ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΣΥΧΝΑ ΥΠΕΡΚΥΚΛΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Βασίλης Κόκκοβας
Μεταπτυχιακή Διατριβή

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2017

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
1. Ανδρέας Τόλιας (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής
2. Ιωάννης Πουρναράς	Αναπληρωτής Καθηγητής
3. Παναγιώτης Τσαμάτος	Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Βασίλης Κόκκοβας

Αφιερώνεται στο Βασίλη,
στη Δήμητρα,
στη Ζωή
και στο Θανάση.

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή ορίζουμε την έννοια του υπερκυκλικού τελεστή, παραθέτουμε παραδείγματα υπερκυκλικών τελεστών και παρουσιάζουμε κάποια γενικά θεωρήματα που αναφέρονται στην υπερκυκλικότητα. Επίσης μελετούμε τις έννοιες των ασθενώς αναμειγνυόντων τελεστών και των χαοτικών τελεστών. Τέλος ορίζουμε την έννοια της συχνής υπερκυκλικότητας, έννοια που είναι γνήσια ισχυρότερη (όπως αποδεικνύουμε) από αυτήν της υπερκυκλικότητας και δίνουμε παραδείγματα συχνά υπερκυκλικών τελεστών. Επίσης παρουσιάζουμε κάποια χαρακτηριστικά θεωρήματα για συχνά υπερκυκλικούς τελεστές και χρησιμοποιώντας συνδυαστικά εργαλεία δείχνουμε ότι κάθε συχνά υπερκυκλικός τελεστής είναι ασθενώς αναμειγνύων.

Abstract

In this master thesis we define the notion of hypercyclic operators, we give examples of hypercyclic operators and we present some general theorems concerning the concept of hypercyclicity. We also study the notions of weakly mixing operators and of chaotic operators. Finally we define the notion of frequent hypercyclicity, a notion strictly stronger (as we prove) than hypercyclicity and we give examples of frequent hypercyclic operators. We also present some theorems concerning frequent hypecyclic operators and by using combinatorial tools we show that every frequently hypercyclic operator is weakly mixing.

Ευχαριστίες

Σ’ αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου απέναντι σε όλους τους Καθηγητές του Μεταπτυχιακού για τη σημαντική τους συμβολή στη ανάπτυξη και την ολοκλήρωση της Μαθηματικής μου Παιδείας. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον επιβλέποντα Καθηγητή μου Ανδρέα Τόλια για τον υπέρ του δέοντος χρόνο που αφιέρωσε για την καθοδήγηση μου στη διαμόρφωση και περάτωση αυτής της Διπλωματικής εργασίας. Τέλος ευχαριστώ ιδιαίτερα τους καθηγητές Ιωάννη Πουρναρά και Παναγιώτη Τσαμάτο για την συμμετοχή τους στην Τριμελή Επιτροπή Κρίσης της διατριβής αυτής.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **13**

2 Γραμμικά δυναμικά συστήματα **17**

3 Υπερκυκλικοί Τελεστές **23**
3.1 Εισαγωγή 23
3.2 Πώς αποδεικνύουμε ότι ένας τελεστής είναι υπερκυκλικός 25
3.3 Η υπερκυκλική συγκριτική αρχή 28
3.4 Μερικές ιδιότητες φάσματος 29
3.5 Πώς μοιάζει το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων 31

4 Βασικά θεωρήματα **33**
4.1 Θεώρημα Ansari 33
4.2 Κάπου πυκνές τροχιές 35
4.3 Αναμειγνύοντες και ασθενώς αναμειγνύοντες τελεστές 37
4.4 Χαοτικοί Τελεστές 38

5 Τελεστές μετατόπισης σε χώρους ακολουθιών **41**
5.1 Μετατοπίσεις με βάρη 41
5.2 Τελεστές που μετατίθενται με μεταφορές 54

6 Συχνά υπερκυκλικοί τελεστές **57**
6.1 Ορισμοί και παραδείγματα 57
6.2 Θεωρήματα συχνής υπερκυκλικότητας 63

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η γραμμική δυναμική είναι ένας ραγδαία αναπτυσσόμενος κλάδος της συναρτησιακής ανάλυσης. Όπως υποδηλώνει το όνομα, η γραμμική δυναμική μελετά τη συμπεριφορά επαναλήψεων ενός γραμμικού τελεστή $T : X \to X$, όπου X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Ένα αναπάντεχο χαρακτηριστικό κάποιων γραμμικών δυναμικών συστημάτων είναι η εμφάνιση χάους, χαρακτηριστικό για το οποίο υπήρχε η πεποίθηση ότι αφορούσε αποκλειστικά μη γραμμικά φαινόμενα. Η πρώτη που μελέτησε αφηρημένα γραμμικά δυναμικά συστήματα ήταν η Kitai [24] για να ακολουθήσει πλειάδα μαθηματικών, μεταξύ των οποίων οι Godefroy και Shapiro [19].

Πολλά από τα παραδείγματα που θα μελετήσουμε βρίσκονται έξω από το πλαίσιο των χώρων Banach. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ο τελεστής παραγώγισης στον χώρο $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ των ακεραίων συναρτήσεων. Για να μπορεί η θεωρία να περιλαμβάνει παρόμοια παραδείγματα αυτή αναπτύσσεται σε χώρους Fréchet οι οποίοι αποτελούν γενίκευση των χώρων Banach. Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος (X, τ) λέγεται χώρος F-χώρος αν η τοπολογία του επάγεται από μια μετρική αναλλοίωτη στις μεταθέσεις ως προς την οποία ο X είναι πλήρης. Ένας χώρος Fréchet είναι ένας F-χώρος που είναι τοπικά κυρτός. Αποδεικνύεται [30] ότι ένας χώρος Fréchet είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος, εφοδιασμένος με μια διαχωρίζουσα και αύξουσα ακολουθία ημινορμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ο οποίος είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζεται από τον τύπο $d(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x - y))$, $x, y \in X$. Ο χώρος όλων των ακεραίων συναρτήσεων $\mathrm{H}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ εφοδιασμένος με τις ημινόρμες $p_n(f) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f(z)|$ είναι χώρος Fréchet και μαζί με τον τελεστή της παραγώγισης αποτελεί, όπως προαναφέραμε, ένα βασικό παράδειγμα γραμμικού δυναμικού συστήματος που θα μας απασχολήσει σε αυτήν την διπλωματική. Επίσης ότι ο χώρος όλων των ακολουθιών (πραγματικών ή μιγαδικών), $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ή $\mathbb{C}$ εφοδιασμένος με τις ημινόρμες $p_n(x) = \sup\limits_{1\leq k\leq n} |x_k|$, είναι χώρος Fréchet.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε τη βασική έννοια της γραμμικής δυναμικής που είναι αυτήν της υπερκυκλικότητας ενός τελεστή. Ένα τελεστής T σε έναν τοπολογικό διανυσματικό χώρο X καλείται υπερκυκλικός αν η τροχιά ενός στοιχείου $x \in X$, δηλαδή το σύνολο $\mathrm{Orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ είναι πυκνό στον X. Παρουσιάζουμε την απόδειξη ότι δεν υπάρχουν υπερκυκλικοί τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Έτσι, η υπερκυκλικότητα είναι μια ιδιότητα που λαμβάνει χώρα αποκλειστικά σε χώρους άπειρης διάστασης. Έχει αποδειχθεί από τους Bonet και Peris [13] ότι για κάθε απειροδιάστατο διαχωρίσιμο χώρο Fréchet X υπάρχει υπερκυκλικός τελεστής $T : X \to X$. Το αποτέλεσμα αυτό σε χώρους Banach είχε αποδειχτεί νωρίτερα από τους Ansari [2] και Bernal-Gonzàlez [8]. Ύστερα αποδεικνύουμε το θεώρημα μεταβατικότητας του Birkhoff [11], που μας λέει ότι αν T είναι τελεστής σε ένα διαχωρίσιμο F-χώρο X, τότε ο T είναι υπερκυκλικός αν και μόνο αν είναι τοπολογικά μεταβατικός. Τοπολογικά μεταβατικός ονομάζεται ένας τελεστής αν για κάθε ζεύγος μη κενών ανοιχτών υποσυνόλων U, V του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος αποδεικνύουμε ότι οι τελεστές μετατόπισης του Birkhoff [12] είναι υπερκυκλικοί. Αν $a \in \mathbb{C}$ με $a \neq 0$, τότε ο τελεστής $T_a : \mathrm{H}(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}(\mathbb{C})$ που ορίζεται ώς $T_a(f)(z) = f(z + a)$ ονομάζεται τελεστής μετατόπισης. Επίσης με τη βοήθεια του θεωρήματος Birkhoff αποδεικνύουμε το κριτήριο υπερκυκλικότητας που δίνει ικανές συνθήκες ώστε ένας τελεστής να είναι υπερκυκλικός. Ένας τελεστής T λέμε ότι ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας αν υπάρχει κάποια αύξουσα ακολουθία ακεραίων (n_k), δύο πυκνά υποσύνολα $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ του X, και μια ακολουθία απεικονίσεων $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$ τέτοια ώστε να ισχύει: (1) $T^{n_k}(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathcal{D}_1$, (2) $S_{n_k}(y) \to 0$ για κάθε $y \in \mathcal{D}_2$ και (3) $T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y$ για κάθε $y \in \mathcal{D}_2$. Αποδεικνύεται ότι ένας τελεστής που ικανοποιεί το παραπάνω κριτήριο είναι υπερκυκλικός. Με το κριτήριο υπερκλυκλικότητας αποδεικνύουμε ότι ο τελεστής παραγώγισης του Maclane [26] και ο τελεστής του Rolewitz [29] είναι υπερκυκλικοί. Ο τελεστής παραγώγισης ορίζεται ώς $D : \mathrm{H}(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}(\mathbb{C})$, με τύπο $D(f) = f'$. Ο τελεστής της προς τα πίσω μετατόπισης ορίζεται ως $B : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ με τύπο $B(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$. Τότε, όπως ο Rolewitz απέδειξε, ο τελεστής λB είναι υπερκυκλικός για $|\lambda| > 1$. Εν συνεχεία παρουσιάζουμε το κριτήριο Godefroy-Shapiro [19] που μας επιτρέπει επίσης να αποδεικνύουμε την υπερκυκλικότητα κάποιων τελεστών εξετάζοντας τα ιδιοδιανύσματά τους. Παραθέτουμε και αποδεικνύουμε μερικές ιδιότητες φάσματος των υπερκυκλικών τελεστών και έπειτα αποδεικνύουμε το θεώρημα Ansari καθώς και το θεώρημα Bourdon-Feldman. Το θεώρημα Ansari [1] μας λέει ότι για ένα υπερκυκλικό τελεστή T σε ένα χώρο Fréchet, κάθε δύναμη του τελεστή T^p, όπου $p \in \mathbb{N}$, είναι υπερκυκλικός τελεστής και έχει τα ίδια ακριβώς υπερκυκλικά διανύσματα με τον τελεστή T. Το θεώρημα Bourdon-Feldman [14] μας λέει ότι αν έχουμε έναν τελεστή T σε ένα χώρο Fréchet και ένα στοιχείο του χώρου έχει κάπου πυκνή τροχιά, τότε η τροχιά του στοιχείου είναι πυκνή. Ορίζουμε την έννοια του αναμειγνύοντος τελεστή και αποδεικνύουμε ότι αν ένας τελεστής ικανοποιεί το κριτήριο της Kitai, τότε είναι αναμειγνύων. Ένας τελεστής σε ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο είναι αναμειγνύων αν για κάθε ζεύγος από μη κενα ανοιχτά σύνολα U, V του χώρου υπάρχει καποιο $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N$. Ύστερα ορίζουμε την έννοια του ασθενώς αναμειγνύων τελεστή και δείχνουμε ότι αν ένας τελεστής σε ένα διαχωρίσιμο F-χώρο είναι ασθενώς αναμειγνύων τότε ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας [10]. Ένας τελεστής σε ένα διαχωρίσιμο F-χώρο είναι ασθενώς αναμειγνύων αν και μόνο αν ο τελεστής $T \oplus T$ είναι υπερκυκλικός.

Αν (X, T) ένα δυναμικό σύστημα λέμε ότι ένα $x \in X$ είναι περιοδικό αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $T^k(x) = x$. Ο τελεστής λέγεται χαοτικός αν ο T είναι τοπολογικά μεταβατικός και το σύνολο των περιοδικών του σημείων είναι πυκνό στον X. Έπειτα διατυπώνουμε ένα κριτήριο χαοτικότητας, που μας παρέχει ικανές συνθήκες υπό τις οποίες ένας τελεστής είναι χαοτικός.

Προς το τελος του κεφαλαίου μελετάμε την υπερκυκλικότητα σε τελεστές μετατόπισης [20] που δρούν σε ακολουθιακούς χώρους Banach ή Fréchet, δηλαδή σε υποχώρους του χώρου όλων των ακολουθιών από ακολουθίες, $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Κλασσικό παράδειγμα τέτοιων τελεστών είναι οι προς πίσω μετατοτοπίσεις που αναφερθήκαμε και παραπάνω, που ορίζονται σε κάποιον χώρο Fréchet. Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αποδεικνύουμε [19] ότι αν ένας τελεστής T στον χώρο $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ μετατίθεται με κάθε τελεστή μεταφοράς T_a και δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου τελεστή, τότε ο τελεστής T είναι υπερκυκλικός. Οι τελεστές μεταφοράς $T_a : \mathrm{H}(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}(\mathbb{C})$ ορίζονται ως $T_a(f(z)) = f(z + a)$.

Στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύουμε την έννοια της συχνής υπερκυκλικότητας ενός τελεστή [6]. Ξέρουμε ότι αν ένας τελεστής είναι υπερκυκλικός τότε η τροχιά ενός υπερκυκλικού διανύσματος επισκέπτεται κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο. Η έννοια της συχνής υπερκυκλικότητας συλλαμβάνει την ιδέα πόσο συχνά η τροχιά ενός υπερκυκλικού διανύσματος επισκέπτεται αυτά τα μη κενά ανοιχτά σύνολα. Αν έχουμε ένα $A \subseteq \mathbb{N}$, τότε η κάτω πυκνότητα του συνόλου A ορίζεται να είναι το όριο

$$\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{card}(A \cap [1, N])}{N}.$$

Ένας τελεστής σε ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται συχνά υπερκυκλικός αν υπάρχει κάποιο $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, V) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in V\} \tag{1.1}$$

έχει θετική κάτω πυκνότητα για κάθε ανοιχτό μή κενό σύνολο V. Αποδεικνύεται στη συνέχεια ότι υπάρχουν υπερκυκλικοί τελεστές που δεν είναι συχνά υπερκυκλικοί και αργότερα ότι υπάρχουν συχνά υπερκυκλικοί τελεστές. Μετά αποδεικνύουμε ότι αν T είναι ένας τελεστής σε ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{C}$, τότε και ο τελεστής λT, όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$, είναι συχνά υπερκυκλικός και μάλιστα έχει το ίδιο σύνολο συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων με τον T. Ακόμη αποδεικνύουμε ότι αν ο τελεστής T είναι συχνά υπερκυκλικός τότε και ο τελεστής T^p, όπου $p \in \mathbb{N}$ είναι συχνά υπερκυκλικός και έχει το ίδιο σύνολο συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων με τον T. Τέλος αποδεικνούμε ότι οι συχνά υπερκυκλικοί τελεστές είναι ασθενώς αναμειγνύοντες [21].

Σε όλη την έκταση αυτής της διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκε ύλη από το βιβλίο των F. Bayart και É. Matheron, Dynamics of Linear Operators [7] και από το βιβλίο των K.-G. Grosse-Erdmann και A. Peris, Linear Chaos [20]. Το γενικό υπόβαθρο της διπλωματικής στις περιοχές της συναρτησιακής ανάλυσης, θεωρίας τελεστών και μιγαδικής ανάλυσης έχει βασιστεί στα [30] [32], [3], [4], [23], [28].

Κεφάλαιο 2

Γραμμικά δυναμικά συστήματα

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει συντελεστεί μια έκρηξη στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων που ανακύπτουν στις διάφορες επιστήμες, από τη φυσική και τη βιολογία μέχρι και τις κοινωνικές επιστήμες, η μελέτη των οποίων επικεντρώνεται στην μακροπρόθεσμη συμπεριφορά ενός φαινομένου. Κατά κύριο λόγο τα δυναμικά συστήματα που ενδιαφέρουν του επιστήμονες στους διάφορους κλάδους είναι μη γραμμικά, δηλαδή περιγράφονται από μη γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων στην περίπτωση των συνεχών δυναμικών συστημάτων ή από συστήματα εξισώσεων διαφορών στην περίπτωση των διακριτών δυναμικών συστημάτων.

Γενικά υπάρχουν διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια στα οποία μελετούνται δυναμικά συστήματα. Ένα δυναμικό σύστημα (διακριτό) ορίζεται ως ένα ζεύγος (X, T) όπου ο X είναι ένας μετρικός χώρος και $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση σε αυτόν το μετρικό χώρο. Η εξέλιξη του δυναμικού συστήματος όταν η αρχική του κατάσταση είναι $x \in X$ περιγράφεται από την τροχιά του x, δηλαδή από το σύνολο $\{x, T(x), T^2(x), \ldots, T^k(x), \ldots\}$. Στην διπλωματική αυτή εργασία πραγματευόμαστε δυναμικά συστήματα στα οποία οι υποκείμενοι χώροι εκτός από τοπολογική δομή, έχουν επίσης και μια γραμμική δομή. Υπάρχουν διάφορα τέτοια παραδείγματα που ορίζονται σε χώρους Banach ή Hilbert.

Πολλά από τα παραδείγματα που θα μελετήσουμε βρίσκονται έξω από το πλαίσιο των χώρων Banach και ορίζονται σε χώρους Fréchet οι οποίοι αποτελούν γενίκευση των χώρων Banach. Στη συνέχεια λοιπόν θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των χώρων Fréchet, καθώς επίσης και μερικά παραδείγματα από γραμμικά δυναμικά συστήματα που ορίζονται σε αυτούς τους χώρους και θα μας απασχολήσουν στη διπλωματική εργασία.

Ορισμός 2.1. *Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος (X, τ) λέγεται F-χώρος αν η τοπολογία του επάγεται από μια μετρική αναλλοίωτη στις μεταθέσεις*[1] *ως προς την οποία ο χώρος X είναι πλήρης.*

Ορισμός 2.2. *Ένας F-χώρος X λέγεται χώρος Fréchet αν είναι τοπικά κυρτός*[2].

Η έννοια της ημινόρμας είναι βασική για το χαρακτηρισμό των τοπικά κυρτών χώρων.

Ορισμός 2.3. *Μια απεικόνιση $p : X \to \mathbb{R}_+$ σε ένα διανυσματικό χώρο X πάνω στο σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ καλείται ημινόρμα αν για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,*

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Παρατηρούμε ότι έννοια της ημινόρμας είναι ασθενέστερη από αυτής της νόρμας καθόσον δεν ισχύει απαραίτητα η συνεπαγωγή:

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

[1] Μια μετρική $d : X \times X \to X$, όπου X διανυσματικός χώρος, λέγεται αναλλοίωτη στις μεταθέσεις αν για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύει ότι $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

[2] Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος X λέγεται τοπικά κυρτός, αν υπάρχει μια βάση περιοχών του μηδενός της οποίας τα μέλη είναι κυρτά σύνολα.

Θεώρημα 2.4. *[32] Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος είναι τοπικά κυρτός αν και μόνο αν η τοπολογία του είναι η ασθενής τοπολογία ως προς μια οικογένεια ημινορμών $\{p_i : i \in I\}$, δηλαδή είναι η ελάχιστη τοπολογία που κάνει τις ημινόρμες συνεχείς απεικονίσεις.*

Όπως είπαμε η έννοια του χώρου Fréchet αποτελεί γενίκευση της έννοιας του χώρου Banach, και αποδεικνύεται [30] ότι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος είναι χώρος Fréchet αν η τοπολογία του επάγεται από μια διαχωρίζουσα[3] ακολουθία ημινορμών $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Η παραπάνω ακολουθία $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να θεωρηθεί αύξουσα αντικαθιστώντας κάθε p_n με $q_n = \max\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Λήμμα 2.5. *Έστω $(p_n)_n$ μια διαχωρίζουσα ακολουθία ημινορμών στον διανυσματικό χώρο X. Τότε η απεικόνιση*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)), \quad x, y \in X. \tag{2.1}$$

είναι μια μετρική στον X, αναλλοίωτη στις μεταθέσεις.

Απόδειξη. Προφανώς $d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = d(y,x)$ για κάθε $x, y \in X$. Αποδεικνύουμε αρχικά την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή ότι αν $x, y, z \in X$, τότε ισχύει $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι αν $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, τότε ισχύει

$$\min\{a, b+c\} \leq \min\{a, b\} + \min\{a, c\}.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n((x-z)+(z-y)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-z)+p_n(z-y)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-z)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(z-y)) \\ &\leq d(x,z) + d(x,y). \end{aligned}$$

Αν $d(x,y) = 0$, τότε $p_n(x-y) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η $(p_n)_n$ είναι διαχωρίζουσα προκύπτει $x - y = 0$, δηλαδή $x = y$.

Τέλος, εφόσον προφανώς $d(x,y) = d(x+z, y+z)$, για κάθε $x, y, z \in X$, η μετρική d είναι αναλλοίωτη στις μεταθέσεις. □

Διατυπώνουμε τώρα ένα θεώρημα που αφορά τους χώρους Fréchet.

Θεώρημα 2.6. *Αν X είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet τότε υπάρχει μια διαχωρίζουσα και αύξουσα ακολουθία ημινορμών $(p_n)_n$, ώστε η μετρική που ορίζει η σχέση (2.1) να είναι πλήρης και να επάγει την τοπολογία του X.*

όπου $(p_n)_n$ είναι μια αύξουσα ακολουθία από νόρμες.

Παραθέτουμε τώρα ένα βασικό λήμμα το οποίο μας είναι αρκετά χρήσιμο για τη συνέχεια.

Λήμμα 2.7. *Έστω X ένας χώρος Fréchet του οποίου η τοπολογία επάγεται από μια διαχωρίζουσα και αύξουσα οικογένεια ημινορμών $(p_n)_n$. Έστω $(x_k)_k$ ακολουθία στον X, $U \subseteq X$ καθώς και ένα $x \in X$. Τότε:*

[3] Μια ακολουθία ημινορμών λέγεται διαχωρίζουσα αν ισχύει η εξής συνθήκη: Αν $p_n(x) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $x = 0$.

(i) *$x_k \to x$ αν και μόνο αν $p_n(x_k - x) \to 0$ καθώς $k \to +\infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Η ακολουθία $(x_k)_k$ είναι Cauchy αν και μόνο αν $p_n(x_k - x_l) \to 0$ καθώς $k, l \to +\infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *Το σύνολο U είναι μια περιοχή του x αν και μόνο αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$ τέτοια ώστε $\{y \in X : p_n(y - x) < \epsilon\} \subseteq U$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την τρίτη ιδιότητα μόνο καθώς οι άλλες δύο αποδεικνύονται στοιχειωδώς.

Έστω U μια περιοχή του x. Τότε υπάρχει G ανοιχτό υποσύνολο του X, τέτοιο ώστε $x \in G \subseteq U$. Αφού το G είναι ανοιχτό υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\{y \in X : d(x, y) < \delta\} \subseteq G$, όπου d η μετρική της σχέσης (2.1). Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$\{y \in X : p_n(x - y) < \frac{\delta}{2}\} \subseteq \{y \in X : d(x, y) < \delta\}.$$

Έστω λοιπόν $y \in X$ με $p_n(y - x) < \frac{\delta}{2}$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\{1, p_k(x - y)\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \min\{1, p_k(x - y)\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\{1, p_k(x - y)\} \\ &\le \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2^k}) p_n(x - y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 1 \\ &< 1 \cdot p_n(x - y) + \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει

$$\{y \in X : p_n(x - y) < \frac{\delta}{2}\} \subseteq \{y \in X : d(x, y) < \delta\} \subseteq G$$

και έτσι αποδεικνύεται η μια κατεύθυνση.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\{y \in X : p_n(x - y) < \epsilon\} \subseteq U.$$

Τότε το σύνολο $p_n^{-1}((-\epsilon, \epsilon))$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και άρα το σύνολο $G = x + p_n^{-1}((-\epsilon, \epsilon))$ είναι ανοιχτό σύνολο που περιέχει το x, ενώ

$$G = \{y \in X : p_n(x - y) < \epsilon\} \subseteq U,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Προφανώς κάθε χώρος Banach είναι χώρος Fréchet. Παραθέτουμε τώρα μερικά παραδείγματα από γραμμικά δυναμικά συστήματα σε χώρους Fréchet που δεν είναι χώροι Banach.

Παράδειγμα 2.8. *Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα γραμμικού δυναμικού συστήματος είναι αυτό του τελεστή της παραγώγισης στον χώρο των ακεραίων συναρτήσεων. Θεωρούμε $D : \mathrm{H}(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}(\mathbb{C})$ με $D(f) = f'$, όπου*

$$\mathrm{H}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f \text{ ολόμορφη}\}. \tag{2.2}$$

Εφοδιάζουμε τον $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ *με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή σύνολα. Στην τοπολογία αυτή η σύγκλιση χαρακτηρίζεται ως εξής: Για* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία στον* $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ *και* $f \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$, $f_k \to f$ *στον χώρο* $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ *αν και μόνο αν για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, $p_n(f_k - f) \to 0$ *καθώς* $k \to +\infty$, *όπου*

$$p_n(f) = \sup_{|z|\leq n} |f(z)|.$$

Η $(p_n)_n$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία από ημινόρμες. Ο χώρος* $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ *εφοδιασμένος με τις ημινόρμες* p_n *που ορίστηκαν παραπάνω είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet.*

Παράδειγμα 2.9. *Πολλοί χώροι ακολουθιών όπως ο χώρος* $\ell^2(\mathbb{N})$ *είναι χώροι Banach, αλλά αν θεωρήσουμε για παράδειγμα τον χώρο ακολουθιών*

$$\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_n : x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$$

όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$, *αυτός βρίσκεται έξω από το πλαίσιο των χώρων Banach. Η φυσική έννοια της σύγκλισης εδώ είναι αυτή της σύγκλισης κατά συντεταγμένες, δηλαδή έχουμε ότι* $x^{(\nu)} \to x$ *στο σύνολο* ω, *αν και μόνο αν,* $x^{(\nu)}(k) \to x(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Η τοπολογία αυτή μπορεί να περιγραφεί από την αύξουσα οικογένεια ημινορμών* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *όπου*

$$p_n(x) = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k|, \quad x = (x_k)_k.$$

Ο χώρος $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *όλων των πραγματικών ή μιγαδικών ακολουθιών είναι χώρος Fréchet. Επίσης αφού οι τελικά μηδενικές ακολουθίες με τιμές στο* $\mathbb{Q}$ *(αν* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*) ή στο* $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ *(αν* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*) που περιγράφονται από τα σύνολα* $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{Q} \times \prod_{k=n+1}^{\infty}\{0\}\right)$ *και* $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}) \times \prod_{k=n+1}^{\infty}\{0\}\right)$ *αντίστοιχα σχηματίζουν ένα πυκνό και αριθμήσιμο σύνολο, ο χώρος* ω *είναι διαχωρίσιμος.*

Βλέποντας τον τρόπο που ορίζεται μια μετρική σε έναν χώρο Banach μέσω κάποιας νόρμας θα ορίσουμε την αντίστοιχη απεικόνιση σε ένα χώρο Fréchet X, θέτοντας:

$$\|x\|_F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x)), \quad x \in X, \tag{2.3}$$

και $d(x,y) = \|x-y\|_F$. Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις ιδιότητες της απεικόνισης $\| \ \|_F$ που μόλις ορίσαμε.

Πρόταση 2.10. *Η απεικόνιση* $\| \ \|_F : X \to \mathbb{R}_+$, *που δίνεται από τη σχέση* (2.3), *για όλα τα* $x, y \in X$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$, *ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $\|x+y\|_F \leq \|x\|_F + \|y\|_F$.

(ii) $\|\lambda x\|_F \leq \|x\|_F$ *αν* $\lambda \leq 1$.

(iii) $\lim_{\lambda\to 0} \|\lambda x\|_F = 0$.

(iv) *Αν* $\|x\|_F = 0$ *τότε* $x = 0$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την τρίτη ιδιότητα, οι άλλες ιδιότητες προκύπτουν άμεσα. Έστω λοιπόν $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Επιλέγω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\epsilon}{2}$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $n_0\delta \cdot p_{n_0}(x) < \frac{\epsilon}{2}$.

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| < \delta$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(\lambda x)) \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \min(1, |\lambda| p_n(x)) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, |\lambda| p_n(x)) \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} 1 \cdot |\lambda| \cdot p_{n_0}(x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 1 \\
&< n_0 \delta \cdot p_{n_0}(x) + \frac{1}{2^{n_0}} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

άρα $\lim\limits_{\lambda \to 0} \|\lambda x\|_F = 0$ □

Ορισμός 2.11. *Μια απεικόνιση $\| \|_F : X \to \mathbb{R}_+$ σε ένα διανυσματικό χώρο X που ικανοποιεί τις συνθήκες $(i) - (iv)$ της πρότασης (2.10) καλείται F-νόρμα.*

Σημειώνουμε ότι η F-νόρμα δεν είναι νόρμα εφόσον δεν ισχύει η ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας. Κάποια από τα θεωρήματα και τις προτάσεις που αφορούν τα γραμμικά δυναμικά συστήματα είναι έγκυρα και σε διαχωρίσιμους F-χώρους που αποτελούν ευρύτερη κλάση των χώρων Fréchet.

Η έννοια της F-νόρμας μας παρέχει το πλεονέκτημα ότι μπορούμε να επιχειρηματολογούμε στις αποδείξεις που αφορούν τους F-χώρους σαν να εργαζόμαστε σε έναν χώρο Banach. Απλώς πρέπει να θυμόμαστε ότι δεν ισχύει η σχέση της θετικής ομοιογένειας που ισχύει στις νόρμες.

Περνούμε στον ορισμό της έννοιας του τελεστή σε χώρους Fréchet.

Ορισμός 2.12. *Έστω X και Y χώροι Fréchet. Τότε μια συνεχής και γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ καλείται τελεστής. Ο χώρος όλων των συνεχών και γραμμικών απεικονίσεων $T : X \to Y$ συμβολίζεται με $\mathfrak{L}(X, Y)$. Αν $X = Y$ και $T : X \to X$ λέμε ότι η απεικόνιση T είναι ένας τελεστής στον X, και συμβολίζουμε με $\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}(X, X)$.*

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση ενός θεμελιώδους θεωρήματος της συναρτησιακής ανάλυσης που αφορά χώρους Banach.

Θεώρημα 2.13. *Έστω X και Y χώροι Fréchet των οποίων οι τοπολογίες ορίζονται από τις οικογένειες ημινορμών $(p_n)_n$ και $(q_n)_n$ αντίστοιχα. Τότε η γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ είναι ένας τελεστής αν και μόνο αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ και ένα $M > 0$ τέτοια ώστε:*

$$q_m(Tx) \leq M p_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ και ένα $M > 0$ τέτοια ώστε:

$$q_m(Tx) \leq M p_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Θα δείξουμε ότι αν $x_k \to x$, (όπου $(x_k)_k$ ακολουθία στον X και $x \in X$), τότε $Tx_k \to Tx$ στον χώρο Y. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε, σύμφωνα με το (i) του λήμματος (2.7), ότι για καθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $q_m(Tx_k - Tx) \to 0$. Έστω λοιπόν $m \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$ τέτοιο ώστε $q_m(Ty) \leq M p_n(y)$ για κάθε $y \in Y$. Άρα

$$q_m(Tx_k - Tx) = q_m(T(x_k - x)) \leq M p_n(x_k - x) \to 0 \tag{2.4}$$

αφού $x_k \to x$. Άρα η απεικόνιση T είναι συνεχής.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο τελεστής T είναι συνεχής και έστω $m \in \mathbb{N}$. Από το λήμμα (2.7), το σύνολο $W = \{y \in Y : q_m(y) < 1\}$ είναι μια περιοχή του μηδενός στον Y. Από τη συνέχεια του τελεστή

T υπάρχει μια περιοχή W' του 0 στον X τέτοια ώστε $T(W') \subseteq W$. Από το λήμμα (2.7) υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$ ώστε $\{x \in X : p_n(x) < \epsilon\} \subseteq W'$. Έτσι αν $x \in X$ με $p_n(x) < \epsilon$, τότε συνεπάγεται ότι $q_m(Tx) < 1$. Έστω τώρα $x \in X$. Τότε, για κάθε $\delta > 0$, έχουμε ότι

$$p_n\left(\frac{\epsilon}{p_n(x)+\delta}x\right) = \frac{\epsilon}{p_n(x)+\delta}p_n(x) < \epsilon \tag{2.5}$$

και άρα

$$\begin{aligned} q_m\left(T\left(\frac{\epsilon}{p_n(x)+\delta}x\right)\right) &< 1 \Rightarrow \\ q_m\left(\frac{\epsilon}{p_n(x)+\delta}T(x)\right) &< 1 \Rightarrow \\ q_m(T(x)) < \frac{p_n(x)+\delta}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Αφού όμως το $\delta > 0$ είναι τυχαίο, συνάγουμε ότι $q_m(Tx) \leq \frac{1}{\epsilon}p_n(x)$. Συνεπώς ισχύει το αποτέλεσμα θέτοντας $M = \frac{1}{\epsilon}$. $\square$

Ορισμός 2.14. *Ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα είναι ένα ζεύγος (X, T) που αποτελείται από ένα διαχωρίσιμο χώρο Fréchet και ένα τελεστή $T : X \to X$.*

Από δύο δυναμικά συστήματα $S : X \to X$ και $T : Y \to Y$ μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο δυναμικό σύστημα $S \times T : X \times Y \to X \times Y$. Πιο συγκεκριμένα έστω X και Y διαχωρίσιμοι χώροι Fréchet των οποίων οι τοπολογίες επάγονται από τις αύξουσες ακολουθίες ημινορμών $(p_n)_n$ και $(q_n)_n$ αντίστοιχα. Τότε ο χώρος

$$X \oplus Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

εφοδιάζεται με τις ημινόρμες $(x, y) \to p_n(x)+q_n(y)$, $n \geq 1$, οι οποίες επάγουν την τοπολογία του γινομένου του χώρου $X \oplus Y$. ο Έτσι ο χώρος $X \oplus Y$ είναι επίσης διαχωρίσιμος χώρος Fréchet.

Ορισμός 2.15. *Έστω $S : X \to X$ και $T : Y \to Y$ τελεστές στου χώρους Fréchet X και Y αντίστοιχα. Τότε ο τελεστής $S \oplus T$ ορίζεται ώς*

$$S \oplus T : X \oplus Y \to X \oplus Y, \quad (S \oplus T)(x, y) = (Sx, Ty).$$

Κεφάλαιο 3

Υπερκυκλικοί Τελεστές

3.1 Εισαγωγή

Ορισμός 3.1. *Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Αν $T \in \mathfrak{L}(X)$, τότε η T-τροχιά ενός διανύσματος $x \in X$ είναι το σύνολο*

$$\mathrm{Orb}(x, T) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}.$$

Ορισμός 3.2. *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Λέμε ότι ο τελεστής T είναι υπερκυκλικός αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\mathrm{Orb}(x, T)$ είναι πυκνό στον X. Ένα τέτοιο διάνυσμα x λέγεται υπερκυκλικό για τον T. Το σύνολο όλων των υπερκυκλικών διανυσμάτων του X θα συμβολίζεται με $\mathrm{HC}(T)$.*

Ο T λέγεται supercyclic αν υπάρχει ένα διάνυσμα $x \in X$ του οποίου η προβολική τροχιά

$$\mathbb{K} \cdot \mathrm{Orb}(x, T) = \{\lambda T^n(x) : n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

είναι πυκνή στον X.

Τέλος, ο T λέγεται κυκλικός αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\mathbb{K}[T]x = \mathrm{Span}\,\mathrm{Orb}(x, T) = \{P[T]x : P \text{ πολυωνυμο}\}$$

να είναι πυκνό στον X. Ένα τέτοιο x λέγεται κυκλικό διάνυσμα για τον T.

Αν X διανυσματικός χώρος με νόρμα και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leq 1$, τότε ο T δεν μπορεί να είναι υπερκυκλικός τελεστής διότι κάθε $x \in X$ έχει φραγμένη τροχιά (και άρα το σύνολο $\mathrm{Orb}(x, T)$ δεν μπορεί να είναι πυκνό).

Οι παραπάνω έννοιες έχουν νόημα μόνο αν ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος. Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με υπερκυκλικούς τελεστές. Η υπερκυκλικότητα αποδεικνύεται ότι λαμβάνει χώρα μόνο σε απειροδιάστατους διανυσματικούς χώρους, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. *Δεν υπάρχουν υπερκυκλικοί τελεστές σε πεπερασμένης διάστασης χώρους $X \neq \{0\}$.*

Απόδειξη. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει υπερκυκλικός τελεστής T σε διανυσματικό χώρο X που έχει διάσταση N. Ο χώρος X είναι γραμμικά ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^N$, όποτε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = \mathbb{K}^N$. Έστω $x \in HC(T)$, τότε το σύνολο $\{x, T(x), ..., T^{N-1}(x)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και συνεπώς είναι μία βάση του $\mathbb{K}^N$. Πράγματι έστω ότι το παραπάνω σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq N-1$ έτσι ώστε να ισχύει $T^k(x) \in A = \mathrm{Span}\{x, T(x), ..., T^{k-1}(x)\}$. Τότε

$$T^{k+1}(x) \in \mathrm{Span}\{T(x), ..., T^k(x)\} \subseteq \mathrm{Span}\{x, T(x), ..., T^k(x)\} = \mathrm{Span}\{x, T(x), ..., T^{k-1}(x)\}.$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία βλέπουμε ότι $\mathrm{Orb}(x,T) \subseteq \mathrm{Span}\{x, T(x), ..., T^{k-1}(x)\}$, όμως αφού $k \leq N-1$ ισχύει ότι $\dim A \leq N-1$ και άρα ο A είναι κλειστός υπόχωρος του X με $A \neq X$. Τελικά έχουμε ότι $\overline{\mathrm{Orb}(x,T)} \subseteq \overline{A} = A \neq X$, άτοπο αφού ο T είναι υπερκυκλικός τελεστής.

Έστω τυχαίο $a \in \mathbb{R}_+$. Αφού $ax \in X$ και το σύνολο $\mathrm{Orb}(x,T)$ είναι πυκνό στον X υπάρχει ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $T^{n_k}(x) \to ax$. Από τη συνέχεια του τελεστή T έχουμε ότι $T^{n_k}(T^i x) = T^i(T^{n_k}x) \to aT^i(x)$ για κάθε $i < N$. Άρα για κάθε $z \in \mathbb{K}^N$ ισχύει $T^{n_k}z \to az$. Πράγματι αν $z \in \mathbb{K}^N$ τότε υπάρχουν μοναδικά a_i για $i = 0, ...N-1$, με $z = \sum\limits_{i=0}^{N-1} a_i T^i(x)$ οπότε,

$$T^{n_k}(z) = T^{n_k}(\sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i(x)) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i T^{n_k}(T^i(x)) \to \sum_{i=0}^{N-1} a_i a T^i(x) = a\sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i(x) = az.$$

Τώρα αν $b = |\det(T)|$ θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{b^n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$ πράγμα άτοπο. Έστω $c \in \mathbb{R}_+$. Τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $c = a^N$. Αν $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία για την οποία ισχύει $T^{n_k}(z) \to az$ για κάθε $z \in X$, έστω $[a_{n_k,i,j}]$ ο πίνακας του τελέστη T^{n_k}. Τότε για $y = e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ όπου το 1 βρίσκεται στην m-θέση, έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} a_{n_k,1,1} & a_{n_k,1,2} & \dots & a_{n_k,1,N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n_k,N,1} & a_{n_k,N,2} & \dots & a_{n_k,N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{n_k,1,m} \\ a_{n_k,2,m} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n_k,N,m} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου το a βρίσκεται στην m-θέση. Άρα

$$\begin{aligned} [a_{n_k,i,j}] \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix} = aI_N & \quad \Longrightarrow \\ \det(T^{n_k}) \to a^N & \quad \Rightarrow \\ (\det(T))^{n_k} \to \alpha^N & \quad \Rightarrow \\ b^{n_k} \to \alpha^N & \quad \Rightarrow \\ b^{n_k} \to c. & \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $c \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει υπακολουθία στοιχείων του $\{b^n : n \in \mathbb{N}\}$ που συγκλίνει στο c άρα το σύνολο αυτό είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$, άτοπο. □

Το γενικότερο πλαίσιο στη Γραμμική Δυναμική είναι αυτό ενός διαχωρίσιμου τοπολογικού διανυσματικού χώρου X. Ωστόσο για πολλά θεωρήματα ο χώρος X απαιτείται να είναι ένας F-χώρος, δηλαδή ένας πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος που η τοπολογία του προέρχεται από κάποια μετρική αναλλοίωτη στις μεταθέσεις. Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται ο χώρος X να είναι ένας χώρος Fréchet, δηλαδή ένας τοπικά κυρτός F-χώρος. Ισοδύναμα, ένας χώρος Fréchet είναι ένας πλήρης τοπολογικός διανυσματικός χώρος του οποίου η τοπολογία του παράγεται από μια αριθμήσιμη οικογένεια ημινορμών.

Ένα ελκυστικό χαρακτηριστικό των F-χώρων είναι ότι κάποιος μπορεί να κάνει χρήση του θεωρήματος Baire. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι το θεώρημα Banach-Steinhaus και το θεώρημα ισομορφισμού διατηρούνται στους F-χώρους, και αν υποτεθεί η τοπική κυρτότητα (δηλαδή σε χώρους Fréchet) τότε μπορούμε και να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα Hahn-Banach καθώς και τις συνέπειες του.

3.2 Πώς αποδεικνύουμε ότι ένας τελεστής είναι υπερκυκλικός

Θεώρημα 3.4 (Θεώρημα μεταβατικότητας του Birkhoff). *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) O T είναι υπερκυκλικός

(ii) O T είναι τοπολογικά μεταβατικός, δηλαδή για κάθε ζεύγος μη κενών ανοιχτών υποσυνόλων $(U,V) \subseteq X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Σε αυτή την περίπτωση, το $\mathrm{HC}(T)$ είναι ένα πυκνό G_δ [1] υποσύνολο του X.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι (i) $\Rightarrow$ (ii). Παρατηρούμε ότι αν x είναι ένα υπερκυκλικό διάνυσμα για τον T τότε $\mathrm{Orb}(x,T) \subseteq HC(T)$. Πράγματι, αφού ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, κάθε πυκνό σύνολο $A \subseteq X$ παραμένει πυκνό μετά από την απομάκρυνση πεπερασμένου πλήθος στοιχείων. Εφαρμόζοντας αυτό στο $\mathrm{Orb}(x,T)$ και αφού

$$\mathrm{Orb}(T^p(x),T) = \mathrm{Orb}(x,T)\backslash\{x,T(x),...,T^{p-1}(x)\}, \tag{3.1}$$

βλέπουμε ότι $T^p(x) \in HC(T)$ για κάθε θετικό ακέραιο p. Έτσι το σύνολο $\mathrm{HC}(T)$ είναι είτε κενό, είτε πυκνό στον X.

Έστω U, V είναι μη κενά ανοιχτά υποσύνολα του X. Αφού ο T είναι υπερκυκλικός ισχύει ότι το σύνολο $\mathrm{HC}(T)$ είναι μη κενό και πυκνό και άρα υπάρχει $x \in U \cap \mathrm{HC}(T)$. Επιπλέον, αφού και το σύνολο $\mathrm{Orb}(x,T)$ είναι πυκνό, ισχύει ότι $\mathrm{Orb}(x,T) \cap V \neq \emptyset$, οπότε τελικά υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n(x) \in V$.

Αντίστροφα, θα αποδείξουμε ότι (ii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι ο T είναι τοπολογικά μεταβατικός. Εφόσον ο χώρος X είναι μετρικοποιήσιμος και διαχωρίσιμος, άρα και δεύτερος αριθμήσιμος, επιδέχεται μια αριθμήσιμη βάση από ανοιχτά σύνολα. Έστω $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ μια τέτοια βάση. Ένα διάνυσμα $x \in X$ είναι υπερκυκλικό για τον T αν και μόνο αν η T-τροχιά του επισκέπτεται κάθε ανοιχτό σύνολο V_j, δηλαδή αν για κάθε $j \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq 0$, τέτοιο ώστε $T^n(x) \in V_j$. Έτσι έχουμε ότι

$$HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j).$$

Αυτό δείχνει ειδικότερα ότι ότι το σύνολο $\mathrm{HC}(T)$ είναι G_δ σύνολο. Επιπλέον από το θεώρημα κατηγορίας του Baire[2] αρκεί να δείξουμε ότι καθένα από τα ανοιχτά σύνολα $W_j = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$ είναι πυκνό. Έστω U ανοιχτό και μη κενό υποσύνολο του X. Αφού ο T είναι τοπολογικά μεταβατικός υπάρχει κάποιο n τέτοιο ώστε να ισχύει $U \cap T^{-n}(V_j) \neq \emptyset$ ή ισοδύναμα, $T^n(U) \cap V_j \neq \emptyset$.. Συνεπώς $U \cap W_j \neq$. Επομένως το W_j είναι πυκνό για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και άρα ο T είναι υπερκυκλικός. □

Σημειώνουμε ότι η συνεπαγωγή (υπερκυκλικότητα)$\Rightarrow$(τοπολογική μεταβατικότητα) δεν απαιτεί ο χώρος X να είναι μετρικοποιήσιμος ή Baire: Αυτό ισχύει για ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο X. Πράγματι, το μόνο πράγμα που χρησιμοποιήσαμε ήταν ότι το σύνολο $\mathrm{HC}(T)$ είναι πυκνό στον X όταν δεν

[1] Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι G_δ-σύνολο αν υπάρχει ακολουθία (G_n) ανοιχτών υποσυνόλων του X, ώστε $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

[2] Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και (G_n) ακολουθία ανοιχτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε το σύνολο $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

είναι κενό, αφού ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Επιπλέον αυτό που χρειάζεται για την αντίστροφη συνεπαγωγή (τοπολογική μεταβατικότητα)⇒(υπερκυκλικότητα) είναι ότι ο X είναι ένας χώρος Baire με μια αριθμήσιμη βάση από ανοιχτά σύνολα. Επίσης στην απόδειξη του θεωρήματος (3.4) δεν χρησιμοποιήθηκε καθόλου η γραμμική δομή του χώρου X, αφού οι ορισμοί της υπερκυκλικότητας και της τοπολογικής μεταβατικότητας δεν απαιτούν κάποια γραμμική δομή. Έτσι το θεώρημα (3.4) ισχύει για μια τυχαία συνεχή απεικόνιση $T : X \to X$ που δρα σε κάποιον δεύτερο αριθμήσιμο χώρο Baire X, χωρίς μεμονωμένα σημεία.

Πόρισμα 3.5. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος. Τότε ο T είναι υπερκυκλικός αν και μόνο αν ο T^{-1} είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της ισοδυναμίας $T^n(U) \cap V \neq \emptyset \iff U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$ όπου U, V ανοιχτά μη κενά σύνολα. □

Δίνουμε τώρα ένα ιστορικό παράδειγμα υπερκυκλικού τελεστή που οφείλεται στον Birkhoff [12].

Παράδειγμα 3.6. *Έστω $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ ο χώρος των ακεραίων συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$ εφοδιασμένος με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή σύνολα. Για κάθε μη μηδενικο μιγαδικό αριθμό a, έστω $T_a : \mathrm{H}(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}(\mathbb{C})$ ο τελεστής μετάθεσης που ορίζεται ως $T_a(f)(z) = f(z+a)$. Τότε ο T_a είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Εφόσον ο χώρος $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet, αρκεί να δείξουμε ότι ο T_a είναι τοπολογικά μεταβατικός. Αν $u \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$ και $E \subseteq \mathbb{C}$ είναι συμπαγές, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\|u\|_E = \sup\{|u(z)| : z \in E\}.$$

Έστω U, V δύο μη κενά ανοιχτά υποσύνολα του $\mathrm{H}(\mathbb{C})$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$, δύο κλειστοί δίσκοι $K, L \subseteq \mathbb{C}$ και δύο συναρτήσεις $f, g \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$ τέτοιες ώστε

$$U \supseteq \{h \in \mathrm{H}(\mathbb{C}) : \|h - f\|_K < \epsilon\},$$

$$V \supseteq \{h \in \mathrm{H}(\mathbb{C}) : \|h - g\|_L < \epsilon\}.$$

Έστω n ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $K \cap (L + an) = \emptyset$. Αφού το σύνολο $\mathbb{C} \setminus (K \cup (L + an))$ είναι συνεκτικό, σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης του Runge[3] μπορούμε να βρούμε μία $h \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε

$$\|h - f\|_K < \epsilon \quad \text{και} \quad \|h - g(\cdot - na)\|_{L+na} < \epsilon.$$

Έτσι $h \in U$ και $T_a^n(h) \in V$, άρα ο τελεστής T_a είναι τοπολογικά μεταβατικός. □

Στα παρακάτω θα δώσουμε ένα κριτήριο υπερκυκλικότητας που δίνει ικανές συνθήκες ώστε ένας τελεστής να είναι υπερκυκλικός. Ξεκινάμε με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.7. *Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Λέμε ότι ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας αν υπάρχει μια αύξουσα ακολούθια ακεραίων (n_k), δύο πυκνά σύνολα $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subseteq X$ και μια ακολουθία απεικονίσεων $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$ τέτοια ώστε:*

1. *$T^{n_k}(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathcal{D}_1$*
2. *$S_{n_k}(y) \to 0$ για κάθε $y \in \mathcal{D}_2$*
3. *$T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y$ για κάθε $y \in \mathcal{D}_2$*

[3] Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ ένα συμπαγές σύνολο και A ένα σύνολο που περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$, όπου $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Έστω f μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη σε κάποια περιοχή του K και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ρητή συνάρτηση h με πόλους σημεία μόνο από το A τέτοια ώστε $\sup_{z \in K} |f(z) - h(z)| < \epsilon$. Επιπλέον, αν το $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ είναι συνεκτικό, τότε μπορούμε να πάρουμε ως $A = +\infty$, οπότε η συνάρτηση h θα είναι αναγκαστικά πολυώνυμο.

Όταν είναι εφικτό να πάρουμε $n_k = k$ και $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, λέμε ότι ο T ικανοποιεί το κριτήριο της Kitai. Σημειώνεται ότι οι απεικονίσεις S_{n_k} δεν απαιτείται να είναι ούτε γραμμικές, ούτε συνεχείς.

Θεώρημα 3.8. *Έστω $T \in \mathfrak{L}(x)$, όπου ο X είναι ένας διαχωρίσιμος F-χώρος. Υποθέτουμε ότι ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας. Τότε ο T είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο T είναι τοπολογικά μεταβατικός. Έστω U, V δύο μη κενά ανοιχτά υποσύνολα του X. Αφού τα $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ είναι πυκνά στον X μπορούμε να επιλέξουμε $x \in \mathcal{D}_1 \cap U$ και $y \in \mathcal{D}_2 \cap V$. Τότε $x + S_{n_k}(y) \to x \in U$ καθώς $k \to +\infty$ ενώ $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(x) + T^{n_k}S_{n_k}(y) \to y \in V$. Άρα αφού $x + S_{n_k}(y) \to x \in U$ υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq k_1$ να ισχύει $x + S_{n_k}(y) \in U$. Όμοια αφού $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) \to y \in V$ υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq k_2$ να ισχύει $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y) \in V$. Τότε για $k \geq \max\{k_1, k_2\}$ έχουμε ταυτόχρονα ότι $x + S_{n_k}(y) \in U$ και $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) \in V$. Άρα $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$. □

Σημειώνουμε ότι μπορεί να αποδειχτεί ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα: Αν ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας σε σχέση με μια ακολουθία (n_k) τότε η οικογένεια $(T^{n_k})_{k\geq 0}$ είναι καθολική, δηλαδή υπάρχει κάποιο $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{T^{n_k}(x) : k \geq 0\}$ να είναι πυκνό στον X. Στην πραγματικότητα, για κάθε υπακολουθία (n'_k) της (n_k), η οικογένεια $(T^{n'_k})_{k\geq 0}$ είναι καθολική.

Παράδειγμα 3.9 (G.R.MacLane, 1951)**.** *Ο τελεστής της παραγώγισης $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ με τύπο $D(f) = f'$ είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο υπερκυκλικότητας για την ακολουθία των ακεραίων $(n_k) := (k)$ και τα σύνολα $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}$, όπου $\mathfrak{D}$ το σύνολο των μιγαδικών πολυωνύμων, το οποίο είναι πυκνό στον χώρο $H(\mathbb{C})$, και τις απεικονίσεις $S_k := S^k$ όπου $Sf(z) = \int_0^z f(\xi)d\xi$ είναι ο τελεστής της ολοκλήρωσης. Θα ελέγξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.8.

1. Έστω $P \in \mathfrak{D}$ με τάξη n. Τότε για $m > n$ ισχύει ότι $D^m(P) = 0 \to 0$
2. $S_k(z^p) = S_{k-1}(\frac{z^{p+1}}{p+1}) = S_{k-2}(\frac{z^{p+2}}{(p+1)(p+2)}) = \ldots = \frac{z^{p+k}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} = \frac{p!}{(p+k)!}z^{p+k} \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, για κάθε σταθερό $p \in \mathbb{N}$ οπότε συμπεραίνουμε ότι $S_{n_k} \to 0$ για κάθε $P \in \mathfrak{D}$ από τη γραμμμικότητα του τελεστή της ολοκλήρωσης.
3. Αφού ο τελεστής της ολοκλήρωσης είναι αντίστροφος του τελεστή της παραγώγισης, έχουμε άμεσα ότι $DS = I$ όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής, άρα ικανοποιείται το τελικό κριτήριο.

□

Παράδειγμα 3.10 (S.Rolewitz, 1969)**.** *Ο τελεστής της προς τα πίσω μετατόπισης $B : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, όπου $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$, ορίζεται από τον τύπο $B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Τότε ο λB είναι υπερκυκλικός αν και μόνο αν ισχύει $|\lambda| > 1$.*

Απόδειξη. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Τότε $B((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\geq 2}$. Άρα έχουμε ότι $\|Bx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, συνεπώς $\|B\|_2 \leq 1$. Επίσης αφού

$$\|B\|_2 \geq \frac{\|Be_2\|_2}{\|e_2\|_2} = \frac{\|e_1\|_2}{\|e_2\|_2} = 1, \tag{3.2}$$

παίρνουμε ότι $\|B\|_2 = 1$. Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει $\|\lambda B\|_2 = |\lambda|\|B\|_2 = |\lambda|$, συνεπώς αν $|\lambda| \leq 1$, τότε ο τελεστής λB δεν μπορεί να είναι υπερκυκλικός.

Έστω τώρα $|\lambda| > 1$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο υπερκυκλικότητας για την ακολουθία των φυσικών $n_k = k$ στο σύνολο $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών (που είναι πυκνό στον χώρο $\ell^2(\mathbb{N})$) και για τις απεικονίσεις $S_k = \lambda^{-k}S^k$, όπου S είναι ο τελεστής της προς τα εμπρός μετατόπισης που ορίζεται ως $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι οι συνθήκες (1),(2),(3) του κριτηρίου υπερκυκλικότητας ικανοποιούνται. Για την (1) και (3) τα επιχειρήματα είναι όμοια με το παράδειγμα (3.9). Το (2) έπεται άμεσα από την εκτίμηση $\|S_k\| = |\lambda|^{-k}$. □

Ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν αν ο $\ell^2(\mathbb{N})$ αντικατασταθεί από τον $\ell^p(\mathbb{N})$ για $p \geq 1$, ή τον $c_0(\mathbb{N})$.

Πόρισμα 3.11 (Κριτήριο Godefroy-Shapiro). *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ όπου X είναι ένας διαχωρίσιμος F-χώρος. Αν οι γραμμικές θήκες καθενός από τα σύνολα $\bigcup_{|\lambda|<1} \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ και $\bigcup_{|\lambda|>1} \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$ είναι πυκνοί υπόχωροι του X τότε ο T είναι υπερκυκλικός τελεστής.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας με $(n_k) := (k)$ και

$$\mathfrak{D}_1 = \mathrm{Span}\Big(\bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T-\lambda I)\Big) \qquad \mathfrak{D}_2 = \mathrm{Span}\Big(\bigcup_{|\lambda|>1} \mathrm{Ker}(T-\lambda I)\Big)$$

Οι απεικονίσεις $S_k : \mathfrak{D}_2 \to X$ ορίζονται ως ακολούθως: θέτουμε $S_k(y) = \lambda^{-k} y$ αν $T(y) = \lambda y$ με $|\lambda| > 1$, και επεκτείνουμε τις S_k στο $\mathfrak{D}_2$ μέσω γραμμικότητας ώς εξής: Αν $y \in \mathfrak{D}_2 \Rightarrow y = y_1 + y_2 + \ldots + y_p$, όπου $y_i \in \mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$ με $|\lambda_i| > 1$, ορίζουμε $S_k(y) = S_k(y_1) + S_k(y_2) + \ldots + S_k(y_p) = \lambda_1^{-k} y_1 + \lambda_2^{-k} y_2 + \ldots + \lambda_p^{-k} y_p$. Εφόσον $\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I) \bigcap \mathrm{Ker}(T-\lambda_j I) = \{0\}$ για $\lambda_i \neq \lambda_j$ οι απεικονίσεις S_k είναι καλά ορισμένες.

Ελέγχουμε τώρα τις τρείς συνθήκες του κριτηρίου υπερκυκλικότητας.

1. Θα δείξουμε ότι αν $y \in \mathfrak{D}_1$ τότε $T^k(y) \to 0$. Πράγματι αφού $y \in \mathfrak{D}_1$ τότε $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_p$ όπου $y_i \in \mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$ με $|\lambda_i| < 1$ άρα $T^k(y) = {\lambda_1}^k y_1 + {\lambda_2}^k y_2 + \ldots + {\lambda_p}^k y_p \to 0$ αφού $|\lambda_i| < 1$, για $i = 1, \ldots, p$.

2. Όμοια $S_k(y) \to 0$ όταν $y \in \mathfrak{D}_2$. Πράγματι αν $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_p$ όπου $y_i \in \mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$ με $|\lambda_i| > 1$ τότε $S_k(y) = {\lambda_1}^{-k} y_1 + {\lambda_2}^{-k} y_2 + \ldots + {\lambda_p}^{-k} y_p \to 0$

3. Τέλος δείχνουμε ότι $T^k \circ S^k(y) = y$ για κάθε $y \in \mathfrak{D}_2$. Αν $y \in \mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$ τότε $T^k(S^k(y)) = T^k(\lambda_i^{-k} y) = \lambda_i^k \lambda_i^{-k} y = y$ και λόγω γραμμικότητας συμπεραίνουμε ότι $(T^k \circ S^k)(y) = y$ για κάθε $y \in \mathfrak{D}_2$.

□

3.3 Η υπερκυκλική συγκριτική αρχή

Ορισμός 3.12. *Έστω $T_0 : X_0 \to X_0$ και $T : X \to X$ δύο συνεχείς απεικονίσεις στους τοπολογικούς χώρους X_0 και X αντίστοιχα. Τότε η απεικόνιση T λέγεται quasi-factor του T_0 αν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $J : X_0 \to X$ με πυκνή εικόνα τέτοια ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "T_0"] \arrow[d, "J"'] & X_0 \arrow[d, "J"] \\ X \arrow[r, "T"] & X \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό, δηλαδή $TJ = JT_0$. Όταν αυτό μπορεί να επιτευχθεί με έναν ομομορφισμό $J : X_0 \to X$ (και άρα $T = JT_0J^{-1}$), λέμε ότι οι T_0 και T είναι τοπολογικά συζυγείς. Τέλος όταν οι T_0 και T είναι γραμμικοί τελεστές και η απεικόνιση J (αντ. ομομορφισμός) είναι γραμμική, λέμε ότι ότι ο T είναι γραμμικός quasi-factor του T_0 (αντ. ότι οι T_0 και T είναι γραμμικά συζυγείς).

Λήμμα 3.13. *Έστω X, X_0 διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι και $J : X_0 \to X$ συνεχής απεικόνιση με πυκνή εικόνα. Τότε η J μεταφέρει αριθμήσιμα πυκνά σύνολα σε αριθμήσιμα πυκνά σύνολα.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ αριθμήσιμο και πυκνό σύνολο στον X_0. Έστω επίσης $U \neq \emptyset$ ανοιχτό υποσύνολο του X. Πρέπει να δείξουμε ότι $J(A) \cap U \neq \emptyset$. Πράγματι αφού το $J(X_0)$ είναι πυκνό στον X ισχύει ότι $J(X_0) \cap U \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $z \in U \cap J(X_0)$. Έστω $x \in X_0$, τέτοιο ώστε $J(x) = z$. Τότε, αφού $z \in U$ ισχύει ότι $x \in J^{-1}(U)$ και άρα $J^{-1}(U) \neq \emptyset$. Επίσης αφού η J είναι συνεχής το σύνολο $J^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό στον X_0. Εφόσον το A είναι πυκνό στον X συνεπάγεται ότι $A \cap J^{-1}(U) \neq \emptyset$ και άρα $J(A) \cap U \neq \emptyset$. $\square$

.

Πρόταση 3.14. *Έστω $T_0 \in \mathfrak{L}(X_0)$ και $T \in \mathfrak{L}(X)$, όπου X, X_0 διαχωρίσιμοι F-χώροι και $J : X_0 \to X$ συνεχής και γραμμική απεικόνιση με πυκνή εικόνα τέτοια ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "T_0"] \arrow[d, "J"'] & X_0 \arrow[d, "J"] \\ X \arrow[r, "T"] & X \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό. Αν ο τελεστής T_0 είναι υπερκυκλικός, τότε και ο T είναι υπερκυκλικός.

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathrm{HC}(T_0)$. Τότε το σύνολο $A = \{z, T_0(z), \ldots, T_0^k(z), \ldots\}$ είναι πυκνό στον X_0. Θεωρούμε το διάνυσμα $J(z) \in X$. Θα δείξουμε ότι $J(z) \in \mathrm{HC}(T)$. Πράγματι, από το μεταθετικό διάγραμμα έχουμε ότι $T(J(z)) = J(T_0(z))$, άρα με επαγωγή προκύπτει εύκολα ότι $T^k(J(z)) = J(T_0^k(z))$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα έχουμε ότι το σύνολο

$$\{T(J(z)), T^2(J(z)), \ldots, T^k(J(z)), \ldots\} = \{J(T_0(z), J(T_0^2(z)), \ldots, J(T_0^2(z)), \ldots\} = J(A)$$

είναι πυκνό από το προηγούμενο λήμμα. $\square$

3.4 Μερικές ιδιότητες φάσματος

Σε αυτήν την ενότητα, δείχνουμε ότι οι υπερκυκλικοί τελεστές έχουν κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητες όσον αφορά το φάσμα τους. Ονομάζουμε σημειακό φάσμα ενός τελεστή R το σύνολο των ιδιοτιμών του R, δηλαδή το σύνολο $\sigma_p(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Ker}(\lambda I - R) \neq \{0\}\}$. Επίσης θα συμβολίζουμε με $\sigma(R)$ το φάσμα του τελεστή R, δηλαδή το σύνολο $\sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - R$ μη αντιστρέψιμος$\}$.

Πρόταση 3.15. *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ υπερκυκλικός τελεστής. Τότε $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ (όπου $T^* : X^* \to X^*$ είναι ο συζυγής τελεστής του T).*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $T^*(x^*) = \mu x^*$ για κάποιο $\mu \in \mathbb{K}$ και κάποιο $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$. Αν $x \in X$ τότε

$$\langle x^*, T^n(x) \rangle = \langle (T^n)^*(x), x \rangle = \langle (T^*)^n(x^*), x \rangle = \langle \mu^n x^*, x \rangle = \mu^n \langle x^*, x \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Είναι προφανές ότι το σύνολο $\{\mu^n \langle x^*, x\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι πυκνό στον $\mathbb{K}$. Αφού τώρα ο τελεστής T είναι υπερκυκλικός, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε η τροχιά του X, δηλαδή το σύνολο $\mathrm{Orb}(x, T) = \{x, T(x), \ldots, T^k(x), \ldots\}$, να είναι πυκνή στον X. Αφού για τη γραμμική και συνεχή απεικόνιση x^* ισχύει ότι $x^* \neq 0$, συναγάγουμε ότι και το σύνολο $x^*(\mathrm{Orb}(x, T))$ είναι πυκνό στον $\mathbb{K}$. Συνεπώς έχουμε ότι το σύνολο $x^*(\mathrm{Orb}(x, T)) = \{\mu^n \langle x^*, x\rangle : n \in \mathbb{N}\})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{K}$, άτοπο. Άρα ισχύει ότι $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. $\square$

Θεώρημα 3.16. *Έστω X ένας χώρος Banach πάνω στον $\mathbb{C}$, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ ένας υπερκυκλικός τελεστής. Τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του φάσματος του T, τέμνει τον μοναδιαίο κύκλο.*

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε δύο γνωστά αποτελέσματα της φασματικής θεωρίας, τα οποία παρατίθενται στα επόμενα δύο λήμματα. Σε ότι ακολουθεί ο X είναι ένας χώρος Banach πάνω στο $\mathbb{C}$.

Λήμμα 3.17 (Θεώρημα διάσπασης του Riesz). *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι το φάσμα του T μπορεί να διασπαστεί ως $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_N$, όπου τα σύνολα σ_i είναι κλειστά και ανά δύο ξένα. Τότε ο X διασπάται $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_N$, όπου κάθε X_i είναι ένας κλειστός T-αναλλοίωτος υπόχωρος, με $\sigma(T_{|X_i}) = \sigma_i$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, N\}$.*

Λήμμα 3.18. *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$.*

(1) *Υποθέτουμε ότι $\sigma(T) \subseteq \mathbb{D}$ [4]. Τότε υπάρχει $a < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|T^n(x)\| \leq a^n \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και για όλα τα $n \geq N$.*

(2) *Υποθέτουμε ότι $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Τότε υπάρχει κάποιο $A > 1$ και κάποιο $N \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|T^n(x)\| \geq A^n \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και για όλα τα $n \geq N$.*

Απόδειξη. (1) Από το φασματικό θεώρημα έχουμε ότι

$$\lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T), \text{ όπου } r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Αφού το σύνολο $\sigma(T)$ είναι συμπαγές σύνολο με $\sigma(T) \subseteq \mathbb{D}$ συμπεραίνουμε ότι $r(T) < 1$. Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $r(T) < a < 1$. Εφόσον $\lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < a$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$, να ισχύει $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} < a \Rightarrow \|T^n\| < a^n$ για κάθε $n \geq N$. Άρα έχουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$\|T^n(x)\| \leq \|T^n\| \|x\| \leq a^n \|x\|, \quad \forall n \geq N.$$

(2) Για το δεύτερο σκέλος του λήμματος, αφού $0 \notin \sigma(T)$, ο τελεστής T είναι αντιστρέψιμος. Ακόμη από την γνωστή σχέση $\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1} = \{\frac{1}{z} \in \mathbb{C} : z \in \sigma(T)\}$, εφόσον $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ παίρνουμε ότι $\sigma(T^{-1}) \subseteq \mathbb{D}$ και άρα από το (1) υπάρχει $a < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|(T^{-1})^n(y)\| \leq a^n \|y\|, \quad \forall n \geq N$ και $\forall y \in Y$. Αν θέσουμε $A = \frac{1}{a}$ τότε έχουμε $A > 1$ και $\|x\| \leq a^n \|T^n(x)\|$ για κάθε $x \in X$ και $n \geq N$ και άρα $\|T^n(x)\| \geq A^n \|x\| \quad$ για κάθε $x \in X$ και $n \geq N$.

□

Τέλος για την απόδειξη του θεωρήματος (3.16) χρειαζόμαστε ένα στοιχειώδες τοπολογικό λήμμα.

Λήμμα 3.19. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, και έστω C μια συνεκτική συνιστώσα του K. Υποθέτουμε ότι το C περιέχεται σε κάποιο ανοιχτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο σ του K τέτοιο ώστε $C \subseteq \sigma \subseteq \Omega$.*

Απόδειξη. Από γνωστό θεώρημα [5], αφού ο K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, έχουμε ότι $C = \bigcap_{O \in \mathcal{F}} O$, όπου $\mathcal{F}$ η συλλογή όλων των ανοιχτών-κλειστών υποσυνόλων του X με $C \subseteq O$. Από τη συμπάγεια του K υπάρχουν $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $O_1 \bigcap \ldots \bigcap O_n \bigcap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = \emptyset$. Τότε το σύνολο $O_1 \bigcap \ldots \bigcap O_n$ είναι το κλειστό-ανοιχτό σύνολο που αναζητούμε. □

Απόδειξη του Θεωρήματος (3.16). Θα αποδείξουμε το θεώρημα με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι κάποια συνεκτική συνιστώσα C_1 του $\sigma(T)$ δεν τέμνει τον μοναδιαίο δίσκο, συνεπώς είτε $C_1 \subseteq \mathbb{D}$ είτε $C_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Έτσι από το λήμμα (3.19), αφού το C_1 είναι συνεκτική συνιστώσα του συμπαγούς συνόλου $\sigma(T)$ και το $\mathbb{D}$ περιέχει το C_1, υπάρχει ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του $\sigma(T)$, έστω σ_1, με $C_1 \subseteq \sigma_1 \subseteq \mathbb{D}$ ή

[4] Συμβολίζουμε με $\mathbb{D}$ τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο, δηλαδή $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

[5] Θεώρημα: Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff και C μια συνεκτική συνιστώσα του X, τότε το C ισούται με την τομή όλων των ανοιχτών-κλειστών συνόλων που περιέχουν το C.

$C_1 \subseteq \sigma_1 \subseteq \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$. Εφαρμόζοντας το λήμμα (3.17) στα σύνολα σ_1 και $\sigma_2 = \sigma(T)\setminus\sigma_1$, μπορούμε να γράψουμε $T = T_1 \oplus T_2$, όπου $T_i = T_{|X_i} : X_i \to X_i$ για $i \in \{1,2\}$ και X_i κλειστοί υπόχωροι του X, με $\sigma(T_1) = \sigma_1$ και $\sigma(T_2) = \sigma_2$. Εφόσον ο T είναι υπερκυκλικός τελεστής, άμεσα προκύπτει ότι οι τελεστές T_1, T_2 είναι υπερκυκλικοί. (Στην πραγματικότητα είναι quasi-factors του T μέσω των σχετιζόμενων προβολών πάνω στον X_1 και στον X_2.) Από το λήμμα (3.18) στην περίπτωση που $C_1 \subseteq \sigma_1 \subseteq \mathbb{D}$ έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n(x)\| \to 0$ για κάθε $x \in X_1$ ενώ στην περίπτωση που $C_1 \subseteq \sigma_1 \subseteq \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n(x)\| = \infty$ για κάθε $x \in X_1\setminus\{0\}$. Συνεπώς ο τελεστής T_1 δεν είναι υπερκυκλικός, άρα ούτε και ο T είναι υπερκυκλικός, άτοπο. Επομένως κάθε συνεκτική συνιστώσα του φάσματος του T, τέμνει τον μοναδιαίο κύκλο. $\square$

Πόρισμα 3.20. *Κανένας συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Banach $X \neq \emptyset$ πάνω στο $\mathbb{C}$ δεν μπορεί να είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Από την πρόταση (3.3), μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X είναι απειροδιάστατος. Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ ένας συμπαγής τελεστής. Τότε το φάσμα του T είναι αριθμήσιμο και περιέχει το 0. Αφού κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι ολικά μη συνεκτικό, συνεπάγεται ότι το σύνολο $\{0\}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $\sigma(T)$. Από το θεώρημα (3.16) ο T δεν μπορεί να είναι υπερκυκλικός. $\square$

3.5 Πώς μοιάζει το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων

Έχουμε ήδη δεί ότι άν ο T είναι υπερκυκλικός τελεστής σε κάποιον F-χώρο τότε το σύνολο όλων των υπερκυκλικών διανυσμάτων του T, είναι μεγάλο με την τοπολογική έννοια: είναι ένα G_δ υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει και με την αλγεβρική έννοια.

Πρόταση 3.21. *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ ένας υπερκυκλικός τελεστής σε έναν F-χώρο. Τότε κάθε $x \in X$ είναι το άθροισμα δύο υπερκυκλικών διανυσμάτων, δηλαδή $X = HC(T) + HC(T)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Το σύνολο $\mathrm{HC}(T)$ είναι G_δ και πυκνό στον X άρα και το $x - \mathrm{HC}(T)$ είναι επίσης G_δ και πυκνό. Οπότε προκύπτει ότι $\mathrm{HC}(T) \cap (x - \mathrm{HC}(T)) \neq \emptyset$ και άρα $x \in \mathrm{HC}(T) + \mathrm{HC}(T)$. $\square$

Ορισμός 3.22. *Έστω X ένας F-χώρος, $T \in \mathfrak{L}(X)$ και E διανυσματικός υπόχωρος του X. Τότε ο E λέγεται υπερκυκλικός υπόχωρος για τον T, αν το σύνολο $E\setminus\{0\}$ αποτελείται αποκλειστικά από υπερκυκλικά διανύσματα.*

Ορισμός 3.23. *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ και L υπόχωρος του X. Τότε ο L λέγεται T-αναλλοίωτος αν ισχύει $T(L) \subseteq L$.*

Θεώρημα 3.24. *Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ υπερκυκλικός τελεστής. Αν $x \in \mathrm{HC}(T)$ τότε $\mathbb{K}[T]x = \{P(T)x : P \text{ πολυώνυμο}\}$ είναι ένας υπερκυκλικός υπόχωρος για τον T.*

Λήμμα 3.25. *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ υπερκυκλικός τελεστής. Τότε για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο P, ο τελεστής $P(T)$ έχει πυκνή εικόνα.*

Απόδειξη.

Ισχυρισμός. *Έστω $L \subseteq X$ ένας κλειστός T-αναλλοίωτος υπόχωρος του X. Τότε είτε $L = X$ είτε ο L έχει άπειρη συνδιάσταση στον X.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο χώρος X/L είναι πεπερασμένης διάστασης. Η απεικόνιση πηλίκο $q : X \to X/L$ με τύπο $q(x) = x + L$ είναι γραμμική, επί και συνεχής. Θα δείξουμε ότι ισχύει $\mathrm{Ker}(q) \subseteq \mathrm{Ker}(qT)$. Έστω $z \in \mathrm{Ker}(q)$. Τότε

$$(qT)(z) = q(T(z)) = T(z) + L. \tag{3.3}$$

Όμως $q(z) = 0 + L = L$ άρα $z \in L$. Άρα $T(z) \in L$ αφού ο L είναι T-αναλλοίωτος. Οπότε $(qT)(z) = L$ άρα $z \in \mathrm{Ker}(qT)$. Ορίζουμε τελεστή $A \in \mathfrak{L}(X/L)$ με τύπο $A(z + L) = T(z) + L$. Καταρχήν ο A είναι καλά ορισμένος. Πράγματι, αν $z_1 + L = z_2 + L$ τότε $z_1 - z_2 \in L$ και εφόσον ο L είναι T-αναλλοίωτος $T(z_1 - z_2) \in L$ συνεπώς $T(z_1) + L = T(z_2) + L$. Η απεικόνιση $qT : X \to X/L$ παραγοντοποιείται μέσω της απεικόνισης πηλίκο ως εξής: $Aq = qT$.

Άρα, αφού η απεικόνιση q είναι συνεχής και επί, ο A είναι quasi-factor του T και αφού ο T είναι υπερκυκλικός συμπεραίνουμε ότι ο A είναι επίσης υπερκυκλικός πάνω στον πεπερασμένης διάστασης χώρο X/L. Από την πρόταση (3.3) συνάγουμε ότι $X/L = \{0\}$, δηλαδή $L = X$. □

Έστω $L = \overline{P(T)[X]}$. Καταρχήν ο χώρος L είναι T-αναλλοίωτος. Πράγματι

$$T(L) = T(\overline{P(T)[X]}) \subseteq \overline{T(P(T)[X])} = \overline{P(T)(T[X])} \subseteq \overline{P(T)[X]} = L.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ο L έχει πεπερασμένη συνδιάσταση στον X, οπότε σύμφωνα με τον παραπάνω ισχυρισμό $L = X$. Έστω λοιπόν ότι $x \in \mathrm{HC}(T)$ και έστω $q : X \to X/L$ η απεικόνιση πηλίκο. Τότε από τον αλγόριθμο της διαίρεσης και από την μεταθετικότητα της άλγεβρας $\mathbb{K}[T]$, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{K}[T]x \subseteq P(T)[X] + \mathrm{Span}\{T^i(x);\ \ i < \deg(P)\}. \tag{3.4}$$

Έτσι $q(\mathbb{K}[T]x) = \mathbb{K}[T]x + L \subseteq \mathrm{Span}\{T^i(x);\ \ i < \deg(P)\} + L$ και άρα ο $q(\mathbb{K}[T]x)$ είναι πεπερασμένης διάστασης, και αφού το x είναι κυκλικό διάνυσμα για τον T θα είναι και ο χώρος $X/L = q(X)$ είναι πεπερασμένης διάστασης, άρα $L = X$. □

Απόδειξη του θεωρήματος (3.24). Έστω $x \in \mathrm{HC}(T)$. Τότε για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο P, ο τελεστής $P(T)$ αντιμετατίθεται με τον τελεστή T και έχει πυκνή εικόνα σύμφωνα με το Λήμμα 3.25. Από την αρχή της υπερκυκλικής σύγκρισης, συνεπάγεται ότι $P(T)x \in \mathrm{HC}(T)$. Έτσι ο χώρος $\mathbb{K}[T]x$ είναι υπερκυκλικός υπόχωρος για τον T. Τέλος, ο $\mathbb{K}[T]x$ είναι πυκνός στον X αφού $\mathrm{Orb}(x, T) \subseteq \mathbb{K}[T]x$. □

Πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν από το θεώρημα (3.24). Παραθέτουμε εδώ μια θεμελιώδη συνεπεια του θεωρήματος.

Πόρισμα 3.26. *Αν $T \in \mathfrak{L}(X)$ είναι υπερκυκλικός τότε το σύνολο $\mathrm{HC}(T)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έχουμε οτι $\mathbb{K}[T]x \subseteq \mathrm{HC}(T) \subseteq X = \overline{K[T]x}$ και αφού ο χώρος $\mathbb{K}[T]x$ είναι συνεκτικός υπόχωρος του X προκύπτει ότι το σύνολο $\mathrm{HC}(T)$ είναι συνεκτικό. □

Όταν ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος είναι χώρος Fréchet μπορούμε να πούμε ακόμα περισσότερα [17].

Θεώρημα 3.27 (A. Fathi)**.** *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ είναι υπερκυκλικός τελεστής. Τότε ο χώρος $\mathrm{HC}(T)$ είναι ομοιομορφικός με τον X.*

Κεφάλαιο 4

Βασικά θεωρήματα

4.1 Θεώρημα Ansari

Σε αυτήν την ενότητα πραγματευόμαστε το εξής ερώτημα. Είναι αληθές ότι αν T είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής τότε κάθε δύναμη του T^p, $p \in \mathbb{N}$, είναι επίσης υπερκυκλικός; Το θεώρημα της Ansari απαντάει καταφατικά στο προηγούμενο ερώτημα.

Το επόμενο λήμμα είναι κρίσιμο για την απόδειξη του θεωρήματος Ansari.

Λήμμα 4.1. *Έστω X μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία και $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε τα εσωτερικά των κλειστοτήτων δύο τυχαίων τροχιών, είτε συμπίπτουν, είτε είναι ξένα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(x,T)}) \cap \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}) \neq \emptyset$, όπου $x, y \in X$ με $x \neq y$.

Ισχυρισμός. *Υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(x) \in \overline{\mathrm{Orb}(y,T)}$*

Απόδειξη. Έστω ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $T^n(x) \notin \overline{\mathrm{Orb}(y,T)}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}(x,T) \cap \overline{\mathrm{Orb}(y,T)} = \emptyset \quad &\Rightarrow \\ \mathrm{Orb}(x,T) \cap \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}) = \emptyset \quad &\Rightarrow \\ \overline{\mathrm{Orb}(x,T)} \cap \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}) = \emptyset \quad &\Rightarrow \\ \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(x,T)}) \cap \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}) = \emptyset \quad & \end{aligned}$$

άτοπο, άρα ισχύει το συμπέρασμα του ισχυρισμού. □

Ισχυρισμός. *Το σύνολο $\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}$ είναι T-αναλλοίωτο.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \overline{\mathrm{Orb}(y,T)}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε, $T^{n_k}(y) \to z$ άρα $T(T^{n_k}y) \to T(z)$ συνεπώς $T^{n_k+1}(y) \to T(z)$. Επομένως $T(z) \in \overline{\mathrm{Orb}(y,T)}$. □

Αφού το σύνολο $\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}$ είναι T-αναλλοίωτο και $T^n(x) \in \overline{\mathrm{Orb}(y,T)}$, έχουμε ότι

$$\overline{\{T^k(x) : k \geq n\}} \subseteq \overline{\mathrm{Orb}(y,T)}.$$

και άρα

$$\mathrm{int}(\overline{\{T^k(x) : k \geq n\}}) \subseteq \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}).$$

Εφόσον ο μετρικός χώρος δεν έχει μεμονωμένα σημεία μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι

$$\mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(x,T)}) \quad = \quad \mathrm{int}(\overline{\{T^k(x) : k \geq n\}})$$

και άρα

$$\mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(x,T)}) = \mathrm{int}\,\overline{\{T^k(x) : k \geq n\}} \subseteq \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}).$$

Για λόγους συμμετρίας έχουμε ότι ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός επομένως άρα $\mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(y,T)}) = \mathrm{int}(\overline{\mathrm{Orb}(x,T)})$. □

Θεώρημα 4.2 (Ansari). *Έστω T ένας τελεστής σε ένα χώρο Fréchet. Τότε, για κάθε $p \in \mathbb{N}$, ισχύει $\mathrm{HC}(T) = \mathrm{HC}(T^p)$. Ειδικότερα αν ο T είναι υπερκυκλικός, τότε είναι υπερκυκλικός και κάθε δύναμη του, T^p.*

Απόδειξη. Έστω $p \in \mathbb{N}$, τότε $\mathrm{HC}(T^p) \subseteq \mathrm{HC}(T)$. Πράγματι αν $x \in \mathrm{HC}(T^p)$, τότε $\overline{\mathrm{Orb}(x, T^p)} = X$ και αφού $\overline{\mathrm{Orb}(x, T^p)} \subseteq \overline{\mathrm{Orb}(x, T)}$ έχουμε ότι $\mathrm{HC}(T^p) \subseteq \mathrm{HC}(T)$.

Αντίστροφα τώρα, έστω $x \in \mathrm{HC}(T)$. Τότε το σύνολο $D = \mathrm{HC}(T)$ είναι πυκνό, T-αναλλοίωτο και συνεκτικό υποσύνολο του χώρου X και δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Θεωρούμε τον περιορισμό της T στο D, $T : D \to D$. Οι τελεστές της κλειστότητας και του εσωτερικού στο υπόλοιπο της παρούσας απόδειξης θα θεωρούμε ότι νοούνται στον χώρο D. Αφού το D είναι πυκνό στον X αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{\mathrm{Orb}(x, T^p)} = D$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$D_j = \overline{\mathrm{Orb}(T^j(x), T^p)}, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $D = D_0$. Παρατηρούμε ότι

$$D = \overline{\mathrm{Orb}(x, T)} = \overline{\bigcup_{j=0}^{p-1} \mathrm{Orb}(T^j(x), T^p)} = \bigcup_{j=0}^{p-1} \overline{\mathrm{Orb}(T^j(x), T^p)} = \bigcup_{j=0}^{p-1} D_j$$

και

$$T(D_j) = T(\overline{\mathrm{Orb}(T^j(x), T^p)}) \subseteq \overline{T(\mathrm{Orb}(T^j(x), T^p))} = \overline{\mathrm{Orb}(T^{j+1}(x), T^p)} \subseteq D_{j+1 \pmod p}.$$

Έστω $F \subseteq \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ένα σύνολο ελάχιστης πληθικότητας, τέτοιο ώστε $D = \bigcup_{j \in F} D_j$. Υποθέτουμε(προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το F δεν είναι μονοσύνολο. Αν $\mathrm{int}(D_j) \cap \mathrm{int}(D_k) \neq \emptyset$ για κάποια $j, k \in F$ με $j \neq k$ από το λήμμα (4.1) ισχύει ότι $\mathrm{int}(D_j) = \mathrm{int}(D_k)$. Από την ελαχιστότητα τώρα του F έχουμε ότι το σύνολο $D \setminus \bigcup_{l \in F \setminus \{j\}} D_l \neq \emptyset$ είναι ανοιχτό με $D \setminus \bigcup_{l \in F \setminus \{j\}} D_l \subseteq D_j$, συνεπώς

$$D \setminus \bigcup_{l \in F \setminus \{j\}} D_l \subseteq \mathrm{int}(D_j) = \mathrm{int}(D_k) \subseteq D_k,$$

άτοπο άρα

$$\mathrm{int}(D_j) \cap \mathrm{int}(D_k) = \emptyset \text{ συνεπώς } \mathrm{int}(D_j \cap D_k) = \emptyset \quad \text{για κάθε } j, k \in F \text{ με } j \neq k.$$

Τώρα θέτουμε $F_l = F + l \pmod p$, $l = 0, 1, \ldots, p-1$. Έτσι

$$D = \overline{T^l(D)} = \overline{T^l\left(\bigcup_{j \in F} D_j\right)} = \overline{\bigcup_{j \in F} T^l(D_j)} = \bigcup_{k \in F_l} D_k, \quad l = 0, 1, \ldots p-1.$$

Αφού $\mathrm{card}(F_l) = \mathrm{card}(F)$ και λόγω ελαχιστότητας, παίρνουμε επίσης ότι

$$\mathrm{int}(D_j \cap D_k) = \emptyset, \quad \forall j, k \in F_l \quad \text{με} \quad j \neq k \quad \text{και} \quad l = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Σαν συνέπεια το σύνολο

$$A = \bigcup_{l=0}^{p-1} \bigcup_{\substack{j,k \in F_l \\ j \neq k}} (D_j \cap D_k)$$

είναι πουθενά πυκνό και είναι T-αναλλοίωτο. Αν το A ήταν μη κενό και $y \in A$, τότε

$$D = \overline{\mathrm{Orb}(y, T)} \subseteq \overline{A} = A$$

κάτι που συνιστά αντίφαση. Επομένως $A = \emptyset$, πράγμα που συνεπάγεται ότι το σύνολο

$$D = \bigcup_{j \in F} D_j$$

είναι πεπερασμένη ένωση ανά δύο ξένων κλειστών υποσυνόλων. Αλλά αυτό αντιφάσκει με τη συνεκτικότητα του D.

Συμπερασματικά, το σύνολο F είναι μονοσύνολο, έστω $F = \{j\}$. Τότε $D = D_j$, και άρα $D = \overline{T^{p-j}(D_j)} = D_0$, παίρνοντας έτσι το ζητούμενο. □

4.2 Κάπου πυκνές τροχιές

Ανακαλούμε ότι ένα σύνολο λέγεται κάπου πυκνό αν η κλειστότητα του έχει μη κενό εσωτερικό. Κρίσιμο σημείο στην απόδειξη του θεωρήματος Ansari ήταν να γράψουμε το χώρο D σαν πεπερασμένη ένωση κλειστοτήτων από τροχιές. Τότε κάποιες από αυτές τις κλειστότητες πρέπει να έχουν ένα εσωτερικό σημείο, πράγμα που σημαίνει ότι η αντίστοιχη τροχιά είναι κάπου πυκνή. Στο τέλος συμπεράναμε ότι αυτή η τροχιά είναι στην πραγματικότητα (κάπου) πυκνή. Το ερώτημα που εγείρεται είναι αν μια τροχιά κάπου πυκνή είναι παντού πυκνή. Το θεώρημα Bourdon-Feldman που θα αποδείξουμε παρακάτω δίνει καταφατική απάντηση σε αυτό το ερώτημα.

Έστω T ένας τελεστής σε ένα χώρο Fréchet X. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$D(x) = \overline{\mathrm{Orb}(x,T)} \quad \text{και} \quad U(x) = \operatorname{int} D(x).$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες μπορούν εύκολα να εξαχθούν από τη συνέχεια του τελεστή T σε συνδυασμό με την απουσία μεμονωμένων σημείων του χώρου X.

(i) Αν $y \in D(x)$, τότε $D(y) \subseteq D(x)$.

(ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $U(x) = U(T^k(x))$.

(iii) Αν $R : X \to X$ είναι συνεχής απεικόνιση που μετατίθεται με τον T, τότε ισχύει $R(D(x)) \subseteq D(R(x))$.

Πρώτα χρειαζόμαστε μια γενίκευση του Λήμματος (3.25) η απόδειξη της οποίας είναι όμοια με την απόδειξη του Λήμματος (3.25).

Λήμμα 4.3. *Αν ο T έχει μια τροχιά που είναι κάπου πυκνή και p είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο τελεστής $p(T)$ έχει πυκνή εικόνα.*

Πριν αποδείξουμε ότι ένα διάνυσμα του οποίου η τροχιά είναι κάπου πυκνή είναι κατά ανάγκη υπερκυκλικό, πρώτα θα αποδείξουμε ότι είναι κυκλικό, δηλαδή ότι η γραμμική θήκη της τροχιάς του είναι πυκνή στον X.

Λήμμα 4.4. *Αν το σύνολο $\mathrm{Orb}(x,T)$ είναι κάπου πυκνό, τότε το σύνολο $\{p(T)x : p \neq 0 \text{ πολυώνυμο}\}$ είναι συνεκτικό και πυκνό στον X.*

Απόδειξη. Το σύνολο $A = \{p(T)x : p \neq 0 \text{ πολυώνυμο}\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό. Πράγματι, έστω p, q μη μηδενικά πολυώνυμα. Αν το q δεν είναι πολλαπλάσιο του p τότε το ευθύγραμμο τμήμα $z(t) = tp(T)x + (1-t)q(T)x$, $t \in [0,1]$, περιέχεται στο σύνολο A. Διαφορετικά επιλέγουμε ένα τρίτο μη μηδενικό πολυώνυμο r το οποίο δεν είναι πολλαπλάσιο του p, και συνεπώς ούτε και του q, και παίρνουμε την ένωση των ευθύγραμμων τμημάτων που συνδέουν τα σημεία $p(T)x$ και $q(T)x$ με το σημείο $r(T)x$.

Επιπλέον, το $\overline{A}$ είναι υπόχωρος του X που περιέχει το $\overline{\mathrm{Orb}(x,T)}$. Από την υπόθεση τώρα έπεται ότι υπάρχει κάποιο $x_0 \in X$ και μια περιοχή του μηδενός W τέτοια ώστε $x_0 + W \subseteq \overline{A}$. Για κάθε $y \in X$, υπάρχει κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$ με $y \in \lambda W$ και άρα $y \in \lambda(x_0 + W) - \lambda x_0 \subseteq \overline{A}$. Κατά συνέπεια, το A είναι πυκνό στον X. □

Θεώρημα 4.5 (Bourdon-Feldman)**.** *Έστω T ένας τελεστής σε ένα χώρο Fréchet X και $x \in X$. Αν η τροχιά $\mathrm{Orb}(x,T)$ είναι κάπου πυκνή στον X, τότε η τροχιά αυτή είναι πυκνή στον X.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι αν $\operatorname{int}(\overline{\mathrm{Orb}(x,T)}) \neq \emptyset$ τότε $\overline{\mathrm{Orb}(x,T)} = X$. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$T(X \setminus U(x)) \subseteq X \setminus U(x) \Leftrightarrow T^{-1}(U(x)) \subseteq U(x).$$

Βήμα 1. Δείχνουμε ότι $T^{-1}(U(x)) \subseteq U(x)$.

Απόδειξη. Αφού $U(x) \neq \emptyset$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}_0$ με $x_m = T^m x \in U(x)$.
Έστω τώρα $y \in T^{-1}(U(x))$, και έστω V μια γειτονιά του y. Από την ιδιότητα (ii) έχουμε ότι το x_m έχει κάπου πυκνή τροχιά. Από το λήμμα (4.4) μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $p(T)x_m \in V \cap T^{-1}(U(x))$ και αυτό γιατί $V \cap T^{-1}(U(x)) \neq \emptyset$. Από την ιδιότητα (ii) τώρα έχουμε ότι:

$$p(T)x_m \in p(T)(U(x)) = p(T)(U(T^{m+1}x)) \subseteq p(T)(D(T^{m+1}x)),$$

όμως εφόσον ισχύει ότι $p(T)x_m \in V \cap T^{-1}(U(x))$ έχουμε ότι $T(p(T)x_m) \in U(x) \subseteq D(x)$. Εφόσον ο τελεστής $p(T)$ είναι συνεχής και $T \circ p(T) = p(T) \circ T$, οι ιδιότητες (iii) και (ii) συνεπάγονται ότι

$$p(T)(D(T^{m+1}x)) \subseteq D(T(p(T)x_m)) \subseteq D(x)$$

και αυτό γιατί

$$T(p(T)x_m) \in D(x) \Rightarrow D(T(p(T)x_m)) \subseteq D(x).$$

Άρα

$$p(T)x_m \in V \quad \text{και} \quad p(T)x_m \in D(x) \Rightarrow V \cap D(x) \neq \emptyset.$$

Αφού το V είναι τυχαίο και επιπλέον γειτονιά του y, έχουμε ότι το y είναι οριακό σημείο του $D(x)$. Επίσης αφού το $D(x)$ είναι κλειστό, ισχύει $y \in D(x)$, οπότε τελικά $T(X \setminus U(x)) \subseteq X \setminus U(x)$. □

Βήμα 2. Θα δείξουμε ότι για κάθε $z \in X \setminus U(x)$, ισχύει $D(z) \subseteq X \setminus U(x)$. Πράγματι αφού το $X \setminus U(x)$ είναι T-αναλλοίωτο και $z \in X \setminus U(x)$, συνεπάγεται ότι $T^k(z) \in X \setminus U(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\mathrm{Orb}(z,T) \subseteq X \setminus U(x) \Rightarrow \overline{\mathrm{Orb}(z,T)} \subseteq \overline{X \setminus U(x)} = X \setminus U(x),$$

αφού το σύνολο $X \setminus U(x)$ είναι κλειστό.

Βήμα 3. Για κάθε πολυώνυμο $p \neq 0$, ισχύει $p(T)x \in X \setminus \partial D(x)$.

Απόδειξη. Έστω $p(T)x \in \partial D(x)$ για κάποιο $p \neq 0$. Από το λήμμα (4.3) ο τελεστής $p(T)$ έχει πυκνή εικόνα άρα υπάρχει $y \in X$ με $p(T)y \in U(x)$. Αφού $p(T)x \notin U(x)$ από την ιδιότητα (iii) και το βήμα 2 έχουμε ότι

$$p(T)(D(x)) \subseteq D(p(T(x)) \subseteq X \setminus U(x).$$

Ως εκτούτου ισχύει

$$p(T)y \in U(x) \Rightarrow p(T)y \notin X \setminus U(x) \Rightarrow p(T)y \notin p(T)(D(x)) \Rightarrow y \notin D(x) \Rightarrow y \in X \setminus D(x).$$

Από το λήμμα (4.4) υπάρχει πολυώνυμο q τέτοιο ώστε $q(T)x$ να είναι αρκετά κοντά στο y και να ισχύει $q(T)x \in X \setminus D(x) \subseteq X \setminus U(x)$ και $p(T)q(T)x \in U(x)$. Αφού $p(T)x \in D(x)$, από την ιδιότητα (iii) και το βήμα 2 έχουμε ότι

$$p(T)q(T)x = q(T)p(T)x \in q(T)(D(x)) \subseteq D(q(T)x) \subseteq X \setminus U(x),$$

άτοπο. □

Βήμα 4. Ισχύει ότι $D(X) = X$.

Από το Βήμα 3 έχουμε ότι

$$A = \{p(T)x : \, p \neq 0 \, \text{πολυώνυμο}\} \subseteq U(x) \cup (X \setminus D(x)),$$

όπου τα σύνολα $U(x)$, $X \setminus D(x)$ είναι ανοιχτά και ξένα μεταξύ τους. Αφού από το λήμμα (4.4), το A είναι συνεκτικό και πυκνό, ισχύει ότι $A \cap U(x) \neq \emptyset$, άρα πρέπει να έχουμε ότι $A \cap (X \setminus D(x)) = \emptyset$. Ως εκτούτου, $A \subseteq D(x)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $D(x) = X$.

□

4.3 Αναμειγνύοντες και ασθενώς αναμειγνύοντες τελεστές

Σε αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε κάποιες ισχυρότερες μορφές τοπολογικής μεταβατικότητας όπως είναι η ιδιότητα της ανάμειξης και η ιδιότητα της ασθενούς ανάμειξης.

Ορισμός 4.6. *Έστω X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Ένας τελεστής $T \in \mathfrak{L}(X)$ θα λέγεται αναμειγνύων αν ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε ζεύγος U, V μη κενών και ανοιχτών υποσυνόλων του X, υπάρχει ένα $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ για όλα τα $n \geq N$.*

Θεώρημα 4.7 (Κριτήριο της Kitai)**.** *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος και $T : X \to X$ ένας τελεστής. Αν υπάρχουν πυκνά σύνολα $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subseteq X$ και μια απεικόνιση $S : \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_2$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \mathcal{D}_1$ και για κάθε $y \in \mathcal{D}_2$, να ισχύουν τα εξής:*

(i) $T^n x \to 0$,

(ii) $S^n y \to 0$,

(iii) $TSy = y$,

τότε ο τελεστής T είναι αναμειγνύων.

Απόδειξη. Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοιχτά σύνολα. Αφού τα $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ είναι πυκνά, υπάρχουν $x \in \mathcal{D}_1 \cap U$ και $y \in \mathcal{D}_2 \cap V$. Ορίζουμε $u_n = S^n y$, για $n \in \mathbb{N}_0$. Ισχύει $T^n x \to 0$ και $u_n \to 0$, όταν $n \to +\infty$ και επειδή $T^n(u_n) = T^n(S^n y) = y$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq N$ να ισχύουν $x + u_n \in U$ και $T^n(x + u_n) = T^n x + y \in V$. Άρα ο T είναι αναμειγνύων. □

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αν ο τελεστής T είναι υπερκυκλικός τότε και κάθε δύναμή του, ο T^p είναι υπερκυκλικός. Είναι λοιπόν φυσικό να αναρωτηθούμε αν και ο τελεστής $T \oplus T$ παραμένει υπερκυκλικός.

Ορισμός 4.8. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Μια συνεχής απεικόνιση $T : X \to X$ λέγεται ασθενώς αναμειγνύουσα αν η απεικόνιση $T \times T$ είναι τοπολογικά μεταβατική.*

Εδώ η απεικόνιση $T \times T : X \times X \to X \times X$ είναι μια απεικόνιση που ορίζεται ως εξής: $(T \times T)(x, y) = (T(x), T(y))$. Όταν ο T είναι γραμμικός τελεστής, ταυτίζουμε τον $T \times T$ με τον τελεστή $T \oplus T \in \mathfrak{L}(X \oplus X)$. Υπενθυμίζουμε ότι από το θεώρημα μεταβατικότητας του Birkhoff (θεώρημα 3.4) μπορούμε να αντικαταστήσουμε στον παραπάνω ορισμό την τοπολογική μεταβατικότητα με την υπερκυκλικότητα αν ο υποκείμενος χώρος X είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος Baire χωρίς μεμονωμένα σημεία. Ειδικότερα για ένα διαχωρίσιμο F-χώρο έχουμε:

Ορισμός 4.9. *Ένας τελεστής T σε ένα διαχωρίσιμο χώρο F λέγεται ασθενώς αναμειγνύων αν ο τελεστής $T \oplus T$ είναι υπερκυκλικός.*

Λόγω του θεωρήματος μεταβατικότητας του Birkhoff, αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ότι για οποιαδήποτε τετράδα U_1, U_2, V_1, V_2 μη κενών και ανοιχτών υποσυνόλων του X, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \quad \text{και} \quad T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Παρακάτω θα αποδείξουμε το θεώρημα Bès-Peris [10]. Ο ακόλουθος ορισμός θα μας δώσει τη σύνδεση ανάμεσα στο κριτήριο υπερκυκλικότητας και της ιδιότητας της ασθενούς ανάμειξης.

Ορισμός 4.10. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος. Έστω μια αύξουσα ακολουθία από ακεραίους (n_k), ένας τελεστής $T \in \mathfrak{L}(X)$ λέγεται κληρονομικά υπερκυκλικός σε σχέση με την ακολουθία (n_k), αν για κάθε υπακολουθία (m_k) της (n_k), η ακολουθία $(T^{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ είναι καθολική, δηλαδή υπάρχει ένα $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{T^{m_k}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στον X. Ένας τελεστής T λέγεται κληρονομικά υπερκυκλικός αν είναι κληρονομικά υπερκυκλικός σε σχέση με κάποια ακολουθία (n_k).*

Σημειώνουμε ότι από την απόδειξη του θεωρήματος της μεταβατικότητας, μια ακολουθία (T^{m_k}) είναι καθολική αν και μόνο αν για κάθε U, V μη κενά ανοιχτά υποσύνολα του X, μπορούμε να βρούμε ένα k τέτοιο ώστε $T^{m_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ και αν αυτό ισχύει για ένα k, μπορούμε να βρούμε άπειρα k με αυτήν την ιδιότητα.

Θεώρημα 4.11 (Bẽs-Peris). *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας.

(ii) Ο T είναι κληρονομικά υπερκυκλικός.

(iii) Ο T είναι ασθενώς αναμειγνύων.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Αν ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας σε σχέση με μια ακολουθία (n_k), τότε για κάθε υπακολουθία (m_k) της (n_k), η ακολουθία (T^{m_k}) είναι καθολική. Αυτό σημαίνει ότι ο T είναι κληρονομικά υπερκυκλικός σε σχέση με την ακολουθία (n_k).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Υποθέτουμε ότι ο T είναι κληρονομικά υπερκυκλικός σε σχέση με μια ακολουθία (n_k), και έστω ότι U_1, U_2, V_1, V_2 μη κενά ανοιχτά υποσύνολα του X. Αφού η ακολουθία (T^{n_k}) είναι καθολική, μπορούμε να βρούμε μια άπειρη υπακολουθία (m_k) της (n_k), τέτοια ώστε $T^{m_k}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Από υπόθεση, η ακολουθία (T^{m_k}) είναι καθολική. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^{m_k}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Τότε $(T \times T)^{m_k}(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$, το οποίο αποδεικνύει ότι ο T είναι ασθενώς αναμειγνύων.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Υποθέτουμε ότι ο $T \oplus T$ είναι υπερκυκλικός, με υπερκυκλικό διάνυσμα $x \oplus y$. Δείχνουμε ότι το κριτήριο υπερκυκλικότητας ικανοποιείται για $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathrm{Orb}(x, T)$. Το σημείο κλειδί είναι να παρατηρήσουμε ότι $x \oplus T^n(y) \in \mathrm{HC}(T \oplus T)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επειδή ο τελεστής $I \oplus T^n$ έχει πυκνή εικόνα και μετατίθεται με τον $T \oplus T$. Αφού $y \in \mathrm{HC}(T)$, έχουμε ότι για κάθε μη κενό υποσύνολο του X έστω U, μπορούμε να βρούμε ένα $u \in U$ τέτοιο ώστε $x \oplus u \in \mathrm{HC}(T \oplus T)$.

Ειδικότερα, υπάρχει ένα u αυθαιρέτως κοντά στο 0 και ένα $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $T^n(x) \oplus T^n(u)$ να είναι αυθαιρέτως κοντά στο $0 \oplus x$. Με άλλα λόγια, κάποιος μπορεί να βρεί μια ακολουθία $(u_k) \subseteq X$ και μια αύξουσα ακολουθία από ακεραίους (n_k) τέτοια ώστε $u_k \to 0$, $T^{n_k}(x) \to 0$ και $T^{n_k}(u_k) \to x$.

Τώρα ας ορίσουμε τις απεικονίσεις $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$, με $S_{n_k}(T^j x) = T^j u_k$, όπου $j \in \mathbb{N}$. Ο ορισμός έχει νόημα αφού τα διανύσματα $T^j(x)$ είναι ανα δύο διαφορετικά. Τότε

$$\begin{aligned} T^{n_k}(T^j x) &= T^j T^{n_k}(x) \to 0, \\ S_{n_k}(T^j x) &= T^j u_k \to 0, \\ T^{n_k} S_{n_k}(T^j x) &= T^j T^{n_k}(u_k) \to T^j x \end{aligned}$$

για όλα τα $j \in \mathbb{N}$, έτσι ο T ικανοποιεί το κριτήριο υπερκυκλικότητας σε σχέση με την ακολουθία (n_k). □

4.4 Χαοτικοί Τελεστές

Σε κοινή γλώσσα η χαοτική συμπεριφορά συνήθως αναφέρεται σε φαινόμενα με απρόβλεπτη συμπεριφορά. Στο κλασσικό του βιβλίο ο R. L. Devaney προτείνει τον ακόλουθο μαθηματικό ορισμό [16].

Ορισμός 4.12. *Έστω $f : E \to E$ μια συνεχής απεικόνιση που δρά πάνω σε ένα μετρικό χώρο (E, d). Τότε η απεικόνιση λέγεται χαοτική αν*

(a) η f είναι τοπολογικά μεταβατική.

(b) η f έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων (το $x \in E$ είναι περιοδικό για την f αν ισχύει ότι $f^k(x) = x$ για κάποιο $k \geq 1$)

(c) *η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες: δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in E$ και για κάθε περιοχή U του x, υπάρχει $y \in U$ και ακέραιος $n \geq 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.*

Με μια πρώτη ματιά η τρίτη ιδιότητα φαίνεται να είναι η πιο σημαντική, αφού συλλαμβάνει την διαισθητική ιδέα της απρόβλεπτης συμπεριφοράς. Ωστόσο αποδεικνύεται το εξής:

Θεώρημα 4.13 (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey). *Έστω X ένας μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Αν το δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ είναι τοπολογικά μεταβατικό και έχει ένα πυκνό σύνολο από περιοδικά σημεία τότε το T έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες σε σχέση με τη μετρική που ορίζει την τοπολογία του X.*

Το θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να παραλείψουμε τη συνθήκη (c) του ορισμού (4.12), οπότε μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της χαοτικής απεικόνισης ως εξής:

Ορισμός 4.14. *Έστω $f : E \to E$ μια συνεχής απεικόνιση που δρά πάνω σε ένα μετρικό χώρο (E, d). Τότε η απεικόνιση λέγεται χαοτική αν*

(a) *η f είναι τοπολογικά μεταβατική.*

(b) *η f έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων (το $x \in E$ είναι περιοδικό για την f αν ισχύει ότι $f^k(x) = x$ για κάποιο $k \geq 1$).*

Στο πλαίσιο των γραμμικών συστημάτων κάποιος μπορεί να πει περισσότερα: η υπερκυκλικότητα και μόνο συνεπάγεται μια ισχυρή μορφή της εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες.

Πρόταση 4.15. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι ο T είναι υπερκυκλικός. Τότε για κάθε $x \in X$, υπάρχει ένα G_δ πυκνό υποσύνολο $G(x)$ του X τέτοιο ώστε το σύνολο $\{T^n(y) - T^n(x) : n \geq 0\}$ να είναι πυκνό στον X για κάθε $y \in G(x)$.*

Απόδειξη. Αναζητούμε ένα πυκνό G_δ σύνολο τέτοιο ώστε $y - x \in \mathrm{HC}(T)$ για κάθε $y \in G(x)$. Το σύνολο αυτό είναι το $G(x) = x + \mathrm{HC}(T)$. □

Ορισμός 4.16. *Ένας τελεστής $T \in \mathfrak{L}(X)$ λέγεται χαοτικός αν ο T είναι υπερκυκλικός και το σύνολο*

$$\mathrm{Per}(T) = \{x \in X : \exists k \geq 1 \text{ με } T^k(x) = x\},$$

είναι πυκνό στον X.

Παρακάτω παραθέτουμε ένα κριτήριο για την χαοτικότητα, το οποίο αποτελεί μια ισχυροποίηση των συνθηκών του Κριτηρίου Υπερκυκλικότητας.

Θεώρημα 4.17 (Κριτήριο Χαοτικότητας). *Έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα πυκνό σύνολο $\mathfrak{D} \subseteq X$ και μια απεικόνιση $S : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ τέτοια ώστε*

(1) *Οι σειρές $\sum T^n(x)$ και $\sum S^n(x)$ συγκλίνουν unconditionally για κάθε $x \in \mathfrak{D}$.*

(2) *$T \circ S = I$ στο $\mathfrak{D}$.*

Τοτε ο τελεστής T είναι χαοτικός.

Απόδειξη. Από το (1) παίρνουμε άμεσα ότι $T^n(x) \to 0$ και $S^n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{D}$. Έτσι αν πάρουμε $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}$ και $n_k = k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο υπερκυκλικότητας, οπότε έχουμε ότι ο τελεστής T είναι υπερκυκλικός. Τώρα αν επιλέξουμε ένα $x \in \mathfrak{D}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + x + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x).$$

Από το (1) έχουμε ότι οι σειρές στην παραπάνω εξίσωση συγκλίνουν και επίσης $x_k \to x$. Επιπλέον, από τη συνθήκη (2) παίρνουμε ότι $T^k(x_k) = x_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, έστω $k \in \mathbb{N}$, τότε

$$T^k(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} T^k \circ S^{nk}(x) + T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^k \circ T^{nk}(x) = \tag{4.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S^{(n-1)k}(x) + \left(T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n+1)k}(x) \right) = \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + S^0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x) = x_k. \tag{4.3}$$

Έτσι, κάθε σημείο του πυκνού συνόλου $\mathfrak{D}$ μπορεί να προσεγγισθεί από περιοδικά σημεία του T, συνεπώς το σύνολο $\mathrm{Per}(T)$ είναι πυκνό στον X. $\square$

Το κριτήριο που μόλις παραθέσαμε είναι μόνο ικανή συνθήκη για την ύπαρξη χαοτικότητας. Ωστόσο αξίζει να σημειώσουμε ότι οι χαοτικοί τελεστές ικανοποιούν το κριτήριο υπερκυκλικότητας [7].

Πρόταση 4.18. *Κάθε χαοτικός τελεστής είναι ασθενώς αναμειγνύων.*

Κεφάλαιο 5

Τελεστές μετατόπισης σε χώρους ακολουθιών

5.1 Μετατοπίσεις με βάρη

Το βασικό μοντέλο των μετατοπίσεων είναι η απεικόνιση της προς τα πίσω μετατόπισης

$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Με σκοπό να διαχωρίσουμε αυτήν την μετατόπιση από την biletaral μετατόπιση που θα συζητήσουμε αργότερα θα ονομάζουμε την παραπάνω μετατόπιση unilateral μετατόπιση.

Όπως δείξαμε σε προηγούμενη ενότητα στο παράδειγμα του Rolewicz, για κάθε $|\lambda| > 1$, τα πολλαπλάσια του τελεστή B, $\lambda B(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, είναι υπερκυκλικά στον ακολουθιακό χώρο ℓ^2. Επεκτείνουμε λοιπόν το ορισμό αφήνοντας τα βάρη να διαφέρουν από συντεταγμένη σε συντεταγμένη, το οποίο μας οδηγεί στην έννοια της unilateral μετατόπισης με βάρη:

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (w_2x_2, w_3x_3, \ldots)$$

όπου

$$w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

είναι μια ακολουθία μη μηδενικών στοιχείων του $\mathbb{K}$, που καλείται ακολουθία βαρών.

Θα μπορούσαμε επίσης να γενικεύσουμε αυτούς τους τελεστές σε διαφορετική κατεύθυνση. Στον τελεστή του Rolewicz θα μπορούσε για παράδειγμα να αντικαταστηθεί ο υποκείμενος χώρος ℓ^2 από κάποιον από τους χώρους ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$ ή και τον c_0.

Πιο γενικά κάποιος θα μπορούσε να πάρει ως υποκείμενο χώρο έναν τυχαίο ακολουθιακό χώρο X, ο οποίος είναι, ένας διανυσματικός χώρος από ακολουθίες, ή με άλλα λόγια ένας υπόχωρος του $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον, ο X θα έπρεπε να είναι εφοδιασμένος με μια τοπολογία, που θα είναι συμβατή με την ακολουθιακή δομή του χώρου. Απαιτούμε λοιπόν η εμφύτευση $X \to \omega$ να είναι συνεχής, πράγμα που σημαίνει ότι η σύγκλιση στον X, θα πρέπει να συνεπάγεται σύγκλιση κατά συντεταγμένες. Ένας χώρος Banach(Fréchet,. . .) αυτού του είδους καλείται ακολουθιακός χώρος Banach (Fréchet,. . .). Οι όροι της ακολουθίας $x, y, z \ldots$ θα συμβολίζονται με $x_n, y_n, z_n, \ldots, n \geq 1$.

Με e_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

όπου το 1 είναι στην n-θέση θα συμβολίζουμε τις ορθομοναδιαίες ακολουθίες. Αν οι e_n περιέχονται στον χώρο X και η γραμμική τους θήκη είναι πυκνός υπόχωρος του X, τότε ένας εναλλακτικός τρόπος για να περιγράφουμε τις μετατοπίσεις με βάρη είναι ο εξής:

$$B_we_n = w_ne_{n-1},\ n \geq 1, \quad \text{όπου}\, e_0 = 0.$$

Η συνέχεια της εμφύτευσης $X \to \omega$ έχει ως συνέπεια τη συνέχεια του συναρτησιακού

$$X \to \mathbb{K},\, x \to x_n,\, n \geq 1$$

Πρόταση 5.1. *Έστω X ένας ακολουθιακός χώρος Fréchet. Τότε κάθε μετατόπιση με βάρη $B_w : X \to X$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ με $x_n = (x_1^n, \ldots, x_k^n, \ldots)$. Ας υποθέσουμε ότι $x_n \to x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ και $B_w(x_n) \to y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots)$. Αν δείξουμε ότι $B_w(x) = y$, τότε από θεώρημα του κλειστού γραφήματος [1] ο B_w είναι συνεχής.

Ισχύει

$$x_n \to x \Longleftrightarrow x_i^n \to x_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} B_w(x_n) &\to y \Rightarrow \\ (w_2 x_2^n, \ldots, w_k x_k^n, \ldots) &\to (y_1, \ldots, y_k, \ldots) \Rightarrow \\ w_i x_i^n &\to y_{i-1}, \quad \forall i \geq 2 \Rightarrow \\ x_i^n &\to \frac{y_{i-1}}{w_i} \quad \forall i \geq 2. \end{aligned}$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι

$$x_i = \frac{y_{i-1}}{w_i} \Longleftrightarrow y_{i-1} = x_i w_i \quad \forall i \geq 2.$$

Άρα $B_w(x) = (w_2 x_2, \ldots, w_k x_k, \ldots) = (y_1, \ldots, y_k \ldots) = y$. □

Ξεκινάμε με τη μελέτη του (χωρίς βάρη) τελεστή μετατόπισης προς τα πίσω B. Τα αποτελέσματα τότε αμέσως μεταφέρονται σε όλες τις μετατοπίσεις με βάρη μέσω μιας απλής συζυγίας. Το ακόλουθο τεχνικό αποτέλεσμα θα μας βοηθήσει να απλοποιήσουμε τη συνθήκη, που χαρακτηρίζει την υπερκυκλικότητα του B.

Λήμμα 5.2. *Έστω X μετρικός χώρος, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $u \in X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ από φυσικούς τέτοια ώστε να ισχύει*

$$u_{n_k - j} \to u \quad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

Τότε υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(m_k)_k$ από φυσικούς τέτοια ώστε

$$u_{m_k + j} \to u \quad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

Απόδειξη. Έστω d η μετρική του χώρου X. Δείχνουμε αρχικά ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει κάποιο $N_k \geq k+2$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$d(u_{N_k - j}, u) < \frac{1}{k}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Πράγματι για $j = 1, \ldots, k$ από υπόθεση υπάρχει $l_j \geq k+2$ ώστε $d(u_{n_l - j}, u) < \frac{1}{k}$ για κάθε $l \geq l_j$. Θέτοντας $N_k = \max\{n_{l_j} : j = 1, \ldots, k\}$ έχουμε ότι $N_k \geq k+2$ και $d(u_{N_k - j}, u) < \frac{1}{k}$ για $j = 1, \ldots k$.

Αν θέσουμε $m_k = N_k - k - 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $d(u_{m_k + k + 1 - j}, u) < \frac{1}{k}$ για $j = 1, \ldots k$. Συνεπώς $d(u_{m_k + j}, u) < \frac{1}{k}$ για κάθε k και j με $1 \leq j \leq k$. Από αυτό προκύπτει ότι $u_{m_k + j} \to u$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. □

[1] Έστω X, Y χώροι Fréchet. Αν η γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ έχει κλειστό γράφημα, δηλαδή αν $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y συνεπάγεται ότι $Tx = y$, τότε η T είναι συνεχής.

Ορισμός 5.3. *Έστω X ακολουθιακός χώρος Fréchet. Τότε η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται βάση για το χώρο X αν κάθε e_n, $n\in\mathbb{N}$ ανήκει στον X και, για κάθε $x\in X$,ισχύει*

$$x = \lim_{N\to+\infty}(x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

Θεώρημα 5.4. *Έστω X ένας ακολουθιακός χώρος Fréchet στον οποίο η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση. Υποθέτουμε ότι η προς τα πίσω μετατόπιση B είναι τελεστής στον X. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) Ο B είναι υπερκυκλικός.

(ii) Ο B είναι ασθενώς αναμειγνύων.

(iii) Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(n_k)_k$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $e_{n_k} \to 0$ στον X καθώς $k\to+\infty$.

Απόδειξη. Έστω $\|\,\|_F$ μια F-νόρμα στον X που επάγει την τοπολογία στον X.

$(i) \Longrightarrow (iii)$ Υποθέτουμε ότι ο B είναι υπερκυκλικός. Για να δειχτεί το (iii) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $N\in\mathbb{N}$ και $\epsilon>0$ υπάρχει $n\ge N$ με $\|e_n\|_F<\epsilon$.

Αφού από την υπόθεση της βάσης έχουμε ότι για κάθε $x\in X$ η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η ακολουθία $(x_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0 στον X. Έστω $T_n : X\to X$ για $n=1,2,\dots$ ακολουθία γραμμικών τελεστών με τύπο $T_n(x) = x_n e_n$ όταν $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)$. Τότε για κάθε $x\in X$ το σύνολο $\{T_n(x) : n\in\mathbb{N}\} = \{x_n e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο αφού $x_n e_n\to 0$. Άρα από το θεώρημα Banach-Steinhaus[2] η οικογένεια τελεστών $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής, συνεπώς υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in X$ να ισχύει η συνεπαγωγή

$$\|x\|_F<\delta \Longrightarrow \|x_n e_n\|_F < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}\,. \tag{5.1}$$

Επιπλέον, αφού η απεικόνιση $\pi_1\circ\phi : X\to\mathbb{K}$ (όπου η $\phi : X\to\omega$ η εμφύτευση και π_1 η κανονική προβολή στην πρώτη συντεταγμένη του ω) είναι συνεχής από το τρόπο ορισμού της τοπολογίας του ω, υπάρχει κάποιο $\eta>0$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $x\in X$,

$$\|x\|_F<\eta \Longrightarrow |x_1|\le\frac{1}{2} \tag{5.2}$$

Τώρα αφού ο B είναι υπερκυκλικός και ως εκ-τούτου τοπολογικά μεταβατικός, υπάρχουν $n\ge N$ και $x\in X$ τέτοια ώστε να ισχύουν $\|x\|_F<\delta$ και $\|B^{n-1}x-e_1\|_F<\eta$. Τώρα από (5.1), (5.2) και αφού ισχύει $\|B^{n-1}x-e_1\|_F<\eta$ έχουμε ότι

$$\|x_n e_n\|_F<\frac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|(x_n, x_{n+1},\dots)-e_1\|_F<\eta \Rightarrow |x_n-1|\le\frac{1}{2} \tag{5.3}$$

η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι το x_n είναι πιο κοντά στο 1 σε σχέση με το 0, πράγμα που μας οδηγεί στη σχέση

$$|x_n^{-1}-1| = \left|\frac{1-x_n}{x_n}\right|\le 1$$

Από αυτό και τη σχέση (5.3) συναγάγουμε, χρησιμοποιώντας και τις ιδιότητες της F-νόρμας ότι

$$\|e_n\|_F = \|(x_n^{-1}-1)x_n e_n + x_n e_n\|_F \le \|(x_n^{-1}-1)x_n e_n\|_F + \|x_n e_n\|_F < \epsilon \tag{5.4}$$

άρα αποδείξαμε αυτό που θέλαμε.

[2]Έστω X και Y χώροι Fréchet και $T_j : X\to Y$, $j\in J$,τελεστές. Αν, για κάθε $x\in X$, το σύνολο $\{T_j x : j\in J\}$ είναι φραγμένο στον Y, τότε η οικογένεια $(T_j)_{j\in J}$ είναι ισοσυνεχής.

$(iii) \implies (ii)$ Εφαρμόζουμε το κριτήριο υπερκυκλικότητας για τα σύνολα $X_0 = Y_0 = c_{00}$ όπου c_{00} είναι το σύνολο όλων των τελικά μηδενικών ακολουθιών το οποίο, εξαιτίας του γεγονότος ότι η ακολουθία $(e_n)_n$ είναι βάση του X, είναι πυκνό στον X.

Ορίζουμε την S_n ως την απεικόνιση που είναι η n-οστή επανάληψη της προς τα εμπρός μετατόπισης

$$F : X \to X \quad \text{με τύπο} \quad F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots),$$

δηλαδή, $S_n = F^n : Y_0 \to X$, $n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε μόνο την (ii) συνθήκη του Κριτηρίου, οι άλλες δύο ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο. Για την απόδειξη της (ii), από τη συνέχεια του τελεστή B και του γεγονότος ότι $e_{n_k} \to 0$ έχουμε

$$e_{n_k - j} = B^j e_{n_k} \to B^j(0) = 0 \quad \text{καθώς}\, k \to +\infty$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Όμως αφού η ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι αυστηρά αύξουσα, από το Λήμμα (5.2) έχουμε ότι υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

$$e_{m_k + j} \to 0 \quad \text{καθώς}\, k \to +\infty$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άλλα αφού $S_{m_k} e_j = e_{m_k+j}$, έχουμε από τη γραμμικότητα του τελεστή S ότι

$$S_{m_k} y \to 0$$

για κάθε $y \in Y_0$. Αυτό μας δείχνει ότι οι συνθήκες του Υπερκυκλικού κριτηρίου ικανοποιούνται για την ακολουθία $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, έτσι ο τελεστής B είναι ασθενώς αναμειγνύων.

$(ii) \implies (i)$ Ισχύει για όλους τους τελεστές στον X. □

Σημειώνουμε ότι το να είναι τελεστής ο B στον X είναι μέρος της υπόθεσης. Από την πρόταση (5.1) αυτό μπορεί να επαναδιατυπωθεί απλά λέγοντας ότι $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$ όταν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

Παράδειγμα 5.5. *Έστω $u = (u_n)_n$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (η οποία θα καλείται ακολουθία βαρών) και*

$$\ell^p(u) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p u_n < +\infty \right\}, \quad 1 \le p < +\infty,$$

και νόρμα $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p u_n \right)^{\frac{1}{p}}$. Ο $\ell^p(u)$ με την παραπάνω νόρμα καλείται ℓ^p χώρος με βάρη.

Ισχυρισμός. *Ο B είναι τελεστής στον χώρο $\ell^p(u)$ αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $x \in \ell^p(u)$, να ισχύει ότι*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p u_n \right)^{\frac{1}{p}} \le M \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p u_n \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.5}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τη σχέση $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{u_{n+1}} < +\infty$.

Απόδειξη. Ο B είναι τελεστής στον χώρο $\ell^p(u)$ αν και μόνο αν $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(u)$ να ισχύει

$$\begin{aligned} \left\| B((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \right\|_p &\le M \left\| (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_p \Leftrightarrow && (5.6) \\ \left\| (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \right\|_p &\le M \left\| (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_p \Leftrightarrow && (5.7) \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p u_n \right)^{\frac{1}{p}} &\le M \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p u_n \right)^{\frac{1}{p}} && (5.8) \end{aligned}$$

και έτσι αποδείξαμε το πρώτο σκέλος του ισχυρισμού.

Έστω τώρα ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{u_{n+1}} < +\infty$. Τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\frac{u_n}{u_{n+1}} < M^p$. Από αυτό έχουμε ότι $u_n \leq M^p u_{n+1}$, πράγμα που συνεπάγεται ότι για $x = (x_n)_n \in \ell^p(u)$ θέτοντας

$$a = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p u_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p u_n \leq M^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p u_{n+1} = M^p(a^p - |x_1|^p u_1) \leq M^p a^p = M^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p u_n$$

και υψώνοντας την ανισότητα στη δύναμη $\frac{1}{p}$ παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

Αντίστροφα έστω ότι για κάθε $x \in \ell^p(u)$ ισχύει η σχέση (5.5). Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρώντας το $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ από την (5.5) παίρνουμε ότι

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{k,n+1}|^p u_n\right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{k,n}|^p u_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

και άρα για $k \geq 2$ παίρνουμε $u_{k-1}^{\frac{1}{p}} \leq M u_k^{\frac{1}{p}}$. Συνεπώς προκύπτει ότι ότι $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{u_{n+1}} < +\infty$. □

Ισχυρισμός. *Αν η απεικόνιση $B : \ell^p(u) \to \ell^p(u)$ ορίζεται καλά, τότε ο B είναι υπερκυκλικός αν και μόνο αν ισχύει $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο B είναι υπερκυκλικός και $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n > 0$, δηλαδή $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $0 < \epsilon \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε από την απόδειξη του θεωρήματος (5.4) για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$ και για $N = 1$ υπάρχει κάποιο $n \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$\|e_n\| < \epsilon \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{n,k}|^p u_k < \epsilon \Longrightarrow u_n < \epsilon$$

πράγμα άτοπο, άρα $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0$. Τότε υπάρχει αύξουσα υπακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}$ με $u_{n_k} \to 0$. Έχουμε ότι

$$\|e_{n_k}\| = \sum_{l=1}^{\infty} |\delta_{k,l}|^p u_{n_l} = u_{n_k} \to 0$$

άρα από το Θεώρημα 5.4 ο B είναι υπερκυκλικός. □

Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη του θεωρήματος (5.4), αλλά εφαρμόζοντας αυτήν την φορά το κριτήριο της Kitai, αποκτούμε έναν χαρακτηρισμό της mixing ιδιότητας του τελεστή B.

Θεώρημα 5.6. *Έστω X ένας ακολουθιακός χώρος Fréchet στον οποίο η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο B είναι αναμειγνύων.*

(ii) *$e_n \to 0$ στον X καθώς $n \to +\infty$*

Όσον αφορά τη χαοτικότητα ενός τελεστή σε ένα ακολουθιακό χώρο εμφανίζεται ένα περίεργο φαινόμενο. Υπό την υπόθεση ότι ο χώρος X έχει unconditional βάση θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη ενός και μόνο περιοδικού σημείου για τον τελεστή της προς τα πίσω μετατόπισης συνεπάγεται ότι ο B είναι χαοτικός.

Ορισμός 5.7. *Έστω X χώρος Fréchet και $(e_n)_n$ βάση στον X. Η βάση αυτή λέγεται unconditional αν για κάθε $(x_n)_n \in X$ και για κάθε ακολουθία από 0-1 $(\epsilon_n)_n$ η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n e_n$$

συγκλίνει στον X.

Θεώρημα 5.8. *Έστω X ένας ακολουθιακός χώρος Fréchet στον οποίο η ακολουθία $(e_n)_n$ είναι unconditional βάση. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση της μετατόπισης προς τα πίσω B είναι ένας τελεστής στον X.*
Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) *Ο B είναι χαοτικός.*

(ii) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ συγκλίνει στον X.*

(iii) *Οι σταθερές ακολουθίες ανήκουν στον X.*

(iv) *Υπάρχει $x \neq 0$ περιοδικό σημείο του B.*

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (iv)$ Είναι προφανές.
$(iv) \Longrightarrow (ii)$. Αν $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \neq 0$ είναι ένα μη-τετριμμένο περιοδικό σημείο του B, τότε προφανώς η x είναι περιοδική ακολουθία. Έστω ότι η περίοδος του x είναι N. Τότε υπάρχει $j \leq N$ με $x_j \neq 0$. Εφόσον το x έχει περίοδο N έχουμε ότι $x_{j+\nu N} = x_j \neq 0$ για κάθε $\nu \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N} \in X.$$

Πράγματι, αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ τότε για $\epsilon_k = 0$ όταν $k \neq j + \nu N$ για $\nu \geq 0$ και $\epsilon_k = 1$ όταν $k = j + \nu N$ για $\nu \geq 0$ έχουμε ότι

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu x_\nu e_\nu \in X \Longrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} x_j e_{j+\nu N} \in X$$

Άρα

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N} = \frac{1}{x_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} x_j e_{j+\nu N} \in X.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον τελεστή B, $N-1$ φορές στο $\sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
B\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N}\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} B(e_{j+\nu N}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N-1} \in X \\
B^2\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N}\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} B^2(e_{j+\nu N}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N-2} \in X \\
&\vdots \\
B^{N-1}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N}\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} B^{N-1}(e_{j+\nu N}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_{j+\nu N-N+1} \in X.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας αυτές τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (e_{j+\nu N-1} + \ldots + e_{j+\nu N-N+1}) \in X \Longrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{N-1} e_{j+\nu N-k}\right] \in X$$

Όμως

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{N-1} e_{j+\nu N-k}\right] = (e_1+\ldots+e_j)+(e_{j+1}+\ldots+e_{j+N-1})+(e_{j+N}+e_{j+N+1}+\ldots+e_{j+2N-1})+\ldots$$

Άρα

$$(1,1,\ldots,1,\ldots)\in X.$$

$(iii) \Longleftrightarrow (ii)$ Είναι προφανές.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Πρώτα από το Θεώρημα 5.4, η συνθήκη (ii) συνεπάγεται ότι ο τελεστής B είναι υπερκυκλικός. Επίσης αφού $(1,1,1\ldots)\in X$, λόγω της uncondiotionality της βάσης όλες οι ακολουθίες από 0-1 ανήκουν στον X, και άρα όλες οι περιοδικές ακολουθίες (που αποτελούν ακριβώς τα περιοδικά σημεία του B) ανήκουν επίσης στον X ως γραμμικοί συνδυασμοί των 0-1 ακολουθιών.

Απομένει να δείξουμε ότι οι περιοδικές ακολουθίες συνιστούν ένα πυκνό σύνολο στον X. Έστω $x=(x_n)_n\in X$ και $\epsilon>0$. Αφού η $(e_n)_n$ είναι μια βάση υπάρχει ένα $N\geq 1$ τέτοιο ωστε το

$$\widetilde{x}=\sum_{n=1}^{N} x_n e_n$$

να έχει απόσταση λιγότερο από $\frac{\epsilon}{2}$ από το x. Η περιοδική ακολουθία που παράγεται από το $\widetilde{x}$, δηλαδή η

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+\nu N}$$

ανήκει στον X. Από την unconditionality της βάσης σύμφωνα με γνώστο θεώρημα[3] έχουμε ότι υπάρχει $m\geq 1$ τέτοιο ωστε

$$\left\|\sum_{\nu=m}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n\epsilon_{n+\nu N} e_{n+\nu N}\right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

για κάθε 0-1 ακολουθία $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ειδικότερα έχουμε ότι

$$\left\|\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+\mu m N}\right\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{5.9}$$

Άρα για το περιοδικό σημείο

$$y=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+\mu m N}$$

έχουμε ότι

$$\|y-\widetilde{x}\| = \left\|\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+\mu m N} - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right\| = \left\|\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n e_{n+\mu m N}\right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

[3] Έστω X χώρος Fréchet. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) για κάθε ακολουθία από 0-1 $(\epsilon_n)_n$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n x_n$ συγκλίνει

(ii) για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο $N\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε ακολουθία από 0-1 $(\epsilon_n)_n$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n x_n$ συγκλίνει και

$$\left\|\sum_{n\geq N}\epsilon_n x_n\right\| < \epsilon$$

από τη σχέση (5.9), άρα

$$\|y-x\| \le \|y-\widetilde{x}\| + \|\widetilde{x}-x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

άρα το σύνολο των περιοδικών σημείων είναι πυκνό στον X. □

Παράδειγμα 5.9. *Επανερχόμαστε στο παράδειγμα (5.5) που αναφέρεται στον χώρο $\ell^p(u)$.*

Ισχυρισμός. *Κάτω από την υπόθεση ότι ο B είναι ένας τελεστής στον χώρο $X = \ell^p(u)$ έχουμε:*

(1) *Ο B είναι αναμειγνύων αν και μόνο αν $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

(2) *Ο B είναι χαοτικός αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.6 έχουμε ότι ο B είναι αναμειγνύων αν και μόνο αν $e_n \to 0$ στον X όταν $n \to +\infty$, πράγμα που ισχύει αν και μόνο αν

$$\|e_n\| \to 0 \Leftrightarrow u_n \to 0$$

Ο B τώρα από το Θεώρημα 5.8 είναι χαοτικός αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ συγκλίνει στον X. Αυτό με τη σειρά του ισχύει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy X, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n > m \ge n_0$ να ισχύει:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k - \sum_{k=1}^{m} e_k \right\| < \epsilon \Leftrightarrow \|e_{m+1} + \ldots + e_n\| < \epsilon \Leftrightarrow \sum_{k=m+1}^{n} u_k < \epsilon \Leftrightarrow$$

δηλαδή αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$. □

Σκοπός μας τώρα είναι να μεταφέρουμε τα αποτελέσματα μας, για ακολουθιακούς χώρους εφοδιασμένους με τυχαίες μετατοπίσεις με βάρη μέσω της κατάλληλης συζυγίας. Έστω X ακολουθιακός χώρος και $B_{\mathbf{w}} : X \to X$ μια μετατόπιση με βάρη. Ορίζουμε τα νέα βάρη u_n ως

$$u_n = \left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu \right)^{-1}, \quad n \ge 1,$$

και θεωρούμε τον ακολουθιακό χώρο

$$X_u = \{(x_n)_n : (x_n u_n)_n \in X\}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi_u : X_u \to X$ με $\phi_u((x_n)_n) = (x_n u_n)_n$ και παρατηρούμε ότι είναι καλά ορισμένη και είναι ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων X και X_u. Επιπλέον ορίζουμε μια τοπολογία στον X_u αντιστρέφοντας μέσω της ϕ_u ανοιχτά σύνολα στον X_u. Δηλαδή, ένα σύνολο U είναι ανοιχτό στον X_u αν και μόνο αν, το σύνολο $\phi_u(U)$ είναι ανοιχτό στον X. Άρα δημιουργήσαμε έναν τοπολογικό ισομορφισμό μεταξύ των υποκείμενων χώρων, με συνέπεια να μεταφέρονται οι αλγεβρικές και τοπολογικές ιδιότητες των χώρων από τον ένα στον άλλο. Ειδικότερα ο χώρος X είναι Banach, (Fréchet) αν και μόνο αν είναι και ο χώρος X_u. Επίσης αν η ακολουθία $(e_n)_n$ είναι βάση για τον X τότε η $\phi_u^{-1}((e_n)_n) = (\frac{e_n}{u_n})_n$ είναι βάση του X_u.

Τέλος δείχνουμε τη συζυγία μεταξύ των δυναμικών συστημάτων (X, B_w) και (X_u, B), αποδεικνύοντας την μεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} X_u \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\phi_u"'] & X_u \arrow[d, "\phi_u"] \\ X \arrow[r, "B_w"] & X \end{tikzcd}$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε τη συνθήκη $B_w \circ \phi_u = \phi_u \circ B$.
Έστω $(x_n)_n \in X_u$ τότε $(x_n u_n)_n \in X$, άρα

$$B_w(\phi_u((x_n)_n) = B_w((x_n u_n)_n) = (x_{n+1}u_{n+1}w_{n+1})_n.$$

Όμως

$$u_{n+1} = \frac{1}{w_1 \dots w_n w_{n+1}} = \frac{u_n}{w_{n+1}} \Leftrightarrow u_{n+1}w_{n+1} = u_n$$

άρα

$$\phi_u(B(x_n)_n)) = \phi_u((x_{n+1})_n) = (x_{n+1}u_n)_n = (x_{n+1}u_{n+1}w_{n+1})_n$$

άρα $B_w(\phi_u((x_n)_n) = \phi_u(B(x_n)_n))$. Άρα έχουμε τη συζυγία των δυναμικών συστημάτων .
Αφού όμως μέσω συζυγίας διατηρούνται ιδιότητες όπως η χαοτικότητα, η υπερκυκλικότητα και η ιδιότητα να είναι ένας τελεστής ασθενώς αναμειγνύων ή αναμειγνύων, αυτόματα παίρνουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.10. *Έστω X ένας ακολουθιακός χώρος Fréchet στον οποίο η ακολουθία $(e_n)_n$ είναι βάση. Υποθέτουμε επίσης ότι ο B_w είναι τελεστής στον X.*

(a) *Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

  (i) *Ο B_w είναι υπερκυκλικός.*

  (ii) *Ο B_w είναι ασθενώς αναμειγνύων.*

  (iii) *Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(n_k)_k$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε*

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n_k} w_\nu\right)^{-1} e_{n_k} \to 0$$

  στον X καθώς $k \to +\infty$.

(b) *Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

  (i) *Ο B_w είναι αναμειγνύων.*

  (ii) *Έχουμε ότι*

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_n \to 0$$

  στον X καθώς $n \to +\infty$.

(c) *Υποθέτουμε ότι η βάση $(e_n)_n$ είναι unconditional. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

  (i) *Ο B_w είναι χαοτικός.*

  (ii) *Η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_n$$

  συγκλίνει στον X.

  (iii) *Η ακολουθία*

$$\left(\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1}\right)_n$$

  ανήκει στον X.

  (iv) *Ο B_w έχει ένα μη τετριμμένο περιοδικό σημείο.*

Παράδειγμα 5.11. *Μία μετατόπιση με βάρη B_w είναι ένας τελεστής σε έναν ακολουθιακό χώρο ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$, ή στον c_0 αν και μόνο αν η ακολουθία των βαρών w_n, $n \geq 1$, είναι φραγμένη.*
Πράγματι, ξέρουμε ότι για το δυναμικό σύστημα $(\ell^p(u), B)$, ο B είναι τελεστής αν και μόνο αν $\sup \frac{u_n}{u_{n+1}} < +\infty$. Άρα ο B_w είναι τελεστής στον χώρο ℓ^p αν και μόνο αν

$$\sup \frac{\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1}}{\left(\prod_{\nu=1}^{n} w_{\nu+1}\right)^{-1}} < \infty \Leftrightarrow \sup \frac{w_1 \dots w_{\nu+1}}{w_1 \dots w_\nu} < +\infty \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} (w_{\nu+1}) < +\infty$$

Συνεχίζοντας ο B_w είναι υπερκυκλικός στον ℓ^p, αν και μόνο αν ο B είναι υπερκυκλικός στον χώρο $\ell^p(u)$, δηλαδή

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0 \Leftrightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n} |w_n|} = 0 \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{\nu=1}^{n} |w_n| = +\infty$$

Όμοια ο B_w είναι αναμειγνύων αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = +\infty$$

Τέλος ο B_w είναι χαοτικός αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^p} < +\infty$$

Σημειώνουμε ότι από το παράδειγμα (5.11), κάθε φραγμένη ακολουθία βαρών $(w_n)_n$ με

$$\lim_{n\to+\infty} \inf \prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu| < \lim_{n\to+\infty} \sup \prod_{\nu=1}^{p} |w_\nu| = +\infty$$

ορίζει μια μετατόπιση με βάρη B_w στον χώρο ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$ ή στον c_0 που είναι ασθενώς αναμειγνύουσα αλλά όχι αναμειγνύουσα.

Τώρα θα μελετήσουμε μετατοπίσεις σε ακολουθιακούς χώρους με δείκτες πάνω στο $\mathbb{Z}$. Ορίζουμε λοιπόν την bilateral μετατόπιση προς τα πίσω ως εξής:

$$B((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

και την bilateral μετατόπιση προς τα πίσω με βάρη:

$$B_w((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (w_{n+1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι η ακολουθία βαρών όπου κάθε $w_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αντίστοιχα με τα προηγούμενα ορίζουμε ως ακολουθιακό χώρο Banach(Fréchet) πάνω στο σύνολο $\mathbb{Z}$, να είναι ένας υπόχωρος του $\omega(\mathbb{Z}) = \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, εφοδιασμένο με την τοπολογία του γινομένου.

Ορισμός 5.12. *Έστω ακολουθιακός χώρος Banach (Fréchet) πάνω στο $\mathbb{Z}$. Τότε λέμε ότι οι ακολουθίες*

$$e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

σχηματίζουν μια βάση στον X αν $e_n \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ακολουθία $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ ισχύει

$$x = \lim_{M,N\to+\infty} (\dots, 0, 0, x_{-M}, x_{-M+1}, \dots, x_{N-1}, x_N, 0, 0, \dots).$$

Θεώρημα 5.13. *Έστω X ένας ακολουθιακός χώρος Fréchet πάνω στον $\mathbb{Z}$ στον οποίο η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι βάση. Υποθέτουμε ότι η bilateral μετατόπιση προς τα πίσω B είναι ένας τελεστής στον X.*

(a) *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(*i*) *Ο B είναι υπερκυκλικός.*

(*ii*) *Ο B είναι ασθενώς αναμειγνύων.*

(*iii*) *Υπάρχει αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων $(n_k)_k$ τέτοια ώστε, για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, $e_{j-n_k} \to 0$ και $e_{j+n_k} \to 0$ στον X καθώς $k \to +\infty$.*

(*b*) *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(*i*) *Ο B είναι αναμειγνύων.*

(*ii*) *$e_{-n} \to 0$ και $e_n \to 0$ στον X καθώς $n \to +\infty$.*

(*c*) *Υποθέτουμε ότι η βάση $(e_n)_n$ είναι unconditional. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*i*) *Ο B είναι χαοτικός.*

(*ii*) *Η σειρά $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e_n$ συγκλίνει στον X.*

(*iii*) *Οι σταθερές ακολουθίες ανήκουν στον X.*

(*iv*) *Ο B έχει ένα μη τετριμμένο περιοδικό σημείο.*

Απόδειξη. (a), $(i) \implies (iii)$. Έστω $\|.\|_F$ η F-νόρμα που επάγει την τοπολογία στον X.

Ισχυρισμός. *Αν για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq N$ τέτοιο ώστε αν $|j| \leq N$, να ισχύει $\|e_{j-n}\| < \epsilon$ και $\|e_{j+n}\| < \epsilon$, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $e_{m-n_k} \to 0$ και $e_{m+n_k} \to 0$ στον X καθώς $k \to +\infty$.*

Απόδειξη. Για $\epsilon = 1$ και $N = 1$, υπάρχει $n_1 \geq 1$ τέτοιο ώστε $\|e_{j-n_1}\| < 1$ και $\|e_{j+n_1}\| < 1$ για όλα τα $|j| \leq 1$. Όμοια, υπάρχει $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε $\|e_{j-n_2}\| < \frac{1}{2}$ και $\|e_{j+n_2}\| < \frac{1}{2}$ για όλα τα $|j| \leq n_1$. Συνεχίζοντας επαγωγικά έστω ότι έχουν οριστεί οι $n_1, n_2, \ldots n_{k-1}$ τότε από υπόθεση, υπάρχει $n_k > n_{k-1}$ τέτοιο ώστε $\|e_{j-n_k}\| < \frac{1}{k}$ και $\|e_{j+n_k}\| < \frac{1}{k}$ για όλα τα $|j| \leq n_{k-1}$.

Μένει να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ οι ακολουθίες $(e_{m-n_k})_k$ και $(e_{m+n_k})_k$ συγκλίνουν στο 0. Πράγματι έστω $m \in \mathbb{Z}$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|m| \leq k_0 - 1$ και $\frac{1}{k_0} < \epsilon$. Τότε ισχύει ότι

$$\|e_{j-n_{k_0}}\| < \frac{1}{k_0} \quad \text{και} \quad \|e_{j+n_{k_0}}\| < \frac{1}{k_0} \quad \text{για τα} \quad |j| \leq n_{k_0-1}, \tag{5.10}$$

και αφού η ακολουθία $(n_k)_k$ είναι αύξουσα ισχύει ότι $|m| \leq k_0 - 1 \leq n_{k_0-1}$, άρα από τη σχέση (5.10) έχουμε ότι

$$\|e_{m-n_{k_0}}\| < \frac{1}{k_0} < \epsilon \quad \text{και} \quad \|e_{m+n_{k_0}}\| < \frac{1}{k_0} < \epsilon.$$

Για κάθε $k \geq k_0$, ισχύει $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \epsilon$. Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\|e_{j-n_k}\| < \frac{1}{k} \quad \text{και} \quad \|e_{j+n_k}\| < \frac{1}{k} \text{ για τα} \quad |j| \leq n_{k-1} \tag{5.11}$$

και αφού $|m| \leq n_{k_0-1} \leq n_{k-1}$ από τη σχέση (5.11) παίρνουμε ότι

$$\|e_{m-n_k}\| < \frac{1}{k} < \epsilon \quad \text{και} \quad \|e_{m+n_k}\| < \frac{1}{k} < \epsilon$$

□

Περνούμε στην απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $\epsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}$. Τότε οπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.4 από το θεώρημα Banach-Steinhaus, υπάρχει $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ να ισχύει η συνεπαγωγή

$$\|x\| < \delta' \implies \|x_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

Επίσης αφού οι εμφυτεύσεις $i_k : X \to \mathbb{K}, \quad k \in \mathbb{Z}$ με τύπο $i_k((\dots, x_{-N}, \dots, x_k, \dots, x_N, \dots)) = x_k, \quad k \in \mathbb{Z}$ είναι συνεχείς απεικονίσεις

$$\forall j \in \mathbb{Z} \text{ με } |j| \leq N, \quad \exists \delta_j > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \forall x \in X \text{ με } \|x\| < \delta_j \text{ να ισχύει } |x_j| \leq \frac{1}{2}.$$

Άρα αν πάρω $\delta = \min\left\{\delta', \min_{j \leq N}\{\delta_j\}\right\} > 0$ έχουμε ότι

$$\forall x \in X \text{ με } \|x\| < \delta \Longrightarrow \|x_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ και } |x_j| \leq \frac{1}{2} \quad \text{για } |j| \leq N$$

Τώρα από την τοπολογική μεταβατικότητα του B, μπορούμε να βρούμε κάποιο $x \in X$ και κάποιο $n > 2N$ τέτοια ώστε

$$\left\| x - \sum_{|j| \leq N} e_j \right\| < \delta \quad \text{και} \quad \left\| B^n(x) - \sum_{|j| \leq N} e_j \right\| < \delta.$$

Τώρα έχουμε ότι

$$\|x_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2} \ (|n| > N) \text{ και } |x_{n+j} - 1| \leq \frac{1}{2} \ (|j| \leq N),$$

συνεπώς και αφού $n > 2N$ παίρνουμε ότι

$$\|x_{j+n} e_{j+n}\| < \frac{\epsilon}{2} \ (|j| \leq N) \quad \text{και} \quad |(x_{n+j})^{-1} - 1| \leq 1 \ (|j| \leq N).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\|e_{j+n}\| < \epsilon \quad \text{για } |j| \leq N.$$

Από την άλλη έχουμε ότι

$$|x_j - 1| \leq \frac{\epsilon}{2} \ (|j| \leq N) \quad \text{και} \quad \|x_{n+k} e_k\| < \frac{\epsilon}{2} \ (|k| > N),$$

άρα

$$|(2x_j)|^{-1} \leq 1 \ (|j| \leq N) \quad \text{και} \quad \|x_j e_{j-n}\| < \frac{\epsilon}{2} \ (|j| \leq N),$$

και έτσι έχουμε ότι

$$\|e_{j-n}\| = \|(2x_j)^{-1} 2x_j e_{j-n}\| < \epsilon \quad \text{για } |j| \leq N.$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Παρατηρούμε ότι για τον τελεστή της προς τα εμπρός μετατόπισης

$$F(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

έχουμε ότι $BFx = x$ για κάθε πεπερασμένη ακολουθία x και για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$B^{n_k} e_j = e_{j-n_k} \to 0, \quad F^{n_k} e_j = e_{j+n_k} \to 0,$$

συνεπώς ικανοποιείται το κριτήριο υπερκυκλικότητας και άρα έχουμε το ζητούμενο.
Η συνεπαγωγή $(ii) \Rightarrow (i)$ ισχύει για όλους τους τελεστές στον X.

(b). Η απόδειξη εδώ είναι ίδια όπως αυτήν που αφορά την υπερκυκλικότητα. Για την επαρκή συνθήκη (ii) εφαρμόζουμε το κριτήριο της Kitai αντί για το κριτήριο υπερκυκλικότητας, ενώ η απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης είναι απλούστερη αφού έχουμε να θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $j = 0$.

(c). Η απόδειξη είναι ίδια όπως στην unilateral περίπτωση. □

Τα αποτελέσματα αυτά μεταφέρονται και για μετατοπίσεις με βάρη αν χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω συζυγία.

$$\begin{tikzcd} X_u \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\phi_u"'] & X_u \arrow[d, "\phi_u"] \\ X \arrow[r, "B_w"] & X \end{tikzcd}$$

όπου

$$X_u = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : (x_n u_n)_n \in X\}$$

και $\phi_u : X_u \to X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (x_n u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με

$$u_n = \left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} \quad \text{για } n \geq 1, \quad u_n = \prod_{\nu=n+1}^{0} w_\nu \quad \text{για } n \leq -1, \quad u_0 = 1$$

Θεώρημα 5.14. *Έστω X ένας ακολουθιακός χώρος Fréchet πάνω στο $\mathbb{Z}$ στον οποίο η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια βάση. Υποθέτουμε ότι η μετατόπιση με βάρη $B_{\mathbf{w}}$ είναι ένας τελεστής στον X. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(a) *Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

 (i) *Ο $B_{\mathbf{w}}$ είναι υπερκυκλικός.*

 (ii) *Ο $B_{\mathbf{w}}$ είναι ασθενώς αναμειγνύων.*

 (iii) *Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(n_k)_k$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε, για κάθε $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\left(\prod_{\nu=j-n_k+1}^{j} w_\nu\right) e_{j-n_k} \to 0 \quad \text{και} \quad \left(\prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} w_\nu\right)^{-1} e_{j+n_k} \to 0$$

 στον X καθώς $k \to +\infty$.

(b) *Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

 (i) *Ο $B_{\mathbf{w}}$ είναι αναμειγνύων.*

 (ii) *Έχουμε ότι*

$$\left(\prod_{\nu=-n+1}^{0} w_\nu\right) e_{-n} \to 0 \quad \text{και} \quad \left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_n \to 0$$

 στον X καθώς $n \to +\infty$.

(c) *Υποθέτουμε οτί η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι unconditional. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

 (i) *Ο $B_{\mathbf{w}}$ είναι χαοτικός.*

 (ii) *Η σειρά*

$$\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\prod_{\nu=n+1}^{0} w_\nu\right) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} e_n$$

 συγκλίνει στον X.

 (iii) *Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με*

$$x_n = \prod_{\nu=n+1}^{0} w_\nu \ (n \leq 0), \quad x_n = \left(\prod_{\nu=1}^{n} w_\nu\right)^{-1} \quad (n \geq 1)$$

 ανήκει στον X.

 (iv) *Ο $B_{\mathbf{w}}$ έχει ένα μη τετριμμένο περιοδικό σημείο.*

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που ο τελεστής μας είναι bilateral, οι μετατοπίσεις προς τα εμπρός μπορεί να είναι υπερκυκλικοί τελεστές. Μια bilateral μετατόπιση προς τα εμπρός με βάρη είναι ένας τελεστής

$$F_w : X \to X, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (w_{n-1}x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου η $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι η ακολουθία των βαρών.

Παράδειγμα 5.15. *Έστω $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \le p \le +\infty$ ένας ακολουθιακός χώρος και $B_{\mathbf{w}}$ μια μετατόπιση με βάρη. Τότε η $B_{\mathbf{w}}$ είναι ένας τελεστής αν και μόνο αν η ακολουθία των βαρών $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη. Επίσης ο τελεστής είναι υπερκυκλικός, αναμειγνύων, ή χαοτικός αν και μόνο αν οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται αντίστοιχα:*

$$\exists (n_k)_k \ \forall j \in \mathbb{Z} : \lim_{k\to+\infty} \prod_{\nu=j-n_k+1}^{j} w_\nu = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{k\to+\infty} \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} |w_\nu| = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{\nu=-n+1}^{0} w_\nu = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to+\infty} \prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{\nu=-n+1}^{0} |w_\nu|^p < +\infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^p} < +\infty$$

5.2 Τελεστές που μετατίθενται με μεταφορές

Με μια πρώτη ματιά, κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί ότι τα παραδείγματα του Birkhoff και του Maclane είναι αποτελέσματα που δεν συσχετίζονται μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα όμως είναι ειδικές περιπτώσεις ενός γενικότερου θεωρήματος που οφείλεται στους Godefroy και Shapiro. Θυμίζουμε ότι οι τελεστές μεταφοράς $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ορίζονται ως $T_a f(z) = f(z+a)$.

Θεώρημα 5.16. *Έστω T ένας συνεχής γραμμικός τελεστής στον χώρο H($\mathbb{C}$). Υποθέτουμε ότι ο T μετατίθεται με κάθε τελεστή μεταφοράς T_a και δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου τελεστή. Τότε ο T είναι υπερκυκλικός.*

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος απαιτεί δύο βήματα. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο τελεστής T έχει μια αναπαράσταση της μορφής $T = \phi(D)$ όπου ϕ είναι μια ακέραια συνάρτηση και D είναι ο τελεστής της παραγώγισης. Η αναπαράσταση θα μας βοηθήσει να βρούμε πολλά ιδιοδιανύσματα του T, και μια εφαρμογή του κριτηρίου Godefroy-Shapiro θα μας δώσει το συμπέρασμα.

Ορισμός 5.17. *Έστω $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μια ακέραια συνάρτηση. Τότε λέμε ότι η ϕ είναι εκθετικού τύπου αν υπάρχουν σταθερές A και B τέτοιες ώστε να ισχύει $|\phi(z)| \le Ae^{B|z|}$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$.*

Λήμμα 5.18. *Έστω $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Τότε η F είναι εκθετικού τύπου αν και μόνο αν $|c_n| \le \frac{CR^n}{n!}$ για κάποιες σταθερές C, R και για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Αν $|F(z)| \le Ae^{B|z|}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε για κάθε $r > 0$ έχουμε ότι $|F(z)| \le Ae^{Br}$ για κάθε $|z| \le r$. Από την εκτίμηση Cauchy έχουμε ότι $|F^{(n)}(0)| \le Ae^{Br}\frac{n!}{r^n}$. Συνεπώς

$$|c_n| = \frac{|F^{(n)}(0)|}{n!} \le \frac{Ae^{Br}}{r^n} \quad \forall r > 0 \,\text{και}\quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Για κάθε σταθερό $n \in \mathbb{N}$ η ποσότητα $r^{-n}e^{Br}$ γίνεται ελάχιστη για $r = \frac{n}{B}$. Έτσι παίρνουμε ότι

$$|c_n| \le A(\frac{n}{B})^{-n}e^n = \frac{A(Be)^n}{n^n} \le \frac{A(Be)^n}{n!}.$$

Αντίστροφα τώρα αν $|c_n| \le \frac{AR^n}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} |F(z)| &\le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z|^n \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{AR^n|z|^n}{n!} \\ &= A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|Rz|^n}{n!} \\ &= Ae^{R|z|} \end{aligned}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. □

Πρόταση 5.19. *Αν $\phi \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$ μια ακεραία συνάρτηση εκθετικού τύπου με $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ να είναι το ανάπτυγμα της σε δυναμοσειρά, τότε η σειρά $\phi(D)f = \sum c_n D^n(f)$ συγκλίνει στον $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ για κάθε $f \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$ και ορίζει έναν τελεστή στον $\mathrm{H}(\mathbb{C})$.*

Απόδειξη. Ισχύει $|c_n| \le \frac{CR^n}{n!}$ για κάποια $C, R \in \mathbb{R}$ και για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε αφού η f είναι αναλυτική στο σύνολο $\overline{B}(z,r)$ με $r > R$ η f είναι φραγμένη στο συμπαγές σύνολο $\overline{B}(z,r)$, οπότε υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(w)| \le M \quad \forall w \in \overline{B}(z,r)$. Από τις εκτιμήσεις του Cauchy έχουμε ότι

$$|c_n f^{(n)}(z)| \le \frac{CR^n}{n!}\frac{n!M}{r^n} = CM(\frac{R}{r})^n.$$

Εφόσον η σειρά $\sum(\frac{R}{r})^n$ συγκλίνει, από το κριτήριο του Weirstrass η $\sum c_n D^n(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{B}(z,r)$. Εφόσον αυτό συμβαίνει για κάθε $r > R$ έπεται το συμπέρασμα. □

Πρόταση 5.20. *Έστω $T : \mathrm{H}(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}(\mathbb{C})$ ένας συνεχής τελεστής που μετατίθεται με κάθε τελεστή μεταφοράς T_a. Τότε υπάρχει μια ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $T = \phi(D)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το γραμμικό τελεστή $L : \mathrm{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$L(f) = (Tf)(0)$$

Ο L είναι συνεχής. Πράγματι έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ με $f_n \to f$. Τότε

$$L(f_n) = (Tf_n)(0) \to (Tf)(0) = L(f) \quad \text{αφού ο } T \text{ είναι συνεχής.}$$

Εφόσον ο T μετατίθεται με όλους τους τελεστές μεταφοράς T_a μπορούμε να γράψουμε

$$Tf(z) = (T_z(Tf))(0) = (T(T_zf))(0) = L(T_zf)$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επιπλέον, αφού το γραμμικό συναρτησοειδές L είναι συνεχές, μπορούμε να βρούμε ένα $C < +\infty$ και ένα κλειστό δίσκο $K = \overline{D}(0,R)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $|L(f)| \le C\|f\|_K$ για κάθε $f \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$. Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα Hahn-Banach και το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, μπορούμε να βρούμε ένα μιγαδικά μέτρο μ με φορέα στο K τέτοιο ώστε

$$L(f) = \int_K f d\mu$$

για κάθε $f \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$. Έτσι παίρνουμε τη σχέση

$$Tf(z) = \int_K T_z f d\mu = \int_K f(z+w)d\mu(w).$$

Αφού το K είναι συμπαγές, το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της f στο σημείο z συγκλίνει ομοιόμορφα στο K. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} Tf(z) &= \int_K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} w^n d\mu(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n f(z) \end{aligned}$$

όπου $c_n = \frac{1}{n!}\int_K w^n d\mu(w)$. Αφού $|c_n| \leq \frac{R^n}{n!}\|\mu\|$ για όλα τα n, ο τύπος $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ορίζει μια ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.16 θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα, η απόδειξη του οποίου θα στηριχτεί στο κριτήριο Godefroy-Shapiro (Πόρισμα 3.11). Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, συμβολίζουμε με $g_\lambda \in \mathrm{H}(\mathbb{C})$ τη συνάρτηση με τύπο $g_\lambda(z) = e^{\lambda z}$.

Λήμμα 5.21. *Έστω $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ένα σύνολο που περιέχει κάποιο σημείο συσσώρευσης. Το σύνολο* $\mathrm{Span}\{g_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$*, όπου $g_\lambda(z) = e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, είναι πυκνό στον χώρο $H(\mathbb{C})$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in H(\mathbb{C})$ και $\lambda \in \Lambda$ σημείο συσσώρευσης. Υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Λ με $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ και $\lambda_n \neq \lambda$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι

$$e^{\lambda_n z} = e^{\lambda z} e^{(\lambda_n - \lambda)z} = e^{\lambda z} + e^{\lambda z}(\lambda_n - \lambda)z + e^{\lambda z}\frac{(\lambda_n - \lambda)^2 z^2}{2!} + \cdots .$$

Επομένως, $g_\lambda \in \overline{\mathrm{Span}\{g_{\lambda_n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}}$. Όμως,

$$\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} = e^{\lambda z} z + e^{\lambda z}\frac{(\lambda_n - \lambda) z^2}{2!} + \cdots$$

οπότε $\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} \longrightarrow z e^{\lambda z}$. Επομένως, η συνάρτηση $g_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, ανήκει στο $\overline{\mathrm{Span}\{g_{\lambda_n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι όλες οι συναρτήσεις $g_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g_k(z) = z^k e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, ανήκουν στο $\overline{\mathrm{Span}\{g_{\lambda_n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}}$. Για την f έχουμε ότι

$$f(z) = e^{\lambda z}\left(e^{-\lambda z} f(z)\right) = e^{\lambda z}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k e^{\lambda z},$$

για κάποιους $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, με τη σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Επομένως, $f \in \overline{\mathrm{Span}\{g_{\lambda_n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}}$, κι έτσι έχουμε το συμπέρασμα. □

Περνούμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.16.

Απόδειξη Θεωρήματος 5.16. Αφού ο T αντιμετατίθεται με μεταφορές και δεν είναι πολλαπλάσιο της ταυτοτικής απεικόνισης μπορεί να γραφτεί στη μορφή $T = \phi(D)$ όπου ϕ είναι μια ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου. Τότε

$$T(g_\lambda) = \sum_{n\geq 0} a_n D^n(g_\lambda) = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^n g_\lambda = \phi(\lambda) g_\lambda$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Με άλλα λόγια κάθε g_λ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή T, με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\phi(\lambda)$. Επιπλέον μετά από την εφαρμογή του θεωρήματος του Liouville στην συνάρτηση ϕ, συνεπάγεται ότι τα σύνολα $V = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\phi(\lambda)| > 1\}$ και $U = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\phi(\lambda)| < 1\}$ είναι και τα δύο μη κενά.

Όμως από το προηγούμενο λήμμα αφού το σύνολο U έχει σημείο συσσώρευσης, το σύνολο $\mathrm{Span}\{g_\lambda : \lambda \in U\}$ είναι πυκνό στον $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ οπότε και το σύνολο $\mathrm{Span}\bigcup_{|\mu|<1}\mathrm{Ker}(T - \mu I)$ είναι πυκνό. Όμοια αποδεικνύουμε ότι και το σύνολο $\mathrm{Span}\bigcup_{|\mu|>1}\mathrm{Ker}(T - \mu I)$ είναι πυκνό οπότε από το κριτήριο Godefroy-Shapiro (Πόρισμα 3.11) έχουμε ότι ο T είναι υπερκυκλικός. □

Κεφάλαιο 6

Συχνά υπερκυκλικοί τελεστές

6.1 Ορισμοί και παραδείγματα

Αν ένας τελεστής $T \in \mathfrak{L}(X)$ είναι υπερκυκλικός, από τον ορισμό της υπερκυκλικότητας υπάρχει $x \in X$ του οποίου η T-τροχιά συναντάει κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο $V \subseteq X$, δηλαδή για κάθε ανοιχτό μη κενό $V \subseteq X$, το σύνολο

$$\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, V) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in V\} \tag{6.1}$$

είναι μη κενό. Τότε φυσιολογικά τίθεται το ερώτημα πόσο μεγάλα είναι τα σύνολα $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, V)$. Αυτό μας οδηγεί με φυσικό τρόπο στον ορισμό:

Ορισμός 6.1. *Έστω ότι A ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών, τότε ορίζουμε ως κάτω πυκνότητα του συνόλου A να είναι το όριο:*

$$\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{card}(A \cap [1, N])}{N},$$

ενώ ορίζουμε ως πάνω πυκνότητα του συνόλου A να είναι το όριο:

$$\overline{\mathrm{dens}}(A) = \limsup_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{card}(A \cap [1, N])}{N}.$$

Αν αριθμήσουμε το άπειρο σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ ως μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, τότε έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ με $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Τότε $\underline{\mathrm{dens}}(A) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $n_k \leq Ck$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θέτουμε $a_N = \frac{\mathrm{card}(A \cap [1,N])}{N}$.
$\Longrightarrow$) Εφόσον $\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf\limits_{N \to +\infty} a_N > 0$, επίλεγουμε λ με $0 < \lambda < \underline{\mathrm{dens}}(A)$. Τότε το σύνολο $\{N \in \mathbb{N} : a_N < \lambda\}$ είναι πεπερασμένο και επομένως θα ισχύει $a_N \geq \lambda$ για όλα τα N εκτός από πεπερασμένα το πλήθος N. Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

- Αν $A \cap \{N \in \mathbb{N} : a_N < \lambda\} = \emptyset$, τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $a_N > \lambda$ άρα θέτοντας $\lambda = \frac{1}{C}$ παίρνουμε αμέσως το ζητούμενο.
- Αν $A \cap \{N \in \mathbb{N} : a_N < \lambda\} = \{n_{k_1}, \ldots, n_{k_m}\}$ τότε αν θέσουμε $C' = \min\limits_{1 \leq j \leq m} a_{n_{k_j}}$ ισχύει ότι $a_{n_k} \geq C'$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και επιπλέον $C' > 0$. Έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

  $$a_{n_k} = \frac{\mathrm{card}(A \cap [1, n_k])}{n_k} = \frac{k}{n_k}.$$

  Εφόσον $\frac{k}{n_k} \geq C'$ συμπεραίνουμε ότι $n_k \leq \frac{1}{C'} k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Αν θέσουμε $C = \frac{1}{C'}$ έχουμε το ζητούμενο.

$\Longleftarrow$) Έστω ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $n_k \leq Ck$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{n_k} = \frac{k}{n_k} \geq \frac{1}{C}$ και άρα

$$\underline{\text{dens}}(A) \geq \liminf_{N\to+\infty} \frac{k}{n_k} \geq \frac{1}{C}.$$

. □

Λήμμα 6.3. *Έστω $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ και I δύο υποσύνολα του $\mathbb{N}$ με θετική κάτω πυκνότητα. Τότε το σύνολο $C = \{n_k : k \in I\}$ έχει θετική κάτω πυκνότητα.*

Απόδειξη. Έστω

$$I = \{m_l : l \in \mathbb{N}\} \quad \text{και} \quad C = \{n_k : k \in I\} = \{n_{m_l} : l \in \mathbb{N}\}.$$

Αφού $\underline{\text{dens}}(A) > 0$ και $\underline{\text{dens}}(I) > 0$ υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε να ισχύει

$$n_k \leq ak \quad \text{και} \quad m_l \leq bl \tag{6.2}$$

για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$ και άρα $n_{m_l} \leq am_l \leq abl$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Συνεπώς το σύνολο C έχει θετική κάτω πυκνότητα. □

Ορισμός 6.4. *Έστω X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Ο τελεστής T ονομάζεται συχνά υπερκυκλικός, αν υπάρχει κάποιο διάνυσμα $x \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε μη κενό ανοιχτό υποσύνολο V του X το σύνολο $\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, V) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in V\}$ να έχει θετική κάτω πυκνότητα. Ένα τέτοιο διάνυσμα x λέγεται συχνά υπερκυκλικό για τον T και το σύνολο όλων των συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων του T συμβολίζεται με $\mathrm{FHC}(T)$.*

Από τα όσα έχουμε πει ως τώρα για τα σύνολα με θετική πυκνότητα, ένα διάνυσμα $x \in X$ είναι συχνά υπερκυκλικό για τον τελεστή T, αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό μη-κενό υποσύνολο V του X, υπάρχει μια γνησιώς αύξουσα ακολουθία ακεραίων $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και μια σταθερά C τέτοια ώστε:

$$T^{n_k}(x) \in V \quad \text{και} \quad n_k \leq Ck$$

για όλα τα $k \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε παρακάτω την ύπαρξη συχνά υπερκυκλικών τελεστών και ότι υπάρχουν υπερκυκλικοί τελεστές που δεν είναι συχνά υπερκυκλικοί. Στο επόμενο παράδειγμα δείχνουμε το τελευταίο.

Παράδειγμα 6.5. *Έστω $B_\mathbf{w} : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ μια μετατόπιση προς τα πίσω με βάρη $w_n = \sqrt{\frac{(n+1)}{n}}$. Τότε η $B_\mathbf{w}$ είναι υπερκυκλικός τελεστής αλλά όχι συχνά υπερκυκλικός τελεστής.*

Έστω $V = B(2e_1, 1)$ η ανοιχτή μπάλα στον $\ell^2(\mathbb{N})$ κέντρου $2e_1$ και ακτίνας 1, όπου e_1 είναι η ακολουθία του $\ell^2(\mathbb{N})$ με πρώτη συνιστώσα το 1 και όλες τις υπόλοιπες με 0.

Ισχυρισμός. *Αν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ τότε*

$$|w_1 \ldots w_n x_{n+1}| \geq 1 \quad \textit{για κάθε} \quad n \in \mathbf{N}_{B_\mathbf{w}}(x, V)$$

και κατά συνέπεια:

$$\sum_{n\in\mathbf{N}_{B_\mathbf{w}}(x,V)} \frac{1}{(w_1 \ldots w_n)^2} < +\infty$$

Απόδειξη. Έστω ότι $n \in \mathbf{N}_{B_\mathbf{w}}(x, V)$, τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} B_\mathbf{w}^n\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) \in V \Rightarrow (w_k w_{k+1} \ldots w_{k+n-1} x_{k+n})_{k\in\mathbb{N}} \in V \quad &\Rightarrow \\ \|2e_1 - (w_1 w_2 \ldots w_n x_{n+1}, w_2 w_3 \ldots w_{n+1} x_{2+n}, \ldots)\|_2 \leq 1 \quad &\Rightarrow \\ |2 - w_1 w_2 \ldots w_n x_{n+1}| \leq 1 \quad &\Rightarrow \\ |w_1 w_2 \ldots w_n x_{n+1}| \geq 1.& \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τώρα την απόδειξη έχουμε:

$$\begin{aligned}
|w_1 \dots w_n x_{n+1}| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V) \quad &\Rightarrow \\
\frac{1}{|w_1 \dots w_n||x_{n+1}|} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V) \quad &\Rightarrow \\
\frac{1}{(w_1 \dots w_n)^2} \leq |x_{n+1}|^2 \quad \forall n \in \mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V) \quad &\Rightarrow \\
\sum_{n \in \mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V)} \frac{1}{(w_1 \dots w_n)^2} \leq \sum_{n \in \mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V)} |x_{n+1}|^2 \quad &\leq \\
\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^2 < +\infty &
\end{aligned}$$

αφού $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. □

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα 5.11 εφόσον $w_n \to 1$, η ακολουθία των βαρών $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, η απεικόνιση $B_{\mathbf{w}}$ είναι συνεχής. Ακόμη εφόσον

$$\prod_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = \prod_{\nu=1}^{n} \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu}} = \sqrt{\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu+1}{\nu}} = \sqrt{\frac{1+1}{1} . \frac{2+1}{2} . \dots . \frac{n+1}{n}} = \sqrt{n+1}$$

έχουμε ότι $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \prod\limits_{\nu=1}^{n} |w_\nu| = +\infty$, άρα πάλι από το Παράδειγμα 5.11 έχουμε ότι ο τελεστής $B_{\mathbf{w}}$ είναι υπερκυκλικός.

Μένει να δείξουμε ότι ο $B_{\mathbf{w}}$ δεν είναι συχνά υπερκυκλικός τελεστής. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο $B_{\mathbf{w}}$ είναι συχνά υπερκυκλικός. Τότε υπάρχει $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V)$ να έχει θετική κάτω πυκνότητα. Άρα θα υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ και μια γνησιώς αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε για το σύνολο

$$\mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V) = \{n \in \mathbb{N} : B_{\mathbf{w}}^n(x) \in V\} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \text{ να ισχύει } n_k \leq Ck \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.3}$$

Από την άλλη ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k+1} = \sum_{n \in \mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V)} \frac{1}{n+1} = \sum_{n \in \mathbf{N}_{B_{\mathbf{w}}}(x,V)} \frac{1}{(w_1 \dots w_n)^2} < +\infty$$

Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k+1}$ συγλίνει στο $\mathbb{R}$ είναι εύκολο να δούμε ότι και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Όμως από τη σχέση (6.3) έχουμε ότι

$$\frac{1}{k} \leq \frac{C}{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{n_k} < +\infty$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι η αρμονική σειρά συγκλίνει, άτοπο, άρα ο τελεστής $B_{\mathbf{w}}$ δεν είναι συχνά υπερκυκλικός. □

Παρακάτω παραθέτουμε ένα Κριτήριο το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν συχνά υπερκυκλικοί τελεστές.

Θεώρημα 6.6 (*Κριτήριο συχνής υπερκυκλικότητας*). *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος, και $T \in \mathfrak{L}(X)$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα πυκνό υποσύνολο $\mathfrak{D} \subseteq X$ και μια απεικόνιση $S : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ τέτοια ώστε:*

(1) *Οι σειρές* $\sum T^n(x)$ *και* $\sum S^n(x)$ *συγκλίνουν unconditionally για κάθε* $x \in \mathfrak{D}$

(2) *Ισχύει* $T \circ S = I$ *στο σύνολο* $\mathfrak{D}$

Τότε ο τελεστής T *είναι συχνά υπερκυκλικός.*

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό θα αποδείξουμε πρώτα ένα συνδυαστικό λήμμα το οποίο μας επιτρέπει να παράγουμε μια άπειρη ακολουθία από σύνολα με θετική κάτω θετική πυκνότητα, τα οποία ανά δύο είναι ξένα τους. Έπειτα θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα σύνολα για την κατασκευή ενός συχνά υπερκυκλικού διανύσματος αποδεικνύοντας έτσι το Κριτήριο συχνής υπεκυκλικότητας.

Λήμμα 6.7. *Έστω* $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία από φυσικούς αριθμούς. Τότε μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία* $(\mathbf{N}_p))_{p\in\mathbb{N}}$ *υποσυνόλων του* $\mathbb{N}$*, ανά δυο ξένα μεταξύ τους τέτοια ώστε:*

(1) *Κάθε σύνολο* $(\mathbf{N}_p)_{\in\mathbb{N}}$ *έχει θετική κάτω πυκνότητα.*

(2) *Ισχύει ότι* $\min \mathbf{N}_p \geq N_p$*, και* $|n-m| \geq N_p + N_q$ *όποτε* $n \neq m$ *και* $(n,m) \in \mathbf{N}_p \times \mathbf{N}_q$*.*

Απόδειξη. Έστω $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών με $a_1 = 1$, τέτοια ώστε ο όρος a_{p+1} να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του όρου a_p για κάθε $p \in \mathbb{N}$ και $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{N_p}{a_p} < +\infty$. Για κάθε $p \geq 1$, ορίζουμε τα σύνολα $I_p = a_p\,\mathbb{N} \setminus a_{p+1}\,\mathbb{N}$.

Εφόσον ισχύει

$$\mathbb{N} = a_1\,\mathbb{N} \supset a_2\,\mathbb{N} \supset \ldots a_p\,\mathbb{N} \supset a_{p+1}\,\mathbb{N} \supset \ldots$$

η ακολουθία $(I_p)_{p\geq 1}$ είναι μια διαμέριση του $\mathbb{N}$.

Προφανώς για κάθε $p \in \mathbb{N}$ έχει $\underline{\text{dens}}(I_p) = \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_{p+1}} > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε ως $\phi(k)$ να είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $k \in I_{\phi(k)}$. Ορίζουμε μια αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ θέτοντας

$$n_k = N_{\phi(k)} + 2\sum_{j<k} N_{\phi(j)}. \tag{6.4}$$

Ο ορισμός διασφαλίζει ότι $n_k \geq N_p$ όταν $k \in I_p$. Πράγματι αν $k \in I_p$ τότε $\phi(k) = p$, άρα από την (6.4) έχουμε ότι

$$n_k = N_p + 2\sum_{j<k} N_{\phi(j)} \Rightarrow n_k \geq N_p.$$

Τώρα δείχνουμε ότι η ακολουθία $(n_k)_k$ είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned} n_k = N_{\phi(k)} + 2\left[\sum_{j<k-1} N_{\phi(j)} + N_{\phi(k-1)}\right] &= \\ N_{\phi(k)} + 2\sum_{j<k-1} N_{\phi(j)} + N_{\phi(k-1)} + N_{\phi(k-1)} &= \\ N_{\phi(k)} + n_{k-1} + N_{\phi(k-1)} & \end{aligned}$$

συνεπώς έχουμε ότι

$$n_k - n_{k-1} = N_{\phi(k)} + N_{\phi(k-1)} > 0 \tag{6.5}$$

άρα η ακολουθία $(n_k)_k$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχυρισμός. *Αν* $k > j$*, όταν* $k \in I_p$ *και* $j \in I_q$ *τότε ισχύει ότι* $n_k - n_j \geq N_p + N_q$*.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\phi(k) = p$ και $\phi(j) = q$ και

$$n_k - n_j = N_{\phi(k)} + 2\sum_{l<k} N_{\phi(l)} - N_{\phi(j)} - 2\sum_{\nu<j} N_{\phi(\nu)} =$$

$$N_{\phi(k)} + 2\left[\sum_{l<j} N_{\phi(l)} + \sum_{j\le l<k} N_{\phi(l)}\right] - N_{\phi(j)} - 2\sum_{\nu<j} N_{\phi(\nu)} =$$

$$N_{\phi(k)} + 2\sum_{j\le l\le k} N_{\phi(l)} - N_{\phi(j)} =$$

$$N_p + 2N_{\phi(j)} + 2\sum_{j+1\le l\le k} N_{\phi(l)} - N_q =$$

$$N_p + 2N_q - N_q + 2\sum_{j+1\le l<k} N_{\phi(l)} \ge N_p + N_q.$$

□

Θέτουμε

$$\mathbf{N}_p = \{n_k : k \in I_p\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ιδιότητα (2) του λήμματος. Αφού $n_k \ge N_p$ για κάθε $k \in I_p$, προκύπτει $\min \mathbf{N}_p \ge N_p$. Αν $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{N}_p \times \mathbf{N}_q$, τότε $\nu_1 = n_{k_1}$ για κάποιο $k_1 \in I_p$ και $\nu_2 = n_{k_2}$ για κάποιο $k_2 \in I_q$. Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρήσουμε ότι $k_1 > k_2$, από τον παραπάνω ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι $n_{k_1} - n_{k_2} \ge N_p + N_q$, δηλαδή $\nu_1 - \nu_2 \ge N_p + N_q$.
Για να δείξουμε τώρα ότι το σύνολο $\mathbf{N}_p = \{n_k : k \in I_p\}$ έχει θετική κάτω πυκνότητα αρκεί να δείξουμε (χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3 αφού το I_p έχει θετική κάτω πυκνότητα) ότι το σύνολο $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ έχει θετική κάτω πυκνότητα.

Βλέπουμε ότι

$$\forall k, p \ge 1 \quad [1,k] \cap I_p \subseteq [1,k] \cap a_p\,\mathbb{N},$$

άρα $\mathrm{card}([1,k] \cap I_p) \le \frac{k}{a_p}$. Ως εκτούτου οι λύσεις της εξίσωσης $\phi(j) = p$ στο σύνολο $[1,k]$, δηλαδή τα $j \in \{1,\ldots,k\}$ με $j \in I_p$, είναι το πολύ $\frac{k}{a_p}$, για κάθε $p = 1, 2.\ldots$. Έχουμε

$$n_k = N_{\phi(k)} + 2\sum_{j<k} N_{\phi(j)} \le 2\sum_{j\le k} N_{\phi(j)}. \tag{6.6}$$

Από το άθροισμα $\sum_{j\le k} N_{\phi(j)}$ το πολύ $\frac{k}{a_p}$ από τους προσθετέους παίρνουν την τιμη N_p. Συνεπώς από την σχέση (6.6) ισχύει

$$n_k \le 2\sum_{j\le k} N_{\phi(j)} \le 2k\sum_{p=1}^{\infty} \frac{N_p}{a_p} \quad \forall k \ge 1$$

και αφού $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{N_p}{a_p} < +\infty$ έχουμε το συμπέρασμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.6. Έστω $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ μια πλήρης, αναλλοίωτη στις μεταθέσεις μετρική, που παράγει την τοπολογία του χώρου X. Οριζουμε $\|x\| = \rho(x, 0)$. Αφού ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του X, έστω $\mathfrak{D} = \{x_p : p \in \mathbb{N}\}$. Επιλέγουμε μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\epsilon_p)_{p\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε αν θέσουμε $a_p = p\epsilon_p + \sum\limits_{q=p+1} \epsilon_q$ να ισχύει $a_p \to 0$ και $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \epsilon_p < +\infty$. Από τις υποθέσεις του θεωρήματος συμπεραίνουμε τα εξής: Για κάθε $p \in \mathbb{N}$, υπάρχει $N_p \in \mathbb{N}$ τέτοιο ωστε, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq \mathbb{N} \cap [N_p, +\infty)$, να ισχύει

$$\left\|\sum_{n\in F} T^n(x_i)\right\| + \left\|\sum_{n\in F} S^n(x_i)\right\| < \epsilon_p \quad \forall i \le p.$$

Πράγματι έστω $p \in \mathbb{N}$. Τότε για $i \in \mathbb{N}$ (και αφού οι σειρές $\sum T^n(x)$, $\sum S^n(x)$ συγκλίνουν unconditionally για κάθε $x \in \mathfrak{D}$) και για $\epsilon_p > 0$

$$\exists N^1_{p_i} > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \forall F \subseteq \mathbb{N} \text{ πεπερασμένο με } \min F \geq N_{p_i} \text{ να ισχύει } \left\|\sum_{n\in F} T^n(x_i)\right\| < \frac{\epsilon_p}{2}.$$

Αν τώρα θέσουμε $N^1_p = \max\limits_{1\leq i\leq p} N^1_{p_i}$, τότε

$$\text{για κάθε πεπερασμένο } F \subseteq \mathbb{N} \;\text{ με } \min F \geq N^1_p \text{ ισχύει } \left\|\sum_{n\in F} T^n(x_i)\right\| < \frac{\epsilon_p}{2} \quad \forall i \leq p. \tag{6.7}$$

Όμοια για τη σειρά $\sum S^n(x_i)$ έχουμε ότι για $p \geq 1$ και για $\epsilon_p > 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος $N^2_p > 0$ τέτοιος ώστε

$$\text{για κάθε πεπερασμένο } F \subseteq \mathbb{N} \text{ με } \min F \geq N^2_p \text{ ισχύει } \left\|\sum_{n\in F} S^n(x_i)\right\| < \frac{\epsilon_p}{2} \quad \forall i \leq p. \tag{6.8}$$

Αν θέσουμε $N_p = \max\{N^1_p, N^2_p\}$ τότε για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ με $\min F > N_p$, από τις σχέσεις (6.7) και (6.8) παίρνουμε ότι

$$\left\|\sum_{n\in F} T^n(x_i)\right\| + \left\|\sum_{n\in F} S^n(x_i)\right\| < \frac{\epsilon_p}{2} \quad \forall i \leq p.$$

Έστω τώρα $(\mathbf{N}_p)_{p\geq 1}$ η ακολουθία των ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τα οποία προκύπτουν από το Λήμμα 6.7, από την ακολουθία $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Το συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα το οποίο αναζητούμε είναι το

$$x = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p).$$

Παρατηρούμε ότι το x είναι καλά ορισμένο. Πράγματι από uncondiotionallity έχουμε ότι για κάθε $p \in \mathbb{N}$ η σειρά $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p)$ συγκλίνει και $\left\|\sum\limits_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p)\right\| < \epsilon_p$. Οπότε

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\|\sum_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p)\right\| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon_p < +\infty.$$

Έστω τώρα ότι σταθεροποιούμε ένα $p \in \mathbb{N}$ και ένα $n \in \mathbf{N}_p$. Τότε

$$\|T^n(x) - x_p\| = \|T^n(x) - T^n(S^n(x_p))\| = \|T^n[x - S^n(x_p)]\| =$$

$$\left\|T^n\left[\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbf{N}_q} S^m(x_q) - S^n(x_p)\right]\right\| = \left\|T^n\left[\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{\infty}\sum_{m\in\mathbf{N}_q} S^m(x_q) + \sum_{m\in\mathbf{N}_p} S^m(x_p) - S^n(x_p)\right]\right\| =$$

$$\left\|T^n\left[\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{\infty}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m<n}} S^m(x_q) + \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{\infty}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m>n}} S^m(x_q) + \sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_p\\m<n}} S^m(x_p) + \sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_p\\m>n}} S^m(x_p)\right]\right\| =$$

$$\left\|T^n\left[\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m<n}} S^m(x_q) + \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m>n}} S^m(x_q)\right]\right\| = \left\|\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m<n}} T^{n-m}(x_q) + \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m>n}} S^{m-n}(x_q)\right\| \leq$$

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left\|\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m>n}} S^{m-n}(x_q)\right\| + \sum_{q=1}^{\infty}\left\|\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\m<n}} T^{n-m}(x_q)\right\|.$$

Όμως από το Λήμμα 6.7 για κάθε $n \in \mathbf{N}_p$, $m \in \mathbf{N}_q$, ισχύει ότι $|n-m| > N_p + N_q > \max\{N_p, N_q\}$. Από την επιλογή της ακολουθίας $(N_q)_q$ έχουμε ότι:

$$\left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m>n}} S^{m-n}(x_q) \right\| < \epsilon_p \text{ για } q \leq p \Rightarrow \sum_{q=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m>n}} S^{m-n}(x_q) \right\| \leq p\epsilon_p + \sum_{q=p+1} \epsilon_q = a_p.$$

Ομοίως προκύπτει ότι

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m<n}} T^{n-m}(x_q) \right\| \leq a_p.$$

Έτσι συνεπάγεται ότι

$$\|T^n(x) - x_p\| \leq 2a_p \quad \forall p \in \mathbb{N} \text{ και } \forall n \in \mathbf{N}_p.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι

$$\mathbf{N}_p \subseteq \mathbf{N_T}(x, B(x_p, 3a_p)) \quad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

Ειδικότερα, κάθε σύνολο $\mathbf{N_T}(x, B(x_p, 3a_p))$ έχει θετική κάτω πυκνότητα. Αφού η ακολουθία (x_p) είναι πυκνή στον X, αυτό δείχνει ότι το x είναι συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα για τον T δεδομένου ότι $a_p \to 0$. □

Πόρισμα 6.8. *Οι προς τα πίσω μετατοπίσεις με βάρη, $B_w : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$, για τις οποίες ισχύει $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(w_1 \ldots w_n)^{-p}} < +\infty$ είναι συχνά υπερκυκλικοί τελεστές.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $B_{\mathbf{w}}$ με την συνθήκη του πορίσματος ικανοποιεί το κριτήριο συχνής υπερκυκλικότητας. Έστω λοιπόν $\mathfrak{D} \subseteq \ell^p(\mathbb{N})$ το σύνολο των τελικά μηδενικών ακολουθιών, το οποίο είναι πυκνό στον $\ell^p(\mathbb{N})$, και έστω $S_w : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ η προς τα εμπρός μετατόπιση με βάρη με τύπο, $S_w(e_i) = w_{i+1}^{-1} e_{i+1}$. Τότε προφανώς $S_w \circ B_w = I$ στα στοιχεία του $\mathfrak{D}$, συνεπώς ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη του κριτηρίου. Επίσης λόγω της συνθήκης $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(w_1 \ldots w_n)^{-p}} < +\infty$ οι σειρές $\sum S_w^n(x)$ συγκλίνουν unconditionally για κάθε $x \in \mathfrak{D}$. Αφού $B_w^n(x) = 0$ για μεγάλα n αν $x \in \mathfrak{D}$, συμπεραίνουμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο συχνής υπερκυκλικότητας. □

6.2 Θεωρήματα συχνής υπερκυκλικότητας

Σε αυτήν την ενότητα δείχνουμε ότι κάποιες γενικές ιδιότητες που αφορούν υπεκυκλικούς τελεστές, έχουν τα ανάλογα τους στο πλαίσιο της συχνής υπερκυκλικότητας, αλλά άλλες όχι.
Πρώτα παρατηρούμε ότι στην απόδειξη του Κριτηρίου Συχνής Υπερκυκλικότητας δεν χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire.

Θεώρημα 6.9. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος F-χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $O \subseteq X$ με $\overline{O} \neq X$ τέτοιο ώστε, για κάθε $a \in (0,1)$, το σύνολο*

$$\{x \in X : \overline{\operatorname{dens}}(\mathbf{N}_T(x, O)) \geq a\}$$

είναι πυκνό στον X. Τότε το σύνολο $\mathrm{FHC}(T)$ είναι ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας κατά Baire στον X. Ειδικότερα, αυτό συμβαίνει όταν $T^n(x) \to 0$ για κάθε $x \in D$ όπου D πυκνό σύνολο στο X.

Απόδειξη. Για $a \in (0,1)$ θέτουμε

$$\begin{aligned} G_a &= \{x \in X : \overline{\operatorname{dens}}(\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, O)) \geq a\} \\ &= \bigcap_{m \geq 1} \bigcap_{K \geq 1} \bigcap_{N \geq K} \{x \in X : \operatorname{card}\{n \leq N : T^n(x) \in O\} > (1 - \frac{1}{m})aN\} \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα είναι άμεση απόρροια της γνωστής πρότασης ότι για μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ και για ένα $a \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$a \leq \limsup a_N \text{ αν και μόνο αν : για κάθε } \epsilon > 0 \text{ το σύνολο } \{N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N\} \text{ είναι άπειρο.}$$

Αν τώρα θέσουμε

$$O_{m,N} = \{x \in X : \operatorname{card}\{n \leq N : T^n(x) \in O\} > (1 - \frac{1}{m})aN\}$$

τότε παίρνουμε ότι

$$G_a = \bigcap_{m\geq 1} \bigcap_{K\geq 1} \bigcap_{N\geq K} O_{m,N}.$$

Τα σύνολα $O_{m,N}$ όμως είναι προφανώς ανοιχτά, άρα το G_a είναι πυκνό G_δ σύνολο ως αριθμήσιμη τομή ανοιχτών και πυκνών συνόλων. Θέτοντας $G = \cap_{a\in(0,1)} G_a = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_{1-2^{-n}}$ έχουμε ότι το G είναι πυκνό G_δ υποσύνολο του X.

Από τον ορισμό του G, κάθε $x \in G$ ικανοποιεί τη σχέση $\overline{\text{dens}}(\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, O)) = 1$. Προφανώς για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση $\overline{\text{dens}}(A) = 1 - \underline{\text{dens}}(\mathbb{N}\setminus A)$. Ισχύει ότι $\underline{\text{dens}}(\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, X\backslash\overline{O})) = 0$ για κάθε $x \in G$. Πράγματι, αν $x \in G$ τότε

$$\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, X\backslash\overline{O}) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \notin \overline{O}\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \notin O\} = \mathbb{N} \setminus \mathbf{N}_\mathrm{T}(x, O),$$

άρα ισχύει

$$\underline{\text{dens}}(\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, X\backslash\overline{O})) \leq \underline{\text{dens}}(\mathbb{N} \setminus \mathbf{N}_\mathrm{T}(x, O)) = 1 - \overline{\text{dens}}(\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, O)) = 0.$$

Όμως από την υπόθεση το σύνολο $X\backslash\overline{O}$ είναι μη κενό ανοιχτό σύνολο, οπότε συμπεραίνουμε ότι το G δεν περιέχει συχνά υπερκυκλικά διανύσματα για τον T. Έτσι έχουμε ότι το σύνολο $\text{FHC}(T) \subseteq X\backslash G$ είναι ένα σύνολο Baire πρώτης κατηγορίας.

Αν τώρα $T^n(x) \to 0$ για όλα τα x που ανήκουν σε ένα πυκνό υποσύνολο D του X, μπορούμε να πάρουμε για O μια γειτονιά (μη-πυκνή) του 0. Πράγματι, αν $x \in D$ τότε το $\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, O)$ περιέχει όλα τα $n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένα. □

Παρά το παραπάνω θεώρημα, κάποιες ιδιότητες των υπερκυκλικών τελεστών έχουν τα αντίστοιχα τους στο πλαίσιο της συχνής υπερκυκλικότητας. Το επόμενο θεώρημα είναι μια παραλλαγή του θεωρήματος Bourdon-Feldman.

Θεώρημα 6.10. *Έστω X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Επίσης, έστω $x \in X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό σύνολο $O \subseteq X$ τέτοιο ώστε $\underline{\text{dens}}(\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, W)) > 0$ για κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο $W \subseteq O$. Τότε το x είναι ένα συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα για τον τελεστή T.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι το σύνολο $\text{Orb}(x, T)$ είναι κάπου πυκνό, και συγκεκριμένα στο O. Από το θεώρημα Bourdon-Feldman το $\text{Orb}(x, T)$ είναι παντού πυκνό στον X, άρα ο T είναι υπερκυκλικός τελεστής και συνεπώς τοπολογικά μεταβατικός από το θεώρημα Birkhoff. Ειδικότερα αν $V \subseteq X$ με $V \neq \emptyset$ και ανοιχτό, τότε υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^p(O) \cap V \neq \emptyset$, συνεπώς υπάρχει $x \in O$ με $T^p(x) \in V$ και από τη συνέχεια της απεικόνισης T^p, υπάρχει $W \subseteq O$ μη κενό ανοιχτό με $T^p(W) \subseteq V$. Τότε ισχύει $\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, W) + p \subseteq \mathbf{N}_\mathrm{T}(x, V)$. Πράγματι αν $m \in \mathbf{N}_\mathrm{T}(x, W) + p$ τότε έχουμε ότι $m = n + p$, όπου $n \in \mathbf{N}_\mathrm{T}(x, W)$, άρα $T^n(x) \in W$. Όμως τότε

$$T^m(x) = T^{n+p}(x) = T^p(T^n(x)) \in T^p(W) \subseteq V.$$

Άρα αφού $T^m(x) \in V$, παίρνουμε ότι $m \in \mathbf{N}_\mathrm{T}(x, V)$. Τελικά εφόσον $\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, W) + p$ έχει θετική κάτω πυκνότητα, συνεπάγεται ότι και το σύνολο $\mathbf{N}_\mathrm{T}(x, V)$ έχει θετική κάτω πυκνότητα. □

Παρόμοιες θεωρήσεις οδηγούν στο ανάλογο του θεωρήματος Ansari.

Λήμμα 6.11. *Έστω ότι το σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ έχει θετική κάτω πυκνότητα. Έστω επίσης, $I_1, \dots I_q \subseteq \mathbb{N}$ σύνολα με $\cup_{j=1}^{q} I_j = \mathbb{N}$ και έστω $n_1, \dots n_q \in \mathbb{N}$. Τότε το $B = \cup_{j=1}^{q}(n_j + (A \cap I_j))$ έχει θετική κάτω πυκνότητα.*

Απόδειξη. Αν $N \geq \max\{n_1, \dots n_q\}$ τότε κάθε σύνολο $n_j + (A \cap I_j) \cap [0, 2N]$ περιέχει το $n_j + (A \cap I_j \cap [0, N])$, αφού $n_j + m \leq 2N$ όταν $m \in A \cap I_j \cap [0, N]$. Αν θέσουμε $B = \cup_{j=1}^{q} n_j + (A \cap I_j)$ τότε αφού $n_j + (A \cap I_j) \subseteq B$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{card}\left(n_j + (A \cap I_j)\right) \cap [0, 2N]) \leq \sum_{j=1}^{q} \operatorname{card}(B \cap [0, 2N]) = q \operatorname{card}(B \cap [0, 2N] \Longrightarrow \tag{6.9}$$

$$\operatorname{card}(B \cap [0, 2N]) \geq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} ((n_j + (A \cap I_j)) \cap [0, 2N]). \tag{6.10}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\operatorname{card}(A \cap I_j \cap [0, N]) \leq \operatorname{card}((n_j + A \cap I_j) \cap [0, 2N]) \tag{6.11}$$

και αυτό γιατί αν $x \in A \cap I_j \cap [0, N]$ τότε αφού $x \in A \cap I_j$ έχουμε ότι $x + n_j \in (n_j + A \cap I_j)$ και $x + n_j \leq N + N = 2N$, οπότε $x + n_j \in n_j + (A \cap I_j) \cap [0, 2N]$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σύνολο $n_j + (A \cap I_j) \cap [0, 2N]$ έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα έχει το σύνολο $A \cap I_j \cap [0, N]$, άρα έχουμε το ζητούμενο. Συνεπώς από τη σχέση (6.10) έχουμε

$$\frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \operatorname{card}(n_j + (A \cap I_j)) \cap [0, 2N] \geq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \operatorname{card}(A \cap I_j \cap [0, N]). \tag{6.12}$$

Επίσης εφόσον

$$A \cap [0, N] = A \cap (\cup_{j=1}^{q} I_j) \cap [0, N] = \cup_{j=1}^{q} (A \cap I_j \cap [0, N])$$

ισχύει ότι

$$\operatorname{card}(A \cap [0, N]) \leq \sum_{j=1}^{q} \operatorname{card}(A \cap I_j \cap [0, N])$$

οπότε

$$\frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \operatorname{card}(A \cap I_j \cap [0, N]) \geq \frac{1}{q} \operatorname{card}(A \cap [0, N]). \tag{6.13}$$

Από τις σχέσεις (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), παίρνουμε ότι

$$\operatorname{card}(B \cap [0, 2N]) \geq \frac{1}{q} \operatorname{card}(A \cap [0, N]).$$

Έπειτα έχουμε

$$\begin{aligned}
\underline{\operatorname{dens}}(B) = \liminf_{N \to +\infty} \frac{\operatorname{card}(B \cap [0, 2N])}{2N} &\geq \\
\liminf_{N \to +\infty} \frac{\operatorname{card}(A \cap [0, N])}{2qN} &= \\
\frac{1}{2q} \liminf_{N \to +\infty} \frac{\operatorname{card}(A \cap [0, N])}{N} &> 0.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.12. *Αν ο T είναι συχνά υπερκυκλικός τελεστής τότε και οι τελεστές T^p είναι συχνά υπερκυκλικοί για κάθε θετικό ακέραιο p, με* $\operatorname{FHC}(T) = \operatorname{FHC}(T^p)$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{FHC}(T)$, και έστω V ένα μη κενό ανοιχτό σύνολο του X. Από το θεώρημα Ansari ξέρουμε ότι ο τελεστής T^p είναι υπερκυκλικός και ότι $\mathrm{HC}(T) = \mathrm{HC}(T^p)$, άρα το x είναι υπερκυκλικό διάνυσμα για τον T^p, άρα και το $T^{p-j}(x)$ είναι υπερκυκλικό για τον T^p για κάθε $j \in \{1, \dots, p\}$. Συνεπώς για κάθε $j \in \{1, \dots, p\}$ υπάρχει φυσικός k_j τέτοιος ώστε $(T^p)^{k_j - 1} T^{p-j} x = T^{pk_j - p} T^{p-j} x = T^{k_j p - j} x \in V$. Έτσι υπάρχει W γειτονιά του x τέτοια ώστε $T^{k_j p - j}(W) \subseteq V$ για κάθε $j \in \{1, \dots, p\}$. Θέτουμε

$$I_j = \{n \in \mathbb{N} : n = j \bmod p\} \text{ και } B = \bigcup_{j=1}^{p} ((k_j p - j) + A \cap I_j), \text{ όπου } A = \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, W).$$

Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{j=1}^{p} I_j = \mathbb{N}$. Αφού το A έχει θετική κάτω πυκνότητα από το Λήμμα 6.11 έχουμε ότι και $\underline{\mathrm{dens}}(B) > 0$. Επίσης αν $x \in B$, τότε συνεπάγεται ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $1 \le m \le p$ τέτοιο ώστε, $x = k_m p - m + z$ όπου $z \in I_m$. Από αυτό παίρνουμε ότι $z - m = kp$, όπου k ακέραιος, άρα $x \in p\,\mathbb{N}$ και οπότε $B \subseteq p\,\mathbb{N}$. Επιπλέον για κάθε $m \in B$ με $m = k_j p - j + n$ έχουμε ότι $T^m x = T^{k_j p - j}(T^n x)$. Όμως $n \in A \cap I_j$, άρα $n \in \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, W)$, συνεπώς $T^n(x) \in W$ οπότε $T^m(x) \in T^{k_j p - j}(W) \subseteq V$. Από αυτό παίρνουμε ότι αφού για κάθε $m \in B$ ισχύει $T^m(x) \in V$, τότε εφόσον $B \subseteq p\,\mathbb{N}$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $m = pk$, άρα $(T^p)^k(x) \in V$. Τέλος αφού το B έχει θετική κάτω πυκνότητα, και το σύνολο $\mathbf{N}_{T^p}(x, V)$ έχει θετική κάτω πυκνότητα, συνεπώς $x \in \mathrm{FHC}(T^p)$.

Αντίστροφα τώρα, έστω $x \in \mathrm{FHC}(T^p)$ και V μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του X. Τότε αφού $\mathbf{N}_{T^p}(x, V) \subseteq \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, V)$ και το σύνολο $\mathbf{N}_{T^p}(x, V)$ έχει θετική κάτω πυκνότητα, τότε και το σύνολο $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, V)$ έχει θετική κάτω πυκνότητα, συνεπώς $x \in \mathrm{FHC}(T)$. $\square$

Θεώρημα 6.13. *Έστω X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$, και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$ ένας συχνά υπερκυκλικός τελεστής. Τότε ο τελεστής λT είναι συχνά υπερκυκλικός για καθε $\lambda \in \mathbb{T}$* [1]*, με* $\mathrm{FHC}(\lambda T) = \mathrm{FHC}(T)$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{FHC}(T)$ και $V \neq \emptyset$ ανοιχτό υποσύνολο του X. Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο

$$B = \{n \in \mathbb{N} : (\lambda T)^n(x) \in V\}$$

έχει θετική κάτω πυκνότητα. Εφόσον $1x = x \in V$ και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι συνεχής συνάρτηση υπάρχει $\epsilon > 0$ και V' γειτονιά του x έτσι ώστε $zV' \subseteq V$ όταν $|z - 1| < \epsilon$ (ειδικότερα $V' \subseteq V$). Θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε το $\mathbb{N}$ με πεπερασμένες μεταφορές του συνόλου

$$I = \{n \in \mathbb{N} : |\lambda^n - 1| < \epsilon\}.$$

Αν $\lambda \in e^{2\pi i \mathbb{Q}}$ τότε υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda^p = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{p-1} (k + p\,\mathbb{N}) = \bigcup_{k=0}^{p-1} (k + I).$$

Αν $\lambda \notin e^{2\pi i \mathbb{Q}}$ τότε το σύνολο $\{\lambda^n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στον $\mathbb{T}$. Άρα

$$\mathbb{T} = \bigcup_{j=0}^{\infty} B(\lambda^j, \epsilon) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \{z \in \mathbb{T} : |z - \lambda^j| < \epsilon\}.$$

Πράγματι αν $z \in \mathbb{T}$ τότε αφού το σύνολο $\{\lambda^j : j \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στον $\mathbb{T}$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $|z - \lambda^k| < \epsilon$, άρα $z \in B(\lambda^k, \epsilon)$. Όμως αφού το $\mathbb{T}$ είναι συμπαγής χώρος, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλλυψη του $\mathbb{T}$, άρα $\exists N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathbb{T} = \bigcup_{j=0}^{N} \{z \in \mathbb{T} : |z - \lambda^j| < \epsilon\}$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=0}^{N} \{m \in \mathbb{N} : |\lambda^m - \lambda^j| < \epsilon\} = \bigcup_{j=0}^{N} (j + I).$$

[1] Ορίζουμε $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, δηλαδή το $\mathbb{T}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Πράγματι αν $k \in \mathbb{N}$ τότε αφού $\lambda^k \in \mathbb{T}$, έχουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $0 \leq m \leq N$ με $|\lambda^k - \lambda^m| < \epsilon$. Τέλος θα δείξουμε ότι $k \in \bigcup_{j=0}^{N}(j+I)$ και μάλιστα ότι $k \in m+I$. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση που $k > m$, οι υπόλοιπες περιπτώσεις βγαίνουν ανάλογα. Έχουμε ότι $k = m+n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $n \in I$. Ισχύει ότι

$$|\lambda^n - 1| = |\lambda^{k-m} - 1| = |\frac{\lambda^k}{\lambda^m} - 1| = \frac{1}{|\lambda^m|}|\lambda^k - \lambda^m| = |\lambda^k - \lambda^m| < \epsilon,$$

άρα έχουμε το ζητούμενο. Έστω τώρα $m_1, \ldots, m_q \in \mathbb{N}$ σταθερές τέτοιες ώστε

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{q}(m_j + I) = \bigcup_{j=1}^{q} I_j.$$

Αφού $\mathrm{FHC}(T) \subseteq \mathrm{HC}(T)$ και $x \in \mathrm{FHC}(T)$, τότε $x \in \mathrm{HC}(T)$. Εφόσον $|\lambda| = 1$, από το θεώρημα Leon-Muller [2] για κάθε $j \in \{1, \ldots, q\}$ μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό n_j τέτοιο ώστε $(\lambda T)^{n_j}(\lambda^{m_j}x) = \lambda^{m_j}\lambda^{n_j}T^{n_j}x \in V'$. Όμως αφού ο T^{n_j} είναι συνεχής στον X για κάθε $j \in \{1, \ldots, q\}$, υπάρχει W_j γειτονιά του x με $\lambda^{m_j}\lambda^{n_j}T^{n_j}(W_j) \subseteq V'$. Αν πάρουμε $W \bigcap_{j=1}^{q} W_j$ τότε $\lambda^{m_j}\lambda^{n_j}T^{n_j}(W) \subseteq V' \quad \forall j \in \{1, \ldots, q\}$. Τώρα έστω

$$A := \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, W) = \{k \in \mathbb{N} : T^k x \in W\}.$$

Αφού $x \in \mathrm{FHC}(T)$, το σύνολο A έχει θετική κάτω πυκνότητα. Επιπλέον αν $j \in \{1, \ldots, q\}$ και $k \in A \cap I_j$ τότε

$$\begin{aligned} \lambda^{n_j+k}T^{n_j+k}(x) &= \lambda^{k-m_j}\lambda^{m_j}\lambda^{n_j}T^{n_j}(T^k(x)) \\ &\in D(1,\epsilon)\lambda^{m_j}\lambda^{n_j}T^{n_j}(W) \subseteq V. \end{aligned}$$

Έτσι το B περιέχει το σύνολο $\bigcup_{j=1}^{q}(n_j + (A \cap I_j))$ που από το Λήμμα 6.11 έχει θετική κάτω πυκνότητα, άρα και το σύνολο B έχει θετική κάτω πυκνότητα. □

Ολοκληρώνουμε την ενότητα δείχνοντας ότι οι συχνά υπερκυκλικοί τελεστές ικανοποιούν το κριτήριο υπερκυκλικότητας. Θυμίζουμε ότι στους διαχωρίσιμους F-χώρους οι τελεστές ικανοποιούν το κριτήριο υπερκυκλικότητας αν και μόνο αν είναι ασθενώς αναμειγνύοντες, που με τη σειρά του αυτό το γεγονός σχετίζεται με το μέγεθος των συνόλων $\mathbf{N}(U, V)$ για U, V μη κενά ανοιχτά σύνολα στον X. Αφού η συχνή υπερκυκλικότητα ορίζεται με όρους των συνόλων $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, V)$, το ακόλουθο θεώρημα που αποδείχτηκε από τους K.-G. Grosse-Erdmann και A.Peris, είναι αρκετά φυσικό.

Θεώρημα 6.14. *Οι συχνά υπερκυκλικοί τελεστές είναι ασθενώς αναμειγνύοντες.*

Για την απόδειξη, χρειαζόμαστε ένα γνωστό λήμμα που αναφέρεται στα σύνολα με θετική πυκνότητα και ένα λήμμα που αναφέρεται σε σύνολα συνδετικά. Πρώτα όμως θα παραθέσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός 6.15. *Έστω U και V ανοιχτά και μη κενά σύνολα και $T : X \to X$ τελεστής σε ένα χώρο Fréchet. Τότε συμβολίζουμε με $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, V)$ το σύνολο*

$$\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

[2]Έστω T ένας τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο Fréchet έστω X. Αν $x \in X$ είναι τέτοιο ώστε $\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, n \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στον X, τότε το σύνολο $\mathrm{Orb}(x, \lambda T)$ είναι πυκνό στον X για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$.

Ειδικότερα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$, τότε ο T και ο λT έχουν τα ίδια υπερκυκλικά διανύσματα, δηλαδή $\mathrm{HC}(T) = \mathrm{HC}(\lambda T)$ [25].

Ορισμός 6.16. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε το σύνολο της διαφοράς του A να είναι το σύνολο $A - A = \{n - m : n, m \in A$ με $n \geq m\}$.*

Ορισμός 6.17. *Ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$, έστω $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, όπου $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, ονομάζεται συνδετικό αν ισχύει ότι $\sup_{k\in\mathbb{N}}(n_{k+1} - n_k) < +\infty$ ή ισοδύναμα το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ δεν περιέχει αυθαίρετα μεγάλα διαστήματα.*

Λήμμα 6.18 (Erdos-Sarkozy)**.** *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ με $\underline{\text{dens}}(A) > 0$. Τότε το σύνολο των διαφορών[3] του A, $A - A$ είναι συνδετικό σύνολο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $D = A - A$ δεν είναι συνδετικό. Τότε το σύνολο $\mathbb{N} \setminus D$ περιέχει αυθαίρετα μεγάλα διαστήματα. Αρχικά επιλέγουμε ένα $n_1 \notin D$. Έπειτα αφού το $\mathbb{N} \setminus D$ περιέχει αυθαίρετα μεγάλα διαστήματα, υπάρχει φυσικός n_2 ώστε $[n_2, n_1 + n_2] \cap D = \emptyset$. Ειδικότερα $n_2 \notin D$ και $n_1 + n_2 \notin D$. Έτσι έχουμε ότι $\{n_1, n_2, n_1 + n_2\} \subseteq \mathbb{N} \setminus D$. Όμοια υπάρχει φυσικός n_3 ώστε $[n_3, n_1 + n_2 + n_3] \cap D = \emptyset$. Έτσι έχουμε $\{n_1, n_2, n_3, n_1 + n_2, n_2 + n_3, n_1 + n_3, n_1 + n_2 + n_3\} \subseteq \mathbb{N} \setminus D$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε κάθε πεπερασμένο άθροισμα όρων της ακολουθίας, να ανήκει στο $\mathbb{N} \setminus D$.

Αφού τώρα $\underline{\text{dens}}(A) > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\underline{\text{dens}}(A) > \frac{1}{m}$. Επίσης θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$A_k = A + (n_1 + \ldots + n_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.14}$$

Αφού κάθε A_k έχει κάτω πυκνότητα μεγαλύτερη από $\frac{1}{m}$, υπάρχει κάποιο $N \geq 1$ τέτοιο ώστε, για κάθε $k \leq m$ να ισχύει

$$\text{card}\{n \leq N : n \in A_k\} > \frac{N+1}{m}.$$

Αν τα A_k, για $k = 1, \ldots m$, ήταν ανά δύο ξένα, θα έπρεπε να ισχύει

$$\text{card}\{n \leq N : n \in A_1 \cup \ldots \cup A_m\} > m\frac{N+1}{m} = N + 1,$$

πράγμα αδύνατο. Συνεπώς υπάρχει $j < k$ με $A_j \cap A_k \neq \emptyset$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$n_{j+1} + \ldots + n_k \in A - A = D.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την κατασκευή της ακολουθίας $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Λήμμα 6.19. *[7] Έστω X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος και έστω $T \in \mathcal{L}(X)$ τοπολογικά μεταβατικός τελεστής.*

(α) Για κάθε ανοιχτή γειτονιά του μηδενός W και για κάθε μη κενά ανοιχτά σύνολα $U, V \subseteq X$, τα σύνολα $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, W)$ και $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(W, V)$ είναι συνδετικά.

(β) Υποθέτουμε ότι όλα τα σύνολα $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, W) \cap \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(W, V)$ είναι μη κενά για τα σύνολα U, V, W που ορίστηκαν από πάνω. Τότε όλα αυτά τα σύνολα είναι συνδετικά.

Απόδειξη Θεωρήματος 6.14. Έστω ότι ο τελεστής $T \in \mathfrak{L}(X)$ είναι συχνά υπερκυκλικός. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ασθενώς αναμειγνύων δείχνοντας ότι ικανοποιεί το Κριτήριο των Τριών Ανοιχτών Συνόλων.[7][4]

[3]Έστω A και B υποσύνολα του $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο των διαφορών $A - B$ ορίζεται να είναι το σύνολο $A - B = \{n - m : (n, m) \in A \times B, n \geq m\}$.

[4]Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και έστω $T \in \mathfrak{L}(X)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(*i*) Ο T είναι ασθενώς αναμειγνύων.

(*ii*) $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, W) \cap \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(W, V) \neq \emptyset$ για κάθε $U, V \subseteq X$ ανοιχτά μη κενά σύνολα και για κάθε γειτονιά του μηδενός W.

Έστω $U, V \neq \emptyset$ ανοιχτά υποσύνολα του X και W μια γειτονιά του 0. Αφού ο T είναι συχνά υπερκυκλικός είναι και υπερκυκλικός, συνεπώς είναι τοπολογικά μεταβατικός. Άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^m(U) \cap W \neq \emptyset$, έτσι υπάρχει $x \in U$ με $T^m(x) \in W$. Αφού ο τελεστής T^m είναι συνεχής, υπάρχει $U' \subseteq U$ ανοιχτό με $x \in U'$ και $T^m(U') \subseteq W$. Έστω ότι $x \in \mathrm{FHC}(T)$, τότε $x \in \mathrm{HC}(T)$, άρα από γνωστό λήμμα [7][5] ισχύει ότι

$$\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U', U') = \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, U') - \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, U').$$

Αφού τώρα το $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, U')$ έχει θετική κάτω πυκνότητα από το Λήμμα 6.18, το σύνολο $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U', U')$ είναι συνδετικό.

Ισχυρισμός. $m + \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U', U') \subseteq \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, W)$.

Απόδειξη. Έστω $m + n \in m + \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U', U')$ με $n \in \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U', U')$. Τότε $T^n(U') \cap U'$, άρα υπάρχει $x \in U'$ με $T^n(x) \in U'$. Θα δείξω ότι

$$(T^n(T^m(U)) \cap W = T^{n+m}(U) \cap W \neq \emptyset.$$

Αφού $U' \subseteq U$ έχουμε ότι

$$T^m(T^n(U')) \cap W \subseteq T^n(T^m(U)) \cap W.$$

Αφού υπάρχει $x \in U'$ με $T^n(x) \in U'$ και $T^m(U') \subseteq W$ έχουμε ότι $T^m(T^n(x)) \in W$. $\square$

Άρα αφού το $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(W, V)$ είναι συνδετικό από Λήμμα 6.19 συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, W) \cap \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(W, V) \neq \emptyset$. $\square$

[5]Υποθέτουμε ότι ο X είναι ένας δεύτερος αριθμήσιμος χώρος Baire χωρίς μεμονωμένα σημεία και $T : X \to X$ μια συνεχής υπερκυκλική απεικόνιση. Επίσης έστω x ένα υπερκυκλικό σημείο του T. Τότε, για κάθε (U, V) ζευγάρι μη κενών ανοιχτών συνόλων, ισχύει η ακόλουθη σχέση: $\mathbf{N}_{\mathrm{T}}(U, V) = \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, V) - \mathbf{N}_{\mathrm{T}}(x, U)$.

Βιβλιογραφία

[1] S. I. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128**, (1995), 374-383.

[2] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. **148**, (1997), 384-390.

[3] Σ. Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2004.*

[4] Σ. Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2011.*

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, **99**, (1992), 332-334.

[6] F. Bayart and S. Grivaux, *Frequently hypercyclic operators*, Trans. Amer. Math. Soc, **358(11)**, (2006), 5083-5117.

[7] Frédéric Bayart and Étienne Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge tracts in Mathematics, **179**, 2009.

[8] L. Bernal-Gonzàlez, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc, Amer. Math. Soc., **127(4)**, (1999), 1003-1010.

[9] J. P. Bès, *Three problems on hypercyclic vectors for the real scalar case. Ph.D thesis, Bowling Green State University, Bowling Green, Ohio*, (1998).

[10] J. Bès and A. Peris, *Hereditarily Hypercyclic Operators*, J. Funct. Anal. **167**, (1999), 94-112.

[11] G. D. Birkhoff, *Surface transformations and their dynamical properties*, Acta Math. **43**, (1922), 1-119.

[12] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. sci. Paris **189**, (1929), 473-475.

[13] J. Bonet and A. Peris, *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. **159**, (1998), 587-595.

[14] P. S. Bourdon and N. S. Feldman, *Somewhere dense orbits are everywhere dense*, Indiana Univ. Math. J. **52**, (2003), 811-819.

[15] J. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer, 1973.

[16] R. L. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.

[17] A. Fathi, *Existence de systèmes dynamiques minimaux sur l'espace de Hilbert Sèparable.*, Topology **22**, (1983), 163-167.

[18] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc, Amer. Math. Soc., **100(2)**, (2006), 5083-5117.

[19] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds.*, J. Funct. Anal. **98**, (1991), 229-269.

[20] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris-Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, 2011.

[21] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris-Manguillot, *Frequently dense orbits*, C. R. Acad, Sci. Paris, **341**, (2005), 123-128.

[22] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Dover. Second edition, 1988.

[23] Σ. Καρανάσιος, *Σημειώσεις Παραδόσεων Θεωρίας Τελεστών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2006.*

[24] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Ph.D thesis, University of Toronto, Toronto, (1982).

[25] F. Leòn and V. Muller, *Rotations of hypercyclic and supercyclic operators*, Integral Equations Operator Theory **50**, (2004), 385-391.

[26] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2**, (1952/1953), 72-87.

[27] J. Muncres, *Topology*, Pearson, Second edition, 2000.

[28] Γ. Παντελίδης, Δ. Κραββαρίτης, Β. Νασόπουλος, *Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, 1996.*

[29] S.Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32**, (1969), 17-22.

[30] W. Rudin, *Functional Analysis*, International Editions, Second edition, 1991.

[31] J. H. Shapiro, *Compositions Operators and Classical Function Theory*, Universitext. Springer-Verlag, 2006.

[32] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις ΑΙΘΡΑ, 1988.