ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ι.Δ. ΒΕΡΓΑΔΟΣ
Καθηγητής
Θεωρητικής Φυσικής
Τμήματος Φυσικής
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Γ.Κ. ΛΕΟΝΤΑΡΗΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής
Θεωρητικής Φυσικής
Τμήματος Φυσικής
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ι.Δ. ΒΕΡΓΑΔΟΣ
Καθηγητής
Θεωρητικής Φυσικής
Τμήματος Φυσικής
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Γ.Κ. ΛΕΟΝΤΑΡΗΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής
Θεωρητικής Φυσικής
Τμήματος Φυσικής
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2009

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

415.15
Δωρεά: Α. Μελετίου

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΧΟΛΗΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ Α' ΕΚΔΟΣΗ

Το πόνημα τούτο γράφτηκε κυρίως για να ικανοποιήσει τις ανάγκες των φοιτητών του Φυσικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων οι οποίοι παρακολουθούν το μάθημα Διανυσματική Ανάλυση. Το υποχρεωτικό αυτό μάθημα διδάσκεται στο β' εξάμηνο σπουδών. Κατά συνέπεια υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος μόνο με την ύλη ενός εξαμήνου Απειροστικού λογισμού καθώς και ενός εξαμήνου Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας. Υποθέτουμε επίσης ότι ο αναγνώστης δεν είναι ακόμη πλήρως εξοικειωμένος με την ύλη του Ηλεκτρισμού - Μαγνητισμού που γίνεται παράλληλα.

Στην προσπάθειά μας αυτή παρορμηθήκαμε από την διαπίστωση ότι δεν υπάρχει ανάλογο βοήθημα στα ελληνικά. Αλλά και στην διεθνή βιβλιογραφία ο αριθμός των βιβλίων του είδους αυτού είναι σχετικά περιορισμένος. Κυρίως επειδή η ύλη του μαθήματος αυτού καλύπτεται μερικώς στον Απειροστικό λογισμό και στην Αναλυτική και Διαφορική Γεωμετρία, που συνήθως διδάσκονται από μαθηματικούς. Ελλείψεις πάνω σε κεντρικά σημεία του βοηθήματος αυτού, όπως τα θεωρήματα Stokes, Green, κ.λπ., καλύπτονται εν μέρει σε μαθήματα θεωρητικής Φυσικής, όπως η Κλασική Μηχανική, η Κλασική Ηλεκτροδυναμική και η Κβαντική Μηχανική.

Στο πρόγραμμα σπουδών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων η «Διανυσματική Ανάλυση» περιλαμβάνεται ως ξεχωριστό μάθημα με σκοπό να γίνει πιο συντονισμένη η διδασκαλία του αντικειμένου και να αποφευχθούν ή τουλάχιστον να μειωθούν οι άσκοπες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα που διδάσκονται παράλληλα.

Επιπλέον πιστεύεται ότι η καλή εξοικείωση με τις σχετικές βασικές έννοιες αποτελεί χρήσιμο εφόδιο και για άλλα μαθήματα όπως των, Μηχανική των Ρευστών, δυναμική Μετεωρολογία, Φυσική Πλάσματος, Αστροφυσική κ.λπ. Επίσης επικρατεί η άποψη ότι για τους φοιτητές αυτής της κατηγορίας, είναι προτιμότερη η παρουσίαση του μαθήματος από Θεωρητικούς Φυσικούς επειδή οι Μαθηματικοί (ακόμη και των εφαρμοσμένων Μαθηματικών), βρίσκουν την απασχόληση με τέτοια θέματα κάπως ανιαρή γι' αυτούς.

Με βάση τα πιο πάνω, γίνεται κατανοητός ο λόγος αποφυγής της μαθηματικής αυστηρότητας στο τρίπτυχο ορισμός-θεώρημα-απόδειξη. Σκόπιμα αποφύγαμε τον συνοπτικό μαθηματικό συμβολισμό. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση του όγκου του βοηθήματος, αλλά νομίζουμε ότι θα ικανοποιήσει τον αναγνώστη. Επίσης σκόπιμα αποφύγαμε τις συνεχείς αναδρομές και προτιμήσαμε την επανηλειμμένη αναφορά των ειδικών εξισώσεων για διευκόλυνση του αναγνώστη.

Ελπίζουμε ότι το βοήθημα αυτό προχωρεί αρκετά πέρα από την επιφανειακή αντιμετώπιση των θεμάτων που είναι υποχρεωμένος να ακολουθήσει ο διδάσκων τα θέματα αυτά σε εξειδικευμένα μαθήματα της Φυσικής. Είμαστε βέβαιοι ότι η επιλογή των παραδειγμάτων και των Εφαρμογών μαζί με τις λυμμένες και άλυτες ασκήσεις που συμπεριλάβαμε θα βοηθήσει τους φοιτητές να ξεκαθαρίσουν τις κάπως λεπτές μαθηματικές έννοιες τις οποίες εκτίθενται. Επίσης θα δώσουν κάποιο κίνητρο για να διατηρηθεί αμείωτο το ενδιαφέρον

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

τους για το αντικείμενο. Ελπίζουμε τέλος ότι τα οφέλη που θα έχει ο φοιτητής από την εξοικείωση αρκετά νωρίς στη σταδιοδρομία του με το αντισυμμετρικό σύμβολο ε_{ijk} την παραδοχή άθροισης κ.λπ. θα υπερκεράσουν την αρχική αρνητική εντύπωση που δημιουργεί η δυσκολία στην κατανόηση.

Ιωάννινα 15/5/91

Ι.Δ. Βέργαδος Γ.Κ. Λεοντάρης

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗ Β′ ΕΚΔΟΣΗ

Με την ευκαιρία της δεύτερης έκδοσης του βιβλίου θεωρήθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθεί ένα όγδοο κεφάλαιο στο οποίο γενικεύονται οι έννοιες των προηγουμένων σε πολυδιάστατους γραμμικούς διανυσματικούς χώρους. Έγιναν επίσης πολλές βελτιώσεις στην ανάπτυξη και δομή του πονήματος καθώς και προσθήκες νέων παραδειγμάτων. Ευχαριστούμε θερμά τον καθηγητή και ερευνητή του "ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος" Ερνέστο Αργύρη για την προσεκτική ανάγνωση των χειρογράφων και χρήσιμες υποδείξεις. Η επιμέλεια του κειμένου έγινε από τις κυρίες Λούλα Παπαφωτίκα και Λίντα Ζώνιου τις οποίες ευχαριστούμε.

Ιωάννινα 1/2/96

Ι.Δ. Βέργαδος Γ.Κ. Λεοντάρης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ....1
1.1 Διάνυσμα
1.2. 'Αθροισμα διανυσμάτων....3
1.3 Αφαίρεση διανυσμάτων....4
1.4. Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό....5
1.5. Καρτεσιανές συντεταγμένες....12
1.6 Η Διανυσματική Εξίσωση της Ευθείας....20
1.7 Βαθμωτό (Εσωτερικό) Γινόμενο....24
1.9. Μετασχηματισμός προβολών Διανύσματος κάτω από περιστροφή των αξόνων....31
1.10. Διανυσματική Εξίσωση του Επιπέδου....43
1.11. Το διανυσματικό γινόμενο....45
1.12. Τα τριπλά γινόμενα C·(AxB) και Ax(BxC)....51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ....63
2.1. Διανυσματική συνάρτηση μιάς μεταβλητής....63
2.2.a.Όριο Διανυσματικής Συνάρτησης....64
2.2.b.Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης....65
2.3. Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, μερικές παράγωγοι....71
2.4. Καμπύλες χώρου....73
2.5. Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης χώρου....77
2.6. Μήκος καμπύλης χώρου....79
2.7. Καμπυλότητα καμπύλης....85
2.8. Ανάλυση της επιτάχυνσης. Εξισώσεις του Frenet....88
2.9 Επίπεδες καμπύλες - Πολικές συντεταγμένες....93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ
GRAD, DIV, CURL, κ.α....101
3.1 Επιφάνειες....101
3.2 Η παράγωγος ως προς κατεύθυνση....112
3.3. Ιδιότητες της κλίσης ή grad f....120
3.4. Βαθμωτά και Διανυσματικά Πεδία. Γραμμές Ροής....124
3.5 Απόκλιση Διανυσματικής Συνάρτησης....130
3.6. Στροβιλισμός διανυσματικής Συνάρτησης....133
3.7 Η Λαπλασιανή ή τελεστής Laplace....139
3.8. Διανυσματικές ταυτότητες....142
3.9. Προσανατολισμένες επιφάνειες....148

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 159
4.1 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα 159
4.2 Μερικά παραδείγματα υπολογισμού επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων . 164
4.3 Απλά συνεκτικοί τόποι (domains) 171
4.4. Διατηρητικά ή Συντηρητικά πεδία 174
4.5 Διανυσματικό δυναμικό 181

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V
ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 211
5.1 Η φυσική σημασία της απόκλισης 211
5.2. Θεώρημα της Απόκλισης - Τύπος του Green 215
5.3 Τύπος του Ostrogradsky 229
5.4 Εφαρμογή στον υπολογισμό της στερεάς γωνίας 230
5.5 Οι Ταυτότητες του Green. Θεωρήματα της κλίσης και στροβιλισμού 234
5.7 Το Θεώρημα του Stokes 243

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI
ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ 263
6.1. Κυλινδρικές συντεταγμένες 264
6.2. Σφαιρικές συντεταγμένες 269
6.3. Καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων 273
6.4. Στοιχειώδη Μεγέθη 279
6.5. Παράγωγοι μοναδιαίων διανυσμάτων* 285
6.6. Διαφορικοί τελεστές 287
6.7. Η Εξίσωση Laplace 295

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII
ΤΑΝΥΣΤΕΣ 307
Εισαγωγή 307
7.1. Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί 308
7.2. Καρτεσιανοί Τανυστές 315
7.3. Τανυστές σε N-διάστατους Ευκλείδιους χώρους 328
7.4. Μη γραμμικοί μετασχηματισμοί. Ανταλλοίωτοι και συναλλοίωτοι τανυστές. 332

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII
ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ 343
Εισαγωγή 343
8.1. Ορισμός Γραμμικών Διανυσματικών χώρων 343
8.7. Ορθογωνιοποίηση Gram - Schmidt 352

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Η έννοια του διανύσματος είναι πάρα πολύ χρήσιμη στη φυσική. Μας επιτρέπει να εκφράσουμε ένα φυσικό νόμο με τη βοήθεια μιάς εξίσωσης αντί για τρείς αλγεβρικές εξισώσεις. Επίσης μας δίνει τη δυνατότητα να διατυπώσουμε τους νόμους της φύσης κατά τρόπο ανεξάρτητο ενός συγκεκριμμένου συστήματος αξόνων.

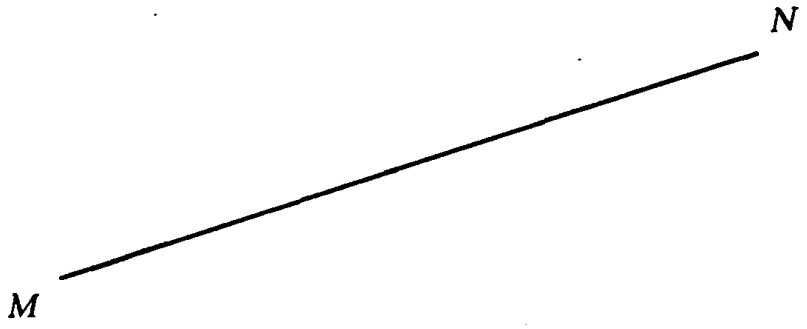
Θα αρχίσουμε τη μελέτη με τη γεωμετρική έννοια του διανύσματος με την οποία ο φοιτητής είναι αρκετά εξοικειωμένος. Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στη μελέτη της αναλυτικής μορφής των διανυσμάτων, η οποία είναι, όπως θα δούμε, μιά τριάδα αριθμών στον ευκλείδιο χώρο.

1.1 Διάνυσμα :

Ας θεωρήσουμε δύο διακριτά μεταξύ τους σημεία Μ και Ν. Τότε υπάρχει μόνο μία ευθεία που περνά απο αυτά τα δύο σημεία (Σχήμα 1.1.1). Το κομμάτι της ευθείας μεταξύ των Μ και Ν, ονομάζουμε <u>ευθύγραμμο τμήμα</u>. Λέμε ότι έχουμε ορίσει μία διεύθυνση στο ευθύγραμμο τμήμα (και το καλούμε προσανατολισμένο), όταν τα ακραία σημεία του Μ και Ν, έχουν δοθεί με καθορισμένη διάταξη.

Καθε συγκεκριμμένο κομμάτι ευθείας ορίζει δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα. Στη περίπτωση του σχήματος 1.1.1. το ένα συμβολίζουμε με ΜΝ και το άλλο με ΝΜ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



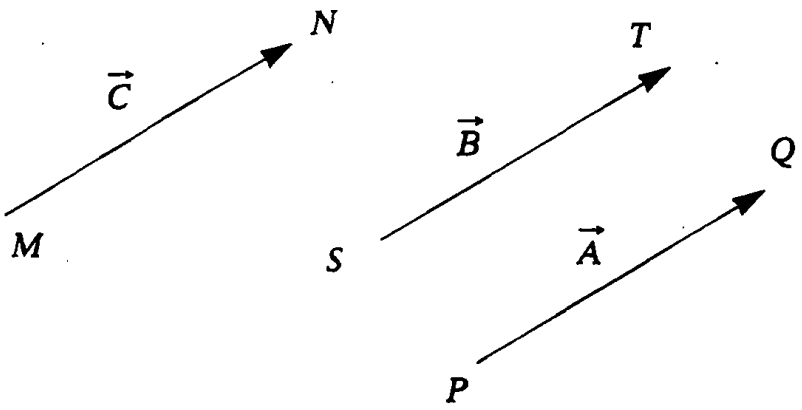
Σχήμα 1.1.1. Ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα MN

Συνεπώς ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ειναι ποσότητα που έχει μέγεθος (στη περίπτωσή μας ορίζεται η απόσταση μεταξύ των M και N), και διεύθυνση (ανάλογα με τη σειρά διάταξης που θα δοθούν τα ακραία σημεία του).

Δύο ή περισσότερα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ισοδύναμα, όταν το ένα είναι παράλληλη μετατόπιση του άλλου, δηλαδή όταν έχουν ίδιο μέτρο και στοχεύουν στην ίδια διεύθυνση. Για παράδειγμα τα MN, ST και PQ στο σχήμα 1.1.2 είναι όλα ισοδύναμα μεταξύ τους.

Είμαστε έτοιμοι τώρα να δώσουμε τον ορισμό του διανύσματος. Ορίζουμε ως διάνυσμα τη συλλογή ισοδύναμων προσανατολισμένων τμημάτων. Μπορούμε να συμβολίσουμε το διάνυσμα με οποιοδήποτε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα της συλλογής (έστω το PQ). Θα είναι δε κατανοητό ότι το διάνυσμα καθαυτό θα είναι το σύνολο των ευθυγραμμάτων τμημάτων που είναι ισοδύναμα με το PQ.

Συνηθίζουμε να συμβολίζουμε το διάνυσμα είτε με ένα γράμμα που γράφεται πιό έντονα απο τα υπόλοιπα ή με γράμμα που απο πάνω φέρει



Σχήμα 1.1.2. Ισοδύναμα ευθύγραμμα τμήματα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ένα βέλος. Στο σχήμα 1.1.2 το PQ παριστάνεται απο το **A** ή $\vec{A}$, το ST απο το $\vec{B}$ ή **B** το MN απο το $\vec{C}$ ή **C** . Είναι :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

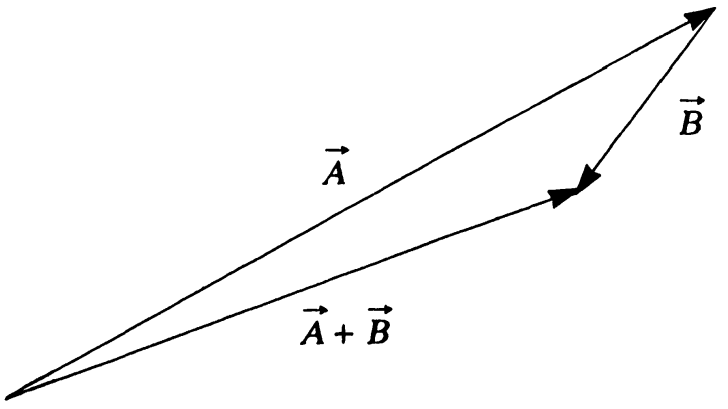
που σημαίνει τα PQ, RS, MN είναι παράλληλα μεταξύ τους, στοχεύουν στην ίδια διεύθυνση και οι αποστάσεις που ορίζονται απο τα άκρα τους είναι ίσες, μεταξύ τους. Την απόσταση αυτή καλούμε και μέτρο του διανύσματος. Τέλος κάθε σημείο παριστάνει το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ ή **0**. Σημειώνουμε εδώ ότι το μονοσήμαντα ορισμένο διάνυσμα μηδέν δεν έχει καθορισμένη διεύθυνση.

Γνωστά παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών στη Φυσική είναι η δύναμη, η επιτάχυνση,η ταχύτητα, η ένταση του μαγνητικού πεδίου κ.α.

Σημείωση : Το διάνυσμα, καθώς ορίστηκε παραπάνω, μπορεί να κινηθεί ελεύθερα στο χώρο αρκεί να παραμένει παράλληλο προς την αρχική του διεύθυνση. Στις εφαρμογές όμως, όπως π.χ. όταν αναπαριστάνουμε με διανύσματα φυσικές ποσότητες όπως η δύναμη , η ασάφεια αυτή πρέπει να απαλειφτεί. Έτσι για τον πλήρη ορισμό της δύναμης απαιτείται να είναι γνωστό και το σημείο εφαρμογής της.

1.2. Άθροισμα διανυσμάτων

Θεωρούμε δύο διανύσματα **A** και **B** (σχ. 1.2.1.(a)). Από το πέρας του **A** φέρουμε διάνυσμα παράλληλο προς το **B** (σχ.1.2.1.(b)). Τότε ορίζουμε ως άθροισμα των **A+B** το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του **A** και πέρας το πέρας του **B**. Τούτο συμβολίζουμε με **A+B**. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν από το πέρας του **B** φέρουμε διάνυσμα παράλληλο προς το **A** (1.2.1.a)



Σχήμα 1.2.1. Αθροιση δύο διανυσμάτων **A** *και* **B**. *Το άθροισμα είναι το* **A+B**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γεωμετρικά (βλέπε σχ. 1.2.2) εύκολα προκύπτει ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(i) Ισοδυναμία : Αν $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ και $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ τότε και

$$\mathbf{A}' + \mathbf{B}' = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad (1.2.1)$$

(ii) Μεταθετικότητα : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (1.2.2)

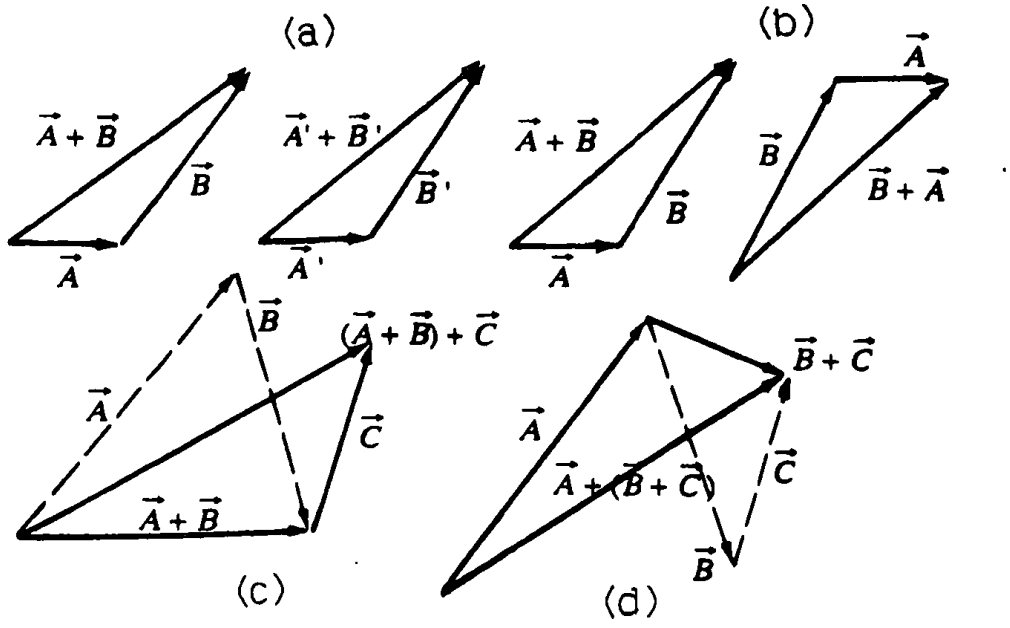
(iii)Προσεταιριστικότητα: $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A}+ (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (1.2.3)

δηλαδή οι παρενθέσεις περιττεύουν

(iv) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ για κάθε $\mathbf{A}$ (1.2.4)

((v) Για κάθε διάνυσμα **B** υπάρχει διάνυσμα **B**΄ τέτοιο ώστε $\mathbf{B} + \mathbf{B}' = \mathbf{0}$. Τότε το **B**΄ λέγεται <u>αντίθετο</u> του **B** και θα γράφουμε

$$\mathbf{B}' = -\mathbf{B} \qquad (1.2.5)$$



Σχήμα 1.2.2. Ιδιότητες διανυσμάτων.

1.3 Αφαίρεση διανυσμάτων

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα **B** και **B**΄ του ιδίου μέτρου. Ας υποθέσουμε ότι διατηρούμε το **B** σταθερό και υπολογίζουμε το $\mathbf{C} = \mathbf{B}+\mathbf{B}'$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό του **B΄**. Το μήκος του **C** προφανώς μεταβάλλεται. Για κάποια θέση του **B**, το **C** εκφυλίζεται σε σημείο. Τοτε προφανώς

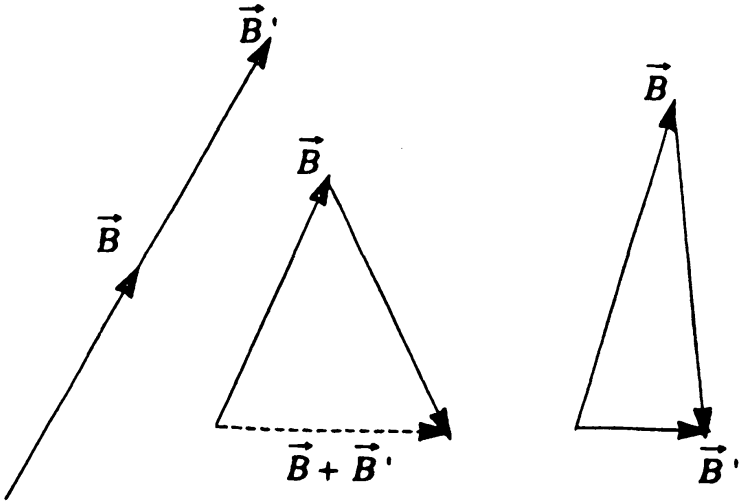
$$\mathbf{B} + \mathbf{B}' = \mathbf{0} \qquad (1.3.1)$$

λέμε τότε ότι το **B΄** είναι αντίθετο του **B** και γράφουμε **B΄ = −B**. Με άλλα λόγια τα διανύσματα **B** και **B΄** έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετο προσανατολισμό. Προφανώς το αντίθετο του **B** είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Η σχετική διαδικασία δείχνεται στο σχ. 1.3.1.

Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε την αφαίρεση του διανύσματος **B** απο ένα διάνυσμα **A**. Αυτό είναι ένα νέο διάνυσμα **C** το οποίο ορίζεται ως εξής :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \equiv \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (1.3.2)$$

δηλαδή η αφαίρεση ανάγεται σε πρόσθεση του αντίθετου.



Σχήμα 1.3.1. Αφαίρεση Διανυσμάτων

1.4. Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό.

Μέτρο ενός διανύσματος καλείται το μήκος αυτού, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που αντιστοιχεί σ'αυτό. Το μήκος ενός διανύσματος **A** συμβολίζεται με **|A|**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας θεωρήσουμε ένα διάνυσμα **A** και ένα πραγματικό αριθμο α. Το

$$\mathbf{C} = \alpha\,\mathbf{A}$$

είναι επίσης διάνυσμα με τις εξής ιδιότητες

i) $|\mathbf{C}| = |\alpha|\,|\mathbf{A}|$ (1.4.1)

ii) Τα διανύσματα **C** και **A** κείνται σε ευθείες παράλληλες.

Ιδιότητες:

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad (1.4.2)$$

$$(\alpha+\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \qquad (1.4.3)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{A} \qquad (1.4.4)$$

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B} \qquad (1.4.5)$$

Τότε μπορεί κανείς τυπικά να δείξει ότι

$$0\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

πραγματικά

$1\mathbf{A} = (1+0)\,\mathbf{A} = 1\mathbf{A} + 0\mathbf{A}$ (από την ιδιότητα (1.4.3))

οπότε

$\mathbf{A} = \mathbf{A} + 0\,\mathbf{A}$ (από την ιδιότητα (1.4.2))

'Από την ιδιότητα (1.2.4) προκύπτει ότι

$$0\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Επίσης η σχέση

$\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{0}$ (ιδιότητα (1.2.4))

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

συνεπάγεται

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{0}$$

θέτοντας $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$ έχουμε

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} + \alpha \mathbf{0}$$

δηλαδή $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Σύμφωνα με τα πιο πάνω για κάθε διάνυσμα $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ορίζεται το διάνυσμα $\hat{\mathbf{e}} = \alpha \mathbf{A}$ όπου $\alpha = 1/|\mathbf{A}|$.Τότε προφανώς

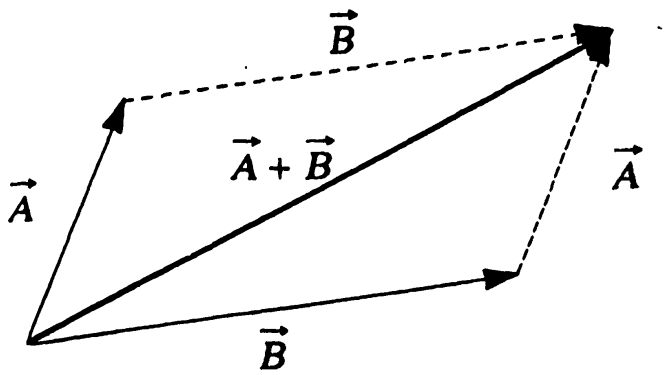
$$|\hat{\mathbf{e}}| = |\alpha|\,|\mathbf{A}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}|\mathbf{A}| = 1 \qquad (1.4.6)$$

δηλαδή το $\hat{\mathbf{e}}$ έχει μέτρο μονάδα. Ένα τέτοιο διάνυσμα λέγεται μοναδιαίο. Προφανώς ισχύει

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \text{ και } \mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\hat{\mathbf{e}}\,,\ |\mathbf{A}| \neq 0 \qquad (1.4.7)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα θα συμβολίζονται με $\hat{\mathbf{e}}$ ή άλλο σύμβολο με υπερκείμενο $\{\wedge\}$ ($\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{a}}$, κ.λ.π.)

Παράδειγμα 1.4.1 Να δειχθεί ότι το άθροισμα δύο διανυσμάτων με κοινή αφετηρία είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου το οποίο αυτά σχηματίζουν.



Σχήμα 1.4.1. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου το οποίο σχηματίζουν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

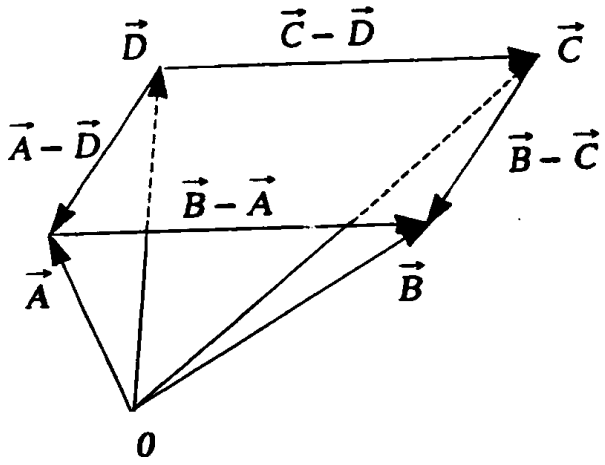
Λύση : Πραγματικά τούτο είναι προφανές από το σχ. 1.4.1, εφαρμόζοντας τον ορισμό του αθροίσματος όπως αναπτύχθηκε πιο πάνω. Ο κανόνας αυτός είναι γνωστός από το Λύκειο.

Παράδειγμα 1.4.2. Αν **A, B, C, D** είναι διανύσματα που έχουν κοινό σημείο αφετηρίας και αν **B –A = C –D ≠ 0** τότε το ABCD είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση : Πράγματι η σχέση **B – A =C –D** ορίζει ότι τα τμήματα BA και CD ίσα μέτρα και είναι παράλληλα. Η σχέση **B –A = C –D** μπορεί να γραφεί και ως εξής

B –C = A –D

που ορίζει ότι και τα τμήματα BC και AD είναι παράλληλα και ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς τα ABCD σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 1.4.2.

Παράδειγμα 1.4.3. Τα διανύσματα **F, C, D** και **E** κλείνουν ένα παραλληλεπίπεδο (σχ. 1.4.3). Να εκφραστεί το **C** συναρτήσει των υπολοίπων.

Λύση : Προφανώς

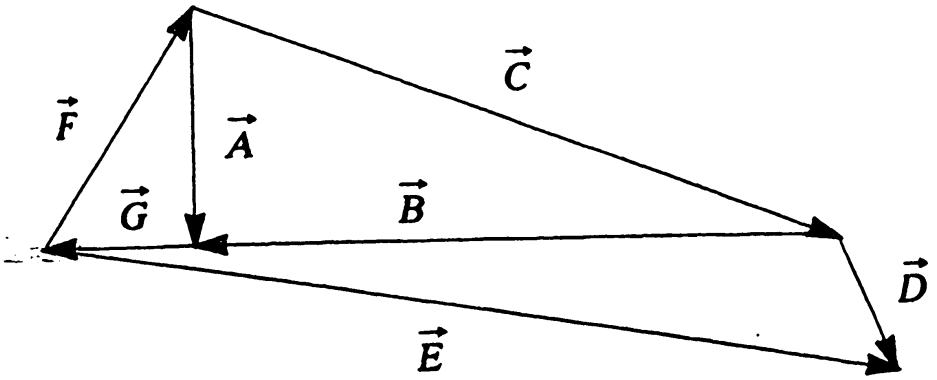
G =F +C ή **C = G–F**

G +D = E ή **G = E –D**

Αρα **C = E –D –F**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σημείωση : Ένας άλλος τρόπος για να λύσουμε τέτοιου είδους ασκήσεις είναι ο εξής: Παρατηρείστε πρώτα οτι τα διανύσματα **F**, **C**, **D**, **E**, αποτελούν το περίγραμμα ενός τετραπλεύρου. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την προφανή σχέση **E**=**C**+**D**+**F**



Σχήμα 1.4.3. Δείχνονται 4 διανύσματα που συγκροτούν τις κορυφές τετραπλεύρου

Το διάνυσμα **C** μπορεί να επιτευχθεί, ξεκινώντας απο το αρχικό του σημείο και πηγαίνοντας αντίθετα στη φορά του **F**, ομόρροπα με αυτή του **E** και αντίθετα αυτής του **D**. Άρα

$$\mathbf{C} = -\mathbf{F} + \mathbf{E} - \mathbf{D}$$

Παράδειγμα 1.4.4. Έστω $|\mathbf{A}| = 3$ και $-3 \le \alpha \le 2$.

Τι συμπεραίνετε για τις τιμές των $|\alpha\,\mathbf{A}|$, $|(1/\alpha)\,\mathbf{A}|$;

Λύση :

i) $-3 \le \alpha \le 2 \Rightarrow |\alpha| \le 3$

$|\alpha\mathbf{A}| = |\alpha|\,|\mathbf{A}| \le 3|\mathbf{A}| \le 9$

ii) $-3 \le \alpha \le 2 \Rightarrow \dfrac{1}{|\alpha|} \ge \dfrac{1}{3}$,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|\mathbf{A}/\alpha| = \frac{1}{|\alpha|}|\mathbf{A}| \geq \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

Παράδειγμα 1.4.5. Αν **A** και **B** είναι δύο μη-παράλληλα συνεπίπεδα διανύσματα, τότε κάθε διάνυσμα **C** που βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα **A** και **B** μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός τους δηλ.

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B}$$

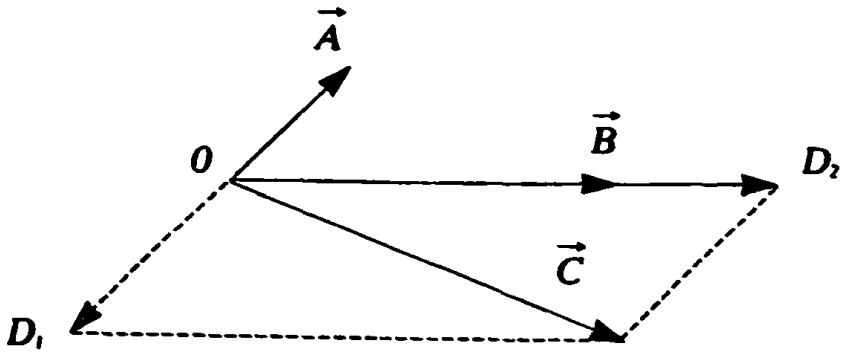
Λύση : Αρκεί να θεωρήσουμε δύο διανύσματα **A** και **B** που έχουν κοινό σημείο αφετηρίας Ο, καθώς και ένα τυχαίο διάνυσμα **C** με το ίδιο σημείο εφαρμογής Ο (σχήμα 1.4.4). Χαράσσουμε απο την κορυφή του **C** τις ευθείες CD_1 και CD_2 παράλληλες στα **B** και **A** αντίστοιχα Είναι:

$$\mathbf{OC} \equiv \mathbf{C} = \mathbf{OD}_1 + \mathbf{OD}_2$$

όμως $\mathbf{OD}_1$ συγγραμμικό με **A** και $\mathbf{OD}_2$ με **B**. Συνεπώς

$$\mathbf{OD}_1 = \alpha\,\mathbf{A} \text{ και } \mathbf{OD}_2 = \beta\,\mathbf{B}$$

Άρα $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B}$



Σχήμα 1.4.4. Το διάνυσμα **C** *είναι γραμμικός συνδυασμός των* **A**,**B**.

Τα α και β είναι αριθμοί μονοσήμαντα ορισμένοι. Πραγματικά έστω ότι υπάρχουν και οι α', β' για τους οποίους ισχύει

$$\mathbf{C} = \alpha'\mathbf{A} + \beta'\,\mathbf{B}$$

Τότε αφαιρώντας έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{C} - \mathbf{C} \equiv \mathbf{0} = (\alpha - \alpha')\,\mathbf{A} + (\beta - \beta')\,\mathbf{B}$$

ή $$(\alpha - \alpha')\,\mathbf{A} = -(\beta - \beta')\,\mathbf{B}$$

Επειδή όμως **A** και **B** δεν είναι παράλληλα πρέπει

$$\alpha - \alpha' = 0 \;\&\; \beta - \beta' = 0 \rightarrow \alpha = \alpha' \;\&\; \beta = \beta'$$

Το θεώρημα αυτό είναι πολύ βασικό.

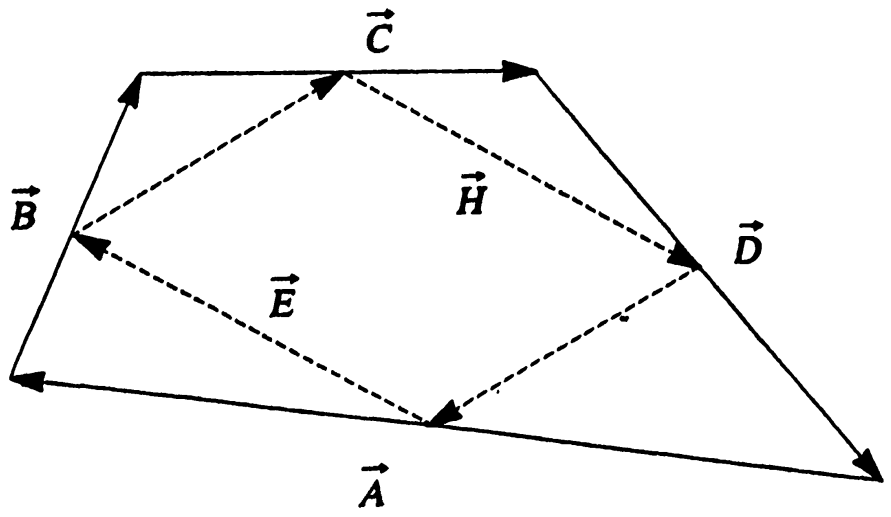
Παράδειγμα 1.4.6. . Να δειχτεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετράπλευρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

Λύση : Έστω το τετράπλευρο του σχ. 1.4.5. Αναπαριστούμε τις πλευρές του με διανύσματα **A**, **B**, **C** και **D** που το σημείο αφετηρίας του καθενός συμπίπτει με το τελικό του προηγουμένου. Τότε

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

ή $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = -(\mathbf{C} + \mathbf{D})$$

ή $$\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{D})$$



Σχήμα 1.4.5. Τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όμως (1/2) (**A** + **B**) = **E** και (1/2) (**C** + **D**) = **H** (βλέπε σχ. 1.4.5), όπου **E**,**H** είναι οι δύο απέναντι πλευρές του μικρού τετράπλευρου που σχηματίζεται απο τα μέσα των πλευρών του αρχικού. Συνεπώς **E** = – **H**, άρα **E**||**H**. Όμοια **G** =– **F** δηλαδή **G**||**F** ο.ε.δ.

1.5. Καρτεσιανές συντεταγμένες

Μέχρι στιγμής έχουμε αναπαραστήσει το διάνυσμα ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Είναι χρήσιμο να αναπτύξουμε έναν ισοδύναμο αλγεβρικό τρόπο μελέτης των διανυσμάτων ο οποίος θα διευκολύνει πολύ τη μελέτη μερικών ιδιότητων και εφαρμογών τους.

1.5.1. Ανάλυση διανύσματος σε ορθογώνια βάση.

Ας θεωρήσουμε τυχόν διάνυσμα **A** και ένα σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 το οποίο έχει ως αρχή την αρχή Ο του **A** (βλέπε σχ. 1.5.1). Από το πέρας Ρ του **A** φέρουμε κάθετη στον άξονα x_3 και έστω P_3 το σημείο της τομής. Φέρουμε επίσης κάθετη στο επίπεδο x_1 Ο x_2 και έστω Q το σημείο τομής με το επίπεδο. Ύστερα από το Q φέρουμε κάθετες στους άξονες x_1 και x_2 και έστω P_1 και P_2 τα σημεία τομής. Οι OP_1, OP_2 και OP_3 λέγονται προβολές του διανύσματος **A** πάνω στους άξονες x_1, x_2 και x_3. Αν A_1=(OP_1), A_2 = (OP_2) και A_3 = (OP_3) υπάρχει μια προς μια αντιστοιχία μεταξύ του διανύσματος **A** και των προβολών του A_1, A_2 και A_3. Έτσι γράφουμε

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

δηλαδή το διάνυσμα **A** αντιστοιχεί σε μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών A_1, A_2 και A_3.Οι πραγματικοί αριθμοί A_1,A_2,A_3 καλούνται συνιστώσες του **A** και εξαρτώνται απο το συγκεκριμμένο σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεχθεί. Ανάλυση του διανύσματος **A** σε άλλο σύστημα συντεταγμένων (x_1',x_2',x_3') σημαίνει και αναπαράσταση του **A** απο διαφορετική τριάδα διατεταγμένων αριθμών (A_1',A_2',A_3') δηλαδή

$$\mathbf{A} = (A_1', A_2', A_3')$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τρία μοναδιαία διανύσματα $\hat{\imath}_1$, $\hat{\imath}_2$, και $\hat{\imath}_3$ κατά μήκος αντίστοιχα των αξόνων x_1, x_2 και x_3. Τότε προφανώς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\hat{x}_1 = (1,0,0),\ \hat{x}_2 = (0,1,0),\ \hat{x}_3 = (0,0,1) \qquad (1.5.1)$$

Επίσης

$$\mathbf{OP}_1 = A_1\hat{x}_1, \mathbf{OP}_2 = A_2\hat{x}_2, \mathbf{OP}_3 = A_3\hat{x}_3$$

αλλά

$$\mathbf{OP}_1 = (A_1,0,0),\ \mathbf{OP}_2 = (0,A_2,0),\ \mathbf{OP}_3 = (0,0,A_3)$$

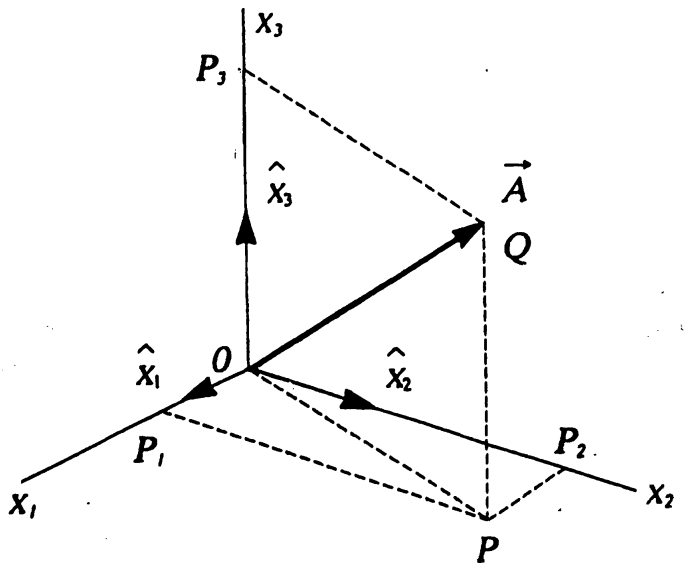
δηλαδή

$$(A_1,0,0) = A_1(1,0,0)$$

$$(0,A_2,0) = A_2(0,1,0)$$

$$(0,0,A_3) = A_3(0,0,1)$$

Επίσης $\mathbf{0} = (0,0,0)$



Σχήμα 1.5.1 Συνιστώσες διανύσματος.

Σύμφωνα με τα γραφόμενα στο εδάφιο 1.2.,

$$\mathbf{A} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 + \mathbf{OP}_3 = \mathbf{OP}'_1 + \mathbf{OP}'_2 + \mathbf{OP}'_3 \qquad (1.5.2)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{\imath}_1 + A_2 \hat{\imath}_2 + A_3 \hat{\imath}_3 \qquad (1.5.3a)$$

$$\mathbf{A} = A_1' \hat{\imath}_1' + A_2' \hat{\imath}_2' + A_3' \hat{\imath}_3' \qquad (1.5.3b)$$

Όμως για δεδομένο σύστημα $\hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2, \hat{\imath}_3$, οι προβολές ενός διανύσματος είναι μονοσήμαντα ορισμένες. Πραγματικά έστω ότι:

$$\mathbf{A} = A_1\hat{\imath}_1 + A_2 \hat{\imath}_2 + A_3\hat{\imath}_3 = \tilde{A}_1 \hat{\imath}_1 + \tilde{A}_2\hat{\imath}_2 + \tilde{A}_3\hat{\imath}_3$$

Τότε: $\mathbf{A}-\mathbf{A} = \mathbf{0} \rightarrow (A_1 - \tilde{A}_1)\hat{\imath}_1 + (A_2 - \tilde{A}_2)\hat{\imath}_2 + (A_3 - \tilde{A}_3)\hat{\imath}_3 = \mathbf{0}$

Επειδή το μηδενικό διάνυσμα είναι μονοσήμαντα ορισμένο και έχει προβολές μηδέν έχουμε

$$A_1=\tilde{A}_1, \quad A_2=\tilde{A}_2, \quad A_3=\tilde{A}_3$$

Έστω τώρα δύο διανύσματα **A** και **B**. Έστω ότι σε ένα σύστημα $\hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2, \hat{\imath}_3$ έχουμε

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{\imath}_1 + A_2 \hat{\imath}_2 + A_3\hat{\imath}_3, \quad \mathbf{B} = B_1 \hat{\imath}_1 + B_2 \hat{\imath}_2 + B_3 \hat{\imath}_3$$

Τότε $\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_1+B_1) \hat{\imath}_1 + (A_2+B_2) \hat{\imath}_2 + (A_3+B_3) \hat{\imath}_3 \qquad (1.5.4)$

δηλαδή διατυπώνουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα: **Το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα που έχει προβολές το άρθοισμα των προβολών των διανυσμάτων αυτών.**

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι τετριμένη:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_1\hat{\imath}_1 + A_2 \hat{\imath}_2 + A_3 \hat{\imath}_3) + (B_1 \hat{\imath}_1 + B_2 \hat{\imath}_2 + B_3 \hat{\imath}_3)$$

$$= (A_1\hat{\imath}_1 + B_1\hat{\imath}_1) + (A_2 \hat{\imath}_2 + B_2 \hat{\imath}_2) + (A_3 \hat{\imath}_3 + B_3 \hat{\imath}_3)$$

αλλά $(A_1+B_1) \hat{\imath}_1 = A_1 \hat{\imath}_1 + B_1 \hat{\imath}_1$ κ.λ.π. (ιδιότητα (1.4.5)) κατά συνέπεια εύκολα προκύπτει η εξ. (1.5.4).

Από το σχ. 1.5.1 χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θέωρημα βρίσκουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\mathbf{OP})^2 = (\mathbf{OP}_1)^2 + (\mathbf{OP}_2)^2 + (\mathbf{OP}_3)^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

ή $$|\mathbf{A}|^2 = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \qquad (1.5.5)$$

ή $$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \qquad (1.5.6)$$

Προφανώς

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{A'^2_1 + A'^2_2 + A'^2_3} \qquad (1.5.7)$$

που εκφράζει την προφανή (γεωμετρικά) ιδιότητα ότι το μέτρο του διανύσματος είναι ανεξάρτητο της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων.

Από τη σχέση (1.5.5) έχουμε

$$\left(\frac{A_1}{|\mathbf{A}|}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{|\mathbf{A}|}\right)^2 + \left(\frac{A_3}{|\mathbf{A}|}\right)^2 = 1 \qquad (1.5.8)$$

ή αν ορίσουμε $\cos\alpha_i = \frac{A_i}{|\mathbf{A}|}$, τότε:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 \qquad (1.5.9)$$

Οι ποσότητες $\frac{A_i}{|\mathbf{A}|} = \cos\alpha_i$ ορίζουν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος **A** ως προς δεδομένο σύστημα συντεταγμένων (βλέπε σχ. 1.5.2). Τα συνημίτονα κατεύθυνσης όπως και οι συνιστώσες ενός συγκεκριμμένου διανύσματος εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς ενώ το μέτρο $|\mathbf{A}|$ του διανύσματος παραμένει πάντα το ίδιο σε όλα τα συστήματα.

Πριν τελειώσουμε το εδάφιο αυτό σημειώνουμε ότι θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως διάνυσμα **A** μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών (A_1, A_2, A_3) με τις **ιδιότητες**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

i) $\mathbf{A} = (A_1,A_2,A_3)$

ii) $\alpha\mathbf{A} = (\alpha A_1,\alpha A_2,\alpha A_3)$

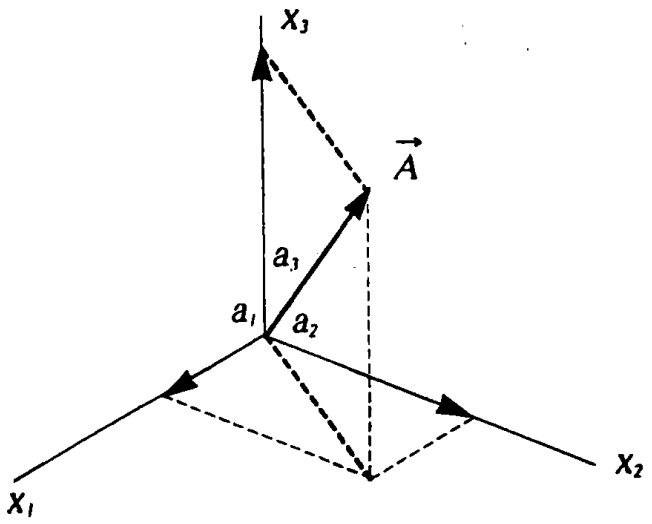
iii) $\mathbf{0} = (0,0,0)$

iv) αν $\mathbf{A}= (A_1,A_2,A_3)$ και $\mathbf{B}= (B_1,B_2,B_3)$ τότε (1.5.10)

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_1,A_2,A_3) + (B_1,B_2,B_3) \equiv (A_1+B_1,A_2+B_2,A_2+B_3)$$

v) $|\mathbf{A}| = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$

τότε μπορεί κανείς να αποδείξει όλες τις ιδιότητες των διανυσμάτων τις οποίες συνάγαμε γεωμετρικά.



Σχ. 1.5.2. Τα συνημίτονα κατεύθυνσης $\cos a_i$, $i = 1,2,3$ ενός διανύσματος ως προς τρεις άξονες x_1,x_2,x_3.

Παράδειγμα 1.5.1.

Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων,

$$\mathbf{A} = 2\hat{e}_1+2\hat{e}_2-\hat{e}_3, \mathbf{B} = 3\hat{e}_1+4\hat{e}_2, \mathbf{C} = \hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3$$

και τα μοναδιαία διανύσματα που έχουν τις ίδιες διευθύνσεις με τα **A, B, C.**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

$|\mathbf{A}| = \sqrt{4+4+1} = 3,\ |\mathbf{B}| = \sqrt{9+16} = 5,\ |\mathbf{C}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\hat{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{3}(2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3)$

$\hat{e}_B = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{5}(3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2)$

$\hat{e}_C = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$

Παράδειγμα 1.5.2.

Να βρεθούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης των διανυσμάτων

$\mathbf{A} = 2\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3$, $\mathbf{B} = 3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2$, $\mathbf{C} = \hat{e}_1$

Λύση :

$|\mathbf{A}| = \sqrt{4+4+1} = 3,\ |\mathbf{B}| = \sqrt{9+16} = 5,\ |\mathbf{C}| = 1$

$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{|\mathbf{A}|} = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha_2 = -\frac{2}{3}$, $\cos\alpha_3 = \frac{1}{3}$

$\cos\beta_1 = \frac{B_1}{|\mathbf{B}|} = \frac{3}{5}$, $\cos\beta_2 = \frac{4}{5}$, $\cos\beta_3 = 0$

$\cos\gamma_1 = \frac{C_1}{|\mathbf{C}|} = 1$, $\cos\gamma_2 = 0$, $\cos\gamma_3 = 0$

Παράδειγμα 1.5.3.

Πόσα μοναδιαία διανύσματα μπορείτε να κατασκευάστε που έχουν $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 1/2$;

Να δειχθούν σε διάγραμμα.

Λύση :

Σύμφωνα και με το παράδειγμα 1.5.1, οι συνιστώσες μοναδιαίου διανύσματος ταυτίζονται με τα συνημιτονα κατεύθυνσης. Συνεπώς από την (1.5.9) έχουμε

$$\cos^2 a_3 = 1 - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,,\ \cos a_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

'Αρα είναι τα

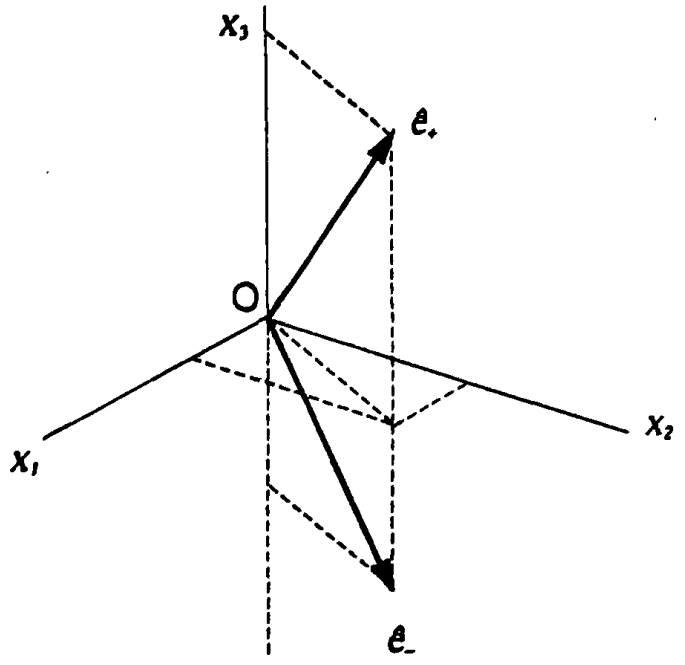
$$\hat{e}_+ = \frac{1}{2}\hat{e}_1 + \frac{1}{2}\hat{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_3$$

$$\hat{e}_- = \frac{1}{2}\hat{e}_1 + \frac{1}{2}\hat{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_3$$

όπως απεικονίζονται στο σχήμα (1.5.3) της επομένης σελίδας.

Παράδειγμα 1.5.4.

Διάνυσμα **A** με μέτρο 10 μονάδες σχηματίζει ίσες γωνίες με τους τρείς άξονες ορθογωνίου συστήματος. Να βρεθούν τα A_1, A_2 και A_3.



Σχήμα 1.5.3 Τα επιτρεπτά μοναδιαία διανύσματα με συνημίτονα κατεύθυνσης $\cos a_1 = \cos a_2 = 1/2$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 \equiv \cos\alpha_i \rightarrow$$

$$3\cos^2\alpha_i = 1 \rightarrow \cos\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\alpha_i = \frac{A_i}{|\mathbf{A}|} \Rightarrow A_i = |\mathbf{A}|\cos\alpha_i = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 = A_3 = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Παράδειγμα 1.5.5.

Η μετατόπιση ενος σωματίου ορίζεται ως η διαφορά του διανύσματος της αρχικής απο το διάνυσμα της τελικής θέσης του. Έστω λοιπόν ότι η θέση ενός σωμάτιου σε κατάλληλες μονάδες σε χρόνο t καθορίζεται απο το διάνυσμα

$$\mathbf{R} = 3\hat{e}_1 + 4t^2\,\hat{e}_2 - t^3\,\hat{e}_3$$

Να βρεθεί η μετατόπιση κατά το χρονικό διάστημα t = [1,3]

Λύση :

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = 4\,(9-1)\,\hat{e}_2 - (27-1)\,\hat{e}_3$$

$$= 2\,(\,16\,\hat{e}_2 - 13\,\hat{e}_3\,)$$

Παράδειγμα 1.5.6.

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος *n* - σωματίων ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2 + \ldots + m_n\mathbf{R}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_i\mathbf{R}_i}{\sum m_i}$$

όπου το σωμάτιο m_i βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}_i$. Δείξτε ότι η "ασυμμετρία μάζας" του συστήματος στο κέντρο μάζας είναι μηδέν.

Ως ασυμμετρία μάζας (ο αντίστοιχος όρος στην Αγγλική είναι mass unbalance) του συστήματος ορίζεται το διάνυσμα

$$\mathbf{R}_{MA} = m_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}) + m_2(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}) + \ldots + m_n(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{R}_i - \mathbf{R})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

Έχουμε

$$\mathbf{R}_{MA}(\text{c.m.}) = \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{R}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{R}_{cm}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{R}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{R}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{R}_j - \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{R}_i = 0$$

1.6 Η Διανυσματική Εξίσωση της Ευθείας

Έστω $\mathbf{R}_o$ είναι ένα συγκεκριμμένο διάνυσμα θέσης με συντεταγμένες x^0_1, x^0_2, x^0_3. Ζητούμε να βρούμε τις εξισώσεις μίας ευθείας που διέρχεται απο το σημείο x^0_1, x^0_2, x^0_3 και είναι παράλληλη σε δοσμένο διάνυσμα

$$\mathbf{A} = a_1 \hat{\imath}_1 + a_2 \hat{\imath}_2 + a_3 \hat{\imath}_3 \qquad (1.6.1)$$

Έστω **R** το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου (x_1, x_2, x_3). Σχηματίζουμε τότε το διάνυσμα της διαφοράς $\mathbf{R} - \mathbf{R}_o$ (βλέπε σχήμα 1.6.1). Το τελευταίο, κειται σε ευθεία που διέρχεται απο το σημείο (x^0_1, x^0_2, x^0_3). Αν θέλουμε η ευθεία αυτή να είναι παράλληλη ως προς το διάνυσμα **A**, αρκεί το $\mathbf{R} - \mathbf{R}_o$ να είναι παράλληλο ως προς το **A**. Συνεπώς το $\mathbf{R} - \mathbf{R}_o$ πρέπει να είναι ανάλογο του **A**:

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_o = t\,\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}_o + \mathbf{A}\,t \qquad (1.6.2)$$

όπου t, η σταθερά αναλογίας. Γράφοντας την τελευταία ως προς τις συνιστώσες έχουμε : $x_i = x^0_i + a_i t$, ή αναλυτικά :

$$x_1 = x^0_1 + a_1 t\,,\; x_2 = x^0_2 + a_2 t\,,\; x_3 = x^0_3 + a_3 t \qquad (1.6.3)$$

Οι εξισώσεις (1.6.3.) καλούνται παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας και η μεταβλητή t καλείται παράμετρος. Στο βαθμό που αφορά την εξίσωση της ευθείας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

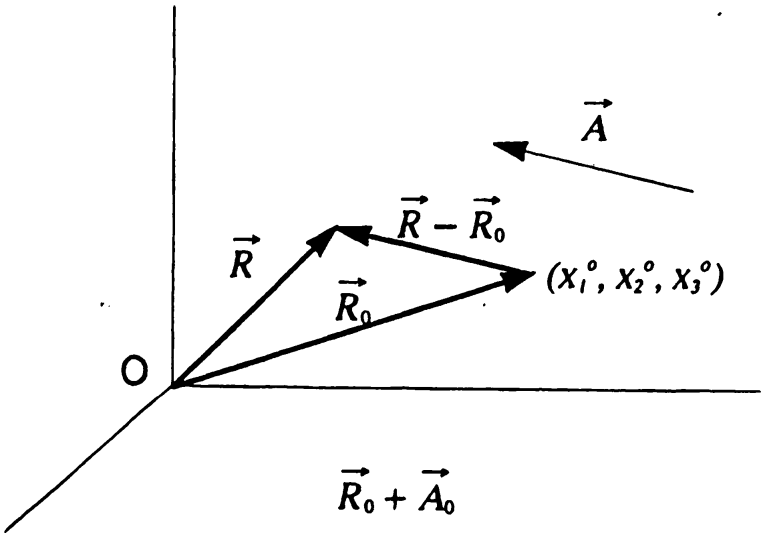
η παράμετρος t μπορεί να αντικατασταθεί με οποιαδήποτε άλλη βαθμωτή συνάρτηση του t με τιμές στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Η μορφή της συνάρτησης αυτής δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Αν η μεταβλητή t παίρνει συνεχείς τιμές σε ένα υποσύνολο του R το προκύπτον ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα τμήμα της ευθείας (1.6.2). Ιδιαίτερα αν

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{A}\, t^2,\ t \in (-\infty, +\infty) \qquad (1.6.4)$$

η (1.6.4) είναι ημιευθεία διερχόμενη απο το $\mathbf{R}_0$ και παράλληλη ως προς το **A**, δηλαδή είναι η μισή της προηγούμενης, διότι η συνάρτηση $f(t)=t^2$ παίρνει μόνο θετικές τιμές. Επίσης η

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{A}\ \text{sint}\ ,\ -\infty < t < \infty \qquad (1.6.5)$$

παριστάνει ένα ευθύγραμμο τμήμα που εκτείνεται απο $\mathbf{R}_0 - \mathbf{A}$ μέχρι το $\mathbf{R}_0 + \mathbf{A}$ (βλέπε σχήμα 1.6.2) διότι $|\text{sint}| \leq 1$.



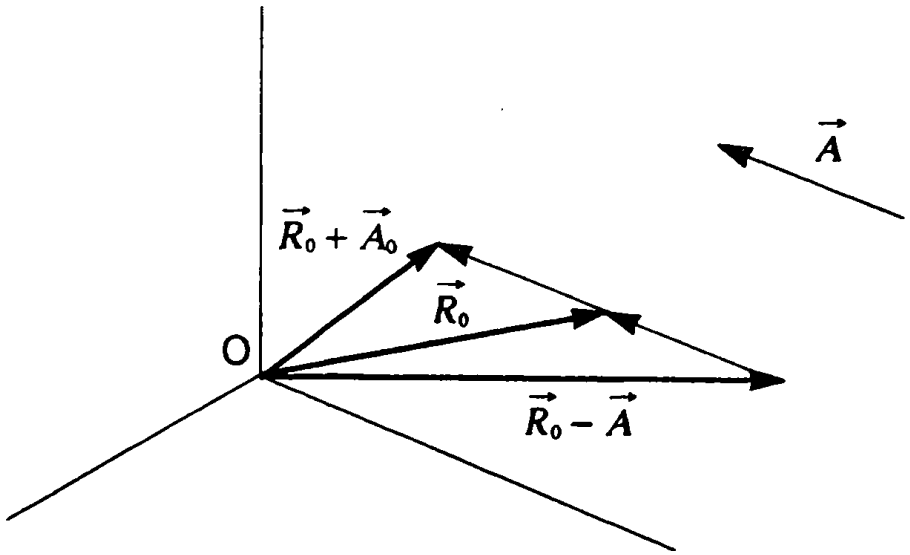
Σχήμα 1.6.1. Το διάνυσμα $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{A}t$ *έχει πέρας που κείται στην ευθεία που περνάει από το* (x^0_1, x^0_2, x^0_3) *και είναι παράλληλη στο διάνυσμα* **A**.

Τα παραπάνω γίνονται κατανοητά αν γράψουμε την εξίσωση της ευθείας στη μη παραμετρική της μορφή. Αυτό γίνεται απαλείφοντας την παράμετρο t από τις (1.6.3). Τότε με την προϋπόθεση ότι $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{x_1 - x^0_1}{a_1} = \frac{x_2 - x^0_2}{a_2} = \frac{x_3 - x^0_3}{a_3} \qquad (1.6.6)$$

Απο φυσική σκοπιά η παράμετρος t έχει ιδιαίτερη σημασία και εξαρτάται από το φυσικό πρόβλημα. Έτσι αν t είναι ο χρόνος, τότε οι εξισώσεις (1.6.2 - 1.6.5) περιγράφουν τελείως διαφορετικά συστήματα. Στην (1.6.2) ένα σώμα κινείται απο το $-\infty$ μέχρι το ∞, στην (1.6.4) από το (x^0_1, x^0_2, x^0_3) μέχρι το άπειρο, ενώ στην (1.6.5) εκτελεί ταλάντωση σε πεπερασμένο διάστημα. Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των κινήσεων αυτών είναι ότι γίνονται παράλληλα στο **A** και διέρχονται από το σημείο (x^0_1, x^0_2, x^0_3).



Σχήμα 1.6.2. Δείχνεται το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{A} \sin t$.

Παράδειγμα 1.6.1

Να βρεθεί (εφόσον υπάρχει) το σημείο τομής των δυο ευθειών

$$\mathbf{R} = 3\,\mathbf{i}_1 + 2\,\mathbf{i}_2 + (2\,\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)\,t$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}_1 - 2\,\mathbf{i}_3 + (\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)\,t$$

καθώς και η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

Έστω ότι τέμνονται στο σημείο $\mathbf{R}_\tau = r_1 \hat{\imath}_1 + r_2 \hat{\imath}_2 + r_3 \hat{\imath}_3$. Τότε επειδή το σημείο τομής κείται στην πρώτη ευθεία, έχουμε τις εξισώσεις

$$\frac{r_1 - 3}{2} = \frac{r_2 - 2}{1} = \frac{r_3}{1}$$

Εφόσον τέμνονται τότε ανήκει και στη δεύτερη, άρα

$$r_1 - 1 = 0 \, , \, r_2 = 2 + r_3$$

Έχουμε τέσσερεις εξισώσεις με τρείς αγνώστους. Το σύστημα είναι συμβιβαστό και έχει τη λύση

$$r_1 = 1, \, r_2 = 1, \, r_3 = -1$$

Συνεπώς υπάρχει σημείο τομής και είναι το

$$\mathbf{R}_\tau = \hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$$

Για να απαντήσουμε το δεύτερο ερώτημα, διαπιστώνουμε ότι οι αρχικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0' = (2 \hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3) t$$

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0'' = (\hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3) t$$

Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες ως προς τα $\mathbf{A}_1 = 2\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$ και $\mathbf{A}_2 = \hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$ αντίστοιχα. Συνεπώς η γωνία μεταξύ τους είναι (βλέπε σχέση (1.7.3) πιο κάτω)

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Παράδειγμα 1.6.2

Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα παράλληλα στην ευθεία που ορίζουν οι εξισώσεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{r_1+1}{3} = \frac{r_2+2}{4}, \; r_3 = 9$$

Λύση :

Προφανώς η ευθεία κείται στο επίπεδο x_1Ox_2. Από την εξίσωση της ευθείας, εύκολα βλέπουμε ότι το διάνυσμα $3\hat{\imath}_1 + 4\hat{\imath}_2$ είναι παράλληλο αυτής. Τότε τα μοναδιαία διανύσματα είναι

$$\hat{A} = \pm\frac{1}{5}(3\hat{\imath}_1 + 4\hat{\imath}_2)$$

Παράδειγμα 1.6.3.

Έστω δύο σημεία Α, Β με διανύσματα θέσης **A** και **B**. Να δειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α και Β, μπορεί να παρασταθεί απο την εξίσωση

$$\mathbf{R} = \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B}\,, \; \alpha+\beta = 1$$

Λύση :

Προφανώς η ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα **B** – **A** και περνάει από τα σημεία Α και Β.

Άρα $\mathbf{R} = \mathbf{A} + (\mathbf{B}-\mathbf{A})\,t = (1-t)\,\mathbf{A} + t\,\mathbf{B}$

δηλαδή $\alpha = 1-t$, $\beta = t$, οπότε $\alpha+\beta = 1$

1.7 Βαθμωτό (Εσωτερικό) Γινόμενο

Αν μας δοθούν δύο διανύσματα μπορούμε σ' αυτά να προσαρτήσουμε μονοσήμαντα ένα πραγματικό αριθμό, το βαθμωτό γινόμενο. Ως βαθμωτό ή εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **A** και **B** ονομάζεται αριθμός που συμβολίζεται $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ και ορίζεται ως εξής

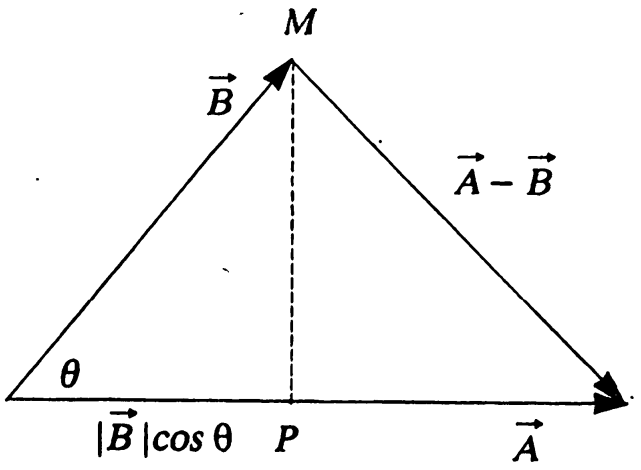
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (1.7.1)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των **A** και **B**. Προφανώς το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό δηλαδή

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν ένα από τα δύο διανύσματα **A**, **B** είναι μηδέν τότε και το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν. Είναι όμως δυνατό να έχουμε **A**·**B** = 0 ακόμη και όταν |**A**| ≠ 0, |**B**| ≠ 0. Τούτο συμβαίνει αν cosθ =0, δηλαδή όταν τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, (θ=π/2).



Σχήμα 1.7.1 Οι προβολές του διανύσματος **B**–**A** *είναι* |**B**|sinθ και |**A**|– |**B**| *cosθ.*

Μια άλλη ισοδύναμη, αλλά πολλές φορές πιο χρήσιμη περιγραφή του βαθμωτού γινομένου **A**·**B**, δίνεται μέσω των συνιστωσών των δύο διανυσμάτων. Προς τούτο σχηματίζουμε το διάνυσμα **A**-**B** (σχήμα 1.7.1) και παρατηρούμε ότι

$$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 = (A_1-B_1)^2 +(A_2-B_2)^2 + (A_3 -B_3)^2 =$$

$$= (A_1^2 +A_2^2 +A_3^2) +(B_1^2 +B_2^2 +B_3^2) - 2 (A_1B_1+A_2B_2 +A_3B_3)$$

ή $$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 = |A|^2 +|B|^2 - 2 (A_1B_1 +A_2B_2 +A_3B_3) \qquad (1.7.2a)$$

Από το σχήμα 1.7.1, έχουμε επίσης ότι

$$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 = (\mathbf{MP})^2 +(\mathbf{PN})^2 = (|\mathbf{B}|\sin\theta)^2 +(|\mathbf{A}|- |\mathbf{B}|\cos\theta)^2 \Rightarrow$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2\,|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (1.7.2b)$$

εξισώνοντας τα δεύτερα μελή των (1.7.2a) και (1.7.2b) έχουμε

$$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \qquad (1.7.3)$$

Συνεπώς απο τις (1.7.1) και (1.7.3) βρίσκουμε

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \qquad (1.7.4)$$

Προφανώς αν A_i' και B_i' οι προβολές των **A** και **B** σε κάποιο άλλο σύστημα συντεταγμένων έχουμε

$$\sum_i A_i' B_i' = \sum_i A_i B_i$$

Από τις σχέσεις (1.7.1) και (1.7.4.) μπορεί να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζουν δύο δεδομένα διανύσματα

Παράδειγμα 1.7.1.

Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο και η γωνία τομής θ των διανυσμάτων

$$\mathbf{A} = 2\,\hat{\imath}_1 + 2\,\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3\,,\quad \mathbf{B} = 3\,\hat{\imath}_1 + 4\,\hat{\imath}_2$$

Λύση :

Από τη σχέση (1.7.4) έχουμε

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 2\cdot3 + 2\cdot4 + (-1)\cdot0 = 14$$

επίσης $|\mathbf{A}| = \sqrt{4+4+1} = 3$, $|\mathbf{B}| = \sqrt{9+16} = 5$

Από την σχέση (1.7.3)

$$\cos\theta = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|} = \frac{14}{3.5} = \frac{14}{15}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{14}{15}\right) \approx 21.04^\circ$$

Οι παρακάτω ιδιότητες

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (1.7.5a)$$

$$(\kappa\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \kappa\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \lambda\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} \qquad (1.7.5b)$$

αποτελούν μια απλή συνέπεια των εξ. (1.7.1) και (1.7.4) αντίστοιχα.

Σημειώστε επίσης ότι το μέτρο ενός διανύσματος **A** είναι η τετραγωνική ρίζα του βαθμωτού γινομένου με τον εαυτό του. Απο την (1.7.4)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = |\mathbf{A}|^2 \qquad (1.7.5c)$$

Τέλος, οι συνιστώσες ενός διανύσματος ως προς τους άξονες ενός συστήματος μπορούν να εκφραστούν ως εσωτερικά γινόμενα του διανύσματος με το μοναδιαίο διάνυσμα του αντίστοιχου άξονα. Δηλαδή

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\hat{\imath}_1)\,\hat{\imath}_1 + (\mathbf{A}\cdot\hat{\imath}_2)\,\hat{\imath}_2 + (\mathbf{A}\cdot\hat{\imath}_3)\,\hat{\imath}_3 \qquad (1.7.6)$$

Πράγματι

$$\mathbf{A}\cdot\hat{\imath}_1 = (A_1\hat{\imath}_1 + A_2\hat{\imath}_2 + A_3\hat{\imath}_3)\cdot\hat{\imath}_1$$

$$= A_1\hat{\imath}_1\cdot\hat{\imath}_1 + A_2\hat{\imath}_2\cdot\hat{\imath}_1 + A_3\hat{\imath}_3\cdot\hat{\imath}_1 = A_1$$

διότι $\hat{\imath}_2\cdot\hat{\imath}_1 = \cos(\hat{\imath}_2, \hat{\imath}_1) = 0$ και $\hat{\imath}_3\cdot\hat{\imath}_1 = 0$, ενώ:

$$\hat{\imath}_1\cdot\hat{\imath}_1 = \hat{\imath}_2\cdot\hat{\imath}_2 = \hat{\imath}_3\cdot\hat{\imath}_3 = 1$$

Γράφουμε

$$\hat{\imath}_i\cdot\hat{\imath}_j = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases} \qquad (1.7.7)$$

Διανύσματα τα οποία είναι αμοιβαία ορθογώνια και έχουν μέτρο ίσο με μονάδα λέγονται <u>ορθοκανονικά</u>.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

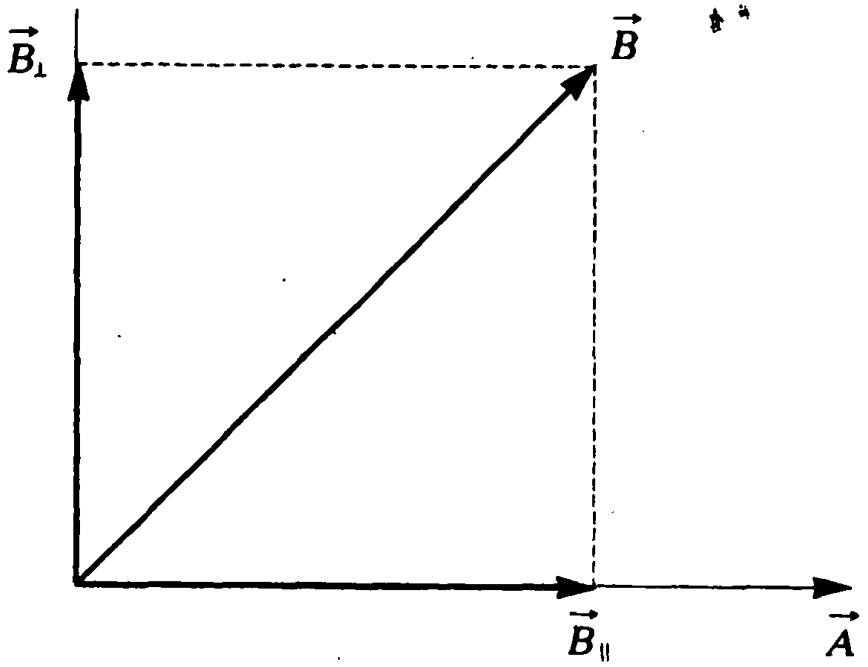
Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω ιδιότητες των $\hat{x}_i$, $\hat{x}_j$ και των εξ. (1.7.5b) μπορεί αλγεβρικά να προκύψει η εξ. (1.7.4).

Παράδειγμα 1.7.2.

Δίνονται δύο μη παράλληλα διανύσματα **A** και **B**. Να αναλυθεί το **B** σε δύο συνιστώσες μία παράλληλη και μία κάθετη στο **A**.

Λύση :

Αρκεί να θεωρήσουμε διανύσματα με κοινή αρχή όπως στο σχήμα (1.7.2.)



Σχήμα 1.7.2. Ανάλυση του **B** *σε μια συνιστώσα παράλληλη στο* **A** *και μία κάθετη στο* **A**.

Τότε η παράλληλη συνιστώσα του **B** ως προς το **A** είναι η προβολή του **B** στο **A**. Έχει μέτρο $|\mathbf{B}|\cos\theta$ και διεύθυνση αυτή του **A**. Αν πολλαπλασιάσουμε το μέτρο αυτό με το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του **A**, που μπορεί να γραφεί $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$, βρίσκουμε

$$\mathbf{B}_\parallel = (|\mathbf{B}| \cos\theta) \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

'Ομως από την (1.7.3) $\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} / |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, άρα

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|^2}\mathbf{A}$$

Το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{B}_{\perp}$ στο $\mathbf{A}$ είναι τότε

$$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|^2}\mathbf{A}$$

Παράδειγμα 1.7.3.

Να βρεθεί το κατοπτρικό $\mathbf{A}'$ ενός διανύσματος $\mathbf{A}$ ως προς επίπεδο που έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το $\hat{A}$.

Λύση

Στο σχήμα (1.7.3) σημειώνουμε με διακεκομμένη γραμμή το επίπεδο και κάθετα σ'αυτό θεωρούμε το μοναδιακό διάνυσμα $\hat{A}$. Χωρίς απώλεια γενικότητας θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{A}$, $\hat{A}$ με κοινό σημείο αφετηρίας.

Το διάνυσμα $\mathbf{A}$ αναλύουμε σύμφωνα με το τελευταίο παράδειγμα σε παράλληλη και κάθετη συνιστώσα ως προς το $\hat{A}$. Είναι

$$\mathbf{A}_{\parallel} = \frac{\mathbf{A}\cdot\hat{A}}{|\hat{A}|^2}\hat{A} = (\mathbf{A}\cdot\hat{A})\,\hat{A}$$

όπου : $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_{\parallel}$

Από το σχήμα 1.7.3. εύκολα συνάγουμε ότι

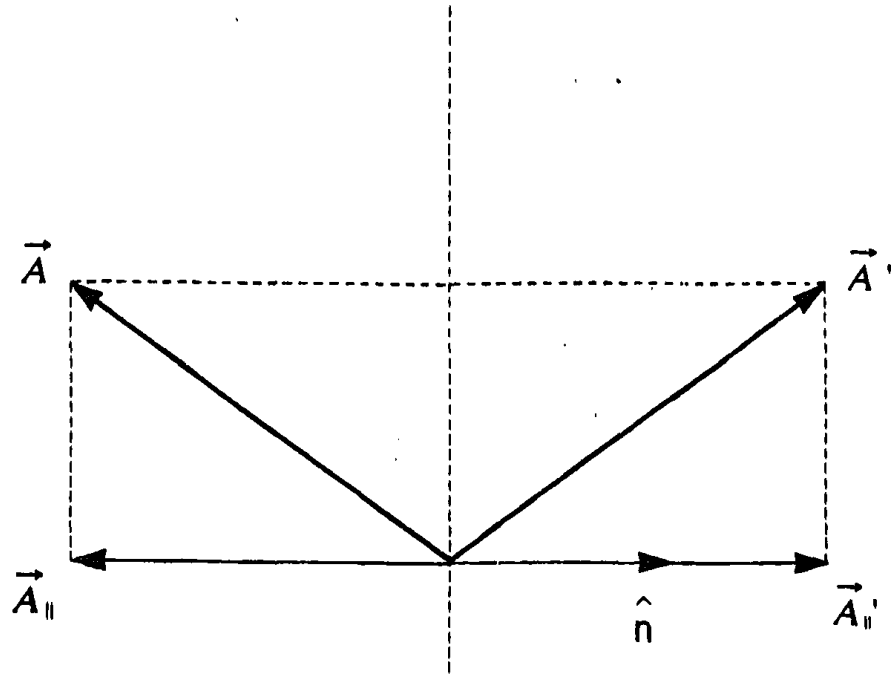
$$\mathbf{A}_{\parallel}' = -\mathbf{A}_{\parallel},\ \mathbf{A}_{\perp}' = \mathbf{A}_{\perp}$$

Συνεπώς

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\perp} - \mathbf{A}_{\parallel} = \mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_{\parallel} - 2\,\mathbf{A}_{\parallel} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - 2\,(\mathbf{A}\cdot\hat{A})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 1.7.3. Ανάκλαση διανύσματος ως προς επίπεδο.

1.8. Το σύμβολο του Kronecker

Είναι χρήσιμο, σ' αυτό το σημείο να εισάγουμε το σύμβολο δ_{ij} το οποίο καλούμε δέλτα του Kronecker. Το δ_{ij} παίρνει την τιμή ένα (1) όταν οι δείκτες είναι ίσοι και την τιμή μηδέν (0) όταν είναι διάφοροι μεταξύ τους.

Δηλαδή

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases} \qquad (1.8.1)$$

Με τη χρήση του σύμβολου δ_{ij} μπορούμε να γράφουμε το εσωτερικό γινόμενο και ως εξής

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} A_i B_j \qquad (1.8.2)$$

Πράγματι απο τον ορισμό (1.8.1) για όλους τους όρους στην (1.8.2) για τους οποίους $i \neq j$ το $\delta_{ij} = 0$ και συνεπώς παραμένουν μόνο εκείνοι για τους οποίους $i = j$.

'Αρα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}A_i B_j = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \qquad (1.8.3)$$

Το σύμβολο δ_{ij} χαρακτηρίζεται απο δύο δείκτες, σε αντίθεση με τις συνιστώσες διανύσματος που χαρακτηρίζονται απο ένα δείκτη μόνο. Με τη βοήθεια του συμβόλου Kronecker το εσωτερικό γινόμενο ορθοκανονικών διανυσμάτων $\hat{x}_i$ (εξ.1.7.7) παίρνει τη μορφή

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij} \qquad (1.8.4)$$

1.9. Μετασχηματισμός προβολών Διανύσματος κάτω από περιστροφή των αξόνων.

Έστω ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων x_1Ox_2 (σχ. 1.9.1). Το σύστημα αυτό περιστρέφεται δεξιόστροφα κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x_3 και έρχεται στη θέση $x_1'Ox_2'$.

Έστω $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, και $\hat{x}_1'$, $\hat{x}_2'$, μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων των δύο συστημάτων. Από το σχ. 1.9.1 βλέπουμε ότι

$$\hat{x}_1' = \hat{x}_1\cos\theta + \hat{x}_2\cos(-\theta+\pi/2) = \hat{x}_1\cos\theta + \hat{x}_2\sin\theta$$

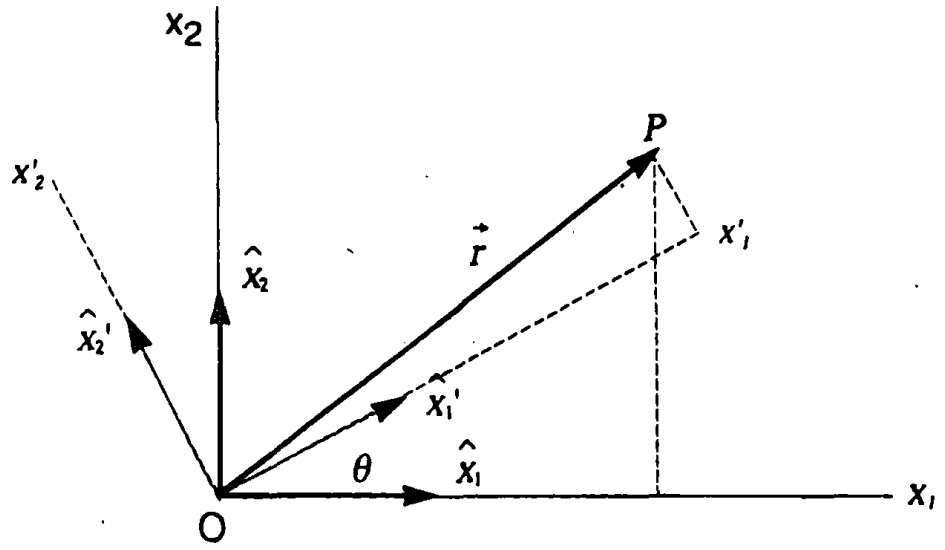
$$\hat{x}_2' = \hat{x}_1\cos(\pi/2+\theta) + \hat{x}_2\cos\theta = -\hat{x}_1\sin\theta + \hat{x}_2\cos\theta \qquad (1.9.1)$$

Αν επιθυμούμε, μπορούμε συμβολικά να γράψουμε τον πιο πάνω μετασχηματισμό σε μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1' \\ \hat{x}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \qquad (1.9.2)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός, που αντιστοιχεί στην ανωτέρω στροφή κατά γωνία θ,και μετασχηματίζει ένα ορθοκανονικό σύστημα $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ σε ένα άλλο ορθοκανονικό, λέγεται ορθογώνιος μετασχηματισμός.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ. 1.9.1. Δείχνεται η περιστροφή του συστήματος x_1Ox_2 γύρω από τον άξονα x_3, κάθετο στο επίπεδο x_1Ox_2, κατά γωνία θ. Δείχνεται ένα σημείο P με συντεταγμένες (x_1,x_2) και (x_1',x_2') στα δύο συστήματα αντίστοιχα.

Η ορίζουσα του αντίστοιχου πίνακα R(θ) είναι μονάδα (+1). Ένας τέτοιος μετασχηματισμός λέγεται γνήσιος ορθογώνιος μετασχηματισμός. Επιλύοντας το σύστημα (1.9.2) ως προς ξ_1 και ξ_2 έχουμε

$$\xi_1 = \xi_1' \cos\theta - \xi_2' \sin\theta \,, \quad \xi_2 = \sin\theta\, \xi_1' + \cos\theta\, \xi_2' \qquad (1.9.3)$$

ή

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} \qquad (1.9.4)$$

Οι μετασχηματισμοί (1.9.2) και (1.9.4) είναι αντίστροφοι αλλήλων. Δεν μας εκπλήσσει λοιπόν ότι το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων είναι ο μοναδιαίος πίνακας

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.9.5)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αν συμβολίσουμε τον πίνακα μετασχηματισμών (1.9.2) με R(θ) και τον αντίστοιχο της (1.9.4) με R΄(θ) τότε η (1.9.5) γράφεται

$$R'(\theta)\, R(\theta) = I = R(\theta)\, R'(\theta) \qquad (1.9.6)$$

όπου I ο ταυτοτικός 2x2 πίνακας. Δηλαδή ο R΄(θ) είναι ο αντίστροφος $R^{-1}(\theta)$, του R(θ). Ειδικότερα εδώ παρατηρούμε ότι

$$R'(\theta) = R^{-1}(\theta) = R(-\theta) \qquad (1.9.7)$$

Ας δούμε στη συνέχεια πως συνδέονται οι συνιστώσες (x_1', x_2') ενός διανύσματος x στο περιστραμμένο σύστημα με τις συνιστώσες (x_1, x_2) του ίδιου διανύσματος στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων. Επειδή πρόκειται για το ίδιο διάνυσμα προφανώς ισχύει

$$\mathbf{x} = x_1' \hat{\imath}_1' + x_2' \hat{\imath}_2' = x_1 \hat{\imath}_1 + x_2 \hat{\imath}_2 \qquad (1.9.8)$$

Με την χρήση του μετασχηματισμού (1.9.4) ή (1.9.8) γράφεται

$$x_1' \hat{\imath}_1' + x_2' \hat{\imath}_2' = x_1 (\hat{\imath}_1' \cos\theta - \hat{\imath}_2' \sin\theta) +$$

$$+ x_2 (\hat{\imath}_1' \sin\theta + \hat{\imath}_2' \cos\theta)$$

$$= (x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)\, \hat{\imath}_1' + (-x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)\, \hat{\imath}_2'$$

Από την τελευταία συνάγουμε ότι

$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$

$$x_2' = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \qquad (1.9.9)$$

Σε μορφή πίνακα, η τελευταία γράφεται

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (1.9.10)$$

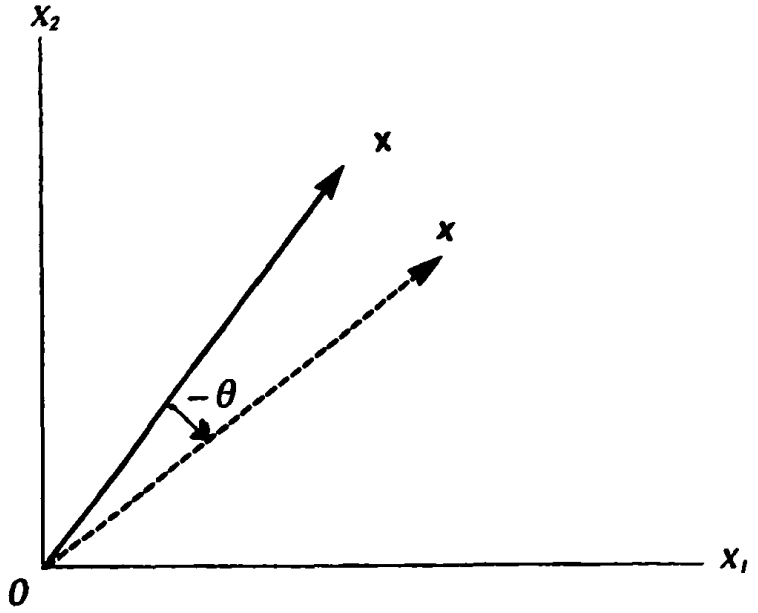
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δηλαδή οι συνιστώσες διανύσματος στο περιστραμμένο σύστημα μετασχηματίζονται όπως και τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}_1'$, $\hat{x}_2'$ όπως φαίνεται από την (1.9.2).

Σημειώνουμε εδώ ότι **το διάνυσμα x παραμένει το ίδιο και ότι απλά οι συνιστώσες του αλλάζουν ανάλογα με το ορθογώνιο σύστημα αναφοράς.** Θα μπορούσαμε όμως από πλευράς φυσικής να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα θεωρώντας και την περιστροφή του διανύσματος καθόσον το σύστημα συντεταγμένων παραμένει σταθερό. **Η περιστροφή του συστήματος και η περιστροφή του διανύσματος συνδέονται άμεσα.** Για παράδειγμα η προηγούμενη περιστροφή του συστήματος κατά γωνία θ, αντιστοιχεί με περιστροφή του διανύσματος κατά γωνία –θ (βλέπε σχήμα 1.9.2)

Συνεπώς, στρέφοντας το διάνυσμα (και όχι το σύστημα) κατά γωνία θ, οι συνιστώσες του θα μετασχηματίζονται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό $R^{-1}(\theta)$

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (1.9.11)$$



Σχήμα 1.9.2 Η περιστροφή του συστήματος κατά γωνία –θ είναι ισοδύναμη με περιστροφή των αξόνων κατά θ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τελειώνοντας αξίζει να τονιστεί ότι πολλές φορές η εξ. (1.9.10) λαμβάνεται ως αφετηρία για τον ορισμό του διανύσματος. Λέμε, δηλαδή, ότι μια ποσότητα είναι διάνυσμα όταν κάτω από την δράση στροφών μετασχηματίζεται ακριβώς όπως οι συντεταγμένες. Με άλλα λόγια θα λέμε ότι οι A_1 και A_2 είναι συνιστώσες ενός διανύσματος αν κάτω από το μετασχηματισμό R(θ) μετασχηματίζονται ως εξής

$$\begin{pmatrix} A_1' \\ A'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad (1.9.12)$$

Παράδειγμα 1.9.1

Να στραφεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{x}_1$ κατά γωνία θ και να βρεθούν οι συνιστώσες του. Να γίνει το ίδιο για το $\hat{x}_2$.

Λύση :

Το διάνυσμα $\hat{x}_1$ έχει συνιστώσες $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Στροφή κατά θ του $\hat{x}_1$ δίνει το $\hat{x}_1'$ με συνιστώσες που βρίσκονται από τον μετασχηματισμό

$$R(-\theta) = R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Αν χ_1, χ_2 οι συνιστώσες του $\hat{x}_1'$ ως προς το σύστημα (x_1Ox_2) τότε:

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Άρα $\hat{x}_1' = \chi_2 \hat{x}_1 + \chi_2 \hat{x}_2$ ή

$$\hat{x}_1' = \hat{x}_1 \cos\theta + \hat{x}_2 \sin\theta$$

Για στροφή του $\hat{x}_2$ κατά θ έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

'Αρα $\hat{\imath}_2' = -\sin\theta\,\hat{\imath}_1 + \cos\theta\,\hat{\imath}_2$

Δηλαδή

$$\begin{pmatrix} \hat{\imath}_1' \\ \hat{\imath}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath}_2 \\ \hat{\imath}_2 \end{pmatrix}$$

όπως ήδη γνωρίζουμε από την (1.9.2).

'Ασκηση 1.9.1

Κάτω από την δράση της στροφής R(θ) έχουμε

$$\hat{\imath}_1' = \alpha\,\hat{\imath}_1 + \beta\,\hat{\imath}_2$$

$$\hat{\imath}_2' = \gamma\,\hat{\imath}_1 + \delta\,\hat{\imath}_2$$

χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των μοναδιαίων διανυσμάτων να υπολογιστούν οι συντελεστές α,β,γ,δ .

(Υπόδειξη: $\alpha = \hat{\imath}_1 \cdot \hat{\imath}_1'$ κ.λ.π.)

'Ασκηση 1.9.2

Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης **r** στις δύο διαστάσεις.

(απ. $\mathbf{r} = x_1\,\hat{\imath}_1 + x_2\,\hat{\imath}_2 = |\mathbf{r}|\,(\hat{\imath}_1\cos\theta + \hat{\imath}_2\sin\theta)$)

'Ασκηση 1.9.3

Να βρεθούν οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{e}_t$ εφαπτομένου σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας a.

(απ. $\hat{e}_t = -\sin\theta\,\hat{\imath}_1 + \cos\theta\,\hat{\imath}_2 = (-x_2\,\hat{\imath}_1 + x_1\,\hat{\imath}_2)/a$)

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήσατε την μέθοδο της άσκησης 1.9.1.)

'Ασκηση 1.9.4

Να βρεθεί οι συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου γύρω από μια άπειρη ευθεία γραμμή αν δίνεται ότι είναι ακτινικό καί έχει μέτρο $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\rho}$, όπου ρ η απόσταση από την γραμμή και λ το φορτίο ανά μονάδα μήκους.

Θα θεωρήσουμε στη συνέχεια το τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και θα εξετάσουμε αναλυτικά τους μετασχηματισμούς στροφών, γενικεύοντας όλες τις έννοιες που αναπτύξαμε μέχρι στιγμής στο εδάφιο αυτό: Ας θεωρήσουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος **x** σε δύο ορθογώνια συστήματα $Ox_1x_2x_3$ και $Ox_1'x_2'x_3'$, (όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα 1.9.3). Σε αναλογία με την (1.9.8) έχουμε:

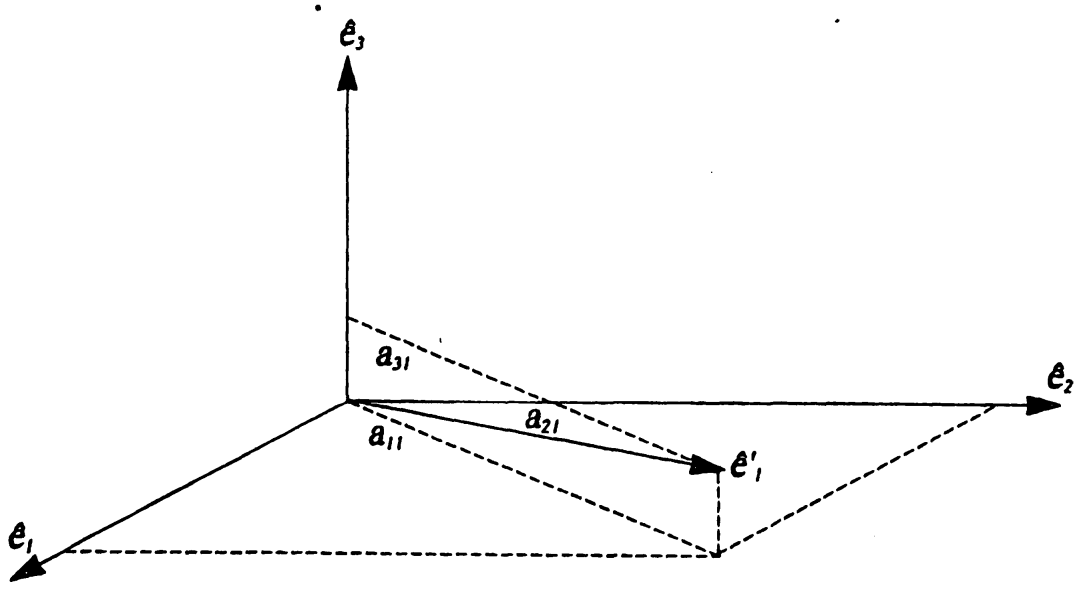
$$x = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = x_1 \hat{e}_1' + x_2 \hat{e}_2' + x_3 \hat{e}_3' \qquad (1.9.13)$$

Ας σχηματίσουμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο $\hat{e}_1' \cdot \mathbf{x}$. Έχουμε τότε

$$\hat{e}_1' \cdot \mathbf{x} = x_1' = x_1(\hat{e}_1' \cdot \hat{e}_1) + x_2(\hat{e}_1' \cdot \hat{e}_2) + x_3(\hat{e}_1' \cdot \hat{e}_3) \qquad (1.9.14)$$

όπου κάναμε χρήση της <u>ορθοκανονικότητας του νέου συστήματος</u> δηλαδή

$$\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_j' = \delta_{ij}.$$



Σχήμα 1.9.3 Στροφή συστήματος ορθογωνίων αξόνων στις 3 διαστάσεις.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η συνιστώσα x_2', μπορεί να εκφραστεί από τις συνιστώσες x_1, x_2, x_3 σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο

$$x_2' = x_1(\hat{e}_2' \cdot \hat{e}_1) + x_2(\hat{e}_2' \cdot \hat{e}_2) + x_3(\hat{e}_2' \cdot \hat{e}_3) \qquad (1.9.15)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Υπολογίζοντας ανάλογα και τις συνιστώσες x_3' καταλήγουμε στον πίνακα μετασχηματισμού.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{x}_1' \cdot \hat{x}_1) & (\hat{x}_1' \cdot \hat{x}_2) & (\hat{x}_1' \cdot \hat{x}_3) \\ (\hat{x}_2' \cdot \hat{x}_1) & (\hat{x}_2' \cdot \hat{x}_2) & (\hat{x}_2' \cdot \hat{x}_3) \\ (\hat{x}_3' \cdot \hat{x}_1) & (\hat{x}_3' \cdot \hat{x}_2) & (\hat{x}_3' \cdot \hat{x}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (1.9.16)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι τα εσωτερικά γινόμενα εκφράζουν συνημίτονα κατεύθυνσης. Έτσι το πρώτο γινόμενο $\hat{x}_1' \cdot \hat{x}_1 = \cos(\hat{x}_1', \hat{x}_1,)$ είναι το συνημίτονο κατεύθυνσης του $\hat{x}_1$ στη διεύθυνση $\hat{x}_1'$ (βλέπε σχήμα 1.9.3).

Παρατηρούμε από τον μετασχηματισμό (1.9.16) τα εξής: Η πρώτη στήλη είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\hat{x}_1$, δηλαδή

$$\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_1' = \cos a_{11}$$

$$\hat{x}_2 \cdot \hat{x}_1' = \cos a_{21}$$

$$\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1' = \cos a_{31}$$

Ανάλογα η δεύτερη στήλη είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\hat{x}_2'$ και η τρίτη αντίστοιχα του $\hat{x}_3'$.

Γενικά λέμε ότι μια ποσότητα $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ είναι διανυσματική αν κάτω από τις στροφές οι συνιστώσες της μετασχηματίζονται σύμφωνα με την (1.9.16).

Για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του (1.9.16), εργαζόμαστε ανάλογα, χρησιμοποιώντας την ισότητα:

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 + x_3 \hat{x}_3 = x_1' \hat{x}_1' + x_2' \hat{x}_2' + x_3' \hat{x}_3'$$

και σχηματίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα $\hat{x}_i \cdot \mathbf{x}$, όπως

$$\hat{x}_i \cdot \mathbf{x} = x_1 = x_1' (\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_1') + x_2' (\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2') + x_3' (\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3')$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου τώρα κάναμε χρήση της ορθοκανονικότητας $\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$. Τότε ο αντίστροφος πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_1') & (\hat{x}_1 \hat{x}_2') & (\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3') \\ (\hat{x}_2 \cdot \hat{x}_1') & (\hat{x}_2 \cdot \hat{x}_2') & (\hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3') \\ (\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1') & (\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_2') & (\hat{x}_3 \cdot \hat{x}_3') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2 \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad (1.9.17)$$

Συγκρίνοντας την (1.9.17) με την (1.9.16) παρατηρούμε ότι οι στήλες του (1.9.16) έχουν γίνει γραμμές του (1.9.17) και αντίστροφα. Λέμε τότε ότι ο πίνακας (1.9.17) είναι ανάστροφος $(R)^T$ του R στην (1.9.17).

Απ' την άλλη μεριά ο μετασχηματισμός (1.9.17) είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του (1.9.16), δηλαδή εκφράζει τα x_i σε σχέση με τα x_i'. 'Αρα είναι ο αντίστροφος R^{-1} του R συμπίπτει με του R^T.

Δηλαδή

$$(R)^T = R^{-1} \qquad (1.9.18)$$

Η εξίσωση (1.9.18) αποτελεί τον ορισμό <u>ορθογωνίου πίνακα</u>. Γενικά αυτή η ιδιότητα ισχύει όταν μετασχηματίζουμε μια ορθογώνια βάση σε μια άλλη επίσης ορθογώνια. Το είδαμε και στην αρχή στο διδιάστατο παράδειγμα. Συνεπώς ο μετασχηματισμός καλείται <u>ορθογώνιος</u>. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι τα στοιχεία των πινάκων (1.9.16) και (1.19.17) δεν είναι όλα μεταξύ τους ανεξάρτητα. Στο 7ο κεφάλαιο θα ξανασχοληθούμε με τους παραπάνω μετασχηματισμούς και θα δούμε ότι είναι αρκετό να ορίσουμε τρεις μόνο γωνίες περιστροφής (γωνίες Euler) για να εκφράσουμε και τα εννέα στοιχεία του πίνακα μετασχηματισμού.

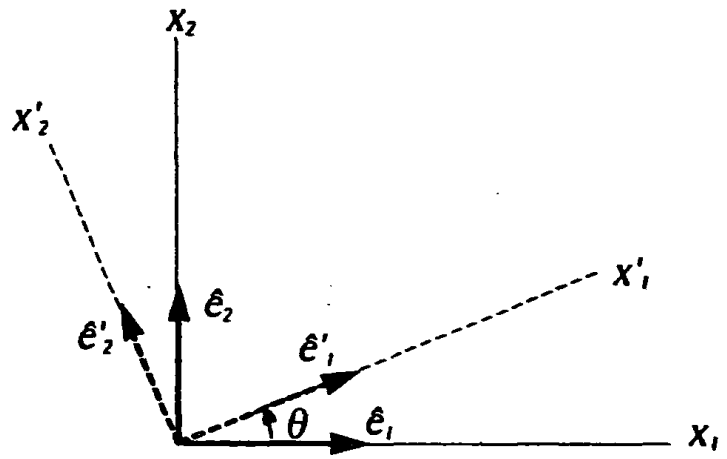
Παράδειγμα 1.9.2

Περιστρέφουμε το ορθογώνιο σύστημα (Ox_1,x_2,x_3) κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x_3. Να υπολογιστεί ο πίνακας μετασχηματισμού R

<u>Λύση</u> :

Αρκεί να βρούμε τα συνημίτονα κατεύθυσης των $\hat{x}_1'$, $\hat{x}_2'$, $\hat{x}_3'$. Είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχ.1.9.4. Περιστροφή τρισορθογώνιου συστήματος αξόνων γύρω από τον άξονα x_3 κατά γωνία θ.

$\hat{x}_1'$: $\cos\alpha_{11} = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_1' = \cos\theta$

$\cos\alpha_{21} = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_1' = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

$\cos\alpha_{31} = \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1' = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\hat{x}_2'$: $\cos\alpha_{12} = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2' = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$

$\cos\alpha_{22} = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_2' = \cos\theta$

$\cos\alpha_{32} = \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_2' = 0$

$\hat{x}_3'$: $\cos\alpha_{13} = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3' = 0$

$\cos\alpha_{23} = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3' = 0$

$\cos\alpha_{33} = \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_3' = 1$ διότι $\hat{x}_3 \equiv \hat{x}_3'$

Άρα

$$R'(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\text{Δηλαδή} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R'(\theta) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \quad R'(\theta) = R_3^{-1}(\theta) = R^3(-\theta)$$

Παράδειγμα 1.9.3.

Να εξεταστεί κατά πόσον τα διανύσματα

$$\xi_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \xi_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \xi_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα.

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που συνδέει τα ξ_1, ξ_2, ξ_3 με τα

$$\hat{\xi}_1 = (1,0,0), \quad \hat{\xi}_2 = (0,1,0), \quad \hat{\xi}_3 = (0,0,1).$$

Λύση :

Για να διαπιστώσουμε εαν τα ξ_1, ξ_2, ξ_3 αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα, θα υπολογίσουμε όλα τα εσωτερικά γινόμενα $\xi_i \cdot \xi_j$.

Ο υπολογισμός είναι απλός. Για παράδειγμα

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}} - 0\sqrt{\frac{2}{3}} = 0 \text{ , κ.ο.κ.}$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, όλες οι περιπτώσεις των εσωτερικών γινομένων μεταξύ των δοσμένων ξ_i , γράφονται με τη χρήση του συμβόλου του Kronecker ως ακολούθως:

$$\xi_i \cdot \xi_j = \delta_{ij}$$

Συνεπώς το σύστημα ξ_i είναι ορθοκανονικό : $\xi_i \rightarrow \hat{\xi}_i$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

απο την (1.9.17) προκύπτει

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{x}_1 \cdot \hat{\xi}_1) & (\hat{x}_2 \cdot \hat{\xi}_1) & (\hat{x}_3 \cdot \hat{\xi}_1) \\ (\hat{x}_1 \cdot \hat{\xi}_2) & (\hat{x}^{\wedge}_2 \cdot \hat{\xi}_2) & (\hat{x}_3 \cdot \hat{\xi}_2) \\ (\hat{x}_1 \cdot \hat{\xi}_3) & (\hat{x}_2 \cdot \hat{\xi}_3) & (\hat{x}_3 \cdot \hat{\xi}_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού μετά την αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών των εσωτερικών γινομένων $\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_j$ είναι

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Σημείωση : Αναφέραμε ήδη οτι οι πίνακες που συνδέουν ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων καλούνται ορθογώνιοι. Γενικώτερα, κάθε τετραγωνικός πίνακας Ο διάστασης n x n που υπακούει στη συνθήκη

$$O\,O^T = I \qquad (1.9.19)$$

όπου *I* είναι ο αντίστοιχος ταυτοτικός πίνακας διάστασης n x n , καλείται ορθογώνιος. Η συνθήκη (1.9.19) γράφεται με τη χρήση των στοιχείων του πίνακα και ως εξής

$$(O\,O^T)_{ij} = O_{ik}O^T{}_{kj} = \delta_{ij} \qquad (1.9.20)$$

όπου στην τελευταία έχει γίνει χρήση της αθροιστικής σύμβασης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

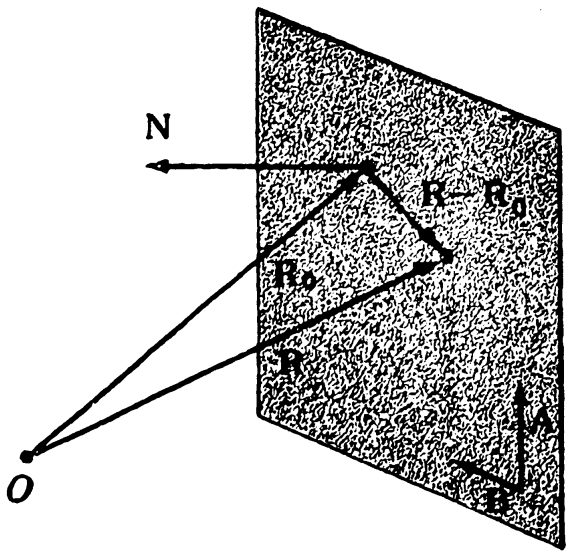
1.10. Διανυσματική Εξίσωση του Επιπέδου

Η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου προκύπτει με διαδικασία ανάλογη εκείνης της ευθείας (εδάφιο 1.5) Από την ευκλείδια γεωμετρία είναι γνωστό ότι δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο. Ξέρουμε ότι δύο τέτοιες ευθείες παριστάνονται από δύο διανύσματα, έστω **A** και **B**. Κάθε διάνυσμα **C** του επιπέδου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός τους συνδυασμός $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$. Κατά συνέπεια αν $\mathbf{R}_0 = (x^0_1, x^0_2, x^0_3)$ είναι ένα δεδομένο σημείο του επιπέδου και το διάνυσμα $\mathbf{R} = (x_1, x_2, x_3)$ αναπαριστά τυχόν σημείο αυτού, το διάνυσμα $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ κείται στο επίπεδο (σχ. 1.10.1). Γράφουμε τότε

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B}.$$

ή
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B}. \qquad (1.10.1)$$

Στην εξίσωση (1.10.1) υπεισέρχονται δύο βαθμωτές παράμετροι α και β σε αντίθεση με αυτή της ευθείας όπου εισάγεται μόνο μία, και αυτό είναι φυσικό διότι το επίπεδο είναι διδιάστατος χώρος.



Σχήμα 1.10.1: Επίπεδο που ορίζεται απο δυο τεμνόμενα διανύσματα **A** *και* **B**. *Το διάνυσμα* **N** *είναι κάθετο στο επίπεδο.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, που δώσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, για να ορίσουμε διανυσματικά το επίπεδο με διαφορετικό και απλούστερο τρόπο. Σ'αυτή την περίπτωση είναι αρκετό να δοθεί το κάθετο διάνυσμα **N** του επιπέδου. Τότε, δεδομένου του $\mathbf{R}_0$, η συνθήκη ώστε το σημείο **R** να κείται στο επίπεδο κάθετο στο **N** είναι

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{N} = 0 \qquad (1.10.2)$$

Αν $\mathbf{N} = n_1 \hat{x}_1 + n_2 \hat{x}_2 + n_3 \hat{x}_3$, όπου n_1, n_2 , n_3 , είναι οι συνιστώσες του διανύσματος που είναι κάθετο στο επίπεδο , τότε η (1.10.2) γίνεται :

$$n_1 (x_1 - x^0_1) + n_2 (x_2 - x^0_2) + n_3 (x_3 - x^0_3) = 0 \qquad (1.10.3)$$

ή $\quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n$

όπου $n = n_1 x^0_1 + n_2 x^0_2 + n_3 x^0_3$

Παράδειγμα 1.10.1

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται απο το σημείο $\mathbf{R}_0 = (1,2,3)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $\frac{x_1 - 1}{4} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3 + 5}{6}$.

Από την παραμετρική εξίσωση της ευθείας,

$$\frac{x_1 - x^0_1}{a_1} = \frac{x_2 - x^0_2}{a_2} = \frac{x_3 - x^0_3}{a_3}$$

γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{A} = a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3$ είναι παράλληλο σ'αυτή. Στη συγκεκριμμένη περίπτωση

$$\mathbf{A} = 4 \hat{x}_1 + 5 \hat{x}_2 + 6 \hat{x}_3$$

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = (x_1 - 1) \hat{x}_1 + (x_2 - 2) \hat{x}_2 + (x_3 - 3) \hat{x}_3$$

οπότε η σχέση $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{A} = 0$ γίνεται

$$4 (x_1 - 1) + 5 (x_2 - 2) + 6 (x_3 - 3) = 0$$

ή $\quad 4 x_1 + 5 x_2 + 6 x_3 = 32$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 1.10.2

Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των επιπέδων

$$3x_1 + 4x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Ως γωνία δύο επιπέδων ορίζεται η γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα κάθετα αντίστοιχα προς αυτά. Αυτά μπορούν να βρεθούν άμεσα από τους συντελεστές των x_1, x_2, x_3 των εξισώσεων των επιπέδων. Είναι

$$\mathbf{N}_1 = 3\,\hat{x}_1 + 4\,\hat{x}_2$$

$$\mathbf{N}_2 = 2\,\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 2\,\hat{x}_3$$

Η γωνία προσδιορίζεται μέσω του συνημιτόνου της απο το εσωτερικό γινόμενο

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1|\ |\mathbf{N}_2|} = \frac{6 + 4}{5 \cdot 3} = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

1.11. Το διανυσματικό γινόμενο

Στο εδάφιο 1.7 μελετήσαμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων και είδαμε ότι ορίζεται ως ένα βαθμωτό μέγεθος που αντιστοιχεί σ' αυτά. Για παράδειγμα στη μηχανική αν το ένα διάνυσμα αντιπροσωπεύει σταθετή δύναμη **F** και το άλλο τη μετατόπιση **r** κατά μήκος της οποίας η **F** δρά, τότε το εσωτερικό γινόμενο ορίζει το έργο που η δύναμη αυτή παράγει

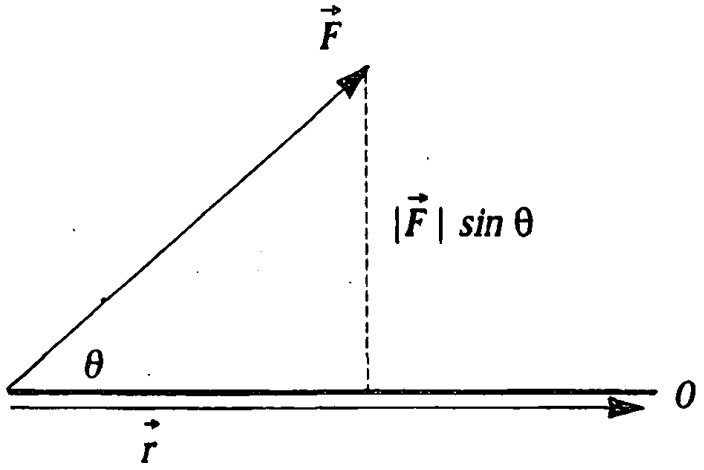
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{F}|\ |\mathbf{r}| \cos\theta.$$

Ας υποθέσουμε όμως ότι έχουμε ένα άλλο πρόβλημα μηχανικής στο οποίο στερεά ράβδος περιστρέφεται γύρω απο άξονα που διέρχεται απο τη μία άκρη της (σχήμα 1.11.1) κάτω από την επίδραση δύναμης **F** εφαρμοζόμενης στο άλλο άκρο.

Παρατηρούμε τότε ότι η κάθετη συνιστώσα $|\mathbf{F}|\sin\theta$ της **F** τείνει να στρέψει τη ράβδο γύρω από τον άξονα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα **F**, **r**. Γνωρίζουμε επίσης ότι η αποτελεσματικότητα της δύναμης μεγαλώνει καθώς απομακρύνεται το σημείο εφαρμογής της απο τον άξονα Ο. Σημειώστε ότι η κατοπτρική δύναμη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

της **F** ως προς τη ράβδο **r** (κύτταξε σχ. 1.7.3) θα είχε αποτέλεσμα ίδιο ως προς το μέτρο, αλλά θα προκαλούσε αντίθετη περιστροφή της ράβδου. Δηλαδή η ροπή έχει μέτρο M = |**F**|sinθ r και κατάλληλη φορά.

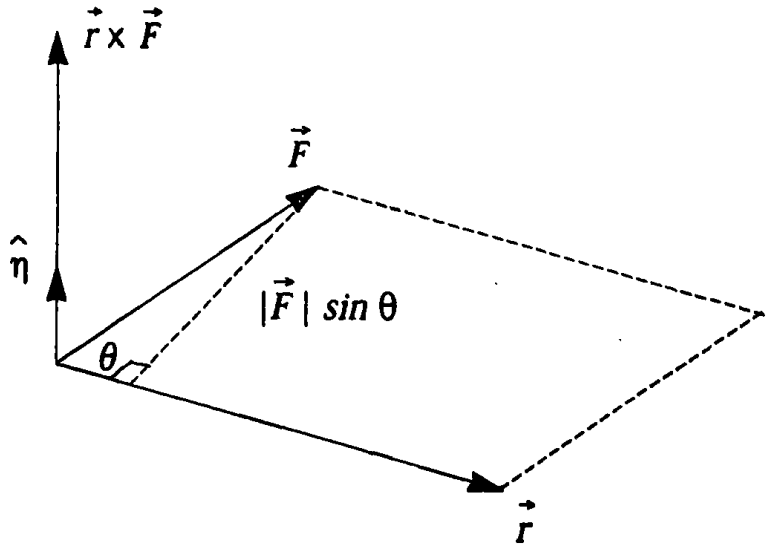


Σχήμα 1.11.1. Η κάθετη συνιστώσα |**F**|sinθ *της δύναμης τείνει να περιστρέψει τη ράβδο ΟΑ στερεωμένη στο Α.*

Ορμώμενοι απο τα παραπάνω ορίζουμε ως διανυσματικό ή εξωτερικό γινόμενο **r**x **F** το διάνυσμα

$$\mathbf{r}\text{x}\ \mathbf{F} = |\mathbf{r}|\ |\mathbf{F}|\sin\theta\ \hat{n} \qquad (1.11.1)$$

όπου $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των **r** και **F**, έτσι ώστε **r**, **F**, $\hat{n}$ να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα (σχήμα 1.11.2). Δηλαδή δύο διανύσματα απεικονίζονται σε ένα διάνυσμα όπως ορίζει η εξίσωση (1.11.1).



Σχήμα 1.11.2. Παράσταση των διανυσμάτων **r**,**F** *και* **r**x**F**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σημειώστε ότι $|\mathbf{r}\times\mathbf{F}|$ είναι το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου που σχηματίζεται απο τα **r** και **F**.

Ιδιότητες του διανυσματικού γινόμενου. Για τυχαία διανύσματα **A**,**B**,**C** ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad (1.11.2)$$

δηλαδή το διανυσματικό γινόμενο είναι αντισυμμετρικό.

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C} \qquad (1.11.3)$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{C} + \mathbf{B}\times\mathbf{C} \qquad (1.11.4)$$

Η (1.11.2) είναι άμεση συνέπεια του ορισμού (1.11.1). Η απόδειξη των (1.11.2–1.11.4) αφήνεται για άσκηση.

Τις περισσότερες φορές, ιδιαίτερα σε υπολογισμούς, είναι χρήσιμη η έκφραση του εξωτερικού γινομένου σε συνάρτηση των συνιστωσών των διανυσμάτων. Παρατηρώντας ότι σε ένα τρισορθογώνιο σύστημα τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3$ ικανοποιούν

$$\hat{x}_1\times\hat{x}_2 = \hat{x}_3\ ,\ \hat{x}_2\times\hat{x}_3 = \hat{x}_1\ ,\ \hat{x}_3\times\hat{x}_1 = \hat{x}_2 \qquad \text{(κυκλική εναλλαγή)}$$

εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 + A_3\hat{x}_3)\times(B_1\hat{x}_1 + B_2\hat{x}_2 + B_3\hat{x}_3)$$

ή $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_1B_2 - A_2B_1)(\hat{x}_1\times\hat{x}_2) + (A_1B_3 - A_3B_1)(\hat{x}_1\times\hat{x}_3) + (A_2B_3 - A_3B_2)(\hat{x}_2\times\hat{x}_3)$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\hat{x}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\hat{x}_2 + (A_2B_1 - A_1B_2)\hat{x}_3 \qquad (1.11.5)$$

Μπορούμε να απομνημονεύσουμε την τελευταία έκφραση καλύτερα σε μορφή ορίζουσας γράφοντας και αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα γνωστά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \qquad (1.11.6)$$

Μερικά παραδείγματα ποσοτήτων της φυσικής που ορίζονται με την βοήθεια του εξωτερικού γινομένου είναι*

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (ροπή δύναμης)

όπου **r** το διάνυσμα θέσης της δύναμης **F** προς δοθέν σημείο, και **F** η δύναμη αυτή. Επίσης,

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (στροφορμή ενός σωματίου)

όπου **p** η ορμή του σωματίου.

Παράδειγμα 1.11.1

Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στα διανύσματα

$\mathbf{A} = 2\,\hat{x}_1 + 2\,\hat{x}_2 - 3\,\hat{x}_3$

$\mathbf{B} = \hat{x}_1 + 3\,\hat{x}_2 + \hat{x}_3$

Διανύσματα κάθετα στα **A** και **B** θα είναι κάθετα και στο επίπεδο που σχηματίζουν τα **A** και **B**. Υπάρχουν δύο μοναδιαία διανύσματα κάθετα σε επίπεδο, το ένα είναι αντίθετο του άλλου. Επίσης γνωρίζουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο **AxB** είναι κάθετο στο **A** και στο **B**. Άρα

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}, \quad \hat{n}' \equiv -\hat{n} = \frac{\mathbf{B}\times\mathbf{A}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}$$

Αλλά

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11\,\hat{x}_1 - 5\,\hat{x}_2 + 4\,\hat{x}_3$$

και $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = 9\sqrt{2}$. Άρα τα δύο μοναδιαία είναι

* βλέπε D. Halliday και R. Resnick, Φυσική, Μέρος Α.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\hat{n} = \pm \frac{\{11\ \hat{x}_1 - 5\ \hat{x}_2 + 4\ \hat{x}_3\}}{9\sqrt{2}}$$

Παράδειγμα 1.11.2

Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται απο το σημείο (3,2, – 4) και ειναι παράλληλη στην τομή που ορίζουν τα δύό επίπεδα

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8,\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι η τομή των δύο επιπέδων ειναι παράλληλη ως προς το διάνυσμα $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, όπου $\mathbf{n}_{1,2}$ τα διανύσματα κάθετα στα επίπεδα $E_{1,2}$ αντίστοιχα. Απο τις εξισώσεις των επιπέδων εύκολα διαβάζουμε τις συνιστώσες των $\mathbf{n}_{1,2}$

$$\mathbf{n}_1 = \hat{x}_1 + 3\ \hat{x}_2 - 2\ \hat{x}_3$$

$$\mathbf{n}_2 = \hat{x}_1 - 3\ \hat{x}_2 + \hat{x}_3$$

Συνεπώς, το διάνυσμα που ειναι παράλληλο στην ευθεία είναι:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3\ \hat{x}_1 - 3\ \hat{x}_2 - 6\ \hat{x}_3$$

Η εξίσωση της ζητουμένης ευθείας είναι τότε

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = t\ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$$

$$\mathbf{R} - (3\ \hat{x}_1 + 2\ \hat{x}_2 - 4\ \hat{x}_3) = -(3\ \hat{x}_1 + 3\ \hat{x}_2 + 6\ \hat{x}_3)\ t$$

ή σε μη παραμετρική μορφή

$$\frac{x_1 - 3}{3} = \frac{x_2 - 2}{3} = \frac{x_3 + 4}{6}$$

ή $$x_1 - 3 = x_2 - 2 = \frac{x_3 + 4}{2}$$

Παράδειγμα 1.11.3.

Να παραχθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται απο το σημείο

$$\mathbf{R}_0 = r^0_1\ \hat{e}_1 + r^0_2\ \hat{e}_2 + r^0_3\ \hat{e}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και ειναι παράλληλη σε διάνυσμα

$$\mathbf{V} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3,$$

με τη χρήση του εξωτερικού γινομένου.

Λύση :

'Οπως γνωρίζουμε για τυχαίο σημειο **R** της ευθείας, το διάνυσμα $\mathbf{R}-\mathbf{R}_0$ είναι παράλληλο του **V**. Συνεπώς το εξωτερικό γινόμενο

$$|(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0) \times \mathbf{V}| = |\mathbf{R}-\mathbf{R}_0|\,|\mathbf{V}|\sin\theta = 0$$

είναι μηδέν, διότι θ=0. Γράφοντας τα διανύσματα με τις συνιστώσες τους, το διανυσματικό γινόμενο $(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0) \times \mathbf{V}$ γράφεται και ως εξής

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ x_1 - r^0_1 & x_2 - r^0_2 & x_3 - r^0_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

η οποία οδηγεί στις

$$(x_1 - r^0_1)\, v_2 = (x_2 - r^0_2)\, v_1$$

$$(x_2 - r^0_2)\, v_3 = (x_3 - r^0_3)\, v_2$$

$$(x_1 - r^0_1)\, v_3 = (x_3 - r^0_3)\, v_1$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{(x_1 - r^0_1)}{v_1} = \frac{(x_2 - r^0_2)}{v_2} = \frac{(x_3 - r^0_3)}{v_3}$$

που ειναι οι εξισώσεις της ευθείας.

'Ασκηση 1.11.1 :

Να δειχθεί οτι το μαγνητικό πεδίο γύρω απο ευθύγραμμο αγωγό διαρρεόμενο με ρεύμα I δίνεται απο τη σχέση

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\hat{x}_3 \times \boldsymbol{\rho})}{\rho^2} I$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρ η απόσταση του σημείου στο οποίο ζητείται το πεδίο από τον αγωγό και $\hat{x}_3$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του αγωγού.

Υπόδειξη: Δίνεται ότι το μαγνητικό πεδίο χαρακτηρίζεται από κυκλικές δυναμικές γραμμές με κέντρο τα σημεία του αγωγού και έχει μέτρο $B=\frac{\mu_0}{2\pi} I/\rho$.

'Ασκηση 1.11.2:

Να εξετασθεί πως μετασχηματίζεται το πεδίο της προηγούμενης άσκησης

i) Κάτω από στροφές γύρω του άξονα του αγωγού.

ii) Κάτω από την αναστροφή $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$

Να συγκριθούν τα αποτελέσματα και με εκείνα της άσκησης 4 του εδαφίου. 1.9.

1.12. Τα τριπλά γινόμενα C·(AxB) και Ax(BxC)

Είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ειναι ένα νέο διάνυσμα. Κατά συνέπεια μπορούμε να πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο αυτού με ένα τρίτο διάνυσμα. Επίσης μπορούμε να πάρουμε το εξωτερικό γινόμενο αυτού με ένα τρίτο διάνυσμα και να προκύψει ένα άλλο διάνυσμα. 'Ετσι μπορούμε να ορίσουμε από τρία διανύσματα ένα βαθμωτό και ενα διανυσματικό μέγεθος δηλ.

(AxB)·C	βαθμωτό*
Ax(BxC)	διάνυσμα

Τα μεγέθη αυτά έχουν, καθώς θα ιδούμε, φυσική σημασία και είναι αρκετά χρήσιμα στις εφαρμογές. Ας δούμε ομως σ' αυτό το σημείο τη γεωμετρική ερμηνεία της βαθμωτής ποσότητας **(AxB)·C**.

'Εστω λοιπόν τρία τυχαία διανύσματα **A**,**B**,**C**. Φέροντας παράλληλες από την κορυφή του καθενός προς τα άλλα δύο, σχηματίζουμε το παραλληλεπίπεδο του σχήματος (1.12.1). Γνωρίζουμε τώρα ότι το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **A** και **B** είναι διάνυσμα που έχει διεύθυνση στον τρίτο άξονα του τρισορθογώνιου συστήματος και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό της βάσης του παραλληλεπιπέδου (βλέπε σχήμα 1.12.1).

---

* καθώς θα ιδούμε στο κεφάλαιο 7 πρόκειται για ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος. Αντίστοιχα το εξωτερικό γινόμενο είναι ψευτοδιανυσματικό μέγεθος.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\varphi\,)\,\hat{x}_3 = E\,\hat{x}_3 \equiv \mathbf{E}$$

Το ύψος του παραλληλεπιπέδου h, μπορεί να παρασταθεί από το εσωτερικό γινόμενο του **C** με το $\hat{x}_3$.

$$h = \mathbf{C}\cdot\hat{x}_3$$

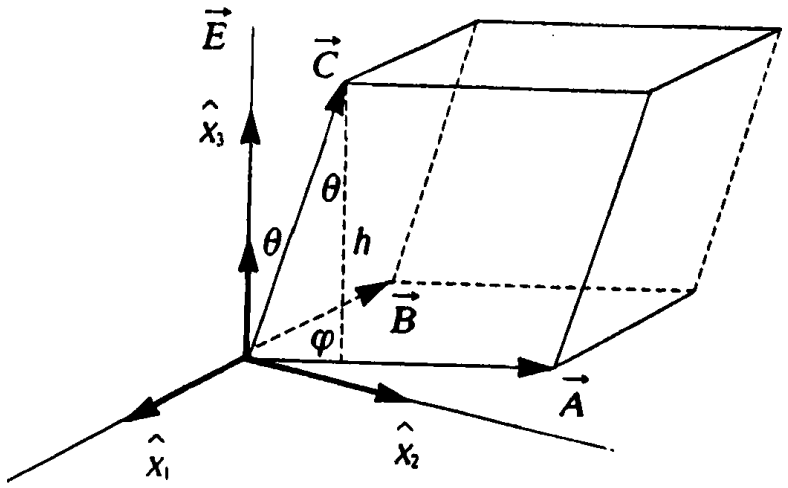
Συνεπώς ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι

$$V = h\,E = E(\mathbf{C}\cdot\hat{x}_3) = (E\hat{x}_3)\cdot\mathbf{C}\ \text{ή}$$

$$V \equiv (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

Ξεκινώντας απο τις άλλες βάσεις βρίσκουμε $V = (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, και

$$V = (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) \qquad (1.12.1)$$



Σχήμα 1.12.1. Τρία διανύσματα **A**,**B** *και* **C** *ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο.*

συνεπώς όλες οι παραπάνω εκφράσεις οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα. Άρα οι παρανθέσεις μπορούν να παραληφθούν, δηλαδή γράφουμε απλά

$$V = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} C_i\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i$$

Εύκολα μπορούμε να εκφράσουμε τον όγκο και ως προς τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

$$V = C_1A_2B_3 - C_1A_3B_2 + C_2A_3B_1 - C_2A_1B_3 + C_3A_1B_2 - C_3A_2B_1 \qquad (1.12.2)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τη (1.12.1) καλούμε και τριπλό βαθμωτό γινόμενο. Η διανυσματική του έκφραση είναι συμπαγής και ευκολομνημόνευτη, όμως η (1.12.2) είναι περισσότερο χρήσιμη στους υπολογισμούς. Θα ήταν λοιπόν επιθυμητό να μπορούσαμε να τη γράψουμε σε μιά βολικότερη μορφή. Προς τούτο παρατηρούμε τα ακόλουθα. Υπάρχουν τρείς όροι στην (1.12.2) που έχουν θετικό πρόσημο και άλλοι τρείς που έχουν αρνητικό. Υποθέτοντας πάντα ότι η σειρά των διανυσμάτων είναι όπως αυτά εμφανίζονται στην (1.12.2), δηλαδή [**C**,**A**,**B**], διαπιστώνουμε ότι το θετικό πρόσημο συνοδεύεται πάντα με κυκλική μετάθεση των δεικτών 1,2,3 δηλαδή [1,2,3], [3,1,2] και [2,3,1], ενώ το αρνητικό στην [1,3,2] και σ' όλες τις κυκλικές μεταθέσεις του. Ορίζουμε τότε το σύμβολο το ε_{ijk} όπου i,j,k =1,2,3, με τις εξής ιδιότητες

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases} +1 & \text{όταν } (ijk) = (123),(231),(312) \\ -1 & \text{όταν } (ijk) = (132),(213),(321) \\ 0 & \text{όταν κάποιοι απ' τους δείκτες είναι ίσοι} \end{cases} \qquad (1.12.3)$$

Οι έξι μεταθέσεις της (1.12.3) είναι όλες οι δυνατές. Αξίζει να δούμε αναλυτικότερα ορισμένες ιδιότητες:

(i) $\varepsilon_{ikk} = \varepsilon_{iik} = \ldots = 0$, δηλαδή όταν κάποιοι απο τους δείκτες είναι ίσοι.

(ii) $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$, δηλαδή όταν οι δείχτες μετατίθενται κυκλικά. (1.12.4)

(iii) $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$,δηλαδή όταν δύο δείχτες αλλάζουν μεταξύ τους θέση.

Το σύμβολο ε_{ijk} καλείται πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο τρίτης τάξης. Τότε η (1.12.2) γράφεται :

$$V = \varepsilon_{123} C_1A_2B_3 + \varepsilon_{132}C_1A_3B_2 + \varepsilon_{231}C_2A_3B_1 + \varepsilon_{213}C_2A_1B_3 + \varepsilon_{312}C_3 A_1 B_2 + \varepsilon_{321}C_3A_2B_1$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} C_i A_j B_k \qquad (1.12.5)$$

Υιοθετώντας τη συνθήκη Einstein, κατά την οποία οι επαναλαμβανόμενοι δείχτες που εμφανίζονται στις εκφράσεις αθροίζονται, μπορούμε να γράφουμε την (1.12.5) πιο απλά ως

$$V = \varepsilon_{ijk}\, C_i\, A_j\, B_k \qquad (1.12.6)$$

Κάνοντας ανάλογες παρατηρήσεις για την εξ. (1.11.5) διαπιστώνουμε ότι **και το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι δυνατό να εκφραστεί μέσω του** συμβόλου ε_{ijk}. Πράγματι με την "αντικατάσταση" στην (1.12.6) της C_i με το $\hat{x}_i$ έχουμε

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \varepsilon_{ijk}\, \hat{x}_i\, A_j\, B_k \qquad (1.12.7)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ε_{ijk} απο τη (1.12.3) επιβεβαιώνουμε ότι ο ορισμός (1.12.7) είναι ταυτόσημος με την (1.11.5). Η συνιστώσα ως προς τη διεύθυνση x_i του εξωτερικού γινομένου γράφεται τώρα

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk}\, A_j\, B_k \qquad (1.12.8)$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη άθροισης που μνημονεύσαμε προηγούμενα, στην (1.12.8) μόνο οι δείχτες j και k αθροίζονται. Για παράδειγμα η συνιστώσα στη διεύθυνση $\hat{x}_1$ είναι

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 = \varepsilon_{1jk}\, A_j\, B_k$$

$$= \varepsilon_{123}\, A_2\, B_3 + \varepsilon_{132}\, A_3\, B_2 = A_2\, B_3 - A_3\, B_2$$

Συγκρίνοντας τέλος την (1.12.7) με τη (1.11.6), διαπιστώνουμε ότι το σύμβολο ε_{ijk} είναι χρήσιμο και στην συμπαγή έκφραση της ορίζουσας ενός πίνακα 3x3. Αντίστροφα τώρα, **το τριπλό βαθμωτό γινόμενο είναι κι αυτό ταυτόσημο με την ανάπτυξη της ορίζουσας**

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_2 \end{vmatrix} \equiv \varepsilon_{ijk}\, C_i\, A_j\, B_k \qquad (1.12.9)$$

Από τα παραπάνω γίνεται αμέσως κατανοητή ή χρησιμότητα του συμβόλου ε_{ijk}.

Αξίζει λοιπόν να δούμε ορισμένες εφαρμογές.

Παράδειγμα 1.12.1

Πολλές φορές στους υπολογισμούς μας υπεισέρχεται η έκφραση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jlm} \qquad (1.12.10)$$

Να δοθεί μια άλλη έκφραση αυτής με τη χρήση του συμβόλου του Kronecker.

Λύση :

Η (1.12.10) αναλυτικά γράφεται :

$$\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jlm} = \varepsilon_{ik1}\varepsilon_{jl1} + \varepsilon_{ik2}\varepsilon_{jl2} + \varepsilon_{ik3}\varepsilon_{jl3} \qquad (1.12.11)$$

Η έκφραση αυτή μπορεί να γραφεί σε βολικότερη μορφή, αν θυμηθούμε τον ορισμό του δέλτα του Kronecker (βλέπε (1.8.1)). Διαπιστώνουμε πρώτα ότι το γινόμενο (1.12.11) είναι διάφορο του μηδενός όταν $i\neq k\neq m\neq i$ και $j\neq l\neq m\neq j$.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις :

(i) $i=j$ και $k=l$ τότε $\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{jlm} = \varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{ikm} = +1$

(ii) $i=l$ και $j=k$ τότε $\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{jlm} = \varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{klm} = -1$

('Εχουμε κάνει χρήση των ιδιοτήτων (1.12.3 –4)).

Οι περιπτώσεις (i) και (ii) μπορούν να συμπτυχθούν με τη χρήση του δέλτα του Kronecker $\delta_{ij}\,\delta_{kl}-\delta_{il}\,\delta_{jk}$. Δηλαδή ισχύει η ταυτότητα:

$$\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{jlm} = \delta_{ij}\,\delta_{kl}-\delta_{il}\,\delta_{jk} \qquad (1.12.12)$$

Παράδειγμα 1.12.2.

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε την ταυτότητα

$$\mathbf{[A\times(B\times C)]} = (\mathbf{A\cdot C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A\cdot B})\,\mathbf{C} \qquad (1.12.13)$$

Για την απόδειξη* αυτής, ας υπολογίσουμε την συνιστώσα i, του πρώτου μέλους.

---

* προφανώς το **AxD**, όπου **D=BxC**, είναι κάθετο στο **D** δηλαδή κείται στο επίπεδο των **B** και **C**. 'Αρα μπορεί να γραφεί ως **βB+γC**. Απομένει να υπολογιστούν οι αριθμοί β και γ. Αρκεί να δειχθεί ότι **β=A·C** και **γ=-A·B**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i = \varepsilon_{ijk} A_j [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} A_j [\varepsilon_{klm} B_l C_m]$$

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_j B_l C_m$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (1.12.12)

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

έχουμε

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m = A_m B_i C_m - A_j B_j C_i$$

δηλαδή

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_i = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) B_i - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) C_i$$

'Ομως η τελευταία είναι η i-συνιστώσα του διανύσματος $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$, δηλαδή εδείχθη η (1.12.13).

Ανάλογα αποδεικνύονται και οι ακόλουθες χρήσιμες ταυτότητες :

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{A} \qquad (1.12.14)$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \times (\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}]\mathbf{B} - [\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}]\mathbf{A} \qquad (1.12.15)$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \qquad (1.12.16)$$

Η απόδειξη τους αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 1.12. 3 :

Να απλοποιηθεί η έκφραση:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

Λύση :

Χρησιμοποιώντας για απλότητα την αθροιστική σύμβαση έχουμε :

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot[(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]$$

$$= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i [(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]_i = (\varepsilon_{ijk} A_j B_k)[\varepsilon_{ilm} (\mathbf{B}\times\mathbf{C})_l (\mathbf{C}\times\mathbf{A})_m]$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= (\delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl})\, A_j B_k\, (B \times C)_l\, (C \times A)_m$$

$$= A_l\, B_m\, (B \times C)_l\, (C \times A)_m - A_m\, B_l\, (B \times C)_l\, (C \times A)_m$$

$$= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})\, \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

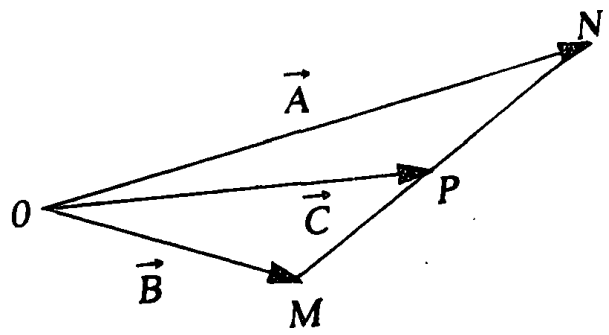
Όμως $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \equiv \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv 0$ και $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ συνεπώς :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot [(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]^2$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4.1. Θεωρείστε τα διανύσματα **A**, **B**, **C** του σχήματος



Αν MP=PN να γραφεί το **C** ως γραμμικός συνδυασμός των **A** και **B**.

1.4.2. Αεροπλάνο κινείται Βορειοδυτικά με ταχύτητα $\mathbf{u}_T$ ενώ φυσά δυτικός άνεμος με ταχύτητα $\mathbf{w}_0$. Υποθέστε ότι ξαφνικά σταματά ο άνεμος. Ποιά η ταχύτητα του αεροπλάνου ;

1.4.3. Αν **A**, **B**, **C** είναι διανύσματα μη συγγραμμικά και δεν βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο, τότε δείξτε ότι κάθε διάνυσμα του τρισδιάστατου του'χώρου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός τους συνδυασμός.

1.4.4. Αν α και β είναι μη μηδενικά και ισχύει,

$$\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

να δειχθεί ότι **A**, **B** είναι παράλληλα μεταξύ τους.

1.4.5. Να δειχθεί ότι οι γραμμές που ενώνουν τη κορυφή παραλληλόγραμμου με τα μέσα των απέναντι πλευρών, τριχοτομούν τη διαγώνιο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.4.6. α) Αποδείξτε ότι οι διάμεσοι κάθε τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο. β) Σε χάρτη εξερευνητών με Ν χωριά σημειωμένα, υπάρχουν οι ακόλουθες οδηγίες για την εύρεση ενός θησαυρού: "Ξεκινείστε από το χωριό Q_1 προς το Q_2 και διανύστε το 1/2 της απόστασης Q_1Q_2 , το 1/3 προς το χωριό Q_3 μετά το 1/4 προς το Q_4 κ.ο.κ. Ο θησαυρός ευρίσκεται στην τελευταία στάση." Παίζει ρόλο η σειρά των χωριών; Αν χάσετε το χάρτη, μπορείτε να βρείτε το θησαυρό;

1.5.1. Έστω δύο διανύσματα **A** και **B**, και θ η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους. Δείξτε ότι

$$\cos\theta = \frac{A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|}$$

1.6.1. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται απο την αρχή των συντεταγμένων και είναι παράλληλη στην ευθεία

$$x_1 - 3 = (x_2 + 2)/4 = 1 - x_3$$

1.6.2. Θεωρούμε τρία συγγραμμικά σημεία Α, Β και Ρ, όπου Ρ είναι σημείο που διαιρεί το τμήμα ΑΒ σε δύο τμήματα με λόγο λ, δηλαδή (ΑΡ) = λ (ΡΒ). Αν Ο είναι η αρχή των συντεταγμένων να δειχθεί ότι

$$\mathbf{OP} = [\mathbf{OA} + \lambda\,(\mathbf{OB})] / (1+\lambda)$$

1.7.1. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3,\ \mathbf{B} = \mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

όπου $\mathbf{e}_i$ i = 1,2,3 τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x_1, x_2, x_3 αντίστοιχα

1.7.2. Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ τους τα διανύσματα

$$A_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\ ,\ A_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$$

$$A_3 = \mathbf{e}_1\ ,\ A_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

1.7.3. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία (2,-1,1), (1,-3,-5), (3,-4,-4).

1.10.1.Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου κάθετου στο διάνυσμα

$$\mathbf{D} = 10\hat{x}_1 - 10\hat{x}_2 + 5\hat{x}_3$$

που διέρχεται απο το σημείο P = (1,1,-3)

(Απ. $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0$)

1.10.2. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ του επιπέδου

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

και της ευθείας

$$x_1 - 1 = x_2 + 2 = 2x_3 + 3$$

(Απ. $90 - \cos^{-1}\frac{5}{9}\sqrt{3}$)

(Υπόδειξη: Η γωνία αυτή ορίζεται ως η συμπληρωματική της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με την κάθετη στο επίπεδο.)

1.10.3. Αν $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ είναι μοναδιαία διανύσματα που σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους να δειχθεί ότι

$$\frac{1}{2}|\hat{n}_1 - \hat{n}_2| = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

1.10.4. Να ορισθούν τα α και β έτσι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{C}-\alpha\,\mathbf{A}-\beta\,\mathbf{B}$ να είναι κάθετο στα **A** και **B**, όπου

$$\mathbf{A} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3\,,\quad \mathbf{B} = 2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3\,,\quad \mathbf{C} = 2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 4\hat{e}_3$$

1.10.5. Στη μελέτη των κρυστάλλων με κυβική συμμετρία οι δείκτες Miller επιπέδου είναι τρεις αριθμοί (h,k,l) ανάλογοι των αντιστρόφων των τομών του επιπέδου με τους άξονες x_1, x_2, x_3.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Να γραφεί ένα διάνυσμα κάθετο σε επίπεδο με δείκτες Miller (h,k,l).

1.10.6. Αν **A**,**B**,**C** είναι διανύσματα με σημείο αφετηρίας την αρχή των αξόνων και κορυφές τα σημεία A,B,C αντίστοιχα να δειχτεί ότι το

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\mathbf{C} + \mathbf{C}\times\mathbf{A}$$

είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν οι κορυφές ABC.

1.10.7. Να δειχθεί ότι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επιπέδο

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$ γράφεται ως εξής

$$\hat{n} = \pm \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i \hat{x}_i}{\{\sum_{i=1}^{3} a_i^2\}^{1/2}}$$

Να εξηγηθεί γεωμετρικά γιατί η έκφραση είναι ανεξάρτητη της σταθεράς d.

1.11.1. Να αποδειχθεί ότι αν $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$, τότε

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{C}\times\mathbf{A}$$

1.11.2. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\hat{e}_1 \times (\hat{e}_1 \times \mathbf{A}) + \hat{e}_2 \times (\hat{e}_2 \times \mathbf{A}) + \hat{e}_3 \times (\hat{e}_3 \times \mathbf{A})$$

1.12.1. Να αποδειχτούν οι ταυτότητες (1.12.14 –1.12.16)

1.12.2. Θεωρείστε το αντισυμμετρικό σύμβολο ε_{ij} ,$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$. Να δειχθεί ότι

$$\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{il}\,\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{jl}$$

1.12.3. Έστω τα σύνολα διανυσμάτων $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_3$ και $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3$ τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{B}_n = \delta_{mn}$

a) Να δειχθεί ότι $\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_m \times \mathbf{A}_n \neq 0$, $\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{B}_n \times \mathbf{B}_m \neq 0$

b) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{A}_k = \frac{\mathbf{B}_m \times \mathbf{B}_n}{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{B}_m \times \mathbf{B}_n}$$

c) Να αποδειχθούν οι αντίστοιχες σχέσεις για τα $\mathbf{B}_k$.

1.12.4. Συνηθίζουμε να γράφουμε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$. Να δειχθεί ότι τυχαίο διάνυσμα **V** μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\mathbf{V} = \frac{1}{[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]} \{[\mathbf{V},\mathbf{B},\mathbf{C}]\mathbf{A} + [\mathbf{V},\mathbf{C},\mathbf{A}]\mathbf{B} + [\mathbf{V},\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C}\}$$

1.12.5. Αν **A**,**B**,**C** διανύσματα του τρισδιάστατου χώρου και λ μια πραγματική σταθερά, να ανάγετε σε ορίζουσες 3x3 τα τριπλά γινόμενα $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$, $[\mathbf{A},\mathbf{B} + \lambda \mathbf{A},\mathbf{C}]$ και να τις υπολογίσετε. Τι συμπεραίνετε ;

1.12.6. Να δειχθεί ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ είναι: $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{B} = 0$

1.12.7. Να δειχθεί ότι τα **A**,**B**,**C** είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] \neq 0$.

1.12.8. Έστωσαν $\hat{A}_1$,$\hat{A}_2$ είναι μοναδιαία διανύσματα στο $(x_1 O x_2)$ επίπεδο σχηματίζοντας γωνίες α_1 και α_2 αντίστοιχα με τον θετικό άξονα x_1. Να δειχθεί ότι

i) $\hat{A}_i = \cos \alpha_i \hat{e}_1 + \sin \alpha_i \hat{e}_2$

ii) $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$

iii) Να βρεθεί ανάλογος τύπος για το $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τα $\hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2$ και $\hat{A}_1 \times \hat{A}_2$).

1.12.9. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ τέτοια ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ να τέμνονται σε ένα σημείο. Έστω τώρα Η το σημείο τομής των ευθειών διερχομένων από τα ΑΒ και ΔΕ, Θ το σημείο τομής των ευθειών που διέρχονται από τα ΒΓκαι ΕΖ και Κ το αντίστοιχο για το ζεύγος ΓΑ, ΖΔ. Να δειχτεί ότι τα Η, Θ, Κ κείνται σε ευθεία.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1. Διανυσματική συνάρτηση μιάς μεταβλητής.

Η έννοια της διανυσματικής συνάρτησης είναι γνωστή από τον απειροστό λογισμό. Θα κάνουμε όμως κι εδω μιά σύντομη ανασκόπιση των βασικών ιδιοτήτων των διανυσματικών συναρτήσεων μιας ή και περισσοτέρων μεταβλητών.

Είναι γνωστή η έννοια της βαθμωτής συνάρτησης· αν t είναι μιά βαθμωτή μεταβλητή, τότε μία βαθμωτή συνάρτηση ϕ, συνδέει με αυτή ένα μοναδικό βαθμωτό μέγεθος $\phi(t)$, που καλείται η τιμή της ϕ στο t.

Ανάλογα ορίζουμε και μια διανυσματική συνάρτηση **F**. Δηλαδή μιά διανυσματική συνάρτηση **F** μιάς βαθμωτής μεταβλητής t που ανήκει σε κάποιο πραγματικό διάστημα είναι μία αντιστοιχία (απεικόνιση) που συνδέει σε κάθε t ένα μοναδικό διάνυσμα **F**(t) που καλείται η τιμή της **F** στο t. Όσα εκθέσαμε στα προηγούμενα περί διανυσμάτων ισχύουν και στην περίπτωση που έχουμε μία διανυσματική συνάρτηση, δηλαδή μεταβαλλόμενο διάνυσμα.

Υπάρχουν όμως και πρόσθετες ιδιότητες που σχετίζονται με την διανυσματική συνάρτηση.

Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων η διανυσματική συνάρτηση γράφεται :

$$\mathbf{F}(t) = F_1(t)\,\hat{\imath}_1 + F_2(t)\,\hat{\imath}_2 + F_3(t)\,\hat{\imath}_3 \qquad (2.1.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις της μεταβλητής t και καλούνται συνιστώσες.

2.2.α. Όριο Διανυσματικής Συνάρτησης

Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση **F**(t) ορίζεται για όλες τις τιμές της μεταβλητής t, γύρω απο τη γειτονιά ενός σημείου t_0. Τότε καθώς το t τείνει στο t_0, λέμε ότι υπάρχει το οριακό διάνυσμα **A** της **F**(t) και συμβολίζουμε:

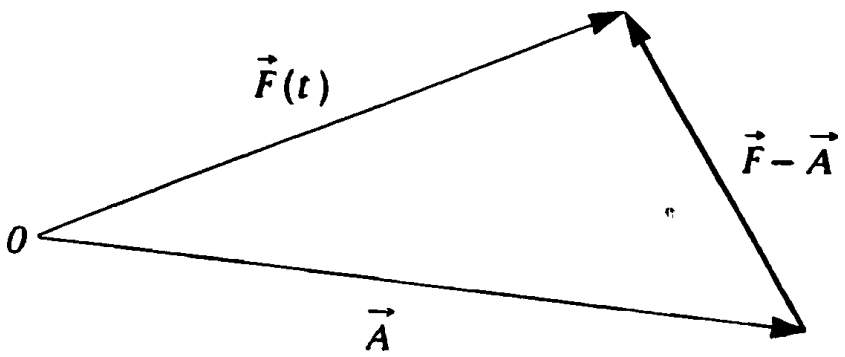
$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{A}, \qquad (2.2.1)$$

όταν για κάθε αυθαίρετο ε>0 υπάρχει πάντα αριθμός δ>0 τέτοιος ώστε

$$|\mathbf{F}(t) - \mathbf{A}| < \varepsilon \text{ όταν } |t-t_0| < \delta \qquad (2.2.2)$$

Γεωμετρικά μπορούμε να κατανοήσουμε τον ορισμό ως εξής: Το μέτρο του **F**(t) καθώς $t\to t_0$, πλησιάζει το μέτρο του **A** (βλέπε σχ. 2.2.1) και αν **A**≠0, η γωνία μεταξύ των **A** και **F**(t) τείνει στο μηδέν.

Και αυτός ο ορισμός, όπως και ο πρώτος, είναι ανάλογος με τον ορισμό του ορίου για τις βαθμωτές συναρτήσεις. Η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ η έκφραση **|F**(t)**−A|** αναφέρεται στο μέτρο του διανύσματος ενώ στις βαθμωτές συναρτήσεις έχουμε την απόλυτη τιμή ενός αριθμού.



Σχήμα 2.2.1. Καθώς το **F** *πλησιάζει το* **A** *το* **F** *−* **A** *τείνει στο μηδέν.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η **F**(t) λέγεται ότι είναι συνεχής στο σημείο t_0, εάν ορίζεται στη γειτονιά του t_0 και υπάρχει το όριο καθώς $t \to t_0$, και ισχύει

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0) , \qquad (2.2.3)$$

2.2.b. Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης.

Η **F**(t) είναι παραγωγήσιμη στο t_0 εφόσον υπάρχει το όριο

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{F}(t_0)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\Big|_{t=t_0} \qquad (2.2.4)$$

και είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Το όριο (2.2.4) καλείται παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης **F** και είναι και αυτό επίσης διανυσματική συνάρτηση. Πρακτικά για να παραγωγίσουμε μία διανυσματική συνάρτηση, τη γράφουμε όπως στη σχέση (2.1.1) και παραγωγίζουμε τις συνιστώσες της

$$\mathbf{F}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(t) = F_1'(t)\,\hat{\imath}_1 + F_2'(t)\,\hat{\imath}_2 + F_3'(t)\,\hat{\imath}_3 \qquad (2.2.5)$$

Ανάλογα ορίζουμε και διαφορικά υψηλότερης τάξης. Οι κανόνες παραγώγισης των διανυσματικών συναρτήσεων δεν διαφέρουν απο εκείνους των βαθμωτών συναρτήσεων. Θα πρέπει όμως να προσεχθεί η περίπτωση διαφόρισης εξωτερικού γινομένου διανυσματικών συναρτήσεων όπου η μεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει. Αν **F**(t), **G**(t), είναι διανυσματικές συναρτήσεις διαφορίσιμες και $\phi(t)$ βαθμωτή συνάρτηση, τότε ισχύουν οι ιδιότητες

$$\frac{d}{dt}[\,\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)\,] = \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{G}(t)}{dt} \qquad (2.2.6)$$

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)\,\mathbf{G}(t)) = \frac{d\phi(t)}{dt}\mathbf{G}(t) + \phi(t)\frac{d\mathbf{G}(t)}{dt} \qquad (2.2.7)$$

$$\frac{d}{dt}[\,\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t)\,] = \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\cdot\mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t)\cdot\frac{d\mathbf{G}(t)}{dt} \qquad (2.2.8)$$

$$\frac{d}{dt}[\,\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)\,] = \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\times\mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t)\times\frac{d\mathbf{G}(t)}{dt} \qquad (2.2.9)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επίσης αν t =t(s), τότε

$$\frac{d\mathbf{G}(t)}{ds} = \frac{d\mathbf{G}(t(s))}{ds} = \frac{d\mathbf{G}(t)}{dt}\frac{dt(s)}{ds} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}\frac{dt}{ds} \qquad (2.2.10)$$

Παράδειγμα 2.2.1

Να δειχθεί ότι αν $\lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) \to \mathbf{A}$, τότε κάθε συνιστώσα ξεχωριστά ικανοποιεί:

$$\lim_{t\to t_0} F_i(t) \to A_i$$

Λύση :

Εφόσον $\lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{A}$ τότε σύμφωνα με τον ορισμό, για κάθε αυθαίρετο

$\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$|\mathbf{F}(t) - \mathbf{A}| < \varepsilon \text{ , όταν } |t-t_0|<\delta. \text{ Όμως}$$

$$|\mathbf{F}(t) - \mathbf{A}| = ([F_1(t) - A_1]^2 + [F_2(t) - A_2]^2 + [F_3(t) - A_3]^2)^{1/2}$$

$$\geq |F_i(t) - A_i| \text{ , } i = 1,2,3$$

Άρα $|F_i(t) - A_i| < \varepsilon$ ή $\lim_{t\to t_0} F_i(t) \to A_i$

Στη παραπάνω ισχύει και το αντίστροφο. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|F_i(t) - A_i| < \varepsilon/3$ όταν $|t-t_0|<\delta$.

Τότε

$$|\mathbf{F}(t) - \mathbf{A}| = |(F_1(t) - A_1)\,\hat{\imath} + (F_2(t) - A_2)\,\hat{\jmath} + (F_3(t) - A_3)\,\hat{k}\,|$$

$$\leq |F_1(t) - A_1| + |F_2(t) - A_2| + |F_3(t) - A_3| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(όπου στην τελευταία χρησιμοποιήθηκε η λεγομένη τριγωνική ιδιότητα για τις απόλυτες τιμές : $|x+y| \leq |x|+|y|$)

Άρα

$$|\mathbf{F}(t)-\mathbf{A}| < \varepsilon \text{ για } |t-t_0| <\delta$$

το οποίο συνεπάγεται

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{A}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 2.2.2.

Να δειχτεί η ιδιότητα (2.2.9)

Λύση :

Από τον ορισμό της παραγώγου (2.2.4) έχουμε

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)\times\mathbf{G}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)+\mathbf{F}(t)]\times\mathbf{G}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)]\times\mathbf{G}(t+\Delta t)+\mathbf{F}(t)\times[\mathbf{G}(t+\Delta t)-\mathbf{G}(t)]}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\times\mathbf{G}(t)+\mathbf{F}(t)\times\frac{d\mathbf{G}(t)}{dt}$$

Η απόδειξη μπορεί εξ ίσου καλά να δοθεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.12.7) εφόσον ε_{ijk} και $\hat{\chi}_i$ είναι σταθερές ποσότητες.

Παράδειγμα 2.2.3

Να δειχθεί ότι για τυχούσα διανυσματική συνάρτηση **F**(t), ισχύει:

$$\mathbf{F}(t)\cdot\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = |\mathbf{F}(t)|\,\frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)|$$

Ειδικότερα, αν η **F**(t) έχει σταθερό μέτρο αλλά εν γένει μεταβαλλόμενη διεύθυνση, να δειχθεί ότι

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dt} = 0$$

δηλαδή η $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ είναι κάθετη στην **F**.

Λύση :

Είναι :

$$\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{F}(t) = |\mathbf{F}(t)|^2$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{F}(t)) = \frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)|^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dt} + \frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\mathbf{F} = 2|\mathbf{F}(t)|\,\frac{d|\mathbf{F}(t)|}{dt}$$

ή $$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dt} = |\mathbf{F}(t)|\,\frac{d|\mathbf{F}(t)|}{dt}$$

Ειδικότερα αν $|\mathbf{F}(t)|$ = σταθερό, τότε $\frac{d|\mathbf{F}(t)|}{dt} = 0$ και επομένως

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dt} = 0$$

(Να δειχτούν τα παραπάνω με τη χρήση των συνιστωσών

$$\mathbf{F}(t) = F_1(t)\,\hat{\imath}_1 + F_2(t)\,\hat{\imath}_2 + F_3(t)\,\hat{\imath}_3\ )$$

Παράδειγμα 2.2.4.

Δίδεται η διανυσματική έκφραση

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt})$$

όπου $\mathbf{x}$ το διάνυσμα θέσης. Να εκφραστεί μέ τη χρήση αυτής ο νόμος του Newton, καθώς και η στροφορμή και η ροπή σώματος μάζας m.

Λύση :

Σύμφωνα με την ιδιότητα (2.2.9)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x}\times\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

'Ομως απο τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου έχουμε

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$$

'Αρα $$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}) = \mathbf{x}\times\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής η εξίσωση του Newton

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

γράφεται

$$m\mathbf{x}\times\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{x}\times\mathbf{F}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ή $\quad m\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt}) = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$

ορίζοντας τη στροφορμή

$$\mathbf{L} = m\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

βρίσκουμε οτι $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$

όπου $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$, είναι η ροπή της δύναμης $\mathbf{F}$. Αν $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ τότε

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$$ (διατήρηση της στροφορμής)

(Κύτταξε εδάφιο 2.9 για την ειδική περίπτωση της κίνησης στις δύο διαστάσεις.)

Παράδειγμα 2.2.5

Σωμάτιο κινείται κατά μήκος τροχιάς $\mathbf{x}(t)$ με συνιστώσες

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 \,,\; x_2 = \frac{1}{4}gt^2 - v_0 t \,,\; x_3 = \frac{3}{4}v_0 t - \frac{5}{4}x_0$$

Να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας και επιτάχυνσης του σωμάτιου στη κατεύθυνση $\hat{x}_1 - 3\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3$ ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = gt\,\hat{x}_1 + (\frac{1}{2}gt - v_0)\,\hat{x}_2 + \frac{3}{4}v_0\,\hat{x}_3$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = g\,\hat{x}_1 + \frac{1}{2}g\,\hat{x}_2$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα στη ζητουμένη κατεύθυνση είναι:

(βλέπε παραδ. 1.7.2)

$$\hat{A} = \frac{\hat{x}_1 - 3\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3}{\sqrt{14}}$$

Άρα $v = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \hat{A} = \frac{gt - 3(\frac{1}{2}gt - v_0) + \frac{3}{2}v_0}{\sqrt{14}} = \frac{9v_0 - gt}{2\sqrt{14}}$

$$a = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \cdot \hat{A} = \frac{g - \frac{3}{2}g}{\sqrt{14}} = -\frac{g}{2\sqrt{14}}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 2.2.6.

Το διάνυσμα θέσης **x** σωματίου ως συνάρτηση τού χρόνου t δίνεται απο την $\mathbf{x}(t)= r_0(\cos\omega t\, \hat{\imath}_1 + \sin\omega t\, \hat{\imath}_2)$, ω= σταθερό.

Να δειχθεί ότι η ταχύτητα του **u**(t) είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης **x**(t), ενώ η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά με αυτό. Να δειχτεί επίσης ότι το **x**x**u** είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

Λύση :

Το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος **x**(t) είναι

$$|\mathbf{x}(t)|^2 = r^2_0 \, (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = r^2_0$$

δηλαδή σταθερό. Τότε η παράγωγος του $|\mathbf{x}(t)|^2$ είναι μηδέν

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{x}(t)|^2 = \mathbf{x}(t) \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = 0$$

(βλέπε παράδειγμα 2.2.3)

'Ομως $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{u}(t)$, άρα $\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = 0$. Σημειώνουμε πάντως ότι η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχθεί και αναλυτικά χρησιμοποιώντας την ειδική μορφή της συνάρτησης **x**(t), καθώς και της ταχύτητας,

$$\mathbf{u}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = r_0\, \omega(-\sin\omega t\, \hat{\imath}_1 + \cos\omega t\, \hat{\imath}_2)$$

Η επιτάχυνση είναι

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = r_0\, \omega^2 (-\cos\omega t\, \hat{\imath}_1 - \sin\omega t\, \hat{\imath}_2) = -\omega^2\, \mathbf{x}(t)$$

δηλαδή έχει αντίθετη φορά με αυτή του **x**(t).

Το ότι **x**x**u** = σταθερό μπορεί να αποδειχθεί με δύο τρόπους.

i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{u}) = 0$$

'Ομως $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}$ και $|\mathbf{x}| = r_0$, $|\mathbf{u}| = \omega r_0$ συνεπώς

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{u}) = \frac{d}{dt}(|\mathbf{x}|\, |\mathbf{u}|\, \sin\theta)\, \hat{\imath}_3 = \hat{\imath}_3 \frac{d}{dt}(r^2_0\, \omega) = 0$$

ii) Με απ' ευθείας υπολογισμό του εξωτερικού γινομένου, αντικαθιστώντας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ x_0\cos\omega t & x_0\sin\omega t & 0 \\ -r_0\omega\sin\omega t & r_0\omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r_0^2\,\omega\,(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)\,\hat{\imath}_3$$

$$= r_0^2\,\omega\,\hat{\imath}_3 = \textit{σταθερό διάνυσμα.}$$

Το **xxu** μπορεί επίσης να λογαριαστεί απλά, χρησιμοποιώντας τον αντισυμμετρικό τανυστή ε_{ijk}

$$\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{u} = \varepsilon_{ijk}\,\hat{\imath}_i\,r_j\,u_k = \varepsilon_{3jk}\,r_j\,u_k\,\hat{\imath}_3 =$$

$$= (\varepsilon_{312}\,r_1\,u_2 + \varepsilon_{321}\,r_2\,u_1)\,\hat{\imath}_3 = r^2{}_0\omega\,\hat{\imath}_3.$$

2.3. Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, μερικές παράγωγοι

Μιά διανυσματική συνάρτηση **F** δύο μεταβλητών u και υ, αντιστοιχεί σε κάθε σημείο (u,υ) κάποιας περιοχής, ένα μοναδικό διάνυσμα **F**(u,υ) που καλείται η τιμή της **F** στο σημείο (u,υ). Ανάλογα, ορίζονται διανυσματικές συναρτήσεις τριών και περισσοτέρων βαθμωτών μεταβλητών.

'Ετσι, ως προς συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, για μιά διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητων **F**(u,υ,w) γράφουμε

$$\mathbf{F} = F_1(u,\upsilon,w)\,\hat{\imath}_1 + F_2(u,\upsilon,w)\,\hat{\imath}_2 + F_3(u,\upsilon,w)\,\hat{\imath}_3 \qquad (2.3.1)$$

Η μερική παράγωγος της **F** ως προς τη μεταβλητή u, ορίζεται :

$$\mathbf{F}_u = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{F}(u+\Delta u,\upsilon,w) - \mathbf{F}(u,\upsilon,w)}{\Delta u} \qquad (2.3.2)$$

και ανάλογα για τις υπόλοιπες μεταβλητές

$$\mathbf{F}_\upsilon = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \upsilon} = \lim_{\Delta \upsilon \to 0} \frac{\mathbf{F}(u,\upsilon+\Delta\upsilon,w) - \mathbf{F}(u,\upsilon,w)}{\Delta \upsilon}$$

και όμοια για $\mathbf{F}_w$.

Οι παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης, είναι δυνατό να είναι είτε ως προς την ίδια μεταβλητή είτε ως προς διαφορετική. 'Ετσι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$F_{uu} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)$$

$$F_{uv} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) \qquad (2.3.3)$$

$$F_{vu} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)$$

$$F_{vv} = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

Αν η συνάρτηση **F**(u,v,w) έχει συνεχείς παραγώγους τουλάχιστον δεύτερης τάξης τότε οι δύο τελευταίες είναι ίσες, δηλαδή

$$F_{uv} = F_{vu}$$

Με άλλα λόγια δεν έχει σημασία η σειρά παραγώγισης. Τέλος, ισχύουν κι εδώ οι ιδιότητες (2.2.6) - (2.2.10) ως προς κάθε μεταβλητή ξεχωριστά : Επιπλέον

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}\cdot\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v}\right\} \qquad (2.3.4)$$

$$= \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u \partial v}\cdot\mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial v} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial u \partial v}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μία διανυσματική συνάρτηση **F** που εξαρτάται από τις μεταβλητές (u,v,w,t) πλην όμως οι μεταβλητές u,v,w δεν είναι ανεξάρτητες του χρόνου αλλά συνάρτηση αυτού δηλαδή u=u(t), v=v(t), w=w(t). Τότε, αν $F_i = F_i(u,v,w,t)$ είναι οι συνιστώσες της **F** ως προς τρισορθογώνιο σύστημα $\hat{\imath}_i$ (i=1,2,3), έχουμε*

$$dF = \hat{\imath}_1 dF_1 + \hat{\imath}_2 dF_2 + \hat{\imath}_3 dF_3 \equiv \hat{\imath}_i dF_i =$$

$$= \hat{\imath}_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial t}dt + \frac{\partial F_i}{\partial u}du + \frac{\partial F_i}{\partial v}dv + \frac{\partial F_i}{\partial w}dw\right)$$

* Υπενθυμίζουμε ότι οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \left(\hat{i}_1 \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} \hat{i}_1\right) du + \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} \hat{i}_1\right) du + \left(\frac{\partial F_1}{\partial w} \hat{i}_1\right) dw$$

$$= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w} dw$$

'Αρα

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial w}\frac{dw}{dt} \qquad (2.3.5)$$

Για (n+1) - μεταβλητές, όπου $u_i = u_i(t)$, i =1,2,3....n, έχουμε

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_i}\frac{du_i}{dt} \qquad (2.3.6)$$

Είναι λοιπόν σαφές ότι η ολική παράγωγος $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ ως προς t δεν πρέπει να συγχέεται με την μερική παράγωγο $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$.

2.4. Καμπύλες χώρου

Στο πρώτο κεφάλαιο απαντήσαμε την πρώτη διανυσματική συνάρτηση μιας παραμέτρου που είναι η εξίσωση της ευθείας $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{A}$.

Στο παρόν εδάφιο θα ασχοληθούμε με περισσότερο περίπλοκες διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ της παραμέτρου t.

Για μιά τυχαία διανυσματική συνάρτηση, $\mathbf{x}(t)$, συνεχή ως προς τη μεταβλητή t, γράφουμε τις παραμετρικές εξισώσεις :

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t) \qquad (2.4.1)$$

Καθώς η τιμή της παραμέτρου t μεταβάλλεται από την αρχική της τιμή $t=t_0$, το σημείο (x_1,x_2,x_3) διαγράφει μία καμπύλη στο χώρο. Κάθε σημείο της καμπύλης καθορίζεται από μία συγκεκριμμένη τιμή της παραμέτρου t και γιαυτό η καμπύλη ονομάζεται μονοδιάστατη. Προφανώς η ευθεία είναι μία ειδική περίπτωση μονοδιάστατης καμπύλης του χώρου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Συνεπώς έχουμε συσχετίσει κάθε συνεχή διανυσματική συνάρτηση **x**(t) με μία καμπύλη καθώς η παράμετρος t μεταβάλλεται σε κάποιο διάστημα. Η καμπύλη απο μόνη της περιέχει λιγότερη πληροφορία απ' ότι η διανυσματική συνάρτηση. Έτσι, δεν είναι δυνατό να καθοριστεί η συνάρτηση **x**(t) από δοσμένο σημείο της καμπύλης. Αυτό φαίνεται αν περιοριστούμε στην ευθεία γραμμή. Γνωρίζουμε ήδη ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι παραμέτρησης ευθείας. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{A}\ ,\ -\infty < t < \infty \qquad (2.4.2)$$

περιγράφει την ίδια ευθεία με την συνάρτηση

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_0 + \tan(t)\,\mathbf{A}\ ,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\ , \qquad (2.4.3)$$

Σχετικά απλά μπορούμε να γράψουμε και την παραμετρική εξίσωση του κύκλου. Αν θεωρήσουμε ότι κείται στο επίπεδο (x_1, x_2) με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή $x^2_1 + x^2_2 = a^2$, χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις γράφουμε $x_1 = a\cos t$, $x_2 = a\sin t$ και

$$\mathbf{x}(t) = a\,(\cos t\,\hat{e}_1 + \sin t\,\hat{e}_2) \qquad (2.4.4)$$

Αν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται σε απόσταση $\mathbf{x}_0$ από την αρχή των αξόνων και κείται στο τυχαίο επίπεδο $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$, έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + a(\cos t\,\hat{e}_1 + \sin t\,\hat{e}_2) \qquad (2.4.5)$$

Παράδειγμα 2.4.1

Να γραφεί η παραμετρική εξίσωση του κύκλου ακτίνας 2, που είναι παράλληλος στο επίπεδο (x_1, x_3) και το κέντρο του είναι στο σημείο (0,1,0).

Λύση :

Θέτουμε στη (2.4.5) $\mathbf{x}_0 \rightarrow (x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,1,0)$, $a = 2$, $\hat{e}_1 = \hat{\imath}_1$ και $\hat{e}_2 = \hat{\imath}_3$. Τότε

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\imath}_2 + 2(\cos t\,\hat{\imath}_1 + \sin t\,\hat{\imath}_3)$$

Παράδειγμα 2.4.2

Να γραφεί η παραμετρική εξίσωση του κύκλου που τέμνει τους άξονες στα σημεία $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

Από την εξίσωση του επίπεδου $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{n} = 0$, θεωρώντας τα $\mathbf{x}_0 = (1,0,0)$ και $\mathbf{x}_0' = (0,1,0)$ βρίσκουμε $n_1 - n_2 = 0$. Όμοια θεωρώντας $\mathbf{x}_0'' = (0,0,1)$ βρίσκουμε $n_1 = n_3$.

Άρα το διάνυσμα $\hat{n} = (\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3)/\sqrt{3}$ είναι κάθετο στο επίπεδο του κύκλου. Συνεπώς αρκεί να βρούμε δύο μοναδιαία διανύσματα κάθετα στο $\hat{n}$ και κάθετα μεταξύ τους. Έστω το $\hat{e}_1 = a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2$. Τότε

$$\hat{n}\cdot\hat{e}_1 = 0 \rightarrow a_1 = -a_2$$

Επίσης $a^2{}_1 + a^2{}_2 = 1$ άρα $a_1 = -a_2 = 1/\sqrt{2}$. Το άλλο διάνυσμα βρίσκεται απο το εξωτερικό γινόμενο των $\hat{n}$ και $\hat{e}_1$ δηλαδή

$$\hat{e}_2 = (\hat{n} \times \hat{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3) \times \left(\frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 2\hat{x}_3)$$

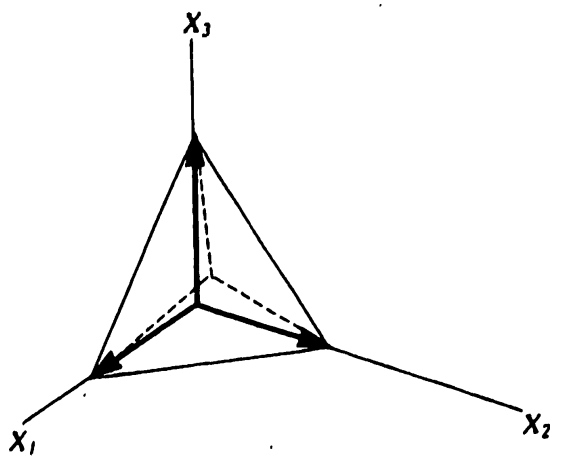
Άρα βρήκαμε δύο κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα στο επίπεδο του κύκλου

$$\hat{e}_1 = \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{e}_2 = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 2\hat{x}_3}{\sqrt{6}}$$

Για να εφαρμόσουμε την εξίσωση (2.4.5) απομένει να βρούμε το κέντρο του κύκλου. Αυτό συμπίπτει με το κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου (βλέπε σχήμα 2.4.1) που σχηματίζουν τα σημεία (0,0,1), (0,1,0) και (1,0,0).

Είναι :

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{3}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3)$$



Σχήμα 2.4.1 Επίπεδο που τέμνει τους άξονες στα σημεία $x_1=x_2=x_3=1$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τελικά η εξίσωση του κύκλου είναι

$$x(t) = \frac{1}{3}(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) + a\left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{\ell_1 + \ell_2 - 2\ell_3}{\sqrt{6}}\sin t\right)$$

όπου a είναι η ακτίνα του κύκλου

$$a = \left|\ell_1 - \frac{1}{3}(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)\right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Τελικά

$$x(t) = \frac{1}{3}[\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \sqrt{3}(\ell_1 - \ell_2)\cos t + (\ell_1 + \ell_2 - 2\ell_3)\sin t]$$

Παράδειγμα 2.4.3

Να σχεδιαστεί η καμπύλη

$$x_1 = \rho\cos(\alpha^{-1}x_3)\ x_2 = \rho\sin(\alpha^{-1}x_3)$$

Λύση :

Εισάγουμε μία νέα παράμετρο t έτσι ώστε

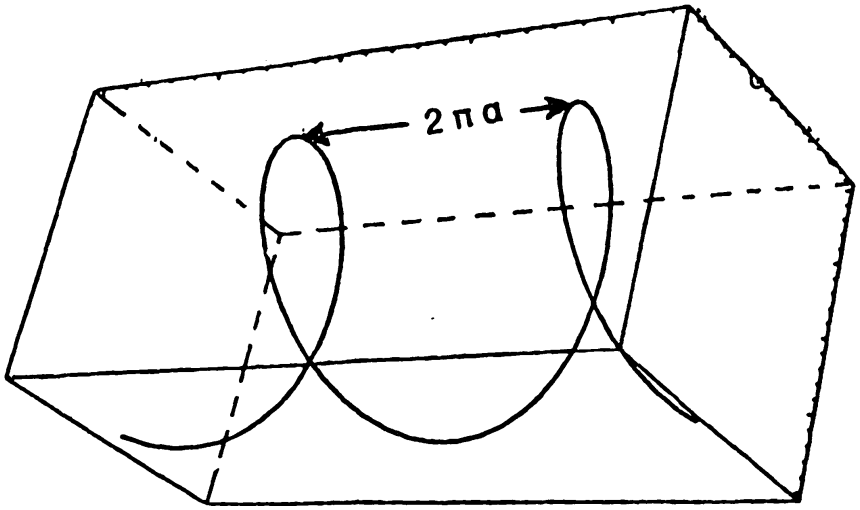
$$\alpha^{-1}x_3 = t \rightarrow x_3 = \alpha t$$

Άρα έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για τις συντεταγμένες x_i

$$x_1 = \rho\cos t\ ,\ x_2 = \rho\sin t\ ,\ x_3 = \alpha t \qquad (2.4.6)$$

Οι (2.4.6) είναι οι εξισώσεις της ελικοειδούς καμπύλης. Οι $x_{1,2}$ συντεταγμένες περιγράφουν κύκλο όμως η x_3 συντεταγμένη δεν παραμένει σταθερή αλλά είναι ανάλογη της γωνίας περιστροφής (βλέπε σχήμα 2.4.2).

Το μήκος x_3 σε χρόνο $t = 2\pi$ λέγεται βήμα Δ της έλικος. Εύκολα προκύπτει οτι είναι $\Delta = x_3(t + 2\pi) - x_3(t) = 2\pi a$. Για ένα τυχαίο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) με άξονα συμμετρίας τον άξονα ℓ_3 η εξίσωση της ελικοειδούς καμπύλης γράφεται



Σχήμα 2.4.2. Η ελικοειδής καμπύλη

$$\mathbf{x}(t) = \rho\cos t\, \hat{\imath}_1 + \rho\sin t\, \hat{\imath}_2 + \frac{\Delta}{2\pi} t\, \hat{\imath}_3 \qquad (2.4.7)$$

που ρ η ακτίνα και Δ το βήμα της έλικας.

2.5. Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης χώρου

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση μιάς καμπύλης **x**=**x**(t), ως προς παράμετρο t. Ας υποθέσουμε ότι η παράμετρος t παριστάνει στη συγκεκριμένη περίπτωση τη μεταβλητή τού χρόνου. Σε διάστημα Δt, η θέση του διανύσματος **x** αλλάζει απο **x**(t) σε **x**(t +Δt). Η μετατόπιση είναι

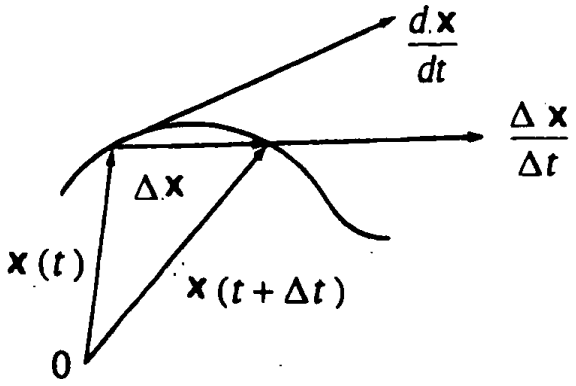
$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) = \Delta x_1\, \hat{\imath}_1 + \Delta x_2\, \hat{\imath}_2 + \Delta x_3\, \hat{\imath}_3 \qquad (2.5.1)$$

Η μέση ταχύτητα σωμάτιου που έχει διάνυσμα θέσης το **x**(t), στο χρονικό διάστημα Δt είναι τότε (βλέπε σχήμα 2.5.1)

$$\mathbf{u} = \frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t} = \hat{\imath}_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \qquad (2.5.2)$$

(παραδοχή άθροισης του Einstein)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 2.5.1. Το $\frac{dx}{dt}$ *είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη* **x**(t).

Εφόσον η **x**(t) είναι παραγωγίσιμη, η μέση ταχύτητα **u** τείνει σε ένα όριο **u**(t) καθώς το Δt τείνει στο μηδέν

$$\mathbf{u}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \mathbf{x}'(t) = \hat{\mathbf{x}}_i \frac{dx_i}{dt} \qquad (2.5.3)$$

Το όριο αυτό αποτελεί την ταχύτητα του σωμάτιου τη στιγμή t, και συμπίπτει με την εφαπτόμενη στη καμπύλη (σχήμα 2.5.1). Μία καμπύλη λέγεται ομαλή σε κάποιο διάστημα αν η συνάρτηση **x**(t) είναι μονότιμη και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με συνεχή παράγωγο. Μία καμπύλη είναι κατά τμήματα ομαλή αν είναι συνεχής και μπορεί να διαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό ομαλών καμπύλων. Το μοναδιαίο διάνυσμα **T**(t) εφαπτόμενο στην καμπύλη **x**(t) ορίζεται επίσης απλά

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{x}/dt}{|d\mathbf{x}/dt|} = \frac{\sum_i (dx_i/dt)\hat{\mathbf{x}}_i}{\sqrt{\sum_i (dx_i/dt)^2}} \qquad (2.5.4)$$

Παράδειγμα 2.5.1.

Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη

$$\mathbf{x}(t) = 3t\,\hat{\mathbf{x}}_1 + t^2\,\hat{\mathbf{x}}_2 + t^3\,\hat{\mathbf{x}}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στο σημείο (6,4,8). Προφανώς για το σημείο αυτό θα πρέπει t=2, $t^2=4$, $t^3=8$ δηλαδή υπάρχει λύση που αντιστοιχεί σε t=2. Απο την εξίσωση (2.5.4) έχουμε

$$\mathbf{T}(t) = \frac{3\mathbf{i}_1 + 2t\,\mathbf{i}_2 + 3t^2\,\mathbf{i}_3}{\sqrt{3^2+(2t)^2+(3t^2)^2}}$$

'Αρα για t=2, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{T}(t=2) = \frac{3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{1}{13}(3\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 + 12\mathbf{i}_3)$$

2.6. Μήκος καμπύλης χώρου

'Εστω C είναι μία καμπύλη κατά τμήματα ομαλή. Διαιρούμε τη C σε μικρά διαστήματα με τα σημεία $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ (σχήμα 2.6.1) και τη προσεγγίζουμε με μία πολυγωνική γραμμή που αποτελείται απο τα ευθύγραμμα τμήματα Q_0Q_1, $Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$. Αν $\mathbf{x}_k$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου Q_k, k=1,2...n και $\Delta\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$, τότε το συνολικό μήκος της πολυγωνικής γραμμής $Q_0Q_1...Q_n$ είναι :

$$Q_0Q_1 + Q_1Q_2 + \ldots + Q_{n-1}Q_n = \sum_{k=1}^{n} |\Delta\mathbf{x}_k| \qquad (2.6.1)$$

όπου $$|\Delta\mathbf{x}_k| = \sqrt{(\Delta x_1(k))^2 + (\Delta x_2(k))^2 + (\Delta x_3(k))^2} \qquad (2.6.2)$$

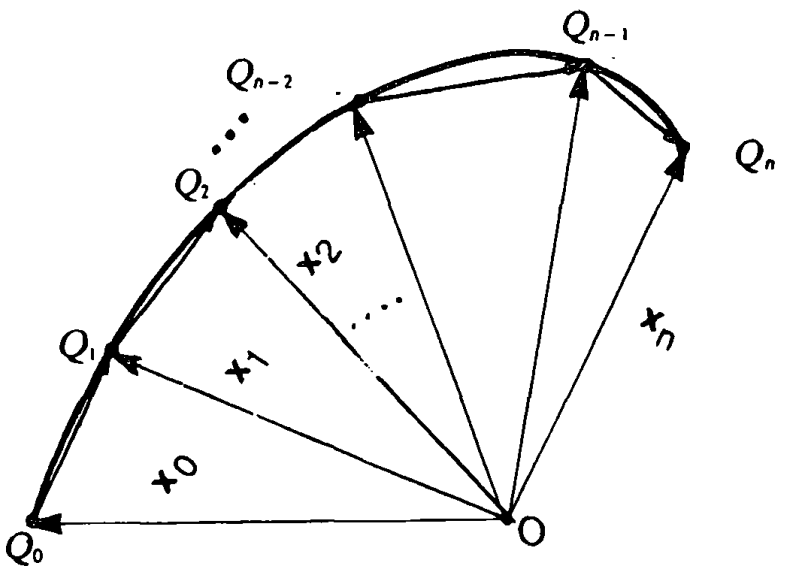
Το μήκος της καμπύλης προκύπτει απο το όριο της (2.6.1), όταν αυτό υπάρχει, καθώς ο αριθμός των υποδιαιρέσεων n αυξάνει απεριόριστα. Ο υπολογισμός του ορίου αυτού διευκολύνεται αν έχουμε τη δυνατότητα να παραμετροποιήσουμε την καμπύλη, να προσδιορίσουμε δηλαδή κάθε σημείο της με τη βοήθεια μιάς παραμέτρου $t\in(a,b)$ μέσω μιάς συνάρτησης $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Προς τούτο, έστω t_k η τιμή της μεταβλητής t, που αντιστοιχεί στο $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$. Τότε, επειδή η $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ είναι συνεχής συνάρτηση, για κάποιον αριθμό $\tau_i(k)$ μεταξύ των t_{k-1} και t_k έχουμε

$$\Delta x_i(k) = x_i(k) - x_i(k-1) = (t_k - t_{k-1})\frac{dx^i}{dt}(\tau_i(k)) \ , \ i=1,2,3$$

Το μήκος του πολυγώνου είναι τότε,

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta\mathbf{x}_k| = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}(\tau_1(k))\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}(\tau_2(k))\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}(\tau_3(k))\right)^2\right]^{1/2}(t_k - t_{k-1})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 2.6.1. Υποδιαίρεση καμπύλης σε n- τμήματα.

Αυξάνοντας τον αριθμό των υποδιαιρέσεων απεριόριστα, οι διαφορές $t_k - t_{k-1}$ γίνονται απειροστές και το άθροισμα προσεγγίζει το ολοκληρωμα δηλαδή $\Delta x_i(k)$ $\rightarrow dx_i = \frac{dx_i}{dt} dt$ οπότε

$$s = \int_a^b \left[\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3(t)}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} dt$$

$$\equiv \int_a^b dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt \equiv \int_a^b \left|\frac{dx}{dt}\right| dt \qquad (2.6.3)$$

Το ολοκλήρωμα (2.6.3) μας δίνει λοιπόν το μήκος της καμπύλης C. Σημειώνουμε εδώ ότι αν χρησιμοποιήσουμε ως παράμετρο το ίδιο το μήκος s(t) της καμπύλης, τη χρονική στιγμή t, τότε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα **T**(t) της **x**(t) (σχέση 2.5.4) εκφράζεται απλά $\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds}$ (βλέπε παράδειγμα (2.6.3) πιο κάτω).

Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση που η καμπύλη κείται σε επίπεδο. Αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι το επίπεδο της καμπύλης είναι το (x_1, x_2) τότε $\frac{dx_3}{dt} = 0$. Η υπό ολοκλήρωση ποσότητα τότε γράφεται

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} = \left|\frac{dx_1}{dt}\right| \sqrt{1 + \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$s = \int_{x_1(a)}^{x_1(b)} dx_1 \sqrt{1+\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2} \qquad (2.6.4a)$$

ή ανάλογα

$$s = \int_{x_2(a)}^{x_2(b)} dx_2 \sqrt{1+\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2} \qquad (2.6.4.b)$$

Παράδειγμα 2.6.1.

Κίνηση φορτίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο : Θεωρείστε ότι ένα σώμα με φορτίο q κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο **B** έτσι ώστε αρχικά η ορμή του **P** να σχηματίζει γωνία θ με το πεδίο **B.** i) Να δοθεί μια έκφραση που περιγράφει την τροχιά του. ii) Αν εξέρχεται από το πεδίο αφού διανύσει απόσταση L κατά το μήκος του πεδίου να βρεθούν : α) το μήκος τροχιάς του και β) ο χρόνος διαδρομής.

Λύση :

Η δύναμη του μαγνητικού πεδίου πάνω στο φορτίο q είναι

$$\mathbf{F} = q\,[\mathbf{u} \times \mathbf{B}] \text{ (Δύναμη Lorenz)}$$

Η **F** είναι κάθετη στην ορμή με μέτρο

$$F = quB\cos\theta = qBu_\perp$$

εξαιτίας της οποίας θα διαγράψει κυκλική τροχιά έτσι ώστε

$$qBu_\perp = \frac{mu^2_\perp}{r} \Rightarrow r = \frac{P_\perp}{qB}.$$

Η συχνότητα της κίνησης είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi r}{u_\perp}} = \frac{u_\perp}{r} = \frac{qB}{m}$$

ταυτόχρονα όμως κινείται και κατά μήκος του πεδίου με ταχύτητα $u_\parallel$

$$u_\parallel = \frac{P_\parallel}{m} = \frac{P\cos\theta}{m}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα η τροχιά δίνεται από το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{x} = \frac{P_\perp}{qB}\left(\cos\frac{qB}{m}t\,\hat{\imath}_1 + \sin\frac{qB}{m}t\,\hat{\imath}_2\right) + \frac{P_\parallel}{m}t\,\hat{\imath}_3 .$$

Αυτή είναι η εξίσωση της ελικοειδούς (παράδειγμα 2.4.3) με ακτίνα $\frac{P_\perp}{2B}$ και βήμα

$$\Delta = 2\pi\frac{P_\parallel}{qB} .$$

Το μήκος της τροχιάς για ένα βήμα είναι

$$s_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\left(\frac{P_\perp}{qB}\right)^2\left(\frac{qB}{m}\right)^2 + \left(\frac{P_\parallel}{m}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{P}{m}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{P}{m}2\pi\frac{m}{qB} = 2\pi\frac{P}{qB}$$

Αυτό αντιστοιχεί σε ένα βήμα. Σε απόσταση L βρίσκουμε

$$s_2 = s_1\frac{L}{(2\pi P_\parallel / qB)} = \frac{L\,P}{P_\parallel}$$

Ο αντίστοιχος χρόνος είναι $t_1 = L/v_{11} = Lm/P_\parallel$.

Παράδειγμα 2.6.2.

Να βρεθεί το μήκος της ελικοειδούς καμπύλης

$$x_2 = \sin 2\pi x_1,\ x_3 = \cos 2\pi x_1$$

μεταξύ των σημείων (0,0,1) και (1,0,1)

Λύση :

Εδώ η συντεταγμένη x_1 μπορεί να εκληφθεί ως παράμετρος. Είναι :

$$|dx| = \sqrt{dx^2_1 + dx^2_2 + dx^2_3}$$

$$= \{dx^2_1 + (4\pi^2\cos^2 2\pi x_1 + 4\pi^2\sin^2 2\pi x_1)dx^2_1\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{1 + 4\pi^2}\,dx_1$$

Συνεπώς η μορφή του |dx| μας οδηγεί στη (2.6.4). Έχουμε τότε

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + 4\pi^2}\,dx_1 = \sqrt{1 + 4\pi^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σ η μ ε ί ω σ η: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την συνήθη παραμετρική μορφή της εξίσωσης της ελικοειδούς καμπύλης για να υπολογίσουμε το μήκος, με τη χρήση της (2.6.3). Έτσι θέτοντας $x_1 = t/2\pi$ έχουμε

$$\mathbf{x} = \frac{t}{2\pi}\hat{\imath}_1 + \sin t\,\hat{\imath}_2 + \cos t\,\hat{\imath}_3$$

Τότε $s = \int_0^{2\pi} dt \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| = \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}\int_0^{2\pi} dt = \sqrt{1+4\pi^2}$

Παράδειγμα 2.6.3.

Δίνεται η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{x}(t) = r_0(\cos\omega t\,\hat{\imath}_1 + \sin\omega t\,\hat{\imath}_2)$$

όπου t, παράμετρος χρόνου.

Να εκφραστεί το διάνυσμα θέσης **x** ως προς τη μεταβλητή s, **x**(s), όπου s είναι το ίδιο το μήκος της καμπύλης τη χρονική στιγμή t.

Λύση :

Απο την εξίσωση (2.6.3) έχουμε

$$s(t) = r_0\int_0^t \omega\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}\,dt = t\omega r_0 \rightarrow t = \frac{s}{\omega r_0}$$

Άρα

$$\mathbf{x}(s) = r_0(\cos(\frac{s}{r_0})\,\hat{\imath}_1 + \sin(\frac{s}{r_0})\,\hat{\imath}_2)$$

Παράδειγμα 2.6.4.

Δείξτε ότι για οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη **x**(t) το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα **T** (σχέση 2.5.4) δίνεται απο τη σχέση

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \qquad (2.6.5)$$

όπου s το μήκος της καμπύλης τη στιγμή t.

Λύση :

Από τον τύπο (2.5.4) έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}/dt}{|d\mathbf{x}/dt|}$$

Επίσης από τον τύπο (2.6.3) $s = \int_0^t \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| dt$ συνάγουμε ότι

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|$$

Αντικαθιστώντας το $|d\mathbf{x}/dt|$ στην έκφραση για το **T** έχουμε

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

Ετσι στο παράδειγμα (2.6.3) έχουμε :

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = r_0\left(\frac{1}{r_0}\right)\{-\sin\left(\frac{s}{r_0}\right)\hat{\imath}_1+\cos\left(\frac{s}{r_0}\right)\hat{\imath}_2\} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right| = 1$$

Παράδειγμα 2.6.5.

Δίνεται η καμπύλη

$$x_1 = t\ ,\ x_2 = 2t+5\ ,\ x_3 = 3t$$

Να υπολογιστούν: i) η $\frac{d\mathbf{T}}{dt}$ ii) το μήκος της καμπύλης μεταξύ των σημείων (0,5,0) και (1,7,3). Είναι απαραίτητη η χρήση της (2.6.3);

Λύση :

i) Το **T** είναι η εφαπτόμενη της καμπύλης

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}/dt}{|d\mathbf{x}/dt|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\hat{\imath}_1 +2\hat{\imath}_2 +3\hat{\imath}_3)$$

Συνεπώς $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0$. Δηλαδή η καμπύλη έχει σταθερή διεύθυνση. Τούτο είναι προφανές μιας και πρόκειται για ευθεία.

ii) Απο την τελευταία παρατήρηση συνάγουμε ότι δεν είναι απαραίτητη η χρήση της (2.6.3) για τον υπολογισμό του μήκους. Το s είναι απλά η απόσταση των δύο σημείων

$$s= \{1^2 +2^2 +3^2\}^{1/2} = \sqrt{14}$$

Παράδειγμα 2.6.6.

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης

$$x_1 = e^t \cos t\ ,\ x_2 = e^t \sin t\ ,\ x_3 = 0$$

μεταξύ των σημείων t=0 και t=1. Να γίνει η παραμετροποίησή της ως προς τη μεταβλητή του μήκους s. Να βρεθεί το σχήμα της.

Λύση :

Είναι $\frac{dx}{dt} = e^t[(\cos t - \sin t)\hat{\imath}_1 + (\cos t + \sin t)\hat{\imath}_2] \rightarrow \left|\frac{dx}{dt}\right| = \sqrt{2}\, e^t$

Άρα $s = \int_0^1 \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = \sqrt{2}\,(e-1)$

Για να παραμετροποιήσουμε ως προς την μεταβλητή s υπολογίζουμε το ίδο ολοκλήρωμα με άνω όριο το t

$$s = \int_0^t \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2}\,(e^t - 1) \rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

Άρα

$$\mathbf{x}(s) = \left[\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\hat{\imath}_1 + \left[\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\hat{\imath}_2$$

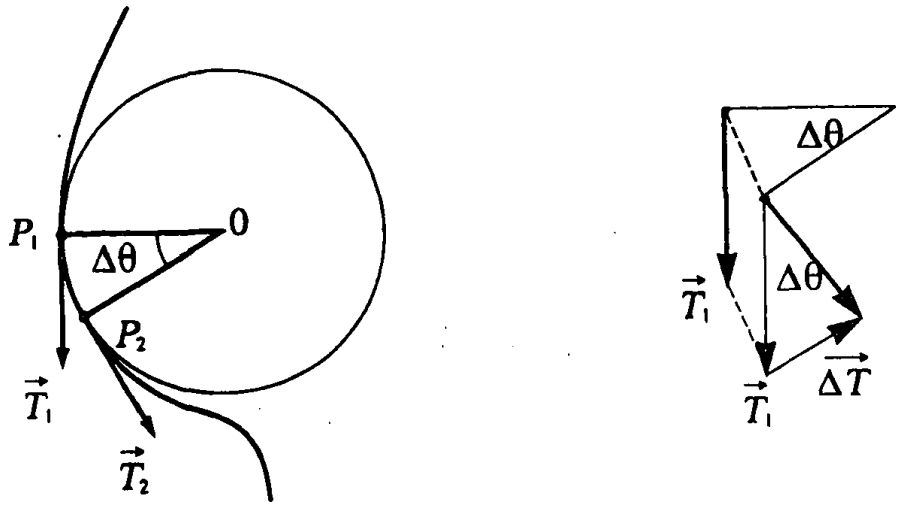
2.7. Καμπυλότητα καμπύλης

Ας θεωρήσουμε καμπύλη που περιγράφεται απο ομαλή συνεχή διανυσματική συνάρτηση **x**(t). Για κάθε αρκετά μικρό τμήμα της είναι δυνατό να επιλέξουμε κύκλο κατάλληλης ακτίνας ρ τέτοιου που τοπικά ένα μικρό τόξο του θα συμπίπτει με το αυτό μικρό τμήμα της καμπύλης (βλέπε σχήμα 2.7.1). Με λίγα λόγια είναι δυνατό με επιλογή της ακτίνας ρ, ο κύκλος να έχει την ίδια καμπυλότητα τοπικά με αυτή της καμπύλης.

Μπορούμε να ορίσουμε την καμπυλότητα με τη μεταβολή του εφαπτόμενου διανύσματος **T** κατά μήκος της καμπύλης. Έτσι η καμπυλότητα k ορίζεται ως εξής:

$$k \equiv \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{|dT/dt|}{ds/dt} = \frac{|dT/dt|}{dx/dt} \qquad (2.7.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 2.7.1. Η καμπυλότητα της καμπύλης σε δοσμένο σημείο συμπίπτει με εκείνη μικρού κύκλου που εφάπτεται της καμπύλης στο σημείο αυτό.

Ας επανέλθουμε στο σχήμα 2.7.1. Αν Δθ είναι η γωνία μεταξύ των ακτίνων OP_1 και OP_2 όπου $P_1P_2 = \Delta s$, είναι το μήκος τους τόξου που εφάπτεται στην καμπύλη, τότε

$$|\Delta s| = \rho\Delta\theta$$

Συνάμα, τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ που εφάπτονται στα σημεία P_1, P_2 της καμπύλης, σχηματίζουν και αυτά μεταξύ τους γωνία Δθ. Η διαφορά τους $\Delta\mathbf{T}=\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2$ (σχήμα 2.7.1b) είναι :

$$|\Delta\mathbf{T}| = |\mathbf{T}_i|\,\Delta\theta = \Delta\theta,\ |\mathbf{T}_i| = 1, i = 1,2$$

'Αρα αν ρ είναι η ακτίνα του τοπικού κύκλου $|\Delta s|\approx\rho\Delta\theta=\rho|\Delta\mathbf{T}| \rightarrow \frac{1}{\rho} = \left|\frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta s}\right|$

Στο όριο $\Delta s \rightarrow 0$ έχουμε

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta s}\right|$$

$$= \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \equiv k \qquad (2.7.2)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς η ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου σε κάθε σημείο ισούται με το αντίστροφο της καμπυλότητας:

$$\rho = \frac{1}{k} \qquad (2.7.3)$$

Για παράδειγμα η ευθεία γραμμή έχει καμπυλότητα k=0 δηλαδή αντιστοιχεί σε ακτίνα $\rho = \infty$.

'Εχουμε αποδείξει ότι για κάθε διάνυσμα **F**(t) σταθερού μέτρου ισχύει $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{F}(t)/dt = 0$ που σημαίνει ότι, αν $\mathbf{F}(t) \neq 0$, τότε $\mathbf{F}(t) \perp d\mathbf{F}(t)/dt$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα **T**(t) είναι μοναδιαίο, δηλαδή έχει μέτρο σταθερό $|\mathbf{T}(t)| = 1$. Συνεπώς $\frac{d\mathbf{T}}{dt} \perp \mathbf{T}$. (Αυτό είναι φανερό και απο το σχήμα 2.7.1b). Ορίζουμε τότε το μοναδιαίο διάνυσμα **N** ως εξής :

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \qquad (2.7.4)$$

Είναι όμως $k = |d\mathbf{T}/ds|$, συνεπώς

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\,\mathbf{N} \text{ ή } \mathbf{N} = \rho\,\frac{d\mathbf{T}}{ds} \qquad (2.7.5)$$

επίσης (2.7.6)

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,k\,\mathbf{N} \qquad (2.7.7)$$

Η (2.7.5) μας λέγει οτι το εφαπτόμενο διάνυσμα **T** στρέφεται προς τη διεύθυνση **N** με ρυθμό ίσο με την καμπυλότητα της καμπύλης. Προφανώς

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{0} \qquad (2.7.8)$$

Ένα τρίτο διάνυσμα **B** ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} \qquad (2.7.9)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 2.7.1.

Να βρεθούν τα διανύσματα **T** , **N** και **B** που αντιστοιχούν στην έλικα του παραδείγματος (2.6.1).

Λύση :

Εισάγοντας $s_0 = \frac{p}{qB}$, $\cos\theta = \mathbf{P}.\mathbf{B}/ (|\mathbf{P}||\mathbf{B}|)$ και το μήκος s της έλικας ως παράμετρο, έχουμε

$$s = \frac{p}{m} t \text{ και } \frac{qB}{m} t = \frac{s}{s_0} \text{ , οπότε}$$

$$\mathbf{x} = \sin\theta\, s_0 \left[\lambda_1 \cos\frac{s}{s_0} + \lambda_2 \sin\frac{s}{s_0} \right] + \cos\theta\, s\, \lambda_3$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \sin\theta \left[-\lambda_1 \sin\frac{s}{s_0} + \lambda_2 \cos\frac{s}{s_0} \right] + \sin\theta\, \lambda_3 ,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{\sin\theta}{s_0} \left(\lambda_1 \cos\frac{s}{s_0} + \lambda_2 \sin\frac{s}{s_0} \right) \right.$$

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\sin\theta|}{s_0} \rightarrow \rho = \frac{s_0}{|\sin\theta|} = \frac{s_0}{\sin\theta} , \quad 0<\theta<\pi$$

$$\mathbf{N} = \rho \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\left[\lambda_1 \cos\frac{s}{s_0} + \lambda_2 \sin\frac{s}{s_0} \right]$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \cos\theta \left[\lambda_1 \sin\frac{s}{s_0} - \lambda_2 \cos\frac{s}{s_0} \right] + \sin\theta \lambda_3$$

Το βήμα είναι $\Delta = 2\pi s_0 = 2\pi\, p / (qB)$

2.8. Ανάλυση της επιτάχυνσης. Εξισώσεις του Frenet.

Έχοντας ορίσει την καμπυλότητα k και τα διανύσματα **T** και **N**, ενδιαφέρον είναι να δούμε σ' αυτό το σημείο πώς εκφράζεται με τη βοήθειά τους η $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$, δηλαδή η επιτάχυνση κινητού που κινείται πάνω σε καμπύλη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\hat{\imath}_1 + x_2(t)\hat{\imath}_2 + x_3(t)\hat{\imath}_3$.

Η ταχύτητα του ως γνωστόν ορίζεται ως η πρώτη παράγωγος της $\mathbf{x}(t)$ ως προς το χρόνο.

$$\mathbf{u}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{dx_i}{dt}\hat{\imath}_i$$

Το δε μέτρο της είναι

$$|\mathbf{u}(t)| = u = \left\{ \sum_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right) \right\}^{1/2} \equiv \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} \qquad (2.8.1)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η τελευταία ισότητα συνάγεται από το γεγονός ότι

$$s = \int_0^t \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| dt$$

(βλέπε 2.6.3). Συνεπώς η ταχύτητα έχει μέτρο ds/dt και διεύθυνση ίδια με τη διεύθυνση του εφαπτόμενου ανύσματος **T**. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\mathbf{u}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \qquad (2.8.2)$$

Η επιτάχυνση προκύπτει με παραγώγιση της (2.8.2)

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}/ds}{dt/ds} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{N}/\rho \qquad (2.8.3)$$

δηλαδή

$$\mathbf{a}(t) = a_t\,\mathbf{T} + a_n\,\mathbf{N} \qquad (2.8.4)$$

όπου

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2},\ a_n = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2/\rho = |\mathbf{u}|^2/\rho \qquad (2.8.5)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η $\mathbf{a}_n$ λέγεται κεντρομόλος επιτάχυνση.

Άσκηση: Να συγκριθεί η $\mathbf{a}_n$ με την γνωστή σχέση της ομαλής κυκλικής κίνησης.

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{a^2_t + a^2_n} \qquad (2.8.6)$$

κι αυτό, διότι τα **T** και **N** είναι μοναδιαία και ορθογώνια μεταξύ τους.

Απο τη (2.8.5) μπορούμε να υπολογίσουμε την καμπυλότητα εφόσον είναι γνωστή η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{a_n}{|\mathbf{u}|^2} \qquad (2.8.7)$$

Μπορούμε όμως να παράγουμε μιά γενικότερη έκφραση για τον υπολογισμό της με την ακόλουθη διαδικασία: Σχηματίζουμε το εξωτερικό γινόμενο της ταχύτητας με την επιτάχυνση και κάνουμε με τη χρήση των (2.8.2) και (2.8.3). Τότε έχουμε

$$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \times \left(\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\mathbf{N}\right)$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k\, \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Έχοντας υπόψη ότι $\mathbf{T} \perp \mathbf{N}$ και $|\mathbf{T}| = |\mathbf{N}| = 1$, το μέτρο $|\mathbf{u} \times \mathbf{a}|$ είναι :

$$|\mathbf{u}(t) \times \mathbf{a}(t)| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k\, |\mathbf{T}\times\mathbf{N}| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k = |\mathbf{u}|^3 k$$

Άρα $k = \dfrac{|\mathbf{u}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{|\mathbf{u}|^3}$ (2.8.8)

Από τις (2.8.7) και (2.8.8) έχουμε επίσης ότι

$$a_n = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{u}|}$$

Παράδειγμα 2.8.1.

Ομαλή κυκλική κίνηση

$$\mathbf{x}(t) = r_0[\cos\omega t\, \hat{\imath}_1 + \sin\omega t\, \hat{\imath}_2], \quad r_0, \omega = \text{σταθ.}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{dx}{dt} = r_0\omega\,[-\sin\omega t\,\hat{x}_1 + \cos\omega t\,\hat{x}_2]$$

$$\frac{ds}{dt} = r_0\omega = (\sigma\tau\alpha\theta.)\ \eta\ \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

'Αρα

$$a_s = 0, \quad a_n = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k = r_0^2\omega^2\frac{1}{r_0} = \omega^2 r_0$$

Υπάρχει μόνο κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \omega^2 r_0 = \frac{u^2}{r_0}$$

πράγμα που είναι γνωστό με στοιχειώδεις μεθόδους.

Παράδειγμα 2.8.2

Να βρεθούν οι συνιστώσες a_t και a_n της επιτάχυνσης κατά την κίνηση του φορτίου του παραδείγματος (2.6.1).

Έχουμε

$$s = \frac{P}{m}t\,, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{P}{m}\ \eta\ \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

Άρα

$$a_n = \left(\frac{P}{m}\right)^2/\rho = \left(\frac{P}{m}\right)^2 P_\perp\frac{qB}{P^2} = \frac{P_\perp}{m^2}qB \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{qB}{m}u_\perp$$

Σε συμφωνία, όπως αναμενόταν με την πρόβλεψη της δύναμης Lorentz (κύτταξε παράδειγμα (2.6.1)).

Επανερχόμενοι στην (2.8.8), σημειώνουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο **u**(t) x**a**(t) είναι ανάλογο του διανύσματος

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} \qquad (2.8.9)$$

Επειδή τα **T**,**N** είναι μοναδιαία, τότε και το **B** είναι επίσης μοναδιαίο. Τα μοναδιαία διανύσματα (**T**,**N**,**B**) ορίζουν ένα τρισορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

που συνοδεύει το σωμάτιο το οποίο κινείται πάνω σε δοσμένη καμπύλη. Παραγωγίζοντας την 2.8.9. έχουμε

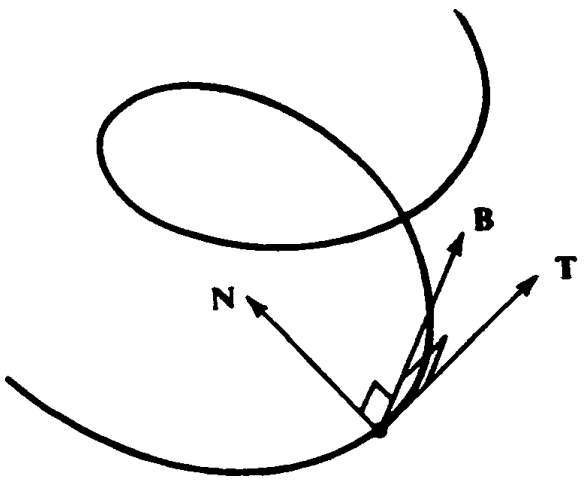
$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

και κάνοντας χρήση της 2.7.5

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} \qquad (2.8.10)$$

Επειδή όμως $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \perp \mathbf{N}$, επέται ότι το $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των **B** και **T** (βλέπε σχ. 2.8.1). Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \lambda\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \qquad (2.8.11)$$



Σχήμα 2.8.1. Το $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \perp \mathbf{T}$ *και συνεπώς κείται στο επίπεδο* (**B**,**T**).

Αντικαθιστώντας την (2.8.11) στην (2.8.10) έχουμε

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T} \times \{ \lambda\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \}$$

$$= \tau\, \mathbf{T} \times \mathbf{B} = -\tau\mathbf{N}$$

Δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \qquad (2.8.12)$$

Ο συντελεστής τ στη σχέση (2.8.12) καλείται στρέψη (torsion) της καμπύλης. Πολλαπλασιάζοντας την (2.8.12) εσωτερικά με **N** έχουμε

$$\tau = -\mathbf{N}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds} \qquad (2.8.13)$$

Το πρόσημο της τρέψης είναι ανεξάρτητο από τη φορά του **N** και του προσανατολισμού της καμπύλης και τούτο διότι αν $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}' = -\mathbf{N}$, όμοια έχουμε $\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{B}' = \mathbf{T}\times\mathbf{N}' = -\mathbf{B}$, άρα το πρόσημο στην (2.8.13) παραμένει αμετάβλητο. Συνεπώς η στρέψη εκφράζει μια εσωτερική ιδιότητα της καμπύλης, με άλλα λόγια μετρά το ρυθμό με τον οποίο η καμπύλη περιστρέφεται. Ανάλογα με την (2.8.9) μπορούμε να γράψουμε (βλέπει και σχ. 2.8.1)

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\times\mathbf{T} \qquad (2.8.14)$$

Παραγωγίζοντας τώρα την τελευταία και αντικαθιστώντας τις (2.8.12) και (2.7.5) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T} \qquad (2.8.15)$$

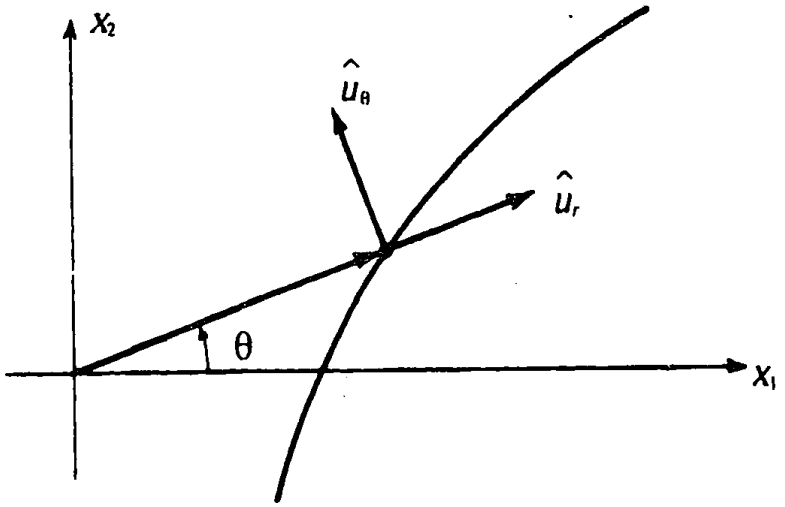
Οι εξισώσεις (2.7.5), (2.7.12) και (2.8.15) καλούνται εξισώσεις του Frenet. Μπορούν να γραφούν σε μορφή πίνακα, ως εξής

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} \qquad (2.8.16)$$

2.9 Επίπεδες καμπύλες - Πολικές συντεταγμένες

Μιά συχνά εμφανιζόμενη στις εφαρμογές ειδική περίπτωση κίνησης σωματίου είναι η επίπεδη κίνηση. Ιδιαίτερη χρησιμότητα στη περιγραφή της παρουσιάζουν οι πολικές συντεταγμένες r, θ. Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη του σχ. 2.9.1. Έστω **x**(t) το διάνυσμα θέσης σωματίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 2.9.1. Επίπεδες πολικές συντεταγμένες r και θ

Οι πολικές συντεταγμένες συνδέονται ως γνωστό με τις καρτεσιανές με τις σχέσεις:

$x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ οπότε $\mathbf{x}(t) = r[\cos\theta\, \hat{\imath}_1 + \sin\theta\, \hat{\imath}_2]$

Εισάγουμε δύο κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$, όπου το $\mathbf{u}_r$ έχει ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{x}(t)$, δηλαδή

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta\, \hat{\imath}_1 + \sin\theta\, \hat{\imath}_2 \qquad (2.9.1)$$

Επειδή $\mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_\theta$ εύκολα προσδιορίζουμε και το $\mathbf{u}_\theta$ από τη σχέση

$$\mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_r = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\, \hat{\imath}_1 + \cos\theta\, \hat{\imath}_2 \qquad (2.9.2)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\, \hat{\imath}_1 + \cos\theta\, \hat{\imath}_2 = \mathbf{u}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\, \hat{\imath}_1 - \sin\theta\, \hat{\imath}_1 = -\mathbf{u}_r \qquad (2.9.3)$$

Επίσης, επειδή το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}_r$ έχει την ίδια διεύθυνση με το $\mathbf{x}(t)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\,\mathbf{u}_r = r\mathbf{u}_r \tag{2.9.4}$$

Η ταχύτητα προκύπτει με παραγώγιση της (2.9.4)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

Όμως

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath}_1 + \sin\theta\,\hat{\imath}_1) = \mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Άρα $\mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$ (2.9.5)

Παραγωγίζοντας την (2.9.5), προκύπτει η επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\mathbf{u}_r + \left\{r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right\}\mathbf{u}_\theta \tag{2.9.6}$$

Όμοια αν

$$\mathbf{F} = F_r\,\mathbf{u}_r + F_\theta\,\mathbf{u}_\theta \tag{2.9.7}$$

από το νόμο του Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, συνδυάζοντας τις (2.9.6) και (2.9.7) βρίσκουμε

$$F_r = m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{2.9.8}$$

$$F_\theta = mr\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2m\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \tag{2.9.9}$$

Επίσης η στροφορμή δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{u} = m\,r\,r\frac{d\theta}{dt}(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta) = mr^2\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_3$$

Ειδικότερα, αν η δύναμη είναι κεντρική, $F_\theta = 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας την (2.9.9) με r, έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$m\left(r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = \text{σταθερό} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{σταθερό}$$

δηλαδή η στροφορμή του σωματίου είναι σταθερή όταν αυτό βρίσκεται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων (κύτταξε και άσκηση 2.2.4). Από την τελευταία παρατήρηση απορρέει ο δεύτερος νόμος του Kepler σύμφωνα με τον οποίο το διάνυσμα θέσης σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων καλύπτει εμβαδό A του οποίου ο ρυθμός μεταβολής είναι σταθερός

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \qquad (2.9.10)$$

Παράδειγμα 2.9.1.

Σωμάτιο κινείται έτσι ώστε το διάνυσμα θέσης του να δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{x}(t) = r_0\{\log(1+t^2/t^2_0)\,\hat{\imath}_1 + (t/t_0 - 2\arctan(t/t_0))\,\hat{\imath}_2 + 2\sqrt{2}\,t/t_0\hat{\imath}_3\}$$

Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του και η καμπυλότητα της τροχιάς.

Λύση :

Η ταχύτητα του είναι

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = r_0\left\{\frac{2t}{t^2_0+t^2}\hat{\imath}_1 + \left(\frac{1}{t_0} - \frac{2t_0}{t^2_0+t^2}\right)\hat{\imath}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{t_0}\hat{\imath}_3\right\}$$

Το μέτρο της είναι

$$|\mathbf{u}| = r_0\left\{\left(\frac{2t}{t^2_0+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{t_0} - \frac{2t_0}{t^2_0+t^2}\right)^2 + \frac{8}{t^2_0}\right\}^{1/2} = 3\frac{r_0}{t_0}$$

Τέλος έχουμε

$$\mathbf{x}''(t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{2r_0}{(t^2_0+t^2)^2}\{(t^2_0 - t^2)\,\hat{\imath}_1 + 2t\,t_0\hat{\imath}_2\}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 2.9.2.

'Ενα φορτισμένο σωματίδιο κινείται κατά μήκος επίπεδης τροχιάς με

$$r = \frac{1}{1+2\cos\theta}\,,\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}$$

Να υπολογισθουν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματίου

Λύση :

Η ταχύτητα του σωματίου είναι

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$$

$$= \frac{2\sin\theta}{(1+2\cos\theta)^2}\frac{1}{r^2}\mathbf{u}_r + r\frac{1}{r^2}\mathbf{u}_\theta$$

'Ομως $r(1+2\cos\theta) = 1$

$$\mathbf{u} = 2\sin\theta\,\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\mathbf{u}_\theta$$

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης υπολογίζονται με βάση τον τύπο (2.9.6). Είναι $\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta$ όπου :

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2\cos\theta}{r^2} - \frac{1}{r^3} = -\frac{1}{r^2}$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right) + 2\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= r(-4\sin\theta)\frac{1}{r^3} + 4\frac{\sin\theta}{(1+2\cos\theta)^2}\frac{1}{r^4} = 0$$

'Αρα $\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r = -\frac{1}{r^2}\mathbf{u}_r$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2.1. Αν $\mathbf{F}(t) = e^{2t}\,\mathbf{A} + e^{3t}\,\mathbf{A}$, να υπολογιστεί η παράσταση

$$\mathbf{F}''(t) - 5\mathbf{F}'(t) + 6\mathbf{F}(t)$$

2.2.2. Αν $\mathbf{F}(u,u) = e^{uu}\,\hat{\imath}_1 + (u-u)\,\hat{\imath}_2 + u \sin u\,\hat{\imath}_3$ να υπολογιστεί το

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}$$

2.3.1. Υπολογίστε τις πρώτες και όλες τις δεύτερες παραγώγους των συναρτήσεων

$$f(x,y) = x \operatorname{Arctan} \frac{x}{y}$$

$$g(x,y) = \exp\{-x^2 - y^2\}$$

2.3.2. Αποδείξτε για τη συνάρτηση

$$f(x,y,z,w) = \exp\{xyz\} \sin(xw)$$

ότι $f_{xzw} = f_{zwx}$

2.3.3. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$u = (x,t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} (x - ct) \sqrt{2} \right\}$$

αποτελεί λύση της γνωστής ως εξίσωσης KdV (Korteweg – de Vries) :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

(Η λύση της εξίσωσης KdV καλείται σολιτόνιο και περιγράφει την κίνηση επιφανειακών κυμάτων.) ($\text{sech}u = \frac{1}{\cosh u}$)

2.4.1. Να σχεδιαστούν οι καμπύλες

$\mathbf{x}(t) = \cos t\, \hat{\imath}_1 + \sin t\, (\hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3)$, $0 \le t \le 2\pi$

$\mathbf{x}(t) = a(\cos t\, \hat{\imath}_1 + \sin t\, \hat{\imath}_2) + bt\, \hat{\imath}_3$, $b>0$, $0 \le t \le \infty$

2.5.1. Δίνεται η καμπύλη

$x_1 = \sin t - t\cos t$, $x_2 = \cos t + t \sin t$, $x_3 = t^2$

Να βρεθουν, το μήκος της μεταξύ των σημείων (0,1,0) και $(-2\pi, 1, 4\pi^2)$,

καθώς και το διάνυσμα $\mathbf{T}(t=\pi)$

2.5.2. Να βρεθεί η ταχύτητα σωματίου με διάνυσμα θέσης που έχει συνιστώσες ίσες με αυτές της άσκησης 3.

2.6.1. Να βρεθεί το μήκος των καμπυλών

$\mathbf{x}(t) = \cos t\, \hat{\imath}_1 + \sin t\, (\hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3)$, $0 \le t \le \pi$

$\mathbf{x}(t) = t\, \hat{\imath}_1 + \sin 2\pi t \hat{\imath}_2 + \cos 2\pi t\, \hat{\imath}_3$, $0 \le t \le 1$

2.7.1. Να βρεθεί η καμπυλότητα της χωρικής καμπύλης

$x_1 = 3t^2 - t^3$, $x_2 = 3t^2$, $x_3 = 3t + t^3$

2.7.2. α) Δίδεται η καμπύλη $\mathbf{x}(t) = \frac{t^2}{2}\hat{\imath}_1 + \frac{t^3}{3}\hat{\imath}_3$.

Να γίνει νέα παραμετροποίηση αυτής ως προς το ίδιο το μήκος του τόξου της.

2.8.1. Το διάνυσμα θέσης κινούμενου σωματίου είναι

$$\mathbf{r}(t) = a\{\cos(t/t_0)(\hat{\imath}_1 - \hat{\imath}_2) + \sin(t/t_0)\,(\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2) + \frac{1}{2}(t/t_0)\,\hat{\imath}_3\}$$

i) Να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματίου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ii) Να βρεθεί το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση κίνησης του σωματίου.

iii) Να βρεθούν η καμπυλότητα και το είδος της τροχιάς.

2.8.2. Να γραφούν οι τιμές των παρακάτω ποσοτήτων

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \qquad \mathbf{T}\cdot\mathbf{N}, \qquad [\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}]$$

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \qquad \mathbf{B}\cdot\frac{d\mathbf{N}}{ds}, \frac{d\mathbf{B}}{ds}$$

2.8.3. Να βρεθούν τα διανύσματα **N** και **B** για t = 0, της καμπύλης

$$\mathbf{x}(t) = \cos t\,\hat{\imath}_1 + \sin t\,\hat{\imath}_2 + 2t\,\hat{\imath}_3$$

2.8.4. Αν **x**(t) καμπύλη πάνω σε σφαίρα, τέτοια ώστε |**x**(t)| =σταθερό, να δειχθεί ότι

$$\mathbf{x} = -\rho\mathbf{N} - \frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{ds}\mathbf{B}$$

2.9.1. Σωμάτιο κινείται έτσι ώστε η θέση του δίνεται από

$$r = 2(1+\sin\theta), \theta = e^{-t}$$

Να βρεθεί η **u** ως προς τις διευθύνσεις $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$.

2.9.2. Να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση αν

$$r = b(1+\sin(t/t_0)), \theta = e^{-t/t_0} - 1$$

2.9.3. Φορτισμένο σωμάτιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$$r = \frac{a}{1+2\cos\theta}, \left(\frac{d\theta}{dt} = \frac{b}{r^2}\right)$$

όπου a και b σταθερά. Να βρεθούν οι

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \text{ και } \frac{d^2\mathbf{x}}{dt} \text{ όπου } \mathbf{x} = r\,\hat{\mathbf{u}}_r$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

GRAD, DIV, CURL, κ.α.

3.1 Επιφάνειες

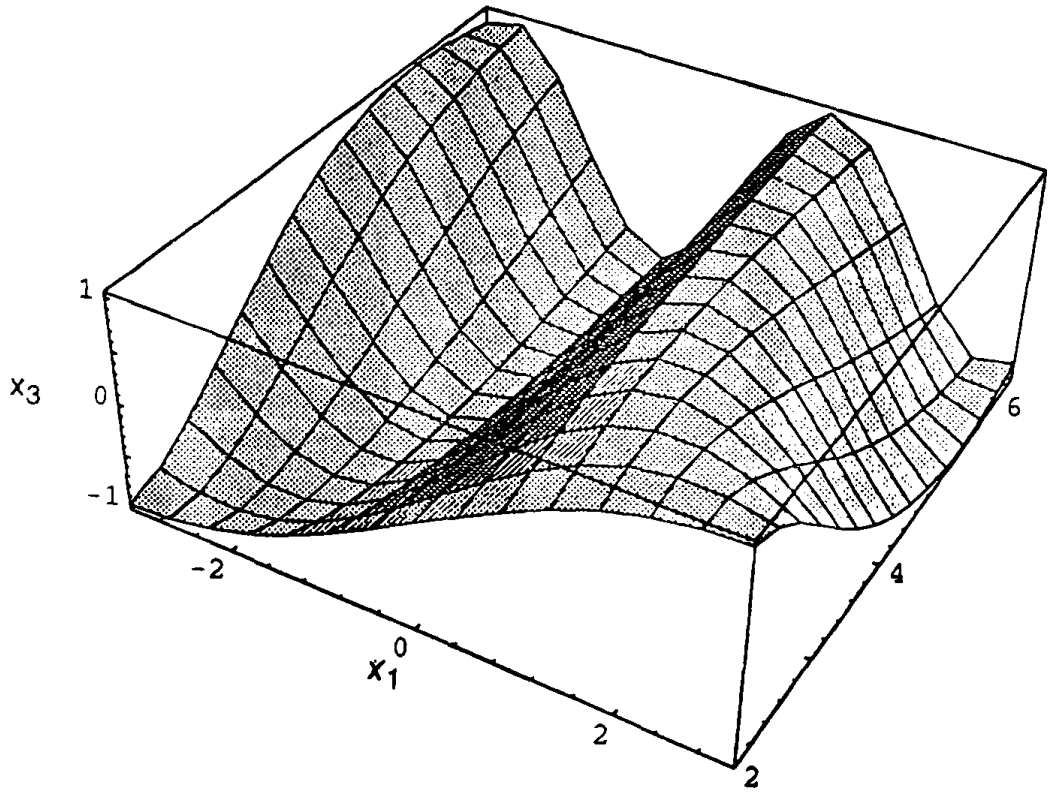
Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετήσαμε την εξίσωση της καμπύλης η οποία εκφράζεται με μία παράμετρο, δηλαδή τις εξισώσεις $x_i = x_i(t)$ ή ισοδύναμα $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Επιπλέον, μελετήσαμε την εξίσωση του επιπέδου η οποία έχει τη γενική μορφή $a_1x_1 + a_1x_2 + a_1x_3 = k$, δηλαδή εξαρτάται γραμμικά απο τις καρτεσιανές συντεταγμένες x_1,x_2,x_3. Είναι μάλλον προφανές οτι μια άμεση γενίκευση της εξίσωσης αυτής θα περιέχει δυνάμεις των συντεταγμένων x_1,x_2,x_3, οι δε προκύπτουσες μαθηματικές εκφράσεις θα περιγράφουν σχήματα περιπλοκότερα απο αυτά των επιπέδων. Πράγματι, ως γνωστόν στις 3 διαστάσεις μιά επιφάνεια αναπαρίσταται γενικά από μία σχέση της μορφής

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = k = \text{σταθ.} \qquad (3.1.1)$$

π.χ. η εξίσωση της σφαίρας με ακτίνα **R** και κέντρο την αρχή των αξόνων είναι $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = R^2$. Στο σχήμα 3.1.0 δείχνεται η επιφάνεια που ορίζεται απο τη βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x_1,x_2,x_3) = x_3 - \sin(x_1 \log(x_2/1.2))$.

Ομως γνωρίζουμε οτι ένα επίπεδο αναπαρίσταται επίσης και από μία διανυσματική εξίσωση της μορφής $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + p\,\mathbf{A} + q\,\mathbf{B}$ όπου **A** , **B** σταθερά διανύσματα, ή ισοδύναμα με τρείς βαθμωτές ποσότητες x_1, x_2, x_3 που αντιστοιχούν στις τρείς καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του "εν λόγω" επιπέδου . Είναι πάλι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 3.1.0 : Η επιφάνεια $x_3 = \sin(x_1 \log(x_2/1.2))$.

προφανές οτι η άμεση γενίκευση των τριών τελευταίων σε τρείς βαθμωτές συναρτήσεις δύο παραμέτρων p και q ,

$$x_i = x_i(p,q)\ ,\ i = 1,2,3 \qquad (3.1.2)$$

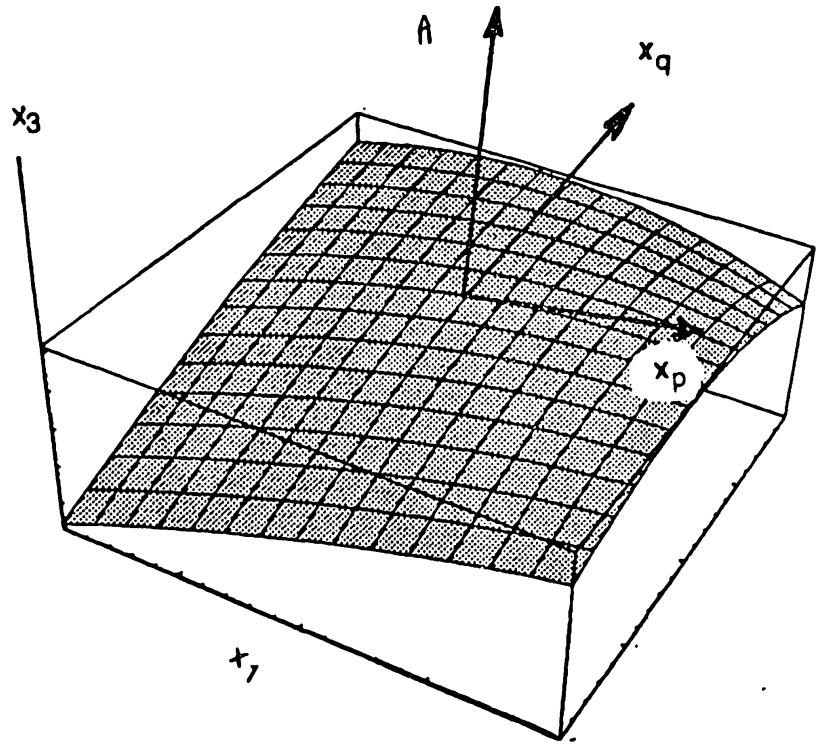
περιγράφουν μια γενικότερη γεωμετρική οντότητα απο εκείνη του επιπέδου την οποία καλούμε επιφάνεια.

Οι εξισώσεις (3.1.2) είναι ισοδύναμες με την (3.1.1). Πραγματικά, απαλοίφοντας τις δυο παραμέτρους p και q μεταξύ των τριών εξισώσεων (3.1.2) καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής (3.1.1).

Αν στην εξίσωση (3.1.2) υποθέσουμε την p-παράμετρο σταθερή p=στ., τότε οι x_i είναι πλέον μονοπαραμετρικές εξισώσεις $x_i = x_i(p=στ,\ q) = x_i(q)$ και παριστάνουν καμπύλες της παραμέτρου q. Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε q=στ. στις (3.1.2) τότε αυτές ειναι και πάλι μονοπαραμετρικές εξισώσεις $x_i = x_i(p,\ q=στ) = x_i(p)$ και εκφράζουν καμπύλες ως προς τη μεταβολή της παραμέτρου p. Συνεπώς για κάθε τιμή της παραμέτρου $p=c_1$ υπάρχει μία καμπύλη χώρου και αντίστοιχα για κάθε τιμή της παραμέτρου $q=c_2$ υπάρχει επίσης μία αντίστοιχη καμπύλη. Οι καμπύλες αυτές ορίζουν ένα "πλέγμα". Ο γεωμετρικός τόπος που ορίζεται από το πλέγμα των καμπυλών $p=c_1$ και $q=c_2$, σχηματίζει μία επιφάνεια S, η οποία εκφράζεται από τις εξισώσεις (3.1.2) (Σχήμα 3.1.1) Οι παράμετρες p,q καλούνται καμπυλόγραμμες συντεταγμένες των σημείων της επιφάνειας. Οι καμπύλες $p = c_1$,

$q = c_2$ καλούνται παραμετρικές καμπύλες. Η διανυσματική έκφραση της (3.1.1) είναι

$$\mathbf{x}(p,q) = x_i(p,q)\,\hat{\imath}_i \qquad (3.1.3)$$



Σχήμα 3.1.1. Οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε $p = c_1 =$ σταθ. και $p = c_2 =$σταθ. καθώς και τα εφαπτόμενα διανύσματα.

Το $\mathbf{x}(p,q)$ συνεπώς παριστάνει το διάνυσμα θέσης του σημείου (p,q) της επιφάνειας. (Θα συμβολίζουμε στη συνέχεια το διάνυσμα θέσης και με $\mathbf{x}(p,q)$ και το μέτρο του με $r = |\mathbf{x}(p,q)|$).

3.1.1 Διάνυσμα κάθετο σε δεδομένη επιφάνεια - το διάνυσμα gradφ.

Έχουμε ήδη μελετήσει εφαπτόμενα σε καμπύλες διανύσματα, στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μπορούμε λοιπόν και εδώ να ορίσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα των παραμετρικών καμπυλών σε δεδομένα σημεία $p=c_1$ και $q=c_2$. Απο τυχαίο σημειο (p,q) διέρχονται δύο τέτοιες καμπύλες, τα εφαπτόμενα διανύσματα των οποίων είναι (σχήμα 3.1.1)

$$\mathbf{x}_p \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}\,,\ \mathbf{x}_q \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \qquad (3.1.4)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τα $\mathbf{x}_p$ και $\mathbf{x}_q$ σχηματίζουν ένα επίπεδο το οποίο είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (p,q) της επιφάνειας S. Το κάθετο στο επίπεδο αυτό διάνυσμα ορίζεται απο το διανυσματικό γινόμενο

$$\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \qquad (3.1.5)$$

(κύτταξε εδ. 1.11)

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι τότε

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q}{|\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q|} \qquad (3.1.6)$$

Αν σε κάποιο σημείο της επιφάνειας S συμβαίνει να είναι $\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q = \mathbf{0}$, τότε το σημείο αυτό καλείται ανώμαλο (ιδιόμορφο), αλλοιώς καλείται ομαλό. Γεωμετρικά, η συνθήκη $\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q = 0$, σημαίνει ότι $\mathbf{x}_p // \mathbf{x}_q$, συνεπώς στο σημείο αυτό οι καμπύλες $q=c_1$ $p=c_2$ εφάπτονται. Αντίστοιχα αν $\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q \neq 0$ τότε τέμνονται.

Ας υποθέσουμε ότι η επιφάνεια είναι επίπεδη. Διαλέγοντας το επίπεδο x_1 x_2 ως επίπεδό της έχουμε $\mathbf{x} = p\,\mathbf{i}_1 + q\,\mathbf{i}_2$

Τότε $\mathbf{x}_p = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{x}_q = \mathbf{i}_2$, $\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q = \mathbf{i}_3$, δηλ. $\mathbf{N} = \mathbf{i}_3$

$d\mathbf{S} = \mathbf{i}_3\, dpdq = \mathbf{i}_3\, d x_1 d x_2$

του οποίου το μέτρο συμπίπτει με το εμβαδό της επιφάνειας του ορθογωνίου (d x_1, d x_2).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εξίσωση 3.1.1, που εν γένει είναι πεπλεγμένης μορφής, μπορεί να λυθεί ως προς μία απο τις μεταβλητές π.χ. την x_3. Τώρα έστω ότι :

$$x_3 = f(x_1, x_2) \qquad (3.1.7)$$

Τότε οι αντίστοιχες παραμετρικές εξισώσεις είναι

$$x_1 = p\ ,\ x_2 = q\ ,\ x_3 = f(p,q) \qquad (3.1.8)$$

Για q=σταθερά και p=σταθερά έχομε τις αντίστοιχες επίπεδες καμπύλες.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$x_3 = f(x_1,q)$, q = σταθ. (στο επίπεδο x_1,x_3)

$x_3 = f(p,x_2)$, p = σταθ. (στο επίπεδο x_2,x_3) (3.1.9)

Τα αντίστοιχα διανύσματα $\mathbf{x}_p$, $\mathbf{x}_q$ είναι

$$\mathbf{x}_p = \hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_3 \frac{\partial f(x_1,q)}{\partial x_1} , \mathbf{x}_q = \hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3 \frac{\partial f(p,x_2)}{\partial x_2} \quad (3.1.10)$$

Με τη χρήση των (3.1.10) μπορούμε να συνάγουμε μια διαφορετική έκφραση για το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q$:

$$\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q = \begin{pmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ 1 & 0 & \partial f/\partial x_1 \\ 0 & 1 & \partial f/\partial x_2 \end{pmatrix} = \hat{\imath}_3 - \hat{\imath}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - \hat{\imath}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (3.1.11)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο των $\mathbf{x}_p$ και $\mathbf{x}_q$ είναι

$$\hat{n} = \frac{-\hat{\imath}_1 \left.\frac{\partial f(x_1,q)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p} - \hat{\imath}_2 \left.\frac{\partial f(p,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=q} + \hat{\imath}_3}{\sqrt{1+\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2_{\substack{x_1=p \\ x_2=q}} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2_{\substack{x_1=p \\ x_2=q}}}} \quad (3.1.12)$$

Στην ειδική περίπτωση της σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R έχουμε

$$x_3 = \pm \sqrt{R^2 - x^2_1 - x^2_2}$$

όπου το άνω σημείο αντιστοιχεί στο ημισφαίριο με $x_3>0$ και το κάτω με $x_3<0$. Τώρα

$$\mathbf{x}_p = \hat{\imath}_1 \pm \hat{\imath}_3 \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x^2_1 - q^2}} , \mathbf{x}_q = \hat{\imath}_2 \pm \hat{\imath}_3 \frac{x_2}{\sqrt{R^2 - x^2_2 - p^2}}$$

οπότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\hat{n} = \hat{x}_3\sqrt{1 - \frac{p^2+q^2}{R^2}} \pm \hat{x}_1 \frac{p}{R} \pm \hat{x}_2 \frac{q}{R} \qquad (3.1.13)$$

Εύκολα βρίσκουμε τα κάθετα διανύσματα στις πιο κάτω απλές περιπτώσεις

$\hat{n} = \pm \hat{x}_1$, $p = R$ $q = 0$

$\hat{n} = \pm \hat{x}_2$, $p = 0$ $q = R$

$\hat{n} = \hat{x}_3$, $p = q = 0$

Αν τώρα γράψουμε

$$x = p\hat{x}_1 + q\,\hat{x}_2 + f(p,q)\,\hat{x}_3 \qquad (3.1.14a)$$

έχουμε

$$dx = \hat{x}_1 dp + \hat{x}_2 dq + \left(\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq\right)\hat{x}_3 \qquad (3.1.14b)$$

οπότε

$$\hat{n}\cdot dx = \frac{-\frac{\partial f}{\partial p} dp - \frac{\partial f}{\partial q}\partial q + \left(\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q}\partial q\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2\right]^{1/2}} = 0$$

Μέ άλλα λόγια, το **dx** είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια. Το εφαπτόμενο στην επιφάνεια $\phi = c$ διάνυσμα μπορεί ευκολότερα να βρεθεί και με άλλο πιο χρήσιμο τρόπο. Έχουμε

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3$$

$$dx = \hat{x}_1\, dx_1 + \hat{x}_2\, dx_2 + \hat{x}_3 dx_3$$

ορίζουμε την ποσότητα grad ϕ (κλίση της ϕ ή gradient της ϕ) ως εξής:

$$\mathrm{grad}\phi = \hat{x}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \hat{x}_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \hat{x}_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3}. \qquad (3.1.16)$$

Τότε $d\phi = (\mathrm{grad}\phi) \cdot dx$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στην ειδική περίπτωση που η μετακίνηση **dx** γίνεται πάνω στην επιφάνεια $\phi = c =$ σταθ. , έχουμε $d\phi = 0$, δηλαδή $grad\phi \cdot \mathbf{dx} = 0$

Με άλλα λόγια η κλίση της ϕ, $(grad\phi)$ είναι κάθετη στην επιφάνεια $\phi = c$. Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\hat{n} = grad\varphi / |grad\phi| \qquad (3.1.17)$$

Γενικά αν το **dx** είναι τυχαίο (δεν κείται πάνω στην επιφάνεια $\phi = c$) έχουμε

$$d\varphi = |grad\phi|\ |\mathbf{dx}|\cos\gamma$$

όπου γ η γωνία μεταξύ των **dx** και του $\hat{n}$.

Παρατηρούμε ότι για δοσμένο $|\mathbf{dx}|$, δηλαδή δοθείσα μετακίνηση, η μεγίστη μεταβολή συντιστοιχεί σε $\cos\gamma = 1$. Με άλλα λόγια το $grad\phi$ παρέχει τη διεύθυνση της μεγίστης μεταβολής της $d\phi$ (κύτταξε εδ. 3.2 για μια διαφορετική προσέγγιση).

3.1.2. Στοιχείο προσανατολισμένης επιφάνειας.

Το στοιχειώδες διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη q=c σύμφωνα με το εδάφιο (2.5) είναι

$$\mathbf{dx}\ (p,q = \sigma\tau.) = \frac{\partial\, \mathbf{x}}{\partial p}\, dp \equiv \mathbf{x}_p\, dp$$

και ανάλογα, κατά μήκος της καμπύλης p =c

$$\mathbf{dx}\ (p = \sigma\tau,\ q) = \frac{\partial\, \mathbf{x}}{\partial q}\, dq \equiv \mathbf{x}_q\, dq$$

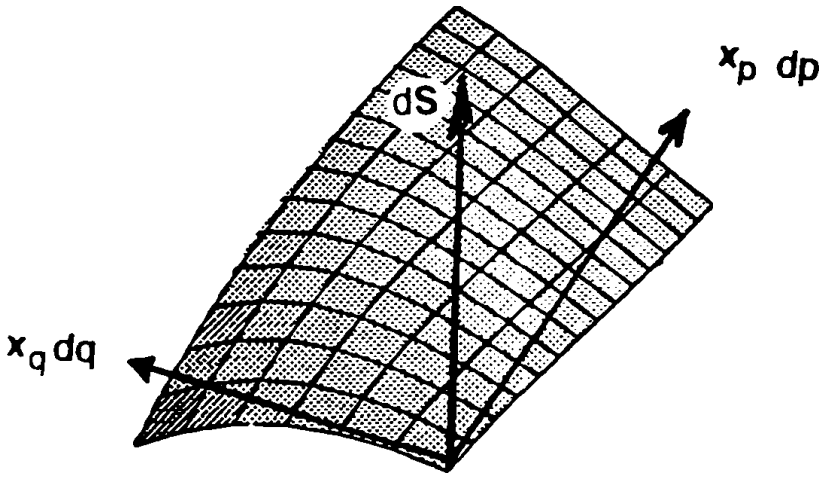
Τότε, το διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας (σχήμα 3.1.2) ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{dS} = \mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q\, dpdq \qquad (3.1.18)$$

(κύτταξε εδ. 1.11 για τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από τον ορισμό του μοναδιαίου κάθετου στην επιφάνεια διανύσματος, (σχέση 3.1.6.), βλέπουμε πως το στοιχείο d**S** είναι κάθετο στην επιφάνεια (βλέπε σχήμα 3.1.2), της οποίας κάθε σημείο της αναπαριστάται απο το διάνυσμα **x** = **x**(p,q). Το στοιχειώδες εμβαδό ορίζεται ως το μέτρο του d**S** που ορίστηκε στην εξ. 3.1.18.



Σχήμα 3.1.2. Στοιχειώδης επιφάνεια.

$$dS = |\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q|\, dp\, dq \quad (3.1.19)$$

δηλαδή

$$dS = \hat{n} \cdot d\mathbf{S} = \hat{n} \cdot (\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q)\, dp\, dq \quad (3.1.20)$$

Θέτοντας στην (3.1.20) τις (3.1.11) και (3.1.12) βρίσκουμε

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1\, dx_2 \quad (3.1.21)$$

Η ολική επιφάνεια S προκύπτει απο την ολοκλήρωση

$$S = \int\int dS = \int\int \hat{n} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1.22)$$

δηλαδή

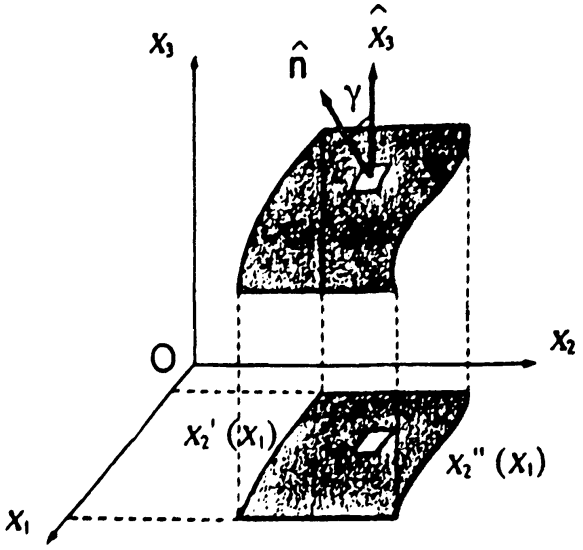
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$S = \int\int |d\mathbf{S}| = \int_{x_1'}^{x_1''} \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1\, dx_2 \qquad (3.1.23)$$

όπου (x_1', x_1'') και $(x_2'(x_1), x_2''(x_1))$ τα όρια της επιφάνειας (βλέπε σχήμα 3.1.3). Η ολοκλήρωση (3.1.22) μπορεί να εκφραστεί και με τη βοήθεια της γωνίας που σχηματίζει η κάθετη $\hat{n}$ στην επιφάνεια με το μονοδιαίο διάνυσμα $\hat{x}_3$. Πράγματι έστω $\hat{x}_3 \cdot \hat{n} = \cos\gamma$, τότε

$$\hat{x}_3 \cdot d\mathbf{S} = \cos\gamma\, |d\mathbf{S}| \rightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{\hat{x}_3 \cdot d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|}$$



Σχήμα 3.1.3. Δείχνονται τα όρια στον υπολογισμό του ολοκληρώματος 3.1.22.

Όμως $\frac{\hat{x}_3 \cdot d\mathbf{S}}{dx_1 dx_2} = \hat{x}_3 \cdot \left(\hat{x}_3 - \hat{x}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \hat{x}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 1$. Άρα

$$\cos\gamma = \frac{dx_1 dx_2}{|d\mathbf{S}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}} \qquad (3.1.24)$$

Συνεπώς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$|S| = \int_{x_1'}^{x_1''} \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} \frac{dx_1 dx_2}{|\cos\gamma|} \qquad (3.1.25)$$

Θα δούμε αργότερα (εδ. 4.6) ότι με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε όχι μόνο εμβαδά αλλά και άλλα επιφανειακά ολοκληρώματα.

Παράδειγμα 3.1.1:

Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που αναπαρίσταται απο τις εξισώσεις*

$x_1 = a \sin\theta \cos\varphi$, $x_2 = a \sin\theta \sin\varphi$, $x_3 = a \cos\theta$

$0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$

Λύση :

Προκειμένου να βρούμε το ζητούμενο εμβαδό της επιφάνειας, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη στοιχειώδη επιφάνεια απο την (3.1.20) και μετά να ολοκληρώσουμε σύμφωνα με την (3.1.22). Προς τούτο ορίζουμε τις παράμετρες ρ και q να είναι οι γωνίες θ και φ. Γνωρίζοντας ότι το διάνυσμα θέσης είναι

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi) = a\,(\sin\theta\cos\varphi\, \hat{\imath}_1 + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{\imath}_2 + \cos\theta\, \hat{\imath}_3)$$

έχουμε

$$\mathbf{x}_p \equiv \mathbf{x}_\theta = \frac{\partial x_i}{\partial \theta} \hat{\imath}_i =$$

$$= a[\cos\theta(\cos\varphi\, \hat{\imath}_1 + \sin\varphi\, \hat{\imath}_2) - \sin\theta\, \hat{\imath}_3]$$

$$\mathbf{x}_q \equiv \mathbf{x}_\varphi = \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \hat{\imath}_i =$$

$$= -a\,[\sin\theta(\sin\varphi\, \hat{\imath}_1 - \cos\varphi\, \hat{\imath}_2)]$$

Υπολογίζουμε τότε το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi = a^2\,[\sin^2\theta(\cos\varphi\, \hat{\imath}_1 + \sin\varphi\, \hat{\imath}_2) + \sin\theta\cos\theta\, \hat{\imath}_3]$$

Το διαφορικό στοιχείο της επιφάνειας είναι τότε

---

* Παρατηρείστε ότι $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = a^2$. δηλαδή οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις επιφάνειας σφαίρας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$dS = |\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi| \, d\theta \, d\varphi = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$S = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 4\pi a^2$$

Σημείωση : Το πιο πάνω αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και με πιο στοιχειώδεις μεθόδους. Είναι $dS = dl_1 dl_2$ όπου dl_1 στοιχείο του μεσημβρινού και dl_2 στοιχείο της παραλλήλου που περιορίζει τη στοιχειώδη επιφάνεια dS.

Έχουμε

$$dl_1 = a d\theta \, , \, dl_2 = \rho d\varphi$$

όπου ρ=ακτίνα των παράλληλων κύκλων στη θέση που δίνεται απο τη γωνία θ. Αλλά

$$\rho = a \sin\theta$$

Άρα $dS = (a \, d\theta)(a \sin\varphi) = a^2 \sin\theta d\varphi d\theta$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκεται ότι το στοιχείο της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου είναι

$$dS = a d\varphi dx_3 \quad (a = \text{ακτίνα του κυλίνδρου})$$

ενώ έχουμε τοποθετήσει τον άξονα x_3 κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου. Άρα μετά την ολοκλήρωση έχουμε $S = 2\pi a h$ όπου h το ύψος του κυλίνδρου.

Παράδειγμα 3.1.2

Δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις επιφάνειας

$$x_1 = u\cos\theta \, , \, x_2 = u\sin\theta \, , \, x_3 = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$$

Να υπολογιστεί το στοιχείο επιφάνειας dS.

Λύση :

Σύμφωνα με την (3.1.19) είναι

$$dS = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_\theta| \, du \, d\theta$$

όπου

$$\mathbf{x}_u = \cos\theta \hat{\imath}_1 + \sin\theta \hat{\imath}_2 + u\hat{\imath}_3 \, , \, \mathbf{x}_\theta = -u\sin\theta \hat{\imath}_1 + u\cos\theta \hat{\imath}_2$$

άρα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & u \\ -u\sin\theta & u\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = u\sqrt{1+u^2}\,\hat{n}$$

'Αρα $dS = u\sqrt{1+u^2}\,du\,d\theta$

Παράδειγμα 3.1.3

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει η έλλειψη

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Λύση :

Επειδή η επιφάνεια είναι επίπεδη το εμβαδό μπορεί να βρεθεί και με μεθόδους στοιχειώδεις. Θα το υπολογίσουμε, όμως εφαρμόζοντας την πιο πάνω γενική θεωρία. Θεωρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις :

$$x_1 = a\,\xi\cos\theta\,,\ x_2 = b\,\xi\sin\theta,\ (\,0 \le \xi \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\,)$$

(η έλλειψη αντιστοιχεί σε $\xi = 1$) . Έχουμε

$$\mathbf{x}_\xi = a\cos\theta\,\hat{\imath}_1 + b\sin\theta\,\hat{\imath}_2$$

$$\mathbf{x}_\theta = -\xi\,a\sin\theta\,\hat{\imath}_1 + \xi\,b\cos\theta\,\hat{\imath}_2$$

$$\mathbf{x}_\xi \times \mathbf{x}_\theta = \xi ab\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\hat{\imath}_3 = \xi ab\,\hat{\imath}_3$$

'Αρα

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ab\xi\,d\xi = \pi ab$$

3.2 Η παράγωγος ως προς κατεύθυνση (κατευθυντική παράγωγος)

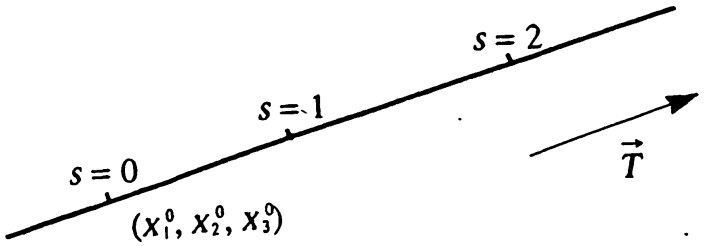
Ας μελετήσουμε στη συνέχεια τη συμπεριφορά μιας βαθμωτής συνάρτησης $\phi(x_1,x_2,x_3)$ στη γειτονιά ενός σημείου (x^0_1,x^0_2,x^0_3) το οποίο βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της. Ας υποθέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το σημείο (x^0_1,x^0_2,x^0_3) και είναι παράλληλο ως προς δοσμένο διάνυσμα **T**. (σχήμα 3.2.1)

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η εξίσωση της ευθείας είναι $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+s\mathbf{T}$. Κατά συνέπεια υπάρχει μιά αντιστοιχία μεταξύ των σημείων x_1,x_2,x_3 τής ευθείας αυτής

και της παραμέτρου s. 'Αρα σε δοσμένη μεταβολή της παραμέτρου Δs αντιστοιχεί μία μεταβολή Δφ της βαθμωτής συνάρτησης.

'Εστω τώρα ότι υπάρχει το όριο

$$\phi_s = \frac{d\phi}{ds} \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+\Delta s\mathbf{T})-f(\mathbf{x}_0)}{\Delta s} \qquad (3.2.1)$$



Σχήμα 3.2.1. 'Ενα ευθύγραμμο τμήμα που περνάει από το (x^0_1,x^0_2,x^0_3) και είναι παράλληλο στο διάνυσμα **T**.

Τότε η ϕ_s λέγεται παράγωγοςτης συνάρτησης $\phi(\mathbf{x})$, στην κατεύθυνση **T** στο σημείο $\mathbf{x}_0$. 'Ετσι μιλάμε για κατευθυντική παράγωγο (υπονοώντας στην κατεύθυνση **T**) της συνάρτησης $\phi(\mathbf{x})$. Με άλλα λόγια:

Η παράγωγος κατεύθυνσης είναι ο ρυθμός μεταβολής της $\phi(x_1,x_2,x_3)$, ανά μονάδα μήκους σε συγκεκριμμένη κατεύθυνση. Εξαρτάται από τη θέση του σημείου (x^0_1,x^0_2,x^0_3) και την συγκεκριμμένη κατεύθυνση του διανύσματος **T**.

Ειδικότερα, η παράγωγος κατεύθυνσης μιάς βαθμωτής συνάρτησης $\phi(x_1,x_2,x_3)$ σε διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα $x_i(i=1,2,3)$ δηλαδή $\mathbf{T}=\hat{\imath}_i$ είναι η μερική παράγωγος της φ, πράγματι :

$$\phi\hat{\imath}_1 = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_i+\Delta x_i)-f(x_i)}{\Delta x_i} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

Εξυπακούεται, βέβαια, ότι πηγαίνοντας στο όριο οι $\Delta x_i \to 0$ συντεταγμένες $x_j \neq x_i$ δεν μεταβάλλονται.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ας θεωρήσουμε τώρα μία καμπύλη C και $P(x_1,x_2,x_3)$ ένα ομαλό σημείο της. Το μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στην καμπύλη C είναι

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{dx_1}{ds}\mathbf{i}_1 + \frac{dx_2}{ds}\mathbf{i}_2 + \frac{dx_3}{ds}\mathbf{i}_3 \qquad (3.2.2)$$

όπου $\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα θέσης $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$ του σημείου $P(x_1,x_2,x_3)$ της καμπύλης. Τότε, για μία συνεχή βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x_1,x_2,x_3)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, i =1,2,3, στο σημείο P, η παράγωγος στη διεύθυνση του εφαπτόμενου στην καμπύλη μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{T}$, δίνεται από την εξίσωση (3.2.1). Θα δείξουμε ότι :

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds} \qquad (3.2.3)$$

Πραγματικά εφ' όσον η $\phi(\mathbf{x})$ είναι παραγωγίσημη στη διεύθυνση $\mathbf{T}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\phi(\mathbf{x} + \Delta s\mathbf{T}) = \phi\,(x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\, x_3+\Delta x_3)$$

$$= \Delta x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \Delta x_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \varepsilon \Delta S.$$

όπου ε μια ποσότητα που πάει στο μηδέν καθώς $\Delta s \to 0$, εφ' όσον οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Έστω τώρα ότι

$$\mathbf{T} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3).$$

Τότε $$\frac{d\phi}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\phi(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{T}) - \phi(\mathbf{x})}{\Delta s} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cos\alpha_i$$

αλλά $$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{T} \text{ δηλαδή } \frac{dx_i}{ds} = \cos\alpha_i$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

οπότε προκύπτει η (3.2.3).

Ενθυμούμενοι τώρα ότι η ποσότητα

$$\text{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\,\mathbf{i}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\,\mathbf{i}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\,\mathbf{i}_3 \qquad (3.2.4a)$$

ορίστηκε ως η κλίση (gradient) της βαθμωτής συνάρτησης $\phi(x_1,x_2,x_3)$, η (3.2.3) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{T}\cdot \text{grad}\,\phi \qquad (3.2.5)$$

όπου **T**, ορίστηκε στην (3.2.2).

Αν τώρα ορίσουμε το σύμβολο

$$\nabla = \mathbf{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (3.2.6)$$

με την κατανόηση ότι δρά σ' ότι βρίσκεται δεξιά του, βλέπουμε ότι

$$\nabla\phi = \mathbf{i}_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3\frac{\partial\phi}{\partial x_3} \qquad (3.2.4b)$$

δηλαδή

$$\text{grad}\phi \equiv \nabla\phi \qquad (3.2.4c)$$

Έστω τώρα ότι το μοναδιαίο διάνυσμα **T** και η κλίση $\nabla\phi$ της ϕ, σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους. Τότε απο την (3.2.5) έχουμε

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{T}\cdot\nabla\,\phi = |\mathbf{T}|\,|\nabla\,\phi|\cos\theta = |\nabla\,\phi|\cos\theta \qquad (3.2.7)$$

Από την (3.2.7) προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες της κλίσης grad ϕ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

i) Η gradϕ χαρακτηρίζει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης $\phi(x_1,x_2,x_3)$.

Πράγματι, από την (3.2.7) η μέγιστη τιμή $\frac{d\phi}{ds}$ παροκύπτει όταν cosθ =1, δηλαδή όταν το μοναδιαίο διάνυσμα **T** και η κλίση gradϕ είναι συγγραμμικά διανύσματα.

ii) Το μέτρο της κλίσης $|\nabla\phi|$ είναι ίσο με το μέγιστο ρυθμό αύξησης της $\phi(x_1,x_2,x_3)$ ανά μονάδα μήκους.

Τούτο προκύπτει αβίαστα από την 3.2.7.

Ήδη, διαπιστώσαμε στα προηγούμενα ότι κάθε βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x_1,x_2,x_3)$ ορίζει μία επιφάνεια μέσα απο την εξίσωση

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = k$$

όπου k σταθερά. Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα της κλίσης gradϕ φανερώνεται τώρα όταν η καμπύλη C που μόλις πριν θεωρήσαμε, κείται στην επιφάνεια που ορίζει η ϕ. Πράγματι διαφορίζοντας την τελευταία ως προς την παράμετρο s, έχουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds} = 0 \qquad (3.2.8)$$

Όμως η (3.2.8) μπορεί να εκφραστεί ως το εσωτερικό γινόμενο της κλίσης $\nabla\phi$ επί το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα **T** (όπως αυτό ορίζεται στην 3.2.2) σε σημείο P της καμπύλης C, δηλαδή

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{\imath}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{\imath}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\hat{\imath}_3\right)\cdot\left(\frac{dx_1}{ds}\hat{\imath}_1 + \frac{dx_2}{ds}\hat{\imath}_2 + \frac{dx_3}{ds}\hat{\imath}_3\right)$$

ή ισοδύναμα με τη χρήση των (3.2.2) και (3.2.4)

$$\mathbf{T}\cdot\nabla\phi = \mathbf{T}\cdot\text{grad}\,\phi = 0 \qquad (3.2.9)$$

Η τελευταία συνεπάγεται ότι η κλίση $\nabla\phi$ είναι κάθετη στο διάνυσμα **T** που είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη C της επιφάνειας $\phi(x_1,x_2,x_3) = k$. Επειδή η καμπύλη C είναι μιά τυχαία ομαλή καμπύλη στο σημείο P της επιφάνειας, έπεται ότι η κλίση $\nabla\phi$ είναι κάθετη σε κάθε ομαλή καμπύλη της επιφάνειας που διέρχεται από το P και συνεπώς και στην ίδια την επιφάνεια, όπως άλλωστε διατυπώσαμε και με τη εξίσωση (3.1.16). Δηλαδή τα παραπάνω θεμελιώνουν την ακόλουθη ιδιότητα :

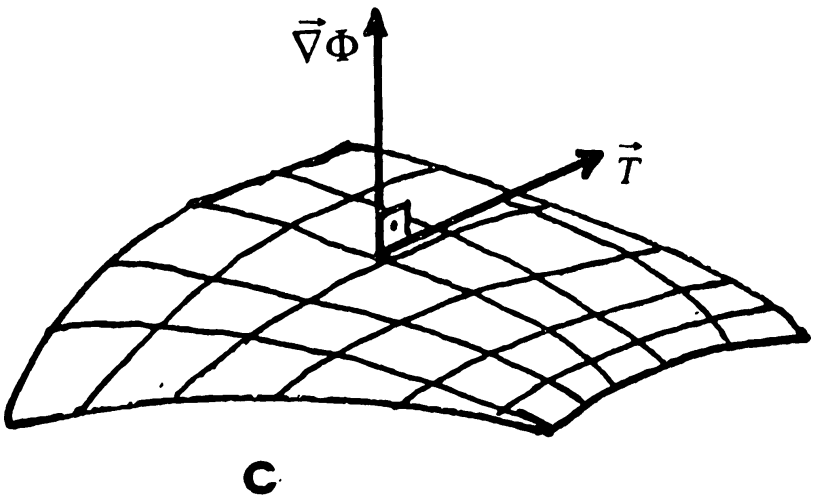
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

iii) Από κάθε σημείο (x_1,x_2,x_3) για το οποίο ισχύει

$$\text{grad}\,\phi\,(x_1,x_2,x_3) \neq 0$$

διέρχεται μιά επιφάνεια $\phi(x_1,x_2,x_3) = k$, στην οποία η $\nabla\phi$ είναι κάθετη. Επειδή όπως είδαμε ότι η κλίση $\nabla\phi$ είναι κάθετη στην επιφάνεια που ορίζει η $\phi(x_1,x_2,x_3) = k$, το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σ' αυτή μπορεί βολικά να γραφεί

$$\hat{n} = \frac{\nabla\,\phi}{|\nabla\,\phi|} \qquad (3.2.10)$$



Σχήμα 3.2.2. Σε κάθε ομαλό σημείο της επιφάνειας $\phi = k = σταθ.$ η κλίση $\nabla\phi$ είναι κάθετη στην επιφάνεια αυτή.

Παράδειγμα 3.2.1

Έστω η βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3$. Να βρεθεί η παράγωγος κατεύθυνσης $\frac{d\phi}{ds}$ στη διεύθυνση $\mathbf{x} = 4\hat{\imath}_1 + 4\hat{\imath}_2 - 2\hat{\imath}_3$ στο σημείο $(x_1,x_2,x_3) = (1,1,1)$.

Λύση :

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο κατεύθυνσης, αρκεί να γνωρίζουμε την κλίση της βαθμωτής συνάρτησης και το μοναδιαίο διάνυσμα στη συγκεκριμμένη κατεύθυνση. Είναι :

$$\nabla\phi = 2x_1\,\hat{\imath}_1 + 2x_2\,\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για να βρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα **T** στην κατεύθυνση **x**, διαιρούμε το **x** με το μέτρο του, $|\mathbf{x}| = 6$. Έχουμε τότε

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{T}\cdot\nabla\phi = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\cdot\nabla\phi =$$

$$= \frac{1}{3}\{2\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3\}\cdot\{2x_1\hat{\imath}_1 + 2x_2\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3\} = \frac{1}{3}(4x_1 + 4x_2 + 1)$$

Στο σημείο (1,1,1) έχουμε $d\phi/ds = 3$

Παράδειγμα 3.2.2:

Να υπολογιστούν οι κλίσεις των συναρτήσεων

$$\text{i) } \phi_1 = \frac{1}{|\mathbf{x}|},\ r\neq 0 \quad \text{ii) } \phi_2 = (\hat{\imath}_1 \times \hat{\imath}_2)\cdot\mathbf{x} \quad \text{iii) } \phi_3 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{a},\ \mathbf{x} = x_1\hat{\imath}_1 + x_2\hat{\imath}_2 + x_3\hat{\imath}_3$$

όπου **a** τυχαίο σταθερό διάνυσμα.

Λύση :

$$\text{i) } \nabla\phi_1 = \left(\hat{\imath}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$$

Αλλά $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i} = \dfrac{\partial r}{\partial x_i}\dfrac{\partial\phi}{\partial r}$, δηλαδή

$$\nabla\phi_1 = -\frac{1}{2}(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^{-3/2}\{2x_1\hat{\imath}_1 + 2x_2\hat{\imath}_2 + 2x_3\hat{\imath}_3\}$$

$$= -\frac{x_i\hat{\imath}_i}{(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},\ |\mathbf{x}|\neq 0$$

Ανάλογα μπορεί κανείς να δείξει την πιο γενική και πολύ χρήσιμη σχέση

$$\nabla\phi\,(|\mathbf{x}|) = \frac{d\phi}{dr}\frac{\mathbf{x}}{r} \quad (3.2.11)$$

$$\text{ii) } \nabla[(\hat{\imath}_1 \times \hat{\imath}_2)\cdot\mathbf{x}] = \nabla\{\mathbf{x}\cdot\hat{\imath}_3\} = \nabla\{x_3\hat{\imath}_3\cdot\hat{\imath}_3\}$$

$$= \nabla x_3 = \hat{\imath}_3\frac{\partial}{\partial x_3}x_3 = \hat{\imath}_3$$

$$\text{iii) } \nabla(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) = \nabla(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3) =$$

$$= \left(\hat{\imath}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3)$$

$$= (\hat{\imath}_1 a_1 + \hat{\imath}_2 a_2 + \hat{\imath}_3 a_3) = \mathbf{a}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 3.2.3

Να βρεθεί η παράγωγος της $\phi(x_1,x_2,x_3)=x^2_1+x^2_2+x^2_3$ στη διεύθυνση που ορίζουν τα δύο σημεία P = (1,1,0) και Q =(2,1,1), καθώς και η μέγιστη τιμή της και η κατεύθυνσή της στο σημείο P =(1,1,0).

Λύση :

Ορίζουμε πρώτα ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη ζητούμενη διεύθυνση που ορίζουν τα σημεία P,Q

$$\mathbf{u} = \frac{(2-1)\hat{\imath}_1 + (1-1)\hat{\imath}_2 + (1-0)\hat{\imath}_3}{[(2-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2]^{1/2}} = \frac{\hat{\imath}_1+\hat{\imath}_3}{\sqrt{2}}$$

Επίσης $\nabla\phi = 2(x_1\hat{\imath}_1 + x_2\hat{\imath}_2 + x_3\hat{\imath}_3)$. Τότε σύμφωνα με την (3.2.7)

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{u}\cdot\nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath}_1+\hat{\imath}_3)\cdot\{2(x_1\hat{\imath}_1 + x_2\hat{\imath}_2 + x_3\hat{\imath}_3)\}$$

$$= \sqrt{2}\,\{x_1+x_3\}$$

Στο σημείο (1,1,0)

$$\frac{d\phi}{ds} = \sqrt{2}\,(1+0) = \sqrt{2}$$

Η μέγιστη τιμή, είναι το μέτρο $|\nabla\phi|$,

$$|\nabla\phi|_{(1,1,0)} = 2\sqrt{x^2_1 + x^2_2 + x^2_3}\,\Big|_{(1,1,0)} = 2\sqrt{2}$$

η οποία είναι προφανώς μεγαλύτερη της $\frac{d\phi}{ds}$. Η κατεύθυνση της μέγιστης τιμής στο P=(1,1,0) ορίζεται από την ίδια την κατεύθυνση της κλίσης, στο σημείο αυτό. Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{T}_{(1,1,0)} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\Big|_{(1,1,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath}_1+\hat{\imath}_2)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.3. Ιδιότητες της κλίσης ή grad ϕ

Θα ασχοληθούμε τώρα με ορισμένες βασικές ιδιότητες της κλίσης grad ϕ οι οποίες θα φανούν χρήσιμες στις εφαρμογές. Έστω λοιπόν ότι $d\mathbf{x}$ είναι το στοιχειώδες διάνυσμα

$$d\mathbf{x} = dx_1 \hat{\imath}_1 + dx_2 \hat{\imath}_2 + dx_3 \hat{\imath}_3 \qquad (3.3.1)$$

Έστω επίσης μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x_1,x_2,x_3)$. Η κλίση της ϕ είναι ως γνωστόν

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{\imath}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{\imath}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\hat{\imath}_3 \qquad (3.3.2)$$

δηλαδή μια διανυσματική συνάρτηση. Συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\nabla\phi\cdot d\mathbf{x} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{\imath}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{\imath}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\hat{\imath}_3\right)\cdot(dx_1\hat{\imath}_1 + dx_2\hat{\imath}_2 + dx_3\hat{\imath}_3)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}dx_3$$

Δηλαδή $\nabla\phi\cdot d\mathbf{x} = d\phi$ (3.3.3)

Αν θέλουμε να αποφύγουμε τις μακροσκελείς εκφράσεις όπως παραπάνω, είναι δυνατόν να εισάγουμε τους αθροιζόμενους δείκτες σύμφωνα με τη συνθήκη Einstein όπως και στο πρώτο κεφάλαιο. Έτσι η σχέση 3.3.3 μπορεί να προκύψει ως ακολούθως

$$\nabla\phi\cdot d\mathbf{x} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\hat{\imath}_i\right)\cdot(dx_j\hat{\imath}_j) = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_j(\hat{\imath}_i\cdot\hat{\imath}_j)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_j\,\delta_{ij} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx_i = d\phi$$

Έστω τώρα ότι $\phi = \phi(u)$, όπου $u=u(x_1,x_2,x_3)$. Τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{\imath}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{\imath}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\hat{\imath}_3$$

Όμως $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{d\,\phi}{d\,u}\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,2,3$

Άρα $\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}\hat{\imath}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\hat{\imath}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\hat{\imath}_3\right\}$

ή

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{d\,u}\nabla u \qquad (3.3.4)$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι η συνάρτηση ϕ, εκτός από τις χωρικές συντεταγμένες (x_1,x_2,x_3), εξαρτάται επιπλέον και από μια άλλη μεταβλητή t, δηλαδή $\phi = \phi(x_1,x_2,x_3,t)$. Γνωρίζουμε από το 2ο κεφάλαιο ότι

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

(η παραδοχή άθροισης υπονοείται), ή

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial \phi}{\partial t}dt$$

Από την (3.3.3) αντικαθιστώντας και έχουμε

$$d\phi = d\mathbf{x}\cdot\nabla\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}dt \qquad (3.3.5)$$

Παράδειγμα 3.3.1

Να υπολογισθεί η κλίση της $|\mathbf{x}|^n$.

Λύση :

Είναι

$$\nabla\,|\mathbf{x}|^n = \frac{\partial}{\partial|\mathbf{x}|}(|\mathbf{x}|^n)\,\nabla\,|\mathbf{x}| = n\,|\mathbf{x}|^{n-1}\,\nabla\,|\mathbf{x}|$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

'Ομως $\nabla|\mathbf{x}| = \left(\hat{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^{-1/2} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$

'Αρα $\nabla |\mathbf{x}|^n = n |\mathbf{x}|^{n-2} \mathbf{x}$

η οποία είναι ειδική περίπτωση της 3.2.11.

Παράδειγμα 3.3.2

1) Η θερμοκρασία των σημείων ενός δωματίου δίνεται από τη συνάρτηση

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \frac{T_0}{a^2}\{x^2_1 + x^2_2 - ax_3\} .$$

α) Σε ποιά διεύθυνση πρέπει να κινηθεί έντομο που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{x}_0$ =(a,a,2a) ώστε να υφίσταται την ελάχιστη δυνατή θερμοκρασία;

β) Υποθέστε ότι αυτό κινείται με ταχύτητα $|\mathbf{u}|$ = 5m/s στη διεύθυνση

$\mathbf{x}=(4\hat{\imath}_1 + 4\hat{\imath}_2 - 2\hat{\imath}_3)a$ όπου a = 1m. Ποιος είναι ο ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας στη μονάδα του χρόνου τη στιγμή που το έντομο διέρχεται από το σημείο x = (a,a,2a) αν (T_0/a) = 1 βαθμός/m;

Λύση :

α) Η διεύθυνση μεγίστης αύξησης της θερμοκρασίας καθορίζεται από το $\nabla\phi$ που είναι κάθετο στην ισοθερμική επιφάνεια .Έχουμε

$$\nabla\phi = \frac{T_0}{a}\left(2\frac{x_1}{a}\hat{\imath}_1 + 2\frac{x_2}{a}\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3\right)$$

Συνεπώς το έντομο πρέπει να κινηθεί ακριβώς στην αντίθετη κατεύθυνση $-\nabla\phi$.

β) Όπως γνωρίζουμε,η αύξηση της θερμοκρασίας στη μονάδα μήκους δίνεται από

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{T}\cdot\nabla\phi$$

όπου **T** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη ζητούμενη κατεύθυνση

$$\mathbf{T} = \frac{2\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 - 1\hat{\imath}_3}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}\{2\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3\}$$

Ο ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας στη μονάδα χρόνου καθώς διέρχεται από το σημείο (1,1,2) είναι

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = |\mathbf{u}|\,\mathbf{T}\cdot\nabla\phi = u\frac{T_0}{a}\frac{1}{3}\left(4\frac{x_1}{a} + 4\frac{x_2}{a} + 1\right)$$

Για $x_2 = x_2 = a = 1$ βρίσκουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{d\phi}{dt} = 3\ (5m/s)(1\text{βαθμός/m}) = 15\ \text{βαθμοί/sec}$$

Παράδειγμα 3.3.3

Να βρεθεί η γωνία ανάμεσα στις κάθετες των δύο τεμνομένων σφαιρών:

$\phi_1: x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = 16$ και $\phi_2: (x_1-1)^2 + x^2_2 + x^2_3 = 16$, στο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2})$.

Λύση :

Γνωρίζουμε ότι η κλίση είναι κάθετη στην επιφάνεια. Υπολογίζουμε τις κλίσεις των δύο σφαιρών για τυχαίο σημείο της επιφάνειας

$$\nabla\phi_1 = 2(x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3)$$

$$\nabla\phi_2 = 2[(x_1-1)\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3]$$

Η γωνία των δυο καθέτων υπολογίζεται τότε εύκολα από τη σχέση

$$\cos\theta = \frac{\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2}{|\nabla\phi_1|\ |\ \nabla\phi_2|}$$

$$= \frac{x_1(x_1-1) + x^2_2 + x^2_3}{\{[(x_1-1)^2 + x^2_2 + x^2_3](x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)\}^{1/2}}$$

Στο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2})$ είναι $\cos\theta = \frac{31}{32}$

Άρα $\theta = \cos^{-1}\frac{31}{32} \approx 14^o$

Σημείωση: Κατά τον υπολογισμό, οι σταθεροί όροι στα δεύτερα μέλη των εξισώσεων των επιφανειών φάνηκε να μην παίζουν κάποιο ρόλο. Όμως αυτό δεν είναι αλήθεια. Ήδη τους έχουμε χρησιμοποιήσει όταν ορίσαμε ότι το σημείο τομής $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2})$ το οποίο πρέπει να κείται πάνω στις δυο επιφάνειες $\phi_1 = \phi_2 = 16$. Προφανώς το σημείο της τομής θα πρέπει να ισχύει $x^2_1 = (x_1-1)^2$ ή $x_1 = \frac{1}{2}$. Τα σημεία x_2 και x_3 πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$x_2{}^2 + x_3{}^2 = \frac{63}{4}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.4. Βαθμωτά και Διανυσματικά Πεδία. Γραμμές Ροής

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες των επιφανειών. Διαπιστώσαμε ότι κάθε βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x_1,x_2,x_3)$ ορίζει μια συγκεκριμένη επιφάνεια μέσα από την εξίσωση $\phi(x_1,x_2,x_3)=k$, όπου k σταθερό. Απ' την άλλη, είμαστε όλοι εξοικιωμένοι με τα βαθμωτά πεδία στη φυσική. Με άλλα λόγια, ένα βαθμωτό πεδίο είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της μορφής $\psi=\psi(\mathbf{x})$ η οποία αναπαριστά φυσικές ποσότητες όπως για παράδειγμα η θερμοκρασία, η πίεση, το ηλεκτροστατικό δυναμικό μεταξύ δυο πλακών, κ.α. Αν η Ψ παίρνει σταθερή τιμή πάνω στην επιφάνεια $\varphi=k$, θα πρέπει $\Psi=\chi(\varphi)$. Έτσι στην πιο πάνω εξίσωση, συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς k, ισοδυναμεί με ισόθερμες επιφάνειες, ισοβαρείς, ισοδυναμικές επιφάνειες κ.λ.π, με τιμή $\chi(k)$.

Μια άλλη κατηγορία φυσικών ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα η δύναμη, το ηλεκτρικό πεδίο κ.α., απαιτούν για τον πλήρη ορισμό τους την έννοια της διανυσματικής συνάρτησης και καλούνται διανυσματικά πεδία. Στα πεδία αυτά, σε κάθε σημείο του χώρου μεταβάλλεται όχι μόνο το μέτρο τους αλλά προφανώς και η διεύθυνσή τους. Έτσι, είναι δυνατό σε κάθε σημείο του χώρου, να προσάψουμε ένα διάνυσμα του οποίου το μέτρο και η διεύθυνση να αντιστοιχούν στο μέτρο και τη φορά του συγκεκριμένου διανυσματικού πεδίου (σχήμα 3.4.1a). Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση που το διανυσματικό πεδίο μπορεί να προκύψει από μια βαθμωτή συνάρτηση ψ με τη δράση του ∇,

$$\mathbf{A} = \nabla \psi$$

τέτοιες περιπτώσεις θα εξετάσουμε στο εδ. 3.6.

Ένα διανυσματικό πεδίο **A** περιγράφεται λοιπόν από τρεις ανεξάρτητες συναρτήσεις $A_i\,(x_1,x_2,x_3)$ $i = 1,2,3$ δηλαδή

$$\mathbf{A} = \hat{\imath}_1 A_1(x_1,x_2,x_3) + \hat{\imath}_2 A_2(x_1,x_2,x_3) + \hat{\imath}_3 A_3(x_1,x_2,x_3)$$

Επειδή η εποπτική περιγραφή του πεδίου μέσω των τριών συνιστωσών είναι αδύνατη, στην πράξη χρησιμοποιούμε μια αναπαράσταση η οποία μας δίνει τη διεύθυνση του πεδίου σε ένα σημείο του χώρου που μας ενδιαφέρει και το μέγεθος του μέτρου του διανύσματος αυτού. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο όταν το πεδίο έχει δύο μόνο συνιστώσες και εξαρτάται από δύο μόνο συντεταγμένες. Τρισδιάστατα πεδία μπορούν να παρασταθούν μόνο αν έχουν κάποια συμμετρία. Οι κανόνες είναι οι εξής:

1) Σε κάθε σημείο του διδιάστατου χώρου χαράσουμε διανύσματα τα οποία δίνουν την διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου στη θέση αυτή (σχ. 3.5a) και σημείο εφαρμογής του διανύσματος, το σημείο που καθορίζεται από τις συνιστώσες (x_1,x_2,x_3) για τις οποίες υπολογίζεται το μέτρο του.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

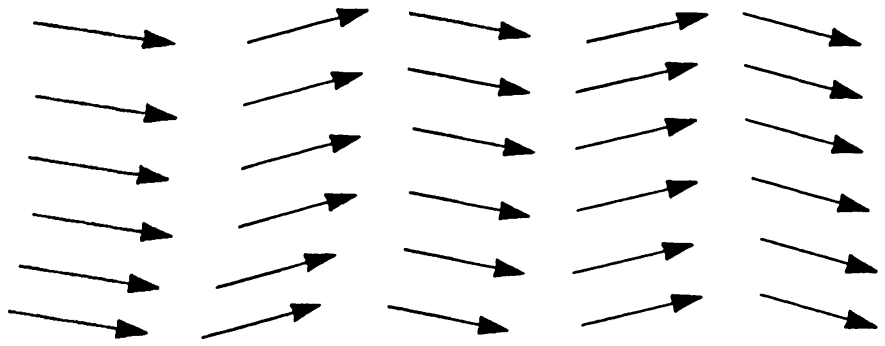
2) Χαράσουμε καμπύλες τέτοιες ώστε το εφαπτόμενο σε αυτές διάνυσμα σε κάθε σημείο του διάνυσμα είναι παράλληλο με τα διανύσματα της 1). Αυτές λέγονται χαρακτηριστικές καμπύλες του πεδίου.

3) Η πυκνότητα των καμπυλών (αριθμός καμπυλών ανά μονάδα μήκους) είναι ανάλογη του μέτρου του διανυσματικού πεδίου στην περιοχή που σχεδιάζονται. Οι προκύπτουσες γραμμές λέγονται συνήθως δυναμικές γραμμές. Αν το διανυσματικό πεδίο είναι η πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J} = \rho\mathbf{u}$ (ρ = πυκνότητα) λέγονται γραμμές ροής ή καμπύλες ροής.

Μπορούμε να συνάγουμε μια απλή εποπτική σχέση μεταξύ των καμπύλων και του διανυσματικού πεδίου. Προφανώς η ακρίβεια εξαρτάται από την πυκνότητα με την οποία χαράσουμε τις δυναμικές γραμμές. Οι χαραχθείσες έτσι καμπύλες παρέχουν μια εποπτική εικόνα του διανυσματικού πεδίου.

Αν $\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$ είναι τυχαίο σημείο μιας δυναμικής καμπύλης, το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{dx_1}{ds}\hat{\imath}_1 + \frac{dx_2}{ds}\hat{\imath}_2 + \frac{dx_3}{ds}\hat{\imath}_3 \qquad (3.4.1)$$



Σχήμα 3.4.1α. Διανύσματα που αναπαριστούν την τιμή διανυσματικού πεδίου σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου.

Όμως αυτό πρέπει να είναι συγγραμικό με το διανυσματικό πεδίο **A**, σε κάθε σημείο της καμπύλης. Άρα

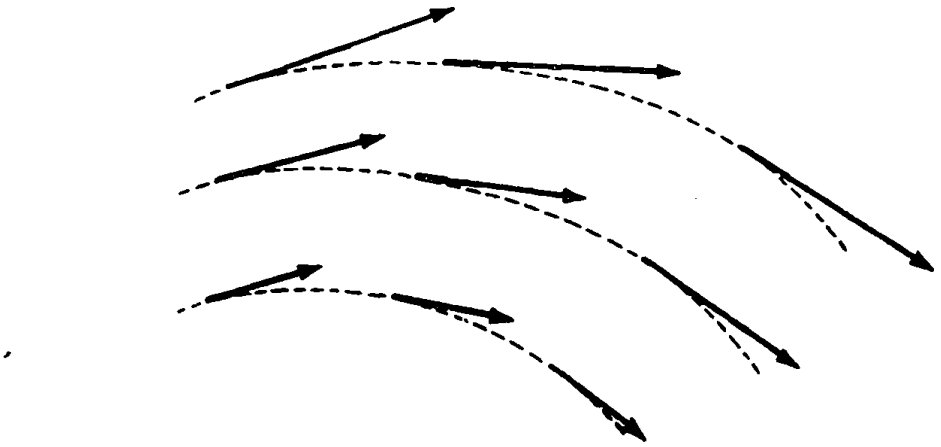
$$\mathbf{A} = \kappa\,\mathbf{T} \qquad (3.4.2)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όπου κ σταθερά αναλογίας η οποία εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης του πεδίου. Από τις (3.4.1-2) βρίσκουμε

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3} \qquad (3.4.3)$$

όπου $\mathbf{A} = A_1 \hat{\imath}_1 + A_2 \hat{\imath}_2 + A_3 \hat{\imath}_3$. Όμως το μέτρο του πεδίου εξαρτάται από την πυκνότητα με την οποία έχουν σχεδιαστεί οι δυναμικές γραμμές.

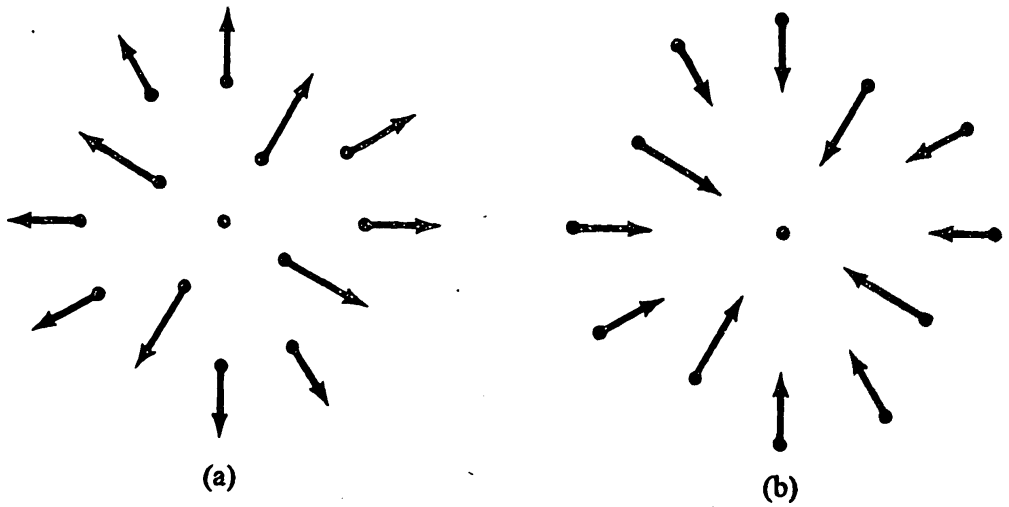


Σχήμα 3.4.1.b. Διανυσματικές καμπύλες.

Στο προηγούμενο εδάφιο, παρουσιάσαμε την έννοια της κλίσης μιας βαθμωτής συνάρτησης και είδαμε πως περιγράφει το ρυθμό μεταβολής του βαθμωτού πεδίου. Πολλές φορές το διανυσματικό πεδίο της κλίσης βαθμωτής συνάρτησης έχει και αυτό ιδιαίτερη φυσική σημασία.

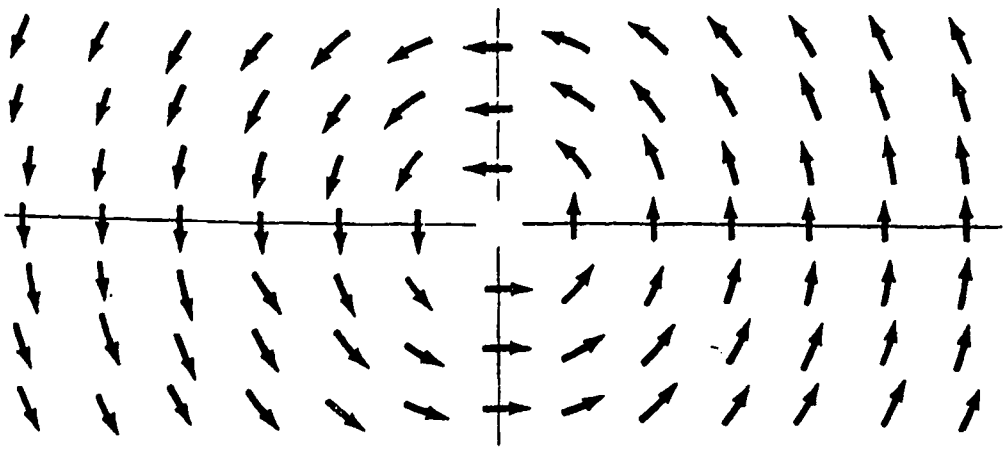
Θα θέλαμε τώρα να περιγράψουμε κάπως αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, το ρυθμό μεταβολής ενός διανυσματικού πεδίου. Στην περίπτωση όμως μιας διανυσματικής συνάρτησης μπορούμε να θεμελιώσουμε δυο τρόπους ρυθμού μεταβολής της. Τον πρώτο τρόπο καλούμε <u>απόκλιση</u> της διανυσματικής συνάρτησης (divergence). Η απόκλιση είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που υποδηλώνει την τάση μεταβολής του πεδίου από συγκεκριμένο σημείο. (βλέπε σχήμα 3.4.2). Δείχνει κατά πόσο δημιουργούνται νέες δυναμικές γραμμές. Τον δεύτερο καλούμε <u>στροβιλισμό</u> (curl) και είναι μια διανυσματική συνάρτηση που

υποδηλώνει τον τρόπο με τον οποίο το πεδίο "στροβιλίζεται" στη γειτονιά συγκεκριμένου σημείου. (βλ. σχ. 3.4.3.)



Σχήμα (3.4.2) Η απόκλιση διανυσματικού πεδίου είναι στην περίπτωση a) μηδέν (εκτός από την αρχή που υπάρχει πηγή). b) πεδίο με μη μηδενική απόκλιση στην αρχή (καταβόθρα).

Οι παραπάνω περιγραφές της απόκλισης και του στροβιλισμού διανυσματικής συνάρτησης δεν είναι βέβαια ακριβείς. Θα δούμε ό,τι, αφου οριστούν οι δυο ποσότητες αυτές προσεχτικά, είναι δυνατό να βρίσκουμε απόκλιση σε διανυσματικά πεδία τα οποία κάθε άλλο παρά "αποκλίνουν". Ανάλογα, είναι δυνατό να υπάρχει στροβιλισμός διάφορος του μηδενός σε διανυσματικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές δεν δείχνουν να στροβιλίζονται.



Σχήμα (3.4.3.) Δείχνεται ένα πεδίο που έχει μη μηδενικό στροβιλισμό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 3.4.1

Να βρεθεί η εξίσωση γραμμών ροής του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = -x_2\hat{x}_1 + x_1\hat{x}_2$$

Λύση :

Από την εξίσωση (3.4.3) έχουμε

$$\frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{x_1} \quad \text{και} \quad dx_3 = 0$$

Η πρώτη γίνεται $x_1dx_1 = -x_2dx_2$. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη έχουμε

$$\int x_1dx_1 = -\int x_2dx_2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \text{σταθερό}$$

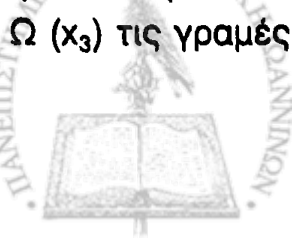
Επίσης από την $dx_3 = 0$ έχουμε ότι $x_3 =$σταθερό. Άρα οι καμπύλες ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι κάθετοι στον άξονα x_3, με κέντρα πάνω στον x_3.

Παράδειγμα 3.4.2

Η ταχύτητα υγρού δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\Omega(x_3)\, x_2\hat{x}_1 + \Omega(x_3)\, x_1\hat{x}_2$$

όπου $\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα θέσης. i) Να βρεθεί η εξίσωση των γραμμών ροής όταν: α) $\Omega(x_3) = x_3^3$ β). $\Omega(x_3) = \tanh x_3$ και να σχεδιαστούν αυτές . ii) Να υπολογιστεί το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}(x) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x})$ και να βρεθεί η εξίσωση γραμμών ροής για κάθε μια απο τις περιπτώσεις α) & β). iii) Επιρρεάζει η μορφή της συνάρτησης $\Omega(x_3)$ τις γραμές ροής των $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}$;



Λύση : Παρατηρούμε κατ' αρχήν οτι η τρίτη συνιστώσα του πεδίου ταχυτήτων είναι μηδενική, συνεπώς οι γραμμές ροής αναμένονται σε επίπεδα κάθετα στον άξονα x_3. Όπως και πριν, απο την εξίσωση ροής έχουμε

$$\frac{dx_1}{-\Omega x_2} = \frac{dx_2}{\Omega x_1} \quad \text{και} \quad dx_3 = 0$$

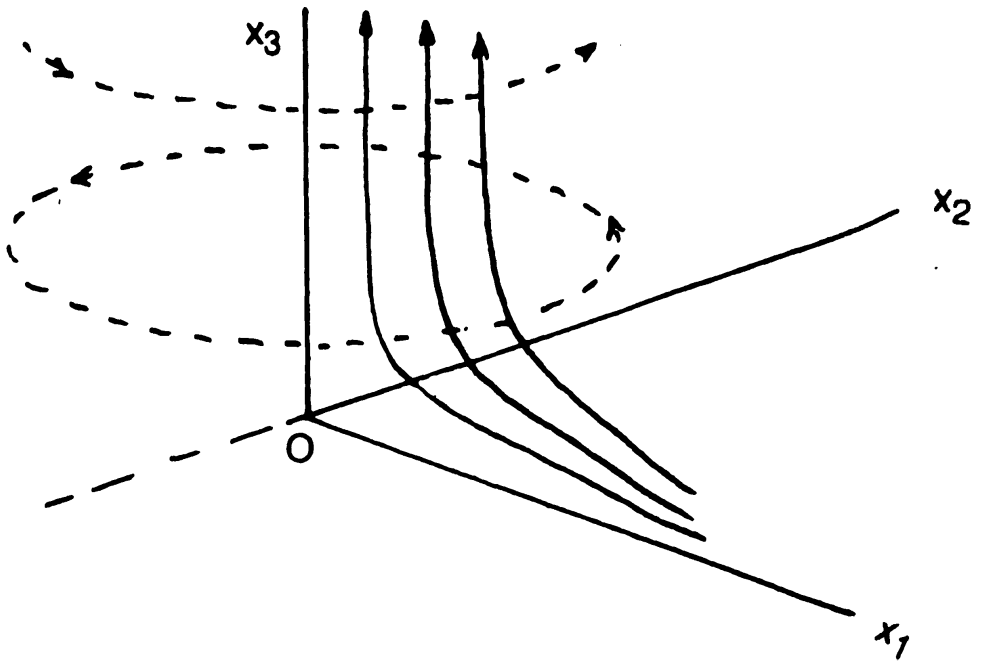
ή

$$-\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} \qquad \text{(ανεξάρτητη από την } \Omega\ (x_3)\text{)}$$

Η τελευταία οδηγεί και πάλι στη σχέση $x_1 dx_1 = -x_2 dx_2$ η οποία μετά την ολοκλήρωση δίνει $x_1^2 + x_2^2 = c$, όπου c=σταθερά. Για διάφορες τιμές της σταθεράς c παίρνουμε ομόκεντρους κύκλους κάθετους στον άξονα x_3.

Το διάνυσμα **ω** δίνεται απο το διανυσματικό γινόμενο

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = -x_1 \frac{d\Omega}{dx_3} \hat{x}_1 - x_2 \frac{d\Omega}{dx_3} \hat{x}_2 + 2\Omega \hat{x}_3$$



Σχήμα 3.4.4. Γραμμές ροής των διανυσμάτων **u** , **ω** .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Οι γραμμές ροής του **ω** είναι τότε

$$\frac{dx_1}{-x_1}\left(\frac{d\Omega}{dx_3}\right)^{-1} = \frac{dx_2}{-x_2}\left(\frac{d\Omega}{dx_3}\right)^{-1} = \frac{dx_3}{2\Omega}$$

$$\text{ή } \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = -\left(\frac{d\Omega}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{2\Omega} \equiv -\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{\Omega}$$

Ολοκληρώνοντας τις τελευταίες έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις γραμμών ροής του **ω**

$$x_1 = cx_2\,,\; x_1\sqrt{\Omega} = c'$$

όπου c, c' είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Σε αντίθεση με τις γραμμές ροής της **υ**, το σχήμα των γραμμών σ' αυτή την περίπτωση εξαρτάται από τη συνάρτηση Ω .

3.5 Απόκλιση Διανυσματικής Συνάρτησης.

Ας θεωρήσουμε διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3)$, με συνιστώσες $F_1(x_1,x_2,x_3)$, $F_2(x_1,x_2,x_3)$, και $F_3(x_1,x_2,x_3)$, δηλαδή

$$\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3) = F_1(x_1,x_2,x_3)\,\hat{\imath}_1 + F_2(x_1,x_2,x_3)\hat{\imath}_2 + F_3(x_1,x_2,x_3)\hat{\imath}_3 \quad (3.5.1)$$

Η απόκλιση της **F** είναι μια βαθμώτη ποσότητα που ορίζεται ως εξής

$$(\text{απόκλιση } \mathbf{F}) = \text{div}\mathbf{F} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \quad (3.5.2)$$

Η τελευταία, μπορεί να γραφτεί συμβολικά μέσω του γνωστού μας τελεστή (3.2.6), δηλαδή*

$$\nabla = \hat{\imath}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \quad (3.5.3)$$

Από τα διανύσματα (3.5.1) και (3.5.3) ορίζουμε μια βαθμωτή ποσότητα που είναι το εσωτερικό γινόμενό τους ως εξής

---

*Παρόλο που για το καρτεσιανό σύστημα δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των $\hat{\imath}_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ και $\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{\imath}_1$ ($\hat{\imath}_1$ (τα μοναδιαία διανύσματα είναι σταθερά) σκόπιμα γράφτηκε ως τελεστής της μορφής 3.5.2. έχοντας κατά νου τυχαία συστήματα αξόνων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \left(\hat{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{E}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (F_1 \hat{\imath}_1 + F_2 \hat{\imath}_2 + F_3 \hat{\imath}_3) \qquad (3.5.3a)$$

Δηλαδή ισχύει

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \qquad (3.5.3b)$$

Προφανώς η απόκλιση ενός διανύσματος δεν προσδιορίζει πλήρως το διάνυσμα. Αν **F** έχει δοθείσα απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ όλα τα διανύσματα $\mathbf{F}+\mathbf{F}'$ όπου $\nabla \cdot \mathbf{F}' = 0$ έχουν την ίδια απόκλιση

Παρατήρηση: Σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο δύο πραγματικών συναρτήσεων, η θέση του "διανύσματος" ∇ εδώ έχει μεγάλη σημασία. Στον ορισμό (3.4.7) το ∇ τοποθετείται αριστερά και το αποτέλεσμα είναι μια βαθμωτή συνάρτηση. Είναι όμως λογική και η έκφραση

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = (F_1 \hat{\imath}_1 + F_2 \hat{\imath}_2 + F_3 \hat{\imath}_3) \cdot \left(\hat{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Η τελευταία έκφραση εξακολουθεί να είναι ένας πολύπλοκος τελεστής. Για να έχει νόημα, θα πρέπει να δράσει σε κάτι που βρίσκεται δεξιά του. Τέτοια, όμως, θέματα προς το παρόν τα προσπερνάμε.

Παράδειγμα 3.5.1

Θα υπολογιστεί η απόκλιση της $\mathbf{F}=x_1 e^{x_2} \hat{\imath}_1 + e^{x_1 x_2} \hat{\imath}_2 + \sin(x_2 x_3) \hat{\imath}_3$.

Λύση :

Είναι: $$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 e^{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e^{x_1 x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} \sin(x_2 x_3)$$

$$= e^{x_2} + x_1 e^{x_1 x_2} + x_2 \cos(x_2 x_3)$$

Παράδειγμα 3.5.2

Θα βρεθεί η απόκλιση του διανύσματος θέσης **x**.

Λύση :

Εδώ είναι $\mathbf{F} \equiv \mathbf{x} = x_1 \hat{\imath}_1 + x_2 \hat{\imath}_2 + x_3 \hat{\imath}_3$ συνεπώς έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 3$$

'Αλλα διανύσματα με απόκλιση 3 είναι π.χ $\mathbf{a} = 3x_1 \hat{\imath}_1$, $\mathbf{b} = 2x_1 \hat{\imath}_1 + x_2 \hat{\imath}_2$ κ.λ.π.

Παράδειγμα 3.5.3

Θα δείξουμε ότι $\nabla \cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla \cdot\mathbf{F} + \nabla \cdot\mathbf{G}$

Το άθροισμα $\mathbf{F}+\mathbf{G}$, ως προς τις συνιστώσες γράφεται

$$\mathbf{F}+\mathbf{G} = (F_1+G_1)\hat{\imath}_1 + (F_2+G_2)\hat{\imath}_2 + (F_3+G_3)\hat{\imath}_3$$

τότε

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}) =$$

$$= \left(\hat{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right).((F_1+G_1)\hat{\imath}_1 + (F_2+G_2)\hat{\imath}_2 + (F_3+G_3)\hat{\imath}_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(F_1+G_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(F_2+G_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(F_3+G_3)$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial G_3}{\partial x_3}\right)$$

$$= \nabla\cdot\mathbf{F} + \nabla\cdot\mathbf{G}$$

Σ η μ ε ί ω σ η : Είναι χρήσιμο να επαναφέρουμε σ' αυτό το σημείο τον συμπαγή συμβολισμό που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Οι εκφράσεις απλοποιούνται σημαντικά και όπως θα δούμε αργότερα θα είναι ο μόνος τρόπος υπολογισμού σε γενικευμένα διανύσματα με N-συνιστώσες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε

$$\nabla \cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \left(\sum_{i=1}^{3} \hat{\imath}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\sum_j (F_j + G_j)\hat{\imath}_j\right)$$

$$= \left(\hat{\imath}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot (F_j + G_j)\hat{\imath}_j$$

$$= (\hat{\imath}_i \cdot \hat{\imath}_j)\frac{\partial}{\partial x_i}(F_j + G_j)$$

$$= \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(F_j + G_j)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$=\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(F_i+G_i)=\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}+\sum_i \frac{\partial G_i}{\partial x_i}$$

$$=\nabla\cdot\mathbf{F}+\nabla\cdot\mathbf{G}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό σύστημα είναι σταθερά και δεν μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο.

3.6. Στροβιλισμός διανυσματικής Συνάρτησης

Στο προηγούμενο εδάφιο μελετήσαμε την απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3)$. Θεωρούμε τώρα την ίδια συνάρτηση με συνιστώσες F_1,F_2,F_3 που έχουν συνεχείς παραγώγους. Ορίζουμε τον στροβιλισμό της **F**, (curl **F** ή rot **F**) ως εξής.

$$\text{curl } \mathbf{F}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{i}_1+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{i}_2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{i}_3 \qquad (3.6.1)$$

με τη βοήθεια του γνωστού μας τελεστή ∇ διαπιστώνουμε ότι

$$\nabla x\mathbf{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \text{curl } \mathbf{F} \qquad (3.6.2)$$

κατά την ανάπυξη της ορίζουσας διατηρείται η σειρά των γραμμών γράφουμε πρώτα εκείνο της 2ης και μετά εκείνο της τρίτης.

Είναι φανερό ότι ο στροβιλισμός (curl) της **F** είναι επίσης διανυσματική συνάρτηση.

Ένας άλλο συμβολισμός του στροβιλισμού είναι

$$\nabla x\mathbf{F}=\text{rot } \mathbf{F} \text{ ή curl } \mathbf{F} \qquad (3.6.3)$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι παρόλο που το ∇ χρησιμοποιείται σαν διάνυσμα, είναι στην ουσία τελεστής. Έτσι, όλες οι ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δεν έχουν πάντα εφαρμογή. Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\nabla x\mathbf{F}$ δεν είναι απαραίτητα κάθετο στο **F**.

Ιδιότητες όμως όπως η,

$$\nabla x (\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla x\mathbf{F} + \nabla x\mathbf{G} \qquad (3.6.4)$$

ισχύουν πάντα. Για την απόδειξη της 3.6.4 θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό που αναπτύξαμε στα πρώτα κεφάλαια. Σύμφωνα με αυτόν η συνιστώσα k του εξωτερικού γινομένου στην (3.4.6) γράφεται

$$\begin{aligned}[\nabla x (\mathbf{F}+\mathbf{G})]_k &= \varepsilon_{ijk}\, \nabla_i (F+G)_j \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (F+G)_j \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} G_j \\ &= (\nabla x\mathbf{F})_k + (\nabla x\, \mathbf{G})_k\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.6.1

Να βρεθεί ο στροβιλισμός του διανύσματος θέσης **x**

Λύση :

Είναι $\mathbf{x} = x_1\hat{\imath}_1 + x_2\hat{\imath}_2 + x_3\hat{\imath}_3$ και

$$\nabla x\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

ή για τυχαία συνιστώσα k, είναι:

$$(\nabla x\mathbf{x})_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{x})_j = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = 0$$

Παράδειγμα 3.6.2

Να βρεθεί ο στροβιλισμός του πεδίου

$$\mathbf{F} = x_1x_2\hat{\imath}_1 + x^2{}_1x^2{}_2x^2{}_3\hat{\imath}_2 + x^2{}_2x^3{}_3\hat{\imath}_3$$

Λύση :

έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\nabla x\mathbf{F})_1 = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = 2x_2x^2_3 - 2x^2_1x^2_2x_3$$

και ανάλογα για της άλλες δυο συνιστώσες. Τελικά

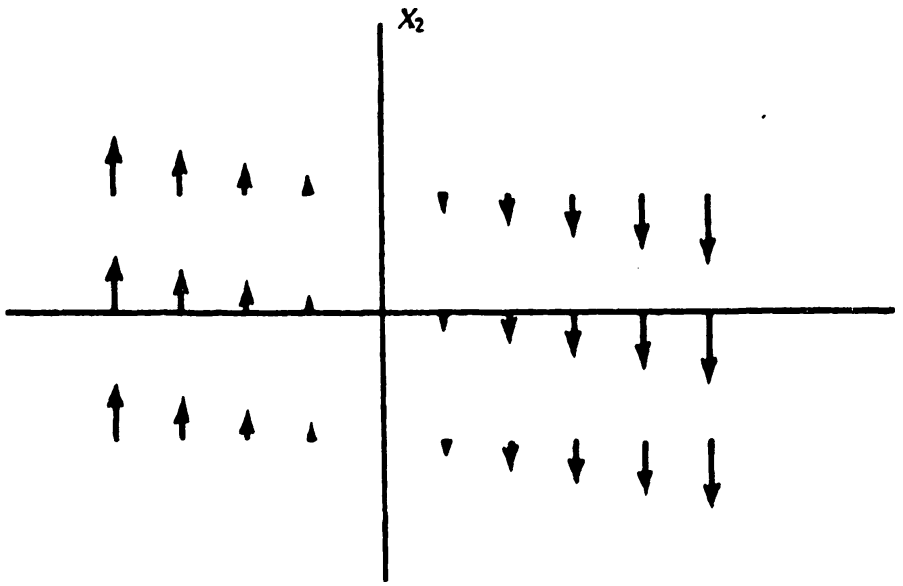
$$\nabla x\mathbf{F} = 2(x_2x^2_3 - x^2_1x^2_2x_3)\hat{\imath}_1 + x_1x_2\hat{\imath}_2 + (2x_1x^2_2x^2_3 - x_1x_3)\hat{\imath}_3$$

Παράδειγμα 3.6.3

Να βρεθεί σε ποια διεύθυνση στοχεύει το διάνυσμα $\nabla x\mathbf{F}$, όταν το $\mathbf{F}$ αναπαρίσταται όπως στο σχήμα (3.6.1) . Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το πεδίο $\mathbf{F}$, μεταβάλεται μόνο κατά τη διεύθυνση x_1. Η μεταβολή είναι γραμμική και αρνητική ως προς τα θετικά x_1. 'Αρα

$$\mathbf{F} = -\,a\,x_1\,\hat{\imath}_2$$

όπου α σταθερός θετικός αριθμός. Τότε



Σχήμα 3.6.1. Γραφική παράσταση του πεδίου $\mathbf{F} = -ax_1\hat{\imath}_2$

$$\nabla x\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & -ax_1 & 0 \end{vmatrix} = -\,a\hat{\imath}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς η διεύθυνση του curl **F** είναι ή $-\hat{\imath}_3$ αν α>0. Υπογραμμίζουμε ότι παρόλο που το πεδίο δεν "στροβιλίζεται", είναι curl **F** ≠ **0**.

Παράδειγμα 3.6.4

Έστω υγρό σταθερής πυκνότητας μάζας που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **ω**, γύρω από τον άξονα $\hat{\imath}_3$. Να βρεθεί ο στροβιλισμός του διανύσματος της ταχύτητας του υγρού.

Λύση :

Το υγρό περιγράφεται πλήρως από το διάνυσμα **J**=ρ**u** όπου ρ η πυκνότητα και **u**(**x**,t) το πεδίο ταχύτητας. Αν είναι ασυμπίεστο, ρ=σταθ., αρκεί η ποσότητα **u**(**x**,t). Αν **x** το διάνυσμα θέσης η ταχύτητα του ρευστού είναι

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\mathbf{x} = |\boldsymbol{\omega}|\hat{\imath}_3\mathbf{x}\mathbf{x} = |\boldsymbol{\omega}| \begin{vmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{\omega}|\,(x_1\hat{\imath}_2 - x_2\hat{\imath}_1)$$

Τότε

$$\text{curl } \mathbf{u} = |\boldsymbol{\omega}| \begin{vmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{\omega}|\,\hat{\imath}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2) \right) = 2\,|\boldsymbol{\omega}|\,\hat{\imath}_3$$

δηλαδή curl

$$\mathbf{u} = 2|\boldsymbol{\omega}|\,\hat{\imath}_3 = 2\boldsymbol{\omega} \neq 0$$

Θεώρημα 1.

Αν ϕ είναι βαθμωτή συνάρτηση με συνεχείς παράγωγους πρώτης και δεύτερης τάξης , τότε να δειχτεί ότι

$$\nabla\mathbf{x}(\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

δηλαδή ότι ο στροβιλισμός κάθε διανυσματικής συνάρτησης **A**, που μπορεί να εκφραστεί ως η κλίση αντίστοιχης βαθμωτής **A** = ∇ϕ, είναι πάντα μηδέν. Τέτοια πεδία λέγονται διατηρητικά.

Σ η μ ε ί ω σ η: Θα δούμε αργότερα ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Έστω ότι $\nabla\phi = \mathbf{A}$, τότε, τυχαία συνιστώσα k του στροβιλισμού του **A** γράφεται

$$(\nabla x\mathbf{A})_k = \varepsilon_{ijk}\,\nabla_i A_j = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i} A_j$$

Όμως $A_j = (\nabla\phi)_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\phi$. Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη και έχουμε

$$(\nabla x\mathbf{A})_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\ \phi\right)$$

Έστω k = 3. Τότε

$$(\nabla x\mathbf{A})_3 = \varepsilon_{ij3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi = \varepsilon_{123}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\phi + \varepsilon_{213}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} f$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} = 0$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι και οι άλλες δυο συνιστώσες είναι μηδέν.

Συνεπώς $\nabla x\nabla\phi = \mathbf{0}$.

Σ η μ ε ί ω σ η: Στην πραγματικότητα, για την απόδειξη του θεωρήματος δεν είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε συγκεκριμμένη συνιστώσα: προς τούτο παρατηρούμε πρώτα οτι η ποσότητα

$$S_{ij} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j} = S_{ji}$$

είναι συμμετρική ως προς την εναλλαγή των δεικτών. Όμως λόγω της αντισυμμετρικότητας του συμβόλου ε_{ijk} έχουμε

$$(\nabla x\mathbf{A})_k = \varepsilon_{ijk}\,S_{ij} = \varepsilon_{jik}S_{ji} = \varepsilon_{jik}\,S_{ij} = -\,\varepsilon_{ijk}\,S_{ij}$$

$$= -\,(\nabla x\mathbf{A})_k$$

δηλαδή φέρνοντας στο πρώτο μέλος έχουμε $2\,(\nabla x\mathbf{A})_k = 0$ πράγμα που αποδεικνύει το θεώρημα.

Θεώρημα 2. Η κλίση του στροβιλισμού διανυσματικής συνάρτησης **A** είναι μηδέν, δηλαδή

$$\nabla\cdot(\nabla x\mathbf{A}) = 0$$

όπου $\mathbf{A} = A_1\hat{\imath}_1 + A_2\hat{\imath}_2 + A_3\hat{\imath}_3$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα δούμε αργότερα ότι και στην περίπτωση αυτή ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή αν $\nabla x\mathbf{B}=0$ πάνω στο χώρο υπάρχει διάνυσμα **A** τέτοιο ώστε

$$\mathbf{B}=\nabla x\mathbf{A} .$$

Γράφουμε πρώτα τον στροβιλισμό του **A** σε καρτεσιανές συνιστώσες. Είναι

$$\nabla x\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\hat{x}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\hat{x}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\hat{x}_3$$

Τότε η απόκλιση της παραπάνω έκφρασης είναι:

$$\nabla\cdot(\nabla x\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_2\partial x_1} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3\partial x_1} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3\partial x_2}$$

Αν υποθέσουμε ότι οι παράγωγοι δεύτερης τάξης συνιστώσεων είναι συνεχείς και ότι επιτρέπεται η αλλαγή στη σειρά παραγωγής τότε η τελευταία έκφραση είναι μηδέν.

Ένας ποιο κομψός τρόπος απόδειξης είναι ο παρακάτω:

$$\nabla\cdot(\nabla x\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(\nabla x\mathbf{A})_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j\right)$$

$$= \sum_{k,i,j}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j \equiv \sum_{k,i,j}^{3}\varepsilon_{kji}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}A_j$$

Στην τελευταία ισότητα έχουμε εναλλάξει τους δείκτες $i \longleftrightarrow k$. Αυτό δεν επηρεάζει την έκφραση μιας και οι δυο δείκτες είναι βουβοί (αθροίζονται). Επειδή η σειρά παραγώγισης δεν έχει σημασία, η τελευταία ισότητα μπορεί να γραφεί :

$$\sum_{k,i,j}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = \sum_{k,i,j}^{3}\varepsilon_{kji}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j$$

Όμως από τις ιδιότητες του συμβόλου ε_{ijk} έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\varepsilon_{kjl} = -\varepsilon_{klj} = -\varepsilon_{ijk}$$

Τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$\sum_{k,i,j}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = - \sum_{k,i,j}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j$$

Δηλαδή $2\sum_{k,i,j}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = 0$

που σημαίνει ότι $\nabla\cdot(\nabla x \mathbf{A}) = 0$

3.7 Η Λαπλασιανή ή τελεστής Laplace

Ας θεωρήσουμε συνεχή βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x_1,x_2,x_3)$.

Η δράση του τελεστή ∇ στη συνάρτηση ϕ έχει ως αποτέλεσμα μια διανυσματική συνάρτηση $\nabla\phi$. Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση της τελευταίας, η οποία είναι

$$\text{div}(\text{grad}\phi)=\nabla\cdot(\nabla\phi) = \left(\sum_{i}^{3} \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\sum_{j}^{3} \hat{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\phi$$

$$= \sum_{i,j}^{3} \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{i,j}^{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

Δηλαδή

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \frac{\partial^2}{\partial x^2_1}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2_2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2_3}\phi \qquad (3.7.1)$$

Παρατηρούμε στην (3.7.1) , οτι η συνδυασμένη δράση των τελεστών **grad** και **div**, ισοδυναμεί με ένα νέο τελεστή τον οποίο καλούμε Λαπλασιανή (τελεστή Laplace) και συμβολίζουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2_2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2_3} \qquad (3.7.2)$$

Ο τελεστής (3.7.2) είναι ένας από τους σπουδαιότερους τελεστές της φυσικής. Πραγματικά, αρκετά από τα προβλήματα της φυσικής καταλήγουν στην αναζήτηση λύσεων διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιέχουν τον τελεστή της Λαπλασιανής, όπως για παράδειγμα η μη ομογενής Δ.Ε. Helmotz

$$(\nabla^2 + \alpha^2)\,\phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad (3.7.3)$$

όπου f = γνωστή, ϕ = προσδιοριστέα, είναι βαθμωτές συναρτήσεις του διανύσματος θέσης **x** και α είναι συνήθως κάποια σταθερά. Ειδική περίπτωση της Δ.Ε. (3.7.3.) αποτελεί και η γνωστή ως εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad (3.7.4)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3.7.4) καλούνται <u>αρμονικές</u> συναρτήσεις. Αν θέσουμε α=0 στην (3.7.3) έχουμε την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad (3.7.5)$$

Ο τελεστής (3.7.2) παρήχθη με τη διαδοχική δράση των **div** και **grad** σε μια βαθμωτή συνάρτηση. Ανεξάρτητα όμως απ'αυτό, ο τελεστής αυτός μπορεί να δράσει και σε διανυσματικές συναρτήσεις και να οδηγήσει σε μια νέα επίσης διανυσματική συνάρτηση. Σε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων αν $\mathbf{F} = \hat{\imath}_1 F_1 + \hat{\imath}_2 F_2 + \hat{\imath}_3 F_3$ όπου F_i είναι συνεχείς και μέχρι 2ης τάξης παραγωγίσιμες συναρτήσεις των συντεταγμένων, έχουμε

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \hat{\imath}_1 \nabla^2 F_1 + \hat{\imath}_2 \nabla^2 F_2 + \hat{\imath}_3 \nabla^2 F_3$$

Για παράδειγμα η δράση του τελεστή ∇^2 στη συνάρτηση

$$\mathbf{F} = x^2_1\, x_2\, \hat{\imath}_1 + x^2_2\, x^3_3\, \hat{\imath}_2 + x_1\, x_2\, x^4_3\, \hat{\imath}_3$$

είναι $\nabla^2 \mathbf{F} = \hat{\imath}_1 \nabla^2 (x^2_1\, x_2) + \hat{\imath}_2 \nabla^2 (x^2_2\, x^3_3) + \hat{\imath}_3 \nabla^2 (x_1\, x_2\, x^4_3)$

$$= 2x_2\, \hat{\imath}_1 + 2(x^2_3 + 3x^2_2)x_3\, \hat{\imath}_2 + 12x_1\, x_2\, x^2_3\, \hat{\imath}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 3.7.1

Θα δοθεί μια απλή έκφραση του τελεστή Laplace που δρα σε μια συνάρτηση $\phi = \phi(|\mathbf{x}|)$

Λύση :

Έστω ότι $\phi = \phi(r)$ όπου ως συνήθως $r = |\mathbf{x}|$. Τότε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{d\phi}{dr} = \frac{x_i}{r}\frac{d\phi}{dr}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} + \frac{x_i^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{x_i^2}{r^3}\frac{d\phi}{dr} + \frac{x_i^2}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}$$

Άρα

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = \frac{3}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{r^2}{r^3}\frac{d\phi}{dr} + \frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \frac{d^2\phi}{dr^2}$$

Μπορεί επίσης να γραφεί

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)$$

Προφανώς για $\phi(r) = \frac{k}{r}$ (δυναμικό Coulomb), $r \neq 0$

$$\nabla^2\left(\frac{k}{r}\right) = 0, r \neq 0$$

η $\frac{k}{r}$ είναι αρμονική. Για $r = 0$ θα δούμε αργότερα ότι η $\phi(r)$ δεν είναι αρμονική

$$\nabla^2\phi = \infty \text{ για } r = 0$$

Σημείωση : Για να εξοικιωθεί καλύτερα ο φοιτητής με το συμβολισμό των αθροιζομένων δεικτών, παραθέτουμε τη λύση της άσκησης και ως εξής:

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{3}x_j^2\right)^{1/2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \sum_i^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\sum_j x^2_j \right)^{-3/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} x^2_j \right\}$$

αλλά $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}$ οπότε

$$\nabla^2 \frac{1}{|x|} = -\sum_i^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\sum_j^3 x^2_j \right)^{3/2} (x_j\ \delta_{ij}) \right\}$$

$$= -\sum_i^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\sum_j^3 x^2_j \right)^{3/2} (x_i) \right\}$$

$$= \left\{ \left(\sum_j^3 \frac{3}{2} (2x_i) \right) \left(\sum_j^3 x^2_j \right)^{5/2} x_i - \left(\sum_{j=1}^3 x^2_j \right)^{3/2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \right\}$$

$$= 3 \left(\sum_{i=1}^3 x^2_j \right) \left(\sum_j^3 x^2_j \right)^{-5/2} - 3 \left(\sum_{j=1}^3 x^2_j \right)^{-3/2} = 3|x|^2 \frac{1}{|x|^5} - 3 \frac{1}{|x|^3} = 0$$

3.8. Διανυσματικές ταυτότητες

Στα προηγούμενα εδάφια χρησιμοποιήσαμε εκτεταμένα το σύμβολο ανάδελτα (nabla)

$$\nabla = \hat{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (3.8.1)$$

ως διάνυσμα, παρόλο που όμως τονίσαμε, πολλές απ' τις ιδιότητες των διανυσμάτων δεν ισχύουν γι' αυτό.

Είναι σημαντικό κατ' αρχήν να αποσαφηνίσουμε ότι η ποσότητα $\nabla \cdot \mathbf{A}$ είναι τελείως διαφορετική μαθηματική οντότητα από την ποσότητα $\mathbf{A} \cdot \nabla$. Πράγματι η

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} A_3 \qquad (3.8.2)$$

είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Αντίθετα η $\mathbf{A} \cdot \nabla$ είναι:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = \left(A_1 \hat{\imath}_1 + A_2 \hat{\imath}_2 + A_3 \hat{\imath}_3 \right) \cdot \left(\hat{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (3.8.3)$$

δηλαδή ένας διαφορικός τελεστής που έχει έννοια μόνο όταν δράσει πάνω σε κάποια συνάρτηση. Είναι λοιπόν προφανές ότι μια από τις βασικότερες ιδιότητες του εσωτερικού (βαθμωτού) γινόμενου των διανυσμάτων, η $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, δεν έχει έννοια στην περίπτωση που το ένα από τα δύο διανύσματα είναι ο διανυσματικός τελεστής ∇.

Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να διατυπώσουμε και για περιπλοκότερες εκφράσεις όπως η $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{C}$ και η $(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{C}$. Και οι δύο είναι παραδεκτές εκφράσεις αλλά διαφορετικές η μια από την άλλη. Με άλλα λόγια γενικά

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{C} \neq (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{C} \neq \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) \qquad (3.8.4)$$

Η σειρά με την οποία γράφονται τα σύμβολα $\mathbf{A}$, ∇, $\mathbf{C}$ κλπ είναι κρίσιμη. Ο τελεστής ∇ δρα μόνο σε ότι βρίσκεται δεξιά του. Πολλές φορές οι παρενθέσεις είναι απαραίτητες.

Είναι δυνατό όμως να γραφούν εκφράσεις όπου η τοποθέτηση των παρενθέσεων δεν έχει σημασία. Για παράδειγμα αν $\phi(\mathbf{x})$ είναι είναι βαθμωτή συνάρτηση και $A(\mathbf{x})$, διανυσματική τότε οι εκφράσεις $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$, $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$ έχουν και οι δύο έννοια οδηγούν δε στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. Πράγματι η πρώτη έκφραση δίνει:

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \left(A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\phi$$

$$= A_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial\phi}{\partial x_3}$$

και η δεύτερη,

$$\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi) = (A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k})\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \hat{\jmath}\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)$$

$$A_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$$

Άρα

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{A}\cdot(\nabla\phi) = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi \qquad (3.8.5)$$

Σκεπτόμενοι ανάλογα, είναι δυνατό να παράγουμε μια σειρά από χρήσιμες διανυσματικές ταυτότητες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιούνται στους διάφορους υπολογισμούς με απ' ευθείας αντικατάστασή τους. Στον επόμενο πίνακα παραθέτουμε μερικές βασικές ταυτότητες οι οποίες εμφανίζονται συχνά. Ορισμένες απ' αυτές έχουν αποδειχθεί σε προηγούμενα παραδείγματα. Με ανάλογο τρόπο είναι δυνατό να αποδειχθούν όλες, αναπτύσσοντας τα διανύσματα σε συνιστώσες. Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε την απόδειξη ορισμένων απ' αυτές, αφήνοντας τις υπόλοιπες για ασκήσεις. Όμως η ανάπτυξη πολλών απ' αυτές σε συνιστώσες είναι αρκετά κοπιαστική και χρονοβόρα, γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την τανυστική γλώσσα που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Πριν αρχίσουμε, όμως, τους υπολογισμούς, θα εισάγουμε ακόμη μια σημαντική απλοποίηση στο συμβολισμό μας. Θα γράψουμε ∂_j και θα εννοούμε μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή x_j, δηλαδή

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}, \; j = 1, 2, 3$$

Χρήσιμες Διανυσματικές Ταυτότητες με τον Τελεστή ∇

$$\nabla(\phi_1\phi_2) = \phi_1 \nabla\phi_2 + \phi_2 \nabla\phi_1, \; \phi_i = \phi_i(\mathbf{x}), \; i = 1, 2 \qquad (3.8.6)$$

$$\nabla\cdot(\phi\,\mathbf{A}) = \phi\,\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\phi, \; \phi = \phi(\mathbf{x}), \; \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \qquad (3.8.7)$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \phi\,\nabla \times \mathbf{A} + \nabla\phi \times \mathbf{A}, \qquad (3.8.8)$$

$$\nabla\,\phi(f(\mathbf{x})) = \frac{d\phi}{df}\nabla f(\mathbf{x}) \qquad (3.8.9)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\nabla \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{a}) = 3$ ($\mathbf{x}$ = διάνυσμα θέσης, $\mathbf{a}$ = σταθερό διάνυσμα) (3.8.10)

$\nabla \times (\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (3.8.11)

$\nabla (|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^n) = n|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^{n-2} (\mathbf{x}-\mathbf{a})$ (3.8.12)

$(\mathbf{A}\cdot\nabla) (\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathbf{A}$ (3.8.13)

$\nabla (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ (3.8.14)

$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$ (3.8.15)

$\nabla \times (\mathbf{A}\times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}$ (3.8.16)

$\nabla \times (\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla (\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ (3.8.17)

$\nabla (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla\times\mathbf{A})$ (3.8.18)

$\nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$ (3.8.19)

$\nabla\cdot (\nabla\times\mathbf{A}) = 0$ (3.8.20)

$\nabla\cdot (\nabla\phi_1 \times \nabla\phi_2) = \mathbf{0}$ (3.8.21)

$$\nabla\phi(u_1, u_2,\ldots u_n) = \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \nabla u_1 + \ldots + \frac{\partial\phi}{\partial u_n} \nabla u_n,\ u_i = u_i(\mathbf{x}) \qquad (3.8.21)$$

Η εξίσωση (3.8.17.) χρησιμοποιείται πολλές φορές και ως ορισμός της δράσης του τελεστή Laplace ∇^2 στη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A}$ σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων δηλαδή

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla\times\mathbf{A})$$

Παράδειγμα 3.8.1

Θα αποδείξουμε την ταυτότητα (3.8.8).

Λύση :

Παρατηρούμε ότι η συνιστώσα i του $\nabla \times (\phi\mathbf{A})$, γράφεται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$[\nabla \times (\phi \mathbf{A})]_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j (\phi\, A_k)$$

$$= \varepsilon_{ijk} (\partial_j \phi)\, A_k + \varepsilon_{ijk}\, \phi (\partial_j A_k)$$

$$= [(\nabla\phi) \times \mathbf{A}]_i + \phi [\nabla \times \mathbf{A}]_i$$

Άρα

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi\, \nabla \times \mathbf{A}$$

Παράδειγμα 3.8.2.

Να δειχθεί η (3.8.16)

Λύση :

Θεωρούμε τη συνιστώσα i του διανυσματικού γινομένου του τελεστή ∇ με τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Είναι

$$[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i = \varepsilon_{ijk} (\nabla)_j\, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k$$

Χρειαζόμαστε στην τελευταία τη συνιστώσα k του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Προσέχοντας να μην ξαναχρησιμοποιήσουμε τους δείχτες i και j, χρησιμοποιώντας νέους δείκτες, π.χ. l, m έχουμε

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{klm} A_l B_m$$

Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη και έχουμε

$$[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \{\varepsilon_{klm} A_l B_m\}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm}\, \partial_j \{A_l B_m\}$$

όπου εξυπακούεται άθροιση ως προς k. Κάνουμε στη συνέχεια χρήση της ταυτότητας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Έχουμε τότε

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\,\partial_j\,\{A_lB_m\} = (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\,\{A_lB_m\}$$

$$= \partial_j\,\{A_iB_j\} - \partial_j\,\{A_jB_i\}$$

$$= A_i\partial_jB_j + B_j\partial_jA_i - A_j\partial_jB_i - B_i\partial_jA_j$$

$$= A_j(\nabla\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)A_i - (\mathbf{A}\cdot\nabla)B_i - B_i\,(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

Συνεπώς για τη συνιστώσα i έχουμε

$$[\nabla \times (\mathbf{A}\times\mathbf{B})]_i = [\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})]_i$$

η οποία αποδεικνύει την 3.8.16

Παράδειγμα 3.8.3.

Να υπολογιστεί η ποσότητα $\nabla\cdot[\mathbf{x}\,\phi(r)]$, όπου $\mathbf{x}$ το διάνυσμα θέσης και βαθμωτή συνάρτηση που εξαρτάται από το μέτρο $r=|\mathbf{x}|$ του $\mathbf{x}$.

Λύση :

Σύμφωνα με την ταυτότητα είναι 3.8.7. είναι

$$\nabla\cdot[\mathbf{x}\,\phi(r)] = (\nabla\cdot\mathbf{x})\,\phi(r) + [\nabla\,\phi(r)]\cdot\mathbf{x}$$

$$= 3\phi(r) + [\nabla\,\phi(r)]\cdot\mathbf{x}$$

Όμως από προηγούμενη άσκηση

$$\nabla\,\phi(r) = \frac{d\phi(r)}{dr}\,\nabla\,r = \frac{d\phi}{dr}\,\frac{\mathbf{x}}{r}$$

Αντακαθιστώντας έχουμε

$$\nabla\cdot[\mathbf{x}\,\phi(r)] = 3\phi(r) + \frac{\mathbf{x}}{r}\,\frac{d\phi}{dr}\cdot\mathbf{x}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή τελικά

$$\nabla\cdot[\mathbf{x}\,\phi(r)] = 3\phi(r) + r\frac{d\phi}{dr}$$

Παράδειγμα 3.8.4.

Να υπολογιστεί η ποσότητα $\nabla x\,(\phi(r)\mathbf{x})$ όπου $\phi(r)$ συνάρτηση του μέτρου $r = |\mathbf{x}|$.

Λύση :

Από την ταυτότητα 3.8.8. έχουμε

$$\nabla x\,(\phi(r)\mathbf{x}) = \nabla\phi(r)\,x\mathbf{x} + \phi(\nabla x\mathbf{x})$$

$$= (\nabla\phi)\,x\,\mathbf{x}$$

Όμως, όπως και στην προηγούμενη άσκηση

$$\nabla\phi(r) = \frac{d\phi(r)}{dr}\nabla r = \frac{d\phi}{dr}\frac{\mathbf{x}}{r}$$

Τότε

$$\nabla x\,(\phi(r)\mathbf{x}) = (\nabla\phi)\,x\,\mathbf{x} = \frac{d\phi}{dr}\frac{\mathbf{x}}{r}\,x\,\mathbf{x} = \frac{d\phi}{dr}\frac{(\mathbf{x}x\mathbf{x})}{r} = 0$$

3.9. Προσανατολισμένες επιφάνειες

Ας μελετήσουμε διεξοδικότερα τη γεωμετρία των επιφανειών, που απαντήσαμε στο εδάφιο 3.1.

Στην περίπτωση των καμπυλών είδαμε ότι οι βασικές τους ιδιότητες συσχετίζονται με το εφαπτόμενο σε αυτές διάνυσμα. Αντίστοιχα, στην περίπτωση των επιφανειών αμέσως θα διαπιστώσουμε ότι αντίστοιχο ρόλο παίζει το κάθετο σε αυτές διάνυσμα.

Καλούμε μια επιφάνεια S ομαλή, όταν είναι δυνατό να επιλέξουμε μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ κάθετο στην S έτσι ώστε το $\hat{n}$ να μεταβάλλεται συνεχώς πάνω στην S. Για παράδειγμα, η επιφάνεια σφαίρας είναι ομαλή.

Καλούμε μια επιφάνεια S κατά διαστήματα ομαλή, όταν η S αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό συνδεμένων μεταξύ τους ομαλών επιφανειών. Τέτοια επιφάνεια αποτελούν για παράδειγμα οι έξι ομαλές έδρες του κύβου. Βλέπουμε από τα παραπάνω ότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα διαδραματίζει σημαντικό

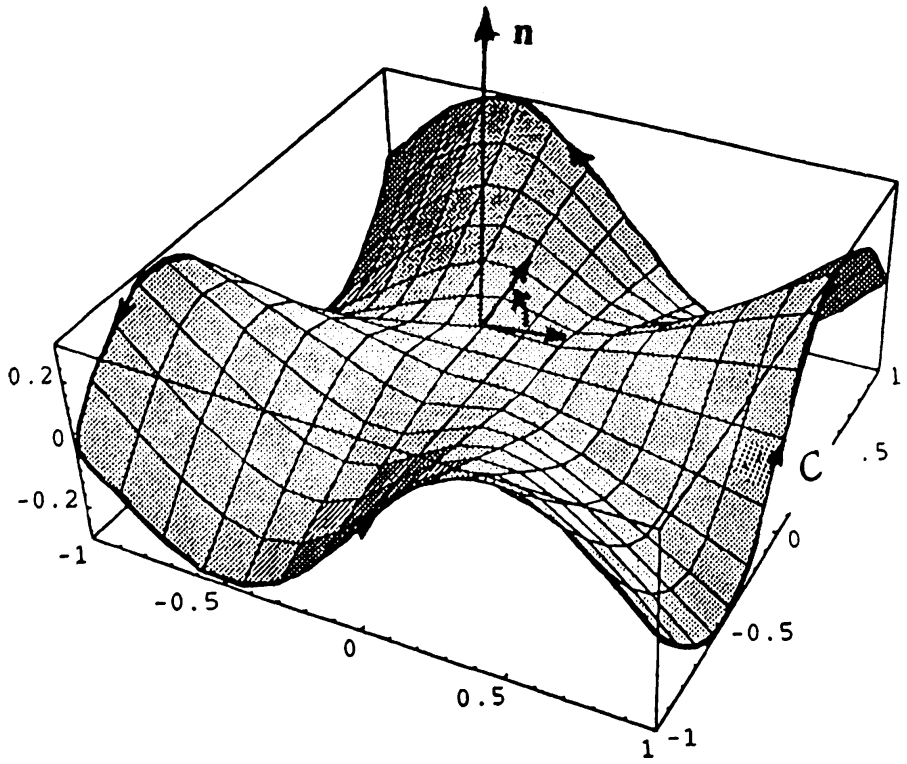
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ρόλο στους ορισμούς γι αυτό θα ασχοληθούμε μ' αυτό λίγο περισσότερο. Κατ' αρχήν διαπιστώνουμε ότι σε κάθε σημείο της επιφάνειας υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές: αν για παράδειγμα $\phi(x_1,x_2,x_3) = k$ είναι η εξίσωση μιας ομαλής επιφάνειας τότε τα

$$\hat{n} = \frac{\text{grad}\phi}{|\text{grad}\phi|} \text{ και } \hat{n}' = -\hat{n} = -\frac{\text{grad}\phi}{|\text{grad}\phi|} \qquad (3.9.1)$$

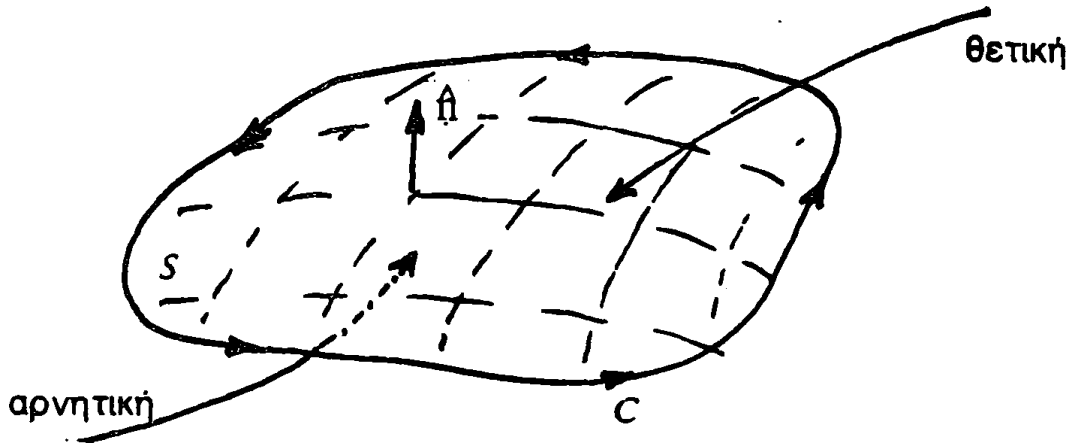
είναι δύο μοναδιαία διανύσματα κάθετα στο ίδιο σημείο της επιφάνειας και αντίθετα μεταξύ τους. (Βλέπε αντίστοιχη περίπτωση για το επίπεδο στο παράδειγμα 1.11 I)Συνεπώς υπάρχουν δύο δυνατοί τρόποι προσανατολισμού της επιφάνειας. Επιλέγουμε ένα από τα δύο διανύσματα της (3.9.1) για να προσανατολίσουμε την επιφάνεια. Απ' τη στιγμή που θα επιλέξουμε έναν από τους δύο, τότε έχουμε ταυτόχρονα ορίσει τη θετική φορά περιστροφής σε κάθε σημείο της επιφάνειας (βλέπε σχήμα 3.9.1). Ειδικότερα τώρα σε επιφάνειες με σύνορο, η θετική κατεύθυνση μπορεί να οριστεί με βάση τη φορά της κλειστής καμπύλης που τις περιβάλλει.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε την επιφάνεια του σχήματος 3.9.2. που έχει σύνορο κλειστή καμπύλη C.



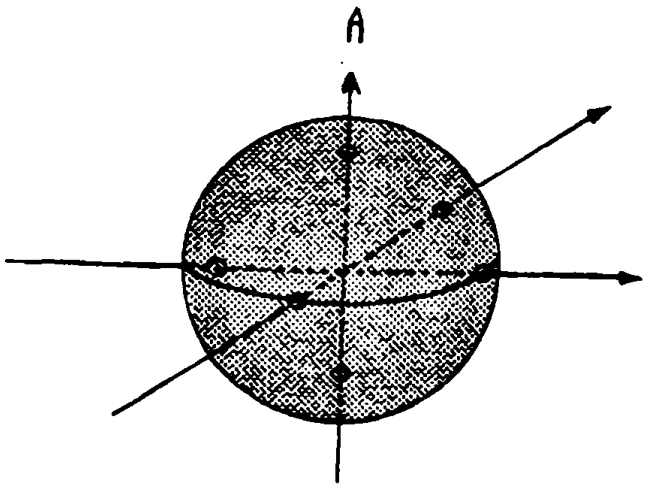
Σχήμα 3.9.1. Η επιλογή του κάθετου διανύσματος $\hat{n}$, προσανατολίζει την επιφάνεια και ταυτόχρονα ορίζει τη θετική κατεύθυνση περιστροφής.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 3.9.2. Ορισμός θετικής κατεύθυνσης κλειστής επιφάνειας.

Ορίζουμε θετική πλευρά της επιφάνειας εκείνη που βρίσκεται αριστερά ενός παρατηρητή που ακολουθεί τη φορά της καμπύλης C. Σε κλειστές επιφάνειες (επιφάνειες χωρίς σύνορο) επιλέγουμε κατά σύμβαση το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα που προσανατολίζει την επιφάνεια να στοχεύει προς την κατεύθυνση που βρίσκεται έξω από την περιοχή που περικλείει η εν λόγω επιφάνεια. Για παράδειγμα η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι κλειστή διότι δεν υπάρχει κλειστή καμπύλη που να χαρακτηρίζεται σύνορό της. Το μοναδιαίο διάνυσμα που προσανατολίζει την επιφάνειά της δείχνεται στο σχήμα 3.9.3.

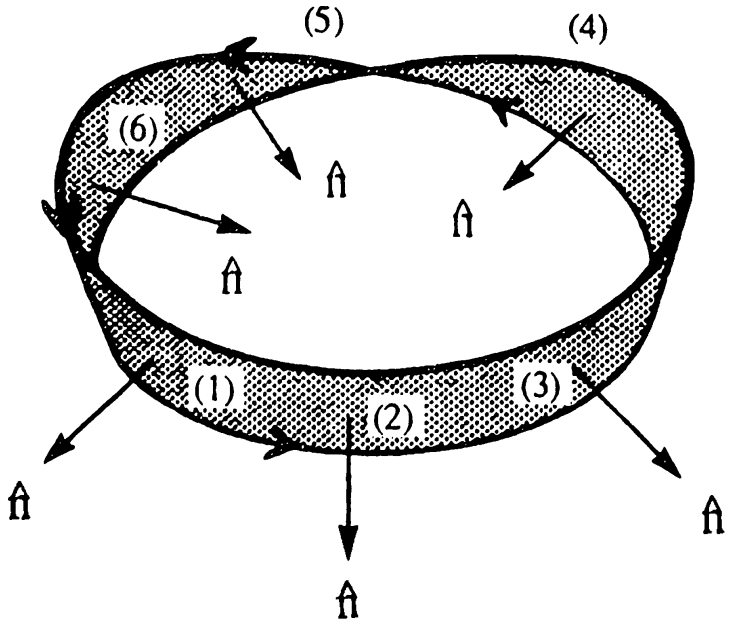


Σχήμα 3.9.3. Η σφαίρα περιβάλλεται από κλειστή επιφάνεια. Η θετική κατεύθυνση είναι από μέσα προς τα έξω.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στο δεύτερο κεφάλαιο διαπιστώσαμε ότι κάθε καμπύλη που περιγράφεται απο μια διανυσματική συνάρτηση μπορεί να παραμετροποιηθεί με μια παράμετρο. Ακριβώς ανάλογα, κάθε εξίσωση που περιγράφει διδιάστατη προσανατολίσιμη επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί σε παραμετρική μορφή με τη διαφορά οτι -όπως τονίστηκε και στην αρχή του κεφαλαίου - απαιτούνται δύο παράμετροι. Με άλλα λόγια, εαν δοθεί η εξίσωση επιφάνειας $\Phi(\mathbf{x}) = k$, μπορούμε πάντα να ορίσουμε δυο παραμέτρους (p,q) έτσι ώστε να γράφουμε $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p,q)$, ή για κάθε μια συνιστώσα ξεχωριστά $x_i = x_i(p,q)$. Η παραμετροποίηση των επιφανειών θα αποβεί ιδιαίτερα χρήσιμη στα διδιάστατα ολοκληρώματα που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια.

Τα παραπάνω γενικεύονται εύκολα και για κατά τμήματα συνεχείς επιφάνειες. Γενικά κάθε επιφάνεια συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής μπορεί να προσανατολισθεί αρκεί να διαθέτει δύο πλευρές ώστε η μια να ορίζεται ως θετική και η άλλη αρνητική. Υπάρχουν όμως επιφάνειες που δεν έχουν την τελευταία ιδιότητα καλούνται δε μη- προσανατολίσιμες (non-orientable). Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας επιφάνειας αποτελεί η λωρίδα του Möbius (σχήμα 3.9.4). Πράγματι, ας ορίσουμε την καμπύλη C στη θέση (1) στο κάτω μέρος της επιφάνειας. Το διάνυσμα $\hat{n}$ στη θέση (1) δείχνει τότε προς την εξωτερική περιοχή. Μετά από μια πλήρη περιστροφή ακολουθώντας τα σημεία (1),(2),...,(6), δείχνει προς την αντίθεση κατεύθυνση από αυτή που ξεκίνησε. Συνεπώς η συγκεκριμένη επιφάνεια δεν μπορεί να προσανατολιστεί.



Σχήμα 3.9.4. Η λωρίδα του Möbius είναι παράδειγμα μη-προσανατολίσιμης επιφάνειας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 3.9.1.

Θα κατασκευάσουμε τις παραμετρικές εξισώσεις του κώνου του οποίου η γωνία α είναι $\cot\frac{\alpha}{2}=k=$ σταθ. .

Ας θεωρήσουμε ότι ο άξονας του συμπίπτει με τον άξονα συντεταγμένων x_3, συνεπώς η επιφάνειά του μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία κύκλων παραλλήλων με το επίπεδο (x_1,x_2). Μπορούμε τότε να γράψουμε τις συντεταγμένες κάθε σημείου της επιφάνειάς του ως εξής:

$$x_1 = p\cos q\ ,\ x_2 = p\sin q\ ,\ x_3 = k\,p$$

Μπορούμε επίσης εύκολα, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο κεφ. 2, να κατασκευάσουμε το κάθετο στην επιφάνεια του κώνου διάνυσμα, το εφαπτόμενο σ'αυτή επίπεδο απαιτείται σε σημεία όπου αυτές οι ποσότητες δεν ορίζονται. Για το κάθετο διάνυσμα υπολογίζουμε πρώτα τις ποσότητες

$$\mathbf{x}_p = \cos q\ \hat{\imath}_1 + \sin q\ \hat{\imath}_2 + k\,\hat{\imath}_3$$

$$\mathbf{x}_q = -p\sin q\ \hat{\imath}_1 + p\cos q\ \hat{\imath}_2$$

Τότε η κατεύθυνση που ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q$ ορίζει το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{x}(p,q)$. Είναι

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q = kp(-\cos q\hat{\imath}_1 + \sin q\hat{\imath}_2) + p\hat{\imath}_3$$

Αλλά στο $\mathbf{x}(0,0)=0$ έχουμε $\mathbf{x}_p = \hat{\imath}_1 + k\hat{\imath}_3$, $\mathbf{x}_q = 0$ και συνεπώς δεν ορίζεται κάθετο διάνυσμα στην αρχή των αξόνων όπου ευρίσκεται η κορυφή του κώνου. Στα άλλα σημεία αυτό είναι δυνατό. Για παράδειγμα $\mathbf{x}(p=1, q=0) = \hat{\imath}_1 + k\hat{\imath}_3$ και $\mathbf{T} = -k\,\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_3$ εκεί όπου ορίζεται το κάθετο διάνυσμα, μπορεί να ορισθεί και το εφαπτόμενο στην επιφάνεια επίπεδο. Συγκεκριμένα σε σημείο $\mathbf{x}^0(p_0,q_0)$ έχουμε την εξίσωση (βλέπε 1.10.2)

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\cdot\hat{n} = 0$$

όπου $\hat{n}=\mathbf{T}/|\mathbf{T}|$, ή ισοδύναμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$n_1(x_1-x_1^0) + n_2(x_2-x_2^0) + n_3(x_3-x_3^0) = 0$$

Έτσι στο σημείο (p,q) =(1,0) έχουμε

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\cdot\mathbf{T} = (x_1-1)(-k) + (x_3-k)\,1 = 0 \text{ ή } x_3 - kx_1 = 0.$$

Παράδειγμα 3.9.2

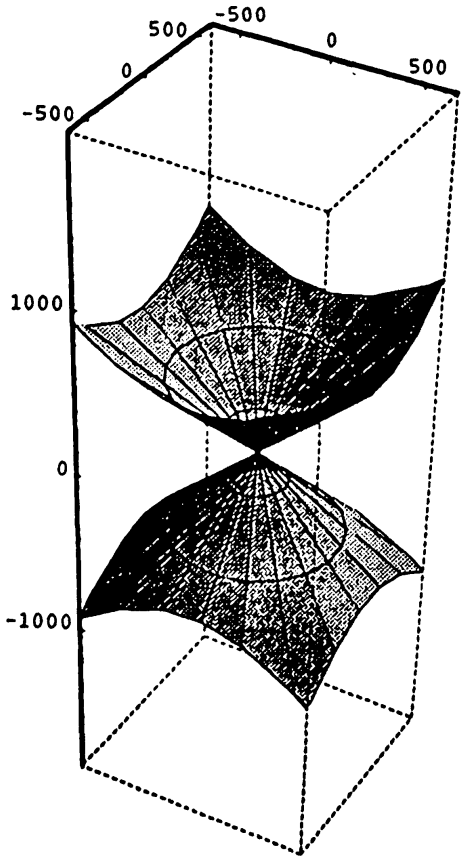
Θεωρείστε την επιφάνεια

$$x_1=p\cos q\,,\ x_2=p\sin q\,,\ x_3=p^2+q^2$$

Όπως και πριν έχουμε

$$\mathbf{x}_p = \cos q\,\mathbf{i}_1 + \sin q\,\mathbf{i}_2 + 2p\,\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{x}_q = -p\sin q\,\mathbf{i}_1 + p\cos q\,\mathbf{i}_2 + 2q\,\mathbf{i}_3$$



Σχήμα 3.9.5 : Τμήμα της επιφάνειας που ορίζεται απο τις εξισώσεις του παραδείγματος 3.9.2.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Τότε εύκολα βρίσκουμε το κάθετο διάνυσμα

$$T = x_p \times x_q = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \cos q & \sin q & 2p \\ -p\sin q & p\cos q & 2q \end{vmatrix}$$

$$= 2(q\sin q - p^2\cos q)\mathbf{i}_1 - 2(q\cos q + p^2\sin q)\mathbf{i}_2 + p\mathbf{i}_3$$

Παρατηρούμε ότι στο $x(0,0)=\mathbf{0}$ έχουμε $x_p \times x_q = 0$ και συνεπώς δεν ορίζεται και πάλι κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια στο σημείο αυτό. Συνεπώς, ούτε εφαπτόμενο επίπεδο μπορεί να οριστεί σ'αυτό το σημείο. Σε άλλα σημεία ($x \neq \mathbf{0}$) μπορούμε να ορίσουμε τις παραπάνω οντότητες. Για παράδειγμα στο $(p,q) = (1,0)$ είναι $T = -2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3$ και το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση $2x_1 - x_3 = 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.3.1. Εστω S_a και S_b επιφάνειες με εξισώσεις

$$\frac{x^2_1}{a^2_1} + \frac{x^2_2}{a^2_2} + \frac{x^2_3}{a^2_3} = 1, \quad \frac{x^2_1}{b^2_1} + \frac{x^2_2}{b^2_2} + \frac{x^2_3}{b^2_3} = 1$$

αντίστοιχα. Αν $a^2_1\, b^2_2 = a^2_2\, b^2_1$, να δειχθεί ότι η τομή τους είναι παράλληλη στο επίπεδο(x_1Ox_2).

3.4.1. Να βρεθεί η εξίσωση των γραμμών ροής όταν

a) $\mathbf{A} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + \hat{x}_3$

b) $\mathbf{A} = x^2_1\hat{x}_1 + x^2_2\hat{x}_2 + \hat{x}_3$

3.5.1. Να δειχθεί ότι div $(\phi\mathbf{F}) = \phi \text{div}\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \text{grad}\, \phi$

3.6.1. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$$\nabla\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{r^3}\right) + \nabla x\left(\frac{\mathbf{a}x\mathbf{x}}{r^3}\right)$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot \nabla r^{-1}) + \nabla x(\mathbf{a}x\, \nabla r^{-1})$$

όπου **a**, σταθερό διάνυσμα.

3.6.2. Τα πεδία **A** και **B** ικανοποιούν τις σχέσεις

$\mathbf{A} = \nabla x\mathbf{B}$

$\mathbf{B} = \nabla x\mathbf{A}$

Να γραφεί μια διαφορική εξίσωση για το πεδίο **B.** Να γίνει το ίδιο για το **A.**
Να δειχθεί ότι: div $(\mathbf{A}x\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 - \mathbf{A}^2$

3.6.3. Έστωσαν τα πεδία

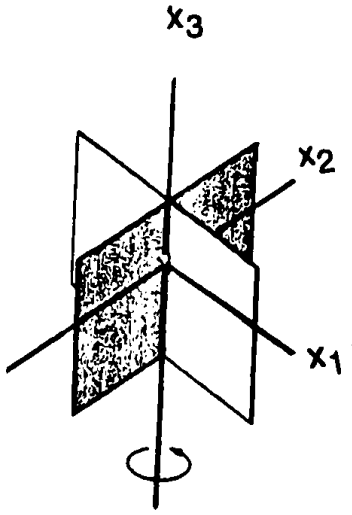
$$\mathbf{F(x)} = -x_2\,\hat{e}_1 + x_1\,\hat{e}_2$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{\sqrt{x^2_1 + x_2^2}}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{(x^2_1 + x_2^2)}$$

Να υπολογιστούν η απόκλιση και ο στροβιλισμός αυτών. Να μελετηθεί η συμπεριφορά των πτερυγίων του σχήματος, κάτω από τη ροή των πεδίων **F**,**P**,**U** .



Σχήμα : τοποθέτηση πτερυγίων σε ροή

3.7.1. Να βρεθεί η $\nabla^2\phi$ όταν

$$\phi = |\mathbf{x}|^{-1/2}$$

3.7.2. Να δειχθεί η ισότητα

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\nabla\times\mathbf{F}$$

όπου **x**, το διάνυσμα θέσης και **F** διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση.

3.8.1. Αν **F**(**x**) μπορεί να εκφραστεί ως **F**(**x**)= **a**ϕ(**x**·**b**) όπου **a**,**b** σταθερά, να δειχθεί ότι το $\nabla\times\mathbf{F}$ είναι κάθετο στα **a** και **b**.

3.8.2. Να αποδειχτούν οι διανυσματικές ταυτότητες του πίνακα (3.8.10) - (3.8.21)

3.8.4. Να υπολογιστεί η ποσότητα $(\mathbf{F}\cdot\nabla)\phi$ όταν

$$\mathbf{F} = 3x_1x_2x^2_3\,\hat{\imath}_1 + 2x_1x^3_3\,\hat{\imath}_2 - x^2_1x_2x_3\,\hat{\imath}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$\phi = x_1x_2x_3$

3.8.5. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$\nabla x\ (\nabla x\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

3.8.6. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$\nabla\cdot(\phi(r)\mathbf{x})$, $\nabla^2\ x\ [\mathbf{x}\ \phi(r)]$, $\nabla^2\ r^n$

3.8.7. Θεωρείστε το πεδίο ταχύτητας

$\mathbf{u} = \hat{x}_2\ u_0\ e^{-x_2^2/\lambda^2}$

όπου u_0,λ είναι σταθερές. Σχεδιάστε το πεδίο με βέλη κατάλληλου μήκους σε κάθε σημείο. Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός του πεδίου **u**.

3.8.8. Να γίνει το ίδιο για το πεδίο

$\mathbf{u} = \hat{x}_2\ u_0\ e^{-x_1^2/\lambda^2}$

Αν **u** παριστάνει την ταχύτητα υγρού, τί θα γίνει σε κάθε μια από τις πάνω περιπτώσεις όταν τοποθετηθούν πτερύγια στη ροή του όπως στο σχήμα;

3.9.1 Να κατασκευάσετε παραμετρικές αναπαραστάσεις τών ακολούθων επιφανειών: a) επίπεδο, b) σφαίρα, c) τόρος.

3.9.2 Να μελετηθεί κατά πόσο οι επιφάνειες

i) $x_1=p\cos q$, $x_2=p\sin q$, $x_3=p$, $p>0$

ii) $x_1=p^2-q^2$, $x_2=p+q$, $x_3=p^2+4q$

iii) $x_1=p^2$, $x_2=p\sin(e^q)$, $x_3=\frac{1}{3}p\cos(e^q)$

έχουν κάθετα διανύσματα στα σημεία (0,0), $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$ και (13,−2,−1) αντίστοιχα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

3.9.3. Να βρεθεί μια διανυσματική έκφραση για το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $x_1=3\cos\varphi\sin\theta$, $x_2=2\sin\varphi\sin\theta$, $x_3=\cos\theta$, όπου $\theta=[0,\pi]$ και $\varphi=[0,2\pi]$.

3.9.4 Σχηματίστε δύο λωρίδες απο χαρτί. Ενώστε τα άκρα της μιας αφού πρώτα την περιστρέψετε ώστε να δημιουργηθεί η λωρίδα Moebius ενώ ενώστε την άλλη χωρίς να την περιστρέψετε. Τεμαχίστε μετά τις λωρίδες στη μέση κατά μήκος κυκλικής γραμμής παράλληλης με τα όριά τους. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να το εξηγήσετε; Επαναλάβατε τη διαδικασία περιστρέφοντας δύο φορές τη λωρίδα πριν την ενώσετε.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εισαγωγή

Θα ξεκινήσουμε το παρόν κεφάλαιο με τη μελέτη του επικαμπύλιου ολοκληρώματος που αποτελεί γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann. Θα συζητήσουμε στη συνέχεια τους απλά συνεκτικούς τόπους και θα μελετήσουμε ύστερα τα διατηρητικά πεδία δίνοντας παραδείγματα από τη φυσική.

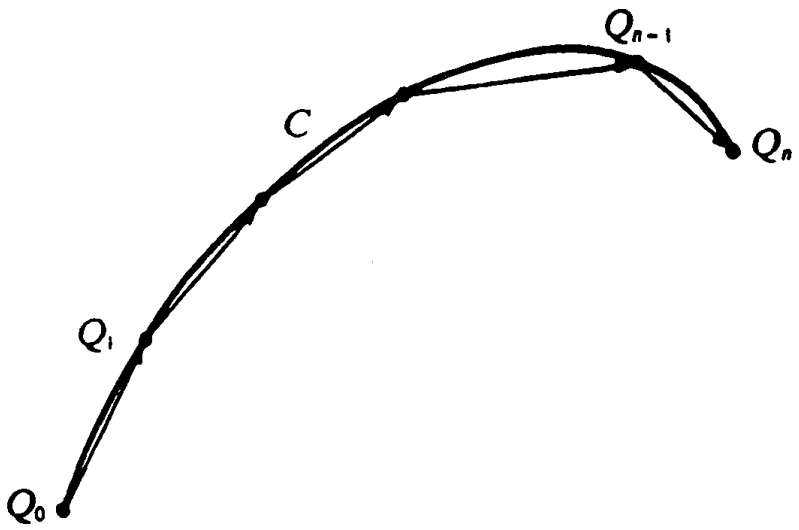
Κατόπιν θα ασχοληθούμε με επιφανειακά (διδιάστατα) και χωρικά (τρισδιάστατα) ολοκληρώματα. Όλα αυτά θα αποτελέσουν στην ουσία το μαθηματικό υπόβαθρο για την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των ολοκληρωμάτων αυτών, που είναι γνωστές ως θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης (θεωρήματα Green, Stokes, κ.α.) που θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα στο επόμενο κεφάλαιο.

4.1 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αποτελεί γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann. Στο ολοκλήρωμα Riemann, για παράδειγμα, η ολοκλήρωση μιας βαθμωτής συνάρτησης f(x) μιας μεταβλητής x, γίνεται πάνω σε ένα κομμάτι του πραγματικού άξονα στο οποίο ορίζεται η f(x). Στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε μια καμπύλη της οποίας η εξίσωση είναι γνωστή συνάρτηση των συντεταγμένων x_1, x_2, x_3. Σε απόλυτη αναλογία με την ολοκλήρωση κατά Riemann, η καμπύλη διαιρείται σε μικρά τόξα και στη συνέχεια

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σχηματίζεται το ανάλογο άθροισμα των όρων που σχηματίζονται από το γινόμενο του κάθε μικρού τόξου επί την τιμή της συνάρτησης σ' αυτό. Το ολοκλήρωμα προκύπτει στο όριο όπου ο αριθμός των τόξων αυτών γίνεται άπειρος και το μήκος των τόξων τείνει στο μηδέν.



Σχήμα 4.1.1. Η καμπύλη C, διαιρείται σε n τόξα.

Ας θεωρήσουμε την καμπύλη C του σχήματος (4.1.1). Διαιρούμε την καμπύλη σε n τόξα με τα σημεία $Q_0, Q_1, \ldots Q_{n-1}, Q_n$. Εφόσον το n είναι αρκετά μεγάλο η καμπύλη μπορεί να προσεγγιστεί με το πολυγωνικό δρόμο που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα $Q_0, Q_1, \ldots Q_{n-1}, Q_n$. Ας συμβολίσουμε με $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n$ τα διανύσματα θέσης των $Q_0, Q_1, \ldots Q_{n-1}, Q_n$ αντίστοιχα. Τότε το μήκος του πολυγώνου ισούται με το άθροισμα των μηκών $|\Delta\mathbf{x}_i|=|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i-1}|$, i = 1,2,...n.

Το μήκος της καμπύλης είναι το όριο του αθροίσματος καθώς το μήκος των τμημάτων $|\Delta\mathbf{x}_i|$ τείνει στο μηδέν (ή καθώς το n τείνει στο άπειρο). Στο εδάφιο (2.6) εκφράσαμε την καμπύλη με τη βοήθεια μιας παράμετρου t, $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, και υπολογίσαμε το μήκος της. Συνοπτικά μπορούμε να γράψουμε:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_c |d\mathbf{x}| = l = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\Delta\mathbf{x}_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\frac{d\mathbf{x}}{dt}|\, \Delta t_i = \int_{t_a}^{t_b} |\frac{d\mathbf{x}}{dt}|\, dt \qquad (4.1.1)$$

όπου υποθέσαμε ότι

$$\Delta\mathbf{x}_i \approx \frac{d\mathbf{x}}{dt}\, \Delta t_i \qquad (4.1.2)$$

Πρακτικά, ο υπολογισμός του μήκους καμπύλης γίνεται από την τελευταία έκφραση της 4.1.1., η οποία είναι ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια διανυσματική συνάρτηση **A** η οποία είναι συνεχής στην περιοχή που ορίζεται η ανωτέρω καμπύλη. Υποθέτουμε ξανά ότι έχουμε υποδιαιρέσει την καμπύλη σε n τμήματα $\Delta\mathbf{x}_i$. Ας είναι $\mathbf{A}_i$ η τιμή της **A** στο σημείο Q_i. Τότε σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \Delta\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \Delta\mathbf{x}_2 + \ldots \mathbf{A}_n \cdot \Delta\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \cdot \Delta\mathbf{x}_i \qquad (4.1.3)$$

Ορίζουμε ως <u>επικαμπύλιο ολοκλήρωμα</u> το όριο του αθροίσματος (4.1.3), καθώς ο αριθμός των υποδιαιρέσεων n τείνει στο άπειρο, συμβολίζουμε δε το όριο αυτό με το ολοκλήρωμα:

$$\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \cdot \Delta\mathbf{x}_i \qquad (4.1.4)$$

με την προυπόθεση ότι το όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο που γίνονται οι υποδιαιρέσεις της καμπύλης. Προς τούτο αρκεί βέβαια η μέγιστη τιμή των $|\Delta\mathbf{x}_i|$ να τείνει στο μηδέν καθώς ο αριθμός τους μεγαλώνει απεριόριστα.

Από την (4.1.4) διαπιστώνουμε επίσης ότι η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών. Χωρίς παραπέρα επεξήγηση του ορισμού (4.1.4) υπάρχει εδώ μια αυθαιρεσία στο σημείο του ολοκληρώματος. Για να άρουμε την αυθαιρεσία αυτή πρέπει να ορίσουμε τον προσανατολισμό της καμπύλης. Πράγματι, είναι δυνατό να ορίσουμε δύο διαφορετικούς προσανατολισμούς στην καμπύλη C. Ο ένας ορίζεται κατά τη φορά $Q_0\, Q_n$ και ο άλλος αντίστροφα. Σε κάθε περίπτωση η διεύθυνση των

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

διανυσμάτων $\Delta\mathbf{x}_i$ που αποτελούν τα μικρά κομμάτια του πολυγώνου, $|\Delta\mathbf{x}_i| = |\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_{i-1}|$, πρέπει να συμφωνεί με τον ορισμένο προσανατολισμό της καμπύλης. Το πρόσημο του ολοκληρώματος εξαρτάται από την επιλογή αυτή.

Η εξ. (4.1.4) επιτρέπει να γραφεί το επκαμπύλιο ολολκήρωμα σε απλούστερη μορφή και να αναχθεί στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος κατά Riemann. Πραγματικά, έστω ότι είναι γνωστή η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης με παράμετρο t δηλαδή $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, $t_a<t<t_b$ όπου t_a και t_b οι παράμετροι που αντιστοιχούν στα πέρατα της καμπύλης C του ολοκληρώματος (4.1.4). Τότε χρησιμοποιώντας την (4.1.2) η (4.1.4) γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{A}_i\cdot\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}\right)\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}f_i(t)\,\Delta t_i\ ,\ f_i(t)=\mathbf{A}_i\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \qquad (4.1.5)$$

Κατά συνέπεια στο όριο $\Delta t_i\to 0$, $n\to\infty$, έχουμε

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}=\int_{t_a}^{t_b}\left(\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)dt \qquad (4.1.6)$$

το τελευταίο είναι ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα κατά Riemann. Ειδική επιλογή παραμέτρου t μπορεί να είναι καθώς είδαμε η μεταβλητή s που δίνει το μήκος της καμπύλης. Τότε αν **T** είναι το εφαπτόμενο στην καμπύλη μοναδιαίο διάνυσμα δηλαδή

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{x}}{ds} \qquad (4.1.7)$$

η εξ. (4.1.6) γίνεται

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}=\int_{s_a}^{s_b}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{T})ds \qquad (4.1.8)$$

Μια άλλη μορφή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος δίνεται σε σχέση με τις συνιστώσες της διανυσματικής συνάρτησης **A**(x) σε καρτεσιανές συντεταγμένες δηλαδή

$$\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int_c (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3) \qquad (4.1.9)$$

όπου

$$\mathbf{A} = (A_1 \hat{x}_1 + A_2 \hat{x}_2 + A_3 \hat{x}_3)$$

$$d\mathbf{x} = (dx_1 \hat{x}_1 + dx_2 \hat{x}_2 + dx_3 \hat{x}_3) \qquad (4.1.10)$$

Με τον τρόπο αυτό το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανάγεται σε τρία συνηθισμένα ολοκληρώματα.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.1.4) και (4.1.9) μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int_{t_a}^{t_b} \left(A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + A_3 \cdot \frac{dx_3}{dt} \right) dt \qquad (4.1.11)$$

όπου A_i, i=1,2,3 μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις του t . Προφανώς η (4.1.11) δεν είναι παρά μια ειδική μορφή της (4.1.6) σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει διαφορετική κάθε φορά φυσική σημασία ανάλογα με το τι παριστάνει το διανυσματικό πεδίο **A**. Έτσι αν **A** παριστάνει τη δύναμη, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παριστάνει το έργο. Αν **A**=**E**, όπου **E** το ηλεκτρικό πεδίο, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παριστάνει τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων της καμπύλης C. Στην (4.1.11), η υπό ολοκλήρωση ποσότητα αποτελείται από το άθροισμα τριών βαθμωτών ποσοτήτων, το δε ολοκλήρωμα εκτελείται όπως κάθε σύνηθες ολοκλήρωμα Riemann.

Ακόμη και η γεωμετρική σημασία του ολοκληρώματος Riemann, δηλαδή το ότι το ολοκλήρωμα Riemann παριστάνει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη μπορεί να γενικευτεί ανάλογα. Μόνο που το "εμβαδόν" τώρα έχει διαστάσεις έργου, διαφοράς δυναμικού κλπ ανάλογα με την περίπτωση. Ο γραφικός υπολογισμός των αντίστοιχων ποσοτήτων εξακολουθεί να είναι χρήσιμος.

Πολλές φορές έχει ιδιαίτερη σημασία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα όταν η καμπύλη c είναι κλειστή. Τότε το ολοκλήρωμα λέγεται και κυκλοφορία του διανύσματος **A**. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stokes που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, η κυκλοφορία σχετίζεται με άλλες βασικές ποσότητες π.χ. τη ροή. Αν **A** είναι το διανυσματικό δυναμικό η κυκλοφορία του **A** είναι η

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

μαγνητική ροή. Αν **A**=**H**, όπου **H**=**B**/ μ με **B** το μαγνητικό πεδίο του κενού και το μ η μαγνητική διαπερατότητα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παριστάνει το ολικό ρεύμα που περνάει μέσα από μια κλειστή καμπύλη c. Αν **A** = **u**(**x**) όπου **u** είναι πεδίο ταχύτητας ενός ρευστού τότε το επικαμπύλιο χαρακτηρίζει κατά πόσον η ροή έχει στροβολισμό (στροβιλή ροή) ή όχι.

Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος προκύπτει όταν η καμπύλη C $\rightarrow$ σ κείται σε επίπεδο (έστω το x_1,x_2) και η συνάρτηση της οποίας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ζητείται είναι δύο μεταβλητών, $f(x_1,x_2)$. Τότε το ολοκληρώμα $I_\sigma = \int_\sigma f(x_1,x_2)\, ds$ αποκτά τη γνωστή έννοια του εμβαδού. Είναι :

$$ds = \frac{ds}{dt}\, dt = \sqrt{x_1'^2+x_2'^2}\, dt$$

$$I_\sigma = \int_\sigma f(x_1(t),x_2(t))\, \sqrt{x_1'(t)^2+x_2'(t)^2}\, dt.$$

Αν η καμπύλη παραμετροποιηθεί με πολικές συντεταγμένες (r,θ) τότε το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$I_\sigma = \int_\sigma f(r,\theta)\, \sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\, d\theta \qquad (4.1.12)$$

4.2 Μερικά παραδείγματα υπολογισμού επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 4.2.1

Έστω η καμπύλη του επιπέδου (x_1, x_2) που ορίζεται από την εξίσωση

$$x_2 = \sqrt{x_1}$$

εκτεινόμενη από το σημείο (0,0,0) στο σημείο (1,1,0). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{A}(x) = x_1\, x^2{}_2\, \hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_3$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της **A** κατά μήκος της c.

Λύση :

Για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, πρέπει πρώτα να γράψουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης. Ας θεωρήσουμε ως παράμετρο t, τη συνιστώσα x_1

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x_1 = t$$

Τότε από την εξίσωση της καμπύλης έχουμε :

$$x_2 = \sqrt{x_1} = \sqrt{t}$$

Προφανώς η καμπύλη κείται στο επίπεδο (x_1, x_2) άρα $x_3 = 0$. Εύκολα επίσης διαπιστώνουμε ότι η παράμετρος t παίρνει τιμές στο διάστημα

$0 \leq t \leq 1$. Έχουμε τότε, (εξ. (4.1.11)),

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \left(A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2 \frac{dx_2}{dt} + A_3 \frac{dx_3}{dt} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(x_1 \, x^2_2 \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_3}{dt} \right) dt$$

$$= \int_0^1 t\cdot t\cdot 1\cdot dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$$

Προφανώς η συνιστώσα του πεδίου **A** κατά μήκος του $\hat{\imath}_3$ δεν συνεισφέρει στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, αφού το **dx** δεν έχει τέτοια συνιστώσα.

Παράδειγμα 4.2.2

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{A} = x^2_1 \hat{\imath}_1 + x_2 \hat{\imath}_2 + (x_1 x_3 - x_2)\hat{\imath}_3$ κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σημεία (0,0,0) και (1,2,4).

Λύση :

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο (0,0,0) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (1,2,4). Σύμφωνα με το εδάφιο (1.6), επιλέγοντας ως παράμετρο τη x_1 έχουμε

$$x_1 = t \, , \; x_2 = 2t \, , \; x_3 = 4t$$

Το ευθύγραμμο τμήμα της ολοκλήρωσης καλύπτεται όταν το t κείται στο διάστημα [0,1]. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι τότε

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int_C \{x_1^2 \hat{\imath}_1 + x_2 \hat{\imath}_2 + (x_1 x_3 - x_2)\hat{\imath}_3\}\cdot(\hat{\imath}_1 \, dx_1 + \hat{\imath}_2 \, dx_2 + \hat{\imath}_3 \, dx_3)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \int_C (x^2_1\, dx_1 + x_2\, d\, x_2 + (x_1 x_3 - x_2)\, dx_3)$$

$$= \int_0^1 (t^2\, dt + (2t)\,(2dt) + (t4t - 2t)\,(4dt)$$

$$= \int_0^1 (17t^2 - 4t)dt = \frac{11}{3}$$

Παράδειγμα 4.2.3

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της

$$\mathbf{A} = x_1 \hat{\imath}_1 + \frac{x^2_1\, \hat{\imath}_2}{r}$$

κατά μήκος του ημικυκλίου

$$x_2 = \sqrt{r^2 - x^2_1}$$

όπου r η ακτίνα του κύκλου κατά την αντίθετη φορά προς τους δείκτες του ρολογιού.

Λύση :

Επιλέγουμε ως παράμετρο στο πρόβλημα αυτό τη γωνία θ που σχηματίζει η ακτίνα του μοναδιαίου κύκλου με τον άξονα x_1. Τότε $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $dx_1 = -r\sin\theta d\theta$, $dx_2 = r\cos\theta d\theta$.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int_C \left(x_1 \hat{\imath}_1 + \frac{x^2_1}{r}\, \hat{\imath}_2\right)(dx_1\, \hat{\imath}_1 + dx_2\, \hat{\imath}_2)$$

$$= \int_C \left\{x_1 dx_1 + \frac{x^2_1}{r}\, dx_2\right\}$$

$$= r^2 \int_0^{\pi} \{\cos\theta\,(-\sin\theta d\theta) + \cos^2\theta\,(\cos\theta d\theta)\}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= -r^2 \int_0^{\pi} (\cos\theta \sin\theta - \cos^3\theta)\, d\theta$$

$$= -\left\{ \frac{\sin^2\theta}{2} - \sin\theta + \frac{\sin^3\theta}{3} \right\}_0^{\pi} r^2 = 0$$

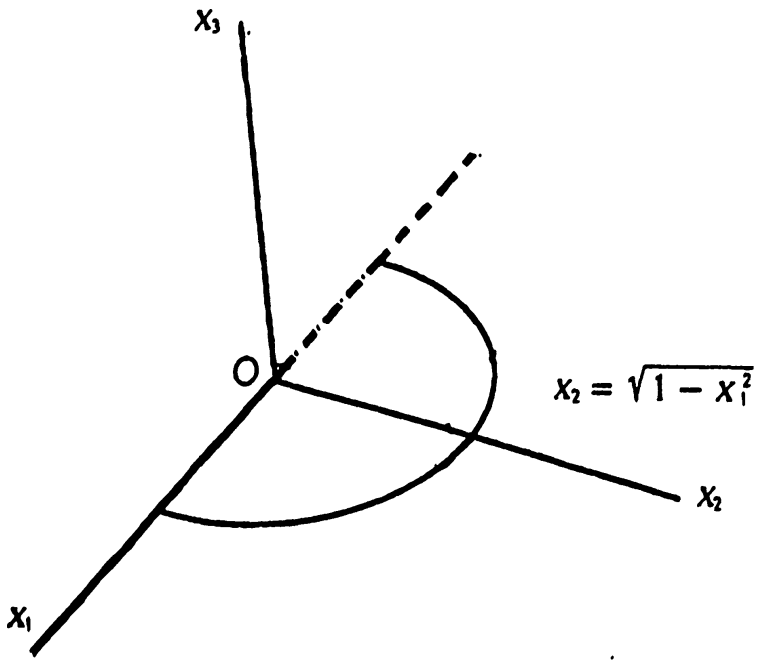
Παρατήρηση 1: Θα μπορούσαμε κατ' αρχήν να είχαμε επιλέξει ως μεταβλητή τη x_1, όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα. Τότε θα είχαμε

$$\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int_1^{-1} \left(x_1 - \frac{x^3_1 \,/\, r}{\sqrt{r^2 - x^2_1}} \right) dx_1$$

Όμως για να λύσουμε το ολοκλήρωμα, χρειαζόμαστε ένα μετασχηματισμό για να απαλείψουμε το ριζικό. Έτσι επιλέγουμε $x_1 = r\cos\theta$, ο οποίος μας οδηγεί και πάλι στην προηγούμενη επιλογή.

Παρατήρηση 2: Θεωρώντας ως παράμετρο το μήκος του τόξου από την αρχή του κύκλου ($x_1 = r$, $x_2 = 0$) έχουμε:

$$x_1 = r\cos\frac{s}{r},\ x_2 = r\sin\frac{s}{r},\ r = \text{ακτίνα του κύκλου}$$



Σχήμα 4.2.1 ολοκλήρωση της $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ *στο δρόμο ημικυκλίου.*

οπότε: $$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = -\sin\frac{s}{r}\,\mathbf{i}_1 + \cos\frac{s}{r}\,\mathbf{i}_2$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και το πεδίο

$$\mathbf{A} = r\left[\cos\frac{s}{r}\,\mathbf{i}_1 + \cos^2\frac{s}{r}\,\mathbf{i}_2\right]$$

δηλαδή $$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \mathbf{A}\cdot T\,ds = r\left[-\sin\frac{s}{r}\cos\frac{s}{r} + \cos^3\frac{s}{r}\right]ds$$

Άρα για τυχαίο τμήμα του κύκλου έχουμε

$$\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = r^2\int_{s_1}^{s_2}\left[-\sin\frac{s}{r}\cos\frac{s}{r} + \cos^3\frac{s}{r}\right]d\left(\frac{s}{r}\right)$$

$$= -r^2\left[\varphi(s_2) - \varphi(s_1)\right]$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{s}{r} - \sin\frac{s}{r} + \frac{1}{3}\sin^3\frac{s}{r}$$

$$s_1 = 0,\ s_2 = \pi r \Rightarrow \varphi(s_1) = \varphi(s_2) = 0 \Rightarrow \int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = 0$$

$$s_1 = 0,\ s_2 = \frac{\pi r}{2} \Rightarrow \varphi(s_1) = 0\ \varphi(s_2) = -\frac{1}{6} \Rightarrow \int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \frac{r^2}{6}$$

Παράδειγμα 4.2.4

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης:

$$\mathbf{F} = \frac{x_2}{x^2_1 + x^2_2}\,\mathbf{i}_1 - \frac{x_1}{x^2_1 + x^2_2}\,\mathbf{i}_2$$

i) κατά μήκος του ημικυκλίου $x_2 = \sqrt{1 - x^2_1}$ από το (−1, 0) έως το (1, 0)

ii) κατά μήκος της πολυγωνικής γραμμής που σχηματίζεται από τα διαδοχικά σημεία

$P_1 = (-1,0),\ P_2 = (0,1),\ P_3 = (1,1),\ P_4 = (1,0)$

Να συγκριθεί η απάντηση με εκείνη κατά μήκος της ευθείας που περνάει από τα P_1, P_4.

Λύση :

i) Για το δρόμο- ημικύκλιο θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με δυο τρόπους:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

α) Επιλέγουμε ως παράμετρο την συντεταγμένη x_1 δηλ. θέτουμε

$x_1 = t,\ x_2 = \sqrt{1-t^2}$

$$\mathbf{F} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2+(1-t^2)}\,\mathbf{i}_1 - \frac{t}{t^2+(1-t^2)}\,\mathbf{i}_2 = \sqrt{1-t^2}\,\mathbf{i}_1 - t\,\mathbf{i}_2$$

Επίσης $d\mathbf{x} = \mathbf{i}_1\,dx_1 + \mathbf{i}_2\,dx_2 = \mathbf{i}_1\,dt - \mathbf{i}_2\,\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$. Παρατηρούμε τώρα ότι η παράμετρος t παίρνει συνεχώς τιμές μεταξύ −1 και 1 , $-1 \le t \le 1$, και για τους δύο δρόμους i) και ii) κατά συνέπεια η τιμή του ολοκληρώματος και στις δύο περιπτώσεις είναι:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-t^2}\,\mathbf{i}_1 - t\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\left(\mathbf{i}_1\,dt - \mathbf{i}_2\,\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} t\,|^{1}_{-1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

β) Επιλέγουμε για μεταβλητή, τη γωνία θ

όπου $\cos\theta = x_1/\sqrt{x^2_1 + x^2_2}$. Τότε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_{\pi}^{0} (\sin\theta\,\mathbf{i}_1 - \cos\theta\,\mathbf{i}_2)\cdot(-\mathbf{i}_1\sin\theta d\theta + \mathbf{i}_2\cos\theta d\theta)$$

$$= -\int_{\pi}^{0} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = -\int_{\pi}^{0} d\theta = \pi$$

ii) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος του πολυγώνου $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$. Έχουμε:

$P_1\,P_2 : \mathbf{x} = \mathbf{i}_1\,(t-1) + t\,\mathbf{i}_2,$ $\quad \mathbf{F} = \frac{t\mathbf{i}_1 - (t-1)\,\mathbf{i}_2}{t^2+(t-1)^2},$ $\quad 0<t<1$

$P_2\,P_3 : \mathbf{x} = \mathbf{i}_1\,t + \mathbf{i}_2,$ $\quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{i}_1 - t\mathbf{i}_2}{1+t^2},$ $\quad 0<t<1$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$P_3 P_4 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - (t-1)\,\mathbf{x}_2, \qquad \mathbf{F} = \frac{(1-t)\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{(t-1)^2 + 1}, \qquad 0<t<1$$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$P_1 P_2 : \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{t^2 + (t-1)^2} \quad \text{ή} \quad I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + (t-1)^2}$$

$$P_2 P_3 : \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{1+ t^2} \quad \text{ή} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$P_3 P_4 : \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{(t-1)^2 +1} \quad \text{ή} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^2 +1}$$

Τα ολοκληρώματα I_2 , I_3 υπολογίζονται απλά. Πράγματι έχουμε :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \tan^{-1} t\,|^1_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^2 +1} = \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2 +1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+ t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Για το I_1 έχουμε

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 -2t +1} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(2t-1)^2+1}$$

Θέτουμε στη συνέχεια $2t-1= x$ οπότε παίρνει τη μορφή

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+ x^2} = \frac{\pi}{2}$$

'Αρα προσθέτοντας τα τρία αποτελέσματα παίρνουμε τελικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{P_1P_2P_3P_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

που είναι ίση με την τιμή που υπολογίσαμε για τον ημικυκλικό δρόμο. Σημειώνουμε ότι η πιο πάνω ισότητα είναι συμπτωματική, π.χ. αν θεωρήσουμε ως δρόμο την ευθεία που έχει τα ίδια πέρατα έχουμε:

$$P_1P_4 : \mathbf{x} = t\,\hat{\imath}_1 , \mathbf{F} = -\frac{t\,\hat{\imath}_2}{1+t^2} , -1<t<1$$

δηλαδή $\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$ ή $\int_{P_1P_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = 0$

Θα δούμε αργότερα για ποιο λόγο το ολοκλήρωμα εξαρτάται από το δρόμο.

Σημειώνουμε επίσης ότι και στην περίπτωση που η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι τμήμα του κύκλου μπορεί εύκολα το ολοκλήρωμα να δοθεί ως συνάρτηση των γωνιών που προσδιορίζουν το κυκλικό τμήμα.

Προχωρώντας όπως στο παράδειγμα 4.2.4 έχουμε

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r}\boldsymbol{\tau} , \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$, το εφαπτόμενο διάνυσμα (με διεύθυνση την φορά του των δεικτών του ρολογιού). Άρα η εξίσωση (4.1.8) δίνει:

$$\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \frac{s_b - s_a}{r} = \theta_b - \theta_a$$

(εδώ $\theta_b = \pi$, $\theta_a = 0$)

4.3 Απλά συνεκτικοί τόποι (domains)

Γνωρίζουμε από τα στοιχειώδη μαθηματικά, ότι πολλές συναρτήσεις δεν είναι δυνατό να οριστούν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους αλλά μόνο για συγκεκριμμένα τμήματά τους. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ για παράδειγμα, ορίζεται για όλα τα σημεία x εκτός του x = 0.

Ανάλογα, και τα διανυσματικά πεδία που εμφανίζονται στη φυσική, δεν ορίζονται πάντα για όλα τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα n-ηλεκτρικών σημειακών φορτίων στο χώρο. Είναι δυνατό τότε να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κάθε χωρικό σημείο, εκτός από τα n-σημεία στα οποία βρίσκονται τοποθετημένα τα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

σημειακά φορτία. Τότε από την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού είναι γνωστό ότι στο σύστημα MKSA το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση **x** δίνεται από τη σχέση :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}(j))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(j)|^3} \qquad (4.3.1)$$

όπου **x**(j) το διάνυσμα θέσης του φορτίου q_j. Η σχέση (4.3.1) πολλές φορές γράφεται

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\hat{\mathbf{r}}_j}{r_j^2} \qquad (4.3.2)$$

όπου $\mathbf{r}_j = \mathbf{x} - \mathbf{x}(j)$ και $r_j = |\mathbf{r}_j|$. Όμως δεν προτιμάμε τον τρόπο αυτό διότι κρύβει την εξάρτηση από το **x**.

Προφανώς το πεδίο δεν ορίζεται στα σημεία **x** = **x**(j) δηλαδή στη θέση των φορτίων όπου απειρίζεται. Το πρόβλημα αυτό είναι απόρροια εξιδανίκευσης του φυσικού προβλήματος που συνίσταται στην παραδοχή ότι τα φορτία είναι σημειακά.

Υπάρχουν επίσης διανυσματικά πεδία στη φυσική τα οποία ορίζονται στο εσωτερικό μιας περιοχής αλλά όχι και στο σύνορό της. Τότε πολλές φορές αν ένα πεδίο ορίζεται σε δύο σημεία Α, Β είναι δυνατό να βρούμε μια καμπύλη που ενώνει τα δύο αυτά σημεία, κατά μήκος της οποίας το διανυσματικό πεδίο ορίζεται παντού. Αλλές φορές αυτό δεν είναι δυνατό. Η τοπολογική αυτή συμπεριφορά επηρεάζει τις ιδιότητες των πεδίων. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να εισάγουμε την έννοια των απλά συνεκτικών τόπων. Προς τούτο, είναι πρώτα απαραίτητοι ορισμένοι βασικοί ορισμοί.

Ορισμός 1: Ας θεωρήσουμε ένα σημείο P και ένα θετικό αριθμό ε (ε>0). Καλούμε γειτονιά (ε) του σημείου P, το σύνολο των σημείων που έχουν απόσταση από το P μικρότερη του ε.

Για ένα επίπεδο χώρο, η γειτονιά (ε) του σημείου P, είναι όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα σε κύκλο ακτίνας ε, και κέντρο το σημείο P. Για τρισδιάστατο χώρο, η γειτονιά (ε) είναι το εσωτερικό σφαίρας ακτίνας ε με κέντρο το P.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ορισμός 2: Δοσμένης μιας περιοχής S, λέμε ότι το σημείο P είναι εσωτερικό σημείο της S αν είναι δυνατό να βρούμε μια γειτονιά του P, της οποίας τα σημεία να βρίσκονται όλα μέσα στην περιοχή S.

Ορισμός 3: Λέμε ότι το σημείο P είναι συνοριακό σημείο μιας περιοχής S, όταν η γειτονιά (ε) του P περιέχει πάντα τουλάχιστο ένα σημείο που ανήκει στην S και ένα που δεν ανήκει σ' αυτή, ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το ε.

Ορισμός 4: Κάθε σημείο που δεν είναι εσωτερικό ή συνοριακό σε μια περιοχή S, καλείται εξωτερικό σημείο.

Ορισμός 5: Ανοικτή περιοχή καλείται εκείνη της οποίας κάθε σημείο της είναι εσωτερικό σημείο. Με άλλα λόγια η ανοικτή περιοχή δεν περιέχει το σύνορό της. Αντίθετα, κλειστή περιοχή είναι εκείνη που περιλαμβάνει το σύνορό της.

Ορισμός 6: Μια περιοχή S λέγεται συνεκτική αν για δύο δοσμένα σημεία της, P και Q, μπορεί να βρεθεί ομαλή καμπύλη που τα ενώνει. Ένα παράδειγμα συνεκτικής περιοχής στο επίπεδο δίνεται στο σχήμα 4.3.1.

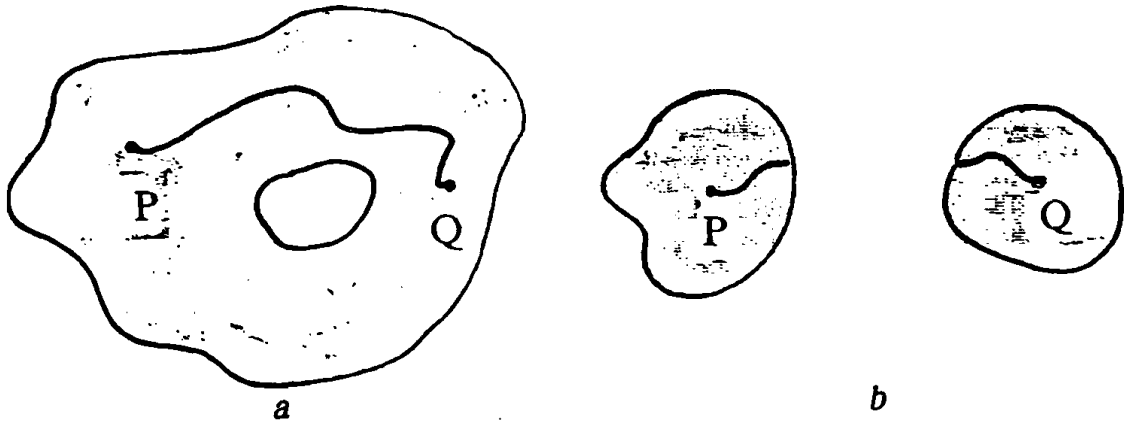
Ορισμός 7: Μια περιοχή που είναι ανοικτή και συνεκτική καλείται τόπος, (domain).

Μπορούμε τώρα να επανέλθουμε στη σχέση (4.3.1) που ορίζει το ηλεκτρικό πεδίο n- σημειακών φορτίων στο χώρο. Παρατηρούμε τα εξής: είναι δυνατό να ορίσουμε το πεδίο **E** όσο κοντά θέλουμε στις θέσεις που βρίσκονται τα σημειακά φορτία αλλά όχι πάνω σ' αυτές. Απ' αυτή την άποψη η περιοχή ορισμού του **E** είναι ανοικτή. Επίσης η καμπύλη μεταβολής του **E** ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού του είναι ομαλή. Συνεπώς το πεδίο ορισμού του **E** είναι τόπος.

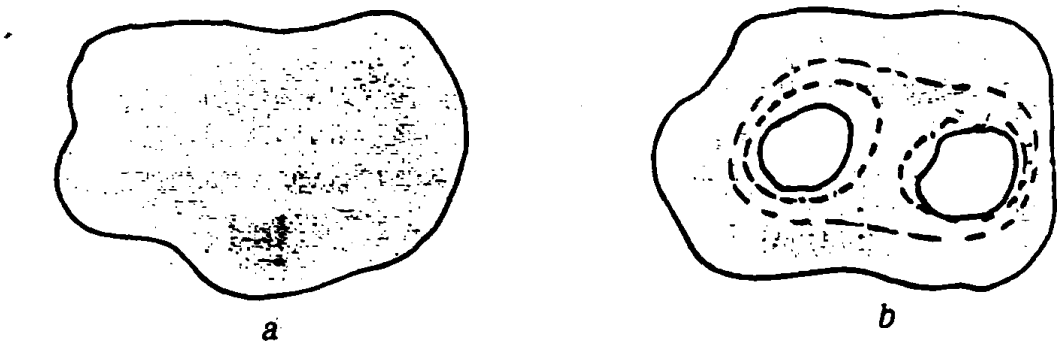
Ορισμός 8: Καλούμε απλά συνεκτικό τόπο μια ανοικτή συνεκτική περιοχή στην οποία κάθε κλειστή καμπύλη που κείται ολόκληρη μέσα στην περιοχή μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα σημείο εντός της περιοχής, χωρίς να διέλθει από σημείο εκτός περιοχής. Με άλλα λόγια, ένας απλά συνεκτικός τόπος δεν πρέπει να περιέχει "οπές" , διότι τότε θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε κλειστές καμπύλες οι οποίες δεν κλείνουν σε ένα σημείο του τόπου. Για

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

παράδειγμα στο σχήμα (4.3.2) δείχνουμε δύο επίπεδους τόπους. Ο 4.3.2(a) είναι απλά συνεκτικός διότι κάθε κλειστή καμπύλη μπορεί να συρρικνωθεί συνεχώς χωρίς να διέλθει από σημείο εκτός αυτής. Αντίθετα στο σχήμα 4.3.2(b), οι καμπύλες C_1, C_2, C_3 δεν είναι δυνατό να συρρικνωθούν χωρίς να διέλθουν από τις "οπές" οι οποίες δεν ανήκουν στον τόπο.



Σχήμα 4.3.1 (a) Παράδειγμα συνεκτικής περιοχής στο επίπεδο (b) Μη συνεκτική περιοχή.



Σχήμα 4.3.2 (a) Απλά συνεκτικόςτόπος. (b) Μη απλά συνεκτικός τόπος.

Αν επανέλθουμε στο παράδειγμα του ηλεκτρικού πεδίου των n - σημειακών φορτίων, διαπιστώνουμε ότι ο τόπος αυτός είναι απλά συνεκτικός. Ένα παράδειγμα μη- απλού συνεκτικού τόπου αποτελεί το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ρεύμα ενός ευθύγραμμου άπειρου αγωγού.

4.4. Διατηρητικά ή Συντηρητικά πεδία

Καθώς έχουμε ήδη αναφέρει και διαπιστώσει άμεσα στο παράδειγμα 4 του προηγούμενου εδαφίου, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εξαρτάται όχι μόνο από τα πέρατα του δρόμου c αλλά και από το δρόμο c. Στη φυσική η αρχή και το πέρας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

του δρόμου c παριστάνουν την αρχική και την τελική κατάσταση του συστήματος. Έτσι λέμε ότι το έργο εξαρτάται όχι μόνο από την αρχική και την τελική κατάσταση, αλλά και από τη συγκεκριμένη διαδοχή των ενδιαμέσων καταστάσεων. Κατά συνέπεια εν γένει το έργο δεν αντιστοιχεί σε κάποια μεταβλητή του συστήματος αλλά χαρακτηρίζει κάποια συγκεκριμένη μεταβολή.

Υπό ορισμένες, όμως, προϋποθέσεις το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από την αρχή και το πέρας της καμπύλης c και όχι από τη μορφή του δρόμου c. Έτσι π.χ. σε ορισμένες περιπτώσεις το έργο είναι ανεξάρτητο του δρόμου. Τότε λέμε ότι η δύναμη είναι διατηρητική και ορίζει μία μεταβλητή του συστήματος (π.χ. τη δυναμική ενέργεια).

Το έργο που παράγει μια εξωτερική δύναμη $\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}$ πάνω σε ένα σωμάτιο από το σημείο P_1 στο σημείο P_2 είναι :

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi} \cdot d\mathbf{x} \qquad (4.4.1)$$

αλλά $\mathbf{F}_{\varepsilon\xi} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ και $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$

$$W_{12} = m\int_1^2 \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt = \frac{1}{2}mv^2{}_2 - \frac{1}{2}mv^2{}_1 = T_2 - T_1 \qquad (4.4.2)$$

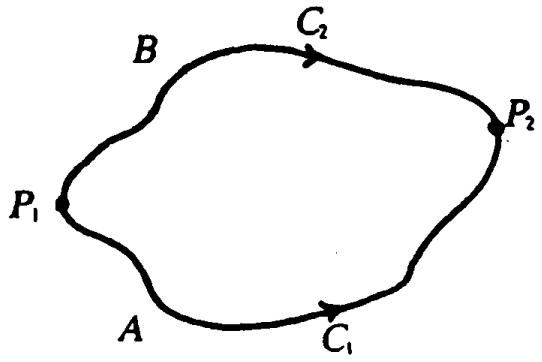
Δηλαδή, όπως αναμέναμε, το έργο που παράγεται από τη δύναμη **F** είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματίου. Θα δούμε πιο κάτω ότι στην περίπτωση αυτή το έργο κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι μηδέν . Δηλαδή

$$\oint_C \mathbf{F}_{\varepsilon\xi} \cdot d\mathbf{x} = 0 \qquad (4.4.3)$$

(ο κύκλος πάνω στο σύμβολο του ολοκληρώματος υποδηλώνει ότι η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι κλειστή). Έτσι για να ισχύει η (4.4.3) τα επί μέρους έργα κατά μήκος της καμπύλης είναι άλλα θετικά και άλλα αρνητικά. Προφανώς διατηρητική δεν μπορεί να είναι η τριβή διότι γνωρίζουμε ότι αυτή παράγει πάντα θετικό έργο και συνεπώς το ολοκλήρωμα δεν θα μπορούσε να μηδενιστεί. Άρα για να ισχύει η (4.4.3) δεν θα πρέπει στο σύστημα που μελετάμε να υπάρχουν τριβές ή άλλες δυνάμεις της ιδίας φύσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θα ιδούμε ότι αν η δύναμη είναι διατηρητική ισχύει η εξ. (4.4.3). Πραγματικά έστω η κλειστή τροχιά του σχ. 4.4.1. Προφανώς



$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = 0$$

Σχήμα 4.4.1. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συντηρητικής δύναμης κατά μήκος κλειστής τροχιάς είναι μηδέν.

$$\oint_C \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} = \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x}$$

$$= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} = \int_{c_1} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} - \int_{c_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x}$$

αλλά έχουμε υποθέσει ότι τα δύο τελευταία ολοκληρώματα είναι ίσα οπότε προκύπτει η (4.4.3).

Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο. Πραγματικά από την (4.4.1) βρίσκουμε

$$0 = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x}$$

ή $$0 = \int_{c_1} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} - \int_{c_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x}$$

δηλαδή:

$$\int_{c_1} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} = \int_{c_2} \mathbf{F}_{\varepsilon\xi}\cdot d\mathbf{x} \qquad (4.4.4)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Αυτό σημαίνει ότι το έργο $W(P_1 \rightarrow P_2)$ που παράγει η εξωτερική δύναμη δίνεται από κάποια βαθμωτή συνάρτηση που είναι συνάρτηση των P_1 και P_2 και γράφουμε

$$W_{\varepsilon\xi}(P_1 \rightarrow P_2) = U(P_2) - U(P_1) \qquad (4.4.5)$$

Η ποσότητα U λέγεται δυναμική ενέργεια.

Το στοιχειώδες έργο γράφεται

$$dW_{\varepsilon\xi} = \mathbf{F}_{\varepsilon\xi} \cdot d\mathbf{x} \qquad (4.4.6a)$$

και ισχύει

$$dW_{\varepsilon\xi} = d\,U \qquad (4.4.6b)$$

Ας υποθέσουμε ότι τώρα σε κάθε βήμα η εξωτερική δύναμη εξισορροπείται από μια δύναμη F την οποία ασκεί το σύστημα πάνω στο κινούμενο σώμα, Τότε

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}$$

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = dU$$

δηλαδή

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -dU \qquad (4.4.7a)$$

ή

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + dU = 0 \qquad (4.4.7b)$$

Το αρνητικό σημείο στην (4.4.7) προέρχεται βασικά από το γεγονός ότι θεωρήσαμε πως η εξωτερική δύναμη μεταβάλλει την δυναμική ενέργεια του συστήματος. Αυτό έχει ως φυσική συνέπεια ότι έργο παραγόμενο από εσωτερική δύναμη γίνεται εις βάρος της δυναμικής ενέργειας του συστήματος όπως φαίνεται από την εξ. (4.4.7b). Θα μπορούσαμε πάντως να είχαμε κάνει και την αντίθετη επιλογή.

Ας αναλύσουμε από τη σκοπιά αυτή τη δυναμική ενέργεια του συστήματος γης - ηλίου. Η δύναμη του ηλίου πάνω στη γη είναι

$$\mathbf{F} = -G_N \frac{mM}{r^2} \hat{r}\,, \quad G_N = \text{σταθερά παγκόσμιας έλξης}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου r η απόσταση γης - ηλίου και $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από τον ήλιο στη γη. Επειδή το έργο είναι ανεξάρτητο του δρόμου, θεωρούμε ένα δρόμο ακτινικό ώστε η γη απομακρύνεται από τον ήλιο κατά τρόπο που να μην επιταχύνεται. Τότε

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = G_N \frac{mM}{r^2} dr$$

ή $$U(r_2) - U(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} G_N \frac{mM}{r^2} dr = -G_N\, mM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Από την τελευταία σχέση συνάγεται ότι

$$U(r) = -G_N \frac{mM}{r} + C$$

η σταθερά C δεν μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα καθόσον μόνο μεταβολές της δυναμικής ενέργειας έχουν οριστεί. Δεν έχει λοιπόν ιδιαίτερη σημασία. Συνήθως επιλέγεται ώστε η δυναμική ενέργεια να είναι μηδέν όταν τα δύο μέρη του συστήματος βρίσκονται σε άπειρη απόσταση (οπότε δεν αισθάνεται το ένα το άλλο) δηλαδή:

$$U(r \to \infty) \to 0$$

οπότε C = 0 δηλαδή τελικά

$$U(r) = -G_N \frac{mM}{r}$$

Ξαναγυρνώντας πίσω στις διατηρητικές δυνάμεις υπογραμμίζουμε δύο πράγματα: 1) Επιτρέπουν να οριστεί μία μεταβλητή κατάστασης του συστήματος (π.χ. η δυναμική ενέργεια) και 2) για την περιγραφή του συστήματος αρκεί μια βαθμωτή συνάρτηση (π.χ. η U(**x**)) αντί για τη διανυσματική συνάρτηση **F** (**x**) που είναι ισοδύναμη με τρεις βαθμωτές συναρτήσεις F_i (**x**) , i = 1, 2, 3. Τούτο φαίνεται ως εξής:

Ξέρουμε ότι

$$dU = (\nabla U)\cdot d\mathbf{x} \qquad (4.4.8)$$

Αυτή συνδυαζόμενη με την (4.4.6) δίνει

$$\mathbf{F} = -\nabla U \qquad (4.4.9a)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δηλαδή $F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}, F_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3}$ (4.4.9b)

Το αρνητικό σημείο είναι απόρροια της παραδοχής που αναφέραμε πιο πάνω.

Ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος με την απλότητα λύσης προβλημάτων της μηχανικής όταν οι δυνάμεις είναι διατηρητικές. Η βάση της απλότητας είναι η εξ. (4.4.9) η οποία μας εξασφαλίζει ότι το σύστημα περιγράφεται με τη βοήθεια μιας βαθμωτής συνάρτησης (Φ ή U) αντί των τριών συνιστωσών της δύναμης. Καταλήγουμε λοιπόν στον ακόλουθο ορισμό για τα διατηρητικά (ή συντηρητικά) διανυσματικά πεδία:

Ορισμός: Ένα διανυσματικό πεδίο **F** συνεχές σε μια απλά συνεκτική περιοχή (domain) D, είναι διατηρητικό (συντηρητικό) αν και μόνο αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της **F** κατά μήκος κάθε ομαλής καμπύλης που ανήκει εξ ολοκλήρου στην D, εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης. Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε τρία σπουδαία θεωρήματα που αφορούν τις διατηρητικές δυνάμεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Έστω ένα πεδίο **F** το οποίο είναι διατηρητικό. Τότε υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση Φ(x) τέτοια ώστε

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) \qquad (4.4.10)$$

όπου P_1 και P_2 τα πέρατα μιας καμπύλης C .

Επί πλέον η **F** δίνεται από την Φ δια μέσου της σχέσης

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi$$

Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι η διαφορά του δυναμικού (δυναμικής ενέργειας) στα άκρα της καμπύλης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το θεώρημα ισχύει αμφίδρομα, δηλαδή:

Αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της **F** είναι ανεξάρτητο του δρόμου τότε η **F** είναι διατηρητική. Αντίστροφα αν η **F** είναι διατηρητική τότε μπορεί να γραφεί ως η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης **F**= – **grad** Φ και το ολοκλήρωμα (4.4.10) μπορεί να γραφεί ως η διαφορά της Φ στα άκρα της καμπύλης.

Μια σπουδαία ιδιότητα των διατηρητικών πεδίων, ιδίως από άποψη πρακτικής εφαρμογής, σχετίζεται με το στροβιλισμό του. Πράγματι, δείξαμε στο κεφ. III ότι όταν ένα διανυσματικό πεδίο αποτελεί την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης, τότε ο στροβολισμός του είναι πάντα μηδέν. Δηλαδή

$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\Phi \rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = -\,\nabla \times \nabla\Phi = 0$$

Αναμένουμε ότι εφόσον το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, θα μπορούμε να διαπιστώσουμε αν μια δύναμη **F** είναι συντηρητική, χωρίς να χρειαστεί να βρούμε τη βαθμωτή συνάρτηση Φ, αρκεί η **F** να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \text{ ή } \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0$$

Πραγματικά μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής θεώρημα - κριτήριο:

ΘΕΩΡΗΜΑ II : Ένα διανυσματικό πεδίο **F** που έχει συνεχείς παραγώγους και ορίζεται σε μια απλά συνεκτική περιοχή D, είναι διατηρητικό αν και μόνο αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ σε κάθε σημείο της D.

Η απόδειξη είναι συνέπεια του θεωρήματος του Stokes (εδ. 5.7)

Σημειώνουμε ότι το θεώρημα I μπορεί να διατυπωθεί και μέσα από τη σχέση (4.4.3) ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ III : Ένα διανυσματικό πεδίο **F** συνεχές σε απλά συνεκτική περιοχή D, είναι συντηρητικό αν και μόνο αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του **F** γύρω από κάθε κλειστή καμπύλη που ανήκει στην D, είναι μηδέν.

$$\oint_{C_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \forall\, C_i \in D$$

Η απόδειξη είναι τετριμένη ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία που οδήγησε στην (4.4.3) και στην (4.4.4).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνοψίζοντας , ένα διανυσματικό πεδίο **F** είναι συντηρητικό αν έχει μια από τις παρακάτω ιδιότητες*

1. Το **F** αποτελεί την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης, $\mathbf{F} = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$

2. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από κλειστή καμπύλη είναι μηδέν

3. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα μιας ανοικτής καμπύλης

4.Ο στροβιλισμός του **F** είναι μηδέν (αστρόβιλο πεδίο) σ' όλη την συνεκτική περιοχή.

4.5 Διανυσματικό δυναμικό

Ένα από τα βασικά συμπεράσματα του προηγούμενου εδαφίου είναι ότι όταν ο στροβιλισμός μιας συνάρτησης είναι μηδέν τότε αυτή ισούται με την κλίση κάποιας βαθμωτής συνάρτησης , δηλαδή

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F} = -\,\mathbf{grad}\ \Phi(\mathbf{x}) \qquad (4.5.1)$$

Τη συνάρτηση $\Phi(\mathbf{x})$ ονομάσαμε βαθμωτό δυναμικό

Αν ανατρέξουμε στις διανυσματικές ταυτότητες του προηγούμενου κεφαλαίου, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια άλλη ταυτότητα

$$\nabla\cdot(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \qquad (4.5.2)$$

η οποία μας οδηγεί να σκεφτούμε ανάλογα. Συγκεκριμένα μπορούμε να θέσουμε το εξής ερώτημα:

Αν η απόκληση διανυσματικής συνάρτησης **B** σε κάθε σημείο του χώρου είναι μηδέν,

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad (4.5.3)$$

αποτελεί πάντα το **B** το στροβιλισμό μιας συνάρτησης **A**;

Δηλαδή μπορούμε να βρούμε ένα πεδίο **A** ώστε να γράφουμε πάντα;

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}; \qquad (4.5.4)$$

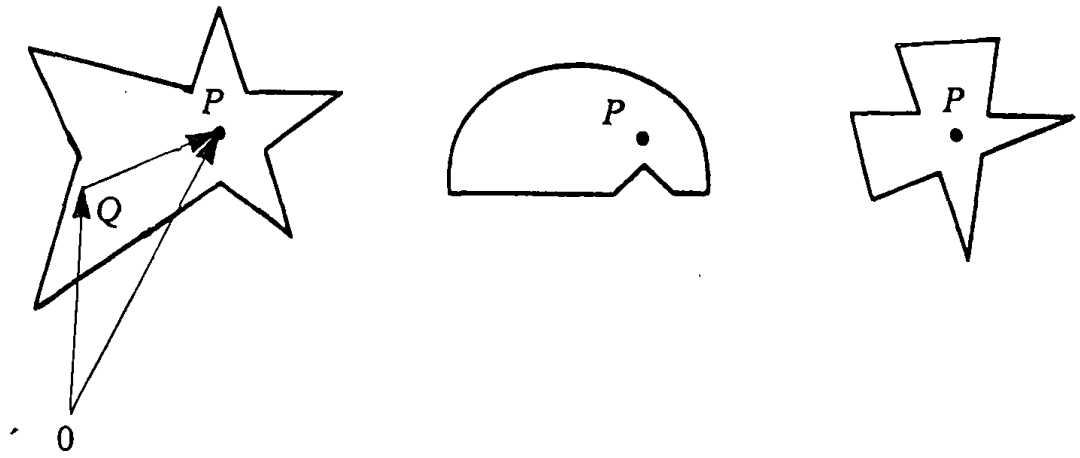
---

* Μία από αυτές αποτελεί προφανώς ορισμό του διατηρητικού πεδίου. Οι υπόλοιπες αποδεικνύονται.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η απάντηση είναι **ναι** όταν πρόκειται για ένα ειδικό απλά συνεκτικό τόπο που καλείται "αστεροειδής" (star - shaped). Δεν θα επεκταθούμε στις επί μέρους ιδιότητες τέτοιων τόπων όμως θα δώσουμε συνοπτικά (για την πληρότητα) τον ορισμό του.

Αστεροειδής απλός τόπος είναι εκείνος στον οποίο υπάρχει σημείο P το οποίο συνδέεται με ευθύγραμμα τμήματα που κείτονται ολοκληρωτικά μέσα στον τόπο, με κάθε άλλο σημείο του. Ένας τέτοιος διδιάστατος τόπος φαίνεται στο σχήμα (4.5.1)



Σχήμα 4.5.1 Αστεροειδής τόπος. Το σημείο P ενώνεται με ευθύγραμμα τμήματα με κάθε άλλο σημείο του τόπου.

Θεώρημα. Έστω ένα πεδίο **B** το οποίο ορίζεται σε ένα απλά συνεκτικό αστεροειδή τόπο. Έστω επί πλέον ότι για κάθε σημείο του τόπου ισχύει

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (4.5.5a)$$

τότε υπάρχει διανυσματικό πεδίο **A** τέτοιο ώστε

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (4.5.b)$$

Δεν θα δώσουμε απόδειξη του θεωρήματος. Σημειώνουμε μόνο ότι το διανυσματικό πεδίο **A** δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Πραγματικά αν **A** είναι ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο θεωρούμε την ποσότητα

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \qquad (4.5.6)$$

όπου Ψ μία αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση. Τότε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\Psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Συνεπώς το **A** δεν καθορίζεται μονοσήμαντα όταν γνωρίζουμε το **B**. Το διάνυσμα **A** καλείται διανυσματικό δυναμικό (σε αναλογία με το βαθμωτό δυναμικό Φ στη σχέση (4.5.1)). Ένα πεδίο **B** καλείται σωληνοειδές όταν αυτό μπορεί να γραφεί ως ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού δυναμικού, δηλαδή, όταν η απόκλισή του είναι παντού μηδέν.

Για έναν αστεροειδή απλά συνεκτικό τόπο είναι δυνατό να επιλέξουμε το διανυσματικό δυναμικό **A** ως εξής.

Ορίζουμε πρώτα ένα ευθύγραμμο τμήμα έστω το PQ στο σχήμα (4.5.1) το οποίο παραμετροποιούμε ως εξής

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \qquad (4.5.7)$$

Τότε ένα διανυσματικό δυναμικό **A** ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 t\, \mathbf{B}\mathbf{x}\, \frac{d\mathbf{s}}{dt}\, dt \qquad (4.5.8)$$

Είναι δυνατό να αποδειχθεί τώρα ότι ο στροβιλισμός του **A** όπως αυτό ορίζεται στην (4.5.8) ισούται με το πεδίο **B** . Η απόδειξη αυτή θα δοθεί στο παράρτημα.

Παράδειγμα 4.5.1

Στην ηλεκτροδυναμική, το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi$$

και το μαγνητικό πεδίο από τη σχέση

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

όπου **A** είναι το διανυσματικό δυναμικό και Φ το αντίστοιχο βαθμωτό. Αν μετασχηματίσουμε το **A**

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi,$$

τι μετασχηματισμό υφίσταται το Φ ώστε να παίρνουμε το ίδιο ηλεκτρικό πεδίο;

Προφανώς το μαγνητικό πεδίο δεν αλλάζει. Τα δυναμικά **A**, Ψ πρέπει να μετασχηματιστούν κατάλληλα ώστε να μην μεταβληθεί η τιμή του πεδίου **E**. Αντικαθιστώντας το **A** με το $\mathbf{A}' - \nabla\Psi$ έχουμε:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}' - \nabla\Psi) - \nabla\Phi =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}' + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi - \nabla\Phi \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}' - \nabla(\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Psi)$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι το πεδίο Φ πρέπει να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

Άρα το **E** σε σχέση με τα νέα πεδία **A**′, Φ′ γράφεται :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}' - \nabla\Phi'$$

ακριβώς όπως και στην αρχική του μορφή. Οι μετασχηματισμοί

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi,\ \Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Psi \qquad (4.5.9)$$

είναι γνωστοί ως μετασχηματισμοί βαθμίδας. Αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις του Maxwell και έχουν ιδιαίτερη σημασία στη σύγχρονη κβαντική θεωρία. Η εξίσωση την οποία ικανοποιεί η συνάρτηση Ψ εξαρτάται από την επιλογή του πεδίου **A** (το οποίο δεν ορίζεται μονοσήμαντα).

Εφ' όσον το μαγνητικό πεδίο έχει απόκλιση μηδέν, δηλαδή $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ παντού, το πιο πάνω θεώρημα μας επιτρέπει να περιγράψουμε τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα δια μέσου (κάποιας κατάλληλης επιλογής) του διανυσματικού δυναμικού. Το κέρδος δεν είναι εδώ προφανές καθ' όσον αντί των τριων συναρτήσεων $B_i(\mathbf{x})$, i=1, 2, 3, χρησιμοποιούμε τρεις άλλες $A_i(\mathbf{x})$, i = 1, 2, 3. Η βολικότητα του διανυσματικού δυναμικού πηγάζει από το γεγονός ότι οι εξισώσεις που υπακούει το **A** είναι αρκετά απλούστερες από εκείνες που υπακούει το **B**. Υπάρχει βέβαια συνολικά κέρδος. Η μορφή των εξισώσεων του Maxwell είναι τέτοια που αντί για τις έξι συναρτήσεις $B_i(\mathbf{x})$ και $E_i(\mathbf{x})$ i = 1, 2, 3 αρκούν μόνο τέσσερις δηλαδή οι $\Phi(\mathbf{x})$, $A_i(\mathbf{x})$, i = 1, 2, 3. Και μάλιστα λόγω της αυθαιρεσίας που υπάρχει στην επιλογή του διανυσματικού δυναμικού (βλέπε εξ. 4.5.3) αρκούν τελικά τρεις τέτοιες συναρτήσεις.

Παράδειγμα 4.5.2

Έστω ότι το πεδίο ταχύτητας **v** ενός ρευστού δίνεται από την $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}$ όπου **ω** είναι σταθερό διάνυσμα (γωνιακή ταχύτητα) και **x** το διάνυσμα θέσης. Είναι δυνατό να αντιστοιχίσουμε ένα διανυσματικό δυναμικό στο πεδίο **v**;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

Για να υπάρχει διανυσματικό δυναμικό που αντιστοιχεί στο διάνυσμα της ταχύτητας **v** πρέπει $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$. Πράγματι σύμφωνα με τις ταυτότητες του εδ. 3.8 (εξ. 3.8.16) αντικαθιστώντας το **v** με το $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ έχουμε:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla \times \mathbf{x}) = 0$$

Συνεπώς η απόκλιση του **v** είναι 0 και τότε μπορούμε να βρούμε **A** ώστε $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Προς τούτο, θέτουμε στην (4.5.7) $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ και χρησιμοποιούμε την (4.5.8) Έχουμε:*

$$\mathbf{A} = \int_0^1 t\left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)dt$$

$$= \int_0^1 t\left\{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}) \times \frac{d\mathbf{s}}{dt}\right\}dt$$

$$= \int_0^1 t\left\{(\boldsymbol{\omega} \times t\mathbf{x}) \times \frac{d(t\mathbf{x})}{dt}\right\}dt$$

$$= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x} \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x}$$

Δηλαδή $\mathbf{A} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x}$

Το πιο πάνω πεδίο **v** δεν μπορεί να προκύψει από ένα βαθμωτό δυναμικό καθόσον

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = -(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{x} + (\nabla\cdot\mathbf{x})\,\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} + 3\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} \neq 0$$

Παρόλο που αποφεύγουμε να επιλέγουμε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, μια και σκοπός μας είναι να εξοικειώσουμε τον αναγνώστη με τη νέα τεχνική, δεν πρέπει να διστάζει ο αναγνώστης να χρησιμοποιεί κατάλληλο σύστημα όταν θέλει να αποφεύγει πολύπλοκες πράξεις ή δεν θυμάται πολύπλοκες σχέσεις. Π.χ. στο πιο πάνω παράδειγμα εφ' όσον το **ω** είναι σταθερό μπορεί να ληφθεί ως ένας άξονας π.χ. $\hat{\imath}_3$, τότε: $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\hat{\imath}_3$

$$\mathbf{v} = \omega\hat{\imath}_3 \times \mathbf{x} = \omega\,(-x_2\,\hat{\imath}_1 + x_1\,\hat{\imath}_2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_1}(-\omega x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\omega x_1) = 0$$

---

* Η μεταβλητή t είναι αυθαίρετη και δεν έχει σχέση με το χρόνο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εύκολα διαπιστώνεται ότι υπάρχουν και οι εξής λύσεις:

$$\mathbf{A} = \hat{\imath}_1\,\omega x_2 x_3 - \hat{\imath}_2\,\omega x_1 x_3 = x_3\omega(\hat{\imath}_1 x_2 - \hat{\imath}_2\,x_1) = \frac{\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x})}{\omega}$$

$$\mathbf{A} = -\frac{\omega}{2}\hat{\imath}_3\,(x^2{}_1+x^2{}_2) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2\omega^2}\,[\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x})^2]$$

Παροτρύνεται ο αναγνώστης να επιβεβαιώσει ότι όντως αυτές είναι λύσεις και να προσδιορίσει την συνάρτηση Ψ που τις συνδέει με την πιο πάνω λύση.

Παράδειγμα 4.5.3

Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό που αντιστοιχεί στο ομογενές μαγνητικό πεδίο **B**.

Λύση :

Καθώς έχουμε ήδη αναφέρει, πάντοτε $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ (πράγμα που προφανώς ισχύει και για το ομογενές πεδίο). Οι σχέσεις (4.5.7) και (4.5.8) δίνουν

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 t\,\mathbf{B}\times\mathbf{x}\,dt = \mathbf{B}\times\mathbf{x}\int_0^1 t\,dt$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{x}$$

Αν $\mathbf{B} = B\,\hat{\imath}_3$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathbf{A} = \frac{1}{2}B\,(-\hat{\imath}_1 x_2 + \hat{\imath}_2 x_1)$

Προφανώς άλλες λύσεις είναι $\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{x} + \nabla\Psi(\mathbf{x})$ όπου $\Psi(x)$ βαθμωτή συνάρτηση . Μερικές επιλογές

α) $\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}kx^2$, k = σταθερά

τώρα $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{x} + k\mathbf{x})$

β) Αν $\mathbf{B} = B\hat{\imath}_3$ μπορούμε να διαλέξουμε

i) $\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1 x_2$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\hat{\imath}_1 x_2 + \hat{\imath}_2 x_1) = \hat{\imath}_2 x_1$$

ii) $\Psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}x_1 x_2$

οπότε $\mathbf{A} = -\hat{\imath}_1 x_2$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που μπορούν να παίξουν το ρόλο του διανυσματικού δυναμικού.

4.6 Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Στα προηγούμενα, μελετήσαμε διεξοδικά τις εξισώσεις των επιφανειών στις διάφορες μορφές τους και τις διάφορες ιδιότητες αυτών.

Είδαμε στο εδ. 3.1 (εξ. 3.1.3) ότι η διανυσματική εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$\mathbf{x}(p,q) = x_1(p,q)\,\hat{\imath}_1 + x_2(p,q)\,\hat{\imath}_2 + x_3(p,q)\,\hat{\imath}_3 \qquad (4.6.1)$$

Επίσης το διαφορικό στοιχείο της επιφάνειας είναι

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\, dpdq \equiv \mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q\, dpdq \qquad (4.6.2)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον ορισμό του κάθετου στην επιφάνεια μοναδιαίου διανύσματος $\hat{n}$

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q}{|\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q|} \qquad (4.6.3)$$

η (4.6.2) γράφεται και ως εξής

$$d\mathbf{S} = |\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q|\, \hat{n}\, dpdq = \hat{n}\, |d\mathbf{S}| \qquad (4.6.4)$$

Συνεπώς το εμβαδό της επιφάνειας δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\iint |d\mathbf{S}| = \iint |\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q|\, dpdq \qquad (4.6.5)$$

Στα φυσικά προβλήματα είναι δυνατό να προκύψουν ολοκληρώματα που περιέχουν το διαφορικό στοιχείο $d\mathbf{S}$ πολλαπλασιασμένο με κάποια άλλη συνάρτηση (βαθμωτή ή διανυσματική) σύμφωνα με τους ακόλουθους τρόπους

$$\int\!\!\int_S \phi(x_1,x_2,x_3)\, |d\mathbf{S}|, \qquad (4.6.6)$$

$$\int\!\!\int_S \phi(x_1,x_2,x_3)\, d\mathbf{S}, \qquad (4.6.7)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}, \tag{4.6.8}$$

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \times d\mathbf{S} \tag{4.6.9}$$

Τα ολοκληρώματα αυτά καλούνται επιφανειακά ολοκληρώματα. Ειδικότερα το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης **F**, δηλ. το (4.6.8) καλείται η ροή της **F** δια μέσου της **S** και θα συμβολίζεται ως

$$\Phi_F = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, |d\mathbf{S}| \tag{4.6.9}$$

Για τη χρησιμότητα των παραπάνω ολοκληρωμάτων ας δώσουμε ορισμένα παραδείγματα από διάφορες φυσικές εφαρμογές.

Ας θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $T(\mathbf{x})$ παριστάνει τη θερμοκρασία κάθε σημείου του χώρου που καλύπτεται από ένα ομογενές υλικό με συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας κ. Η κατεύθυνση ροής της θερμότητας δίνεται σύμφωνα με το νόμο του Fourier από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = -\kappa \nabla T(\mathbf{x})$$

Το αρνητικό σημείο εισήχθηκε ωστε ο παράγοντας κ να είναι θετικός, καθόσον η θερμότητα ρέει αντίθετα προς την κατεύθυνση αύξησης της θερμοκρασίας. Το μέτρο του **F** δίνει το ρυθμό ροής της θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στο διανυσματικό πεδίο **F**.

Γενικότερα, αν $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω σε τυχαία επιφάνεια, ο ρυθμός ροής της θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας δίνεται τότε από το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{F} \cdot \hat{n} = -\kappa \hat{n} \cdot \nabla T(\mathbf{x})$$

Έστω στοιχειώδες τμήμα δS_i της επιφάνειας S. Τότε αν

$$f(\mathbf{x}(i)) = -\kappa \hat{n} \cdot \nabla T(\mathbf{x}(i))$$

η τιμή της παραπάνω συνάρτησης στο $\mathbf{x}(i)$, από το στοιχειώδες τμήμα δS_i θα διέρχεται ροή θερμότητας ίση με

$$f(\mathbf{x}(i))\delta S_i = -\kappa \hat{n} \cdot \nabla T(\mathbf{x}(i))\delta S_i$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(Το αρνητικό σημείο υποδηλώνει ότι ενώ το ∇T στοχεύει στη διεύθυνση μέγιστου ρυθμού αύξησης της θερμοκρασίας, η θερμότητα ρέει αντίθετα αν $\kappa>0$ καθώς αναφέραμε πιο πάνω).

Αν το σύνολο της επιφάνειας έχει χωρισθεί σε *n* μικρά τμήματα δS_i τότε προσεγγιστικά μπορούμε να γράψουμε το συνολικό ρυθμό ροής ανά μονάδα χρόνου που διέρχεται από την επιφάνεια,

$$-\sum_{i=1}^{n} \kappa\, \hat{\mathbf{n}}\cdot \nabla T(\mathbf{x}(i))\delta S_i$$

Η ακριβής τιμή βρίσκεται όταν πάρουμε το όριο της τελευταίας, καθώς ο αριθμός n μεγαλώνει απεριόριστα και το μεγαλύτερο από τα τμήματα δS_i γίνεται απεριόριστα μικρό. Τότε

$$-\sum_{i=1}^{n} \kappa\, \hat{\mathbf{n}}\cdot \nabla T(\mathbf{x}(i))\delta S_i \underset{n\to\infty}{\to} \iint (-\kappa \nabla T(\mathbf{x})\cdot\hat{\mathbf{n}})dS$$

Δηλαδή η συνολική ροή θερμότητας διερχόμενη από την επιφάνεια S αντιστοιχεί στον υπολογισμό ενός διπλού ολοκληρώματος της μορφής της εξ. (4.6.9).

$$\Phi_F = \iint (\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dS$$

όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε, $\mathbf{F} = -\kappa \nabla T(\mathbf{x})$

Ανάλογο παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε και από τον ηλεκτρισμό. Η ροή ενός ηλεκτρικού πεδίου **E** δια μέσου στοιχειώδους τμήματος επιφάνειας δS_i είναι

$$\delta\Phi_E = \mathbf{E}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}\delta S_i = \mathbf{E}_i\cdot\delta\mathbf{S}_i$$

Η συνολική ροή δια μέσου της επιφάνειας S είναι τότε προσεγγιστικά

$$\sum_{i=1}^{n}\delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\mathbf{x}(i))\cdot\hat{\mathbf{n}}\delta S_i$$

και η ακριβής τιμή δίνεται στο όριο $n\to\infty$

$$\Phi_E = \int\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

Παράδειγμα 4.6.1

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss, η ροή του ηλεκτρικού πεδίου που διέρχεται μέσα από κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη του φορτίου που περιέχεται στον

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όγκο που περικλείει η επιφάνεια. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση **x** από σημειακό φορτίο q.

Λύση :

Η ροή ηλεκτρικού πεδίου δια μέσου επιφάνειας S είναι

$$\Phi_E = \int\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι ορισμός και η δεύτερη είναι συνέπεια του νόμου του Gauss. Ας θεωρήσουμε μια σφαίρα ακτίνας $r=|\mathbf{x}|$, με κέντρο το φορτίο q. Για λόγους συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό και το μέτρο του θα έχει την ίδια τιμή παντού στην επιφάνεια της σφαίρας. Δηλαδή

$$\mathbf{E} = E(r)\, \hat{e}_r \,,\ \hat{e}_r // \hat{n} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{E} \cdot \hat{n} = E(r)$$

Τότε

$$\Phi_E = E(r) \int\int_S dS = \mathbf{E} \cdot \hat{n}\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Άρα

$$\mathbf{E} \cdot \hat{n} = E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

οπότε

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$$

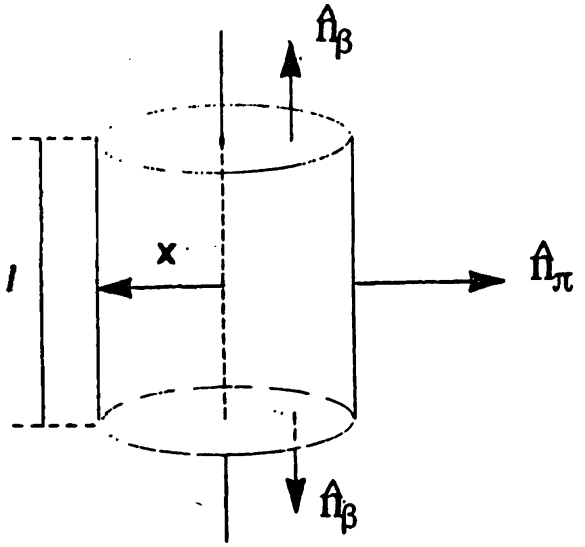
Παράδειγμα 4.6.2

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από άπειρη ευθεία με φορτίο λ ανά μονάδα μήκους ως συνάρτηση της απόστασης **x** από αυτή. Να χρησιμοποιηθεί ο νόμος του Gauss όπως αυτός διατυπώθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Λύση :

Για λόγους συμμετρίας και πάλι το πεδίο **E** έχει διεύθυνση κάθετη ως προς την άπειρη γραμμή. Αν θεωρήσουμε ότι η γραμμή αυτή συμπίπτει με τον άξονα x_3, τότε σε απόσταση **x** το πεδίο μπορεί να γραφεί $\mathbf{E} = E(r)\, \hat{n}_n$ όπου $\hat{n}_n$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στον άξονα x_3 δηλ. όλη η παράπλευρη επιφάνεια, σχ. 4.5.2. Το

πρόβλημα έχει κυλινδρική συμμετρία, συνεπώς επιλέγουμε μια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r, με άξονα τον x_3, που έχει μήκος h.



Σχήμα 4.6.1. Η γεωμετρία που διέπει το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από άπειρη γραμμή φορτισμένη.

Η επιφάνεια αυτή είναι κατά τμήματα συνεχής και πρέπει να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα Gauss σε τρία τμήματα ένα για την παράπλευρη επιφάνεια και δύο για τις βάσεις του κυλίνδρου. Ομως λόγω συμμετρίας το **E** είναι παράλληλο στις βάσεις άρα $\mathbf{E}\cdot\hat{n}_\beta = 0$. Συνεπώς αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μόνο στην παράπλευρη επιφάνεια

$$\iint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{E}\cdot \hat{n}_\pi\, |d\mathbf{S}| = E(r)\iint |d\mathbf{S}| = E(r)\, 2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

άρα $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$,

όπου $\dfrac{q}{h} = \lambda$ τα φορτία ανά μονάδα μήκους.

Παράδειγμα 4.6.3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int\int_S d\mathbf{S}$$

για θετικές τιμές του x_3, πάνω σε σφαίρα ακτίνας r=a. Να γίνει το ίδιο για τις αρνητικές τιμές του x_3. Ποιό είναι το αποτέλεσμα για όλες τις τιμές του x_3;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση:

Έχουμε ήδη δει στο παράδειγμα 3.1.1 ότι το διάνυσμα θέσης τυχαίου σημείου της σφαίρας είναι

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi) = a\{\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\imath}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\imath}_2 + \cos\theta\,\hat{\imath}_3\}$$

όπου έχουμε επιλέξει $p=\theta$ και $q=\varphi$. Από το ίδιο παράδειγμα γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi = a^2\{\sin^2\theta(\cos\varphi\,\hat{\imath}_1 + \sin\varphi\,\hat{\imath}_2) + \sin\theta\cos\theta\,\hat{\imath}_3\}$$

Είναι τότε $d\mathbf{S} = \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi\, d\theta d\varphi$. Η συνθήκη $x_3>0$ σημαίνει ότι $0\le\theta\le\pi/2$, οπότε

$$\iint d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,(\hat{\imath}_1 \sin^2\theta\cos\varphi + \hat{\imath}_2 \sin^2\theta\sin\varphi + \hat{\imath}_3 \sin\theta\cos\theta\}$$

$$= \left(\hat{\imath}_1 \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi + \hat{\imath}_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^2\theta +$$

$$+ \hat{\imath}_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 0 + 0 + \hat{\imath}_3 2\pi a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\theta\, d\cos\theta$$

$$= \hat{\imath}_3 \cdot 2\pi a^2 \cdot \frac{1}{2} = \hat{\imath}_3 \pi a^2$$

Για τις αρνητικές τιμές του x_3 όμοια βρίσκουμε ότι $\iint d\mathbf{S} = -\hat{\imath}_3 \pi a^2$.

Το συνολικό αποτέλεσμα για όλα τα x_3 είναι προφανώς μηδέν.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 4.6.4

Να υπολογιστεί η ροή διανυσματικού πεδίου

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \hat{e}_1 + x_1 x_2 \hat{e}_2$

δια μέσου της επιφάνειας που δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$x_1 = p + q, \qquad x_2 = p - q, \qquad x_3 = p^2$

όπου $0 \le p, q \le 1$.

Λύση:

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$$

Το $d\mathbf{S}$ με τη χρήση της (4.6.2) είναι

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\right) dpdq$$

$$= (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2p\hat{e}_3) \times (\hat{e}_1 - \hat{e}_2)\, dpdq = 2pdpdq\,(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

Τότε το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\right) dpdq = \int_0^1 \int_0^1 (\hat{e}_1 + x_1 x_2 \hat{e}_2) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\right) dpdq =$$

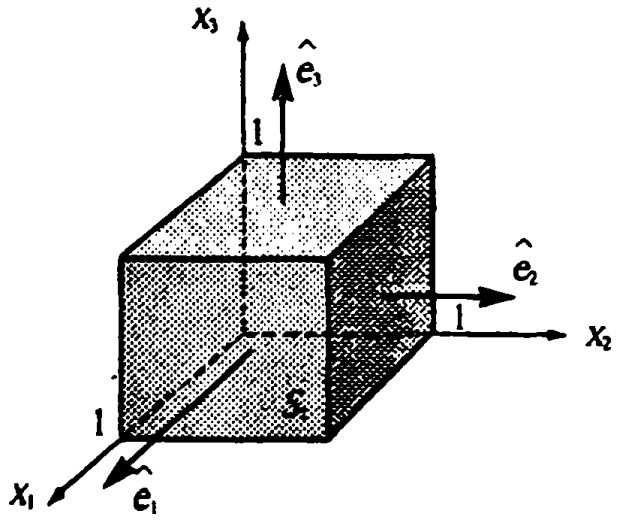
$$= \int_0^1 \int_0^1 [\hat{e}_1 + (p^2 - q^2)\hat{e}_2] \cdot \{\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2p\hat{e}_3) \times (\hat{e}_1 - \hat{e}_2)\, dpdq =$$

$$= \int_0^1 dp \int_0^1 dq\, (2p^3 - 2pq^2 + 2p) = \frac{7}{6}.$$

Παράδειγμα 4.6.5

Να υπολογιστεί η ροή του πεδίου $\mathbf{F} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$ δια μέσου της επιφάνειας κύβου με ακμές παράλληλες προς τους άξονες με μήκος ακμών ίσο με τη μονάδα, ο οποίος βρίσκεται τοποθετημένος όπως φαίνεται στο σχήμα (4.6.2).

Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 3, ότι η επιφάνεια κύβου είναι κατά τμήματα συνεχής. Επομένως το ολοκλήρωμα (4.6.9) πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά σε κάθε μία από τις έξι επιφάνειες. Έχουμε



Σχήμα 4.6.2. Η ροή του πεδίου $\mathbf{F} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$ *δια μέσου της επιφάνειας ενός κύβου.*

Λύση :

$$\iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{6} \iint \mathbf{F} \cdot \hat{n}_i \, |d\mathbf{S}_i|$$

Για την επιφάνεια S_1 το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι $\hat{n}_1 = \hat{e}_1$ συνεπώς

$$\iint \mathbf{F} \cdot \hat{n}_1 \, |d\mathbf{S}_1| = \int_0^1 \int_0^1 (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3) \cdot \hat{e}_1 (dx_2 dx_3)$$

$$= x_1 \int_0^1 \int_0^1 dx_2 dx_3 = x_1$$

Ομως πάνω στην επιφάνεια S_1, $x_1 = 1$ άρα $\iint \mathbf{F} \cdot \hat{n}_1 \, |d\mathbf{S}_1| = 1$.

Η S_2 βρίσκεται απέναντι από αυτή και σύμφωνα με αυτά που είπαμε στο κεφάλαιο 3 σχετικά με τον προσανατολισμό των κλειστών επιφανειών είναι $\hat{n}_2 = -\hat{e}_1$. Άρα

$$\iint \mathbf{F} \cdot \hat{n}_2 \, |d\mathbf{S}_2| = x_1 \iint \hat{e}_1 \cdot (-\hat{e}_1) \, dx_2 dx_3 = -x_1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ομως πάνω στην S_2, είναι $x_1=0$, άρα $\iint \mathbf{F} \cdot \hat{n}_2 \, |d\mathbf{S}_2| = 0$

Ανάλογα εργαζόμαστε και για τις άλλες επιφάνειες. Τελικά βρίσκουμε

$$\Phi_E = \iint \mathbf{F} \cdot \hat{n}_i \, |d\mathbf{S}_i| = 3$$

Για παραλληλεπίπεδο ακμών a,b,c είναι

$$\Phi_F = 3V \qquad V = abc$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο του προσανατολισμού του παραλληλεπιπέδου.

Παράδειγμα 4.6.6

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του διανύσματος $\mathbf{F} = x^2{}_1\hat{e}_1 + x_1x_2\hat{e}_2 + x_1x_3\hat{e}_3$ πάνω στην επιφάνεια τριγώνου με κορυφές (1,0,0), (0,2,0) και (0,0,3).

Λύση:

Από την εξίσωση του επιπέδου (εδ.1.10)

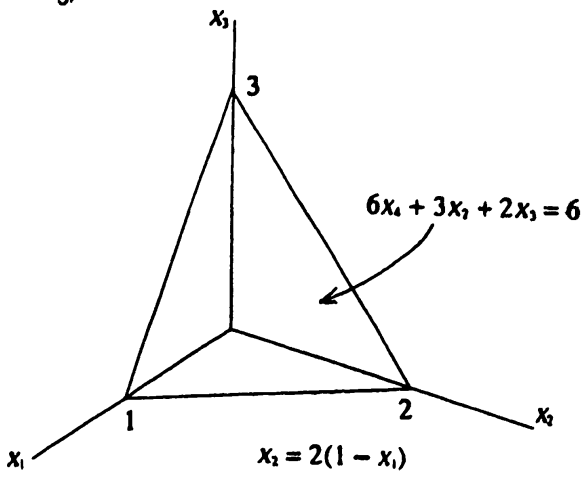
$$\hat{n} \cdot \mathbf{x} = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1x^0{}_1 + n_2x^0{}_2 + n_3x^0{}_3$$

μπορούμε εύκολα να βρούμε τις συνιστώσες του μοναδιαίου, κάθετου στην επιφάνεια του τριγώνου, διανύσματος $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ Πράγματι

$$\hat{n} \cdot \mathbf{x} = n_1 \cdot 1 = n_2 \cdot 2 = n_3 \cdot 3$$

όπου κάναμε χρήση των συντεταγμένων των κορυφών του τριγώνου. Τότε

$$\hat{n} = \frac{1}{7}(6\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3)$$



Σχήμα 4.6.3. Η τομή του επιπέδου $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ *με το επίπεδο των αξόνων.*

και η εξίσωση του επιπέδου είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

Η προβολή της συνάρτησης **F** στο διάνυσμα $\hat{n}$ είναι τότε

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\hat{n} = \frac{1}{7}(6x^2_1 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3)$$

Επίσης από το κεφάλαιο 3 (σχέση (3.1.24)) έχουμε $\cos\gamma = \hat{n}\cdot\hat{e}_3 = \frac{2}{7}$ και $|d\mathbf{S}|=dx_1dx_2$ όπου το x_1 μεταβάλλεται στο (0,1) και το x_2 από μηδέν μέχρι την καμπύλη $x_2 = 2(1- x_1)$, (Βλέπε σχ. 4.6.3). Τότε έχουμε

$$\iint (\mathbf{F}\cdot\hat{n})\frac{|d\mathbf{S}|}{\cos\gamma} = \frac{1}{2}\int_0^{12(1-x_1)}\int_0 (6x^2_1 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3)\,dx_1dx_2$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα συμμετέχει η μεταβλητή x_3, η οποία όμως μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση των x_1, x_2 από την εξίσωση του επιπέδου. Είναι

$$x_3 = \frac{1}{2}(6 - 6x_1 - 3x_2)$$

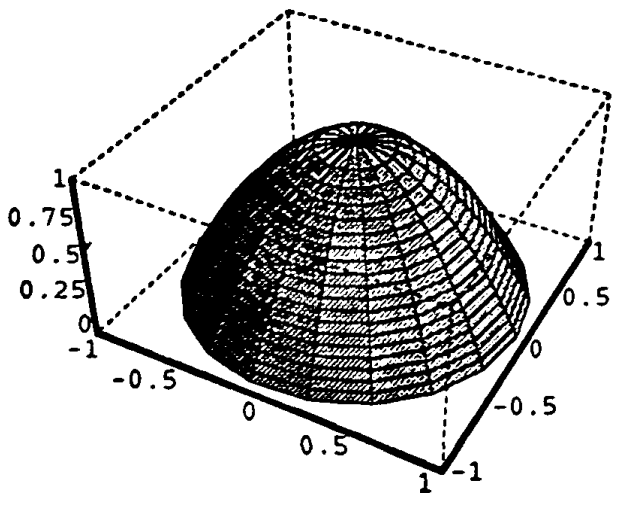
Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_0^{12(1-x_1)}\int_0 3x_1\,dx_1dx_2 = 1$$

Παράδειγμα 4.6.7

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + 2x_3\hat{e}_3$ και η επιφάνεια παραβολοειδούς $x^2_1 + x^2_2 + x_3 = 1$, για $x_3>0$ (βλέπε σχ. 4.6.3). Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$



Σχήμα 4.7.3. Η επιφάνεια του παραβολοειδούς $x^2_1 + x^2_2 + x_3 = 1$, για $x_3>0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

Από τη θεωρία των επιφανειών γνωρίζουμε ότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας είναι

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

Η εξίσωση της επιφάνειας για το παραβολοειδές είναι

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x^2_1 + x^2_2 + x_3 = 1$$

'Αρα

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x_1\hat{e}_1 + 2x_2\hat{e}_2 + \hat{e}_3}{\sqrt{4x^2_1 + 4x^2_2 + 1}}$$

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε και στην προηγούμενη άσκηση

$$\iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint (\mathbf{F}\cdot\hat{n})\frac{|dS|}{\cos\gamma}$$

όπου $\cos\gamma = \hat{e}_3\cdot\hat{n} = -(4x^2_1 + 4x^2_2 + 1)^{-1/2}$

$$\mathbf{F}\cdot\hat{n} = \frac{2x^2_1 + 2x^2_2 + x_3}{\sqrt{4x^2_1 + 4x^2_2 + 1}} \quad \text{και} \quad |d\mathbf{S}| = dx_1 dx_2$$

Από το σχήμα και την εξίσωση του παραβολοειδούς συνάγουμε τα όρια ολοκλήρωσης των x_1 και x_2. Η εξίσωση για το x_2 προκύπτει θέτοντας $x_3=0$ στην εξίσωση του παραβολοειδούς. Αρα $x_2 = \pm\sqrt{1 - x^2_1}$. Το x_1 μεταβάλλεται στο διάστημα [1,−1]. Εχουμε τότε

$$\iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\int_{-1}^{1} dx_1 \int_{-\sqrt{1-x^2_1}}^{\sqrt{1-x^2_1}} dx_2\,(2x^2_1 + 2x^2_2 + x_3)$$

$$= \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{-\sqrt{1-x^2_1}}^{\sqrt{1-x^2_1}} \{2x^2_1 + 2x^2_2 + (1 - x^2_1 - x^2_2)\}\,dx_2$$

$$= -\int_{-1}^{1} dx_1 \int_{-\sqrt{1-x^2_1}}^{\sqrt{1-x^2_1}} dx_2 .(x^2_1 + x^2_2 + 1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= 2 \int_{-1}^{1} dx_1 \sqrt{1-x^2}_1 \left(x^2_1 + \frac{1}{3}(1-x^2_1) + 1 \right)$$

$$= 4 \int_{0}^{1} dx_1 \sqrt{1-x^2}_1 \left(\frac{2}{3} x^2_1 + \frac{4}{3} \right)$$

Θέτουμε $x_1 = \sin\theta$ και $dx_1 = \cos\theta d\theta$, οπότε

$$\iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4 \int_{0}^{\pi/2} \cos^2\theta \left(\frac{2}{3} \sin^2\theta + \frac{4}{3} \right) d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \left(3 - \frac{1}{3}\cos 4\theta + \frac{8}{3}\cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

4.7 Ολοκληρώματα Όγκου

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μια βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(\mathbf{x})$ ορισμένη σε τόπο V και στο σύνορο αυτού.

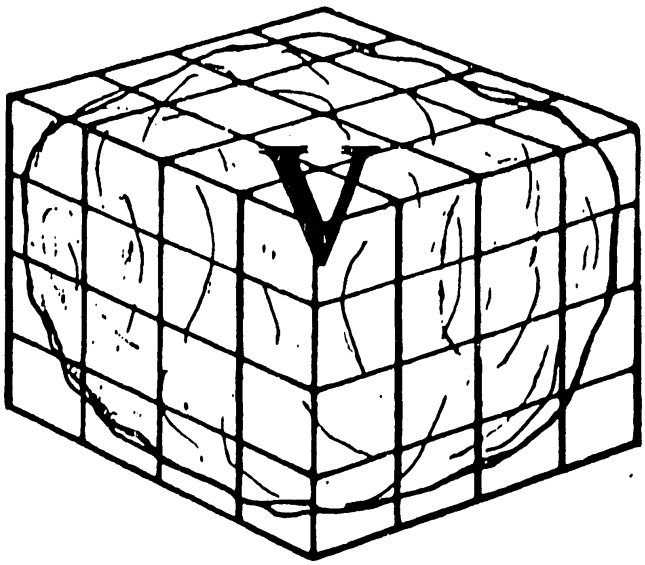
Θεωρούμε κύβο αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να καλύπτει πλήρως τον τόπο V. Στη συνέχεια υποδιαιρούμε τον κύβο σε μικρά παραλληλεπίπεδα με επίπεδα κάθετα στους άξονες ορθογωνίου συστήματος που έχει τους άξονες παράλληλους με της ακμές του κύβου (σχήμα 4.7.1). Αγνοούμε τα παραλληλεπίπεδα που δεν έχουν κοινό σημείο με τον τόπο V, και συμβολίζουμε εκείνα που έχουν, με $\delta V_1, \ldots \delta V_n$. Επιλέγουμε σε κάθε παραλληλεπίπεδο δV_i, ένα σημείο του (x^i_1, x^i_2, x^i_3) και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(x^i_1, x^i_2, x^i_3)\, \delta V_i \qquad (4.7.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ως χωρικό ολοκλήρωμα του βαθμωτού πεδίου $\Phi(\mathbf{x})$ ορίζεται το όριο του αθροίσματος (4.7.1) καθώς οι υποδιαιρέσεις τείνουν στο άπειρο, και τα δV_i στο μηδέν

$$\iiint_V \Phi(\mathbf{x})\, dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Phi(x'_1, x'_2, x'_3)\, \delta V_i \qquad (4.7.2)$$



Σχήμα 4.7.1. Ο τόπος V περικλείεται σε ένα κύβο ο οποίος υποδιαιρείται σε στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα.

Σημειώνουμε, ότι για να έχει έννοια η (4.7.2), πρέπει να απαιτήσουμε το όριο του αθροίσματος να είναι πάντα ανεξάρτητο από τον τρόπο υποδιαίρεσης του V. Πρακτικά, η ολοκλήρωση (4.7.2) γίνεται ως εξής:

Σύμφωνα με την υποδιαίρεση σε μικρά παραλληλεπίπεδα μπορούμε να γράψουμε τον στοιχειώδη όγκο

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (4.7.3)$$

Η τελευταία αντικαθίστανται στην (4.7.2) και οδηγεί σε μία τριπλή ολοκλήρωση η οποία γίνεται διαδοχικά για τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3

$$\iiint \Phi(\mathbf{x})\, dV = \iiint \Phi(\mathbf{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (4.7.4)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της ολοκλήρωσης όγκου και σε διανυσματικές συναρτήσεις. Αν **F**(**x**) είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται μέσα και πάνω στο σύνορο τόπου V, τότε το ολοκλήρωμα όγκου της **F** στον εν λόγω τόπο είναι:

$$\iiint_V \mathbf{F}(\mathbf{x})\, dV = \hat{e}_1 \iiint F_1(\mathbf{x})\, dV + \hat{e}_2 \iiint F_2(\mathbf{x})\, dV + \hat{e}_3 \iiint F_3(\mathbf{x})\, dV \qquad (4.7.5)$$

Στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων όγκου, διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε συντεταγμένες διαφορετικές από τις καρτεσιανές. Γνώμονα για τη σωστή επιλογή των συντεταγμένων αποτελεί σχεδόν πάντα η συμμετρία του προβλήματος. Για παράδειγμα σε προβλήματα με σφαιρική συμμετρία είναι συμφέρον να εργασθούμε στις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) οι οποίες συνδέονται με τις καρτεσιανές $x_{1,2,3}$ (βλέπε και εδάφιο 6.3 πιο κάτω) ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\theta \cos\varphi \\ x_2 &= r \sin\theta \sin\varphi \qquad (4.7.6) \\ x_3 &= r \cos\theta \end{aligned}$$

Το στοιχείο του όγκου στο νέο σύστημα συντεταγμένων βρίσκεται σύμφωνα με τη σχέση

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} dr\, d\theta\, d\varphi \qquad (4.7.7)$$

Η παραπάνω ορίζουσα καλείται Ιακωβιανή (Jacobian), και συμβολίζεται με J(r,θ,φ), χαρακτηρίζει δε το μετασχηματισμό από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο αντίστοιχο των σφαιρικών. Τους μετασχηματισμούς από ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάποιο άλλο θα μελετήσουμε διεξοδικά στο κεφάλαιο VI. Στην ειδική περίπτωση της εξ. (4.7.6) η Ιακωβιανή μπορεί εύκολα να υπολογισθεί

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \qquad (4.7.8)$$

'Αρα στις σφαιρικές συντεταγμένες το στοιχείο του όγκου είναι

$$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \qquad (4.7.9)$$

Γενικά τώρα, όταν οι μεταβλητές του τριπλού ολοκληρώματος είναι επιθυμητό να αλλάξουν από x_1, x_2, x_3 σε ένα άλλο σύστημα u_1, u_2, u_3 σύμφωνα με δοσμένο μετασχηματισμό των συντεταγμένων,

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3)\ i = 1,2,3 \qquad (4.7.10)$$

τότε, με την προυπόθεση ότι οι $x_i(u_1, u_2, u_3)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες και η $J(u_1, u_2, u_3) \neq 0$, μπορούμε να γράφουμε

$$\iiint_V \phi(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \iiint_V \Phi(x_i(u_1, u_2, u_3))\, |J(u_1, u_2, u_3)|\, du_1\, du_2\, du_3 \qquad (4.7.11)$$

<u>'Ασκηση:</u> Να γραφεί το στοιχείο όγκου $dV=dx_1dx_2dx_3$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες

$x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$,
$x_3 = x_3$ (<u>Απάντηση</u> : $dV = \rho d\rho d\varphi dx_3$)

Παράδειγμα 4.7.1

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα όγκου της $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2\, x_3)$, στον όγκο που εσωκλείουν οι επιφάνειες $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1 + x_1$, με τα επίπεδα των αξόνων.

<u>Λύση</u> :

Με απ' ευθείας αντικατάσταση της $\phi(\mathbf{x})$ στο ολοκλήρωμα όγκου έχουμε:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

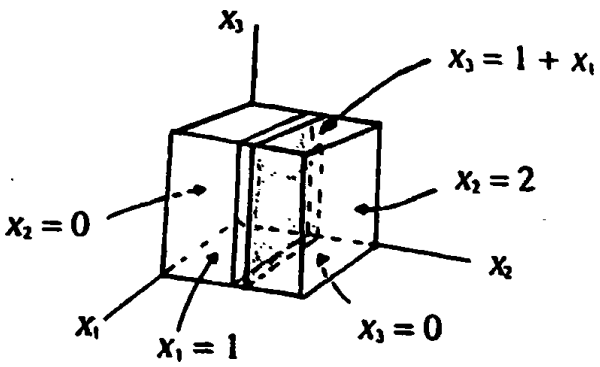
$$\iiint \phi(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^2 dx_2 \int_0^{1+x_1} dx_3\, (x_1 + x_2 x_3) =$$

$$= \int_0^2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \left\{x_1 x_3 + \frac{1}{2} x_2 x_3^2\right\}_0^{1+x_1}$$

$$= \int_0^2 dx_2 \int_0^1 dx_1 \left\{x_1(1+x_1) + \frac{1}{2} x_2 (1+x_1)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^2 (5+7x_2)\, dx_2 = 4$$

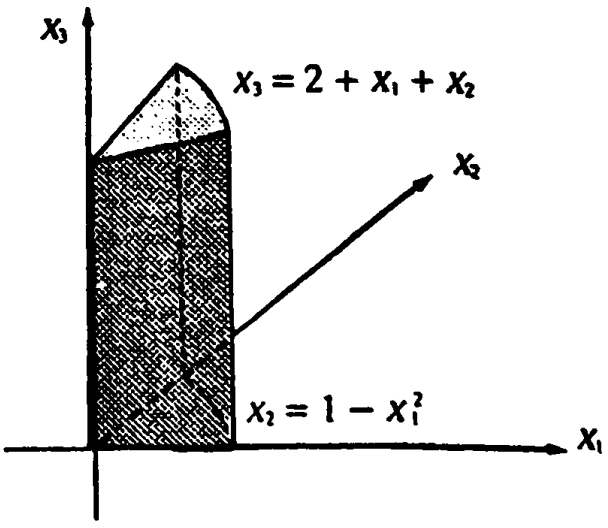


Παράδειγμα 4.7.2

Να βρεθεί ο όγκος περιοχής που περιβάλλεται από τις ακόλουθες επιφάνειες. i) Τα επίπεδα x_1Ox_2 και $x_3 = 2+x_1+x_2$. ii) Τα επίπεδα $x_1 = x_2 = 0$ και iii) την επιφάνεια $x_2 = 1-x^2_1$.

Λύση:

Η περιοχή δείχνεται στο σχήμα που ακολουθεί



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η συνιστώσα x_1 μεταβάλλεται στο διάστημα $0 \le x_1 \le 1$. Τότε η x_2 καθορίζεται από την εξίσωση $x_2 = 1-x^2_1$.και η x_3 από την εξίσωση του πάνω επιπέδου $x_3=2+x_1+x_2$.

'Εχουμε τότε

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x^2_1} \int_0^{2+x_1+x_2} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x^2_1} dx_2 \int_0^{2+x_1+x_2} dx_3$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x^2_1} dx_2\, (2+x_1+x_2) =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \left(2x_2 + x_2x_1 + \frac{1}{2}\, x^2_2\right) \Big|_0^{1-x^2_1}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} + x_1 - 3x^2_1 - x^3_1 + \frac{1}{4}\, x^4_1\right) dx_1 = \frac{37}{20}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1.1. Η εξίσωση καμπύλης C δίνεται από

$$\mathbf{x}(t) = \cos t\, \hat{e}_1 + \sin t\, \hat{e}_2 + e^t \hat{e}_3 \,,\ 0 \le t \le \pi/2$$

να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

όπου $\mathbf{F} = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2}(-x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2) + 2x_3\hat{e}_3$

4.1.2. Να αποδειχτεί η (4.1.12) και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα για r=1+cosθ, απο θ = 0 έως θ= 2π.

4.2.1. Αν $\mathbf{F} = \frac{-x_2\hat{e}_1 + x_1\hat{e}_2}{x_1^2 + x_2^2}$ να υπολογιστεί το $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$ σε κλειστό δρόμο ακτίνας r=a με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων, πάνω στο επίπεδο x_1Ox_2.

4.2.2 Να υπολογιστεί το $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ απο το σημείο (0,1,1) μέχρι (1,0,1) πάνω στην καμπύλη : $x_1^2 + x_2^2 = 1$

4.2.3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της **F** με συνιστώσες:

$$F_1 = -x_1^2 x_2 \text{ και } F_2 = x_2^3,$$

στον κλειστό δρόμο που ορίζεται απο την καμπύλη :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,\ x_3 = 0.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.2.4. Δίνεται το πεδίο

$$\mathbf{E} = F(x_1+x_2)\,\hat{x}_1 + F(x_1-x_2)\,\hat{x}_2$$

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στον κλειστό δρόμο που σχηματίζεται απο τα ευθύγραμμα τμήματα με κορυφές (0,0), (1,0), (1,1) (0,1), πάνω στο επίπεδο (x_1O x_2). Συγκεκριμένα να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$ ισούται με

$$3\int_0^1 F(t)dt - \int_{-1}^{2} F(t)dt$$

4.3.1. Εξηγείστε τι περιοχή είναι το πεδίο ορισμού του μαγνητικού πεδίου **B** που δημιουργείται από συνεχές ρεύμα που διαρρέει αγωγό κατα μήκος του άξονα x_3.

4.3.2. Τι περιοχή ορίζουν τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου για τα οποία
α) $z>0$; β) $z \geq 0$; γ) $c < \Sigma x_i^2 < d$, c,d = πραγματικοί θετικοί αριθμοί.

4.4.1. Να δειχθεί ότι το πεδίο

$$\mathbf{F} = x_1 x_2^2\,\hat{x}_1 + x_1^3 x_2 \hat{x}_2$$

δεν είναι διατηρητικό .

4.4.2. Να δειχθεί ότι το :

$$\mathbf{F} = 3x_1^2 x_2 \hat{x}_1 + (1+x_1^3)\,\hat{x}_2 + 9\,x_3^2\,\hat{x}_2$$

είναι διατηρητικό .

4.4.3. Να δειχθεί ότι το

$$\mathbf{F} = 2x_1\,x_2\,\hat{e}_1 + (1+x_1^2)\,\hat{e}_2 + 6\,x_3^2\,\hat{e}_3$$

είναι διατηρητικό . Να βρεθεί το δυναμικό.

4.4.4. Να μελετηθεί κατά πόσο το πεδίο

$$\mathbf{F} = -\frac{-x_2\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

είναι διατηρητικό. Υπολογίστε το $\nabla x\mathbf{F}$ και το δυναμικό εφόσον υπάρχει. Τι συμπεραίνετε; Κατόπιν υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του **F** πάνω σε περιφέρεια με κέντρο το σημείο (0,0,0). Ξαναϋπολογίστε το ολοκλήρωμα σε κύκλο με κέντρο που δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα x_3. Υπάρχει αντίφαση;

4.4.5. Η δύναμη $\mathbf{F} = \mathbf{x}/r3$ ορίζεται παντού στο χώρο εκτός απο το σημείο (0,0,0). Να βρεθεί το δυναμικό αν υπάρχει. Να βρεθεί το έργο πάνω σε σωμάτιο που κινείται απο το σημείο (1,2,3) στο (2,3,5).

4.4.6. Να υπολογιστεί το grad της $\phi = \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}$. Αναλύσατε το αποτέλεσμα της πράξης αυτής σε σχέση με την προηγούμενη άσκηση. Υπάρχει αντίφαση;

4.5.1. Να βρεθεί ένα διανυσματικό δυναμικό για τη συνάρτηση

$$\mathbf{F} = x_1\hat{e}_2$$

(απάντηση: $-\frac{1}{2}x^2_1\,\hat{e}_3$)

4.6.1. Με το νόμο του Gauss να βρεθεί το μέγεθος του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση h από άπειρο επίπεδο με πυκνότητα φορτίου σ ανα μονάδα επιφάνειας.

4.6.2. Κυλινδρικός μονωτής θερμότητας περιβάλλει σωλήνα ατμού. Έστω r= a και r=b η εσωτερική και εξωτερική ακτίνα του μονωτή και T_a και T_b οι θερμοκρασίες του εσωτερικού και εξωτερικού τοιχώματος του αντίστοιχα. Να βρεθεί η θερμοκρασία T(r) στο εσωτερικό του μονωτή, ως συνάρτηση της ακτίνας r.

4.6.3. Δίνεται ο τόρος του σχήματος, με μεγάλη και μικρή ακτίνα R_0 και r_0 αντίστοιχα. Να περιγραφεί τυχαίο σημείο της επιφάνειας με τις γωνίες θ και φ του σχήματος. Να υπολογιστεί η επιφάνεια του.

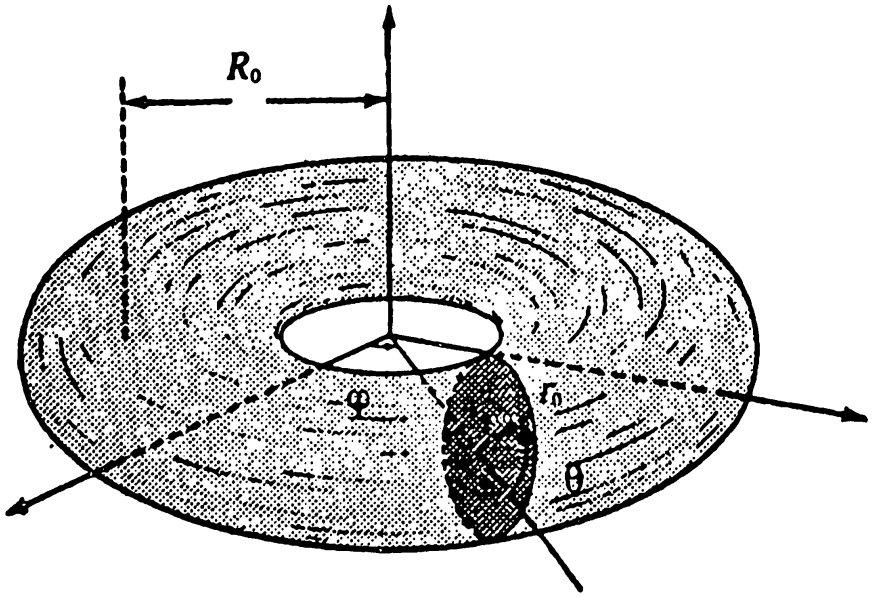
(Απ. $S = 4\pi^2 R_0 r_0$)

4.7.1. Εστω $\mathbf{F}= x^2_1\,\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

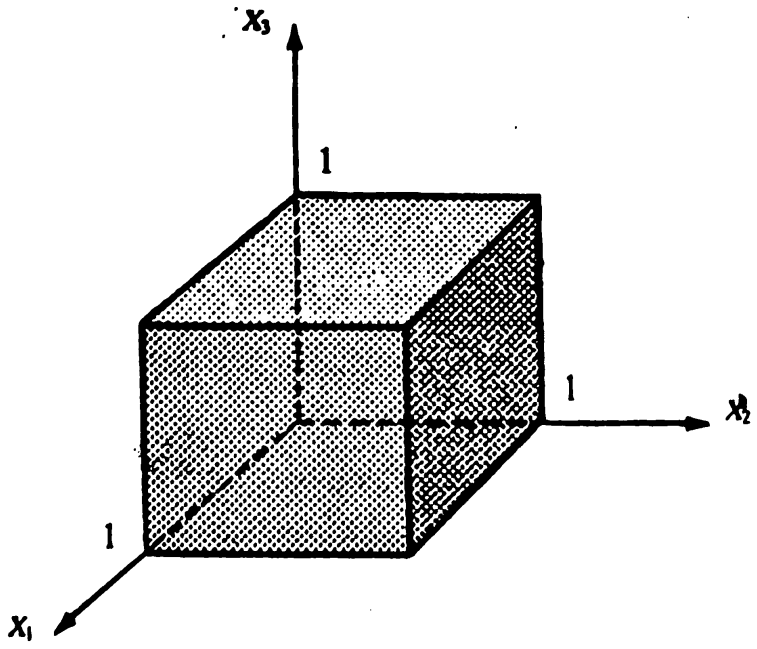
$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\,,\quad \int\int\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\cdot dx$$

για τον κύβο του σχήματος. Τι παρατηρείτε;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα : Ο τόρος της άσκησης 4.6.3



Σχήμα : Ο κύβος της άσκησης 4.7.1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

4.7.2. Να βρεθεί ο όγκος που περιβάλλεται από τις επιφάνειες

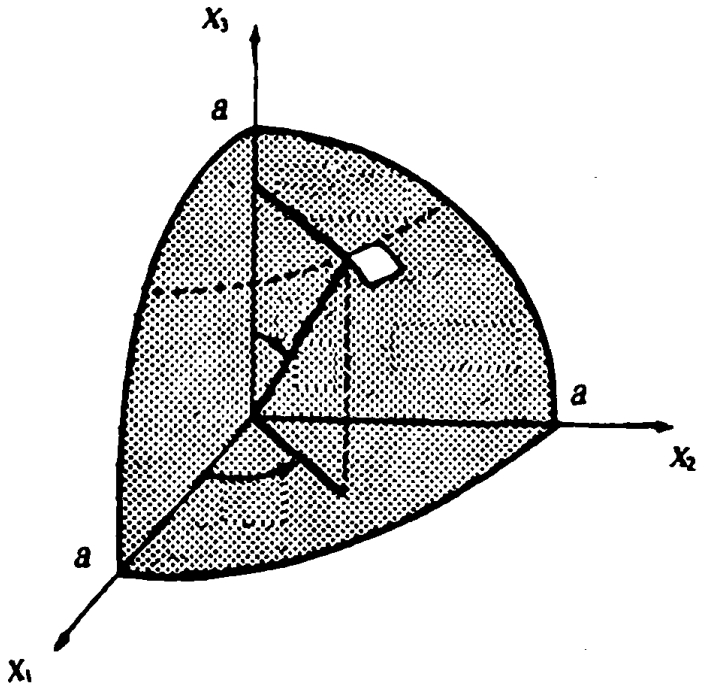
$x_3 = \exp\{-x^2_1 - x^2_2\}$

$x^2_1 + x^2_2 = 1$ και $x_3 = 0$

(Οι κυλινδρικές συντεταγμένες ίσως αποβούν χρήσιμες.)

4.7.3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int\int_S x_3^2 \, dS$$



Σχήμα : τμήμα επιφάνειας σφαίρας της άσκησης 4.7.3.

πάνω στο τμήμα επιφάνειας σφαίρας ακτίνας a που ορίζεται μεταξύ των θετικών τμημάτων των αξόνων (x_1,x_2,x_3) (βλέπε σχήμα).

4.7.4. Έστωσαν δύο μη μηδενικές συναρτήσεις $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, για τις οποίες ισχύει $\nabla \cdot(\Phi \cdot \mathbf{F}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{F}$. i) Με τη χρήση γνωστής ταυτότητας να βρεθεί μία σχέση για τις Φ και $\nabla \cdot \mathbf{F}$. ii) Αν $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = r\,(\sin\varphi\, \hat{e}_1 - \cos\varphi\, \hat{e}_2)$ και $\nabla \cdot \mathbf{F} = r-2$ όπου $r = |x| = |\, x_1\, \hat{e}_1 + x_2\, \hat{e}_1\,|$, να βρεθεί η $\Phi(\mathbf{x})$.

4.7.5. Να υπολογιστεί ο όγκος ελλειψοειδούς με ημιάξονες a,b,c. (Απάντηση $V = 4\pi\, abc/3$)

4.7.6. Έστω κύλινδρος ύψους h και ακτίνα βάσεων ίση με a. Έστω επίπεδο Ε το οποίο ορίζεται απο τη διάμετρο d και ένα σημείο Μ της περιφέρειας της άλλης βάσης. Να δειχτεί ότι το τμήμα του κυλίνδρου που περικλύεται απο τα επίπεδα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ε,Β και την κυρτή επιφάνειά του έχει όγκο ίσο με $V=2\ h/(3\ a^2)$. Με τη χρήση του αποτελέσματος τούτου αποδείξτε το ακόλουθο

Θεώρημα του Αρχιμήδη: Αν σε ορθό πρίσμα με τετράγωνες βάσεις είναι εγγεγραμένος κύλινδρος που έχει βάσεις εγγεγραμένες στις βάσεις αυτού και οι τέσσερις γενέτηρές σου ανα μία μέσα στις τετράπλευρες έδρες του πρίσματος και αν θεωρηθεί το επίπεδο που ορίζεται απο το κέντρο της μιάς βάσης του κυλίνδρου και απο τη μιά πλευρά της απέναντι βάσης του πρίσματος, αυτό θα αποκόψει απο τον κύλινδρο ένα τμήμα του που ο όγκος του ισούται με το 1/6 του όγκου του πρίσματος. (Το θεώρημα αυτό συμπεριλαμβάνεται στο έργο του Αρχιμήδη "Περί Μηχανικών Θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος" και ευρέθη σε χειρόγραφο στις αρχές του Αιώνα.)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στα προηγούμενα, και ειδικότερα στο κεφ III, θέσαμε τις βάσεις που μας επιτρέπουν να ασχοληθούμε κάπως διεξοδικά με δύο από τα πιο βασικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης. Το θεώρημα της απόκλισης (ή τύπος του Green) και το θεώρημα - τύπος του Stokes. Λόγω της μεγάλης χρησιμότητας των θεωρημάτων αυτών, ιδιαίτερα στην Μηχανική των ρευστών και την κλασσική ηλεκτροδυναμική, η ενασχόληση μας με αυτά θα είναι κάπως διεξοδική.

5.1 Η φυσική σημασία της απόκλισης

Ο μαθηματικός ορισμός της απόκλισης, όπως έγινε στην (3.5.3), δεν δίνει άμεσα τη βαθύτερη φυσική σημασία της ποσότητας αυτής. Θα ιδούμε πιο κάτω ότι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου **F** σχετίζεται με την ροή του πεδίου **F** διαμέσου μιας επιφανείας S. Η τελευταία ορίζεται από την εξ. (4.6.9) δηλαδή ως

$$\Phi_F = \int\int (\mathbf{F}\cdot \hat{n})\, dS \qquad (5.1.1)$$

όπου $\hat{n}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια και κατάλληλα προσανατολισμένο. Ανάλογα ορίζεται και η ροή του διανύσματος **F** διαμέσου μιας κλειστής επιφανείας S , δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\Phi_F = \oiint_S (\mathbf{F}\cdot \hat{n})\, dS \qquad (5.1.2)$$

Στην (5.1.2) το διάνυσμα $\hat{n}$ είναι προσανατολισμένο προς το εξωτερικό του χώρου που μας ενδιαφέρει. Θα δούμε πιο κάτω ότι αν η ροή δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας είναι διάφορη από το μηδέν λέμε ότι υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες στο εσωτερικό της επιφάνειας S. Αντίστροφα, αν σε κάποιο σημείο υπάρχει πηγή ή καταβόθρα η απόκλιση του διανύσματος **F** σε κείνο το σημείο είναι διάφορη από το μηδέν.

Πριν συσχετίσουμε τη ροή Φ_F με την απόκλιση της **F**, δηλαδή την ποσότητα $\nabla \cdot \mathbf{F}$, θα ασχοληθούμε με ένα παράδειγμα από την υδροδυναμική που δικαιολογεί και τα πιο πάνω ονόματα.

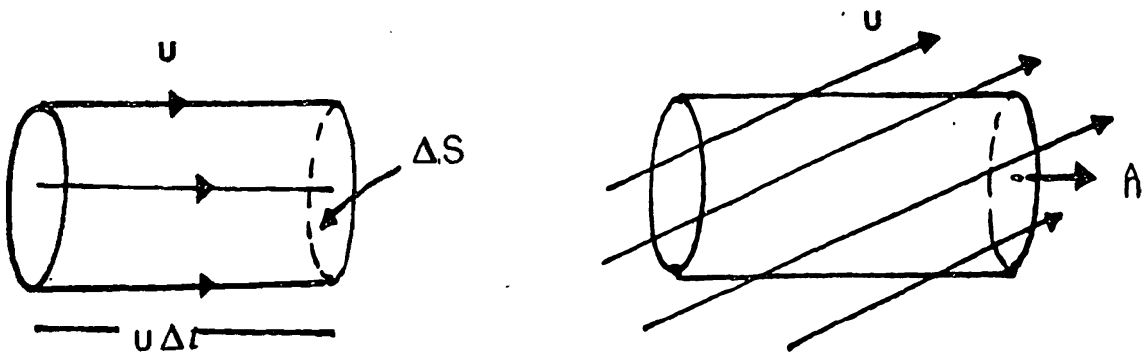
'Ενα ρευστό περιγράφεται μακροσκοπικά πλήρως αν είναι γνωστή η πυκνότητα ρ αυτού και η ταχύτητα **u** αυτού σε κάθε σημείο του χώρου του ρευστού ως συνάρτηση του χρόνου. Αν η κατάσταση δεν αλλάζει με το χρόνο, είναι αρκετό να γνωρίζουμε τις συναρτήσεις ρ(**x**) και **u** (**x**). Ονομάζουμε ροή του ρευστού δια μέσου μιας επιφανείας S τη μάζα του ρευστού που διέρχεται δια μέσου της επιφανείας αυτής ανά μονάδα χρόνου. Για τον υπολογισμό της ροής αυτής ας θεωρήσουμε πρώτα την απλή περίπτωση που η επιφάνεια είναι κάθετη στην ταχύτητα του ρευστού. Θεωρούμε αρκετά μικρή επιφάνεια ΔS και μικρό χρόνο Δt ώστε η ταχύτητα του ρευστού δεν αλλάζει κατά μέτρο και διεύθυνση μέσα στον κύλινδρο του σχήματος 5.1.1. Τότε σε χρόνο Δt μόνο η ποσότητα του ρευστού που βρίσκεται μέσα σε κύλινδρο βάσης ΔS και ύψους νΔt θα περάσει διαμέσου της ΔS δηλαδή :

$$\Delta m = \text{πυκνότητα} \times \text{όγκος} = \rho u \Delta t\, \Delta S$$

δηλαδή η ζητούμενη ροή είναι:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho u \Delta S \qquad (5.1.3)$$

Αν η επιφάνεια δεν είναι κάθετη στην ταχύτητα τότε μόνο το ρευστό που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο με βάση ΔS και ύψος $u_\perp \Delta t$ θα περάσει διαμέσου της ΔS, όπου $u_\perp = u \cos\theta$, η συνιστώσα της ταχύτητας κάθετη στην επιφάνεια και θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **u** και $\hat{n}$. Τότε η (5.1.4). γίνεται



5.1.1. Η μάζα Δm που θα περάσει σε χρόνο Δt μέσα από την ΔS περιλαμβάνεται στον κύλινδρο που σχεδιάστηκε.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho u \cos\theta \, \Delta S \qquad (5.1.4)$$

$$= \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} \, \Delta S$$

Αν τώρα ορίσουμε την πυκνότητα ρεύματος **J**

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$$

η (5.1.4) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \mathbf{J} \cdot \hat{n} \, \Delta S \qquad (5.1.5a)$$

Από την (5.1.5a) βλέπουμε ότι η ροή του ρευστού ταυτίζεται με την ροή του διανύσματος **J**, δηλαδή

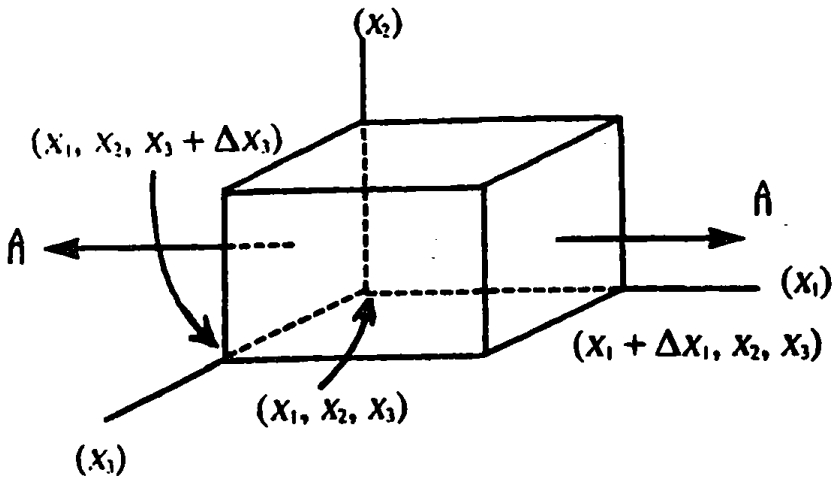
$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \Phi_J = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} \, \Delta S \qquad (5.1.5b)$$

από όπου προέρχεται και το όνομα της ποσότητας που ορίζεται στην εξίσωση (5.1.1).

Θα προσπαθήσουμε τώρα να συσχετίσουμε τη ροή του διανύσματος **J** με την απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{J}$ αυτού. Πρότυπο ως κλειστή επιφάνεια θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο του σχ. 5.1.2. Θα υπολογίσουμε την συνολική ροή ρευστού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

δια μέσου και προς τα έξω από τις έξι πλευρές αυτού (σχ. 5.1.2). Σημειώνουμε ότι το $\hat{A}$ θεωρείται προσανατολισμένο προς τον εξωτερικό του όγκου χώρο.



Σχήμα 5.1.2. Υπολογίζεται η ροή του **J** *διαμέσου των 6 πλευρών του παραλληλεπιπέδου.*

Η ποσότητα που διέρχεται από την επιφάνεια ΔA_I στη μονάδα του χρόνου, σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι

$$\mathbf{J} \cdot \hat{A}_I \, \delta A_I = \mathbf{J} \cdot (-\hat{e}_1) \, \Delta x_2 \Delta x_3$$

$$= - J_1(x_1, x_2, x_3) \, \Delta x_2 \Delta x_3$$

Αντίστοιχα από την απέναντι επιφάνεια ΔA_{II} είναι

$$\mathbf{J} \cdot \hat{A}_{II} \, \delta A_{II} = J_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) \, \Delta x_2 \, \Delta x_3$$

Συνολικά από τις δύο επιφάνειες

$$\{ J_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - J_1(x_1, x_2, x_3) \} \, \Delta x_2 \, \Delta x_3$$

$$= \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \Delta x_1 \, \Delta x_2 \, \Delta x_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τις υπόλοιπες επιφάνειες και προσθέτοντας όλες τις συνεισφορές, βρίσκουμε τη συνολική ροή προς τα έξω η οποία είναι

$$\left(\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} \right) \Delta x_1 \, \Delta x_2 \, \Delta x_3$$

Συνεπώς η ροή που εξέρχεται από τον όγκο προς τα έξω είναι:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \left(\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} \right) \Delta V = (\nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta V = (\mathrm{div}\mathbf{J}) \Delta V \, .$$

Δηλαδή

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\text{ροή ρευστού}}{\Delta V} = \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n} \Delta S}{\Delta V}$$

Γενικά τωρα μπορούμε να δώσουμε την ακόλουθη ερμηνεία στην απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου.

Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι η ροή δια μέσου μιας μικρής επιφάνειας διαιρεμένης δια του όγκου τον οποίο αυτή περικλείει. Θα δούμε σε λίγο, αφού διατυπώσουμε το θεώρημα της απόκλισης, μια πληρέστερη ερμηνεία του div**F**.

5.2. Θεώρημα της Απόκλισης - Τύπος του Green

Ας θεωρήσουμε διανυσματική συνάρτηση **F**(**x**), ορισμένη σε φραγμένο τόπο V που περιβάλλεται απο μια συνεχή ή κατά τμήματα συνεχή συνοριακή επιφάνεια S. Υποθέτουμε οτι η **F**(**x**) είναι συνεχής και διαφορίσιμη μέσα στον τόπο V και πάνω στην S. Μπορούμε τότε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα:

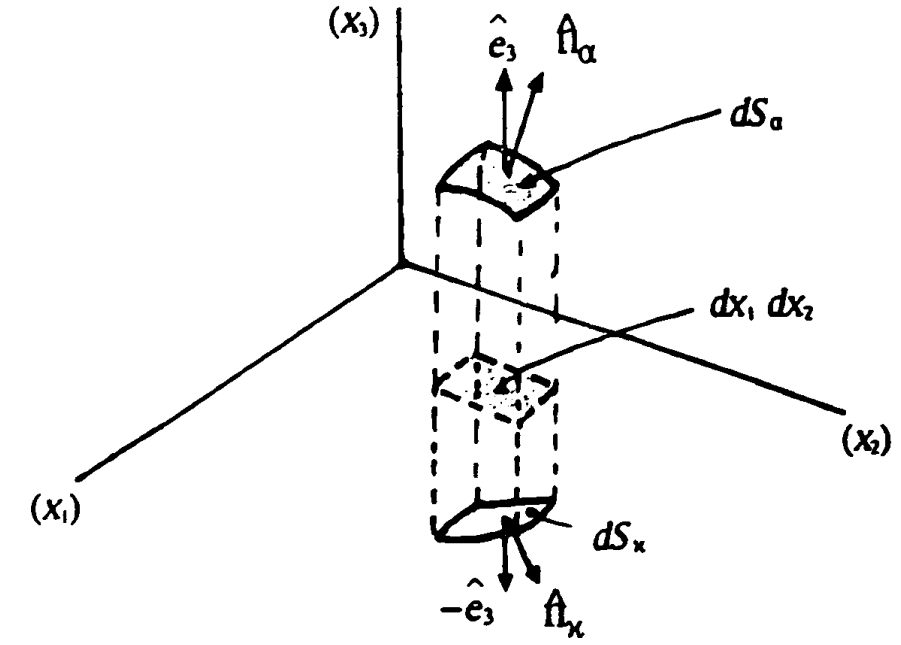
Το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου **F** σε κλειστό τόπο V, ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου **F** στην επιφάνεια που περιβάλλει τον τόπο V. Δηλαδή

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, dS \qquad (5.2.1)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σύμφωνα με την ορολογία που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το θεώρημα λέγει ότι η απόκλιση του πεδίου **F**(**x**) μέσα στον φραγμένο τόπο V, ισούται με τη συνολική ροή του πεδίου **F**(**x**), που εξέρχεται από τον τόπο V διά μέσου της συνοριακής επιφάνειας S.

Θα αποδείξουμε κατ'αρχήν το θεώρημα της απόκλισης σε ένα σφαιρικό τόπο. Όμως η απόδειξη μπορεί να επεκταθεί και σε πολυπλοκότερους τόπους.



Σχήμα 5.2.1. Ένας τόπος που χρησιμοποιείται για την απόδειξη του τύπου του Green.

Έστω λοιπόν (F_1,F_2,F_3) οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου. Τότε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Άρα

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int\int\int \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \int\int\int \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \int\int\int \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (5.2.3)$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τον κάθε όρο στην (5.2.3.) ξεχωριστά. Έστω λοιπόν ο όρος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int\int\int \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (5.2.4)$$

Για την ολοκλήρωση του όρου αυτού, θεωρούμε πρώτα μία στήλη του όγκου παράλληλη ως προς τον άξονα x_3 όπως στο σχήμα 5.2.1.

Η στήλη αυτή καταλήγει σε μία στοιχειώδη επιφάνεια $dS_α$ στο άνω μέρος και $dS_κ$ κάτω. Τότε ολοκληρώνοντας ως προς x_3 στην (5.2.4) έχουμε

$$\int\int\int \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int\int \left\{ \int \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\, dx_3 \right\} dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\int \{ F^α_3 - F^κ_3 \}\, dx_1 dx_2 \qquad (5.2.5)$$

όπου $F^α_3$ είναι η τιμή του πεδίου στο $dS_α$ και $F^κ_3$ η τιμή του στη στοιχειώδη επιφάνεια $dS_κ$ για δύο σημεία x_1 και x_2. Έστω τώρα $\hat{n}_α$ και $\hat{n}_κ$ τα μοναδιαία διανύσματα κάθετα στις $dS_α$ και $dS_κ$ αντίστοιχα με φορά προς το εξωτερικό του τόπου V. Αν $θ_α$ και $θ_κ$ οι γωνίες των $\hat{n}_α$ και $\hat{n}_κ$ με τα $\hat{e}_3$ και $-\hat{e}_3$ αντίστοιχα τότε η επιφάνειες $dS_α$ και $dS_κ$ σχετίζονται με το στοιχειώδες εμβαδό $dx_1 dx_2$ ως εξής

$$dx_1 dx_2 = dS_α \,|\cos θ_α| = dS_α\, \hat{e}_3 \cdot \hat{n}_α \qquad (5.2.6)$$

$$dx_1 dx_2 = - dS_κ\, \hat{e}_3 \cdot \hat{n}_α \qquad (5.2.7)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.2.6.) στην (5.2.5.) έχουμε

$$\int\int\int_V \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int\int_{S_α} F^α_3\, \hat{e}_3 \cdot \hat{n}\, dS_α + \int\int_{S_κ} F^κ_3\, \hat{e}_3 \cdot \hat{n}\, dS_κ =$$

$$= \int\int_S (F_3\, \hat{e}_3) \cdot \hat{n}\, dS \qquad (5.2.8)$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και για τους δύο άλλους όρους της (5.2.3.). Τότε προσθέτοντας, έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

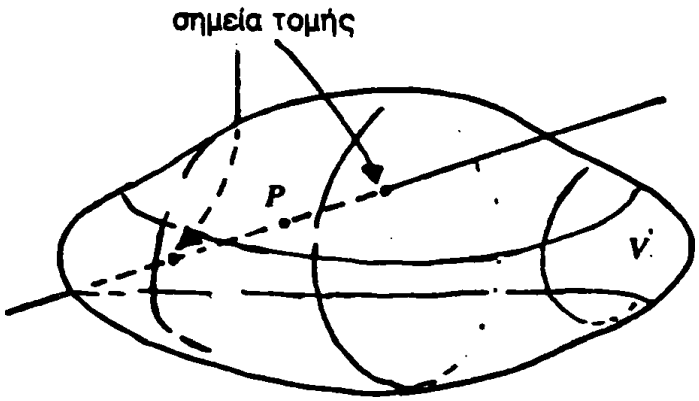
$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}dV = \iint_S (F_1\,\hat{e}_1)\cdot\hat{n}\,dS + \iint_S (F_2\,\hat{e}_2)\cdot\hat{n}\,dS + \iint_S (F_3\,\hat{e}_3)\cdot\hat{n}\,dS$$

$$= \iint_S (F_1\,\hat{e}_1 + F_2\,\hat{e}_2 + F_3\,\hat{e}_3)\cdot\hat{n}\,dS = \oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS \qquad (5.2.9)$$

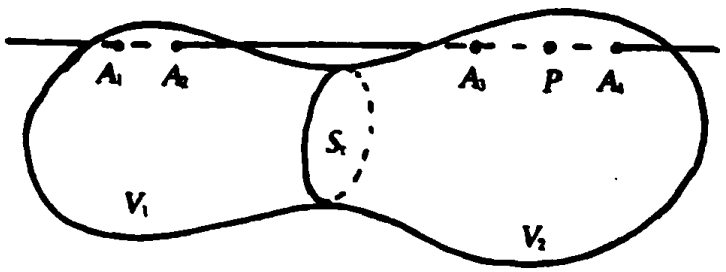
Η τελευταία αποδεικνύει το θεώρημα της απόκλισης (5.2.1.) όταν ο κλειστός τόπος είναι σφαιρικός. Όμως εύκολα μπορεί να επεκτείνει κανείς την απόδειξη και σε τόπους όπως ο κύβος ο κύλινδρος κ.α.

Γενικά η πιο πάνω απόδειξη, ισχύει για τους απλούς τόπους. Ο ορισμός του απλού τόπου είναι:

Αν κάθε ευθεία διερχόμενη από οποιαδήποτε σημείο του τόπου τέμνει την κλειστή του επιφάνεια μόνο σε δύο σημεία τότε ο τόπος καλείται απλός. Ενας απλός τόπος δείχνεται στο σχήμα (5.2.2.)



Σχήμα 5.2.2. Από οποιοδήποτε σημείο απλού τόπου, κάθε ευθεία διερχόμενη από αυτό, τέμνει το σύνορο σε δύο μόνο σημεία.



Σχήμα 5.2.3. Ένας μη απλός τόπος μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα δύο απλών τόπων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όμως η απόδειξη του θεωρήματος επεκτείνεται και για ακόμη πολυπλοκότερους τόπους. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον τόπο V του σχήματος (5.2.3.).

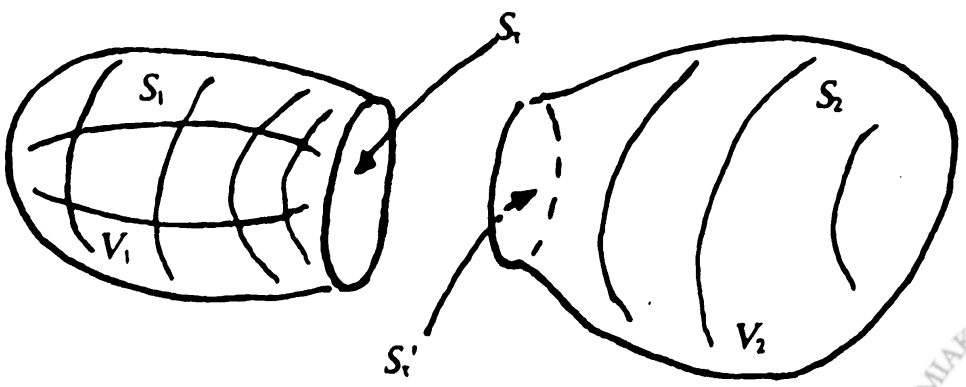
Ο V δεν ανήκει στην κατηγορία των απλών τόπων. Ομως είναι δυνατό να χωριστεί σε δύο απλούς τόπους με επιφάνεια τομής S_τ όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα. Προφανώς ο όγκος των δύο μικρότερων τόπων V_1 και V_2 ισούται με τον συνολικό όγκο V. Ομως το άθροισμα των επιφανειών περιέχει δύο φορές την επιφάνεια τομής S_τ. Αυτό όμως δεν αποτελεί πρόβλημα διότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα οποιασδήποτε διανυσματικής συνάρτησης πάνω στη μιά (έστω τη S_τ) είναι αντίθετο της άλλης ($S_{\tau'}$) και τούτο διότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}_\tau$ της μιάς είναι το αντίθετο με το αντίστοιχο $\hat{n}_{\tau'}$ της άλλης. Με άλλα λόγια στη ροή εξέρχεται από τη μιά επιφάνεια ακριβώς η ίδια εξέρχεται από την άλλη. Άρα η μια συνεισφορά στο επιφανειακό ολοκλήρωμα εξουδετερώνει την άλλη. Δηλαδή το θεώρημα σ'αυτήν την περίπτωση γράφεται (βλέπε σχ. 5.2.4.).

$$\iiint_S \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_{V_1} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV_1 + \iiint_{V_2} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV_2$$

$$= \int_{S_1+S_\tau}\int \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS + \int_{S_2+S_{\tau'}}\int \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

$$= \int_{S_1+S_2}\int \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS + \int_{S_\tau}\int \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS + \int_{S_{\tau'}}\int \mathbf{F}\cdot(-\hat{n}\,dS)$$

$$= \int_{S_1+S_2}\int \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\hat{n})\,dS$$



Σχήμα 5.2.4. Εφαρμογή του τύπου του Green χωριστά για κάθε απλό τόπο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Είναι τώρα φανερό ότι το θεώρημα απόκλισης μπορεί να επεκταθεί για κάθε τόπο ο οποίος είναι δυνατό να τμηθεί σε πεπερασμένο αριθμό απλών τόπων με την παραπάνω διαδικασία. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε μιά γενικώτερη μορφή του θεωρήματος της απόκλισης:

Γενική Διατύπωση του Θεωρήματος της Απόκλισης:

Θεωρούμε στον χώρο R^3 τον τόπο V ο οποίος περατούται σε μιά κλειστή επιφάνεια S, και μπορεί να τμηθεί σε πεπερασμένο αριθμό απλών τόπων V_1, V_2, ...V_n. Έστω ότι η επιφάνεια κάθε τόπου V_1,...V_n είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής, και προσανατολισμένη με το μοναδιαίο διάνυσμα αυτής να κατευθύνεται προς το εξωτερικό του τόπου. Έστω $\mathbf{F}=F_1\hat{e}_1+F_2\hat{e}_2+F_3\hat{e}_3$ ένα διανυσματικό πεδίο συνεχές και με συνεχείς μερικές παραγώγους των συνιστωστών του μέσα στον τόπο και πάνω στην επιφάνειά του. Τότε:

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oiint_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS \qquad (5.2.10)$$

Το θεώρημα της απόκλισης μας επιτρέπει να μετατρέψουμε μιά ολοκληρωτική σε μία διαφορετική εξίσωση. Ας θεωρήσουμε π.χ. το νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό:

$$\Phi_E\ (\text{κλειστή}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{περ.}} \qquad (5.2.11a)$$

$$\oiint_S (\mathbf{E}\cdot\hat{n})\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x})d^3x \qquad (5.2.11b)$$

όπου V ο όγκος που περικλείει η κλειστή επιφάνεια . Αλλά σύμφωνα με τον τύπο του Green

$$\oiint_S (\mathbf{E}\cdot\hat{n})\,dS = \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{E})\,d^3x \qquad (5.2.12)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

'Αρα ο νόμος του Gauss παίρνει τη μορφή*

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E})\, d^3x = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x \qquad (5.2.13)$$

αυτή όμως θα πρέπει να ισχύει για κάθε όγκο V. Κατά συνέπεια

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (5.2.14)$$

που είναι ο νόμος του Gauss σε διαφορική μορφή. Ανάλογα ο νόμος του Gauss για το μαγνητισμό

$$\Phi_B \text{ (κλειστή)} = 0 \qquad (5.2.15)$$

παίρνει τη μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (5.2.16)$$

Οι εξισώσεις (5.2.14) και (5.2.15) είναι δύο από τις εξισώσεις του Maxwell. Είδαμε στο εδάφιο 5.1. ότι η μάζα του ρευστού που περνάει μέσα από μιά κλειστή επιφάνεια S είναι:

$$\frac{dm}{dt} = \oint_S (\mathbf{J} \cdot \hat{n})\, dS, \quad \mathbf{J} = \rho(\mathbf{x},t)\, \mathbf{v}(\mathbf{x},t) \qquad (5.2.17)$$

Η μεταβολή της μάζας μέσα στον όγκο V είναι:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int\int\int_V \rho(\mathbf{x},t)\, d^3x = \int\int\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}\, d^3x \qquad (5.2.18)$$

(με την προυπόθεση ότι $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ = συνεχής). Η διατήρηση της μάζας γράφεται

μεταβολή μάζας + ροή μάζας = 0

---

* Πολλές φορές, για χάρη της απλότητας του συμβολισμού, στις ολοκληρώσεις όγκου θα χρησιμοποιούμε ένα αντί για τρία σύμβολα ολοκλήρωσης. Ανάλογα θα πράττουμε και για τα επιφανειακά ολοκληρώματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{dm}{dt} + \oiint_S (\mathbf{J}\cdot\hat{n})\, dS = 0$$

Αυτή παίρνει τη μορφή

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}\, d^3x + \oiint_S (\mathbf{J}\cdot\hat{n})\, dS = 0 \qquad (5.2.19)$$

Όμως σύμφωνα με τον τύπο του Green

$$\oiint_S (\mathbf{J}\cdot\hat{n})\, dS = \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{J})\, d^3x \qquad (5.2.20)$$

Άρα η διατήρηση της μάζας παίρνει τη μορφή

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}\, d^3x + \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{J})\, d^3x = 0 \qquad (5.2.21)$$

Επειδή πρέπει να ισχύει για κάθε όγκο V βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \qquad (5.2.22)$$

αυτή είναι η τοπική διατήρηση της μάζας.

Ανάλογα εκφράζεται τοπικά και η διατήρηση του φορτίου ή οποιασδήποτε άλλης βαθμωτής ποσότητας που διατηρείται (ενέργεια κ.λ.π) .

Το θεώρημα της απόκλισης μας παρέχει τη δυνατότητα να ορίσουμε διαφορετικά την απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου. Πράγματι ας θεωρήσουμε ένα αρκετά μικρό τόπο V που περιβάλλει σημείο P. Θεωρούμε οτι η απόκλιση div **F** μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση σταθερή εντός του όγκου V. Τότε το ολοκλήρωμα όγκου της div **F** μπορεί προσεγγιστικά να γραφεί (div**F**) V. Αν V γίνει απειροστά μικρό τότε μπορούμε να γράφουμε:

$$\lim_{V\to 0} \frac{\iiint_V \text{div}\ \mathbf{F}\ dV}{V} = \text{div}\ \mathbf{F} \qquad (5.2.23)$$

Όμως από το θεώρημα απόκλισης έχουμε ότι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int\int\int_V \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \int\int_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS \qquad (5.2.24)$$

Αντικαθιστώντας το τριπλό ολοκλήρωμα στην (5.2.24) έχουμε:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\int_S \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS \qquad (5.2.25)$$

Η τελευταία, που αποτελεί συνέπεια του θεωρήματος της απόκλισης, μας πληροφορεί ότι η απόκλιση ενός πεδίου **F** σε κάθε σημείο P ισούται με την εξερχόμενη ροή του πεδίου **F** ανά μονάδα όγκου στο P ανεξάρτητα από το σχήμα του όγκου. Σημειώνουμε ότι η (5.2.25) βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με την φυσική ερμηνεία που εδόθη στην απόκλιση με βάση το παράδειγμα της ροής υγρού στο εδάφιο 5.1.

Σημείωση: Το θεώρημα της απόκλισης είναι δυνατό να αποδειχθεί διαφορετικά εφόσον αποδεχθούμε την (5.2.25) ως ορισμό της απόκλισης διανυσματικού πεδίου.

Πράγματι, έστω ότι υποδιαιρούμε τον τόπο V σε μεγάλο αριθμό μικρών τμημάτων ΔV_i όπου καθένα από αυτά περιβάλλεται από κλειστή επιφάνεια ΔS_i. Τότε προσεγγιστικά, η σχέση (5.2.25) μπορεί να γραφεί για κάθε ένα από τα ΔV_i ως εξής

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{1}{\Delta V_i}\iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_i \qquad (5.2.26a)$$

ή $$\text{div}\,\mathbf{F}\,(\Delta V_i) = \iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_i\,\Delta V_i \qquad (5.2.26b)$$

όπου στη (5.2.26) έχει προστεθεί ένας μικρός αυθαίρετος αριθμός ε_i έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα χωρίς να πάρουμε το όριο της έκφρασης. Όταν $\Delta V_i \to 0$ είναι $\varepsilon_i \to 0$. Το άθροισμα σε όλο τον όγκο του τόπου V είναι τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla\cdot\mathbf{F}\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n}\int\int_{\Delta S_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\,\Delta V_i \qquad (5.2.27)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στη συνέχεια παίρνουμε το όριο $n \to \infty$. Τότε ο πρώτος όρος της (5.2.27) έχει όριο το ολοκλήρωμα

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \nabla\cdot\mathbf{F}\Delta V_i = \int\int\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}dV_i \qquad (5.2.28)$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της (5.2.27) αποτελείται από το άθροισμα των ολοκληρωμάτων πάνω στις κλειστές επιφάνειες ΔS_i . Οι τελευταίες αποτελούνται από τμήματα τα οποία είτε θα ανήκουν εν μέρει στην συνοριακή επιφάνεια S, ή θα είναι εσωτερικά επιφανειακά τμήματα που δεν θα ανήκουν στην εξωτερική S. Τα πρώτα από αυτά, προστιθέμενα θα μας δώσουν τη συνολική εξωτερική επιφάνεια που περιβάλλει τον τόπο V. Τα δεύτερα εμφανίζονται πάντα κατά δυάδες το ένα απέναντι του άλλου με αντίθετα μοναδιαία διανύσματα και οι ροές τους θα αλληλοαναιρούνται. (βλέπε αντίστοιχη περίπτωση στο σχήμα 5.2.4) Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta S_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \qquad (5.2.29)$$

Για τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της (5.2.27) έχουμε

$$|\sum \varepsilon_i \Delta V_i| \le \sum |\varepsilon_i|\Delta V_i \le |\varepsilon_{max}| \sum V_i = |\varepsilon_{max}|V$$

Όμως καθώς $n\to\infty$, $\Delta V_i \to 0$ και $\varepsilon_{max}\to 0$ ενώ ο όγκος V είναι πεπερασμένος. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta V_i \to 0 \qquad (5.2.30)$$

Από τις (5.2.27) - (5.2.30) εύκολα έπεται το θεώρημα της απόκλισης.

Παράδειγμα 5.2.1

Να υπολογιστεί "η ροή" του διανύσματος θέσης δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας του διανύσματος θέσης. Να ειδικευτεί το αποτέλεσμα για την επιφάνεια σφαίρας ακτίνας α.

Λύση :

Έστω $\mathbf{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$. Ζητούμε τον υπολογισμό του

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\oiint_S \mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}$$

'Ομως από το θεώρημα απόκλισης, το παραπάνω μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα όγκου

$$\oiint_S \mathbf{x}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{x}\, dV$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι $\nabla\cdot\mathbf{x} = 3$. Άρα

$$\oiint_S \mathbf{x}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{x}\, dV = 3V$$

'Οταν η S αποτελεί επιφάνεια σφαίρας τότε γνωρίζουμε ότι $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. Από την τελευταία έχουμε

$$\oiint_S \mathbf{x}\cdot d\mathbf{S} = 3V = 3\,\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

(κύτταξε παράδειγμα 4.6.5 για κύβο)

Παράδειγμα 5.2.2

Να υπολογιστεί η απόκλιση του πεδίου $\mathbf{F} = \frac{k}{r^2}\hat{e}_r$, k = σταθ.

Λύση :

Προφανώς $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ για $r \neq 0$. Για $r = 0$ θα χρησιμοποιηθεί η εξ. (5.2.25). Για σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r,

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \oiint_S (\mathbf{F}\cdot\hat{n})\, dS = \frac{3}{4\pi r^3}\frac{k}{r^2} 4\pi r^2 \Big|_{r=0} \to \infty$$

Άρα η απόκλιση του **F** δεν είναι παντού μηδέν.

Πραγματικά η ροή του **F** δια μέσου μιας σφαιρικής επιφάνειας είναι

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\hat{n})\, dS = \frac{k}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi k \neq 0$$

Υπάρχει λοιπόν πηγή στο r = 0.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 5.2.3

Αν το μαγνητικό πεδίο **B** σε μια περιοχή δίνεται από τη σχέση

B = ∇x **A**, όπου **A** το διανυσματικό δυναμικό, να δειχθεί ότι για κάθε κλειστή επιφάνεια γύρω από την περιοχή αυτή ισχύει:

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$ (νόμος του Gauss για το μαγνητισμό)

Λύση

Πράγματι από το θεώρημα της απόκλισης

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dV$$

Όμως γνωρίζουμε από προηγούμενο θεώρημα ότι όταν

B = ∇x**A** τότε ∇·**B** = 0.

Συνεπώς το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Η δυνατότητα να γράψει κανείς **B** = ∇x**A**, στην ουσία αποτελεί συνέπεια του νόμου του Gauss για το μαγνητικό πεδίο. Μας λέγει ότι η ολική ροή του **B** δια μέσου της κλειστής επιφάνειας S είναι μηδέν.

Παράδειγμα 5.2.4

Να μετατραπεί το ολοκλήρωμα όγκου

$$\iiint r^2\,dV$$

σε κατάλληλο επιφανειακό.

Λύση :

Από το κεφ. 3 γνωρίζουμε ότι

$$\nabla\cdot(r^{n-1}\mathbf{x}) = (n+2)\,r^{n-1},\ r=|\mathbf{x}|$$

$$\Rightarrow r^{n-1} = \frac{1}{n+2}\nabla\cdot(r^{n-1}\mathbf{x}),\ n \neq -2$$

Για n =–1 είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$r^{-2} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^2}$$

Αντικαθιστώντας, με τη χρήση του θεωρήματος της απόκλισης έχουμε

$$\iiint r^{-2}\, dV = \oiint \frac{\mathbf{x}\cdot\hat{n}\, dS}{r^2}$$

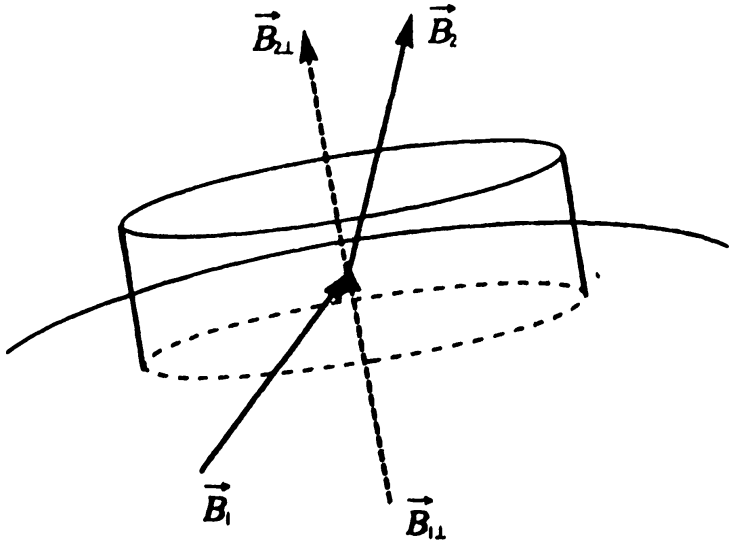
Παράδειγμα 5.2.5

Θεωρούμε τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων όπως στο σχήμα (5.2.5) και τις τιμές του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}_1$ και $\mathbf{B}_2$ εκατέρωθεν αυτής. Να δειχθεί ότι οι κάθετες συνιστώσες $\mathbf{B}_{1\perp}$, $\mathbf{B}_{2\perp}$ είναι ίσες δηλαδή $\mathbf{B}_{1\perp} = \mathbf{B}_{2\perp}$

Λύση :

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss η ροή του μαγνητικού πεδίου **B** δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας είναι $\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{B}\cdot\hat{n}\, dS = 0$ όπου $\hat{n}$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην κλειστή επιφάνεια. Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss σε μικρό κύλινδρο που τέμνει την διαχωριστική επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα. Παίρνοντας $\Delta h \to 0$, ο νόμος του Gauss μπορεί να γραφεί

$$0 = \lim_{\Delta h \to 0} \int\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{n}\, dS = (\mathbf{B}_2\cdot\hat{n} - \mathbf{B}_1\cdot\hat{n})\Delta S$$



Σχήμα 5.2.5. Εφ' όσον $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ στη διαχωριστική επιφάνεια οι κάθετες συνιστώσες **B** *στα δύο μέσα είναι ίσες.*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Επειδή $\Delta S \neq 0$ έπεται ότι

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\cdot\hat{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_2\cdot\hat{n} = \mathbf{B}_1\cdot\hat{n}$$

Όμως $\mathbf{B}_2\cdot\hat{n} = (\mathbf{B}_2)_\perp$ και $\mathbf{B}_1\cdot\hat{n} = (\mathbf{B}_1)_\perp$

Η σχέση $\nabla.\mathbf{B}=0$ δεν περιορίζει τις παράλληλες συνιστώσες.

Παράδειγμα 5.2.6.

Να υπολογιστεί η ροή του πεδίου $\mathbf{F} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2$ πάνω στην επιφάνεια του ημισφαιρίου S_n: $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = a^2$, $x_3 \geq 0$.

Λύση :

Μετασχηματίζουμε στις σφαιρικές συντεταγμένες και έχουμε

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \{a\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_1 + a\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_2\}\cdot$$

$$a^2\{\sin^2\theta\cos\varphi\,\hat{e}_1 + \sin^2\theta\sin\varphi\,\hat{e}_2 + \sin\theta\cos\theta\,\hat{e}_3\}$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$= a^3 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3\theta = \frac{4\pi}{3}a^3$$

Παρατήρηση: Το παραπάνω επιφανειακό ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σύμφωνα με το θεώρημα της απόκλισης σε ολοκλήρωμα όγκου, αρκεί η παραπάνω ανοιχτή επιφάνεια, να κλείσει με την προσθήκη κατάλληλου τμήματος. Πράγματι, διαπιστώνουμε ότι ο δίσκος $x^2_1 + x^2_2 = a^2$, κλείνει την παραπάνω επιφάνεια ενώ για την επιφάνεια του δίσκου S_δ και τη συγκεκριμμένη διανυσματική συνάρτηση ισχύει:

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2)\cdot\hat{e}_3\, dx_1 dx_2 = 0$$

Συνεπώς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int\int_{S_n} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_{S_n+S_\delta} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \equiv \oiint_{S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \frac{4}{3}\pi a^3$$

5.3 Τύπος του Ostrogradsky

Ο τύπος του Ostrogradsky είναι στην ουσία το θεώρημα της Απόκλισης διατυπωμένο σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Τον μνημονεύουμε εδώ διότι είναι χρήσιμος σε ορισμένες εφαρμογές. Προς τούτο, αντικαθιστούμε στο αριστερό μέλος της (5.2.1) τη μορφή του $\nabla\cdot\mathbf{F}$ από την (5.2.2). Γράφοντας το στοιχείο όγκου $dV = dx_1dx_2dx_3$ έχουμε

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}dV = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3 \qquad (5.3.1)$$

Το δεξιό μέλος της (5.2.1) γίνεται (βλέπε 5.2.9)

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot \hat{n}dS = \iint \{ F_1(\hat{e}_1\cdot\hat{n}) + F_2(\hat{e}_2\cdot\hat{n}) + F_3(\hat{e}_3\cdot\hat{n}) \}\, dS \qquad (5.3.2)$$

Όμως $\hat{n}\cdot\hat{e}_1\, dS = dx_2dx_3$ $\hat{n}\cdot\hat{e}_2\, dS = dx_1\, dx_3$ $\hat{n}\cdot\hat{e}_3\, dS = dx_1dx_2$

(βλέπε και 5.2.6). Αντικαθιστώντας στην (5.3.2) και αυτή μαζί με την (5.3.1) στην (5.2.1) καταλήγουμε

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3 =$$

$$\int\int_S (F_1\, dx_2dx_3 + F_2\, dx_1dx_3 + F_3\, dx_1dx_2) \qquad (5.3.3)$$

Η (5.3.3) καλείται τύπος του Ostrogradsky

Παράδειγμα 5.3.1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

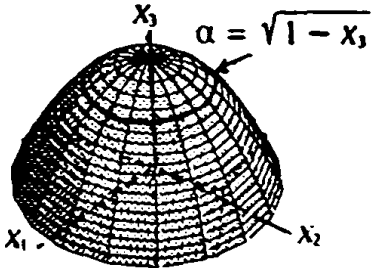
$$I = \oiint_S (x_1\, dx_2dx_3 + x_2\, dx_1dx_3 + 2x_3\, dx_1dx_2)$$

πάνω στην κλειστή επιφάνεια που σχηματίζεται από το παραβολοειδές $x^2_1 + x^2_2 + x_3 = 1$, $0<x_3<1$ και $x^2_1 + x^2_2 \le 1$ για $x_3 = 0$.

Λύση :

Από τον τύπο (5.3.3) το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$I = \iiint_V \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(2x_3)\right\} dx_1dx_2dx_3 =$$



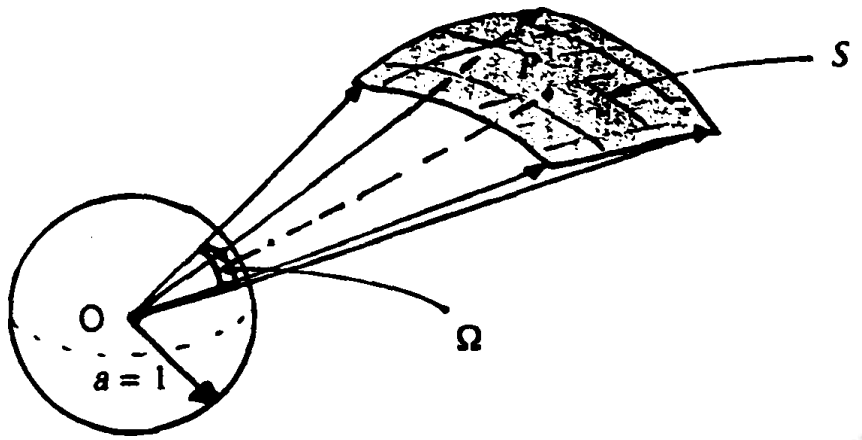
$$= 4 \iiint_V dx_1dx_2dx_3 = 4 \iiint_V dV$$

Η ολοκλήρωση αυτή γίνεται εύκολα

$$I = 4\int dx_3 \int dx_1dx_2 = 4\pi \int_0^1 dx_3\, (r(x_3))^2 = 4\pi \int_0^1 (1 - x_3)\, dx_3 = 2\pi$$

5.4 Εφαρμογή στον υπολογισμό της στερεάς γωνίας

Θεωρούμε τμήμα επιφάνειας S και σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ του οποίου η αρχή O δεν ανήκει στην S (σχήμα 5.4.1)



Σχήμα 5.4.1 Ορισμός στερεάς γωνίας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Υποθέτουμε ότι κάθε ευθεία διερχόμενη από το Ο τέμνει την S το πολύ σε ένα σημείο. Έστω σημείο P της S και **OP** το διάνυσμα θέσης του. Το ευθύγραμμο τμήμα OP τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα στο σημείο P΄ορίζοντας έτσι το μοναδιαίο διάστημα **OP**΄. Καθώς το διάνυσμα **OP** διαγράφει την επιφάνεια S, το μοναδιαίο διάνυσμα **OP**΄αντίστοιχα, διαγράφει ένα τμήμα επιφανείας πάνω στη μοναδιαία σφαίρα. Το εμβαδόν του τμήματος αυτού καλούμε στερεά γωνία Ω της S ως προς το σημείο Ο. Θα δείξουμε τώρα ότι η στερεά γωνία Ω δίνεται από τον τύπο:

$$\Omega = \int\int_S \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} \qquad (5.4.1)$$

όπου **x** το διάνυσμα θέσης σημείου P της στοιχειώδους επιφανείας **d**S με άλλα λόγια η στοιχειώδης στερεά γωνία είναι

$$d\Omega = \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} \qquad (5.4.2)$$

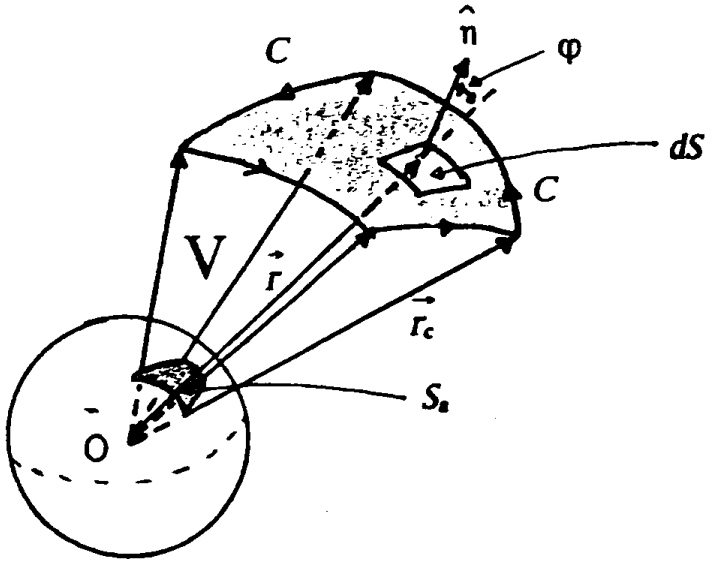
όπου $r = |\mathbf{x}| = (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^{1/2}$

Για την απόδειξη της (5.4.1) θεωρούμε επιφάνεια S του σχήματος (5.4.2) και σφαίρα ακτίνας a έτσι ώστε η S να κείται εξ ολοκλήρου έξω από την σφαίρα. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}_c$ περιφέρεται κατά μήκος της καμπύλης C η οποία αποτελεί το σύνορο της επιφανείας S. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζεται πάνω στη σφαίρα μια επιφάνεια S_a. Οι δύο επιφάνειες S και S_a μαζί με τη νοητή παράπλευρη επιφάνεια που σχηματίζει η ακτίνα $\mathbf{x}_c$ κατά την κίνηση της κατά μήκος καμπύλης C, περικλείουν έναν όγκο που καλούμε V. Θεωρούμε τώρα το ολοκλήρωμα

$$\oint\oint_{S_t} \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} \qquad (5.4.3)$$

όπου S_t εννοούμε τη συνολική κλειστή επιφάνεια που απαρτίζεται από τις S, S_a και την παράπλευρη S_n, δηλαδή $S_t = S + S_a + S_n$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 5.4.2

Από το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\oint\oint_{S_t} \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \int\int\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r^3}\right) dV \qquad (5.4.4)$$

Η απόκλιση όμως της $\frac{\mathbf{x}}{r^3}$ για $r \neq 0$ είναι

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r^3}\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^3}\right) = 0 \qquad (5.4.5)$$

Άρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι μηδέν

$$0 = \oint\oint_{S_t} \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} =$$

$$\equiv \int\int_S \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} + \int\int_{S_a} \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} + \int\int_{S_n} \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} \qquad (5.4.6)$$

Στην τελευταία χωρίσαμε το ολοκλήρωμα στις τρεις επιφάνειες S, S_a, S_n. Όμως στην παράπλευρη επιφάνεια S_n, το κάθετο σ' αυτή διάνυσμα $\hat{n}$ είναι πάντα κάθετο στο διάνυσμα θέσης **x**. Συνεπώς

$$\int\int_{S_n} \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \int\int_{S_n} \frac{\mathbf{x}\cdot\hat{n}\,d|\mathbf{S}|}{r^3} = \int\int_{S_n} \frac{0}{r^3} dS = 0 \qquad (5.4.7)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα

$$\oiint_S \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -\int\int_{S_a} \frac{(\mathbf{x}\cdot\hat{n})d|\mathbf{S}|}{r^3} \quad (5.4.7a)$$

όπου $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη σφαίρα με διεύθυνση προς το εσωτερικό της ($\hat{n} = -\hat{x}$). Άρα

$$\oiint_S \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -\int\int_{S_a} \frac{(\mathbf{x}\cdot\hat{x})dS}{r^3} = \int\int_{S_a} \frac{dS}{r^2} = \frac{E_a}{a^2} \quad (5.4.7b)$$

όπου E_a το εμβαδό του σφαιρικού τμήματος.

Άρα

$$\Omega \equiv \frac{E_a}{a^2} = \oiint \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} \quad (5.4.7c)$$

Αν η επιφάνεια είναι κλειστή $\Omega=4\pi$.

Με τη βοήθεια της πιο πάνω εξίσωσης μπορεί να δειχτεί το πόρισμα:

Πόρισμα: Ο νόμος του Coulomb συνεπάγεται το νόμο του Gauss.

Ο νόμος του Coulomb συνεπάγεται

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{x}}{r^3}$$

(το φορτίο q βρίσκεται στην αρχή των αξόνων). Εφαρμόζοντας την (5.4.7c) για μια κλειστή επιφάνεια γύρω από το φορτίο έχουμε

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint \frac{\mathbf{x}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Το ότι ο νόμος του Gauss συνεπάγεται το νόμο του Coulomb έχει ήδη αποδειχτεί (κύτταξε πρόβλημα 4.6.1) .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.5 Οι Ταυτότητες του Green. Θεωρήματα της κλίσης και στροβιλισμού

Το θεώρημα της απόκλισης (5.2.1) όπως τονίσαμε και στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου είναι πολύ χρήσιμο στη μετατροπή τριπλών ολοκληρωμάτων σε διπλά όταν τα δεύτερα αποδεικνύονται ευκολότερα ή και το αντίστροφο. Όμως η χρησιμότητα του δεν περιορίζεται μόνο σ' αυτό το γεγονός. Μπορούμε με αυτό να μελετήσουμε τη φυσική σημασία της Λαπλασιανής που είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο από καθαρά μαθηματική σκοπιά. Επιπλέον βοηθά στη μελέτη και διερεύνηση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους κλπ. Στο εδάφιο τούτο, θα παράγουμε με τη χρήση του, τις ταυτότητες Green.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \Phi\nabla\Psi \tag{5.5.1}$$

όπου Φ και Ψ είναι δύο βαθμωτά πεδία. Τότε η απόκλιση της **F** είναι

$$\nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi) = (\nabla\Phi)\cdot(\nabla\Psi) + \Phi\nabla^2\Psi \tag{5.5.2}$$

Ολοκληρώνοντας την (5.5.2) έχουμε

$$\iiint_V \nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi) = \iiint_V \{(\nabla\Phi)\cdot(\nabla\Psi) + \Phi\nabla^2\Psi\}\, dV \tag{5.5.3}$$

Όμως από το θεώρημα απόκλισης το πρώτο μέλος της (5.5.3) ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα της ΦΨ. Άρα

$$\oiint_S (\Phi\nabla\Psi)\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V (\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi + \Phi\nabla^2\Psi)\, dV \tag{5.5.4}$$

Η (5.5.4) καλείται <u>πρώτη ταυτότητα Green.</u>

Θεωρούμε στη συνέχεια τη συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi \tag{5.5.5}$$

Η απόκλιση αυτής είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi \qquad (5.5.6)$$

Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα της Απόκλισης εύκολα καταλήγουμε στην σχέση

$$\oint\!\!\oint_S (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi)\cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_V (\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi)\, dV \qquad (5.5.7)$$

που αποτελεί τη δεύτερη ταυτότητα Green.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον ορισμό της κατευθυντικής παραγώγου να παράγουμε μία ενδιαφέρουσα μορφή της πρώτης ταυτότητας Green. Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος βαθμωτής συνάρτησης Ψ σε κατεύθυνση **T** είναι

$$\frac{d\Psi}{ds} = \mathbf{T}\cdot\nabla\Psi \qquad (5.5.8)$$

Εξειδικεύοντας την (5.5.8) στην περίπτωση όπου **T** είναι το κάθετο διάνυσμα παίρνουμε

$$\frac{d\Psi}{ds} = \nabla\Psi\cdot\hat{n} \qquad (5.5.9)$$

Τότε η πρώτη ταυτότητα Green, θέτοντας την (5.5.9) στην (5.5.4) γράφεται

$$\oint\!\!\oint_S \Phi\frac{d\Psi}{ds}\, dS = \int\int\int_V (\Phi\nabla^2\Psi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi)\, dV \qquad (5.5.10)$$

Τέλος παραθέτουμε εδώ χωρίς απόδειξη την τρίτη ταυτότητα Green η οποία είναι

$$\int\int\int (\mathbf{A}\cdot\nabla^2\mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\nabla^2\mathbf{A})\, dV =$$

$$= \int\int_S \{\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})\}\cdot\hat{n}\, dS \qquad (5.5.11)$$

Τέλος, μνημονεύουμε δύο θεωρήματα που μπορούν να εξαχθούν από το θεώρημα της Απόκλισης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεώρημα της Κλίσης. Αν Φ είναι συνεχής βαθμωτή συνάρτηση σε τόπο V περικλειόμενο από κλειστή επιφάνεια S, τότε

$$\int\int\int_V \nabla\Phi \, dV = \oint\oint_S \Phi d\mathbf{S} \qquad (5.5.12)$$

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στο θεώρημα της απόκλισης. Θεωρούμε σταθερό διάνυσμα **A**, και κατασκευάζουμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{A}$$

Το θεώρημα της απόκλισης για την **F** είναι

$$\int\int\int_V \nabla . \mathbf{F} \, dV = \int\int_S \mathbf{F}\cdot\hat{n} dS$$

ή

$$\int\int\int_V \nabla\cdot(\Phi\mathbf{A}) \, dV = \int\int_S \Phi\mathbf{A}\cdot\hat{n} dS \qquad (5.5.13)$$

κι επειδή το **A** είναι σταθερό έχουμε από την ταυτότητα $\nabla\cdot(\Phi\,\mathbf{A}) = \nabla\Phi\cdot\mathbf{A}$

$$\int\int\int_V \nabla . \mathbf{F} \, dV = \mathbf{A}\cdot\int\int\int_V \nabla\Phi \, dV = \mathbf{A}\cdot\left(\int\int_S \Phi d\mathbf{S}\right)$$

οπότε η (5.5.13) γράφεται

$$\mathbf{A}\cdot\left\{\int\int\int_V \nabla\Phi \, dV - \int\int_S \Phi d\mathbf{S}\right\} = 0$$

Επειδή το **A** είναι τυχαίο, έπεται ότι η ποσότητα στην παρένθεση της τελευταίας εξίσωσης είναι μηδέν. Αρα αποδεικνύεται η (5.5.12)

Παράδειγμα 5.5.1

Στο παράδειγμα (1.5.6) το κέντρο μάζας συστήματος n σωμάτων ορίστηκε ως εξής

$$\mathbf{x}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \, \mathbf{x}(i)}{\sum m_i}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για στερεό σώμα μπορούμε να γενικεύσουμε την έκφραση αυτή θεωρώντας συνεχή κατανομή μάζας που εκφράζεται με τη συνάρτηση της πυκνότητας $\rho(\mathbf{x})$. Τότε

$$\mathbf{x}_{c.m.}=\frac{\int_V \mathbf{x}\rho(\mathbf{x})d^3x}{\int_V \rho(\mathbf{x})d^3x}$$

όπου $M=\int_V \rho(\mathbf{x})d^3x$ η συνολική μάζα του συστήματος. Για ομοιόμορφη κατανομή

$\rho(\mathbf{x})$=σταθερά η σχέση γράφεται

$$\mathbf{x}_{c.m.}=\frac{\rho}{M}\int_V \mathbf{x}d^3x=\frac{1}{V}\int_V \mathbf{x}d^3x \quad . \quad (5.5.14)$$

Μπορούμε τότε να δείξουμε ότι

$$\mathbf{x}_{c.m.}=\frac{1}{2V}\oint_S x^2 d\mathbf{S}$$

Πράγματι, με τη χρήση του θεωρήματος της κλίσης έχουμε

$$\oint_S \mathbf{x}^2 d\,\mathbf{S}=\int_V \nabla \mathbf{x}^2 d^3\,x$$

Όμως $\nabla \mathbf{x}^2=2\mathbf{x}$ άρα

$$\int\int \mathbf{x}^2 d\,\mathbf{S}=2\int_V \mathbf{x}d^3x$$

$$\mathbf{x}_{c.m}=\frac{1}{V}\int_V \mathbf{x}d^3\,x=\frac{1}{2V}\oint_V 2\mathbf{x}d^3x$$

το οποίο αποδείχνει το ζητούμενο.

Το θεώρημα του στροβιλισμού. Αν **F** είναι συνεχής διανυσματική συνάρτηση σε τόπο V περικλειόμενο από επιφάνεια S, τότε

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{F}\, dV = \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F} \qquad (5.5.15)$$

Για την απόδειξη της θεωρούμε και πάλι σταθερό διάνυσμα **A**. Το θεώρημα της απόκλισης για τη συνάρτηση **FxA** γράφεται

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{F}\times\mathbf{A})\, dV = \iint_S \mathbf{F}\times\mathbf{A}\cdot \hat{n} dS \qquad (5.5.16)$$

Από τη διανυσματική ταυτότητα (3.8.15) του κεφαλαίου III έχουμε

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}\times\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{F} \qquad (5.5.17)$$

Από το τριπλό γινόμενο (κεφ. I) έχουμε

$$\mathbf{F}\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}\times\mathbf{F} \qquad (5.5.18)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.5.16) τελικά έχουμε

$$\mathbf{A}\cdot\left\{\iiint_V \nabla\times\mathbf{F}\, dV - \iint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{F}\right\} = 0 \qquad (5.5.19)$$

η οποία αποδεικνύει την (5.5.15), διότι το **A** είναι τυχαίο διάνυσμα, και συνεπώς η ποσότητα στην αγκύλη είναι μηδέν.

Παράδειγμα 5.5.2

Αν η συνάρτηση Ψ είναι λύση της εξίσωσης Laplace, σε κάποια περιοχή V που περιβάλλεται από επιφάνεια S, τότε

$$\oint_S \frac{d\Psi}{ds}\, dS = 0$$

Λύση:

Από την πρώτη ταυτότητα Green, θέτοντας Φ =1 έχουμε

$$\oint_S (\nabla)\Psi\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla^2\Psi\, dV$$

Επειδή η ψ είναι λύση της εξίσωσης Laplace, $\nabla^2 \Psi = 0$, έπεται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int\int_S \nabla\Psi \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \frac{d\Psi}{ds}\, dS = 0$$

Παράδειγμα 5.5.3

Αν Φ και Ψ είναι αρμονικές συναρτήσεις σε περιοχή V, τότε

$$\oint\oint_S (\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi)\cdot d\mathbf{S} = \int\int \left(\Phi \frac{d\Psi}{ds} - \Psi \frac{d\Phi}{ds}\right) dS = 0$$

Λύση :

Οι Φ, Ψ καλούνται αρμονικές όταν ικανοποιούν την εξίσωση Laplace, δηλαδή $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0$ τότε από τη δεύτερη ταυτότητα Green έπεται αυτόματα η ζητούμενη.

Παράδειγμα 5.5.4

Να δειχτεί ότι για κλειστή επιφάνεια S, $\oint\oint d\mathbf{S} = 0$

Λύση :

Από το θεώρημα της κλίσης (5.5.13), για Φ=1 έχουμε

$$\int\int d\mathbf{S} = \int\int\int_V \nabla(1)\, dV = 0$$

διότι $\nabla(1) = 0$

5.6 Το Θεώρημα του Green

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε το θεώρημα του Green το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος Stokes. Η απόδειξη του θεωρήματος Green είναι απλούστερη αυτής του θεωρήματος Stokes και σ'αυτό το σημείο θα αποτελέσει το κατάλληλο υπόβαθρο για την ευκολότερη κατανόηση του τελευταίου. Θα διατυπώσουμε τώρα το θεώρημα Green.

Θεώρημα

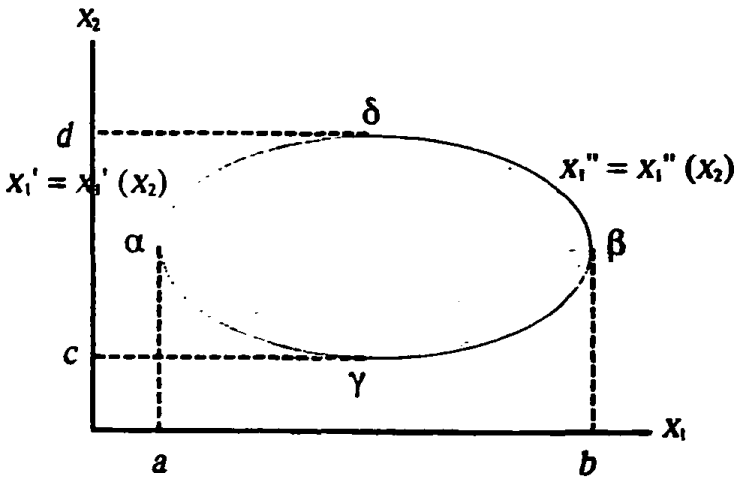
'Εστω τόπος D στο επίπεδο (x_1Ox_2) με σύνορο κλειστή καμπύλη C. Θεωρούμε ότι η C είναι προσανατολισμένη δεξιόστροφα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εστω F_1 και F_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών x_1 και x_2 και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ υπάρχουν και είναι επίσης συνεχείς στο επίπεδο (x_1Ox_2). Αν ο τόπος D είναι δυνατό να τεμαχιστεί σε πεπερασμένο αριθμό απλών τόπων D_1, ..., D_n, τότε η παράκατω ισότητα ισχύει

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2 = \oint_C (F_1 dx_1 + F_2 dx_2) \qquad (5.6.1)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τόπο του σχήματος (5.3.1) ο οποίος περατούται στην κλειστή καμπύλη C προσανατολισμένη όπως στο σχήμα 5.6.1.



Σχήμα 5.6.1. Για την απόδειξη του θεωρήματος του Green διαιρούμε την κλειστή καμπύλη C σε δύο τμήματα i) $x_1' = x_1'(x_2)$ και $x_1'' = x_1''(x_2)$ που αντοιστοιχούν στα δαγ και γβδ. ii) $x_2' = x_2'(x_1)$ και $x_2'' = x_2''(x_1)$ που αντιστοιχούν στα βδα και αγβ.

Έστω δυο σημεία γ,δ, τέτοια ώστε $x_2(\gamma)=c$ και $x_2(\delta)=d$, όπου c και d είναι οι ακραίες τιμές της καμπύλης C. Τα σημεία γ, δ, χωρίζουν τη C σε δύο ανοιχτές καμπύλες που περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1' = x_1'(x_2)$ και $x_1'' = x_1''(x_2)$ (βλέπε σχήμα 5.6.1). Στη συνέχεια χωρίζουμε το πρώτο μέλος της (5.6.1) σε δύο ολοκληρώματα. Το πρώτο είναι

$$\iint_D \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Κατόπιν εκτελούμε στην (5.6.2) την ολοκλήρωση ως προς x_1. Σύμφωνα με το σχήμα (5.6.1) έχουμε

$$\int\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 = \int_c^d dx_2 \int_{x_1'(x_2)}^{x_1''(x_2)} \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\, dx_1 =$$

$$= \int_c^d dx_2 \{F_2(x_1'',x_2) - F_2(x_1',x_2)\}$$

$$\int\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 = \int_c^d dx_2\, F_2(x_1''(x_2),x_2) - \int_c^d F_2(x_1'(x_2),x_2)\, dx_2 \qquad (5.6.3)$$

Στον τελευταίο όρο της (5.6.3) αλλάζουμε τη σειρά των ορίων c και d στην ολοκλήρωση οπότε έχουμε

$$\int\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 = \int_c^d dx_2\, F_2(x_1''(x_2),x_2) + \int_d^c F_2(x_1'(x_2),x_2)\, dx_2 =$$

$$= \oint_C dx_2 F_2 \qquad (5.6.4)$$

Ανάλογα επεξεργαζόμαστε και το δεύτερο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (5.6.1) είναι

$$-\int\int \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = -\int_a^b dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\, dx_2$$

Όπου τώρα $x_2' = x_2'(x_1)$ είναι το αγβ τμήμα της καμπύλης C και $x_2'' = x_2''(x_1)$ το τμήμα αδβ αυτής. Η ολοκλήρωση της (5.6.5) ως προς x_2 δίνει τελικά

$$-\int\int \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = -\int_a^b dx_1 \{ F_1(x_2''(x_1),x_1) - F_1(x_2'(x_1),x_1) \}$$

$$= -\int_a^b F_1(x_2''(x_1),x_1) + \int_a^b F_1(x_2'(x_1),x_1)\, dx_1 =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \oint_C dx_1 F_1 \qquad (5.6.6)$$

Προσθέτοντας τις (5.6.4) και (5.6.6) καταλήγουμε στην (5.6.1) η οποία αποδεικνύει το θεώρημα.

Παράδειγμα 5.6.1

1. Θεωρούμε συνάρτηση $\mathbf{F} = x_2\hat{e}_1$. Με τη χρήση του θεωρήματος Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

πάνω στην κλειστή καμπύλη C του σχήματος (5.6.2).

Λύση :

Είναι $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \oint_C (\hat{e}_1 x_2)\cdot(dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2) = \oint_C x_2 dx_1$

Συγκρίνοντας με την (5.3.1) βρίσκουμε ότι $F_1 = x_2$ και $F_2 = 0$. Τότε από το θεώρημα έχουμε

$$\oint_C x_2 dx_1 = \int\int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(0) - \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) \right\} = -\int\int_D dx_1\, dx_2$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν E_c του τόπου που περικλείει η καμπύλη C. Άρα

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = -E_c\,,\ \mathbf{F} = x_2\hat{e}_1$$

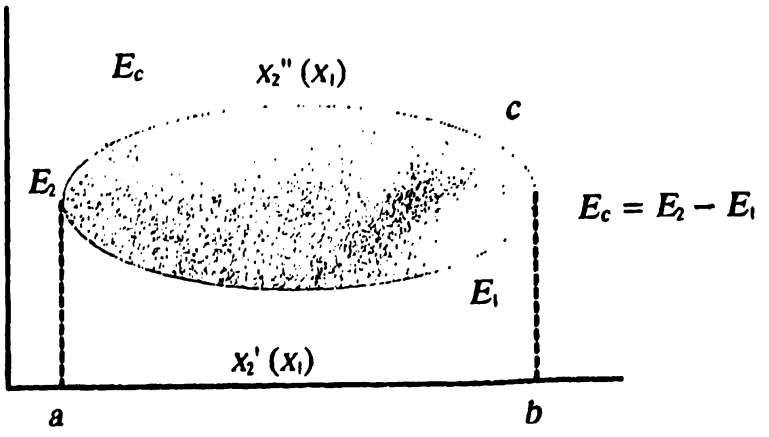
Παρατήρηση:

Προφανώς μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και χωρίς τη χρήση του θεωρήματος Green. Από το σχήμα (5.6.1) έχουμε

$$\int_C x_2 dx_1 = \int_a^b x_2'(x_1)\, dx_1 + \int_a^b x_2''(x_1) dx_1 \Rightarrow$$

$$\int x_2 dx_1 = \int_a^b x_2'(x_1)\, dx_1 - \int_a^b x_2''(x_1) dx_1$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 5.6.2. Το θεώρημα του Green δίνει άμεση γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος $\oint_C x_2 dx_1$ *ως το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη.*

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της τελευταίας ισούται με το εμβαδόν E_1 που περικλείεται από την καμπύλη $x_2'(x_1)$ και τον άξονα των x_1 ανάμεσα από τα σημεία a, b. Το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται από τη $x_2''(x_1)$ και τον άξονα των x_1. Άρα

$$\int x_2 dx_1 = E_1 - E_2 = -E_c$$

Άσκηση 5.6.1: Να δειχτεί ότι

$$\frac{1}{2}\int (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = E_c$$

Σημείωση: Η γεωμετρική ερμηνεία της τελευταίας έκφρασης είναι προφανής αν η υπό ολοκλήρωση ποσότητα γραφεί διανυσματικά ως

$$dE = \mathbf{x}\times d\mathbf{x} = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$$

5.7 Το Θεώρημα του Stokes

Πριν διατυπώσουμε το δεύτερο σημαντικό θεώρημα του κεφαλαίου αυτού που είναι το θεώρημα ή τύπος του Stokes θα υπενθυμίσουμε για παρακάτω ευκολία ορισμένες βασικές μαθηματικές έννοιες που αφορούν τις επιφάνειες.

Έστω λοιπόν μία ομαλή προσανατολισμένη επιφάνεια S η οποία έχει σύνορο μια κλειστή ομαλή καμπύλη C. Ο προσανατολισμός της καμπύλης C είναι σύμφωνος με τον προσανατολισμό της επιφάνειας S (Βλέπε σχήμα 5.7.1a).

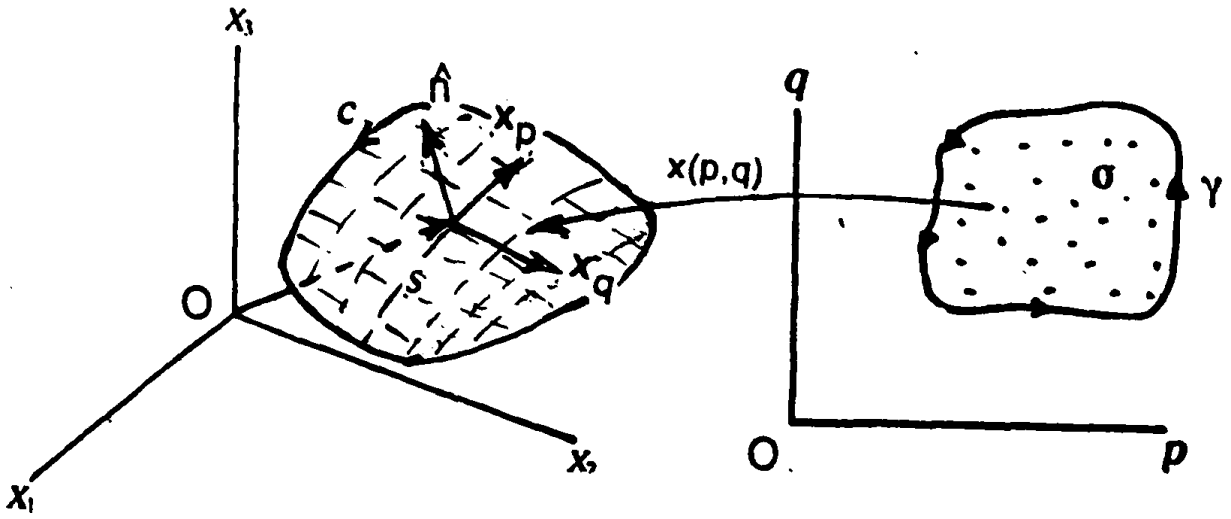
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δηλαδή η θετική πλευρά της S βρίσκεται αριστερά ενός παρατηρητή που κινείται πάνω στη C κατά τη φορά προσανατολισμού της C.

Έστω ότι παραμετροποιούμε την επιφάνεια με τις μεταβλητές (p, q). Συνεπώς το διάνυσμα θέσης των σημείων της είναι

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(p,q) = \hat{e}_1 x_1(p,q) + \hat{e}_2 x_2(p,q) + \hat{e}_3 x_3(p,q) \quad (5.7.1)$$

Θεωρούμε ότι τα $x_i(p,q)$, $i = 1,2,3$, έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς p και q μέχρι δεύτερη τάξη.



Σχήμα 5.7.1

Γνωρίζουμε ότι οι παράγωγοι $\mathbf{x}_p = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}$, $\mathbf{x}_q = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}$, και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, σχετίζονται ως εξής

$$\hat{n} = \mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q / |\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q| \quad (5.7.2)$$

Ως γνωστόν τα $\mathbf{x}_p$ και $\mathbf{x}_q$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα στις καμπύλες $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p,q = \text{σταθ.})$ και $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p = \text{σταθ.},q)$ αντίστοιχα. Τότε σύμφωνα με την 3.1.18

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} dp dq \quad (5.7.3)$$

Το στοιχειώδες μήκος ως γνωστόν γράφεται

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} dp + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} dq \quad (5.7.4)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Γνωρίζουμε επίσης να εκφράζουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial p}$, $\frac{\partial}{\partial q}$, με τη βοήθεια του τελεστή ∇ ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial x_1}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}\cdot\nabla \qquad (5.7.5)$$

και $$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\cdot\nabla \qquad (5.7.6)$$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο των τιμών των μεταβλητών p και q στο επίπεδο (p, q), οι οποίες αντιστοιχούν στα σημεία της S. Το σύνολο των τιμών αυτών σχηματίζει μία επιφάνεια στο επίπεδο (p, q) την οποία καλούμε σ, (σχήμα 5.7.1b) περιβάλλεται δε από μία καμπύλη γ της οποίας τα ζεύγη τιμών (p, q) αντιστοιχούν στα σημεία της καμπύλης C που είναι τα πέρατα της καμπύλης S.

Υποθέτουμε παραπέρα, ότι η αντιστοιχία των σημείων (p, q) με τα σημεία της επιφάνειας **x**(p, q) είναι ένα προς ένα. Επιπλέον έστω ότι για την επιφάνεια σ στο επίπεδο (p, q) ισχύει το θεώρημα Green της προηγούμενης παραγράφου. Δηλαδή για συνάρτηση **F**(p,q) όπου $\mathbf{F} = F_p\hat{e}_p + F_q\hat{e}_q$ έχουμε:

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial F_q}{\partial p} - \frac{\partial F_p}{\partial q} \right) dpdq = \oint_\gamma (F_p dp + F_q dq) \qquad (5.7.7)$$

Μπορούμε τότε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα - τύπος του Stokes:

Έστω **F** είναι διανυσματική συνάρτηση συνεχής και διαφορίσιμη πάνω σε ομαλή επιφάνεια S που περικλείεται από τη συνοριακή ομαλή καμπύλη C. Τότε η κυκλοφορία της **F** γύρω από την καμπύλη C, ισούται με τη ροή του στροβιλισμού της **F** διαμέσου της S, δηλαδή

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \iint_S \nabla x\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \qquad (5.7.8)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του θεωρήματος του Stokes θα χρησιμοποιηθούν οι εξής δύο διανυσματικές ταυτότητες

$$(\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q) \times \nabla = \mathbf{x}_q(\mathbf{x}_p \cdot \nabla) - \mathbf{x}_p(\mathbf{x}_q \cdot \nabla) \qquad (5.7.9)$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \nabla \cdot \mathbf{B} \qquad (5.7.10)$$

Η απόδειξη της (5.7.9) προχωράει όπως και στην (1.12.13) προσέχοντας να διατηρήσουμε τη σειρά των τριών διανυσμάτων δηλαδή

$$(\mathbf{x}_p \times \mathbf{x}_q) \times \nabla_i = (\mathbf{x}_q)_i (\mathbf{x}_p)_j \nabla_j - (\mathbf{x}_p)_i (\mathbf{x}_q)_j \nabla_j$$

από την οποία έπεται η (5.7.9). Η (5.7.10) προκύπτει εύκολα από την (1.12.9) δηλαδή

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \varepsilon_{ijk} A_i \nabla_j B_k = (\mathbf{A} \times \nabla)_k \cdot \mathbf{B}_k = (\mathbf{A} \times \nabla) \cdot \mathbf{B}$$

Ξεκινάμε την απόδειξη με την αντικατάσταση της (5.7.4) στο πρώτο μέλος της (5.7.8)

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} dp + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} dq \right)$$

$$= \int_\gamma \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} dp + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} dq \right)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green (5.7.7) στην τελευταία, έχουμε

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int\int_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \right) - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \right) \right\} dpdq$$

$$= \int\int_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial p \partial q} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q \partial p} \right\} dpdq$$

οπότε

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int\int_\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \right) dpdq$$

ή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int\int_\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} \right)\cdot \mathbf{F}\, dpdq \qquad (5.7.11)$$

Εισάγοντας τις (5.7.5) και (5.7.6) στην (5.7.11) έχουμε

$$\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int\int_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p}\cdot\nabla\right) - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\cdot\nabla\right) \right\}\cdot \mathbf{F}\, dpdq \qquad (5.7.12)$$

Η ποσότητα στις αγκύλες της (5.7.12) αντικαθίσταται με το ίσο της από την (5.7.9). Τότε

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int\int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \right) \times\nabla \right\}\cdot \mathbf{F}\, dpdq$$

και από την (5.7.10) για $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}$ και $\mathbf{B} = \mathbf{F}$ έχουμε

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int\int_\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \right)\cdot \nabla \times \mathbf{F} dpdq \qquad (5.7.13)$$

$$= \int\int_\sigma (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}\, dpdq \right\}$$

ή

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int\int_\sigma \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

η οποία αποδεικνύει το θεώρημα.

Παρατήρηση: Από την πιο πάνω απόδειξη είναι σαφές ότι το θεώρημα τύπος του Stokes ισχύει για κάθε επιφάνεια S η οποία έχει ως πέρας την καμπύλη εφ' όσον πάνω σ' αυτήν η **F** πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος (α). Αυτό έχει μεγάλη σημασία στις εφαρμογές.

Παράδειγμα 5.7.1

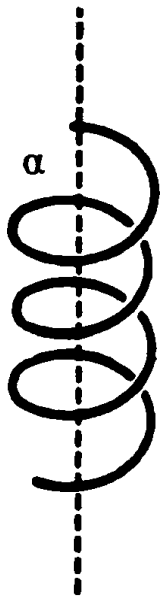
Έστω ότι το μαγνητικό πεδίο **B** προκύπτει από το στροβιλισμό ενός διανυσματικού δυναμικού : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα Stokes

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \int\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n}\, dS = \int\int_S (\mathbf{B} \cdot \hat{n})\, dS$$

δηλαδή η ροή του μαγνητικού πεδίου διαμέσου μιας ανοικτής επιφάνειας ισούται με την κυκλοφορία του διανυσματικού δυναμικού **A** κατά μήκος του πέρατος της επιφάνειας.

Κατά συνέπεια το διανυσματικό δυναμικό στο εξωτερικό ενός κυλινδρικού σωληνοειδούς απείρου μήκους δεν επιτρέπεται να είναι μηδέν, παρόλο που εκεί **B** = **0**.



Σχήμα 5.7.2. Σωληνοειδές απείρου μήκους με ακτίνα α.

Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς το πεδίο **B** είναι ομογενές και παράλληλο στον άξονα του κυλίνδρου. Ξέρουμε επίσης (παράδειγμα 4.4.3) ότι το διανυσματικό δυναμικό στο εσωτερικό του σωληνοειδούς μπορεί να επιλεγεί

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{x} = \frac{1}{2}B\rho\,\boldsymbol{\tau}\,,\ \rho \le a \qquad (5.7.15)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου **τ** εφαπτόμενο στον κύκλο της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου, με μήκος μονάδα, και ρ η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Προφανώς αν θεωρήσουμε κύκλο γ με ακτίνα ρ και κέντρο στον άξονα του κυλίνδρου

$$\int_{\gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int \frac{1}{2} B\rho\, \rho d\varphi = \frac{1}{2} B\rho^2\, 2\pi = B\pi\rho^2$$

που είναι όντως η ροή του Β διαμέσου της επιφάνειας $S = \pi\rho^2$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διανυσματικό δυναμικό έχει στο εξωτερικό την ίδια μορφή δηλαδή

$$\mathbf{A} = A(\rho)\boldsymbol{\tau}$$

όπου Α(ρ) προσδιοριστέα συνάρτηση. Προφανώς

$$\int_{\gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = B\pi a^2 \ , \ \rho > a$$

αλλά

$$\int_{\gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} = \int_{0}^{2\pi} A(\rho)\, \rho d\varphi = A(\rho) 2\pi\rho$$

δηλαδή $A(\rho)2\pi\rho = B\pi a^2$ ή $A(\rho) = \frac{1}{2} B \frac{a^2}{\rho}$

και σε διανυσματική έκφραση

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \frac{Ba^2}{\rho} \boldsymbol{\tau} \ , \ \rho > a \qquad (5.7.16)$$

ή καλύτερα

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{x}}{\rho^2}$$

Ως απόρροια της εξίσωσης (5.7.8) μπορεί να οριστεί και ο στροβιλισμός ως εξής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$(\nabla x\mathbf{F})_i = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

όπου c ένας κλειστός δρόμος κάθετος στη διεύθυνση $\hat{e}_i$ και S η περικλειόμενη επιφάνεια.

Παράδειγμα 5.7.2

Θα υπολογιστεί ο στροβιλισμός του πεδίου

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}(-\hat{e}_1 x_2 + \hat{e}_2 x_1) = \frac{\boldsymbol{\tau}}{r}, \rho = (x^2{}_1 + x^2{}_2)^{1/2}$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι εφαπτόμενο σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

$$\text{Για } r \neq 0,\ \nabla x\mathbf{F} = \hat{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{r^2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2{}_1}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2{}_2}{r^4} = 0$$

Για $r \to 0$, θεωρούμε το δρόμο C, να είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r. Προφανώς αν $\nabla x\mathbf{F} \neq 0$ θα είναι στη διεύθυνση $\hat{e}_3$, οπότε

$$(\nabla x\mathbf{F})_3 = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{x}}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} 2\pi \underset{r\to 0}{\to} \infty$$

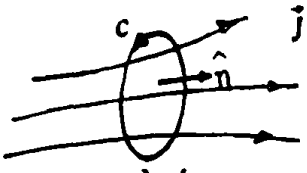
Επειδή $\nabla x\mathbf{F}$ δεν είναι παντού μηδέν το πεδίο **F** δεν μπορεί να προκύψει από μία βαθμωτή συνάρτηση. Το πεδίο **F** είναι στροβιλό.

Παράδειγμα 5.7.3 Διαφορική μορφή του νόμου του Ampére.

Το θεώρημα του Stokes μας επιτρέπει να γράψουμε το νόμο του Ampére

$$\int_c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{x} = \mu_0 I_{\text{περ.}} \qquad (5.7.17)$$

σε διαφορική μορφή.



Πραγματικά το ρεύμα που περικλείεται στο δρόμο C μπορεί να υπολογιστεί αν είναι γνωστή η πυκνότητα ρεύματος (φορτίου) **J** πάνω σε μια επιφάνεια που περικλείει η C. Πραγματικά εξ ορισμού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$dI = \mathbf{J} \cdot \hat{n}\, dS$$

ή

$$I_{\pi\epsilon\rho} = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{n}\, dS$$

'Ομως σύμφωνα με το θεώρημα Stokes

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \int \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{n}\, dS$$

όπου S είναι <u>οποιαδήποτε</u> επιφάνεια που έχει ως πέρατα το δρόμο C. 'Αρα ο νόμος του Ampére παίρνει τη μορφή

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{n}\, dS = \mu_0 \int_S (\mathbf{J} \cdot \hat{n})\ dS$$

επειδή αυτή θα πρέπει να ισχύει για κάθε S έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \qquad (5.7.18)$$

που είναι η (ισοδύναμη) διαφορική μορφή του νόμου του Ampére.

Παράδειγμα 5.7.4

Ο στροβιλισμός πεδίου με δυναμικές γραμμές που δεν στροβιλίζονται.

Συνήθως επικρατεί εντύπωση ότι ένα διάνυσμα **F** έχει στροβιλισμό διάφορο από το μηδέν αν οι δυναμικές γραμμές αυτού στροβιλίζονται. Ανάλογα επικρατεί η αντίληψη ότι μια ροή είναι στροβιλή όταν υπάρχουν στρόβιλοι. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο.

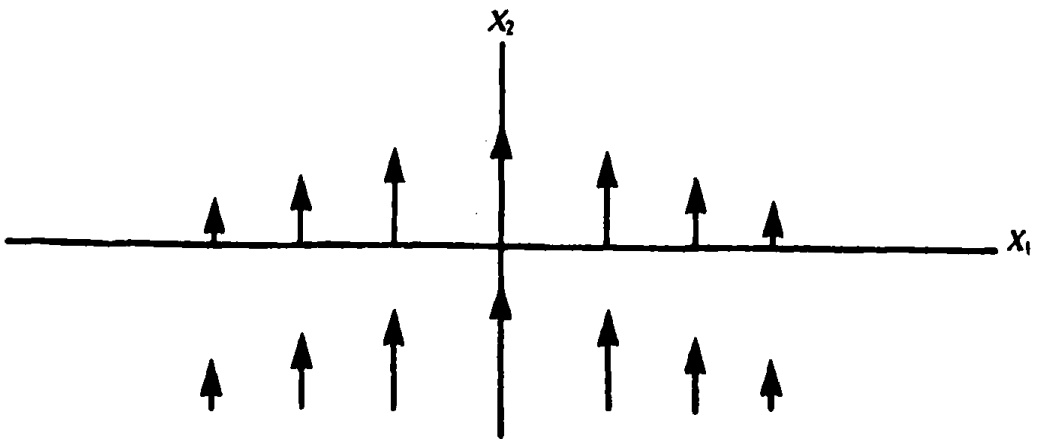
Πραγματικά ας θεωρήσουμε ένα ασυμπίεστο ρευστό (ρ= σταθ.) που περιγράφεται από το πεδίο ταχύτητας **u** = **u**(**x**). 'Εστω ότι πεδίο ταχύτητας είναι

$$\mathbf{u} = \hat{e}_2\, u_0\, e^{-x^2_1/\lambda^2}\ ,\ u_0,\ \lambda = \text{σταθ.},\ u_0 > 0 \qquad (5.7.19)$$

Οι ρευματικές γραμμές δίνονται στο σχ. 5.7.3

Προφανώς

$$\nabla x\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & u & 0 \end{vmatrix} = \hat{e}_3 \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{2ux_1}{\lambda^2} e^{-x^2_1/\lambda^2} \hat{e}_3$$



Σχήμα 5.7.3. Δείχνεται η ροή ενός ρευστού με πεδίο ταχύτητας παράλληλο στον άξονα x_2 το οποίο όμως ελλατώνεται καθώς το $|x_1|$ αυξάνει. Η ροή ενός τέτοιου ρευστού είναι στροβιλή.

δηλαδή $\nabla x\mathbf{u} = 0$ μόνο στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_1 = \infty$. Το σημείο του $\nabla x\mathbf{u}$ εξαρτάται από το σημείο του x_1. Συνεπώς το ολοκλήρωμα

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$$

θα εξαρτάται από το δρόμο C. Η ποσότητα Γ λέγεται κυκλοφορία του διανύσματος **u**. Ποια είναι η κυκλοφορία κατά μήκος του δρόμου $A_1A_2A_3A_4A_1$ (σχήμα 5.7.4) όπου :

$A_1 = (x_0, y_0)$, $A_2 = (x_0, y_0+b)$, $A_3 = (x_0+a, y_0+b)$, $A_4 = (x_0+a, y_0)$;

$(a>0$ και $b>0)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς έχουμε συνεισφορά μόνο κατά μήκος των δρόμων A_1A_2 και A_3A_4. Έχουμε

$$\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x} = \int_{A_1}^{A_2} u\, dx_2 = u_0 e^{-x^2_0/\lambda^2} \int_{y_0}^{y_0+b} dx_2 = b u_0\, e^{-x^2_0/\lambda^2}$$

$$\int_{A_3}^{A_4} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x} = \int_{y_0+b}^{y_0} u\, dx_2 = u_0 e^{-(x_0+a)^2/\lambda^2} \int_{y_0+b}^{y_0} dx_2$$

$$= -\, b u_0 e^{-(x_0+a)^2/\lambda^2}$$

Άρα

$$\Gamma = b u_0 (e^{-(x_0/\lambda)^2} - e^{-(x_0+a)^2/\lambda^2}) = b_0 u_0 \{1 - e^{-(a^2+2ax_0)/\lambda^2}\}\, e^{-(x_0/\lambda)^2}$$

παρατηρούμε ότι $\Gamma>0$ αν $x_0 > -\frac{a}{2}$ και $\Gamma<0$ αν $x_0< -\frac{a}{2}$.

Επιβεβαιώνουμε ότι αν S η επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου ισχύει

$$\Gamma = \int_S (\nabla x \mathbf{u}) \cdot \hat{n}\, dS =$$

όντως $\hat{n} = -\hat{e}_3$, δηλαδή

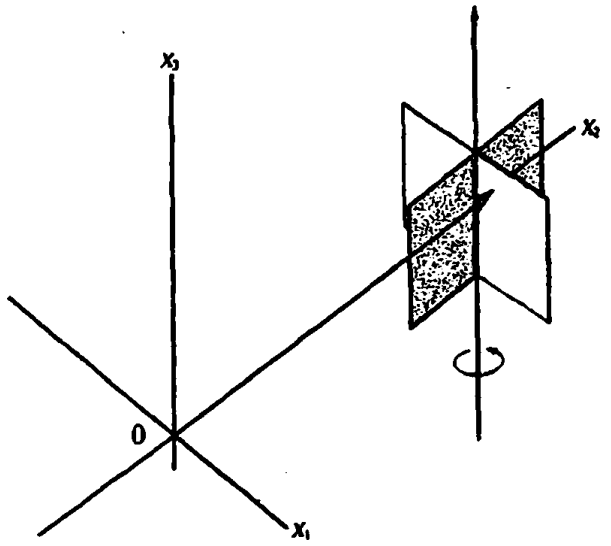
$$\int (\nabla x \mathbf{u}) \cdot \hat{n}\, dS = -\int (-) \frac{2u_0 x_1}{\lambda^2} e^{-x^2_1/\lambda^2}\, dx_1\, dx_2$$

$$= \frac{2u_0 b}{\lambda^2} \int_{x_0}^{x_0+b} x_1\, e^{-x^2_1/\lambda^2} = (-)\; u_0\; b\; e^{-x^2_1/\lambda^2} \Big|_{a+x_0}^{x_0}$$

$$= u_0\, b\, (e^{-(x_0/\lambda)^2} - e^{-(x_0+a)^2/\lambda^2}) = \Gamma$$

προφανώς $\Gamma = 0$ αν $x_0 = -a/2$. Συνεπώς αν τοποθετήσουμε πτερύγια στο πεδίο ροής θα ασκηθεί πάνω τους ροπή εκτός αν το κέντρο τους είναι πάνω στον άξονα x_2.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 5.7.5. Το πεδίο του σχήματος 5.7.3. ασκεί ροπή σε πτερύγια όταν το κέντρο της ροής δεν διέρχεται από τον άξονα περιστροφής.

Παράδειγμα 5.7.5

Ο στροβιλισμός πεδίου **F** είναι:

curl **F** = $2x_2\hat{\imath}_1 - 2x_3\hat{\imath}_2 + a\hat{\imath}_3$.

Να βρεθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του στροβιλισμού πάνω στην ανοιχτή επιφάνεια $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = a^2$, $x_3>0$. Μπορεί να υπολογισθεί το $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$ πάνω στον κύκλο $x^2_1 + x^2_2 = a^2$;

Λύση :

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με δύο τρόπους:

α) Εργαζόμαστε στις σφαιρικές συντεταγμένες. Από το παράδειγμα του εδαφίου 3.1 έχουμε ότι

$$d\mathbf{S} = \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi \, d\theta d\varphi$$

$$= a^2 \{ \sin^2\theta (\cos\varphi \, \hat{\imath}_1 + \sin\varphi \, \hat{\imath}_2) + \sin\theta \cos\theta \, \hat{\imath}_3$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε και το στροβιλισμό της **F** στις σφαιρικές συντεταγμένες, οπότε έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{F} = a \{ 2(\sin\theta \sin\varphi \, \hat{\imath}_1 - \cos\theta \, \hat{\imath}_2) + \hat{\imath}_3 \}$$

Τότε το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας πάνω στην επιφάνεια είναι:

$$\int\int_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\{ 2\sin\varphi\cos\varphi \sin^3\theta + (-2\cos\theta \sin\varphi \sin^2\theta) + \sin\theta\cos\theta \}$$

$$= a^3 \{ 2 \int_0^{2\pi} 2d\varphi \sin\varphi \cos\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta - \int_0^{2\pi} 2\sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \} = \pi a^3.$$

β) Θα υπολογίσουμε τώρα το ίδιο ολοκλήρωμα με τη χρήση των σχέσεων (3.1.23)–(3.1.26). Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $\nabla \times \mathbf{F}$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\int\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{n} |dS| = \int\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{n} \frac{dx_1 dx_2}{\cos\gamma}$$

όπου $\hat{n}$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στη συγκεκριμμένη επιφάνεια, $\phi = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3$,

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{x_1\hat{i}_1}{(x^2_1)^{1/2}} = \frac{x_1\hat{i}_1}{a}$$

και $\cos\gamma = \hat{i}_3 \cdot \hat{n} = \frac{x_3}{a}$.

Αντικαθιστώντας στο επιφανειακό ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\int\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_S (2x_2\hat{i}_1 - 2x_3\hat{i}_2 + a\hat{i}_3) \cdot \frac{x_1\hat{i}_1 + x_2\hat{i}_2 + x_3\hat{i}_3}{x_3} dx_1 dx_2$$

$$= \int\int_S \{ \frac{2x_1x_2}{x_3} - 2x_2 + a \} dx_1 dx_2$$

Από την εξίσωση της επιφάνειας έχουμε

$$x_3 = (a^2 - x^2_1 - x^2_2)^{1/2}$$

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα, οπότε

$$\int\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x^2_1}}^{\sqrt{a^2-x^2_1}} dx_2 \{ \frac{2x_1x_2}{\sqrt{a^2-x^2_1-x^2_2}} - 2x_2 + a \} dx_1 dx_2$$

Το τελευταίο, χωρίζεται σε τρία ολοκληρώματα. Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x^2_1}}^{\sqrt{a^2-x^2_1}} dx_2 \frac{2x_1x_2}{\sqrt{a^2-x^2_1-x^2_2}}$$

$$= \int_{-a}^{a} dx_1 x_1 \int_{-\sqrt{a^2-x^2_1}}^{\sqrt{a^2-x^2_1}} \frac{dx^2_2}{\sqrt{a^2-x^2_1-x^2_2}}$$

$$= \int_{-a}^{a} dx_1 x_1 \{ \sqrt{a^2 -x^2_1 -x^2_2} \}_{x_2=-\sqrt{a-^2x^2_1}}^{x_2=\sqrt{a-^2x^2_1}} = 0$$

Επίσης

$$\int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x^2_1}}^{\sqrt{a^2-x^2_1}} (-2x_2\, dx_2) = - \int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x^2_1}}^{\sqrt{a^2-x^2_1}} dx^2_2 = 0$$

Τέλος το τρίτο ολοκλήρωμα δίνει:

$$\int_{-a}^{a} dx_1 \int_{-\sqrt{a^2-x^2_1}}^{\sqrt{a^2-x^2_1}} a\, dx_2 = a \int_{-a}^{a} \{\sqrt{a^2 -x^2_1} + \sqrt{a^2 -x^2_1}\}\, dx_1$$

$$= 2a \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 -x^2_1}\, dx_1$$

$$= 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos\theta\, d \sin\theta = \pi a^3$$

Η δεύτερη μέθοδος υπολογισμού είναι περισσότερο πολύπλοκη από την πρώτη. Είναι όμως πολύ χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει σφαιρική συμμετρία και είμαστε υποχρεωμένοι να εργασθούμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Για να απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα, παρατηρούμε πρώτα, ότι ο κύκλος $x^2_1 + x^2_2 = a^2$, αποτελεί το σύνορο της επιφάνειας όπου υπολογίστηκε ο στροβιλισμός της **F**. Έτσι, παρόλο που η **F** δεν είναι γνωστή, γνωρίζουμε όμως

ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο της επιφάνειας, σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes είναι:

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int\int_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \pi a^3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.2.1. Ένα ηλεκτροστατικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{a^2}(\hat{e}_1 x_2 x_3 + \hat{e}_2 x_1 x_3 + \hat{e}_3 x_1 x_2)$$ όπου E_0, a σταθερές.

Είναι το πεδίο αυτό αποδεκτό; Αν ναι, πόσο φορτίο περικλείεται μέσα στο ημισφαίριο με σύνορα

$$S_1 : x_3 = \sqrt{a^2 - x^2_1 - x^2_2} \text{ και } S_2 : x^2_1 + x^2_2 = a^2,\ x_3 = 0$$

5.2.2. Ένα ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση $\mathbf{E} = \frac{E_0}{a^2}(\hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_2 x_2)$. Είναι αποδεκτό; Αν ναι, πόσο φορτίο περικλείεται στην ημικυλινδρική επιφάνεια με ύψος h και βάσεις ημικύκλια ακτίνας d και παράπλευρη επιφάνεια ακτίνας d;

5.2.3. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss και την προφανή συμμετρία ηλεκτρικού πεδίου, να βρεθεί το ηλεκτροστατικό πεδίο μιας άπειρης επίπεδης ομοιόμορφης κατανομής φορτίου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.2.4. Να γίνει το ίδιο για επίπεδη ταινία στο επίπεδο x_3, δηλαδή

$\rho(x_1, x_2) = \rho_0$ $\quad -a < x_1 < a$

$\rho(x_1, x_2) = 0$ $\quad |x_1| > a \quad -\infty < x_2 < \infty$

5.2.5. Να γίνει το ίδιο αν

$\rho(x_1, x_2) = \rho_0 \exp\{-|x_1|/a\}$, $-a < x_1 < a$, $\quad -\infty < x_2 < \infty$

5.2.6. Να γίνει το ίδιο για άπειρο κύλινδρο ακτίνας a αν

$\rho(x_1, x_2) = \rho_0$, $\quad \sqrt{x^2_1 + x^2_2} < a$

$\rho(x_1, x_2) = 0$ $\quad$ αλλού

5.2.7. Να γίνει το ίδιο αν $\rho(x_1, x_2) = \rho_0 \exp\{-\sqrt{x^2_1 + x^2_2}/a\}$

$-\infty < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$

5.2.8. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss και τη συμμετρία του πεδίου να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η κατανομή

$\rho(x_1, x_2, x_3) = \rho_0$, $\quad \sqrt{x^2_1 + x^2_2 + x^2_3} < a$

$\rho(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\quad$ αλλού

5.2.9. Να γίνει το ίδιο αν $\rho(x_1, x_2, x_3) = \rho_0 e^{-r/a}$, $r = (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^{1/2}$

5.2.10. Να γίνει το ίδιο αν

$\rho(x_1, x_2, x_3) = \rho_0$, $\quad r < a$

$\rho(x_1, x_2, x_3) = \rho_1$, $\quad a < r < 2a$

$\rho(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\quad$ αλλού

όπου $r = \sqrt{x^2_1 + x^2_2 + x^2_3}$

5.2.11. Να βρεθεί η ροή του ομογενούς μαγνητικού πεδίου **B** διαμέσου της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου με ύψος h και ακτίνα βάσης R αν ο άξονας του κώνου είναι παράλληλος στο **B**.

Υπόδειξη: Ο νόμος του Gauss ίσως σας βοηθήσει να αποφύγετε μερικές πράξεις.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.2.12. Να δειχθεί ότι

$$\iint \hat{n}\, dS = 0$$

5.2.13. Η ελκτική δύμαμη μεταξύ δύο μαζών m_1, m_2 που απέχουν απόσταση $r=|\mathbf{x}|$ ισούται με $G_N m_1 m_2 / r^2$ (G_N=παγκόσμια σταθερά). Να δειχτεί ότι η ένταση της βαρύτητας (βαρυτική δύναμη ανά μονάδα μάζας) που βρίσκεται πλησίον μεγάλης βαρυτικής μάζας M ομοιόμορφης κατανομής ρ και αυθαίρετου σχήματος, όγκου που περικλείεται από επιφάνεια S ,δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{g} = -G\rho \oint\!\!\oint_S \frac{d\mathbf{S}}{r}$$

(Το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.3.1 ίσως φανεί χρήσιμο)

5.7.1. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ampére (εξ. (5.7.17)), να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο **B** παντού στο χώρο που δημιουργείται από κυλινδρικό αγωγό απείρου μήκους ακτίνας a που διαρρέεται με ρεύμα I ομοιόμορφα κατανεμημένο. Είναι $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ παντού στο χώρο; Ποιό είναι το όριο όταν η ακτίνα a γίνεται πολύ μικρή;

5.7.2. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει το θεώρημα του Stokes για το πεδίο

$$\mathbf{B} = (\hat{e}_2 x_1 - \hat{e}_1 x_2)/(x^2_1 + x^2_2)$$

αν C είναι κύκλος στο επίπεδο (x_1,x_2) ακτίνας R και κέντρο την αρχή των αξόνων και S η επιφάνεια του κύκλου αυτού. Να εξηγηθεί η απάντηση.

5.7.3. Στην περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος κατά πόσον ισχύει ο τύπος του Stokes αν $c = c_1 + c_2$ όπου c_1 και c_2 ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες R_1 και R_2 αντίστοιχα και S η επιφάνεια που περικλείουν οι κύκλοι αυτοί.

5.7.4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

όπου $\mathbf{F} = (e^{-x_2} - x_3 e^{-x_1})\,\hat{e}_1 + (e^{-x_3} - x_1 e^{-x_2})\,\hat{e}_2 + (e^{-x_1} - x_2 e^{-x_3})\,\hat{e}_3$ και c ο δρόμος

$$x_1 = \frac{\ln(1+p)}{\ln 2},\quad x_2 = \sin\frac{\pi p}{2},\quad x_3 = \frac{1-e^{-p}}{1-e},\quad 0 \le p \le 1$$

(Υπόδειξη: σκεφτείτε πριν αρχίσετε τις πράξεις!)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.7.5. Να δειχτεί ότι η επιφάνεια που περικλείει μια επίπεδη κλειστή καμπύλη c είναι

$$S = \frac{1}{2} \oint_c \mathbf{x} \times \mathbf{t}\, ds$$

Να βρεθεί η συνθήκη ώστε να υπάρχει συνάρτηση **F** τέτοια ώστε

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = S$$

όπου S η επιφάνεια που περικλείει η καμπύλη c (χρησιμοποιείστε τον τύπο του Stokes)

Δώστε μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων **F**.

5.7.6. Με την βοήθεια του προηγούμενου προβλήματος 5.7.5. να δειχθεί ότι

$$S = \frac{1}{2} \oint_c \mathbf{x} \times d\mathbf{x}$$

5.7.7. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου προβλήματος να εκφραστούν με τη βοήθεια επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων οι επιφάνειες

α) Ορθογωνίου παραλληλογράμμου

β) ορθογωνίου τριγώνου

γ) κύκλου.

5.7.8. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

i) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ παντού στο χώρο

ii) Υπάρχει πεδίο **A** τέτοιο ώστε $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Υπόδειξη ii → i είναι προφανές (κύτταξε κεφ.3.8.20). Για να αποδείξετε ότι i → ii δείξτε ότι το πεδίο

$$A_1 = 0,\ A_2 = \int_a^{x_1} B_3(x_1', x_2, x_3)\, dx_1'$$

$$A_3 = -\int_a^{x_1} B_2(x_1', x_2, x_3)\, dx_1' + \int_b^{x_1} B_1(a, x_2', x_3)\, dx_2'$$

είναι ένα τέτοιο (αν $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) (κύτταξε και συζήτηση του εδ. 4.5)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

5.7.9. Να δειχθεί ότι ο στροβιλισμός ενός διανύσματος **F** μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\nabla x\mathbf{F} = \lim_{v\to 0} \frac{1}{v} \int\int (\hat{n}x\,\mathbf{F})\, dS$$

(κύτταξε εξ. 5.5.5). Να δειχθεί ότι η σχέση αυτή οδηγεί στον συνήθη ορισμό της ποσότητας $\nabla x\mathbf{F}$.

5.7.10. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x_1, x_2, x_3) = x_2$ στον όγκο που περιβάλλεται από σφαίρα ακτίνας $r = 1$. Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ της οποίας το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας της πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας $r = 1$, οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα;

5.7.11. Στη κβαντομηχανική σωμάτιο μάζας σε δυναμικό $V(\mathbf{x})$ υπακούει στην εξίσωση

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

με τη χρήση αυτής δείξτε την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$$

όπου $\rho = \psi^*\psi$. Να βρεθεί η έκφραση για τη **J**.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Μέχρι τώρα μελετήσαμε προβλήματα, όπου οι διάφορες φυσικές ποσότητες εκφράστηκαν κυρίως σε ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων που καλούμε καρτεσιανά. Το μεγάλο πλεονέκτημα των καρτεσιανών συντεταγμένων είναι ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\imath}_1$, $\hat{\imath}_2$, $\hat{\imath}_3$, κατά μήκος των αντιστοίχων συντεταγμένων x_1, x_2, x_3, είναι σταθερά. Όμως πολλές φορές τα φυσικά προβλήματα παρουσιάζουν τέτοιες συμμετρίες που μας οδηγούν να εκφράσουμε τις διάφορες ποσότητες σε άλλα συστήματα συντεταγμένων* . Είναι χρήσιμο λοιπόν να δούμε πως μπορούμε να εκφράσουμε τελεστές, όπως ο ανάδελτα ή η Λαπλασιανή σε διάφορα γενικευμένα συστήματα. Τα περισσότερο χρήσιμα γενικευμένα συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε εδώ, είναι το σύστημα των σφαιρικών και το σύστημα των κυλινδρικών συντεταγμένων που είναι και τα απλούστερα.

Αφού μελετήσουμε τους μετασχηματισμούς που συνδέουν τα δύο αυτά συστήματα με το καρτεσιανό, θα επεκτείνουμε την ανάλυσή μας σε γενικώτερους τύπους μετασχηματισμών οι οποίοι θα φανούν χρήσιμοι και για άλλα συστήματα τα οποία όμως δεν θα μελετήσουμε εδώ* .

---

* Η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων είναι αυθαίρετη.Όμως η επιλογή του κατάλληλου συστήματος διευκολύνει πολύ την λύση του προβλήματος και πρέπει να επιδιώκεται.

1* Άλλα χρήσιμα συστήματα, αλλά ιδίως πολύ σημαντικά για ορισμένα προβλήματα, μπορεί ο ενδιαφερόμενος να μελετήσει σε περισσότερο προχωρημένα βιβλία. (βλ. Ι.Δ.Βέργαδου, Μ.Μ.Φ. Ι).

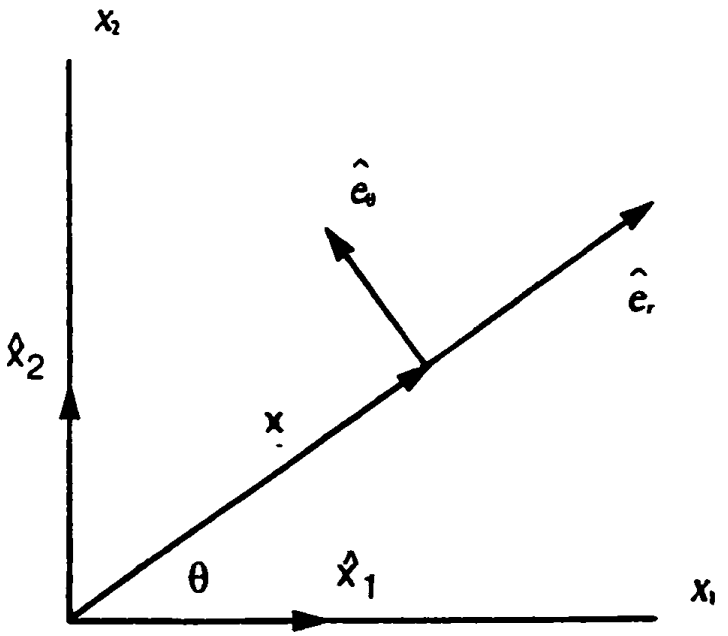
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6.1. Κυλινδρικές συντεταγμένες.

Για να κατανοήσουμε τη σπουδαιότητα των γενικευμένων συστημάτων συντεταγμένων, ας ξεκινήσουμε από ένα επίπεδο καρτεσιανό σύστημα δύο διαστάσεων.

Ας θεωρήσουμε $\hat{\imath}_1$, $\hat{\imath}_2$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x_1, x_2 αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα θέσης είναι

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\imath}_1 + x_2 \hat{\imath}_2 \qquad (6.1.1)$$



Σχήμα 6.1.1. Δείχνεται ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων. Τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_r$ και $\hat{e}_\varphi$, αλλάζουν καθώς r, φ μεταβάλλονται.

Σε ορισμένες εφαρμογές, είναι προτιμότερο να εκφράσουμε το διάνυσμα **x** ως προς τις λεγόμενες πολικές συντεταγμένες r και θ, με μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi$ αντίστοιχα όπως στο σχήμα 6.1.1. Καθώς είδαμε στο εδ. 2.9. ισχύουν $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\mathbf{x} = r\,\hat{e}_r \qquad (6.1.2)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μπορούμε εύκολα να μεταβούμε από τις καρτεσιανές στις πολικές συντεταγμένες. Είναι

$$|x| = r = \sqrt{x^2_1 + x^2_2}$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{x^2_1 + x^2_2}}, \quad \sin\theta = \frac{x_2}{\sqrt{x^2_1 + x^2_2}} \tag{6.1.3}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα συνδέονται ως εξής

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath}_1 \\ \hat{\imath}_2 \end{pmatrix} \tag{6.1.4}$$

(βλέπε ασκήσεις 1.9.2 και 1.9.3).

Το σύστημα των κυλινδρικών συντεταγμένων αποτελεί άμεση επέκταση του συστήματος των πολικών συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Συγκεκριμένα, προσθέτοντας μία ακόμη εξίσωση στις παραπάνω για τον άξονα x_3, και συμβολίζοντας

$$\rho = (x^2_1 + x^2_2)^{1/2}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{x_1}{\rho} \tag{6.1.5}$$

έχουμε

$$x_1 = \rho\cos\varphi \,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$x_2 = \rho \sin\varphi \,, \quad 0 \le \rho < \infty \tag{6.1.6}$$

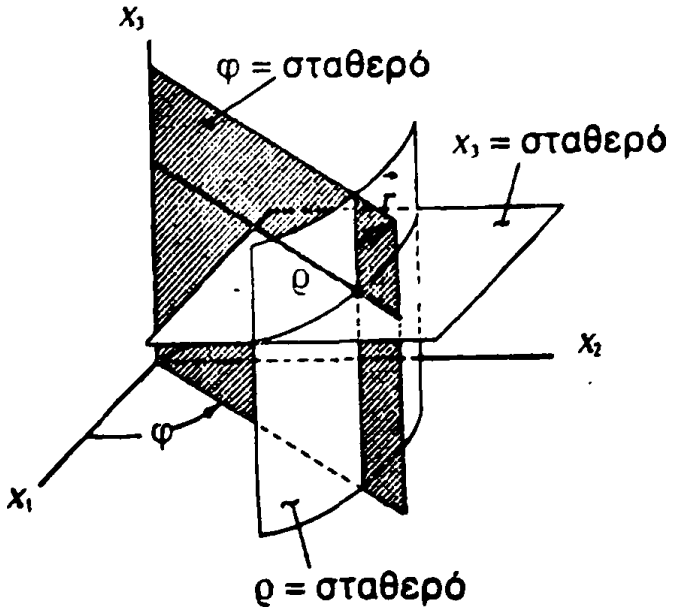
$$x_3 = x_3 \,, \quad -\infty < x_3 < \infty$$

Στις εξισώσεις έχουμε συμβολίσει με φ τη γωνία, για να είναι κατανοητό ότι μετρείται πάνω στο επίπεδο (x_1Ox_2) και με ρ την ακτίνα του κυλίνδρου για να υποδηλώνει καθαρά την απόσταση σημείου από τον άξονα x_3 και όχι από το κέντρο του συστήματος (βλέπε σχήμα 6.1.2.)

Κάθε σημείο του χώρου είναι σημείο τομής τριών επιφανειών: της επιφάνειας ρ=σταθ. της φ= σταθ. και της x_3 = σταθ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Η ρ = σταθ. είναι κυλινδρική επιφάνεια, η φ = σταθ. είναι ημιεπίπεδο διερχόμενο από τον άξονα x_3 που ξεκινά από αυτόν και εκτείνεται στο άπειρο και η x_3 = σταθ. είναι επίπεδο παράλληλο στο x_1Ox_2. (βλέπε σχήμα 6.1.2)



Σχήμα 6.1.2. Κυλινδρικές Συντεταγμένες. Κάθε σημείο ορίζεται ως η τομή των επιφανειών ρ=σταθ., φ = σταθ., x_3 = σταθ. Δείχνονται και τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_3$

Ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων είναι ο συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων των πολικών συντεταγμένων και του $\hat{e}_3$. Τούτο προκύπτει και ως εξής:

Στα ανωτέρω επίπεδα με τη χρήση του ορισμού της κλίσης βαθμωτής συνάρτησης, ορίζουμε τα κάθετα σε αυτά διανύσματα. Έτσι στην επιφάνεια ρ = σταθ. το κάθετο διάνυσμα είναι το gradρ και για φ = σταθ., x_3 = σταθ. τα gradφ και $\text{grad}x_3$ αντίστοιχα. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα (σχήμα 6.1.2),

$$\hat{e}_\rho = \frac{\text{grad}\rho}{|\text{grad}\rho|}, \quad \hat{e}_\varphi = \frac{\text{grad}\varphi}{|\text{grad}\varphi|}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\text{grad}x_3}{|\text{grad}x_3|} \qquad (6.1.7)$$

τα οποία αποτελούν ένα τρισορθογώνιο σύστημα. Πράγματι το $\hat{e}_\rho$ είναι κάθετο στην κυλινδρική επιφάνεια ρ = σταθ. και κείται πάνω στην ακτίνα ρ, ενώ το $\hat{e}_\varphi$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη C και συνεπώς $\hat{e}_\rho \perp \hat{e}_\varphi$. Το επίπεδο των $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi$ είναι προφανώς κάθετο στον x_3, άρα και στο $\hat{e}_3$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις (6.1.7). Από τον ορισμό της κλίσης, για τυχαία βαθμωτή συνάρτηση ϕ, έχουμε

$$\frac{d\phi}{ds} = |\text{grad } \phi| \qquad (6.1.8)$$

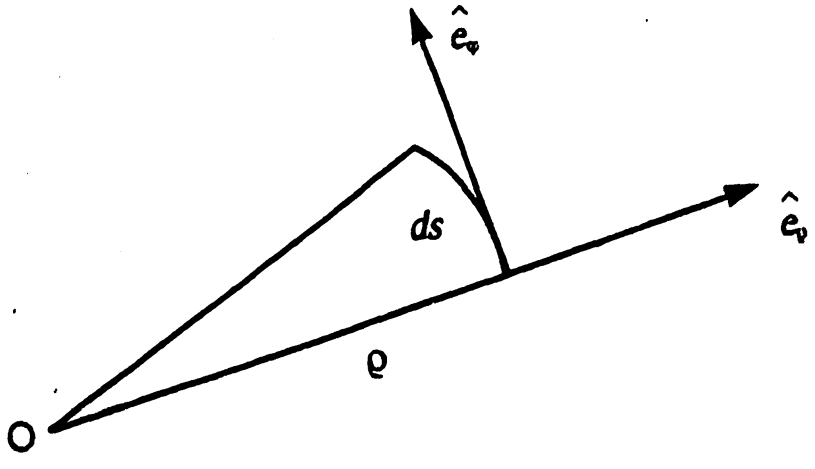
όπου s μετρά την απόσταση στη διεύθυνση της κλίσης. Τότε κατά μήκος του άξονα x_3 είναι $ds = dx_3$, άρα $|\text{grad } x_3| = \frac{dx_3}{ds} = \frac{ds}{ds} = 1$, και

$$\hat{e}_3 = \frac{\text{grad}x_3}{|\text{grad}x_3|} = \text{grad}x_3 \qquad (6.1.9)$$

Κατά μήκος της ακτίνας ρ, είναι $|\text{grad } \rho| = \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{d\rho} = 1$

$$\hat{e}_\rho = \text{grad}\rho \qquad (6.1.10)$$

Κατά μήκος της καμπύλης φ, είναι $ds=\rho d\varphi$ (σχήμα 6.1.3.)



Σχήμα 6.1.3. Επειδή $|\text{grad } \varphi| = \frac{1}{\rho}$, $\hat{e}_\varphi = \rho \text{ grad } \varphi$ *και* $d\hat{e}_\rho/d\varphi = \hat{e}_\varphi$

άρα $|\text{grad}\varphi| = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$ και

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\text{grad}\varphi}{|\text{grad}\varphi|} = \rho\, \text{grad}\varphi \qquad (6.1.11)$$

Τα $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_3$, αποτελούν ένα δεξιόστροφο σύστημα.

Ας δούμε τώρα πως εκφράζονται ορισμένες βασικές οντότητες στο κυλινδρικό σύστημα. Το διάνυσμα θέσης είναι

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\imath}_1 + x_2 \hat{\imath}_2 + x_3 \hat{\imath}_3$$

$$= \rho \left(\frac{x_1}{\rho} \hat{\imath}_1 + \frac{x_2}{\rho} \hat{\imath}_2 \right) + x_3 \hat{\imath}_3$$

$$= \rho\, \hat{e}_\rho + x_3\, \hat{e}_3 \qquad (6.1.12)$$

Για το στοιχειώδες διάνυσμα $d\mathbf{x}$ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί επειδή το $\hat{e}_\rho$ μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Από την (6.1.12)

$$d\mathbf{x} = d(\rho\, \hat{e}_\rho) + d(x_3\, \hat{e}_3)$$

$$= \hat{e}_\rho\, d\rho + \rho d\hat{e}_\rho + \hat{e}_3 dx_3$$

Όμως $d\,\hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi\, d\varphi$ (βλέπε σχήμα 6.1.3.), άρα:

$$d\mathbf{x} = \hat{e}_\rho\, d\rho + \rho\, \hat{e}_\varphi\, d\varphi + \hat{e}_3 dx_3 \qquad (6.1.13)$$

Το στοιχειώδες μήκος στις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι τότε

$$ds = |d\mathbf{x}| = (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dx^2{}_3)^{1/2} \qquad (6.1.14)$$

Ας δούμε στην συνέχεια πώς γράφεται η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης, στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Έτσω λοιπόν $\phi(\rho,\varphi,x_3)$ η βαθμωτή συνάρτηση. Τότε, η $\nabla\,\phi = \text{grad}\,\phi$ μπορεί να αναλυθεί στις τρεις ορθογώνιες μεταξύ τους κατευθύνσεις $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_3$ ως εξής

$$\text{grad}\,\phi = \nabla\,\phi = (\hat{e}_\rho \cdot \nabla\,\phi)\,\hat{e}_\rho + (\hat{e}_\varphi \cdot \nabla\,\phi)\,\hat{e}_\varphi + (\hat{e}_3 \cdot \nabla\,\phi)\,\hat{e}_3 \qquad (6.1.15)$$

Προφανώς οι $(\hat{e}_i \cdot \nabla\,\phi)$ δίνουν τις προβολές της κλίσης της ϕ πάνω στις αντίστοιχες κατευθύνσεις $\hat{e}_i$, ή σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στο εδάφιο (3.2), οι προβολές αυτές αποτελούν το ρυθμό μεταβολής της ϕ στις συγκεκριμένες κατευθύνσεις. Δηλαδή

$$\hat{e}_\rho \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial s}\Big|_{\varphi, x_3=\sigma\tau\alpha\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}$$

$$\hat{e}_\varphi \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial s}\Big|_{\rho, x_3=\sigma\tau\alpha\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \qquad (6.1.16)$$

$$\hat{e}_3 \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial s}\Big|_{\varphi, \rho=\sigma\tau\alpha\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

'Αρα η έκφραση της κλίσης βαθμωτής συνάρτησης ϕ σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από την (6.1.15) με αντικατάσταση των (6.1.16), δηλαδή

$$\text{grad}\, \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\hat{e}_3 \qquad (6.1.17)$$

Ανάλογα θα μπορούσαμε να γράψουμε τις εκφράσεις άλλων χρήσιμων τελεστών στο σύστημα αυτό. 'Ομως θα αναβάλουμε τη μελέτη αυτή μέχρι να ορίσουμε τους γενικούς μετασχηματισμούς από καρτεσιανά σε γενικά συστήματα συντεταγμένων.

6.2. Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες αποτελούν επίσης μια άλλη γενίκευση των πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο. Ως ανεξάρτητες συντεταγμένες λαμβάνονται, η απόσταση $r = |\mathbf{x}|$ σημείου από την αρχή των αξόνων, η γωνία θ ανάμεσα στον άξονα x_3 και το διάνυσμα θέσης $\mathbf{x}$ και η γωνία φ που σχηματίζει ο άξονας x_1 με την προβολή του διανύσματος $\mathbf{x}$ στο επίπεδο x_1Ox_2. Η εξίσωση $r = \sigma\tau\alpha\theta.$ ισοδυναμεί με επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r. Η εξίσωση $\varphi = \sigma\tau\alpha\theta.$ αντιστοιχεί σε επιφάνεια επίπεδη διερχόμενη από τον άξονα x_3 που σχηματίζει γωνία φ με το επίπεδο x_1Ox_3. Τέλος η $\theta = \sigma\tau\alpha\theta.$ αποτελεί κωνική επιφάνεια με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον x_3. Η ακτίνα r μεταβάλλεται στο διάστημα $[0,\infty)$, η γωνία φ μεταβάλλεται στο διάστημα $[0,2\pi]$ και η γωνία θ, στο διάστημα $[0,\pi]$. Εύκολα μπορούν να παραχθούν οι μετασχηματισμοί μεταξύ των σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων είναι

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi \qquad 0 \le r < \infty$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

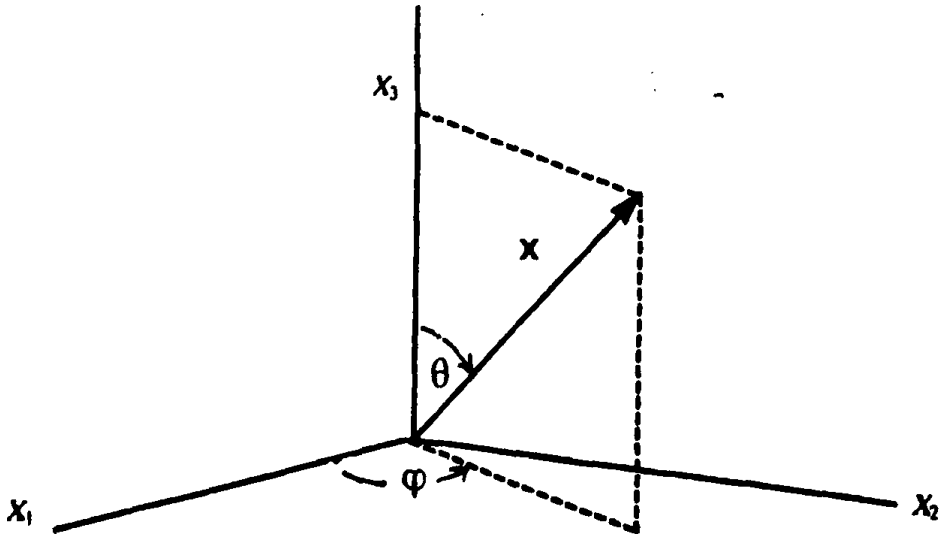
$$x_2 = r \sin\theta \sin\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \tag{6.2.1}$$

$$x_3 = r \cos\theta \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\text{όπου } r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2_1 + x^2_2 + x^2_3} \tag{6.2.2}$$

Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί δίνονται

$$\theta = \cos^{-1}\frac{x_3}{r}, \quad \varphi = \sin^{-1}\frac{x_2}{\sqrt{x^2_1 + x^2_2}} = \cos^{-1}\frac{x_1}{\sqrt{x^2_1 + x^2_2}} \tag{6.2.3}$$

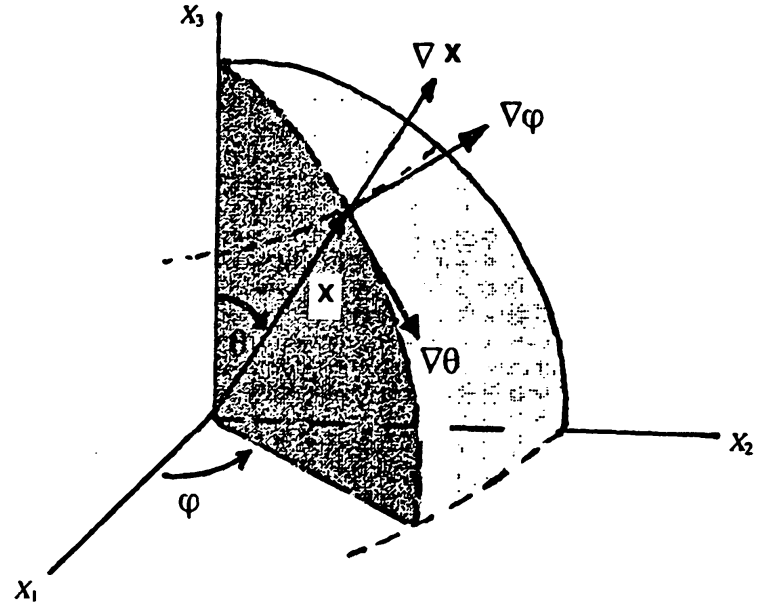


Σχήμα 6.2.1. Σφαιρικές συντεταγμένες r, θ και φ.

Διαπιστώνουμε και εδώ, ότι τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζονται στις διευθύνσεις των μεταβολών $\nabla r, \nabla\theta, \nabla\varphi$, σχηματίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα (βλέπε σχήμα 6.2.2). Είναι

$$\hat{e}_r = \frac{\text{grad}r}{|\text{grad}r|}, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\text{grad}\theta}{|\text{grad}\theta|}, \quad \hat{e}_\varphi = \frac{\text{grad}\varphi}{|\text{grad}\varphi|} \tag{6.2.4}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



Σχήμα 6.2.2. Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\theta$ σχηματίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα. Η διεύθυνσή του αλλάζει από σημείο σε σημείο.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε ξανά τον ορισμό της κατευθυντικής παραγώγου, με παράμετρο το ίδιο μήκος της εκάστοτε καμπύλης (όπως στην (6.1.8)), οι παραπάνω εκφράσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων παίρνουνε βολικότερη μορφή. Έτσι αν ds = |**dx**| τότε

$$\hat{e}_r = \text{grad } r \tag{6.2.5}$$

Για ds =rdθ είναι:

$$\text{grad}\theta = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} \rightarrow \hat{e}_\theta = r \text{ grad } \theta \tag{6.2.6}$$

Επίσης για ds = r sinθ dφ έχουμε

$$\text{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r\sin\theta} \rightarrow \hat{e}_\varphi = r \sin\theta \text{ grad } \varphi \tag{6.2.7}$$

Με τα παραπάνω εφόδια είμαστε σε θέση να γράψουμε διάφορες διανυσματικές οντότητες στις σφαιρικές συντεταγμένες. Η απλούστερη διανυσματική ποσότητα είναι το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{x} = r\,\hat{e}_r$$

Για το στοιχειώδες διάνυσμα έχουμε (βλέπε σχήμα 6.2.3)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

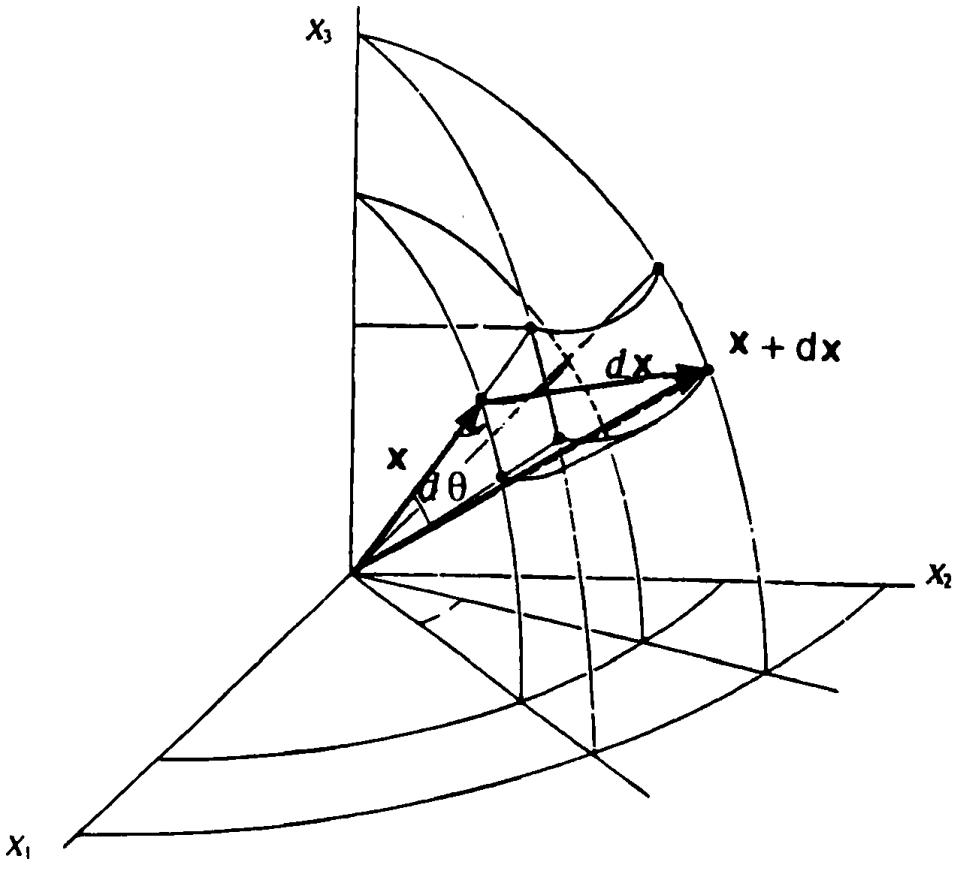
$$d\mathbf{x} = \hat{e}_r\, dr + r\, d\,\hat{e}_r \text{ όπου } d\,\hat{e}_r = \hat{e}_\theta\, d\theta + \hat{e}_\varphi \sin\theta\, d\varphi$$

Δηλαδή:

$$d\mathbf{x} = \hat{e}_r\, dr + \hat{e}_\theta\, r\, d\theta + \hat{e}_\varphi\, r \sin\theta\, d\varphi \quad (6.2.8)$$

Τότε το στοιχειώδες μήκος είναι

$$ds = |d\mathbf{x}| = (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2)^{1/2} \quad (6.2.9.)$$



Σχήμα 6.2.3. Το διάνυσμα dr μπορεί να αναλυθεί στο σύστημα $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ *και μάλιστα* $d\mathbf{x} = \hat{e}_r\, dr + \hat{e}_\theta\, r d\theta + \hat{e}_\varphi\, r \sin\theta d\varphi$.

Κάθε διανυσματική συνάρτηση **F** μπορεί να γραφεί σε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων ως εξής

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = F_r\, \hat{e}_r + F_\varphi\, \hat{e}_\varphi + F_\theta\, \hat{e}_\theta$$

Η κλίση βαθμωτής συνάρτησης μπορεί να προκύψει επίσης ανάλογα

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\, \hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\, \hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\, \hat{e}_\varphi$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

6.3. Καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων

Είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε γενικώτερα τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.

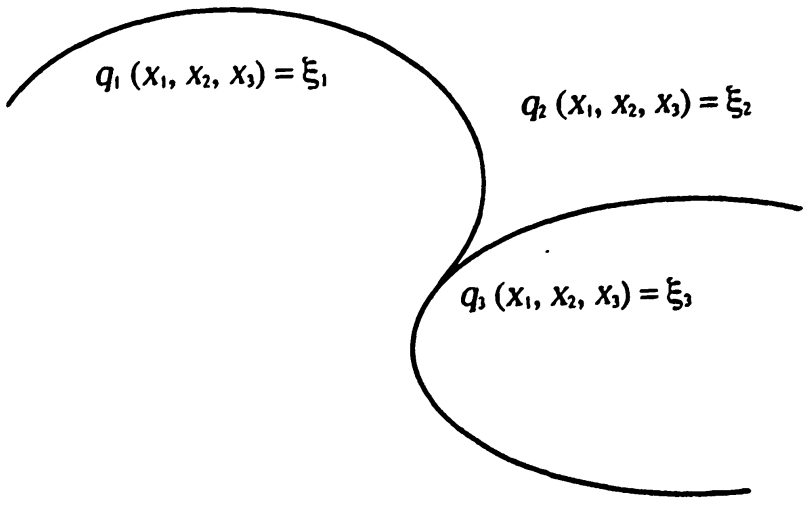
Κάθε σημείο του τρισδιάστατου χώρου, όπως γνωρίζουμε, εκφράζεται από μια διαταγμένη τριάδα αριθμών (x_1,x_2,x_3) στο καρτεσιανό σύστημα. Το ίδιο σημείο σε ένα γενικευμένο σύστημα εκφράζεται με μια άλλη τριάδα (q_1,q_2,q_3). Έστω ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται ως συνάρτηση των q_1,q_2,q_3 δηλαδή

$$x_1 = x_1(q_1,q_2,q_3)\ ,\ x_2 = x_2(q_1,q_2,q_3)\ ,\ x_3 = x_3(q_1,q_2,q_3) \qquad (6.3.1)$$

Οι εξισώσεις (6.3.1) θα πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να λύνονται ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες q_1,q_2,q_3, δηλαδή να υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$q_1 = q_1(x_1,x_2,x_3)\ ,\ q_2 = q_2(x_1,x_2,x_3)\ ,\ q_3 = q_3(x_1,x_2,x_3) \qquad (6.3.2)$$

και να ορίζει μονοσήμαντα τις q_1,q_2,q_3 ως προς τις αντίστοιχες x_1,x_2,x_3. Επίσης η Ιακωβιανή (Jacobian) του μετασχηματισμού (6.3.1) πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός:



Σχήμα 6.3.1. Δείχνονται οι επιφάνειες q_i = σταθ., i = 1,2,3 και το σημείο της τομής αυτών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$J \equiv \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (6.3.3)$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $q_i=q_i(x_1,x_2,x_3)$ δεν μπορούν να είναι αυθαίρετες. Επιπλέον θα πρέπει να έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και να μπορεί σε κάθε σημείο να οριστεί η κλίση αυτών. Έστω $P_0=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ σημείο του χώρου. Οι επιφάνειες που διέρχονται από το P_0, ορίζονται από τις εξισώσεις

$$q_1(x_1,x_2,x_3)=\xi_1\ ,\ q_2(x_1,x_2,x_3)=\xi_2\ ,q_3(x_1,x_2,x_3)=\xi_3 \qquad (6.3.4)$$

Οι καμπύλες τομής μεταξύ των επιφανειών $q_i(x_1,x_2,x_3)=\xi_i$, δείχνονται στο σχήμα 6.3.1. Η καμπύλη που σχηματίζεται από τις επιφάνειες $q_2(x_1,x_2,x_3)=\xi_2$ και $q_3(x_1,x_2,x_3)=\xi_3$ ορίζει την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη q_1 και ανάλογα ορίζονται οι q_2 και q_3. Επειδή τα γενικευμένα συστήματα χαρακτηρίζονται από καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (σε αντίθεση με το καρτεσιανό όπου οι άξονες συντεταγμένων είναι ευθείες γραμμές) ονομάζονται και καμπυλόγραμμα συστήματα. Είναι τώρα φανερή και η διαφορά των μοναδιαίων διανυσμάτων μεταξύ καρτεσιανών και καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζεται κατά μήκος των πρώτων είναι σταθερό, ενώ των δεύτερων γενικά αλλάζει διεύθυνση. Συνεπώς πρέπει να είμαστε αρκετά προσεκτικοί στην παραγώγιση μαθηματικών ποσοτήτων που εκφράζονται σε καμπυλόγραμμα συστήματα.

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Συνηθίζουμε να λέμε ότι απαρτίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα διανυσμάτων βάσης. Στα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων σε κάθε σημείο P του χώρου μπορούμε να ορίζουμε δύο σύνολα διανυσμάτων βάσης. Τα διανύσματα κάθε συνόλου δέν είναι απαραίτητα ορθογώνια μεταξύ τους (βλέπε σχήμα 6.3.2). Το ένα σύνολο των μοναδιαίων διανυσμάτων στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ορίζεται κατά μήκος των εφαπτομένων πάνω στις καμπύλες q_1,q_2,q_3. Το άλλο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σύνολο ορίζεται μέσω των καθέτων στις επιφάνειες $q_i(x_1,x_2,x_3) = \xi_i$, διανυσμάτων. Όπως ήδη γνωρίζουμε, η κάθετη διεύθυνση πάνω σε μια επιφάνεια $q_i = \xi_i$, ορίζεται από την απόκλιση*

$$\nabla q_i(x_1,x_2,x_3) = \hat{x}_1 \frac{\partial q_i}{\partial x_1} + \hat{x}_2 \frac{\partial q_i}{\partial x_2} + \hat{x}_3 \frac{\partial q_i}{\partial x_3} = \hat{x}_m \frac{\partial q_i}{\partial x_m} \qquad (6.3.5)$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε τα μοναδιαία διανύσματα βάσης κατά μήκος των καθέτων στις επιφάνειες, τότε αυτά γράφονται

$$\hat{e}_{q_1} = \frac{\nabla q_1}{|\nabla q_1|}, \hat{e}_{q_2} = \frac{\nabla q_2}{|\nabla q_2|}, \hat{e}_{q_3} = \frac{\nabla q_3}{|\nabla q_3|} \qquad (6.3.6)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα πάνω στην καμπυλόγραμμη συντεταγμένη q_j είναι

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \hat{x}_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \hat{x}_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \hat{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial q_j} = \hat{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \qquad (6.3.7)$$

Αν τώρα επιλέξουμε ως μοναδιαία διανύσματα βάσης τα εφαπτόμενα στις καμπύλες συντεταγμένες q_1,q_2,q_3, τότε αυτά γράφονται

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}/\partial q_1}{|\partial \mathbf{x}/\partial q_1|}, \hat{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}/\partial q_2}{|\partial \mathbf{x}/\partial q_2|}, \hat{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}/\partial q_3}{|\partial \mathbf{x}/\partial q_3|} \qquad (6.3.8)$$

Για ορθογώνια συστήματα συνήθως ορίζουμε τις ποσότητες

$$h_i = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}\right|, \; i = 1,2,3 \qquad (6.3.9)$$

οπότε οι (6.3.8) γράφονται

---

* Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$. Θα κρατήσουμε το σύμβολο $\hat{e}_i$, για τα αντίστοιχα εφαπτόμενα των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i}\left\{ \hat{\imath}_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_i} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right\} \qquad (6.3.10)$$

(όχι άθροιση ως προς i).Τα h_i, καλούνται συντελεστές κλίμακας.

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_{q_i}$, στην (6.3.6), γενικά, δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους. 'Οταν είναι ορθογώνια, τότε λέμε ότι ορίζουν ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Το ίδιο ισχύει και για την βάση (6.3.8). Στη γενική περίπτωση δεν είναι ορθογώνια. Σε κάθε περίπτωση, όμως υπάρχει μια σημαντική σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές βάσεις, η οποία φανερώνεται όταν σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$(\nabla q_i)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}\right) = \left(\hat{\imath}_m \frac{\partial q_i}{\partial x_m}\right)\cdot\left(\hat{\imath}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_j}\right)$$

$$= \hat{\imath}_m \cdot \hat{\imath}_n \frac{\partial q_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_n}{\partial q_j} = \delta_{mn}\frac{\partial q_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_n}{\partial q_j}$$

ή $$(\nabla q_i)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \qquad (6.3.11)$$

Τα δύο σύνολα των βάσεων λέμε τότε ότι είναι αμοιβαία ορθογώνια (reciprocal sets of vectors). Επειδή οι βάσεις $\hat{e}_i$, και $\hat{e}_{q_j}$ είναι αμοιβαία ορθογώνιες, σύμφωνα με την άσκηση (1.12.3) του πρώτου κεφαλαίου μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{e}_{q_i} = \frac{\hat{e}_{q_j} \times \hat{e}_{q_k}}{\hat{e}_{q_i} \cdot \hat{e}_{q_j} \times \hat{e}_{q_k}}, \text{ όπου } i\neq j\neq k\neq i \qquad (6.3.12)$$

Ανάλογα μπορούμε να εκφράσουμε τα $\hat{e}_{q_i}$ συναρτήσει του $\hat{e}_i$.

Στην ειδική περίπτωση των ορθογωνίων συστημάτων συντεταγμένων, όπου το κάθε σύνολο ξεχωριστά απαρτίζεται από τρία ορθογώνια μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα, ισχύει η ακόλουθη σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

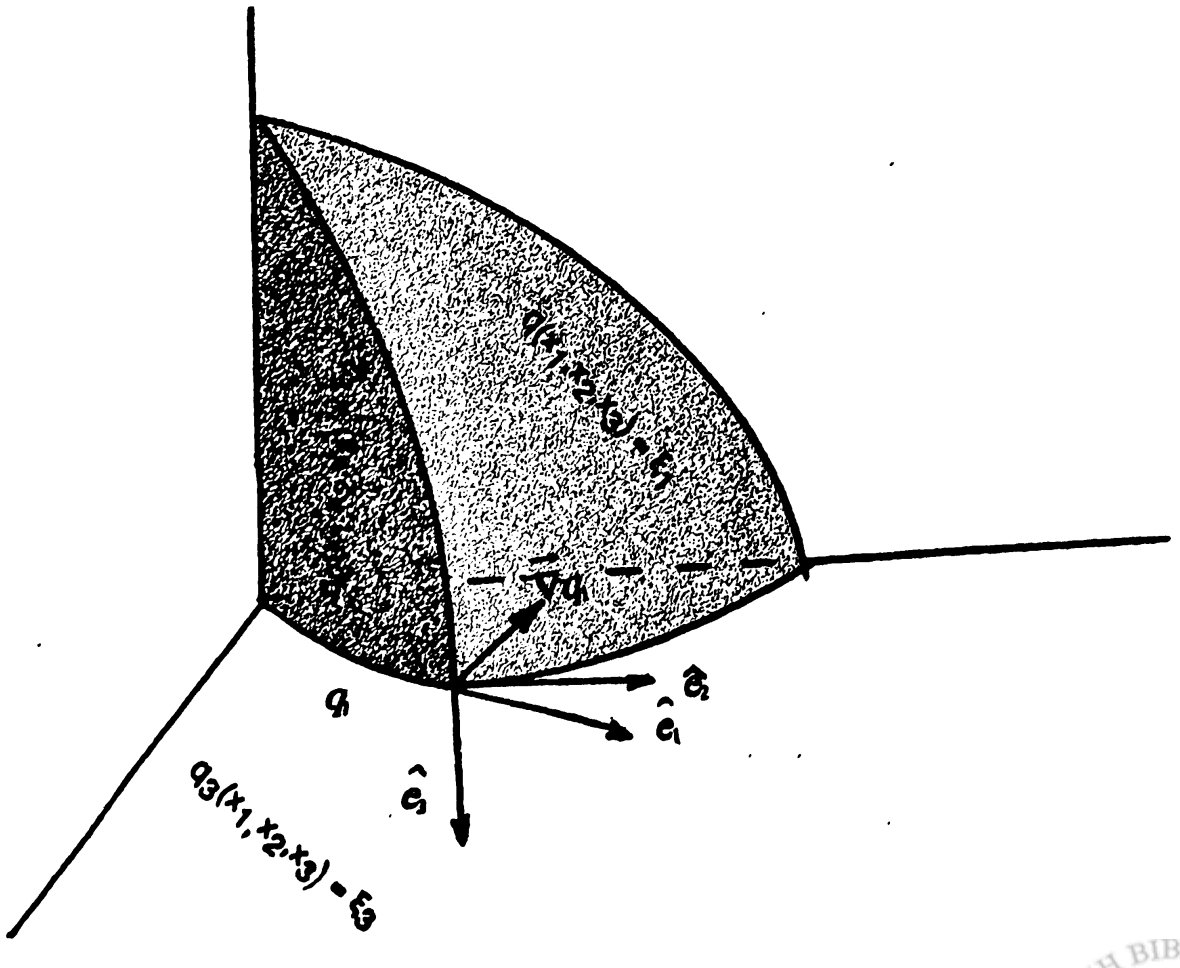
$$\hat{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}/\partial q_i}{|\partial \mathbf{x}/\partial q_i|} = \frac{\nabla q_i}{|\nabla q_i|} = \hat{e}_{q_i} \qquad (6.3.13)$$

Τούτο προκύπτει εύκολα από την (6.3.12). Πράγματι για δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα, έχουμε

$$\hat{e}_{q_i} \cdot \hat{e}_{q_j} \times \hat{e}_{q_k} = +1 \,, \; i \neq j \neq k \neq i \qquad (6.3.14)$$

συνεπώς η (6.3.13) γίνεται

$$\hat{e}_i = \hat{e}_{q_j} \times \hat{e}_{q_k} \,, \; i \neq j \neq k \neq i \qquad (6.3.15)$$



Σχήμα 6.3.2. Το ∇q_1 είναι κάθετο στα $\hat{e}_2, \hat{e}_3$. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τα υπόλοιπα. Για ορθογώνια συστήματα, $\hat{e} // \nabla q_i$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

'Ομως για κάθε ορθογώνια βάση ισχύει

$$\hat{e}_{q_i} = \hat{e}_{q_j} \times \hat{e}_{q_k} \,, \quad i \neq j \neq k \neq i \tag{6.3.16}$$

Από τις (6.3.15) και (6.3.16) έχουμε αμέσως το επιθυμητό αποτέλεσμα,

$$\hat{e}_i = \hat{e}_{q_i} \,, \; i = 1,2,3 \text{ (για ορθογώνια συστήματα)} \tag{6.3.17}$$

δηλαδή ότι στην περίπτωση ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων, τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_i$ κατά μήκος των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων ταυτίζονται με τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_{q_i}$ κάθετα στις αντίστοιχες επιφάνειες $q_i = \xi_i$. Μπορούμε τώρα να συνάγουμε μια άλλη σχέση για τους συντελεστές κλίμακας h_i. Από την (6.3.17) έχουμε

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_{q_i} = 1 \text{ (όχι άθροιση ως προς i)}$$

ή χρησιμοποιώντας την (6.3.12) έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \nabla q_i = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right| |\nabla q_i| \tag{6.3.18}$$

'Ομως από την (6.3.11) έχουμε $(\nabla q_i) \cdot \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = 1$, άρα από την (6.3.18) συνάγουμε ότι

$$\frac{1}{|\nabla q_i|} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right| \equiv h_i \tag{6.3.19}$$

όπου με h_i συμβολίσαμε στην (6.3.19) τους συντελεστές κλίμακας.

Παράδειγμα 6.3.1

Να δειχτεί ότι σε ορθογώνιο σύστημα ισχύει:

a) $\hat{e}_i = h_i \nabla q_i$

b) $\nabla q_i \cdot \nabla q_j \times \nabla q_k = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}$, $i \neq j \neq k \neq i$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

a) Είναι $\hat{e}_i = \hat{e}_{q_i} = \frac{1}{|\nabla q_i|} \nabla q_i$

Όμως από την (6.3.19) $\nabla q_i = h_i^{-1}$ άρα $\hat{e}_i = h_i \nabla q_i$

b) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\nabla q_i = \hat{e}_i / h_i$ που βρίκαμε πιο πάνω βρίσκουμε

$$\nabla q_i \cdot \nabla q_j \times \nabla q_k = \frac{1}{h_i}\frac{1}{h_j}\frac{1}{h_k}\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \times \hat{e}_k = \frac{1}{h_i h_j h_k} \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3}$$

διότι $i \neq j \neq k \neq i$, και $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \times \hat{e}_k = +1$ για ορθογώνια δεξιόστροφα συστήματα.

6.4. Στοιχειώδη Μεγέθη

Έστω s_1, s_2, s_3 οι παράμετροι των μηκών των τόξων στις διευθύνσεις q_1, q_2, q_3 αντίστοιχα. Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dq_1} = \hat{e}_1 \frac{ds_1}{dq_1} \qquad (6.4.1)$$

και ανάλογα για τις δύο άλλες κατευθύνσεις. (Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την 6.3.8 χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_1} \right| = 1$$

σύμφωνα με τη σχέση (2.3.3) στο δεύτερο κεφάλαιο). Όμως από την (6.3.10) έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} = h_1 \hat{e}_1 \qquad (6.4.2)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (6.4.1) και (6.4.2) λαμβάνομε την ακόλουθη σχέση για το στοιχειώδες μήκος ds_1

$$ds_1 = h_1 dq_1 \qquad (6.4.3)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ανάλογα, για τα στοιχειώδη μήκη στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες q_2,q_3 έχουμε

$$ds_2 = h_2\, dq_2 \quad ds_3 = h_3\, dq_3 \tag{6.4.4}$$

Το απειροστό διάνυσμα **dx** μπορεί να προκύψει ως εξής

$$\mathbf{dx} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_3} dq_3 \tag{6.4.5}$$

και με τη χρήση της (6.3.8) ή (6.4.5) γράφεται

$$\mathbf{dx} = \hat{e}_1\, h_1\, dq_1 + \hat{e}_2\, h_2\, dq_2 + \hat{e}_3\, h_3\, dq_3 \tag{6.4.6}$$

Τότε, το τετράγωνο του στοιχείου μήκους μεταξύ **x** και **x+dx** δίνεται από

$$\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} = ds^2 = h^2_1\, dq^2_1 + h^2_2\, dq^2_2 + h^2_3\, dq^2_3 \tag{6.4.7}$$

(όπου υπόθεσαμε ορθογωνιότητα $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$)

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε και για τα υπόλοιπα στοιχειώδη μεγέθη.

Η στοιχειώδης επιφάνεια dS_{12} κάθετη στο $\hat{e}_3$ δίνεται από τη σχέση 3.1.18 δηλαδή

$$\mathbf{dS}_{12} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_2} \right) ds_1\, ds_2 = (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)\, ds_1 ds_2$$

ή $$\mathbf{dS}_{12} = \hat{e}_3\, h_1\, h_2\, dq_1\, dq_2$$

Δηλαδή έχουμε γενικά

$$dS_{ij} = |\mathbf{dS}_{ij}| = h_i\, h_j\, dq_i\, dq_j \text{ (όχι άθροιση ως προς } i,j) \tag{6.4.8}$$

Το στοιχείο όγκου, (από το εδάφιο (1.12) στο πρώτο κεφάλαιο), για το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο (ds_1,ds_2,ds_3) είναι:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$dV = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_3} \right) ds_1\, ds_2\, ds_3$$

ή $dV = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \times \hat{e}_3\, h_1\, h_2\, h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$

δηλαδή τελικά

$$dV = h_1\, h_2\, h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 \qquad (6.4.9)$$

Τούτο μπορεί να προκύψει και μέσω της Ιακωβιανής. Όντως ο ορθογώνιος μετασχηματισμός

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial x_3}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}$$

έχει ορίζουσα μονάδα. Τούτο συνεπάγεται

$$\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3} J = 1 \text{ ή } J = h_1\, h_2\, h_3 \text{ ή}$$

$$dV = J dq_1 dq_2 dq_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Παράδειγμα 6.4.1

Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο σύστημα των κυλινδρικών συνεταγμένων που μελετήσαμε στο πρώτο εδάφιο. Όπως είδαμε, ως ανεξάρτητες μεταβλητές λαμβάνονται οι ρ, φ, x_3. Οι μετασχηματισμοί είναι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x_1 = \rho\cos\varphi\ ,\ x_2 = \rho\sin\varphi\ ,\ x_3 = x_3 \qquad (6.4.10)$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι τότε

$$J = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(\rho,\varphi,x_3)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho \neq 0 \qquad (6.4.11)$$

Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί είναι

$$\rho = \sqrt{x^2_1 + x^2_2},\ x_3 = x_3\ ,\ \varphi = \cos^{-1}\frac{x_1}{\sqrt{x^2_1 + x^2_2}} \qquad (6.4.12)$$

Το διάνυσμα θέσης γράφεται

$$\mathbf{x} = \rho\ (\cos\varphi\ \hat{\imath}_1 + \sin\varphi\ \hat{\imath}_2) + x_3\hat{\imath}_3 \qquad (6.4.13)$$

ή $$\mathbf{x} = \rho\ \hat{e}_\rho + x_3\hat{\imath}_3 \qquad (6.4.14)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τις ποσότητες h_ρ, h_φ, h_3. Είναι

$$h_\rho = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}\right| = 1$$

$$h_\varphi = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\right| = |\rho\ (-\sin\varphi\ \hat{\imath}_1 + \cos\varphi\ \hat{\imath}_2)| = \rho$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_3}\right| = 1 \qquad (6.4.15)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_3$ βρίσκονται από τον τύπο (6.3.12)

$$\hat{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho}\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}\right| = \cos\varphi\ \hat{\imath}_1 + \sin\varphi\ \hat{\imath}_2$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\hat{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\right| = -\sin\varphi\, \hat{\imath}_1 + \cos\varphi\, \hat{\imath}_2 \qquad (6.4.16)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_3} = \hat{\imath}_3$$

Η ορθογωνιότητα των $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_3$ προκύπτει αμέσως, σχηματίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$, με βάση τις (6.4.16). Εύκολα προκύπτουν και οι στοιχειώδεις ποσότητες.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6.4.15) και (6.4.6) βρίσκουμε

$$d\mathbf{x} = \hat{e}_\rho\, d\rho + \hat{e}_\varphi\, \rho d\varphi + \hat{e}_3\, dx_3$$

και ανάλογα

$dS_{12} = \rho d\rho\, d\varphi$ κάθετο στο $\hat{e}_3$

$dS_{13} = d\rho\, dx_3$ κάθετο στο $\hat{e}_\varphi$

$dS_{23} = \rho d\varphi\, dx_3$ κάθετο στο $\hat{e}_\rho$

όμοια

$$dV = \rho d\rho\, d\varphi\, dx_3$$

σε συμφωνία με το εδάφιο 6.1.

Παράδειγμα 6.4.2

Θα υπολογίσουμε τώρα τις ίδιες ποσότητες στις σφαιρικές συντεταγμένες. Οι μετασχηματισμοί είναι

$$x_1 = r\cos\varphi \sin\theta$$

$$x_2 = r\sin\varphi \sin\theta \quad 0 \le r < \infty \qquad (6.4.17)$$

$x_3 = r\cos\theta \quad 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματιμού είναι

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \varphi, x_3)} = r^2 \sin\theta \neq 0 \quad (\theta \neq 0, \pi) \qquad (6.4.18)$$

$$h_\theta = r\,,\ h_\varphi = r\sin\theta\,,\ h_r = 1 \qquad (6.4.19)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δηλαδή

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta\,(d\varphi)^2 \qquad (6.4.20)$$

Τα στοιχειώδη τμήματα επιφάνειας είναι:

$dS_{12} = r\,dr\,d\theta$ (κάθετο στο $\hat{e}_\varphi$)

$dS_{13} = r\sin\theta\,dr\,d\varphi$ (κάθετο στο $\hat{e}_\theta$) (6.4.20)

$dS_{23} = r^2\sin\theta\,d\varphi\,d$ (κάθετο στο $\hat{e}_r$)

Ο στοιχειώδης όγκος είναι

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \qquad (6.4.22)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων είναι:

$$\hat{e}_r = \cos\varphi\sin\theta\,\hat{\chi}_1 + \sin\varphi\sin\theta\,\hat{\chi}_2 + \cos\theta\,\hat{\chi}_3$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{\chi}_1 + \cos\varphi\,\hat{\chi}_2 \qquad (6.4.23)$$

$$\hat{e}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\,\hat{\chi}_1 + \sin\varphi\cos\theta\,\hat{\chi}_2 - \sin\theta\,\hat{\chi}_3$$

Οι σχέσεις (6.4.23) μπορούν να προκύψουν και με πιο στοιχειώδεις τρόπους. Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι τα διανύσματα $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ είναι ορθοκανονικά και ο πίνακας (O) που τα συνδέει με τα $\hat{\chi}_i$ είναι :

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\chi}_1 \\ \hat{\chi}_2 \\ \hat{\chi}_3 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας αυτός είναι ορθογώνιος δηλαδή $O^T = O^{-1}$. Συνεπώς ο μετασχηματισμός αντιστρέφεται εύκολα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\begin{bmatrix} \hat{\chi}_1 \\ \hat{\chi}_2 \\ \hat{\chi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \sin\theta & \cos\varphi \cos\theta & -\sin\varphi \\ \sin\varphi \sin\theta & \sin\varphi \cos\theta & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} \qquad (6.4.25)$$

6.5. Παράγωγοι μοναδιαίων διανυσμάτων*

Τα μοναδιαία διανύσματα σε καμπυλόγραμμες ορθογώνιες συντεταγμένες, σε αντιδιαστολή με καρτεσιανές συντεταγμένες, αλλάζουν προσανατολισμό από σημείο σε σημείο. Συνεπώς, εν γένει,

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} \neq 0$$

Επειδή όμως $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1$, έχουμε $\frac{\partial}{\partial q_j}(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i) = 0$ ή

$$\hat{e}_i \cdot \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} = 0$$

δηλαδή το διάνυσμα $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j}$ είναι πάντοτε κάθετο στο διάνυσμα $\hat{e}_i$.

(βλέπε και και παράδειγμα 2.2.6)

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i) i =j. Έστω i=1: τότε:

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_1} = \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3 \qquad (6.5.1)$$

ii) $i \neq j$. Π.χ., i= 1, j = 2, οπότε

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} = \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3$$

αλλά για λόγους συμμετρίας $\beta_3 = 0$, οπότε:

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} = \beta_2 \hat{e}_2 \qquad (6.5.2)$$

---

* Το εδάφιο αυτό μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απομένει να υπολογίσουμε τους συντελεστές α_2,α_3 και β_2. Από την (6.5.1.) έχουμε:

$$\alpha_2 = \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_1} = \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^2_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_1} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^2_1} =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \right) - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} =$$

$$= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{h_1}{h_2} \hat{e}_1 \cdot \left(\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} \right) = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2}$$

δηλαδή $\alpha_2 = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2}$ (6.5.3)

όμοια βρίσκουμε

$$\alpha_3 = -\frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \qquad (6.5.4)$$

Γενικά :

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_i} = -\sum_{j \neq i} \frac{\partial h_i}{h_j \partial q_j} \hat{e}_j$$

Η σχέση (6.5.2) δίνει

$$\beta_2 = \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2}$$

αλλά

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = 0 \rightarrow \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} + \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial q_2} = 0$$

$$\beta_2 = \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} = -\hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial q_2} = -\hat{e}_1 \cdot \left[-\frac{\partial h_2}{h_1 \partial q_1} \hat{e}_1 - \frac{\partial h_2}{h_3 \partial q_3} \hat{e}_3 \right] =$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \frac{\partial h_2}{h_1 \partial q_1} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} \hat{e}_1 \hat{e}_3 = \frac{\partial h_2}{h_1 \partial q_1} \qquad (6.5.5)$$

Δηλαδή γενικά $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} = \hat{e}_j \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i}$, $i \neq j$ (6.5.6)

Οι σχέσεις (6.5.3) - (6.5.6) είναι πολύ βασικές για όσα θα ακολουθήσουν στο επόμενο εδάφιο.

6.6. Διαφορικοί τελεστές

Οι πιο γνωστοί διαφορικοί τελεστές (grad, div, curl, Laplacian), όπως γνωρίζουμε, εκφράζονται ως συναρτήσεις του γνωστού μας τελεστή

$$\nabla = \hat{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (6.6.1)$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Οι πιο πάνω διαφορικοί τελεστές μπορούν να υπολογισθούν και σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων με τη βοήθεια των εξισώσεων του εδαφίου 6.5 αφού εκφράσουμε τον τελεστή ∇ στις συντεταγμένες αυτές.

α) Κλίση μια βαθμωτής συνάρτησης . Όπως γνωρίζουμε ήδη, η κλίση (grad) είναι ένα διάνυσμα το οποίο παίρνουμε από μια βαθμωτή συνάρτηση (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) ως εξής:

$$\nabla \phi = \hat{\imath}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \hat{\imath}_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \hat{\imath}_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \qquad (6.6.2)$$

Οι τρεις προβολές του διανύσματος $\nabla \phi$ είναι:

$$(\nabla \phi)_{x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{d\phi}{ds_1}\Big|_{\substack{x_2=\sigma\tau \\ x_3=\sigma\tau}},$$

$$(\nabla \phi)_{x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \frac{d\phi}{ds_2}\Big|_{\substack{x_1=\sigma\tau \\ x_3=\sigma\tau}}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

και

$$(\nabla \phi)_{x3} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{d\phi}{ds_3}\Big|_{x_2=\sigma\tau}^{x_1=\sigma\tau}.$$

Με ανάλογο τρόπο σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες γράφουμε

$$\nabla \phi = (\nabla \phi)_{q_1}\, \hat{e}_1 + (\nabla \phi)_{q_2}\, \hat{e}_2 + (\nabla \phi)_{q_3}\, \hat{e}_3$$

όπου

$$(\nabla \phi)_{q_1} = \frac{d\phi}{ds_1}\Big|_{q_3=\sigma\tau}^{q_2=\sigma\tau} = \frac{d\phi}{h_1 dq_1}\Big|_{q_3=\sigma\tau}^{q_2=\sigma\tau} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1}$$

ή $\text{grad}\, \phi = \nabla \phi = \dfrac{\hat{e}_1}{h_1}\dfrac{\partial \phi}{\partial q_1} + \dfrac{\hat{e}_2}{h_2}\dfrac{\partial \phi}{\partial q_2} + \dfrac{\hat{e}_3}{h_3}\dfrac{\partial \phi}{\partial q_3}$ (6.6.3)

δηλαδή ο τελεστής ∇ (τελεστής Nabla) γράφεται

$$\nabla = \frac{\hat{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \qquad (6.6.4)$$

Στην εξίσωση αυτή σκόπιμα οι ποσότητες $\frac{\hat{e}_i}{h_i}$ γράφονται αριστερά του τελεστή $\frac{\partial}{\partial q_i}$ καθ' όσον ο τελεστής δεν δρα πάνω σ' αυτές, αλλά μόνο στη συνάρτηση που βρίσκεται δεξιά του (σε καρτεσιανές συντεταγμένες η σειρά γραψίματος δεν παίζει ρόλο).

β) Απόκλιση (divergence) διανύσματος.

Με τον τελεστή αυτό παίρνουμε ένα βαθμωτό μέγεθος, το οποίο συμβολίζουμε $\nabla \cdot \mathbf{A}$, ξεκινώντας από ένα διάνυσμα **A**. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η σχετική έκφραση είναι απλή:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \qquad (6.6.5)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες*. Γράφουμε $\mathbf{A} = A_1\,\hat{e}_1 + A_2\,\hat{e}_2 + A_3\,\hat{e}_3$ και

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\frac{\hat{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\cdot(A_1\,\hat{e}_1 + A_2\,\hat{e}_2 + A_3\,\hat{e}_3) \qquad (6.6.6)$$

Στη σχέση (6.6.6) οι τελέστές $\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3}$ δρούν σε ο,τιδήποτε βρίσκεται δεξιά τους, δηλ. τόσο στα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ και $\hat{e}_3$ (μην ξεχνάτε τις εξισώσεις του εδαφίου 6.5) όσο φυσικά και στα μεγέθη A_1, A_2 και A_3. Μόνο μετά από τη δράση αυτή παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που προκύπτουν. Έχουμε:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\hat{e}_1}{h_1}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3)\right\} +$$

$$+ \frac{\hat{e}_2}{h_2}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3)\right\} + \frac{\hat{e}_3}{h_3}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3)\right\}$$

Αλλά

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1\,\hat{e}_1) = \hat{e}_1\frac{\partial A_1}{\partial q_1} + A_1\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_1} =$$

οπότε $\frac{\hat{e}_1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1\,\hat{e}_1) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{A_1}{h_1}\hat{e}_1\cdot\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_1}$ δηλαδή

$$\frac{\hat{e}_1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1\,\hat{e}_1) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_1} \qquad (6.6.7)$$

Επίσης

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2\,\hat{e}_2) = \hat{e}_2\frac{\partial A_2}{\partial q_1} + A_2\frac{\partial \hat{e}_2}{\partial q_1} = \hat{e}_2\frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \hat{e}_1\frac{A_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \qquad (6.6.8)$$

και

---

* Για ένα άλλο ισοδύναμο ορισμό κύτταξε Κεφ.V δηλ.

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(A_3\,\hat{e}_3) = \hat{e}_3\frac{\partial A_3}{\partial q_1} + \hat{e}_1\frac{A_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} \qquad (6.6.9)$$

δηλαδή

$$\frac{\hat{e}_1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2\,\hat{e}_2) = \frac{A_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}$$

$$\frac{\hat{e}_1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}(A_3\,\hat{e}_3) = \frac{A_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3}$$

Άρα

$$\frac{\hat{e}_1}{h_1}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}(\mathbf{A}) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{A_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{A_3}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} \qquad (6.6.10)$$

όμοια , με κυκλική εναλλαγή των δεικτών, βρίσκουμε

$$\frac{\hat{e}_2}{h_2}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(\mathbf{A})\right\} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_2} + \frac{A_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \frac{A_1}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}$$

$$\frac{\hat{e}_3}{h_3}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(\mathbf{A})\right\} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial A_3}{\partial q_3} + \frac{A_3}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \frac{A_2}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2} \qquad (6.6.11)$$

Έτσι τελικά:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{A_1}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{A_1}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_2} + \frac{A_2}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{A_2}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial A_3}{\partial q_3} + \frac{A_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3} + \frac{A_3}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3}\right)$$

Άρα πιο κομψά και συμμετρικά

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right\} \qquad (6.6.12)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

γ) Στροβιλισμός.

Με τον τελεστή αυτό, από ένα διάνυσμα **A** παίρνουμε ένα άλλο διάνυσμα (ψευδοδιάνυσμα) το οποίο συμβολίζουμε $\nabla \times \mathbf{A}$, curl**A** ή rot**A**. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε τη γνωστή σε μορφή ορίζουσας σχέση

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_1 & \hat{\imath}_2 & \hat{\imath}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \qquad (6.6.13)$$

Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες γράφουμε

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \times (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3)$$

Προχωράμε όπως και στην περίπτωση της απόκλισης, δηλαδή ο τελεστής $\frac{\partial}{\partial q_j}$ δρα όχι μόνο στην ποσότητα A_j αλλά και στα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_j$ που βρίσκονται δεξιά του.

$$\frac{\hat{e}_1}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \times (A_1 \hat{e}_1) = \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 \frac{\partial A_1}{h_1 \partial q_1} + \left\{ \hat{e}_1 \times \left(\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_1} \right) \right\} \frac{A_1}{h_1} =$$

$$= \frac{A_1}{h_1} \cdot \left\{ \hat{e}_1 \times \left(- \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \hat{e}_2 - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \hat{e}_3 \right) \right\} =$$

$$= \frac{A_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) - \frac{A_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} (\hat{e}_1 \times \hat{e}_3) =$$

$$= \frac{A_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \hat{e}_2 - \frac{A_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \hat{e}_3$$

$$\frac{\hat{e}_2}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} \times (A_1 \hat{e}_1) = \frac{A_1}{h_2} \hat{e}_2 \times \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 =$$

$$= - \frac{1}{h_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \hat{e}_3$$

$$\frac{\hat{e}_3}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \times (A_1 \hat{e}_1) = \frac{1}{h_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) + \frac{A_1}{h_3} \hat{e}_3 \times \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \hat{e}_2$$

$$\nabla \times (A_1 \hat{e}_1) = \left(\frac{A_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} \right) \hat{e}_2 - \left(\frac{A_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right) \hat{e}_3$$

$$\nabla \times (A_1 \hat{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 h_1) \hat{e}_2 - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 h_1) \hat{e}_3$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\nabla x(A_1\hat{e}_1) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{ h_2\,\hat{e}_2\,\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1h_1) - h_3\,\hat{e}_3\,\frac{\partial}{\partial q_2}(A_1h_1)\right\}$$

Όμοια βρίσκουμε και το στροβιλισμό των άλλων συνιστωτών:

$$\nabla x(A_2\hat{e}_2) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{ h_3\,\hat{e}_3\,\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2h_2) - h_1\,\hat{e}_1\,\frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right\}$$

$$\nabla x(A_3\hat{e}_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{ h_1\,\hat{e}_1\,\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - h_2\,\hat{e}_2\,\frac{\partial}{\partial q_1}(A_3h_3)\right\}$$

$$\nabla x\,\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{ h_1\,\hat{e}_1\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right] + \right.$$

$$\left. + h_2\,\hat{e}_2\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3h_3)\right] + h_3\,\hat{e}_3\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1h_1)\right]\right\}$$

ή παραστατικά

$$\nabla x\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\,\hat{e}_1 & h_2\,\hat{e}_2 & h_3\,\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix} \qquad (6.6.14)$$

Σημείωση: Για να βρούμε την εξίσωση (6.6.14) υποθέσαμε ότι $\hat{e}_1 x \hat{e}_2 = \hat{e}_3$ (δεξιόστροφο σύστημα). Αν το σύστημα είναι αριστερόστροφο η έκφραση (6.6.14) αλλάζει σημείο.

δ) Ο τελεστής Laplace ή ∇^2

Ο τελεστής αυτός είναι βαθμωτός, δηλαδή δίνει βαθμωτό μέγεθος όταν δρα σε βαθμωτό και διάνυσμα όταν δρα σε διάνυσμα. Ορίζεται ως εξής

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi) \text{ ή } \nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla x(\nabla x\mathbf{A}) \qquad (6.6.15)$$

Θα περιοριστούμε στην έκφραση που δρα πάνω σε βαθμωτή συνάρτηση. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες εύκολα βρίσκουμε:

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2_1} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2_2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2_3} \rightarrow \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2_2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2_3}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες η έκφραση που ζητούμε βρίσκεται θέτοντας $\mathbf{A} = \nabla\phi$ στην εξίσωση (6.6.12) που δίνει την απόκλιση, δηλαδή αν θέσουμε σ' αυτή:

$$A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\,,\quad A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\,,\quad A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}$$

'Ετσι παίρνουμε:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right\} \qquad (6.6.17)$$

την έκφραση αυτή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στις εξισώσεις (3.7.3)-(3.7.5) όταν είναι βολικό να λυθούν αυτές σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Συνήθως η εξ. (6.6.17) είναι η πιο χρήσιμη μορφή (δεν χρειάζεται να γίνουν οι πρόσθετες παραγωγήσεις). Στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων (παράδειγμα 6.4.2), παίρνουμε τις εξής εκφράσεις για τους διαφορικούς τελεστές

$$\nabla = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\cdot A = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\varphi)\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\left\{ r\frac{\partial A_r}{\partial r} + 2A_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \cot\theta\, A_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} \qquad (6.6.18)$$

Παράδειγμα 6.6.1

Η δύναμη που περιγράφει ένα δυναμικό πεδίο είναι

$$\mathbf{F} = \hat{e}_r\frac{2P\cos\theta}{r^3} + \hat{e}_\theta\frac{P}{r^3}\sin\theta\,,\ P\in R$$

Θα δώσουμε απάντηση (στις σφαιρικές συντεταγμένες) στις εξής ερωτήσεις

i) Είναι το πεδίο αστρόβιλο; (είναι δηλαδή $\nabla\times\mathbf{F}=0$ παντού στο χώρο;)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση :

$$\nabla x\mathbf{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\,\hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{2P\cos\theta}{r^3} & r\frac{P\sin\theta}{r^3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \hat{e}_\varphi\, r\sin\theta \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{r^2}\sin\theta\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2P\cos\theta}{r^3}\right)\right]\right\}\frac{1}{r^2\sin\theta} =$$

$$= \frac{\hat{e}_\varphi}{r}\left\{ -\frac{2P}{r^2}\sin\theta + \frac{2P\sin\theta}{r^2}\right\} = 0,\ r\neq 0$$

Για το σημείο r = 0 η πιο πάνω μέθοδος δεν είναι εγγυημένη. Δείχνει πάντως πως αν υπάρχει περίπτωση να είναι $\nabla x\mathbf{F}\neq 0$ στο r = 0, το $\nabla x\mathbf{F}$ θα έχει διεύθυνση $\hat{e}_\varphi$. Για να δούμε αν $\nabla x\mathbf{F}$ είναι διάφορο από το μηδέν για r = 0 θεωρούμε ένα μικρό κύκλο ακτίνας r με κέντρο το μηδέν σε ένα επίπεδο κάθετο στο $\hat{e}_\varphi$, δηλαδή ένα μεσημβρινό επίπεδο. Τότε αν S είναι η επιφάνεια του κύκλου, τότε απο το τύπο του Stokes έχουμε:

$$\int_S (\nabla x\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = 2\int_0^{2\pi} \mathbf{F}\cdot\hat{e}_\theta\, r d\theta = 2\int_0^{2\pi} (P/r^3)\sin\theta\, r d\theta$$

$$= -\frac{2P}{r^2}\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Αρα $\nabla x\mathbf{F} = 0$ στο σημείο r = 0. Συνεπώς το πεδίο **F** είναι αστρόβιλο.

ii) Δύναται το πεδίο αυτό να παραχθεί από ένα δυναμικό;

Λύση :

Ναί, εφ' όσον $\nabla x\mathbf{F} = 0$ παντού στο χώρο. Έστω ότι το δυναμικό είναι U(r,θ). Τότε

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\left(\hat{e}_r\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)$$ ή

$$\frac{2P\cos\theta}{r^3} = -\frac{\partial U}{\partial r}\,\frac{P\sin\theta}{r^3} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$U(r,\theta) = \frac{P\cos\theta}{r^2} + \phi(\theta)$$

Θέτοντας τη λύση αυτή στη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε:

$$-\frac{1}{r}\left(-\frac{P\sin\theta}{r^2} + \frac{d\phi}{d\theta}\right) = \frac{P\sin\theta}{r^3} \rightarrow \frac{d\phi}{d\theta} = 0 \rightarrow \phi = \sigma\tau = c$$

'Αρα:

$$U(r,\theta) = \frac{P\cos\theta}{r^2} + \sigma\tau\alpha\theta.$$

iii) 'Εχει το πεδίο <<πηγές>>; (είναι σε κάποιο σημείο div**F** $\neq 0$;)

Λύση:

'Εχουμε

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\,\frac{2P\cos\theta}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\,\sin\theta\,\frac{P}{r^3}\,\sin\theta\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{2P\,\sin\theta\,\cos\theta\,\left(-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{P}{r^2}\,\{\,2\sin\theta\,\cos\theta\}\right\} = 0$$

Εφ' όσον div **F** = 0, το πεδίο δεν έχει πηγές.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι **F** = ∇ x **A** όπου **A**=(**p**x**r**)/r^3.

Συνεπώς div**F** = 0 καθ' όσον div(curl**A**) = 0 (για οποιοδήποτε διάνυσμα **A** η απόκλιση του στροβιλισμού είναι πάντα μηδέν).

6.7. Η Εξίσωση Laplace

Στο εδάφιο αυτό, θα μελετήσουμε ορισμένες απλές περιπτώσεις λύσεων της εξίσωσης Laplace. Θα θεωρήσουμε ορισμένα απλά παραδείγματα από τη φυσική.

Παράδειγμα 6.7.1

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο πολύ μεγάλες παράλληλες πλάκες σε από... η d μεταξύ τους (πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους). Η μια έχει δυναμικό ϕ =

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

0 και η άλλη $\phi = V_0$ =σταθ. Θα θέλαμε να βρούμε το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο ανάμεσα από αυτές.

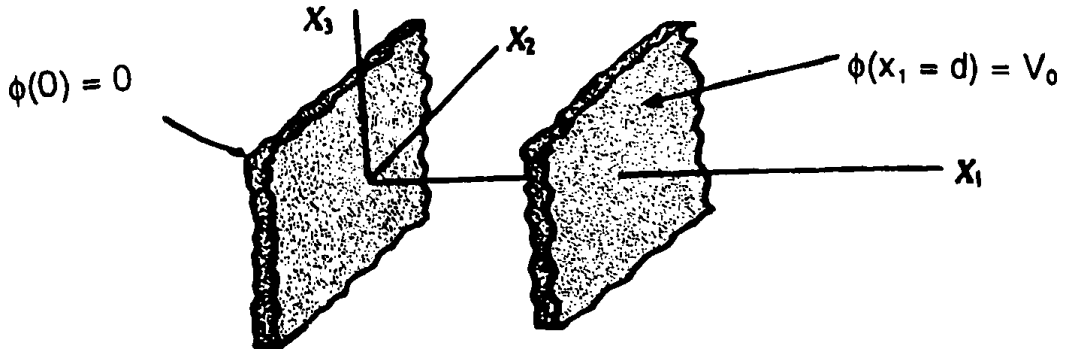
Η λύση ανάγεται στην επίλυση της εξίσωση Laplace

$$\nabla^2\phi\,(x_1,x_2,x_3) = 0 \qquad (6.7.1.)$$

με τις προαναφαιρθείσες συνοριακές συνθήκες. Ας θεωρήσουμε ότι η πλάκα με ϕ = 0 διέρχεται από το κέντρο των συντεταγμένων κείμενη στο επίπεδο x_2,x_3. Τότε η δεύτερη πλάκα με $\phi=V_0$ διέρχεται από το σημείο $x_1=d$, κάθετα στον άξονα x_1. (βλέπε σχήμα 6.7.1.)

Για λόγους συμμετρίας, η εξίσωση Laplace γράφεται τότε

$$\frac{d^2\phi}{dx^2_1} = 0;\ \phi(0) = 0\ \phi(x_1 = d) = V_0 \qquad (6.7.2)$$



Σχήμα 6.7.1.

Η λύση προκύπτει απλά, ολοκληρώνοντας την τελευταία. 'Εχουμε

$$\phi = c_1\,x_1 + c_2 \qquad (6.7.3)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει τότε από τη σχέση

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(x_1) = -\hat{e}_1 \frac{d}{dx_1}\phi(x_1),$$

δηλαδή

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d}\hat{e}_1 \qquad (6.7.4)$$

Αν τώρα διαλέξουμε την αρχή στο μέσο των πλακών δηλαδή αν $\phi(-d/2) = 0$, $\phi(d/2) = V$ βρίσκουμε

$$\phi(x_1) = \frac{V}{d}x_1 + \frac{V}{2}$$

Παράδειγμα 6.7.2

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ενός σφαιρικού πυκνωτή του οποίου οι δύο επιφάνειες είναι ομόκεντρες επιφάνειες σφαίρας με ακτίνες R_1 και R_2 αντίστοιχα όπου $\phi(R_1) = 0$ και $\phi(R_2) = V_0$.

Προφανώς λόγω σφαιρικής συμμετρίας προτιμούμε να γράψουμε την εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες. Από τη σχέση (6.6.17) έχουμε τότε τη διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (6.7.5)$$

Όμως και πάλι λόγω συμμετρίας είναι κατανοητό ότι το δυναμικό μεταξύ των δύο επιφανείων θα είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας r, δηλαδή $\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$, άρα η εξίσωση Laplace γίνεται

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi(r)}{dr}\right) = 0 \qquad (6.7.6)$$

Η λύση της τελευταίας προκύπτει απλά, μετά από δύο ολοκληρώσεις και είναι

$$\phi(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \qquad (6.7.7)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου C_1, C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης και προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Πράγματι

$$\phi(R_1) = -\frac{C_1}{R_1} + C_2 = 0$$

$$\phi(R_2) = -\frac{C_1}{R_2} + C_2 = V_0 \qquad (6.7.8)$$

Επιλύοντας το γραμμικό σύστημα (6.7.8) βρίσκουμε

$$C_1 = \frac{V_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \text{ και } C_2 = \frac{V_0 R_2}{R_2 - R_1} \qquad (6.7.9)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.7.9) στην (6.7.7) έχουμε

$$\phi(r) = \begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \frac{V_0 R_2}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{R_1}{r}\right) & R_1<r<R_2 \\ V_0 & r>R_2 \end{cases} \qquad (6.7.10)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει εύκολα

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \begin{cases} \frac{V_0 R_1 R_2}{R_1 - R_2}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r & R_2<r<R_1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad (6.7.11)$$

Παράδειγμα 6.7.3.

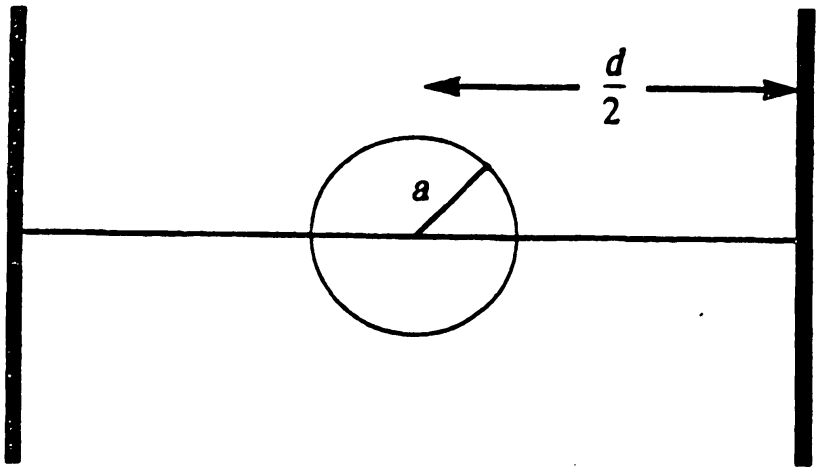
Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ανάμεσα από τις δύο πλάκες του παραδείγματος (6.7.1), οι οποίες εξακολουθούν να βρίσκονται σε σταθερά δυναμικά $\phi(x_1 = 0) = 0$ και $\phi(x_1 = d) = V_0$, τοποθετούμε κύλινδρο μικρής ακτίνας ($a << d$) του οποίου ο άξονας είναι παράλληλος με τις πλάκες και διέρχεται από το μέσο της απόστασης d (σχήμα 6.7.2). Το μήκος του θεωρείται πολύ μεγάλο (πρακτικά "άπειρο"), το δυναμικό στην επιφάνειά του είναι μηδέν. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του χώρου μεταξύ των πλακών;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Προφανώς υπάρχει συμμετρία κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου. Επιλέγουμε τότε τις κυλινδρικές συντεταγμένες οπότε η εξίσωση Laplace γράφεται

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2_3}=0 \qquad (6.7.12)$$

Λόγω συμμετρίας, δεν έχουμε μεταβολή ως προς συντεταγμένη x_3 συνεπώς μπορούμε να γράψουμε



Σχήμα 6.7.2.

$$\phi = \phi(\rho,\varphi) \text{ και } \frac{\partial\phi}{\partial x_3}=0,$$

άρα η (6.7.12) γίνεται

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (6.7.13)$$

Εξισώσεις της μορφής (6.7.13) δεν έχουμε μάθει να λύνουμε, όμως η μορφή αυτή είναι απλούστερη απ' όποια άλλη θα προέκυπτε αν λύναμε το πρόβλημα σε κάποιο άλλο σύστημα συντεταγμένων. Πράγματι εδώ έχουμε αναγάγει το πρόβλημα σε διαφορική εξίσωση δύο μεταβλητών, (από τις τρεις που ήταν αρχικά). Για τη λύση τέτοιων διαφορικών εξισώσεων γράφουμε πρώτα τις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

συνοριακές συνθήκες στην κατάλληλη μορφή, ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεχθεί. Μετά αξιώνουμε συνήθως η λύση να επαλληλία λύσεων της μορφής

$$\phi(\rho,\varphi) = \phi_1(\rho)\phi_2(\varphi).$$

Η μέθοδος αυτή καλείται μέθοδος ξεχωρισμού των μεταβλητών που εφαρμόζεται ανάλογα για άλλα συστήματα συντεταγμένων και θα μελετηθεί διεξοδικά αλλού. Ο αναγνώστης εδώ θα διαπιστώσει ότι καμιά από τις προηγούμενες μορφές της εξίσωσης Laplace δεν είναι δόκιμη. Για τις ανάγκες του παρόντος προβλήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορισμένα φυσικά επιχειρήματα.

Κατ' αρχήν από το ότι το δυναμικό είναι μηδέν στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Μετρώντας το ρ από το κέντρο του κυλίνδρου θα πρέπει

$$\phi(\rho,\varphi)|_{\rho=a} = 0 \qquad (6.7.14)$$

Επίσης, επειδή η ακτίνα του κυλίνδρου είναι μικρή a<<d, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για $\frac{d}{2} > \rho >> a$ το πεδίο δεν επηρεάζεται από την παρουσία του κυλίνδρου και το δυναμικό σύμφωνα με το παράδειγμα 6.7.1.είναι

$$\phi \approx \frac{V}{d}\rho\cos\varphi + \frac{V_0}{2} \qquad (6.7.15)$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι στο πρόβλημά μας οι μεταβλητές ρ,φ, ξεχωρίζονται και η λύση γράφεται ως εξής

$$\phi(\rho,\varphi) = f(\rho)\cos\varphi + \frac{V_0}{2} \qquad (6.7.16)$$

Αντικαθιστώντας στην (6.7.13) παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση με ακτινική εξάρτηση μόνο:

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}f = 0 \qquad (6.7.17)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δυστυχώς με τα μέχρι τώρα γνωστά στο μάθημα αυτό, δεν μπορούμε να λύσουμε ούτε την τελευταία* . Μπορούμε όμως να δοκιμάσουμε λύση της μορφής

$$f(\rho) = \rho^k \qquad (6.7.18)$$

όπου k σταθερά. Τότε παίρνουμε

$$k(k-1)\rho^{k-2} + k\rho^{k-2} - \rho^{k-2} = 0 \qquad (6.7.19)$$

η οποία για $\rho \neq 0$ δινει $k^2 = 1$ ή $k = \pm 1$

δηλαδή, έχουμε βρεί λύσεις της μορφής $f_1(\rho) = \rho$ και $f_2(\rho) = 1/\rho$. Στη γενικότερη περίπτωση, η λύση της (6.7.17) θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των λύσεων $f_1(\rho) = \rho$ και $f_2(\rho) = 1/\rho$, δηλαδή

$$f(\rho) = c_1 \rho + \frac{c_2}{\rho} \qquad (6.7.20)$$

και η (6.7.16) , από την (6.7.20) γίνεται

$$\phi(\rho,\varphi) = \left(c_1 \rho + \frac{c_2}{\rho}\right) \cos\varphi + \frac{V}{2} \qquad (6.7.21)$$

Εφαρμόζοντας τώρα τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές c_1, c_2. Έχουμε: για την επιφάνεια του κυλίνδρου

$$\phi(\rho = a, \varphi) = 0 \rightarrow c_1 a + \frac{c_2}{a} = 0$$

Άρα

$$\phi(\rho,\varphi) = c_1 \left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right) \cos\varphi + \frac{V}{2} \qquad (6.7.22)$$

Επίσης για $\rho >> a$, ο δεύτερος όρος της (6.7.22) είναι αμελητέος άρα

$$\phi(\rho,\varphi) = c_1 \rho \cos\varphi + \frac{V}{2}$$

---

* Η εξίσωση αυτή είναι τύπου Euler και λύνεται στοιχειωδώς (κύτταξε Ι.Δ.Βέργαδου Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής, εδ. 6.3.1. παράδειγμα 5.)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συγκρίνοντας με την (6.7.15) συνάγουμε ότι $c_1 = \frac{V}{d}$, άρα η (6.7.22) γράφεται

$$\phi(\rho,\varphi) = \begin{cases} \frac{V}{d}\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right)\rho\cos\theta + \frac{V}{2} & a<\rho<\frac{d}{2} \\ 0 & \rho\leq a \end{cases} \qquad (6.7.23)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.3.1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \frac{x_1}{x_2}\hat{e}_1$$

στις κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται

$$\mathbf{F} = \cos\varphi(\cot\varphi\ \hat{e}_\rho - \hat{e}_\varphi)$$

6.3.2. Να αποδειχθεί ότι:

$$\nabla(\ln\rho) = \nabla x(\hat{e}_3\varphi) \text{ (κυλινδρικές συντεταγμένες)}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla\frac{1}{r} &= \nabla x\ (\cos\theta\ \nabla\varphi) \\ \nabla\varphi &= \nabla x\ (r\nabla\theta/\sin\theta) \end{aligned}\right\} \text{(σφαιρικές συντεταγμένες}$$

6.3.3. Να δοθούν οι εκφράσεις των $\frac{\partial}{\partial x_i}$ στις σφαιρικές συντεταγμένες.

6.3.4. Επιφάνεια S δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x_i = x_i(q_1,q_2),\ i = 1,2,3$$

i) Να δειχθεί ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να τέμνονται οι καμπύλες

$q_1 = \xi_1$, $q_2 = \xi_2$ ορθογώνια, είναι

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\frac{\partial x_j}{\partial q_2} = 0$$

ii) Να δειχθεί ότι το στοιχειώδες μήκος στις καμπύλες q_i δίνεται από

$$ds^2 = E\,(dq_1)^2 + F dq_1 dq_2 + G(dq_2)^2$$

όπου E,F,G καλούνται θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης και ορίζονται ως εξής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$E = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1}\right|^2 , F = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}, G = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}\right|$$

ii) 'Οταν οι καμπύλες τέμνονται ορθογώνια, να δειχθεί ότι

$$ds^2 = (h_1 d\, q_1)^2 + (h_2 dq_2)^2$$

iv) Να δειχθεί ότι το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$S = \iint_S \sqrt{E\ G - F^2}\, dq_1 dq_2$$

6.3.5. Δίδονται δύο βαθμωτά πεδία σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\phi_1 (\rho,\varphi,x_3) = \rho^2 (\cos\varphi - \frac{1}{2}) + x^2_3$$

$$\phi_2(\rho,\varphi,x_3) = \rho^2 x_3 f(\varphi)$$

Να ορισθεί η συνάρτηση f(φ) έτσι ώστε οι "ισότιμες" "επιφάνειες" που ορίζουν οι ϕ_1 και ϕ_2 να τέμνονται ορθογώνια.

6.6.1. Με τη χρήση του ορισμού της απόκλισης

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_S \mathbf{A}\cdot \hat{n}\, dS$$

να δειχθεί η (6.6.7)

6.6.2. Αν στις κυλινδρικές συντεταγμένες πεδίο **F** γράφεται

$$\mathbf{F}(\rho,\varphi) = F_\rho (\rho,\varphi)\, \hat{e}_\rho + F_\varphi (\rho,\varphi)\, \hat{e}_\varphi$$

να δειχθεί ότι το curl**F** έχει μόνο συνιστώσα παράλληλη του $\hat{k}_3$,δηλ.

$$\nabla x\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho A\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_3$$

6.6.3. Θεωρείστε το μετασχηματισμό

$$x_1 = q^2_1 - q^2_2\, x_2 = 2q_1 q_2\, x_3 = q_3$$

i) Να δειχθεί ότι τα (q_1,q_2,q_3) σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ii) Να υπολογιστούν οι συντελεστές κλίμακας

iii) Να γραφεί η Λαπλασιανή στο νέο σύστημα

iv) Να γραφεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός της συνάρτησης

$$\mathbf{F} = q_3\hat{e}_1 + q_1\hat{e}_2 + q_2\hat{e}_3$$

6.6.4. Με τη χρήση του αποτελέσματος της άσκησης (6.3.4) να δειχθεί ότι

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

6.6.5. Στην κβαντομηχανική ο τελεστής της στροφορμής ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{L} = -(i\,h/(2\pi))(\mathbf{x}\times\nabla)$$

όπου **x** το διάνυσμα θέσης.Να δειχθεί ότι

$$L_1 + iL_2 = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_1 - iL_2 = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

6.6.6. Να δειχθεί ότι $\mathbf{L}\times\mathbf{L} = i\mathbf{L}$, στις σφαιρικές συντεταγμένες όπου **L** ο τελεστής που ορίστηκε στην άσκηση 6.6.5.

6.6.7. Αν $\psi = \psi(r)$, όπου $r = |\mathbf{x}|$, να δειχθεί ότι η έκφραση $\nabla^2\psi(r)$ στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι ισοδύναμη με τις τρεις παρακάτω εκφράσεις

i) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\psi(r)}{dr}\right)$$

ii) $$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi(r))$$

iii) $$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}$$

6.6.8. Έστω πεδίο **F** το οποίο σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται $\mathbf{F} = \frac{\hat{e}_\rho}{\rho}$. Είναι το πεδίο **F** σωληνοειδές; Δηλαδή μπορεί να γραφεί όπως ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού δυναμικού **A**; Αν ναί, πιό είναι το πεδίο **A**;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

(Απάντηση : $\mathbf{A} = -\frac{x_3 \hat{e}_\varphi}{\rho}$. Μία άλλη λύση είναι $\mathbf{A} = \varphi\, \hat{e}_3$).

6.7.1. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο παράδειγμα 6.7.3.

6.7.2. Ηλεκτρικό δίπολο είναι τοποθετημένο κατά μήκος του άξονα x_3 με κέντρο στην αρχή των αξόνων και δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\{2\hat{e}_r \cos\theta + \hat{e}_\theta \sin\theta\}$$

Να βρεθεί το δυναμικό ϕ ώστε $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Να υπολογιστεί η ροή του πεδίου δια μέσου σφαίρας ακτίνας R από το κέντρο του διπόλου. Πόση είναι η ροή για κλειστή επιφάνεια που δεν περιλαμβάνει το κέντρο;

(Απάντηση: $\phi = (p\cos\theta)/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Εισαγωγή

Μέχρι τώρα στη διανυσματική ανάλυση αναπτύξαμε ένα συμβολισμό ο οποίος μας δίνει το μεγάλο πλεονέκτημα να γράφουμε φυσικούς νόμους, ή ακόμα και καθαρά γεωμετρικές σχέσεις ανάμεσα σε διανυσματικές ποσότητες, με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εξαρτώνται από το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων.

Όμως υπάρχουν στη φυσική μεγέθη τα οποία δεν μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια διανυσμάτων. Είναι επιθυμητό και οι νόμοι που διέπουν τα μεγέθη αυτά να μπορούν να εκφραστούν σε αναλλοίωτη μορφή, δηλαδή κατά τρόπο που να παίρνουν την ίδια μορφή σ' όλα τα συστήματα αξόνων. Τούτο επιτυγχάνεται με τη γενίκευση του διανύσματος εισάγοντας την έννοια του τανυστή. Η απλούστερη μορφή τανυστή προκύπτει θεωρώντας γραμμικούς συνδυασμούς γινομένων προβολών διανυσμάτων. Κατά συνέπεια οι τανυστές καθορίζονται από περισσότερους από ένα δείκτες. Θα δούμε στη συνέχεια ότι οι συνιστώσες των τανυστών έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες ως προς τους μετασχηματισμούς στροφών που είναι γενίκευση εκείνων των διανυσμάτων. Είναι χρήσιμο λοιπόν πριν αναπτύξουμε στο κεφάλαιο αυτό τη θεωρία των τανυστών, να διερευνήσουμε την ανάλυση των μετασχηματισμών ως προς τις στροφές που ήδη αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τους τανυστές ως προς τις ιδιότητές τους κάτω από τους μετασχηματισμούς των στροφών και θα δούμε φυσικά παραδείγματα. Ακολούθως θα μελετήσουμε τους μη γραμμικούς μετασχηματισμούς και θα ορίσουμε τις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

έννοιες του ανταλλοίωτου και συναλλοίωτου τανυστή. Στο τέλος του κεφαλαίου θα δούμε τη γενίκευση της έννοιας του διανύσματος στις τέσσερις διαστάσεις. Η κατανόηση της έννοιας του τετραδιανύσματος αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για μια ουσιαστική μελέτη της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας και των εφαρμογών της στα διάφορα πεδία της φυσικής.

7.1. Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί

Στο εδάφιο 1.6. μελετήσαμε τη συμπεριφορά των συνιστωσών ενός διανύσματος στον τρισδιάστατο χώρο. Διαπιστώσαμε ότι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης **x**, στο νέο περιστραμένο σύστημα, συνδέονται με εκείνες ως προς το παλιό σύστημα με ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό που στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με O. Όπως σημειώσαμε στο πρώτο κεφάλαιο οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί έχουν την ιδιότητα :

$$O^T=O^{-1} \qquad (7.1.1a)$$

Οι συνιστώσες στη νέα βάση δίνονται τότε

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (7.1.1b)$$

Αποδείξαμε επίσης ότι τα εννέα στοιχεία O_{ij} του πίνακα μετασχηματισμού (O), συνίστανται από τα συνημίτοντα κατεύθυνσης $a_{ij} = \hat{e}_i' \cdot \hat{e}_j$ όπου $\hat{e}_i'$ ($\hat{e}_i$) τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x_i' (x_i). Η (7.1.1a) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \equiv \cos a_{ij}\, x_j \qquad (7.1.1c)$$

Προφανώς, λόγω της συνθήκης (7.1.1a) τα εννέα στοιχεία του πίνακα O, δεν είναι όλα ανεξάρτητα. Ας δούμε αναλυτικά τις σχέσεις που προκύπτουν μεταξύ τους. Κατ' αρχήν, όπως και κάθε άλλο διάνυσμα, τα μοναδιαία διανύσματα βάσης $\hat{e}_i'$, μπορούν να εκφραστούν και αυτά ως προς τη βάση $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ με τον μετασχηματισμό O. Πράγματι γενικά γράφουμε,

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

$$\hat{e}_j' = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ji}\, \hat{e}_i \equiv \alpha_{ji}\, \hat{e}_i \qquad (7.1.2)$$

όπου α_{ji} αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης. Είναι:

$$\hat{e}_j' \cdot \hat{e}_k = \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji}\ \hat{e}_i \right) \cdot \hat{e}_k \equiv \alpha_{ji}\, \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = \alpha_{ji}\, \delta_{ik} = \alpha_{jk}$$

(διότι $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_k = \delta_{ik}$, ορθοκανονική βάση), δηλαδή* .

$$\alpha_{jk} = \hat{e}_j' \cdot \hat{e}_k = \cos(\hat{e}_j', \hat{e}_k) \equiv O_{jk} \qquad (7.1.3)$$

Όμως και η νέα βάση $\hat{e}_i'$ είναι επίσης ορθοκανονική, $\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_j' = \delta_{ij}$. Τότε, από την (7.1.2) έχουμε

$$\delta_{jk} = \hat{e}_j' \cdot \hat{e}_k'$$

$$= (\alpha_{ji}\, \hat{e}_i) \cdot (\alpha_{kl}\, \hat{e}_l)$$

$$= \alpha_{ji}\, \alpha_{kl}\, (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_l) = \alpha_{ji}\, \alpha_{kl}\, \delta_{il}$$

ή $$\sum_{l=1}^{3} \alpha_{jl}\, \alpha_{kl} \equiv \sum_{l=1}^{3} O_{jl}\, O_{kl} = \delta_{jk} \qquad (7.1.4)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι τα στοιχεία του ανάστροφου μετασχηματισμού O^T σχετίζονται με αυτά του O ως εξής

$$\alpha^T{}_{lk} = \alpha_{kl} \qquad (7.1.5)$$

Συνεπώς η (7.1.4.) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\sum_{l=1}^{3} O_{jl}\, O^T{}_{lk} = \delta_{jk} \qquad (7.1.6)$$

που είναι ισοδύναμη με την

---

* στη συνέχεια αντί για a_{ij} θα γράφουμε O_{ij}, για τα συνημίτονα κατεύθυνης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$O\,O^T = I \qquad (7.1.7)$$

την οποία δείξαμε και στο πρώτο κεφάλαιο.

Οι σχέσεις (7.1.4), (7.1.6), συνιστούν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει τα στοιχεία O_{ij} να ικανοποιούν ώστε ο πίνακας O, να αναπαριστά τον μετασχηματισμό από μια ορθοκανονική βάση σε κάποια άλλη. Από τις ιδιότητες των οριζουσών και από την (7.1.7) έχουμε ότι

$$\det(OO^T) = (\det O)\,(\det O^T) = \det I = 1$$

ή επειδή

$$\det O \equiv \det(O_{ij}) = \det(O_{ji}) = \det(O^T_{ij}) \equiv \det O^T$$

έπεται ότι

$$\det(OO^T) = (\det O)^2 = 1$$

δηλαδή

$$\det O = \pm 1 \qquad (7.1.8)$$

'Οταν det O =+1, τότε ο ορθογώνιος μετασχηματισμός καλείται γνήσιος. Αναφέραμε ήδη ότι τα στοιχεία του πίνακα μετασχηματισμού δεν είναι ανεξάρτητα. Μαθηματικά, αυτό εκφράζεται από τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες (7.1.4) και (7.1.6). Οι σχέσεις αυτές αφήνουν τελικά τρεις ανεξάρτητες παραμέτρους για ένα πίνακα στροφής 3x3. Είναι λογικό να αναζητηθεί μια κατάλληλη παραμετροποίηση του μετασχηματισμού (πίνακα στροφής) ώστε να περιγράφει γωνία στροφής γύρω από τυχαίο άξονα. Η γνωστότερη παραμετροποίηση χρησιμοποιεί ως ανεξάρτητες παραμέτρους τρεις γωνίες στροφής (θ,φ,ω) που καλούνται γωνίες Euler (π.χ. βλέπε H. Goldstein, Κλασσική Μηχανική).

Παράδειγμα 7.1.1

Να εκφραστούν τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_i$ ως προς τη νέα ορθοκανονική βάση $\hat{e}_i'$.

Λύση :

Στην ουσία, ζητούμε να βρούμε το αντίστροφο του μετασχηματισμού (7.1.2). 'Εστω

$$\hat{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ji}\, \hat{e}_i'$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Σχηματίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\hat{e}_k' \cdot \hat{e}_j$. Τότε

$$\hat{e}_k' \cdot \hat{e}_j = \hat{e}_k' \cdot (\beta_{ji}\, \hat{e}_i')$$
$$= \beta_{ji}\, \hat{e}_k' \cdot \hat{e}_i' = \beta_{ji}\, \delta_{ki} = \beta_{jk}$$

'Αρα

$$\beta_{jk} = \hat{e}_k' \cdot \hat{e}_j = O_{kj} = O^T_{jk}$$

Συνεπώς

$$\hat{e}_j = \sum_{l=1}^{3} O^T_{jl}\, \hat{e}_i' \quad (7.1.9)$$

όπως θα έπρεπε να αναμένουμε.

Παράδειγμα 7.1.2

Ας θεωρήσουμε τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς

$$O_A : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1', x_2', x_3') \quad (7.1.10a)$$

$$O_B : (x_1', x_2', x_3') \to (x_1'', x_2'', x_3'') \quad (7.1.10b)$$

και ας συγκρίνουμε αυτούς με το μετασχηματισμό

$$O_C : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1'', x_2'', x_3) \quad (7.1.10c)$$

προφανώς από την (7.10a) και (7.10b) έχουμε

$$x_i'' = (O_B)_{ik}\, x_k'$$
$$x_k' = (O_A)_{kj}\, x_j$$

δηλαδή

$$x_i'' = (O_B)_{ik}\, (O_A)_{kj}\, x_j = (O_B O_A)_{ij}\, x_j \quad (7.1.11a)$$

όμως η (7.1.11a) συνεπάγεται

$$x_i'' = (O_C)_{ij}\, x_j \quad (7.1.11b)$$

Από τις (7.1.11a) και (7.11b) προκύπτει

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$O_C = O_B O_A \qquad (7.1.12)$$

(σημειώστε τη σειρά των μετασχηματισμών O_B και O_A).

Η τελευταία δηλώνει ότι ο πίνακας μετασχηματισμού που ζητούμε είναι το γινόμενο των πινάκων των δύο διαδοχικών μετασχηματισμών.

Η (7.1.12) μας λέει επίσης ότι το γινόμενο δύο ορθογώνιων μετασχηματισμών O_B O_A είναι επίσης ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός. Πράγματι ο μετασχηματισμός (7.1.11) είναι ορθογώνιος διότι συνδέει και αυτός δύο ορθοκανονικές βάσεις. Μπορούμε να συνοψίσουμε τώρα τις ιδιότητες του συνόλου των ορθογωνίων μετασχηματισμών που έγιναν φανερές απ' τα παραπάνω, στον τρισδιάστατο ευκλείδιο χώρο. Αυτές είναι:

Ιδιότητες Ορθογωνίων Μετασχηματισμών:

Το γινόμενο δύο ορθογωνίων μετασχηματισμών είναι επίσης στοιχείο του ίδιου συνόλου O_B O_A $= O_C$. β)Υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο $O_0 = I$ και εφράζει τον μετασχηματισμό μιας βάσης στον εαυτό της. γ)Υπάρχει το αντίστροφο για κάθε στοιχείο του συνόλου, δηλαδή υπάρχει ο αντίστοφος κάθε ορθογώνιου μετασχηματισμού $O^{-1} = O^T$. Το σύνολο των ορθογωνίων μετασχηματισμών με τις προαναφερθείσες ιδιότητες συγκροτεί **ομάδα**. Η ομάδα καλείται ορθογώνια και συνήθως συμβολίζεται με το σύμβολο O(3).

Στην αρχή του παρόντος εδαφίου επαναφέραμε στη μνήμη μας τους μετασχηματισμούς του διανύσματος θέσης όπως ορίστηκαν στο κεφάλαιο Ι. Όμως με το συμβολισμό, που μόλις αναπτύξαμε, είμαστε σε θέση να ορίσουμε τις ιδιότητες των συνιστωσών κάθε διανύσματος κάτω από τους μετασχηματισμούς στροφών. Πράγματι, έστω τυχαίο διάνυσμα **A** το οποίο έχει συνιστώσες (A_1,A_2,A_3) στο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από τα $(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)$.

$$\mathbf{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = A_i\hat{e}_i \qquad (7.1.13)$$

Σε ένα περιστραμένο σύστημα $(\hat{e}_1',\hat{e}_2',\hat{e}_3')$, ως προς το αρχικό

$$\hat{e}_i' = O_{ij}\hat{e}_j$$

το διάνυσμα **A** γράφεται:

$$\mathbf{A} = A_1'\hat{e}_1' + A_2'\hat{e}_2' + A_3'\hat{e}_3' = A_i'\hat{e}_i' \qquad (7.1.14)$$

Οι σχέσεις μεταξύ των A_i' και A_i προκύπτουν εύκολα με τη χρήση της (7.1.9)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{A}' = \sum_j A_j \hat{e}_j = \sum_j A_j \sum_i O^T_{ji} \hat{e}_i'$$

$$= \sum_i (\sum_j O_{ij} A_j) \hat{e}_i'$$

Συγκρίνοντας με την (7.1.14) έχουμε

$$A_i = \sum_j O_{ij} A_j \qquad (7.1.16a)$$

Ανάλογα, με τη χρήση της (7.1.2) καταλήγουμε στον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$A_i = \sum_j O^T_{ij} A_j' = \sum_j O_{ji} A_j' \qquad (7.1.16b)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι οι μετασχηματισμοί (7.1.16a) και (7.1.16b) είναι οι ίδιοι που ορίστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο για το διάνυσμα θέσης.

Τα παραπάνω αποτελούν συνέπεια του ορισμού διανύσματος που δώσαμε στο εδάφιο 1.6.

Θα μπορούσαμε να δώσουμε τον ορισμό και αντίστροφα:

Ορισμός.

'Ενα σύνολο τριών ποσοτήτων (A_1, A_2, A_3) αποτελεί συνιστώσες διανύσματος **A**, όταν κάτω από ορθογώνιο μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων, μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση (7.1.16).

Υπάρχουν πολλές φυσικές ποσότητες που είναι αναλλοίωτες κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Τέτοιες είναι, π.χ, οι παγκόσμιες σταθερές (μάζα, φορτίο, κ.λ.π). Επίσης το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **A** και **B**. Όντως

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = A_i' B_i' = O_{ij} A_j O_{ik} B_k$$

αλλά $O_{ij} O_{ik} = \delta_{jk}$ (εξ. 7.1.6), οπότε

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \delta_{jk} A_j B_k = A_j B_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \qquad (7.1.17a)$$

Προφανώς και οι ποσότητες $|\mathbf{A}|$ και $|\mathbf{B}|$ είναι αναλλοίωτες. Με άλλα λόγια από δύο διανύσματα **A** και **B** κατασκευάζει κανείς τρεις βασικές αναλλοίωτες ποσότητες $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$ και $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Η πιο γενική αναλλοίωτη ποσότητα που κατασκευάζεται από τα **A** και **B** είναι συνάρτηση των τριών αυτών ποσοτήτων δηλ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$f\,(\,|\mathbf{A}|,|\mathbf{B}|,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,) \qquad (7.1.17b)$$

όπου f τυχούσα συνάρτηση.

Άλλα παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών είναι η πυκνότητα μάζας η πυκνότητα φορτίου κλπ., καθώς και οι αντίστοιχες ποσότητες

$$\int \rho(\mathbf{x})\, d^3x$$

Ένα παράδειγμα διανύσματος με την πιο πάνω έννοια είναι η ηλεκτρική διπολική ροπή ενός συστήματος N φορτισμένων σωματίων

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{N} q(k)\, \mathbf{x}(k)$$

όπου q(k) και **x**(k) αναφέρονται στο φορτίο και τη συντεταγμένη θέσης του σωματίου k. Αν το φορτίο κατανέμεται συνεχώς η πιο πάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}\, \rho(\mathbf{x})\, d^3x$$

όπου ρ η πυκνότητα φορτίου.

Ο στοιχειώδης όγκος είναι επίσης αναλλοίωτη ποσότητα, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη από γνήσιους ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Αυτό δεν είναι προφανές. Ήδη γνωρίζουμε από το έκτο κεφάλαιο, ότι κατά τους μετασχηματισμούς από ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάποιο άλλο, στο στοιχείο όγκου ($dV \equiv d^3x$) υπεισέρχεται η Ιακωβιανή ορίζουσα.

Πράγματι,

$$d^3x = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1',x_2',x_3')}\, dx_1' dx_2' dx_3' \qquad (7.1.18)$$

όπου

$$J = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1',x_2',x_3')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3'} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3'} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3'} \end{vmatrix} \qquad (7.1.19)$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα, θεωρούμε τον μετασχηματισμό του διανύσματος θέσης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x_i' = \sum_j O_{ij} x_j \, , \; x_j = \sum_i O^T_{ij} x_i' \qquad (7.1.20)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \sum_j O_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \sum_j O_{ij} \delta_{jk} = O_{ik}, \text{ και } \frac{\partial x_j}{\partial x_k'} = O_{jk} \qquad (7.1.21)$$

Συνεπώς η Ιακωβιανή γράφεται

$$\begin{vmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{vmatrix} \equiv \det O = \pm 1$$

Συνεπώς το στοιχείο όγκου σωστά θεωρήθηκε αμετάβλητο από τον γνήσιο ορθογώνιο μετασχηματισμό (det O =1).

7.2. Καρτεσιανοί Τανυστές

Αναφέραμε ήδη στην εισαγωγή, ότι υπάρχουν ποσότητες στη φυσική για τις οποίες χρειαζόμαστε περισσότερους από ένα δείκτη να τις περιγράψουμε. Ένα απλό παράδειγμα μιας τέτοιας ποσότητας μπορεί να αποτελέσει το γινόμενο των συνιστωσών δύο διανυσμάτων **A** και **B**. Ας διερευνήσουμε το μετασχηματισμό μιας τέτοιας ποσότητας, $T_{ij} = A_i B_j$ κάτω από τις στροφές. Σύμφωνα με το προηγούμενο εδάφιο η κάθε μια συνιστώσα ξεχωριστά υπόκειται στον μετασχηματισμό

$$A_i' = O_{ik} A_k \qquad (7.2.1)$$

$$B_j' = O_{jl} B_l$$

Τότε

$$T_{ij}' = A_i' B_j' = O_{ik} O_{jl} A_k B_l = O_{ik} O_{jl} T_{kl}$$

Δηλαδή

$$T_{ij}' = O_{ik} O_{jl} T_{kl} \equiv \sum_{k,l} O_{ik} O_{jl} T_{kl} \qquad (7.2.2)$$

Υπάρχουν εννέα ποσότητες T_{ij} συνολικά (i,j =1,2,3) οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως τα στοιχεία ενός πίνακα 3x3. Υπάρχουν πλείστα παραδείγματα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

στη φυσική που απαιτούν για τον ορισμό τους εννέα συνιστώσες, σε αντίθεση με εκείνες που μπορούν να ορισθούν ως διανύσματα. Οι φυσικές ποσότητες των οποίων οι συνιστώσες τους υπακούουν το μετασχηματισμό (7.2.2) καλούνται τανυστές δεύτερης τάξης.

Στα πιο πάνω θεωρήσαμε την ειδική περίπτωση όπου η ποσότητα T_{ij} είναι γινόμενο δύο διανυσμάτων. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Ο απλούστερος δυνατός τανυστής είναι το σύμβολο δ_{ij}. Προφανώς

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$$

όμως

$$O_{ik} O_{jl} \delta_{kl} = O_{ik} O_{jk} = \delta_{ij}$$

δηλαδή

$$\delta_{ij}' = O_{ik} O_{jl} \delta_{kl} \qquad (7.2.3)$$

η οποία είναι ειδική περίπτωση της εξ. (7.2.2). Ένας άλλος χρήσιμος τανυστής είναι το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο ε_{ijk} (κύτταξε πρόβλημα 7.2.3).

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τανυστή T_{ij}. Τότε προφανώς έχουμε

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij} \qquad (7.2.4)$$

προφανώς

$$S_{ij} = S_{ji} \text{ (συμμετρικός τανυστής)} \qquad (7.2.5a)$$

$$A_{ij} = -A_{ji} \text{ (αντισυμμετρικός τανυστής)} \qquad (7.2.5b)$$

παρατηρούμε τώρα ότι

$$O_{ik} O_{jm} S_{km} = \frac{1}{2}(O_{ik} O_{jm} T_{km} + O_{ik} O_{jm} T_{mk})$$

$$= \frac{1}{2}(T_{ij}' + T_{ji}') = S_{ij}'$$

δηλαδή

$$S'_{ij} = O_{ik} O_{jm} S_{km} \qquad (7.2.6)$$

όμοια

$$A_{ij}' = O_{ik} O_{jm} A_{km} \qquad (7.2.7)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Άρα τα υποσύνολα του T_{ij} , δηλαδή οι ποσότητες S_{ij} και A_{ij} είναι τανυστές δεύτερης τάξης. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί δεν μπορούν να μετατρέψουν ένα συμμετρικό σε ένα αντισυμμετρικό τανυστή. Θα δείξουμε τώρα ότι το A_{ij} μετασχηματίζεται και ως διάνυσμα.

Θεωρούμε το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

τότε

$$D_3 = B_1 C_2 - B_2 C_1,\ D_1 = B_2 C_3 - B_3 C_2\ ,\ D_2 = B_3 C_1 - B_1 C_3$$

θέτοντας $A_{ij} = B_i C_j - B_j C_i$

$$D_3 = A_{12} \qquad D_1 = A_{23} \qquad D_2 = A_{31} \tag{7.2.8}$$

Λόγω των συνθηκών (7.2.5) ένας αντισυμμετρικός τανυστής έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες. Εδώ διαλέξαμε τις $A_{12}\, A_{23}$ και A_{31}. Ισχύουν οι σχέσεις

$$D_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{ij}\, A_{ij} = \varepsilon_{ijk} D_k \tag{7.2.9}$$

κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς έχουμε

$$D'_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A'_{ij} = \varepsilon_{ijk} O_{ir} O_{jm} A_{rm}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} O_{ir} O_{jm} \varepsilon_{rmn} D_n = \Omega_{kn} D_n \tag{7.2.10}$$

όπου

$$\Omega_{kn} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} O_{ir} O_{jm} \varepsilon_{rmn} \tag{7.2.11}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο πίνακας Ω_{kn} είναι ορθογώνιος. Πραγματικά

$$\Omega_{kn}\, \Omega_{kl} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} O_{ir} O_{jm} \varepsilon_{rmn} \varepsilon_{\lambda\mu k} O_{\lambda p} O_{\mu\sigma} \varepsilon_{p\sigma l}$$

Αλλά $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{\lambda\mu k} = \delta_{i\lambda}\, \delta_{j\mu} - \delta_{i\mu}\, \delta_{j\lambda}$ (κύτταξε εξ. 1.7.3) , οπότε

$$\Omega_{kn}\, \Omega_{kl} = \frac{1}{4} (O_{ir} O_{jm} O_{ip} O_{\sigma} \varepsilon_{p\sigma l} \varepsilon_{rmn} - O_{ir} O_{jm} O_{jp} O_{i\sigma} \varepsilon_{p\sigma l} \varepsilon_{rmn})$$

αλλά $O_{ir} O_{ip} = \delta_{pr}\ O_{ir} O_{i\sigma} = \delta_{r\sigma}$

οπότε $O_{jm} O_{j\sigma} = \delta_{j\sigma}\ O_{jm} O_{jp} = \delta_{mp}$

$$\Omega_{kn}\, \Omega_{kl} = \frac{1}{4} (\varepsilon_{p\sigma l} \varepsilon_{p\sigma n} - \varepsilon_{p\sigma l} \varepsilon_{\sigma p n})$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\alpha\iota} \varepsilon_{\rho\sigma n} = \delta_{\iota n}$$

δηλαδή η (7.2.10) υποδηλώνει ότι οι συνιστώσες της (7.2.8) μετασχηματίζονται και ως συνιστώσες διανύσματος.

Ίχνος ενός τανυστή λέγεται το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του

$$tr(T) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} \qquad (2.7.12)$$

Το ίχνος ενός τανυστή είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Πράγματι

$$tr(T') = T'_{ii} = O_{ij} O_{ik} T_{jk} = \delta_{jk} T_{jk} = T_{jj} = tr(T)$$

Ο αντισυμμετρικός τανυστής έχει ίχνος μηδέν Tr(A) = 0. Αν μας δοθεί ένας οποιοσδήποτε τανυστής T μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άϊχνο τανυστή T^0 ως εξής

$$T^0_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} tr(T)\, \delta_{ij} \qquad (2.7.13)$$

Η ποσότητα αυτή είναι πράγματι τανυστής εφ' όσον η ποσότητα δ_{ij} είναι τανυστής 2ης τάξης (κύτταξε εξ. (7.2.3) πιο πάνω). Εχουμε

$$tr(T^0) = \sum_{l=1}^{3} T_{ii} - \frac{1}{3} tr(T) \sum_{l=1}^{3} \delta_{ii} = tr\,(T) - \frac{1}{3} tr(T)3 = 0$$

Παράδειγμα 7.2.1

Ας δούμε ένα παράδειγμα τανυστή δεύτερης τάξης από τη φυσική. Γνωρίζουμε ότι η στροφορμή σωματίου στη μηχανική δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{L} = m\, \mathbf{x} \times \mathbf{u} = m\, \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \qquad (7.2.14)$$

Η συνιστώσα L_i της στροφορμής είναι τότε

$$L_i = m\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, u_k$$

$$= m\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})_k$$

$$= m\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \varepsilon_{kln}\, \omega_l\, x_n$$

$$= m\, (\delta_{il}\, \delta_{jn} - \delta_{in}\, \delta_{jl})\, \omega_l x_n\, x_j$$

$$= m\, (\omega_i\, x_j\, x_j - \omega_j\, x_i\, x_j) = m\, \omega_j\, (\delta_{ij} r^2 - x_i\, x_j)$$

δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$L_i = I_{ij}\,\omega_j \qquad (7.2.15)$$

όπου

$$I_{ij} = m\,(\,\delta_{ij}\,r^2 - x_i\,x_j\,) \qquad (7.2.16)$$

Για τη συνιστώσα L_1, από την (7.2.15) έχουμε

$$L_1 = m(\omega_1\,r^2 - \omega_1\,x^2{}_1 - \omega_2 x_2 x_1 - \omega_3 x_3 x_1)$$

$$= I_{11}\,\omega_1 + I_{12}\,\omega_2 + I_{13}\,\omega_3 \qquad (7.2.17)$$

όπου σύμφωνα με την εξ. (7.2.15)

$$I_{11} = m(\,r^2 - x^2{}_1) = m(\,x^2{}_2 + x^2{}_3\,),\; I_{12} = -\,mx_1x_2\,,\; I_{13} = -\,mx_1x_3$$

Ανάλογα εκφράζονται και άλλες συνιστώσες L_2 και L_3. Μέσω της εξ. (7.2.15) ορίζουμε συνολικά εννέα ποσότητες , I_{ij} (i, j =1,2,3) οι οποίες συνδέουν τα δύο διανύσματα **L** και **ω**. Μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (7.2.14) με τη χρήση των ποσοτήτων αυτών ως εξής

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad (7.2.18)$$

Η (7.2.18) μας λέγει καθαρά ότι η κάθε συνιστώσα στροφορμής μπορεί να είναι γραμμική συνάρτηση <u>όλων</u> των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας. Με άλλα λόγια το διάνυσμα της στροφορμής συνδέεται με εκείνο της γωνιακής ταχύτητας με ένα γραμμικό μετασχηματισμό. Οι παραπάνω σχέσεις προφανώς γενικεύονται και για N σωμάτια: Γράφουμε τότε

$$I_{ij} = \sum_{s=1}^{N} m\,(s)\,\{\,r^2\,(s)\,\delta_{ij} - x_i(s)\,x_j(s)\,\} \qquad (7.2.19)$$

όπου x_i (s) είναι η i συνιστώσα του διανύσματος θέσης του σωματίου s.

Αν όλα τα σωμάτια βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο ώστε να θεωρούνται ένα σώμα, τότε η (7.2.9) γράφεται

$$I_{ij} = \delta_{ij} \int_V \rho(\mathbf{x})\,r^2 dV - \int_V x_i\,x_j\,\rho(\mathbf{x})\,dV \qquad (7.2.20)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου ρ(x) η πυκνότητα μάζας του σώματος.

Ας συζητήσουμε τώρα για τις εννέα ποσότητες I_{ij}. Όπως είδαμε σχηματίζουν ένα πίνακα 3x3. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα αυτού, I_{11}, I_{22}, I_{33} καλούνται συντελεστές ροπών αδράνειας. Τα μη διαγώνια στοιχεία I_{ij} ($i \neq j$) καλούνται γινόμενα αδράνειας. Προφανώς είναι μια μαθηματική οντότητα διαφορετική από το διάνυσμα. Χρειαζόμαστε δύο δείκτες να την ορίσουμε και εννέα συνιστώσες. (Στο διάνυσμα έχουμε ένα δείκτη και τρεις συνιστώσες). Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι απλό να διαπιστώσουμε ότι ο τρόπος μετασχηματισμού του I_{ij} συμπίπτει με εκείνο του τανυστή δεύτερης τάξης (βλ. σχέση (7.2.2)). Στη συνέχεια ας εξετάσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 7.2.2

Θα εξετάσουμε τη μορφή που παίρνει ο τανυστής αδρανείας στερεού όταν υπάρχει άξονας συμμετρίας, π.χ. ο x_3. Ας ξεκινήσουμε με σφαιρικές συντεταγμένες. Η πυκνότητα στην περίπτωση αυτή θα έχει τη μορφή

$$\rho(x) = \rho(r,\theta) \text{ (ανεξάρτητη της } \varphi)$$

τότε κάθε μη διαγώνιο στοιχείο είναι μηδέν.

Όντως

$$I_{12} \propto \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

$$I_{13} \propto \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

Επίσης

$$I_{11} = \int_0^r r^4 dr \Big\{ \int_0^{\pi} \rho(r,\theta) \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$- \int_0^{\pi} \rho(r,\theta) \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \Big\}$$

$$= 2\pi \int_0^r r^4 \, dr \int_0^{\pi} \rho(r,\theta) \sin\theta \, (1 - \sin^2\theta/2) \, d\theta$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= \pi \int_0^r r^4\,dr \int_0^\pi \rho(r,\theta)\,\sin\theta\,(1+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$I_{22} = \int_0^r r^4\,dr \int_0^\pi \rho(r,\theta)\,\sin\theta\,d\theta \Big\{ \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\sin^2\varphi\,d\varphi \Big\} =$$

$$= \int_0^r r^4\,dr \int_0^\pi \rho(r,\theta)\sin\theta(2\pi - \pi\sin^2\theta) = \pi \int_0^r r^4 dr \int_0^\pi \rho(r,\theta)\sin\theta(1+\cos^2\theta) = I_{11}$$

$$I_{33} = \int_0^r r^4\,dr \int_0^\pi \rho(r,\theta)\,\sin\theta\,[1-\cos^2\theta] \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi \int r^4 dr \int_0^{2\pi} \rho\,(r,\theta)\,\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

Δηλαδή αν έχουμε αξονική συμμετρία γύρω από τον άξονα x_3 , $I_1 = I_2 \neq I_3$

όπου $I_1 = I_{11}$, $I_2 = I_{22}$, $I_3 = I_{33}$, $I_{ij} = 0$, $i \neq j$. Γενικά όμως $I_i \neq I_j$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν επιλέξουμε και κυλινδρικές συντεταγμένες. Τώρα η πυκνότητα ρ΄ γράφεται ρ΄ =ρ΄ (ρ,x_3) , οπότε

$$I_1 = I_2 = 2\pi \Big\{ \int (\rho^2 + x_3^2)\,\rho'(\rho, x_3)\,\rho d\rho dx_3 - \frac{1}{2} \int \rho^2 \rho'(\rho, x_3)\rho d\rho dx_3 \Big\} =$$

$$= \pi \int (\rho^2 + 2x_3^2)\,\rho'(\rho, x_3)\,\rho d\rho dx_3$$

$$I_3 = 2\pi \int \rho^2\,\rho'(\rho, x_3)\,\rho d\rho dx_3$$

Παράδειγμα 7.2.3

Θα δοθούν εκφράσεις για τον τανυστή αδράνειας όταν η πυκνότητα είναι μόνο συνάρτηση της απόστασης από στοιχείο συμμετρίας.

♦ Ας αρχίσουμε με την περίπτωση ρ =ρ(r) (σφαιρική συμμετρία).

Τώρα $I_1 = I_2 = \pi \int_0^a r^4\,\rho(r)\,dr \int_0^\pi \sin\theta(1+\cos^2\theta)d\theta$

$$= \pi \int_0^a r^4\,\rho(r)\,dr \int_{-1}^{1} (1+\xi^2)\,d\xi = \frac{8\pi}{3} \int_0^a \rho(r)\,r^4\,dr$$

$$I_3 = 2\pi \int_0^a r^4 \rho(r)\, dr \int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^a r^4 \rho(r)\, dr \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)\, d\xi = \frac{8\pi}{3} \int_0^a r^4 \rho(r)\, dr$$

Δηλαδή $I_1 = I_2 = I_3$ (σφαιρική συμμετρία).

Υπάρχει μια μόνο ροπή αδρανείας.

Αν δίνεται επιπλέον ότι η πυκνότητα είναι σταθερή

$$\rho = \frac{m}{(4/3)\pi a^3} = \frac{3m}{4\pi a^3}$$

Εύκολα προκύπτει ότι αν ο άξονας περνάει από το κέντρο της σφαίρας, ισχύει

$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \frac{8\pi}{3}\frac{3m}{4\pi a^3}\frac{a^5}{5} = \frac{2}{5} ma^2$$

(ροπή αδρανείας ομογενούς σφαίρας)

Ας θεωρήσουμε τώρα την άλλη περίπτωση όταν η πυκνότητα είναι ανεξάρτητη της x_3

$\rho^* = \rho'(\rho)$ (κυλινδρική συμμετρία)

Τότε η ολοκλήρωση ως προς x_3 εξαρτάται αποκλειστικά από την επιλογή των αξόνων. Αν η αρχή βρίσκεται στο κέντρο του κυλίνδρου παίρνουμε

$$I_1 = I_2 = \pi h \int_0^a \rho'(\rho) \left(\rho^2 + \frac{h^2}{6}\right) \rho d\rho$$

$$I_3 = 2\pi h \int_0^a \rho'(\rho)\, \rho^3 d\rho$$

- Αν τώρα $\rho'(\rho)$ = ανεξάρτητο της ρ, δηλαδή η πυκνότητα είναι σταθερή έχουμε

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{\pi a^2 h} \pi h \int_0^a \left(\rho^2 + \frac{h^2}{6}\right) \rho d\rho \text{ ή}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{4}\left(a^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$

$$I_3 = 2\pi h \frac{m}{\pi a^2 h} \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} ma^2$$

όπου α η ακτίνα του κυλίνδρου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για μια λεπτή ράβδο (α <<h)

$$I_1=I_2=\frac{m}{12}h^2\ ,\ I_3=0.$$

Για επίπεδο δίσκο (h=0)

$$I_1=I_2=\frac{1}{4}m\,a^2\ ,\ I_3=\frac{1}{2}m\,a^2$$

Σημείωση: Αν οι άξονες x_1,x_2 βρίσκονται όχι στο κέντρο αλλά στη βάση του κυλίνδρου τότε $I_3=(1/2)\,m\,a^2$, αλλά τα I_1, I_2 είναι διαφορετικά. Τώρα

$$I_1'=I_2'=m\int_0^a\rho'(\rho)\,\rho d\rho\int_0^h(\rho^2+2x^3)\,dx_3$$

$$=\pi h\int_0^a\rho'(\rho)\,\rho d\rho\,(\rho^2+\frac{2}{3}h^2)$$

και αν $\rho'=\frac{m}{\pi a^2h^2}$ = σταθερό, βρίσκουμε

$$I_1'=I_2'=\frac{m}{4}(a^2+\frac{4}{3}h^2)$$

δηλαδή

$$I_1'=I_1+m\,(\frac{h}{2})^2$$

Τώρα για λεπτή ράβδο

$$I_1'=I_3'=\frac{1}{3}mh^2\ ,\ I_3'=0$$

γενικά

$$I=I\ (\text{κέντρο μάζας})+md^2$$

όπου d η απόσταση του άξονα από το κέντρο μάζας.

Παράδειγμα 7.2.4

Θα μελετήσουμε τον τανυστή Q_{ij} της τετραπολικής ροπής.

Ο τανυστής αυτός ορίζεται ανάλογα με τον τανυστή αδρανείας

$$Q_{ij}=\int\rho(x)\,[3x_ix_j-\delta_{ij}r^2]\,dV \qquad (7.2.21)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου ρ(x) η πυκνότητα (μάζας, φορτίου, κ.λ.π ανάλογα με την περίπτωση) ο τανυστής αυτός είναι επίσης συμμετρικός. Συνήθως αναφέρεται ως προς σύστημα αξόνων που έχει αρχή το κέντρο της κατανομής. Εδώ ελήφθη πρόνοια ώστε ο τανυστής Q_{ij} να έχει ίχνος μηδέν.

$$Q_{11}+Q_{22}+Q_{33}=0$$

Προχωρώντας όπως πιο πάνω μπορεί να δειχθεί ότι αν υπάρχει άξονας συμμετρίας μπορούμε να επιλέξουμε $Q_{ij}=0$, $i \neq j$.

Αν ο άξονας αυτής θεωρηθεί ο x_3 έχουμε

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_0}{2} \text{ και } Q_{33} = Q_0$$

δηλαδή ουσιαστικά έχουμε μια μόνο ανεξάρτητη συνιστώσα. Προφανώς αν υπάρχει σφαιρική συμμετρία

$$Q_{11}=Q_{22}=Q_{33}=0$$

δεν υπάρχει τετραπολική ροπή !

Το δυναμικό που προκαλεί μια τετραπολική ροπή είναι

$$\Phi(\mathbf{x}) = k_1 \sum_{ij} \frac{Q_{ij}x_i x_j}{2r^5}$$

όπου

$$k_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \text{ηλεκτροστατική} \\ G_N & \text{βαρυτικό πεδίο} \end{array} \right\}$$

Παράδειγμα 7.2.5

Ο τανυστής της διηλεκτρικής σταθεράς. Αν **D** είναι η ηλεκτρική μετατόπιση και **E** το ηλεκτρικό πεδίο ο τανυστής της διηλεκτρικής σταθεράς ορίζεται ως εξής

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \qquad (7.2.22)$$

και προϋποθέτει γραμμική σχέση μεταξύ των **D** και **E**. Το ε_{ij} μπορεί να είναι συνάρτηση της θέσης πλην όμως ανεξάρτητο του ηλεκτρικού πεδίου.

Προχωρώντας όπως και στην περίπτωση του τανυστή της ροπής αδρανείας βρίσκουμε ότι για ομογενή και ισότροπα μέσα έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$$

δηλαδή το διάνυσμα **D** είναι πολλαπλάσιο του **E**, δηλαδή αρκεί η γνώση της διηλεκτρικής σταθεράς ε. Ανάλογα κρίνεται και ο τανυστής μαγνητικής διαπερατότητας όπου συνδέει γραμμικά τα πεδία **B** και **H** ($B_i=\mu_{ij}H_j$), ο τανυστής στρέψης στη μηχανική ελαστικού μέσου, ο τανυστής αγωγιμότητας $J_i=\sigma_{ij}E_j$ κ.λ.π.

Υποπτευόμαστε ότι ένας τανυστής 2ης τάξης συνδέει γενικά δύο διανυσματικά πεδία (κύτταξε εξ. (7.2.22)). Θα πρέπει όμως να βεβαιωθούμε ότι μετασχηματίζεται όπως υπαγορεύει η εξ. (7.2.2).

Ορισμός:

Το σύνολο των ποσοτήτων T_{ij} (i,j = 1,2,3) αποτελούν τις συνιστώσες ενός καρτεσιανού τανυστή δεύτερης τάξης όταν κάτω από τον ορθογώνιο μετασχηματισμό (7.1.16), μετασχηματίζονται ως εξής

$$T_{ij}' = O_{ik}\, O_{jl}\, T_{kl} \qquad (7.2.23)$$

ή με τη χρήση των* (7.2.16)

$$T_{ij}' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\frac{\partial x_j'}{\partial x_l}T_{kl} \qquad (7.2.24)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζεται :

$$T_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'}\frac{\partial x_l}{\partial x_j'}T_{ij}' \qquad (7.2.25)$$

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε τον ορισμό για τανυστές μαγαλύτερης τάξης. Για παράδειγμα, ένας τανυστής τρίτης τάξης έχει τρεις δείκτες, T_{ijk} και μετασχηματίζεται ως εξής

$$T_{ijk} = O_{il}\, O_{jm}\, O_{kn} T_{lmn}$$

ή

$$T_{ijk} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_l}\frac{\partial x_j'}{\partial x_m}\frac{\partial x_k'}{\partial x_n}T_{lmn} \qquad (7.2.26)$$

---

* Η μορφή (7.2.24) υπερτερεί της (7.2.23) καθ' όσον επιτρέπει να θεωρηθούν και μη ορθογώνιοι μετασχηματισμοί αξόνων (κύτταξε εδ. 7.4).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ο αντίστροφος της (7.2.26) γράφεται ανάλογα με την (7.2.25). Ένας τανυστής ανώτερης τάξης προκύπτει παραγωγίζοντας ένα δοσμένο τανυστή (κύτταξε πρόβλημα 7.3.1)

Πριν τελειώσουμε το εδάφιο αυτό κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις για τον κάπως μυημένο αναγνώστη που σχετίζεται με μη γνήσιους ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Ένας τέτοιος είναι π.χ η αναστροφή (κατοπτρισμός ως προς κέντρο)

$$\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$$

Κάτω από τον μετασχηματισμό αυτό ένα διάνυσμα αλλάζει σημείο. Το εξωτερικό γινόμενο **D** δύο διανυσμάτων **B** και **C** μετασχηματίζεται ως εξής:

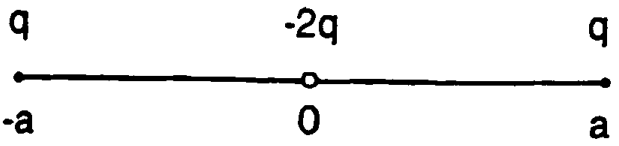
$$\mathbf{D} \rightarrow (-\mathbf{B}) \times (-\mathbf{C}) = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{D}$$

δηλαδή δεν μετασχηματίζεται ως (σύνηθες) διάνυσμα. Λέγεται ψευδοδιάνυσμα. Ορθότερα είναι αντισυμμετρικός τανυστής 2ης βαθμίδας καθώς ήδη αναφέρθηκε πιο πάνω. Τέτοια ποσότητα είναι π.χ η στροφορμή. Παραδείγματα διανυσμάτων είναι το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και η πυκνότητα ρεύματος **J** (και κατά συνέπεια το διανυσματικό δυναμικό **A**). Αντίθετα το μαγνητικό πεδίο είναι ψευδοδιάνυσμα. Το ίδιο και η μαγνητική ροπή. Η ηλεκτρική ροπή είναι διάνυσμα.

Τα πιο πάνω πολλές φορές είναι χρήσιμα σε υπολογισμούς για τον έλεγχο της ορθότητας των απαραίτητων πράξεων.

Παράδειγμα 7.2.6

Δίνεται η διάταξη των τριών φορτίων του σχήματος. Θα βρεθούν οι ποσότητες $q_{ολ}$, **p** και Q_{ij}.



Σχήμα 7.2.1.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Απάντηση:

Προφανώς $q_{ολ} = q + q - 2q = 0$

$$p_1 = p_2 = 0\ ,\ p_3 = q(a) + 2q(0) + q(-a) = 0$$

Επειδή δύο τουλάχιστον από τις συντεταγμένες των φορτίων είναι μηδέν ο τετραπολικός τανυστής είναι διαγώνιος. Έχουμε

$$Q_{11} = Q_{22} = -\sum_{k=1}^{3} |\mathbf{x}(k)|^2\, q(k) = -a^2 q - a^2 q = -2qa^2$$

$$Q_{33} = \sum_{k} (3x^2{}_3(k) - x^2(k))\, q(k)$$

$$= 2(3a^2 - a^2) = 4qa^2$$

Ο τανυστής αυτός είναι άϊχνος πράγμα που περιμένουμε. Το δυναμικό των τριών φορτίων σε κάποιο σημείο $\mathbf{x}$ του χώρου είναι

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\hat{e}_3 a|} + \frac{1}{|\mathbf{x}+\hat{e}_3 a|} - \frac{2}{|\mathbf{x}|}\right]$$

$$|\mathbf{x}-\hat{e}_3 a| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\hat{e}_3 a|} = (r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2}(3\cos^2\theta - 1)\right)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\hat{e}_3 a|} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^2}(3\cos^2\theta - 1)\right)$$

Άρα για σχετικά μεγάλες αποστάσεις

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

παρατηρούμε όμως ότι

$$\frac{Q_{ij}x_i x_j}{2r^5} = \frac{Q_{33}\, x^2{}_3 + Q_{11}\, x^2{}_1 + Q_{22}\, x^2{}_2}{2r^5}$$

$$= \frac{2qa^2(2x^2{}_3 - x^2{}_1 - x^2{}_2)}{2r^5} = \frac{qa^2(3x^2{}_3 - r^2)}{r^5}$$

$$= \frac{qa^2(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

δηλαδή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_i x_j}{2r^5}Q_{ij}$$

η έκφραση αυτή δείχνει τη φυσική σημασία της τετραπολικής ροπής. Γενικά για μεγάλες αποστάσεις το δυναμικό πεπερασμένης κατανομής φορτίου προσεγγίζεται ως εξής

μονοπολική ροπή $\quad \phi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ (Coulomb)

διπολική ροπή $\quad \phi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^3}$

τετραπολική ροπή $\quad \phi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{ij}x_i x_j}{2r^5}$

7.3. Τανυστές σε N-διάστατους Ευκλείδιους χώρους

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει τους καρτεσιανούς τανυστές με βάση τον τρόπο μετασχηματισμού των συνιστωσών τους ως προς τον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο. Ο περιορισμός αυτός δεν ήταν απαραίτητος, αλλά έγινε με σκοπό την πλήρη κατανόηση των εισαγωγικών εννοιών στην τανυστική ανάλυση με τη βοήθεια φυσικών παραδειγμάτων. Χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια, μπορούμε να προσαρμόσουμε την παραπάνω συζήτηση για την περίπτωση των N-διάστατων Ευκλείδιων χώρων. Πριν όμως προχωρήσουμε στη γενίκευση αυτή, πρέπει πρώτα να ορίσουμε το N-διάστατο Ευκλείδιο χώρο.

7.3.α N- διάστατοι Ευκλείδειοι χώροι

Τα στοιχεία του N - διάστατου χώρου είναι διανύσματα διάστασης N που χαρακτηρίζονται απο διαταγμένες N-αδες αριθμών $\mathbf{x} \rightarrow (x_1,....,x_N)$. Σε αναλογία με τους τριδιάστατους διανυσματικούς χώρους θα πρέπει να ορίσουμε κι εδώ αλγεβρικές πράξεις.

i) Πρόσθεση: αν $\mathbf{A}=(A_1,.....,A_N)$ και $\mathbf{B}=(B_1,....,B_N)$ δύο διανύσματα του χώρου R_N τότε η άθροιση $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ανήκει στο R_N και αναπαρίσταται με τις συνιστώσες ως εξής

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \rightarrow (A_1+B_1,.....,A_N+B_N)$$

ii) Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό, α :

$$\alpha\mathbf{A} \rightarrow \alpha(A_1,....,A_N) = (\alpha A_1,....,\alpha A_N)$$

Κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί ως προς την ορθοκανονική βάση $\hat{\mathbf{e}}_i$ ως εξής

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} A_i \hat{e}_i , A_i = \hat{e}_i \mathbf{A} \qquad (7.3.1)$$

Το βαθμωτό γινόμενο $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ γράφεται

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{N} A_i B_i \qquad (7.3.2)$$

και το μέτρο του διανύσματος

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \left(\sum_{i=1}^{N} A_i^2 \right)^{1/2} \qquad (7.3.3)$$

Η γωνία δύο διανυσμάτων **A** ,**B** ορίζεται ως εξής

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|} \qquad (7.3.4)$$

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τις ακόλουθες ιδιότητες. Αν α,β πραγματικοί αριθμοί και **A**,**B**,**C** ανήκουν στον R_N τότε :

1) $(\alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \beta\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ (7.3.5)

2) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ (7.3.6)

3) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \geq 0$ (7.3.7)

4) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{A} = 0$ (7.3.8)

5) $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ (Ανισότητα Gauchy - Schwarz) (7.3.9)

6) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ (τριγωνική ιδιότητα) (7.3.10)

Αξίζει να σημειώσουμε τα ακόλουθα:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Υπάρχουν γενικεύσεις των N - διάστατων γραμμικών χώρων όπου ορισμένες από τις παραπάνω ιδιότητες παύουν να ισχύουν. Για παράδειγμα οι ιδιότητες (3,4) δεν ισχύουν στον τετραδιάστατο διανυσματικό χώρο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein. (βλέπε εδάφιο 7.5)

Ένας Ευκλείδιος χώρος N-διαστάσεων, ορίζεται επίσης και από ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{\hat{e}_i\}$, i = 1,2,....N, δηλαδή από ένα σύνολο N ορθογωνίων μεταξύ τους μοναδιαίων διανυσμάτων. Κάθε άλλο ορθοκανονικό σύστημα $\{\hat{e}_i'\}$ μπορεί να προκύψει από ένα γραμμικό συνδυασμό των μοναδιαίων διανυσμάτων $\{\hat{e}_j\}$.

$$\hat{e}_i' = \sum_{j=1}^{N} O_{ij}\, \hat{e}_j \qquad (7.3.11)$$

όπου οι συντελεστές O_{ij} ικανοποιούν τη συνθήκη ορθοκανονικότητας

$$\sum_{k=1}^{N} O^{T}_{ik}\, O_{kj} = \delta_{ij} \qquad (7.3.12)$$

Οι (7.3.11) - (7.3.12) αποτελούν την άμεση γενίκευση των (7.1.2) και (7.1.4). Η (7.3.12) ανάλογα με την (7.1.8) οδηγεί στην

$$\det (O_{ij}) = \pm 1 \qquad (7.3.13)$$

Συνεπώς ο (7.3.11) αποτελεί τη γενίκευση του ορθοκανονικού μετασχηματισμού σε N-διαστάσεις.

7.3.b Μετασχηματισμοί τανυστών στον R_N:

Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα ορίζουμε ένα σημείο P στον N- διάστατο χώρο με N- συνιστώσες που καλούμε συντεταγμένες και συμβολίζουμε με $(x^1,x^2,....x^N)$. Ο συνήθης τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος προκύπτει ως ειδική περίπτωση του N-διάστατου, όταν N=3 και τα x^1,x^2,x^3 αποτελούν τις συνιστώσες του συνήθους διανύσματος θέσης. Υπάρχει μια διαφορά στο συμβολισμό του εδαφίου τούτου σε σχέση με τα προηγούμενα. Οι δείκτες των συνιστωσών τοποθετούνται πάνω. Ο λόγος που γίνεται αυτό θα γίνει κατανοητός πιο κάτω όταν μεταβούμε σε μη γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Επιστρέφοντας στον N-διάστατο Ευκλείδιο χώρο, οι συνιστώσες σημείου P στο ορθοκανονικό σύστημα $\{\hat{e}_i'\}$, ορίζονται σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση του τρισδιάστατου χώρου, από τις εξισώσεις

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$x'^{i} = \sum_{i=1}^{N} O^{i}_{i}\, x^{i} \equiv O_{i}\, x^{i} \qquad (7.3.14)$$

και ο αντίστροφος

$$x^{i} = \sum_{i=1}^{N} (O^{T})^{i}_{i}\, x'^{i} \qquad (7.3.15)$$

Συμβολίζουμε το μετασχηματισμό των x^i στις x'^i ως εξής

$$x'^{i} = x'^{i}(x^{1}, x^{2}, x^{3}, \ldots x^{N}) \equiv x'^{i}(x^{j}) \qquad (7.3.16)$$

Τότε

$$\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} = \sum_{j} O^{j}_{i} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{k}}$$

$$= \sum_{j} O^{j}_{i}\, \delta^{j}_{k} = O^{i}_{k}$$

Άρα

$$x'^{i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}} x^{j} \equiv \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}} x^{j} \qquad (7.3.17)$$

και

$$x^{j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{i}} x'^{i} \equiv \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{i}} x'^{i} \qquad (7.3.18)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον γενικό ορισμό ενός τανυστή σε Ευκλείδιο χώρο N-διαστάσεων.

Ορισμός Ένα σύνολο από N_r ποσότητες $T^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ αποτελεί τις συνιστώσες τανυστή τάξης r αν κάτω από τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς (7.3.17), οι ποσότητες αυτές μετασχηματίζονται ως εξής

$$T'^{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{j_1, j_2 \ldots j_r} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{j_r}} T^{j_1 j_2 \ldots j_r} \qquad (7.3.19)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός γράφεται

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_r} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x'^{j_2}} \ldots \frac{\partial x^{i_3}}{\partial x'^{j_3}} T'^{j_1 j_2 \ldots j_r} \qquad (7.3.20)$$

Παράδειγμα 7.3.1

Η απόσταση dx^i δύο γειτονικών σημείων συνδέεται με την dx'^i ως προς άλλο σύστημα συντεταγμένων με τη σχέση

$$dx'^i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i \qquad (7.3.21)$$

Η (7.3.11) ορίζει τις συνιστώσες τανυστή πρώτης τάξης. Συμπίπτει με την ποσότητα που μέχρι τώρα ονομάζουμε διάνυσμα.

Παράδειγμα 7.3.2

Γνωρίζουμε ήδη ότι υπάρχουν φυσικά μεγέθη των οποίων η τιμή δεν εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, όπως το μήκος διανύσματος η θερμοκρασία η πυκνότητα, και αναπαρίστανται από βαθμωτές συναρτήσεις. Έστω μια τέτοια συνάρτηση $\phi = \phi(x^1, x^2, \ldots x^N)$. Η συνθήκη ανεξαρτησίας από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων είναι λοιπόν

$$\phi'(x'^1, x'^2, \ldots, x'^N) = \phi(x^1, x^2, \ldots, x^N). \qquad (7.3.22)$$

Τέτοιες βαθμωτές ποσότητες καλούνται τανυστές μηδενικής τάξης.

7.4. Μη γραμμικοί μετασχηματισμοί. Ανταλλοίωτοι και συναλλοίωτοι τανυστές.

Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί με τανυστές οι οποίοι ορίζονται σε σχέση με ορθογώνιους μετασχηματισμούς οι οποίοι εξ ορισμού είναι γραμμικοί. Πολλές φορές όμως για πρακτικούς σκοπούς, είναι επιθυμητό να μεταβούμε σε κάποιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Για το λόγο αυτό, αλλά και για άλλους σημαντικότερους που δεν μπορούμε να αναλύσουμε εδώ, στο παρόν εδάφιο θα γενικεύσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε περιπτώσεις μη γραμμικών μετασχηματισμών των συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν δύο συστήματα συντεταγμένων σε ένα N-διάστατο χώρο στα οποία τυχαίο σημείο P, ορίζεται από τα $(x^1, x^2, \ldots x^N)$ και $(x'^1, x'^2, \ldots x'^N)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

αντίστοιχα, όπου οι συντεταγμένες συνδέονται με ένα μετασχηματισμό γενικά μη γραμμικό

$$x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2, \ldots, x^N)$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad (7.4.1)$$

$$x^{N'} = x^{N'}(x^1, x^2, \ldots, x^N)$$

Συνηθίζουμε να γράφουμε το μετασχηματισμό (7.4.1) συνοπτικά ως εξής

$$x^{j'} = x^{j'}(x^j)\ ,\ j = 1,3,\ldots, N \qquad (7.4.2)$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $x^{j'}(x^j)$ είναι διαφορίσιμες τουλάχιστον μέχρι δεύτερη τάξη και ότι ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος

$$x^j = x^j(x^{j'}) \qquad (7.4.3)$$

που σημαίνει ότι η συναρτησιακή ορίζουσα (Ιακωβιανή) του μετασχηματισμού πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή

$$\frac{\partial(x^{1'},\ldots,x^{N'})}{\partial(x^1,\ldots,x^N)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^N} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial x^{N'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{N'}}{\partial x^N} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (7.4.4)$$

Ας παραγωγίσουμε τώρα την (7.4.3) ως προς τυχαία συνιστώσα x^k. Τότε

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \qquad (7.4.5)$$

Όμως τα x^k είναι μεταξύ τους γραμμικά ανεξάρτητα συνεπώς ο πρώτος όρος είναι

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \delta^j_k \qquad (7.4.6)$$

Άρα, από τις (7.4.5) και (7.4.6) έχουμε

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} = \delta^j_k \qquad (7.4.7)$$

Ας υποθέσουμε τώρα στοιχειώδη μετατόπιση στη γειτονιά ενός σημείου P στο N-διάστατο χώρο, η οποία χαρακτηρίζεται από N-συντεταγμένες dx^j. Στο δεύτερο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

σύστημα οι συντεταγμένες είναι $dx^{i'}$. Η σχέση μεταξύ τους προκύπτει από τη διαφόριση της (7.4.2). Έχουμε τότε

$$\frac{dx'^i}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} \Rightarrow dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i \qquad (7.4.8)$$

Η απειροστή μετατόπιση που οι συνιστώσες της σε δύο συστήματα συνδέονται με την (7.4.2), αποτελεί το πρότυπο μιας κλάσης γεωμετρικών οντοτήτων που καλούνται ανταλλοίωτα διανύσματα. Δηλαδή:

Ένα σύνολο από N ποσότητες T^i σχετιζόμενες με ένα συγκεκριμένο σημείο R του N-διάστατου χώρου αποτελούν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος αν κατά την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων μετασχηματίζονται ως εξής

$$T'^i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T^i \qquad (7.4.9)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο P. Ανάλογα τώρα μπορούμε να ορίζουμε ανταλλοίωτες ποσότητες με περισσότερους από ένα δείκτες. Έτσι ο ανταλλοίωτος τανυστής δεύτερης τάξης μετασχηματίζεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n} T^{mn} \qquad (7.4.10)$$

Η γενίκευση της (7.4.10) είναι προφανής για τανυστή n-τάξης.

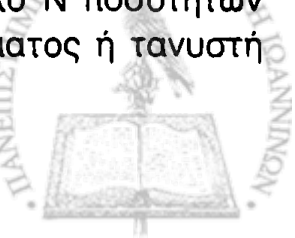
Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x^i)$ η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (7.4.3), δηλαδή

$$\phi(x^i) = \phi'(x^{i'}) \qquad (7.4.11)$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια τις μερικές παραγώγους $\partial\phi/\partial x^i$, i = 1,2,... N της $\phi(x^i)$, και ας προσπαθήσουμε να βρούμε το νόμο μετασχηματισμού τους. Από την (7.4.11) και τους κανόνες παραγώγισης έχουμε

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \qquad (7.4.12)$$

Προφανώς, για τυχαίο μη γραμμικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων, ο κανόνας μετασχηματισμού των μερικών παραγώγων (7.4.12) είναι διαφορετικός από εκείνο των συνιστωσών της στοιχειώδους μετατόπισης στην (7.4.8). Έχοντας ως πρότυπο μετασχηματισμού την (7.4.12), λέμε ότι ένα σύνολο N ποσοτήτων $T_1, T_2, \ldots T_N$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός <u>συναλλοίωτου</u> διανύσματος ή τανυστή



πρώτης τάξης όταν κάτω από τους μετασχηματισμούς (7.4.1) μετασχηματίζονται ως εξής

$$T'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} T_j \qquad (7.4.13)$$

'Αρα οι παράγωγοι μιας βαθμωτής ποσότητας ως προς ανταλλοίωτες συντεταγμένες είναι συναλλοίωτα διανύσματα (τανυστές πρώτης τάξης).

'Οπως και πριν, η γενίκευση είναι άμεση. 'Ετσι οι συνιστώσες συναλλοίωτου τανυστή δεύτερης τάξης μετασχηματίζονται ως εξής

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} T_{mn} \qquad (7.4.14)$$

Ανάλογα ορίζουμε τανυστές μεγαλύτερης τάξης.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε και μικτούς τανυστές. Ας σχηματίσουμε για παράδειγμα το γινόμενο $A^i B_j$ των συνιστωσών A^i ενός ανταλλοίωτου διανύσματος με τις αντίστοιχες ενός συναλλοίωτου B_j. Τότε από τους νόμους μετασχηματισμού έχουμε

$$A'^k B'_l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} A^i B_j \qquad (7.4.15)$$

Χαρακτηριστική περίπτωση μικτού τανυστή αποτελεί το γνωστό σύμβολο του Kronecker. Γνωρίζουμε ότι το δ^i_j παίρνει τις τιμές 1 και 0 σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Για το συγκεκριμμένο μη γραμμικό μετασχηματισμό (7.4.1) έχουμε

$$x'^l = x'^l (x^j)$$

'Αρα

$$\delta'^l_k = \frac{\partial x'^l}{\partial x'^k} = \sum_i \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}$$

$$\equiv \sum_i \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \delta^i_i$$

Δηλαδή

$$\delta'^l_k = \sum_i \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \delta^i_i \qquad (7.4.16)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση του μικτού τανυστή $A'^k B'_l$ παρουσιάζεται όταν οι δύο δείκτες είναι ίσοι, k = l και αθροίζονται. Σ' αυτή την περίπτωση, από την (7.4.15) έχουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$A'^{l} B'_{l} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{l}} A^{i} B_{j}$$

$$= \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i}} A^{i} B_{j} = \delta^{j}_{i} A^{i} B_{j} = A^{i} B_{i}$$

(Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται.) Δηλαδή

$$A'^{l} B'_{l} = A^{i} B_{i} \qquad (7.4.17)$$

Βλέπουμε από την (7.4.17), ότι με την εξίσωση των δεικτών έχουμε σχηματίσει μια ποσότητα η οποία είναι αναλλοίωτη, ανεξάρτητη από την επιλογή του συστήματος και θυμίζει την έννοια του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Ας εξειδικεύσουμε την (7.4.17) στην περίπτωση των γραμμικών μετασχηματισμών ενός τρισορθογωνίου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Τότε (βλέπε 7.2.16)

$$A'^{k} = \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{l}} = O^{k}_{i} A^{i}$$

Επίσης $B'_{l} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{l}} B_{j} = (O^{T})^{j}_{i} B_{j} \equiv O^{l}_{j} B_{j}$

Συνεπώς τώρα η ανταλλοίωτη συνιστώσα A'^{l} υπακούει στον ίδιο νόμο μετασχηματισμού με τη συναλλοίωτη και σε καρτεσιανά συστήματα η (7.4.17) ανάγεται στο γνωστό εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Στη γενικότερη όμως περίπτωση υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ τους.

Η αναλλοιώτητα που εμφανίζει η (7.4.15) όταν θέσουμε τους δύο δείκτες ίσους, έχει να κάνει αποκλειστικά με το ότι το γινόμενο $A^{k} B_{l}$ είναι μικτός τανυστής 2ης τάξης. Δεν συμβαίνει το ίδιο με τους τανυστές $A^{k} B^{l}$ ή $A_{k} B_{l}$. Πράγματι είναι φανερό ότι η ποσότητα

$$A'^{i} B'^{j} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}} A^{k} B^{l} \qquad (7.4.18)$$

είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής 2ης τάξης, όμως θέτοντας i=j έχουμε :

$$A'^{i} B'^{i} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{l}} A^{k} B^{l} \qquad (7.4.19)$$

που δεν είναι αναλλοίωτη ποσότητα . Ανάλογα ισχύουν και για το $A_{k} B_{l}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7.5 Τετραδιανύσματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας◆ .

Θα κλείσουμε το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο στη θεωρία των τανυστών με μια σύντομη αναφορά στα τετραδιανύσματα του τετραδιάστατου χωροχρόνου. Όπως τονίσαμε ήδη, η μελέτη τους είναι απαραίτητη στην κατανόηση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein.

Θα εισάγουμε πρώτα την έννοια της μετρικής. Η μετρική ή μετρικός τανυστής του οποίου τα στοιχεία για τυχαίο σύστημα συντεταγμένων θα συμβολίσουμε με $g_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3$, σχετίζεται με το τετράγωνο της απειροστής απόστασης δύο γειτονικών "σημείων"- γεγονότων P και Q του χωρόχρονου. Η στοιχειώδης μετατόπιση dx^μ σχετιζόμενη με την εν λόγω απειροστή απόσταση, βρίσκεται πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο P. Επειδή η απόσταση σχετίζεται με το τετράγωνο της μετατόπισης έπεται ότι αποτελεί στη γενική περίπτωση ένα τανυστή ανταλλοίωτης μορφής που συνήθως για τυχαίο σύστημα γράφεται ως εξής

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \equiv g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad (7.5.1)$$

Είναι δυνατό να δειχθεί, ότι υπάρχει πάντα μια ορθοκανονική βάση $\hat{e}_i$, στο συγκεκριμένο χώρο, στην οποία οι συνιστώσες $g_{\mu\nu}$ του τανυστή παίρνουν τις τιμές

$$g_{\mu\nu}(\hat{e}_i,\hat{e}_j) = \pm\,\delta_{ij} \qquad (7.5.2)$$

Στον τετραδιάστατο χωρόχρονο οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ δίνονται από

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (7.5.3)$$

Το ds^2 από την (7.5.1) παίρνει τότε την απλή μορφή

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad \text{ή}$$

◆ Το εδάφιο αυτό μπορεί να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$ds^2 \equiv (dx^0)^2 - (dx)^2 \qquad (7.5.4)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η συνιστώσα x^0 στην ειδική θεωρία της σχετικότητας είναι $x^0 = ct$ όπου c η ταχύτητα του φωτός και t ο χρόνος. Οι x^1, x^2, x^3 αποτελούν της συνήθεις συνιστώσες του διανύσματος θέσης **x** του τρισδιάστατου χώρου.

Στον τετραδιάστατο χώρο, ορίζουμε τις ποσότητες $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις με τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \qquad (7.5.5)$$

Αν τα $g_{\mu\nu}$, $\Lambda^{\beta}{}_{\nu}$ θεωρηθούν τα στοιχεία* πίνακων g και Λ, η τελευταία γράφεται

$$g = \Lambda^{T}\, g\, \Lambda \qquad (7.5.6)$$

Καλούμε ομογενείς μετασχηματισμούς Lorentz, τους μετασχηματισμούς των συνιστωσών των τετραδιανυσμάτων που δίνονται από τις σχέσεις

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, x^{\rho} \qquad (7.5.7)$$

Οι μετασχηματισμοί Lorentz αφήνουν αναλλοίωτο το στοιχειώδες μήκος του τετραδιανύσματος. Πράγματι από την (7.5.7) έχουμε $dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, x^{\rho}$ και

$$dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\, dx^{\rho}\, d^{\sigma}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την τελευταία με $g_{\mu\nu}$ και αθροίζοντας έχουμε

$$g_{\mu\nu}\, dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\, dx^{\rho}\, d\sigma^{\sigma}$$

$$\equiv g_{\rho\sigma}\, dx^{\rho}\, d\sigma^{\sigma} \equiv ds^2$$

όπου έγινε χρήση της (7.5.5).

Ας μελετήσουμε διεξοδικότερα τις ιδιότητες των μετασχηματισμών αυτών. Από την (7.5.6), παίρνοντας τις ορίζουσες των δύο μελών έχουμε

$$\det(g) = \det(\Lambda^{T} g \Lambda) = \det(g)\, \det(\Lambda^{T}\Lambda)$$

ή $$\det(\Lambda^{T}\Lambda) = [\det(\Lambda)^2] = 1 \text{ ή } \det\Lambda = \pm 1 \qquad (7.5.8)$$

Επίσης από την (7.5.3) για $\mu = \nu = 0$ έχουμε

---

* σύμφωνα με τα εκτεθέντα στο προηγούμενο εδάφιο οι πίνακες Λ είναι μικτοί τανυστές $2^{ης}$ τάξης και οι πίνακες g συναλλοίωτοι τανυστές $2^{ης}$ τάξης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$g_{00} = \Lambda^{\alpha}{}_0\, g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\beta}{}_0$$

$$=(\Lambda^0{}_0)^2\, g_{00} +(\Lambda^1{}_0)^2\, g_{11} +(\Lambda^2{}_0)^2\, g_{22} +(\Lambda^3{}_0)^2\, g_{33}\ \text{ή}$$

$$1 =(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \qquad (7.5.9)$$

όπου κάναμε αντικατάσταση των $g_{\mu\nu}$ από την (7.5.3). Επίσης όπως είναι φανερό από την (7.5.9), χρησιμοποιούμε ελληνικούς χαρακτήρες για τους δείκτες που παίρνουν τιμές 0,1,2,3, και λατινικούς για τους δείκτες 1,2,3 Από την τελευταί έχουμε ότι

$$(\Lambda^0{}_0)^2 =1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 > 1$$

Συνεπώς η $(\Lambda^0{}_0) \geq 1$ ή $(\Lambda^0{}_0) \leq -1$. Ανάλογα με την τιμή του $\Lambda^0{}_0$ και το πρόσημο της ορίζουσας από την (7.5.8), χωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz στις ακόλουθες κατηγορίες.

Αν

$$(\Lambda^0{}_0) \geq 1 \text{ και } \det \Lambda = +1$$

τότε οι μετασχηματισμοί καλούνται γνήσιοι (proper). Στις άλλες περιπτώσεις καλούμε τους μετασχηματισμούς μη γνήσιους (improper). Στην τελευταία κατηγορία υπάγονται οι λεγόμενες αντιστροφές του χώρου $x_0 \to x_0$, $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$. Στην περίπτωση αυτή $\Lambda=g$ δηλαδή $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 = 1$. Επίσης και η αναστροφή χρόνου ($x_0 \to -x_0$, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}$). Τώρα $\Lambda=-g$, δηλαδή $\det \Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 = -1$. Στην ίδια κατηγορία ανήκει και ο συνδυασμός και των δύο $\Lambda = -I$ δηλαδή $\det \Lambda = 1$, $\Lambda^0{}_0 = -1$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο συστήματα S και S΄ στο τετραδιάστατο χώρο, και ένα "σημείο" - γεγονός αυτού έτσι ώστε στο σύστημα S να ισχύει: $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, $dx^0 \neq 0$ δηλαδή ένα ακίνητο (στο σύστημα αυτό) υλικό σημείο. Τότε από τους μετασχηματισμούς Lorentz στο σύστημα S΄ έχουμε

$$dx'^0 = \Lambda^0{}_0\, dx^0 \qquad (7.5.10)$$

$$dx'^i = \Lambda^i{}_0\, dx^0\ ,\ i = 1, 2, 3$$

Αν ταυτίσουμε τη συντεταγμένη $x'^0 = ct'$, τότε οι ποσότητες $c\,\frac{dx'^i}{dx'^0}$ έχουν διαστάσεις ταχύτητας. Ορίζουμε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\beta^i \equiv \frac{dx'^i}{dx'^0} = \frac{u_i}{c} \qquad (7.5.11)$$

Από τις (7.510) και (7.5.11) έχουμε τότε

$$\beta^i = \frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0} \qquad (7.5.12)$$

Με τη χρήση της (7.5.9), και της (7.5.12) μπορούμε να προσδιορίσουμε τα $\Lambda^i{}_0$, $\Lambda^0{}_0$ Είναι

$$\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}} \equiv \gamma \text{ (αυθαίρετη επιλογή σημείου)}$$

$$\Lambda^i{}_0 = \frac{u^i}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}} = \gamma u^i \qquad (7.5.13)$$

όπου $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{u}}{c} = \frac{1}{c}\hat{e}_i \frac{dx'^i}{dx'^0}$ και $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}}$.

Τα υπόλοιπα στοιχεία του μετασχηματισμού δεν ορίζονται μονοσήμαντα. Μπορεί να δειχθεί με τη βοήθεια της (7.5.5), ότι μια κατάλληλη επιλογή είναι

$$\Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + u^i u_j \frac{\gamma-1}{\mathbf{u}^2} \,,\ \Lambda^0{}_j = \gamma u_i \qquad (7.5.14)$$

Οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί Lorentz, για κίνηση του συστήματος S΄ με ταχύτητα **u** ως προς το S, παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta} x^0),\ \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \,,$$

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}) \qquad (7.5.15)$$

όπου $\mathbf{x}_{\parallel}$ η συνιστώσα παράλληλη της ταχύτητας και $\mathbf{x}_{\perp}$ η κάθετη σε αυτή. Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε τις έννοιες των ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων διανυσμάτων στον τετραδιάτατο χώρο.

Έτσι, τέσσερεις ποσότητες συγκροτούν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος του τετραδιάτατου χωρόχρονου, όταν μετασχηματίζονται σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz (7.5.7) για το διάνυσμα θέσης $(x^0,\mathbf{x})$. Δηλαδή, τα διανύσματα που οι συνιστώσες τους μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$A^{\alpha} \rightarrow A'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} A^{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{0} A^{0} + \Lambda^{\alpha}{}_{1} A^{1} + \Lambda^{\alpha}{}_{2} A^{2} + \Lambda^{\alpha}{}_{3} A^{3} \qquad (7.5.16)$$

(με τα διανύσματα θέσης να μετασχηματίζεται $x^{\alpha}\ x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\ x^{\beta}$) ονομάζονται ανταλλοίωτα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.2.1. Να δειχθούν οι σχέσεις

i) $\delta_{ii} = 3$, ii) $\delta_{ij}\,\delta_{jk} = \delta_{ik}$,

iii) $\delta_{ij}\,a_j = a_i$, iv) $\delta_{mn}\,a_{nij} = a_{mij}$

7.2.2. Οι συνιστώσες A_i ενός διανύσματος του τρισδιάστατου χώρου έχουν τις τιμές $(\frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 0)$ στο καρτεσιανό σύστημα (x_1, x_2, x_3). Αν ο ορθογώνιος μετασχηματισμός από το x_i σε ένα άλλο x'_j δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

να υπολογιστούν οι συνιστώσες A'_i.

7.2.3. Να δειχθεί ότι το αντισυμμετρικό σύμβολο ε_{ijk}, είναι τανυστής τρίτης τάξης.

7.2.4. Να δειχτεί οτι το στοιχείο όγκου είναι αναλλοίωτη ποσότητα

7.3.1. Να δειχτούν οι σχέσεις (7.3.1 - 7.3.3) , (7.3.5 - 7.3.7)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

7.3.2. Θεωρείστε την ποσότητα $\mathbf{C}=\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{B}$ όπου $\mathbf{A},\mathbf{B}$ διανύσματα του N-διάστατου διανυσματικού χώρου και $\alpha=\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$, $\beta=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Μελετείστε την ανισότητα $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}\geq 0$ και αποδείξτε με τη βοήθειά της την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

7.3.3. Με τη χρήση του αποτελέσματος της 7.3.2 και την $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|^2$ αποδείξτε την τριγωνική ιδιότητα (7.3.10).

7.3.4. Με τη μέθοδο της επαγωγής δείξτε ότι αν $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\ldots,\mathbf{Q},\ldots$ διανύσματα του R_N τότε

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\ldots+\mathbf{Q}+\ldots|\leq|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|+\ldots+|\mathbf{Q}|+\ldots$$

7.3.5. Να δειχτεί η ταυτότητα Lagrange

$$\Big(\sum_{i=1}^{N}A_iB_i\Big)^2=\Big(\sum_{i=1}^{N}A_i\Big)^2\Big(\sum_{i=1}^{N}B_i\Big)^2-\sum_{i<j}^{N}\Big(A_iB_j-A_jB_i\Big)^2$$

7.3.6. Αν $\phi=\phi(x_i)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση, να δειχθεί ότι τα $\partial^2\phi/\partial x_i\partial x_j$ είναι συνιστώσες τανυστή 2ης τάξης.

7.3.7. Στον N-διάστατο διανυσματικό χώρο, η γωνία δύο διανυσμάτων $\mathbf{A},\mathbf{B}$ ορίζεται ως εξής

$$\cos\theta=\frac{A_i\;B_i}{\{(A_j\;A_j)\;(B_k\;B_k)\}^{1/2}}$$

Να δειχθεί ότι η ποσότητα είναι αναλλοίωτη βαθμωτή ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

7.4.1. Να εξειδικευτεί η (7.4.19) στην περίπτωση των γραμμικών μετασχηματισμών των συντεταγμένων.

7.5.1. Να δειχτεί ότι οι (7.5.14) ικανοποιούν τους μετασχηματισμούς Lorentz.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις ιδιότητες του τρισδιάστατου διανυσματικού χώρου, οι οποίες μας επέτρεψαν να μελετήσουμε διεξοδικά χρήσιμες διανυσματικές ταυτότητες τελεστών, υπολογισμούς ολοκληρωμάτων και τα βασικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης. Επιπλέον, στο Κεφ. 7, στα πλαίσια της θεωρίας των τανυστών, θεωρήσαμε μια πρώτη επέκταση του τρισδιάτατου διανυσματικού χώρου σε αυθαίρετο αλλά πεπερασμένο αριθμό διαστάσεων.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια διαφορετική και πιο ολοκληρωμένη γενίκευση των γραμμικών διανυσματικών χώρων. Θα αναφερόμαστε στη συνέχεια σε αφηρημένες συλλογές αντικειμένων οι οποίες θα υπακούουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των χώρων που μελετήσαμε. Η νέα αυτή προσέγγιση πλεονεκτεί έναντι της προηγούμενης ειδικά σε προχωρημένα μαθήματα φυσικής.

8.1. Ορισμός Γραμμικών Διανυσματικών χώρων

Με τη λέξη "χώρος" εννοούμε μία συλλογή στοιχείων Χ, που ικανοποιούν συγκεκριμένα αξιώματα. Διαφορετική επιλογή των αξιωμάτων οδηγούν σε διαφορετικούς τύπους χώρων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω S συλλογή από αφηρημένα στοιχεία

$S = \{ |a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, \ldots \}$

Σε αναλογία με τους αριθμούς ορίζουμε τις πράξεις άθροισης και πολλαπλασιασμού.

I) Άθροιση: $|a\rangle + |b\rangle = |d\rangle$

II) Πολλαπλασιασμός: $\alpha \cdot |b\rangle = |e\rangle, \alpha \in C$

Φυσικά τα $|d\rangle$, $|e\rangle$ θα πρέπει να είναι επίσης αντικείμενα του ίδιου χώρου. Η ύπαρξη του αντίθετου και του μηδενικού στοιχείου στον χώρο S θα πρέπει επίσης να εξασφαλίζεται. Συνεπώς

(1) $|a\rangle, |b\rangle \in S \Rightarrow \quad |a\rangle + |b\rangle \in S$

(2) $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \quad \alpha \cdot |b\rangle \in S\ ,\ \forall\ |b\rangle \in S$

(3) $\exists\ |0\rangle \Rightarrow \quad |a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$

(4) $\forall\ |a\rangle \in S \Rightarrow \quad \exists |a'\rangle \in S$ τέτοιο ώστε $|a\rangle + |a'\rangle = |0\rangle$

Το $|a'\rangle$ λέγεται αντίθετο της $|a\rangle$ και συμβολίζεται με $-|a\rangle$. Τέλος απαιτούμε τις παρακάτω ιδιότητες:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

(5) $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

(6) $|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

(7) $\alpha \cdot (\beta \cdot |c\rangle) = (\alpha \cdot \beta) \cdot |c\rangle$

(8) $(\alpha + \beta) \cdot |c\rangle = \alpha|c\rangle + \beta|c\rangle$

(9) $\alpha\ (|b\rangle + |c\rangle) = \alpha|b\rangle + \alpha|c\rangle$

(10) $1 \cdot |a\rangle = |a\rangle$

Το σύνολο των αφηρημένων στοιχείων S που είναι εφοδιασμένο με τις πράξεις I, II και έχει τις ιδιότητες (1-10) καλείται **Γραμμικός Διανυσματικός Χώρος.**

Άσκηση:

i) Δείξτε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών πληροί τις παραπάνω ιδιότητες του διανυσματικού χώρου.

ii) Κάντε το ίδιο για τα διανύσματα του τρισδιάτατου χώρου.

Το επόμενο βήμα είναι να εφοδιάσουμε το διανυσματικό χώρο με το εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8.2. Εσωτερικό (Βαθμωτό) Γινόμενο

Είναι η πράξη που συνδέει δύο στοιχεία |a> και |b> του διανυσματικού χώρου με ένα μιγαδικό αριθμό. Το μιγαδικό αριθμό συμβολίζουμε με <a|b> δηλαδή |a>, |b> ⇒ <a |b>

Το *εσωτερικό γινόμενο* έχει τις ιδιότητες

(i) $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$

(όπου $\langle a|b\rangle^*$ συζυγής μιγαδικός του <a|b>).

(ii) Αν $|d\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ τότε

$\langle c|d\rangle = \alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle$

(iii) $\langle a|a\rangle \geq 0$. Τό ίσο εμφανίζεται μόνο όταν |a> = 0, δηλαδή

$\langle a|a\rangle = 0 \Rightarrow |a\rangle = 0$

Ερώτηση : Ανήκει το $\langle a|b\rangle \in S$;

Ο πιο πάνω ορισμός του εσωτερικού γινομένου οδηγεί στους εξής ορισμούς

- ορισμός μήκους || ||:

$$\| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

- Ορθογωνιότητα: αν |a>, |b> ≠ |0> και

$\langle a|b\rangle = 0$, τότε τα |a> και |b> είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Θεώρημα

Αν το |a> ορθογώνιο σε κάθε $|\ \rangle \in S$: $\langle a|\ \rangle = 0$

τότε |a> = |0>

Απόδειξη: Αφού είναι κάθετο σ' όλα τα διανύσματα του S άρα είναι κάθετο και στον εαυτό του

$\Rightarrow \langle a|a\rangle = 0 \Rightarrow |a\rangle = 0$

8.3. Διανύσματα του Δυαδικού χώρου

Η ιδιότητα (ii) του *εσωτερικού γινομένου* εισάγει μια φαινομενική ασυμμετρία ως προς τα |d> και |c>.

Πράγματι: Έστω $|d\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

Τότε $\langle c|d\rangle = \alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Όμως: αν $|c\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

Τότε $\langle c|d\rangle = \alpha^*\langle a|d\rangle + \beta^*\langle b|d\rangle$

Για την ακρίβεια:

$$\langle c|d\rangle = \langle d|c\rangle^* = \{\alpha\langle d|a\rangle + \beta\langle d|b\rangle\}^*$$
$$= \alpha^*\langle d|a\rangle^* + \beta^*\langle d|b\rangle^*$$
$$= \alpha^*\langle a|d\rangle + \beta^*\langle b|d\rangle$$

Δηλαδή: **δεν εξαρτάται γραμμικά από τα α και 6 ! !**

Για να άρουμε την ασυμμετρία αυτή **ορίζουμε** ένα *διαφορετικό χώρο* με νέα διανύσματα (μαζί με τα παλαιά $|\ >$) που τα συμβολίζουμε $<|$, βρίσκονται δε σε αντιστοιχία 1- 1 με τα $|\ >$

$\langle b|$ είναι το **δυαδικό** (συζυγές) του $|b\rangle$

Ο χώρος των $<|$ καλείται δυαδικός του S

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος $|\ >$ με συζυγές $<|$ αντιστοιχεί στο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a| \cdot |b\rangle \equiv \langle a|b\rangle$$

Με την επέκταση του χώρου ώστε να συμπεριλαμβάνει και τα διανύσματα $<|$, το $\langle c|d\rangle$ εξαρτάται *γραμμικά* από το $\langle c|$.

$$\langle c|d\rangle = \kappa\langle a|d\rangle + \lambda\langle b|d\rangle$$

όπου $\langle c| = \kappa\langle a| + \lambda\langle b|$

Αν $|d\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

το δυαδικό του είναι

$$\langle d| = \alpha^*\langle a| + \beta^*\langle b|$$

8.4. Ανισότητα Cauchy -Schwarz

Έστω τώρα διάνυσμα $|c\rangle$:

$|c\rangle = |a\rangle - x\langle b|a\rangle|b\rangle$, x = Πραγματικός

δηλαδή το $|c\rangle$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $|a\rangle$ και $|b\rangle$ με συντελεστές 1 και $(-x\langle b|a\rangle)$, όπου x = πραγματικός.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Από την ιδιότητα (iii) του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\langle c|c\rangle \geq 0$$

όπου $\langle c| = \langle a| - x \langle b|a\rangle^* \langle b|$

$= \langle a| - x \langle a|b\rangle \langle b|$

Τότε $\langle c|c\rangle = x^2 \langle b|a\rangle \langle a|b\rangle \langle b|b\rangle - 2x \langle b|a\rangle \langle a|b\rangle + \langle a|a\rangle \geq 0$

Η τελευταία είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς x, με πραγματικούς συντελεστές που παίρνει πάντα μη αρνητικές τιμές. Άρα δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Συνεπώς η συνθήκη για τη διακρινουσα είναι είτε $\Delta = 0$ (διπλή ρίζα) ή $\Delta < 0$ (μη πραγματικές ρίζες). Άρα

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow |\langle a|b\rangle| \leq \| |a\rangle \| \, \| |b\rangle \| \qquad (8.4.1)$$

Η τελευταία είναι η ανισότητα Cauchy -Schwarz.

8.5. Γραμμική Ανεξαρτησία

Έστω ($|x_1\rangle, |x_2\rangle \ldots |x_n\rangle$) διανύσματα. Αυτά λέγονται *γραμμικά ανεξάρτητα* όταν η σχέση

$$\alpha_1 |x_1\rangle + \alpha_2 |x_2\rangle + \ldots + \alpha_n |x_n\rangle = 0 \qquad (8.5.1a)$$

συνεπάγεται ότι :

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \qquad (8.5.1b)$$

Παρατήρηση

Αν τα $|x_1\rangle, \ldots |x_n\rangle$ είναι **ορθογώνια** μεταξύ τους, δηλαδή :

$$\langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij}$$

τότε είναι αυτόματα, **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Απόδειξη :

Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ώστε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$a_1 |x_1> + \ldots + a_n |x_n> = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i> = 0$$

τότε πολλαπλασιάζουμε με τυχαίο $<x_j|$ του συζυγούς χώρου

$$0 \equiv <x_j| \{ \sum a_i |x_i> \} = \sum_i a_i <x_j|x_i>$$

$$= \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j \equiv 0$$

Επειδή το $|x_j>$ τυχαίο συνεπάγεται $a_j = 0$, $j = 1,...n$.

Όταν τα $|x_1>, \ldots, |x_n>$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε τουλάχιστον **δύο** a_i, a_j είναι διάφορα του μηδενός. Τότε **ένα** τουλάχιστον μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των άλλων

Έστω $a_K \neq 0 \Rightarrow$

$$a_K x_K = - \{ a_1 |x_1> + \ldots \}$$

$$\Rightarrow \quad x_K = - \frac{1}{a_K} \{ a_1 |x_1> + \ldots \}$$

8.6. Ν-Διάστατος Γραμμικός Διανυσματικός χώρος S_N

Αν υπάρχουν N - γραμμικά ενεξάρτητα διανύσματα

$x_1, \ldots, x_N$

αλλά κάθε x_{N+1} είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε λέμε ότι ορίζουν έναν N-διάστατο γραμμικό διανυσματικό χώρο. Δηλαδή

i) Τα $(x_1, \ldots, x_N)$ = ορίζουν μια βάση

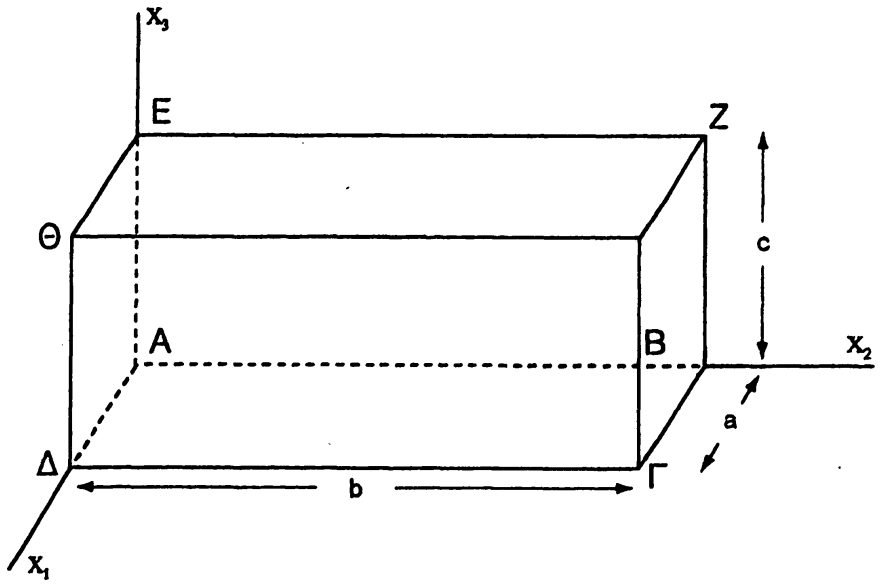
ii) Κάθε διάνυσμα του χώρου S_N μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός συγκεκριμένης βάσης (μονοσήμαντα)

$$|x> = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i> \qquad (8.6.1)$$

Σημειώνουμε ότι η βάση δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Συνεπώς και οι συντελεστές a_i εξαρτώνται από την επιλογή της βάσης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Παράδειγμα 8.6.1. Με τη χρήση του εσωτερικού γινομένου και τοι φορμαλισμού που αναπτύχθηκε, να βρεθεί η γωνία (ΑΘ,ΑΒ) του σχήματος



Σχήμα 8.1.1.

i) Γωνία $(\vec{A\Theta},\vec{AB})$

Ορίζουμε πρώτα ορθοκανονικό σύστημα $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, $\langle \hat{e}_i|\hat{e}_j\rangle = \delta_{ij}$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{A\Theta}|\vec{AB}\rangle}{|\vec{A\Theta}|\ |\vec{AB}|}$$

$$\vec{A\Theta}=a\,|e_1\rangle + c\,|e_3\rangle \quad |\vec{A\Theta}| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\vec{AB}=b\,|e_2\rangle \quad |\vec{AB}| = b$$

$$\cos\theta = \frac{(\langle e_1|a + \langle e_3|c)\ (b\ |e_2\rangle)}{b\ \sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{b\ a\ \langle e_1|e_2\rangle + b\ c\ \langle e_3|e_2\rangle}{b\ \sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

ii) Γωνία $(\vec{AH}, |e_1\rangle)$

$$\vec{AH} = |AH\rangle = a\,|\hat{e}_1\rangle + b\,|\hat{e}_2\rangle + c\,|\hat{e}_3\rangle$$

$$\| |AH\rangle \| \equiv |\vec{AH}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\cos\theta_{\hat{e}_1} = \frac{\langle e_1|\vec{AH}\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{a\,\langle e_1|e_1\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Παράδειγμα 8.6.2. Δίδονται τα διανύσματα

$$|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_N\rangle\ ,\ \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

από τα οποία κατασκευάζουμε τα $|f_i\rangle$

$$|f_i\rangle = \sum_{\kappa=1}^{N} |e_\kappa\rangle$$

Είναι τα $|f_i\rangle$ ορθογώνια;

Λύση : Σχηματίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα $\langle f_i|f_j\rangle$, και έχουμε:

$$\langle f_i|f_j\rangle = \sum_{\kappa=i}^{N} \sum_{l=j}^{N} \langle e_\kappa|e_l\rangle$$

$$= \sum_{\kappa=i}^{N} \sum_{l=j}^{N} \delta_{\kappa l}$$

$$= N + 1 - \max(i,j)$$

$$= N + 1 - \frac{i + j + |i - j|}{2} \neq 0$$

Συνεπώς δεν είναι ορθογώνια.

Παράδειγμα 8.6.3. Δίδονται τα ορθογώνια διανύσματα $|e_i\rangle$, $i = 1,2$ και οι γραμμικοί συνδυασμοί

$$|f_1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\delta} |e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_2\rangle$$

$$|f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\delta} |e_2\rangle$$

Είναι τα $|f_i\rangle$ ορθοκανονικά;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Λύση : Για να απαντήσουμε αν είναι ορθογώνια αρκεί να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_i|f_j\rangle$, $i \neq j$. Έστω λοιπόν το γινόμενο $\langle f_2|f_1\rangle$. Από το $|f_2\rangle$ σχηματίζουμε πρώτο το δυαδικό του.

$$|f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle e_1| + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{-i\delta}\right)^* \langle e_2|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle e_1| + i\, e^{-i\delta}\, |e_2\rangle\right)$$

Τότε $\langle f_2|f_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle e_1| + i\, e^{-i\delta}\, |e_2\rangle\right)\left(-i\,|e_1\rangle\, e^{-i\delta} + |e_2\rangle\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(-ie^{-i\delta}\langle e_1|e_1\rangle + ie^{i\delta}\langle e_2|e_2\rangle + \langle e_1|e_2\rangle + e^{2i\delta}\langle e_2|e_1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-ie^{-i\delta} + ie^{i\delta} + 0 + 2e^{2i\delta}\cdot 0) = 0$$

δηλαδή τα $|f_1\rangle$, $|f_2\rangle$ είναι ορθογώνια. Για να δούμε αν είναι κανονικοποι-ημένα στη μονάδα σχηματίζουμε τα μέτρα τους $\| |f_1\rangle \|$, $\| |f_2\rangle \|$

$$\| |f_1\rangle \|^2 = \frac{1}{2}(\langle e_1| ie^{-i\delta} + |e_2\rangle)(-ie^{i\delta}|e_1\rangle + |e_2\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(\langle e_1|e_1\rangle + \langle e_1|e_2\rangle) = 1 \Rightarrow \| |f_1\rangle \| = 1$$

Όμοια βρίσκουμε ότι $\| |f_2\rangle \| = 1$.

Παράδειγμα 8.6.4. Έστω ότι

$$|f_1\rangle = \xi|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle,\ |f_2\rangle = |e_1\rangle + \xi|e_2\rangle + |e_3\rangle$$

$$|f_3\rangle = |e_1\rangle + |e_2\rangle + \xi|e_3\rangle$$

όπου ξ τυχόν πραγματικός αριθμός και $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$, $|e_3\rangle$ ορθοκανονικά. Για ποιές τιμές του ξ είναι τα $|f_1\rangle$, $|f_2\rangle$ και $|f_3\rangle$ ορθογώνια μεταξύ τους;

Λύση : Σχηματίζουμε όλα τα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των $|f_i\rangle$ επιβάλλοντας τις συνθήκες $\langle f_i|f_j\rangle = \delta_{ij}$. Έχουμε

$$\langle f_2|f_1\rangle = (\langle e_1| + \xi^*\langle e_2| + \langle e_3|)(\xi|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle)$$

$$= \xi\langle e_1|e_1\rangle + \xi^*\langle e_2|e_2\rangle + \langle e_3|e_3\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \xi + \xi^* + 1 = 0 \qquad \text{(i)}$$

Την ίδια συνθήκη παίρνουμε για κάθε άλλο εσωτερικό γινόμενο $\langle f_i|f_j\rangle$, όταν $i \neq j$. Συνεπώς τα διανύσματα είναι ορθογώνια όταν $\xi + \xi^* \equiv 2Re\xi = -1$ και $Im\xi =$ αυθαίρετο ή $\xi = -\frac{1}{2} + ib$ όπου b πραγματικός αριθμός.

8.7. Ορθογωνιοποίηση Gram - Schmidt

Ως γνωστό, N-γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός N-διάστατου γραμμικού διανυσματικού χώρου S_N, αποτελούν βάση στο χώρο αυτό. Με άλλα λογια, κάθε διάνυσμα $|a\rangle$ που ανήκει στο χώρο S_N εκφράζεται πάντοτε ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης.

Έτσι αν τα $|x_1\rangle, \ldots |x_N\rangle$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ισχύει

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |x_i\rangle \qquad (8.7.1)$$

όπου a_i, $i = 1, \ldots N$, συντελεστές που εκφράζουν τις "προβολές" του $|a\rangle$ στη συγκεκριμμένη βάση. Ο υπολογισμός των a_i είναι εξαιρετικά απλός όταν η βάση έχει επιλεγεί ορθοκανονική

$$\langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij} \qquad (8.7.2)$$

Τότε σχηματίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα

$$\langle x_j|a\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i \langle x_j|x_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{ij} \equiv a_j \qquad (8.7.3)$$

και συνεπώς το διάνυσμα $|a\rangle$ γράφεται

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x_i|a\rangle |x_i\rangle \qquad (8.7.4)$$

Από τυχαία, - μή ορθοκανονική - βάση, είναι δυνατό να κατασκευάσουμε μια νέα βάση η οποία είναι ορθοκανονική, με τη μέθοδο Gram -Schmidt. Η μέθοδος έχει ως ακολούθως:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Έστω τα διανύσματα βάσης $|x_1>, \ldots |x_N>$ διά τα οποία εν γένει $<x_i|x_j> \neq \delta_{ij}$.

Κατασκευάζουμε πρώτα το διάνυσμα

$$|1> = e^{i\varphi} \frac{|x_1>}{\sqrt{<x_1|x_1>}} \qquad (8.7.5)$$

για το οποίο εύκολα προκύπτει ότι είναι κανονικοποιημένο στη μονάδα, $<1|1>=1$.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα δεύτερο διάνυσμα ως εξής

$$|2> = N_2 \{ |x_2> - \kappa_{21} |1>\} \qquad (8.7.6)$$

όπου N_2, κ_{21} συντελεστές που θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες ορθοκανονικότητας των $|1>$ και $|2>$, δηλαδή, $<1|2> = 0$ και $<2|2> =1$. Η πρώτη δίνει $\kappa_{21} = <1|x_2>$ και η δεύτερη $N_2 = (<x_2|x_2> - |\kappa_{21}|^2)^{-1/2}$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία μέχρι να εξαντληθούν τα $|x_1>, \ldots |x_N>$, συνάγουμε τον ακόλουθο γενικό τύπο για τα νέα διανύσματα

$$|l+1> = N_{l+1} \{ |x_{l+1}> - \sum_{i=1}^{l} \kappa_{l+1,i} |i>\} \qquad (8.7.7)$$

όπου

$$\kappa_{l+1,i} = <i|x_{l+1}> \qquad (8.7.8)$$

$$N_{l+1,l} = (<x_{l+1} |x_{l+1}> - \sum_{i=1}^{l} | \kappa_{l+1,i} |^2)^{-1/2} \qquad (8.7.9)$$

Από τη σχέση (8.7.7), είναι εύκολο να δειχτεί ότι το διάνυσμα $|l+1>$ είναι κάθετο σε όλα τα προηγούμενα από αυτό διανύσματα:

$$<j|l+1> = N_{l+1} \{ <j|x_{l+1}> - \sum_{i=1}^{l} <i|x_{l+1}> <j|i> \}$$

όμως $<j|i> = \delta_{ij}$ και το δεύτερο μέλος είναι

$$<j|x_{l+1}> - \sum_{i=1}^{l} <i|x_{l+1}> \delta_{ij} \equiv <j|x_{l+1}> - <j|x_{l+1}> = 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Εξετάζοντας την (8.7.7) συνάγουμε ότι η παραπάνω διαδικασία αντιστοιχεί με την αφαίρεση από το διάνυσμα $|x_{l+1}>$ όλων των συνιστωσών του στις διευθύνσεις $|1>, |2>, \ldots, |l>$.

8.8. Ορθογώνια Πολυώνυμα

Ας θεωρήσουμε το διανυσματικό χώρο των μονωνύμων

$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$

Ανάλογα με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να πάρουμε όλες τις κατηγορίες των κλασσικών πολυωνύμων.

8.8.1. Πολυώνυμα Legendre

Το εσωτερικό γινόμενο στο διάστημα [-1,1] ορίζεται ως

$$<x_m|x_n> = \int_{-1}^{1} x^m x^n \, dx$$

εύκολα δείχνεται ότι η παραπάνω βάση υπακούει στα αξιώματα των γραμμικών διανυσματικών χώρων. Επίσης από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$<x_m|x_n> = \begin{cases} \dfrac{2}{m+n+1} & \text{όταν } n+m = \text{άρτιος} \\ 0 \text{ " } & n+m = \text{περιττός} \end{cases}$$

Δηλαδή ο παραπάνω χώρος, χωρίζεται σε δύο υποχώρους αρτίων και περιττών πολυωνύμων όπου τα διανύσματα του ενός είναι κάθετα στα διανύσματα του άλλου.

Αν επιβάλλουμε τη συνθήκη

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}$$

τα προκύπτοντα πολυώνυμα $P_n(x)$ καλούνται πολυώνυμα Legendre. Είναι απλό να δειχτεί με τη μέθοδο Gram-Schmidt ότι

$$P_0(x) = 1, \; P_1(x) = x, \; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \; P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \ldots$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8.8.2. Πολυώνυμα Hermite : $H_n(x)$

Τα Hermite κατασκευάζονται με τον ορισμό στο $(-\infty,+\infty)$ του εσωτερικού γινομένου

$$\langle x_m | x_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{m+n}(x)\, e^{-x^2}\, dx$$

και κανονικοποίηση

$$\langle H_n | H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\, H_m(x)\, e^{-x^2}\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, \delta_{mn}$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων απαιτεί τη γνώση της συνάρτησης $\Gamma(z)$. (Βλέπε παράρτημα)

$$\Gamma(z) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, u^{2z-1}\, du = 2\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

Σημειώστε την εμφάνιση της συνάρτησης $e^{-x^2} \equiv w(x)$ στο ολοκλήρωμα. Η $w(x)$ καλείται συνάρτηση βάρους. Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην κατασκευή είναι μη μηδενικό για $m + n = 2k =$ άρτιο. Τότε

$$I_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-x^2}\, dx$$

$$= \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)$$

ενώ για $m + n =$ περιττό, $I_{mn} = 0$. Έστω

$$|H_o\rangle = N_o \cdot 1$$

Τότε $I_o = \langle H_o | H_o \rangle = N_o^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = N_o^2\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = N_o^2\, \sqrt{\pi}$

Όμως από τη συνθήκη κανονικοποίησης

$$I_o = 2^o\, 0!\, \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

Συγκρίνοντας, συνάγουμε ότι $N_o = e^{i\varphi}$, όπου φ αυθαίρετη φάση. Συνήθως επιλέγουμε $N_o = 1$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Στη συνέχεια ορίζουμε $|H_1> = N_1 (|x_1> - \kappa |H_0>)$. Τότε

$$0 = <H_0|H_1> = N_1 (<x_0 |x_1> - \kappa <H_0|H_0>)$$

Αλλά

$$<x_0 |x_1> = 0 \Rightarrow \kappa = 0 \text{ διότι } <H_0|H_0> \neq 0.$$

Επίσης από τη σχέση $<H_1|H_1>=2^1\ 1\ !\ \sqrt{\pi}$ υπολογίζουμε $N_1=2$, δηλ. $H_1(x)=2x$.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία έχουμε

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ \ldots\ H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

8.8.3. Πολυώνυμα Laguerre : $L_n(x)$

Στα $L_n(x)$ ορίζουμε στο διάστημα $[0,\infty)$ το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο

$$<x_n|x_m> = \int_0^\infty x^{m+n}\, e^{-x}\, dx$$

και συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int_0^\infty L_n(x)\, L_m(x)\, e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!}\, \delta_{mn}$$

Τα ολοκληρώματα των μονωμύμων με συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x}$ που απαιτούνται στον υπολογισμό των $L_n(x)$ είναι

$$I_{mn} = <x_m|x_n> = \int_0^\infty e^{-x}\, x^m\, x^n\, dx = (m + n)\ !$$

Έτσι βρίσκουμε

$$L_0(x) = L_1(x) = 1 - x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(2 + x - 4x^2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(6 - 18x^2 + 9x^3 - x)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

8.9. Επέκταση συναρτήσεων στη βάση των ορθογωνίων πολυωνύμων.

Με τη χρήση των πολυωνυμικών ορθογωνίων βάσεων μπορούμε να προσεγγίσουμε συναρτήσεις σε όποιο βαθμό θέλουμε. Για παράδειγμα η

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ -1 & -1<x<0 \end{cases}$$

αν και ασυνεχής συνάρτηση, προσεγγίζεται στη μέση τιμή καλώς με ένα αρκετά μεγάλο αριθμό όρων των πολυωνύμων Legendre. Έστω λοιπόν η ανάπτυξη

$$f(x) \rightarrow |f> = \sum_{n=0}^{n} a_n |P_n>$$

όπου $|P_n>$ το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο $P_n(x)$. Τότε,

$$<P_m|f> = \sum a_i <P_m|P_i> \equiv a_m \frac{2}{2m+1}$$

Συνεπώς οι συντελεστές της ανάπτυξης a_m, δίνονται

$$a_n = \frac{2n+1}{2} <P_n|f>$$

$$= \frac{2n+1}{2} \{ \int_0^1 P_n(x)\, dx - \int_0^1 P_n(-x)\, dx \}$$

Για $n = 2l+1$ είναι $P_n(-x) = -P_n(x)$

ενώ όταν $n = 2l$ $P_n(-x) = P_n(x)$

$$\text{Συνεπώς } a_n = (2n+1) \begin{cases} \int_0^1 P_n(x)\, dx\,, & n = 2l+1 \\ 0 & n = 2l \end{cases}$$

Θέτοντας $n = 0, 1, 2, \ldots$ υπολογίζουμε τους $a_{0,1,2,\ldots}$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος για $n = 2l - 1$ δίνει το αποτέλεσμα (βλ. π.χ. J.D. Jackson Classical Electrodynamics)

$$\int_0^1 P_n\, dx = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \frac{(n-2)!!}{2\left(\frac{(n+1)}{2}\right)!}$$

όπου $(n-2)!! = (n-1).(n-4)\ldots.3.1.$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Για τους πρώτους όρους έχουμε τότε

$$f(x) = \frac{3}{2} P_1(x) - \frac{7}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) + \ldots$$

8.10. Γραμμικοί Τελεστές

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο S. Μπορούμε να ορίσουμε ένα κανόνα σύμφωνα με τον οποίο το διάνυσμα $|f\rangle$ του χώρου S απεικονίζεται σε διάνυσμα $|g\rangle$ του ίδιου ή άλλου χώρου T. Η μετάβαση αυτή μπορεί να προκύψει από τη δράση ενός αντικειμένου C που καλούμε τελεστή πάνω στο διάνυσμα $|f\rangle$

$$|g\rangle = C\,|f\rangle \qquad (8.10.1)$$

$|f\rangle \leftrightarrow f(x)$, $|g\rangle \leftrightarrow g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ συναρτήσεις.

Παραδείγματα:

i) $C = x$ και $|f\rangle \rightarrow f(x)$ συνάρτηση της μεταβλητής x. Τότε

$$C|f\rangle \rightarrow xf(x) = g(x) \quad S \equiv T$$

ii) $$f(x) = |x| \quad g(x) = \frac{df}{dx} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$ δηλαδή $S \neq T$

Ο τελεστής C καλείται γραμμικός εφόσον

$$C\{\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle\} = \alpha\{C|x\rangle\} + \beta\{C|y\rangle\} \qquad (8.10.2)$$

όπου $\alpha,\beta \in C$, $|x\rangle, |y\rangle \in S$.

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός γραμμικών τελεστών ορίζουν επίσης γραμμικούς τελεστές. Αν A,B γραμμικοί τελεστές τότε εν γένει $A \cdot B \neq B \cdot A$. Ο μεταθέτης δύο τελεστών A,B ορίζεται ως εξής

$$C = [A,B] \equiv A \cdot B - B \cdot A$$

Για παράδειγμα αν $A = \frac{d}{dx}$, $B = x$ τότε

$$\left[\frac{d}{dx}, x\right] f(x) = \frac{d}{dx}(x\,f(x)) - x\frac{d}{dx} f(x) = f(x)$$

Ορίζοντας τον ταυτοτικό τελεστή : $I \cdot f(x) = f(x)$ γράφουμε τότε $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = I$.

Εφόσον έχει ορισθεί το γινόμενο τελεστών, μπορεί κατ' επέκταση να ορισθεί και η δύναμη ενός τελεστή A.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$A^n |y> = A \cdot A \cdots A |y>$$

$$n$$

Όμοια, αν

$$f(x) = \sum_n a_n x^n$$

ορίζουμε

$$f(A) = \sum_n a_n A^n$$

π.χ.

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Έτσι αν $A = a \frac{d}{dx}$ έπεται ότι

$$e^A f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

Το δεύτερο μέλος συμπίπτει με την ανάπτυξη της f(y) κατά Taylor

$$f(y) = \sum \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!} (y - y_0)^n$$

όπου $y = x + a$ και $y_0 = x$. Συνεπώς

$$e^{a(d/dx)} f(x) = f(x + a) \qquad (8.10.3)$$

Σημειώνουμε ότι ο τελεστής $e^{a(d/dx)}$ καλείται τελεστής μετατόπισης, προφανώς λόγω της ιδιότητας του (8.10.3). Ιδιαίτερα στην Κβαντική Μηχανική γράφουμε

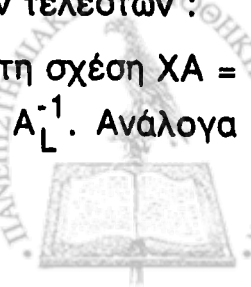
$$A = i \frac{a}{\hbar} p \text{ όπου } p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}.$$

Ο τελεστής p είναι ο τελεστής ορμής.

8.11. Ειδικοί Τελεστές

Θα δώσουμε στη συνέχεια τις ιδιότητες ορισμένων χρήσιμων τελεστών :

i) **Αντίστροφος** : Έστω τελεστής A. Ο τελεστής X που ικανοποιεί τη σχέση XA = I καλείται αντίστροφος του A από αριστερά και συμβολίζεται με A_L^{-1}. Ανάλογα



ορίζεται ο αντίστροφος από δεξιά $A\,A_R^{-1} = I$. Όταν $A_R^{-1} = A_L^{-1} = A^{-1}$, τότε λέμε ότι υπάρχει αντίστροφος A^{-1} του A και γράφουμε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (8.11.1)$$

Για να υπάρχει αντίστροφος πρέπει ο μετασχηματισμός να είναι 1-1 (ένα προς ένα).

Παράδειγμα: 8.11.1.

Έστω η βάση $|e_1\rangle, |e_2\rangle \ldots |e_N\rangle$ και τελεστής A για τον οποίο ισχύει:

$$A|e_n\rangle = A|e_{n+1}\rangle\,,\; A|e_N\rangle = |e_1\rangle\,.$$

Να βρεθεί ο αντίστροφος αυτού. Ο αντίστροφος υπάρχει αφού ο μετασχηματισμός είναι 1-1.

Λύση. Είναι $A|e_1\rangle = |e_2\rangle$

$$A|e_2\rangle = A\{A|e_1\rangle\} = A^2|e_1\rangle = |e_3\rangle$$

$$A^{N-1}|e_1\rangle = |e_N\rangle$$

δηλαδή ο τλεστής A^N μετασχηματίζει κάθε στοιχείο στον εαυτό του.

Συνεπώς $A\{A^{N-1}|e_1\rangle\} = A|e_N\rangle = |e_1\rangle$ και

$$A \cdot A^{N-1} = I,\ \text{Άρα}\ A^{-1} = A^{N-1}.$$

Ο αντίστροφος του γινομένου $C = AB$ ορίζεται ως $C^{-1} = (AB)^{-1}$. Έχουμε

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1} \qquad (8.11.2)$$

Πράγματι έστω $|f\rangle$ διάνυσμα του S. Τότε

$$A^{-1}\,\{C|f\rangle\} = A^{-1}\,A\,B|f\rangle = B|f\rangle$$

$$B^{-1}A^{-1}\,\{C|f\rangle\} = B^{-1}\,B|f\rangle = |f\rangle$$

Άρα $B^{-1}A^{-1} = C^{-1} \equiv (AB)^{-1}$

ii) **Προσαρτημένος** (adjoint) τελεστής.

Έστω τελεστής A και τα $|f\rangle, |g\rangle \in S$. Ο τελεστής X για τον οποίο ισχύει

$$\langle f \,|\, X\,|g\rangle = \langle g|\, A\,|f\rangle^* \qquad (8.11.3)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

καλείται προσαρτημένος του A και συμβολίζεται με A^+ δηλαδή $X = A^+$.

Με άλλα λόγια ο προσαρτημένος τελεστής ορίζεται από τη σχέση

$$\langle f| A^+ |g\rangle = \langle g| A |f\rangle^* \qquad (8.11.4)$$

Αν ορίσουμε το διάνυσμα $|h\rangle = A|f\rangle$ τότε

$$\langle f| A^+ |g\rangle = \langle g|h\rangle^*$$

συνεπώς το διάνυσμα $\langle f| A^+ = \langle h|$ είναι το δυαδικό του $|h\rangle$. Επίσης από την

$$\langle f| Q |g\rangle = \langle g| Q^+ |f\rangle^*$$

για $Q = A^+$ συνάγουμε ότι $(A^+)^+ = A$.

Τέλος αν $C = AB$ έχουμε $C^+ = B^+ A^+$, διότι

$$\langle g| C^+ |f\rangle = \langle g| B^+A^+ |f\rangle = \{ \langle g| B^+ \} \{ A^+ |f\rangle \} = \langle f | AB |g\rangle^*$$
$$= \langle f | C |g\rangle^*$$

Σημειώστε τότε αλλαγή σειράς, όπως και στην περίπτωση του αντίστροφου. Επίσης

$$(A + B)^+ = A^+ + B^+. \qquad (8.11.5)$$

- Οι τελεστές για τους οποίους ισχύει

$$H^+ = H \qquad (8.11.6)$$

καλούνται <u>ερμιτιανοί</u> ή αυτοπροσαρτημένοι.

- Οι τελεστές για τους οποίους

$$U^+ = U^{-1} \qquad (8.11.7)$$

καλούνται <u>μοναδιακοί</u> .

Οι τελευταίοι έχουν την ιδιότητα να διατηρούν το μέτρο διανύσματος $|f\rangle$. Πράγματι έστω το διάνυσμα $|g\rangle = U|f\rangle$. Το δυαδικό του είναι $\langle f|U^+ = \langle g|$.

Άρα $\langle g|g\rangle = \{\langle f|U^+\} \{U|f\rangle\} = \langle f|U^+U|f\rangle$.

Όμως επειδή $U^+ = U^{-1} \Rightarrow U^+U = U^{-1}U = 1$ έπεται ότι

$$\langle g|g\rangle = \langle f | 1 |f\rangle \blacksquare \langle f |f\rangle$$

Πιό γενικά εάν

$|g> = U|f>$, $|g'> = U|f'> \Rightarrow <g|g'> = <f|f'>$.

Παραδείγματα τελεστών.

♦ Το σύμβολο $P_{xy} = |x><y|$ είναι τελεστής. Πράγματι, έστωσαν τα διανύσματα $|f>$, $|g>$. Είναι τότε

$$P_{xy}|f> = |x><y|f>$$
$$= f_y|x>$$

Δηλαδή δρώντας στο διάνυσμα $|f>$ ο τελεστής P_{xy} έδωσε ένα νέο διάνυσμα

$$|f'> = f_y|x>$$

Ας σχηματίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$<f|P_{xy}|g> = <f|\{|x><y|\}|g> = <f|x><y|g>$$
$$= \{<g|y><x|f>\}^* = \{<g|\{|y><x|\}|f>\}^*$$
$$\equiv <g|P^+_{xy}|f>^*$$

Συνεπώς $\{|x><y|\}^+ = |y><x|$.

♦ Έστω ορθοκανονική βάση $|e_1>$, $|e_2>$ . . . $|e_N>$. Τότε οι τελεστές $P_j = |e_j><e_j|$ προβάλουν κάθε διάνυσμα του χώρου στη διεύθυνση $|e_j>$. Π.χ.

$$P_1|x> = \{|e_1><e_1|\}|x> = <e_1|x>|e_1> = a_1|e_1>$$

Ο τελεστής P_j είναι αυτοπροσαρτημένος. Η συνδυασμένη δράση δύο τέτοιων τελεστών είναι

$$P_iP_j|x> = P_i\{a_j|e_j>\} \text{ (όχι άθροιση ως προς j)}$$
$$= a_j\{P_i|e_j>\} = a_j<e_i|e_j>|e_i>$$
$$= \delta_{ij}a_j|e_i> \text{ (όχι άθροιση ως προς i,j)}$$

Άρα $P^2_j = P_j$

Ένας ερμιτιανός τελεστής που υπακούει τη σχέση αυτή λέγεται τελεστής προβολής. Ο τελεστής

$$P = \sum_j P_j = \sum_{i=1}^{N} |e_i><e_i| \text{ είναι ο ταυτοτικός τελεστής.}$$

Πράγματι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$P|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \{|e_i\rangle\langle e_i|\}|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle|e_i\rangle \equiv |x\rangle$$

8.12. Ιδιοδιανύσματα - Ιδιοτιμές Τελεστή

Όταν η δράση τελεστή A σε διάνυσμα $|x\rangle$ έχει ως αποτέλεσμα μόνο την αλλαγή του μήκους του $|x\rangle$,

$$A|x\rangle = \lambda\,|x\rangle$$

τότε το $|x\rangle$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του A. Ο αριθμός λ είναι εν γένει μιγαδικός και καλείται ιδιοτιμή. Για παράδειγμα ο τελεστής $Q = |x\rangle\langle y|$ έχει ιδιοδιάνυσμα το $|x\rangle$ με ιδιοτιμή $\lambda = \langle y|x\rangle$, διότι

$$Q|x\rangle = \{|x\rangle\langle y|\}\,|x\rangle = \{\langle y|x\rangle\}\,|x\rangle$$

Θεώρημα: Οι ιδιοτιμές ερμιτιανού τελεστή $H = H^+$ είναι πραγματικές, ενώ τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Έστωσαν $|h_1\rangle$, $|h_2\rangle$ δύο ιδιοδιανύσματα του H και $\lambda_{1,2} \neq 0$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές $H|h_i\rangle = \lambda_i|h_i\rangle$.

$$\langle h_1|H|h_1\rangle = \langle h_1|\lambda_1|h_1\rangle = \lambda_1\langle h_1|h_1\rangle.$$

Επίσης

$$\langle h_1|H|h_1\rangle = \langle h_1|H^+|h_1\rangle^* \equiv \langle h_1|H|h_1\rangle^* = \langle h_1|\lambda_1|h_1\rangle^*$$

$$= \lambda_1^*\langle h_1|h_1\rangle^* = \lambda_1^*\langle h_1|h_1\rangle$$

συνεπώς $\lambda_1 = \lambda_1^* \Rightarrow \lambda_1$ πραγματικός αριθμός.

Επίσης

$$\langle h_2|H|h_1\rangle = \lambda_1\langle h_2|h_1\rangle \qquad \text{(i)}$$

$$\langle h_1|H|h_2\rangle = \lambda_2\langle h_1|h_2\rangle$$

$$\langle h_1|H|h_2\rangle^* = \lambda_2\langle h_1|h_2\rangle^* \text{ ή } \langle h_2|H^+|h_1\rangle = \lambda_2\langle h_1|h_2\rangle$$

ή $$\langle h_2|H|h_1\rangle = \lambda_2\langle h_2|h_1\rangle \qquad \text{(ii)}$$

$$\text{(i) - (ii)} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle h_2|h_1\rangle = 0$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνεπώς αν $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle h_2|h_1\rangle = 0 \Rightarrow |h_2\rangle \perp |h_1\rangle$. (8.12.1)

Παράδειγμα 8.12.1. Να δειχτεί ότι

$$e^{A}\, B\, e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \ldots \qquad (I)$$

όπου A,B τελεστές και [A,B] = AB -BA.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{xA}\, B\, e^{-xA}$$

και αναπτύσουμε κατά Taylor γύρω από το x = 0

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left\{ \frac{d^n f}{dx^n} \right\}_{x=0}$$

Είναι

$$\frac{d\, f}{dx}\Big|_{x=0} = e^{xA}\, AB\, e^{-xA} + e^{xA}\, B(-A)\, e^{-xA}\Big|_{x=0}$$

$$= Af(x) - f(x)A\big|_{x=0} = AB - BA \equiv [A,B]$$

Όμοια $\frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{x=0} = [A,[A,B]]$

Έστω ότι $\frac{d^K}{dx^K} f(x)\Big|_{x=0} = \underbrace{[A,[A \ldots [A,B] \ldots]}_{\text{κ-φορές}}$

Επαγωγικά έχουμε τότε ότι

$$\frac{d^{K+1}}{dx^{K+1}} f(x) = \frac{d^K}{dx^K} \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\}$$

$$= \frac{d^K}{dx^K} \{ Af(x) - f(x)A \}$$

$$= A \frac{d^K f(x)}{dx^K} - \frac{d^K f(x)}{dx^K} A$$

$$= [A, \frac{d^K f(x)}{dx^K}] = \underbrace{[A,[A,\ldots:[A,B]] \ldots]}_{\text{κ+1-φορές}}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

το οποίο αποδείχνει τήν (I)

Παράδειγμα 8.12.2. Δίνεται ο τελεστής $K(x,y) = \int_0^1 xy\, dy$ και η εξίσωση

$$A|u\rangle = (1-\lambda K)\,|u\rangle = |f\rangle$$

($|u\rangle \leftrightarrow u(x)$ = άγνωστη $|f\rangle \leftrightarrow f(x)$ = γνωστή).

όπου $A = 1 - \lambda K$.

Να βρεθεί ο αντίστροφος του A, δηλαδή να δειχθεί ότι

$$u(x) = f(x) + \frac{3\lambda}{3 - \lambda} x \int_0^1 y\, f(y)\, dy$$

Λύση

$$(1 - \lambda K)\,|u\rangle = |f\rangle \Rightarrow$$

$$u(x) - \lambda \int_0^1 xy\, dy\, u(y) = f(x) \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε και ολοκληρώνουμε ως πρός x από το 0 μέχρι το 1

$$xu(x) - \lambda x^2 \int_0^1 y\, dy\, u(y) = x\, f(x)$$

$$\int_0^1 xu(x)\, dx - \frac{\lambda}{3} \int_0^1 y\, dy\, u(y) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 y\, dy\, u(y) = \frac{1}{1 - (\lambda/3)} \int_0^1 x\, f(x)\, dx \qquad (2)$$

Αντικαθιστούμε το ολοκλήρωμα της (2) στην (1) και έχουμε

$$u(x) = f(x) + \frac{3\ \lambda}{3 - \lambda} x \int_0^1 f(y)\, y\, dy$$

Ορίζουμε τότε

$$(1 - \lambda K)^{-1} = A^{-1} = 1 + \frac{3\ \lambda}{3 - \lambda} x \int_0^1 y\, dy$$

ή $$A^{-1} = 1 + \frac{3\ \lambda}{3 - \lambda} K(x,y)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

όπου $K(x,y) = \int_0^1 x\, y\, dy$

Προϋποθέσεις ύπαρξης του A^{-1} είναι $\lambda \neq 3$ και $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$.

Παράδειγμα 8.12.3. Δίνονται οι τελεστές $j_i = -i\hbar\varepsilon_{ijk} x_j \partial_k \equiv \varepsilon_{ijk} x_j p_k$, $(\hbar = h/2\pi)$

όπου $\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}$ και $p_k = -i\hbar\partial_k$, $k = 1, 2, 3$

Να υπολογιστούν οι μεταθέτες $[j_i, j_j]$.

Κατ' αρχήν έχουμε $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$

Τότε
$$\begin{aligned}
[j_i, j_j] &= \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}[x_k p_l, x_m p_n] \\
&= \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\{x_k[p_l, x_m p_n] + [x_k, x_m p_n] p_l\} \\
&= \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\{x_k[p_l, x_m] p_n + x_m[x_k, p_n] p_l\} \\
&= \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\{x_k(-i\hbar\delta_{lm}) p_n + x_m(+i\hbar\delta_{kn}) p_l\} \\
&= i\hbar\{-\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jln} x_k p_n + \varepsilon_{inl}\varepsilon_{jmn} x_m p_l\} \\
&= i\hbar\{(\delta_{ik}\delta_{jn} - \delta_{ij}\delta_{kn}) x_k p_n - (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{ij}\delta_{lm}) x_m p_l\} \\
&= i\hbar\{x_i p_j - \delta_{ij}\vec{x}\cdot\vec{p} - x_j p_i + \delta_{ij}\vec{x}\cdot\vec{p}\} \\
&= i\hbar(x_i p_j - x_j p_i) = i\hbar\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kln} x_l p_n \\
&= i\hbar\varepsilon_{ijk} j_k
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.12.4. Να υπολογιστούν οι μεταθέτες του τελεστή

$$J^2 = \sum_{k=1}^{3} j_k^2 \text{ με τους } j_i,\ i = 1, 2, 3$$

Λύση :

Οι μεταθέτες του $J^2 = \sum j_k^2$ με τους $j_{1,2,3}$ προκύπτουν απλά

$$J^2 = \sum_k j_k^2 = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$$

$$[J^2, j_1] = 0 + [j_2^2, j_1] + [j_3^2, j_1]$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$= j_2[j_2, j_1] + [j_2, j_1]j_2 + j_3[j_3, j_1] + [j_3, j_1]j_3$$

$$= j_2(-i\hbar j_3) + (-i\hbar j_3)j_2 + j_3(i\hbar j_2) + (i\hbar j_2)j_3 = 0$$

και όμοια με τους $j_{2,3}$. Συνεπώς $[J^2, j_i] = 0$

Παράδειγμα 8.12.5. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή

$$L_x = \alpha \frac{d^2}{dx^2} + \beta \frac{d}{dx} + \gamma,\ \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$$

με συνοριακές συνθήκες συνθήκες $u(0) = u(L) = 0$. Δείξτε ότι με κατάλληλο ορισμό συνάρτησης βάρους $w(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\{\int \frac{\beta}{\alpha} dx)$ οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες.

Λύση: $L_x u(x) = \lambda u(x)$; Έστω $u \sim e^{\rho x}$ τότε έχουμε :

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{\rho x} + 2\frac{d}{dx} e^{\rho x} + e^{\rho x} = \lambda e^{\rho x} \rightarrow \rho^2 + 2\rho + 1 = \lambda \rightarrow$$

$$(\rho + 1)^2 = \lambda$$

Ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του λ.

i) $\lambda = 0 \rightarrow \rho = -1 \rightarrow u(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$

$u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$u(L) = 0 \Rightarrow B = 0$ -> **Δεν υπάρχει μη τετριμμένη λύση**

ii) $\lambda > 0 \rightarrow \rho = -1 \pm \sqrt{\lambda} \rightarrow u(x) = (Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x})e^{-x}$

$u(0) = 0 \Rightarrow A+B = 0$

$u(L) = 0 \Rightarrow Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{\sqrt{\lambda}L} = 0$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}L} & e^{-\sqrt{\lambda}L} \end{bmatrix} \neq 0$$ -> **Δεν υπάρχει λύση**

iii) $\lambda < 0 \rightarrow \rho_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{|\lambda|}$

$$e^{\rho_1 x} + e^{\rho_2 x} \sim e^{-x+i\sqrt{|\lambda|}x} + e^{-x-i\sqrt{|\lambda|}x} = e^{-x}\cos\sqrt{|\lambda|}\,x$$

$$e^{\rho_1 x} - e^{\rho_2 x} \sim e^{-x}\sin\sqrt{|\lambda|}\,x$$

$$u(x) = e^{-x}(A\sin\sqrt{|\lambda|}\,x + B\cos\sqrt{|\lambda|}\,x)$$

$$u(0) = A\sin\sqrt{|\lambda|}\,0 + B\cos\sqrt{|\lambda|}\,0 = B = 0$$

$$u(L) = A\sin\sqrt{|\lambda|}\,L = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|}\,L = n\pi \Rightarrow$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < 0$$

$$u_n(x) = A_n e^{-x} \sin\frac{n\pi}{L} x \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Επειδή ο τελεστής δεν είναι ερμιτιανός, δεν αναμένουμε ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές.

Μπορούμε όμως να ορίσουμε κατάλληλη συνάρτηση βάρους έτσι ώστε ο τελεστής να γίνει ερμιτιανός και να έχουμε ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων* . Η κανονικότητα θα προκύψει με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών A_n. Η συνάρτηση βάρους είναι :

$$\alpha(x)\, w(x) = \exp\{\int \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} dx\}$$

$$= \exp\{2\int dx\} = e^{2x} \Rightarrow w(x) = e^{2x}.$$

Συνεπως το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται

$$\langle u_n|u_m\rangle = \int_0^L u_n(x)u_m(x)\, e^{2x}\, dx$$

$$= A_n A_m \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} dx$$

$$= A_n A_m \frac{L}{2}\left\{\frac{\sin(m-n)\pi}{(m-n)\pi} + \frac{\sin(m+n)\pi}{(m+n)\pi}\right\}$$

Για $m^2 \neq n^2$ έπεται $\langle u_n|u_m\rangle = 0$. Για $m = \pm n$* $\Rightarrow$

$$\langle u_m|u_n\rangle \to A_n^2 \frac{L}{2}(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \to 1).$$

Συνεπώς η κανονικοποίηση επιβάλλει την ακόλουθη τιμή στη σταθερά A_n:

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

---

* Η πλήρης μελέτη τέτοιων συστημάτων μελετάται σε πιο προχωρημένα βιβλία (βλ. π.χ., Ι.Δ. Βέργαδου ΜΜΦ 1).

* Σημειώστε ότι οι ιδιοτιμές είναι ανάλογες του n^2 και όχι του n. Συνεπώς ίδιες ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε $m = \pm n$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

G. Arfken*: Mathematical Methods
for Physicists, NY Academic
Press, Inc. 1968

Ι. Δ. Βέργαδου*: Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής
Ιωάννινα 1990

R. A. Barnett and J. N. Eujii: Vectors.
NY, John Wiley & Sons 1963

R. Buck: Advanced Calculus, N. Y.
McGraw-Hill, 1965

H. F. Davis & A. D. Snider: Introduction to
Vector Analysis, Wm. C. Brown, 1991

B. A. Green Jr. Vector Calculus, NY
Appleton - Century Grofts 1967

W. Kaplan, Advanced Calculus, Boston,
Addison - Wesley, 1952

J. E. Marsden and A. Tromba, Vector Calculus
(Ελληνική Μετάφραση από Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 1994) N. Y., W. H.
Ereeman 1988

H. M. Schey: Div, Grad, Curl and
all that, W.W. Norton, 1992

I. S. Sokolnikoff and R. M. Redheffer*
Mathematics for Physicists and Modern
Engineering, N. Y. McGraw-Hill, 1996

Σημείωση
Με (*) σημειώνονται τα κάπως πιο προχωρημένα βιβλία

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ