εξής: Εάν $a \in \Delta\backslash\Gamma$, θέτουμε $f_a = 0$ και εάν $a \in \Gamma$, τότε $f_a = \pi_a \circ g$, όπου $\pi_a\colon \oplus_{a\in\Delta} M_a \longrightarrow M_a$. Έτσι, αποκτούμε ένα στοιχείο $(f_a)_{a\in\Delta} \in \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N, M_\alpha)$ και προφανώς εκ κατασκευής θα έχουμε $P(\sum_{a\in\Delta} j_a(f_a)) = f$. Επομένως, ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων P είναι επιμορφισμός. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων P είναι ισομορφισμός. ■

Παρατήρηση 1.5.20. 1. Ο ομομορφισμός P στο τρίτο σκέλος της Πρότασης 1.5.19 μπορεί να είναι μονομορφισμός χωρίς την προϋπόθεση το πρότυπο N να είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

2. Ας είναι $\{f_\alpha \colon M_\alpha \longrightarrow N_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ μια οικογένεια ομομορφισμών αριστερών R-προτύπων. Τότε επάγονται οι ακόλουθοι ομομορφισμοί αριστερών R-προτύπων:

$$\prod\nolimits_{\alpha\in\Delta} f_\alpha \colon \prod\nolimits_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow \prod\nolimits_{\alpha\in\Delta} N_\alpha, \quad (x_\alpha) \longmapsto (f_\alpha(x_\alpha)),$$

και

$$\bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta} f_\alpha \colon \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta} M_\alpha \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Delta} N_\alpha, \quad (x_\alpha) \longmapsto (f_\alpha(x_\alpha)).$$

Εύκολα προκύπτει ότι, εάν οι f_α είναι μονομορφισμοί (αντίστοιχα επιμορφισμοί, ισομορφισμοί) τότε οι $\prod_{\alpha\in\Delta} f_\alpha$ και $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} f_\alpha$ είναι εξίσου μονομορφισμοί (αντίστοιχα επιμορφισμοί, ισομορφισμοί).

Πρόταση 1.5.21. *Ας είναι $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ μία οικογένεια αριστερών R-προτύπων. Το ευθύ γινόμενο $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι ενέσιμο αν και μόνο αν κάθε M_α, για $\alpha \in \Delta$, είναι ενέσιμο.*

Απόδειξη. Ας είναι $0 \longrightarrow N_1 \stackrel{g}{\longrightarrow} N_2$ μια ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Για κάθε $\alpha \in \Delta$, θεωρούμε τον επαγόμενο ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$g_\alpha^\star \colon \ \mathsf{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N_1, M_\alpha), \quad f \longmapsto f \circ g_\alpha.$$

Εάν το αριστερό R-πρότυπο $\prod_{\alpha\in\Delta} M_a$ είναι ενέσιμο, τότε η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\mathsf{Hom}_R(N_2, \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \stackrel{g^\star}{\longrightarrow} \mathsf{Hom}_R(N_1, \prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \longrightarrow 0, \tag{1.3}$$

είναι ακριβής. Η Πρόταση 1.5.19 μας εξασφαλίζει ότι η ακριβής ακολουθία (1.3) είναι ισόμορφη με την ακολουθία

$$\prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \stackrel{\prod g_\alpha^\star}{\longrightarrow} \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Ως εκ τούτου, έπεται ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων (1.4) είναι εξίσου ακριβής. Έτσι, θεωρώντας για κάθε $\alpha \in \Delta$ το μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \arrow[r, "\prod g_\alpha^\star"] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \prod_{\alpha\in\Delta} \mathsf{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_\alpha"] & 0 \\
\mathsf{Hom}_R(N_2, M_\alpha) \arrow[r, "g_\alpha^\star"'] & \mathsf{Hom}_R(N_2, M_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

όπου π_α και π'_α είναι οι κανονικές προβολές, λαμβάνουμε ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $g_\alpha^\star$ είναι επιμορφισμός για κάθε $\alpha \in \Delta$. Συνεπώς, τα αριστερά R-πρότυπα M_α είναι ενέσιμα για κάθε $\alpha \in \Delta$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα M_α είναι ενέσιμα, $\forall \alpha \in \Delta$. Τότε ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $g_\alpha^\star$ είναι επιμορφισμός, $\forall \alpha \in \Delta$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το αποτέλεσμα αυτό καθώς και το δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 1.5.20, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία αβελιανών ομάδων (1.4) είναι ακριβής. Επομένως, η ακολουθία αβελιανών ομάδων (1.3) είναι εξίσου ακριβής, ως ισόμορφη με την ακριβή ακολουθία (1.4). Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι το ευθύ γινόμενο $\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο. ■

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.5.21 είναι το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 1.5.22. *1. Ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα από ενέσιμα αριστερά R-πρότυπα είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.*

2. Ένας ευθύς προσθετέος ενός ενέσιμου αριστερού R-προτύπου είναι ενέσιμο αριστερό R-πρότυπο.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος του Πορίσματος 1.5.22 είναι λογικό να διερωτηθεί κανείς εάν ένα άπειρο ευθύ άθροισμα από ενέσιμα R-πρότυπα είναι εξίσου ενέσιμο. Την απάντηση δίνει η ακόλουθη Παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.5.23. Ένα άπειρο ευθύ άθροισμα ενέσιμων προτύπων υπεράνω ενός τυχόντος δακτυλίου *δεν* είναι απαραίτητα ενέσιμο πρότυπο. Ωστόσο, εάν πρόκειται για δακτύλιο της Noether τότε κάθε ευθύ άθροισμα ενέσιμων προτύπων είναι ενέσιμο πρότυπο. Ειδικότερα, η τελευταία ιδιότητα αποτελεί κριτήριο τέτοιο ώστε να χαρακτηριστεί ένας δακτύλιος ως δακτύλιος της Noether, βλέπε [33].

Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας στα ενέσιμα πρότυπα με την ακόλουθη Πρόταση η οποία αποτελεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε ένα πρότυπο να είναι ενέσιμο.

Πρόταση 1.5.24. *Ένα αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο αν και μόνο αν κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ διασπάται.*

Απόδειξη. Ας είναι E ένα αριστερό R-πρότυπο το οποίο είναι ενέσιμο και

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow 0, \tag{1.5}$$

μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων. Τότε υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon B \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $g \circ f = 1_E$. Ως εκ τούτου, η σύντομη ακριβής ακολουθία (1.5) ως αριστερά διασπάσιμη είναι διασπάσιμη. Αντίστροφα, υποθέτουμε τώρα ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία της μορφής (1.5) διασπάται. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι κάθε πρότυπο εμφυτεύεται σε ένα ενέσιμο πρότυπο, υπάρχει μια σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

όπου H είναι ενέσιμο. Τότε εξ' υποθέσεως η τελευταία ακολουθία είναι διασπάσιμη, και κατ' επέκταση το E είναι ευθύς προσθετέος του H. Έτσι, χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος του Πορίσματος 1.5.22 συνάγεται ότι το αριστερό R-πρότυπο E είναι ενέσιμο. ■

Εν συνεχεία επικεντρωνόμαστε στην μελέτη των προβολικών αριστερών R-προτύπων και των ιδιοτήτων αυτών. Η κλάση των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι δυϊκή της κλάσης των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων. Ως εκ τούτου οι ιδιότητες των προβολικών αριστερών R-προτύπων προκύπτουν ως δυϊκές αυτών των ενέσιμων αριστερών R-προτύπων.

Ορισμός 1.5.25. *Ένα αριστερό R-πρότυπο P καλείται* **προβολικό (projective)** *εάν για κάθε επιμορφισμό αριστερών R-προτύπων $\psi\colon A \longrightarrow B$ και κάθε ομομορφισμό αριστερών R-προτύπων $f\colon P \longrightarrow B$, υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon P \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\psi"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Η ακόλουθη Πρόταση υποδηλώνει ότι η κλάση όλων των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι κλειστή στους ισομορφισμούς.

Πρόταση 1.5.26. *Ας είναι M και N δύο αριστερά R-πρότυπα τέτοια ώστε το M να είναι ισόμορφο με το N. Τότε το πρότυπο M είναι προβολικό αν και μόνο αν το πρότυπο N είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.5.3. ■

Πρόταση 1.5.27. *Ας είναι P ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο και $f\colon N \longrightarrow P$ ένας επιμορφισμός αριστερών R-προτύπων. Τότε το P είναι ευθύς προσθετέος του N.*

Απόδειξη. Ας είναι P ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο και $f\colon N \longrightarrow P$ ένας επιμορφισμός αριστερών R-προτύπων. Τότε υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon P \longrightarrow N$, τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ N \arrow[r, "f"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου, ο επιμορφισμός f είναι διασπάσιμος, και κατ' επέκταση υπάρχει κάποιο αριστερό R-πρότυπο K τέτοιο ώστε $N \cong K \oplus P$. Έτσι, το P είναι ένας ευθύς προσθετέος του N. ■

Ευθύς αμέσως παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα προβολικών R-προτύπων.

Παράδειγμα 1.5.28. 1. Το μηδενικό πρότυπο είναι κατά τετριμμένο τρόπο προβολικό R-πρότυπο.

2. Κάθε ελεύθερο πρότυπο είναι προβολικό πρότυπο, (βλέπε Πρόταση 1.5.32).

Πρόταση 1.5.29. *Ας είναι $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ μία οικογένεια αριστερών R-προτύπων. Το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ είναι προβολικό αν και μόνο αν κάθε M_α για $\alpha \in \Delta$, είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.5.21. ■

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.5.29 είναι το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 1.5.30. *Ένας ευθύς προσθετέος ενός προβολικού αριστερού R-προτύπου είναι προβολικό αριστερό R-πρότυπο.*

Λήμμα 1.5.31. *1. Ο δακτύλιος R ως αριστερό R-πρότυπο είναι προβολικό.*

2. Ο δακτύλιος R ως δεξιό R-πρότυπο είναι προβολικό.

Απόδειξη. 1. Ας είναι $h\colon N_2 \longrightarrow N_1$ ένας επιμορφισμός αριστερών R-προτύπων και $f\colon R \longrightarrow N_1$ ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Για να αποδείξουμε ότι ο δακτύλιος R είναι προβολικό ως αριστερό R-πρότυπο αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων $g\colon R \longrightarrow N_2$ τέτοιος ώστε $h \circ g = f$. Εάν $f(1_R) = y \in N_1$ τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο h είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $x \in N_2$ με $h(x) = y$. Ως εκ τούτου ορίζουμε

$$g\colon R \longrightarrow N_2, \quad r \longmapsto rx.$$

Τότε εύκολα προκύπτει ότι ο g είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων και ότι $f = h \circ g$.

2. Ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική διαδικασία με αυτή του πρώτου σκέλους προκύπτει ότι ο δακτύλιος R είναι προβολικό ως δεξιό R-πρότυπο. ■

Πρόταση 1.5.32. *Κάθε ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο είναι προβολικό.*

Απόδειξη. Αν F είναι ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο. Τότε υπάρχει κάποιο σύνολο I έτσι ώστε $R^{(I)} \cong F$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 1.5.31 ο δακτύλιος R ως αριστερό R-πρότυπο είναι προβολικό. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 1.5.29 προκύπτει ότι το $R^{(I)}$ είναι προβολικό. Όμως σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.26 η κλάση των προβολικών αριστερών R-προτύπων είναι κλειστή στους ισομορφισμούς. Ως εκ τούτου το F είναι προβολικό. ∎

Το αντίστροφο της Πρότασης 1.5.32 δεν ισχύει όπως υποδηλώνει το ακόλουθο Παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.5.33. Το $\mathbb{Z}_2$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}_6$-πρότυπο, αλλά *δεν* είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}_6$-πρότυπο. Πράγματι, θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$ ως $\mathbb{Z}_6$-πρότυπο. Τότε ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_6$ είναι προβολικό ως $\mathbb{Z}_6$-πρότυπο και $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. Συνεπώς σύμφωνα με το Πόρισμα 1.5.30 το $\mathbb{Z}_2$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}_6$-πρότυπο ως ευθύς προσθετέος του προβολικού $\mathbb{Z}_6$-προτύπου $\mathbb{Z}_6$. Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{Z}_2$ είναι ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}_6$-πρότυπο. Στην περίπτωση αυτή το $\mathbb{Z}_2$ θα είχε τουλάχιστον 6 στοιχεία, πράγμα το οποίο είναι αδύνατο.

Σχόλιο 1.5.34. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 1.5.32 καθώς και το Παράδειγμα 1.5.33 συμπεραίνουμε ότι η κλάση των ελεύθερων R-προτύπων είναι γνήσια υποκλάση της κλάσης των προβολικών R-προτύπων. Ωστόσο, υπάρχουν δακτύλιοι όπως για παράδειγμα οι τοπικοί και οι περιοχές κυρίων ιδεωδών υπεράνω των οποίων η κλάση των ελεύθερων R-προτύπων συμπίπτει με την κλάση των προβολικών R-προτύπων.

Πρόταση 1.5.35. *Κάθε αριστερό R-πρότυπο M είναι ομομορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου. Επιπροσθέτως, εάν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο τότε το ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο μπορεί να επιλεχθεί έτσι ώστε να είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. Ας είναι M ένα αριστερό R-πρότυπο και $\{x_i\}_{i\in I}$ ένα σύνολο γεννητόρων του M. Τότε το $R^{(I)}$ είναι ένα ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi\colon R^{(I)} \longrightarrow M,$$

ως $\phi((r_i)) = \sum_{i\in I} r_i x_i$, για κάθε $(r_i) \in R^{(I)}$. Για κάθε $(r_i), (r_i') \in R^{(I)}$ και για κάθε $r \in R$, λαμβάνουμε τις ακόλουθες ισότητες:

$$\begin{aligned} \phi((r_i) + (r_i')) &= \phi((r_i + r_i')) = \sum_{i\in I}(r_i + r_i')x_i \\ &= \sum_{i\in I} r_i x_i + \sum_{i\in I} r_i' x_i \\ &= \phi((r_i)) + \phi((r_i')) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \phi(r(r_i)) &= \phi((rr_i)) = \sum_{i\in I}(rr_i)x_i \\ &= r\Big(\sum_{i\in I} r_i x_i\Big) = r\phi((r_i)) \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η απεικόνιση ϕ είναι ένας ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Υποθέτουμε ότι $x \in M$, τότε το x μπορεί να γραφεί ως $x = \sum_{i\in I} r_i x_i$ όπου $r_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Άρα, $(r_i) \in R^{(I)}$ και κατ' επέκταση $\phi((r_i)) = \sum_{i\in I} r_i x_i$. Επομένως, ο ϕ είναι ένας επιμορφισμός αριστερών R-προτύπων.

Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Τότε το σύνολο I είναι πεπερασμένο και ως εκ τούτου το ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο $R^{(I)}$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο. ∎

Ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.5.35 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 1.5.36. *Για κάθε αριστερό R-πρότυπο M, υπάρχει μια ακριβής ακολουθία από αριστερά R-πρότυπα*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \tag{1.6}$$

όπου κάθε F_i για $i \geqslant 0$, είναι ελεύθερο.

Σχόλιο 1.5.37. Μια ακριβής ακολουθία όπως η (1.6), καλείται μια **ελεύθερη ανάλυση (free resolution)** του αριστερού R-προτύπου M.

Η ακόλουθη Πρόταση δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα αριστερό R-πρότυπο να είναι προβολικό.

Πρόταση 1.5.38. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό.*
2. *Κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

   διασπάται.

3. *Το αριστερό R-πρότυπο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

- $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: Υποθέτουμε ότι το P είναι ένα προβολικό αριστερό R-πρότυπο. Ας είναι 1_P ο ταυτοτικός μορφισμός του P ο οποίος είναι ένας ομομορφισμός. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του προβολικού προτύπου προκύπτει ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία που τελειώνει σε P διασπάται.
- $\underline{(2) \Rightarrow (3)}$: Υποθέτουμε ότι κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

  διασπάται. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 1.5.35. προκύπτει μια σύντομη ακριβή ακολουθία αριστερών R-προτύπων

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

  στην οποία το αριστερό R-πρότυπο F ελεύθερο. Τότε εξ' υποθέσεως έπεται ότι η προηγούμενη σύντομη ακριβής ακολουθία είναι διασπάσιμη. Ως εκ τούτου το P είναι ευθύς προσθετέος του ελεύθερου αριστερού R-προτύπου F.
- $\underline{(3) \Rightarrow (1)}$: Υποθέτουμε ότι το αριστερό R-πρότυπο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 1.5.32 έπεται ότι το αριστερό R-πρότυπο P είναι ευθύς προσθετέος ενός προβολικού αριστερού R-προτύπου. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το Πόρισμα 1.5.30 το αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό. ■

Πρόταση 1.5.39. *Κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού αριστερού R-προτύπου.*

Απόδειξη. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός ελεύθερου αριστερού R-προτύπου και ότι κάθε ελεύθερο αριστερό R-πρότυπο είναι προβολικό είναι άμεσο ότι κάθε αριστερό R-πρότυπο είναι η ομομορφική εικόνα ενός προβολικού αριστερού R-προτύπου. ■

Προηγουμένως είδαμε ότι μια ιδιότητα η οποία χαρακτηρίζει τα ενέσιμα πρότυπα είναι ότι καθιστούν τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή Hom ακριβή. Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε ότι τα προβολικά πρότυπα είναι ακριβώς τα πρότυπα τα οποία καθιστούν τον συναλλοίωτο συναρτητή Hom ακριβή.

Πρόταση 1.5.40. *Ένα αριστερό R-πρότυπο P είναι προβολικό αν και μόνο αν ο συναλλοίωτος συναρτητής* $\mathsf{Hom}_R(P,-)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ *είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 1.5.17. ■

Κεφάλαιο 2

Τοπικοποίηση Κατηγοριών

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την τοπικοποίηση μιας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ εφοδιασμένης με μια κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύουμε, υπό αρκούντως γενικές συνθήκες, την ύπαρξη και μοναδικότητα της τοπικοποιήσης της $\mathcal{C}$ όταν η $\mathcal{W}$ είναι μια τυχαία κλάση μορφισμών της. Εν συνεχεία επικεντρωνόμαστε σε ειδικούς τύπους κλάσεων μορφισμών καθώς για αυτές τις κλάσεις όπως θα δούμε μπορούμε να έχουμε μια πιο «καλή» περιγραφή των μορφισμών και αποδεικνύουμε την ύπαρξη της τοπικοποίησης της $\mathcal{C}$ στην ειδική αυτή περίπτωση. Επιπλέον, μελετάμε την τοπικοποίηση της δυϊκής κατηγορίας $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ της $\mathcal{C}$ και ολοκληρώνουμε με μια αναφορά στην τοπικοποιήση μιας υποκατηγορίας της $\mathcal{C}$.

Σύμβαση: Στο παρόν Κεφάλαιο, για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ και κάθε κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ στην $\mathcal{C}$, μελετούμε την τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$, η οποία είναι μια κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένη με έναν συναρτητή $P\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\forall w \in \mathcal{W}$, ο μορφισμός $P(w)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

2. Αν $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ είναι ένας συναρτητής έτσι ώστε ο μορφισμός $F(w)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{D}$ για κάθε $w \in \mathcal{W}$, τότε υπάρχει μοναδικός, με ακρίβεια ισομορφισμού συναρτητών, συναρτητής $F^*\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}$, έτσι ώστε: $F^* \circ P = F$.

Για συνολοθεωρητικούς λόγους, η τοπικοποιημένη κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ δεν υπάρχει πάντα στο συνολοθεωρητικό σύμπαν στο οποίο υπάρχει η $\mathcal{C}$. Η τοπικοποιημένη κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ υπάρχει σε κάποιες σημαντικές περιπτώσεις, για παράδειγμα όταν η $\mathcal{C}$ είναι μικρή, ή όταν η $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία μοντέλο και $\mathcal{W}$ είναι η κλάση των ασθενών ισοδυναμιών.

Στην ανάπτυξη του παρόντος Κεφαλαίου θα μας απασχολήσουν οι βασικές ιδιότητες μιας τοπικοποιημένης κατηγορίας $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ η οποία θα υποθέτουμε ότι υπάρχει πάντα στο σύμπαν στο οποίο υπάρχει η $\mathcal{C}$.

2.1 Τοπικοποίηση μιας Τυχαίας Κατηγορίας

Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια τυχαία κλάση μορφισμών της. Ο σκοπός της τοπικοποίησης της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι η κατασκευή μιας κατηγορίας $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ τέτοιας ώστε οι μορφισμοί οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ να είναι αντιστρέψιμοι. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ γίνονται ισομορφισμοί στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Η τοπικοποίηση μιας κατηγορίας αποτελεί γενίκευση της τοπικοποίησης ενός μεταθετικού δακτυλίου. Σε γενικές γραμμές η τοπικοποίηση καθιστά ισόμορφα αντικείμενα τα οποία εξ' αρχής δεν ήταν. Στη θεωρία Ομοτοπίας για παράδειγμα υπάρχουν πολλά παραδείγματα μορφισμών οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι με ακρίβεια ομοτοπίας, αλλά όχι αντιστρέψιμοι. Ιδιαίτερα υπάρχει μεγάλη κλάση από τοπολογικών χώρων οι οποίοι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι αλλά όχι ομοιομορφικοί. Η τοπικοποίηση μιας κατηγορίας αναφέρεται επίσης ως λογισμός των κλασμάτων (calculus of fractions).

Ορισμός 2.1.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της. Η* **τοπικοποίηση (localization)** *της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$ είναι μια κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένη με έναν συναρτητή $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(LC1) *Για κάθε μορφισμό $w \in \mathcal{W}$, ο μορφισμός $Q(w)$ είναι ένας ισομορφισμός.*

(LC2) *Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}'$ και συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιον ώστε για κάθε μορφισμό $w \in \mathcal{W}$, ο μορφισμός $F(w)$ να είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $G \circ Q = F$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[dl, "G"] \arrow[dl, phantom, "\exists!"', near start] \\
\mathcal{C}' &
\end{tikzcd}
$$

Εν συνεχεία παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα τοπικοποίησης.

Παράδειγμα 2.1.2.

1. Ας είναι $\mathcal{W}$ ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο ενός μεταθετικού δακτυλίου R με μονάδα. Η σχέση

$$(r, w) \backsim (r', w') \text{ αν και μόνο αν υπάρχει στοιχείο } u \in \mathcal{W} \text{ τέτοιο ώστε } urw' = ur'w$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $R \times W$. Συμβολίζουμε με $R\mathcal{W}^{-1}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των στοιχείων $(r, w) \in R \times W$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας «$\backsim$». Το σύνολο $R\mathcal{W}^{-1}$ εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού αποτελεί έναν μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα. Επιπλέον υπάρχει ομομορφισμός δακτυλίων $\phi\colon R \longrightarrow R\mathcal{W}^{-1}$ ο οποίος ορίζεται ως $\phi(r) = r/1$, τέτοιος ώστε για κάθε στοιχείο w του $\mathcal{W}$ το $\phi(w)$ να είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου $R\mathcal{W}^{-1}$. Ο δακτύλιος $R\mathcal{W}^{-1}$ εφοδιασμένος με τον ομομορφισμό δακτυλιών $\phi\colon R \longrightarrow R\mathcal{W}^{-1}$ καλείται **τοπικοποίηση (localization)** του δακτυλιού R στο $\mathcal{W}$. Η τοπικοποίηση ενός μεταθετικού δακτυλίου, της οποίας αποτελεί γενίκευση η τοπικοποίηση μιας κατηγορίας αποτελεί κλασικό παράδειγμα τοπικοποιήσης.

Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι $R = \mathbb{Z}$ είναι ο δακτύλιος των ακεραίων και $\mathcal{W} = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Στο σύνολο $R \times W$ ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $(r, w) \backsim (r', w')$ αν και μόνο αν $rw' = r'w$. Συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας (r, w) με $\frac{r}{w}$. Τότε ο δακτύλιος $R[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού οι οποίες ορίζονται αντίστοιχα ως

$$\frac{r}{w} + \frac{r'}{w'} := \frac{rw' + r'w}{ww'}$$

και

$$\frac{r}{w} \cdot \frac{r'}{w'} := \frac{rr'}{ww'}$$

συμπίπτει με το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών.

2. Ας είναι R τυχόν δακτύλιος και $\mathcal{W} = \{1\}$. Τότε ισχύει $R\mathcal{W}^{-1} \cong R$.

3. Ας είναι I ένα πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R και $\mathcal{W} = R\backslash I$ ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Στην περίπτωση αυτή ο δακτύλιος $R\mathcal{W}^{-1}$ καλείται **τοπικοποίηση του**

R **στο πρώτο ιδεώδες** I **(localization of** R **at the prime ideal** I**)** και συμβολίζεται με R_I. Ειδικότερα, ας είναι $R = \mathbb{Z}$ και $I = 3\mathbb{Z}$. Τότε έχουμε:

$$\mathcal{W} = \mathbb{Z} \backslash 3\mathbb{Z} = \{3k+1, 3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

και ως εκ τούτου

$$R\mathcal{W}^{-1} = \mathbb{Z}_{3\mathbb{Z}} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 3 \nmid b\right\}$$

4. Ας είναι r ένα σταθερό στοιχείο ενός μεταθετικού δακτυλίου με μονάδα R και $\mathcal{W} = \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Στην περίπτωση αυτή ο δακτύλιος $R\mathcal{W}^{-1}$ καλείται **τοπικοποίηση του** R **στο στοιχείο** r **(localization of** R **at the element** r**)** και συμβολίζεται με R_r. Ειδικότερα, ας είναι $R = \mathbb{Z}$. Επιλέγουμε έναν πρώτο αριθμό $p \in \mathbb{Z}$. Τότε προκύπτει ότι:
$$R\mathcal{W}^{-1} = \left\{\frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

5. Ας είναι Ab η κατηγορία των αβελιανών ομάδων και των ομομορφισμών αβελιανών ομάδων και $\mathcal{W}$ η κλάση των μορφισμών $f\colon A \longrightarrow B$ τέτοιων ώστε ο πυρήνας $\mathsf{Ker}(f)$ και ο συμπυρήνας $\mathsf{Coker}(f)$ να είναι ομάδες στρέψης. Για κάθε κατηγορία $\mathcal{D}$ η οποία έχει ως αντικείμενα τις αβελιανές ομάδες αλλά ως μορφισμούς $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\mathbb{Q} \otimes A, \mathbb{Q} \otimes B)$ ορίζουμε έναν συναρτητή $F\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathcal{D}$ ο οποίος στέλνει μια αβελιανή ομάδα A στον εαυτό της και έναν ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $f\colon A \longrightarrow B$ στον μορφισμό $\mathbb{Q} \otimes f\colon \mathbb{Q} \otimes A \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes B$. Το ζεύγος $(\mathcal{D}, F)$ είναι η τοπικοποίηση της κατηγορίας Ab ως προς την κλάση $\mathcal{W}$.

Χάρις στην ακόλουθη πρόταση μπορούμε να μιλάμε για «την» τοπικοποίηση $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ της $\mathcal{C}$.

Πρόταση 2.1.3. *Η τοπικοποίηση $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδική μέχρις ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Ας είναι $(\mathcal{D}, Q)$ και $(\mathcal{D}', Q')$ τοπικοποιήσεις της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$. Τότε σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα που πληρούν οι συναρτητές $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ και $Q'\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}'$ για κάθε κατηγορία $\mathcal{D}'$ και $\mathcal{D}$ αντίστοιχα και συναρτητές $Q'\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}'$ και $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ τέτοιους ώστε για κάθε μορφισμό $w \in W$, οι μορφισμοί $Q'(w)$ και $Q(w)$ να είναι ισομορφισμοι υπάρχουν μοναδικοί συναρτητές $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ και $H\colon \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ αντίστοιχα τέτοιοι ώστε $Q' = G \circ Q$ και $Q = H \circ Q'$ όπως παριστάνονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "Q'"'] & \mathcal{D} \arrow[dl, shift left, "G"] \\
\mathcal{D}' \arrow[ur, shift left, "H"] &
\end{tikzcd}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $Q' = (G \circ H) \circ Q'$ και $Q = (H \circ G) \circ Q$. Επιπλέον, ισχύει ότι $Q' = \mathsf{Id}_{\mathcal{D}'} \circ Q'$ και $Q = \mathsf{Id}_{\mathcal{D}} \circ Q$. Έτσι, λόγω της μοναδικότητας των συναρτητών $G \circ H\colon \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ και $H \circ G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ έπεται ότι $G \circ H = \mathsf{Id}_{\mathcal{D}'}$ και $H \circ G = \mathsf{Id}_{\mathcal{D}}$. Ως εκ τούτου ο συναρτητής $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}'$ με αντίστροφο $G^{-1} = H\colon \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$. Έτσι, η τοπικοποίηση $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$ είναι μοναδική μέχρις ισομορφισμού. ∎

Ο ακόλουθος ορισμός είναι ισοδύναμος του Ορισμού 2.1.1.

Ορισμός 2.1.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της. Η* **τοπικοποίηση (localization)** *της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$ είναι μια κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένη με έναν συναρτητή $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(LC1) *Για κάθε μορφισμό $w \in \mathcal{W}$, ο μορφισμός $Q(w)$ είναι ένας ισομορφισμός.*

(LC2) *Για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}'$ και συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιον ώστε για κάθε μορφισμό $w \in \mathcal{W}$, ο μορφισμός $F(w)$ να είναι ένας ισομορφισμός, υπάρχει ένας συναρτητής $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $G \circ Q \backsimeq F$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[dl, "G"] \\ \mathcal{C}' & \end{tikzcd}$$

(LC3) *Εάν G_1, G_2 είναι αντικείμενα της κατηγορίας $Fun(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}], \mathcal{C}')$ τότε η φυσική απεικόνιση*

$$\mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}],\mathcal{C}')}(G_1, G_2) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{C}')}(G_1 \circ Q, G_2 \circ Q)$$

είναι «1-1» και «επί».

Παρατήρηση 2.1.5. Ο συναρτητής $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ορίζει έναν συναρτητή

$$- \circ Q\colon Fun(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}], \mathcal{C}') \longrightarrow Fun(\mathcal{C}, \mathcal{C}'), \quad G \longmapsto G \circ Q$$

ο οποίος σύμφωνα με την τρίτη συνθήκη του Ορισμού 2.1.4 είναι πλήρης και πιστός.

Πρόταση 2.1.6. *Ο συναρτητής $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ ο οποίος πληροί τη δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 2.1.4 είναι μοναδικός με ακρίβεια μοναδικού ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Ας είναι $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής τέτοιος ώστε $G \circ Q \backsimeq F$. Υποθέτουμε ότι $G'\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας άλλος συναρτητής τέτοιος ώστε $G' \circ Q \backsimeq F$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\circ Q$ έπεται ότι $-\circ Q(G) \backsimeq F$ και $-\circ Q(G') \backsimeq F$. Ας είναι $\theta_0\colon F \longrightarrow -\circ Q(G)$ και $\theta_1\colon F \longrightarrow -\circ Q(G')$ ισομορφισμοί των συναρτητών F και $-\circ Q(G)$ και F και $-\circ Q(G')$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1.5 ο συναρτητής $-\circ Q$ είναι πλήρης και πιστός. Έτσι, από το Λήμμα 1.2.40 έπεται ότι υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός συναρτητών $\theta\colon G \longrightarrow G'$ τέτοιος ώστε $\theta_0 = (-\circ Q \circ \theta) \circ \theta_1$. Επομένως, ο συναρτητής $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ ο οποίος πληροί την δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 2.1.4 είναι μοναδικός με ακρίβεια μοναδικού ισομορφισμού. ■

Λήμμα 2.1.7. *Ας είναι $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ τρεις κατηγορίες και $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $Q'\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ δύο συναρτητές μεταξύ αυτών. Εάν για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}'$ υπάρχει αντικείμενο Y της $\mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $w\colon X \longrightarrow Q(Y)$ ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:*

(a) *Ο μορφισμός $G(w)$ είναι ένας ισομορφισμός.*

(b) *Για κάθε αντικείμενο Y' της $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό $t\colon X \longrightarrow Q(Y')$ υπάρχει αντικείμενο Y'' της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $w'\colon Y' \longrightarrow Y''$ και $t'\colon Y \longrightarrow Y''$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός $G(Q(w'))$ να είναι ένας ισομορφισμός και το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικο:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[d, "t"'] & Q(Y) \arrow[d, "Q(t')"] \\ Q(Y') \arrow[r, "Q(w')"'] & Q(Y'') \end{tikzcd} .$$

Τότε η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')}(F, G) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{C}'')}(F \circ Q, G \circ Q)$$

η οποία ορίζεται κατά φυσικό τρόπο είναι «1-1» και «επί» για κάθε συναρτητή $F\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi_{F,G}\colon \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')}(F,G) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{C}'')}(F\circ Q, G\circ Q), \quad \theta \longmapsto \theta(Q)$$

- Η απεικόνιση $\Phi_{F,G}$ είναι «καλά ορισμένη».

  Ας είναι $\theta_1\colon F \longrightarrow G$ και $\theta_2\colon F \longrightarrow G$ φυσικοί μετασχηματισμοί τέτοιοι ώστε $\theta_1 = \theta_2$. Τότε $\theta_1(Q) = \theta_2(Q)$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης $\Phi_{F,G}$ έπεται ότι $\Phi_{F,G}(\theta_1) = \Phi_{F,G}(\theta_2)$. Ως εκ τούτου η απεικόνιση $\Phi_{F,G}$ είναι «καλά ορισμένη».

- Η απεικόνιση $\Phi_{F,G}$ είναι «1-1».

  Ας είναι $\theta_1\colon F \longrightarrow G$ και $\theta_2\colon F \longrightarrow G$ φυσικοί μετασχηματισμοί τέτοιοι ώστε $\Phi_{F,G}(\theta_1) = \Phi_{F,G}(\theta_2)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης $\Phi_{F,G}$ έπεται ότι $\theta_1(Q) = \theta_2(Q)$. Έτσι, για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{C}$ ισχύει ότι $(\theta_1(Q))_Y = (\theta_2(Q))_Y$ και κατ' επέκταση ότι $\theta_{1Q(Y)} = \theta_{2Q(Y)}$. Σύμφωνα με την συνθήκη (a) για $X \in \mathcal{C}$ επιλέγουμε έναν μορφισμό $w\colon X \longrightarrow Q(Y)$ τέτοιον ώστε ο μορφισμός $G(w)\colon G(X) \longrightarrow G(Q(Y))$ να είναι ένας ισομορφισμός. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος $G(w)^{-1}\colon G(Q(Y)) \longrightarrow G(X)$ ο οποίος είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Εφόσον οι $\theta_1\colon F \longrightarrow G$ και $\theta_2\colon F \longrightarrow G$ φυσικοί μετασχηματισμοί υπάρχουν μορφισμοί $\theta_{1X}\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ και $\theta_{2X}\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ αντίστοιχα, για όλα τα $X \in \mathcal{C}'$ τέτοιοι ώστε για κάθε μορφισμό $w\colon X \longrightarrow Q(Y)$ τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\theta_{1X}"] \arrow[d, "F(w)"'] & G(X) \arrow[d, "G(w)"] \\ F(Q(Y)) \arrow[r, "\theta_{1Q(Y)}"'] & G(Q(Y)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\theta_{2X}"] \arrow[d, "F(w)"'] & G(X) \arrow[d, "G(w)"] \\ F(Q(Y)) \arrow[r, "\theta_{2Q(Y)}"'] & G(Q(Y)) \end{tikzcd}$$

  Ως εκ τούτου $\theta_{1Q(Y)} \circ F(w) = G(w) \circ \theta_{1X}$ και $\theta_{2Q(Y)} \circ F(w) = G(w) \circ \theta_{2X}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\theta_{1Q(Y)} = \theta_{2Q(Y)}$ από τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι $G(w) \circ \theta_{1X} = G(w) \circ \theta_{2X}$. Συνθέτοντας από αριστερά την τελευταία ισότητα με τον μορφισμό $G(w)^{-1}\colon G(Q(Y)) \longrightarrow G(X)$ και χρησιμοποιώντας την ισότητα $G(w)^{-1} \circ G(w) = 1_{G(X)}$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{G(X)}\colon G(X) \longrightarrow G(X)$ προκύπτει ότι $\theta_{1X} = \theta_{2X}$ για κάθε $X \in \mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου $\theta_1 = \theta_2$. Έτσι, η απεικόνιση $\Phi_{F,G}$ είναι «1-1».

- Η απεικόνιση $\Phi_{F,G}$ είναι «επί».

  Ας είναι $\theta\colon F\circ Q \longrightarrow G \circ Q$ ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των συναρτητών $F \circ Q$ και $G \circ Q$. Για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}'$ επιλέγουμε έναν μορφισμό $w\colon X \longrightarrow Q(Y)$ ο οποίος ικανοποιεί τις ιδιότητες (a) και (b). Ορίζουμε τον μορφισμό $\widetilde{\theta}_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ ως $\widetilde{\theta}_X = (G(w))^{-1} \circ \theta_Y \circ F(w)$. Ως εκ τούτου προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_X"] \arrow[d, "F(w)"'] & G(X) \arrow[d, "G(w)"] \\ F(Q(Y)) \arrow[r, "\theta_Y"'] & G(Q(Y)) \end{tikzcd}$$

  Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω κατασκευή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του μορφισμού w. Ας είναι $f\colon X_1 \longrightarrow X_2$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Υποθέτουμε ότι $w_1\colon X_1 \longrightarrow Q(Y_1)$ και $w_2\colon X_2 \longrightarrow Q(Y_2)$ είναι μορφισμοί οι οποίοι ικανοποιούν τις ιδιότητες (a) και (b). Ως εκ τούτου ισχύει ότι οι μορφισμοί $G(w_1)\colon G(X_1) \longrightarrow G(Q(Y_1))$ και $G(w_2)\colon G(X_2) \longrightarrow G(Q(Y_2))$ είναι ισομορφισμοί και επιπλέον για κάθε αντικείμενο Y_1'

της $\mathcal{C}$ και Y_2' της $\mathcal{C}$ και για μορφισμούς $t_1\colon X_1 \longrightarrow Q(Y_1')$ και $t_2\colon X_2 \longrightarrow Q(Y_2')$ υπάρχουν αντικείμενα Y_1'' και Y_2'' της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $w_1'\colon Y_1' \longrightarrow Y_1''$, $t_1'\colon Y_1 \longrightarrow Y_1''$, $w_2'\colon Y_2' \longrightarrow Y_2''$ και $t_2'\colon Y_2 \longrightarrow Y_2''$ τέτοιοι ώστε οι μορφισμοί $G(Q(w_1'))\colon G(Q(Y_1')) \longrightarrow G(Q(Y_1''))$ και $G(Q(w_2'))\colon G(Q(Y_2')) \longrightarrow G(Q(Y_2''))$ να είναι ισομορφισμοί και τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "t_1"'] & Q(Y_1) \arrow[d, "Q(t_1')"] \\
Q(Y_1') \arrow[r, "Q(w_1')"'] & Q(Y_1'')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "t_2"'] & Q(Y_2) \arrow[d, "Q(t_2')"] \\
Q(Y_2') \arrow[r, "Q(w_2')"'] & Q(Y_2'')
\end{tikzcd} \quad .$$

Για οποιαδήποτε επιλογή μορφισμών $w_1\colon X_1 \longrightarrow Q(Y_1)$ και $w_2\colon X_2 \longrightarrow Q(Y_2)$ οι οποίοι ικανοποιούν τις ιδιότητες (a) και (b) εφαρμόζουμε την ιδιότητα (b) στους μορφισμούς $w_1\colon X_1 \longrightarrow Q(Y_1)$ και $w_2 \circ f\colon X_1 \longrightarrow Q(Y_2)$. Τότε για κάθε αντικείμενο Y_2 της $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό $w_2 \circ f\colon X_1 \longrightarrow Q(Y_2)$ υπάρχει αντικείμενο Y_3 της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $t_1\colon Y_1 \longrightarrow Y_3$ και $t_2\colon Y_2 \longrightarrow Y_3$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός $G(Q(t_2))\colon G(Q(Y_2)) \longrightarrow G(Q(Y_3))$ να είναι ένας ισομορφισμός και το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "w_2 \circ f"'] & Q(Y_1) \arrow[d, "Q(t_1)"] \\
Q(Y_2) \arrow[r, "Q(t_2)"'] & Q(Y_3)
\end{tikzcd}$$

Λόγω της μεταθετικότητας του τελευταίου διαγράμματος προκύπτει ότι $Q(t_2) \circ (w_2 \circ f) = Q(t_1) \circ w_1$. Εφαρμόζοντας τους συναρτητές F και G στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τους διέπουν ως συναρτητές προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$F(Q(t_2)) \circ F(w_2) \circ F(f) = F(Q(t_1)) \circ F(w_1)$$

και

$$G(Q(t_2)) \circ G(w_2) \circ G(f) = G(Q(t_1)) \circ G(w_1)$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
F(X_1) \arrow[rrr, "\widetilde{\theta}(X_1)"] \arrow[dr, "F(w_1)"] \arrow[dddd, "F(f)"'] & & & G(X_1) \arrow[dl, "G(w_1)"'] \arrow[dddd, "G(f)"] \\
& F(Q(Y_1)) \arrow[r, "\theta(Y_1)"] \arrow[d, "F(Q(t_1))"'] & G(Q(Y_1)) \arrow[d, "G(Q(t_1))"] & \\
& F(Q(Y_3)) \arrow[r, "\theta(Y_3)"] & G(Q(Y_3)) & \\
& F(Q(Y_2)) \arrow[r, "\theta(Y_2)"] \arrow[u, "F(Q(t_2))"] & G(Q(Y_2)) \arrow[u, "G(Q(t_2))"'] & \\
F(X_2) \arrow[rrr, "\widetilde{\theta}(X_2)"] \arrow[ur, "F(w_2)"] & & & G(X_2) \arrow[ul, "G(w_2)"']
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

Λαμβάνοντας ως f τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X : X \longrightarrow X$ για οποιαδήποτε επιλογή μορφισμών $w_1 : X \longrightarrow Q(Y_1)$ και $w_2 : X \longrightarrow Q(Y_2)$ οι οποίοι ικανοποιούν τις ιδιότητες (a) και (b) εφαρμόζουμε την ιδιότητα (b) στους μορφισμούς $w_1 : X \longrightarrow Q(Y_1)$ και $w_2 \circ 1_X = w_2 : X \longrightarrow Q(Y_2)$. Τότε για κάθε αντικείμενο Y_2 της $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό $w_2 \circ 1_X : X \longrightarrow Q(Y_2)$ υπάρχει αντικείμενο Y_3 της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $t_1 : Y_1 \longrightarrow Y_3$ και $t_2 : Y_2 \longrightarrow Y_3$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός $G(Q(t_2)) : G(Q(Y_2)) \longrightarrow G(Q(Y_3))$ να είναι ένας ισομορφισμός και το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "w_2 \circ 1_X = w_2"'] & Q(Y_1) \arrow[d, "Q(t_1)"] \\
Q(Y_2) \arrow[r, "Q(t_2)"'] & Q(Y_3)
\end{tikzcd}
$$

Λόγω της μεταθετικότητας του τελευταίου διαγράμματος προκύπτει ότι $Q(t_2) \circ w_2 \circ 1_X = Q(t_1) \circ w_1$. Εφαρμόζοντας τους συναρτητές F και G στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τους διέπουν ως συναρτητές προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$F(Q(t_2)) \circ F(w_2) \circ 1_{F(X)} = F(Q(t_1)) \circ F(w_1)$$

και

$$G(Q(t_2)) \circ G(w_2) \circ 1_{G(X)} = G(Q(t_1)) \circ G(w_1).$$

Ως εκ τούτου καταλήγουμε στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rrr, "\widetilde{\theta}(X)"] \arrow[dr, "F(w_1)"] \arrow[dddd, "F(1_X)=1_{F(X)}"'] & & & G(X) \arrow[dl, "G(w_1)"'] \arrow[dddd, "G(1_X)=1_{G(X)}"] \\
& F(Q(Y_1)) \arrow[r, "\theta(Y_1)"] \arrow[d, "F(Q(t_1))"'] & G(Q(Y_1)) \arrow[d, "G(Q(t_1))"] & \\
& F(Q(Y_3)) \arrow[r, "\theta(Y_3)"] & G(Q(Y_3)) & \\
& F(Q(Y_2)) \arrow[r, "\theta(Y_2)"] \arrow[u, "F(Q(t_2))"] & G(Q(Y_2)) \arrow[u, "G(Q(t_2))"'] & \\
F(X) \arrow[ur, "F(w_2)"] \arrow[rrr, "\widetilde{\theta}(X)"] & & & G(X) \arrow[ul, "G(w_2)"']
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

το οποίο είναι ίδιο με το μεταθετικό διάγραμμα (2.1) με τη μόνη διαφορά ότι $X_1 = X$, $X_2 = X$, $F(f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$ και $G(f) = G(1_X) = 1_{G(X)}$. Εφόσον όλα τα εσωτερικά διαγράμματα του διαγράμματος (2.2) είναι μεταθετικά έπεται ότι το εξωτερικό διάγραμμα είναι εξίσου μεταθετικό. Ως εκ τούτου $\widetilde{\theta}_{X_2} \circ 1_{F(X_2)} = \widetilde{\theta}_{X_1} \circ 1_{G(X_1)}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{F(X_2)} \colon F(X_2) \longrightarrow F(X_2)$ και $1_{G(X_1)} \colon G(X_1) \longrightarrow G(X_1)$ από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\widetilde{\theta}_{X_2} = \widetilde{\theta}_{X_1}$. Έτσι, η παραπάνω κατασκευή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του μορφισμού $w \colon X \longrightarrow Q(Y)$. Επομένως, ο $\widetilde{\theta}$ είναι «καλά ορισμένος». Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι $\widetilde{\theta} \in \mathrm{Hom}_{Fun(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')}(F, G)$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος (2.1) ισχύει ότι:

$$\theta_{Y_3} \circ F(Q(t_1)) \circ F(w_1) = G(Q(t_1)) \circ G(w_1) \circ \widetilde{\theta}_{X_1} \tag{2.3}$$

και

$$\theta_{Y_3} \circ F(Q(t_2)) \circ F(w_2) = G(Q(t_2)) \circ G(w_2) \circ \widetilde{\theta}_{X_2} \tag{2.4}$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$F(Q(t_1)) \circ F(w_1) = F(Q(t_2)) \circ F(w_2) \circ F(f) \tag{2.5}$$

και

$$G(Q(t_1)) \circ G(w_1) = G(Q(t_2)) \circ G(w_2) \circ G(f) \tag{2.6}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $G(w_2) \colon G(X) \longrightarrow G(Q(Y_2))$ και $G(Q(t_2)) \colon G(Q(Y_2)) \longrightarrow G(Q(Y_3))$ είναι ισομορφισμοί από την ισότητα (2.4) προκύπτει

$$\widetilde{\theta}_{X_2} = G(w_2)^{-1} \circ G(Q(t_2))^{-1} \circ \theta_{Y_3} \circ F(Q(t_2)) \circ F(w_2) \tag{2.7}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{G(Q(Y_2))}$ και $1_{G(X_2)}$, την τελευταία ισότητα, τις ισότητες (2.5), (2.3) και (2.6) καθώς και τις ισότητες $G(Q(t_2))^{-1} \circ G(Q(t_2)) =$

$1_{G(Q(Y_2))}$ και $G(w_2)^{-1} \circ G(w_2) = 1_{G(X_2)}$ προκύπτει ότι:

$$\widetilde{\theta}_{X_2} \circ F(f) = G(w_2)^{-1} \circ G(Q(t_2))^{-1} \circ \theta_{Y_3} \circ F(Q(t_2)) \circ F(w_2) \circ F(f) = G(w_2)^{-1} \circ G(Q(t_2))^{-1} \circ$$

$$\circ \theta_{Y_3} \circ F(Q(t_1)) \circ F(w_1) = G(w_2)^{-1} \circ G(Q(t_2))^{-1} \circ G(Q(t_1)) \circ G(w_1) \circ \widetilde{\theta}_{X_1} = G(w_2)^{-1} \circ G(Q(t_2))^{-1} \circ$$

$$\circ G(Q(t_2)) \circ G(w_2) \circ G(f) \circ \widetilde{\theta}_{X_1} = G(w_2)^{-1} \circ 1_{G(Q(Y_2))} \circ G(w_2) \circ G(f) \circ \widetilde{\theta}_{X_1} = G(w_2)^{-1} \circ G(w_2) \circ$$

$$\circ G(f) \circ \widetilde{\theta}_{X_1} = 1_{G(X_2)} \circ G(f) \circ \widetilde{\theta}_{X_1} = G(f) \circ \widetilde{\theta}_{X_1}.$$

Συνεπώς, ο $\widetilde{\theta}\colon F \longrightarrow G$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Έτσι, $\widetilde{\theta} \in \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')}(F,G)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μας απομένει να δείξουμε ότι $\Phi_{F,G}(\widetilde{\theta}) = \theta$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης $\Phi_{F,G}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\widetilde{\theta}Q = \theta$. Θέτουμε $X = Q(Y)$. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε ως μορφισμό w τον ταυτοτικό μορφισμό $1_{Q(Y)}\colon Q(Y) \longrightarrow Q(Y)$, ο οποίος πληροί τις ιδιότητες (a) και (b). Έτσι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μορφισμού $\widetilde{\theta}_X$, την ισότητα $(1_{G(Q(Y))})^{-1} = 1_{G(Q(Y))}$ η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{G(Q(Y))}\colon G(Q(Y)) \longrightarrow G(Q(Y))$ είναι ένας ισομορφισμός με αντίστροφο τον εαυτό του και τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{F(Q(Y))}$ και $1_{G(Q(Y))}$ για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}$ έπεται ότι:

$$(\widetilde{\theta}Q)_Y = \widetilde{\theta}_{Q(Y)} = (G(1_{Q(Y)}))^{-1} \circ \theta_Y \circ F(1_{Q(Y)}) = (1_{G(Q(Y))})^{-1} \circ \theta_Y \circ 1_{F(Q(Y))} =$$

$$= 1_{G(Q(Y))} \circ \theta_Y \circ 1_{F(Q(Y))} = \theta_Y$$

Ως εκ τούτου $\widetilde{\theta}Q = \theta$ και κατ' επέκταση $\Phi_{F,G}(\widetilde{\theta}) = \theta$. Επομένως, αποδείξαμε ότι για κάθε φυσικό μετασχηματισμό $\theta \in \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{C}'')}(F \circ Q, G \circ Q)$ υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\widetilde{\theta} \in \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')}(F,G)$ τέτοιος ώστε $\Phi_{F,G}(\widetilde{\theta}) = \theta$, γεγονός που αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi_{F,G}$ είναι «επί».

Έτσι, συνοψίζοντας η απεικόνιση

$$\mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C}',\mathcal{C}'')}(F,G) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{C}'')}(F \circ Q, G \circ Q)$$

η οποία ορίζεται κατά φυσικό τρόπο είναι «1-1» και «επί» για κάθε συναρτητή $F\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$. ■

Εν συνεχεία θα προχωρήσουμε στην κατασκευή της τοπικοποίησης της κατηγορίας $\mathcal{C}$ με χρήση μονοπατιών. Ωστόσο πριν παραθέσουμε την εν λόγω κατασκευή κρίνουμε απαραίτητο να αναφέρουμε κάποιους βασικούς ορισμούς οι οποίοι θα διευκολύνουν την κατανόηση της.

Ορισμός 2.1.8. *Ένα* **γράφημα (graph)** *αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών και από ένα σύνολο ακμών οι οποίες συνδέουν αυτές τις κορυφές.*

Παρατήρηση 2.1.9. Τα είδη των γραφημάτων ποικίλουν ανάλογα με το τι είδους ακμές επιτρέπονται. Έτσι, τα γραφήματα διακρίνονται σε μη κατευθυνόμενα (undirected), κατευθυνόμενα ή προσανατολισμένα (directed or oriented), απλά (simple), πολυγραφήματα (multigraphs), μικτά (mixed), κανονικά (regulars), πλήρη (complete), σταθμισμένα (weighted), πεπερασμένα (finite), άπειρα (infinite), συνεκτικά (connected), μη συνεκτικά (disconnected), K-κορυφών συνεκτικά (K-vertex connected) τα οποία απλούστερα καλούνται K-συνεκτικά (K-connected), K-ακμών συνεκτικά (K-edge connected) κ.λ.π.

Καθώς το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στην κατασκευή της κατηγορίας $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ με χρήση μονοπατιών θα αναφερθούμε στα κατευθυνόμενα ή προσανατολισμένα γραφήματα.

Ορισμός 2.1.10. *Ένα* **κατευθυνόμενο ή προσανατολισμένο (directed or oriented)** *γράφημα G αποτελείται από:*

1. *Μια κλάση* $\mathsf{ob}(G)$ *αντικειμένων ή κορυφών του γραφήματος.*

2. *Ένα σύνολο* $\mathsf{Hom}_G(X,Y)$ *μορφισμών ή κατευθυνόμενων ακμών από το* X *στο* Y *για κάθε διατεταγμένο ζεύγος* $(X,Y) \in \mathsf{ob}(G) \times \mathsf{ob}(G)$.

Εν συνεχεία παραθέτουμε ένα παράδειγμα κατευθυνόμενου ή προσανατολισμένου διαγράμματος.

Παράδειγμα 2.1.11. Η κατηγορία **3** η οποία όπως έχουμε δει παριστάνεται ως:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[dr] & \bigstar \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

αποτελεί παράδειγμα κατευθυνόμενου ή προσανατολισμένου διαγράμματος.

Παρατήρηση 2.1.12. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της κατηγορίας που παραθέσαμε στο πρώτο κεφάλαιο εύκολα συνάγεται ότι ένα προσανατολισμένο γράφημα είναι σε γενικές γραμμές μια κατηγορία χωρίς νόμο σύνθεσης και ότι κάθε κατηγορία είναι ένα προσανατολισμένο γράφημα εάν στον ορισμό της κατηγορίας παραλείψουμε τον νόμο της σύνθεσης.

Αντίστοιχα, με την μικρή κατηγορία ορίζεται το μικρό γράφημα.

Ορισμός 2.1.13. *Ένα γράφημα* G *καλείται* **μικρό (small)** *εάν η κλάση αντικειμένων* $\mathsf{ob}(G)$ *είναι σύνολο.*

Ορισμός 2.1.14. *Ας είναι* G *ένα προσανατολισμένο γράφημα. Ένα* **μονοπάτι (path)** *μήκους* n *από το* Y *στο* Z *στο* G *είναι μια μη κενή πεπερασμένη ακολουθία εναλλασσόμενων κορυφών και ακμών του* G *τέτοια ώστε ο πρώτος και ο τελευταίος όρος* Y *και* Z *να είναι κορυφές του* G *και επιπλέον το τέλος κάθε ακμής να συμπίπτει με την αρχή της επόμενης. Διαγραμματικά, ένα μονοπάτι μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:*

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_i \arrow[dl, "s_{i-1}"'] \arrow[dr, "f_i"] & & X_{i-1} \arrow[dl, "s_{n-2}"'] & \\ Y = X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & \cdots & & \cdots & & Z = X_n \arrow[ul, "f_{i-1}"'] \end{tikzcd}$$

Σχόλιο 2.1.15.
1. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Παρατήρηση 2.1.12 ο ορισμός του μονοπατιού είναι δυνατόν να διατυπωθεί αντικαθιστώντας τον όρο προσανατολισμένο γράφημα με τον όρο κατηγορία, (βλέπε Ορισμό 4.1.9) χωρίς καμιά αλλαγή στο περιεχόμενο του.

2. Ορισμένες φορές στην βιβλιογραφία ο όρος μονοπάτι αναφέρεται ως ζιγκ-ζαγκ. Τον όρο αυτό υιοθετούμε στην διατύπωση του Ορισμού 4.1.9.

Ορισμός 2.1.16. *Δύο μονοπάτια καλούνται* **ισοδύναμα (equivalent)** *εάν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας μετασχηματισμών της ακόλουθης μορφής:*

1. *Δύο διαδοχικοί μορφισμοί σε ένα μονοπάτι μπορούν να αντικατασταθούν από την σύνθεση τους.*

2. *Μορφισμοί της μορφής*

$$\ldots W_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} W_k \xleftarrow{f_{k-1}} W_{k-1} \ldots$$

είτε της μορφής

$$\dots W_{k-1} \xleftarrow{f'_k} W_k \xrightarrow{f'_k} W_{k-1} \dots$$

σε ένα μονοπάτι αντικαθίστανται από τον ταυτοτικό μορφισμό

$$\dots W_{k-1} \xrightarrow{1_{W_{k-1}}} W_{k-1} \dots$$

3. *Μορφισμοί της μορφής*

$$\dots W_{k-1} \xrightarrow{1_{W_{k-1}}} W_{k-1} \xleftarrow{f_k} W_k \dots$$

είτε της μορφής

$$\dots W_k \xleftarrow{1_{W_k}} W_k \xrightarrow{f'_k} W_k \dots$$

σε ένα μονοπάτι αντικαθίστανται αντίστοιχα από τους μορφισμούς

$$\dots W_{k-1} \xleftarrow{f_k} W_k \dots$$

και

$$\dots W_k \xrightarrow{f'_k} W_k \dots$$

Παρατήρηση 2.1.17. Η ισοδυναμία μονοπατιών ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ του αντικειμένου που αποτελεί τον πρώτο όρο του μονοπατιού και του αντικειμένου που αποτελεί τον τελευταίο όρο του μονοπατιού στο σύνολο όλων των μονοπατιών.

2.1.1 Ύπαρξη της Τοπικοποίησης μιας Κατηγορίας $\mathcal{C}$

Ευθύς αμέσως παραθέτουμε μια απλή απόδειξη της ύπαρξης της τοπικοποίησης μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ η οποία είναι εφοδιασμένη με μια τυχαία κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$.

Ας είναι $\mathcal{C}$ μια τυχαία κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια τυχαία κλάση μορφισμών της. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας καθολικός συναρτητής ο οποίος μετατρέπει στοιχεία της $\mathcal{W}$ σε ισομορφισμούς. Ειδικότερα, θα κατασκευάσουμε μια κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ και έναν συναρτητή $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 2.1.1.
Ορίζουμε τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ να είναι τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Όσον αφορά τους μορφισμούς στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ αρχικά για κάθε μορφισμό $w\colon X \longrightarrow Y$ της κλάσης $\mathcal{W}$ προσθέτουμε έναν μορφισμό $x_w\colon Y \longrightarrow X$ ο οποίος αποτελεί τον αντίστροφο του. Εν συνεχεία κατασκευάζουμε ένα προσανατολισμένο γράφημα G_1 το οποίο έχει ως κορυφές τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και για κάθε μορφισμό στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ υπάρχει μια ακμή από το X στο Y στο γράφημα G_1. Ένα μονοπάτι στο G_1 ορίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 2.1.14 και δύο μονοπάτια είναι ισοδύναμα σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.16 εάν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας μετασχηματισμών της ακόλουθης μορφής

- Εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τότε οι διαδοχικοί μορφισμοί $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ σε ένα μονοπάτι μπορεί να αντικατασταθεί από το μονοπάτι $X \xrightarrow{g\circ f} Z$.
- Εάν $w\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τότε ο μορφισμός $X \xrightarrow{w} Y \xrightarrow{x_w} X$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον ταυτοτικό μορφισμό $X \xrightarrow{1_X} X$ και ο μορφισμός $Y \xrightarrow{x_w} X \xrightarrow{w} Y$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον ταυτοτικό μορφισμό $Y \xrightarrow{1_Y} Y$.

Η σχέση η οποία ορίζεται από την ισοδυναμία των μονοπατιών είναι κατά προφανή τρόπο ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Ως εκ τούτου είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Έτσι, ορίζουμε τους μορφισμούς στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ως κλάσεις ισοδυναμίας των μονοπατιών στο G_1 με κοινή αρχή και τέλος. Η σύνθεση δύο μορφισμών στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ επάγεται από τον συνδυασμό (conjunction) των μονοπατιών και ουσιαστικά επάγει μια σύνθεση στις κλάσεις ισοδυναμίας τους. Ο ταυτοτικός μορφισμός ενός αντικειμένου Y δίνεται από την κλάση ισοδυναμίας του μονοπατιού

$$Y \xrightarrow{1_Y} Y.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ικανοποιείται το Αξίωμα της προσεταιριστικότητας και ότι εξασφαλίζεται η ύπαρξη των ταυτοτικών μορφισμών. Ως εκ τούτου η $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είναι μια κατηγορία. Κατόπιν ορίζουμε τον συναρτητή $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ να είναι ταυτοτικός στα αντικείμενα και να στέλνει έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ στην κλάση του μονοπατιού μήκους 1

$$X \longrightarrow Y$$

Ας είναι $w\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ο συναρτητής Q εξ' ορισμού στέλνει τον μορφισμό $w\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ στην κλάση του μονοπατιού μήκους 1

$$X \xrightarrow{w} Y$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $X \xrightarrow{w} Y \xrightarrow{x_w} X$ αντικαθίσταται από τον ταυτοτικό μορφισμό $X \xrightarrow{1_X} X$ και ο μορφισμός $Y \xrightarrow{x_w} X \xrightarrow{w} Y$ αντικαθίσταται από τον ταυτοτικό μορφισμό $Y \xrightarrow{1_Y} Y$ συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός $Q(s)$ ο οποίος αναπαρίσταται από την κλάση του μονοπατιού μήκους 1

$$X \xrightarrow{w} Y$$

έχει ως αντίστροφο την κλάση του μονοπατιού $Y \xrightarrow{x_w} X$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $Q(w)\colon Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ για κάθε μορφισμό w ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και κατ' επέκταση η πρώτη απαίτηση του Ορισμού 2.1.1 πληρείται. Όσον αφορά τη δεύτερη απαίτηση του Ορισμού 2.1.1 υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κατηγορία $\mathcal{C}'$ και ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε για κάθε μορφισμό $w \in \mathcal{W}$, ο μορφισμός $F(w)$ να είναι ένας ισομορφισμός. Κατασκευάζουμε τον ζητούμενο συναρτητή $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ ως εξής:

- $G(X) = F(X)$ για κάθε αντικείμενο $X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}) = \mathsf{ob}(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}])$.
- $G(f) = F(f)$ για κάθε μορφισμό f στην κατηγορία $\mathcal{C}$.
- $G(\text{κλάση των } x_w) = F(w^{-1})$ για κάθε μορφισμό w της κλάσης $\mathcal{W}$.

Ας είναι Ψ ένα μονοπάτι. Υποθέτουμε ότι $\psi = \psi_n \circ \cdots \circ \psi_1$ όπου καθένα από τα ψ_i είναι μορφισμοί στο G_1. Εξαιτίας των ιδιοτήτων που διέπουν έναν συναρτητή έπεται ότι $G(\psi) = G(\psi_n) \circ \cdots \circ G(\psi_1)$. Για να ελέγξουμε ότι ο συναρτητής G είναι καλά ορισμένος θεωρούμε δύο ισοδύναμα μονοπάτια

$$\gamma = (\ X \xrightarrow{\gamma_0} \Gamma_1 \xrightarrow{\gamma_1} \ldots \longrightarrow \Gamma_n \xrightarrow{\gamma_n} Y\ )$$

και

$$\epsilon = (\ X \xrightarrow{\epsilon_0} E_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \ldots \longrightarrow E_n \xrightarrow{\epsilon_n} Y\ ).$$

Ο συναρτητής G στέλνει τα παραπάνω μονοπάτια στους μορφισμούς

$$G(\gamma) = G(\gamma_n) \circ G(\gamma_{n-1}) \circ \cdots \circ G(\gamma_0)$$

και

$$G(\epsilon) = G(\epsilon_n) \circ G(\epsilon_{n-1}) \circ \cdots \circ G(\epsilon_0)$$

αντίστοιχα. Εφόσον τα μονοπάτια γ και ϵ είναι ισοδύναμα μπορούμε να μετατρέψουμε το ένα στο άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας μετασχηματισμών. Καθένας απο αυτούς τους μετασχηματισμούς μεταφράζεται σε μια ισότητα στην $\mathcal{C}'$ ως εξής:
Όταν

$$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) = (X \xrightarrow{g \circ f} Z)$$

στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ τότε λαμβάνουμε την ισότητα

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$$

και κατ' επέκταση σύμφωνα με τον ορισμό του συναρτητή G την ισότητα

$$G(g) \circ G(f) = G(g \circ f)$$

στην $\mathcal{C}'$. Αντίστοιχα, όταν

$$(X \xrightarrow{w} Y \xrightarrow{x_w} X) = (X \xrightarrow{1_X} X)$$

στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ τότε στην $\mathcal{C}'$ ισχύει ότι

$$G(x_w \circ x) = F(x_w) \circ F(x) = F(x)^{-1} \circ F(x) = F(1_X) = G(1_X)$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα της διαδικασίας της μετατροπής του μονοπατιού γ στο ϵ μέσω στοιχειωδών μετασχηματισμών λαμβάνουμε ισότητες στην $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου $G(\gamma) = G(\epsilon)$. Έτσι, ο συναρτητής G είναι καλά ορισμένος. Ο $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής και επιπλέον πληροί την ισότητα $G \circ Q = F$ εκ κατασκευής. Όσον αφορά την μοναδικότητα του συναρτητή $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας άλλος συναρτητής $G'\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $G' \circ Q = F$. Τότε $G \circ Q = G' \circ Q$. Έτσι, για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ ισχύει ότι $G(Q(X)) = G'(Q(X))$ και $G(Q(f)) = G'(Q(f))$ αντίστοιχα. Μας απομένει να αποδείξουμε την ισότητα στις κλάσεις των x_w. Θεωρούμε ένα μονοπάτι

$$M \xrightarrow{f_0} \bullet \xleftarrow{x_0} \bullet \xrightarrow{f_1} \bullet \longleftarrow \dots \xrightarrow{f_n} \bullet \xleftarrow{x_n} N \ .$$

Εφαρμόζοντας τους συναρτητές G και G' στο τελευταίο μονοπάτι προκύπτουν τα ακόλουθα μονοπάτια:

$$G(M) \xrightarrow{G(f_0)} G(\bullet) \xleftarrow{G(x_0)} G(\bullet) \xrightarrow{G(f_1)} G(\bullet) \longleftarrow \dots \xrightarrow{G(f_n)} G(\bullet) \xleftarrow{G(x_n)} G(N)$$

και

$$G'(M) \xrightarrow{G'(f_0)} G'(\bullet) \xleftarrow{G'(x_0)} G'(\bullet) \xrightarrow{G'(f_1)} G'(\bullet) \longleftarrow \dots \xrightarrow{G'(f_n)} G'(\bullet) \xleftarrow{G'(x_n)} G'(N)$$

Οι μορφισμοί f_i, $i = 0, \dots, n$, είναι μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Έτσι, οι μορφισμοί $G(f_i)$ και $G'(f_i)$, $i = 0, \dots, n$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ και ως εκ τούτου ταυτίζονται. Επιπλέον για κάθε $x_w \in \mathcal{W}$ ισχύει ότι $G(Q(x_w)) = G'(Q(x_w))$. Ωστόσο, υπενθυμίζουμε ότι ο συναρτητής $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ εξ' ορισμού στέλνει κάθε μορφισμό στην κλάση του αντίστοιχου μονοπατιού. Ως εκ τούτου $Q(x_w) =$ κλάση του x_w. Έτσι, $G($κλάση του $x_w) = G'($κλάση του $x_w)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι:

- $G(Q(X)) = G'(Q(X))$ για κάθε αντικείμενο $Q(X) = X \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}) = \mathsf{ob}(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}])$
- $G(Q(f)) = G'(Q(f))$ για κάθε μορφισμό $Q(f)\colon Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.
- $G($κλάση του $x_w) = G'($κλάση του $x_w)$

συμπεραίνουμε ότι ο συναρτητής $G\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι μοναδικός. Επομένως το ζεύγος $(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}], Q)$ ικανοποιεί τον Ορισμό 2.1.1.

Παρατήρηση 2.1.18. Η παραπάνω κατασκευή της τοπικοποιήσης $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ με τη βοήθεια των μονοπατιών γίνεται όταν η κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ είναι αυθαίρετη. Εάν η κλάση $\mathcal{W}$ εφοδιαστεί με κάποιες επιπλέον ιδιότητες η κατασκευή της τοπικοποίησης $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$ όπως θα δούμε στην συνέχεια μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των λεγόμενων roofs ή κλασμάτων (fractions).

2.2 Τοπικοποίηση της Δυϊκής Κατηγορίας

Στην ενότητα αυτή μελετάμε την τοπικοποίηση της δυϊκής κατηγορίας $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Η ύπαρξη της τοπικοποίησης $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ της δυϊκής κατηγορίας $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ προϋποθέτει την ύπαρξη της τοπικοποίησης $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$.

Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ η δυϊκή αυτής. Υποθέτουμε ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι εφοδιασμένη με μια κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$. Η υποενότητα 2.1.1 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη της τοπικοποίησης $(\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}], Q)$ της $\mathcal{C}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$, αντιστρέφοντας το βέλος μπορεί να ιδωθεί ως μορφισμός στη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ μπορούμε να θεωρήσουμε τους μορφισμούς της κλάσης $\mathcal{W}$ της $\mathcal{C}$ ως μορφισμούς στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Σημειώνουμε με $\mathcal{W}^{\mathsf{op}}$ την εικόνα της κλάσης $\mathcal{W}$ στη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ μέσω του συναρτητή op. Ο συναρτητής $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ μπορεί να ιδωθεί ως ένας συναρτητής από τη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ της $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είτε από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ της $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είτε από τη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ της $\mathcal{C}$ στη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ της $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ και σε κάθε περίπτωση τον συμβολίζουμε με Q. Για κάθε μορφισμό w στην κλάση $\mathcal{W}^{\mathsf{op}}$ η οποία ταυτίζεται με την κλάση $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $Q(w)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$. Ως εκ τούτου, υπάρχει μοναδικός συναρτητής $\beta\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \arrow[r, "Q^{\mathsf{op}}"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[dl, "\beta"] \\
\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}} &
\end{tikzcd}
$$

Έτσι, η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένη με τον συναρτητή $Q^{\mathsf{op}}\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ αποτελεί τοπικοποίηση της $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

Σχόλιο 2.2.1. Ο συναρτητής $\beta\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ στέλνει ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ στον εαυτό του και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ ο οποίος αναπαρίσταται από ένα μονοπάτι στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ στον μορφισμό $\beta(f)$ στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ ο οποίος αναπαρίσταται από το ίδιο μονοπάτι αντιστρέφοντας τα βέλη των μορφισμών του.

Πρόταση 2.2.2. *Ο συναρτητής $\beta\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ και $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $\beta\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ ένας συναρτητής μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ και $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$. Η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένη με τον συναρτητή $Q^{\mathsf{op}}\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ αποτελεί τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Η κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ εφοδιασμένη με τον συναρτητή $Q\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ αποτελεί εξίσου τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.3 υπάρχει ένας ισομορφισμός $\beta\colon \mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$ μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}[\mathcal{W}^{-1}]$ και $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]^{\mathsf{op}}$. ■

Παρατήρηση 2.2.3. Το συμπέρασμα του Λήμματος 2.1.7 ισχύει και για τις δυϊκές κατηγορίες. Έτσι, παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει αντιστρέφοντας τα βέλη των μορφισμών.

2.3 Localizing Κλάσεις και Roofs

Στην Ενότητα 2.1 επικεντρωθήκαμε στην τοπικοποίηση μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ εφοδιασμένης με μια τυχαία κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$. Στην ενότητα αυτή θέτουμε ορισμένους περιορισμούς στην κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου περιοριζόμαστε σε ειδικούς τύπους κλάσεων μορφισμών για τις οποίες μπορούμε να δώσουμε μια καλύτερη περιγραφή των μορφισμών στην τοπικοποιημένη κατηγορία. Η ανάγκη αυτή πηγάζει από το γεγονός ότι εάν η κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ είναι τυχαία υπάρχει μεγάλη δυσκολία στο να διατυπώσουμε οτιδήποτε σχετικά με την κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Ορισμός 2.3.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της. Η κλάση $\mathcal{W}$ είναι μια* **δεξιά localizing κλάση (right localizing class)** *εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(W1) *Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.*

(W2) *Δοθέντων δύο μορφισμών $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$, η σύνθεση τους $g \circ f : X \longrightarrow Z$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.*

(W3) *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $w : X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t : Y \longrightarrow Y'$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και μορφισμός $g : X' \longrightarrow Y'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\ X' \arrow[r, dashed, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

(W4) *Ας είναι $f, g : X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Εάν υπάρχει ένας μορφισμός $w : W \longrightarrow X$ ο οποίος ανήκει στην κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $f \circ w = g \circ w$ τότε υπάρχει μορφισμός $t : Y \longrightarrow Z$ στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $t \circ f = t \circ g$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "w"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, dashed, "t"] & Z. \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 2.3.2. Οι συνθήκες του Ορισμού 2.3.1 επιβεβαιώνουν ότι υπάρχει μια υποκατηγορία $\widetilde{\mathcal{W}}$ της $\mathcal{C}$ με αντικείμενα τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμούς την κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$. Ο συναρτητής φυσικής έγκλεισης $i : \widetilde{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ημιπλήρης καθώς για κάθε ζεύγος αντικειμένων X, Y στην κατηγορία $\widetilde{\mathcal{W}}$ τέτοια ώστε $i(X) \backsimeq i(Y)$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ ισχύει ότι $X \backsimeq Y$ στην κατηγορία $\widetilde{\mathcal{W}}$. Έτσι, η υποκατηγορία $\widetilde{\mathcal{W}}$ της $\mathcal{C}$ είναι ημιπλήρης υποκατηγορία της. Με αυτές τις συνθήκες η έννοια της δεξιάς localizing κλάσης διατηρείται υπό τη δράση ισοδυναμιών κατηγοριών.

Η έννοια της αριστερής localizing κλάσης ορίζεται όμοια αντιστρέφοντας τα βέλη των μορφισμών. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 2.3.3. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της. Η κλάση $\mathcal{W}$ είναι μια* **αριστερή localizing κλάση (left localizing class)** *εάν ικανοποιεί τους ακόλουθους περιορισμούς:*

(W1′) *Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.*

(W2′) *Δοθέντων δύο μορφισμών $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$, η σύνθεση τους $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.*

(W3′) *Εάν $f\colon Y \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $w\colon X' \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t\colon Y' \longrightarrow Y$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και μορφισμός $g\colon Y' \longrightarrow X'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "f"'] \\ X' \arrow[u, "w"] & Y' \arrow[l, dashed, "g"'] \arrow[u, dashed, "t"'] \end{tikzcd}$$

(W4′) *Ας είναι $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Εάν υπάρχει ένας μορφισμός $t\colon Y \longrightarrow Z$ ο οποίος ανήκει στην κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $t \circ f = t \circ g$ τότε υπάρχει μορφισμός $w\colon W \longrightarrow X$ στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $f \circ w = g \circ w$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "w"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "t"] & Z \end{tikzcd}$$

Στην περίπτωση που μια κλάση μορφισμών είναι εξίσου αριστερή localizing κλάση και δεξιά localizing κλάση λαμβάνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.3.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της. Η κλάση $\mathcal{W}$ είναι μια* **localizing κλάση (localizing class)** *εάν ικανοποιεί τους ακόλουθους περιορισμούς:*

(W1″) *Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X\colon X \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.*

(W2″) *Δοθέντων δύο μορφισμών $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$, η σύνθεση τους $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.*

(W3″)

(a) *Εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $w\colon X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t\colon Y \longrightarrow Y'$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και μορφισμός $g\colon X' \longrightarrow Y'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\ X' \arrow[r, dashed, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

(b) *Εάν $f\colon Y \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $w\colon X' \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t\colon Y' \longrightarrow Y$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και μορφισμός $g\colon Y' \longrightarrow X'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "f"'] \\ X' \arrow[u, "w"] & Y' \arrow[l, dashed, "g"'] \arrow[u, dashed, "t"'] \end{tikzcd}$$

(W4″) *Ας είναι $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός $w\colon W \longrightarrow X$ ο οποίος ανήκει στην κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $f \circ w = g \circ w$ αν και μόνο αν υπάρχει μορφισμός $t\colon Y \longrightarrow Z$ στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $t \circ f = t \circ g$.*

Παρατήρηση 2.3.5.

1. Συχνά στη βιβλιογραφία η δεξιά localizing κλάση μορφισμών αναφέρεται ως δεξιό πολλαπλασιαστικό σύστημα, η αριστερή localizing κλάση αναφέρεται ως αριστερό πολλαπλασιαστικό σύστημα και η localizing κλάση αναφέρεται ως πολλαπλασιαστικό σύστημα. Επιπλέον ορισμένοι συγγραφείς καλούν δεξιά localizing κλάση μορφισμών αυτό που εμείς ορίσαμε ως αριστερή localizing κλάση και αντίστροφα. Αυτό συμβαίνει καθώς όπως θα δούμε στην συνέχεια κάθε μορφισμός της $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ γράφεται ως $Q(w)^{-1} \circ Q(f)$ για κάποιο μορφισμό w ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και κάποιο μορφισμό f στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

2. Ορισμένες φορές ο πρώτος περιορισμός των Ορισμών 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4 αντικαθίστανται από τον γενικότερο περιορισμό: Κάθε ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ωστόσο, χάρις στο δεύτερο περιορισμό στους εν λόγω Ορισμούς καταλήγουμε ουσιαστικά στο ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.

3. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον Ορισμό 2.3.4 εάν $\mathcal{W}$ είναι μια localizing κλάση μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τότε είναι εξίσου localizing κλάση στην αντίθετη κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Εν συνεχεία παραθέτουμε ένα παράδειγμα localizing κλάσης.

Παράδειγμα 2.3.6. Η οικογένεια ισομορφισμών $\mathcal{W}$ σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ η οποία ικανοποιεί του περιορισμούς (W1″) και (W2″) του Ορισμού 2.3.4 είναι μια localizing κλάση στην $\mathcal{C}$. Για να έχουμε το ζητούμενο μας αρκεί να αποδείξουμε ότι πληρούνται εξίσου οι περιορισμοί (W3″) και (W4″) του Ορισμού 2.3.4. Για να ελέγξουμε τον περιορισμό (W3″(a)) θέτουμε $Y' = Y$. Έτσι, εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και $w\colon X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ δηλαδή ένας ισομορφισμός υπάρχει ο ταυτοτικός μορφισμός $1_Y : Y \longrightarrow Y$ ο οποίος ως ισομορφισμός ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και ο μορφισμός $g = f \circ w^{-1} : X' \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε $(f \circ w^{-1}) \circ w = 1_Y \circ f$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, dashed, "1_Y"] \\ X' \arrow[r, dashed, "g = f \circ w^{-1}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Όσον αφορά τον περιορισμό (W3″(b)) θέτουμε $Y' = Y$. Έτσι, εάν $f\colon Y \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και $w\colon X' \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ δηλαδή ένας ισομορφισμός υπάρχει ο ταυτοτικός μορφισμός $1_Y : Y \longrightarrow Y$ ο οποίος ως ισομορφισμός ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και ο μορφισμός $g = w^{-1} \circ f : Y \longrightarrow X'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε $f \circ 1_Y = w \circ (w^{-1} \circ f)$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "f"] \\ X' \arrow[u, "w"] & Y \arrow[l, dashed, "g = w^{-1} \circ f"] \arrow[u, dashed, "1_Y"'] \end{tikzcd}$$

Όσον αφορά τον περιορισμό (W4″) ας είναι ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μορφισμός $w\colon W \longrightarrow X$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$

τέτοιος ώστε $f \circ w = g \circ w$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός w ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ έπεται ότι είναι ένας ισομορφισμός. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος μορφισμός $w^{-1} \colon X \longrightarrow W$ ο οποίος είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Συνθέτοντας από τα δεξιά στην τελευταία ισότητα με τον μορφισμό w^{-1} προκύπτει ότι $f = g$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_{Y} από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $1_{\mathrm{Y}} \circ f = 1_Y \circ g$. Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{\mathrm{Y}} \colon Y \longrightarrow Y$ ως ισομορφισμός ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $1_{\mathrm{Y}} \colon Y \longrightarrow Y$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $1_{\mathrm{Y}} \circ f = 1_{\mathrm{Y}} \circ g$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει μορφισμός $t \colon Y \longrightarrow Z$ στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $t \circ f = t \circ g$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός t ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ έπεται ότι είναι ένας ισομορφισμός. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος μορφισμός t^{-1} ο οποίος είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Συνθέτοντας από τα αριστερά στην τελευταία ισότητα με τον μορφισμό t^{-1} προκύπτει ότι $f = g$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_{X} από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $f \circ 1_X = g \circ 1_X$. Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{\mathrm{X}} \colon X \longrightarrow X$ ως ισομορφισμός ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $1_{\mathrm{X}} \colon X \longrightarrow X$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $f \circ 1_{\mathrm{X}} = g \circ 1_{\mathrm{X}}$. Έτσι, αποδείξαμε ότι δοθέντος ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών $f, g \colon X \rightrightarrows Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ υπάρχει ένας μορφισμός $1_X \colon X \longrightarrow X$ ο οποίος ανήκει στην κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $f \circ 1_X = g \circ 1_X$ αν και μόνο αν υπάρχει μορφισμός $1_Y \colon Y \longrightarrow Y$ στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $1_Y \circ f = 1_Y \circ g$.

Ανάλογα με τους Ορισμούς 1.2.32 και 1.2.31 έχουμε τους ακόλουθους Ορισμούς.

Ορισμός 2.3.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, X ένα αντικείμενο της και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της η οποία ικανοποιεί τους δύο πρώτους περιορισμούς του Ορισμού 2.3.4. Η κατηγορία $\mathcal{W}^{\mathbf{X}}$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα ζευγάρια (X', w) όπου X' είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και $w \colon X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.*

2. *Ένας μορφισμός της $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ από το ζεύγος (X', w) στο ζεύγος (X'', w') είναι ένας μορφισμός $h \colon X' \longrightarrow X''$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $h \circ w = w'$ δηλαδή ένας μορφισμός $h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X'')$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[d, "w'"'] & X' \arrow[dl, "h"] \\ X''. & \end{tikzcd}$$

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ και $(X'', w') \longrightarrow (X''', w'')$ επάγει έναν μορφισμό $(X', w) \longrightarrow (X''', w'')$ δηλαδή έναν μορφισμό $h = h_2 \circ h_1 \colon X' \longrightarrow X'''$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ με $h_1 \colon X' \longrightarrow X''$ και $h_2 \colon X'' \longrightarrow X'''$ ο οποίος είναι τέτοιος ώστε $h \circ w = w''$.*

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός ορίζεται κατά προφανή τρόπο.*

Στην κατηγορία $\mathcal{W}^X$ ορίζεται ένας συναρτητής $\alpha^X \colon \mathcal{W}^X \longrightarrow \mathcal{C}$ ως $\alpha^X((X', w)) = X'$ για κάθε αντικείμενο (X', w) στην κατηγορία $\mathcal{W}^X$ και $\alpha^X((X', w) \longrightarrow (X'', w')) = (\, X' \xrightarrow{h} X'' \,)$ για κάθε μορφισμό $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ στην κατηγορία $\mathcal{W}^X$.

Ορισμός 2.3.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, X ένα αντικείμενο της και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της η οποία ικανοποιεί τους δύο πρώτους περιορισμούς του Ορισμού 2.3.4. Η κατηγορία $\mathcal{W}_{\mathbf{X}}$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα ζευγάρια (X', w) όπου X' είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και $w \colon X' \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.*

2. *Ένας μορφισμός της* $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ *από το ζεύγος* (X', w) *στο ζεύγος* (X'', w') *είναι ένας μορφισμός* $h\colon X' \longrightarrow X''$ *στην* $\mathcal{C}$ *τέτοιος ώστε* $w' \circ h = w$ *δηλαδή ένας μορφισμός* $h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X'')$ *τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"'] & X'' \arrow[dl, "w'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών* $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ *και* $(X'', w') \longrightarrow (X''', w'')$ *επάγει έναν μορφισμό* $(X', w) \longrightarrow (X''', w'')$ *δηλαδή έναν μορφισμό* $h = h_2 \circ h_1\colon X' \longrightarrow X'''$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}$ *με* $h_1\colon X' \longrightarrow X''$ *και* $h_2\colon X'' \longrightarrow X'''$ *ο οποίος είναι τέτοιος ώστε* $w'' \circ h = w$.

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός ορίζεται κατά προφανή τρόπο.*

Στην κατηγορία $\mathcal{W}_X$ *ορίζεται ένας συναρτητής* $\alpha_X\colon \mathcal{W}_X \longrightarrow \mathcal{C}$ *ως* $\alpha_X((X', w)) = X'$ *για κάθε αντικείμενο* (X', w) *στην κατηγορία* $\mathcal{W}_X$ *και* $\alpha_X((X', w) \longrightarrow (X'', w')) = (\,X' \xrightarrow{h} X''\,)$ *για κάθε μορφισμό* $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ *στην κατηγορία* $\mathcal{W}_X$.

Παρατήρηση 2.3.9. 1. Οι κατηγορίες $\mathcal{W}^X$ και $\mathcal{W}_X$ είναι πλήρεις υποκατηγορίες των κατηγοριών $\mathcal{C}^X$ και $\mathcal{C}_X$ αντίστοιχα.

2. Στους ορισμούς 2.3.7 και 2.3.8 αντίστοιχα δεν απαιτούμε ο μορφισμός h να ανήκει στην κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$. Ωστόσο υπό ορισμένες προϋποθέσεις αυτό είναι δυνατόν. Πιο συγκεκριμένα, ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής, ορίζουμε την κλάση $\mathcal{W}$ ως εξής:

$$\mathcal{W} = \{f\colon A \longrightarrow B \mid F(f) \text{ είναι ένας ισομορφισμός στην } \mathcal{C}'\}$$

Ας είναι $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{W}^X$. Τότε $h \circ w = w'$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $F(h) \circ F(w) = F(w')$. Οι μορφισμοί w και w' ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου οι μορφισμοί $F(w)$ και $F(w')$ είναι ισομορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι αντίστροφοι μορφισμοί $F(w)^{-1}$ και $F(w')^{-1}$ υπάρχουν και είναι εξίσου ισομορφισμοί από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $F(h) = F(w') \circ F(w)^{-1}$. Έτσι, ο μορφισμός $F(h)$ είναι ένας ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. Ως εκ τούτου ο μορφισμός h ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.
Ανάλογα όσον αφορά τον Ορισμό 2.3.8 ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής, ορίζουμε την κλάση $\mathcal{W}$ ως εξής:

$$\mathcal{W} = \{f\colon A \longrightarrow B \mid F(f) \text{ είναι ένας ισομορφισμός στην } \mathcal{C}'\}$$

Ας είναι $(X', w) \longrightarrow (X'', w')$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{W}_X$. Τότε $w' \circ h = w$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $F(w') \circ F(h) = F(w)$. Οι μορφισμοί w και w' ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου οι μορφισμοί $F(w)$ και $F(w')$ είναι ισομορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι αντίστροφοι μορφισμοί $F(w)^{-1}$ και $F(w')^{-1}$ υπάρχουν και είναι εξίσου ισομορφισμοί από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $F(h) = F(w')^{-1} \circ F(w)$. Έτσι, ο μορφισμός $F(h)$ είναι ένας ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. Ως εκ τούτου ο μορφισμός h ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.

Ορισμός 2.3.10. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *μια κατηγορία. Η κατηγορία* $\mathcal{C}$ *καλείται* **φίλτρο (filtrant)** *εάν πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Η κατηγορία* $\mathcal{C}$ *είναι μη κενή.*

2. *Για οποιαδήποτε αντικείμενα Y και Z της $\mathcal{C}$ υπάρχει αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $Y \longrightarrow X$ και $Z \longrightarrow X$, όπως αναπαρίσταται στο ακόλουθο διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Y \arrow[ur] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

3. *Για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών $f, g \colon Y \rightrightarrows Z$ υπάρχει ένας μορφισμός $h \colon Z \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $h \circ f = h \circ g$, όπως αναπαρίσταται στο ακόλουθο διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "h\circ f = h\circ g"'] & Z \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Ορισμένα παραδείγματα κατηγοριών φίλτρο είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 2.3.11. 1. Ας είναι $\mathcal{W}$ μια δεξιά localizing κλάση. Η κατηγορία $\mathcal{W}^X$ είναι φίλτρο. Πράγματι, ας είναι $w \colon X \longrightarrow X'$ και $w' \colon X \longrightarrow X''$ μορφισμοί οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Τότε σύμφωνα με τον περιορισμό (W3) της δεξιάς localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t \colon X' \longrightarrow X'''$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και μορφισμός $t' \colon X'' \longrightarrow X'''$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε $t' \circ w' = t \circ w$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $w \colon X \longrightarrow X'$ και $t \colon X' \longrightarrow X'''$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον περιορισμό (W2) της δεξιάς localizing κλάσης $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $t \circ w \colon X \longrightarrow X'''$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου το ζευγάρι $(X''', t \circ w)$ αποτελεί αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{W}^X$. Έτσι, η κατηγορία $\mathcal{W}^X$ είναι μη κενή. Κατόπιν, για οποιαδήποτε αντικείμενα (X', w) και (X'', w') της κατηγορίας $\mathcal{W}^X$ υπάρχει αντικείμενο (X''', w'') της $\mathcal{W}^X$ όπου $w'' = t' \circ w' = t \circ w$ και μορφισμοί $(X', w) \longrightarrow (X''', w'')$ και $(X'', w') \longrightarrow (X''', w'')$ όπως αναπαρίσταται στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & (X''', w'') & \\ (X', w) \arrow[ur] & & (X'', w') \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

Τέλος, ας είναι $w \colon X \longrightarrow X'$ και $w' \colon X \longrightarrow X''$ μορφισμοί οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Υποθέτουμε ότι $f, g \colon X' \rightrightarrows X''$ είναι ένα ζεύγος παράλληλων μορφισμών τέτοιο ώστε $f \circ w = g \circ w = w'$. Τότε σύμφωνα με τον περιορισμό (W4) της δεξιάς localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t \colon X'' \longrightarrow W$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $t \circ f = t \circ g$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $w' \colon X \longrightarrow X''$ και $t \colon X'' \longrightarrow W$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον περιορισμό (W2) της δεξιάς localizing κλάσης $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $t \circ w' \colon X \longrightarrow W$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Επομένως, το ζευγάρι $(W, t \circ w')$ είναι αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{W}^X$. Επιπλέον, οι συνθέσεις

$$\begin{tikzcd} (X', w) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (X'', w') \arrow[r, "t"] & (W, t \circ w') \end{tikzcd}$$

συμπίπτουν. Έτσι, συνοψίζοντας για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών $f, g \colon (X', w) \rightrightarrows (X'', w')$ υπάρχει ένας μορφισμός $t \colon (X'', w') \longrightarrow (W, t \circ w')$ τέτοιος ώστε $t \circ f = t \circ g$. Συνεπώς σύμφωνα με τα παραπάνω πληρούνται όλες οι συνθήκες του Ορισμού 2.3.10 γεγονός που εξασφαλίζει ότι η κατηγορία $\mathcal{W}^X$ είναι φίλτρο.

Δυϊκά,

2. Ας είναι $\mathcal{W}$ μια αριστερή localizing κλάση. Η κατηγορία $\mathcal{W}_X$ είναι φίλτρο.

Ορισμός 2.3.12. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, X, Y αντικείμενα της και $\mathcal{W}$ είναι μια δεξιά localizing κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}$. Η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}$ έχει ως αντικείμενα τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και οι μορφισμοί της ορίζονται ως εξής:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X,Y) = \varinjlim_{(Y \longrightarrow Y') \in \mathcal{W}^Y} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') = \varinjlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\alpha^Y).$$

Ορισμός 2.3.13. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, X, Y αντικείμενα της και $\mathcal{W}$ είναι μια αριστερή localizing κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}$. Η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ έχει ως αντικείμενα τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και οι μορφισμοί της ορίζονται ως εξής:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}}(X,Y) = \varinjlim_{(X' \longrightarrow X) \in \mathcal{W}_X} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y) = \varinjlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha_X,Y).$$

Σχόλιο 2.3.14. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις κατηγορίες $\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}$ και $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ με τη χρήση των roofs. Η διαδικασία αυτή μας διευκολύνει ιδιαίτερα καθώς ο ορισμός του συνόλου των μορφισμών στις εν λόγω κατηγορίες είναι απλούστερος.

Λήμμα 2.3.15. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και Z, Y αντικείμενα της.*

1. *Εάν $\mathcal{W}$ είναι μια δεξιά localizing κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}$ και $w\colon X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$, τότε ο μορφισμός w επάγει έναν ισομορφισμό*

$$\circ w\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X',Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X,Y), \quad f \longmapsto f \circ w$$

2. *Εάν $\mathcal{W}$ είναι μια αριστερή localizing κλάση μορφισμών της $\mathcal{C}$ και $w\colon X \longrightarrow X'$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$, τότε ο μορφισμός w επάγει έναν ισομορφισμό*

$$w\circ\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}}(Z,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}}(Z,X'), \quad f \longmapsto w \circ f$$

Απόδειξη. 1. Ας είναι $\mathcal{W}$ μια δεξιά localizing κλάση μορφισμών της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και $w\colon X \longrightarrow X'$ ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$\circ w\colon\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X',Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X,Y), \quad f \longmapsto f \circ w$$

Θα αποδείξουμε ότι:

- <u>Η απεικόνιση $\circ w$ είναι «καλά ορισμένη».</u>
  Ας είναι $f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X',Y)$. Υποθέτουμε ότι $f = g$. Συνθέτοντας από δεξιά στην τελευταία ισότητα με τον μορφισμό w προκύπτει ότι $f \circ w = g \circ w$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης $\circ w$ προκύπτει ότι $(\circ w)(f) = (\circ w)(g)$. Ως εκ τούτου, η απεικόνιση $\circ w$ είναι «καλά ορισμένη».
- <u>Η απεικόνιση $\circ w$ είναι «επί».</u>
  Δοθέντων ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ενός μορφισμού $w\colon X \longrightarrow X'$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον περιορισμό (W3) της δεξιάς localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t'\colon Y' \longrightarrow Y''$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και μορφισμός $e\colon X' \longrightarrow Y''$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y' \arrow[d, dashed, "t'"] & Y \arrow[l, "t"'] \\ X' \arrow[r, dashed, "e"'] & Y'' & \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $e \circ w = t' \circ f$. Από την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης $\circ w$ προκύπτει ότι $(\circ w)(e) = t' \circ f$. Έτσι, αποδείξαμε ότι για κάθε μορφισμό $t' \circ f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X, Y'')$ υπάρχει μορφισμός $e \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X', Y'')$ τέτοιος ώστε $(\circ w)(e) = t' \circ f$ γεγονός που εξασφαλίζει ότι η απεικόνιση $\circ w$ είναι «επί».

- Η απεικόνιση $\circ w$ είναι «1-1».

  Ας είναι $f, g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(X', Y')$. Υποθέτουμε ότι $(\circ w)(f) = (\circ w)(g)$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό της απεικόνισης $\circ w$ προκύπτει ότι $f \circ w = g \circ w$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα από τον περιορισμό (W4) της δεξιάς localizing κλάσης $\mathcal{W}$ προκύπτει ότι υπάρχει μορφισμός $t' \colon Y' \longrightarrow Y''$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $t' \circ f = t' \circ g$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] & X' \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y' \arrow[r, dashed, "t'"] & Y'' \\ & & Y \arrow[u, "t"] & \end{tikzcd}$$

  Όμως, όπως αποδείξαμε παραπάνω η απεικόνιση $\circ t' \colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(Y'', Y') \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}$ (Y', Y') είναι «επί». Έτσι, υπάρχει μορφισμός $p \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}}(Y'', Y')$ τέτοιος ώστε $(\circ t')(p)$ $= 1_{Y'}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης $\circ t'$ από την τελευταία ισότητα έπεται ότι $p \circ t' = 1_{Y'}$. Συνθέτοντας από τα αριστερά με τον μορφισμό p στην ισότητα $t' \circ f = t' \circ g$ και χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{Y'}$ προκύπτει ότι $f = g$. Έτσι, αποδείξαμε ότι εάν $(\circ w)(f) = (\circ w)(g)$ τότε $f = g$ γεγονός που εξασφαλίζει ότι η απεικόνιση $\circ w$ είναι «1-1».

Συνεπώς σύμφωνα με τα παραπάνω η απεικόνιση $\circ w$ είναι ένας ισομορφισμός.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Εν συνεχεία περιγράφουμε τους μορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Πρόταση 2.3.16. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ η τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$. Κάθε μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ αναπαρίσταται ως σύνθεση των μορφισμών $Q(w)^{-1}$ και $Q(f)$ είτε ως σύνθεση των μορφισμών $Q(f)$ και $Q(w)^{-1}$, όπου ο μορφισμός w ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και f είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ η τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την localizing κλάση $\mathcal{W}$. Υποθέτουμε ότι $t \colon X \longrightarrow X'$ και $w \colon X' \longrightarrow X''$ είναι μορφισμοί οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Τότε σύμφωνα με τον περιορισμό (W2$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $w \circ t \colon X \longrightarrow X''$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είναι η τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ έπεται ότι ο μορφισμός $Q(w \circ t)$ και κατ' επέκταση λόγω των ιδιοτήτων που διέπουν τον Q ως συναρτητή, ο μορφισμός $Q(w) \circ Q(t)$ είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος $(Q(w) \circ Q(t))^{-1} = Q(t)^{-1} \circ Q(w)^{-1}$ ο οποίος είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Έτσι, κάθε μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είναι της μορφής:

$$Q(f_1) \circ Q(w_1)^{-1} \circ Q(f_2) \circ Q(w_2)^{-1} \circ \cdots \circ Q(f_n) \circ Q(w_n)^{-1}$$

όπου $w_1, w_2, \ldots, w_n$ είναι μορφισμοί οι οποίοι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Από το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) την localizing κλάση $\mathcal{W}$ για κάθε μορφισμό $f \colon X' \longrightarrow X''$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και $w \colon X' \longrightarrow X''$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $t \colon X \longrightarrow X'$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και μορφισμός $g \colon X \longrightarrow X'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X'' & X' \arrow[l, "f"'] \\
X' \arrow[u, "w"] & X \arrow[l, dashed, "g"] \arrow[u, dashed, "t"']
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $f \circ t = w \circ g$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή Q στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $Q(f) \circ Q(t) = Q(w) \circ Q(g)$. Εφόσον οι μορφισμοί $t\colon X \longrightarrow X'$ και $w\colon X' \longrightarrow X''$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον ορισμό της τοπικοποίησης οι μορφισμοί $Q(t)\colon Q(X) \longrightarrow Q(X')$ και $Q(w)\colon Q(X') \longrightarrow Q(X'')$ είναι ισομορφισμοί στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Ως εκ τούτου υπάρχουν οι αντίστροφοι $Q(t)^{-1}\colon Q(X') \longrightarrow Q(X)$ και $Q(w)^{-1}\colon Q(X'') \longrightarrow Q(X')$ και είναι εξίσου ισομορφισμοί. Συνθέτοντας από αριστερά με τον μορφισμό $Q(w)^{-1}$ και από δεξιά με τον μορφισμό $Q(t)^{-1}$ στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας τις ισότητες $Q(w)^{-1} \circ Q(w) = 1_{Q(X')}$ και $Q(t) \circ Q(t)^{-1} = 1_{Q(X')}$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{Q(X')}$ προκύπτει ότι $Q(w)^{-1} \circ Q(f) = Q(g) \circ Q(t)^{-1}$. Με χρήση μαθηματικής επαγωγής ως προς το n έπεται ότι κάθε μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $Q(f) \circ Q(w)^{-1}$ όπου ο μορφισμός w είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι κάθε μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί ως $Q(w)^{-1} \circ Q(f)$ όπου ο μορφισμός w είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. ■

Σχόλιο 2.3.17. Η Πρόταση 2.3.16 υποδηλώνει ότι κάθε μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ μπορεί να ιδωθεί ως ένα αριστερό ή δεξιό κλάσμα.

Ευθύς αμέσως θα δώσουμε μια περιγραφή των μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ η οποία είναι πιο εύκολη στο να τη διαχειριστούμε και κατά συνέπεια είναι κατάλληλη για υπολογισμούς.

Ορισμός 2.3.18. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της.*

1. *Ένα διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $w\colon Y' \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ καλείται **αριστερό roof (left roof)** *μεταξύ των αντικειμένων X και Y.*

Δυϊκά,

2. *Ένα διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd}
& Y' & \\
X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $t\colon Y \longrightarrow Y'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ καλείται **δεξιό roof (right roof)** *μεταξύ των αντικειμένων X και Y.*

Παρατήρηση 2.3.19. Μεταβαίνοντας από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στη δυϊκή της κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ένα αριστερό roof από το X στο Y μετατρέπεται σε ένα δεξιό roof από το Y στο X και αντίστροφα.

Χάρις στην Παρατήρηση 2.3.19 περιοριζόμαστε στην απόδειξη των ιδιοτήτων των αριστερών roofs καθώς οι ιδιότητες των δεξιών roofs προκύπτουν ως δυϊκές τους.

Ορισμός 2.3.20. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της.*

1. *Δοθέντων δύο αριστερών roofs*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

εάν υπάρχει αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon Z \longrightarrow Y'$, $q\colon Z \longrightarrow Y''$, $t'\colon Z \longrightarrow X$ και $r\colon Z \longrightarrow Y$ με το μορφισμό t' να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Z \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "r"] \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ & Y'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

τότε τα αριστερά roofs καλούνται **ισοδύναμα (equivalent)**.

2. *Δοθέντων δύο δεξιών roofs*

$$\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "w"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y'' & \\ X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$

εάν υπάρχει αντικείμενο W της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon Y' \longrightarrow W$, $q\colon Y'' \longrightarrow W$, $t'\colon X \longrightarrow W$ και $r\colon Y \longrightarrow W$ με το μορφισμό r να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "p"'] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "g"'] & W & Y \arrow[ul, "w"'] \arrow[l, "r"'] \arrow[dl, "t"] \\ & Y'' \arrow[u, "q"] & \end{tikzcd}$$

τότε τα δεξιά roofs καλούνται **ισοδύναμα (equivalent)**.

Παρατήρηση 2.3.21. Μεταβαίνοντας από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στη δυϊκή της κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ τα ισοδύναμα αριστερά roofs μετατρέπονται σε ισοδύναμα δεξιά roofs και αντίστροφα.

Είναι λογικό κάποιος να διερωτηθεί ποιο ήταν το κίνητρο για τη διατύπωση του Ορισμού 2.3.20. Την απάντηση δίνει το ακόλουθο σχόλιο.

Σχόλιο 2.3.22. Δοθείσης μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μιας localizing κλάσης μορφισμών της $\mathcal{W}$ είναι γεγονός ότι για τους μορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ισχύει ότι $Q(f) \circ Q(w)^{-1} = Q(g) \circ Q(t)^{-1}$, όπου οι μορφισμοί w και t ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Ωστόσο, το αποτέλεσμα αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι η ισοδυναμία των αριστερών roofs ορίζεται σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Ορισμού 2.3.20, υπογραμμίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τη σημασία του. Πιο αναλυτικά, ας είναι δύο ισοδύναμα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει ένα αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon Z \longrightarrow Y'$, $q\colon Z \longrightarrow Y''$, $t'\colon Z \longrightarrow X$ και $r\colon Z \longrightarrow Y$ οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Z \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "r"] \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ & Y'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $t' = w \circ p = t \circ q$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είναι τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$, ο μορφισμός $w \circ p$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τις ιδιότητες που διέπουν τον Q ως συναρτητή έπεται ότι ο μορφισμός $Q(w \circ p) = Q(w) \circ Q(p)$ είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Εφόσον ο μορφισμός w ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $Q(w)$ είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος $Q(w)^{-1}$ ο οποίος είναι εξίσου ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Συνθέτοντας από αριστερά στην τελευταία ισότητα με το μορφισμό $Q(w)^{-1}$ και χρησιμοποιώντας την ισότητα $Q(w)^{-1} \circ Q(w) = 1_{Q(Y')}$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{Q(Y')}\colon Q(Y') \longrightarrow Q(Y')$ προκύπτει ότι $Q(p) = Q(w)^{-1} \circ Q(w \circ p)$. Έτσι, ο μορφισμός $Q(p)$ είναι ένας ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι ο μορφισμός $Q(q)$ είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος (2.8) έπεται ότι $f \circ p = g \circ q$ και $w \circ p = t \circ q$. Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες ισότητες, τις ισότητες $Q(p) \circ Q(p)^{-1} = 1_{Q(Y')}$, $(Q(w) \circ Q(p))^{-1} = Q(p)^{-1} \circ Q(w)^{-1}$, $(Q(t) \circ Q(q))^{-1} = Q(q)^{-1} \circ Q(t)^{-1}$, $Q(q) \circ Q(q)^{-1} = 1_{Q(Y'')}$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν τον Q ως συναρτητή καθώς και τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{Q(Y')}\colon Q(Y') \longrightarrow Q(Y')$ και $1_{Q(Y'')}\colon Q(Y'') \longrightarrow Q(Y'')$ προκύπτει ότι:

$$Q(f) \circ Q(w)^{-1} = Q(f) \circ 1_{Q(Y')} \circ Q(w)^{-1} = Q(f) \circ Q(p) \circ Q(p)^{-1} \circ Q(w)^{-1} = Q(f) \circ Q(p) \circ (Q(w) \circ$$

$$\circ Q(p))^{-1} = Q(f \circ p) \circ Q(w \circ p)^{-1} = Q(g \circ q) \circ Q(t \circ q)^{-1} = Q(g) \circ Q(q) \circ Q(q)^{-1} \circ Q(t)^{-1} =$$

$$= Q(g) \circ 1_{Q(Y'')} \circ Q(t)^{-1} = Q(g) \circ Q(t)^{-1}.$$

Εναλλακτικά, για τους μορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ισχύει ότι $Q(w)^{-1} \circ Q(f) = Q(t)^{-1} \circ Q(g)$ όπου οι μορφισμοί w και t ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Η εν λόγω ισότητα είναι απόρροια του γεγονότος ότι η ισοδυναμία των δεξιών roofs ορίζεται σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Ορισμού 2.3.20.

Ο Ορισμός 2.3.20 ορίζει μια σχέση στα αριστερά και στα δεξιά roofs. Το ακόλουθο Λήμμα αποδεικνύει ότι η σχέση η οποία ορίζεται είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Λήμμα 2.3.23. *1. Η σχέση η οποία ορίζεται στο πρώτο σκέλος του Ορισμού 2.3.20 είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί της κλάσης των αριστερών roofs.*

2. Η σχέση η οποία ορίζεται στο δεύτερο σκέλος του Ορισμού 2.3.20 είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί της κλάσης των δεξιών roofs.

Απόδειξη. 1. Θα αποδείξουμε ότι η σχέση η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \quad \backsim \quad \begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

εάν υπάρχει αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon Z \longrightarrow Y'$, $q\colon Z \longrightarrow Y''$, $t'\colon Z \longrightarrow X$ και $r\colon Z \longrightarrow Y$ με το μορφισμό t' να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Z \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "r"] \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ & Y'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των αριστερών roofs. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι η «$\backsim$» είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- **Ανακλαστική**: Το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του.
Πράγματι, υπάρχει αντικείμενο Y' της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $1_{Y'}\colon Y' \longrightarrow Y'$, $w\colon Y' \longrightarrow X$ και $f\colon Y' \longrightarrow Y$ οι οποίοι είναι τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Y' \arrow[l, "w"'] \arrow[r, "f"] \arrow[u, "1_{Y'}"] \arrow[d, "1_{Y'}"'] & Y \\ & Y' \arrow[ul, "w"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $w = w \circ 1_{Y'}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του.

- **Συμμετρική**: Εάν το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

τότε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Υποθέτουμε ότι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon Z \longrightarrow Y'$, $q\colon Z \longrightarrow Y''$, $t'\colon Z \longrightarrow X$ και $r\colon Z \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & Z \arrow[u, "p"] \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"] & Y \\
 & Y'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $t' = w \circ p = t \circ q$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου υπάρχει αντικείμενο Z της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $q\colon Z \longrightarrow Y''$, $p\colon Z \longrightarrow Y'$, $t'\colon Z \longrightarrow X$ και $r\colon Z \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & Z \arrow[u, "q"] \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "p"] & Y \\
 & Y' \arrow[ul, "w"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $t' = t \circ q = w \circ p$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Έτσι, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

- **<u>Μεταβατική</u>**: Εάν το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

και το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

, τότε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Υποθέτουμε ότι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχουν αντικείμενα Z και E της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon Z \longrightarrow Y'$, $q\colon Z \longrightarrow Y''$, $r\colon E \longrightarrow Y''$, $v\colon E \longrightarrow Y'''$, $t'\colon Z \longrightarrow X$, $u'\colon E \longrightarrow X$, $s\colon Z \longrightarrow Y$ και $r'\colon E \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$
\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & Z \arrow[l, "t'"'] \arrow[u, "p"] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "q"] & Y \\
 & Y'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & E \arrow[l, "u'"'] \arrow[u, "r"] \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "v"] & Y \\
 & Y''' \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.9}
$$

και επιπλέον οι μορφισμοί $t' = w \circ p = t \circ q$ και $u' = t \circ r = u \circ v$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$. Θεωρούμε τους μορφισμούς $w \circ p\colon Z \longrightarrow X$ και $t \circ r\colon E \longrightarrow X$. Εφόσον ο μορφισμός $w \circ p\colon Z \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $t \circ r\colon E \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει ένας μορφισμός $z\colon R \longrightarrow Z$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και ένας μορφισμός $\alpha\colon R \longrightarrow E$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$
\begin{tikzcd}
X & Z \arrow[l, "w\circ p"] \\
E \arrow[u, "t\circ r"] & R \arrow[l, dashed, "\alpha"'] \arrow[u, dashed, "z"']
\end{tikzcd}
$$

Ως εκ τούτου $(w \circ p) \circ z = (t \circ r) \circ \alpha$. Θέτουμε $b = q \circ z\colon R \longrightarrow Y''$ και $c = r \circ \alpha\colon R \longrightarrow Y''$. Χρησιμοποιώντας την ισότητα $t \circ q = w \circ p$ καθώς και τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:

$$t \circ b = t \circ q \circ z = w \circ p \circ z = t \circ r \circ \alpha = t \circ c.$$

Ως εκ τούτου σύμφωνα με τον περιορισμό (W4″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει ένας μορφισμός $w'\colon T \longrightarrow R$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $b \circ w' = c \circ w'$. Εν συνεχεία θέτουμε $x = p \circ z \circ w'$ και $y = v \circ \alpha \circ w'$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $w \circ p = t \circ q$, $b = q \circ z$, $t \circ b = t \circ c$, $c = r \circ \alpha$ και $t \circ r = u \circ v$ καθώς και τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι:

$$w\circ x = w\circ p\circ z\circ w' = t\circ q\circ z\circ w' = t\circ b\circ w' = t\circ c\circ w' = t\circ r\circ \alpha\circ w' = u\circ v\circ \alpha\circ w' = u\circ y.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $w \circ p\colon Z \longrightarrow X$, $z\colon R \longrightarrow Z$ και $w'\colon T \longrightarrow R$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον περιορισμό (W2″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $w\circ x = w\circ p\circ z\circ w'$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Λόγω της μεταθετικότητας των διαγραμμάτων (2.9) προκύπτει ότι $h \circ v = g \circ r$ και $g \circ q = f \circ p$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $y = v \circ \alpha \circ w'$, $c = r \circ \alpha$, $c \circ w' = b \circ w'$, $b = q \circ z$ καθώς και τις τελευταίες ισότητες λαμβάνουμε ότι:

$$h\circ y = h\circ v\circ \alpha\circ w' = g\circ r\circ \alpha\circ w' = g\circ c\circ w' = g\circ b\circ w' = g\circ q\circ z\circ w' = f\circ p\circ z\circ w' = f\circ x$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει αντικείμενο T της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $x = p \circ z \circ w'$, $y = v \circ \alpha \circ w'$, $e = w \circ x = u \circ y\colon T \longrightarrow X$ και $e' = f \circ x = h \circ y\colon T \longrightarrow Y$

τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & T \arrow[l, "e"'] \arrow[r, "e'"] \arrow[u, "x"] \arrow[d, "y"'] & Y \\ & Y''' \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ισχύει ότι ο μορφισμός $e = w \circ x = u \circ y$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Έτσι, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Εν συνεχεία αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών και δεξιών roofs. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένας ισομορφισμός μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}^{\mathbf{l}}_{\mathcal{W}}$ και $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}_{\mathcal{W}}$ που θα ορίσουμε μετέπειτα, αυτή τη φορά με χρήση roofs.

Πρόταση 2.3.24. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση της. Υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών και δεξιών roofs μεταξύ δύο αντικειμένων στην κατηγορία $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ένα αριστερό roof μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του περιορισμού (W3″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $g\colon X \longrightarrow Y''$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμός $t\colon Y \longrightarrow Y''$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ δηλαδή ένα δεξιό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' & \\ X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\ X \arrow[r, dashed, "g"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $g \circ w = t \circ f$. Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & Y''' & \\ X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"'] \end{tikzcd}$$

ένα άλλο δεξιό roof μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, dashed, "t'"] \\ X \arrow[r, dashed, "g'"'] & Y''' \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $g' \circ w = t' \circ f$. Έτσι, μέχρις στιγμής αποδείξαμε ότι δύο δεξιά roofs αντιστοιχούν σε ένα αριστερό roof. Από το πρώτο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $u' \colon Y''' \longrightarrow Z$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $u \colon Y'' \longrightarrow Z$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t'"'] & Y'' \arrow[d, dashed, "u"] \\ Y''' \arrow[r, dashed, "u'"'] & Z \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $u' \circ t' = u \circ t$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $g \circ w = t \circ f$, $g' \circ w = t' \circ f$ καθώς και την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$u \circ g \circ w = u \circ t \circ f = u' \circ t' \circ f = u' \circ g' \circ w.$$

Τότε, σύμφωνα με τον περιορισμό (W4$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει μορφισμός $v \colon Z \longrightarrow E$ ο οποίος ανήκει στην κλάση μορφισμών $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $v \circ u \circ g = v \circ u' \circ g'$. Συνθέτοντας από αριστερά με το μορφισμό $v \colon Z \longrightarrow E$ στην ισότητα $u' \circ t' = u \circ t$ προκύπτει ότι $v \circ u' \circ t' = v \circ u \circ t$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $u \colon Y'' \longrightarrow Z$ και $t \colon Y \longrightarrow Y''$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον περιορισμό (W2$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ η σύνθεση $u \circ t \colon Y \longrightarrow Z$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Επιπλέον, ο μορφισμός $v \colon Z \longrightarrow E$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Τότε, και πάλι σύμφωνα με τον περιορισμό (W2$''$) η σύνθεση $v \circ u \circ t = v \circ u' \circ t' \colon Y \longrightarrow E$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει αντικείμενο E της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $v \circ u \colon Y'' \longrightarrow E$, $v \circ u' \colon Y''' \longrightarrow E$, $r = v \circ u \circ g = v \circ u' \circ g' \colon X \longrightarrow E$ και

$r' = v \circ u \circ t = v \circ u' \circ t'$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' \arrow[d, "v\circ u"] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "g'"'] & E & Y \arrow[ul, "t"'] \arrow[l, "r'"'] \arrow[dl, "t'"] \\
 & Y''' \arrow[u, "v\circ u'"'] &
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $r' = v \circ u \circ t = v \circ u' \circ t'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου τα δεξιά roofs

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' & \\
X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y''' & \\
X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"']
\end{tikzcd}$$

μεταξύ των αντικειμένων X και Y είναι ισοδύναμα. Κατ' αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια καλά ορισμένη απεικόνιση από τα αριστερά roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y στις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση η οποία ορίστηκε παραπάνω είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Ας είναι

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "w'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

δύο ισοδύναμα αριστερά roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Τότε υπάρχει αντικείμενο W της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $e\colon W \longrightarrow Y'$,$e'\colon W \longrightarrow P$, $q\colon W \longrightarrow X$, $q'\colon W \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & W \arrow[l, "q"'] \arrow[r, "q'"] \arrow[u, "e"] \arrow[d, "e'"'] & Y \\
 & P \arrow[ul, "w'"] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $q = w \circ e = w' \circ e'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Δοθέντων των τελευταίων αριστερών roofs σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχουν δεξιά roofs ας είναι

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' & \\
X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y''' & \\
X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"']
\end{tikzcd}$$

μεταξύ των αντικειμένων X και Y τέτοια ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\ X \arrow[r, dashed, "g"'] & Y'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "w'"'] & Y \arrow[d, dashed, "t'"] \\ X \arrow[r, dashed, "g'"'] & Y''' \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $g \circ w = t \circ f$ και $g' \circ w' = t' \circ f'$. Συνθέτοντας από τα δεξιά στις τελευταίες ισότητες με τους μορφισμούς e και e' αντίστοιχα προκύπτει ότι $g \circ w \circ e = t \circ f \circ e$ και $g' \circ w' \circ e' = t' \circ f' \circ e'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τελευταίες ισότητες προκύπτουν τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f \circ e"] \arrow[d, "w \circ e"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\ X \arrow[r, dashed, "g"'] & Y'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "f' \circ e'"] \arrow[d, "w' \circ e'"'] & Y \arrow[d, dashed, "t'"] \\ X \arrow[r, dashed, "g'"'] & Y''' \end{tikzcd}.$$

Έτσι, τα δεξιά roofs

$$\begin{tikzcd} & Y'' & \\ X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y''' & \\ X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"'] \end{tikzcd}$$

μεταξύ των αντικειμένων X και Y αντιστοιχούν στο ίδιο αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w \circ e = w' \circ e'"'] \arrow[dr, "f \circ e = f' \circ e'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της απόδειξης τα δεξιά roofs

$$\begin{tikzcd} & Y'' & \\ X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y''' & \\ X \arrow[ur, "g'"] & & Y \arrow[ul, "t'"'] \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι σταθερή στις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Ως εκ τούτου υπάρχει μια καλά ορισμένη απεικόνιση από τις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y στις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Μεταβαίνοντας από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ τα αριστερά roofs μετατρέπονται σε δεξιά roofs και αντίστροφα. Ως εκ τούτου υπάρχει μια απεικόνιση η οποία προκύπτει κατ' ανάλογο τρόπο από τις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y στις κλάσεις ισοδυναμίας των αριστερών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y. Επομένως, ορίζουμε

$$\phi\colon \{\text{αριστερά roofs}\} \longrightarrow \{\text{δεξιά roofs}\}$$

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

και

$$\psi\colon \{\text{δεξιά roofs}\} \longrightarrow \{\text{αριστερά roofs}\}$$

$$\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι οι απεικονίσεις

$$\phi\colon \{\text{αριστερά roofs}\} \longrightarrow \{\text{δεξιά roofs}\} \quad \text{και} \quad \psi\colon \{\text{δεξιά roofs}\} \longrightarrow \{\text{αριστερά roofs}\}$$

είναι αντίστροφες η μια της άλλης.

Για κάθε δεξιό roof $\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$ έχουμε:

- $$(\phi\circ\psi)\left(\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}\right) = \phi\left(\psi\left(\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}\right)\right) =$$

$$= \phi\left(\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

Για κάθε αριστερό roof $\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$ έχουμε:

- $$(\psi\circ\phi)\left(\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right) = \psi\left(\phi\left(\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right)\right) =$$

$$= \psi\left(\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\mathsf{id}\left(\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "w"] & & Y \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

και

$$\mathsf{id}'\left(\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

όπου $\mathsf{id}\colon \{\text{δεξιά roofs}\} \longrightarrow \{\text{δεξιά roofs}\}$ και $\mathsf{id}'\colon \{\text{αριστερά roofs}\} \longrightarrow \{\text{αριστερά roofs}\}$ είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις οι οποίες στέλνουν τις κλάσεις ισοδυναμίας των δεξιών roofs και αντίστοιχα των αριστερών roofs στον εαυτό τους. Έτσι θα έχουμε ότι $\phi \circ \psi = \mathsf{id}$ και $\psi \circ \phi = \mathsf{id}'$. Ως εκ τούτου η απεικόνιση ϕ είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη την $\phi^{-1} = \psi$. Επομένως, υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών και δεξιών roofs μεταξύ δύο αντικειμένων X και Y στην κατηγορία $\mathcal{C}$. ■

Κατόπιν ορίζουμε την σύνθεση των κλάσεων των αριστερών και δεξιών roofs.

Ορισμός 2.3.25. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της.*

1. *Ας είναι*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

δύο αριστερά roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y και Y και Z αντίστοιχα. Η **σύνθεση (composition)** *τους είναι ένα αριστερό roof*

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w\circ e"'] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο προκύπτει από το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $e\colon W \longrightarrow Y'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και ο μορφισμός $h\colon W \longrightarrow Y''$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Δυϊκά,

2. *Ας είναι*

$$\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "w"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y'' & \\ Y \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$

δύο δεξιά roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y, και των Y και Z αντίστοιχα. Η **σύνθεση (composition)** *τους είναι ένα δεξιό roof*

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "h\circ f"] & & Z \arrow[ul, "t\circ e"'] \end{tikzcd}$$

το οποίο προκύπτει από το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & W & & \\ & Y' \arrow[ur, "h"] & & Y'' \arrow[ul, "e"'] & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "w"'] \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $e\colon Y'' \longrightarrow W$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και ο μορφισμός $h\colon Y' \longrightarrow W$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Παρατήρηση 2.3.26. Η ύπαρξη του αντικειμένου W της κατηγορίας $\mathcal{C}$, του μορφισμού $e\colon W \longrightarrow Y'$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και του μορφισμού $h\colon W \longrightarrow Y''$ ο οποίος είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ στο πρώτο σκέλος του Ορισμού 2.3.25 εξασφαλίζεται από το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης μορφισμών $\mathcal{W}$. Δυϊκά, η ύπαρξη του αντικειμένου W της κατηγορίας $\mathcal{C}$, του μορφισμού $e\colon Y'' \longrightarrow W$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και του μορφισμού $h\colon Y' \longrightarrow W$ ο οποίος είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ στο δεύτερο σκέλος του Ορισμού 2.3.25 εξασφαλίζεται από το πρώτο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης μορφισμών $\mathcal{W}$.

Η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού (αντίστοιχα δεξιού) roof που προκύπτει είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αντικειμένου W και των μορφισμών e και h που αναφέραμε στον Ορισμό 2.3.25 όπως υποδηλώνει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.3.27. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση της.*

1. *Η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof* $\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w\circ e"'] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$ *είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αντικειμένου W και των μορφισμών $e\colon W \longrightarrow Y'$ και $h\colon W \longrightarrow Y''$.*

2. *Η κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof* $\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "h\circ f"] & & Z \arrow[ul, "t\circ e"'] \end{tikzcd}$ *είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αντικειμένου W και των μορφισμών $e\colon Y'' \longrightarrow W$ και $h\colon Y' \longrightarrow W$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "w''"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$ ένα αριστερό roof το οποίο είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει αντικείμενο V της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $v\colon V \longrightarrow Y'$, $v'\colon V \longrightarrow Y'''$, $\phi\colon V \longrightarrow X$ και $\phi'\colon V \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & V \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\phi'"] \arrow[u, "v"] \arrow[d, "v'"'] & Y \\ & Y''' \arrow[ul, "w''"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $\phi = w \circ v = w'' \circ v'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Συνθέτουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "w''"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο W' στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $e'\colon W' \longrightarrow Y'''$ και $h'\colon W' \longrightarrow Y''$ με τον μορφισμό e' να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό h να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & & W' \arrow[dl, "e'"'] \arrow[dr, "h'"] & & \\ & Y''' \arrow[dl, "w''"'] \arrow[dr, "f'"] & & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Ως εκ τούτου προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "w''\circ e'"'] \arrow[dr, "g\circ h'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Εφόσον $v\colon V \longrightarrow Y'$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $e\colon W \longrightarrow Y'$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο H στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $h_1\colon H \longrightarrow V$ και $\alpha\colon H \longrightarrow W$

με τον μορφισμό h_1 να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό α να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$, τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y' & V \arrow[l, "v"'] \\ W \arrow[u, "e"] & H \arrow[l, dashed, "\alpha"'] \arrow[u, dashed, "h_1"'] \end{tikzcd}$$

Έτσι, $v \circ h_1 = e \circ \alpha$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $v' \colon V \longrightarrow Y'''$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $e' \colon W \longrightarrow Y'''$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο H' στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $h_1' \colon H' \longrightarrow V$ και $\alpha' \colon H' \longrightarrow W'$ με τον μορφισμό h_1' να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό α' να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y''' & V \arrow[l, "v'"'] \\ W' \arrow[u, "e'"] & H' \arrow[l, dashed, "\alpha'"'] \arrow[u, dashed, "h_1'"'] \end{tikzcd}$$

Έτσι, $v' \circ h_1' = e' \circ \alpha'$. Εν συνεχεία, εφόσον ο μορφισμός $h_1' \colon H' \longrightarrow V$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $h_1 \colon H \longrightarrow V$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και πάλι σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο R στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $r' \colon R \longrightarrow H'$ και $r \colon R \longrightarrow H$ με τον μορφισμό r' να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό r να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} V & H' \arrow[l, "h_1'"'] \\ H \arrow[u, "h_1"] & R \arrow[l, dashed, "r"'] \arrow[u, dashed, "r'"'] \end{tikzcd}$$

Έτσι, $h_1' \circ r' = h_1 \circ r$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $v \circ h_1 = e \circ \alpha$, $w \circ v = w'' \circ v'$ και $v' \circ h_1' = e' \circ \alpha'$ καθώς και την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$w \circ e \circ \alpha \circ r = w \circ v \circ h_1 \circ r = w'' \circ v' \circ h_1' \circ r' = w'' \circ e' \circ \alpha' \circ r'.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $r' \colon R \longrightarrow H'$, $h_1' \colon H' \longrightarrow V$ και $w'' \circ v' \colon V \longrightarrow X$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον περιορισμό (W2$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $w'' \circ v' \circ h_1' \circ r' \colon R \longrightarrow X$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $w \circ e \circ \alpha \circ r = w'' \circ v' \circ h_1' \circ r' \colon R \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Συνθέτουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο W στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $e\colon W \longrightarrow Y'$ και $h\colon W \longrightarrow Y''$ με τον μορφισμό e να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό h να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

Ως εκ τούτου προκύπτει το ακόλουθο αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w\circ e"'] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ X & & Z. \end{tikzcd}$$

Λόγω της μεταθετικότητας του διαγραμμάτων (2.10), (2.11) και (2.12) προκύπτουν αντίστοιχα οι ισότητες $f \circ v = f' \circ v'$, $f' \circ e' = t \circ h'$ και $t \circ h = f \circ e$. Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες ισότητες καθώς και τις ισότητες $e \circ \alpha = v \circ h_1$, $h_1 \circ r = h_1' \circ r'$ και $v' \circ h_1' = e' \circ \alpha'$ προκύπτει ότι:

$$t \circ h \circ \alpha \circ r = f \circ e \circ \alpha \circ r = f \circ v \circ h_1 \circ r = f' \circ v' \circ h_1' \circ r' = f' \circ e' \circ \alpha' \circ r' = t \circ h' \circ \alpha' \circ r'.$$

Ως εκ τούτου σύμφωνα με τον περιορισμό (W4″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο Q της $\mathcal{C}$ και μορφισμός $q\colon Q \longrightarrow R$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε $h \circ \alpha \circ r \circ q = h' \circ \alpha' \circ r' \circ q$. Εν συνεχεία συνθέτοντας από τα δεξιά με το μορφισμό q στην ισότητα $w \circ e \circ \alpha \circ r = w'' \circ e' \circ \alpha' \circ r'$ έπεται ότι $w \circ e \circ \alpha \circ r \circ q = w'' \circ e' \circ \alpha' \circ r' \circ q$. Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι οι μορφισμοί $q\colon Q \longrightarrow R$ και $w \circ e \circ \alpha \circ r\colon R \longrightarrow X$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ από τον περιορισμό (W2″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ η σύνθεση $w \circ e \circ \alpha \circ r \circ q = w'' \circ e' \circ \alpha' \circ r' \circ q\colon Q \longrightarrow X$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Θέτουμε $b = \alpha \circ r \circ q\colon Q \longrightarrow W$ και $b' = \alpha' \circ r' \circ q\colon Q \longrightarrow W'$. Έτσι, η τελευταία ισότητα μετατρέπεται στην $w \circ e \circ b = w'' \circ e' \circ b'$. Ο μορφισμός $w \circ e \circ b = w'' \circ e' \circ b'$ όπως είναι αναμενόμενο ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Κατόπιν, συνθέτοντας από αριστερά με το μορφισμό $g\colon Y'' \longrightarrow Z$ στην ισότητα $h \circ \alpha \circ r \circ q = h' \circ \alpha' \circ r' \circ q$ λαμβάνουμε την ισότητα $g \circ h \circ \alpha \circ r \circ q = g \circ h' \circ \alpha' \circ r' \circ q$ και κατ΄ επέκταση την ισότητα $g \circ h \circ b = g \circ h' \circ b'$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει αντικείμενο Q της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $b = \alpha \circ r \circ q\colon Q \longrightarrow W$, $b' = \alpha' \circ r' \circ q\colon Q \longrightarrow W'$, $\psi = w \circ e \circ b = w'' \circ e' \circ b'\colon Q \longrightarrow X$ και $\psi' = g \circ h \circ b = g \circ h' \circ b'\colon Q \longrightarrow Z$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w\circ e"'] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ X & Q \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi'"] \arrow[u, "b"] \arrow[d, "b'"'] & Z \\ & W' \arrow[ul, "w''\circ e'"] \arrow[ur, "g\circ h'"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $\psi = w \circ e \circ b = w'' \circ e' \circ b' \colon Q \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Έτσι, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w\circ e"'] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & W' \arrow[dl, "w''\circ e'"'] \arrow[dr, "g\circ h'"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Αντίστοιχα, ας είναι $\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$ ένα αριστερό roof το οποίο είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof $\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$ Τότε υπάρχει αντικείμενο V της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $v \colon V \longrightarrow Y''$, $v' \colon V \longrightarrow Y'''$, $\mu \colon V \longrightarrow Y$ και $\mu' \colon V \longrightarrow Z$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & V \arrow[l, "\mu"'] \arrow[r, "\mu'"] \arrow[u, "v"] \arrow[d, "v'"'] & Z \\ & Y''' \arrow[ul, "t'"] \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $\mu = t \circ v = t' \circ v'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Εφόσον ο μορφισμός $f \colon Y' \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $t \circ v \colon V \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο U της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u \colon U \longrightarrow Y'$ και $\alpha \colon U \longrightarrow V$ με τον μορφισμό u να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό α να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y & Y' \arrow[l, "f"] \\ V \arrow[u, "t\circ v"] & U \arrow[l, dashed, "\alpha"] \arrow[u, dashed, "u"'] \end{tikzcd}$$

Έτσι, $f \circ u = t \circ v \circ \alpha$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v\circ\alpha"] & & \\
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου η σύνθεση των αριστερών roofs

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
 & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}$$

είναι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "w\circ u"'] \arrow[dr, "g\circ v\circ\alpha"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $f\colon Y' \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $t' \circ v'\colon V \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο U της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u\colon U \longrightarrow Y'$ και $\alpha\colon U \longrightarrow V$ με τον μορφισμό u να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό α να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
Y & Y' \arrow[l, "f"] \\
V \arrow[u, "t'\circ v'"] & U \arrow[l, dashed, "\alpha"] \arrow[u, dashed, "u"']
\end{tikzcd}$$

Έτσι, $f \circ u = t' \circ v' \circ \alpha$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v'\circ\alpha"] & & \\
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & Y''' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου η σύνθεση των αριστερών roofs

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

είναι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w \circ u"'] \arrow[dr, "g' \circ v' \circ \alpha"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο είναι πανομοιότυπο με το αριστερό roof
$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w \circ u"'] \arrow[dr, "g \circ v \circ \alpha"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$
Επομένως, η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof
$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w \circ e"'] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$
είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αντικειμένου W και των μορφισμών $e\colon W \longrightarrow Y'$ και $h\colon W \longrightarrow Y''$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Παρατήρηση 2.3.28. 1. Στην Πρόταση 2.3.27 αποδείξαμε ότι η κλάση ισοδυναμίας ενός αριστερού (αντίστοιχα δεξιού) roof το οποίο προκύπτει ως σύνθεση δυο αριστερών (αντίστοιχα δεξιών) roof είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αντικειμένου W και των μορφισμών e και h. Γενικότερα, οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ανεξάρτητες των αντικειμένων και των μορφισμών, ωστόσο σε σπάνιες περιπτώσεις μπορεί και να εξαρτώνται.

2. Η απόδειξη της Πρότασης 2.3.27 υποδηλώνει ότι η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "w \circ e"'] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

εξαρτάται μόνο από τις κλάσεις ισοδυναμίας του πρώτου και του δεύτερου αριστερού roof των οποίων προκύπτει ως σύνθεση. Δυϊκά, η κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "h \circ f"] & & Z \arrow[ul, "t \circ e"'] \end{tikzcd}$$

εξαρτάται μόνο από τις κλάσεις ισοδυναμίας του πρώτου και του δεύτερου αριστερού roof των οποίων προκύπτει ως σύνθεση.

3. Η διαδικασία η οποία ακολουθήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 2.3.27 ορίζει μια απεικόνιση από το γινόμενο των συνόλων των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y και των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs μεταξύ των αντικειμένων Y και Z στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Z. Χωρίς βλάβη της γενικότητας η εν λόγω απεικόνιση καλείται σύνθεση των αριστερών roofs. Δυϊκά, ορίζεται μια απεικόνιση από το γινόμενο των συνόλων των κλάσεων ισοδυναμίας των δεξιών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Y και των κλάσεων ισοδυναμίας των δεξιών roofs μεταξύ των αντικειμένων Y και Z στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των δεξιών roofs μεταξύ των αντικειμένων X και Z. Χωρίς βλάβη της γενικότητας η εν λόγω απεικόνιση καλείται σύνθεση των δεξιών roofs.

Πρόταση 2.3.29. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της. Η σύνθεση των roofs είναι συμβατή με την «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ των αριστερών και δεξιών roofs.*

Απόδειξη. Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & Y''' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

δύο αριστερά roofs. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του περιορισμού (W3″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχουν δεξιά roofs

$$\begin{tikzcd} & U & \\ X \arrow[ur, "\alpha"] & & Y \arrow[ul, "u"'] \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & V & \\ Y \arrow[ur, "b"] & & Z \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα τέτοια ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[d, dashed, "u"] \\ X \arrow[r, dashed, "\alpha"'] & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y''' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[d, dashed, "v"] \\ Y \arrow[r, dashed, "b"'] & V \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $\alpha \circ w = u \circ f$ και $b \circ t = v \circ g$. Συνθέτουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y''' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & Z
\end{tikzcd}$$

και το δεξιό roof

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
X \arrow[ur, "\alpha"] & & Y \arrow[ul, "u"']
\end{tikzcd}$$

με το δεξιό roof

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
Y \arrow[ur, "b"] & & Z \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχουν αντικείμενα Q και R της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $q\colon Q \longrightarrow Y'$, $h\colon Q \longrightarrow Y'''$, $r\colon V \longrightarrow R$ και $c\colon U \longrightarrow R$ με τους μορφισμούς q και r να ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιοι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
 & & Q \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & Y''' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & R & & \\
 & U \arrow[ur, "c"] & & V \arrow[ul, "r"'] & \\
X \arrow[ur, "\alpha"] & & Y \arrow[ul, "u"'] \arrow[ur, "b"] & & Z \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd} \tag{2.13}$$

Ως εκ τούτου προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "w \circ q"'] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\
X & & Z
\end{tikzcd}$$

το οποίο αναπαριστά τη σύνθεση των παραπάνω αριστερών roofs και αντίστοιχα το δεξιό roof

$$\begin{tikzcd}
 & R & \\
X \arrow[ur, "c \circ \alpha"] & & Z \arrow[ul, "r \circ v"']
\end{tikzcd}$$

το οποίο με τη σειρά του αναπαριστά τη σύνθεση των αντίστοιχων δεξιών roofs. Λόγω της μεταθετικότητας των διαγραμμάτων (2.13) προκύπτουν αντίστοιχα οι ισότητες $f \circ q = t \circ h$ και $c \circ u = r \circ b$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $\alpha \circ w = u \circ f$ και $b \circ t = v \circ g$ καθώς και τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι

$$c \circ \alpha \circ w \circ q = c \circ u \circ f \circ q = r \circ b \circ t \circ h = r \circ v \circ g \circ h.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "g\circ h"] \arrow[d, "w\circ q"'] & Z \arrow[d, "r\circ v"] \\ X \arrow[r, "c\circ \alpha"'] & R \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "w\circ q"'] \arrow[dr, "g\circ h"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

αντιστοιχεί στο δεξιό roof

$$\begin{tikzcd} & R & \\ X \arrow[ur, "c\circ \alpha"] & & Z. \arrow[ul, "r\circ v"'] \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, η σύνθεση των roofs είναι συμβατή με την «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ των αριστερών και δεξιών roofs. ■

Ανάλογα με τη σύνθεση των μορφισμών, η σύνθεση των αριστερών (αντίστοιχα δεξιών) roofs είναι προσεταιριστική όπως υποδηλώνει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.3.30. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της.*

1. *Η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs είναι προσεταιριστική.*

2. *Η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των δεξιών roofs είναι προσεταιριστική.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι

(αʹ)
$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

(βʹ)
$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

(γʹ)
$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Z & & W \end{tikzcd}$$

τρία αριστερά roofs μεταξύ των αντικειμένων X, Y, Z και W της κατηγορίας $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε να ορίζεται η μεταξύ τους σύνθεση. Θα αποδείξουμε ότι η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των δύο πρώτων αριστερών roofs σύνθεση με την κλάση ισοδυναμίας του τρίτου αριστερού roof ισούται με τη σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας του πρώτου αριστερού roof με τη σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των δύο τελευταίων αριστερών roofs, δηλαδή

$$\left(\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Z & & W \end{tikzcd}\right)\circ$$

$$\circ\left(\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd} \circ \begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right) =$$

$$= \left(\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Z & & W \end{tikzcd} \circ \begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}\right)\circ$$

$$\circ\left(\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right)$$

Εφόσον ο μορφισμός $f\colon U \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $u\colon V \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο M της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $m\colon M \longrightarrow U$ και $k\colon M \longrightarrow V$ με τον μορφισμό m να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό k να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y & U \arrow[l, "f"'] \\ V \arrow[u, "u"] & M \arrow[l, dashed, "k"] \arrow[u, dashed, "m"'] \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $g\colon V \longrightarrow Z$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $v\colon Q \longrightarrow Z$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο N της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $n\colon N \longrightarrow V$ και $l\colon N \longrightarrow Q$ με τον μορφισμό n να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό l να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Z & V \arrow[l, "g"'] \\ Q \arrow[u, "v"] & N \arrow[l, dashed, "l"] \arrow[u, dashed, "n"'] \end{tikzcd}$$

Εφόσον ο μορφισμός $k\colon M \longrightarrow V$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $n\colon N \longrightarrow V$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ για ακόμη μια φορά σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο P της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon P \longrightarrow M$ και $q\colon P \longrightarrow N$ με τον μορφισμό p να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό q να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} V & M \arrow[l, "k"] \\ N \arrow[u, "n"] & P \arrow[l, dashed, "q"] \arrow[u, dashed, "p"'] \end{tikzcd}$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & & \\ & & M \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "k"] & & N \arrow[dl, "n"'] \arrow[dr, "l"] & & \\ & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "g"] & & Q \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X & & Y & & Z & & W \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το τελευταίο μεταθετικό διάγραμμα το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "w \circ m"'] \arrow[dr, "g \circ k"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

αντιπροσωπεύει την σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Έτσι, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "w \circ m \circ p"'] \arrow[dr, "h \circ l \circ q"] & \\ X & & W \end{tikzcd}$$

αντιπροσωπεύει την σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "w \circ m"'] \arrow[dr, "g \circ k"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Z & & W \end{tikzcd}$$

Αντίστοιχα, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "u \circ n"'] \arrow[dr, "h \circ l"] & \\ Y & & W \end{tikzcd}$$

αντιπροσωπεύει την σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Z & & W \end{tikzcd}$$

Έτσι, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "w \circ m \circ p"'] \arrow[dr, "h \circ l \circ q"] & \\ X & & W \end{tikzcd}$$

αντιπροσωπεύει την σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "u \circ n"'] \arrow[dr, "h \circ l"] & \\ Y & & W \end{tikzcd}$$

Συνεπώς η ζητούμενη ισότητα ικανοποιείται, γεγονός που αποδεικνύει ότι η σύνθεση των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs είναι προσεταιριστική.

2. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.29 η σύνθεση των roofs είναι συμβατή με την «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των αριστερών και δεξιών roofs. Ως εκ τούτου η προσεταιριστικότητα της σύνθεσης των αριστερών roofs που αποδείξαμε στο πρώτο σκέλος της παρούσας πρότασης έχει ως συνέπεια την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης των δεξιών roofs. ∎

Σύμβαση: Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και X ένα αντικείμενο της. Συμβολίζουμε με 1_X την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

και με $\widetilde{1_X}$ την κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \arrow[ur, "1_X"] & & X \arrow[ul, "1_X"'] \end{tikzcd} .$$

Πρόταση 2.3.31. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της, ψ η κλάση ισοδυναμίας των αριστερών roofs και $\widetilde{\psi}$ η κλάση ισοδυναμίας των δεξιών roofs.*

1. *Η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας 1_X με την κλάση ισοδυναμίας ψ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας ψ.*
2. *Η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας ψ με την κλάση ισοδυναμίας 1_Y ισούται με την κλάση ισοδυναμίας ψ.*
3. *Η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας $\widetilde{\psi}$ με την κλάση ισοδυναμίας $\widetilde{1_X}$ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας $\widetilde{\psi}$.*
4. *Η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας $\widetilde{1_Y}$ με την κλάση ισοδυναμίας $\widetilde{\psi}$ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας $\widetilde{\psi}$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

ένας αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας 1_X και

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ένας αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας ψ. Εφόσον ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X \colon X \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $w \colon Y' \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο Y' της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $w \colon Y' \longrightarrow X$ και $1_{Y'} \colon Y' \longrightarrow Y'$ με τον μορφισμό w να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον ταυτοτικό μορφισμό $1_{Y'}$ να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} X & X \arrow[l, "1_X"] \\ Y' \arrow[u, "w"] & Y' \arrow[l, dashed, "1_{Y'}"] \arrow[u, dashed, "w"'] \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_{Y'}"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & X & & Y \end{tikzcd}$$

Έτσι, προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "1_X\circ w"'] \arrow[dr, "f\circ 1_{Y'}"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τη σύνθεση του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} .$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_X\colon X \longrightarrow X$ του X και του ταυτοτικού μορφισμού $1_{Y'}\colon Y' \longrightarrow Y'$ του Y' το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "1_X\circ w"'] \arrow[dr, "f\circ 1_{Y'}"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ταυτίζεται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} .$$

Ως εκ τούτου η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας 1_X με την κλάση ισοδυναμίας ψ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας ψ.

2. Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

ένας αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας 1_Y και

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ένας αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας ψ. Εφόσον ο μορφισμός $f\colon Y' \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο ταυτοτικός μορφισμός $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο Y' της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $1_{Y'}\colon Y' \longrightarrow Y'$ και $f\colon Y' \longrightarrow Y$

με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_{Y'}$ να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό f να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
Y & Y' \arrow[l, "f"] \\
Y \arrow[u, "1_Y"] & Y' \arrow[l, dashed, "f"] \arrow[u, dashed, "1_{Y'}"']
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"] & \\
X & & Y & & Y
\end{tikzcd}$$

Έτσι, προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w \circ 1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_Y \circ f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

το οποίο αντιπροσωπεύει την σύνθεση του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"] & \\
Y & & Y
\end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ του Y και του ταυτοτικού μορφισμού $1_{Y'} : Y' \longrightarrow Y'$ του Y' το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w \circ 1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_Y \circ f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

ταυτίζεται με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου η σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας ψ με την κλάση ισοδυναμίας 1_Y ισούται με την κλάση ισοδυναμίας ψ.

3. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.
4. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του δεύτερου σκέλους. ■

Εν συνεχεία χρησιμοποιούμε τα δεξιά και τα αριστερά roofs για να ορίζουμε τις κατηγορίες $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}_{\mathcal{W}}$ και $\mathcal{C}^{\mathbf{l}}_{\mathcal{W}}$ αντίστοιχα. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο ορισμός τους γίνεται πιο κατανοητός.

Ορισμός 2.3.32. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια δεξιά localizing κλάση μορφισμών της. Η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}_{\mathcal{W}}$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$.*
2. *Για κάθε ζεύγος αντικειμένων X,Y της $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}_{\mathcal{W}}$ ισχύει ότι:*
$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathbf{r}}_{\mathcal{W}}}(X,Y) = \{(Y',f,w) \mid f\colon X \longrightarrow Y',\ w\colon Y \longrightarrow Y',\ w \in \mathcal{W}\}/ \backsim^r$$
όπου $\{(Y',f,w) \mid f\colon X \longrightarrow Y',\ w\colon Y \longrightarrow Y',\ w \in \mathcal{W}\}/ \backsim^r$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των δεξιών roofs
$$\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "w"'] \end{tikzcd}$$
ως προς τη σχέση ισοδυναμίας «$\backsim^r$» η οποία ορίζεται ως εξής:
$$\begin{tikzcd} & Y' & & & & Y'' & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "w"'] & \backsim^r & X \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$
εάν υπάρχει αντικείμενο W της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $p\colon Y' \longrightarrow W$, $q\colon Y'' \longrightarrow W$, $t'\colon X \longrightarrow W$ και $r\colon Y \longrightarrow W$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό
$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "p"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "g"'] & W & Y \arrow[ul, "w"'] \arrow[l, "r"'] \arrow[dl, "t"] \\ & Y'' \arrow[u, "q"'] & \end{tikzcd}$$
και επιπλέον ο μορφισμός $r = p \circ w = q \circ t$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$.
3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών της $(Y',f,w) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{r}_{\mathcal{W}}}(X,Y)$ και $(Y'',g,t) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{r}_{\mathcal{W}}}(Y,Z)$ είναι ένας μορφισμός $(W, h \circ f, e \circ t) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{r}_{\mathcal{W}}}(X,Z)$ ο οποίος προκύπτει από το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*
$$\begin{tikzcd} & & W & & \\ & Y' \arrow[ur, "h"] & & Y'' \arrow[ul, "e"'] & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "w"'] \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $e\colon Y'' \longrightarrow W$ *ανήκει στην κλάση* $\mathcal{W}$ *και ο μορφισμός* $h\colon Y' \longrightarrow W$ *είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία* $\mathcal{C}$.

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός* $(X, 1_X, 1_X)$ *είναι η κλάση ισοδυναμίας του δεξιού roof*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \arrow[ur, "1_X"] & & X \arrow[ul, "1_X"'] \end{tikzcd}$$

Δυϊκά,

Ορισμός 2.3.33. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *μια κατηγορία και* $\mathcal{W}$ *μια αριστερή localizing κλάση μορφισμών της. Η κατηγορία* $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ *ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα αντικείμενα της κατηγορίας* $\mathcal{C}$.

2. *Για κάθε ζεύγος αντικειμένων* X,Y *της* $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ *ισχύει ότι:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}}(X,Y) = \{(Y', w, f) \mid w\colon Y' \longrightarrow X,\ f\colon Y' \longrightarrow Y,\ w \in \mathcal{W}\}/\backsim^{l}$$

όπου $\{(Y', w, f) \mid w\colon Y' \longrightarrow X,\ f\colon Y' \longrightarrow Y,\ w \in \mathcal{W}\}/\backsim^{l}$ *είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των αριστερών roofs*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

ως προς τη σχέση ισοδυναμίας «$\backsim^{l}$*» η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \backsim^{l} \qquad \begin{tikzcd} & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

εάν υπάρχει αντικείμενο Z *της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *και μορφισμοί* $p\colon Z \longrightarrow Y'$, $q\colon Z \longrightarrow Y''$, $t'\colon Z \longrightarrow X$ *και* $r\colon Z \longrightarrow Y$ *τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Z \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "r"] \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ & Y'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $t' = w \circ p = t \circ q$ *ανήκει στην κλάση* $\mathcal{W}$.

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών της* $(Y', w, f) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}}(X,Y)$ *και* $(Y'', t, g) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}}(Y,Z)$ *είναι ένας μορφισμός* $(W, w \circ e, g \circ h) \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}}(X,Z)$ *ο οποίος προκύπτει από το ακόλουθο*

μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & Y' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & Y'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $e\colon W \longrightarrow Y'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και ο μορφισμός $h\colon W \longrightarrow Y''$ είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός $(X, 1_X, 1_X)$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Σχόλιο 2.3.34. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της Πρότασης 2.3.30 καθώς και τα δύο πρώτα σκέλη της Πρότασης 2.3.31 αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ είναι πράγματι κατηγορία. Αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπ' όψιν το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 2.3.30 και τα δύο τελευταία σκέλη της Πρότασης 2.3.31 αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}$ είναι επίσης μια κατηγορία.

Η ακόλουθη Πρόταση υποδηλώνει ότι η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ (αντίστοιχα η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}$) αποτελεί τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την localizing κλάση μορφισμών της $\mathcal{W}$. Η εν λόγω κατασκευή της τοπικοποίησης της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι πιο πρακτική για τους υπολογισμούς.

Πρόταση 2.3.35. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της.*

1. *Η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ αποτελεί τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την localizing κλάση $\mathcal{W}$.*

2. *Η κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{W}}$ αποτελεί τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την localizing κλάση $\mathcal{W}$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας συναρτητής $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 2.1.1. Σύμφωνα με το Σχόλιο 2.3.34 η $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ είναι μια κατηγορία. Ορίζουμε τον $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ ως εξής:

- $Q(X) = X$, για κάθε αντικείμενο $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$.
- $Q(f)$ = κλάση ισοδυναμίας του $\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$ για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε ότι ο Q είναι ένας συναρτητής. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ δύο μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$. Ο $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ εξ' ορισμού στέλνει τον μορφισμό $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$

στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$
Ως εκ τούτου $Q(g \circ f) =$
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$
Αντίστοιχα, ο $Q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ εξ' ορισμού στέλνει τον μορφισμό $g\colon Y \longrightarrow Z$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$
Έτσι, $Q(g) =$
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$
Συνθέτοντας τους μορφισμούς $Q(f)$ και $Q(g)$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχουν μορφισμοί $1_X\colon X \longrightarrow X$ και $f\colon X \longrightarrow Y$ με τον ταυτοτικό μορφισμό 1_X να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό f να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z. \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X\circ 1_X"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τη σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

με την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

και κατ' επέκταση τη σύνθεση των μορφισμών $Q(f)$ και $Q(g)$. Έτσι,

$$Q(g) \circ Q(f) = \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X\circ 1_X"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ X & & Z \end{tikzcd} .$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_X \colon X \longrightarrow X$ έπεται ότι $Q(g \circ f) = Q(g) \circ Q(f)$. Εν συνεχεία ο Q εξ' ορισμού στέλνει τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X \colon X \longrightarrow X$ στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & X. \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $Q(1_X) = 1_X$. Από την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή Q στα αντικείμενα προκύπτει $Q(1_X) = 1_X = 1_{Q(X)}$. Έτσι, ο $Q \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ είναι ένας συναρτητής. Ας είναι $w \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $Q(w)$ είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$. Ο συναρτητής Q εξ' ορισμού στέλνει τον μορφισμό $w \colon X \longrightarrow Y$ στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "w"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο X και μορφισμός $1_X \colon X \longrightarrow X$ όπου ο ταυτοτικός μορφισμός 1_X ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "w"] \\ X \arrow[u, "w"] & X \arrow[l, dashed, "1_X"] \arrow[u, dashed, "1_X"'] \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "w"] & & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X & & Y & & X \end{tikzcd}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει το ταυτοτικό αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X \circ 1_X = 1_X"'] \arrow[dr, "1_X \circ 1_X = 1_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τη σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "w"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

με την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

είναι αριστερά αντίστροφος του μορφισμού $Q(w)$. Αντίστοιχα από το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & & \\ & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "w"] & \\ Y & & X & & Y \end{tikzcd}$$

προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w\circ 1_X = w"'] \arrow[dr, "w\circ 1_X = w"] & \\ Y & & Y \end{tikzcd}$$

που αντιπροσωπεύει τη σύνθεση της κλάσης ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

με την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "w"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

το οποίο ωστόσο δεν είναι το ταυτοτικό. Έτσι, για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "w"] & \\ Y & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το ταυτοτικό roof

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"] & \\ Y & & Y. \end{tikzcd}$$

Πράγματι, υπάρχει αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $1_X \colon X \longrightarrow X$ και $w \colon X \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "w"] & \\ Y & X \arrow[l, "w"'] \arrow[r, "w"] \arrow[u, "1_X"] \arrow[d, "w"] & Y \\ & Y \arrow[ul, "1_Y"] \arrow[ur, "1_Y"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ισχύει ότι ο μορφισμός $w = w \circ 1_X = 1_Y \circ w$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Συνεπώς, η κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

είναι δεξιά αντίστροφος του μορφισμού $Q(w)$. Συνοψίζοντας, για κάθε μορφισμό w ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $Q(w)$ είναι ένας ισομορφισμός με αντίστροφο την κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ Y & & X. \end{tikzcd}$$

Όσον αφορά τη δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 2.1.1 υποθέτουμε ότι υπάρχει κατηγορία $\mathcal{C}'$ και ένας συναρτητής $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε για κάθε μορφισμό w ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$, ο μορφισμός $F(w)$ να είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$. Θα κατασκευάσουμε έναν συναρτητή $G \colon \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιον ώστε να ικανοποιεί την ισότητα $G \circ Q = F$ και κατόπιν θα αποδείξουμε την μοναδικότητα του. Ορίζουμε τον $G \colon \mathcal{C}^{l}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ως εξής:

- $G(Y) = F(Y)$,για κάθε αντικείμενο $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{ob}(\mathcal{C}^{l}_{\mathcal{W}})$.
- $G(\phi) = F(f) \circ F(w)^{-1}$,για κάθε μορφισμό ϕ στην κατηγορία $\mathcal{C}^{l}_{\mathcal{W}}$ ο οποίος αντιπροσωπεύεται από ένα αριστερό roof $\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$.

Αρχικά θα διαπιστώσουμε ότι ο G είναι «καλά ορισμένος». Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

δύο ισοδύναμα αριστερά roof μεταξύ των αντικειμένων Y και Z. Τότε υπάρχει αντικείμενο U της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u\colon U \longrightarrow X$, $v\colon U \longrightarrow X'$, $e\colon U \longrightarrow Y$ και $e'\colon U \longrightarrow Z$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & U \arrow[l, "e"'] \arrow[r, "e'"] \arrow[u, "u"] \arrow[d, "v"'] & Z \\ & X' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $e = w \circ u = t \circ v$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Λόγω της μεταθετικότητας του τελευταίου διαγράμματος λαμβάνουμε $f \circ u = g \circ v$ και $w \circ u = t \circ v$. Εφαρμόζοντας στις τελευταίες ισότητες τον F και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή έπεται αντίστοιχα $F(f) \circ F(u) = F(g) \circ F(v)$ και $F(w) \circ F(u) = F(t) \circ F(v)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $w \circ u\colon U \longrightarrow Y$, $w\colon X \longrightarrow Y$ και $t\colon X' \longrightarrow Y$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ οι μορφισμοί $F(w \circ u)\colon F(U) \longrightarrow F(Y)$, $F(w)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ και $F(t)\colon F(X') \longrightarrow F(Y)$ εξ' υποθέσεως είναι ισομορφισμοί. Τότε υπάρχουν οι αντίστροφοι αυτών $F(w \circ u)^{-1}\colon F(Y) \longrightarrow F(U)$, $F(w)^{-1}\colon F(Y) \longrightarrow F(X)$ και $F(t)^{-1}\colon F(Y) \longrightarrow F(X')$ και είναι εξίσου ισομορφισμοί. Έτσι, οι μορφισμοί $F(u) = F(w)^{-1} \circ F(w \circ u)$ και $F(v) = F(t)^{-1} \circ F(w \circ u)$ είναι ισομορφισμοί ως σύνθεση ισομορφισμών. Από την ισότητα $F(w) \circ F(u) = F(t) \circ F(v)$ προκύπτει ότι $(F(w) \circ F(u))^{-1} = (F(t) \circ F(v))^{-1}$ και κατ' επέκταση ότι $F(u)^{-1} \circ F(w)^{-1} = F(v)^{-1} \circ F(t)^{-1}$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα, τις ισότητες $F(f) \circ F(u) = F(g) \circ F(v)$, $F(u) \circ F(u)^{-1} = 1_{\mathrm{F(X)}}$ και $F(v) \circ F(v)^{-1} = 1_{\mathrm{F(X')}}$ καθώς και τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{\mathrm{F(X)}}\colon F(X) \longrightarrow F(X)$ και $1_{\mathrm{F(X')}}\colon F(X') \longrightarrow F(X')$ προκύπτει ότι:

$$F(f) \circ F(w)^{-1} = F(f) \circ 1_{\mathrm{F(X)}} \circ F(w)^{-1} = F(f) \circ F(u) \circ F(u)^{-1} \circ F(w)^{-1} = F(g) \circ F(v) \circ F(v)^{-1} \circ$$

$$\circ F(t)^{-1} = F(g) \circ 1_{\mathrm{F(X')}} \circ F(t)^{-1} = F(g) \circ F(t)^{-1}.$$

Ως εκ τούτου ο G είναι σταθερός στις κλάσεις ισοδυναμίας των roofs. Έτσι, ο G είναι «καλά ορισμένος». Εν συνεχεία αποδεικνύουμε ότι ο G είναι ένας συναρτητής. Ας είναι ϕ και ψ δύο μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathbf{l}}_{\mathcal{W}}$ οι οποίοι αντιπροσωπεύονται από τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad \begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Z & & W \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα.

Συνθέτουμε το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Z & & W \end{tikzcd} .$$

Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο U και μορφισμοί $u\colon U \longrightarrow X$ και $h\colon U \longrightarrow X'$ με τον μορφισμό u να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και τον μορφισμό h να είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & & X' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Y & & Z & & W. \end{tikzcd}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w\circ u"'] \arrow[dr, "g'\circ h"] & \\ Y & & W \end{tikzcd}$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τη σύνθεση του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Z & & W \end{tikzcd}$$

και κατ' επέκταση τη σύνθεση του μορφισμού ϕ με τον μορφισμό ψ στην κατηγορία $\mathcal{C}^{1}_{\mathcal{W}}$. Λόγω της μεταθετικότητας του τελευταίου διαγράμματος προκύπτει ότι $f \circ u = t' \circ h$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $F(f) \circ F(u) = F(t') \circ F(h)$. Ανάλογα με προηγουμένως εφόσον οι μορφισμοί t' και u ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ έπεται ότι οι μορφισμοί $F(t')\colon F(X') \longrightarrow F(Z)$ και $F(u)\colon F(U) \longrightarrow F(X)$ είναι ισομορφισμοί με αντιστρόφους $F(t')^{-1}\colon F(Z) \longrightarrow F(X')$ και $F(u)^{-1}\colon F(X) \longrightarrow F(U)$ αντίστοιχα οι οποίοι είναι εξίσου ισομορφισμοί. Συνθέτοντας στην τελευταία ισότητα από αριστερά με τον μορφισμό $F(t')^{-1}\colon F(Z) \longrightarrow F(X')$ και από δεξιά με τον μορφισμό $F(u)^{-1}\colon F(X) \longrightarrow F(U)$ και χρησιμοποιώντας τις ισότητες $F(t')^{-1} \circ F(t') = 1_{\mathrm{F(X')}}$ και $F(u) \circ F(u)^{-1} = 1_{\mathrm{F(X)}}$ καθώς και τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{\mathrm{F(X')}}\colon F(X') \longrightarrow F(X')$ και $1_{\mathrm{F(X)}}\colon F(X) \longrightarrow F(X)$ έπεται ότι $F(t')^{-1} \circ F(f) = F(h) \circ F(u)^{-1}$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα, την ισότητα $(F(w) \circ F(u))^{-1} = F(u)^{-1} \circ F(w)^{-1}$, τον ορισμό του G στους μορφισμούς καθώς και τις ιδιότητες που διέπουν τον F ως συναρτητή προκύπτει:

$$G(\psi\circ\phi) = F(g'\circ h)\circ F(w\circ u)^{-1} = F(g')\circ F(h)\circ(F(w)\circ F(u))^{-1} = F(g')\circ F(h)\circ F(u)^{-1}\circ$$

$$\circ F(w)^{-1} = F(g') \circ F(t')^{-1} \circ F(f) \circ F(w)^{-1} = G(\psi) \circ G(\phi).$$

Έτσι, ο G διατηρεί τη σύνθεση των μορφισμών. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο G στέλνει τον ταυτοτικό μορφισμό στην $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ στον ταυτοτικό μορφισμό στην $\mathcal{C}'$. Ας είναι 1_{X} ο ταυτοτικός μορφισμός στην $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ ο οποίος αντιπροσωπεύεται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_{\mathrm{X}}"'] \arrow[dr, "1_{\mathrm{X}}"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο F είναι ένας συναρτητής, τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{\mathrm{F(X)}} \colon F(X) \longrightarrow F(X)$ καθώς και τον ορισμό του συναρτητή G προκύπτει ότι:

$$G(1_{\mathrm{X}}) = F(1_{\mathrm{X}}) \circ F(1_{\mathrm{X}})^{-1} = 1_{\mathrm{F(X)}} \circ {1_{\mathrm{F(X)}}}^{-1} = 1_{\mathrm{F(X)}} = 1_{\mathrm{G(X)}}$$

Συνεπώς, ο $G \colon \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των συναρτητών G και Q και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{\mathrm{F(X)}} \colon F(X) \longrightarrow F(X)$ έπεται ότι

- $(G \circ Q)(X) = G(Q(X)) = G(X) = F(X)$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.
- $(G \circ Q)(f) = G(Q(f)) = G\left(\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_{\mathrm{X}}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right) = F(f) \circ F(1_{\mathrm{X}})^{-1} =$
  $= F(f) \circ {1_{\mathrm{F(X)}}}^{-1} = F(f) \circ 1_{\mathrm{F(X)}} = F(f)$ για κάθε μορφισμό $f \colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Ως εκ τούτου ο συναρτητής $G \colon \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ικανοποιεί την ισότητα $G \circ Q = F$. Όσον αφορά τη μοναδικότητα του υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας άλλος συναρτητής $H \colon \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $H \circ Q = F$. Θα αποδείξουμε ότι $G = H$. Για κάθε αντικείμενο $Y \in \mathsf{ob}(\mathcal{C}) = \mathsf{ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}})$, χρησιμοποιώντας την ισότητα $H \circ Q = F$ και τους ορισμούς των συναρτητών Q και G στα αντικείμενα έπεται ότι

$$H(Y) = H(Q(Y)) = (H \circ Q)(Y) = F(Y) = G(Y).$$

Για να έχουμε το ζητούμενο μας απομένει να αποδείξουμε ότι $H(\phi) = G(\phi)$ για κάθε μορφισμό ϕ στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$. Έτσι, ας είναι ϕ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ ο οποίος αντιπροσωπεύεται από το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής $Q \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{W}}$ εξ' ορισμού στέλνει τον μορφισμό $w \colon X \longrightarrow Y$ στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_{\mathrm{X}}"'] \arrow[dr, "w"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

και αντίστοιχα τον μορφισμό $f \colon X \longrightarrow Z$ στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_{\mathrm{X}}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Z. \end{tikzcd}$$

Συνθέτουμε τον μορφισμό $Q(w)$ με τον μορφισμό ϕ στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathbf{l}}_{\mathcal{W}}$. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο X και μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ με τον ταυτοτικό μορφισμό 1_X ο οποίος είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$ να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "w"] & & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X \circ 1_X = 1_X"'] \arrow[dr, "f \circ 1_X = f"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τον μορφισμό $\phi \circ Q(w)$ και ισούται κατά προφανή τρόπο με τον μορφισμό $Q(f)$. Ως εκ τούτου $\phi \circ Q(w) = Q(f)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $Q(w)$ είναι ένας ισομορφισμός από την τελευταία ισότητα έπεται ότι $\phi = Q(f) \circ Q(w)^{-1}$. Εφαρμόζοντας τον H στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή, τον ορισμό του συναρτητή G στους μορφισμούς καθώς και τις ισότητες $G \circ Q = F$ και $H \circ Q = F$ προκύπτει ότι:

$$H(\phi) = H(Q(f) \circ Q(w)^{-1}) = H(Q(f)) \circ H(Q(w)^{-1}) = H(Q(f)) \circ (H(Q(w)))^{-1} = F(f) \circ$$

$$\circ F(w)^{-1} = G(\phi)$$

για κάθε μορφισμό ϕ στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathbf{l}}_{\mathcal{W}}$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω $H = G$. Συνοψίζοντας, ικανοποιείται ο ορισμός 2.1.1 της τοπικοποίησης. Ως εκ τούτου, το ζεύγος ($\mathcal{C}^{\mathbf{l}}_{\mathcal{W}}$,$Q$) αποτελεί τοπικοποίηση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την localizing κλάση $\mathcal{W}$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 2.3.36. *Οι κατηγορίες $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}_{\mathcal{W}}$ και $\mathcal{C}^{\mathbf{l}}_{\mathcal{W}}$ είναι ισόμορφες.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.35 τα ζεύγη $(\mathcal{C}^{l}_{\mathcal{W}}, Q)$ και $(\mathcal{C}^{r}_{\mathcal{W}}, Q')$ είναι τοπικοποιήσεις της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς την localizing κλάση μορφισμών της $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου από την Πρόταση 2.1.3 είναι άμεσο ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}^{r}_{\mathcal{W}}$ και $\mathcal{C}^{l}_{\mathcal{W}}$ είναι ισόμορφες. ■

Λήμμα 2.3.37. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση της.*

1. *Ας είναι*

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "w_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

αριστερά roofs τα οποία αναπαριστούν τους μορφισμούς $\phi_i \colon Y \longrightarrow Z$ με $1 \leqq i \leqq n$ στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Τότε υπάρχει αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $g_i \colon X \longrightarrow Z$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν τους μορφισμούς $\phi_i \colon Y \longrightarrow Z$ για όλα τα $1 \leqq i \leqq n$.

2. *Ας είναι*

$$\begin{tikzcd} & X_i & \\ Y \arrow[ur, "f_i"] & & Z \arrow[ul, "w_i"'] \end{tikzcd}$$

δεξιά roofs τα οποία αναπαριστούν τους μορφισμούς ϕ_i με $1 \leqq i \leqq n$ στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Τότε υπάρχει αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $h_i \colon Y \longrightarrow X$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε τα δεξιά roofs

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Y \arrow[ur, "h_i"] & & Z \arrow[ul, "w"'] \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν τους μορφισμούς ϕ_i για όλα τα $1 \leqq i \leqq n$.

Απόδειξη. 1. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση μαθηματικής επαγωγής ως προς n.

- Για $n = 1$ λαμβάνουμε $f = g$ και κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει το ζητούμενο.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k < n$ και εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι ισχύει για n. Ας είναι $n > 1$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει αντικείμενο K της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $h_i \colon K \longrightarrow Z$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

να αναπαριστούν τα ϕ_i για όλα τα $1 \leqq i \leqq n-1$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο $t \colon K \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και $w_n \colon X_n \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του περιορισμού (W3$''$) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ υπάρχει αντικείμενο U της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u \colon U \longrightarrow K$ και $u' \colon U \longrightarrow X_n$ με τον μορφισμό u να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} Y & K \arrow[l, "t"] \\ X_n \arrow[u, "w_n"] & U \arrow[l, dashed, "u'"'] \arrow[u, dashed, "u"'] \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $t \circ u = w_n \circ u'$. Θέτουμε $w = t \circ u = w_n \circ u'$. Εφόσον οι μορφισμοί $u \colon U \longrightarrow K$ και $t \colon K \longrightarrow Y$ ανήκουν στην κλάση $\mathcal{W}$ σύμφωνα με τον περιορισμό

(W2″) της localizing κλάσης $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $t \circ u \colon U \longrightarrow Y$ ανήκει εξίσου στην κλάση $\mathcal{W}$. Έτσι, ο μορφισμός $w = t \circ u = w_n \circ u'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\ Y & U \arrow[l, "w"'] \arrow[u, "u"] \arrow[r, "h_i \circ u"] \arrow[d, "1_U"] & Z \\ & U \arrow[ul, "w"] \arrow[ur, "h_i \circ u"'] & \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $t \circ u = w \circ 1_U = w$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα με τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h_i \circ u"] & \\ Y & & Z. \end{tikzcd}$$

Ωστόσο εξ' υποθέσεως τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

αναπαριστούν τα ϕ_i για όλα τα $1 \leqq i \leqq n-1$. Έτσι, τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h_i \circ u"] & \\ Y & & Z. \end{tikzcd}$$

αναπαριστούν εξίσου τα ϕ_i για όλα τα $1 \leqq i \leqq n-1$. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[dl, "w_n"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\ Y & U \arrow[l, "w"'] \arrow[u, "u'"] \arrow[r, "f_n \circ u'"] \arrow[d, "1_U"] & Z \\ & U \arrow[ul, "w"] \arrow[ur, "f_n \circ u'"'] & \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $w_n \circ u' = w \circ 1_U = w$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[dl, "w_n"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα με τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f_n \circ u'"] & \\ Y & & Z. \end{tikzcd}$$

Ωστόσο εξ' υποθέσεως τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[dl, "w_n"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

αναπαριστούν τα ϕ_n. Έτσι, τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f_n \circ u'"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

αναπαριστούν εξίσου τα ϕ_n. Επομένως, λαμβάνοντας ως $X = U$, $g_i = h_i \circ u$ για $1 \leqq i \leqq n-1$ και $g_n = f_n \circ u'$ προκύπτει το συμπέρασμα.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Σχόλιο 2.3.38. Το Λήμμα 2.3.37 είναι ανάλογο της αναγωγής σε κοινό παρανομαστή. Πιο συγκεκριμένα, τα w_i τα οποία αναφέρουμε στο Λήμμα 2.3.37 μπορούν διαισθητικά να ειδωθούν ως διάφοροι παρανομαστές κλασμάτων οι οποίοι στην περίπτωση της πρόσθεσης με την διαδικασία των ομωνύμων ανάγονται σε έναν κοινό παρανομαστή ο οποίος εκφράζεται από το w. Κάτι ανάλογο συμβαίνει στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πρώτο σκέλος του παραδείγματος 2.1.2. Ειδικότερα, προσθέτοντας το κλάσμα $\frac{3}{2}$ με το κλάσμα $\frac{4}{3}$ λαμβάνουμε το κλάσμα $\frac{17}{6}$. Το w που προαναφέραμε είναι ο αριθμός 6 ο οποίος αποτελεί τον κοινό παρανομαστή. Ανάλογα στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων το κλάσμα $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}$ είναι ίδιο με το κλάσμα $\frac{9}{6} \cdot \frac{8}{6}$.

2.4 Τοπικοποίηση Υποκατηγοριών

Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία της. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{W}_{\mathcal{C}'} = \mathcal{W} \bigcap Mor(\mathcal{C}')$ είναι μια localizing κλάση μορφισμών της κατηγορία $\mathcal{C}'$. Κατ' επέκταση ορίζεται ένας συναρτητής $\mathcal{C}'[{\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ κατά φυσικό τρόπο ο οποίος θέτοντας μια επιπλέον υπόθεση αποδεικνύεται ότι είναι πλήρης και πιστός. Σημειώνουμε ότι οι localizing κατηγορίες σχηματίζουν μια σημαντική κλάση υποκατηγοριών μιας αβελιανής κατηγορίας και είναι στενά συνδεδεμένες με την έννοια της κατηγορίας πηλίκο.

Ορισμός 2.4.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία της. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{W}_{\mathcal{C}'} = \mathcal{W} \bigcap Mor(\mathcal{C}')$ είναι μια localizing κλάση μορφισμών της κατηγορίας $\mathcal{C}'$. Τότε ορίζεται ο συναρτητής $H\colon \mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, ο οποίος είναι ταυτοτικός στα αντικείμενα και στέλνει κάθε μορφισμό στην κατηγορία $\mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}]$ ο οποίος αναπαρίσταται από το αριστερό roof*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

στην κλάση ισοδυναμίας του αριστερού roof στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε, υπό κάποιες φυσικές προϋποθέσεις, ότι ο επαγόμενος συναρτητής $H\colon \mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός.

Πρόταση 2.4.2. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία της. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *$\mathcal{W}_{\mathcal{C}'} = \mathcal{W} \bigcap Mor(\mathcal{C}')$ είναι μια localizing κλάση στην κατηγορία $\mathcal{C}'$.*

2. *Για κάθε μορφισμό $w\colon Y \longrightarrow Z$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και κάθε αντικείμενο M της πλήρους υποκατηγορίας $\mathcal{C}'$ υπάρχει μορφισμός $u\colon P \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε η σύνθεση $w \circ u\colon P \longrightarrow Z$ να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ και P είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}'$.*

Τότε ο φυσικός συναρτητής $H\colon \mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ είναι πλήρης και πιστός.

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία της. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες 1. και 2. . Δοθέντων δύο αντικειμένων Z και Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$H_{Z,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}]}(Z,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]}(Z,Y), \quad h \longmapsto H(h)$$

είναι «1-1» και «επί».

- <u>$H_{Z,Y}$ είναι «1-1».</u>

  Ας είναι

  $$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

  και

  $$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

  δύο αριστερά roofs τα οποία αναπαριστούν τους μορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}]$. Υποθέτουμε ότι

  $$H_{Z,Y}\left(\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}\right) = H_{Z,Y}\left(\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}\right).$$

Τότε τα αριστερά roofs

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμα. Ως εκ τούτου υπάρχει αντικείμενο U της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u\colon U \longrightarrow X$, $v\colon U \longrightarrow X'$, $e'\colon U \longrightarrow Z$ και $e\colon U \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & U \arrow[u, "u"] \arrow[l, "e'"'] \arrow[r, "e"] \arrow[d, "v"] & Y \\ & X' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

και επιπλέον ο μορφισμός $e' = w \circ u = t \circ v$ να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Λόγω της μεταθετικότητας του τελευταίου διαγράμματος έπεται ότι $f \circ u = g \circ v$. Από τη συνθήκη 2. προκύπτει ότι υπάρχει αντικείμενο V της $\mathcal{C}'$ και μορφισμός $w'\colon V \longrightarrow U$ τέτοιος ώστε η σύνθεση $w \circ u \circ w' = t \circ v \circ w'$ να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Συνθέτοντας από δεξιά στην ισότητα $f \circ u = g \circ v$ με τον μορφισμό w' έπεται ότι $f \circ u \circ w' = g \circ v \circ w'$. Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & V \arrow[u, "u \circ w'"] \arrow[l, "m'"'] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "v \circ w'"] & Y \\ & X' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $m' = w \circ u \circ w' = t \circ v \circ w'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου, το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z & & Y. \end{tikzcd}$$

Έτσι, οι κλάσεις ισοδυναμίας των τελευταίων roofs ισούνται. Συνεπώς η απεικόνιση $H_{Z,Y}$ είναι «1-1».

- <u>$H_{Z,Y}$ είναι «επί».</u>

  Ας είναι

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

ένα αριστερό roof το οποίο αναπαριστά έναν μορφισμό ψ ο οποίος ανήκει στο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]}(Z,Y)$. Από τη συνθήκη 2. υπάρχει αντικείμενο U της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ και μορφισμός $u\colon U \longrightarrow X$ ο οποίος ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$ τέτοιος ώστε η σύνθεση $w \circ u$ να ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & U \arrow[u, "u"] \arrow[l, "e'"'] \arrow[r, "e"] & Y \\ & U \arrow[u, "1_U"] \arrow[ul, "w \circ u"] \arrow[ur, "f \circ u"'] & \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $e' = w \circ u$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{W}$. Ως εκ τούτου το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "w \circ u"'] \arrow[dr, "f \circ u"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

είναι ισοδύναμο με το αριστερό roof

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z & & Y \end{tikzcd}$$

και κατ' επέκταση αναπαριστά εξίσου τον μορφισμό ψ. Έτσι, υπάρχει ένας μορφισμός μεταξύ των Z και Y στην κατηγορία $\mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}]$ ο οποίος απεικονίζεται μέσω της $H_{Z,Y}$ στο ψ. Συνεπώς, η απεικόνιση $H_{Z,Y}$ είναι «επί».

Συνοψίζοντας, ο συναρτητής $H\colon \mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ο οποίος ορίζεται κατά φυσικό τρόπο είναι πλήρης και πιστός. ∎

Σχόλιο 2.4.3. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 2.4.2 έπεται ότι η κατηγορία $\mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}]$ είναι πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Μεταβαίνοντας από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην δυϊκή της $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ λαμβάνουμε την δυϊκή Πρόταση της Πρότασης 2.4.2.

Πρόταση 2.4.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, $\mathcal{W}$ μια localizing κλάση μορφισμών της και $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία της. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\mathcal{W}_{\mathcal{C}'} = \mathcal{W} \bigcap Mor(\mathcal{C}')$ *είναι μια* localizing *κλάση στην κατηγορία* $\mathcal{C}'$.

2. *Για κάθε μορφισμό* $w\colon Z \longrightarrow Y$ *ο οποίος ανήκει στην κλάση* $\mathcal{W}$ *και κάθε αντικείμενο* M *της πλήρους υποκατηγορίας* $\mathcal{C}'$ *υπάρχει μορφισμός* $u\colon Y \longrightarrow P$ *τέτοιος ώστε η σύνθεση* $u \circ w\colon Z \longrightarrow P$ *να ανήκει στην κλάση* $\mathcal{W}$ *και* P *είναι ένα αντικείμενο της* $\mathcal{C}'$.

Τότε ο φυσικός συναρτητής $H : \mathcal{C}'[\mathcal{W}_{\mathcal{C}'}{}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ *είναι πλήρης και πιστός.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της Πρότασης 2.4.2. ■

Κεφάλαιο 3

Κατηγορίες Μοντέλα

Στο παρόν κεφάλαιο ορίζουμε την έννοια της κατηγορίας μοντέλο και μελετάμε τις ιδιότητες που διέπουν κατηγορίες εφοδιασμένες με αυτή τη δομή. Εν συνεχεία αναφερόμαστε στην έννοια της ομοτοπίας μεταξύ δύο μορφισμών της, γεγονός που μας επιτρέπει να ορίσουμε την κλασική ομοτοπική κατηγορία και μελετάμε τις κατηγορίες των αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο υπεράνω και υπό ενός αντικειμένου της.

3.1 Κατηγορίες Μοντέλα

Ένα απο τα σημαντικά προβλήματα τα οποία εμφανίζονται σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών αφορά την ύπαρξη συγκεκριμένης κλάσης μορφισμών (ασθενεις ισοδυναμίες) σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$, τα στοιχεία της οποίας δεν είναι ισομορφισμοί μολονότι για δομικούς λόγους θα θέλαμε να ανήκουν στην κλάση των ισομορφισμών. Είναι γεγονός ότι μέσω της θεωρίας της τοπικοποίησης μπορούμε να αντιστρέψουμε τις ασθενείς ισοδυναμίες ωστόσο σε αυτή την περίπτωση χάνουμε τον έλεγχο των μορφισμών στην τοπικοποιημένη κατηγορία. Το σημαντικό αυτό πρόβλημα επιλύουν οι κατηγορίες μοντέλα. Στις κατηγορίες μοντέλα υπάρχουν οι ασθενείς ισοδυναμίες, αλλά υπάρχουν επίσης και άλλες κλάσεις μορφισμών οι οποίες καλούνται **συννηματώσεις (cofibrations)** και **νηματώσεις (fibrations)**. Αυτή η επιπλέον δομή μας επιτρέπει να έχουμε τον έλεγχο των μορφισμών στην κατηγορία που προκύπτει αντιστρέφοντας τις ασθενείς ισοδυναμίες. Οι κατηγορίες μοντέλο εισήχθησαν απο τον Daniel Quillen το 1967 στο βιβλίο του «Ομοτοπική Άλγεβρα», βλέπε [32] ο οποίος ανέπτυξε τον ορισμό της κατηγορίας μοντέλο με σκοπό να υπογραμμίσει τις ομοιότητες μεταξύ ομολογικής άλγεβρας και της ομοτοπικής θεωρίας της οποίας αποτέλεσαν θεμέλιο για την ανάπτυξη της. Αξιοσημείωτη είναι η χρησιμότητα τους στον κλάδο της Αλγεβρικής Τοπολογίας και της Αλγεβρικής K-Θεωρίας.

Ορισμός 3.1.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία.*

1. *Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Z \longrightarrow W$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Ο μορφισμός f καλείται* **(retract)** *του μορφισμού g εάν υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\gamma"] & W \arrow[r, "\delta"] & Y \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $\beta \circ \alpha = 1_X$ και $\delta \circ \gamma = 1_Y$.

2. *Σχηματίζουμε την κατηγορία* $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ *η οποία υπενθυμίζουμε ότι έχει ως αντικείμενα τους μορφισμούς στην* $\mathcal{C}$ *και στην οποία ένας μορφισμός* $(f\colon X \longrightarrow Y) \longrightarrow (g\colon Z \longrightarrow W)$ *είναι ένα ζεύγος μορφισμών* (k_0, k_1) *όπου* $k_0\colon X \longrightarrow Z$ *και* $k_1\colon Y \longrightarrow W$ *τέτοιο ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_0"'] & Y \arrow[d, "k_1"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}$$

Επιπλέον η κατηγορία $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ *είναι εφοδιασμένη με δύο συναρτητές* $\theta_0, \theta_1\colon \mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ *οι οποίοι ορίζονται ώς εξής:*

- *Για κάθε αντικείμενο* $f\colon X \longrightarrow Y$ *της* $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$

$$\theta_0(f\colon X \longrightarrow Y) = X \quad \text{και} \quad \theta_1(f\colon X \longrightarrow Y) = Y$$

- *Για κάθε μορφισμό* $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_0"'] & Y \arrow[d, "k_1"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}$ *στην* $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$*:*

$$\theta_0\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_0"'] & Y \arrow[d, "k_1"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}\right) = k_0 \quad \text{και} \quad \theta_1\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_0"'] & Y \arrow[d, "k_1"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}\right) = k_1$$

Ένα διατεταγμένο ζεύγος συναρτητών (α, β) *όπου* $\alpha, \beta\colon \mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ *τέτοιο ώστε το πεδίο ορισμού του* $\alpha(f)$ *είναι το πεδίο ορισμού του* f*, το πεδίο τιμών του* $\alpha(f)$ *είναι το πεδίο ορισμού του* $\beta(f)$*, το πεδίο τιμών του* $\beta(f)$ *είναι το πεδίο τιμών του* f *και* $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ *για κάθε* $f \in \mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ *καλείται* **συναρτητική παραγοντοποιήση (functorial factorization)**.

Ισοδύναμα μια συναρτητική παραγοντοποιήση σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ *είναι μια τριάδα* (F, α, β) *η οποία αποτελείται απο έναν συναρτητή* $F\colon \mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ *και δύο φυσικούς μετασχηματισμούς* $\alpha\colon \theta_0 \Rightarrow F$ *και* $\beta\colon F \Rightarrow \theta_1$*, έτσι ώστε ο φυσικός μετασχηματισμός* $\beta \circ \alpha\colon \theta_0 \Rightarrow \theta_1$ *να στέλνει κάθε αντικείμενο* $f\colon X \longrightarrow Y$ *της* $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ *στον εαυτό του.*

Λήμμα 3.1.2. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *μια κατηγορία και* $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Z \longrightarrow W$ *είναι μορφισμοί στην* $\mathcal{C}$*. Εάν ο μορφισμός* g *είναι ένας ισομορφισμός και ο μορφισμός* f *είναι retract του* g *τότε ο μορφισμός* f *είναι ένας ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Δοθέντων δύο μορφισμών $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Z \longrightarrow W$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι ο μορφισμός g είναι ένας ισομορφισμός και ο μορφισμός f retract αυτού. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g'\colon W \longrightarrow Z$ με $g \circ g' = 1_W$ και $g' \circ g = 1_Z$ και επιπλέον ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\gamma"] & W \arrow[r, "\delta"] & Y \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $\beta \circ \alpha = 1_X$ και $\delta \circ \gamma = 1_Y$. Θεωρούμε τον μορφισμό $k\colon Y \longrightarrow X$ με $k = \beta \circ g' \circ \gamma$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ'οψιν την μεταθετικότητα του διαγράμματος, τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών 1_Z και 1_W καθώς και τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$k \circ f = \beta \circ g' \circ \gamma \circ f = \beta \circ g' \circ g \circ \alpha = \beta \circ 1_Z \circ \alpha = \beta \circ \alpha = 1_X$$

και

$$f \circ k = f \circ \beta \circ g' \circ \gamma = \delta \circ g \circ g' \circ \gamma = \delta \circ 1_W \circ \gamma = \delta \circ \gamma = 1_Y$$

Επομένως, απο τις τελευταιές ισότητες είναι άμεσο ότι ο μορφισμός f είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $f^{-1} = k$. ■

Πρόταση 3.1.3. *Ας είναι $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ η κατηγορία η οποία προκύπτει ως γινόμενο των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ και $(f_1, g_1)\colon (X_1, X_2) \longrightarrow (Y_1, Y_2)$ και $(f_2, g_2)\colon (Z_1, Z_2) \longrightarrow (W_1, W_2)$ μορφισμοί στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$. Εάν ο μορφισμός (f_1, g_1) είναι retract του μορφισμού (f_2, g_2) στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ τότε ο μορφισμός f_1 είναι retract του μορφισμού f_2 στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός g_1 είναι retract του μορφισμού g_2 στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός (f_1, g_1) είναι retract του μορφισμού (f_2, g_2). Τότε υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
(X_1, X_2) \arrow[r, "(\alpha_1,\alpha_2)"] \arrow[d, "(f_1,g_1)"] & (Z_1, Z_2) \arrow[r, "(\beta_1,\beta_2)"] \arrow[d, "(f_2,g_2)"] & (X_1, X_2) \arrow[d, "(f_1,g_1)"] \\
(Y_1, Y_2) \arrow[r, "(\gamma_1,\gamma_2)"] & (W_1, W_2) \arrow[r, "(\delta_1,\delta_1)"] & (Y_1, Y_2)
\end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $(\beta_1, \beta_2) \circ (\alpha_1, \alpha_2) = (1_{X_1}, 1_{X_2})$ και $(\delta_1, \delta_2) \circ (\gamma_1, \gamma_2) = (1_{Y_1}, 1_{Y_2})$.
Λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταθετικότητα του διαγράμματος και τις τελευταίες ισότητες προκύπτουν τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & Z_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "f_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "\gamma_1"] & W_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Y_1
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g_1"] & Z_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "g_2"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
Y_2 \arrow[r, "\gamma_2"] & W_2 \arrow[r, "\delta_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

τα οποία είναι τέτοια ώστε $\beta_1 \circ \alpha_1 = 1_{X_1}$, $\delta_1 \circ \gamma_1 = 1_{Y_1}$, $\beta_2 \circ \alpha_2 = 1_{X_2}$, $\delta_2 \circ \gamma_2 = 1_{Y_2}$.
Συνεπώς, σύμφωνα με τον ορισμό του retract ο μορφισμός f_1 είναι retract του μορφισμού f_2 στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός g_1 είναι retract του μορφισμού g_2 στην $\mathcal{C}'$. ■

Κάτι ανάλογο με αυτό που είδαμε ότι ισχύει στην κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ισχύει και στην δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ όπως υποδηλώνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ η δυϊκή αυτής. Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι retract ενός μορφισμού $g\colon Z \longrightarrow W$ στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν ο μορφισμός $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ είναι retract του μορφισμού $g^{\mathsf{op}}\colon W \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι retract του μορφισμού $g\colon Z \longrightarrow W$ στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\gamma"] & W \arrow[r, "\delta"] & Y \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $\beta \circ \alpha = 1_X$ και $\delta \circ \gamma = 1_Y$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\delta^{\mathsf{op}}"] \arrow[d, "f^{\mathsf{op}}"] & W \arrow[r, "\gamma^{\mathsf{op}}"] \arrow[d, "g^{op}"] & Y \arrow[d, "f^{\mathsf{op}}"] \\ X \arrow[r, "\beta^{\mathsf{op}}"] & Z \arrow[r, "\alpha^{\mathsf{op}}"] & X \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταθετικότητα του αρχικού διαγράμματος και τον ορισμό την σύνθεσης στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ έχουμε:

$$\alpha^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}} = g \circ \alpha = \gamma \circ f = f^{\mathsf{op}} \circ \gamma^{\mathsf{op}}$$

και

$$\beta^{\mathsf{op}} \circ f^{\mathsf{op}} = f \circ \beta = \delta \circ g = g^{\mathsf{op}} \circ \delta^{\mathsf{op}}$$

και ως εκ τούτου

$$f^{\mathsf{op}} \circ \gamma^{\mathsf{op}} \circ \delta^{\mathsf{op}} = \alpha^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}} \circ \delta^{\mathsf{op}} = \alpha^{\mathsf{op}} \circ \beta^{\mathsf{op}} \circ f^{\mathsf{op}}$$

Συνεπώς το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Επιπλέον, κάνοντας χρήση των ισοτήτων $\beta \circ \alpha = 1_X$ και $\delta \circ \gamma = 1_Y$ προκύπτει ότι:

$$\alpha^{\mathsf{op}} \circ \beta^{\mathsf{op}} = \beta \circ \alpha = 1_X$$

και

$$\gamma^{\mathsf{op}} \circ \delta^{\mathsf{op}} = \delta \circ \gamma = 1_Y$$

Έτσι, ο μορφισμός $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ είναι retract του μορφισμού $g^{\mathsf{op}}\colon W \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ είναι retract του μορφισμού $g^{\mathsf{op}}\colon W \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Τότε υπάρχει ένα μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\delta^{\mathsf{op}}"] \arrow[d, "f^{\mathsf{op}}"] & W \arrow[r, "\gamma^{\mathsf{op}}"] \arrow[d, "g^{op}"] & Y \arrow[d, "f^{\mathsf{op}}"] \\ X \arrow[r, "\beta^{\mathsf{op}}"] & Z \arrow[r, "\alpha^{\mathsf{op}}"] & X \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $\alpha^{\mathsf{op}} \circ \beta^{\mathsf{op}} = 1_X$ και $\gamma^{\mathsf{op}} \circ \delta^{\mathsf{op}} = 1_Y$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος ισχύει ότι:

$$\beta^{\mathsf{op}} \circ f^{\mathsf{op}} = g^{\mathsf{op}} \circ \delta^{\mathsf{op}}$$

$$\alpha^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}} \circ \gamma^{\mathrm{op}}$$

και

$$\alpha^{\mathrm{op}} \circ \beta^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}} \circ \gamma^{\mathrm{op}} \circ \delta^{\mathrm{op}}$$

Οι παραπάνω ισότητες επάγουν τις ακόλουθες ισότητες

$$f \circ \beta = \delta \circ g$$

$$g \circ \alpha = \gamma \circ f$$

$$f \circ \beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma \circ f$$

$$\beta \circ \alpha = 1_X$$

και

$$\delta \circ \gamma = 1_Y$$

στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\gamma"] & W \arrow[r, "\delta"] & Y \end{tikzcd}$$

το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\beta \circ \alpha = 1_X$ και $\delta \circ \gamma = 1_Y$. Έτσι, ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι retract ενός μορφισμού $g\colon Z \longrightarrow W$ στην $\mathcal{C}$. ■

Ο ακόλουθος ορισμός της κατηγορίας μοντέλο διαφέρει απο τον ορισμό που διατυπώθηκε απο τον Quillen στο βιβλίο του «Ομοτοπική άλγεβρα», βλέπε [32]. Πιο συγκεκριμένα, ο Quillen έκανε την διάκριση μεταξύ κατηγοριών μοντέλα και κλειστών κατηγοριών μοντέλα. Ο όρος «κλειστή» κατηγορία μοντέλο προήλθε όπως θα δούμε παρακάτω απο το γεγονός ότι τα αξιώματα στον ορισμό της κατηγορίας μοντέλο υποδηλώνουν ότι οποιεσδήποτε δύο απο τις τρείς κλάσεις μορφισμών καθορίζουν την τρίτη. Ωστόσο η διάκριση αυτή δεν θεωρήθηκε σημαντική και οι μεταγενέστεροι συγγραφείς με τον όρο κατηγορίες μοντέλα εννοούν τις κλειστές κατηγορίες μοντέλα παραλείποντας το επίθετο κλειστές. Επιπλέον ο Quillen απαίτησε να υπάρχουν μόνο πεπερασμένα όρια και συνόρια. Στον ακόλουθο ορισμό απαιτούμε την ύπαρξη όλων των μικρών ορίων και συνορίων. Ωστόσο η διαφορά δεν είναι σημαντική καθως στα παραδείγματα με τα οποία ασχολήθηκε ο Quillen στα οποία μόνο πεπερασμένα όρια και συνόρια υπάρχουν είναι πλήρεις υποκατηγορίες των κατηγοριών μοντέλα στις οποίες υπάρχουν όλα τα μικρά όρια και συνόρια. Τέλος, ο Quillen υπέθεσε ότι οι παραγοντοποιήσεις (factorizations) απλώς υπάρχουν και όχι ότι είναι συναρτητικές (functorial) γεγονός που δεν μας επηρεάζει καθώς στα παραδείγματα δύναται να γίνουν συναρτητικές. Ο εναλλακτικός ορισμός τον οποίο θα αναφέρουμε ευθύς αμέσως οφείλεται στον Dan Kan και διατυπώθηκε στο βιβλίο του «Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories», βλέπε [10] το οποίο εκδόθηκε σε συνεργασία με τους W.G.Dwyer, J.Smith P.S.Hirchhorn.

Ορισμός 3.1.5. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία εφοδιασμένη με τρείς διακεκριμένες κλάσεις μορφισμών:*

1. **Ασθενείς ισοδυναμίες (Weak equivalences)** *($\mathcal{W}$)*

2. **Νηματώσεις (Fibrations)** *($\mathcal{F}$)*

3. **Συννηματώσεις (Cofibrations)** *($\mathcal{C}$)*

κάθε μια απο τις οποίες είναι κλειστή ως προς την σύνθεση και περιέχει τους ταυτοτικούς μορφισμούς. Ένας μορφισμός ο οποίος είναι ταυτόχρονα συννημάτωση και ασθενής ισοδυναμία καλείται **τετριμμένη συννημάτωση (Trivial cofibration)**. *Αντίστοιχα, ένας μορφισμός ο οποίος είναι ταυτόχρονα νημάτωση και ασθενής ισοδυναμία καλείται* **τετριμμένη νημάτωση (Trivial fibration)**.

Μια κατηγορία εφοδιασμένη με την παραπάνω δομή καλείται **κατηγορία μοντέλο (Model Category)** *εαν ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:*

(MC1) *(**Limit Axiom**) Η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι πλήρης και συν-πλήρης δηλαδή έχει όλα τα μικρά όρια και συνόρια.*

(MC2) *(**Two out of three Axiom**) Εαν f και g είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ και δύο απο τους f, g και $g \circ f$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες τότε είναι και ο τρίτος.*

(MC3) *(**Retract Axiom**) Εαν f και g είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε ο f να είναι retract του g και ο g να είναι ασθενής ισοδυναμία, νημάτωση ή συννημάτωση τότε ο f είναι αντίστοιχα ασθενής ισοδυναμία, νημάτωση ή συννημάτωση.*

(MC4) *(**Lifting Axiom**) Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος στην κατηγορία $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

υπάρχει ένας μορφισμός $h\colon B \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $h \circ i = f$ και $p \circ h = g$ ο οποίος καλείται **ανύψωση (lift)**, *σε κάθε μια απο τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(a) *i είναι συννημάτωση και p είναι τετριμμένη νημάτωση.*

(b) *i είναι τετριμμένη συννημάτωση και p είναι νημάτωση.*

(MC5) *(**Factorization Axiom**) Κάθε μορφισμός f στην $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως*

$$f = p \circ i$$

όπου:

(a) *i είναι συννημάτωση και p είναι τετριμμένη νημάτωση είτε*

(b) *i είναι τετριμμένη συννημάτωση και p είναι νημάτωση.*

και οι παραγοντοποιήσεις αυτές είναι συναρτητικές (functorial).

Σχόλιο 3.1.6. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον παραπάνω ορισμό γίνεται εύκολα κατανοήτο ότι το να εφοδιάσουμε μια κατηγορία με την δομή κατηγορίας μοντέλο είναι ισοδύναμο με το να προσδιορίσουμε τις τρείς κλάσεις μορφισμών $(\mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιούνται τα απαιτούμενα αξιώματα.

Άμεση συνέπεια του Αξιώματος (MC1) είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η $\mathcal{C}$ έχει ένα αρχικό αντικείμενο $\varnothing$ και ένα τελικό αντικείμενο $*$.*

Απόδειξη. Δοθείσης μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $\mathcal{D}$ είναι η κενή κατηγορία και $F\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ ο μοναδικός συναρτητής μεταξύ αυτών. Απο το Αξίωμα (MC1) που πληροί η κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ έπεται ότι το συνόριο $\varinjlim F$ και το όριο $\varprojlim F$ του F υπάρχουν. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του ορίου και του συνορίου αντίστοιχα, υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί απο ένα οποιοδήποτε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ στο όριο $\varprojlim F$ του F και απο το συνόριο $\varinjlim F$ του F σε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Συνεπώς, το συνόριο $\varinjlim F$ του F είναι ένα αρχικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και το όριο $\varprojlim F$ του F είναι ένα τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$. ■

Ορισμός 3.1.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ καλείται* **συνινώδες (cofibrant)** *εαν ο μοναδικός μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση.*
2. *Ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ καλείται* **ινώδες (fibrant)** *εαν ο μοναδικός μορφισμός $X \longrightarrow *$ είναι νημάτωση.*
3. *Ένα αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ καλείται* **συνινώδες-ινώδες (cofibrant-fibrant)** *εαν είναι ταυτόχρονα συνινώδες και ινώδες.*

Εν συνεχεία παραθέτουμε κάποια παραδείγματα κατηγοριών μοντέλο

Παράδειγμα 3.1.9. 1. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία με όλα τα μικρά όρια και συνόρια. Η κατηγορία $\mathcal{C}$ μπορεί να εφοδιαστεί με τρείς διαφορετικές δομές κατηγορίας μοντέλο, επιλέγοντας μία απο τις τρείς διακεκριμένες κλάσεις μορφισμών να είναι οι ισομορφισμοί και οι άλλες δύο να είναι όλοι οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας ορίζουμε έναν μορφισμό να είναι ασθενής ισοδυναμία εαν είναι ένας ισομορφισμός και καθε μορφισμός να είναι ταυτόχρονα συννημάτωση και νημάτωση. Ευθύς αμέσως θα αποδείξουμε ότι με την παραπάνω δομή πληρούνται τα αξιώματα του ορισμού της κατηγορίας μοντέλο.

(MC1) (**Limit Axiom**) Η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι πλήρης και συν-πλήρης εξ' υποθέσεως.

(MC2) (**Two out of three Axiom**) Ας είναι f και g μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ υποθέτουμε ότι δύο απο τους f, g και $g \circ f$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες δηλαδή ισομορφισμοί. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η σύνθεση ισομορφισμών και ο αντίστροφος ενός ισομορφισμού είναι ισομορφισμοί έπεται ότι σε κάθε περίπτωση και ο τρίτος μορφισμός είναι ισομορφισμός και κατ' επέκταση ασθενής ισοδυναμία.

(MC3) (**Retract Axiom**) Ας είναι f και g μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε ο f να είναι retract του g και ο g να είναι ασθενής ισοδυναμία δηλαδή ισομορφισμός τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2. ο f είναι αντίστοιχα ισομορφισμός και κατ' επέκταση ασθενής ισοδυναμία. Οι περιπτώσεις στις οποίες ο μορφισμός g είναι νημάτωση ή συννημάτωση προκύπτουν κατα προφανή τρόπο.

(MC4) (**Lifting Axiom**) Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος στην κατηγορία $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός i είναι συννημάτωση και ο μορφισμός p είναι τετριμμένη νημάτωση. Ο μορφισμός p ως τετριμμένη νημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία και κατ' επέκταση ισομορφισμός. Έτσι, υπάρχει ο αντίστροφος $p^{-1} \colon Y \longrightarrow X$ του p και είναι ισομορφισμός. Επιπλέον λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταθετικότητα του διαγράμματος και την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης ισχύει ότι:

$$(p^{-1} \circ g) \circ i = p^{-1} \circ (g \circ i) = p^{-1} \circ (p \circ f) = (p^{-1} \circ p) \circ f = 1_X \circ f = f$$

και

$$p \circ (p^{-1} \circ g) = (p \circ p^{-1}) \circ g = 1_Y \circ g = g.$$

Έτσι, η ζητούμενη ανύψωση είναι ο μορφισμός $h = p^{-1} \circ g$.
Όσον αφορά την δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε ότι ο μορφισμός i είναι τετριμμένη

συννημάτωση και ο μορφισμός p είναι νημάτωση. Ανάλογα με την πρώτη περίπτωση ο μορφισμός i είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον μορφισμό $i^{-1}\colon B \longrightarrow A$.Επιπλέον λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταθετικότητα του διαγράμματος και την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης ισχύει ότι:

$$(f \circ i^{-1}) \circ i = f \circ (i^{-1} \circ i) = f \circ 1_A = f$$

και

$$p \circ (f \circ i^{-1}) = (p \circ f) \circ i^{-1} = (g \circ i) \circ i^{-1} = g \circ (i \circ i^{-1}) = g \circ 1_B = g.$$

Έτσι, η ζητούμενη ανύψωση σε αυτή την περίπτωση είναι ο μορφισμός $h = f \circ i^{-1}$.

(MC5) **(Factorization Axiom)** Καθώς όλοι οι μορφισμοί είναι νηματώσεις (fibrations) και συννηματώσεις (cofibrations) κάθε μορφισμός f στην $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = 1_Y \circ f$ είτε ως $f = f \circ 1_X$ όπου:

(a) ο μορφισμός f είναι συννημάτωση και ο μορφισμός 1_Y είναι τετριμμένη νημάτωση είτε

(b) 1_X είναι τετριμμένη συννημάτωση και f είναι νημάτωση αντίστοιχα.

Η ίδια αποδεικτική διαδικασία ακολουθείται στις περιπτώσεις που εφοδιάσουμε την κατηγορία $\mathcal{C}$ με τις άλλες δύο δομές κατηγορίας μοντέλο δηλαδή ορίζοντας ένα μορφισμό να είναι συννημάτωση εαν είναι ένας ισομορφισμός και κάθε μορφισμό να είναι τετριμμένη νημάτωση ή δυϊκά ορίζοντας ένα μορφισμό να είναι νημάτωση εαν είναι ένας ισομορφισμός και κάθε μορφισμό να είναι τετριμμένη συννημάτωση.

2. Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες μοντέλο. Η κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ αποκτά την δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής: Ορίζουμε έναν μορφισμό $(f, g)\colon (X, Y) \longrightarrow (X', Y')$ να είναι ασθενής ισοδυναμία (αντίστοιχα νημάτωση, συννημάτωση), αν και μόνο αν ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow X'$ είναι ασθενής ισοδυναμία (αντίστοιχα νημάτωση, συννημάτωση) στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow Y'$ είναι ασθενής ισοδυναμία (αντίστοιχα νημάτωση, συννημάτωση) στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Εν συνεχεία αποδεικνύουμε ότι με την παραπάνω δομή πληρούνται τα αξιώματα του ορισμού της κατηγορίας μοντέλο.

(MC1) **(Limit Axiom)** Η κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ είναι πλήρης και συν-πλήρης αφού οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ ως κατηγορίες μοντέλο είναι πλήρεις και συν-πλήρεις.

(MC2) **(Two out of three Axiom)** Ας είναι $(f_1, g_1)\colon (X, Y) \longrightarrow (X', Y')$ και $(f_2, g_2)\colon (X', Y') \longrightarrow (X'', Y'')$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)\colon (X, Y) \longrightarrow (X'', Y'')$. Επιπλέον, $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$. Σύμφωνα με την δομή που ορίσαμε έχουμε:

(f_1, g_1) είναι ασθενής ισοδυναμία $\iff$

$\iff$ f_1 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ και g_1 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$

(f_2, g_2) είναι ασθενής ισοδυναμία $\iff$

$\iff$ f_2 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ και g_2 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.

$(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)$ είναι ασθενής ισοδυναμία $\iff$

$\iff$ $f_2 \circ f_1$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ και $g_2 \circ g_1$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.

(a) Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί (f_1, g_1) και (f_2, g_2) είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Τότε οι μορφισμοι f_1 και f_2 στην $\mathcal{C}$ και g_1 και g_2 στην $\mathcal{C}'$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο έχουμε ότι η κλάση των ασθενών ιδοδυναμιών είναι κλειστή ως προς την σύνθεση. Έτσι, οι μορφισμοι $f_2 \circ f_1$ και $g_2 \circ g_1$ στις $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ αντίστοιχα είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Συνεπώς ο μορφισμός $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

(b) Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί (f_1, g_1) και $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Τότε οι μορφισμοι f_1 και $f_2 \circ f_1$ στην $\mathcal{C}$ και g_1 και $g_2 \circ g_1$ στην $\mathcal{C}'$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι οι μορφισμοί f_2 και g_2 στις $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ αντίστοιχα είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Συνεπώς ο μορφισμός (f_2, g_2) είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

(c) Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί (f_2, g_2) και $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες ανάλογα με το (b) αποδεικνύεται ότι ο μορφισμός (f_1, g_1) είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

(MC3) (**Retract Axiom**) Ας είναι (f_1, g_1) και (f_2, g_2) μορφισμοί στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ τέτοιοι ώστε ο (f_1, g_1) να είναι retract του (f_2, g_2). Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.3 ο μορφισμός f_1 είναι retract του μορφισμού f_2 στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός g_1 είναι retract του μορφισμού g_2 στην $\mathcal{C}'$.

(a) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός (f_2, g_2) είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε ο μορφισμός f_2 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός g_2 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο σύμφωνα με το αξίωμα (MC3) ο μορφισμός f_1 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός g_1 είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Συνεπώς, ο μορφισμός (f_1, g_1) είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

(b) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός (f_2, g_2) είναι νημάτωση . Τότε ο μορφισμός f_2 είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός g_2 είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο σύμφωνα με το αξίωμα (MC3) ο μορφισμός f_1 είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός g_1 είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}'$. Συνεπώς, ο μορφισμός (f_1, g_1) είναι νημάτωση στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

(c) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός (f_2, g_2) είναι συννημάτωση ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική διαδικασία με το (b) έπεται ότι ο μορφισμός (f_1, g_1) είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

(MC4) (**Lifting Axiom**) Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος στην κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$:

$$\begin{tikzcd}
(A_1, A_2) \arrow[r, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[d, "{(i_1,i_2)}"'] & (X_1, X_2) \arrow[d, "{(p_1,p_2)}"] \\
(B_1, B_2) \arrow[r, "{(g_1,g_2)}"'] & (Y_1, Y_2)
\end{tikzcd}$$

(a) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός (i_1, i_2) είναι συννημάτωση και ο μορφισμός (p_1, p_2) είναι τετριμμένη νημάτωση. Τότε οι μορφισμοί i_1 και i_2 είναι συννηματώσεις στις κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ αντίστοιχα και οι μορφισμοί p_1 και p_2 είναι τετριμμένες νηματώσεις στις κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο, ο μορφισμός i_1 είναι συννημάτωση και οι μορφισμός p_1 είναι τετριμμένη νημάτωση στην $\mathcal{C}$ και αντίστοιχα ο μορφισμός i_2 είναι συννημάτωση και οι μορφισμός p_2 είναι τετριμμένη νημάτωση στην $\mathcal{C}'$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχουν ανυψώσεις $h_1 \colon B_1 \longrightarrow X_1$ στην $\mathcal{C}$ και $h_2 \colon B_2 \longrightarrow X_2$ στην $\mathcal{C}'$. Έτσι $h_1 \circ i_1 = f_1$, $h_2 \circ i_2 = f_2$, $p_1 \circ h_1 = g_1$ και $p_2 \circ h_2 = g_2$. Επιπλέον απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι:

$$(h_1, h_2) \circ (i_1, i_2) = (h_1 \circ i_1, h_2 \circ i_2) = (f_1, f_2)$$

και

$$(p_1, p_2) \circ (h_1, h_2) = (p_1 \circ h_1, p_2 \circ h_2) = (g_1, g_2).$$

Έτσι, η ζητούμενη ανύψωση είναι ο μορφισμός (h_1, h_2).

(b) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός (i_1, i_2) είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός (p_1, p_2) είναι νημάτωση. Τότε οι μορφισμοί i_1 και i_2 είναι τετριμμένες συννηματώσεις στις κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ αντίστοιχα και οι μορφισμοί p_1 και p_2 είναι νηματώσεις στις κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο ο μορφισμός i_1 είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός p_1 είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$ και αντίστοιχα ο μορφισμός i_2 είναι τετριμμένη συννημάτωση και οι μορφισμός p_2 είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}'$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχουν ανυψώσεις $h_1' : B_1 \longrightarrow X_1$ στην $\mathcal{C}$ και $h_2' : B_2 \longrightarrow X_2$ στην $\mathcal{C}'$. Έτσι $h_1' \circ i_1 = f_1$, $h_2' \circ i_2 = f_2$, $p_1 \circ h_1' = g_1$ και $p_2 \circ h_2' = g_2$. Επιπλέον απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι:

$$(h_1', h_2') \circ (i_1, i_2) = (h_1' \circ i_1, h_2' \circ i_2) = (f_1, f_2)$$

και

$$(p_1, p_2) \circ (h_1', h_2') = (p_1 \circ h_1', p_2 \circ h_2') = (g_1, g_2).$$

Έτσι, η ζητούμενη ανύψωση είναι ο μορφισμός (h_1', h_2').

(MC5) **(Factorization Axiom)** Ας είναι (f_1, g_1) ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

(a) Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμοί f_1 στην $\mathcal{C}$ και g_1 στην $\mathcal{C}'$ μπορούν να παραγοντοποιηθεί ως $f_1 = p \circ i$ και $g_1 = k \circ l$ όπου οι μορφισμοί i και l είναι συννηματώσεις και οι μορφισμοί p και k είναι τετριμμένες νηματώσεις. Έτσι, έχουμε:

$$(f_1, g_1) = (p \circ i, k \circ l) = (p, k) \circ (i, l).$$

Συνεπώς ο μορφισμός (f_1, g_1) μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως σύνθεση της συννημάτωσης (i, l) και της τετριμμένης νημάτωσης (p, k).

είτε

(b) Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι κατηγορίες μοντέλο σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμοί f_1 στην $\mathcal{C}$ και g_1 στην $\mathcal{C}'$ μπορούν να παραγοντοποιηθεί ως $f_1 = p' \circ i'$ και $g_1 = k' \circ l'$ όπου οι μορφισμοί i' και l' είναι τετριμμένες συννηματώσεις και οι μορφισμοί p' και k' είναι νηματώσεις. Έτσι, έχουμε:

$$(f_1, g_1) = (p' \circ i', k' \circ l') = (p', k') \circ (i', l').$$

Συνεπώς ο μορφισμός (f_1, g_1) μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως σύνθεση της τετριμμένης συννημάτωσης (i, l) και της νημάτωσης (p', k').

3.1.1 Δυϊκότητα στις κατηγορίες μοντέλο

Τα αξιώματα τα οποία ισχύουν για μια κατηγορία μοντέλο είναι αυτοδυϊκά. Δηλαδή εαν P είναι μια πρόταση η οποία ισχύει για μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ και P^{op} είναι η δυϊκή της η οποία λαμβάνεται αντιστρέφοντας τους μορφισμούς στην P και εναλλάσοντας τις συννηματώσεις με τις νηματώσεις και τα όρια με τα συνόρια εαν η P ισχύει για όλες τις κατηγορίες μοντέλο, τότε ισχύει και η P^{op}.

Το ακόλουθο παράδειγμα αντανακλά το γεγονός ότι τα αξιώματα για μια κατηγορία μοντέλο είναι αυτοδυϊκά.

Παράδειγμα 3.1.10. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η δυϊκή της $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ αποκτά την δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής:
Ορίζουμε έναν μορφισμό $f^{\mathsf{op}} : Y \longrightarrow X$ να είναι:

(a) μια ασθενής ισοδυναμία εαν ο μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$.

(b) μια νημάτωση εαν ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C}$.

(c) μια συννημάτωση εαν ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$.

Ευθύς αμέσως θα αποδείξουμε ότι με την παραπάνω δομή πληρούνται τα αξιώματα του ορισμού της κατηγορίας μοντέλο.

(MC1) (**Limit Axiom**) Εφόσον η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι κατηγορία μοντέλο απο το Αξίωμα (MC1) έπεται ότι όλα τα μικρά όρια και συνόρια στην $\mathcal{C}$ υπάρχουν. Ένα συνόριο στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ αντιστοιχεί σε ένα όριο στην $\mathcal{C}$ και ένα όριο στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ αντιστοιχεί σε ένα συνόριο στην $\mathcal{C}$. Ετσι, είναι άμεσο ότι όλα τα μικρά όρια και συνόρια υπάρχουν εξίσου στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

(MC2) (**Two out of three Axiom**) Ας είναι $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ και $g^{\mathsf{op}}\colon Z \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $f^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}}\colon Z \longrightarrow X$. Επιπλέον, ισχύει ότι $f^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}} = (g \circ f)^{\mathsf{op}}$. Σύμφωνα με την δομή που ορίσαμε έχουμε:

$$f^{\mathsf{op}} \text{ είναι ασθενής ισοδυναμία στην } \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \iff f \text{ είναι ασθενής ισοδυναμία στην } \mathcal{C}.$$

$$g^{\mathsf{op}} \text{ είναι ασθενής ισοδυναμία στην } \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \iff g \text{ είναι ασθενής ισοδυναμία στην } \mathcal{C}.$$

$$f^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}} \text{ είναι ασθενής ισοδυναμία στην } \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \iff g \circ f \text{ είναι ασθενής ισοδυναμία στην } \mathcal{C}.$$

Έτσι, εαν δύο απο τους τρείς μορφισμούς είναι ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ τότε δύο απο τους τρείς μορφισμούς είναι εξίσου ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η $\mathcal{C}$ είναι κατηγορία μοντέλο σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι και ο τρίτος μορφισμός είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ και κατ' επέκταση στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

(MC3) (**Retract Axiom**) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f^{op} είναι retract του μορφισμού g^{op}. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.4. ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού g. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός g είναι ασθενής ισοδυναμία (αντίστοιχα νημάτωση, συννημάτωση). Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι κατηγορία μοντέλο σύμφωνα με το Αξίωμα (MC3) έπεται ότι ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία (αντίστοιχα νημάτωση, συννημάτωση) στην $\mathcal{C}$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός f^{op} είναι ασθενής ισοδυναμία (αντίστοιχα νημάτωση, συννημάτωση) στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

(MC4) (**Lifting Axiom**) Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{\mathsf{op}}"] \arrow[d, "i^{\mathsf{op}}"'] & Y \arrow[d, "p^{\mathsf{op}}"] \\ A \arrow[r, "g^{\mathsf{op}}"'] & X \end{tikzcd}$$

(a) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός i^{op} είναι συννημάτωση και ο μορφισμός p^{op} είναι τετριμμένη νημάτωση. Λόγω της μεταθετικότητας του παραπάνω διαγράμματος έχουμε ότι:

$$g^{\mathsf{op}} \circ i^{\mathsf{op}} = p^{\mathsf{op}} \circ f^{\mathsf{op}}$$

στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Έτσι, στην κατηγορία $\mathcal{C}$ ισχύει ότι $i \circ g = f \circ p$. Η τελευταία ισότητα επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός p είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός i είναι νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) που πληροί η κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ υπάρχει μια ανύψωση $h\colon Y \longrightarrow A$. Έτσι, ισχύει ότι $h \circ p = g$ και $i \circ h = f$ στην $\mathcal{C}$. Απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι $p^{\mathsf{op}} \circ h^{\mathsf{op}} = g^{\mathsf{op}}$ και $h^{\mathsf{op}} \circ i^{\mathsf{op}} = f^{\mathsf{op}}$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Συνεπώς, ο μορφισμός $h^{\mathsf{op}}\colon A \longrightarrow Y$ είναι η ζητούμενη ανύψωση.

(b) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός i^{op} είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός p^{op} είναι νημάτωση. Λόγω της μεταθετικότητας του αρχικού διαγράμματος έχουμε ότι:

$$g^{\mathsf{op}} \circ i^{\mathsf{op}} = p^{\mathsf{op}} \circ f^{\mathsf{op}}$$

στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Έτσι, στην κατηγορία $\mathcal{C}$ ισχύει ότι $i \circ g = f \circ p$. Η τελευταία ισότητα επάγει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός p είναι συννημάτωση και ο μορφισμός i είναι τετριμμένη νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) που πληροί η κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ υπάρχει μια ανύψωση $h\colon Y \longrightarrow A$. Έτσι, ισχύει ότι $h \circ p = g$ και $i \circ h = f$ στην $\mathcal{C}$. Απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι $p^{\mathsf{op}} \circ h^{\mathsf{op}} = g^{\mathsf{op}}$ και $h^{\mathsf{op}} \circ i^{\mathsf{op}} = f^{\mathsf{op}}$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Συνεπώς, ο μορφισμός $h^{\mathsf{op}}\colon A \longrightarrow Y$ είναι η ζητούμενη ανύψωση.

(MC5) (**Factorization Axiom**) Ας είναι $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.

(a) Ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ ως μορφισμός στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) που πληροί η κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός i είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός p είναι νημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f^{\mathsf{op}} = i^{\mathsf{op}} \circ p^{\mathsf{op}}$ όπου ο μορφισμός p^{op} είναι συννημάτωση και ο μορφισμός i^{op} είναι τετριμμένη νημάτωση. είτε

(b) Ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ ως μορφισμός στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) που πληροί η κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός i είναι συννημάτωση και ο μορφισμός p είναι τετριμμένη νημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $f^{\mathsf{op}}\colon Y \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f^{\mathsf{op}} = i^{\mathsf{op}} \circ p^{\mathsf{op}}$ όπου ο μορφισμός p^{op} είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός i^{op} είναι νημάτωση.

3.1.2 Ιδιότητες Ανύψωσης

Συνεχίζουμε μελετώντας τις ιδιότητες ανύψωσης οι οποίες χαρακτηρίζουν τις κλάσεις μορφισμών σε μια κατηγορία μοντέλο και αναφερόμαστε σε μια τεχνική η οποία καλείται "retract argument". Η τεχνική αυτή μαζί με το αξίωμα (MC3) που πληροί μια κατηγορία μοντέλο μας βοηθά να αποδείξουμε ότι ένας μορφισμός είναι νημάτωση, συννημάτωση, τετριμμένη νημάτωση ή τετριμμένη συννημάτωση βασιζόμενοι στις ιδιότητες ανύψωσης του.

Ορισμός 3.1.11. *Ένας μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ λέμε ότι έχει την* **ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης (left lifting property (LLP))** *ως προς έναν άλλο μορφισμό $p\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ και ο $p\colon X \longrightarrow Y$ έχει την* **ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης (right lifting property (RLP))**

ως προς τον i εαν υπάρχει μια ανύψωση ας είναι $h\colon B \longrightarrow X$ για κάθε μεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Το ζεύγος των μορφισμών (i, p) με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης (lifting-extension pair)**

Σχόλιο 3.1.12. Λαμβάνοντας υπ’οψιν τον παραπάνω ορισμό, απο το αξίωμα (MC4) το οποίο πληρούν οι κατηγορίες μοντέλο, έπεται ότι οι συννηματώσεις έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τις τετριμμένες νηματώσεις και οι νηματώσεις έχουν την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τις τετριμμένες συννηματώσεις.

Πρόταση 3.1.13. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες και $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών. Τότε $(F(f), g)$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης αν και μόνο αν $(f, G(g))$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό g στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon A \longrightarrow B$ μορφισμοί στις κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ αντίστοιχα. Απο τον ορισμό των συζυγών συναρτητών υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των διαγραμμάτων στην $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ της μορφής:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d, "F(f)"'] & A \arrow[d, "g"] \\ F(Y) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & G(A) \arrow[d, "G(g)"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h^{\#}"] & G(B). \end{tikzcd}$$

Επιπλέον, λόγω συζυγίας υπάρχει μία ανύψωση $h\colon F(Y) \longrightarrow A$ στο αριστερό διάγραμμα αν και μόνο αν υπάρχει μια ανύψωση $h^{\#}\colon Y \longrightarrow G(A)$ στο δεξιό διάγραμμα. Έτσι, $(F(f), g)$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης αν και μόνο αν $(f, G(g))$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης. ∎

Λήμμα 3.1.14. *(**The Retract Argument**) Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ ο οποίος παραγοντοποιείται ως $f = p \circ i$.*

1. *Εαν ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό p τότε ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού i.*

2. *Εαν ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό i τότε ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού p.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$, $i\colon X \longrightarrow Z$ και $p\colon Z \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε $f = p \circ i$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό p. Τότε υπάρχει μια ανύψωση $h\colon Y \longrightarrow Z$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $h \circ f = i$ και $p \circ h = 1_Y$.
Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h"] & Z \arrow[r, "p"] & Y
\end{tikzcd}$$

στο οποίο επιπλέον ισχύει ότι $p \circ h = 1_Y$. Συνεπώς, ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού i.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 3.1.15. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $k\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Η κλάση των μορφισμών οι οποιοί έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k είναι κλειστή ως προς τα retracts.*

2. *Η κλάση των μορφισμών οι οποιοί έχουν την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k είναι κλειστή ως προς τα retracts.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $g\colon C \longrightarrow D$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ ο οποίος έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $k\colon X \longrightarrow Y$ και $f\colon A \longrightarrow B$ retract αυτού. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k.
Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "k"] \\
B \arrow[r, "\zeta"'] & Y
\end{tikzcd}$$

και αναζητούμε μια ανύψωση $h\colon B \longrightarrow X$.
Εφόσον ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι retract του μορφισμού $g\colon C \longrightarrow D$ έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "\gamma"] & D \arrow[r, "\delta"] & B
\end{tikzcd}$$

το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\beta \circ \alpha = 1_A$ και $\delta \circ \gamma = 1_B$.
Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $g\colon C \longrightarrow D$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k υπάρχει μια ανύψωση στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "k"] \\
B \arrow[r, "\gamma"] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[urr, dashed, "\psi"] & B \arrow[r, "\zeta"] & Y
\end{tikzcd}$$

Έτσι, ισχύει ότι $k \circ \psi = \zeta \circ \delta$ και $\psi \circ g = \epsilon \circ \beta$. Επιπλέον απο την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις τελευταίες ισότητες και την μεταθετικότητα του διαγράμματος προκύπτει ότι:

$$(\psi \circ \gamma) \circ f = \psi \circ (\gamma \circ f) = \psi \circ (g \circ \alpha) = (\psi \circ g) \circ \alpha = (\epsilon \circ \beta) \circ \alpha = \epsilon \circ (\beta \circ \alpha) = \epsilon \circ 1_A = \epsilon$$

και

$$k \circ (\psi \circ \gamma) = (k \circ \psi) \circ \gamma = (\zeta \circ \delta) \circ \gamma = \zeta \circ (\delta \circ \gamma) = \zeta \circ 1_B = \zeta$$

Επομένως, η ζητούμενη ανύψωση είναι ο μορφισμός $h = \psi \circ \gamma$.

2. Η απόδειξη της είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Στην παραπάνω πρόταση μελετήσαμε την συμπεριφορά που έχουν οι μορφισμοί οι οποιοί έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης και δυϊκά την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τα retracts. Παρόμοια συμπεριφορά έχουν οι προαναφερθέντες μορφισμοί ως προς τα pushouts και τα pullbacks όπως υποδηλώνεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.1.16. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $k\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Η κλάση των μορφισμών οι οποίοι έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k είναι κλειστή ως προς τα pushouts.*

2. *Η κλάση των μορφισμών οι οποιοί έχουν την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k είναι κλειστή ως προς τα pullbacks.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $i\colon A \longrightarrow B$ ένας μορφισμός ο οποίος έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $k\colon X \longrightarrow Y$ και $j\colon C \longrightarrow D$ ένα pushout του μορφισμού $i\colon A \longrightarrow B$ κατά μήκος ενός μορφισμού $s\colon A \longrightarrow C$. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός j έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k.
Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, "k"] \\ B \arrow[r, "t"'] \arrow[urr, dashed, "\psi"] & D \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "\theta"'] & Y \end{tikzcd}$$

στο οποίο το αριστερό μεταθετικό διάγραμμα είναι pushout. Αναζητούμε μια ανύψωση $\theta\colon D \longrightarrow X$ όπως σημειώνεται στο παραπάνω διάγραμμα. Εφόσον ο μορφισμός i έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό k υπάρχει μια ανύψωση $\psi\colon B \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Έτσι, έχουμε ότι $\psi \circ i = u \circ s$ και $k \circ \psi = v \circ t$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αριστερό μεταθετικό διάγραμμα είναι pushout υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h\colon D \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $h \circ j = u$ και $h \circ t = \psi$. Συνθέτοντας τις τελευταίες ισότητες απο αριστερά με τον μορφισμό k, χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα του δεξιού διαγράμματος και την ισότητα $k \circ \psi = v \circ t$ προκύπτει ότι:

$$k \circ h \circ t = k \circ \psi = v \circ t$$

και

$$k \circ h \circ j = k \circ u = v \circ j$$

Συνεπώς, απο τις τελευταίες ισότητες λόγω της καθολικής ιδιότητας των pushouts έπεται ότι $k \circ h = v$. Ετσι, λαμβάνοντας $\theta = h$ έχουμε την ζητούμενη ανύψωση.

2. Η απόδειξη της είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Η ακόλουθη πρόταση χαρακτηρίζει τις κλάσεις μορφισμών σε μια κατηγορία μοντέλο.

Πρόταση 3.1.17. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι συννημάτωση αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις τετριμμένες νηματώσεις.*

2. *Ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις νηματώσεις.*

3. *Ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι νημάτωση αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς όλες τις τετριμμένες συννηματώσεις.*

4. *Ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι τετριμμένη νημάτωση αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς όλες τις συννηματώσεις.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $i\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση και $p\colon X \longrightarrow Y$ μια τετριμμένη νημάτωση στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$. Τότε σύμφωνα με το Αξίωμα (MC4) υπάρχει μία ανύψωση ας είναι $h\colon B \longrightarrow X$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Συνεπώς η συννημάτωση $i\colon A \longrightarrow B$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς την τετριμμένη νημάτωση $p\colon X \longrightarrow Y$ και κατ' επέκταση ως προς οποιαδήποτε τετριμμένη νημάτωση στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $i\colon A \longrightarrow B$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ ο οποίος έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις τετριμμένες νηματώσεις. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός i στην $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $i = p \circ k$ όπου ο μορφισμός k είναι συννημάτωση και ο μορφισμός p είναι τετριμμένη νημάτωση. Τότε ο μορφισμός i έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς την τετριμμένη νημάτωση p. Ετσι, απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.14. έπεται ότι ο μορφισμός i είναι retract του μορφισμού k. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός k είναι συννημάτωση απο το Αξίωμα (MC3) προκύπτει ότι ο μορφισμός i είναι συννημάτωση.

2. Ας είναι $i\colon A \longrightarrow B$ μια τετριμμένη συννημάτωση και $p\colon X \longrightarrow Y$ μια νημάτωση στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μία ανύψωση, ας είναι $h\colon X \longrightarrow Y$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Συνεπώς η τετριμμένη συννημάτωση $i\colon B \longrightarrow X$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς την νημάτωση $p\colon X \longrightarrow Y$ και κατ' επέκταση ως προς οποιαδήποτε νημάτωση στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $i\colon A \longrightarrow B$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ ο οποίος έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις νηματώσεις. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός i στην $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $i = j \circ k$ όπου ο μορφισμός k είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός j είναι νημάτωση. Τότε ο μορφισμός i έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς την νημάτωση j. Ετσι, απο το πρώτο σκέλος του λήμματος 3.1.14. έπεται ότι ο μορφισμός i είναι retract του μορφισμού k. Εφόσον ο μορφισμός k είναι ασθενής ισοδυναμία απο το Αξίωμα (MC3) προκύπτει ότι ο μορφισμός i είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $i = j \circ k$ απο το Αξίωμα (MC2) συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός j είναι ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, ο μορφισμός j είναι τετριμμένη νημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός i έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς την τετριμμένη νημάτωση j και ως εκ τούτου απο το πρώτο σκέλος της παρούσας πρότασης είναι συννημάτωση. Συνεπώς, ο μορφισμός i είναι τετριμμένη συννημάτωση.

3. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.

4. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του δεύτερου σκέλους. ■

Παρατήρηση 3.1.18. Συνδυάζοντας την Πρόταση 3.1.15 και την Πρόταση 3.1.17 είναι άμεσο ότι σε μια κατηγορία μοντέλο οι κλάσεις των νηματώσεων, των συννηματώσεων, των τετριμμένων νηματώσεων και των τετριμμένων συννηματώσεων είναι κλειστές ως προς τα retracts.

Πρόταση 3.1.19. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μιας τετριμμένης συννημάτωσης και μιας τετριμμένης νημάτωσης.*

Απόδειξη. Ας είναι $f \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.

1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός f μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $i \colon X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $p \colon Z \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση. Ο μορφισμός i ως τετριμμένη συννημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός p είναι ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, ο μορφισμός p είναι τετριμμένη νημάτωση. Έτσι, η ασθενής ισοδυναμία f γράφεται ως σύνθεση της τετριμμένης συννημάτωσης i και της τετριμμένης νημάτωσης p.

2. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $i \colon X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $p \colon Z \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Οι μορφισμοί i και p είναι ασθενείς ισοδυναμίες ως τετριμμένη συννημάτωση και ως τετριμμένη νημάτωση αντίστοιχα. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $f = p \circ i$ απο το Αξίωμα (MC2) είναι άμεσο ότι ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία. ■

Η Πρόταση 3.1.17 εκτός απο το ότι χαρακτηρίζει τις κλάσεις των μορφισμών σε μια κατηγορία μοντέλο υποδηλώνει ότι τα αξιώματα της είναι υπερπλήρη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι εάν θέλουμε να εφοδιάσουμε μια κατηγορία με την δομή κατηγορίας μοντέλο και έχουμε επιλέξει τις δύο κλάσεις μορφισμών μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε και την τρίτη κλάση μορφισμών όπως υποδηλώνεται απο το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.1.20. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Οι κλάσεις των συννηματώσεων και των ασθενών ισοδυναμιών προσδιορίζουν την κλάση των νηματώσεων.*

2. *Οι κλάσεις των νηματώσεων και των ασθενών ισοδυναμιών προσδιορίζουν την κλάση των συννηματώσεων.*

3. *Οι κλάσεις των συννηματώσεων και των νηματώσεων προσδιορίζουν την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών.*

Απόδειξη.

1. Επιλέγοντας τις κλάσεις των συννηματώσεων και των ασθενών ισοδυναμιών σύμφωνα με το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 προσδιορίζεται η κλάση των νηματώσεων (είναι αυτές οι οποίες έχουν την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως πρός όλες τις τετριμμένες συννηματώσεις).

2. Επιλέγοντας τις κλάσεις των νηματώσεων και των ασθενών ισοδυναμιών σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 προσδιορίζεται η κλάση των συννηματώσεων (είναι αυτές οι οποίες έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως πρός όλες τις τετριμμένες νηματώσεις).

3. Επιλέγοντας την κλάση των νηματώσεων σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 προσδιορίζεται η κλάση των τετριμμένων συννηματώσεων (είναι αυτές οι οποίες έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως πρός όλες τις νηματώσεις). Ανάλογα, επιλέγοντας την κλάση των συννηματώσεων σύμφωνα με το τέταρτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 προσδιορίζεται η κλάση των τετριμμένων νηματώσεων (είναι αυτές οι οποίες έχουν την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως πρός όλες τις συννηματώσεις). Ωστόσο σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.19 οι τετριμμένες συννηματώσεις και οι τετριμμένες νηματώσεις προσδιορίζουν τις ασθενείς ισοδυναμίες. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι οι συννηματώσεις και οι νηματώσεις προσδιορίζουν τις ασθενείς ισοδυναμίες. ■

Άμεση συνέπεια της Παρατήρησης 3.1.18 και του Αξιώματος (MC3) είναι η ακόλουθη πρόταση.

Λήμμα 3.1.21. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Κάθε ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι τετριμμένη νημάτωση και τετριμμένη συννημάτωση.*

Απόδειξη. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $f \circ g = 1_Y$ και $g \circ f = 1_X$. Σύμφωνα, με την Πρόταση 3.1.19 ο ταυτοτικός μορφισμός 1_X ο οποίος αποτελεί ασθενή ισοδυναμία μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $1_X = k \circ h$ όπου ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow W$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $k\colon W \longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

στο οποίο ισχύει $k \circ h = 1_X$ και $f \circ g = 1_Y$. Έτσι, ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού k ο οποίος είναι τετριμμένη νημάτωση. Όμως σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.18 η κλάση των τετριμμένων νηματώσεων είναι κλειστή στα retracts. Συνεπώς ο ισομορφισμός f είναι τετριμμένη νημάτωση.

Ανάλογα, σύμφωνα, με την Πρόταση 3.1.19 ο ταυτοτικός μορφισμός 1_Y ο οποίος αποτελεί ασθενή ισοδυναμία μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $1_Y = k' \circ h'$ όπου ο μορφισμός $h'\colon Y \longrightarrow C$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $k'\colon C \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h'"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h'"] & C \arrow[r, "k'"] & Y
\end{tikzcd}$$

στο οποίο ισχύει $k' \circ h' = 1_Y$ και $g \circ f = 1_X$. Έτσι, ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού h' ο οποίος είναι τετριμμένη συννημάτωση. Όμως σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.18 η κλάση των τετριμμένων συννηματώσεων είναι κλειστή στα retracts. Συνεπώς ο ισομορφισμός f είναι τετριμμένη συννημάτωση. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να αποδείξουμε το εν λόγω λήμμα ως εξής: Κάθε ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$ είναι retract του ταυτοτικού μορφισμού. Ο ταυτοτικός μορφισμός ανήκει και στις τρείς κλάσεις μορφισμών της κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το Αξίωμα (MC3) κάθε ισομορφισμός είναι τετριμμένη συννημάτωση και τετριμμένη νημάτωση. ∎

Πρόταση 3.1.22. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Η κλάση των ασθενών ισοδυναμιών είναι κλειστή ως προς την σύνθεση.*

2. *Η κλάση των νηματώσεων είναι κλειστή ως προς την σύνθεση.*

3. *Η κλάση των συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς την σύνθεση.*

Απόδειξη. Ας είναι $f \colon X \longrightarrow Y$ και $g \colon Y \longrightarrow Z$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f \colon X \longrightarrow Z$.

1. Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί f και g είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Τότε σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $g \circ f$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, η κλάση των ασθενών ισοδυναμιών είναι κλειστή ως προς την σύνθεση.

2. Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί f και g είναι νηματώσεις και $p \colon A \longrightarrow B$ μια τετριμμένη συννημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "g \circ f"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "k"] & Z
\end{tikzcd}$$

Αναζητούμε μια ανύψωση $k \colon B \longrightarrow X$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.17 οι μορφισμοί f και g έχουν την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως πρός όλες τις τετριμμένες συννηματώσεις και κατ' επέκταση και ως προς την p. Έτσι, υπάρχουν ανυψώσεις $h \colon B \longrightarrow X$ και $\beta_1 \colon B \longrightarrow Y$ αντίστοιχα, στα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\beta_1"] & Z.
\end{tikzcd}$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$h \circ p = \alpha \quad \text{και} \quad f \circ h = \beta_1$$

$$\beta_1 \circ p = \alpha_1 \quad \text{και} \quad g \circ \beta_1 = \beta$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης και τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ \beta_1 = \beta$$

και

$$h \circ p = \alpha$$

Ως εκ τούτου η ζητούμενη ανύψωση είναι ο μορφισμός $k = h \colon B \longrightarrow X$. Έτσι, ο μορφισμός $g \circ f \colon X \longrightarrow Z$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως πρός την τετριμμένη συννημάτωση $p \colon A \longrightarrow B$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $g \circ f$ είναι νημάτωση.

3. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του δεύτερου σκέλους. ∎

Πρόταση 3.1.23. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Η κλάση των συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα pushouts.*
2. *Η κλάση των τετριμμένων συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα pushouts.*
3. *Η κλάση των νηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα pullbacks.*
4. *Η κλάση των τετριμμένων νηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα pullbacks.*

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε το ακόλουθο pushout διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "u"] \\ B \arrow[r, "v"'] & D \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f \colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $u \colon C \longrightarrow D$ είναι εξίσου συννημάτωση. Ας είναι $h \colon M \longrightarrow N$ μια τετριμμένη νημάτωση. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 ο f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις τετριμμένες νηματώσεις και κατ' επέκταση και ως προς την h. Ως εκ τούτου εφόσον ο μορφισμός u είναι pushout του μορφισμού f κατα μήκος του μορφισμού g σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.16 έπεται ότι ο μορφισμός u έχει εξίσου την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως πρός την τετριμμένη νημάτωση h. Έτσι, ο μορφισμός u είναι συννημάτωση.

2. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f \colon A \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $u \colon C \longrightarrow D$ είναι εξίσου τετριμμένη συννημάτωση. Ας είναι $h' \colon M' \longrightarrow N'$ μια νημάτωση. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 ο f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις νηματώσεις και κατ' επέκταση και ως προς την h'. Ως εκ τούτου εφόσον ο μορφισμός u είναι pushout του μορφισμού f κατα μήκος του μορφισμού g σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.16 έπεται ότι ο μορφισμός u έχει εξίσου την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως πρός την νημάτωση h'. Έτσι, ο μορφισμός u είναι τετριμμένη συννημάτωση.

3. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.

4. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του δεύτερου σκέλους. ∎

Πρόταση 3.1.24. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Η κλάση των συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα συγγινόμενα (coproducts).*
2. *Η κλάση των τετριμμένων συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα συγγινόμενα (coproducts).*
3. *Η κλάση των νηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα (products).*
4. *Η κλάση των τετριμμένων νηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα (products).*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $1_Z\colon Z \longrightarrow Z$ συννηματώσεις. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $f\coprod 1_Z\colon X\coprod Z \longrightarrow Y\coprod Z$ είναι εξίσου συννημάτωση. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.16 το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_0"] \arrow[d, "f"'] & X\coprod Z \arrow[d, "f\coprod 1_Z"] \\ Y \arrow[r, "\iota n_0'"] & Y\coprod Z \end{tikzcd}$$

είναι pushout διάγραμμα. Εφόσον ο μορφισμός f είναι συννημάτωση απο το πρώτο σκέλος της πρότασης 3.1.23 έπεται ότι ο μορφισμός $f\coprod 1_Z\colon X\coprod Z \longrightarrow Y\coprod Z$ είναι συννημάτωση. Έτσι, η κλάση των συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα συγγινόμενα (coproducts).

2. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $1_Z\colon Z \longrightarrow Z$ τετριμμένες συννηματώσεις. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $f\coprod 1_Z\colon X\coprod Z \longrightarrow Y\coprod Z$ είναι εξίσου τετριμμένη συννημάτωση. Όπως είδαμε και στην απόδειξη του πρώτου σκέλους το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_0"] \arrow[d, "f"'] & X\coprod Z \arrow[d, "f\coprod 1_Z"] \\ Y \arrow[r, "\iota n_0'"] & Y\coprod Z \end{tikzcd}$$

είναι pushout διάγραμμα. Εφόσον ο μορφισμός f είναι τετριμμένη συννημάτωση απο το δεύτερο σκέλος της πρότασης 3.1.23 έπεται ότι ο μορφισμός $f\coprod 1_Z\colon X\coprod Z \longrightarrow Y\coprod Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Έτσι, η κλάση των τετριμμένων συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τα συγγινόμενα (coproducts).

3. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.
4. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του δεύτερου σκέλους. ■

Πρόταση 3.1.25. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλο και $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών.*

1. *Ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις αν και μόνο αν ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις.*
2. *Ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις αν και μόνο αν ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ μια συννημάτωση στην $\mathcal{C}$ και $g\colon A \longrightarrow B$ μια τετριμμένη νημάτωση στην $\mathcal{C}'$. Υποθέτουμε ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις. Ως εκ τούτου, ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C}'$. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις τετριμμένες νηματώσεις και κατ' επέκταση και ως προς την g. Συνεπώς, το ζεύγος $(F(f), g)$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης. Όμως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.13 αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το ζεύγος $(f, G(g))$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης δηλαδη εξ' ορισμού αν και μόνο αν ο μορφισμός $G(g)$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς την συννημάτωση f δηλαδή συμφωνα με το τέταρτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 αν και μόνο αν ο μορφισμός $G(g)$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Επομένως, ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις αν και μόνο αν ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις.

2. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ μια τετριμμένη συννημάτωση στην $\mathcal{C}$ και $g\colon A \longrightarrow B$ μια νημάτωση στην $\mathcal{C}'$. Υποθέτουμε ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις. Ως εκ τούτου, ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι τετριμμένη συννημάτωση στην $\mathcal{C}'$. Έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις νηματώσεις και κατ' επέκταση και ως προς την g. Συνεπώς, το ζεύγος $(F(f), g)$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης. Όμως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.13 αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το ζεύγος $(f, G(g))$ είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης δηλαδη εξ' ορισμού αν και μόνο αν ο μορφισμός $G(g)$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς την τετριμμένη συννημάτωση f δηλαδή συμφωνα με το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 αν και μόνο αν ο μορφισμός $G(g)$ είναι νημάτωση. Επομένως, ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις αν και μόνο αν ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις. ■

Λήμμα 3.1.26. ***(*C.L.Reedy*)*** *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{C}$.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\mu"] \arrow[dd, "\beta"'] & & B \arrow[dr, "f_B"] \arrow[dd, "\gamma"] & \\
& A' \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dd, "\zeta"] & & B' \arrow[dd, "\eta"] \\
C \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\iota"'] & & D \arrow[dr, "f_D"] & \\
& C' \arrow[rr, "\theta"] & & D'
\end{tikzcd}
$$

στο οποίο τα εμπρός και πίσω μεταθετικά διαγράμματα είναι pushouts και οι μορφισμοί $f_B\colon B \longrightarrow B'$ και $C \coprod_A A' \longrightarrow C'$ είναι συννηματώσεις. Τότε ο μορφισμός $f_D\colon D \longrightarrow D'$ είναι συννημάτωση.

Απόδειξη. Δοθέντων συννηματώσεων $f_B\colon B \longrightarrow B'$ και $C \coprod_A A' \longrightarrow C'$ αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $f_D\colon D \longrightarrow D'$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις τετριμμένες νηματώσεις. Ας είναι $p\colon X \longrightarrow Y$ μια τετριμμένη νημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_D"'] & X \arrow[d, "p"] \\
D' \arrow[r, "\psi"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

στην $\mathcal{C}$. Αναζητούμε μια ανύψωση $D' \longrightarrow X$. Εφόσον $f_B\colon B \longrightarrow B'$ είναι συννημάτωση σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 υπάρχει μια ανύψωση $h_B\colon B' \longrightarrow X$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f_B"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[ur, dashed, "h_B"] & Y \end{tikzcd}$$

Έτσι, ισχύει ότι $h_B \circ f_B = k$ και $p \circ h_B = \lambda$.

Συνθέτοντας τον μορφισμό h_B με τον μορφισμό $\epsilon\colon A' \longrightarrow B'$ λαμβάνουμε τον μορφισμό $h_A = h_B \circ \epsilon\colon A' \longrightarrow X$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την μεταθετικότητα του τρισδιάστατου διαγράμματος και τις τελευταίες ισότητες ο μορφισμός h_A είναι τέτοιος ώστε:

$$h_A \circ \mu = (h_B \circ \epsilon) \circ \mu = h_B \circ (\epsilon \circ \mu) = h_B \circ (f_B \circ \alpha) = (h_B \circ f_B) \circ \alpha = k \circ \alpha.$$

και

$$p \circ h_A = p \circ (h_B \circ \epsilon) = (p \circ h_B) \circ \epsilon = \lambda \circ \epsilon.$$

Υποθέτουμε ότι $h_A \circ \mu = v \circ \delta \circ \beta$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"'] & A' \arrow[d, "\omega"] \\ C \arrow[r, "\phi"'] & C \coprod_A A' \end{tikzcd}$$

είναι pushout υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\pi\colon C \coprod_A A' \longrightarrow C'$ τέτοιος ώστε $\pi \circ \omega = h_A$ και $\pi \circ \phi = v \circ \delta$. Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι $\zeta \circ \mu = \iota \circ \beta$. Χρησιμοποιώντας ξανά ότι το παραπάνω διάγραμμα είναι pushout υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g\colon C \coprod_A A' \longrightarrow C'$ τέτοιος ώστε $g \circ \phi = \iota$ και $g \circ \omega = \zeta$. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} C \coprod_A A' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C' \arrow[r, "\psi\circ\theta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Εφόσον ο μορφισμός g είναι συννημάτωση και ο μορφισμός p είναι τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $h'_C\colon C' \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Έτσι, έχουμε $h'_C \circ g = \pi$ και $p \circ h'_C = \psi \circ \theta$. Υποθέτουμε ότι $h_B \circ \epsilon = h'_C \circ \zeta$. Εφόσον το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\zeta"'] & B' \arrow[d, "\eta"] \\ C' \arrow[r, "\theta"'] & D' = C' \coprod_{A'} B' \end{tikzcd}$$

είναι pushout υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h'_D\colon D' \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $h'_D \circ \theta = h'_C$ και $h'_D \circ \eta = h_B$. Υποθέτουμε ότι $\lambda \circ \epsilon = p \circ h'_C \circ \zeta$. Χρησιμοποιώντας ξανά ότι το παραπάνω διάγραμμα είναι pushout υπάρχει μοναδικός μορφισμός $p \circ h'_D \colon D' = C' \coprod'_A B' \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $(p \circ h'_D) \circ \theta = p \circ h'_C$ και $(p \circ h'_D) \circ \eta = \lambda$. Επιπλέον, το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "k"'] & B' \arrow[d, "\lambda"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

διασπάται ως:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dd, bend right=60, "k"'] & B' \arrow[d, "\eta"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda"] \\ D \arrow[r, "f_D"] \arrow[d, "v"'] & D' \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "p"] & Y. \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου προκύπτει ότι $k = v \circ \gamma$ και $\lambda = \psi \circ \eta$. Συνεπώς έχουμε ότι $\psi \circ \theta = p \circ h'_C$ και $\psi \circ \eta = \lambda$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την μοναδικότητα του μορφισμού $p \circ h'_D$ έπεται ότι $p \circ h'_D = \psi$. Ακόμη, υποθέτουμε ότι $k \circ \alpha = h'_D \circ \theta \circ \iota \circ \beta$. Εφόσον το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd}$$

είναι pushout υπάρχει μοναδικός μορφισμός $v \colon D \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $v \circ \delta = h'_D \circ \theta \circ \iota$ και $v \circ \gamma = k$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταθετικότητα του τρισδιάστατου διαγράμματος καθώς και τις ισότητες $h_B = h'_D \circ \eta$ και $h_B \circ f_B = k$ έχουμε:

$$h'_D \circ f_D \circ \delta = h'_D \circ \theta \circ \iota.$$

$$h'_D \circ f_D \circ \gamma = h'_D \circ \eta \circ f_B = h_B \circ f_B = k.$$

Έτσι, λόγω της μοναδικότητας του μορφισμού v έπεται ότι $v = h'_D \circ f_D$. Συνεπώς εφόσον $v = h'_D \circ f_D$ και $p \circ h'_D = \psi$ η ζητούμενη ανύψωση είναι ο μορφισμός $h'_D \colon D' \longrightarrow X$. ∎

3.2 Ομοτοπία Στις Κατηγορίες Μοντέλο

Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούμε τα αξιώματα μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ για να κατασκευάσουμε σχέσεις ομοτοπίας στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ των μορφισμών της. Αρχικά, μελετάμε τις έννοιες της αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας οι οποίες ορίζονται με χρήση των κυλινδρικών αντικειμένων και των μονοπάτι αντικειμένων αντίστοιχα. Εν συνεχεία αποδεικνύεται ότι εαν το αντικείμενο X είναι συννινώδες και το αντικείμενο Y είναι ινώδες οι έννοιες της αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας συμπίπτουν και η «κοινή» σχέση που προκύπτει είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Ωστόσο εαν δεν κάνουμε κάποια υπόθεση σχετικά με τα αντικείμενα X και Y όπως θα δούμε οι σχέσεις της αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας δεν ταυτίζονται και καμία εκ των δύο δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

3.2.1 Αριστερή Ομοτοπία, Δεξιά Ομοτοπία και Ομοτοπία

Ξεκινάμε ορίζοντας τις έννοιες του κυλινδρικού αντικειμένου και του μονοπάτι αντικειμένου οι οποίες αποτελούν «δομικά στοιχεία» στον ορισμό της έννοιας της ομοτοπίας και κατ' επέκταση της ομοτοπικής κατηγορίας.

Ορισμός 3.2.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X,Y αντικείμενα της.*

1. *Ένα* **κυλινδρικό αντικείμενο (cylinder object)** *για το X, το οποίο συνήθως συμβολίζεται με Cyl(X), είναι μια παραγοντοποίηση*

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

του συνδιαγώνιου μορφισμού $1_X + 1_X \colon X \coprod X \longrightarrow X$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $s\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow X$ να είναι ασθενής ισοδυναμία και ο μορφισμός $i_0 + i_1 \colon X \coprod X \longrightarrow$ Cyl(X) να είναι συνυημάτωση. Έαν το Cyl(X) είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X οι μορφισμοί $i_0, i_1 \colon X \longrightarrow$ Cyl(X) ορίζονται ώς $i_0 = i \circ in_0$ και $i_1 = i \circ in_1$ όπου $in_0, in_1 \colon X \longrightarrow X \coprod X$ είναι μορφισμοί προς το συν-γινόμενο και $i = i_0 + i_1$.

2. *Ένα* **μονοπάτι αντικείμενο (path object)** *για το Y, το οποίο συνήθως συμβολίζεται με Path(Y), είναι μια παραγοντοποίηση*

$$Y \xrightarrow{r} \text{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$$

του διαγώνιου μορφισμού $(1_Y, 1_Y)\colon Y \longrightarrow Y \times Y$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow$ Path(Y) να είναι ασθενής ισοδυναμία και ο μορφισμός $(p_0, p_1)\colon$ Path(Y) $\longrightarrow Y \times Y$ να είναι νημάτωση. Έαν το Path(Y) είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y οι μορφισμοί $p_0, p_1 \colon$ Path(Y) $\longrightarrow Y$ ορίζονται ώς $p_0 = pr_0 \circ p$ και $p_1 = pr_1 \circ p$ όπου $pr_0, pr_1 \colon Y \times Y \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί απο το γινόμενο και $p = (p_0, p_1)$.

Σχόλιο 3.2.2. 1. Ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y σε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το Y στην δυϊκή κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Αντίστοιχα, όπως θα δούμε στην συνέχεια μια δεξιά ομοτοπία μεταξύ μορφισμών f και g στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ είναι μια αριστερή ομοτοπία μεταξύ τους στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$. Ετσι, αρκεί να αποδεικνύουμε αποτελέσματα σχετικά με κυλινδρικά αντικείμενα και αριστερές ομοτοπίες καθώς τα αποτελέσματα σχετικά με μονοπάτι αντικείμενα και δεξιές ομοτοπίες προκύπτουν ως δυϊκά αυτών.

2. Ισχύει ότι:
$$s \circ i_0 = s \circ (i \circ in_0) = (s \circ i) \circ in_0 = (1_X + 1_X) \circ in_0 = 1_X$$
και
$$s \circ i_1 = s \circ (i \circ in_1) = (s \circ i) \circ in_1 = (1_X + 1_X) \circ in_1 = 1_X.$$

3. Ισχύει ότι:
$$p_0 \circ r = (pr_0 \circ p) \circ r = pr_0 \circ (p \circ r) = pr_0 \circ (1_Y, 1_Y) = 1_Y$$
και
$$p_1 \circ r = (pr_1 \circ p) \circ r = pr_1 \circ (p \circ r) = pr_1 \circ (1_Y, 1_Y) = 1_Y.$$

Εφόσον όπως έχουμε αποδείξει η δυϊκή μιας κατηγορίας μοντέλο είναι μια κατηγορία μοντέλο υπάρχει ένας αντίστοιχος δυϊκός ισχυρισμός για κάθε ισχυρισμό που κάνουμε όπως θα δούμε στις ακόλουθες προτάσεις.

Λήμμα 3.2.3. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X τυχαίο αντικείμενο της $\mathcal{C}$.*

1. *Υπάρχει (τουλάχιστον) ένα κυλινδρικό αντικείμενο*

$$X\coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

στο οποίο ο μορφισμός $s\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.

2. *Υπάρχει (τουλάχιστον) ένα μονοπάτι αντικείμενο*

$$X \xrightarrow{r} \text{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X\times X$$

στο οποίο ο μορφισμός $r\colon X \longrightarrow$ Path(X) είναι τετριμμένη συννημάτωση για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.

Απόδειξη. 1. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε τον συνδιαγώνιο μορφισμό $1_X + 1_X$ στην $\mathcal{C}$ ως:

$$X\coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

όπου ο μορφισμός $s\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση και ο μορφισμός $i_0 + i_1\colon X\coprod X \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X\coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

στο οποίο ο μορφισμός $s\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.

2. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε τον διαγώνιο μορφισμό $(1_X, 1_X)$ στην $\mathcal{C}$ ως:

$$X \xrightarrow{r} \text{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X\times X$$

όπου ο μορφισμός $r\colon X \longrightarrow$ Path(X) είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $(p_0,p_1)\colon$ Path(X) $\longrightarrow X\times X$ είναι νημάτωση. Επομένως, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα μονοπάτι αντικείμενο

$$X \xrightarrow{r} \text{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X\times X$$

στο οποίο ο μορφισμός $r\colon X \longrightarrow$ Path(X) είναι τετριμμένη συννημάτωση για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$. ■

Ευθύς αμέσως παραθέτουμε ένα παράδειγμα κυλινδρικού αντικειμένου και ένα παράδειγμα μονοπάτι αντικειμένου.

Παράδειγμα 3.2.4. 1. Ας είναι $\mathcal{C}$ η κατηγορία των τοπολογικών χώρων η οποία μπορεί να εφοδιαστεί με την δομή κατηγορίας μοντέλο όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Ένα κυλινδρικό αντικείμενο για έναν τοπολογικό χώρο X είναι το καρτεσιανό γινόμενο $X \times I$ όπου I είναι το κλειστό διάστημα $[0,1]$, ο μορφισμός $i_0\colon X \longrightarrow X\times I$ ορίζεται ως $i_0(x) = (x,0)$, ο μορφισμός $i_1\colon X \longrightarrow X\times I$ ορίζεται ως $i_1(x) = (x,1)$ και ο μορφισμός $s\colon X\times I \longrightarrow X$ ορίζεται ως $s(x,t) = x$.

2. Ας είναι $\mathcal{C}$ η κατηγορία των τοπολογικών χώρων η οποία μπορεί να εφοδιαστεί με την δομή κατηγορίας μοντέλο όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Ένα μονοπάτι αντικείμενο για έναν τοπολογικό χώρο X είναι ο χώρος των απεικονίσεων $Map(I,X) = \{f\colon I \longrightarrow X|\ f \text{ συνεχής}\}$ με την συμπαγή-ανοικτή τοπολογία όπου I είναι το κλειστό διάστημα $[0,1]$, η συνεχής απεικόνιση $p_0\colon Map(I,X) \longrightarrow X$ ορίζεται ως $p_0(f) = f(0)$, η συνεχής απεικόνιση $p_1\colon Map(I,X) \longrightarrow X$ ορίζεται ως $p_1(f) = f(1)$ και $s\colon X \longrightarrow Map(I,X)$ όπου $s(x)$ είναι η απεικόνιση με σταθερή τιμή x.

Πρόταση 3.2.5. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Εαν το X είναι συννινώδες, τότε οι μορφισμοί $in_0, in_1 \colon X \longrightarrow X \coprod X$ είναι συννηματώσεις.*

2. *Εαν το X είναι ινώδες, τότε οι μορφισμοί $pr_0, pr_1 \colon X \times X \longrightarrow X$ είναι νηματώσεις.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι το X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Τότε ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι πρόκειται για μια κατηγορία με πεπερασμένα συνόρια άρα και pushouts το συν-γινόμενο $X \coprod X$ δίνεται απο το ακόλουθο pushout διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "in_0"] \\
X \arrow[r, "in_1"'] & X \coprod X
\end{tikzcd}$$

Τότε, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.23. οι μορφισμοί $in_0, in_1 \colon X \longrightarrow X \coprod X$ είναι συννημάτωσεις.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Λήμμα 3.2.6. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Εαν Cyl(X) είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X τότε οι μορφισμοί $i_0, i_1 \colon X \longrightarrow Cyl(X)$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Επιπλέον, εαν το X είναι συννινώδες τότε οι μορφισμοί i_0, i_1 είναι τετριμμένες συννηματώσεις.*

2. *Εαν Path(X) είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το X τότε οι μορφισμοί $p_0, p_1 \colon$ Path(X) $\longrightarrow X$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Επιπλέον, εαν το X είναι ινώδες τότε οι μορφισμοί p_0, p_1 είναι τετριμμένες νηματώσεις.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0 + i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X. Απο το Σχόλιο 3.2.2 έχουμε ότι $s \circ i_0 = 1_X$ και $s \circ i_1 = 1_X$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τελευταίες ισότητες και ότι οι μορφισμοί $s \colon$ Cyl(X) $\longrightarrow X$ και $1_X \colon X \longrightarrow X$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι οι μορφισμοί $i_0, i_1 \colon X \longrightarrow$ Cyl(X) είναι ασθενείς ισοδυναμίες.
Όσον αφορά τον δεύτερο ισχυρισμό του πρώτου σκέλους της Πρότασης υποθέτουμε ότι το X είναι συννινώδες. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρόταση 3.2.5 οι μορφισμοί $in_0, in_1 \colon X \longrightarrow X \coprod X$ είναι συννηματώσεις. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $i = i_0 + i_1 \colon X \coprod X \longrightarrow$ Cyl(X) είναι εξίσου συννημάτωση και τις ισότητες $i_0 = i \circ in_0$ και $i_1 = i \circ in_1$ απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 έπεται ότι οι μορφισμοί i_0, i_1 είναι συννηματώσεις. Επομένως οι μορφισμοί i_0, i_1 είναι τετριμμένες συννηματώσεις.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 3.2.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Εαν το X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ τότε ένα κυλινδρικό αντικείμενο Cyl(X) για το X είναι εξίσου συννινώδες.*

2. *Εαν το Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ τότε ένα μονοπάτι αντικείμενο Path(Y) για το Y είναι εξίσου ινώδες.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι το X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση. Επιπλέον, απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $i_0 \colon X \longrightarrow$ Cyl(X) είναι τετριμμένη συννημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow Cyl(X)$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $i_0 \colon X \longrightarrow$ Cyl(X) και $\varnothing \longrightarrow X$. Συνεπώς, το κυλινδρικό αντικείμενο Cyl(X) για το X είναι συννινώδες.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου μέλους. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι το Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός $Y \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Επιπλέον, απο το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $p_0 \colon$ Path(Y) $\longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός Path(Y) $\longrightarrow *$ είναι νημάτωση ως σύνθεση των νηματώσεων $Y \longrightarrow *$ και $p_0 \colon$ Path(Y) $\longrightarrow Y$. Συνεπώς, το μονοπάτι αντικείμενο Path(Y) για το Y είναι ινώδες. ■

Ευθύς αμέσως ορίζουμε τις έννοιες της αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας μέσω των κυλινδρικών αντικειμένων και των μονοπάτι αντικειμένων αντίστοιχα. Οι ακόλουθοι δυϊκοί ορισμοί δίνουν την ίδια έννοια όταν οι συνθήκες είναι αρκετά καλές, επιτρέποντας μας να ορίσουμε την έννοια της ομοτοπίας στους μορφισμούς και κατ' επέκταση με χρήση αυτών την ομοτοπική κατηγορία.

Ορισμός 3.2.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g \colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Μια* **αριστερή ομοτοπία (left homotopy)** *απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g είναι ένας μορφισμός $H \colon$ Cyl(X) $\longrightarrow Y$ για κάποιο κυλινδρικό αντικείμενο Cyl(X) για το X τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Εαν υπάρχει μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g ο μορφισμός f καλείται* **αριστερά ομοτοπικός (left homotopic)** *του μορφισμού g και συνήθως συμβολίζεται με: $f \backsim^l g$.*

2. *Μια* **δεξιά ομοτοπία (right homotopy)** *απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g είναι ένας μορφισμός $H \colon X \longrightarrow$ Path(Y) για κάποιο μονοπάτι αντικείμενο Path(Y) για το Y τέτοιος ώστε $p_0 \circ H = f$ και $p_1 \circ H = g$. Εαν υπάρχει μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g ο μορφισμός f καλείται* **δεξιά ομοτοπίκός (right homotopic)** *του μορφισμού g και συνήθως συμβολίζεται με: $f \backsim^r g$.*

3. *Ο μορφισμός f καλείται* **ομοτοπικός (homotopic)** *του μορφισμού g και συνήθως συμβολίζεται με $f \backsim g$ εαν ο f είναι ταυτόχρονα αριστερά και δεξια ομοτοπικός του g.*

4. *Ο μορφισμός f καλείται* **ομοτοπική ισοδυναμία (homotopy equivalence)** *εαν υπάρχει μορφισμός $h \colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $h \circ f \backsim 1_X$ και $f \circ h \backsim 1_Y$.*

Πρόταση 3.2.9. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g \colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g και επιπλέον το Y είναι ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο*

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathit{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

στο οποίο ο μορφισμός $s \colon$ Cyl(X) $\longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση και μια αριστερή ομοτοπία $H \colon$ Cyl(X) $\longrightarrow Y$ απο τον f στον g.

2. *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g και επιπλέον το X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ τότε υπάρχει ένα μονοπάτι αντικείμενο*

$$Y \xrightarrow{r} \mathit{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$$

στο οποίο ο μορφισμός $r \colon Y \longrightarrow$ Path(Y) είναι τετριμμένη συννημάτωση και μια δεξιά ομοτοπία $H \colon X \longrightarrow$ Path(Y) απο τον f στον g.

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g και επιπλέον ότι το Y είναι ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.3 υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

στο οποίο ο μορφισμός $s\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Εν συνεχεία αναζητούμε μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g. Ας είναι

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0'+i_1'} \mathrm{Cyl(X)}' \xrightarrow{s'} X$$

ένα κυλινδρικό ανικείμενο αντικείμενο για το X τέτοιο ώστε να υπάρχει μια αριστερή ομοτοπία $H'\colon \mathrm{Cyl(X)}' \longrightarrow Y$. Τότε $H' \circ i_0' = f$ και $H' \circ i_1' = g$. Εφαρμόζοντας το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε την ασθενή ισοδυναμία $s'\colon \mathrm{Cyl(X)}' \longrightarrow X$ ως σύνθεση μιας συννημάτωσης $\alpha\colon \mathrm{Cyl(X)}' \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}$ και της τετριμμένης νημάτωσης $s\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow X$ όπως γίνεται ορατό στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\mathrm{Cyl(X)}' \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X.$$

Ο μορφισμός $s\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow X$ ως τετριμμένη νημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $\alpha\colon \mathrm{Cyl(X)}' \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, ο μορφισμός α είναι τετριμμένη συννημάτωση. Κατόπιν θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cyl(X)}' \arrow[r, "H'"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "!!"] \\
\mathrm{Cyl(X)} \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & *
\end{tikzcd} .$$

Εφόσον το $*$ είναι τελικό αντικείμενο το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Y είναι ινώδες εξ' ορισμού έπεται ότι ο μορφισμός $Y \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Συνεπώς, ισχύει ότι $H \circ \alpha = H'$ και $!! \circ H = b$. θεωρούμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_0'"] \arrow[drr, "f"'] & \mathrm{Cyl(X)}' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "H'"] & \mathrm{Cyl(X)} \arrow[d, "H"] \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1'"] \arrow[drr, "g"'] & \mathrm{Cyl(X)}' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "H'"] & \mathrm{Cyl(X)} \arrow[d, "H"] \\
& & Y.
\end{tikzcd}$$

Λόγω της μεταθετικότητας των παραπάνω διαγραμμάτων προκύπτει ότι:

$$H \circ (\alpha \circ i_0') = (H \circ \alpha) \circ i_0' = H' \circ i_0' = f$$

και

$$H \circ (\alpha \circ i_1') = (H \circ \alpha) \circ i_1' = H' \circ i_1' = g$$

Έτσι, απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι η $H\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow Y$ είναι η ζητούμενη αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Η ακόλουθη πρόταση είναι «ασθενέστερη» της Πρότασης 3.2.9 και θα την χρησιμοποίησουμε αργότερα για να αποδείξουμε ότι η αριστερή ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των μορφισμών $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ υπο την προϋπόθεση ότι το αντικείμενο X είναι συννινώδες αντικείμενο της.

Πρόταση 3.2.10. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g αν και μόνο αν ο συνδιαγώνιος μορφισμός $1_X + 1_X\colon X \coprod X \longrightarrow X$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως*

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} C \xrightarrow{s} X$$

όπου ο μορφισμός $s\colon C \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία και υπάρχει ένας μορφισμός $H\colon C \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$.

2. *Ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g αν και μόνο αν ο διαγώνιος μορφισμός $(1_Y, 1_Y)\colon Y \longrightarrow Y \times Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως*

$$Y \xrightarrow{r} P \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$$

όπου ο μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow P$ είναι ασθενής ισοδυναμία και υπάρχει ένας μορφισμός $H\colon X \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε $p_0 \circ H = f$ και $p_1 \circ H = g$.

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει μια παραγοντοποίηση

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} C \xrightarrow{s} X$$

του συνδιαγώνιου μορφισμού $1_X + 1_X\colon X \coprod X \longrightarrow X$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $i_0 + i_1\colon X \coprod X \longrightarrow X$ να είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $s\colon C \longrightarrow X$ να είναι ασθενής ισοδυναμία και υπάρχει ένας μορφισμός $H\colon C \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Συνεπώς, αποδείξαμε ότι ο συνδιαγώνιος μορφισμός $1_X + 1_X\colon X \coprod X \longrightarrow X$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} C \xrightarrow{s} X$$

όπου ο μορφισμός $s\colon C \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία και επιπλέον υπάρχει ένας μορφισμός $H\colon C \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$.
Αντίστροφα, παραγοντοποιούμε τον συνδιαγώνιο μορφισμό $1_X + 1_X\colon X \coprod X \longrightarrow X$ ως

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} C \xrightarrow{s} X$$

όπου ο μορφισμός $s\colon C \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία και επιπλέον ας είναι ένας μορφισμός $H\colon C \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Εφαρμόζοντας το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε τον μορφισμό $i = i_0 + i_1 : X \coprod X \longrightarrow C$ ως σύνθεση μιας συννημάτωσης $i' = i'_0 + i'_1 : X \coprod X \longrightarrow C'$ και μιας τετριμμένης νημάτωσης $t : C' \longrightarrow C$ όπως γίνεται ορατό στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$X \coprod X \xrightarrow{i'=i'_0+i'_1} C' \xrightarrow{\quad t \quad} C.$$

Ο μορφισμός $t : C' \longrightarrow C$ ως τετριμμένη νημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 έπεται ότι ο μορφισμός $s \circ t : C' \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον ισχύει ότι:

$$(s \circ t) \circ (i'_0 + i'_1) = s \circ (t \circ (i'_0 + i'_1)) = s \circ (i_0 + i_1) = 1_X + 1_X.$$

Συνεπώς απο τα παραπάνω προκύπτει ότι το

$$X \coprod X \xrightarrow{i'=i'_0+i'_1} C' \xrightarrow{\quad s \circ t \quad} X$$

είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αναζητούμε μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ισότητες $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$ και την παραγοντοποίηση του μορφισμού i προκύπτει ότι:

$$(H \circ t) \circ i'_0 = H \circ (t \circ i'_0) = H \circ (t \circ (i' \circ in_0)) = H \circ ((t \circ i') \circ in_0) = H \circ (i \circ in_0) = H \circ i_0 = f$$

και

$$(H \circ t) \circ i'_1 = H \circ (t \circ i'_1) = H \circ (t \circ (i' \circ in_1)) = H \circ ((t \circ i') \circ in_1) = H \circ (i \circ in_1) = H \circ i_1 = g.$$

Επομένως απο τις τελευταίες ισότητες είναι άμεσο ότι η ζητούμενη αριστερή ομοτοπία είναι ο μορφισμός $H \circ t : C' \longrightarrow Y$. Έτσι, αποδείξαμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ∎

Πρόταση 3.2.11. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g : X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g, X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο και $Y \xrightarrow{\quad r \quad} Path(Y) \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y τότε υπάρχει μια δεξιά ομοτοπία $H : X \longrightarrow Path(Y)$ απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g.*

2. *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g, Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο και*

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} Cyl(X) \xrightarrow{\quad s \quad} X$$

είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X, τότε υπάρχει μια αριστερή ομοτοπία $H : Cyl(X) \longrightarrow Y$ απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g.

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{\quad s \quad} X$$

και ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon \mathsf{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $\widetilde{H} \circ i_0 = f$ και $\widetilde{H} \circ i_1 = g$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r\circ f"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathsf{Path(Y)} \arrow[d, "(p_0,p_1)"] \\ \mathsf{Cyl(X)} \arrow[r, "(f\circ s,\widetilde{H})"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \times Y \end{tikzcd} .$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X, την ισότητα $(p_0, p_1) \circ r = (1_X, 1_X)$ η οποία προκύπτει απο τον ορισμό του μονοπάτι αντικειμένου $\mathsf{Path(Y)}$, την ισότητα $\widetilde{H} \circ i_0 = f$ καθώς και την ισότητα $s \circ i_0 = 1_X$ που είδαμε στο δεύτερο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 προκύπτει ότι:

$$(f\circ s, \widetilde{H})\circ i_0 = (pr_0\circ((f\circ s, \widetilde{H})\circ i_0), pr_1\circ((f\circ s, \widetilde{H})\circ i_0)) = ((pr_0\circ(f\circ s, \widetilde{H}))\circ i_0, (pr_1\circ(f\circ s, \widetilde{H}))\circ$$

$$\circ i_0) = ((f \circ s) \circ i_0, \widetilde{H} \circ i_0) = (f \circ (s \circ i_0), \widetilde{H} \circ i_0) = (f \circ 1_X, f) = (f, f)$$

και

$$(p_0, p_1)\circ(r\circ f) = ((p_0, p_1)\circ r)\circ f = (1_X, 1_X)\circ f = (pr_0\circ((1_X, 1_X)\circ f), pr_1\circ((1_X, 1_X)\circ f)) =$$

$$= ((pr_0 \circ (1_X, 1_X)) \circ f, (pr_1 \circ (1_X, 1_X)) \circ f) = (1_X \circ f, 1_X \circ f) = (f, f)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τελευταίες ισότητες το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Εφόσον X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $i_0\colon X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Απο τον ορισμό του μονοπάτι αντικειμένου $\mathsf{Path(Y)}$ ο μορφισμός $(p_0, p_1)\colon Y \longrightarrow Y \times Y$ είναι νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $h\colon \mathsf{Cyl(X)} \longrightarrow \mathsf{Path(Y)}$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Έτσι, έχουμε ότι $h \circ i_0 = r \circ f$ και $(p_0, p_1) \circ h = (f \circ s, \widetilde{H})$. Θέτουμε $H = h \circ i_1$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X, τις ισότητες $(p_0, p_1) \circ h = (f \circ s, \widetilde{H})$, $\widetilde{H} \circ i_1 = g$ καθώς και την ισότητα $s \circ i_1 = 1_X$ που είδαμε στο δεύτερο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 έχουμε ότι

$$p_0\circ H = (pr_0\circ p)\circ H = pr_0\circ(p\circ H) = pr_0\circ((p_0, p_1)\circ H) = pr_0\circ((p_0, p_1)\circ(h\circ i_1)) = pr_0\circ(((p_0, p_1)\circ$$

$$\circ h)\circ i_1) = pr_0\circ((f\circ s, \widetilde{H})\circ i_1) = (pr_0\circ(f\circ s, \widetilde{H}))\circ i_1 = (f\circ s)\circ i_1 = f\circ(s\circ i_1) = f\circ 1_X = f$$

και

$$p_1\circ H = (pr_1\circ p)\circ H = pr_1\circ(p\circ H) = pr_1\circ((p_0, p_1)\circ H) = pr_1\circ((p_0, p_1)\circ(h\circ i_1)) = pr_1\circ(((p_0, p_1)\circ$$

$$\circ h) \circ i_1) = pr_1 \circ ((f \circ s, \widetilde{H}) \circ i_1) = (pr_1 \circ (f \circ s, \widetilde{H})) \circ i_1 = \widetilde{H} \circ i_1 = g.$$

Επομένως, απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι ο μορφισμός $H = h \circ i_1\colon X \longrightarrow \mathsf{Path(Y)}$ είναι η ζητούμενη δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.11 αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 3.2.12. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Εαν X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο, Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο και ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g τότε:*

1. *Εαν* $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathit{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ *είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το* X *τότε υπάρχει μια αριστερή ομοτοπία* $H: \mathit{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ *απο τον μορφισμό* f *στον μορφισμό* g.

2. *Εαν* $Y \xrightarrow{r} \mathit{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ *είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το* Y *τότε υπάρχει μια δεξιά ομοτοπία* $H: X \longrightarrow \mathit{Path(Y)}$ *απο τον μορφισμό* f *στον μορφισμό* g.

Απόδειξη. 1. Ας είναι $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X και Y ένα ινώδες αντικείμενο στην $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f: X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g: X \longrightarrow Y$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g. Έτσι, απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.11 έπεται ότι υπάρχει μια αριστερή ομοτοπία $H: \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του Πρώτου σκέλους. Πιο συγκεκριμένα, ας είναι $Y \xrightarrow{r} \mathrm{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y και X ένα συννινώδες αντικείμενο στην $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f: X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g: X \longrightarrow Y$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g. Έτσι, απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.11 έπεται ότι υπάρχει μια δεξιά ομοτοπία $H: X \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}$ απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g. ■

Πρόταση 3.2.13. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *μια κατηγορία μοντέλο και* $f, g: X \longrightarrow Y$ *μορφισμοί στην* $\mathcal{C}$.

1. *Εαν ο μορφισμός* f *είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού* g *τότε ο μορφισμός* f *είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο μορφισμός* g *είναι ασθενής ισοδυναμία.*

2. *Εαν ο μορφισμός* f *είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού* g *τότε ο μορφισμός* f *είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο μορφισμός* g *είναι ασθενής ισοδυναμία.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

για το X και ένας μορφισμός $H: \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.6 οι μορφισμοί $i_0, i_1: X \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $H \circ i_0 = f$ απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός H είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 είναι άμεσο ότι ο μορφισμός $g = H \circ i_1$ είναι ασθενής ισοδυναμία.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός g είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $H \circ i_1 = g$ απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός H είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 είναι άμεσο ότι ο μορφισμός $f = H \circ i_0$ είναι ασθενής ισοδυναμία.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Στην ακόλουθη πρόταση δίνονται οι προϋποθέσεις κατω απο τις οποίες ένας συναρτητής διατηρεί τις σχέσεις της αριστερής ομοτοπίας και της δεξιάς ομοτοπίας αντίστοιχα.

Πρόταση 3.2.14. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *και* $\mathcal{C}'$ *κατηγορίες μοντέλο,* $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *συναρτητής μεταξύ αυτών και* $f, g: X \longrightarrow Y$ *μορφισμοί στην* $\mathcal{C}$.

1. *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο Y είναι ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathsf{Cyl(X)} \xrightarrow{\quad s \quad} X$$

για το X και ένας μορφισμός $H\colon \mathsf{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Απο το τρίτο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 έχουμε ότι $s \circ i_0 = 1_X$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $F(s) \circ F(i_0) = 1_{F(X)}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο X είναι συννινώδες απο την Πρόταση 3.2.7 έπεται ότι το κυλινδρικό αντικείμενο Cyl(X) για το X είναι εξίσου συννινώδες. Επιπλέον απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $i_0\colon X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ειδικότερα μεταξύ συννινωδών αντικειμένων. Έτσι, εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $F(i_0)\colon F(X) \longrightarrow F(\mathsf{Cyl(X)})$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{F(X)}\colon F(X) \longrightarrow F(X)$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $F(s) \circ F(i_0) = 1_{F(X)}$ απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $F(s)\colon F(\mathsf{Cyl(X)}) \longrightarrow F(X)$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Απο την τελευταία ισότητα και τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι:

$$F(s) \circ (F(i_0) + F(i_1)) = (F(s) \circ (F(i_0) + F(i_1)) \circ in_0 + (F(s) \circ (F(i_0) + F(i_1)) \circ in_1 =$$

$$= F(s) \circ ((F(i_0) + F(i_1)) \circ in_0) + F(s) \circ ((F(i_0) + F(i_1)) \circ in_1) = F(s) \circ F(i_0) + F(s) \circ F(i_1) =$$

$$= F(s \circ i_0) + F(s \circ i_1) = F(1_X) + F(1_X) = 1_{F(X)} + 1_{F(X)}$$

Έτσι, ο μορφισμός $1_{F(X)} + 1_{F(X)}\colon F(X) \coprod F(X) \longrightarrow F(X)$ γράφεται ως σύνθεση

$$F(X) \coprod F(X) \xrightarrow{F(i)=F(i_0)+F(i_1)} F(\mathsf{Cyl(X)}) \xrightarrow{\quad F(s) \quad} F(X)$$

όπου ο μορφισμός ο μορφισμός $F(s)\colon F(\mathsf{Cyl(X)}) \longrightarrow F(X)$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Εν συνεχεία εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στις ισότητες $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$ λαμβάνουμε έναν μορφισμό $F(H)\colon F(\mathsf{Cyl(X)}) \longrightarrow F(Y)$ τέτοιον ώστε $F(H) \circ F(i_0) = F(f)$ και $F(H) \circ F(i_1) = F(g)$. Επομένως απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.10 έπεται ότι ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Λήμμα 3.2.15. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλο, $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ συναρτητής μεταξύ αυτών και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$ αν και μόνο αν ο μορφισμός $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο Y είναι ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$ αν και μόνο αν ο μορφισμός $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.14 έπεται ότι ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου απο την Πρόταση 3.2.13 προκύπτει ότι ο μορφισμός $F(f)$ είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο μορφισμός $F(g)$ είναι ασθενής ισοδυναμία.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ∎

Λήμμα 3.2.16. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία, $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ συναρτητής μεταξύ αυτών και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ ισούται με τον μορφισμό $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο Y είναι ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ ισούται με τον μορφισμό $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g, το αντικείμενο X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathsf{Cyl(X)} \xrightarrow{\quad s \quad} X$$

για το X και ένας μορφισμός $H\colon \mathsf{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Απο το δεύτερο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 έχουμε ότι $s \circ i_0 = 1_X = s \circ i_1$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στις τελευταίες ισότητες και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $F(s) \circ F(i_0) = 1_{F(X)} = F(s) \circ F(i_1)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο X είναι συννινώδες απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.7 έπεται ότι το κυλινδρικό αντικείμενο $\mathsf{Cyl(X)}$ για το X είναι εξίσου συννινώδες. Επιπλέον απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $i_0\colon X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ειδικότερα μεταξύ συννινωδών αντικειμένων. Έτσι, εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $F(i_0)\colon F(X) \longrightarrow F(\mathsf{Cyl(X)})$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον $F(i_0)^{-1}\colon F((Cyl(X))) \longrightarrow F(X)$ ο οποίος είναι εξίσου ισομορφισμός. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $F(s) = F(i_0)^{-1}$ είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι, απο τις ισότητες $F(s) \circ F(i_0) = 1_{F(X)}$ και $F(s) \circ F(i_1) = 1_{F(X)}$ προκύπτει ότι $F(i_0) = F(s)^{-1} = F(i_1)$.

Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες ενός συναρτητή, την τελευταία ισότητα καθώς και τις ισότητες $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$ έχουμε:

$$F(f) = F(H \circ i_0) = F(H) \circ F(i_0) = F(H) \circ F(i_1) = F(H \circ i_1) = F(g).$$

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Παραπάνω ορίσαμε τις έννοιες της αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας αντίστοιχα. Όπως είδαμε τόσο η αριστερή όσο και η δεξιά ομοτοπία αποτελουν μορφισμούς οι οποίοι ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες ισότητες. Είναι λοιπόν φυσικό να αναρρωτηθούμε εαν οι μορφισμοι αυτοί αντιστρέφονται και αν αυτό συμβαίνει εαν οι αντίστροφοι αυτών είναι εξίσου αριστερή ή αντιστοιχα δεξιά ομοτοπία. Την απάντηση δίνει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.2.17. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ας είναι*

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \textit{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X και $H\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow Y$ μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g. Τότε ορίζεται ο **αντίστροφος (inverse)** *του H, $H^{-1}\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow Y$, όπου*

$$X \coprod X \xrightarrow{i_1+i_0} \textit{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X ο οποίος ισούται με τον H και είναι μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό g στον μορφισμό f.

2. *Ας είναι*

$$Y \xrightarrow{r} \textit{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$$

ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y και $H\colon X \longrightarrow$ Path(Y) μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g. Τότε ορίζεται ο **αντίστροφος (inverse)** *του H, $H^{-1}\colon X \longrightarrow$ Path(Y), όπου*

$$Y \xrightarrow{r} \textit{Path(Y)} \xrightarrow{(p_1,p_0)} Y \times Y$$

είνα ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y ο οποίος ισούται με τον H και είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό g στον μορφισμό f.

Στο ακόλουθο λήμμα δίνονται οι προϋποθέσεις οι οποίες πρέπει να πληροί ένα αντικείμενο X και ένα αντικείμενο Y μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ έτσι ώστε δύο κυλινδρικά αντικείμενα και δυϊκά δύο μονοπάτι αντικείμενα να μπορούν να συντεθουν για να δώσουν ένα κυλινδρικό και ένα μονοπάτι αντικείμενο αντίστοιχα.

Λήμμα 3.2.18. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X, Y αντικείμενα αυτής.*

1. *Εαν $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \textit{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ και $X \coprod X \xrightarrow{i'_0+i'_1} \textit{Cyl(X)}' \xrightarrow{s'} X$ είναι κυλινδρικά αντικείμενα για το X και X είναι συννινώδες τότε υπάρχει ένα τρίτο κυλινδρικό αντικείμενο $X \coprod X \xrightarrow{i''_0+i''_1} \textit{Cyl(X)}'' \xrightarrow{s''} X$ στο οποίο Cyl(X)$''$ είναι το pushout του διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d, "i_1"'] & \textit{Cyl(X)}' \\ \textit{Cyl(X)} & \end{tikzcd}$$

ο μορφισμός $i_0'': X \longrightarrow$ Cyl(X)$''$ είναι η σύνθεση

$$X \xrightarrow{i_0} \mathit{Cyl(X)} \xrightarrow{k_0'} \mathit{Cyl(X)}''$$

και ο μορφισμός $i_1'': X \longrightarrow$ Cyl(X)$''$ είναι η σύνθεση

$$X \xrightarrow{i_1'} \mathit{Cyl(X)}' \xrightarrow{k_1} \mathit{Cyl(X)}''$$

2. *Εαν $Y \xrightarrow{r} \mathit{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ και $Y \xrightarrow{r'} \mathit{Path(Y)}' \xrightarrow{(p_0',p_1')} Y \times Y$ είναι μονοπάτι αντικείμενα για το Y και το Y είναι ινώδες τότε υπάρχει ένα τρίτο μονοπάτι αντικείμενο $Y \xrightarrow{r''} \mathit{Path(Y)}'' \xrightarrow{(p_0'',p_1'')} Y \times Y$ στο οποίο Path(Y)$''$ είναι το pullback του διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} & \mathit{Path(Y)} \arrow[d, "p_1"] \\ \mathit{Path(Y)}' \arrow[r, "p_0'"'] & Y \end{tikzcd}$$

ο μορφισμός $p_0'': \mathit{Path(Y)}'' \longrightarrow Y$ είναι η σύνθεση

$$\mathit{Path(Y)}'' \xrightarrow{l_0'} \mathit{Path(Y)} \xrightarrow{p_0} Y$$

και ο μορφισμός $p_1'': \mathit{Path(Y)}'' \longrightarrow Y$ είναι η σύνθεση

$$\mathit{Path(Y)}'' \xrightarrow{l_1} \mathit{Path(Y)}' \xrightarrow{p_1'} Y.$$

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

και

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0'+i_1'} \mathrm{Cyl(X)}' \xrightarrow{s'} X$$

είναι κυλινδρικά αντικείμενα για το X και X είναι συννινώδες. Ας είναι Cyl(X)$''$ το pushout του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0'"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathrm{Cyl(X)}' \\ \mathrm{Cyl(X)}. \end{tikzcd}$$

Τότε, το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα είναι pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0'"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathrm{Cyl(X)}' \arrow[d, "k_1"] \\ \mathrm{Cyl(X)} \arrow[r, "k_0'"'] & \mathrm{Cyl(X)}'' \end{tikzcd}$$

Απο το δεύτερο σκέλος του Σχολίου 3.2.2. έχουμε ότι $s \circ i_0 = 1_X = s \circ i_1$. Αντίστοιχα, για το κυλινδρικό αντικείμενο Cyl(X)$'$ ισχύει ότι $s' \circ i_0' = 1_X = s' \circ i_1'$. Έτσι, συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες έχουμε $s' \circ i_0' = 1_X = s \circ i_1$. Λόγω της καθολικής ιδιότητας του pushout υπάρχει μοναδικός μορφισμός $s''\colon \mathrm{Cyl(X)}'' \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $s'' \circ k_1 = s'$ και $s'' \circ k_0' = s$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_0'"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathrm{Cyl(X)}' \arrow[d, "k_1"] \arrow[ddr, bend left, "s'"] & \\
\mathrm{Cyl(X)} \arrow[r, "k_0'"'] \arrow[drr, bend right, "s"'] & \mathrm{Cyl(X)}'' \arrow[dr, dotted, "s''"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Εφόσον το X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 έπεται ότι οι μορφισμοί $i_0, i_1 \colon X \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}$ και $i_0', i_1' \colon X \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}'$ είναι τετριμμένες συννηματώσεις. Ώς εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν το παραπάνω pushout διάγραμμα απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.1.23 συμπεραίνουμε ότι οι μορφισμοί $k_0' \colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}''$ και $k_1 \colon \mathrm{Cyl(X)}' \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}''$ είναι τετριμμένες συννηματώσεις. Ο μορφισμός k_1 ως τετριμμένη συννημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Απο τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου Cyl(X)$'$ ο μορφισμός s' είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, απο την ισότητα $s'' \circ k_1 = s'$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός s'' είναι ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις ισότητες $s'' \circ k_1 = s'$ και $s'' \circ k_0' = s$, τον τρόπο ορισμού των μορφισμών i_0'' και i_1'' και τις ισότητες οι οποίες προκύπτουν απο τον ορισμό των κυλινδρικών αντικειμένων Cyl(X) και Cyl(X)$'$ έχουμε:

$$s''\circ(i_0''+i_1'') = (s''\circ(i_0''+i_1''))\circ in_0+(s''\circ(i_0''+i_1''))\circ in_1 = s''\circ((i_0''+i_1'')\circ in_0)+s''\circ((i_0''+i_1'')\circ in_1) =$$

$$= s''\circ i_0''+s''\circ i_1'' = s''\circ(k_0'\circ i_0)+s''\circ(k_1\circ i_1') = (s''\circ k_0')\circ i_0+(s''\circ k_1)\circ i_1' = s\circ i_0+s'\circ i_1' = 1_X+1_X.$$

Για να έχουμε το ζητούμενο μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $i_0''+i_1'' \colon X \coprod X \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}''$ είναι συννημάτωση.

Θεωρούμε τον μορφισμό $i_0 \coprod 1_X \colon X \coprod X \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)} \coprod X$. Για τον μορφισμό $i_0 \coprod 1_X$ λόγω των ιδιοτήτων των συν-γινομένων έχουμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "in_0"] \arrow[d, "i_0"'] & X \coprod X \arrow[d, "i_0 \coprod 1_X"] \\
\mathrm{Cyl(X)} \arrow[r, "in_0'"] & \mathrm{Cyl(X)} \coprod X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "in_1"] \arrow[d, "1_X"'] & X \coprod X \arrow[d, "i_0 \coprod 1_X"] \\
X \arrow[r, "in_1'"] & \mathrm{Cyl(X)} \coprod X.
\end{tikzcd}$$

Έτσι, ισχύει ότι $in_0' \circ i_0 = (i_0 \coprod 1_X) \circ in_0$ και $in_1' = (i_0 \coprod 1_X) \circ in_1$. Ανάλογες ισότητες ικανοποιεί ο μορφισμός $i_1 \coprod 1_X \colon X \coprod X \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)} \coprod X$. Δηλαδή ισχύει $(i_1 \coprod 1_X)\circ in_0 = in_0' \circ i_1$ και $(i_1 \coprod 1_X) \circ in_1 = in_1'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις δύο πρώτες ισότητες έχουμε:

$$(k_0'+k_1\circ i_1')\circ(i_0 \coprod 1_X) = ((k_0'+k_1\circ i_1')\circ(i_0 \coprod 1_X))\circ in_0+((k_0'+k_1\circ i_1')\circ(i_0 \coprod 1_X))\circ in_1 =$$

$$= (k_0'+k_1\circ i_1')\circ((i_0 \coprod 1_X)\circ in_0)+(k_0'+k_1\circ i_1')\circ((i_0 \coprod 1_X)\circ in_1) = (k_0'+k_1\circ i_1')\circ(in_0'\circ i_0)+(k_0'+$$

$$+k_1 \circ i'_1) \circ in'_1 = ((k'_0 + k_1 \circ i'_1) \circ in'_0) \circ i_0 + k_1 \circ i'_1 = k'_0 \circ i_0 + k_1 \circ i'_1 = i''_0 + i''_1.$$

Έτσι, ο μορφισμός $i''_0 + i''_1 \colon X \coprod X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)}''$ ισούται με την σύνθεση

$$X \coprod X \xrightarrow{i_0 \coprod 1_X} \mathsf{Cyl(X)} \coprod X \xrightarrow{k'_0 + k_1 \circ i'_1} \mathsf{Cyl(X)}''$$

Απο την Πρόταση 1.4.16 έχουμε ότι κάθε διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota n_0"] \arrow[d, "f"'] & X \coprod X \arrow[d, "f \coprod 1_X"] \\ Y \arrow[r, "\iota n'_0"] & Y \coprod X \end{tikzcd}$$

είναι pushout διάγραμμα. Επομένως στην περίπτωση μας λαμβάνοντας ως $Y = Cyl(X)$ και $f = i_0$ έπεται ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "in_0"] \arrow[d, "i_0"'] & X \coprod X \arrow[d, "i_0 \coprod 1_X"] \\ \mathsf{Cyl(X)} \arrow[r, "in'_0"] & \mathsf{Cyl(X)} \coprod X \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου ο μορφισμός $i_0 \coprod 1_X \colon X \coprod X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)} \coprod X$ είναι pushout του μορφισμού $i_0 \colon X \longrightarrow Cyl(X)$ ο οποίος ως τετριμμένη συννημάτωση είναι συννημάτωση. Έτσι, απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.23 έπεται ότι ο μορφισμός $i_0 \coprod 1_X$ είναι συννημάτωση. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "i_1 \coprod 1_X"] \arrow[d, "i'_0 + i'_1"'] & \mathsf{Cyl(X)} \coprod X \arrow[d, "k'_0 + i''_1"] \\ \mathsf{Cyl(X)}' \arrow[r, "k_1"] & \mathsf{Cyl(X)}'' \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα του πρώτου pushout διαγράμματος, τον τρόπο ορισμού του μορφισμού i''_1 και τις ισότητες $(i_1 \coprod 1_X) \circ in_0 = in'_0 \circ i_1$, $(i_1 \coprod 1_X) \circ in_1 = in'_1$ προκύπτει ότι:

$$k_1 \circ (i'_0 + i'_1) = (k_1 \circ (i'_0 + i'_1)) \circ in_0 + (k_1 \circ (i'_0 + i'_1)) \circ in_1 =$$

$$= k_1 \circ ((i'_0 + i'_1) \circ in_0) + k_1 \circ ((i'_0 + i'_1) \circ in_1) = k_1 \circ i'_0 + k_1 \circ i'_1 = k'_0 \circ i_1 + i''_1.$$

και

$$(k'_0 + i''_1) \circ (i_1 \coprod 1_X) = ((k'_0 + i''_1) \circ (i_1 \coprod 1_X)) \circ in_0 + ((k'_0 + i''_1) \circ (i_1 \coprod 1_X)) \circ in_1 = (k'_0 + i''_1) \circ$$

$$\circ ((i_1 \coprod 1_X) \circ in_0) + (k'_0 + i''_1) \circ ((i_1 \coprod 1_X) \circ in_1) = (k'_0 + i''_1) \circ in'_0 \circ i_1 + (k'_0 + i''_1) \circ in'_1 = k'_0 \circ i_1 + i''_1$$

Έτσι, το τελευταίο διάγραμμα είναι μεταθετικό. Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι είναι pushout. Θεωρούμε το επαυξημένο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "in_0"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & X \coprod X \arrow[r, "i'_0 + i'_1"] \arrow[d, "i_1 \coprod 1_X"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & \mathsf{Cyl(X)}' \arrow[d, "k_1"] \\ \mathsf{Cyl(X)} \arrow[r, "in'_0"] & \mathsf{Cyl(X)} \coprod X \arrow[r, "k'_0 + i''_1"] & \mathsf{Cyl(X)}'' \end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα (I)+(II) είναι pushout εξ' υποθέσεως. Το διάγραμμα (I) όπως είδαμε παραπάνω είναι εξίσου pushout. Έτσι, απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.4.17 έπεται ότι το διάγραμμα (II) είναι pushout. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $k_0' + i_1''$ είναι pushout του μορφισμού $i_0' + i_1'$ κατα μήκος του μορφισμού $i_1 \coprod 1_X$ και ο μορφισμός k_1 είναι pushout του μορφισμού $i_1 \coprod 1_X$ κατα μήκος του μορφισμού $i_0' + i_1'$. Απο τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου Cyl(X)$'$ έχουμε ότι ο μορφισμός $i_0' + i_1' \colon X \coprod X \longrightarrow (\text{Cyl(X)})'$ είναι συννημάτωση. Έτσι, απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.23 έπεται ότι ο μορφισμός $k_0' + i_1''$ είναι εξίσου συννημάτωση. Επομένως, απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 έπεται ότι ο μορφισμός $i_0'' + i_1'' = (k_0' + i_1'') \circ (i_0 \coprod 1_X)$ είναι συννημάτωση.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Στον ορισμό 3.2.17 είδαμε ότι τόσο η αριστερή όσο και η δεξιά ομοτοπία αντιστρέφονται και οι αντίστροφοι αυτών είναι αντίστοιχα αριστερή και δεξιά ομοτοπία. Εν συνεχεία το ερώτημα το οποίο τίθεται ειναι το εξής: Εαν έχουμε μια αριστερή ομοτοπία απο έναν μορφισμό f σε έναν μορφισμό g και μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό g σε έναν μορφισμό h μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση των παραπάνω ομοτοπιών και αν αυτή ορίζεται είναι αριστερή ομοτοπία; Δυϊκα εαν έχουμε μια δεξιά ομοτοπία απο έναν μορφισμό f σε έναν μορφισμό g και μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό g σε έναν μορφισμό h μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση των παραπάνω ομοτοπιών και αν αυτή ορίζεται είναι δεξιά ομοτοπία;

Ορισμός 3.2.19. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon X \longrightarrow Y$, $h\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ας είναι $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ και $X \coprod X \xrightarrow{i_0'+i_1'} \text{Cyl(X)}' \xrightarrow{s'} X$ κυλινδρικά αντικείμενά για το X, X ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$, $H\colon \text{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g και $H'\colon \text{Cyl(X)}' \longrightarrow Y$ μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό g στον μορφισμό h. Τότε ορίζεται η* **σύνθεση (composition)** *$H \circ H'\colon \text{Cyl(X)}'' \longrightarrow Y$ των αριστερών ομοτοπιών H' και H όπου Cyl(X)$''$ είναι το κυλινδρικό αντικείμενο που ορίστηκε στο Λήμμα 3.2.16. η οποία είναι μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό h.*

2. *Ας είναι $Y \xrightarrow{r} \text{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ και $Y \xrightarrow{r'} \text{Path(Y)}' \xrightarrow{(p_0',p_1')} Y \times Y$ είναι μονοπάτι αντικείμενα για το Y, Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$, $H\colon X \longrightarrow \text{Path(Y)}$ μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g και $H'\colon X \longrightarrow \text{Path(Y)}'$ μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό g στον μορφισμό h. Τότε ορίζεται η* **σύνθεση (composition)** *$H \circ H'\colon X \longrightarrow \text{Path(Y)}''$ των δεξιών ομοτοπιών H' και H όπου Path(Y)$''$ είναι το μονοπάτι αντικείμενο που ορίστηκε στο Λήμμα 3.2.16. η οποία είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό h.*

Στην συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ικάνες συνθήκες για να είναι η αριστερής ομοτοπία, η δεξιά ομοτοπία και η ομοτοπία σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ των μορφισμών απο το X στο Y μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$.

Πρόταση 3.2.20. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X, Y αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν το X είναι συννινώδες τότε η αριστερή ομοτοπία «$\stackrel{l}{\backsim}$» είναι μια σχέση ισοδυναμίας επι του συνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ των μορφισμών απο το X στο Y.*

2. *Εαν το Y είναι ινώδες τότε η δεξιά ομοτοπία «$\stackrel{r}{\backsim}$» είναι μια σχέση ισοδυναμίας επι του συνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ των μορφισμών απο το X στο Y.*

3. *Εαν το X είναι συννινώδες και το Y είναι ινώδες τότε η ομοτοπία «$\backsim$» είναι μια σχέση ισοδυναμίας επι του συνόλου $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ των μορφισμών απο το X στο Y.*

Απόδειξη. 1. Θα αποδείξουμε ότι η «$\backsim^l$» είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- **Ανακλαστική**: $f \backsim^l f$.
Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Ο μορφισμός $1_X + 1_X\colon X\coprod X \longrightarrow X$ παραγοντοποιείται ως
$$X\coprod X \xrightarrow{1_X+1_X} X \xrightarrow{1_X} X$$
όπου ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X\colon X \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού ο μορφισμός f είναι τέτοιος ώστε $f \circ 1_X = f$. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.10 ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού f.
- **Συμμετρική**: Εαν $f \backsim^l g$ τότε $g \backsim^l f$.
Υποθέτουμε ότι $f \backsim^l g$. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο
$$X\coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$
και ένας μορφισμός $H\colon \text{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Θεωρούμε τον μορφισμό $l = in_1 \coprod in_0\colon X\coprod X \longrightarrow X\coprod X$. Για τον μορφισμό $l = in_1 \coprod in_0\colon X\coprod X \longrightarrow X\coprod X$ έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "in_0"] \arrow[r, shift right, "in_1"'] \arrow[d, shift right, "in_1"'] \arrow[d, shift left, "in_0"] & X\coprod X \arrow[dl, "l"] \\ X\coprod X & \end{tikzcd}$$
Έτσι, ισχύει ότι: $l \circ in_0 = in_1$ και $l \circ in_1 = in_0$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι
$$l \circ l \circ in_1 = in_1$$
και
$$l \circ l \circ in_0 = in_0.$$
Επιπλέον ισχύει ότι $1_{X\coprod X} \circ in_1 = in_1$ και $1_{X\coprod X} \circ in_0 = in_0$. Όμως λόγω της καθολικής ιδιότητας του συγγινομένου $X\coprod X$ δοθέντων των μορφισμών in_1 και in_0 ο μορφισμός $l \circ l$ είναι ο μοναδικός μορφισμός τέτοιος ώστε $l \circ l \circ in_1 = in_1$ και $l \circ l \circ in_0 = in_0$. Έτσι, $l \circ l = 1_{X\coprod X}$ και $l \circ l = 1_{X\coprod X}$. Απο τις τελευταίες ισότητες έχουμε ότι ο μορφισμός l είναι ισομορφισμός με αντίστροφο τον $l^{-1} = l$. Επομένως απο το λήμμα 3.1.21 ο μορφισμός l είναι τετριμμένη συννημάτωση και ως εκ τούτου συννημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου Cyl(X) ο μορφισμός $i = i_0+i_1$ είναι εξίσου συννημάτωση. Ως εκ τούτου απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ο μορφισμός $i \circ l\colon X\coprod X \longrightarrow \text{Cyl(X)}$ είναι συννημάτωση. Επιπλέον απο τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου Cyl(X) ο μορφισμός $s\colon \text{Cyl(X)} \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία και ακόμη ισχύει ότι $s \circ i = 1_X + 1_X$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την τελευταία ισότητα καθώς και τις ισότητες $l \circ in_0 = in_1$ και $l \circ in_1 = in_0$ έχουμε:
$$s\circ(i\circ l) = (s\circ i)\circ l = (1_X+1_X)\circ l = (1_X+1_X)\circ l\circ in_0+(1_X+1_X)\circ l\circ in_1 = (1_X+1_X)\circ in_1+$$
$$+(1_X + 1_X) \circ in_0 = 1_X + 1_X.$$
Επομένως, απο τα παραπάνω προκύπτει ότι το
$$X\coprod X \xrightarrow{i\circ l} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$$

είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X. Επιπλέον, απο την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης και τις ισότητες $l \circ in_0 = in_1$, $l \circ in_1 = in_0$, $i \circ in_0 = i_0$, $i \circ in_1 = i_1$, $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$ έπεται ότι υπάρχει ένας μορφισμός $H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε

$$H \circ ((i \circ l) \circ in_0) = H \circ (i \circ (l \circ in_0)) = H \circ (i \circ in_1) = H \circ i_1 = g$$

και

$$H \circ ((i \circ l) \circ in_1) = H \circ (i \circ (l \circ in_1)) = H \circ (i \circ in_0) = H \circ i_0 = f.$$

Συνεπώς, ο μορφισμός g είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού f.
Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την συμμετρική ιδιότητα με την βοήθεια Ορισμού 3.2.17.
Πιο συγκεκριμένα, εφόσον $f \backsim^l g$ υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{\ s\ } X$$

και ένας μορφισμός $H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.17 υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_1+i_0} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{\ s\ } X$$

για το X και ένας μορφισμός $H^{-1} = H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ απο τον μορφισμό g στον μορφισμό f με $H^{-1} \circ i_1 = g$ και $H^{-1} \circ i_0 = f$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός g είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού f με αριστερή ομοτοπία H^{-1}.

- **Μεταβατική**: Εαν $f \backsim^l g$ και $g \backsim^l h$ τότε $f \backsim^l h$.
  Υποθέτουμε ότι $f \backsim^l g$ και $g \backsim^l h$. Τότε υπάρχουν κυλινδρικά αντικείμενα
  $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{\ s\ } X$ και $X \coprod X \xrightarrow{i=i'_0+i'_1} \mathrm{Cyl(X)}' \xrightarrow{\ s'\ } X$ για το X και μορφισμοί $H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ και $H'\colon \mathrm{Cyl(X)}' \longrightarrow Y$ τέτοιοι ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$, $H' \circ i'_0 = g$ και $H' \circ i'_1 = h$. Εφόσον το X είναι συννινώδες αντικείμενο σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του ορισμού 3.2.19 υπάρχει ένα κυλινδρικό $X \coprod X \xrightarrow{i=i''_0+i''_1} \mathrm{Cyl(X)}'' \xrightarrow{\ s''\ } X$ όπως ορίστηκε στο πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.18 και ένας μορφισμός $H \circ H'\colon \mathrm{Cyl(X)}'' \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ H' \circ i''_0 = f$ και $H \circ H' \circ i''_1 = h$. Επομένως ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού h με αριστερή ομοτοπία $H \circ H'$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.

3. Υποθέτουμε ότι το X είναι συννινώδες και το Y είναι ινώδες. Τότε απο το πρώτο σκέλος της εν λόγω πρότασης η αριστερή ομοτοπία και αντίστοιχα απο το δεύτερο σκέλος της η δεξιά ομοτοπία είναι σχέσεις ισοδυναμίας επι του συνόλου $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Όμως η ομοτοπία εξ' ορισμού είναι ταυτόχρονα αριστερή και δεξιά. Επομένως, είναι άμεσο ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας επι του συνόλου $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. ■

Πρόταση 3.2.21. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Δοθέντος ενός μορφισμού $h\colon Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}$ εαν $f \backsim^l g$ τότε $h \circ f \backsim^l h \circ g$.*

2. *Δοθέντος ενός μορφισμού $k\colon W \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ εαν $f \backsim^r g$ τότε $f \circ k \backsim^r g \circ k$.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι $f \backsim^l g$. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{\ s\ } X$$

και ένας μορφισμός $H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Θεωρούμε τον μορφισμό $h \circ H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Z$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης και τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$(h \circ H) \circ i_0 = h \circ (H \circ i_0) = h \circ f$$

και

$$(h \circ H) \circ i_1 = h \circ (H \circ i_1) = h \circ g.$$

Εφόσον $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{\quad s \quad} X$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X και υπάρχει ένας μορφισμός $h \circ H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Z$ τέτοιος ώστε $(h \circ H) \circ i_0 = h \circ f$ και $(h \circ H) \circ i_1 = h \circ g$ ο μορφισμός $h \circ f$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g$ με αριστερή ομοτοπία τον μορφισμό $h \circ H$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Στην παραπάνω πρόταση είδαμε ότι δοθέντος ενός μορφισμού και μιας αριστερής (αντίστοιχα δεξιάς ομοτοπίας) συνθέτοντας απο αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) με τον μορφισμό η αριστερή (αντίστοιχα δεξιά) ομοτοπία διατηρείται. Ωστόσο υπο κάποιες προϋποθέσεις είναι δυνατόν συνθέτοντας με έναν μορφισμό απο δεξιά (αντίστοιχα απο αριστερά) να διατηρηθεί η αριστερή ομοτοπία(αντίστοιχα η δεξιά ομοτοπία) όπως υποδηλώνεται απο την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.22. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Δοθέντος ενός μορφισμού $h\colon Z \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ εαν $f \backsim^l g$ και Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο τότε $f \circ h \backsim^l g \circ h$.*

2. *Δοθέντος ενός μορφισμού $w\colon Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}$ εαν $f \backsim^r g$ και X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο τότε $w \circ f \backsim^r w \circ g$.*

Απόδειξη. 1. Δοθέντος ενός μορφισμού $h\colon Z \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $f \backsim^l g$ και ότι Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.9 υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{\quad s \quad} X$ στο οποίο ο μορφισμός $s\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση και μια αριστερή ομοτοπία $H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$. Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι $Z \coprod Z \xrightarrow{j=j_0+j_1} \mathrm{Cyl(Z)} \xrightarrow{\quad t \quad} Z$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το Z. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Z \coprod Z \arrow[r, "h \coprod h"] \arrow[d, "j=j_0+j_1"'] & X \coprod X \arrow[r, "i=i_0+i_1"] & \mathrm{Cyl(X)} \arrow[d, "s"] \\
\mathrm{Cyl(Z)} \arrow[r, "t"] \arrow[urr, dashed, "\widetilde{h}"] & Z \arrow[r, "h"] & X
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Όσον αφορά τον μορφισμό $h \coprod h\colon Z \coprod Z \longrightarrow X \coprod X$ έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "in'_0"] \arrow[r, shift right, "in'_1"'] \arrow[d, "h"'] & Z \coprod Z \arrow[d, "h \coprod h"] \\
X \arrow[r, shift left, "in_0"] \arrow[r, shift right, "in_1"'] & X \coprod X
\end{tikzcd}$$

Έτσι, ισχύει ότι $(h\coprod h)\circ in_0' = in_0\circ h$ και $(h\coprod h)\circ in_1' = in_1\circ h$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "in_0'"] \arrow[r, shift right, "in_1'"'] \arrow[d, "h"'] & Z\coprod Z \arrow[dl, shift right, "\phi"'] \arrow[dl, shift left, "h\circ(t\circ j)"] \\ X & \end{tikzcd}$$

όπου $\phi = s\circ i\circ (h\coprod h)$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης,τις ιδιότητες που διέπουν τους ταυτοτικούς μορφισμούς 1_X και 1_Z, τον τρόπο ορισμού των μορφισμών i_0 και i_1, τις ισότητες $(h\coprod h)\circ in_0' = in_0\circ h$, $(h\coprod h)\circ in_1' = in_1\circ h$, τις ισότητες του δεύτερου σκέλους του σχολίου 3.2.2 καθώς και την ισότητα που προκύπτει απο το γεγονός ότι Cyl(Z) είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το Z προκύπτει ότι:

$$\phi\circ in_0' = (s\circ i\circ(h\coprod h))\circ in_0' = (s\circ i)\circ((h\coprod h)\circ in_0') = (s\circ i)\circ(in_0\circ h) = ((s\circ i)\circ in_0)\circ h =$$

$$= (s\circ(i\circ in_0))\circ h = (s\circ i_0)\circ h = 1_X\circ h = h.$$

$$(h\circ t\circ j)\circ in_0' = (h\circ(1_Z+1_Z))\circ in_0' = h\circ((1_Z+1_Z)\circ in_0') = h\circ 1_Z = h.$$

$$\phi\circ in_1' = (s\circ i\circ(h\coprod h))\circ in_1' = (s\circ i)\circ((h\coprod h)\circ in_1') = (s\circ i)\circ(in_1\circ h) = ((s\circ i)\circ in_1)\circ h =$$

$$= (s\circ(i\circ in_1))\circ h = (s\circ i_1)\circ h = 1_X\circ h = h.$$

και

$$(h\circ t\circ j)\circ in_1' = (h\circ(1_Z+1_Z))\circ in_1' = h\circ((1_Z+1_Z)\circ in_1') = h\circ 1_Z = h.$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας του συνγινομένου $Z\coprod Z$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $Z\coprod Z \longrightarrow X$. Επομένως απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι $\phi = h\circ t\circ j$, γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του διαγράμματος (3.1). Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου Cyl(Z) για το Z ο μορφισμός $j\colon Z\coprod Z \longrightarrow$ Cyl(Z) είναι συννημάτωση. Επιπλέον, ανατρέχοντας στα παραπάνω ο μορφισμός $s\colon$ Cyl(X) $\longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Τότε απο το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{h}\colon$ Cyl(Z) $\longrightarrow$ Cyl(X) στο διάγραμμα (3.1). Ως εκ τούτου ισχύει ότι $\widetilde{h}\circ j = i\circ(h\coprod h)$ και $s\circ\widetilde{h} = h\circ t$. Θεωρούμε τον μορφισμό $H\circ\widetilde{h}\colon$ Cyl(Z) $\longrightarrow Y$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τον ορισμό των μορφισμών i_0, i_1 και j_0, j_1, τις ισότητες $(h\coprod h)\circ in_0' = in_0\circ h$, $(h\coprod h)\circ in_1' = in_1\circ h$ και $\widetilde{h}\circ j = i\circ(h\coprod h)$ καθώς και τις ισότητες $H\circ i_0 = f$, $H\circ i_1 = g$ οι οποίες προκύπτουν απο το γεγονός ότι H είναι μια αριστερή ομοτοπία έπεται:

$$(H\circ\widetilde{h})\circ j_0 = (H\circ\widetilde{h})\circ(j\circ in_0') = ((H\circ\widetilde{h})\circ j)\circ in_0' = (H\circ(\widetilde{h}\circ j))\circ in_0' = (H\circ(i\circ(h\coprod h)))\circ in_0' =$$

$$= H\circ(i\circ((h\coprod h)\circ in_0')) = H\circ(i\circ(in_0\circ h)) = H\circ((i\circ in_0)\circ h) = H\circ(i_0\circ h) = (H\circ i_0)\circ h = f\circ h$$

και

$$(H\circ\widetilde{h})\circ j_1 = (H\circ\widetilde{h})\circ(j\circ in_1') = ((H\circ\widetilde{h})\circ j)\circ in_1' = (H\circ(\widetilde{h}\circ j))\circ in_1' = (H\circ(i\circ(h\coprod h)))\circ in_1' =$$

$$= H\circ(i\circ((h\coprod h)\circ in_1')) = H\circ(i\circ(in_1\circ h)) = H\circ((i\circ in_1)\circ h) = H\circ(i_1\circ h) = (H\circ i_1)\circ h = g\circ h$$

Εφόσον $Z\coprod Z \xrightarrow{j=j_0+j_1}$ Cyl(Z) $\xrightarrow{\quad t\quad} Z$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το Z και υπάρχει ένας μορφισμός $H\circ\widetilde{h}\colon$ Cyl(Z) $\longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $(H\circ\widetilde{h})\circ j_0 = f\circ h$ και $(H\circ\widetilde{h})\circ j_1 = g\circ h$ ο μορφισμός $f\circ h$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $g\circ h$ με αριστερή ομοτοπία τον μορφισμό $H\circ\widetilde{h}$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ∎

Πρόταση 3.2.23. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν το X είναι συννινώδες και ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g.*
2. *Εαν το Y είναι ινώδες και ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g.*

Απόδειξη. 1. Δοθέντος ενός συννινώδους αντικειμένου X της $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι $f \stackrel{l}{\backsim} g$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 3.2.3 υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι αντικείμενο $Y \xrightarrow{r} \text{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ για το Y στο οποίο ο μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow \text{Path(Y)}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση, απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.1 υπάρχει μια δεξιά ομοτοπία $H\colon X \longrightarrow \text{Path(Y)}$ απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g. Συνεπώς, ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ∎

Στην ακόλουθη πρόταση μελετάμε την ιδιότητα της ομοτοπικής επέκτασης την οποία ικανοποιούν οι συννηματώσεις. Απο την σκοπία της αλγεβρικής τοπολογίας η ιδιότητα της ομοτοπικής επέκτασης υποδεικνύει ποιές ομοτοπίες ορισμένες σε έναν υπόχωρο μπορούν να «επεκταθούν» σε μια ομοτοπία η οποία ορίζεται σε έναν μεγαλύτερο χώρο.

Πρόταση 3.2.24. (Ιδιότητα της Ομοτοπικής Επέκτασης των Συννηματώσεων) *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, X ένα ινώδες αντικείμενο της και $k\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση στην $\mathcal{C}$. Τότε η $k\colon A \longrightarrow B$ έχει την ιδιότητα της ομοτοπικής επέκτασης ως προς το X. Δηλαδή για οποιοδήποτε μονοπάτι αντικείμενο $X \xrightarrow{r} \text{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X \times X$ για το X και οποιουσδήποτε μορφισμούς $H\colon A \longrightarrow \text{Path(X)}$ και $\widetilde{f}\colon B \longrightarrow X$ οι οποιοί κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "k"'] & \text{Path(X)} \arrow[d, "p_0"] \\ B \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}.$$

υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow \text{Path(X)}$ τέτοιος ώστε $p_0 \circ \widetilde{H} = \widetilde{f}$ και $\widetilde{H} \circ k = H$.

Απόδειξη. Δοθέντος ενός ινώδους αντικειμένου X ας είναι $X \xrightarrow{r} \text{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X \times X$ ένα μονοπάτι αντικείμενο για το X. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $p_0\colon \text{Path(X)} \longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "k"'] & \text{Path(X)} \arrow[d, "p_0"] \\ \text{B} \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}.$$

στο οποίο ο μορφισμός $k\colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση. Τότε απο το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow \text{Path(X)}$ του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Επομένως υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow \text{Path(X)}$ τέτοιος ώστε $p_0 \circ \widetilde{H} = \widetilde{f}$ και $\widetilde{H} \circ k = H$. ∎

Πρόταση 3.2.25. (Ιδιότητα της Ομοτοπικής Επέκτασης των Συννηματώσεων) *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, X ένα ινώδες αντικείμενο της και $k\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση στην $\mathcal{C}$. Τότε η $k\colon A \longrightarrow B$ έχει την ιδιότητα της ομοτοπικής επέκτασης ως προς το X. Δηλαδή για οποιοδήποτε μονοπάτι αντικείμενο $X \xrightarrow{r} \text{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X \times X$ για το X και οποιουσδήποτε μορφισμούς $H\colon A \longrightarrow$ Path(X) και $\widetilde{f}\colon B \longrightarrow X$ οι οποιοί κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "k"'] & \text{Path(X)} \arrow[d, "p_0"] \\ B \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd} .$$

υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow$ Path(X) τέτοιος ώστε $p_0 \circ \widetilde{H} = \widetilde{f}$ και $\widetilde{H} \circ k = H$.

Απόδειξη. Δοθέντος ενός ινώδους αντικειμένου X ας είναι $X \xrightarrow{r} \text{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X \times X$ ένα μονοπάτι αντικείμενο για το X. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $p_0\colon$ Path(X) $\longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "k"'] & \text{Path(X)} \arrow[d, "p_0"] \\ \text{B} \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd} .$$

στο οποίο ο μορφισμός $k\colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση. Τότε απο το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow$ Path(X) του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Επομένως υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow$ Path(X) τέτοιος ώστε $p_0 \circ \widetilde{H} = \widetilde{f}$ και $\widetilde{H} \circ k = H$. ■

Εν συνεχεία μελετάμε την ιδιότητα της ομοτοπικής ανύψωσης που ικανοποιούν οι νηματώσεις. Στην κλασική ομοτοπική θεωρία η ιδιότητα της ομοτοπικής ανύψωσης είναι μια συνθήκη η οποία ικανοποιείται απο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων. Γενικότερα μια τέτοια συνθήκη μπορεί να εμφανίστει στο γενικότερο πλαίσιο μιας κατηγορίας με γινόμενα η οποία διαθέτει ένα αντικείμενο διάστημα (interval object) δηλαδή ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ το οποίο μπορούμε να πούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι συμπεριφέρεται όπως το διάστημα $[0, 1]$ με τις δύο εγκλείσεις $* \coprod * \xrightarrow{[0,1]} I$ του συνοριακού σημείου $*$.

Πρόταση 3.2.26. (Ιδιότητα Της Ομοτοπικής Ανύψωσης Των Νηματώσεων) *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, A ένα συννινώδες αντικείμενο της και $k\colon X \longrightarrow Y$ μια νημάτωση στην $\mathcal{C}$. Τότε η $k\colon X \longrightarrow Y$ έχει την ιδιότητα της ομοτοπικής ανύψωσης ως προς το A. Δηλαδή για οποιοδήποτε κυλινδρικό αντικείμενο $A \coprod A \xrightarrow{i=i_0+i_1} \text{Cyl(A)} \xrightarrow{s} A$ για το A και οποιουσδήποτε μορφισμούς $\widetilde{f}\colon A \longrightarrow X$ και $H\colon$ Cyl(A) $\longrightarrow Y$ οι οποιοί κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "k"] \\ \text{Cyl(A)} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & Y \end{tikzcd}$$

υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon$ Cyl(A) $\longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $\widetilde{H}\circ i_0 = \widetilde{f}$ και $k\circ\widetilde{H} = H$.

Απόδειξη. Δοθέντος ενός συννινώδους αντικειμένου A ας είναι $A\coprod A \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(A)} \xrightarrow{s} A$ ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το A . Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $i_0\colon A \longrightarrow$ Cyl(A) είναι τετριμμένη συννημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "k"] \\ \mathrm{Cyl(A)} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & Y \end{tikzcd} .$$

στο οποίο ο μορφισμός $k\colon X \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση. Τότε απο το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{H}\colon$ Cyl(A) $\longrightarrow X$ του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Επομένως υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon$ Cyl(A) $\longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $\widetilde{H}\circ i_0 = \widetilde{f}$ και $k\circ\widetilde{H} = H$. ■

Πόρισμα 3.2.27. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Ας είναι $k\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση στην $\mathcal{C}$ και X ένα ινώδες αντικείμενο της. Εαν $f\colon A \longrightarrow X$ και $g\colon B \longrightarrow X$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός $g\circ k\colon A \longrightarrow X$ να ορίζεται και να είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού f τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g'\colon B \longrightarrow X$ με την ιδιότητα ο μορφισμός g' να είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g και $g'\circ k = f$.*

2. *Ας είναι $k\colon X \longrightarrow Y$ μια νημάτωση στην $\mathcal{C}$ και A ένα συννινώδες αντικείμενο της. Εαν $f\colon A \longrightarrow X$ και $g\colon A \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός $k\circ f\colon A \longrightarrow Y$ να ορίζεται και να είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε υπάρχει ένας μορφισμός $f'\colon A \longrightarrow X$ με την ιδιότητα ο μορφισμός f' να είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού f και $k\circ f' = g$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $k\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση στην $\mathcal{C}$ και X ένα ινώδες αντικείμενο της. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g\circ k\colon A \longrightarrow X$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού f. Τότε υπάρχει ένα μονοπάτι αντικείμενο $X \xrightarrow{r} \mathrm{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X\times X$ για το X και ένας μορφισμός $H\colon A \longrightarrow$ Path(X) τέτοιος ώστε $p_0\circ H = g\circ k$ και $p_1\circ H = f$. Απο την ισότητα $p_0\circ H = g\circ k$ προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, "k"'] & \mathrm{Path(X)} \arrow[d, "p_0"] \\ \mathrm{B} \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd} .$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.25 υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow$ Path(X) τέτοιος ώστε $\widetilde{H}\circ k = H$ και $p_0\circ\widetilde{H} = g$. Συνδυάζοντας τις ισότητες $p_1\circ H = f$ και $\widetilde{H}\circ k = H$ προκύπτει ότι $(p_1\circ\widetilde{H})\circ k = f$. Έτσι, θέτοντας $g' = p_1\circ\widetilde{H}$ λαμβάνουμε τον ζητούμενο μορφισμό $g'\colon B \longrightarrow X$ ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα $g'\circ k = f$. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι $g' \backsim^r g$. Ο μορφισμός $\widetilde{H}\colon B \longrightarrow$ Path(X) είναι τέτοιος ώστε $p_0\circ\widetilde{H} = g$ και $p_1\circ\widetilde{H} = g'$ και επιπλέον $X \xrightarrow{r} \mathrm{Path(X)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} X\times X$ είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το X. Ως εκ τούτου $g \backsim^r g'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το X είναι ένα ινώδες αντικείμενο απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.20 έπεται ότι η δεξιά ομοτοπία $\backsim^r$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Έτσι, εφόσον $g \backsim^r g'$ λόγω της συμμετρικής ιδιότητας έπεται ότι $g' \backsim^r g$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Στην ακόλουθη πρόταση διατυπώνονται οι προϋποθέσεις κάτω απο τις οποίες οι έννοιες της αριστερής και δεξιάς ομοτοπίας συμπίπτουν δινοντάς μας την έννοια της ομοτοπίας.

Πρόταση 3.2.28. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Εαν X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο και Y ένα ινώδες αντικείμενο τότε οι σχέσεις αριστερής ομοτοπίας και δεξιάς ομοτοπίας συμπίπτουν δινοντάς μας την σχέση ομοτοπίας και είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Απόδειξη. Δοθέντων δύο μορφισμών $f, g\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ υποθέτουμε ότι X είναι ένα συννινώδες και Y ένα ινώδες αντικείμενο της. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.20. η αριστερή σχέση ομοτοπίας και η δεξιά σχέση ομοτοπίας είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ και ώς σχέσεις ισοδυναμίας συμπίπτουν. Επιπλέον λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση, απο την Πρόταση 3.2.23. έπεται ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g αν και μόνο αν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g. Επομένως ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g. Έτσι, οι σχέσεις αριστερής ομοτοπίας και δεξιάς ομοτοπίας συμπίπτουν δινοντάς μας την σχέση ομοτοπίας. ■

Ορισμός 3.2.29. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X, Y αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν το X είναι συννινώδες συμβολίζουμε με $\pi^l(X, Y)$ το σύνολο των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών απο το X στο Y δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *ως προς την σχέση ισοδυναμίας η οποία γεννάται απο την αριστερή ομοτοπία.*

2. *Εαν το Y είναι ινώδες συμβολίζουμε με $\pi^r(X, Y)$ το σύνολο των δεξιών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών απο το X στο Y δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *ως προς την σχέση ισοδυναμίας η οποία γεννάται απο την δεξιά ομοτοπία.*

3. *Εαν το X είναι συννινώδες και το Y είναι ινώδες συμβολίζουμε με $\pi(X, Y)$ το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών απο το X στο Y δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *ως προς την σχέση ισοδυναμίας η οποία γεννάται απο την ομοτοπία.*

Σχόλιο 3.2.30. Στον παραπάνω ορισμό αναφερθήκαμε στην σχέση ισοδυναμίας η οποία γεννάται απο την αριστερή ομοτοπία «$\backsim^l$» η οποία όπως είδαμε στην Πρόταση 3.2.20 υπο την προϋπόθεση ότι το X είναι συννινώδες, είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Ωστόσο μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο $\pi^l(X, Y)$ ακόμη και αν το X δεν είναι συννινώδες. Σ' αυτή την περίπτωση η αριστερή ομοτοπία «$\backsim^l$» αφ' εαυτού δεν είναι κατ' ανάγκη μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να την θεωρήσουμε ως υποσύνολο μιας σχέσης ισοδυναμίας καθώς γενικά ισχύει ότι εαν $\mathcal{R}$ είναι μια διμελής σχέση επι ενός συνόλου X δηλαδή $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ και J μια σχέση ισοδυναμίας τότε $\bigcap_{\mathcal{R} \subseteq J} J = \mathcal{R}$ είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας επί του X η οποία περιέχει την $\mathcal{R}$. Ανάλογα για την δεξιά ομοτοπία και την ομοτοπία.

Στην κατασκευή της ομοτοπικής κατηγορίας μιας κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο στρέφουμε την προσοχή μας σε με μία υποκατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τα συννινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τις δεξιές ομοτοπικές κλάσεις των μορφισμών της. Δυϊκά, μπορούμε να ασχοληθούμε με μία υποκατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τα ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τις αριστερές ομοτοπικές κλάσεις των μορφισμών της. Ωστόσο απαραίτητη προϋπόθεση για να καταστούν τα παραπάνω δυνατά είναι η σύνθεση των δεξιών ομοτοπικών κλάσεων και αντίστοιχα των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων να είναι καλά ορισμένη. Το γεγονός αυτό διασφαλίζει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2.31. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Εαν Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο τότε η σύνθεση στην $\mathcal{C}$ επάγει μια απεικόνιση*

$$\pi^l(Z,X) \times \pi^l(X,Y) \longrightarrow \pi^l(Z,Y), \quad ([h],[f]) \longmapsto [f \circ h]$$

2. *Εαν Z είναι ένα συννινώδες αντικείμενο τότε η σύνθεση στην $\mathcal{C}$ επάγει μια απεικόνιση*

$$\pi^r(Z,X) \times \pi^r(X,Y) \longrightarrow \pi^r(Z,Y), \quad ([h],[f]) \longmapsto [f \circ h]$$

Απόδειξη. 1. Ας είναι Y ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Εφόσον δεν απαιτούμε το X να είναι συννινώδες δύο μορφισμοί απο το X στο Y που αντιπροσωπεύουν το ίδιο στοιχείο του $\pi^l(X,Y)$ δεν συνδέονται άμεσα με μια αριστερή ομοτοπία. Ωστόσο απο τον τρόπο ορισμού του συνόλου $\pi^l(X,Y)$ αρκεί να δείξουμε ότι εαν $h \backsim^l k \colon Z \longrightarrow X$ και $f \backsim^l g \colon X \longrightarrow Y$ τότε οι μορφισμοί $f \circ h$ και $g \circ k$ αντιπροσωπεύουν το ίδιο στοιχείο του συνόλου $\pi^l(Z,Y)$. Ως εκ τούτου μας αρκει να ελέγξουμε ότι $f \circ h \backsim^l g \circ h \colon Z \longrightarrow Y$ και ότι $g \circ h \backsim^l g \circ k \colon Z \longrightarrow Y$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Y είναι ινώδες και $f \backsim^l g$ και $h \backsim^l k$ δοθέντων μορφισμών $h \colon Z \longrightarrow X$ και $g \colon X \longrightarrow Y$ απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.22 έπεται ότι $f \circ h \backsim^l g \circ h$ και $g \circ h \backsim^l g \circ k$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 3.2.32. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g \colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Δοθέντος ενός μορφισμού $h \colon Y \longrightarrow Z$ εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε η σύνθεση με τον μορφισμό h επάγει μια καλά ορισμένη απεικόνιση*

$$h_*^X \colon \pi^l(X,Y) \longrightarrow \pi^l(X,Z), \quad [f] \longmapsto [h \circ f].$$

2. *Δοθέντος ενός μορφισμού $k \colon W \longrightarrow X$ εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε η σύνθεση με τον μορφισμό k επάγει μια καλά ορισμένη απεικόνιση*

$$k_Y^* \colon \pi^r(X,Y) \longrightarrow \pi^r(W,Y), \quad [f] \longmapsto [f \circ h].$$

Απόδειξη. 1. Ας είναι $h_*^X \colon \pi^l(X,Y) \longrightarrow \pi^l(X,Z)$ η απεικόνιση με τύπο $h_*^X([f]) = [h \circ f]$. Δοθέντος ενός μορφισμού $h \colon Y \longrightarrow Z$ υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g. Τότε απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.21 έπεται ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g$. Επομένως αποδείξαμε ότι εαν $[f] = [g]$ τότε $[h \circ f] = [h \circ g]$, γεγονός που υποδηλώνει ότι η απεικόνιση h_*^X είναι καλά ορισμένη.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Θεώρημα 3.2.33. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, X, Y, Z είναι ινώδη-συννινώδη της και $f, g \colon X \longrightarrow Y$ και $h, k \colon Y \longrightarrow Z$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g και ο μορφισμός h είναι ομοτοπικός του μορφισμού k τότε ο μορφισμός $h \circ f$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$ και κατ' επέκταση η σύνθεση είναι καλά ορισμένη στις κλάσεις ομοτοπίας των μορφισμών μεταξύ συννινώδων-ινωδών αντικειμένων.*

Απόδειξη. Ας είναι $f, g\colon X \longrightarrow Y$ και $h, k\colon Y \longrightarrow Z$ μορφισμοι στην $\mathcal{C}$ μεταξύ ινωδών-συννινωδών αντικειμένων. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g και ο μορφισμός h είναι ομοτοπικός του μορφισμού k. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f είναι αριστερά και δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g και αντίστοιχα ο μορφισμός h είναι αριστερά και δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού k. Εφόσον το Z είναι ινώδες και ο μορφισμός h είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού k δοθέντος του μορφισμού g απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.22 έπεται ότι ο μορφισμός $h \circ g$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$. Αντίστοιχα, εφόσον το X είναι συννινώδες και ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g δοθέντος του μορφισμού h απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.22 έπεται ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g$. Επιπλέον εφόσον f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g και ο μορφισμός h είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού k τότε δοθέντων των μορφισμών h και g απο το πρώτο και δεύτερο σκέλος της Πρόταση 3.2.21 προκύπτει ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g$ και ο μορφισμός $h \circ g$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$. Έτσι έχουμε ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g$ και ότι ο μορφισμός $h \circ g$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το X είναι συννινώδες απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.20 έπεται ότι η αριστερή ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας. Ως εκ τούτου λόγω της μεταβατικής ιδιότητας προκύπτει ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$. Αντίστοιχα, έχουμε ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g$ και ότι ο μορφισμός $h \circ g$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Z είναι ινώδες απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.20 έπεται ότι η δεξιά ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας. Ως εκ τούτου λόγω της μεταβατικής ιδιότητας προκύπτει ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$. Συνεπώς απο τα παραπάνω προκύπτει ότι ο μορφισμός $h \circ f$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$. Όσον αφορά την σύνθεση των ομοτοπικών κλάσεων ας είναι

$$\beta\colon \pi(X,Y) \times \pi(Y,Z) \longrightarrow \pi(X,Z), \quad ([f],[h]) \longmapsto [h \circ f]$$

η απεικόνιση η οποία επάγεται απο την σύνθεση. Υποθέτουμε ότι $([f],[h]) = ([g],[k])$. Τότε $[f] = [g]$ και $[h] = [k]$. Έτσι, ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g και ο μορφισμός h είναι ομοτοπικός του μορφισμού k. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του θεωρήματος ο μορφισμός $h \circ f$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $k \circ g$ και ως εκ τούτου $[h \circ f] = [k \circ g]$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τρόπο ορισμού της απεικόνισης β και την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\beta([f],[h]) = \beta([g],[k])$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η απεικόνιση β είναι καλά ορισμένη. ∎

Πρόταση 3.2.34. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Εαν $p\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση στην $\mathcal{C}$ και A ένα συννινώδες αντικείμενο της τότε η επαγόμενη απο τον p απεικόνιση μεταξύ των συνόλων των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών*

$$p_*^A\colon \pi^l(A,X) \longrightarrow \pi^l(A,Y), \quad [f] \longmapsto [p \circ f]$$

είναι ένας ισομορφισμός.

2. *Εαν $i\colon A \longrightarrow B$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση στην $\mathcal{C}$ και X ένα ινώδες αντικείμενο της, τότε η επαγόμενη απο τον i απεικόνιση μεταξύ των συνόλων των δεξιών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών*

$$i_X^*\colon \pi^r(B,X) \longrightarrow \pi^r(A,X), \quad [f] \longmapsto [f \circ i]$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Απόδειξη. 1. Ας είναι $p\colon X \longrightarrow Y$ μια τετριμμένη νημάτωση και A ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $p_*^A\colon \pi^l(A,X) \longrightarrow \pi^l(A,Y)$ η οποία ορίζεται ως $p_*^A([f]) = [p \circ f]$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

- **Η απεικόνιση $\mathbf{p_*^A}$ είναι καλά ορισμένη.**

  Ας είναι $[f],[g] \in \pi^l(A,X)$ με $[f]=[g]$. Τότε ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g. Έτσι, δοθέντος ενός μορφισμού $p\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.21. ο μορφισμός $p\circ f\colon A \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $p\circ g\colon A \longrightarrow Y$. Ως εκ τούτου $[p\circ f]=[p\circ g]$. Συνεπώς απο την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τον τρόπο ορισμού της p_*^A προκύπτει ότι $p_*^A([f]) = p_*^A([g])$. Έτσι, αποδείξαμε ότι εαν $[f]=[g]$ τότε $p_*^A([f]) = p_*^A([g])$ γεγονός που υποδηλώνει ότι η απεικόνιση $\mathbf{p_*^A}$ είναι καλά ορισμένη.

- **Η απεικόνιση $\mathbf{p_*^A}$ είναι «επί».**

  Ας είναι $[h]\in \pi^l(A,Y)$. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!!"'] & X \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

  Εφόσον το A είναι ένα συννινώδες αντικείμενο εξ' ορισμού έπεται ότι ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow A$ είναι μια συννημάτωση. Επιπλέον, ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $f\colon A \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου $p\circ f = h$ και $f\circ !! = !$. Λαμβάνοντας τις αριστερές ομοτοπικές κλάσεις στην πρώτη ισότητα προκύπτει ότι $[p\circ f]=[h]$. Απο την τελευταία ισότητα σύμφωνα με τον ορισμό της απεικόνισης p_*^A έπεται ότι $p_*^A([f]) = [h]$. Έτσι, αποδείξαμε ότι για κάθε $[h]\in\pi^l(A,Y)$ υπάρχει $[f]\in\pi^l(A,X)$ τέτοιος ώστε $p_*^A([f])=[h]$ γεγονός που υποδηλώνει ότι η απεικόνιση $\mathbf{p_*^A}$ είναι «επί».

- **Η απεικόνιση $\mathbf{p_*^A}$ είναι «1-1».**

  Ας είναι $[f],[g]\in\pi^l(A,X)$. Υποθέτουμε ότι $p_*^A([f]) = p_*^A([g])$. Τότε απο τον ορισμό της p_*^A έπεται ότι $[p\circ f]=[p\circ g]$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $p\circ f$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $p\circ g$. Έτσι, υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $A\coprod A \xrightarrow{i=i_0+i_1} \text{Cyl(A)} \xrightarrow{s} A$ για το A και ένας μορφισμός $H\colon \text{Cyl(A)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H\circ i_0 = p\circ f$ και $H\circ i_1 = p\circ g$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
A\coprod A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\
\text{Cyl(A)} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "H'"] & Y
\end{tikzcd} .$$

  Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την ισότητα $i=i_0+i_1$ καθώς και τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:

$$p\circ(f+g) = (p\circ(f+g))\circ in_0 + (p\circ(f+g))\circ in_1 = p\circ((f+g)\circ in_0) + p\circ((f+g)\circ in_1) = p\circ f +$$
$$+ p\circ g$$

  και

$$H\circ i = H\circ(i_0+i_1) = (H\circ(i_0+i_1))\circ in_0 + (H\circ(i_0+i_1))\circ in_1 = H\circ((i_0+i_1)\circ in_0) + H\circ((i_0+$$

$$+i_1) \circ in_1) = H \circ i_0 + H \circ i_1 = p \circ f + p \circ g.$$

Επομένως απο τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι $p \circ (f+g) = H \circ i$, γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του διαγράμματος. Απο τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου Cyl(A) ο μορφισμός $i\colon A \coprod A \longrightarrow$ Cyl(A) είναι συννημάτωση. Επιπλέον, ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $H'\colon$ Cyl(A) $\longrightarrow X$ του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Ως εκ τούτου $H' \circ i = f + g$ και $p \circ H' = H$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ισότητες $i_0 = i \circ in_0$, $i_1 = i \circ in_1$ καθώς και την ισότητα $H' \circ i = f + g$ έπεται ότι:

$$H' \circ i_0 = H' \circ (i \circ in_0) = (H' \circ i) \circ in_0 = (f+g) \circ in_0 = f$$

και

$$H' \circ i_1 = H' \circ (i \circ in_1) = (H' \circ i) \circ in_1 = (f+g) \circ in_1 = g.$$

Επομένως, εφόσον υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο

$$A \coprod A \xrightarrow{i=i_0+i_1} \text{Cyl(A)} \xrightarrow{s} A$$

για το A και ένας μορφισμός $H'\colon$ Cyl(A) $\longrightarrow X$ ο οποίος ικανοποιεί τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g με αριστερή ομοτοπία τον μορφισμό H'. Έτσι, $[f] = [g]$. Άρα, αποδείξαμε ότι εαν $p^A_*([f]) = p^A_*([g])$ τότε $[f] = [g]$ γεγονός που υποδηλώνει ότι η απεικόνιση p^A_* είναι «1-1».

Συνεπώς λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $p^A_*\colon \pi^l(A,X) \longrightarrow \pi^l(A,Y)$ είναι ένας ισομορφισμός.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 3.2.35. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Ας είναι $i\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση και X ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Εαν ο μορφισμός i επάγει έναν ισομορφισμό*

$$i^*_X\colon \pi^r(B,X) \longrightarrow \pi^r(A,X), \quad [k] \longmapsto [k \circ i]$$

τότε για κάθε μορφισμό $f\colon A \longrightarrow X$ υπάρχει ένας μοναδικός μέχρις δεξιάς ομοτοπίας μορφισμός $g\colon B \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $g \circ i = f$.

2. *Ας είναι $p\colon X \longrightarrow Y$ μια νημάτωση και A ένα συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Εαν ο μορφισμός p επάγει έναν ισομορφισμό*

$$p^A_*\colon \pi^l(A,X) \longrightarrow \pi^l(A,Y), \quad [k] \longmapsto [p \circ k]$$

τότε για κάθε μορφισμό $f\colon A \longrightarrow Y$ υπάρχει ένας μοναδικός μέχρις αριστερής ομοτοπίας μορφισμός $g\colon A \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $p \circ g = f$.

Απόδειξη. 1. Ας είναι $i\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση και X ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός i επάγει έναν ισομορφισμό $i^*_X\colon \pi^r(B,X) \longrightarrow \pi^r(A,X)$ ο οποίος ορίζεται ως $i^*_X([k]) = [k \circ i]$. Τότε, η απεικόνιση i^* είναι επι. Έτσι, για κάθε $[f] \in \pi^r(A,X)$ υπάρχει $[h] \in \pi^r(B,X)$ τέτοια ώστε $i^*_X([h]) = [f]$. Απο την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τρόπο ορισμού του μορφισμού i^*_X έπεται ότι $[h \circ i] = [f]$. Ως εκ τούτου $h \circ i \backsim^r f$. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Πορίσματος 3.2.27 υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon B \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $g \circ i = f$. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $g\colon B \longrightarrow X$ είναι μοναδικός μέχρις δεξιάς ομοτοπίας. Υποθέτουμε ότι $g'\colon B \longrightarrow X$ είναι ένας άλλος μορφισμός τέτοιος ώστε $g' \circ i = f$. Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την ισότητα $g \circ i = f$ έπεται ότι $g \circ i = g' \circ i$. Εν συνεχεία, λαμβάνοντας τις δεξιές ομοτοπικές κλάσεις στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $[g \circ i] = [g' \circ i]$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τρόπο ορισμού του μορφισμού i^*_X και την τελευταία ισότητα έχουμε ότι $i^*_X([g]) = i^*_X([g'])$. Όμως ο μορφισμός i^*_X ως ισομορφισμός είναι «1-1» και ως εκ τούτου απο την τελευταία ισότητα έπεται ότι $[g] = [g']$. Έτσι, $g \backsim^r g'$ γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $g\colon B \longrightarrow X$ είναι μοναδικός μέχρις δεξιάς ομοτοπίας.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Στις περισσότερες κατηγορίες μοντέλο είτε όλα τα αντικείμενα είναι ινώδη είτε όλα είναι συννινώδη. Σπάνιως εμφανίζονται κατηγορίες μοντέλο των οποίων τα αντικείμενα είναι συννινώδη-ινώδη. Εν συνεχεία παραθέτουμε το Λήμμα του Ken Brown το οποίο μας επιτρέπει να αποδεικνύουμε ότι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων έχει αρκετές απο τις ιδιότητες μιας τετριμμένης συννημάτωσης μεταξύ συννινωδών αντικειμένων και δυϊκά ότι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών αντικειμένων έχει αρκετές απο τις ιδιότητες μιας τετριμμένης νημάτωσης μεταξύ ινωδών αντικειμένων. Το εν λόγω Λήμμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν τα αντικείμενα μιας κατηγορίας μοντέλο είναι ινώδη είτε συννινώδη.

Λήμμα 3.2.36. (K. S. Brown) *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Εαν $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ τότε ο g μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $g = j \circ i$ όπου ο μορφισμός i είναι μια τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός j είναι μια τετριμμένη νημάτωση ο οποίος έχει ως δεξιό αντίστροφο μια τετριμμένη συννημάτωση.*

2. *Εαν $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ τότε ο g μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $g = j \circ i$ όπου ο μορφισμός i είναι μια τετριμμένη συννημάτωση ο οποίος έχει ως αριστερό αντίστροφο μια τετριμμένη νημάτωση και ο μορφισμός j είναι μια τετριμμένη νημάτωση.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι X και Y συννινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και $g\colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ αυτών. Τότε απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.5 οι μορφισμοί $in_0\colon X \longrightarrow X \coprod Y$ και $in_1\colon Y \longrightarrow X \coprod Y$ είναι συννηματώσεις. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) η coproduct map $g + 1_Y\colon X \coprod Y \longrightarrow Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $g + 1_Y = j \circ k$ όπου ο μορφισμός k είναι μια συννημάτωση και ο μορφισμός j είναι τετριμμένη νημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την ισότητα $(g + 1_Y) \circ in_0 = g$ καθώς και την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$j \circ (k \circ in_0) = (j \circ k) \circ in_0 = (g + 1_Y) \circ in_0 = g.$$

Ως εκ τούτου το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικο

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "in_0"] \arrow[dr, "g"'] & X \coprod Y \arrow[r, "k"] & Z \arrow[dl, "j"] \\
& Y. &
\end{tikzcd}$$

Θέτουμε $l = k \circ in_1$ και $i = k \circ in_0$. Τότε η παραπάνω ισότητα μετασχηματίζεται ως $j \circ i = g$. Ο μορφισμός j ως τετριμμένη νημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Ο μορφισμός g είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία εξ' υποθέσεως. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός i είναι ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ο μορφισμός $i = k \circ in_0$ είναι συννημάτωση. Έτσι ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός

j έχει δεξιά αντίστροφο ο οποίος είναι τετριμμένη συνννημάτωση. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης και τις ισότητες $l = k \circ in_1$, $g + 1_Y = j \circ k$ και $(g + 1_Y) \circ in_1 = 1_Y$ έπεται ότι:

$$j \circ l = j \circ (k \circ in_1) = (j \circ k) \circ in_1 = (g + 1_Y) \circ in_1 = 1_Y.$$

Απο την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός j έχει δεξιά αντίστροφο τον μορφισμό l. Εν συνεχεία, απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22. ο μορφισμός $l = k \circ in_1$ είναι συννημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο ταυτοτικός μορφισμός 1_Y και ο μορφισμός j είναι ασθενείς ισοδυναμίες απο την ισότητα $j \circ l = 1_Y$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός l είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Συνεπώς ο μορφισμός l είναι τετριμμένη συννημάτωση. Συνοψίζοντας αποδείξαμε ότι ο μορφισμός g μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $g = j \circ i$ όπου ο μορφισμός i είναι μια τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός j είναι μια τετριμμένη νημάτωση ο οποίος έχει ως δεξιά αντίστροφο την τετριμμένη συννημάτωση l.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Άμεση συνέπεια του Λήμματος Ken Brown είναι το ακόλουθο πόρισμα το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό και στο οποίο θα στρέψουμε την προσοχή μας για την μελέτη των συναρτητών Quillen.

Πόρισμα 3.2.37. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλο και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο συναρτητής F στέλνει τις ασθενεις ισοδυναμίες μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο συναρτητής F στέλνει τις ασθενεις ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι X και Y συννινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και $g\colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ αυτών. Τότε ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση. Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Παραγοντοποιούμε τον μορφισμό g όπως στο πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.36, δηλαδή ως εξής: $g = j \circ i$ όπου ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $j\colon Z \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση με δεξιά αντίστροφο $l\colon Y \longrightarrow Z$ ο οποίος είναι τετριμμένη συννημάτωση. Ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow Z$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $i\colon X \longrightarrow Z$ και $\varnothing \longrightarrow X$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο Z είναι συννινώδες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός l είναι δεξιά αντίστροφος του μορφισμού j έπεται ότι $j \circ l = 1_Y$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι $F(j) \circ F(l) = F(1_Y)$. Εφόσον ο ταυτοτικός μορφισμός $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ και ο μορφισμός $l\colon Y \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένες συννηματώσεις σύμφωνα με την υπόθεση οι μορφισμοί $F(l)\colon F(Y) \longrightarrow F(Z)$ και $F(1_Y)\colon F(Y) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Τότε απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $F(j)\colon F(Z) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Εν συνεχεία εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην ισότητα $g = j \circ i$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι $F(g) = F(j) \circ F(i)$. Εφόσον ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννηματώση εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $F(i)\colon F(X) \longrightarrow F(Z)$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα σύμφωνα με το Πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 έπεται ότι ο μορφισμός $F(g)$ είναι ασθενής ισοδυναμία, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο συναρτητής F διατηρεί τις ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συννινωδών αντικειμένων.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πόρισμα 3.2.38. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία και $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ τότε ο συναρτητής F στέλνει όλες τις ασθενεις ισοδυναμίες μεταξύ συννινωδών αντικειμένων σε ισομορφισμούς.*

2. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ τότε ο συναρτητής F στέλνει όλες τις ασθενεις ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων σε ισομορφισμούς.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι X και Y συννινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και $g: X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ αυτών. Τότε ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση. Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$. Παραγοντοποιούμε τον μορφισμό g όπως στο πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.36 δηλαδή ως εξής: $g = j \circ i$ όπου ο μορφισμός $i: X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $j: Z \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση με δεξιό αντίστροφο $k: Y \longrightarrow Z$ ο οποίος είναι τετριμμένη συννημάτωση. Ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow Z$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $i: X \longrightarrow Z$ και $\varnothing \longrightarrow X$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο Z είναι συννινώδες. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην ισότητα $g = j \circ i$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι $F(g) = F(j) \circ F(i)$. Εφόσον ο μορφισμός $i: X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννηματώση μεταξύ συννινωδών αντικειμένων εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $F(i): F(X) \longrightarrow F(Z)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός k είναι δεξιά αντίστροφος του μορφισμού j έπεται ότι $j \circ k = 1_Y$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι $F(j) \circ F(k) = F(1_Y) = 1_{F(Y)}$. Εφόσον ο μορφισμός $k: Y \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση μεταξύ συννινωδών αντικειμένων σύμφωνα με την υπόθεση ο μορφισμός $F(k): F(Y) \longrightarrow F(Z)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος $F(k)^{-1}: F(Z) \longrightarrow F(Y)$ και είναι εξίσου ισομορφισμός. Εν συνεχεία συνθέτοντας απο δεξιά με τον μορφισμό $F(k)^{-1}$ στην ισότητα $F(j) \circ F(k) = 1_{F(Y)}$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{F(Y)}: F(Y) \longrightarrow F(Y)$ έπεται ότι $F(j) = F(k)^{-1}$ και ως εκ τούτου ο μορφισμός $F(j)$ είναι ένας ισομορφισμός. Επομένως ο μορφισμός $F(g) = F(j) \circ F(i)$ είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Το ακόλουθο Λήμμα ταυτίζει δεξιές ομοτοπικές κλάσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων και αριστερές ομοτοπικές κλάσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$.

Λήμμα 3.2.39. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}_c$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία έχει ως αντικείμενα τα συννινώδη αντικείμενα της, $\mathcal{C}_f$ η πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία έχει ως αντικείμενα τα ινώδη αντικείμενα της και $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία.*

1. *Εαν $F: \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων της $\mathcal{C}_c$ σε ισομορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ και $f, g: X \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}_c$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός f να είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g στην $\mathcal{C}$, τότε $F(f) = F(g)$.*

2. *Εαν $F: \mathcal{C}_f \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων της $\mathcal{C}_f$ σε ισομορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}'$ και $f, g: X \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}_f$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός f να είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g στην $\mathcal{C}$, τότε $F(f) = F(g)$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F: \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων της $\mathcal{C}_c$ σε ισομορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}'$.

Υποθέτουμε ότι $f, g\colon X \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}_c$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός f να είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g στην $\mathcal{C}$. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.9 υπάρχει ένα μονοπάτι αντικείμενο $Y \xrightarrow{r} \text{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ για το Y στο οποίο ο μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow \text{Path(Y)}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ένας μορφισμός $H\colon X \longrightarrow \text{Path(Y)}$ τέτοιος ώστε $p_0 \circ H = f$ και $p_1 \circ H = g$. Απο το τρίτο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 ισχύει ότι $p_0 \circ r = 1_Y$ και $p_1 \circ r = 1_Y$. Ως εκ τούτου $p_0 \circ r = p_1 \circ r$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην παραπάνω ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι $F(p_0) \circ F(r) = F(p_1) \circ F(r)$. Εφόσον το αντικείμενο Y είναι συννινώδες ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση. Ο μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow \text{Path(Y)}$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι εξίσου συννημάτωση. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \text{Path(Y)}$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $r\colon Y \longrightarrow \text{Path(Y)}$ και $\varnothing \longrightarrow Y$. Έτσι, το αντικείμενο Path(Y) είναι συννινώδες και κατα συνέπεια ο μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow \text{Path(Y)}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}_c$. Έτσι, σύμφωνα με την υπόθεση ο μορφισμός $F(r)\colon F(Y) \longrightarrow F(\text{Path(Y)})$ είναι ένας ισομορφισμός. Συνεπώς υπάρχει ο $F(r)^{-1}\colon F(\text{Path(Y)}) \longrightarrow F(Y)$ και είναι εξίσου ισομορφισμός. Συνθέτοντας απο δεξιά με τον μορφισμό $F(r)^{-1}$ στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $F(p_0) = F(p_1)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που διέπουν τον F ως συναρτητή, την τελευταία ισότητα και τις ισότητες $p_0 \circ H = f$ και $p_1 \circ H = g$ έπεται ότι:

$$F(f) = F(p_0 \circ H) = F(p_0) \circ F(H) = F(p_1) \circ F(H) = F(p_1 \circ H) = F(g)$$

Έτσι, $F(f) = F(g)$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Κλείνουμε την παρούσα υποενότητα με ένα Πόρισμα το οποίο είναι ισχυρότερο του Πορίσματος 3.2.37.

Πόρισμα 3.2.40. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες μοντέλο και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Εαν ο συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις, τότε ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εαν ο συναρτητής F διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις, τότε ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής ο οποίος διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις και $f\colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.36 παραγοντοποιούμε τον μορφισμό f ως $f = j \circ i$ όπου ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow Z$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $j\colon Z \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση με δεξιό αντίστροφο $s\colon Y \longrightarrow Z$ ο οποίος είναι τετριμμένη συννημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός s είναι δεξιός αντίστροφος του μορφισμού j έπεται ότι $j \circ s = 1_Y$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι $F(j) \circ F(s) = F(1_Y) = 1_{F(Y)}$. Εφόσον, ο συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις έπεται ότι οι μορφισμοί $F(s)\colon F(Y) \longrightarrow F(Z)$ και $F(i)\colon F(X) \longrightarrow F(Z)$ είναι τετριμμένες συννηματώσεις και κατ' επέκταση ασθενείς ισοδυναμίες. Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{F(Y)}\colon F(Y) \longrightarrow F(Y)$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Ως εκ τούτου απο την τελευταία ισότητα σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $F(j)\colon F(Z) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην ισότητα $f = j \circ i$ και και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν έναν συναρτητή προκύπτει ότι $F(f) = F(j) \circ F(i)$. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22. ο μορφισμός

$F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

3.2.2 Η Κλασική Ομοτοπική Κατηγορία μιας Κατηγορίας Μοντέλο.

Στο Θεώρημα 3.2.33 είδαμε ότι η σύνθεση ομοτοπικών κλάσεων μορφισμών είναι καλά ορισμένη όταν πρόκειται για μορφισμούς μεταξύ ινωδών-συννινωδών αντικειμένων. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε την κλασική ομοτοπική κατηγορία μιας κατηγορίας μοντέλο να είναι η κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τα ινώδη-συννινώδη αντικείμενα της κατηγορίας μοντέλο και ως μορφισμούς τις ομοτοπικές κλάσεις των μορφισμών της. Η κλασική ομοτοπική κατηγορία καθώς δεν περιέχει όλα τα αντικείμενα μιας κατηγορίας μοντέλο δεν πρέπει να συγχέεται με την ομοτοπική κατηγορία μιας κατηγορίας μοντέλο την οποία θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Η κλασική ομοτοπική κατηγορία καθώς και κάποιες άλλες κατηγορίες τις οποίες θα αναφέρουμε αργότερα θα χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία για να ορίσουμε την ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ καθώς επίσης και για να κατασκευάσουμε τον κανονικό συναρτητή $\mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ho}(\mathcal{C})$.

Ορισμός 3.2.41. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η* **Κλασική Ομοτοπική Κατηγορία (Classical Homotopy Category)** *της $\mathcal{C}$ η οποία συνήθως συμβολίζεται με $\pi\mathcal{C}_{cf}$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τα οποία είναι ινώδη-συννινώδη.*

2. *Για κάθε διατεταγμένο ζευγάρι αντικειμένων της (X, Y) ισχύει ότι:*
$$\mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(X, Y) = \pi(X, Y).$$

3. *Η σύνθεση επάγεται απο την σύνθεση στην $\mathcal{C}$ δηλαδή ορίζεται ως εξής:*
$$\circ\colon \pi(X,Y) \times \pi(Y,Z) \longrightarrow \pi(X,Z), \quad ([f],[h]) \longmapsto [h \circ f]$$

4. *Οι ταυτοτικοί μορφισμοί της είναι οι κλάσεις ομοτοπίας $[1_X]$ των ταυτοτικών μορφισμών 1_X στην $\mathcal{C}$.*

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε ένας μορφισμός μεταξύ συννινώδων-ινώδων αντικειμένων να είναι ασθενής ισοδυναμία. Η ικανή συνθήκη του ακόλουθου θεωρήματος αποτελεί το Θεώρημα του Whitehead.

Θεώρημα 3.2.42. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων. Ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν είναι ομοτοπική ισοδυναμία.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος ($\mathsf{MC5}$) ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ q$ όπου ο μορφισμός $q\colon X \longrightarrow W$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση. Ο μορφισμός q ως τετριμμένη συννημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός f είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία εξ' υποθέσεως απο την ισότητα $f = p \circ q$ σύμφωνα με το Αξίωμα ($\mathsf{MC2}$) έπεται ότι ο μορφισμός p είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, ο μορφισμός p είναι τετριμμένη νημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "\star\star"] \\
W \arrow[r, "\star"] \arrow[ur, dashed, "r"] & *
\end{tikzcd} .$$

Εφόσον $*$ είναι τελικό αντικείμενο το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το X είναι ινώδες εξ' ορισμού έπεται ότι ο μορφισμός $\star\star\colon X \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Επιπλέον ο μορφισμός q όπως είδαμε παραπάνω είναι τετριμμένη συννημάτωση. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $r\colon W \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου $\star\star \circ r = \star$ και $r \circ q = 1_X$. Εν συνεχεία εφόσον το Y είναι ινώδες εξ' ορισμού έπεται ότι ο μορφισμός $Y \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $W \longrightarrow *$ είναι νημάτωση ως σύνθεση των νηματώσεων $Y \longrightarrow *$ και $p\colon W \longrightarrow Y$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο W είναι ινώδες και εφόσον ο μορφισμός q είναι τετριμμένη συννημάτωση απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 έπεται ότι ο μορφισμός $q^*\colon \pi^r(W,W) \longrightarrow \pi^r(X,W)$ ο οποίος ορίζεται ως $q^*([h]) = [h \circ q]$ είναι ισομορφισμός. Έτσι, λαμβάνοντας υπ'όψιν τον ορισμό της απεικόνισης q^*,την ισότητα $r \circ q = 1_X$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X έχουμε:

$$q^*([q \circ r]) = [q \circ r \circ q] = [q \circ 1_X] = [q] = q^*([1_W])$$

Όμως η απεικόνιση q^* είναι «1-1». Ως εκ τούτου απο την τελευταία ισότητα έπεται ότι $[q \circ r] = [1_W]$. Έτσι, ο μορφισμός $q \circ r\colon W \longrightarrow W$ είναι δεξιά ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$. Εφόσον το X είναι συννινώδες εξ' ορισμού ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση. Επιπλέον ο μορφισμός $q\colon X \longrightarrow W$ είναι συννημάτωση ως τετριμμένη συννημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow W$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $q\colon X \longrightarrow W$ και $\varnothing \longrightarrow X$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο W είναι εξίσου συννινώδες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $q \circ r\colon W \longrightarrow W$ είναι δεξιά ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$ και ότι το αντικείμενο W είναι συννινώδες-ινώδες απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός $q \circ r\colon W \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$. Συνεπώς αφού ο μορφισμός $r \circ q\colon X \longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_X\colon X \longrightarrow X$ και ο μορφισμός $q \circ r\colon W \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$ προκύπτει ότι ο μορφισμός q είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο τον μορφισμό r. Εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός p είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!!"'] & W \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "1_Y"'] \arrow[ur, dashed, "s"] & Y
\end{tikzcd} .$$

Εφόσον $\varnothing$ είναι αρχικό αντικείμενο το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Y είναι συννινώδες εξ' ορισμού έπεται ότι ο μορφισμός $!!\colon \varnothing \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση. Επιπλέον ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ όπως είδαμε παραπάνω είναι τετριμμένη νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $s\colon Y \longrightarrow W$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου $s \circ !! = !$ και $p \circ s = 1_Y$. Εν συνέχεια εφόσον το W είναι συννινώδες και ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση απο το Πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.34. έπεται ότι ο μορφισμός $p_*\colon \pi^l(W,W) \longrightarrow \pi^l(W,Y)$ ο οποίος ορίζεται ως $p_*([h]) = [p \circ h]$ είναι ισομορφισμός. Έτσι, λαμβάνοντας υπ'όψιν τον ορισμό της απεικόνισης p_*, την ισότητα $p \circ s = 1_Y$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y έχουμε:

$$p_*([s \circ p]) = [p \circ s \circ p] = [1_Y \circ p] = [p] = p_*([1_W])$$

Όμως η απεικόνιση p_* είναι «1-1». Ως εκ τούτου απο την τελευταία ισότητα έπεται ότι $[s \circ p] = [1_W]$. Έτσι, ο μορφισμός $s \circ p\colon W \longrightarrow W$ είναι αριστερά ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$. Ανάλογα με προηγουμένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $s \circ p\colon W \longrightarrow W$ είναι αριστερά ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$ και ότι το αντικείμενο W είναι συννινώδες-ινώδες απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός $s \circ p\colon W \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$. Συνεπώς αφού ο μορφισμός $s \circ p\colon W \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$ και ο μορφισμός $p \circ s\colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ προκύπτει ότι ο μορφισμός p είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφον τον μορφισμό $s\colon Y \longrightarrow W$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.33 ο μορφισμός $f = p \circ q$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία ως σύνθεση των ομοτοπικών ισοδυναμιών μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων q και p.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $g \circ f\colon X \longrightarrow X$ να είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X\colon X \longrightarrow X$ και ο μορφισμός $f \circ g\colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ q$ όπου ο μορφισμός $q\colon X \longrightarrow W$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση. Ο μορφισμός $q\colon X \longrightarrow W$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Για να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Ας είναι $H\colon$ Cyl(Y) $\longrightarrow Y$ μια ομοτοπία απο τον μορφισμό $f \circ g$ στον ταυτοτικό μορφισμό 1_Y όπου $Y \coprod Y \xrightarrow{i=i_0+i_1}$ Cyl(Y) $\xrightarrow{s} Y$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το Y. Τότε $H \circ i_0 = f \circ g$ και $H \circ i_1 = 1_Y$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "q\circ g"] \arrow[d, "i_0"'] & W \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{Cyl(Y)} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "H'"] & Y
\end{tikzcd} .$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης και τις ισότητες $H \circ i_0 = f \circ g$ και $f = p \circ q$ προκύπτει ότι:

$$H \circ i_0 = f \circ g = (p \circ q) \circ g = p \circ (q \circ g).$$

Επομένως απο την παραπάνω ισότητα έπεται ότι το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Εφόσον το Y είναι συννινώδες σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $i_0\colon Y \longrightarrow$ Cyl(Y) είναι τετριμμένη συννημάτωση. Επιπλέον όπως είδαμε παραπάνω ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση. Τότε απο το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $H'\colon$ Cyl(Y) $\longrightarrow W$ του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Έτσι, έχουμε ότι $p \circ H' = H$ και $H' \circ i_0 = q \circ g$. Θέτουμε $s' = H' \circ i_1\colon Y \longrightarrow W$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την τελευταία ισότητα καθώς και τις ισότητες $p \circ H' = H$ και $H \circ i_1 = 1_Y$ έπεται ότι:

$$p \circ s' = p \circ (H' \circ i_1) = (p \circ H') \circ i_1 = H \circ i_1 = 1_Y.$$

Εφόσον $Y \coprod Y \xrightarrow{i=i_0+i_1}$ Cyl(Y) $\xrightarrow{s} Y$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το Y και υπάρχει ένας μορφισμός $H'\colon$ Cyl(Y) $\longrightarrow W$ τέτοιος ώστε $H' \circ i_0 = q \circ g$ και $H' \circ i_1 = s'$ ο μορφισμός $q \circ g\colon Y \longrightarrow W$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $s'\colon Y \longrightarrow W$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Y είναι συννινώδες και το W είναι ινώδες απο το Πρόταση 3.2.28 προκύπτει ότι ο μορφισμός $q \circ g\colon Y \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $s'\colon Y \longrightarrow W$. Όμως υπο την προϋπόθεση ότι το Y είναι συννινώδες και το W είναι ινώδες απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.2.20 η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας. Έτσι, λόγω της συμμετρικής ιδιότητας έπεται ότι ο μορφισμός s' είναι ομοτοπικός του μορφισμού $q \circ g$. Ο μορφισμός $q\colon X \longrightarrow W$ απο το ευθύ της παρούσας πρόταση ως ασθενής ισοδυναμία είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Έτσι, υπάρχει ένας μορφισμός $r\colon W \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $q \circ r\colon W \longrightarrow W$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W\colon W \longrightarrow W$ και ο μορφισμός $r \circ q\colon X \longrightarrow X$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_X\colon X \longrightarrow X$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα αντικείμενα X, Y, W είναι συννινώδη-ινώδη και ότι ο μορφισμός $p \circ q$ είναι ομοτοπικός του f και ότι ο μορφισμός r είναι ομοτοπικός του r απο την Πρόταση 3.2.28 ο μορφισμός $p \circ q \circ r$ είναι ομοτοπικός του $f \circ r$.

Όμως ο μορφισμός $q \circ r \colon W \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_W \colon W \longrightarrow W$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός p είναι ομοτοπικός του $f \circ r$. Αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα αντικείμενα Y, W είναι συννινώδη-ινώδη και ότι ο μορφισμός s' είναι ομοτοπικός του $q \circ g$ και ότι ο μορφισμός p είναι ομοτοπικός του p απο την Πρόταση 3.2.28. ο μορφισμός $s' \circ p$ είναι ομοτοπικός του $q \circ g \circ r$. Χρησιμοποιώντας ότι ο μορφισμός p είναι ομοτοπικός του $f \circ r$, ότι ο μορφισμός $g \circ f$ είναι ομοτοπικός του 1_X, ότι ο μορφισμός $g \circ f$ είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό 1_X και ότι ο μορφισμός $q \circ r$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού 1_W καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X έχουμε:

$$s' \circ p \backsim q \circ g \circ p \backsim q \circ g \circ f \circ r \backsim q \circ 1_X \circ r \backsim q \circ r \backsim 1_W$$

Εφόσον $s' \circ p \backsim 1_W$ και ο ταυτοτικός μορφισμός 1_W είναι ασθενής ισοδυναμία προκύπτει ότι ο μορφισμός $s' \circ p$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Χρησιμοποιώντας την ισότητα $p \circ s' = 1_Y$ και τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών 1_Y και 1_W έπεται ότι:

$$(p \circ s') \circ p = 1_Y \circ p = p = p \circ 1_W \circ 1_W$$

Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "1_W"] \arrow[d, "p"] & W \arrow[r, "1_W"] \arrow[d, "s' \circ p"] & W \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "s'"] & W \arrow[r, "p"] & Y
\end{tikzcd}.$$

το οποίο υποδηλώνει ότι ο μορφισμός p είναι retract του μορφισμού $s' \circ p$ ο οποίος όπως προείπαμε είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε σύμφωνα με το Αξίωμα (MC3) ο μορφισμός p είναι ασθενής ισοδυναμία. Συνεπώς σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ότι ο μορφισμός $f = p \circ q$ είναι ασθενής ισοδυναμία. ■

Πρόταση 3.2.43. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, X, Y, Z, W συννινώδη-ινώδη αντικείμενα της και $f, g \colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν υπάρχει ένας μορφισμός $h \colon Y \longrightarrow Z$ στην $\mathcal{C}$ ο οποίος είναι ασθενής ισοδυναμία τέτοιος ώστε ο μορφισμός $h \circ f \colon X \longrightarrow Z$ να είναι ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g \colon X \longrightarrow Z$ τότε ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g.*

2. *Εαν υπάρχει ένας μορφισμός $k \colon W \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ ο οποίος είναι ασθενής ισοδυναμία τέτοιος ώστε ο μορφισμός $f \circ k \colon W \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g \circ k \colon W \longrightarrow Y$ τότε ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $h \colon Y \longrightarrow Z$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $h \circ f \colon X \longrightarrow Z$ να είναι ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g \colon X \longrightarrow Z$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.40 ο μορφισμός h είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $\widetilde{h} \colon Z \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $\widetilde{h} \circ h \colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y \colon Y \longrightarrow Y$ και $h \circ \widetilde{h} \colon Z \longrightarrow Z$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Z \colon Z \longrightarrow Z$. Εφόσον τα αντικείμενα X, Y είναι συννινώδη-ινώδη και ο μορφισμός $\widetilde{h} \circ h \colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y \colon Y \longrightarrow Y$ και ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $f \colon X \longrightarrow Y$ απο το Θεώρημα 3.2.33 ο μορφισμός $1_Y \circ f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{h} \circ h \circ f \colon X \longrightarrow Y$. Εν συνεχεία, εφόσον ο μορφισμός $\widetilde{h} \colon Z \longrightarrow Y$ μεταξύ των συννινωδών-ινωδών αντικειμένων Z, Y είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{h} \colon Z \longrightarrow Y$ και εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $h \circ f \colon X \longrightarrow Z$ μεταξύ των συννινωδών-ινωδών αντικειμένων X, Z είναι ομοτοπικός του μορφισμού $h \circ g \colon X \longrightarrow Z$ απο το Θεώρημα

8.2.33 ο μορφισμός $\widetilde{h} \circ h \circ f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{h} \circ h \circ g \colon X \longrightarrow Y$. Επιπλέον, εφόσον ο μορφισμός $\widetilde{h} \circ h \colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y \colon Y \longrightarrow Y$ και ο μορφισμός $g \colon X \longrightarrow Y$ μεταξύ των συννινωδών-ινωδών αντικειμένων X, Y είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$ απο το Θεώρημα 3.2.33 ο μορφισμός $\widetilde{h} \circ h \circ g \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $1_Y \circ g \colon X \longrightarrow Y$. Έτσι, συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει:

$$f \backsim 1_Y \circ f \backsim \widetilde{h} \circ h \circ f \backsim \widetilde{h} \circ h \circ g \backsim 1_Y \circ g \backsim g.$$

Επομένως, ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο με ένα επιπλέον κριτήριο ώστε ένας μορφισμός σε μια κατηγορία μοντέλο να είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Πρόταση 3.2.44. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, X, Y συννινώδη-ινώδη αντικείμενα της και $g \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν ο μορφισμός g επάγει ισομορφισμούς*

$$g_*^X \colon \pi(X,X) \longrightarrow \pi(X,Y), \quad [f] \longmapsto [g \circ f]$$

και

$$g_*^Y \colon \pi(Y,X) \longrightarrow \pi(Y,Y), \quad [f] \longmapsto [g \circ f]$$

μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών τότε είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

2. *Εαν ο μορφισμός g επάγει ισομορφισμούς*

$$g^*_X \colon \pi(Y,X) \longrightarrow \pi(X,X), \quad [h] \longmapsto [h \circ g]$$

και

$$g^*_Y \colon \pi(Y,Y) \longrightarrow \pi(X,Y), \quad [h] \longmapsto [h \circ g]$$

μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών τότε είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Απόδειξη. 1. Ας είναι $g \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός g επάγει ισομορφισμούς

$$g_*^X \colon \pi(X,X) \longrightarrow \pi(X,Y), \quad [f] \longmapsto [g \circ f]$$

και

$$g_*^Y \colon \pi(Y,X) \longrightarrow \pi(Y,Y), \quad [f] \longmapsto [g \circ f]$$

μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Τότε υπάρχει μορφισμός $h' \in \pi(Y,X)$ τέτοιος ώστε $g_*^Y([h']) = [1_Y]$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης g_*^Y απο την τελευταία ισότητα έπεται ότι $[g \circ h'] = [1_Y]$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g \circ h' \colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y \colon Y \longrightarrow Y$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μορφισμού g_*^X, την τελευταία ισότητα και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού προκύπτει:

$$g_*^X([1_X]) = [g \circ 1_X] = [g]$$

και

$$g_*^X([h' \circ g]) = [g \circ h' \circ g] = [g \circ h'] \circ [g] = [1_Y] \circ [g] = [1_Y \circ g] = [g]$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι $g_*^X([1_X]) = g_*^X([h' \circ g])$. Όμως ο μορφισμός g_*^X είναι «1-1». Ετσι, $[h' \circ g] = [1_X]$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $h' \circ g \colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $g \circ h' : Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ και ο μορφισμός $h' \circ g : Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ ο μορφισμός g είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο $g^{-1} = h'$.

2. Η αποδεικτική διαδικασία η οποία ακολουθείται είναι παρόμοια της αποδεικτικής διαδικασίας η οποία ακολουθήθηκε στο πρώτο σκέλος. ■

3.2.3 Ομοτοπία σε undercategories και σε overcategories

Εν συνεχεία ορίζουμε τις κατηγορίες των αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο υπό ενός σταθεροποιημένου αντικειμένου της, των αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο υπεράνω ενός σταθεροποιημένου αντικειμένου της, η οποία αποτελεί δυϊκή της προαναφερθείσας και των αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο υπό ενος αντικειμένου της και υπεράνω ενός άλλου οι οποίες με την σειρά τους αποτελούν κατηγορίες μοντέλο και μελετάμε την ομοτοπία σε αυτές. Επιπλέον αποδεικνύουμε την μοναδικότητα μέχρις ομοτοπίας των ανυψώσεων η οποία εξασφαλίζεται απο το Αξίωμα (MC4).

Ορισμός 3.2.45. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και A ένα αντικείμενο της. Η* **κατηγορία των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπό του A (categories of objects of $\mathcal{C}$ under A)** *η οποία συνήθως συμβολίζεται με $(A \downarrow \mathcal{C})$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα ζευγάρια (X, s) όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $s : A \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*
2. *Ένας μορφισμός της $h : (X, s) \longrightarrow (Y, t)$ απο το αντικείμενο (X, s) στο αντικείμενο (Y, t) είναι ένας μορφισμός $h : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & X \arrow[dl, "h"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

   να είναι μεταθετικό.
3. *Η σύνθεση των μορφισμών της επάγεται απο την σύνθεση των μορφισμών στην $\mathcal{C}$.*

Σχόλιο 3.2.46. Χαριν απλότητας θα συμβολίζουμε ένα αντικείμενο (X, s) της κατηγορίας $(A \downarrow \mathcal{C})$ ως $s : A \longrightarrow X$ χωρίς να κάνουμε ρητή αναφορά στο αντικείμενο X.

Ορισμός 3.2.47. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και A ένα αντικείμενο της.*
Ο λησμονικός συναρτητής $G : (A \downarrow \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής ο οποίος στέλνει κάθε αντικείμενο $s : A \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(A \downarrow \mathcal{C})$ στο αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & X \arrow[dl, "h"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$ στον μορφισμό $h : X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Δυϊκά,

Ορισμός 3.2.48. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και A ένα αντικείμενο της. Η* **κατηγορία των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπεράνω του A (categories of objects of $\mathcal{C}$ over A)** *η οποία συνήθως συμβολίζεται με $(\mathcal{C} \downarrow A)$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα ζευγάρια (X, s) όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $s\colon X \longrightarrow A$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

2. *Ένας μορφισμός της $h\colon (X, s) \longrightarrow (Y, t)$ απο το αντικείμενο (X, s) στο αντικείμενο (Y, t) είναι ένας μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[dl, "t"] \\ A & \end{tikzcd}$$

   να είναι μεταθετικό.

3. *Η σύνθεση των μορφισμών της επάγεται απο την σύνθεση των μορφισμών στην $\mathcal{C}$.*

Σχόλιο 3.2.49. Χαριν απλότητας θα συμβολίζουμε ένα αντικείμενο (X, s) της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow A)$ ως $s\colon X \longrightarrow A$ χωρίς να κάνουμε ρητή αναφορά στο αντικείμενο X.

Ορισμός 3.2.50. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και A ένα αντικείμενο της.*
Ο λησμονικός συναρτητής $G\colon (\mathcal{C} \downarrow A) \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής ο οποίος στέλνει κάθε αντικείμενο $s\colon X \longrightarrow A$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow A)$ στο αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και κάθε μορφισμό

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[dl, "t"] \\ A & \end{tikzcd}$$

στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$ στον μορφισμό $h\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορίας $\mathcal{C}$.

Πρόταση 3.2.51. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια συν-πλήρης κατηγορία και A ένα αντικείμενο της.*

1. *Ο λησμονικός συναρτητής $G\colon (A \downarrow \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ ο οποίος στέλνει ένα αντικείμενο $A \longrightarrow Y$ στο Y είναι δεξιά συζυγής του συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow (A \downarrow \mathcal{C})$ ο οποίος στέλνει το αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ στο αντικείμενο $A \longrightarrow A \coprod X$.*

2. *Ο λησμονικός συναρτητής $G\colon (\mathcal{C} \downarrow A) \longrightarrow \mathcal{C}$ ο οποίος στέλνει ένα αντικείμενο $Y \longrightarrow A$ στο Y είναι αριστερά συζυγής του συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow (\mathcal{C} \downarrow A)$ ο οποίος στέλνει το αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ στο αντικείμενο $X \coprod A \longrightarrow A$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $A \longrightarrow Y$ ένα αντικείμενο της κατηγορίας $(A \downarrow \mathcal{C})$. Τότε σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα του συν-γινομένου προκύπτει ότι ο μορφισμός

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "in_0"] \arrow[d] & A \coprod X \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

εξαρτάται εξ' ολοκλήρου απο την επιλογή του μορφισμού $X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου ο λησμονικός συναρτητής $G\colon (A \downarrow \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι δεξιά συζυγής του συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow (A \downarrow \mathcal{C})$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Ορισμός 3.2.52. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και A, B αντικείμενα της. Η* **κατηγορία των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπο του A και υπεράνω του B (categories of objects of $\mathcal{C}$ under A and over B)** *η οποία συνήθως συμβολίζεται με $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow B)$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Ένα αντικείμενο της είναι ένα διάγραμμα $A \longrightarrow X \longrightarrow B$ στην $\mathcal{C}$.*

2. *Ένας μορφισμός της απο το αντικείμενο* $A \longrightarrow X \longrightarrow B$ *στο αντικείμενο* $A \longrightarrow Y \longrightarrow B$ *είναι ένας μορφισμός* $X \longrightarrow Y$ *στην* $\mathcal{C}$ *τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[ur] & B \end{tikzcd} .$$

να είναι μεταθετικό.

3. *Η σύνθεση των μορφισμών της επάγεται απο την σύνθεση των μορφισμών στην* $\mathcal{C}$*.*

Παράδειγμα 3.2.53. Ας είναι Top_* η κατηγορία των pointed spaces η οποία έχει ως αντικείμενα τους pointed spaces δηλαδή διατεταγμένα ζεύγη (X, x_0) όπου X είναι ένας τοπολογικός χώρος και x_0 είναι basepoint, και ως μορφισμούς τις basepoint preserving συνεχείς απεικονίσεις. Η κατηγορία Top_* των pointed spaces μπορεί να ιδωθεί ως η κατηγορία $(* \downarrow \mathsf{Top})$ των τοπολογικών χώρων υπο του τελικού αντικειμένου $*$ δηλαδή ενός one-point space $\{x\}$ στην Top. Τα αντικείμενα της κατηγορίας $(* \downarrow \mathsf{Top})$ είναι οι συνεχείς απεικονίσεις $\{x\} \longrightarrow X$ και οι μορφισμοί στην $(* \downarrow \mathsf{Top})$ είναι οι μορφισμοί στην Top για τους οποίους το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \{x\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "y_0"] & X \arrow[dl, "h"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Η μεταθετικότητα του διαγράμματος είναι ισοδύναμη με την συνθήκη ότι ο μορφισμός h διατηρεί basepoints.

Εαν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι κατηγορία μοντέλο οι παραπάνω κατηγορίες αποκτούν την δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής:

Παρατήρηση 3.2.54. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και A, B αντικείμενα της.

1. Η κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$ αποκτά δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής:
   Ορίζουμε έναν μορφισμό $h\colon (X, s) \longrightarrow (Y, t)$ στην $(A \downarrow \mathcal{C})$ να είναι
   (a) ασθενής ισοδυναμία εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$.
   (b) νημάτωση εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$.
   (c) συννημάτωση εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C}$.
2. Η κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$ αποκτά δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής:
   Ορίζουμε έναν μορφισμό $h\colon (X, s) \longrightarrow (Y, t)$ στην $(\mathcal{C} \downarrow A)$ να είναι
   (a) ασθενής ισοδυναμία εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$.
   (b) νημάτωση εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$.
   (c) συννημάτωση εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C}$.
3. Η κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow B)$ αποκτά δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής:
   Ορίζουμε έναν μορφισμό $h\colon (\, A \longrightarrow X \longrightarrow B \,) \longrightarrow (\, A \longrightarrow Y \longrightarrow B \,)$ στην $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow B)$ να είναι
   (a) ασθενής ισοδυναμία εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$.

(b) νημάτωση εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$.

(c) συννημάτωση εαν ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C}$.

Ορισμός 3.2.55. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και A ένα αντικειμενό της.*

1. *Στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπό του A δοθέντων δύο αντικειμένων της $A \longrightarrow X$ και $A \longrightarrow Y$ και δύο μορφισμών της $f, g\colon X \longrightarrow Y$ έχουμε:*

   (a) *Ο μορφισμός f καλείται* **αριστερά ομοτοπικός υπο του** A **(left homotopic under A)** *του μορφισμού g εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$.*

   (b) *Ο μορφισμός f καλείται* **δεξιά ομοτοπικός υπο του** A **(right homotopic under A)** *του μορφισμού g εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$.*

   (c) *Ο μορφισμός f καλείται* **ομοτοπικός υπο του** A **(homotopic under A)** *του μορφισμού g εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$.*

   (d) *Ο μορφισμός f καλείται* **ομοτοπική ισοδυναμία υπο του** A **(homotopy equivalence under A)** *εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπική ισοδυναμία στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$.*

2. *Στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπεράνω του A δοθέντων δύο αντικειμένων της $X \longrightarrow A$ και $Y \longrightarrow A$ και δύο μορφισμών της $f, g\colon X \longrightarrow Y$ έχουμε:*

   (a) *Ο μορφισμός f καλείται* **αριστερά ομοτοπικός υπεράνω του** A **(left homotopic over A)** *του μορφισμού g εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$.*

   (b) *Ο μορφισμός f καλείται* **δεξιά ομοτοπικός υπεράνω του** A **(right homotopic over A)** *του μορφισμού g εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$.*

   (c) *Ο μορφισμός f καλείται* **ομοτοπικός υπεράνω του** A **(homotopic over A)** *του μορφισμού g εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$.*

   (d) *Ο μορφισμός f καλείται* **ομοτοπική ισοδυναμία υπεράνω του** A **(homotopy equivalence over A)** *εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπική ισοδυναμία στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$.*

Πρόταση 3.2.56. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και A ένα αντικειμενό της.*

1. *Στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπό του A δοθέντων δύο αντικειμένων της $A \longrightarrow X$ και $A \longrightarrow Y$ και δύο μορφισμών της $f, g\colon X \longrightarrow Y$ έχουμε:*

   (a) *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός υπο του A του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g.*

   (b) *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός υπο του A του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g.*

   (c) *Εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός υπο του A του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g.*

2. *Στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow A)$ των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπεράνω του A δοθέντων δύο αντικειμένων της $X \longrightarrow A$ και $Y \longrightarrow A$ και δύο μορφισμών της $f, g\colon X \longrightarrow Y$ έχουμε:*

   (a) *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός υπεράνω του A του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g.*

   (b) *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός υπεράνω του A του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g.*

(c) *Εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός υπεράνω του A του μορφισμού g τότε ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $A \longrightarrow X$ και $A \longrightarrow Y$ αντικείμενα της $(A \downarrow \mathcal{C})$ και $f, g \colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $(A \downarrow \mathcal{C})$.

(a) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$ υπό του A. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.10 ο μορφισμός $1_X + 1_X \colon X \coprod X \longrightarrow X$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, "s"] \arrow[drr, "t"] & & \\ X \coprod X \arrow[r, "i=i_0+i_1"] & C \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $p \colon (C, s) \longrightarrow (X, t)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$ και επιπλέον υπάρχει ένας μορφισμός $H \colon C \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Ωστόσο, όπως είδαμε στο πρώτο σκέλος της Παρατήρησης 3.2.52 ο μορφισμός $p \colon (C, s) \longrightarrow (X, t)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $(A \downarrow \mathcal{C})$ εαν ο μορφισμός $p \colon C \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Έτσι, ο μορφισμός $1_X + 1_X \colon X \coprod X \longrightarrow X$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως:

$$X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} C \xrightarrow{p} X$$

όπου ο μορφισμός $p \colon C \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι υπάρχει ένας μορφισμός $H \colon C \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$ απο την Πρόταση 3.2.10 έπεται ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

(b) Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του (a).

(c) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$ υπό του A. Τότε ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά και δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$ υπό του A. Έτσι, σύμφωνα με τα (a) και (b) ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά και δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g \colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.2.54 είναι η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.2.57. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και A ένα αντικειμενό της.*

1. *Εαν ένας μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία υπό του A τότε είναι ομοτοπική ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$.*

2. *Εαν ένας μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία υπεράνω του A τότε είναι ομοτοπική ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία υπό του A. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$. Ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $g \colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $g \circ f \colon X \longrightarrow X$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_X \colon X \longrightarrow X$ και ο μορφισμός

$f \circ g \colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C})$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον Ορισμό 3.2.53 ο μορφισμός $g \circ f \colon X \longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_X \colon X \longrightarrow X$ και αντίστοιχα ο μορφισμός $f \circ g \colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y υπό του A. Ως εκ τούτου απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.54 έπεται ότι ο μορφισμός $g \circ f \colon X \longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_X \colon X \longrightarrow X$ και αντίστοιχα ο μορφισμός $f \circ g \colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y στην $\mathcal{C}$. Συνεπώς, ο μορφισμός f είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο τον μορφισμό g στην $\mathcal{C}$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Οι ακόλουθες προτάσεις εγγυόνται την μοναδικότητα μέχρις ομοτοπίας των ανυψώσεων.

Πρόταση 3.2.58. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "m"'] \arrow[ur, shift left, "h_1"] \arrow[ur, shift right, "h_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

.

1. *Εαν ο μορφισμός $i \colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση, ο μορφισμός $p \colon X \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση και οι μορφισμοί $h_1 \colon B \longrightarrow X$ και $h_2 \colon B \longrightarrow X$ είναι ανυψώσεις στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα, τότε ο μορφισμός h_1 είναι ομοτοπικός του μορφισμού h_2 εαν θεωρηθούν ως μορφισμοί στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$.*
2. *Εαν ο μορφισμός $i \colon A \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη συννημάτωση, ο μορφισμός $p \colon X \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση και οι μορφισμοί $h_1 \colon B \longrightarrow X$ και $h_2 \colon B \longrightarrow X$ είναι ανυψώσεις στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα, τότε ο μορφισμός h_1 είναι ομοτοπικός του μορφισμού h_2 εαν θεωρηθούν ως μορφισμοί στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$.*

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "m"'] \arrow[ur, shift left, "h_1"] \arrow[ur, shift right, "h_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $i \colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση, ο μορφισμός $p \colon X \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση και οι μορφισμοί $h_1 \colon B \longrightarrow X$ και $h_2 \colon B \longrightarrow X$ είναι ανυψώσεις. Τότε $p \circ k = m \circ i$, $h_1 \circ i = k$, $p \circ h_1 = m$, $h_2 \circ i = k$ και $p \circ h_2 = m$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε τον μορφισμό $1_B + 1_B \colon B \coprod B \longrightarrow B$ ως

$$B \coprod B \xrightarrow{j = j_0 + j_1} C \xrightarrow{r} B$$

όπου ο μορφισμός $r \colon C \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη νημάτωση και ο μορφισμός $j \colon B \coprod B \longrightarrow C$ είναι συννημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} B \coprod B \arrow[r, "h_1 + h_2"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "m \circ r"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd} .$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ισότητες $p\circ h_1 = m$, $p\circ h_2 = m$ και $r \circ j = 1_B + 1_B$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_B προκύπτει ότι:

$$p\circ(h_1+h_2) = (p\circ(h_1+h_2))\circ in_0+(p\circ(h_1+h_2))\circ in_1 = p\circ((h_1+h_2)\circ in_0)+p\circ((h_1+h_2)\circ in_1) =$$
$$= p \circ h_1 + p \circ h_2 = m + m$$

και

$$(m\circ r)\circ j = m\circ(r\circ j) = m\circ(1_B+1_B) = (m\circ(1_B+1_B))\circ in_0 + (m\circ(1_B+1_B))\circ in_1 =$$
$$= m\circ((1_B+1_B)\circ in_0) + m\circ((1_B+1_B)\circ in_1) = m\circ 1_B + m\circ 1_B = m+m.$$

Απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι $p \circ (h_1 + h_2) = (m \circ r) \circ j$, γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του τελευταίου διαγράμματος. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $j\colon B\coprod B \longrightarrow C$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $H\colon C \longrightarrow X$ στο τελευταίο μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου, ισχύει ότι $H\circ j = h_1 + h_2$ και $p\circ H = m\circ r$. Εφόσον ο μορφισμός $j\colon B\coprod B \longrightarrow C$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $r\colon C \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη νημάτωση στην κατηγορία $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το τρίτο σκέλος της Παρατήρησης 3.2.52 ο μορφισμός $j\colon (\ A \longrightarrow B\coprod B \longrightarrow Y\ ) \longrightarrow (\ A \longrightarrow C \longrightarrow Y\ )$ είναι συννημάτωση στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$ και ο μορφισμός $r\colon (\ A \longrightarrow C \longrightarrow Y\ ) \longrightarrow (\ A \longrightarrow B \longrightarrow Y\ )$ είναι τετριμμένη νημάτωση στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$. Επιπλέον ισχύει ότι $r\circ j = 1_B + 1_B$ στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$. Έτσι, $B\coprod B \xrightarrow{j=j_0+j_1} C \xrightarrow{\ r\ } B$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το B στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$. Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ισότητες $j_0 = j\circ in_0$, $j_1 = j\circ in_1$ και $H\circ j = h_1 + h_2$ έπεται ότι ο μορφισμός $H\colon C \longrightarrow X$ πληροί τις ακόλουθες ισότητες:

$$H\circ j_0 = H\circ(j\circ in_0) = (H\circ j)\circ in_0 = (h_1+h_2)\circ in_0 = h_1$$

και

$$H\circ j_1 = H\circ(j\circ in_1) = (H\circ j)\circ in_1 = (h_1+h_2)\circ in_1 = h_2.$$

Συνεπώς ο μορφισμός $H\colon C \longrightarrow X$ είναι μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό h_1 στον μορφισμό h_2 στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$. Όμως το αντικείμενο $A \longrightarrow B \longrightarrow Y$ είναι ένα συννινώδες αντικείμενο και $A \longrightarrow X \longrightarrow Y$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$ και καθώς ο μορφισμός h_1 είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού h_2 στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$ σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός h_1 είναι ομοτοπικός του μορφισμού h_2 στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$.

2. Η αποδεικτική διαδικασία η οποία ακολουθούμε είναι ανάλογη της αποδεικτικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε στο πρώτο σκέλος. ■

Πρόταση 3.2.59. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "m"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

1. *Εαν οι μορφισμοί $i\colon A \longrightarrow B$ και $k\colon A \longrightarrow X$ είναι συννημάτωσεις και οι μορφισμοί $p\colon X \longrightarrow Y$ και $m\colon B \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένες νημάτωσεις τότε υπάρχει μια ανύψωση $h\colon B \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα η οποία είναι μοναδική μέχρις ομοτοπίας στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$ και οποιαδήποτε τέτοια ανύψωση είναι ομοτοπική ισοδυναμία στην $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$.*

2. *Εαν οι μορφισμοί $i\colon A \longrightarrow B$ και $k\colon A \longrightarrow X$ είναι τετριμμένες συννημάτωσεις και οι μορφισμοί $p\colon X \longrightarrow Y$ και $m\colon B \longrightarrow Y$ είναι νημάτωσεις τότε υπάρχει μια ανύψωση $h\colon B \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα η οποία είναι μοναδική μέχρις ομοτοπίας στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$ και οποιαδήποτε τέτοια ανύψωση είναι ομοτοπική ισοδυναμία στην $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$.*

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "m"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

στο οποίο οι μορφισμοί $i\colon A \longrightarrow B$ και $k\colon A \longrightarrow X$ είναι συννημάτωσεις και οι μορφισμοί $p\colon X \longrightarrow Y$ και $m\colon B \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένες νημάτωσεις. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $h\colon B \longrightarrow X$ του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Ως εκ τούτου ισχύει ότι $h \circ i = k$ και $p \circ h = m$. Ας είναι $h'\colon B \longrightarrow X$ μια άλλη ανύψωση του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.56. ο μορφισμός $h\colon B \longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $h'\colon B \longrightarrow X$ στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$. Ως εκ τούτου η ανύψωση $h\colon B \longrightarrow X$ είναι μοναδική μέχρις ομοτοπίας στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$. Οι μορφισμοί $p\colon X \longrightarrow Y$ και $m\colon B \longrightarrow Y$ ως τετριμμένες νηματώσεις είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $p \circ h = m$ απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $h\colon B \longrightarrow X$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Όμως τα αντικείμενα $A \to B \to Y$ και $A \to X \to Y$ είναι ινώδη-συννινώδη αντικείμενα της $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$. Επομένως ο μορφισμός $h\colon B \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών-συννινώδων αντικειμένων στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$ και ως εκ τούτου σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.40 μια ομοτοπική ισοδυναμία στην κατηγορία $(A \downarrow \mathcal{C} \downarrow Y)$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

2. Η αποδεικτική διαδικασία η οποία ακολουθούμε είναι ανάλογη της αποδεικτικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε στο πρώτο σκέλος. ■

Ορισμός 3.2.60. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $i\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow Y$ καλείται* **έγκλειση μιας συσταλτικής παραμόρφωσης (inclusion of a deformation retract)** *εαν υπάρχει ένας μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $r \circ i = 1_X$ και ο μορφισμός $i \circ r\colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$. Σ' αυτή την περίπτωση το αντικείμενο X καλείται* **συσταλτική παραμόρφωση (deformation retract)** *του αντικειμένου Y.*

2. *Μια συσταλτική παραμόρφωση καλείται* **ισχυρή συσταλτική παραμόρφωση (strong deformation retract)** *εαν ο μορφισμός $i \circ r\colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ υπό του X.*

Πρόταση 3.2.61. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Εαν ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη συννημάτωση μεταξύ ινωδών αντικειμένων τότε υπάρχει ένας μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $r \circ i = 1_X$ και ο μορφισμός $i \circ r\colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ υπό του X δηλαδή το X είναι ισχυρή συσταλτική παραμόρφωση του Y.*

2. *Εαν ο μορφισμός $p\colon A \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη νημάτωση μεταξύ συννινωδών αντικειμένων τότε υπάρχει ένας μορφισμός $s\colon B \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $p \circ s = 1_B$ και ο μορφισμός $s \circ p\colon A \longrightarrow A$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_A\colon A \longrightarrow A$ υπεράνω του B.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $i\colon X \longrightarrow Y$ τετριμμένη συννημάτωση μεταξύ των ινωδών αντικειμένων X και Y. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\star"] \\ Y \arrow[r, "!!"'] \arrow[ur, dashed, "r"'] & * \end{tikzcd}$$

Εφόσον $*$ είναι τελικό αντικείμενο το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Εφόσον το αντικείμενο X είναι ινώδες ο μορφισμός $X \longrightarrow *$ είναι νημάτωση στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου απο το πρώτο σκέλος της Παρατήρησης 3.2.52 ο μορφισμός $(X, s) \longrightarrow (*, t)$ είναι νημάτωση στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$. Ανάλογα, ο μορφισμός $i\colon (X, s') \longrightarrow (Y, t')$ είναι τετριμμένη συννημάτωση στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$ ως τετριμμένη συννημάτωση στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $r\colon Y \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$. Ως εκ τούτου $r \circ i = 1_X$ και $!! \circ r =!$. Το αντικείμενο X είναι αρχικό αντικείμενο της κατηγορίας $(X \downarrow \mathcal{C})$ καθώς για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $(X \downarrow \mathcal{C})$ δηλαδή για κάθε μορφισμό $X \longrightarrow Y$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $X \longrightarrow Y$ οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικο

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Το αντικείμενο $*$ είναι τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $(X \downarrow \mathcal{C})$ καθώς για κάθε αντικείμενο Z της κατηγορίας $(X \downarrow \mathcal{C})$ δηλαδή για κάθε μορφισμό $X \longrightarrow Z$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $Z \longrightarrow *$ οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικο

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[dl] \\ *. & \end{tikzcd}$$

Επιπλέον, το αντικείμενο X είναι συννινώδες-ινώδες αντικείμενο της κατηγορίας $(X \downarrow \mathcal{C})$ καθώς υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $1_X : X \longrightarrow X$ απο το αρχικό αντικείμενο $X \longrightarrow X$ στο $X \longrightarrow X$ και $X \longrightarrow *$ απο το αντικείμενο $X \longrightarrow X$ στο τελικό αντικείμενο $X \longrightarrow *$ οι οποιοί κάνουν τα ακόλουθα διαγράμματα μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"] & X \arrow[dl, "1_X"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[dl] \\ * & \end{tikzcd}$$

και είναι συννημάτωση και νημάτωση αντίστοιχα. Το αντικείμενο Y είναι εξίσου συννινώδες-ινώδες αντικείμενο της κατηγορίας $(X \downarrow \mathcal{C})$ καθώς υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $i\colon X \longrightarrow Y$ απο το αρχικό αντικείμενο $1_X : X \longrightarrow X$ στο $i\colon X \longrightarrow Y$ και $Y \longrightarrow *$ απο το αντικείμενο $i\colon X \longrightarrow Y$ στο τελικό αντικείμενο $X \longrightarrow *$ οι οποιοί κάνουν τα ακόλουθα διαγράμματα μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[dl, "i"] \\ Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[dl] \\ * & \end{tikzcd}$$

και είναι συννημάτωση και νημάτωση αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $i\colon (X,s') \longrightarrow (Y,t')$ είναι τετριμμένη συννημάτωση στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$ και ότι Y είναι ινώδες στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 η απεικόνιση $i^*\colon \pi^r(Y,Y) \longrightarrow \pi^r(X,Y)$ ο οποίος ορίζεται ως $i^*([\alpha]) = [\alpha \circ i]$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των συνόλων των δεξιών ομοτοπικών κλάσεων στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απεικονίσης i^* και την ισότητα $i \circ r = 1_Y$ έχουμε ότι:

$$i^*([1_Y]) = [1_Y \circ i] = [i \circ r \circ i] = i^*([i \circ r]).$$

Έτσι, απο την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η απεικόνιση i^* είναι «1-1» έπεται ότι $[1_Y] = [i \circ r]$. Ως εκ τούτου ο ταυτοτικός μορφισμός $1_Y : Y \longrightarrow Y$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $i \circ r\colon Y \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$. Επιπλέον εφόσον όπως προείπαμε τα αντικείμενα X και Y είναι συννινώδη-ινώδη στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$ απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_Y : Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $i \circ r\colon Y \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ∎

Λήμμα 3.2.62. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, X, Y συννινώδη-ινώδη αντικείμενα της και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X, $H\colon \text{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ είναι μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g και H'' είναι η σύνθεση της H και της H^{-1} όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 3.2.19, τότε η H'' είναι ομοτοπική με την σταθερή αριστερή ομοτοπία $\text{Cyl(X)}'' \xrightarrow{s''} X \xrightarrow{f} Y$ στην κατηγορία $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$.*

2. *Εαν $Y \xrightarrow{r} \text{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y, $H\colon X \longrightarrow \text{Path(Y)}$ είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g και H'' είναι η σύνθεση της H και της H^{-1} όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 3.2.19, τότε η H'' είναι ομοτοπική με την σταθερή δεξιά ομοτοπία $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{r''} \text{Path(Y)}''$ στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow (Y \times Y))$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $Y \xrightarrow{r} \text{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y. Δοθέντος ενός κυλινδρικού αντικειμένου $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \text{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ για το X υποθέτουμε ότι $H\colon \text{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ είναι μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό g. Τότε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r \circ f"] \arrow[d, "i_0"'] & \text{Path(Y)} \arrow[d, "(p_0,p_1)"] \\
\text{Cyl(X)} \arrow[r, "(f \circ s, H)"'] \arrow[ur, dashed, "K"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X και του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y, τις ισότητες $s \circ i_0 = 1_X$, $p_0 \circ r = 1_Y$, $p_1 \circ r = 1_Y$ οι οποίες προκύπτουν απο το δεύτερο και τρίτο σκέλος του Σχολίου 3.2.2. και την ισότητα $H \circ i_0 = f$ έπεται ότι:

$(f \circ s, H) \circ i_0 = (pr_0 \circ ((f \circ s, H) \circ i_0), pr_1 \circ ((f \circ s, H) \circ i_0) = ((pr_0 \circ (f \circ s, H)) \circ i_0, (pr_1 \circ (f \circ s, H)) \circ$

$$\circ i_0) = ((f \circ s) \circ i_0, H \circ i_0) = (f \circ (s \circ i_0), f) = (f \circ 1_X, f) = (f, f)$$

και

$$(p_0, p_1) \circ (r \circ f) = (pr_0 \circ ((p_0, p_1) \circ (r \circ f)), pr_1 \circ ((p_0, p_1) \circ (r \circ f)) = ((pr_0 \circ (p_0, p_1)) \circ (r \circ f), (pr_1 \circ (p_0,$$

$$, p_1)) \circ (r \circ f)) = (p_0 \circ (r \circ f), p_1 \circ (r \circ f)) = ((p_0 \circ r) \circ f, (p_1 \circ r) \circ f) = (1_Y \circ f, 1_Y \circ f) = (f, f).$$

Απο τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $(f \circ s, H) \circ i_0 = (p_0, p_1) \circ (r \circ f)$, γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του τελευταίου διαγράμματος. Εφόσον το X είναι συννινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.6 ο μορφισμός $i_0 \colon X \longrightarrow$ Cyl(X) είναι τετριμμένη συννημάτωση. Επιπλέον, απο τον ορισμό του μονοπάτι αντικειμένου Path(Y) ο μορφισμός $(p_0, p_1) \colon$ Path(Y) $\longrightarrow Y$ είναι νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $K \colon$ Cyl(X) $\longrightarrow$ Path(Y) στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου ισχύει ότι $K \circ i_0 = r \circ f$ και $(p_0, p_1) \circ K = (f \circ s, H)$. Εν συνεχεία θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r \circ f"] \arrow[d, "i_1'"'] & \mathrm{Path(Y)} \arrow[d, "(p_0, p_1)"] \\
\mathrm{Cyl(X)}' \arrow[r, "(f \circ s', H^{-1})"'] \arrow[ur, dashed, "K'"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον Ορισμό 3.2.17 ο μορφισμός $H^{-1} = H \colon$ Cyl(X)$'$ = Cyl(X) $\longrightarrow Y$ είναι ομοτοπία απο τον μορφισμό g στον μορφισμό f και επιπλέον έχουμε ότι $i_1' = i_0$ και $s' = s$. Ως εκ τούτου το τελευταίο διάγραμμα ανάγεται στο προηγούμενο. Έτσι η ανύψωση $K' \colon$ Cyl(X)$'$ $\longrightarrow$ Path(Y) υπάρχει στο τελευταίο διάγραμμα και ισούται με την ανύψωση $K \colon$ Cyl(X) $\longrightarrow$ Path(Y). Επομένως, $K' \circ i_1' = r \circ f$ και $(p_0, p_1) \circ K' = (f \circ s', H^{-1})$. Εν συνεχεία απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.18 ισχύει ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_0'"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathrm{Cyl(X)}' \arrow[d, "k_1"] \\
\mathrm{Cyl(X)} \arrow[r, "k_0'"'] & \mathrm{Cyl(X)}''
\end{tikzcd}$$

είναι pushout. Τότε για κάθε άλλο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_0'"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathrm{Cyl(X)}' \arrow[d, "k'"] \\
\mathrm{Cyl(X)} \arrow[r] & \mathrm{Path(Y)}
\end{tikzcd}$$

λόγω της καθολικής ιδιότητα των pushouts υπάρχει μοναδικός μορφισμός $K'' \colon$ Cyl(X)$''$ $\longrightarrow$ Path(Y) τέτοιος ώστε $K'' \circ k_0' = K$ και $K'' \circ k_1 = K'$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathsf{Cyl(X)}' \arrow[d, "k_1"] \arrow[ddr, bend left, "k'"] & \\
\mathsf{Cyl(X)} \arrow[r, "k'_0"'] \arrow[drr, bend right, "K"'] & D \arrow[dr, dotted, "K''"] & \\
& & \mathsf{Path(Y)}
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[r, "r\circ f+r\circ f"] \arrow[d, "i''_0+i''_1"'] & \mathsf{Path(Y)} \arrow[d, "(p_0,p_1)"] \\
\mathsf{Cyl(X)}'' \arrow[r, "(f\circ s'',H'')"'] \arrow[ur, dashed, "K''"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X και 1_Y, τις ισότητες $s''\circ i''_0 = 1_X$, $p_0\circ r = 1_Y$, $p_1\circ r = 1_Y$ οι οποίες προκύπτουν απο δεύτερο και τρίτο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 καθως και την ισότητα $H''\circ i_0 = f$ η οποία προκύπτει απο το γεγονός ότι H'' είναι αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό f έπεται ότι:

$$(p_0,p_1)\circ(r\circ f) = (pr_0\circ((p_0,p_1)\circ(r\circ f)), pr_1\circ((p_0,p_1)\circ(r\circ f)) = ((pr_0\circ(p_0,p_1))\circ(r\circ f),(pr_1\circ$$

$$\circ(p_0,p_1))\circ(r\circ f)) = (p_0\circ(r\circ f), p_1\circ(r\circ f)) = ((p_0\circ r)\circ f,(p_1\circ r)\circ f) = (1_Y\circ f, 1_Y\circ f) = (f,f).$$

και

$$(f\circ s'',H'')\circ i''_0 = (pr_0\circ((f\circ s'',H'')\circ i''_0), pr_1\circ((f\circ s'',H'')\circ i''_0)) = ((pr_0\circ(f\circ s'',H''))\circ i''_0,(pr_1\circ$$

$$\circ(f\circ s'',H''))\circ i''_0) = ((f\circ s'')\circ i''_0, H''\circ i''_0) = (f\circ(s''\circ i''_0), f) = (f\circ 1_X, f) = (f,f).$$

Έτσι, έχουμε:

$$(f\circ s'',H'')\circ(i''_0+i''_1) = ((f\circ s'',H'')\circ(i''_0+i''_1))\circ in_0+((f\circ s'',H'')\circ(i''_0+i''_1))\circ in_1 = (f\circ s'',H'')\circ$$

$$\circ((i''_0+i''_1)\circ in_0) + (f\circ s'',H'')\circ((i''_0+i''_1))\circ in_1) = (f\circ s'',H'')\circ i''_0 + (f\circ s'',H'')\circ i''_1 =$$

$$= (f,f) + (f,f)$$

και

$$(p_0,p_1)\circ(r\circ f+r\circ f) = ((p_0,p_1)\circ(r\circ f+r\circ f))\circ in_0+((p_0,p_1)\circ(r\circ f+r\circ f))\circ in_1 = (p_0,p_1)\circ$$

$$\circ((r\circ f+r\circ f)\circ in_0)+(p_0,p_1)\circ((r\circ f+r\circ f)\circ in_1) = (p_0,p_1)\circ(r\circ f)+(p_0,p_1)\circ(r\circ f) = (f,f)+(f,f)$$

Απο τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $(p_0,p_1)\circ(r\circ f+r\circ f) = (f\circ s'',H'')\circ(i''_0+i''_1)$, γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του τελευταίου διαγράμματος. Απο τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου $\mathsf{Cyl(X)}''$ ο μορφισμός $i = i''_0 + i''_1\colon X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)}''$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Επιπλέον υπενθυμίζουμε ότι ο μορφισμός $(p_0,p_1)\colon \mathsf{Path(Y)} \longrightarrow Y\times Y$

είναι νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $K''\colon \mathrm{Cyl(X)}'' \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}$ του τελευταίου μεταθετικού διαγράμματος. Ως εκ τούτου ισχύει ότι $(p_0, p_1) \circ K'' = (f \circ s'', H'')$ και $K'' \circ (i_0'' + i_1'') = r \circ f + r \circ f$. Εφόσον $Y \xrightarrow{r} \mathrm{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y στην $\mathcal{C}$ ο μορφισμός $1_Y \times 1_Y \colon Y \longrightarrow Y \times Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
Y \arrow[r, "r"] & \mathrm{Path(Y)} \arrow[r, "(p_0,p_1)"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

στην $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του μονοπάτι αντικείμενο Path(Y) ο μορφισμός $r\colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Παρατήρησης 3.2.52 ο μορφισμός
$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[dl, "r"] \\
\mathrm{Path(Y)} &
\end{tikzcd}$$
είναι ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης και τις ισότητες $K'' \circ i_0'' = r \circ f$ προκύπτει ότι:

$$K'' \circ (i_0''+i_1'') = (K'' \circ (i_0''+i_1'')) \circ in_0 + (K'' \circ (i_0''+i_1'')) \circ in_1 = K'' \circ i_0'' + K'' \circ i_1'' = r \circ f + r \circ f.$$

Έτσι, το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό
$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[r, "i_0''+i_1''"] \arrow[d, "r\circ f+r\circ f"'] & \mathrm{Cyl(X)}'' \arrow[dl, "K''"] \\
\mathrm{Path(Y)} &
\end{tikzcd}$$
είναι μεταθετικό και ως εκ τούτου ο μορφισμός $K''\colon \mathrm{Cyl(X)}'' \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}$ είναι μορφισμός στην $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$ ο οποίος πληροί τις ισότητες $p_0 \circ K'' = f \circ s''$ και $p_1 \circ K'' = H''$. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.10 ο μορφισμός $f \circ s''$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού H'' στην κατηγορία $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$. Το αντικείμενο $X \coprod X$ είναι αρχικό αντικείμενο της κατηγορίας $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$ καθώς για κάθε αντικείμενο Y της κατηγορίας $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$ δηλαδή για κάθε μορφισμό $X \coprod X \longrightarrow Y$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f\colon X \coprod X \longrightarrow Y$ οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικο

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[r, "1_X \coprod 1_X"] \arrow[d, "f"] & X\coprod X \arrow[dl, "f"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

Το αντικείμενο $*$ είναι τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$ καθώς για κάθε αντικείμενο Z της κατηγορίας $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$ δηλαδή για κάθε μορφισμό $X \coprod X \longrightarrow Z$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $Z \longrightarrow *$ οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικο

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[dl] \\
* &
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον, το αντικείμενο $\mathrm{Cyl(X)}''$ είναι συννινώδες αντικείμενο της κατηγορίας $((X \coprod X) \downarrow \mathcal{C})$ καθώς υπάρχει μοναδικός μορφισμός $i_0'' + i_1''\colon X \coprod X \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}''$ απο το αρχικό αντικείμενο $X\coprod X$ στο Cyl(X)$''$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[r, "1_X\coprod 1_X"] \arrow[d, "i_0''+i_1''"] & X\coprod X \arrow[dl, "i_0''+i_1''"] \\
\text{Cyl(X)}'' &
\end{tikzcd}$$

και είναι συννημάτωση. Το αντικείμενο Y είναι ινώδες αντικείμενο της κατηγορίας $(X\coprod X\downarrow \mathcal{C})$ καθώς υπάρχει μοναδικός μορφισμός απο το αντικείμενο Y της κατηγορία $((X\coprod X)\downarrow \mathcal{C})$ δηλαδή απο τον μορφισμό $X\coprod X\longrightarrow Y$ στο τελικό αντικείμενο $*$ της κατηγορία $((X\coprod X)\downarrow \mathcal{C})$ δηλαδή στον μορφισμό $X\coprod X\longrightarrow *$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[dl] \\
* &
\end{tikzcd}$$

και είναι νημάτωση. Ετσι, εφόσον ο μορφισμός $f\circ s''\colon$ Cyl(X)$''\longrightarrow Y$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $H''\colon$ Cyl(X)$''\longrightarrow Y$ στην κατηγορία $((X\coprod X)\downarrow \mathcal{C})$ και Cyl(X)$''$ είναι συννινώδες αντικείμενο της και Y είναι ινώδες αντικείμενο της απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός $f\circ s''\colon$ Cyl(X)$''\longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $H''\colon$ Cyl(X)$''\longrightarrow Y$ στην κατηγορία $((X\coprod X)\downarrow \mathcal{C})$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 3.2.63. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f\colon X\longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων.*

1. *Εαν ο μορφισμός f είναι ταυτόχρονα συννημάτωση και ομοτοπική ισοδυναμία τότε υπάρχει μορφισμός $g\colon Y\longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $g\circ f=1_X$ και ο μορφισμός $f\circ g\colon Y\longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y\colon Y\longrightarrow Y$ στην κατηγορία $(X\downarrow\mathcal{C})$ δηλαδή ο μορφισμός f είναι έγκλιση μιας ισχυρής συσταλτικής παραμόρφωσης.*

2. *Εαν ο μορφισμός f είναι ταυτόχρονα νημάτωση και ομοτοπική ισοδυναμία τότε υπάρχει μορφισμός $g\colon Y\longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $f\circ g=1_Y$ και ο μορφισμός $g\circ f\colon X\longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_X\colon X\longrightarrow X$ στην κατηγορία $(\mathcal{C}\downarrow Y)$ δηλαδή ο μορφισμός f είναι δυϊκός μιας ισχυρής συσταλτικής παραμόρφωσης.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $f\colon X\longrightarrow Y$ ένας μορφισμός μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων ο οποίος είναι ταυτόχρονα συννημάτωση και ομοτοπική ισοδυναμία. Τότε υπάρχει ένας μορφισμός $h\colon Y\longrightarrow X$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $f\circ h\colon Y\longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y και ο μορφισμός $h\circ f\colon X\longrightarrow X$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού 1_X. Ως εκ τούτου απο το πρώτο σκέλος του πορίσματος 3.2.27 υπάρχει μορφισμός $g\colon Y\longrightarrow X$ με την ιδιότητα ο μορφισμός $g\colon Y\longrightarrow X$ να είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $h\colon Y\longrightarrow X$ και επιπλέον τέτοιος ώστε $g\circ f=1_X$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα αντικείμενα X και Y είναι συννινώδη-ινώδη σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 ο μορφισμός $g\colon Y\longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $h\colon Y\longrightarrow X$ και επιπλέον απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.2.20 η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας. Ως εκ τούτου λόγω της συμμετρικής ιδιότητας ο μορφισμός $h\colon Y\longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $g\colon Y\longrightarrow X$. Έτσι, δοθέντος του μορφισμού $f\colon X\longrightarrow Y$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός $f\circ g\colon Y\longrightarrow Y$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων είναι ομοτοπικός του μορφισμού $f\circ h\colon Y\longrightarrow Y$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων. Όμως, ο μορφισμός $f\circ h\colon Y\longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y. Συνεπώς, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας ο μορφισμός $f \circ g \colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y \colon Y \longrightarrow Y$. Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι $Y \xrightarrow{\ r\ }$ Path(Y) $\xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y και $H \colon Y \longrightarrow$ Path(Y) μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό $f \circ g$ στον ταυτοτικό μορφισμό 1_Y. Ως εκ τούτου $p_0 \circ H = f \circ g$ και $p_1 \circ H = 1_Y$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X και του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y, τις τελευταίες ισότητες και την ισότητα $g \circ f = 1_X$ προκύπτει ότι:

$$p_0 \circ (H \circ f) = (p_0 \circ H) \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ 1_X = f$$

και

$$p_1 \circ (H \circ f) = (p_1 \circ H) \circ f = 1_Y \circ f = f$$

Ως εκ τούτου η σύνθεση $H \circ f \colon X \longrightarrow$ Path(Y) είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό $f \circ g \circ f$ στον μορφισμό $1_Y \circ f = f$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την ισότητα $g \circ f = 1_X$ καθώς και την ισότητα $(H \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ H^{-1}$ έπεται

$$\begin{aligned}((H \circ f \circ g) \circ H^{-1}) \circ f &= (pr_0 \circ (((H \circ f \circ g) \circ H^{-1}) \circ f), (pr_1 \circ (((H \circ f \circ g) \circ H^{-1}) \circ f)) = \\ &= ((pr_0 \circ (H \circ f \circ g) \circ H^{-1}) \circ f, (pr_1 \circ ((H \circ f \circ g) \circ H^{-1})) \circ f) = \\ &= (H \circ f \circ g \circ f, H^{-1} \circ f) = (H \circ f, H^{-1} \circ f) \end{aligned} \tag{3.2}$$

και

$$\begin{aligned}(H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1} &= (pr_0 \circ ((H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1}), pr_1 \circ ((H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1})) = (H \circ f, (H \circ f)^{-1}) = \\ &= (H \circ f, f^{-1} \circ H^{-1})\end{aligned}$$

Ο μορφισμός $H \colon Y \longrightarrow$ Path(Y) είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό $f \circ g$ στον ταυτοτικό μορφισμό 1_Y. Τότε εξ' ορισμού Ο μορφισμός $H^{-1} \colon Y \longrightarrow$ Path(Y) είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον ταυτοτικό μορφισμό 1_Y στον μορφισμό $f \circ g$ ο οποίος ταυτίζεται με τον H. Έτσι,

$$(H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1} = (H \circ f, f^{-1} \circ H^{-1}) = (H \circ f, f^{-1} \circ H) = (H \circ f, (H^{-1} \circ f)^{-1}).$$

Ανάλογα, εφόσον ο μορφισμός $H^{-1} \circ f \colon X \longrightarrow$ Path(Y) είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό f στον μορφισμό f ο μορφισμός $(H^{-1} \circ f)^{-1} \colon X \longrightarrow$ Path(Y) είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον ταυτοτικό μορφισμό f στον μορφισμό f ο οποίος ταυτίζεται με τον $H^{-1} \circ f$. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}(H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1} &= (H \circ f, f^{-1} \circ H^{-1}) = (H \circ f, f^{-1} \circ H) = \\ &= (H \circ f, (H^{-1} \circ f)^{-1}) = (H \circ f, (H^{-1} \circ f)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Έτσι, απο τις ισότητες (3.2) και (3.3) έπεται ότι η ομοτοπία $(H \circ f \circ g) \circ H^{-1} \colon Y \longrightarrow$ Path(Y)$''$ η οποία προκύπτει ως σύνθεση των ομοτοπιών $(H \circ f \circ g)$ και H^{-1} εαν συντεθεί με τον μορφισμό $f \colon X \longrightarrow Y$ ισούται με την ομοτοπία $(H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1} \colon X \longrightarrow$ Path(Y)$''$ η οποία προκύπτει ως σύνθεση των ομοτοπιών $(H \circ f)$ και $(H \circ f)^{-1}$. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 3.2.60 η $(H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1} \colon X \longrightarrow$ Path(Y)$''$ είναι ομοτοπική με την σταθερή ομοτοπία $r'' \circ f \colon X \longrightarrow$ Path(Y)$''$ στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow (Y \times Y))$. Εφόσον Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.7 το μονοπάτι αντικείμενο Path(Y)$''$ είναι εξίσου ινώδες στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και κατ' επέκταση στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow (Y \times Y))$. Υπενθυμίζουμε ότι ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \times Y \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

είναι συννημάτωση στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow Y \times Y)$. Επιπλέον, ο μορφισμός $(H \circ f) \circ (H \circ f)^{-1} = (H \circ f \circ g) \circ H^{-1} \circ f \colon X \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$ είναι ομοτοπικός και κατ' επέκταση δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $r'' \circ f \colon X \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Πόρισματος 3.2.27 υπάρχει μορφισμός $K \colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $K \colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$ να είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $(H \circ f \circ g) \circ H^{-1} \colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$ και $K \circ f = r'' \circ f$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και κατ' επέκταση της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow (Y \times Y))$ σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός $K \colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$ να είναι ομοτοπικός του μορφισμού $(H \circ f \circ g) \circ H^{-1} \colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$ στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow (Y \times Y))$. Επιπλέον ισχύει ότι $K \circ f = r'' \circ f$. Ο μορφισμός $H \circ f \colon X \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}$ είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό $f \circ g \circ f$ στον μορφισμό f. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $H \circ f \circ g \colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}$ είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό $f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$ στον μορφισμό $f \circ g$. Επιπλέον, ο μορφισμός $(H \circ f \circ g) \circ H^{-1} \colon Y \longrightarrow \mathrm{Path(Y)}''$ είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον ταυτοτικό μορφισμό 1_Y στον μορφισμό $f \circ g$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός K είναι ομοτοπικός του μορφισμού $(H \circ f \circ g) \circ H^{-1}$ ο μορφισμός K είναι ομοτοπία απο τον μορφισμό $f \circ g$ στον ταυτοτικό μορφισμό 1_Y στην $\mathcal{C}$ και κατ' επέκταση στην $(X \downarrow \mathcal{C})$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 3.2.64. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $g \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων.*

1. *Εαν ο μορφισμός $g \colon X \longrightarrow Y$ είναι ταυτόχρονα συννημάτωση και ομοτοπική ισοδυναμία τότε ο μορφισμός g είναι ασθενής ισοδυναμία.*

2. *Εαν ο μορφισμός $g \colon X \longrightarrow Y$ είναι ταυτόχρονα νημάτωση και ομοτοπική ισοδυναμία τότε ο μορφισμός g είναι ασθενής ισοδυναμία.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g \colon X \longrightarrow Y$ είναι ταυτόχρονα συννημάτωση και ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.61 υπάρχει μορφισμός $h \colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $h \circ g = 1_X$ και ο μορφισμός $g \circ h \colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y \colon Y \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε τον μορφισμό $g \colon X \longrightarrow Y$ ως $g = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $p \colon W \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση και ο μορφισμός $i \colon X \longrightarrow W$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Τότε λόγω του Αξιώματος (MC3) αρκεί να δείξουμε ότι ο μορφισμός g είναι retract του μορφισμού i ο οποίος ως τετριμμένη συννημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Το ζητούμενο ανάγεται στο να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια ανύψωση $q \colon Y \longrightarrow W$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "1_Y"'] \arrow[ur, dashed, "q"] & Y
\end{tikzcd}$$

Τότε απο το τελευταίο διάγραμμα θα προκύψει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "q"] & W \arrow[r, "p"] & Y
\end{tikzcd}$$

στο οποίο $1_X \circ 1_X = 1_X$ και $p \circ q = 1_Y$ γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός g είναι retract του μορφισμού i. Ευθύς αμέσως θα προσδιορίσουμε την ζητούμενη ανύψωση $q\colon Y \longrightarrow W$. Ορίζουμε $k\colon Y \longrightarrow W$ ως $k = i \circ h$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_X : X \longrightarrow X$ και τις ισότητες $h \circ g = 1_X$ και $p \circ i = g$ προκύπτει ότι:

$$k \circ g = (i \circ h) \circ g = i \circ (h \circ g) = i \circ 1_X = i$$

και

$$p \circ k = p \circ (i \circ h) = (p \circ i) \circ h = g \circ h$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα και το γεγονός ότι ο μορφισμός $g \circ h\colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$ έπεται ότι ο μορφισμός $p \circ k\colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$. Επιπλέον, εφόσον ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση και το αντικείμενο Y είναι συννινώδες τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Πορίσματος 3.2.27 έπεται ότι υπάρχει μορφισμός $q\colon Y \longrightarrow W$ ο οποίος είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού k στην κατηγορία $(X \downarrow \mathcal{C})$ και $p \circ q = 1_Y$. Ο μορφισμός $W \longrightarrow *$ είναι νημάτωση ως σύνθεση των νηματώσεων $Y \longrightarrow *$ και $p\colon W \longrightarrow Y$ στην $(X \downarrow \mathcal{C})$. Ως εκ τούτο το αντικείμενο W είναι ένα ινώδες αντικείμενο στην $(X \downarrow \mathcal{C})$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Y είναι ένα συννινώδες αντικείμενο στην $(X \downarrow \mathcal{C})$ απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός $q\colon Y \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού k στην $(X \downarrow \mathcal{C})$. Συνεπώς η ζητούμενη ανύψωση $q\colon Y \longrightarrow W$ είναι ο μορφισμός $k\colon Y \longrightarrow W$. Έτσι, ο μορφισμός $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Εν συνεχεία παραθέτουμε μια πιο σύντομη απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης του Θεωρήματος 3.2.40 κάνοντας χρήση προηγούμενων προτάσεων.

Πρόταση 3.2.65. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων. Έαν ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία τότε ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία.*

Απόδειξη. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών-ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$. Τότε υπάρχει μορφισμός $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $f \circ f^{-1}\colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ και ο μορφισμός $f^{-1} \circ f\colon X \longrightarrow X$ να είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X\colon X \longrightarrow X$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = k \circ h$ όπου ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow W$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $k\colon W \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Έτσι, σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow W$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ και ότι το Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο στην $\mathcal{C}$ οι μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow X$ και $Y \longrightarrow *$ είναι συννημάτωση και νημάτωση αντίστοιχα. Ως εκ τούτου οι μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow W$ και $W \longrightarrow *$ είναι συννημάτωση και νημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $h\colon X \longrightarrow W$ και $\varnothing \longrightarrow X$ και των νηματώσεων $Y \longrightarrow *$ και $W \longrightarrow Y$ αντίστοιχα. Έτσι, το αντικείμενο W είναι συννινώδες-ινώδες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow W$ είναι συννημάτωση μεταξύ συννινώδων-ινωδών αντικειμένων σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.62 για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι ο μορφισμός $h\colon X \longrightarrow W$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Ορίζουμε τον μορφισμό $r\colon W \longrightarrow X$ ως $r = f^{-1} \circ k$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την τελευταία ισότητα καθώς και την ισότητα $f = k \circ h$ έχουμε:

$$r \circ h = (f^{-1} \circ k) \circ h = f^{-1} \circ (k \circ h) = f^{-1} \circ f$$

Απο την τελευταία ισότητα λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $f^{-1} \circ f\colon X \longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X\colon X \longrightarrow X$ έπεται ότι ο μορφισμός $r \circ h\colon X \longrightarrow X$

είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X : X \longrightarrow X$. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $h \circ r : W \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_W : W \longrightarrow W$. Εφόσον X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο και $k : W \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 η απεικόνιση $k_*^X : \pi^l(X, W) \longrightarrow \pi^l(X, Y)$ ο οποίος ορίζεται ως $k_*^X([f]) = [k \circ f]$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των συνόλων των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Επιπλέον εφόσον τα W, X είναι ινώδη αντικείμενα απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι η απεικόνιση $k_*^X : \pi(X, W) \longrightarrow \pi(X, Y)$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων. Απο τον ορισμό της απεικόνισης k_*^X και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ και τις ισότητες $f = k \circ h$ και $r = f^{-1} \circ k$

$$k_*^X([h \circ r]) = [k \circ (h \circ r)] = [(k \circ h) \circ r] = [f \circ r] = [f \circ f^{-1} \circ k] = [1_Y \circ k] = [k]$$

Απο την τελευταία ισότητα εφόσον η απεικόνιση k_*^X είναι «1-1» έπεται ότι $[h \circ r] = [k]$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $h \circ r : W \longrightarrow W$ είναι ομοτοπικός με τον ταυτοτικό μορφισμό $1_W : W \longrightarrow W$. Έτσι, ο μορφισμός h είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο τον μορφισμό r, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Πρόταση 3.2.66. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Εαν ο μορφισμός $g : Z \longrightarrow W$ είναι ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ και X είναι ένα ινώδες αντικείμενο της τότε ο μορφισμός g επάγει έναν ισομορφισμό $g_X^* : \pi(W, X) \longrightarrow \pi(Z, X)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών.*

2. *Εαν ο μορφισμός $g : X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ και Z είναι ένα συννινώδες αντικείμενο της τότε ο μορφισμός g επάγει έναν ισομορφισμό $g_*^X : \pi(Z, X) \longrightarrow \pi(Z, Y)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $g : Z \longrightarrow W$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ και X είναι ένα ινώδες αντικείμενο της. Τότε, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.36 ο μορφισμός g μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $g = j \circ i$ όπου ο μορφισμός $i : Z \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $j : Y \longrightarrow W$ είναι τετριμμένη νημάτωση με δεξιό αντίστροφο $k : W \longrightarrow Y$ ο οποίος είναι τετριμμένη συννημάτωση. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $g_X^* = i_X^* \circ j_X^*$ ο οποίος περιγράφεται απο το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\pi(W,X) \arrow[r, "j_X^* = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(j,X)"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi(Y,X) \arrow[dl, "i_X^* = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(i,X)"] \\
\pi(Z,X) &
\end{tikzcd}$$

είναι ένας ισομορφισμός. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο X είναι ινώδες και ότι ο μορφισμός $i : Z \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη συννημάτωση σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 έπεται ότι η απεικόνιση $i_X^* : \pi^r(Y, X) \longrightarrow \pi^r(Z, X)$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των δεξιών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το Z είναι ένα συννινώδες αντικείμενο, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow Z$ είναι συννημάτωση. Επιπλέον ο μορφισμός $i : Z \longrightarrow Y$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι συννημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow Y$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $i : Z \longrightarrow Y$ και $\varnothing \longrightarrow Z$. Ως εκ τούτου το Y είναι ένα συννινώδες αντικείμενο. Επιπροσθέτως το X είναι ένα ινώδες αντικείμενο. Τότε απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι η απεικόνιση $i_X^* : \pi(Y, X) \longrightarrow \pi(Z, X)$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μας απομένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση $j_X^* : \pi(W, X) \longrightarrow \pi(Y, X)$

είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Εφόσον ο μορφισμός $j\colon Y \longrightarrow W$ είναι τετριμμένη νημάτωση μεταξύ συννινωδών αντικειμένων τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.59 υπάρχει μορφισμός $s\colon W \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $j \circ s = 1_W$ και ο μορφισμός $s \circ j\colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ υπεράνω του W. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.54 ο μορφισμός $s \circ j\colon Y \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_Y : Y \longrightarrow Y$ στην κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$. Εν συνεχεία θεωρούμε τον μορφισμό

$$s^*_X\colon \pi(Y, X) \longrightarrow \pi(W, X), \quad [\alpha] \longmapsto [\alpha \circ s]$$

Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση s^*_X είναι καλά ορισμένη. Ας είναι $[\alpha], [\alpha'] \in \pi(Y, X)$ με $[\alpha] = [\alpha']$. Τότε ο μορφισμός $\alpha\colon Y \longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός και κατέπέκταση αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\alpha'\colon Y \longrightarrow X$. Δοθέντος του μορφισμού $s\colon W \longrightarrow Y$, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο X είναι ινώδες σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.22 ο μορφισμός $\alpha \circ s\colon W \longrightarrow X$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\alpha' \circ s\colon W \longrightarrow X$. Εφόσον το αντικείμενο W είναι συννινώδες και το αντικείμενο X είναι ινώδες σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 ο μορφισμός $\alpha \circ s\colon W \longrightarrow X$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\alpha' \circ s\colon W \longrightarrow X$. Ως εκ τούτου $[\alpha \circ s] = [\alpha' \circ s]$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης s^*_X προκύπτει ότι $s^*_X([\alpha]) = s^*_X([\alpha'])$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η απεικόνιση s^*_X είναι καλά ορισμένη. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $j^*_X\colon \pi(W, X) \longrightarrow \pi(Y, X)$ ο οποίος ορίζεται με τον ίδιο τρόπο με την s^*_X είναι καλά ορισμένη. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_Y και του ταυτοτικού μορφισμού 1_W, τους ορισμούς των απεικονίσεων s^*_X και j^*_X και τις ισότητες $[s \circ j] = [1_Y]$ και $[j \circ s] = [1_W]$ προκύπτει ότι για κάθε $[\alpha] \in \pi(Y, X)$ και για κάθε $[\beta] \in \pi(W, X)$:

$$(j^*_X \circ s^*_X)([\alpha]) = j^*_X(s^*_X([\alpha])) = j^*_X([\alpha \circ s]) = [(\alpha \circ s) \circ j] = [\alpha \circ (s \circ j)] = [\alpha] \circ [s \circ j] =$$

$$= [\alpha] \circ [1_Y] = [\alpha \circ 1_Y] = [\alpha]$$

και

$$(s^*_X \circ j^*_X)([\beta]) = s^*_X(j^*_X([\beta])) = s^*_X([\beta \circ j]) = [(\beta \circ j) \circ s] = [\beta \circ (j \circ s)] = [\beta] \circ [j \circ s] = [\beta] \circ [1_W] =$$

$$= [\beta \circ 1_W] = [\beta].$$

Ως εκ τούτου ο μορφισμός $j^*_X \circ s^*_X$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση $1_{\pi(Y,X)} : \pi(Y, X) \longrightarrow \pi(Y, X)$ και ο μορφισμός $s^*_X \circ j^*_X$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση $1_{\pi(W,X)} : \pi(W, X) \longrightarrow \pi(W, X)$. Έτσι, η απεικόνιση j^*_X είναι ισομορφισμός με αντίστροφο την απεικόνιση s^*_X. Επομένως ο μορφισμός $g^*_X = i^*_X \circ j^*_X$ είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο με το ακόλουθο Πόρισμα το οποίο είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.2.64

Πόρισμα 3.2.67. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Εαν ο μορφισμός $g\colon Z \longrightarrow W$ είναι ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ και X είναι ένα ινώδες αντικείμενο της τότε υπάρχει ένας μορφισμός $Z \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας μορφισμός $W \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$.*

2. *Εαν ο μορφισμός $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ και Z είναι ένα συννινώδες αντικείμενο της τότε υπάρχει ένας μορφισμός $Z \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας μορφισμός $Z \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $g\colon Z \longrightarrow W$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ και X είναι ένα ινώδες αντικείμενο της. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.64 ο μορφισμός g επάγει έναν ισομορφισμό $g_X^*\colon \pi(W,X) \longrightarrow \pi(Z,X)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Η παραπάνω «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών επάγει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των μορφισμών των αντίστοιχων ομοτοπικών κλάσεων. Ως εκ τούτου υπάρχει ένας μορφισμός $Z \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας μορφισμός $W \longrightarrow X$ στην $\mathcal{C}$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Κεφάλαιο 4

(Συν)Ινώδεις Προσεγγίσεις και η Ομοτοπική Κατηγορία

Στο παρόν κεφάλαιο ορίζουμε συνινώδεις/ινώδεις προσεγγίσεις σε αντικείμενα και μορφισμούς μιας κατηγορίας μοντέλο. Αυτές οι προσεγγίσεις είναι απο τα χρησιμότερα εργαλεία της ομοτοπικής θεωρίας, καθώς αυτή η διαδικασία προσέγγισης μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε ένα αντικείμενο ή έναν μορφισμό σε μια κατηγορία μοντέλο με ένα αντικείμενο ή μορφισμό με καλύτερες ιδιότητες ομοτοπικής φύσης. Επιπλέον μελετάμε την κατασκευή της Quillen ομοτοπικής κατηγορία και της ομοτοπικής κατηγορίας η οποία προκύπτει εαν στραφούμε στην υποκατηγορία των συνινωδών-ινωδών αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ και αποδεικνύουμε ότι η πρώτη είναι ισοδύναμη με την κλασικη ομοτοπική κατηγορία π_{cf} που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.1 Ινώδεις και Συνινώδεις Προσεγγίσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε και μελετάμε ινώδεις και συνινώδεις προσεγγίσεις οι οποίες αποτελούν τις σημαντικότερες προσεγγίσεις σε μια κατηγορία μοντέλο. Οι προσεγγίσεις αυτές παίζουν κυρίαρχο ρόλο στην ομοτοπική θεωρία και ιδιαίτερα στην ομολογική άλγεβρα.

4.1.1 Προσεγγίσεις στα Αντικείμενα

Αρχίζουμε, ορίζοντας μια συνινώδη προσέγγιση σε ένα αντικείμενο και μια ινώδη προσέγγιση σε ένα αντικείμενο η οποία αποτελεί δυϊκή της πρώτης. Οι συνινώδεις και ινώδεις προσεγγίσεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές καθώς μορφισμοί οι οποίοι είναι αναμενόμενο να υπάρχουν συχνά υπάρχουν μόνο όταν η πηγή είναι συννινώδες και ο στόχος είναι ινώδες. Επιπλέον, εφόσον όπως θα δούμε στην συνέχεια οι ασθενείς ισοδυναμίες σε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ μετατρέπονται σε ισομορφισμούς στην ομοτοπική της κατηγορία μια συνινώδης ή ινώδης προσέγγιση σε ένα αντικείμενο είναι ισόμορφο με το αντικείμενο αυτό στην ομοτοπική κατηγορία γεγονός που υπογραμμίζει την χρησιμότητα τους.

Ορισμός 4.1.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Μια* **συνινώδης προσέγγιση (cofibrant approximation)** *σε ένα αντικείμενο X είναι ένα συννινώδες αντικείμενο $\widetilde{X}$ εφοδιασμένο με μια ασθενή ισοδυναμία $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ και συμβολίζεται με $(\widetilde{X}, i)$.*
2. *Μια* **ινώδης-συνινώδης προσέγγιση (fibrant-cofibrant approximation)** *στο X είναι μια συνινώδης προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ τέτοια ώστε η ασθενής ισοδυναμία i είναι τετριμμένη νημάτωση. Δυϊκά,*

3. *Μια* **ινώδης προσέγγιση (fibrant approximation)** *σε ένα αντικείμενο X είναι ένα ινώδες αντικείμενο $\widehat{X}$ εφοδιασμένο με μια ασθενή ισοδυναμία $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ και συμβολίζεται με $(\widehat{X}, j)$.*

4. *Μια* **συνινώδης-ινώδης προσέγγιση (cofibrant-fibrant approximation)** *στο X είναι μια ινώδης προσέγγιση $(\widehat{X}, j)$ τέτοια ώστε η ασθενής ισοδυναμία j είναι τετριμμένη συνυνημάτωση.*

Σχόλιο 4.1.2. Συχνά στην βιβλιογραφία χρησιμοποιούμε τους όρους συνινώδης προσέγγιση και ινώδης προσέγγιση για να αναφερθούμε στο συνινώδες αντικείμενο $\widetilde{X}$ και αντίστοιχα στο ινώδες αντικείμενο $\widehat{X}$ χωρίς να γίνει ρητή αναφορά στην ασθενή ισοδυναμία i και στην ασθενή ισοδυναμία j αντίστοιχα.

Κατόπιν ορίζουμε τους μορφισμούς μεταξύ συνινωδών προσεγγίσεων και τους μορφισμούς μεταξύ ινωδών προσεγγίσεων.

Ορισμός 4.1.3. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Ένας μορφισμός απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ στο X στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$ στο X είναι ένας μορφισμός $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ μεταξύ των συνινωδών αντικειμένων $\widetilde{X}$ και $\widetilde{X}'$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \widetilde{X}' \arrow[dl, "i'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

2. *Ένας μορφισμός απο την ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}, j)$ στο X στην ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}', j')$ στο X είναι ένας μορφισμός $g\colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}'$ μεταξύ των ινωδών αντικειμένων $\widehat{X}$ και $\widehat{X}'$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j'"'] & \widehat{X} \arrow[dl, "g"] \\ \widehat{X}' & \end{tikzcd}$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι κάθε αντικείμενο μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ έχει τουλάχιστον ένα κυλινδρικό και ένα μονοπάτι αντικείμενο. Κάτι ανάλογο συμβαίνει για τις ινώδεις-συνινώδεις προσεγγίσεις και τις συνινώδεις-ινώδεις προσεγγίσεις όπως υποδηλώνεται απο την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ έχει εξίσου μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ και μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\varnothing \xrightarrow{\quad ! \quad} \widetilde{X} \xrightarrow{\quad i \quad} X$$

όπου ο μορφισμός $!\colon \varnothing \longrightarrow \widetilde{X}$ είναι συνυνημάτωση και ο μορφισμός $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\widetilde{X}$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, $(\widetilde{X}, i)$ είναι συνινώδης προσέγγιση στο αντικείμενο X. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση έπεται ότι

$(\widetilde{X}, i)$ είναι ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X. Έτσι, το αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ έχει μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$.
Ανάλογα, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός $X \longrightarrow *$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] & \widehat{X} \arrow[r, "\star"] & * \end{tikzcd}$$

όπου ο μορφισμός $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $*\colon \widehat{X} \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ είναι ασθενής ισοδυναμία και το αντικείμενο $\widehat{X}$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Έτσι, $(\widehat{X}, j)$ είναι ινώδης προσέγγιση στο αντικείμενο X. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση έπεται ότι $(\widehat{X}, j)$ είναι συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο X. Έτσι, το αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ έχει μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$. Επομένως, κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ έχει εξίσου μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ και μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$. ■

Λήμμα 4.1.5. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Εαν $(\widetilde{X}, i)$ και $(\widetilde{X}', i')$ είναι συνινώδεις προσεγγίσεις στο X και $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι ένας μορφισμός απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$ τότε ο μορφισμός g είναι μια ασθενής ισοδυναμία.*

2. *Εαν $(\widehat{X}, j)$ και $(\widehat{X}', j')$ είναι ινώδεις προσεγγίσεις στο X και $g\colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}'$ είναι ένας μορφισμός απο την ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}, j)$ στην ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}', j')$ τότε ο μορφισμός g είναι μια ασθενής ισοδυναμία.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $(\widetilde{X}, i)$ και $(\widetilde{X}', i')$ συνινώδεις προσεγγίσεις στο X και $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι ένας μορφισμός απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$. Τότε οι μορφισμοί $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ και $i'\colon \widetilde{X}' \longrightarrow X$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες με $\widetilde{X}$ και $\widetilde{X}'$ να είναι συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι τέτοιος ώστε $i' \circ g = i$. Ως εκ τούτου απο το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Λήμμα 4.1.6. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Εαν $(\widetilde{X}, i)$ είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X και $g\colon W \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ όπου W είναι ένα συνινώδες αντικείμενο, τότε υπάρχει ένας μορφισμός $\phi\colon W \longrightarrow \widetilde{X}$ μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X, τέτοιος ώστε $i \circ \phi = g$.*

2. *Εαν $(\widehat{X}, j)$ είναι μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο X και $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ όπου Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο, τότε υπάρχει ένας μορφισμός $\phi\colon \widehat{X} \longrightarrow Y$ μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπό του X, τέτοιος ώστε $\phi \circ j = g$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $(\widetilde{X}, i)$ μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X και $g\colon W \longrightarrow X$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ όπου W είναι ένα συνινώδες αντικείμενο. Τότε $(\widetilde{X}, i)$ είναι μια συνινώδης προσεγγιση στο X τέτοια ώστε ο μορφισμός $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ να είναι μια τετριμμένη νημάτωση και ο μορφισμός $!!\colon \varnothing \longrightarrow W$ είναι συννημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!!"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "i"] \\ W \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\phi"] & X \end{tikzcd}$$

Εφόσον το $\varnothing$ είναι αρχικό αντικείμενο το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $!! \colon \varnothing \longrightarrow W$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $i \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\phi \colon W \longrightarrow \widetilde{X}$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου $\phi \circ !! = !$ και $i \circ \phi = g$. Έτσι, υπάρχει μορφισμός $\phi \colon W \longrightarrow \widetilde{X}$ τέτοιος ώστε $i \circ \phi = g$. Όσον αφορά την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι υπάρχει ακόμη μια ανύψωση $\widehat{\phi} \colon W \longrightarrow \widetilde{X}$ του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.56 ο μορφισμός $\phi \colon W \longrightarrow \widetilde{X}$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{\phi} \colon W \longrightarrow \widetilde{X}$ στην κατηγορία των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπο του αρχικού αντικειμένου $\varnothing$ και υπεράνω του X. Συνεπώς ο μορφισμός $\phi \colon W \longrightarrow \widetilde{X}$ είναι ο μοναδικός μορφισμός μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X, τέτοιος ώστε $i \circ \phi = g$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 4.1.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Εαν $(\widetilde{X}, i)$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση και $(\widetilde{X}', i')$ είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X, τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ του X στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$ του X μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X και κάθε τέτοιος μορφισμός g είναι ασθενής ισοδυναμία.*

2. *Εαν $(\widehat{X}, j)$ είναι μια ινώδης προσέγγιση και $(\widehat{X}', j')$ είναι μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο X, τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}'$ απο την ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}, j)$ του X στην ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}', j')$ του X μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπο του X και κάθε τέτοιος μορφισμός g είναι ασθενής ισοδυναμία.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $(\widetilde{X}, i)$ μια συνινώδης προσέγγιση στο X και $(\widetilde{X}', i')$ μια ινώδης–συνινώδης προσέγγιση στο X. Τότε ο μορφισμός $i \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ όπου $\widetilde{X}$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο και $(\widetilde{X}', i')$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στο X τέτοια ώστε ο μορφισμός $i' \colon \widetilde{X}' \longrightarrow X$ να είναι τετριμμένη νημάτωση. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.6 υπάρχει ένας μορφισμός $g \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ μεταξύ των συνινωδών αντικειμένων $\widetilde{X}$ και $\widetilde{X}'$ μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X, τέτοιος ώστε $i' \circ g = i$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι ένας μορφισμός απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ του X στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$ του X και κατ' επέκταση σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.5 μια ασθενή ισοδυναμία.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.1.7 είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Εαν $(\widetilde{X}, i)$ και $(\widetilde{X}', i')$ είναι ινώδεις-συνινώδεις προσεγγίσεις στο X, τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ στο X στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$ στο X μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X και κάθε τέτοιος μορφισμός g είναι ομοτοπική ισοδυναμία υπεράνω του X.*

2. *Εαν $(\widehat{X}, j)$ και $(\widehat{X}', j')$ είναι συνινώδεις-ινώδεις προσεγγίσεις στο X, τότε υπάρχει ένας μορφισμός $g \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}'$ απο την ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}, j)$ στο X στην ινώδη προσέγγιση $(\widehat{X}', j')$ στο X μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπο του X και κάθε τέτοιος μορφισμός g είναι ομοτοπική ισοδυναμία υπο του X.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $(\widetilde{X}, i)$ και $(\widetilde{X}', i')$ ινώδεις–συνινώδεις προσέγγισεις στο X. Τότε $(\widetilde{X}, i)$ και $(\widetilde{X}', i')$ είναι συνινώδεις προσέγγισεις στο X τέτοιες ώστε οι μορφισμόι $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ και $i'\colon \widetilde{X}' \longrightarrow X$ να είναι τετριμμένες νημάτωσεις. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.1.7 υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ στο X στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$ στο X μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X ο οποίος είναι ασθενής ισοδυναμία. Το αρχικό αντικείμενο $\varnothing$ είναι αρχικό αντικείμενο της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ αφου για κάθε αντικείμενο $\widetilde{X}$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ δηλαδή για κάθε μορφισμό $\widetilde{X} \longrightarrow X$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widetilde{X}$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[dl] \\
X &
\end{tikzcd}$$

Το αντικείμενο X είναι τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ αφου για κάθε αντικείμενο A της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ δηλαδή για κάθε μορφισμό $f\colon A \longrightarrow X$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f\colon A \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[dl, "1_X"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

Εφόσον $\widetilde{X}$ και $\widetilde{X}'$ είναι συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ οι μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow \widetilde{X}$ και $\varnothing \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι συννηματώσεις. Το αντικείμενο $\widetilde{X}$ είναι συνινώδες-ινώδες αντικείμενο της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ καθώς υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow \widetilde{X}$ απο το αρχικό αντικείμενο $\varnothing \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ στο αντικείμενο $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ και $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ απο το αντικείμενο $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ στο τελικό αντικείμενο $1_X\colon X \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ οι οποιοί κάνουν τα ακόλουθα διάγραμματα μεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[dl, "i"] \\
X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[dl, "1_X"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

και είναι συννημάτωση και νημάτωση αντίστοιχα. Το αντικείμενο $\widetilde{X}'$ είναι εξίσου συνινώδες-ινώδες αντικείμενο της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ καθώς υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow \widetilde{X}'$ απο το αρχικό αντικείμενο $\varnothing \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ στο αντικείμενο $i'\colon \widetilde{X}' \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ και $i'\colon \widetilde{X}' \longrightarrow X$ απο το αντικείμενο $i'\colon \widetilde{X}' \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ στο τελικό αντικείμενο $1_X\colon X \longrightarrow X$ της κατηγορίας $(\mathcal{C} \downarrow X)$ οι οποιοί κάνουν τα ακόλουθα διάγραμματα μεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{X}' \arrow[dl, "i'"] \\
X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{X}' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[dl, "1_X"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

και είναι συννημάτωση και νημάτωση αντίστοιχα. Εφόσον $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών-ινωδών αντικειμένων στην κατηγορία $(\mathcal{C} \downarrow X)$ απο το Θεώρημα 3.2.40 έπεται ότι ο μορφισμός $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία υπεράνω του X.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Υπενθυμίζουμε,

Ορισμός 4.1.9. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της. Εαν X και Y είναι αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και $n \geqslant 0$, τότε κάθε διάγραμμα της μορφής*

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 & & \cdots & & Y \\
X \arrow[ur, "f_1"] & & W_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[ur, "f_3"] & & W_{n-1} \arrow[ul, "f_n"'] \arrow[ur, "f_n-1"] &
\end{tikzcd}$$

όπου καθένα απο τα f_i ανήκει στην κλάση W, μπορεί να κατευθύνεται είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά και διαδοχικά f_i μπορούν να κατευθύνονται είτε στην ίδια είτε σε αντίθετη διεύθυνση καλείται **ζιγκ-ζαγκ των στοιχείων της $\mathcal{W}$ μήκους n απο το X στο Y (zig-zag of elements of $\mathcal{W}$ of length n from X to Y).**
Εαν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία μοντέλο και η κλάση $\mathcal{W}$ είναι η κλάση των ασθενών ισοδυναμιών της $\mathcal{C}$ τότε τα αντικείμενα X και Y καλούνται **ασθενώς ισοδύναμα (weakly equivalent)**.

Πρόταση 4.1.10. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X ένα αντικείμενο της.*

1. *Εαν $(\widetilde{X}, i)$ και $(\widetilde{X}', i')$ είναι συνινώδεις προσέγγισεις στο X, τότε τα $\widetilde{X}$ και $\widetilde{X}'$ είναι ασθενώς ισοδύναμα υπεράνω του X.*

2. *Εαν $(\widehat{X}, j)$ και $(\widehat{X}', j')$ είναι ινώδεις προσέγγισεις στο X, τότε τα $\widehat{X}$ και $\widehat{X}'$ είναι ασθενώς ισοδύναμα υπο του X.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι X ένα αντικείμενο στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και $(\widetilde{X}, i)$ συνινώδης προσέγγιση στο X. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.4 το αντικείμενο X έχει μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$. Τότε απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.1.7 έπεται ότι υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ απο την συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}, i)$ στο X στην συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{X}', i')$ στο X μοναδικός μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X ο οποίος είναι ασθενής ισοδυναμία. Ως εκ τούτου υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ ασθενών ισοδυναμιών μήκους 1 μεταξύ των $\widetilde{X}$ και $\widetilde{X}'$, γεγονός που αποδεικνύει ότι τα $\widetilde{X}$ και $\widetilde{X}'$ είναι ασθενώς ισοδύναμα.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Υπενθυμίζουμε,

Ορισμός 4.1.11. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και X, Y αντικείμενα στην $\mathcal{C}$. Δύο ζιγκ-ζαγκ στην $\mathcal{C}$ απο το X στο Y καλούνται* **ισοδύναμα (equivalent)** *εαν το ένα μπορεί να προκύψει απο το άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας μετασχηματισμών της ακόλουθης μορφής:*

1. *Δύο διαδοχικοί μορφισμοί της ίδιας διεύθυνσης σε ένα ζιγκ-ζαγκ μπορούν να αντικατασταθούν απο την σύνθεση τους.*

2. *Μορφισμοί της μορφής*

$$\ldots W_{k-1} \xrightarrow{f_k} W_k \xleftarrow{f_k} W_{k-1} \ldots$$

είτε της μορφής

$$\ldots W_{k-1} \xleftarrow{f'_k} W_k \xrightarrow{f'_k} W_{k-1} \ldots$$

σε ένα ζίγκ-ζαγκ αντικαθίστανται απο τον ταυτοτικό μορφισμό

$$W_{k-1} \xrightarrow{1_{W_{k-1}}} W_{k-1} \ .$$

Εαν δύο οποιαδήποτε ζιγκ-ζαγκ απο το X στο Y είναι ισοδύναμα τότε θα λέμε ότι υπάρχει ένα **ουσιωδώς μοναδικό ζιγκ-ζαγκ (essentially unique zig-zag)** *απο το X στο Y στην $\mathcal{C}$.*

Παρατήρηση 4.1.12. Σε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ δοθέντος ενός αντικειμένου της X υπαρχεί ένα ουσιωδώς μοναδικό ζιγκ-ζαγκ των ασθενών ισοδυναμιών των συνινωδών προσεγγίσεων $(\widetilde{X}, i)$ και $(\widetilde{X}', i')$ στο X απο το $(\widetilde{X}, i)$ στο $(\widetilde{X}', i')$ και δυϊκά υπαρχεί ένα ουσιωδώς μοναδικό ζιγκ-ζαγκ των ασθενών ισοδυναμιών των ινωδών προσεγγίσεων $(\widehat{X}, j)$ και $(\widehat{X}', j')$ στο X απο το $(\widehat{X}, j)$ στο $(\widehat{X}', j')$.

Λήμμα 4.1.13. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μουτέλο, X ένα αντικείμενο της, $i_X : \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X και $j_X : X \longrightarrow \widehat{R}X$ μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο X. Δοθέντος ενός μορφισμού $f : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$*

1. *Υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{f} : \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q}X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός $\widetilde{f}$ εξαρτάται μόνο απο τον μορφισμό f μέχρις αριστερής ή δεξιάς ομοτοπίας και είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία. Εαν το αντικείμενο Y είναι ινώδες τότε ο μορφισμός $\widetilde{f}$ εξαρτάται μόνο απο την αριστερή κλάση ομοτοπίας του f μέχρις αριστερής ή δεξιάς ομοτοπίας.

2. *Υπάρχει ένας μορφισμός $\widehat{f} : \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_X"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \\ \widehat{R}X \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{R}Y \end{tikzcd}$$

. Ο μορφισμός $\widehat{f}$ εξαρτάται μόνο απο τον μορφισμό f μέχρις αριστερής ή δεξιάς ομοτοπίας και είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία. Εαν το αντικείμενο X είναι συνινώδες τότε ο μορφισμός $\widehat{f}$ εξαρτάται μόνο απο την δεξιά κλάση ομοτοπίας του f μέχρις αριστερής ή δεξιάς ομοτοπίας.

Απόδειξη. 1. Ας είναι $i_X : \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ και $i_Y : \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ ινώδεις-συνινώδεις προσεγγίσεις στο X και στο Y αντίστοιχα. Τότε τα αντικείμενα $\widetilde{Q}X$ και $\widetilde{Q}Y$ είναι συνινώδη και οι μορφισμοί i_X και i_Y είναι τετριμμένες νηματώσεις. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "!!"] \arrow[d, "!"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\ \widetilde{Q}X \arrow[r, "f \circ i_X"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] & Y. \end{tikzcd}$$

Εφόσον $\varnothing$ είναι ένα αρχικό αντικείμενο το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο $\widetilde{Q}X$ είναι συνινώδες ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}X$ είναι συννημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου, $i_Y \circ \widetilde{f} = f \circ i_X$ και $\widetilde{f}\circ! =!!$. Έτσι, απο την ισότητα $i_Y \circ \widetilde{f} = f \circ i_X$ έπεται ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q}X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Όσον αφορά την μοναδικότητα μέχρις αριστερής ομοτοπίας υποθέτουμε ότι υπάρχει μορφισμός $\widetilde{f}'\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ ο οποίος κάνει το τελευταίο διάγραμμα μεταθετικό. Τότε ισχύει $i_Y \circ \widetilde{f}' = f \circ i_X$. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $i_Y \circ \widetilde{f} = f \circ i_X$ έπεται ότι $i_Y \circ \widetilde{f} = i_Y \circ \widetilde{f}'$. Παίρνοντας τις αριστερές ομοτοπικές κλάσεις στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $[i_Y \circ \widetilde{f}] = [i_Y \circ \widetilde{f}']$. Σύμφωνα, με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 η τετριμμένη νημάτωση $i_Y : \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ επάγει έναν ισομορφισμό ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X} : \pi^l(\widetilde{Q}X, \widetilde{Q}Y) \longrightarrow \pi^l(\widetilde{Q}X, Y)$ μεταξύ των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών ο οποίος ορίζεται ως ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}([h]) = [i_Y \circ h]$. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}$ και την τελευταία ισότητα έπεται ότι ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}([\widetilde{f}]) = {i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}([\widetilde{f}'])$. Όμως ο μορφισμός ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}$ είναι «1-1». Έτσι, απο την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $[\widetilde{f}] = [\widetilde{f}']$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{f}'$. Όσον αφορά την μοναδικότητα μέχρις δεξιάς ομοτοπίας λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{f}'$ και ότι $\widetilde{Q}X$ είναι συνινώδες απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.23 έπεται ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{f}'$. Οι μορφισμοί $i_X : \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ και $i_Y : \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ ως τετριμμένες νηματώσεις είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $i_Y \circ \widetilde{f} = f \circ i_X$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι εαν ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία τότε ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Όσον αφορά τον τελευταίο ισχυρισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι εαν $\widetilde{f}'$ είναι ένας άλλος μορφισμός τέτοιος ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό ανήκει στην ίδια κλάση ομοτοπίας του f.

- **Ειδική Περίπτωση**: Σταθεροποιούμε έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ και $\widetilde{f}'\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q}X \arrow[r, shift left, "\widetilde{f}"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{f}'"'] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

  Τότε λόγω της μοναδικότητας μέχρις αριστερής ομοτοπίας του μορφισμού $\widetilde{f}$ έπεται ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{f}'$.

- **Γενική Περίπτωση**: Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $f'\colon X \longrightarrow Y$ δύο αριστερά ομοτοπικοί μορφισμοί και $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ και $\widetilde{f}'\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ οι αντίστοιχοι μορφισμοί οι οποιοί κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Q}X \arrow[r, shift left, "\widetilde{f}"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{f'}"'] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{f'}$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος προκύπτουν οι ισότητες $f \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{f}$ και $f' \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{f'}$. Εφόσον ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $f' \colon X \longrightarrow Y$ και το Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.22 ο μορφισμός $f \circ i_X \colon \widetilde{Q}X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $f' \circ i_X \colon \widetilde{Q}X \longrightarrow Y$. Ως εκ τούτου $[f \circ i_X] = [f' \circ i_X]$ και κατ' επέκταση χρησιμοποιώντας τις τελευταίες ισότητες $[i_Y \circ \widetilde{f}] = [i_Y \circ \widetilde{f'}]$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}$ και την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}([\widetilde{f}]) = {i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}([\widetilde{f'}])$. Όμως ο μορφισμός ${i_Y}_*^{\widetilde{Q}X}$ είναι «1-1». Επομένως, $[\widetilde{f}] = [\widetilde{f'}]$ γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{f'}$. Ανάλογα με προηγουμένως εφόσον $\widetilde{Q}X$ είναι ένα συννινώδες αντικείμενο σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.23 έπεται ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{f'}$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Παρατήρηση 4.1.14. Η μοναδικότητα των αποτελεσμάτων του Λήμματος 4.1.13 μας επιτρέπει λαμβάνοντας ως f τον ταυτοτικό μορφισμό $1_X \colon X \longrightarrow X$ να συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι δεξιά ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμό $1_{\widetilde{Q}X}$ και ο μορφισμός $\widehat{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_{\widehat{R}X}$. Ομοίως εαν $f \colon X \longrightarrow Y$ και $g \colon Y \longrightarrow Z$ είναι δύο μορφισμοί τέτοιοι ώστε $h = g \circ f$ συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός $\widetilde{h}$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ και ο μορφισμός $\widehat{h}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g} \circ \widehat{f}$.

Εν συνεχεία ορίζουμε έξι κατηγορίες οι οποίες συνδέονται με μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ και θα χρησιμοποιηθούν σε ακόλουθα αποτελέσματα καθώς επίσης και για την κατασκευή της Quillen ομοτοπικής κατηγορίας και ενός «κανονικού συναρτητή» (canonical functor) απο την $\mathcal{C}$ στην Quillen ομοτοπική κατηγορία.

Ορισμός 4.1.15. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Η κατηγορία $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία έχει ως αντικείμενα τα συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

2. *Η κατηγορία $\mathcal{C}_{\mathbf{f}}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία έχει ως αντικείμενα τα ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

3. *Η κατηγορία $\mathcal{C}_{\mathbf{cf}}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία έχει ως αντικείμενα τα συνινώδη-ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

4. *Η κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ είναι η κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τα συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τις δεξιές κλάσεις ομοτοπιάς των μορφισμών μεταξύ αυτών.*

5. *Η κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{\mathbf{f}}$ είναι η κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τα ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τις αριστερές κλάσεις ομοτοπιάς των μορφισμών μεταξύ αυτών.*

6. *Η κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{\mathbf{cf}}$ είναι η κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τα συνινώδη-ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ και ως μορφισμούς τις κλάσεις ομοτοπιάς των μορφισμών μεταξύ αυτών.*

Με την βοήθεια του Λήμματος 4.1.13 κατασκευάζουμε τους συναρτητές $\widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ και $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ ως εξής:

Πρόταση 4.1.16. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Τότε ορίζονται οι ακόλουθοι συναρτητές:*

1. *Ο συναρτητής $\widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ στέλνει ένα αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ στο συνινώδες αντικείμενο $\widetilde{Q}X$ της κατηγορίας $\pi\mathcal{C}_c$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ στην δεξιά ομοτοπική κλάση $[\widetilde{f}] \in \pi^r(\widetilde{Q}X, \widetilde{Q}Y)$.*

2. *Ο συναρτητής $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ στέλνει ένα αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ στο ινώδες αντικείμενο $\widetilde{R}X$ της κατηγορίας $\pi\mathcal{C}_f$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ στην αριστερή ομοτοπική κλάση $[\widehat{f}] \in \pi^l(\widehat{R}X, \widehat{R}Y)$.*

Απόδειξη. 1. Η απόδειξη είναι δυϊκή της διαδικασίας του δευτέρου σκέλους.

2. Υποθέτουμε ότι ο $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ στέλνει ένα αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ στο ινώδες αντικείμενο $\widetilde{R}X$ της κατηγορίας $\pi\mathcal{C}_f$ και έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ στην αριστερή ομοτοπική κλάση $[\widetilde{f}] \in \pi^l(\widehat{R}X, \widehat{R}Y)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.13 ο $\widehat{R}$ είναι «καλά ορισμένος». Ας είναι f ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X\colon X \longrightarrow X$, τότε ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{\widehat{R}X}\colon \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}X$ κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "j_X"'] & X \arrow[d, "j_X"] \\
\widehat{R}X \arrow[r, "1_{\widehat{R}X}"] & \widehat{R}X.
\end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός $\widehat{1}_X$ εκ κατασκευής κάνει εξίσου το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widehat{1}_X$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $1_{\widehat{R}X}$. Ως εκ τούτου $[\widehat{1}_X] = [1_{\widehat{R}X}]$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τρόπο ορισμού του $\widehat{R}$ έπεται ότι $\widehat{R}(1_X) = [1_{\widehat{R}X}]$. Εν συνεχεία ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ μορφισμοί τέτοιοι ώστε $h = g \circ f$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13. οι μορφισμοί $\widehat{f}\colon \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$ και $\widehat{g}\colon \widehat{R}Y \longrightarrow \widehat{R}Z$ κάνουν τα ακόλουθα διαγράμματα μεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_X"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \\
\widehat{R}X \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{R}Y.
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_Y"'] & Z \arrow[d, "j_Z"] \\
\widehat{R}X \arrow[r, "\widehat{g}"] & \widehat{R}Z.
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_Y"] & Z \arrow[d, "j_Z"] \\
\widehat{R}X \arrow[r, "\widehat{f}"] & \widehat{R}Y \arrow[r, "\widehat{g}"] & \widehat{R}Z
\end{tikzcd}$$

και κατ' επέκταση το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h=g\circ f"] \arrow[d, "j_X"'] & Z \arrow[d, "j_Z"] \\ \widehat{R}X \arrow[r, "\widehat{g}\circ\widehat{f}"] & \widehat{R}Z. \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Ο μορφισμός $\widehat{h} = \widehat{g \circ f}$ εκ κατασκευής κάνει εξίσου το τελευταίο διάγραμμα μεταθετικό. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widehat{h}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g} \circ \widehat{f}$. Ως εκ τούτου $[\widehat{h}] = [\widehat{g} \circ \widehat{f}]$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την ισότητα $[\widehat{g} \circ \widehat{f}] = [\widehat{g}] \circ [\widehat{f}]$ προκύπτει ότι $[\widehat{h}] = [\widehat{g}] \circ [\widehat{f}]$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τρόπο ορισμού του $\widehat{R}$ έπεται ότι $\widehat{R}(h) = \widehat{R}(g) \circ \widehat{R}(f)$. Εφόσον $h = g \circ f$ απο την τελευταία ισότητα είναι άμεσο ότι $\widehat{R}(g \circ f) = \widehat{R}(g) \circ \widehat{R}(f)$ γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη ότι ο $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ είναι ένας συναρτητής. ∎

Σχόλιο 4.1.17. Ο συναρτητής $\widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ καλείται **συναρτητής συνινώδους προσέγγισης (cofibrant approximation functor)** και ο συναρτητής $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ καλείται **συναρτητής ινώδους προσέγγισης (fibrant approximation functor)**.

Λήμμα 4.1.18. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Ο περιορισμός του συναρτητή $\widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ στην κατηγορία $\mathcal{C}_f$ επάγει έναν συναρτητή $\widetilde{Q}'\colon \pi\mathcal{C}_f \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$.*

2. *Ο περιορισμός του συναρτητή $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ στην κατηγορία $\mathcal{C}_c$ επάγει έναν συναρτητή $\widehat{R}'\colon \pi\mathcal{C}_c \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$.*

Απόδειξη. 1. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του δεύτερου σκέλους.

2. Ορίζουμε τον $\widehat{R}'\colon \pi\mathcal{C}_c \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ ως εξής:

   - $\widehat{R}'(X) = \widehat{R}(X)$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\pi\mathcal{C}_c$.
   - $\widehat{R}'([f]) = \widehat{R}([f])$ για κάθε $[f] \in \pi^r(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_c}(X,Y)$.

   Σύμφωνα, με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 4.1.16 ο $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ είναι ένας συναρτητής. Ως εκ τούτου ο $\widehat{R}'\colon \pi\mathcal{C}_c \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ εξ' ορισμού είναι ένας συναρτητής. Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{R}'_{X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_c}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(\widehat{R}'(X), \widehat{R}'(X)), \quad [f] \longmapsto \widehat{R}(f)$$

   είναι «καλά ορισμένη». Ας είναι X και Y συνινώδη αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι μορφισμοί τέτοιοι ώστε η δεξιά κλάση ομοτοπίας του f να ισούται με την δεξιά κλάση ομοτοπίας του g. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $\widehat{f}\colon \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g}\colon \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$. Εφόσον $[f] = [g]$ ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$. Ας είναι $(\widehat{R}Y, j_Y)$ μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο Y και $(\widehat{R}X, j_X)$ μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο X. Τότε οι μορφισμοί $j_Y\colon Y \longrightarrow \widehat{R}Y$ και $j_X\colon X \longrightarrow \widehat{R}X$ είναι τετριμμένες συννηματώσεις και τα $\widehat{R}Y$ και $\widehat{R}X$ είναι ινώδη αντικείμενα. Έτσι, δοθέντος του μορφισμού $j_Y\colon Y \longrightarrow \widehat{R}Y$ απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.22 έπεται ότι ο μορφισμός $j_Y \circ f\colon X \longrightarrow \widehat{R}Y$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $j_Y \circ g\colon X \longrightarrow \widehat{R}Y$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ισχύει ότι $\widehat{f} \circ j_X = j_Y \circ f$ και $\widehat{g} \circ j_X = j_Y \circ g$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\widehat{f} \circ j_X$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g} \circ j_X$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το X είναι συνινώδες αντικείμενο ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση. Ο μορφισμός $j_X : X \longrightarrow \widehat{R}X$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι εξίσου συννημάτωση. Επομένως, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widehat{R}X$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $X \longrightarrow \widehat{R}X$ και $\varnothing \longrightarrow X$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\widehat{R}X$ είναι συνινώδες. Έτσι, το αντικείμενο $\widehat{R}X$ είναι συνινώδες-ινώδες. Ο μορφισμός $j_X : X \longrightarrow \widehat{R}X$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.41 ο μορφισμός $\widehat{f}: \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g}: \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο $\widehat{R}X$ είναι συνινώδες και το αντικείμενο $\widehat{R}Y$ είναι ινώδες απο την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι ο μορφισμός $\widehat{f}: \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g}: \widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}Y$. Ως εκ τούτου $[\widehat{f}] = [\widehat{g}]$. Έτσι, απο τον ορισμό του συναρτητή $\widehat{R}$ στους μορφισμούς προκύπτει ότι $\widehat{R}(f) = \widehat{R}(g)$ και κατ' επέκταση $\widehat{R}'_{X,Y}([f]) = \widehat{R}'_{X,Y}([g])$. Συνεπώς η απεικόνιση $\widehat{R}'_{X,Y} \colon \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_c}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(\widehat{R}'(X), \widehat{R}'(X))$ είναι καλά ορισμένη. ■

4.1.2 Προσεγγίσεις Μορφισμών

Εν συνεχεία ορίζουμε μια συνινώδη προσέγγιση σε έναν μορφισμό και μια ινώδη προσέγγιση σε έναν μορφισμό η οποία ανάλογα με την ιννώδη προσέγγιση σε ένα αντικείμενο αποτελεί δυϊκή της πρώτης και μελετάμε σχέσεις ομοτοπίας μεταξύ μορφισμών.

Ορισμός 4.1.19. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Μια* **συνινώδης προσέγγιση (cofibrant approximation)** *σε έναν μορφισμό $g \colon X \longrightarrow Y$ είναι μια τριάδα $((\widetilde{X}, i_X), (\widetilde{Y}, i_Y), \widetilde{g})$ όπου $(\widetilde{X}, i_X)$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στο X, $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στο Y και $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι ένας μορφισμός τέτοιος ώστε $i_Y \circ \widetilde{g} = g \circ i_X$.*

2. *Μια* **ινώδης-συνινώδης προσέγγιση (fibrant-cofibrant approximation)** *σε έναν μορφισμό $g \colon X \longrightarrow Y$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον g τέτοια ώστε οι συνινώδεις προσεγγίσεις $(\widetilde{X}, i_X)$ και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ στο X και στο Y αντίστοιχα να είναι ινώδεις-συνινώδεις.*

3. *Μια* **ινώδης προσέγγιση (fibrant approximation)** *σε έναν μορφισμό $g \colon X \longrightarrow Y$ είναι μια τριάδα $((\widehat{X}, j_X), (\widehat{Y}, j_Y), \widehat{g})$ όπου $(\widehat{X}, j_X)$ είναι μια ινώδης προσέγγιση στο X, $(\widehat{Y}, j_Y)$ είναι μια ινώδης προσέγγιση στο Y και $\widehat{g} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι ένας μορφισμός τέτοιος ώστε $\widehat{g} \circ j_X = j_Y \circ g$.*

4. *Μια* **συνινώδης-ινώδης προσέγγιση (cofibrant-fibrant approximation)** *σε έναν μορφισμό $g \colon X \longrightarrow Y$ είναι μια ινώδης προσέγγιση στον g τέτοια ώστε οι ινώδεις προσεγγίσεις $(\widehat{X}, j_X)$ και $(\widehat{Y}, j_Y)$ στο X και στο Y αντίστοιχα να είναι συνινώδεις-ινώδεις.*

Σχόλιο 4.1.20. Συχνά στην βιβλιογραφία χρησιμοποιούμε τους όρους συνινώδης προσέγγιση σε έναν μορφισμό g και ινώδης προσέγγιση σε έναν μορφισμό g χωρίς να γίνει ρητή αναφορά στις συνινώδεις προσεγγίσεις $(\widetilde{X}, i_X)$ και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ και στις ινώδεις προσεγγίσεις $(\widehat{X}, j_X)$ και $(\widehat{Y}, j_Y)$ αντίστοιχα.

Ανάλογα με τον μορφισμό μεταξύ των συνινωδών προσέγγισεων στα αντικείμενα και τον μορφισμό μεταξύ των ινωδών προσέγγισεων στα αντικείμενα ορίζεται ο μορφισμός μεταξύ των συνινωδών προσέγγισεων στους μορφισμούς και ο μορφισμός μεταξύ των ινωδών προσέγγισεων στους μορφισμούς όπως υποδηλώνεται ακολούθως.

Ορισμός 4.1.21. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $g \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ένας μορφισμός απο την συνινώδη προσέγγιση $((\widetilde{X}, i_X), (\widetilde{Y}, i_Y), \widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y})$ στον g στην συνινώδη προσέγγιση $((\widetilde{X}', i'_X), (\widetilde{Y}', i'_Y), \widetilde{g}' \colon \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{Y}')$ στον g είναι ένα ζεύγος μορφισμών*

(h_X, h_Y) όπου $h_X : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ και $h_Y : \widetilde{Y} \longrightarrow \widetilde{Y}'$ τέτοιο ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[rrr, "\widetilde{g}"] \arrow[dr, "i_X"] \arrow[dd, "h_X"'] & & & \widetilde{Y} \arrow[dl, "i_Y"'] \arrow[dd, "h_Y"] \\
& X \arrow[r, "g"] & Y & \\
\widetilde{X}' \arrow[rrr, "\widetilde{g}'"'] \arrow[ur, "i'_X"'] & & & \widetilde{Y}. \arrow[ul, "i'_Y"]
\end{tikzcd}$$

2. *Ένας μορφισμός απο την ινώδη προσέγγιση $((\widehat{X}, j_X), (\widehat{Y}, j_Y), \widehat{g} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y})$ στον g στην ινώδη προσέγγιση $((\widehat{X}', j'_X), (\widehat{Y}', j'_Y), \widehat{g}' : \widehat{X}' \longrightarrow \widehat{Y}')$ στον g είναι ένα ζεύγος μορφισμών (h_X, h_Y) όπου $h_X : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{X}'$ και $h_Y : \widehat{Y} \longrightarrow \widehat{Y}'$ τέτοιο ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X} \arrow[rrr, "\widehat{g}"] \arrow[dd, "h_X"'] & & & \widehat{Y} \arrow[dd, "h_Y"] \\
& X \arrow[r, "g"] \arrow[ul, "j_X"] \arrow[dl, "j'_X"] & Y \arrow[ur, "j_Y"'] \arrow[dr, "j'_Y"'] & \\
\widehat{X}' \arrow[rrr, "\widehat{g}'"'] & & & \widehat{Y}'
\end{tikzcd}$$

Αντίστοιχα με τις συνινώδεις προσεγγίσεις και τις ινώδεις προσεγγίσεις σε ένα αντικείμενο οι οποίες συνδέονται με ένα ουσιωδώς μοναδικό ζιγκ-ζαγκ ασθενών ισοδυναμιών και οι συνινώδεις προσεγγίσεις και οι ινώδεις προσεγγίσεις σε έναν μορφισμό συνδέονται με ένα ουσιωδώς μοναδικό ζιγκ-ζαγκ ασθενών ισοδυναμιών όπως υποδηλώνεται απο την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 4.1.22. Σε μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ δοθέντος ενός μορφισμού της $g : X \longrightarrow Y$ υπαρχεί ένα ουσιωδώς μοναδικό ζιγκ-ζαγκ των ασθενών ισοδυναμιών των συνινωδών προσεγγίσεων $((\widetilde{X}, i_X), (\widetilde{Y}, i_Y), \widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y})$ και $((\widetilde{X}', i'_X), (\widetilde{Y}', i'_Y), \widetilde{g}' : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{Y}')$ στον g απο το $((\widetilde{X}, i_X), (\widetilde{Y}, i_Y), \widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y})$ στο $((\widetilde{X}', i'_X), (\widetilde{Y}', i'_Y)\widetilde{g}' : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{Y}')$ και δυϊκά υπαρχεί ένα ουσιωδώς μοναδικό ζιγκ-ζαγκ των ασθενών ισοδυναμιών των ινωδών προσεγγίσεων $((\widehat{X}, j_X), (\widehat{Y}, j_Y), \widehat{g} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y})$ και $((\widehat{X}', j'_X), (\widehat{Y}', j'_Y), \widehat{g}' : \widehat{X}' \longrightarrow \widehat{Y}')$ στον g απο το $((\widehat{X}, j_X), (\widehat{Y}, j_Y), \widehat{g} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y})$ στο $((\widehat{X}', j'_X), (\widehat{Y}', j'_Y), \widehat{g}' : \widehat{X}' \longrightarrow \widehat{Y}')$.

Πρόταση 4.1.23. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Κάθε μορφισμός $g : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ έχει μια φυσική ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $\widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ η οποία είναι συνννημάτωση.*

2. *Κάθε μορφισμός $g : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ έχει μια φυσική συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $\widehat{g} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ η οποία είναι νημάτωση.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.4 το αντικείμενο X έχει μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση ας είναι $(\widetilde{X}, i_X)$. Εν συνεχεία σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) επιλέγουμε μια φυσική παραγοντοποιήση της σύνθεσης $g \circ i_X : \widetilde{X} \longrightarrow Y$ ως $g \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{g}$ όπου ο μορφισμός $\widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι συνννημάτωση και ο μορφισμός $i_Y : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Ο μορφισμός $! : \varnothing \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι συνννημάτωση ως σύνθεση των συνννηματώσεων $\widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ και $!! : \varnothing \longrightarrow \widetilde{X}$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\widetilde{Y}$ είναι συνινώδες και κατ' επέκταση $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι ινώδης-συνινώδης προσέγγιση. Έτσι, $((\widetilde{X}, i_X), (\widetilde{Y}, i_Y), \widetilde{g})$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό g η οποία τέτοια ώστε οι συνινώδεις προσεγγίσεις $(\widetilde{X}, i_X)$ και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ στο X και στο Y είναι ινώδεις-συνινώδεις προσεγγίσεις. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g \colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ έχει μια φυσική ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ η οποία όπως είδαμε παραπάνω είναι συννημάτωση.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Θεώρημα 4.1.24. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν X και Y είναι συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τότε ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν για κάθε ινώδες αντικείμενο Z της $\mathcal{C}$ ο μορφισμός f επάγει έναν ισομορφισμό $f^*_Z \colon \pi(Y, Z) \longrightarrow \pi(X, Z)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών.*

2. *Εαν X και Y είναι ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τότε ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν για κάθε συνινώδες αντικείμενο W της $\mathcal{C}$ ο μορφισμός f επάγει έναν ισομορφισμό $f^W_* \colon \pi(W, X) \longrightarrow \pi(W, Y)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $f \colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ και Z ένα ινώδες αντικείμενο της. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.64 ο επαγόμενος μορφισμός $f^*_Z \colon \pi(Y, Z) \longrightarrow \pi(X, Z)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών είναι ένας ισομορφισμός.

Αντίστροφα, ας είναι $f \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε για κάθε συνινώδες αντικείμενο W της $\mathcal{C}$ ο επαγόμενος μορφισμός $f^*_Z \colon \pi(Y, Z) \longrightarrow \pi(X, Z)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών να είναι ένας ισομορφισμός. Υποθέτουμε ότι $\widehat{f} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στον μορφισμό f. Τότε ο μορφισμός $\widehat{f} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι ινώδης προσέγγιση στον μορφισμό f στην οποία οι ινώδεις προσεγγίσεις $(\widehat{X}, j_X)$ και $(\widehat{Y}, j_Y)$ στο X και στο Y αντίστοιχα είναι συνινώδεις-ινώδεις προσεγγίσεις. Ως εκ τούτου $(\widehat{X}, j_X)$ και $(\widehat{Y}, j_Y)$ είναι ινώδεις προσεγγίσεις στο X και στο Y αντίστοιχα τέτοιες ώστε οι μορφισμοί $j_X : X \longrightarrow \widehat{X}$ και $j_Y : Y \longrightarrow \widehat{Y}$ να είναι τετριμμένες συννηματώσεις και ο μορφισμός $\widehat{f} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι τέτοιος ώστε $\widehat{f} \circ j_X = j_Y \circ f$. Οι μορφισμοί $j_X : X \longrightarrow \widehat{X}$ και $j_Y : Y \longrightarrow \widehat{Y}$ ως τετριμμένες συννηματώσεις είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) για να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $\widehat{f} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Οι μορφισμοί $j_X : X \longrightarrow \widehat{X}$ και $j_Y : Y \longrightarrow \widehat{Y}$ ως τετριμμένες συννηματώσεις είναι συννηματώσεις. Εφόσον τα αντικείμενα X και Y είναι συνινώδη, οι μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow X$ και $\varnothing \longrightarrow Y$ είναι συννηματώσεις. Ως εκ τούτου οι μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow \widehat{X}$ και $\varnothing \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι συννηματώσεις ως σύνθεση των συννηματώσεων $j_X : X \longrightarrow \widehat{X}$ και $\varnothing \longrightarrow X$ και των συννηματώσεων $j_Y : Y \longrightarrow \widehat{Y}$ και $\varnothing \longrightarrow Y$ αντίστοιχα, γεγονός που αποδεικνύει ότι τα αντικείμενα $\widehat{X}$ και $\widehat{Y}$ είναι συνινώδη. Έτσι, τα αντικείμενα $\widehat{X}$ και $\widehat{Y}$ είναι συνινώδη-ινώδη. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $j_X : X \longrightarrow \widehat{X}$ και $j_Y : Y \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι τετριμμένες συννηματώσεις απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 έπεται ότι οι μορφισμοι

$$(j_X)^*_{\widehat{X}} \colon \pi^r(\widehat{X}, \widehat{X}) \longrightarrow \pi^r(X, \widehat{X}),$$
$$(j_X)^*_{\widehat{Y}} \colon \pi^r(\widehat{X}, \widehat{Y}) \longrightarrow \pi^r(X, \widehat{Y}),$$
$$(j_Y)^*_{\widehat{X}} \colon \pi^r(\widehat{Y}, \widehat{X}) \longrightarrow \pi^r(Y, \widehat{X}),$$
$$(j_Y)^*_{\widehat{Y}} \colon \pi^r(\widehat{Y}, \widehat{Y}) \longrightarrow \pi^r(Y, \widehat{Y})$$

είναι ισομορφισμοί μεταξύ των συνόλων των δεξιών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Εφόσον τα αντικείμενα $\widehat{X}$ και $\widehat{Y}$ είναι συνινώδη-ινώδη και τα αντικείμενα X και Y είναι συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$ σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 οι μορφισμοι

$$(j_X)^*_{\widehat{X}} \colon \pi(\widehat{X}, \widehat{X}) \longrightarrow \pi(X, \widehat{X}),$$

$$(j_X)^*_{\widehat{Y}} \colon \pi(\widehat{X}, \widehat{Y}) \longrightarrow \pi(X, \widehat{Y}),$$

$$(j_Y)^*_{\widehat{X}} \colon \pi(\widehat{Y}, \widehat{X}) \longrightarrow \pi(Y, \widehat{X}),$$

$$(j_Y)^*_{\widehat{Y}} \colon \pi(\widehat{Y}, \widehat{Y}) \longrightarrow \pi(Y, \widehat{Y})$$

είναι ισομορφισμοί μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών. Απο την ισότητα $\widehat{f} \circ j_X = j_Y \circ f$ έπεται ότι

$$(j_X)^*_{\widehat{X}} \circ \widehat{f}^*_{\widehat{X}} = f^*_{\widehat{X}} \circ (j_Y)^*_{\widehat{X}}$$

και

$$(j_X)^*_{\widehat{Y}} \circ \widehat{f}^*_{\widehat{Y}} = f^*_{\widehat{Y}} \circ (j_Y)^*_{\widehat{Y}}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα αντικείμενα $\widehat{X}$ και $\widehat{Y}$ είναι ινώδη εξ' υποθέσεως έπεται ότι οι επαγόμενοι μορφισμοί $f^*_{\widehat{X}} \colon \pi(Y, \widehat{X}) \longrightarrow \pi(X, \widehat{X})$ και $f^*_{\widehat{Y}} \colon \pi(Y, \widehat{Y}) \longrightarrow \pi(X, \widehat{Y})$ είναι ισομορφισμοί. Απο τις τελευταίες ισότητες οι μορφισμοί $\widehat{f}^*_{\widehat{X}} \colon \pi(\widehat{Y}, \widehat{X}) \longrightarrow \pi(\widehat{X}, \widehat{X})$ και $\widehat{f}^*_{\widehat{Y}} \colon \pi(\widehat{Y}, \widehat{Y}) \longrightarrow \pi(\widehat{X}, \widehat{Y})$ είναι ισομορφισμοί ως σύνθεση ισομορφισμών. Ως εκ τούτου απο το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.42 έπεται ότι ο μορφισμός $\widehat{f} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία και συγκεκριμένα μεταξύ συνινωδών-ινωδών αντικειμένων. Έτσι, απο το Θεώρημα 3.2.40 ο μορφισμός $\widehat{f} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι ασθενής ισοδυναμία και κατ' επέκταση ο μορφισμός $f \colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδύναμια.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 4.1.25. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλο, $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών και $g \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ και υπάρχει μια συνινώδης προσέγγιση $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ στον g τέτοια ώστε ο μορφισμός $F(\widetilde{g}) \colon F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y})$ να είναι ασθενής ισοδυναμία τότε ο F στέλνει κάθε συνινώδη προσέγγιση στον g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ και υπάρχει μια ινώδης προσέγγιση $\widehat{g} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ στον g τέτοια ώστε ο μορφισμός $F(\widehat{g}) \colon F(\widehat{X}) \longrightarrow F(\widehat{Y})$ να είναι ασθενής ισοδυναμία τότε ο F στέλνει κάθε ινώδη προσέγγιση στον g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $g \colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.1.17 κάθε μορφισμός $g \colon X \longrightarrow Y$ έχει μια φυσική ινώδη-συνινώδη προσέγγιση. Έτσι, επιλέγουμε μια φυσική ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $((\widetilde{X}', i'_X), (\widetilde{Y}', i'_Y), \widetilde{g}' \colon \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{Y}')$ στον g. Ως εκ τούτου $(\widetilde{X}', i'_X)$ και $(\widetilde{Y}', i'_Y)$ είναι συνινώδεις προσεγγίσεις στο X και στο Y αντίστοιχα τέτοιες ώστε οι ασθενείς ισοδυναμίες $i'_X \colon \widetilde{X}' \longrightarrow X$ και $i'_Y \colon \widetilde{Y}' \longrightarrow Y$ να είναι τετριμμένες νηματώσεις και επιπλέον ο μορφισμός $\widetilde{g}' \colon \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{Y}'$ είναι τέτοιος ώστε $g \circ i'_X = i'_Y \circ \widetilde{g}'$. Εαν $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι μια άλλη συνινώδης προσέγγιση στον g αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $F(\widetilde{g}) \colon F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y})$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$ αν και μόνο αν ο μορφισμός $F(\widetilde{g}') \colon F(\widetilde{X}') \longrightarrow F(\widetilde{Y}')$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Εφόσον, $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον g τότε $(\widetilde{X}, i_X)$ και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι συνινώδεις προσεγγίσεις στο X και στο Y αντίστοιχα και ο μορφισμός $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι τέτοιος ώστε $i_Y \circ \widetilde{g} = g \circ i_X$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα και την ισότητα $g \circ i'_X = i'_Y \circ \widetilde{g}'$ προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "i_X"'] \arrow[dd, bend right=60, "h_X"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "i_Y"] \arrow[dd, bend left=60, "h_Y"] \\
X \arrow[r, "g"] & Y \\
\widetilde{X}' \arrow[r, "\widetilde{g}'"'] \arrow[u, "i'_X"] & \widetilde{Y}' \arrow[u, "i'_Y"']
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι μορφισμοί $i'_X : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ και $i'_Y : \widetilde{Y}' \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένες νηματώσεις και οι μορφισμοί $i_X : \widetilde{X} \longrightarrow X$ και $i_Y : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Εφόσον $(\widetilde{X}, i_X)$ και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι συνινώδεις προσεγγίσεις στο X και στο Y αντίστοιχα και $(\widetilde{X}', i'_X)$ και $(\widetilde{Y}', i'_Y)$ είναι ινώδεις-συνινώδεις προσεγγίσεις στο X και στο Y αντίστοιχα απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.1.7 υπάρχουν μορφισμοί $h_X : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ και $h_Y : \widetilde{Y} \longrightarrow \widetilde{Y}'$ τέτοιοι ώστε $i'_X \circ h_X = i_X$ και $i'_Y \circ h_Y = i_Y$ μοναδικοί μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του X και του Y αντίστοιχα οι οποιοί είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος και τις ισότητες $i'_X \circ h_X = i_X$ και $i'_Y \circ h_Y = i_Y$ προκύπτει ότι:

$$i'_Y \circ \widetilde{g}' \circ h_X = g \circ i'_X \circ h_X = g \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{g} = i'_Y \circ h_Y \circ \widetilde{g}.$$

Λαμβάνοντας τις αριστερές ομοτοπικές κλάσεις στην παραπάνω ισότητα έπεται ότι $[i'_Y \circ \widetilde{g}' \circ h_X] = [i'_Y \circ h_Y \circ \widetilde{g}]$. Εφόσον ο μορφισμός $i'_Y : \widetilde{Y}' \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση και το αντικείμενο $\widetilde{X}$ είναι συνινώδες αντικείμενο απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 η απεικόνιση $(i'_Y)^{\widetilde{X}}_* : \pi^l(\widetilde{X}, \widetilde{Y}') \longrightarrow \pi^l(\widetilde{X}, Y)$ μεταξύ των συνόλων των αριστερών κλάσεων των μορφισμών η οποία ορίζεται ως $(i'_Y)^{\widetilde{X}}_*([f]) = [i'_Y \circ f]$ είναι ένας ισομορφισμός. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της απεικόνισης $(i'_Y)^{\widetilde{X}}_*$ και την τελευταία ισότητα έπεται ότι $(i'_Y)^{\widetilde{X}}_*([\widetilde{g}' \circ h_X]) = (i'_Y)^{\widetilde{X}}_*([h_Y \circ \widetilde{g}])$. Όμως, η απεικόνιση $(i'_Y)^{\widetilde{X}}_*$ είναι «1-1» ως εκ τούτου απο την τελευταία ισότητα προκύπτει $[\widetilde{g}' \circ h_X] = [h_Y \circ \widetilde{g}]$ γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $\widetilde{g}' \circ h_X : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}'$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $h_Y \circ \widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}'$. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση και ότι το αντικείμενο $\widetilde{X}$ είναι συνινώδες αντικείμενο απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.14 είναι άμεσο ότι ο μορφισμός $F(\widetilde{g}' \circ h_X) : F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y}')$ είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο μορφισμός $F(h_Y \circ \widetilde{g}) : F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y}')$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συναρτητή F έπεται ότι $F(\widetilde{g}' \circ h_X) = F(\widetilde{g}') \circ F(h_X)$ και $F(h_Y \circ \widetilde{g}) = F(h_Y) \circ F(\widetilde{g})$. Επιπλέον εφόσον ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Πορίσματος 3.2.37 οι μορφισμοί $F(h_X) : F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{X}')$ και $F(h_Y) : F(\widetilde{Y}) \longrightarrow F(\widetilde{Y}')$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου απο την τελευταία ισοδυναμία λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τελευταιές ισότητες σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $F(\widetilde{g}) : F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y})$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$ αν και μόνο αν ο μορφισμός $F(\widetilde{g}') : F(\widetilde{X}') \longrightarrow F(\widetilde{Y}')$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 4.1.26. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορια μοντέλο και $g : X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν $(\widetilde{X}, i_X)$ είναι συνινώδης προσέγγιση στο X και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι ινώδης -συνινώδης προσέγγιση στο Y τότε υπάρχει μια συνινώδης προσέγγιση $((\widetilde{X}, i_X), (\widetilde{Y}, i_Y), \widetilde{g})$ στον g η οποία είναι μοναδική μέχρις ομοτοπίας υπεράνω του Y.*

2. *Εαν $(\widehat{X}, j_X)$ είναι συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο X και $(\widehat{Y}, j_Y)$ είναι ινώδης προσέγγιση στο Y τότε υπάρχει μια ινώδης προσέγγιση $((\widehat{X}, j_X), (\widehat{Y}, j_Y), \widehat{g}\colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y})$ στον g η οποία είναι μοναδική μέχρις ομοτοπίας υπο του Y.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι $(\widetilde{X}, i_X)$ είναι συνινώδης προσέγγιση στο X και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο Y. Τότε ο μορφισμός $i_X : \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία όπου $\widetilde{X}$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο και $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι συνινώδης προσέγγιση στο Y τέτοια ώστε η ασθενής ισοδυναμία $i_Y : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "!!"] \arrow[d, "!"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "i_Y"] \\ \widetilde{X} \arrow[r, "g\circ i_X"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"] & Y \end{tikzcd} .$$

Εφόσον το $\varnothing$ είναι ένα αρχικό αντικείμενο το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το $\widetilde{X}$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο εξ' ορισμού έπεται ότι ο μορφισμός $! \colon \varnothing \longrightarrow \widetilde{X}$ είναι συννημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Έτσι, ισχύει ότι $\widetilde{g}\circ ! = !!$ και $i_Y \circ \widetilde{g} = g \circ i_X$. Εφόσον $(\widetilde{X}, i_X)$ είναι συνινώδης προσέγγιση στο X, $(\widetilde{Y}, i_Y)$ είναι συννινώδης προσέγγιση στο Y και ο μορφισμός $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι τέτοιος ώστε $i_Y \circ \widetilde{g} = g \circ i_X$ συμπεραίνουμε ότι $((\widetilde{X}, i_X), (\widetilde{Y}, i_Y), \widetilde{g})$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον g. Όσον αφορά την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι $\widetilde{g}' \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι μια άλλη ανύψωση του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.56 έπεται ότι οι μορφισμοί $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ και $\widetilde{g}' \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι ομοτοπικοί ως μορφισμοί στην κατηγορία των αντικειμένων της $\mathcal{C}$ υπο του αρχικού αντικειμένου $\varnothing$ και υπεράνω του Y και κατ' επέκταση υπεράνω του Y.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Λήμμα 4.1.27. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1}$ Cyl(X) $\xrightarrow{s} X$ ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X και $X \xrightarrow{r_1}$ Path(X) $\xrightarrow{(p_0',p_1')} X \times X$ είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το X.*

1. *Εαν $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X τότε*

   (a) *Υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $\widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \longrightarrow$ Cyl($\widetilde{X}$) $\longrightarrow \widetilde{X}$ για το $\widetilde{X}$ και ένα διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "i \coprod i"] & \mathit{Cyl}(\widetilde{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathit{Cyl}(i)"] & \widetilde{X} \arrow[d, "i"] \\ X \coprod X \arrow[r] & \mathit{Cyl}(X) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

   τέτοιο ώστε Cyl(i): Cyl($\widetilde{X}$) $\longrightarrow$ Cyl(X) να είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο Cyl(X) και

(b) *Υπάρχει ένα μονοπάτι αντικείμενο* $\widetilde{X} \longrightarrow \textit{Path}(\widetilde{X}) \longrightarrow \widetilde{X} \times \widetilde{X}$ *για το* $\widetilde{X}$ *και ένα διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \textit{Path}(\widetilde{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\textit{Path(i)}"] & \widetilde{X} \times \widetilde{X} \arrow[d, "i \times i"] \\
X \arrow[r] & \textit{Path(X)} \arrow[r] & X \times X
\end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε Path(i): $\textit{Path}(\widetilde{X}) \longrightarrow \textit{Path(X)}$ *να είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο Path(X) και το δεξιό τετράγωνο του διαγράμματος να είναι pullback.*

2. *Εαν* $j\colon X \longrightarrow \widehat{X}$ *είναι μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο* X *τότε*

(a) *Υπάρχει ένα μονοπάτι αντικείμενο* $\widehat{X} \longrightarrow \textit{Path}(\widehat{X}) \longrightarrow \widehat{X} \times \widehat{X}$ *για το* $\widehat{X}$ *και ένα διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \textit{Path(X)} \arrow[r] \arrow[d, "\textit{Path(j)}"] & X \times X \arrow[d, "j \times j"] \\
\widehat{X} \arrow[r] & \textit{Path}(\widehat{X}) \arrow[r] & \widehat{X} \times \widehat{X}
\end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε Path(j): $\textit{Path(X)} \longrightarrow \textit{Path}(\widehat{X})$ *να είναι μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο Cyl(X) και*

(b) *Υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο* $\widehat{X} \coprod \widehat{X} \longrightarrow \textit{Cyl}(\widehat{X}) \longrightarrow \widehat{X}$ *για το* $\widehat{X}$ *και ένα διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[r] \arrow[d, "j \coprod j"] & \textit{Cyl(X)} \arrow[r] \arrow[d, "\textit{Cyl(j)}"] & X \arrow[d, "j"] \\
\widehat{X} \coprod \widehat{X} \arrow[r] & \textit{Cyl}(\widehat{X}) \arrow[r] & \widehat{X}
\end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε Cyl(j): $\textit{Cyl(X)} \longrightarrow \textit{Cyl}(\widehat{X})$ *να είναι μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο Cyl(X) και το αριστερό τετράγωνο του διαγράμματος να είναι pushout.*

Απόδειξη. Ας είναι $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X και ότι $X \xrightarrow{r_1} \mathrm{Path(X)} \xrightarrow{(p_0',p_1')} X \times X$ είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το X.

1. (a) Υποθέτουμε ότι $(\widetilde{X}, i)$ είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X. Τότε $(\widetilde{X}, i)$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στο X τέτοια ώστε η ασθενής ισοδυναμία $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ να είναι τετριμμένη νημάτωση. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε την σύνθεση

$$\widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \xrightarrow{i \coprod i} X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)}$$

ως

$$\widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \xrightarrow{k_0+k_1} \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\mathrm{Cyl(i)}} \mathrm{Cyl(X)}$$

όπου ο μορφισμός $k_0 + k_1 \colon \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \longrightarrow \mathrm{Cyl}(\widetilde{X})$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $\mathrm{Cyl(i)} \colon \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Για τον μορφισμό $i \coprod i \colon \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \longrightarrow X \coprod X$ έχουμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "in_0"] \arrow[d, "i"'] & \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \arrow[d, "i \coprod i"] \\ X \arrow[r, "in'_0"] & X \coprod X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "in_1"] \arrow[d, "i"'] & \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \arrow[d, "i \coprod i"] \\ X \arrow[r, "in'_1"] & X \coprod X. \end{tikzcd}$$

Έτσι, $(i \coprod i) \circ in_0 = in'_0 \circ i$ και $(i \coprod i) \circ in_1 = in'_1 \circ i$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \arrow[r, "1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}}"] \arrow[d, "k_0 + k_1"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "i"] \\ \mathrm{Cyl}\widetilde{X} \arrow[r, "s \circ \mathrm{Cyl(i)}"] \arrow[ur, dashed, "q"] & X \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την ισότητα που προκύπτει απο το γεγονός ότι Cyl(X) είναι κυλινδρικό αντικείμενο για το X την ισότητα $(i_0 + i_1) \circ (i \coprod i) = \mathrm{Cyl(i)} \circ (k_0 + k_1)$, τις ισότητες $(i \coprod i) \circ in_0 = in'_0 \circ i$ και $(i \coprod i) \circ in_1 = in'_1 \circ i$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού 1_X και του ταυτοτικού μορφισμού $1_{\widetilde{X}}$ προκύπτει ότι:

$$s \circ \mathrm{Cyl(i)} \circ (k_0 + k_1) = s \circ (\mathrm{Cyl(i)} \circ (k_0 + k_1)) = s \circ ((i_0 + i_1) \circ (i \coprod i)) = (s \circ (i_0 +$$

$$+ i_1)) \circ (i \coprod i) = ((s \circ (i_0 + i_1)) \circ (i \coprod i)) \circ in_0 + ((s \circ (i_0 + i_1)) \circ (i \coprod i)) \circ in_1 = (s \circ (i_0 + i_1)) \circ$$

$$\circ ((i \coprod i)) \circ in_0) + (s \circ (i_0 + i_1)) \circ ((i \coprod i)) \circ in_1) = (1_X + 1_X) \circ (in'_0 \circ i) + (1_X + 1_X)$$

$$\circ (in'_1 \circ i) = ((1_X + 1_X) \circ in'_0) \circ i + ((1_X + 1_X) \circ in'_1) \circ i = 1_X \circ i + 1_X \circ i = i + i$$

και

$$i \circ (1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}}) = (i \circ (1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}})) \circ in_0 + (i \circ (1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}})) \circ in_1 = i \circ ((1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}}) \circ in_0) + i \circ ((1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}}) \circ$$

$$\circ in_1) = i \circ 1_{\widetilde{X}} + i \circ 1_{\widetilde{X}} = i + i.$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι $s \circ \mathrm{Cyl(i)} \circ (k_0 + k_1) = i \circ (1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}})$, γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του διαγράμματος (4.1). Εφόσον ο μορφισμός $k_0 + k_1 \colon \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \longrightarrow \mathrm{Cyl}(\widetilde{X})$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $i \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι τετριμμένη νημάτωση τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $q \colon \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \longrightarrow \widetilde{X}$ στο διάγραμμα (4.1). Έτσι, $q \circ (k_0 + k_1) = 1_{\widetilde{X}} + 1_{\widetilde{X}}$ και $i \circ q = s \circ \mathrm{Cyl(i)}$. Ο μορφισμός $\mathrm{Cyl(i)} \colon \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathrm{Cyl(X)}$ ως τετριμμένη νημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον απο τον ορισμό του κυλινδρικού αντικειμένου Cyl(X) ο μορφισμός $s \colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ο μορφισμός $s \circ \mathrm{Cyl(i)} \colon \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Ως εκ τούτου απο την ισότητα $i \circ q = s \circ \mathrm{Cyl(i)}$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $i \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ ως τετριμμένη νημάτωση είναι ασθενής ισοδυναμία έπεται ότι ο μορφισμός $q \colon \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \longrightarrow \widetilde{X}$

είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, $\widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \xrightarrow{k_0+k_1} \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \xrightarrow{q} \widetilde{X}$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το $\widetilde{X}$. Όσον αφορά το δεύτερο ζητούμενο εφόσον $\widetilde{X}$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.7 το κυλινδρικό αντικείμενο Cyl($\widetilde{X}$) για το $\widetilde{X}$ είναι εξίσου συνινώδες. Επιπλέον, ο μορφισμός Cyl(i): Cyl($\widetilde{X}$) $\longrightarrow$ Cyl(X) είναι τετριμμένη νημάτωση. Ως εκ τούτου (Cyl($\widetilde{X}$), Cyl(i)) είναι ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X.

(b) Ας είναι Path($\widetilde{X}$) το pullback Path(X) $\times_{(X\times X)} (\widetilde{X} \times \widetilde{X})$. Τότε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Path}(\widetilde{X}) \arrow[r, "(p_0,p_1)"] \arrow[d, "\mathrm{Path(i)}"'] & \widetilde{X} \times \widetilde{X} \arrow[d, "i\times i"] \\
\mathrm{Path(X)} \arrow[r, "(p_0',p_1')"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

είναι pullback. Υποθέτουμε ότι $(i \times i) \circ (1_X, 1_X) = (p_0', p_1') \circ (r \circ i)$. Τότε σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα των pullbacks υπάρχει μοναδικός μορφισμός $r\colon \widetilde{X} \longrightarrow$ Path($\widetilde{X}$) τέτοιος ώστε $(p_0, p_1) \circ r = (1_{\widetilde{X}}, 1_{\widetilde{X}})$ και Path(i) $\circ\, r = r_1 \circ i$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[dr, dotted, "r"] \arrow[drr, bend left, "(1_{\widetilde{X}},1_{\widetilde{X}})"] \arrow[ddr, bend right, "r_1\circ i"'] & & \\
& \mathrm{Path}(\widetilde{X}) \arrow[r, "(p_0,p_1)"] \arrow[d, "\mathrm{Path(i)}"'] & \widetilde{X} \times \widetilde{X} \arrow[d, "i\times i"] \\
& \mathrm{Path(X)} \arrow[r, "(p_0',p_1')"'] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Ας είναι $f\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση. Θεωρούμε το επαυξημένο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{X} \times \widetilde{X} \arrow[r, shift left, "pr_0"] \arrow[r, shift right, "pr_1"'] \arrow[d, "i\times i"] & \widetilde{X} \arrow[d, "i"] \\
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[urr, dashed, shift left, "g"] \arrow[urr, dashed, shift right, "h"'] & X \times X \arrow[r, shift left, "pr_0'"] \arrow[r, shift right, "pr_1'"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Εφόσον ο μορφισμός $i\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17. υπάρχουν ανυψώσεις $g\colon B \longrightarrow \widetilde{X}$ και $h\colon B \longrightarrow \widetilde{X}$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Έτσι, $g \circ f = pr_0 \circ \alpha$, $i \circ g = pr_0' \circ \beta$, $h \circ f = pr_1 \circ \alpha$ και $i \circ h = pr_1' \circ \beta$. Εν συνεχεία, θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "(pr_0\circ\alpha, pr_1\circ\alpha)"] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{X}\times\widetilde{X} \arrow[d, "i\times i"] \\ B \arrow[r, "(pr'_0\circ\beta, pr'_1\circ\beta)"] & X\times X \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τον ορισμό του μορφισμού $i\times i$ τις ισότητες $g\circ f = pr_0\circ\alpha$, $i\circ g = pr'_0\circ\beta$, $h\circ f = pr_1\circ\alpha$ και $i\circ h = pr'_1\circ\beta$ προκύπτει:

$$(pr'_0\circ\beta, pr'_1\circ\beta)\circ f = (i\circ g, i\circ h)\circ f$$

και

$$(i\times i)\circ(pr_0\circ\alpha, pr_1\circ\alpha) = (i\times i)\circ(g\circ f, h\circ f) = (i\circ(g\circ f), i\circ(h\circ f)) = ((i\circ g)\circ f, (i\circ h)\circ f) =$$

$$= (i\circ g, i\circ h)\circ f$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τελευταίες ισότητες προκύπτει $(pr'_0\circ\beta, pr'_1\circ\beta)\circ f = (i\times i)\circ(pr_0\circ\alpha, pr_1\circ\alpha)$ γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του διαγράμματος. Ας είναι $q = (g,h)\colon B \longrightarrow \widetilde{X}\times\widetilde{X}$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τον ορισμό του μορφισμού $i\times i$ τις ισότητες $g\circ f = pr_0\circ\alpha$, $i\circ g = pr'_0\circ\beta$, $h\circ f = pr_1\circ\alpha$ και $i\circ h = pr'_1\circ\beta$ προκύπτει:

$$q\circ f = (g,h)\circ f = (g\circ f, h\circ f) = (pr_0\circ\alpha, pr_1\circ\alpha)$$

και για κάθε $b\in B$

$$((i\times i)\circ q)(b) = ((i\times i)\circ(g,h))(b) = (i\times i)((g,h)(b)) = (i\times i)(g(b), h(b)) =$$

$$= (i(g(b)), i(h(b))) = (pr'_0(\beta(b)), pr'_1(\beta(b))) = ((pr'_0\circ\beta)(b), (pr'_1\circ\beta)(b)) =$$

$$= (pr'_0\circ\beta, pr'_1\circ\beta)(b),$$

γεγονός που υποδηλώνει ότι $(i\times i)\circ q = (pr'_0\circ\beta, pr'_1\circ\beta)$. Ως εκ τούτου από τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι ο μορφισμός $q = (g,h)\colon B\longrightarrow \widetilde{X}\times\widetilde{X}$ είναι μια ανύψωση του τελευταίου μεταθετικού διαγράμματος. Έτσι, ο μορφισμός $i\times i\colon \widetilde{X}\times\widetilde{X}\longrightarrow X\times X$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς την συννημάτωση $f\colon A\longrightarrow B$, γεγονός που αποδεικνύει σύμφωνα με το τέταρτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 ότι ο μορφισμός $i\times i\colon \widetilde{X}\times\widetilde{X}\longrightarrow X\times X$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Εφόσον ο μορφισμός Path(i): Path($\widetilde{X}$) $\longrightarrow$ Path(X) είναι pullback του μορφισμού $i\times i\colon \widetilde{X}\times\widetilde{X}\longrightarrow X\times X$ κατα μήκος του μορφισμού $(p'_0, p'_1)\colon$ Path(X) $\longrightarrow X\times X$ και ο μορφισμός $(p_0,p_1)\colon$ Path($\widetilde{X}$) $\longrightarrow \widetilde{X}\times\widetilde{X}$ είναι pullback του μορφισμού $(p_0,p_1)\colon$ Path(X) $\longrightarrow X\times X$ κατα μήκος του μορφισμού $i\times i\colon \widetilde{X}\times\widetilde{X}\longrightarrow X\times X$ απο το τέταρτο σκέλος και αντίστοιχα απο το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.23 είναι άμεσο ότι ο μορφισμός Path(i): Path($\widetilde{X}$) $\longrightarrow$ Path(X) είναι εξίσου τετριμμένη νημάτωση και κατ' επέκταση ασθενής ισοδυναμία και ο μορφισμός $(p_0,p_1)\colon$ Path(X) $\longrightarrow \widetilde{X}\times\widetilde{X}$ είναι νημάτωση. Ο μορφισμός $r_1\colon X\longrightarrow$ Path(X) είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε απο το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ο μορφισμός $r_1\circ i\colon \widetilde{X}\longrightarrow$ Path($\widetilde{X}$) είναι ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα Path(i) $\circ\, r = r_1\circ i$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $r\colon \widetilde{X}\longrightarrow$ Path($\widetilde{X}$) είναι ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω $\widetilde{X}\xrightarrow{r}\mathrm{Path}(\widetilde{X})\xrightarrow{(p_0,p_1)}\widetilde{X}\times\widetilde{X}$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το $\widetilde{X}$. Όσον αφορά το δεύτερο ζητούμενο εφόσον $\widetilde{X}$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο ο μορφισμός $!\colon \varnothing\longrightarrow\widetilde{X}$ είναι συννημάτωση. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 3.2.3 υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι αντικείμενο ας είναι το

$\widetilde{X} \xrightarrow{r_1} \mathrm{Path}(\widetilde{X}) \xrightarrow{(p_0',p_1')} \widetilde{X} \times \widetilde{X}$ στο οποίο ο μορφισμός $r_1 \colon \widetilde{X} \longrightarrow \mathrm{Path}(\widetilde{X})$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και κατ' επέκταση συννημάτωση. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \mathrm{Path}(\widetilde{X})$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $! \colon \varnothing \longrightarrow \widetilde{X}$ και $r_1 \colon \widetilde{X} \longrightarrow \mathrm{Path}(\widetilde{X})$, γεγονός που αποδεικνύει ότι το αντικείμενο $\mathrm{Path}(\widetilde{X})$ είναι συνινώδες. Επιπλέον όπως προείπαμε ο μορφισμός Path(i): $\mathrm{Path}(\widetilde{X}) \longrightarrow$ Path(X) είναι τετριμμένη νημάτωση. Συνεπώς, ($\mathrm{Path}(\widetilde{X})$,Path(i)) είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο Path(X).

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 4.1.28. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f, g \colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ας είναι $\widetilde{f} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό f και $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό g.*

   (a) *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g}$.*

   (b) *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g}$.*

   (c) *Εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g}$.*

2. *Ας είναι $\widehat{f} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στον μορφισμό f και $\widehat{g} \colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στον μορφισμό g.*

   (a) *Εαν ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός $\widehat{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g}$.*

   (b) *Εαν ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός $\widehat{f}$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g}$.*

   (c) *Εαν ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g τότε ο μορφισμός $\widehat{f}$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widehat{g}$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $\widetilde{f} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό f και $\widetilde{g} \colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό g.

   (a) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ για το X και ένας μορφισμός $H \colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Εφόσον $i_X \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο X σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.27 υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $\widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \xrightarrow{i_0'+i_1'} \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \xrightarrow{s'} \widetilde{X}$ για το $\widetilde{X}$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) παραγοντοποιούμε την σύνθεση

$$\widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \xrightarrow{i_X \coprod i_X} X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)}$$

ως

$$\widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \xrightarrow{i_0'+i_1'} \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\mathrm{Cyl(i)}} \mathrm{Cyl(X)}$$

όπου ο μορφισμός $i_0' + i_1' \colon \widetilde{X} \coprod \widetilde{X} \longrightarrow \mathrm{Cyl}(\widetilde{X})$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $\mathrm{Cyl}(i_X) \colon \mathrm{Cyl}(\widetilde{X}) \longrightarrow$ Cyl(X) είναι τετριμμένη νημάτωση. Για τον μορφισμό $i_X \coprod i_X \colon \widetilde{X} \coprod \widetilde{X}$

$\longrightarrow X\coprod X$ έχουμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "in_0"] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{X}\coprod\widetilde{X} \arrow[d, "i_X\coprod i_X"] \\ X \arrow[r, "in'_0"] & X\coprod X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "in_1"] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{X}\coprod\widetilde{X} \arrow[d, "i_X\coprod i_X"] \\ X \arrow[r, "in'_1"] & X\coprod X. \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου, $(i_X\coprod i_X)\circ in_0 = in'_0\circ i_X$ και $(i_X\coprod i_X)\circ in_1 = in'_1\circ i_X$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}\coprod\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}+\widetilde{g}"] \arrow[d, "i'_0+i'_1"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "i_Y"] \\ \mathsf{Cyl}(\widetilde{X}) \arrow[r, "H\circ\mathsf{Cyl(i)}"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & Y \end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ισότητες $f\circ i_X = i_Y\circ\widetilde{f}$ και $g\circ i_X = i_Y\circ\widetilde{g}$ οι οποίες προκύπτουν απο το γεγονός ότι οι μορφισμοί $\widetilde{f}\colon\widetilde{X}\longrightarrow\widetilde{Y}$ και $\widetilde{g}\colon\widetilde{X}\longrightarrow\widetilde{Y}$ είναι ινώδεις-συνινώδεις προσέγγισεις στους μορφισμούς f και g αντίστοιχα καθώς και τις ισότητες $H\circ i_0 = f$, $H\circ i_1 = g$ και $\mathsf{Cyl(i)}\circ(i'_0+i'_1) = (i_0+i_1)\circ(i\coprod i)$ προκύπτει:

$$H\circ\mathsf{Cyl}(i_X)\circ(i'_0+i'_1) = H\circ(i_0+i_1)\circ(i\coprod i) = (H\circ(i_0+i_1)\circ(i\coprod i))\circ in_0+(H\circ(i_0+i_1)\circ$$

$$\circ(i\coprod i))\circ in_1 = (H\circ(i_0+i_1))\circ((i\coprod i)\circ in_0)+(H\circ(i_0+i_1))\circ((i\coprod i)\circ in_1) = (H\circ(i_0+$$

$$+i_1))\circ(in'_0\circ i_X)+(H\circ(i_0+i_1))\circ(in'_1\circ i_X) = ((H\circ(i_0+i_1))\circ in'_0)\circ i_X+((H\circ(i_0+i_1))\circ in'_1)\circ$$

$$\circ i_X = (H\circ((i_0+i_1)\circ in'_0))\circ i_X+(H\circ((i_0+i_1)\circ in'_1))\circ i_X = (H\circ i_0)\circ i_X+(H\circ i_1)\circ i_X = f\circ$$

$$\circ i_X + g\circ i_X = i_Y\circ\widetilde{f} + i_Y\circ\widetilde{g}$$

και

$$i_Y\circ(\widetilde{f}+\widetilde{g}) = (i_Y\circ(\widetilde{f}+\widetilde{g}))\circ in_0+(i_Y\circ(\widetilde{f}+\widetilde{g}))\circ in_1 = i_Y\circ((\widetilde{f}+\widetilde{g})\circ in_0)+i_Y\circ((\widetilde{f}+\widetilde{g})\circ in_1) =$$

$$= i_Y\circ\widetilde{f} + i_Y\circ\widetilde{g}$$

Απο τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι $H\circ\mathsf{Cyl}(i_X)\circ(i'_0+i'_1) = i_Y\circ(\widetilde{f}+\widetilde{g})$ γεγονός που αποδεικνύει την μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $i'_0+i'_1\colon\widetilde{X}\coprod\widetilde{X}\longrightarrow\widetilde{X}$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $i_Y\colon\widetilde{Y}\longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση απο το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{H}\colon\mathsf{Cyl}(\widetilde{X})\longrightarrow Y$ του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος. Έτσι, $\widetilde{H}\circ(i'_0+i'_1) = \widetilde{f}+\widetilde{g}$ και $i_Y\circ\widetilde{H} = H\circ\mathsf{Cyl(i)}$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ισότητες $i'_0 = i'\circ in_0$, $i'_1 = i'\circ in_1$ και $i' = i'_0+i'_1$ καθώς και την ισότητα $\widetilde{H}\circ(i'_0+i'_1) = \widetilde{f}+\widetilde{g}$ έπεται ότι:

$$\widetilde{H}\circ i'_0 = \widetilde{H}\circ(i'\circ in_0) = (\widetilde{H}\circ i')\circ in_0 = (\widetilde{H}\circ(i'_0+i'_1))\circ in_0 = (\widetilde{f}+\widetilde{g})\circ in_0 = \widetilde{f}$$

και

$$\widetilde{H}\circ i'_1 = \widetilde{H}\circ(i'\circ in_1) = (\widetilde{H}\circ i')\circ in_1 = (\widetilde{H}\circ(i'_0+i'_1))\circ in_1 = (\widetilde{f}+\widetilde{g})\circ in_1 = \widetilde{g}$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $\widetilde{H}\colon\mathsf{Cyl}(\widetilde{X})\longrightarrow Y$ είναι μια αριστερή ομοτοπία απο τον μορφισμό $\widetilde{f}$ στον μορφισμό $\widetilde{g}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g}$ με αριστερή ομοτοπία τον μορφισμό $\widetilde{H}\colon\mathsf{Cyl}(\widetilde{X})\longrightarrow Y$.

(b) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g. Τότε υπάρχει ένα μονοπάτι αντικείμενο $Y \xrightarrow{r} \text{Path(Y)} \xrightarrow{(p_0,p_1)} Y \times Y$ για το Y και ένας μορφισμός $K\colon X \longrightarrow \text{Path(Y)}$ τέτοιος ώστε $p_0 \circ K = f$ και $p_1 \circ K = g$. Εφόσον $i_Y : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ είναι μια ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο Y σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.27. υπάρχει ένα μονοπάτι αντικείμενο $\widetilde{Y} \xrightarrow{r} \text{Path}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{(p_0',p_1')} \widetilde{Y} \times \widetilde{Y}$ για το $\widetilde{Y}$ και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\text{Path}(\widetilde{Y}) \arrow[r, "(p_0',p_1')"] \arrow[d, "\text{Path}(i_Y)"'] & \widetilde{Y} \times \widetilde{Y} \arrow[d, "i_Y \times i_Y"] \\
\text{Path(Y)} \arrow[r, "(p_0,p_1)"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

είναι pullback. Υποθέτουμε ότι $(p_0, p_1) \circ k \circ i_X = (i_Y \times i_Y) \circ (\widetilde{f}, \widetilde{g})$. Τότε λόγω της καθολικής ιδιότητας των pullbacks υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\widetilde{K}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \text{Path}(\widetilde{Y})$ τέτοιος ώστε $(p_0', p_1') \circ \widetilde{K} = (\widetilde{f}, \widetilde{g})$ και $\text{Path}(i_Y) \circ \widetilde{K} = K \circ i_X$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[dr, dotted, "\widetilde{K}"] \arrow[drr, bend left, "(\widetilde{f},\widetilde{g})"] \arrow[ddr, bend right, "K\circ i_X"'] & & \\
& \text{Path}(\widetilde{Y}) \arrow[r, "(p_0',p_1')"] \arrow[d, "\text{Path}(i_Y)"'] & \widetilde{Y} \times \widetilde{Y} \arrow[d, "i_Y \times i_Y"] \\
& \text{Path(Y)} \arrow[r, "(p_0,p_1)"'] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ισότητες $p_0' = pr_0 \circ p'$, $p_1' = pr_1 \circ p'$ και $p' = (p_0', p_1')$ καθώς και την ισότητα $(p_0', p_1') \circ \widetilde{K} = (\widetilde{f}, \widetilde{g})$ έπεται ότι:

$$p_0' \circ \widetilde{K} = (pr_0 \circ p') \circ \widetilde{K} = pr_0 \circ (p' \circ \widetilde{K}) = pr_0 \circ ((p_0', p_1') \circ \widetilde{K}) = pr_0 \circ (\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \widetilde{f}$$

και

$$p_1' \circ \widetilde{K} = (pr_1 \circ p') \circ \widetilde{K} = pr_1 \circ (p' \circ \widetilde{K}) = pr_1 \circ ((p_0', p_1') \circ \widetilde{K}) = pr_1 \circ (\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \widetilde{g}$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $\widetilde{K}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \text{Path}(\widetilde{Y})$ είναι μια δεξιά ομοτοπία απο τον μορφισμό $\widetilde{f}$ στον μορφισμό $\widetilde{g}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g}$ με δεξιά ομοτοπία τον μορφισμό $\widetilde{K}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \text{Path}(\widetilde{Y})$.

(c) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι ομοτοπικός του μορφισμού g. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f είναι αριστερά και δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g. Ως εκ τούτου απο τα (a) και (b) έπεται ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι αριστερά και δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι ομοτοπικός του μορφισμού $\widetilde{g}$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

4.2 Η Ομοτοπική Κατηγορία μιας Κατηγορίας Μοντέλο

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε δύο κατασκευές της ομοτοπικής κατηγορίας μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$, την Quillen ομοτοπική κατηγορία και την ομοτοπική κατηγορία η οποία προκύπτει εαν στραφούμε στην υποκατηγορία των συνινωδών αντικειμένων της. Αποδεικνύεται ότι η Quillen ομοτοπική κατηγορία είναι μια τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών. Το γεγονός ότι η Quillen ομοτοπική κατηγορία μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ εξαρτάται μόνο απο την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών μας βοηθά να κατανοήσουμε ότι η κλάση των ασθενών ισοδυναμιών μεταφέρει την θεμελιώδη θεωρητική πληροφορία για την ομοτοπία ενώ οι συννηματώσεις και οι νηματώσεις καθώς και τα αξιώματα που αυτές ικανοποιούν λειτουργούν ως εργαλεία για κάποιες κατασκευές που θα μελετήσουμε στην συνέχεια. Ακόμη, υποδεικνύει ότι εφοδιάζοντας μια κατηγορία με την δομή κατηγορίας μοντέλο ιδιαίτερη βαρύτητα πρέπει να καταλαμβάνει ο καθορισμός της κλάσης των ασθενών ισοδυναμιών ενώ ο καθορισμός των κλάσεων των νηματώσεων και των συννηματώσεων αποτελεί δευτερεύον ζήτημα. Επιπλέον αποδεικνύουμε ότι η Quillen ομοτοπική κατηγορία είναι ισοδύναμη με την κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$.

Ξεκινάμε, υπενθυμίζοντας τον ορισμό της τοπικοποίησης μιας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$.

Ορισμός 4.2.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $\mathcal{W}$ μια κλάση μορφισμών της. Μια κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένη με έναν συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ καλείται* **τοπικοποίηση (localization)** *της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$ εαν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

(a) *Για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{W}$ ο μορφισμός $F(f)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.*

(b) *Για οποιαδήποτε κατηγορία $\mathcal{C}'$ και συναρτητή $G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιον ώστε για κάθε μορφισμό $w \in \mathcal{W}$ ο μορφισμός $G(w)$ να είναι έναν ισομορφισμός στην $\mathcal{C}'$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G'\colon \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[dl, "G'"] \\
\mathcal{C}' &
\end{tikzcd}$$

Σχόλιο 4.2.2. Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδείξαμε ότι εαν υπάρχει η τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$ είναι μοναδική μέχρις ισομορφισμού και έτσι μπορούμε να μιλάμε για «την» τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση $\mathcal{W}$. Επιπλέον, όπως έχουμε δει συχνά αναφερόμαστε στην κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ ως τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την $\mathcal{W}$ παραλείποντας να αναφερθούμε ρητά στον συναρτητή.

Ορισμός 4.2.3. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η τοπικοποιήση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών καλείται* **Quillen ομοτοπική κατηγορία (Quillen homotopy category)** *και συνήθως συμβολίζεται με $(Ho(\mathcal{C}), \gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}))$ ή απλούστερα με $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.*

Παρατήρηση 4.2.4. Η τοπικοποίηση μιας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ εφοδιασμένης με μια κλάση μορφισμών της δεν υπάρχει πάντα εξαιτίας προβλημάτων που ανακύπτουν απο την θεωρία συνόλων. Η ύπαρξη της τοπικοποιήσης της $\mathcal{C}$ εξαρτάται απο το εαν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μικρή η όχι. Πιο συγκεκριμένα, εαν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μικρή τότε η τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς μια κλάση μορφισμών της υπάρχει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τους μορφισμούς της τοπικοποίησης κάνοντας χρήση γεννητόρων και σχέσεων για να προσθέσουμε τους αντιστρόφους της κλάσης $\mathcal{W}$. Με αυτό τον τρόπο η ύπαρξη ενός μόνο συνόλου μορφισμών στην $\mathcal{C}$ για να ξεκινήσουμε, εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός μόνο σύνολου μορφισμών μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Ωστόσο, εαν η κατηγορία $\mathcal{C}$ δεν είναι μικρή τότε η χρήση γεννητόρων και σχέσεων μας οδηγεί σε μια γνήσια κλάση μορφισμών μεταξύ κάποιων ζευγών αντικειμένων γεγονός που υποδηλώνει ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε κατηγορία.

Το ακόλουθο λήμμα υποδηλώνει ότι ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ο οποίος στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ ταυτίζει ομοτοπικούς μορφισμούς.

Λήμμα 4.2.5. *Ας είναι $\mathcal{C}$ κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία, $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ και ο μορφισμός f είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε $F(f) = F(g)$.*

2. *Εαν ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ και ο μορφισμός f είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού g τότε $F(f) = F(g)$.*

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$.

1. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $X \coprod X \xrightarrow{i_0+i_1} \mathsf{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ για το X και ένας μορφισμός $H\colon \mathsf{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Απο το δεύτερο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 έχουμε $s \circ i_0 = 1_X$ και $s \circ i_1 = 1_X$. Ως εκ τούτου $s \circ i_0 = s \circ i_1$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $F(s) \circ F(i_0) = F(s) \circ F(i_1)$. Εφόσον ο μορφισμός $s\colon \mathsf{Cyl(X)} \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $F(s)\colon F(\mathsf{Cyl(X)}) \longrightarrow F(X)$ είναι ένας ισομορφισμός. Τότε υπάρχει ο αντίστροφος $F(s)^{-1}\colon F(X) \longrightarrow F(\mathsf{Cyl(X)})$ ο οποίος είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Ως εκ τούτου συνθέτοντας απο αριστερά με τον μορφισμό $F(s)^{-1}$ στην τελευταία ισότητα έπεται ότι $F(i_0) = F(i_1)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συναρτητή F, την τελευταία ισότητα καθώς και τις ισότητες $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$ προκύπτει ότι:

$$F(f) = F(H \circ i_0) = F(H) \circ F(i_0) = F(H) \circ F(i_1) = F(H \circ i_1) = F(g)$$

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Σχόλιο 4.2.6.

1. Άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.2.5 είναι ότι αναζητώντας την Quillen ομοτοπική κατηγορία της $\mathcal{C}$ ένα φυσικό αντικείμενο το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε είναι η κλασική ομοτοπική κατηγορία της κατηγορίας $\pi\mathcal{C}_{cf}$.

2. Λόγω του Θεωρήματος του Whitehead εαν περιοριστούμε στην κατηγορία $\mathcal{C}_{cf}$ τότε ταυτοποιώντας ομοτοπικούς μορφισμούς μετατρέπουμε τις ασθενείς ισοδυναμίες σε ισομορφισμούς και έτσι η κλασική ομοτοπική κατηγορία περιορισμένη στην $\mathcal{C}_{cf}$ έχει την απαιτούμενη καθολική ιδιότητα.

Ευθύς αμέσως ορίζουμε την Quillen ομοτοπική κατηγορία. Όταν αναφερόμαστε στην ομοτοπική κατηγορία μιας κατηγορίας μοντέλο, συνήθως εννοούμε την Quillen ομοτοπική κατηγορία.

Ορισμός 4.2.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η* **Quillen ομοτοπική κατηγορία (Quillen homotopy category)** *$Ho(\mathcal{C})$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της $Ho(\mathcal{C})$ είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$.*

2. *Εαν X,Y είναι αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τότε*

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(\widehat{R}'\widetilde{Q}X, \widehat{R}'\widetilde{Q}Y) = \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Y).$$

3. *Εαν X,Y,Z είναι αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τότε η σύνθεση*

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y) \times \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Z)$$

είναι η σύνθεση των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών μεταξύ συνινωδών-ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$

$$\pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Y) \times \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}Y, \widehat{R}\widetilde{Q}Z) \longrightarrow \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Z)$$

Επιπλέον ορίζεται ένας συναρτητής $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ να είναι ταυτοτικός στα αντικείμενα και να στέλνει έναν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην ομοτοπική κλάση του μορφισμού $f' = \widehat{R}\widetilde{Q}(f)\colon \widehat{R}\widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ ο οποίος καλείται **κανονικός συναρτητής (canonical functor)**.

Σχόλιο 4.2.8. 1. Το Θεώρημα 3.2.33 εξασφαλίζει ότι η σύνθεση μορφισμών στην $Ho(\mathcal{C})$ είναι «καλά ορισμένη».

2. Εαν τα αντικείμενα X, Y είναι συνινώδη-ινώδη τότε ο μορφισμός $\gamma\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y)$ εκ κατασκευής είναι επί. Επιπλέον, ο μορφισμός γ επάγει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y) = \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Y) = \pi(\widehat{R}X, \widetilde{Q}Y) \backsimeq \pi(X,Y).$$

3. Αλλάζοντας τον συναρτητή $\widehat{R}'\widetilde{Q}$ με τον συναρτητή $\widetilde{Q}'\widehat{R}$ προκύπτει ο δυϊκός ορισμός της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ ο οποίος δεν διαφέρει σε σχέση με τον αρχικό. Η κατασκευή της ομοτοπικής κατηγορίας η οποία δώσαμε στην αρχή της παραγράφου μας απαλλάσει απο το να αποδείξουμε άμεσα την παραπάνω διαπίστωση.

Εν συνεχεία αποδεικνύουμε μια σημαντική ιδιότητα του κανονικού συναρτητή $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.

Θεώρημα 4.2.9. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Τότε ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν ο μορφισμός $\gamma(f)$ είναι ένας ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$. Επιπλέον οι μορφισμοί στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ αναπαρίστανται ως σύνθεση των εικόνων υπο του γ των μορφισμών στην $\mathcal{C}$ και των αντίστροφων εικόνων υπο του γ των ασθενών ισοδυναμιών στην $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Ο μορφισμός $\gamma(f)$ εξ' ορισμού παριστάνεται απο έναν μορφισμό $f'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ ο οποίος είναι καλά ορισμένος μέχρις ομοτοπίας. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι ασθενής ισοδυναμία. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία και κατ' επέκταση απο το δεύτερο σκέλος του ο μορφισμός f' είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον, εφόσον τα αντικείμενα $\widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ και $\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ είναι συνινώδη-ινώδη απο το Θεώρημα 3.2.42 έπεται ότι ο μορφισμός f' είναι είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $h\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(Y) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ τέτοιος ώστε ο μορφισμός $f' \circ h\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(Y) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_{\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)}\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(Y) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ και ο μορφισμός $h \circ f'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ είναι ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_{\widehat{R}\widetilde{Q}(X)}\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$. Επομένως, $[f' \circ h] = [1_{\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)}]$ και $[h \circ f'] = [1_{\widehat{R}\widetilde{Q}(X)}]$ και κατ' επέκταση $[f'] \circ [h] = [1_{\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)}]$ και $[h] \circ [f'] = [1_{\widehat{R}\widetilde{Q}(X)}]$. Έτσι, ο μορφισμός $[f'] \in \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}(X), \widehat{R}\widetilde{Q}(Y))$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον μορφισμό $[h]$. Ωστόσο, σύμφωνα με τον ορισμό του συναρτητή γ ο μορφισμός $\gamma(f)$ είναι ακριβώς ο μορφισμός $[f']$ και ως εκ τούτου είναι ένας ισομορφισμός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο $\gamma(f)$ είναι ένας ισομορφισμός. Τότε ο μορφισμός $[f']$ είναι αντιστρέψιμος στην $\pi(\widehat{R}\widetilde{Q}(X), \widehat{R}\widetilde{Q}(Y))$ και ως εκ τούτου ο μορφισμός f' έχει ομοτοπικό αντίστροφο. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $f'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ μεταξύ των συνινωδών-ινωδών αντικειμένων $\widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ και $\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.42 ο μορφισμός f' είναι ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι ασθενής ισοδυναμία και κατ' επέκταση απο το πρώτο σκέλος του ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία.

Όσον αφορά το δεύτερο ζητούμενο της παραπάνω πρότασης ας είναι X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $(\widetilde{Q}X, i_X)$, $(\widetilde{Q}Y, i_Y)$ ινώδεις-συνινώδεις προσέγγισεις στο X και στο Y αντίστοιχα και $(\widehat{R}\widetilde{Q}X, j_{\widetilde{Q}X})$, $(\widehat{R}\widetilde{Q}Y, j_{\widetilde{Q}Y})$ συνινώδεις-ινώδεις προσέγγισεις στο $\widetilde{Q}X$ και $\widetilde{Q}Y$ αντίστοιχα. Τότε τα αντικείμενα $\widetilde{Q}X$, $\widetilde{Q}Y$ είναι συνινώδη και τα αντικείμενα $\widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ και $\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ είναι ινώδη. Επιπλέον οι μορφισμοί $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$, $j_{\widetilde{Q}Y}\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ και $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$, $i_Y\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένες συννηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις αντίστοιχα και ως εκ τούτου ασθενείς ισοδυναμίες. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης, οι μορφισμοί $\gamma(i_X)\colon \widetilde{Q}(X) \longrightarrow X$ και $\gamma(j_{\widetilde{Q}(X)})\colon \widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ είναι ισομορφισμοί. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\beta_X = \gamma(j_{\widetilde{Q}(X)}) \circ \gamma(i_X)^{-1}\colon X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. Ορίζουμε $l \in \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(\widehat{R}\widetilde{Q}(X), \widehat{R}\widetilde{Q}(Y))$ να είναι η σύνθεση

$$\widehat{R}\widetilde{Q}(X) \xrightarrow{\beta_X^{-1}} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\beta_Y} \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$$

Τα αντικείμενα $\widehat{R}\widetilde{Q}(X)$, $\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ είναι ινώδη. Οι μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ και $\varnothing \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ είναι συννηματώσεις ως σύνθεση των συννηματώσεων $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$ και $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}X$ και των συννηματώσεων $j_{\widetilde{Q}Y}\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ και $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ αντίστοιχα. Ως εκ τούτου τα αντικείμενα $\widehat{R}\widetilde{Q}(X)$, $\widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ είναι εξίσου συνινώδη. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Σχολιού 4.2.8 ο μορφισμός $\gamma\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\widehat{R}\widetilde{Q}(X), \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(\widehat{R}\widetilde{Q}(X), \widehat{R}\widetilde{Q}(Y))$ είναι επί. Ως εκ τούτου για κάθε μορφισμό $l \in \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(\widehat{R}\widetilde{Q}(X), \widehat{R}\widetilde{Q}(Y))$ υπάρχει μορφισμός $f' \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\widehat{R}\widetilde{Q}(X), \widehat{R}\widetilde{Q}(Y))$ τέτοιος ώστε $\gamma(f') = l$. Έτσι, $\gamma(f') = \beta_Y \circ f \circ \beta_X^{-1}$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $\beta_X = \gamma(j_{\widetilde{Q}(X)}) \circ \gamma(i_X)$, $\beta_Y = \gamma(j_{\widetilde{Q}(Y)}) \circ \gamma(i_Y)$, $(\gamma(j_{\widetilde{Q}(X)}) \circ \gamma(i_X)^{-1})^{-1} = (\gamma(i_X)^{-1})^{-1} \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}(X)})^{-1}$ και $(\gamma(i_X)^{-1})^{-1} = \gamma(i_X)$ απο την τελευταία ισότητα προκύπτει:

$$\gamma(f') = \gamma(j_{\widetilde{Q}Y}) \circ \gamma(i_Y)^{-1} \circ f \circ (\gamma(j_{\widetilde{Q}(X)}) \circ \gamma(i_X)^{-1})^{-1} = \gamma(j_{\widetilde{Q}Y}) \circ \gamma(i_Y)^{-1} \circ f \circ (\gamma(i_X)^{-1})^{-1} \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}(X)})^{-1} =$$

$$= \gamma(j_{\widetilde{Q}Y}) \circ \gamma(i_Y)^{-1} \circ f \circ \gamma(i_X) \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}(X)})^{-1}$$

Συνθέτοντας απο αριστερά με τον μορφισμό $\gamma(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1}$ και δεξιά με τον μορφισμό $\gamma(j_{\widetilde{Q}(X)})$ έπεται ότι

$$\gamma(j_{\widetilde{Q}(Y)})^{-1} \circ \gamma(f') \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}(X)}) = \gamma(i_Y)^{-1} \circ f \circ (\gamma(i_X)$$

Εν συνεχεία συνθέτοντας απο αριστερά με τον μορφισμό $\gamma(i_Y)$ και απο δεξιά με τον μορφισμό $\gamma(i_X)^{-1}$ προκύπτει ότι

$$f = \gamma(i_Y) \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}(Y)})^{-1} \circ \gamma(f') \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}(X)}) \circ \gamma(i_X)^{-1}.$$

Επομένως, κάθε μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $Ho(\mathcal{C})$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια σύνθεση των εικόνων υπο του γ των μορφισμών στην $\mathcal{C}$ και των αντίστροφων εικόνων υπο του γ των ασθενών ισοδυναμιών. ■

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.9 είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.2.10. *Ας είναι $F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $G\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ δύο συναρτητές και $t\colon F \circ \gamma \longrightarrow G \circ \gamma$ ένας φυσικός μετασχηματισμός απο τον συναρτητή $F \circ \gamma$ στον συναρτητή $G \circ \gamma$, τότε ο t είναι εξίσου ένας φυσικός μετασχηματισμός απο τον συναρτητή F στον συναρτητή G.*

Απόδειξη. Ας είναι $t\colon F\circ\gamma \longrightarrow G\circ\gamma$ ένας φυσικός μετασχηματισμός απο τον συναρτητή $F\circ\gamma$ στον συναρτητή $G\circ\gamma$. Τότε υπάρχει μορφισμός $t_{\gamma(X)}\colon F(\gamma(X)) \longrightarrow G(\gamma(X))$ τέτοιος ώστε για κάθε μορφισμό $h_1=\gamma(f)\colon \gamma(X)\longrightarrow\gamma(Y)$ το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
F(\gamma(X)) \arrow[r, "t_{\gamma(X)}"] \arrow[d, "F(\gamma(f))"'] & G(\gamma(X)) \arrow[d, "G(\gamma(f))"] \\
F(\gamma(Y)) \arrow[r, "t_{\gamma(Y)}"] & G(\gamma(Y))
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $t_{\gamma(Y)}\circ F(\gamma(f)) = G(\gamma(f))\circ t_{\gamma(X)}$. Ας είναι $g\colon X\longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $\gamma(g)\colon\gamma(X)\longrightarrow\gamma(Y)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C})$. Κάνοντας χρήση της υπόθεσης για ακόμη μια φορά, υπάρχει μορφισμός $t_{\gamma(Y)}\colon F(\gamma(Y))\longrightarrow G(\gamma(Y))$ τέτοιος ώστε για κάθε μορφισμό $h_2=\gamma(g)^{-1}\colon\gamma(Y)\longrightarrow\gamma(X)$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
F(\gamma(Y)) \arrow[r, "t_{\gamma(Y)}"] \arrow[d, "F(\gamma(g)^{-1})"'] & G(\gamma(Y)) \arrow[d, "G(\gamma(g)^{-1})"] \\
F(\gamma(X)) \arrow[r, "t_{\gamma(X)}"] & G(\gamma(X))
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $t_{\gamma(X)}\circ F(\gamma(g)^{-1}) = G(\gamma(g)^{-1})\circ t_{\gamma(Y)}$. Θεωρούμε τον μορφισμό $h=h_1\circ h_2=\gamma(f)\circ\gamma(g)^{-1}\colon\gamma(Y)\longrightarrow\gamma(Y)$. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, τις ιδιότητες των συναρτητών F και G, τις ισότητες $t_{\gamma(Y)}\circ F(\gamma(f)) = G(\gamma(f))\circ t_{\gamma(X)}$ και $t_{\gamma(X)}\circ F(\gamma(g)^{-1}) = G(\gamma(g)^{-1})\circ t_{\gamma(Y)}$ καθώς και την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$t_{\gamma(Y)}\circ F(h) = t_{\gamma(Y)}\circ F(\gamma(f)\circ\gamma(g)^{-1}) = t_{\gamma(Y)}\circ(F(\gamma(f))\circ F(\gamma(g)^{-1})) = (t_{\gamma(Y)}\circ F(\gamma(f)))\circ F(\gamma(g)^{-1}) =$$

$$= (G(\gamma(f))\circ t_{\gamma(X)})\circ F(\gamma(g)^{-1}) = G(\gamma(f))\circ(t_{\gamma(X)}\circ F(\gamma(g)^{-1})) = G(\gamma(f))\circ(G(\gamma(g)^{-1})\circ t_{\gamma(Y)}) =$$

$$= (G(\gamma(f))\circ G(\gamma(g)^{-1}))\circ t_{\gamma(Y)} = G(\gamma(f)\circ\gamma(g)^{-1})\circ t_{\gamma(Y)} = G(h)\circ t_{\gamma(Y)}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα που προέκυψε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μορφισμός $t_{\gamma_{(Y)}}\colon F(\gamma(Y))\longrightarrow G(\gamma(Y))$ τέτοιος ώστε για κάθε μορφισμό $h=\gamma(f)\circ\gamma(g)^{-1}\colon\gamma(Y)\longrightarrow\gamma(Y)$ το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
F(\gamma(Y)) \arrow[r, "t_{\gamma(Y)}"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(\gamma(Y)) \arrow[d, "G(h)"] \\
F(\gamma(Y)) \arrow[r, "t_{\gamma(Y)}"] & G(\gamma(Y))
\end{tikzcd}$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι ο t είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός απο τον συναρτητή F στον συναρτητή G. ■

Όπως είδαμε στην Παρατήρηση 4.2.4 η τοπικοποίηση μιας τυχαίας κατηγορίας εφοδιασμένης με μια κλάση ασθενών ισοδυναμιών δεν υπάρχει πάντα εξαιτίας συνολοθεωρητικών προβλημάτων. Ωστόσο, τα αξιώματα μιας κατηγορίας μοντέλο εξασφαλίζουν ότι τέτοια τοπικοποίηση υπάρχει όπως αποδεικνύεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.11. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Τότε η Quillen ομοτοπική κατηγορία της $\mathcal{C}$, ορισμένη ως τοπικοποιήση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών της, υπάρχει.*

Απόδειξη. Ας είναι X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Επιλέγουμε μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{Q}X, i_X)$ και μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $(\widehat{R}X, j_X)$ στο X. Αντίστοιχα, επιλέγουμε μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{Q}Y, i_Y)$ και μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $(\widehat{R}Y, j_Y)$ στο Y. Ορίζουμε την κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.7. Θα αποδείξουμε ότι ο συναρτητής $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ πληροί τις συνθήκες του Ορισμού 4.2.1. Υποθέτουμε ότι f είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση των ασθενών ισοδυναμιών $\mathcal{W}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $\gamma(f)$ είναι ένας ισομορφισμός και ως εκ τούτου η πρώτη συνθήκη του Ορισμού πληροίται. Όσον αφορά την δεύτερη συνθήκη του Ορισμού, υποθέτουμε ότι $G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής ο οποιός στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$. Αρκεί να κατασκευάσουμε έναν συναρτητή $G'\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιον ώστε $G' \circ \gamma = G$ και κατόπιν να αποδείξουμε ότι είναι μοναδικός. Ορίζουμε τον G' ως εξής:

- $G'(X) = G(X)$ για κάθε αντικείμενο X της $Ho(\mathcal{C})$.
- Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $Ho(\mathcal{C})$, τότε ο f είναι η ομοτοπική κλάση ενός μορφισμού $f'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Y)$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.5 ο συναρτητής G στέλνει όλα τα στοιχεία αυτής της ομοτοπικής κλάσης στον ίδιο μορφισμό στην $\mathcal{C}'$. Έτσι, ορίζουμε

$$G'(f) = G(i_Y) \circ G(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1} \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1}.$$

Ανάλογα με τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$, ο μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow Z$ είναι η ομοτοπική κλάση του μορφισμού $g'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(Y) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Z)$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι η ομοτοπική κλάση του μορφισμού $g' \circ f'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(Z)$. Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X\colon X \longrightarrow X$ είναι η ομοτοπική κλάση του ταυτοτικού μορφισμού $1'_X\colon \widehat{R}\widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}(X)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του G', τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1'_X$, $1_{G(\widetilde{Q}Y)}$, $1_{G(\widehat{R}\widetilde{Q}Y)}$ και $1_{G(\widehat{R}\widetilde{Q}X)}$, τις ισότητες $G(i_Y) \circ G(i_Y)^{-1} = 1_{G(Y)}$, $G(j_{\widetilde{Q}X})^{-1} \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) = 1_{G(\widehat{R}\widetilde{Q}X)}$, $G(i_X) \circ G(i_X)^{-1} = 1_{G(X)}$ και ότι ο $G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής προκύπτει ότι:

$$G'(g) \circ G'(f) = G(i_Z) \circ G(j_{\widetilde{Q}Z})^{-1} \circ G(g') \circ G(j_{\widetilde{Q}Y}) \circ G(i_Y)^{-1} \circ G(i_Y) \circ G(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1} \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ$$

$$\circ G(i_X)^{-1} = G(i_Z) \circ G(j_{\widetilde{Q}Z})^{-1} \circ G(g') \circ G(j_{\widetilde{Q}Y}) \circ 1_{G(\widetilde{Q}Y)} \circ G(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1} \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1} =$$

$$= G(i_Z) \circ G(j_{\widetilde{Q}Z})^{-1} \circ G(g') \circ G(j_{\widetilde{Q}Y}) \circ G(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1} \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1} = G(i_Z) \circ G(j_{\widetilde{Q}Z})^{-1} \circ$$

$$\circ G(g') \circ 1_{G(\widehat{R}\widetilde{Q}Y)} \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1} = G(i_Z) \circ G(j_{\widetilde{Q}Z})^{-1} \circ G(g') \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ$$

$$\circ G(i_X)^{-1} = G(i_Z) \circ G(j_{\widetilde{Q}Z})^{-1} \circ G(g' \circ f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1} = G'(g \circ f)$$

και

$$G'(1_X) = G(i_X) \circ G(j_{\widetilde{Q}X})^{-1} \circ G(1'_X) \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1} = G(i_X) \circ G(j_{\widetilde{Q}X})^{-1} \circ G(1'_X \circ j_{\widetilde{Q}X}) \circ$$

$$\circ G(i_X)^{-1} = G(i_X) \circ G(j_{\widetilde{Q}X})^{-1} \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1} = G(i_X) \circ 1_{G\widetilde{Q}X} \circ G(i_X)^{-1} = G(i_X) \circ G(i_X)^{-1} =$$

$$= 1_{GX} = 1_{G'X}$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι ο $G'\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής. Εν συνεχεία, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς των συναρτητών $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ και $G'\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ισχύει ότι

$$(G \circ \gamma)(X) = G(\gamma(X)) = G'(X) = G(X).$$

Επιπλέον, για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 υπάρχει μορφισμός $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ και αντίστοιχα σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του για κάθε μορφισμό $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ υπάρχει μορφισμός $f'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ τέτοιοι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q}X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{Q}X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "j_{\widetilde{Q}X}"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "j_{\widetilde{Q}Y}"] \\ \widehat{R}\widetilde{Q}X \arrow[r, "f'"'] & \widehat{R}\widetilde{Q}Y. \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $f \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{f}$ και $f' \circ j_{\widetilde{Q}X} = j_{\widetilde{Q}Y} \circ \widetilde{f}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή G στις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $G(f) \circ G(i_X) = G(i_Y) \circ G(\widetilde{f})$ και $G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) = G(j_{\widetilde{Q}Y}) \circ G(\widetilde{f})$. Οι μορφισμοί $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ και $i_Y\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ ως τετριμμένες νηματώσεις και οι μορφισμοί $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ και $j_{\widetilde{Q}Y}\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ ως τετριμμένες συννηματώσεις είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Επομένως, σύμφωνα με την υπόθεση σχετικά με τον συναρτητή G οι μορφισμοί $G(i_X)\colon G(\widetilde{Q}X) \longrightarrow G(X)$, $G(i_Y)\colon G(\widetilde{Q}Y) \longrightarrow G(Y)$, $G(j_{\widetilde{Q}X})\colon G(\widetilde{Q}X) \longrightarrow G(\widehat{R}\widetilde{Q}X)$ και $G(j_{\widetilde{Q}Y})\colon G(\widetilde{Q}Y) \longrightarrow G(\widehat{R}\widetilde{Q}Y)$ είναι ισομορφισμοί. Συνθέτοντας απο αριστερά με τον μορφισμό $G(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1}$ την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $G(\widetilde{f}) = G(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1} \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X})$. Κατ' όπιν αντικαθιστώντας στην ισότητα $G(f) \circ G(i_X) = G(i_Y) \circ G(\widetilde{f})$ και συνθέτοντας απο τα δεξιά με τον μορφισμό $G(i_X)^{-1}$ συνάγεται ότι $G(f) = G(i_Y) \circ G(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1} \circ G(f') \circ G(j_{\widetilde{Q}X}) \circ G(i_X)^{-1}$. Εφόσον $\gamma(f)$ είναι η ομοτοπική κλάση του μορφισμού f' έπεται ότι $G(f) = G'(\gamma(f))$ για κάθε μορφισμό f στην $\mathcal{C}$. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω $G' \circ \gamma = G$. Μας απομένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα του συναρτητή G'. Εκ κατασκευής του συναρτητή G' αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $Ho(\mathcal{C})$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως σύνθεση των εικόνων υπο του γ των μορφισμών στην $\mathcal{C}$ και των αντίστροφων εικόνων υπο του γ των ασθενών ισοδυναμιών δηλαδή ως $f = \gamma(i_Y) \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}Y})^{-1} \circ \gamma(f') \circ \gamma(j_{\widetilde{Q}X}) \circ \gamma(i_X)^{-1}$ για κάποιον μορφισμό $f'\colon \widehat{R}\widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ στην $\mathcal{C}$. Το ζητούμενο εξασφαλίζεται απο το Θεώρημα 4.2.9. ■

Σχόλιο 4.2.12.

1. Λόγω της μοναδικότητας μέχρις ισομορφισμού της τοπικοποίησης μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ το Θεώρημα 4.2.11 ισχυρίζεται ότι εαν $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία μοντέλο και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ είναι η κλάση των ασθενών ισοδυναμιών της, τότε η τοπικοποίηση της $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ υπάρχει και είναι ισόμορφη με την $Ho(\mathcal{C})$.

2. Εφόσον οι μορφισμοί $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ και $j_X\colon X \longrightarrow \widehat{R}X$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες και ο συναρτητής $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $Ho(\mathcal{C})$ έπεται ότι τα αντικείμενα X, $\widetilde{Q}X$ και $\widehat{R}X$ είναι ισόμορφα ως αντικείμενα της $Ho(\mathcal{C})$.

Πρόταση 4.2.13. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, X ένα συνινώδες αντικείμενο της και Y ένα ινώδες αντικείμενο της. Τότε ο μορφισμός $\gamma\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y)$ είναι «επί» και επάγει έναν ισομορφισμό $\pi(X,Y) \simeq \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο και Y ένα ινώδες αντικείμενο της κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$. Τότε ισχύει ότι $\widetilde{Q}X \simeq X$ και ο μορφισμός $Y \longrightarrow *$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση. Ας είναι $(\widetilde{Q}Y, i_Y)$ ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στο Y. Τότε $\widetilde{Q}Y$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο και ο μορφισμός $i_Y\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Ο μορφισμός $\widetilde{Q}Y \longrightarrow *$ είναι νημάτωση ως σύνθεση των νηματώσεων $Y \longrightarrow *$ και $i_Y\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$. Έτσι, το $\widetilde{Q}Y$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο. Ως εκ τούτου $\widehat{R}\widetilde{Q}Y \simeq \widetilde{Q}Y$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.11 και το

Λήμμα 4.2.5 ο συναρτητής $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ προσδιορίζει τους ομοτοπικούς μορφισμούς και κατ' επέκταση επάγει έναν μορφισμό $\pi(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των μορφισμών στην $Ho(\mathcal{C})$, τους ισομορφισμούς $\widetilde{Q}X \simeq X$ και $\widehat{R}\widetilde{Q}Y \simeq \widetilde{Q}Y$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 3.2.34 καθώς και την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y) = \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Y) = \pi(\widehat{R}X, \widetilde{Q}Y) \simeq \pi(X, \widetilde{Q}Y) \simeq \pi(X,Y).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y) = \pi(X,Y)$ προκύπτει ότι για κάθε $[f] \in \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y)$ υπάρχει μορφισμός $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ τέτοιος ώστε $\gamma(f) = [f]$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\gamma\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y)$ είναι «επί». ■

Το ακόλουθο Θεώρημα μας δίνει μια εναλλακτική κατασκευή της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$.

Θεώρημα 4.2.14. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Τότε υπάρχει μια κατασκευή της Quillen ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ ως τοπικοποίηση της $\mathcal{C}$ ως προς την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών της τέτοια ώστε εαν X, Y είναι συνινώδη-ινώδη αντικείμενα της ισχύει* $\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(\gamma(X), \gamma(Y)) = \pi(X,Y)$.

Απόδειξη. Για κάθε συνινώδες αντικείμενο X ισχύει ότι $\widetilde{Q}X = X$. Στην περίπτωση αυτή ο μορφισμός $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ είναι ο ταυτοτικός μορφισμός. Για κάθε αντικείμενο X το οποίο δεν είναι συνινώδες επιλέγουμε μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $(\widetilde{Q}X, i_X)$ στο X. Αντίστοιχα, για κάθε ινώδες αντικείμενο X ισχύει ότι $\widehat{R}X = X$. Στην περίπτωση αυτή ο μορφισμός $j_X\colon X \longrightarrow \widehat{R}X$ είναι ο ταυτοτικός μορφισμός. Για κάθε αντικείμενο X το οποίο δεν είναι ινώδες επιλέγουμε μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $(\widehat{R}X, j_X)$ στο X. Ορίζουμε την κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ ως εξής:

1. Τα αντικείμενα της $Ho(\mathcal{C})$ είναι τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$.

2. Εαν X,Y είναι αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τότε

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(\widehat{R}'\widetilde{Q}X, \widehat{R}'\widetilde{Q}Y) = \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Y).$$

3. Εαν X,Y,Z είναι αντικείμενα της $\mathcal{C}$ τότε η σύνθεση

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y) \times \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Z)$$

είναι η σύνθεση των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών μεταξύ συνινωδών-ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$

$$\pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Y) \times \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}Y, \widehat{R}\widetilde{Q}Z) \longrightarrow \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}Z)$$

Εν συνεχεία ορίζουμε τον $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ ως εξής:

- $\gamma(X) = X$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$.
- Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, "!!"] \arrow[d, "!"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\
\widetilde{Q}X \arrow[r, "f\circ i_X"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Εφόσον $\varnothing$ είναι ένα αρχικό αντικείμενο το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο $\widetilde{Q}X$ είναι συνινώδες ο μορφισμός $!\colon \varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}X$ είναι συννημάτωση.

Επιπλέον, ο μορφισμός $i_Y\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{f} = \widetilde{Q}f\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου $\widetilde{f}\circ ! = !!$ και $i_Y \circ \widetilde{f} = f \circ i_X$. Έτσι, ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό f. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\widetilde{Q}X$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.34 ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι καλά ορισμένος μέχρις αριστερής ομοτοπίας. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.23 ο μορφισμός $\widetilde{f}$ είναι εξίσου καλά ορισμένος μέχρις δεξιάς ομοτοπίας. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{Q}X \arrow[r, "j_{\widetilde{Q}Y}\circ \widetilde{Q}f"] \arrow[d, "j_{\widetilde{Q}X}"'] & \widehat{R}\widetilde{Q}Y \arrow[d, "\star"] \\
\widehat{R}\widetilde{Q}X \arrow[r, "\star\star"'] \arrow[ur, dashed, "f'=\widehat{R}\widetilde{Q}f"] & *
\end{tikzcd}
$$

Εφόσον $*$ είναι ένα τελικό αντικείμενο το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο $\widehat{R}\widetilde{Q}Y$ είναι ινώδες, ο μορφισμός $\star\colon \widehat{R}\widetilde{Q}Y \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Επιπλέον ο μορφισμός $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $f' = \widehat{R}\widetilde{Q}f\colon \widehat{R}\widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα. Ο μορφισμός $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι συννημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ και $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}X$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι συνινώδες. Επιπλέον εφόσον το αντικείμενο $\widehat{R}\widetilde{Q}Y$ είναι ινώδες σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.34 και την Πρόταση 3.2.28 ο μορφισμός $f' = \widehat{R}\widetilde{Q}f\colon \widehat{R}\widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ είναι καλά ορισμένος μέχρις ομοτοπίας. Έτσι ορίζουμε

$$\gamma(f) = [f']$$

για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$.

Σύμφωνα με το Πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.1.16 ο $\widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ είναι ένας συναρτητής. Τότε σύμφωνα με τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ και κάθε μορφισμό $g\colon Y \longrightarrow Z$,

$$\widetilde{Q}(g\circ f) = \widetilde{Q}(g)\circ\widetilde{Q}(f)$$

και

$$\widetilde{Q}(1_X) = 1_{\widetilde{Q}X}$$

Ανάλογα, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 4.1.16 ο $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ είναι ένας συναρτητής. Εφαρμόζοντας τον στις τελευταίες ισότητες και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι

$$\widehat{R}\widetilde{Q}(g\circ f) = \widehat{R}(\widetilde{Q}(g)\circ\widetilde{Q}(f)) = \widehat{R}\widetilde{Q}(g)\circ\widehat{R}\widetilde{Q}(f)$$

και

$$\widehat{R}\widetilde{Q}(1_X) = \widehat{R}(1_{\widetilde{Q}X}) = 1_{\widehat{R}\widetilde{Q}X}$$

Λαμβάνοντας τις ομοτοπικές κλάσεις στις τελευταίες ισότητες και παίρνοντας υπ' όψιν ότι $[\widehat{R}\widetilde{Q}(g)\circ \widehat{R}\widetilde{Q}(f)] = [\widehat{R}\widetilde{Q}(g)]\circ[\widehat{R}\widetilde{Q}(f)]$ συνάγεται ότι $[\widehat{R}\widetilde{Q}(g\circ f)] = [\widehat{R}\widetilde{Q}(g)]\circ[\widehat{R}\widetilde{Q}(f)]$ και $[\widehat{R}\widetilde{Q}(1_X)] = [1_{\widehat{R}\widetilde{Q}X}]$. Έτσι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ καθώς και τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι

$$\gamma(g\circ f) = [\widehat{R}\widetilde{Q}(g\circ f)] = [\widehat{R}\widetilde{Q}(g)]\circ[\widehat{R}\widetilde{Q}(f)] = \gamma(g)\circ\gamma(f)$$

και

$$\gamma(1_X) = [\widehat{R}\widetilde{Q}(1_X)] = [1_{\widehat{R}\widetilde{Q}X}]$$

Ως εκ τούτου ο $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ είναι ένας συναρτητής. Ο συναρτητής γ ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα η οποία περιγράφεται στον Ορισμό 4.2.1 και η αποδεικτική διαδικασία η οποία ακολουθείται είναι ίδια με αυτή που ακολουθήσαμε στο Θεώρημα 4.2.11 Έτσι, ορίσαμε την κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ και τον συναρτητή $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$. Όσον αφορά το τελευταίο ζητούμενο λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή γ, τον ορισμό τον μορφισμών στην $Ho(\mathcal{C})$ και ότι τα αντικείμενα X και Y είναι συνινώδη-ινώδη έχουμε ότι

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(\gamma(X),\gamma(Y)) = \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X,Y) = \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X,\widehat{R}\widetilde{Q}Y) = \pi(\widehat{R}X,\widehat{R}Y) = \pi(X,Y). \quad \blacksquare$$

Εν συνεχεία αποδεικνύουμε ότι η ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ η οποία κατασκευάσαμε στο Θεώρημα 4.2.11 είναι ισόμορφη της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ που κατασκευάσαμε στο Θεώρημα 4.2.14.

Πρόταση 4.2.15. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ η οποία κατασκευάστηκε στο Θεώρημα 4.2.11 είναι ισόμορφη της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ που κατασκευάστηκε στο Θεώρημα 4.2.14 και ο ισομορφισμός μεταξύ τους είναι ο μοναδικός ο οποίος μετατίθεται με τους συναρτητές απο την $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\gamma_{4.2.11}\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ τον συναρτητή που ορίστηκε στο Θεώρημα 4.2.11 και αντίστοιχα με $\gamma_{4.2.14}\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ τον συναρτητή που ορίστηκε στο Θεώρημα 4.2.14. Λόγω της καθολικής ιδιότητας που ικανοποιεί ο συναρτητής $\gamma_{4.2.11}\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ τέτοιος ώστε $F \circ \gamma_{4.2.11} = \gamma_{4.2.14}$. Αντίστοιχα, λόγω της καθολικής ιδιότητας που ικανοποιεί ο συναρτητής $\gamma_{4.2.14}\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $\widetilde{F}\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ τέτοιος ώστε $\widetilde{F} \circ \gamma_{4.2.14} = \gamma_{4.2.11}$. Ως εκ τούτου έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\gamma_{4.2.11}"] \arrow[d, "\gamma_{4.2.14}"'] & Ho(\mathcal{C}) \arrow[dl, shift left, "F"] \\
Ho(\mathcal{C}) \arrow[ur, shift left, "\widetilde{F}"] &
\end{tikzcd}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $\widetilde{F} \circ F \circ \gamma_{4.2.11} = \gamma_{4.2.11}$ και $F \circ \widetilde{F} \circ \gamma_{4.2.14} = \gamma_{4.2.14}$. Επιπλέον για τον ταυτοτικό συναρτητή $Id_{Ho(\mathcal{C})}$ ισχύει ότι $Id_{Ho(\mathcal{C})} \circ \gamma_{4.2.11} = \gamma_{4.2.11}$ και $Id_{Ho(\mathcal{C})} \circ \gamma_{4.2.14} = \gamma_{4.2.14}$. Έτσι, λόγω της μοναδικότητας των συναρτητών $\widetilde{F} \circ F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ και $F \circ \widetilde{F}\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ προκύπτει ότι $\widetilde{F} \circ F = Id_{Ho(\mathcal{C})}$ και $F \circ \widetilde{F} = Id_{Ho(\mathcal{C})}$. Ως εκ τούτου ο συναρτητής $F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ είναι ένας ισομορφισμός. Επομένως, υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ ο οποίος μετατίθεται με τους συναρτητές απο την $\mathcal{C}$. $\blacksquare$

Ορισμός 4.2.16. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και $Ho(\mathcal{C})$ η Quillen ομοτοπική της κατηγορία.*

1. *Η κατηγορία $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $Ho(\mathcal{C})$ η οποία παράγεται απο τα συνινώδη αντικείμενα.*

2. *Η κατηγορία $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}_{\mathbf{f}})$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $Ho(\mathcal{C})$ η οποία παράγεται απο τα ινώδη αντικείμενα.*

3. *Η κατηγορία $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}_{\mathbf{cf}})$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $Ho(\mathcal{C})$ η οποία παράγεται απο τα συνινώδη-ινώδη αντικείμενα.*

Θεώρημα 4.2.17. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$ είναι φυσικά ισόμορφη με την κατηγορία $Ho(\mathcal{C}_{cf})$.*

Απόδειξη. Ας είναι $Ho(\mathcal{C}_{cf})$ η πλήρης υποκατηγορία της Quillen ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ της $\mathcal{C}$ η οποία παράγεται απο τα συνινώδη-ινώδη αντικείμενα και $\pi\mathcal{C}_{cf}$ η κλασική ομοτοπική κατηγορία της $\mathcal{C}$. Η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$ είναι εξ' ορισμού η κατηγορία πηλίκο $\mathcal{C}_{cf}/\backsim$ όπου $((\backsim))$ είναι η σχέση ομοτοπίας. Έτσι, θεωρούμε τον φυσικό συναρτητή πηλίκο $\pi\colon \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \mathcal{C}_{cf}/\backsim = \pi\mathcal{C}_{cf}$. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών-ινωδών αντικειμένων. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.42 ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία. Ως εκ τούτου ο συναρτητής $\pi\colon \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \mathcal{C}_{cf}/\backsim = \pi\mathcal{C}_{cf}$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες σε κλάσεις ομοτοπικών ισοδυναμιών δηλαδή σε ισομορφισμούς στην $\pi\mathcal{C}_{cf}$. Λόγω της καθολικής ιδιότητας της $Ho(\mathcal{C}_{cf})$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $F\colon Ho(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{cf} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi"'] & Ho(\mathcal{C}_{cf}) \arrow[dl, "F"] \\ \pi\mathcal{C}_{cf} & \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $F \circ \gamma = \pi$. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικός ενός μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$. Εφόσον ο συναρτητής $\gamma\colon \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{cf})$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}_{cf}$ σε ισομορφισμούς στην $Ho(\mathcal{C}_{cf})$ σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.5 και την Πρόταση 3.2.28 έπεται ότι $\gamma(f) = \gamma(g)$. Εφόσον ο συναρτητής $\gamma\colon \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{cf})$ είναι τέτοιος ώστε εαν $f \backsim g$ τότε $\gamma(f) = \gamma(g)$ λόγω της καθολικής ιδιότητας που ικανοποιεί ο συναρτητής $\pi\colon \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf} = \mathcal{C}_{cf}/\backsim$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G\colon \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{cf})$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{cf} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"'] & \pi\mathcal{C}_{cf} \arrow[dl, "G"] \\ Ho(\mathcal{C}_{cf}) & \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $G\circ\pi = \gamma$. Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την ισότητα $F\circ\gamma = \pi$ προκύπτει ότι $F\circ G\circ\pi = \pi$ και $G\circ F\circ\gamma = \gamma$. Επιπλέον για τους ταυτοτικούς συναρτητές $Id_{\pi\mathcal{C}_{cf}}\colon \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ και $Id_{Ho(\mathcal{C}_{cf})}\colon Ho(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{cf})$ ισχύει ότι $Id_{\pi\mathcal{C}_{cf}} \circ \pi = \pi$ και $Id_{Ho(\mathcal{C}_{cf})} \circ \gamma = \gamma$. Έτσι, λόγω της μοναδικότητας των συναρτητών $F \circ G\colon \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ και $G \circ F\colon Ho(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{cf})$ προκύπτει ότι $F \circ G = Id_{\pi\mathcal{C}_{cf}}$ και $G \circ F = Id_{Ho(\mathcal{C}_{cf})}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο συναρτητής $F\colon Ho(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ είναι ένας ισομορφισμός. Επομένως, η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$ είναι φυσικά ισόμορφη με την κατηγορία $Ho(\mathcal{C}_{cf})$. ■

Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο αποδεικνύοντας ότι η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$ είναι ισοδύναμη με την Quillen ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$.

Θεώρημα 4.2.18. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$ της $\mathcal{C}$ είναι ισοδύναμη με την Quillen ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ της $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $\pi\mathcal{C}_{cf}$ η κλασική ομοτοπική κατηγορία και $Ho(\mathcal{C})$ η Quillen ομοτοπική κατηγορία της $\mathcal{C}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας συναρτητής $\gamma_*\colon \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ ο οποίος είναι πλήρης, πιστός και ουσιωδώς επί. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.13 ο μορφισμός $\gamma\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})(X,Y)}$ είναι επί και επάγει έναν ισομορφισμό $\pi(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}\ (X, Y)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\pi(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(X, Y)$ και ότι $\gamma_*(X) = X$ και $\gamma_*(Y) = Y$ έπεται ότι ο μορφισμός $\gamma_{*X,Y}\colon \mathsf{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(\gamma_*(X), \gamma_*(Y))$ είναι «1-1» και «επί». Ως εκ τούτου ο συναρτητής $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ επάγει έναν πλήρη και πιστό συναρτητή $\gamma_*\colon \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.

Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο συναρτητής γ_* είναι ουσιωδώς επί. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αντικειμένο της $Ho(\mathcal{C})$ είναι ισόμορφο με ένα αντικείμενο το οποίο είναι στην εικόνα του συναρτητή γ_*. Απο την Πρόταση 3.2.34 έπεται ότι οι τετριμμένες νηματώσεις και οι τετριμμένες συννηματώσεις στην $\mathcal{C}_{cf}$ γίνονται ισομορφισμοί στην $\pi\mathcal{C}_{cf}$. Ως εκ τούτου η κλάση ομοτοπίας μιας ασθενούς ισοδυναμίας στην $\mathcal{C}_{cf}$ γίνεται ισομορφισμός στην κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Σύμφωνα με το πρωτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ισχύει ότι $f \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{Q}f$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ και $i_Y\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow Y$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $\widetilde{Q}f\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Ανάλογα, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ισχύει ότι $\widehat{R}\widetilde{Q}f \circ j_{\widetilde{Q}X} = j_{\widetilde{Q}Y} \circ \widetilde{Q}f$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ και $j_{\widetilde{Q}Y}\colon \widetilde{Q}Y \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $\widehat{R}\widetilde{Q}f\colon \widehat{R}\widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}Y$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}_{cf}$. Έτσι, ο μορφισμός $\gamma(f) = [\widehat{R}\widetilde{Q}f]$ είναι ένας ισομορφισμός. Εφόσον για κάθε αντικείμενο X οι μορφισμοί $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ και $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες στην κατηγορία $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 έπεται ότι οι μορφισμοί $\gamma(i_X)\colon \gamma(\widetilde{Q}X) \longrightarrow \gamma(X)$ και $\gamma(j_{\widetilde{Q}X})\colon \gamma(\widetilde{Q}X) \longrightarrow \gamma(\widehat{R}\widetilde{Q}X)$ είναι ισομορφισμοί στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$. Έτσι, ο μορφισμός $\gamma(j_{\widetilde{Q}X}) \circ \gamma(i_X)^{-1}\colon \gamma(X) \longrightarrow \gamma(\widehat{R}\widetilde{Q}X)$ είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών. Όμως σύμφωνα με τον ορισμό του συναρτητή γ έχουμε ότι $\gamma(X) = X$ και $\gamma(\widehat{R}\widetilde{Q}X) = \widehat{R}\widetilde{Q}X$. Έτσι, ο μορφισμός $\gamma(j_{\widetilde{Q}X}) \circ \gamma(i_X)^{-1}\colon X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C})$. Έτσι, ο συναρτητής $\gamma_*\colon \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών. Επομένως, η κλασική ομοτοπική κατηγορία $\pi\mathcal{C}_{cf}$ της $\mathcal{C}$ είναι ισοδύναμη με την Quillen ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ της $\mathcal{C}$. ■

Κεφάλαιο 5

Παραγόμενοι Συναρτητές και Συναρτητές του Quillen

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάμε τους μορφισμούς μεταξύ κατηγοριών μοντέλα. Τον ρόλο αυτών των μορφισμών παίζουν οι συναρτητές του Quillen. Οι συναρτητές του Quillen οι οποίοι ονομάστηκαν έτσι προς τιμήν του Αμερικάνου μαθηματικού Daniel Quillen αποτελούν ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών μεταξύ κατηγοριών μοντέλα, οι οποίοι επάγουν συναρτητές στις ομοτοπικές κατηγορίες. Οι συναρτητές αυτοί όπως θα δούμε καλούνται παραγόμενοι συναρτητές και είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις εφαρμογές. Οι παραγόμενοι συναρτητές όπως είναι φυσικό συνδέονται με τους συναρτητές του Quillen, και αν και ορισμένες φορές ο παραγόμενος συναρτητής είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών, ο συναρτητής του Quillen από τον οποίο έχει προέλθει δεν είναι απαραίτητα ισοδυναμία κατηγοριών. Οι εν λόγω συναρτητές καλούνται ισοδυναμίες του Quillen και είναι συναρτητές του Quillen οι οποίες ικανοποιούν μια επιπλέον συνθήκη, η οποία συνεπάγεται ότι οι παραγόμενοι συναρτητές τους είναι ισοδυναμίες μεταξύ των ομοτοπικών κατηγοριών.

5.1 Συναρτητές του Quillen

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε τον «κατάλληλο» μορφισμό μεταξύ κατηγοριών μοντέλα. Αυτό το οποίο θα ήταν αναμενόμενο να συνιστά έναν μορφισμό μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλα $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ο οποίος θα ήταν συμβατός με την δομή των $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$, δηλαδή ένας συναρτητής ο οποίος διατηρεί τις ασθενείς ισοδυναμίες, τις νηματώσεις και τις συννηματώσεις. Ωστόσο, οι συναρτητές οι οποίοι συνήθως «εμφανίζονται» μεταξύ κατηγοριών μοντέλα δεν πληρούν αυτή την ιδιότητα. Παρόλα αυτά αρκετοί από αυτούς είναι ένας από ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών, ώστε ο αριστερός συζυγής διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις, ενώ ο δεξιός συζυγής διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις. Οι συναρτητές αυτοί είναι οι συναρτητές του Quillen τους οποίους μελετάμε ευθύς αμέσως.

Ορισμός 5.1.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλο.*

1. *Ένας συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ καλείται* **αριστερός συναρτητής του Quillen (left Quillen functor)** *εάν είναι αριστερός συζυγής συναρτητής και διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις.*

2. *Ένας συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ καλείται* **δεξιός συναρτητής του Quillen (right Quillen functor)** *εάν είναι δεξιός συζυγής συναρτητής και διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις.*

3. *Το ζεύγος συναρτητών (F, G) καλείται* **ζεύγος συναρτητών του Quillen (Quillen pair of functors)** *εάν είναι ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών όπου ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι*

αριστερός συναρτητής του Quillen και ο συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι δεξιός συναρτητής του Quillen.

Σχόλιο 5.1.2. 1. Ορισμένες φορές στην βιβλιογραφία ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen αναφέρεται ως συζυγία του Quillen.

2. Πρακτικά, ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen αναφέρεται είτε μόνο με τον αριστερό συζυγή συναρτητή είτε μόνο με τον δεξιό συζυγή συναρτητή. Ωστόσο, ο αντίστοιχος συζυγής συναρτητής είτε στην μια είτε στην άλλη περίπτωση είναι πάντα αυτός ο οποίος εννοείται κατά προφανή τρόπο.

Εν συνεχεία παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα ζευγών συναρτητών του Quillen.

Παράδειγμα 5.1.3. 1. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και I ένα σύνολο. Το ζεύγος (C, P) όπου $P\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής γινόμενο και $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$ είναι ο διαγώνιος συναρτητής, είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Πράγματι, ο συναρτητής γινόμενο $P\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ένας δεξιά συζυγής του διαγώνιου συναρτητή $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$. Έτσι, το (C, P) είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. Επιπλέον, από τον ορισμό της δομής κατηγορίας μοντέλο στο γινόμενο κατηγοριών μοντέλο (βλέπε το σκέλος (2) του Παραδείγματος 3.1.9) ο διαγώνιος συναρτητής $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$ διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις και κατ' επέκταση είναι αριστερός συναρτητής του Quillen και ο συναρτητής γινόμενο $P\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις και ως εκ τούτου είναι δεξιός Quillen συναρτητής.

2. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και I ένα σύνολο. Το ζεύγος (P', C) όπου $P'\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής συνγινόμενο και $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$ είναι ο διαγώνιος συναρτητής είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Πράγματι, ο συναρτητής συνγινόμενο $P'\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ένας αριστερός συζυγής συναρτητής του διαγώνιου συναρτητή $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$. Έτσι, το (P', C) είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. Επιπλέον, από τον ορισμό της δομής κατηγορίας μοντέλο στο γινόμενο κατηγοριών μοντέλο (βλέπε το σκέλος (2) του Παραδείγματος 3.1.9) ο συναρτητής συνγινόμενο $P'\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις και κατ' επέκταση είναι αριστερός συναρτητής του Quillen και ο διαγώνιος συναρτητής $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$ διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις και ως εκ τούτου είναι δεξιός συναρτητής του Quillen.

3. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο. Το ζεύγος $(*, F)$ όπου $*\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_*$ είναι ο συναρτητής της επισύναψης σημείου βάσης (disjoint basepoint functor) και $F\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}$ ο λησμονικός συναρτητής είναι ένα Quillen ζεύγος συναρτητών. Πραγματικά, ο λησμονικός συναρτητής $F\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι κατά προφανή τρόπο ένας δεξιός συναρτητής του Quillen. Από την Πρόταση 5.1.5 παρακάτω έπεται ότι ο συναρτητής επισύναψης σημείου βάσης είναι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen.

Παρατήρηση 5.1.4. Το Πόρισμα 3.2.37 έχει ως συνέπεια ότι κάθε αριστερός συναρτητής του Quillen διατηρεί τις ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων και ότι κάθε δεξιός συναρτητής του Quillen διατηρεί τις ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων.

Η ακόλουθη Πρόταση εξηγεί γιατί για να χαρακτηρίσουμε ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών (F, G) ως ζεύγος συναρτητών του Quillen μας αρκεί είτε ο συναρτητής F να είναι αριστερός συναρτητής του Quillen είτε ο συναρτητής G να είναι ένας δεξιός συναρτητής του Quillen.

Πρόταση 5.1.5. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλο και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.*

2. *Ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις.*

3. *Ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις.*

4. *Ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις.*

5. *Ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις και ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών. Θα αποδείξουμε ότι $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$.

- $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ Υποθέτουμε ότι (F, G) είναι ένα Quillen ζεύγος συναρτητών. Τότε εξ' ορισμού ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι αριστερός συναρτητής του Quillen. Ως εκ τούτου ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις.

- $\underline{(2) \Rightarrow (3)}$ Υποθέτουμε ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.25 ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις και νηματώσεις.

- $\underline{(3) \Rightarrow (4)}$ Υποθέτουμε ότι ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.25 ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις. Έτσι, ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις.

- $\underline{(4) \Rightarrow (5)}$ Υποθέτουμε ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.25 ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις και ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις.

- $\underline{(5) \Rightarrow (1)}$ Υποθέτουμε ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις και ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.25 ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις και ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις. Συνοψίζοντας, ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις γεγονός που αποδεικνύει ότι είναι αριστερός συναρτητής του Quillen και ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις γεγονός που αποδεικνύει ότι είναι δεξιός συναρτητής του Quillen. Επομένως, το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. ■

Παρατήρηση 5.1.6. Εάν $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}''$ είναι κατηγορίες μοντέλο και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $F'\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ είναι αριστεροί (αντίστοιχα δεξιοί) συναρτητές του Quillen, τότε η σύνθεση τους $F' \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ ορίζεται και είναι ένας αριστερός (αντίστοιχα δεξιός) συναρτητής του Quillen. Αντίστοιχα, εάν $(F, G)\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'$ και $(F', G')\colon \mathcal{C}' \leftrightarrows \mathcal{C}''$ είναι ζεύγη συναρτητών του Quillen, τότε η σύνθεση τους $(F' \circ F, G' \circ G)\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}''$ ορίζεται και είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Επιπλέον, η σύνθεση ζευγών συναρτητών του Quillen είναι προσεταιριστική και υπάρχει ουδέτερο στοιχείο: ο ταυτοτικός συναρτητής $\mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$.

Εν συνεχεία παραθέτουμε μια Πρόταση ισχυρότερη της Πρότασης 5.1.5 η οποία διατυπώθηκε από τον Daniel Dugger στο άρθρο του [9]. Η ακόλουθη πρόταση μας διευκολύνει όταν ασχολούμαστε με την τοπικοποίηση κατηγοριών εφοδιασμένων με την δομή κατηγορίας μοντέλο.

Πρόταση 5.1.7. (D. Dugger) *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.*

2. *Ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων και τετριμμένες συννηματώσεις.*

3. *Ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων και τετριμμένες νηματώσεις.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών. Θα αποδείξουμε ότι $(1) \Leftrightarrow (2)$ και $(1) \Leftrightarrow (3)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του ζεύγους συναρτητών του Quillen οι συνεπαγωγές $(1) \Rightarrow (2)$ και $(1) \Rightarrow (3)$ προκύπτουν άμεσα. Αρκεί να αποδείξουμε την συνεπαγωγή $(2) \Rightarrow (1)$ καθώς η συνεπαγωγή $(3) \Rightarrow (1)$ προκύπτει ως δυϊκή της.

Υποθέτουμε ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί εξίσου συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων και τετριμμένες συννηματώσεις. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την συνεπαγωγή $(5) \Rightarrow (1)$ της Πρότασης 5.1.5 αρκεί να αποδείξουμε ότι ο δεξιός συζυγής συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις. Ας είναι $p\colon X \longrightarrow Y$ μια τετριμμένη νημάτωση στην $\mathcal{C}'$. Εφόσον ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί τετριμμένες συννηματώσεις σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.1.25 ο δεξιός συζυγής συναρτητής G διατηρεί νηματώσεις. Ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ ως τετριμμένη νημάτωση είναι μια νημάτωση. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $G(p)\colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ είναι νημάτωση. Ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ ως τετριμμένη νημάτωση είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Για να έχουμε το ζητούμενο μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $G(p)\colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Στην περίπτωση αυτή έπεται ότι ο συναρτητής G διατηρεί τις ασθενείς ισοδυναμίες. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.1.23 μπορούμε να επιλέξουμε μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $p'\colon X' \longrightarrow Y'$ στον μορφισμό $G(p)\colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ τέτοια ώστε ο μορφισμός p' να είναι μια συννημάτωση. Έτσι, $p'\colon X' \longrightarrow Y'$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό $G(p)\colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ στην οποία οι συνινώδεις προσεγγίσεις (X', i_{GX}) και (Y', i_{GY}) στο GX και στο GY αντίστοιχα είναι ινώδεις-συνινώδεις. Ως εκ τούτου οι μορφισμοί $i_{GX}\colon X' \longrightarrow GX$ και $i_{GY}\colon Y' \longrightarrow GY$ είναι τετριμμένες νηματώσεις όπου X', Y' είναι συννινώδη αντικείμενα και επιπλέον ισχύει ότι $i_{GY} \circ p' = G(p) \circ i_{GX}$. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i_{GX}"] \arrow[d, "p'"'] & GX \arrow[d, "G(p)"] \\ Y' \arrow[r, "i_{GY}"'] & GY \end{tikzcd}$$

Το συζυγές του τελευταίου διαγράμματος είναι το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} FX' \arrow[r, "i^{\#}_{GX}"] \arrow[d, "F(p')"'] & X \arrow[d, "p"] \\ FY' \arrow[r, "i^{\#}_{GY}"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $p'\colon X' \longrightarrow Y'$ είναι μια συννημάτωση μεταξύ συνινωδών αντικειμένων και ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής F διατηρεί συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων έπεται ότι ο μορφισμός $F(p')\colon F(X') \longrightarrow F(Y')$ είναι συννημάτωση μεταξύ συνινωδών αντικειμένων. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) έπεται ότι υπάρχει μια ανύψωση $g\colon FY' \longrightarrow X$ στο τελευταίο μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου $g \circ F(p') = i^{\#}_{GX}$ και $p \circ g = i^{\#}_{GY}$. Απο την ισότητα $g \circ F(p') = i^{\#}_{GX}$ προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} FX' \arrow[r, "1_{FX'}"] \arrow[d, "F(p')"'] & FX' \arrow[d, "i^{\#}_{GX}"] \\ FY' \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Εαν $g^{\#} \colon Y' \longrightarrow GX$ είναι ο συζυγής του μορφισμού $g \colon FY' \longrightarrow X$ τότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "1_{X'}"] \arrow[d, "p'"'] & X' \arrow[d, "i_{GX}"] \\ Y' \arrow[r, "g^{\#}"'] \arrow[ur, dashed, "s"] & GX \end{tikzcd}$$

στο οποίο ο μορφισμός $p' \colon X' \longrightarrow Y'$ είναι μια συννημάτωση και ο μορφισμός $i_{GX} \colon X' \longrightarrow GX$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC4) υπάρχει μια ανύψωση $s \colon Y' \longrightarrow X'$ στο τελευταίο μεταθετικό διάγραμμα. Έτσι, ισχύει ότι $s \circ p' = 1_{X'}$ και $i_{GX} \circ s = g^{\#}$. Αντίστοιχα, από την ισότητα $p \circ g = i^{\#}_{GY}$ προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} FY' \arrow[r, "1_{FY'}"] \arrow[d, "g"'] & FY' \arrow[d, "i^{\#}_{GY}"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

Το συζυγές του τελευταίου διαγράμματος είναι το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "1_{Y'}"] \arrow[d, "g^{\#}"'] & Y' \arrow[d, "i_{GY}"] \\ GX \arrow[r, "G(p)"'] & GY \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $G(p) \circ g^{\#} = i_{GY} \circ 1_{Y'}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα και τις ισότητες $i_{GX} \circ s = g^{\#}$ και $i_{GY} \circ p' = G(p) \circ i_{GX}$ προκύπτει ότι:

$$i_{GY} \circ p' \circ s = G(p) \circ i_{GX} \circ s = G(p) \circ g^{\#} = i_{GY} \circ 1_{Y'}.$$

Έτσι, $[i_{GY} \circ p' \circ s] = [i_{GY} \circ 1_{Y'}]$. Υπενθυμίζουμε ότι ο μορφισμός $i_{GY} \colon Y' \longrightarrow GY$ είναι τετριμμένη νηματώση και το αντικείμενο Y' είναι συνινώδες. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 έπεται ότι ο μορφισμός $i_{GY} \colon Y' \longrightarrow GY$ επάγει έναν ισομορφισμό ${i_{GY}}^{Y'}_{*} \colon \pi^l(Y', Y') \longrightarrow \pi^l(Y', GY)$ μεταξύ των συνόλων των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών ο οποίος ορίζεται ως ${i_{GY}}^{Y'}_{*}([l]) = [i_{GY} \circ l]$. Ως εκ τούτου από την τελευταία ισότητα έπεται ότι ${i_{GY}}^{Y'}_{*}([p' \circ s]) = {i_{GY}}^{Y'}_{*}([1_{Y'}])$ και κατ' επέκταση $[p' \circ s] = [1_{Y'}]$. Έτσι, ο μορφισμός $p' \circ s \colon Y' \longrightarrow Y'$ είναι αριστερά ομοτοπικός του ταυτοτικού μορφισμού $1_{Y'} \colon Y' \longrightarrow Y'$. Επιπλέον εφόσον ο συναρτητής $\gamma \colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $Ho(\mathcal{C})$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.2.5 έπεται ότι $\gamma(p' \circ s) = \gamma(1_{Y'})$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που διέπουν τον γ ως συναρτητή και τον ορισμό του συναρτητή γ από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\gamma(p') \circ \gamma(s) = \gamma(1_{Y'}) = 1_{\gamma(Y')} = 1_{Y'}$. Εν συνεχεία εφαρμόζοντας τον συναρτητή γ στην ισότητα $s \circ p' = 1_{X'}$ προκύπτει ότι $\gamma(s \circ p') = \gamma(1_{X'})$ και κατ' επέκταση ομοίως με πριν $\gamma(s) \circ \gamma(p') = \gamma(1_{X'}) = 1_{\gamma(X')} = 1_{X'}$. Έτσι, από τις τελευταίες ισότητες ο μορφισμός $\gamma(p') \colon X' \longrightarrow Y'$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C})$ με αντίστροφο τον μορφισμό $\gamma(s) \colon Y' \longrightarrow X'$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $p' : X' \longrightarrow Y'$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Οι μορφισμοί $i_{GX} : X' \longrightarrow GX$ και $i_{GY} : Y' \longrightarrow GY$ ως τετριμμένες νηματώσεις είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Έτσι, από την ισότητα $i_{GY} \circ p' = G(p) \circ i_{GX}$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $G(p) \colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία και κατ' επέκταση τετριμμένη νημάτωση. Συνεπώς, ο συναρτητής $G \colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ διατηρεί τετριμμένες νηματώσεις. ■

Πρόταση 5.1.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλο και $F \colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon G$ ένα Quillen ζεύγος συναρτητών.*

1. *Ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Ο συναρτητής G στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}'$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F \colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Τότε από την Πρόταση 5.1.5 ο αριστερός συζυγής συναρτητής $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί εξίσου συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις. Ας είναι $f \colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών αντικειμένων. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.36 ο μορφισμός f παραγοντοποιείται ως εξής: $f = j \circ i$ όπου ο μορφισμός $i \colon X \longrightarrow Z$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $j \colon Z \longrightarrow Y$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση με δεξιό αντίστροφο $l \colon Y \longrightarrow Z$ ο οποίος είναι μια τετριμμένη συννημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός l είναι δεξιός αντίστροφος του μορφισμού j έπεται ότι $j \circ l = 1_Y$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που διέπουν κάθε συναρτητή προκύπτει ότι $F(j) \circ F(l) = 1_{F(Y)}$. Εφόσον ο μορφισμός $l \colon Y \longrightarrow Z$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση σύμφωνα με την ιδιότητα που χαρακτηρίζει τον συναρτητή F, ο μορφισμός $F(l)$ είναι εξίσου τετριμμένη συννημάτωση και κατ' επέκταση ασθενής ισοδυναμία. Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{\mathrm{F(Y)}} \colon F(Y) \longrightarrow F(Y)$ είναι επίσης μια ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, από την τελευταία ισότητα σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $F(j) \colon F(Z) \longrightarrow F(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Επικαλούμενοι το ίδιο επιχείρημα με παραπάνω ο μορφισμός $F(i) \colon F(X) \longrightarrow F(Z)$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση και ως εκ τούτου μια ασθενής ισοδυναμία. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην ισότητα $f = j \circ i$ προκύπτει ότι $F(f) = F(j) \circ F(i)$. Επομένως σύμφωνα με το τρίτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ο μορφισμός $F(f) \colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Παρατήρηση 5.1.9. Χρησιμοποιώντας ως μορφισμούς τους αριστερούς συναρτητές του Quillen, τους δεξιούς συναρτητές του Quillen ή τα ζεύγη των συναρτητών του Quillen ορίζουμε διαφορετικές έννοιες της «κατηγορίας» των κατηγοριών μοντέλα. Ωστόσο, οποιαδήποτε επιλογή μορφισμού και να κάνουμε στην εν λόγω κατηγορία δεν διατηρεί τις συναρτητικές παραγοντοποιήσεις. Κατ' επέκταση, η επιλογή των συναρτητικών παραγοντοποιήσεων δεν έχει επίδραση στην κλάση ισομορφίας της κατηγορίας μοντέλο. Αυτό γίνεται κατανοητό θεωρώντας μια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ και χρησιμοποιώντας την ίδια κατηγορία μοντέλο με τους ίδιους μορφισμούς (συννηματώσεις, νηματώσεις, ασθενείς ισοδυναμίες) και επιλέγοντας διαφορετικές συναρτητικές παραγοντοποιήσεις.

Κατ' αυτόν τον τρόπο αποκτούμε μια καινούργια κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}'$. Ο ταυτοτικός συναρτητής αποτελεί έναν ισομορφισμό των κατηγοριών μοντέλα μεταξύ αυτών. Υπενθυμίζουμε ότι μια κατηγορία αποτελείται από μια κλάση αντικειμένων και από ένα σύνολο μορφισμών. Ωστόσο κάθε κλάση ορίζει μια κατηγορία μοντέλο όπου οι μόνοι μορφισμοί είναι οι ταυτοτικοί οι οποίοι ανήκουν και στις τρεις κλάσεις μορφισμών (συννηματώσεις, νηματώσεις, ασθενείς ισοδυναμίες). Έτσι, η συλλογή όλων των κατηγοριών μοντέλα περιέχει την συλλογή όλων των κλάσεων, η οποία ωστόσο δεν συνιστά κλάση. Ανάλογα, η συλλογή όλων των συναρτητών μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλα δεν είναι απαραίτητα σύνολο. Έτσι, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι καμία από τις παραπάνω κατηγορίες δεν είναι κατηγορία με την αυστηρή έννοια του όρου. Ορισμένοι θεωρούν εσφαλμένα ότι μια λύση του προβλήματος είναι να περιοριστούμε στις μικρές κατηγορίες μοντέλα στις οποίες τα αντικείμενα απαιτούμε να σχηματίζουν σύνολο. Ωστόσο, σύμφωνα με το Αξίωμα (MC1) δεν υπάρχουν μη τετριμμένες μικρές κατηγορίες μοντέλο. Μια λύση είναι να μεταβούμε σε ένα μεγαλύτερο σύμπαν όπως ήδη έχουμε κάνει για να σχηματίσουμε την κατηγορία των κατηγοριών μοντέλο. Ωστόσο, η καλύτερη λύση του προβλήματος αυτού είναι η θεώρηση της συλλογής των κατηγοριών μοντέλα, των συναρτητών του Quillen και των φυσικών μετασχηματισμών ως μια 2-κατηγορία.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.2.34 είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.1.10. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και X, Z και W αντικείμενα αυτής.*

1. *Εάν το αντικείμενο W είναι συννιώδες και το αντικείμενο X είναι ινώδες τότε η τετριμμένη νημάτωση $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών*

$$(i_X)_*^W\colon \pi(W,\widetilde{Q}X) \longrightarrow \pi(W,X), \quad [f] \longmapsto [i_X\circ f]$$

ο οποίος είναι φυσικός εξίσου στα W και X.

2. *Εάν το αντικείμενο W είναι ινώδες και το αντικείμενο X είναι συννιώδες τότε η τετριμμένη συννημάτωση $j_X\colon X \longrightarrow \widehat{R}X$ επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών*

$$(j_X)_*^Z\colon \pi(\widehat{R}X,Z) \longrightarrow \pi(X,Z), \quad [g] \longmapsto [g\circ j_X]$$

ο οποίος είναι φυσικός εξίσου στα X και Z.

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι W είναι ένα συννιώδες και το X είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ο μορφισμός $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση. Τότε οι μορφισμοί $\varnothing \longrightarrow W$ και $X \longrightarrow *$ είναι αντίστοιχα συννημάτωση και νημάτωση και σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.34 ο επαγόμενος μορφισμός ${(i_X)_*}^W\colon \pi^l(W,\widetilde{Q}X) \longrightarrow \pi^l(W,X)$ μεταξύ των συνόλων των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών ο οποίος ορίζεται ως ${(i_X)_*}^W([f]) = [i_X\circ f]$ είναι ένας ισομορφισμός. Ο μορφισμός $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ ως τετριμμένη νημάτωση είναι νημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\widetilde{Q}X \longrightarrow *$ είναι νημάτωση ως σύνθεση των νηματώσεων $X \longrightarrow *$ και $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\widetilde{Q}X$ είναι ινώδες. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 ο μορφισμός ${(i_X)_*}^W\colon \pi(W,\widetilde{Q}X) \longrightarrow \pi(W,X)$ μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών ο οποίος ορίζεται ως ${(i_X)_*}^W([f]) = [i_X\circ f]$ είναι ένας ισομορφισμός. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να αποδείξουμε την φυσικότητα του ισομορφισμού ${(i_X)_*}^W$ στα W και X.

- Φυσικότητα στο W: Ας είναι $h\colon W' \longrightarrow W$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \pi(W,\widetilde{Q}X) \arrow[r, "\pi(h,\widetilde{Q}X)"] \arrow[d, "{(i_X)_*}^W"'] & \pi(W',\widetilde{Q}X) \arrow[d, "{(i_X)_*}^{W'}"] \\ \pi(W,X) \arrow[r, "\pi(h,X)"'] & \pi(W',X) \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς των μορφισμών ${(i_X)_*}^W$, ${(i_X)_*}^{W'}$, $\pi(h,\widetilde{Q}X)$ και $\pi(h,X)$ προκύπτει ότι:

$$(\pi(h,X)\circ{(i_X)_*}^W)([f]) = \pi(h,X)({(i_X)_*}^W)([f])) = \pi(h,X)([i_X\circ f]) = [i_X\circ f\circ h]$$

και

$$({(i_X)_*}^{W'}\circ\pi(h,\widetilde{Q}X))([f]) = {(i_X)_*}^{W'}(\pi(h,\widetilde{Q}X))([f])) = {(i_X)_*}^{W'}([f\circ h]) = [i_X\circ f\circ h]$$

Έτσι, από τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι $(\pi(h,X)\circ{(i_X)_*}^W)([f]) = ({(i_X)_*}^{W'}\circ\pi(h,\widetilde{Q}X))([f])$ για κάθε $[f]\in\pi(W,\widetilde{Q}X)$ και κατ' επέκταση ότι $\pi(h,X)\circ{(i_X)_*}^W = {(i_X)_*}^{W'}\circ\pi(h,\widetilde{Q}X)$. Ως εκ τούτου το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό, γεγονός που αποδεικνύει την φυσικότητα στο W.

- Φυσικότητα στο X: Ας είναι $\phi\colon X\longrightarrow X'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \pi(W,\widetilde{Q}X) \arrow[r, "\pi(W,\widetilde{Q}(\phi))"] \arrow[d, "{(i_X)_*}^W"'] & \pi(W,\widetilde{Q}X') \arrow[d, "{(i_{X'})_*}^W"] \\ \pi(W,X) \arrow[r, "\pi(W,\phi)"'] & \pi(W,X') \end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς των μορφισμών ${(i_X)_*}^W$, ${(i_{X'})_*}^W$, $\pi(W,\widetilde{Q}(\phi))$ και $\pi(W,\phi)$ και την ισότητα $i_{X'}\circ\widetilde{Q}(\phi) = \phi\circ i_X$ η οποία συνάγεται απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 προκύπτει ότι:

$$(\pi(W,\phi)\circ{(i_X)_*}^W)([f']) = \pi(W,\phi)({(i_X)_*}^W([f'])) = \pi(W,\phi)([i_X\circ f']) = [\phi\circ i_X\circ f']$$

και

$$({(i_{X'})_*}^W\circ\pi(W,\widetilde{Q}(\phi)))([f']) = {(i_{X'})_*}^W(\pi(W,\widetilde{Q}(\phi))([f'])) = {(i_{X'})_*}^W([\widetilde{Q}(\phi)\circ f']) =$$
$$= [i_{X'}\circ\widetilde{Q}(\phi)\circ f'] = [\phi\circ i_X\circ f']$$

Έτσι, από τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι $(\pi(W,\phi)\circ{(i_X)_*}^W)([f']) = ({(i_{X'})_*}^W\circ\pi(W,\widetilde{Q}(\phi)))([f'])$ για κάθε $[f']\in\pi(W,\widetilde{Q}X)$ και κατ' επέκταση ότι $\pi(W,\phi)\circ{(i_X)_*}^W = {(i_{X'})_*}^W\circ\pi(W,\widetilde{Q}(\phi))$. Ως εκ τούτου το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό, γεγονός που αποδεικνύει την φυσικότητα στο X.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Η ακόλουθη Πρόταση αναφέρει υπό ποιες προϋποθέσεις ένας συναρτητής διατηρεί ένα κυλινδρικό αντικείμενο και δυϊκά ένα μονοπάτι αντικείμενο.

Πρόταση 5.1.11. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.*

1. *Εάν X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \textit{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X τότε*

$$F(X) \coprod F(X) \xrightarrow{F(i)=F(i_0)+F(i_1)} F(\textit{Cyl(X)}) \xrightarrow{F(s)} F(X)$$

είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το $F(X)$.

2. *Εάν Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$ και $Y \xrightarrow{r} \textit{Path(Y)} \xrightarrow{p=(p_0,p_1)} Y \times Y$ είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το Y τότε*

$$G(Y) \xrightarrow{G(r)} G(\textit{Path(Y)}) \xrightarrow{G(p)=(G(p_0),G(p_1))} G(Y) \times G(Y)$$

είναι ένα μονοπάτι αντικείμενο για το $G(Y)$.

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο αριστερός συζυγής συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις. Υποθέτουμε ότι X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathsf{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.6 ο μορφισμός $i_0\colon X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)}$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και επιπλέον εξ' ορισμού του κυλινδρικού αντικειμένου ο μορφισμός $i\colon X \coprod X \longrightarrow \mathsf{Cyl(X)}$ είναι συννημάτωση, ο μορφισμός $s\colon \mathsf{Cyl(X)} \longrightarrow X$ είναι ασθενής ισοδυναμία και $s \circ i = 1_X + 1_X$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στο κυλινδρικό αντικείμενο Cyl(X) λαμβάνουμε $F(X \coprod X) \xrightarrow{F(i)=F(i_0+i_1)} F(\mathsf{Cyl(X)}) \xrightarrow{F(s)} F(X)$. Ο συναρτητής F ως αριστερός συζυγής διατηρεί συνόρια και πιο συγκεκριμένα συν-γινόμενα. Έτσι, $F(X \coprod X) \backsimeq F(X) \coprod F(X)$ και $F(1_{\mathrm{X}} + 1_{\mathrm{X}}) = 1_{\mathrm{F(X)}} + 1_{\mathrm{F(X)}}$. Από το δεύτερο σκέλος του Σχολίου 3.2.2 έχουμε ότι $s \circ i_0 = 1_{\mathrm{X}}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή έπεται ότι $F(s) \circ F(i_0) = 1_{\mathrm{F(X)}}$. Εφόσον, ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις ο μορφισμός $F(i)$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $F(i_0)$ είναι αντίστοιχα τετριμμένη συννημάτωση και κατ' επέκταση ασθενής ισοδυναμία. Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{\mathrm{F(X)}}\colon F(X) \longrightarrow F(X)$ ανήκει εξίσου στην κλάση των ασθενών ισοδυναμιών. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την τελευταία ισότητα από το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $F(s)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Εν συνεχεία εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην ισότητα $s \circ i = 1_{\mathrm{X}} + 1_{\mathrm{X}}$ και χρησιμοποιώντας την ισότητα $F(1_{\mathrm{X}} + 1_{\mathrm{X}}) = 1_{\mathrm{F(X)}} + 1_{\mathrm{F(X)}}$ προκύπτει ότι $F(s) \circ F(i) = 1_{\mathrm{F(X)}} + 1_{\mathrm{F(X)}}$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω $F(X) \coprod F(X) \xrightarrow{F(i)=F(i_0)+F(i_1)} F(\mathsf{Cyl(X)}) \xrightarrow{F(s)} F(X)$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το $F(X)$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Στην Πρόταση 5.1.11 είδαμε ότι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen και δυϊκά ένας δεξιός συναρτητής του Quillen διατηρούν αντίστοιχα ένα κυλινδρικό και ένα μονοπάτι αντικείμενο. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει με την αριστερή και δεξιά ομοτοπία όπως υποδεικνύεται από το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 5.1.12. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.*

1. *Εάν ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ και το X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της, τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εάν ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $g\colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{C}'$ και το B είναι ένα ινώδες αντικείμενο της, τότε ο μορφισμός $G(f)\colon G(A) \longrightarrow G(B)$ είναι δεξιά ομοτοπικός του μορφισμού $G(g)\colon G(A) \longrightarrow G(B)$ στην $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ και το X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της. Τότε υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $X \coprod X \xrightarrow{i=i_0+i_1} \mathrm{Cyl(X)} \xrightarrow{s} X$ για το X και ένας μορφισμός $H\colon \mathrm{Cyl(X)} \longrightarrow Y$ τέτοιος ώστε $H \circ i_0 = f$ και $H \circ i_1 = g$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.1.11 έπεται ότι $F(X) \coprod F(X) \xrightarrow{F(i)=F(i_0)+F(i_1)} F(\mathrm{Cyl(X)}) \xrightarrow{F(s)} F(X)$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το $F(X)$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας τον συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ στις παραπάνω ισότητες και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι υπάρχει ένας μορφισμός $F(H)\colon F(\mathrm{Cyl(X)}) \longrightarrow F(Y)$ τέτοιος ώστε $F(H) \circ F(i_0) = F(f)$ και $F(H) \circ F(i_1) = F(g)$. Επομένως, ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι αριστερά ομοτοπικός του μορφισμού $F(g)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ στην $\mathcal{C}'$ με αριστερή ομοτοπία τον μορφισμό $F(H)\colon F(\mathrm{Cyl(X)}) \longrightarrow F(Y)$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ∎

Ολοκληρώνουμε την ενότητα με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.1.13. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen . Εάν X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$ τότε η επαγόμενη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών $\pi(F(X), Y) \longrightarrow \pi(X, G(Y))$ από τον ισομορφισμό συζυγίας μεταξύ των συναρτητών F και G είναι ένας φυσικός ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο αριστερός συζυγής συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις και ο δεξιός συζυγής συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις. Επιπλέον, ο αριστερός συζυγής συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συνόρια και αντίστοιχα ο δεξιός συζυγής συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ διατηρεί όρια. Υποθέτουμε ότι X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $Y \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Εφαρμόζοντας τους συναρτητές F και G στους παραπάνω μορφισμούς και παίρνοντας υπ' όψιν την υπόθεση λαμβάνουμε τους μορφισμούς $F(\varnothing) \longrightarrow F(X)$ και $G(Y) \longrightarrow G(*)$ οι οποίοι είναι συννημάτωση και νημάτωση αντίστοιχα. Το τελικό αντικείμενο $*$ της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ μπορεί να οριστεί εξίσου ως όριο του μοναδικού κενού διαγράμματος $\varnothing \longrightarrow \mathcal{C}'$. Εφόσον, η κενή κατηγορία είναι μια διακριτή κατηγορία το τελικό αντικείμενο $*$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «κενό» γινόμενο (empty product). Αντίστοιχα, το αρχικό αντικείμενο $\varnothing$ της κατηγορίας $\mathcal{C}'$ μπορεί να οριστεί εξίσου ως συνόριο του μοναδικού κενού διαγράμματος $\varnothing \longrightarrow \mathcal{C}$. Εφόσον, η κενή κατηγορία είναι μια διακριτή κατηγορία το τελικό αντικείμενο $*$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «κενό» συν-γινόμενο (empty coproduct) ή κατηγορικό άθροισμα. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο αριστερός συζυγής συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συνόρια και αντίστοιχα ο δεξιός συζυγής συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ διατηρεί όρια ο συναρτητής F στέλνει το αρχικό αντικείμενο $\varnothing$ στο αρχικό αντικείμενο $F(\varnothing)$ και αντίστοιχα ο συναρτητής G στέλνει το τελικό αντικείμενο $*$ στο τελικό αντικείμενο $G(*)$. Ως εκ τούτου οι μορφισμοι $F(\varnothing) \longrightarrow F(X)$ και $G(Y) \longrightarrow G(*)$ οι οποίοι είναι συννημάτωση και νημάτωση αντίστοιχα είναι μοναδικοί. Έτσι, το αντικείμενο $F(X)$ είναι συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$ και το αντικείμενο $G(Y)$ είναι ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Λόγω της συζυγίας των συναρτητών

F και G υπάρχει ένας ισομορφισμός $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ μεταξύ των συνόλων $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y)$ και $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο εν λόγω ισομορφισμός μεταφέρεται στις κλάσεις ομοτοπίας. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.11 εάν δύο μορφισμοί $X \longrightarrow G(Y)$ είναι αριστερά ομοτοπικοί στην $\mathcal{C}$ τότε οι αντίστοιχοι συζυγείς $F(X) \longrightarrow Y$ είναι αριστερά ομοτοπικοί στην $\mathcal{C}'$ και εάν δύο μορφισμοί $F(X) \longrightarrow Y$ είναι δεξιά ομοτοπικοί στην $\mathcal{C}'$ τότε οι αντίστοιχοι συζυγείς $X \longrightarrow G(Y)$ είναι δεξιά ομοτοπικοί στην $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου οι απεικονίσεις $\pi^l(F(X), Y) \longrightarrow \pi^l(X, G(Y))$ μεταξύ των συνόλων των αριστερών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών και $\pi^r(F(X), Y) \longrightarrow \pi^r(X, G(Y))$ μεταξύ των συνόλων των δεξιών ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών είναι «1-1» και «επί». Ωστόσο, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα αντικείμενα $F(X)$, X είναι συνινώδη και τα αντικείμενα Y, $G(Y)$ είναι ινώδη αντικείμενα σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.28 η σχέση της αριστερής ομοτοπίας συμπίπτει με την σχέση της δεξιάς ομοτοπίας δίνοντάς μας την σχέση ομοτοπίας. Ως εκ τούτου, η επαγόμενη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών $\pi(F(X), Y) \longrightarrow \pi(X, G(Y))$ από τον ισομορφισμό συζυγίας μεταξύ των συναρτητών F και G είναι ένας φυσικός ισομορφισμός. ■

5.2 Παραγόμενοι Συναρτητές

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε την έννοια του παραγόμενου συναρτητή ενός συναρτητή $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ όπου $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία μοντέλο. Οι παράγωγοι συναρτητές είναι συναρτητές στην ομοτοπική κατηγορία οι οποιοί επάγονται από συναρτητές του Quillen. Εάν κάποιος ενδιαφέρεται να παραγοντοποιήσει τον συναρτητή F μέσω της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ αυτό δεν είναι πάντα δυνατό. Οι παράγωγοι συναρτητές είναι συναρτητές $Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ οι οποίοι προσεγγίζουν αυτή την παραγοντοποιήση με έναν καθολικό τρόπο. Ιστορικά, η έννοια του παράγωγου συναρτητή εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο ειδικό πλαίσιο της ομολογικής άλγεβρας της κατηγορίας των αλυσιδωτών συμπλόκων (chain complexes) και στην συνέχεια επεκτάθηκε στην γενική περίπτωση.

5.2.1 Αριστεροί και Δεξιοί Παραγόμενοι Συναρτητές

Ξεκινάμε ορίζοντας τους αριστερά και δεξιά παραγόμενους συναρτητές.

Ορισμός 5.2.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία, $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών και $\gamma \colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ ο κανονικός συναρτητής από την $\mathcal{C}$ στην Quillen ομοτοπική της κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$.*

1. *Ένας* **αριστερά παραγόμενος συναρτητής (left derived functor)** *για τον συναρτητή F είναι ένα ζεύγος (LF, ϵ), όπου $LF \colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής και $\epsilon \colon LF \circ \gamma \longrightarrow F$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική ιδιότητα: για οποιοδήποτε άλλο ζεύγος (G, ζ) όπου $G \colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής και $\zeta \colon G \circ \gamma \longrightarrow F$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός υπάρχει μοναδικός φυσικός μτασχηματισμός $\theta \colon G \longrightarrow LF$ τέτοιος ώστε $\zeta = \epsilon \circ (\theta \cdot \gamma)$.*
   Δυϊκά,

2. *Ένας* **δεξιά παραγόμενος συναρτητής (right derived functor)** *για τον συναρτητή F είναι ένα ζεύγος (RF, ϵ), όπου $RF \colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής και $\epsilon \colon F \longrightarrow RF \circ \gamma$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική ιδιότητα: για οποιοδήποτε άλλο ζεύγος (G, ζ) όπου $G \colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής και $\zeta \colon F \longrightarrow G \circ \gamma$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός υπάρχει μοναδικός φυσικός μτασχηματισμός $\theta \colon RF \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $\zeta = (\theta \cdot \gamma) \circ \epsilon$.*

Σχόλιο 5.2.2. Στην βιβλιογραφία ένας αριστερά παραγόμενος συναρτητής του $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι επίσης γνωστός ως δεξιά επέκταση του Kan του F κατά μήκος του συναρτητή $\gamma \colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$. Ομοίως, ένας δεξιά παράγωγος συναρτητής του $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι επίσης γνωστός ως αριστερή Kan επέκταση του F κατά μήκος του συναρτητή $\gamma \colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.

Χάρις στην ακόλουθη πρόταση μπορούμε να μιλάμε για «τον» αριστερά παραγόμενο συναρτητή και για «τον» δεξιά παραγόμενο συναρτητή του $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$.

Πρόταση 5.2.3. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής του F, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικός μέχρις μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.*

2. *Ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής του F, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικός μέχρις μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι (LF, ϵ) και (LF', ϵ') δύο αριστερά παραγόμενοι συναρτητές του συναρτητή F. Τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί μετασχηματισμοί $\theta\colon LF' \longrightarrow LF$ και $\theta'\colon LF \longrightarrow LF'$ τέτοιοι ώστε $\epsilon' = \epsilon \circ (\theta \cdot \gamma)$ και $\epsilon = \epsilon' \circ (\theta' \cdot \gamma)$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $\epsilon' = \epsilon' \circ (\theta' \cdot \gamma) \circ (\theta \cdot \gamma)$ και $\epsilon = \epsilon \circ (\theta \cdot \gamma) \circ (\theta' \cdot \gamma)$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\epsilon' = \epsilon' \circ 1_{\mathrm{LF}'\circ\gamma}$ και $\epsilon = \epsilon \circ 1_{\mathrm{LF}\circ\gamma}$. Λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζεται από την καθολική ιδιότητα έπεται ότι $(\theta' \cdot \gamma) \circ (\theta \cdot \gamma) = 1_{\mathrm{LF}'\circ\gamma}$ και $(\theta \cdot \gamma) \circ (\theta' \cdot \gamma) = 1_{\mathrm{LF}\circ\gamma}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο $\theta \cdot \gamma\colon LF' \circ \gamma \longrightarrow LF \circ \gamma$ είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι, για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ο $(\theta \cdot \gamma)(X)$ είναι ένας ισομορφισμός. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\gamma\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ έχουμε $\theta(X) = \theta(\gamma(X)) = (\theta \cdot \gamma)(X)$. Έτσι, ο $\theta(X)$ είναι ένας ισομορφισμός για κάθε αντικείμενο X της $Ho(\mathcal{C})$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο φυσικός μετασχηματισμός $\theta\colon LF' \longrightarrow LF$ είναι μια φυσική ισοδυναμία. Επομένως, ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής του F εάν υπάρχει είναι μοναδικός μέχρις μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Εφόσον παραθέσαμε τον ορισμό του αριστερά και δεξιά παραγόμενου συναρτητή για τον συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ εγείρεται το ερώτημα πότε ένας αριστερά ή δεξιά παραγόμενος συναρτητής του υπάρχει. Εάν η κατηγορία $\mathcal{C}'$ είναι πλήρης δηλαδή έχει όλα τα μικρά όρια ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής υπάρχει και γνωρίζουμε την κατασκευή του ως μια δεξιά επέκταση του Kan. Αντίστοιχα, εάν η κατηγορία $\mathcal{C}'$ είναι συν-πλήρης δηλαδή έχει όλα τα μικρά συνόρια ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής υπάρχει και γνωρίζουμε την κατασκευή του ως μια αριστερή επέκταση του Kan. Αυτό συμβαίνει διότι υπό αυτές τις προϋποθέσεις το ζεύγος συναρτητή και φυσικού μετασχηματισμού εξ' ορισμού υπάρχει και ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα που περιγράψαμε στον Ορισμό 5.2.1. Ωστόσο εάν η κατηγορία $\mathcal{C}'$ είναι τυχαία κατηγορία τότε οι συνθήκες για την ύπαρξη ενός αριστερά ή δεξιά παραγόμενου συναρτητή για τον συναρτητή F εξασφαλίζονται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}'$ τυχαία κατηγορία και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Εάν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συννινωδών αντικειμένων σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ τότε ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής (LF, ϵ) του F υπάρχει. Επιπλέον, υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\epsilon\colon LF \circ \gamma \longrightarrow F$ με την ιδιότητα για κάθε συνινώδες αντικείμενο X ο μορφισμός $\epsilon_X\colon (LF \circ \gamma)(X) \longrightarrow F(X)$ είναι ένας ισομορφισμός.*

2. *Εάν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$ τότε ο δεξιά παραγόμενος συναρτητής (RF, ϵ) του F υπάρχει. Επιπλέον, υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\epsilon\colon F \longrightarrow RF \circ \gamma$ με την ιδιότητα για κάθε ινώδες αντικείμενο A ο μορφισμός $\epsilon_A\colon F(A) \longrightarrow (RF \circ \gamma)(A)$ είναι ένας ισομορφισμός.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι F ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$. Θα κατασκευάσουμε το ζεύγος (LF, ϵ) και εν συνεχεία θα αποδείξουμε ότι πληροί την καθολική ιδιότητα η οποία αναφέρθηκε στον Ορισμό 5.2.1. Ορίζουμε έναν συναρτητή $F'\colon \pi\mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{C}'$ ως εξής:

- $F'(X) = F(X)$, για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\pi\mathcal{C}_c$.
- $F'(f) = F(f)$, για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\pi\mathcal{C}_c$.

Το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.2.39 ταυτίζει τις δεξιές ομοτοπικές κλάσεις των μορφισμών μεταξύ συνινωδών αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου ο συναρτητής F' είναι καλά ορισμένος. Ας είναι $\widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ ο συναρτητής ο οποίος ορίστηκε στο πρώτο σκέλος της Πρότασης 4.1.16. Θεωρούμε την σύνθεση $\xi = F' \circ \widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του ξ και του συναρτητή F' έχουμε

- $\xi(X) = (F' \circ \widetilde{Q})(X) = F'(\widetilde{Q}(X)) = F(\widetilde{Q}(X))$ για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.
- $\xi(f) = (F' \circ \widetilde{Q})(f) = F'(\widetilde{Q}(f)) = F(\widetilde{Q}(f))$, για κάθε μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Εφόσον οι συναρτητές $\widetilde{Q}$ και F' είναι καλά ορισμένοι ο $\xi = F' \circ \widetilde{Q}$ είναι καλά ορισμένος. Επιπλέον ο $\xi = F' \circ \widetilde{Q}$ είναι συναρτητής ως σύνθεση των συναρτητών F' και $\widetilde{Q}$. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widetilde{Q}f\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\widetilde{Q}$ τα αντικείμενα $\widetilde{Q}X$ και $\widetilde{Q}Y$ είναι συννινώδη. Έτσι, ο μορφισμός $\widetilde{Q}f\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών αντικειμένων. Ως εκ τούτου σύμφωνα με την υπόθεση για τον συναρτητή F ο μορφισμός $\xi(f) = F(\widetilde{Q}(f))$ είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο συναρτητής $\xi = F' \circ \widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}'$. Επομένως, σύμφωνα με την καθολική ιδιότητα της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $LF\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\xi"'] & Ho(\mathcal{C}) \arrow[dl, "LF"] \\ \mathcal{C}' & \end{tikzcd}$$

Έτσι, $LF \circ \gamma = \xi$. Εν συνεχεία θα κατασκευάσουμε έναν φυσικό μετασχηματισμό $\epsilon\colon LF \circ \gamma = \xi \longrightarrow F$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 δοθέντος του μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{Q}f\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}Y$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q}X \arrow[r, "\widetilde{Q}f"] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{Q}Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $f \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{Q}f$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $F(f) \circ F(i_X) = F(i_Y) \circ F(\widetilde{Q}f)$. Από την τελευταία ισότητα λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(\widetilde{Q}X) \arrow[r, "F(i_X)"] \arrow[d, "F(\widetilde{Q}f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(\widetilde{Q}Y) \arrow[r, "F(i_Y)"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

Έτσι, θέτοντας ως $\epsilon_X = \epsilon(X) = F(i_X)\colon (LF\circ\gamma)(X) = \xi(X) = F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow F(X)$ λαμβάνουμε τον επιθυμητό φυσικό μετασχηματισμό. Εάν το X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο τότε $\widetilde{Q}X \simeq X$. Στην περίπτωση αυτή ο μορφισμός ϵ_X είναι ο ταυτοτικός μορφισμός ο οποίος είναι ένας ισομορφισμός, γεγονός που αποδεικνύει το δεύτερο σκέλος της παρούσας Πρότασης. Συνοψίζοντας, κατασκευάσαμε το ζεύγος (LF,ϵ). Μας απομένει να αποδείξουμε ότι το εν λόγω ζεύγος ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα την οποία περιγράψαμε στο πρώτο σκέλος του Ορισμού 5.2.1. Ας είναι (G,ζ) ένα άλλο ζεύγος όπου $G\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής και $\zeta\colon G\circ\gamma \longrightarrow F$ ένας φυσικός μετασχηματισμός. Θεωρούμε έναν φυσικό μετασχηματισμό $\theta\colon G \longrightarrow LF$ και για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ κατασκευάζουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
G(\widetilde{Q}X) \arrow[r, "\theta_{\widetilde{Q}X}"] \arrow[d, "G(\gamma(i_X))"] & LF(\widetilde{Q}X) \arrow[r, "\epsilon_{\widetilde{Q}X}=1_{\mathbb{Q}\mathrm{X}}"] \arrow[d, "LF(\gamma(i_X))=1_{\mathbb{Q}\mathrm{X}}"] & F(\widetilde{Q}X) \arrow[d, "F(i_X)"] \\
G(X) \arrow[r, "\theta_X"] & LF(X) \arrow[r, "\epsilon_X=F(i_X)"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή γ έπεται ότι:

$$\epsilon_{\widetilde{Q}X}\circ\theta_{\widetilde{Q}X} = \epsilon(\widetilde{Q}X)\circ\theta(\widetilde{Q}X) = \epsilon(\widetilde{Q}X)\circ\theta\gamma(\widetilde{Q}X) = \epsilon(\widetilde{Q}X)\circ(\theta\cdot\gamma)(\widetilde{Q}X)$$

και

$$\epsilon_X\circ\theta_X = \epsilon(X)\circ\theta(X) = \epsilon(X)\circ\theta\gamma(X) = \epsilon(X)\circ(\theta\cdot\gamma)(X)$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι οι οριζόντιοι μορφισμοί δίνουν την σύνθεση των μορφισμών $\theta\circ\gamma$ και ϵ. Ωστόσο για να ικανοποιεί ο θ επιπλέον την συνθήκη του πρώτου σκέλους του Ορισμού 5.2.1 θα πρέπει $\zeta_{\widetilde{Q}X} = \epsilon_{\widetilde{Q}X}\circ\theta_{\widetilde{Q}X}$. Λόγω της μεταθετικότητας του αριστερού τετραγώνου του παραπάνω μεταθετικού διαγράμματος έπεται ότι $\theta_X\circ G(\gamma(i_X)) = LF(\gamma(i_X))\circ\theta_{\widetilde{Q}X}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού και την ισότητα $LF(\gamma(i_X)) = 1_{\widetilde{Q}X}$ προκύπτει ότι $\theta_{\widetilde{Q}X} = \theta_X\circ G(\gamma(i_X))$. Συνθέτοντας στην τελευταία ισότητα από αριστερά με τον μορφισμό $\epsilon_{\widetilde{Q}X}$ έπεται ότι $\epsilon_{\widetilde{Q}X}\circ\theta_{\widetilde{Q}X} = \epsilon_{\widetilde{Q}X}\circ(\theta_X\circ G(\gamma(i_X)))$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης, την ισότητα $\zeta_{\widetilde{Q}X} = \epsilon_{\widetilde{Q}X}\circ\theta_{\widetilde{Q}X}$, την ισότητα $\epsilon_{\widetilde{Q}X} = 1_{\mathbb{Q}\mathrm{X}}$ και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{\mathbb{Q}\mathrm{X}}$ από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\zeta_{\widetilde{Q}X} = \theta_X\circ G(\gamma(i_X))$. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.13 ο μορφισμός $i_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ είναι μια συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στο X και ως εκ τούτου μια ασθενής ισοδυναμία. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $\gamma(i_X)$ είναι ένας ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της Πρότασης 1.2.9 ο μορφισμός $G(\gamma(i_X))$ είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος $G(\gamma(i_X))^{-1}$ του $G(\gamma(i_X))$ και είναι εξίσου ισομορφισμός. Συνθέτοντας από δεξιά με τον μορφισμό $G(\gamma(i_X))^{-1}$ στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $G(\gamma(i_X))\circ G(\gamma(i_X))^{-1} = 1_{\mathrm{G(X)}}$ και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $1_{G(X)}$ προκύπτει ότι $\theta_X = \zeta_{\widetilde{Q}X}\circ G(\gamma(i_X))^{-1}$. Ευθύς αμέσως θα ελέγξουμε εάν ο θ είναι πράγματι ένας φυσικός μετασχηματισμός από τον συναρτητή G στον συναρτητή LF. Για τυχόν μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "G(\gamma(i_X))^{-1}"] \arrow[d, "G(\gamma(f))"] & G(\widetilde{Q}X) \arrow[r, "\zeta_{\widetilde{Q}X}"] \arrow[d, "G\gamma(\widetilde{Q}(f))"] & F(\widetilde{Q}X) \arrow[d, "F(\widetilde{Q}(f))"] \\
G(Y) \arrow[r, "G(\gamma(i_Y))^{-1}"] & G(\widetilde{Q}Y) \arrow[r, "\zeta_{\widetilde{Q}Y}"] & F(\widetilde{Q}Y)
\end{tikzcd}$$

όπου $\zeta_{\widetilde{Q}X} \circ G(\gamma(i_X))^{-1} = \theta_X$ και $\zeta_{\widetilde{Q}Y} \circ G(\gamma(i_Y))^{-1} = \theta_Y$. Εφόσον ο $\zeta\colon G\circ\gamma \longrightarrow F$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός το δεξιό τετράγωνο του παραπάνω διαγράμματος είναι μεταθετικό. Ως εκ τούτου $\zeta_{\widetilde{Q}Y} \circ G\gamma(\widetilde{Q}(f)) = F(\widetilde{Q}(f)) \circ \zeta_{\widetilde{Q}X}$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή γ στην ισότητα $f \circ i_X = i_Y \circ \widetilde{Q}f$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $\gamma(f)\circ\gamma(i_X) = \gamma(i_Y)\circ\gamma(\widetilde{Q}f)$. Κατόπιν εφαρμόζοντας τον συναρτητή G έπεται ότι $G(\gamma(f))\circ G(\gamma(i_X)) = G(\gamma(i_Y))\circ G(\gamma(\widetilde{Q}f))$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $G(\gamma(i_X))$ και $G(\gamma(i_Y))$ είναι ισομορφισμοί συνθέτουμε από αριστερά με τον μορφισμό $G(\gamma(i_Y))^{-1}$ και από δεξιά με τον μορφισμό $G(\gamma(i_X))^{-1}$ στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας τις ισότητες $G(\gamma(i_Y))^{-1}\circ G(\gamma(i_Y)) = 1_{G(\mathbb{Q}Y)}$ και $G(\gamma(i_X))\circ G(\gamma(i_X))^{-1} = 1_{G(X)}$ και τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{G(\mathbb{Q}Y)}$ και $1_{G(X)}$ προκύπτει ότι $G(\gamma(i_Y))^{-1}\circ G(\gamma(f)) = G(\gamma(\widetilde{Q}f))\circ G(\gamma(i_X))^{-1}$. Ως εκ τούτου το αριστερό τετράγωνο του παραπάνω διαγράμματος είναι εξίσου μεταθετικό. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $\zeta_{\widetilde{Q}Y} \circ G\gamma(\widetilde{Q}(f)) = F(\widetilde{Q}(f)) \circ \zeta_{\widetilde{Q}X}$ και $G(\gamma(i_Y))^{-1}\circ G(\gamma(f)) = G(\gamma(\widetilde{Q}f))\circ G(\gamma(i_X))^{-1}$ έπεται ότι:

$$\zeta_{\widetilde{Q}Y}\circ G(\gamma(i_Y))^{-1}\circ G(\gamma(f)) = \zeta_{\widetilde{Q}Y}\circ G(\gamma(\widetilde{Q}f))\circ G(\gamma(i_X))^{-1} = F(\widetilde{Q}(f))\circ\zeta_{\widetilde{Q}X}\circ G(\gamma(i_X))^{-1}$$

Έτσι, σύμφωνα με την τελευταία ισότητα το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "\zeta_{\widetilde{Q}X}\circ G(\gamma(i_X))^{-1}"] \arrow[d, "G(\gamma(f))"'] & F(\widetilde{Q}X) \arrow[d, "F(\widetilde{Q}(f))"] \\
X \arrow[r, "\zeta_{\widetilde{Q}Y}\circ G(\gamma(i_Y))^{-1}"] & F(\widetilde{Q}Y).
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου ο $\theta\colon G\circ\gamma \longrightarrow LF\circ\gamma$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Επιπλέον εφόσον οι $G\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ και $LF\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι συναρτητές από την ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ στην τυχαία κατηγορία $\mathcal{C}'$ από το Λήμμα 4.2.10 έπεται ότι θ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός από τον συναρτητή G στον συναρτητή LF. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός μετασχηματισμός $\theta\colon G \longrightarrow LF$ ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη του Ορισμού 5.2.1. Θα αποδείξουμε ότι ο μορφισμός θ είναι μοναδικός. Ας είναι $\theta'\colon G \longrightarrow LF$ ένας άλλος φυσικός μετασχηματισμός ο οποίος πληροί την ισότητα $\theta = \epsilon\circ(\theta'\cdot\gamma)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\theta'\colon G \longrightarrow LF$ και $\epsilon\colon LF\circ\gamma \longrightarrow F$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
G(\widetilde{Q}X) \arrow[r, "\theta'_{\widetilde{Q}X}"] \arrow[d, "G(\gamma(i_X))"] & LF(\widetilde{Q}X) \arrow[r, "\epsilon_{\widetilde{Q}X}=1_{\mathbb{Q}X}"] \arrow[d, "LF(\gamma(i_X))=1_{\mathbb{Q}X}"] & F(\widetilde{Q}X) \arrow[d, "F(i_X)"] \\
G(X) \arrow[r, "\theta'_X"] & LF(X) \arrow[r, "\epsilon_X=F(i_X)"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

Έτσι, $\theta'_X = \zeta_{\widetilde{Q}X}\circ G(\gamma(i_X))^{-1}$. Ως εκ τούτου $\theta_X = \theta'_X$, γεγονός που αποδεικνύει την μοναδικότητα του φυσικού μετασχηματισμού θ. Έτσι, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής (LF,ϵ) του F υπάρχει.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

5.2.2 Ολικά Αριστερά και Ολικά Δεξιά Παραγόμενοι Συναρτητές

Στην προηγούμενη υποενότητα ορίστηκε η έννοια του αριστερά παραγόμενου συναρτητή καθώς και η έννοια του δεξιά παραγόμενου συναρτητή ενός συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ όπου $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία μοντέλο. Εάν η κατηγορία $\mathcal{C}'$ είναι εξίσου μια κατηγορία μοντέλο ορίζεται η έννοια του ολικά αριστερά παραγόμενου συναρτητή καθώς και η έννοια του ολικά δεξιά παραγόμενου συναρτητή ενός συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$. Εν συνεχεία μελετάμε τους ολικά αριστερά και ολικά δεξιά παραγόμενους συναρτητές καθώς και τις ιδιότητες που τους διέπουν.

Ορισμός 5.2.5. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ δύο κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Ένας* **ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής (total left derived functor)** *του F είναι ένας αριστερά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή $\gamma_{\mathcal{C}'} \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$.*

   Έτσι, ένας ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή F είναι ένα ζεύγος $(\mathbf{L}F, \epsilon)$, όπου $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ είναι ένας συναρτητής και $\epsilon\colon \mathbf{L}F \circ \gamma_{\mathcal{C}} \longrightarrow \gamma_{\mathcal{C}'} \circ F$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός τέτοιο ώστε να πληροίται η καθολική ιδιότητα του πρώτου σκέλους του Ορισμού 5.2.1. Δηλαδή ένα ζεύγος $(\mathbf{L}F, \epsilon)$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε άλλο ζεύγος (G, ζ) όπου $G\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ είναι ένας συναρτητής και $\zeta\colon G \circ \gamma_{\mathcal{C}} \longrightarrow \gamma_{\mathcal{C}'} \circ F$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, υπάρχει μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός $\theta\colon G \longrightarrow \mathbf{L}F$ τέτοιος ώστε $\zeta = \epsilon \circ (\theta \cdot \gamma_{\mathcal{C}})$.

   Δυϊκά,

2. *Ένας* **ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής (total right derived functor)** *του F είναι ένας δεξιά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή $\gamma_{\mathcal{C}'} \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$.*

   Έτσι, ένας ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή F είναι ένα ζεύγος $(\mathbf{R}F, \epsilon)$, όπου $\mathbf{R}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ είναι ένας συναρτητής και $\epsilon\colon \gamma_{\mathcal{C}'} \circ F \longrightarrow \mathbf{R}F \circ \gamma_{\mathcal{C}}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός τέτοιο ώστε να πληροίται η καθολική ιδιότητα του δεύτερου σκέλους του Ορισμού 5.2.1. Δηλαδή ένα ζεύγος $(\mathbf{R}F, \epsilon)$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε άλλο ζεύγος (G, ζ) όπου $G\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ είναι ένας συναρτητής και $\zeta\colon \gamma_{\mathcal{C}'} \circ F \longrightarrow G \circ \gamma_{\mathcal{C}}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, υπάρχει μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός $\theta\colon \mathbf{R}F \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $\zeta = (\theta \cdot \gamma_{\mathcal{C}}) \circ \epsilon$.

Σχόλιο 5.2.6. Συχνά στην βιβλιογραφία αναφερόμαστε στον $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ ως ολικά αριστερά παραγόμενο συναρτητή του συναρτητή F και αντίστοιχα στον $\mathbf{R}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ ως ολικά δεξιά παραγόμενο συναρτητή του συναρτητή F παραλείποντας να αναφερθούμε στον φυσικό μετασχηματισμό ϵ και αφήνοντας τον να εννοηθεί.

Χάρις στην ακόλουθη πρόταση μπορούμε να μιλάμε για «τον» ολικά αριστερά παραγόμενο συναρτητή και για «τον» ολικά δεξιά παραγόμενο συναρτητή του $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$.

Πρόταση 5.2.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ αυτών.*

1. *Ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής του F, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικός μέχρις μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.*

2. *Ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής του F, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, είναι μοναδικός μέχρις μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής μεταξύ κατηγοριών μοντέλα. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Ορισμού 5.2.5 ένας ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής για τον συναρτητή F είναι ένας αριστερά παραγόμενος συναρτητής για τον συναρτητή $\gamma_{\mathcal{C}'} \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$. Τότε από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.2.3 έπεται ότι ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής του F εάν υπάρχει είναι μοναδικός μέχρις μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Ανάλογα, με την Πρόταση 5.2.3 η ακόλουθη Πρόταση εξασφαλίζει τις συνθήκες για την ύπαρξη του ολικά αριστερά παραγόμενου συναρτητή και του ολικά δεξιά παραγόμενου συναρτητή για τον συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$.

Πρόταση 5.2.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής.*

1. *Εάν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F υπάρχει.*

2. *Εάν ο συναρτητής F στέλνει τετριμμένες νηματώσεις μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ τότε ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{R}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F υπάρχει.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$ και $f\colon X \longrightarrow Y$ μια τετριμμένη συννημάτωση μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$. Τότε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $\gamma_{\mathcal{C}'}(F(f))$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C}')$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ο συναρτητής $\gamma_{\mathcal{C}'} \circ F\colon \mathcal{C} \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ στέλνει τετριμμένες συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $Ho(\mathcal{C}')$. Επομένως, από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.2.4 ο αριστερά παραγόμενος συναρτητής του $\gamma_{\mathcal{C}'} \circ F$ και κατά συνέπεια ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής υπάρχει.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Εν συνεχεία ορίζουμε τον ολικά αριστερά παραγόμενο συναρτητή καθώς και τον ολικά δεξιά παραγόμενο συναρτητή ενός συναρτητή $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ επί ενός μορφισμού της $\mathcal{C}$.

Ορισμός 5.2.9. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα, $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής και $g\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.*

1. *Εάν $\widetilde{Q}$ είναι η ινώδης-συνινώδης προσέγγιση στην $\mathcal{C}$ η οποία χρησιμοποιείται στην κατασκευή της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ ο μορφισμός $F(\widetilde{Q}(g))$ στην $\mathcal{C}'$ καλείται* **αριστερά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή F στον μορφισμό g (left derived functor of functor F on map g)** *και συμβολίζεται με $\mathbf{L}F(g)$.*

2. *Εάν $\widehat{R}$ είναι η συνινώδης-ινώδης προσέγγιση στην $\mathcal{C}$ η οποία χρησιμοποιείται στην κατασκευή της ομοτοπικής κατηγορίας $Ho(\mathcal{C})$ ο μορφισμός $F(\widehat{R}(g))$ στην $\mathcal{C}'$ καλείται* **δεξιά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή F στον μορφισμό g (right derived functor of functor F on map g)** *και συμβολίζεται με $\mathbf{R}F(g)$.*

Σχόλιο 5.2.10. 1. Η εικόνα στην $Ho(\mathcal{C}')$ του μορφισμού $\mathbf{L}F(g)$ στην $\mathcal{C}'$ είναι ισόμορφη με την εικόνα υπό του ολικά αριστερά παραγόμενου συναρτητή $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F της εικόνας του μορφισμού g στην $Ho(\mathcal{C})$. Αντίστοιχα, η εικόνα στην $Ho(\mathcal{C}')$ του μορφισμού $\mathbf{R}F(g)$ στην $\mathcal{C}'$ είναι ισόμορφη με την εικόνα υπό του ολικά δεξιά παραγόμενου συναρτητή $\mathbf{R}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F της εικόνας του μορφισμού g στην $Ho(\mathcal{C})$.

2. Ο ορισμός 5.2.9 υποδηλώνει ότι ο μορφισμός $\mathbf{L}F(g)$ εξαρτάται από την επιλογή της ινώδουςσυνινώδους προσέγγισης $\widetilde{Q}$ και ότι ο μορφισμός $\mathbf{R}F(g)$ εξαρτάται από την επιλογή της συνινώδους-ινώδους προσέγγισης $\widehat{R}$.

5.2.3 Ολικά (Αριστερά/Δεξιά) Παραγόμενοι Συναρτητές των Συναρτητών του Quillen

Ολοκληρώνουμε την αναφορά μας στους παραγόμενους συναρτητές με τους ολικά αριστερά και ολικά δεξιά παραγόμενους συναρτητές των Συναρτητών του Quillen. Οι εν λόγω συναρτητές όπως υποδηλώνει και το όνομα τους επάγονται από τους αριστερούς και δεξιούς συναρτητές του Quillen αντίστοιχα. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής ενός αριστερού συναρτητή του Quillen και ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής ενός δεξιού συναρτητή του Quillen είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών μεταξύ των ομοτοπικών κατηγοριών.

Ορισμός 5.2.11. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' : G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.*

1. *Ένας* **ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής (total left derived functor)** *του αριστερού συναρτητή του Quillen F είναι η σύνθεση*

$$Ho(\mathcal{C}) \xrightarrow{Ho(Q)} Ho(\mathcal{C}_c) \xrightarrow{Ho(F)} Ho(\mathcal{C}')$$

και συμβολίζεται με $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$.

2. *Ένας* **ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής (total right derived functor)** *του δεξιού συναρτητή του Quillen G είναι η σύνθεση*

$$Ho(\mathcal{C}') \xrightarrow{Ho(R)} Ho(\mathcal{C}'_f) \xrightarrow{Ho(G)} Ho(\mathcal{C})$$

και συμβολίζεται με $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$.

Δοθέντος ενός φυσικού μετασχηματισμού $\alpha\colon F \longrightarrow F'$ μεταξύ αριστερών συναρτητών του Quillen και ενός φυσικού μετασχηματισμού $\beta\colon G \longrightarrow G'$ μεταξύ δεξιών συναρτητών του Quillen, ορίζεται ο **ολικά παραγόμενος φυσικός μετασχηματισμός (total derived natural transformation)** *ο οποίος συμβολίζεται με $\mathbf{L}\alpha$, να είναι η σύνθεση $Ho(\alpha) \circ Ho(Q)$, καθώς και ο* **ολικά παραγόμενος φυσικός μετασχηματισμός (total derived natural transformation)** *ο οποίος συμβολίζεται με $\mathbf{R}\beta$, να είναι η σύνθεση $Ho(\beta) \circ Ho(R)$. Έτσι, $(\mathbf{L}\alpha)(X) = (\mathbf{L}\alpha)_X = \alpha(QX) = \alpha_{QX}$ και $(\mathbf{R}\beta)(X) = (\mathbf{R}\beta)_X = \beta(RX) = \beta_{RX}$.*

Παρατήρηση 5.2.12.

1. Στην πραγματικότητα ένας συναρτητής είναι σπάνια εξίσου αριστερός και δεξιός συναρτητής του Quillen. Ως εκ τούτου, μπορούμε να αναφερόμαστε στον ολικά παραγόμενο συναρτητή του, παραλείποντας να αναφέρουμε εάν είναι δεξιός είτε αριστερός.

2. Ο ορισμός 5.2.11 αποτελεί τον λόγο για τον οποίο υποθέσαμε ότι οι συναρτητικές παραγοντοποιήσεις είναι τμήμα της δομής μιας κατηγορίας μοντέλο. Διαφορετικά, θα επιλέγαμε μια συναρτητική συνινώδη προσέγγιση για να ορίσουμε τον ολικά αριστερά παραγόμενο συναρτητή $\mathbf{L}F$. Κατ' αυτόν τον τρόπο δεν θα ήταν δυνατόν να ορίσουμε τον ολικά αριστερά παραγόμενο συναρτητή $\mathbf{L}F$ έτσι ώστε να εξαρτάται από την κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$.

3. Όπως είδαμε στην υποενότητα 5.2.2 μπορούμε να ορίσουμε τον ολικά αριστερά παραγόμενο συναρτητή $\mathbf{L}F$ ενός συναρτητή F ακόμη και εάν ο συναρτητής F δεν είναι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen, αλλά απλώς ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων σε ασθενείς ισοδυναμίες. Δυϊκά, μπορούμε να ορίσουμε τον ολικά δεξιά παραγόμενο συναρτητή $\mathbf{R}G$ ενός συναρτητή G ακόμη και εάν ο συναρτητής G δεν είναι ένας δεξιός συναρτητής του Quillen, αλλά απλώς ένας συναρτητής ο οποίος στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων σε ασθενείς ισοδυναμίες.

4. Εάν $\alpha\colon F \longrightarrow F'$ και $\alpha'\colon F' \longrightarrow F''$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ αριστερών συναρτητών του Quillen τότε η σύνθεση τους $\alpha' \circ \alpha\colon F \longrightarrow F''$ ορίζεται και είναι εξίσου ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των αριστερών συναρτητών του Quillen F και F''. Επιπλέον, ο εν λόγω ολικά παραγόμενος φυσικός μετασχηματισμός είναι συναρτητικός καθώς $\mathbf{L}(\alpha' \circ \alpha) = \mathbf{L}(\alpha') \circ \mathbf{L}(\alpha)$ και $\mathbf{L}(1_{\mathrm{F}}) = 1_{\mathbf{LF}}$. Δυϊκά, εάν $\beta\colon G \longrightarrow G'$ και $\beta'\colon G' \longrightarrow G''$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ δεξιών συναρτητών του Quillen τότε η σύνθεση τους $\beta' \circ \beta\colon G \longrightarrow G''$ ορίζεται και είναι εξίσου ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των δεξιών συναρτητών του Quillen G και G''. Επιπλέον, ο εν λόγω ολικά παραγόμενος φυσικός μετασχηματισμός είναι συναρτητικός καθώς $\mathbf{R}(\beta' \circ \beta) = \mathbf{R}(\beta') \circ \mathbf{R}(\beta)$ και $\mathbf{R}(1_G) = 1_{\mathbf{R}G}$.

5. Δοθέντων μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ και ενός συνόλου I, ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή γινόμενο $\mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής γινόμενο $(Ho(\mathcal{C}))^I \longrightarrow Ho(\mathcal{C}^I) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ όπου ο μορφισμός $(Ho(\mathcal{C}))^I \longrightarrow Ho(\mathcal{C}^I)$ είναι ένας ισομορφισμός.

Εν συνεχεία παραθέτουμε ένα παράδειγμα ολικά αριστερά παραγόμενου συναρτητή ενός αριστερού συναρτητή του Quillen καθώς και ενός ολικά δεξιά παραγόμενου συναρτητή ενός δεξιού συναρτητή του Quillen.

Παράδειγμα 5.2.13. 1. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και I ένα σύνολο. Στο πρώτο σκέλος του παραδείγματος 5.1.3 είδαμε ότι το ζεύγος (C, P) όπου $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$ είναι ο διαγώνιος συναρτητής και $P\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής γινόμενο είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής του δεξιού συναρτητή $P\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ του Quillen στην $\mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής γινόμενο στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$. Πράγματι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $(\mathbf{L}C)(X) = C(QX)$ έπεται ότι ο συναρτητής $\mathbf{L}C$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον διαγώνιο συναρτητή C' στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ υπό του ισομορφισμού $Ho(\mathcal{C}^I) \backsimeq Ho(\mathcal{C})^I$.

2. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο και I ένα σύνολο. Στο δεύτερο σκέλος του παραδείγματος 5.1.3. είδαμε ότι το ζεύγος (P', C) όπου $P'\colon \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής συν-γινόμενο και $C\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$ είναι ο διαγώνιος συναρτητής, είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Ομοίως, με το μέρος 1., ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής του συναρτητή συν-γινόμενο στην $\mathcal{C}$ είναι ο συναρτητής συν-γινόμενο στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$.

Σχόλιο 5.2.14. Το παράδειγμα 5.2.13 αποδεικνύει ότι η ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$ μιας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ έχει όλα τα μικρά γινόμενα και συν-γινόμενα. Ως εκ τούτου είναι εφοδιασμένη με επιπλέον δομή την οποία κληρονομεί από την κατηγορία μοντέλο.

Το ακόλουθο Θεώρημα υποδηλώνει την ύπαρξη του ολικά αριστερά παραγόμενου συναρτητή που επάγεται από τον αριστερό συναρτητή του Quillen καθώς και την ύπαρξη του ολικά δεξιά παραγόμενου συναρτητή που επάγεται από τον δεξιό συναρτητή του Quillen .

Θεώρημα 5.2.15. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.*

1. *Ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F υπάρχει.*

2. *Ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του G υπάρχει.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.1.8 ο συναρτητής F στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.2.8 ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F υπάρχει.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Λήμμα 5.2.16. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα.*

1. *Εάν $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen και $g\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, τότε ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F στέλνει την εικόνα του g στην $Ho(\mathcal{C})$ στην εικόνα του $F(\widetilde{g})$ στην $Ho(\mathcal{C}')$ όπου $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον g.*

2. *Εάν $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας δεξιός συναρτητής του Quillen και $g\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, τότε ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{R}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F στέλνει την εικόνα του g στην $Ho(\mathcal{C})$ στην εικόνα του $F(\widehat{g})$ στην $Ho(\mathcal{C}')$ όπου $\widetilde{g}\colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ είναι μια συνινώδης προσέγγιση στον g.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας αριστερός συναρτητής του Quillen και $g\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F(\gamma_{\mathcal{C}})"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}'}"] \\
Ho(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathbf{L}F"] & Ho(\mathcal{C}').
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $\mathbf{L}F \circ \gamma_{\mathcal{C}} = \gamma_{\mathcal{C}'} \circ F$. Επομένως, για κάθε μορφισμό $g\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ ισχύει ότι $\mathbf{L}F(\gamma_{\mathcal{C}}(g)) = \gamma_{\mathcal{C}'}(F(g))$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο $\mathbf{L}F(\gamma_{\mathcal{C}}(g)) \backsimeq \gamma_{\mathcal{C}'}(F(\widetilde{g}))$ προκύπτει ότι $\mathbf{L}F(\gamma_{\mathcal{C}}(g)) = \gamma_{\mathcal{C}'}(F(g)) \backsimeq \gamma_{\mathcal{C}'}(F(\widetilde{g}))$. Έτσι, ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F στέλνει την εικόνα του g στην $Ho(\mathcal{C})$ στην εικόνα του $F(\widetilde{g})$ στην $Ho(\mathcal{C}')$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Πρόταση 5.2.17. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα.*

1. *Εάν $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen και $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

   (a) *Ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F στέλνει την εικόνα του μορφισμού g στην $Ho(\mathcal{C})$ σε έναν ισομορφισμό στην $Ho(\mathcal{C}')$.*

   (b) *Ο συναρτητής F στέλνει κάποια συνινώδη προσέγγιση στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

   (c) *Ο συναρτητής F στέλνει κάθε συνινώδη προσέγγιση στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

2. *Εάν $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας δεξιός συναρτητής του Quillen και $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

   (a) *Ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{R}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F στέλνει την εικόνα του μορφισμού g στην $Ho(\mathcal{C})$ σε έναν ισομορφισμό στην $Ho(\mathcal{C}')$.*

   (b) *Ο συναρτητής F στέλνει κάποια ινώδη προσέγγιση στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

   (c) *Ο συναρτητής F στέλνει κάθε ινώδη προσέγγιση στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.*

Απόδειξη. 1. Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής F είναι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen και $g\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Θα αποδείξουμε ότι (c) ⇒ (b) ⇒ (a) ⇒ (c).

- (c) $\Rightarrow$ (b) Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής F στέλνει κάθε συνινώδη προσέγγιση στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Τότε ο συναρτητής F στέλνει κάποια συγκεκριμένη συνινώδη προσέγγιση $\widetilde{g}$ στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.
- (b) $\Rightarrow$ (a) Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής F στέλνει κάποια συνινώδη προσέγγιση στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Ας είναι $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ μια συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό g. Τότε ο μορφισμός $F(\widetilde{g})\colon F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y})$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $\gamma_{\mathcal{C}'}(F(\widetilde{g}))\colon F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y})$ είναι ένας ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C}')$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναρτητής F είναι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen, δοθέντος ενός μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ από το Λήμμα 5.2.16 έπεται ότι $(\mathbf{L}F \circ \gamma_{\mathcal{C}})(g) = \mathbf{L}F(\gamma_{\mathcal{C}}(g)) = \gamma_{\mathcal{C}'}(F(\widetilde{g}))$. Έτσι, ο μορφισμός $\mathbf{L}F(\gamma_{\mathcal{C}}(g))$ είναι ένας ισομορφισμός. Ως εκ τούτου ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F στέλνει την εικόνα του μορφισμού g στην $Ho(\mathcal{C})$ σε έναν ισομορφισμό στην $Ho(\mathcal{C}')$.
- (a) $\Rightarrow$ (c) Ας είναι $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ μια συνινώδης προσέγγιση στον μορφισμό g. Υποθέτουμε ότι ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F στέλνει την εικόνα του μορφισμού g στην $Ho(\mathcal{C})$ σε έναν ισομορφισμό στην $Ho(\mathcal{C}')$. Έτσι, ο μορφισμός $\mathbf{L}F(\gamma_{\mathcal{C}}(g))$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C}')$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναρτητής F είναι ένας αριστερός συναρτητής του Quillen, δοθέντος ενός μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$ απο το Λήμμα 5.2.16 έπεται ότι $(\mathbf{L}F \circ \gamma_{\mathcal{C}})(g) = \mathbf{L}F(\gamma_{\mathcal{C}}(g)) = \gamma_{\mathcal{C}'}(F(\widetilde{g}))$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\gamma_{\mathcal{C}'}(F(\widetilde{g}))$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C}')$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $F(\widetilde{g})\colon F(\widetilde{X}) \longrightarrow F(\widetilde{Y})$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Επομένως, ο συναρτητής F στέλνει κάθε συνινώδη προσέγγιση στον μορφισμό g σε μια ασθενή ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Ολοκληρώνουμε την παρούσα υποενότητα με το ακόλουθο Θεώρημα το οποίο υποδηλώνει την συζυγία μεταξύ των ολικά παραγόμενων συναρτητών των συναρτητών του Quillen.

Θεώρημα 5.2.18. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.*

1. *Ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F υπάρχει.*
2. *Ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ του G υπάρχει.*
3. *Οι συναρτητές $\mathbf{L}F$ και $\mathbf{R}G$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών.*

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.

1. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen από το πρώτο σκέλος του Θεωρήματος 5.2.15 ο ολικά αριστερά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F υπάρχει.

2. Εφόσον $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen από το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 5.2.15 ο ολικά δεξιά παραγόμενος συναρτητής $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ του G υπάρχει.

3. Τα σκέλη 1. και 2. του παρόντος Θεωρήματος εξασφαλίζουν την ύπαρξη του ολικά αριστερά παραγόμενου συναρτητή $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ του F και του ολικά δεξιά παραγόμενου συναρτητή $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ του G. Θα αποδείξουμε ότι οι συναρτητές $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ και $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ αποτελούν ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός

$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C}')}(\mathbf{L}FX, Y) \longrightarrow Hom_{Ho(\mathcal{C})}(X, \mathbf{R}GY)$. Ας είναι $\widetilde{Q}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ ο συναρτητής της συνινώδους προσέγγισης και $\widehat{R}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ ο συναρτητής της ινώδους προσέγγισης της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Αντίστοιχα, ας είναι $\widetilde{Q}'\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \pi\mathcal{C}'_c$ ο συναρτητής της συνινώδους προσέγγισης και $\widehat{R}'\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \pi\mathcal{C}'_f$ ο συναρτητής της ινώδους προσέγγισης της κατηγορίας $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ καθώς και τον ορισμό των μορφισμών στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C}')$ έπεται ότι:

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C}')}(\mathbf{L}FX, Y) = \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C}')}(F(\widetilde{Q}X), Y) = \pi(\widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.4 επιλέγουμε μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $i_{F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow F(\widetilde{Q}X)$ στο αντικείμενο $F(\widetilde{Q}X)$ της $\mathcal{C}'$ και μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $j_{\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow \widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ στο αντικείμενο $\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ της $\pi\mathcal{C}'_c$. Ως εκ τούτου η ασθενής ισοδυναμία $i_{F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow F(\widetilde{Q}X)$ όπου $\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο είναι μια τετριμμένη νημάτωση και η ασθενής ισοδυναμία $j_{\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow \widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ όπου $\widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο είναι μια τετριμμένη συννημάτωση. Εφόσον το αντικείμενο $\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ είναι συννημάτωση. Ο μορφισμός $j_{\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow \widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι εξίσου συννημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $j_{\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow \widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ και $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ είναι συνινώδες. Επομένως ο μορφισμός $j_{\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow \widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών αντικειμένων. Επιπλέον από τον ορισμό του συναρτητή $\widehat{R}'$ το αντικείμενο $\widehat{R}'\widetilde{Q}'Y$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο. Ως εκ τούτου από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.2.66 έπεται ότι $\pi(\widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y) \backsimeq \pi(\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\widetilde{Q}$, το αντικείμενο $\widetilde{Q}X$ είναι συνινώδες. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}X$ είναι συννημάτωση. Εφόσον, $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο αριστερός συζυγής συναρτητής διατηρεί συννηματώσεις και τετριμμένες συννηματώσεις. Έτσι, ο μορφισμός $F(\varnothing) \longrightarrow F(\widetilde{Q}X)$ είναι συννημάτωση. Ο συναρτητής F ως αριστερός συζυγής συναρτητής στέλνει το αρχικό αντικείμενο $\varnothing$ σε ένα αρχικό αντικείμενο. Ως εκ τούτου, το $F(\varnothing)$ είναι ένα αρχικό αντικείμενο. Επομένως, ο μοναδικός μορφισμός $F(\varnothing) \longrightarrow F(\widetilde{Q}X)$ είναι συννημάτωση, γεγονός που αποδεικνύει ότι το αντικείμενο $F(\widetilde{Q}X)$ είναι συνινώδες. Έτσι, ο μορφισμός $i_{F(\widetilde{Q}X)}\colon \widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow F(\widetilde{Q}X)$ είναι ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών αντικειμένων. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\widehat{R}'\widetilde{Q}'Y$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με παραπάνω προκύπτει ότι $\pi(\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y) \backsimeq \pi(F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y)$. Έτσι,

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C}')}(\mathbf{L}FX, Y) = \pi(\widehat{R}'\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y) \backsimeq \pi(\widetilde{Q}'F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y) \backsimeq$$

$$\backsimeq \pi(F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.4 επιλέγουμε μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $i_Y\colon \widetilde{Q}'Y \longrightarrow Y$ και μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $j_Y\colon Y \longrightarrow \widehat{R}'Y$ στο αντικείμενο Y της κατηγορίας $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου η ασθενής ισοδυναμία $i_Y\colon \widetilde{Q}'Y \longrightarrow Y$ όπου $\widetilde{Q}'Y$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο, είναι μια τετριμμένη νημάτωση και η ασθενής ισοδυναμία $j_Y\colon Y \longrightarrow \widehat{R}'Y$ όπου $\widehat{R}'Y$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο είναι μια τετριμμένη συννημάτωση. Εφόσον ο μορφισμός $i_Y\colon \widetilde{Q}'Y \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία από το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 έπεται ότι ο μορφισμός $\widehat{R}'(i_Y)\colon \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y \longrightarrow \widehat{R}'Y$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία και μάλιστα μεταξύ ινωδών αντικειμένων. Επιπλέον, εφόσον το $F(\widetilde{Q}X)$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.66

έπεται ότι $\pi(F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y) \backsimeq \pi(F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'Y)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το $\widetilde{Q}X$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $\widehat{R}'Y$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$ και ότι οι συναρτητές F και G αποτελούν ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen από την Πρόταση 5.1.13 προκύπτει ότι $\pi(F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'Y) \backsimeq \pi(\widetilde{Q}X, G(\widehat{R}'Y))$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\widehat{R}'$, το αντικείμενο $\widehat{R}'Y$ είναι ινώδες. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\widehat{R}'Y \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Εφόσον, $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο δεξιός συζυγής συναρτητής διατηρεί νηματώσεις και τετριμμένες νηματώσεις. Έτσι, ο μορφισμός $G(\widehat{R}'Y) \longrightarrow G(*)$ είναι νημάτωση. Ο συναρτητής G ως δεξιός συζυγής συναρτητής στέλνει το τελικό αντικείμενο $*$ σε ένα τελικό αντικείμενο. Ως εκ τούτου, το $G(*)$ είναι ένα τελικό αντικείμενο. Επομένως, ο μορφισμός $G(\widehat{R}'Y) \longrightarrow G(*)$ ο οποίος είναι νημάτωση είναι μοναδικός, γεγονός που αποδεικνύει ότι το αντικείμενο $G(\widehat{R}'Y)$ είναι ινώδες. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 5.1.10 $\pi(\widetilde{Q}X, G(\widehat{R}'Y)) \backsimeq \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, G(\widehat{R}'Y))$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.4 επιλέγουμε μια ινώδη-συνινώδη προσέγγιση $i_{G(\widehat{R}'Y)}\colon \widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y) \longrightarrow G(\widehat{R}'Y)$ στο αντικείμενο $G(\widehat{R}'Y)$ της $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου $i_{G(\widehat{R}'Y)}\colon \widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y) \longrightarrow G(\widehat{R}'Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Επομένως από το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widehat{R}(i_{G(\widehat{R}'Y)})\colon \widehat{R}\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y) \longrightarrow \widehat{R}G(\widehat{R}'Y)$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Όμως το αντικείμενο $G(\widehat{R}'Y)$ είναι ινώδες και ως εκ τούτου $\widehat{R}G(\widehat{R}'Y) = G(\widehat{R}'Y)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\widetilde{Q}$ το αντικείμενο $\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y)$ είναι συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Έτσι, από τον ορισμό του συναρτητή $\widehat{R}$ το αντικείμενο $\widehat{R}\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y)$ είναι ινώδες. Επομένως, $\widehat{R}(i_{G(\widehat{R}'Y)})\colon \widehat{R}\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y) \longrightarrow G(\widehat{R}'Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών αντικειμένων. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.4 επιλέγουμε μια συνινώδη-ινώδη προσέγγιση $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ στο αντικείμενο $\widetilde{Q}X$ της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου η ασθενής ισοδυναμία $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ όπου $\widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο είναι μια τετριμμένη συννημάτωση. Ο μορφισμός $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ ως τετριμμένη συννημάτωση είναι συννημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση των συννηματώσεων $j_{\widetilde{Q}X}\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widehat{R}\widetilde{Q}X$ και $\varnothing \longrightarrow \widetilde{Q}X$. Επομένως το αντικείμενο $\widehat{R}\widetilde{Q}X$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Συνεπώς, από το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.2.66 προκύπτει ότι $\pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, G(\widehat{R}'Y)) \backsimeq \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y))$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό της ομοτοπικής ομάδας $Ho(\mathcal{C})$ της $\mathcal{C}$ έπεται ότι $\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X, G(\widehat{R}'Y)) = \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y))$. Επιπλέον, από τον ορισμό του δεξιά παραγόμενου συναρτητή $\mathbf{R}G$ ισχύει ότι $\mathbf{R}GY = G(\widehat{R}'Y)$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο ισότητες προκύπτει οτι $\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X, \mathbf{R}GY) = \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X, G(\widehat{R}'Y)) = \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y))$. Συνοψίζοντας έχουμε

$$\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C}')}(\mathbf{L}FX, Y) \backsimeq \pi(F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'\widetilde{Q}'Y) \backsimeq \pi(F(\widetilde{Q}X), \widehat{R}'Y) \backsimeq \pi(\widetilde{Q}X, G(\widehat{R}'Y)) \backsimeq$$

$$\backsimeq \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, G(\widehat{R}'Y)) \backsimeq \pi(\widehat{R}\widetilde{Q}X, \widehat{R}\widetilde{Q}G(\widehat{R}'Y)) = \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X, G(\widehat{R}'Y)) = \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X, \mathbf{R}GY)$$

Ως εκ τούτου $\mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C}')}(\mathbf{L}FX, Y) \backsimeq \mathsf{Hom}_{Ho(\mathcal{C})}(X, \mathbf{R}GY)$, γεγονός που αποδεικνύει ότι οι συναρτητές $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ και $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ αποτελούν ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. ■

5.3 Ισοδυναμίες του Quillen

Στην ενότητα αυτή μελετάμε τις ισοδυναμίες του Quillen. Οι ισοδυναμίες του Quillen όπως θα δούμε είναι συναρτητές του Quillen οι οποίοι ικανοποιούν μια επιπλέον ιδιότητα η οποία συνεπάγεται ότι οι ολικά παραγόμενοι συναρτητές τους είναι ισοδυναμίες κατηγοριών μεταξύ των ομοτοπικών κατηγοριών. Επιπλέον, ανάλογα με την ισοδυναμία κατηγοριών οι ισοδυναμίες του

Quillen καθορίζουν εάν δύο κατηγορίες μοντέλα είναι «ουσιαστικά» ίδιες. Ωστόσο η έννοια της ισοδυναμίας του Quillen είναι ασθενέστερη της έννοιας της ισοδυναμίας των κατηγοριών.

Ορισμός 5.3.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Εάν για κάθε ζεύγος αντικειμένων (X, Y) όπου X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και Y είναι ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$, ένας μορφισμός $f\colon FX \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$ αν και μόνο αν ο συζυγής μορφισμός του $f^{\#}\colon X \longrightarrow GY$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$, τότε το ζεύγος συναρτητών του Quillen $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ καλείται* **ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen (pair of Quillen equivalences)**.

Στην περίπτωση αυτή ο αριστερός Quillen συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ καλείται **αριστερή ισοδυναμία του Quillen (left Quillen equivalence)** *και ο δεξιός Quillen συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ καλείται* **δεξιά ισοδυναμία του Quillen (right Quillen equivalence)**.

Ευθύς αμέσως παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα ισοδυναμιών του Quillen.

Παράδειγμα 5.3.2. 1. Ας είναι $\mathsf{S\,Set}$ η κατηγορία των μονόπλοκων συνόλων και Top η κατηγορία των τοπολογικών χώρων. Ο συναρτητής γεωμετρικής πραγματοποιήσης (geometric realization functor) $|\cdot|\colon \mathsf{S\,Set} \longrightarrow \mathsf{Top}$ ο οποίος στέλνει ένα μονόπλοκο σύνολο $X \in \mathsf{S\,Set}$ στην γεωμετρική πραγματοποιήση του $|X|$ (δηλαδή στον τοπολογικό ο οποίος έχει κατασκευαστεί ως εξής: Ας είναι $|\Delta_n|$ το n-διάστατο simplex το οποίο ορίζεται ως

$$|\Delta^n| = \Big\{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \ \text{ και } \ t_i \geqslant 0\Big\}$$

Εφοδιάζουμε το X με την διακριτή τοπολογία και θέτουμε $\bar{X} = \bigcup_{n\geqslant 0} X_n \times |\Delta^n|$. Εν συνεχεία ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας ως εξής:

$$(d_i x_n, u_{n-1}) \backsim (x_n, \theta_i u_n - 1) \ \text{ για } x_n \in X_n \ \text{ και } \ u_{n-1} \in |\Delta^{n-1}|$$

$$(s_i x_n, u_{n+1}) \backsim (x_n, \sigma_i u_{n+1}) \ \text{ για } x_n \in X_n \ \text{ και } \ u_{n+1} \in |\Delta^{n+1}|$$

Τότε $|X| = \bar{X}/\backsim$, και έναν μονόπλοκο μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ στην συνεχή απεικόνιση $|f|\colon |X| \longrightarrow |Y|$ η οποία ορίζεται ως $|f||x_n, u_n| = |f(x_n), u_n|$ και ο ολικά ιδιάζον πολύπλοκος συναρτητής (total singular complex functor) $\mathsf{Sing}\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{S\,Set}$ ο οποίος στέλνει έναν τοπολογικό χώρο A στο βαθμωτό σύνολο $\mathsf{Sing}(A) = \big\{f\colon |\Delta_n| \longrightarrow A \mid f \ \text{ συνεχής } \ n \in \mathbb{N}^+\big\}$ δηλαδή σε όλες τις συνεχείς απεικονίσεις από το $|\Delta_n|$ στον A και μια συνεχή απεικόνιση $g\colon A \longrightarrow B$ στο

$$\mathsf{Sing}(g)\colon \mathsf{Sing}(A) \longrightarrow \mathsf{Sing}(B), \quad (f\colon |\Delta_n| \longrightarrow A) \longmapsto g \circ f\colon |\Delta_n| \longrightarrow A \longrightarrow B$$

αποτελούν ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.

2. Ας είναι $\mathsf{S\,Set}_*$ η κατηγορία των σημειακών μονόπλοκων συνόλων και Top_* η κατηγορία των σημειακών τοπολογικών χώρων. Ο συναρτητής γεωμετρικής πραγματοποιήσης (geometric realization functor) $|\cdot|_*\colon \mathsf{S\,Set}_* \longrightarrow \mathsf{Top}_*$ και ο ολικά ιδιάζον πολύπλοκος συναρτητής (total singular complex functor) $\mathsf{Sing}_*\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{S\,Set}_*$ αποτελούν ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen .

Παρατήρηση 5.3.3. 1. Εάν $X \in Ho(\mathcal{C})$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο τότε η μονάδα (unit) στο X δίνεται από τη σύνθεση

$$X \xrightarrow{\epsilon_X} GF(X) \xrightarrow{Gj_{FX}} G\widehat{R}F(X)$$

όπου $\epsilon\colon X \longrightarrow GF(X)$ είναι η μονάδα του συζυγούς ζεύγους συναρτητών (F, G) στο X και $j_{F(X)}\colon F(X) \longrightarrow \widehat{R}F(X)$ είναι η ινώδης προσέγγιση στο $F(X)$.

Εαν $X \in Ho(\mathcal{C})$ είναι τυχαίο αντικείμενο η μονάδα δίνεται από τη σύνθεση

$$X \xleftarrow{i_X} \widetilde{Q}X \longrightarrow G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$$

όπου $i_X \colon \widetilde{Q}X \longrightarrow X$ είναι η συνινώδης προσέγγιση στο X, η οποία ως ασθενής ισοδυναμία είναι αντιστρέψιμη στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$.

2. Εάν $X \in Ho(\mathcal{C})$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο τότε η συνμονάδα (counit) στο X δίνεται από τη σύνθεση

$$F\widetilde{Q}G(X) \xrightarrow{Fi_{GX}} FG(X) \xrightarrow{\eta_X} X$$

όπου $\eta_X \colon FG(X) \longrightarrow X$ είναι η συνμονάδα του συζυγούς ζεύγους συναρτητών (F, G) στο X και $i_{GX} \colon \widetilde{Q}G(X) \longrightarrow GX$ είναι η συνινώδης προσέγγιση στο $G(X)$. Εάν $X \in Ho(\mathcal{C})$ είναι τυχαίο αντικείμενο η συνμονάδα δίνεται από τη σύνθεση

$$F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}X \xleftarrow{j_X} X$$

όπου $j_X \colon X \longrightarrow \widehat{R}X$ είναι η ινώδης προσέγγιση στο X, η οποία ως ασθενής ισοδυναμία είναι αντιστρέψιμη στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C})$.

Υπενθυμίζουμε ότι η ισοδυναμία μεταξύ δύο κατηγοριών μας εξασφαλίζει ότι οι εν λόγω κατηγορίες είναι «ουσιαστικά ίδιες». Η σημασία των ισοδυναμιών του Quillen έγκειται στο γεγονός ότι ακόμη και εάν το ζεύγος των ισοδυναμιών του Quillen δεν είναι ισοδυναμία κατηγοριών το συζυγές ζεύγος των παράγωγων συναρτητών τους είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών όπως υποδηλώνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες μοντέλα και $F \colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.*

2. *Η σύνθεση $X \xrightarrow{\epsilon_X} GF(X) \xrightarrow{Gj_{FX}} G\widehat{R}F(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για όλα τα συνινώδη αντικείμενα X και η σύνθεση $F\widetilde{Q}G(X) \xrightarrow{Fi_{GX}} FG(X) \xrightarrow{\eta_X} X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για όλα τα ινώδη αντικείμενα X.*

3. *Το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G)$ είναι μια συζυγής ισοδυναμία κατηγοριών.*

Απόδειξη. Ας είναι $F \colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Θα αποδείξουμε ότι $(1) \Leftrightarrow (2)$ και $(3) \Leftrightarrow (2)$.

- $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ Υποθέτουμε ότι το ζεύγος συναρτητών (F, G) του Quillen είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen και ότι το αντικείμενο X είναι συνινώδες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της Παρατήρησης 5.3.3 ο μορφισμός $j_{F(X)} \colon F(X) \longrightarrow \widehat{R}F(X)$ είναι η ινώδης προσέγγιση στο $F(X)$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $j_{F(X)} \colon F(X) \longrightarrow \widehat{R}F(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία όπου $\widehat{R}F(X)$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο. Έτσι, εφόσον (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen ο συζυγής μορφισμός $Gj_{F(X)} \circ \epsilon_X \colon X \longrightarrow G\widehat{R}F(X)$ του μορφισμού $j_{F(X)} \colon F(X) \longrightarrow \widehat{R}F(X)$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία.

  Ανάλογα, υποθέτουμε ότι το ζεύγος συναρτητών του Quillen (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen και ότι το αντικείμενο X είναι ινώδες. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 5.3.3 ο μορφισμός $i_{GX} \colon \widetilde{Q}G(X) \longrightarrow G(X)$ είναι η συνινώδης προσέγγιση στο $G(X)$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $i_{GX} \colon \widetilde{Q}G(X) \longrightarrow G(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία όπου $\widetilde{Q}G(X)$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο. Έτσι, εφόσον (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen ο συζυγής μορφισμός $\eta_X \circ Fi_{GX} \colon F\widetilde{Q}G(X) \longrightarrow X$ του μορφισμού $i_{GX} \colon \widetilde{Q}G(X) \longrightarrow G(X)$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία.

- $(2) \Rightarrow (1)$ Υποθέτουμε ότι το ζεύγος συναρτητών του Quillen (F, G) ικανοποιεί το 2. Ας είναι $f\colon FX \longrightarrow Y$ μια ασθενής ισοδυναμία όπου X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο και Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο. Ο μορφισμός $X \longrightarrow G(Y)$ είναι η σύνθεση

$$X \xrightarrow{\epsilon_X} G(F(X)) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$$

Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\epsilon_X"] \arrow[d, "1_X"] & G(F(X)) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "G(j_{F(X)})"] & G(Y) \arrow[d, "G(j_Y)"] \\ X \arrow[r, "\beta"] & G\widehat{R}(F(X)) \arrow[r, "G\widehat{R}f"] & G(\widehat{R}Y) \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση, ο μορφισμός $X \longrightarrow G\widehat{R}(F(X))$ είναι η σύνθεση $X \xrightarrow{\epsilon_X} G(F(X)) \xrightarrow{Gj_{FX}} G\widehat{R}(F(X))$. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 υπάρχει ένας μορφισμός $\widehat{R}f\colon \widehat{R}(F(X)) \longrightarrow \widehat{R}Y$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_{F(X)}"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \\ \widehat{R}(F(X)) \arrow[r, "\widehat{R}f"'] & \widehat{R}Y \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $\widehat{R}f \circ j_{F(X)} = j_Y \circ f$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή G στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $G\widehat{R}f \circ G(j_{F(X)}) = G(j_Y) \circ G(f)$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα και την ισότητα $\beta \circ 1_X = G(j_{F(X)}) \circ \epsilon_X$ έπεται ότι

$$G\widehat{R}f \circ \beta \circ 1_X = G\widehat{R}f \circ G(j_{F(X)}) \circ \epsilon_X = G(j_Y) \circ G(f) \circ \epsilon_X.$$

Ως εκ τούτου, το διάγραμμα (5.1) είναι μεταθετικό. Εφόσον ο μορφισμός $f\colon FX \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widehat{R}f\colon \widehat{R}FX \longrightarrow \widehat{R}Y$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι (F, G) είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen από το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 5.1.8 έπεται ότι ο συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}'$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$. Έτσι, οι μορφισμοί $G(\widehat{R}f)\colon G(\widehat{R}FX) \longrightarrow G(\widehat{R}Y)$, $G(j_Y)\colon G(Y) \longrightarrow G(\widehat{R}Y)$ και $G(i_Y)\colon G(Y) \longrightarrow G(\widehat{R}Y)$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Επιπλέον, εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $\beta = G(j_{F(X)}) \circ \epsilon_X$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ο μορφισμός $G(\widehat{R}f) \circ \beta\colon X \longrightarrow G(\widehat{R}Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν επιπροσθέτως ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{\mathrm{X}}\colon X \longrightarrow X$ ανήκει στην κλάση των ασθενών ισοδυναμιών από την ισότητα $G\widehat{R}f \circ \beta \circ 1_{\mathrm{X}} = G(j_Y) \circ G(f) \circ \epsilon_X$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $G(f) \circ \epsilon_X : X \longrightarrow GY$ είναι ασθενής ισοδυναμία.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f^{\#}\colon X \longrightarrow GY$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία όπου X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο και Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο. Ο μορφισμός $F(X) \longrightarrow Y$ είναι η σύνθεση $F(X) \xrightarrow{F(f^{\#})} F(G(Y)) \xrightarrow{\eta_Y} Y$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(\widetilde{Q}X) \arrow[r, "F(\widetilde{Q}(f^{\#}))"] \arrow[d, "F(i_X)"] & F(\widetilde{Q}(G(Y))) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(i_{G(Y)})"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\ FX \arrow[r, "F(f^{\#})"] & F(G(Y)) \arrow[r, "\eta_Y"] & Y \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση, ο μορφισμός $\alpha\colon F(\widetilde{Q}(G(Y))) \longrightarrow Y$ είναι η σύνθεση $F(\widetilde{Q}(G(Y))) \xrightarrow{F(i_{G(Y)})} F(G(Y)) \xrightarrow{\eta_Y} Y$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 υπάρχει ένας μορφισμός $\widetilde{Q}(f^{\#})\colon \widetilde{Q}(X) \longrightarrow \widetilde{Q}(GY)$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q}(X) \arrow[r, "\widetilde{Q}(f^{\#})"] \arrow[d, "i_X"] & \widetilde{Q}(GY) \arrow[d, "i_{GY}"] \\ X \arrow[r, "f^{\#}"'] & GY \end{tikzcd} .$$

Ως εκ τούτου $i_{G(Y)} \circ \widetilde{Q}(f^{\#}) = f^{\#} \circ i_X$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή F στην τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν προκύπτει ότι $F(i_{G(Y)}) \circ F\widetilde{Q}(f^{\#}) = F(f^{\#}) \circ F(i_X)$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα και την ισότητα $1_Y \circ \alpha = \eta_Y \circ F(i_{G(Y)})$ έπεται ότι

$$\eta_Y \circ F(f^{\#}) \circ F(i_X) = \eta_Y \circ F(i_{G(Y)}) \circ F\widetilde{Q}(f^{\#}) = 1_Y \circ \alpha \circ F\widetilde{Q}(f^{\#})$$

Ως εκ τούτου, το διάγραμμα (5.2) είναι μεταθετικό. Εφόσον ο μορφισμός $f^{\#}\colon X \longrightarrow GY$ είναι ασθενής ισοδυναμία σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο μορφισμός $\widetilde{Q}(f^{\#})\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}(GY)$ είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι (F, G) είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.1.8 έπεται ότι ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Έτσι, οι μορφισμοί $F(\widetilde{Q}(f^{\#}))\colon F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow F(\widetilde{Q}(GY))$ και $F(i_X)\colon F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow FX$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Επιπλέον, εξ' υποθέσεως ο μορφισμός $\alpha = \eta_Y \circ F(i_{G(Y)})$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 ο μορφισμός $\alpha \circ F(\widetilde{Q}(f^{\#}))\colon F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν επιπροσθέτως ότι ο ταυτοτικός μορφισμός $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση των ασθενών ισοδυναμιών από την ισότητα $\eta_Y \circ F(f^{\#}) \circ F(i_X) = 1_Y \circ \alpha \circ F\widetilde{Q}(f^{\#})$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός $\eta_Y \circ F(f^{\#})\colon FX \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Επομένως αποδείξαμε ότι για κάθε ζεύγος αντικειμένων (X, Y) όπου X είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και Y είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$ ο μορφισμός $FX \longrightarrow Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο συζυγής μορφισμός του $X \longrightarrow GY$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Ως εκ τούτου το ζεύγος συναρτητών του Quillen (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.

- $\underline{(3) \Leftrightarrow (2)}$ Υποθέτουμε ότι το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G)$ είναι μια συζυγής ισοδυναμία κατηγοριών. Τότε ο ταυτοτικός συναρτητής $1_{Ho(\mathcal{C})}\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον συναρτητή $\mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ και ο συναρτητής $\mathbf{L}F \circ \mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον ταυτοτικό συναρτητή $1_{Ho(\mathcal{C}')}\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Παρατήρησης 5.3.3 για κάθε αντικείμενο X της $Ho(\mathcal{C})$ η μονάδα στο X δίνεται ως σύνθεση

$$X \xrightarrow{i_X^{-1}} \widetilde{Q}X \xrightarrow{Gj_{F\widehat{Q}X}\circ\epsilon_X} G\widehat{R}F\widetilde{Q}X\ .$$

Εφόσον ο ταυτοτικός συναρτητής $1_{Ho(\mathcal{C})}\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον συναρτητή $\mathbf{R}G\circ\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ για κάθε αντικείμενο X της $Ho(\mathcal{C})$ ο μορφισμός $X \longrightarrow (\mathbf{R}G\circ\mathbf{L}F)(X)$ είναι ένας ισομορφισμός. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό των συναρτητών $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ και $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ προκύπτει ότι:

$$(\mathbf{R}G\circ\mathbf{L}F)(X) = \mathbf{R}G(\mathbf{L}F(X)) = \mathbf{R}G(F(\widetilde{Q}X)) = G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$$

Έτσι, ο μορφισμός $X \longrightarrow G\widehat{R}F(\widetilde{Q}X)$ είναι ένας ισομορφισμός. Ωστόσο, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $X \xrightarrow{i_X^{-1}} \widetilde{Q}X \xrightarrow{Gj_{F\widehat{Q}X}\circ\epsilon_X} G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ είναι ένας ισομορφισμός αν και μόνο αν ο μορφισμός $Gj_{F\widehat{Q}X}\circ\epsilon_X\circ i_X^{-1}$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $Gj_{F\widehat{Q}X}\circ\epsilon_X\colon \widetilde{Q}X \longrightarrow G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ είναι ασθενής ισοδυναμία για όλα τα X. Εαν το αντικείμενο X είναι συνινώδες λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\widetilde{Q}X \backsimeq X$ ισχύει αν και μόνο αν ο μορφισμός $Gj_{FX}\circ\epsilon_X\colon X \longrightarrow G\widehat{R}FX$ δηλαδή η σύνθεση $X \xrightarrow{\epsilon_X} GF(X) \xrightarrow{Gj_{FX}} G\widehat{R}F(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Όσον αφορά τον δεύτερο μορφισμό σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Παρατήρησης 5.3.3 για κάθε αντικείμενο X της $Ho(\mathcal{C}')$ η συνμονάδα στο X δίνεται ως σύνθεση

$$F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \xrightarrow{\eta_X\circ Fi_{G\widehat{R}X}} \widehat{R}X \xrightarrow{j_X^{-1}} X\ .$$

Εφόσον ο συναρτητής $\mathbf{L}F\circ\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ είναι φυσικά ισόμορφος με τον ταυτοτικός συναρτητής $1_{Ho(\mathcal{C}')}\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ για κάθε αντικείμενο X της $Ho(\mathcal{C}')$ ο μορφισμός $(\mathbf{L}F\circ\mathbf{R}G)(X) \longrightarrow X$ είναι ένας ισομορφισμός. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό των συναρτητών $\mathbf{L}F\colon Ho(\mathcal{C}) \longrightarrow Ho(\mathcal{C}')$ και $\mathbf{R}G\colon Ho(\mathcal{C}') \longrightarrow Ho(\mathcal{C})$ προκύπτει ότι:

$$(\mathbf{L}F\circ\mathbf{R}G)(X) = \mathbf{L}F(\mathbf{R}G(X)) = \mathbf{L}GF(G(\widehat{R}X)) = F\widetilde{Q}G\widehat{R}X$$

Έτσι, ο μορφισμός $F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow X$ είναι ένας ισομορφισμός. Ωστόσο, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \xrightarrow{\eta_X\circ Fi_{G\widehat{R}X}} \widehat{R}X \xrightarrow{j_X^{-1}} X$ είναι ένας ισομορφισμός αν και μόνο αν ο μορφισμός $j_X^{-1}\circ\eta_X\circ Fi_{G\widehat{R}X}$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $\eta_X\circ Fi_{G\widehat{R}X}\colon F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}X$ είναι ασθενής ισοδυναμία για όλα τα X. Εαν το αντικείμενο X είναι ινώδες, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\widehat{R}X \backsimeq X$, ισχύει αν και μόνο αν ο μορφισμός $F\widetilde{Q}GX \longrightarrow X$ δηλαδή η σύνθεση $F\widetilde{Q}G(X) \xrightarrow{Fi_{GX}} FG(X) \xrightarrow{\eta_X} X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$. ■

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.4 είναι η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 5.3.5. *Ας είναι (F,G), (F,G') και (F',G) ζεύγη συναρτητών του Quillen .*

1. *Το ζεύγος (F,G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen αν και μόνο αν το ζεύγος (F,G') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.*

2. *Το ζεύγος (F,G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen αν και μόνο αν το ζεύγος (F',G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι (F,G) και (F,G') ζεύγη συναρτητών του Quillen. Υποθέτουμε ότι το ζεύγος (F,G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση

5.3.4 το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G)$ είναι μια συζυγής ισοδυναμία κατηγοριών και κατ' επέκταση ο συναρτητής $\mathbf{L}F$ είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών. Εφόσον το ζεύγος (F, G') είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με το τρίτο σκέλος του Θεωρήματος 5.2.18 το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G')$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. Ως εκ τούτου ο συναρτητής $\mathbf{R}G'$ ως συζυγής του $\mathbf{L}F$ είναι αυτόματα ισοδυναμία κατηγοριών. Έτσι, το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G')$ είναι συζυγής ισοδυναμία κατηγοριών. Ως εκ τούτου απο την Πρόταση 5.3.4 έπεται ότι το ζεύγος (F, G') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το ζεύγος (F, G') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.4 το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G')$ είναι μια συζυγής ισοδυναμία κατηγοριών και κατ' επέκταση ο συναρτητής $\mathbf{L}F$ είναι μια ισοδυναμία κατηγοριών. Εφόσον το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με το τρίτο σκέλος του Θεωρήματος 5.2.18 το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G)$ είναι ένα συζυγές ζεύγος συναρτητών. Ως εκ τούτου ο συναρτητής $\mathbf{R}G$ ως συζυγής του $\mathbf{L}F$ είναι αυτόματα ισοδυναμία κατηγοριών. Έτσι, το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G)$ είναι συζυγής ισοδυναμία κατηγοριών. Ως εκ τούτου από την Πρόταση 5.3.4 έπεται ότι το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.
Διαφορετικά, εφόσον τα (F, G) και (F, G') είναι ζεύγη συζυγών συναρτητών έπεται ότι $G \simeq G'$. Ως εκ τούτου είναι άμεσο ότι το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen αν και μόνο αν το ζεύγος (F, G') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.

2. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Σχόλιο 5.3.6. Χάρις στην Πρότασης 5.3.5 μπορούμε να μιλάμε για την ισοδυναμία του Quillen F παραλείποντας την υπόλοιπη συζυγία.

Πρόταση 5.3.7. *Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon \Phi$ και $G\colon \mathcal{C}' \leftrightarrows \mathcal{C}'' \colon \Phi'$ ζεύγη συναρτητών του Quillen.*

1. *Εάν τα ζεύγη (F, Φ) και (G, Φ') είναι ζεύγη ισοδυναμιών του Quillen, τότε το ζεύγος $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.*

2. *Εάν τα ζεύγη (F, Φ) και $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ζεύγη ισοδυναμιών του Quillen, τότε το ζεύγος (G, Φ') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.*

3. *Εάν τα ζεύγη (G, Φ') και $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ζεύγη ισοδυναμιών του Quillen, τότε το ζεύγος (F, Φ) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.*

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon \Phi$, $G\colon \mathcal{C}' \leftrightarrows \mathcal{C}'' \colon \Phi'$ ζεύγη συναρτητών του Quillen. Τότε η σύνθεση $G \circ F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'' \colon \Phi \circ \Phi'$ ορίζεται και είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen.

1. Υποθέτουμε ότι τα ζεύγη (F, Φ) και (G, Φ') είναι ζεύγη ισοδυναμιών του Quillen. Έστω ότι για κάθε συνινώδες αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ και κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$ ο μορφισμός $(G \circ F)(B) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}''$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο B είναι ένας συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$ ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση. Εφόσον $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon \Phi$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συννηματώσεις. Έτσι, ο μορφισμός $F(\varnothing) \longrightarrow F(B)$ είναι εξίσου συννημάτωση. Ο συναρτητής F ως αριστερός συζυγής συναρτητής στέλνει το αρχικό αντικείμενο $\varnothing$ στο αρχικό αντικείμενο $F(\varnothing)$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $F(\varnothing) \longrightarrow F(B)$ είναι μοναδικός. Επομένως, το αντικείμενο $F(B)$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το ζεύγος (G, Φ') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen και ότι ο μορφισμός $G(F(B)) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}''$ για κάθε συνινώδες αντικείμενο $F(B)$ της $\mathcal{C}'$ και για κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$ έπεται ότι ο μορφισμός $F(B) \longrightarrow \Phi'(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Εφόσον (G, Φ') είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο συναρτητής $\Phi'\colon \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί τις νηματώσεις. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αντικείμενο X είναι

ινώδες ο μορφισμός $X \longrightarrow *$ είναι νημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός $\Phi'(X) \longrightarrow \Phi'(*)$ είναι εξίσου νημάτωση. Ο συναρτητής $\Phi' \colon \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$ ως δεξιός συζυγής συναρτητής στέλνει το τελικό αντικείμενο $*$ στο τελικό αντικείμενο $\Phi'(*)$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\Phi'(X) \longrightarrow \Phi'(*)$ είναι μοναδικός. Επομένως, το αντικείμενο $\Phi'(X)$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το ζεύγος (F, Φ) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen και ότι ο μορφισμός $F(B) \longrightarrow \Phi'(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$ για κάθε συνινώδες αντικείμενο $F(B)$ της $\mathcal{C}'$ και για κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$ έπεται ότι ο μορφισμός $B \longrightarrow (\Phi \circ \Phi')(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε συνινώδες αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ και κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$ ο μορφισμός $B \longrightarrow (\Phi \circ \Phi')(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική διαδικασία ο μορφισμός $(G \circ F)(B) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}''$ για κάθε συνινώδες αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ και κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$. Έτσι, συνυπολογίζοντας ότι το ζεύγος $G \circ F \colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'' \colon \Phi \circ \Phi'$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen προκύπτει ότι το ζεύγος $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.

2. Υποθέτουμε ότι τα ζεύγη (F, Φ) και $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ζεύγη ισοδυναμιών του Quillen. Ας είναι B ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Εφόσον $F \colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' \colon \Phi$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο αριστερός συζυγής συναρτητής $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συννηματώσεις και κατ' επέκταση όπως έχουμε αποδείξει στο πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης συνινώδη αντικείμενα. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $F(B)$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Υποθέτουμε ότι για κάθε συνινώδες αντικείμενο Z της $\mathcal{C}'$ και κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$ ο μορφισμός $G(Z) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Ωστόσο, κάθε συνινώδες αντικείμενο Z της $\mathcal{C}'$ είναι ισόμορφο με ένα συνινώδες αντικείμενο $F(B)$ της $\mathcal{C}'$. Έτσι, ο μορφισμός $G(F(B)) \longrightarrow X$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $(G \circ F)(B) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία της $\mathcal{C}''$. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το ζεύγος $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen έπεται ότι ο μορφισμός $B \longrightarrow (\Phi \circ \Phi')(X)$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $B \longrightarrow \Phi(\Phi'(X))$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Εφόσον $G \colon \mathcal{C}' \leftrightarrows \mathcal{C}'' \colon \Phi'$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5. ο δεξιός συζυγής συναρτητής $\Phi' \colon \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί νηματώσεις και κατ' επέκταση όπως έχουμε αποδείξει στο πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης ινώδη αντικείμενα. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\Phi'(X)$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι (F, Φ) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen και ότι ο μορφισμός $B \longrightarrow \Phi(\Phi'(X))$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία προκύπτει ότι ο μορφισμός $F(B) \longrightarrow \Phi'(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Ως εκ τούτου καθώς $F(B) \simeq Z$ έπεται ότι ο μορφισμός $Z \longrightarrow \Phi'(X)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε συνινώδες αντικείμενο Z της $\mathcal{C}'$ και κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$ ο μορφισμός $Z \longrightarrow \Phi'(X)$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική διαδικασία ο μορφισμός $G(Z) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε συνινώδες αντικείμενο Z της $\mathcal{C}'$ και κάθε ινώδες αντικείμενο X της $\mathcal{C}''$. Επομένως, συνυπολογίζοντας ότι το ζεύγος $G \colon \mathcal{C}' \leftrightarrows \mathcal{C}'' \colon \Phi'$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen προκύπτει ότι το ζεύγος (G, Φ') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.

3. Υποθέτουμε ότι τα ζεύγη (G, Φ') και $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ζεύγη ισοδυναμιών του Quillen. Ας είναι X ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}''$. Εφόσον $G \colon \mathcal{C}' \leftrightarrows \mathcal{C}'' \colon \Phi'$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο δεξιός συζυγής συναρτητής $\Phi' \colon \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί νηματώσεις και κατ' επέκταση όπως έχουμε αποδείξει στο πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης ινώδη αντικείμενα. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $\Phi'(X)$ είναι ένα ινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Υποθέτουμε ότι για κάθε συνινώδες αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ και κάθε ινώδες αντικείμενο W της $\mathcal{C}'$ ο μορφισμός $B \longrightarrow \Phi(W)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Ωστόσο, κάθε ινώδες αντικείμενο W της $\mathcal{C}'$ είναι ισόμορφο με ένα ινώδες αντικείμενο $\Phi'(X)$ της $\mathcal{C}'$. Έτσι, ο μορφισμός $B \longrightarrow \Phi(\Phi'(X))$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $B \longrightarrow (\Phi \circ \Phi')(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία της $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το ζεύγος $(G \circ F, \Phi \circ \Phi')$ είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen έπεται ότι ο μορφισμός

$(G \circ F)(B) \longrightarrow X$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $G(F(B)) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Εφόσον $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon \Phi$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.5 ο αριστερός συζυγής συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ διατηρεί συννηματώσεις και κατ' επέκταση όπως έχουμε αποδείξει στο πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης συννινώδη αντικείμενα. Ως εκ τούτου το αντικείμενο $F(B)$ είναι ένα συνινώδες αντικείμενο της $\mathcal{C}'$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι (G, Φ') είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen και ότι ο μορφισμός $G(F(B)) \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία προκύπτει ότι ο μορφισμός $F(B) \longrightarrow \Phi'(X)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Ως εκ τούτου καθώς $\Phi'(X) \backsimeq W$ έπεται ότι ο μορφισμός $F(B) \longrightarrow W$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $F(B) \longrightarrow W$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$ για κάθε συνινώδες αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ και κάθε ινώδες αντικείμενο W της $\mathcal{C}'$. Ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική διαδικασία ο μορφισμός $B \longrightarrow \Phi(W)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε συνινώδες αντικείμενο B της $\mathcal{C}$ και κάθε ινώδες αντικείμενο W της $\mathcal{C}'$. Επομένως, συνυπολογίζοντας ότι το ζεύγος $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon \Phi$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen προκύπτει ότι το ζεύγος (F, Φ) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen. ■

Παρατήρηση 5.3.8. Η Πρόταση 5.3.7 μας επιτρέπει να θεωρούμε διαισθητικά την κατηγορία των κατηγοριών μοντέλα αυτού καθ' εαυτού ως κατηγορία μοντέλο στην οποία τις ασθενείς ισοδυναμίες αποτελούν οι ισοδυναμίες του Quillen. Επιπλέον ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen το οποίο είναι retract ενός ζεύγους ισοδυναμιών του Quillen είναι εξίσου ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.

Ολοκληρώνουμε το παρόν κεφάλαιο παραθέτοντας την ακόλουθη Πρόταση η οποία αποτελεί ένα κριτήριο το οποίο μας επιτρέπει να ελέγχουμε πότε ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen αποτελεί ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.

Πρόταση 5.3.9. *Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το ζεύγος (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen.*
2. *Ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ αντανακλά ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων και για κάθε ινώδες αντικείμενο Y ο μορφισμός $F\widetilde{Q}GY \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία.*
3. *Ο συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ αντανακλά ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων και για κάθε συνινώδες αντικείμενο X ο μορφισμός $X \longrightarrow G\widehat{R}FX$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία.*

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος Quillen συναρτητών. Θα αποδείξουμε ότι $(1) \Leftrightarrow (2)$ και $(1) \Leftrightarrow (3)$

- $\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ Υποθέτουμε ότι το ζεύγος των Quillen συναρτητών (F, G) είναι ένα ζεύγος ισοδυναμιών του Quillen . Τότε από την Πρόταση 5.3.4 ο μορφισμός $Gj_{FX} \circ \epsilon_X\colon X \longrightarrow G\widehat{R}FX$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε συνινώδες αντικείμενο X και ο μορφισμός $\eta_Y \circ Fi_{GY}\colon F\widetilde{Q}GY \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε συνινώδες αντικείμενο Y. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός μεταξύ συνινωδών αντικειμένων τέτοιος ώστε ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ να είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Δοθέντος του μορφισμού $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 υπάρχει μορφισμός $\widehat{R}F(f)\colon \widehat{R}F(X) \longrightarrow \widehat{R}F(Y)$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "j_{FX}"'] & F(Y) \arrow[d, "j_{F(Y)}"] \\
\widehat{R}F(X) \arrow[r, "\widehat{R}F(f)"'] & \widehat{R}F(Y)
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον εφόσον ο μορφισμός $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία έπεται ότι ο μορφισμός $\widehat{R}F(f)\colon \widehat{R}F(X) \longrightarrow \widehat{R}F(Y)$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\widehat{R}$ έπεται ότι τα αντικείμενα $\widehat{R}F(X)$ και $\widehat{R}F(Y)$ είναι ινώδη αντικείμενα. Έτσι, ο μορφισμός $\widehat{R}F(f)\colon \widehat{R}F(X) \longrightarrow \widehat{R}F(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών αντικειμένων. Λόγω της συζυγίας των συναρτητών (F, G) προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Gj_{FX}\circ\epsilon_X"'] & Y \arrow[d, "Gj_{FY}\circ\epsilon_Y"] \\
G\widehat{R}F(X) \arrow[r, "G\widehat{R}F(f)"'] & G\widehat{R}F(Y)
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $G\widehat{R}F(f) \circ Gj_{FX} \circ \epsilon_X = Gj_{FY} \circ \epsilon_Y \circ f$. Εφόσον το ζεύγος $F\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα Quillen ζεύγος συναρτητών από το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 5.1.8 έπεται ότι ο συναρτητής $G\colon \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}'$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $G\widehat{R}F(f)\colon G\widehat{R}F(X) \longrightarrow G\widehat{R}F(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Επιπλέον λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $Gj_{FX} \circ \epsilon_X \colon X \longrightarrow G\widehat{R}FX$ και $Gj_{FY} \circ \epsilon_Y \colon F\widetilde{Q}GY \longrightarrow Y$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες από την τελευταία ισότητα σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, ο συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ αντανακλά ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων.

- $\underline{(1) \Rightarrow (3)}$ Υποθέτουμε ότι το ζεύγος συναρτητών του Quillen (F, G) είναι ένα ζεύγοςμισοδυναμιών του Quillen. Τότε από την Πρόταση 5.3.4 ο μορφισμός $Gj_{FX} \circ \epsilon_X \colon X \longrightarrow G\widehat{R}FX$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε συνινώδες αντικείμενο X και ο μορφισμός $\eta_X \circ Fi_{GX} \colon F\widetilde{Q}GY \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε συνινώδες αντικείμενο Y. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός μεταξύ ινωδών αντικειμένων τέτοιος ώστε ο μορφισμός $G(f)\colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ να είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Δοθέντος του μορφισμού $G(f)\colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 υπάρχει μορφισμός $\widetilde{Q}G(f)\colon \widetilde{Q}G(X) \longrightarrow \widetilde{Q}G(Y)$ ο οποίος κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Q}G(X) \arrow[r, "\widetilde{Q}G(f)"] \arrow[d, "i_{GX}"'] & \widetilde{Q}G(Y) \arrow[d, "i_{G(Y)}"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον εφόσον ο μορφισμός $G(f)\colon G(X) \longrightarrow G(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία έπεται ότι ο μορφισμός $\widetilde{Q}G(f)\colon \widetilde{Q}G(X) \longrightarrow \widetilde{Q}G(Y)$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\widetilde{Q}$ έπεται ότι τα αντικείμενα $\widetilde{Q}G(X)$ και $\widetilde{Q}G(Y)$ είναι συννινώδη αντικείμενα. Έτσι, ο μορφισμός $\widetilde{Q}G(f)\colon \widetilde{Q}G(X) \longrightarrow \widetilde{Q}G(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συννινωδών αντικειμένων. Λόγω της συζυγίας των συναρτητών

(F, G) προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F\widetilde{Q}G(X) \arrow[r, "F\widetilde{Q}G(f)"] \arrow[d, "\eta_X \circ Fi_{GX}"'] & F\widetilde{Q}G(Y) \arrow[d, "\eta_Y \circ Fi_{GY}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $f \circ \eta_X \circ Fi_{GX} = \eta_Y \circ Fi_{GY} \circ F\widetilde{Q}G(f)$. Εφόσον το ζεύγος $F: \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}': G$ είναι ένα ζεύγος συναρτητών του Quillen από το πρώτο σκέλος της Πρότασης 5.1.8 έπεται ότι ο συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων στην $\mathcal{C}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{C}'$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $F\widetilde{Q}G(f): F\widetilde{Q}G(X) \longrightarrow F\widetilde{Q}G(Y)$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Επιπλέον λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι μορφισμοί $\eta_X \circ Fi_{GX}: F\widetilde{Q}GX \longrightarrow X$ και $\eta_Y \circ Fi_{GY}: F\widetilde{Q}GY \longrightarrow Y$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες από την τελευταία ισότητα σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) ο μορφισμός $f: X \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Επομένως, ο συναρτητής $G: \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ αντανακλά ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών αντικειμένων.

- $\underline{(2) \Rightarrow (1)}$ Υποθέτουμε ότι ο συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ αντανακλά ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων και για κάθε ινώδες αντικείμενο Y ο μορφισμός $F\widetilde{Q}GY \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.4 για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(\mathbf{L}F, \mathbf{R}G)$ είναι μια συζυγής ισοδυναμία κατηγοριών. Ως εκ τούτου αρκεί να αποδείξουμε ότι οι μορφισμοί $X \longrightarrow (\mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F)(X)$ και $(\mathbf{L}F \circ \mathbf{R}G)(X) \longrightarrow X$ είναι ισομορφισμοί στις ομοτοπικές κατηγορίες $Ho(\mathcal{C})$ και $Ho(\mathcal{C}')$ αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό των συναρτητών $\mathbf{L}F$ και $\mathbf{R}G$ προκύπτει ότι:

$$(\mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F)(X) = \mathbf{R}G(\mathbf{L}F(X)) = \mathbf{R}G(F(\widetilde{Q}(X))) = G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$$

και

$$(\mathbf{L}F \circ \mathbf{R}G)(X) = \mathbf{L}F(\mathbf{R}G(X)) = \mathbf{L}F(G(\widehat{R}(X))) = F\widetilde{Q}G\widehat{R}X$$

Έτσι, επικεντρωνόμαστε στο να αποδείξουμε ότι οι μορφισμοί $X \longrightarrow G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ και $F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow X$ είναι ισομορφισμοί στις ομοτοπικές κατηγορίες $Ho(\mathcal{C})$ και $Ho(\mathcal{C}')$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 5.3.3 η συνμονάδα $F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow X$ στο X είναι η σύνθεση

$$F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}X \xrightarrow{j_X^{-1}} X.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\widehat{R}$ το αντικείμενο $\widehat{R}X$ είναι ινώδες. Έτσι, ο μορφισμός $F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow \widehat{R}X$ είναι εξ' υποθέσεως μια ασθενής ισοδυναμία. Ο μορφισμός $j_X^{-1}: \widehat{R}X \longrightarrow X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία εκ κατασκευής. Επομένως, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.22 η συνμονάδα $F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow X$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}'$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $F\widetilde{Q}G\widehat{R}X \longrightarrow X$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $(\mathbf{L}F \circ \mathbf{R}G)(X) \longrightarrow X$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C}')$. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι η μονάδα $X \longrightarrow G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ είναι ένας ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $\mathbf{L}F$ στον τελευταίο μορφισμό προκύπτει ο μορφισμός $\mathbf{L}F(X) \longrightarrow \mathbf{L}F(G\widehat{R}F\widetilde{Q}X)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό του συναρτητή $\mathbf{L}F$ έπεται ότι $\mathbf{L}F(X) = F(\widetilde{Q}X)$ και $\mathbf{L}F(G\widehat{R}F\widetilde{Q}X) = F\widetilde{Q}G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$. Έτσι, λαμβάνουμε τον μορφισμό $F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow F\widetilde{Q}G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ ο οποίος είναι αντίστροφος της συνμονάδας και ως εκ τούτου εξίσου ισομορφισμός στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{C}')$. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $F(\widetilde{Q}X) \longrightarrow F\widetilde{Q}G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Όμως εξ' υποθέσεως ο συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ αντανακλά ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών αντικειμένων. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι από τον ορισμό του συναρτητή $\widetilde{Q}$ τα αντικείμενα $\widetilde{Q}X$ και $\widetilde{Q}G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ είναι συνινώδη, ο μορφισμός $\widetilde{Q}X \longrightarrow \widetilde{Q}G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 4.1.13 ο συναρτητής $\widetilde{Q}$ αντανακλά όλες τις ασθενείς ισοδυναμίες. Επομένως, ο μορφισμός $X \longrightarrow G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$. Ως εκ τούτου από το Θεώρημα 4.2.9 ο μορφισμός $X \longrightarrow G\widehat{R}F\widetilde{Q}X$ και κατ' επέκταση ο μορφισμός $X \longrightarrow (\mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F)(X)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C})$.

- $\underline{(3) \Rightarrow (1)}$ Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης της συνεπαγωγής $(2) \Rightarrow (1)$. Επομένως, $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$. ∎

Κεφάλαιο 6

Παραδείγματα Κατηγοριών Μοντέλα

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα κατηγοριών μοντέλα. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε ότι η κατηγορία των (δεξιών) προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου, μια κατηγορία Frobenius, η κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$ καθώς και η κατηγορία των τοπολογικών χώρων εφοδιάζονται με τη δομή μιας κατηγορίας μοντέλο και στη συνέχεια περιγράφουμε την επαγόμενη ομοτοπική κατηγορία. Σημειώνουμε ότι στις τρεις πρώτες παραγράφους του παρόντος Κεφαλαίου εργαζόμαστε στο γενικότερο πλαίσιο των κατηγοριών μοντέλο με την έννοια του αρχικού ορισμού του Quillen, δηλαδή εργαζόμαστε σε κατηγορίες μοντέλα οι οποίες δεν είναι απαραίτητα (συν-)πλήρεις και δεν υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συναρτητικές παραγοντοποιήσεις στο Αξίωμα (MC5).

6.1 Κατηγορίες Προτύπων

Στην παρούσα ενότητα παραθέτουμε ίσως το απλούστερο παράδειγμα κατηγορίας μοντέλο. Πρόκειται για την κατηγορία $\mathsf{Mod}\text{-}R$ των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius R. Γενικότερα, η κατηγορία $\mathsf{Mod}\text{-}R$ των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R υπό κάποιες προϋποθέσεις οι οποίες αφορούν τον δακτύλιο εφοδιάζεται με δύο εν γένει διαφορετικές μη-τετριμμένες δομές κατηγορίας μοντέλο. Ωστόσο, υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius οι δύο αυτές διαφορετικές δομές συμπίπτουν δίνοντας μας τη δομή κατηγορίας μοντέλο στην κατηγορία $\mathsf{Mod}\text{-}R$ των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου Quasi-Frobenius R. Περιοριζόμενοι στην κατηγορία προτύπων ορίζονται δύο διαφορετικές θεωρίες ομοτοπίας. Η ενέσιμη ομοτοπία η οποία ορίζεται εξαλείφοντας τα ενέσιμα πρότυπα και η προβολική ομοτοπία η οποία ορίζεται εξαλείφοντας τα προβολικά πρότυπα. Πιο συγκεκριμένα, δοθείσης της κατηγορίας $\mathsf{Mod}\text{-}R$ των δεξιών R-προτύπων όπου R είναι ένας προσεταιριστικός δακτύλιος χρησιμοποιώντας την ενέσιμη ομοτοπία λαμβάνουμε την ευσταθή κατηγορία $\overline{\mathsf{Mod}}\text{-}R$ και αντίστοιχα χρησιμοποιώντας την προβολική ομοτοπία λαμβάνουμε την ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathsf{Mod}}\text{-}R$. Ωστόσο στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι quasi-Frobenius οι ευσταθείς κατηγορίες $\overline{\mathsf{Mod}}\text{-}R$ και $\underline{\mathsf{Mod}}\text{-}R$ ταυτίζονται δίνοντας την ευσταθή κατηγορία των δεξιών R-προτύπων. Αποδεικνύεται ότι η ευσταθής κατηγορία των δεξιών R-προτύπων είναι η ομοτοπική κατηγορία της κατηγορίας μοντέλο των δεξιών R- προτύπων με την προϋπόθεση ότι ο δακτύλιος R είναι ένας δακτύλιος quasi-Frobenius.

Αναπτύσσουμε πρώτα τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των ευσταθών κατηγοριών.

Ορισμός 6.1.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία με split idempotents και $\mathcal{X}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς και τους ευθείς προσθεταίους.*

Η **ευσταθής κατηγορία (stable category)** *της $\mathcal{C}$ η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{C}/\mathcal{X}$ είναι η κατηγορία η οποία έχει ως αντικείμενα τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$ και οι μορφισμοί της ορίζονται ως*

$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/\mathfrak{X}}(A,B) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)/H_{\mathfrak{X}}(A,B)$ *όπου* $H_{\mathfrak{X}}(A,B)$ *είναι η υποομάδα της* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *η οποία αποτελείται από όλους τους μορφισμούς οι οποίοι αναλύονται μέσω ενός αντικειμένου της* $\mathfrak{X}$.

Η ευσταθής κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ *είναι εφοδιασμένη με έναν συναρτητή* $\varpi\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{X}$ *ο οποίος στέλνει ένα αντικείμενο* A *της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *στο αντικείμενο* $\underline{A}$ *το οποίο είναι το αντικείμενο* A *εάν ιδωθεί ως αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ *και έναν μορφισμό* $f\colon A \longrightarrow B$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}$ *στον μορφισμό* $\underline{f}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ *ο οποίος είναι η κλάση του μορφισμού* $f\colon A \longrightarrow B$ *στο σύνολο* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/\mathfrak{X}}(A,B)$. *Ο συναρτητής* $\varpi\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{X}$ *καλείται* **συναρτητής προβολής (projection functor)**.

Ορισμός 6.1.2. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *μια προσθετική κατηγορία με split idempotents,* $\mathfrak{X}$ *μια πλήρης υποκατηγορία της* $\mathcal{C}$ *η οποία είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς και τους ευθείς προσθεταίους και* $f\colon A \longrightarrow B$ *ένας μορφισμός στην* $\mathcal{C}$.

1. *Ο μορφισμός* f *καλείται* $\mathfrak{X}$-**monic** *εάν ο μορφισμός* $f^*_{\mathfrak{X}} = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\mathfrak{X})\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\mathfrak{X})$ *είναι «επί», δηλαδή εάν για κάθε μορφισμό* $\alpha\colon A \longrightarrow X$ *υπάρχει μορφισμός* $\beta\colon B \longrightarrow X$ *τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, "\exists\,\beta"] \\ X & \end{tikzcd}$$

   για κάθε αντικείμενο X *της* $\mathfrak{X}$.

2. *Ο μορφισμός* f *καλείται* $\mathfrak{X}$-**epic** *εάν ο μορφισμός* $f^{\mathfrak{X}}_* = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{X},f)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{X},A) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{X},B)$ *είναι «επί», δηλαδή εάν για κάθε μορφισμό* $\alpha\colon X \longrightarrow B$ *υπάρχει μορφισμός* $\beta\colon X \longrightarrow A$ *τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ X \arrow[u, "\exists\,\beta"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

   για κάθε αντικείμενο X *της* $\mathfrak{X}$.

3. *Ο μορφισμός* f *καλείται* $\mathfrak{X}$-**ισομορφισμός** *εάν υπάρχει μορφισμός* $g\colon B \longrightarrow A$ *στην* $\mathcal{C}$ *τέτοιος ώστε οι μορφισμοί* $1_{\mathrm{A}} - g\circ f\colon A \longrightarrow A$ *και* $1_{\mathrm{B}} - f\circ g\colon B \longrightarrow B$ *να αναλύονται μέσω αντικειμένων* X *και* X' *αντίστοιχα της* $\mathfrak{X}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_{\mathrm{A}}-g\circ f"] \arrow[d] & A \\ X \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "1_{\mathrm{B}}-f\circ g"] \arrow[d] & B \\ X' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

   Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι ο μορφισμός f *καλείται* $\mathfrak{X}$-**ισομορφισμός** *εάν ο μορφισμός* $\underline{f}$ *είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία* $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$.

Ορισμός 6.1.3. *Ας είναι* $\mathcal{C}$ *μια προσθετική κατηγορία με split idempotents και* $\mathfrak{X}$ *μια πλήρης υποκατηγορία της* $\mathcal{C}$ *η οποία είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς και τους ευθείς προσθεταίους.*

1. *Η υποκατηγορία* $\mathfrak{X}$ *καλείται* **συναλλοίωτα πεπερασμένη (covariantly finite)** *εάν για οποιοδήποτε αντικείμενο* A *της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *υπάρχει ένας* $\mathfrak{X}$*-monic μορφισμός* $x^A\colon A \longrightarrow X^A$ *όπου το* X^A *ανήκει στην* $\mathfrak{X}$. *Ο μορφισμός* x^A *καλείται* **αριστερή** $\mathfrak{X}$-**προσέγγιση (left** $\mathfrak{X}$-**approximation)** *του* A.

2. *Η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ καλείται* **αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη (contravariantly finite)** *εάν για οποιοδήποτε αντικείμενο A της κατηγορίας $\mathcal{C}$ υπάρχει ένας $\mathfrak{X}$-epic μορφισμός $x_A\colon X_A \longrightarrow A$ όπου το X_A ανήκει στην $\mathfrak{X}$. Ο μορφισμός x_A καλείται* **δεξιά $\mathfrak{X}$-προσέγγιση (right $\mathfrak{X}$-approximation)** *του A.*

3. *Η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ καλείται* **συναρτητικά πεπερασμένη (functorially finite)** *εάν είναι εξίσου συναλλοίωτα πεπερασμένη και αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη.*

Λήμμα 6.1.4. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία με split idempotents, $\mathfrak{X}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς και τους ευθείς προσθεταίους και $f\colon A \longrightarrow B$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Ορίζουμε τις κλάσεις των μορφισμών στην $\mathcal{C}$ ως εξής:*

- *Η κλάση των συννηματώσεων C είναι η κλάση των $\mathfrak{X}$-monics μορφισμών.*
- *Η κλάση των νηματώσεων F είναι η κλάση των $\mathfrak{X}$-epics μορφισμών.*
- *Η κλάση των ασθενών ισοδυναμιών W είναι η κλάση των $\mathfrak{X}$-ισομορφισμών δηλαδή $f \in \mathsf{W}$ αν και μόνο αν $\underline{f}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$.*

Τότε:

(a) *Ο μορφισμός f είναι τετριμμένη συννημάτωση αν και μόνο αν ο μορφισμός f είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και* $\mathsf{Coker}\, f \in \mathfrak{X}$.

(b) *Ο μορφισμός f είναι τετριμμένη νημάτωση αν και μόνο αν ο μορφισμός f είναι διασπάσιμος επιμορφισμός και* $\mathsf{Ker}\, f \in \mathfrak{X}$.

Απόδειξη. (a) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση. Τότε ο μορφισμός f είναι συννημάτωση και ασθενής ισοδυναμία. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό των κλάσεων των μορφισμών στην $\mathcal{C}$ ο μορφισμός $\underline{f}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ και ο μορφισμός f είναι $\mathfrak{X}$-monic. Έτσι, υπάρχει μορφισμός $\underline{g}\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$ τέτοιος ώστε $\underline{f} \circ \underline{g} = \underline{1_B}$ και $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{1_A}$. Από την ισότητα $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{1_A}$ έπεται ότι $\underline{g \circ f} = \underline{1_A}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $1_A - g \circ f\colon A \longrightarrow A$ αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου της $\mathfrak{X}$, ας είναι X. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "1_A - g\circ f"'] & X \arrow[dl, "k"] \\ A. & \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $k \circ x = 1_A - g \circ f$. Εφόσον ο μορφισμός f είναι $\mathfrak{X}$-monic έπεται ότι ο μορφισμός $f_X^* = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ είναι «επί» για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$. Έτσι, για κάθε μορφισμό $x\colon A \longrightarrow X$ υπάρχει μορφισμός $\lambda\colon B \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $x = \lambda \circ f$ όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & B \arrow[dl, "\lambda"] \\ X & \end{tikzcd}$$

για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $k \circ \lambda \circ f = 1_A - g \circ f$ και κατ' επέκταση ότι $g \circ f + k \circ \lambda \circ f = 1_A$. Ως εκ τούτου, ισχύει ότι $(g + k \circ \lambda) \circ f = 1_A$. Εφόσον υπάρχει μορφισμός $g + k \circ \lambda\colon B \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $(g + k \circ \lambda) \circ f = 1_A$ έπεται ότι ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι διασπάσιμος μονομορφισμός. Μας απομένει να αποδείξουμε

ότι ο συμπυρήνας $\mathsf{Coker}\, f$ του f υπάρχει και ανήκει στην $\mathfrak{X}$. Εφόσον στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τα idempotents διασπώνται ο μορφισμός f ως διασπάσιμος μονομορφισμός έχει συμπυρήνα και κατ' επέκταση ανήκει στην $\mathfrak{X}$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο μορφισμός f είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και $\mathsf{Coker}\, f \in \mathfrak{X}$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει μορφισμός $f' \colon B \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε $f' \circ f = 1_A$. Εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) \circ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f', X) = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)}$ και κατ' επέκταση ότι ${f_X}^* \circ {f'_X}^* = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός ${f_X}^*$ είναι επί. Έτσι, ο μορφισμός $f \colon A \longrightarrow B$ είναι $\mathfrak{X}$-monic και κατ' επέκταση σύμφωνα με τον ορισμό των μορφισμών στην $\mathcal{C}$ μια συννημάτωση. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός f είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $\underline{f} \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει split idempotents ο μορφισμός f επάγει έναν ισομορφισμό $B \simeq A \bigoplus \mathsf{coker}(f)$. Επιπλέον, εφόσον ο συμπυρήνας $\mathsf{coker}(f)$ του μορφισμού f ανήκει στην $\mathfrak{X}$ έπεται ότι ο μορφισμός $\underline{f} \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία και κατ' επέκταση μια τετριμμένη συννημάτωση.

(b) Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους. ■

Το ακόλουθο Θεώρημα υποδηλώνει ότι μια υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι συναρτητικά πεπερασμένη αν και μόνο αν επάγει δομή κατηγορίας μοντέλο στην $\mathcal{C}$.

Θεώρημα 6.1.5. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία με split idempotents και $\mathfrak{X}$ μια πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς και τους ευθείς προσθεταίους. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $\mathfrak{X}$ είναι μια συναρτητικά πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.*
2. *Η τριάδα $(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{W})$ είναι μια δομή κατηγορίας μοντέλο, όπου C=$\mathfrak{X}$-monics, F=$\mathfrak{X}$-epics και W=$\mathfrak{X}$-ισομορφισμοί.*

Στην περίπτωση αυτή όλα τα αντικείμενα είναι συνινώδη-ινώδη και η ομοτοπική κατηγορία $\mathcal{C}[\mathsf{W}^{-1}]$ είναι ισοδύναμη με την ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Επιπλέον δύο μορφισμοί $f, g \colon A \longrightarrow B$ είναι ομοτοπικοί αν και μόνον αν η διαφορά $f - g \colon A \longrightarrow B$ αναλύεται μέσω ενός αντικειμένου της $\mathfrak{X}$.

Απόδειξη. Όπως και παραπάνω, για έναν μορφισμό $f \colon A \longrightarrow B$ στην $\mathcal{C}$ ορίζουμε ο f να είναι:

(a) μια συννημάτωση, δηλαδή $f \in \mathsf{C}$, αν και μόνο αν είναι $\mathfrak{X}$-monic.

(b) μια νημάτωση, δηλαδή $f \in \mathsf{F}$, αν και μόνο αν είναι $\mathfrak{X}$-epic.

(c) μια ασθενής ισοδυναμία, δηλαδή $f \in \mathsf{W}$, αν και μόνο αν ο μορφισμός $\underline{f}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$.

Υποθέτουμε ότι η $\mathfrak{X}$ είναι μια συναρτητικά πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Θα αποδείξουμε ότι η τριάδα $(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{W})$ αποτελεί δομή κατηγορίας μοντέλο στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Αρκεί να δείξουμε ότι πληρούνται τα Αξιώματα (MC2)-(MC5) του Ορισμού 3.1.5 που αφορούν την δομή κατηγορίας μοντέλου της $\mathcal{C}$.

(MC2) (**Two out of three Axiom**) Ας είναι $f \colon A \longrightarrow B$ και $g \colon B \longrightarrow E$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f \colon A \longrightarrow E$.

- Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί $f \colon A \longrightarrow B$ και $g \colon B \longrightarrow E$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε οι μορφισμοί $\underline{f} \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ και $\underline{g} \colon \underline{B} \longrightarrow \underline{E}$ είναι ισομορφισμοί στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $\underline{g \circ f} = \underline{g} \circ \underline{f}$ έπεται ότι ο μορφισμός $\underline{g \circ f}$ είναι ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ ως σύνθεση ισομορφισμών. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g \circ f \colon A \longrightarrow E$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

– Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί $f\colon A \longrightarrow B$ και $g\circ f\colon A \longrightarrow E$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε οι μορφισμοί $\underline{f}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ και $\underline{g\circ f}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{E}$ είναι ισομορφισμοί στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $\underline{h}\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$ στην $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ τέτοιος ώστε $\underline{f}\circ\underline{h} = \underline{1_B}$ και $\underline{h}\circ\underline{f} = \underline{1_A}$. Έτσι, ο μορφισμός $\underline{h}$ είναι εξίσου ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Συνθέτοντας από δεξιά με τον μορφισμό $\underline{h}\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$ στην ισότητα $\underline{g\circ f} = \underline{g}\circ\underline{f}$ και χρησιμοποιώντας την ισότητα $\underline{f}\circ\underline{h} = \underline{1_B}$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $\underline{1_B}\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{B}$ έπεται ότι $\underline{g} = \underline{g\circ f}\circ\underline{h}$. Έτσι, ο μορφισμός $\underline{g}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ ως σύνθεση ισομορφισμών. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g\colon E \longrightarrow A$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

– Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί $g\colon B \longrightarrow E$ και $g\circ f\colon A \longrightarrow E$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε οι μορφισμοί $\underline{g}\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{E}$ και $\underline{g\circ f}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{E}$ είναι ισομορφισμοί στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου υπάρχει μορφισμός $\underline{w}\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{B}$ τέτοιος ώστε $\underline{g}\circ\underline{w} = \underline{1_E}$ και $\underline{w}\circ\underline{g} = \underline{1_B}$. Έτσι, ο μορφισμός $\underline{w}$ είναι εξίσου ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Συνθέτοντας από αριστερά με τον μορφισμό $\underline{w}\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{B}$ στην ισότητα $\underline{g\circ f} = \underline{g}\circ\underline{f}$ και χρησιμοποιώντας την ισότητα $\underline{w}\circ\underline{g} = \underline{1_B}$ καθώς και τις ιδιότητες του ταυτοτικού μορφισμού $\underline{1_B}\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{B}$ έπεται ότι $\underline{f} = \underline{w}\circ\underline{g\circ f}$. Έτσι, ο μορφισμός $\underline{f}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ ως σύνθεση ισομορφισμών. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

(MC3) (**Retract Axiom**) Ας είναι $f\colon A \longrightarrow B$ και $g\colon E \longrightarrow D$ μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε ο μορφισμός f να είναι retract του g.

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g\colon E \longrightarrow D$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Τότε ο μορφισμός $\underline{g}\colon \underline{E} \longrightarrow \underline{D}$ είναι ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Εφόσον ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού g το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "e_3"] & D \arrow[r, "e_4"] & B
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον τέτοιο ώστε $e_2\circ e_1 = 1_A$ και $e_4\circ e_3 = 1_B$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος προκύπτει ότι $e_3\circ f = g\circ e_1$, $e_4\circ g = f\circ e_2$ και $f\circ e_2\circ e_1 = e_4\circ e_3\circ f$. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή προβολής $\varpi\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{X}$ στις παραπάνω ισότητες και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτει ότι $\underline{e_3}\circ\underline{f} = \underline{g}\circ\underline{e_1}$, $\underline{e_4}\circ\underline{g} = \underline{f}\circ\underline{e_2}$, $\underline{f}\circ\underline{e_2}\circ\underline{e_1} = \underline{e_4}\circ\underline{e_3}\circ\underline{f}$, $\underline{e_2}\circ\underline{e_1} = \underline{1_A}$ και $\underline{e_4}\circ\underline{e_3} = \underline{1_B}$. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "\underline{e_1}"] \arrow[d, "\underline{f}"] & \underline{E} \arrow[r, "\underline{e_2}"] \arrow[d, "\underline{g}"] & \underline{A} \arrow[d, "\underline{f}"] \\
\underline{B} \arrow[r, "\underline{e_3}"] & \underline{D} \arrow[r, "\underline{e_4}"] & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

στο οποίο $\underline{e_2}\circ\underline{e_1} = \underline{1_A}$ και $\underline{e_4}\circ\underline{e_3} = \underline{1_B}$. Έτσι, ο μορφισμός $\underline{f}$ είναι retract του ισομορφισμού $\underline{g}$ στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 ο μορφισμός $\underline{f}$ είναι εξίσου ένας ισομορφισμός στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Έτσι, ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g\colon E \longrightarrow D$ είναι μια νημάτωση στην $\mathcal{C}$. Τότε ο μορφισμός g είναι $\mathfrak{X}$-epic. Έτσι, ο μορφισμός $g_*^X = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,g)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,E) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,D)$ όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathfrak{X}$ είναι «επί». Εφόσον ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι retract του μορφισμού $g\colon E \longrightarrow D$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "e_3"] & D \arrow[r, "e_4"] & B
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον τέτοιο ώστε $e_2 \circ e_1 = 1_A$ και $e_4 \circ e_3 = 1_B$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος προκύπτει ότι $e_3 \circ f = g \circ e_1$, $e_4 \circ g = f \circ e_2$ και $f \circ e_2 \circ e_1 = e_4 \circ e_3 \circ f$. Εφαρμόζοντας τον συναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ στις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $e^X_{3\,*} \circ f^X{}_* = g^X{}_* \circ e^X_{1\,*}$, $e^X_{4\,*} \circ g^X{}_* = f^X{}_* \circ e^X_{2\,*}$, $f^X{}_* \circ e^X_{2\,*} \circ e^X_{1\,*} = e^X_{4\,*} \circ e^X_{3\,*} \circ f^X{}_*$, $e^X_{2\,*} \circ e^X_{1\,*} = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)}$ και $e^X_{4\,*} \circ e^X_{3\,*} = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B)}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, "e^X_{1\,*}"] \arrow[d, "f^X{}_*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,E) \arrow[r, "e^X_{2\,*}"] \arrow[d, "g^X{}_*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[d, "f^X{}_*"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B) \arrow[r, "e^X_{3\,*}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,D) \arrow[r, "e^X_{4\,*}"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο $e^X_{2\,*} \circ e^X_{1\,*} = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)}$ και $e^X_{4\,*} \circ e^X_{3\,*} = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B)}$. Έτσι, ο μορφισμός $f^X{}_*$ είναι retract του επιμορφισμού $g^X{}_*$ και κατ' επέκταση είναι επί. Έτσι, ο μορφισμός g είναι $\mathfrak{X}$-epic και ως εκ τούτου είναι νημάτωση.

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g\colon E \longrightarrow D$ είναι μια συννημάτωση στην $\mathcal{C}$. Τότε ο μορφισμός g είναι $\mathfrak{X}$-monic. Έτσι, ο μορφισμός $g^*_X = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(g,X)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(D,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(E,X)$ όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathfrak{X}$ είναι «επί». Εφόσον ο μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ είναι retract του μορφισμού $g\colon E \longrightarrow D$ το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "e_3"] & D \arrow[r, "e_4"] & B
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον τέτοιο ώστε $e_2 \circ e_1 = 1_A$ και $e_4 \circ e_3 = 1_B$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος προκύπτει ότι $e_3 \circ f = g \circ e_1$, $e_4 \circ g = f \circ e_2$ και $f \circ e_2 \circ e_1 = e_4 \circ e_3 \circ f$. Εφαρμόζοντας τον αντισυναλλοίωτο συναρτητή $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ στις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $f_X{}^* \circ e_{3X}{}^* = e_{1X}{}^* \circ g_X{}^*$, $g_X{}^* \circ e_{4X}{}^* = e_{2X}{}^* \circ f_X{}^*$, $e_{1X}{}^* \circ e_{2X}{}^* \circ f_X{}^* = f_X{}^* \circ e_{3X}{}^* \circ e_{4X}{}^*$, $e_{1X}{}^* \circ e_{2X}{}^* = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)}$ και $e_{3X}{}^* \circ e_{4X}{}^* = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X)}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X) \arrow[r, "{e_{4X}}^*"] \arrow[d, "{f_X}^*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(D,X) \arrow[r, "{e_{3X}}^*"] \arrow[d, "{g_X}^*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X) \arrow[d, "{f_X}^*"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \arrow[r, "{e_{2X}}^*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(E,X) \arrow[r, "{e_{1X}}^*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο ${e_{1X}}^* \circ {e_{2X}}^* = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)}$ και ${e_{3X}}^* \circ {e_{4X}}^* = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X)}$. Έτσι, ο μορφισμός ${f_X}^*$ είναι retract του επιμορφισμού ${g_X}^*$ και κατ' επέκταση είναι επί. Έτσι, ο μορφισμός g είναι $\mathfrak{X}$-monic και κατ' επέκταση είναι συννημάτωση.

(MC4) **(Lifting Axiom)** Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος στην κατηγορία $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon E \longrightarrow D$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Εφόσον ο μορφισμός $p\colon E \longrightarrow D$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με την απόδειξη του δεύτερου σκέλους του Λήμματος 6.1.4. μέσω του μορφισμού p επάγεται ένας ισομορφισμός $E \backsimeq D \bigoplus X$ όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathfrak{X}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $E = D \bigoplus X$ και $p = (1_D, 0)\colon D \bigoplus X \longrightarrow D$. Ο μορφισμός f είναι της μορφής $f = {}^t(f_1, f_2)\colon A \longrightarrow D \bigoplus X$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος (6.1) έπεται ότι $g \circ i = p \circ f$. Όμως,
$$p \circ f = (1_D, 0) \circ {}^t(f_1, f_2) = 1_D \circ f_1 + 0 \circ f_2 = f_1.$$
Έτσι, $f_1 = g \circ i$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση έπεται ότι ο μορφισμός i είναι $\mathfrak{X}$-monic και κατ' επέκταση ο μορφισμός $i_X^* = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$ όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathfrak{X}$ είναι «επί». Έτσι, για κάθε μορφισμό $f_2\colon A \longrightarrow X$ υπάρχει μορφισμός $\beta\colon B \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε $\beta \circ i = f_2$. Θεωρούμε τον μορφισμό $h = {}^t(g, \beta)\colon B \longrightarrow D \bigoplus X$. Τότε:
$$h \circ i = {}^t(g, \beta) \circ i = {}^t(g \circ i, \beta \circ i) = {}^t(f_1, f_2) = f$$
και
$$p \circ h = (1_D, 0) \circ {}^t(g, \beta) = 1_D \circ g + 0 \circ \beta = g.$$
Έτσι, από τις τελευταίες ισότητες έπεται ότι ο μορφισμός $h = (g, \beta)$ είναι η ζητούμενη ανύψωση στο διάγραμμα (6.1).

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon E \longrightarrow D$ είναι νημάτωση. Εφόσον ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση σύμφωνα με την απόδειξη του πρώτου σκέλους του Λήμματος 6.1.4 μέσω του μορφισμού i επάγεται ένας ισομορφισμός $B \backsimeq A \bigoplus X$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $B = A \bigoplus X$ και $i = {}^t(1_A, 0)\colon A \longrightarrow A \bigoplus X$. Ο μορφισμός g είναι της μορφής $g = (g_1, g_2)\colon A \bigoplus X \longrightarrow D$. Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος (6.1) έπεται ότι $g \circ i = p \circ f$. Όμως,
$$g \circ i = (g_1, g_2) \circ {}^t(1_A, 0) = g_1 \circ 1_A + g_2 \circ 0 = g_1.$$

Έτσι, $g_1 = p \circ f$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $p\colon E \longrightarrow D$ είναι νημάτωση έπεται ότι ο μορφισμός p είναι $\mathfrak{X}$-epic και κατ' επέκταση ο μορφισμός $p_*^X = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,p)\colon \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,E) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,D)$ όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathfrak{X}$ είναι «επί». Έτσι, για κάθε μορφισμό $g_2\colon X \longrightarrow D$ υπάρχει μορφισμός $\alpha\colon X \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $p \circ \alpha = g_2$. Θεωρούμε τον μορφισμό $h = (f,\alpha)\colon A \bigoplus X \longrightarrow E$. Τότε:

$$h \circ i = (f,\alpha) \circ {}^t(1_A, 0) = f \circ 1_A + \alpha \circ 0 = f$$

και

$$p \circ h = p \circ (f,\alpha) = (p \circ f, p \circ \alpha) = (g_1, g_2) = g.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τελευταίες ισότητες είναι άμεσο ότι ο μορφισμός $h = (f,\alpha)$ είναι η ζητούμενη ανύψωση στο διάγραμμα (6.1).

(MC5) (**Factorization Axiom**) Ας είναι $f\colon A \longrightarrow B$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$.

(a) Θεωρούμε τους μορφισμούς $f_1 = {}^t(x^A, f)\colon A \longrightarrow X^A \bigoplus B$ και $f_2 = (0, 1_B)\colon X^A \bigoplus B \longrightarrow B$ όπου $x^A\colon A \longrightarrow X^A$ είναι μια αριστερή $\mathfrak{X}$-προσέγγιση του A. Τότε

$$f_2 \circ f_1 = (0, 1_B) \circ {}^t(x^A, f) = 0 \circ x^A + 1_B \circ f = f$$

Ο μορφισμός $f_1 = {}^t(x^A, f)\colon A \longrightarrow X^A \bigoplus B$ είναι $\mathfrak{X}$-monic καθώς για κάθε μορφισμό $f\colon A \longrightarrow B$ υπάρχει μορφισμός $(0, 1_B)\colon X^A \bigoplus B \longrightarrow B$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{}^t(x^A,f)"] \arrow[d, "f"'] & X^A \bigoplus B \arrow[dl, "(0,1_B)"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου, ο μορφισμός $f_1 = {}^t(x^A, f)\colon A \longrightarrow X^A \bigoplus B$ είναι συννημάτωση. Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε ότι ο μορφισμός $f_2 = (0, 1_B)\colon X^A \bigoplus B \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Θεωρούμε τον μορφισμό $f_2' = {}^t(0, 1_B)\colon B \longrightarrow X^A \bigoplus B$. Τότε:

$$f_2 \circ f_2' = (0, 1_B) \circ {}^t(0, 1_B) = 0 \circ 0 + 1_B \circ 1_B = 1_B$$

Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f_2 = (0, 1_B)\colon X^A \bigoplus B \longrightarrow B$ είναι ένας διασπάσιμος επιμορφισμός. Επιπλέον, $D = \mathsf{Ker}\, f_2 \in \mathfrak{X}$ καθώς για κάθε μορφισμό ${}^t(\alpha, 0)\colon D \longrightarrow X^A \bigoplus B$ υπάρχει μορφισμός $\alpha\colon D \longrightarrow X^A$ και για κάθε μορφισμό $\alpha'\colon X^A \longrightarrow D$ υπάρχει μορφισμός $(\alpha', 0)\colon X^A \bigoplus B \longrightarrow D$ τέτοιοι ώστε το ακόλουθα διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} X^A \arrow[r, "{}^t(1_{X^A},0)"] & X^A \bigoplus B \\ D \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "{}^t(\alpha,0)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^A \arrow[r, "{}^t(1_{X^A},0)"] \arrow[d, "\alpha'"'] & X^A \bigoplus B \arrow[dl, "(\alpha',0)"] \\ D & \end{tikzcd}$$

Έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 6.1.4 ο μορφισμός $f_2 = (0, 1_B)\colon X^A \bigoplus B \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Συνεπώς, ο μορφισμός f μπορεί να παραγοντοποιήθει ως $f = f_2 \circ f_1$ όπου ο μορφισμός $f_1 = {}^t(x^A, f)\colon A \longrightarrow X^A \bigoplus B$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $f_2 = (0, 1_B)\colon X^A \bigoplus B \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη νημάτωση.

(b) Θεωρούμε τους μορφισμούς $f_3 = {}^t(1_A, 0) \colon A \longrightarrow A \bigoplus X_B$ και $f_4 = (f, x_B) \colon A \bigoplus X_B \longrightarrow B$ όπου $x_B \colon X_B \longrightarrow B$ είναι μια δεξιά $\mathfrak{X}$-προσέγγιση του B. Τότε

$$f_4 \circ f_3 = (f, x_B) \circ {}^t(1_A, 0) = f \circ 1_A + x_B \circ 0 = f$$

Ο μορφισμός $f_4 = (f, x_B) \colon A \bigoplus X_B \longrightarrow B$ είναι $\mathfrak{X}$-epic καθώς για κάθε μορφισμό $f \colon A \longrightarrow B$ υπάρχει μορφισμός ${}^t(1_A, 0) \colon A \longrightarrow A \bigoplus X_B$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
A \bigoplus X_B \arrow[r, "(f,x_B)"] & B \\
A \arrow[u, "{}^t(1_A,0)"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου, ο μορφισμός $f_4 = (f, x_B) \colon A \bigoplus X_B \longrightarrow B$ είναι νημάτωση. Ευθύς αμέσως αποδεικνύουμε ότι ο μορφισμός $f_3 = {}^t(1_A, 0) \colon A \longrightarrow A \bigoplus X_B$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Θεωρούμε τον μορφισμό $f_3' = (1_A, 0) \colon A \bigoplus X_B \longrightarrow A$. Τότε:

$$f_3' \circ f_3 = (1_A, 0) \circ {}^t(1_A, 0) = 1_A \circ 1_A + 0 \circ 0 = 1_A.$$

Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f_3 = {}^t(1_A, 0) \colon A \longrightarrow A \bigoplus X_B$ είναι ένας διασπάσιμος μονομορφισμός. Επιπλέον, ακολουθώντας ανάλογη αποδεικτική διαδικασία με αυτή του πρώτου σκέλους προκύπτει ότι $D = \mathsf{Coker}\, f_2 \in \mathfrak{X}$. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 6.1.4 ο μορφισμός $f_3 = {}^t(1_A, 0) \colon A \longrightarrow A \bigoplus X_B$ είναι τετριμμένη συννημάτωση. Συνεπώς, ο μορφισμός f μπορεί να παραγοντοποιήθει ως $f = f_4 \circ f_3$ όπου ο μορφισμός $f_3 = {}^t(1_A, 0) \colon A \longrightarrow A \bigoplus X_B$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $f_4 = (f, x_B) \colon A \bigoplus X_B \longrightarrow B$ είναι νημάτωση.

Έτσι, η τριάδα $(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{W})$ ορίζει μια δομή κατηγορίας μοντέλο στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η τριάδα $(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{W})$ ορίζει μια δομή κατηγορίας μοντέλο στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Θα αποδείξουμε ότι η $\mathfrak{X}$ είναι μια συναρτητικά πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι εξίσου συναλλοίωτα και αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη. Ας είναι A ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Εάν $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) = 0$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$ τότε $A \longrightarrow 0$ είναι μια αριστερή $\mathfrak{X}$-προσέγγιση του A. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο X' της $\mathfrak{X}$ και ένας μη μηδενικός μορφισμός $f \colon A \longrightarrow X'$. Εφόσον η τριάδα $(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{W})$ ορίζει μια δομή κατηγορίας μοντέλο στην κατηγορία $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός $f \colon A \longrightarrow X'$ παραγοντοποιείται ως $f = f_2 \circ f_1$ όπου ο μορφισμός $f_1 \colon A \longrightarrow B$ είναι μια συννημάτωση και ο μορφισμός $f_2 \colon B \longrightarrow X'$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $f_2 \colon B \longrightarrow X'$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Λήμματος 6.1.4 ο μορφισμός f_2 είναι διασπάσιμος επιμορφισμός και επιπλέον $\mathsf{Ker}\, f_2 \in \mathfrak{X}$. Έτσι, $B \in \mathfrak{X}$. Εφόσον ο μορφισμός $f_1 \colon A \longrightarrow B$ είναι μια συννημάτωση εξ' ορισμού είναι $\mathfrak{X}$-monic. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f_1 \colon A \longrightarrow B$ είναι αριστερή $\mathfrak{X}$- προσέγγιση του A. Έτσι, η $\mathfrak{X}$ είναι συναλλοίωτα πεπερασμένη. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι η $\mathfrak{X}$ είναι αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη. Ας είναι A ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Εάν $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) = 0$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$ τότε $0 \longrightarrow A$ είναι μια δεξιά $\mathfrak{X}$-προσέγγιση του A. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο X' της $\mathfrak{X}$ και ένας μη μηδενικός μορφισμός $f \colon X' \longrightarrow A$. Εφόσον η τριάδα $(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{W})$ ορίζει μια δομή κατηγορίας μοντέλο στην κατηγορία $\mathcal{C}$ σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) ο μορφισμός $f \colon X' \longrightarrow A$ παραγοντοποιείται ως $f = f_4 \circ f_3$ όπου ο μορφισμός $f_3 \colon X' \longrightarrow B$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $f_4 \colon B \longrightarrow A$ είναι μια νημάτωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $f_3 \colon X' \longrightarrow B$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 6.1.4 ο μορφισμός f_3 είναι διασπάσιμος μονομορφισμός και επιπλέον $\mathsf{Coker}\, f_3 \in \mathfrak{X}$. Έτσι, $B \in \mathfrak{X}$. Εφόσον ο μορφισμός $f_4 \colon B \longrightarrow A$ είναι μια νημάτωση εξ' ορισμού είναι $\mathfrak{X}$-epic. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f_4 \colon B \longrightarrow A$ είναι δεξιά

$\mathfrak{X}$- προσέγγιση του A. Έτσι, η $\mathfrak{X}$ είναι αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη. Συνεπώς, η $\mathfrak{X}$ είναι μια συναρτητικά πεπερασμένη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$.
Ας είναι A ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$. Θα αποδείξουμε ότι το αντικείμενο A είναι συνινώδες-ινώδες. Για κάθε μορφισμό $0\colon X \longrightarrow 0$ υπάρχει μορφισμός $0\colon X \longrightarrow A$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "0"] & 0 \\ X \arrow[u, "0"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $A \longrightarrow 0$ είναι $\mathfrak{X}$-epic και κατ' επέκταση νημάτωση. Έτσι, το αντικείμενο A είναι ινώδες. Επιπλέον για κάθε μορφισμό $0\colon 0 \longrightarrow X$ υπάρχει μορφισμός $0\colon A \longrightarrow X$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[dl, "0"] \\ X & \end{tikzcd}$$

για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $0 \longrightarrow A$ είναι $\mathfrak{X}$-monic και κατ' επέκταση συννημάτωση. Έτσι, το αντικείμενο A είναι εξίσου συνινώδες. Συνεπώς το αντικείμενο A και κατ' επέκταση κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι συννινώδες-ινώδες. Ας είναι $f\colon A \longrightarrow B$ μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Θεωρούμε τον συναρτητή προβολής $\varpi\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{X}$. Ο συναρτητής ϖ εξ' ορισμού στέλνει την ασθενή ισοδυναμία $f\colon A \longrightarrow B$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ στον μορφισμό $\underline{f}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ στην ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ ο οποίος είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Έτσι, ο συναρτητής $\varpi\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathfrak{X}$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες σε ισομορφισμούς. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ ένας προσθετικός συναρτητής τέτοιος ώστε ο μορφισμός $F(f)$ να είναι ένας ισομορφισμός για κάθε μορφισμό $f \in \mathsf{W}$. Εφόσον ο μορφισμός $X \longrightarrow 0$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$ έπεται ότι ο μορφισμός $F(X) \longrightarrow F(0) = 0$ είναι ένας ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}'$. Έτσι, $F(X) = 0$ για κάθε αντικείμενο X της $\mathfrak{X}$ και κατ' επέκταση $F(\mathfrak{X}) = 0$. Έτσι, υπάρχει μοναδικός μέχρις ισοδυναμίας συναρτητής $\widetilde{F}\colon \mathcal{C}/\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{C}'$ τέτοιος ώστε $\widetilde{F} \circ \varpi = F$. Ως εκ τούτου αποδεικνύεται ότι η ευσταθής κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$ είναι ισοδύναμη με την ομοτοπική κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. ■

Ορισμός 6.1.6. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία εφοδιασμένη με μια δομή μοντέλο (C, F,W). Ένα αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ καλείται* **ακυκλικό (acyclic)** *εάν ισχύει $A \longrightarrow 0 \in \mathsf{W}$ ή ισοδύναμα αν ισχύει $0 \longrightarrow A \in \mathsf{W}$.*

Η παραπάνω ανάλυση μας οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσματα (παραπέμπουμε στην εργασία [4] για περισσότερες λεπτομέρειες).

Θεώρημα 6.1.7. *Ας είναι $Ac(\mathcal{C})$ η επαγόμενη πλήρης υποκατηγορία των ακυκλικών αντικειμένων. Υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ κλειστών δομών μοντέλου (C, F, W) στην $\mathcal{C}$ με όλα τα αντικείμενα συνινώδη-ινώδη και των συναρτητικά πεπερασμένων υποκατηγοριών $\mathfrak{X}$ της $\mathcal{C}$. Η αντιστοιχία περιγράφεται ως εξής:*

$$(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{W}) \longrightarrow Ac(\mathcal{C}) \quad \textit{και} \quad \mathfrak{X} \longrightarrow (\mathsf{C}_{\mathfrak{X}}, \mathsf{F}_{\mathfrak{X}}, \mathsf{W}_{\mathfrak{X}})$$

Η κατηγορία δεξιών προτύπων Mod-R υπεράνω ενός δακτυλίου R εφοδιάζεται με δύο διαφορετικές δομές κατηγορίας μοντέλο όπως υποδηλώνεται από το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 6.1.8. *[4] Η κατηγορία δεξιών προτύπων* Mod-R *υπεράνω ενός δακτυλίου R εφοδιάζεται υπό προϋποθέσεις, με δύο, εν γένει διαφορετικές, δομές κατηγορίας μοντέλο* (C, F, W) *ως εξής:*

- *Εάν R=δεξιά συναφής και αριστερά τέλειος και $\mathfrak{X} = R$-Proj η κλάση των προβολικών R-προτύπων τότε C=$\mathfrak{X}$-monic, F=$\mathfrak{X}$-epic=επιμορφισμοί και W=$\mathfrak{X}$-ισομορφισμοί. Η ομοτοπική κατηγορία της Mod-R είναι η ευσταθής κατηγορία $\underline{\text{Mod-}R}$ = Mod-R/R-Proj των προτύπων modulo τα προβολικά.*

- *Εάν R=αριστερός δακτύλιος της Noether και $\mathfrak{U} = R$-Inj η κλάση των ενέσιμων R-προτύπων τότε C=$\mathfrak{U}$-monic=μονομορφισμοί, F=$\mathfrak{U}$-epic και W=$\mathfrak{U}$-ισομορφισμοί. Η ομοτοπική κατηγορία της Mod-R είναι η ευσταθής κατηγορία $\overline{\text{Mod-}R}$ = Mod-R/R-Inj των προτύπων modulo τα ενέσιμα.*

Ορισμός 6.1.9. *Ένας δακτύλιος R καλείται* **quasi-Frobenius** *(QF) εάν R-Inj = R-Proj ή ισοδύναμα εάν Inj-R = Proj-R.*

Ευθύς αμέσως παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα quasi-Frobenius δακτυλίων.

Παράδειγμα 6.1.10.

1. Κάθε ημιαπλός δακτύλιος είναι quasi-Frobenius καθώς οποιοδήποτε πρότυπο υπεράνω ενός ημιαπλού δακτυλίου είναι ενέσιμο και προβολικό.

2. Ας είναι G μια πεπερασμένη ομάδα. Ο δακτύλιος $k[G]$ υπεράνω ενός σώματος k είναι quasi-Frobenius.

3. Μια πεπερασμένη βαθμωτή συνεκτική Hopf άλγεβρα υπεράνω ενός σώματος είναι quasi-Frobenius.

Σημειώνουμε ότι κάθε δακτύλιος QF είναι τέλειος και συναφής δακτύλιος της Noether. Ωστόσο, το αντίστροφο δεν ισχύει όπως γίνεται ορατό από την ακόλουθη Παρατήρηση.

Παρατήρηση 6.1.11. Κάθε άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος, για παράδειγμα η άλγεβρα των 2×2 άνω τριγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{R}$, είναι τέλειος και συναφής δακτύλιος της Noether, αλλά δεν είναι απαραίτητα QF.

Εφόσον κάθε δακτύλιος quasi-Frobenius είναι τέλειος και συναφής δακτύλιος της Noether, οι δύο δομές κατηγορίας μοντέλο του Θεωρήματος 6.1.8 συμπίπτουν δίνοντας μας την δομή μοντέλο στην κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius.

Θεώρημα 6.1.12. *Η κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius εφοδιάζεται με μια δομή μοντέλο στην οποία:*

1. *οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ευσταθείς ισομορφισμοί, δηλαδή οι ομομορφισμοί προτύπων $f\colon A \longrightarrow B$ για τους οποίους υπάρχει ομομορφισμός προτύπων $g\colon B \longrightarrow A$ έτσι ώστε οι ομομορφισμοί $1_B - f \circ g\colon B \longrightarrow B$ και $1_A - g \circ f\colon A \longrightarrow A$ αναλύονται μέσω προβολικών προτύπων P και Q αντίστοιχα*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "1_B - f\circ g"] \arrow[d] & B \\ P \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A - g\circ f"] \arrow[d] & A \\ Q \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

2. *οι νηματώσεις είναι οι επιμορφισμοί,*

3. *οι συννηματώσεις είναι οι μονομορφισμοί.*

Κάθε δεξιό πρότυπο είναι συνινώδες-ινώδες, και η ομοτοπική κατηγορία Ho(Mod-R) *είναι ισοδύναμη με την ευσταθή κατηγορία προτύπων Mod-$R/\mathfrak{X}$, όπου $\mathfrak{X} = R$-Proj $= R$-Inj.*

Απόδειξη. Ας είναι Mod-R η κατηγορία των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο δακτύλιος είναι quasi-Frobenius η κλάση των προβολικών R-προτύπων ταυτίζεται με την κλάση των ενέσιμων R-προτύπων. Θεωρούμε ως υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ την υποκατηγορία η οποία αποτελείται από τα προβολικά R-πρότυπα τα οποία ταυτίζονται με τα ενέσιμα R-πρότυπα. Θα αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι συναρτητικά πεπερασμένη υποκατηγορία της κατηγορίας Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius. Ας είναι J ένα αντικείμενο της υποκατηγορίας $\mathfrak{X}$. Τότε το J είναι ένα ενέσιμο πρότυπο. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε πρότυπο εμφυτεύεται σε ένα ενέσιμο πρότυπο. Έτσι, για κάθε μονομορφισμό δεξιών R-προτύπων $f\colon A \longrightarrow I$ όπου I είναι ένα ενέσιμο πρότυπο και για κάθε ομομορφισμό δεξιών R-προτύπων $\alpha\colon A \longrightarrow J$ υπάρχει ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων $\beta\colon I \longrightarrow J$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & I \arrow[dl, "\beta"] \\ J & \end{tikzcd}$$

όπου I είναι ένα πρότυπο το οποίο ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $A \longrightarrow I$ είναι $\mathfrak{X}$-monic και κατ' επέκταση μια αριστερή $\mathfrak{X}$-προσέγγιση του A. Έτσι, η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι συναλλοίωτα πεπερασμένη. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη. Ας είναι P' ένα αντικείμενο της υποκατηγορίας $\mathfrak{X}$. Τότε το αντικείμενο P' είναι προβολικό πρότυπο. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε πρότυπο είναι επιμορφική εικόνα ενός προβολικού. Έτσι, για κάθε επιμορφισμό δεξιών R-προτύπων $g\colon P \longrightarrow A$ και κάθε ομομορφισμό δεξιών R-προτύπων $\alpha\colon P' \longrightarrow A$ όπου A είναι ένα προβολικό πρότυπο υπάρχει ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων $\beta\colon P' \longrightarrow P$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] & A \\ P' \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

όπου P είναι ένα πρότυπο το οποίο ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $P \longrightarrow A$ είναι $\mathfrak{X}$-epic και κατ' επέκταση μια δεξιά $\mathfrak{X}$-προσέγγιση του A. Έτσι, η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι εξίσου αντισυναλλοίωτα πεπερασμένη. Συνεπώς η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι συναρτητικά πεπερασμένη υποκατηγορία της κατηγορίας Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.5 η κατηγορία Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου Quasi-Frobenius εφοδιάζεται με μια δομή μοντέλο στην οποία οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ευσταθείς ισομορφισμοί, οι νηματώσεις είναι οι $\mathfrak{X}$-epics μορφισμοί, δηλαδή οι επιμορφισμοι και οι συννηματώσεις είναι οι $\mathfrak{X}$-monics μορφισμοί, δηλαδή οι μονομορφισμοί. Επιπλέον, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 6.1.5 η ομοτοπική κατηγορία Ho(Mod-R) της κατηγορίας Mod-R των δεξιών R-προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου quasi-Frobenius είναι ισοδύναμη με την ευσταθή κατηγορία προτύπων Mod-$R/\mathfrak{X}$, όπου $\mathfrak{X} = R$-Proj $= R$-Inj. ■

6.2 Κατηγορίες Frobenius

Στην εν λόγω ενότητα θα ασχοληθούμε με τις κατηγορίες Frobenius. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.1.5 της προηγούμενης ενότητας αποδεικνύουμε ότι μια κατηγορία Frobenius εφοδιάζεται με την δομή κατηγορίας μοντέλο και περιγράφουμε την ομοτοπική της κατηγορία.

Αρχίζουμε ορίζοντας την έννοια της ακριβούς κατηγορίας.

Ορισμός 6.2.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία. Ένα* **ζεύγος πυρήνα-συμπυρήνα (kernel-cokernel pair)** *στην $\mathcal{C}$ είναι ένα ζεύγος μορφισμών (i, p) των οποίων ορίζεται η σύνθεση*

$$A' \xrightarrow{\ i\ } A \xrightarrow{\ p\ } A''$$

τέτοιο ώστε ο μορφισμός $i\colon A' \longrightarrow A$ είναι ο πυρήνας του μορφισμού $p\colon A \longrightarrow A''$ και ο μορφισμός $p\colon A \longrightarrow A''$ είναι ο συμπυρήνας του μορφισμού $i\colon A' \longrightarrow A$.

Σταθεροποιούμε μια κλάση $\mathcal{E}$ ζευγών πυρήνα-συμπυρήνα.

1. *Ένας* **επιτρεπτός μονομορφισμός (admissible monic)** *είναι ένας μορφισμός i για τον οποίο υπάρχει μορφισμός p τέτοιος ώστε το ζεύγος (i, p) να ανήκει στην κλάση $\mathcal{E}$.*

2. *Ένας* **επιτρεπτός επιμορφισμός (admissible epic)** *είναι ένας μορφισμός p για τον οποίο υπάρχει μορφισμός i τέτοιος ώστε το ζεύγος (i, p) να ανήκει στην κλάση $\mathcal{E}$.*

Σχόλιο 6.2.2. 1. Η έννοια του επιτρεπτού επιμορφισμού είναι δυϊκή της έννοιας του επιτρεπτού μονομορφισμού.

2. Στην βιβλιογραφία ένας επιτρεπτός μονομορφισμός συνήθως συμβολίζεται με $i\colon A' \rightarrowtail A$ και ένας επιτρεπτός επιμορφισμός συνήθως συμβολίζεται με $p\colon A \twoheadrightarrow A''$.

Ορισμός 6.2.3. *Μια* **ακριβής δομή (exact structure)** *στην $\mathcal{C}$ είναι μια κλάση $\mathcal{E}$ ζευγών πυρήνα-συμπυρήνα η οποία είναι κλειστή ως προς τους ισομορφισμούς και ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:*

(EX1) *Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ είναι επιτρεπτός μονομορφισμός για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.*

(EX2) *Η κλάση των επιτρεπτών μονομορφισμών είναι κλειστή ως προς την σύνθεση.*

(EX3) *Η κλάση των επιτρεπτών μονομορφισμών είναι κλειστή ως προς τα pushouts.*

(EX4) *Ο ταυτοτικός μορφισμός $1_X : X \longrightarrow X$ είναι επιτρεπτός επιμορφισμός για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$.*

(EX5) *Η κλάση των επιτρεπτών επιμορφισμών είναι κλειστή ως προς την σύνθεση.*

(EX6) *Η κλάση των επιτρεπτών επιμορφισμών είναι κλειστή ως προς τα pullbacks.*

Μια προσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$ εφοδιασμένη με μια ακριβή δομή $\mathcal{E}$ καλείται **ακριβής κατηγορία (exact category)**. *Τα στοιχεία της κλάσης $\mathcal{E}$ καλούνται* **σύντομες ακριβείς ακολουθίες (short exact sequences)**.

Παράδειγμα 6.2.4. 1. Κάθε αβελιανή κατηγορία είναι μια ακριβής κατηγορία ορίζοντας ως $\mathcal{E}$ να είναι η κλάση όλων των σύντομων ακριβών ακολουθιών.

2. Κάθε αβελιανή κατηγορία είναι μια ακριβής κατηγορία ορίζοντας ως $\mathcal{E}$ να είναι η κλάση των διασπάσιμων ακριβών ακολουθιών.

Παρατήρηση 6.2.5. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η $\mathcal{E}$ είναι μια ακριβής δομή στην $\mathcal{C}$ αν και μόνο αν η $\mathcal{E}^{\mathsf{op}}$ είναι μια ακριβής δομή στην $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει η αρχή της δυϊκότητας για τις ακριβείς κατηγορίες.

Ορισμός 6.2.6. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια ακριβής ακολουθία.*

1. *Ένα αντικείμενο P της $\mathcal{C}$ καλείται* **προβολικό (projective)** *εάν ο συναλλοίωτος συναρτητής $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ είναι ακριβής.*

2. *Ένα αντικείμενο I της $\mathcal{C}$ καλείται* **ενέσιμο (injective)** *εάν ο αντισυναλλοίωτος συναρτητής* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ *είναι ακριβής.*

Παρατήρηση 6.2.7. Οι έννοιες του προβολικού και του ενέσιμου αντικειμένου είναι δυϊκές η μια της άλλης. Πιο συγκεκριμένα:

$$P \text{ είναι προβολικό στην } \mathcal{C} \text{ αν και μόνο αν } P \text{ είναι ενέσιμο στην } \mathcal{C}^{\mathsf{op}}.$$

Έτσι, κανείς μπορεί να επικεντρωθεί στις ιδιότητες που αφορούν τα προβολικά αντικείμενα καθώς οι ιδιότητες των ενέσιμων προκύπτουν ως δυϊκές τους και το αντίστροφο.

Ορισμός 6.2.8. *Μια ακριβής κατηγορία $\mathcal{C}$ λέμε ότι έχει* **αρκετά προβολικά αντικείμενα (enough projective objects)** *εάν για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ υπάρχει ένας επιτρεπτός επιμορφισμός $P \twoheadrightarrow A$ όπου P είναι ένα προβολικό αντικείμενο. Αντίστοιχα, μια ακριβής κατηγορία $\mathcal{C}$ λέμε ότι έχει* **αρκετά ενέσιμα αντικείμενα (enough injective objects)** *εάν για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$ υπάρχει ένας επιτρεπτός μονομορφισμός $A \rightarrowtail I$ όπου I είναι ένα ενέσιμο αντικείμενο.*

Στο σημείο αυτό έχουμε θέσει τις βάσεις ώστε να ορίσουμε την Frobenius κατηγορία.

Ορισμός 6.2.9. *Μια ακριβής κατηγορία καλείται* **Frobenius** *εάν έχει αρκετά προβολικά και ενέσιμα αντικείμενα και επιπλέον η κλάση των προβολικών αντικειμένων συμπίπτει με την κλάση των ενέσιμων αντικειμένων.*

Παρατήρηση 6.2.10. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ευσταθής κατηγορία $\underline{\mathcal{C}}$ μιας Frobenius κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι προσθετική.

Ένας μορφισμός $f\colon A \longrightarrow B$ σε μια κατηγορία Frobenius $\mathcal{C}$ καλείται **ευσταθής ισομορφισμός** αν υπάρχει μορφισμός $g\colon B \longrightarrow A$ στην $\mathcal{C}$ έτσι ώστε οι μορφισμοί $1_A - g \circ f$ και $1_B - f \circ g$ αναλύονται μέσω ενός προβολικού-ενέσιμου αντικειμένου. Έτσι οι ευσταθείς ισομορφισμοί στην $\mathcal{C}$ συμπίπτουν με τους $\mathfrak{X}$-ισομορφισμούς, όπου $\mathfrak{X}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία των προβολικών-ενέσιμων εντικειμένων της $\mathcal{C}$.

Ολοκληρώνουμε την παρούσα υποενότητα αποδεικνύοντας ότι μια Frobenius κατηγορία εφοδιάζεται με μια δομή κατηγορίας μοντέλο και η ομοτοπική της κατηγορία είναι ισοδύναμη με την ευσταθή κατηγορία $\underline{\mathcal{C}}$.

Πρόταση 6.2.11. *Μια κατηγορία Frobenius $\mathcal{C}$ εφοδιάζεται με μια δομή μοντέλο στην οποία:*

1. *οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ευσταθείς ισομορφισμοί.*

2. *οι νηματώσεις είναι οι επιτρεπτοί επιμορφισμοί,*

3. *οι συννηματώσεις είναι οι επιτρεπτοί μονομορφισμοί.*

Κάθε αντικείμενο της είναι συνινώδες-ινώδες και επιπλέον η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ *είναι ισοδύναμη με την ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$, όπου $\mathfrak{X} = \mathsf{Proj}\text{-}\mathcal{C} = \mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{C}$ η κλάση $\mathsf{Proj}\text{-}\mathcal{C}$ των προβολικών αντικειμένων της $\mathcal{C}$ η οποία συμπίπτει με την κλάση $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{C}$ των ενέσιμων αντικειμένων της.*

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία Frobenius. Τότε η ακριβής κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει αρκετά προβολικά και ενέσιμα αντικείμενα και επιπλέον η κλάση των προβολικών αντικειμένων συμπίπτει με την κλάση των ενέσιμων αντικειμένων. Θεωρούμε ως υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ την υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ η οποία αποτελείται από τα προβολικά αντικείμενα τα οποία ταυτίζονται με τα ενέσιμα αντικείμενα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η $\mathcal{C}$ έχει αρκετά προβολικά και ενέσιμα αντικείμενα έπεται ότι η υποκατηγορία $\mathcal{C}$ είναι συναρτητικά πεπερασμένη. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.5 η $\mathcal{C}$ εφοδιάζεται με μια δομή μοντέλο στην οποία οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι μορφισμοί οι οποίοι αναλύονται μέσω ενός προβολικού αντικειμένου, οι νηματώσεις είναι οι $\mathfrak{X}$-epics μορφισμοί δηλαδή οι επιτρεπτοί επιμορφισμοί και οι συννηματώσεις είναι οι $\mathfrak{X}$-monics μορφισμοί δηλαδή οι επιτρεπτοί μονομορφισμοί. Επιπλέον, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 6.1.5 κάθε αντικείμενο της είναι συνινώδες-ινώδες και επιπλέον η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ είναι ισοδύναμη με την ευσταθή κατηγορία $\mathcal{C}/\mathfrak{X}$, όπου $\mathfrak{X} = \mathsf{Proj}\text{-}\mathcal{C} = \mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{C}$ η κλάση $\mathsf{Proj}\text{-}\mathcal{C}$ των προβολικών αντικειμένων της $\mathcal{C}$ η οποία συμπίπτει με την κλάση $\mathsf{Inj}\text{-}\mathcal{C}$ των ενέσιμων αντικειμένων της. ■

6.3 Σύμπλοκα

Ένα εξίσου σημαντικό παράδειγμα κατηγορίας μοντέλο είναι η κατηγορία των συμπλόκων $Ch(\mathcal{C})$ των (δεξιών) προτύπων υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$. Η παρούσα ενότητα αφιερώνεται στο εν λόγω παράδειγμα.

Σύμβαση: Καθ' όλη την έκταση της παρούσας ενότητας, συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία.

Αρχίζουμε, ορίζοντας τις έννοιες ενός συμπλόκου και ενός συν-αλυσιδωτού συμπλόκου στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Ορισμός 6.3.1. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία. Ένα (αλυσιδωτό)* **σύμπλοκο (chain complex)** $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *είναι μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}$:*

$$\mathbf{C}_\bullet : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

τέτοια ώστε $d_n \circ d_{n+1} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ή ισοδύναμα $\mathsf{Im}\, d_{n+1} \subseteq \mathsf{Ker}\, d_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κάθε μορφισμός d_n μεταξύ των αντικειμένων για $n \in \mathbb{Z}$ καλείται **διαφορικό (differential operator)**. *Επιπροσθέτως, το σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet$ καλείται* **ακριβές στο** *C_n, εάν $\mathsf{Im}\, d_{n+1} = \mathsf{Ker}\, d_n$, και* **ακριβές (exact)**, *εάν είναι ακριβές σε κάθε C_n για $n \in \mathbb{Z}$.*

Ανάλογα,

Ορισμός 6.3.2. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία. Ένα* **συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο (cochain complex)** $\mathbf{C}_\bullet = \{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *είναι μια ακολουθία αντικειμένων και μορφισμών στην $\mathcal{C}$:*

$$\mathbf{C}_\bullet : \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

έτσι ώστε $d^{n+1} \circ d^n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ή ισοδύναμα $\mathsf{Im}\, d^n \subseteq \mathsf{Ker}\, d^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κάθε μορφισμός d^n μεταξύ αντικειμένων για $n \in \mathbb{Z}$, καλείται **διαφορικό (differential operator)**. *Επιπλέον, το συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet$ καλείται* **ακριβές στο** *C^n εάν $\mathsf{Im}\, d^{n-1} = \mathsf{Ker}\, d^n$ και* **ακριβές (exact)** *εάν είναι ακριβές σε κάθε C^n για $n \in \mathbb{Z}$.*

Παρατήρηση 6.3.3. Παρατηρούμε ότι σε ένα σύμπλοκο, οι δείκτες μειώνονται από τα αριστερά στα δεξιά ενώ σε ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο οι δείκτες αυξάνονται από τα αριστερά στα δεξιά. Ένα σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ μπορεί να μετατραπεί σε ένα συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο $\mathbf{N}_\bullet = \{N^n, b^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ εάν θέσουμε $N^n = C_{-n}$ και $b^n = d_{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ανάλογα, κάθε συν-αλυσιδωτό σύμπλοκο μετατρέπεται σε ένα σύμπλοκο (chain complex). Ως εκ τούτου η μόνη διαφορά μεταξύ ενός συμπλόκου και ενός συν-αλυσιδωτού συμπλόκου ανάγεται στον συμβολισμό.

Στο σημείο αυτό επικεντρωνόμαστε σε (chain) σύμπλοκα. Επισημαίνουμε ότι ανάλογα αποτελέσματα με αυτά που θα παραθέσουμε για σύμπλοκα, ισχύουν για συν-αλυσιδωτά σύμπλοκα.

Παράδειγμα 6.3.4.

1. Κάθε ακριβής ακολουθία είναι ένα (ακριβές) σύμπλοκο κατά προφανή τρόπο.

2. Το μηδενικό σύμπλοκο είναι το σύμπλοκο $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ του οποίου κάθε όρος $C_n = \{0\}$ και κατ' επέκταση κάθε διαφορικό $d_n = 0$.

Σχόλιο 6.3.5. Εάν $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα σύμπλοκο και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ είναι ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής τότε η επαγόμενη ακολουθία $F(\mathbf{C}_\bullet)$

$$F(\mathbf{C}_\bullet) = \cdots \longrightarrow F(C_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(C_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(C_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

είναι ένα σύμπλοκο καθώς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που διέπουν τον F ως συναρτητή προκύπτει ότι

$$F(d_n) \circ F(d_{n+1}) = F(d_n \circ d_{n+1}) = F(0) = 0$$

Ανάλογα, εάν $\mathbf{C}_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα σύμπλοκο στην $\mathcal{C}$, και $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ είναι ένας προσθετικός αντισυναλλοίωτος συναρτητής τότε η επαγόμενη ακολουθία $F(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ένα (συν-αλυσιδωτό) σύμπλοκο στην $\mathcal{C}'$.

Ορισμός 6.3.6. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία. Ένας* **μορφισμός μεταξύ δύο συμπλόκων (chain map)** *από αντικείμενα της $\mathcal{C}$*

$$\mathbf{f}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet),$$

είναι μία οικογένεια $\{f_n\colon C_n \longrightarrow C'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ μορφισμών στην $\mathcal{C}$, τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots . \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός $\mathbf{f}_\bullet = \{f_n\colon C_n \longrightarrow C'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται αντίστοιχα **μονομορφισμός (επιμορφισμός, ισομορφισμός)**, *εάν κάθε f_n για $n \in \mathbb{Z}$, είναι μονομορφισμός (αντίστοιχα επιμορφισμός, ισομορφισμός).*

Ορισμός 6.3.7. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία. Η* **κατηγορία των συμπλόκων (category of chain complexes)** *$Ch(\mathcal{C})$ υπεράνω της $\mathcal{C}$ ορίζεται ως εξής:*

1. *Τα αντικείμενα της είναι τα σύμπλοκα στην $\mathcal{C}$.*

2. *Οι μορφισμοί της είναι οι μορφισμοί μεταξύ των συμπλόκων.*

3. *Η σύνθεση δύο μορφισμών συμπλόκων στην $\mathcal{C}$,*

$$\mathbf{f}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \quad \& \quad \mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C''}_\bullet, \mathbf{d''}_\bullet),$$

   είναι ο μορφισμός $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet = \{g_n \circ f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

4. *Ο ταυτοτικός μορφισμός στο αντικείμενο $\mathbf{C}_\bullet$ της $Ch(\mathcal{C})$, είναι ο μορφισμός $1_{\mathbf{C}_\bullet} = \{1_{C_n} : C_n \longrightarrow C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Επιπλέον, εάν $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet \colon \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C'}_\bullet$ είναι δύο μορφισμοί μεταξύ συμπλόκων στην $\mathcal{C}$, τότε η πρόσθεση στο σύνολο των μορφισμών $\mathsf{Hom}_{Ch(\mathcal{C})}(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{C'}_\bullet)$, δίνεται ως ο μορφισμός συμπλόκων $\mathbf{f}_\bullet + \mathbf{g}_\bullet = \{f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Ορισμός 6.3.8. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια προσθετική κατηγορία και $\mathbf{f}_\bullet, \mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ δύο μορφισμοί μεταξύ δύο συμπλόκων στην $\mathcal{C}$. Τότε μια* **ομοτοπία (homotopy)** $\mathbf{s}_\bullet$ *από τον* $\mathbf{f}_\bullet$ *στον* $\mathbf{g}_\bullet$, *είναι μια οικογένεια μορφισμών στην $\mathcal{C}$ $\mathbf{s}_\bullet = \{s_n \colon C_n \longrightarrow C'_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$*

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$$

όπως περιγράφεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \arrow[dl, dashed, "s_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "s_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Η ομοτοπία $\mathbf{s}_\bullet$ *από τον* $\mathbf{f}_\bullet$ *στον* $\mathbf{g}_\bullet$, *συμβολίζεται με* $\mathbf{s}_\bullet \colon \mathbf{f}_\bullet \longrightarrow \mathbf{g}_\bullet$. *Στην περίπτωση που υπάρχει μια τέτοια ομοτοπία, οι* $\mathbf{f}_\bullet$ *και* $\mathbf{g}_\bullet$ *καλούνται* **ομοτοπικοί μορφισμοί (homotopic chain maps)**, *και τότε γράφουμε* $\mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{g}_\bullet$.

Δύο σύμπλοκα $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet), (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ *στην $\mathcal{C}$ λέμε ότι έχουν τον* **ίδιο ομοτοπικό τύπο**, *εάν υπάρχουν μορφισμοί* $\mathbf{f}_\bullet \colon (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet)$ *και* $\mathbf{g}_\bullet \colon (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet)$ *έτσι ώστε* $\mathbf{g}_\bullet \circ \mathbf{f}_\bullet \cong \mathbf{1}_{\mathbf{C}_\bullet}$ *και* $\mathbf{f}_\bullet \circ \mathbf{g}_\bullet \cong \mathbf{1}_{\mathbf{C'}_\bullet}$, *όπου* $\mathbf{1}_{\mathbf{C}_\bullet}$, $\mathbf{1}_{\mathbf{C'}_\bullet}$ *είναι οι ταυτοτικοί μορφισμοί των συμπλόκων* $\mathbf{C}_\bullet$ *και* $\mathbf{C}'_\bullet$, *αντίστοιχα.*

Ορισμός 6.3.9. *Μια ακολουθία από σύμπλοκα και μορφισμούς συμπλόκων*

$$\mathbf{C}_\bullet \xrightarrow{\mathbf{f}_\bullet} \mathbf{C'}_\bullet \xrightarrow{\mathbf{g}_\bullet} \mathbf{C''}_\bullet$$

καλείται **ακριβής (exact sequence of chain complexes)**, *εάν οι ακολουθίες* $C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ *είναι ακριβείς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Μια ακριβής ακολουθία από σύμπλοκα και μορφισμούς συμπλόκων της μορφής:

$$0 \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, \mathbf{d'}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{f}_\bullet} (\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{d}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{g}_\bullet} (\mathbf{C''}_\bullet, \mathbf{d''}_\bullet) \longrightarrow 0 \tag{6.2}$$

καλείται **σύντομη ακριβής ακολουθία (short exact sequence of chain complexes)** *εάν ισχύουν τα ακόλουθα:*

- *Ο μορφισμός συμπλόκων* $\mathbf{f}_\bullet$ *είναι μονομορφισμός.*
- *Ο μορφισμός συμπλόκων* $\mathbf{g}_\bullet$ *είναι επιμορφισμός*
- $\forall n \in \mathbb{Z} : \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n$

Έτσι, μια σύντομη ακριβής ακολουθία συμπλόκων όπως η (6.2), μπορεί να ιδωθεί ως το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"'] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 6.3.10. *Ας είναι*

$$(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet): \ \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

ένα σύμπλοκο. Το $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ καλείται **σύσταλτο (contractible)** *εάν ο ταυτοτικός μορφισμός $1_{(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)}$ είναι ομοτοπικός με τον μηδενικό μορφισμό $0_{(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)}$. Δηλαδή υπάρχει μορφισμός $\phi_n : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ τέτοιος ώστε $1_{C_n} = d_{n+1} \circ \phi_n + \phi_{n-1} \circ d_n$ όπως περιγράφεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "1_{C_{n+1}}"'] \arrow[d, shift left, "0"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "1_{C_n}"'] \arrow[d, shift left, "0"] \arrow[dl, dashed, "\phi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "1_{C_{n-1}}"'] \arrow[d, shift left, "0"] \arrow[dl, dashed, "\phi_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα αποδεικνύοντας ότι η κατηγορία $Ch(\mathcal{C})$ των συμπλόκων υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$ εφοδιάζεται με την δομή κατηγορίας μοντέλο και επιπλέον η ομοτοπική της κατηγορία είναι ισοδύναμη με την με την κλασική ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ των συμπλόκων υπεράνω της $\mathcal{C}$.

Θεώρημα 6.3.11. *Η κατηγορία $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ εφοδιάζεται με μια δομή μοντέλο στην οποία:*

1. *οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ομοτοπικές ισοδυναμίες,*

2. *οι νηματώσεις είναι οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι επιμορφισμοί,*

3. *οι συννηματώσεις είναι οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι μονομορφισμοί.*

Κάθε σύμπλοκο είναι συνινώδες-ινώδες, και η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathsf{Ch}(\mathcal{C}))$ είναι ισοδύναμη με την κλασική ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ των συμπλόκων υπεράνω της $\mathcal{C}$.

Απόδειξη. Ας είναι $Ch(\mathcal{C})$ η κατηγορία των συμπλόκων υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$. Θεωρούμε ως $\mathfrak{X}$ την υποκατηγορία της $Ch(\mathcal{C})$ η οποία αποτελείται απο όλα τα συσταλτά σύμπλοκα. Θα αποδείξουμε ότι η υποκατηγορία $\mathfrak{X}$ είναι συναρτητικά πεπερασμένη υποκατηγορία της. Το σύμπλοκο

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1}\oplus A_{n+2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}} A_n \oplus A_{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}} A_{n-1}\oplus A_n \longrightarrow \cdots$$

είναι συσταλτό καθώς υπάρχει $\begin{pmatrix} 0 & 1_{A_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A_n \oplus A_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}\oplus A_{n+2}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 & 1_{A_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1_{A_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{A_{n+1}} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1_{A_n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{A_n} & 0 \\ 0 & 1_{A_{n+1}} \end{pmatrix}$$

όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\cdots \arrow[r] & A_{n+1}\oplus A_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{A_{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{A_{n+2}} \end{pmatrix}"'] & A_n\oplus A_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} 0 & 1_{A_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{A_n} & 0 \\ 0 & 1_{A_{n+1}} \end{pmatrix}"'] & A_{n-1}\oplus A_n \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} 0 & 1_{A_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{A_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{A_n} \end{pmatrix}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1}\oplus A_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"'] & A_n\oplus A_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}"'] & A_{n-1}\oplus A_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Έτσι, το σύμπλοκο

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1}\oplus A_{n+2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}} A_n \oplus A_{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}} A_{n-1}\oplus A_n \longrightarrow \cdots$$

ανήκει στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Το σύμπλοκο

$$\cdots \longrightarrow Y_{n+1}\oplus Y_{n+2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}} Y_n \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}} Y_{n-1}\oplus Y_n \longrightarrow \cdots$$

είναι εξίσου συσταλτό καθώς υπάρχει $\begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : Y_n \oplus Y_{n+1} \longrightarrow Y_{n+1}\oplus Y_{n+2}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n+1}} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1_{Y_n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{Y_n} & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n+1}} \end{pmatrix}$$

όπως παριστάνεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\cdots \arrow[r] & Y_{n+1}\oplus Y_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{Y_{n+1}} & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n+2}} \end{pmatrix}"'] & Y_n\oplus Y_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{Y_n} & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n+1}} \end{pmatrix}"'] & Y_{n-1}\oplus Y_n \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{n+1}\oplus Y_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"'] & Y_n\oplus Y_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}"'] & Y_{n-1}\oplus Y_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Έτσι, το σύμπλοκο

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \oplus Y_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] & Y_n \oplus Y_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}"] & Y_{n-1} \oplus Y_n \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

ανήκει εξίσου στην υποκατηγορία $\mathfrak{X}$. Εν συνεχεία ας είναι

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

ένα στοιχείο της κατηγορίας $Ch(\mathcal{C})$ δηλαδή ένα σύμπλοκο. Θεωρούμε έναν μορφισμό μεταξύ συμπλόκων $(f_n, g_n)\colon Y_n \oplus Y_{n+1} \longrightarrow A_n$. Τότε λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \oplus Y_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(f_{n+1}, g_{n+1})"'] & Y_n \oplus Y_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(f_n, g_n)"'] & Y_{n-1} \oplus Y_n \arrow[r] \arrow[d, "(f_{n-1}, g_{n-1})"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "d_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου

$$d_{n+1} \circ (f_{n+1}, g_{n+1}) = (f_n, g_n) \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

και κατ' επέκταση

$$d_{n+1} \circ f_{n+1} = g_n$$

και

$$d_{n+1} \circ g_{n+1} = 0.$$

Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \oplus A_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(1_{A_{n+1}}, d_{n+2})"'] & A_n \oplus A_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(1_{A_n}, d_{n+1})"'] & A_{n-1} \oplus A_n \arrow[r] \arrow[d, "(1_{A_{n-1}}, d_n)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "d_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{6.3}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

είναι ένα σύμπλοκο έπεται ότι $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα καθώς και τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών έπεται ότι:

$$d_n \circ (1_{A_n}, d_{n+1}) = (d_n \circ 1_{A_n}, d_n \circ d_{n+1}) = (d_n, 0) = (1_{A_{n-1}}, d_n) \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι, το διάγραμμα (6.3) είναι μεταθετικό. Ως εκ τούτου η $(1_{A_n}, d_{n+1})\colon A_n \oplus A_{n+1} \longrightarrow A_n$ είναι ένας μορφισμός από το σύμπλοκο

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \oplus A_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] & A_n \oplus A_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}"] & A_{n-1} \oplus A_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

στο σύμπλοκο

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] & A_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Κατόπιν θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \oplus Y_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f_{n+1} & 0 \\ 0 & f_{n+2} \end{pmatrix}"'] & Y_n \oplus Y_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n+1} \end{pmatrix}"'] & Y_{n-1} \oplus Y_n \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f_{n-1} & 0 \\ 0 & f_n \end{pmatrix}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \oplus A_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"'] & A_n \oplus A_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}"'] & A_{n-1} \oplus A_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{6.4}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ταυτοτικών μορφισμών $1_{A_n}\colon A_n \longrightarrow A_n$ και $1_{Y_n}\colon Y_n \longrightarrow Y_n$ προκύπτει ότι

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} & 0 \\ 0 & f_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι, το διάγραμμα (6.4) είναι μεταθετικό. Ως εκ τούτου η $\begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n+1} \end{pmatrix}\colon Y_n \oplus Y_{n+1} \longrightarrow A_n \oplus A_{n+1}$ είναι ένας μορφισμός από το σύμπλοκο

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \oplus Y_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] & Y_n \oplus Y_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}"] & Y_{n-1} \oplus Y_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

στο σύμπλοκο

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \oplus A_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] & A_n \oplus A_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}"] & A_{n-1} \oplus A_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
(\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \oplus A_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"] & A_n \oplus A_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{A_n} & 0 \end{pmatrix}"] & A_{n-1} \oplus A_n \cdots) \arrow[r, "(1_{A_n}, d_{n+1})"] & (\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] & \cdots) \\
& (\cdots \arrow[r] & Y_{n+1} \oplus Y_{n+2} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}"'] & Y_n \oplus Y_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_n} & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[ul, "\begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n+1} \end{pmatrix}"'] & Y_{n-1} \oplus Y_n \arrow[r] \arrow[ur, "(f_n, g_n)"] & \cdots)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό καθώς

$$(1_{A_n}, d_{n+1}) \circ \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n+1} \end{pmatrix} = (1_{A_n} \circ f_n + d_{n+1} \circ 0, 1_{A_n} \circ 0 + d_{n+1} \circ f_{n+1}) = (f_n, g_n)$$

Ως εκ τούτου ο μορφισμός $(1_{A_n}, d_{n+1})$ είναι μια δεξιά προσέγγιση του συμπλόκου

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι υπάρχει και μια αριστερή προσέγγιση. Έτσι, η υποκατηγορία των συσταλτών συμπλόκων $\mathfrak{X}$ είναι συναρτητικά πεπερασμένη. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.5 η κατηγορία $Ch(\mathcal{C})$ των συμπλόκων υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$ εφοδιάζεται με μια δομή μοντέλο στην οποία οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ομοτοπικές ισοδυναμίες, οι νηματώσεις είναι οι $\mathfrak{X}$-epics μορφισμοί δηλαδή οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι επιμορφισμοί και οι συννηματώσεις είναι οι $\mathfrak{X}$-monics μορφισμοί δηλαδή οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι μονομορφισμοί. Επιπλέον, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 6.1.5 κάθε σύμπλοκο είναι συνινώδες-ινώδες, και η ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{Ho}(\mathsf{Ch}(\mathcal{C}))$ είναι ισοδύναμη με την κλασική ομοτοπική κατηγορία $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ των συμπλόκων υπεράνω της $\mathcal{C}$. ■

Παρατήρηση 6.3.12. Δοθείσης μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$ η κατηγορία των συμπλόκων $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ υπεράνω μιας προσθετικής κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία Frobenius στην οποία οι επιτρεπτοί μονομορφισμοί είναι οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι μονομορφισμοί, οι επιτρεπτοί επιμορφισμοί είναι οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι επιμορφισμοί και τα προβολικά-ενέσιμα αντικείμενα είναι τα συσταλτά σύμπλοκα. Ως εκ τούτου σύμφωνα με την παράγραφο 6.2 η κατηγορία $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ ως κατηγορία Frobenius εφοδιάζεται με την δομή κατηγορίας μοντέλο στην οποία οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ομοτοπικές ισοδυναμίες, οι νηματώσεις είναι οι επιτρεπτοί επιμορφισμοί δηλαδή οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι επιμορφισμοί και οι συννηματώσεις είναι οι επιτρεπτοί μονομορφισμοί δηλαδή οι μορφισμοί συμπλόκων οι οποίοι όταν παραλείψουμε τα διαφορικά είναι διασπώμενοι μονομορφισμοί. Εάν επιπλέον η $\mathcal{C}$ έχει πεπερασμένα όρια και συνόρια η κατηγορία $\mathsf{Ch}(\mathcal{C})$ είναι μια ευσταθής κατηγορία μοντέλο, δηλαδή η ομοτοπική κατηγορία της είναι τριγωνισμένη.

6.4 Τοπολογικοί Χώροι

Στην παρούσα ενότητα κατασκευάζουμε τη «συνήθη» δομή μοντέλου στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων και των συνεχών απεικονίσεων μεταξύ αυτών. Πρόκειται για τη δομή μοντέλου του Quillen. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η κατηγορία Top εφοδιασμένη με την εν λόγω δομή αποτελεί κατηγορία μοντέλο. Στην απόδειξη χρησιμοποιούμε στοιχεία από την Θεωρία Συνόλων (διατακτικοί αριθμοί, υπερπεπερασμένες συνθέσεις) και τη Θεωρία Κατηγοριών (σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα και ο ισχυρισμός του μικρού αντικειμένου) τα οποία αναλύονται στο Παράρτημα Α΄.

Ορισμός 6.4.1. *Ας είναι X και Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f, g\colon X \longrightarrow Y$ συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ αυτών. Μια* **ομοτοπία (homotopy)** *από τη συνεχή απεικόνιση f στη συνεχή απεικόνιση g είναι μια συνεχής απεικόνιση $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ τέτοια ώστε*

$$H(x,0) = f(x) \quad \textit{και} \quad H(x,1) = g(x),$$

για κάθε $x \in X$. Εάν υπάρχει μια ομοτοπία από την f στην g, η f καλείται **ομοτοπική (homotopic)** *της g και συνήθως συμβολίζεται με $f \simeq g$.*

Παρατήρηση 6.4.2. 1. Διαισθητικά, θεωρούμε την ομοτοπία ως μια μονοπαραμετρική οικογένεια συνεχών απεικονίσεων από το X στο Y. Εάν φανταστούμε ότι η παράμετρος t αναπαριστά τον χρόνο τότε η ομοτοπία H αναπαριστά μια συνεχή «παραμόρφωση» της απεικόνισης f στην απεικόνιση g καθώς το t πηγαίνει από το μηδέν στο ένα.

2. Εάν συμβολίσουμε με $C(X, Y)$ το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από τον X στον Y η σχέση ομοτοπίας που ορίστηκε παραπάνω είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $C(X, Y)$.

Ορισμός 6.4.3. *Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος και A ένας υπόχωρος του.*

1. *Ο υπόχωρος A καλείται* **retract** *του X εάν η απεικόνιση έγκλεισης $i\colon A \longrightarrow X$ έχει έναν αριστερό αντίστροφο δηλαδή εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r\colon X \longrightarrow A$ τέτοια ώστε $r \circ i = 1_A$. Η απεικόνιση r καλείται* **retraction** *του X επί του A.*

2. *Ο υπόχωρος A καλείται* **ισχυρή συσταλτική παραμόρφωση (strong deformation retract)** *του X εάν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $F\colon X \times [0,1] \longrightarrow X$ τέτοια ώστε*
$$F(x, 0) = x \text{ για } x \in X,$$
$$F(x, 1) \in A \text{ για } x \in X,$$
$$F(a, t) = a \text{ για } a \in A \text{ και } t \in [0, 1].$$
Η απεικόνιση F καλείται **ισχυρή συσταλτική παραμόρφωση (strong deformation retraction)**.

Παρατήρηση 6.4.4. 1. Διαισθητικά, ο χώρος A είναι μια ισχυρή συσταλτική παραμόρφωση του χώρου X εάν ο X μπορεί να παραμορφωθεί σταδιακά στο A και κάθε σημείο του A να παραμένει σταθερό κατά την διάρκεια αυτής της παραμόρφωσης. Στο τέλος της παραμόρφωσης έχουμε μια retraction του X επί του A η οποία στέλνει το x στο $F(x, 1)$.

2. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον Ορισμό 6.4.3 συμπεραίνουμε ότι η ισχυρή συσταλτική παραμόρφωση F είναι μια ομοτοπία μεταξύ της ταυτοτικής απεικόνισης $1_X\colon X \longrightarrow X$ του X και ενός retract $r\colon X \longrightarrow A$.

Ορισμός 6.4.5. *Μια συνεχής απεικόνιση $f\colon X \longrightarrow Y$ καλείται* **ομοτοπική ισοδυναμία (homotopy equivalence)** *εάν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g\colon Y \longrightarrow X$ τέτοια ώστε η συνεχής απεικόνιση $g \circ f\colon X \longrightarrow X$ να είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση $1_X\colon X \longrightarrow X$ του X και η συνεχής απεικόνιση $f \circ g\colon Y \longrightarrow Y$ να είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση $1_Y\colon Y \longrightarrow Y$ του Y. Στην περίπτωση αυτή η απεικόνιση g καλείται* **ομοτοπικός αντίστροφος (homotopy inverse)** *του μορφισμού f.*

Σχόλιο 6.4.6. 1. Δοθείσης οποιασδήποτε συλλογής $\mathcal{C}$ τοπολογικών χώρων, η σχέση της ομοτοπικής ισοδυναμίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας στη συλλογή $\mathcal{C}$. Δύο τοπολογικοί χώροι οι οποίοι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι λέμε ότι έχουν τον ίδιο **ομοτοπικό τύπο (homotopy type)**.

2. Η έννοια της ομοτοπικής ισοδυναμίας γενικεύει την έννοια της ισχυρής συσταλτικής παραμόρφωσης. Εάν A είναι μια ισχυρή συσταλτική παραμόρφωση του X τότε ο A έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τον X. Θεωρώντας ως $i\colon A \longrightarrow X$ την απεικόνιση έγκλεισης και ως $r\colon X \longrightarrow A$ την retraction απεικόνιση, η σύνθεση $r \circ i\colon A \longrightarrow A$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση $1_A\colon A \longrightarrow A$ του A και η σύνθεση $i \circ r\colon X \longrightarrow X$ είναι εξ' υποθέσεως ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση $1_X\colon X \longrightarrow X$ του X και στην πραγματικότητα κάθε στοιχείο του A παραμένει σταθερό μέσω της ομοτοπίας. Υπό την προϋπόθεση ότι δύο χώροι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι αποδεικνύεται ότι έχουν ισόμορφες θεμελιώδεις ομάδες.

Ορισμός 6.4.7. *Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος και x, y δύο σημεία του X. Ένα* **μονοπάτι (path)** *στον X από το σημείο x στο σημείο y είναι μια συνεχής απεικόνιση $f\colon [0,1] \longrightarrow X$ τέτοια ώστε $f(0) = x$ και $f(1) = y$. Ο χώρος X καλείται* **path συνεκτικός (path connected)** *εάν κάθε ζεύγος στοιχείων του μπορεί να ενωθεί με ένα μονοπάτι.*

Παρατήρηση 6.4.8. Δοθέντος ενός τοπολογικού χώρου X και δύο σημείων του x και y, η ύπαρξη ενός μονοπατιού από το x στο y ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στον τοπολογικό χώρο X ως εξής:

$$x \backsim y \quad \textit{εάν υπάρχει ένα μονοπάτι στον } X \textit{ απο το } x \textit{ στο } y.$$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας καλούνται **συνεκτικές συνιστώσες (path components)** του X.

Για κάθε $n \geqslant 1$, συμβολίζουμε με

$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
$$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$$

τη μοναδιαία σφαίρα και τον μοναδιαίο δίσκο στον $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα.

Ορισμός 6.4.9. *Ας είναι X ένας τοπολογικός χώρος και x ένα σημείο του. Εάν στην μοναδιαία σφαίρα S^n επιλέξουμε ως σημείο βάσης το σημείο $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ θα συμβολίζουμε με $\pi_n(X, x)$ το σύνολο των σημειακών ομοτοπικών κλάσεων από το (S^n, e_0) στο (X, x). Για κάθε $n \geqslant 1$, το σύνολο $\pi_n(X, x)$ εφοδιάζεται με μια δομή ομάδας και καλείται* n**-οστή ομάδα ομοτοπίας του** X **(n-th homotopy group of X)**.

Παρατήρηση 6.4.10.

1. Για $n = 0$ το σύνολο $\pi_0(X, x)$ είναι το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του X.

2. Ας είναι X και Y δύο τοπολογικοί χώροι, x ένα σημείο του X και $f\colon X \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Θα συμβολίζουμε με $\pi_n(f) = \pi_n(f, x)$ την απεικόνιση $\pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$ η οποία ορίζεται ως εξής $\pi_n(f, x)([h]) = [f \circ h]$.

3. Οι ομάδες ομοτοπίας είναι ανεξάρτητες της επιλογής του σημείου βάσης.

4. Για $n \geqslant 1$, ορίζεται ο **συναρτητής** n**-οστής ομάδας ομοτοπίας (n-th homotopy group functor)** $\pi_n\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Grp}$ από την κατηγορία Top_* των σημειακών τοπολογικών χώρων στην κατηγορία Grp των ομάδων ο οποίος στέλνει έναν σημειακό τοπολογικό χώρο (X, x_0) στην n-οστή ομάδα ομοτοπίας $\pi_n(X, x_0)$ και μια συνεχή απεικόνιση $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, f(x_0))$ η οποία διατηρεί το σημείο βάσης στον ομομορφισμό ομάδων $\pi_n(f) = f_*\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ ο οποίος ορίζεται ως $f_*([g]) = [f \circ g]$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω αντιστοιχία ορίζει έναν συναλλοίωτο συναρτητή από την κατηγορία Top_* των σημειακών τοπολογικών χώρων στην κατηγορία Grp των ομάδων, ο οποίος καλείται ο συναρτητής n-οστής ομάδας ομοτοπίας. Για $n \geqslant 2$, η n-οστή ομάδας ομοτοπίας $\pi_n(X, x_0)$ είναι αβελιανή. Έτσι, στην περίπτωση αυτή ο συναρτητής n-οστής ομάδας ομοτοπίας ορίζεται από την κατηγορία Top_* των σημειακών τοπολογικών χώρων στην κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων.

Ορισμός 6.4.11. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ καλείται* **ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία (weak homotopy equivalence)** *εάν για κάθε επιλογή του σημείου της βάσης $x \in X$ η επαγόμενη απεικόνιση $\pi_n(f)\colon \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$ είναι ένας ισομορφισμός των ομάδων ομοτοπίας και η απεικόνιση $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ είναι «1-1» και «επί».*

Ορισμός 6.4.12.

1. *Κάθε τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$ καλείται* **κύτταρο (cell)**. *Εάν X είναι ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου Y τέτοιος ώστε να υπάρχει ένα pushout διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ D^n \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

για κάποιο $n \geqslant 0$, θα λέμε ότι ο Y **λαμβάνεται απο τον** X **με την προσθήκη ενός κυττάρου (Y is obtained from X by attaching a cell)**.

2. *Μια διαμέριση του τοπολογικού χώρου X σε υπόχωρους του οι οποίοι είναι κύτταρα καλείται* **αποσύνθεση σε κύτταρα (cell decomposition)**.

3. *Ένα* **σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα (relative cell complex)** *είναι μια έγκλειση $i\colon X \longrightarrow Y$ ενός υποχώρου X στο Y τέτοια ώστε ο Y να μπορεί να κατασκευαστεί από τον X μέσω μιας πιθανά άπειρης διαδικασίας προσθήκης κυττάρων.*

4. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι ένα* **κυτταρικό σύμπλεγμα (cell complex)** *εάν ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα.*

Παρατήρηση 6.4.13. 1. Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα προσκολλώντας περισσότερα από ένα κύτταρα την φορά. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντων ενός χώρου X_0, και για κάθε στοιχείο s ενός συνόλου S μιας απεικόνισης $S^{(n_s-1)} \longrightarrow X_0$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα pushout διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \coprod_{s\in S} S^{(n_s-1)} \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ \coprod_{s\in S} D^{n_s} \arrow[r] & X_1 \end{tikzcd}$$

Κατόπιν εκτελούμε μια παρόμοια κατασκευή με το X_1, στη συνέχεια με το X_2 κ.τ.λ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή πιθανόν άπειρες φορές.

2. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον Ορισμό 6.4.12 συμπεραίνουμε ότι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα είναι μια απεικόνιση η οποία μπορεί να κατασκευαστεί ως υπερπεπερασμένη σύνθεση των pushouts των εγκλείσεων του συνόρου ενός κυττάρου στο κύτταρο αυτό. Υπάρχουν πολλές διαφορετικές πιθανές τέτοιες κατασκευές. Ωστόσο, όταν πρόκειται για έναν τοπολογικό χώρο ο οποίος είναι ένα κυτταρικό σύμπλεγμα ή για έναν μορφισμό ο οποίος είναι ένας σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει κάποια συγκεκριμένη τέτοια κατασκευή. Επιπλέον, όπως είδαμε στο πρώτο σκέλος της παρούσας Παρατήρησης μπορούμε να επιλέξουμε μια κατασκευή του μορφισμού ως υπερπεπερασμένη σύνθεση των pushouts των συνγινομένων των κυττάρων, δηλαδή θα θεωρούμε κατασκευές ως υπερπεπερασμένες συνθέσεις στις οποίες περισσότερα από ένα κύτταρα θα προσκολλούνται την φορά.

Ο ακόλουθος Ορισμός εισήχθη από τον J.H.C. Whitehead και περιγράφει πως τα κύτταρα μπορούν «τοπολογικά» να προσκολληθούν μεταξύ τους.

Ορισμός 6.4.14. *Ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{E})$ όπου X είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff και $\mathcal{E}$ μια αποσύνθεση σε κύτταρα του X καλείται* **CW-σύμπλεγμα (CW-complex)**, *αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:*

1. *(**Characteristic Maps**) Για κάθε κύτταρο e διαστάσεως n το οποίο ανήκει στην $\mathcal{E}$ υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $\phi_e\colon D^n \longrightarrow X$ τέτοια ώστε ο υπόχωρος $\phi_e((D^n)^\circ)$ να είναι ομοιομορφικός με το κύτταρο e και ο υπόχωρος $\phi_e(S^{n-1})$ να είναι η ένωση κυττάρων διάστασης το πολύ $n-1$.*

2. *(**Closure Finiteness**) Το κάλυμμα $\bar{e}$ κάθε κυττάρου e που ανήκει στην $\mathcal{E}$ τέμνει μόνο πεπερασμένου πλήθους άλλα κύτταρα.*

3. *(**Weak Topology**) Ένα υποσύνολο A του X είναι κλειστό αν και μόνο αν το σύνολο $A \bigcap \bar{e}$ είναι κλειστό.*

Σχόλιο 6.4.15. Απλούστερα, μπορούμε να πούμε ότι ένα CW-σύμπλεγμα είναι ένας «καλός» τοπολογικός χώρος ο οποίος μπορεί να κατασκευαστεί επαγωγικά μέσω μιας διαδικασίας προσκολλήσεως n-διάστατων δίσκων D^n κατά μήκος των συνοριακών τους σφαιρών S^{n-1}.

Παρατήρηση 6.4.16. 1. Τα Αξιώματα 2. και 3. του Ορισμού 6.4.14 είναι απαραίτητα μόνο στην περίπτωση που η κυτταρική αποσύνθεση $\mathcal{E}$ είναι άπειρη καθώς στην περίπτωση που είναι πεπερασμένη ικανοποιούνται αυτόματα.

2. Τα Αξιώματα 2. και 3. του Ορισμού 6.4.14 είναι ανεξάρτητα το ένα του άλλου καθώς υπάρχουν παραδείγματα ζευγαριών $(X, \mathcal{E})$ με X είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff και $\mathcal{E}$ να είναι μια άπειρη αποσύνθεση σε κύτταρα του X τέτοια ώστε να ικανοποιείται το Αξίωμα 1. του Ορισμού 6.4.14 και είτε το Αξίωμα 2. είτε το Αξίωμα 3.

3. Η χαρακτηριστική απεικόνιση για ένα 0-κύτταρο e υποσύνολο του X είναι απλώς η απεικόνιση η οποία στέλνει το μηδέν στον one-point space e.

Παράδειγμα 6.4.17. 1. Εφοδιάζουμε την S^n με μια CW-δομή διαμερίζοντας την επαγωγικά. Υποθέτουμε ότι η S^{n-1} διαμερίζεται. Τότε διαμερίζουμε το υπόλοιπο της S^n σε άνω και κάτω ανοικτά ημισφαίρια. Οι χαρακτηριστικές απεικονίσεις για αυτά τα δύο επιπλέον κύτταρα μπορούν να ληφθούν να είναι οι προφανείς απεικονίσεις από τον D^n στα κλειστά ημισφαίρια της S^n. Σε αυτή την CW-δομή υπάρχουν δύο κύτταρα κάθε διάστασης μικρότερης ή ίσης του n. Μια άλλη CW-δομή με την οποία εφοδιάζουμε την S^n δίνεται από την διαμέριση του $\{e_1\}$ όπου e_1 είναι το πρώτο διάνυσμα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^{n+1}$ και από το $S^n - \{e_1\}$. Ως χαρακτηριστική απεικόνιση για αυτό το μεγάλο κύτταρο μπορούμε να λάβουμε την απεικόνιση πηλίκο $D^n \longrightarrow S^n$ η οποία ταυτίζει την S^{n-1} με το e_1. Σε αυτή την CW-δομή υπάρχει ένα κύτταρο διάστασης μηδέν, ένα κύτταρο διάστασης n και κανένα άλλο.

2. Ορίζοντας ως $S^\infty = \bigcup_n S^n$ και εφοδιάζοντας την με την τοπολογία:

$$F \subset S^\infty \text{ είναι κλειστό αν και μόνο αν } F \bigcap S^n \text{ είναι κλειστό στην} S^n,$$

για κάθε $n \geqslant 0$, λαμβάνουμε μια CW-δομή στην S^∞.

Σχόλιο 6.4.18. Κάθε CW-σύμπλεγμα είναι ένα κυτταρικό σύμπλεγμα. Ωστόσο, δεν είναι όλα τα κυτταρικά συμπλέγματα, CW-συμπλέγματα καθώς η απεικόνιση προσκολλήσεως ενός κυττάρου σε ένα κυτταρικό σύμπλεγμα δεν είναι απαραίτητο να αναλύεται μέσω της ένωσης κυττάρων μικρότερης διάστασης.

Ορισμός 6.4.19. *Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα και e ένα κύτταρο του. Μια λ-ακολουθία η οποία αποτελείται από pushouts συν-γινομένων των στοιχείων του I*

$$X_0 \longrightarrow X_1 \ldots \longrightarrow X_\beta \longrightarrow \ldots (\beta < \lambda)$$

τέτοια ώστε η σύνθεση $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{\beta<\lambda} X_\beta$ να είναι ισόμορφη με την f καλείται **παράσταση (presentation)** *της f. Η* **διατακτική παράσταση (presentation ordinal)** *του e είναι ο πρώτος διατακτικός β τέτοιος ώστε το e να ανήκει στο X_β.*

Ορισμός 6.4.20. *Ας είναι X ένα CW-σύμπλεγμα. Ένα* **υποσύμπλεγμα (sub-complex)** *A του X είναι η ένωση κυττάρων e στο X τέτοια ώστε $e \subset A$ να συνεπάγεται ότι $\bar{e} \subset A$.*

Παρατήρηση 6.4.21. 1. Η ένωση (αντίστοιχα τομή) υποσυμπλεγμάτων είναι ένα υποσύμπλεγμα.

2. Κάθε κύτταρο e του X περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα.

3. Ένα υποσύμπλεγμα A του X είναι ένα CW-σύμπλεγμα του οποίου οι χαρακτηριστικές απεικονίσεις είναι οι δοθείσες χαρακτηριστικές απεικονίσεις για εκείνα τα κύτταρα του X τα οποία βρίσκονται στο A.

4. Εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα τότε ένα συμπαγές υποσύνολο του Y μπορεί να τέμνει τα εσωτερικά μόνο πεπερασμένου πλήθους κυττάρων του $Y \backslash X$.

Παράδειγμα 6.4.22. Εφοδιάζοντας την S^n με την πρώτη δομή που αναφέραμε στο πρώτο σκέλος του Παραδείγματος 6.4.17, η S^{n-1} είναι ένα υποσύμπλεγμα της S^n και η S^n με την σειρά της ένα υποσύμπλεγμα της S^∞.

Πρόταση 6.4.23. *Κάθε κύτταρο ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια παράσταση ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος $X \longrightarrow Y$. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση υπερπεπερασμένης επαγωγής ως προς την διατακτική παράσταση του κυττάρου. Τα αρχικά κύτταρα τα οποία προσκολλούνται είναι το καθένα σε ένα υποσύμπλεγμα με ένα μόνο κελί. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η διατακτική παράσταση κάθε κυττάρου είναι ένας επόμενος διατακτικός αρκεί να υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε διατακτική παράσταση των κυττάρων μέχρι κάποιο διατακτικό β. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για την διατακτική παράσταση του επόμενου του β. Η εικόνα της απεικόνισης προσκολλήσεως οποιασδήποτε διατακτικής παράστασης του επόμενου του β είναι συμπαγής. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το τέταρτο σκέλος της Παρατήρησης 6.4.21 τέμνει τα εσωτερικά μόνο πεπερασμένα πολλών κυττάρων. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση καθένα από αυτά τα κύτταρα περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα. Η ένωση αυτών των πεπερασμένων υποσυμπλεγμάτων και αυτό το καινούργιο κύτταρο είναι ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα το οποίο περιέχει το καινούργιο κύτταρο. ■

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.4.23 είναι η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 6.4.24. *Ένα συμπαγές υποσύνολο ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος.*

Απόδειξη. Ας είναι W ένα συμπαγές υποσύνολο ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος $i\colon X \longrightarrow Y$. Τότε σύμφωνα με το τέταρτο σκέλος της Παρατήρησης 6.4.21 το συμπαγές υποσύνολο W του Y τέμνει εσωτερικά μόνο πεπερασμένο πλήθος κυττάρων του $Y \backslash X$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 6.4.23 καθένα από αυτά τα κύτταρα ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος περιέχεται σε ένα πεπερασμένο υποσύμπλεγμα. Η ένωση αυτών των πεπερασμένων υποσυμπλεγμάτων η οποία αποτελεί πεπερασμένο υποσύμπλεγμα περιέχει το συμπαγές υποσύνολο W. ■

Συμβολίζουμε με I το σύνολο των απεικονίσεων

$$I = \{S^{n-1} \longrightarrow D^n \mid n \geqslant 0\}$$

το οποίο καλείται **σύνολο παραγουσών συννηματώσεων (set of generating cofibrations)** και με J το σύνολο των απεικονίσεων

$$J = \{D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I \mid n \geqslant 0\}$$

το οποίο καλείται **σύνολο παραγουσών τετριμμένων συννηματώσεων (set of generating trivial cofibrations)**.

Ορισμός 6.4.25. 1. *Εάν X είναι ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου Y τέτοιος ώστε να υπάρχει ένα pushout διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
D^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
D^n \times I \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

για κάποιο $n \geqslant 0$, θα λέμε ότι ο Y **λαμβάνεται από τον X με την προσθήκη ενός J-κυττάρου (Y is obtained from X by attaching a J-cell)**.

2. *Ένα* **σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα (relative J-cell complex)** *είναι μια έγκλειση $i\colon X \longrightarrow Y$ ενός υποχώρου X στο Y τέτοια ώστε ο Y να μπορεί να κατασκευαστεί από τον X μέσω μιας πιθανά άπειρης διαδικασίας προσθήκης J-κυττάρων.*

Σχόλιο 6.4.26. Κάθε στοιχείο του J είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα με δύο κύτταρα. Εάν ο τοπολογικός χώρος Y λαμβάνεται από τον τοπολογικό χώρο Y με την προσθήκη ενός J-κυττάρου τότε ο μορφισμός $X \longrightarrow Y$ είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα στο οποίο προστίθεται ένα μόνο n-κύτταρο και στη συνέχεια ένα μόνο $(n+1)$-κύτταρο για κάποιο $n \geqslant 0$.

Παρατήρηση 6.4.27. Ανάλογα με τα σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα προσκολλώντας περισσότερα από ένα J-κύτταρα τη φορά. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντων ενός χώρου X_0, και για κάθε στοιχείο s ενός συνόλου S μιας απεικόνισης $D^{n_s} \times \{0\} \longrightarrow X_0$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα pushout διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{s\in S} D^{n_s} \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\
\coprod_{s\in S} D^{n_s} \times I \arrow[r] & X_1.
\end{tikzcd}$$

Κατόπιν εκτελούμε μια παρόμοια κατασκευή με το X_1, στη συνέχεια με το X_2 κ.τ.λ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή πιθανόν άπειρες φορές.

Λήμμα 6.4.28. *Ας είναι S ένα σύνολο και $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός. Εάν για κάθε στοιχείο s του συνόλου S έχουμε έναν μορφισμό $A_s \longrightarrow B_s$ ο οποίος έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον f, τότε το συνγινόμενο $\coprod_{s\in S} A_s \longrightarrow \coprod_{s\in S} B_s$ έχει εξίσου την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον f.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε στοιχείο s του συνόλου S ο μορφισμός $A_s \longrightarrow B_s$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό f. Τότε, για κάθε $s \in S$ υπάρχει μια ανύψωση $h_s\colon B_s \longrightarrow X$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
B_s \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h_s"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{s\in S} A_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\coprod_{s\in S} B_s \arrow[r] & Y.
\end{tikzcd}$$

Εφόσον $h_s\colon B_s \longrightarrow X$ είναι μια ανύψωση για καθένα B_s τότε $\sum_{s\in S} h_s\colon \coprod_{s\in S} B_s \longrightarrow X$ είναι εξίσου μια ανύψωση στο τελευταίο μεταθετικό διάγραμμα. Ως εκ τούτου, το συνγινόμενο $\coprod_{s\in S} A_s \longrightarrow \coprod_{s\in S} B_s$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον f. ■

Πρόταση 6.4.29. *Εάν ένας μορφισμός έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε στοιχείο του I τότε έχει εξίσου την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς όλα τα σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα και τα retracts τους.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.4.13 δοθέντων ενός χώρου X_n, και για κάθε στοιχείο s ενός συνόλου S μιας απεικόνισης $S^{(n_s-1)} \longrightarrow X_n$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα pushout διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{s\in S} S^{(n_s-1)} \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[d] \\
\coprod_{s\in S} D^{n_s} \arrow[r] & X_{n+1}.
\end{tikzcd}$$

Επαναλαμβάνοντας την κατασκευή αυτή πιθανόν άπειρες φορές λαμβάνουμε ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα. Ας είναι $f\colon Z \longrightarrow W$ ένας μορφισμός ο οποίος έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε στοιχείο του $I = \{S^{n-1} \longrightarrow D^n \mid n \geqslant 0\}$. Δοθέντος ενός συνόλου S και για κάθε $s \in S$ οι μορφισμοί $S^{n_s-1} \longrightarrow D^{n_s}$ έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 6.4.28 το συνγινόμενο τους $\coprod_{s\in S} S^{n_s-1} \longrightarrow \coprod_{s\in S} D^{n_s}$ έχει εξίσου την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$. Ο μορφισμός $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ είναι pushout του μορφισμού $\coprod_{s\in S} S^{n_s-1} \longrightarrow \coprod_{s\in S} D^{n_s}$ κατά μήκος του μορφισμού $\coprod_{s\in S} S^{n_s-1} \longrightarrow X_n$ και ο μορφισμός $\coprod_{s\in S} S^{n_s-1} \longrightarrow \coprod_{s\in S} D^{n_s}$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.16 ο μορφισμός $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$. Έτσι, έχουμε μια ακολουθία μορφισμών $X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$ για όλα τα $n \geqslant 0$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.0.65 ο μορφισμός $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ ο οποίος από τον τρόπο που κατασκευάστηκε είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f\colon Z \longrightarrow W$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς το σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ και κατ' επέκταση ως προς όλα τα σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μας απομένει να δείξουμε ότι ο μορφισμός $f\colon Z \longrightarrow W$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τα retracts των σχετικών κυτταρικών συμπλεγμάτων. Ας είναι $g\colon E \longrightarrow D$ ένα retract του σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$. Από το πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης το σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.15 έπεται ότι ο μορφισμός $g\colon E \longrightarrow D$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon Z \longrightarrow W$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f\colon Z \longrightarrow W$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς το retract $g\colon E \longrightarrow D$ του σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε retract ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος. ■

Ορισμός 6.4.30. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια* **νημάτωση του Serre (Serre fibration)** *αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε απεικόνιση του συνόλου $J = \{D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I \mid n \geqslant 0\}$.*

Ορισμός 6.4.31. *Ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία* Top *των τοπολογικών χώρων είναι:*

- *μια* **ασθενής ισοδυναμία** *εάν για κάθε επιλογή του σημείου της βάσης $x \in X$ η επαγόμενη απεικόνιση $\pi_n(f)\colon \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$ είναι ένας ισομορφισμός των ομοτοπικών ομάδων και η απεικόνιση $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ είναι «1-1» και «επί».*
- *μια* **συννημάτωση** *εάν είναι σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα ή ένα retract ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος.*
- *μια* **νημάτωση** *εάν είναι νημάτωση του Serre.*

Πρόταση 6.4.32. *Κάθε νημάτωση έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς όλα τα σχετικά J-κυτταρικά συμπλέγματα και τα retracts τους.*

Απόδειξη. Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ μια νημάτωση. Τότε εξ' ορισμού η f είναι μια νημάτωση του Serre και ως εκ τούτου έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε απεικόνιση του συνόλου $J = \{D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I \mid n \geqslant 0\}$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.4.27 δοθέντων ενός χώρου X_n, και για κάθε στοιχείο s ενός συνόλου S μιας απεικόνισης $D^{n_s} \times \{0\} \longrightarrow X_n$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα pushout διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \coprod_{s\in S} D^{n_s} \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[d] \\ \coprod_{s\in S} D^{n_s} \times I \arrow[r] & X_{n+1}. \end{tikzcd}$$

Επαναλαμβάνοντας την κατασκευή αυτή πιθανόν άπειρες φορές λαμβάνουμε ένα σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα. Δοθέντος ενός συνόλου S και για κάθε $s \in S$ οι μορφισμοί $D^{n_s} \times \{0\} \longrightarrow D^{n_s} \times I$ έχουν την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 6.4.28 το συνγινόμενο τους $\coprod_{s\in S} D^{n_s} \times \{0\} \longrightarrow \coprod_{s\in S} D^{n_s} \times I$ έχει εξίσου την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Ο μορφισμός $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ είναι pushout του μορφισμού $\coprod_{s\in S} D^{n_s} \times \{0\} \longrightarrow \coprod_{s\in S} D^{n_s} \times I$ κατά μήκος του μορφισμού $\coprod_{s\in S} D^{n_s} \times \{0\} \longrightarrow X_n$ και ο μορφισμός $\coprod_{s\in S} D^{n_s} \times \{0\} \longrightarrow \coprod_{s\in S} D^{n_s} \times I$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.16 ο μορφισμός $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Έτσι, έχουμε μια ακολουθία μορφισμών $X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$ για όλα τα $n \geqslant 0$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.0.65 ο μορφισμός $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ ο οποίος από τον τρόπο που κατασκευάστηκε είναι ένα σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς το σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ και κατ' επέκταση ως προς όλα τα σχετικά J-κυτταρικά συμπλέγματα. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μας απομένει να δείξουμε ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τα retracts των σχετικών J-κυτταρικών συμπλεγμάτων. Ας είναι $g\colon E \longrightarrow D$ ένα retract του σχετικού J-κυτταρικού συμπλέγματος $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$. Από το πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης το σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Έτσι, σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.15 έπεται ότι ο μορφισμός $g\colon E \longrightarrow D$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $f\colon X \longrightarrow Y$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς το retract $g\colon E \longrightarrow D$ του σχετικού J-κυτταρικού συμπλέγματος $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{n\geqslant 0} X_n$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε retract ενός σχετικού J-κυτταρικού συμπλέγματος. ■

Παρατήρηση 6.4.33. Εάν $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση τότε υπάρχει μια ανύψωση στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \vartheta D^n \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ D^n \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

για κάθε $n \geqslant 0$.

Ευθύς αμέσως κατασκευάζουμε δύο συναρτητικές παραγοντοποιήσεις των μορφισμών οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν κατόπιν στην απόδειξη του Αξιώματος (MC5).

Πρόταση 6.4.34. *1. Υπάρχει μια συναρτητική παραγοντοποίηση κάθε μορφισμού $f: X \longrightarrow Y$ ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $i: X \longrightarrow W$ είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα και ο μορφισμός $p: W \longrightarrow Y$ είναι I-ενέσιμος.*

2. Υπάρχει μια συναρτητική παραγοντοποίηση κάθε μορφισμού $f: X \longrightarrow Y$ ως $f = q \circ j$ όπου ο μορφισμός $j: X \longrightarrow W$ είναι ένα σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα και ο μορφισμός $q: W \longrightarrow Y$ είναι J-ενέσιμος.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλέπε [17, Proposition 4.1, 4.9]. ■

Παρατήρηση 6.4.35. Οι παραπάνω συναρτητικές παραγοντοποιήσεις αποτελούν παραδείγματα του ισχυρισμού του μικρού αντικειμένου (βλέπε Α΄.0.83).

Θεώρημα 6.4.36. *Η κατηγορία* Top *των τοπολογικών χώρων είναι μια κατηγορία μοντέλο εφοδιασμένη με μια δομή στην οποία:*

1. *οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ασθενείς ομοτοπικές ισοδυναμίες,*
2. *οι νηματώσεις είναι οι νηματώσεις του Serre,*
3. *οι συννηματώσεις είναι τα σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα ή τα retracts των σχετικών κυτταρικών συμπλέγματων.*

Απόδειξη. Ας είναι $f: X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων. Ορίζουμε τον μορφισμό f να είναι:

- μια ασθενής ισοδυναμία εάν είναι ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία.
- μια συννημάτωση εάν είναι σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα ή ένα retract ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος.
- μια νημάτωση εάν είναι νημάτωση του Serre.

Θα αποδείξουμε ότι πληρούνται τα Αξιώματα (MC1) – (MC5) του Ορισμού 3.1.5 για τη δομή που μόλις ορίσαμε.

(MC1) (**Limit Axiom**) Ας είναι $\mathcal{I}$ μια μικρή κατηγορία και $X: \mathcal{I} \longrightarrow$ Top ένας συναρτητής. Το όριο $\varprojlim(X)$ του X είναι το όριο στην κατηγορία Set των συνόλων εφοδιασμένο με την τοπολογία του υποχώρου και το συνόριο $\varinjlim(X)$ του X είναι το συνόριο στην κατηγορία Set των συνόλων εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκο. Αναλυτικότερα, ας είναι $\mathcal{I}$ μια μικρή κατηγορία και $X: \mathcal{I} \longrightarrow \text{Set}, \ i \longrightarrow X_i$ ένας συναρτητής. Συμβολίζουμε με I το σύνολο αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{I}$. Το όριο στην κατηγορία Set των συνόλων περιγράφεται ως εξής:

$$\varprojlim_{\mathcal{I}}(X) = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \mid \forall \text{ μορφισμό } \phi: i \longrightarrow i' \text{ στην } \mathcal{I},\ X(\phi)(x_i) = x_{i'} \right\}$$

Εάν (X_i) είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ εφοδιάζεται με την τοπολογία γινόμενο. Πρόκειται για την ασθενέστερη τοπολογία (δηλαδή την τοπολογία με τα λιγότερα ανοικτά σύνολα) για την οποία οι κανονικές προβολές $\pi_i: \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ είναι συνεχείς απεικονίσεις. Δοθέντων ανοικτών συνόλων U_i, μια βάση για την τοπολογία γινόμενο δίνεται από τα γινόμενα $\prod_{i\in I} U_i$ των ανοικτών συνόλων $U_i \subseteq X_i$ με $U_i = X_i$ εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό δεικτών. Το υποσύνολο $\varprojlim_{\mathcal{I}}(X)$ του τοπολογικού χώρου $\prod_{i\in I} X_i$ το οποίο ορίσθηκε παραπάνω εφοδιασμένο με την τοπολογία του υποχώρου δηλαδή την ασθενέστερη τοπολογία για την οποία η έγκλειση $i\colon \lim_{\mathcal{I}}(X) \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ είναι συνεχής, αποτελεί το όριο στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων. Αντίστοιχα, το συνόριο στην κατηγορία Set των συνόλων είναι το πηλίκο

$$\varinjlim_{\mathcal{I}}(X) = \bigsqcup_{i\in I} X_i/ \backsim$$

όπου $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ είναι η ξένη ένωση των συνόλων X_i και «$\backsim$» είναι η σχέση ισοδυναμίας η οποία παράγεται θέτοντας:

$$x_i \backsim x_{i'} \text{ εάν } x_i \in X_i,\ x_{i'} \in X_{i'} \text{ και } X(\phi)(x_i) = x_{i'} \text{ για κάποιο μορφισμό } \phi\colon i \longrightarrow i'.$$

Το συνόριο $\varinjlim_{\mathcal{I}}(X) = \bigsqcup_{i\in I} X_i/ \backsim$ εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκο η οποία ορίζεται ως εξής: Ένα υποσύνολο U του $\varinjlim(X)$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το σύνολο $f_i^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον χώρο $X(i)$ για κάθε $i \in I$ όπου $f_i\colon X(i) \longrightarrow \varinjlim(X)$ είναι οι κανονικοί μορφισμοί ως προς το συνόριο, αποτελεί το συνόριο στην κατηγορία Top των τοπολογικών χώρων.

(MC2) (**Two out of three Axiom**) Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ μορφισμοί στην Top τέτοιοι ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$.

- Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Y \longrightarrow Z$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Τότε για οποιαδήποτε επιλογή σημείων βάσης $x \in X$ και $f(x) \in Y$ αντίστοιχα, οι επαγόμενες απεικονίσεις

$$\pi_n(f)\colon \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y,f(x))$$

και

$$\pi_n(g)\colon \pi_n(Y,f(x)) \longrightarrow \pi_n(Z,g(f(x)))$$

είναι ισομορφισμοί των ομοτοπικών ομάδων και οι απεικονίσεις

$$\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$$

και

$$\pi_0(g)\colon \pi_0(Y) \longrightarrow \pi_0(Z)$$

είναι «1-1» και «επί» απεικονίσεις μεταξύ συνόλων. Τότε για κάθε επιλογή σημείου βάσης $x \in X$ η απεικόνιση

$$\pi_n(g\circ f) = \pi_n(g)\circ\pi_n(f)\colon \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Z,g(f(x)))$$

είναι ένας ισομορφισμός των ομοτοπικών ομάδων ως σύνθεση ισομορφισμών και η απεικόνιση

$$\pi_0(g\circ f) = \pi_0(g)\circ\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Z)$$

είναι μια «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ συνόλων ως σύνθεση «1-1» και «επί» απεικονίσεων μεταξύ συνόλων. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g\circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία.

- Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί $g\colon Y \longrightarrow Z$ και $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Τότε για οποιαδήποτε επιλογή σημείων βάσης $f(x) \in Y$ και $x \in X$ αντίστοιχα, οι επαγόμενες απεικονίσεις

$$\pi_n(g)\colon \pi_n(Y,f(x)) \longrightarrow \pi_n(Z,g(f(x)))$$

και

$$\pi_n(g\circ f) = \pi_n(g)\circ\pi_n(f)\colon \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Z,(g\circ f)(x))$$

είναι ισομορφισμοί των ομοτοπικών ομάδων και οι απεικονίσεις

$$\pi_0(g)\colon \pi_0(Y) \longrightarrow \pi_0(Z)$$

και

$$\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Z)$$

είναι «1-1» και «επί» απεικονίσεις μεταξύ συνόλων. Ως εκ τούτου υπάρχει ο αντίστροφος

$$\pi_n(g)^{-1}\colon \pi_n(Z, g(f(x))) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

ο οποίος είναι ισομορφισμός μεταξύ ομοτοπικών ομάδων και η αντίστροφη

$$\pi_0(g)^{-1}\colon \pi_0(Z) \longrightarrow \pi_0(Y)$$

η οποία είναι «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ συνόλων. Έτσι, για κάθε επιλογή σημείου βάσης $x \in X$ η απεικόνιση

$$\pi_n(f) = \pi_n(g)^{-1} \circ \pi_n(g \circ f)\colon \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

είναι εξίσου ένας ισομορφισμός μεταξύ ομοτοπικών ομάδων ως σύνθεση ισομορφισμών και η απεικόνιση

$$\pi_0(f) = \pi_0(g)^{-1} \circ \pi_0(g \circ f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$$

είναι «1-1» και «επί» ως σύνθεση «1-1» και «επί» απεικονίσεων μεταξύ συνόλων. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία.

– Υποθέτουμε ότι οι μορφισμοί $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Τότε η απεικόνιση $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ είναι μια «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ συνόλων. Στην περίπτωση αυτή δοθέντος ενός σημείου $y \in Y$ ίσως δεν είναι στην εικόνα του f. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η απεικόνιση $\pi_0(f)$ είναι ένας «1-1» και «επί» υπάρχει ένα σημείο x του X και ένα μονοπάτι $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow Y$ από το $f(x)$ στο y. Τότε $\alpha(0) = f(x)$ και $\alpha(1) = y$. Δοθέντος του μορφισμού $g\colon Y \longrightarrow Z$ λαμβάνουμε τους επαγόμενους ομομορφισμούς

$$\pi_n(g, y)\colon \pi_n(Y, y) \longrightarrow \pi_n(Z, g(y)), \qquad [\gamma] \longrightarrow [g \circ \gamma]$$

και

$$\pi_n(g, f(x))\colon \pi_n(Y, f(x)) \longrightarrow \pi_n(Z, g(f(x))), \quad [\gamma] \longrightarrow [g \circ \gamma]$$

Εφόσον Y είναι ένας τοπολογικός και y, $f(x)$ είναι στοιχεία του Y τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\alpha_*\colon \pi_n(Y, y) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x)), \qquad [\gamma] \longrightarrow [\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}].$$

Επιπλέον το μονοπάτι $g \circ \alpha\colon [0,1] \longrightarrow Z$ από το $g(y)$ στο $g(f(x))$ επάγει έναν ισομορφισμό

$$(g \circ \alpha)_*\colon \pi_n(Z, g(y)) \longrightarrow \pi_n(Z, g(f(x)))$$

ο οποίος ορίζεται όπως ο α_*. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς των παραπάνω απεικονίσεων προκύπτει ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(Y, y) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\pi_n(g,y)"'] & \pi_n(Y, f(x)) \arrow[d, "\pi_n(g,f(x))"] \\
\pi_n(Z, g(y)) \arrow[r, "(g\circ\alpha)_*"'] & \pi_n(Z, g(f(x)))
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου $(g \circ \alpha)_* \circ \pi_n(g, y) = \pi_n(g, f(x)) \circ \alpha_*$. Εφόσον οι μορφισμοί $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες τότε για οποιαδήποτε επιλογή σημείου βάσης $x \in X$, οι επαγόμενες απεικονίσεις

$$\pi_n(f, x)\colon \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

και

$$\pi_n(g \circ f, x)\colon \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Z, g(f(x)))$$

είναι ισομορφισμοί των ομοτοπικών ομάδων. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $\pi_n(g \circ f, x) = \pi_n(g, f(x)) \circ \pi_n(f, x)$ έπεται ότι η απεικόνιση $\pi_n(g, f(x))$ είναι εξίσου ένας ισομορφισμός. Έτσι, από την ισότητα $(g \circ \alpha)_* \circ \pi_n(g, y) = \pi_n(g, f(x)) \circ \alpha_*$ έπεται ότι η απεικόνιση $\pi_n(g, y)\colon \pi_n(Y, y) \longrightarrow \pi_n(Z, g(y))$ είναι ένας ισομορφισμός. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $g\colon Y \longrightarrow Z$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία.

(MC3) (**Retract Axiom**) Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ και $g\colon Z \longrightarrow W$ μορφισμοί στην Top τέτοιοι ώστε ο μορφισμός f να είναι retract του μορφισμού g.

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g\colon Z \longrightarrow W$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού g προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\gamma"] & W \arrow[r, "\delta"] & Y
\end{tikzcd}$$

στο οποίο $\beta \circ \alpha = 1_X$ και $\delta \circ \gamma = 1_Y$. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος λαμβάνουμε τις ισότητες

$$\gamma \circ f = g \circ \alpha, \tag{6.5}$$

$$\delta \circ g = f \circ \beta \tag{6.6}$$

και

$$f \circ \beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma \circ f. \tag{6.7}$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή π_n στις παραπάνω ισότητες καθώς και στις ισότητες

$$\beta \circ \alpha = 1_X \tag{6.8}$$

και

$$\delta \circ \gamma = 1_Y \tag{6.9}$$

προκύπτει

$$\pi_n(\gamma, f(x)) \circ \pi_n(f, x) = \pi_n(g, \alpha(x)) \circ \pi_n(\alpha, x),$$

$$\pi_n(\delta, \gamma(f(x)) = g(\alpha(x))) \circ \pi_n(g, \alpha(x)) = \pi_n(f, \beta(\alpha(x)) = x) \circ \pi_n(\beta, \alpha(x)),$$

$$\pi_n(f, x = \beta(\alpha(x))) \circ \pi_n(\beta, \alpha(x)) \circ \pi_n(\alpha, x) = \pi_n(\delta, \gamma(f(x)) = g(\alpha(x))) \circ \pi_n(\gamma, f(x)) \circ$$

$$\circ \pi_n(f, x),$$

$$\pi_n(\beta, \alpha(x)) \circ \pi_n(\alpha, x) = 1_{\pi_n(X,x)}$$

και

$$\pi_n(\delta, \gamma(f(x)) = g(\alpha(x))) \circ \pi_n(\gamma, f(x)) = 1_{\pi_n(Y, f(x))}$$

Ως εκ τούτου προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,x) \arrow[r, "\pi_n(\alpha,x)"] \arrow[d, "\pi_n(f,x)"] & \pi_n(Z,\alpha(x)) \arrow[r, "\pi_n(\beta,\alpha(x))"] \arrow[d, "\pi_n(g,\alpha(x))"] & \pi_n(X,x) \arrow[d, "\pi_n(f,\beta(\alpha(x))=x)"] \\
\pi_n(Y,f(x)) \arrow[r, "\pi_n(\gamma,f(x))"] & \pi_n(W,\gamma(f(x)) = g(\alpha(x))) \arrow[r, "\pi_n(\delta,\gamma(f(x))=g(\alpha(x)))"] & \pi_n(Y,f(x))
\end{tikzcd}$$

με $f(x) = f(\beta(\alpha(x))) = \delta(\gamma(f(x))) = \delta(g(\alpha(x)))$ και $x = \beta(\alpha(x))$ στο οποίο $\pi_n(\delta, \gamma(f(x)) = g(\alpha(x))) \circ \pi_n(\gamma, f(x)) = 1_{\pi_n(Y,f(x))}$ και $\pi_n(\beta, \alpha(x)) \circ \pi_n(\alpha, x) = 1_{\pi_n(X,x)}$. Ως εκ τούτου η απεικόνιση $\pi_n(f,x)$ είναι retract της απεικόνισης $\pi_n(g, \alpha(x))$. Εφόσον ο μορφισμός $g\colon Z \longrightarrow W$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία για κάθε επιλογή σημείου βάσης $\alpha(x) \in Z$ η επαγόμενη απεικόνιση $\pi_n(g, \alpha(x))\colon \pi_n(Z, \alpha(x)) \longrightarrow \pi_n(W, \gamma(f(x)) = g(\alpha(x)))$ είναι ένας ισομορφισμός των ομοτοπικών ομάδων. Έτσι, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 η απεικόνιση $\pi_n(f,x)\colon \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$ είναι εξίσου ισομορφισμός των ομοτοπικών ομάδων. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Για $n = 0$ λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $g\colon Z \longrightarrow W$ είναι μια ασθενής ισοδυναμία η επαγόμενη απεικόνιση $\pi_0(g)\colon \pi_0(Z) \longrightarrow \pi_0(W)$ είναι μια «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ συνόλων. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή π_0 στις ισότητες (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) και (6.9) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες που τον διέπουν ως συναρτητή προκύπτουν οι ακόλουθες ισότητες

$$\pi_0(\gamma) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(\alpha), \tag{6.10}$$

$$\pi_0(\delta) \circ \pi_0(g) = \pi_0(f) \circ \pi_0(\beta) \tag{6.11}$$

$$\pi_0(f) \circ \pi_0(\beta) \circ \pi_0(\alpha) = \pi_0(\delta) \circ \pi_0(\gamma) \circ \pi_0(f) \tag{6.12}$$

$$\pi_0(\beta) \circ \pi_0(\alpha) = 1_{\pi_0(X)} \tag{6.13}$$

και

$$\pi_0(\delta) \circ \pi_0(\gamma) = 1_{\pi_0(Y)}. \tag{6.14}$$

Ως εκ τούτου λαμβάνουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(X) \arrow[r, "\pi_0(\alpha)"] \arrow[d, "\pi_0(f)"] & \pi_0(Z) \arrow[r, "\pi_0(\beta)"] \arrow[d, "\pi_0(g)"] & \pi_0(X) \arrow[d, "\pi_0(f)"] \\
\pi_0(Y) \arrow[r, "\pi_0(\gamma)"] & \pi_0(W) \arrow[r, "\pi_0(\delta)"] & \pi_0(Y)
\end{tikzcd}$$

στο οποίο $\pi_0(\beta) \circ \pi_0(\alpha) = 1_{\pi_0(X)}$ και $\pi_0(\delta) \circ \pi_0(\gamma) = 1_{\pi_0(Y)}$. Έτσι, η απεικόνιση $\pi_0(f)$ είναι retract της «1-1» και «επί» απεικόνισης μεταξύ συνόλων $\pi_0(g)$ και κατ' επέκταση σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 μια «1-1» και «επί» μεταξύ συνόλων. Συνεπώς, ο μορφισμός f είναι μια ασθενής ισοδυναμία στην κατηγορία Top.

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g\colon Z \longrightarrow W$ είναι μια συννημάτωση. Τότε ο μορφισμός g ένα retract ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος. Έτσι, ο μορφισμός f ως retract ενός retract ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος είναι εξίσου ένα retract ενός σχετικού κυτταρικού συμπλέγματος και κατ' επέκταση μια συννημάτωση.

– Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $g\colon Z \longrightarrow W$ είναι μια νημάτωση. Τότε ο μορφισμός g είναι μια νημάτωση του Serre. Ως εκ τούτου ο μορφισμός g έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε απεικόνιση του συνόλου $J = \{D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I \mid n \geqslant 0\}$ των παραγουσών τετριμμένων συννηματώσεων. Έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.1.15 ο μορφισμός f ως retract του μορφισμού g έχει εξίσου την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε στοιχείο του συνόλου $J = \{D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I \mid n \geqslant 0\}$ των παραγουσών τετριμμένων συννηματώσεων. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f είναι νημάτωση του Serre και κατ' επέκταση νημάτωση.

(MC4) **(Lifting Axiom)** Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος στην κατηγορία Top:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(a) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ είναι τετριμμένη νημάτωση. Ο μορφισμός p ως τετριμμένη νημάτωση σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.4.33 έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε στοιχείο του $I = \{S^{n-1} \longrightarrow D^n \mid n \geqslant 0\}$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.4.29 ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς όλα τα σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα και τα retracts τους και κατ' επέκταση ως προς την συννημάτωση i. Έτσι, υπάρχει μια ανύψωση $h\colon B \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα.

(b) Υποθέτουμε ότι ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ είναι τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon X \longrightarrow Y$ είναι νημάτωση. Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου παραγοντοποιούμε τον μορφισμό i ως $i = t \circ s$ όπου ο μορφισμός $s\colon A \longrightarrow W$ είναι ένα σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα και ο μορφισμός $t\colon W \longrightarrow B$ είναι μια νημάτωση. Σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος του Αξιώματος (MC5) που θα αποδείξουμε στην συνέχεια ο μορφισμός s είναι μια τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός t είναι μια νημάτωση. Οι μορφισμοί i και s ως τετριμμένες συννηματώσεις είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Ως εκ τούτου από την ισότητα $i = t \circ s$ σύμφωνα με το Αξίωμα (MC2) έπεται ότι ο μορφισμός t είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, ο μορφισμός t είναι μια τετριμμένη νημάτωση. Ο μορφισμός i ως τετριμμένη συννημάτωση είναι συννημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του παρόντος Αξιώματος ο μορφισμός i έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό t. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $i = t \circ s$ από το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.14 το οποίο ισχύει και για μια τυχαία κατηγορία έπεται ότι ο μορφισμός i είναι retract του σχετικού J-κυτταρικού συμπλέγματος s. Ο μορφισμός p ως νημάτωση σύμφωνα με την Πρόταση 6.4.32 έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς όλα τα σχετικά J-κυτταρικά συμπλέγματα και τα retracts τους. Έτσι, ο μορφισμός p έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης και ως προς το σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα i. Ως εκ τούτου υπάρχει μια ανύψωση $h\colon B \longrightarrow X$ στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα.

(MC5) **(Factorization Axiom)** Ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην κατηγορία Top.

(a) Ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ σύμφωνα με τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow W$ είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα και ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι I-ενέσιμος δηλαδή έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς οποιοδήποτε απεικόνιση στο I. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι συννηματώσεις έχουν οριστεί να είναι τα σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα και τα retracts αυτών ο μορφισμός i είναι μια συννημάτωση. Σύμφωνα με το Σχόλιο 6.4.26 κάθε απεικόνιση του συνόλου $J = \{D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I \mid n \geqslant 0\}$ είναι ένα σχετικό κυτταρικό σύμπλεγμα. Εφόσον ο μορφισμός p έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς οποιαδήποτε απεικόνιση στο I από την Πρόταση 6.4.29 έπεται ότι έχει εξίσου την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς όλα τα σχετικά κυτταρικά συμπλέγματα και τα retract αυτών. Ως εκ τούτου ο μορφισμός p έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε απεικόνιση του συνόλου J. Έτσι, ο μορφισμός p είναι νημάτωση του Serre και κατ' επέκταση νημάτωση. Μας απομένει για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη να δείξουμε ότι ο p είναι εξίσου ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός p έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $\varnothing \longrightarrow D^0$ υπάρχει μια ανύψωση $h\colon D^0 \longrightarrow W$ στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d, "p"] \\ D^0 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}.$$

Έτσι, ο μορφισμός p είναι «επί». Ως εκ τούτου κάθε συνεκτική συνιστώσα του Y είναι στην εικόνα μιας συνεκτικής συνιστώσας του W. Έτσι, τα X και Y είναι εξίσου κενά είτε εξίσου μη κενά. Θα αποδείξουμε ότι κάθε απεικόνιση των ομοτοπικών ομάδων ή των συνόλων $\pi_n(p)\colon \pi_n(W) \longrightarrow \pi_n(Y)$, $n \geqslant 0$ για κάθε επιλογή σημείου της βάσης του W είναι «1-1». Σημειώνουμε ότι κάθε στοιχείο του πυρήνα δημιουργεί ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d, "p"] \\ D^{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}.$$

Η ύπαρξη της ανύψωσης στο τελευταίο μεταθετικό διάγραμμα υποδηλώνει ότι το εν λόγω στοιχείο του πυρήνα είναι το μηδενικό στοιχείο του $\pi_n(W)$. Εάν $n = 0$ ισχύει για κάθε επιλογή σημείου της βάσης και ως εκ τούτου η απεικόνιση $\pi_0(p)\colon \pi_0(W) \longrightarrow \pi_0(Y)$ είναι ένας μονομορφισμός. Κατόπιν θα αποδείξουμε ότι κάθε απεικόνιση μεταξύ των ομοτοπικών ομάδων $\pi_{n+1}(p)\colon \pi_{n+1}(W) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y)$ για $n \geqslant 0$ είναι «επί» σε κάθε σημείο βάσης του W. Κάθε σημείο του $\pi_{n+1}Y$ δημιουργεί ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d, "p"] \\ D^{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

στο οποίο η απεικόνιση $S^n \longrightarrow W$ είναι η σταθερή απεικόνιση. Η ύπαρξη της ανύψωσης $D^{n+1} \longrightarrow W$ αποδεικνύει ότι το επιλεγμένο στοιχείο $\pi_{n+1}Y$ είναι στην εικόνα του $\pi_{n+1}W$. Συνοψίζοντας ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow W$ είναι μια συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι μια τετριμμένη νημάτωση.

(b) Ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ σύμφωνα με τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow W$ είναι ένα σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα και ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι J-ενέσιμος δηλαδή έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς οποιαδήποτε απεικόνιση στο σύνολο J. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι μια νημάτωση του Serre και κατ' επέκταση νημάτωση. Ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow W$ ως σχετικό J-κυτταρικό σύμπλεγμα σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.0.80 είναι μια J-συννημάτωση. Ως εκ τούτου από την Πρόταση Α΄.0.86 έπεται ότι ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow W$ είναι retract ενός σχετικού J-κυτταρικού συμπλέγματος και κατ΄ επέκταση μια συννημάτωση. Μας απομένει να αποδείξουμε ότι ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow W$ είναι εξίσου μια ασθενής ισοδυναμία. Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι η έγκλειση $D^n \times \{0\} \longrightarrow D^n \times I$ είναι η έγκλειση μιας ισχυρής συσταλτικής παραμόρφωσης κάθε μορφισμός $W_k \longrightarrow W_{k+1}$ στην κατασκευή της παραγοντοποίησης είναι εξίσου έγκλειση μιας ισχυρής συσταλτικής παραμόρφωσης και κατ΄ επέκταση μια ασθενής ισοδυναμία. Έτσι, για κάθε $n \geqslant 0$ η ακολουθία

$$\pi_n W_0 \longrightarrow \pi_n W_1 \longrightarrow \pi_n W_1 \longrightarrow \pi_n W_2 \longrightarrow \dots$$

είναι μια ακολουθία ισομορφισμών. Εφόσον S^n και D^{n+1} είναι συμπαγή σύμφωνα με την Πρόταση 6.4.23 κάθε απεικόνιση από την S^n ή τον D^{n+1} στο W αναλύεται μέσω των W_k για κάποιο $k \geqslant 0$. Ως εκ τούτου η απεικόνιση $\varinjlim_k(\pi_n W_k) \longrightarrow \pi_n W$ είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι, η απεικόνιση $\pi_n X \longrightarrow \pi_n W$ είναι εξίσου ένας ισομορφισμός και ο μορφισμός i είναι μια ασθενής ισοδυναμία. Συνοψίζοντας ένας μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός $i\colon X \longrightarrow W$ είναι μια τετριμμένη συννημάτωση και ο μορφισμός $p\colon W \longrightarrow Y$ είναι μια νημάτωση. ■

Παρατήρηση 6.4.37. Με την δομή κατηγορίας μοντέλο της Top η οποία κατασκευάσθηκε στο Θεώρημα 6.4.36, κάθε αντικείμενο της Top είναι ινώδες και κάθε CW-σύμπλεγμα είναι συνινώδες.

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων και ο Ισχυρισμός του Μικρού Αντικειμένου

Στο παρόν παράρτημα, αναφέρουμε εν συντομία ορισμένες βασικές γνώσεις από τη Θεωρία συνόλων και διατυπώνουμε τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου. Ο ισχυρισμός του μικρού αντικειμένου χρησιμοποιείται στην απόδειξη ότι η κατηγορία των τοπολογικών χώρων εφοδιάσμένη με την Quillen δομή μοντέλου αποτελεί κατηγορία μοντέλο.

Α΄.0.1 Διατακτικοί Αριθμοί, Πληθικοί Αριθμοί και Υπερπεπερασμένες συνθέσεις

Στην παρούσα υποενότητα υπενθυμίζουμε ορισμένα βασικά στοιχεία της Θεωρίας συνόλων. Πιο συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στους διατακτικούς και πληθικούς αριθμούς και στις ιδιότητες που τους διέπουν. Κατόπιν με χρήση των διατακτικών αριθμών ορίζουμε την έννοια της υπερπεπερασμένης σύνθεσης.

Ορισμός Α΄.0.38. *Ας είναι X ένα σύνολο και $\leqslant$ μια διμελής σχέση στο X.*

1. *Η διμελής σχέση $\leqslant$ καλείται* **μερική διάταξη (partial order)** *εάν είναι:*

   (α΄) **(ανακλαστική)***: $x \leqslant x$,*

   (β΄) **(αντισυμμετρική)***: $x \leqslant y$ και $y \leqslant x$ τότε $x = y$,*

   (γ΄) **(μεταβατική)***: $x \leqslant y$ και $y \leqslant z$ τότε $x \leqslant z$, $\forall x, y, z \in X$.*

   Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια μερική διάταξη $\leqslant$ καλείται **μερικά διατεταγμένο (partially ordered)**. *Εάν S είναι ένα υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου X, τότε λέμε ότι το S έχει την* **επαγόμενη διάταξη** *με $x \leqslant y$ στο S όπως ακριβώς αυτή η σχέση πληρούται στο X .*

2. *Μια μερική διάταξη $\leqslant$ στο X τέτοια ώστε $\forall x, y \in X$ να ισχύει είτε $x \leqslant y$ είτε $y \leqslant x$ καλείται* **ολική διάταξη (total order)**. *Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια ολική διάταξη καλείται* **ολικά διατεταγμένο (totally ordered)**.

3. *Ένα στοιχείο x ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου X καλείται* **ελαχιστικό (minimal)** *εάν $x \leqslant y$, $\forall y \in X$. Μια ολική διάταξη $\leqslant$ στο X με την ιδιότητα κάθε μη κενό υποσύνολο S του X εφοδιασμένο με την επαγόμενη διάταξη να έχει ελαχιστικό στοιχείο καλείται* **καλή διάταξη (well order)**. *Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια καλή διάταξη καλείται* **καλά διάτεταγμένο (well ordered)**.

Ορισμός Α΄.0.39. *Δύο καλά διατεταγμένα σύνολα X και Y καλούνται* **ισόμορφα (isomorphic)** *και συμβολίζονται με $X \cong Y$ εάν υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία $f\colon X \longrightarrow Y$ η οποία διατηρεί τη διάταξη, δηλαδή εάν $x_1 \leqslant x_2$ στο X τότε $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ στο Y.*

Ορισμός Α΄.0.40. *Ας είναι X ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Ένα υποσύνολο S του X λέγεται* **τμήμα (segment)** *του X εάν όταν $y < x$ και $x \in S$ τότε και $y \in S$.*

Παρατήρηση Α΄.0.41.

1. Η ένωση (αντίστοιχα τομή) οποιασδήποτε συλλογής από τμήματα ενός καλά διατεταγμένου συνόλου X είναι εξίσου τμήμα του X.
2. Εάν S και T είναι τμήματα του X τότε είτε $S \subset T$ είτε $T \subset S$.
3. Το X είναι τμήμα του X.

Ορισμός Α΄.0.42. *Εάν $S \neq X$ και ένα στοιχείο $x \in X$ είναι ελαχιστικό στοιχείο του $X - S$, τότε $S_x = \{y \in X \mid y < x\}$ είναι ένα τμήμα του X και αναφέρεται ως* **αρχικό τμήμα (initial segment)**.

Σχόλιο Α΄.0.43. Το σύνολο των αρχικών τμημάτων του X εφοδιασμένο με την έγκλειση είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο το οποίο είναι ισόμορφο με το X. Έτσι εάν $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ είναι τμήματα του X, τότε για κάποιο $n_0 \geqslant 0$, $S_n = S_{n_0}$, $\forall\ n \geqslant n_0$

Ευθύς αμέσως εισάγουμε την έννοια του διατακτικού αριθμού.

Ας είναι X ένα καλά διατεταγμένο σύνολο το οποίο διαθέτει «αρκετά στοιχεία». Στην περίπτωση αυτή το X έχει πρώτο στοιχείο, δεύτερο στοιχείο, τρίτο στοιχείο κ.τ.λ. Οι διατακτικοί αριθμοί μπορούν να ορισθούν ως αριθμοί οι οποίοι αντιπροσωπεύουν τη θέση ενός στοιχείου σε ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Το γεγονός αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό με την βοήθεια του ακόλουθου παραδείγματος.

Παράδειγμα Α΄.0.44. Ορίζοντας τους ακέραιους αριθμούς ως σύνολα ως εξής

$$\begin{gathered} 0 = \varnothing \\ 1 = \{0\} \\ 2 = \{0,1\} \\ 3 = \{0,1,2\} \\ \cdots\cdots \\ n = \{0,1,2,\ldots n-1\} \end{gathered}$$

η διάταξη :

$$0 \subsetneqq \{0\} \subsetneqq \{0,1\} \subsetneqq \{0,1,2\} \cdots \subsetneqq \{0,1,\ldots n-1\}$$

χρησιμοποιείται για να ορίσει τη συνήθη διάταξη :

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots$$

του συνόλου $\mathbb{N}_0$ των φυσικών αριθμών. Το σύνολο n με την εν λόγω διάταξη είναι καλά διατεταγμένο για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Θεωρούμε το σύνολο n. Ας είναι

$$\begin{gathered} S_0 = \{x \in n \mid x < 0\} = \varnothing = 0 \\ S_1 = \{x \in n \mid x < 1\} = \{0\} = 1 \\ S_2 = \{x \in n \mid x < 2\} = \{0,1\} = 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n-1} = \{x \in n \mid x < n-1\} = \{0,1,\cdots n-2\} = n-1. \end{gathered}$$

Τότε το n είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο τέτοιο ώστε $k = S_k$, $\forall\ k \in n$.

Ορισμός Α΄.0.45. *Ένα καλά διατεταγμένο σύνολο α καλείται* **διατακτικός αριθμός (ordinal number)** *εάν $x = S_x$,$\forall x \in \alpha$. Εάν X είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο τέτοιο ώστε να είναι ισόμορφο με το α λέμε ότι το X έχει διατακτικό αριθμό a και το συμβολίζουμε με* $\mathsf{Ord}\, X = \alpha$.

Παρατήρηση Α΄.0.46.

1. Εάν α είναι ένας διατακτικός αριθμός και $\beta \in \alpha$ τότε ο β είναι εξίσου ένας διατακτικός αριθμός.
2. Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο έχει μοναδικό διατακτικό αριθμό.
3. Η ένωση ενός συνόλου διατακτικών είναι ένας διατακτικός και αυτό είναι το ελάχιστο άνω φράγμα για το σύνολο.
4. Εάν $\mathsf{Ord}\, X = a$ και X είναι πεπερασμένο σύνολο τότε το a είναι πεπερασμένος διατακτικός αριθμός. Αντίστοιχα, εάν το X είναι ένα άπειρο σύνολο τότε το a είναι άπειρος διατακτικός αριθμός.
5. Εάν α είναι ένας διατακτικός αριθμός τότε η σχέση του υποσυνόλου «$\subset$» είναι μια σχέση καλής διάταξης στο α.

Παράδειγμα Α΄.0.47. Στο Παράδειγμα Α΄.0.44 καθένα από τα σύνολα n είναι διατακτικός αριθμός. Επιπλέον, εάν το $\mathbb{N}_0$ είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη διάταξη τότε $\mathsf{Ord}\, \mathbb{N}_0 = \omega$.

Η κλάση των διατακτικών αριθμών έχει την ιδιότητα της τριχοτομίας όπως υποδηλώνει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση Α΄.0.48. *Ας είναι α και β δύο διατακτικοί αριθμοί. Οι αριθμοί α και β ικανοποιούν μια και μόνο μια από τις ακόλουθες σχέσεις:*

1. $\alpha < \beta$,
2. $\alpha = \beta$,
3. $\alpha > \beta$.

Κατόπιν μελετάμε την έννοια του πληθαρίθμου. Οι πληθάριθμοι αποτελούν γενίκευση των φυσικών αριθμών και χρησιμοποιούνται για να μετρήσουμε το μέγεθος των συνόλων. Η πληθικότητα όπως θα δούμε εκφράζεται με την βοήθεια των «1-1» απεικονίσεων. Έτσι, δύο σύνολα X και Y έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων εάν υπάρχει μια «1-1» αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους χωρίς να ληφθεί υπ' όψιν η διάταξη στο X και στο Y. Στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων, αυτό συμφωνεί με την διαισθητική έννοια του μεγέθους. Ωστόσο, στην περίπτωση των άπειρων συνόλων η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη.

Ορισμός Α΄.0.49. *Ας είναι X ένα σύνολο. Ο μικρότερος διατακτικός για τον οποίο υπάρχει μια «1-1» αντιστοιχία με το σύνολο καλείται* **πληθικότητα (cardinality)** *ή* **πληθάριθμος (cardinal)** *του X και συμβολίζεται με $card(X)$. Ένας διατακτικός αριθμός μεγαλύτερης πληθικότητας από οποιοδήποτε μικρότερο διατακτικό καλείται* **πληθάριθμος (cardinal)**.

Παρατήρηση Α΄.0.50. Κάθε σύνολο έχει έναν μοναδικό πληθάριθμο.

Το ακόλουθο παράδειγμα υποδηλώνει ότι υπάρχουν εξίσου πεπερασμένοι και άπειροι πληθάριθμοι.

Παράδειγμα Α΄.0.51. 1. Θέτουμε

$$0 = card(\varnothing)$$
$$1 = card(\{0\})$$

$$2 = card(\{0,1\})$$
$$3 = card(\{0,1,2\})$$
$$\ldots\ldots$$
$$n = card(\{0,1,2,\ldots n-1\})$$

Τότε, για κάθε σύνολο $X \in card(\{0,1,2,\ldots,n-1\})$ έχουμε $card(X) = n$.

2. Οι ακόλουθοι αριθμοί είναι αντίστοιχα ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος,..., ο κ-οστός άπειρος πληθάριθμος

$$\aleph_0 = card(\mathbb{N}_0)$$
$$\aleph_1 = card(\wp(\mathbb{N}_0))$$
$$\aleph_2 = card(\wp(\wp(\mathbb{N}_0)))$$
$$\ldots\ldots$$
$$\aleph_n = card(\wp^k(\mathbb{N}_0)),$$

όπου $\wp^k$ προκύπτει εάν συνθέσουμε το $\wp$ με τον εαυτό του k-φορές.

$$\ldots\ldots$$

Τότε, για κάθε σύνολο $X \in card(\wp^k(\mathbb{N}_0))$ έχουμε $card(X) = \aleph_k$.

Σχόλιο Α΄.0.52. Εάν $card(X) = n$ τότε λέμε ότι το X έχει πεπερασμένο πληθάριθμο n.

Ανάλογα με τους διατακτικούς αριθμούς οι πληθάριθμοι ικανοποιούν την ιδιότητα της τριχοτομίας όπως υποδηλώνει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση Α΄.0.53. *Ας είναι α και β δύο πληθάριθμοι. Οι αριθμοί α και β ικανοποιούν μια και μόνο μια από τις ακόλουθες σχέσεις:*

1. $\alpha < \beta$,
2. $\alpha = \beta$,
3. $\alpha > \beta$

Σχόλιο Α΄.0.54. Η κλάση των πληθαρίθμων είναι μια αλυσίδα

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$$

Η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός πληθαρίθμων καθώς και η ύψωση σε εκθέτη ενός πληθαρίθμου ορίζεται ως εξής:

Ορισμός Α΄.0.55. *Ας είναι X και Y σύνολα.*

1. *Εάν $a = card(X)$ και $b = card(Y)$, τότε $a + b = c$ όπου $c = card((X \times \{1\}) \bigcup (Y \times \{2\}))$.*
2. *Εάν $a = card(X)$ και $b = card(Y)$, τότε $ab = c$ όπου $c = card(X \times Y)$.*
3. *Εάν $a = card(X)$ και $b = card(Y)$, τότε $a^b = c$ όπου $c = card(X^Y)$.*

Πρόταση Α΄.0.56. *Στην κλάση* **Card** *των πληθαρίθμων ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Εάν a και b είναι πληθάριθμοι και ο a είναι άπειρος, τότε $a + b = \max\{a, b\}$.*

2. *Εάν a και b είναι πληθάριθμοι, ο a είναι άπειρος και $b \neq 0$, τότε $ab = \max\{a, b\}$.*

3. *Εάν a και b είναι πληθάριθμοί, ο b είναι άπειρος και $2 \leqslant a \leqslant 2^b$, τότε $a^b = 2^b$.*

4. *Εάν a είναι ένας άπειρος πληθάριθμός και $b = a^a$, τότε $b^a = b$.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι a και b πληθάριθμοι με a να είναι άπειρος. Υποθέτουμε ότι $a \leqslant b$. Τότε, $b \leqslant a + b \leqslant b + b = 2b \leqslant bb = b$.

2. Ας είναι a και b πληθάριθμοι με a να είναι άπειρος. Υποθέτουμε ότι $0 < a < b$. Τότε, $b \leqslant ab \leqslant bb = b$.

3. Ας είναι a και b πληθάριθμοι με b να είναι άπειρος. Υποθέτουμε ότι $2 \leqslant a \leqslant 2^b$. Τότε, $2^b \leqslant a^b \leqslant (2^b)^b = 2^b$.

4. Ας είναι a ένας άπειρος πληθάριθμος και $b = a^a$. Τότε, $b^a = (a^a)^a = a^{aa} = a^a = b$. ■

Ορισμός Α΄.0.57. *Ας είναι a ένας πληθάριθμος. Ο πρώτος πληθάριθμος μεγαλύτερος του a καλείται* **επόμενος (successor)** *και συμβολίζεται με $Succ(a)$.*

Ορισμός Α΄.0.58. *Ας είναι a ένας πληθάριθμος. Ο πληθαριθμός a καλείται* **κανονικός πληθάριθμος (regular cardinal)** *εάν όταν X είναι ένα σύνολο του οποίου ο πληθικός αριθμός είναι μικρότερος του a και για κάθε στοιχείο x του X υπάρχει ένα σύνολο S_x του οποίου ο πληθικός αριθμός είναι μικρότερος του a, τότε ο πληθικός αριθμός του συνόλου $\bigcup_{x \in X} S_x$ είναι μικρότερος του a. Ένας πληθάριθμος ο οποίος δεν είναι κανονικός καλείται* **ιδιάζων πληθάριθμος (singular cardinal)**.

Παράδειγμα Α΄.0.59. 1. Ο πρώτος άπειρος κανονικός πληθάριθμος είναι ο $\aleph_0$ καθώς ένα σύνολο με πληθικότητα μικρότερη αυτής του $\aleph_0$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και η πεπερασμένη ένωση πεπερασμένων συνόλων είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.

Σχόλιο Α΄.0.60. Ο επόμενος ενός άπειρου πληθαρίθμου όπως για παράδειγμα ο $\aleph_1$, είναι ένας κανονικός πληθάριθμος. Στην περίπτωση του $\aleph_1$ αυτό σημαίνει ότι η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Ως εκ τούτου υπάρχει μια αυθαίρετα μεγάλη συλλογή κανονικών πληθαρίθμων: για κάθε πληθάριθμο a υπάρχει ένας μεγαλύτερος κανονικός πληθάριθμος ο οποίος συμβολίζεται με a^+.

Έχοντας ολοκληρώσει την αναφορά μας στους διατακτικούς αριθμούς και στους πληθαρίθμους, θα χρησιμοποιήσουμε τους διατακτικούς αριθμούς για να ορίσουμε την έννοια της υπερπεπερασμένης σύνθεσης.

Ορισμός Α΄.0.61. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία με όλα τα μικρά συνόρια και λ ένας διατακτικός αριθμός.*

1. *Ένας συναρτητής $X : \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$, δηλαδή ένα διάγραμμα της μορφής*

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_\beta \longrightarrow \cdots \quad (\beta < \lambda)$$

στην $\mathcal{C}$, τέτοιος ώστε ο επαγόμενος μορφισμός

$$\varinjlim_{\beta < \gamma} X_\beta \longrightarrow X_\gamma$$

να είναι ένας ισομορφισμός για κάθε οριακό διατακτικό $\gamma < \lambda$, καλείται **λ-ακολουθία (λ-sequence)** *στην $\mathcal{C}$.*

2. *Ο μορφισμός* $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{\beta<\gamma} X_\beta$ *καλείται* **σύνθεση της λ-ακολουθίας (composition of λ-sequence)**.

Σχόλιο Α΄.0.62. 1. Ορισμένες φορές στην βιβλιογραφία μια λ-ακολουθία ορίζεται να είναι ένας συναρτητής $X\colon \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$ ο οποίος διατηρεί συνόρια. Ωστόσο, ο ορισμός αυτός δεν διαφέρει από τον ορισμό που εμείς παραθέσαμε καθώς λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο συναρτητής X διατηρεί συνόρια συνάγεται ότι ο επαγόμενος μορφισμός

$$\varinjlim_{\beta<\gamma} X_\beta \longrightarrow X_\gamma$$

είναι ένας ισομορφισμός για κάθε οριακό διατακτικό $\gamma < \lambda$.

2. Η σύνθεση της λ-ακολουθίας δεν είναι μοναδική αλλά μοναδική μέχρις ισομορφισμού υπό του X.

3. Εάν $\lambda = \aleph_0$, τότε μια λ-ακολουθία είναι μια συνηθισμένη ακολουθία.

Ορισμός Α΄.0.63. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία με όλα τα μικρά συνόρια, $\mathcal{D}$ μια κλάση μορφισμών της και λ ένας διατακτικός αριθμός.*

1. *Μια λ-ακολουθία μορφισμών*

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_\beta \longrightarrow \cdots \quad (\beta < \lambda)$$

στην $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε ο μορφισμός $X_\beta \longrightarrow X_{\beta+1}$ να ανήκει στην $\mathcal{D}$ για $\beta + 1 < \lambda$ καλείται **λ-ακολουθία μορφισμών (λ-sequence of morphisms)** *στην $\mathcal{D}$.*

2. *Ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ ο οποίος είναι η σύνθεση μιας λ-ακολουθίας στην $\mathcal{D}$ για κάποιο διατακτικό λ πιθανότατα πεπερασμένο καλείται* **υπερπεπερασμένη σύνθεση μορφισμών (transfinite composition of morphisms)** *στην $\mathcal{D}$.*

3. *Ας είναι $\mathcal{C}'$ μια υποκατηγορία της $\mathcal{C}$. Η υπερπεπερασμένη σύνθεση των μορφισμών στην κλάση των μορφισμών στην $\mathcal{C}'$ καλείται* **υπερπεπερασμένη σύνθεση μορφισμών (transfinite composition of morphisms)** *στην $\mathcal{C}'$.*

Σχόλιο Α΄.0.64. Διαισθητικά, η υπερπεπερασμένη σύνθεση είναι ένας τρόπος να μιλάμε σχετικά με μορφισμούς σε μια κατηγορία οι οποίοι συμπεριφέρονται ως το αποτέλεσμα της σύνθεσης απείρως πολλών μορφισμών οι οποίοι συντίθενται διαδοχικά.

Ευθύς αμέσως μελετάμε τις ιδιότητες της ανύψωσης των υπερπεπερασμένων συνθέσεων.

Πρόταση Α΄.0.65. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $p\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Η κλάση των μορφισμών με την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό p είναι κλειστή ως προς την υπερπεπερασμένη σύνθεση.*

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $p\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Δοθείσης μια λ-ακολουθία μορφισμών η οποία έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό p θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
\varinjlim_{\beta<\gamma} X_\beta \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

Με χρήση υπερπεπερασμένης επαγωγής αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια ανύψωση $h\colon \varinjlim_{\beta<\gamma} X_\beta \longrightarrow X$ στο παραπάνω διάγραμμα. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $X_0 \longrightarrow \varinjlim_{\beta<\gamma} X_\beta$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $p\colon X \longrightarrow Y$. ∎

Πρόταση Α΄.0.66. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία μοντέλο.*

1. *Η κλάση των συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τις υπερπεπερασμένες συνθέσεις.*
2. *Η κλάση των τετριμένων συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τις υπερπεπερασμένες συνθέσεις.*

Απόδειξη. 1. Ας είναι $i\colon A \longrightarrow B$ μια συννημάτωση. Τότε σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις τετριμμένες νηματώσεις. Ας είναι $p\colon X \longrightarrow Y$ μια τετριμμένη νημάτωση. Τότε ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $p\colon X \longrightarrow Y$. Έτσι, από την Πρόταση Α΄.0.65 έπεται ότι κλάση των συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τις υπερπεπερασμένες συνθέσεις.

2. Ας είναι $i\colon A \longrightarrow B$ μια τετριμένη συννημάτωση. Τότε σύμφωνα με το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 3.1.17 ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς όλες τις νηματώσεις. Ας είναι $p\colon X \longrightarrow Y$ μια νημάτωση. Τότε ο μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $p\colon X \longrightarrow Y$. Έτσι, από την Πρόταση Α΄.0.65 έπεται ότι κλάση των τετριμένων συννηματώσεων είναι κλειστή ως προς τις υπερπεπερασμένες συνθέσεις. ∎

Ολοκληρώνουμε την παρούσα υποενότητα με μια αναφορά στα μικρά αντικείμενα.

Ορισμός Α΄.0.67. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια, W ένα αντικείμενο της, $\mathcal{D}$ μια υποκατηγορία της και k ένας πληθάριθμος.*

1. *Εάν για κάθε κανονικό πληθάριθμο $\lambda \geqslant k$ και κάθε λ-ακολουθία*

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_\beta \longrightarrow \cdots \quad (\beta < \lambda)$$

στην $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε κάθε μορφισμός $X_\beta \longrightarrow X_{\beta+1}$ να ανήκει στην $\mathcal{D}$ για κάθε διατακτικό β με $\beta+1<\lambda$, η απεικόνιση

$$\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X_\beta) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \varinjlim_{\beta<\lambda} X_\beta)$$

*είναι ένας ισομορφισμός θα λέμε ότι το αντικείμενο W της $\mathcal{C}$ είναι k-**μικρό σχετικά (k-small relative)** με την $\mathcal{D}$.*

2. *Το αντικείμενο W καλείται **μικρό σχετικά (small relative)** με την $\mathcal{D}$ εάν είναι k-μικρό σχετικά με την $\mathcal{D}$ για κάποιο πληθάριθμο k.*
3. *Το αντικείμενο W καλείται **μικρό (small)** εάν είναι μικρό σχετικά με την $\mathcal{C}$.*

Σχόλιο Α΄.0.68. Εάν $k<k'$ και το W είναι k-μικρό σχετικά με την $\mathcal{D}$ τότε το W είναι εξίσου k'-μικρό σχετικά με την $\mathcal{D}$.

Ορισμένα παραδείγματα μικρών αντικειμένων είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα Α΄.0.69. 1. Στην κατηγορία των συνόλων κάθε σύνολο X είναι μικρό.

2. Στην κατηγορία των προτύπων υπεράνω ενός δακτυλίου R κάθε πρότυπο είναι μικρό.

Ορισμός Α΄.0.70. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται* **retract** *ενός αντικειμένου Y εάν υπάρχουν μορφισμοί $i\colon X \longrightarrow Y$ και $r\colon Y \longrightarrow X$ τέτοιοι ώστε $r \circ i = 1_X$.*

Η ακόλουθη ιδιότητα υποδηλώνει η κλάση των αντικειμένων τα οποία έχουν την ιδιότητα να είναι k-μικρά σχετικά με μια υποκατηγορία μιας κατηγορίας, είναι κλειστή ως προς τα retracts.

Πρόταση Α΄.0.71. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια, $\mathcal{D}$ μια υποκατηγορία της, k ένας πληθάριθμος και X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ το οποίο είναι k-μικρό σχετικά με την $\mathcal{D}$. Κάθε retract του X είναι εξίσου k-μικρό σχετικά με την $\mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια, $\mathcal{D}$ μια υποκατηγορία της, k ένας πληθάριθμος και X ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ το οποίο είναι k-μικρό σχετικά με την $\mathcal{D}$. Υποθέτουμε ότι W είναι ένα retract του X. Τότε υπάρχουν μορφισμοί $i\colon W \longrightarrow X$ και $r\colon X \longrightarrow W$ τέτοιοι ώστε $r \circ i = 1_W$. Ας είναι λ ένας κανονικός πληθάριθμος τέτοιος ώστε $\lambda \geqslant k$ και $Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_\beta \longrightarrow \cdots$ με $\beta < \lambda$ είναι μια λ-ακολουθία στην $\mathcal{D}$. Τότε προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y_\beta) \arrow[r, "\varinjlim r^*"] \arrow[d] & \varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y_\beta) \arrow[r, "\varinjlim i^*"] \arrow[d] & \varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y_\beta) \arrow[d] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\varinjlim_{\beta<\lambda} Y_\beta) \arrow[r, "r^*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\varinjlim_{\beta<\lambda} Y_\beta) \arrow[r, "i^*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\varinjlim_{\beta<\lambda} Y_\beta)
\end{tikzcd}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα $r \circ i = 1_W$ έπεται ότι $i^* \circ r^* = 1_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\varinjlim Y_\beta)}$ και $\varinjlim i^* \circ \varinjlim r^* = 1_{\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y_\beta)}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός $\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y_\beta) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\varinjlim_{\beta<\lambda} Y_\beta)$ είναι retract του μορφισμού $\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y_\beta) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\varinjlim_{\beta<\lambda} Y_\beta)$. Εφόσον το αντικείμενο X είναι k-μικρό σχετικά με την $\mathcal{D}$ έπεται ότι ο μορφισμός $\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y_\beta) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\varinjlim_{\beta<\lambda})$ είναι ένας ισομορφισμός. Έτσι, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 ο μορφισμός $\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y_\beta) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\varinjlim_{\beta<\lambda} Y_\beta)$ είναι εξίσου ένας ισομορφισμός ως retract του ισομορφισμού $\varinjlim_{\beta<\lambda} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y_\beta) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\varinjlim_{\beta<\lambda})$. ■

Α΄.0.2 Σχετικά I-κυτταρικά Συμπλέγματα και ο Ισχυρισμός του Μικρού Αντικειμένου

Στην προηγούμενη υποενότητα αναφερθήκαμε στα μικρά αντικείμενα. Το πλεονέκτημα του να είναι ένα αντικείμενο μικρό είναι ότι μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε συναρτητικές παραγοντοποιήσεις. Στην παρούσα υποενότητα αναφερόμαστε στον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου. Ο ισχυρισμός του μικρού αντικειμένου χρησιμοποιείται κατά κόρον στην θεωρία των κατηγοριών μοντέλα και πιο συγκεκριμένα στις συνινωδώς παραγόμενες κατηγορίες μοντέλο προκειμένου να αποδείξουμε ότι ένας μορφισμός μπορεί να παραγοντοποιηθεί έτσι ώστε να πληροίται το Αξίωμα (MC5) και επιπλέον ότι οι εν λόγω παραγοντοποιήσεις είναι συναρτητικές.

Ορισμός Α΄.0.72. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και I μια κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ένας μορφισμός καλείται I-**ενέσιμος (I-injective)** εάν έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς οποιοδήποτε μορφισμό στην I. Η κλάση όλων των I-ενέσιμων μορφισμών συμβολίζεται με I-**inj**.*
2. *Ένας μορφισμός καλείται I-**προβολικός (I-projective)** εάν έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς οποιοδήποτε μορφισμό στην I. Η κλάση όλων των I-προβολικών μορφισμών συμβολίζεται με I-**proj**.*

3. *Ένας μορφισμός καλείται I-**συννημάτωση (I-cofibration)** εάν έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε I-ενέσιμο μορφισμό. Η κλάση όλων των I-συννηματώσεων συμβολίζεται με I-**cof**.*

4. *Ένας μορφισμός καλείται I-**νημάτωση (I-fibration)** εάν έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε I-προβολικό μορφισμό. Η κλάση όλων των I-νηματώσεων συμβολίζεται με I-**fib**.*

Σχόλιο Α΄.0.73.

1. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον Ορισμό Α΄.0.72 η κλάση των I-συννηματώσεων την οποία συμβολίσαμε με I-cof είναι η κλάση (I-inj)-proj και αντίστοιχα η κλάση των I-νηματώσεων την οποία συμβολίσαμε με I-fib είναι η κλάση (I-proj)-inj.

2. Εάν $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία μοντέλο και I είναι η κλάση των συννηματώσεων τότε I-inj είναι η κλάση των τετριμμένων νηματώσεων και I-cof$= I$. Δυϊκά, εάν I είναι η κλάση των νηματώσεων τότε I-proj είναι η κλάση των τετριμμένων συννηματώσεων και I-fib$= I$.

Πρόταση Α΄.0.74. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και I, J κλάσεις μορφισμών της $\mathcal{C}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $I \subseteq I - cof$.
2. $I \subseteq I - fib$.
3. $(I - cof) - inj = I - inj$.
4. $(I - fib) - proj = I - proj$.
5. *Εάν* $I \subseteq J$ *τότε* $J - inj \subseteq I - inj$ *και* $J - proj \subseteq I - proj$.
6. *Εάν* $I \subseteq J$ *τότε* $I - cof \subseteq J - cof$ *και* $I - fib \subseteq J - fib$.
7. *Εάν* $I - inj \subseteq J - inj$ *τότε* $J - cof \subseteq I - cof$.
8. *Εάν* $I - inj = J - inj$ *τότε* $I - cof = J - cof$.

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και I, J κλάσεις μορφισμών της $\mathcal{C}$.

1. Ας είναι $f \in I$. Τότε ο f είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Έτσι, $f \in I - \mathrm{cof}$ καθώς οι μορφισμοί στην κλάση $I - \mathrm{cof}$ είναι οι μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}$ οι οποίοι έχουν επιπλέον την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην $I - \mathrm{inj}$.

2. Ας είναι $f \in I$. Τότε ο f είναι ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$. Έτσι, $f \in I - \mathrm{fib}$ καθώς οι μορφισμοί στην κλάση $I - \mathrm{fib}$ είναι οι μορφισμοί στην κατηγορία $\mathcal{C}$ οι οποίοι έχουν επιπλέον την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην $I - \mathrm{proj}$.

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$(I - \mathrm{cof}) - \mathrm{inj} \subseteq I - \mathrm{inj} \tag{Α΄.1}$$
και
$$I - \mathrm{inj} \subseteq (I - \mathrm{cof}) - \mathrm{inj}. \tag{Α΄.2}$$
Όσον αφορά τη σχέση υποσυνόλου (Α΄.1) ας είναι $f \in (I - \mathrm{cof}) - \mathrm{inj}$. Τότε ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην $I - \mathrm{cof}$. Υποθέτουμε ότι k είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην I. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της παρούσας Πρότασης ο μορφισμός k ανήκει εξίσου στην κλάση $I - \mathrm{cof}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $k \in I$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό στο I. Ως εκ τούτου $f \in I - \mathrm{inj}$. Έτσι, $(I - \mathrm{cof}) - \mathrm{inj} \subseteq I - \mathrm{inj}$. Αντίστοιχα, όσον αφορά την σχέση υποσυνόλου (Α΄.2) ας είναι $f \in I - \mathrm{inj}$. Τότε, ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην

I. Υποθέτουμε ότι k είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $I - \mathrm{cof}$. Τότε ο μορφισμός k είναι ανήκει στην κλάση I. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $k \in I - \mathrm{cof}$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό στην κλάση $I - \mathrm{cof}$. Συνεπώς, $f \in (I - \mathrm{cof}) - \mathrm{inj}$. Έτσι, $I - \mathrm{inj} \subseteq (I - \mathrm{cof}) - \mathrm{inj}$. Επομένως, $(I - \mathrm{cof}) - \mathrm{inj} = I - \mathrm{inj}$.

4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$(I - \mathrm{fib}) - \mathrm{proj} \subseteq I - \mathrm{proj} \tag{Α΄.3}$$
και
$$I - \mathrm{proj} \subseteq (I - \mathrm{fib}) - \mathrm{proj}. \tag{Α΄.4}$$
Όσον αφορά την σχέση υποσυνόλου (Α΄.3) ας είναι $f \in (I - \mathrm{fib}) - \mathrm{proj}$. Τότε ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην $I - \mathrm{fib}$. Υποθέτουμε ότι k είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην I. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το δεύτερο σκέλος της παρούσας Πρότασης ο μορφισμός k ανήκει εξίσου στην $I - \mathrm{fib}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $k \in I$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό που ανήκει στο I. Ως εκ τούτου $f \in I - \mathrm{proj}$. Έτσι, $(I - \mathrm{fib}) - \mathrm{proj} \subseteq I - \mathrm{proj}$. Αντίστοιχα, όσον αφορά την σχέση υποσυνόλου (Α΄.4) ας είναι $f \in I - \mathrm{proj}$. Τότε, ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην I. Υποθέτουμε ότι j είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $I - \mathrm{fib}$. Τότε ο μορφισμός j ανήκει στην κλάση I. Έτσι, ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $j \in I - \mathrm{fib}$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό στην κλάση $I - \mathrm{fib}$. Ως εκ τούτου $f \in (I - \mathrm{fib}) - \mathrm{proj}$. Έτσι, $I - \mathrm{proj} \subseteq (I - \mathrm{fib}) - \mathrm{proj}$. Συνεπώς, $(I - \mathrm{fib}) - \mathrm{proj} = I - \mathrm{proj}$.

5. Υποθέτουμε ότι $I \subseteq J$. Ας είναι f ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $J - \mathrm{inj}$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην J. Υποθέτουμε ότι i είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην I. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η I είναι υποσύνολο της J, συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός i ανήκει εξίσου στην J. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $i \in I$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό που ανήκει στην I. Συνεπώς $f \in I - \mathrm{inj}$. Έτσι, $J - \mathrm{inj} \subseteq I - \mathrm{inj}$.
Αντίστοιχα, ας είναι f ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $J - \mathrm{proj}$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στο J. Υποθέτουμε ότι i είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στο I. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η I είναι υποσύνολο της J, συμπεραίνουμε ότι ο μορφισμός i ανήκει εξίσου στην J. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $i \in I$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό που ανήκει στην I. Συνεπώς $f \in I - \mathrm{proj}$. Έτσι, $J - \mathrm{proj} \subseteq I - \mathrm{proj}$.

6. Υποθέτουμε ότι $I \subseteq J$. Ας είναι f ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $I - \mathrm{cof}$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην κλάση $I - \mathrm{inj}$. Υποθέτουμε ότι h είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $J - \mathrm{inj}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πέμπτο σκέλος της παρούσας πρότασης ο μορφισμός h ανήκει εξίσου στην $I - \mathrm{inj}$. Έτσι, ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $h \in J - \mathrm{inj}$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό που ανήκει στην $J - \mathrm{inj}$. Συνεπώς, $f \in J - \mathrm{cof}$. Έτσι, $I - \mathrm{cof} \subseteq J - \mathrm{cof}$.
Αντίστοιχα ας είναι f ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $I - \mathrm{fib}$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό στην κλάση $I - \mathrm{proj}$. Υποθέτουμε ότι k είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $J - \mathrm{proj}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πέμπτο σκέλος της παρούσας Πρότασης ο μορφισμός k ανήκει εξίσου στην $I - \mathrm{proj}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $k \in J - \mathrm{proj}$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό που ανήκει στην $J - \mathrm{proj}$. Συνεπώς $f \in J - \mathrm{fib}$. Έτσι, $I - \mathrm{fib} \subseteq J - \mathrm{fib}$.

7. Υποθέτουμε ότι $I - \text{inj} \subseteq J - \text{inj}$. Ας είναι f ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $J - \text{cof}$. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς οποιοδήποτε μορφισμό στην $J - \text{inj}$. Υποθέτουμε ότι i είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην $I - \text{inj}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $I - \text{inj} \subseteq J - \text{inj}$ έπεται ότι ο μορφισμός i ανήκει στην κλάση $J - \text{inj}$. Έτσι, ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $i \in I - \text{inj}$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό που ανήκει στην $I - \text{inj}$. Ως εκ τούτου $f \in I - \text{cof}$. Συνεπώς, $J - \text{cof} \subseteq I - \text{cof}$.

8. Υποθέτουμε ότι $I - \text{inj} = J - \text{inj}$. Τότε $I - \text{inj} \subseteq J - \text{inj}$ και $J - \text{inj} \subseteq I - \text{inj}$. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$J - \text{cof} \subseteq I - \text{cof} \tag{Α'.5}$$
και
$$I - \text{cof} \subseteq J - \text{cof}. \tag{Α'.6}$$
Όσον αφορά την σχέση υποσυνόλου (Α'.5) λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $I - \text{inj} \subseteq J - \text{inj}$ από το έβδομο σκέλος της παρούσας Πρότασης έπεται ότι $J - \text{cof} \subseteq I - \text{cof}$. Όσον αφορά την σχέση υποσυνόλου (Α'.6), ας είναι f ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $I - \text{cof}$. Τότε ο μορφισμός f έχει εξ' ορισμού την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως πρός κάθε μορφισμό στην $I - \text{inj}$. Υποθέτουμε ότι j είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $J - \text{inj}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $J - \text{inj} \subseteq I - \text{inj}$ έπεται ότι ο μορφισμός j ανήκει εξίσου στην κλάση $I - \text{inj}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός f έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό $j \in J - \text{inj}$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό στην κλάση $J - \text{inj}$. Έτσι, ο μορφισμός f ανήκει στην κλάση $J - \text{cof}$. Συνεπώς, $I - \text{cof} \subseteq J - \text{cof}$. Συνοψίζοντας από τις σχέσεις (Α'.5) και (Α'.6) προκύπτει ότι $I - \text{cof} = J - \text{cof}$. ■

Πρόταση Α'.0.75. *Ας είναι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ κατηγορίες, $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών, I μια μορφισμών στην $\mathcal{C}$ και J μια κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}'$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *$G(FI - \text{inj}) \subseteq I - \text{inj}$.*
2. *$F(I - \text{cof}) \subseteq FI - \text{cof}$.*
3. *$F(GJ - \text{proj}) \subseteq J - \text{proj}$.*
4. *$G(J - \text{fib}) \subseteq GJ - \text{fib}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}'\colon G$ ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών, I μια κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}$ και J μια κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}'$.

1. Υποθέτουμε ότι g είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $FI - \text{inj}$ και f είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση I. Τότε εξ' ορισμού ο μορφισμός g έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό Ff της FI. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών από την Πρόταση 3.1.13 έπεται ότι ο μορφισμός Gg έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης ως προς τον μορφισμό f στο I. Ως εκ τούτου ο μορφισμός Gg ανήκει στην κλάση $I - \text{inj}$. Συνεπώς, $G(FI - \text{inj}) \subseteq I - \text{inj}$.

2. Υποθέτουμε ότι f είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $I - \text{cof}$ και g είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση $FI - \text{inj}$. Τότε $Gg \in G(FI - \text{inj})$. Όμως σύμφωνα με το πρώτο σκέλος της παρούσας πρότασης $G(FI - \text{inj}) \subseteq I - \text{inj}$. Ως εκ τούτου $Gg \in I - \text{inj}$. Εφόσον $f \in I - \text{cof}$ εξ' ορισμού έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό Gg. Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}'\colon G$ είναι ένα ζεύγος συζυγών συναρτητών απο την Πρόταση 3.1.13 έπεται ότι ο μορφισμός Ff έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς τον μορφισμό g ο οποίος ανήκει στην κλάση $FI - \text{inj}$ και κατ' επέκταση ως προς κάθε μορφισμό ο οποίος ανήκει στην κλάση $FI - \text{inj}$. Ως εκ τούτου ο μορφισμός Ff ανήκει στην κλάση $FI - \text{cof}$. Συνεπώς, $F(I - \text{cof}) \subseteq FI - \text{cof}$.

3. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του πρώτου σκέλους.

4. Η απόδειξη είναι δυϊκή της απόδειξης του δεύτερου σκέλους. ■

Ευθύς αμέσως ορίζουμε τα I-συνινώδη και τα I-ινώδη αντικείμενα μιας τυχαίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ των οποίων ο ορισμός παραπέμπει στον ορισμό των συνινωδών και ινωδών αντικειμένων μιας κατηγορίας μοντέλο.

Ορισμός Α΄.0.76. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και I μια κλάση μορφισμών στην $\mathcal{C}$.*

1. *Ένα αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται I-**συνινώδες (I-cofibrant)** εάν ο μοναδικός μορφισμός $\varnothing \longrightarrow X$ είναι μια I-συννημάτωση.*

2. *Ένα αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται I-**ινώδες (I-fibrant)** εάν ο μοναδικός μορφισμός $X \longrightarrow *$ είναι μια I-νημάτωση.*

Ορισμός Α΄.0.77. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια και I ένα σύνολο μορφισμών της.*

1. *Ένας μορφισμός ο οποίος μπορεί να κατασκευαστεί ως μια υπερπεπερασμένη σύνθεση η οποία αποτελείται από pushouts στοιχείων του I καλείται **σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα (relative I-cell complex)**. Δηλαδή, εάν $f\colon A \longrightarrow B$ είναι ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα τότε υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός λ και μια λ-ακολουθία $X\colon \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$ τέτοια ώστε ο f είναι η σύνθεση της X και για κάθε β τέτοιο ώστε $\beta+1<\lambda$, υπάρχει ένα pushout διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} C_\beta \arrow[r] \arrow[d, "g_\beta"'] & X_\beta \arrow[d] \\ D_\beta \arrow[r] & X_{\beta+1} \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε $g_\beta \in I$. Η κλάση των σχετικών I-κυτταρικών συμπλεγμάτων συμβολίζεται με I-cell.

2. *Ένα αντικείμενο A της κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται I-**κυτταρικό σύμπλεγμα (I-cell complex)** εάν ο μορφισμός $\varnothing \longrightarrow A$ είναι ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα.*

3. *Ένας μορφισμός $i\colon A \longrightarrow B$ καλείται **έγκλειση των I-κυτταρικών συμπλεγμάτων (inclusion of I-cell complexes)** εάν είναι ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα του οποίου το αντικείμενο A είναι ένα I-κυτταρικό σύμπλεγμα.*

Ορισμένα παραδείγματα σχετικών I-κυτταρικών συμπλεγμάτων είναι τα ακόλουθα.

Παράδειγμα Α΄.0.78. 1. Οι ταυτοτικοί μορφισμοί είναι σχετικά I-κυτταρικά συμπλέγματα. Πράγματι, ας είναι A ένα αντικείμενο μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ο ταυτοτικός μορφισμός στο A, $1_{\mathrm{A}}\colon \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ μπορεί να κατασκευαστεί ως υπερπεπερασμένη σύνθεση της 1-ακολουθίας A η οποία είναι τετριμμένη.

2. Κάθε ισομορφισμός είναι ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα. Πράγματι, ας είναι $f\colon A \longrightarrow B$ ένας ισομορφισμός σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$. Ο μορφισμός f μπορεί να κατασκευαστεί ως υπερπεπερασμένη σύνθεση της 1-ακολουθίας A.

3. Δοθέντος ενός διατακτικού λ, η υπερπεπερασμένη σύνθεση μιας λ-ακολουθίας $X\colon \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$ τέτοιας ώστε κάθε μορφισμός $X_\beta \longrightarrow X_{\beta+1}$ να είναι είτε ένα pushout ενός μορφισμού στο I ή ένας ισομορφισμός, είναι ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα.

Σχόλιο Α΄.0.79. Δοθείσης μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ με όλα τα μικρά συνόρια και ενός συνόλου μορφισμών της I, η κλάση I-cell είναι κλειστή ως προς τις υπερπεπερασμένες συνθέσεις.

Πρόταση Α΄.0.80. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και I ένα σύνολο μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Τότε κάθε σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα είναι μια I-συνυνημάτωση.*

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και I ένα σύνολο μορφισμών στην $\mathcal{C}$. Θα αποδείξουμε $I-\text{cell} \subseteq I-\text{cof}$. Για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι η κλάση I-cof είναι κλειστή ως προς τις υπερπεπερασμένες συνθέσεις και τα pushouts. Η κλάση I-cof είναι εξ' ορισμού η κλάση των μορφισμών με την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό ο οποίος ανήκει στην κλάση I-inj. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση Α΄.0.65 καθώς και την Πρόταση 3.1.16 η κλάση I-cof είναι κλειστή ως προς τις υπερπεπερασμένες συνθέσεις και τα pushouts. Επομένως, κάθε σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα είναι μια I-συνυνημάτωση. ∎

Άμεση συνέπεια της Πρότασης Α΄.0.80 είναι η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση Α΄.0.81. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και I ένα σύνολο μορφισμών στην $\mathcal{C}$.*

1. *Κάθε retract ενός σχετικού I-κυτταρικού συμπλέγματος είναι μια I-συνυνημάτωση.*
2. *Κάθε pushout ενός σχετικού I-κυτταρικού συμπλέγματος είναι μια I-συνυνημάτωση.*

Απόδειξη.

1. Ας είναι $f\colon A \longrightarrow B$ ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα και $g\colon X \longrightarrow Y$ ένα retract του. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.0.80 ο μορφισμός f είναι μια I-συνυνημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός f ανήκει στην κλάση I-cof. Η κλάση I-cof είναι εξ' ορισμού η κλάση των μορφισμών με την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό ο οποίος ανήκει στην κλάση I-inj. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της Προτάσης 3.1.15 η κλάση I-cof είναι κλειστή ως προς τα retracts. Έτσι, ο μορφισμός g είναι μια I-συνυνημάτωση.

2. Ας είναι $f\colon A \longrightarrow B$ ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα και $g\colon X \longrightarrow Y$ ένα pushout του μορφισμού $f\colon A \longrightarrow B$ κατά μήκος ενός μορφισμού $s\colon A \longrightarrow X$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.0.80 ο μορφισμός f είναι μια I-συνυνημάτωση. Έτσι, ο μορφισμός f ανήκει στην κλάση I-cof. Η κλάση I-cof είναι εξ' ορισμού η κλάση των μορφισμών με την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό ο οποίος ανήκει στην κλάση I-inj. Ως εκ τούτου λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.16 η κλάση I-cof είναι κλειστή ως προς τα pushouts. Έτσι, ο μορφισμός g είναι μια I-συνυνημάτωση. ∎

Ορισμός Α΄.0.82. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια, I ένα σύνολο μορφισμών της και k είναι ένας πληθάριθμος. Η υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων είναι η υποκατηγορία των μορφισμών οι οποίοι μπορούν να κατασκευαστούν ως υπερπεπερασμένη σύνθεση pushouts στοιχείων του I.*

Εφόσον έχουμε ολοκληρώσει την θεωρία των υπερπεπερασμένων συνθέσεων καθώς και των σχετικών I-κυτταρικών συμπλεγμάτων είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην διατύπωση του ισχυρισμού του μικρού αντικειμένου. Ο ισχυρισμός του μικρού αντικειμένου που θα παραθέσουμε διατυπώθηκε από τον D.Quillen και για πρώτη φορά εμφανίστηκε στο βιβλίο του «Homotopical Algebra», βλέπε [32].

Λήμμα Α΄.0.83. (The Small Object Argument) *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια και I ένα σύνολο μορφισμών στην $\mathcal{C}$ των οποίων οι πηγές τους είναι μικρά αντικείμενα σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων. Τότε κάθε μορφισμός f στην $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ i$ όπου ο μορφισμός i είναι ένα σχετικό I-κυτταρικό σύμπλεγμα και ο μορφισμός p είναι I-ενέσιμος.*

Παρατήρηση Α΄.0.84.

1. Ορισμένες φορές στην βιβλιογραφία δοθείσης μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ και ενός συνόλου μορφισμών της I εάν οι πηγές των μορφισμών του συνόλου I είναι μικρά αντικείμενα σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων λέμε ότι το I επιτρέπει τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου. Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Dan Kan.

2. Δοθείσης μιας κατηγορίας η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια, ενός συνόλου μορφισμών της I των οποίων οι πηγές τους είναι μικρά αντικείμενα σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων και ενός μορφισμού $g\colon X \longrightarrow Y$ ο οποίος είναι retract ενός μορφισμού $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου η παραγοντοποίηση του g είναι retract της παραγοντοποίησης του $\widetilde{g}$.

3. Δοθείσης μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια, ενός συνόλου μορφισμών της I των οποίων οι πηγές τους είναι μικρά αντικείμενα σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων και ενός πληθαρίθμου k τέτοιου ώστε η πηγή κάθε μορφισμού στο σύνολο I να είναι k-μικρό αντικείμενο σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων, κάθε μορφισμός στην $\mathcal{C}$ παραγοντοποιείται ως σύνθεση ενός I-ενέσιμου μορφισμού και μιας σύνθεσης μιας k-ακολουθίας των pushouts των συνγινομένων των στοιχείων του I και η εν λόγω παραγοντοποίηση είναι συναρτητική.

Άμεση συνέπεια του ισχυρισμού του μικρού αντικειμένου είναι η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση Α΄.0.85. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια και I ένα σύνολο μορφισμών της των οποίων οι πηγές τους είναι μικρά αντικείμενα σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων. Δοθέντος ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cof υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon X \longrightarrow Z$ ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cell τέτοιος ώστε ο f να είναι retract του g μέσω ενός μορφισμού ο οποίος σταθεροποιεί το X.*

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια και I ένα σύνολο μορφισμών της των οποίων οι πηγές τους είναι μικρά σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων. Υποθέτουμε ότι $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cof. Τότε σύμφωνα με τον ισχυρισμό του μικρού αντικειμένου ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $f = p \circ g$ όπου ο μορφισμός $g\colon X \longrightarrow Z$ ανήκει στην κλάση I-cell και ο μορφισμός $p\colon Z \longrightarrow Y$ ανήκει στην κλάση I-inj. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο μορφισμός $f\colon X \longrightarrow Y$ είναι ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cof εξ' ορισμού έπεται ότι έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης ως προς κάθε μορφισμό ο οποίος ανήκει στην κλάση I-inj και κατ' επέκταση ως προς τον μορφισμό p. Ως εκ τούτου σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος 3.1.14 ο μορφισμός f είναι retract του μορφισμού g. Έτσι, δοθέντος ενός μορφισμού $f\colon X \longrightarrow Y$ ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cof υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon X \longrightarrow Z$ ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cell τέτοιος ώστε ο f να είναι retract του g μέσω ενός μορφισμού ο οποίος σταθεροποιεί το X. ■

Πρόταση Α΄.0.86. *Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια και I ένα σύνολο μορφισμών της των οποίων οι πηγές τους είναι μικρά αντικείμενα σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων. Τότε η κλάση των I-συννηματώσεων ισούται με την κλάση των retracts των σχετικών I-κυτταρικών συμπλεγμάτων.*

Απόδειξη. Ας είναι $\mathcal{C}$ μια κατηγορία η οποία έχει όλα τα μικρά συνόρια, I ένα σύνολο μορφισμών της των οποίων οι πηγές τους είναι μικρά αντικείμενα σχετικά με την υποκατηγορία των σχετικά I-κυτταρικών συμπλεγμάτων, I-cof η κλάση των συννηματώσεων και $\widetilde{I - \mathrm{cell}}$ η κλάση των retracts των σχετικών I-κυτταρικών συμπλεγμάτων. Θα αποδείξουμε ότι $I - \mathrm{cof} = \widetilde{I - \mathrm{cell}}$. Για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$I - \mathrm{cof} \subseteq \widetilde{I - \mathrm{cell}} \tag{Α΄.7}$$

και

$$\widetilde{I-\mathrm{cell}} \subseteq I-\mathrm{cof}. \tag{Α΄.8}$$

Όσον αφορά την σχέση υποσυνόλου (Α΄.7) ας είναι $f\colon X \longrightarrow Y$ ένας μορφισμός ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cof. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση Α΄.0.85 υπάρχει ένας μορφισμός $g\colon X \longrightarrow Z$ ο οποίος ανήκει στην κλάση I-cell τέτοιος ώστε ο f να είναι retract του g. Ως εκ τούτου $f \in \widetilde{I-\mathrm{cell}}$. Έτσι, $I-\mathrm{cof} \subseteq \widetilde{I-\mathrm{cell}}$. Όσον αφορά την σχέση υποσυνόλου (Α΄.8) λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρώτο σκέλος της Πρότασης Α΄.0.81 κάθε retract ενός σχετικού I-κυτταρικού συμπλέγματος είναι μια I-συννημάτωση. Ως εκ τούτου $\widetilde{I-\mathrm{cell}} \subseteq I-\mathrm{cof}$. Συνεπώς, η κλάση των I-συννηματώσεων ισούται με την κλάση των retracts των σχετικών I-κυτταρικών συμπλεγμάτων. ■

Παράρτημα Β΄

Περίληψη - Abstract

Περίληψη. Ο κεντρικός στόχος της παρούσης Διατριβής είναι η παρουσίαση και ανάλυση σε βάθος των κύριων αποτελεσμάτων της Θεωρίας των Κατηγοριών Μοντέλα με την έννοια του Quillen. Η Διατριβή αποτελείται από έξι Κεφάλαια και ένα Παράρτημα. Στα δύο πρώτα Κεφάλαια αναλύουμε τα βασικά στοιχεία από τη Θεωρία Κατηγοριών, τη Θεωρία Προτύπων και τη Θεωρία Τοπικοποίησης Κατηγοριών, τα οποία θα μας χρειασθούν στη συνέχεια. Το τρίτο και το τέταρτο Κεφάλαιο είναι αφιερωμένα στη βασική θεωρία των κατηγοριών μοντέλα, και των ομοτοπικών κατηγοριών τους. Στο πέμπτο Κεφάλαιο αναλύουμε το βασικά στοιχεία από τη θεωρία των παράγωγων συναρτητών και των συναρτητών του Quillen μεταξύ κατηγοριών μοντέλα. Στο τελευταίο Κεφάλαιο της διατριβής παρουσιάζουμε βασικά παραδείγματα κατηγοριών μοντέλα από την Άλγεβρα και την Τοπολογία. Τα στοιχεία από την θεωρία συνόλων τα οποία είναι απαραίτητα στην ανάπτυξη της θεωρίας των κατηγοριών μοντέλα παρατίθενται σε ένα παράρτημα.

Abstract. The principal aim of this thesis is to present an in depth analysis of the main results of the modern theory of Model Categories in the sense of Quillen. The thesis consists of six chapters and an appendix. In the first two chapters we analyse the basic elements of Category Theory, Module Theory and Localizations of Categories that we shall need in the sequel. The next two chapters are devoted to the presentation of the basic theory of model categories and their homotopy categories. In the fifth chapter we analyse the basic elements of the theory of derived functors and Quillen functors between model categories. In the last chapter of the thesis we present basic examples of model categories which arise in Algebra and Topology. The necessary elements of set theory which are needed in the development of the theory of model categories are collected in an appendix.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] **J. Adamek, H. Herrlich and G.E. Strecker**. *Abstract and concrete categories: the joy of cats.* Reprint of the 1990 original [Wiley, New York]. Repr. Theory Appl. Categ. No. **17**, (2006).

[2] **S. Awoday**. *Category Theory. Clarendon Press, Oxford*, (2006).

[3] **M. Barr and C. Wells**. *Toposes, triples and theories.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **278** Springer-Verlag, New York, (1985) xiii+345 pp.

[4] **A. Beligiannis**. Homotopy Theory Of Modules And Gorenstein Rings. Mathematica Scandinavica, No. **89**, (2001), 5–45.

[5] **P. Bland**. *Rings and their Modules. De Gruyter*, (2011).

[6] **F. Borceux**. *Handbook of categorical Algebra 1: Basic category theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. **50**. Cambridge University Press, Cambridge, (1994), xvi+345 pp.

[7] **G. Calugareanu and I. Purdea**. *Examples in Category Theory.* Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, (2011).

[8] **D. Dummit and R. Foote**. *Abstract Algebra.* Third Edition, John Wiley and Sons,Inc, (2004).

[9] **D. Dugger**. *Replacing modle categories with simplicial ones.* Transactions of AMS, Vol. **353** No. 12 (2001), 5003–5027.

[10] **W. G. Dwyer, P.S. Hirschhorn, D.M. Kan and J.H. Smith**. *Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories.* American Mathematical Society, Mathematical Survey, Vol. **113**, (2004).

[11] **W. G. Dwyer and J. Spalinski**. *Homotopy theories and model categories.* Handbook of Algebraic Topology, 73-126, North Holland, Amsterdam, (1995).

[12] **S. Eilenberg and S. MacLane**. *General theory of natural equivalences.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **58**, (1945).

[13] **P. Gabriel and M. Zisman**. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **35** Springer-Verlag New York, Inc., (1967), x+168 pp.

[14] **P. Goerss and F. Jardine**. *Simplicial Homotopy Theory.* Birkhauser Verlag, Basel, (1999), xvi+510 pp.

[15] **G. Hamel**. *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung: f(x+y)=f(x)+f(y).(German).* Mathematische Annalen, Vol. **60**, (1905), no.3, 459–462.

[16] **P. S. Hirschhorn**. *Model Categories and Their Localizations*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **50**, American Mathematical Society, (2002).

[17] **P. S. Hircshhorn**. *The Quillen model category of topological spaces*. arxiv:1508.01942v2, (2015).

[18] **M. Hovey**. *Model Categories*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **63**, American Mathematical Society, Providence, RI, (1999), xii+209 pp.

[19] **M. Hovey**. *Cotorsion pairs and model categories*. Interactions between homotopy theory and algebra: Contemp. Math., Amer. Math. Soc. **436**, (2007), 277-296.

[20] **M. Hovey**. *Quillen model categories*. J. K-Theory 11 (2013), No. **3**, 469–478.

[21] **B. Iversen**. *Cohomology of Sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (1986), xii+464 pp.

[22] **M. Kashiwara and P. Schapira**. *Categories and Sheaves*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Vol. **332**, Springer-Verlag, Berlin, (2006).

[23] **S. MacLane**. *Categories for the working mathematician*. Graduated Texts in Mathematics, vol. **5**, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1971).ix+262 pp.

[24] **J. P. May and K. Ponto**. *More concise algebraic topology. Localization, completion, and model categories.*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, (2012).xxviii+514 pp.

[25] **D. Milicic**. *Lectures on Derived Categories. Lecture notes*, (1996).

[26] **B. Mitchell**. *Theory of Categories. Academic Press, (London)*, (1965).

[27] **J.R. Munkres**. *Topology: a first course. Prentice-Hall* (1975), xvi+413 pp.

[28] **W. K. Nicholson and M. F. Yousif**. Quasi-Frobenius Rings. *Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics*, Vol. **158**, (2003).

[29] **J.V. Oosten**. *Basic category theory*. Bricks Lecture Series, Bricks Department Of Computer Science, Aarhus, (1995).

[30] **Κ. Παπαδοπούλου**. *Προσεγγίσεις Cohen-Macauley και Δακτύλιοι Gorenstein. Μεταπτυχιακή Διατριβή*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, (2014).

[31] **Γ. Προτσώνης**. *Κατηγοριες με Ομοτοπικη Δομη. Μεταπτυχιακή Διατριβή*, Πανεπιστήμιο Πατρών, (2006).

[32] **D. G. Quillen**. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. **43**, Springer Verlag, Berlin-New York,(1967), 385-390.

[33] **J. Rotman**. *Advanced Modern Algebra, Second Edition. Prentice Hall*, (2003).

[34] **H. Simmons**. *An Introduction to Category Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge,(2011).

[35] **B. Stenstrom**. *Rings of Quotients. An introduction to methods of ring theory. Springer-Verlag*, Vol. **217**, (1975).

[36] **T. Streicher**. *Introduction to category theory and categorical logic*. Course notes, (2004).