ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τμημα Μαθηματικων
Τομεας Αλγεβρας - Γεωμετριας

**Αμαλία - Σοφία Τσούρη**

# Ελαχιστικες Επιφανειες και η Συνθηκη Ricci

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2017

*Στη μνήμη της γιαγιάς μου Φωτεινής.*

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 27-06-17 από την επταμελή εξεταστική επιτροπή:

| **Ονοματεπώνυμο** | **Βαθμίδα** | **Υπογραφή** |
|---|---|---|
| Θεόδωρος Βλάχος (Επιβλέπων) | Καθηγητής | |
| Ανδρέας Αρβανιτογεώργος | Αναπληρωτής Καθηγητής | |
| Φανή Πεταλίδου | Επίκουρη Καθηγήτρια | |

Η έγκριση της Μεταπτυχιακής Διατριβής από το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων δεν υποδηλοί αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα (Άρθρο 202 §2, Ν. 5343/1932 και Άρθρο 50 §8, Ν.1268/1982)

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Αμαλία - Σοφία Τσούρη

# Ευχαριστιες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συνέβαλαν στην εκπόνησή της.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Θεόδωρο Βλάχο, για την καθοδήγηση, τις συμβουλές και την στήριξη που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Επίσης θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στην κ. Φανή Πεταλίδου και τον κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο, για τις χρήσιμες διορθώσεις και παρατηρήσεις τους.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως την οικογένειά μου για τη συμβολή της στην εκπλήρωση του στόχου μου, το Χρήστο για τη συνεχή συμπαράσταση και τους φίλους και συναδέλφους μου.

Αμαλία - Σοφία Τσούρη

Ιωάννινα, 2017

# Περιληψη

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε ελαχιστικές επιφάνειες σε Ευκλείδειους χώρους και τη συνθήκη Ricci. Η συνθήκη Ricci είναι ένας εσωτερικός χαρακτηρισμός των μετρικών σε διδιάστατα πολυπτύγματα Riemann $(M, \langle , \rangle)$, τα οποία εμβαπτίζονται ισομετρικά ως ελαχιστικές επιφάνειες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$. Η συνθήκη Ricci δηλαδή, είναι ένα κριτήριο για το πότε ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann είναι τοπικά ισομετρικό με μια ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Προκύπτει τότε το ερώτημα, κατά πόσο οποιαδήποτε ελαχιστική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ πληροί τη συνθήκη Ricci, ή ισοδύναμα αν κάθε ελαχιστική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου, με οποιαδήποτε συνδιάσταση, είναι τοπικά ισομετρική με μια ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Ο Pinl [18] το 1953 έδωσε ένα πρώτο παράδειγμα ελαχιστικής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^4$, η οποία δεν πληροί τη συνθήκη Ricci. Έτσι τέθηκε το πρόβλημα της εύρεσης όλων εκείνων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τη συνθήκη Ricci ή ισοδύναμα είναι τοπικά ισομετρικές με ελαχιστικές επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Ο Lawson, στη διδακτορική του διατριβή [14], [13], έλυσε το πρόβλημα της ταξινόμησης όλων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που πληρούν τη συνθήκη Ricci και μάλιστα απέδειξε ότι αυτές περιέχονται είτε στον $\mathbb{R}^3$ είτε στον $\mathbb{R}^6$. Στόχος της διατριβής είναι να αποδείξουμε την ταξινόμηση του Lawson.

# Abstract

We study minimal surfaces in a Euclidean space and the Ricci condition. The Ricci condition is an intrinsic characterization of the metrics on 2-dimensional Riemann manifolds $(M, \langle , \rangle)$, which are isometrically immersed as minimal surfaces in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$. This means that a 2-dimensional Riemann manifold satisfies the Ricci condition if and only if it is locally isometric to a minimal surface in $\mathbb{R}^3$. Then it arises naturally the question, weather every minimal surface of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is locally isometric to a minimal surface in $\mathbb{R}^3$. Pinl [18] in 1953 provided a first example of a minimal surface in $\mathbb{R}^4$ that does not satisfy the Ricci condition. This raised the problem to classify all minimal surfases in $\mathbb{R}^n$ that satisfy the Ricci condition or equivalently the minimal surfaces that are locally isometric to minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. Lawson in his PhD thesis [14], [13], solved the problem of the classification of all minimal surfaces in $\mathbb{R}^n$, which satisfy the Ricci condition and proved that they lie either in $\mathbb{R}^3$ or in $\mathbb{R}^6$. The aim of this thesis is to provide a proof of Lawson's classification.

# Περιεχομενα

# Εισαγωγη

Η θεωρία των επιφανειών του Ευκλειδείου χώρου γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη την εποχή του Gauss, περί τον 17ο με 18ο αιώνα. Πιο συγκεκριμένα, οι ελαχιστικές επιφάνειες μελετήθηκαν αρκετά και προσέλκυσαν το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών ανά τους αιώνες. Εξακολουθεί δε να είναι ενεργό πεδίο έρευνας στη Διαφορική Γεωμετρία, συνδυάζοντας εργαλεία από τις Διαφορικές Εξισώσεις με μερικές παραγώγους καθώς και τη Μιγαδική Ανάλυση. Υπάρχει μια συνθήκη, η λεγόμενη **συνθήκη Ricci**, η οποία χαρακτηρίζει τις μετρικές πάνω σε διδιάστατα πολυπτύγματα Riemann $(M, \langle , \rangle)$, τα οποία εμβαπτίζονται ισομετρικά ως ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$. Με άλλα λόγια υπάρχει ένας εσωτερικός χαρακτηρισμός, με τον οποίο εξασφαλίζεται πότε ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann είναι τοπικά ισομετρικό με μια ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Η συνθήκη Ricci αποδίδεται στον Ricci-Curbastro [20], [21] και δημοσιεύτηκε το 1896.

Έπειτα από την εμφάνιση της συνθήκης Ricci, ήταν εύλογο το εξής ερώτημα : πόσες τοπικές ελαχιστικές ισομετρικές εμβαπτίσεις ενός διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann στον $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν, υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η συνθήκη Ricci; Αποδεικνύεται ότι αν $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι μια ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ είναι απλά συνεκτικό διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann, τότε υπάρχει μια **μονοπαραμετρική $2\pi$-περιοδική οικογένεια** ελαχιστικών ισομετρικών εμβαπτίσεων (associate family) $f_\theta : M \to \mathbb{R}^3$, $\theta \in \mathbb{R}$, με $f_0 = f$. Η μονοπαραμετρική οικογένεια αυτή είναι ουσιαστικά και ο μόνος τρόπος ισομετρικής παραμόρφωσης απλά συνεκτικών ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι είναι εφικτή η αναλυτική περιγραφή της $f_\theta$, η οποία λαμβάνει τη μορφή:

$$f_\theta = \cos\theta f + \sin\theta f_{\pi/2},$$

που είναι μοναδική, modulo μιας παράλληλης μεταφοράς στον $\mathbb{R}^3$.

Με τα νέα αυτά δεδομένα για ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$, προέκυψαν αρκετά ερωτήματα για ελαχιστικές επιφάνειες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ οποιασδήποτε συνδιάστασης. Ένα από αυτά ήταν αν οποιαδήποτε ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^n$ πληροί τη συνθήκη Ricci, ή ισοδύναμα αν κάθε ελαχιστική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου, με οποιαδήποτε συνδιάσταση, είναι τοπικά ισομετρική με ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Για αρκετά χρόνια επικρατούσε η εντύπωση ότι κάθε ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^n$ πληροί τη συνθήκη Ricci. Αν ίσχυε αυτό, από σκοπιάς της τοπικής θεωρίας, θα σήμαινε ότι δεν θα υπήρχε κανένα νόημα να μελετά κάποιος ελαχιστικές επιφάνειες με μεγάλη συνδιάσταση. Ωστόσο, ο Pinl [18] το 1953 έδωσε ένα παράδειγμα ελαχιστικής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^4$, η οποία δεν πληροί τη συνθήκη Ricci. Φυσιολογικά τέθηκε το πρόβλημα της εύρεσης όλων εκείνων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που πληρούν τη συνθήκη Ricci ή, ισοδύναμα, της ταξινόμησης εκείνων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που είναι τοπικά ισομετρικές με ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$. Ο Lawson στη διδακτορική του διατριβή [14] [13], έλυσε το πρόβλημα της ταξινόμησης όλων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που πληρούν τη συνθήκη Ricci. Απέδειξε ότι αυτές περιέχονται είτε στον $\mathbb{R}^3$ είτε στον $\mathbb{R}^6$.

Στην παρούσα διατριβή θα αναλύσουμε λεπτομερώς την ταξινόμηση αυτών των ελαχιστικών επιφανειών. Γι΄ αυτό το σκοπό θα αναφερθούμε σε σημαντικές έννοιες της θεωρίας των επιφανειών του $\mathbb{R}^n$, όπως η γενικευμένη απεικόνιση Gauss ελαχιστικής επιφάνειας καθώς και σε θεωρήματα που αφορούν ολόμορφες καμπύλες του $n$-διάστατου μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{C}P^n$ σταθερής καμπυλότητας Gauss. Σημαντικό ρόλο στην ανάλυση αυτή θα έχει η **μονοπαραμετρική οικογένεια** ελαχιστικών επιφανειών, ο **ολόμορφος αντιπρόσωπος** καθώς και η **αναπαράσταση Weierstrass**, η οποία είναι μια τοπική μέθοδος κατασκευής όλων των ελαχιστικών επιφανειών του Ευκλειδείου χώρου μέσω ολόμορφων δεδομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Προκαταρκτικα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παραθέσουμε αρχικά κάποιες έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας [19], ενώ στη συνέχεια θα αναφέρουμε χρήσιμες πληροφορίες για τα διαφορίσιμα πολυπτύγματα [11] και την θεωρία των ισομετρικών εμβαπτίσεων [4]. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις σύμμορφες μετρικές και έννοιες που αφορούν τα μιγαδικά πολυπτύγματα, καθώς είναι απαραίτητα για την κατανόηση και την απόδειξη των κύριων αποτελεσμάτων της παρούσας διατριβής.

## 1.1 Αλγεβρικά προκαταρκτικά

Αρχικά αναφέρουμε χρήσιμες πληροφορίες για τους αυτοπροσηρτημένους και τους ορθογώνιους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Έστω $V$ ένας $n$-διάστατος διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$.

**Ορισμός 1.1.1.** *Αν $A : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός $A^* : V \to V$ που ορίζεται ως:*

$$\langle A^* x, y \rangle = \langle Ay, x \rangle,$$

*ονομάζεται **προσηρτημένος (adjoint)** του $A$.*

Για τυχόντες γραμμικούς μετασχηματισμούς $A, B : V \to V$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$(A \circ B)^* = B^* \circ A^*,$$

$$(A^*)^* = A,$$

$$(A + B)^* = A^* + B^*,$$

$$(\lambda A)^* = \lambda A^*, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, για τον ταυτοτικό γραμμικό μετασχηματισμό $I : V \to V$ ισχύει $I^* = I$, ενώ αν $A$ είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός, τότε ο προσηρτημένος του είναι επίσης αντιστρέψιμος και μάλιστα ισχύει $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

**Ορισμός 1.1.2.** *Ο γραμμικός μετασχηματισμός $A : V \to V$, καλείται **αυτοπροσηρτημένος (self-adjoint)**, αν ισχύει $A^* = A$.*

Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές ενός αυτοπροσηρτημένου γραμμικού μετασχηματισμού $A$ είναι πραγματικές, ενώ επίσης υπάρχει ορθομοναδιαία βάση του $V$ ως προς την οποία ο πίνακας του $A$ είναι διαγώνιος με στοιχεία της κύριας διαγωνίου τις ιδιοτιμές του $A$.

Σημαντικό ρόλο στα επόμενα έχουν οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί.

**Ορισμός 1.1.3.** *Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $A : V \to V$ καλείται* ***ορθογώνιος*** *μετασχηματισμός αν πληροί τη σχέση*

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \text{ για κάθε } x, y \in V.$$

Άμεσα προκύπτει ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $A : V \to V$ είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν ισχύει

$$A \circ A^* = A^* \circ A = I,$$

ενώ αν ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $A$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές, αυτές είναι οι $+1, -1$.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε την έννοια της μιγαδικής δομής και της μιγαδικοποίησης ενός $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου.

**Ορισμός 1.1.4.** *Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $J : V \to V$ καλείται* ***μιγαδική δομή*** *αν ικανοποιεί την $J \circ J = -I$.*

**Παρατήρηση.** *Αποδεικνύεται ότι μόνο διανυσματικοί χώροι άρτιας διάστασης επιδέχονται μιγαδική δομή.*

Αν $V$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, εφοδιασμένος με μια μιγαδική δομή $J$, τότε ο $J$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός αν και μόνο αν ισχύει:

$$J^* = J^{-1} = -J.$$

Επιπλέον, στην περίπτωση ενός διδιάστατου διανυσματικού χώρου εφοδιασμένου με ένα εσωτερικό γινόμενο, και αν η μιγαδική δομή $J : V \to V$ είναι και ορθογώνιος μετασχηματισμός, προκύπτει ότι το ίχνος της είναι μηδενικό, ενώ από το θεώρημα Cayley-Hamilton ισχύει:

$$J^2 - (\mathrm{trace} J)J + (\det J)I = 0,$$

και επομένως $\det J = 1$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι ένας διδιάστατος διανυσματικός χώρος $V$, με εσωτερικό γινόμενο, επιδέχεται δύο ακριβώς τέτοιες μιγαδικές δομές που είναι και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, τις $J$ και $-J$.

**Πρόταση 1.1.1.** *Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $J : V \to V$ μία μιγαδική δομή του που είναι και ορθογώνιος μετασχηματισμός. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $J_\theta : V \to V$ με $J_\theta = \cos\theta I + \sin\theta J$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $J_\theta \circ J_\varphi = J_{\theta+\varphi}$, *για κάθε* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,

*(ii)* $J_\theta^* = J_{-\theta}$.

*Απόδειξη.* *(i)* Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned} J_\theta \circ J_\varphi &= (\cos\theta I + \sin\theta J) \circ (\cos\varphi I + \sin\varphi J) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)I + (\cos\theta\sin\theta + \cos\varphi\sin\varphi)J \\ &= \cos(\theta+\varphi)I + \sin(\theta+\varphi)J \\ &= J_{\theta+\varphi}. \end{aligned}$$

*(ii)* Επιπλέον

$$\begin{aligned} J_\theta^* &= (\cos\theta I + \sin\theta J)^* \\ &= \cos\theta I^* + \sin\theta J^* \\ &= \cos\theta I - \sin\theta J \\ &= J_{-\theta} \end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Άμεσα προκύπτει ότι ο $J_\theta$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Έστω $V$ ένας 2-διάστατος διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και μία μιγαδική δομή $J$, η οποία είναι και ορθογώνιος μετασχηματισμός. Αποδεικνύεται ότι αν $T : V \to V$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός με ορίζουσα $\det T = 1$, τότε υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ μοναδικό $\mod 2\pi$, τέτοιο ώστε $T = J_\theta$.

**Πρόταση 1.1.2.** *Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $\dim V = 2$, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και μία μιγαδική δομή $J$, που είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.*

*(i) Αν $A$ είναι αυτοπροσηρτημένος μετασχηματισμός μηδενικού ίχνους, τότε $A \circ J_\theta = J_{-\theta} \circ A$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Ειδικά, $A \circ J = -J \circ A$.*

*(ii) Αν $A, B : V \to V$ είναι δύο αυτοπροσηρτημένοι μετασχηματισμοί μηδενικού ίχνους και με ίσες ορίζουσες, τότε υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $A = B \circ J_\varphi$.*

*Απόδειξη.* *(i)* Έστω $\{e_1, e_2\}$ ορθομοναδιαία βάση τέτοια ώστε $Je_1 = e_2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} A \circ Je_1 &= Ae_2 \\ &= \langle Ae_2, e_1\rangle e_1 + \langle Ae_2, e_2\rangle e_2, \end{aligned}$$

απ΄ όπου, επειδή ο μετασχηματισμός $A$ έχει μηδενικό ίχνος, λαμβάνουμε

$$A \circ Je_1 = \langle Ae_1, e_2\rangle e_1 - \langle Ae_1, e_1\rangle e_2.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} -J \circ Ae_1 &= \langle -J \circ Ae_1, e_1\rangle e_1 + \langle -J \circ Ae_1, e_2\rangle e_2 \\ &= \langle J \circ (-J \circ A)e_1, Je_1\rangle e_1 + \langle J \circ (-J \circ A)e_1, Je_2\rangle e_2. \end{aligned}$$

Έτσι, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} -J \circ Ae_1 &= \langle Ae_1, Je_1 \rangle e_1 + \langle Ae_1, Je_2 \rangle e_2 \\ &= \langle Ae_1, e_2 \rangle e_1 - \langle Ae_1, e_1 \rangle e_2. \end{aligned}$$

Επομένως άμεσα προκύπτει ότι $A \circ Je_1 = -J \circ Ae_1$, ενώ παρόμοια αποδεικνύεται ότι $A \circ Je_2 = -J \circ Ae_2$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$A \circ J = -J \circ A.$$

Από τον τρόπο που ορίστηκε ο $J_\theta$ προκύπτει

$$\begin{aligned} J_{-\theta} \circ A &= (\cos\theta I - \sin\theta J) \circ A \\ &= \cos\theta A - \sin\theta J \circ A \\ &= \cos\theta A + \sin\theta A \circ J \\ &= A \circ (\cos\theta I + \sin\theta J) \\ &= A \circ J_\theta. \end{aligned}$$

*(ii)* Έστω ότι $\det A = \det B \neq 0$. Από το θεώρημα Cayley-Hamilton λαμβάνουμε

$$A^2 - (\mathrm{trace} A)A + (\det A)I = 0,$$

$$B^2 - (\mathrm{trace} B)B + (\det B)I = 0,$$

απ΄ όπου λόγω των υποθέσεων της πρότασης προκύπτει

$$A^2 = B^2,$$

ή ισοδύναμα

$$A \circ B^{-1} = A^{-1} \circ B.$$

Θεωρώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό $T = A \circ B^{-1}$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (A \circ B^{-1})^* &= (B^{-1})^* \circ A^* \\ &= B^{-1} \circ A \\ &= (A^{-1} \circ B)^{-1} \\ &= (A \circ B^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

δηλαδή ότι ο $T$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός και μάλιστα

$$\det T = \det A^{-1} \det B = \frac{\det B}{\det A} = 1.$$

Επομένως σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $A \circ B^{-1} = J_{-\varphi}$, ή ισοδύναμα $A = J_{-\varphi} \circ B$. Έχουμε δηλαδή

$$\begin{aligned} A &= (\cos\varphi I - \sin\varphi J) \circ B \\ &= \cos\varphi B - \sin\varphi J \circ B \\ &= \cos\varphi B + \sin\varphi B \circ J \\ &= B \circ J_\varphi. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση όπου $\det A = \det B = 0$, μιας και μετασχηματισμοί $A, B$ είναι αυτοπροσηρτημένοι, προκύπτει $A = B = 0$, οπότε η $A = B \circ J_\varphi$ ισχύει για κάθε $\varphi \in \mathbb{R}$. □

Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $J$ μία μιγαδική δομή του. Ορίζουμε την **μιγαδικοποίηση του** $V$ ως τον μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V^{\mathbb{C}}$ με πράξεις την γνωστή πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό με συντελεστές από τους μιγαδικούς ως εξής:

$$zv = (x + iy)v := xv + yJv,$$

για κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $v \in V$. Προφανώς ισχύει

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V,$$

ενώ επιπλέον η μιγαδική δομή $J$ του $V$, μπορεί να επεκταθεί $\mathbb{C}$-γραμμικά στο $V^{\mathbb{C}}$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο ενδομορφισμός $J : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ έχει ιδιοτιμές τις $i, -i$, με αντίστοιχους ιδιοχώρους:

$$V^{(1,0)} = \{v \in V^{\mathbb{C}} : Jv = iv\},$$

$$V^{(0,1)} = \{v \in V^{\mathbb{C}} : Jv = -iv\}.$$

**Λήμμα 1.1.1.** *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$V^{(1,0)} = \{x - iJx : x \in V\}$$

*και*

$$V^{(0,1)} = \{x + iJx : x \in V\}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $v = x + iy$ με $x, y \in V$. Τότε

$$\begin{aligned} V^{(1,0)} &= \{v \in V^{\mathbb{C}} : Jv = iv\} \\ &= \{v \in V^{\mathbb{C}} : Jx + iJy = ix + i(iy)\} \\ &= \{v \in V^{\mathbb{C}} : Jx = -y \text{ και } Jy = x\} \\ &= \{x - iJx : x \in V\}. \end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $V^{(0,1)} = \{x + iJx : x \in V\}$. □

Προφανώς ισχύει

$$V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}.$$

Ορίζονται τότε οι προβολές:

$$\pi : V^{\mathbb{C}} \to V^{(1,0)}, \text{ με } \pi(v) := \frac{1}{2}(v - iJv),$$

$$\pi' : V^{\mathbb{C}} \to V^{(0,1)}, \text{ με } \pi'(v) := \frac{1}{2}(v + iJv).$$

## 1.2 Διαφορίσιμα πολυπτύγματα

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε ορισμούς και προτάσεις που αφορούν τα διαφορίσιμα πολυπτύγματα.

**Ορισμός 1.2.1.** *Ένα $n$-διάστατο* ***διαφορίσιμο πολύπτυγμα*** *$M$ είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, ο οποίος πληροί τις εξής ιδιότητες:*

*(i) Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ του $M$, τέτοια ώστε $\cup_{\alpha\in I}U_\alpha = M$ και αντίστοιχων ομοιομορφισμών $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, όπου $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ονομάζεται χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων του $M$.*

*(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η απεικόνιση*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

*είναι $C^\infty$-διαφορίσιμη. Η οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ καλείται άτλας του $M$.*

*(iii) Η οικογένεια χαρτών $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, είναι μεγιστοτική ως προς τις ιδιότητες (i) και (ii), δηλαδή εάν $(U, \varphi)$ είναι ένας χάρτης τέτοιος ώστε $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ , $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ να είναι $C^\infty$-διαφορίσιμες απεικονίσεις για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο χάρτης $(U, \varphi)$ ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.*

Μια συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ καλείται **διαφορίσιμη** στο $p \in M$ αν υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U$ του $p$ και ομοιομορφισμός $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ώστε η $f \circ \varphi^{-1}$ να είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(p)$.

**Ορισμός 1.2.2.** *Έστω $M$ ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα, $p \in M$ και $D_p = \{f : U \to \mathbb{R} : f$ διαφορίσιμη$\}$. Καλούμε* ***εφαπτόμενο διάνυσμα*** *του $M$ στο $p$, μια απεικόνιση $v : D_p \to \mathbb{R}$ που πληροί τις εξής ιδιότητες:*

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g),$$

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g),$$

*για κάθε $f, g \in D_p$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Το σύνολο $T_pM$ των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε ένα σημείο $p \in M$ ονομάζεται **εφαπτόμενος χώρος** του $M$ στο σημείο $p$ και δέχεται δομή $\mathbb{R}$-γραμμικού χώρου, του οποίου η διάσταση είναι $n$, δηλαδή ίση με τη διάσταση του $M$. Επιπλέον, αν $(U, \varphi)$ χάρτης του $M^n$ με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^1, x^2, \ldots, x^n$, τα εφαπτόμενα διανύσματα

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$$

που ορίζονται ως

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f) := D_i(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)},$$

όπου $f \in D_p$ και $D_i$ η συνήθης μερική παράγωγος της $f\circ\varphi^{-1}$ ως προς την $x^i$-μεταβλητή του $\mathbb{R}^n$, συνιστούν βάση του $T_pM$.

**Ορισμός 1.2.3.** *Έστω $M$ ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Η* ***εφαπτόμενη δέσμη*** *$TM$ του $M$ ορίζεται ως η ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων του $M$,*

$$TM = \cup_{p\in M} T_pM = \{(p,u) : p \in M, u \in T_pM\}.$$

Είναι γνωστό ότι η εφαπτόμενη δέσμη του $M$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης $2n$.

**Ορισμός 1.2.4.** *Έστω $f : M^n \to N^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων $M^n$ και $N^m$. Καλούμε* ***διαφορικό*** *της $f$ στο $p \in M$ τη γραμμική απεικόνιση $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ που ορίζεται ως εξής:*

$$df_p(v)(h) = v(h \circ f),$$

*για κάθε $v \in T_pM$ και $h \in D_{f(p)}$.*

**Ορισμός 1.2.5.** *Έστω $f : M^n \to N^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $n \leq m$.*

*(i) Η $f$ καλείται* ***εμβάπτιση*** *αν για κάθε $p \in M$ το διαφορικό*

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

*είναι $1-1$, δηλαδή $rank(df_p) = n$.*

*(ii) Η $f$ καλείται* ***εμφύτευση*** *αν είναι εμβάπτιση και επιπλέον η απεικόνιση $f : M^n \to f(M^n)$ είναι ομοιομορφισμός, όπου το $f(M^n)$ είναι εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία του $N^m$.*

**Ορισμός 1.2.6.** *Έστω $M^n, N^m$ διαφορίσιμα πολυπτύγματα για τα οποία ισχύει $M^n \subset N^m$. Το πολύπτυγμα $M^n$ καλείται* ***υποπολύπτυγμα*** *του $N^m$ αν η απεικόνιση έγκλεισης*

$$i : M^n \to N^m,\ i(p) = p,\ p \in M^n$$

*είναι εμφύτευση.*

Κατά τη μελέτη των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων προέκυψε η ανάγκη ορισμού των διανυσματικών πεδίων.

**Ορισμός 1.2.7.** *Έστω $M$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Καλούμε* ***διανυσματικό πεδίο*** *$X$ του $M$, μία απεικόνιση που σε κάθε $p \in M$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $X_p \in T_pM$. Το $X$ καλείται* ***διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο*** *αν για κάθε $f : M \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, η συνάρτηση*

$$Xf : M \to \mathbb{R},\quad (Xf)(p) = X_p(f)$$

*είναι διαφορίσιμη.*

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda Xf + \mu Xg,$$

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg),$$

για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$ και $X \in \mathcal{X}(M)$, όπου με $C^\infty(M)$ συμβολίζουμε το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : M \to \mathbb{R}$ και με $\mathcal{X}(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του $M$.

**Ορισμός 1.2.8.** *Καλούμε* ***γινόμενο Lie*** *των $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ που ορίζεται ως εξής:*

$$[X, Y]_p = X_pY - Y_pX,\ p \in M,$$

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf),\ f \in C^\infty(M).$$

Ισχύουν τα παρακάτω:

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

$$[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1[X_1, Y] + \lambda_2[X_2, Y],\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X,$$

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0 \text{ για κάθε } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

**Ορισμός 1.2.9.** *Ένα πολύπτυγμα $M$ καλείται* ***απλά συνεκτικό*** *αν και μόνο αν κάθε συνεχής κλειστή καμπύλη $c : [0, 1] \to M$ είναι ομοτοπική με τη σταθερή καμπύλη, δηλαδή υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : [0, 1] \times [0, 1] \to M$ τέτοια ώστε, για $p \in M$, να ισχύουν:*

$$H(0, t) = p,\ \text{για κάθε } t \in [0, 1],$$

$$H(1, t) = c(t),\ \text{για κάθε } t \in [0, 1],$$

$$H(s, 0) = H(s, 1) = p,\ \text{για κάθε } s \in [0, 1].$$

Στη συνέχεια θα εισάγουμε την έννοια του προσανατολισμού ενός διαφορίσιμου πολυπτύγματος, μια έννοια τοπολογική, η οποία αναφέρεται σε ολόκληρο το πολύπτυγμα.

**Ορισμός 1.2.10.** *Ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$ καλείται* ***προσανατολίσιμο****, αν υπάρχει άτλας $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, ώστε για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, να ισχύει $\det d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ στο $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, όπου $d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$. Ο άτλας αυτός καλείται προσανατολισμός.*

Ένας προσανατολισμός του $M$ επάγει έναν προσανατολισμό σε κάθε εφαπτόμενο χώρο, ενώ κάθε συνεκτικό, διαφορίσιμο και προσανατολίσιμο πολύπτυγμα δέχεται ακριβώς δύο προσανατολισμούς. Ένα πολύπτυγμα καλείται προσανατολισμένο, αν είναι προσανατολίσιμο και έχουμε επιλέξει ένα προσανατολισμό.

**Ορισμός 1.2.11.** *Έστω $M$ ένα $n$-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Μια* ***γραμμική συνοχή*** *στο $M$, είναι μια απεικόνιση*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), (X, Y) \to \nabla_X Y,$$

*η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y,$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$$

$$\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2,$$
$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$$

*για* $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ *και* $f \in C^\infty(M)$. *Το διανυσματικό πεδίο* $\nabla_X Y$ *καλείται συναλλοίωτη παράγωγος του* $Y$ *στη διεύθυνση* $X$, *ως προς τη συνοχή* $\nabla$.

**Ορισμός 1.2.12.** *Έστω* $M$ *ένα* $n$*-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Ένα* ***τανυστικό πεδίο*** *τύπου* $(r, 1)$ *στο* $M$ *είναι μια απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r} \to \mathcal{X}(M)$$

*η οποία είναι* $C^\infty(M)$*-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, ενώ ένα τανυστικό πεδίο τύπου* $(r, 0)$ *στο* $M$ *είναι μια απεικόνιση*

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r} \to C^\infty(M)$$

*η οποία είναι* $C^\infty(M)$*-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.*

Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(M)$ και ένα $(r, s)$-τανυστικό πεδίο $T$ του $M$, όπου $s = 0, 1$.

**Ορισμός 1.2.13.** *Η* ***συναλλοίωτη παράγωγος*** *του* $T$ *στη διεύθυνση του* $X$, *είναι το* $(r, s)$*-τανυστικό πεδίο* $\nabla_X T$ *που ορίζεται ως:*

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1, X_2, \ldots, X_r) &= \nabla_X\big(T(X_1, X_2, \ldots, X_r)\big)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} T(X_1, \ldots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \ldots, X_r), \text{ αν } s = 1,\end{aligned}$$

$$(\nabla_X T)(X_1, X_2, \ldots, X_r) = X\big(T(X_1, X_2, \ldots, X_r)\big), \text{ αν } s = 0.$$

**Πρόταση 1.2.1.** *Για τυχόντα τανυστικά πεδία* $A, B$ *τύπου* $(1, 1)$ *ενός πολυπτύγματος ισχύει:*

$$\nabla_X(A \circ B) = (\nabla_X A) \circ B + A \circ (\nabla_X B), \text{ για κάθε } X \in \mathcal{X}(M).$$

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου τανυστικών πεδίων έχουμε για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned}\big(\nabla_X(A \circ B)\big)(Y) &= \nabla_X\big((A \circ B)(Y)\big) - (A \circ B)(\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X\big(A\big(B(Y)\big)\big) - A\big(B(\nabla_X Y)\big).\end{aligned}$$

Λαμβάνουμε δηλαδή ότι

$$\begin{aligned}\big(\nabla_X(A \circ B)\big)(Y) &= (\nabla_X A)\big(B(Y)\big) + A\big(\nabla_X\big(B(Y)\big)\big) - A\big(B(\nabla_X Y)\big)\\ &= (\nabla_X A)\big(B(Y)\big) + A\big((\nabla_X B)(Y)\big) + A\big(B(\nabla_X Y)\big) - A\big(B(\nabla_X Y)\big)\\ &= (\nabla_X A) \circ B(Y) + A \circ (\nabla_X B)(Y).\end{aligned}$$

□

**Ορισμός 1.2.14.** *Έστω $M$ διαφορίσιο πολύπτυγμα, εφοδιασμένο με συνοχή $\nabla$. Η απεικόνιση $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$,*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

*καλείται **τανυστής καμπυλότητας** του πολυπτύγματος $M$ ως προς τη συνοχή $\nabla$.*

Κατά τα γνωστά, ο τανυστής καμπυλότητας είναι τανυστικό πεδίο τύπου $(3,1)$.

**Ορισμός 1.2.15.** *Μια **μετρική Riemann** $\langle , \rangle$ σε ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M^n$ είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(2,0)$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

*(i)* *είναι συμμετρικό, δηλαδή $\langle X,Y \rangle = \langle Y,X \rangle$, για κάθε $X,Y \in \mathcal{X}(M)$,*

*(ii)* *είναι θετικώς οριστικό, δηλαδή για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$ και $p \in M$ ισχύει $\langle X,X \rangle(p) \geq 0$ και $\langle X,X \rangle(p) = 0$ αν και μόνο αν $X_p = 0$ .*

Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$ εφοδιασμένο με μια μετρική Riemann, ονομάζεται **πολύπτυγμα Riemann**.

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνοχής που είναι συμβατή με τη μετρική Riemann.

**Θεώρημα 1.2.1.** *Για κάθε πολύπτυγμα Riemann $(M, \langle , \rangle)$ υπάρχει μόνο μία συνοχή $\nabla$, η **συνοχή Levi-Civitá**, η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],$$
$$X\langle Y,Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

*για κάθε $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$.*

Ο τανυστής καμπυλότητας της συνοχής Levi-Civitá πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$$
$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$$
$$\langle R(X,Y)Z, W \rangle = -\langle R(X,Y)W, Z \rangle,$$
$$\langle R(X,Y)Z, W \rangle = \langle R(Z,W)X, Y \rangle.$$

**Ορισμός 1.2.16.** *Καλούμε **καμπυλότητα τομής** του $M^n$ στο σημείο $p \in M$ και ως προς τον διδιάστατο υπόχωρο $\sigma \subset T_pM$, τον αριθμό*

$$K(p,\sigma) = \langle R(X,Y)Y, X \rangle,$$

*όπου $\{X,Y\}$ ορθομοναδιαία βάση του $\sigma$.*

Αν $\{X,Y\}$ είναι τυχούσα βάση του $\sigma \subset T_pM$, τότε ισχύει

$$K(p,\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X \rangle}{||X \wedge Y||^2}, \tag{1.1}$$

όπου $||X \wedge Y||^2 = ||X||^2 ||Y||^2 - \langle X,Y \rangle^2$.

**Παρατήρηση.** *Όταν το πολύπτυγμα $M$ έχει διάσταση 2, η καμπυλότητα τομής του είναι συνάρτηση μόνο του σημείου $p$ και ονομάζεται* ***καμπυλότητα Gauss***.

Συμβολίζουμε $\mathbb{Q}_c^n$ το χώρο μορφής σταθερής καμπυλότητας $c$, δηλαδή ένα απλά συνεκτικό πλήρες πολύπτυγμα Riemann διάστασης $n$, με σταθερή καμπυλότητα τομής, ίση με $c$.

Κάθε προσανατολίσιμο, διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann $M$, δέχεται ένα $(1,1)$-τανυστικό πεδίο $J$, το οποίο σε κάθε σημείο $p \in M$ επάγει τον γραμμικό μετασχηματισμό $J_p : T_pM \to T_pM$, ο οποίος είναι μιγαδική δομή και ορθογώνιος μετασχηματισμός. Στην πραγματικότητα ο $J_p$ είναι η στροφή κατά γωνία $+\pi/2$ στο $T_pM$.

**Πρόταση 1.2.2.** *Για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M^2)$ ισχύει $(\nabla_X J)Y = 0$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\{e_1, e_2\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο τέτοιο ώστε $Je_1 = e_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(\nabla_{e_i} J)e_j = 0$ για $i, j = 1, 2$. O $J$ ως $(1,1)$-τανυστικό πεδίο ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\nabla_{e_1} J)(e_2) = \nabla_{e_1}\big(J(e_2)\big) - J(\nabla_{e_1} e_2).$$

Αφού το $\{e_1, e_2\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο, ισχύουν $\langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle = 0$ και $\langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle = 0$. Οπότε έχουμε

$$-\langle J(\nabla_{e_1} e_2), e_1 \rangle = 0,$$

ή

$$\langle \nabla_{e_1} J(e_2) - (\nabla_{e_1} J)(e_2), e_1 \rangle = 0,$$

ή

$$-\langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle - \langle (\nabla_{e_1} J)(e_2), e_1 \rangle = 0.$$

Επομένως παίρνουμε $\langle (\nabla_{e_1} J)e_2, e_1 \rangle = 0$. Επιπλέον ισχύει

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle &= -\langle e_1, \nabla_{e_1} e_2 \rangle \\
&= \langle Je_2, \nabla_{e_1} e_2 \rangle \\
&= -\langle e_2, J(\nabla_{e_1} e_2) \rangle \\
&= -\langle e_2, \nabla_{e_1}\big(J(e_2)\big) \rangle + \langle e_2, (\nabla_{e_1} J)e_2 \rangle,
\end{aligned}$$

απ᾽ όπου λαμβάνουμε

$$\langle e_2, (\nabla_{e_1} J)e_2 \rangle = 0.$$

Συνεπώς $(\nabla_{e_1} J)e_2 = 0$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $(\nabla_{e_2} J)e_1 = (\nabla_{e_1} J)e_1 = (\nabla_{e_2} J)e_2 = 0$. Τότε έχουμε ότι για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M^2)$ ισχύει

$$(\nabla_X J)Y = 0.$$

□

**Πρόταση 1.2.3.** *Έστω $(M, \langle , \rangle)$ ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann εφοδιασμένο με τη συνοχή Levi-Civitá $\nabla$. Για κάθε αυτοπροσηρτημένο τανυστικό πεδίο $A$ τύπου $(1,1)$ και για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

*(i) το (1,1)-τανυστικό πεδίο $\nabla_X A$ είναι αυτοπροσηρτημένο,*

*(ii)* $X(\mathrm{trace}A) = \mathrm{trace}(\nabla_X A)$.

*Απόδειξη.* *(i)* Αρκεί να δείξουμε ότι, για $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, ισχύει

$$\langle (\nabla_X A)Y, Z\rangle = \langle (\nabla_X A)Z, Y\rangle.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\langle (\nabla_X A)Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X (AY), Z\rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z\rangle \\ &= X(\langle AY, Z\rangle) - \langle AY, \nabla_X Z\rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z\rangle.\end{aligned}$$

Επειδή το τανυστικό πεδίο $A$ είναι αυτοπροσηρτημένο, λαμβάνουμε

$$\langle (\nabla_X A)Y, Z\rangle = X(\langle Y, AZ\rangle) - \langle Y, A(\nabla_X Z)\rangle - \langle \nabla_X Y, AZ\rangle.$$

Ομοίως έχουμε

$$\begin{aligned}\langle (\nabla_X A)Z, Y\rangle &= \langle \nabla_X (AZ), Y\rangle - \langle A(\nabla_X Z), Y\rangle \\ &= X(\langle AZ, Y\rangle) - \langle AZ, \nabla_X Y\rangle - \langle A(\nabla_X Z), Y\rangle)\end{aligned}$$

και συνεπώς προκύπτει το ζητούμενο.

*(ii)* Θεωρούμε $\{e_1, e_2\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο του προσανατολισμού του $M$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}X(\mathrm{trace}A) &= \sum_{i=1}^{2} X(\langle Ae_i, e_i\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \langle \nabla_X (Ae_i), e_i\rangle + \sum_{i=1}^{2} \langle Ae_i, \nabla_X e_i\rangle.\end{aligned}$$

Από τον ορισμό της συναλλοιώτου παραγώγου και το γεγονός ότι το $A$ είναι αυτοπροσηρτημένο τανυστικό πεδίο λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}X(\mathrm{trace}A) &= \sum_{i=1}^{2} \langle (\nabla_X A)e_i, e_i\rangle + 2\sum_{i=1}^{2} \langle Ae_i, \nabla_X e_i\rangle \\ &= \mathrm{trace}(\nabla_X A) + 2\sum_{i=1}^{2} \langle Ae_i, \nabla_X e_i\rangle.\end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla_X e_1 &= \langle \nabla_X e_1, e_1\rangle e_1 + \langle \nabla_X e_1, e_2\rangle e_2 \\ &= \frac{1}{2} X(\langle e_1, e_1\rangle) + \langle \nabla_X e_1, e_2\rangle e_2 \\ &= \langle \nabla_X e_1, e_2\rangle e_2.\end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι

$$\nabla_X e_2 = -\langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle e_1.$$

Επομένως προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{2} \langle Ae_i, \nabla_X e_i \rangle = \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle \langle Ae_1, e_2 \rangle - \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle \langle Ae_2, e_1 \rangle.$$

Λόγω του γεγονότος ότι το $A$ είναι αυτοπροσηρτημένο τανυστικό πεδίο, από την ανωτέρω λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{2} \langle Ae_i, \nabla_X e_i \rangle = 0,$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

## 1.3 Διαφορικές μορφές

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τους τανυστές και τους αντισυμμετρικούς τανυστές σε διανυσματικούς χώρους υπεράνω του $\mathbb{R}$, ενώ θα αναφέρουμε και την έννοια των διαφορικών μορφών και κάποιες από τις ιδιότητές τους.

**Ορισμός 1.3.1.** *Έστω $V$ διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Καλούμε **$r$-τανυστή** στο $V$ με $r \geq 1$ κάθε απεικόνιση:*

$$\tau : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{r} \to \mathbb{R}$$

*η οποία είναι πλειογραμμική, δηλαδή*

$$\tau(\dots, \lambda v_i + \mu v_i', \dots) = \lambda \tau(\dots, v_i, \dots) + \mu \tau(\dots, v_i', \dots),$$

*για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v_i, v_i' \in V, i = 1, \dots, r$.*

**Παρατήρηση.** *Το σύνολο όλων των $r$-τανυστών εφοδιάζεται κατά φυσικό τρόπο με δομή διανυσματικού χώρου. Ειδικά το σύνολο των 1-τανυστών είναι ο δυϊκός χώρος*

$$V^* = \{\phi : V \to \mathbb{R} : \phi \text{ είναι γραμμική}\}.$$

**Ορισμός 1.3.2.** *Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και $\tau$ ένας $r$-τανυστής και $\sigma$ ένας $s$-τανυστής στο $V$. Καλούμε **τανυστικό γινόμενο** των $\tau$ και $\sigma$ τον $(r+s)$-τανυστή που ορίζεται ως*

$$(\tau \otimes \sigma)(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) = \tau(v_1, \dots, v_r)\sigma(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}).$$

Το τανυστικό γινόμενο πληροί τις εξής ιδιότητες:

(i) $(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2) \otimes \sigma = \lambda_1 \tau_1 \otimes \sigma + \lambda_2 \tau \otimes \sigma$,

(ii) $\tau \otimes (\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2) = \lambda_1 \tau \otimes \sigma_1 + \lambda_2 \tau \otimes \sigma_2$,

(iii) $(\tau \otimes \sigma) \otimes \phi = \tau \otimes (\sigma \otimes \phi)$,

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $\tau, \tau_1, \tau_2, \sigma, \sigma_1, \sigma_2$ είναι τανυστές του διανυσματικού χώρου $V$.

**Ορισμός 1.3.3.** *Ένας $r$-τανυστής καλείται* ***αντισυμμετρικός*** *αν ισχύει:*

$$\tau(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(r)}) = \operatorname{sign}(\pi) \tau(v_1, \ldots, v_r)$$

*για κάθε $v_1, \ldots, v_r \in V$, $\pi \in S_r, r \geq 1$, όπου $S_r$ είναι η ομάδα των $r$-μεταθέσεων και $\operatorname{sign}(\pi)$ είναι το πρόσημο του $\pi$.*

Το σύνολο των $r$-αντισυμμετρικών τανυστών συμβολίζεται με $\Lambda^r V^*, r \geq 1$, και έχει δομή διανυσματικού υπόχωρου του χώρου όλων των $r$-τανυστών. Αποδεικνύεται ότι η διάστασή του είναι $\binom{n}{r}$, για $1 \leq r \leq n$, ενώ $\Lambda^r V^* = \{0\}$ για $r > n$.

Δοθέντος ενός $r$-τανυστή $\tau$ σε διανυσματικό χώρο $V$, μπορούμε να ορίσουμε έναν $r$-αντισυμμετρικό τανυστή $A\tau$ ως εξής:

$$(A\tau)(v_1, \ldots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in S_r} \operatorname{sign}(\pi) \tau(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(r)}),$$

για κάθε $v_1, \ldots, v_r \in V$, $\pi \in S_r, r \geq 1$.

Παρατηρούμε όμως ότι το τανυστικό γινόμενο δύο αντισυμμετρικών τανυστών δεν είναι αντισυμμετρικός τανυστής. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό ορίζουμε το εξωτερικό ή σφηνοειδές γινόμενο.

**Ορισμός 1.3.4.** *Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$, $\tau$ ένας $r$-αντισυμμετρικός τανυστής και $\sigma$ ένας $s$-αντισυμμετρικός τανυστής στο $V$. Καλούμε* ***εξωτερικό ή σφηνοειδές γινόμενο*** *των $\tau$ και $\sigma$, τον $(r+s)$-αντισυμμετρικό τανυστή $\tau \wedge \sigma$ που ορίζεται ως*

$$\tau \wedge \sigma = \frac{(r+s)!}{r!s!} A(\tau \otimes \sigma).$$

Το σφηνοειδές γινόμενο πληροί τις εξής ιδιότητες:

(i) $(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) \wedge \varphi = \lambda_1 \omega_1 \wedge \varphi + \lambda_2 \omega_2 \wedge \varphi$,

(ii) $\omega \wedge (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 \omega \wedge \varphi_1 + \lambda_2 \omega \wedge \varphi_2$,

(iii) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \sigma = \omega \wedge (\varphi \wedge \sigma)$,

(iv) $\omega \wedge \varphi = (-1)^{rs} \varphi \wedge \omega$,

(v) $\omega \wedge \varphi = \omega \otimes \varphi - \varphi \otimes \omega$, όταν $\omega, \varphi \in \Lambda^1 V^*$,

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $\omega, \omega_1, \omega_2, \varphi, \varphi_1, \varphi_2$ είναι αντισυμμετρικοί τανυστές.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις διαφορικές μορφές διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων.

**Ορισμός 1.3.5.** *Έστω $M^n$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Μια **$r$-μορφή** του $M$ είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(r,0)$*

$$\omega : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r} \to C^\infty(M)$$

*το οποίο είναι αντισυμμετρικό, δηλαδή*

$$\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r)}) = \mathrm{sign}(\pi)\omega(X_1, \ldots, X_r)$$

*για κάθε $\pi \in S_r, r \geq 1$ και $X_1, X_2, \ldots, X_r \in \mathcal{X}(M)$.*

Συμβολίζουμε με $\Lambda^r M$ το σύνολο των $r$-μορφών του $M$, για $r \geq 1$, ενώ ορίζουμε $\Lambda^0 M = C^\infty(M)$. Προφανώς $\Lambda^r M = \{0\}$ για $r > n$.

Παρατηρούμε ότι για τις μορφές ενός πολυπτύγματος, επειδή εξ' ορισμού είναι α-ντισυμμετρικά τανυστικά πεδία, ορίζεται το τανυστικό και το εξωτερικό ή σφηνοειδές γινόμενο ακριβώς όπως ορίστηκε παραπάνω.

**Πρόταση 1.3.1.** *Για κάθε διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M$ υπάρχει μοναδικός τελεστής $d$, τέτοιος ώστε, αν $\omega \in \Lambda^r M$, τότε $d\omega \in \Lambda^{r+1} M$, ο οποίος πληροί τα ακόλουθα:*

*(i)* $d(f) = df$, *για κάθε* $f \in C^\infty(M)$,

*(ii)* $d(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

*(iii)* $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^r \omega \wedge d\varphi$, $\varphi \in \Lambda^r M$,

*(iv)* $d(d\omega) = 0$.

Η μορφή $d\omega$ καλείται **εξωτερική παράγωγος** της μορφής $\omega$.

Αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση [11], η οποία υπολογίζει την εξωτερική παράγωγο μιας 1-μορφής.

**Πρόταση 1.3.2.** *Η εξωτερική παράγωγος μιας 1-μορφής $\omega \in \Lambda^1 M$ δίνεται ως εξής:*

$$d\omega(X,Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega([X,Y]),$$

*όπου $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.*

**Ορισμός 1.3.6.** *Έστω $M$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Μια μορφή $\omega$ του $M$ καλείται **κλειστή** αν η εξωτερική της παράγωγος είναι $d\omega = 0$, ενώ καλείται **ακριβής** αν υπάρχει μορφή $\varphi$ του $M$ τέτοια ώστε $\omega = d\varphi$.*

Είναι γνωστό ότι κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή, ενώ το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει. Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει μια συνθήκη για την ισχύ του αντιστρόφου.

**Πρόταση 1.3.3.** *Έστω $M$ ένα απλά συνεκτικό πολύπτυγμα και $\omega \in \Lambda^1 M$. Αν η μορφή $\omega$ είναι κλειστή, τότε υπάρχει λεία συνάρτηση $u : M \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $du = \omega$.*

## 1.4 Κλίση και Εσσιανή

Στη μελέτη της διανυσματικής ανάλυσης στον Ευκλείδειο χώρο είναι γνωστές οι έννοιες της κλίσεως, της Εσσιανής και του τελεστή Laplace μιας συνάρτησης καθώς και της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου. Οι έννοιες αυτές γενικεύονται σε τυχόν $n$-διάστατο πολύπτυγμα Riemann.

Σε κάθε σημείο $p \in M$, η μετρική $\langle , \rangle$ ορίζει ένα κανονικό ισομορφισμό μεταξύ του $T_pM$ και του δυϊκού του χώρου $T_p^*M$ ως εξής:

$$v \in T_pM \to v^* \in T_p^*M \text{ με } v^*(w) = \langle v, w\rangle.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι προφανώς γραμμική με πυρήνα $\mathrm{Ker} v^* = \{0\}$, επομένως η $v^*$ είναι ισομορφισμός. Μέσω αυτού του ισομορφισμού ορίζεται εν συνεχεία η κλίση τυχούσας συνάρτησης.

**Ορισμός 1.4.1.** *Έστω $M$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann, μια συνάρτηση $f \in C^\infty(M)$ και η αντίστοιχη 1-μορφή $df \in \Lambda^1(M)$. Η **κλίση** της $f$ στο σημείο $p$ ορίζεται ως*

$$df_p(v) = \langle \mathrm{grad} f(p), v\rangle, \text{ για κάθε } v \in T_pM.$$

Προφανώς $\mathrm{grad} f \in \mathcal{X}(M)$ και για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$ ισχύει

$$\langle X, \mathrm{grad} f\rangle = df(X) = Xf.$$

**Ορισμός 1.4.2.** *Έστω $M$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann και $Z \in \mathcal{X}(M)$. Καλούμε **απόκλιση** του $Z \in \mathcal{X}(M)$ τη συνάρτηση $\mathrm{div} Z \in C^\infty(M)$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$(\mathrm{div} Z)(p) = \mathrm{trace}(v \mapsto \nabla_v Z), \; v \in T_pM.$$

Επίσης γενικεύεται και η έννοια της Εσσιανής σε τυχόν $n$-διάστατο πολύπτυγμα Riemann.

**Ορισμός 1.4.3.** *Καλούμε **Εσσιανή** της $f \in C^\infty(M)$ το συμμετρικό τανυστικό πεδίο τύπου $(2,0)$ που ορίζεται ως εξής:*

$$\nabla^2 f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M), \; \nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \mathrm{grad} f, Y\rangle.$$

**Ορισμός 1.4.4.** *Έστω $M$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann και $f \in \mathcal{X}(M)$. Καλούμε **τελεστή Laplace** της $f$ την απεικόνιση*

$$\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M), \; \Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f), \; f \in C^\infty(M).$$

Η συνάρτηση $\Delta f$ καλείται Λαπλασιανή της $f$. Η $f \in C^\infty(U)$, με $U$ ανοιχτό υποσύνολο του πολυπτύγματος Riemann $M$, λέγεται **αρμονική** αν ισχύει $\Delta f = 0$. Επίσης είναι προφανές ότι η Λαπλασιανή είναι το ίχνος της Εσσιανής.

## 1.5 Ισομετρικές εμβαπτίσεις

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε την έννοια της ισομετρικής εμβάπτισης πολυπτύγματος και θα παραθέσουμε στοιχεία από τη θεωρία των ισομετρικών εμβαπτίσεων. Θα αναφέρουμε επίσης το Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των ισομετρικών εμβαπτίσεων.

**Ορισμός 1.5.1.** *Έστω $f : M^n \to N^m$ εμβάπτιση και $N^m$ πολύπτυγμα Riemann εφοδιασμένο με μετρική Riemann $\langle , \rangle$. Η* ***επαγόμενη μετρική*** *της εμβάπτισης $f$ ορίζεται ως η μετρική Riemann του $M^n$ που δίνεται ως εξής:*

$$\langle v, w \rangle = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle, \ \ \textit{για κάθε } v, w \in T_pM, \ p \in M.$$

**Ορισμός 1.5.2.** *Μια εμβάπτιση $f : (M^n, \langle , \rangle) \to (N^m, \langle , \rangle)$ μεταξύ δύο πολυπτυγμάτων Riemann $(M, \langle , \rangle), (N, \langle , \rangle)$ καλείται* ***ισομετρική εμβάπτιση****, αν η επαγόμενη μετρική είναι η μετρική του $M$, δηλαδή αν*

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)} = \langle v, w \rangle_p,$$

*για κάθε $p \in M$ και $v, w \in T_pM$.*

**Ορισμός 1.5.3.** *Δύο ισομετρικές εμβαπτίσεις $f : M^n \to N^m$, $g : M^n \to N^m$ καλούνται* ***γεωμετρικώς ισότιμες (congruent)*** *αν υπάρχει ισομετρία $\tau : N^m \to N^m$ τέτοια ώστε $g = \tau \circ f$.*

Συχνά στην παρούσα εργασία μια ισομετρική εμβάπτιση $f : M^2 \to \mathbb{R}^n$ θα αναφέρεται και ως επιφάνεια του $\mathbb{R}^n$.

**Ορισμός 1.5.4.** *Έστω $f : M^n \to \tilde{M}^{n+k}$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Καλούμε* ***επαγόμενη δέσμη*** *της $f$ το σύνολο:*

$$f^*(T\tilde{M}^{n+k}) = \Big\{(p, v) : p \in M, v \in T_{f(p)}\tilde{M}^{n+k}\Big\}.$$

Είναι γνωστό ότι η επαγόμενη δέσμη αποτελεί διανυσματική δέσμη υπεράνω του $M$, με βαθμίδα $n + k$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(f) = \Gamma\big(f^*(T\tilde{M}^{n+k})\big)$ το σύνολο των διαφορίσιμων τομών της δέσμης $f^*(T\tilde{M}^{n+k})$.

**Πρόταση 1.5.1.** *Έστω $M^n$ διαφορίσιμο πολύπτυγμα και $(\tilde{M}^{n+k}, \langle , \rangle)$ πολύπτυγμα Riemann με συνοχή Levi-Civitá $\tilde{\nabla}$. Αν $f : M^n \to \tilde{M}^{n+k}$ διαφορίσιμη απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση*

$$\nabla^f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(f) \to \mathcal{X}(f), \ \ (X, V) \to \nabla^f_X V,$$

*η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\nabla^f_{X_1+X_2} V = \nabla^f_{X_1} V + \nabla^f_{X_2} V,$$

$$\nabla^f_{hX} = h\nabla^f_X V,$$

$$\nabla^f_X (V_1 + V_2) = \nabla^f_X V_1 + \nabla^f_X V_2,$$

$$\nabla^f_X(hV) = (Xh)V + h\nabla^f_X V,$$
$$\nabla^f_X(\tilde{Y}\circ f) = \tilde{\nabla}_{df(X)}\tilde{Y},$$
$$X\big(\langle V_1, V_2\rangle\big) = \langle \nabla^f_X V_1, V_2\rangle + \langle V_1, \nabla^f_X V_2\rangle,$$
$$\nabla^f_X df(Y) - \nabla^f_Y df(X) = df([X,Y]),$$

*όπου $X, Y, X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$, $\tilde{Y} \in \mathcal{X}(\tilde{M}^{n+k})$, $V, V_1, V_2 \in \mathcal{X}(f)$ και $h \in C^\infty(M)$. Η απεικόνιση $\nabla^f$ είναι η συνοχή που επάγει η συνοχή Levi-Civitá του $\tilde{M}$ στην επαγόμενη δέσμη $f^*(T\tilde{M}^{n+k})$.*

Έστω ισομετρική εμβάπτιση $f : (M^n, \langle,\rangle) \to (\tilde{M}^{n+k}, \langle,\rangle)$. Για κάθε σημείο $p \in M$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_{f(p)}\tilde{M}$ αναλύεται σε ορθογώνιο ευθύ άθροισμα

$$T_{f(p)}\tilde{M} = df_p(T_pM) \oplus \big(df_p(T_pM)\big)^\perp.$$

Η **εφαπτόμενη δέσμη** της $f$ είναι το σύνολο

$$df(TM) = \{(p, v) : p \in M, v \in df_p(T_pM)\}$$

και το σύνολο των λείων τομών είναι το $\Gamma(df(TM))$.

Ο υπόχωρος $\big(df_p(T_pM)\big)^\perp$ καλείται **κάθετος χώρος** της $f$ στο σημείο $p$ και συμβολίζεται με $N_fM(p)$. Αντίστοιχα υπάρχει η **κάθετη δέσμη** της $f$ που είναι το σύνολο

$$N_fM = \{(p, w) \in f^*(T\tilde{M}^{n+k}) : p \in M, w \in N_fM(p)\}.$$

Το σύνολο των λείων τομών της κάθετης δέσμης είναι $\Gamma(N_fM) = \mathcal{X}^\perp(f)$.

Κάθε διάνυσμα $v \in T_{f(p)}\tilde{M}^{n+k}$ αναλύεται με μοναδικό τρόπο ως

$$v = df_p(v^\top) + v^\perp,$$

με $v^\top \in T_pM$ και $v^\perp \in N_fM(p)$. Επομένως για κάθε $V \in \mathcal{X}(f)$ υπάρχουν μοναδικά $V^\top \in \mathcal{X}(M)$ και $V^\perp \in \mathcal{X}^\perp(f)$ τέτοια ώστε

$$V = df(V^\top) + X^\perp.$$

Κατά συνέπεια για $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ έχουμε την ανάλυση

$$\nabla^f_X df(Y) = df\Big(\big(\nabla^f_X df(Y)\big)^\top\Big) + \big(\nabla^f_X df(Y)\big)^\perp. \tag{1.2}$$

Αποδεικνύεται [4] ότι $\big(\nabla^f_X df(Y)\big)^\top = \nabla_X Y$, όπου $\nabla$ είναι η συνοχή Levi-Civitá του $M^n$.

**Ορισμός 1.5.5.** *Καλούμε **δεύτερη θεμελιώδη μορφή** της ισομετρικής εμβάπτισης $f : M^n \to \tilde{M}^{n+k}$ την απεικόνιση*

$$\alpha_f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}^\perp(f),\ \ \alpha_f(X,Y) = \big(\nabla^f_X df(Y)\big)^\perp.$$

Τότε η σχέση (1.2) παίρνει την μορφή

$$\nabla^f_X df(Y) = df(\nabla_X Y) + \alpha_f(X,Y),$$

η οποία καλείται **τύπος Gauss** για ισομετρικές εμβαπτίσεις.

Αποδεικνύεται [4] ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι συμμετρική και συμπεριφέρεται ως τανυστικό πεδίο. Στην πραγματικότητα $\alpha_f \in \Gamma\big(\mathrm{Hom}(TM \times TM, N_f M)\big)$.

**Ορισμός 1.5.6.** *Μια ισομετρική εμβάπτιση $f : M^n \to N^m$ καλείται **ολικά γεωδαιτική** αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της είναι $\alpha_f(X,Y) = 0$, για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.*

Τα ολικά γεωδαιτικά υποπολυπτύγματα του Ευκλειδείου χώρου είναι οι αφφινικοί υπόχωροι.

Έστω $f : M^n \to N^m$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Ο αριθμός $p = m - n$ καλείται **συνδιάσταση** της $f$. Δοθείσης ισομετρικής εμβάπτισης $f : M^n \to N^{n+p}$, ο αριθμός $p$ καλείται **ουσιώδης συνδιάσταση** αν δεν υπάρχει ολικά γεωδαιτικό υποπολύπτυγμα $L \subset N^{n+p}$ διάστασης $n+k$, με $k < p$, τέτοιο ώστε $f(M) \subset L$.

**Ορισμός 1.5.7.** *Η **απεικόνιση Weingarten** ή **τελεστής σχήματος** στην διεύθυνση $\xi \in \mathcal{X}^\perp(f)$, είναι το $(1,1)$ τανυστικό πεδίο*

$$A_\xi : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \;\; A_\xi X = -(\nabla^f_X \xi)^\top.$$

Η απεικόνιση Weingarten ικανοποιεί τη σχέση:

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha_f(X,Y), \xi\rangle.$$

**Ορισμός 1.5.8.** *Καλούμε **κάθετη συνοχή** της ισομετρικής εμβάπτισης $f : M^n \to \tilde{M}^{n+k}$ τη συνοχή της κάθετης δέσμης $\nabla^\perp$ της $f$ που ορίζεται ως*

$$\nabla^\perp : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}^\perp(f) \to \mathcal{X}^\perp(f), \;\; \nabla^\perp_X \xi = (\nabla^f_X \xi)^\perp.$$

Ο **τύπος Weingarten** για ισομετρικές εμβαπτίσεις είναι

$$\nabla^f_X \xi = -df(A_\xi X) + \nabla^\perp_X \xi.$$

Το συμμετρικό $(2,0)$-τανυστικό πεδίο $II(X,Y) = \langle A_\xi X, Y\rangle$ καλείται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** στη διεύθυνση του $\xi$.

**Ορισμός 1.5.9.** *Έστω $f : M^n \to \tilde{M}^{n+k}$ ισομετρική εμβάπτιση. Το **διάνυσμα μέσης καμπυλότητας** της $f$ στο $p \in M$ είναι το διάνυσμα*

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_f(X_i, X_i),$$

*όπου $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ορθομοναδιαία βάση του $T_pM$.*

*Επίσης αποδεικνύεται, ότι το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας είναι ανεξάρτητο της επιλογής βάσης και επομένως*

$$H(p) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{trace} A_{\xi_i})\xi_i,$$

*όπου $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση του κάθετου χώρου $N_f M(p)$.*

Ορίζεται κατά αυτόν τον τρόπο το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $H \in \mathcal{X}^{\perp}(f)$.

**Ορισμός 1.5.10.** *Έστω $f : M^n \to N^m$ ισομετρική εμβάπτιση. Το πολύπτυγμα $M^n$ καλείται* ***ελαχιστικό*** *αν έχει διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $H \equiv 0$.*

**Πρόταση 1.5.2.** *Για κάθε ισομετρική εμβάπτιση $f : M^n \to \tilde{M}^{n+k}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i) η εξίσωση Gauss,*

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \tilde{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle,$$

*(ii) η εξίσωση Codazzi,*

$$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z),$$

*όπου*

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\big(\alpha(Y,Z)\big) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z),$$

*(iii) η εξίσωση Ricci,*

$$(\tilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y),$$

*όπου $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, $R$, $\tilde{R}$ οι τανυστές καμπυλότητας των $M$ και $\tilde{M}$ αντίστοιχα και $\xi \in N_f M$.*

Από τον ορισμό της καμπυλότητας τομής προκύπτει η ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης Gauss:

$$K(X,Y) = \tilde{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle - ||\alpha(X,Y)||^2,$$

όπου $K, \tilde{K}$ οι καμπυλότητες τομής των $M$ και $\tilde{M}$, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα θεώρημα θεμελιώδους σημασίας για τις ισομετρικές εμβαπτίσεις, μιας και μας εφοδιάζει με το, κατά κάποιο τρόπο, αντίστροφο αποτέλεσμα της παραπάνω πρότασης, για την περίπτωση όπου το πολύπτυγμα $\tilde{M}^{n+k}$ είναι ένας χώρος μορφής $\mathbb{Q}^{n+k}_c$. Υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος μορφής $\mathbb{Q}^{n+k}_c$ είναι ένα απλά συνεκτικό πλήρες πολύπτυγμα Riemann, διάστασης $n+k$, με σταθερή καμπυλότητα τομής $c$.

**Θεώρημα 1.5.1.** ***Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας των Ισομετρικών Εμβαπτίσεων***

*(i) (Ύπαρξη) Έστω $M^n$ ένα απλά συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann, $\pi : E \to M$ μια διανυσματική δέσμη Riemann βαθμίδας (rank) $k$, με συμβατή συνοχή $\nabla^E$ και τανυστή καμπυλότητας $R^E$. Επιπλέον έστω $\alpha$ συμμετρικό πεδίο της δέσμης ομομορφισμών $\mathrm{Hom}(TM \times TM, E)$. Ορίζουμε για κάθε πεδίο $\xi \in \Gamma(E)$ την απεικόνιση $A_\xi : TM \to TM$ ώστε να ικανοποιείται η σχέση:*

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle,\ X, Y \in TM.$$

*Αν τα $\nabla^E, R^E, \alpha, A_\xi$ πληρούν τις εξισώσεις των Gauss, Codazzi και Ricci, τότε υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+k}$ και ισομετρία δεσμών $\Phi : E \to N_f M$, τέτοια ώστε*

$$\alpha_f = \Phi \circ \alpha,$$
$$\nabla^\perp_X \Phi(\xi) = \Phi(\nabla^\epsilon_X \xi).$$

*(ii) (Μοναδικότητα) Έστω $f, g : M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+k}$ ισομετρικές εμβαπτίσεις. Αν υπάρχει ισομετρία δεσμών $\Phi : N_f M \to N_g M$ τέτοια ώστε*

$$\alpha_g = \Phi \circ \alpha_f,$$

*και για κάθε $X, \in \mathcal{X}(M)$ και $\xi \in \mathcal{X}(f)^\perp$,*

$$\nabla^{g\perp}_X\big(\Phi(\xi)\big) = \Phi(\nabla^{f\perp}_X \xi),$$

*τότε υπάρχει $\tau \in \mathrm{Isom}(\mathbb{Q}_c^{n+k})$ ώστε $g = \tau \circ f$ και $d\tau|_{N_f M} = \Phi$.*

## 1.6 Σύμμορφη αλλαγή της μετρικής

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις σύμμορφες μετρικές και στην επιρροή μιας σύμμορφης αλλαγής της μετρικής στη συνοχή, στον τανυστή καμπυλότητας και στην καμπυλότητα τομής ενός πολυπτύγματος $M^n$. Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει η επιρροή μιας τέτοιας σύμμορφης αλλαγής στην κλίση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης καθώς και στον Λαπλασιανό τελεστή της.

**Ορισμός 1.6.1.** *Δύο μετρικές Riemann $\langle,\rangle$, $\langle,\rangle_*$, ενός πολυπτύγματος $M$, καλούνται* ***σύμμορφες*** *αν υπάρχει συνάρτηση $f \in C^\infty(M)$ με $f > 0$, τέτοια ώστε $\langle,\rangle_* = f\langle,\rangle$.*

Η συνάρτηση $f$ αναφέρεται ως σύμμορφος συντελεστής.

Είναι γνωστό ότι αν δύο μετρικές $\langle,\rangle$ και $\langle,\rangle_*$ ενός πολυπτύγματος είναι σύμμορφες, τότε σε κάθε σημείο του πολυπτύγματος, η γωνία δύο εφαπτόμενων διανυσμάτων ως προς την πρώτη μετρική είναι πάντα ίση με τη γωνία των διανυσμάτων αυτών ως προς τη δεύτερη μετρική.

**Πρόταση 1.6.1.** *Έστω $\langle,\rangle$ και $\langle,\rangle_*$ σύμμορφες μετρικές ενός διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $M$ με σύμμορφο συντελεστή $f$. Οι συνοχές $\nabla$ και $\nabla^*$ των μετρικών $\langle,\rangle$ και $\langle,\rangle_*$ ικανοποιούν τη σχέση*

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f}\big((Xf)Y + (Yf)X - \langle X, Y\rangle \mathrm{grad} f\big), \tag{1.3}$$

*για $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, όπου $\mathrm{grad} f$ είναι η κλίση της $f$ ως προς τη μετρική $\langle,\rangle$.*

*Απόδειξη.* Ως γνωστόν για κάθε μετρική $\langle , \rangle$ και για $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ισχύει:

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X(\langle Y, Z\rangle) + Y(\langle X, Z\rangle) - Z(\langle X, Y\rangle) + \langle [Z, Y], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle \\ &\quad + \langle [Z, X], Y\rangle.\end{aligned}$$

Οπότε για την μετρική $\langle , \rangle_*$ έχουμε:

$$\begin{aligned}2\langle \nabla^*_X Y, Z\rangle_* &= X(\langle Y, Z\rangle_*) + Y(\langle X, Z\rangle_*) - Z(\langle X, Y\rangle_*) + \langle [Z, Y], X\rangle_* \\ &\quad + \langle [X, Y], Z\rangle_* + \langle [Z, X], Y\rangle_* \\ &= X(f\langle Y, Z\rangle) + Y(f\langle X, Z\rangle) - Z(f\langle X, Y\rangle) + f\langle [Z, Y], X\rangle \\ &\quad + f\langle [X, Y], Z\rangle + f\langle [Z, X], Y\rangle.\end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει

$$\begin{aligned}2\langle \nabla^*_X Y, Z\rangle_* &= (Xf)\langle Y, Z\rangle + f\langle \nabla_X Y, Z\rangle + f\langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ &\quad + (Yf)\langle X, Z\rangle + f\langle \nabla_Y X, Z\rangle + f\langle X, \nabla_Y Z\rangle \\ &\quad - (Zf)\langle X, Y\rangle - f\langle \nabla_Z X, Y\rangle - f\langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &\quad + f\langle \nabla_Z Y, X\rangle - f\langle \nabla_Y Z, X\rangle \\ &\quad + f\langle \nabla_X Y, Z\rangle - f\langle \nabla_Y X, Z\rangle \\ &\quad + f\langle \nabla_Z X, Y\rangle - f\langle \nabla_X Z, Y\rangle.\end{aligned}$$

Άμεσα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}2\langle \nabla^*_X Y, Z\rangle_* &= (Xf)\langle Y, Z\rangle + (Yf)\langle X, Z\rangle - (Zf)\langle X, Y\rangle + 2f\langle \nabla_X Y, Z\rangle \\ &= (Xf)\langle Y, Z\rangle + (Yf)\langle X, Z\rangle - \langle \mathrm{grad} f, Z\rangle\langle X, Y\rangle + 2f\langle \nabla_X Y, Z\rangle \\ &= \frac{1}{f}(Xf)\langle Y, Z\rangle_* + \frac{1}{f}(Yf)\langle X, Z\rangle_* - \frac{1}{f}\langle \mathrm{grad} f, Z\rangle_*\langle X, Y\rangle + 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle_*,\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (1.3). □

**Παρατήρηση.** *Θέτοντας $f = e^{2\varphi}$, όπου $\varphi \in C^\infty(M)$, προκύπτουν τα εξής:*

$$\frac{Xf}{2f} = \frac{Xe^{2\varphi}}{2e^{2\varphi}} = X(\varphi),$$

$$\frac{Yf}{2f} = \frac{Ye^{2\varphi}}{2e^{2\varphi}} = Y(\varphi)$$

*και*

$$\frac{\mathrm{grad} f}{2f} = 2e^{2\varphi}\frac{\mathrm{grad}\varphi}{2e^{2\varphi}} = \mathrm{grad}\varphi.$$

*Τότε η σχέση (1.3) παίρνει τη μορφή:*

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y + X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - \langle X, Y\rangle \mathrm{grad}\varphi.$$

**Πρόταση 1.6.2.** *Έστω $\langle , \rangle$, $\langle , \rangle_*$ σύμμορφες μετρικές σε ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με σύμμορφο συντελεστή $f = e^{2\varphi}$. Οι τανυστές καμπυλότητας $R$ και $R^*$ των μετρικών $\langle , \rangle$ και $\langle , \rangle_*$ αντίστοιχα, ικανοποιούν τη σχέση:*

$$\begin{aligned} R^*(X,Y)Z = R(X,Y)Z & \\ &+ \big( -\operatorname{hess}_\varphi(Y,Z) + Y(\varphi)Z(\varphi) - \langle Y,Z\rangle ||\operatorname{grad}\varphi||^2 \big) X \\ &+ \big( \operatorname{hess}_\varphi(X,Z) - X(\varphi)Z(\varphi) + \langle X,Z\rangle ||\operatorname{grad}\varphi||^2 \big) Y \\ &+ \langle X,Z\rangle (\nabla_Y \operatorname{grad}\varphi - Y(\varphi)\operatorname{grad}\varphi) \\ &+ \langle Y,Z\rangle (X(\varphi)\operatorname{grad}\varphi - \nabla_X \operatorname{grad}\varphi), \end{aligned} \tag{1.4}$$

*με $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.*

*Απόδειξη.* Η σχέση (1.4) προκύπτει με υπολογισμούς, κάνοντας χρήση της Πρότασης 3.9 [12]. □

**Πρόταση 1.6.3.** *Έστω $\langle , \rangle$ και $\langle , \rangle_*$ σύμμορφες μετρικές ενός διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $M$ με σύμμορφο συντελεστή $f$. Οι καμπυλότητες Gauss $K$ και $K^*$ των $\langle , \rangle$ και $\langle , \rangle_*$, αντίστοιχα, ικανοποιούν τη σχέση:*

$$K^* = \frac{K}{f} - \frac{\Delta \log f}{2f}. \tag{1.5}$$

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό της καμπυλότητας Gauss (1.1) και τη σχέση (1.4), για $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ λαμβάνουμε

$$K^* = \frac{\langle R^*(X,Y)Y, X\rangle_*}{||X \wedge Y||_*^2} = \frac{f\langle R^*(X,Y)Y, X\rangle}{f^2||X \wedge Y||^2}.$$

Άμεσα προκύπτει

$$\begin{aligned} K^* = \frac{K}{f} + \frac{1}{f||X\wedge Y||^2} \Big( & -\operatorname{hess}_\varphi(Y,Y)\langle X,X\rangle + Y(\varphi)Y(\varphi)\langle X,X\rangle \\ & - \langle Y,Y\rangle\langle X,X\rangle ||\operatorname{grad}\varphi||^2 + \operatorname{hess}_\varphi(X,Y)\langle X,Y\rangle - X(\varphi)Y(\varphi)\langle X,Y\rangle \\ & + \langle X,Y\rangle^2 ||\operatorname{grad}\varphi||^2 + X(\varphi)\langle Y,Y\rangle\langle \operatorname{grad}\varphi, X\rangle - \langle Y,Y\rangle\langle \nabla_X \operatorname{grad}\varphi, X\rangle \\ & + \langle X,Y\rangle\langle \nabla_Y \operatorname{grad}\varphi, X\rangle - \langle X,Y\rangle Y(\varphi)\langle \operatorname{grad}\varphi, X\rangle \Big). \end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} K^* = \frac{K}{f} - \frac{||\operatorname{grad}\varphi||^2}{f} + \frac{1}{f||X\wedge Y||^2} \Big( & -\operatorname{hess}_\varphi(Y,Y)\langle X,X\rangle \\ & + Y^2(\varphi)\langle X,X\rangle + \operatorname{hess}_\varphi(X,Y)\langle X,Y\rangle - X(\varphi)Y(\varphi)\langle X,Y\rangle \\ & + X^2(\varphi)\langle Y,Y\rangle - \langle Y,Y\rangle \operatorname{hess}_\varphi(X,X) \\ & + \langle X,Y\rangle \operatorname{hess}_\varphi(Y,X) - Y(\varphi)X(\varphi)\langle X,Y\rangle \Big). \end{aligned}$$

Αυτό μας δίνει ότι

$$K^* = \frac{K}{f} - \frac{||\mathrm{grad}\varphi||^2}{f} + \frac{1}{f||X \wedge Y||^2}\Big(\langle X, X\rangle\big( - \mathrm{hess}_\varphi(Y, Y) + Y^2(\varphi)\big)$$
$$+ 2\langle X, Y\rangle\big(\mathrm{hess}_\varphi(X, Y) - X(\varphi)Y(\varphi)\big) - \langle Y, Y\rangle\big(\mathrm{hess}_\varphi(X, X) - X^2(\varphi)\big)\Big).$$

Θεωρούμε $\{X, Y\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο του $M$ ως προς την μετρική $\langle,\rangle$, συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{K}{f} - \frac{||\mathrm{grad}\varphi||^2}{f} + \frac{1}{f}\big( - \mathrm{hess}_\varphi(Y, Y) + Y^2(\varphi) \\ &\quad - \mathrm{hess}_\varphi(X, X) + X^2(\varphi)\big) \\ &= \frac{K}{f} - \frac{||\mathrm{grad}\varphi||^2}{f} + \frac{1}{f}(-\Delta\varphi + ||\mathrm{grad}\varphi||^2), \end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει η (1.5).

□

**Πρόταση 1.6.4.** *Έστω $\langle,\rangle$ και $\langle,\rangle_*$ σύμμορφες μετρικές σε ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με σύμμορφο συντελεστή $f = e^{2\varphi}$. Οι κλίσεις* $\mathrm{grad}u$ *και* $\mathrm{grad}^*u$ *μιας συνάρτησης $u \in C^\infty(M)$, ως προς τις μετρικές $\langle,\rangle$ και $\langle,\rangle_*$, αντίστοιχα, ικανοποιούν τη σχέση:*

$$\mathrm{grad}^*u = e^{-2\varphi}\mathrm{grad}u, \tag{1.6}$$

*ενώ οι Λαπλασιανές της $\Delta u$ και $\Delta^*u$ ικανοποιούν τη σχέση:*

$$\Delta^*u = e^{-2\varphi}\Delta u. \tag{1.7}$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι

$$\langle X, \mathrm{grad}u\rangle = Xu = \langle X, \mathrm{grad}^*u\rangle_* = e^{2\varphi}\langle X, \mathrm{grad}^*u\rangle.$$

Άμεσα προκύπτει η (1.6), ενώ παρόμοια αποδεικνύεται και η (1.7). □

## 1.7 Μιγαδικά πολυπτύγματα και πολυπτύγματα Kähler

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στα μιγαδικά πολυπτύγματα, τα πολυπτύγματα Kähler, καθώς και στην έννοια των ολόμορφων απεικονίσεων μεταξύ μιγαδικών πολυπτυγμάτων.

Ο ακόλουθος ορισμός για ολόμορφες απεικονίσεις είναι γνωστός από τη Μιγαδική Ανάλυση.

**Ορισμός 1.7.1.** *Μια απεικόνιση $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ όπου $U$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, καλείται **ολόμορφη** στο $U$, αν για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$ το όριο*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

*υπάρχει στο $\mathbb{C}$.*

Η έννοια της ολομορφίας γενικεύεται για απεικονίσεις $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, όπου $U$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^n$.

**Ορισμός 1.7.2.** *Μια απεικόνιση $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ καλείται **ολόμορφη** στο $U$ αν και μόνο αν ισχύει $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0$, για κάθε $k = 1, \dots, n$ όπου $z = (z_1, \dots, z_n) \in U$.*

Αποδεικνύεται ότι μια λεία απεικόνιση $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ είναι ολόμορφη αν το διαφορικό της, σε κάθε σημείο του $U$, πληροί τη σχέση

$$df \circ J_n = J_m \circ df,$$

όπου $J_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ είναι η μιγαδική δομή του $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, με $J_n(x, y) = (-y, x)$ και $J_m$ η αντίστοιχη μιγαδική δομή του $\mathbb{C}^m$.

**Ορισμός 1.7.3.** *Ένα **μιγαδικό πολύπτυγμα** $M$, μιγαδικής διάστασης $n$, είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, ο οποίος πληροί τις εξής ιδιότητες:*

*(i) Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ του $M$, ώστε $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ και αντίστοιχων ομοιομορφισμών $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$, όπου $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^n$. Το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ονομάζεται μιγαδικός χάρτης ή μιγαδικό σύστημα συντεταγμένων του $M$.*

*(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η απεικόνιση*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

*είναι ολόμορφη. Η οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ καλείται μιγαδικός άτλας του $M$.*

*(iii) Η οικογένεια χαρτών $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, είναι μεγιστοτική ως προς τις ιδιότητες $(i)$ και $(ii)$, δηλαδή εάν $(U, \varphi)$ είναι ένας χάρτης τέτοιος ώστε $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ , $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ να είναι ολόμορφες απεικονίσεις για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο χάρτης $(U, \varphi)$ ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.*

Σημειώνεται ότι κάθε μιγαδικό πολύπτυγμα μιγαδικής διάστασης $n$ καθίσταται κατά φυσικό τρόπο πραγματικό προσανατολισμένο πολύπτυγμα διάστασης $2n$.

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε μιγαδικό πολύπτυγμα $M$ ορίζεται κατά φυσικό τρόπο ένας ενδομορφισμός της εφαπτόμενης δέσμης $J : TM \to TM$, με $J^2 = -I$. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα $n$-διάστατο μιγαδικό πολύπτυγμα, επιλέγοντας μιγαδικό χάρτη $(U, z)$ με συντεταγμένες $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n$, οι αντίστοιχες πραγματικές συντεταγμένες είναι $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. Τότε ο ενδομορφισμός $J$ ορίζεται ως

$$J\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}$$

και

$$J\frac{\partial}{\partial y_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Ο ενδομορφισμός αυτός καλείται **μιγαδική δομή** του πολυπτύγματος. Αποδεικνύεται [10] ότι ο ορισμός της μιγαδικής δομής είναι καλός, δηλαδή είναι ανεξάρτητος της επιλογής του μιγαδικού χάρτη.

Η έννοια της ολομορφίας ορίζεται και για απεικονίσεις μεταξύ μιγαδικών πολυπτυγμάτων.

**Ορισμός 1.7.4.** *Έστω $M$, $\tilde{M}$ μιγαδικά πολυπτύγματα με αντίστοιχες μιγαδικές δομές $J$, $\tilde{J}$. Μια λεία απεικόνιση $f : M \to \tilde{M}$ καλείται* ***ολόμορφη*** *αν, για κάθε $p \in M$, ισχύει*

$$\tilde{J} \circ df_p = df_p \circ J.$$

Ο Ορισμός 1.7.4 είναι ισοδύναμος με τον εξής ορισμό:

**Ορισμός 1.7.5.** *Μια απεικόνιση $f : M^n \to \tilde{M}^m$ καλείται ολόμορφη αν για κάθε μιγαδικό χάρτη $(U, z)$ του $M$ και κάθε μιγαδικό χάρτη $(\tilde{U}, \tilde{z})$ του $\tilde{M}$ η απεικόνιση $\tilde{z} \circ f \circ z^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ είναι ολόμορφη.*

Τα μιγαδικά πολυπτύγματα μιγαδικής διαστάσεως 1 καλούνται **επιφάνειες Riemann**. Αποδεικνύεται ότι κάθε διδιάστατο προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann καθίσταται κατά φυσικό τρόπο επιφάνεια Riemann. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω ισόθερμων συντεταγμένων του προσανατολισμού, οι οποίες ορίζουν αντίστοιχα μιγαδικό χάρτη [19], [3].

Το αμέσως επόμενο βήμα είναι να εξετάσει κανείς μιγαδικά πολυπτύγματα τα οποία εφοδιάζονται με μια μετρική Riemann, η οποία είναι συμβατή με τη μιγαδική δομή $J$ του πολυπτύγματος. Αυτά είναι τα καλούμενα πολυπτύγματα Kähler [22].

**Ορισμός 1.7.6.** *Έστω $M^n$ μιγαδικό πολύπτυγμα και $J$ η αντίστοιχη μιγαδική δομή του. Μια* ***Ερμιτιανή μετρική*** *επί του $M$ είναι μια μετρική Riemann $\langle , \rangle$ τέτοια ώστε, για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ικανοποιείται η σχέση*

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

*Το πολύπτυγμα $(M, \langle , \rangle)$ καλείται* ***πολύπτυγμα Kähler*** *αν η $\langle , \rangle$ είναι Ερμιτιανή μετρική και επιπλέον για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ισχύει*

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y) = 0,$$

*όπου $\nabla$ η συνοχή Riemann. Μια μετρική $\langle , \rangle$ που ικανοποιεί τις δύο παραπάνω σχέσεις καλείται* ***μετρική Kähler****.*

Το απλούστερο παράδειγμα μιγαδικού πολυπτύγματος είναι ο μιγαδικός χώρος $\mathbb{C}^n$. Ορίζεται ως $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n)/z_k \in \mathbb{C}\}$ και εφοδιάζεται με την Ερμιτιανή μετρική

$$\|dz\|^2 = \sum_k \|dz_k\|^2 = \sum_k \big((dx_k)^2 + (dy_k)^2\big),$$

όπου $z_k = x_k + iy_k$. Η αντίστοιχη μιγαδική δομή του όπως αναφέραμε είναι η

$$J_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ J_n(x, y) = (-y, x).$$

Ένα εξίσου σημαντικό παράδειγμα μιγαδικού πολυπτύγματος είναι ο $n$-διάστατος **μιγαδικός προβολικός χώρος** $\mathbb{C}P^n$. Το πολύπτυγμα $\mathbb{C}P^n$ ορίζεται ως εξής:

Ορίζουμε στον μιγαδικό χώρο $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n) \sim (w_0, w_1, \ldots, w_n)$$

αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}^*$ τέτοιο ώστε

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \lambda(w_0, w_1, \ldots, w_n).$$

Η κλάση ισοδυναμίας $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$, αντιπροσωπεύει έναν υπόχωρο του $\mathbb{C}^{n+1}$ διάστασης 1. Ο $n$-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος ορίζεται ως

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim,$$

είναι δηλαδή ο χώρος των μιγαδικών ευθειών του $\mathbb{C}^{n+1}$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Αποδεικνύεται ότι έχει τη δομή $n$-διάστατου μιγαδικού πολυπτύγματος [22]. Συγκεκριμένα, ορίζουμε

$$U_k = \{[z] \in \mathbb{C}P^n : z_k \neq 0\},\ z = (z_0, \ldots, z_n),\ 0 \leq k \leq n,$$

$$\varphi_k : U_k \to \mathbb{C}^n,\ \varphi_k([z]) = \big(\frac{z_0}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, 1, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\big),$$

και αποδεικνύουμε ότι το ζεύγος $(U_k, \varphi_k)$ είναι μιγαδικός χάρτης του $\mathbb{C}P^n$. Τα σύνολα $U_k,\ 0 \leq k \leq n$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{C}P^n$, ο οποίος είναι τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο. Επιπλέον, η οικογένεια $\{(U_k, \varphi_k)\}_{k=0}^n$ αποδεικνύεται ότι είναι άτλας και ορίζεται μέσω αυτού ο αντίστοιχος μεγιστοτικός άτλας.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n,\ \pi(z) = [z],\ z = (z_0, \ldots, z_n),$$

η καλούμενη **φυσική προβολή**. Εφοδιάζουμε το $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ με το τανυστικό πεδίο

$$ds_0^2 = 4\frac{\|z \wedge dz\|^2}{\|z\|^4},$$

όπου

$$\|z \wedge dz\|^2 = \sum_{k<j} |z_k dz_j - z_j dz_k|^2 = \|z\|^2\|dz\|^2 - |\langle z, dz\rangle_H|^2,$$

ενώ $\langle , \rangle_H$ είναι το Ερμιτιανό γινόμενο του $\mathbb{C}^{n+1}$ που ορίζεται ως

$$\langle v, w\rangle_H = \sum_k v_k \overline{w}_k, \;\; v = (v_1, \ldots, v_{n+1}), w = (w_1, \ldots, w_{n+1})$$

και

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle_H.$$

Εναλλακτικά ισχύει

$$ds_0^2 = \sum_{k,j} g_{k\overline{j}} dz_k d\overline{z}_j,$$

όπου

$$\begin{aligned} g_{k\overline{j}} &= \frac{4(\delta_{kj}\|z\|^2 - \overline{z}_k z_j)}{\|z\|^4} \\ &= 4\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\log(\|z\|^2). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $ds_0^2$ είναι αναλλοίωτη από πολλαπλασιασμό με μη μηδενική μιγαδική σταθερά και επιπλέον, ο περιορισμός της $ds_0^2$ στην μιγαδική ευθεία $l_z = \{\alpha z : \alpha \in \mathbb{C}\}$ είναι θετικά οριστικός. Συγκεκριμένα, αν $w \in T_z(\mathbb{C}^{n+1})$ κάθετο στην $l_z$, τότε

$$\langle z, dz(w)\rangle_H = \langle z, w\rangle_H = 0$$

και επομένως

$$ds_0^2\langle w, w\rangle_H = 4\frac{|dz|^2\langle w, w\rangle_H}{|z|^2} > 0.$$

Έτσι, η $ds_0^2$ έχει προβολή την Ερμιτιανή μετρική $ds^2$ του $\mathbb{C}P^n$, δηλαδή $ds_0^2 = \pi^*(ds^2)$, όπου $\pi^*$ δηλώνει την ανάσυρση της φυσικής προβολής $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$. Η μετρική αυτή του $\mathbb{C}P^n$ καλείται μετρική **Fubini-Study**.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Η ΣΥΝΘΗΚΗ RICCI ΓΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^3$

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να δώσουμε ένα εσωτερικό χαρακτηρισμό εκείνων των μετρικών Riemann σε διδιάστατα πολυπτύγματα Riemann $(M, \langle , \rangle)$, τα οποία εμβαπτίζονται ισομετρικά ως ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$. Ο εσωτερικός αυτός χαρακτηρισμός είναι η περίφημη **συνθήκη Ricci**.

**Ορισμός 2.0.1.** *Ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann $(M, \langle , \rangle)$ πληροί τη* ***συνθήκη Ricci*** *αν έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$ και ικανοποιείται η εξίσωση*

$$\Delta \log(-K) = 4K, \text{ στο σύνολο των σημείων με } K < 0,$$

*όπου $\Delta$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής του $M$.*

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\text{η μετρική } \langle , \rangle_* = \sqrt{-K}\langle , \rangle \text{ είναι ισόπεδη,}$$

δηλαδή έχει καμπυλότητα Gauss $K^* \equiv 0$.

Αξίζει να αναφερθεί ότι η συνθήκη Ricci αποδίδεται στον Ricci-Curbastro [20], [21] ο οποίος τη δημοσίευσε το 1896 ενώ αναδημοσιεύτηκε το 1950 σε ένα από τα βιβλία του σπουδαίου γερμανού μαθηματικού Blaschke [1].

Στη συνέχεια, θα δούμε με πόσους τρόπους επιτυγχάνεται αυτή η υλοποίηση, δηλαδή θα απαντήσουμε στο ερώτημα πόσες τοπικές ελαχιστικές ισομετρικές εμβαπτίσεις ενός διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann στον $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν, υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η συνθήκη Ricci.

## 2.1 Ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ και η συνθήκη Ricci

Ως γνωστόν, όταν μας δοθούν δύο σημεία $p, q$ του χώρου, από όλες τις καμπύλες που ενώνουν τα $p$ και $q$, αυτή με το ελάχιστο μήκος είναι το ευθύγραμμο τμήμα $PQ$. Για το 2-διάστατο ανάλογο του προβλήματος αυτού, αντικαθιστούμε τα σημεία $p$,$q$ με μια κλειστή καμπύλη $C$ στον $\mathbb{R}^3$ και αναζητούμε μεταξύ όλων των επιφανειών με σύνορο την καμπύλη $C$, μια επιφάνεια η οποία έχει ελάχιστο εμβαδό. Αποδεικνύεται ότι αν μια επιφάνεια είναι λύση αυτού του προβλήματος, τότε έχει μέση καμπυλότητα $H$ παντού μηδέν. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό των ελαχιστικών επιφανειών.

**Ορισμός 2.1.1.** *Μια επιφάνεια $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ καλείται* ***ελαχιστική*** *αν έχει μέση καμπυλότητα $H \equiv 0$.*

Αν $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι ελαχιστική επιφάνεια, τότε ισχύει $\mathrm{trace}A = 0$, όπου $A$ ο τελεστής σχήματος της $f$ ως προς ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της. Οι ιδιοτιμές του $A$ είναι οι κύριες καμπυλότητες $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Επειδή η $f$ είναι ελαχιστική, προκύπτει ότι $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$. Θέτοντας $\kappa_1 = \kappa$, η καμπυλότητα Gauss είναι $K = -\kappa^2 \leq 0$ ή ισοδύναμα $\kappa = \sqrt{-K}$. Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 2.1.1.** *Η καμπυλότητα Gauss κάθε ελαχιστικής επιφάνειας πληροί την $K \leq 0$.*

**Σχόλιο.** *Ενδέχεται να υπάρχουν σημεία όπου οι κύριες καμπυλότητες είναι μηδέν, δηλαδή ισόπεδα σημεία. Όπως θα δείξουμε αργότερα, το σύνολο των ισόπεδων σημείων αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, εκτός αν η επιφάνεια είναι τμήμα επιπέδου.*

Σε αυτό το σημείο θα διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου που είναι ουσιαστικά η ισχύς της συνθήκης Ricci για ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$.

**Θεώρημα 2.1.1.** *Έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ ελαχιστική επιφάνεια. Τότε για το σύνολο των σημείων $\{p \in M^2 : K(p) < 0\}$ ισχύει η συνθήκη Ricci:*

$$\Delta \log(-K) = 4K.$$

*Αντίστροφα, έστω $(M^2, \langle , \rangle)$ πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K < 0$ το οποίο πληροί τη συνθήκη Ricci. Τότε για κάθε $p \in M$, υπάρχει περιοχή του $U(p)$ και ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση $f : U(p) \to \mathbb{R}^3$. Στην περίπτωση όπου το $M$ είναι απλά συνεκτικό, η εμβάπτιση $f$ ορίζεται σε ολόκληρο το $M$.*

Το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του ανωτέρου θεωρήματος.

**Πόρισμα 2.1.1.** *Έστω $(M, \langle , \rangle)$ διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$. Το πολύπτυγμα $(M, \langle , \rangle)$ είναι τοπικά ισομετρικό με μια ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη Ricci.*

Με την ακόλουθη πρόταση λαμβάνουμε μια ισοδύναμη μορφή της συνθήκης Ricci.

**Πρόταση 2.1.1.** *Έστω $(M, \langle , \rangle)$ ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K < 0$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

$$(i)\ \Delta \log(-K) = 4K, \text{ στα σημεία όπου η καμπυλότητα Gauss } K < 0. \tag{2.1}$$

$$(ii)\ \text{Η μετρική } \langle , \rangle_* = \sqrt{-K}\langle , \rangle \text{ έχει καμπυλότητα Gauss } K^* \equiv 0. \tag{2.2}$$

*Απόδειξη.* Έστω ότι ισχύει η (2.1). Από την Πρόταση 1.6.3, η καμπυλότητα Gauss της νέας μετρικής $\langle , \rangle_* = \sqrt{-K}\langle , \rangle$ είναι:

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{K}{\sqrt{-K}} - \frac{\Delta \log \sqrt{-K}}{2\sqrt{-K}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{-K}} - \frac{4K}{4\sqrt{-K}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς η μετρική $\langle , \rangle_* = \sqrt{-K}\langle , \rangle$ έχει καμπυλότητα Gauss μηδέν.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.2). Από την Πρόταση 1.6.3, έχουμε ότι

$$K^* = \frac{K}{\sqrt{-K}} - \frac{\Delta \log \sqrt{-K}}{2\sqrt{-K}} = 0.$$

Τότε παρατηρούμε ότι ισχύει

$$2K - \Delta \log \sqrt{-K} = 0,$$

η οποία άμεσα μας δίνει την (2.1). □

Παραθέτουμε μια σειρά από λήμματα και έννοιες που θα χρειαστούν για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1.

Η απόδειξη του ακόλουθου λήμματος δίνεται στο [5, Chapter 3, Theorem 2].

**Λήμμα 2.1.2.** *Έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ ελαχιστική επιφάνεια και $p \in M$ μη ισόπεδο σημείο. Τότε υπάρχει ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ σε κατάλληλη περιοχή $U(p)$ αυτού του σημείου, αποτελούμενη από μη ισόπεδα σημεία, τέτοιο ώστε:*

$$Ae_1 = \kappa e_1,\ Ae_2 = -\kappa e_2,$$

*όπου $\kappa = \sqrt{-K}$ και $K$ είναι η καμπυλότητα Gauss του $M$.*

**Ορισμός 2.1.2.** *Η **μορφή συνοχής** $\omega_{12}$ ενός ορθομοναδιαίου πλαισίου $\{e_1, e_2\}$, ενός διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $(M, \langle , \rangle)$, είναι η 1-μορφή που ορίζεται ως*

$$\omega_{12}(X) = \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle,$$

*όπου $X \in \mathcal{X}(M)$ και $\nabla$ η συνοχή Levi-Civita του πολυπτύγματος $M$.*

**Ορισμός 2.1.3.** *Έστω $M^2$ προσανατολισμένο διαφορίσιμο πολύπτυγμα με αντίστοιχη μιγαδική δομή $J$. Καλούμε **Hodge star** τελεστή του $M$ την απεικόνιση*

$$* : \Lambda^1 M \to \Lambda^1 M,\ *\omega(X) = -\omega(JX)$$

*όπου $X \in \mathcal{X}(M)$.*

Σε προσανατολισμένο διαφορίσιμο πολύπτυγμα $M^2$ θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ του προσανατολισμού. Τότε ορίζεται το αντίστοιχο **δυϊκό πλαίσιο** $\{\omega_1, \omega_2\}$ με

$$\omega_i(X) = \langle X, e_i \rangle$$

για $X \in \mathcal{X}(M)$.

Υπολογίζουμε το $*\omega_1$ ως εξής:

$$*\omega_1(X) = -\langle JX, e_1 \rangle = +\langle Je_1, X \rangle = \omega_2(X),$$

ενώ αντίστοιχα για το $*\omega_2$ έχουμε

$$*\omega_2(X) = -\langle JX, e_2 \rangle = +\langle Je_2, X \rangle = -\omega_1(X).$$

Συνεπώς αν

$$\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \Lambda^1 U$$

με $a_1, a_2 \in C^\infty(U)$, άμεσα προκύπτει ότι

$$*\omega = a_1\omega_2 - a_2\omega_1.$$

**Λήμμα 2.1.3.** *Έστω $(M^2, \langle , \rangle)$ πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K$ και $\{e_1, e_2\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του προσανατολισμού με δυϊκό πλαίσιο $\{\omega_1, \omega_2\}$. Για κάθε $f \in C^\infty(M)$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$\begin{aligned}
(i)&\ df \wedge *df = ||\nabla f^2||\, \omega_1 \wedge \omega_2,\\
(ii)&\ d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \text{ και } d\omega_2 = -\omega_{12} \wedge \omega_1,\\
(iii)&\ d * df = \Delta f \omega_1 \wedge \omega_2,\\
(iv)&\ d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* (i) Είναι γνωστό ότι

$$df = e_1(f)\omega_1 + e_2(f)\omega_2,$$

απ' όπου έχουμε

$$*df = e_1(f)\omega_2 - e_2(f)\omega_1.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$\begin{aligned}
df \wedge *df &= (e_1(f))^2\omega_1 \wedge \omega_2 - (e_2(f))^2\omega_2 \wedge \omega_1\\
&= ((e_1(f))^2 + (e_1(f))^2)\omega_1 \wedge \omega_2\\
&= ||\nabla f||^2\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$d\omega_1(e_1, e_2) = \omega_{12} \wedge \omega_2(e_1, e_2).$$

Από την Πρόταση 1.3.2 λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
d\omega_1(e_1,e_2) &= e_1(\omega_1(e_2)) - e_2(\omega_1(e_1)) - \omega_1([e_1,e_2]) \\
&= e_1(\langle e_2,e_1\rangle) - e_2(\langle e_1,e_1\rangle) - \omega_1(\nabla_{e_1}e_2) + \omega_1(\nabla_{e_2}e_1) \\
&= -2\langle \nabla_{e_2}e_1, e_1\rangle - \langle \nabla_{e_1}e_2, e_1\rangle + \langle \nabla_{e_2}e_1, e_1\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_1}e_1, e_2\rangle \\
&= \omega_{12}(e_1) \\
&= \omega_{12}\wedge\omega_2(e_1,e_2).
\end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται και η ισότητα $d\omega_2 = -\omega_{12}\wedge\omega_1$.

(iii) Γνωρίζουμε ότι

$$*df = e_1(f)\omega_2 - e_2(f)\omega_1.$$

Λαμβάνοντας την εξωτερική παράγωγο έχουμε:

$$\begin{aligned}
d(*df) &= d\big(e_1(f)\omega_2\big) - d\big(e_2(f)\omega_1\big) \\
&= d\big(e_1(f)\big)\wedge\omega_2 + e_1(f)\wedge d\omega_2 - d\big(e_2(f)\big)\wedge\omega_1 - e_2(f)\wedge d\omega_1 \\
&= \big(e_1(e_1(f))\omega_1 + e_2(e_1(f))\omega_2\big)\wedge\omega_2 - \big(e_1(e_2(f))\omega_1 + e_2(e_2(f))\omega_2\big)\wedge\omega_1 \\
&\quad + e_1(f)\wedge d\omega_2 - e_2(f)\wedge d\omega_1,
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
d(*df) &= e_1(e_1(f))\omega_1\wedge\omega_2 - e_2(e_2(f))\omega_2\wedge\omega_1 + e_1(f)\wedge d\omega_2 - e_2(f)\wedge d\omega_1 \\
&= e_1(e_1(f))\omega_1\wedge\omega_2 + e_2(e_2(f))\omega_1\wedge\omega_2 - e_1(f)\omega_{12}\wedge\omega_1 - e_2(f)\omega_{12}\wedge\omega_2 \\
&= \big(e_1(e_1(f)) + e_2(e_2(f))\big)\omega_1\wedge\omega_2 + \big(e_1(f)\omega_{12}(e_2) - e_2(f)\omega_{12}(e_1)\big)\omega_1\wedge\omega_2.
\end{aligned}$$

Όμως η Λαπλασιανή είναι το ίχνος της Εσσιανής και συνεπώς

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \mathrm{trace}\nabla^2 f \\
&= e_1(e_1(f)) + e_2(e_2(f)) - (\nabla_{e_1}e_1)f - (\nabla_{e_2}e_2)f \\
&= e_1(e_1(f)) + e_2(e_2(f)) + e_1(f)\omega_{12}(e_2) - e_2(f)\omega_{12}(e_1),
\end{aligned}$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

(iv) Λόγω της Πρότασης 1.3.2 έχουμε:

$$\begin{aligned}
d\omega_{12}(e_1,e_2) &= e_1\big(\omega_{12}(e_2)\big) - e_2\big(\omega_{12}(e_1)\big) - \omega_{12}\big([e_1,e_2]\big) \\
&= e_1\big(\langle \nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle\big) - e_2\big(\langle \nabla_{e_1}e_1, e_2\rangle\big) - \langle \nabla_{[e_1,e_2]}e_1, e_2\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle - \langle \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1, e_2\rangle - \langle \nabla_{[e_1,e_2]}e_1, e_2\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_1, e_2\rangle.
\end{aligned}$$

Άμεσα λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
d\omega_{12}(e_1,e_2) &= \langle R(e_1,e_2)e_1, e_2\rangle \\
&= -\langle R(e_1,e_2)e_2, e_1\rangle \\
&= -K \\
&= -K\omega_1\wedge\omega_2(e_1,e_2)
\end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Λήμμα 2.1.4.** *Έστω $\{e_1, e_2\}$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ τοπικά ορθομοναδιαία πλαίσια του προσανατολισμού ενός διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $(M, \langle , \rangle)$ και $\theta$ λεία συνάρτηση, τέτοια ώστε*

$$\tilde{e}_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2,$$

$$\tilde{e}_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2.$$

*Για τις αντίστοιχες μορφές συνοχής $\omega_{12}$ και $\tilde{\omega}_{12}$ των πλαισίων αυτών ισχύει:*

$$\tilde{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta.$$

*Απόδειξη.* Εξ' ορισμού, για $X \in \mathcal{X}(M)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{12}(X) &= \langle \nabla_X \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle \\ &= \langle \nabla_X (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \rangle,\end{aligned}$$

όπου $\nabla$ είναι η συνοχή Levi-Civitá του πολυπτύγματος $(M, \langle , \rangle)$.

Από τις ιδιότητες της συνοχής προκύπτει

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{12}(X) = &\langle \nabla_X (\cos\theta e_1), -\sin\theta e_1 \rangle + \langle \nabla_X (\sin\theta e_2), \cos\theta e_2 \rangle \\ &+ \langle \nabla_X (\cos\theta e_1), \cos\theta e_2 \rangle + \langle \nabla_X (\sin\theta e_2), -\sin\theta e_1 \rangle,\end{aligned}$$

δηλαδή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{12}(X) = &X(\cos\theta)\langle e_1, -\sin\theta e_1 \rangle + \cos\theta \langle \nabla_X e_1, -\sin\theta e_1 \rangle \\ &+ X(\sin\theta)\langle e_2, \cos\theta e_2 \rangle + \sin\theta \langle \nabla_X e_2, \cos\theta e_2 \rangle \\ &+ X(\cos\theta)\langle e_1, \cos\theta e_2 \rangle + \cos\theta \langle \nabla_X e_1, \cos\theta e_2 \rangle \\ &+ X(\sin\theta)\langle e_2, -\sin\theta e_1 \rangle + \sin\theta \langle \nabla_X e_2, -\sin\theta e_1 \rangle.\end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{12}(X) &= -X(\cos\theta)\sin\theta + X(\sin\theta)\cos\theta + \cos^2\theta \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle \\ &\quad - \sin^2\theta \langle \nabla_X e_2, e_1 \rangle \\ &= X(\theta)\sin^2\theta + X(\theta)\cos^2\theta + \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle \\ &= X(\theta) + \omega_{12}(X) \\ &= d\theta(X) + \omega_{12}(X),\end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να παραθέσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1:* Θεωρούμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ του προσανατολισμού όπως στο Λήμμα 2.1.2. Η εξίσωση Codazzi για την ελαχιστική επιφάνεια $f$ είναι:

$$(\nabla_{e_1} A)e_2 = (\nabla_{e_2} A)e_1.$$

Αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$\nabla_{e_1}(Ae_2) - A(\nabla_{e_1}e_2) = \nabla_{e_2}(Ae_1) - A(\nabla_{e_2}e_1),$$

ενώ λόγω του Λήμματος 2.1.2 παίρνει τη μορφή:

$$\nabla_{e_1}(-\kappa e_2) - A(\langle\nabla_{e_1}e_2, e_1\rangle e_1 + \langle\nabla_{e_1}e_2, e_2\rangle e_2)$$

$$= \nabla_{e_2}(\kappa e_1) - A(\langle\nabla_{e_2}e_1, e_1\rangle e_1 + \langle\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle e_2),$$

όπου $\kappa = \sqrt{-K}$ και $K$ είναι η καμπυλότητα Gauss. Η ανωτέρω σχέση λαμβάνει τη μορφή:

$$-e_1(\kappa)e_2 - \kappa\nabla_{e_1}e_2 - \langle\nabla_{e_1}e_2, e_1\rangle\kappa e_1$$

$$= e_2(\kappa)e_1 + \kappa\nabla_{e_2}e_1 + \langle\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle\kappa e_2,$$

ή ισοδύναμα

$$-e_1(\kappa)e_2 - \kappa\langle\nabla_{e_1}e_2, e_1\rangle e_1 - \kappa\langle\nabla_{e_1}e_2, e_1\rangle e_1$$

$$= e_2(\kappa)e_1 + \kappa\langle\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle e_2 + \kappa\langle\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle e_2.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$e_2(\kappa) = -2\kappa\langle\nabla_{e_1}e_2, e_1\rangle$$

και

$$-e_1(\kappa) = 2\kappa\langle\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle,$$

ή πιο απλά

$$e_1(\kappa) = -2\kappa\omega_{12}(e_2)$$

και

$$e_2(\kappa) = 2\kappa\omega_{12}(e_1).$$

Υπολογίζοντας τη μορφή συνοχής $\omega_{12}$ του πλαισίου $\{e_1, e_2\}$ για τυχόν $X \in \mathcal{X}(U)$ έχουμε :

$$\begin{aligned}\omega_{12}(X) &= \omega_{12}(\langle X, e_1\rangle e_1 + \langle X, e_2\rangle e_2)\\ &= \langle X, e_1\rangle\omega_{12}(e_1) + \langle X, e_2\rangle\omega_{12}(e_2)\\ &= \frac{1}{2}\langle X, e_1\rangle e_2(\log\kappa) - \frac{1}{2}\langle X, e_2\rangle e_1(\log\kappa).\end{aligned}$$

Το δυϊκό πλαίσιο $\{\omega_1, \omega_2\}$ του ορθομοναδιαίου πλαισίου $\{e_1, e_2\}$ δίνεται ως εξής

$$\omega_1(X) = \langle X, e_1\rangle\,,\, \omega_2(X) = \langle X, e_2\rangle$$

και επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$2\omega_{12} = e_2(\log\kappa)\omega_1 - e_1(\log\kappa)\omega_2.$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$2\omega_{12} = - * d(\log\kappa).$$

Παίρνοντας την εξωτερική παράγωγο προκύπτει ότι

$$2d\omega_{12} = -d * d(\log \kappa).$$

Λόγω του Λήμματος 2.1.3 έχουμε

$$-2K\omega_1 \wedge \omega_2 = -\Delta \log \kappa \; \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$\Delta \log \kappa^2 = 4K,$$

ή ισοδύναμα

$$\Delta \log(-K) = 4K.$$

Για το αντίστροφο θεωρούμε τη λεία συνάρτηση

$$\kappa := \sqrt{-K}$$

και τυχαίο ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ του προσανατολισμού. Ορίζουμε το $(1,1)$-τανυστικό πεδίο $A$ έτσι ώστε

$$Ae_1 = \kappa e_1, \; Ae_2 = -\kappa e_2.$$

Θα δείξουμε ότι η τριάδα $(M, \langle , \rangle, A)$ πληροί το Θεμελιώδες Θεώρημα 1.5.1.

Το ότι ικανοποιείται η εξίσωση Gauss είναι προφανές αφού $K = \det A$.

Θα αποδείξουμε ότι ικανοποιείται η εξίσωση Codazzi. Βάσει του Λήμματος 2.1.3 (iii), (iv), η συνθήκη Ricci

$$\Delta \log(-K) = 4K,$$

ισοδύναμα γράφεται:

$$d(2\omega_{12} + *d \log \kappa) = 0.$$

Επομένως από την Πρόταση 1.3.3 τοπικά υπάρχει μια συνάρτηση $\varphi$ τέτοια ώστε:

$$2\omega_{12} + *d \log \kappa = d\varphi. \tag{2.3}$$

Θεωρούμε το ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ με

$$\tilde{e}_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2,$$

$$\tilde{e}_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2,$$

όπου $\theta$ είναι τυχούσα λεία συνάρτηση. Από το Λήμμα 2.1.4 και τη σχέση (2.3) βρίσκουμε ότι η μορφή συνοχής $\tilde{\omega}_{12}$ του πλαισίου $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ ικανοποιεί την:

$$2\tilde{\omega}_{12} + *d \log \kappa = d(\varphi + 2\theta).$$

Επιλέγοντας $\theta = -\varphi/2$, προκύπτει ότι η μορφή συνοχής του πλαισίου $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ είναι

$$2\tilde{\omega}_{12} + *d \log \kappa = 0.$$

Από τον ορισμό του τελεστή Hodge star λαμβάνουμε

$$2\tilde{\omega}_{12} = \tilde{e}_2(\log \kappa)\tilde{\omega}_1 - \tilde{e}_1(\log \kappa)\tilde{\omega}_2.$$

Συνεπώς η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με τις

$$\tilde{e}_1(\kappa) = -2\kappa\tilde{\omega}_{12}(\tilde{e}_2),$$

$$\tilde{e}_2(\kappa) = 2\kappa\tilde{\omega}_{12}(\tilde{e}_1).$$

Άμεσα λαμβάνουμε ότι οι δύο τελευταίες σχέσεις είναι ισοδύναμες με την εξίσωση Codazzi

$$(\nabla_{\tilde{e}_1} A)\tilde{e}_2 = (\nabla_{\tilde{e}_2} A)\tilde{e}_1.$$

Συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεμελιώδους Θεωρήματος των ισομετρικών εμβαπτίσεων (Θεώρημα 1.5.1) και άρα η απόδειξη είναι πλήρης. □

**Παρατήρηση.** *Το Θεώρημα 2.1.1 μπορεί με παρόμοιο τρόπο να επεκταθεί και για ελαχιστικές επιφάνειες σε κάθε τρισδιάστατο χώρο μορφής $\mathbb{Q}_c^3$ σταθερής καμπυλότητας c. Η συνθήκη Ricci τότε λαμβάνει τη μορφή*

$$\Delta \log(c - K) = 4K, \text{ εκεί όπου } K < c$$

*ή, ισοδύναμα, την μορφή*

$$\text{η μετρική } \langle,\rangle_* = \sqrt{c-K}\langle,\rangle \text{ έχει καμπυλότητα Gauss } K^* \equiv 0$$

*όπου $K \leq c$ είναι η καμπυλότητα Gauss του διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $(M, \langle,\rangle)$.*

## 2.2 Η μονοπαραμετρική οικογένεια

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να δούμε με ποιους τρόπους παραμορφώνεται ισομετρικά μια ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

**Θεώρημα 2.2.1.** *Έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση, όπου $M$ ένα απλά συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann. Τότε υπάρχει μονοπαραμετρική, $2\pi$-περιοδική οικογένεια ισομετρικών ελαχιστικών εμβαπτίσεων (associate family) $f_\theta : M \to \mathbb{R}^3,\ \theta \in \mathbb{R}$, με $f_0 = f$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ τύπου $(1,1)$ ως εξής:

$$A_\theta = A \circ J_\theta,$$

όπου $A$ είναι ο τελεστής σχήματος της $f$ και

$$J_\theta = \cos\theta I + \sin\theta J,$$

όπου $J$ είναι η μιγαδική δομή του $M$ και $\theta \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ πληροί το Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των ισομετρικών εμβαπτίσεων (Θεώρημα 1.5.1), δηλαδή ότι είναι αυτοπροσηρτημένο και ικανοποιεί τις εξισώσεις Gauss και Codazzi.

Για να δείξουμε ότι το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ είναι αυτοπροσηρτημένο αρκεί να δείξουμε ότι $A_\theta = A_\theta^*$. Πράγματι κάνοντας χρήση της Πρότασης 1.1.1, το προσηρτημένο τανυστικό πεδίο του $A_\theta$ είναι

$$A_\theta^* = (A \circ J_\theta)^* = J_\theta^* \circ A^* = J_{-\theta} \circ A.$$

Λόγω ελαχιστικότητας, το τανυστικό πεδίο $A$ έχει μηδενικό ίχνος. Άρα από την Πρόταση 1.1.2(i) ισχύει

$$J_{-\theta} \circ A = A \circ J_\theta, \text{για κάθε } \theta \in \mathbb{R},$$

από το οποίο προκύπτει ότι $A_\theta^* = A_\theta$.

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Gauss και Codazzi, δηλαδή ότι για $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$R(X,Y)Z = \langle A_\theta Y, Z\rangle A_\theta X - \langle A_\theta X, Z\rangle A_\theta Y, \tag{2.4}$$

$$(\nabla_X A_\theta)Y = (\nabla_Y A_\theta)X, \tag{2.5}$$

όπου $R$ είναι ο τανυστής καμπυλότητας και $\nabla$ είναι η συνοχή Levi-Civitá του πολυπτύγματος $M$.

Θεωρούμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ κυρίων διευθύνσεων της $f$, δηλαδή

$$Ae_1 = \kappa_1 e_1,\ Ae_2 = \kappa_2 e_2.$$

Η σχέση (2.4), είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες δύο σχέσεις:

$$\langle A_\theta e_2, e_1\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_1\rangle A_\theta e_2 = R(e_1, e_2)e_1$$

και

$$\langle A_\theta e_2, e_2\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_2\rangle A_\theta e_2 = R(e_1, e_2)e_2.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle A_\theta e_2, e_1\rangle A_\theta e_1 &= \langle A \circ J_\theta e_2, e_1\rangle A \circ J_\theta e_1 \\
&= \langle J_{-\theta} \circ Ae_2, e_1\rangle J_{-\theta} \circ Ae_1 \\
&= \langle J_{-\theta}(\kappa_2 e_2), e_1\rangle J_{-\theta}(\kappa_1 e_1) \\
&= \kappa_1\kappa_2 \langle J_{-\theta} e_2, e_1\rangle J_{-\theta} e_1 \\
&= \kappa_1\kappa_2 \sin\theta J_{-\theta} e_1.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\begin{aligned}
\langle A_\theta e_1, e_1\rangle A_\theta e_2 &= \langle A \circ J_\theta e_1, e_1\rangle A \circ J_\theta e_2 \\
&= \langle J_{-\theta} \circ Ae_1, e_1\rangle J_{-\theta} \circ Ae_2 \\
&= \langle J_{-\theta}(\kappa_1 e_1), e_1\rangle J_{-\theta}(\kappa_2 e_2) \\
&= \kappa_1\kappa_2 \langle J_{-\theta} e_1, e_1\rangle J_{-\theta} e_2 \\
&= \kappa_1\kappa_2 \cos\theta J_{-\theta} e_2.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\langle A_\theta e_2, e_1\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_1\rangle A_\theta e_2 &= \kappa_1\kappa_2 \sin\theta J_{-\theta}e_1 - \kappa_1\kappa_2\cos\theta J_{-\theta}e_2 \\ &= \kappa_1\kappa_2\sin\theta(\cos\theta e_1 - \sin\theta e_2) \\ &\quad - \kappa_1\kappa_2\cos\theta(\cos\theta e_2 + \sin\theta e_1) \\ &= -\kappa_1\kappa_2\sin^2\theta e_2 - \kappa_1\kappa_2\cos^2\theta e_2 \\ &= -\kappa_1\kappa_2 e_2,\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\langle A_\theta e_2, e_1\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_1\rangle A_\theta e_2 &= \langle Ae_2, e_1\rangle Ae_1 - \langle Ae_1, e_1\rangle Ae_2 \\ &= R(e_1, e_2)e_1.\end{aligned}$$

Εργαζόμενοι παρόμοια, βρίσκουμε

$$\langle A_\theta e_2, e_2\rangle A_\theta e_1 - \langle A_\theta e_1, e_2\rangle A_\theta e_2 = R(e_1, e_2)e_2,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη ότι ικανοποιείται η εξίσωση Gauss.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ πληροί την εξίσωση Codazzi (2.5). Επειδή $A_\theta = A\circ J_\theta$, τότε για τυχόν $X \in \mathcal{X}(M)$ ισχύει

$$\nabla_X A_\theta = \nabla_X(A\circ J_\theta).$$

Από τις Προτάσεις 1.2.1 και 1.2.2 έχουμε

$$\nabla_X A_\theta = (\nabla_X A)\circ J_\theta,$$

αφού $\nabla_X J_\theta = 0$. Λαμβάνοντας υπόψιν τις Πρότασεις 1.2.3 και 1.1.2 έχουμε

$$\nabla_X A_\theta = J_{-\theta}\circ\nabla_X A.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(\nabla_X A_\theta)Y - (\nabla_Y A_\theta)X &= J_{-\theta}\circ(\nabla_X A)(Y) - J_{-\theta}\circ(\nabla_Y A)(X) \\ &= J_{-\theta}\big((\nabla_X A)(Y) - (\nabla_Y A)(X)\big) \\ &= 0,\end{aligned}$$

αφού το τανυστικό πεδίο $A$ ως τελεστής σχήματος της $f$ πληροί την εξίσωση Codazzi.

Συνεπώς το τανυστικό πεδίο $A_\theta$ πληροί τις εξισώσεις Gauss και Codazzi, οπότε από το Θεώρημα 1.5.1, προκύπτει ότι υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση $f_\theta : M \to \mathbb{R}^3$ με τελεστή σχήματος ακριβώς το τανυστικό πεδίο $A_\theta$.

Απομένει να δείξουμε ότι η $f_\theta$ είναι ελαχιστική. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}A_\theta &= \mathrm{trace}(A\circ J_\theta) \\ &= \mathrm{trace}(A\circ(\cos\theta I + \sin\theta J)) \\ &= \cos\theta\mathrm{trace}A + \sin\theta\mathrm{trace}(A\circ J) \\ &= 0,\end{aligned}$$

κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Παρατήρηση.** *Η οικογένεια $f_\theta$ ενδέχεται να είναι τετριμμένη δηλαδή για κάθε $\theta$ να υπάρχει ισομετρία $\tau_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $f_\theta = \tau_\theta \circ f$ Αποδεικνύεται ότι μόνο στην ιδιάζουσα περίπτωση όπου η $f$ είναι ολικά γεωδαιτική, δηλαδή το $f(M)$ είναι τμήμα επιπέδου, η οικογένεια $f_\theta$ είναι τετριμμένη.*

Με το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζουμε ότι η μονοπαραμετρική οικογένεια του Θεωρήματος 2.2.1 είναι ουσιαστικά και ο μόνος τρόπος ισομετρικής παραμόρφωσης απλά συνεκτικών ελαχιστικών επιφανειών.

**Θεώρημα 2.2.2.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^3$ μια ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση ενός προσανατολισμένου απλά συνεκτικού διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann. Αν $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση, τότε υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi]$ και $\tau$ ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε $\tilde{f} = \tau \circ f_\theta$.*

*Απόδειξη.* Έστω $A, \tilde{A}$ οι τελεστές σχήματος των ισομετρικών εμβαπτίσεων $f, \tilde{f}$. Επειδή οι $f, \tilde{f}$ είναι ελαχιστικές ισχύει

$$\mathrm{trace} A = \mathrm{trace} \tilde{A} = 0,$$

ενώ από την εξίσωση Gauss γνωρίζουμε ότι η καμπυλότητα Gauss $K$ πληροί

$$\det A = \det \tilde{A} = K.$$

Επομένως από την Πρόταση 1.1.2, έπεται ότι για κάθε μη ισόπεδο σημείο $p \in M$, υπάρχει περιοχή του, $U \subset M$ που δεν περιέχει ισόπεδα σημεία και λεία συνάρτηση $\varphi \in C^\infty(U)$ ώστε

$$\tilde{A} = A \circ J_\varphi,$$

όπου $J_\varphi = \cos\varphi I + \sin\varphi J$. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\varphi$ είναι σταθερή. Ως γνωστόν, οι τελεστές σχήματος $A, \tilde{A}$ πληρούν την εξίσωση Codazzi, δηλαδή

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X \tag{2.6}$$

και

$$(\nabla_X \tilde{A})Y = (\nabla_Y \tilde{A})X. \tag{2.7}$$

Για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$ και λόγω της Πρότασης 1.2.2 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\nabla_X J_\varphi &= \nabla_X(\cos\varphi I + \sin\varphi J)\\ &= X(\cos\varphi)I + X(\sin\varphi)J + \sin\varphi \nabla_X J\\ &= -X(\varphi)\sin\varphi I + X(\varphi)\cos\varphi J\\ &= X(\varphi)(-\sin\varphi I + \cos\varphi J)\\ &= X(\varphi)J_{\varphi+\pi/2}.\end{aligned}$$

Από την σχέση $\tilde{A} = A \circ J_\varphi$ και την Πρόταση 1.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_X \tilde{A} &= (\nabla_X A) \circ J_\varphi + A \circ \nabla_X J_\varphi\\ &= (\nabla_X A) \circ J_\varphi + X(\varphi) A \circ J_{\varphi+\pi/2}\\ &= (\nabla_X A) \circ J_\varphi + X(\varphi) J_{-\varphi-\pi/2} \circ A.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Επίσης ισχύει $A \circ J_\varphi = J_{-\varphi} \circ A$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή στη διεύθυνση ενός διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου $X \in \mathcal{X}(M)$ έχουμε:

$$(\nabla_X A) \circ J_\varphi + A \circ \nabla_X J_\varphi = \nabla_X J_{-\varphi} \circ A + J_{-\varphi} \circ \nabla_X A$$

Συνεπώς, από τα προηγούμενα λαμβάνουμε ότι:

$$(\nabla_X A) \circ J_\varphi + X(\varphi) A \circ J_{\varphi+\pi/2} = -X(\varphi) J_{-\varphi+\pi/2} \circ A + J_{-\varphi} \circ \nabla_X A,$$

ή ισοδύναμα

$$(\nabla_X A) \circ J_\varphi + X(\varphi) J_{-\varphi-\pi/2} \circ A = -X(\varphi) J_{-\varphi+\pi/2} \circ A + J_{-\varphi} \circ \nabla_X A.$$

Επειδή $J_{-\varphi-\pi/2} + J_{-\varphi+\pi/2} = 0$, προκύπτει ότι

$$(\nabla_X A) \circ J_\varphi = J_{-\varphi} \circ \nabla_X A. \tag{2.9}$$

Συνεπώς, η σχέση (2.8) λόγω της σχέσης (2.9), γίνεται

$$\begin{aligned} \nabla_X \tilde{A} &= J_{-\varphi} \circ \nabla_X A + X(\varphi) J_{-\varphi-\pi/2} \circ A \\ &= J_{-\varphi} \circ (\nabla_X A + X(\varphi) J_{-\pi/2} \circ A) \\ &= J_{-\varphi} \circ (\nabla_X A + X(\varphi) J \circ A). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Από τις (2.7) και (2.10) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X \tilde{A})Y - (\nabla_Y \tilde{A})X \\ &= -J_{-\varphi}(X(\varphi) J \circ AY - Y(\varphi) J \circ AX) \\ &= -J_{-\varphi+\pi/2}(X(\varphi) AY - Y(\varphi) AX). \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τώρα $X$ να είναι το $e_1$ και $Y$ το $e_2$, όπου $\{e_1, e_2\}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο κυρίων διευθύνσεων της $f$ στο $U$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.2 επιλέγουμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ της $f$ σε συνεκτική περιοχή $U$, η οποία δεν περιέχει ισόπεδα σημεία, τέτοιο ώστε

$$Ae_1 = \kappa e_1 \text{ και } Ae_2 = -\kappa e_2,\ \kappa = \sqrt{-K}.$$

Από την ανωτέρω σχέση για $X = e_1$ και $Y = e_2$ προκύπτει ότι στην περιοχή $U$ ισχύει $e_1(\varphi) = e_2(\varphi) = 0$. Αυτό μας δίνει ότι η συνάρτηση $\varphi$ είναι σταθερή στην περιοχή $U$ και κατ΄ επέκταση σε όλο το πολύπτυγμα πλην των ισόπεδων σημείων. Αποδεικνύεται (Πρόταση 3.1.2) ότι το σύνολο των ισόπεδων σημείων αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι η $\varphi$ είναι σταθερή σε ολόκληρο το $M$. Τότε ο τελεστής σχήματος της $\tilde{f}$ είναι της μορφής $\tilde{A} = A \circ J_\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$, επομένως από το Θεμελιώδες Θεώρημα 1.5.1, υπάρχει $\tau$ ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε $\tilde{f} = \tau \circ f_\theta$. □

Η μονοπαραμετρική οικογένεια $f_\theta$ μπορεί να οριστεί κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για ελαχιστικές επιφάνειες σε τρισδιάστατους χώρους μορφής. Στην περίπτωση όμως των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ και μόνο, υπάρχει η δυνατότητα αναλυτικής περιγραφής της.

Πράγματι, έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ μια απλά συνεκτική, ελαχιστική επιφάνεια. Θεωρούμε τυχαίο σταθερό διάνυσμα $\vec{v}$ και την 1-μορφή

$$\omega_{\theta,\vec{v}} = \langle df \circ J_\theta, \vec{v} \rangle,$$

όπου

$$J_\theta = \cos\theta I + \sin\theta J,$$

και $\langle , \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$. Η μορφή $\omega_{\theta,\vec{v}}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\omega_{\theta,\vec{v}} = \cos\theta d\langle f, \vec{v} \rangle + \sin\theta \omega_{\pi/2}.$$

Η εξωτερική παράγωγός της είναι

$$d\omega_{\theta,\vec{v}} = \cos\theta d^2\langle f, \vec{v} \rangle + \sin\theta d\omega_{\pi/2}.$$

Αφού $d^2\langle f, \vec{v} \rangle = 0$, ισχύει

$$d\omega_{\theta,\vec{v}} = \sin\theta d\omega_{\pi/2}.$$

Από την Πρόταση 1.3.2 και λαμβάνοντας υπόψιν τον τύπο του Gauss για $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ έχουμε

$$\begin{aligned} d\omega_{\pi/2}(X,Y) &= X\big(\omega_{\pi/2}(Y)\big) - Y\big(\omega_{\pi/2}(X)\big) - \omega_{\pi/2}([X,Y]) \\ &= X\big(\langle df \circ J(Y), \vec{v} \rangle\big) - Y\big(\langle df \circ J(X), \vec{v} \rangle\big) - \langle df \circ J([X,Y]), \vec{v} \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X df(JY), \vec{v} \rangle - \langle \overline{\nabla}_Y df(JX), \vec{v} \rangle - \langle df(J[X,Y]), \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει $\nabla_X JY = J(\nabla_X Y)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} d\omega_{\pi/2}(X,Y) &= \langle df(J\nabla_X Y), \vec{v} \rangle + \langle \alpha_f(X, JY), \vec{v} \rangle - \langle df(J\nabla_Y X), \vec{v} \rangle \\ &\quad - \langle \alpha_f(Y, JX), \vec{v} \rangle - \langle df(J\nabla_X Y), \vec{v} \rangle + \langle df(J\nabla_Y X), \vec{v} \rangle \\ &= \langle \alpha_f(X, JY) - \alpha_f(Y, JX), \vec{v} \rangle, \end{aligned}$$

όπου $\alpha_f$ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της $f$. Αν $\xi$ είναι μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο, γνωρίζουμε ότι

$$\alpha_f(X,Y) = \langle AX, Y \rangle \xi.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} d\omega_{\pi/2}(X,Y) &= (\langle AX, JY \rangle - \langle AY, JX \rangle)\langle \xi, \vec{v} \rangle \\ &= -(\langle J \circ AX, Y \rangle + \langle J \circ AY, X \rangle)\langle \xi, \vec{v} \rangle, \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 1.1.2 προκύπτει $d\omega_{\pi/2} = 0$ και επομένως $d\omega_{\theta,\vec{v}} = 0$. Τότε λόγω της Πρότασης 1.3.3, υπάρχουν συναρτήσεις

$$f_i^\theta : M \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3,$$

τέτοιες ώστε $\omega_i^\theta = df_i^\theta$, όπου $\omega_i^\theta = \omega_{\theta,\varepsilon_i}$ και $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f_\theta : M \to \mathbb{R}^3,\ \text{με } f_\theta = (f_1^\theta, f_2^\theta, f_3^\theta) = f_1^\theta \varepsilon_1 + f_2^\theta \varepsilon_2 + f_3^\theta \varepsilon_3.$$

Το διαφορικό αυτής είναι:

$$\begin{aligned} df_\theta &= df_1^\theta \varepsilon_1 + df_2^\theta \varepsilon_2 + df_3^\theta \varepsilon_1 \\ &= \omega_1^\theta \varepsilon_1 + \omega_2^\theta \varepsilon_2 + \omega_3^\theta \varepsilon_3 \\ &= df \circ J_\theta. \end{aligned}$$

Συνεπώς η $f_\theta$ είναι μια ισομετρική εμβάπτιση με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\xi_\theta = \xi$ και τελεστή σχήματος το τανυστικό πεδίο $A_\theta$.

Επιπλέον για τον τελεστή σχήματος της $f_\theta$ ισχύει ότι

$$A_\theta = J_{-\theta} \circ A = A \circ J_\theta \text{ για κάθε } \theta \in [0, 2\pi].$$

Πράγματι, από τον τύπο του Weingarten ισχύει

$$df_\theta \circ A_\theta(X) = df \circ A(X), \text{ για κάθε } X \in \mathcal{X}(M).$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$df \circ J_\theta \circ A_\theta(X) = df \circ A(X).$$

Άμεσα προκύπτει ότι η $f_\theta$ λαμβάνει τη μορφή:

$$f_\theta = \cos\theta f + \sin\theta f_{\pi/2},$$

ως προς παράλληλη μεταφορά στον $\mathbb{R}^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Η ΣΥΝΘΗΚΗ RICCI ΓΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

Μετά από τα όσα αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$, τίθεται φυσιολογικά το ερώτημα αν οποιαδήποτε ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^n$ πληροί τη συνθήκη Ricci. Ο Pinl [18] το 1953 έδωσε ένα παράδειγμα ελαχιστικής επιφάνειας στον $\mathbb{R}^4$, η οποία δεν πληροί τη συνθήκη Ricci. Εύλογα τέθηκε το ερώτημα της εύρεσης όλων εκείνων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που πληρούν τη συνθήκη Ricci ή ισοδύναμα της ταξινόμησης εκείνων των ελαχιστικών επιφανειών του Ευκλειδείου χώρου οι οποίες είναι τοπικά ισομετρικές με ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$. Ο Lawson στη διδακτορική του διατριβή [14] [13], έλυσε το πρόβλημα της ταξινόμησης όλων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που πληρούν τη συνθήκη Ricci.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλύσουμε την διαδικασία που ακολούθησε ο Lawson για να φτάσει μέχρι την ταξινόμηση αυτών των ελαχιστικών επιφανειών. Γι΄ αυτό το σκοπό θα αναφερθούμε σε σημαντικές έννοιες της θεωρίας των επιφανειών του $\mathbb{R}^n$, όπως η γενικευμένη απεικόνιση Gauss, καθώς και θεωρήματα που αφορούν ολόμορφες καμπύλες του μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{C}P^n$ σταθερής καμπυλότητας Gauss.

## 3.1 Η απεικόνιση Gauss για επιφάνειες του $\mathbb{R}^n$

Ως γνωστόν, σημαντικό ρόλο στην κλασική θεωρία των επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ έχει η απεικόνιση Gauss, η οποία ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 3.1.1.** *Έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ είναι προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης 2, με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $N$. Η **απεικόνιση Gauss** αυτής είναι η απεικόνιση*

$$g : M \to \mathbb{S}^2,\ g(p) = N(p).$$

Μελετώντας επιφάνειες στον $\mathbb{R}^n$, καθίσταται φυσιολογική η ανάγκη επέκτασης της έννοιας της απεικόνισης Gauss. Για τον ορισμό της απεικόνισης Gauss τέτοιων επιφανειών σε τυχαία συνδιάσταση, χρειαζόμαστε την έννοια του πολυπτύγματος Grassmann $G_{2,n}$. Το πολύπτυγμα Grassmann ορίζεται ως το σύνολο όλων των προσανατολισμένων διδιάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα.

Ειδικότερα αποδεικνύεται ότι είναι διαφορομορφικό με τον ομογενή χώρο

$$G_{2,n} = SO(n)/SO(2) \times SO(n-2),$$

όπου με $SO(n)$ είναι η ομάδα των $n \times n$ ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα 1.

**Ορισμός 3.1.2.** *Έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^n$ ισομετρική εμβάπτιση, όπου $M$ προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann διάστασης 2. Η* ***γενικευμένη απεικόνιση Gauss*** *αυτής, είναι η απεικόνιση*

$$g : M \to G_{2,n},\ g(p) = df_p(T_pM).$$

Επί της ουσίας η απεικόνιση Gauss, απεικονίζει σε κάθε σημείο $p \in M$ τον διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, ο οποίος προκύπτει από παράλληλη μεταφορά του εφαπτομένου επιπέδου $df_p(T_pM)$, ώστε να διέρχεται από το $0 \in \mathbb{R}^n$.

**Παρατήρηση.** *Για $n = 3$, οι Ορισμοί 3.1.1, 3.1.2 είναι ισοδύναμοι, αφού κάθε διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ καθορίζεται από ένα μοναδιαίο κάθετό του διάνυσμα.*

Μπορούμε να περιγράψουμε την απεικόνιση Gauss και με διαφορετικό τρόπο. Ας θεωρήσουμε ένα ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων $(U, \psi)$, με συναρτήσεις συντεταγμένων $(u, v)$. Αυτό σημαίνει ότι η μετρική του $M$ γράφεται

$$\langle , \rangle = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

όπου $\lambda \in C^\infty(U)$ με $\lambda > 0$, ή ισοδύναμα

$$\|\frac{\partial}{\partial u}\| = \|\frac{\partial}{\partial v}\| = \lambda \ \text{ και } \ \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = 0.$$

Θεωρούμε την εμβάπτιση $x = f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$. Επειδή η $f$ είναι ισομετρική εμβάπτιση έχουμε

$$\|x_u\| = \|x_v\| = \lambda \ \text{ και } \ \langle x_u, x_v \rangle = 0.$$

Το πολύπτυγμα $M$ έχει δομή επιφάνειας Riemann με αντίστοιχο μιγαδικό χάρτη $(U, z)$, όπου $z = u + iv$. Τότε $\{x_u, x_v\}$ είναι βάση του εφαπτόμενου επιπέδου $df_p(T_pM)$, όπου $p = \varphi^{-1}(u, v)$. Συνεπώς το εφαπτόμενο επίπεδο καθορίζεται πλήρως από τα διανύσματα $x_u, x_v$, ή αλλιώς από το μιγαδικό διάνυσμα $x_u - ix_v \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια μπορούμε να θεωρήσουμε τοπικά την απεικόνιση Gauss ως την απεικόνιση $\varphi : \psi(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ με

$$\varphi = x_u - ix_v.$$

Ορίζοντας τους τελεστές Wirtinger

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\Big),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big),$$

παρατηρούμε ότι η απεικόνιση Gauss είναι

$$\varphi = 2\frac{\partial x}{\partial z} = 2x_z.$$

**Λήμμα 3.1.1.** *Έστω $(U,\psi)$ ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων του πολυπτύγματος $(M,\langle,\rangle)$ με $\langle,\rangle=\lambda^2|dz|^2$ και $f: M^2\to\mathbb{R}^n$ ισομετρική εμβάπτιση με διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $H$. Τότε για την $x=f\circ\psi^{-1}$ ισχύει*

$$\Delta_0 x = 2\lambda^2 H\circ\psi^{-1},$$

*όπου με $\Delta_0$ συμβολίζουμε το Λαπλασιανό τελεστή της Ευκλείδειας μετρικής $|dz|^2$.*

*Απόδειξη.* Ισχυριζόμαστε ότι

$$\langle\Delta_0 x, x_u\rangle = 0 = \langle\Delta_0 x, x_v\rangle$$

ή ισοδύναμα

$$\langle x_{uu}+x_{vv}, x_u\rangle = 0 = \langle x_{uu}+x_{vv}, x_v\rangle,$$

όπου με $\langle,\rangle$ συμβολίζουμε επίσης το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Αφού το σύστημα συντεταγμένων είναι ισόθερμο έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle x_{uu}+x_{vv}, x_u\rangle &= \langle x_{uu}, x_u\rangle + \langle x_{vv}, x_u\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle x_u, x_u\rangle_u + \langle x_v, x_u\rangle_v - \langle x_v, x_{uv}\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle x_u, x_u\rangle_u - \frac{1}{2}\langle x_v, x_v\rangle_u\\ &= 0.\end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα.

Επιπλέον έχουμε ότι ισχύει $\mathrm{trace}\alpha_f = 2H$, όπου $\alpha_f$ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της. Επομένως για την κάθετη συνιστώσα του $\Delta_0 x$ ισχύει

$$\begin{aligned}(\Delta_0 x)^\perp &= (x_{uu}+x_{vv})^\perp\\ &= \alpha(\partial_u,\partial_u)+\alpha(\partial_v,\partial_v)\\ &= 2\lambda^2 H\circ\psi^{-1},\end{aligned}$$

όπου $\partial_u=\frac{\partial}{\partial u}$, $\partial_v=\frac{\partial}{\partial v}$. Όμως $\Delta_0 x=(\Delta_0 x)^\perp$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Παρατήρηση.** *Για την Λαπλασιανή προφανώς ισχύει $\Delta=\frac{1}{\lambda^2}\Delta_0$. Επομένως το Λήμμα 3.1.1 ουσιαστικά σημαίνει ότι $\Delta f = 2H$.*

**Πρόταση 3.1.1.** *Αν $f: M^2\to\mathbb{R}^n$ είναι ελαχιστική επιφάνεια και $(U,\psi)$ είναι ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων, τότε η απεικόνιση*

$$\varphi:\psi(U)\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n \text{ με } \varphi = x_u - i x_v$$

*είναι ολόμορφη, όπου $x=f\circ\psi^{-1}$.*

*Απόδειξη.* Είδαμε ότι η απεικόνιση Gauss μιας επιφάνειας του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να λάβει τοπικά τη μορφή $\varphi=2x_z$. Προφανώς έχουμε

$$\varphi_{\bar z} = 2x_{z\bar z}.$$

Κάνοντας χρήση των τελεστών Wirtinger και του Λήμματος 3.1.1 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big)x\\ &= \frac{1}{2}\Delta_0 x.\end{aligned}$$

Λόγω του Λήμματος 3.1.1 έχουμε ότι $\varphi_{\overline{z}}=0$ και άρα η απεικόνιση $\varphi$ είναι ολόμορφη. □

Τονίζουμε ότι η απεικόνιση $\varphi:\psi(U)\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$ είναι τοπική, δηλαδή εξαρτάται από την επιλογή του ισόθερμου συστήματος συντεταγμένων του πολυπτύγματος $M$. Θεωρώντας ένα άλλο σύστημα ισόθερμων συντεταγμένων $(\tilde{U},\tilde{\psi})$ με συντεταγμένες $(\tilde{u},\tilde{v})$, έχουμε τον αντίστοιχο μιγαδικό χάρτη $(\tilde{U},\tilde{z})$ με $\tilde{z}=\tilde{u}+i\tilde{v}$. Τότε βρίσκουμε ότι

$$x_z=\frac{\partial\tilde{z}}{\partial z}x_{\tilde{z}}\ \text{ ή ισοδύναμα } \varphi=\frac{\partial\tilde{z}}{\partial z}\tilde{\varphi},$$

όπου $\tilde{\varphi}=\tilde{x}_{\tilde{u}}-i\tilde{x}_{\tilde{v}}$ και $\tilde{x}=f\circ\tilde{\psi}^{-1}$. Τούτο σημαίνει ότι $x_z$ και $\tilde{x}_{\tilde{z}}$ ορίζουν την ίδια κλάση στον $\mathbb{C}P^{n-1}$. Συνεπώς η απεικόνιση Gauss μπορεί ισοδύναμα να οριστεί ως η απεικόνιση:

$$\Phi: M^2\to\mathbb{C}P^{n-1},\ \Phi=[\varphi\circ\psi].$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση Gauss $\Phi$ λαμβάνει τιμές στην αλγεβρική ποικιλότητα $Q_{n-2}\subset\mathbb{C}P^{n-1}$ που ορίζεται ως εξής:

$$Q_{n-2}=\left\{[z_1,\ldots,z_n]\in\mathbb{C}P^{n-1}: z_1^2+\cdots+z_n^2=0\right\}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\varphi\rangle &= \langle x_u-ix_v,x_u-ix_v\rangle\\ &= \|x_u\|^2-\|x_v\|^2-2i\langle x_u,x_v\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι με το σύμβολο $\langle,\rangle$ συμβολίζουμε επίσης και τη $\mathbb{C}$-διγραμμική επέκταση του συνήθους εσωτερικού γινομένου του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή την απεικόνιση $\langle,\rangle:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, με

$$\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^n v_iw_i,\ \text{και } v=(v_1,\ldots,v_n), w=(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{C}^n.$$

Συνεπώς θέτοντας $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ έχουμε

$$\varphi_1^2+\cdots+\varphi_n^2=0.$$

Αναφέρουμε ότι αυτή η αλγεβρική ποικιλότητα $Q_{n-2}$ ταυτίζεται μέσω ενός διαφορομορφισμού με το πολύπτυγμα $G_{2,n}$. Πράγματι, επιλέγουμε μια προσανατολισμένη βάση $\{v_1,v_2\}$ ενός διδιάστατου υπόχωρου $V$ του $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $\|v_1\|=\|v_2\|$ και

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Τότε το μιγαδικό διάνυσμα $w = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τη σχέση $\langle w, w \rangle = 0$. Επιπλέον αν $\{v_1', v_2'\}$ είναι μια άλλη βάση του ίδιου προσανατολισμού του $V$, το αντίστοιχο μιγαδικό διάνυσμα $w' = v_1' + iv_2'$ πληροί $w' = aw$ για κάποιο $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Επομένως σε κάθε διδιάστατο υπόχωρο $V$ του $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο του πολυπτύγματος $Q_{n-2}$. Αυτή η αντιστοιχία είναι ένα προς ένα και επί και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι διαφορομορφισμός.

Έστω $f : (M, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}^n$ ελαχιστική επιφάνεια και $(U, \psi)$ χάρτης του πολυπτύγματος $M$ με ισόθερμες συντεταγμένες $(u, v)$. Θεωρούμε όπως και πριν την απεικόνιση $x : \psi(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$, με $x = f \circ \psi^{-1}$. Η μετρική του $M$, γράφεται

$$\langle , \rangle = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2 |dz|^2,$$

όπου

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(\langle x_u, x_u \rangle + \langle x_v, x_v \rangle) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^2, \tag{3.1}$$

$z = u + iv$ και $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

**Λήμμα 3.1.2.** *Η καμπυλότητα Gauss κάθε ελαχιστικής επιφάνειας $f : M^2 \to \mathbb{R}^n$ δίνεται από τη σχέση*

$$K = -4\frac{\|\varphi \wedge \varphi_z\|^2}{\|\varphi\|^6}.$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με την Πρόταση 1.6.3, η καμπυλότητα Gauss της μετρικής $\langle , \rangle = \lambda^2 |dz|^2$ δίνεται ως εξής:

$$K = -\frac{\Delta_0 \log \lambda^2}{2\lambda^2}, \tag{3.2}$$

όπου $\Delta_0$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής της Ευκλείδειας μετρικής $|dz|^2$. Για λόγους ευκολίας συμβολίζουμε τους τελεστές Wirtinger ως εξής

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} \text{ και } \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Τότε ο Λαπλασιανός τελεστής $\Delta_0$ γράφεται

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \\ &= (\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}) \\ &= 4\partial\overline{\partial}.\end{aligned}$$

Επειδή $\|\varphi\|^2 = 2\lambda^2$, λαμβάνουμε

$$K = -\frac{4}{\|\varphi\|^2}\partial\overline{\partial} \log \|\varphi\|^2.$$

Προφανώς έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\log\|\varphi\|^2 &= \frac{\overline{\partial}\|\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2} = \frac{\overline{\partial}\langle\varphi,\overline{\varphi}\rangle}{\|\varphi\|^2} \\ &= \frac{\langle\varphi_{\overline{z}},\overline{\varphi}\rangle + \langle\varphi,\overline{\varphi}_{\overline{z}}\rangle}{\|\varphi\|^2}.\end{aligned}$$

Επειδή η $\varphi$ είναι ολόμορφη (Πρόταση 3.1.1), προκύπτει ότι

$$\overline{\partial}\log\|\varphi\|^2 = \frac{\langle\varphi,\overline{\varphi}_{\overline{z}}\rangle}{\|\varphi\|^2}.$$

Επιπλέον είναι

$$\partial\|\varphi\|^2 = \partial\langle\varphi,\overline{\varphi}\rangle = \langle\varphi_z,\overline{\varphi}\rangle + \langle\varphi,\overline{\varphi}_z\rangle.$$

Και πάλι λόγω ολομορφίας της $\varphi$ ισχύει $\varphi_{\overline{z}} = 0$ ή ισοδύναμα $\overline{\varphi}_z = 0$. Συνεπώς

$$\partial\|\varphi\|^2 = \langle\varphi_z,\overline{\varphi}\rangle.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\partial\overline{\partial}\log\|\varphi\|^2 &= \frac{1}{\|\varphi\|^4}\left((\langle\varphi_z,\overline{\varphi}_{\overline{z}}\rangle + \langle\varphi,\overline{\varphi}_{\overline{z}z}\rangle)\|\varphi\|^2 - \langle\varphi,\overline{\varphi}_{\overline{z}}\rangle\langle\varphi_z,\overline{\varphi}\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\|\varphi\|^4}\left(\|\varphi_z\|^2\|\varphi\|^2 - \langle\varphi,\varphi_z\rangle_H\overline{\langle\varphi,\varphi_z\rangle}_H\right) \\ &= \frac{1}{\|\varphi\|^4}\left(\|\varphi_z\|^2\|\varphi\|^2 - |\langle\varphi,\varphi_z\rangle_H|^2\right),\end{aligned}$$

όπου $\langle,\rangle_H$ είναι το Ερμιτιανό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$, δηλαδή η απεικόνιση

$$\langle,\rangle_H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ \langle v,w\rangle_H = \sum_{i=1}^n v_i\overline{w}_i,$$

με $v = (v_1,\ldots,v_n), w = (w_1,\ldots,w_n)$. Έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

**Σχόλιο.** *Προκύπτει άμεσα απο το Λήμμα 3.1.2 ότι η καμπυλότητα Gauss κάθε ελαχιστικής επιφάνειας $f : M^2 \to \mathbb{R}^n$, όπως και για ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$, ικανοποιεί $K \leq 0$.*

**Πρόταση 3.1.2.** *Τα ολικά γεωδαιτικά σημεία μιας ελαχιστικής επιφάνειας $f : M \to \mathbb{R}^n$ είναι μεμονωμένα, εκτός αν η εικόνα $f(M)$ είναι τμήμα επιπέδου του $\mathbb{R}^n$.*

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 3.1.2 προκύπτει ότι η καμπυλότητα Gauss μηδενίζεται όταν $|\varphi \wedge \varphi_z|^2 = 0$. Η απεικόνιση $\varphi$ όμως είναι ολόμορφη και επομένως και η $\varphi \wedge \varphi_z$, αφού

$$(\varphi \wedge \varphi_z)_{\overline{z}} = \varphi_{\overline{z}} \wedge \varphi_z + \varphi \wedge \varphi_{z\overline{z}}.$$

Συνεπώς είτε είναι $\varphi \wedge \varphi_z \equiv 0$, οπότε είτε η καμπυλότητα Gauss είναι ταυτοτικά μηδέν και άρα η $f$ είναι ολικά γεωδαιτική, είτε τα σημεία που μηδενίζεται είναι μεμονωμένα. □

## 3.2 Η τρίτη θεμελιώδης μορφή

Εφοδιάζουμε τον μιγαδικό προβολικό χώρο $\mathbb{C}P^{n-1}$ με την μετρική Fubini-Study

$$\langle , \rangle_{FS} := ds^2 = 4\frac{\|z \wedge dz\|^2}{\|z\|^4}, \ [z] \in \mathbb{C}P^{n-1},$$

ακριβώς όπως ορίστηκε στην Ενότητα 2.5. Προφανώς μέσω της μετρικής Fubini-Study, η απεικόνιση Gauss

$$\Phi : M^2 \to \mathbb{C}P^{n-1}$$

επάγει μια μετρική (ενδεχομένως όχι Riemann) στο πολύπτυγμα $M$, η οποία συμβολίζεται με $\langle , \rangle_{III}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\langle , \rangle_{III} = \Phi^*(\langle , \rangle_{FS}) = \lambda_{III}^2 |dz|^2, \text{ όπου } \lambda_{III}^2 = 2\frac{\|\varphi \wedge \varphi_z\|^2}{\|\varphi\|^4}. \tag{3.3}$$

Η μετρική αυτή είναι γνωστή και ως **τρίτη θεμελιώδης μορφή** της επιφάνειας.

Σημειώνουμε ότι η τρίτη θεμελιώδης μορφή μιας ελαχιστικής επιφάνειας είναι μετρική Riemann στο σύνολο των σημείων όπου η καμπυλότητα Gauss είναι αρνητική.

**Πρόταση 3.2.1.** *Έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^n$ ελαχιστική επιφάνεια. Η συνθήκη Ricci ικανοποιείται στο σύνολο των σημείων του $M$, τα οποία έχουν καμπυλότητα Gauss $K < 0$, αν και μόνο αν $K_{III} \equiv 1$, όπου $K_{III}$ είναι η καμπυλότητα Gauss της τρίτης θεμελιώδους μορφής της $f$.*

*Απόδειξη.* Από τις (3.3), (3.1) και (3.2) λαμβάνουμε ότι

$$K = -\frac{\lambda_{III}^2}{\lambda^2},$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_{III}^2 = -K\lambda^2. \tag{3.4}$$

Από την (3.2) και την (3.4) έχουμε

$$\Delta_0 \log \lambda = -K\lambda^2 = \lambda_{III}^2, \tag{3.5}$$

ενώ λογαριθμίζοντας και παίρνοντας την Λαπλασιανή της (3.4) προκύπτει

$$\Delta \log \lambda_{III} = \Delta_0 \log \lambda + \frac{1}{2}\Delta \log(-K) = \lambda_{III}^2 + \frac{1}{2}\Delta \log(-K). \tag{3.6}$$

Συνεπώς κάνοντας χρήση της Πρότασης 1.6.3 για την καμπυλότητα Gauss $K_{III}$ της μετρικής $\langle , \rangle_{III}$ έχουμε

$$K_{III} = -\frac{\Delta \log \lambda_{III}}{\lambda_{III}^2} = -1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta \log(-K)}{\lambda_{III}^2}. \tag{3.7}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η συνθήκη Ricci σημαίνει ότι η καμπυλότητα Gauss $\tilde{K}$ της μετρικής $\tilde{\langle,\rangle} = \sqrt{-K}\langle,\rangle$ ικανοποιεί $\tilde{K} \equiv 0$. Αν γράψουμε την μετρική $\tilde{\langle,\rangle}$ στη μορφή

$$\tilde{\langle,\rangle} = \tilde{\lambda}^2|dz|^2, \ \tilde{\lambda}^2 = \sqrt{-K}\lambda^2,$$

έχουμε ότι

$$\Delta \log \tilde{\lambda} = \frac{1}{2}\Delta \log \sqrt{-K} + \Delta \log \lambda.$$

Επιπλέον αφού

$$\tilde{K} = -\frac{\Delta \log \tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}^2},$$

άμεσα λαμβάνουμε ότι $\tilde{K} \equiv 0$ αν και μόνο αν $\Delta \log \tilde{\lambda} \equiv 0$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\Delta \log(-K) \equiv -4\Delta \log \lambda.$$

Από την (3.4) προκύπτει ότι το παραπάνω ισχύει αν και μόνο αν

$$\Delta \log(-K) \equiv -4\lambda_{III}^2$$

και τότε η σχέση (3.7) γίνεται $K_{III} \equiv 1$. □

## 3.3 Η αναπαράσταση Weierstrass

Το επόμενο θεώρημα είναι το θεώρημα **Αναπαράστασης του Weierstrass**. Στην πραγματικότητα οφείλεται στον Weierstrass για την περίπτωση $n = 3$ ενώ η γενίκευσή του για ελαχιστικές επιφάνειες σε τυχούσα συνδιάσταση αποδείχθηκε από τον Osserman [6].

**Θεώρημα 3.3.1.** *Έστω $f : (M, \langle,\rangle) \to \mathbb{R}^n$ ελαχιστική επιφάνεια και $(U, \psi)$ χάρτης του $M$ με ισόθερμες συντεταγμένες $(u, v)$ και μετρική $\langle,\rangle = \lambda^2(du^2 + dv^2)$. Αν $(U, z)$ είναι ο αντίστοιχος μιγαδικός χάρτης, με $z = u + iv$, τότε η απεικόνιση Gauss $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 2x_z$ είναι ολόμορφη και πληροί*

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i|^2 = 2\lambda^2 > 0, \ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = 0.$$

*Επιπλέον η απεικόνιση $x : \psi(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$, με $x = f \circ \psi^{-1}$, μπορεί να γραφεί ως*

$$x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(\int^z \varphi dz\Big).$$

*Αντίστροφα, έστω $\varphi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$, όπου $V$ είναι ανοιχτό σύνολο και $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ολόμορφη απεικόνιση με τις εξής ιδιότητες:*

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i|^2 > 0, \ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = 0.$$

*Τότε η απεικόνιση $x : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$,*

$$x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left( \int^z \varphi dz \right)$$

*είναι ελαχιστική επιφάνεια.*

*Απόδειξη.* Επειδή $\varphi = 2x_z$ το ορθό προκύπτει άμεσα. Το αντίστροφο είναι συνέπεια του Λήμματος 3.1.1. □

Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα 3.3.1 περιγράφει τοπικά όλες τις ελαχιστικές επιφάνειες του $\mathbb{R}^n$.

Στην περίπτωση όπου $n = 3$, η απεικόνιση $\varphi : \psi(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ με $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ικανοποιεί την

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0.$$

Ισοδύναμα η τελευταία σχέση γράφεται

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2,$$

ή

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2}.$$

Θέτοντας

$$g = \frac{1}{2}(\varphi_1 - i\varphi_2) \;\; \text{και} \;\; h = \frac{-i\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$$

προκύπτει ότι

$$\varphi_1 = g(1 + h^2), \; \varphi_2 = ig(1 - h^2), \; \varphi_3 = 2igh.$$

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.3.1.

**Πόρισμα 3.3.1.** *Κάθε απλά συνεκτική ελαχιστική επιφάνεια $x : (M^2, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}^3$ με $x = (x_1, x_2, x_3)$ γράφεται ως*

$$x_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left( \int^z g(1 + h^2) \right)$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left( \int^z ig(1 - h^2) \right)$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left( \int^z 2igh \right),$$

*όπου $g, h$ ολόμορφες συναρτήσεις.*

Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η αναπαράσταση Weierstrass για ελαχιστικές επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$, με τη χρήση δύο και όχι τριών συναρτήσεων. Επιπλέον μιας και είναι ολόμορφες συναρτήσεις μπορούμε με τη βοήθεια ενός ορθογώνιου πίνακα, να εναλλάξουμε τη θέση της καθεμιάς από τις $\varphi_k$, $k = 1, 2, 3$, ή επίσης μία εκ των $w$ και $g$ να είναι μεταβλητή συνάρτηση της άλλης.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.1, αφού

$$\varphi = \big(g(1+h^2), ig(1-h^2), 2igh\big),$$

υπολογίζοντας το $\|\varphi\|^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2 &= |g|^2|1+h^2|^2 + |g|^2|1-h^2|^2 + 4|g|^2|h|^2 \\ &= |g|^2\big((1+h^2)(1+\overline{h}^2) + (1-h^2)(1-\overline{h}^2) + 4|h|^2\big).\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\|\varphi\|^2 = 2|g|^2(1+|h|^2)^2,$$

δηλαδή η επαγόμενη μετρική $\langle , \rangle$ της επιφάνειας $x$ είναι

$$\langle , \rangle = 2|g|^2(1+|h|^2)^2|dz|^2.$$

**Παράδειγμα 1.** *Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου $M = \mathbb{C}$, $g(z) = -ie^z$ και $h(z) = e^{-z}dz$, λαμβάνουμε*

$$\varphi = (\cosh(z)dz, -i\sinh(z)dz, -idz).$$

*Τότε η ελαχιστική επιφάνεια που ορίζεται λόγω του Πορίσματος 3.3.1 είναι η*

$$x(u,v) = (\cos v \sinh u, \sin v \sinh u, v),$$

*η οποία είναι το γνωστό* ***ελικοειδές***.

**Παράδειγμα 2.** *Παρόμοια αν θεωρήσουμε $M = \mathbb{C}$, $g(z) = -e^z$ και $h(z) = -e^{-z}dz$, λαμβάνουμε*

$$\varphi = (\sinh(z)dz, -i\cosh(z)dz, dz).$$

*Τότε προκύπτει η ελαχιστική επιφάνεια*

$$x(u,v) = (\cos v \cos u - 1, \sin v \cosh u, u)$$

*η οποία είναι το γνωστό* ***αλυσοειδές***.

## 3.4 Η μονοπαραμετρική οικογένεια ελαχιστικών επιφανειών

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια κάθε ελαχιστικής επιφάνειας του $\mathbb{R}^n$. Θα αναφέρουμε τον ορισμό της και κάποιες ιδιότητές της.

Αρχικά δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των ελαχιστικών επιφανειών μέσω της μιγαδικής τους δομής $J$.

**Λήμμα 3.4.1.** *Μια επιφάνεια $f : M^2 \to \mathbb{R}^n$, με αντίστοιχη μιγαδική δομή $J : TM \to TM$, είναι ελαχιστική αν και μόνο αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της $\alpha$, ικανοποιεί την*

$$\alpha(X, JY) = \alpha(JX, Y), \tag{3.8}$$

*για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.*

*Απόδειξη.* Μια επιφάνεια ως γνωστόν είναι ελαχιστική αν και μόνο αν ισχύει $\mathrm{trace}\alpha = 0$ ή ισοδύναμα για οποιαδήποτε ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του εφαπτόμενου επιπέδου σε κάθε σημείο ισχύει

$$\alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2) = 0.$$

Για τη μιγαδική δομή $J$ του πολυπτύγματος $M$ όμως ισχύει ότι $e_2 = Je_1$, συνεπώς ισοδύναμα έχουμε ότι για κάθε μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $e_1$ ισχύει

$$\alpha(e_1, e_1) + \alpha(Je_1, Je_1) = 0.$$

Επομένως προκύπτει ότι η επιφάνεια είναι ελαχιστική αν και μόνο αν για κάθε $X \in T_pM$ και $p \in M$ ισχύει

$$\alpha(X, X) + \alpha(JX, JX) = 0,$$

ή ισοδύναμα για $X, Y \in T_pM$

$$\alpha(X + Y, X + Y) + \alpha(JX + JY, JX + JY) = 0.$$

Συνεπώς αν η $f$ είναι ελαχιστική από την παραπάνω σχέση συνάγουμε ότι

$$\alpha(X, Y) + \alpha(JX, JY) = 0, \text{ για κάθε } X, Y \in T_pM. \tag{3.9}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η ανωτέρω σχέση, τότε άμεσα προκύπτει ότι $\mathrm{trace}\alpha = 0$. Η σχέση (3.8) προκύπτει από την (3.9) θέτοντας όπου $Y$ το $JY$. $\square$

Έστω $f : (M^2, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}^n$ μια ελαχιστική επιφάνεια με μιγαδική δομή $J$ και

$$J_\theta = \cos\theta I + \sin\theta J$$

είναι κατά τα γνωστά η στροφή σε κάθε εφαπτόμενο επίπεδο κατά γωνία $+\theta$. Θεωρώντας τυχαίο σταθερό διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την 1-μορφή $\omega_{\vec{v}}$ με

$$\omega_{\vec{v}}(X) = \langle df \circ J_\theta(X), \vec{v} \rangle, \; X \in \mathcal{X}(M).$$

**Λήμμα 3.4.2.** *Η 1-μορφή $\omega_{\vec{v}}$ είναι κλειστή για κάθε διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .*

*Απόδειξη.* Θα υπολογίσουμε την εξωτερική παράγωγο της $\omega_{\vec{v}}$, $d\omega_{\vec{v}}$, κάνοντας χρήση της Πρότασης 1.3.2. Υπολογίσουμε πρώτα τα $X\big(\omega_{\vec{v}}(Y)\big)$, $Y\big(\omega_{\vec{v}}(X)\big)$ και $\omega_{\vec{v}}([X, Y])$ για $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} X\big(\omega_{\vec{v}}(Y)\big) &= X\big(\langle df \circ J_\theta(Y), \vec{v} \rangle\big) \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X df(J_\theta Y), \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον τύπο του Gauss έχουμε

$$X\big(\omega_{\vec{v}}(Y)\big) = \langle df(\nabla_X J_\theta Y) + \alpha_f(X, J_\theta Y), \vec{v}\rangle.$$

Επιπλέον είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\nabla_X(J_\theta Y) = (\nabla_X J_\theta)Y + J_\theta(\nabla_X Y).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.2 είναι

$$\begin{aligned}\nabla_X J_\theta &= \nabla_X(\cos\theta I + \sin\theta J)\\ &= \cos\theta\nabla_X I + \sin\theta\nabla_X J\\ &= 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}d\omega_{\vec{v}}(X,Y) &= \langle df\circ J_\theta(\nabla_X Y), \vec{v}\rangle + \langle\alpha_f(X, J_\theta Y), \vec{v}\rangle - \langle df\circ J_\theta(\nabla_Y X), \vec{v}\rangle\\ &\quad - \langle\alpha_f(Y, J_\theta X), \vec{v}\rangle - \langle df\circ J_\theta([X,Y]), \vec{v}\rangle\\ &= \langle\alpha_f(X, J_\theta Y), \vec{v}\rangle - \langle\alpha_f(Y, J_\theta X), \vec{v}\rangle.\end{aligned}$$

Όμως παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\alpha_f(X, J_\theta Y) &= \alpha_f(X, \cos\theta Y + \sin\theta JY)\\ &= \cos\theta\alpha_f(X,Y) + \sin\theta\alpha_f(X, JY)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\alpha_f(Y, J_\theta X) &= \alpha_f(Y, \cos\theta X + \sin\theta JX)\\ &= \cos\theta\alpha_f(X,Y) + \sin\theta\alpha_f(Y, JX).\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.4.1 προκύπτει τότε ότι $d\omega_{\vec{v}} = 0$. □

Λόγω του Λήμματος 3.4.2, οι 1-μορφές $\omega_{\varepsilon_k}$ είναι κλειστές, όπου $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Αν υποθέσουμε ότι το πολύπτυγμα $M^2$ είναι απλά συνεκτικό, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.3, υπάρχουν συναρτήσεις $v_k^\theta : M \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\omega_{\varepsilon_k} = dv_k^\theta$.

**Πρόταση 3.4.1.** *Η επιφάνεια $f_\theta : (M^2, \langle,\rangle) \to \mathbb{R}^n$ με $f_\theta = \sum_{k=1}^n u_k^\theta \varepsilon_k$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση.*

*Απόδειξη.* Είναι φανερό ότι ισχύει $df_\theta = df\circ J_\theta$. Από αυτό προκύπτει ότι η $f_\theta$ είναι εμβάπτιση καθώς το $J_\theta$ είναι ισομορφισμός του εφαπτόμενου χώρου και η $f$ είναι εμβάπτιση.

Επίσης η $f_\theta$ είναι ισομετρική εμβάπτιση, αφού για $X, Y \in T_pM$ και $p \in M$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle df_\theta(X), df_\theta(Y)\rangle &= \langle df(J_\theta X), df(J_\theta Y)\rangle\\ &= \langle J_\theta X, J_\theta Y\rangle\\ &= \langle X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Για να δείξουμε την ελαχιστικότητα της $f_\theta$ θα βρούμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή της $\alpha_{f_\theta}$. Από τον τύπο του Gauss για την $f_\theta$ έχουμε

$$\tilde{\nabla}_X df_\theta(Y) = df_\theta(\nabla_X Y) + \alpha_{f_\theta}(X, Y).$$

Προφανώς ισχύει

$$\tilde{\nabla}_X df_\theta(Y) = \tilde{\nabla}_X df(J_\theta Y).$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss για την $f$ έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X df_\theta(Y) &= df\big(\nabla_X J_\theta(Y)\big) + \alpha_f(X, J_\theta Y)\\ &= df\big(J_\theta(\nabla_X Y)\big) + \alpha_f(X, J_\theta Y)\\ &= df \circ J_\theta(\nabla_X Y) + \alpha_f(X, J_\theta Y)\\ &= df_\theta(\nabla_X Y) + \alpha_f(X, J_\theta Y).\end{aligned}$$

Συνεπώς η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της $f_\theta$ είναι

$$\alpha_{f_\theta}(X, Y) = \alpha_f(X, J_\theta Y) = \alpha_f(Y, J_\theta X).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\alpha_{f_\theta}(JX, Y) &= \alpha_f(JX, J_\theta Y)\\ &= \alpha_f(JX, \cos\theta Y + \sin\theta JY),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha_{f_\theta}(JX, Y) = \cos\theta \alpha_f(JX, Y) + \sin\theta \alpha_f(JX, JY).$$

Ομοίως

$$\begin{aligned}\alpha_{f_\theta}(X, JY) &= \alpha_f(J_\theta X, JY)\\ &= \alpha_f(\cos\theta X + \sin\theta JX, JY),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha_{f_\theta}(X, JY) = \cos\theta \alpha_f(X, JY) + \sin\theta \alpha_f(JX, JY).$$

Λόγω ελαχιστικότητας της $f$ προκύπτει η σχέση

$$\alpha_{f_\theta}(JX, Y) = \alpha_{f_\theta}(X, JY),$$

η οποία κάνοντας χρήση του Λήμματος 3.4.1 είναι ισοδύναμη με την ελαχιστικότητα της επιφάνειας $f_\theta$. $\square$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι αν ξεκινήσουμε από μια ελαχιστική επιφάνεια $f : (M, \langle, \rangle) \to \mathbb{R}^n$ και υποθέσουμε ότι το πολύπτυγμα $M$ είναι απλά συνεκτικό, μπορούμε να παράξουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια $f_\theta : (M, \langle, \rangle) \to \mathbb{R}^n$ ισομετρικών ελαχιστικών εμβαπτίσεων.

Η $f_\theta$ καλείται η **μονοπαραμετρική οικογένεια** της ελαχιστικής εμβάπτισης $f$ (associate family). Είναι φανερό ότι για $\theta = 0$ παίρνουμε την ίδια την $f$, δηλαδή $f_0 = f$.

Αυτή η οικογένεια των ελαχιστικών επιφανειών, όπως και στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$, δύναται να περιγραφεί αναλυτικά με τη βοήθεια της **αρμονικής συζυγούς** της $f$, δηλαδή την ελαχιστική επιφάνεια $\tilde{f} := f_{\pi/2}$, της οποίας το διαφορικό είναι

$$d\tilde{f} = df \circ J.$$

**Πρόταση 3.4.2.** *Έστω $f : M \to \mathbb{R}^n$ ελαχιστική επιφάνεια. Η μονοπαραμετρική οικογένεια αυτής έχει τη μορφή*

$$f_\theta = \cos\theta f + \sin\theta \tilde{f},$$

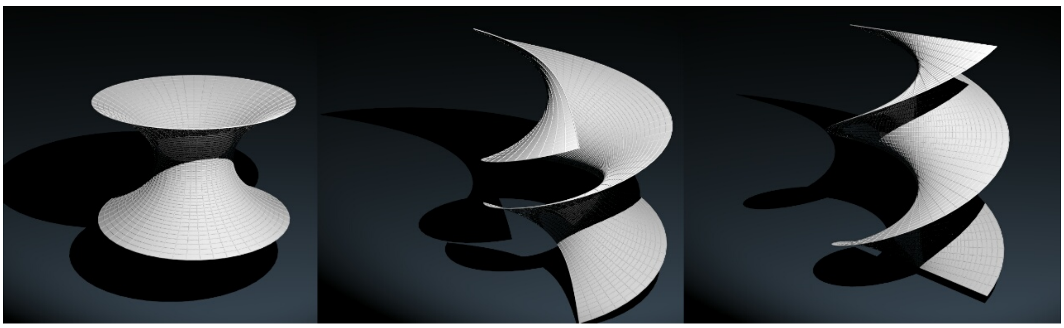
*ως προς παράλληλη μεταφορά του $\mathbb{R}^n$.*

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό της μονοπαραμετρικής οικογένειας έχουμε $df_\theta = df \circ J_\theta$. Από την άλλη πλευρά παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} d(\cos\theta f + \sin\theta \tilde{f}) &= \cos\theta df + \sin\theta d\tilde{f} \\ &= \cos\theta df + \sin\theta df \circ J \\ &= df \circ (\cos\theta I + \sin\theta J) \\ &= df \circ J_\theta. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα διαφορικά των συναρτήσεων $f_\theta$ και $\cos\theta f + \sin\theta \tilde{f}$ είναι ίσα, και επομένως οι $f_\theta$ και $\cos\theta f + \sin\theta \tilde{f}$ διαφέρουν ως προς σταθερό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. □

Ένα παράδειγμα τοπικής ισομετρικής παραμόρφωσης ελαχιστικών επιφανειών είναι η παραμόρφωση ενός ελικοειδούς σε αλυσοειδές και αντίστροφα (βλέπε σχήμα 3.1). Το αλυσοειδές και το ελικοειδές ανήκουν στην ίδια μονοπαραμετρική οικογένεια (associate family) και μάλιστα η συζυγής εμβάπτιση του ελικοειδούς είναι το αλυσοειδές και αντίστροφα.



Σχήμα 3.1: Αλυσοειδές - Ελικοειδές

## 3.5 Η μονοπαραμετρική οικογένεια μέσω της αναπαράστασης Weierstrass

Η μονοπαραμετρική οικογένεια $f_\theta$ μιας ελαχιστικής επιφάνειας $f : M \to \mathbb{R}^n$, μπορεί να περιγραφεί μέσω της αναπαράστασης Weierstrass. Πράγματι, η επιφάνεια $f_\theta$ έχει απεικόνιση Gauss την $\Phi_{f_\theta} = [\varphi_{f_\theta} \circ \psi]$, όπου

$$\varphi_\theta = 2x^\theta_z,\ x^\theta = f_\theta \circ \psi^{-1},$$

ενώ $(U, \psi)$ χάρτης του $M$. Η απεικόνιση $x^\theta$ λόγω της Πρότασης 3.4.2 είναι

$$x^\theta = \cos\theta x + \sin\theta x^{\pi/2}.$$

Επομένως παίρνοντας τη μερική παράγωγο ως προς $z = u + iv$ έχουμε

$$x^\theta_z = \cos\theta x_z + \sin\theta x^{\pi/2}_z.$$

Όμως

$$x^{\pi/2}_z = df^{\pi/2}(\frac{\partial}{\partial z}) = df \circ J\frac{\partial}{\partial z} = idf(\frac{\partial}{\partial z}) = ix_z.$$

Συνεπώς ισχύει

$$\begin{aligned} x^\theta_z &= \cos\theta x_z + i\sin\theta x_z \\ &= e^{i\theta}x_z. \end{aligned}$$

Άμεσα λαμβάνουμε ότι

$$\varphi_\theta = e^{i\theta}\varphi.$$

Προφανώς ισχύουν οι ιδιότητες

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi^\theta_i|^2 = 2\lambda^2 > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} (\varphi^\theta_i)^2 = 0,$$

μιας και $|e^{i\theta}| = 1$.

Συμπεραίνουμε ότι η μονοπαραμετρική οικογένεια $f_\theta = \cos\theta f + \sin\theta \tilde{f}$, της ελαχιστικής επιφάνειας δίνεται κάνοντας χρήση της αναπαράστασης Weierstrass (Θεώρημα 3.3.1) από την σχέση

$$x_\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\int^z e^{i\theta}\varphi dz).$$

## 3.6 Η διπαραμετρική οικογένεια και ο ολόμορφος αντιπρόσωπος

Στο σημείο αυτό και έχοντας ορίσει την παραπάνω μονοπαραμετρική οικογένεια θα δούμε πώς μέσω αυτής μπορούμε να ορίσουμε μια νέα, αυτή τη φορά διπαραμετρική οικογένεια. Θα δούμε δηλαδή ότι σε κάθε ελαχιστική επιφάνεια του $\mathbb{R}^n$, αντιστοιχεί μια ολόκληρη οικογένεια ελαχιστικών επιφανειών, τοπικά ισομετρικές με την αρχική, οι οποίες όμως δεν περιέχονται στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, αλλά στον $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$.

Έστω $f : M^2 \to \mathbb{R}^n$ ελαχιστική επιφάνεια. Υποθέτουμε ότι το πολύπτυγμα $M$ είναι απλά συνεκτικό. Προφανώς ορίζεται η αρμονική συζυγής ελαχιστική επιφάνεια $\tilde{f} = f_{\pi/2}$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $d\tilde{f} = df \circ J$, ενώ η μονοπαραμετρική οικογένεια της $f$ λόγω της Πρότασης 3.4.2 δίνεται ως προς παράλληλη μεταφορά από τον τύπο

$$f_\theta = \cos\theta f + \sin\theta \tilde{f}.$$

Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{2n}$ ως το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Για κάθε ζεύγος $(\theta, \varphi)$ ορίζονται οι απεικονίσεις $f_{\theta,\varphi} : M \to \mathbb{R}^{2n}$ με

$$f_{\theta,\varphi} = f_\theta \cos(\varphi/2) \oplus \tilde{f}_\theta \sin(\varphi/2).$$

Στην ακόλουθη πρόταση αποδεικνύεται ότι η $f_{\theta,\varphi}$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση.

**Πρόταση 3.6.1.** *Έστω $f : (M, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}^n$ ελαχιστική επιφάνεια. Η απεικόνιση, $f_{\theta,\varphi} : (M, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}^{2n}$, με*

$$f_{\theta,\varphi} = f_\theta \cos(\varphi/2) \oplus \tilde{f}_\theta \sin(\varphi/2),$$

*όπου $\tilde{f}_\theta = f_{\theta+\pi/2}$, είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση.*

Η $f_{\theta,\varphi}$ είναι γνωστή ως **διπαραμετρική οικογένεια** της αρχικής επιφάνειας $f$. Παραθέτουμε το παρακάτω λήμμα [4], που είναι χρήσιμο για την απόδειξη της Πρότασης 3.6.1.

**Λήμμα 3.6.1.** *Έστω $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ ισομετρική εμβάπτιση. Για τυχόν $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+p}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h_{\vec{v}} : M \to \mathbb{R}$ με $h_{\vec{v}}(.) = \langle f(.), \vec{v} \rangle$. Τότε η $f$ είναι ελαχιστική αν και μόνο αν η συνάρτηση $h_{\vec{v}}$ είναι αρμονική, για κάθε $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+p}$.*

*Απόδειξη.* Το διαφορικό της συνάρτησης $h_{\vec{v}}$ δίνεται από τη σχέση

$$dh_{\vec{v}}(X) = X(h_{\vec{v}}) = \langle df(X), \vec{v} \rangle.$$

Η Εσσιανή της συνάρτησης $h_{\vec{v}}$ είναι:

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_{\vec{v}}(X,Y) &= XY(h_{\vec{v}}) - (\nabla_X Y) h_{\vec{v}} \\ &= X(\langle df(Y), \vec{v} \rangle) - \langle df(\nabla_X Y), \vec{v} \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X df(Y), \vec{v} \rangle - \langle df(\nabla_X Y), \vec{v} \rangle, \ X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Gauss προκύπτει ότι

$$\nabla^2 h_{\vec{v}}(X,Y) = \langle df(\nabla_X Y) + \alpha_f(X,Y), \vec{v} \rangle - \langle df(\nabla_X Y), \vec{v} \rangle,$$

και συνεπώς

$$\nabla^2 h_{\vec{v}}(X,Y) = \langle \alpha_f(X,Y), \vec{v} \rangle.$$

Η Λαπλασιανή της $h_{\vec{v}}$ ως γνωστόν είναι το ίχνος της Εσσιανής. Άρα έχουμε

$$\Delta h_{\vec{v}} = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2(e_i, e_i) = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i), \vec{v} \rangle,$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο του πολυπτύγματος Riemann $M$. Άμεσα από τον τρόπο που ορίστηκε το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας έχουμε ότι

$$\Delta h_{\vec{v}} = n\langle H, v \rangle.$$

Θεωρώντας τη συνήθη βάση του Ευκλειδείου χώρου $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+p}\}$, η $f$ γράφεται

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varepsilon_i, \text{ όπου } f_i = h_{\varepsilon_i}.$$

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \varepsilon_i = nH,$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι η ελαχιστικότητα της $f$ είναι ισοδύναμη με την αρμονικότητά της. □

*Απόδειξη της Πρότασης 3.6.1:* Θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $f_{\theta,\varphi} : M \to \mathbb{R}^{2n}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση, ενώ στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι είναι και ελαχιστική.

Η επαγόμενη μετρική της $f_{\theta,\varphi}$ για $X, Y \in T_pM$ και $p \in M$ είναι

$$\begin{aligned}
\langle X, Y \rangle_{f_{\theta,\varphi}} &= \langle df_{\theta,\varphi}(X), df_{\theta,\varphi}(Y) \rangle \\
&= \Big\langle \cos(\varphi/2) df_\theta(X) \oplus \sin(\varphi/2) d\tilde{f}_\theta(X), \cos(\varphi/2) df_\theta(Y) \oplus \sin(\varphi/2) d\tilde{f}_\theta(Y) \Big\rangle \\
&= \cos^2(\varphi/2)\langle df_\theta(X), df_\theta(Y) \rangle \oplus \sin^2(\varphi/2)\langle d\tilde{f}_\theta(X), d\tilde{f}_\theta(Y) \rangle.
\end{aligned}$$

Στην Πρόταση 3.4.1 όμως, αποδείξαμε ότι οι $f_\theta$, $\tilde{f}_\theta = f_{\theta+\pi/2}$ είναι ισομετρικές εμβαπτίσεις. Συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle X, Y \rangle_{f_{\theta,\varphi}} &= \cos^2(\varphi/2)\langle X, Y \rangle \oplus \sin^2(\varphi/2)\langle X, Y \rangle \\
&= \langle X, Y \rangle,
\end{aligned}$$

δηλαδή η $f_{\theta,\varphi}$ είναι ισομετρική εμβάπτιση.

Σε ό,τι αφορά την ελαχιστικότητα της εμβάπτισης $f_{\theta,\varphi}$, υπολογίζοντας την Λαπλασιανή της προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\Delta f_{\theta,\varphi} &= \Delta\big(f_\theta \cos(\varphi/2) \oplus \tilde{f}_\theta \sin(\varphi/2)\big) \\
&= \cos(\varphi/2)\Delta f_\theta \oplus \sin(\varphi/2)\Delta \tilde{f}_\theta.
\end{aligned}$$

Οι επιφάνειες όμως $f_\theta$ και $\tilde{f}_\theta$ είναι ελαχιστικές και λόγω του Λήμματος 3.6.1 ισχύει $\Delta f_\theta = 0$ και $\Delta \tilde{f}_\theta = 0$.

Άμεσα προκύπτει ότι $\Delta f_{\theta,\varphi} = 0$ και επομένως η $f_{\theta,\varphi}$ είναι ελαχιστική επιφάνεια. □

**Ορισμός 3.6.1.** *Η απεικόνιση $F = f_{0,\varphi}$ για $\varphi \equiv \pi/2(\mathrm{mod}\pi)$ καλείται* ***ολόμορφος αντιπρόσωπος*** *της $f$.*

Πρόκειται για την απεικόνιση

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}(f \oplus \tilde{f}) : M \to \mathbb{C}^n,$$

όπου $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Αυτή η απεικόνιση όπως θα δούμε παρακάτω παίζει σημαντικό ρόλο στο κύριο αποτέλεσμα της παρούσας διατριβής. Η ακόλουθη πρόταση εξηγεί την ονομασία της.

**Πρόταση 3.6.2.** *Η απεικόνιση*

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}(f \oplus \tilde{f}) : (M, \langle , \rangle) \to \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$$

*είναι ολόμορφη ισομετρική εμβάπτιση.*

*Απόδειξη.* Θέτουμε $g = \frac{1}{\sqrt{2}}(f \oplus \tilde{f})$. Το διαφορικό της είναι

$$dg = \frac{1}{\sqrt{2}}(df \oplus d\tilde{f}).$$

Για τυχόν $p \in M$ και $X \in T_pM$ έχουμε

$$\begin{aligned} dg_p(X) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(df_p(X) \oplus d\tilde{f}_p(X)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(df_p(X) \oplus df_p(J_pX)\big). \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη μιγαδική δομή $J_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, με $J_n(x, y) = (-y, x)$ και $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. Τότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} J_n \circ dg_p(X) &= \frac{1}{\sqrt{2}}J_n\big(df_p(X) \oplus df_p(J_pX)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big( - df_p(JX) \oplus df_p(X)\big). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά όμως είναι

$$\begin{aligned} dg_p \circ J_p(X) &= dg_p(J_pX) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(df_p(J_pX) \oplus d\tilde{f}_p(J_pX)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(df_p(J_pX) \oplus df_p \circ J_p(J_pX)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big( - df_p(J_pX) \oplus df_p(X)\big). \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει

$$J_n \circ dg = dg \circ J,$$

γεγονός που αποδεικνύει την ολομορφία της $g$. Επιπλέον, αν $X, Y \in T_pM$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle dg_p(X), dg_p(Y)\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(df_p(X) \oplus d\tilde{f}_p(X)\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(df_p(Y) \oplus d\tilde{f}_p(Y)\right)\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle df_p(X), df_p(Y)\rangle \oplus \frac{1}{2}\langle d\tilde{f}_p(X), d\tilde{f}_p(Y)\rangle.\end{aligned}$$

Οι $f, \tilde{f}$ όμως είναι ισομετρικές εμβαπτίσεις και συνεπώς

$$\langle dg_p(X), dg_p(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle,$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

## 3.7 Ολόμορφες καμπύλες

Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε κάποιες προτάσεις και πορίσματα τα οποία θα φανούν αρκετά χρήσιμα στην απόδειξη του κύριου αποτελέσματος της εργασίας που οφείλεται στο Lawson.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1, αν ένα διδιάστατο απλά συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann $(M, \langle,\rangle)$ έχει καμπυλότητα Gauss $K < 0$ και πληροί τη συνθήκη Ricci, τότε υπάρχει ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση $f : (M\langle,\rangle) \to \mathbb{R}^3$. Επιπρόσθετα, για κάθε τέτοια ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση ορίζεται ο αντίστοιχος ολόμορφος αντιπρόσωπος:

$$F : (M, \langle,\rangle) \to \mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3,\ F = \frac{1}{\sqrt{2}}(f \oplus \tilde{f}).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.6.2 η $F$ είναι ολόμορφη ισομετρική εμβάπτιση.

Τίθεται κατά φυσικό τρόπο το εξής πρόβλημα:

**Πρόβλημα 3.7.1.** *Αν δίνεται ολόμορφη ισομετρική εμβάπτιση $F : (M, \langle,\rangle) \to \mathbb{C}^m$ με ουσιώδη συνδιάσταση $m-2$, τότε ποιο είναι το σύνολο*

$$\mathcal{M}(F) = \{f : (M, \langle,\rangle) \to \mathbb{R}^n,\ \textit{όπου } f \textit{ ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση}\}$$

*όλων των μη γεωμετρικά ισότιμων ελαχιστικών επιφανειών που είναι ισομετρικές με την $F$;*

Παραθέτουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα [16].

**Πρόταση 3.7.1.** *Έστω $\varphi : D \to \mathbb{C}^n$ και $\psi : D \to \mathbb{C}^{n+m}$ ολόμορφες απεικονίσεις του ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου $D$ του $\mathbb{C}$, τέτοιες ώστε*

$$\|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2$$

*και $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+m}$, με*

$$\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+m} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m,\ z \mapsto (z, 0).$$

*Τότε υπάρχει ένας Ερμιτιανά ορθογώνιος μετασχηματισμός $U : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^{n+m}$ τέτοιος ώστε*

$$\psi = U \circ \varphi.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η Πρόταση 3.7.1 ισχύει και για την περίπτωση όπου το $D$ είναι τυχούσα επιφάνεια Riemann.

**Πόρισμα 3.7.1.** *Έστω $(M, \langle, \rangle)$ προσανατολισμένο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann και $\psi : M \to \mathbb{C}^{n+m}$, $\varphi : M \to \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ είναι δύο ολόμορφες ισομετρικές εμβαπτίσεις. Τότε υπάρχει ολόμορφη ισομετρία $\tau : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^{n+m}$, δηλαδή ένας Ερμιτιανά ορθογώνιος μετασχηματισμός ακολουθούμενος από παράλληλη μεταφορά, τέτοιος ώστε*

$$\psi = \tau \circ \varphi.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε $(U, \phi)$ μιγαδικό χάρτη του πολυπτύγματος $M$ με ισόθερμες συντεταγμένες $z = u + iv$. Οι επαγόμενες μετρικές των απεικονίσεων $\psi$ και $\varphi$ είναι

$$\langle, \rangle = 2\|\psi_z\|^2 |dz|^2 = 2\|\varphi_z\|^2 |dz|^2.$$

Τότε ισχύει $\|\psi_z\|^2 = \|\varphi_z\|^2$ και από την Πρόταση 3.7.1 υπάρχει Ερμιτιανά ορθογώνιος μετασχηματισμός $U$ τέτοιος ώστε $\psi_z = U\varphi_z$. Επομένως $\psi = U\varphi + c$, όπου $c \in \mathbb{C}^n$. □

**Πρόταση 3.7.2.** *Έστω ολόμορφη ισομετρική εμβάπτιση $F : (M, \langle, \rangle) \to \mathbb{C}^m$ με ουσιώδη συνδιάσταση $m - 2$. Αν $f : (M, \langle, \rangle) \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση η οποία είναι ισομετρική με την $F$, τότε ισχύει*

$$m \leq n \leq 2m.$$

*Απόδειξη.* Έστω $(U, \psi)$ χάρτης του πολυπτύγματος $M$ με ισόθερμες συντεταγμένες $(u, v)$ και μετρική Riemann $\langle, \rangle = \lambda^2(du^2 + dv^2)$. Τότε $(U, z)$ είναι ο αντίστοιχος μιγαδικός χάρτης, με $z = u + iv$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις $x = f \circ \psi^{-1}$ και $X = F \circ \psi^{-1}$. Από το γεγονός ότι οι απεικονίσεις $f, F$ είναι ισομετρικές λαμβάνουμε ότι

$$\langle, \rangle = \lambda^2 |dz|^2 = \langle, \rangle_f = \langle, \rangle_F.$$

Σε ό,τι αφορά τη $\mathbb{C}$-διγραμμική επέκταση της επαγόμενης μετρικής $\langle, \rangle_F$, για τα μιγαδικά διανυσματικά πεδία $\partial, \overline{\partial}$ ισχύει

$$\langle \partial, \overline{\partial} \rangle_F = \langle F_z, F_{\overline{z}} \rangle,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \partial, \overline{\partial} \rangle_F = \langle \frac{1}{2}(F_u - iF_v), \frac{1}{2}(F_u + iFv) \rangle,$$

όπου $F_u = dF(\frac{\partial}{\partial u})$ και $F_v = dF(\frac{\partial}{\partial v})$. Επειδή όμως το σύστημα συντεταγμένων είναι ισόθερμο λαμβάνουμε

$$\langle F_z, F_{\overline{z}} \rangle = \frac{\lambda^2}{2}$$

και συνεπώς

$$\langle, \rangle_F = \lambda^2 |dz|^2 = 2\|F_z\|^2 |dz|^2,$$

όπου $\|F_z\|^2 = \langle F_z, F_z\rangle_H$. Όμοια βρίσκουμε $\|f_z\|^2 = \frac{\lambda^2}{2}$. Επομένως ισχύει

$$\|F_z\| = \|f_z\|.$$

Οι απεικονίσεις $F_z : U \subset M \to \mathbb{C}^m$ και $f_z : U \subset M \to \mathbb{C}^n$ είναι ολόμορφες ως παράγωγοι ολόμορφων συναρτήσεων και σύμφωνα με την Πρόταση 3.7.1 υπάρχει ένας Ερμιτιανά ορθογώνιος πίνακας $N \times N$, όπου $N = \max\{n, m\}$, τέτοιος ώστε

$$f_z = UF_z.$$

Επομένως $f = UF + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{C}^N$. Έστω ότι $n < m$. Τότε η εικόνα της $f$ περιέχεται στον $\mathbb{C}^n$ και επειδή $f = UF + c$ προκύπτει ότι η εικόνα της $F$ περιέχεται σε ολικά γεωδαιτικό υποπολύπτυγμα του $\mathbb{C}^m$, άτοπο.

Για το υπόλοιπο μέρος της ανισότητας υποθέτουμε ότι $n > 2m$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από την αναπαράσταση Weierstrass για την απεικόνιση $x$ έχουμε

$$x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(\int^z \varphi dz\Big) = \mathrm{Re}\Big(\int^z x_z dz\Big).$$

Κάνοντας χρήση των παραπάνω προκύπτει

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}\Big(\int^z UX_z dz\Big) \\ &= \mathrm{Re}\Big(\int^z (UX)_z dz\Big), \end{aligned}$$

αφού ο πίνακας $U$ είναι σταθερός. Τότε

$$x = \mathrm{Re}(UX) = \frac{1}{2}(UX + \overline{UX}).$$

Στην παραπάνω εξίσωση το δεξί μέλος έχει εικόνα που περιέχεται στον χώρο $\mathbb{R}^{2m}$ ενώ το αριστερό μέλος έχει εικόνα στον $\mathbb{R}^n$. Το άτοπο προκύπτει γιατί η απεικόνιση $f$ θα είχε εικόνα σε χώρο διάστασης μικρότερης του $n$. □

Στο παρακάτω θεώρημα [16, Theorem 9] περιγράφεται πλήρως η δομή του χώρου $\mathcal{M}(F)$ για δοθείσα ολόμορφη ισομετρική εμβάπτιση $F$ .

**Θεώρημα 3.7.1.** *Ο χώρος $\mathcal{M}(F)$ των μη γεωμετρικά ισότιμων ελαχιστικών επιφανειών $f : M \to \mathbb{R}^n$ που είναι ισομετρικές με δοθείσα ολόμορφη εμβάπτιση $F : M \to \mathbb{C}^m$ με ουσιώδη συνδιάσταση $m-2$, περιγράφεται ως το σύνολο όλων των $m \times m$ συμμετρικών μιγαδικών πινάκων $P$ που είναι τέτοιοι ώστε:*

$$I_m - P\overline{P} \geq 0$$

*και*

$$\Big\langle dF\big(\frac{\partial}{\partial z}\big), PdF\big(\frac{\partial}{\partial z}\big)\Big\rangle = 0,$$

*για κάθε μιγαδικό χάρτη $(U, z)$.*

*Επιπλέον, αν $n$ είναι η διάσταση του μικρότερου αφφινικού υπόχωρου που περιέχει την εικόνα $f(M)$, όπου $f$ μια ελαχιστική επιφάνεια που αντιστοιχει στον πίνακα $P$, τότε*

$$n - m = \operatorname{rank}(I_m - P\overline{P}).$$

*Ακόμη ισχύει $m \leq n \leq 2m$ και $n = 2m$ αν και μόνο αν $I_m - P\overline{P} > 0$.*

Από τα παραπάνω, είναι άμεσο το εξής συμπέρασμα. Αν δίνεται ολόμορφη $F : M \to \mathbb{C}^3$ και $f \in \mathcal{M}(F)$, τότε $3 \leq n \leq 6$ και συνεπώς για την εικόνα της $f$ ισχύει $f(M) \subset \mathbb{R}^6$.

## 3.8 Το αποτέλεσμα του Lawson

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το κύριο συμπέρασμα της παρούσας εργασίας, δηλαδή την ταξινόμηση όλων των ελαχιστικών επιφανειών του $\mathbb{R}^n$ που πληρούν τη συνθήκη Ricci. Συγκεκριμένα, ο Lawson απέδειξε ότι κάθε τέτοια ελαχιστική επιφάνεια περιέχεται είτε στον $\mathbb{R}^3$ είτε στον $\mathbb{R}^6$.

**Θεώρημα 3.8.1.** *Έστω $(M, \langle , \rangle)$ ένα διδιάστατο απλά συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K < 0$ και $f : (M^2, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}^n$ ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση. Αν το $(M, \langle , \rangle)$ πληροί τη συνθήκη Ricci τότε υπάρχει ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση $f^* : M \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε ένα από τα ακόλουθα να ισχύει:*

*(i)* $f = f^*_\theta$ *για κάποιο* $\theta \in \mathbb{R}$,

*ή*

*(ii)* $f = f^*_{\theta,\varphi}$ *για σταθερό* $\theta \in \mathbb{R}$ *και* $\varphi \neq 0 \operatorname{mod}\pi$.

Η Πρόταση 3.2.1 παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.8.1, καθώς το πρόβλημα της ταξινόμησης αυτών των επιφανειών ανάγεται στην εύρεση εκείνων των ελαχιστικών επιφανειών των οποίων η καμπυλότητα της αντίστοιχης τρίτης θεμελιώδους μορφής είναι $K_{III} = 1$. Ουσιαστικά λόγω των Προτάσεων 3.1.1 και 3.2.1 η ταξινόνησή τους ανάγεται στην ταξινόμηση των ολόμορφων καμπυλών του $\mathbb{C}P^n$ με σταθερή καμπυλότητα Gauss. Οι μιγαδικές καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα Gauss έχουν ταξινομηθεί από τον Calabi [6], στο παρακάτω αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 3.8.2.** *(i) Η καμπύλη $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ σε ομογενείς συντεταγμένες*

$$[z_0, z_1] \mapsto [z_0^n, \sqrt{n} z_0^{n-1} z_1, \dots, \sqrt{\tbinom{n}{j}} z_0^{n-j} z_1^j, \dots, z_1^n]$$

*έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss $2/n$.*

*(ii) Κάθε ολόμορφη καμπύλη $g : D \subset \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}P^n$ που έχει σταθερή καμπυλότητα και δεν βρίσκεται σε κανέναν γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{C}P^n$ είναι γεωμετρικώς ισότιμη με την καμπύλη $\tilde{f} : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^n$ που δίνεται από την*

$$z \mapsto [1, \sqrt{n} z, \dots, \sqrt{\tbinom{n}{j}} z^j, \dots, z^n].$$

*(iii) Αν μια ολόμορφη καμπύλη $g : D \subset \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss $K$, τότε $K \equiv 2/\kappa$ για κάποιο φυσικό $1 \leq \kappa \leq n$. Δύο τέτοιες καμπύλες είναι γεωμετρικώς ισότιμες. Επιπλέον, $K \equiv 2/\kappa$ αν και μόνο αν η εικόνα της $g$ περιέχεται σε κάποιο $\kappa$-διάστατο γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{C}P^n$ και είναι γεωμετρικώς ισότιμη με την*

$$z \mapsto [1, \sqrt{\kappa} z, \ldots, \sqrt{\tbinom{\kappa}{j}} z^j, \ldots, z^\kappa, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\kappa}].$$

Επομένως από το Θεώρημα 3.8.2 (iii) για $\kappa = 2$ έχουμε ότι η απεικόνιση Gauss κάθε ελαχιστικής επιφάνειας του $\mathbb{R}^n$, η οποία πληροί τη συνθήκη Ricci, είναι γεωμετρικώς ισότιμη με την

$$z \mapsto [1, \sqrt{2} z, z^2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}].$$

Συνεπώς γνωρίζουμε ακριβώς ποια είναι η απεικόνιση Gauss κάθε ελαχιστικής επιφάνειας του $\mathbb{R}^n$ που πληροί τη συνθήκη Ricci. Τότε, κάνοντας χρήση της αναπαράστασης Weierstrass (Θεώρημα 3.3.1), μπορούμε να βρούμε ακριβώς ποια είναι η ελαχιστική επιφάνεια η οποία πληροί τη συνθήκη Ricci.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 3.8.1:* Γνωρίζουμε ότι το πολύπτυγμα $M$ πληροί τη συνθήκη Ricci και είναι απλά συνεκτικό. Από το Θεώρημα 2.1.1 υπάρχει ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση $f^* : (M, \langle , \rangle) \to \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε τον ολόμορφο αντιπρόσωπο αυτής $F : (M, \langle , \rangle) \to \mathbb{C}^3$. Προφανώς οι επιφάνειες $f^*$ και $F$ είναι ισομετρικές, όπως επίσης και οι $f$ και $f^*$. Είναι φανερό ότι η $f \in \mathcal{M}(F)$. Λόγω του Θεωρήματος 3.7.1 ή της Πρότασης 3.7.2 και αφού $m = 3$, συμπεραίνουμε ότι $3 \leq n \leq 6$. Τούτο σημαίνει ότι η εικόνα της $f$ περιέχεται σε $\mathbb{R}^6 \subset \mathbb{R}^n$ και από εδώ και στο εξής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n = 6$.

Αν $n = 3$, τότε λόγω του Θεωρήματος 2.2.2 έχουμε ότι $f = f^*_\theta$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$.

Για την συνέχεια υποθέτουμε ότι $n > 3$. Θεωρούμε την απεικόνιση Gauss $\Phi : M^2 \to \mathbb{C}P^5$. Από την Πρόταση 3.1.1 γνωρίζουμε ότι είναι ολόμορφη, ενώ επιπλέον λόγω της Πρότασης 3.2.1, η επαγόμενη μετρική της έχει καμπυλότητα Gauss $K_{III} \equiv 1$. Έχοντας εφοδιάσει τον $\mathbb{C}P^5$ με την Fubini-Study μετρική, τότε η εικόνα του $M^2$ μέσω της $\Phi$ περιέχεται σε μία αλγεβρική καμπύλη η οποία βάσει του Θεωρήματος 3.8.2 είναι γεωμετρικώς ισότιμη με την

$$\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^5, \ [z_0, z_1] \mapsto [z_0^2, \sqrt{2} z_0 z_1, z_1^2, 0, 0, 0].$$

Κάνουμε κατάλληλη αλλαγή ομογενών συντεταγμένων, επιλέγουμε κατάλληλο μιγαδικό χάρτη $(U, \psi)$ του $M$ και διαιρούμε την $\Phi$ με μια μη μηδενική ολόμορφη συνάρτηση $g(w)$ που ορίζεται στο $U$. Έτσι αποκτούμε την κανονικοποιημένη μορφή της $\Phi$ η οποία πλέον είναι γεωμετρικώς ισότιμη με την

$$\tilde{\varphi} : \psi(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^6, \ \tilde{\varphi}(w) = (1, \sqrt{2} w, w^2, 0, 0, 0),$$

όπου $(U, \psi)$ μιγαδικός χάρτης του $M$.

Με άλλα λόγια, για την απεικόνιση Gauss $\Phi = [\varphi \circ \psi]$ ισχύει

$$\varphi(w) = g(w) A \tilde{\varphi}(w),$$

όπου $A$ είναι ένας Ερμιτιανά ορθογώνιος $6 \times 6$ πίνακας, δηλαδή πίνακας για τον οποίο ισχύει $(\overline{A})^t A = A(\overline{A})^t = Id$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Psi : \psi(U) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^6,\ \Psi(w) = \big(1/g(w)\big)\varphi(w) = A\tilde{\varphi}(w).$$

Κάθε συνιστώσα της απεικόνισης

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6)$$

είναι της μορφής

$$\Psi_k(w) = a_{k1} + a_{k2}\sqrt{2}w + a_{k3}w^2,\ \text{όπου } A = (a_{ij}).$$

Ισχύει όμως $\langle \Psi, \Psi \rangle = 0$, από όπου έχουμε $\sum_{k=1}^{6} \Psi_k^2 = 0$. Αυτό μας δίνει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{6} a_{k1}^2 = 0,\ \sum_{k=1}^{6} a_{k1}a_{k2} = 0,\ \sum_{k=1}^{6} a_{k2}a_{k3} = 0, \\ \sum_{k=1}^{6} a_{k3}^2 = 0,\ \sum_{k=1}^{6}(a_{k2}^2 + a_{k1}a_{k3}) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Από τον ορισμό της αλγεβρικής ποικιλότητας $Q_4$, είναι φανερό ότι η υποομάδα των ολόμορφων ισομετριών του $\mathbb{C}P^5$ που αφήνουν την $Q_4$ αμετάβλητη, είναι ακριβώς οι πραγματικοί ορθογώνιοι μετασχηματισμοί των ομογενών συντεταγμένων.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η απεικόνιση $\Psi$ έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \Psi_1(w) &= a_{11} + a_{12}\sqrt{2}w + a_{13}w^2 \\ \Psi_2(w) &= a_{21} + a_{22}\sqrt{2}w + a_{23}w^2 \\ \Psi_3(w) &= \qquad\ \ a_{32}\sqrt{2}w + a_{33}w^2 \\ \Psi_4(w) &= \qquad\ \ a_{42}\sqrt{2}w + a_{43}w^2 \\ \Psi_5(w) &= \qquad\qquad\qquad\ \ a_{53}w^2 \\ \Psi_6(w) &= \qquad\qquad\qquad\ \ a_{63}w^2, \end{aligned}$$

όπου $\mathrm{Im}(a_{11}) = \mathrm{Im}(a_{32}) = \mathrm{Im}(a_{53}) = 0$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (3.10) και επειδή

$$\sum_{k=1}^{6} a_{ki}\overline{a}_{kj} = \sum_{k=1}^{6} \overline{a}_{ki}a_{kj} = \delta_{ij},$$

μετά από υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \Psi(w) = &\big(1 + w^2\cos\varphi, i(1 - w^2\cos\varphi), 2w\sin(\varphi/2), \\ &2iw\cos(\varphi/2), w^2\sin\varphi, iw^2\sin\varphi\big), \end{aligned} \tag{3.11}$$

για κάποια σταθερά $\varphi \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.1, υπάρχει ελαχιστική επιφάνεια $\hat{f} : M \to \mathbb{R}^3$ της οποίας η αντίστοιχη απεικόνιση Gauss $\hat{\Phi} = [\hat{\varphi} \circ \psi]$ πληροί την

$$\hat{\varphi}(w) = \big(g(1+w^2), ig(1-w^2), 2igw\big),$$

όπου $g, w$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις.

Υπολογίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned}\|\hat{\varphi}\|^2 &= |g|^2|1+w^2|^2 + |g|^2|1-w^2|^2 + 4|g|^2|w|^2\\ &= |g|^2\big((1+w^2)(1+\overline{w}^2) + (1-w^2)(1-\overline{w}^2) + 4|w|^2\big).\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\|\hat{\varphi}\|^2 = 2|g|^2(1+|w|^2)^2.$$

Τούτο σημαίνει ότι η επαγόμενη μετρική της $\hat{f}$ είναι

$$\langle , \rangle_{\hat{f}} = 2|g|^2(1+|w|^2)^2|dz|^2.$$

Αντίστοιχα, για την ελαχιστική επιφάνεια $f$, είδαμε ότι $\varphi = gA\tilde{\varphi}$ και ορίσαμε την απεικόνιση $\Psi = A\tilde{\varphi}$. Άμεσα λαμβάνουμε ότι

$$\varphi = g\Psi.$$

Υπολογίζοντας λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2 &= |g|^2\|\Psi\|^2\\ &= |g|^2\big((1+w^2\cos\varphi)(1+\overline{w}^2\cos\varphi) + (1-w^2\cos\varphi)(1-\overline{w}^2\cos\varphi)\\ &\quad + 4w\overline{w}\sin^2(\varphi/2) + 4w\overline{w}\cos^2(\varphi/2)\\ &\quad + w^2\overline{w}^2\sin^2\varphi + w^2\overline{w}^2 cos^2\varphi\big).\end{aligned}$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$\|\varphi\|^2 = 2|g|^2(1+|w|^2)^2$$

και συνεπώς η επαγόμενη μετρική της $f$ είναι

$$\langle , \rangle_f = 2|g|^2(1+|w|^2)^2|dz|^2.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $\langle , \rangle_{\hat{f}} = \langle , \rangle_f$, γεγονός που σημαίνει ότι οι επιφάνειες $f, f^*$ και $\hat{f}$ έχουν την ίδια επαγόμενη μετρική. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2 η μία περιέχεται στην μονοπαραμετρική οικογένεια της άλλης, δηλαδή ισχύει

$$\hat{f} = f^*_\theta, \text{ για κάποιο } \theta \in \mathbb{R}.$$

Τότε κάνοντας χρήση της σχέσης (3.11) και του Θεωρήματος 3.3.1 ισχύει ότι

$$f = \hat{f}_{0,\varphi}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f &= \cos(\varphi/2)\hat{f} \oplus \sin(\varphi/2)\hat{f}_{\pi/2} \\ &= \cos(\varphi/2) f^*_\theta \oplus \sin(\varphi/2) f^*_{\theta+\pi/2} \end{aligned}$$

και η απόδειξη ειναι πλήρης. □

Ο Lawson [16] έδωσε και μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.8.1, η οποία δεν κάνει χρήση του Θεωρήματος 3.3.1, αλλά του Θεωρήματος 3.7.1.

*Εναλλακτική Απόδειξη του Θεωρήματος 3.8.1:* Αφού το πολύπτυγμα $M$ είναι απλά συνεκτικό και πληροί τη συνθήκη Ricci, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 υπάρχει ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση $f^* : M \to \mathbb{R}^3$. Έστω $(U, \psi)$ χάρτης του $M$, με ισόθερμες συντεταγμένες $(u, v)$ και μετρική $\langle , \rangle = \lambda^2(du^2 + dv^2)$. Τότε αν $(U, z)$ είναι ο αντίστοιχος μιγαδικός χάρτης, με $z = u + iv$, ορίζεται η απεικόνιση $\varphi^* = 2x^*_z$ όπου $x^* = f^* \circ \psi^{-1}$. Έστω ότι ο ολόμορφος αντιπρόσωπος της $f^*$ είναι η απεικόνιση $F : M \to \mathbb{C}^3$.

Από το Θεώρημα 3.7.1, ο χώρος $\mathcal{M}(F)$ των μη γεωμετρικά ισότιμων ελαχιστικών επιφανειών αντιστοιχεί στο σύνολο όλων των $3 \times 3$ μιγαδικών πινάκων $P$ που είναι τέτοιοι ώστε

$$(\varphi^*)^t P \varphi^* \equiv 0 \text{ και } I_3 - P\overline{P} \geq 0.$$

Κάθε πίνακας $P = cI_3$ με $|c| \leq 1$, ικανοποιεί αυτές τις δύο συνθήκες και προφανώς $P \in \mathcal{M}(F)$. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $\mathcal{M}(F)$ αποτελείται μόνο από $3 \times 3$ μιγαδικούς πίνακες της μορφής $P = cI_3$. Αυτό συμβαίνει γιατί σε διαφορετική περίπτωση θα υπήρχε $P \in \mathcal{M}(F)$, με $P \neq cI_3$ και

$$\langle \varphi^*, \varphi^* \rangle = 0, \ \langle \varphi^*, P\varphi^* \rangle = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η εικόνα της απεικόνισης $\varphi^*$ περιέχεται στο σύνολο

$$S = \{z \in \mathbb{C}^3 : \langle z, z \rangle = 0 = \langle z, Pz \rangle\}.$$

Το παραπάνω σύνολο ισοδύναμα γράφεται

$$S = \left\{ z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / \ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \text{ και } \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij} z_i z_j = 0 \right\},$$

όπου $p_{ij}$ είναι τα στοιχεία του πίνακα $P$. Θέτοντας

$$w_1 = \frac{z_1}{z_3} \ \text{ και } \ w_2 = \frac{z_2}{z_3}$$

και διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις με το $z_3^2$ λαμβάνουμε ισοδύναμα το σύστημα

$$\begin{aligned} &w_1^2 + w_2^2 + 1 = 0 \\ &p_{11} w_1^2 + p_{22} w_2^2 + p_{33} + 2p_{12} w_1 w_2 + 2p_{13} w_1 + 2p_{23} w_2 = 0. \end{aligned}$$

Επειδή $P \neq cI_3$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bezout, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $S$ είναι πεπερασμένη ένωση μονοδιάστατων υποχώρων δηλαδή μιγαδικών ευθειών που περνάνε από το 0. Συνεπώς υπάρχει ένα σταθερό διάνυσμα $w \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ και τότε ισχύει $\varphi^* = hw$, όπου $h$ είναι ολόμορφη συνάρτηση. Παραγωγίζοντας ως προς $z$ λαμβάνουμε $\varphi_z^* = h_z w$ γεγονός που σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 μας δίνει $K \equiv 0$, άτοπο. Άρα αποδείξαμε ότι

$$\mathcal{M}(F) = \{cI_3 : |c| \leq 1\}.$$

Είναι φανερό ότι το σύνολο $\mathcal{M}(F)$ ταυτίζεται με το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μέτρο $|c| \leq 1$, δηλαδή

$$\mathcal{M}(F) \simeq \overline{D},$$

όπου $D$ είναι ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος στον $\mathbb{R}^2$. Σημειώνουμε ότι τα σημεία $c \in D$ αντιστοιχούν σε ελαχιστικές επιφάνειες που κείνται στον $\mathbb{R}^6$ (Θεώρημα 3.7.1), ενώ τα σημεία $c \in \partial D$ αντιστοιχούν σε ελαχιστικές επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον αν δύο μιγαδικοί αριθμοί σχετίζονται με την σχέση $c_1 = e^{i\theta}c_2$, τότε οι ελαχιστικές επιφάνειες ανήκουν στην ίδια μονοπαραμετρική οικογένεια. Συνεπώς η απεικόνιση $\varphi^*$ που αντιστοιχεί στο σύνορο $\partial D$ αν πολλαπλασιαστεί με ένα συντελεστή $e^{i\theta}$ δίνει την διπαραμετρική οικογένεια και τότε η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

**Παρατήρηση.** *Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.8.1 έγινε χρήση του Θεωρήματος 2.1.1, στο οποίο $(M, \langle,\rangle)$ είναι ένα απλά συνεκτικό διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann, με καμπυλότητα Gauss $K < 0$ που πληροί τη συνθήκη Ricci. Τίθεται το ερώτημα, αν αυτό το αποτέλεσμα εξακολουθεί να ισχύει επιτρέποντας και σημεία όπου η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$. O Lawson [16] απέδειξε ότι το Θεώρημα 2.1.1 εξακολουθεί να ισχύει σε αυτή την περίπτωση υπό την προϋπόθεση ότι η μετρική $\langle,\rangle$ είναι αναλυτική ($C^\omega$). Αν η μετρική $\langle,\rangle$ δεν είναι αναλυτική, υπάρχουν αρκετά αντιπαραδείγματα [15]. Άμεσα λαμβάνουμε ότι το Θεώρημα 3.8.1 εξακολουθεί να ισχύει και με την υπόθεση ότι η καμπυλότητα Gauss μπορεί να μηδενιστεί σε μεμονωμένα σημεία.*

## 3.9 Η εικασία για την $\mathbb{S}^n$

Στο Κεφάλαιο 2 παρατηρήσαμε ότι το Θεώρημα 2.1.1 μπορεί να επεκταθεί και για ελαχιστικές επιφάνειες $f : (M, \langle,\rangle) \to \mathbb{S}^3$, όπου $\mathbb{S}^3$ είναι η Ευκλείδεια τριδιάστατη μοναδιαία σφαίρα σταθερής καμπυλότητας 1. Σε αυτή την περίπτωση το πολύπτυγμα $(M, \langle,\rangle)$ πληροί τη λεγόμενη **σφαιρική συνθήκη Ricci**. Για την ακρίβεια λέμε ότι ένα διδιάστατο πολύπτυγμα $(M, \langle,\rangle)$ πληροί τη σφαιρική συνθήκη Ricci αν έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 1$ και ικανοποιείται η εξίσωση

$$\Delta \log(1 - K) = 4K, \text{ στο σύνολο των σημείων με } K < 1,$$

όπου $\Delta$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής του $M$. Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω συνθήκη ισοδύναμα γράφεται

$$\tilde{\langle,\rangle} = \sqrt{1-K}\langle,\rangle \text{ είναι παντού ισόπεδη.}$$

Αποδεικνύεται ότι αν το πολύπτυγμα $(M, \langle,\rangle)$ είναι απλά συνεκτικό, τότε δέχεται ελαχιστική ισομετρική εμβάπτιση στην $\mathbb{S}^3$ και μάλιστα μια ολόκληρη $2\pi$-περιοδική οικογένεια μη γεωμετρικά ισότιμων εμβαπτίσεων

$$f_\theta : M \to \mathbb{S}^3, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Κάνοντας χρήση αυτής της οικογένειας, μπορούμε να κατασκευάσουμε πληθώρα ελαχιστικών επιφανειών σε σφαίρες με ουσιώδη συνδιάσταση $k > 3$, οι οποίες πληρούν τη σφαιρική συνθήκη Ricci. Η κατασκευή αυτή γίνεται ως εξής: Επιλέγουμε γωνίες $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_m < \pi$ και πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_m$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^2 = 1.$$

Θεωρούμε τότε την απεικόνιση

$$F : M \to \mathbb{S}^{4m-1} \subset \mathbb{R}^{4m},\ F = a_1 f_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus a_m f_{\theta_m}, \tag{3.12}$$

όπου το ευθύ άθροισμα αναφέρεται στην ορθογώνια διάσπαση

$$\mathbb{R}^{4m} = \underbrace{\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^4}_{m},$$

και κάθε μια από τις $f_{\theta_1}, \ldots, f_{\theta_m}$ λαμβάνει τιμές στη μοναδιαία σφαίρα του αντίστοιχου $\mathbb{R}^4$. Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $F : (M, \langle , \rangle) \to \mathbb{S}^{4m-1}$ είναι ισομετρική ελαχιστική εμβάπτιση με ουσιώδη συνδιάσταση. Ο Lawson [13], [14] διατύπωσε την παρακάτω εικασία.

**Εικασία 3.9.1.** *Κάθε ελαχιστική επιφάνεια $f : M^2 \to \mathbb{S}^n$, η μετρική της οποίας ικανοποιεί την σφαιρική συνθήκη Ricci μακριά από τα σημεία όπου η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 1$, (ή ισοδύναμα είναι τοπικά ισομετρική με ελαχιστική επιφάνεια στην $\mathbb{S}^3$), είναι της μορφής (3.12), εκτός εάν είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο.*

Η εικασία αυτή παραμένει ανοιχτό πρόβλημα και έχει αποδειχθεί μόνο σε κάποιες περιπτώσεις [17], [23], [24]. Σημειώνεται ότι υπάρχουν πολλές ελαχιστικές επιφάνειες σε σφαίρες με καμπυλότητα Gauss $K \equiv 0$. Αυτές έχουν ταξινομηθεί πλήρως [2], [7], [8], [9].

# Βιβλιογραφια


[1] B. W. Blaschke, *Einführung in die Differentialgeometrie,* Berlin 1950, par. 72, 124.

[2] R. L. Bryant, *Minimal surfaces of constant curvature in $\mathbb{S}^n$,* Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 259-271.

[3] S. S. Chern, *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface,* Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 771-782.

[4] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions,* Publish or Perish, 1990.

[5] N. J. Hicks, *Notes on Differential Geometry,* University of Michigan, 1964.

[6] D. A. Hoffman and R. Osserman, *The Geometry of the Generalized Gauss Map,* Memoirs of the A.M.S. vol. 28, no. 236, 1980.

[7] K. Kenmotsu, *On compact minimal surfaces with non-negative Gaussian curvature in a space of constant curvature I,* Tôhoku Math. J. **25** (1973), 469-479.

[8] K. Kenmotsu, *On compact minimal surfaces with non-negative Gaussian curvature in a space of constant curvature II,* Tôhoku Math. J. **27** (1973), 291-301.

[9] K. Kenmotsu, *On minimal immersions of $\mathbb{R}^2$ into $\mathbb{S}^n$,* J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 182-191.

[10] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry,* Vol. I, II Interscience Publishers, 1969.

[11] Δ. Κουτρουφιώτης, *Διαφορική Γεωμετρία,* Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1994.

[12] R. S. Kulkarni, *Curvature and metric,* Ann. Math. **2** (1970), 311-331.

[13] H. B. Lawson, *Some intrinsic characterizations of minimal surfaces,* J. Anal. Math. **24**, 151-161 (1971).

[14] H. B. Lawson, *Minimal varieties in constant curvature manifolds,* Stanford University, 1968.

[15] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in* $\mathbb{S}^3$, Ann. Math. (2) **92** (1970), 335-374.

[16] H. B. Lawson, *Lectures on minimal submanifolds,* Vol. I, Publish or Perish, 1980.

[17] R. Miyaoka, *The family of isometric superconformal harmonic maps and the affine Toda equations,* J. Reine Angew. Math. **481** (1996), 1-25.

[18] M. Pinl, *Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gausssche Krümung der Minimalflächen,* Arch. Math. (Basel) **4** (1953), 369-373.

[19] Θ. Ραβανού, *Ισομετρικές Παραμορφώσεις Επιφανειών στον* $\mathbb{R}^3$ *που διατηρούν τη Μέση Καμπυλότητα,* Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2014.

[20] G. Ricci-Curbastro, *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed inispecie di quelle di 2o grado,* Ven. Ist. Atti **7** VI (1896), 445-488.

[21] G. Ricci-Curbastro, *Opere vol.1 Edizioni,* Cremonese, Roma, 1956.

[22] T. Sakai, *Riemannian Geometry,* Amer. Math. Soc. 1992.

[23] M. Sakaki, *Minimal surfaces with the Ricci condition in 4-dimensional space forms,* Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 557-573.

[24] Th. Vlachos, *Minimal surfaces, Hopf differentials and the Ricci Condition,* Manusucripta Math. **126** (2008), 201-230.