ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΣΙΜΑ ΜΑΡΙΝΑ

ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2016

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

''ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Ανάλυση - Άλγεβρα - Γεωμετρία)''

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 7η **Δεκεμβρίου 2016** από την Εξεταστική Επιτροπή:

Ιωάννης Πουρναράς (Επιβλέπων)	:	Αναπληρωτής Καθηγητής
Γεώργιος Καρακώστας	:	Καθηγητής
Παναγιώτης Τσαμάτος	:	Καθηγητής

Όλα τα μέλη της επιτροπής ανήκουν στο ακαδημαϊκό προσωπικό του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ιωάννη Πουρναρά για την ουσιαστική και συνεχή συνδρομή, την αδιάλειπτη επιστημονική καθοδήγηση καθώς και για το πραγματικό ενδιαφέρον που επέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της Διατριβής.

Επίσης, ευχαριστώ τον καθηγητή Γεώργιο Καρακώστα και τον καθηγητή Παναγιώτη Τσαμάτο για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους, οι οποίες συνέβαλαν στην άρτια παρουσίαση της Διατριβής.

Τέλος, ευχαριστώ τον Τομέα Μαθηματικής Αναλύσεως του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την δυνατότητα που μου παρείχε για την εκπόνηση αυτής της Διατριβής.

Πρόλογος

Θα λέμε ότι μια απεικόνιση f ενός συνόλου X στον εαυτό του έχει ***σταθερό σημείο*** (fixed point) αν υπάρχει ένα στοιχείο $u \in X$ τέτοιο ώστε $f(u) = u$. Με τον όρο ***θεώρημα σταθερού σημείου*** εννοούμε μια πρόταση που εξασφαλίζει, κάτω από ορισμένες συνθήκες, ότι μια απεικόνιση f του X στον εαυτό του έχει ένα ή περισσότερα σταθερά σημεία. Τα θεωρήματα σταθερού σημείου είναι πολύ ισχυρά αποδεικτικά εργαλεία στην Μαθηματική Ανάλυση. Ένα από τα ευρέως χρησιμοποιούμενα θεωρήματα σταθερού σημείου είναι το ***Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer*** που έγινε γνωστό στη βιβλιογραφία το 1910 και στη γενική του μορφή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 0.1 (***Brouwer***, [3], σ. 169)**.** *Ας είναι X ένα σύνολο της μορφής $X = \{x \in \mathbb{R}^{\nu} : \|x\|_{\varepsilon} \leq M\}$, όπου $\| \cdot \|_{\varepsilon}$ είναι η ευκλείδεια στάθμη του $\mathbb{R}^{\nu}$ και M ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Αν $f : X \to X$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in X$, τέτοιο ώστε $f(x_o) = x_0$.*

Για $\nu = 1$, πρόκειται για το γνωστό θεώρημα:

Θεώρημα 0.2 ([2], σ. 243)**.** *Αν $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ συνεχής, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο $[\alpha, \beta]$.*

Μερικά χρόνια αργότερα, το 1922, εμφανίστηκε ένα άλλο πολύ γνωστό θεώρημα σταθερού σημείου, το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach ή η Αρχή της Συστολής, το οποίο εξασφαλίζει μοναδικό σταθερό σημείο μιας συστολής σε έναν πλήρη σταθμητό χώρο. Ανάμεσα στα θεωρήματα σταθερού σημείου που θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τα συμπεράσματά μας είναι και τα θεωρήματα σταθερού σημείου του Schauder (1930), καθώς και κάποιες τροποποιήσεις αυτών, όπως το θεώρημα του Schaefer ή Leray-Schauder Alternative, το Nonlinear Alternative και το θεώρημα σταθερού σημείου των Boyd και Wong που αποτελεί γενίκευση της Αρχής της Συστολής και αποδεικνύει ότι μια γενικευμένη συστολή ενός πλήρους σταθμητού χώρου έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Με την πάροδο του χρόνου, παρουσιάστηκε μια πληθώρα θεωρημάτων σταθερού σημείου που χρησιμοποιούνται ευρέως στη μελέτη ύπαρξης λύσεων για μη γραμμικές ολοκληρωτικές και διαφορικές εξισώσεις. Ο ***Krasnosel'skii*** [57] χρησιμοποιώντας την Αρχή της Συστολής και κάποιες τοπολογικές μεθόδους, απέδειξε ότι το άθροισμα δύο τελεστών, που πληρούν ορισμένες υποθέσεις, έχει σταθερό σημείο. Το συγκεκριμένο θεώρημα ανήκει στην κατηγορία των υβριδικών (hybrid) θεωρημάτων σταθερού σημείου. Τα ***υβριδικά θεωρήματα σταθερού σημείου*** είναι πολύ πλούσια σε εφαρμογές, ιδιαίτερα στη θεωρία μη γραμμικών διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων. Τα θεωρήματα σταθερού σημείου που θα μελετήσουμε στην παρούσα Διατριβή είναι υβριδικά θεωρήματα σταθερού σημείου τύπου Krasnosel'skii.

Πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με το θεώρημα του Krasnosel'skii. Οι Burton και Kirk [20] επέκτειναν το παραπάνω θεώρημα συνδυάζοντας τα θεωρήματα των Banach και Schaefer. Ο Dhage απέδειξε θεωρήματα σταθερού σημείου για το γινόμενο δύο τελεστών, καθώς επίσης και για το συνδυασμό του αθροίσματος και του γινομένου τριών τελεστών [30], [23], [24]. Οι Avramescu, Vladimirescu, Barroso και Teixeira [9], [11], [12] και [13] παρουσίασαν θεωρήματα αυτού του τύπου βελτιώνοντας τις συνθήκες του θεωρήματος Krasnosel'skii. Ο G. L. Karakostas

[45] γενίκευσε το θεώρημα του Krasnosel'skii, για έναν τελεστή της μορφής $T(x, C(x))$, όπου C είναι ένας συμπαγής τελεστής.

Σκοπός της παρούσας Διατριβής είναι η παρουσίαση κάποιων υβριδικών θεωρημάτων σταθερού σημείου, και ορισμένες εφαρμογές τους στη μελέτη ύπαρξης λύσεων για μη γραμμικές διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις ή προβλήματα αρχικών τιμών. Η βασική ιδέα είναι η αναγωγή του προβλήματος ύπαρξης λύσης της εκάστοτε εξίσωσης σε πρόβλημα ύπαρξης σταθερού σημείου ενός κατάλληλα ορισμένου τελεστή. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα χώρο Banach, ή μια Banach άλγεβρα, με μια στάθμη που σχετίζεται, μεταξύ άλλων, με τη μορφή της εξίσωσης που θεωρούμε, και κατασκευάζουμε έναν κατάλληλο τελεστή, τα σταθερά σημείου του οποίου είναι ακριβώς οι λύσεις του προβλήματος.

Η μελέτη διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών παγκοσμίως, καθώς τέτοιες εξισώσεις παρουσιάζονται αρκετά συχνά σε εφαρμογές και φυσικά προβλήματα [49]. Για παράδειγμα, σε αρκετές βιολογικές εφαρμογές, περιγραφές των διακυμάνσεων των πληθυσμών δίνονται από διαφορικές εξισώσεις. Επίσης, εμφανίζονται ως μοντέλα ηλεκτρικών δικτύων, τα οποία αφορούν γραμμές μετάδοσης χωρίς απώλειες. Τέτοια δίκτυα υπάρχουν, επί παραδείγματι, σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές υψηλών ταχυτήτων, όπου οι γραμμές μετάδοσης χωρίς απώλειες χρησιμεύουν στο να αλληλοσυνδέουν τα κυκλώματα μεταγωγής. Η μελέτη ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων είναι από τα πιο κοινά και σημαντικά χαρακτηριστικά μαθηματικών μοντέλων, και βρίσκουν εφαρμογές στη μελέτη μοντέλων που περιγράφουν πρακτικά προβλήματα.

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία θεωρημάτων σταθερού σημείου τα οποία χρησιμοποιούνται στα πλαίσια της μεθοδολογίας που περιγράψαμε πιο πάνω. Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο της Διατριβής παρατίθενται όλοι οι ορισμοί και τα Θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά στο Θεώρημα του Krasnosel'skii, που αφορά το άθροισμα δύο τελεστών. Παραθέτουμε, επίσης, και κάποιες εναλλακτικές διατυπώσεις του παραπάνω Θεωρήματος με τις αντίστοιχες εφαρμογές τους. Στο τρίτο κεφάλαιο της Διατριβής διατυπώνουμε ένα Θεώρημα για το γινόμενο δύο τελεστών. Και για αυτό το Θεώρημα παρατίθενται διάφορες παραλλαγές και δίνονται εφαρμογές σε μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις, καθώς και σε συναρτησιακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Στο τέταρτο, και τελευταίο, κεφάλαιο παρατίθεται ένα Θεώρημα που αφορά το συνδυασμό αθροίσματος και γινομένου τελεστών. Το Θεώρημα αυτό αποτελεί γενίκευση των προηγούμενων δύο θεωρημάτων σταθερού σημείου, αυτό του αθροίσματος και εκείνο του γινομένου δύο τελεστών, καθώς τα δύο αυτά θεωρήματα μπορούν να αποτελέσουν ειδικές περιπτώσεις του.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται οι ορισμοί και κάποια θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Ορίζουμε τις έννοιες των χώρων όπου θα εργαζόμαστε, όπως οι χώροι Banach ή Banach άλγεβρες, καθώς και κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων αυτών, όπως για παράδειγμα η πληρότητα, η συμπαγότητα και η κυρτότητα. Ορίζουμε τους τύπους των τελεστών, οι οποίοι αναφέρονται στα θεωρήματα σταθερού σημείου που μελετάμε, όπως συμπαγείς και πλήρως συνεχείς τελεστές, συστολές και γενικευμένες συστολές, τελεστές Lipschitz και γενικευμένους Lipschitz. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των θεωρημάτων σταθερού σημείου των Banach, Schauder, Schaefer, Nonlinear Alternative, το θεώρημα σταθερού σημείου των Boyd και Wong, καθώς, επίσης, και κάποιες τοπολογικές ιδιότητες που θα μας είναι χρήσιμες στις αποδείξεις κάποιων συμπερασμάτων μας.

Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.

1.2 Ορισμοί και Παραδείγματα

Η έννοια της απόλυτης τιμής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μας δίνει τη δυνατότητα να μιλάμε για την απόσταση δύο αριθμών και παίζει θεμελιακό ρόλο στη μελέτη του συνόλου αυτού. Η αντίστοιχη έννοια, σε πιο γενικούς χώρους, είναι η έννοια της στάθμης και του σταθμητού χώρου.

Ορισμός 1.1 ([5], σ.17)**.** Ας είναι X ένα σύνολο. Η απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ καλείται ***στάθμη*** (norm) αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in X$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in X$.

Ορισμός 1.2 ([5], σ.17)**.** Ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια στάθμη $\|\cdot\|$ καλείται ***σταθμητός χώρος*** (normed space).

Παραδείγματα σταθμητών χώρων αποτελούν οι πραγματικοί αριθμοί με την απόλυτη τιμή $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, ο χώρος $(\mathbb{R}^\nu, \|\cdot\|_\varepsilon)$, όπου $\|\cdot\|_\varepsilon$ είναι η ευκλείδεια στάθμη του $\mathbb{R}^\nu$

$$\|x\|_\varepsilon = \|(x_1, x_2, \ \dots \ , x_\nu)\|_\varepsilon = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_\nu)^2},$$

και ο χώρος $C([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων του $[\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με νόρμα την sup-norm $\|x\|_{\sup} = \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |x(t)|$.

Δύο θεμελιώδεις έννοιες των χώρων όπου θα εργαζόμαστε είναι η έννοια της βασικής ακολουθίας και η έννοια του πλήρους σταθμητού χώρου.

Ορισμός 1.3 ([5], σ.86)**.** Μια ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ σε ένα σταθμητό χώρο $(X, \|\cdot\|)$ καλείται ***βασική ακολουθία*** ή ***ακολουθία Cauchy*** (Cauchy sequence) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $\nu_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\|x_\nu - x_\mu\| < \epsilon$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\nu, \mu \geq \nu_0(\epsilon)$.

Ορισμός 1.4 ([5], σ.147)**.** Ένας σταθμητός χώρος $(X, \|\cdot\|)$ καλείται ***πλήρης*** αν κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του X συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του X.

Ορισμός 1.5 ([5], σ.481)**.** Ένας πλήρης σταθμητός διανυσματικός χώρος καλείται χώρος ***Banach***.

Ως παραδείγματα χώρων Banach αναφέρουμε τους πραγματικούς αριθμούς με την απόλυτη τιμή $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, ο $(\mathbb{R}^\nu, \|\cdot\|_\varepsilon)$, όπου $\|\cdot\|_\varepsilon$ είναι η ευκλείδεια στάθμη του $\mathbb{R}^\nu$ και $C([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων του $[\alpha,\beta]$ στο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένος με την max-norm $\|x\|_{\max} = \max\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |x(t)|$.

Ένα αρκετά χρήσιμο θεώρημα είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 1.6. *Ας είναι X ένας χώρος Banach. Ο χώρος $C(X, \mathbb{R})$ των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X, εφοδιασμένος με τη στάθμη sup-norm $\|\cdot\|_{sup}$, είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in C(X, \mathbb{R})$ μια βασική ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f \in C(X, \mathbb{R})$ με $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu = f$. Επειδή η $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\|f_\nu - f_\mu\|_{\sup} < \epsilon$ για όλους τους $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu, \mu \geq \nu_0$. Επίσης, για κάθε $t \in X$ είναι

$$\begin{aligned} |f_\nu(t) - f_\mu(t)| &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_\nu(t) - f_\mu(t)| \\ &= \|f_\nu - f_\mu\|_{\sup} < \epsilon, \end{aligned}$$

δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|f_\nu(t) - f_\mu(t)| < \epsilon$ για όλα τα $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu, \mu \geq \nu_0$ και για κάθε $t \in X$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(f_\nu(t))_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{R}$, ο οποίος είναι πλήρης. Έτσι, ορίζεται μια συνάρτηση

$f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_\nu(t) \to f(t)$ για όλα τα $t \in X$. Οπότε, για $\mu \geq \nu_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}|f_\mu(t) - f(t)| &= \left|f_\mu(t) - \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(t)\right| \\ &= \lim_{\nu\to\infty} |f_\mu(t) - f_\nu(t)| \\ &\leq \lim_{\nu\to\infty} \|f_\nu - f_\mu\|_{\sup} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $f_\nu \to f$ ομοιόμορφα. Από το Βασικό Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης 1.41 έχουμε ότι υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{t\in X} |f_\nu(t) - f(t)| \leq \epsilon,$$

δηλαδή

$$\|f_\nu - f\|_{\sup} \leq \epsilon.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής για κάθε $t \in X$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|f_\nu(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{3},$$

για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq \nu_0$. Έχουμε ότι η $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - y| < \delta$ να έχουμε

$$|f_\nu(x) - f_\nu(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x) + f_\nu(x) - f_\nu(x) + f_\nu(y) - f_\nu(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(y)| + |f_\nu(y) - f(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\end{aligned}$$

δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - y| < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, που σημαίνει ότι $f \in C(X, \mathbb{R})$. □

Σημείωση 1.7. Αν στο προηγούμενο θεώρημα οι συνεχείς συναρτήσεις ορίζονται σε ένα συμπαγές σύνολο, έπεται ότι το supremum είναι στην πραγματικότητα μέγιστο, δηλαδή ο χώρος $C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ εφοδιασμένος με την max-norm $\|x\|_{\max} = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |x(t)|$ είναι χώρος Banach.

Τα υβριδικά θεωρήματα σταθερού σημείου τύπου Krasnosel'skii, με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, αφορούν σε κυρτά σύνολα και συγκεκριμένου είδους τελεστές, όπως συστολές ή γενικευμένες συστολές, Lipschitz ή γενικευμένους Lipschitz, συμπαγείς, ολικά φραγμένους και πλήρως συνεχείς τελεστές.

Ορισμός 1.8 ([5], σ.230). Ένα σύνολο A, υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου X υπεράνω του $\mathbb{R}$ καλείται ***κυρτό*** (convex) αν για κάθε $x, y \in A$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Ορισμός 1.9 ([5], σ.105). Ας είναι X ένας σταθμητός χώρος. Ένας τελεστής $f : X \to X$ καλείται ***συνεχής*** (continuous) αν για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in X$ με $x_\nu \to x \in X$ ισχύει $f(x_\nu) \to f(x) \in f(X)$.

Ορισμός 1.10 ([5], σ.122). Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος. Ένας τελεστής $f : X \to X$ καλείται ***ομοιόμορφα συνεχής*** (uniformly continuous) αν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε να ισχύει $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ για κάθε $x, y \in X$ με $\|x - y\| < \delta$.

Ορισμός 1.11 ([5], σ.159). Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος. Ένας τελεστής $f : X \to X$ καλείται ***συστολή*** (contraction) αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\kappa \in [0, 1)$, τέτοιος ώστε:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \kappa \|x - y\|,$$

για κάθε $x, y \in X$.

Ορισμός 1.12 ([30]). Ας είναι $T : X \to X$, ένας τελεστής, όπου $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος. Τότε ο T καλείται ***γενικευμένη συστολή*** αν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, που ονομάζεται συνάρτηση συστολής, τέτοια ώστε

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|),$$

για κάθε $x, y \in X$, όπου $\phi(r) < r$ για $r > 0$.

Σημείωση 1.13. Προφανώς, κάθε συστολή είναι και γενικευμένη συστολή.

Ορισμός 1.14 ([3], σ.183). Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος και $f : X \to X$ ένας τελεστής. Τότε ο f καλείται ***Lipschitz*** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\kappa \geq 0$ τέτοιος ώστε:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \kappa \|x - y\|,$$

για κάθε $x, y \in X$.

Ορισμός 1.15 ([24]). Ένας τελεστής $T : X \to X$, όπου $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος, καλείται ***γενικευμένος Lipschitz*** αν υπάρχει μια συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|), \tag{1.1}$$

για κάθε $x, y \in X$, όπου $\phi(0) = 0$.

Σημείωση 1.16. Προφανώς, κάθε τελεστής Lipschitz είναι και γενικευμένος Lipschitz.

Η συμπαγότητα είναι μια από τις πιο βασικές έννοιες της Τοπολογίας καθώς συμπαγείς σταθμητοί χώροι είναι χώροι πλούσιοι σε ιδιότητες και έχουν μεγάλη συχνότητα εμφάνισης σε όλους τους κλάδους της Μαθηματικής Ανάλυσης. Η έννοια του σχετικά συμπαγούς συνόλου θα μας οδηγήσει στους ορισμούς των συμπαγών και πλήρως συνεχών τελεστών που χρειαζόμαστε για τα θεωρήματα σταθερού σημείου τύπου Krasnosel'skii.

Ορισμός 1.17 ([5], σ.179)**.** Ας είναι X ένας σταθμητός χώρος και $E \subseteq X$. ***Κάλυψη*** (cover) $\mathcal{C}$ του συνόλου E καλείται μια συλλογή υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε $E \subseteq \cup\mathcal{C}$.

Ορισμός 1.18 ([5], σ.180)**.** Μια συλλογή συνόλων $\mathcal{A}$ καλείται ***υποκάλυψη*** (subcover) μιας κάλυψης $\mathcal{C}$ του E αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ και επιπλέον $E \subseteq \cup\mathcal{A}$.

Ορισμός 1.19 ([5], σ.180)**.** Ας είναι S ένα υποσύνολο ενός σταθμητού χώρου X. Μια κάλυψη $\mathcal{C}$ του S καλείται ***ανοιχτή*** (open) στον X αν κάθε $A \in \mathcal{C}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X ως προς την τοπολογία που παράγεται από τη στάθμη.

Ορισμός 1.20 ([5], σ.180)**.** Ας είναι X ένας σταθμητός χώρος και $E \subseteq X$. Το σύνολο E καλείται ***συμπαγές*** (compact) αν κάθε ανοικτή κάλυψη του E έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Ορισμός 1.21 ([5], σ.166)**.** Ένας σταθμητός χώρος X καλείται ***ολικά φραγμένος*** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψη του X από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ϵ.

Σημείωση 1.22. Αντί του όρου "ολικά φραγμένος" χρησιμοποιείται ο όρος "προσυμπαγής" ή "σχετικά συμπαγής".

Ένας διαφορετικός ορισμός της έννοιας του σχετικά συμπαγούς συνόλου είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 1.23 ([5], σ.506)**.** Ένα σύνολο A υποσύνολο ενός σταθμητού χώρου X καλείται ***σχετικά συμπαγές*** (relatively compact) ή ***προσυμπαγές*** (precompact) αν η κλειστή θήκη (closure) $\overline{A}$ είναι συμπαγές σύνολο.

Ορισμός 1.24 ([57] σ.25, [60] σ.53)**.** Ας είναι $f : X \to \Upsilon$ ένας συνεχής τελεστής, όπου X και Υ είναι σταθμητοί γραμμικοί χώροι.

- Ο τελεστής f καλείται ***συμπαγής*** (compact) αν το σύνολο $f(X)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Υ.

- Ο τελεστής f καλείται ***πλήρως συνεχής*** (completely continuous) αν για κάθε φραγμένο υποσύνολο S του X το σύνολο $f(S)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Υ.

- Ο τελεστής f καλείται ***ολικά φραγμένος*** (totally bounded) αν για κάθε φραγμένο υποσύνολο S του X το σύνολο $f(S)$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του Υ.

Σημείωση 1.25. Έστω ένας συνεχής τελεστής $f : X \to Y$, όπου X και Y είναι σταθμητοί γραμμικοί χώροι. Αν το σύνολο $f(X)$ είναι σχετικά συμπαγές σύνολο, τότε η εικόνα οποιουδήποτε φραγμένου υποσυνόλου του X είναι επίσης σχετικά συμπαγές σύνολο, επομένως ο τελεστής f είναι πλήρως συνεχής, δηλαδή *κάθε συμπαγής τελεστής είναι και πλήρως συνεχής τελεστής*. Με άλλα λόγια, κάθε συμπαγής τελεστής μεταφέρει το πεδίο ορισμού του, αλλά και κάθε υποσύνολο του πεδίου ορισμού του, σε σχετικά συμπαγές σύνολο.

Σημείωση 1.26. Ένας τελεστής είναι πλήρως συνεχής αν είναι συνεχής και ολικά φραγμένος.

Η έννοια των συναρτήσεων Καραθεοδωρή που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω δίνεται από τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.27 ([39])**.** Μια συνάρτηση $f : [0,T] \times E \to E$, όπου $(E, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος Banach, καλείται ***συνάρτηση Καραθεοδωρή*** (Caratheodory function) αν:

- Η απεικόνιση $t \to f(t,z)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $z \in E$.
- Η απεικόνιση $z \to f(t,z)$ είναι συνεχής σχεδόν για όλα τα $t \in [0,T]$.
- Για κάθε $r > 0$ υπάρχει $h_r \in L^1([0,T],E)$[1] τέτοια ώστε αν $\|z\| \leq r$ να ισχύει $\|f(t,z)\| \leq h_r(t)$ σχεδόν παντού στο $[0,T]$.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις συναρτήσεις Καραθεοδωρή παραπέμπουμε στο [41].

Αρκετά συχνά, για την απόδειξη της συμπαγότητας ενός συνόλου κάνουμε χρήση του Θεωρήματος των Arzela - Ascoli, που αφορά ομοιόμορφα φραγμένες και ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων.

Ορισμός 1.28 ([50], σ.171)**.** Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος, $E \subseteq X$, I ένα σύνολο δεικτών και $(f_a)_{a\in I} : E \to X$ μια οικογένεια συναρτήσεων. Η οικογένεια $(f_a)_{a\in I}$ καλείται ***ομοιόμορφα φραγμένη*** (uniformly bounded) αν υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\|f_a(x)\| \leq c$ για όλα τα $x \in E$ και όλα τα $a \in I$.

Ορισμός 1.29 ([50], σ. 172)**.** Έστω $(X, (\|\cdot\|)$ ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος, $E \subseteq X$, I ένα σύνολο δεικτών και $(f_a)_{a\in I} : E \to X$ μια οικογένεια συναρτήσεων. Η οικογένεια $(f_a)_{a\in I}$ καλείται ***ισοσυνεχής*** (equicontinuous) αν, για κάθε θετικό αριθμό ϵ, υπάρχει θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε να ισχύει $\|f_a(x) - f_a(y)\| < \epsilon$, για όλα τα $x, y \in E$ με $\|x - y\| < \delta$ και όλα τα $a \in I$.

Για τα θεωρήματα σταθερού σημείου που αφορούν το γινόμενο δύο τελεστών και το συνδυασμό του αθροίσματος και του γινομένου τελεστών εργαζόμαστε σε Banach άλγεβρα, δηλαδή έναν χώρο Banach όπου για την πράξη του πολλαπλασιασμού ισχύει η προσεταιριστική και η επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά και από αριστερά αντίστοιχα.

[1] $L^1([0,T],E) = \{u : [0,T] \to E |\ u$ ολοκληρώσιμη$\}$.

Ορισμός 1.30 ([15])**.** Ένας χώρος Banach X εφοδιασμένος με μια στάθμη $\|\cdot\|$ καλείται ***Banach άλγεβρα*** αν ορίσουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού για την οποία ισχύει

(i) $ab \in X$ για κάθε $a, b \in X$,

(ii) $(ab)c = a(bc)$,

(iii) $a(b + c) = ab + ac$,

(iv) $(b + c)a = ba + bc$,

(v) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$,

(vi) $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

για κάθε $a, b, c \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

1.3 Βασικά Θεωρήματα

Τα υβριδικά θεωρήματα σταθερού σημείου τύπου Krasnosel'skii που χρησιμοποιούμε αποδεικνύουν την ύπαρξη σταθερών σημείων για συγκεκριμένου τύπου τελεστές, όπως συμπαγείς τελεστές ή πλήρως συνεχείς τελεστές. Αρκετά συχνά θα πρέπει να αποδειχθεί η συμπαγότητα κατάλληλων συνόλων. Εκτός από τον ακολουθιακό ορισμό της συμπαγότητας το επόμενο θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της συμπαγότητας ενός συνόλου.

Θεώρημα 1.31 ([5], σ.173)**.** *Ένας σταθμητός χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ακολουθία του X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον X.*

Το θεώρημα των Arzela - Ascoli, επίσης χρησιμοποιείται ευρέως για την απόδειξη της συμπαγότητας ενός συνόλου, και αφορά την ύπαρξη μιας ομοιόμορφα φραγμένης και ισοσυνεχούς οικογένειας συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.32 (***Arzela-Ascoli***, [50], σ.172)**.** *Ας είναι X, Ω σταθμητοί διανυσματικοί χώροι, Y ένα συμπαγές υποσύνολο του X και $\mathcal{M}$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο Y με τιμές στο Ω, δηλαδή $\mathcal{M} \subseteq C(Y, \Omega)$. Η οικογένεια $\mathcal{M}$ είναι σχετικά συμπαγής στο $C(Y, \Omega)$ αν και μόνο αν η $\mathcal{M}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής.*

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε τα θεωρήματα σταθερού σημείου που θα χρειαστούμε για την απόδειξη των συμπερασμάτων. Ένα πολύ γνωστό θεώρημα αυτής της κατηγορίας είναι η Αρχή της Συστολής ή Θεώρημα Σταθερού σημείου του Banach, που εξασφαλίζει μοναδικό σταθερό σημείο για μια συστολή σε έναν πλήρη σταθμητό χώρο. Επίσης, θα μας φανούν πολύ χρήσιμα και τα θεωρήματα του Schauder. Τροποποιημένες διατυπώσεις αυτών των θεωρημάτων αποτελούν τα θεωρήματα του Schaefer και το Nonlinear Alternative που αναφέρονται παρακάτω.

Πρόταση 1.33 (***Αρχή της συστολής*** (Contraction Principle), [5], σ.159)**.** *Ας είναι X ένας πλήρης σταθμητός χώρος και $f : X \to X$ μια συστολή. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $x = f(x)$.*

Θεώρημα 1.34 (***Schauder***, [60], σ.56). *Έστω F ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $f : F \to F$ ένας συμπαγής τελεστής. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in F$ τέτοιο ώστε $x = f(x)$, δηλαδή ο τελεστής f έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο στο F.*

Θεώρημα 1.35 (***Schauder*****, [60], σ.56). *Έστω F ένα μη κενό, φραγμένο, κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $f : F \to F$ ένας πλήρως συνεχής τελεστής. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in F$ τέτοιο ώστε $x = f(x)$, δηλαδή ο τελεστής f έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο στο F.*

Θεώρημα 1.36 (***Schaefer*** ή ***Leray-Schauder Alternative***, [57], σ.29). *Έστω F ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $f : F \to F$ ένας πλήρως συνεχής τελεστής. Αν $\mathcal{E}(f) = \{x \in X : \text{υπάρχει } \mu \in (0,1) : x = \mu f(x)\}$ τότε ισχύει ένα ακριβώς από τα εξής:*

(i) *Το $\mathcal{E}(f)$ είναι μη-φραγμένο*

(ii) *Ο τελεστής f έχει ένα σταθερό σημείο στο F.*

Θεώρημα 1.37 (***Nonlinear Alternative***, [41]). *Έστω F ένα μη κενό και κυρτό υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου X, U ένα ανοικτό υποσύνολο του F με $0 \in U$ και $f : \overline{U} \to F$ ένας πλήρως συνεχής τελεστής. Τότε ισχύει ένα ακριβώς από τα εξής:*

(i) *Ο τελεστής f έχει ένα σταθερό σημείο στο $\overline{U}$ ή*

(ii) *υπάρχει ένα $u \in \partial U$ και $\lambda \in (0,1)$ με $u = \lambda f u$.*

Παραθέτουμε, εδώ, και μια γενίκευση της Αρχής της Συστολής που αποδεικνύει την ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου για γενικευμένη συστολή ενόςπλήρους σταθμητού χώρου και είναι το θεώρημα σταθερού σημείου των Boyd και Wong.

Θεώρημα 1.38 (***Boyd*** και ***Wong***, [14]). *Ας είναι X ένας πλήρης σταθμητός χώρος και $f : X \to X$ μια γενικευμένη συστολή. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $x = f(x)$.*

Στη συνέχεια, παρατίθενται μερικές γνωστές προτάσεις από την Τοπολογία, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη κάποιων συμπερασμάτων μας.

Πρόταση 1.39 ([5], σ.110). *Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση μεταξύ δύο γραμμικών χώρων X, Y. Τότε $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ για κάθε $S \subseteq X$.*

Θεώρημα 1.40 (***Bolzano-Weierstrass***, [2], σ.76). *Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Θεώρημα 1.41 (***Βασικό Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης***, [60], σ.110). *Ας είναι X ένας χώρος Banach και $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in C(X, \mathbb{R})$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Τότε η $f_\nu \to f$ ομοιόμορφα αν και μόνο αν $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left(\sup\limits_{x \in X} |f_\nu(x) - f(x)| \right) = 0$.*

Θεώρημα 1.42 (***Σύγκλισης Lebesgue*** ή ***Κυριαρχούμενης Σύγκλισης***, [1], σ.276)**.** *Υποθέτουμε ότι* $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *είναι μια ακολουθία μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων επί του γραμμικού χώρου* X *τέτοια ώστε*

$$f_\nu \to f$$

κατά σημείο. Αν υπάρχει $g \in L^1(X)$ *τέτοια ώστε* $|f_\nu| \leq g(x),\ x \in X$*, τότε* $f \in L^1(X)$ *και επιπλέον*

$$\lim \int_X |f_\nu - f| = 0$$

και

$$\lim \int_X f_\nu = \int_X f.$$

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη θεωρία μέτρου παραπέμπουμε στα [1] και [58].

Κεφάλαιο 2

Άθροισμα Τελεστών

2.1 Εισαγωγή

Το θεώρημα σταθερού σημείου του **Krasnosel'skii** που θα μας απασχολήσει στην παρούσα ενότητα είναι ένας συνδυασμός θεωρημάτων σταθερού σημείου των Schauder και Banach και βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στη θεωρία διαφορικών εξισώσεων ουδετέρου τύπου. Αποδεικνύει ότι το άθροισμα δύο τελεστών που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες έχει σταθερό σημείο. Με αφετηρία το συγκεκριμένο θεώρημα αρκετοί ερευνητές ασχολήθηκαν με γενικεύσεις του, με τροποποιήσεις των συνθηκών, ακόμα και επεκτάσεις του. Ο Reinerman [54] έδωσε ένα συμπέρασμα τύπου Krasnosel'skii για ένα ομοιόμορφα κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach. Ο Avramescu [10], με χρήση του θεωρήματος Schaefer, έδωσε μια γενίκευση του θεωρήματος Krasnosel'skii, σε έναν τοπικά κυρτό χώρο. Επίσης, οι Burton και Kirk [16], [20] συνδυάσανε το θεώρημα του Krasnosel'skii με το θεώρημα του Schaefer και παρουσίασαν ένα αντίστοιχο θεώρημα σταθερού σημείου. Ο Dhage [26] παρουσίασε μια απόδειξη του θεωρήματος Krasnosel'skii για μερικώς διατεταγμένους σταθμητούς διανυσματικούς χώρους και αντιμετώπισε το πρόβλημα ύπαρξης λύσεων για μη γραμμικές κλασματικές (fractional) ολοκληρωτικές εξισώσεις Voltera.

2.2 Ένα θεώρημα του Krasnosel'skii

Πριν παρουσιάσουμε το βασικό θεώρημα που μας απασχολεί σε αυτήν την ενότητα παραθέτουμε τέσσερα Λήμματα που θα χρειαστούμε για την απόδειξή του, αλλά και παρακάτω.

Λήμμα 2.1. *Ας είναι $(E, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος και X ένα υποσύνολό του. Αν ο τελεστής $B : X \to X$ είναι συστολή, τότε ο τελεστής $I - B : X \to X$ είναι ομοιομορφισμός του X επί του $(I - B)X$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής $I - B$ είναι 1-1, συνεχής και $(I - B)^{-1}$ συνεχής.

Ας είναι $\lambda \in [0, 1)$ η σταθερά της συστολής. Για $x, y \in X$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(I - B)x = (I - B)y &\Rightarrow x - Bx = y - By \\ &\Rightarrow x - y = Bx - By \\ &\Rightarrow \|x - y\| = \|Bx - By\| \leq \lambda \|x - y\| \\ &\Rightarrow (1 - \lambda)\|x - y\| \leq 0 \\ &\Rightarrow \|x - y\| = 0 \\ &\Rightarrow x - y = 0 \\ &\Rightarrow x = y.\end{aligned}$$

Άρα ο $I - B$ είναι 1-1.

Επίσης,

$$\begin{aligned}\|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|x - Bx - y + By\| \\ &= \|x - y - (Bx - By)\| \leq \|x - y\| + \|Bx - By\| \\ &\leq \|x - y\| + \lambda\|x - y\| \\ &= (1 + \lambda)\|x - y\|,\end{aligned}$$

δηλαδή ο $I - B$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα και συνεχής.
Είναι,

$$\begin{aligned}\|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|x - y - (Bx - By)\| \\ &\geq \|x - y\| - \|Bx - By\| \\ &\geq (1 - \lambda)\|x - y\|.\end{aligned}$$

Επειδή ο τελεστής $I - B$ είναι 1-1, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα $z, w \in X$ τέτοια ώστε $(I - B)x = z, (I - B)y = w$. Δηλαδή είναι

$$x = (I - B)^{-1}z,\ y = (I - B)^{-1}w,$$

και συνεπώς έχουμε:

$$\|z - w\| \geq (1 - \lambda)\|(I - B)^{-1}z - (I - B)^{-1}w\|$$

δηλαδή

$$\|(I-B)^{-1}z-(I-B)^{-1}w\| \leq \frac{1}{1-\lambda}\|z-w\|.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $(I-B)^{-1}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα και συνεχής. Επομένως, ο $I-B$ είναι ομοιομορφισμός του X επί του $(I-B)X$. $\square$

Λήμμα 2.2. *Ας είναι $A \subseteq E$ όπου $(E, \|\cdot\|)$ σταθμητός διανυσματικός χώρος. Αν κάθε ακολουθία του A έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\overline{A}$ τότε το $\overline{A}$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.31 αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\overline{A}$ είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \overline{A}$. Τότε, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$B\left(\alpha_\nu, \frac{1}{\nu}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in A$ τέτοια ώστε:

$$\|\alpha_\nu - b_\nu\| < \frac{1}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Από την υπόθεσή μας, για την ακολουθία $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία της $(b_{\kappa_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο $\overline{A}$, δηλαδή υπάρχει $b \in \overline{A}$ τέτοιο ώστε

$$(b_{\kappa_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}} \to b.$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned}
\|\alpha_{\kappa_\nu} - b\| &= \|\alpha_{\kappa_\nu} - b_{\kappa_\nu} + b_{\kappa_\nu} - b\| \\
&\leq \|\alpha_{\kappa_\nu} - b_{\kappa_\nu}\| + \|b_{\kappa_\nu} - b\| \\
&\leq \frac{1}{\kappa_\nu} + \|b_{\kappa_\nu} - b\|,
\end{aligned}$$

από όπου, επειδή $(b_{\kappa_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}} \to b$, προκύπτει

$$\|\alpha_{\kappa_\nu} - b\| \to 0,\ \text{καθώς}\ \nu \to \infty,$$

δηλαδή

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\kappa_\nu} = b \in \overline{A}.$$

Αυτό σημαίνει ότι για την τυχαία ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ του $\overline{A}$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\overline{A}$, που σημαίνει ότι το $\overline{A}$ είναι ακολουθιακά συμπαγές. $\square$

Λήμμα 2.3. *Ας είναι X, Y, Z σταθμητοί διανυσματικοί χώροι, $f : X \to Y$ συμπαγής τελεστής και $g : Y \to Z$ συνεχής. Τότε η σύνθεση $g \circ f : X \to Z$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Επειδή, η $g \circ f$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{(g \circ f)(X)}$ είναι συμπαγές ή σύμφωνα με το Θεώρημα 1.31 ακολουθιακά συμπαγές. Από το Λήμμα 2.2 είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι κάθε ακολουθία του $g(f(X))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\overline{g(f(X))}$. Έστω $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία του $g(f(X))$ και $z_\nu = g(f(x_\nu))$ με $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in X$. Τότε η $f(x_\nu) = y_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία στο $f(X) \subseteq \overline{f(X)}$. Όμως ο f είναι συμπαγής, δηλαδή $\overline{f(X)}$ είναι συμπαγές σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υπακολουθία $(y_{\kappa_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ της $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα στο $\overline{f(X)}$, δηλαδή υπάρχει $y^* \in \overline{f(X)}$ τέτοιο ώστε

$$y_{\kappa_\nu} \to y^*.$$

Οπότε

$$\lim_{\nu\to\infty} f(x_{\kappa\nu}) = y^*.$$

Επειδή ο g είναι συνεχής έχουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} g(f(x_{\kappa_\nu})) = g(y^*),$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 1.39

$$\lim_{\nu\to\infty} z_{\kappa_\nu} = g(y^*) \in g(\overline{f(X)}) \subseteq \overline{g(f(X))}.$$

Δηλαδή για την τυχαία ακολουθία $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in g(f(X))$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της στο $\overline{g(f(X))}$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, το σύνολο $\overline{g(f(X))}$ είναι συμπαγές. □

Λήμμα 2.4. *Ας είναι X, Y, Z σταθμητοί διανυσματικοί χώροι, $f : X \to Y$ πλήρως συνεχής και $g : Y \to Z$ συνεχής. Τότε η σύνθεση $g \circ f : X \to Z$ είναι πλήρως συνεχής.*

Απόδειξη. Επειδή, η $g \circ f$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών, αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\overline{(g \circ f)(M)}$ είναι συμπαγές, για κάθε φραγμένο $M \subseteq X$, ή σύμφωνα με το Θεώρημα 1.31 ότι είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω M τυχαίο φραγμένο υποσύνολο του X. Από το Λήμμα 2.2 είναι αρκετό να πάρουμε τυχαία ακολουθία του $g(f(M))$ και να δείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\overline{g(f(M))}$. Έστω $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία του $g(f(M))$ και $z_\nu = g(f(x_\nu))$ με $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in M$. Τότε $f(x_\nu) = y_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία του $f(M) \subseteq \overline{f(M)}$. Όμως ο f είναι πλήρως συνεχής, δηλαδή $\overline{f(M)}$ είναι συμπαγές σύνολο για κάθε φραγμένο $M \subseteq X$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υπακολουθία $(y_{\kappa_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ της $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα στο $\overline{f(M)}$, δηλαδή υπάρχει $y^* \in \overline{f(M)}$ τέτοιο ώστε

$$y_{\kappa_\nu} \to y^*.$$

Οπότε

$$\lim_{\nu\to\infty} f(x_{\kappa\nu}) = y^*.$$

Επειδή ο g είναι συνεχής έχουμε ότι

$$\lim g(f(x_{\kappa_\nu})) = g(y^*)$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 1.39

$$\lim z_{\kappa_\nu} = g(y^*) \in g(\overline{f(M)}) \subseteq \overline{g(f(M))}$$

. Δηλαδή για την τυχαία ακολουθία $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in g(f(M))$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της στο $\overline{g(f(M))}$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, το σύνολο $\overline{g(f(M))}$ είναι συμπαγές. □

Το βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας είναι το θεώρημα του Krasnosel'skii που παρουσιάζουμε εδώ.

Θεώρημα 2.5 (***Krasnosel'skii***, [57], σ. 31)**.** *Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και M ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολό του X. Αν $A, B : M \to X$ είναι δύο τελεστές τέτοιοι ώστε:*

(i) *$Bx + Ay \in M$ για κάθε $x, y \in M$,*

(ii) *ο A είναι συμπαγής,*

(iii) *ο B είναι συστολή,*

τότε υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε $x = Ax + Bx$.

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $y \in M$. Θεωρούμε τον τελεστή $S_y : M \to X$ με $S_y x = Bx + Ay$, $x \in M$. Αφού $x, y \in M$, λόγω της (i), ισχύει $Bx + Ay \in M$ οπότε $S_y x \in M$. Δηλαδή είναι $S_y : M \to M$. Θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής S_y είναι συστολή. Πραγματικά, για κάθε $x_1, x_2 \in M$, και $\lambda \in [0, 1)$ η σταθερά της συστολής, είναι:

$$\begin{aligned} \|S_y x_1 - S_y x_2\| &= \|(Bx_1 + Ay) - (Bx_2 + Ay)\| \\ &= \|Bx_1 - Bx_2\| \le \lambda \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Άρα ο S_y είναι συστολή.

Σύμφωνα με την Αρχή της Συστολής 1.33 υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένο $z \in M$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} S_y z = z \Leftrightarrow &\ z = Bz + Ay \\ \Leftrightarrow &\ Iz = Bz + Ay \\ \Leftrightarrow &\ (I - B)z = Ay. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 2.1, επειδή ο B είναι συστολή, ο τελεστής $I - B$ είναι ομοιομορφισμός του M επί του $(I-B)M$, δηλαδή ο $I - B$ είναι συνεχής, 1-1, επί και ο $(I-B)^{-1}$ είναι συνεχής.

Έχουμε ότι $B : M \to X$, δηλαδή $I - B : M \to (I-B)M$ και αφού ο $I - B$ είναι ομοιομορφισμός του $(I-B)M$ συμπεραίνουμε ότι ορίζεται η απεικόνιση $(I-B)^{-1} : (I-B)M \to M$. Έτσι, λόγω της πρώτης υπόθεσης του θεωρήματος έχουμε

$$A : M \to (I-B)M \text{ και } (I-B)^{-1} : (I-B)M \to M.$$

Οπότε ορίζεται η σύνθεση $(I-B)^{-1} \circ A : M \to M$. Αν ονομάσουμε T τον τελεστή $T = (I-B)^{-1} \circ A$, τότε είναι $T : M \to M$. Δηλαδή, ο T είναι σύνθεση ενός συμπαγούς τελεστή κι ενός συνεχούς τελεστή, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 έχουμε ότι ο T είναι συμπαγής. Από το Θεώρημα 1.34 (Schauder) έχουμε ότι ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο στο M, δηλαδή υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} x = Tx &\Leftrightarrow\ x = [(I-B)^{-1} \circ A]x \\ &\Leftrightarrow\ x = (I-B)^{-1}Ax \\ &\Leftrightarrow\ (I-B)x = Ax \\ &\Leftrightarrow\ x - Bx = Ax \\ &\Leftrightarrow\ x = Ax + Bx, \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο. □

2.3 Μια εφαρμογή σε ένα Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Στην παρούσα παράγραφο θα δώσουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος Krasnosel'skii που αποδεικνύει την ύπαρξη λύσης ενός Προβλήματος Αρχικών Τιμών.

Εφαρμογή 2.6 ([39])**.** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y^{'}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0,T] \\ y(0) = \alpha \in E, \end{cases} \tag{2.1}$$

όπου E είναι ένας πραγματικός χώρος Banach και $f : [0,T] \times E \to E$ μια συνάρτηση της μορφής $f = g + h$ με $g, h : [0,T] \times E \to E$ να είναι συναρτήσεις Καραθεοδωρή 1.27. Ορίζουμε τους χώρους

$$C([0,T], E) = \{u : [0,T] \to E, u : \text{συνεχής}\}$$

και

$$C_\alpha([0,T], E) = \{u \in C([0,T], E) : u(0) = \alpha\}.$$

Υποθέτουμε, επιπλέον, για τις g, h ότι ισχύουν:

(i) Το σύνολο $\{\int_0^t g(s,u(s))ds : u \in C_\alpha([0,T],E)\}$ είναι σχετικά συμπαγές.

(ii) Υπάρχει $q \in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$ με $\|h(t,u)-h(t,v)\| \leq q(t)\|u-v\|$ για όλα τα $u,v \in E$ σχεδόν παντού στο $[0,T]$.

Θα αποδείξουμε ότι το ΠΑΤ (2.1) έχει μία λύση.

Εφοδιάζουμε τον χώρο $C([0,T],E)$ με τη στάθμη Bielecki:

$$\|u\|_Q = \max_{t\in[0,T]} \|e^{-Q(t)}u(t)\| \text{ όπου } Q(t) = \int_0^t q(s)ds.$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $(C([0,T],E),\|\cdot\|_Q)$ είναι χώρος Banach. Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα:

Λήμμα 2.7. *Ο χώρος $(C([0,T],E),\|\cdot\|_Q)$ των συνεχών συναρτήσεων του $[0,T]$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η στάθμη Bielecki είναι ισοδύναμη με τη max-norm $\|\cdot\|_{\max}$. Πράγματι, σύμφωνα με το θεώρημα 1.6, ο $(C([0,T],E),\|\cdot\|_{\max})$ είναι χώρος Banach, οπότε αν δείξουμε ότι οι δύο στάθμες είναι ισοδύναμες, τότε και ο $(C([0,T],E),\|\cdot\|_Q)$ θα είναι χώρος Banach.

Για κάθε $t \in [0,T]$ είναι:

$$|u(t)e^{-Q(t)}| \leq |u(t)| \leq \max_{t\in[0,T]} |u(t)|$$

οπότε

$$\max_{t\in[0,T]} |u(t)e^{-Q(t)}| \leq \max_{t\in[0,T]} |u(t)|$$

δηλαδή

$$\|u\|_Q \leq \|u\|_{\max}.$$

Επίσης, επειδή η συνάρτηση Q είναι αύξουσα, έπεται ότι για $t \in [0,T]$ είναι $e^{-Q(T)} \leq e^{-Q(t)}$.

Επομένως,

$$\max_{t\in[0,T]} |u(t)e^{-Q(t)}| \geq \max_{t\in[0,T]} |u(t)e^{-Q(T)}| = e^{-Q(T)} \max_{t\in[0,T]} |u(t)|,$$

δηλαδή

$$\|u\|_Q \geq e^{-Q(T)}\|u\|_{\max}.$$

Επομένως, $e^{-Q(T)}\|u\|_{\max} \leq \|u\|_Q \leq \|u\|_{\max}$, που αποδεικνύει ότι η στάθμη Bielecki είναι ισοδύναμη με τη max-norm $\|\cdot\|_{\max}$. Συνεπώς, ο χώρος $(C([0,T],E),\|\cdot\|_Q)$ είναι χώρος Banach. □

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Krasnosel'skii 2.5 ορίζουμε δύο τελεστές

$$T_1 : C_\alpha([0,T],E) \to C([0,T],E)$$

με

$$(T_1 y)(t) = \int_0^t g(s,y(s))ds,\ t \in [0,T]$$

και

$$T_2 : C_\alpha([0,T],E) \to C_\alpha([0,T],E)$$

με

$$(T_2 y)(t) = \alpha + \int_0^t h(s,y(s))ds,\ t \in [0,T].$$

Διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα ύπαρξης λύσης του ΠΑΤ (2.1) ανάγεται στο πρόβλημα ύπαρξης σταθερού σημείου του τελεστή $T_{\text{sum}} : C_\alpha([0,T],E) \to C_\alpha([0,T],E)$ που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}(T_{\text{sum}} y)(t) &= \alpha + \int_0^t f(s,y(s))ds \\ &= \alpha + \int_0^t h(s,y(s))ds + \int_0^t g(s,y(s))ds \\ &= (T_2 y)(t) + (T_1 y)(t),\end{aligned}$$

Αφού οι g, h είναι συναρτήσεις Καραθεοδωρή έπεται ότι οι T_1, T_2 είναι καλά ορισμένοι και συνεχείς. Παρατηρούμε ότι από τη συνθήκη (i) έπεται ότι το σύνολο:

$$\begin{aligned}\left\{ \int_0^t g(s,u(s))ds : u \in C_\alpha([0,T],E) \right\} &= \{T_1 u \ : \ u \in C_\alpha([0,T],E)\} \\ &= T_1(C_\alpha([0,T],E)) \\ &\subseteq C([0,T],E)\end{aligned}$$

είναι σχετικά συμπαγές, συνεπώς το σύνολο $\overline{T_1(C_\alpha([0,T],E))}$ είναι συμπαγές, που σημαίνει ότι ο τελεστής T_1 είναι συμπαγής.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής T_2 είναι συστολή. Πράγματι, για $u, v \in C([0,T],E)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\|T_2 u - T_2 v\|_Q &= \max_{t\in[0,T]} \left| (T_2 u(t) - T_2 v(t))\, e^{-Q(t)} \right| \\ &= \max_{t\in[0,T]} \left| e^{-Q(t)} \left(\alpha + \int_0^t h(s,u(s))ds - \alpha - \int_0^t h(s,v(s))ds \right) \right| \\ &= \max_{t\in[0,T]} \left| e^{-Q(t)} \int_0^t [h(s,u(s)) - h(s,v(s))]ds \right| \\ &\le \max_{t\in[0,T]} \left| e^{-Q(t)} \int_0^t [q(s)|u(s) - v(s)|]\, ds \right|\end{aligned}$$

σύμφωνα με τη συνθήκη (ii).
Έτσι,

$$\begin{aligned}
\|T_2u - T_2v\|_Q &\leq \max_{t\in[0,T]} \left| e^{-Q(t)} \int_0^t q(s)e^{Q(s)}e^{-Q(s)}|u(s)-v(s)|ds \right| \\
&\leq \|u-v\|_Q \max_{t\in[0,T]} \left| e^{-Q(t)} \int_0^t q(s)e^{Q(s)}ds \right| \\
&= \|u-v\|_Q \max_{t\in[0,T]} \left| e^{-Q(t)} \int_0^t q(s)e^{\int_0^s q(r)dr}ds \right| \\
&= \|u-v\|_Q \max_{t\in[0,T]} \left| e^{-Q(t)} \int_0^t \left(e^{\int_0^s q(r)dr}\right)' ds \right| \\
&= \|u-v\|_Q \max_{t\in[0,T]} \left[e^{-Q(t)} [e^{Q(t)} - 1] \right] \\
&= \|u-v\|_Q \max_{t\in[0,T]} \left(1 - e^{-Q(t)}\right) \\
&= \left(1 - e^{-Q(T)}\right) \|u-v\|_Q \\
&= k_0\|u-v\|_Q
\end{aligned}$$

με $k_0 = 1 - e^{-Q(T)} < 1$.

Για τη συνθήκη (ι) του θεωρήματος 2.5 έχουμε:

$$T_1x + T_2y \in C([0,T],E)$$

και επειδή για $t = 0$ είναι

$$T_1x(0) + T_2y(0) = 0 + \alpha = \alpha$$

έπεται ότι

$$T_1x + T_2y \in C_\alpha([0,T],E).$$

Συνεπώς, πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.5 και έχουμε ένα σταθερό σημείο του τελεστή T_{sum}, δηλαδή μια λύση του ΠΑΤ (2.1).

2.4 Παραλλαγή του Θεωρήματος Krasnosel'skii και μια Εφαρμογή

Μια, ουσιαστικά, παρόμοια διατύπωση του Θεωρήματος Krasnosel'skii είναι η ακόλουθη, που αντί για έναν συμπαγή τελεστή, έχει έναν πλήρως συνεχή τελεστή σε ένα μη-κενό, κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach.

Θεώρημα 2.8 ([48]). *Ας είναι M ένα μη κενό, φραγμένο, κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach $(X, \|\cdot\|)$ και $A, B : M \to X$ είναι δύο τελεστές τέτοιοι ώστε:*

(i) *$Bx + Ay \in M$ για κάθε $x, y \in M$,*

(ii) *ο A είναι πλήρως συνεχής και*

(iii) *ο B είναι συστολή.*

Τότε υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε $x = Ax + Bx$.

Απόδειξη. Ας είναι αυθαίρετο $y \in M$ και ορίζουμε τον τελεστή $S_y : M \to X$ με $S_y x = Bx + Ay,\ x \in M$.

Αφού $x, y \in M$, λόγω του (i), ισχύει $Bx + Ay \in M$ δηλαδή $S_y x \in M$. Αυτό σημαίνει ότι $S_y : M \to M$. Τώρα θα δείξουμε ότι ο S είναι συστολή. Πραγματικά, για $x_1, x_2 \in M$ και $\lambda < 1$, η σταθερά συστολής του τελεστή B, έχουμε

$$\begin{aligned} \|S_y x_1 - S_y x_2\| &= \|(Bx_1 + Ay) - (Bx_2 + Ay)\| \\ &= \|Bx_1 - Bx_2\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Άρα ο S είναι συστολή.

Σύμφωνα με την Αρχή της Συστολής 1.33 υπάρχει $z \in M$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} S_y z = z \Leftrightarrow\ & z = Bz + Ay \\ \Leftrightarrow\ & Iz = Bz + Ay \\ \Leftrightarrow\ & (I - B)z = Ay. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 2.1, αφού ο B είναι συστολή, έπεται ότι η απεικόνιση $I - B$ είναι ομοιομορφισμός του M επί του $(I - B)M$, δηλαδή ο $I - B$ είναι συνεχής, 1-1, επί και ο $(I - B)^{-1}$ είναι συνεχής.

Έχουμε ότι $B : M \to X$, δηλαδή $I - B : M \to (I - B)M$ και αφού ο $I - B$ είναι ομοιομορφισμός του $(I - B)M$ συμπεραίνουμε ότι ορίζεται η απεικόνιση $(I - B)^{-1} : (I - B)M \to M$. Έτσι, λόγω της πρώτης συνθήκης του θεωρήματος έχουμε

$$A : M \to (I - B)M \text{ και } (I - B)^{-1} : (I - B)M \to M.$$

Οπότε ορίζεται η σύνθεση $(I - B)^{-1} \circ A : M \to M$. Αν ονομάσουμε T τον τελεστή $T = (I - B)^{-1} \circ A$ τότε $T : M \to M$. Δηλαδή, ο T είναι σύνθεση ενός πλήρως συνεχούς τελεστή κι ενός συνεχούς τελεστή. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.4 προκύπτει ότι ο T είναι πλήρως συνεχής. Τελικά, σύμφωνα με το θεώρημα 1.35 (Schauder*) ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο στο M, δηλαδή υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε:

$$
\begin{aligned}
x = Tx \Leftrightarrow\ & x = [(I-B)^{-1} \circ A]x \\
\Leftrightarrow\ & x = (I-B)^{-1}Ax \\
\Leftrightarrow\ & (I-B)x = Ax \\
\Leftrightarrow\ & x - Bx = Ax \\
\Leftrightarrow\ & x = Ax + Bx,
\end{aligned}
$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα για την ύπαρξη λύσης ενός ΠΑΤ της μορφής

$$
\begin{cases}
\big(x(t) - g(t, x(t))\big)' = f(t, x(t)), \quad t \in [0,1] \\
x(0) = \xi.
\end{cases}
$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η ύπαρξη λύσης του παραπάνω ΠΑΤ ανάγεται στην ύπαρξη λύσης μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης της μορφής

$$x(t) = G(t, x(t)) + \int_0^t f(s, x(s))ds,\ t \in [0,1],$$

όπου $G(t, x(t)) = \xi - g(0, \xi) + g(t, x(t)),\ t \in [0,1]$.

Εφαρμογή 2.9 ([4])**.** Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = G(t, x(t)) + \int_0^t f(s, x(s))ds,\ t \in [0,1] \tag{2.2}$$

όπου $f : [0,1] \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$ και $G : [0,1] \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$ είναι δεδομένες συναρτήσεις.

Για την εξίσωση (2.2) μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.10 ([4])**.** *Ας είναι $f, G : [0,1] \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$ συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε:*

(i) *Για $t \in [0,1]$ και $x, y \in \mathbb{R}^\nu$ ισχύει*

$$\|G(t,x) - G(t,y)\|_\varepsilon \leq \theta(t)\|x - y\|_\varepsilon,$$

όπου $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, τέτοια ώστε $\|\theta\|_{max} < 1$ και $\|\cdot\|_\varepsilon$ η ευκλείδεια στάθμη του $\mathbb{R}^\nu$.

(ii) *Υπάρχει συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $\Omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ και συνεχείς συναρτήσεις $h, \phi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, τέτοιες ώστε:*

$$\|f(t,u)\|_\varepsilon \leq h(t)\Omega(\|u\|_\varepsilon) + \phi(t)$$

για όλα τα $t \in [0,1]$ και $u \in \mathbb{R}^\nu$.

Τότε, αν

$$\sup_{z\in[0,+\infty)} \frac{z}{G^*+\|h\|_{max}\Omega(z)+\|\phi\|_{max}} > \frac{1}{1-\|\theta\|_{max}}, \tag{2.3}$$

όπου $G^* = \sup_{t\in[0,1]} |G(t,0)|$, *η εξίσωση (2.2) έχει μια λύση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο Banach $X = (C([0,1],\mathbb{R}^\nu), \|\cdot\|_{\max})$, όπου $\|\cdot\|_{\max}$ είναι η max-norm, και τους τελεστές $A, B : X \to X$ που ορίζονται ως εξής:

$$Ax(t) = G(t, x(t)),\ t \in [0,1]$$

και

$$Bx(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds,\quad t \in [0,1]$$

Λόγω της συνθήκης (i) ο τελεστής A είναι συστολή. Για να αποδείξουμε ότι ο τελεστής B είναι πλήρως συνεχής θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα:

Πρόταση 2.11 ([4]). *Θεωρούμε τον χώρο Banach* $X = (C([0,1],\mathbb{R}^\nu), \|\cdot\|_{max})$. *Τότε ο τελεστής* $B : X \to X$ *με*

$$Bx(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds,\ t \in [0,1],$$

όπου $f : [0,1]\times\mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$ *συνεχής, είναι πλήρως συνεχής τελεστής.*

Απόδειξη. Πράγματι, είναι αρκετό να δείξουμε ότι ο τελεστής B είναι συνεχής και μεταφέρει φραγμένα υποσύνολα του πεδίου ορισμού του σε σχετικά συμπαγή υποσύνολα του πεδίου τιμών του.

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής B είναι συνεχής. Έστω $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in X$ με $\lim x_\nu = x \in X$. Τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x_\nu - x\|_{\max} = 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} \|Bx_\nu - Bx\|_{\max} = 0.$$

Αφού η f είναι συνεχής έχουμε:

$$\begin{aligned}|Bx_\nu(t) - Bx(t)| &= \left|\int_0^t f(s, x_\nu(s))ds - \int_0^t f(s, x(s))ds\right| \\ &= \left|\int_0^t [f(s, x_\nu(s)) - f(s, x(s))]\, ds\right|.\end{aligned}$$

Από το Κριτήριο Σύγκλισης Lebesgue 1.42 παίρνουμε ότι

$$\left|\int_0^t [f(s, x_\nu(s)) - f(s, x(s))]\, ds\right| \to 0$$

όταν το $\nu \to \infty$. Οπότε

$$|Bx_\nu(t) - Bx(t)| \to 0$$

όταν το $\nu \to \infty$.

Έστω M φραγμένο υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$M \subseteq \{x \in X : \|x\|_{\max} \le a\}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{x \in X : \|x\|_{\max} \le a\}$ απεικονίζεται σε σχετικά συμπαγές σύνολο. Ορίζουμε τα σύνολα

$$S = \{x \in \mathbb{R}^\nu : \|x\|_\varepsilon \le a\}$$

και για σταθερά $a, b \in [0,1]$ το σύνολο

$$\Sigma = [a,b] \times S \subseteq \mathbb{R}^{\nu+1}.$$

Το Σ είναι συμπαγές σύνολο, ως καρτεσιανό γινόμενο κλειστών και φραγμένων συνόλων.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1] \times \mathbb{R}^\nu$, οπότε η f είναι συνεχής στο $\Sigma \subseteq [0,1] \times \mathbb{R}^\nu$, που είναι συμπαγές, οπότε η f είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή υπάρχει $\mu > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|f(t,x)\|_\varepsilon \le \mu, \ (t,x) \in \Sigma.$$

Επίσης, για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(t_i, x_i) \in \Sigma, \ i = 1,2$ με

$$|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| < \delta$$

να ισχύει

$$\|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\|_\varepsilon < \epsilon.$$

Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο $B(M)$ είναι σχετικά συμπαγές θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.32 (Arzela - Ascoli). Αρκεί να δείξουμε ότι το $B(M)$ είναι φραγμένο και ισοσυνεχές.

Για $x \in M$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|B(x(t))| &= \left| \int_0^t f(s,x(s))ds \right| \\
&\le \int_0^t |f(s,x(s))|ds \\
&\le \|f(t,x)\|_\varepsilon \int_0^1 ds \\
&\le \mu(1-0) = \mu,
\end{aligned}$$

δηλαδή $\|Bx\|_{\max} \le \mu$, που σημαίνει ότι $B(M)$ είναι φραγμένο.

Θεωρούμε $\epsilon^* > 0$ και ορίζουμε $\epsilon = \frac{\epsilon^*}{1+\mu}$. Ας είναι $\delta = \delta(\epsilon^*)$ το δ που αντιστοιχεί στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας της f επί του συνόλου Σ. Επίσης, θεωρούμε $\delta^* = \min\{\epsilon^*, \delta\}$. Ας είναι $t_1, t_2 \in [0,1]$ με $|t_1 - t_2| < \delta^*$ και $x \in M$.

Τότε

$$\begin{aligned}
|B(x(t_1)) - B(x(t_2))| &= \left| \int_0^{t_1} f(t_1, x(s))ds - \int_0^{t_2} f(t_2, x(s))ds \right| \\
&= \Bigg| \int_0^{t_1} f(t_1, x(s))ds - \int_0^{t_1} f(t_2, x(s))ds - \\
&\quad \int_{t_1}^{t_2} f(t_2, x(s))ds \Bigg| \\
&= \Bigg| \int_0^{t_1} \left(f(t_1, x(s)) - f(t_2, x(s))\right) ds - \\
&\quad \int_{t_1}^{t_2} f(t_2, x(s))ds \Bigg| \\
&\leq \left| \int_0^{t_1} \left(f(t_1, x(s)) - f(t_2, x(s))\right) ds \right| + \\
&\quad \left| \int_{t_1}^{t_2} f(t_2, x(s))ds \right| \\
&\leq \int_0^{1} |f(t_1, x(s)) - f(t_2, x(s))| \, ds + \left| \int_{t_1}^{t_2} f(t_2, x(s))ds \right| \\
&\leq (1-0)\epsilon + \mu|t_1 - t_2| \\
&\leq \epsilon + \mu\epsilon \\
&= (1+\mu)\epsilon \\
&= \epsilon^*,
\end{aligned}$$

δηλαδή το $B(M)$ είναι ισοσυνεχές. Από το Θεώρημα 1.32 παίρνουμε ότι το $B(M)$ είναι σχετικά συμπαγές. Συνεπώς, ο B είναι πλήρως συνεχής. □

Λόγω της (2.3) και του ορισμού του supremum υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{M}{G^* + \|h\|_{\max}\Omega(M) + \|\phi\|_{\max}} > \frac{1}{1 - \|\theta\|_{\max}}.$$

Θέτουμε τότε $S' = \{u \in X : \|u\|_{\sup} \leq M\}$. Θα αποδείξουμε ότι το S' είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του X. Πράγματι, έστω $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in S'$ με $u_\nu \to u$ και θα δείξουμε ότι $u \in S'$.

Αφού $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in S'$ είναι

$$\|u_\nu\|_{\sup} \leq M$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu\|_{\sup} \leq \lim_{\nu\to\infty} M$$

$$\|\lim_{\nu\to\infty} u_\nu\|_{\sup} \leq M$$

$$\|u\|_{\sup} \leq M,$$

που σημαίνει ότι $u \in S'$, δηλαδή S' είναι κλειστό.

Για $u_1, u_2 \in S$ έχουμε $\|u_1\|_{\sup} \leq M$ και $\|u_2\|_{\sup} \leq M$ και αν $\lambda \in (0,1)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2\|_{\sup} &\leq \lambda\|u_1\|_{\sup} + (1-\lambda)\|u_2\|_{\sup}\\ &\leq \lambda M + (1-\lambda)M\\ &= M\end{aligned}$$

δηλαδή $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in S'$, που σημαίνει ότι S' είναι κυρτό.

Θεωρούμε τυχόντα στοιχεία $x, y \in S'$. Από τη σχέση (ii) παίρνουμε

$$\begin{aligned}|A(x(t)) + B(y(t))| &\leq |G(t,x(t))| + \left|\int_0^t f(s,y(s))ds\right|\\ &\leq |G(t,x(t)) - G(t,0) + G(t,0)| + \int_0^t |f(s,y(s))|\, ds\\ &\leq |G(t,x(t)) - G(t,0)| + |G(t,0)| +\\ &+ \int_0^t (h(s)\Omega(|y(s)|)\, ds + \int_0^t \phi(s)ds.\end{aligned}$$

Επειδή η G είναι συστολή και η Ω αύξουσα, για $y \in S'$ έχουμε

$$|A(x(t)) + B(y(t))| \leq |\theta(t)||x(t)| + G^* + \|h\|_{\max}\Omega(M) + \|\phi\|_{\max},$$

και λόγω της σχέσης (2.3) παίρνουμε:

$$|A(x(t)) + B(y(t))| \leq M.$$

Δηλαδή $\|Ax + By\|_{\sup} \leq M$ που σημαίνει ότι $Ax + By \in S'$.

Έτσι έχουμε ότι ο A είναι συστολή, ο B είναι πλήρως συνεχής και $Ax + By \in S'$, όπου S' είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach X και το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 2.8. □

2.5 Μια εφαρμογή στις Εξισώσεις Διαφορών

Στο σημείο αυτό θα γίνει χρήση της τροποποιημένης μορφής του Θεωρήματος Krasnosel'skii με σκοπό τη μελέτη της ύπαρξης θετικών περιοδικών λύσεων μιας εξίσωσης διαφορών με υστέρηση. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις εξισώσεις διαφορών παραπέμπουμε στα [37] και [47], καθώς επίσης και αυτές με υστέρηση στα [6] - [8], [17] - [19], [21], [22], [35], [36], [38], [42], [43], [44], [46], [52] και [59] .

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών ουδετέρου τύπου με υστέρηση

$$x(n+1) = a(n)x(n) + c\Delta x(n-\tau) + g(n, x(n-\tau)),\ \nu \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

όπου τ ένας μη-αρνητικός ακέραιος, $a(n)$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, $g : \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι:

$$a(n+T) = a(n),\ g(n+T, \cdot) = g(n, \cdot),\ \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

με

$$0 < a(n) < 1. \tag{2.6}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$P_T = \{x(n) : n \in \mathbb{N},\ x(n) = x(n+T),\ T \geq 1\}.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι ο χώρος $(P_T, \|\cdot\|_{\max})$, με στάθμη την $\|x\|_{\max} = \max\limits_{n\in[0,T-1]} |x(n)|$, είναι χώρος Banach.
Θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα 2.12. *Ο χώρος $(P_T, \|\cdot\|_{max})$ των πραγματικών περιοδικών ακολουθιών με περίοδο $T \geq 1$, είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Ας είναι $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in P_T$ μια βασική ακολουθία.Θα αποδείξουμε ότι συγκλίνει στο P_T. Αφού $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι βασική έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|x_i - x_j\|_{\max} < \epsilon$$

για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ με $i, j \geq i_0$. Για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_i(n) - x_j(n)| \leq \|x_i - x_j\|_{\max} < \epsilon.$$

Άρα $(x_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{R}$, που είναι πλήρης, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει το

$$\lim_{i\to\infty} x_i(n) =: x(n) \in \mathbb{R}.$$

Θα αποδείξουμε ότι $x \in P_T$ και

$$\|x_i - x\|_{\max} \to 0$$

όταν $i \to \infty$. Επειδή η $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ με $i, j \geq i_0$, να ισχύει

$$\|x_i - x_j\|_{\max} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Δηλαδή για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ με $i, j \geq i_0$

$$\max_{n\in[0,T-1]} |x_i(n) - x_j(n)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Επομένως

$$|x_i(n) - x_j(n)| < \frac{\epsilon}{2},$$

για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ με $i, j \geq i_0$ και για κάθε $n \in [0, T-1]$. Δηλαδή, για $i \geq i_0$ και για κάθε $n \in [0, T-1]$ έχουμε ότι $x_j(n) \to x(n),$ καθώς $j \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι

$$|x_i(n) - x_j(n)| \to |x_i(n) - x(n)|, \text{ για } i \to \infty$$

και

$$\max_{n\in[0,T-1]} |x_i(n) - x_j(n)| \to \max_{n\in[0,T-1]} |x_i(n) - x(n)|, \text{ για } j \to \infty$$

ή

$$\max_{n\in[0,T-1]} |x_i(n) - x(n)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

για κάθε $i \geq i_0$ και για κάθε $n \in [0, T-1]$. Άρα

$$\|x_i - x\|_{\max} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

για κάθε $i \geq i_0$, δηλαδή

$$\|x_i - x\|_{\max} \to 0, \text{ όταν } i \to \infty.$$

Επίσης, $x \in P_T$ αφού $x(n+T) = \lim_{i\to\infty} x_i(n+T) = \lim_{i\to\infty} x_i(n) = x(n).$ □

Ας είναι

$$G(n,u) = \frac{\prod_{s=u+1}^{n+T-1} a(s)}{1 - \prod_{s=n}^{n+T-1} a(s)}, \ u \in [n, n+T-1]. \tag{2.7}$$

Σημειώνουμε ότι στην σχέση (2.7) ο παρανομαστής δεν γίνεται 0 λόγω της (2.6) για κάθε $n \in [0, T-1]$. Ορίζουμε, επίσης,

$$m\colon = \min\{G(n,u) : n \geq 0, \ u \leq T\} = G(n,n) > 0, \tag{2.8}$$

$$M\colon = max\{G(n,u) : n \geq 0, \ u \leq T\} = G(n, n+T-1) = G(0, T-1) > 0. \tag{2.9}$$

Το επόμενο λήμμα δίνει μια περιγραφή της λύσης της εξίσωσης (2.4)

Λήμμα 2.13 ([53]). *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις* (2.5), (2.6). *Αν* $x(n) \in P_T$ *τότε η* $x(n)$ *είναι λύση της* (2.4) *αν και μόνο αν*

$$x(n) = cx(n-\tau) + \sum_{u=n}^{n+T-1} G(n,u)\left[g(u, x(u-\tau)) - c(1-a(u))x(u-\tau)\right],\ n \in \mathbb{Z}, \qquad (2.10)$$

όπου η $G(n,u)$ *ορίζεται από τη σχέση* (2.7).

Απόδειξη. Από την (2.4) παίρνουμε την εξίσωση

$$x(n+1) - a(n)x(n) = c\Delta x(n-\tau) + g(n, x(n-\tau)), \qquad (2.11)$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε μέλος της (2.11) με τον όρο $\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s)$ έχουμε

$$\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s)\left(x(n+1) - a(n)x(n)\right) = \left[c\Delta x(n-\tau) + g(n, x(n-\tau))\right]\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s).$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s)\left(x(n+1) - a(n)x(n)\right) &= \prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\frac{x(n+1) - a(n)x(n)}{a(n)} \\
&= \prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)[x(n+1)a^{-1}(s) - x(n)] \\
&= \prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s)x(n+1) - \prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)x(n) \\
&= \Delta\left[x(n)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right].
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\Delta\left[x(n)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right] = \left[c\Delta x(n-\tau) + g(n, x(n-\tau))\right]\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s). \qquad (2.12)$$

Αθροίζοντας την (2.12) από n έως $n+T-1$ παίρνουμε

$$\sum_{u=n}^{n+T-1}\Delta\left[x(u)\prod_{s=0}^{u-1} a^{-1}(s)\right] = \sum_{u=n}^{n+T-1}\left[c\Delta x(u-\tau) + g(u, x(u-\tau))\right]\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s). \qquad (2.13)$$

Όμως, το πρώτο μέλος της εξίσωσης (2.13) γράφεται

$$\sum_{u=n}^{n+T-1}\Delta\left[x(u)\prod_{s=0}^{u-1} a^{-1}(s)\right] = \Delta\left[x(n)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right] + \Delta\left[x(n+1)\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s)\right] + \ldots +$$

$$+\,\Delta\left[x(n+T-1)\prod_{s=0}^{n+T-2} a^{-1}(s)\right]$$

$$= x(n+1)\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s) - x(n)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s) + x(n+2)\prod_{s=0}^{n+1} a^{-1}(s) - x(n+1)\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s) +$$

$$+ \ldots + x(n+T)\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s) - x(n+T-1)\prod_{s=0}^{n+T-2} a^{-1}(s)$$

$$= x(n+T)\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s) - x(n)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s).$$

Επειδή $x \in P_T$ έχουμε $x(n+T) = x(n)$, οπότε:

$$\sum_{u=n}^{n+T-1} \Delta\left[x(u)\prod_{s=0}^{u-1} a^{-1}(s)\right] = x(n)\left[\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s) - \prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right].$$

Επιπλέον, για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.13) έχουμε

$$\sum_{u=n}^{n+T-1} c\Delta x(u-\tau)\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s) = c\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)x(u+1-\tau) - c\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)x(u-\tau).$$

Για τον όρο: $c\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)x(u+1-\tau)$ έχουμε:

$$c\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)x(u+1-\tau) =$$

$$c\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s)x(n+1-\tau) + c\prod_{s=0}^{n+1} a^{-1}(s)x(n+2-\tau) + \ldots + c\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)x(n+T-\tau).$$

Προσθαφαιρώντας τον όρο: $cx(n-\tau)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)$, επειδή $x \in P_T$, έχουμε

$$c\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)x(u+1-\tau) =$$

$$c\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)x(n-\tau) - cx(n-\tau)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s) + cx(n-\tau)\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s) +$$

$$c\prod_{s=0}^{n} a^{-1}(s)x(n+1-\tau) + c\prod_{s=0}^{n+1} a^{-1}(s)x(n+2-\tau) + \ldots + c\prod_{s=0}^{n+T-2} a^{-1}(s)x(n+T-1-\tau).$$

Δηλαδή,

$$c\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)x(u+1-\tau) =$$

$$cx(n-\tau)\left[\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s) - \prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right] + c\sum_{u=n}^{n+T-1} x(u-\tau)\prod_{s=0}^{u-1} a^{-1}(s).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\sum_{u=n}^{n+T-1} c\Delta x(u-\tau)\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)\\
&= cx(n-\tau)\left[\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right]+c\sum_{u=n}^{n+T-1} x(u-\tau)\prod_{s=0}^{u-1} a^{-1}(s)-\\
&\quad - c\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)x(u-\tau)\\
&= cx(n-\tau)\left[\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right]-c\sum_{u=n}^{n+T-1} x(u-\tau)\Big[\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{u-1} a^{-1}(s)\Big].
\end{aligned}$$

Επειδή

$$\prod_{s=0}^{u-1} a^{-1}(s)=a(u)\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s),$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\sum_{u=n}^{n+T-1} c\Delta x(u-\tau)\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)\\
&\qquad = cx(n-\tau)\left[\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\right]-\sum_{u=n}^{n+T-1} x(u-\tau)c[1-a(u)]\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s).
\end{aligned}$$

Οπότε η (2.13) γίνεται

$$\begin{aligned}
x(n)\Big[\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\Big] =&cx(n-\tau)\Big[\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)\Big]-\\
&-\sum_{u=n}^{n+T-1} x(u-\tau)c[1-a(u)]\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s)+\\
&+\sum_{u=n}^{n+T-1} g(u,x(u-\tau))\prod_{s=0}^{u} a^{-1}(s).
\end{aligned}$$

Διαιρώντας κατ τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης με τον όρο:

$$\prod_{s=0}^{n+T-1} a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1} a^{-1}(s)$$

παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
x(n) =& cx(n-\tau)+\\
&+\sum_{u=n}^{n+T-1}\Big\{g(u,x(u-\tau))-x(u-\tau)c[1-a(u)]\Big\}\frac{\prod_{s=0}^{u}a^{-1}(s)}{\prod_{s=0}^{n+T-1}a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1}a^{-1}(s)},
\end{aligned}
$$

όπου $u\in[n,n+T-1]$. Όμως,

$$
\frac{\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=0}^{u}a^{-1}(s)}{\prod_{s=0}^{n+T-1}a^{-1}(s)-\prod_{s=0}^{n-1}a^{-1}(s)}=\frac{\prod_{s=0}^{n}a^{-1}(s)+\prod_{s=0}^{n+1}a^{-1}(s)+\ldots+\prod_{s=0}^{n+T-1}a^{-1}(s)}{\prod_{s=0}^{n-1}a^{-1}(s)\left[\prod_{s=n}^{n+T-1}a^{-1}(s)-1\right]}
$$

$$
=\frac{\prod_{s=0}^{n}a^{-1}(s)\left[1+a^{-1}(n+1)+\prod_{s=n+1}^{n+2}a^{-1}(s)+\ldots+\prod_{s=n+1}^{n+T-1}a^{-1}(s)\right]}{\prod_{s=0}^{n-1}a^{-1}(s)\left[\prod_{s=n}^{n+T-1}a^{-1}(s)-1\right]}
$$

$$
=\frac{a^{-1}(n)\left[1+a^{-1}(n+1)+\prod_{s=n+1}^{n+2}a^{-1}(s)+\ldots+\prod_{s=n+1}^{n+T-1}a^{-1}(s)\right]}{\left[1-\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)\right]\Big/\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)}
$$

$$
=\frac{\left[a^{-1}(n)+\prod_{s=n}^{n+1}a^{-1}(s)+\prod_{s=n}^{n+2}a^{-1}(s)+\ldots+\prod_{s=n}^{n+T-1}a^{-1}(s)\right]\cdot\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)}{\left[1-\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)\right]}
$$

$$
=\frac{\prod_{s=n+1}^{n+T-1}a(s)+\prod_{s=n+2}^{n+T-1}a(s)+\ldots+1}{\left[1-\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)\right]}=\frac{\sum_{u=n}^{n+T-1}\prod_{s=u+1}^{n+T-1}a(s)}{\left[1-\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)\right]}=\sum_{u=n}^{n+T-1}\frac{\prod_{s=u+1}^{n+T-1}a(s)}{\left[1-\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)\right]},
$$

όπου $u\in[n,n+T-1]$. Από τη σχέση (2.7) έπεται ότι

$$
\sum_{u=n}^{n+T-1}\frac{\prod_{s=u+1}^{n+T-1}a(s)}{\left[1-\prod_{s=n}^{n+T-1}a(s)\right]}=\sum_{u=n}^{n+T-1}G(n,u),\ u\in[n,n+T-1].
$$

Δηλαδή

$$x(n) = cx(n-\tau) + \sum_{u=n}^{n+T-1} G(n,u)\big[g(u, x(u-\tau)) - c(1-a(u))x(u-\tau)\big],$$

που είναι το ζητούμενο. □

Για την απόδειξη των συμπερασμάτων μας θα χρησιμοποιήσουμε την τροποποιημένη μορφή του Θεωρήματος Krasnosel'skii, δηλαδή το Θεώρημα 2.8.

Θεωρούμε δύο σταθερές $L \geq 0$, $K > 0$ και ορίζουμε το σύνολο

$$\mathbb{M} = \{\phi \in P_T : L \leq \phi \leq K\}, \tag{2.14}$$

που είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach P_T. Υποθέτουμε ότι $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}$ με $\phi_\nu \to \phi$ και θα αποδείξουμε ότι $\phi \in \mathbb{M}$. Επειδή $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}$ έπεται ότι

$$L \leq \phi_\nu \leq K$$

ή

$$\lim_{\nu\to\infty} L \leq \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu \leq \lim_{\nu\to\infty} K,$$

δηλαδή

$$L \leq \phi \leq K$$

και

$$\phi(m+T) = \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu(m+T) = \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu(m) = \phi(m),$$

που σημαίνει ότι $\phi \in \mathbb{M}$, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{M}$ είναι κλειστό.

Για $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{M}$ έχουμε

$$L \leq \phi_1 \leq K \text{ και } L \leq \phi_2 \leq K.$$

Και για $\lambda \in (0,1)$ είναι

$$\lambda L \leq \lambda\phi_1 \leq \lambda K$$

και

$$(1-\lambda)L \leq (1-\lambda)\phi_2 \leq (1-\lambda)K,$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισότητες παίρνουμε

$$\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2 \in \mathbb{M},$$

που σημαίνει ότι το σύνολο $\mathbb{M}$ είναι κυρτό.

Θα εξετάσουμε χωριστά τις περιπτώσεις $0 \leq c < 1$ και $-1 < c \leq 0$. Αρχικά, υποθέτουμε ότι

$$0 \leq c < 1 \tag{2.15}$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{Z}$ και $\rho \in \mathbb{M}$,

$$\frac{(1-c)L}{mT} \leq g(u,\rho) - c[1-a(u)]\rho \leq \frac{(1-c)K}{MT}, \tag{2.16}$$

όπου m και M ορίζονται από τις σχέσεις (2.8) και (2.9) αντίστοιχα.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.8 ορίζουμε δύο τελεστές, τον $B : \mathbb{M} \to P_T$ με

$$(B\phi)(n) = c\phi(n-\tau),\ n \in \mathbb{N}$$

και τον $C : \mathbb{M} \to P_T$ με

$$(C\phi)(n) = \sum_{u=n}^{n+T-1} G(n,u)[g(u, x(u-\tau)) - c(1-a(u))\phi(u-\tau)], \; n \in \mathbb{N}.$$

Λόγω της (2.15) ο τελεστής B είναι συστολή. Για να αποδείξουμε ότι ο τελεστής C είναι πλήρως συνεχής θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα 2.14 ([53])**.** *Αν ισχύουν οι σχέσεις* (2.5), (2.6), (2.15) *και* (2.16), *τότε ο τελεστής* C *είναι πλήρως συνεχής στο* $\mathbb{M}$.

Απόδειξη. Για $n \in [0, T-1]$ και για $\phi \in \mathbb{M}$, λόγω της (2.16) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \big|(C\phi)(n)\big| &= \left| \sum_{u=n}^{n+T-1} G(n,u)[g(u, x(u-\tau)) - c(1-a(u))\phi(u-\tau)] \right| \\ &\leq TM \frac{(1-c)K}{MT} = (1-c)K \leq K \end{aligned}$$

λόγω της (2.15). Οπότε $\|C\phi\|_{\max} \leq K$, που σημαίνει ότι $C(\mathbb{M})$ είναι φραγμένο. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο C είναι πλήρως συνεχής, δηλαδή για κάθε φραγμένο υποσύνολο S του $\mathbb{M}$ το σύνολο $C(S)$ είναι σχετικά συμπαγές, δηλαδή το σύνολο $\overline{C(S)}$ είναι συμπαγές. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 αρκεί να πάρουμε τυχαία ακολουθία $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ του $C(S)$ και να δείξουμε ότι υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(f_{\kappa_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ στο $\overline{C(S)}$. Πράγματι, για την ακολουθία $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ισχύει $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in C(S) \subseteq P_T$, δηλαδή είναι περιοδική ακολουθία πραγματικών αριθμών με τιμές στο σύνολο $C(S)$, που είναι υποσύνολο του συνόλου $C(\mathbb{M})$. Το σύνολο $C(\mathbb{M})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο, δηλαδή η ακολουθία $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.40 (Bolzano-Weierstrass) η ακολουθία $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $C(S) \subseteq \overline{C(S)}$. □

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα που μας εξασφαλίζει θετική περιοδική λύση της εξίσωσης διαφορών ουδετέρου τύπου (2.4).

Θεώρημα 2.15 ([53])**.** *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις* (2.5), (2.6), (2.15) *και* (2.16). *Τότε η εξίσωση* (2.4) *έχει μια θετική περιοδική λύση* z *που πληροί τη σχέση* $L \leq z \leq K$.

Απόδειξη. Ας είναι $\phi, y \in \mathbb{M}$. Από την (2.16), για $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (B\phi)(n) + (Cy)(n) &= c\phi(n-\tau) + \\ &\quad + \sum_{u=n}^{n+T-1} G(n,u)\left[g(u, y(u-\tau)) - c(1-a(u))y(u-\tau)\right] \\ &\leq cK + M \sum_{u=n}^{n+T-1} \left[g(u, y(u-\tau)) - c(1-a(u))y(u-\tau)\right] \\ &\leq cK + MT\frac{(1-c)K}{MT} = K. \end{aligned}$$

Επίσης, για $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\begin{aligned}(B\phi)(n) + (Cy)(n) = c\phi(n-\tau) + \\ &+ \sum_{u=n}^{n+T-1} G(n,u)\left[g(u, y(u-\tau)) - c(1-a(u))y(u-\tau)\right] \\ &\geq cL + m \sum_{u=n}^{n+T-1} \left[g(u, y(u-\tau)) - c(1-a(u))y(u-\tau)\right] \\ &\geq cL + mT\frac{(1-c)L}{mT} = L.\end{aligned}$$

Επομένως, από τις δύο προηγούμενες ανισότητες έπεται ότι

$$L \leq B\phi + Cy \leq K,$$

που σημαίνει ότι $B\phi + Cy \in \mathbb{M}$. Το σύνολο $\mathbb{M}$ είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach P_T ,άρα πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.8. Συνεπώς, υπάρχει $z \in \mathbb{M}$ τέτοιο ώστε $z = Bz + Cz$, δηλαδή η εξίσωση (2.4) έχει μια θετική περιοδική λύση z που πληροί τη σχέση $L \leq z \leq K$. □

Τώρα, για την περίπτωση που

$$-1 < c \leq 0 \tag{2.17}$$

υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{L-cK}{mT} \leq g(u,\rho) - c[1-a(u)]\rho \leq \frac{K-cL}{MT}, \tag{2.18}$$

για κάθε $u \in \mathbb{Z}$ και $\rho \in \mathbb{M}$, όπου m και M ορίζονται από τις σχέσεις (2.8) και (2.9). Ακολουθώντας παρόμοιους ισχυρισμούς αποδεικνύονται το επόμενο λήμμα και θεώρημα:

Λήμμα 2.16 ([53])**.** *Αν ισχύουν οι σχέσεις* (2.5), (2.6), (2.17) *και* (2.18), *τότε ο τελεστής C είναι πλήρως συνεχής στο $\mathbb{M}$.*

Θεώρημα 2.17 ([53])**.** *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις* (2.5), (2.6), (2.17) *και* (2.18) *αντίστοιχα. Τότε η εξίσωση* (2.4) *έχει μια θετική περιοδική λύση z που πληροί την $L \leq z \leq K$.*

2.6 Krasnosel'skii Alternative και μια Εφαρμογή σε Μη Γραμμικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Το επόμενο Θεώρημα είναι μια εναλλακτική μορφή του Θεωρήματος Krasnosel'skii 2.5 και έχει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί την ύπαρξη ενός κυρτού και κλειστού υποσυνόλου με τις ιδιότητες του θεωρήματος Krasnosel'skii 2.5. Για την απόδειξή του γίνεται χρήση του Θεωρήματος 1.36 (Schaefer).

Θεώρημα 2.18 (***Krasnosel'skii Alternative***, [20])**.** *Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και $A, B : X \to X$ δύο τελεστές. Υποθέτουμε ότι ο A είναι συστολή και ο B είναι πλήρως συνεχής τελεστής. Τότε ισχύει ένα ακριβώς από τα εξής δύο:*

(i) *Το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης: $x = \lambda A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + \lambda Bx$, $\lambda \in (0,1)$ είναι μη φραγμένο.*

(ii) *Η εξίσωση: $x = \lambda A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + \lambda Bx$ έχει μια λύση για $\lambda = 1$.*

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής $\lambda A\left(\frac{1}{\lambda}\right) : X \to X$ είναι μια συστολή στον X.Πράγματι, για $\lambda \in (0,1)$, $x, y \in X$, επειδή ο τελεστής A είναι συστολή με σταθερά συστολής α και ο X είναι διανυσματικός χώρος, ως χώρος Banach, παίρνουμε:

$$\left\|\lambda A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) - \lambda A\left(\frac{1}{\lambda}y\right)\right\| \leq \lambda\alpha\left\|\frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\lambda}\right\| = \alpha\|x - y\|.$$

Ας είναι $y \in X$ ένα αυθαίρετο στοιχείο και θεωρούμε τον τελεστή $T_y : X \to X$ με $T_y(x) = \lambda A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + \lambda By$. Τότε ο Ty είναι συστολή στον χώρο Banach X, οπότε σύμφωνα με την Αρχή της Συστολής 1.33 έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned}
& x = T_y(x) \\
\Leftrightarrow\ & x = \lambda A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + \lambda By \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\lambda}x = A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + By \\
\Leftrightarrow\ & (I - A)\frac{1}{\lambda}x = By \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\lambda}x = \left[(I - A)^{-1} \circ B\right] y \\
\Leftrightarrow\ & x = \lambda\left[(I - A)^{-1} \circ B\right] y.
\end{aligned}$$

Τώρα, σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 ο τελεστής $\left(I - A\right)^{-1}$ υπάρχει και είναι συνεχής, και από το Λήμμα 2.4 έπεται ότι η σύνθεση $\left(I - A\right)^{-1} \circ B$ είναι πλήρως συνεχής.

Έτσι, η τελευταία εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής $x = \lambda Ty$ για κάθε $y \in X$, που, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.36 (Schaefer) έχει λύση με $x = y$ για $\lambda = 1$ ή έχει το σύνολο των λύσεών της για $\lambda \in (0,1)$ μη φραγμένο,δηλαδή τα ζητούμενα. □

Θα δούμε πως εφαρμόζεται το θεώρημα Krasnosel'skii alternative μέσα από την ακόλουθη εφαρμογή, που αποδεικνύει την ύπαρξη λύσης για μια ολοκληρωτική εξίσωση συγκεκριμένης μορφής.

Εφαρμογή 2.19 ([4]). Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = g(t, x(t)) + \int_0^t f(s, x(s))ds, \ t \in [0, T] \tag{2.19}$$

όπου $g : [0, T] \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^\nu$ μια συνεχής συνάρτηση, συστολή ως προς τη δεύτερη μεταβλητή με σταθερά συστολής $L \in (0, 1)$ (δηλαδή $\|g(t, x) - g(t, y)\|_\varepsilon \leq L\|x - y\|_\varepsilon$) και $f : [0, T] \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι:

$$|f(t, u)| \leq m(t)\Omega(\|u\|_\varepsilon), \ (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

όπου $m : [0, T] \to \mathbb{R}$ και $\Omega : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ συνεχείς και Ω αύξουσα, τέτοιες ώστε:

$$\int_0^T m(s)ds < (1 - L) \int_{\frac{G}{1-L}}^{\infty} \frac{ds}{\Omega(s)}$$

με $G = \max\limits_{t \in [0,T]} |g(t, o)|$. Θα αποδείξουμε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (2.19) έχει λύση στο $C([0, T], \mathbb{R}^\nu)$.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$x(t) = \lambda g\left(t, \frac{1}{\lambda}x(t)\right) + \lambda \int_0^t f(s, x(s))ds, \ t \in [0, T] \tag{2.20}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \lambda \left| g\left(t, \frac{1}{\lambda}x(t)\right) - g(t, 0) + g(t, 0) \right| + \lambda \int_0^t |f(s, x(s))| \, ds \\
&\leq \lambda \left| g\left(t, \frac{1}{\lambda}x(t)\right) - g(t, 0) \right| + \lambda |g(t, 0)| + \lambda \int_0^t |f(s, x(s))| \, ds \\
&\leq \lambda L \left| \frac{1}{\lambda}x(t) \right| + \lambda |g(t, o)| + \lambda \int_0^t m(s)\Omega(|x(s)|)ds \\
&\leq L|x(t)| + G + \int_0^t m(s)\Omega(|x(s)|)ds,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$|x(t)| \leq \frac{G}{1 - L} + \frac{1}{1 - L} \int_0^t m(s)\Omega(|x(s)|)ds.$$

Θέτουμε

$$u(t) = \frac{G}{1 - L} + \frac{1}{1 - L} \int_0^t m(s)\Omega(|x(s)|)ds$$

οπότε έχουμε:

$$|x(t)| \leq u(t) \text{ και } u(0) = \frac{G}{1 - L}.$$

Είναι:

$$|x(t)| \leq u(t) \leq \frac{G}{1 - L} + \frac{1}{1 - L} \int_0^t m(s)\Omega(u(s))ds,$$

οπότε παίρνουμε:

$$u'(t) \leq \frac{1}{1-L} m(t)\Omega(u(t))$$

ή

$$\frac{u'(t)}{\Omega(u(t))} \leq \frac{1}{1-L} m(t).$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση από 0 έως t έχουμε:

$$\int_0^t \frac{du}{dw} \frac{dw}{\Omega(u(w))} \leq \frac{1}{1-L} \int_0^t m(s)ds$$

ή

$$\int_0^t \frac{du}{\Omega(u(w))} \leq \frac{1}{1-L} \int_0^t m(s)ds,$$

και αν θέσουμε $u(w) = s$ έχουμε $du = ds$, και όταν $w = 0$ παίρνουμε $s = u(0) = \dfrac{G}{1-L}$, ενώ όταν $w = t$ παίρνουμε $s = u(t)$, οπότε έχουμε

$$\int_0^t \frac{du}{\Omega(u(w))} = \int_{\frac{G}{1-L}}^{u(t)} \frac{ds}{\Omega(s)},$$

δηλαδή

$$\int_{\frac{G}{1-L}}^{u(t)} \frac{ds}{\Omega(s)} \leq \frac{1}{1-L} \int_0^t m(s)ds \leq \frac{1}{1-L} \int_0^T m(s)ds < \int_{\frac{G}{1-L}}^{\infty} \frac{ds}{\Omega(s)}$$

οπότε υπάρχει $\kappa > 0$ τέτοιο ώστε $|x(t)| \leq u(t) \leq \kappa$, που σημαίνει ότι το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης

$$x = \lambda A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + \lambda Bx,\ \lambda \in (0,1),$$

με

$$Ax(t) = g(t, x(t)),\ t \in [0,T]$$

είναι συστολή εξ' υποθέσεως και

$$Bx(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds,\ t \in [0,T]$$

είναι πλήρως συνεχής σύμφωνα με το Λήμμα 2.11, είναι φραγμένο. Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.18 και άρα η εξίσωση

$$x = \lambda A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) + \lambda Bx$$

έχει μια λύση για $\lambda = 1$, δηλαδή η εξίσωση (2.19) έχει λύση στο $[0,T]$.

Σημείωση 2.20. Το πλεονέκτημα στο Θεώρημα 2.18 είναι ότι το φράγμα προκύπτει εκ των υστέρων, δηλαδή δεν απαιτείται εξ' αρχής να το γνωρίζουμε.

Κεφάλαιο 3

Γινόμενο Τελεστών

3.1 Εισαγωγή

Με συνδυασμό των Θεωρημάτων Σταθερού Σημείου των Banach και Schauder σε μία Banach άλγεβρα προκύπτει το Θεώρημα Σταθερού Σημείου που παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα και αφορά το γινόμενο δύο τελεστών. Το συμπέρασμα αυτό βρίσκει εφαρμογές στη μελέτη μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων σε Banach άλγεβρες. Ο Dhage με τον Lakshmikatham [31], [32] απέδειξαν ένα θεώρημα ύπαρξης λύσης, με τις υποθέσεις Lipschitz και Καραθεοδωρή, και εξήγαγαν συμπεράσματα σχετικά με ύπαρξη λύσης, σύγκλιση και συνεχούς εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα για μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

3.2 Ένα Θεώρημα για το γινόμενο δύο τελεστών και Παραλλαγές του

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα θεώρημα τύπου Krasnosel'skii που εξασφαλίζει την ύπαρξη σταθερού σημείου του γινομένου δύο τελεστών.

Θεώρημα 3.1 ([29]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας X και $A, B : S \to X$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) ο A είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz α,

(ii) ο B είναι πλήρως συνεχής και

(iii) $AxBx \in S$, για κάθε $x \in S$.

Αν $\alpha M < 1$, όπου $M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\}$, τότε η εξίσωση

$$AxBx = x \tag{3.1}$$

έχει μια λύση.

Μια διαφορετική μορφή του παραπάνω συμπεράσματος είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 3.2 ([28]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας X και $A, B : S \to S$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz α,*

(ii) *ο $(I/A)^{-1}$ υπάρχει στο $B(S)$, όπου I η ταυτοτική απεικόνιση του X,*

(iii) *ο B είναι πλήρως συνεχής και*

(iv) *$AxBy \in S$, για κάθε $x, y \in S$.*

Αν $\alpha M < 1$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (3.1) *έχει μια λύση.*

Σημείωση 3.3. Παρατηρούμε ότι ο τελεστής $(I/A)^{-1}$ υπάρχει αν ο I/A είναι καλά ορισμένος και 1-1 στον X, ενώ ο I/A είναι καλά ορισμένος αν ο τελεστής A απεικονίζει τον X σε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του X.

Για την απόδειξη των παραπάνω θεωρημάτων, που στηρίζεται στην έννοια του measure of noncompactness, παραπέμπουμε στην εξής βιβλιογραφία [28], [29], [51] και [55].

Αν στο προηγούμενο θεώρημα αντικαταστήσουμε τη συνθήκη Lipschitz για τον τελεστή A με τη συνθήκη γενικευμένος Lipschitz τότε προκύπτει ένα άλλο συμπέρασμα για ύπαρξη σταθερού σημείου.

Θεώρημα 3.4 ([30]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ και $A : X \to X$, $B : S \to X$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A είναι γενικευμένος Lipschitz,*

(ii) *ο $(I/A)^{-1}$ υπάρχει στο $B(S)$, όπου I η ταυτοτική απεικόνιση του X,*

(iii) *ο B είναι πλήρως συνεχής και*

(iv) *για κάθε $y \in S$ και $x = AxBy$ έπεται ότι $x \in S$.*

Αν $M\phi(r) < r,\ r > 0$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (3.1) *έχει μια λύση.*

Απόδειξη. Είναι
$$B : S \to B(S)$$
και
$$\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} : B(S) \to X.$$
Άρα, ορίζεται η σύνθεση $\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} \circ B : S \to X$. Θέτουμε
$$T = \left(\frac{I}{A}\right)^{-1} \circ B : S \to X, \tag{3.2}$$

και ισχυριζόμαστε ότι

$$T(S) \subseteq S. \tag{3.3}$$

Θεωρούμε ένα αυθαίρετο $y \in S$ και ορίζουμε τον τελεστή $A_y : X \to X$ ως εξής

$$A_y(x) = AxBy. \tag{3.4}$$

Από την υπόθεση (i), επειδή ο A είναι γενικευμένος Lipschitz με συνάρτηση Lipschitz ϕ, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\|A_y(x_1) - A_y(x_2)\| &= \|Ax_1By - Ax_2By\| \\ &= \|(Ax_1 - Ax_2)By\| \\ &\leq \|Ax_1 - Ax_2\|\|By\| \\ &\leq M\phi(\|x_1 - x_2\|).\end{aligned}$$

Επειδή, από την υπόθεση, έχουμε ότι $M\phi(r) < r$, $r > 0$ έπεται ότι ο τελεστής A_y είναι γενικευμένη συστολή στον X. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου 1.38 (Boyd και Wong) έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $x^* \in X$ τέτοιο ώστε

$$A_y(x^*) = x^* = Ax^*By. \tag{3.5}$$

Λόγω της υπόθεσης (iv) έχουμε ότι $x^* \in S$. Η εξίσωση (3.5) μπορεί να γραφεί ως

$$\left(\frac{I}{A}\right) x^* = By \in B(S),$$

δηλαδή

$$\left[\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} \circ B\right](y) = x^* \in S$$

που αποδεικνύει την (3.3). Ο $\left(\frac{I}{A}\right)^{-1}$ είναι καλά ορισμένος και συνεχής [28]. Αφού ο T είναι σύνθεση ενός συνεχούς και ενός πλήρως συνεχούς τελεστή, σύμφωνα με το λήμμα 2.4, είναι πλήρως συνεχής. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.35 (Schauder), ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο στο S, δηλαδή υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε

$$x = Tx$$

ή

$$x = \left(\frac{I}{A}\right)^{-1}(Bx).$$

Δηλαδή

$$x = AxBx,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Με βάση την Σημείωση 3.3 μπορούμε να πάρουμε το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 3.5. *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας X και $A : X \to X$, $B : S \to X$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A είναι γενικευμένος Lipschitz,*

(ii) *ο (I/A) είναι καλά ορισμένος και 1-1, όπου I η ταυτοτική απεικόνιση του X,*

(iii) *ο B είναι πλήρως συνεχής και*

(iv) *για κάθε $y \in S$ και $x = AxBy$ έπεται ότι $x \in S$.*

Αν $\alpha M < 1$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (3.1) *έχει μια λύση.*

Θα παραθέσουμε μια διαφορετική διατύπωση του θεωρήματος 3.4, χρησιμοποιώντας μια ισοδύναμη μορφή της συνθήκης (iv) του θεωρήματος. Παρατηρούμε ότι από την εξίσωση

$$x = AxBy,$$

έχουμε ότι

$$\frac{x}{Ax} = By \text{ ή } \left(\frac{I}{A}\right) x = By,$$

και

$$\left\| \left(\frac{I}{A}\right) x \right\| = \|By\| . \tag{3.6}$$

Πρόταση 3.6 ([30]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ τέτοιο ώστε $S = \{y \in X \ : \ \|y\| \leq r\}$ για κάποιον πραγματικό αριθμό $r > 0$. Ας είναι, επίσης, $A : X \to X$, $B : S \to X$ δύο τελεστές που ικανοποιούν τις υποθέσεις (i)-(iii) του θεωρήματος 3.4. Επιπλέον, αν*

$$\|x\| \leq \left\| \left(\frac{I}{A}\right) x \right\|, \text{ για κάθε } x \in X \tag{3.7}$$

τότε $x \in S$.

Απόδειξη. Η σχέση (3.7) μαζί με τις υποθέσεις (i)-(iii) του θεωρήματος 3.4 δηλώνουν ότι $\left(\frac{I}{A}\right) x \in B(S)$ ή ότι $x \in \left(\frac{I}{A}\right)^{-1} B(S)$. Όμως, από τις (3.2) και (3.3) έπεται ότι $\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} B(S) \subseteq S$. Άρα $x \in S$.

□

Από την πρόταση 3.6 προκύπτει το επόμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα 3.7 ([30]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ και $A : X \to X$, $B : S \to X$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A είναι γενικευμένος Lipschitz,*

(ii) *ο $(I/A)^{-1}$ υπάρχει στο $B(S)$, όπου I η ταυτοτική απεικόνιση του X,*

(iii) *ο B είναι πλήρως συνεχής,*

(iv) $\|x\| \leq \left\| \left(\frac{I}{A} \right) x \right\|$, *για κάθε $x \in X$.*

Αν $M\phi(r) < r,\ r > 0$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (3.1) έχει μια λύση.

Με βάση την Σημείωση 3.3 μπορούμε να πάρουμε το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 3.8. *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ και $A : X \to X$, $B : S \to X$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A είναι γενικευμένος Lipschitz,*

(ii) *ο (I/A) είναι καλά ορισμένος και 1-1, όπου I η ταυτοτική απεικόνιση του X,*

(iii) *ο B είναι πλήρως συνεχής και*

(iv) $\|x\| \leq \left\| \left(\frac{I}{A} \right) x \right\|$, *για κάθε $x \in X$.*

Αν $M\phi(r) < r,\ r > 0$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (3.1) έχει μια λύση.

3.3 Μια εφαρμογή σε Μη Γραμμικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος 3.4, που εξασφαλίζει ύπαρξη λύσης για μια μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση.

Εφαρμογή 3.9 ([30]). Ας είναι $J = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ και $X = C(J, \mathbb{R})$ η Banach άλγεβρα όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με στάθμη, την

$$\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)|, \tag{3.8}$$

και θεωρούμε τη μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = [f(t, x(t))] \left(q(t) + \int_0^t g(s, x(s))ds \right),\ t \in [0, 1], \tag{3.9}$$

όπου $q : J \to \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, είναι συνεχείς, και $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δίνεται από τη σχέση

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 1, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι

$$|g(t, x)| < 1 - \|q\|_{\max},\ \|q\|_{\max} < 1,\ \text{για κάθε } t \in J \text{ και } x \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση (3.9) έχει λύση που ορίζεται στο J.

Η f είναι συνεχής στο $J \times \mathbb{R}$. Ως λύση της εξίσωσης (3.9) εννοούμε μια συνεχή συνάρτηση $x \in X$ που πληροί την ολοκληρωτική εξίσωση (3.9) στο J. Ορίζουμε το σύνολο

$$S = \{y \in X \ : \ \|y\|_{\sup} \le 1\}. \tag{3.11}$$

Θεωρούμε τους τελεστές $A : X \to X$ με

$$Ax(t) = f(t, x(t)), \ t \in J, \tag{3.12}$$

και $B : S \to X$ με

$$Bx(t) = q(t) + \int_0^t g(s, x(s))ds, \ t \in J. \tag{3.13}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι το πρόβλημα ύπαρξης λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.9) ανάγεται στο πρόβλημα ύπαρξης σταθερού σημείου της εξίσωσης τελεστών $x = AxBx, \ x \in X$. Θα αποδείξουμε ότι οι τελεστές A, B πληρούν τις προϋποθέσεις του Πορίσματος (3.8). Ισχυριζόμαστε ότι ο τελεστής A είναι Lipschitz στον X. Πραγματικά, για $x, y \in X$ και $t \in J$ έχουμε

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &= |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \\ &\le \left| \frac{1}{1 + x(t)} - \frac{1}{1 + y(t)} \right| \\ &= \frac{|x(t) - y(t)|}{|1 + x(t)||1 + y(t)|} \\ &\le \|x - y\|_{\sup}, \end{aligned}$$

δηλαδή ο A είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $\alpha = 1$, άρα και γενικευμένος Lipschitz.

Είναι,

$$\left(\frac{I}{A}\right)(x) = \frac{x}{f(t, x)} \text{ ή } \left(\frac{I}{A}\right)x(t) = \begin{cases} x(t)(1 + x(t)), & \text{αν } x(t) \ge 0, \\ x(t), & \text{αν } x(t) < 0. \end{cases}$$

Ο (I/A) είναι καλά ορισμένος και 1-1 του X στον X. Πράγματι, για $x, y \in X$ και $t \in J$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{A}\right)x(t) &= \left(\frac{I}{A}\right)y(t) \\ x(t)(1 + x(t)) &= y(t)(1 + y(t)) \\ x(t) + x^2(t) &= y(t) + y^2(t) \\ x^2(t) - y^2(t) &= y(t) - x(t) \\ (x(t) + y(t))(x(t) - y(t)) &= -(x(t) - y(t)) \end{aligned}$$

Αν για κάποιο $t \in J$ ισχύει $x(t) \neq y(t)$ τότε $x(t) + y(t) = -1$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x(t), y(t) \ge 0, \ t \in J$. Άρα $x(t) = y(t)$, δηλαδή (I/A) είναι 1-1 στον X.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.11 ο τελεστής B είναι πλήρως συνεχής στο S. Θα δείξουμε ότι $B : S \to S$. Ας είναι $x \in S$. Λόγω των (3.10) και (3.13) έχουμε:

$$\begin{aligned} |Bx(t)| &\le |q(t)| + \int_0^t |g(s, x(s))|ds \\ &< |q(t)| + \int_0^t (1 - \|q\|_{\max})ds. \end{aligned}$$

Επειδή $Bx \in C(J, \mathbb{R})$, δηλαδή ο Bx είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο J, έπεται ότι υπάρχει $t^* \in J$ τέτοιο ώστε

$$\|Bx\| = |Bx(t^*)| = \max_{t \in J} |Bx(t)|.$$

Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned}\|Bx\| &= |Bx(t^*)| \\ &< |q(t^*)| + \int_0^{t^*} (1 - \|q\|_{\max}) ds \\ &\leq \|q\|_{\max} + \int_0^1 (1 - \|q\|_{\max}) ds \\ &= 1,\end{aligned}$$

δηλαδή $\|Bx\|_{\sup} < 1$, που σημαίνει ότι $B : S \to S$, όπου S είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο της Banach άλγεβρας $X = C(J, \mathbb{R})$.

Επίσης, για κάθε $x \in X$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\left\| \left(\frac{I}{A} \right) x \right\|_{\sup} &= \sup_{t \in J} \left| \frac{x(t)}{Ax(t)} \right| \\ &= \sup_{t \in J} |x(t)[1 + x(t)]| \\ &\geq \|x\|_{\sup}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, πληρούνται οι προϋποθέσεις του Πορίσματος 3.8 και, άρα, η εξίσωση (3.1), δηλαδή, η ολοκληρωτική εξίσωση (3.9), έχει μια λύση που ορίζεται στο J.

3.4 Alternative

Το επόμενο θεώρημα είναι μια διαφορετική μορφή του θεωρήματος 3.4 που προκύπτει με χρήση του θεωρήματος 1.37 (Nonlinear Alternative).

Θεώρημα 3.10 (***Alternative***, [34])**.** *Ας είναι $B(0, r)$ (αντίστοιχα, $B[0, r]$) η ανοικτή μπάλα (αντίστοιχα, η κλειστή μπάλα) με κέντρο 0 και ακτίνα r μιας Banach άλγεβρας $X = (X, \|\cdot\|)$. Υποθέτουμε ότι $A, B : X \to X$ είναι δύο τελεστές που πληρούν τα ακόλουθα:*

(i) *ο A είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz α,*

(ii) *ο $\dfrac{I}{A} : X \to X$ είναι καλά ορισμένος και 1-1,*

(iii) *ο B είναι πλήρως συνεχής και*

(iv) *$\alpha M < 1$, όπου $M = \big\|B\big(B[0, r]\big)\big\| = \sup\{\|Bx\| : x \in B[0, r]\}$.*

Τότε ισχύει ένα ακριβώς από τα εξής:

(i) *υπάρχει* $x \in B[0,r]$ *με* $x = AxBx$ *ή*

(ii) *υπάρχει* $u \in \partial B[0,r]$ *και* $\lambda \in (0,1)$ *με* $u = \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.37 (Nonlinear-Alternative) για τον τελεστή $T = \left(\frac{I}{A}\right)^{-1} \circ B$ στο σύνολο $U = B(0,r)$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} : B\left(B(0.r)\right) \to X. \tag{3.14}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε τη σχέση (3.14), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$B\left(B(0.r)\right) \subseteq \left(\frac{I}{A}\right)(X),$$

δηλαδή για αυθαίρετο $y \in B(0,r)$ είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\left(\frac{I}{A}\right)(x) = By. \tag{3.15}$$

Για ένα αυθαίρετο $y \in B(0,r)$ ορίζουμε τον τελεστή $A_y : X \to X$ ως εξής

$$A_y(x) = AxBy.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in X$, από την (i) έχουμε

$$\|A_y(x_1) - A_y(x_2)\| \leq \|A(x_1) - A(x_2)\| \, \|By\| \leq \alpha M \|x_1 - x_2\|,$$

και λόγω της (iv), προκύπτει ότι ο τελεστής A_y είναι συστολή στον X. Επομένως, υπάρχει μοναδικό $x^* \in X$ με

$$A_y(x^*) = x^*.$$

ή

$$\frac{x^*}{A(x^*)} = By.$$

από όπου

$$\left(\frac{I}{A}\right)(x^*) = By,$$

που αποδεικνύει την (3.15). Θα αποδείξουμε ότι

$$\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} : B\left(B(0.r)\right) \to X \text{ είναι συνεχής.} \tag{3.16}$$

Πραγματικά, ας είναι $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in B\left(B(0.r)\right)$ τέτοια ώστε $x_\nu \to x \in B\left(B(0.r)\right)$. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\left(\frac{I}{A}\right)^{-1}(x_\nu) \to \left(\frac{I}{A}\right)^{-1}(x).$$

Θέτουμε

$$y_\nu := \left(\frac{I}{A}\right)^{-1}(x_\nu) \text{ και } y := \left(\frac{I}{A}\right)^{-1}(x).$$

Είναι

$$x_\nu A y_\nu = y_\nu$$

και

$$xAy = y.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\|y_\nu - y\| &= \|x_\nu A y_\nu - xAy\| \\
&= \|x_\nu A y_\nu + x_\nu A y - x_\nu A y - xAy\| \\
&= \|x_\nu \left(A y_\nu - Ay\right) + Ay(x_\nu - x)\| \\
&\leq \|A y_\nu - Ay\| \, \|x_\nu\| + \|Ay\| \, \|x_\nu - x\| \\
&\leq \alpha M \|y_\nu - y\| + \|Ay\| \, \|x_\nu - x\|.
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\|y_\nu - y\| \leq \alpha M \|y_\nu - y\| + \|Ay\| \, \|x_\nu - x\|.$$

Ωστόσο,

$$\|Ay\| = \|A0 - A0 + Ay\| \leq \|A0\| + \|A0 - Ay\| \leq \|A0\| + \alpha \|y\| \equiv \beta,$$

Άρα από τις προηγούμενες δύο ανισότητες έπεται ότι

$$\|y_\nu - y\| \leq \frac{\beta}{1 - \alpha M} \|x_\nu - x\|,$$

από όπου, για $\nu \to \infty$ παίρνουμε $\|y_\nu - y\| \to 0$, που αποδεικνύει την (3.16).

Παρατηρούμε ότι $B : B[o, r] \to B\big(B[o, r]\big)$ και $\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} : B\big(B[0, r]\big) \to X$. Επομένως η σύνθεση

$$T = \left(\frac{I}{A}\right)^{-1} \circ B : B[0, r] \to X$$

είναι καλά ορισμένη και, σύμφωνα με το Λήμμα 2.4 και την συνθήκη (iii) του Θεωρήματος, είναι πλήρως συνεχής. Συνεπώς, με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.37 για τον τελεστή T στον χώρο $B[0, r]$, που είναι κυρτό σύνολο, και ανοικτό υποσύνολό του την ανοικτή μπάλα $B(0, r)$ με κέντρο 0 και ακτίνα r, παίρνουμε ότι ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής

(i) ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο στο $B[0, r]$,

(ii) υπάρχουν $u \in \partial B[0, r]$ και $\lambda \in (0, 1)$ με $u = \lambda \left(\frac{I}{A}\right)^{-1} B(u)$.

Αυτό σημαίνει ότι είτε

$$\left(\frac{I}{A}\right)^{-1} B(x) = x, \text{ για } x \in B[0, r]$$

είτε

$$\text{υπάρχουν } u \in \partial B[0,r] \text{ και } \lambda \in (0,1) \text{ με } \frac{I}{A}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = Bu$$

δηλαδή είτε

$$x \in B[0,r] \text{ με } x = AxBx$$

ή

$$\text{υπάρχουν } u \in \partial B[0,r] \text{ και } \lambda \in (0,1) \text{ με } u = \lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right) Bu.$$

Επομένως, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Σημείωση 3.11. Στο Θεώρημα 3.10 θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το $B : X \to X$ με το $B : B[0,r] \to X$.

Σημείωση 3.12. Στο Θεώρημα 3.10 θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε την συνθήκη (ii) με $\left(\frac{I}{A}\right)^{-1}$ υπάρχει στο $B\left(B[0,r]\right)$, και επίσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $B(0,r)$ με οποιοδήποτε ανοικτό και φραγμένο σύνολο που περιέχει το 0.

3.5 Μια εφαρμογή σε Συναρτησιακές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος 3.10 σε συναρτησιακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα θεωρούμε την συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = [f(t, x(\alpha_1(t)))] \left(q(t) + \int_0^{\alpha_2(t)} g(s, x(\alpha_3(s)))ds \right), t \in J, \tag{3.17}$$

όπου $J = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι

(i) $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και υπάρχει μια φραγμένη συνάρτηση $\alpha : J \to [0,\infty)$ με

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \alpha(t)|x-y|,\ t \in J,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Καραθεοδωρή, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $h_r \in L^1(J)$ τέτοια ώστε να ισχύει $|g(t,x)| \leq h_r(t)$ σχεδόν παντού στο J,

(iii) $\alpha_i : J \to J$ είναι συνεχής για i=1,2,3,

(iv) $q : J \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής,

(v) $h : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ όπου $h(t,x) = \dfrac{x}{f(t,x)}$, $(t,x) \in J \times \mathbb{R}$,

(vi) για κάθε $x_1, x_2 \in C(J,\mathbb{R})$ με

$$\frac{x_1(t)}{f(t, x_1(\alpha_1(t)))} = \frac{x_2(t)}{f(t, x_2(\alpha_1(t)))} \text{ έχουμε } x_1(t) = x_2(t) \text{ για } t \in J.$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση (3.17) έχει λύση στην Banach άλγεβρα όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $X = C(J,\mathbb{R})$, εφοδιασμένη με τη στάθμη $\|x\|_{\sup} = \sup_{t\in J}|x(t)|$.

Θεώρημα 3.13 ([34]). *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες (i) έως (vi). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι*

$$\begin{cases} \text{υπάρχει μια συνεχής και αύξουσα συνάρτηση } \psi : [0,\infty) \to [0,\infty), \text{ και} \\ \text{υπάρχει μια συνάρτηση } \phi \in L^1(J) \text{ με } \phi > 0 \text{ σχεδόν παντού στο } J \text{ τέτοια ώστε} \end{cases}$$

$$|g(t,y)| \leq \phi(t)\psi(|y|), \text{ για } (t,y) \in J \times \mathbb{R} \tag{3.18}$$

και υπάρχει $\gamma > 0$ με

$$\frac{\gamma}{[\|\alpha\|_{max}\gamma + F]\left(\|q\|_{max} + \psi(\gamma)\|\phi\|_{L^1(J)}\right)} > 1 \tag{3.19}$$

όπου $\|\phi\|_{L^1(J)} := \int_0^1 |\phi(s)|ds$.
Αν

$$\|\alpha\|_{max}\left(\|q\|_{max} + \psi(\gamma)\|\phi\|_{L^1(J)}\right) < 1 \tag{3.20}$$

όπου $F = \sup_{t\in J} |f(t,0)|$, τότε η εξίσωση (3.17) έχει λύση που ορίζεται στο J.

Απόδειξη. Ας είναι $X = C(J,\mathbb{R})$ και $B(0,\gamma)$ η ανοικτή μπάλα στον X, με $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε να πληρούνται οι (3.19) και (3.20). Ορίζουμε τους τελεστές $A : X \to X$ με

$$Ax(t) = f(t, x(\alpha_1(t))), \ t \in J$$

και $B : X \to X$ με

$$Bx(t) = q(t) + \int_0^{\alpha_2(t)} g(s, x(\alpha_3(s)))ds, \ t \in J.$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι λύση της εξίσωσης (3.17) ανάγεται σε λύση της εξίσωσης τελεστών

$$AxBx = x \text{ στον } X.$$

Θα αποδείξουμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.10. Ας είναι $x, y \in X$. Από τη συνθήκη (i) έχουμε

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &= |f(t, x(\alpha_1(t))) - f(t, y(\alpha_1(t)))| \\ &\leq \alpha(t)\,|x(\alpha_1(t)) - y(\alpha_1(t))| \\ &\leq \|\alpha\|_{\max}\|x - y\|, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|Ax - Ay\| \leq \|\alpha\|_{\max}\|x - y\|,$$

που σημαίνει ότι ο τελεστής A είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $\|\alpha\|$. Από τις (ii), (iii) και το Θεώρημα 1.42 προκύπτει ότι ο τελεστής $B : X \to X$ είναι συνεχής (για την αναλυτική απόδειξη παραπέμπουμε στο [41]). Θα αποδείξουμε ότι είναι και πλήρως συνεχής με χρήση του Θεωρήματος 1.32 (Arzela-Ascoli). Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $B\left(B[0,r]\right)$, $r>0$, είναι σχετικά συμπαγές, ή, ισοδύναμα, (θεώρημα 1.32) φραγμένο και ισοσυνεχές. Ας είναι $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $B[0,r]$. Με χρήση της (ii) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|Bx_\nu\| &\leq \|q\|_{\max} + \sup_{t\in J}\int_0^{\alpha_2(t)} |g(s,x_\nu(\alpha_3(s)))|\,ds \\ &\leq \|q\|_{\max} + \|h_r\|_{L^1(J)},\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι το σύνολο $B\left(B[0,r]\right)$ είναι φραγμένο για οποιοδήποτε $r>0$. Επίσης, για $t_1,t_2\in J$ έχουμε

$$\begin{aligned}|Bx_\nu(t_1)-Bx_\nu(t_2)| &\leq |q(t_1)-q(t_2)| + \left|\int_{\alpha_2(t_2)}^{\alpha_2(t_1)} h_r(s)ds\right| \\ &= |q(t_1)-q(t_2)| + |p(t_1)-p(t_2)|,\end{aligned}$$

όπου $p:J\to\mathbb{R}$ με $p(t)=\displaystyle\int_0^{\alpha_2(t)} h_r(s)ds$. Επειδή οι συναρτήσεις p και q είναι ομοιόμορφα συνεχείς (ως συνεχείς στο συμπαγές διάστημα J), λόγω της προηγούμενης ανισότητας, συμπεραίνουμε ότι $B\left(B[0,r]\right)$ είναι ισοσυνεχές, για οποιοδήποτε $r>0$. Άρα, από το Θεώρημα 1.32 προκύπτει ότι ο $B:B[0,r]\to X$ είναι πλήρως συνεχής για κάθε $r>0$, άρα και για το $r=\gamma$. Παρατηρούμε ότι για $t\in[0,\gamma]$ είναι

$$\begin{aligned}M = B\left(B[0,\gamma]\right) &= \sup_{t\in J}\{Bx : x\in B[0,\gamma]\} \\ &\leq \|q\|_{\max} + \psi(\gamma)\int_0^1 \phi(s)ds \\ &= \|q\|_{\max} + \psi(\gamma)\|\phi\|_{L^1(J)},\end{aligned}$$

άρα, λόγω της (3.20) παίρνουμε $\|\alpha\|M<1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.10, ισχύει ένα ακριβώς από τα εξής:

(i) υπάρχει $x\in B[0,\gamma]$ με $x=AxBx$ ή

(ii) υπάρχουν $u\in\partial B[0,\gamma]$ και $\lambda\in(0,1)$ με $u=\lambda A\left(\frac{u}{\lambda}\right)Bu$.

Θα αποδείξουμε ότι η περίπτωση (ii) του συμπεράσματος του Θεωρήματος 3.10 δεν μπορεί να ισχύει. Πράγματι, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x\in\partial B[0,\gamma]$ και $\lambda\in(0,1)$ με $x=\lambda A\left(\frac{x}{\lambda}\right)Bx$. Τότε για $t\in[0,\gamma]$ έχουμε

$$x(t)=\lambda\left(f\left(t,\frac{1}{\lambda}x(\alpha_1(t))\right)\right)\left(q(t)+\int_0^{\alpha_2(t)} g(s,x(\alpha_3(s)))ds\right)$$

Για $t \in [0, \gamma]$ είναι

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq \left(\left| \lambda f\left(t, \frac{1}{\lambda} x(\alpha_1(t))\right) - \lambda f(t,0) \right| + \lambda \left| f(t,0) \right| \right) \left[\|q\|_{\max} + \psi(\|x\|_{\sup}) \|\phi\|_{L^1(J)} \right] \\
&\leq (\|\alpha\|_{\max} \|x\|_{\sup} + F) \left[\|q\|_{\max} + \psi(\gamma) \|\phi\|_{L^1(J)} \right] \\
&= (\|\alpha\|_{\max} \gamma + F) \left[\|q\|_{\max} + \psi(\gamma) \|\phi\|_{L^1(J)} \right],
\end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε

$$\gamma = \|x\|_{\sup} \leq (\|\alpha\|_{\max} \gamma + F) \left[\|q\|_{\max} + \psi(\gamma) \|\phi\|_{L^1(J)} \right],$$

που αντίκειται στην υπόθεση (3.19). Επομένως, υπάρχει $x \in B[o, \gamma]$ με $x = AxBx$, που σημαίνει ότι η εξίσωση (3.17) έχει μια λύση στο $B[o, \gamma]$. Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Κεφάλαιο 4

Άθροισμα και Γινόμενο Τελεστών

4.1 Εισαγωγή

Το βασικό θεώρημα σταθερού σημείου που θα μας απασχολήσει στην παρούσα παράγραφο είναι ένα θεώρημα σταθερού σημείου που αφορά το συνδυασμό αθροίσματος και γινομένου τριών τελεστών. Η απόδειξή του στηρίζεται στα θεωρήματα σταθερού σημείου των Banach και Schauder. Ο Dhage [25] έκανε εφαρμογή αυτού του θεωρήματος για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ύπαρξη λύσεων, την ύπαρξη maximal και minimal λύσεων, καθώς και χρήσιμων ανισοτήτων σε μια διαφορική εξίσωση με εκτρεπόμενα ορίσματα. Οι Dhage, Ntouyas και Tsamatos [33] παρουσίασαν ένα θεώρημα σταθερού σημείου, που αφορά το συνδυασμό αθροίσματος και γινομένου τελεστών, και εφαρμογές του σε μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Επίσης, οι A. E. Sayed και H. Hashem [56], κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Dhage, παρουσίασαν ένα ακόμα θεώρημα ύπαρξης λύσης που εφαρμόστηκε σε μια μη γραμμική συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση κλασματικού τύπου (fractional).

4.2 Το Βασικό Θεώρημα και Παραλλαγές του

Το επόμενο υβριδικό θεώρημα αφορά το συνδυασμό αθροίσματος και γινομένου τριών τελεστών.

Θεώρημα 4.1 ([24]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ και $A, B, C : S \to X$ τρεις τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) ο A και ο C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz α και β αντίστοιχα,

(ii) ο B είναι πλήρως συνεχής, και

(iii) $AxBx + Cx \in S$, για κάθε $x \in S$.

Αν $\alpha M + \beta < 1$, όπου $M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\}$, τότε η εξίσωση

$$AxBx + Cx = x \tag{4.1}$$

έχει μια λύση.

Μια διαφορετική διατύπωση του παραπάνω Θεωρήματος παρουσιάζεται παρακάτω.

Θεώρημα 4.2 ([24]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ και $A, B, C : S \to S$ τρεις τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A και ο C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz α και β αντίστοιχα,*

(ii) *ο $\left(\frac{I-C}{A}\right)^{-1}$ υπάρχει στο $B(S)$, όπου I η ταυτοτική απεικόνιση του X,*

(iii) *ο B είναι πλήρως συνεχής,*

(iv) *$AxBy + Cy \in S$, για κάθε $x, y \in S$.*

Αν $\alpha M + \beta < 1$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (4.1) έχει μια λύση.

Σημείωση 4.3. Παρατηρούμε ότι ο τελεστής $\left(\frac{I-C}{A}\right)^{-1}$ υπάρχει αν είτε

(i) $\left(\frac{I-C}{A}\right)$ είναι καλά ορισμένος και 1-1 στον X, ή

(ii) $\frac{I}{A}$ είναι καλά ορισμένος και 1-1 στον X, αφού

$$\left(\frac{I-C}{A}\right)^{-1} = \left(\frac{I}{A}\right)^{-1} \circ (I-C)^{-1}.$$

Επιπλέον, οι $\left(\frac{I-C}{A}\right)$ και $\left(\frac{I}{A}\right)$ είναι καλά ορισμένοι αν ο τελεστής A απεικονίζει τον X σε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του X.

Για την απόδειξη των παραπάνω θεωρημάτων, που στηρίζεται στην έννοια του measure of noncompactness, παραπέμπουμε στο [16].

Με αντικατάσταση της συνθήκης (iii) του θεωρήματος 4.1 με μια παρόμοια συνθήκη προκύπτει ένα νέο υβριδικό θεώρημα σταθερού σημείου.

Θεώρημα 4.4 ([24]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$, $A, C : X \to X$ και $B : S \to X$ τρεις τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A και ο C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz α και β αντίστοιχα,*

(ii) *ο B είναι πλήρως συνεχής, και*

(iii) *για κάθε $y \in S$ και $x = AxBy + Cx$ έπεται ότι $x \in S$.*

Αν $\alpha M + \beta < 1$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (4.1) έχει μια λύση.

Απόδειξη. Ας είναι αυθαίρετο $y \in S$ και ορίζουμε τον τελεστή $A_y : X \to X$ ως εξής

$$A_y(x) = AxBy + Cx,\ x \in X. \tag{4.2}$$

Από την υπόθεση (i), για κάθε $x_1, x_2 \in X$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\|A_y(x_1) - A_y(x_2)\| &= \|Ax_1By + Cx_1 - Ax_2By - Cx_2\| \\ &\leq \|(Ax_1 - Ax_2)By\| + \|Cx_1 - Cx_2\| \\ &\leq \|Ax_1 - Ax_2\|\|By\| + \|Cx_1 - Cx_2\| \\ &\leq M\alpha\|x_1 - x_2\| + \beta\|x_1 - x_2\| \\ &= (\alpha M + \beta)\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

και επειδή, από την υπόθεση, έχουμε ότι $\alpha M + \beta < 1$ έπεται ότι ο τελεστής A_y είναι συστολή στον X με σταθερά συστολής $\alpha M + \beta$. Με εφαρμογή της Αρχής της Συστολής υπάρχει μοναδικό $x^* \in X$ τέτοιο ώστε

$$A_y(x^*) = x^* = Ax^*By + Cx^*. \tag{4.3}$$

Λόγω της υπόθεσης (iii) έχουμε ότι $x^* \in S$. Ορίζουμε τον τελεστή $N : S \to X$ ως εξής

$$Ny = z, \tag{4.4}$$

όπου $z \in X$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$z = AzBy + Cz,\ y \in S.$$

Για να αποδείξουμε ότι ο τελεστής N είναι πλήρως συνεχής, σύμφωνα με τη σημείωση 1.26, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής και ολικά φραγμένος. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ο N είναι συνεχής. Ας είναι $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία του S, τέτοια ώστε να συγκλίνει προς ένα $y \in S$. Θα αποδείξουμε ότι $Ny_\nu \to Ny$. Για $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\big\|Ny_\nu - Ny\big\| &= \big\|ANy_\nu By_\nu + CNy_\nu - ANyBy - CNy\big\| \\ &= \big\|ANy_\nu By_\nu - ANyBy_\nu + ANyBy_\nu - ANyBy + CNy_\nu - CNy\big\| \\ &\leq \big\|ANy_\nu By_\nu - ANyBy_\nu\big\| + \big\|ANyBy_\nu - ANyBy\big\| + \big\|CNy_\nu - CNy\big\| \\ &\leq \big\|\big(ANy_\nu - ANy\big)By_\nu\big\| + \big\|ANy\big(By_\nu - By\big)\big\| + \big\|CNy_\nu - CNy\big\| \\ &\leq \big\|ANy_\nu - ANy\big\|\big\|By_\nu\big\| + \big\|ANy\big\|\big\|By_\nu - By\big\| + \big\|CNy_\nu - CNy\big\| \\ &\leq M\alpha\big\|Ny_\nu - Ny\big\| + \big\|ANy\big\|\big\|By_\nu - By\big\| + \beta\big\|Ny_\nu - Ny\big\|.\end{aligned}$$

Επειδή ο B είναι συνεχής (ως πλήρως συνεχής) έπεται ότι $\|By_\nu - By\| \to 0$ για $\nu \to \infty$. Επομένως,

$$\|Ny_\nu - Ny\| \leq (\alpha M + \beta)\|Ny_\nu - Ny\|$$

ή

$$(1 - \alpha M - \beta)\|Ny_\nu - Ny\| \leq 0,$$

από όπου, λόγω του ότι $\alpha M + \beta < 1$, έπεται ότι $\|Ny_\nu - Ny\| \leq 0$, και, συνεπώς, $Ny_\nu \to Ny$. Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής N είναι συνεχής.

Θα αποδείξουμε ότι ο N είναι και ολικά φραγμένος, δηλαδή για $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ϵ. Για κάθε $z, a \in S$

$$\begin{aligned}
\|Az\| &= \|Aa + Az - Aa\| \\
&\leq \|Aa\| + \|Az - Aa\| \\
&\leq \|Aa\| + \alpha\|z - a\| \\
&\leq c,
\end{aligned}$$

όπου $c = \|Aa\| + \alpha\ diam(S)$.

Λόγω της υπόθεσης (ii) έχουμε ότι ο τελεστής B είναι πλήρως συνεχής, ή, ισοδύναμα, συνεχής και ολικά φραγμένος. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $B(S)$ είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή, για $\delta > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $Y = \{y_1,\ y_2, \ldots,\ y_\nu\} \subseteq S$ τέτοιο ώστε

$$B(S) \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{B}_\delta(w_i),$$

όπου $\mathcal{B}_\delta(w_i)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο w_i και ακτίνα δ. Θέτουμε $w_i = B(y_i)$ και $\delta = \left(\dfrac{1 - (\alpha M + \beta)}{c}\right)\epsilon$. Για $y \in S$ υπάρχει $y_k \in Y$, τέτοιο ώστε

$$\|By - By_k\| \leq \left(\frac{1 - (\alpha M + \beta)}{c}\right)\epsilon.$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|z_k - z\| &= \|Az_kBy_k + Cz_k - AzBy - Cz\| \\
&= \|Az_kBy_k - AzBy_k + AzBy_k - AzBy + Cz_k - Cz\| \\
&\leq \|Az_kBy_k - AzBy_k\| + \|AzBy_k - AzBy\| + \|Cz_k - Cz\|
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}\|z_k - z\| &\le \|(Az_k - Az)By_k\| + \|Az(By_k - By)\| + \|Cz_k - Cz\| \\ &\le \|Az_k - Az\|\|By_k\| + \|Az\|\|By_k - By\| + \|Cz_k - Cz\| \\ &\le M\alpha\|z_k - z\| + \|Az\|\|By_k - By\| + \beta\|z_k - z\| \\ &\le M\alpha\|z_k - z\| + c\|By_k - By\| + \beta\|z_k - z\| \\ &= M\alpha\|Ny_k - Ny\| + c\|By_k - By\| + \beta\|z_k - z\|,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$[1 - (M\alpha + \beta)]\|Ny_k - Ny\| \le c\|By_k - By\|$$

ή

$$\|Ny_k - Ny\| \le \frac{c}{1 - (M\alpha + \beta)}\|By_k - By\|,$$

που σημαίνει ότι

$$\|Ny_k - Ny\| < \epsilon,$$

δηλαδή

$$N(S) \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{B}_\epsilon(w_i).$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το σύνολο $N(S)$ είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή ότι ο τελεστής N είναι ολικά φραγμένος. Άρα ο N πλήρως συνεχής. Από το Θεώρημα 1.35 (Schauder*) ο τελεστής N έχει σταθερό σημείο στο S. Άρα,

$$x = Nx = A(Nx)Bx + C(Nx) = AxBx + Cx.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (4.1) έχει μια λύση στο S. □

Παρατηρούμε ότι παίρνοντας για $C \equiv 0$ (ο τετριμμένος μηδενικός τελεστής του X) και $A \equiv 1$ στο θεώρημα 4.4 προκύπτουν τα θεωρήματα σταθερού σημείου που αφορούν το άθροισμα δύο τελεστών και αντίστοιχα το γινόμενο που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Τώρα, θα παραθέσουμε μια διαφορετική μορφή του θεωρήματος 4.1, χρησιμοποιώντας μια ισοδύναμη μορφή της συνθήκης (iii) του θεωρήματος. Ας είναι $y \in S$. Παρατηρούμε ότι από την εξίσωση

$$x = AxBy + Cx, \text{ για κάποιο } x \in X,$$

παίρνουμε ότι

$$\left(\frac{I - C}{A}\right)(x) = By,$$

από όπου έχουμε

$$\left\|\left(\frac{I - C}{A}\right)x\right\| = \|By\|. \tag{4.5}$$

Πρόταση 4.5 ([24]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ τέτοιο ώστε $S = \{y \in X \mid \|y\| \leq r\}$ για κάποιον πραγματικό αριθμό $r > 0$. Ας είναι $A : X \to X - \{0\}$, $B : S \to S$ δύο τελεστές που ικανοποιούν τις υποθέσεις (i)-(ii) του Θεωρήματος 4.2. Επιπλέον, αν*

$$\|x\| \leq \left\| \left(\frac{I - C}{A} \right) x \right\|, \text{ για κάθε } x \in X \tag{4.6}$$

τότε $x \in S$.

Απόδειξη. Η σχέση (4.6) μαζί με τις υποθέσεις (i)-(iii) του θεωρήματος 4.2 δηλώνουν ότι

$$\left(\frac{I - C}{A} \right) x \in B(S)$$

ή ότι

$$x \in \left(\frac{I - C}{A} \right)^{-1} B(S).$$

Όμως ισχύει ότι

$$\left(\frac{I - C}{A} \right)^{-1} B(S) \subseteq S.$$

Άρα $x \in S$. □

Με χρήση της προηγούμενης πρότασης, από το θεώρημα 4.1, προκύπτει το επόμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα 4.6 ([24]). *Ας είναι S ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο μιας Banach άλγεβρας $(X, \|\cdot\|)$ και $A, C : X \to X$, $B : S \to X$ τρεις τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) *ο A και ο C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz α και β αντίστοιχα,*

(ii) *ο B είναι πλήρως συνεχής και*

(iii) $\|x\| \leq \left\| \left(\frac{I - C}{A} \right) x \right\|$, *για κάθε $x \in X$.*

Αν $\alpha M + \beta < 1$, όπου $M = \|B(S)\|$, τότε η εξίσωση (4.1) έχει μια λύση.

4.3 Εφαρμογές σε Μη Γραμμικές Συναρτησιακές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Η χρησιμότητα του θεωρήματος 4.1 γίνεται φανερή από τις ακόλουθες εφαρμογές, που αποδεικνύουν την ύπαρξη λύσης για μη γραμμικές συναρτησιακές ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Εφαρμογή 4.7 ([24]). Θεωρούμε τη μη-γραμμική συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = -a(t)|x(t)| + \left[\frac{1}{1 + b(t)|x(t)|} \right] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds \right), \ t \in J, \tag{4.7}$$

όπου $J = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $a, b : J \to \mathbb{R}^+$ είναι φραγμένες συναρτήσεις με φράγματα $\|a\|_{\max}$ και $\|b\|_{\max}$ αντίστοιχα και $\sigma, \eta : J \to J$, $q : J \to \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς, τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} \sigma(t) \leq t, \\ |g(t,x)| < 1 - \|q\|_{\max}, \quad \|q\|_{\max} < 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

για κάθε $t \in J$ και $x \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι, αν $\|a\|_{\max} + \|b\|_{\max} < 1$, η εξίσωση (4.7) έχει λύση που ορίζεται στο J.

Ας είναι $X = C(J, \mathbb{R})$ η Banach άλγεβρα όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με στάθμη, την

$$\|x\|_{\sup} = \sup_{t \in J} |x(t)|, \tag{4.9}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$S = \{y \in X : \|y\|_{\sup} \leq 1\} \tag{4.10}$$

Ως λύση της (4.7) εννοούμε μια συνεχή συνάρτηση $x : J \to \mathbb{R}$ που να πληροί την (4.7) στο J. Ορίζουμε τους τελεστές $A : X \to X$ με

$$Ax(t) = \frac{1}{1 + b(t)|x(t)|}, \ t \in J, \tag{4.11}$$

$B : X \to X$ με

$$Bx(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds, \ t \in J \tag{4.12}$$

και $C : X \to X$ με

$$Cx(t) = -a(t)|x(t)|, \ t \in J \tag{4.13}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι το πρόβλημα εύρεσης λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.7) ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης σταθερού σημείου της εξίσωσης τελεστών (4.1). Θα αποδείξουμε ότι οι τελεστές A, B, και C ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.6. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι οι τελεστές A, C είναι Lipschitz στον X. Ας είναι $x, y \in X$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \big|Ax(t) - Ay(t)\big| &= \left| \frac{1}{1 + b(t)|x(t)|} - \frac{1}{1 + b(t)|y(t)|} \right| \\ &\leq |b(t)(|x(t)| - |y(t)|)| \\ &\leq \|b\|_{\max} \|x - y\|_{\sup} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \big|Cx(t) - Cy(t)\big| &= \big| -a(t)|x(t)| + a(t)|y(t)|\big| \\ &= \big| -a(t)(|x(t)| - |y(t)|)\big| \\ &\leq \|a\|_{\max} \|x - y\|_{\sup}, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι οι τελεστές A και C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz $\|b\|_{\max}$ και $\|a\|_{\max}$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.11 ο τελεστής B είναι πλήρως συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι $B : S \to S$. Ας είναι $x \in S$. Τότε από τις σχέσεις (4.6) και (4.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\big|Bx(t)\big| &= \left|q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds\right| \\
&\leq |q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} |g(s, x(\eta(s)))|ds \\
&< |q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} (1 - \|q\|_{\max})ds.
\end{aligned}$$

Επειδή $Bx \in C(J, \mathbb{R})$, δηλαδή ο Bx συνεχής στο συμπαγές διάστημα J, έπεται ότι υπάρχει $t^* \in J$ τέτοιο ώστε

$$\big\|Bx\big\| = \big|Bx(t^*)\big| = \max_{t \in J} \big|Bx(t)\big|.$$

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\big\|Bx\big\| &= \big|Bx(t^*)\big| \\
&< |q(t^*)| + \int_0^{t^*} (1 - \|q\|_{\max})ds \\
&\leq \|q\|_{\max} + \int_0^1 (1 - \|q\|_{\max})ds \\
&= 1,
\end{aligned}$$

δηλαδή $B : S \to S$. Επίσης, είναι

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{I - C}{A}\right)x(t)\right| &= \left|\frac{x(t) - Cx(t)}{Ax(t)}\right| \\
&= |1 + b(t)|x(t)|||x(t)(1 + a(t))| \\
&\geq |x(t)|,
\end{aligned}$$

για κάθε $t \in J$. Δηλαδή

$$\sup_{t \in J} \left|\left(\frac{I - C}{A}\right)x(t)\right| \geq \sup_{t \in J} |x(t)|,$$

που σημαίνει ότι

$$\left\|\left(\frac{I - C}{A}\right)x\right\|_{\sup} \geq \|x\|_{\sup}.$$

για κάθε $x \in C(J, \mathbb{R})$. Επομένως, αφού $\|a\|_{\max} + \|b\|_{\max} < 1$, οι τελεστές A, B και C ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.6. Συνεπώς, η εξίσωση τελεστών (4.1) έχει ένα σταθερό σημείο. Συνεπώς, η συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση (4.7) έχει μια λύση που ορίζεται στο J.

Εφαρμογή 4.8 ([24])**.** Θεωρούμε τη μη-γραμμική συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = p_1(t)|\sin x(t)| + [1 + p_2(t)|x(\theta(t))|] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds\right), \ t \in J \tag{4.14}$$

όπου $J = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $\theta, \sigma, \eta : J \to J$, $q : J \to \mathbb{R}$, $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και $p_1, p_2 \in L^1(J)$ τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} \sigma(t) \leq t, \\ |g(t,x)| < 1 - \|q\|_{\max}, \quad \|q\|_{\max} < 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

για κάθε $t \in J$ και $x \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση (4.14) έχει λύση που ορίζεται στο J.

Ας είναι $X = C(J, \mathbb{R})$, όπου $J = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, η Banach άλγεβρα όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με στάθμη, την

$$\|x\|_{\sup} = \sup_{t \in J} |x(t)|, \tag{4.16}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$S = \left\{ y \in X : \|y\|_{\sup} \leq \frac{1 + \|p_1\|_{\max}}{1 - \|p_2\|_{\max}} \right\}, \tag{4.17}$$

όπου $\|p_1\| + \|p_2\| < 1$. Ως λύση της (4.14) εννοούμε μια συνεχή συνάρτηση $x : J \to \mathbb{R}$ που πληροί την (4.14) στο σύνολο J. Ορίζουμε τους τελεστές $A : X \to X$ με

$$Ax(t) = 1 + p_2(t)|x(\theta(t))|, \ t \in J, \tag{4.18}$$

$B : X \to X$ με

$$Bx(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds, \ t \in J \tag{4.19}$$

και $C : X \to X$ με

$$Cx(t) = p_1(t)|\sin x(t)|, \ t \in J. \tag{4.20}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι το πρόβλημα ύπαρξης λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.14) ανάγεται στο πρόβλημα ύπαρξης σταθερού σημείου της εξίσωσης τελεστών (4.1). Θα αποδείξουμε ότι οι τελεστές A, B, και C ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.4. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι οι τελεστές A, C είναι Lipschitz στον X. Ας είναι $x, y \in X$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \big|Ax(t) - Ay(t)\big| &= \Big|1 + p_2(t)|x(\theta(t))| - 1 - p_2(t)|y(\theta(t))|\Big| \\ &\leq |p_2(t)(|x(\theta(t))| - |y(\theta(t))|)| \\ &\leq \|p_2\|_{\max}\|x - y\|_{\sup} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \big|Cx(t) - Cy(t)\big| &= \big|p_1(t)|\sin x(t)| - p_1(t)|\sin y(t)|\big| \\ &= \big|p_1(t)(|x(t)| - |y(t)|)\big| \\ &\leq \|p_1\|_{\max}\|x - y\|_{\sup}, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι οι τελεστές A, και C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz $\|p_2\|_{\max}$ και $\|p_1\|_{\max}$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.11 ο τελεστής B είναι πλήρως συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι $B: S \to S$. Ας είναι $x \in S$. Από τη σχέση (4.15) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\big|Bx(t)\big| &= \left|q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds\right| \\ &\leq |q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} |g(s, x(\eta(s)))|ds \\ &< |q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} (1 - \|q\|_{\max})ds.\end{aligned}$$

Επειδή $Bx \in C(J, \mathbb{R})$, δηλαδή ο Bx συνεχής στο συμπαγές διάστημα J, έπεται ότι υπάρχει $t^* \in J$ τέτοιο ώστε

$$\big\|Bx\big\| = \big|Bx(t^*)\big| = \max_{t \in J} \big|Bx(t)\big|.$$

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned}\big\|Bx\big\| &= \big|Bx(t^*)\big| \\ &< |q(t^*)| + \int_0^{t^*} (1 - \|q\|)ds \\ &\leq \|q\|_{\max} + \int_0^1 (1 - \|q\|_{\max})ds \\ &= 1 \leq \frac{1 + \|p_1\|_{\max}}{1 - \|p_2\|_{\max}}.\end{aligned}$$

Επομένως, $B: S \to S$. Θα αποδείξουμε ότι πληρούται η συνθήκη (iii) του Θεωρήματος 4.4. Πράγματι, ας είναι $x \in C(J, \mathbb{R})$ και $y \in S$. Είναι

$$\begin{aligned}|x(t)| &= \big|Ax(t)Bx(t) + Cx(t)\big| \\ &\leq \big|Ax(t)\big|\big|Bx(t)\big| + \big|Cx(t)\big| \\ &\leq \big|1 + p_2(t)|x(\theta(t))|\big|\left|q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds\right| + \big|p_1(t)|\sin x(t)|\big| \\ &\leq \big|1 + p_2(t)|x(\theta(t))|\big|\left(|q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} |g(s, x(\eta(s))|ds\right) + \big|p_1(t)|\sin x(t)|\big| \\ &\leq \big(1 + \|p_2\|_{\max}\|x\|_{\sup}\big)\left(\|q\|_{\max} + \int_0^{\sigma(t)} (1 - \|q\|_{\max})ds\right) + \|p_1\|_{\max} \\ &\leq \big(1 + \|p_2\|_{\max}\|x\|_{\sup}\big)\left(\|q\|_{\max} + \int_0^1 (1 - \|q\|_{\max})ds\right) + \|p_1\|_{\max} \\ &= 1 + \|p_1\|_{\max} + \|p_2\|_{\max}\|x\|_{\sup}.\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\sup_{t \in J} |x(t)| \leq 1 + \|p_1\|_{\max} + \|p_2\|_{\max}\|x\|_{\sup},$$

που σημαίνει ότι
$$\big(1-\|p_2\|_{\max}\big)\|x\|_{\sup} \leq 1+\|p_1\|_{\max},$$
ή
$$\|x\|_{\sup} \leq \frac{1+\|p_1\|_{\max}}{1-\|p_2\|_{\max}}.$$
Άρα $x \in S$. Επομένως, ισχύει και η συνθήκη (iii) του θεωρήματος 4.4. Συνεπώς, η εξίσωση (4.1) έχει σταθερό σημείο, δηλαδή ότι η συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση (4.14) έχει μια λύση που ορίζεται στο J.

Σημείωση 4.9. Παρατηρούμε ότι οι τελεστές A, B και C δεν πληρούν τη σχέση (4.6) της Πρότασης 4.5.

4.4 Τοπικό Θεώρημα Σταθερού Σημείου

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε μια τοπική εκδοχή του θεωρήματος σταθερού σημείου 4.1, το οποίο θα κάνουμε χρήση στη μελέτη του προβλήματος τοπικής λύσης για μια μη γραμμική συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση.

Θεώρημα 4.10 ([27]). *Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ μια Banach άλγεβρα, $a \in X$ και r ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι $A, C : X \to X$ και $B : \overline{\mathcal{B}}_r(a) \to X$ τρεις τελεστές, τέτοιοι ώστε*

(i) ο A και ο C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz α και β αντίστοιχα,

(ii) ο B είναι πλήρως συνεχής με $M = \big\|B\big(\overline{\mathcal{B}}_r(a)\big)\big\|$, και

(iii) $\big\|a - \big(AaBy + Ca\big)\big\| \leq [1-(\alpha M+\beta)]r$ για κάθε $y \in \overline{\mathcal{B}}_r(a)$ με $\alpha M + \beta < 1$.

Τότε η εξίσωση τελεστών (4.1) έχει μια λύση στο $\overline{\mathcal{B}}_r(a)$.

Απόδειξη. Ας είναι αυθαίρετο $y \in \overline{\mathcal{B}}_r(a)$ και ορίζουμε τον τελεστή $A_y : \overline{\mathcal{B}}_r(a) \to X$ ως εξής
$$A_y(x) = AxBy + Cx.$$
Από την υπόθεση (i), για κάθε $x_1, x_2 \in X$ έχουμε:
$$\begin{aligned}
\|A_y(x_1) - A_y(x_2)\| &= \|Ax_1By + Cx_1 - Ax_2By - Cx_2\| \\
&\leq \|(Ax_1 - Ax_2)By\| + \|Cx_1 - Cx_2\| \\
&\leq \|Ax_1 - Ax_2\|\|By\| + \|Cx_1 - Cx_2\| \\
&\leq M\alpha\|x_1 - x_2\| + \beta\|x_1 - x_2\| \\
&= (\alpha M + \beta)\|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}$$

και επειδή ισχύει ότι $\alpha M+\beta<1$ έπεται ότι ο τελεστής A_y είναι συστολή στον $\overline{\mathcal{B}}_r(a)$ με σταθερά συστολής $\alpha M+\beta$. Επομένως, υπάρχει μοναδικό $x^*\in\overline{\mathcal{B}}_r(a)$ τέτοιο ώστε:

$$A_y(x^*)=x^*=Ax^*By+Cx^*.$$

Λόγω της συνθήκης (iii) έχουμε ότι:

$$\big\|a-A_y(a)\big\|=\big\|a-\big(AaBy+Ca\big)\big\|\le[1-(\alpha M+\beta)]r.$$

Ορίζουμε τον τελεστή $N:\overline{\mathcal{B}}_r(a)\to\overline{\mathcal{B}}_r(a)$ ως εξής:

$$Ny=z, \tag{4.21}$$

όπου $z\in\overline{\mathcal{B}}_r(a)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$z=AzBy+Cz,\ y\in\overline{\mathcal{B}}_r(a).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο τελεστής N είναι πλήρως συνεχής, σύμφωνα με τη σημείωση 1.26, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής και ολικά φραγμένος. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι ο N είναι συνεχής. Ας είναι $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $\overline{\mathcal{B}}_r(a)$, τέτοια ώστε να συγκλίνει προς ένα $y\in\overline{\mathcal{B}}_r(a)$. Θα αποδείξουμε ότι $Ny_\nu\to Ny$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\big\|Ny_\nu-Ny\big\|&=\big\|ANy_\nu By_\nu+CNy_\nu-ANyBy-CNy\big\|\\
&=\big\|ANy_\nu By_\nu-ANyBy_\nu+ANyBy_\nu-ANyBy+CNy_\nu-CNy\big\|\\
&\le\big\|ANy_\nu By_\nu-ANyBy_\nu\big\|+\big\|ANyBy_\nu-ANyBy\big\|+\big\|CNy_\nu-CNy\big\|\\
&\le\big\|\big(ANy_\nu-ANy\big)By_\nu\big\|+\big\|ANy\big(By_\nu-By\big)\big\|+\big\|CNy_\nu-CNy\big\|\\
&\le\big\|ANy_\nu-ANy\big\|\big\|By_\nu\big\|+\big\|ANy\big\|\big\|By_\nu-By\big\|+\big\|CNy_\nu-CNy\big\|\\
&\le M\alpha\big\|Ny_\nu-Ny\big\|+\big\|ANy\big\|\big\|By_\nu-By\big\|+\beta\big\|Ny_\nu-Ny\big\|.
\end{aligned}$$

Επειδή ο B είναι συνεχής (ως πλήρως συνεχής) έχουμε ότι $\big\|By_\nu-By\big\|$ για $\nu\to\infty$. Επομένως,

$$\big\|Ny_\nu-Ny\big\|\le(\alpha M+\beta)\big\|Ny_\nu-Ny\big\|$$

ή

$$(1-\alpha M-\beta)\big\|Ny_\nu-Ny\big\|\le 0,$$

που λόγω της υπόθεσής μας, έπεται ότι $\big\|Ny_\nu-Ny\big\|\le 0$, δηλαδή $Ny_\nu\to Ny$. Άρα ο τελεστής N είναι συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι είναι και ολικά φραγμένος, δηλαδή για $\epsilon>0$ υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του από σφαιρικές περιοχές ακτίνας ϵ. Για κάθε $z, a \in \overline{\mathcal{B}}_r(a)$, είναι:

$$\begin{aligned}\|Az\| &= \|Aa + Az - Aa\| \\ &\leq \|Aa\| + \|Az - Aa\| \\ &\leq \|Aa\| + \alpha\|z - a\| \\ &\leq c,\end{aligned}$$

όπου $c = \|Aa\| + \alpha r$.

Λόγω της (ii) έχουμε ότι το σύνολο $B(\overline{\mathcal{B}}_r(a))$ είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή, σύμφωνα με τον ορισμό 1.21, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $Y = \{y_1,\ y_2, \cdots,\ y_\nu\} \subseteq \overline{\mathcal{B}}_r(a)$ τέτοιο ώστε:

$$B(\overline{\mathcal{B}}_r(a)) \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{B}_\delta(w_i),$$

όπου $\mathcal{B}_\delta(w_i)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο w_i και ακτίνα δ. Θέτουμε $w_i = B(y_i)$ και $\delta = \left(\dfrac{1-(\alpha M+\beta)}{c}\right)\epsilon$. Οπότε, για κάθε $y \in \overline{\mathcal{B}}_r(a)$ παίρνουμε $y_k \in Y$, τέτοιο ώστε:

$$\|By - By_k\| \leq \left(\frac{1-(\alpha M+\beta)}{c}\right)\epsilon.$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}\|z_k - z\| &= \|Az_kBy_k + Cz_k - AzBy - Cz\| \\ &= \|Az_kBy_k - AzBy_k + AzBy_k - AzBy + Cz_k - Cz\| \\ &\leq \|Az_kBy_k - AzBy_k\| + \|AzBy_k - AzBy\| + \|Cz_k - Cz\| \\ &\leq \|(Az_k - Az)By_k\| + \|Az(By_k - By)\| + \|Cz_k - Cz\| \\ &\leq \|Az_k - Az\|\|By_k\| + \|Az\|\|By_k - By\| + \|Cz_k - Cz\| \\ &\leq M\alpha\|z_k - z\| + \|Az\|\|By_k - By\| + \beta\|z_k - z\| \\ &\leq M\alpha\|z_k - z\| + c\|By_k - By\| + \beta\|z_k - z\| \\ &= M\alpha\|Ny_k - Ny\| + c\|By_k - By\| + \beta\|z_k - z\|,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$[1-(M\alpha+\beta)]\|Ny_k - Ny\| \leq c\|By_k - By\|$$

ή

$$\|Ny_k - Ny\| \leq \frac{c}{1-(M\alpha+\beta}\|By_k - By\|$$

που σημαίνει ότι

$$\big\|Ny_k - Ny\big\| < \epsilon,$$

δηλαδή

$$N(\overline{\mathcal{B}}_r(a)) \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{B}_\epsilon(w_i).$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το σύνολο $N(\overline{\mathcal{B}}_r(a))$ είναι ολικά φραγμένο ή ότι ο N είναι ολικά φραγμένος. Άρα ο τελεστής N είναι πλήρως συνεχής. Από το Θεώρημα 1.35 (Schauder*) ο τελεστής N έχει ένα σταθερό σημείο στο $\overline{\mathcal{B}}_r(a)$. Αυτό σημαίνει ότι,

$$x = Nx = A(Nx)Bx + C(Nx) = AxBx + Cx.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (4.1) έχει μια λύση στο $\overline{\mathcal{B}}_r(a)$. □

Παίρνοντας για $a = 0$ στο παραπάνω Θεώρημα έχουμε το εξής Πόρισμα που είναι χρήσιμο σε εφαρμογές:

Πόρισμα 4.11 ([27]). *Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ μια Banach άλγεβρα και r ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Ας είναι $A, C : X \to X$ και $B : \overline{\mathcal{B}}_r(0) \to X$ τρεις τελεστές, τέτοιοι ώστε*

(i) ο A και ο C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz α και β αντίστοιχα,

(ii) ο B είναι πλήρως συνεχής με $M = \big\|B\big(\overline{\mathcal{B}}_r(0)\big)\big\|$ και

(iii) $\big\|A0By + C0)\big\| \leq [1 - (\alpha M + \beta)]r$ για κάθε $y \in \overline{\mathcal{B}}_r(0)$ με $\alpha M + \beta < 1$.

Τότε η εξίσωση (4.1) έχει μια λύση στο $\overline{\mathcal{B}}_r(0)$.

Θέτοντας $C \equiv 0$ και $C \equiv 1$ στο θεώρημα 4.10 προκύπτουν τοπικά συμπεράσματα που αφορούν το άθροισμα και το γινόμενο, αντίστοιχα, δύο τελεστών.

Πόρισμα 4.12 ([27]). *Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ μια Banach άλγεβρα, $a \in X$ και r ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Ας είναι $A : X \to X$ και $B : \overline{\mathcal{B}}_r(a) \to X$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) ο A είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz α,

(ii) ο B είναι πλήρως συνεχής με $M = \big\|B\big(\overline{\mathcal{B}}_r(a)\big)\big\|$ και

(iii) $\big\|a - \big(AaBy\big)\big\| \leq [1 - (\alpha M)]r$ για κάθε $y \in \overline{\mathcal{B}}_r(a)$ με $\alpha M < 1$.

Τότε η εξίσωση $x = AxBx$ έχει μια λύση στο $\overline{\mathcal{B}}_r(a)$.

Πόρισμα 4.13 ([27]). *Ας είναι $(X, \|\cdot\|)$ μια Banach άλγεβρα, $a \in X$ και r ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Ας είναι $A : X \to X$ και $B : \overline{\mathcal{B}}_r(a) \to X$ δύο τελεστές, τέτοιοι ώστε:*

(i) ο A είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz α,

(ii) ο B είναι πλήρως συνεχής και

(iii) $\big\|a - (Aa + By\big\| \leq (1 - \alpha)r$ για κάθε $y \in \overline{\mathcal{B}}_r(a)$ με $\alpha < 1$.

Τότε η εξίσωση $x = Ax + Bx$ έχει μια λύση στο $\overline{\mathcal{B}}_r(a)$.

4.5 Μια εφαρμογή σε Μη Γραμμικές Συναρτησιακές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Θεωρούμε τη μη-γραμμική συναρτησιακή ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = k(t, x(\mu(t))) + [f(t, x(\theta(t)))]\left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds\right), \ t \in J, \tag{4.22}$$

όπου $J = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $q : J \to \mathbb{R}$, $\mu, \theta, \sigma, \eta : J \to J$ και $f, g, k : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δοθείσες συναρτήσεις. Ας είναι $M(J, \mathbb{R})$ και $B(J, \mathbb{R})$ οι χώροι όλων των μετρήσιμων και φραγμένων αντίστοιχα πραγματικών συναρτήσεων του J. Θα αναζητήσουμε λύση της εξίσωσης (4.22) στο χώρο $BM(J, \mathbb{R})$ των φραγμένων και μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων του J. Ορίζουμε τη στάθμη:

$$\|x\|_{BM} = \max_{t \in J} |x(t)|. \tag{4.23}$$

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι $\big(BM(J, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{BM}\big)$ είναι Banach άλγεβρα. Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι χώρος Banach με στάθμη την (4.23). Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 4.14. *Ο χώρος $\big(BM(J, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{BM}\big)$ των φραγμένων και μετρήσιμων συναρτήσεων του J στο $\mathbb{R}$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Ας είναι $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in BM(J, \mathbb{R})$ μια βασική ακολουθία μετρήσιμων και φραγμένων συναρτήσεων. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f \in BM(J, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε: $f_\nu \to f$. Επειδή η $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|f_\nu - f_\mu\|_{BM} < \epsilon,$$

για κάθε $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu, \mu \geq \nu_0$.

Επίσης,

$$|f_\nu(t) - f_\mu(t)| \leq \max_{t \in \mathbb{N}} |f_\nu(t) - f_\mu(t)| = \|f_\nu - f_\mu\|_{BM} < \epsilon,$$

δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f_\nu(t) - f_\mu(t)| < \epsilon$ για κάθε $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\nu, \mu \geq \nu_0$ και για κάθε $t \in J$. Αυτό σημαίνει ότι $(f_\nu(t))_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{R}$, που είναι πλήρης, οπότε υπάρχει συνάρτηση $f : J \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f_\nu(t) \to f(t),$$

για κάθε $t \in J$. Άρα, για $\mu \geq \nu_0$ είναι:

$$\begin{aligned} |f_\mu(t) - f(t)| &= \big|f_\mu(t) - \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(t)\big| \\ &= \lim_{\nu \to \infty} |f_\mu(t) - f_\nu(t)| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα $f_\nu \to f$ ομοιόμορφα. Οπότε, $f \in M(J,\mathbb{R})$. Επιπλέον, $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in BM(J,\mathbb{R})$ δηλαδή

$$\|f_\nu\|_{BM} \leq \alpha \in \mathbb{R}$$

ή

$$\lim_{\nu\to\infty} \|f_\nu\|_{BM} \leq \alpha$$

που σημαίνει ότι

$$\|\lim_{\nu\to\infty} f_\nu\|_{BM} \leq \alpha.$$

Με άλλα λόγια

$$\|f\|_{BM} \leq \alpha$$

ή

$$f \in BM(J,\mathbb{R}).$$

□

Επίσης, ορίζουμε το σύνολο $L(J,\mathbb{R})$ όλων των κατά Lebesgue ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων του J με στάθμη την

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|dt. \tag{4.24}$$

Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι

(i) οι συναρτήσεις $\mu, \theta, \sigma, \eta : J \to J$ είναι συνεχείς,

(ii) η συνάρτηση $q : J \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής,

(iii) η συνάρτηση $k : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και υπάρχει μια συνάρτηση $\beta_1 \in B(J,\mathbb{R})$ τέτοια ώστε:
$$|k(t,x) - k(t,y)| \leq \beta_1(t)|x-y|$$
σχεδόν παντού στο J και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

(iv) η συνάρτηση $f : J\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}-\{0\}$ είναι συνεχής και υπάρχει μια συνάρτηση $\alpha_1 \in B(J,\mathbb{R})$ με φράγμα $\|\alpha_1\|$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει:
$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \alpha_1(t)|x-y|, \text{ σχεδόν παντού στο } J,$$

(v) η συνάρτηση g είναι συνάρτηση Καραθεοδωρή, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $h_r \in L^1(J)$ τέτοια ώστε $|g(t,x)| \leq h_r(t)$ σχεδόν παντού στο σύνολο J.

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης (4.22) στο σύνολο $BM(J,\mathbb{R})$.

Θεώρημα 4.15 ([27]). *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες (i) έως (v). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός r τέτοιος ώστε:*

$$\|\alpha_1\|_{max}(\|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1}) + \|\beta_1\|_{max} < 1 \tag{4.25}$$

και

$$r > \frac{F(\|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1}) + K}{1 - [\|\alpha_1\|_{max}(\|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1}) + \|\beta_1\|_{max}]} \tag{4.26}$$

όπου $F = \sup_{t\in J} |f(t,0)|$ *και* $K = \sup_{t\in J} |k(t,0)|$. *Τότε η εξίσωση* (4.22) *έχει λύση* x *στο* $BM(J,\mathbb{R})$ *που πληροί την ανίσωση* $\|x\|_{sup} \le r$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλειστή μπάλα $\overline{\mathcal{B}}_r(0)$ κέντρου 0 και ακτίνας r, όπου r είναι επιλεγμένο έτσι ώστε να πληρούνται οι σχέσεις (4.25) και (4.26). Ορίζουμε τους τελεστές A, B, C στον $BM(J,\mathbb{R})$ ως εξής:

$$Ax(t) = f(t, x(\theta(t))),\ t \in J, \tag{4.27}$$

$$Bx(t) = \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s))ds,\ t \in J, \tag{4.28}$$

και

$$Cx(t) = k(t, x(\mu(t))),\ t \in J \tag{4.29}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα ύπαρξης λύσης της (3.17) ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης λύσης της εξίσωσης τελεστών

$$AxBx + Cx = x \text{ στο } BM(J,\mathbb{R}). \tag{4.30}$$

Θα αποδείξουμε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Πορίσματος 4.11. Ας είναι $x, y \in X$. Από τις υποθέσεις (ii) και (iii) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\big|Ax(t) - Ay(t)\big| &= \big|f(t, x(\theta(t))) - f(t, y(\theta(t)))\big| \\ &\le \alpha_1(t)\big|x(\theta(t)) - y(\theta(t))\big| \\ &\le \|\alpha_1\|_{\max}\|x - y\|_{BM},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\big\|Ax - Ay\big\|_{BM} \le \|\alpha_1\|_{\max}\|x - y\|_{BM},$$

και

$$\begin{aligned}\big|Cx(t) - Cy(t)\big| &= \big|k(t, x(\mu(t))) - k(t, y(\mu(t)))\big| \\ &\le \beta_1(t)\big|x(\theta(t)) - y(\theta(t))\big| \\ &\le \|\beta_1\|_{\max}\|x - y\|_{BM},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\big\|Cx - Cy\big\|_{BM} \le \|\beta_1\|_{\max}\|x - y\|_{BM},$$

που σημαίνει ότι οι τελεστές A και C είναι Lipschitz με σταθερές Lipschitz $\|\alpha_1\|_{\max}$ και $\|\beta_1\|_{\max}$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (iv) και το Θεώρημα (1.42) εξασφαλίζουν ότι ο τελεστής B είναι συνεχής στον $BM(J,\mathbb{R})$ (αναλυτική απόδειξη υπάρχει στη βιβλιογραφία [40]). Προκειμένου να αποδείξουμε ότι είναι και πλήρως συνεχής θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.32 (Arzela-Ascoli). Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\overline{\mathcal{B}}_r(0)$ είναι σχετικά συμπαγές, ή, ισοδύναμα, (Θεώρημα 1.32) φραγμένο και ισοσυνεχές. Ας είναι ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{B}}_r(0)$. Έχουμε $\|x_\nu\| \le r$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Από τη συνθήκη (iv), για $\nu \in \mathbb{N}$ και $t \in J$ έχουμε

$$\begin{aligned}\big|Bx_\nu(t)\big| &\le |q(t)| + \left|\int_0^{\sigma(t)} g(s, x_\nu(\eta(s)))ds\right| \\ &\le |q(t)| + \int_0^{\sigma(t)} h_r(s)ds \\ &\le \|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1(J)},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\big\|Bx_\nu\big\|_{BM} \le \|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1(J)}, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}$$

που σημαίνει ότι το σύνολο $B\big(\overline{\mathcal{B}}_r(0)\big)$ είναι φραγμένο, για οποιοδήποτε $r > 0$. Επίσης, για $t_1, t_2 \in J$ και $\nu \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\big|Bx_\nu(t_1) - Bx_\nu(t_2)\big| &\le |q(t_1) - q(t_2)| + \left|\int_{\sigma(t_2)}^{\sigma(t_1)} h_r(s)ds\right| \\ &\le |q(t_1) - q(t_2)| + |p(t_1) - p(t_2)|,\end{aligned}$$

όπου $p : J \to \mathbb{R}$ με $p(t) = \displaystyle\int_0^{\sigma(t)} h_r(s)ds$. Επειδή οι συναρτήσεις p και q είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις (ως συνεχείς στο συμπαγές διάστημα J), συμπεραίνουμε ότι $B\big(\overline{\mathcal{B}}_r(0)\big)$ είναι ισοσυνεχές για οποιοδήποτε $r > 0$. Άρα από το Θεώρημα 1.32 παίρνουμε ότι $B : B[0,r] \to X$ είναι πλήρως συνεχής για κάθε $r > 0$. Για κάθε $y \in B\big(\overline{\mathcal{B}}_r(0)\big)$ λόγω της (4.26) έχουμε:

$$\begin{aligned}\big\|A0By + C0\big\|_{BM} &\le \big\|A0\big\|_{BM}\big\|By\big\|_{BM} + \big\|C0\big\|_{BM} \\ &\le \sup_{t\in J}|f(t,0)|[\|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1(J)}] + \sup_{t\in J}|k(t,0)| \\ &\le F(\|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1(J)}) + K \\ &\le [1 - \|\alpha_1\|_{\max}(\|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1(J)}) - \|\beta_1\|_{\max}]r,\end{aligned}$$

και λόγω της συνθήκης (4.25) έχουμε $\|\alpha_1\|_{\max}(\|q\|_{BM} + \|h_r\|_{L^1(J)}) + \|\beta_1\|_{\max} < 1$. Επομένως, κάνοντας εφαρμογή του Πορίσματος 4.11 προκύπτει ύπαρξη λύσης της εξίσωσης (4.30) στον $BM(J,\mathbb{R})$, ή, ισοδύναμα, ύπαρξη λύσης της εξίσωσης (4.22) που ορίζεται στο J. □

Τέλος, παραθέτουμε ένα Θεώρημα που οφείλεται στον *G. L. Karakostas* και αποτελεί γενίκευση του συμπεράσματος που αφορά το συνδυασμό αθροίσματος και γινομένου τριών τελεστών.

Θεώρημα 4.16 (***G. L. Karakostas***, [45])**.** *Ας είναι A ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach $(X, \|\cdot\|)$, (Y, d) ένας μετρικός χώρος και $C : A \to Y$ ένας συμπαγής τελεστής. Υποθέτουμε ότι ο τελεστής*

$$T : A \times \overline{C(A)} \to A$$

είναι συνεχής και τέτοιος ώστε για την οικογένεια $\{T(\cdot, y) : y \in \overline{C(A)}\}$ να υπάρχει $k \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|T(x_1, y) - T(x_2, y)\| \leq k\|x_1 - x_2\|,$$

για όλα τα $(x_1, y), (x_2, y) \in A \times \overline{C(A)}$. Τότε η εξίσωση

$$x = T(x, C(x))$$

έχει μια λύση στο A.

Περίληψη

Στη Διατριβή αυτή σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε κάποια υβριδικά θεωρήματα σταθερού σημείου τύπου Krasnosel'skii, τα οποία είναι χρήσιμα στη μελέτη της ύπαρξης λύσεων για διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις ή προβλήματα αρχικών τιμών. Η βασική ιδέα είναι η αναγωγή του προβλήματος ύπαρξης λύσης της εκάστοτε εξίσωσης σε πρόβλημα εύρεσης σταθερού σημείου ενός κατάλληλα ορισμένου τελεστή.

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία θεωρημάτων σταθερού σημείου τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα πλαίσια της μεθοδολογίας που περιγράψαμε πιο πάνω. Σε καθένα από τα κεφάλαια αναπτύσσεται ξεχωριστά καθένα από τα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου με τις αποδείξεις τους, καθώς, επίσης και διάφορες εναλλακτικές μορφές των με εφαρμογές.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο της Διατριβής παρατίθενται όλοι οι ορισμοί και τα θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη των συμπερασμάτων μας. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά στο Θεώρημα του Krasnosel'skii, που αποδεικνύει ότι το άθροισμα δύο τελεστών έχει σταθερό σημείο. Παραθέτουμε, επίσης, και κάποιες εναλλακτικές διατυπώσεις του παραπάνω Θεωρήματος με τις αντίστοιχες εφαρμογές τους. Έπειτα, στο τρίτο κεφάλαιο της Διατριβής διατυπώνουμε ένα θεώρημα για το γινόμενο δύο τελεστών. Και για αυτό το Θεώρημα υπάρχουν διάφορες παραλλαγές και εφαρμογές σε μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις, καθώς και σε συναρτησιακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Στο τέταρτο, και τελευταίο, κεφάλαιο παρατίθεται ένα θεώρημα που αφορά συνδυασμό του αθροίσματος και γινομένου τελεστών.

Σε κάθε ένα κεφάλαιο αναπτύσσεται αναλυτικά η μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε για την εφαρμογή του συγκεκριμένου θεωρήματος και δίνονται συγκεκριμένα παραδείγματα που εξασφαλίζουν την εφαρμοσιμότητα των θεωρητικών συμπερασμάτων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην παρουσίαση των συμπερασμάτων με ενιαίο τρόπο σε όλα τα κεφάλαια και στη μεταξύ τους διασύνδεση.

Τέλος παραθέτουμε έναν εκτενή κατάλογο εργασιών και βιβλίων σχετικών με το αντικείμενο της διατριβής, από όπου έχουμε αντλήσει τα συμπεράσματα που παρουσιάζουμε εδώ.

Abstract

In this thesis, our goal is to present some hybrid fixed point theorems of Krasnosel'skii type, which are useful to the study of the existence of solutions for differential and integral equations or initial value problems. The main idea is the reduction of the problem of the existence of solutions to the problem of finding fixed points of a suitable stated operator.

There is a wide variety of fixed point theorems which can be used in the context of the methodology just described. In each chapter is developed individually each of the fixed point theorems with their proofs as well, and also several alternative forms with their applications.

Specifically, in the first chapter of the thesis are listed all the definitions and some theorems that we will use in order to prove our claims. In the second chapter is given an extensive reference to the theorem of Krasnosel'skii, which shows that the sum of two operators has a fixed point. Also we give several alternatives to the above theorem with their respective applications. Then, in the third chapter of the thesis we formulate a theorem, which shows that the product of two operators, under certain conditions, has a fixed point. And for this theorem there are several alternative forms and applications in nonlinear integral equations, as well as functional integral equations. The fourth, and last, chapter contains a theorem on fixed points of a combination of the sum and the product of three operators.

In each chapter we present in detail the methodology used in order to apply the specific fixed point theorem and we provide specific applications of the theoretical results. Special attention is paid to presenting the results in a unified way throughout the whole thesis and pointing out the relations between them.

Finally we present a detailed list of the papers and books we used in this thesis.

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Λ. Καρακώστα, *Πραγματική Ανάλυση*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, 2004.

[2] Σ. Κ. Ντούγια, *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Leader Books, Αθήνα, 2007.

[3] Σ. Κ. Ντούγια, *Ολοκληρωτικές Εξισώσεις*, Συμμετρία, Αθήνα, 2010.

[4] Π. Χ. Τσαμάτου, *Ανεξάρτητη Σπουδή Στην Ανάλυση* (Χειρόγραφες σημειώσεις), Ιωάννινα, 2015.

[5] Π. Χ. Τσαμάτου, *Τοπολογία*, Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2009.

[6] A. Ardjouni and A. Djoudi, Existence of periodic solutions for a second order nonlinear neutral differential equation with functional delay, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **2012** (2012) 1-9.

[7] A. Ardjouni and A. Djoudi, Existence of periodic solutions for totally nonlinear neutral differential equations with variable delay, *Sarajevo J. Math.* **8** (2012) 107-117.

[8] A. Ardjouni and A. Djoudi, Existence of periodic solutions for a nonlinear neutral differential equation with variable delay, *Appl. Math. E-Notes* **12** (2012) 94-101.

[9] C. Avramescu, A fixed point theorem for multivalued mapping, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **17** (2010) 1-10.

[10] C. Avramescu, Some remarks on a fixed point theorem of Krasnosel'skii, *Electron. J, Qual. Theory Differ. Equ.* **5** (2003) 15.

[11] C. Avramescu and C. Vladimirescu, Fixed point theorems of Krasnosel'skii type in a space of continuous functions, *Fixed Point Theory* **5** (2004) 1-11.

[12] C. S. Barroso, Krasnosel'skii's fixed point theorem for weakly continuous maps, *Nonlinear Anal.* **55** (2003) 25-31.

[13] C. S. Barroso and E. V. Teixeira, Atopological and geometric approach to fixed point results for sum of operators and applications, *Nonlinear Anal.* **60** (2005) 625-650.

[14] B. Boyd, J.S. W. Wong, On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969) 456-464.

[15] E. Brestovanska, M. Medved, Fixed point theorems of the Banach and Krasnosel'skii type for mappings on m-tuple Cartesian product of Banach algebras and systems of generalized Gripenberg's equations, *Mathematica* **51** (2012) 27-39.

[16] T. A. Burton, A fixed point theorem of Krasnosel'skii, *Appl. Math. Lett.* **11** (1998) 85-88.

[17] T. A. Burton, Integral equations, implicit functions and fixed points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996) 2383-2390.

[18] T. A. Burton, Liapunov functionals, fixed points and stability by Krasnosel'skii's theorem, *Nonlinear Stud.* **9** (2002) 181-190.

[19] T. A. Burton, *Stability for fixed point theory for functional differential equations*, Mineola: Dover Publications, 2006.

[20] T. A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnosel'skii-Schaefer type, *Mathematische Nachrichten* **189** (1998) 23-31.

[21] F. Chen, Positive periodic solutions of neutral Lotka-Voltera system with feedback control, *Appl. Math. Comput.* **162** (2005) 1279-1302.

[22] F. Chen and J. Shi, Periodicity in a nonlinear predator-prey system with state dependent delays, *Acta Math. Appl. Sin.* **21** (2005) 49-60.

[23] B. C. Dhage, A fixed point theorem and applications to nonlinear integral equations, *Proc. Int. Symp. Nonlinear Anal. Appl. Bio-Mth.* (1987) 53-59.

[24] B. C. Dhage, A fixed point theorem in Banach algebras involving three operators with applications, *Kyungpook Math. J.* **44** (2004) 145-155.

[25] B. C. Dhage, Basic results in the theory of hybrid differential equations with mixed perturbations of second type, *Funct. Differ. Equ.* **19** (2012) 87-106.

[26] B. C. Dhage, Hybrid fixed point theory in partially ordered normed linear spaces and applications to fractional integral equations, *Differ. Equ. Appl.* **5** (2013) 155-184.

[27] B. C. Dhage, Local fixed point theory involving three operators in Banach algebras, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **24** (2004) 377-386.

[28] B. C. Dhage, On α - condensing mappings in Banach algebras, *The Math. Student* **63** (1994) 146-152.

[29] B. C. Dhage, On some variants of Schauder's fixed point principle and applications to nonlinear integral equations, *J. Math. Phy. Sci.* **25** (1998) 603-611.

[30] B. C. Dhage, Remarks on two fixed-point theorems involving the sum and the product of two operators, *Comput. Math. Appl.* **46** (2003) 1779-1785.

[31] B. C. Dhage and V.Lakshmikatham, Basic results on hybrid differential equations, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* **4** (2010) 414-424.

[32] B. C. Dhage and V.Lakshmikatham, Global existence and convergence theorems for hybrid differential equations, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* (2009).

[33] B. C. Dhage, S. K. Ntouyas and P. C. Tsamatos, A fixed point theorem and its applications to nonlinear integral equations in Banach Algebras, *Bull. Greek Math. Soc.* **46** (2002) 119-127.

[34] B. C. Dhage and D. O'Regan, A fixed point theorem in Banach algebras with applications to functional integral equations, *Funct. Differ. Equ.* **7** (2000) No 3-4 259-267.

[35] Y. M. Dib, M. R. Maroun and Y. N. Raffoul, Periodicity and stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay, *Electron. J. Differential Equations* **2005** (2005) 11.

[36] R. D. Driver, *Ordinary and Delay Differential Equations*, New York, 1977.

[37] S. Elaydi, *An introduction to difference equations*, Second edition,Undergraduate Texts in Mathematics, Springer- Verlag, New York, 1999.

[38] M. Fan, K. Wang, P. J. Y. Wong and R. P. Agarwal, Periodicity and stability in periodic n-species Lotka-Voltera competition system with feedback controls and deviating arguments, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.* **19** (2003) 801-822.

[39] M. Frigon and D. O'Regan, Existence results for initial value problems in Banach spaces, *Differ. Equ. Dyn. Syst.* **2** (1994) 41-48.

[40] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[41] A. Granas, R. B. Guenther and J. W. Lee, Some existence principles in the Caratheodory theory of nonlinear rential systems, *J. Math. Pures et Appl*, **70** (1991) 153-196.

[42] D. Hafsia and D. Ahcene, Existence of periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with variable delay, *Electron. J. Differential Equations* **2010** (2010) 8.

[43] J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New-York, 1977.

[44] J. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New-York, 1993.

[45] G. L. Karakostas, An extension of Krasnosel'skii's fixed point theorem for contractions and compact mappings, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **22** (2003) 181-191.

[46] E. R. Kaufmann, A nonlinear neutral periodic differential equation, *Electron. J. Differential Equations* **2010** (2010) 8.

[47] W, Kelley and A. Peterson, *Difference Equations: An Introduction with Applications*, Harcourt Academic Press, San Diego, 2001.

[48] M. A. Krasnosel'skii, Two remarks on the method of successive approximations, *Uspekhi Mat. Nauk.* **10** (1955) 123-127.

[49] K. Latrach, M. A. Taoudi and A. Zeghal, Some fixed point theorems of the Schauder and the Krasnosel'skii type and application to nonlinear transport equations, *J. Differential Equations* **221** (2006) 256-271.

[50] L. P. Lebedev, I. I. Vorovich and G.M.L.Gladwell, *Functional Analysis, Applications in Mechanics and Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[51] D. O'Regan, Fixed point theory for the sum of two operators, *Appl. Math. Lett.* **9** (1996) 1-9.

[52] Y. N. Raffoul, Positive periodic solutions in neutral nonlinear differential equations, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **2007** (2007) 10.

[53] Y. N. Raffoul and E. Yankson, Positive periodic solutions in neutral delay difference equations, *Adv. Dyn. Syst. Appl.* , **5** (2010) No. 1, 123-130.

[54] J. Reinermann, Finxpuktsatze von Krasnosel'skii - Typ, *Math. Z.* **119** (1971) 167-174.

[55] B. N. Sadovski, A fixed point principle, *Func. Anal. Appl.* **1** (1967) 151-153.

[56] A. E. Sayed, H. Hashem, Existence results for nonlinear quadratic integral equations of fractional order in Banach algebra, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **16** (2013) 816-826.

[57] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[58] D. W. Stroock; *A concise introduction to the theory of integration*, Springer Science and Business Media LLC, 1994.

[59] E. Yankson, Existence and positivity of solutions for a nonlinear periodic differential equation, *Arch. Math. (Brno)* **48** (2012) 261-270.

[60] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems. Translated from the German by Peter R. Wadsack*, Springer-Verlag, New York, 1986.