ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ
ΤΕΛΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ ΣΕ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Χρυσούλα Σκαργιώτη

Επιβλέπων Καθηγητής
Σταύρος Δ. Νικολόπουλος

Σεπτέμβριος 2003

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση [illegible] [illegible] θέλω [illegible] [illegible]

των επιβλέποντα [illegible] [illegible] Χάρη [illegible]

ολοκληρώθηκε [illegible] [illegible] προσπάθεια [illegible]

[illegible] για βοήθεια [illegible]

[illegible] της [illegible] της [illegible]

[illegible] τη βάση [illegible]

Στους γονείς μου

Ευχαριστιες

Με την αποπεράτωση αυτής της εργασίας θα ήθελα να απευθύνω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή Σταύρο Δ. Νικολόπουλο. Χάρη στην προτρεπτική υπομονή του ολοκληρώθηκε, πιστεύω επιτυχώς, αυτή η προσπάθεια. Βασισμένη στην πολύτιμη γνώση του για το αντικείμενο και στην προθυμία του για βοήθεια, θεωρώ τη συμβολή του ουσιαστική για την περάτωση αυτής της μελέτης. Ελπίζω ότι το αποτέλεσμα της συνεργασίας μας θα αποβεί εποικοδομητικό και θα αποτελέσει τη βάση για περαιτέρω έρευνα.

Προλογος

Η Θεωρία Γραφημάτων είναι ένα γνωστικό πεδίο που προϋπήρξε της Επιστήμης της Πληροφορικής. Οι απαρχές της θεωρίας αυτής χρονολογούνται από το 18^{o} αιώνα, αλλά μεγάλη ανάπτυξη γνώρισε μεταγενέστερα, και κυρίως μεταπολεμικά, ως μία περιοχή των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Οι μαθηματικοί ήταν εκείνοι που αρχικά επηρέασαν την καθιέρωση και την ανάπτυξη της θεωρίας αυτής. Αργότερα, με την εξάπλωση των υπολογιστών θεωρήθηκε ότι είχε γεννηθεί μία νέα επιστήμη, η Πληροφορική, με τη δική της οντότητα και πειθαρχία. Οι επιστήμονες της Πληροφορικής ασχολούνται με τη Θεωρία Γραφημάτων γιατί πέρα από το ότι προκαλεί το γενικό επιστημονικό ενδιαφέρον, αποτελεί επίσης και ένα ισχυρό εργαλείο επίλυσης πολλών ειδικών πρακτικών προβλημάτων διαφόρων επιστημονικών κλάδων, όπως η Αναγνώριση Προτύπων, η Ανάκτηση Πληροφοριών, η Γενετική, η Γλωσσολογία, η Επιχειριασιακή Έρευνα, η Ηλεκτροεπιστήμη, η Κοινωνιολογία, η Κυβερνητική, η Πληροφορική, η Τεχνητή Νοημοσύνη, η Χημεία.

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η Θεωρία Γραφημάτων δεν είναι λίγα. Πολλά από αυτά στη περίπτωση γενικών γραφημάτων είναι "άλυτα". Όταν όμως η επίλυση ενός προβλήματος βασίζεται σε ιδιότητες συγκεκριμένων γραφημάτων, τότε πολλά προβλήματα επιδέχονται αποτελεσματική λύση. Η παρούσα μελέτη δίνει μία αλγοριθμική αντιμετώπιση προβλημάτων σε συγκεκριμένες κατηγορίες γραφημάτων με σημαντικές ιδιότητες. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται είναι η εύρεση τέλειας αντιστοίχισης σε συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται έννοιες και ορισμοί που αποτελούν βασική υποδομή για τα επόμενα κεφάλαια. Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης σε συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο υπολογίζεται, εάν υπάρχει, μία τέλεια αντιστοίχιση. Όταν δεν υπάρχει τέλεια αντιστοίχιση, τότε υπολογίζεται το μέγιστο επαγόμενο υπογράφημα με τέλεια αντιστοίχιση, και η αντίστοιχη αλγοριθμική αντιμετώπιση δίνεται στο κεφάλαιο 4, ενώ το κεφάλαιο 5 περιγράφει έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του ελάχιστου υπεργραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση και το οποίο είναι συμπληρωματικό παραγόμενο γράφημα. Η μελέτη ολοκληρώνεται με αλγοριθμική αντιμετώπιση του προβλήματος σε μία άλλη κατηγορία γραφημάτων, τα Quasi-Threshold γραφήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 Εισαγωγή – Ορισμοί

Πολλά προβλήματα και καταστάσεις της καθημερινής ζωής μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια ενός διαγράμματος αποτελούμενο από ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο γραμμών που ενώνουν συγκεκριμένα ζεύγη σημείων. Τα σημεία κάλλιστα θα μπορούσε να είναι φυσικά πρόσωπα και οι γραμμές να συμβολίζουν ζεύγη φίλων, ή θα μπορούσε τα σημεία να είναι υπολογιστές και οι γραμμές να αντιπροσωπεύουν τις αντίστοιχες καλωδιώσεις. Η μαθηματική αφαίρεση καταστάσεων και προβλημάτων τέτοιου είδους οδηγεί στην έννοια του γραφήματος.

Ένα **Γράφημα** (graph) είναι μία δομή που αποτελείται από ένα σύνολο **κορυφών** (vertices) ή **κόμβων** (nodes) ή **σημείων** (points) που συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο **ακμών** (edges) ή **γραμμών** (lines). Γενικά, ένα γράφημα συμβολίζεται ως $G(V, E)$ ή $G = (V, E)$ ή $(V(G), E(G))$, όπου $V = V(G)$ και $E = E(G)$ είναι το σύνολο των κορυφών και των ακμών αντίστοιχα [1]. Το πλήθος των κορυφών ενός γραφήματος συμβολίζεται με $n = |V|$ και ονομάζεται **τάξη** (order) του γραφήματος, ενώ το πλήθος των ακμών συμβολίζεται με $m = |E|$ και ονομάζεται **μέγεθος** (size) του γραφήματος.

Κάθε ακμή προσδιορίζεται από δύο κορυφές που ονομάζονται **άκρα** ή **τερματικά σημεία** (end points). Αν η ακμή e έχει τα u, v ως άκρα, τότε η e ονομάζεται **προσπίπτουσα** (incident) στα σημεία u, v. Ας σημειωθεί ότι η ακμή e συμβολίζεται με (u, v) ή (v, u). Αντίστοιχα, ορίζεται ότι το σημείο u είναι **γειτονικό** (adjacent) του v, και αντίστροφα. Στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή δύο σημεία δεν ενώνονται, τότε ονομάζονται **μη γειτονικά** ή **ανεξάρτητα** (independent).

Η **γειτονιά** (neighborhood) ενός κόμβου v είναι το σύνολο (set) $N(v)=N_G(v)$ και αποτελείται από όλες τις κορυφές του G που είναι γειτονικές με τον κόμβο v, δηλαδή το σύνολο $N(v)=\{u\in V(G)|(v,u)\in E(G)\}$. Η **κλειστή** γειτονιά (closed neighborhood) του κόμβου v ορίζεται ως $N[v]=N_G[v]:=\{v\}\cup N(v)$. Επειδή, τόσο οι γειτονιές κορυφών όσο και τα υπογραφήματα και υπεργραφήματα είναι σύνολα, ισχύουν οι πράξεις επί των συνόλων. Το **επαγόμενο υπογράφημα** (induced subgraph) του γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα $G(X)=(X,F)$ όπου το X είναι ένα υποσύνολο του V και το F είναι υποσύνολο του E τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών του X, υπάρχει μία ακμή μεταξύ τους στο $G(X)$ εάν και μόνο εάν υπάρχει ακμή μεταξύ τους στο G, ενώ το γράφημα G καλείται **υπεργράφημα** (supergraph) του $G[S]$. **Ένωση** (union) δύο γραφημάτων $G_1(V_1,E_1)$ και $G_2(V_2,E_2)$ ονομάζεται το γράφημα G με σύνολο κορυφών $V(G)=V_1\cup V_2$ και σύνολο ακμών $E(G)=E_1\cup E_2$. Το **συμπλήρωμα** (complement) ενός γραφήματος G συμβολίζεται ως $\widetilde{G}$ και είναι ένα γράφημα που έχει σύνολο κορυφών το $V(\widetilde{G})=V(G)$, ενώ το σύνολο των ακμών του αποτελείται από όλες τις δυνατές ακμές που δεν ανήκουν στο σύνολο $E(G)$.

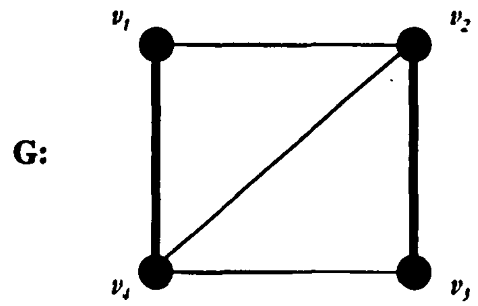
Ένα γράφημα του οποίου ενώνονται δύο οποιεσδήποτε κορυφές ονομάζεται **πλήρες** (complete) ή **γενικό** (universal). Σε ένα πλήρες γράφημα G η κλειστή γειτονιά κάθε κορυφής v είναι το σύνολο κορυφών $V(G)$.

Βαθμός (degree) μίας κορυφής v λέγεται το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή v και συμβολίζεται με $d(v)$.

Για την αναπαράσταση γραφημάτων πολλές φορές χρησιμοποιείται η έννοια των δέντρων. Ένα δέντρο T είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από έναν ή περισσότερους κόμβους. Ένας ειδικός κόμβος t του δέντρου T ονομάζεται **ρίζα** (root), ενώ οι υπόλοιποι κόμβοι T-$\{t\}$ μπορούν να διαμεριστούν σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα T_1, T_2,…,T_n, όπου κάθε υποσύνολο είναι με τη σειρά του ένα δέντρο. Τα δέντρα αυτά ονομάζονται **υποδέντρα** (subtrees) του αρχικού δέντρου. Ο ορισμός αυτός αφ' ενός είναι αναδρομικός, γιατί ορίζει ένα δέντρο σε σχέση με κάποιο άλλο δέντρο, και αφ' ετέρου δείχνει ότι κάθε κόμβος ενός δέντρου μπορεί να θεωρηθεί ως ρίζα κάποιου υποδέντρου του αρχικού δέντρου. Ο αριθμός των υποδέντρων που αρχίζουν από ένα κόμβο ορίζουν το **βαθμό του κόμβου** (node degree). **Βαθμός δέντρου** (tree degree) είναι ο μέγιστος βαθμός από όλους τους βαθμούς κόμβων. Τα δέντρα που χρησιμοποιούνται συνήθως στην πράξη είναι τα **δυαδικά** (binary trees) και έχουν βαθμό 2. Οι κόμβοι από τους οποίους δεν αρχίζει κάποιο υποδέντρο λέγονται

φύλλα (leaves), **εξωτερικοί** (external) ή **τερματικοί** (terminal) κόμβοι. Όλοι οι άλλοι κόμβοι λέγονται **κλαδιά** (branches), **εσωτερικοί** (internal) ή **μη τερματικοί κόμβοι**. Η ρίζα ενός δέντρου ονομάζεται **πατέρας** (father) των ριζών των υποδέντρων και αντίστοιχα οι ρίζες των υποδέντρων ονομάζονται **παιδιά** (children) της ρίζας. Οι κόμβοι που έχουν τον ίδιο πατέρα λέγονται **αδελφοί** (brothers) κόμβοι.

Αντιστοίχιση (matching) ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα υποσύνολο ακμών $M \subseteq E$ τέτοιο ώστε δεν υπάρχει ζεύγος στοιχείων στο M που να γειτνιάζουν [25]. Μία αντιστοίχιση M ονομάζεται **τέλεια αντιστοίχιση** (perfect matching) εάν κάθε κορυφή του γραφήματος G ανήκει σε κάποιο στοιχείο του M. Το μέγεθος μίας τέλειας αντιστοίχισης είναι ίσο με $m/2$, εφόσον δεν υπάρχει κορυφή στο γράφημα G που να μην συμμετέχει σε αυτή.



Σχήμα 1.1 Οι ακμές (v_1,v_4) και (v_2,v_3) αποτελούν αντιστοίχιση και ταυτόχρονα τέλεια αντιστοίχιση για το γράφημα G.

Το πλήθος των ακμών που αποτελούν την αντιστοίχιση ονομάζεται **μέγεθος αντιστοίχισης** (matching number).

Η παρούσα μελέτη ασχολείται μόνο με τέλειες αντιστοιχίσεις σε μία κατηγορία γραφημάτων, τα συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα, που περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου. Μία σημαντική παρατήρηση που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη πριν ξεκινήσει η αναζήτηση μίας τέλειας αντιστοίχισης είναι ότι, εάν ένα γράφημα έχει περιττό πλήθος κορυφών τότε είναι αδύνατο να έχει τέλεια αντιστοίχιση. Με άλλα λόγια, ένα γράφημα *πιθανώς* να έχει τέλεια αντιστοίχιση μόνον όταν έχει άρτιο πλήθος κορυφών. Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή.

Δύο προβλήματα μας απασχολούν στην παρούσα μελέτη. Το πρώτο είναι το **Πρόβλημα Ελέγχου Ύπαρξης Τέλειας Αντιστοίχισης**, σύμφωνα με το οποίο καθορίζουμε εάν ένα γράφημα έχει τέλεια αντιστοίχιση ή όχι. Το δεύτερο είναι το **Πρόβλημα Υπολογισμού Τέλειας Αντιστοίχισης**, σύμφωνα με το οποίο βρίσκουμε την τέλεια αντιστοίχιση, εάν υπάρχει.

1.2 Συμπληρωματικά Παραγόμενα Γραφήματα - Δεντρική Αναπαράσταση

1.2.1 Συμπληρωματικά Παραγόμενα Γραφήματα

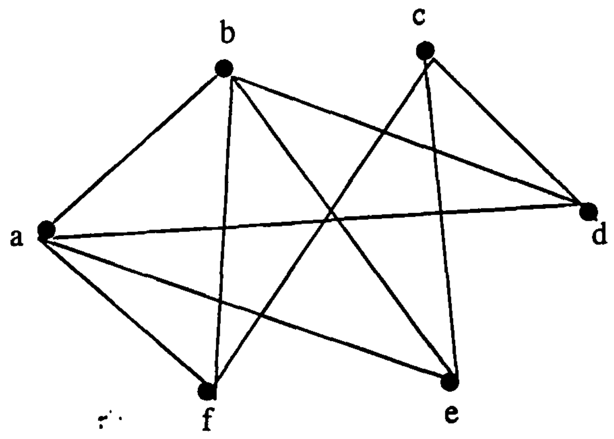
Τα **συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα (complement reducible graphs)**, λέγονται επίσης και **co-γραφήματα (cographs)**, ορίζονται ως ακολούθως [24]:

(1) Ένα γράφημα που αποτελείται από έναν μόνο κόμβο είναι ένα co-γράφημα,

(2) Αν G_1, G_2, ... G_k είναι co-γραφήματα τότε και η ένωση τους $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$ είναι co-γράφημα.

(3) Αν το G είναι co-γράφημα, τότε και το συμπλήρωμά (complement) του είναι co-γράφημα.

Τα co-γραφήματα έχουν μελετηθεί από πολλούς ερευνητές [8, 9, 10, 11, 3, 4, 17, 12, 5]. Είναι γνωστά με διάφορα ονόματα, όπως D^*-γραφήματα [8] και P_4-restricted γραφήματα [3, 4]. Έχουν δοθεί NC αλγόριθμοι για πολλά προβλήματα co-γραφημάτων στα [8, 9, 10, 11, 5]: μέγιστη κλίκα (maximum clique), ελάχιστος χρωματισμός (minimum coloring), ελάχιστη κυριαρχία (minimum domination), ελάχιστο γέμισμα (minimum fill-in) και έλεγχος ισομορφισμού (isomorphism testing). Έχει αποδειχθεί ότι έχουν τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες. Πρώτον, είναι τα γραφήματα που δεν έχουν μονοπάτια μήκους 4, και δεύτερον, ένα co-γράφημα έχει μοναδική δενδρική αναπαράσταση. Το δέντρο αυτό, καλείται co-δέντρο (cotree), και αποτελεί τη βάση για γρήγορους αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου πολλών προβλημάτων. Τα co-δέντρα μελετώνται και περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο.



Σχήμα 1.2 Ένα co-γράφημα G.

1.2.2 Co-δέντρα

Έστω *T* ένα ριζωμένο δέντρο, δηλαδή ένα δέντρο με επιγραφές στο οποίο ένας κόμβος ορίζεται ως η ρίζα. Οι κόμβοι του *T* που δεν έχουν παιδιά καλούνται **κόμβοι φύλλα** (leaf nodes). Οι υπόλοιποι κόμβοι καλούνται **εσωτερικοί κόμβοι** (internal nodes).

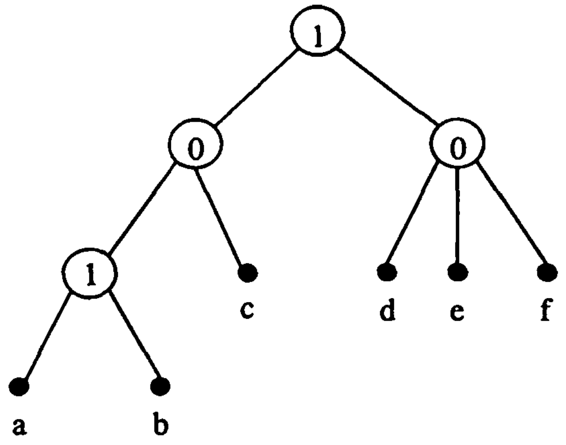
Με ***Leaf(T)*** συμβολίζουμε το σύνολο όλων των κόμβων του *T* που είναι φύλλα. Για κάθε κόμβο *x*, με $p_T(x)$ συμβολίζουμε τον πατέρα του κόμβου *x* στο *T*. ***T(x)*** είναι το υποδέντρο του *T* με ρίζα τον κόμβο *x* και ***Leaf(x)*** είναι το σύνολο των απογόνων του *x* που είναι φύλλα.

Αν ένας κόμβος *y* βρίσκεται στο μονοπάτι από τον κόμβο *x* στη ρίζα *r* του *T*, τότε ο *y* είναι ένας **πρόγονος** (ancestor) του *x* και ο *x* είναι ένας **απόγονος** (descendent) του *y*. Όταν ο κόμβος *x* είναι απόγονος του κόμβου *y* και ο *y* πρόγονος του *x* τότε λέμε ότι οι κόμβοι *x* και *y* **σχετίζονται** (related). Ο πρώτος κοινός κόμβος των μονοπατιών που ξεκινούν από τους *x* και *y* προς τη ρίζα *r* ονομάζεται **ελάχιστος κοινός προκάτοχος** (lowest common ancestor) των *x* και *y* και συμβολίζεται με $lca_T(x, y)$. Αν ο *y* είναι ένας πρόγονος του *x* τότε ισχύει ότι $lca_T(x,y) = y$.

Co-δέντρο (Cotree) είναι ένα ριζωμένο δέντρο *T* που πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες [24]:

(α) Οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν ετικέτες 0 ή 1, η ρίζα του T είναι ένας 1-κόμβος, τα παιδιά ενός 1-κόμβου είναι 0-κόμβοι, τα παιδιά ενός 0-κόμβου είναι 1-κόμβοι.

(β) Κάθε εσωτερικός κόμβος έχει τουλάχιστον 2 παιδιά εκτός από τη ρίζα r που μπορεί να έχει και μόνο ένα παιδί.



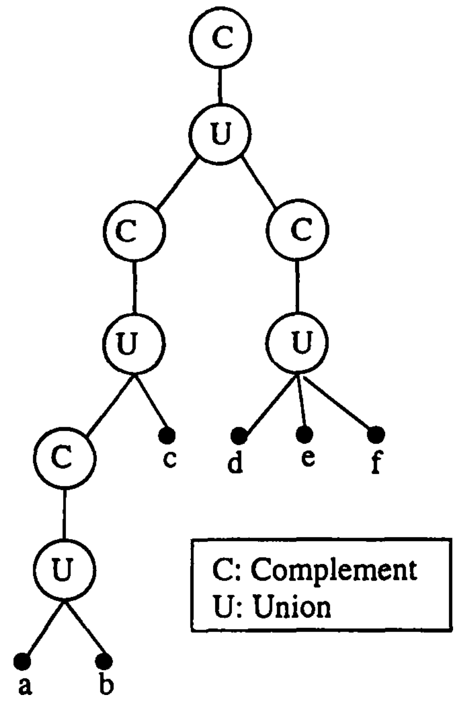
Σχήμα 1.3 Το co-δέντρο *T* για το co-γράφημα *G* της εικόνας 2.2.

Η κατασκευή ενός co-δέντρου έχει ως ακολούθως:

Ένα co-γράφημα *G* μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα ριζωμένο δέντρο *T* ως εξής:
Οι κόμβοι φύλλα του *T* αναπαριστούν τους κόμβους του *G*. Κάθε εσωτερικός κόμβος του *T* αναπαριστά είτε έναν τελεστή "union" (ένωση), είτε έναν τελεστή "complement" (συμπλήρωμα). Ένας κόμβος "union" έχει τουλάχιστον δύο παιδιά. Ένας κόμβος "complement" έχει ακριβώς έναν κόμβο παιδί το οποίο είναι ένας κόμβος "union". Μπορούμε να τροποποιήσουμε το *T* ώστε να είναι ένα co-δέντρο με τον ακόλουθο τρόπο: εάν η ρίζα *r* του *T* είναι ένας κόμβος "union", προσθέτουμε δύο νέους "complement" κόμβους r_1 και r_2 στο *T* και κάνουμε το *r* παιδί του r_1 και το r_1 παιδί του r_2 έτσι ώστε το r_2 να είναι η νέα ρίζα του δέντρου. (Εάν το *r* είναι ένας κόμβος "complement", παραλείπουμε αυτό το βήμα.) Στη συνέχεια, συγχωνεύουμε κάθε κόμβο "union" και τον πατέρα αυτού (ο οποίος είναι ένας κόμβος "complement") σε έναν μοναδικό κόμβο. Τελικά, ο χαρακτηρισμός (label) των κόμβων ως 1-κόμβος ή 0-κόμβος καθορίζεται από τον ορισμό 1(α). Η πιο σημαντική ιδιότητα αυτής της αναπαράστασης είναι η παρακάτω [24]:

Ιδιότητα του cotree: Έστω *G=(V, E)* ένα co-γράφημα και *T* το αντίστοιχο co-δέντρο. Για οποιαδήποτε $x, y \in V$, ισχύει ότι $(x, y) \in E$ αν και μόνο αν ο $\mathrm{lca}_T(x, y)$ είναι 1-κόμβος.

Αυτή η ιδιότητα θα φανεί πάρα πολύ χρήσιμη στον καθορισμό του εάν ένα co-γράφημα έχει τέλεια αντιστοίχιση ή όχι, και στην περίπτωση που υπάρχει στον υπολογισμό αυτής.



Σχήμα 1.4 Η δενδρική αναπαράσταση του co-γραφήματος πριν πάρουμε την τελική, δηλαδή το co-δέντρο. Το co-δέντρο προκύπτει από αυτό το δέντρο με συγχώνευση κάθε κόμβου "union" με τον πατέρα του "complement" σε έναν μοναδικό κόμβο. Ο χαρακτηρισμός των κόμβων καθορίζεται από τον ορισμό του co-δέντρο.

Εάν η ρίζα r του T έχει τουλάχιστον δύο παιδιά τότε το G είναι συνδεδεμένο. Εάν η ρίζα r έχει μόνο ένα παιδί 0-κόμβο, τότε το G είναι μη συνδεδεμένο. Εάν η ρίζα r έχει μόνο ένα παιδί το οποίο είναι φύλλο και αντιστοιχεί στον κόμβο x, τότε το G αποτελείται από έναν μόνο κόμβο, τον x.

Θεώρημα 1.1. Το G είναι ένα co-γράφημα αν και μόνο αν έχει μία δεντρική αναπαράσταση (co-δέντρο) T. Επιπλέον, η δεντρική αναπαράσταση είναι μοναδική ως προς τη μετάθεση των παιδιών των εσωτερικών κόμβων του T.

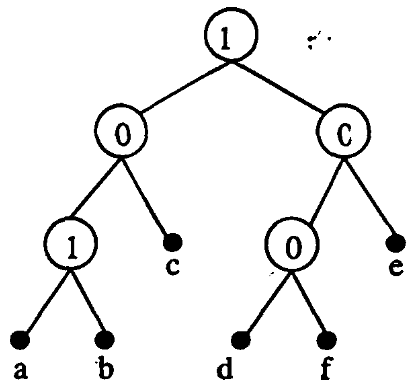
1.2.2.1 Δυαδική αναπαράσταση των co-δέντρων

Πολλές φορές, για ευκολία χρησιμοποιούμε την δυαδική αναπαράσταση των co-δέντρων T [15]. Σύμφωνα με αυτήν την αναπαράσταση κάθε εσωτερικός κόμβος του co-δέντρου έχει ακριβώς δύο παιδιά [19]. Έστω u ένας εσωτερικός κόμβος με παιδιά v_1, v_2, ..., v_k, $(k \geq 3)$. Αντικαθιστούμε τον κόμβο u με $k\text{-}1$ κόμβους $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ έτσι ώστε ο u_1 έχει παιδιά τους κόμβους v_1 και v_2, και κάθε u_i, $(2 \leq i < k)$, έχει παιδιά τους u_{i-1} και v_{i+1}.

Τη δυαδική αναπαράσταση του co-δέντρου T την συμβολίζουμε ως T_b. Το T_b ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

(1) Κάθε εσωτερικός κόμβος έχει ακριβώς δύο παιδιά.

(2) Κάθε κόμβος φύλλο αντιστοιχεί σε μία κορυφή του V, έτσι ώστε, $(x,y) \in E$ εάν και μόνο εάν ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος των φύλλων που αντιστοιχούν στους κόμβους x και y είναι ένας 1-κόμβος.



Σχήμα 1.5 Η δυαδική αναπαράσταση του co-δέντρου του σχήματος 1.3.

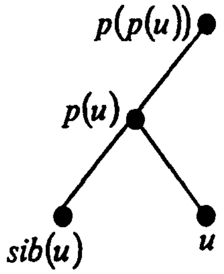
1.3 Τεχνική της Συρρίκνωσης Δέντρου

Η τεχνική της **Συρρίκνωσης Δέντρου** συνίσταται στην με συστηματικό τρόπο συρρίκνωση ενός δυαδικού δέντρου έως ότου αυτό καταλήξει να γίνει ένα δέντρο τριών κόμβων. Η συρρίκνωση επιτυγχάνεται με συνεχή εφαρμογή της διαδικασίας συγχώνευσης ενός τερματικού κόμβου με τον πατέρα του.

1.3.1 Η διαδικασία RAKE

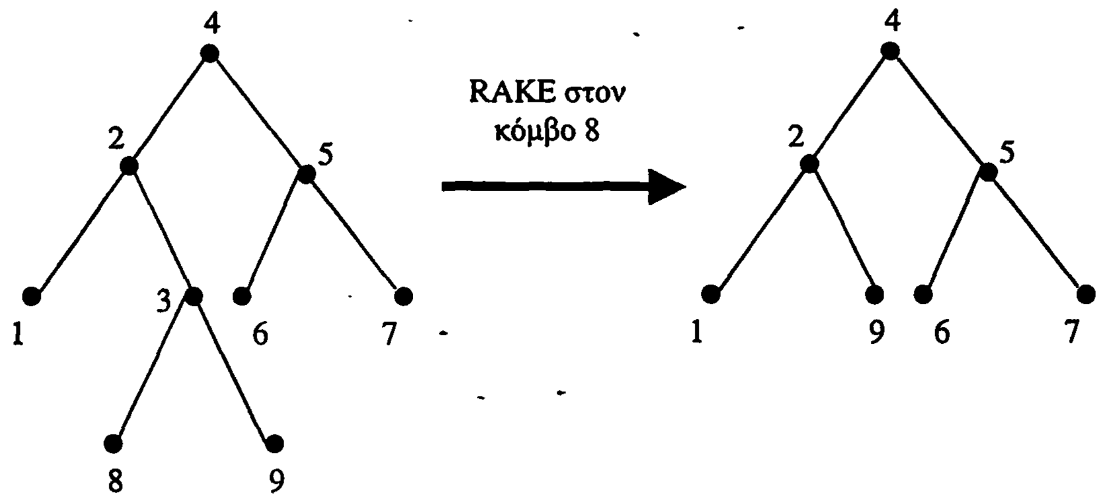
Ορισμός 2.1. Έστω T_b ένα δυαδικό δέντρο T με ρίζα r. Έστω $u \neq r$ ένας κόμβος.

- $p(u)$ είναι ο πατέρας του κόμβου u,
- $sib(u)$ είναι ο αδερφός του κόμβου u,
- $p(p(u))$ είναι ο πατέρας του πατέρα του κόμβου u.



Σχήμα 1.6 Οι κόμβοι u, $p(u)$, $sib(u)$, $p(p(u))$.

Διαδικασία RAKE: Έστω u ένας κόμβος τέτοιος ώστε ο πατέρας $p(u)$ του u να μην είναι η ρίζα r. Η εφαρμογή της διαδικασίας RAKE στον κόμβο u προκαλεί απομάκρυνση του u και του $p(u)$ από το δέντρο και ο αδερφός του u, δηλαδή ο $sib(u)$, γίνεται παιδί του $p(p(u))$.



Σχήμα 1.7 Η εφαρμογή της διαδικασίας RAKE στον κόμβο 8 προκαλεί την απομάκρυνση αυτού και του πατέρα του (κόμβος 3) από το δέντρο, και ο αδερφός του (κόμβος 9) γίνεται παιδί του παππού (κόμβος 2).

Κεφαλαιο 2

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

Ο έλεγχος για την ύπαρξη τέλειας αντιστοίχισης σε ένα co-γράφημα αποτελεί βασικό βήμα πριν προβούμε σε οποιονδήποτε αλγόριθμο υπολογισμού της. Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο για τον έλεγχο ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στην τεχνική συρρίκνωσης δέντρου, όπως αυτή περιγράφηκε στην παράγραφο 1.3.1. Στην παράγραφο 2.1 περιγράφουμε τον ακολουθιακό αλγόριθμο ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης.

2.1 Έλεγχος Ύπαρξης Τέλειας Αντιστοίχισης

Για να αποφασίσουμε εάν ένα co-γράφημα G έχει ή όχι τέλεια αντιστοίχιση θα εργαστούμε στην δεντρική αναπαράσταση αυτού, δηλαδή στο co-δέντρο. Το co-δέντρο μετατρέπεται σε δυαδικό, δηλαδή το δέντρο T_b.

Στον έλεγχο ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης, η διαδικασία RAKE εφαρμόζεται σε τερματικούς κόμβους όπως αυτοί εμφανίζονται στο T_b από κάτω προς τα πάνω και από τα αριστερά προς τα δεξιά. Καθώς κινούμεθα στο δέντρο από κάτω προς τα πάνω ανά επίπεδο, σε κάθε επίπεδο πηγαίνουμε από τα αριστερά προς τα δεξιά και κάθε φορά που συναντούμε δύο κόμβους αδέρφια, έστω u και $sib(u)$, εφαρμόζουμε τη διαδικασία RAKE στον u, με αποτέλεσμα την απομάκρυνση του κόμβου u και του πατέρα του $p(u)$ και τη συγχώνευση του αδερφού του $sib(u)$ με τον πατέρα του πατέρα, δηλαδή τον κόμβο $p(p(u))$.

Η κατασκευή ενός γρήγορου αλγορίθμου που να αποφασίζει την ύπαρξη ή όχι μίας τέλειας αντιστοίχισης βασίζεται στην τεχνική της Συρρίκνωσης Δέντρου που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμός 2.2. Έστω T_v το υποδέντρο του co-δέντρου με ρίζα τον κόμβο v και $|Leaf(v)|$ το πλήθος των τερματικών κόμβων του T_v. Ορίζουμε:

- A_v είναι το πλήθος των ακμών οι οποίες δημιουργούνται αντιστοιχίζοντας κόμβους του υποδέντρου T_v.
- K_v είναι το πλήθος των κόμβων του υποδέντρου T_v που δεν αντιστοιχίζονται και είναι ίσο με $|Leaf(v)| - 2A_v$.

Στόχος μας είναι ο υπολογισμός του ζεύγους $(A_r,\ K_r)$ στη ρίζα του δέντρου.
Αν τελικά προκύψει ότι

$$(A_r,\ K_r) = \left(\frac{|V|}{2},\ 0\right),$$

όπου με $|V|$ συμβολίζουμε το πλήθος των κόμβων του G, τότε το co-γράφημα G έχει τέλεια αντιστοίχιση.

Βασική προϋπόθεση πιθανής ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης στο G είναι, το πλήθος των κόμβων του G να είναι άρτιο. Συνεπώς, ο αλγόριθμος αρχίζει εκτελώντας το ακόλουθο βήμα:

✓ *Εάν το πλήθος των τερματικών κόμβων είναι περιττό, τότε ΔΕΝ υπάρχει Τέλεια Αντιστοίχιση, και τερμάτισε.*

Σε κάθε τερματικό κόμβο v του co-δέντρου αναθέτουμε μία επιγραφή (label) ως εξής:

$$(A_v,\ K_v),\ \text{όπου}\ A_v,\ K_v \in N$$

Οι αρχικές τιμές των επιγραφών έχουν ως εξής:

$$\textit{Τερματικοί κόμβοι} \Rightarrow (0,\ 1)$$

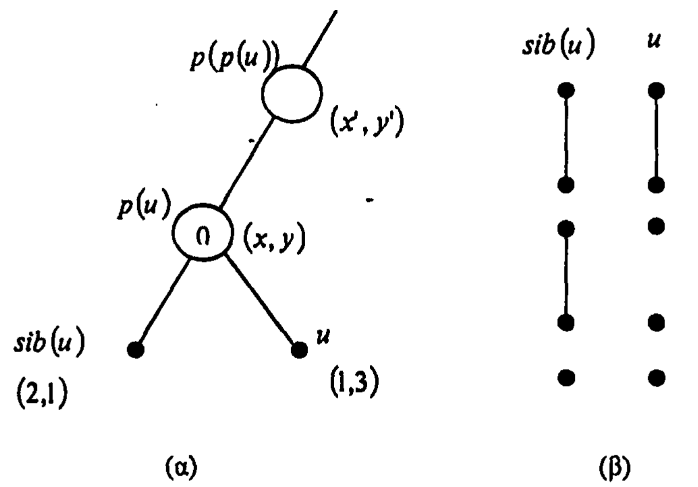
Αυτό σημαίνει ότι αρχικά δεν υφίσταται κάποια αντιστοίχιση μεταξύ τερματικών κόμβων και ότι υπάρχει ο ίδιος ο κόμβος ελεύθερος.

Για τους εσωτερικούς κόμβους δεν χρειάζεται να ορίσουμε τέτοιες ετικέτες διότι ο αλγόριθμος δουλεύει πάντα με τερματικούς κόμβους και ποτέ με εσωτερικούς, καθώς η συρρίκνωση του δέντρου γίνεται με συστηματικό τρόπο από κάτω προς τα πάνω, και σε κάθε επίπεδο από τα αριστερά προς τα δεξιά,. Έτσι θεωρούμε ότι οι ετικέτες των εσωτερικών κόμβων είναι πάντα ίσες με (0,0), και συνεπώς δεν προσμετρώνται κάθε φορά που υπολογίζονται νέες ετικέτες.

Η εφαρμογή της τεχνικής συρρίκνωσης δέντρου στο δυαδικό co-δέντρο προκαλεί την απομάκρυνση κόμβων από αυτό. Οι επιγραφές των κόμβων που απομένουν προσαρμόζονται κατάλληλα ανάλογα με το είδος του πατέρα του κόμβου στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία RAKE, αν δηλαδή αυτός είναι 1-κόμβος ή 0-κόμβος, όπως επίσης και τη σχέση που έχουν τα πλήθη κόμβων και ακμών του κόμβου στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία και του αδερφού αυτού. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u>

Έστω ότι εφαρμόζουμε τη διαδικασία RAKE σε έναν κόμβο u ο πατέρας του οποίου είναι 0-κόμβος, δηλαδή ο κόμβος $p(u)$ είναι 0-κόμβος.



Σχήμα 2.1: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$.

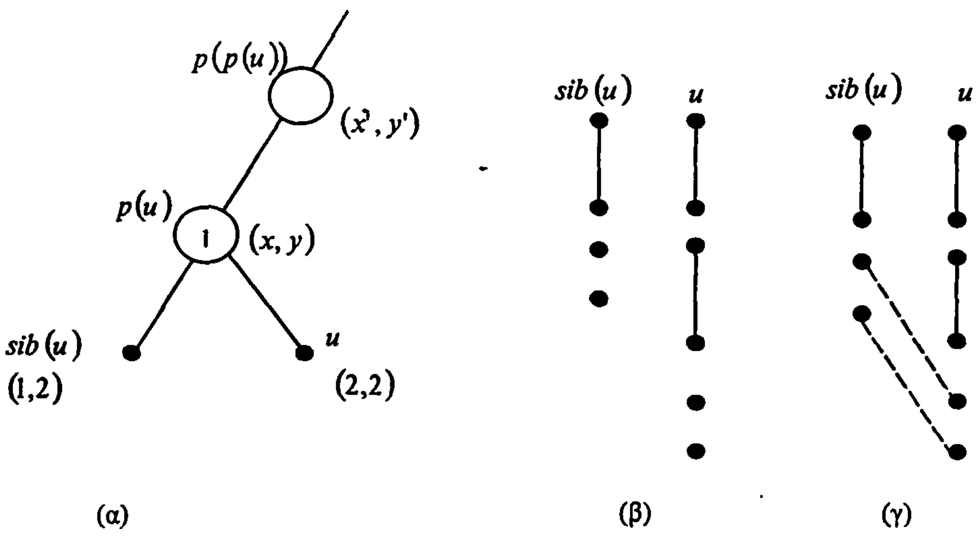
Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν κόμβοι στο αριστερό υποδέντρο του $p(u)$ με ρίζα τον κόμβο $sib(u)$ που να συνδέονται με ακμή με κόμβους του δεξιού υποδέντρου του $p(u)$ με ρίζα τον κόμβο u. Συνεπώς, αφού απομακρυνθούν οι κόμβοι u και $p(u)$ και γίνει η συγχώνευση του κόμβου $sib(u)$ με τον κόμβο $p(p(u))$, η νέα τιμή για το πλήθος ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $A_{sib(u)}$, είναι η ήδη υπάρχουσα τιμή $A_{sib(u)}$ συν την αντίστοιχη τιμή για τον κόμβο u, δηλαδή την τιμή A_u. Η νέα τιμή για το πλήθος κόμβων του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $K_{sib(u)}$, είναι η ήδη υπάρχουσα τιμή $K_{sib(u)}$ συν την αντίστοιχη τιμή για τον κόμβο u, δηλαδή την τιμή K_u. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(A_{sib(u)},\ K_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(A_{sib(u)} + A_u,\ K_{sib(u)} + K_u\right) \tag{2.1}$$

Υποθέτουμε ότι ο κόμβος $p(u)$ είναι 1-κόμβος. Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνουμε υπόψη τη σχέση που έχουν τα πλήθη κόμβων και ακμών του κόμβου u στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία RAKE και του αδερφού του $sib(u)$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

<u>**Περίπτωση 2**</u>

Υποθέτουμε αρχικά ότι ισχύει $K_u = K_{sib(u)}$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι K_u κόμβοι συνδέονται «ένα–προς–ένα» με τους $K_{sib(u)}$ κόμβους δημιουργώντας K_u ($= K_{sib(u)}$) νέες ακμές.



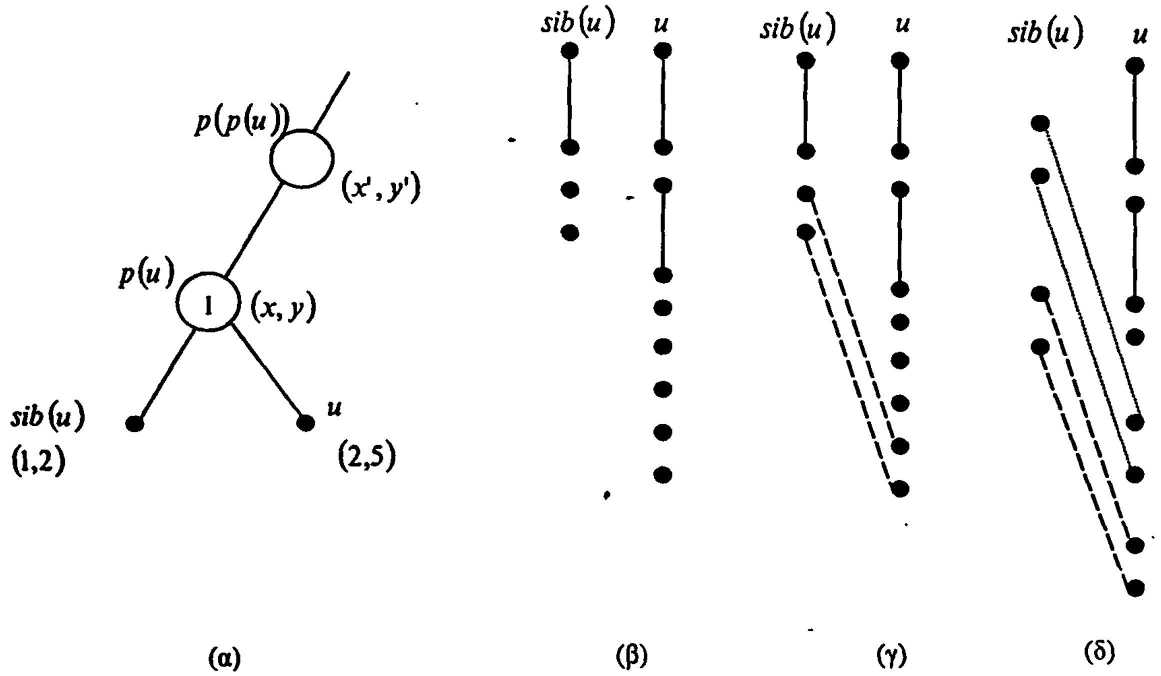
Σχήμα 2.2: (α) Οι κόμβοι *u* και *p*(*u*) πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων *u* και *sib*(*u*). (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται.

Συνεπώς, αφού απομακρυνθεί ο κόμβος u και ο πατέρας του $p(u)$ και γίνει η συγχώνευση του κόμβου $sib(u)$ με τον κόμβο $p(p(u))$, η νέα τιμή για το πλήθος ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $A_{sib(u)}$, είναι η ήδη υπάρχουσα τιμή $A_{sib(u)}$ συν την αντίστοιχη τιμή για τον κόμβο u, δηλαδή η τιμή A_u, συν K_u, όπου K_u είναι το πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται. Η νέα τιμή για το πλήθος κόμβων του κόμβου $sib(u)$ είναι ίση με μηδέν (0) εφόσον δεν απομένουν κόμβοι αταίριαστοι. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(A_{sib(u)},\ K_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(A_{sib(u)} + A_u + K_u,\ 0\right) \tag{2.2}$$

<u>**Περίπτωση 3**</u>

Θεωρούμε ότι ισχύει $K_{sib(u)} < K_u$ και $2A_{sib(u)} \le K_u - K_{sib(u)}$. Οι $K_{sib(u)}$ κόμβοι συνδέονται με $K_{sib(u)}$ κόμβους από τους K_u δημιουργώντας $K_{sib(u)}$ νέες ακμές. Επίσης, οι $A_{sib(u)}$ ακμές διασπώνται δημιουργώντας $2A_{sib(u)}$ κόμβους οι οποίοι συνδέονται με $2A_{sib(u)}$ κόμβους από τους $K_u - K_{sib(u)}$ κόμβους που δεν έχουν αντιστοιχιστεί. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται $2A_{sib(u)}$ επιπλέον νέες ακμές.



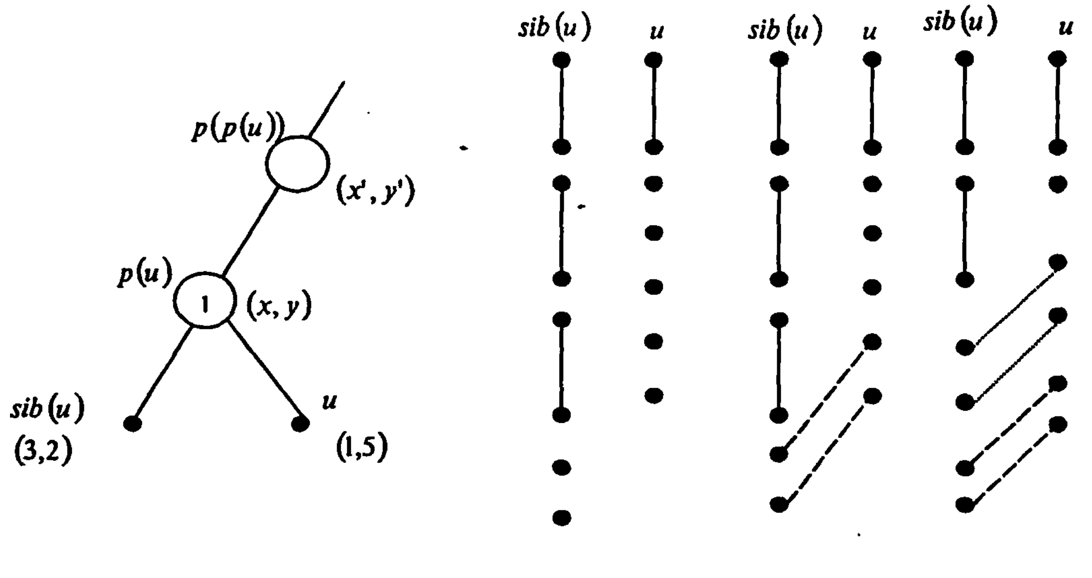
Σχήμα 2.3: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων. (δ) Οι $2A_{sib(u)}$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

Η νέα τιμή για το πλήθος ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $A_{sib(u)}$, προκύπτει από το άθροισμα της ήδη υπάρχουσας τιμής για τον κόμβο u, δηλαδή την τιμή A_u, συν τις τιμές $K_{sib(u)}$ και $2A_{sib(u)}$, που αντιστοιχούν στο πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται. Οι κόμβοι που απομένουν αταίριαστοι είναι στο πλήθος τους ίσοι με $K_u - K_{sib(u)} - 2A_{sib(u)}$. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(A_{sib(u)},\ K_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(K_{sib(u)} + 2A_{sib(u)} + A_u,\ K_u - K_{sib(u)} - 2A_{sib(u)}\right) \tag{2.3}$$

<u>Περίπτωση 4</u>

Υποθέτουμε ότι ισχύει $K_{sib(u)} < K_u$ και $2A_{sib(u)} > K_u - K_{sib(u)}$, τότε οι $K_{sib(u)}$ κόμβοι συνδέονται με $K_{sib(u)}$ κόμβους από τους K_u δημιουργώντας $K_{sib(u)}$ νέες ακμές. Επίσης, $K_u - K_{sib(u)}$ κόμβοι του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο u αντιστοιχίζονται με ίσους στο πλήθος κόμβους που παράγονται διασπώντας $\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil$ ακμές από τις $A_{sib(u)}$ δημιουργώντας $K_u - K_{sib(u)}$ νέες ακμές.



(α) (β) (γ) (δ)

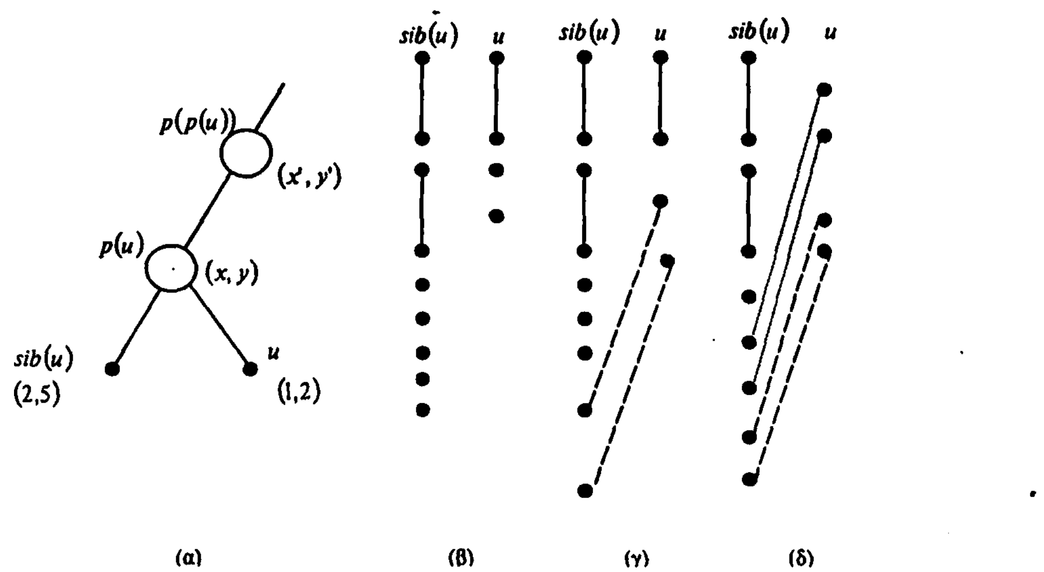
Σχήμα 2.4: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων. (δ) Οι $\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil$ επιπλέον νέες ακμές που δημιουργούνται.

Η νέα τιμή για το πλήθος ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $A_{sib(u)}$, προκύπτει από τις τιμές $K_{sib(u)}$ και $K_u - K_{sib(u)}$ που αντιστοιχούν στο πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται, συν $A_{sib(u)} - \left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil$ ακμές που απομένουν χωρίς να διασπαστούν στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο $sib(u)$, συν την ήδη υπάρχουσα τιμή για τον κόμβο u, δηλαδή την τιμή A_u. Όσον αφορά το πλήθος των κόμβων που απομένουν αταίριαστοι αυτό είναι ίσο είτε με 1 εάν το $K_u - K_{sib(u)}$ είναι περιττός αριθμός είτε με 0 εάν το $K_u - K_{sib(u)}$ είναι άρτιος αριθμός. Η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(A_{sib(u)},\ K_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(A_{sib(u)} - \left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil + A_u + K_u,\ \begin{cases} 1, & \text{αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ 0, & \text{αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases} \right) \quad (2.4)$$

Περίπτωση 5

Θεωρούμε ότι ισχύει $K_{sib(u)} > K_u$ και $2A_u \le K_{sib(u)} - K_u$. Σε αυτή την περίπτωση οι K_u κόμβοι συνδέονται με K_u από τους $K_{sib(u)}$ κόμβους δημιουργώντας K_u νέες ακμές. Επίσης, οι A_u ακμές διασπώνται δημιουργώντας $2A_u$ κόμβους οι οποίοι συνδέονται με $2A_u$ κόμβους από τους $K_{sib(u)} - K_u$ που έχουν μείνει αταίριαστοι. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται $2A_u$ επιπλέον νέες ακμές και απομένουν $K_{sib(u)} - K_u - 2A_u$ κόμβοι αταίριαστοι.



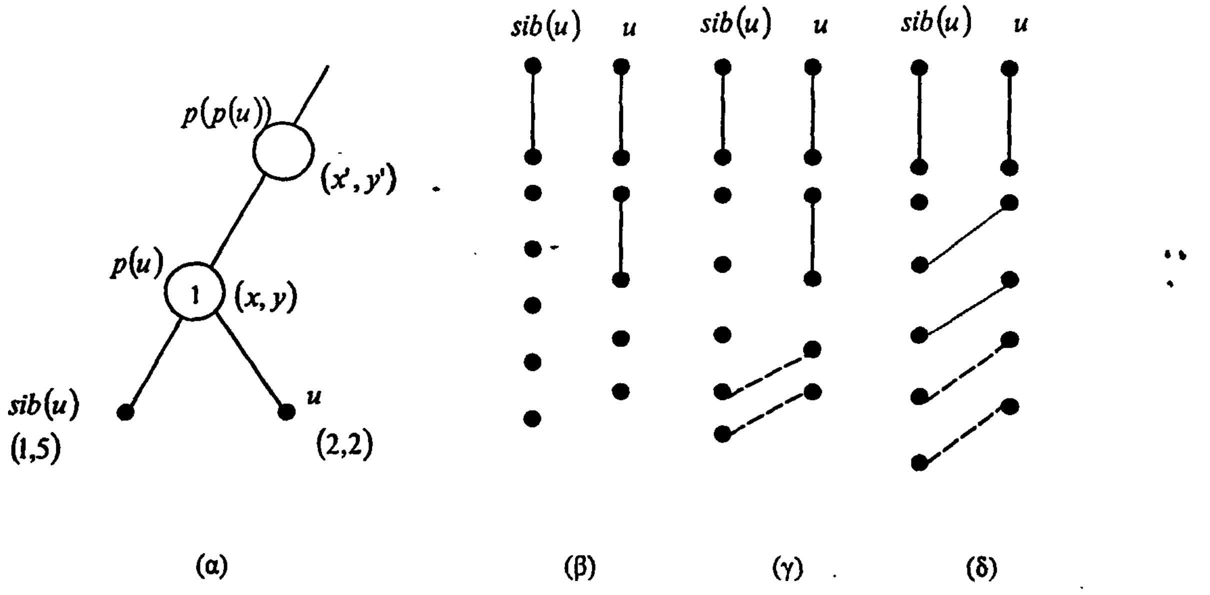
Σχήμα 2.5: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των K_u κόμβων. (δ) Οι $2A_u$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

Η νέα τιμή για το πλήθος ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $A_{sib(u)}$, προκύπτει από την ήδη υπάρχουσα τιμή για τον κόμβο $sib(u)$, δηλαδή την τιμή $A_{sib(u)}$, συν τις τιμές K_u και $2A_u$, που αντιστοιχούν στο πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται. Οι κόμβοι που απομένουν αταίριαστοι είναι στο πλήθος τους ίσοι με $K_{sib(u)} - K_u - 2A_u$. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(A_{sib(u)},\ K_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(A_{sib(u)} + K_u + 2A_u,\ K_{sib(u)} - K_u - 2A_u\right) \tag{2.5}$$

<u>Περίπτωση 6</u>

Έστω ότι ισχύει $K_{sib(u)} > K_u$ και $2A_u > K_{sib(u)} - K_u$, τότε οι K_u κόμβοι συνδέονται με K_u κόμβους από τους $K_{sib(u)}$ δημιουργώντας K_u νέες ακμές. Επίσης, $K_{sib(u)} - K_u$ κόμβοι αντιστοιχίζονται με ίσους στο πλήθος κόμβους οι οποίοι παράγονται διασπώντας $\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil$ ακμές από τις A_u δημιουργώντας $K_{sib(u)} - K_u$ νέες ακμές.



Σχήμα 2.6: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των K_u κόμβων. (δ) Οι $\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

Η νέα τιμή για το πλήθος ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $A_{sib(u)}$, προκύπτει από τις τιμές K_u και $K_{sib(u)} - K_u$ που αντιστοιχούν στο πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται, συν $A_u - \left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil$ ακμές που απομένουν χωρίς να διασπαστούν, συν την ήδη υπάρχουσα τιμή για τον κόμβο $sib(u)$, δηλαδή την τιμή $A_{sib(u)}$. Όσον αφορά το πλήθος των κόμβων που απομένουν αταίριαστοι αυτό είναι ίσο είτε με 1 εάν το $K_{sib(u)} - K_u$ είναι περιττός αριθμός είτε με 0 εάν το $K_{sib(u)} - K_u$ είναι άρτιος αριθμός. Η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(A_{sib(u)},\ K_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(A_{sib(u)} + A_u - \left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil + K_{sib(u)},\ \begin{cases} 1, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ 0, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases} \right) \quad (2.6)$$

Συνοπτικά, το τμήμα του αλγορίθμου που περιλαμβάνει αυτούς τους ελέγχους έχει ως εξής:

- Εάν ο κόμβος $p(u)$ είναι 0-κόμβος, τότε:

  $A_{sib(u)} \leftarrow A_{sib(u)} + A_u$

  $K_{sib(u)} \leftarrow K_{sib(u)} + K_u$

- Εάν ο κόμβος $p(u)$ είναι 1-κόμβος, τότε:
  - Εάν $K_u = K_{sib(u)}$, τότε:

    $A_{sib(u)} \leftarrow A_{sib(u)} + A_u + K_u$

    $K_{sib(u)} \leftarrow 0$

  - Εάν $K_{sib(u)} < K_u$, τότε:
    - Εάν $2A_{sib(u)} \le K_u - K_{sib(u)}$, τότε:

      $A_{sib(u)} \leftarrow K_{sib(u)} + 2A_{sib(u)} + A_u$

      $K_{sib(u)} \leftarrow K_u - K_{sib(u)} - 2A_{sib(u)}$

    - Εάν $2A_{sib(u)} > K_u - K_{sib(u)}$, τότε:

      $A_{sib(u)} \leftarrow A_{sib(u)} - \left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil + A_u + K_u$

      $K_{sib(u)} \leftarrow \begin{cases} 1, & \text{αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ 0, & \text{αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases}$

- Εάν $K_{sib(u)} > K_u$, τότε:
  - Εάν $2A_u \le K_{sib(u)} - K_u$, τότε:

$$A_{sib(u)} \leftarrow A_{sib(u)} + K_u + 2A_u$$

$$K_{sib(u)} \leftarrow K_{sib(u)} - K_u - 2A_u$$

  - Εάν $2A_u > K_{sib(u)} - K_u$, τότε

$$A_{sib(u)} \leftarrow A_{sib(u)} + A_u - \left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil + K_{sib(u)}$$

$$K_{sib(u)} \leftarrow \begin{cases} 1, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ 0, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases}$$

Οι πέντε περιπτώσεις όπου ο κόμβος $p(u)$ είναι ένας 1-κόμβος μπορούν να αναχθούν σε μία περίπτωση, ως ακολούθως:

Έστω (A, K) το ζεύγος τιμών ακμών και κόμβων για τον κόμβο $p(u)$. Έστω (A_1, K_1) και (A_2, K_2), και έστω χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $2A_1 + K_1 \ge 2A_2 + K_2$. Τότε, η νέα τιμή για το ζεύγος (A, K) έχει ως ακολούθως:

$$K \leftarrow 2(A_1 + A_2 - A) + K_1 + K_2$$

$$A \leftarrow 2A_2 + K_2 + \begin{cases} A_1 & \text{εάν } K_1 \gneq 2A_2 + K_2 \\ \left\lfloor \frac{2A_1 + K_1 - 2A_2 - K_2}{2} \right\rfloor & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν φτάνουμε στη ρίζα του co-δέντρου. Όταν ο αλγόριθμος ολοκληρωθεί υπολογίζουμε στη ρίζα r την έκφραση (A_r, K_r), εφαρμόζοντας μια από τις περιπτώσεις (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), εφόσον η ρίζα είναι ένας 1-κόμβος.

Σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, ο αλγόριθμος που μελετήθηκε είναι γραμμικός ως προς το πλήθος των κόμβων.

Θεώρημα 2.1. Ο αλγόριθμος απαιτεί χρόνο ίσο με $O(n)$.

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε δυαδικό co-δέντρο από κάτω προς τα πάνω ανά επίπεδο, και σε κάθε επίπεδο από τα αριστερά προς τα δεξιά. Σε κάθε επίπεδο δημιουργούνται ακμές, είτε αντιστοιχίζοντας ελεύθερους κόμβους, είτε διασπώντας ακμές για την απελευθέρωση κόμβων και τη χρήση αυτών στη δημιουργία νέων ακμών. Όταν προκαλείται διάσπαση μίας ακμής, απελευθερώνονται δύο κόμβοι. Αυτοί οι κόμβοι αντιστοιχίζονται με δύο ελεύθερους κόμβους δημιουργώντας δύο νέες ακμές. Τις πράξεις της διάσπασης της ακμής και της δημιουργία των νέων ακμών τις χρεώνονται οι ελεύθεροι κόμβοι. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου να είναι $O(n)$.

Η ορθότητα του αλγορίθμου προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. Ο αλγόριθμος σωστά αποφασίζει εάν ένα co-γράφημα έχει ή όχι τέλεια αντιστοίχιση.

Απόδειξη. Η ορθότητα προκύπτει από την ορθότητα της διαδικασίας RAKE και τις αποδείξεις των σχέσεων (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) και (2.6).

Κεφαλαιο 3

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

Εφόσον αποφασίσουμε ότι ένα co-γράφημα έχει τέλεια αντιστοίχιση, το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ο αλγόριθμος υπολογισμού μίας τέλειας αντιστοίχισης. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στην δεντρική αναπαράσταση ενός co-γραφήματος και χρησιμοποιεί την τεχνική της συρρίκνωσης του co-δέντρου (Κεφάλαιο 2).

Η δομή του κεφαλαίου έχει ως ακολούθως: στην παράγραφο 3.1 παρουσιάζουμε τις δομές δεδομένων που χρησιμοποιούμε για την αποθήκευση του δυαδικού co-δέντρου, και στην παράγραφο 3.2 παρουσιάζουμε τον ακολουθιακό αλγόριθμο υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης σε ένα co-γράφημα.

3.1 Δομές Δεδομένων

3.1.1 Αποθήκευση του δυαδικού co-δέντρου

Για την αποθήκευση του δυαδικού co-δέντρου εισάγουμε μία νέα δομή δεδομένων. Πρόκειται για ένα δέντρο κάθε κόμβος του οποίου αποτελείται από έξι ξεχωριστά πεδία. Ο τύπος κάθε κόμβου είναι της ακόλουθης μορφής:

```
TYPE treeptr = ^treenode;
     treenode = RECORD
```

llink: treeptr;[1] (*δείκτης στο αριστερό παιδί*)

rlink: treeptr (*δείκτης στο δεξί παιδί*)

data: **CHAR**; (*το είδος του κόμβου, αν είναι 0- ή 1-κόμβος ή σε περίπτωση που πρόκειται για τερματικό κόμβο σαν τιμή για το πεδίο αυτό χρησιμοποιείται ο ίδιος ο κόμβος. Αν πρόκειται για υπερκόμβο, τότε χρησιμοποιούμε έναν αντιπρόσωπο του υπερκόμβου.*)

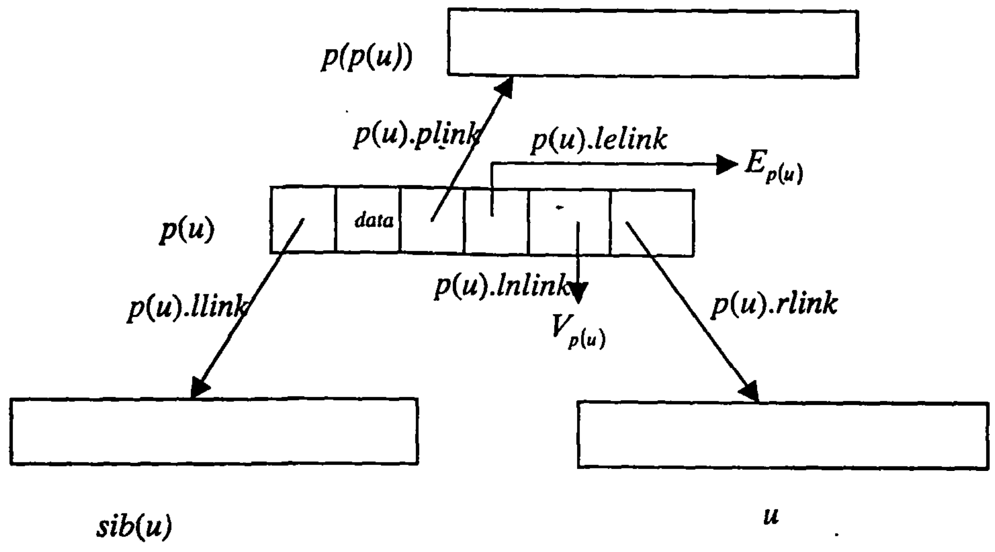
plink: treeptr; (*δείκτης στον πατέρα*)

lelink: nodeptr1; (*δείκτης στη λίστα ακμών*)

lnlink: nodeptr2; (*δείκτης στη λίστα κόμβων*)

END;

Σχηματικά, κάθε κόμβος του δέντρου έχει την μορφή που φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3. 1 Εσωτερικός κόμβος του δέντρου αποθήκευσης.

[1] Οι δείκτες στο αριστερό και στο δεξί παιδί είναι απαραίτητη πληροφορία για τους εσωτερικούς κόμβους. Για τους τερματικούς κόμβους τα πεδία αυτά είναι κενά.

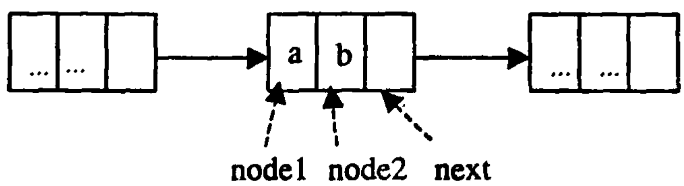
3.1.2 Αποθήκευση ακμών και κόμβων

Η αποθήκευση των συνόλων ακμών και κόμβων που δημιουργούνται κατά την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE γίνεται χρησιμοποιώντας συνδεδεμένες γραμμικές λίστες. Αυτές ονομάζονται αντίστοιχα ***συνδεδεμένη γραμμική λίστα ακμών*** και ***συνδεδεμένη γραμμική λίστα κόμβων***.

Κάθε κόμβος της συνδεδεμένης γραμμικής λίστας ακμών αποτελείται από τρία πεδία. Το πρώτο πεδίο είναι το *node1* και αναπαριστά το ένα άκρο της ακμής, το δεύτερο πεδίο είναι το *node2* και αναπαριστά το άλλο άκρο της ακμής και το τρίτο πεδίο περιλαμβάνει έναν δείκτη *next* στον επόμενο κόμβο στη λίστα.

Η λίστα ακμών είναι τύπου *nodeptr1*.

```
TYPE nodeptr1 = ^node;
          node = RECORD
          node1: CHAR;   (*το πρώτο άκρο της ακμής*)
          node2: CHAR;   (*το δεύτερο άκρο της ακμής*)
          next: nodeptr1   (*δείκτης στο επόμενο κόμβο της
                             λίστας*)
END;
```

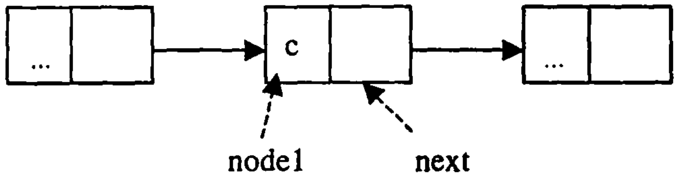


Σχήμα 3. 2 Κόμβος συνδεδεμένης γραμμικής λίστα ακμών που αναπαριστά την ακμή (*a*, *b*).

Κάθε κόμβος της συνδεδεμένης γραμμικής λίστας κόμβων αποτελείται από δύο πεδία. Το πρώτο πεδίο είναι το *node* και αναπαριστά τον ίδιο τον κόμβο. Το δεύτερο πεδίο είναι ένας δείκτης *next* στον επόμενο κόμβο στη λίστα.

Η λίστα κόμβων είναι τύπου *nodeptr2*.

```
TYPE nodeptr2 = ^node;
        node = RECORD
                node1: CHAR;   (*ο κόμβος*)
                next: nodeptr2   (*δείκτης στο επόμενο κόμβο της
                                   λίστας*)
END;
```



Σχήμα 3. 3 Κόμβος συνδεδεμένης γραμμικής λίστα κόμβων που αναπαριστά τον κόμβο *c*.

Υπάρχουν τέσσερις πράξεις μεταξύ των λιστών που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτές είναι η πράξη της *Συνένωσης* (***Concatenate***) λιστών, η πράξη της *Διαγραφής* (***Delete***) κόμβου μίας λίστας, η πράξη της *Εισαγωγής* (***Insert***) κόμβου σε μία λίστα, και η πράξη υπολογισμού του μήκους μίας λίστας ***ListLength***.

3.2 Υπολογισμός Τέλειας Αντιστοίχισης

Ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης είναι μία επέκταση του αλγορίθμου για το αντίστοιχο πρόβλημα ελέγχου.

Ορισμός 3.1 Έστω T_v το υποδέντρο του co-δέντρου με ρίζα τον κόμβο v και $Leaf(v)$ το σύνολο των παιδιών του v που είναι φύλλα Ορίζουμε:

- E_v είναι το σύνολο των ακμών οι οποίες δημιουργούνται στο T_v, και στο πλήθος τους είναι ίσες με A_u.
- V_v είναι το σύνολο των κόμβων του υποδέντρου T_v που δεν έχουν αντιστοιχιστεί, και στο πλήθος τους είναι ίσοι με K_u.

Στόχος μας είναι ο υπολογισμός του ζεύγους $(E_v,\ V_v)$ στη ρίζα του δέντρου. Αν τελικά προκύψει ότι

$$K_v = 0$$

τότε οι ακμές που περιέχονται στο σύνολο ακμών αποτελούν την τέλεια αντιστοίχιση. Το γεγονός ότι το σύνολο κόμβων είναι κενό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν κόμβοι που να έχουν μείνει αταίριαστοι.

Αρχικά, μετατρέπουμε το co-δέντρο σε δυαδικό. Η δυαδική μορφή του δέντρου μας επιτρέπει τη χρήση της τεχνικής συρρίκνωσης δέντρου.

Η επιλογή των ζευγών κόμβων που μας δίνουν τις ακμές της αντιστοίχισης βασίζεται ως επί των πλείστων και στην ακόλουθη ισοδυναμία: *Ένας τερματικός κόμβος που ανήκει στο αριστερό υποδέντρο ενός εσωτερικού κόμβου που είναι 1-κόμβος μπορεί ισοδύναμα να αντιστοιχιστεί με οποιονδήποτε τερματικό κόμβο του δεξιού υποδέντρου αυτού του κόμβου.* Αυτή η ισοδυναμία μας επιτρέπει να αποφύγουμε τον εκθετικό χρόνο που πετυχαίνουμε εάν δεν τη θεωρήσουμε. Σε περίπτωση που δεν λαμβάναμε υπόψη μας μία τέτοια ισοδυναμία θα έπρεπε σε κάθε βήμα να ελέγχουμε όλα τα πιθανά ζεύγη κόμβων.

Σε κάθε τερματικό κόμβο του co-δέντρου αναθέτουμε μία επιγραφή (label) ως εξής:

$(E_v,\ V_v)$, όπου $E_v,\ V_v$ είναι σύνολα ακμών και κόμβων, αντίστοιχα.

Για τους εσωτερικούς κόμβους τα σύνολα αυτά είναι κενά.

Οι αρχικές τιμές των επιγραφών έχουν ως ακολούθως:

$$\textit{Τερματικοί κόμβοι} \Rightarrow (\varnothing, \{v\}),$$

όπου v ένας οποιοσδήποτε κόμβος φύλλο.

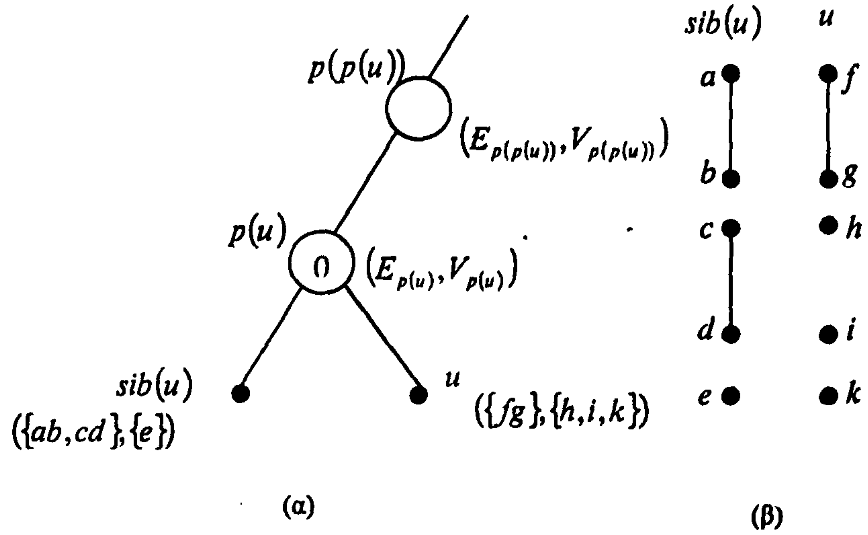
Δηλαδή, για τους τερματικούς κόμβους το σύνολο ακμών είναι αρχικά κενό ενώ το σύνολο κόμβων περιέχει ένα στοιχείο, τον ίδιο τον κόμβο.

Η εφαρμογή της τεχνικής συρρίκνωσης δέντρου στο δυαδικό co-δέντρο προκαλεί την απομάκρυνση κόμβων από αυτό. Οι επιγραφές των κόμβων που απομένουν προσαρμόζονται κατάλληλα ανάλογα με το είδος του πατέρα του κόμβου στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία RAKE, αν δηλαδή αυτός είναι 1-κόμβος ή 0-κόμβος, όπως επίσης και τη σχέση που έχουν τα πλήθη κόμβων και ακμών του κόμβου στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία και του αδερφού αυτού.

Οι κόμβοι θεωρούνται υπερκόμβοι. Όταν θέλω να εφαρμόσω τη διαδικασία RAKE σε κάποιον κόμβο ο οποίος ανήκει σε υπερκόμβο, τότε κάνω RAKE όλο τον υπερκόμβο.

<u>Περίπτωση 1</u>

Η πρώτη περίπτωση περιλαμβάνει την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE σε έναν κόμβο *u* ο πατέρας του οποίου είναι 0-κόμβος, δηλαδή ο κόμβος $p(u)$ είναι 0-κόμβος.



Σχήμα 3.4: (α) Η κατάσταση του co-δέντρου πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων *u* και *sib(u)*.

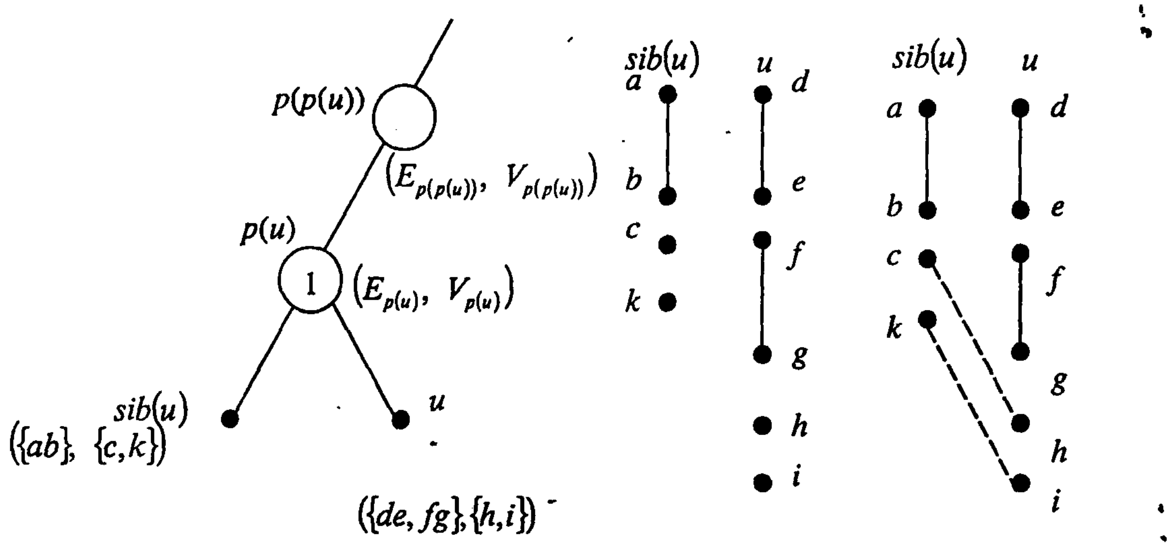
Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν κόμβοι στο αριστερό υποδέντρο του $p(u)$ με ρίζα τον κόμβο $sib(u)$ που να συνδέονται με ακμή με κόμβους του δεξιού υποδέντρου του $p(u)$ με ρίζα τον κόμβο *u*. Συνεπώς, αφού απομακρυνθεί ο κόμβος *u* και ο πατέρας του $p(u)$ και γίνει η συγχώνευση του κόμβου $sib(u)$ με τον κόμβο $p(p(u))$, το νέο σύνολο ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $E_{sib(u)}$, είναι η ένωση του ήδη υπάρχοντος συνόλου $E_{sib(u)}$ με το αντίστοιχο σύνολο για τον κόμβο *u*, δηλαδή το σύνολο E_u. Όμοια, το νέο σύνολο κόμβων του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $V_{sib(u)}$, είναι η ένωση του ήδη υπάρχοντος συνόλου $V_{sib(u)}$ με το αντίστοιχο σύνολο για τον κόμβο *u*, δηλαδή το σύνολο V_u. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(E_{sib(u)},\ V_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(E_{sib(u)} \cup E_u,\ V_{sib(u)} \cup V_u\right) \tag{3.1}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τις περιπτώσεις όπου ο κόμβος $p(u)$ είναι 1-κόμβος. Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνουμε υπόψη τη σχέση που έχουν οι πληθικοί αριθμοί των συνόλων κόμβων και ακμών του κόμβου *u* στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία RAKE και του αδερφού του $sib(u)$.

<u>Περίπτωση 2</u>

Υποθέτουμε αρχικά ότι ισχύει $K_u = K_{sib(u)}$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι K_u κόμβοι συνδέονται «ένα–προς–ένα» με τους $K_{sib(u)}$ κόμβους δημιουργώντας K_u ($= K_{sib(u)}$) νέες ακμές.



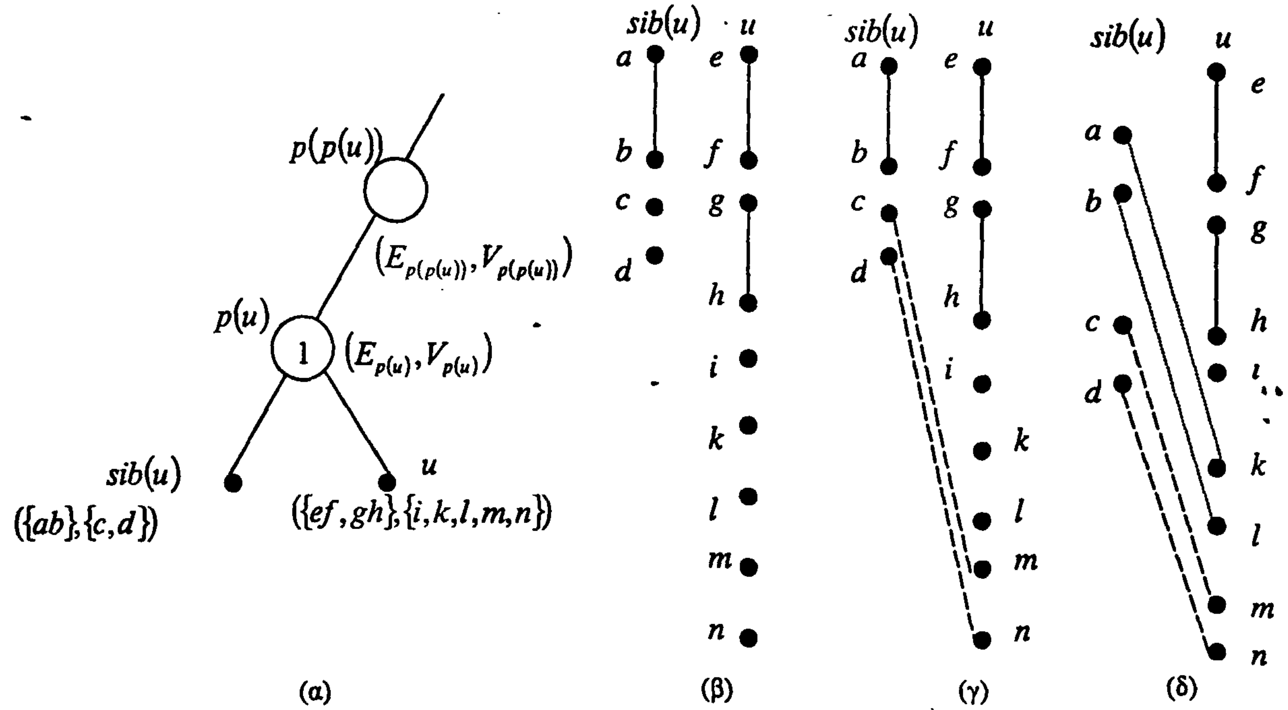
Σχήμα 3.5: (α) Οι κόμβοι *u* και *p*(*u*) πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων *u* και *sib*(*u*). (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται.

Συνεπώς, αφού απομακρυνθεί ο κόμβος *u* και ο πατέρας του $p(u)$ και γίνει η συγχώνευση του κόμβου $sib(u)$ με τον κόμβο $p(p(u))$, το νέο σύνολο ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $E_{sib(u)}$, είναι η ένωση του ήδη υπάρχοντος συνόλου $E_{sib(u)}$ με το σύνολο ακμών του κόμβου *u*, δηλαδή το σύνολο E_u, και το νέο σύνολο $\left\{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\right\}$ που δημιουργείται από την αντιστοίχιση των κόμβων του συνόλου V_u με τους κόμβους του συνόλου $V_{sib(u)}$. Το νέο σύνολο κόμβων του κόμβου $sib(u)$ είναι κενό εφόσον δεν απομένουν κόμβοι που να μην έχουν αντιστοιχιστεί στα σύνολα V_u και $V_{sib(u)}$. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(E_{sib(u)},\ V_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(E_{sib(u)} \cup E_u \cup \left\{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\right\}, \varnothing\right), \text{όπου } j = 1, \ldots, K_{sib(u)} \quad (3.2)$$

<u>Περίπτωση 3</u>

Στη συνέχεια, θεωρούμε την περίπτωση όπου ισχύει $K_{sib(u)} < K_u$ και $2A_{sib(u)} \leq K_u - K_{sib(u)}$. Οι $K_{sib(u)}$ κόμβοι συνδέονται με $K_{sib(u)}$ κόμβους από τους K_u δημιουργώντας $K_{sib(u)}$ νέες ακμές. Επίσης, οι $A_{sib(u)}$ ακμές διασπώνται δημιουργώντας $2A_{sib(u)}$ κόμβους οι οποίοι θα συνδεθούν με $2A_{sib(u)}$ κόμβους από τους $K_u - K_{sib(u)}$ κόμβους που δεν έχουν αντιστοιχιστεί. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται $2A_{sib(u)}$ επιπλέον νέες ακμές.



Σχήμα 3.6: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων. (δ) Οι $2A_{sib(u)}$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

Το νέο σύνολο ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $E_{sib(u)}$, προκύπτει από την ένωση του ήδη υπάρχοντος συνόλου ακμών για τον κόμβο u, δηλαδή το σύνολο E_u, με το σύνολο που προκύπτει από την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων με τους $K_{sib(u)}$ από τους K_u κόμβους, δηλαδή το $\{V_{sib(u)} \xleftrightarrow{j} V_u\}$, και το σύνολο που προκύπτει από την αντιστοίχιση των $2A_{sib(u)}$ κόμβων που παράγονται από τη διάσπαση των $A_{sib(u)}$ ακμών με τους $2A_{sib(u)}$ κόμβους από τους $K_u - K_{sib(u)}$ κόμβους που απομένουν, δηλαδή το σύνολο $\{V'_{sib(u)} \xleftrightarrow{i} V_u\}$. Οι κόμβοι που απομένουν αταίριαστοι σχηματίζουν το σύνολο $V_u - V'_{sib(u)} - E'_{sib(u)}$. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(E_{sib(u)},\ V_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(\{V_{sib(u)} \xleftrightarrow{j} V_u\} \cup \{V''_{sib(u)} \xleftrightarrow{i} V_u\} \cup E_u,\ V_u - V'_{sib(u)} - E'_{sib(u)}\right) \quad (3.3)$$

όπου, $j = 1, \ldots, K_{sib(u)}$,

$i = 1, \ldots, 2A_{sib(u)}$,

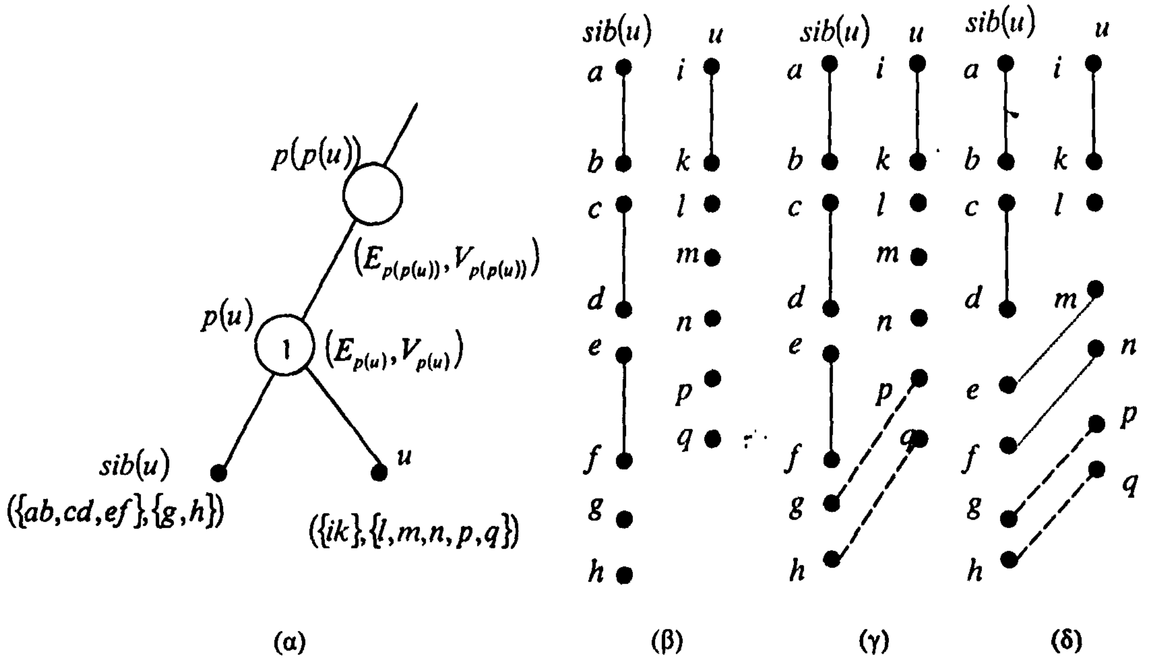
$V'_{sib(u)}$ είναι το σύνολο κόμβων από το V_u που αντιστοιχίζονται με τους κόμβους του συνόλου $V_{sib(u)}$.

$E'_{sib(u)}$ είναι το σύνολο κόμβων από το V_u που αντιστοιχίζονται με τους κόμβους που παράγονται από τη διάσπαση των $A_{sib(u)}$ ακμών.

$V''_{sib(u)}$ είναι το σύνολο κόμβων στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο ***sib(u)*** που προκύπτουν από τη διάσπαση των $A_{sib(u)}$ ακμών.

Περίπτωση 4

Εάν ισχύει ότι $K_{sib(u)} < K_u$ και $2A_{sib(u)} > K_u - K_{sib(u)}$, τότε οι $K_{sib(u)}$ κόμβοι συνδέονται με $K_{sib(u)}$ κόμβους από τους K_u δημιουργώντας $K_{sib(u)}$ νέες ακμές. Επίσης, $K_u - K_{sib(u)}$ κόμβοι του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο u αντιστοιχίζονται με ίσους στο πλήθος κόμβους που παράγονται από τη διάσπαση $\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil$ ακμών από τις $A_{sib(u)}$ δημιουργώντας $K_u - K_{sib(u)}$ νέες ακμές.



Σχήμα 3.7: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων. (δ) Οι $K_u - K_{sib(u)}$ επιπλέον νέες ακμές που δημιουργούνται.

Το σύνολο ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $E_{sib(u)}$, αποτελείται από την ένωση του συνόλου που προκύπτει από την αντιστοίχιση των κόμβων του συνόλου $V_{sib(u)}$ με $K_{sib(u)}$ κόμβους από τους κόμβους του συνόλου V_u, δηλαδή το σύνολο $\{V_{sib(u)} \xleftrightarrow{1} V_u\}$, με το σύνολο που προκύπτει από την αντιστοίχιση $K_u - K_{sib(u)}$ κόμβων του συνόλου V'_u, που περιέχει τους κόμβους που απέμειναν αταίριαστοι στο σύνολο V_u, με ίσους στο πλήθος κόμβους που προκύπτουν από τη διάσπαση $\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil$ ακμών του συνόλου $E_{sib(u)}$, δηλαδή το σύνολο $\{V'_u \xleftrightarrow{1} V'_{sib(u)}\}$, όπου $V'_{sib(u)}$ είναι το σύνολο κόμβων που προκύπτουν από την διάσπαση των $\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil$ ακμών του συνόλου $E_{sib(u)}$, καθώς επίσης και το σύνολο $E'_{sib(u)}$ που περιέχει τις ακμές που απομένουν χωρίς να διασπαστούν στο σύνολο $E_{sib(u)}$, και το σύνολο E_u. Για τους κόμβους που απομένουν αταίριαστοι το σύνολο είναι το $V''_{sib(u)}$, όπου $V''_{sib(u)}$ περιέχει τους κόμβους που απομένουν αταίριαστοι στο σύνολο $V_{sib(u)}$ και στο πλήθος τους είναι ίσοι με ένα, εάν το $K_u - K_{sib(u)}$ είναι περιττός αριθμός, ή μηδέν, εάν το $K_u - K_{sib(u)}$ είναι άρτιος αριθμός, αφού ολοκληρωθούν όλες οι αντιστοιχίσεις. Η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(E_{sib(u)}, V_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(\left\{ V_{sib(u)} \xleftrightarrow{j} V_u \right\} \cup \left\{ V'_u \xleftrightarrow{i} V'_{sib(u)} \right\} \cup E'_{sib(u)} \cup E_u, \begin{cases} V''_{sib(u)}, \text{ αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ \text{κενό, αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases} \right) \quad (3.4)$$

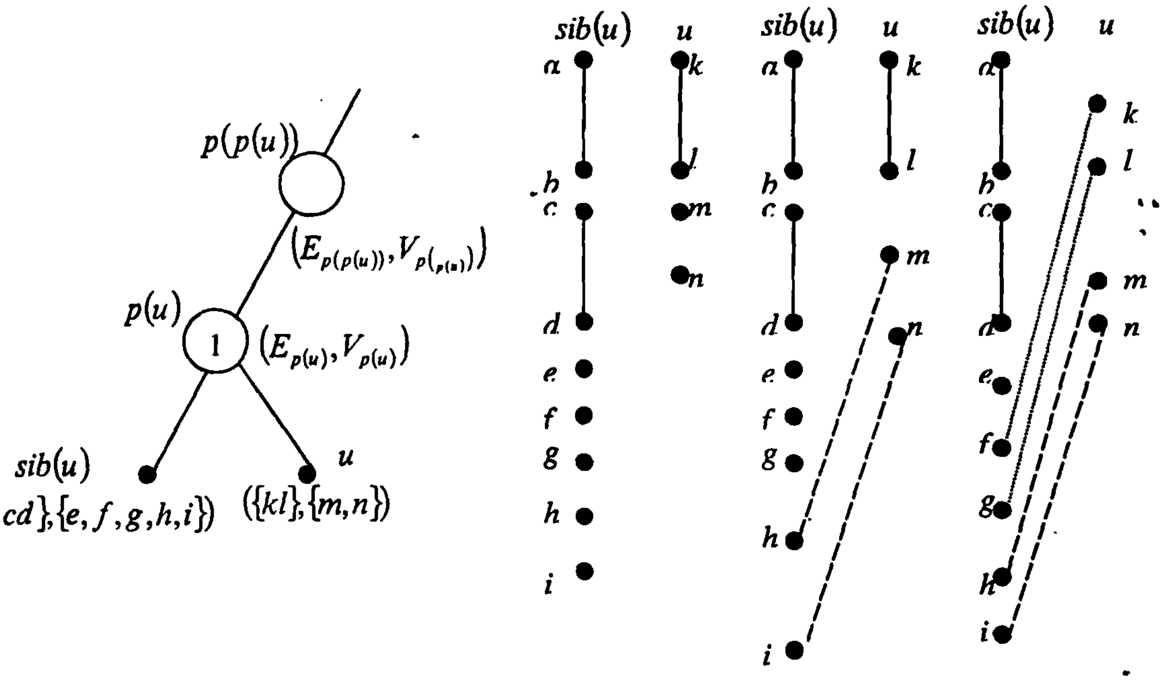
όπου, $j = 1,\ldots, K_{sib(u)}$,

$i = 1,\ldots, K_u - K_{sib(u)}$,

$V''_{sib(u)}$, είναι το σύνολο των κόμβων που απομένει στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο $sib(u)$.

<u>Περίπτωση 5</u>

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι ισχύει $K_{sib(u)} > K_u$ και $2A_u \le K_{sib(u)} - K_u$. Σε αυτή την περίπτωση οι K_u κόμβοι συνδέονται με K_u από τους $K_{sib(u)}$ κόμβους δημιουργώντας K_u νέες ακμές. Επίσης, οι A_u ακμές διασπώνται δημιουργώντας $2A_u$ κόμβους οι οποίοι συνδέονται με $2A_u$ κόμβους από τους $K_{sib(u)} - K_u$ που έχουν μείνει αταίριαστοι. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται $2A_u$ επιπλέον νέες ακμές και απομένουν $K_{sib(u)} - K_u - 2A_u$ κόμβοι αταίριαστοι.



Σχήμα 3.8 : (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των K_u κόμβων. (δ) Οι $2A_u$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

Το νέο σύνολο ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $E_{sib(u)}$, προκύπτει από την ένωση του ήδη υπάρχοντος συνόλου για τον κόμβο $sib(u)$, δηλαδή το σύνολο $E_{sib(u)}$, με το σύνολο ακμών που προκύπτει από την αντιστοίχιση των K_u κόμβων με K_u από τους $K_{sib(u)}$ κόμβους, δηλαδή το σύνολο $\{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\}$, καθώς επίσης και το σύνολο που προκύπτει από την αντιστοίχιση των $2A_u$ κόμβων της διάσπασης των A_u ακμών με ίσους στο πλήθος κόμβους από τους $K_{sib(u)} - K_u$, δηλαδή το σύνολο $\{V'_u \xleftrightarrow{i} V_{sib(u)}\}$. Για τους κόμβους που απομένουν αταίριαστοι το σύνολο είναι το $\{\{V_{sib(u)} - V'_u\} - E'_u\}$. Συνεπώς, η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$(E_{sib(u)}, V_{sib(u)}) \leftarrow (E_{sib(u)} \cup \{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\} \cup \{V''_u \xleftrightarrow{i} V_{sib(u)}\}, V_{sib(u)} - V'_u - E'_u) \quad (3.5)$$

όπου, $j = 1, \ldots, K_u$,

$i = 1, \ldots, 2A_u$,

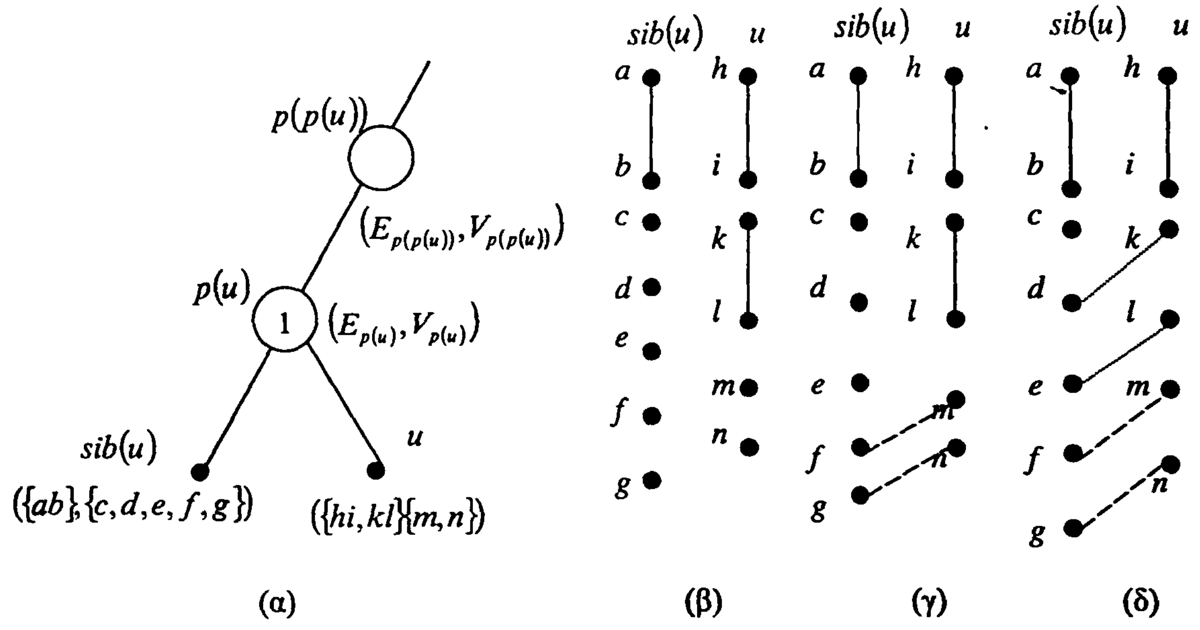
V'_u, είναι το σύνολο κόμβων από το $V_{sib(u)}$ που αντιστοιχίζονται με τους κόμβους του συνόλου V_u,

E'_u είναι το σύνολο κόμβων από το $V_{sib(u)}$ που αντιστοιχίζονται με τους κόμβους που παράγονται από τη διάσπαση των A_u ακμών.

V''_u είναι το σύνολο κόμβων στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο u που προκύπτουν από τη διάσπαση των A_u ακμών.

<u>Περίπτωση 6</u>

Εάν ισχύει ότι $K_{sib(u)} > K_u$ και $2A_u > K_{sib(u)} - K_u$, τότε οι K_u κόμβοι συνδέονται με K_u κόμβους από τους $K_{sib(u)}$ δημιουργώντας K_u νέες ακμές. Επίσης, $K_{sib(u)} - K_u$ κόμβοι του συνόλου $V_{sib(u)}$ αντιστοιχίζονται με ίσους στο πλήθος κόμβους οι οποίοι παράγονται διασπώντας $\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil$ ακμές από τις A_u δημιουργώντας $K_{sib(u)} - K_u$ νέες ακμές.



Σχήμα 3.9: (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των K_u κόμβων. (δ) Οι $K_{sib(u)} - K_u$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

Το νέο σύνολο ακμών του κόμβου $sib(u)$, δηλαδή το $E_{sib(u)}$, προκύπτει από την ένωση του συνόλου που παράγεται από την αντιστοίχιση K_u κόμβων με K_u από τους $K_{sib(u)}$ κόμβους, δηλαδή το σύνολο $\{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\}$, με το σύνολο που προκύπτει από την αντιστοίχιση $K_{sib(u)} - K_u$ κόμβων, που απομένουν αταίριαστοι στο $V_{sib(u)}$, με ίσους στο πλήθος κόμβους που παράγονται από τη διάσπαση $\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil$ ακμών, δηλαδή το σύνολο $\{V'_{sib(u)} \xleftrightarrow{i} V'_u\}$, όπου V'_u είναι το σύνολο των κόμβων που προκύπτει από τη διάσπαση $\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil$ ακμών από το σύνολο E_u, καθώς επίσης και το σύνολο E'_u των ακμών του συνόλου E_u που απομένουν χωρίς να διασπαστούν, και το σύνολο $E_{sib(u)}$. Το νέο σύνολο κόμβων είναι το V''_u, όπου V''_u είναι το σύνολο των κόμβων που απομένουν αταίριαστοι στο V_u αφού ολοκληρωθούν όλες οι αντιστοιχίσεις, και έχει πληθικό αριθμό ίσο με ένα, εάν το $K_{sib(u)} - K_u$ είναι περιττός αριθμός, ή μηδέν, εάν το $K_{sib(u)} - K_u$ είναι άρτιος αριθμός. Η νέα επιγραφή έχει την ακόλουθη μορφή.

$$\left(E_{sib(u)},\ V_{sib(u)}\right) \leftarrow \left(E_{sib(u)} \cup \left\{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\right\} \cup \left\{V'_{sib(u)} \xleftrightarrow{i} V'_u\right\} \cup E'_u,\ \begin{cases} V''_u, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ \text{κενό}, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases} \right) \quad (3.6)$$

όπου, $j = 1, \ldots, K_u$,

$i = 1, \ldots, K_{sib(u)} - K_u$,

V''_u, είναι το σύνολο των κόμβων που απομένει στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο u.

Συνοπτικά, το τμήμα του αλγορίθμου που περιλαμβάνει αυτούς τους ελέγχους έχει ως εξής:

- Εάν ο κόμβος $p(u)$ είναι 0-κόμβος, τότε:

  $E_{sib(u)} \leftarrow E_{sib(u)} \cup E_u$

  $V_{sib(u)} \leftarrow V_{sib(u)} \cup V_u$

- Εάν ο κόμβος $p(u)$ είναι 1-κόμβος, τότε:
  - Εάν $K_u = K_{sib(u)}$, τότε:

    $E_{sib(u)} \leftarrow E_{sib(u)} \cup E_u \cup \left\{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\right\}$

    $V_{sib(u)} \leftarrow \varnothing$

  - Εάν $K_{sib(u)} < K_u$, τότε:
    - Εάν $2A_{sib(u)} \le K_u - K_{sib(u)}$, τότε:

      $E_{sib(u)} \leftarrow \left\{V_{sib(u)} \xleftrightarrow{j} V_u\right\} \cup \left\{V''_{sib(u)} \xleftrightarrow{i} V_u\right\} \cup E_u$

      $V_{sib(u)} \leftarrow V_u - V'_{sib(u)} - E'_{sib(u)}$

    - Εάν $2A_{sib(u)} > K_u - K_{sib(u)}$, τότε:

      $E_{sib(u)} \leftarrow \left\{V_{sib(u)} \xleftrightarrow{j} V_u\right\} \cup \left\{V'_u \xleftrightarrow{i} V'_{sib(u)}\right\} \cup E'_{sib(u)} \cup E_u$

      $$V_{sib(u)} \leftarrow \begin{cases} V''_{sib(u)}, & \text{αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ \text{κενό}, & \text{αν το } K_u - K_{sib(u)} \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases}$$

  - Εάν $K_{sib(u)} > K_u$, τότε:
    - Εάν $2A_u \le K_{sib(u)} - K_u$, τότε:

      $E_{sib(u)} \leftarrow E_{sib(u)} \cup \left\{V_u \xleftrightarrow{j} V_{sib(u)}\right\} \cup \left\{V''_u \xleftrightarrow{i} V_{sib(u)}\right\}$

      $V_{sib(u)} \leftarrow V_{sib(u)} - V'_u - E'_u$

    - Εάν $2A_u > K_{sib(u)} - K_u$, τότε

$$E_{sib(u)} \leftarrow E_{sib(u)} \cup \{V_u \xleftrightarrow{l} V_{sib(u)}\} \cup \{V'_{sib(u)} \xleftrightarrow{l} V'_u\} \cup E'_u$$

$$V_{sib(u)} \leftarrow \begin{cases} V'_u, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ \text{κενό}, & \text{αν το } K_{sib(u)} - K_u \text{ είναι άρτιος αριθμός} \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν φτάσουμε στη ρίζα. Όταν ο αλγόριθμος ολοκληρωθεί υπολογίζουμε στη ρίζα την έκφραση $(E_u,\ V_u)$ όπου *u=r*, εφαρμόζοντας μια από τις περιπτώσεις (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6).

Το γεγονός ότι στον αλγόριθμο υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης χρησιμοποιούνται σύνολα και όχι αριθμοί, όπως στον αλγόριθμο ελέγχου τέλειας αντιστοίχισης, δεν τροποποιεί την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Συνεπώς, έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 3.1. Ο αλγόριθμος απαιτεί χρόνο ίσο $O(n)$, ενώ η δημιουργία των συνόλων ακμών και κόμβων απαιτεί σταθερό χρόνο.

Απόδειξη. Όμοια με το θεώρημα 2.1.

Θεώρημα 3.2. Η ορθότητα προκύπτει από την ορθότητα της διαδικασίας RAKE και τις αποδείξεις των σχέσεων (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) και (3.6).

Απόδειξη. Όμοια με το θεώρημα 2.2.

Κεφαλαιο 4

ΜΕΓΙΣΤΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ

Σε προηγούμενα κεφάλαια αναπτύξαμε αλγορίθμους ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης και υπολογισμού αυτής σε περίπτωση που υπάρχει. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις που δεν έχουμε τέλεια αντιστοίχιση. Σε αυτήν την περίπτωση ζητάμε το μέγιστο υπογράφημα $\tilde{G}$ του G, έτσι ώστε το $\tilde{G}$ να είναι co-γράφημα και να έχει τέλεια αντιστοίχιση.

Για τον υπολογισμό του μέγιστου υπογραφήματος $\tilde{G}$ με τέλεια αντιστοίχιση χρησιμοποιούμε τους αλγορίθμους ελέγχου και υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης που αναπτύχθηκαν στα Κεφάλαιο 2 και 3, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης υπολογίζεται στη ρίζα το ζεύγος (A_r, K_r), ενώ ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης υπολογίζει στη ρίζα το ζεύγος (E_r, V_r). Εάν προκύψει ότι $K_r = k$, όπου $k \neq 0$, τότε το co-γράφημα G δεν έχει τέλεια αντιστοίχιση. Εάν αφαιρεθούν από το G οι k αταίριαστοι κόμβοι, τότε το $\tilde{G}$ έχει τέλεια αντιστοίχιση.

Ο αλγόριθμος που αναπτύσσεται σε αυτό το Κεφάλαιο είναι ο ίδιος ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης ενισχυμένος με κάποιες επιπλέον συνθήκες ελέγχου των κόμβων που δημιουργούν τις ακμές.

4.1 Υπολογισμός μέγιστου υπογραφήματος

Ο υπολογισμός του μέγιστου υπογραφήματος που έχει τέλεια αντιστοίχιση, όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει, βασίζεται στο ταίριασμα κόμβων του co-γραφήματος με μέγιστο βαθμό. Στην περίπτωση που το αρχικό co-γράφημα δεν έχει τέλεια αντιστοίχιση, σκοπός μας είναι να απομείνουν αταίριαστοι αυτοί οι k κόμβοι που το άθροισμα των βαθμών τους είναι ελάχιστο. Αφαιρώντας αυτούς τους κόμβους από το γράφημα αφαιρείται και το μικρότερο πλήθος ακμών, έτσι ώστε μετά από αυτή την αφαίρεση λαμβάνουμε το μέγιστο υπογράφημα $\widetilde{G}$ που έχει τέλεια αντιστοίχιση.

Στον αλγόριθμο υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 3, η επιλογή των ζευγών κόμβων που μας δίνουν τις ακμές της αντιστοίχισης βασίζεται στην ισοδυναμία ότι *ένας τερματικός κόμβος που ανήκει στο αριστερό υποδέντρο ενός εσωτερικού κόμβου που είναι 1-κόμβος μπορεί ισοδύναμα να αντιστοιχιστεί με οποιονδήποτε τερματικό κόμβο του δεξιού υποδέντρου αυτού του κόμβου.* Αυτή η ισοδυναμία δεν χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο υπολογισμού του μέγιστου υπογραφήματος, εφόσον σε αυτήν την περίπτωση μας ενδιαφέρει να ταιριάζουμε κόμβους που έχουν τον μεγαλύτερο βαθμό σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, ώστε στο τέλος οι κόμβοι που θα μείνουν αταίριαστοι να είναι αυτοί με το μικρότερο άθροισμα βαθμών.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης, ελέγχονται οι παρακάτω περιπτώσεις. Μερικές από τις περιπτώσεις που ακολουθούν ενισχύονται με επιπλέον συνθήκες, ώστε κάθε φορά να αντιστοιχίζονται οι κατάλληλοι κόμβοι.

<u>**Περίπτωση 1**</u>

Η πρώτη περίπτωση περιλαμβάνει την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE σε έναν κόμβο u ο πατέρας του οποίου είναι 0-κόμβος, δηλαδή ο κόμβος $p(u)$ είναι 0-κόμβος. Τα νέα σύνολα ακμών και κόμβων προκύπτουν από την ένωση των συνόλων ακμών και κόμβων των κόμβων u και $sib(u)$. Σε αυτή την περίπτωση, δεν δημιουργούνται νέες ακμές, οπότε δεν χρειάζεται να ελεγχθούν σχέσεις μεταξύ των βαθμών των κόμβων.

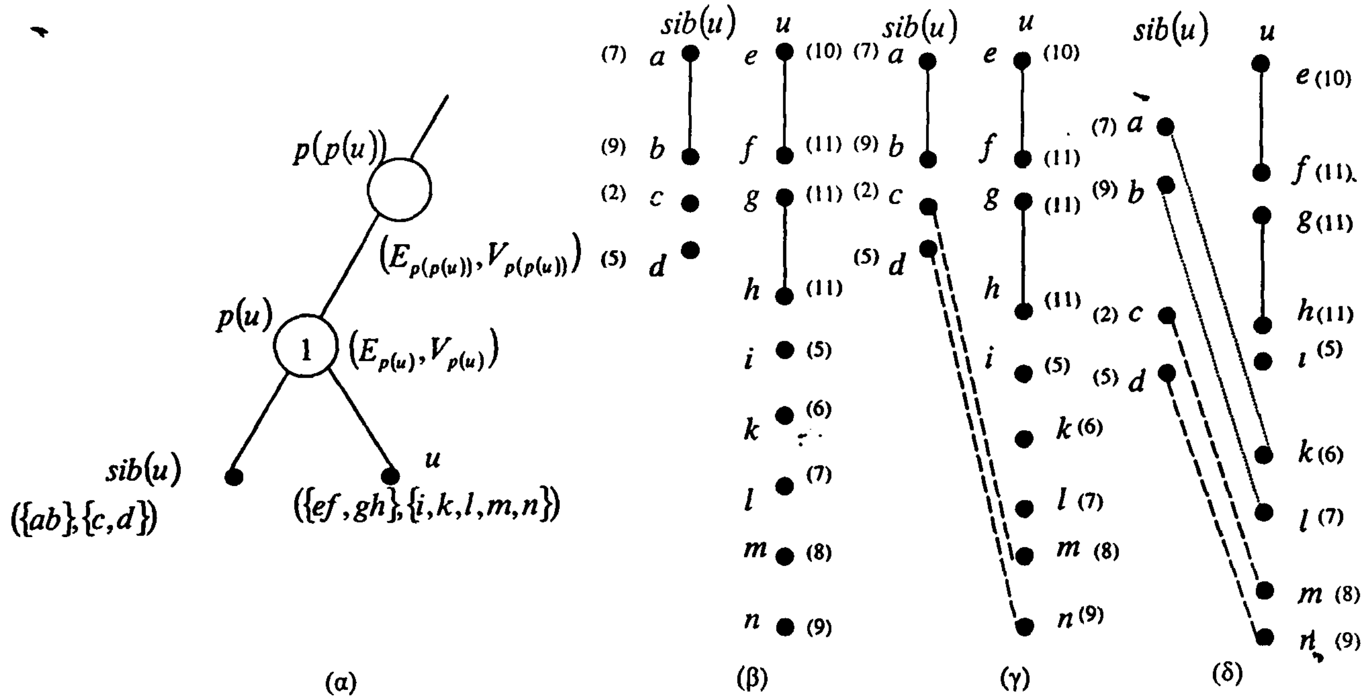
Στη συνέχεια θεωρούμε τις περιπτώσεις όπου ο κόμβος $p(u)$ είναι 1-κόμβος. Σε αυτήν την περίπτωση, λαμβάνεται υπόψη η σχέση που έχουν οι πληθικοί αριθμοί των συνόλων κόμβων και ακμών του κόμβου u στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία RAKE και του αδερφού του $sib(u)$, όπως επίσης και τη σχέση που έχουν οι βαθμοί των κόμβων που πρόκειται να δημιουργήσουν ακμή.

Περίπτωση 2

Έστω ότι ισχύει $K_u = K_{sib(u)}$. Οι K_u κόμβοι συνδέονται «ένα–προς–ένα» με τους $K_{sib(u)}$ κόμβους δημιουργώντας $K_u (= K_{sib(u)})$ νέες ακμές. Σε αυτή την περίπτωση, ο έλεγχος των βαθμών των κόμβων με τους οποίους δημιουργούνται ακμές είναι περιττός, εφόσον οι κόμβοι συνδέονται «ένα–προς-ένα» για τη δημιουργία ακμών και δεν απομένουν κόμβοι αταίριαστοι στα υποδέντρα των κόμβων *u* και *sib(u)*.

Περίπτωση 3

Έστω ότι ισχύει $K_{sib(u)} < K_u$ και $2A_{sib(u)} \leq K_u - K_{sib(u)}$. Οι $K_{sib(u)}$ κόμβοι συνδέονται με $K_{sib(u)}$ κόμβους από τους K_u με τους μεγαλύτερους βαθμούς δημιουργώντας $K_{sib(u)}$ νέες ακμές. Επίσης, οι $A_{sib(u)}$ ακμές διασπώνται δημιουργώντας $2A_{sib(u)}$ κόμβους οι οποίοι θα συνδεθούν με $2A_{sib(u)}$ κόμβους από τους $K_u - K_{sib(u)}$ εναπομείναντες κόμβους που δεν έχουν αντιστοιχιστεί και έχουν τους αμέσως μικρότερους βαθμούς. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται $2A_{sib(u)}$ επιπλέον νέες ακμές. Οι κόμβοι που απομένουν αταίριαστοι είναι στο πλήθος τους ίσοι με $K_u - K_{sib(u)} - 2A_{sib(u)}$, και είναι οι κόμβοι με τους μικρότερους βαθμούς. Εάν κατά την αντιστοίχιση ενός κόμβου, υπάρχουν δύο ή περισσότεροι κόμβοι με τον ίδιο βαθμό που μπορούν να επιλεχθούν, τότε η επιλογή οποιουδήποτε από αυτούς είναι ισοδύναμη.



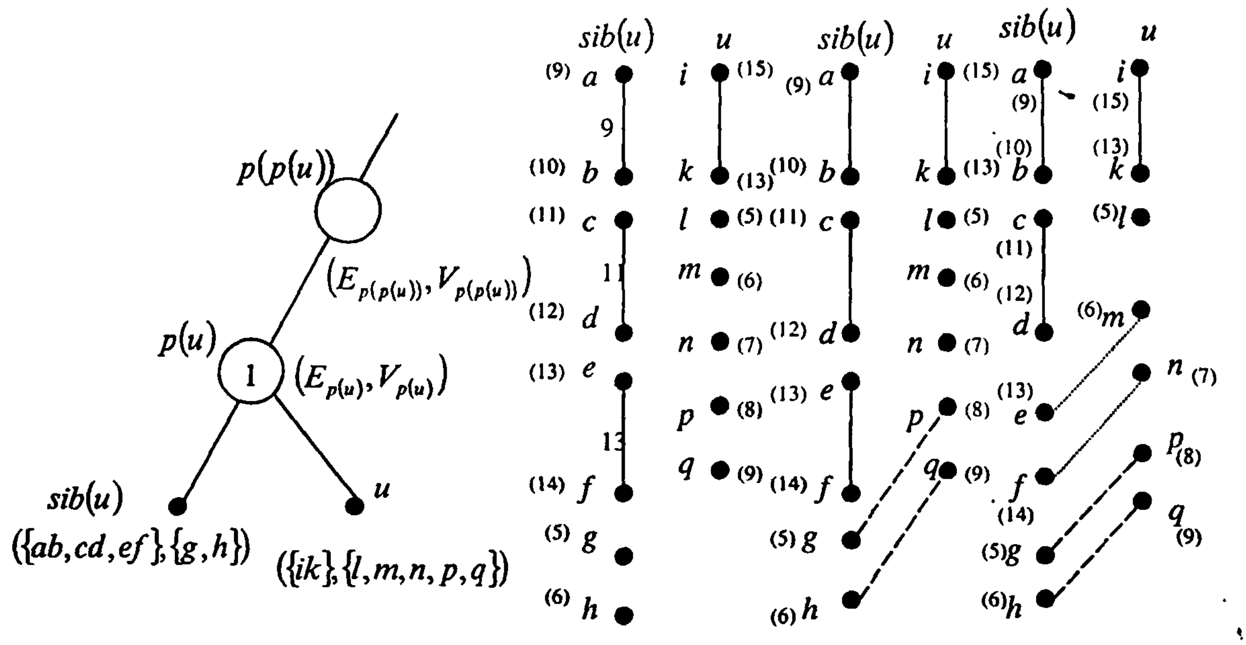
Σχήμα 4. 1 (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. Στους κόμβους αναγράφονται οι αντίστοιχοι βαθμοί. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων. (δ) Οι $2A_{sib(u)}$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

Περίπτωση 4

Εάν ισχύει ότι $K_{sib(u)} < K_u$ και $2A_{sib(u)} > K_u - K_{sib(u)}$, τότε οι $K_{sib(u)}$ κόμβοι συνδέονται με $K_{sib(u)}$ κόμβους από τους K_u με τους μεγαλύτερους βαθμούς δημιουργώντας $K_{sib(u)}$ νέες ακμές. Επίσης, $K_u - K_{sib(u)}$ κόμβοι με τους αμέσως μικρότερους βαθμούς του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο u αντιστοιχίζονται με ίσους στο πλήθος κόμβους που παράγονται από τη διάσπαση $\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil$ ακμών από τις $A_{sib(u)}$ δημιουργώντας $K_u - K_{sib(u)}$ νέες ακμές.

Για τους κόμβους που απομένουν αταίριαστοι το σύνολο είναι το $V''_{sib(u)}$, όπου $V''_{sib(u)}$ περιέχει τους κόμβους που απομένουν αταίριαστοι στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο $sib(u)$ και στο πλήθος τους είναι ίσοι με ένα, εάν το $K_u - K_{sib(u)}$ είναι περιττός αριθμός, ή μηδέν, εάν το $K_u - K_{sib(u)}$ είναι άρτιος αριθμός, αφού ολοκληρωθούν όλες οι αντιστοιχίσεις. Στην περίπτωση που απομένει ένας κόμβος, αυτός θα είναι είτε κόμβος του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο $sib(u)$ είτε κόμβος του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο *u*. Ο κόμβος που απομένει πρέπει να έχει και τον μικρότερο βαθμό. Σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος δουλεύει ως εξής: Οι ακμές του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο *sib*(*u*) ταξινομούνται με βάση μία ετικέτα (label) η οποία έχει τιμή ίση με το μικρότερο βαθμό μεταξύ των βαθμών των δύο κόμβων που την αποτελούν. Εάν το $K_u - K_{sib(u)}$ είναι περιττός αριθμός, τότε διασπώνται $\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil - 1$ ακμές με τις μεγαλύτερες ετικέτες στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *sib*(*u*), και αντιστοιχίζονται οι κόμβοι που προκύπτουν με τους $K_u - K_{sib(u)} - 1$ κόμβους με τους μεγαλύτερους βαθμούς στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *u*. Ο κόμβος που απομένει στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *u*, αντιστοιχίζεται με κόμβο που προκύπτει από τη διάσπαση μίας από τις $A_{sib(u)} - \left(\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil - 1 \right)$ ακμές που απομένουν στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *sib*(*u*). Η ακμή αυτή είναι εκείνη η ακμή με τη μικρότερη ετικέτα, άρα και άκρο με μικρότερο βαθμό, μεταξύ όλων των $A_{sib(u)} - \left(\left\lceil \frac{K_u - K_{sib(u)}}{2} \right\rceil - 1 \right)$ ακμών. Ο βαθμός αυτός συγκρίνεται με το βαθμό του ελεύθερου κόμβου, και εάν είναι μικρότερος τότε, η ακμή αυτή διασπάται και το άκρο με τον μεγαλύτερο βαθμό αντιστοιχίζεται με τον ελεύθερο κόμβο, αφήνοντας το άκρο με τον μικρότερο βαθμό ελεύθερο. Εάν ο βαθμός είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του ελεύθερου κόμβου, τότε μένει αταίριαστος ο κόμβος του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο *u*, χωρίς να προχωρήσει ο αλγόριθμος σε διάσπαση ακμής.

Εάν κατά την αντιστοίχιση ενός κόμβου, υπάρχουν δύο ή περισσότεροι κόμβοι με τον ίδιο βαθμό που μπορούν να επιλεχθούν, τότε η επιλογή οποιουδήποτε από αυτούς είναι ισοδύναμη.



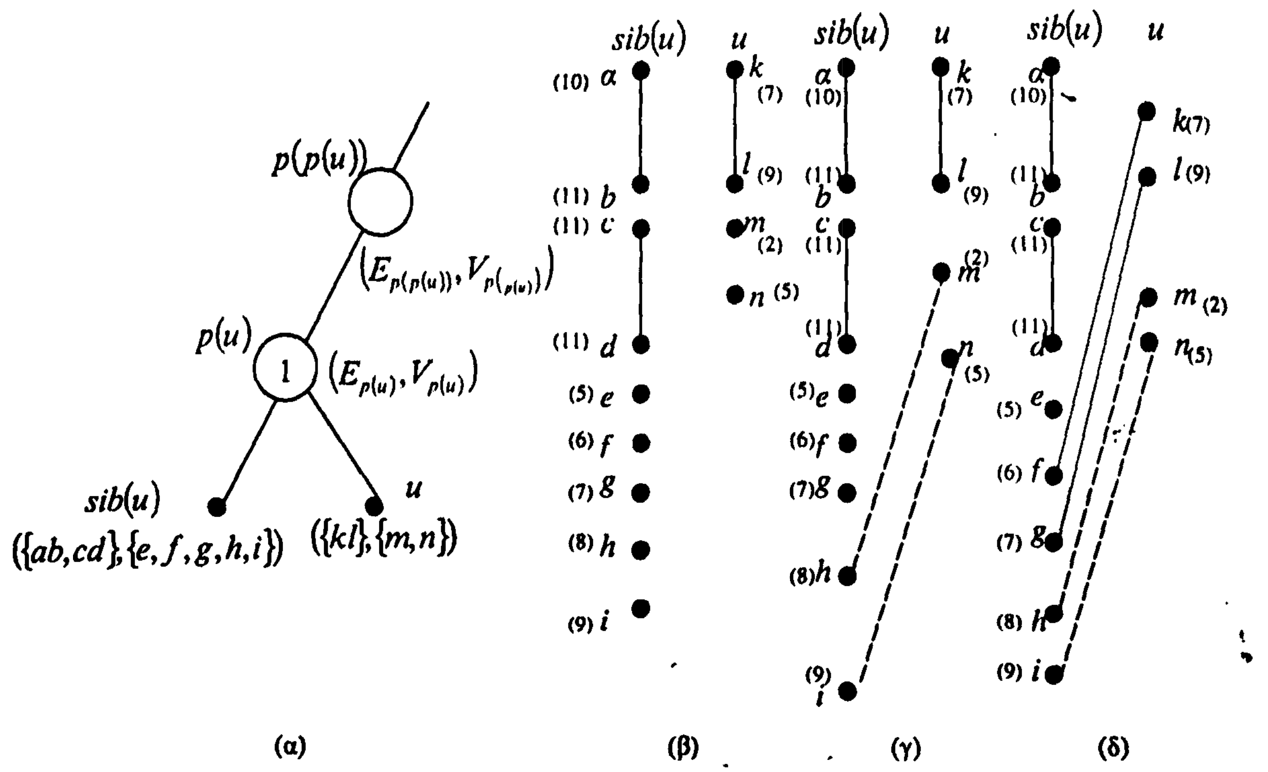
(α) (β) (γ) (δ)

Σχήμα 4. 2 (α) Οι κόμβοι *u* και *p*(*u*) πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων *u* και *sib*(*u*). Στους κόμβους αναγράφονται οι αντίστοιχοι βαθμοί. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων. (δ) Οι $K_u - K_{sib(u)}$ επιπλέον νέες ακμές που δημιουργούνται. Επειδή, ο βαθμός του κόμβου *a* είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του κόμβου *l*, η ακμή (*a*, *b*) δεν διασπάται και ο κόμβος *l* παραμένει χωρίς να αντιστοιχιστεί.

Περίπτωση 5

Έστω ότι ισχύει $K_{sib(u)} > K_u$ και $2A_u \le K_{sib(u)} - K_u$. Σε αυτή την περίπτωση οι K_u κόμβοι συνδέονται με K_u από τους $K_{sib(u)}$ κόμβους με τους μεγαλύτερους βαθμούς δημιουργώντας K_u νέες ακμές. Επίσης, οι A_u ακμές διασπώνται δημιουργώντας $2A_u$ κόμβους οι οποίοι συνδέονται με $2A_u$ κόμβους από τους $K_{sib(u)} - K_u$ που έχουν μείνει αταίριαστοι με τους αμέσως μικρότερους βαθμούς. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται $2A_u$ επιπλέον νέες ακμές και απομένουν $K_{sib(u)} - K_u - 2A_u$ κόμβοι αταίριαστοι. Αυτοί οι κόμβοι έχουν και τους μικρότερους βαθμούς.

Εάν κατά την αντιστοίχιση ενός κόμβου, υπάρχουν δύο ή περισσότεροι κόμβοι με τον ίδιο βαθμό που μπορούν να επιλεχθούν, τότε η επιλογή οποιουδήποτε από αυτούς είναι ισοδύναμη.



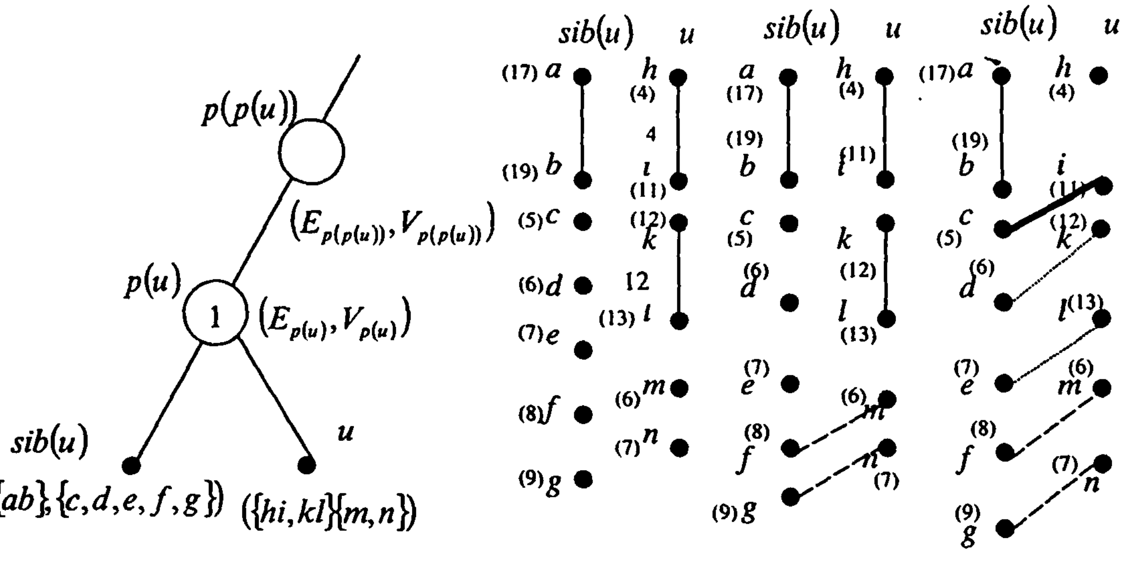
Σχήμα 4. 3 (α) Οι κόμβοι u και $p(u)$ πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων u και $sib(u)$. Στους κόμβους αναγράφονται και οι αντίστοιχοι βαθμοί. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των K_u κόμβων. (δ) Οι $2A_u$ νέες ακμές που δημιουργούνται.

<u>Περίπτωση 6</u>

Εάν ισχύει ότι $K_{sib(u)} > K_u$ και $2A_u > K_{sib(u)} - K_u$, τότε οι K_u κόμβοι συνδέονται με K_u κόμβους από τους $K_{sib(u)}$ με τους μεγαλύτερους βαθμούς δημιουργώντας K_u νέες ακμές. Επίσης, $K_{sib(u)} - K_u$ κόμβοι του συνόλου $V_{sib(u)}$ με τους αμέσως μικρότερους βαθμούς αντιστοιχίζονται με ίσους στο πλήθος κόμβους οι οποίοι παράγονται από τη διάσπαση $\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil$ ακμών από τις A_u δημιουργώντας $K_{sib(u)} - K_u$ νέες ακμές.

Για τους κόμβους που απομένουν αταίριαστοι το σύνολο είναι το V''_u, όπου V''_u περιέχει τους κόμβους που απομένουν αταίριαστοι στο σύνολο V_u και στο πλήθος τους είναι ίσοι με ένα, εάν το $K_{sib(u)} - K_u$ είναι περιττός αριθμός, ή μηδέν, εάν το $K_{sib(u)} - K_u$ είναι άρτιος αριθμός, αφού ολοκληρωθούν όλες οι αντιστοιχίσεις. Στην περίπτωση που απομένει ένας κόμβος, αυτός θα είναι είτε κόμβος του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο *sib(u)* είτε κόμβος του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο *u*. Ο κόμβος που απομένει έχει και τον μικρότερο βαθμό. Σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος δουλεύει ως εξής: Οι ακμές του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο *u* ταξινομούνται με βάση μία ετικέτα (label) η οποία, όπως και στην περίπτωση 4, έχει τιμή ίση με το μικρότερο βαθμό μεταξύ των βαθμών των δύο κόμβων που την αποτελούν. Εάν το $K_{sib(u)} - K_u$ είναι περιττός αριθμός, τότε διασπώνται $\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil - 1$ ακμές με τις μεγαλύτερες ετικέτες στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *u*, και αντιστοιχίζονται οι κόμβοι που προκύπτουν με τους $K_{sib(u)} - K_u - 1$ κόμβους με τους μεγαλύτερους βαθμούς. Ο κόμβος που απομένει στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *sib(u)*, αντιστοιχίζεται με κόμβο που προκύπτει από τη διάσπαση μίας από τις $A_u - \left(\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil - 1 \right)$ ακμές που απομένουν στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *u*. Η ακμή αυτή είναι εκείνη η ακμή με τη μικρότερη ετικέτα μεταξύ όλων των $A_u - \left(\left\lceil \frac{K_{sib(u)} - K_u}{2} \right\rceil - 1 \right)$ ακμών. Ο βαθμός αυτός συγκρίνεται με τον βαθμό του ελεύθερου κόμβου, και εάν είναι μικρότερος τότε, η ακμή αυτή διασπάται και το άκρο με τον μεγαλύτερο βαθμό αντιστοιχίζεται με τον ελεύθερο κόμβο, αφήνοντας το άκρο με τον μικρότερο βαθμό ελεύθερο. Εάν ο βαθμός είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του ελεύθερου κόμβου, τότε μένει αταίριαστος ο κόμβος στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο *sib(u)*, και ο αλγόριθμος δεν προχωρά σε διάσπαση ακμής.

Εάν κατά την αντιστοίχιση ενός κόμβου, υπάρχουν δύο ή περισσότεροι κόμβοι με τον ίδιο βαθμό που μπορούν να επιλεχθούν, τότε η επιλογή οποιουδήποτε από αυτούς είναι ισοδύναμη.



(α) (β) (γ) (δ)

Σχήμα 4. 4 (α) Οι κόμβοι *u* και *p*(*u*) πριν την εφαρμογή της διαδικασίας RAKE. (β) Οι ακμές και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στις επιγραφές των κόμβων *u* και *sib*(*u*). Στους κόμβους αναγράφονται οι αντίστοιχοι βαθμοί. (γ) Οι νέες ακμές που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση των $K_{sib(u)}$ κόμβων. (δ) Οι $K_u - K_{sib(u)}$ επιπλέον νέες ακμές που δημιουργούνται. Επειδή, ο βαθμός του κόμβου *c* είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του κόμβου *h*, η ακμή (*h*, *i*) διασπάται και δημιουργείται η ακμή (*c*, *i*) αφήνοντας ελεύθερο τον κόμβο *h*.

Σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του μέγιστου υπογραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση, όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει, είναι τετραγωνικός.

Θεώρημα 4.1. Ο αλγόριθμος υπολογισμού του μέγιστου υπογραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση, όταν το αρχικό γράφημα δεν έχει, και που παραμένει co-γράφημα, απαιτεί χρόνο ίσο με $O(n^2)$.

Απόδειξη. Οι δομές δεδομένων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος είναι αυτές που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3. Τους ελεύθερους κόμβους σε κάθε βήμα τους διατηρούμε σε έναν ταξινομημένο πίνακα κατά φθίνουσα σειρά. Για την ταξινόμηση χρησιμοποιούμε έναν γραμμικό αλγόριθμο ταξινόμησης, όπως τον Counting-Sort. Με βάση το γεγονός ότι ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης είναι γραμμικός και το γεγονός ότι χρησιμοποιείται γραμμικός αλγόριθμος ταξινόμησης, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n^2)$.

Κεφαλαιο 5

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΥΠΕΡΓΡΑΦΗΜΑ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ

Σε προηγούμενα κεφάλαια αναπτύξαμε αλγορίθμους ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης και υπολογισμού αυτής σε περίπτωση που υπάρχει, όπως επίσης και αλγορίθμους υπολογισμού του μέγιστου υπογραφήματος που έχει τέλεια αντιστοίχιση σε περίπτωση που το αρχικό γράφημα δεν έχει. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος $\hat{G}$ ενός co-γραφήματος G, έτσι ώστε το $\hat{G}$ να είναι co-γράφημα και να έχει τέλεια αντιστοίχιση. Στην παράγραφο 5.1 περιγράφεται το πρόβλημα υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος που έχει τέλεια αντιστοίχιση όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει, στην παράγραφο 5.2 αναλύεται ο αλγόριθμο υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος που προκύπτει προσθέτοντας στο αρχικό γράφημα μόνο ακμές.

5.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα που περιγράφεται και αναλύεται σε αυτό το κεφάλαιο έχει ως εξής:

> *«Εάν ένα co-γράφημα δεν έχει τέλεια αντιστοίχιση, τότε ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ακμών που πρέπει να προσθέσουμε στο γράφημα ώστε αυτό να είναι co-γράφημα και να έχει τέλεια αντιστοίχιση;»*

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνεται ο αλγόριθμος υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος το οποίο προκύπτει προσθέτοντας μόνο ακμές, το ελάχιστο πλήθος αυτών.

5.2 Ελάχιστο Υπεργράφημα με Προσθήκη Ακμών

Ο αλγόριθμος υπολογισμού του μικρότερου υπεργραφήματος που έχει τέλεια αντιστοίχιση και παραμένει co-γράφημα δουλεύει πάνω στους κόμβους που αφήνει αταίριαστους ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3. Οι κόμβοι αυτοί, για να πάρουμε στο τέλος το σωστό υπεργράφημα, σύμφωνα με τον αλγόριθμο, πρέπει να μετακινηθούν σε τέτοιες θέσεις στο co-δέντρο ώστε να προσθέτουν το μικρότερο πλήθος ακμών στο γράφημα, όταν πρόκειται να πάρουμε το υπεργράφημα.

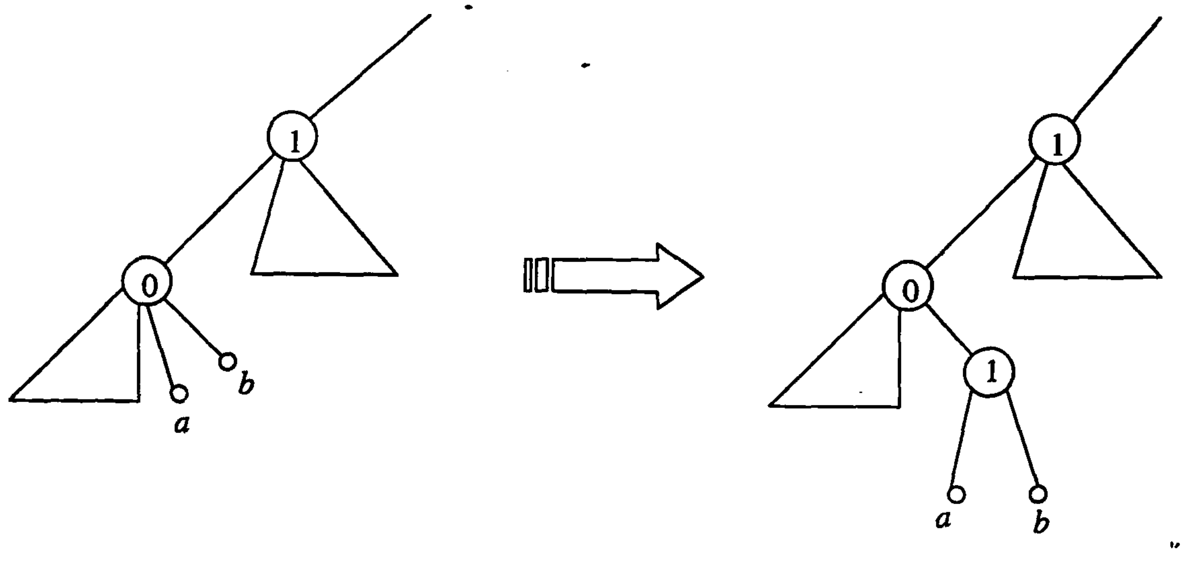
5.2.1 Αντιστοίχιση κόμβων

Για δύο αταίριαστους κόμβους *a* και *b*, ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος των οποίων είναι ένας 0-κόμβος, ο αλγόριθμος ελέγχει τις παρακάτω περιπτώσεις αντιστοίχισης αυτών:

<u>1η Περίπτωση</u>

Έστω ότι οι κόμβοι *a* και *b* που θέλουμε να ενωθούν με ακμή είναι παιδιά του ίδιου 0-κόμβου. Τότε εκτελείται η εξής μετακίνηση στο co-δέντρο:

Δημιουργούμε έναν καινούργιο 1-κόμβο ως παιδί του 0-κόμβου, και παιδιά αυτού γίνονται οι κόμβοι *a* και *b*.



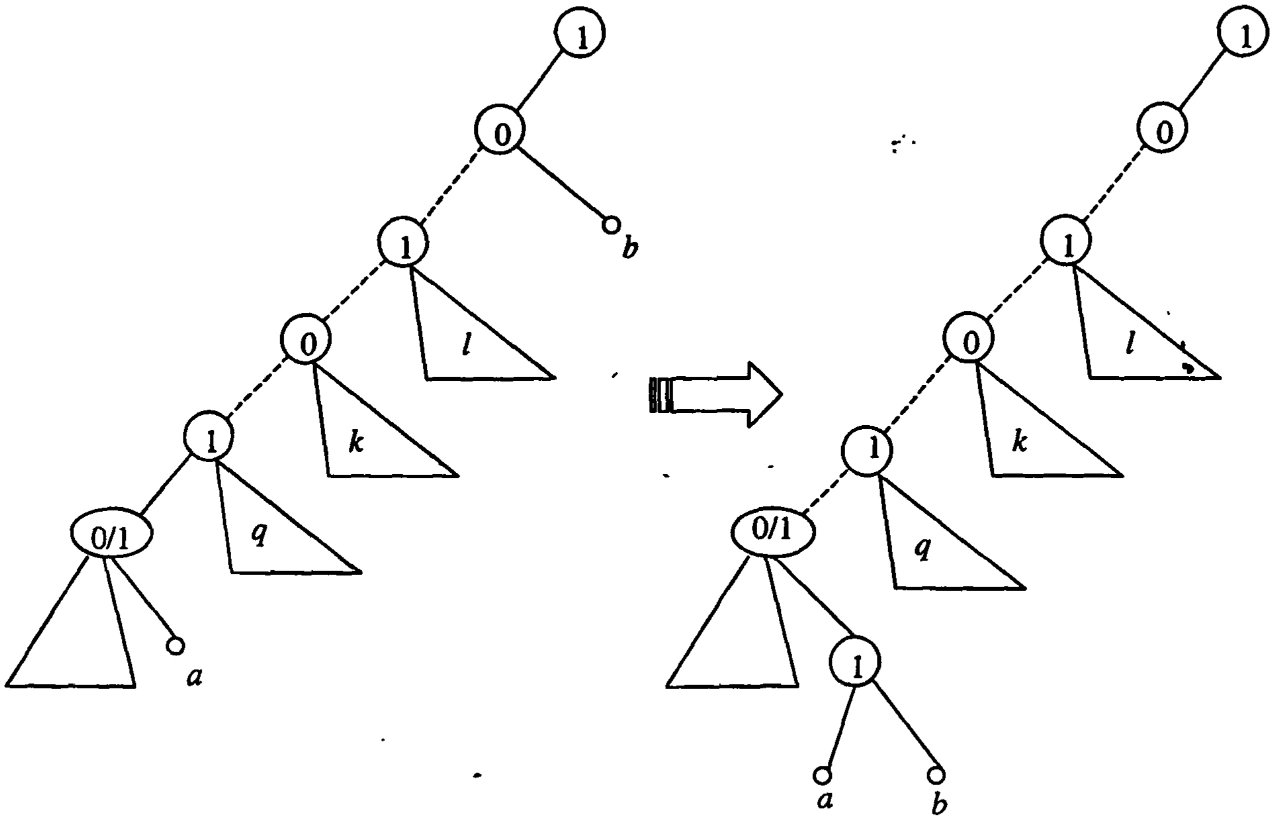
Σχήμα 5. 1 Οι κόμβοι *a* και είναι παιδιά του ίδιου 0-κόμβου.

Έτσι, συνολικά έχουμε μία νέα ακμή.

2η Περίπτωση

Έστω ότι ο b συνδέεται απευθείας με 0-κόμβο, ο οποίος είναι ο ελάχιστος κοινός πρόγονος, ενώ ο a όχι.

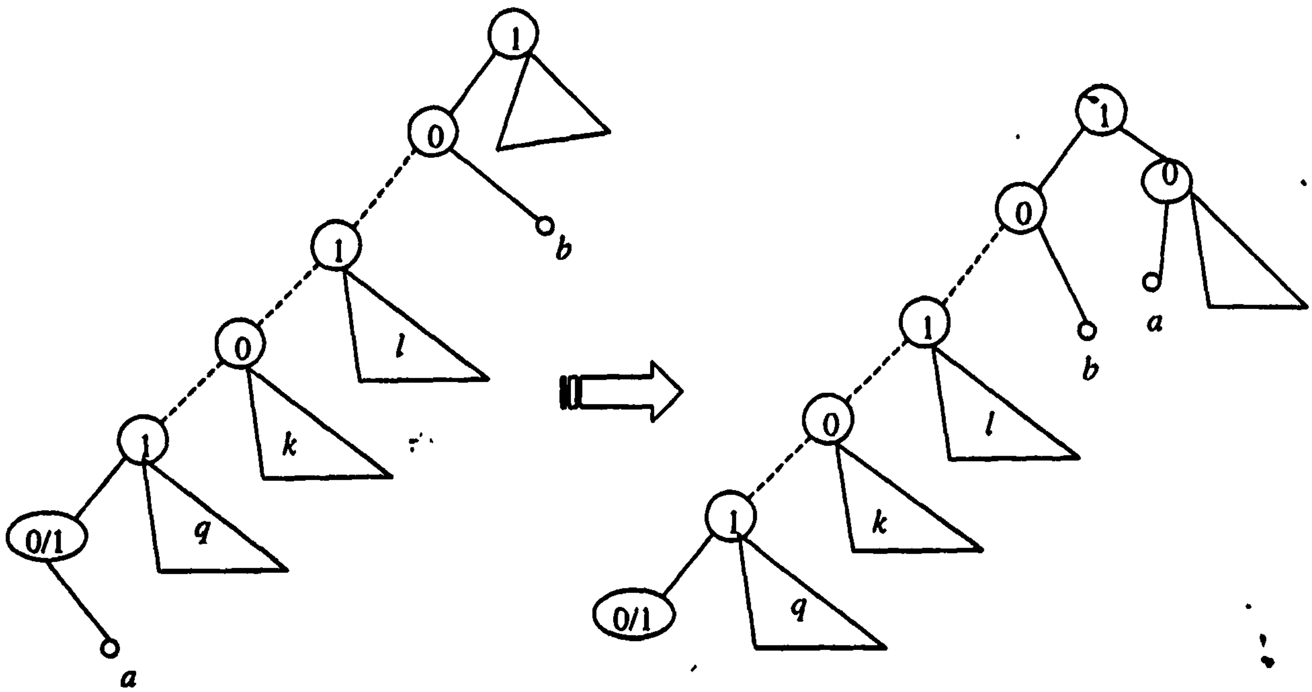
Τότε μετακινούμε τον b στον πρώτο 1-κόμβο από τον a προς τη ρίζα.



Εικόνα 5. 2 Ο b συνδέεται με 0-κόμβο ενώ ο a όχι. Μετακίνηση του b.

Αν θεωρήσουμε ότι k και l είναι οι κόμβοι φύλλα όλων των 0- και 1-κόμβων αντίστοιχα τότε οι νέες ακμές που θα έχουμε από αυτή τη μετακίνηση είναι $l + q$.

Αντίστοιχα μετακινούμε τον a στον πρώτο 1-κόμβο από τον b προς τη ρίζα.



Σχήμα 5. 3 Ο *b* συνδέεται με 0-κόμβο ενώ ο *a* όχι. Μετακίνηση του *a*.

Σε αυτή την περίπτωση το πλήθος των νέων ακμών που προστίθενται είναι $k + q$.

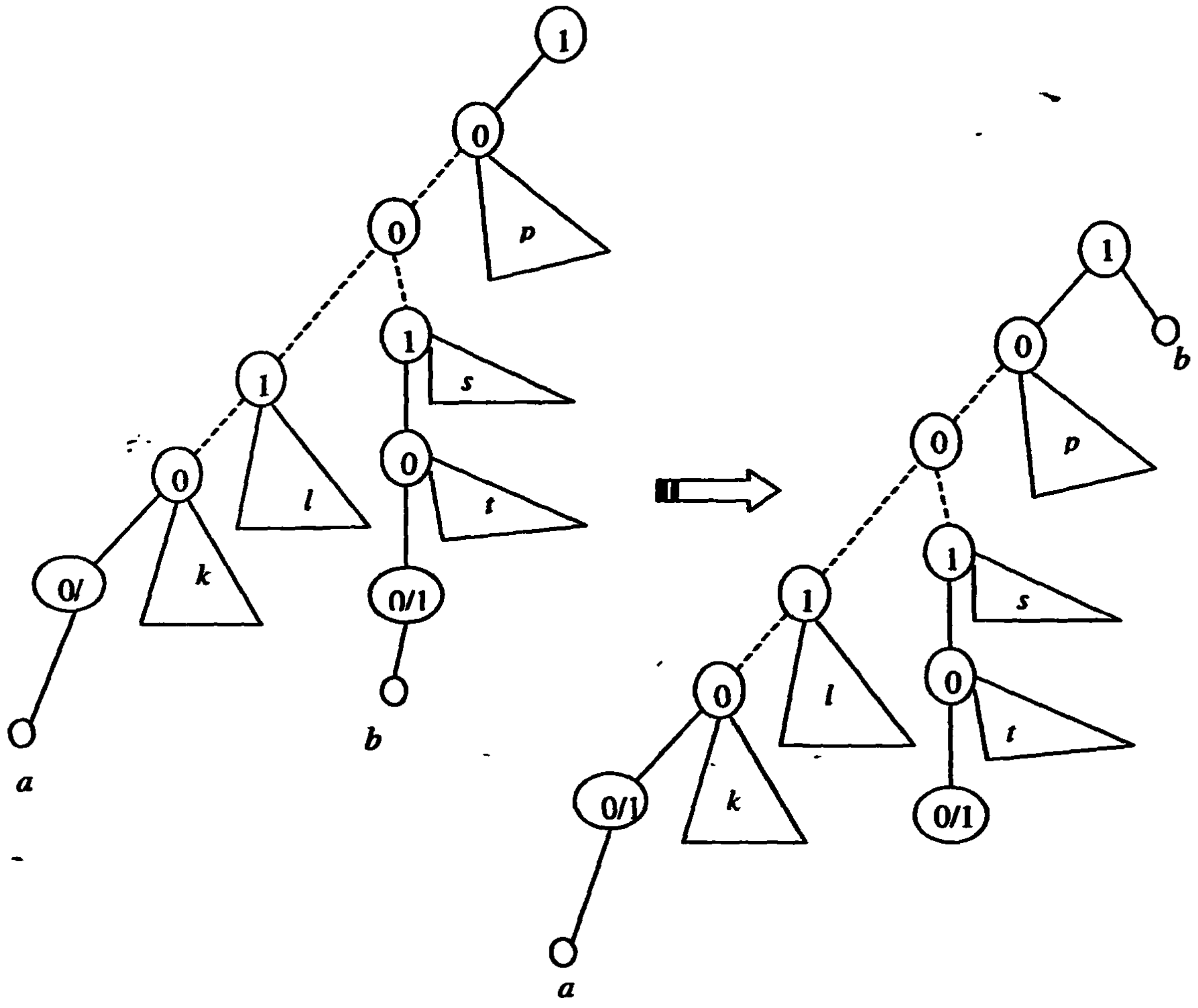
Ελέγχουμε την μετακίνηση και των δύο κόμβων *a* και *b* σε 1-κόμβο και 0-κόμβο, αντίστοιχα, του μονοπατιού $p(a),\ldots, p(b)$. Στο σχήμα 5.3 ελέγχεται η μετακίνηση των κόμβων *a* και *b* στους κόμβους των υποδέντρων με *l* και *q* κόμβους.

Οπότε, επιλέγουμε κάθε φορά το καλύτερο αποτέλεσμα ως προς το πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται σε κάθε μία από τις παραπάνω μετακινήσεις.

3η Περίπτωση

Τέλος έχουμε τη γενική περίπτωση όπου οι κόμβοι *a* και *b* ανήκουν σε δύο διαφορετικά υποδέντρα κάτω από τον 0-κόμβο, ο οποίος είναι ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος.

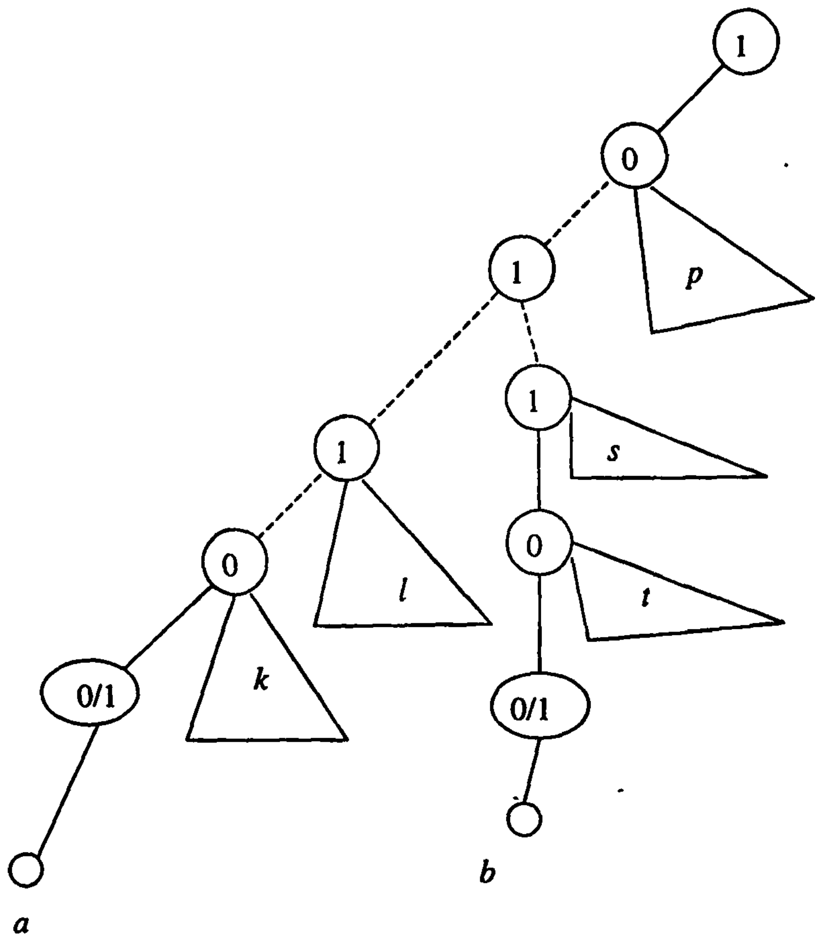
Τότε μετακινούμε είτε τον ένα είτε τον άλλο στον αμέσως επόμενο 1-κομβο μετά τον ελάχιστο κοινό προκάτοχό τους και επιλέγουμε το καλύτερο αποτέλεσμα ως προς το πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται.



Σχήμα 5. 4 Οι *a* και *b* ανήκουν σε διαφορετικά δέντρα κάτω από τον 0-κόμβο. Μετακίνηση του *b*.

Μετακινώντας τον κόμβο *b*, το πλήθος των νέων ακμών θα είναι $k + l + t + p$ (Σχήμα 5.4). Αντίστοιχα, αν μετακινούσαμε τον κόμβο *a*, τότε θα είχαμε $k + t + s + p$ νέες ακμές.

Στην ίδια περίπτωση θα μπορούσαμε να έχουμε και μία τρίτη λύση όπου τον ελάχιστο κοινό προκάτοχό τους τον αλλάζουμε σε 1-κόμβο αν έχει περισσότερα από δύο παιδιά ή τα δύο υποδέντρα στα οποία ανήκουν οι κόμβοι *a* και *b* τα κάνουμε παιδιά του αμέσως επόμενου 1-κόμβου ακολουθώντας το μονοπάτι προς τη ρίζα.



Σχήμα 5. 5 Οι a και b ανήκουν σε διαφορετικά δέντρα κάτω από τον 0-κόμβο. Αλλαγή του ελάχιστου κοινού προκατόχου σε 1-κόμβο.

Τότε, το πλήθος των νέων ακμών θα είναι: $(k+l)*(s+t)$. Επίσης, θα πρέπει να ελέγξουμε και τις περιπτώσεις το υποδέντρο που περιέχει τον κόμβο *a* (αντίστοιχα, τον κόμβο *b*) γίνεται παιδί ενός 1-κόμβου του υποδέντρου που περιέχει τον κόμβο *b* (αντίστοιχα, τον κόμβο *a*) και όπου ο 1-κόμβος βρίσκεται στο μονοπάτι από τον κόμβο *b* (αντίστοιχα, τον κόμβο *a*) στην ρίζα του υποδένδρου του.

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος θεωρεί το πλήρες γράφημα μεταξύ των κόμβων που έχουν μείνει αταίριαστοι. Σε αυτό το πλήρες γράφημα οι ακμές έχουν βάρη, όπου βάρος στην προκειμένη περίπτωση θεωρούμε το πλήθος των ακμών που προσθέτει κάθε αντιστοίχιση μεταξύ των αταίριαστων κόμβων, όταν πρόκειται για τη δημιουργία του υπεργραφήματος. Τα βάρη αυτά υπολογίζονται με χρήση των προαναφερθέντων περιπτώσεων.

Αφού ολοκληρωθεί η κατασκευή του πλήρους γραφήματος, ο αλγόριθμος καλεί τον αλγόριθμο υπολογισμού αντιστοίχισης με ελάχιστο άθροισμα βαρών των ακμών ενός γραφήματος. Ο αλγόριθμος αυτός περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο (5.2.1), ενώ στην παράγραφο 5.2.2 δίνεται ο αλγόριθμος υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος που έχει τέλεια αντιστοίχιση όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει.

5.2.2 Ο αλγόριθμος υπολογισμού αντιστοίχισης με μέγιστο βάρος ακμών

Ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό της αντιστοίχισης με το μέγιστο άθροισμα βαρών των ακμών που συμμετέχουν σε αυτή, σε ένα πλήρες γράφημα, είναι ο αλγόριθμος υπολογισμού της αντιστοίχισης με μέγιστο άθροισμα ακμικών βαρών όπως αυτός δόθηκε από τους Edmonds & Johnson [7].

Ορισμός 5.1. *Αντιστοίχιση μέγιστου βάρους* (*maximum-weight matching*) είναι μία αντιστοίχιση στην οποία το άθροισμα των ακμικών βαρών είναι μέγιστο.

Ορισμός 5.2. Εάν $M \subseteq E$ είναι μία αντιστοίχιση για το γράφημα $G=(V,E)$, τότε κάθε κορυφή $v \in V$ καλείται *ελεύθερη* (*free*) κορυφή εάν *δεν* αποτελεί άκρο κάποιας ακμής στο M.

Ορισμός 5.3. Έστω $M \subseteq E$ είναι μία αντιστοίχιση για το γράφημα $G=(V,E)$. Ένα *εναλλασσόμενο μονοπάτι* (*alternating path*) είναι ένα απλό μονοπάτι στο G του οποίου οι ακμές εναλλάξ ανήκουν στην αντιστοίχιση M και δεν ανήκουν σε αυτή.

Ορισμός 5.4. Έστω $M \subseteq E$ είναι μία αντιστοίχιση για το γράφημα $G=(V,E)$. Ένα *αυξανόμενο μονοπάτι* (*augmenting path*) στην αντιστοίχιση M είναι ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι μεταξύ δύο ελεύθερων κορυφών.

Πριν περιγραφεί με λεπτομέρεια ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης με μέγιστο άθροισμα ακμικών βαρών που συμμετέχουν, δίνεται ο αλγόριθμος υπολογισμού αυξανόμενων μονοπατιών του Edmonds [6]. Σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή, κατασκευάζεται ένα δέντρο αναζήτησης T με ρίζα κάποια ελεύθερη κορυφή v. Οποιοδήποτε μονοπάτι στο T που ξεκινά από την κορυφή v είναι ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι στο οποίο οι κορυφές λαμβάνουν εναλλάξ τις ετικέτες *outer* και *inner*. Η ρίζα v έχει την ετικέτα *outer*. Η διαδικασία δίνεται ακολούθως.

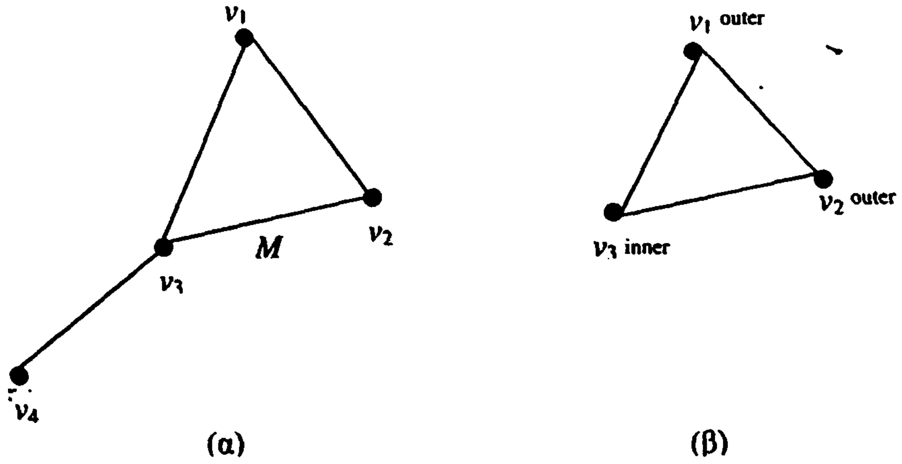
Διαδικασία υπολογισμού Μ-αυξανόμενου μονοπατιού – MAPS(G)

1. Επίλεξε μία *outer* κορυφή $x \in T$ και κάποια ακμή (x, y) που δεν έχει επιλεγεί προηγούμενα. Θεώρησε ότι η (x, y) έχει επιλεγεί. **Εάν** δεν υπάρχει τέτοια ακμή, **τότε goto** *H*.
2. **Εάν** η y είναι ελεύθερη και χωρίς ετικέτα, **τότε** πρόσθεσε την (x, y) στο T. **goto** *A*.
3. **Εάν** η y είναι *outer*, **τότε** πρόσθεσε την (x, y) στο T. **goto** *B*.
4. **Εάν** η y είναι *inner*, **τότε goto 1**
5. Έστω (y, z) η ακμή στην αντιστοίχιση M με το άκρο y. Πρόσθεσε την (x, y) και την (y, z) στο T. Θέσε την ετικέτα *inner* στην y και την *outer* στη z. **goto 1**.

Το δέντρο T αρχικοποιείται στην κορυφή v, η οποία παίρνει την ετικέτα *outer*. Υπάρχουν τρεις πιθανές έξοδοι από τη διαδικασία, στις ετικέτες *A*, *B* και *H*. Από αυτές τις εξόδους μόνο η *A* υποδεικνύει την εύρεση ενός αυξανόμενου μονοπατιού. Με άλλα λόγια, ένα φύλλο του T αποτελεί ελεύθερη κορυφή. Στη συνέχεια, περιγράφονται μία-μία οι τρεις έξοδοι.

Σημειώνουμε ότι η διαδικασία *MAPS*(*G*) κατασκευάζει ένα δέντρο εκτός αν η y βρεθεί να έχει ετικέτα *outer* στην οποία περίπτωση βρίσκεται ένας κύκλος περιττού μήκους και αυτό προκαλεί μία έξοδο στο *B*. Εάν η y έχει ετικέτα *inner*, τότε βρίσκεται ένας κύκλος άρτιου μήκους. Σε αυτή την περίπτωση η ακμή (x, y) δεν προστίθεται στο T και η διαδικασία επεκτείνει το δέντρο από κάποια άλλη *outer* κορυφή. Για να γίνει κατανοητός ο τερματισμός της διαδικασίας όταν ανιχνεύεται ένας κύκλος περιττού μήκους, ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Θεωρούμε το γράφημα G του Σχήματος 5.6 (α), στο οποίο η ακμή M αποτελεί μία αντιστοίχιση. Είναι προφανές ότι το G περιέχει ένα M-αυξανόμενο μονοπάτι, το $P=(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Εάν κληθεί η διαδικασία *MAPS*(*G*) με το T να αρχικοποιείται στην κορυφή v_1 και η γραμμή 2 εκτελείται αρχικά για $y = v_3$, τότε η διαδικασία ολοκληρώνεται με έξοδο στο *B*. Το T που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 5.6 (β). Το μονοπάτι P δεν μπορεί να υπολογιστεί τώρα διότι η κορυφή v_2 έχει ετικέτα *inner*.



Σχήμα 5. 6 Η διαδικασία τερματίζει όταν ανιχνεύεται κύκλος περιττού μήκους.

Η παρουσία κύκλων περιττού μήκους προκαλεί ασάφειες στην εύρεση εναλλασσόμενων μονοπατιών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οποιαδήποτε κορυφή v_j σε έναν τέτοιο κύκλο μπορεί να έχει ετικέτα είτε *outer* είτε *inner* ανάλογα με την κατεύθυνση γύρω από τον κύκλο που προσεγγίζεται η v_j όταν βρίσκεται ένα μονοπάτι στο T από τη ρίζα v_j. Εάν η v_j έχει την ετικέτα *inner*, τότε το T δεν μπορεί να επεκταθεί από την v_j και πιθανά αυξανόμενα μονοπάτια μπορεί να είναι μη ανιχνεύσιμα. Ένα νέο γράφημα κατασκευάζεται συρρικνώνοντας τον κύκλο περιττού μήκους σε μία κορυφή με ετικέτα *outer*. Εάν ένα φύλλο του T είναι ελεύθερη κορυφή, τότε το αυξανόμενο μονοπάτι που υπολογίζεται μπορεί να διέρχεται από μία ή περισσότερες *ψεύτικες κορυφές* (*pseudo-vertices*). Σημειώνουμε ότι, ένας κύκλος περιττού μήκους μπορεί να περιέχει ψεύτικες κορυφές.

Ορισμός 5.5. Ένας κύκλος περιττού μήκους καλείται *άνθος* (***blossom***) [6].

Στη συνέχεια θεωρούμε την έξοδο *H*. Σε αυτή την περίπτωση το T δεν μπορεί να επεκταθεί. Κάθε εναλλασσόμενο μονοπάτι που ανιχνεύεται από τη ρίζα του T τερματίζεται σε κάποια *outer* κορυφή. Η μόνη ελεύθερη κορυφή είναι η ρίζα του T. Το T εδώ καλείται *Hungarian δέντρο*. Κάποιες κορυφές με ετικέτα *outer* μπορεί να είναι ψεύτικες κορυφές, αλλά κάθε κορυφή με ετικέτα *inner* είναι μία κανονική κορυφή. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι ακμές που ενώνουν κορυφές στο T με κορυφές που δεν ανήκουν στο T μπορούν να συνδεθούν μόνο με *inner* κορυφές στο T. Διαφορετικά κάποια *outer* κορυφή συνδέεται με μία ελεύθερη κορυφή ή το T πρέπει να είναι επεκτάσιμο από εκείνη την κορυφή. Καμία κορυφή στο Hungarian δέντρο δεν μπορεί να υπάρχει σε ένα αυξανόμενο μονοπάτι. Το T περιέχει μόνο μία ελεύθερη κορυφή, έτσι ώστε εάν κάποια κορυφή του T βρίσκεται σε ένα αυξανόμενο μονοπάτι, τότε αυτό το μονοπάτι πρέπει να εισαχθεί στο T κατά μήκος μίας ακμής (όχι στο M) σε μία *inner* κορυφή. Συνεπώς, το μονοπάτι πρέπει να επισκέπτεται εναλλάξ *inner* και *outer* κορυφές, δημιουργώντας σχήμα κατά μήκος ακμών της αντιστοίχισης M και μετά κατά μήκος ακμών που δεν ανήκουν στην M. Ένα τέτοιο μονοπάτι δεν μπορεί ούτε να φτάσει στη ρίζα του T ούτε να αφήσει το T. Έτσι η έξοδος στο H, απομακρύνει το T από το γράφημα κατά την αναζήτηση ενός M-αυξανόμενου μονοπατιού. Εάν η αντιστοίχιση M τελικά αυξάνεται, τότε το T επιστρέφεται στο G πριν βρεθεί το επόμενο αυξανόμενο μονοπάτι.

Στη συνέχεια θεωρούμε την έξοδο στο A. Το T περιέχει ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι από τη ρίζα του T σε κάποια άλλη ελεύθερη κορυφή. Ωστόσο, αυτό μπορεί να περάσει από ένα ή περισσότερα συρρικνωμένα άνθη. Αυτά μπορεί να επεκταθούν και μία πλευρά από κάθε κύκλο περιττού μονοπατιού (η πλευρά αρτίου μήκους) μπορεί να παρεμβληθεί στο μονοπάτι. Αυτό συνεχίζεται έως ότου να μην απομείνει κάποιο άνθος στο αυξανόμενο μονοπάτι. Φυσικά, κάθε επέκταση μπορεί να εμφανίσει άλλες ψεύτικες κορυφές που δημιουργήθηκαν νωρίτερα από αυτή που μόλις επεκτάθηκε. Ωστόσο, δεν απομένουν άνθη και μία αύξηση της αντιστοίχισης M είναι πιθανή.

Ορισμός 5.6. Ένα *Μ-αυξανόμενο μονοπάτι με βάρη* (***weighted M-augmenting path***) είναι ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι στο οποίο το άθροισμα των βαρών των ακμών που δεν ανήκουν στην αντιστοίχιση M είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των βαρών των ακμών που ανήκουν στην αντιστοίχιση M.

Αν είτε η πρώτη είτε η τελευταία ακμή του μονοπατιού δεν ανήκει στην αντιστοίχιση M, τότε η ακμή έχει μία ελεύθερη κορυφή σαν άκρο.

Ένα M-αυξανόμενο μονοπάτι με βάρη μπορεί να έχει ακμές της αντιστοίχισης M σαν πρώτες και/ή σαν τελευταίες. Αυτό το συμπέρασμα επάγεται τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 5.7. Ένα M-αυξανόμενο μονοπάτι με βάρη που έχει:

(α) τις περισσότερες ακμές του να μην ανήκουν στην αντιστοίχιση M ενώ λιγότερες να ανήκουν σε αυτή, καλείται *ισχυρό αυξανόμενο μονοπάτι* (***strong augmenting path***).

(β) τον ίδιο αριθμό ακμών να ανήκουν στην αντιστοίχιση M με αυτές που δεν ανήκουν σε αυτή καλείται *ουδέτερο αυξανόμενο μονοπάτι* (***neutral augmenting path***).

(γ) περισσότερες ακμές να ανήκουν στην αντιστοίχιση M από ότι αυτές που δεν ανήκουν στην M καλείται *ασθενές αυξανόμενο μονοπάτι* (*weak augmenting path*).

Θεώρημα 5.1. Ένα M-αυξανόμενο μονοπάτι με βάρη υπάρχει εάν και μόνον εάν η αντιστοίχιση M δεν είναι αντιστοίχιση μέγιστου βάρους.

Πριν περιγραφεί και αναλυθεί ο αλγόριθμος υπολογισμού αντιστοίχισης με μέγιστο άθροισμα ακμικών βαρών, δίνεται μία γραμμική προγραμματιστική διατύπωση του προβλήματος. Χρησιμοποιείται η ακόλουθη σημειογραφία:

$$x(u,v)=\begin{cases}1, & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ (u,v)\in M\\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$$

$$Maximaise\ \sum_{(u,v)} x(u,v)w(u,v)$$

Πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθοι περιορισμοί:

$$\sum_{v} x(u,v)\leq 1,\quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ u\in V$$

$$\sum_{(u,v)\in R_k} x(u,v)\leq r_k,\quad \gamma\iota\alpha\ 1\leq k\leq z$$

όπως επίσης και η συνθήκη μη-αρνητικότητας:

$$x(u,v)\geq 0,\quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ (u,v)$$

Οι παραπάνω περιορισμοί ονομάζονται *πρωταρχικοί* (*primal*) περιορισμοί.

Κάθε ακμή έχει ένα βάρος $w(u,v)$. Αντικειμενικός σκοπός μας είναι ο υπολογισμός του βάρους της αντιστοίχισης. Ο πρώτος περιορισμός καθορίζει ότι υπάρχει μόνο μία ακμή στην αντιστοίχιση M με άκρο τον κόμβο u. Στο δεύτερο περιορισμό, το R_k δηλώνει το υπογράφημα που επάγεται από οποιοδήποτε σύνολο από $(2r_k+1)$ κορυφές. Αυτά τα υπογραφήματα είναι στο πλήθος τους ίσα με z. Προφανώς δεν μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από r_k ακμές του R_k στην αντιστοίχιση M. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η παραπάνω σημειογραφία παρέχει ένα σύνολο από συμπληρωματικές συνθήκες στασιμότητας που ικανοποιούνται αναθέτοντας 0 ή 1 σε κάθε ποσότητα $x(u,v)$.

Το πρόβλημα του δυϊκού γραμμικού προγραμματισμού εκφράζεται ως ακολούθως:

Οι δυϊκές μεταβλητές y_v και z_k συνδέονται, αντίστοιχα, με τους πρωταρχικούς περιορισμούς για τον κόμβο v και το υπογράφημα R_k.

$$Minimize \ \sum_v y_v + \sum_k r_k z_k$$

Πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθοι περιορισμοί:

$$y_u + y_v + \sum_{k:(u,v)\in R_k} z_k \geq w(u,v), \quad \text{για κάθε } (u,v)$$

και οι συνθήκες μη αρνητικότητας:

$$y_v \geq 0, \quad \text{για κάθε } v$$

$$z_k \geq 0, \quad \text{για } 1 \leq k \leq z$$

Σημειώνουμε ότι, στους περιορισμούς για την ακμή (u,v), το άθροισμα ισχύει για όλα τα k έτσι ώστε το R_k να περιέχει την (u,v).

Από τους προηγούμενους περιορισμούς προκύπτουν οι ακόλουθες συμπληρωματικές συνθήκες στασιμότητας:

1. $x(u,v) > 0 \Rightarrow y_u + y_v + \sum_{k:(u,v)\in R_k} z_k = w(u,v), \ \text{για κάθε } (u,v)$

συνθήκη στασιμότητας ακμών

2. $y(u) > 0 \Rightarrow \sum_v x(u,v) = 1, \ \text{για κάθε } u \in V$

συνθήκη στασιμότητας κόμβων

3. $z_k > 0 \Rightarrow \sum_{(u,v)\in R_k} x(u,v) = r_k, \ \text{για κάθε } 1 \leq k \leq z$

συνθήκη στασιμότητας υποσυνόλου περιττού βαθμού

Ο αλγόριθμος ξεκινά με κενή αντιστοίχιση, δηλαδή ισχύει ότι $x(u,v) = 0, \ \text{για κάθε } (u,v) \in E$, και για τις δυϊκές μεταβλητές ισχύει ότι:

$$y_s = W = \frac{1}{2}\max_{(u,v)}(w(u,v)),\ \text{για κάθε } s \in V$$

$$z_k = 0,\ \text{για } 1 \le k \le z$$

Συνεπώς, οι περιορισμοί και οι συνθήκες μη-αρνητικότητας και για το πρωταρχικό και για το δυϊκό πρόβλημα ικανοποιούνται, και συνεχίζουν να ικανοποιούνται μέχρι το τέλος της εκτέλεσης του αλγορίθμου. Εκτός από τη συνθήκη στασιμότητας των κόμβων, οι υπόλοιπες συμπληρωματικές συνθήκες στασιμότητας ικανοποιούνται στην αρχή.

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, οι συμπληρωματικές συνθήκες στασιμότητας που ικανοποιούνται, συνεχίζουν να ικανοποιούνται μέχρι το πέρας του αλγορίθμου. Επιπλέον, κάθε μία από τις συνθήκες κορυφών τελικά ικανοποιείται. Όταν συμβεί κάτι τέτοιο, ο αλγόριθμος τερματίζει και επειδή όλες οι συνθήκες στασιμότητας ικανοποιούνται, η τελική αντιστοίχιση έχει το μέγιστο βάρος. Σημειώνουμε ότι, εάν κάποια κορυφή v δεν ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητας κόμβων τότε ισχύει ότι $y_v > 0$ και η κορυφή v είναι ελεύθερη κορυφή (το $\sum_v x(u,v)$ είναι 0 ή 1).

Ο αλγόριθμος αποτελείται από ένα επαναλαμβανόμενο βήμα. Σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται ένα αυξανόμενο μονοπάτι χρησιμοποιώντας τη διαδικασία MAPS στο υπογράφημα $G' \subseteq G$ που αποτελείται από τις ακμές $(u,v) \in E^*$ όπου:

$$E^* = \left\{(u,v) \mid y_u + y_v + \sum_{k:(u,v)\in R_k} z_k = w(u,v)\right\}$$

Εάν βρεθεί ένα αυξανόμενο μονοπάτι, τότε επεκτείνεται μεταξύ δύο ελεύθερων κορυφών r και s για τις οποίες ισχύει ότι:

$$y_r = y_s = W > 0$$

Στη συνέχεια, εάν επαυξηθεί αυτό το ισχυρό αυξανόμενο μονοπάτι, εναλλάσσοντας του ρόλους των ακμών, τότε οι κορυφές r και s ικανοποιούν τη συνθήκη στασιμότητας υποσυνόλου περιττού βαθμού. Ο όρος ισχυρό αυξανόμενο μονοπάτι διατηρείται, αν και δεν είναι ξεκάθαρο ότι αυξάνεται το βάρος της αντιστοίχισης. Το σημαντικό είναι ότι αυτή η 'επαύξηση' έχει σαν αποτέλεσμα να ικανοποιείται η συνθήκη στασιμότητας υποσυνόλου περιττού βαθμού για δύο ακόμα κορυφές. Εξ' αιτίας του γεγονότος ότι κάθε ακμή (u, v) στο μονοπάτι ανήκει σε ένα υπογράφημα G', η συνθήκη στασιμότητας υποσυνόλου περιττού βαθμού συνεχίζει να διατηρείται.

Ας υποθέσουμε ότι αντί να υπολογιστεί ένα ισχυρό αυξανόμενο μονοπάτι στο G, έστω ότι ο έλεγχος οδηγεί στη δημιουργία ενός Hungarian δέντρου. Σε αυτή την περίπτωση, οι αλλαγές γίνονται στις δυϊκές μεταβλητές. Αυτές οι αλλαγές μπορεί να προκαλέσουν την προσθήκη μίας ή περισσότερων άλλων ακμών στο σύνολο E^*, ή την επέκταση μίας ψεύτικής κορυφής ή το μηδενισμό της δυϊκής μεταβλητής κάποιας *outer* κορυφής. Στην τελευταία περίπτωση, αν η κορυφή είναι η ρίζα του δέντρου αναζήτησης τότε ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητας κόμβων. Εάν δεν είναι η ρίζα, τότε το μονοπάτι από τη ρίζα προς την κορυφή είναι ένα ουδέτερο αυξανόμενο μονοπάτι και μετά από την αύξηση κατά μήκος του μονοπατιού η ρίζα ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητας κόμβων. Σημειώνουμε ότι, αυτή η αύξηση ελευθερώνει την κορυφή v για την οποία ισχύει $y_v = 0$. Ωστόσο, η v συνεχίζει να ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητα κόμβων της διότι ισχύει $y_v = 0$. Εάν ισχύει μία από τις πρώτες δύο περιπτώσεις, δηλαδή είτε προστίθενται κορυφές στο σύνολο E^* είτε επεκτείνονται οι ψεύτικοι κόμβοι, τότε ο έλεγχος για ένα αυξανόμενο μονοπάτι συνεχίζεται από την ίδια ρίζα. Τελικά, ο έλεγχος αυτός καταλήγει στην ικανοποίηση της συνθήκης στασιμότητας κόμβων για τη ρίζα.

Διαδικασία αλλαγής δυϊκών - μεταβλητών, DVC

1. **Για** όλες τις ακραίες κορυφές u με ετικέτα *outer* και όλες τις κορυφές που περιέχονται σε ένα ακραίο άνθος του οποίου η ψεύτικη κορυφή έχει ετικέτα *outer* **κάνε**

   $$y_u \leftarrow y_u - \delta$$

2. **Για** όλες τις ακραίες κορυφές u με ετικέτα *inner* και όλες τις κορυφές u που περιέχονται σε ένα ακραίο άνθος του οποίου η ψεύτικη κορυφή έχει ετικέτα *inner* **κάνε**

   $$y_u \leftarrow y_u + \delta$$

3. **Για** όλα τα ακραία άνθη R_k των οποίων οι ψεύτικες κορυφές έχουν ετικέτα *outer* **κάνε**

   $$z_k \leftarrow z_k + 2\delta$$

4. **Για** όλα τα ακραία άνθη R_k των οποίων οι ψεύτικες κορυφές έχουν ετικέτα *inner* **κάνε**

   $$z_k \leftarrow z_k - 2\delta$$

Στις γραμμές 1 και 2 γίνονται αλλαγές στην ποσότητα y_u για τις κορυφές u, είτε αυτές δεν περιέχονται σε ένα άνθος (ακραίες κορυφές), είτε για τις κορυφές u που περιέχονται σε ένα ακραίο άνθος (αλλά δεν περιέχονται σε ένα πιο εμφωλευμένο άνθος).

Η ποσότητα δ είναι η μέγιστη ποσότητα για την οποία οι δυϊκές μεταβλητές συνεχίζουν να παρέχουν μία δυνατή λύση στο δυϊκό πρόβλημα. Οι δυϊκοί περιορισμοί και οι συνθήκες μη-αρνητικότητας συνεχίζουν να ισχύουν εάν το δ προσδιορίζεται από τη διαδικασία υπολογισμού του δ, DEV. Σημειώνουμε ότι στη γραμμή 4 του αλγορίθμου DVC, οι κορυφές u και v δεν περιέχονται στο ίδιο ακραίο άνθος. Εάν ανήκαν στο ίδιο ακραίο άνθος, τότε οποιαδήποτε αλλαγή στις δυϊκές μεταβλητές δεν θα επηρέαζε τον περιορισμό

$$y_u + y_v + \sum z_k \geq w(u,v)$$

διότι οι αλλαγές του δ σε κάθε y_u και y_v είναι μετατόπιση εξαιτίας της αλλαγής του 2δ στο z_k για το ακραίο άνθος που περιέχει και τη u και τη v.

Διαδικασία δ-εκτίμηση, DEV

1. $\delta_1 \leftarrow \frac{1}{2}\min_{R_k}\{z_k\}$, όπου R_k είναι το ακραίο άνθος του οποίου η ψεύτικη κορυφή έχει ετικέτα *inner*.
2. $\delta_2 \leftarrow \min_{u}\{y_u\}$, όπου u είναι μία οποιαδήποτε κορυφή με ετικέτα *outer* ή οποιαδήποτε κορυφή που περιέχεται σε ένα ακραίο άνθος του οποίου η ψεύτικη κορυφή έχει ετικέτα *outer*.
3. $\delta_3 \leftarrow \min_{(u,v)}\{y_u + y_v - w(u,v)\}$, όπου u είναι μία οποιαδήποτε κορυφή με ετικέτα *outer* ή οποιαδήποτε κορυφή σε ένα ακραίο άνθος του οποίου η ψεύτικη κορυφή έχει ετικέτα *outer* και η v είναι μία κορυφή χωρίς ετικέτα ή περιέχεται σε ένα ακραίο άνθος του οποίου η ψεύτικη κορυφή δεν έχει ετικέτα.
4. $\delta_4 \leftarrow \frac{1}{2}\min_{(u,v)}\{y_u + y_v - w(u,v)\}$, όπου και η u και η v είναι και οι δύο ακραίες κορυφές με ετικέτα *outer* ή κορυφές που περιέχονται σε διαφορετικά ακραία άνθη των οποίων οι ψεύτικες κορυφές έχουν ετικέτα *outer*.
5. $\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$

Ας θεωρήσουμε την επίδραση των αλλαγών στις δυϊκές μεταβλητές.

(α) Εάν ισχύει $\delta = \delta_1$, τότε κάποια δυϊκή μεταβλητή z_k γίνεται 0. Επεκτείνουμε την ψεύτικη κορυφή της πίσω στον αυθεντικό κύκλο περιττού μήκους. Η ψεύτικη κορυφή έχει ετικέτα *inner* και έτσι ήταν το άκρο κάποιας ακμής στην αντιστοίχιση *M*. Αυτή η ακμή συνεπώς αντιστοιχίζει κάποια κορυφή στον αντίστοιχο κύκλο περιττού μήκους. Οι άλλες $2r_k$ κορυφές του κύκλου μπορούν να αντιστοιχιστούν προσθέτοντας ακμές του κύκλου στην *M*. Επίσης, όταν επεκτείνεται η ψεύτικη κορυφή, διατηρούνται οι υπάρχουσες ετικέτες των κορυφών που προσδιορίζουν το *T* και (εάν η ψεύτικη κορυφή έχει βαθμό 2 στο *T*) προσθέτουμε στο *T* το μοναδικό μονοπάτι κατά μήκος μίας πλευράς του άνθους, το οποίο θα διατηρήσει το *T* συνδεδεμένο και εναλλασσόμενο. Σε αυτήν την περίπτωση βάζουμε ετικέτες *outer* και *inner* στις κορυφές του μονοπατιού, όπως αρμόζει.

(β) Εάν ισχύει $\delta = \delta_2$, τότε κάποιες δυϊκές μεταβλητές y_u γίνονται 0. Το μονοπάτι στο δέντρο αναζήτησης από τη ρίζα προς την κορυφή *u* (εάν η *u* δεν είναι ρίζα) είναι ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι με αριθμό ακμών που ανήκουν στην αντιστοίχιση *M* ίσο με τον αριθμό αυτών των ακμών που δεν ανήκουν στην αντιστοίχιση *M*. Εάν η μεταβλητή *y* της ρίζας είναι 0, τότε ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητας κόμβων. Ο αλγόριθμος συνεχίζει δημιουργώντας ένα νέο δέντρο αναζήτησης από μία άλλη κορυφή *v* που είναι ελεύθερη και για την οποία ισχύει $y_v > 0$. Εάν δεν υπάρχει τέτοια κορυφή, τότε ο αλγόριθμος σταματά.

(γ) Εάν ισχύει $\delta = \delta_3$, τότε η αντίστοιχη ακμή προστίθεται στο σύνολο E^* και η αναζήτηση ενός αυξανόμενου μονοπατιού μπορεί να επεκταθεί.

(δ) Εάν ισχύει $\delta = \delta_4$, τότε η αντίστοιχη ακμή προστίθεται στο σύνολο E^*. Η αναζήτηση για ένα αυξανόμενο μονοπάτι συνεχίζεται και καταλήγει σε ένα κύκλο περιττού μήκους.

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, παρουσιάζεται στη συνέχεια η διαδικασία δημιουργίας του Hungarian δέντρου HUT.

Διαδικασία Hungarian δέντρο, HUT

1. DEV
2. DVC
3. **Εάν** $\delta = \delta_1$, **τότε** επεκτείνεται κάθε ακραία ψεύτικη κορυφή με ετικέτα *inner* που έχει μηδενική z-μεταβλητή.
4. **Εάν** $\delta = \delta_2$ **και** (η y-μεταβλητή της ρίζας $T \neq 0$), **τότε**

   begin

5. Αναγνώρισε το εναλλασσόμενο μονοπάτι P από τη ρίζα σε κάποια κορυφή της οποίας η y-μεταβλητή είναι 0.

   end

6. **Εάν** $\delta = \delta_3$ **ή** $\delta = \delta_4$ **τότε** αύξησε το σύνολο E^*
7. **Εάν** $\delta = \delta_2$ **τότε begin**
8. απομάκρυνε όλες τις *inner* και *outer* ετικέτες
9. **goto** C

   end

10. **Εάν** $\delta = \delta_1$ **ή** $\delta = \delta_3$ **ή** $\delta = \delta_4$, **τότε goto** M

Η έξοδος από τη διαδικασία MAPS οδηγεί στο βήμα H, όπου και καλείται η διαδικασία HUT. Η έξοδος από τη διαδικασία HUT είναι είτε πίσω στη διαδικασία MAPS, ετικέτα M, είτε στην εντολή με ετικέτα C. Αυτό προηγείται της διαδικασίας MAPS και επιλέγει τη ρίζα ενός νέου εναλλασσόμενου μονοπατιού. Σημειώνουμε ότι, η διαδικασία HUT εντάσσει τις διαδικασίες DEV και DVC στις γραμμές 1 και 2. Η γραμμή 3 επεκτείνει τις ψεύτικες κορυφές όπως περιγράφηκε στο (α). Οι υπό συνθήκη εντολές των γραμμών 4-5 έχουν να κάνουν με ένα (ουδέτερο) αυξανόμενο μονοπάτι όπως περιγράφηκε σο (β). Η γραμμή 6 προσθέτει κατάλληλες ακμές στο σύνολο E^* σύμφωνα με τις περιγραφές (γ) και (δ). Εάν ισχύει $\delta = \delta_2$, τότε η ρίζα του T ικανοποιεί τη συνθήκη στασιμότητας κόμβων έτσι ώστε να πρέπει να επιλέγει μία νέα ρίζα για ένα νέο δέντρο T. Αυτό επιτυγχάνεται στις γραμμές 7-9. Στις άλλες περιπτώσεις, όπου ισχύει $\delta = \delta_1$, δ_3, ή δ_4, το παρόν δέντρο αναζήτησης συνεχίζεται και επανακαλείται η διαδικασία MAPS στη γραμμή 10.

Στη συνεχεία παρουσιάζεται ο αλγόριθμος υπολογισμού της αντιστοίχισης με μέγιστο βάρος ακμών.

Αλγόριθμος αντιστοίχισης μέγιστου βάρους

1. $M \leftarrow \varnothing$
2. **Για** όλες τις $v \in V$ **κάνε**

$$y_v \leftarrow \frac{1}{2}\min\{w(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \in E\}$$

C: 3. Επίλεξε μία κορυφή v τέτοια ώστε η v να είναι ελεύθερη και να ισχύει $y_v > 0$. Εάν δεν υπάρχει τέτοια κορυφή, **τότε goto** L. Θέσε ετικέτα *outer* στην κορυφή v.

M: 4. MAPS(G').

B: 5. Αναγνώρισε το άνθος και συρρίκνωσέ το. Θέσε στις ψεύτικες κορυφές που προκύπτουν ετικέτες *outer* και 0 στις z-μεταβλητές τους. **goto** M.

H: 6. HUT.

A: 7. Αναγνώρισε το (ισχυρό) αυξανόμενο μονοπάτι. Συνέχισε την επαύξηση εναλλάσσοντας τους ρόλους των ακμών. Απομάκρυνε τις *outer* και *inner* ετικέτες. **goto** C.

L: 8. Επέκτεινε όλες τις εναπομείναντες ψεύτικες κορυφές στο τελικό γράφημα. Αυτό γίνεται με την αντίστροφη σειρά που εντοπίστηκαν, βρίσκοντας μία μέγιστη αντιστοίχιση σε κάθε επεκτάσιμο άνθος.

Στη γραμμή 1 η αντιστοίχιση M είναι κενή. Στη γραμμή 2 οι δυϊκές μεταβλητές y_v αρχικοποιούνται, ενώ η z-μεταβλητή για κάθε άνθος αρχικοποιείται στη γραμμή 5 όταν το άνθος ανακαλύπτεται. Το γενικό βήμα του αλγορίθμου ξεκινά στη γραμμή 3 με την αναγνώριση μίας κορυφής της οποίας δεν ικανοποιείται η συμπληρωματική συνθήκη στασιμότητας κόμβων. Στη γραμμή 4 η διαδικασία αναζήτησης ενός M-αυξανόμενου μονοπατιού (MAPS) αυξάνει ένα εναλλασσόμενο δέντρο με ρίζα σε αυτή την κορυφή και χρησιμοποιώντας μόνο τις ακμές του συνόλου E^* που ορίζουν το G. Η έξοδος από τη διαδικασία MAPS οδηγεί στο B εάν βρεθεί ένα άνθος, στο H εάν βρεθεί ένα Hungarian δέντρο, και στο A εάν βρεθεί ένα αυξανόμενο μονοπάτι. Τότε, οι γραμμές 5, 6 και 7 επιστρέφουν στη γραμμή 3 εάν ικανοποιείται η συμπληρωματική συνθήκη στασιμότητας κόμβων της ρίζας του δέντρου, ή στη γραμμή 4 εάν το δέντρο επεκτείνεται και άλλο. Τελικά, για όλες τις κορυφές ικανοποιούνται οι συμπληρωματικές συνθήκες στασιμότητας, και ο αλγόριθμος τερματίζει στη γραμμή 8.

Όπως φάνηκε από τον αλγόριθμο, η δημιουργία ενός εναλλασσόμενου δέντρου από μία ρίζα v καταλήγει τελικά στην ικανοποίηση της συμπληρωματικής συνθήκης στασιμότητας κόμβων. Αυτό γίνεται πάντα έτσι ώστε η αντιστοίχιση M να παραμένει μία δυνατή λύση στο πρωταρχικό πρόβλημα και έτσι ώστε οι τιμές y_v και z_k συνεχίζουν να παρέχουν δυνατές λύσεις στο δυϊκό πρόβλημα.

Μας απομένει να δείξουμε ότι κατά τον τερματισμό του αλγορίθμου, ικανοποιούνται οι συνθήκες στασιμότητας ακμών και του υποσυνόλου περιττού βαθμού.

Σημειώνουμε ότι, αν μία ακμή (u,v) ανήκει στην αντιστοίχιση M και όχι σε μία ψεύτικη κορυφή τότε $(u,v)\in E^{*}$. Επίσης, εάν η (u,v) περιέχεται σε μία ψεύτικη κορυφή, τότε η τιμή $\left(y_u + y_v + \sum z_m\right)$ παραμένει αμετάβλητη από αλλαγές στις δυϊκές μεταβλητές. Έτσι, οι συνθήκες στασιμότητας ακμών ικανοποιούνται.

Θεωρούμε τις z-μεταβλητές. Οποιοδήποτε z_k μπορεί να γίνει θετικό εάν περιέχεται σε μία ψεύτικη κορυφή. Κάθε φορά που επεκτείνεται μία ψεύτικη κορυφή επάγεται μία μέγιστη αντιστοίχιση από τις ακμές του περιττού κύκλου, έτσι ώστε με την ολοκλήρωση του αλγορίθμου (όταν δεν απομένουν ψεύτικες κορυφές) να ικανοποιούνται οι συνθήκες στασιμότητας υποσυνόλων περιττού βαθμού.

Ο αλγόριθμος είναι πολυωνυμικού χρόνου. Στην περιγραφή έχουν παραληφθεί λεπτομέρειες της διαχείρισης των ανθέων. Φυσικά, μία εγγραφή από εμφωλευμένα άνθη διατηρείται και συνεχώς ενημερώνεται.

5.2.3 Αλγόριθμος Υπολογισμού Ελάχιστου Υπεργραφήματος με Τέλεια Αντιστοίχιση

Στην παράγραφο 5.2.1 αναπτύχθηκαν οι περιπτώσεις αντιστοίχισης αταίριαστων κόμβων στο αρχικό co-γράφημα, έτσι ώστε να προστίθεται στο γράφημα το ελάχιστο πλήθος ακμών. Στην παράγραφο 5.2.2 αναπτύχθηκε ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης με μέγιστο άθροισμα ακμικών βαρών. Στη παρούσα παράγραφο χρησιμοποιούμε αυτές τις διαδικασίες για την επίλυση του προβλήματος εύρεσης ελάχιστου υπεργραφήματος που έχει τέλεια αντιστοίχιση και παραμένει co-γράφημα, όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει τέλεια αντιστοίχιση.

Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1

Καλείται ο αλγόριθμος ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης στο αρχικό co-γράφημα *n* κόμβων. Ο αλγόριθμος αυτός αποφασίζει εάν το αρχικό co-γράφημα έχει ή όχι τέλεια αντιστοίχιση. Για να εκτελεστούν τα επόμενα βήματα του αλγορίθμου υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση, πρέπει ο αλγόριθμος ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης να αποφασίσει ότι δεν υπάρχει τέλεια αντιστοίχιση στο αρχικό co-γράφημα.

Βήμα 2

Κατασκευάζεται ένα πλήρες γράφημα G^* *n* κόμβων. Ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του ελάχιστου υπεργραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση χρησιμοποιεί σαν είσοδο το πλήρες γράφημα που λαμβάνεται σε αυτό το βήμα. Το γράφημα αυτό αποτελείται από *n* κόμβους, όπως και το αρχικό co-γράφημα. Οι ακμές του είναι οι ακμές που έχει το αρχικό co-γράφημα μαζί με τις ακμές που δεν υπάρχουν στο αρχικό γράφημα.

Βήμα 3

Υπολογίζονται τα βάρη των ακμών του πλήρους γραφήματος G^* ως εξής: Θεωρούμε

$$V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\} \text{ και } V(G^*)=\{v_1^*,v_2^*,\ldots,v_n^*\}$$

- Εάν $v_iv_j \in E(G)$, τότε $\cos t(v_i^*,v_j^*)=0$
- Εάν $v_iv_j \notin E(G)$, τότε το κόστος των ακμών (v_i^*,v_j^*) υπολογίζεται εφαρμόζοντας τις περιπτώσεις υπολογισμού του πλήθους των ακμών που προστίθενται στο αρχικό γράφημα αν δημιουργηθεί ακμή μεταξύ των αταίριαστων κόμβων, όπως αυτές περιγράφηκαν στην παράγραφο 5.2.1. Έστω *k* το ελάχιστο πλήθος ακμών που πρέπει να προστεθεί, τότε το κόστος είναι $\cos t(v_i^*,v_j^*)=n-k$.

Βήμα 4

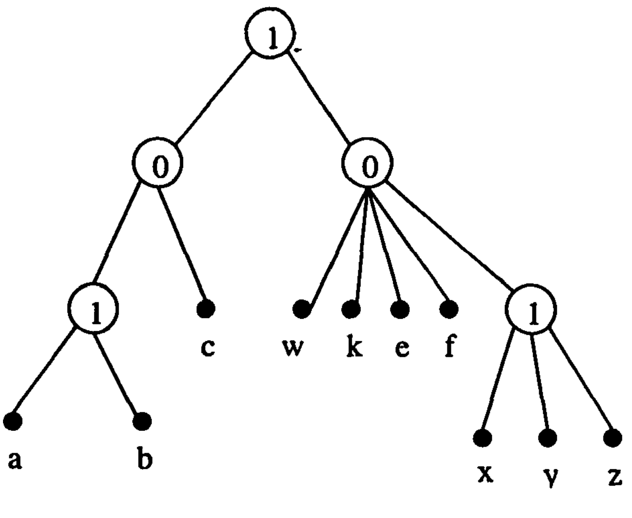
Εφαρμόζεται η διαδικασία υπολογισμού μέγιστης αντιστοίχισης με το μέγιστο άθροισμα ακμικών βαρών στο πλήρες γράφημα G^* που προκύπτει από τα βήματα 3 και 4. Έτσι, υπολογίζεται στο πλήρες γράφημα η αντιστοίχιση που περιλαμβάνει εκείνες τις ακμές με το μεγαλύτερο άθροισμα βαρών. Αυτό το άθροισμα των ακμικών βαρών, στην περίπτωσή μας, είναι το ελάχιστο, αφού θεωρούμε το *n* – (*n* – *k*), και αποτελεί το ελάχιστο πλήθος ακμών που προστίθεται στο αρχικό γράφημα έτσι ώστε να προκύψει το ελάχιστο υπεργράφημα που έχει τέλεια αντιστοίχιση. Δηλαδή, στο τέλος ο αλγόριθμος επιστρέφει τα ζεύγη ακμών που πρέπει να προστεθούν στο αρχικό co-γράφημα ώστε να έχει τέλεια αντιστοίχιση προσθέτοντας το ελάχιστο πλήθος ακμών.

Σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί, το πρόβλημα υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος που έχει τέλεια αντιστοίχιση και παραμένει co-γράφημα, όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει, λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, ίσο με $O(n^3)$.

Θεώρημα 5.2. Ο αλγόριθμος υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση, όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει, και που παραμένει co-γράφημα είναι πολυωνυμικού χρόνου, $O(n^3)$.

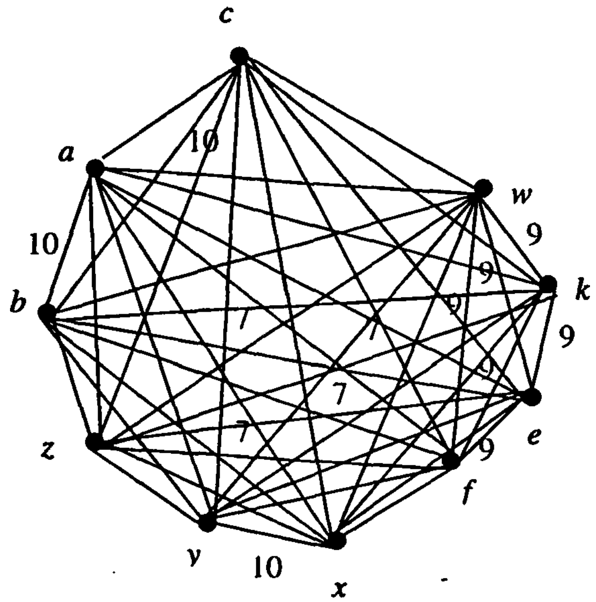
Απόδειξη. Στον αλγόριθμο που περιγράφηκα, το βήμα 1 απαιτεί γραμμικό χρόνο, ενώ τα βήματα 2 και 3 εκτελούνται σε σταθερό χρόνο. Το βήμα 4 απαιτεί πολυωνυμικό χρόνο, διότι ο αλγόριθμος υπολογισμού της αντιστοίχισης με το μέγιστο άθροισμα ακμικών βαρών απαιτεί χρόνο $O(n^3)$. Για τον υπολογισμό της αντιστοίχισης με το ελάχιστο άθροισμα ακμικών βαρών, τα βάρη είναι ίσα με *n-k*. Συνεπώς, ο αλγόριθμος είναι πολυωνυμικού χρόνου, $O(n^3)$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου υπολογισμού του ελάχιστου υπεργραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση. Έστω το ακόλουθο co-δέντρο.



Σχήμα 5.7. Το co-δέντρο ενός co-γραφήματος που δεν έχει τέλεια αντιστοίχιση.

Το co-δέντρο που φαίνεται στο σχήμα 5.7 δεν έχει τέλεια αντιστοίχιση. Σύμφωνα με το βήμα 1 του αλγορίθμου, που περιλαμβάνει την εφαρμογή του αλγορίθμου ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης, προκύπτει το ζεύγος (4, 2). Δηλαδή, απομένουν 2 κόμβοι αταίριαστοι. Η εφαρμογή των βημάτων 2 και 3 δημιουργεί το πλήρες γράφημα με βάρη, όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 5.8. Το πλήρες γράφημα με κόμβους τους αταίριαστους κόμβους.

Η εφαρμογή του βήματος 4 δίνει την ακμή που πρέπει να προστεθεί στο αρχικό co-γράφημα έτσι ώστε να προκύψει το ελάχιστο υπεργράφημα με τέλεια αντιστοίχιση. Η ακμή αυτή είναι η (w, k) η οποία προσθέτει στο αρχικό γράφημα μία ακμή.

Κεφαλαιο 6

ΤΕΛΕΙΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΣΤΑ QUASI-THRESHOLD ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με τη μελέτη μίας ειδικής κατηγορίας γραφημάτων, τα co-γραφήματα. Αναπτύξαμε αλγορίθμους ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης και υπολογισμού αυτής σε ένα co-γράφημα, καθώς επίσης και υπολογισμού του μέγιστου υπογραφήματος και του ελάχιστου υπεργραφήματος που έχουν τέλεια αντιστοίχιση, όταν το αρχικό co-γράφημα δεν έχει, απαιτώντας τα τελευταία να παραμένουν co-γραφήματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμεθα με μία άλλη κατηγορία γραφημάτων τα Quasi-threshold γραφήματα [21]. Τα Quasi-threshold γραφήματα είναι μία υποκλάση των co-γραφημάτων και συνεπώς, είναι μία υποκλάση της γνωστής κλάσης των τέλειων γραφημάτων [2, 18, 23]. Για τα Quasi-threshold γραφήματα, οι Ma et. al. [23] παρουσίασαν πολυωνυμικούς αλγορίθμους για έναν αριθμό από προβλήματα βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, έδωσαν έναν αλγόριθμο χρόνου $O(nm)$ για το πρόβλημα αναγνώρισης, και πολυωνυμικούς αλγορίθμους για το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton. Επίσης, έδωσαν αλγορίθμους για το πρόβλημα κλίκας καθώς και συνθήκες για να είναι ένα Quasi-threshold γράφημα Hamiltonian. Οι Yan et al. [13] έδωσαν σημαντικούς χαρακτηρισμούς για αυτά τα γραφήματα και παρουσίασαν ένα γραμμικό αλγόριθμο, δηλαδή $O(n + m)$, για το πρόβλημα αναγνώρισής τους.

Στην παράγραφο 6.1 παρουσιάζουμε τις ιδιότητες των Quasi-threshold γραφημάτων και τις δομές που τα αναπαριστούν [21], στην 6.2 παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο κατασκευής της δεντρικής αναπαράστασης των Quasi-threshold γραφημάτων [21], και στην 6.3 περιγράφεται ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης σε ένα Quasi-threshold γράφημα.

6.1 Quasi-threshold γραφήματα

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται τα Quasi-Threshold γραφήματα και οι δομές τους.

Ορισμός 6.1. Μία ακμή $(x,y)=(y,x)$ του γραφήματος ταξινομείται ως ακολούθως σύμφωνα με τις σχέσεις γειτονικότητας των κορυφών [22]:

1. η ακμή (x,y) είναι *free* εάν ισχύει $N[x]=N[y]$,
2. η ακμή (x,y) είναι *semi-free* εάν ισχύει $N[x]\subset N[y]$ ($\acute{\eta}$ $N[y]\subset N[x]$),
3. η ακμή (x,y) είναι *actual* σε διαφορετική περίπτωση.

Είναι προφανές ότι, το σύνολο ακμών μπορεί να διαμεριστεί σε τρία υποσύνολα από free, semi-free, και actual ακμές.

Ορισμός 6.2. Ένα γράφημα G καλείται *Quasi-threshold γράφημα ή QT-γράφημα* για συντομία, εάν κάθε ακμή του είναι είτε free είτε semi-free.

Με βάση αυτόν τον ορισμό, ένα γράφημα G είναι QT-γράφημα εάν και μόνο εάν για κάθε ακμή του (x,y), ισχύει ότι $N[x]\subseteq N[y]$ *ή* $N[x]\supseteq N[y]$. Ισοδύναμα, ένα γράφημα G είναι QT-γράφημα εάν και μόνο εάν δεν έχει επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο με το P_4 ή το C_4. Η κλάση των QT-γραφημάτων είναι μία υποκλάση των co-γραφημάτων.

Για ένα υποσύνολο κορυφών S ενός γραφήματος G, ορίζουμε το $G - S$ ως $G[V(G)-S]$. Το ακόλουθο λήμμα προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι για κάθε υποσύνολο $S\subset V(G)$ και για μία κορυφή $x\in S$, έχουμε ότι $N_{G[S]}[x]=N[x]\cap S$ και ότι το $G-S$ είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα.

Λήμμα 6.1.[22] Εάν το G είναι ένα QT-γράφημα, τότε για κάθε υποσύνολο $S\subset V(G)$, και το $G[S]$ και το $G-S$ είναι επίσης QT-γραφήματα.

Το θεώρημα που ακολουθεί παρέχει κάποιες σημαντικές ιδιότητες για την κλάση των QT-γραφημάτων. Για ευκολία, πρώτα δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 6.3. Έστω G ένα Quasi-threshold γράφημα. Ισχύει ότι $cent(G)=\{x\in V(G)\mid N[x]=V(G)\}$.

Θεώρημα 6.1. [22] Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις.

1. Ένα γράφημα G είναι QT-γράφημα εάν και μόνο εάν για κάθε συνδεδεμένο επαγόμενο υπογράφημα $G[S]$, $S \subseteq V(G)$, ισχύει ότι $cent(G[S]) \neq \varnothing$.
2. Ένα γράφημα G είναι QT-γράφημα εάν και μόνο εάν το $G - cent(G)$ είναι QT-γράφημα.
3. Έστω G ένα συνδεδεμένο QT-γράφημα. Εάν ισχύει ότι $G{-}cent(G) \neq \varnothing$, τότε το $G{-}cent(G)$ περιέχει τουλάχιστον δύο συνδεδεμένες συνιστώσες.

Έστω G ένα συνδεδεμένο QT-γράφημα. Τότε το σύνολο $V_1 := cent(G)$ δεν είναι κενό σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1. Έστω $G_1 := G$, και $G - V_1 = G_2 \cup G_3 \cup \ldots \cup G_r$, όπου κάθε G_i είναι μία συνδεδεμένη συνιστώσα του $G - V_1$ και $r \geq 3$. Εφόσον κάθε G_i είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα του G, το G_i είναι επίσης ένα QT-γράφημα, και έτσι ισχύει ότι $V_i := cent(G_i) \neq \varnothing$ για $2 \leq i \leq r$. Εφόσον κάθε συνδεδεμένη συνιστώσα του $G_i - cent(G_i)$ είναι επίσης ένα QT-γράφημα, αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου να φτάσουμε σε κενό γράφημα. Τελικά λαμβάνουμε τον ακόλουθο διαμερισμό του $V(G)$.

$$V(G) = V_1 + V_2 + \ldots + V_k, \quad \text{όπου } V_i = cent(G_i)$$

Επιπλέον, ορίζουμε την ακόλουθη μερική διάταξη $\leq$ στο σύνολο $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ ως ακολούθως:

$$V_i \leq V_j \quad \text{εάν} \quad V_i = cent(G_i) \quad \text{και} \quad V_j \subseteq V(G_i)$$

Η παραπάνω διαμέριση του $V(G)$ διατηρεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

Θεώρημα 6.2. [22]Έστω G ένα συνδεδεμένο QT-γράφημα, και έστω $V(G) = V_1 + V_2 + \ldots + V_k$ η διαμέριση, όπως αυτή ορίστηκε προηγούμενα. Ισχύει $V_1 := cent(G)$. Τότε αυτή η διαμέριση και η μερική διάταξη $(\{V_i\}, \leq)$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(P_1) Εάν ισχύει ότι $V_i \leq V_j$, τότε κάθε κορυφή του V_i και κάθε κορυφή του V_j συνδέονται με μία ακμή του G.

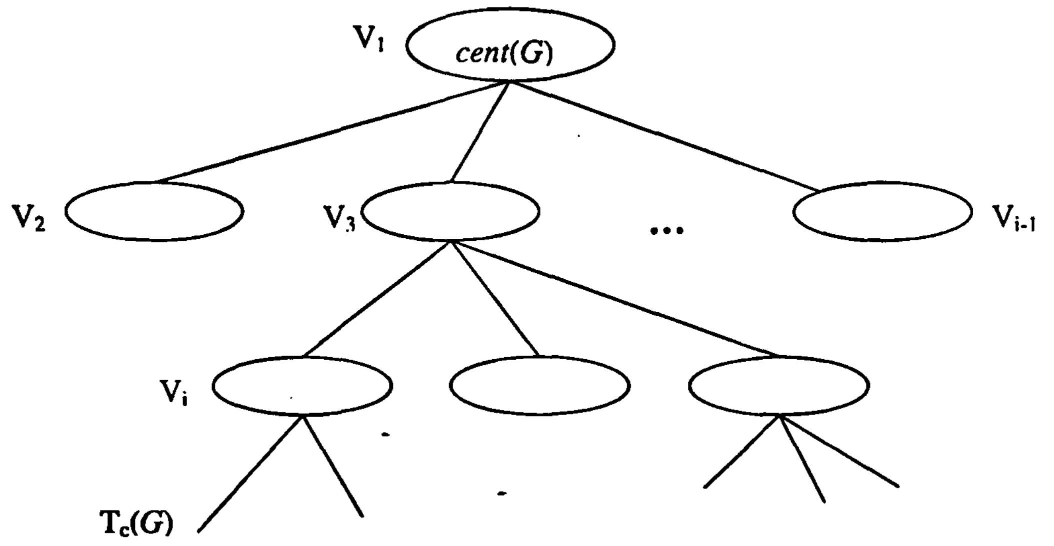
(P_2) Για κάθε V_j, ισχύει ότι $cent(G[\{\cup V_i \mid V_i \leq V_j\}]) = V_j$.

(P_3) Για κάθε δύο σύνολα V_s και V_t τέτοια ώστε $V_s \leq V_t$, το $G[\{\cup V_i \mid V_s \leq V_i \leq V_t\}]$ είναι ένα πλήρες γράφημα. Επιπλέον, για οποιοδήποτε μείζον στοιχείο V_t του $(\{V_i\}, \leq)$, το $G[\{\cup V_i \mid V_1 \leq V_i \leq V_t\}]$ είναι ένα μείζον πλήρες υπογράφημα του G.

(P₄) Κάθε ακμή που έχει και τα δύο άκρα στο V_i είναι μία free ακμή.

(P₅) Κάθε ακμή με ένα άκρο στο V_i και το άλλο άκρο στο V_j, όπου ισχύει ότι $V_i \neq V_j$, είναι μία semi-free ακμή.

Τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 6.2 παρέχουν δομικές και αλγοριθμικές ιδιότητες για την κλάση των QT-γραφημάτων. Μία τυπική δομή αυτών των γραφημάτων φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (Σχήμα 6.1). Η δομή αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες του Θεωρήματος 6.2 και καλείται *cent-tree* $T_c(G)$. Το cent-tree είναι ένα ριζωμένο δέντρο με ρίζα το V_1. Κάθε κόμβος V_i του δέντρου $T_c(G)$ είναι είτε κόμβος φύλλο είτε έχει τουλάχιστον δύο παιδιά. Επιπλέον, ισχύει ότι $V_s \leq V_t$ εάν και μόνο εάν το V_s είναι πρόγονος του V_t.



Σχήμα 6. 1 Η τυπική δομή ενός *cent-tree* $T_c(G)$ ενός QT-γραφήματος *G*.

6.2 Τέλεια αντιστοίχιση στα Quasi-Threshold γραφήματα

Στην παράγραφο αυτή και με βάση τις ιδιότητες των Quasi-Threshold γραφημάτων παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης τέλειας αντιστοίχισης σε αυτή την κατηγορία γραφημάτων. Για τον υπολογισμό της τέλειας αντιστοίχισης χρησιμοποιούμε την δεντρική αναπαράσταση των Quasi-Threshold γραφημάτων, τα cent-trees.

Η βασική ιδέα του αλγορίθμου έχει ως ακολούθως:

Όλοι οι κόμβοι που περιέχονται στους υπερκόμβους του cent-tree χαρακτηρίζονται από δύο μεταβλητές. Για έναν κόμβο *v*, η μεταβλητή *label*(*v*) έχει την τιμή *marked* (*μαρκαρισμένος*) ή *unmarked* (*μη-μαρκαρισμένος*) κόμβος. Αρχικά όλοι οι κόμβοι είναι μη μαρκαρισμένοι, δηλαδή για κάθε κόμβο *v* αρχικά ισχύει ότι *label*(*v*) = unmarked, και κάθε φορά που ένας κόμβος θεωρείται από τον αλγόριθμο η τιμή της μεταβλητής *label*(*v*) για αυτόν τον κόμβο αλλάζει σε marked. Η μεταβλητή *level*(*v*) έχει τιμή ίση με το επίπεδο του υπερκόμβου, στον οποίο ανήκει, στο δέντρο. Η τιμή της μεταβλητής αυτής δεν μεταβάλλεται.

Ο αλγόριθμος διασχίζει το δέντρο από κάτω προς τα πάνω ανά επίπεδο. Σε κάθε επίπεδο επεξεργάζεται τους υπερκόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά. Σε κάθε υπερκόμβο επιλέγεται ένας μη-μαρκαρισμένος κόμβος *v*. Αυτός ο κόμβος αντιστοιχίζεται με έναν μη-μαρκαρισμένο κόμβο *u* που έχει μέγιστη τιμή για τη μεταβλητή level, δηλαδή είτε ίση με την τιμή level του κόμβου *v* είτε κατά 1 μικρότερη, δηλαδή ο κόμβος *u* να ανήκει στο αμέσως μικρότερο επίπεδο, στον πατέρα του υπερκόμβου που επεξεργαζόμαστε, και είναι γείτονας του κόμβου *v*. Όταν ολοκληρωθεί η αντιστοίχιση των δύο κόμβων, οι δύο κόμβοι χαρακτηρίζονται ως μαρκαρισμένοι.

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου φτάσουμε στη ρίζα του cent-tree. Εάν, σε κάποιον ή κάποιους υπερκόμβους μείνουν αταίριαστοι κόμβοι, τότε δεν υπάρχει τέλεια αντιστοίχιση. Σε διαφορετική περίπτωση έχουμε τέλεια αντιστοίχιση η οποία αποτελείται από τις ακμές που προκύπτουν από τις αντιστοιχίσεις.

Αλγόριθμος *Perfect-Matching-σε-Quasi-Threshold Γραφήματα*

(1) **Για** κάθε κόμβο v στο γράφημα **κάνε**

label(v) $\leftarrow$ unmarked;

level(v) $\leftarrow$ το επίπεδο του υπερκόμβου στο cent-tree στο οποίο ανήκει.

(2) **Για** κάθε επίπεδο του cent-tree **κάνε**

Για κάθε υπερκόμβο του cent-tree **κάνε**

Επίλεξε έναν unmarked κόμβο v

label(v) $\leftarrow$ marked;

Επέλεξε τον κόμβο $u \in adj(v)$ έτσι ώστε:

(α) label(u) = unmarked;

(β) level(u) = max{level(w) | $w \in$ adj(v) and label(w)= unmarked};

label(u) $\leftarrow$ marked;

ΤέλοςΓια

ΤέλοςΓια

(3) **Εάν** υπάρχουν υπερκόμβοι με μη μαρκαρισμένους κόμβους **τότε**

δεν υπάρχει τέλεια αντιστοίχιση

διαφορετικά

η τέλεια αντιστοίχιση είναι το σύνολο των ακμών που δημιουργούνται αντιστοιχίζοντας κόμβους

ΤέλοςΑν

Τέλος

Σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί, ο αλγόριθμος υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης στα Quasi-Threshold γραφήματα είναι γραμμικός ως προς το πλήθος των ακμών και κόμβων.

Θεώρημα 6.4. Ο αλγόριθμος Perfect-Matching-σε-Quasi-Threshold Γραφήματα εκτελείται σε γραμμικό χρόνο $O(n+m)$.

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος δουλεύει πάνω στο cent-tree των Quasi-Threshold γραφημάτων, από κάτω προς τα πάνω ανά επίπεδο, και σε κάθε επίπεδο από τα αριστερά προς τα δεξιά στους υπερκόμβους. Σε κάθε υπερκόμβο, για κάθε κόμβο αυτού ελέγχει εάν αυτός ο κόμβος είναι μη μαρκαρισμένος, όπως επίσης και το βαθμό του, και φτιάχνει τις αντίστοιχες ακμές. Δηλαδή, ο αλγόριθμος δουλεύει για τους n κόμβους πάνω στο βαθμό τους που είναι m.

Κεφαλαιο 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΟΙΧΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στην παρούσα μελέτη, αναπτύχθηκαν ακολουθιακοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα ελέγχου ύπαρξης τέλειας αντιστοίχισης και τον υπολογισμό αυτής σε περίπτωση που υπάρχει σε παραγόμενα συμπληρωματικά γραφήματα. Επίσης, μελετήθηκαν τα προβλήματα υπολογισμού του μέγιστου υπογραφήματος και του ελάχιστου υπεργραφήματος με τέλεια αντιστοίχιση όταν το αρχικό γράφημα δεν έχει. Η μελέτη ολοκληρώθηκε με έναν αλγόριθμο υπολογισμού τέλειας αντιστοίχισης στα Quasi-threshold γραφήματα, μία υποκλάση των παραγόμενων συμπληρωματικών γραφημάτων.

Η παράλληλη εφαρμογή αυτών των αλγορίθμων αποτελεί ανοιχτό πρόβλημα μεγάλης σημασίας. Στην παράλληλη εφαρμογή η δυσκολία εντοπίζεται στο γεγονός ότι τα σύνολα ακμών και κόμβων των εσωτερικών κόμβων δεν είναι πλέον κενά, εφόσον η διαδικασία RAKE δεν εφαρμόζεται από κάτω προς τα πάνω ανά επίπεδο και από αριστερά προς τα δεξιά σε κάθε επίπεδο. Οπότε, κατά τη δημιουργία των νέων συνόλων στους ελέγχους που γίνονται πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και το περιεχόμενο αυτών των συνόλων. Δηλαδή, ενώ στην ακολουθιακή εφαρμογή των αλγορίθμων ελέγχονται οι σχέσεις που έχουν τα πλήθη των συνόλων ακμών και κόμβων ενός κόμβου u στον οποίο εφαρμόζεται η διαδικασία RAKE και του αδερφού του $sib(u)$, στην παράλληλη εφαρμογή πρέπει να ληφθούν υπόψη και τα πλήθη των συνόλων ακμών και κόμβων των εσωτερικών κόμβων, καθώς επίσης και οι ελάχιστοι κοινοί προκάτοχοι μεταξύ των κόμβων όλων αυτών των συνόλων ώστε να δημιουργούνται κατάλληλα οι ακμές.

Τέλος, οι παραπάνω αλγόριθμοι βρίσκουν εφαρμογή στα P_4-reducible και P_4-sparse γραφήματα. Στα P_4-reducible γραφήματα, κάθε κορυφή τους ανήκει το πολύ σε ένα P_4 (άχορδο μονοπάτι με τρεις ακμές). Στα P_4-sparse γραφήματα, κάθε σύνολο πέντε κορυφών στο G επάγει το πολύ ένα P_4. Και οι δύο κατηγορίες γραφημάτων αποτελούν υπερκλάση των co-γραφημάτων, και έχουν μοναδική δεντρική αναπαράσταση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Γ. Μανωλόπουλος, Μαθήματα Θεωρίας Γραφημάτων: Θεμελιώσεις – Αλγόριθμοι – Εφαρμογές, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

[2] A. Brandstadt, V. B. Le and J. P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey, Siam Monographs on Discrete Math. and Appl.*, 1999.

[3] D.G. Corneil, H. Lerchs and L. Stewart Burlinham, Complement reducible graphs, *Disc. Appl. Math.* 3, 1981, pp. 163 – 174.

[4] D.G. Corneil, Y. Perl and L. K. Stewart Burlinham, A linear recognition algorithm for cographs, *SIAM J. on Computing* 14 (4), 1985, pp. 926-934.

[5] D.G. Kirkpatrick and T. Przytycka, Parallel recognition of complement reducible graphs and cotree construction, TR-88-1, Department of Computer Science, University of British Columbia, 1988.

[6] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, *Can. J. Math.*, 17, 449-67 (1965).

[7] J. Edmonds and E. Johnson, Matching: A well-solved class of integer linear programs, *Combinatorial Structures and Their Applications*, Gordon & Breach, NY, pp. 89-92 (1970).

[8] G.S. Adhar and S. Peng, NC algorithms for complement reducible graphs and parity graphs, in Proc. of International Conf. on Comput. and Info., 1989.

[9] G.S. Adhar and S. Peng, Parallel algorithms for complement reducible graphs and parity graphs with applications, in Proc. Workshop on Algorithms and Data Structures, 1989.

[10] G.S. Adhar and S. Peng, Parallel algorithms for cographs and parity graphs with Applications, *J. Algorithms* 11, 1990, pp. 252-284.

[11] G.S. Adhar and S. Peng, Parallel algorithms for finding minimal path cover, Hamiltonian path and Hamiltonian cycle in cographs, UMIACS-TR-89-64, Uni. Of Maryland, 1989.

[12] H.A. Jung, On a class of posets and the corresponding comparability graphs, *J. Combinatorial Theory* (B) 24, 1978, pp. 125-133.

[13] J–H. Yan, J–J. Chen and G. J. Chang, Quasi-threshold graphs, *Discrete Appl. Math.* 69 (1996) 147-155.

[14] K. Mulmuley, U. Vazirani, and V. Vazirani, Matching is as easy as matrix inversion, *Combinatorica* 7(1):105-131, 1987.

[15] K. Nakano, S. Olariu, A. Y. Zomaya A time-optimal solution for the path cover problem on cographs, NSF grant CCR-9522093, ONR grant N00014-97-1-0526 and Australian Research Council.

[16] L. Lovasz, On determinants, matchings and random algorithms, In L. Budach, editor, *Proceedings of Conference on Fundamentals of Computing Theory*, pages 565-574, Akademia – Verlag, 1979.

[17] M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York, 1980.

[18] M.C. Golumbic, Trivially perfect graphs, *Discrete Math.* 24 (1978) 105-107.

[19] R. Lin, S. Olariu and G. Pruesse, An optimal path cover algorithm for cographs, *Computers and Mathematics with Applications*, 30, (1995), 75 – 83.

[20] R.M. Karp, E. Upfal, and A. Wigderson. Constructing a perfect matching is in random NC, *Combinatorica*, 17:411-423, 1982.

[21] S.D. Nikolopoulos, Parallel algorithms for Hamiltonian problems on quasi-threshold graphs, *J. Parallel and Distributed Computing*, to appear.

[22] S.D. Nikolopoulos, Recognizing cographs and threshold graphs through a classification of their edges, *Inform. Process. Lett.* 75 (2000) 129-306.

[23] T.A. McKee and F. R. McMorris, *Topics in Intersection Graph Theory*, Siam Monographs on Discrete Math. and Appl., 1999.

[24] X. He, Parallel algorithm for cograph recognition with applications, *J. Algorithms* 15(2):284-313 (1993).

[25] A. Gibbons, *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1985.