ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αικατερίνη Γκόγκου

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΚΟΤΕΙΝΩΝ ΣΟΛΙΤΟΝΙΩΝ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2017

Αφιερώνεται στους γονείς μου,

Γαβριήλ και Αλεξάνδρα.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 05/04/2017 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Θεόδωρος Χωρίκης	Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
Δημήτριος Νούτσος	Καθηγητής
Μιχαήλ Ξένος	Επίκουρος Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Αικατερίνη Γκόγκου

Ευχαριστιες

Η διεξαγωγή και η διεκπεραίωση μιας μεταπτυχιακής διατριβής αποτελεί συνήθως μια εποικοδομητική εμπειρία. Φθάνοντας στο τέλος της συγγραφής συνειδητοποίησα πως εκτός από καρπό προσωπικού αγώνα αποτέλεσε ένα συγκερασμό της συνδρομής και την υποστήριξης ανθρώπων στους οποίους θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη.

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή αποτελεί την ολοκλήρωση μιας προσπάθειας σπουδών κατά την οποία γνώρισα και συνεργάστηκα με τον επιβλέποντα μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Θεόδωρο Χωρίκη. Τον ευχαριστώ για τη σημαντική του καθοδήγηση στα πρώτα βήματα αυτής της εργασίας αλλά και για την ευρεία του γνώση που με εισήγαγε σε σχετικά θέματα έρευνας. Ο τρόπος σκέψης του και οι συμβουλές του αποτέλεσαν ορόσημο στην αλλαγή του δικού μου τρόπου σκέψης. Κύριως τον ευχαριστώ για το γεγονός ότι καθ΄ όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στάθηκε δίπλα μου με υπομονή και κατανόηση.

Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Δημήτριο Νούτσο και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Μιχαήλ Ξένο, για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και υποδείξεις τους σε θέματα που προέκυψαν κατά τη συγγραφή της μεταπτυχιακής διατριβής και βοήθησαν στη βελτίωση της.

Δεν θα πρέπει να παραλείψω να ευχαριστήσω τη βιβλιοθηκονόμο της βιβλιοθήκης του Τμήματος Μαθηματικών κ. Βάσω Ανδρούτσου για τις σημαντικές της επισημάνσεις και συμβουλές της καθ΄ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, αλλά κυρίως για την αμέριστη υπομονή της στηρίζοντας με όποτε τη χρειάστηκα.

Όμως, το πιο μεγάλο ευχαριστώ από όλα τα παραπάνω ανήκει δικαιωματικά στους γονείς μου, οι οποίοι στάθηκαν η κινητήριος δύναμη μου για να ολοκληρώσω τις μεταπτυχιακές μου σπουδές. Θα ήθελα ολόψυχα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους γονείς μου, Γαβριήλ και Αλεξάνδρα, για τη κατανόηση που έδειξαν απέναντι μου, τη στήριξη τους, τόσο ψυχολογική όσο και οικονομική, που μου πρόσφεραν και θα συνεχίσουν να κάνουν στα μελλοντικά μου σχέδια, αλλά κυρίως στη πίστη τους σε μένα και στις δυνατότητες μου.

Περιληψη

Στην παρούσα εργασία, θα μελετηθούν αναλυτικά και αριθμητικά η δυναμική των σκοτεινών σολιτονίων υπό την επίδραση διαταραχών. Σκοπός μας είναι η εφαρμογή της πλήρους θεωρίας διαταραχών για να προσεγγιστούν σκοτεινές σολιτονικές λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (NLS) υπό την επίδραση συγκεκριμένων διαταραχών. Η βασική ιδέα της μελέτης στηρίχθηκε στην αδιαβατική θεωρία διαταραχών, με βάση την οποία η συναρτησιακή μορφή του σολιτονίου παραμένει αμετάβλητη αλλά εισάγεται μια νέα κλίμακα, η αργή κλίμακα, στην οποία μελετάται η εξέλιξη των παραμέτρων του σολιτονίου. Η αδιαβατική θεωρία μας επιτρέπει να χωρίσουμε το πρόβλημα σε δύο περιοχές, την εσωτερική και την εξωτερική. Η εσωτερική περιοχή περιλαμβάνει το σολιτόνιο και τον πυρήνα του. Σε αντίθεση, η εξωτερική περιοχή περιλαμβάνει τις συνοριακές συνθήκες στο άπειρο, δηλαδή το συνεχές υπόβαθρο πάνω στο οποίο εδράζεται το σκοτεινό σολιτόνιο. Οι δύο περιοχές επικοινωνούν με την προσθήκη ενός οριακού στρώματος. Απόρροια του οριακού στρώματος είναι η δημιουργία και η διάδοση ενός ερμαρίου (shelf) γύρω από το σολιτόνιο, το οποίο κινείται με ταχύτητα ίση με εκείνη του συνεχούς υποβάθρου.

Η δυναμική ενός σκοτεινού σολιτονίου εξαρτάται από την εξέλιξη των παραμέτρων του. Μια σημαντική ιδιότητα της εξίσωσης NLS, η ολοκληρωσιμότητα της, η οποία προκύπτει από τον μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης, μας έδωσε χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη της εξέλιξης των παραμέτρων. Βασιστήκαμε στους διατηρητικούς νόμους, που προκύπτουν με αλγοριθμκό τρόπο από τον μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης, και καταλήξαμε σε ένα σύστημα ολικών διαφορικών εξισώσεων, με βάση το οποίο περιγράψαμε πλήρως τη μεταβολή των παραμέτρων του σολιτονίου για οποιαδήποτε τυχαία διαταραχή. Ακόμη, επιβεβαιώθηκε η ύπαρξη του ερμαρίου και περιγράφηκε ασυμπτωτικά. Για συγκεκριμένα παραδείγματα διαταραχών τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα της θεωρίας συγκρίθηκαν με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Η σύγκριση μας έδωσε την ταύτισή τους όσο για ένα σταθερό υπόβαθρο όσο και για ένα μεταβαλλόμενο. Η παρούσα ανάλυση εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα φυσικών προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων γραμμικών και μη γραμμικών αναλωτικών (dissipative) διαταραχών.

Abstract

In this study, we examine both numerically and analytically the dynamics of dark solitons under the influence of perturbations. Our aim is the implementation of the complete perturbation theory in order to approximate dark soliton solutions of the nonlinear Schrödinger (NLS) equation in the presence of specific higher-order effects. The basic idea leans on the adiabatic approximation of the perturbation theory for solitons. According to this approach the functional soliton shape remains unchanged, but a new slow scale is introduced, with which the evolution of the soliton parameters is studied. The adiabatic approximation permits to partition the problem into two regions, the inner region and the outer region. The inner region consists of the core soliton and the shelf. On the contrary, the outer region involves the boundary conditions at infinity, namely the continuous-wave background in which the dark soliton decays off. A boundary layer is introduced in order to match the two regions. As a result, a shelf develops and propagates around the soliton, which moves with similar velocity to the background velocity.

It is shown that the dynamics of dark soliton depends on the evolution of the soliton parameters. The integration of the NLS equation, is an important quality, which arises from the inverse scattering transform (IST), and gives us relations useful to study the evolution of these parameters. These are based on the conservation laws, which arise from the IST in an algorithmic way, and result in a system of differential equations. According to this system we describe the evolution of the soliton parameters for any perturbation. Moreover, the shelf has been confirmed and described asymptotically. For specific perturbations the analytical results which are derived by the system of ODEs are in accordance with the numerical results, for both constant and slowly evolving background. This analysis is applied to a wide range of physical problems, including linear and nonlinear dissipative perturbations.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγη

Η διάδοση των σολιτονίων στη μη γραμμική οπτική είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη μαθηματική περιγραφή της μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης Schrödinger (NLS), της οποίας η γενική μορφή είναι

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n|u|^2 u = 0 \tag{1.1}$$

όπου D, n σταθερές. Η σταθερά D αναφέρεται στην ταχύτητα διασποράς, η σταθερά n στο δείκτη διάθλασης, z είναι η διεύθυνση διάδοσης και t είναι ο σχετικός χρόνος. Το πρόσημο της σταθεράς D προσδιορίζει την εστίαση ή μη του φωτός.

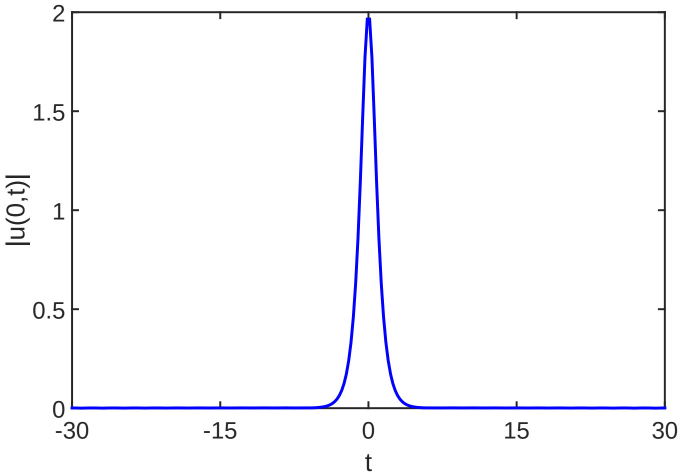
Η εξίσωση NLS παρουσιάζει δύο μορφές σολιτινιακών λύσεων. Όταν το γινόμενο των σταθερών $D{\cdot}n$ είναι θετικό, βρισκόμαστε στην περίπτωση της ανώμαλης διασποράς, όπου υπάρχει ισορροπία μεταξύ της διασποράς και της μη γραμμικότητας των όρων της NLS. Σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις καλούνται φωτεινά σολιτόνια και είναι παλμοί που φθίνουν εκθετικά στο άπειρο. Τα φωτεινά σολιτόνια είναι της μορφής

$$u(z,t) = \eta\,\mathrm{sech}[\eta(t + 2\xi z - x_0)]e^{-i\Theta} \tag{1.2}$$

όπου $\Theta = \xi t + (\xi^2 - \eta^2)z + \Theta_0$. Οι σταθερές ξ και η είναι ελεύθερες να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. Στο Σχήμα 1.1 δίνουμε τη γραφική παράσταση ενός τυπικού φωτεινού σολιτονίου.

Στη δεύτερη περίπτωση βρισκόμαστε στην περίπτωση της κανονικής ή ομαλής διασποράς και οι λύσεις καλούνται σκοτεινά σολιτόνια. Είναι εντοπισμένοι παλμοί, οι οποίοι εδράζονται πάνω σε ένα συνεχές σταθερό υπόβαθρο. Τα σκοτεινά σολιτόνια είναι, από μαθηματικής άποψης, λύσεις Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων με μη μηδενικές συνοριακές συνθήκες. Χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τα μαύρα σολιτόνια που είναι της μορφής

$$u(z,t) = \eta\tanh(\eta t)e^{i\eta^2 z} \tag{1.3}$$



Σχήμα 1.1: Τυπικό φωτεινό σολιτόνιο όταν $\eta = 2$ και $\xi = 0$ και $x_0 = 0$.

και τα γκρι σολιτόνια που είναι της μορφής

$$u(z,t) = \eta\, e^{2i\eta^2 z + i\psi_0}[\cos\alpha + i\sin\alpha\tanh[\sin\alpha\eta(t - 2\eta\cos\alpha z - x_0)]] \tag{1.4}$$

με $\eta, \alpha, x_0, \psi_0$, πραγματικές σταθερές. Οι λύσεις αυτές ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

$$u(z,t) \to u_\pm(t) = \eta e^{2i\eta^2 z + i\psi_0 \pm i\alpha} \tag{1.5}$$

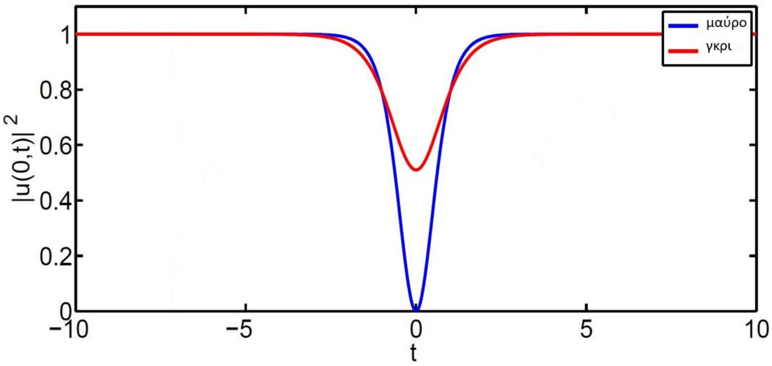
όταν $|t| \to \infty$ και έχουν πλάτος $|u_\pm|^2$ ίσο με $\eta^2 \sin^2\alpha$. Όταν το πλάτος διέρχεται από το μηδέν τότε η λύση είναι ένα μαύρο σολιτόνιο ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση η λύση είναι ένα γκρι σολιτόνιο. Το γκρι σολιτόνιο κινείται με ταχύτητα ίση με $2\eta\cos\alpha$ και μεταβαίνει σε μαύρο σολιτόνιο όταν $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ με $\psi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Στο Σχήμα 1.2 φαίνεται ένα μαύρο και ένα γκρι σολιτόνιο.

Οι μαθηματικές ιδιότητες της NLS προκύπτουν από τον μετασχηματισμό της αντίστροφης σκέδασης που είναι και ο τρόπος για να επιλυθεί πλήρως η εξίσωση. Με βάση αυτόν είναι ολοκληρώσιμη και έχει άπειρους διατηρητικούς νόμους, από τους οποίους στη παρούσα μελέτη θα γίνει λόγος στη Χαμιλτονιανή,

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\left(u_\infty^2 - |u|^2\right)^2\right] dt \tag{1.6}$$

στην Ενέργεια,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u_\infty^2 - |u|^2\right) dt \tag{1.7}$$



Σχήμα 1.2: Η μπλε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα μαύρο σολιτόνιο και η κόκκινη σε ένα γκρι σολιτόνιο όταν $u_\infty = 1$. Στην περίπτωση του μαύρου σολιτονίου είναι $B = u_\infty$ και $A = 0$, ενώ στην περίπτωση του γκρι σολιτονίου είναι $B < u_\infty$ και $A \neq 0$.

στην Ορμή,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2} \left(u^* u_t - u u_t^*\right) dt \tag{1.8}$$

και στο Κέντρο Ενέργειας

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} t \left(u_\infty^2 - |u|^2\right) dt \tag{1.9}$$

όπου u_∞ το πλάτος του σολιτονίου στο άπειρο. Στους νόμους αυτούς έχει προστεθεί η κατάλληλη συνάρτηση u_∞ ώστε για λύσεις u που δεν φθίνουν στο άπειρο τα ολοκληρώματα να συγκλίνουν.

Στη παρούσα μελέτη θα ασχολήθουμε με την περίπτωση που $D = -1$ και $n = 1$

$$i\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = 0, \tag{1.10}$$

επειδή τότε οι λύσεις της εξίσωσης (1.10) είναι Σκοτεινά Σολιτόνια, της μορφής

$$u(z,t) = u_\infty \exp(-i\mu z)(B \tanh \zeta + iA) \tag{1.11}$$

όπου $\zeta = \sqrt{\mu} B(t - \sqrt{\mu} A z)$. Η συνάρτηση u_∞ περιγράφει τη λύση της εξίσωσης NLS στο άπειρο, δηλαδή το πλάτος του συνεχούς υποβάθρου και αντιστοιχεί στις συνοριακές συνθήκες. Η παράμετρος A αναφέρεται στην ταχύτητα του σολιτονίου και η παράμετρος B στο βάθος του. Οι ποσότητες A, B, u_∞ συνδέονται με την σχέση

$$A^2 + B^2 = u_\infty^2. \tag{1.12}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε πως $A = u_\infty \sin(\phi)$ και $B = u_\infty \cos(\phi)$, με $\Delta\phi = 2\tan^{-1}(B/A)$ η μεταβολή φάσης κατά μήκος του σολιτονίου. Στην περίπτωση των γκρι σολιτονίων ισχύει $A \neq 0$ ενώ στην περίπτωση των μαύρων σολιτονίων ισχύει $A = 0$.

Θα μελετήσουμε την διάδοση και την εξέλιξη των σκοτεινών σολιτονίων υπό την επίδραση διαταραχών. Η μελέτη αυτή στηρίζεται στην αδιαβατική θεωρία με βάση την οποία οι παράμετροι του σολιτονίου μεταβάλλονται αργά με σκοπό να μελετηθούν άμεσα αλλά η συναρτησιακή μορφή του σολιτονίου παραμένει αμετάβλητη. Η θεωρία διαταραχών εφαρμόζεται για να βρεθεί αρχικά η προσέγγιση πρώτης τάξης για ένα σκοτεινό σολιτόνιο και έπειτα για να περιγραφεί η δυναμική του σκοτεινού σολιτονίου υπό την επίδραση διαταραχών. Η θεωρία που θα αναπτύξουμε καταλήγει σε διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταβολή των παραμέτρων του σολιτονίου καθώς επιβεβαιώνουν την ύπαρξη και τη διάδοση ενός *ερμαρίου* (shelf) που δημιουργείται γύρω από το σολιτόνιο.

1.1 Σταθερό Υπόβαθρο

Μια πρώτη προσέγγιση της δυναμικής των σκοτεινών σολιτονίων υπό την επίδραση διαταραχών έγινε από τους Yuri S. Kivshar και Xiaoping Yang. Πρώτα ασχολήθηκαν με την περίπτωση σταθερού υποβάθρου. Ας θεωρήσουμε την εξίσωση NLS

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u = \varepsilon F[u] \tag{1.13}$$

όπου ο όρος $\varepsilon F[u]$ στο δεξί μέλος αναφέρεται σε μια μικρή διαταραχή τάξης $O(\varepsilon)$.

Στην ενότητα αυτή θα θεωρήσουμε πως η διαταραχή δεν επηρεάζει την εξέλιξη του συνεχούς υποβάθρου. Επειδή η συναρτησιακή μορφή του υποβάθρου $u = u_0 e^{-iu_0^2 z}$ παραμένει αμετάβλητη υπό την επίδραση της διαταραχής εισάγουμε τον μετασχηματισμό $u(x,z) = u_0 e^{-iu_0^2 z} v(x,z)$ στην εξίσωση (1.13), η οποία μετασχηματίζεται στην

$$i\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - (|v|^2 - 1)v = \varepsilon \bar{F}[v] \tag{1.14}$$

όπου $\varepsilon \bar{F}[v]$ είναι η κανονικοποιημένη συνάρτηση διαταραχής της $\varepsilon F[u]$, $\zeta = u_0^2 z$ και $\xi = u_0 x$. Η γενική μορφή ενός σκοτεινού σολιτονίου πλέον είναι για $\varepsilon = 0$

$$v(\zeta, \xi) = \cos\phi \tan Z - i \sin\phi, \quad Z = \eta(\xi - \Omega\zeta) \tag{1.15}$$

όπου $\eta = \cos\phi$ και $\Omega = \sin\phi$. Αυτό δείχνει ότι η εξέλιξη ενός σκοτεινού σολιτονίου εξαρτάται μόνο από μια παράμετρο, τη φάση του, η οποία περιγράφει τη σκοτεινότητα του σολιτονίου, δηλαδή πόσο απέχει το πλάτος από το συνεχές υπόβαθρο, μέσω της σχέσης

$$|v|^2 = 1 - \frac{\cos^2\phi}{\cosh^2 Z}. \tag{1.16}$$

Χρησιμοποιούμε την Χαμιλτονιανή προσέγγιση για να βρούμε την εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της φάσης $\phi(\zeta)$. Ξεκινάμε με την Χαμιλτονιανή που ισχύει για την αδιατάραχτη εξίσωση NLS

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial \xi}\right|^2 + \frac{1}{2}(|v|^2 - 1)^2 \right] \tag{1.17}$$

η οποία για τη λύση (1.15) παίρνει τη μορφή $H_s = \frac{4}{3}\cos^3\phi$. Παραγωγίζοντας τη Χαμιλτονιανή ως προς ζ και χρησιμοποιώντας την σχέση (1.14) βρίσκουμε

$$\frac{dH}{d\zeta} = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[\bar{F}[v]\frac{\partial v^*}{\partial \zeta} + \bar{F}^*[v]\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right]. \tag{1.18}$$

Τέλος, με βάση τις παραπάνω σχέσεις και χρησιμοποιώντας την αδιαβατική θεωρία για τις παραμέτρους του σολιτονίου βρίσκουμε την εξίσωση που περιγράφει τη φάση του σολιτονίου

$$\frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{\varepsilon}{2\cos^2\phi\sin\phi}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \bar{F}^*[v]\frac{\partial v^*}{\partial\zeta} \tag{1.19}$$

όπου οι συναρτήσεις στο δεξί μέλος της εξίσωσης υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.15). Η σχέση που δίνει τη μεταβολή της φάσης του σολιτονίου είναι η βάση για τη μελέτη των σκοτεινών σολιτονίων υπό την επίδραση διαταραχών. Το σύμβολο Re αντιστοιχεί στο πραγματικό μέρος της ποσότητας.

1.2 Μεταβαλλόμενο Υπόβαθρο

Εάν η συνάρτηση διαταραχής $\varepsilon F[u]$ στην εξίσωση (1.13) δεν εξαφανίζεται όταν $|t| \to \infty$, τότε θα επηρεάσει και την εξέλιξη του υποβάθρου. Είναι οι περιπτώσεις των αναλωτικών διαταραχών που καταναλώνουν ενέργεια, δηλαδή διαταραχών που οδηγούν στην αργή αποσύνθεση του πλάτους του υποβάθρου. Παίρνοντας το όριο $|x| \to \infty$ στη σχέση (1.13) οι παράγωγοι ως προς t μηδενίζονται και προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$i\frac{du_b}{dz} - |u_b|^2 u_b = \varepsilon F[u_b] \tag{1.20}$$

όπου η συνάρτηση u_b περιγράφει την εξέλιξη του υποβάθρου υπό την επίδραση διαταραχών. Γενικά, η λύση της εξίσωσης (1.20) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$u_b(z) = u_0(z)e^{i\theta(z)} \tag{1.21}$$

όπου η συνάρτηση $u_0(z)$ αναφέρεται στη μεταβολή του πλάτους του υποβάθρου και η συνάρτηση $\theta(z)$ αναφέρεται στη μεταβολή της φάσης του υποβάθρου. Για να περιγράψουμε την εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου που εδράζεται πάνω σε ένα μεταβαλλόμενο υπόβαθρο θα εκτελέσουμε τον μετασχηματισμό

$$u(z,x) = u_0(z)e^{i\theta(z)}v(x,z) \tag{1.22}$$

με σκοπό να αφαιρέσουμε το υπόβαθρο και να βρούμε μια μη-γραμμική διαφορική εξίσωση που να περιγράφει την εξέλιξη της συνάρτησης v. Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψιν πως η συνάρτηση v αναφέρεται στο σκοτεινό σολιτόνιο θα μελετήσουμε με ένα απλό παράδειγμα την εξέλιξή του υπό την επίδραση συγκεκριμένης διαταραχής.

1.3 Παράδειγμα: Φωτονική απορρόφηση

Θα μελετηθεί η επίδραση της φωτονικής απορρόφησης στη δυναμική σκοτεινών σολιτονίων. Θεωρούμε την εξίσωση NLS με την προσθήκη της αντίστοιχης διαταραχής

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u = -i\epsilon\kappa |u|^2 u. \tag{1.23}$$

Όταν απουσιάζει η συνεισφορά της φωτονικής απορρόφησης, δηλαδή όταν $\kappa = 0$, η εξίσωση (1.23) περιγράφει σκοτεινά σολιτόνια που μπορούν να διαδοθούν σε ένα σταθερό υπόβαθρο, στο οποίο η συνάρτηση u_∞ μπορεί να γραφεί στη μορφή $u_\infty = u_0 e^{-iu_0^2 z} = u_0(z)e^{i\theta(z)}$, με u_0 το πλάτος του υποβάθρου και θ η φάση του. Η μη γραμμική απορρόφηση, ακόμη κι όταν είναι μικρή, οδηγεί σε εξασθένηση του υποβάθρου και το πλάτος και η φάση εξαρτώνται από την ποσότητα $\kappa u_0^2(0)z$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$$u_0(z) = \frac{u_0(0)}{\sqrt{1 + 2\kappa u_0^2(0)z}} \tag{1.24}$$

$$\theta(z) = \int_0^z u_0^2(z')dz' = \frac{1}{2\kappa}\log[1 + 2\kappa u_0^2(0)z]. \tag{1.25}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις δύο παραπάνω σχέσεις που περιγράφουν την εξέλιξη του υποβάθρου υπό την επίδραση της φωτονικής απορρόφησης, αφαιρούμε το υπόβαθρο από τη σχέση (1.23) εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$$u(z, x) = u_0(z)e^{i\theta(z)}v(z, x) \tag{1.26}$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση

$$i\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - (|v|^2 - 1)v = -i\kappa(|v|^2 - 1)v \tag{1.27}$$

όπου ζ και ξ είναι νέες συντεταγμένες που συνδέονται με τις z και x σύμφωνα με τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$d\zeta = u_0^2(z)dz \quad \text{και} \quad d\xi = u_0(z)dx.$$

Η εξίσωση (1.27) μπορεί να μελετηθεί τώρα με βάση τη θεωρία διαταραχών για σκοτεινά σολιτόνια. Η εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της φάσης ϕ του σολιτονίου παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{3}\kappa u_0^2(z)\sin(2\phi) \tag{1.28}$$

όπου το πλάτος του υποβάθρου $u_0(z)$ εξελίσσεται με βάση την εξίσωση (1.24). Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη εξίσωση μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στη σχέση

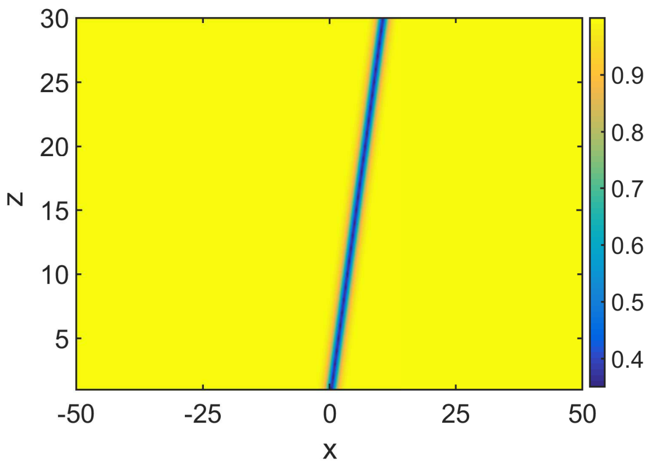
$$\phi(z) = \tan^{-1}\left(\tan\phi(0)[1 + 2\kappa u_0^2(0)z]^{\frac{1}{3}}\right). \tag{1.29}$$

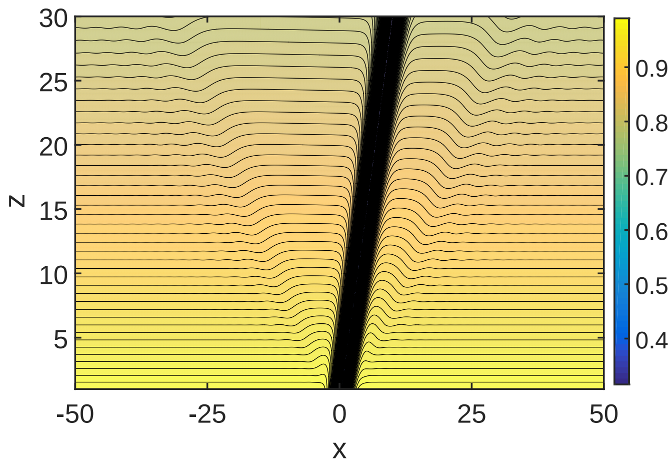
Η συνολική μετατόπιση ενός σκοτεινού σολιτονίου κατά τον άξονα x δίνεται από τη νέα εξίσωση $x_0(z) = \int_0^z dz' u_0(z') \sin\phi(z')$, έτσι ώστε

$$\frac{dx_0}{dz} = u_0(z)\sin\phi. \tag{1.30}$$

Για να επιβεβαιωθεί η μελέτη, συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις σχέσεις (1.24) και (1.29) με αριθμητικά αποτελέσματα της εξίσωσης (1.11). Το Σχήμα 1.3 δείχνει την εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου.

Εντούτοις, αν και η μελέτη που διατυπώθηκε από τους Yuri S. Kivshar και Xiaoping Yang φαίνεται να καταλήγει σε αναλυτικά αποτελέσματα τα οποία συμφωνούν απόλυτα με τα αριθμητικά, ωστόσο υστερούσε σε αρκετά σημεία. Πρώτα από όλα, οι Yuri S. Kivshar και Xiaoping Yang στηρίχθηκαν μόνο στη μελέτη της μεταβολής της φάσης ενώ δεν ασχολήθηκαν με την εξέλιξη των υπόλοιπων παραμέτρων του σολιτονίου. Επίσης, στο Σχήμα 1.3 επάνω παρουσιάζεται η εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου χωρίς την επίδραση διαταραχής, σε αντίθεση με κάτω που παρουσιάζεται η εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου υπό την επίδραση διαταραχής. Η διαφορά στα δύο σχήματα έγκειται στην ύπαρξη του ερμαρίου υπό την επίδραση διαταραχής, το οποίο δημιουργείται γύρω από το σολιτόνιο. Η θεωρία των Yuri S. Kivshar και Xiaoping Yang δεν προβλέπει ούτε την ύπαρξη του ερμαρίου αλλά ούτε βέβαια και την εξέλιξη του.





Σχήμα 1.3: Στο πάνω σχήμα βλέπουμε την εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου χωρίς την προσθήκη διαταραχής και στο κάτω σχήμα την εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου υπό την επίδραση της διαταραχής $-i\kappa|u|^2u$ όταν $\varepsilon\kappa = 0.01$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρια Διαταραχων στη Μελετη Σκοτεινων Σολιτονιων

2.1 Εξέλιξη του Συνεχούς Υποβάθρου

Υποθέτουμε ότι στην εξίσωση NLS προσθέτουμε μια μικρή διαταραχή τάξης ε, με $0 < \varepsilon \ll 1$:

$$i\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + |U|^2 U = \varepsilon F[U] \tag{2.1}$$

και ελέγχουμε πως επηρεάζεται η δυναμική των σκοτεινών σολιτονίων από την επίδραση της διαταραχής. Για να βρούμε την εξέλιξη των παραμέτρων του σολιτονίου χρησιμοποιούμε αδιαβατική θεωρία με βάση την οποία οι παράμετροι του σκοτεινού σολιτονίου μεταβάλλονται αργά, ώστε να μελετηθούν άμεσα, αλλά η συναρτησιακή μορφή του σολιτονίου παραμένει ανεπηρέαστη. Τα σκοτεινά σολιτόνια εδράζονται πάνω σε ένα συνεχές υπόβαθρο. Η εξέλιξη του συνεχούς υποβάθρου εξαρτάται και αυτή από την προσθήκη της διαταραχής στην εξίσωση NLS.

Για να εστιάσουμε στη μεταβολή του υποβάθρου, που ουσιαστικά αποτελεί και τις συνοριακές συνθήκες, θεωρούμε $|t| \to \infty$. Τότε οι παράγωγοι ως προς t, U_{tt}, μηδενίζονται και $U \to U_\infty$. Η εξίσωση

$$i\frac{\partial U_\infty}{\partial z} + |U_\infty|^2 U_\infty = \varepsilon F[U_\infty] \tag{2.2}$$

αναφέρεται πλέον στη λύση στο άπειρο.

Γράφουμε τη συνάρτηση $U_\infty(z)$ στην πολική της μορφή $U_\infty(z) = u_\infty(z)e^{i\phi(z)}$ όπου $u_\infty(z)$ αναφέρεται στο μέτρο της λύσης $U_\infty(z)$ και $\phi(z)$ στη φάση της.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.2) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$i\left(\frac{\partial u_\infty}{\partial z}+iu_\infty\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+u_\infty^3=\varepsilon(\mathrm{Re}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}]]+i\mathrm{Im}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}]])e^{-i\phi} \tag{2.3}$$

όπου έχουμε θέσει: $F[u_\infty e^{i\phi}]=\mathrm{Re}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}]]+i\mathrm{Im}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}]]$.

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial z}=\varepsilon\mathrm{Im}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}]e^{-i\phi}] \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=u_\infty^2-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}]e^{-i\phi}]}{u_\infty}. \tag{2.5}$$

Θεωρούμε για ευκολία, αλλά χωρίς να χαθεί η γενικότητα, διαταραχές για τις οποίες ισχύει η συμμετρία $F[u_\infty e^{i\phi}]=F[u_\infty]e^{i\phi}$. Τότε παίρνουμε τελικά τις εξισώσεις

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial z}=\varepsilon\mathrm{Im}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty]] \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=u_\infty^2-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty]]}{u_\infty} \tag{2.7}$$

οι οποίες περιγράφουν πλήρως την εξέλιξη του συνεχούς υποβάθρου υπό την επίδραση μιας τυχαίας διαταραχής $F[U]$.

Από τη σχέση (2.7) έχουμε όταν $|t|\to\infty$

$$\frac{\partial\phi^\pm}{\partial z}=u_\infty^2-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}[\mathrm{F}[\mathrm{u}_\infty]]}{u_\infty}$$

Ορίζουμε ως $\Delta\phi_\infty=\frac{\partial\phi^+}{\partial z}-\frac{\partial\phi^-}{\partial z}$ τότε έχουμε:

$$\Delta\phi_\infty=0 \tag{2.8}$$

που σημαίνει ότι η μεταβολή της φάσης στο άπειρο παραμένει σταθερή υπό την επίδραση διαταραχής. Εφεξής θα συμβολίζουμε με $^+$ το όριο μιας συνάρτησης στο $+\infty$ και $^-$ το όριο μιας συνάρτησης στο $-\infty$.

2.2 Όροι μηδενικής και πρώτης τάξης

Ας επικεντρωθούμε στην εξέλιξη των Σκοτεινών Σολιτονίων υπό την επίδραση διαταραχών. Έχουμε απομονώσει το συνεχές υπόβαθρο από την εξίσωση

NLS μιας και στα πλαίσια της αδιαβατικής θεωρίας θέλουμε να μελετήσουμε τη μεταβολή των παραμέτρων του σολιτονίου. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό $U = ue^{i\int_0^z u_\infty^2(s)ds}$ στην εξίσωση NLS

$$i\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + |U|^2 U = \varepsilon F[U] \tag{2.9}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$i\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \varepsilon F[u]. \tag{2.10}$$

Γράφουμε τη λύση u στη πολική της μορφή: $u = qe^{i\phi}$, όπου q και ϕ πραγματικές συναρτήσεις του z και t. Τότε η εξίσωση (2.10) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη

$$iq_z - \phi_z q - \frac{1}{2}[q_{tt} + i2\phi_t q_t + q(i\phi_{tt} - \phi_t^2)] + (q^2 - u_\infty^2)q = \varepsilon F[u], \tag{2.11}$$

όπου οι δείκτες αντιστοιχούν σε μερικές παραγωγίσεις.

Θα βασιστούμε στη θεωρία πολλαπλών κλιμάκων. Με βάση τη θεωρία αυτή θα προστεθεί ακόμη μια στις ήδη δύο υπάρχουσες με σκοπό τη μελέτη της εξέλιξης των παραμέτρων του σολιτονίου σε δύο κλίμακες (γρήγορη και αργή). Εισάγουμε δηλαδή την αργή κλίμακα $Z = \varepsilon z$ για να μελετήσουμε την άμεση δυναμική του φαινομένου με την αδιαβατική θεωρία να δίνει αποτελέσματα για την αργή κλίμακα Z. Οι συναρτήσεις q και ϕ είναι πλέον συναρτήσεις τριών μεταβλητών: Z, z και t. Παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις q και ϕ έχουμε

$$q_z = \frac{\partial q}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{\partial q}{\partial z} = \varepsilon q_Z + q_z$$

και

$$\phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial Z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \varepsilon \phi_Z + \phi_z.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω η εξίσωση (2.11) μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} i(\varepsilon q_Z + q_z) - q(\varepsilon\phi_Z + \phi_z) - \frac{1}{2}q_{tt} - iq_t\phi_t - \frac{1}{2}iq\phi_{tt} + \frac{1}{2}q\phi_t^2 \\ +(q^2 - u_\infty^2)q = \varepsilon F[u]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις q και ϕ σε σειρά γύρω από το ε

$$q(Z, z, t) = q_0 + \varepsilon q_1 + O(\varepsilon^2)$$

και

$$\phi(Z,z,t) = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + O(\varepsilon^2)$$

στην εξίσωση (2.12) και έχουμε

$$\begin{aligned} &i(\varepsilon(q_{0Z} + \varepsilon q_{1Z}) + q_{0z} + \varepsilon q_{1z}) - (q_0 + \varepsilon q_1)(\varepsilon(\phi_{0Z} + \varepsilon\phi_{1Z}) + \phi_{0z} + \varepsilon\phi_{1z}) \\ &-\frac{1}{2}(q_{0tt} + \varepsilon q_{1tt}) - i(q_{0t} + \varepsilon q_{1t})(\phi_{0t} + \varepsilon\phi_{1t}) - \frac{1}{2}i(q_0 + \varepsilon q_1)(\phi_{0tt} + \varepsilon\phi_{1tt}) \\ +&\frac{1}{2}(q_0 + \varepsilon q_1)(\phi_{0t}^2 + 2\varepsilon\phi_{0t}\phi_{1t} + \varepsilon^2\phi_{1t}^2) + (q_0^2 + 2\varepsilon q_0 q_1 + \varepsilon^2 q_1^2 - u_\infty^2)(q_0 + \varepsilon q_1) = \varepsilon F[u]. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις q_0 και ϕ_0 θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στο άπειρο, δηλαδή $q_0 \to u_\infty$ και $\phi_0 \to \phi$, οπότε οι συναρτήσεις q_1 και ϕ_1 θα πρέπει να μηδενίζονται. Εξισώνουμε τις ίδιες δυνάμεις του ε. Προκύπτουν έτσι τα προβλήματα μηδενικής και πρώτης τάξης. Κρατώντας τους όρους μηδενικής τάξης προκύπτει η εξίσωση

$$iq_{0z} - q_0\phi_{0z} - \frac{1}{2}q_{0tt} - iq_{0t}\phi_{0t} - \frac{1}{2}iq_0\phi_{0tt} + \frac{1}{2}q_0\phi_{0t}^2 + (q_0^2 - u_\infty^2)q_0 = 0$$

και χωρίζοντας στο φανταστικό και στο πραγματικό μέλος καταλήγουμε στο πρόβλημα τάξης $O(1)$ που καλείται αδιατάραχτο πρόβλημα

$$q_{0z} = \frac{1}{2}(2\phi_{0t}q_{0t} + q_0\phi_{0tt}) \tag{2.13}$$

$$\phi_{0z}q_0 = -\frac{1}{2}(q_{0tt} - \phi_{0t}^2 q_0) + (q_0^2 - u_\infty^2)q_0. \tag{2.14}$$

Η γενική λύση του αδιατάραχτου προβλήματος είναι ένα σκοτεινό σολιτόνιο και δίνεται από τις συναρτήσεις

$$q_0 = \sqrt{A(Z)^2 + B(Z)^2\tanh^2 x} \tag{2.15}$$

$$\phi_0 = \tan\left[\frac{A(Z)}{B(Z)}\tanh(x)\right]^{-1} + \sigma_0(Z) \tag{2.16}$$

όπου: $x = B\left[t - \int_0^z A(\varepsilon s)ds - t_0(Z)\right]$. Εφόσον η αδιαβατική θεωρία δίνει αποτελέσματα για την αργή κλίμακα Z οι συναρτήσεις q_0 και ϕ_0 είναι συναρτήσεις μόνο του Z και θεωρούνται συναρτήσεις σταθερές ως προς τη μεταβλητή z. Όταν η λύση του αδιατάραχτου προβλήματος είναι ένα μαύρο σολιτόνιο τότε οι συναρτήσεις q_0 και ϕ_0 παίρνουν την μορφή

$$q_0(Z,z,t) = u_\infty\tanh[u_\infty(t - t_0(Z))] \tag{2.17}$$

$$\phi_0(Z, z, t) = \sigma_0(Z). \tag{2.18}$$

Κρατώντας τους όρους πρώτης τάξης $O(\varepsilon)$ προκύπτει η εξισωση

$$\begin{aligned} iq_{1z} + iq_{0Z} - q_0\phi_{0Z} - q_0\phi_{1z} - q_1\phi_{0z} - \frac{1}{2}q_{1tt} - iq_{0t}\phi_{1t} - iq_{1t}\phi_{0t} - \frac{1}{2}iq_0\phi_{1tt} \\ -\frac{1}{2}iq_1\phi_{0tt} + q_0\phi_{0t}\phi_{1t} + \frac{1}{2}q_1\phi_{0t}^2 + 3q_0^2q_1 - u_\infty^2 q_1 = \mathrm{Re}[\mathrm{F[u]}] + i\mathrm{Im}[\mathrm{F[u]}] \end{aligned}$$

και χωρίζοντας στο φανταστικό και στο πραγματικό μέλος καταλήγουμε στο πρόβλημα τάξης $O(\varepsilon)$

$$q_{1z} = \frac{1}{2}[2(\phi_{0t}q_{1t} + q_{0t}\phi_{1t}) + q_0\phi_{1tt} + q_1\phi_{0tt}] + \mathrm{Im}[\mathrm{F}] - q_{0Z} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \phi_{1z}q_0 = 3q_0^2q_1 - \frac{1}{2}[q_{1tt} - (2\phi_{0t}\phi 1t)q_0 - \phi_{0t}^2 q_1] \\ - q_1\phi_{0z} - u_\infty^2 q_1 - \mathrm{Re}[\mathrm{F}] - \phi_{0Z}q_0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Οι εξισώσεις (2.19) και (2.20) είναι γραμμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού συζευγμένες με μη σταθερούς συντελεστές και αυτό αποτελεί πρόβλημα στην επίλυση τους.

2.3 Ένα παράδειγμα

Θεωρούμε ως διαταραχή τη συνάρτηση $F[u] = i\gamma u_{tt}, \gamma > 0$

$$i\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = i\varepsilon\gamma u_{tt}$$

και εφαρμόζουμε την αδιαβατική θεωρία όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Υποθέτουμε πως η λύση του αδιατάραχτου προβλήματος είναι ένα μαύρο σολιτόνιο και θέλουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη των παραμέτρων του υπό τη συγκεκριμένη διαταραχή. Θεωρούμε το σταθερό υπόβαθρο u_∞ και ότι οι συναρτήσεις q_0 και ϕ_0 του αδιατάραχτου προβλήματος είναι της μορφής (2.17) και (2.18), αντίστοιχα. Αναζητούμε στάσιμη λύση οπότε $q_{1z} = \phi_{1z} = 0$ και παρατηρούμε πως $\phi_{0t} = \phi_{0tt} = 0$. Επίσης, παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις q_0 και ϕ_0 καταλήγουμε αντίστοιχα στις σχέσεις

$$q_{0Z} = -t_{0Z}q_{0t} \quad \text{και} \quad \phi_{0Z} = \sigma_{0Z}. \tag{2.21}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις εξισώσεις (2.19) και (2.20) έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα τάξης $O(\varepsilon)$

$$\frac{1}{2}(2q_{0t}\phi_{1t} + q_0\phi_{1tt}) + \mathrm{Im}[\mathrm{F}] + t_{0Z}q_{0t} = 0 \tag{2.22}$$

$$-\frac{1}{2}q_{1tt} + 3q_0^2 q_1 - u_\infty^2 q_1 - \mathrm{Re}[\mathrm{F}] - \sigma_{0Z}q_0 = 0 \tag{2.23}$$

όπου $\mathrm{Re}[\mathrm{F}] = 0$ και $\mathrm{Im}[\mathrm{F}] = \gamma q_{0tt}$.

Θα ασχοληθούμε πρώτα με την εξίσωση (2.22)

$$q_{0t}\phi_{1t} + \frac{1}{2}q_0\phi_{1tt} = -\gamma q_{0tt} - t_{0Z}q_{0t} \tag{2.24}$$

την οποία πολλαπλασιάζουμε με τον όρο q_0

$$\left(\frac{q_0}{2}\right)_t^2 \phi_{1t} + \frac{1}{2}q_0^2(\phi_{1t})_t = -\gamma q_0 q_{0tt} - t_{0Z}q_0 q_{0t}.$$

Ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας ότι ισχύει η σχέση

$$\int q_0 q_{0tt} dt = -\frac{2}{3}q_0^3 + c$$

όταν

$$q_0 = \sqrt{A(Z)^2 + B(Z)^2 \tanh^2 x}, \tag{2.25}$$

προκύπτει η σχέση

$$\phi_{1t} = \frac{4}{3}\gamma q_0 - t_{0Z} + c_1 q_0^{-2}$$

όπου $c_1 = 0$, για να αποφύγουμε την εκθετική αύξηση που παρουσιάζει ο όρος q_0^{-2} στο t_0 και να έχουμε φραγμένη λύση . Ολοκληρώνοντας ως προς t βρίσκουμε τη λύση ϕ_1 ίση με

$$\phi_1 = \frac{4}{3}\gamma \log[\cosh(u_\infty(t - t_0))] - t_{0Z}t + c_2 \tag{2.26}$$

η παράγωγος της οποίας ασυμπτωτικά στο άπειρο γίνεται ίση με

$$\phi_{1t}^{+} = \frac{4}{3}\gamma u_\infty - t_{0Z}, \quad \phi_{1t}^{-} = -\frac{4}{3}\gamma u_\infty - t_{0Z}. \tag{2.27}$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε τη λύση της εξίσωσης (2.23). Εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητών $x = u_\infty(t - t_0)$

$$q_{1tt} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = u_\infty^2 q_{1xx}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.23) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $q_0 = u_\infty \tanh(x)$ έχουμε:

$$\frac{1}{2}u_\infty^2 q_{1xx} - q1(3q_0^2 - u_\infty^2) = -\sigma_{0Z} q_0$$
$$\Leftrightarrow q_{1xx} - 2q_1(3\tanh(x)^2 - 1) = -2\frac{\sigma_{0Z}}{u_\infty}\tanh(x)$$
$$\Leftrightarrow q_{1xx} + q_1(6\text{sech}^2 x - 4) = -2\frac{\sigma_{0Z}}{u_\infty}\tanh x.$$

Η ομογενής εξίσωση είναι της μορφής

$$Q_{xx} + \left[n(n+1)\text{sech}^2 x - n^2\right]Q = 0$$

η οποία έχει λύση την

$$Q = \text{sech}^n x.$$

Με βάση τη λύση $\text{sech}^2 x$ για το ομογενές πρόβλημα και μια μερική λύση για το μη-ομογενές πρόβλημα μπορούμε να βρούμε την πλήρη λύση q_1

$$q_1 = \left[c_1 + c_2\left(\frac{1}{4}\sinh(4x) + 2\sinh(2x) + 3x\right) + \frac{\sigma_{0Z}}{8u_\infty}\left(x - \frac{1}{4}\sinh(4x)\right)\right]\text{sech}^2 x. \tag{2.28}$$

Κοιτάζοντας την ασυμπτωτική της συμπεριφορά όταν $x \to \pm\infty$

$$q_1 \longrightarrow \frac{1}{16}\left(c_2 - \frac{\sigma_{0Z}}{u_\infty}\right)e^{\pm 2x}$$

παρατηρούμε πως πρέπει $c_2 = \frac{\sigma_{0Z}}{u_\infty}$ για να αποφευχθεί η εκθετική αύξηση. Για το λόγο αυτό η μοναδική λύση της εξίσωσης (2.24) είναι η

$$q_1 = \frac{\sigma_{0Z}}{4u_\infty}\left[\sinh(2u_\infty(t-t_0)) + 2u_\infty(t-t_0\right]\text{sech}^2(u_\infty(t-t_0)). \tag{2.29}$$

Η ασυμπτωτική της συμπεριφορά στο άπειρο είναι

$$q_1 \to (2u_\infty^2)^{-1}\sigma_{0Z} q_0^\pm = \pm\frac{\sigma_{0Z}}{2u_\infty}$$

$$q_1^+ = \frac{\sigma_{0Z}}{2u_\infty}, \quad q_1^- = -\frac{\sigma_{0Z}}{2u_\infty}. \tag{2.30}$$

Παρατηρούμε τότε ότι οι συναρτήσεις q_1 και ϕ_1 δεν ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στο άπειρο που θα πρέπει να είναι μηδενικές, σχέσεις (2.6) και (2.7), και μάλιστα δίνουν διαφορετικές τιμές στο $\pm\infty$ αντίστοιχα.

2.3.1 Προσθήκη του Οριακού Στρώματος

Σκοπός μας είναι να μηδενίζονται οι συναρτήσεις q_1 και ϕ_1 όταν $|t| \to \infty$ επειδή μόνο σε αυτή την περίπτωση από την μορφή $(q_0 + \varepsilon q_1)e^{i(\phi_0+\varepsilon\phi_1)}$ οι συναρτήσεις q_0 και ϕ_0 ασυμπτωτικά τείνουν στις συναρτήσεις u_∞ και ϕ αντίστοιχα, οι οποίες γνωρίζουμε ότι από τις σχέσεις (2.6) και (2.7) ότι ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στο άπειρο. Αντίθετα, παρατηρούμε πως οι συναρτήσεις q_1 και ϕ_1 που βρήκαμε ως λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης (2.22) και (2.23) δεν μηδενίζονται ασυμπτωτικά και μάλιστα δίνουν διαφορετικές τιμές όταν $|t| \to \infty$. Η θεωρία διαταραχών που εφαρμόσαμε απέτυχε και υπάρχει ανάγκη για διόρθωση.

Πρέπει να πετύχουμε τη συναρμογή των δύο τιμών των λύσεων q_1 και ϕ_1 στο $\pm\infty$ αντίστοιχα. Αυτό το εξυπηρετεί η προσθήκη ενός οριακού στρώματος. Δημιουργούνται έτσι δύο περιοχές: η εσωτερική περιοχή που αναφέρεται στο σολιτόνιο και στον πυρήνα του και η εξωτερική περιοχή που αναφέρεται στο συνεχές υπόβαθρο. Οι δύο περιοχές επικοινωνούν με την προσθήκη ενός οριακού στρώματος. Απόρροια της προσθήκης του οριακού στρώματος είναι η εμφάνιση του ερμαρίου (shelf). Το ερμάριο είναι η διαφορά μεταξύ του πυρήνα του σολιτονίου και του υποβάθρου και προκύπτει λόγω της συναρμογής των δύο τιμών των συναρτήσεων q_1 και ϕ_1 όταν $|t| \to \infty$. Σημαντική παρατήρηση αυτού είναι ότι στην πραγματικότητα η λύση της εξίσωσης NLS, το σκοτεινό σολιτόνιο, αποτελείται από τον πυρήνα του, το συνεχές υπόβαθρο και το ερμάριο που δημιουργείται γύρω από το σολιτόνιο.

Αναζητούμε τη συμπεριφορά του οριακού στρώματος, στο σημείο όπου οι δύο περιοχές ενώνονται. Θεωρούμε u_∞ μια συνάρτηση του $Z = \varepsilon z$. Επιστρέφουμε στην εξίσωση

$$i\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \varepsilon F[u] \tag{2.31}$$

και αναζητούμε λύση u υπό διαταραχή γύρω από τη λύση στο άπειρο. Για το λόγο αυτό, γράφουμε τη λύση u στη μορφή $u = (u_\infty + \varepsilon\omega)e^{i(\phi+\varepsilon\theta)}$, όπου ω και θ είναι πραγματικές συναρτήσεις των z και t. Έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial u}{\partial z} =$$
$$\left[\varepsilon\left(\frac{du_\infty}{dZ} + i(u_\infty + \varepsilon\omega)\frac{d\phi}{dZ}\right) + \varepsilon\omega_z + (u_\infty + \varepsilon\omega)i\varepsilon\theta_z\right]e^{i(\phi+\varepsilon\theta)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\varepsilon\omega_{tt} + 2i\varepsilon^2\omega_t\theta_t + i\varepsilon u_\infty\theta_{tt} + i\varepsilon^2\omega\theta_{tt} - \varepsilon^2 u_\infty\theta_t^2 - \varepsilon^3\omega\theta_t^2)e^{i(\phi+\varepsilon\theta)}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην εξίσωση (2.31) το πρόβλημα τάξης $O(1)$ επαληθεύεται αυτόματα. Κρατώντας όρους τάξης $O(\varepsilon)$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(-\theta_z u_\infty + i\omega_z - \frac{1}{2}[iu_\infty\theta_{tt} + \omega_{tt}] + 2u_\infty^2\omega + i\frac{du_\infty}{dZ} - u_\infty\frac{d\phi}{dZ})e^{i(\phi+\varepsilon\theta)} = F[(u_\infty + \varepsilon\omega)e^{i(\phi+\varepsilon\theta)}].$$

Λόγω της συμμετρίας $F[(u_\infty+\varepsilon\omega)e^{i(\phi+\varepsilon\theta)}] = F[(u_\infty+\varepsilon\omega)]e^{i(\phi+\varepsilon\theta)}$ καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$-\theta_z u_\infty + i\omega_z - \frac{1}{2}[iu_\infty\theta_{tt} + \omega_{tt}] + 2u_\infty^2\omega = F[(u_\infty + \varepsilon\omega)] - \left(i\frac{du_\infty}{dZ} - u_\infty\frac{d\phi}{dZ}\right) \tag{2.32}$$

Παρατηρούμε ότι $F[u_\infty + \varepsilon\omega] - F[u_\infty] = \varepsilon\frac{\partial F[u_\infty]}{\partial\varepsilon}\omega$, όπου με $\frac{\partial F[u_\infty]}{\partial\varepsilon}$ θα συμβολίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης $F[u_\infty]$. Κατά συνέπεια το δεξί μέλος της σχέσης (2.32) είναι τάξης $O(\varepsilon^2)$ και παραλείπεται

$$-\theta_z u_\infty + i\omega_z - \frac{1}{2}[iu_\infty\theta_{tt} + \omega_{tt}] + 2u_\infty^2\omega = 0.$$

Χωρίζοντας σε πραγματικό και φανταστικό μέλος έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\theta_z u_\infty = 2u_\infty^2\omega - \frac{1}{2}\omega_{tt} \quad \text{και} \quad \omega_z = \frac{1}{2}u_\infty\theta_{tt}. \tag{2.33}$$

Παραγωγίζοντας το φανταστικό και το πραγματικό μέλος ως προς z έχουμε αντίστοιχα

$$\omega_{zz} = \frac{1}{2}\theta_{ttz} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(2u_\infty^2\omega - \frac{1}{2}\omega_{tt}\right) = u_\infty^2\omega_{tt} - \frac{1}{4}\omega_{tttt} \tag{2.34}$$

$$\theta_{zz} = -\frac{1}{2}\omega_{ttz} + 2u_\infty^2\omega_z = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{2}\theta_{tt}\right) + u_\infty^2\theta_{tt} = u_\infty^2\theta_{tt} - \frac{1}{4}\theta_{tttt}. \tag{2.35}$$

Για τη συναρμογή των δύο λύσεων στην εσωτερική και εξωτερική περιοχή απαιτείται οι συναρτήσεις ω και θ να ικανοποιούν διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Στα αριστερά του ερμαρίου οι συναρτήσεις ω και θ πληρούν τις συνθήκες

$$\omega(-\infty) = 0, \quad \omega(\infty) = q_1^-, \quad \theta(-\infty) = 0, \quad \theta_t(\infty) = \phi_{1t}^-. \tag{2.36}$$

Στα δεξιά του ερμαρίου οι συναρτήσεις ω και θ πληρούν τις συνθήκες

$$\omega(-\infty) = q_1^+, \quad \omega(\infty) = 0, \quad \theta(-\infty) = \phi_{1t}^+, \quad \theta_t(\infty) = 0. \tag{2.37}$$

Εάν θέσουμε $\omega = e^{i(\kappa t + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^Z \omega(s,\kappa)ds)}$, τότε η σχέση που δίνει τη διασπορά για τις εξισώσεις (2.34) και (2.35) είναι η ακόλουθη

$$\omega^2 = u_\infty^2(Z)\kappa^2 + \frac{1}{4}\kappa^4. \tag{2.38}$$

Για κύματα μεγάλης διάρκειας ($\kappa \ll 1$) ισχύει προσεγγιστικά ότι $\omega(Z,\kappa) = \pm u_\infty(Z)\kappa$ ή $\omega = e^{i\kappa[t \pm \frac{1}{\varepsilon}\int_0^Z u_\infty(Z)]}$, διότι μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της εξέλιξης του φαινομένου κάθε χρονική στιγμή. Για το λόγο αυτό λύσεις κυματικής μορφής μεγάλης διάρκειας ταξιδεύουν με ταχύτητα ίση μη $V(z) = \pm u_\infty(z)$. Σκοπός μας είναι να παρακολουθούμε την εξέλιξη του φαινομένου σε κάθε χρονική στιγμή. Για το λόγο αυτό αναζητούμε λύσεις των εξισώσεων (2.34) και (2.35) σε ένα κινούμενο πλαίσιο αναφοράς. Εκτελούμε τον μετασχηματισμό $x = t - \int_0^z V dz$,$\zeta = z$ και $V = \pm u_\infty$ και έχουμε

$$\omega_t = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \omega_x.$$

Ανάλογα, $\omega_{tttt} = \omega_{xxxx}$.

$$\omega_z = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -V\omega_x + \omega_z$$

Ομοίως, $\omega_{zz} = V^2\omega_{xx} - 2V\omega_{\zeta x} + \omega_{\zeta\zeta}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.34) έχουμε

$$\omega_{\zeta\zeta} = 2V\omega_{\zeta x} + (u_\infty^2 - V^2)\omega_{xx} - \frac{1}{4}\omega_{xxxx}. \tag{2.39}$$

Αντίστοιχα στη σχέση (2.35) έχουμε

$$\theta_{\zeta\zeta} = 2V\theta_{\zeta x} + (u_\infty^2 - V^2)\theta_{xx} - \frac{1}{4}\theta_{xxxx}. \tag{2.40}$$

Παρατηρούμε πως οι παράγωγοι ως προς x είναι μικρές ποσότητες επειδή αναφερόμαστε σε κύματα μεγάλης διάρκειας. Ακόμη, στις εξισώσεις (2.39) και (2.40) παίρνουμε

$$\theta_{\zeta\zeta} \ll \theta_{\zeta x} \sim \theta_{xxxx} \ll 1$$

και

$$\omega_{\zeta\zeta} \ll \omega_{\zeta x} \sim \omega_{xxxx} \ll 1$$

με σκοπό να συγκρίνουμε τον όρο θ_{xxxx} που είναι ο κύριος όρος της εξίσωσης (2.40) με τον όρο $\theta_{\zeta x}$ ώστε να διατηρηθεί η μέγιστη ισορροπία στην εξίσωση και να μην υπάρχει πρόβλημα επειδή αγνοούμε τον όρο $\theta_{\zeta\zeta}$ που είναι αρκετά μικρός. Καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$2V\omega_{\zeta x} - \frac{1}{4}\omega_{xxxx} = 0 \quad \text{και} \quad 2V\theta_{\zeta x} - \frac{1}{4}\theta_{xxxx} = 0. \tag{2.41}$$

Χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητών $\theta_x = \bar{f}(\bar{\xi})$ και $\bar{\xi} = \frac{x}{\zeta^{\frac{1}{3}}}$ στην εξίσωση (2.41) για να βρούμε τις συναρτήσεις ω και θ.

$$\theta_{xx} = \frac{\partial\theta_x}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x} = \frac{\bar{f}'}{\zeta^{\frac{1}{3}}}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, $\theta_{xxxx} = \frac{\bar{f}'''}{\zeta}$.

$$\theta_{\zeta x} = \frac{\partial\theta_x}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\zeta} = -\frac{1}{3\zeta}\bar{f}'\bar{\xi}$$

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση (2.40) που αναφέρεται στη συνάρτηση θ μετασχηματίζεται στην

$$-\frac{2}{3}V\bar{\xi}\bar{f}' - \frac{1}{4}\bar{f}''' = 0. \tag{2.42}$$

Τέλος, εκτελούμε τον μετασχηματισμό $f = \bar{f}'$ και $\xi = -2\left(\frac{V}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\bar{\xi}$ όπου

$$\bar{f}'' = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = -2\left(\frac{V}{3}\right)^{\frac{1}{3}} f'.$$

Έχουμε, $\bar{f}''' = 4\left(\frac{V}{3}\right)^{\frac{2}{3}} f''$, και η εξίσωση (2.42) γίνεται

$$f'' - \xi f = 0. \tag{2.43}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση Airy με γενική λύση την $f(\xi) = c_1\mathrm{Ai}(\xi) + c_2\mathrm{Bi}(\xi)$, όπου $\mathrm{Ai}(\xi)$ και $\mathrm{Bi}(\xi)$ είναι συναρτήσεις που ορίζονται με γνωστή σειρά. Παίρνουμε $c_2 = 0$ επειδή ο όρος $\mathrm{Bi}(\xi)$ αυξάνει εκθετικά. Στα αριστερά του σολιτονίου για $V = -u_\infty$ αναζητούμε λύση θ που μηδενίζεται όταν $x \to -\infty$. Άρα, $\bar{f} = \theta_x \to 0$ όταν $\bar{\xi} = \frac{x}{\zeta^{\frac{1}{3}}} \to -\infty$. Πηγαίνοντας προς τα πίσω στους μετασχηματισμούς και λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα αριστερά του σολιτονίου έχουμε

$$\theta(\zeta, x) = c_1 \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\frac{\alpha\bar{x}}{\zeta^{1/3}}} \mathrm{Ai}(s)ds d\bar{x}, \tag{2.44}$$

όπου $\alpha = -2\left(\frac{V}{3}\right)^{1/3}$ και $c_1 = \phi_{0t}^{-1}$.
Για να βρούμε τη συνάρτηση ω επιστρέφουμε στη σχέση (2.39) όπου έχουμε

$$\left(2V\omega_\zeta - \frac{1}{4}\omega_{xxx}\right)_x = 0.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x προκύπτει

$$2V\omega_\zeta - \frac{1}{4}\omega_{xxx} = c_3.$$

Για να ικανοποιήσουμε τη συνοριακή συνθήκη στα δεξιά του σολιτονίου παίρνουμε $c_3 = 0$ και καταλήγουμε έτσι στη σχέση

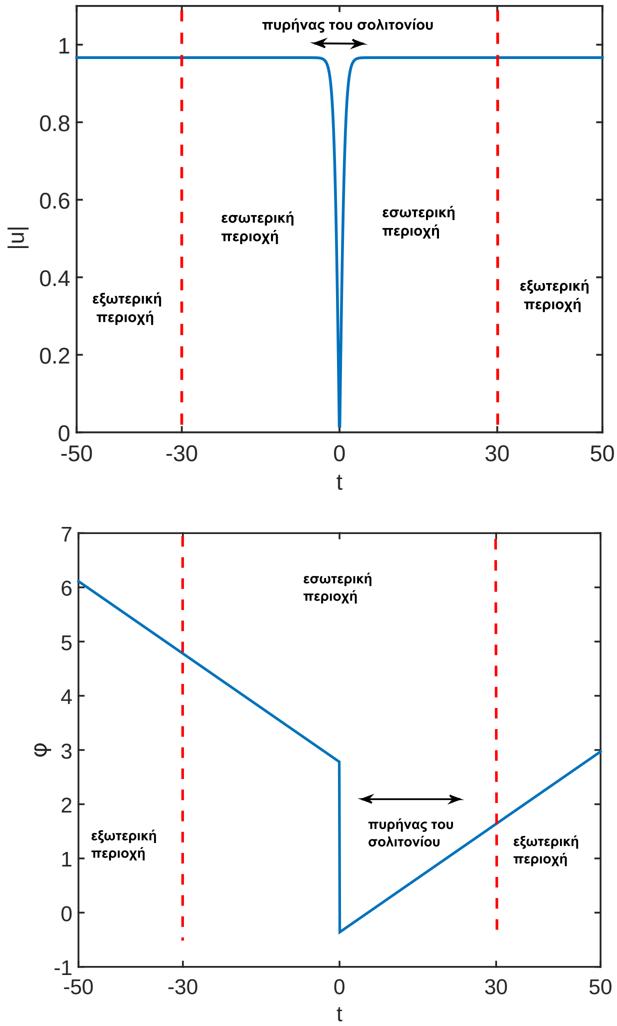
$$2V\omega_\zeta - \frac{1}{4}\omega_{xxx} = 0$$

από την οποία εργαζόμενοι όπως και για τη συνάρτηση θ έχουμε

$$\omega(x) = c_4 \int_{-\infty}^{\frac{\alpha x}{\zeta^{1/3}}} \mathrm{A_i}(s)ds$$

για $V = +u_\infty$ και για $V = -u_\infty$.

Με βάση τα παραπάνω στην περίπτωση ενός μαύρου σολιτονίου, υπάρχουν δύο οριακά στρώματα που απομακρύνονται από την εσωτερική περιοχή του σολιτονίου με ταχύτητα ίση με u_∞. Η ύπαρξη των οριακών στρωμάτων έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία και την παραγωγή του ερμαρίου το οποίο θα περιγραφεί ασυμπτωτικά από διαφορικές εξισώσεις που θα προκύψουν από τους διατηρητικούς νόμους στην επόμενη ενότητα.



Σχήμα 2.1: Τυπικό μαύρο σολιτόνιο και οι χαρακτηριστικές περιοχές του οριακού στρώματος για $u_\infty = 1$. Δείχνει τις δύο περιοχές που δημιουργούνται, εσωτερική και εξωτερική. Οι διακεκομμένες κόκκινες γραμμές οριοθετούν τα σύνορα του ερμαρίου. Επάνω βλέπουμε το πλάτος του σολιτονίου και κάτω τη φάση του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η Πληρης Θεωρια

Η εξίσωση NLS

$$i\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = 0$$

είναι ολοκληρώσιμη βάση του μετασχηματισμού της Αντίστροφης Σκέδασης (Inverse Scattering Transform) και έχει άπειρους διατηρητικούς νόμους. Στη παρούσα μελέτη θα χρησιμοποιήσουμε αυτούς που αναφέρονται στη Χαμιλτονιανή

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\left(u_\infty^2 - |u|^2\right)^2\right] dt \tag{3.1}$$

στην Ενέργεια

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u_\infty^2 - |u|^2\right) dt \tag{3.2}$$

στην Ορμή

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2}\left(u^* u_t - u u_t^*\right) dt \tag{3.3}$$

και στο Κέντρο της Ενέργειας

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} t\left(u_\infty^2 - |u|^2\right) dt \tag{3.4}$$

όπου u^* η συζηγής παράσταση της συνάρτησης u. Για λόγους πληρότητας θα αποδείξουμε τον διατηρητικό νόμο για την Ενέργεια και την Ορμή του συστήματος και με την ίδια λογική προκύπτουν οι υπόλοιποι. Όλοι οι διατηρητικοί νόμοι προκύπτουν από τον μετασχηματισμό αντίστροφης σκέδασης με αλγοριθμικό τρόπο.

Επιστρέφουμε στη διαταραγμένη εξίσωση NLS

$$iu_z - \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2 u = \varepsilon F[u] \tag{3.5}$$

την οποία πολλαπλασιάζουμε με τη συζηγή παράσταση u^*

$$iu_z u^* - \frac{1}{2}u_{tt}u^* + |u|^2 uu^* = \varepsilon F[u]u^*. \tag{3.6}$$

Η εξίσωση NLS για τη συζηγή παράσταση u^* πολλαπλασιασμένη με τη συνάρτηση u γίνεται

$$-iu_z^* u - \frac{1}{2}u_{tt}^* u + |u^*|^2 u^* u = \varepsilon F[u^*]u. \tag{3.7}$$

Αφαιρούμε τις σχέσεις (3.6) και (3.7) και προκύπτει

$$i(u_z u^* + u_z^* u) - \frac{1}{2}(u_{tt}u^* - u_{tt}^* u) = \varepsilon(F[u]u^* - F[u^*]u) \tag{3.8}$$

$$\Longleftrightarrow i\frac{\partial}{\partial z}(uu^*) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t u^* - uu_t^*) = 2i\varepsilon \mathrm{Im}[F[u]u^*]$$

$$\Longleftrightarrow i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}|u|^2 dt - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_t u^* - uu_t^*)dt = 2i\varepsilon \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}F[u]u^* dt$$

όπου

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_t u^* - uu_t^*)dt = 0.$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}|u|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}(|U_\infty|^2 - |u|^2)dt = \frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{\infty}(|U_\infty|^2 - |u|^2)dt$ επειδή η ποσότητα $\frac{\partial}{\partial z}|U_\infty|^2 = 0$ εφόσον το $|U_\infty|$ είναι σταθερό και μπορούμε έτσι να περάσουμε την παραγώγιση έξω από την ολοκλήρωση. Την ποσότητα

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}(|U_\infty|^2 - |u|^2)dt \tag{3.9}$$

καλούμε ενέργεια του συστήματος.

Επανερχόμαστε στη σχέση (3.5) την οποία πολλαπλασιάζουμε με u_t^*

$$iu_z u_t^* - \frac{1}{2}u_{tt}u_t^* + |u|^2 uu_t^* = t\varepsilon F[u]u_t^* \tag{3.10}$$

καθώς και στην εξίσωση NLS για τη συζηγή παράσταση u^* την οποία πολλαπλασιάζουμε με τη συνάρτηση u_t

$$-iu_z^* u_t - \frac{1}{2}u_{tt}^* u_t + |u|^2 u^* u_t = t\varepsilon F[u^*]u_t. \tag{3.11}$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (3.10) και (3.11) προκύπτει

$$i(u_z u_t^* + u_z^* u_t) - \frac{1}{2}(u_{tt}u_t^* - u_{tt}^* u_t) + |u|^2(uu_t^* - u^* u_t) = \varepsilon(F[u]u_t^* - F[u^*]u_t).$$

Όμοια με πριν έχουμε

$$i2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(u_z u_t^*)dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u_{tt}u_t^* - u_{tt}^* u_t)dt + i2\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2(uu_t^*)dt = 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}F[u]u^*dt$$

$$\Longleftrightarrow i2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(u_z u_t^*)dt - \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(u_{tt}u_t^*)dt + i2|u|^2\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(uu_t^*)dt = 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}F[u]u^*dt.$$

Την ποσότητα

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}(u^*u_t - uu_t^*)dt \tag{3.12}$$

καλούμε Ορμή του συστήματος.

Παραγωγίζουμε τους διατηρητικούς νόμους που ισχύουν για την εξίσωση NLS με την προσθήκη διαταραχής, με απώτερο σκοπό να βρούμε διαφορικές εξισώσεις που να περιγράφουν την εξέλιξη των παραμέτρων του σολιτονίου και τη διάδοση του ερμαρίου. Τότε έχουμε

$$\frac{dH}{dz} = \varepsilon\left(E\frac{d}{dZ}|U_\infty|^2 + 2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}F[u]u_z^*dt\right) \tag{3.13}$$

$$\frac{dE}{dz} = 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*)dt \tag{3.14}$$

$$\frac{dI}{dz} = 2\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}F[u]u_t^*dt \tag{3.15}$$

$$\frac{dR}{dz} = -I + 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(T + \int_0^z A(\varepsilon s)ds + t_0\right)(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*)dt. \tag{3.16}$$

Θα αποδείξουμε πώς προκύπτει η παράγωγος της Ενέργειας και με την ίδια λογική προκύπτουν οι υπόλοιπες σχέσεις. Παραγωγίζουμε τη σχέση

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}(|U_\infty|^2 - |u|^2)dt$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}(|U_\infty|^2 - |u|^2)dt \tag{3.17}$$

όπου η παραγώγιση μπορεί να περάσει μέσα στην ολοκλήρωση διότι οι συναρτήσεις U_∞ και u είναι ομοιόμορφα συνεχείς και από την εξίσωση NLS γνωρίζουμε τη διάδοση της συνάρτησης u στο z. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}|U_\infty|^2 = \frac{d}{dz}(U_\infty U_\infty^*) = U_\infty^*\frac{dU_\infty}{dz} + U_\infty\frac{dU_\infty^*}{dz} &= \varepsilon U_\infty^*\mathrm{Im}[F[U_\infty]] + \varepsilon U_\infty\mathrm{Im}[F[U_\infty^*]] \\ &= 2\varepsilon\mathrm{Im}[F[U_\infty]U_\infty^*]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}|u|^2 = \frac{d}{dz}(uu^*) = u_z u^* + uu_z^* &= \left(-\frac{i}{2}u_{tt} + i|u|^2 u - i\varepsilon F[u]\right)u^* \\ &+ \left(\frac{i}{2}u_{tt}^* - i|u^*|^2 u^* + i\varepsilon F[u^*]\right)u \\ &= \frac{i}{2}(u_{tt}^* u - u_{tt}u) - i\varepsilon(F[u]u^* - F[u^*]u)\end{aligned}$$

και η σχέση (3.17) μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dz} &= \int_{-\infty}^{\infty}(2\varepsilon\mathrm{Im}[F[U_\infty]U_\infty^*] + i\varepsilon(F[u]u^* - F[u^*]u))dt - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}(u_{tt}^* u - u_{tt}u^*)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(2\varepsilon\mathrm{Im}[F[U_\infty]U_\infty^*] + i\varepsilon(F[u]u^* - F[u^*]u))dt - \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}(u_t u^* - uu_t^*)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(2\varepsilon\mathrm{Im}[F[U_\infty]U_\infty^*] - 2\varepsilon\mathrm{Im}[F[u]u^*)dt\end{aligned}$$

όπου

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}(u_t u^* - uu_t^*)dt = 0.$$

Τελικά, προκύπτει η ακόλουθη σχέση που περιγράφει την εξέλιξη της ενέργειας

$$\frac{dE}{dz} = 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dt. \tag{3.18}$$

3.1 Εφαρμογή σε Μαύρο Σολιτόνιο

Θεωρούμε ως λύση του αδιατάραχτου προβλήματος ένα μαύρο σολιτόνιο και θέλουμε να μελετήσουμε τη δυναμική των παραμέτρων του σολιτονίου σε αυτή την περίπτωση. Θα ξεκινήσουμε από τον διατηρητικό νόμο της ενέργειας

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_\infty^2 - |u|^2\right)dt = 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(F[u_\infty]u_\infty^* - F[u]u^*)dt. \tag{3.19}$$

Εφόσον, αναφερόμαστε σε μαύρο σολιτόνιο θα ισχύει $A = 0$. Άρα το κινούμενο πλαίσιο αναφοράς ισούται με $T = t - t_0$. Τότε η σχέση (3.19) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_\infty^2 - |u|^2\right)dT = 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(F[u_\infty]u_\infty^* - F[u]u^*)dT. \tag{3.20}$$

Θεωρούμε τη διαταραχή $F[u] = i\gamma u_{TT}$ ως ένα απλό παράδειγμα για τον υπολογισμό των παραμέτρων του σολιτονίου και εφαρμόζουμε την αδιαβατική θεωρία. Γράφουμε τη συνάρτηση u στη μορφή $u = qe^{i\phi}$ και αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις q και ϕ σε σειρά γύρω από το ε

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}(u_\infty^2 - q_0^2 - 2\varepsilon q_0 q_1 - \varepsilon^2 q_1^2)dT = 2\varepsilon i\gamma \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} u_{TT}u^* dT.$$

Έχουμε

$$u_{TT} = (q_{TT} - q\phi_T^2 + 2iq_T\phi_T + iq\phi_{TT})$$

και η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}(u_\infty^2 - q_0^2 - 2\varepsilon q_0 q_1 - \varepsilon^2 q_1^2)dT = \\ -2\varepsilon i\gamma \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[i(q_0+\varepsilon q_1)(\phi_{0T}^2 + 2\varepsilon\phi_{0T}\phi_{1T} + \varepsilon^2\phi_{1T}^2) \\ +(q_{0TT} + \varepsilon q_{1TT}) + 2i(q_{0T} + \varepsilon q_{1T})(\phi_{0T} + \varepsilon\phi_{1T}) \\ +i(q_0+\varepsilon q_1)(\phi_{0TT} + \varepsilon\phi_{1TT})](q_0+\varepsilon q_1)^{-i(\phi_0+\varepsilon\phi_1)}]dT\end{aligned}$$

όπου κρατώντας όρους μέχρι τάξης $O(\varepsilon)$ έχουμε

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}(u_\infty^2 - q_0^2 - 2\varepsilon q_0 q_1)dT = -2\varepsilon\gamma\int_{-\infty}^{\infty} q_{0TT}q_0 dT. \tag{3.21}$$

Το αδιατάραχτο πρόβλημα τάξης $O(1)$

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}(u_\infty^2 - q_0^2)dT = 0$$

ικανοποιείται, εφόσον $q_0 \to u_\infty$ στην περιοχή του απείρου. Το πρόβλημα τάξης $O(\varepsilon)$ ισούται με

$$\frac{d}{dz}\int_{-u_\infty z}^{u_\infty z} q_0 q_1 dT = \gamma\int_{-\infty}^{\infty} q_{0TT}q_0 dT \tag{3.22}$$

όπου $q_{0TT}q_0 = -q_{0T}^2$. Η εξίσωση (3.22) αναφέρεται στη μεταβολή της ενέργειας που προκαλείται από τη διάδοση του ερμαρίου. Η ολοκλήρωση στο αριστερό μέλος της σχέσης γίνεται στο διάστημα $[-u_{\infty z}, u_{\infty z}]$ επειδή ενδιαφερόμαστε στη δυναμική του σολιτονίου στην εσωτερική περιοχή που ορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες της παραγώγου της λύσης στο άπειρο που είναι γνωστές από το πρώτο κεφάλαιο. Λαμβάνοντας υπόψιν πως η συνάρτηση q_0 για ένα μαύρο σολιτόνιο δίνεται από την σχέση

$$q_0(Z, z, t) = u_\infty \tanh[u_\infty(t - t_0(Z))]$$

και ολοκληρώνοντας την εξίσωση (3.22) προκύπτει

$$u_\infty[q_1(u_{\infty z})q_0(u_{\infty z}) + q_1(-u_{\infty z})q_0(u_{-\infty z})] = -\frac{4}{3}\gamma u_\infty^3.$$

Για κύματα μεγάλης διάρκειας, δηλαδή για κύματα που φθίνουν εκθετικά στο άπειρο και παρουσιάζουν άπειρη ενέργεια, γνωρίζουμε ότι $q_0^\pm \to \pm u_\infty$ και $q_1 \to q_1^\pm$, η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην

$$u_\infty(q_1^+ + q_1^-) = -\frac{4}{3}\gamma u_\infty. \tag{3.23}$$

Υπενθυμίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των $q_1^\pm$ στο άπειρο

$$q_1^\pm = \pm\frac{\sigma_{0Z}}{2u_\infty}$$

με βάση την οποία από την σχέση (3.23) παίρνουμε μια έκφραση για τη μεταβολή της παραμέτρου σ_0

$$\sigma_{0Z} = -\frac{4}{3}\gamma u_\infty^2. \tag{3.24}$$

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το διατηρητικό νόμο της ορμής

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} uu_t^* dt = 2\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_t^*. \tag{3.25}$$

Ομοίως με την ενέργεια κάνουμε τις εξής μετατροπές: αλλαγή μεταβλητών στο κινούμενο πλαίσιο αναφοράς, μετασχηματισμό της συνάρτησης u στην πολική της μορφή και ανάπτυγμα των συναρτήσεων q και ϕ σε σειρά γύρω από το ε.

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.25)

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(q_0+\varepsilon q_1)[(q_{0T}+\varepsilon q_{1T}) + i(q_0+\varepsilon q_1)(\phi_{0T}+\varepsilon\phi_{1T})]dT =$$

$$2\varepsilon i\gamma\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(q_{TT} - q\phi_T^2 + 2iq_T\phi_T + iq\phi_{TT})[(q_{0T}+\varepsilon q_{1T}) + i(q_0+\varepsilon q_1)(\phi_{0T}+\varepsilon\phi_{1T})]dT$$

και κρατώντας όρους μέχρι τάξης $O(\varepsilon)$ έχουμε

$$-\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}[q_0^2\phi_{0T}^2 + \varepsilon(2q_0q_1\phi_{0T} + q_0^2\phi_{1T})]dT = 2\varepsilon i\gamma\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} q_{0T}q_{0TT}dT.$$

Το πρόβλημα τάξης $O(1)$ ικανοποιείται ενώ στο πρόβλημα τάξης $O(\varepsilon)$ έχουμε

$$-\frac{d}{dz}\int_{-u_{\infty z}}^{u_{\infty z}}[q_0^2\phi_{0T}^2 + \varepsilon(2q_0q_1\phi_{0T} + q_0^2\phi_{1T})]dT = 0$$

στην οποία ο όρος ϕ_{0T} μηδενίζεται επειδή μας ενδιαφέρει η μελέτη του ερμαρίου στην εσωτερική περιοχή. Έχουμε τότε

$$u_\infty[q_0^2(u_\infty z)\phi_{1T}(u_\infty z) + q_0^2(-u_\infty z)\phi_{1T}(-u_\infty z)] = 0$$

κι επειδή $q_0^2(u_\infty z) = q_0^2(-u_\infty z) = u_\infty^2$

$$\phi_{1T}^+ + \phi_{1T}^- = 0. \tag{3.26}$$

Επανερχόμαστε στην ασυμπτωτική συμπεριφορά των $\phi_1^\pm$ στο άπειρο

$$\phi_1^\pm = \pm\frac{4}{3}\gamma u_\infty - t_{0Z}$$

με βάση την οποία από τη σχέση (3.26) καταλήγουμε σε εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της παραμέτρου t_0

$$t_{0Z} = 0. \tag{3.27}$$

Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο τη σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα των διαφορικών εξισώσεων που ισχύουν για την περίπτωση ενός μαύρου σολιτονίου.

3.2 Εφαρμογή σε Γκρι Σολιτόνιο

Θεωρούμε τη γενική περίπτωση ενός γκρι σολιτονίου με ταχύτητα $A(Z)$ και θέλουμε να μελετήσουμε τη δυναμική των παραμέτρων του υπό την επίδραση διαταραχών. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει η σχέση $A^2(Z) + B^2(Z) = u_\infty^2(Z)$ που συνδέει τις παραμέτρους του σολιτονίου με τη λύση στο άπειρο. Εισάγουμε το πλαίσιο αναφοράς $T = t - \int_0^z A(\varepsilon s)ds - t_0$ και $\zeta = z$ έτσι ώστε η συνάρτηση u να είναι τριών μεταβλητών $u = u(\zeta, Z, T)$. Έχουμε

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} = u_\zeta - Au_T$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = u_T.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω η εξίσωση

$$i\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \varepsilon F[u]$$

μετασχηματίζεται στην

$$iu_\zeta - iAu_T - \frac{1}{2}u_{TT} + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \varepsilon F[u]. \tag{3.28}$$

Γράφουμε τη συνάρτηση u στην πολική της μορφή $u = qe^{i\phi}$ και παραγωγίζοντάς την ως προς ζ και T έχουμε από την σχέση (3.28)

$$iq_\zeta - q\phi_\zeta - iAq_T + Aq\phi_T - \frac{1}{2}q_{TT} - iq_T\phi_T - \frac{1}{2}iq\phi_{TT} + \frac{1}{2}q\phi_T^2 + (q^2 - u_\infty^2)q = \varepsilon F[q,\phi]$$

όπου $F[q,\phi] = \mathrm{Re[F[q,\phi]]} + i\mathrm{Im[F[q,\phi]]}$. Χωρίζοντας το φανταστικό και το πραγματικό μέλος της παραπάνω σχέσης έχουμε αντίστοιχα

$$q_\zeta = Aq_T + \frac{1}{2}(q\phi_{TT} + 2q_T\phi_T) + \varepsilon\mathrm{Im[F[q,\phi]]} \tag{3.29}$$

$$q\phi_\zeta = Aq\phi_t - \frac{1}{2}(q_{TT} - q\phi_T^2) + (q^2 - u_\infty^2)q - \varepsilon\mathrm{Re[F[q,\phi]]} \tag{3.30}$$

Στη συνέχεια, εισάγουμε την αργή κλίμακα $Z = \varepsilon z$

$$q_\zeta = \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \zeta} = q_\zeta + \varepsilon q_Z$$

$$\phi_\zeta = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \phi_\zeta + \varepsilon \phi_Z$$

και αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις q και ϕ στις σχέσεις (3.29) και (3.30) σε σειρά γύρω από το ε, $q = q_0 + \varepsilon q_1 + O(\varepsilon^2)$ και $\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + O(\varepsilon^2)$. Το φανταστικό μέλος μετασχηματίζεται αντίστοιχα στην εξίσωση

$$\begin{aligned} q_{0\zeta} + \varepsilon q_{1\zeta} + \varepsilon q_{0Z} + \varepsilon^2 q_{1Z} = Aq_{0T} + \varepsilon Aq_{1T} + \frac{1}{2}[(q_0 + \varepsilon q_1)(\phi_{0TT} + \varepsilon\phi_{1TT}) \\ +2(q_{0T} + \varepsilon q_{1T})(\phi_{0T} + \varepsilon\phi_{1T})] + \varepsilon\mathrm{ImF[q,\phi]} \end{aligned}$$

όπου η εξίσωση τάξης $O(1)$ ικανοποιείται εύκολα από τη γενική μορφή του σολιτονίου

$$q_0 = \sqrt{A(Z)^2 + B(Z)^2\tanh^2 x}$$

$$\phi_0 = \tan\left[\frac{A(Z)}{B(Z)}\tanh x\right]^{-1} + \sigma_0(Z)$$

όπου: $x = B\left[t - \int_0^z A(\varepsilon s)ds - t_0(Z)\right]$. Κρατώντας τους όρους τάξης $O(\varepsilon)$ έχουμε για το φανταστικό μέλος

$$q_{1\zeta} + q_{0Z} = Aq_{1T} + \frac{1}{2}[q_0\phi_{1TT} + q_1\phi_{0TT} + 2(q_{0T}\phi_{1T} + \phi_{0T}q_{1T})] + \mathrm{Im[F[u_0]]}$$

με $u_0 = q_0 e^{i\phi_0}$.

Επειδή αναζητούμε στάσιμη λύση θα είναι $q_{1\zeta} = 0$, οπότε τελικά καταλήγουμε στη σχέση

$$Aq_{1T} + \frac{1}{2}[q_0\phi_{1TT} + q_1\phi_{0TT} + 2(q_{0T}\phi_{1T} + \phi_{0T}q_{1T})] + \mathrm{Im}[\mathrm{F}[\mathrm{u_0}]] - q_{0Z} = 0. \quad (3.31)$$

Το πραγματικό μέλος μετασχηματίζεται αντίστοιχα στην εξίσωση

$$\begin{gathered}(q_0 + \varepsilon q_1)(\phi_{0\zeta} + \varepsilon\phi_{1\zeta} + \varepsilon\phi_{0Z} + \varepsilon^2\phi_{1Z}) = A(q_0 + \varepsilon q_1)(\phi_{0T} + \varepsilon\phi_{1T}) - \frac{1}{2}[q_{0TT} + \varepsilon q_{1TT} \\ -(q_0 + \varepsilon q_1)(\phi_{0T}^2 + 2\varepsilon\phi_{0T}\phi_{1T} + \varepsilon^2\phi_{1T}^2) + (q_0^2 + 2\varepsilon q_0 q_1 + \varepsilon^2 q_1^2 - u_\infty^2)(q_0 + \varepsilon q_1) \\ -\varepsilon\mathrm{Re}[(\mathrm{q_0} + \varepsilon\mathrm{q_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_0 + \varepsilon\phi_1)}.\end{gathered}$$

Ομοίως, για το πραγματικό μέλος έχουμε την εξίσωση τάξης $O(\varepsilon)$

$$\begin{gathered}q_0\phi_{1\zeta} + q_0\phi_{0Z} = A(q_0\phi_{1T} + q_1\phi_{0T}) - \frac{1}{2}(q_{1TT} - 2q_0\phi_{0T}\phi_{1T} - q_1\phi_{0T}^2) \\ +3q_0^2 q_1 - u_\infty^2 q_1 - \mathrm{Re}[\mathrm{F}[\mathrm{u_0}]]\end{gathered}$$

όπου αναζητώντας στάσιμη λύση, $\phi_{1\zeta} = 0$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{gathered}A(q_0\phi_{1T} + q_1\phi_{0T}) - \frac{1}{2}(q_{1TT} - 2q_0\phi_{0T}\phi_{1T} - q_1\phi_{0T}^2) + 3q_0^2 q_1 - u_\infty^2 q_1 \\ -\mathrm{Re}[\mathrm{F}[\mathrm{u_0}]] - q_0\phi_{0Z} = 0. \qquad (3.32)\end{gathered}$$

Παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις q_0 και ϕ_0 βρίσκουμε εύκολα τις συναρτήσεις q_{0Z} και ϕ_{0Z} που βρίσκονται στις σχέσεις (3.31) και (3.32) αντίστοιχα

$$q_{0Z} = \frac{1}{2}(AA_Z + BB_Z\tanh^2 x)q_0^{-1} + q_{0T}\left(\frac{B_Z}{B} - t_{0Z}\right) \qquad (3.33)$$

$$\phi_{0Z} = (AB_Z - BA_Z)\tanh x q_0^{-2} + \phi_{0T}\left(\frac{B_Z}{B} - t_{0Z}\right) + \sigma_{0Z}. \qquad (3.34)$$

Για να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ερμαρίου παίρνουμε το όριο της σχέσης (3.31) όταν $|T| \to \infty$. Τότε οι παράγωγοι ως προς T των όρων τάξης $O(1)$ μηδενίζονται και έχουμε

$$Aq_{1T}^{\pm} + \frac{1}{2}q_0^{\pm}\phi_{1TT}^{\pm} + \mathrm{Im}[\mathrm{F}[\mathrm{u_\infty}]] - q_{0Z}^{\pm} = 0.$$

Γνωρίζουμε ότι $q_0 \to u_\infty$ και $u_{\infty Z} = \mathrm{Im[F[u_\infty]]}$ η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην

$$Aq_{1T}^{\pm} + \frac{u_\infty}{2}\phi_{1TT}^{\pm} = 0. \tag{3.35}$$

Υποθέτουμε πως $q_1 \to c$, c σταθερά, καθώς $T \to \pm\infty$ άρα $q_{1T} \to 0$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα $\phi_{1TT} \to 0$. Τελικά, οι συναρτήσεις q_1 και ϕ_{1T} που περιγράφουν το ερμάριο τείνουν ασυμπτωτικά σε σταθερές.

Παίρνοντας το όριο της σχέσης (3.32) οι παράγωγοι ως προς T των όρων τάξης $O(1)$ όπως και η παράγωγος της συνάρτησης q_1 μηδενίζονται και έχουμε

$$Aq_0^{\pm}\phi_{1T}^{\pm} + 3(q_0^{\pm})^2 q_1^{\pm} - u_\infty^2 q_1^{\pm} - \mathrm{Re[F[u_\infty]]} - q_0^{\pm}\phi_{0Z}^{\pm} = 0.$$

Επειδή $q_0 \to u_\infty$ έχουμε

$$A\phi_{1T}^{\pm} + 2u_\infty q_1^{\pm} = \frac{\mathrm{Re[F[u_\infty]]}}{u_\infty} + \phi_{0Z}^{\pm}. \tag{3.36}$$

Παίρνοντας το όριο της ϕ_{0Z} όταν $T \to \pm\infty$

$$\phi_{0Z}^{\pm} = \pm\frac{(AB_Z - BA_Z)}{u_\infty^2} + \sigma_{0Z}$$

και αντικαθιστώντας το στη σχέση (3.36) έχουμε τελικά

$$A\phi_{1T}^{\pm} + 2u_\infty q_1^{\pm} = \frac{\mathrm{Re[F[u_\infty]]}}{u_\infty} \pm \frac{(AB_Z - BA_Z)}{u_\infty^2} + \sigma_{0Z}. \tag{3.37}$$

Ορίζουμε ως $\Delta\phi_0 = 2\tan^{-1}(B/A)$ τη φάση κατά μήκος του πυρήνα του σολιτονίου και επιλέγουμε για παραμέτρους A και B τις ποσότητες $A = u_\infty \cos(\Delta\phi_0/2)$ και $B = u_\infty \sin(\Delta\phi_0/2)$.

Παραγωγίζοντας τις ποσότητα $\Delta\phi_0$ ως προς Z έχουμε

$$\Delta\phi_{0Z} = \frac{2(AB_Z - BA_Z)}{u_\infty^2}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τη συνοριακή συνθήκη στο άπειρο για τη φάση

$$\phi_Z^{\pm} = \frac{d\phi}{dz}\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\varepsilon}\phi_z^{\pm} = \frac{1}{\varepsilon}\left(u_\infty^2 - \frac{\varepsilon\mathrm{Re[F[u_\infty]]}}{u_\infty}\right)$$

καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση

$$A\phi_{1T}^{\pm} + 2u_\infty q_1^{\pm} = -\phi_Z^{\pm} \pm \frac{\Delta\phi_{0Z}}{2} + \sigma_{0Z}. \tag{3.38}$$

Είναι μια πρώτη σχέση που συνδέει την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων q_1 και ϕ_1, που αναφέρονται στο ερμάριο, με τη μεταβολή της φάσης.

3.3 Διατηρητικοί Νόμοι υπό την επίδραση τυχαίας διαταραχής

Η σχέση (3.38) στην οποία έχουμε καταλήξει δεν μας δίνει αρκετά στοιχεία για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις q_1 και ϕ_1 που περιγράφουν το ερμάριο ασυμπτωτικά. Για να δοθεί λύση σε αυτό καταφεύγουμε στους διατηρητικούς νόμους που ισχύουν για την εξίσωση NLS.

Υπενθυμίζουμε πως η γενική δομή ενός σκοτεινού σολιτονίου χωρίζεται σε δύο περιοχές: την εσωτερική περιοχή που αποτελείται από τον πυρήνα του σολιτονίου και το ερμάριο που δημιουργείται γύρω του και την εξωτερική περιοχή που αποτελείται το συνεχές υπόβαθρο. Η συναρμογή των δύο περιοχών επιτυγχάνεται με την προσθήκη του οριακού στρώματος, στο οποίο ευθύνεται η δημιουργία του ερμαρίου. Παρατηρούμε πως το ερμάριο διαδίδεται με ταχύτητα $V(Z) = u_\infty(Z)$ και λόγω του κινούμενου πλαισίου αναφοράς $T = t - \int_0^z A(\varepsilon s)ds - t_0$ και $\zeta = z$, τα σύνορα του ερμαρίου είναι ίσα με

$$S_L(\zeta) = -\int_0^\zeta [u_\infty(\varepsilon s) + A(\varepsilon s)]ds \quad \text{και} \quad S_R(\zeta) = \int_0^\zeta [u_\infty(\varepsilon s) - A(\varepsilon s)]ds. \tag{3.39}$$

Τα σύνορα αυτά καθορίζουν τα όρια μεταξύ των δύο περιοχών, όταν $t = S_L$ και $t = S_R$ αντίστοιχα. Στο Σχήμα 3.1 δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις του πλάτους και της φάσης του σολιτονίου στις οποίες φαίνονται τα σύνορα του ερμαρίου.

Θα ξεκινήσουμε με την εξίσωση εξέλιξης της Χαμιλτονιανής

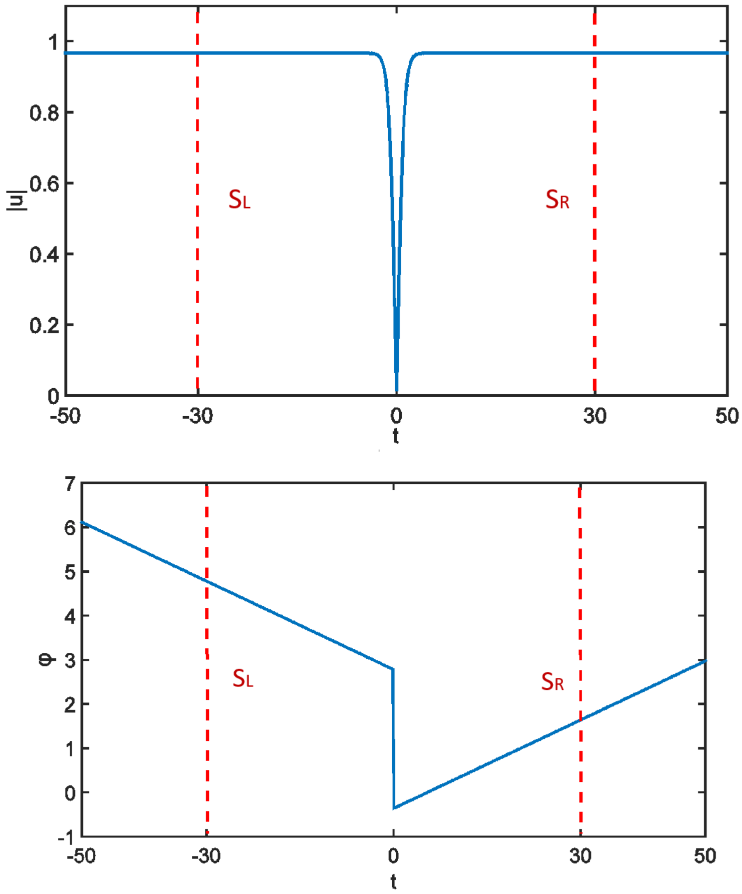
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}(u_\infty^2 - |u_t|^2)^2\right]dt = \varepsilon(u_\infty^2)_Z \int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - |u|^2]dt \\ +2\varepsilon \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_z^* dt.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Εκτελώντας πρώτα την αλλαγή των μεταβλητών στο κινούμενο πλαίσιο αναφοράς $T = t - \int_0^z A(\varepsilon s)ds - t_0$ και $\zeta = z$, έχουμε

$$u_\zeta^* = \frac{\partial u^*}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \zeta} = -Au_T^* \quad \text{και} \quad u_t = \frac{\partial u^*}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = u_T.$$

Η εξίσωση (3.40) μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}|u_T|^2 + \frac{1}{2}(u_\infty^2 - |u_t|^2)^2\right]dT = \varepsilon(u_\infty^2)_Z \int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - |u|^2]dT \\ -2\varepsilon \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]Au_T^* dT.\end{aligned}$$



Σχήμα 3.1: Τυπικό μαύρο σολιτόνιο. Οι διακεκομμένες κόκκινες γραμμές είναι τα σύνορα S_L και S_R του ερμαρίου στα αριστερά και δεξιά του σολιτονίου αντίστοιχα. Στο πάνω σχήμα βλέπουμε το πλάτος του σολιτονίου και στο κάτω σχήμα τη φάση του.

Γράφοντας τη συνάρτηση u στη μορφή $u = qe^{i\phi}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}[(q_T + iq\phi_T)^2 + (u_\infty^2 - q^2)^2]dT = 2\varepsilon(u_\infty^2)_Z\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - q^2]dT \\ -4\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u]Au_T^* dT\end{aligned} \tag{3.41}$$

όπου $\dfrac{d}{d\zeta} = \varepsilon\dfrac{d}{dZ}$.

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις q και ϕ σε σειρά γύρω από το ε και για να υπάρχει ισορροπία στα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης κρατάμε όρους τάξης $O(\varepsilon)$

$$\frac{d}{dZ}\int_{-\infty}^{\infty}[q_{0T}^2 + q_0^2\phi_{0T}^2 + (u_\infty^2 - q_0^2)^2]dT =$$
$$2(u_\infty^2)_Z\int_{-\infty}^{\infty}(u_\infty^2 - q_0^2)dT - 4A\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u_0]Au_{0T}^*dT. \tag{3.42}$$

Από τη γενική μορφή του σκοτεινού σολιτονίου βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dZ}\int_{-\infty}^{\infty}[q_{0T}^2 + q_0^2\phi_{0T}^2 + (u_\infty^2 - q_0^2)^2]dT = 8B^2B_Z$$

και

$$2(u_\infty^2)_Z\int_{-\infty}^{\infty}(u_\infty^2 - q_0^2)dT - 4A\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u_0]Au_{0T}^*dT = 4(u_\infty^2)_Z B - 4A\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u_0]u_{0T}^*dT.$$

Η σχέση (3.42) μετασχηματίζεται στην

$$2B^2B_Z = (u_\infty^2)_Z B - A\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u_0]u_{0T}^*dT. \tag{3.43}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση $u_\infty^2(Z) = A^2(Z) + B^2(Z)$ ως προς Z έχουμε

$$(u_\infty^2)_Z = 2AA_Z + 2BB_Z$$

και αντικαθιστώντας την στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει τελικά

$$2BA_Z = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u_0]u_{0T}^*dT \tag{3.44}$$

όπου $u_0 = q_0e^{i\phi_0}$. Η σχέση (3.44) μας δίνει πληροφορίες για τη μεταβολή της παραμέτρου A στην αργή κλίμακα Z.

Οι εξισώσεις της ενέργειας και της ορμής μετά την αλλαγή των μεταβλητών στο κινούμενο πλαίσιο αναφοράς παραμένουν αμετάβλητες

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_\infty^2 - |u|^2\right)dT = 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dT \tag{3.45}$$

$$\frac{d}{d\zeta}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}uu_T^*dT = 2\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u]u_T^*dT, \tag{3.46}$$

όπου U_∞ η λύση στο άπειρο. Ομοίως, γράφουμε τη συνάρτηση u στη μορφή $u = qe^{i\phi}$ και αναπτύσσοντας σε σειρά γύρω από το ε έχουμε για την ενέργεια

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_\infty^2 - q_0^2 - 2\varepsilon q_0 q_1\right)dT = 2\varepsilon \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dT.$$

Παρατηρούμε πως στην περιοχή του απείρου οι όροι που αναφέρονται στο ερμάριο μηδενίζονται επειδή μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική συμπεριφορά των όρων q_0 και ϕ_0 που αναφέρονται στο συνεχές υπόβαθρο. Αντίθετα στα σύνορα του ερμαρίου οι συναρτήσεις q_1 και ϕ_1 δε μηδενίζονται γιατί μας ενδιαφέρει η μελέτη του. Για το λόγο αυτό έχουμε

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - q_0^2]dT - 2\varepsilon\frac{d}{d\zeta}\int_{S_L(\zeta)}^{S_R(\zeta)} q_0 q_1 dT = 2\varepsilon \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dT$$

$\Longleftrightarrow$

$$\varepsilon\frac{d}{dZ}\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - q_0^2]dT - 2\varepsilon\frac{d}{d\zeta}\int_{S_L(\zeta)}^{S_R(\zeta)} q_0 q_1 dT = 2\varepsilon \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dT$$

$\Longleftrightarrow$

$$2\frac{d}{dZ}B - 2\frac{d}{d\zeta}\int_{S_L(\zeta)}^{S_R(\zeta)} q_0 q_1 dT = 2\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dT$$

$\Longleftrightarrow$

$$B_Z - \left[\frac{d}{d\zeta}S_R(\zeta)q_0^+ q_1^+ - \frac{d}{d\zeta}S_L(\zeta)q_0^- q_1^-\right] = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dT,$$

όπου

$$\frac{d}{d\zeta}S_R(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\left(-\int_0^\zeta [u_\infty(\varepsilon s) + A(\varepsilon s)]ds\right) = (u_\infty - A)$$

και

$$\frac{d}{d\zeta}S_L(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\left(-\int_0^\zeta [u_\infty(\varepsilon s) + A(\varepsilon s)]ds\right) = -(u_\infty + A).$$

Τελικά, έχουμε

$$B_Z - u_\infty[(u_\infty - A)q_1^+ + (u_\infty + A)q_1^-] = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*]dT. \quad (3.47)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει πληροφορίες για τη μεταβολή της παραμέτρου B στην αργή κλίμακα Z, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση q_1.

Ανάλογα για την ορμή έχουμε

$$\frac{d}{d\zeta}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} uu_T^* dT = 2\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_T^* dT$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}(q_0^2\phi_{0T} + \varepsilon q_0^2\phi_{1T} + 2\varepsilon q_0 q_1 \phi_{0T})dT = 2\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_T^* dT$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\varepsilon\frac{d}{dZ}\int_{-\infty}^{\infty} q_0^2\phi_{0T}dT - \frac{d}{d\zeta}\int_{S_L(\zeta)}^{S_R(\zeta)} \varepsilon(q_0^2\phi_{1T} + 2\varepsilon q_0 q_1\phi_{0T})dT = 2\varepsilon\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_T^* dT$$

$\Longleftrightarrow$

$$2(AB)_Z + \left[\frac{d}{d\zeta}S_R(\zeta)(q_0^2)^+\phi_{1t}^+ - \frac{d}{d\zeta}S_L(\zeta)(q_0^2)^-\phi_{1t}^-\right] = -2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_T^* dT.$$

Καταλήγουμε στην εξίσωση

$$2(AB)_Z + u_\infty^2[(u_\infty - A)\phi_{1T}^+ + (u_\infty + A)\phi_{1T}^-] = -2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_T^* dT \quad (3.48)$$

που περιγράφει τη μεταβολή των παραμέτρων A, B στην αργή κλίμακα Z, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση ϕ_{1T}.

Τέλος, θα ασχοληθούμε με την εξίσωση του κέντρου της ενέργειας

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} t(u_\infty^2 - |u|^2)dt = -\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} uu_t^* dt + 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} t(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*)dt$$

η οποία λόγω του κινούμενου πλαισίου αναφοράς γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}\left(T + \int_0^\zeta A + t_0\right)(u_\infty^2 - |u|^2)dT = -\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} uu_T^* dT \\ +2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\left(T + \int_0^\zeta A + t_0\right)(F[U_\infty]U_\infty^*) - F[u]u^*)dT\end{aligned} \quad (3.49)$$

και χωρίζεται σε επιμέρους σχέσεις στις οποίες μπορούμε να αναπτύξουμε την αδιαβατική θεωρία

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} T(u_\infty^2 - |u|^2)dT \quad (3.49.a)$$

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} T(u_\infty^2 - |u|^2)dT$$

$$+\left(\int_0^\zeta A + t_0\right)\left[\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - |u|^2]dT - 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*)dT\right] \tag{3.49.b}$$

$$A\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - |u|^2]dT + \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} uu_T^* dT \tag{3.49.c}$$

$$-\varepsilon t_{0Z}\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - |u|^2]dT + 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} T(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*)dT. \tag{3.49.d}$$

Η σχέση (3.49.a) μέσω του μετασχηματισμού $u = qe^{i\phi}$ μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} T(u_\infty^2 - |u|^2)dT = \frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} T(u_\infty^2 - q_0^2 - 2\varepsilon q_0 q_1 + \varepsilon^2 q_1^2)dT$$

από την οποία κρατώντας όρους τάξης $O(\varepsilon)$ έχουμε

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} T(u_\infty^2 - |u|^2)dT = -2\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} Tq_0q_1 dT = -2\frac{d}{d\zeta}\int_{-S_L(\zeta)}^{S_R(\zeta)} Tq_0q_1 dT =$$
$$-2\left[\frac{d}{d\zeta}S_R(\zeta)S_R q_0^+ q_1^+ - \frac{d}{d\zeta}S_L(\zeta)S_L q_0^- q_1^-\right]$$

Τελικά καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} T(u_\infty^2 - |u|^2)dT = -2u_\infty[S_R(u_\infty - A)q_1^+ + S_L(u_\infty + A)q_1^-]. \tag{3.50}$$

Από την εξίσωση της ενέργειας, σχέση (3.45), η σχέση (3.49.b) γίνεται

$$\left(\int_0^\zeta A + t_0\right)\left[\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - |u|^2]dT - 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u]u^*)dT\right] = 0. \tag{3.51}$$

Επίσης, είναι γνωστό από την εξίσωση της ενέργειας ότι

$$\frac{dE}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}[u_\infty^2 - |u|^2]dT = B_Z - u_\infty[(u_\infty - A)q_1^+ + (u_\infty + A)q_1^-].$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς Z έχουμε

$$E(Z) = 2B - 2u_\infty[S_R(Z)q_1^+ - S_L(Z)q_1^-] + \varepsilon E^{(1)}(Z) + O(\varepsilon^2). \tag{3.52}$$

Αναλόγως, από την εξίσωση της ορμής γνωρίζουμε ότι

$$\frac{dI}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} uu_T^* dT = -2(AB)_Z - u_\infty^2[(u_\infty - A)\phi_{1T}^+ + (u_\infty + A)\phi_{1T}^-].$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς Z έχουμε

$$I(Z) = -2AB - 2u_\infty^2[S_R(Z)\phi_{1T}^+ - S_L(Z)\phi_{1T}^-] + \varepsilon I^{(1)}(Z) + O(\varepsilon^2). \quad (3.53)$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στις σχέσεις $(3.49.a), (3.49.b), (3.49.c)$ και $(3.49.d)$, αντίστοιχα και κρατώντας όρους μέχρι τάξης $O(\varepsilon)$ η σχέση (3.49) μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} 2u_\infty[S_R(u_\infty - A)q_1^+ + S_L(u_\infty + A)q_1^-] - 2AB + 2u_\infty A[S_R q_1^+ - S_L q_1^-] \\ -\varepsilon AE^{(1)}(Z) + 2AB + u_\infty^2[S_R\phi_{1T}^+ - S_L\phi_{1T}^-] - \varepsilon I^{(1)}(Z) = \\ \varepsilon 2Bt_{0Z} - 2\varepsilon\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} T(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u_0]u_0^*)dT, \end{aligned}$$

όπου $u_0 = q_0 e^{i\phi_0}$.

Στο πρόβλημα τάξης $O(\varepsilon)$ έχουμε την εξίσωση

$$Bt_{0Z} = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} T(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u_0]u_0^*)dT \quad (3.54)$$

που περιγράφει τη μεταβολή της παραμέτρου t_0.

Επανερχόμαστε στο πρόβλημα τάξης $O(1)$

$$\begin{aligned} 2u_\infty[S_R(u_\infty - A)q_1^+ + S_L(u_\infty + A)q_1^-] \\ +2u_\infty A[S_R q_1^+ - S_L q_1^-] \\ +u_\infty^2[S_R\phi_{1T}^+ - S_L\phi_{1T}^-] = 0. \end{aligned}$$

$$\iff 2[S_R q_1^+ + S_L q_1^-] + [S_R\phi_{1T}^+ - S_L\phi_{1T}^-] = 0$$

$$\iff 2S_R q_1^+ + 2S_L q_1^- = -S_R\phi_{1T}^+ + S_L\phi_{1T}^-.$$

Για να υπάρχει ισορροπία στην παραπάνω σχέση ασυμπτωτικά στο $+\infty$ και $-\infty$, αντίστοιχα θα πρέπει να ισχύει

$$\phi_{1T}^+ = -2q_1^+ \quad \text{και} \quad \phi_{1T}^- = 2q_1^-. \quad (3.55)$$

Οι παραπάνω σχέσεις συνδέουν ασυμπτωτικά τις συναρτήσεις q_1 και ϕ_{1T}.

Γνωρίζουμε ότι η φάση του αδιατάραχτου προβλήματος δίνεται από τη σχέση $\phi = \tan\left[\frac{A(Z)}{B(Z)}\tanh(x)\right]^{-1} + \sigma_0(Z)$. Όταν $t \to \pm\infty$ τότε $\phi^{\pm} = \pm\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι έχουμε ορίσει ως $\Delta\phi_0$ την ποσότητα $\Delta\phi_0 = 2\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$, παίρνουμε

$$\phi^{\pm} = \pm\frac{\Delta\phi_0}{2}. \tag{3.56}$$

Υπενθυμίζουμε τη σχέση

$$A\phi_{1T}^{\pm} + 2u_{\infty}q_1^{\pm} = -\phi_Z^{\pm} \pm \frac{\Delta\phi_{0Z}}{2} + \sigma_{0Z}$$

η οποία λόγω της σχέσης (3.56) μετασχηματίζεται στην

$$A\phi_{1T}^{\pm} + 2u_{\infty}q_1^{\pm} = \pm\Delta\phi_{0Z} + \sigma_{0Z}.$$

Όταν $T \to \infty$ έχουμε

$$A\phi_{1T}^{+} + 2u_{\infty}q_1^{+} = \Delta\phi_{0Z} + \sigma_{0Z}$$

και $\phi_{1T}^{+} = -2q_1^{+}$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$q_1^{+} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{0Z} + \Delta\phi_{0Z}}{u_{\infty} - A}\right). \tag{3.57}$$

Ομοίως, όταν $T \to -\infty$ προκύπτει η σχέση

$$q_1^{-} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{0Z} - \Delta\phi_{0Z}}{u_{\infty} + A}\right). \tag{3.58}$$

Επανερχόμαστε στη σχέση

$$B_Z - u_{\infty}[(u_{\infty} - A)q_1^{+} + (u_{\infty} + A)q_1^{-}] = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_{\infty}]U_{\infty}^{*} - F[u]u^{*}]dT,$$

όπου αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις q_1^{+} και q_1^{-} από τις σχέσεις (3.57) και (3.58) έχουμε

$$B_Z - u_{\infty}[\frac{1}{2}(\sigma_{0Z} + \Delta\phi_{0Z}) + \frac{1}{2}(\sigma_{0Z} - \Delta\phi_{0Z})] = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_{\infty}]U_{\infty}^{*} - F[u_0]u_0^{*}]dT$$

$$\Longleftrightarrow u_{\infty}\sigma_{0Z} = B_Z - \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}[F[U_{\infty}]U_{\infty}^{*} - F[u_0]u_0^{*}]dT. \tag{3.59}$$

Η παραπάνω σχέση αναφέρεται στη μεταβολή της παραμέτρου σ_0.

Η συγκεκριμένη ενότητα αναφέρεται στην εφαρμογή της αδιαβατικής θεωρίας με απώτερο σκοπό τη μελέτη της δυναμικής των Σκοτεινών Σολιτονίων. Αρχικά, βρήκαμε τη μεταβολή του συνεχούς υποβάθρου, που αποτελεί και τη συνοριακή συνθήκη στο άπειρο. Ακόμη, χρησιμοποιήσαμε τους διατηρητικός νόμους που ισχύουν για την εξίσωση NLS υπό την επίδραση μιας τυχαίας διαταραχής $F[u]$ και βρήκαμε εξισώσεις που περιγράφουν πλήρως τη μεταβολή των παραμέτρων ενός σκοτεινού σολιτονίου: $A, B, \sigma_0, t_0, \Delta\phi_0$. Συγκεκριμένα καταλήξαμε στο παρακάτω σύστημα ολικών διαφορικών εξισώσεων

$$u_{\infty Z} = \mathrm{Im}[F[U_\infty]] \tag{3.60}$$

$$2BA_Z = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u_0]u_{0T}^* dT \tag{3.61}$$

$$B_Z = \frac{u_\infty u_{\infty Z} - AA_Z}{B} \tag{3.62}$$

$$u_\infty \sigma_{0Z} = B_Z - \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u_0]u_0^*)dT + \mathrm{Re}[F[U_\infty]] \tag{3.63}$$

$$Bt_{0Z} = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} T(F[U_\infty]U_\infty^* - F[u_0]u_0^*)dT \tag{3.64}$$

$$\Delta\phi_{0Z} = \frac{2AB_Z - 2BA_Z}{u_\infty^2}, \tag{3.65}$$

όπου

$$\Delta\phi_0 = 2\tan^{-1}(\frac{B}{A}), \quad A = u_\infty \cos(\frac{\Delta\phi_0}{2}), \quad B = u_\infty \sin(\frac{\Delta\phi_0}{2}).$$

Επίσης, επιβεβαιώνεται η δημιουργία και η διάδοση του ερμαρίου. Οι σχέσεις

$$q_1^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{0Z} + \Delta\phi_{0Z}}{u_\infty - A}\right) \tag{3.66}$$

$$q_1^- = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{0Z} - \Delta\phi_{0Z}}{u_\infty + A}\right) \tag{3.67}$$

$$\phi_{1T}^+ = -2q_1^+$$

$$\phi_{1T}^- = 2q_1^-$$

δίνουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων q_1 και ϕ_{1T} όταν $T \to \pm\infty$, αντίστοιχα και περιγράφουν πλήρως το ερμάριο.

3.4 Συνολική Φάση

Συγκρίνουμε τις σχέσεις

$$2BA_Z = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u_0]u_{0T}^* dT \tag{3.68}$$

$$2(AB)_Z + u_\infty^2[(u_\infty - A)\phi_{1T}^+ + (u_\infty + A)\phi_{1T}^-] = -\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u_0]u_{0T}^* dT \tag{3.69}$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} 2(AB)_Z + u_\infty^2[(u_\infty - A)\phi_{1T}^+ + (u_\infty + A)\phi_{1T}^-] = -4BA_Z \\ \Longleftrightarrow 2(AB)_Z + u_\infty^2[(u_\infty - A)\phi_{1T}^+ + (u_\infty + A)\phi_{1T}^-] = -4BA_Z \\ \Longleftrightarrow 2(AB)_Z + 4BA_Z + u_\infty^2\frac{d}{d\zeta}[\phi_1(S_R) - \phi_1(S_L)] = 0 \\ \Longleftrightarrow 2AB_Z - 2A_ZB + u_\infty^2\frac{d}{d\zeta}[\phi_1(S_R) - \phi_1(S_L)] = -8A_ZB. \end{aligned}$$

Η ποσότητα A_ZB μηδενίζεται στην παραπάνω σχέση διότι αναφερόμαστε στα σύνορα του ερμαρίου, δηλαδή στη στιγμή που επιτυγχάνεται η συναρμογή των δύο τιμών των συναρτήσεων q_1 και ϕ_1 λόγω της προσθήκης του οριακού στρώματος. Όμως, στα σύνορα του ερμαρίου η εξέλιξη της συνάρτησης u_∞ είναι μηδενική επειδή η συνάρτηση u_∞ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Κατά συνέπεια, από την σχέση $u_\infty^2 = A^2 + B^2$ θα μηδενίζεται και η εξέλιξη της συνάρτησης A, συνεπώς και ο όρος A_ZB που γίνεται:

$$2(AB_Z - A_ZB) + \varepsilon u_\infty^2\frac{d}{dZ}[\phi_1(S_R) - \phi_1(S_L)] = 0. \tag{3.70}$$

Ορίζουμε ως $\Delta\phi_1$ την ποσότητα

$$\Delta\phi_1 = \phi_1(S_R) - \phi_1(S_L) \tag{3.71}$$

και υπενθυμίζουμε ότι

$$\frac{d}{dZ}\Delta\phi_0 = \frac{2(AB_Z - A_ZB)}{u_\infty^2}. \tag{3.72}$$

Η σχέση (3.70) με βάση τις σχέσεις (3.71) και (3.72) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη

$$\frac{d}{dZ}\Delta\phi_0 + \varepsilon\frac{d}{dZ}\Delta\phi_1 = 0. \tag{3.73}$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει πως η συνολική μεταβολή της φάσης μέχρι όρους τάξης $O(\varepsilon)$ στην εσωτερική περιοχή του σολιτονίου παραμένει σταθερή. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τη συνοριακή συνθήκη που βρήκαμε στο πρώτο κεφάλαιο, ότι δηλαδή η φάση στο άπειρο $\Delta\phi_\infty$ δε μεταβάλλεται υπό της επίδραση οποιασδήποτε διαταραχής και συνεπώς η προσθήκη του οριακού στρώματος λειτουργεί σωστά, εφόσον η μεταβολή της φάσης παραμένει σταθερή τόσο στην εσωτερική όσο και στην εξωτερική περιοχή.

3.5 Όροι ανώτερης τάξης

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η εύρεση της συνολικής λύσης u της εξίσωσης NLS υπό την επίδραση διαταραχής. Για το λόγο αυτό εφαρμόσαμε την αδιαβατική θεωρία, δηλαδή υποθέσαμε πως η συναρτησιακή μορφή του σολιτονίου παραμένει σταθερή και γράψαμε τη συνάρτηση u στη μορφή $u = u_0+\varepsilon u_1+O(\varepsilon^2)$. Από τη θεωρία αυτή προέκυψαν διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταβολή των παραμέτρων του σολιτονίου ως προς την αργή κλίμακα Z και περιγράφηκε ασυμπτωτικά το ερμάριο, δηλαδή ο όρος u_1. Για να είναι πιο ακριβής η προσέγγιση θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε την αναλυτική μορφή του όρου u_1. Επανερχόμαστε στην αρχική εξίσωση NLS

$$iu_z - \frac{1}{2}u_{tt} + (|u|^2 - u_\infty^2)u = \varepsilon F[u]. \tag{3.74}$$

Εισάγουμε την αργή κλίμακα $Z = \varepsilon z$ και αναπτύσσουμε τη λύση σε σειρά γύρω από το ε, $u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)$

$$u_z = u_z + \varepsilon u_Z = u_{0z} + \varepsilon(u_{0Z} + u_{1z}) + \varepsilon^2 u_{1Z}.$$

Κρατώντας όρους τάξης $O(\varepsilon)$ η σχέση μετασχηματίζεται στην

$$iu_{1z} + \left(-\frac{1}{2}\partial_t^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2\right)u_1 + (u_0^2)u_1^* = F[u_0] - iu_{0Z}.$$

Εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητών $T = t - \int_0^\zeta A(\varepsilon s)ds, z = \zeta$ προκύπτει

$$i\left(-Au_{1T} + u_{1\zeta}\right) + \left(-\frac{1}{2}\partial_T^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2\right)u_1 + (u_0)^2 u_1^* = F[u_0] - iu_{0Z}$$

$$\Longleftrightarrow iu_{1\zeta} + \left(-iA\partial_T - \frac{1}{2}\partial_T^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2\right)u_1 + (u_0)^2 u_1^* = F[u_0] - iu_{0Z},$$

όπου επειδή αναζητούμε στάσιμη λύση πρέπει $u_{1\zeta} = 0$ και παίρνουμε

$$\left(-iA\partial_T - \frac{1}{2}\partial_T^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2\right)u_1 + (u_0)^2 u_1^* = F[u_0] - iu_{0Z}, \tag{3.75}$$

όπου ο όρος u_{0Z} δίνεται από τη λύση u_0 του αδιατάρακτου προβλήματος

$$u_{0Z} = A_Z e^{i\sigma_0} + \frac{B_Z}{B}(u_0 - Ae^{i\sigma_0}) + u_{0T}\left(-t_{0Z} + \frac{B_Z}{B}T\right) + i\sigma_{0Z}u_0. \tag{3.76}$$

Στη σχέση (3.75) γράφουμε τις συναρτήσεις u_0, u_1 και την παράμετρο A στη μιγαδική τους μορφή

$$u_0 = \mathrm{Re}(u_0) + i\mathrm{Im}(u_0), \quad u_1 = \mathrm{Re}(u_1) + i\mathrm{Im}(u_1)$$

$$F[u_0] - iu_{0Z} = \mathrm{Re}(F[u_0] - iu_{0Z}) + i\mathrm{Im}(F[u_0] - iu_{0Z})$$

με

$$u_0 = (A + iB\tanh(BT))e^{i\sigma_0}$$

και έχουμε τότε

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\partial_T^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2 + \mathrm{Re}(u_0)^2 - \mathrm{Im}(u_0)^2\right)\mathrm{Re}(u_1)\\ +(A\partial_T + 2\mathrm{Re}(u_0)\mathrm{Im}(u_0))\mathrm{Im}(u_1)\\ +i(-A\partial_T + 2\mathrm{Re}(u_0)\mathrm{Im}(u_0))\mathrm{Re}(u_1)\\ +i\left(-\frac{1}{2}\partial_T^2 + 2|u_0|^2 - u_\infty^2 - \mathrm{Re}(u_0)^2 + \mathrm{Im}(u_0)^2\right)\mathrm{Im}(u_1)\\ = \mathrm{Re}(F[u_0] - iu_{0Z}) + i\mathrm{Im}(F[u_0] - iu_{0Z}).\end{aligned}$$

Χωρίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέλος της παραπάνω σχέσης

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\partial_T^2 + (3A^2 + B^2\tanh^2(BT) - u_\infty^2)\right)\mathrm{Re}(u_1)\\ +(A\partial_T + 2AB\tanh(BT))\mathrm{Im}(u_1) = \mathrm{Re}(F[u_0] - iu_{0Z})\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}\partial_T^2 + (A^2 + 3B^2\tanh^2(BT) - u_\infty^2)\right)\mathrm{Im}(u_1)\\ +(-A\partial_T + 2AB\tanh(BT))\mathrm{Re}(u_1) = \mathrm{Im}(F[u_0] - iu_{0Z}).\end{aligned} \tag{3.78}$$

Από τις σχέσεις (3.77) και (3.78) καταλήγουμε στο εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης $LU_1 = G[u_0]$, όπου $L, U_1, G[u_0]$ είναι οι πίνακες

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\partial_T^2 + (3A^2 + B^2\tanh^2(BT) - u_\infty^2) & A\partial_T + 2AB\tanh(BT) \\ -A\partial_T + 2AB\tanh(BT) & -\frac{1}{2}\partial_T^2 + (A^2 + 3B^2\tanh^2(BT) - u_\infty^2) \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(u_1) \\ \mathrm{Im}(u_1) \end{bmatrix}$$

και

$$G[u_0] = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(F[u_0] - iu_{0Z}) \\ \mathrm{Im}(F[u_0] - iu_{0Z}) \end{bmatrix}.$$

Για το ομογενές σύστημα $LU_1 = 0$ βρίσκουμε τις εξείς λύσεις

$$U_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{sech}^2(BT) \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = \begin{bmatrix} B\tanh(BT) \\ -A \end{bmatrix}$$

$$U_{13} = \begin{bmatrix} B(BT\tanh(BT) - 1) \\ A\left(-BT + \frac{3}{2}BT\mathrm{sech}^2(BT) + \frac{3}{2}\tanh(BT)\right) \end{bmatrix}$$

$$U_{14} = \begin{bmatrix} \frac{-4AB}{A^2-B^2}\cosh^2(BT) \\ 3BT\mathrm{sech}^2(BT) + 4\tanh(BT) + \tanh(BT)\cosh(2BT) \end{bmatrix}.$$

Η πλήρης λύση της εξίσωσης (3.75) είναι της μορφής

$$u_1 = c_1U_{11} + c_2U_{12} + c_3U_{13} + c_4U_{14} + U_{1p} \tag{3.79}$$

όπου U_{1p} είναι μια μερική λύση του μη-ομογενούς συστήματος και c_1, c_2, c_3, c_4 είναι συναρτήσεις του Z. Θεωρούμε $c_4 = 0$ για να αποφύγουμε την εκθετική αύξηση του όρου U_{14}. Εφόσον η U_{1p} είναι λύση του μη-ομογενούς συστήματος από τη σχέση (3.76) συμπεραίνουμε πως θα περιέχει τον όρο t_{0Z}, οπότε χωρίζουμε την U_{1p} σε δύο μέρη $U_{1p} = t_{0Z}U_{1p}^{(1)} + U_{1p}^{(2)}$

$$u_1 = c_1U_{11} + c_2U_{12} + c_3U_{13} + t_{0Z}U_{1p}^{(1)} + U_{1p}^{(2)} \tag{3.80}$$

με

$$U_{1p}^{(1)} = 1 - i\frac{A}{B}[BT\mathrm{sech}^2(BT) + \tanh(BT)]. \tag{3.81}$$

Γράφουμε τη συνάρτηση u σε όρους πλάτους και φάσης σε σειρά γύρω από το ε,

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 = (q_0 + q_1)e^{i(\phi_0 + \varepsilon\phi_1)} = q_0e^{i\phi_0} + \varepsilon(q_1 + i\phi_1q_0)e^{i\phi_0} + O(\varepsilon^2)$$

έτσι ώστε

$$u_0 = q_0e^{i\phi_0}$$

$$u_1 = (q_1 + i\phi_1q_0)e^{i\phi_0}$$

κι επειδή $e^{i\phi_0} = \cos(\phi_0) + i\sin(\phi_0)$, τελικά έχουμε

$$u_1 = [q_1\cos(\phi_0) - \phi_1 q_0 \sin(\phi_0)] + i[q_1 \sin(\phi_0) + \phi_1 q_0 \cos(\phi_0)].$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς T και παίρνοντας το όριο όταν $T \to \pm\infty$ έχουμε

$$u_{1T}^{\pm} = i\phi_{1T}^{\pm} q_0^{\pm} e^{i\phi_0^{\pm}} = i\phi_{1T}^{\pm} u_{\infty} = i\phi_{1T}^{\pm}(A \pm iB) = i\phi_{1T}^{\pm}(A) - i\phi_{1T}^{\pm}(\pm B)$$
$$\Longleftrightarrow u_{1T}^{\pm} = i\phi_{1T}^{\pm}(A) - i\phi_{1T}^{\pm}(\pm B). \tag{3.82}$$

Επειδή οι παράγωγοι των συναρτήσεων U_{11}, U_{12}και U_{1p} ως προς T είναι μηδέν όταν $T \to \pm\infty$, προκύπτει από τη σχέση (3.80) η

$$u_{1T}^{\pm} = c_3 U_{13T}^{\pm}. \tag{3.83}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.82) και (3.83) μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση c_3.

Επίσης, έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε μια σχέση που να περιγράφει τη Χαμιλτονιανή τάξης $O(\varepsilon^2)$. Υπενθυμίζουμε την εξίσωση της μεταβολής της Χαμιλτονιανής

$$\frac{dH}{dz} = \varepsilon\left(E\frac{d}{dZ}u_{\infty}^2 + 2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_z^* dt\right) \tag{3.84}$$

στην οποία, για την άμεση μελέτη του φαινομένου, εισάγουμε την αργή κλίμακα $Z = \varepsilon z$, εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητών στο κινούμενο πλαίσιο αναφοράς, $T = t - \int_0^z A(\varepsilon s)ds - t_0$ και παίρνουμε

$$u_z^* = \frac{\partial u^*}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial u^*}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} = \varepsilon u_Z^* - A u_T^*.$$

Η σχέση (3.84) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{dH}{dz} = \varepsilon\left(E\frac{d}{dZ}u_{\infty}^2 - 2A\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_T^* dT\right) + 2\varepsilon^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F[u]u_Z^* dT. \tag{3.85}$$

Υπολογίζω τα επιμέρους μέρη του δεξί μέλους της παραπάνω σχέσης αναπτύσσοντας τη λύση u σε σειρά γύρω από το ε, $u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)$ και κρατώντας όρους τάξης $O(\varepsilon)$ και τάξης $O(\varepsilon^2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\varepsilon E\frac{d}{dZ}u_{\infty}^2 = \varepsilon\frac{d}{dZ}u_{\infty}^2\int_{-\infty}^{\infty}[u_{\infty}^2 - |u|^2]dT &= \varepsilon\frac{d}{dZ}u_{\infty}^2\int_{-\infty}^{\infty}[-\varepsilon(u_0 u_1^* + u_0^* u_1)]dT \\ &= \varepsilon\frac{d}{dZ}u_{\infty}^2\int_{-\infty}^{\infty}[-2\varepsilon\mathrm{Re}(u_0 u_1^*)]dT\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$-2A\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u]u_T^*dT = -2A\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}[F[u_0+\varepsilon u_1]u_{0T}^* + \varepsilon F[u_0]u_{1T}^*]dT. \quad (3.87)$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι

$$\frac{d}{dz}u_\infty^2 = 2u_\infty\frac{du_\infty}{dz},$$

η οποία με βάση την σχέση

$$\frac{d}{dz}u_\infty^2 = \varepsilon\frac{d}{dZ}u_\infty^2 = \mathrm{Im}[F[u_\infty]]$$

μετασχηματίζεται στην

$$\varepsilon\frac{d}{dZ}u_\infty^2 = 2u_\infty\mathrm{Im}[F[u_\infty]]. \quad (3.88)$$

Τελικά, η σχέση (3.85) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{dH}{dz} = \varepsilon\frac{dH_1}{dZ} + \varepsilon^2\frac{dH_2}{dZ} = -4\varepsilon u_\infty\mathrm{Im}[F[u_\infty]]\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}u_0u_1^*dT$$
$$-2\varepsilon A\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}[F'[u_0][u_1]u_{0T}^* + \varepsilon F[u_0]u_{1T}^*]dT + 2\varepsilon^2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}F[u_0]u_{0Z}^*dT \quad (3.89)$$

όπου συμβολίζουμε με H_1 τη Χαμιλτονιανή που αναφέρεται σε όρους τάξης $O(\varepsilon)$, με H_2 την Χαμιλτονιανή που αναφέρεται σε όρους τάξης $O(\varepsilon^2)$ και ισχύει

$$F'[u_0][u_1] = \frac{d}{d\varepsilon}F[u_0+\varepsilon u_1].$$

Καταλήξαμε σε μια δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της Χαμιλτονιανής για όρους μέχρι τάξης $O(\varepsilon^2)$. Υπενθυμίζουμε το διατηρητικό νόμο που ισχύει για την Χαμιλτονιανή στο κινούμενο πλαίσιο αναφοράς

$$H = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}|u_T|^2 + \frac{1}{2}(u_\infty^2 - |u|^2)^2\right]dT$$

όπου γράφοντας τη συνάρτηση u στη μορφή $u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)$ προκύπτει για την H_1,

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{Re}(u_{0T}u_{1T}^*) + (u_\infty^2 - |u_0|^2)\mathrm{Re}(u_0u_1^*)]dT. \quad (3.90)$$

Αντίστοιχα, για την H_2 έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{dH_2}{d\zeta} &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\zeta}\int_{S_L}^{S_R}[q_{1T}^2 + q_0^2\phi_{1T}^2 + 4q_0^2 q_1^2]dT \\
&= \frac{1}{2}(u_\infty - A)((q_{1T}^+)^2 + u_\infty^2(\phi_{1T}^+)^2) + 4u_\infty^2(q_1^+)^2) \\
&+ \frac{1}{2}(u_\infty + A)((q_{1T}^-)^2 + u_\infty^2(\phi_{1T}^-)^2) + 4u_\infty^2(q_1^-)^2) \\
&= \frac{1}{2}(u_\infty - A)8u_\infty^2(q_1^+)^2 + \frac{1}{2}(u_\infty + A)8u_\infty^2(q_1^-)^2 \\
\Longleftrightarrow \frac{dH_2}{d\zeta} &= 4u_\infty^2[u_\infty((q_1^+)^2 + (q_1^-)^2) - A((q_1^+)^2 - (q_1^-)^2)]. \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογες

4.1 Αναλωτικές Διαταραχές

Ας επιστρέψουμε στη διαταραχή $F[u] = i\gamma u_{tt}$. Είναι ένα είδος αναλωτικής διαταραχής δηλαδή διαταραχής που καταναλίσκει ενέργεια. Υποθέτουμε πως η λύση του αδιατάραχτου προβλήματος είναι ένα μαύρο σολιτόνιο, δηλαδή η παράμετρος A μηδενίζεται, και η ταχύτητα του συνεχούς υποβάθρου τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισούται με $u_\infty(0) = 1$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ταχύτητα u_∞ να παραμένει σταθερή ίση με $u_\infty(Z) = 1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω το ερμάριο κινείται κι αυτό με σταθερή ταχύτητα $V = \pm u_\infty$.

Εφαρμόζοντας την αδιαβατική θεωρία που αναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια καταλήγουμε στις εξής διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταβολή των παραμέτρων του σολιτονίου $u_\infty, A, B, \sigma_0, t_0, \Delta\phi_0$,

$$u_{\infty Z} = 0 \tag{4.1}$$

$$A_Z = 0 \tag{4.2}$$

$$B_Z = 0 \tag{4.3}$$

$$\sigma_{0Z} = -\frac{4}{3}\frac{\gamma B^3}{u_\infty} \tag{4.4}$$

$$t_{0Z} = 0 \tag{4.5}$$

$$\Delta\phi_{0Z} = 0. \tag{4.6}$$

Επίσης, μπορούμε να περιγράψουμε ασυμπτωτικά το ερμάριο

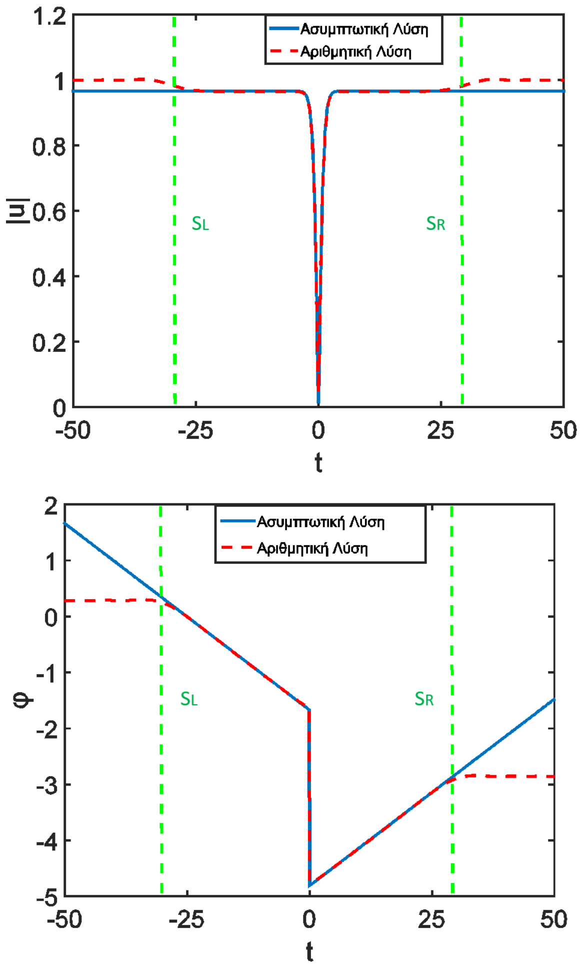
$$q_1^+ = -\frac{2}{3}\frac{\gamma B^3}{u_\infty(u_\infty - A)} \tag{4.7}$$

$$q_1^- = -\frac{2}{3}\frac{\gamma B^3}{u_\infty(u_\infty + A)} \tag{4.8}$$

$$\phi_{1T}^{+} = -2q_1^{+} \tag{4.9}$$

$$\phi_{1T}^{-} = 2q_1^{-}. \tag{4.10}$$

Παρατηρούμε στο Σχήμα 4.1 ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα συμπίπτουν με τα αποτελέσματα της ασυμπτωτικής λύσης που βρίσκουμε από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, τόσο για το πλάτος όσο και για τη φάση ενός μαύρου σολιτονίου. Η συναρτησιακή μορφή του σολιτονίου παραμένει αμετάβλητη στην εσωτερική περιοχή, οριοθετείται το ερμάριο από τα σύνορα του S_L και S_R και ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στο άπειρο. Επίσης θα παρουσιάσουμε στο Σχήμα 4.2 τα αριθμητικά αποτελέσματα σε σύγκριση με τα αποτελέσματα των αναλυτικών προσεγγίσεων.

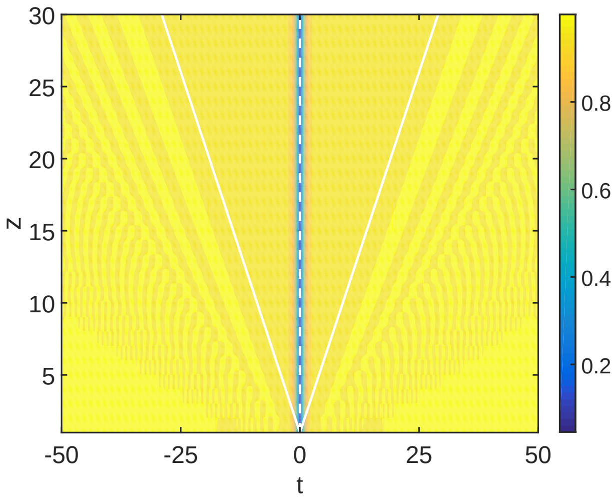


Σχήμα 4.1: Σύγκριση αριθμητικών και ασυμπτωτικών προσεγγίσεων. Στο πάνω σχήμα βλέπουμε τη σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων και της ασυμπτωτικής προσέγγισης του πλάτους ενός τυπικού μαύρου σολιτονίου και στο κάτω σχήμα την αντίστοιχη σύγκριση της φάσης του σολιτονίου. Η μπλε γραμμή είναι η ασυμπτωτική λύση ενώ η κόκκινη είναι η αριθμητική. Οι διακεκομμένες πράσινες γραμμές είναι τα σύνορα του ερμαρίου. Έχουμε $u_\infty = 1, z = 30, \varepsilon\gamma = 0.05$.

4.1.1 Ένα πιο γενικό παράδειγμα

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με μια πιο γενική διαταραχή, την

$$F[u] = i\gamma u + i\delta|u|^2 u + i\beta u_{tt} + i\mu(|u|^2 u)_t + (i\nu + \sigma_R)u(|u|^2)_t \tag{4.11}$$



Σχήμα 4.2: Εξέλιξη ενός τυπικού μαύρου σολιτονίου υπό την επίδραση διαταραχής και η δημιουργία του ερμαρίου. Η άσπρη γραμμή δείχνει την ταχύτητα του ερμαρίου ενώ η διακεκομμένη άσπρη τον πυρήνα του σολιτονίου. Έχουμε $\varepsilon\gamma = 0.05$ και $u_\infty = 1$.

και θα μελετήσουμε τη δυναμική σκοτεινών σολιτονίων υπό την επίδραση ανώτερης τάξης μη γραμμικών αναλωτικών όρων. Συγκεκριμένα, οι συντελεστές $\gamma, \delta, \nu, \sigma_R$ αναφέρονται στην απόκτηση ή στην απώλεια ενέργειας ενώ οι συντελεστές β και μ αναφέρονται στη διασπορά και την κλίση αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την αδιαβατική θεωρία και με αρχική συνθήκη το σκοτεινό σολιτόνιο

$$u(z,t) = [A + iB\tanh(BT)]e^{i\sigma_0}, \tag{4.12}$$

όπου $T = t - \int_0^z A(\varepsilon s)ds - t_0$ είναι ο πυρήνας του σολιτονίου, $A^2 + B^2 = u_\infty^2$ και $\Delta\phi_0 = 2\tan^{-1}(B/A)$ είναι η μεταβολή της φάσης, καταλήγουμε στις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταβολή των παραμέτρων του σολιτονίου

$$u_{\infty Z} = u_\infty(\gamma + \delta u_\infty^2) \tag{4.13}$$

$$A_Z = \delta A^3 + A\left(\gamma + \delta\frac{B^2}{3}\right) + 4\sigma_R\frac{B^4}{15} \tag{4.14}$$

$$B_Z = B\left[\gamma + 5\delta\frac{A^2}{3} + B^2\left(\delta - 4\sigma_R\frac{A}{15}\right)\right] \tag{4.15}$$

$$\sigma_{0Z} = \frac{B\left[-3\gamma - 7\delta A^2 + B^2\left(-5\delta - 4\sigma_R\frac{A}{5}\right)\right]}{3u_\infty} \tag{4.16}$$

$$\Delta\phi_{0Z} = \frac{4}{15}\left[B\left(5\delta A - 2\sigma_R B^2\right)\right] \tag{4.17}$$

$$t_{0Z} = \left(2\beta - \mu - \frac{2\nu}{3}\right)A^2 - \left(2\beta + 2\mu + \frac{4\nu}{3}\right)\left(A^2 + B^2\right). \tag{4.18}$$

Επίσης, μπορούμε να περιγράψουμε ασυμπτωτικά το ερμάριο από τις συναρτήσεις $q_1^{\pm}$ και $\phi_{1T}^{\pm}$

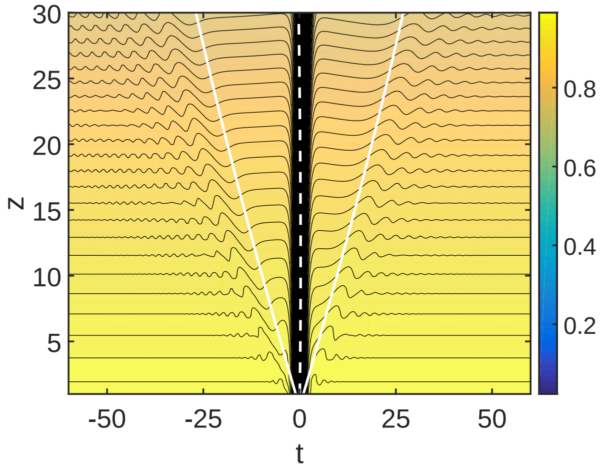
$$\begin{aligned} q_1^+ = \frac{1}{6u_\infty}\left[B\left(-3\gamma - 7\delta A^2 + B^2\left(-5\delta - 4\sigma_R\frac{A}{5}\right)\right)\right] \\ +\frac{4}{15}B\left(\frac{5\delta A - 2\sigma_R B^2}{u_\infty - A}\right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} q_1^- = \frac{1}{6u_\infty}\left[B\left(-3\gamma - 7\delta A^2 + B^2\left(-5\delta - 4\sigma_R\frac{A}{5}\right)\right)\right] \\ -\frac{4}{15}B\left(\frac{5\delta A - 2\sigma_R B^2}{u_\infty + A}\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

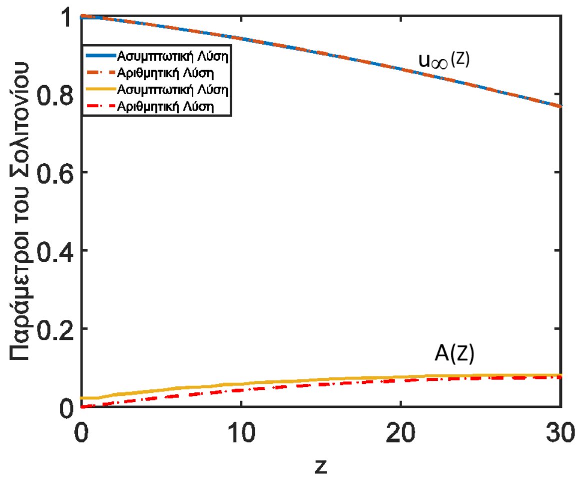
$$\phi_{1T}^+ = -2q_1^+ \tag{4.21}$$

$$\phi_{1T}^- = 2q_1^-. \tag{4.22}$$

Θα παρουσιάσουμε στο Σχήμα 4.3 τα αριθμητικά αποτελέσματα της εξίσωσης (4.11) σε σύγκριση με τα αποτελέσματα των αναλυτικών προσεγγίσεων. Χρησιμοποιούμε τους συντελεστές $\varepsilon\gamma = -0.025, \varepsilon\delta = 0.02, \varepsilon\mu = 0.01, \varepsilon\beta = 0.01, \varepsilon\nu = 0.01, \varepsilon\sigma_R = 0.02$. Υποθέτουμε για αρχική συνθήκη ένα τυπικό μαύρο σολιτόνιο και βλέπουμε την εξέλιξη του σολιτονίου, τη δημιουργία του ερμαρίου καθώς και τη διάδοση του με ταχύτητα ίση με $u_\infty(z)$. Ακόμη, παρατηρούμε πως η εξέλιξη των παραμέτρων u_∞ και A συμπίπτει τόσο στα αριθμητικά όσο και στα αναλυτικά αποτελέσματα.



Σχήμα 4.3: Εξέλιξη ενός τυπικού μαύρου σολιτονίου υπό την επίδραση διαταραχής και η δημιουργία του ερμαρίου. Η άσπρη γραμμή δείχνει την ταχύτητα του ερμαρίου ενώ η διακεκομμένη άσπρη τον πυρήνα του σολιτονίου. Έχουμε $\varepsilon\gamma = -0.025, \varepsilon\delta = 0.02, \varepsilon\mu = 0.01, \varepsilon\beta = 0.01, \varepsilon\nu = 0.01, \varepsilon\sigma_R = 0.02$ και $u_\infty = 1$.



Σχήμα 4.4: Εξέλιξη των παραμέτρων u_∞ και A. Οι συμπαγείς γραμμές αναφέρονται στα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων ενώ οι διακεκομμένες γραμμές αναφέρονται στα αριθμητικά αποτελέσματα. Έχουμε $\varepsilon\gamma = -0.025, \varepsilon\delta = 0.02, \varepsilon\mu = 0.01, \varepsilon\beta = 0.01, \varepsilon\nu = 0.01, \varepsilon\sigma_R = 0.02$ και $u_\infty = 1$.

Επανερχόμαστε στο σύστημα ολικών διαφορικών εξισώσεων

$$u_{\infty Z} = u_\infty(\gamma + \delta u_\infty^2) \tag{4.23}$$

$$A_Z = \delta A^3 + A\left(\gamma + \delta\frac{B^2}{3}\right) + 4\sigma_R\frac{B^4}{15} \tag{4.24}$$

$$B_Z = B\left[\gamma + 5\delta\frac{A^2}{3} + B^2\left(\delta - 4\sigma_R\frac{A}{15}\right)\right] \tag{4.25}$$

$$\sigma_{0Z} = \frac{B\left[-3\gamma - 7\delta A^2 + B^2\left(-5\delta - 4\sigma_R\frac{A}{5}\right)\right]}{3u_\infty} \tag{4.26}$$

$$\Delta\phi_{0Z} = \frac{4}{15}\left[B\left(5\delta A - 2\sigma_R B^2\right)\right] \tag{4.27}$$

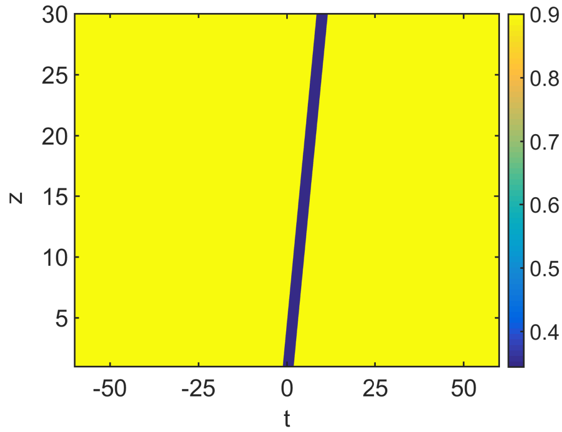
$$t_{0Z} = \left(2\beta - \mu - \frac{2\nu}{3}\right)A^2 - \left(2\beta + 2\mu + \frac{4\nu}{3}\right)\left(A^2 + B^2\right). \tag{4.28}$$

Μπορούμε όχι μόνο να περιγράψουμε τη μεταβολή των παραμέτρων του σολιτονίου και του ερμαρίου αλλά και να επιλέξουμε κατάλληλες σταθερές ικανές να μηδενίζονται οι παράγωγοι του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή έχουμε στάσιμη λύση και σταθερές ίσες με: $\varepsilon\gamma = -0.02, \varepsilon\delta = 0.02, \varepsilon\mu = 0.01, \varepsilon\beta = -0.02, \varepsilon\nu = 0.01, \varepsilon\sigma_R = 0.02$. Η τιμή των παραμέτρων u_∞, A δίνεται από τις σχέσεις

$$u_\infty^2 = -\frac{\gamma}{\delta} \tag{4.29}$$

$$A = \frac{-5\delta^2 + \sqrt{25\delta^4 - 16\gamma\delta\sigma_R^2}}{4\delta\sigma_R}. \tag{4.30}$$

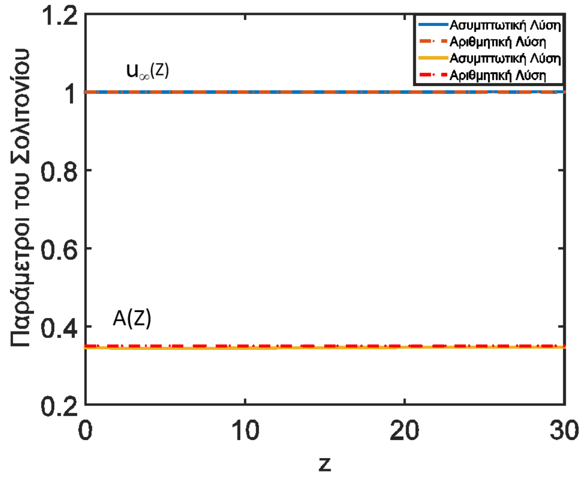
Αποτέλεσμα αυτού είναι η εξέλιξη ενός γκρι σολιτονίου με σταθερές παραμέτρους και η εξαφάνιση του ερμαρίου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5: Εξέλιξη ενός τυπικού γκρι σολιτονίου υπό την επίδραση διαταραχής με σταθερές παραμέτρους. Έχουμε $\varepsilon\gamma = -0.02, \varepsilon\delta = 0.02, \varepsilon\mu = 0.01, \varepsilon\beta = -0.02, \varepsilon\nu = 0.01, \varepsilon\sigma_R = 0.02$.

4.2 Συμπεράσματα

Μετά από την ολοκλήρωση του θεωρητικού μέρους της παρούσας μελέτης και την παράθεση των αποτελεσμάτων, είναι χρήσιμο να αναφερθούν τα συμπεράσματα στα οποία έχουμε καταλήξει. Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη της δυναμικής σκοτεινών σολιτονίων υπό την επίδραση διαταραχών. Για το λόγο αυτό στηριχθήκαμε στην αδιαβατική θεωρία διαταραχών. Υποθέσαμε δηλαδή, πως η συναρτησιακή μορφή του σολιτονίου παραμένει αμετάβλητη και αναπτύσσοντας τη



Σχήμα 4.6: Εξέλιξη των παραμέτρων u_∞ και A. Οι συμπαγείς γραμμές αναφέρονται στα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων ενώ οι διακεκομμένες γραμμές αναφέρονται στα αριθμητικά αποτελέσματα. Έχουμε $\varepsilon\gamma = -0.02, \varepsilon\delta = 0.02, \varepsilon\mu = 0.01, \varepsilon\beta = -0.02, \varepsilon\nu = 0.01, \varepsilon\sigma_R = 0.02$.

θεωρία διαταραχών γύρω από τη λύση της εξίσωσης NLS, προσεγγίσαμε τη δυναμική των σκοτεινών σολιτονίων, που στηρίζεται στην εξέλιξη των παραμέτρων του σολιτονίου.

Η θεωρία που αναπτύξαμε μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε τη μελέτη των σκοτεινών σολιτονίων, χωρίζοντας το πρόβλημα σε δύο περιοχές, την εσωτερική και την εξωτερική περιοχή. Η εσωτερική περιοχή αποτελείται από το σολιτόνιο και τον πυρήνα του, ενώ η εξωτερική περιοχή αναφέρεται στο συνεχές υπόβαθρο και τις συνοριακές συνθήκες στο άπειρο. Οι δύο περιοχές επικοινωνούν με την προσθήκη ενός οριακού στρώματος. Απόρροια αυτού είναι η δημιουργία του ερμαρίου και η εύρεση της πλήρους λύσης της εξίσωσης.

Στην εξίσωση μελετήθηκαν χωριστά τα επιμέρους τμήματα της λύσης και βρέθηκαν, με εξαιρετική προσέγγιση διαφορικές εξισώσεις που τα περιγράφουν. Χρήσιμο εργαλείο ήταν οι διατηρητικοί νόμοι που ισχύουν λόγω του αντίστροφου μετασχηματισμού σκέδασης για την εξίσωση NLS. Επίσης, βρέθηκαν σχέσεις ικανές να επιβεβαιώσουν την ύπαρξη του ερμαρίου. Υπό την επίδραση διαταραχών το ερμάριο διαδίδεται με ταχύτητα ίση με εκείνη του συνεχούς υποβάθρου και περιγράφεται ασυμπτωτικά η διάδοση του.

Για συγκεκριμένα παραδείγματα διαταραχών, πραγματοποιήθηκε σύγκριση των ασυμπτωτικών προσεγγίσεων με τα αποτελέσματα αριθμητικών μεθόδων. Η σύγκριση αυτή μας έδειξε την ταύτιση των αναλυτικών αποτελεσμάτων των διαφορικών εξισώσεων και των αριθμητικών αποτελεσμάτων για τις παραμέτρους του σολιτονίου. Επίσης, επιβεβαιώθηκε η θεωρία και η ύπαρξη του ερμαρίου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] M. J. Ablowitz, S. D. Nixon, T. P. Horikis, D. J. Frantzeskakis, *Perturbations of dark solitons*, Proc. Royal Soc. A **467**, 2597-2621, 2011.

[2] T. P. Horikis, D. J. Frantzeskakis, *Dark Solitons in the presence of higher-order effects*, Optics Letters, 38, 5098-5101, 2013.

[3] Sean D. Nixon, *Dark Soliton Perturbation Theory*, Phd Thesis, University of Colorado, 2010.

[4] Yuri S. Kivshar, Xiaoping Yang, *Perturbation-induced dynamics of dark soitons*, Physical Review E, 49, 1657-1670, 1994.

[5]Mark J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons.*