ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τμημα Μαθηματικων

Αθανάσιος Κωνσταντινίδης

Αλγοριθμοι και Πολυπλοκοτητα της Ισχυρης Τριαδικης Κλειστοτητας σε Κλασεις Γραφηματων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2016

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 16/11/2016 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Χάρης Παπαδόπουλος	Επίκουρος Καθηγητής
Σταύρος Νικολόπουλος	Καθηγητής
Νικόλαος Γλυνός	Επίκουρος Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Αθανάσιος Κωνσταντινίδης

Ευχαριστιες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα καθηγητή κ. Χ. Παπαδόπουλο, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα που αφορά έρευνα για το πρόβλημα της Μεγιστοποίησης της Ισχυρής Τριαδικής Κλειστότητας (MaxSTC) σε κλάσεις γραφημάτων.

Χωρίς την ενθάρρυνση, την υπομονή και την υποστήριξή του δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση αυτής της εργασίας. Η επιστημονική καθοδήγηση που μου παρείχε, οι γόνιμες παρατηρήσεις του και οι εποικοδομητικές συναντήσεις που είχαμε αποτέλεσαν πολύτιμη βοήθεια σ΄ όλη τη διάρκεια της έρευνας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τη δυνατότητα που μου έδωσαν να παρακολουθήσω το συγκεκριμένο μεταπτυχιακό πρόγραμμα και την καλή συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια όλου του προγράμματος.

Περιληψη

Στα κοινωνικά δίκτυα η Ισχυρη Τριαδικη κλειστοτητα είναι μία ανάθεση στις ακμές με ισχυρές ή ασθενείς επιγραφές, τέτοια ώστε για δύο οποιεσδήποτε κορυφές που έχουν κοινό γείτονα με ισχυρή ακμή να είναι γειτονικές. Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης των ισχυρών ακμών, οι οποίες ικανοποιούν την ισχυρή τριαδική κλειστότητα, έχει πρόσφατα αποδειχτεί ότι είναι NP-πλήρες σε γενικά γραφήματα. Στην παρούσα διατριβή γίνεται μελέτη σε κλάσεις γραφημάτων, για τις οποίες το πρόβλημα χαρακτηρίζεται είτε με πολυωνυμική λύση είτε παραμένει NP-πλήρες. Δείχνουμε ότι το πρόβλημα δέχεται πολυωνυμικό σε χρόνο αλγόριθμο σε δύο ανεξάρτητες κλάσεις γραφημάτων των proper interval και των trivially-perfect, καθώς και στις κλάσεις των bipartite, co-bipartite και threshold γραφημάτων. Για να έχουμε μια πιο κατηγοριοποιημένη και ολοκληρωμένη αντίληψη των αποτελεσμάτων μας, δείχνουμε ότι το πρόβλημα παραμένει NP-πλήρες στα split γραφήματα, και ακολούθως στα chordal γραφήματα. Επομένως, μέσα από την διατριβή αυτή συμβάλουμε να οριστούν τα πρώτα διαχωριστικά όρια μεταξύ των κλάσεων γραφημάτων, όπου σε κάποιες κλάσεις το πρόβλημα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ενώ σε άλλες κλάσεις το πρόβλημα παραμένει NP-πλήρες.

Abstract

In social networks the Strong Triadic Closure is an assignment of the edges with strong or weak labels such that any two vertices that have a common neighbor with a strong edge are adjacent. The problem of maximizing the number of strong edges that satisfy the strong triadic closure was recently shown to be NP-complete for general graphs. In this thesis we initiate the study of graph classes for which the problem is either polynomially solvable or remains NP-complete. We show that the problem admits a polynomial-time algorithm for two unrelated classes of graphs: proper interval graphs and trivially-perfect graphs, as well as, on classes of bipartite graphs, co-bipartite graphs and threshold graphs. To complement our result, we show that the problem remains NP-complete on split graphs, and consequently also on chordal graphs. Thus in this thesis we contribute to define the first border between graph classes on which the problem is polynomially solvable and on which it remains NP-complete.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγη

Στα κοινωνικά δίκτυα η πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός δικτύου είναι σημαντικό κομμάτι [8]. Η κατανόηση της δύναμης και της φύσης των κοινωνικών δικτύων έχει βρει ιδιαίτερη χρησιμότητα τα τελευταία χρόνια λόγω της ραγδαίας ανάπτυξής τους (βλέπετε π.χ. [2]). Η αρχή της Ισχυρής Τριαδικής Κλειστότητας (Strong Triadic Closure (STC)) βοηθάει στην κατανόηση των δομικών ιδιοτήτων του δικτύου ή γραφήματος που μελετάται. Η αρχή αυτή αναφέρει ότι δεν είναι εφικτό για δύο άτομα να έχουν ισχυρή σχέση με ένα κοινό φίλο και να μην γνωρίζονται μεταξύ τους [12]. Δηλαδή, η αρχή αυτή ορίζει ότι αν δύο άτομα σε ένα κοινωνικό δίκτυο έχουν ένα κοινό "ισχυρό φίλο", τότε υπάρχει αυξημένη πιθανότητα να γίνουν φίλοι μεταξύ τους σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον. Για να ικανοποιηθεί η ισχυρή τριαδική κλειστότητα, αρκεί να χαρακτηριστούν οι ακμές ενός γραφήματος σε ισχυρές και ασθενείς έτσι ώστε για οποιεσδήποτε δύο κορυφές που έχουν ένα κοινό ισχυρό γείτονα να είναι γειτονικές. Επειδή οι χρήστες αλληλεπιδρούν και εμπλέκονται ενεργά στα κοινωνικά δίκτυα δημιουργώντας ισχυρές σχέσεις, είναι φυσικό να θεωρηθεί το MaxSTC πρόβλημα, δηλαδή η μεγιστοποίηση του πλήθους των ισχυρών ακμών το οποίο ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα. Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης έχει δειχθεί, ότι είναι NP-πλήρες για γενικά γραφήματα και για το δυικό του πρόβλημα της ελαχιστοποίησης των ασθενών ακμών δόθηκε ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος με σταθερό παράγοντα αναλογίας [32]. Στην παρούσα διατριβή επικεντρωνόμαστε σε κλάσεις γραφημάτων και ιδιαίτερα στην κλάση των chordal γραφημάτων.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου δίνονται βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων και της θεωρίας πολυπλοκότητας. Επιπλέον, δίνεται μία τυποποίηση της ισχυρής τριαδικής κλειστότητας και του προβλήματος, καθώς και ο συσχετισμός του με άλλα προβλήματα. Τέλος, δίνονται κάποιες εφαρμογές που έχουν οι κλάσεις γραφημάτων, όπου μελετήθηκε το πρόβλημα, στα κοινωνικά δίκτυα.

1.1 Βασικές Έννοιες Θεωρίας Γραφημάτων

Ένα γράφημα *(graph)* G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο που το καλούμε σύνολο *κορυφών (vertices)* και E είναι ένα σύνολο από διμελή σύνολα κορυφών τα οποία εκφράζουν τις *ακμές (edges)* του γραφήματος . Με $V(G)$ και $E(G)$ συμβολίζουμε το σύνολο κορυφών και το σύνολο ακμών του γαφήματος G, αντίστοιχα. Για κάθε ακμή υπάρχουν δύο *τερματικά σημεία(end points)*. Αν κάθε τερματικό σημείο της ακμής είναι κορυφή του γραφήματος, τότε μία ακμή e συμβολίζεται ως $e = \{u, v\}$, με $u, v \in V(G)$. Επίσης, αν υπάρχει ακμή e ανάμεσα σε δύο κορυφές u και v λέμε ότι η ακμή e ενώνει *(join)* τα u και v ή *προσπίπτει (incedent)* στις κορυφές u και v, αντίστοιχα λέμε ότι η u είναι *γειτονικη (adjacent)* της v.

Η *γειτονιά (neighbourhood)* $N(x)$ της κορυφής $x \in V(G)$ ορίζεται ως το σύνολο των κορυφών του γραφήματος G που συνδέονται με την κορυφή x,

$$N(x) = \{y \mid x, y \in E(G)\}.$$

Η *κλειστή γειτονιά (closed neighbourhood)* $N[x]$ της κορυφής $x \in V(G)$ ορίζεται ως το σύνολο των κορυφών

$$N[x] = N(x) \cup \{x\}.$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τις παραπάνω έννοιες για ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ ως εξής:

$$N(S) = \bigcup_{x \in S} N(x) \setminus S \text{ και } N[S] = N(S) \cup S.$$

Αν για μία κορυφή $x \in V(G)$ ισχύει $N(x) = \emptyset$ τότε ονομάζεται *απομονωμένη (isolated)*, ενώ αν ισχύει $N[x] = V(G)$ τότε λέγεται *καθολική (universal)*· και δύο γειτονικές κορυφές $x, y \in V(G)$ λέγονται *δίδυμες (twins)* αν ισχύει $N[x] = N[y]$.

Επιπλέον, για δύο κορυφές u και v λέμε ότι η u *βλέπει (sees)* την v εάν $\{u, v\} \in E(G)$, διαφορετικά λέμε ότι η u *χάνει (misses)* την v. Μπορούμε να επεκτείνουμε τον συμβολισμό για σύνολα κορυφών: ένα σύνολο κορυφών A βλέπει (αντίστ. χάνει) ένα σύνολο κορυφών B εάν κάθε κορυφή του A είναι γειτονική (αντίστ. μη-γειτονική) με κάθε κορυφή του B. Αντίστοιχα, λέμε ότι δύο ακμές είναι μη-γειτονικές εάν δεν έχουν κανένα κοινό τερματικό σημείο, διαφορετικά τις καλούμε γειτονικές ακμές. Τέλος, το πλήθος των κορυφών ενός γραφήματος G το συμβολίζουμε με n ενώ το πλήθος των ακμών με m, δηλαδή $n = |V(G)|$ και $m = |E(G)|$. Καθώς και τον *βαθμό (degree)* μίας κορυφής v με $deg_G(v) = |N_G(v)|$, δηλαδή το πλήθος των γειτονικών κορυφών της v.

Ορισμός 1.1. *Ένα σύνολο ακμών, $M \subset E(G)$, καλείται ταίριασμα (mathcing) αν οι ακμές του M δεν έχουν κοινό άκρο. Ο μέγιστος αριθμός ακμών ενός γραφήματος που αποτελούν ένα ταίριασμα συμβολίζεται ως $\mu(G)$ και ανεφέρεται ως μέγιστο ταίριασμα.*

Εφόσον ορίσαμε κάποιες βασικές έννοιες για τα γραφήματα, είμαστε σε θέση να ορίσουμε και κάποιες βασικές πράξεις πάνω σε αυτά. Αρχικά, το *συμπλήρωμα (complement)* ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι το γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E' τέτοιο ώστε μία ακμή $e \in E(G)$ αν και μόνο αν $e \notin E'(G)$. Το συμπλήρωμα του γραφήματος G συμβολίζεται με $\bar{G}$.

$$\bar{G} = (V(G), \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G) \kappa\alpha\iota \{u, v\} \in E(G)\}).$$

Έστω, τώρα $G(V, E)$ ένα γράφημα και $v \in V(G)$. Η *διαγραφή κορυφής (vertex deletion)* της κορυφής v έχει ως αποτέλεσμα την διαγραφή της κορυφής v από το σύνολο κορυφών καθώς και την διαγραφή των ακμών που είναι προσπίπτουσες σε αυτήν. Την πράξη της διαγραφης της v από το G την συμβολίζουμε ως $G - v$. Για μία ακμή $e \in E(G)$, *η διαγραφή ακμής (edge deletion)* έχει ως αποτέλεσμα μόνο την διαγραφή της e από το σύνολο των ακμών και συμβολίζεται ως $G - e$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την διαγραφή κορυφής και ακμής σε σύνολα κορυφών και ακμών. Αν $S \subseteq V(G)$ τότε θα γράφουμε $G \setminus S$ για την διαγραφή όλων των κορυφών του S. Αντίσοιχα αν $E \subseteq E(G)$ τότε θα γράφουμε $G \setminus E$ για την διαγραφή όλων των ακμών του E.

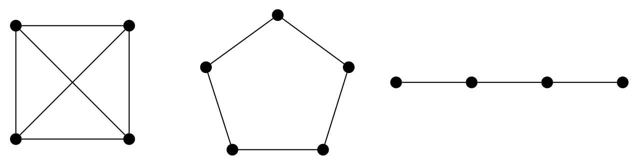
Λέμε ότι δύο γραφήματα G και H είναι ξένα μεταξύ τους ή διακεκριμένα αν $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Αν G και H είναι διακερκιμένα προφανώς $E(G) \cap E(H) = \emptyset$.

Ορισμός 1.2. *Έστω G και H δύο διακεκριμένα γραφήματα. Ορίζουμε την ένωση (union) των G και H ως εξής: $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$.*

Ένα γράφημα H είναι υπογράφημα *(subgraph)* ενός γραφήματος G εάν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$.

Ορισμός 1.3. *Για δύο γραφήματα H και G, λέμε ότι το γράφημα H είναι επαγόμενο υπογράφημα (induced subgraph) του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και$E(H) \subseteq E(G)$.*

Για ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ θα γράφουμε ως $G[S]$ το επαγόμενο υπογράφημα που ορίζεται ώς: $G[S] = (S, \{\{u, v\} \mid u, v \in S \, \kappa\alpha\iota \, \{u, v\} \in E(G)\})$.



Σχήμα 1.1: α) μία κλίκα K_4, β) ένας κύκλος C_5 και γ) ένα μονοπάτι P_4

Ορισμός 1.4. *Έστω G και H δύο γραφήματα. Λέμε ότι το γράφημα H είναι παραγόμενο υπογράφημα (spanning subgraph) του G αν $V(H) = V(G)$ και για κάθε $u, v \in V(H), \{u, v\} \in E(H)$ αν και μόνο αν $\{u, v\} \in E(G)$.*

Ορισμός 1.5. *Το γραμμικό γράφημα (line graph) $L(G)$ ενός γραφήματος G είναι το γράφημα που έχει για κορυφές τις ακμές του G και δύο κορυφές του $L(G)$ είναι γειτονικές αν και μόνο αν οι δύο αρχικές ακμές έχουν κοινό ακρο στο G.*

$$L(G) = (E(G), \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E(G) \, \kappa\alpha\iota \, e \cap e' \neq \emptyset\})$$

Ορισμός 1.6. *Ένα γράφημα το ονομάζουμε πλήρες γράφημα (complete graph) ή κλίκα (clique) αν υπάρχει ακμή για κάθε ζεύζος κορυφών του γραφήματος. Μια κλίκα με n κορυφές την συμβολίζουμε ως K_n.*

Ορισμός 1.7. *Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ καλείται μονοπάτι (path). Το γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές που ορίζεται ως*

$$P_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\}\}$$

καλείται άχορδο (chordless) μονοπάτι.

Ορισμός 1.8. *Το γράφημα G με $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \cup \{v_1, v_n\} \in E(G)$ καλείται κύκλος (cycle). Το γράφημα με $n \geq 4$ κορυφές που ορίζεται ως*

$$C_n = \{\{v_1, ..., v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_1, v_n\}\}$$

καλείται άχορδος (chordless) κύκλος.

Στο Σχήμα 1.1 δίνονται παραδείγματα για την κλίκα, το μονοπάτι και τον κύκλο.

1.2 Τέλεια Γραφήματα

Ορισμός 1.9. *Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος G είναι ο μικρότερος δυνατός ακέραιος k για τον οποίο το γράφημα G είναι k-χρωματίσιμο και συμβολίζεται με $\chi(G)$.*

Ορισμός 1.10. *Συμβολίζουμε με $\omega(G)$ τον μέγιστο αριθμό κορυφών σε μία κλίκα ενός γραφήματος G. Η ποσότητα $\omega(G)$ καλείται αριθμός κλίκας του G. Με άλλα λόγια ισχύει $\omega(G) = max\{k \mid K_k$ υπογράφημα του $G\}$.*

Ορισμός 1.11. *Ένα γράφημα G είναι τέλειο (perfect) αν για όλα τα επαγώμενα υπογραφήματα H του G , $\chi(H) = \omega(H)$.*

Ορισμός 1.12. *Ένα γράφημα G είναι Berge αν κανένα από τα επαγόμενα υπογραφήματα του είναι κύκλος μήκους τουλάχιστον 5 ή τα συμπληρώματα αυτών.*

Θεώρημα 1.1 (Strong Perfect Graph Theorem [5])**.** *Ένα γράφημα είναι τέλειο αν και μόνο αν είναι Berge γράφημα.*

Για ένα γράφημα G και $S \subseteq V(G)$. Λέμε ότι το S είναι *ανεξάρτητο σύνολο* (*independent set*) αν κανένα ζεύγος κορυφών του S δεν έχει ακμή στο G. Το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο το συμβολίζουμε με $I(G)$ Επίσης, λέμε ότι μία ακμή καλύπτεται από ένα σύνολο κορυφών S αν τουλάχιστον ένα απο τα άκρα της ακμής ανήκει στο S. Το S καλείται *κάλυμμα κορυφών (vertex cover)* ενός γραφήματος G αν το S καλύπτει όλες τις ακμές του G. Το κάλυμμα κορυφών με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών καλείται αριθμός καλύμματος κορυφών του G και συμβολίζεται με $vc(G)$. Για το κάλυμμα κορυφών και για το ανεξάρτητο σύνολο ισχύει ότι: Ένα σύνολο κορυφών ενός γραφήματος είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν το συμπλήρωμα του είναι κάλυμμα κορυφών και ισχύει $|I(G)| + |vc(G)| = |V(G)|$.

1.3 Θεμελιώδης Έννοιες Θεωρίας Πολυπλοκότητας

Η αποτελεσματικότητα ενός αλγορίθμου καθορίζεται με βάση την *πολυπλοκότητα (complexity)* του και η πολυπλοκότητα μπορεί να είναι χρονική ή χωρική. Η πολυπλοκότητα που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή είναι η χρονική. Ως πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου μπορούμε να θεωρήσουμε το πλήθος των βημάτων ή των πράξεων που χρειάζεται ένας αλγόριθμος για να επιλύσει ένα πρόβλημα. Για την μελέτη της πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου, ένας από τους συμβολισμούς που χρησιμοποιείται είναι το ασυμπτωτικό άνω φράγμα, $O(f(n))$ (κεφαλαίο όμικρον της $f(n)$), που εκφράζει το άνω φράγμα των απαιτούμενων πράξεων (ή χείριστο χρόνο εκτέλεσης) ενός αλγορίθμου με βάση μια συνάρτηση $f(n)$, όπου n το μέγεθος του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, έστω $g(n)$ είναι μια συνάρτηση, τέτοια ώστε να περιγράφει τον χείριστο χρόνο εκτέλεσης ενός αλγορίθμου, τότε λέμε $g(n) \in O(f(n))$ αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ και $n_0 > 0$ έτσι ώστε για όλα τα $n > n_0$ να έχουμε $g(n) \geq c \cdot f(n)$. Επίσης, λέμε ότι η $g(n)$ είναι $O(f(n))$ (ή είναι τάξης $O(f(n))$). Επιπλέον, ως μέγεθος ενός προβλήματος σε γράφημα συνήθως χρησιμοποιείται το πλήθος των κορυφών και το πλήθος των ακμών. Από τα παραπάνω, μπορούμε να κατατάξουμε τα προβλήματα σε λογαριθμικά, γραμμικά, εκθετικά κ.α. αν $f(n) = \log(n)$, $f(n) = n$, $f(n) = 2^n$, αντίστοιχα.

Αφού έχουμε ορίσει την πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου για κάποιο πρόβλημα, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα προβλήματα αναλόγως με την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που τα επιλύει. Η ομαδοποίηση αυτή γίνεται με τις *κλάσεις πολυπλοκότητας (complexity classes)*. Η πιο απλή κλάση πολυπλοκότητας είναι η κλάση P. Έστω ένα πρόβλημα Π, λέμε ότι το πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση P, αν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα Π. Δηλαδή, η κλάση P περιέχει όλα τα προβλήματα που επιλύονται με πολυωνυμικούς αλγορίθμους. Μια άλλη βασική κλάση πολυπλοκότητας είναι η NP. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε την κλάση αυτή θα δώσουμε αρχικά την έννοια του πιστοποιητή. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν προβλήματα που δεν λύνονται πολυωνυμικά, αλλά υπάρχει ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος όπου ελέγχει αν μια δοθείσα λύση είναι λύση του προβλήματος. Ένας τέτοιος πολυωνυμικός αλγόριθμος λέγεται πιστοποιητής. Έτσι, η κλάση NP μπορεί να οριστεί ως η κλάση που περιέχει όλα τα προβλήματα για τα οποία υπάρχει πολυωνυμικός πιστοποιητής. Είναι φανερό ότι ισχύει $P \subset NP$.

Για να γίνει ευκολότερη η μελέτη των προβλημάτων και ιδιαίτερα των NP προβλημάτων πρέπει να μπορούμε να συσχετίζουμε τα προβλήματα μεταξύ τους. Έτσι, εισάγεται η έννοια της *αναγωγής (reduction)*. Λέμε ότι ένα πρόβλημα Π_1 ανάγεται πολυωνυμικά στο Π_2 αν κάθε στιγμιότυπο του Π_1 μπορεί να λυθεί με χρήση πολυωνυμικού πλήθους υπολογιστικών βημάτων συν ένα πολυωνυμικό αριθμό κλήσεων του τρόπου που λύνει το πρόβλημα Π_2. Συμβολίζεται $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$. Με χρήση της πολυωνυμικής αναγωγής λέμε ότι ένα πρόβλημα Π_2 είναι *NP-πλήρες (NP-complete)* αν το $\Pi_2 \in NP$ και για όλα τα $\Pi_1 \in NP$, $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$. Τέλος, ένα πρόβλημα Π_2 είναι *NP-δύσκολο (NP-hard)* αν για όλα τα $\Pi_1 \in NP$, $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$.

1.4 Τυποποίηση της Ισχυρής Τριαδικής Κλειστότητας (STC)

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή η ισχυρή τριαδική κλειστότητα αναθέτει στις ακμές του γραφήματος ισχυρές και ασθενείς επιγραφές, τέτοιες ώστε για δύο ισχυρές ακμές που έχουν κοινό άκρο πρέπει και για τα άλλα δύο άκρα τους να υπάρχει ακμή. Έτσι παρακάτω δίνεται ένας μαθηματικός ορισμός της ιδιότητας αυτής καθώς και του προβλήματος της μεγιστοποίησης.

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Μία *ισχυρή-ασθενής επιγραφή (strong-weak labeling)* στις ακμές του G είναι μία συνάρτηση σ η οποία αναθέτει σε κάθε ακμή του $E(G)$ μία από τις επιγραφές ισχυρή ή ασθενή, δηλαδή, $\sigma : E(G) \rightarrow \{\text{strong}, \text{weak}\}$.

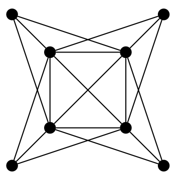
Ορισμός 1.13. *Η ισχυρή τριαδική κλειστότητα ενός γραφήματος G είναι μία ισχυρή-ασθενής επιγραφή σ τέτοια ώστε για οποιεσδήποτε δύο ισχυρές ακμές $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ υπάρχει η (ισχυρή ή ασθενής) ακμή $\{u, w\}$. Με άλλα λόγια, σε μία ισχυρή τριαδική κλειστότητα δεν υπάρχει ζεύγος ισχυρών ακμών $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ τέτοιο ώστε η ακμή $\{u, w\} \notin E(G)$.*

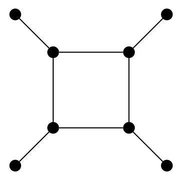
Παρατήρηση 1.1. *Έστω G ένα ισχυρό-ασθενές γράφημα με επιγραφές. Τότε $G \setminus E_W$ ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα αν και μόνο αν για κάθε P_3 στο $G \setminus E_W$, οι κορυφές του P_3 επάγουν ένα K_3 στο G.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το $G \setminus E_W$ είναι το γράφημα που παράγεται από τις ισχυρές ακμές. Αν για δύο ισχυρές ακμές $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$, $\{u, w\} \notin E(G \setminus E_W)$ τότε $\{u, w\}$ είναι μία ακμή στο G και έτσι, u, v, w επάγουν ένα K_3 στο G. Από την άλλη οποιεσδήποτε δύο ακμές στο $G \setminus E_W$ είναι είτε μη-γειτονικές είτε μοιράζονται μία κοινή κορυφή. Εάν αυτές μοιράζονται μία κοινή κορυφή τότε οι κορυφές πρέπει να επάγουν ένα K_3 στο G. □

Το πρόβλημα που υπολογίζει την μέγιστη ισχυρή τριαδική κλειστότητα, και το συμβολίζουμε με MaxSTC, είναι η εύρεση μίας ισχυρούς−ασθενούς επιγραφής στις ακμές $E(G)$ η οποία ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα και μεγιστοποιεί το πλήθος των ισχυρών ακμών.

Αντί να μεγιστοποιήσουμε τις ισχυρές ακμές του αρχικού γραφήματος G, θα ψάξουμε το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του παρακάτω γραφήματος που το καλούμε line-incompatibility γράφημα $\widehat{G}$ του G: για κάθε ακμή του G υπάρχει ένας κόμβος στο $\widehat{G}$ και δύο κόμβοι του $\widehat{G}$ είναι γειτονικοί αν και μόνο αν οι κορυφές των αντίστοιχων ακμών επάγουν ένα P_3 στο G. Παρατηρούμε, αρχικά, ότι το





Σχήμα 1.2: Στην αριστερή πλευρά είναι ένα split γράφημα G. Στην δεξιά πλευρά αναπαριστάται μία λύση για το MaxSTC στο G όπου οι ασθενείς ακμές είναι ακριβώς οι ακμές του G που δεν φαίνονται. Η λύση περιέχει P_3 ως επαγόμενο υπογράφημα.

line-incompatibility γράφημα είναι ένα υπογράφημα του γραμμικού γραφήματος και, δεύτερον, η κατασκευή του γίνεται σε $O(n \cdot m)$ χρόνο.

Πρόταση 1.1. *Ένα σύνολο S από ακμές $E(G)$ είναι μία βέλτιστη λύση για το* MaxSTC *του γραφήματος G αν και μόνο αν το S είναι ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του $\widehat{G}$.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 1.1 για κάθε P_3 στο G τουλάχιστον μία από τις δύο ακμές επιγράφονται ασθενείς στο S. Αυτό σημαίνει ότι αυτές οι δύο ακμές είναι γειτονικές στο $\widehat{G}$ και δεν μπορούν να ανήκουν σε ένα ανεξάρτητο σύνολο του $\widehat{G}$. Από την άλλη, από την κατασκευή δύο κόμβοι του $\widehat{G}$ είναι γειτονικοί αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_3 στο G. Επομένως, οι κόμβοι ενός ανεξάρτητου συνόλου του $\widehat{G}$ μπορούν να έχουν ισχυρή επιγραφή στο G και ικανοποιούν την ισχυρή τριαδική κλειστότητα. □

Συνεπώς, αναζητούμε για βέλτιστη λύση του G ψάχνοντας μία λύση για το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του $\widehat{G}$. Συμβολίζουμε με $I_{\widehat{G}}$ το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του $\widehat{G}$. Για να διαχωρίσουμε τις κορυφές του $\widehat{G}$ από τις κορυφές του G θα αναφέρουμε τις πρώτες ως κόμβους και τις δεύτερες ως κορυφές. Για μία ακμή $\{u, v\}$ του G συμβολίζουμε με uv τον αντίστοιχο κόμβο του $\widehat{G}$.

1.5 Σχετικά Προβλήματα με την STC

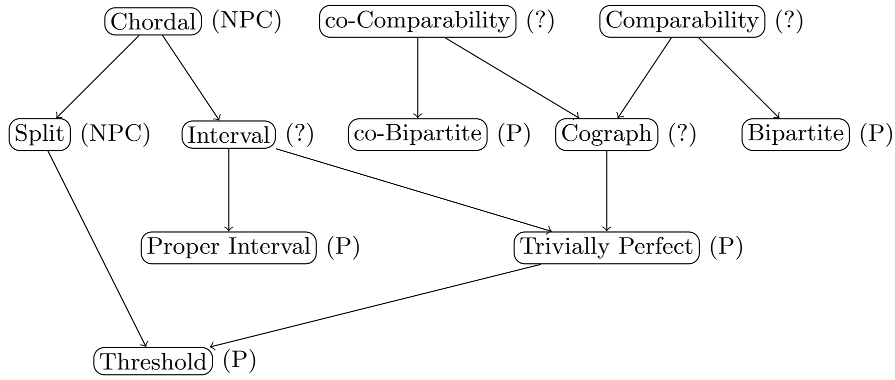
Είναι φυσικό να προσπαθήσει κανείς να συσχετίσει το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της ισχυρής τριαδικής κλειστότητας με κάποιο άλλο γνωστό πρόβλημα και ειδικά αφού μελετάται σε συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων. Αρχικά, αν ένα γράφημα είναι P_3-free γράφημα (δηλ., ένα γράφημα χωρίς επαγόμενο μονοπάτι με

Classes	Cluster Deletion	MaxSTC
General	NP-c [31]	NP-c [32]
Split	P [3]	**NP-c**
Interval	Ανοιχτό	Ανοιχτό
Proper Interval	P [3]	**P**
Cograph	P [9]	Ανοιχτό
Trivially-Perfect	P	**P**

Πίνακας 1.1: Πολυπλοκότητα σε κλάσεις γραφημάτων του προβλήματος Cluster Deletion και του προβλήματος MaxSTC. Με έντονα γράμματα είναι τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής. Το NP-c δηλώνει ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες στην αντίστοιχη κλάση και το P ότι υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος.

τρεις κορυφές ισοδύναμα ένα γράφημα το οποίο αποτελείται από ανεξάρτητες κλίκες), τότε υπάρχει μία τετριμένη λύση επιγράφοντας όλες τις ακμές ισχυρές. Μια τέτοια παρατήρηση μπορεί να οδηγήσει σε ένα πρόβλημα τροποποίησης του γραφήματος, γνωστό ως Cluster Deletion πρόβλημα (βλέπετε π.χ, [3, 13]), στο οποίο θέλουμε να αφαιρέσουμε τον ελάχιστο αριθμό ακμών, οι οποίες μπορούν να αντιστοιχηθούν με τις ασθενείς ακμές, έτσι ώστε το γράφημα που απομένει να μην περιέχει κανένα P_3 ως επαγώμενο υπογράφημα. Πιο συγκεκριμένα, μία προφανής αναγωγή θα μπορούσε να επιγράφει της ακμές που έχουν διαγραφτεί στο στιγμιότυπο του Cluster Deletion ως ασθενείς και τις υπόλοιπες ως ισχυρές. Όμως, αυτή η αναγωγή δεν είναι σωστή διότι το γράφημα που απομένει, αν διαγραφτούν οι ασθενείς ακμές σε μία βέλτιστη λύση του MaxSTC, μπορεί να περιέχει ένα επαγόμενο P_3, (βλέπετε Σχήμα 1.2). Η πολυπλοκότητα του Cluster Deletion και του MaxSTC σε ορισμένες κλάσεις γραφημάτων φαίνεται στον Πίνακα 1.1.

Επίσης, επειδή η ύπαρξη των P_3 αναγκάζει να επιγραφούν ακμές ασθενείς, υπάρχει μια σύνδεση του προβλήματος με το *square root* ενός γραφήματος· ένα γράφημα H αποτελεί μία *τετραγωνική ρίζα (square root)* ενός γραφήματος G και το γράφημα G είναι το *τετράγωνο (square)* του H αν δύο κορυφές είναι γειτονικές στο G και είναι σε απόσταση ένα ή δύο στο H. Όλα τα γραφήματα δεν αποτελούν τετραγωνική ρίζα (για παράδειγμα ένα απλό μονοπάτι) κάποιου γραφήματος, αλλά κάθε γράφημα περιέχει ένα υπογράφημα το οποίο έχει μία τετραγωνική ρίζα. Αν και είναι NP-πλήρες να αποφανθεί κανείς αν ένα δοθέν chordal γράφημα έχει μία τετραγωνική ρίζα [21], όμως υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος όταν η είσοδος είναι ένα διμερές γράφημα [22], ή ένα proper interval γράφημα [21], ή ένα trivially-perfect γράφημα [25]. Η σχέση μεταξύ του MaxSTC και του προβλή-



Σχήμα 1.3: Η πολυπλοκότητα του MaxSTC στις κλάσεις γραφημάτων που αποδείχτηκαν στην παρούσα διατριβή. Το κατευθυνόμενο βέλος $\rightarrow$ δηλώνει τη σχέση $\supset$. Το NPC δηλώνει ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες. Το P σημαίνει ότι υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος και το ? ότι το πρόβλημα παραμένει ανοιχτό.

ματος αυτού μπορεί να θεωρηθεί η εξής: Στο MaxSTC πρόβλημα μας δίνεται ένα γράφημα G και θέλουμε να επιλέξουμε το μέγιστο δυνατό αριθμό ακμών, το πολύ μία από κάθε επαγόμενο P_3 στο G. Έτσι χρειάζεται να βρεθεί το μεγαλύτερο υπογράφημα (ως προς το πλήθος των ακμών) H του G, τέτοιο ώστε το τετράγωνό του του H να είναι ένα υπογράφημα του G. Ωστόσο, τα προηγούμενα αποτελέσματα σχετίζουν την τετραγωνική ρίζα, με το αν μπορεί να αποφανθεί ότι όλο το γράφημα είναι η τετραγωνική ρίζα κάποιου γραφήματος και δεν υπάρχει ισοδύναμος μετασχηματισμός που να σχετίζει την μέγιστη τετραγωνική ρίζα.

1.6 Κοινωνικά Δίκτυα και Κλάσεις Γραφημάτων

Όπως αναφέρθηκε το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της ισχυρής τριαδικής κλειστότητας είναι NP-πλήρες, έτσι, γίνεται η μελέτη του προβλήματος σε συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων και κατά κύριο λόγο στην κλάση των chordal γραφημάτων. Κίνητρο για την μελέτη της πολυπλοκότητας του προβλήματος στα chordal γραφήματα (δλδ., γραφήματα που δεν έχουν άχορδους κύκλους μήκους τουλάχιστον τέσσερα) και στις υποκλάσεις αυτών είναι, ότι βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές τόσο σε θεωρητικό και όσο και σε πρακτικό επίπεδο που σχετίζονται με τα κοινωνικά δίκτυα [1, 18, 29]. Πιο συγκεκριμένα δύο γνωστές ιδιότητες μπορούν να βρεθούν σε κοινωνικά δίκτυα. Η πιο γνωστή ιδιότητα σε κοινωνικά και βιολογικά δίκτυα είναι η διάμετρός τους, δηλαδή το μήκος του μακρύτερου συντομότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών του γραφήματος, είναι γνωστό ότι είναι μία μικρή σταθερά [15]. Από την άλλη μεριά έχει δειχθεί ότι το πιο συχνό υπογράφημα στα κοινωνικά δίκτυα είναι οι κλίκες, ενώ από τα πιο σπάνια επαγόμενα υπογραφήματα είναι οι κύκλοι μήκους τέσσερα [33]. Έτσι, είναι εμφανές ότι οι υποκλάσεις των chordal γραφημάτων σχετίζονται με τέτοια δίκτυα, αφού έχουν σχετική μικρή διάμετρο (για παράδειγμα, split γραφήματα ή trivially-perfect γραφήματα) και χαρακτηρίζονται από την απουσία άχορδων κύκλων (για παράδειγμα, proper interval γραφήματα). Δείχνουμε ότι το MaxSTC είναι NP-πλήρες στα split γραφήματα, επομένως, και στα chordal γραφήματα. Όμως στην αντίθετη πλευρά, παρουσιάζουμε τον πρώτο πολυωνυμικό σε χρόνο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του MaxSTC σε proper interval γραφήματα. Τα proper interval γραφήματα, γνωστά ως και unit interval γραφήματα ή indifference γραφήματα, είναι υποκλάση των interval γραφημάτων και δεν σχετίζονται με τα split γραφήματα [30]. Έτσι, είναι η πρώτη κλάση γραφημάτων, εκτός από τα διμερή γραφήματα, για την οποία το MaxSTC δείχνεται ότι λύνεται πολυωνυμικά. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ένα γράφημα, που η κατασκευή του σχετίζεται με τις ακμές που παίρνουν μέρος στα επαγόμενα P_3 και είναι υπογράφημα του γραμμικού γραφήματος, δείχνουμε ότι υπάρχει πολυωνυμική σε χρόνο λύση σε trivially-perfect γραφήματα για το MaxSTC. Επομένως, δίνουμε τα πρώτα όρια μεταξύ των κλάσεων γραφημάτων στις οποίες το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά και στις οποίες παραμένει NP-πλήρες. Τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής παρουσιάζονται συνοπτικά στο Σχημα 1.3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

NP-πληροτητα σε Split Γραφηματα

Το κεφάλαιο χωρίζεται σε δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα χαρακτηρίζονται μερικές λύσεις του MaxSTC σε split γραφήματα και ορίζεται ένα πρόβλημα για την πολυωνυμική αναγωγή του MaxSTC. Στη δεύτερη δίνεται η αναγωγή του προβλήματος.

Ένα γράφημα είναι *split* αν το σύνολο κορυφών του μπορούν να διαμεριστούν σε μία κλίκα C και ένα ανεξάρτητο σύνολο I, όπου (C, I) καλείται ένας *split partition*. Τα split γραφήματα είναι υποκλάση των *chordal* γραφημάτων, τα οποία είναι τα γραφήματα που δεν περιέχουν κύκλους μήκους 4 ή περισσότερο ως επαγόμενα υπογραφήματα. Είναι γνωστό ότι τα split γραφήματα είναι *self-complementary*, δηλαδή, το συμπλήρωμα ενός split γραφήματος είναι split γράφημα.

2.1 Χαρακτηρισμός Μερικών Λύσεων του MaxSTC.

Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε την NP-πληρότητα στα split γραφήματα, αρχικά, δίνεται ένα λήμμα που χαρακτηρίζει μερικές λύσεις. Δηλαδή, δείχνουμε ότι σε ένα split γράφημα στην περίπτωση, όπου όλες οι κορυφές του ανεξάρτητου συνόλου χάνουν τουλάχιστον τρεις κορυφές της κλίκας, η λύση του MaxSTC είναι η κλίκα, ενώ, στην περίπτωση, όπου όλες οι κορυφές του ανεξάρτητου συνόλου χάνουν μία κορυφή της κλίκας δίνεται ένα άνω φράγμα της λύσης. Επίσης, ορίζεται το πρόβλημα MaxDisjointNN σε split γραφήματα το οποίο ανάγουμε στο MaxSTC.

Λήμμα 2.1. *Έστω $G = (V, E)$ ένα split γράφημα με split partition (C, I). Έστω E_S είναι το σύνολο των ισχυρών ακμών σε μία βέλτιστη λύση για το*

MaxSTC στο G και έστω I_W οι κορυφές του I οι οποίες είναι προσκείμενες σε τουλάχιστον μία ακμή του E_S.

1. *Άν κάθε κορυφή του I_W χάνει τουλάχιστον τρείς κορυφές του C στο G τότε $E_S = E(C)$.*

2. *Άν κάθε κορυφή του I_W χάνει ακριβώς μία κορυφή του C στο G τότε $|E_S| \leq |E(C)| + \lfloor \frac{|I_W|}{2} \rfloor$.*

Απόδειξη. Έστω w_i μία κορυφή του I και έστω B_i το σύνολο κορυφών στο C το οποίο δεν είναι γειτονικό στη κορυφή w_i. Έστω A_i οι ισχυροί γείτονες της κορυφής w_i σε μία βέλτιστη λύση. Για τις ακμές της κλίκας, υπάρχουν $|A_i||B_i|$ ασθενείς ακμές λόγω της ισχυρής τριαδικής κλειστότητας. Επιπλέον, κάθε κορυφή w_j του $I \setminus \{w_i\}$ δεν μπορεί να έχει ισχυρό γείτονα στο A_i. Αυτό σημαίνει ότι $A_i \cap A_j = \emptyset$. Σημειώνουμε, όμως, ότι και τα δύο σύνολα $B_i \cap B_j$ και $A_i \cap B_j$ δεν είναι απαραίτητα κενά.

Παρατηρούμε ότι I_W περιέχει τις κορυφές I οι οποίες είναι προσκείμενες σε τουλάχιστον μία ισχυρή ακμή.

Έστω $E(A, B)$ είναι το σύνολο των ασθενών ακμών όπου έχουν ένα τέρματικο σημείο στο A_i και το άλλο τερματικό στο B_i, για κάθε $1 \leq i \leq |I_W|$. Θα δείξουμε ότι $2|E(A, B)| \geq \sum_{w_i \in I_W} |A_i||B_i|$. Έστω η ακμή $\{a, b\} \in E(A, B)$ τέτοια ώστε η κορυφή $a \in A_i$ και η κορυφή $b \in B_i$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ζεύγος A_j, B_j τέτοιο ώστε η ακμή $\{a, b\}$ είναι ανάμεσα στο A_j και στο B_j, για $j \neq i$. Τότε η κορυφή a δεν μπορεί να ανήκει στο A_j επειδή $A_i \cap A_j = \emptyset$. Επομένως, η κορυφή $a \in B_j$ και η κορυφή $b \in A_j$.

Συνεπώς, για κάθε ακμή $\{a, b\} \in E(A, B)$ υπάρχουν το πολύ δύο ζεύγη (A_i, B_i) και (A_j, B_j) για τα οποία η κορυφή $a \in A_i \cup B_j$ και η κορυφή $b \in B_i \cup A_j$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ακμή του $E(A, B)$ καταμετράται το πολύ δύο φορές στο $\sum_{w_i \in I_W} |A_i||B_i|$.

Για οποιεσδήποτε δύο ακμές $\{u, v\}, \{v, z\} \in E(C) \setminus E(A, B)$, παρατηρούμε ότι αυτές ικανοποιούν την ισχυρή τριαδική κλειστότητα, αφού υπάρχει η ακμή $\{u, z\}$ στο G. Έτσι, οι ισχυρές ακμές της κλίκας είναι ακριβώς το σύνολο των ακμών $E(C) \setminus E(A, B)$. Καταμετρώντας στο σύνολο τον αριθμό των ισχυρών ακμών ανάμεσα στο ανεξάρτητο σύνολο και την κλίκα, έχουμε $|E_S| = |E(C) \setminus E(A, B)| + \sum_{w_i \in I_W} |A_i|$. Καθώς $2|E(A, B)| \geq \sum_{w_i \in I_W} |A_i||B_i|$, παίρνουμε

$$|E_S| \leq |E(C)| + \sum_{w_i \in I_W} |A_i| \left(1 - \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor\right).$$

Ο πρώτος ισχυρισμός του λήμματος ισχύει, επειδή $|B_i| = 3$ και $(1 - \lfloor \frac{|B_i|}{2} \rfloor) < 0$, έτσι λοιπόν $I_W = \emptyset$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό θα δείξουμε ότι για κάθε κορυφή του I_W, $|A_i| = 1$. Έστω η κορυφή $w_i \in I_W$ τέτοια ώστε $|A_i| \geq 2$ και ας είναι $B_i = \{b_i\}$. Υπενθυμίζουμε ότι δεν υπάρχει άλλη κορυφή στο I_W τέτοια ώστε να έχει ισχυρούς γείτονες στο A_i. Επίσης, επισημαίνουμε ότι υπάρχει το πολύ μία κορυφή w_j στο I_W η οποία έχει τη κορυφή b_i ως ισχυρό γείτονα. Εάν υπάρχει τέτοια κορυφή w_j και για την κορυφή b_j της κλίκας η οποία χάνει την w_j ισχύει $b_j \in A_i$, τότε αφήνουμε $v = b_j$· αλλιώς επιλέγουμε v ως μία αυθαίρετη κορυφή του A_i. Παρατηρούμε ότι καμία κορυφή του $I \setminus \{w_i\}$ δεν έχει ισχυρή γειτονία στο $A_i \setminus \{v\}$ και μόνο η κορυφή $w_j \in I_W$ είναι ισχυρός γείτονας της κορυφής b_i. Τότε κάνουμε ασθενείς τις $|A_i| - 1$ ακμές ανάμεσα στη κορυφή w_i και στις κορυφές του $A_i \setminus \{v\}$ και κάνουμε ισχυρές τις $|A_i| - 1$ ακμές ανάμεσα στη κορυφή b_i και στις κορυφές του $A_i \setminus \{v\}$. Κάνοντας ισχυρές της ακμές ανάμεσα στη b_i κορυφή και στις κορυφές του $A_i \setminus \{v\}$ δεν παραβιάζεται η ισχυρή τριαδική κλειστότητα, καθώς κάθε κορυφή στο $C \cup \{w_j\}$ είναι γειτονική με κάθε κορυφή του $A_i \setminus \{v\}$. Επιπροσθέτως, για κάθε κορυφή $w_i \in I_W$, το $|A_i| = 1$ και αντικαθιστώντας το $|B_i| = 1$ στον τύπο του $|E_S|$ έχουμε φράγμα του ισχυρισμού. □

Για να μπορέσουμε να δώσουμε μία αναγωγή για το πρόβλημά μας, εισάγουμε το ακόλουθο πρόβλημα το οποίο καλούμε *maximum disjoint non-neighbourhood*: δοθέντος ενός split γραφήματος (C, I), όπου κάθε κορυφή του ανεξάρτητου συνόλου I χάνει τρεις κορυφές από την κλίκα C, θέλουμε να βρούμε το μέγιστο υποσύνολο S_I του I, τέτοιο ώστε οι μη-γειτονιές των κορυφών του S_I να είναι ανά δύο ξένες. Στο αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης, το συμβολίζουμε ως MaxDisjointNN, μας δίνεται επίσης, και ένας ακέραιος k και το ζητούμενο του προβλήματος είναι αν $|S_I| \geq k$. Η πολυωνυμική αναγωγή στο MaxDisjointNN δίνεται από το κλασσικό NP-πλήρες πρόβλημα 3-Set Packing: Δοθέντος ενός σύμπαντος $\mathcal{U}$ με n στοιχεία, μίας οικογένειας $\mathcal{F}$ από τριάδες του $\mathcal{U}$, και ενός ακέραιου k, ζητάμε για μία υποοικογένεια $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ με $|\mathcal{F}'| \geq k$, τέτοια ώστε όλες οι τριάδες του $\mathcal{F}'$ είναι ανά δύο ξένες [16].

Θεώρημα 2.1. MaxDisjointNN *είναι NP-πλήρες σε split γραφήματα.*

Απόδειξη. Δοθέντος ενός split γραφήματος $G = (C, I)$ και ενός συνόλου $S_I \subseteq I$, ο έλεγχος αν το S_I είναι λύση για το MaxDisjointNN είναι ισοδύναμος με τον ελέγχο αν κάθε ζεύγος από κορυφές του S_I έχουν κοινή γειτονία. Αυτό μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο, επομένως, το πρόβλημα είναι NP. Θα δώσουμε μια πολυωνυμική αναγωγή στο MaxDisjointNN από το κλασικό NP-πλήρες πρόβλημα 3-Set Packing: Δοθέντος ενός σύμπαντος $\mathcal{U}$ με n στοιχεία, μίας οικογένειας $\mathcal{F}$ από τριάδες του $\mathcal{U}$, και ενός ακέραιου k, ζητάμε για μία υποοικογένεια $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ με $|\mathcal{F}'| \geq k$ τέτοια ώστε όλες οι τριάδες του $\mathcal{F}'$ είναι ανά δύο ξένες.

Έστω $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, k)$ είναι ένα στιγμιότυπο του 3-Set Packing. Κατασκευάζουμε ένα split γράφημα $G = (C, I)$ ως εξής: Η κλίκα του G σχηματίζεται από τα n στοιχεία του $\mathcal{U}$. Για κάθε τριάδα F_i του $\mathcal{F}$ προσθέτουμε μία κορυφή v_i στο I, η οποία είναι γειτονική με κάθε κορυφή του C εκτός από τις τρεις κορυφές οι οποίες αντιστοιχούν στην τριάδα F_i. Έτσι, κάθε κορυφή του I χάνει ακριβώς τρείς κορυφές από το C και βλέπει τις υπόλοιπες της C. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι υπάρχει μία λύση $\mathcal{F}'$ για το 3-Set Packing$(\mathcal{U}, \mathcal{F}, k)$ μεγέθους τουλάχιστον k αν και μόνο αν υπάρχει μία λύση S_I για το MaxDisjointNN(G, k) μεγέθους τουλάχιστον k. Για κάθε ζεύγος (F_i, F_j) του $\mathcal{F}'$ γνωρίζουμε ότι $F_i \cap F_j = \emptyset$, το οποίο συνεπάγει ότι οι κορυφές v_i και οι v_j έχουν ξένες μη-γειτονίες, αφού το F_i αντιστοιχεί στη μη-γειτονία του v_i. Από την ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα του $\mathcal{F}$ και τις κορυφές του I, κάθε σύνολο F_i ανήκει στο $\mathcal{F}'$ αν και μόνο αν η κορυφή v_i ανήκει στο S_I. □

2.2 Απόδειξη της NP-πληρότητας σε Split Γραφήματα

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στο αρχικό μας πρόβλημα, το MaxSTC. Το πρόβλημα απόφασης του MaxSTC δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα G και ένα ακέραιο k και ρωτά αν υπάρχει ισχυρή-ασθενής επιγραφή των ακμών του G, η οποία ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα με τουλάχιστον k ισχυρές ακμές.

Θεώρημα 2.2. *Το πρόβλημα απόφασης του* MaxSTC *είναι NP-πλήρες σε split γραφήματα.*

Απόδειξη. Δοθέντος αρχικά, μίας ισχυρούς–ασθενούς επιγραφής (E_S, E_W) ενός split γραφήματος $G = (C, I)$, ο έλεγχος αν η (E_S, E_W) ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα, ισοδυναμεί με τον έλεγχο αν στο $G - E_W$ δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα στις τερματικές κορυφές από κάθε P_3 σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.1. Έτσι, βρίσκοντας όλα τα P_3 του $G \setminus E_W$ το πρόβλημα ανήκει στην NP. Στη συνέχεια, θα δώσουμε μια πολυωνυμική αναγωγή στο MaxSTC από το MaxDisjointNN πρόβλημα στα split γραφήματα, το οποίο είναι NP-πλήρες από το Θεώρημα 2.1. Έστω το (G, k) ένα στιγμιότυπο του MaxDisjointNN όπου $G = (C, I)$ είναι ένα split γράφημα του οποίου κάθε κορυφή από το ανεξάρτητο σύνολο I χάνει ακριβώς τρεις κορυφές από την κλίκα C. Για μία κορυφή $w_i \in I$, συμβολίζουμε με B_i το σύνολο των κορυφών στη C οι οποίες είναι μη-γειτονικές στη κορυφή w_i. Έστω $|C| = n$. Επεκτείνουμε το G και κατασκευάζουμε ένα άλλο split γράφημα G' ως ακολούθως (βλέπετε Σχήμα 2.1):

- Προσθέτουμε n κορυφές $y_1, \ldots, y_n$ στην κλίκα οι οποίες αποτελούν το σύνολο C_Y.
- Προσθέτουμε n κορυφές $x_1, \ldots, x_n$ στο ανεξάρτητο σύνολο οι οποίες αποτελούν το σύνολο I_X.
- Για κάθε $1 \leq i \leq n$, οι κορυφές y_i είναι γειτονικές με όλες τις κορυφές του $(C \cup C_Y \cup I \cup I_X) \setminus \{x_i\}$.
- Για κάθε $1 \leq i \leq n$, οι κορυφές x_i είναι γειτονικές με όλες τις κορυφές του $(C \cup C_Y) \setminus \{y_i\}$.

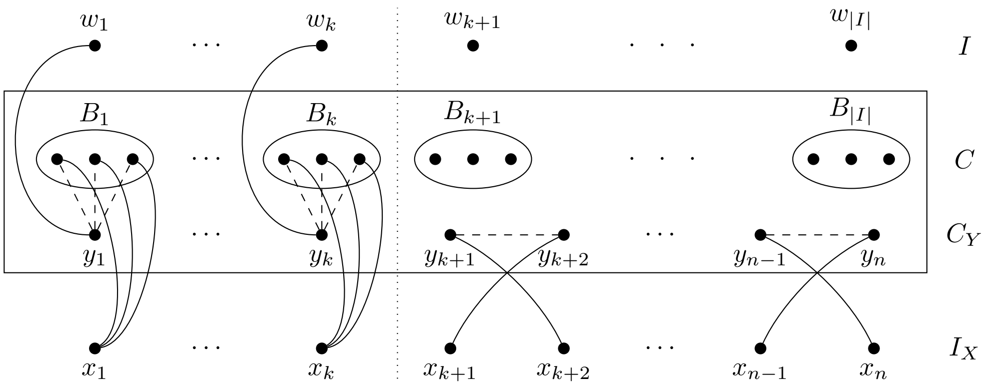
Έτσι οι κορυφές w_i χάνουν μόνο τις κορυφές του B_i από την κλίκα. Από την κατασκευή είναι ξεκάθαρο ότι το G' είναι ένα split γράφημα με split διαμέριση $(C \cup C_Y, I \cup I_X)$. Σημειώνουμε ότι η κλίκα $C \cup C_Y$ έχει $2n$ κορυφές $G = G'[I \cup C]$.

Ισχυριζόμαστε ότι το G έχει λύση για το MaxDisjointNN μεγέθους τουλάχιστον k αν και μόνο αν το G' έχει ισχυρή τριαδική κλειστότητα με τουλάχιστον $n(2n-1) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{k}{2} \rceil$ ισχυρές ακμές.

Υποθέτουμε ότι οι κορυφές $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq I$ είναι λύση για το MaxDisjointNN στο G μεγέθους τουλάχιστον k. Επειδή τα σύνολα $B_1, \ldots, B_k$ είναι ανά δύο ξένα, υπάρχουν k διακεκριμένες κορυφές $y_1, \ldots, y_k$ στο C_Y τέτοιες ώστε $k \leq n$. Θα δώσουμε μια ισχυρή-ασθενής επιγραφή για τις ακμές του G' η οποία ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα και έχει τουλάχιστον τον ισχυριζόμενο αριθμό ισχυρών ακμών. Για απλοποίηση, περιγράφουμε μόνο τις ισχυρές ακμές. Οι ακμές του G' οι οποίες δεν αναφέρονται είναι ασθενείς.

Επιγράφουμε τις προσπίπτουσες ακμές της κάθε κορυφής w_i, y_i, x_i και των τριών κορυφών του κάθε συνόλου B_i, για $1 \leq i \leq k$ ως εξής:

- Οι ακμές της μορφής $\{y_i, v\}$ επιγράφονται ισχυρές εάν η κορυφή $v \in (C \cup C_Y) \setminus B_i$ ή $v = w_i$.
- Οι ακμές που προσπίπτουν στις κορυφές x_i και στις τρείς κορυφές του B_i επιγράφονται ισχυρές.



Σχήμα 2.1: Το split γράφημα $(C \cup C_Y, I \cup I_X)$ που δίνεται στην πολυωνυμική αναγωγή. Κάθε κορυφή w_i χάνει τις κορυφές του B_i και βλέπει τις κορυφές του $(C \cup C_Y) - B_i$. Κάθε κορυφή x_i χάνει y_i και βλέπει τις κορυφές του $(C \cup C_Y) - \{y_i\}$. Τα σύνολα $B_1, \ldots, B_k$ είναι ανά δύο ξένα όπου για κάθε σύνολο B_j, $k < j \leq |I|$, υπάρχει ένα σύνολο B_i, $1 \leq i \leq k$, τέτοιο ώστε $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Οι κανονικές ακμές αντιστοιχούν στις ισχυρές ακμές ανάμεσα στο ανεξάρτητο σύνολο και της κλίκα, και οι διακεκομμένες ακμές είναι οι μόνες ασθενείς ακμές μέσα στην κλίκα $C \cup C_Y$.

Έπειτα επιγράφουμε τις ακμές που προσπίπτουν στις υπόλοιπες κορυφές. Έστω I_W είναι οι κορυφές του $I \setminus \{w_1, \ldots, w_k\}$ και έστω C_W είναι οι κορυφές του $C \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k)$. Καμία προσπίπτουσα ακμή σε κορυφή του I_W επιγράφεται ισχυρή. Για κάθε κορυφή $u \in C_W$ επιγράφουμε την ακμή $\{u, v\}$ ισχυρή αν $v \in (C \cup C_Y)$. Έστω $C'_Y = \{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ και έστω $I'_X = \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Ανακαλούμε ότι κάθε κορυφή x_{k+j} είναι γειτονική με κάθε κορυφή του $C'_Y \setminus \{y_{k+j}\}$. Έστω $\ell = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$. Ας είναι το $M = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$ ένα μεγιστοτικό σύνολο από μη-γειτονικές ανά δύο ακμές στο $G'[C'_Y]$ όπου $e_j = \{y_{k+2j-1}, y_{k+2j}\}$, για $j \in \{1, \ldots, \ell\}$· σημείωση ότι το M είναι ένα μεγιστοτικό ταίριασμα του $G'[C'_Y]$. Για κάθε κορυφή $y \in C'_Y$, επιγράφουμε την ακμή $\{y, v\}$ ισχυρή εάν η κορυφή $v \in (C \cup C_Y) \setminus \{y'\}$ τέτοια ώστε η ακμή $\{y, y'\} \in M$. Επιπλέον, για $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, οι ακμές $\{x_{k+2j-1}, y_{k+2j}\}$ και $\{x_{k+2j}, y_{k+2j-1}\}$ επιγράφονται ισχυρές. Σημειώνεται ότι αν $n - k$ είναι περιττός, τότε καμία ακμή που προσπίπτει στη μοναδική κορυφή y_n δεν ανήκει στο M και όλες οι ακμές ανάμεσα στην y_n και στις κορυφές του $C \cup C_Y$ επιγράφονται ισχυρές· σε αυτήν την περίπτωση και καμία προσπίπτουσα ακμή στο x_n δεν είναι ισχυρή.

Θα δείξουμε ότι μία τέτοια επιγραφή ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα. Κάθε επιγραφή στις ακμές μέσα στο $G'[C \cup C_Y]$ ικανοποιείται, επειδή

$G'[C \cup C_Y]$ είναι κλίκα. Επίσης, σημειώνουμε ότι δεν υπάρχουν δύο γειτονικές ισχυρές ακμές που να έχουν ένα κοινό άκρο στην κλίκα $C \cup C_Y$ και τα άλλα δύο άκρα στο ανεξάρτητο σύνολο $I \cup I_X$. Εάν υπάρχουν δύο ισχυρές προσπίπτουσες ακμές σε ίδια κορυφή v του ανεξάρτητου συνόλου, τότε η κορυφή $v \in \{x_1, \ldots, x_k\}$ και $N_S[v] = B_i$ είναι μία κλίκα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο γειτονικές ισχυρές ακμές $\{u, v\}$ και $\{v, z\}$, τέτοιες ώστε η κορυφή $u \in I \cup I_X$, και οι κορυφές $v, z \in C \cup C_Y$.

- Αν η κορυφή $u \in \{w_1, \ldots, w_k\}$, τότε η ακμή $\{u, z\} \in E(G')$ επειδή κάθε κορυφή w_i χάνει μόνο τις κορυφές του B_i.
- Αν η κορυφή $u \in \{x_1, \ldots, x_k\}$, τότε κορυφή $v \in B_i$ και η ακμή $\{u, z\} \in E(G')$, επειδή κάθε κορυφή x_i χάνει μόνο την κορυφή y_i.
- Αν η κορυφή $u \in I_X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$, τότε οι ισχυροί γείτονες της κορυφής v στη $C \cup C_Y$ είναι γείτονες της κορυφής u στο G', επειδή για το μόνο μη-γείτονα της κορυφής u στη $C \cup C_Y$ υπάρχει μία ασθενής προσπίπτουσα ακμή στη κορυφή v.

Υπενθυμίζουμε ότι δεν υπάρχουν ισχυρές ακμές που προσπίπτουν στις κορυφές του $I \setminus \{w_1, \ldots, w_k\}$. Άρα, η δοθείσα ισχυρή-ασθενής επιγραφή ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των κορυφών μέσα στην $C \cup C_Y$ είναι $2n$. Υπάρχουν ακριβώς $3k + \ell$ ασθενείς ακμές μέσα στην $G'[C \cup C_Y]$. Έτσι, ο αριθμός των ισχυρών ακμών μέσα στην $G'[C \cup C_Y]$ είναι $n(2n-1) - 3k - \ell$. Υπάρχουν k προσπίπτουσες ισχυρές ακμές στις κορυφές $\{w_1, \ldots, w_k\}$, $3k$ προσπίπτουσες ισχυρές ακμές στις κορυφές $\{x_1, \ldots, x_k\}$, και 2ℓ προσπίπτουσες ισχυρές ακμές στις κορυφές του $I_X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των ισχυρών ακμών είναι $n(2n-1) - 3k - \ell + k + 3k + 2\ell = n(2n-1) + \ell + k$ και μέσω αντικατάστασης $\ell = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ παίρνουμε το ζητούμενο φράγμα.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι G' έχει μία ισχυρή τριαδική κλειστότητα με τουλάχιστον $n(2n-1) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{k}{2} \rceil$ ισχυρές ακμές. Ας είναι E_S το σύνολο των ισχυρών ακμών σε μία τέτοια ισχυρή-ασθενή επιγραφή. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ακμών μέσα στην $G'[C \cup C_Y]$ είναι $n(2n-1)$ το οποίο συνεπάγει ότι το E_S περιέχει ακμές ανάμεσα στο ανεξάρτητο σύνολο $I \cup I_X$ και στην κλίκα $C \cup C_Y$. Αν δεν υπάρχει κορυφή του I_X να είναι προσκείμενη σε ακμή του E_S, τότε από τον πρώτο ισχυρισμό του Λήμματος 2.1 συνεπάγεται ότι $|E_S| = |E(C \cup C_Y)| = n(2n-1)$. Αν δεν υπάρχει κορυφή του I να είναι προσκείμενη σε ακμή του E_S, τότε ο δεύτερος ισχυρισμός του Λήμματος 2.1 δείχνει ότι το $|E_S| \leq |E(C \cup C_Y)| + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Επομένως, το E_S περιέχει ακμές οι οποίες είναι προσπίπτουσες σε μία κορυφή του I και ακμές οι οποίες είναι προσπίπτουσες σε μία κορυφή του I_X.

Στο γράφημα που παράγεται από το E_S συμβολίζουμε με S_W το σύνολο των κορυφών του I οι οποίες έχουν ισχυρούς γείτονες μέσα στην $C \cup C_Y$. Θα δείξουμε ότι οι μη-γειτονιές των κορυφών του S_W μέσα στην $C \cup C_Y$ είναι ξένες μέσα στο G' και, αφού το G είναι ένα επαγώμενο υπογράφημα του G', οι μη-γειτονιές τους είναι επίσης ξένες μέσα στο G.

Ισχυρισμός 2.2.1. *Για κάθε κορυφή $w_i \in S_W$, $N_S(w_i) \subseteq C_Y$ και υπάρχει μία μοναδική κορυφή $x \in I_X$ τέτοια ώστε $N_S(x) = B_i$.*

Απόδειξη: Έστω w_i μία κορυφή του S_W. Αρχικά, δείχνουμε ότι $N_S(w_i) \subseteq C_Y$. Έστω W_i οι ισχυροί γείτονες της κορυφής w_i στη C και έστω Y_i οι ισχυροί γείτονες της w_i στη C_Y. Παρατηρούμε ότι καμία αλλή κορυφή του S_W δεν έχει ένα ισχυρό γείνονα στο $W_i \cup Y_i$. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι υπάρχουν $(|W_i| + |Y_i|)|B_i|$ ασθενείς ακμές, αφού w_i είναι μη γειτονικές με τις κορυφές του B_i. Δείχνουμε ότι για κάθε κορυφή $w_i \in S_W$ ισχύει $W_i = \emptyset$. Για όλες τις κορυφές w_i για τις οποίες $W_i \neq \emptyset$ αντικαθιστούμε στο E_S τις ισχυρές ακμές ανάμεσα στα w_i και στις κορυφές των W_i με τις ακμές που σχηματίζονται από τις κορυφές ανάμεσα στα B_i και στα W_i. Σημειώνουμε ότι κάνοντας ισχυρές τις ακμές ανάμεσα στις κορυφές των B_i και W_i δεν παραβιάζεται η ισχυρή τριαδική κλειστότητα, αφού καμία κορυφή από το S_W δεν έχει ισχυρή γειτονιά στα B_i και κάθε κορυφή του I_X είναι γειτονική με όλες τις κορυφές των W_i. Έστω $E(W, B)$ το σύνολο των ακμών το οποίο έχει ένα άκρο στο W_i και το άλλο άκρο στο B_i, για κάθε $w_i \in S_W$. Σημειώνουμε ότι η διαφορά μεταξύ των δύο παραπάνω λύσεων είναι $|E(W, B)| - \sum |W_i|$. Από το Λήμμα 2.1 και ότι το $|B_i| = 3$, γνωρίζουμε ότι $|E(W, B)| \geq 3/2 \sum |W_i|$. Έτσι μία τέτοια αντικατάσταση είναι ασφαλής ως προς το πλήθος των ακμών του E_S και επιπλέον κάθε κορυφή $w_i \in S_W$ έχει ένα ισχυρό γείτονα μόνο στο C_Y.

Έστω X_i το σύνολο κορυφών του I_X που έχουν τουλάχιστον ένα μη-γείτονα στο Y_i. Από την κατασκευή κάθε κορυφή του Y_i είναι μη-γειτονική με μία ακριβώς κορυφή του I_X, και έτσι $|X_i| = |Y_i|$. Επειδή η w_i έχει ισχυρούς γείτονες στο Y_i, κάθε ακμή ανάμεσα στο X_i και Y_i είναι ασθενής. Από το προηγούμενο επιχείρημα κάθε κορυφή του S_W έχει ισχυρούς γείτονες μόνο στη C_Y, και έτσι $N_S(B_i) \cap I = \emptyset$. Επίσης, βλέπουμε ότι δύο κορυφές του ανεξάρτητου συνόλου δεν έχουν κοινό ισχυρό γείτονα μέσα στην κλίκα, το οποίο δηλώνει ότι υπάρχουν $|B_i|$ ισχυροί γείτονες ανάμεσα στις κορυφές του B_i και του I_X. Επιλέγουμε μία αυθαίρετη κορυφή $x \in X_i$. Αντικαθιστούμε όλες τις ισχυρές ακμές μέσα στο E_S ανάμεσα στο B_i και στο I_X με $|B_i|$ ισχυρές ακμές ανάμεσα στη κορυφή x και στις κορυφές τού B_i. Σημειώνεται ότι μια τέτοια αντικατάσταση είναι επιτρεπτή, επειδή ο μοναδικός μη-γείτονας της κορυφής x ανήκει στο Y_i και υπάρχουν ήδη ασθενείς ακμές στο E_S ανάμεσα στο B_i και στο Y_i εξαιτίας των ισχυρών ακμών ανάμεσα στη κορυφή w_i και στο Y_i. Επικεντρωνόμαστε στις ακμές μεταξύ των κορυφών της $(C \cup C_Y) \setminus (B_i \cup Y_i)$ και της κορυφής x. Εάν μία κορυφή x του X_i έχει ένα ισχυρό γείτονα u μέσα στη $(C \cup C_Y) \setminus B_i$ τότε η ακμή $\{u, y\}$ είναι ασθενής όπου η κορυφή $y \in Y_i$ είναι ο μοναδικός μη-γείτονας της κορυφής x. Σημειώνεται, επίσης, ότι $N_S(u) \cap (I \cup I_X) = \{x\}$, $N_S(y) \cap (I \cup I_X) = \{w_i\}$ και η κορυφή w_i είναι γειτονική με την κορυφή u. Τότε μπορούμε με ασφάλεια να αντικαταστήσουμε την ισχυρή ακμή $\{x, u\}$ με την ακμή $\{u, y\}$ και να διατηρήσουμε το μέγεθος του E_S ίδιο. Συνεπώς, $N_S(x) = B_i$. $\diamondsuit$

Ισχυρισμός 2.2.2. *Για κάθε κορυφή $w_i \in S_W$, $N_S(w_i) = \{y\}$ όπου η κορυφή $y \in C_Y$ είναι ο μη γείτονας της κορυφής x με $N_S(x) = B_i$.*

Απόδειξη: Έστω $Y_i = N_S(w_i)$. Από τον Ισχυρισμό 2.2.1 γνωρίζουμε ότι $Y_i \subseteq C_Y$ και υπάρχει κορυφή $x \in I_X$ τέτοια ώστε $N_S(x) = B_i$. Οι w_i και x είναι κορυφές του ανεξάρτητου συνόλου και, έτσι, καμία άλλη κορυφή του $I \cup I_X$ δεν έχει ισχυρούς γείτονες στο $B_i \cup Y_i$. Αυτό σημαίνει ότι αν αφαιρέσουμε την κορυφή w_i από το S_W, κάνοντας ασθενείς τις προσπίπτουσες ακμές στη w_i και τις κορυφες του Y_i, τότε οι ακμές μεταξύ των κορυφών του B_i και του $Y_i \setminus \{y\}$ με ασφάλεια μετατρέπονται σε ισχυρές. Ας είναι E'_S το σύνολο των ισχυρών ακμών σε μία βέλτιση λύση τέτοια ώστε όλες οι προσπίπτουσες ακμές στην κορυφή w_i να είναι ασθενείς. Τότε $|E_S| - |E'_S| = |Y_i| + |B_i| - |Y_i||B_i|$ και $|E_S| > |E'_S|$ μόνο αν $|Y_i| = 1$ επειδή $|B_i| > 1$. Επομένως, $N_S(w_i)$ περιέχει ακριβώς μία κορυφή $y \in C_Y$. $\diamondsuit$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε ζεύγος κορυφών $w_i, w_j \in S_W$, $B_i \cap B_j = \emptyset$. Υποθέτουμε για αντίφαση ότι $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Η εφαρμογή του Ισχυρισμού 2.2.1 για την κορυφή w_i δείχνει ότι υπάρχει κορυφή $x \in I_X$ η οποία έχει ισχυρούς γείτονες σε κάθε κορυφή του $B_i \cap B_j$. Με τον ίδιο ισχυρισμό για την κορυφή w_j συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κορυφή $x' \in I_X$, η οποία έχει ισχυρούς γείτονες με κάθε κορυφή του $B_i \cap B_j$. Άν η κορυφή $x \neq x'$ τότε μία κορυφή από το $B_i \cap B_j$ έχει δύο διακεκριμένους γείτονες στο I_X το οποίο δεν είναι εφικτό λόγω της ισχυρής τριαδικής κλειστότητας. Έτσι $x = x'$. Ο Ισχυρισμός 2.2.2 συνεπάγει ότι ο μοναδικός μη-γείτονας y της κορυφής x είναι ισχυρά γειτονικός και με την κορυφή w_i και με την κορυφή w_j. Όμως αυτό παραβιάζει την ισχυρή τριαδική κλειστότητα για τις ακμές του E_S, αφού οι κορυφές w_i, w_j είναι μη-γειτονικές και καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, $B_i \cap B_j = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των ακμών του E_S είναι τουλάχιστον $n(2n-1) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{|S_W|}{2} \rceil$ το οποίο μεγιστοποιείται για $k = |S_W|$. Επομένως, το E_S περιέχει τον μέγιστο αριθμό του $|S_W|$ το οποίο είναι μία λύση για το MaxDisjointNN στο G, αφού το G είναι ένα επαγώμενο υπογράφημα του G'. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Υπολογισμος του MaxSTC σε Trivially-perfect και Threshold Γραφηματα

Στις ενότητες του κεφαλαίου αυτού θα δώσουμε χαρακτηρισμό για το line-incompatibility γράφημα των trivially-perfect γραφημάτων και των threshold γραφημάτων. Υπενθυμίζουμε ότι για την κατασκευή του line-incompatibility αντιστοιχούμε κάθε ακμή του αρχικού γραφήματος σε ένα κόμβο και δύο κόμβοι ενώνονται αν και μόνο αν οι κορυφές των αντίστοιχων ακμών επάγουν ένα P_3 στο αρχικό γράφημα. Επίσης, η εύρεση ενός μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου του line-incompatibility γραφήματος αντιστοιχεί στην λύση του MaxSTC.

3.1 Χαρακτηρισμός του line-incompatibility Γραφήματος των Trivially-perfect Γραφημάτων

Ένα γράφημα G καλείται *trivially-perfect (quasi-threshold)* εάν για κάθε επαγόμενο υπογράφημα H του G, ο αριθμός των μεγιστοτικών κλικών του H είναι ίσος με το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του H. Τα trivially-perfect γραφήματα είναι ισοδύναμα με την κλάση των (P_4, C_4)-free γραφημάτων, δηλαδή κάθε trivially-perfect γράφημα δεν περιέχει P_4 ή C_4 ως επαγόμενο υπογράφημα [10]. Επιπλέον, ένα γράφημα G είναι cograph αν δεν περιέχει P_4 ως επαγόμενο υπογράφημα [6].

Θεώρημα 3.1. *Το line-incompatibility γράφημα ενός trivially-perfect γραφήματος G είναι cograph.*

Απόδειξη. Έστω G trivially-perfect γράφημα, το οποίο G είναι $(P_4, C_4) - free$.

Θα δείξουμε ότι το line-incompatibility γράφημα $\widehat{G}$ του G είναι ένα $P_4 - free$ γράφημα. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε P_3 στο $\widehat{G}$. Από την κατασκευή του $\widehat{G}$, το P_3 έχει μία από τις επόμενες μορφές: (i) v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 ή (ii) v_1x, v_2x, v_3x. Θα αποδείξουμε ότι το P_3 έχει την δεύτερη μορφή, επειδή το G δεν έχει επαγόμενο P_4 ή C_4. Αν ισχύει η (i) τότε οι ακμές $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E(G)$ και οι ακμές $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\} \in E(G)$ το οποίο συνεπάγει ότι η κορυφή $v_4 \neq v_1$. Επομένως, το G περιέχει ένα P_4 ή ένα C_4 το οποίο εξαρτάται αν υπάρχει η ακμή $\{v_1, v_4\}$ στο G. Άρα, κάθε P_3 στο $\widehat{G}$ έχει την μορφή v_1x, v_2x, v_3x, όπου v_1, v_2, v_3, x είναι διακεκριμένες κορυφές του G. Υποθέτουμε, τώρα, για αντίφαση ότι το $\widehat{G}$ περιέχει ένα P_4. Τότε το P_4 είναι της μορφής v_1x, v_2x, v_3x, v_4x, επειδή περιέχει δύο επαγόμενα P_3. Η δομή του P_4 συνεπάγει ότι οι ακμές $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\} \notin E(G)$ και οι ακμές $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_1\} \in E(G)$. Αυτό όμως δείχνει ότι οι κορυφές v_3, v_1, v_4, v_2 επάγουν ένα P_4 στο G το οποίο μας οδηγεί σε αντίφαση, αφού το G είναι ένα (P_4, C_4)-free γράφημα. Επομένως, το $\widehat{G}$ είναι ένα P_4-free γράφημα. □

Από το θεώρημα 3.1 και από το γεγονός ότι το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο ενός cograph γραφήματος υπολογίζεται σε γραμμικό χρόνο [6], και λαμβάνοντας υπόψη ότι η κατασκευή του line-incompatibility ενός γραφήματος χρειάζεται $O(nm)$, το MaxSTC λύνεται σε $O(nm)$.

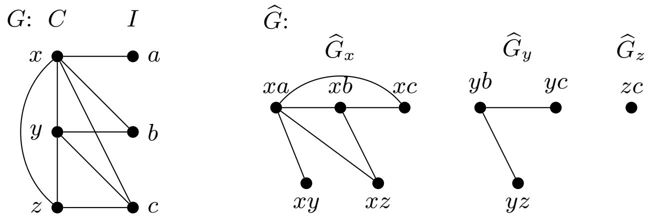
3.2 Χαρακτηρισμός του line-incompatibility Γραφήματος των Threshold Γραφημάτων

Ένα γράφημα G είναι threshold αν είναι split γράφημα, δηλαδή $G = (C, I)$ και το ανεξάρτητο σύνολο I έχει μία nested neighborhood ordering [24]. Επίσης, η τομή των split γραφημάτων και των cograph γραφημάτων ισοδυναμεί με τα threshold γραφήματα [4].

Λήμμα 3.1. *Το line-incompatibility $\widehat{G}$ ενός threshold γραφήματος G είναι ένωση από split γραφήματα.*

Απόδειξη. Έστω $G = (V, E)$ threshold γράφημα με $V = I \cup C$, με C κλίκα και I ανεξάρτητο σύνολο που έχει μία nested neighborhood ordering. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να χωρίσουμε τις κορυφές του $\widehat{G}$ σε split γραφήματα.

Αρχικά, για κάθε κορυφή $x \in C$, οι ακμές μεταξύ της κορυφής x και των κορυφών $N_I(x)$ σχηματίζουν ένα K_1, p, $p = |N_I(x)|$. Το line-incompatibility του K_1, p είναι μία κλίκα μεγέθους p, αφού έχουμε p ακμές και ανά δύο ακμές



Σχήμα 3.1: Αριστερά ένα threshold γράφημα και δεξιά το αντίστοιχό του $\widehat{G}$.

έχουμε P_3. Επομένως, για κάθε κορυφή x έχουμε και μία κλίκα $C_x \in \widehat{G}$. Οι κλίκες αυτές είναι ανεξάρτητες. Έστω ότι δεν είναι ανεξάρτητες, δηλαδή, υπάρχουν δύο κόμβοι $xa \in C_x$ και $yb \in C_y$ και υπάρχει η ακμή $\{xa, yb\} \in E(\widehat{G})$. Επειδή οι κορυφές $x, y \in C$ και $x \neq y$, για τις κορυφές $a, b \in I$ ισχύει ότι $a = b$. Τότε οι κορυφές a, x, y σχηματίζουν ένα K_3 στο G, άρα, οι αντίστοιχοι κόμβοι $xa, ya = yb, xy \in \widehat{G}$ είναι μη γειτονικοί. Άτοπο, επειδή υποθέσαμε ότι υπάρχει ακμή $\{xa, ya\} \in E(\widehat{G})$.

Για δύο οποιεσδήποτε ακμές $\{x, y\}, \{x, z\} \in C$, οι αντίστοιχοι κόμβοι $xy, xz \in \widehat{G}$ είναι μη γειτονικοί, αφού υπάρχει η ακμή $\{y, z\} \in C$. Επομένως, ένας κόμβος $xy \in \widehat{G}$ με $x, y \in C$ και $N(y) \subset N(x)$ είναι γειτονικός με τους κόμβους $xu \in C_x$ με $u \in N_I(x) \setminus N_I(y)$. Έστω ότι ο κόμβος $xy \in \widehat{G}$ ήταν γειτονικός και με ένα κόμβο $yv \in C_y$, τότε η κορυφή $v \notin N_I(x)$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση στην υπόθεση ότι $N(y) \subset N(x)$. Στην περίπτωση όπου $N(y) = N(x)$ ο κόμβος xy είναι απομονωμένος.

Από τα παραπάνω έχουμε ως αποτέλεσμα ότι η κάθε κλίκα C_x θα έχει μοναδικούς γείτονες τις μορφής $I_x = \{xy_i \mid N_I(y_i) \subset N_I(x),\ x, y_i \in C\}$, που σχηματίζουν ανεξάρτητο σύνολο. Άρα, κλίκα C_x και το ανεξάρτητο σύνολο I_x δίνουν ένα *split* γράφημα $\widehat{G}_x$ στο $\widehat{G}$. Έτσι, το $\widehat{G}$ είναι ένωση από *split* γραφήματα. $\square$

Θεώρημα 3.2. *Το line-incomparability ενός threshold γραφήματος G είναι ένωση από threshold γραφήματα.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.1 γνωρίζουμε ότι το line-incomparability ενός threshold γραφήματος είναι ένωση από split γραφήματα. Επίσης ισχύει ότι τα threshold είναι υποκλάση των trivially-perfect γραφημάτων και από το Θεώρημα 3.1 το line-incomparability ενός trivially perfect γραφήματος είναι cograph. Επομένως, το line-incomparability ενός threshold γραφήματος G είναι ένωση από threshold γραφήματα (Σχήμα 3.1). $\square$

Από το Θεώρημα 3.2, από το γεγονός ότι το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο ενός threshold γραφήματος υπολογίζεται σε γραμμικό χρόνο και η κατασκευή του line-incompatibility χρειάζεται $O(nm)$, το MaxSTC λύνεται σε $O(nm)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

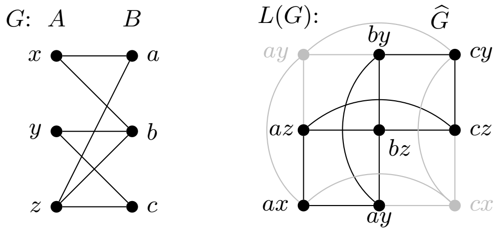
Υπολογισμος του MaxSTC σε Bipartite και co-Bipartite Γραφηματα

Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε, αρχικά, ότι το γραμμικό γράφημα είναι ισόμορφο του line-incompatibility σε διμερή γραφήματα και συσχετίζουμε το μέγιστο ταίριασμα με το MaxSTC σε αυτά τα γραφήματα. Μετά χαρακτηρίζουμε το line-incompatibility των συμπληρωμάτων τους με στόχο να βρούμε το ανεξάρτητο σύνολο.

Ορισμός 4.1. *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές bipartite αν μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο $V(G)$ σε δύο ξένα μη-κενά σύνολα, $V(G) = A \cup B$ και για καθε ακμή $\{x, y\} \in E(G)$ να ισχύει $x \in A$ και $y \in B$. Συμβολίζεται με μια τριάδα $G = (A, B, E)$.*

Από τον ορισμό έχουμε ότι οι κορυφές από ένα διμερές γράφημα μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Ισοδύναμο του ορισμού είναι ότι ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

Αναφέραμε στην αρχή ότι το line-incompatibility είναι υπογράφημα του γραμμικού γραφήματος. Για τα διμερή γραφήματα το line-incompatibility είναι ισόμορφο του γραμμικού γραφήματος, $\widehat{G} \equiv L(G)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε δύο ακμές του αρχικού γραφήματος με κοινό άκρο, οι αντίστοιχες κορυφές επάγουν ένα P_3 στο γράφημα. Επομένως, κάθε δύο κόμβοι στο $\widehat{G}$ και στο $L(G)$ που έχουν κοινή κορυφή ενώνονται. Το γραμμικό γράφημα από ένα διμερές γράφημα έχει δειχθεί ότι είναι επαγόμενο υπογράφημα από ένα greedline γράφημα [28]. Ένα greedline γράφημα είναι ένα πλέγμα όπου κάθε γραμμή και κάθε στήλη έχει γίνει κλίκα. Επειδή $\widehat{G} \equiv L(G)$, το $\widehat{G}$ είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα από ένα greedline γράφημα (Σχήμα 4.1). Τέλος ένα ανεξάρτητο σύνολο στα greedline



Σχήμα 4.1: Αριστερά ένα διμερές γράφημα G και δεξιά το greedline που έχει ως επαγόμενο υπογράφημα το $\widehat{G}$.

γραφήματα βρίσκεται πολυωνυμικά, άρα και το MaxSTC λύνεται πολυωνυμικά σε διμερή γραφήματα.

4.1 Μέγιστο Ταίριασμα και MaxSTC σε Bipartite Γραφήματα

Αν και με την παραπάνω παρατήρηση έχουμε μία λύση για το MaxSTC σε διμερή γραφήματα δείχνουμε ότι ένα μέγιστο ταίριασμα είναι λύση για το MaxSTC σε αυτά. Ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο ότι ένα ταίριασμα είναι ένα σύνολο ακμών του γραφήματος, όπου οι ακμές του συνόλου αυτού δεν έχουν κοινό άκρο. Επομένως, μπορούμε να δώσουμε το παρακάτω λήμμα για την ισοδυναμία των δύο προβλημάτων.

Λήμμα 4.1. *Σε ένα διμερές γράφημα G ένα ταίριασμα M είναι μέγιστο αν και μόνο αν το M είναι λύση για το* MaxSTC.

Απόδειξη. Έστω $G = (A, B, E)$ ένα διμερές γράφημα και έστω M ένα ταίριασμά του. Αρχικά, στο ταίριασμα M του γραφήματος G ισχύει ότι για κάθε κορυφή $a \in A$ υπάρχει το πολύ μία κορυφή $b \in B$ τέτοια ώστε η ακμή $\{a, b\} \in M$. Συμμετρικά ισχύει και για κάθε κορυφή $b \in B$. Στο μέγιστο ταίριασμα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τις ακμές αυτές. Επίσης, γνωρίζουμε ότι σε ένα διμερές γράφημα δεν υπάρχουν περιττοί κύκλοι, επομένως, ούτε K_3 και από την Παρατήρηση 1.1 για κάθε $P_3 \in STC$ οι κορυφές του θα έπρεπε να επάγουν ένα K_3 στο G. Έτσι, στο STC του γραφήματος G μπορούμε να έχουμε το πολύ μία ισχυρή ακμή που είναι προσπίπτουσα σε μία κορυφή $a \in A$, αντίστοιχα σε μία κορυφή $b \in B$, και στο MaxSTC θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το πλήθος των ακμών του STC. Συνεπώς, και στα δύο προβλήματα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ίδια ακριβώς ιδιότητα στις ακμές του G. Επομένως, ένα μέγιστο ταίριασμα M είναι λύση για το γράφημα G αν και μόνο αν είναι λύση για το MaxSTC στο G. □

Λήμμα 4.2 ([26]). *Το μέγιστο ταίριασμα σε διμερή γραφήματα λύνεται σε* $O(n^{2.38})$.

Συνεπώς, από το Λήμμα 4.1 και από το Λήμμα 4.2 έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

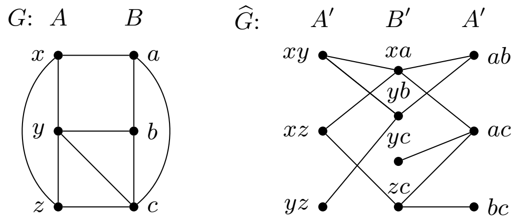
Θεώρημα 4.1. *Το* MaxSTC *σε διμερή γραφήματα λύνεται σε* $O(n^{2.38})$.

4.2 Χαρακτηρισμός του line-incompatibility Γραφήματος των co-Bipartite Γραφημάτων

Από τον ορισμό του διμερούς γραφήματος έχουμε ότι το συμπλήρωμα αυτού αποτελείται από δύο κλίκες, οι οποίες έχουν ακμές μεταξύ τους. Βάση αυτού του ορισμού χαρακτηρίζουμε, στο θεώρημα που ακολουθεί, το line-incompatibility γράφημά τους.

Θεώρημα 4.2. *Έστω G το συμπλήρωμα ένος διμερούς γραφήματος (co-bipartite). Το line-incompatibility $\widehat{G}$ του G είναι διμερές γράφημα.*

Απόδειξη. Έστω $G = (A, B, E)$ το συμπλήρωμα από ένα διμερές γράφημα και έστω $C \subseteq E(G)$ το σύνολο των ακμών μεταξύ των κορυφών των A, B. Θα δείξουμε ότι οι κορυφές του $\widehat{G}$ μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ξένα σύνολα $A', B' \subset V(\widehat{G})$ και οι ακμές του $\widehat{G}$ είναι μεταξύ των δύο αυτών συνόλων, επομένως το γράφημα που προκύπτει είναι διμερές. Αρχικά, το γράφημα $G \setminus C$ είναι δύο ανεξάρτητες κλίκες, των οποίων οι ακμές στο $\widehat{G}$ δίνουν μη γειτονικούς κόμβους. Έστω $A' \subset V(\widehat{G})$ το σύνολο αυτών των κόμβων. Ισχυριζόμαστε ότι οι κόμβοι $\widehat{G}$, που αντιστοιχούν στις ακμές του C, είναι μη γειτονικοί μεταξύ τους. Αρχικά, γνωρίζουμε ότι αν δύο ακμές που δεν έχουν κοινό άκρο στο G, οι αντίστοιχοι κόμβοι είναι μη γειτονικοί στο $\widehat{G}$. Επιπλέον, για δύο ακμές $\{x, y\}, \{x, z\} \in C$ υπάρχει η ακμή $\{y, z\}$, έτσι οι αντίστοιχοι κόμβοι $xy, xz \in V(\widehat{G})$ είναι μη γειτονικοί. Συνεπώς, κι ακμές του C δίνουν ένα σύνολο από μη γειτονικούς κόμβους στο $\widehat{G}$ και έστω $B' \subset V(\widehat{G})$ το σύνολο αυτό. Άρα, οι μόνες ακμές στο $\widehat{G}$ μπορεί να είναι μεταξύ των κόμβων του A' και B'. Ένας κόμβος $xy \in A'$ είναι γειτονικός με ένα κόμβο $xz \in B'$ (αντίστ. $yw \in B'$) αν και μόνο αν η κορυφή z είναι μη γειτονική της κορυφής y (αντίστ. η κορυφή w είναι μη γειτονική της



Σχήμα 4.2: Αριστερά ένα co-bipartite γράφημα και δεξιά το αντίστοιχό του $\widehat{G}$.

κορυφής x). Επομένως, το $V(\widehat{G})$ μπορεί να διαμεριστεί στα ανεξάρτητα σύνολα A', B' και για κάθε ακμή $\{xy, xz\} \in E'(\widehat{G})$ ισχύει $xy \in A'$ και $xz \in B'$. Τελικά, το $\widehat{G} = (A', B', E')$ (ένα παράδειγμα Σχήμα 4.2). $\square$

Υπενθυμίζουμε ότι αν βρούμε ένα ελάχιστο κάλυμα κορυφών γνωρίζουμε και το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο. Από το θεώρημα του König [19] σε διμερή γραφήματα έχουμε ότι το πλήθος των ακμών ενός μέγιστου ταιριάσματος είναι ίσο με το πλήθος των κορυφών ενός ελάχιστου καλύματος κορυφών. Επομένως, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1. *Το* MaxSTC *σε συμπλήρωμα διμερούς γραφήματος λύνεται σε* $O(m^{2.38})$ *χρόνο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι το $\widehat{G}$ είναι διμερές γράφημα και η κατασκευή του χρειάζεται $O(n \cdot m)$. Επιπλέον, επειδή το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο σε διμερή γραφήματα λύνεται σε $O(n^{2.38})$ χρόνο, τελικά έχουμε $O(m^{2.38})$ όπου m το πλήθος των κόμβων. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Υπολογισμος του MaxSTC σε Proper Interval Γραφηματα

Στο παρόν κεφάλαιο δείχνουμε ότι το MaxSTC λύνεται πολυωνυμικά σε proper interval γραφήματα. Για την λύση του χρησιμοποιούμε μία διάταξη των κορυφών του γραφήματος, με την οποία χαρακτηρίζουμε τις λύσεις του προβλήματος. Με βάση αυτές τις λύσεις δίνεται ένας αναδρομικός τύπος για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Ορισμός 5.1. *Ένα γράφημα είναι* proper interval *γράφημα αν υπάρχει μία αντιστοιχία ένα προς ένα ανάμεσα στις κορυφές και σε μία οικογένεια κλειστών διαστημάτων τής πραγματικής ευθείας τέτοια ώστε δύο κορυφές να είναι γειτονικές αν και μόνο αν τα αντίστοιχα διαστήματα επικαλύπτονται και κανένα διάστημα δεν περιέχεται πλήρως σε κάποιο άλλο.*

Μία διάταξη (ordering) κορυφών σ είναι μία γραμμική τοποθέτηση $\sigma = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ των κορυφών του G. Για ένα ζεύγος κορυφών x, y συμβολίζουμε με $x \preceq y$ αν $x = v_i$ και $y = v_j$ για κάποιους δείκτες $i \leq j$· αν $x \neq y$, δηλαδή $i < j$, τότε συμβολίζεται με $x \prec y$. Η πρώτη θέση στην σ αναφέρεται ως το *αριστερό άκρο (left end)* του σ, και η τελευταία θέση ως το *δεξί άκρο (right end)*. Επίσης, χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις *η πιο αριστερή (leftmost)* θέση, και *η πιο δεξιά (rightmost)* θέση με τον προφανή τρόπο ως προς το αριστερό και το δεξί άκρο της διάταξης.

Μία διάταξη κορυφών σ για το G καλείται *proper interval διάταξη* αν για κάθε τριάδα κορυφών x, y, z του G με $x \prec y \prec z$, η ακμή $\{x, z\} \in E(G)$ συνεπάγει ότι οι ακμές $\{x, y\}, \{y, z\} \in E(G)$. Τα proper interval γραφήματα χαρακτηρίζονται ως τα γραφήματα τα οποία έχουν τέτοιες διατάξεις, δηλαδή, ένα γράφημα είναι proper interval αν και μόνο αν έχει μία proper interval διάταξη [23]. Για τον χαρακτηρισμό των proper interval γραφημάτων θα θεωρήσουμε μόνο αυτήν την διάταξη των κορυφών. Επιπλέον, μπορεί να αποφανθεί σε γραμμικό χρόνο πότε ένα δοθέν γράφημα είναι proper interval, και αν είναι, μπορεί να δημιουργηθεί μία proper interval διάταξη σε γραμμικό χρόνο [23]. Είναι προφανές ότι μία διάταξη κορυφών σ για το γράφημα G είναι μία proper interval διάταξη αν και μόνο αν η αντίστροφη της σ είναι μία proper interval διάταξη. Ένα συνεκτικό proper interval γράφημα χωρίς δίδυμες κορυφές έχει μία μοναδική proper interval διάταξη σ και την αντίστροφή της. [7, 14].

5.1 Ομαδοποίηση Δίδυμων Κορυφών

Για την εύρεση μίας βέλτιστης λύσης δείχνουμε ότι η ομαδοποίηση των δίδυμων κορυφών δεν επηρεάζει την βέλτιστη λύση. Υπενθυμίζουμε ότι δύο κορυφές είναι δίδυμες αν είναι γειτονικές και έχουν την ίδια γειτονιά.

Λήμμα 5.1. *Έστω x και y δύο δίδυμες κορυφές του γραφήματος G. Τότε υπάρχει μία βέλτιστη λύση $I_{\widehat{G}}$ τέτοια ώστε ο κόμβος $xy \in I_{\widehat{G}}$ και για κάθε κορυφή $u \in N(x)$, ο κόμβος $xu \in I_{\widehat{G}}$ αν και μόνο αν ο κόμβος $yu \in I_{\widehat{G}}$.*

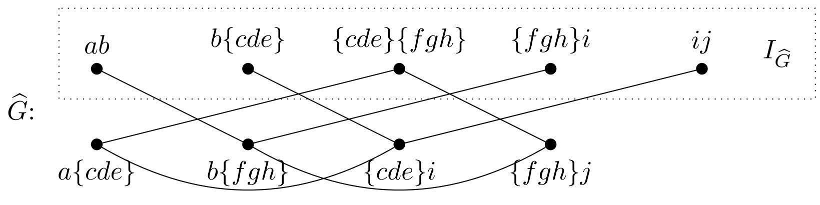
Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι ο κόμβος xy είναι ένας απομονωμένος στο $I_{\widehat{G}}$. Αν ο κόμβος xy είναι γειτονικός στον κόμβο xu τότε η κορυφή y είναι μη-γειτονική στη κορυφή u στο G το οποίο αντιβαίνει στο γεγονός ότι οι x και y είναι δίδυμες κορυφές. Έτσι ο κόμβος xy είναι ένας απομονωμένος στο $\widehat{G}$, επομένως ο κόμβος $xy \in I_{\widehat{G}}$. Για το δεύτερο ισχυρισμό είναι εμφανές ότι για κάθε κορυφή $u \in N(x)$, οι κόμβοι xu και yu είναι μη-γειτονικοί στο $I_{\widehat{G}}$.

Έστω η κορυφή $u \in N(x)$. Τότε ισχύει και η κορυφή $u \in N(y)$. Το οποίο σημαίνει ότι αν ο κόμβος $xu \in I_{\widehat{G}}$ (αντίστ., $yu \in I_{\widehat{G}}$) τότε ο κόμβος yu (αντίστ., xu) είναι ένα κόμβος του $\widehat{G}$. Ορίζουμε τα επόμενα σύνολα με κόμβους του $\widehat{G}$:

- Έστω A_x είναι το σύνολο από κόμβους xa τέτοιο ώστε οι κόμβοι $xa \in I_{\widehat{G}}$ και οι κόμβοι $ya \notin I_{\widehat{G}}$ και έστω A_y το σύνολο από κόμβους ya τέτοιο ώστε οι κόμβοι $xa \in A_x$.
- Έστω B_y είναι το σύνολο από κόμβους yb τέτοιο ώστε οι κόμβοι $yb \in I_{\widehat{G}}$ και οι κόμβοι $xb \notin I_{\widehat{G}}$ και έστω B_x είναι το σύνολο από κόμβους xb τέτοιο ώστε οι κόμβοι $yb \in B_y$.

Είναι εμφανές ότι τα σύνολα $A_x \subseteq I_{\widehat{G}}$, $B_y \subseteq I_{\widehat{G}}$, και $A_x \cap B_y = \emptyset$. Επίσης, ισχύει ότι το $|A_x| = |A_y|$ και το $|B_y| = |B_x|$, επειδή $N[x] = N[y]$.

Έστω $I_{xy} = I_{\widehat{G}} \setminus (A_x \cup B_y)$ έτσι ώστε $I_{\widehat{G}} = A_x \cup B_y \cup I_{xy}$.



Σχήμα 5.1: Το line-incompatibility γράφημα $\widehat{G}$ του proper interval γραφήματος G που δίνεται στο Σχήμα 5.2. Το σύνολο $I_{\widehat{G}}$ είναι το μέγιστο ένβαρο ανεξάρτητο σύνολο του $\widehat{G}$, λαμβάνοντας υπόψη το βάρος για κάθε κορυφή που αντιστοιχεί στον αριθμό των δίδυμων κορυφών (βλέπετε Λήμμα 5.1).

Θα δείξουμε ότι κάθε κόμβος του A_y είναι μη γειτονικός με όλους τους κόμβους του $I_{\widehat{G}} \setminus B_y$. Έστω ya ένας κόμβος του A_y. Αν υπάρχει ένας κόμβος $az \in I_{\widehat{G}} \setminus B_y$ ο οποίος είναι γειτονικός του ya τότε οι κορυφές z και y είναι μη γειτονικές στο G το οποίο συνεπάγει ότι οι κορυφές z και x είναι μη γειτονικές στο G. Αυτό όμως οδηγεί σε αντίφαση επειδή οι κόμβοι $xa, az \in I_{\widehat{G}}$ και ο κόμβος xa είναι γειτονικός με τον κόμβο az στο $\widehat{G}$. Αν υπάρχει ένας κόμβος $yb \in I_{\widehat{G}}$ ο οποίος είναι γειτονικός του ya τότε η κορυφή a είναι μη γειτονική με την κορυφή b στο G και ο κόμβος $yb \in B_y$ επειδή ο κόμβος xa είναι ,επίσης, γειτονικός με τον κόμβο xb στο $\widehat{G}$ έτσι ώστε ο κόμβος $xb \notin I_{\widehat{G}}$. Συνεπώς, κάθε κόμβος του A_y είναι μη γειτονικός με όλους τους κόμβους του $I_{\widehat{G}} \setminus B_y$ και με ακριβώς συμμετρικά ισχυρισμούς, κάθε κόμβος του B_x είναι μη γειτονικός με κάθε κόμβο του $I_{\widehat{G}} \setminus A_x$. Έτσι και τα δύο σύνολα $I_1 = A_x \cup A_y \cup I_{xy}$ και $I_2 = B_x \cup B_y \cup I_{xy}$ σχηματίζουν ανεξάρτητο συνολο στο $\widehat{G}$. Λόγω ότι το $|A_x| = |A_y|$ και το $|B_y| = |B_x|$ έχουμε $|I_1| \geq |I_{xy}|$ όταν το $|A_x| \geq |B_y|$ και $|I_2| \geq |I_{xy}|$ όταν το $|A_x| < |B_y|$. Επομένως, μπορούμε με ασφάλεια να αντικαταστήσουμε ένα από τα σύνολα A_x ή B_y με τα σύνολα B_x ή A_y και να έχουμε τις λύσεις I_2 ή I_1, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι και στις δύο λύσεις I_1 και I_2 έχουμε τον κόμβο $xu \in I_i$ αν και μόνο αν ο κόμβος $yu \in I_i$, για $i \in \{1, 2\}$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

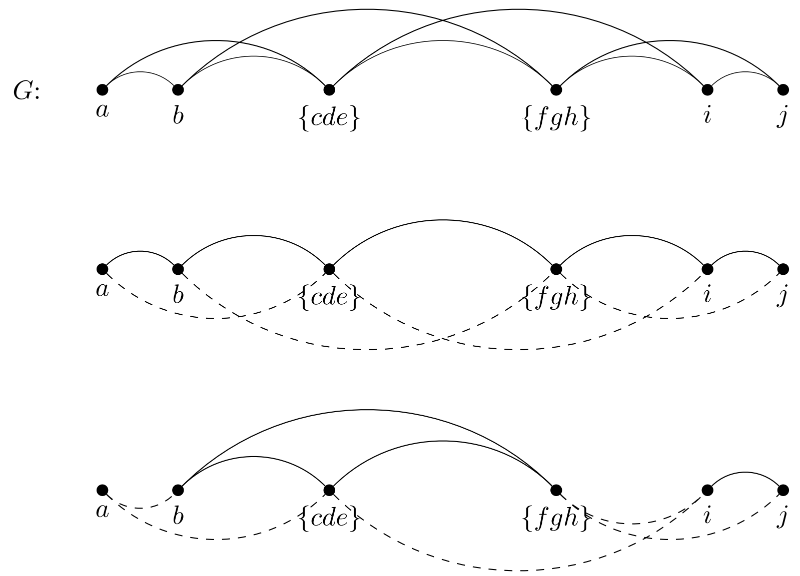
Με χρήση του Λήμματος 5.1 μπορούμε να θεωρήσουμε ένα γράφημα G, το οποίο δεν έχει δίδυμες κορυφές, ως εξής: Διαμερίζουμε το $V(G)$ σε σύνολα από δίδυμες κορυφές. Μία κορυφή που δεν έχει δίδυμη εμφανίζεται στο σύνολο της μόνης της. Για κάθε δίδυμο σύνολο W_x επιλέγουμε μία αυθαίρετη κορυφή x και αφαιρούμε όλες τις δίδυμες κορυφές της, εκτός από την κορυφή x, από το G. Έστω G' το γράφημα μετά από τις αφαιρέσεις των δίδυμων κορυφών, το οποίο δεν έχει δίδυμες κορυφές. Για κάθε ακμή $\{x, y\}$ του G' αναθέτουμε ένα βάρος ίσο με το γινόμενο $|W_x| \cdot |W_y|$. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στο πλήθος των ακμών του αρχικού γραφήματος G που σχηματίζονται ανάμεσα στις κορυφές του W_x και του W_y. Το line-incompatibility γράφημα $\widehat{G'}$ του G' κατασκευάζεται όπως αναφέρθηκε παραπάνω με την μόνη διαφορά ότι ένας κόμβος του $\widehat{G'}$ έχει βάρος ίσο με το βάρος τής αντίστοιχης ακμής στο G'. Έστω $I_{\widehat{G'}}$ είναι ένα *μέγιστο ένβαρο ανεξάρτητο σύνολο*, το οποίο είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του $\widehat{G'}$ τέτοιο ώστε το άθροισμα των βαρών των κόμβων του να μεγιστοποιείται. Τότε από το Λήμμα 5.1 έχουμε το $I_{\widehat{G}} = I_{\widehat{G'}} \cup S(W)$, όπου $S(W)$ περιέχει $|W_x|(|W_x|-1)/2$ κόμβους για κάθε δίδυμο σύνολο W_x. Συνεπώς, ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το μέγιστο ένβαρο ανεξάρτητο σύνολο του $\widehat{G'}$. Επίσης, το G' είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα του αρχικού γραφήματος του G. Έτσι για να απλοποιηθεί ο συμβολίσμος αναφερόμαστε στο $\widehat{G'}$ ως $\widehat{G}$ υποθέτοντας ότι το G δεν έχει δίδυμες κορυφές και κάθε κορυφή του G έχει ένα θετικό βάρος. Στο Σχήμα 5.1 φαίνεται το line-incompatibility γράφημα ενός proper interval γραφήματος καθώς έχουν ομαδοποιηθεί οι δίδυμες κορυφές.

Πριν δώσουμε τον αλγόριθμο για τα proper interval γραφήματα, ας δώσουμε τη διαφορά ανάμεσα από μία βέλτιστη λύση του MaxSTC και από μία βέλτιστη λύση του Cluster Deletion. Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει μία λύση του Cluster Deletion ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα, όμως το αντίθετο δεν ισχύει πάντα. Μία τέτοια περίπτωση είναι το παράδειγμα για τα proper interval γραφήματα, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Και για το Cluster Deletion πρόβλημα οι δίδυμες κορυφές μπορούν να ομαδοποιηθούν με παραπλήσιο τρόπο όπως το Λήμμα 5.1, όπως αποδείκνύεται στο [3]. Επομένως, στα proper interval γραφήματα μία βέλτιστη λύση για το Cluster Deletion δεν συνεπάγει αναγκαστικά μία βέλτιστη λύση για το MaxSTC.

5.2 Χαρακτηρισμός μιας Βέλτιστης Λύσης σε Proper Interval Γραφήματα

Έστω G ένα proper interval γράφημα και έστω σ μία proper interval διάταξη για το G. Λέμε ότι μία λύση $I_{\widehat{G}}$ έχει την *διαδοχική ισχυρή διάταξη (consecutive strong ordering)* ως προς τη σ αν ισχύει το επόμενο, για κάθε τρεις κορυφές x, y, z του G με $x \prec y \prec z$: ο κόμβος $xz \in I_{\widehat{G}}$ συνεπάγει ότι οι κόμβοι $xy, yz \in I_{\widehat{G}}$. Επομένως, θέλουμε να δείξουμε ότι μια τέτοια βέλτιστη λύση υπάρχει. Αρχίζουμε χαρακτηρίζοντας την βέλτιστη λύση $I_{\widehat{G}}$ ως προς τη proper interval διάταξη σ.

Λήμμα 5.2. *Έστω x, y, z τρεις κορυφές ενός proper interval γράφηματος G τέτοιες ώστε $x \prec y \prec z$. Αν ο κόμβος $xz \in I_{\widehat{G}}$ τότε ο κόμβος $xy \in I_{\widehat{G}}$ ή ο κόμβος $yz \in I_{\widehat{G}}$.*



Σχήμα 5.2: Ένα proper interval γράφημα G και η proper interval διάταξή του. Οι κορυφές $\{c, d, e\}$ και οι $\{f, g, h\}$ σχηματίζουν δίδυμα σύνολα στο G. Οι δύο κάτω διατάξεις δείχνουν δύο λύσεις για το MaxSTC στο G. Μία συνεχόμενη ακμή αντιστοιχεί σε ισχυρή ακμή, ενώ μία διακεκομένη αντιστοιχεί σε ασθενή ακμή. Παρατηρείται ότι η πάνω λύση περιέχει περισσότερες ακμές από την κάτω. Επίσης, η κάτω λύση σχηματίζει μία βέλτιστη λύση για το Cluster Deletion στο G.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι τουλάχιστον ένας από τους κόμβους xy ή yz ανήκει στο $I_{\widehat{G}}$. Θεωρούμε τον κόμβο xy στο $\widehat{G}$. Άν ο κόμβος xy είναι γειτονικός με ένα κόμβο $xx_\ell \in I_{\widehat{G}}$, τότε η ακμή $\{x_\ell, y\} \notin E(G)$. Τότε παρατηρούμε ότι η κορυφή $x_\ell \prec y$, επειδή η κορυφή $x \prec y$ και η ακμή $\{x_\ell, y\} \notin E(G)$. Αφού ο κόμβος xx_ℓ και ο κόμβος xz ανήκουν στο $I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{x_\ell, z\} \in E(G)$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την proper interval διάταξη, επειδή η κορυφή $x_\ell \prec y \prec z$, η ακμή $\{x_\ell, z\} \in E(G)$ και η κορυφή y είναι μη γειτονική της κορυφής x_ℓ. Επομένως ο κόμβος xy είναι μη γειτονικός με οποιοδήποτε κόμβο $xx_\ell \in I_{\widehat{G}}$ και, με ανάλογο τρόπο, ο κόμβος yz είναι μη γειτονικός με οποιοδήποτε κόμβο $zz_r \in I_{\widehat{G}}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο κόμβος xy είναι γειτονικός με ένα κόμβο $yy_r \in I_{\widehat{G}}$ και ο κόμβος yz είναι γειτονικός με ένα κόμβο $y_\ell y \in I_{\widehat{G}}$. Αυτό σημαίνει ότι η ακμή $\{x, y_r\} \notin E(G)$ και η ακμή $\{z, y_\ell\} \notin E(G)$. Έτσι η ακμή $\{x, z\} \in E(G)$, και λόγω της proper interval διάταξης έχουμε $y_\ell \prec x \prec y \prec z \prec y_r$. Τότε έχουμε την ακμή $\{y_\ell, y_r\} \in E(G)$, επειδή και οι δύο κόμβοι $yy_r, yy_\ell \in I_{\widehat{G}}$. Από την proper interval διάταξη γνωρίζουμε ότι και οι δύο κορυφές x και z είναι γειτονικές με τις y_ℓ, y_r, το οποίο μας οδηγεί σε αντίφαση στην υπόθεση ότι η ακμή $\{x, y_r\} \notin E(G)$ και η ακμή $\{z, y_\ell\} \notin E(G)$. Επομένως, τουλάχιστον ένας από τους κόμβους xy ή yz ανήκει στο $I_{\widehat{G}}$. □

Έτσι από το Λήμμα 5.2 έχουμε δυο συμμετρικές περιπτώσεις να μελετήσουμε. Ο επόμενος χαρακτηρισμός δείχνει ότι υπάρχει μία τέταρτη κορυφή με σημαντικές ιδιότητες σε κάθε αντίστοιχη περίπτωση.

Λήμμα 5.3. *Έστω x, y, z τρεις κορυφές ενός proper interval γραφήματος G τέτοιες ώστε $x \prec y \prec z$ και ο κόμβος $xz \in I_{\widehat{G}}$.*

- *Αν οι κόμβοι $xy \notin I_{\widehat{G}}$ και $yz \in I_{\widehat{G}}$, τότε ο κόμβος xy είναι μη-γειτονικός με όλους τους κόμβους $x_\ell x \in I_{\widehat{G}}$ και υπάρχει κορυφή w, τέτοια ώστε ο κόμβος $yw \in I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{x, w\} \notin E(G)$, και $z \prec w$.*
- *Αν οι κόμβοι $xy \in I_{\widehat{G}}$ και $yz \notin I_{\widehat{G}}$, τότε ο κόμβος yz μη-γειτονικός με όλους τους κόμβους $zz_r \in I_{\widehat{G}}$ και υπάρχει κορυφή w, τέτοια ώστε ο κόμβος $wy \in I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{w, z\} \notin E(G)$ και $w \prec x$.*

Απόδειξη. Έστω οι κόμβοι $xy \notin I_{\widehat{G}}$ και $yz \in I_{\widehat{G}}$. Η περίπτωση για τους κόμβους $xy \in I_{\widehat{G}}$ και $yz \notin I_{\widehat{G}}$ είναι συμμετρική. Γα την περίπτωσή μας υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή, δεν υπάρχει κορυφή w τέτοια ώστε ο κόμβος $yw \in I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{x, w\} \notin E(G)$ και $z \prec w$. Αποδεικνύουμε ότι ο κόμβος xy είναι μη γειτονικός με όλους τους κόμβους του $I_{\widehat{G}}$, αντιβαίνοντας την υπόθεση ότι η λύση του $I_{\widehat{G}}$ είναι βέλτιση. Αρχικά, υποθέτουμε ότι ο κόμβος xy είναι γειτονικός με ένα κόμβο $x_\ell x \in I_{\widehat{G}}$. Τότε η κορυφή y είμαι μη-γειτονική με την x_ℓ στο G. Σημειώνουμε ότι η κορυφή $x_\ell \prec x$, επειδή η κορυφή y είναι γειτονική τής κορυφής x και $x \prec y$. Από το γεγονός ότι ο κόμβος $yz \in I_{\widehat{G}}$, έχουμε ότι ο κόμβος $x_\ell x$ και ο κόμβος xz είναι μη γειτονικοί στο $\widehat{G}$, το οποίο συνεπάγει ότι η ακμή $\{x_\ell, z\} \in E(G)$. Καθώς, η κορυφή $x_\ell \prec x \prec y \prec z$ και η ακμή $\{x_\ell, z\} \in E(G)$, από την proper interval διάταξη έχουμε ότι η ακμή $\{x_\ell, y\} \in E(G)$, το οποίο μας οδηγεί σε αντίφαση. Επομένως ο κόμβος xy είναι μη γειτονικός με όλους τους κόμβους $x_\ell x \in I_{\widehat{G}}$.

Έπειτα υποθέτουμε ότι ο κόμβος xy είναι γειτονικός με ένα κόμβο $yy_r \in I_{\widehat{G}}$. Τότε η ακμή $\{x, y_r\} \notin E(G)$. Από την υπόθεση ότι δεν υπάρχει κορυφή w με τον κόμβο $yw \in I_{\widehat{G}}$, $\{x, w\} \notin E(G)$, και $z \prec w$, έχουμε η κορυφή $y_r \prec z$. Αυτό σημαίνει ότι, είτε η κορυφή $y_r \prec x$, είτε η κορυφή $x \prec y_r \prec z$. Ωστόσο και στις δύο περιπτώσεις οδηγούμαστε σε αντίφαση, δηλαδή, ότι η ακμή $\{x, y_r\} \notin E(G)$, επειδή, στην πρώτη περίπτωση έχουμε την ακμή $\{y_r, y\} \in E(G)$ και $y_r \prec x \prec y$, και στην δεύτερη γνωρίζουμε ότι η ακμή $\{x, z\} \in E(G)$. Συνεπώς, ο κόμβος xy δεν έχει γείτονα στο $I_{\widehat{G}}$ φτάνοντας σε αντίφαση της βέλτιστης λύσης του $I_{\widehat{G}}$. $\square$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε ότι υπάρχει βέλτιστη λύση που έχει την ιδιότητα που περιγράψαμε ως προς την δοθείσα proper interval διάταξη.

Λήμμα 5.4. *Υπάρχει μία βέλτιστη λύση $I_{\widehat{G}}$ η οποία έχει την διαδοχική ισχυρή ιδιότητα ως προς την σ.*

Απόδειξη. Έστω σ μία proper interval διάταξη για το G. Για να το αποδείξουμε υποθέτουμε ότι το $I_{\widehat{G}}$ δεν έχει την διαδοχική ισχυρή ιδιότητα και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε υπάρχει μία *σύγκρουση (conflict)* ως προς την σ, δηλαδή, υπάρχουν τρεις κορυφές x, y, z με $x \prec y \prec z$ και τον κόμβο $xz \in I_{\widehat{G}}$ τέτοιες ώστε ο κόμβος $xy \notin I_{\widehat{G}}$ ή ο κόμβος $yz \notin I_{\widehat{G}}$. Θα δείξουμε ότι όσο υπάρχουν συγκρούσεις στη σ, μπορούμε να μειώσουμε των αριθμό των συγκρούσεων στη σ χωρίς να επηρεάσουμε την τιμή της βέλτιστης λύσης του $I_{\widehat{G}}$. Θεωρούμε ότι μία σύγκρουση σχηματίζεται από τρεις κορυφές $x \prec y \prec z$ με τον κόμβο $xz \in I_{\widehat{G}}$. Από το Λήμμα 5.2 γνωρίζουμε ότι ο κόμβος $xy \in I_{\widehat{G}}$ ή ο κόμβος $yz \in I_{\widehat{G}}$. Υποθέτουμε ότι ο κόμβος $yz \in I_{\widehat{G}}$. Τότε είναι εμφανές ότι ο κόμβος $xy \notin I_{\widehat{G}}$, διαφορετικά δεν υπάρχει σύγκρουση. Οπότε από το Λήμμα 5.3 υπάρχει μία κορυφή w τέτοια ώστε ο κόμβος $yw \in I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{x, w\} \notin E(G)$, και $x \prec y \prec z \prec w$. Παρατηρούμε ότι και οι δύο τριάδες x, y, z και y, z, w δημιουργούν συγκρούσεις στη σ.

Αρχικά επιλέγουμε μία κατάλληλη σύγκρουση, η οποία σχηματίζεται από τέσσερις κορυφές x, y, z, w τέτοιες ώστε $x \prec y \prec z \prec w$, οι κόμβοι $xz, yz, yw \in I_{\widehat{G}}$, και η ακμή $\{x, w\} \notin E(G)$. Σταθεροποιώντας τις κορυφές y και z στη σ με y, z να είναι αντίστοιχα, η πιο αριστερή και η πιο δεξιά κορυφές, τέτοιες ώστε για κάθε κορυφή v με $y \prec v \prec z$ να ισχύει ότι οι κόμβοι $yv, vz \in I_{\widehat{G}}$. Ανακαλούμε ότι ο κόμβος $yz \in I_{\widehat{G}}$. Επιλέγουμε την κορυφή x ως την πιο αριστερή κορυφή τέτοια ώστε ο κόμβος $xz \in I_{\widehat{G}}$ και επιλέγουμε την κορυφή w ως την πιο δεξιά κορυφή τέτοια ώστε ο κόμβος $yw \in I_{\widehat{G}}$. Ισχύει ότι η ακμή $\{x, w\} \notin E(G)$ αφού οι κορυφές y και z παίρνουν μέρος σε μία σύγκρουση. Λόγω της ιδιότητας των συγκρούσεων που έχουν θεωρηθεί, όλες αυτές οι κορυφές υπάρχουν (βλ. Σχήμα 5.3).

Έστω $W(x)$ το σύνολο των κορυφών w_i τέτοιο ώστε ο κόμβος $yw_i \in I_{\widehat{G}}$ και η ακμή $\{x, w_i\} \notin E(G)$, και έστω $X(w)$ το σύνολο των κορυφών x_j τέτοιο ώστε ο κόμβος $x_j z \in I_{\widehat{G}}$ και η ακμή $\{x_j, w\} \notin E(G)$. Παρατηρούμε ότι η κορυφή $w \in W(x)$ και η κορυφή $x \in X(w)$ όπου η w είναι η πιο δεξιά κορυφή στο $W(x)$ και η x είναι η πιο αριστερή κορυφή στο $X(w)$. Για μία κορυφή w_i του $W(x)$ ισχύει το ακόλουθο. Αν η κορυφή $w_i \prec x$ τότε η ακμή $\{w_i, x\} \in E(G)$, επειδή η ακμή $\{w_i, y\} \in E(G)$, και αν η κορυφή $x \prec w_i \prec z$ τότε η ακμή $\{w_i, x\} \in E(G)$, επειδή η ακμή $\{x, z\} \in E(G)$. Έτσι η κορυφή $z \prec w_i$, το οποίο μας δίνει ότι η ακμή $\{z, w_i\} \in E(G)$, αφού η ακμή $\{y, w_i\} \in E(G)$. Αν ο κόμβος $zw_i \in I_{\widehat{G}}$ τότε, επειδή ο κόμβος $xz \in I_{\widehat{G}}$, έχουμε την ακμή $\{x, w_i\} \in E(G)$ το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $W(x)$. Επίσης, για κάθε κορυφή b_1 τέτοια ώστε ο κόμβος $w_ib_1 \in I_{\widehat{G}}$ και, επειδή η ακμή $\{x, w_i\} \notin E(G)$, έχουμε ότι η κορυφή $x \prec b_1$. Αν η κορυφή $x \prec b_1 \prec w_i$ τότε η ακμή $\{z, b_1\} \in E(G)$ αφού η κορυφή $x \prec z \prec w_i$· και αν η κορυφή $w_i \prec b_1$ τότε λόγω ότι οι κόμβοι $yw_i, w_ib_1 \in I_{\widehat{G}}$ και η ακμή $\{y, b_1\} \in E(G)$, έχουμε ξανά την $\{z, b_1\} \in E(G)$, καθώς και η κορυφή $y \prec z \prec b_1$. Επιπλέον, θεωρούμε μία κορυφή b_2 τέτοια ώστε η κορυφή $z \prec b_2 \prec w$ και η κορυφή $b_2 \notin W(x)$. Αυτό σημαίνει ότι ο κόμβος $yb_2 \notin I_{\widehat{G}}$ ή ο κόμβος $yb_2 \in I_{\widehat{G}}$ με την ακμή $\{b_2, x\} \in E(G)$. Η τελευταία περίπτωση δίνει ότι η κορυφή b_2 είναι γειτονική σε κάθε κορυφή του $X(w)$, αφού η κορυφή x είναι η πιο αριστερή κορυφή στο $X(w)$ και για κάθε κορυφή του $X(w)$ είναι αριστερά της κορυφής z. Συνεπώς, για κάθε κορυφή w_i του $W(x)$ ισχύει το ακόλουθο:

- $z \prec w_i$,
- $zw_i \notin I_{\widehat{G}}$,
- για κάθε κόμβο $w_ib_1 \in I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{z, b_1\} \in E(G)$, και
- για κάθε κορυφή b_2 με $z \prec b_2 \prec w$ και $b_2 \notin W(x)$, ο κόμβος $yb_2 \notin I_{\widehat{G}}$ ή η κορυφή b_2 είναι γειτονική με κάθε κορυφή του $X(w)$.

Συμμετρικά για κάθε κορυφή x_j του $X(w)$ έχουμε το ακόλουθο:

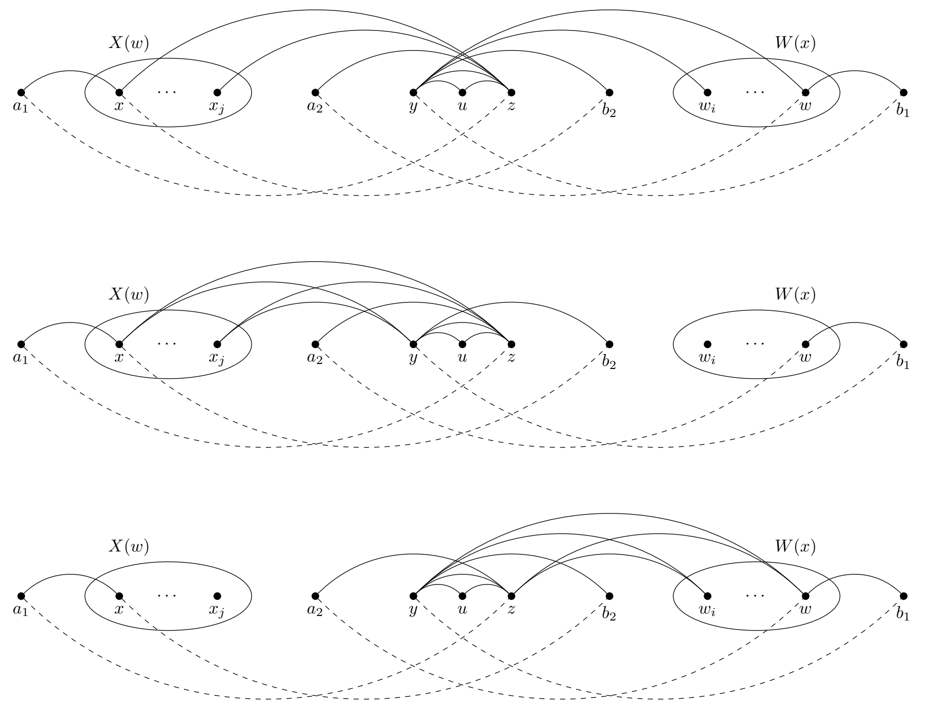
- $x_j \prec y$,
- $x_jy \notin I_{\widehat{G}}$,
- για κάθε κόμβο $a_1x_j \in I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{a_1, y\} \in E(G)$, και
- για κάθε κορυφή a_2 με $x \prec a_2 \prec y$ και $a_2 \notin X(w)$, ο κόμβος $a_2z \notin I_{\widehat{G}}$ ή η κορυφή a_2 είναι γειτονική σε κάθε κορυφή του $W(x)$.

Η παραπάνω διάταξη δίνεται στο Σχήμα 5.3 και απεικονίζει τις αντίστοιχες περιπτώσεις.

Έστω Y_w το σύνολο των κόμβων yw_i στο $\widehat{G}$ τέτοιοι ώστε η κορυφή $w_i \in W(x)$, και έστω Z_x το σύνολο των κόμβων x_jz στο $\widehat{G}$ τέτοιοι ώστε η κορυφή $x_j \in X(w)$. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $Y_w, Z_x \subseteq I_{\widehat{G}}$ από τους προηγούμενους ισχυρισμούς. Θα δείξουμε ότι αφαιρώντας είτε το Y_w είτε το Z_x από το $I_{\widehat{G}}$ δεν δημιουργείται καμία καινούρια σύγκρουση. Έστω ο κόμβος $yw_i \in Y_w$ και έστω u μία κορυφή τέτοια ώστε ο κόμβος $uy \in I_{\widehat{G}}$ και ο κόμβος $uw_i \in I_{\widehat{G}}$. Αν η κορυφή $y \prec u \prec w_i$ τότε δεν δημιουργείται σύγκρουση αφαιρώντας τον κόμβο yw_i από το $I_{\widehat{G}}$. Υποθέτουμε ότι η κορυφή $u \prec y \prec w_i$. Παρατηρούμε ότι η κορυφή $x \prec u \prec z$. Τότε ο κόμβος $xu \notin I_{\widehat{G}}$, επειδή η ακμή $\{x, w_i\} \notin E(G)$. Αφού ο κόμβος $xz \in I_{\widehat{G}}$ και τουλάχιστον ένας από τους κόμβους xu, uz ανήκει στο $I_{\widehat{G}}$, έχουμε τον $uz \in I_{\widehat{G}}$. Όμως αυτό αντιβαίνει στην πιο αριστερή επιλογή για την κορυφή y στην διάταξη $x \prec u \prec y \prec z$ και έτσι δεν υπάρχει τέτοια κορυφή. Έπειτα υποθέτουμε ότι η κορυφή $y \prec w_i \prec u$. Αφού η κορυφή w_i είναι μη γειτονική τής κορυφής x και η κορυφή $w_i \prec u$, η κορυφή u είναι μη γειτονκή τής κορυφής x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του $W(x)$, η κορυφή $u \in W(x)$ και ο κόμβος $yu \in Y_w$. Η περίπτωση για τους κόβους του Z_x είναι συμμετρική. Έτσι, δεν δημιουργείται καμία σύγκρουση αφαιρώντας τους κόμβους του Y_w ή τους κόμβους του Z_x από το $I_{\widehat{G}}$.

Έστω Y_x το σύνολο των κόμβων x_jy στο $\widehat{G}$ τέτοιοι ώστε οι κορυφές $x_j \in X(w)$, και έστω Z_w το σύνολο των κόμβων zw_i στο $\widehat{G}$ τέτοιοι ώστε οι κορυφές $w_i \in W(x)$. Συμβολίζουμε με $I(Y_x)$ και $I(Z_w)$ τα ακόλουθα σύνολα κόμβων: $I(Y_x) = \left(I_{\widehat{G}} \setminus Y_w\right) \cup Y_x$ και $I(Z_w) = \left(I_{\widehat{G}} \setminus Z_x\right) \cup Z_w$. Δείχνουμε ότι και τα δύο σύνολα σχηματίζουν ανεξάρτητα σύνολα στο $\widehat{G}$. Αναλογιζόμαστε την περίπτωση για το $I(Y_x)$. Έστω x_jy ένας κόμβος του $I(Y_x)$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις να εξετάσουμε: υπάρχει ένας κόμβος $ux_j \in \left(I_{\widehat{G}} \setminus Y_w\right) \cup Y_x$ και η ακμή $\{u, y\} \notin E(G)$ ή υπάρχει ένας κόμβος $yv \in \left(I_{\widehat{G}} \setminus Y_w\right) \cup Y_x$ και η ακμή $\{x_j, v\} \notin E(G)$. Στην πρώτη περίπτωση γνωρίζουμε ότι ο κόμβος $ux_j \in I_{\widehat{G}}$ και για κάθε κόμβο $ux_j \in I_{\widehat{G}}$, η ακμή $\{u, y\}$ πρέπει να είναι ακμή του G, το οποίο οδηγεί σε άτοπο, επειδή οι κορυφές u και y είναι μη-γειτονικές. Για τη δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι ο κόμβος $yv \in I_{\widehat{G}} \setminus Y_w$ και η κορυφή $v \notin W(x)$. Εφόσον η ακμή $\{x_j, v\} \notin E(G)$ και η ακμή $\{y, v\} \in E(G)$, έχουμε την κορυφή $z \prec v$ και από την δεξιότερη επιλογή της κορυφής w για την κορυφή y έχουμε την κορυφή $z \prec v \prec w$. Αυτό όμως συνεπάγει ότι η κορυφή $z \prec v \prec w$, η κορυφή $v \notin W(x)$ και ο κόμβος $yv \in I_{\widehat{G}}$ το οποίο δείχνει ότι η ακμή $\{x_j, v\} \in E(G)$. Ο ακριβώς συμμετρικά ισχυρισμός ισχύει για $I(Z_w)$. Οι δύο τελευταίες διατάξεις που δίνονται στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζουν τις προαναφερθείσες περιπτώσεις. Επομένως, τα $I(Y_x)$ και $I(Z_w)$ σχηματίζουν ανεξάρτητα σύνολα στο $\widehat{G}$.

Παρατηρούμε ότι και τα δύο σύνολα $I(Y_x)$ και $I(Z_w)$ έχουν μικρότερο αριθμό συγκρούσεων ως προς το $I_{\widehat{G}}$, επειδή, είτε οι κορυφές x, y, z στο $I(Y_x)$, είτε οι κορυφές y, z, w στο $I(Z_w)$ ικανοποιούν την διαδοχική ισχυρή ιδιότητα. Είναι προφανές ότι η διαφορά ανάμεσα στο $I(Y_x)$ και στο $I_{\widehat{G}}$ είναι οι κόμβοι του Y_x



Σχήμα 5.3: Μία proper interval διάταξη για ένα γράφημα G με τις τρεις διαφορετικές λύσεις που αναφέρθηκαν στην απόδειξη του Λήμματος 5.4. Μία συνεχόμενη ακμή αντιστοιχεί σε ένα κόμβο του $\widehat{G}$ ο οποίος ανήκει στο $I_{\widehat{G}}$, το οποίο σημαίνει ότι μία τέτοια ακμή επιγράφεται ισχυρή σε μία βέλτιστη ισχυρή-ασθενή επιγραφή, ενώ μία διακεκομμένη ακμή αντιστοιχεί σε ένα κόμβο του $\widehat{G}$ ο οποίος δεν ανήκει στο $I_{\widehat{G}}$, το οποίο σημαίνει ότι μία τέτοια ακμή επιγράφεται ασθενής σε μία βέλτιστη ισχυρή-ασθενή επιγραφή. Παρατηρείστε ότι οι δύο κάτω διατάξεις έχουν λιγότερες συγκρούσεις από την πρώτη, δηλαδή, υπάρχει τριάδα κορυφών η οποία παραβιάζει την διαδοχική ισχυρή διάταξη.

και του Y_w, ενώ η διαφορά μεταξύ του $I(Z_w)$ και του $I_{\widehat{G}}$ είναι οι κόμβοι του Z_w και του Z_x. Για ένα σύνολο κορυφών A με θετικά βάρη, συμβολίζουμε με $M(A)$ το άθροισμα των βαρών των κορυφών του. Αν $M(X(w)) \geq M(Z(x))$ τότε $M(I(Y_x)) \geq M(I_{\widehat{G}})$ και αν $M(X(w)) < M(Z(x))$ τότε $M(I(Z_w)) > M(I_{\widehat{G}})$. Έτσι σε κάθε περίπτωση μπρούμε να αντικαταστήσουμε κατάλληλο σύνολο κόμβων στο $I_{\widehat{G}}$ και να πάρουμε μια βέλτιστη λύση με μικρότερο αριθμό συγκρούσεων. Επομένως, εφαρμόζοντας μία τέτοια αντικατάσταση σε κάθε τέτοια σύγκρουση, μπορούμε να πάρουμε μία βέλτιστη λύση η οποία δεν έχει συγκρούσεις και, με αυτό τον τρόπο, ικανοποιεί την διαδοχική ισχυρή ιδιότητα. □

5.3 Αλγόριθμος Δυναμικού Προγραμματισμού του MaxSTC σε Proper Interval Γραφήματα

Το Λήμμα 5.4 προτείνει την εύρεση μίας βέλτιστης λύσης η οποία να έχει τη διαδοχική ισχυρή ιδιότητα ως προς τη σ. Λόγω της Πρότασης 1.1 και της proper interval διάταξης, αυτό ανάγει στον υπολογισμό την εύρεση του μεγαλύτερου proper interval υπογραφήματος H του G τέτοιο ώστε οι κορυφές από κάθε P_3 του H επάγουν μία κλίκα στο G.

Έστω G ένα proper interval γράφημα και έστω $\sigma = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ μία proper interval διάταξή του. Για μία κορυφή v_i συμβολίζουμε με $v_{\ell(i)}$ και $v_{r(i)}$ τον πιο αριστερό και τον πιο δεξί γείτονα της, αντίστοιχα, στη σ. Παρατηρούμε ότι για οποιεσδήποτε κορυφές $v_i \prec v_j$ στο σ, $v_{\ell(i)} \preceq v_{\ell(j)}$ και $v_{r(i)} \preceq v_{r(j)}$ [7]. Για $1 \leq i \leq r(1)$, έστω $V_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$, το οποίο, V_i περιέχει τις *πρώτες* i κορυφές στη σ. Δεδομένου του συνόλου V_i, έστω r είναι ένα ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \leq i \leq r \leq r(1)$.

Έστω $A(G)$ είναι η τιμή μίας βέλτιστης λύσης $I_{\widehat{G}}$ για το G. Για το σύνολο V_i συμβολίζουμε με $B(V_i)$ την τιμή που αντιστοιχεί στο συνολικό βάρος των προσπιπτουσών ακμών μεταξύ της κορυφής v_1 και σε καθεμία από τις κορυφές $v_2, \ldots, v_i$. Παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε υποσύνολο από κορυφές του V_i επάγει μία κλίκα στο G. Συμβολίζουμε με $C(V_i)$ την τιμή που αντιστοιχεί στο συνολικό βάρος των ακμών μεταξύ όλων των κορυφών του V_i. Με δεδομένο τις πρώτες V_i κορυφές και $i \leq r \leq r(1)$, έστω $A(G, V_i, r)$ η τιμή της βέλτιστης λύσης $I(G, V_i, r)$ στο G τέτοια ώστε κάθε ακμή μεταξύ των κορυφών του V_i ανήκει στη $I(G, V_i, r)$ και ο κόμβος $uv_k \notin I(G, V_i, r)$ με την κορυφή $u \in V_i$ και $k > r$. Ως μία τετριμένη περίπτωση παρατηρούμε ότι αν το γράφημα G περιέχει ακριβώς δύο κορυφές v_1, v_2 τότε $A(G) = B(\{v_1, v_2\}) = C(\{v_1, v_2\})$.

Λήμμα 5.5. *Έστω G ένα proper interval γράφημα και έστω V_i και r τέτοιο ώστε $1 \leq i \leq r \leq r(1)$. Τότε, $A(G) = A(G, \{v_1\}, r(1))$, και*

$$A(G, V_i, r) = \begin{cases} \max\limits_{i \leq j \leq r} \{A(G - \{v_1\}, V_j \setminus \{v_1\}, r) + B(V_j)\} & \text{αν } i < r, \\ A(G - V_i, \{v_{i+1}\}, r(i+1)) + C(V_i) & \text{αν } i = r \text{ και } i < n, \\ C(V_i) & \text{άλλως.} \end{cases}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $A(G)$ υπολογίζει την τιμή μιας βέλτιστης λύσης η οποία ικανοποιεί την διαδοχική ισχυρή ιδιότητα. Από το Λήμμα 5.4 υπάρχει τέτοια διάταξη . Εφόσον, δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ των κορυφών v_1 και v_k με $k > r(1)$, ισχύει ότι $A(G) = A(G, \{v_1\}, r(1))$. Παρατηρούμε ότι κάθε επαγόμενο υπογράφημα ενός proper interval γραφήματος είναι proper interval, το οποίο μας δίνει ότι τα γραφήματα $G - \{v_1\}$ και $G - V_i$ παραμένουν proper interval. Έστω $V_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ είναι οι πρώτες i κορυφές του G. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.4 αν ο κόμβος $v_iv_k \notin I(G, V_i, r)$ και $k > i$, τότε κάθε κόμβος v_jv_k, $1 \leq j \leq i$, δεν ανήκει στη $I(G, V_i, r)$. Επίσης, από το Λήμμα 5.4 αν ο κόμβος $v_1v_k \in I(G, V_i, r)$ με $k > i$, τότε κάθε κόμβος v_jv_k, $1 \leq j \leq i$, ανήκει στη $I(G, V_i, r)$.

Έστω $I(V_i)$ είναι οι κόμβοι του $\widehat{G}$ που αντιστοιχούν στις ακμές του $G[V_i]$. Από τον ορισμό της $I(G, V_i, r)$, $I(V_i) \subseteq I(G, V_i, r)$. Αν $i = r$ τότε είναι εμφανές ότι οι κόμβοι του $I(V_i)$ ανήκουν στη $I(G, V_i, r)$. Επιπλέον, αν $i = r < n$ τότε κανένας κόμβος v_iv_k, με $i < k$, δεν μπορεί να προστεθεί στη $I(G, V_i, r)$ και συνεπάγεται ότι όλοι οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις ακμές μεταξύ των V_i και $G - V_i$ δεν ανήκουν στη λύση $I(G, V_i, r)$. Έτσι μπορούμε με ασφάλεια να προσθέσουμε τη $I(V_i)$ σε μία βέλτιστη λύση του $G - V_i$, που είναι η $I(G - V_i, \{v_{i+1}\}, r(i+1))$.

Υποθέτουμε ότι $i < r$. Για να δούμε ότι το $I(V_i) \subseteq I(G, V_i, r)$, παρατηρούμε ότι το $V_i \subseteq V_j$ για κάθε $i \leq j \leq r$ και $C(V_i) = B(V_i) + B(V_i \setminus \{v_1\}) + \cdots + B(\{v_{i-1}, v_i\})$. Θεωρούμε τους κόμβους v_1v_j του $\widehat{G}$ που αντιστοιχούν στις ακμές που είναι προσπίπτουσες στην κορυφή v_1. Έστω ο κόμβος $v_1v_j \in I_{\widehat{G}}$ με j το μεγαλύτερο δυνατό. Τότε $i \leq j \leq r \leq r(1)$. Απο το Λήμμα 5.4 κάθε κόμβος $v_1v_{j'}$ του $\widehat{G}$ με $1 \leq j' \leq j$ ανήκει στη $I_{\widehat{G}}$. Έτσι $I(V_j) \subseteq I(G, V_i, r)$. Ακόμα για κάθε κόμβο v_jv_k, με $r \leq r(1) < k$, γνωρίζουμε ότι ο κόμβος v_jv_k είναι γειτονικός στον κόμβο v_1v_j στο $\widehat{G}$, επειδή η ακμή $\{v_1, v_k\} \notin E(G)$. Συνεπώς, ο κόμβος $v_jv_k \notin I_{\widehat{G}}$, το οποίο συνεπάγει ότι κάθε κόμβος $v_{j'}v_k$ με $j' \leq j$ δεν ανήκει στη $I_{\widehat{G}}$. Αυτό σημαίνει ότι ο κόμβος $v_jv_k \in I(G, V_i, r)$ μόνο αν $k \leq r \leq r(1)$. Επομένως, δίνοντας μία λύση αφαιρώντας την κορυφή v_1 για όλες τις δυνατές τιμές του j, παίρνουμε την επιθυμητή λύση. □

Πλέον έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να φτάσουμε τον στόχο, δηλαδη, να δώσουμε ένα πολυωνυμικό σε χρόνο αλγόριθμο για την λύση του MaxSTC προβλήματος σε proper interval γραφήματα G.

Θεώρημα 5.1. *Υπάρχει ένα πολυωνυμικός σε χρόνο αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει το MaxSTC σε proper interval γραφήματα.*

Απόδειξη. Έστω G ένα proper interval γράφημα με n κορυφές και m ακμές. Αρχικά, υπολογίζουμε την proper interval διάταξή του σ σε γραμμικό χρόνο [23].

Έπειτα, βρίσκουμε τα δίδυμα σύνολα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι u και v είναι δίδυμες κορυφές αν και μόνο αν $\ell(u) = \ell(v)$ και $r(u) = r(v)$. Συμπτύσσουμε τα δίδυμα σύνολα σύμφωνα με το Λήμμα 5.1 και το αποτέλεσμα είναι ένα proper interval γράφημα στο οποίο σε κάθε κορυφή έχει δοθεί ένα θετικό βάρος. Για να υπολογίσουμε τη βέλτιστη λύση $A(G)$ χρησιμοποιούμε δυναμικό προγραμματισμό που βασίζεται στον αναδρομικό τύπο που δίνεται στο Λήμμα 5.5. Η ορθότητα είναι επακόλουθο της Πρότασης 1.1 και των Λημμάτων 5.4 και 5.5.

Αν μας δοθεί μια διάταξη σ μπορούμε να αφαιρέσουμε τις δίδυμες κορυφές σε γραμμικό χρόνο. Όλα τα στιγμιότυπα του $A(G, V_i, r)$ μπορούν να υπολογιστούν ως εξής. Δίνοντας την πρώτη κορυφή v_1 υπολογίζουμε όλα τα δυνατά σύνολα V_i τα οποία φράσσονται από το n. Αφού $r \leq r(1) \leq n$, ο αριθμός των στιγμιότυπων $A(G, V_i, r)$ που δημιουργούνται από τη v_1 είναι το πολύ n^2. Επίσης, ο υπολογισμός των τιμών των $B(V_i)$ και $C(V_i)$ χρειάζεται $O(m)$ χρόνο. Επομένως, ο συνολικός χρόνος του αλγορίθμου είναι $O(n^3 m)$. $\square$

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Επεκτάσεις

Είδαμε ότι στο πρόβλημα της Μεγιστοποίησης της Ισχυρής Τριαδικής Κλειστότητας (MaxSTC), δηλαδή την ανάθεση ισχυρών και ασθενών επιγραφών στις ακμές του γραφήματος, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ισχυρή τριαδική κλειστότητα και να μεγιστοποιούνται οι ισχυρές επιγραφές, αν και είναι NP-πλήρες σε γενικά γραφήματα, υπάρχουν κλάσεις γραφημάτων στις οποίες λύνεται πολυωνυμικά σε χρόνο. Οι κλάσεις αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, proper interval γραφήματα, trivially-perfect γραφήματα, bipartite και co-bipartite γραφήματα. Για να δείξουμε την πολυωνυμική λύση του MaxSTC προβλήματος εκμεταλλευτήκαμε, είτε τις ιδιότητες του ίδιου του γραφήματος (proper interval, bipartite), είτε χαρακτηρίσαμε το line-incompatibility γράφημα αυτών (trivially-perfect, threshold, co-bipartite). Στην αντίθετη κατεύθυνση, δείξαμε ότι το πρόβλημα παραμένει NP-πλήρες στα split γραφήματα, και ακολούθως στα chordal γραφήματα. Συνεπώς, συμβάλουμε στο να οριστούν τα πρώτα όρια μεταξύ των κλάσεων γραφημάτων, σε κάποιες από τις οποίες το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά και σε κάποιες παραμένει NP-πλήρες.

Δίνοντας τα πρώτα αποτελέσματα, θετικά και αρνητικά, για το MaxSTC πρόβλημα με περιορισμό στην είσοδο, υπάρχουν μερικά ενδιαφέροντα ανοιχτά προβλήματα. Παρόλο της δομικής ιδιότητας την οποία αποδείξαμε για την λύση σε proper interval γραφήματα, η πολυπλοκότητα για το MaxSTC σε interval γραφήματα είναι ακόμα ανοιχτή. Ο καθορισμός της πολυπλοκότητας του MaxSTC για άλλες κλάσεις γραφημάτων, προς τα AT-free γραφήματα, φαίνεται να είναι ενδιαφέρον για μελλοντική έρευνα. Πιο συγκεκριμένα, από την Πρόταση 1.1 είναι ενδιαφέρον να θεωρήσουμε το line-incompatibility γράφημα ενός comparability γραφήματος, αφού έχει δοθεί ένας παραπλήσιος χαρακτηρισμός [20]. Επιπλέον, είναι φυσικό να χαρακτηριστούν τα γραφήματα των οποίων το line-incompatibility γράφημα είναι τέλειο (perfect). Ένας τέτοιος χαρακτηρισμός θα μας δώσει πολυωνυμικές λύσεις για το MaxSTC, επειδή το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο σε τέλεια γραφήματα βρίσκεται πολυωνυμικά [11].

Τέλος, υπάρχουν επεκτάσεις και παραλλαγές του MaxSTC προβλήματος οι οποίες έχουν ενδιαφέρον να μελετηθουν όπως προτάθηκαν στο [32]. Ένα φυσικό πρόβλημα τροποίησης γραφήματος είναι το πρόβλημα της πρόσθεσης του ελάχιστου αριθμού ακμών έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισχυρή τριαδική κλειστότητα έχοντας όσο γίνεται λιγότερες ασθενείς ακμές στο αρχικό γράφημα. Πιο τυπικά ο στόχος είναι να προστεθούν F ακμές στο G έτσι ώστε το τροποιημένο γράφημα να ικανοποιεί την ισχυρή τριαδική κλειστότητα με το ελάχιστο αριθμό ακμών του $|F| + |E_W|$.

Βιβλιογραφια

[1] Adcock, A. B., Sullivan, B. D., and Mahoney., M. W. Tree decompositions and social graphs. *Internet Mathematics* (2016), 12:315–361.

[2] Backstrom, L., and Kleinberg., J. Romantic partnerships and the dispersion of social ties: a network analysis of relationship status on facebook. In *Proceedings of CSCW 2014* (2014), pp. 831–841.

[3] Bonomo, F., Durán, G., and Valencia-Pabon., M. Complexity of the cluster deletion problem on subclasses of chordal graphs. *Theoretical Computer Science 600* (2015), 59–69.

[4] Brandstädt, A., Le, V., and Spinrad., J. *Graph Classes – a Survey.* SIAM Monographs in Discrete Mathematics and Applications, 1999.

[5] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., and Thomas, R. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics 164* (2006), 51–229.

[6] Corneil, D., H.Lerchs, and Stewart., L. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics 3* (1981), 163–174.

[7] Deng, X., Hell, P., and Huang., J. Linear-time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs. *SIAM J. Comput.* (1996), 25:390–403.

[8] Easley, D., and Kleinberg., J. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World.* Cambridge University Press, 2010.

[9] Gao, Y., Hare, D. R., and Nastos, J. The cluster deletion problem for cographs. *Discrete Math. 313* (2013), 2763–2771.

[10] Golumbic., M. Trivially perfect graphs. *Discrete Mathematics 24* (1978), 105–107.

[11] Götschel, M., Lovász, L., and Scrijver., A. Polynomial algorithms for perfect graphs. *Annals of Discrete Mathematics 21* (1984), 325–356.

[12] Granovetter., M. The strength of weak ties. *American Journal of Sociology 78* (1973), 1360–1380.

[13] Heggernes, P., Lokshtanov, D., Nederlof, J., Paul, C., and Telle., J. A. Generalized graph clustering: recognizing (p, q)-cluster graphs. In *Proceedings of WG 2010* (2010), pp. 171–183.

[14] Ibarra., L. The clique-separator graph for chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics 157* (2009), 1737–1749.

[15] Jackson., M. O. *Social and economic networks*, vol. 3. Princeton University press, 2008.

[16] Karp, R. M. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computers Computations* (1972), 85–103.

[17] Kleinberg, J. M., and Tardos, É. *Algorithm Design.* Addison-Wesley, 2006.

[18] Kleitman, D. J., and Vohra., R. V. Computing the bandwidth of interval graphs. *IAM J. Disc. Math. 3* (1990), 373–375.

[19] König, D. Gráfok és mátrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok 38* (1931), 116–119.

[20] Kratsch, D., McConnell, R. M., Mehlhorn, K., and Spinrad., J. P. Certifying algorithms for recognizing interval graphs and permutation graphs. *SIAM J. Comput. 36* (2006), 326–353.

[21] L. C. Lau and D. G. Corneil. Recognizing powers of proper interval, split, and chordal graphs. *SIAM J. Disc. Math. 18* (2004), 83–102.

[22] Lau., L. C. Bipartite roots of graphs. *ACM Transactions on Algorithms 2* (2006), 178–208.

[23] Looges, P. J., and Olariu, S. Optimal greedy algorithms for indifference graphs. *Computers & Mathematics with Applications 25* (1993), 15–25.

[24] Mahadev, N., and Peled., U. *Threshold graphs and related topics*, vol. 56. Annals of Discrete Mathematics, North Holland, 1995.

[25] Milanič, M., and Schaudt., O. Computing square roots of trivially perfect and threshold graphs. *Discrete Applied Mathematics 161* (2013), 1538–1545.

[26] Mucha, M., and Sankowski, P. Maximum matchings via gaussian elimination. In *45th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2004), 17-19 October 2004, Rome, Italy, Proceedings* (2004), pp. 248–255.

[27] Papadopoulos, C. *Θεωρία Γραφημάτων*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων Τμήμα Μαθηματικών, 2012.

[28] Peterson, D. Gridline graphs: a review in two dimensions and an extension to higher dimensions. *Discrete Applied Mathematics 126*, 2?-3 (2003), 223–239.

[29] Pfaltz., J. L. Chordless cycles in networks. In *Proceedings of ICDE Workshops* (2013), pp. 223–228.

[30] Roberts., F. S. Indifference graphs. In *Proof Techniques in Graph Theory* (New York, 1969), Academic Press, pp. 139–146.

[31] Shamir, R., Sharan, R., and Tsur, D. Cluster graph modification problems. *Discrete Appl. Math. 144*, 1–2 (2004), 173–182.

[32] Sintos, S., and Tsaparas., P. Using strong triadic closure to characterize ties in social networks. In *Proceedings of KDD 2014* (2014), pp. 1466–1475.

[33] Ugander, J., Backstrom, L., and Kleinberg., J. Subgraph frequencies: Mapping the empirical and extremal geography of large graph collections. In *Proceedings of WWW 2013* (2013), pp. 1307–1318.