

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000265229



59

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ HAWKING ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ  
ΜΕΛΑΝΩΝ ΟΠΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

Ορέστης Ευθυμίου

Τμήμα Φυσικής  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων



ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2008



Η επταμελής επιτροπή που εξέτασε την παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελείται από τους:

- Κ. Ταμβάκης, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Ιωαννίνων (επιβλέπων)
- Π. Καντή, Αναπλ. Καθηγήτρια Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Ιωαννίνων
- Λ. Περιβολαρόπουλος, Αναπλ. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Ιωαννίνων
- Κ. Βαγιονάκης, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Ιωαννίνων
- Ι. Ρίζος, Αναπλ. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Παν/μίου Ιωαννίνων
- Α. Κεχαγιάς, Επίκ. Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ
- Α. Λαχανάς Καθηγητής Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ



...στην οικογένειά μου...

### Αφιερώνεται στην οικογένειά μου

...στην οικογένειά μου...



## Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Κυριάκου Ταμβάκη τον οποίο και ευχαριστώ θερμά για την βοήθεια, την καθοδήγηση και την συνεργασία που μου παρείχε όλα αυτά τα χρόνια, για το χρόνο που μου διέθετε καθημερινά, καθώς και για την οικονομική αλλά και ηθική συμπαράσταση που μου προσέφερε.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κ. Π. Καντή, η οποία με βοήθησε καθόλη την διάρκεια του διδακτορικού, μου προσέφερε απλόχερα τον πολύτιμο χρόνο της όποτε χρειάστηκα την βοήθειά της, καθώς και για την άψογη συνεργασία που είχαμε στα πλαίσια του ερευνητικού έργου.

Ευχαριστώ επίσης τον διδακτορικό φοιτητή του πανεπιστημίου του Durham, S. Greek για την αρμονική συνεργασία μας στις τέσσερις εργασίες που δημοσιεύσαμε και οι οποίες παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στους φίλους και συναδέρφους μου Χ. Μπογδάνο, Σ. Νέσσερη, Α. Ψαλλίδα και Α. Δημητριάδη για την βοήθεια που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια σε ο,τιδήποτε χρειάστηκα και για την αμέριστη συμπαράστασή τους.

Ευχαριστώ θερμά την τριμελή επιτροπή μου (κ. κ. Κ. Ταμβάκη, κ. Α. Λαχανά, κ. Α. Κεχαγιά) για τον χρόνο που διέθεσε στην ανάγνωση της παρούσας διατριβής.

Η διδακτορική αυτή διατριβή εκπονήθηκε με την οικονομική υποστήριξη του Ιδρύματος Ελληνικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.), το οποίο και ευχαριστώ.

Θα ήθελα τέλος να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στους γονείς μου για την οικονομική και ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν καθόλη την διάρκεια της παρούσας διδακτορικής διατριβής.



## Σύνοψη

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετάμε την εκπομπή ακτινοβολίας Hawking από πολυδιάστατες μελανές οπές. Μελετάμε αρχικά την εκπομπή βαρυτονίων στον Υπερχώρο από σφαιρικά συμμετρικές, αφόρτιστες μελανές οπές. Χρησιμοποιώντας αναλυτικές μεθόδους, δίνουμε εκφράσεις για τα διάφορα μεγέθη που χαρακτηρίζουν την εκπομπή και συγκρίνουμε τους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας για τα διάφορα είδη των βαρυτικών διαταραχών.

Στην συνέχεια εξετάζουμε την εκπομπή ακτινοβολίας Hawking από περιστρεφόμενες, αφόρτιστες μελανές οπές παρουσία επιπλέον διαστάσεων. Καταρχάς μελετάμε την εκπομπή βαθμωτών πεδίων στην Μεμβράνη, στην συνέχεια φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας στην Μεμβράνη και τέλος βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο. Παράγουμε αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα απορρόφησης και υπολογίζουμε τον ρυθμό με τον οποίο εκπέμπει η μελανή οπή ενέργεια για κάθε περίπτωση εκπομπής.

Η ανάλυσή μας γίνεται κατά το μεγαλύτερο μέρος με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων. Τα αποτελέσματά μας συγκρίνονται με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα της διεθνούς βιβλιογραφίας και η σύγκριση αυτή δείχνει μια εξαιρετική συμφωνία ανάμεσα στα δυο σύνολα αποτελεσμάτων.



# Περιεχόμενα

Πρόλογος	12
1 Εισαγωγή στις Θεωρίες πέραν του Καθιερωμένου Μοντέλου	17
1.1 Το Καθιερωμένο Μοντέλο	17
1.1.1 Βαρύτητα και Καθιερωμένο Μοντέλο	18
1.1.2 Το Πρόβλημα της Ιεραρχίας	18
1.1.3 Το Πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς	19
1.1.4 Ενοποίηση των Σταθερών Σύζευξης	19
1.2 Μοντέλα Περισσοτέρων Διαστάσεων	20
1.3 Το Μοντέλο των Kaluza - Klein	21
1.4 Τα Μοντέλα ADD	23
1.4.1 Ο Νόμος του Gauss στις Επιπλέον Διαστάσεις	24
1.4.2 Περιορισμοί στο Μέγεθος και τον Αριθμό των Επιπλέον Διαστάσεων	24
2 Εισαγωγή στις Μελανές Οπές	27
2.1 Εισαγωγή	27
2.2 Η Μετρική Schwarzschild	30
2.2.1 Οι Συντεταγμένες Kruskal	31
2.2.2 Το Διάγραμμα Penrose - Carter	34
2.2.3 Ορίζοντας Γεγονότων	36
2.3 Η Μετρική Reissner - Nordström	37
2.4 Η Μελανή Οπή Kerr	41
2.4.1 Η Μετρική Kerr	41
2.4.2 Εργόσφαιρα	42
2.4.3 Αναλυτική Επέκταση του Χωρόχρονου Kerr	43
2.5 Θερμοδυναμική των Μελανών Οπών	45
2.5.1 Οι Θερμοδυναμικοί Νόμοι των Μελανών Οπών	45
2.5.2 Ακτινοβολία Hawking	47
2.6 Μελανές Οπές Εντοπισμένες σε Μεμβράνες	49



2.6.1	Παραγωγή Μελανών Οπών σε Συγκρούσεις Υποατομικών Σωματιδίων . . . . .	50
2.6.2	Ιδιότητες των Πολυδιάστατων Μελανών Οπών . . . . .	52
2.6.3	Ακτινοβολία Hawking από Μελανές Οπές Παρουσία Επιπλέον Χωρικών Διαστάσεων . . . . .	56
2.6.4	Πολυδιάστατες Περιστρεφόμενες Οπές και Εξισώσεις Κίνησης των Πεδίων . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Εκπομπή βαρυτονίων από σφαιρικά συμμετρικές μελανές οπές</b>	<b>67</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	67
3.2	Θεωρητικό Υπόβαθρο . . . . .	69
3.3	Λύνοντας τις Εξισώσεις Κίνησης . . . . .	71
3.3.1	Η Περιοχή Κοντά στον Ορίζοντα . . . . .	71
3.3.2	Η Απομακρυσμένη από τον Ορίζοντα περιοχή . . . . .	74
3.3.3	Κατασκευάζοντας την Ενιαία Λύση . . . . .	75
3.4	Η Πιθανότητα Απορρόφησης . . . . .	76
3.4.1	Απλοποίηση του Αναλυτικού αποτελέσματος . . . . .	77
3.4.2	Χρησιμοποιώντας το Αναλυτικό Αποτέλεσμα . . . . .	81
3.5	Ρυθμός Εκπομπής Ενέργειας . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Εκπομπή Βαθμωτών Πεδίων στην Μembrάνη από Περιστρεφόμενες Μελανές Οπές</b>	<b>89</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	89
4.2	Βαρυτικό Υπόβαθρο και Εξισώσεις Κίνησης . . . . .	90
4.3	Πιθανότητα Απορρόφησης στις Χαμηλές Ενέργειες . . . . .	94
4.3.1	Αναλυτική Επίλυση των Εξισώσεων Κίνησης . . . . .	95
4.3.2	Σύγκριση με την Ακριβή Αριθμητική Λύση . . . . .	101
4.3.3	Ασυμπτωτικό Όριο της Ενεργού Διατομής στις Χαμηλές Ενέργειες . . . . .	104
4.4	Πιθανότητα Απορρόφησης στις Υψηλές Ενέργειες . . . . .	107
4.4.1	Αναλυτική Κατασκευή της Λύσης . . . . .	108
4.4.2	Η Ασυμπτωτική Συμπεριφορά στις Υψηλές Ενέργειες και το Όριο της Γεωμετρικής Οπτικής . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Εκπομπή Φερμιονίων και Μποζονίων Βαθμίδας στην Μembrάνη από Περιστρεφόμενες Μελανές Οπές</b>	<b>121</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	121
5.2	Ενιαία Εξίσωση Κίνησης για Πεδία στην Μembrάνη, Παρουσία Περιστρεφόμενης Μελανής Οπής . . . . .	122
5.3	Αναλυτική Επίλυση της Εξίσωσης Κίνησης . . . . .	125





5.3.1	Επίλυση Κοντά στον Ορίζοντα . . . . .	125
5.3.2	Επίλυση Μακριά από τον Ορίζοντα . . . . .	129
5.3.3	Υπολογισμός της Πιθανότητας Απορρόφησης . . . . .	131
5.4	Αναπαριστώντας Γραφικά τα Αναλυτικά μας Αποτελέσματα . . . . .	133
5.5	Ασυμπτωτική Συμπεριφορά και Ενεργός Διατομή Απορρόφησης . . . . .	135
5.6	Ρυθμοί Εκπομπής Ενέργειας . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Εκπομπή Βαθμωτών Σωματιδίων στον Υπερχώρο από Περι- στρεφόμενες Μελανές Οπές</b> . . . . .	<b>145</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	145
6.2	Στοιχείο Μήκους και Εξισώσεις Κίνησης . . . . .	147
6.3	Αναλυτική Λύση . . . . .	150
6.4	Υπολογισμός της Πιθανότητας Απορρόφησης . . . . .	153
6.5	Ο Ρυθμός Εκπομπής της Ενέργειας . . . . .	158
	<b>Συμπεράσματα</b> . . . . .	<b>164</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b> . . . . .	<b>172</b>



## Πρόλογος

Τα τελευταία χρόνια έχουν εμφανιστεί στους κόλπους της επιστημονικής κοινότητας διάφορες θεωρίες που προσπαθούν να δώσουν μια ικανοποιητική απάντηση στο πώς λειτουργεί η φύση στις κλίμακες ενεργειών για τις οποίες το Καθιερωμένο Μοντέλο αδυνατεί να κάνει προβλέψεις. Όσο επιτυχημένο και αν είναι αυτό το Μοντέλο, αφήνει αναπάντητα σημαντικά ερωτήματα κυρίως σε σχέση με την βαρύτητα, καθώς δεν ενσωματώνει την βαρυτική αλληλεπίδραση.

Η ιδέα της ύπαρξης επιπλέον χωρικών διαστάσεων στο σύμπαν, αν και για πρώτη φορά προτάθηκε αρκετά παλιά, στην δεκαετία του 1920, τον τελευταίο καιρό ξανάγινε επίκαιρη και πλέον ένας μεγάλος αριθμός επιστημόνων δουλεύει πάνω σε θεωρίες περισσότερων των τεσσάρων διαστάσεων, είτε πρόκειται για θεωρίες χορδών, είτε μοντέλα ADD, Randall - Sundrum κτλ. Τα μοντέλα αυτά προβλέπουν ότι εκτός των τριών χωρικών διαστάσεων που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας, το σύμπαν στην πραγματικότητα εμπεριέχει και άλλες, τις οποίες όμως δεν μπορούμε να αντιληφθούμε άμεσα, καθώς είμαστε αναγκασμένοι να ζούμε πάνω στο σύνθητες, τετραδιάστατο σύμπαν, την επονομαζόμενη Μεμβράνη (*Brane*). Αφήνοντας όμως την βαρύτητα ελεύθερη να διαδίδεται σε όλο τον Υπερχώρο (*Bulk*) και ταυτόχρονα κρατώντας το μέγεθος των επιπλέον αυτών διαστάσεων αρκετά μικρό, μπορούμε να κρατήσουμε ανέπαφο τον νόμο του Νεύτωνα στις αποστάσεις που αυτός έχει ελεγχθεί πειραματικά και ταυτόχρονα να αλλάξουμε την συμπεριφορά της βαρυτικής αλληλεπίδρασης σε μικρές αποστάσεις. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατεβάσουμε την χαρακτηριστική κλίμακα της βαρύτητας αρκετά χαμηλά ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα της ιεραρχίας, κρατώντας παράλληλα ανέπαφη την φαινομενολογία στις ενέργειες και στις αποστάσεις που έχουν ελεγχθεί πειραματικά ως τώρα.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα συνακόλουθα της ύπαρξης επιπλέον διαστάσεων στο σύμπαν, είναι ότι αυτή ανοίγει τον δρόμο για την δημιουργία μελανών οπών. Οι μελανές οπές, αντικείμενα που κέντρισαν και συνεχίζουν να κεντρίζουν την φαντασία πολλών ανθρώπων ακόμα και έξω από τα όρια της φυσικής, έχουν απασχολήσει ένα μεγάλο αριθμό επιστημόνων από το πρώτο τέταρτο του περασμένου αιώνα μέχρι και τώρα. Η ύπαρξη τους, παρόλα αυτά, δεν έχει ακόμα αποδειχτεί πέραν οποιασδήποτε αμφιβολίας. Αν όμως οι θεωρίες που προβλέπουν επιπλέον διαστάσεων αποδειχτούν σωστές για την περιγραφή της φύσης, τότε για πρώτη φορά στην ιστορία της φυσικής, ίσως μπορέσουμε όχι απλά να δούμε μία μελανή οπή, αλλά ακόμα και να την κατασκευάσουμε πειραματικά και να μελετήσουμε όλα τα στάδια της ζωής της. Η ενδυνάμωση της βαρύτητας στις μικρές αποστάσεις έχει ως αποτέλεσμα την διευκόλυνση της δημιουργίας μελανών οπών σε υψηλά ενεργειακές συγκρούσεις υποατομικών σωματιδίων, όπως αυτές που γίνονται σε σωματίδια της ατμόσφαιρας με σω-



ματίδια της κοσμικής ακτινοβολίας, ή όπως αυτές που θα διενεργηθούν στους επιταχυντές του άμεσου μέλλοντος, ακόμα και στο πείραμα του LHC που είναι προγραμματισμένο να ξεκινήσει να λειτουργεί στο CERN στην Ελβετία, μέσα στο 2008.

Αυτές οι μελανές οπές, αν τελικά καταφέρουμε να τις δημιουργήσουμε, θα αποτελέσουν μία απόδειξη για την ύπαρξη των επιπλέον διαστάσεων στο σύμπαν και μελετώντας τις θα μπορέσουμε να εξάγουμε πληροφορίες για την φύση του χωρόχρονου. Ο τρόπος να γίνει αυτό είναι μέσα από την ακτινοβολία Hawking. Όπως έδειξε το 1975 ο Stephen Hawking, οι μελανές οπές χαρακτηρίζονται από μια μη μηδενική θερμοκρασία και συμπεριφέρονται σαν μέλανα σώματα, εκπέμπουν δηλαδή θερμική ακτινοβολία σε όλο το φάσμα ενεργειών, με τη μορφή όλων των σωματιδίων του Καθιερωμένου Μοντέλου, καθώς και βαρυτονίων. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα, αν τελικά δημιουργηθούν μελανές οπές στους επιταχυντές, αυτές να εξαϋλωθούν μέσα σε ελάχιστα κλάσματα του δευτερολέπτου ακτινοβολώντας όλη τους την μάζα θερμικά. Επιπλέον η ακριβής μορφή του φάσματος της ακτινοβολίας που η μελανή οπή θα εκπέμψει θα εξαρτάται από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Επίσης, από τον αριθμό αυτό θα εξαρτάται το ποσοστό της αρχικής ενέργειας της σύγκρουσης που θα διαφύγει μέσω ακτινοβολίας Hawking στον Υπερχώρο χωρίς να το ανιχνεύσουμε, ένα ποσοστό που θα αντιστοιχεί σε ένα παρατηρούμενο έλλειμμα ενέργειας.

Με βάση τα παραπάνω λοιπόν, καθίσταται επιτακτική η ανάγκη να μελετηθεί η ακτινοβολία Hawking που θα εκπέμψει μια πολυδιάστατη μελανή οπή και να βρεθεί ο τρόπος να συσχετιστεί η ακτινοβολία που θα παρατηρήσουμε στους ανιχνευτές μας -αν φυσικά δημιουργήσουμε πειραματικά τέτοια αντικείμενα- με τον αριθμό των επιπλέον αυτών διαστάσεων, ή και άλλες παραμέτρους του σύμπαντος, π.χ. την κοσμολογική σταθερά.

Στα πλαίσια αυτά κινείται και η παρούσα διδακτορική διατριβή. Η δομή της είναι η εξής: στο πρώτο Κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση των θεμάτων που αφήνει ανοιχτά το Καθιερωμένου Μοντέλου δίνοντας κίνητρο να ψάξουμε για την φυσική πέραν αυτού, καθώς και μια εισαγωγή στα μοντέλα πολλών διαστάσεων. Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται μια εισαγωγή στην θεωρία των μελανών οπών της κλασικής τετραδιάστατης Γενικής Σχετικότητας και γίνεται η γενίκευσή τους για την περίπτωση που υπάρχουν επιπλέον διαστάσεις στο σύμπαν. Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με την περίπτωση μιας σφαιρικά συμμετρικής, αφόρτιστης μελανής οπής παρουσία  $n$  επιπλέον διαστάσεων, και μελετάμε την ακτινοβολία Hawking που εκπέμπει αυτή με την μορφή βαρυτονίων. Στα Κεφάλαιο 4 εξετάζουμε μία περιστρεφόμενη, αφόρτιστη, πολυδιάστατη μελανή οπή και πώς αυτή ακτινοβολεί ενέργεια με την μορφή βαθμωτών πεδίων στην Μεμβράνη. Στο Κεφάλαιο 5 συνεχίζουμε την μελέτη αυτού του είδους των μελανών οπών υπολογίζοντας τους διάφορους ρυθμούς εκπομπής για



την περίπτωση ακτιβολίας Hawking με την μορφή φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας. Στο Κεφάλαιο 6 ολοκληρώνουμε την μελέτη των περιστρεφόμενων οπών, μελετώντας την εκπομπή βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο. Τέλος παρουσιάζουμε εν συντομία τα κυριότερα συμπεράσματα και τα αποτελέσματα της διατριβής αυτής.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή στις Θεωρίες πέραν του Καθιερωμένου Μοντέλου

### 1.1 Το Καθιερωμένο Μοντέλο

Το Καθιερωμένο Μοντέλο των Στοιχειωδών Σωματιδίων (Standard Model, ή απλά SM), έχει αποδειχθεί εξαιρετικά επιτυχημένο. Πολλές από τις παραμέτρους του έχουν μετρηθεί με μεγάλη ακρίβεια σε πειράματα στο παρελθόν και το μοντέλο έχει κάνει προβλέψεις οι οποίες επιβεβαιώθηκαν πειραματικά [1]. Παρόλη την μεγάλη επιτυχία του μοντέλου, υπάρχουν λόγοι να πιστεύουμε ότι ενώ αυτό λειτουργεί πολύ καλά στις περιοχές ενεργειών που έχουν φτάσει μέχρι τώρα οι σύγχρονοι επιταχυντές, στην πραγματικότητα δεν μας δίνει την πλήρη εικόνα. Κυρίαρχη είναι η άποψη ότι υπάρχει και φυσική πέρα του Καθιερωμένου Μοντέλου, κάτι που δίνει και κίνητρο για την συνέχιση της διενέργειας πειραμάτων μεγάλης κλίμακας στη σωματιδιακή φυσική. Αυτό που αναμένεται με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι το Large Hadron Collider (LHC) στο CERN, που είναι προγραμματισμένο να αρχίσει να λειτουργεί μέσα στο 2008 και στο οποίο θα συγκρουστούν πρωτόνια με ενέργεια κέντρου μάζας που θα φτάσει τα 14 TeV. Ο άλλος μεγάλος στόχος του LHC, είναι η ανίχνευση του σωματιδίου Higgs, του μοναδικού σωματιδίου του Καθιερωμένου Μοντέλου που δεν έχει βρεθεί ακόμα πειραματικά.

Όπως είπαμε, είναι γενικά αποδεχτό ότι το Καθιερωμένο Μοντέλο παρά τις επιτυχίες του δεν αρκεί για να περιγράψει την φύση, και ότι υπάρχει φυσική και πέρα από αυτό. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε εν συντομία κάποιους από τους λόγους που ενισχύουν αυτήν την άποψη.



### 1.1.1 Βαρύτητα και Καθιερωμένο Μοντέλο

Μία πλήρης θεωρία για την περιγραφή των στοιχειωδών σωματιδίων χρειάζεται να ενσωματώνει όλες τις θεμελιώδεις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ τους: ηλεκτρασθενείς, ισχυρές, αλλά και βαρυτικές. Παρόλα αυτά, το Καθιερωμένο Μοντέλο δεν περιλαμβάνει την βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων και συνεπώς δεν μπορεί να αποτελεί τη θεμελιώδη θεωρία που περιγράφει τη φύση. Σε ενεργειακές κλίμακες της τάξης της μάζας Planck,  $M_P = 10^{18} \text{GeV}$ , η βαρύτητα γίνεται συγκρίσιμη με τις υπόλοιπες δυνάμεις, και χρειάζεται μία κβαντική θεωρία της βαρύτητας για να περιγράψει τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα στοιχειώδη σωματίδια. Αυτό δείχνει ότι το Καθιερωμένο μοντέλο θα χρειαστεί να αντικατασταθεί από μία διαφορετική θεωρία στις πολύ υψηλές ενέργειες, ενώ είναι λογικό να αναμένει κάποιος ότι μπορεί να χρειάζεται ένα πιο πλήρες μοντέλο για την περιγραφή της φύσης ακόμα και σε ενέργειες μόνο ελαφρώς μεγαλύτερες από αυτές που έχουν μελετηθεί στα πειράματα που έχουν γίνει.

### 1.1.2 Το Πρόβλημα της Ιεραρχίας

Ένα από τα πιο συνηθισμένα επιχειρήματα υπέρ των θεωριών πέραν του Καθιερωμένου Μοντέλου, είναι αυτό που έχει να κάνει με το λεγόμενο πρόβλημα της ιεραρχίας, ή διαφορετικά του γιατί η βαρύτητα είναι τόσο ασθενέστερη από τις υπόλοιπες θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις. Συγκεκριμένα, η κλίμακα της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης είναι της τάξης των  $100 \text{GeV}$ , δεκαεφτά τάξεις μεγέθους μικρότερη από την χαρακτηριστική κλίμακα της βαρύτητας, που είναι γύρω στα  $10^{18} \text{GeV}$ . Σε μια ενοποιημένη θεωρία των πάντων θα περίμενε κάποιος οι κλίμακες των ενεργειών να είναι σχετικά κοντά.

Μιλώντας πιο τεχνικά, υπάρχει το ερώτημα του γιατί το σωματίδιο Higgs είναι τόσο ελαφρύτερο της μάζας Planck (η μάζα του Higgs αναμένεται να είναι της τάξης των  $100 \text{GeV}$ ), παρόλο που αν κάποιος εκτιμήσει τις κβαντικές διορθώσεις στη μάζα του σωματιδίου, βλέπει ότι την κάνουν τεράστια, της τάξης της κλίμακας ενέργειας που η καινούργια φυσική αρχίζει να εμφανίζεται (μάζα Planck,  $10^{18} \text{GeV}$ ). Για να διορθωθεί αυτό χρειάζεται μια τεράστια ρύθμιση (*fine tuning*) στις παραμέτρους της συνάρτησης Lagrange της θεωρίας, ώστε οι διορθώσεις να αλληλοεξουδετερώνονται, αφήνοντας την μάζα χαμηλά. Αποδεχόμενοι λοιπόν την ύπαρξη του σωματιδίου Higgs, και ότι μιας τέτοιας τάξης ρύθμιση στην συνάρτηση Lagrange είναι αφύσικη, μένουμε μόνο με μία πιθανότητα: να υπάρχει διαφορετική φυσική στις κλίμακες υψηλότερων ενεργειών.



### 1.1.3 Το Πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς

Το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς συνίσταται στην τεράστια διαφορά ανάμεσα στις τιμές που προκύπτουν για την ενέργεια του κενού στο σύμπαν από τις αστροφυσικές παρατηρήσεις και από τους υπολογισμούς με βάση το Καθιερωμένο Μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι το σύμπαν διαστέλλεται με επιτάχυνση, και η εξίσωση Friedmann απαιτεί την ύπαρξη μίας ενέργειας κενού της τάξης του [2]

$$\rho_{vac}^{obs} \approx (10^{-3} eV)^4 \quad (1.1)$$

για να έρθει σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Στην παραπάνω σχέση έχουμε θέσει  $\hbar = c = 1$ .

Όταν όμως πάμε να υπολογίσουμε με βάση το Καθιερωμένο πρότυπο την αναμενόμενη ενέργεια του κενού, όπως αυτή προκύπτει από κβαντικές διακυμάνσεις για το κάθε πεδίο της θεωρίας, ερχόμαστε αντιμέτωποι με απειρισμούς, που μας αναγκάζουν να θέσουμε ένα άνω όριο στις ενέργειες (cutoff). Το πιο φυσικό τέτοιο άνω όριο είναι αυτό που θέτει η κλίμακα της βαρύτητας, η μάζα Planck. Έτσι λοιπόν, οι κβαντικές διακυμάνσεις των διαφόρων πεδίων του μοντέλου, αν υπολογιστούν με cutoff την μάζα Planck, δίνουν ενέργεια κενού της τάξης

$$\rho_{vac}^{theory} \approx (10^{27} eV)^4 \approx 10^{120} \rho_{vac}^{obs}, \quad (1.2)$$

υπάρχει δηλαδή μία διαφορά της τάξης του  $10^{120}$ , η χειρότερη ίσως διαφωνία ανάμεσα στην θεωρία και το πείραμα στην ιστορία της φυσικής.

### 1.1.4 Ενοποίηση των Σταθερών Σύζευξης

Στο Καθιερωμένο Μοντέλο, καθώς αυξάνει η ενέργεια μεταβάλλονται οι σταθερές σύζευξης και σχεδόν ενοποιούνται σε ενέργειες γύρω στα  $10^{16} GeV$ . Παρόλα αυτά, η ενοποίηση αυτή δεν είναι ακριβής [1], κάτι που δίνει ένα επιπλέον κίνητρο να πιστεύουμε ότι χρειάζεται μια νέα θεωρία η οποία θα περιγράφει την μεταβολή των σταθερών σε υψηλές ενέργειες, κάνοντας την ενοποίηση τους ακριβή. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται από την θεωρία της Υπερσυμμετρίας (Supersymmetry) η οποία συνδέει κάθε είδος στοιχειώδους σωματιδίου, με ένα άλλο σωματίδιο διαφορετικού σπιν [3]. Στα πλαίσια αυτής της θεωρίας η ενοποίηση είναι ακριβής, όμως, μέχρι τη στιγμή που γράφεται η παρούσα διατριβή δεν έχει βρεθεί άμεση πειραματική απόδειξη για την ύπαρξη της Υπερσυμμετρίας και το ζήτημα είναι ακόμα ανοικτό.



## 1.2 Μοντέλα Περισσότερων Διαστάσεων

Στα πλαίσια αναζήτησης εναλλακτικών θεωριών, τα τελευταία χρόνια ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών ασχολείται με μοντέλα που προβλέπουν την ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων στο σύμπαν, τα οποία να αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της ιεραρχίας. Αυτά τα μοντέλα εξηγούν το γεγονός ότι η βαρύτητα είναι τόσο ασθενέστερη σε σχέση με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις με την βοήθεια επιπλέον διαστάσεων.

Σε όλα τα μοντέλα αυτού του είδους, υπάρχει μια χωροχρονική Μεμβράνη (3 + 1) διαστάσεων, η οποία συνήθως αποκαλείται *Brane*, εμβρατισμένη στο πλήρες πολυδιάστατο χωρόχρονο (που συνήθως αποκαλείται *Bulk* - Υπερχώρος). Στα περισσότερα από αυτά, ο κόσμος όπως τον ξέρουμε, δηλαδή όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου, είναι εντοπισμένα πάνω στην Μεμβράνη, ενώ τα βαρυτόνια και τα βαθμωτά πεδία μπορούν να διαδίδονται και στον Υπερχώρο. Υπάρχουν βέβαια και ορισμένα μοντέλα όπου τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου μπορούν να διαδίδονται και στον Υπερχώρο, αλλά αυτά δεν θα μας απασχολήσουν περισσότερο. Ένα χαρακτηριστικό ορισμένων πολυδιάστατων μοντέλων είναι ότι οι επιπλέον διαστάσεις είναι συμπαγυτοποιημένες, πράγμα απαραίτητο για να εξηγήσει κανείς το γιατί δεν είναι παρατηρήσιμες όπως και οι υπόλοιπες τρεις συνήθεις χωρικές διαστάσεις. Σε άλλα μοντέλα οι επιπλέον διαστάσεις είναι άπειρες σε έκταση. Το 1999 οι Randall και Sundrum παρουσίασαν μοντέλα επιπλέον διαστάσεων [4, 5] στα οποία η επιπλέον διάσταση είναι άπειρη σε έκταση και καμπυλωμένη.

Παρόλο που τα διάφορα μοντέλα προβλέπουν διαστάσεις διαφόρων μεγεθών, είναι σημαντικό το γεγονός ότι αυτές μπορεί να είναι και σχετικά μεγάλες (μέχρι και 1mm) χωρίς να έρχονται σε αντίθεση με πειραματικές μετρήσεις της βαρύτητας. Η ύπαρξη επιπλέον διαστάσεων τέτοιου μεγέθους υπονοεί ότι ο Νευτώνειος νόμος  $1/r^2$  θα σταματάει να ισχύει σε τέτοιες κλίμακες μήκους, όμως αυτή η εξάρτηση της βαρυτικής έλξης από το  $r$  έχει ελεγχθεί πειραματικά μόνο μέχρι αποστάσεις της τάξης 100  $\mu\text{m}$  [6], ενώ το 1998 που προτάθηκαν για πρώτη φορά αυτά τα μοντέλα το όριο ήταν γύρω στο 1 mm.

Πέραν του το ότι προσφέρουν λύση για το πρόβλημα της ιεραρχίας, κίνητρο για την μελέτη μοντέλων με επιπλέον διαστάσεις, αποτελεί και η θεωρία χορδών. Σε συνδυασμό με την υπερσυμμετρία, η θεωρία χορδών αποτελεί υποψήφια θεωρία κβαντικής βαρύτητας, που όμως απαιτεί την ύπαρξη ενός εντεκαδιάστατου χωρόχρονου. Στην θεωρία αυτή προβλέπονται σωματίδια εντοπισμένα πάνω σε μεμβράνες (3 + 1) διαστάσεων, ενώ τα βαρυτόνια, διαδίδονται και στις επιπλέον διαστάσεις. Η ύλη και οι αλληλεπιδράσεις του Καθιερωμένου Μοντέλου αναπαριστώνται με ανοιχτές χορδές που αρχίζουν και τελειώνουν πάνω σε μία Μεμβράνη, ενώ η βαρύτητα αναπαρίσταται με κλειστές χορδές που μπορούν να διαδίδονται σε όλες τις διαστάσεις.





Πέραν όμως από τις σχετικά συγχρονες θεωρίες χορδών και υπερσυμμετρίας, η ιδέα των επιπλέον διαστάσεων είναι αρκετά παλαιότερη. Στο εδάφιο που ακολουθεί, θα παρουσιάσουμε το μοντέλο που πρότεινε το 1921 ο Kaluza [7] στην προσπάθειά του να ενοποιήσει τον ηλεκτρομαγνητισμό και την βαρύτητα, και το οποίο περιέχει μία επιπλέον χωρική διάσταση. Το μοντέλο αυτό επεκτάθηκε το 1926 από τον Klein [8], ο οποίος πρότεινε ότι η επιπλέον διάσταση είναι συμπαγοποιημένη.

### 1.3 Το Μοντέλο των Kaluza - Klein

Πριν περάσουμε στις λεπτομέρειες του μοντέλου των Kaluza - Klein σκόπιμο είναι να παρουσιάσουμε μερικά πράγματα από την θεωρία της γενικής σχετικότητας.

Οι εξισώσεις πεδίου για την βαρύτητα μπορούν να εξαχθούν από την δράση Einstein - Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4 x \quad (1.3)$$

όπου  $g$  είναι η ορίζουσα του τετραδιάστατου πίνακα  $g_{\mu\nu}$  της μετρικής του χωρόχρονου,  $R$  είναι η βαθμωτή καμπυλότητα και  $G$  η σταθερά του Νεύτωνα. Το  $R$  υπολογίζεται με την βοήθεια του τανυστή καμπυλότητας του Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} - \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} \quad (1.4)$$

ο οποίος κατασκευάζεται από τα σύμβολα Cristoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu}g_{\rho\mu} + \partial_{\mu}g_{\rho\nu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) . \quad (1.5)$$

Ο τανυστής Ricci ορίζεται τότε ως  $R_{\mu\kappa} = R_{\mu\nu\kappa}^{\nu}$  και η βαθμωτή καμπυλότητα με τη σειρά της, με συστολή του τανυστή Ricci, ως εξής:  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ . Από την δράση Einstein - Hilbert προκύπτουν οι περίφημες εξισώσεις Einstein για το κενό

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (1.6)$$

Η δράση Einstein - Hilbert της εξίσωσης (1.3) μπορεί να οριστεί με μοναδικό τρόπο, από την απαίτηση να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς των συντεταγμένων και να περιλαμβάνει δύο χωροχρονικές παραγωγίσεις της μετρικής.

Οι Kaluza - Klein, λοιπόν, πρότειναν μία επέκταση του τετραδιάστατου χωρόχρονου στις πέντε διαστάσεις, προσπαθώντας να γράψουν βαρύτητα και ηλεκτρομαγνητισμό κάτω από ένα ενιαίο πλαίσιο. Η πέμπτη χωρική διάσταση



θεωρείται συμπαγοποιημένη σε ένα μικροσκοπικό κύκλο ακτίνας  $a$ , πολύ μικρότερο από αυτό που μπορούμε να δούμε με τα πειράματα. Θέτοντάς το πιο μαθηματικά, το σημείο με συντεταγμένες  $(x^\mu, x^5)$  ταυτίζεται με το  $(x^\mu, x^5 + 2\pi a)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η δράση (1.3) παίρνει τη μορφή

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int \sqrt{-g_5} R_5 d^5 x. \quad (1.7)$$

Ο δείκτης 5 δηλώνει τις πενταδιάστατες ποσότητες. Συμβολίζουμε την πενταδιάστατη μετρική ως  $g_{AB}$ , με τα  $A, B$  να παίρνουν τιμές 0, 1, 2, 3 και 5.

Ας υποθέσουμε εδώ ότι η πενταδιάστατη μετρική  $g_{AB}$  δεν εξαρτάται από την  $x^5$ . Ολοκληρώνοντας την  $S$  ως προς  $x^5$  μπορούμε να υπολογίσουμε την ενεργό τετραδιάστατη Δράση. Καθώς το  $R_5$  και η τετραδιάστατη βαθμωτή καμπυλότητα  $R$  υπολογίζονται από δύο παραγωγίσεις του  $g_{AB}$ , το οποίο εμπεριέχει το  $g_{\mu\nu}$ , θα ισχύει  $R_5 = R + \dots$ . Έτσι, η (1.7) εμπεριέχει την δράση Einstein - Hilbert, με σταθερά του Νεύτωνα  $G \sim G_5/a$ .

Επιχειρήματα συμμετρίας [9] μας επιτρέπουν να πάρουμε και άλλα χρήσιμα αποτελέσματα. Αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων  $x'^A = x^A + \epsilon^A(x)$ , τότε η μετρική αλλάζει σε

$$g'^{AB} = \left( \frac{\partial x'^A}{\partial x^K} \right) \left( \frac{\partial x'^B}{\partial x^\Lambda} \right) g^{K\Lambda}. \quad (1.8)$$

Αν τώρα θέσουμε  $g^{AB} = \eta^{AB} - h^{AB} + \mathcal{O}(h^2)$ , όπου  $\eta^{AB}$  η μετρική που προκύπτει με την προσθήκη της συμπαγούς διάστασης  $x^5$  στην τετραδιάστατη επίπεδη (Minkowski) μετρική,  $h^{AB}$  μια διαταραχή και χρησιμοποιώντας ότι

$$\left( \frac{\partial x'^A}{\partial x^K} \right) = \delta_K^A - \partial_K \epsilon^A \quad (1.9)$$

βρίσκουμε για την μεταβολή στο  $h^{AB}$

$$h'_{AB} = h_{AB} + \partial_A \epsilon_B + \partial_B \epsilon_A. \quad (1.10)$$

Ας υποθέσουμε ότι  $\epsilon_\mu = 0$  και ότι το  $\epsilon_5$  είναι ανεξάρτητο του  $x_5$ : ουσιαστικά έχουμε περιστρέψει κάθε σημείο του χώρου κατά μία μικρή γωνία πάνω στην επιπλέον διάσταση. Κάνοντας αυτό παίρνουμε  $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$  και  $h'_{55} = h_{55}$ , αλλά  $h'_{\mu 5} = h_{\mu 5} - \partial_\mu \epsilon_5$ . Αν τώρα μετονομάσουμε το διάνυσμα  $h_{\mu 5}$  και το βαθμωτό  $\epsilon_5$  σε  $A_\mu$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα, βλέπουμε ότι  $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ , ο συνήθης δηλαδή μετασχηματισμός βαθμίδας στον ηλεκτρομαγνητισμό. Όπως είπαμε και πριν, η δράση είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων και άρα αναλλοίωτη και στο μετασχηματισμό  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ . Έτσι βλέπουμε ότι η δράση (1.7) είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμό βαθμίδας και άρα απο



αυτήν μπορούμε να παραγάγουμε τις εξισώσεις Maxwell . Σε αυτό το μοντέλο λοιπόν, το φωτόνιο είναι στην ουσία μία συνιστώσα του πενταδιάστατου βαρυτονίου.

Αν και η θεωρία αυτή τελικά εγκαταλείφθηκε λόγω της αδυναμίας της να συμπεριλάβει τις ασθενείς και ισχυρές αλληλεπιδράσεις και επειδή δεν ασχολείται καθόλου με φερμιόνια, τα τελευταία χρόνια οι ιδέες που εισήγαγε έχουν γίνει πάλι της μόδας, και ένας μεγάλος αριθμός επιστημόνων δουλεύει πάνω σε μοντέλα με επιπλέον χωρικές διαστάσεις. Η ακριβής γεωμετρία των επιπλέον διαστάσεων αλλάζει από μοντέλο σε μοντέλο. Σε αυτή τη διατριβή θα μελετήσουμε την φαινομενολογία μελανών σπών στα πλαίσια των μοντέλων με μεγάλες επιπλέον διαστάσεις (τα λεγόμενα ADD μοντέλα), τα οποία και θα παρουσιάσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στα εδάφια που ακολουθούν.

## 1.4 Τα Μοντέλα ADD

Ένα από τα πιο επιτυχημένα μοντέλα επιπλέον διαστάσεων ήταν αυτό των Arcañi-Hamed, Δημόπουλου και Dvali, εν συντομία μοντέλο ADD [10, 11, 12] που παρουσιάστηκε στην βιβλιογραφία το 1998. Αυτός είναι ο απλούστερος τύπος μοντέλου επιπλέον διαστάσεων, και ίσως ο πιο κοντινός στις ιδέες των Kaluza και Klein.

Σύμφωνα με αυτό η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι η μόνη δύναμη που διαδίδεται στον πλήρη πολυδιάστατο χωρόχρονο (τον Υπερχώρο), ο οποίος αποτελείται από το συνηθισμένο τετραδιάστατο σύμπαν με την προσθήκη κάποιων συμπαγοποιημένων,  $n$  τον αριθμό, επιπλέον διαστάσεων. Έτσι, η βαρυτική δύναμη που παρατηρούμε στον τετραδιάστατο κόσμο, (την Μεμβράνη), μοιάζει ασθενής σε σχέση με τις υπόλοιπες δυνάμεις που δεν διαδίδονται στις επιπλέον διαστάσεις. Σε αυτά τα μοντέλα υπάρχει μόνο μία θεμελιώδης ενεργειακή κλίμακα, αυτή του σπασίματος της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας και πλέον δεν υπάρχει το πρόβλημα του fine tuning στην συνάρτηση Lagrange.

Η παρατηρούμενη μάζα Planck  $M_P \sim 10^{18} \text{ GeV}$  δεν είναι η πραγματικά θεμελιώδης κλίμακα της βαρύτητας, αλλά μία ενεργός κλίμακα, που παρατηρείται στον τετραδιάστατο κόσμο. Αντίθετα, υπάρχει μία πιο θεμελιώδης ποσότητα, η  $M_*$ , που θέτει την κλίμακα για ολόκληρη την πενταδιάστατη βαρύτητα, και η οποία μπορεί να είναι αρκετά χαμηλά ώστε να επιλύει το πρόβλημα της ιεραρχίας. Στην συνέχεια θα δούμε πως λειτουργεί η βαρύτητα σε αυτό το μοντέλο, πως δηλαδή μεταβάλλεται ο νόμος του Νεύτωνα λόγω της ύπαρξης των επιπλέον διαστάσεων.



### 1.4.1 Ο Νόμος του Gauss στις Επιπλέον Διαστάσεις

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα δούμε το πως συμπεριφέρεται η βαρύτητα παρουσία  $n$  επιπλέον χωρικών διαστάσεων. Σε ένα τέτοιο χώρο, ο νόμος του Gauss γενικεύεται σε σχέση με το τετραδιάστατο ανάλογο ως εξής:

$$\int_S g dS = A_{(n+2)} G_{(4+n)} M \quad (1.11)$$

όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $G_{(4+n)}$  η γενικευμένη σταθερά του Νεύτωνα στις  $(4+n)$  διαστάσεις,  $M$  είναι η μάζα που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$  και  $A_{(n+2)}$  είναι η επιφάνεια μίας σφαίρας  $(2+n)$  διαστάσεων, με μοναδιαία ακτίνα, η οποία και δίνεται από την σχέση

$$A_{(n+2)} = \frac{2\pi^{\frac{n+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \quad (1.12)$$

Σε αποστάσεις πολύ μικρότερες από το μέγεθος των συμπαγών διαστάσεων ( $r \ll R$ ), οι επιπλέον διαστάσεις μοιάζουν επίπεδες και έτσι παίρνουμε

$$g = G_{(4+n)} \frac{M}{r^{n+2}} \quad (1.13)$$

δηλαδή, η Νευτώνεια σχέση τροποποιείται ως προς την εξάρτηση από το  $r$ , με αποτέλεσμα σε μικρές αποστάσεις η βαρυτική αλληλεπίδραση να είναι δυνατότερη από αυτήν που προβλέπεται κλασικά. Για αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες του μεγέθους των επιπλέον διαστάσεων, ( $r \gg R$ ), αναχτάται ο συνηθισμένος τετραδιάστατος νόμος με εξάρτηση  $1/r^2$  από την απόσταση και εύκολα προκύπτει ότι  $G_{(4+n)} \sim G_{(4)} R^n$ , ή αντίστοιχα

$$M_p^2 \sim M_*^{n+2} R^n \quad (1.14)$$

όπου  $M_p$  η μάζα Planck στις τέσσερις διαστάσεις,  $M_*$  η αντίστοιχη πολυδιάστατη και  $R$  το μέγεθος των  $n$  επιπλέον διαστάσεων, που στο συγκεκριμένο παράδειγμα το πήραμε για όλες το ίδιο. Με βάση λοιπόν την παραπάνω σχέση, δίνοντας κατάλληλες τιμές στα  $R$  και  $n$ , μπορούμε να χαμηλώσουμε την χαρακτηριστική κλίμακα της βαρύτητας, κρατώντας παράλληλα την φαινομενολογία της για μεγάλες αποστάσεις ανέγγιχτη.

### 1.4.2 Περιορισμοί στο Μέγεθος και τον Αριθμό των Επιπλέον Διαστάσεων

Αν θέσουμε  $M_* \sim 1 \text{TeV}$  τότε από την εξίσωση (1.14) παίρνουμε

$$R \sim 10^{\frac{30}{n}-17} \text{cm}. \quad (1.15)$$



Για  $n = 1$  παίρνουμε  $R \sim 10^{13} \text{cm}$  που οδηγεί σε αποκλίσεις του νόμου του Νεύτωνα σε κλίμακα μήκους του μεγέθους του ηλιακού συστήματος. Για  $n = 2$  όμως παίρνουμε  $R \sim 100 \mu\text{m}$ , και για  $n = 6$  έχουμε  $R \sim 10^{-12} \text{cm}$ . Πειράματα μέτρησης της συμπεριφοράς της βαρύτητας σε μικρές αποστάσεις έχουν προσπαθήσει να δουν αποκλίσεις από τον νόμο του Νεύτωνα, και άρα εμμέσως το μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων, αν βέβαια αυτές υπάρχουν. Λόγω του ότι η βαρύτητα είναι τόσο ασθενής, και λόγω του ότι σε μικρές αποστάσεις δεν είναι η κυρίαρχη δύναμη ακόμα και ανάμεσα σε ηλεκτρικά αφόρτιστα, μη-μαγνητισμένα σώματα, τα πειράματα αυτά είναι αρκετά δύσκολα από τεχνικής απόψης. Σε όσα έχουν γίνει μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί απόκλιση στο νόμο του Νεύτωνα μέχρι και για αποστάσεις της τάξης των  $100 \mu\text{m}$  [6], κάτι που σημαίνει ότι είναι ανοιχτό το ενδεχόμενο του  $n \geq 2$ .

Εκτός όμως από τα πειράματα που μετράνε απευθείας την συμπεριφορά της βαρύτητας σε μικρές αποστάσεις, υπάρχουν και περιορισμοί που προέρχονται από αστροφυσικές παρατηρήσεις [13, 14, 15, 16]. Οι ίδιοι οι εμπνευστές του μοντέλου, Arcañi-Hamed, Δημόπουλος και Dvali, στην αρχική τους εργασία [10] πρότειναν το σουπερνόβα SN 1987A για την εξαγωγή ορίων. Πιο συγκεκριμένα ο ρυθμός με τον οποίο το απομεινάρι της εν λόγω σουπερνόβα χάνει ενέργεια στις επιπλέον διαστάσεις μέσω εκπομπής βαρυτονίων, δεν μπορεί να υπερβαίνει τον παρατηρούμενο ρυθμό με τον οποίο αυτό ψύχεται. Θεωρητικοί υπολογισμοί δίνουν τον ρυθμό εκπομπής βαρυτονίων να είναι ανάλογος του  $1/(M_*)^{n+2}$ , και έτσι αυτό μπορεί να θέσει όρια για την θεμελιώδη σταθερά του Planck, σε συνάρτηση και με το  $n$ . Σύμφωνα με τις εργασίες [13, 17], τα αντίστοιχα όρια που παίρνουμε είναι  $M_* \geq 25 - 45 \text{TeV}$  για  $n = 2$  και  $M_* \geq 2 - 4 \text{TeV}$  για την περίπτωση των τριών-επιπλέον χωρικών διαστάσεων, που όμως εξαρτώνται από την θερμοκρασία που υποτέθηκε για το σουπερνόβα.

Επίσης περιορισμοί έχουν τεθεί από το γεγονός ότι, όπως θα δούμε και στο επόμενο Κεφάλαιο, η ύπαρξη μεγάλων επιπλέον διαστάσεων θα επιτρέψει την δημιουργία μικρών μελανών οπών. Κοσμικές ακτίνες υψηλών ενεργειών αποτελούμενες από νετρίνα, συγκρούονται συνεχώς με σωματίδια της ατμόσφαιρας, και αν όντως υπάρχουν επιπλέον διαστάσεις, οι συγκρούσεις αυτές αναμένεται θεωρητικά να παράγουν μελανές οπές, οι οποίες στη συνέχεια θα διασπαστούν και τα προϊόντα της διάσπασης θα παρατηρηθούν από επίγεια παρατηρητήρια [18]. Η απουσία, μέχρι στιγμής, τέτοιων παρατηρήσεων θέτει περιορισμούς για τα  $M_*$  και  $n$  της τάξης του  $M_* \geq 1.4$  για  $n \geq 4$ .

Εκτός από τους προαναφερθέντες περιορισμούς, υπήρξαν και διάφορες άλλες πειραματικές και θεωρητικές προσπάθειες να τεθούν όρια στον αριθμό και το μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων, όμως αυτά είναι είτε αρκετά ελαστικά (για παράδειγμα τα όρια που προέρχονται από πειράματα σε επιταχυντές) είτε έχουν μεγάλα συστηματικά σφάλματα (όπως αυτά που προέρχονται από αστροφυσικές παρατηρήσεις). Όπως και να έχει όμως, ακόμα και αν αγνοή-



σους αυτά τα σφάλματα, μοντέλα με  $M_* \sim 1\text{TeV}$  είναι ακόμα επιτρεπτά για  $n \geq 4$

Συμπερασματικά, οι θεωρίες ADD καταφέρνουν να δώσουν έναν τρόπο επίλυσης του προβλήματος της ιεραρχίας, καθώς το  $M_*$  μπορεί να γίνει μέχρι και τάξης του  $1\text{TeV}$ , μεταβάλλοντας το νόμο του Νεύτωνα για την βαρυτική αλληλεπίδραση σε αποστάσεις που δεν έχουν ελεγχθεί πειραματικά, κρατώντας τον, παράλληλα, ανέπαφο για μεγαλύτερες τιμές του  $r$ . Πειράματα που μετράνε απευθείας την βαρυτική αλληλεπίδραση καθώς και θεωρητικοί υπολογισμοί με την βοήθεια αστροφυσικών παρατηρήσεων, έχουν προσπαθήσει να θέσουν όρια στον αριθμό και το μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων, καθώς και της θεμελιώδους κλίμακας του Planck χωρίς όμως μέχρι στιγμής να έχουν μπορέσει να αποκλείσουν την πιθανότητα αυτά τα μοντέλα να περιγράφουν όντως τη φύση.



## Κεφάλαιο 2

# Εισαγωγή στις Μελανές Οπές

### 2.1 Εισαγωγή

Η δουλειά που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή έχει να κάνει με μελανές οπές σε χωρόχρονους με περισσότερες από τέσσερις χωρικές διαστάσεις. Πριν προχωρήσουμε όμως στην ανάλυση των πολυδιάστατων οπών, σκόπιμο είναι να κάνουμε μία εισαγωγή στις κλασσικές, τετραδιάστατες μελανές οπές.

Μελανή οπή ονομάζεται μία περιοχή του χώρου στην οποία το βαρυτικό πεδίο είναι τόσο ισχυρό που ούτε καν το φως δεν μπορεί να διαφύγει. Για ένα σώμα μάζας  $M$ , σφαιρικά συμμετρικό, αυτό γίνεται αν συμπιεστεί όλη η μάζα του σε ακτίνα μικρότερη ή ίση με

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.1)$$

το οποίο και αντιστοιχεί σε πυκνότητα

$$\rho_S = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3c^2}{32\pi G^3 M^3} \quad (2.2)$$

Για να δώσουμε μία αίσθηση της τάξης μεγέθους της συμπίεσης που απαιτείται να γίνει στην μάζα, μπορούμε να πούμε για παράδειγμα ότι η γη για να γίνει μελανή οπή θα πρέπει να συμπιεστεί σε ακτίνα περίπου ενός εκατοστού του μέτρου. Αντίστοιχα ο ήλιος μας θα έπρεπε να συμπιεστεί στα 3 χιλιόμετρα, σε πυκνότητα  $\rho_S \sim 10^{16} \text{gr/cm}^3$ .

Οι μελανές οπές είναι αντικείμενα που μπορούν να περιγραφτούν σωστά μόνο μέσω της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας του Einstein, (1915), η ιστορία τους όμως ξεκινάει αρκετά παλαιότερα και πιο συγκεκριμένα τον 18ο αιώνα. Το 1783 ο γεωλόγος John Michell και το 1796 ο μαθηματικός Pierre-Simon Laplace χρησιμοποίησαν ανεξάρτητα το επιχείρημα που ακολουθεί για



να προβλέψουν σωστά την ύπαρξη των οπών καθώς και την ακριβή τιμή του  $R_S$ . Σύμφωνα με αυτό το απλό επιχείρημα, ένα σώμα μάζας  $m$  που εκτοξεύεται με ταχύτητα  $u$  από την επιφάνεια μίας σφαίρας ακτίνας  $r$  και μάζας  $M$ , θα καταφέρει να διαφύγει αν ισχύει

$$\frac{1}{2}mu^2 \geq \frac{GMm}{r} \quad (2.3)$$

Έτσι όσο μικραίνει η ακτίνα  $r$  τόσο μεγαλώνει η ταχύτητα διαφυγής. Θέτωντας  $u = c$ , βρίσκουμε την ακτίνα (2.1) στην οποία αν συμπιέσουμε το σώμα η ταχύτητα διαφυγής γίνεται ίση με την ταχύτητα του φωτός, και άρα το σώμα μετατρέπεται σε μελανή οπή. Το αποτέλεσμα που παράγεται με αυτό την απλή συλλογιστική είναι μεν σωστό, αυτό όμως είναι ένα συμπτωματικό γεγονός, καθώς το επιχείρημα είναι καθαρά Νευτώνειο, και δεν παίρνει καθόλου υπόψη σχετικιστικά φαινόμενα.

Μια πιο ολοκληρωμένη μελέτη των περιέργων αυτών αντικειμένων ήρθε το 1916, ένα χρόνο μετά την δημοσίευση της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας, από τον Karl Schwarzschild, ο οποίος όπως θα δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια, παρουσίασε την λύση των εξισώσεων Einstein για ένα σφαιρικά συμμετρικό, αφόρτιστο σώμα, την περίφημη μετρική που φέρει το όνομα του [19]. Έδειξε ότι ένα σώμα μάζας  $M$ , με ακτίνα μικρότερη του  $R_S$ , όπου  $R_S$  δίνεται από την εξίσωση (2.1), δημιουργεί σε απόσταση  $R_S$  από το κέντρο του έναν ορίζοντα γεγονότων, μία σφαιρική επιφάνεια δηλαδή, την οποία αν διασχίσει ένα οποιοδήποτε σώμα, ακόμα και το φως, δεν θα μπορέσει ποτέ να διαφύγει.

Για τους φυσικούς τα επόμενα χρόνια, οι μελανές οπές δεν ήταν παρά ένα μαθηματικό κατασκευάσμα, ο ίδιος ο Schwarzschild τις θεωρούσε αφύσικα αντικείμενα. Το 1930 ο αστροφυσικός Subrahmanyan Chandrasekhar υποστήριξε ότι ένα μη περιστρεφόμενο σώμα με μάζα μεγαλύτερη από 1.44 φορές την ηλιακή μάζα (το λεγόμενο όριο Chandrasekhar) θα καταρρεύσει βαρυτικά, καθώς δεν υπήρχε γνωστός μηχανισμός εκείνη την εποχή που θα μπορούσε να αποτρέψει την κατάρρευση. Οι ιδέες αυτές καταπολεμήθηκαν από τον Arthur Eddington, ο οποίος υποστήριξε ότι αναπόφευκτα κάτι θα σταματήσει την κατάρρευση. Ο Eddington ήταν μόνο εν μέρη σωστός: ένα άστρο μόνο ελαφρά μεγαλύτερο σε μάζα από το όριο Chandrasekhar καταρρέει σε αστέρα νετρονίων, και όχι σε μελανή οπή.

Το 1939 όμως ο Robert Oppenheimer και οι συνεργάτες του βρήκαν [20] ένα άνω όριο στην μάζα ενός αστέρα νετρονίων (το όριο σύμφωνα με νεώτερους υπολογισμούς βρέθηκε στις τρεις ηλιακές μάζες). Οποιοδήποτε άστρο με μάζα μεγαλύτερη από αυτό το όριο θα καταρρεύσει σε μελανή οπή. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποίησαν ο Oppenheimer και οι συνεργάτες του ήταν αυτό του Schwarzschild, το μόνο γνωστό σύστημα συντεταγμένων





εκείνη την εποχή που μπορούσε να περιγράψει τον χωρόχρονο μιας μελανής οπής. Το πρόβλημα όμως με αυτό το σύστημα ήταν ότι παρουσιάζει ανωμαλίες στην ακτίνα Schwarzschild (2.1). Υπάρχουν όροι στη μετρική που απειρίζονται, πράγμα που οδήγησε στην αντίληψη ότι η ακτίνα Schwarzschild είναι ένα όριο, ορίζει μία σφαίρα μέσα στην οποία ο χρόνος σταματάει. Πιο συγκεκριμένα οι Oppenheimer και Snyder έδειξαν [21] ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να καταρρεύσει ένα άστρο σε μελανή οπή είναι άπειρος για έναν εξωτερικό παρατηρητή, πεπερασμένος όμως για έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με τον αστέρα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για έναν εξωτερικό παρατηρητή, το υπό κατάρρευση αστέρι να μοιάζει παγωμένο στον χρόνο και η ονομασία 'παγωμένα αστέρια' χρησιμοποιούνταν για την αναφορά σε άστρα που καταρρέουν βαρυτικά. Βεβαίως, η ιδέα του να παγώνει ο χρόνος στην επιφάνεια ενός αστεριού που καταρρέει βαρυτικά δεν είναι και τόσο εύκολο να την αποδεχτεί κανείς και έτσι μεσολάβησε μία νεκρή περίοδος 20 χρόνων στην οποία δεν υπήρξε ουσιαστική πρόοδος στον τομέα.

Ο γρίφος του παγωμένου χρόνου τελικά λύθηκε με την νέων συστημάτων συντεταγμένων για την περιγραφή της γεωμετρίας Schwarzschild. Η φαινομενική ανωμαλία που υπάρχει στην ακτίνα  $R = 2GM$  είναι μία ανωμαλία συντεταγμένων, και όχι μία πραγματική, φυσική ανωμαλία του χωροχρονικού συνεχούς. Πρώτος ο Eddington το 1924 είχε κατασκευάσει ένα σύστημα συντεταγμένων που περιέγραφαν μια μελανή οπή Schwarzschild χωρίς να εμπεριέχουν ανωμαλία στον ορίζοντα, όμως ο ίδιος δεν φαίνεται να είχε κατάλαβει τη σημασία του αποτελέσματός του [22]. Ο Finkelstein το 1958 ξαναχρησιμοποίησε τις συντεταγμένες του Eddington για να μελετήσει την σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή. Το σύστημα όμως των συντεταγμένων που προσφέρει την καλύτερη εικόνα της γεωμετρίας Schwarzschild, το κατασκεύασαν ανεξάρτητα το 1960 οι Kruskal και Szekeres [23, 24]. Ας σημειωθεί ότι μέχρι αυτό το σημείο όλες οι μελέτες, συμπεριλαμβανομένης και αυτής του Finkelstein, αφορούσαν σφαιρικά συμμετρικές, μη φορτισμένες, μη περιστρεφόμενες μελανές οπές.

Το 1963 ο Roy Kerr παρουσίασε την λεγόμενη μετρική Kerr [25], η οποία κάλυπτε την περίπτωση των περιστρεφόμενων μελανών οπών. Εκτός από την καθαρά θεωρητική αξία της ανάλυσής του, σημαντικό ήταν το γεγονός ότι για πρώτη φορά άρχισε να γίνεται πιστευτή η ύπαρξη τέτοιων αντικειμένων από τους αστρονόμους: οι μελανές οπές προέρχονται από αστέρια, και όλα τα αστέρια που παρατηρούμε περιστρέφονται.

Ακολούθησε η ανακάλυψη των pulsars το 1967 [26] τα οποία εντός ολίγων χρόνων ταυτοποιήθηκαν ως ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων. Ως εκείνη τη στιγμή οι αστέρες νετρονίων, όπως εξάλλου και οι μελανές οπές, αντιμετώπιζονταν περισσότερο ως μια παραξενιά των εξισώσεων και λιγότερο ως φυσικά αντικείμενα. Η ανακάλυψη λοιπόν των αστερών νετρονίων έδωσε



να προβλέψουν σωστά την ύπαρξη των οπών καθώς και την ακριβή τιμή του  $R_S$ . Σύμφωνα με αυτό το απλό επιχείρημα, ένα σώμα μάζας  $m$  που εκτοξεύεται με ταχύτητα  $u$  από την επιφάνεια μίας σφαίρας ακτίνας  $r$  και μάζας  $M$ , θα καταφέρει να διαφύγει αν ισχύει

$$\frac{1}{2}mu^2 \geq \frac{GMm}{r} \quad (2.3)$$

Έτσι όσο μικραίνει η ακτίνα  $r$  τόσο μεγαλώνει η ταχύτητα διαφυγής. Θέτοντας  $u = c$ , βρίσκουμε την ακτίνα (2.1) στην οποία αν συμπιέσουμε το σώμα η ταχύτητα διαφυγής γίνεται ίση με την ταχύτητα του φωτός, και άρα το σώμα μετατρέπεται σε μελανή οπή. Το αποτέλεσμα που παράγεται με αυτό την απλή συλλογιστική είναι μεν σωστό, αυτο όμως είναι ένα συμπτωματικό γεγονός, καθώς το επιχείρημα είναι καθαρά Νευτώνειο, και δεν παίρνει καθόλου υπόψιν σχετικιστικά φαινόμενα.

Μια πιο ολοκληρωμένη μελέτη των περιέργων αυτών αντικειμένων ήρθε το 1916, ένα χρόνο μετά την δημοσίευση της Γενικής θεωρίας της Σχετικότητας, από τον Karl Schwarzschild, ο οποίος όπως θα δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια, παρουσίασε την λύση των εξισώσεων Einstein για ένα σφαιρικά συμμετρικό, αφόρτιστο σώμα, την περίφημη μετρική που φέρει το όνομα του [19]. Έδειξε ότι ένα σώμα μάζας  $M$ , με ακτίνα μικρότερη του  $R_S$ , όπου  $R_S$  δίνεται από την εξίσωση (2.1), δημιουργεί σε απόσταση  $R_S$  από το κέντρο του έναν ορίζοντα γεγονότων, μία σφαιρική επιφάνεια δηλαδή, την οποία αν διασχίσει ένα οποιοδήποτε σώμα, ακόμα και το φως, δεν θα μπορέσει ποτέ να διαφύγει.

Για τους φυσικούς τα επόμενα χρόνια, οι μελανές οπές δεν ήταν παρά ένα μαθηματικό κατασκευάσμα, ο ίδιος ο Schwarzschild τις θεωρούσε αφύσικα αντικείμενα. Το 1930 ο αστροφυσικός Subrahmanyan Chandrasekhar υποστήριξε ότι ένα μη περιστρεφόμενο σώμα με μάζα μεγαλύτερη από 1.44 φορές την ηλιακή μάζα (το λεγόμενο όριο Chandrasekhar) θα καταρρεύσει βαρυτικά, καθώς δεν υπήρχε γνωστός μηχανισμός εκείνη την εποχή που θα μπορούσε να αποτρέψει την κατάρρευση. Οι ιδέες αυτές καταπολεμήθηκαν από τον Arthur Eddington, ο οποίος υποστήριξε ότι αναπόφευκτα κάτι θα σταματήσει την κατάρρευση. Ο Eddington ήταν μόνο εν μέρη σωστός: ένα άστρο μόνο ελαφρά μεγαλύτερο σε μάζα από το όριο Chandrasekhar καταρρέει σε αστέρα νετρονίων, και όχι σε μελανή οπή.

Το 1939 όμως ο Robert Oppenheimer και οι συνεργάτες του βρήκαν [20] ένα άνω όριο στην μάζα ενός αστέρα νετρονίων (το όριο σύμφωνα με νεότερους υπολογισμούς βρέθηκε στις τρεις ηλιακές μάζες). Οποιοδήποτε άστρο με μάζα μεγαλύτερη από αυτό το όριο θα καταρρεύσει σε μελανή οπή. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποίησαν ο Oppenheimer και οι συνεργάτες του ήταν αυτό του Schwarzschild, το μόνο γνωστό σύστημα συντεταγμένων



εκείνη την εποχή που μπορούσε να περιγράψει τον χωρόχρονο μιας μελανής οπής. Το πρόβλημα όμως με αυτό το σύστημα ήταν ότι παρουσιάζει ανωμαλίες στην ακτίνα Schwarzschild (2.1). Υπάρχουν όροι στη μετρική που απειρίζονται, πράγμα που οδήγησε στην αντίληψη ότι η ακτίνα Schwarzschild είναι ένα όριο, ορίζει μία σφαίρα μέσα στην οποία ο χρόνος σταματάει. Πιο συγκεκριμένα οι Oppenheimer και Snyder έδειξαν [21] ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να καταρρεύσει ένα άστρο σε μελανή οπή είναι άπειρος για έναν εξωτερικό παρατηρητή, πεπερασμένος όμως για έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με τον αστέρα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για έναν εξωτερικό παρατηρητή, το υπό κατάρρευση αστέρι να μοιάζει παγωμένο στον χρόνο και η ονομασία 'παγωμένα αστέρια' χρησιμοποιούνταν για την αναφορά σε άστρα που καταρρέουν βαρυτικά. Βεβαίως, η ιδέα του να παγώνει ο χρόνος στην επιφάνεια ενός αστεριού που καταρρέει βαρυτικά δεν είναι και τόσο εύκολο να την αποδεχτεί κανείς και έτσι μεσολάβησε μία νεκρή περίοδος 20 χρόνων στην οποία δεν υπήρξε ουσιαστική πρόοδος στον τομέα.

Ο γρίφος του παγωμένου χρόνου τελικά λύθηκε με την νέων συστημάτων συντεταγμένων για την περιγραφή της γεωμετρίας Schwarzschild. Η φαινομενική ανωμαλία που υπάρχει στην ακτίνα  $R = 2GM$  είναι μία ανωμαλία συντεταγμένων, και όχι μία πραγματική, φυσική ανωμαλία του χωροχρονικού συνεχούς. Πρώτος ο Eddington το 1924 είχε κατασκευάσει ένα σύστημα συντεταγμένων που περιέγραφαν μια μελανή οπή Schwarzschild χωρίς να εμπεριέχουν ανωμαλία στον ορίζοντα, όμως ο ίδιος δεν φαίνεται να είχε κατάλαβει τη σημασία του αποτελέσματός του [22]. Ο Finkelstein το 1958 ξαναχρησιμοποίησε τις συντεταγμένες του Eddington για να μελετήσει την σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή. Το σύστημα όμως των συντεταγμένων που προσφέρει την καλύτερη εικόνα της γεωμετρίας Schwarzschild, το κατασκεύασαν ανεξάρτητα το 1960 οι Kruskal και Szekeres [23, 24]. Ας σημειωθεί ότι μέχρι αυτό το σημείο όλες οι μελέτες, συμπεριλαμβανομένης και αυτής του Finkelstein, αφορούσαν σφαιρικά συμμετρικές, μη φορτισμένες, μη περιστρεφόμενες μελανές οπές.

Το 1963 ο Roy Kerr παρουσίασε την λεγόμενη μετρική Kerr [25], η οποία κάλυπτε την περίπτωση των περιστρεφόμενων μελανών οπών. Εκτός από την καθαρά θεωρητική αξία της ανάλυσής του, σημαντικό ήταν το γεγονός ότι για πρώτη φορά άρχισε να γίνεται πιστευτή η ύπαρξη τέτοιων αντικειμένων από τους αστρονόμους: οι μελανές οπές προέρχονται από αστέρια, και όλα τα αστέρια που παρατηρούμε περιστρέφονται.

Ακολούθησε η ανακάλυψη των pulsars το 1967 [26] τα οποία εντός ολίγων χρόνων ταυτοποιήθηκαν ως ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων. Ως εκείνη τη στιγμή οι αστέρες νετρονίων, όπως εξάλλου και οι μελανές οπές, αντιμετώπιζονταν περισσότερο ως μια παραξενιά των εξισώσεων και λιγότερο ως φυσικά αντικείμενα. Η ανακάλυψη λοιπόν των αστερών νετρονίων έδωσε



ώθηση και στην έρευνα για αντικείμενα ακόμα μεγαλύτερης πυκνότητας που μπορεί να παραχθούν από βαρυτική κατάρρευση. Το 1967 ο John Wheeler σε ομιλία του χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον όρο 'μελανές οπές', ο οποίος και αντικατέστησε σταδιακά τον παλαιότερο, αδόκιμο όρο 'παγωμένα αστέρια'. Από εκεί και πέρα ξεκίνησε η εντατική μελέτη των αντικειμένων αυτών θεωρητικά, αλλά και σε παρατηρησιακό επίπεδο. Αν και οι μελανές οπές δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα καθώς δεν εκπέμπουν ακτινοβολία, παρά μόνο μέσα από το βαρυτικό πεδίο το οποίο προκαλούν, υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις για την ύπαρξή τους, χωρίς όμως αυτές να συνιστούν ακόμα απόδειξη [27, 28, 29].

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε αρχικά τι μελανές οπές στην καθαρά τετραδιάστατη περίπτωση, ξεκινώντας από την μετρική Schwarzschild, μετά με την μετρική Reissner - Nordström και τέλος με την μετρική Kerr, που αποτελούν τις πιο γνωστές ίσως λύσεις των εξισώσεων Einstein, και περιγράφουν μια αφόρτιστη σφαιρικά συμμετρική, μια φορτισμένη σφαιρικά συμμετρική και μια αφόρτιστη περιστρεφόμενη μελανή οπή αντίστοιχα. Επιπλέον, θα δώσουμε κάποια στοιχεία για την θερμοδυναμική των μελανών οπών και για την ακτινοβολία Hawking που αυτές εκπέμπουν. Στην συνέχεια, θα ασχοληθούμε με τις μελανές οπές στις θεωρίες που προβλέπουν επιπλέον χωρικές διαστάσεις στο σύμπαν. Θα γράψουμε την γενίκευση των μετρικών Schwarzschild και Kerr για την περίπτωση  $(4 + n)$ -διάστατων χωροχρόνων, θα δούμε ποια κριτήρια πρέπει να ικανοποιούνται για την παραγωγή τους στους επιταχυντές και θα γράψουμε τις ιδιότητες τους. Ιδιαίτερη σημασία έχει ο τρόπος που αυτές θα ακτινοβολήσουν την ενέργειά τους μέσω εκπομπής Hawking, καθώς αυτό το φαινόμενο θα δώσει ξεκάθαρα αποτυπώματα στους ανιχνευτές. Θα δούμε ότι η ύπαρξη των επιπλέον διαστάσεων θα διευκολύνει την δημιουργία μελανών οπών εργαστηριακά, και επιπλέον, αν αυτές δημιουργηθούν, το φάσμα της ακτινοβολίας που θα εκπέμπουν θα εμπεριέχει πολύτιμες πληροφορίες για την δομή του σύμπαντος, όπως τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων, την κλίμακα της βαρύτητας και την ύπαρξη ή όχι κοσμολογικής σταθεράς. Τέλος θα δούμε πώς μπορεί κάποιος να υπολογίσει αυτό το φάσμα από τις εξισώσεις κίνησης του κάθε πεδίου και θα γράψουμε μία ενιαία εξίσωση που μπορεί να θα περιγράφει την διάδοση πεδίων του Καθιερωμένου μοντέλου γύρω από μία περιστρεφόμενη μελανή οπή.

## 2.2 Η Μετρική Schwarzschild

Η μετρική Schwarzschild δίνεται από την εξής σχέση [19]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.4)$$



όπου έχουμε θέσει την σταθερά του Νεύτωνα  $G = 1$  και  $d\Omega^2$  είναι το στοιχείο μήκους πάνω σε μία μοναδιαία σφαίρα:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.5)$$

Η παραπάνω λύση των εξισώσεων Einstein περιγράφει τον χωρόχρονο γύρω από μία σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας  $M$ . Ακόμα και αν το αντικείμενο κατέρρευσε βαρυτικά ή παλλόταν, ο χωρόχρονος έξω από αυτό θα ήταν πάλι στατικός, και η μετρική του θα δινόταν ξανά από την σχέση (2.4). Αυτό είναι περισσότερο γνωστό ως θεώρημα του Birkhoff: αν η γεωμετρία ενός μέρους του χωρόχρονου είναι (α) σφαιρικά συμμετρική (β) λύση των εξισώσεων Einstein, τότε η γεωμετρία αυτή είναι αναγκαστικά κομμάτι μιας Schwarzschild γεωμετρίας.

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή του παρόντος Κεφαλαίου, η μετρική αυτή έχει απειρισμούς για  $R = 2M$  πράγμα που αρχικά είχε αποδοθεί σε ανωμαλία του χωρόχρονου στην συγκεκριμένη ακτίνα. Όπως όμως θα δούμε παρακάτω, δεν υπάρχει πραγματική ανωμαλία στα συγκεκριμένα σημεία. Αν υπολογίσει κάποιος την καμπυλότητα στην συγκεκριμένη γεωμετρία βλέπει ότι αυτή είναι άπειρη μόνο στο  $r = 0$ , και όχι πάνω στον ορίζοντα, και άρα το κέντρο είναι η μόνη ανωμαλία. Οι απειρισμοί στο  $r = 2M$  οφείλονται στην παθολογική συμπεριφορά του συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιήσαμε και το πρόβλημα μπορεί να παρακαμφθεί με τη χρήση διαφορετικών συντεταγμένων. Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται στην ανεξάρτητη δουλειά των Kruskal [23] και Szekeres [24] το 1960.

### 2.2.1 Οι Συντεταγμένες Kruskal

Ας θεωρήσουμε άμαξα σωματίδια που κινούνται ακτινικά σε ένα χωρόχρονο Schwarzschild, δηλαδή το  $t$  και το  $r$  μεταβάλλονται, όχι όμως οι γωνιακές συντεταγμένες  $\theta$  και  $\phi$ . Τότε, μπορεί να δει κάποιος ότι τα εισερχόμενα σωματίδια κινούνται σε καμπύλες με  $u$  σταθερό, ενώ τα εξερχόμενα σε καμπύλες με  $v$  σταθερό, όπου [22, 30]

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^* \quad (2.6)$$

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (2.7)$$

Όπως εύκολα καταλαβαίνει κάποιος, αυτό το σύστημα συντεταγμένων είναι κατασκευασμένο για την εύκολη περιγραφή φωτοειδών (null) γεωδαισιακών. Σε αυτές τις συντεταγμένες η μετρική Schwarzschild γράφεται ως εξής

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (2.8)$$



Εδώ το  $r$  παρουσιάζεται όχι ως συντεταγμένη, αλλά ως συνάρτηση των  $u$  και  $v$ , και ορίζεται μέσα από την σχέση

$$r^*(r) = \frac{1}{2}(v - u) \quad (2.9)$$

Σε αυτές τις συντεταγμένες η επιφάνεια  $r = 2M$  αντιστοιχεί σε  $v - u = -\infty$ , και εξακολουθεί να είναι μία ανωμαλία συντεταγμένων.

Για να δούμε πώς θα μπορούσαμε να άρουμε αυτήν την ανωμαλία ως επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε μία μικρή περιοχή γύρω από την επιφάνεια  $r = 2M$ , στην οποία η σχέση για το  $r^*$  μπορεί να προσεγγιστεί από την

$$r^* \simeq 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (2.10)$$

Αυτό μας δίνει ότι

$$r/2M \simeq 1 \pm e^{r^*/2M} = 1 \pm e^{(v-u)/4M} \quad (2.11)$$

ή αλλιώς

$$f \equiv 1 - r/2M \simeq \pm e^{(v-u)/4M} \quad (2.12)$$

Από εδώ και πέρα το πάνω πρόσημο αναφέρεται στην περιοχή  $r > 2M$  ενώ το κάτω στην περιοχή  $r < 2M$ . Η μετρική της εξίσωσης (2.8) γίνεται τότε

$$ds^2 \simeq \mp (e^{-u/4M} du)(e^{v/4M} dv) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.13)$$

Αυτή η έκφραση μας οδηγεί να εισάγουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων

$$U = \mp e^{-u/4M} \quad V = e^{v/4M} \quad (2.14)$$

Επιστρέφοντας στην αναλυτική έκφραση (2.7) για το  $r^*$  βλέπουμε ότι  $e^{r^*/2M} = e^{(v-u)/4M} = \pm UV$ , ή ισοδύναμα

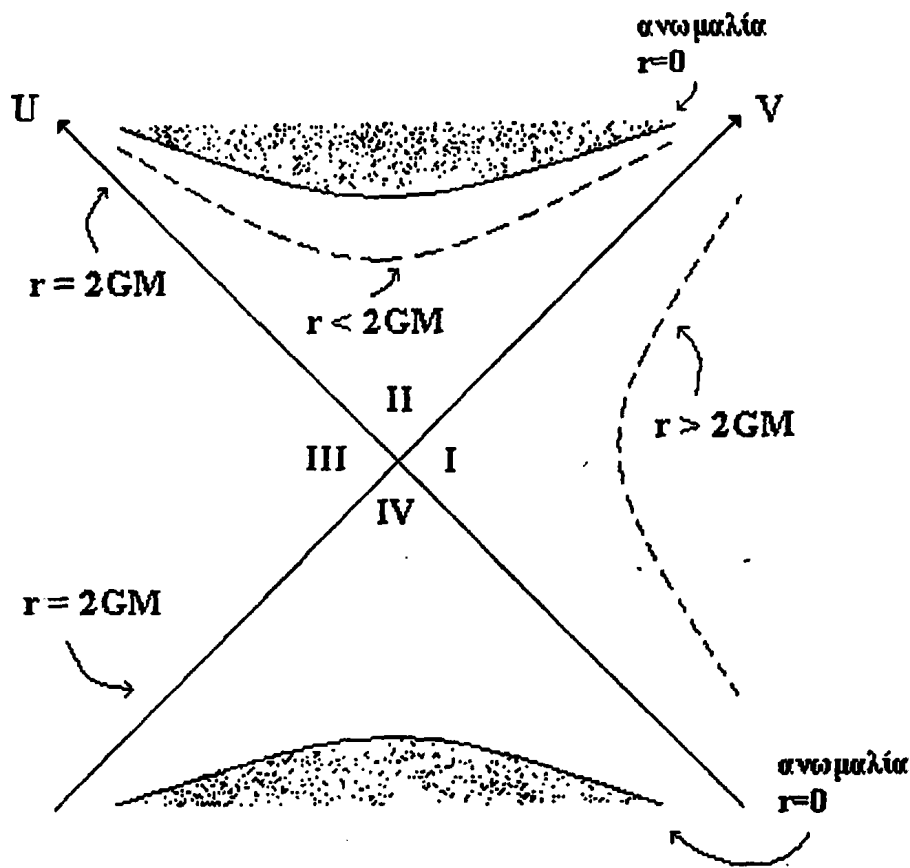
$$e^{r/2M} \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) = -UV. \quad (2.15)$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε την  $r$  σαν συνάρτηση των  $U, V$ . Η μετρική Schwarzschild γράφεται τώρα ως εξής

$$ds^2 = -\frac{32M}{r} e^{-r/2M} dUdV + r^2 d\Omega^2. \quad (2.16)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι καταφέραμε να γράψουμε την μετρική σε μία μορφή που δεν απειρίζεται στο  $r = 2M$  και άρα δεν εμπεριέχει καμία ανωμαλία η συγκεκριμένη επιφάνεια. Η μόνη ανωμαλία που παρουσιάζεται είναι στο  $r = 0$ . Αυτή, όπως είπαμε και παραπάνω, είναι πραγματική ανωμαλία του χωρόχρονου



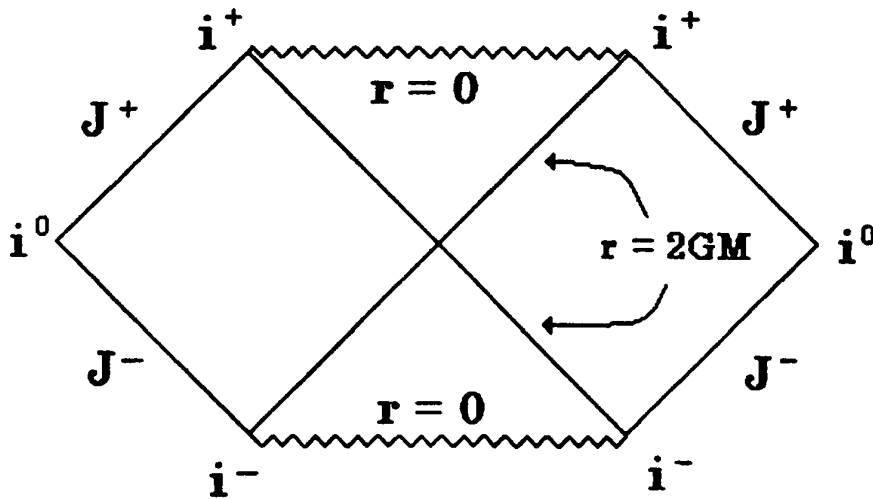


Σχήμα 2.1: Διάγραμμα Kruskal για μία Schwarzschild μελανή οπή.

στην οποία απειρίζεται η καμπυλότητα, και όχι πρόβλημα των συντεταγμένων. Οι συντεταγμένες  $U, V$  ονομάζονται συντεταγμένες Kruskal. Σε ένα διάγραμμα Kruskal, όπως αυτό του Σχήματος 2.1, τα ακτινικά εισερχόμενα φωτόνια κινούνται στις γραμμές  $U = \text{σταθερό}$ , ενώ τα ακτινικά εξερχόμενα στις  $V = \text{σταθερό}$ .

Στις συντεταγμένες Kruskal μία επιφάνεια με σταθερό  $r$  (μία σφαίρα στις τέσσερις διαστάσεις) περιγράφεται από την εξίσωση  $UV = \text{σταθερό}$ , η οποία αντιστοιχεί σε μία υπερβολή με δύο κλάδους στο επίπεδο  $U - V$ . Για παράδειγμα, η επιφάνεια  $r = 2M$  αντιστοιχεί στην  $UV = 0$ , ενώ η  $r = 0$  στην  $UV = 1$ . Υπάρχουν λοιπόν δύο αντίγραφα της επιφάνειας  $r = \text{σταθερό}$  σε ένα διάγραμμα Kruskal. Π.χ. η  $r = 2M$  δίνει  $U = 0$  ή  $V = 0$ . Έτσι βλέπουμε ότι οι συντεταγμένες Kruskal αποκαλύπτουν την ύπαρξη μίας μεγαλύτερης πολλαπλότητας από αυτήν που φαινόταν να εμπεριέχεται στις αρχικές συντεταγμένες





Σχήμα 2.3: Διάγραμμα Penrose - Carter για την γεωμετρία Schwarzschild .

δεν τερματίζονται στο  $r = 0$ . Τέλος, τα σημεία  $(\bar{U}, \bar{V}) = (0, -\pi/2)$  και  $(\bar{U}, \bar{V}) = (-\pi/2, 0)$  ονομάζονται *past timelike infinity*, (παρελθοντική χρονοειδής απειρία) και συμβολίζονται με  $i^-$ . Αυτά περιέχουν τα αρχικά σημεία από τα οποία ξεκινάνε όλες οι φωτοειδείς γεωδαισιακές που δεν αρχίζουν από  $r = 0$ .

Συμπαγοποιημένα διαγράμματα, σαν αυτό του Σχήματος 2.3 ονομάζονται διαγράμματα Penrose - Carter. Περιέχουν όλο τον υπό εξέταση χωρόχρονο και αποτελούν χρήσιμα εργαλεία στην Γενική Σχετικότητα.

### 2.2.3 Ορίζοντας Γεγονότων

Σε ένα διάγραμμα Kruskal, Σχήμα 2.1, όλες οι ακτινικές φωτοειδείς καμπύλες κινούνται κατά μήκος των καμπύλων  $U = \text{σταθερό}$  ή  $V = \text{σταθερό}$ . Έτσι λοιπόν οι κώνοι φωτός είναι προσανατολισμένοι στις  $45^\circ$ , και γίνεται ξεκάθαρος ο χαρακτήρας της επιφάνειας  $r = 2M$  που χωρίζει τις περιοχές I και II στην γεωμετρία Schwarzschild. Ένας παρατηρητής που διασχίζει την επιφάνεια δεν μπορεί να επιστρέψει πίσω, ούτε να αποφύγει να συναντήσει την ανωμαλία του σημείου  $r = 0$ . Είναι επίσης ξεκάθαρο ότι, αφού διασχίσει την  $r = 2M$ , ο παρατηρητής δεν μπορεί να στείλει μηνύματα προς τον έξω κόσμο, αν και ο ίδιος μπορεί να δεχτεί μηνύματα από εκεί. Η επιφάνεια  $r = 2M$  λοιπόν, εμποδίζει κάθε εξωτερικό παρατηρητή να μάθει τι γίνεται μέσα σε αυτήν. Με βάση αυτά, ονομάζεται ορίζοντας γεγονότων της μελανής οπής. Η περιοχή





II, μέσα στον ορίζοντα γεγονότων, ονομάζεται μελανή οπή του χωρόχρονου Schwarzschild.

Η επιφάνεια  $r = 2M$  που χωρίζει τις περιοχές I και II πρέπει να διαχωριστεί από την επιφάνεια  $r = 2M$  που χωρίζει τις περιοχές I και IV. Είναι ξεκάθαρο ότι αυτή αποτελεί ορίζοντα γεγονότων για όλους τους παρατηρητές που ζουν στην περιοχή IV, οι οποίοι δεν μπορούν να αντιληφθούν τι γίνεται στην περιοχή I. Για να ξεχωρίζουμε τις δύο επιφάνειες  $r = 2M$  συνήθως αναφερόμαστε στην πρώτη σαν μέλλοντα ορίζοντα (future horizon) και τη δεύτερη σαν παρελθόντα ορίζοντα (past horizon). Ο χώρος μέσα στον παρελθόντα ορίζοντα, (περιοχή IV), ονομάζεται λευκή οπή του χωρόχρονου Schwarzschild.

### 2.3 Η Μετρική Reissner - Nordström

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε την μετρική Reissner - Nordström [31], η οποία περιγράφει μία στατική, σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή με μάζα  $M$  και ηλεκτρικό φορτίο  $Q$ . Το στοιχείο μήκους σε ένα χώρο γύρω από μία τέτοια μελανή οπή δίνεται από την εξής σχέση:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.18)$$

όπου  $d\Omega^2$  είναι όπως και πριν

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.19)$$

Στην παραπάνω έκφραση για τη μετρική έχουμε θέσει εκτός από  $c = 1$ , και  $G = 1$ . Το δυναμικό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι

$$A_\mu = \left(\frac{Q}{r}, 0, 0, 0\right). \quad (2.20)$$

Η συνάρτηση

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (2.21)$$

έχει ρίζες στα

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (2.22)$$

Έτσι βλέπουμε ότι αν  $M < |Q|$  η μετρική (2.18) περιγράφει μία 'γυμνή ανωμαλία', δηλαδή μία πραγματική χωροχρονική ανωμαλία (αυτήν στο  $r = 0$ ) η οποία δεν καλύπτεται από κάποιον ορίζοντα. Κάτι τέτοιο όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση της 'κοσμικής λογοκρισίας' που διατύπωσε ο Roger Penrose το 1969 και σύμφωνα με την οποία ανωμαλίες που προκύπτουν ως



λύση των εξισώσεων Einstein πρέπει να καλύπτονται από το υπόλοιπο σύμπαν από οριζόντα γεγονότων.

Αν τώρα  $M = |Q|$  οι δύο ρίζες της εξίσωσης (2.22) ταυτίζονται, και έτσι υπάρχει μόνο ένας οριζόντας σε ακτίνα  $r = M$  από την ανωμαλία. Βλέπουμε δηλαδή την μείωση της ακτίνας του οριζόντα της οπής στο μισό σε σχέση με την περίπτωση Schwarzschild. Η μελανή οπή τότε ονομάζεται 'ακραία μελανή οπή' (*extreme black hole*).

Τέλος αν  $M > |Q|$ , υπάρχουν δύο οριζόντες, ο εξωτερικός, ο οποίος όπως θα δούμε αποτελεί τον οριζόντα γεγονότων, ενώ υπάρχει και ο εσωτερικός, ο οποίος ονομάζεται οριζόντας Cauchy. Σε αυτήν την περίπτωση οι συντεταγμένες  $(t, r)$  δεν είναι κατάλληλες για την περιγραφή του χωρόχρονου. Το στοιχείο  $g_{tt}$  της μετρικής μηδενίζεται και το  $g_{rr}$  απειρίζεται, πράγμα που σημαίνει ότι χρειάζεται να εισάγουμε και πάλι συντεταγμένες Kruskal. Αυτή τη φορά όμως θα δούμε ότι οι νέες συντεταγμένες δεν συμπεριφέρονται σωστά στον εσωτερικό οριζόντα, πράγμα που σημαίνει ότι οι συντεταγμένες Kruskal είναι κατάλληλες για την περιγραφή αποκλειστικά ενός οριζόντα, και ότι ένας μόνο μετασχηματισμός δεν αρκεί για να περιγράψει ολόκληρη την πολλαπλότητα.

Αυτήν την φορά ο κατάλληλος μετασχηματισμός συντεταγμένων θα προκύψει ως εξής: καταρχήν θα ορίσουμε το  $r_*$  με τρόπο αντίστοιχο της περίπτωσης Schwarzschild:

$$r_* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}. \quad (2.23)$$

Στην συνέχεια ορίζονται όπως και πριν τα  $u = t - r_*$  και  $v = t + r_*$ , με την βοήθεια των οποίων η επιφάνεια  $r = r_+$  εμφανίζεται στη θέση  $v - u = -\infty$ . Από αυτά προκύπτουν οι συντεταγμένες Kruskal  $U_+$  και  $V_-$  από τους παρακάτω ορισμούς

$$U_+ = \mp e^{-\kappa_+ u}, \quad V_- = e^{\kappa_+ v} \quad (2.24)$$

όπου  $\kappa_+ = \frac{1}{2} f'(r_+)$ , και το άνω πρόσημο να αναφέρεται στην περιοχή  $r > r_+$  ενώ το κάτω στην  $r > r_-$ . Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι  $f \simeq -2U_+V_-$  κοντά στον εξωτερικό οριζόντα  $r = r_+$ , και έτσι η μετρική σε αυτήν την περιοχή παίρνει τη μορφή

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_+^2} dU_+ dV_- + r_+^2 d\Omega^2, \quad (2.25)$$

δεν παρουσιάζει δηλαδή ανωμαλίες. Από την άλλη όμως, μία ακριβής ολοκλήρωση του  $r_*$  αποκαλύπτει ότι  $r_* \rightarrow \infty$  στον εσωτερικό οριζόντα, ο οποίος βρίσκεται στα σημεία  $v - u = \infty$ , ή αλλιώς  $U_+V_- = \infty$ . Έτσι λοιπόν οι συντεταγμένες Kruskal εμφανίζουν απειρισμούς στον εσωτερικό οριζόντα.

Οι συντεταγμένες  $(U_+, V_-)$  θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν μόνο για το διάστημα  $r_1 < r < \infty$ , όπου  $r_1 > r_-$  είναι κάποια ενδιάμεση τιμή της α-



κτίνας. Εσωτερικά του  $r = r_1$ , κάποιο άλλο σύστημα συντεταγμένων πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Ένα τέτοιο σύστημα είναι το αρχικό  $(t, r)$ , στο οποίο η μετρική παίρνει την μορφή (2.18). Είναι σημαντικό όμως το γεγονός ότι, σε αντίθεση με την περιοχή έξωτερά του ορίζοντα που βρίσκεται στο  $r = r_+$ , για  $r_- < r < r_+$ , η  $f$  αλλάζει πρόσημο και έτσι το  $t$  πρέπει να ερμηνευτεί πλέον σαν χωρική συντεταγμένη (αφού  $g_{tt} > 0$ ) και το  $r$  σαν χρονική (αφού  $g_{rr} < 0$ ). Έτσι, ένας παρατηρητής που διασχίζει τον εξωτερικό ορίζοντα, διασχίζει αναγκαστικά και τον εσωτερικό.

Απομένει να βρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων που θα περιγράφει με ομαλό τρόπο τον χώρο για  $r = r_-$  όπου οι συντεταγμένες  $t, r$  αποτυγχάνουν. Παρόμοια με πριν, ορίζουμε

$$U_- = \mp e^{\kappa_- u}, \quad V_- = -e^{\kappa_- v} \quad (2.26)$$

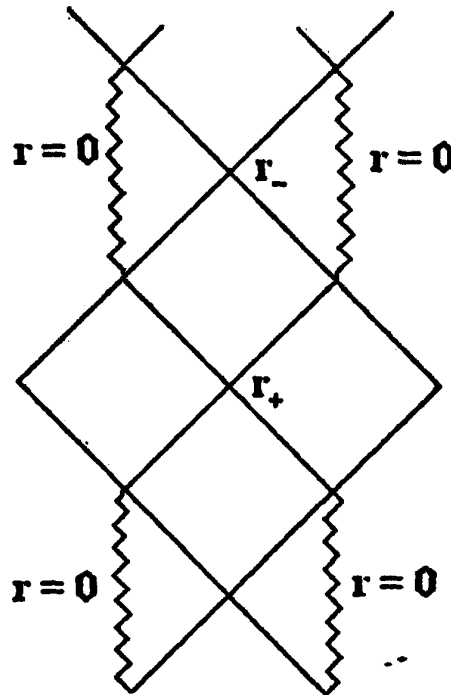
όπου  $\kappa_- = |f'(r_-)|/2$ . Με βάση αυτήν την αλλαγή, η μετρική κοντά στον εσωτερικό ορίζοντα παίρνει την εξής μορφή

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_-^2} dU_- dV_- + r_-^2 d\Omega^2 \quad (2.27)$$

Αυτή η έκφραση είναι ομαλή στον εσωτερικό ορίζοντα, όμως, όπως και πριν, απειρίζεται στον εξωτερικό.

Τι συμβαίνει όμως με έναν παρατηρητή που περνάει και το όριο του εσωτερικού ορίζοντα; Σε αντίθεση με την περίπτωση της μελανής οπής Schwarzschild, όπου ο παρατηρητής δεν έχει άλλη επιλογή από το να καταλήξει στην χωροχρονική ανωμαλία του  $r = 0$ , εδώ ένας παρατηρητής μπορεί να την αποφύγει. Μπορεί να κινηθεί είτε προς την κατεύθυνση που μειώνεται το  $r$ , οπότε να πέσει στην ανωμαλία, είτε προς αυτήν που αυξάνει. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να διασχίσει για άλλη μια φορά τον ορίζοντα του  $r = r_-$  και να αναδυθεί ξανά σε ένα ασυμπτωτικά επίπεδο σύμπαν, διαφορετικό από αυτό από το οποίο ξεκίνησε. Το ταξίδι του όμως μπορεί να μην σταματήσει εδώ. Μπορεί να αποφασίσει να ξαναδιασχίσει τον ορίζοντα της οπής που βρίσκεται στο καινούργιο αυτό κομμάτι του σύμπαντος, και ο κύκλος να επαναλαμβάνεται επί άπειρον! Έτσι η μετρική Reissner - Nordström περιγράφει κάτι παραπάνω από μία μελανή οπή. Στην πραγματικότητα περιγράφει ένα άπειρο πλέγμα από ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα που συνδέονται μέσω τούνελ μελανών οπών. Αυτή η δομή φαίνεται και στο διάγραμμα Penrose - Carter του Σχήματος 2.4. Μπορεί λοιπόν να χρησιμοποιηθεί μία φορτισμένη μελανή οπή για ταξίδια ανάμεσα σε διαφορετικά 'σύμπαντα'; Η απάντηση είναι όχι. Ο λόγος για αυτό είναι ότι η ύπαρξη τέτοιων τούνελ είναι πολύ ευαίσθητη στις συμμετρίες που υποθέσαμε για την οπή. Οποιαδήποτε, μικρή έστω, απόκλιση από αυτές επιφέρει μεγάλες αλλαγές στην δομή του χωρόχρονου, καθιστώντας αυτά τα τούνελ ασταθή, και έτσι αυτά είναι απόντα από πραγματικές καταστάσεις.





Σχήμα 2.4: Διάγραμμα Penrose - Carter για την γεωμετρία Reissner - Nordström .

Κάτι άλλο που πρέπει να προσθέσουμε είναι ότι, όπως είναι γνωστό, όλα τα ουράνια σώματα είναι αφόρτιστα, οπότε και η πρακτική σημασία της μετρικής Reissner - Nordström σε αστροφυσικές παρατηρήσεις είναι μικρή, ενώ στην πραγματικότητα η μετρική αυτή κατασκευάστηκε αρχικά σαν μοντέλο του ηλεκτρονίου [32]. Όμως ακόμα και για το ηλεκτρόνιο, ο λόγος του ηλεκτρικού φορτίου προς τη μάζα είναι πολύ μικρός, με αποτέλεσμα το φορτίο να είναι σημαντικό για την διαμόρφωση του χωρόχρονου μόνο για μικρές αποστάσεις, όπου όμως η ισχύς της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας τίθεται υπό αμφισβήτηση, και απαιτείται μία κβαντική θεωρία βαρύτητας.



## 2.4 Η Μελανή Οπή Kerr

### 2.4.1 Η Μετρική Kerr

Το 1963, ο Roy Kerr κατασκεύασε μία λύση των εξισώσεων Einstein [25], που περιγράφει μία περιστρεφόμενη μελανή οπή. Εκτός από αυτήν, υπάρχει επίσης και η λύση Kerr - Newman, η οποία περιγράφει μία φορτισμένη περιστρεφόμενη μελανή οπή, αλλά δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα διατριβή. Η μετρική Kerr δίδεται από την έκφραση:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (2.28)$$

όπου οι ποσότητες που εμφανίζονται δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \\ \Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (2.29)$$

Η παραπάνω λύση είναι ασυμπτωτικά επίπεδη, ενώ η μάζα και η τροχιακή στροφορμή της μελανής οπής, όπως την αντιλαμβάνεται ένας απομακρυσμένος παρατηρητής, είναι  $M$  και  $J = aM$  αντίστοιχα. Έτσι, η παράμετρος  $a$  δίνει το λόγο της τροχιακής στροφορμής προς τη μάζα.

Οι συντελεστές της αντιστρόφου της μετρικής,  $g^{\mu\nu}$ , είναι

$$g^{tt} = -\frac{\Sigma}{\rho^2 \Delta}, \quad g^{t\phi} = -\frac{2Mar}{\rho^2 \Delta}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta}, \\ g^{rr} = \frac{\Delta}{r^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}. \quad (2.30)$$

Όπως βλέπουμε, η μετρική και η αντιστροφή της έχουν απειρισμούς στα σημεία  $\Delta = 0$  και  $\rho^2 = 0$ . Για να ξεχωρίσουμε ανάμεσα σε πραγματικές χωροχρονικές ανωμαλίες και ανωμαλίες που οφείλονται στο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να εξετάσουμε την πλήρη συστολή του τανυστή Riemann του χωρόχρονου Kerr

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)(\rho^4 - 16a^2 r^2 \cos^2 \theta)}{\rho^{12}} \quad (2.31)$$

Αυτό δείχνει ότι ο απειρισμός στο  $\Delta = 0$  οφείλεται σε αδυναμία του συστήματος συντεταγμένων, ενώ η πραγματική χωροχρονική ανωμαλία βρίσκεται στο  $\rho^2 = 0$ .



## 2.4.2 Εργόσφαιρα

Οι λύσεις της εξίσωσης  $\Delta = 0$  θα μας δώσουν τους πιθανούς ορίζοντες της οπής. Το  $\Delta$  μηδενίζεται στα

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.32)$$

Βλέπουμε ότι για  $a > M$  δεν υπάρχει ορίζοντας και έτσι η μετρική (2.28) περιγράφει μία γυμνή ανωμαλία. Για  $a = M$  υπάρχει μία μόνο λύση, και η μελανή οπή χαρακτηρίζεται ακραία (extremal). Για  $a < M$  η εξίσωση  $\Delta = 0$  έχει δύο πραγματικές λύσεις. Η μεγαλύτερη, η  $r_+$ , είναι και πάλι ορίζοντας γεγονότων, ενώ η  $r_-$  είναι ορίζοντας Cauchy.

Μία σημαντική διαφορά σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις μελανών οπών που εξετάσαμε είναι ότι ενώ πριν στα σημεία που απειριζόταν το στοιχείο  $g_{rr}$  της μετρικής μηδενίζοταν το  $g_{tt}$ , στην μελανή οπή Kerr δεν συμβαίνει αυτό. Ο μηδενισμός του  $g_{tt}$  γίνεται σε διαφορετικά σημεία, τα οποία εύκολα προσδιορίζονται να είναι

$$r_e^{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.33)$$

Από αυτές τις ακτίνες μόνο η μεγαλύτερη, η  $r_e^+ \equiv r_e$ , που είναι έξω από τον ορίζοντα έχει φυσική σημασία. Στο Σχήμα 2.5 φαίνεται ο ορίζοντας  $r_+$  καθώς και η επιφάνεια με  $r = r_e$ , η οποία ταυτίζεται με τον ορίζοντα για  $\theta = 0$  και  $\theta = \pi$ , είναι όμως έξω από αυτόν για όλες τις υπόλοιπες γωνίες. Η επιφάνεια με  $r = r_e$  ονομάζεται στατικό όριο για λόγους που θα δούμε παρακάτω, ενώ η περιοχή ανάμεσα στα  $r = r_+$  και  $r = r_e$  ονομάζεται εργόσφαιρα.

Για να ρίξουμε λίγο περισσότερο φως στο τι ακριβώς συμβαίνει στην εργόσφαιρα, ας θεωρήσουμε έναν παρατηρητή που κινείται σε τροχιά με σταθερά τα  $r$  και  $\theta$  [32]. Η γωνιακή ταχύτητα με την οποία φαίνεται αυτός να κινείται ως προς έναν παρατηρητή στο άπειρο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

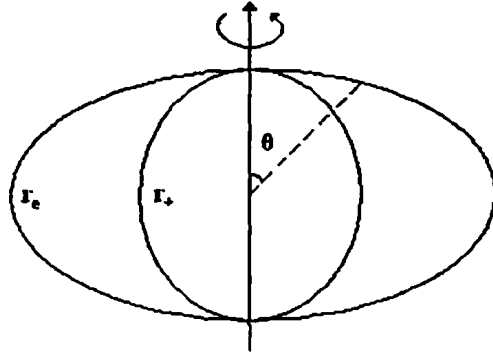
$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \frac{u^{\phi}}{u^t}. \quad (2.34)$$

όπου  $u^{\mu}$  είναι το τετραδιάνυσμα της ταχύτητάς του και η τελεία δηλώνει παραγωγή ως προς τον ιδιοχρόνο του. Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι, αν ο παρατηρητής μας κινείται μέσα στην εργόσφαιρα, το  $\Omega$  δεν μπορεί να είναι μηδέν και αυτός είναι αναγκασμένος να περιστραφεί μαζί με την οπή. Για αυτό το λόγο η επιφάνεια  $r = r_e$  καλείται στατικό όριο, είναι το έσχατο όριο πέρα από το οποίο ο παρατηρητής δεν μπορεί να είναι στατικός.

Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ότι, για έναν παρατηρητή που κινείται με ταχύτητα μικρότερη από αυτή του φωτός ισχύει  $u^{\mu}u_{\mu} > 0$ , το οποίο, αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.34), μας δίνει

$$(u^t)^2 (g^{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}) > 0. \quad (2.35)$$





Σχήμα 2.5: Στατικό όριο και ορίζοντας γεγονότων για την γεωμετρία Kerr .

Καθώς ο συντελεστής  $g_{\phi\phi}$  μπροστά από το  $\Omega^2$ , είναι αρνητικός, για να ισχύει η ανισότητα θα πρέπει να είναι  $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$ , όπου  $\Omega_{\pm}$  είναι οι ρίζες του τριωνύμου της (2.35) :

$$\Omega_{\pm} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} \quad (2.36)$$

Η μικρότερη ρίζα  $\Omega_-$  μηδενίζεται για  $g_{tt} = 0$ , δηλαδή για  $r = r_e$ , ενώ παραμένει θετική για την περιοχή  $r_+ < r < r_e$ . Έτσι λοιπόν, η επιφάνεια  $r = r_e$  αποτελεί το όριο πέρα από το οποίο δεν μπορεί να υπάρξει στατικός παρατηρητής. Πάνω στην επιφάνεια  $r = r_+$  οι δύο λύσεις  $\Omega_{\pm}$  ταυτίζονται σε μία τιμή  $\Omega_H$  την οποία και ταυτοποιούμε με την γωνιακή ταχύτητα της μελανής οπής:

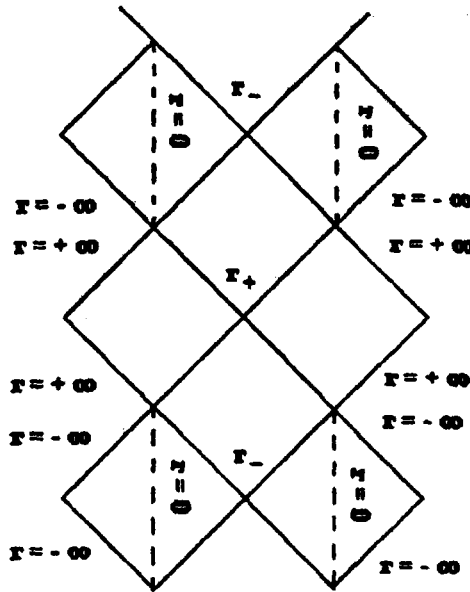
$$\Omega_{\pm}(r_+) \equiv \Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (2.37)$$

Έτσι ένας παρατηρητής πάνω στον ορίζοντα  $r_+$  είναι αναγκασμένος να περιστρέφεται συγχρονισμένα με την μελανή οπή.

### 2.4.3 Αναλυτική Επέκταση του Χωρόχρονου Kerr

Θα ολοκληρώσουμε την μελέτη μας πάνω στην μετρική Kerr κατασκευάζοντας την μέγιστη δυνατή αναλυτική επέκταση του χωρόχρονου, με την χρήση και πάλι συντεταγμένων Kruskal. Για απλότητα, θα δουλέψουμε στο κομμάτι του χωρόχρονου δύο διαστάσεων που προκύπτει αν θέσουμε  $\theta = 0$ . Καθώς όμως η μετρική δεν είναι σφαιρικά συμμετρική, αυτή η επιλογή εμπεριέχει μία απώλεια της γενικότητας. Θέτοντας  $\theta = 0$  στην έκφραση (2.28) η μετρική Kerr γίνεται





Σχήμα 2.6: Penrose - Carter διάγραμμα για την γεωμετρία Kerr .

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) dt^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr^2 \quad (2.38)$$

Ορίζοντας τώρα  $u = t - r^*$  και  $v = t + r^*$ , όπου

$$r^* = \int \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad (2.39)$$

η μετρική παίρνει την απλή μορφή  $ds^2 = -f du dv$ , με  $f = \Delta/(r^2 + a^2)$ , και η κατασκευή των συντεταγμένων Kruskal γίνεται όπως και στην περίπτωση της μελανής οπής Reissner - Nordström .

Κοντά στον εξωτερικό ορίζοντα εισάγουμε τις νέες συντεταγμένες

$$U_+ = \mp e^{-\kappa_+ u}, \quad V_+ = e^{\kappa_+ v} \quad (2.40)$$

όπου  $\kappa_+ = f'(r_+)/2$ . Με την βοήθεια αυτών η μετρική γίνεται

$$ds^2 = -2\kappa_+^{-2} dU_+ dV_+ \quad (2.41)$$

και δεν έχει απειρισμούς πάνω στον εξωτερικό ορίζοντα.

Όπως και στην περίπτωση της Reissner - Nordström οι συντεταγμένες  $(U_+, V_+)$  απειρίζονται στον εσωτερικό ορίζοντα και χρειαζόμαστε ένα άλλο





σύστημα συντεταγμένων για να επεκτείνουμε τον χωρόχρονο. Ο κατάλληλος μετασχηματισμός είναι τώρα

$$U_- = \mp e^{\kappa_- u}, \quad V_- = -e^{-\kappa_- v} \quad (2.42)$$

με  $\kappa_- = |f'(r_-)|/2$ , και το στοιχείο μήκους  $ds^2 = -2\kappa_-^2 dU_- dV_-$ .

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση του χωρόχρονου RN, ένα αντίγραφο του εξωτερικού ορίζοντα παρουσιάζεται στον παρατηρητή που διασχίζει τον εσωτερικό ορίζοντα, και καινούργιες συντεταγμένες Kruskal χρειάζονται για να τον περιγράψουν. Αυτό συνεχίζεται επ' άπειρον, και η μέγιστη αναλυτική επέκταση του χωρόχρονου Kerr περιλαμβάνει μία απειρία ασυμπτωτικά επίπεδων περιοχών που συνδέονται μεταξύ τους μέσω 'τούνελ' μελανών οπών.

Η δομή όμως εδώ είναι πιο πλούσια από αυτήν της φορτισμένης μελανής οπής. Η πλήρης ανάλυση είναι κάπως πολύπλοκη (βλέπε [33]) και έτσι εδώ θα περιοριστούμε στην γενική περιγραφή των αποτελεσμάτων. Εκτός λοιπόν από τα παράλληλα ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα, η μέγιστη επέκταση της γεωμετρίας περιλαμβάνει και περιοχές με αρνητικό  $r$  που επεκτείνονται μέχρι το  $r = -\infty$  και οι οποίες βλέπουν γυμνές ανωμαλίες με αρνητική μάζα. Το πλήρες διάγραμμα Penrose - Carter φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Βέβαια, όπως και στην περίπτωση της μελανής οπής Reissner - Nordström, τα τούνελ που οδηγούν σε νέα σύμπαντα είναι εξαιρετικά ασταθή και δεν υπάρχουν σε ρεαλιστικές καταστάσεις.

## 2.5 Θερμοδυναμική των Μελανών Οπών

Το 1973 οι Jim Bardeen, Brandon Carter και Stephen Hawking διατύπωσαν ένα σύνολο νόμων που καθορίζουν την συμπεριφορά των μελανών οπών [34]. Αυτοί οι νόμοι της μηχανικής των οπών έχουν μεγάλη ομοιότητα με τους νόμους της θερμοδυναμικής, πράγμα που στην αρχή θεωρήθηκε συμπτωματικό γεγονός. Σύντομα όμως έγινε κατανοητό ότι οι μελανές οπές όντως συμπεριφέρονται σαν θερμοδυναμικά συστήματα. Το κρίσιμο βήμα για αυτήν την διαπίστωση ήρθε το 1975, με την ανακάλυψη από τον Hawking ότι κβαντικές διεργασίες επιτρέπουν στις μελανές οπές να έχουν θερμική εκπομπή σωματιδίων [35]. Είναι λοιπόν δυνατόν για μία μελανή οπή να είναι σε θερμική ισορροπία με άλλα θερμοδυναμικά συστήματα και οι νόμοι των μελανών οπών δεν είναι τίποτα άλλο από μία περιγραφή της θερμοδυναμικής τους.

### 2.5.1 Οι Θερμοδυναμικοί Νόμοι των Μελανών Οπών

Οι νόμοι αυτοί προκύπτουν με βάση την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, και μπορούν να συνοψιστούν στις παρακάτω προτάσεις:

☺



### • Μηδενικός νόμος

Ο μηδενικός νόμος της μηχανικής των μελανών οπών λέει ότι η επιφανειακή βαρύτητα μίας στασιμής μελανής οπής είναι η ίδια πάνω σε όλο τον ορίζοντα. Επιφανειακή βαρύτητα ενός αστροφυσικού αντικειμένου ονομάζεται η επιτάχυνση της βαρύτητας που αισθάνεται ένας παρατηρητής στην επιφάνειά του.

### • Πρώτος νόμος

Υποθέτουμε μία στάσιμη μελανή οπή μάζας  $M$ , τροχιακής στροφορμής  $J$  και επιφάνειας  $A$  η οποία μεταπίπτει μετά από μία διαταραχή σε μία κατάσταση με παραμέτρους  $M + \delta M$ ,  $J + \delta J$  και  $A + \delta A$ . Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής των μελανών οπών τότε δηλώνει ότι οι αλλαγές στην μάζα, τροχιακή στροφορμή και επιφάνεια συνδέονται σύμφωνα με την εξής σχέση:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J, \quad (2.43)$$

όπου  $\kappa$  είναι η επιφανειακή βαρύτητα και  $\Omega_H$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της μελανής οπής. Για μία μελανή οπή Kerr, η επιφανειακή βαρύτητα είναι

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_h^2 + a^2}, \quad (2.44)$$

και όπως είδαμε

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (2.45)$$

### • Δεύτερος νόμος

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο, η επιφάνεια μίας μελανής οπής δεν μπορεί ποτέ να μειωθεί, δηλαδή  $\delta A > 0$ . Όταν μία οπή απορροφάει μάζα η επιφάνεια της μεγαλώνει. Αν ενωθούν δύο μελανές οπές η συνολική επιφάνεια πάλι θα μεγαλώσει. Το αντίστροφο όμως δεν μπορεί να γίνει, ο δεύτερος νόμος απαγορεύει την διάσπαση μίας οπής σε δύο μικρότερες, καθώς κάτι τέτοιο θα είχε ως αποτέλεσμα την μείωση της αρχικής επιφάνειας.

### • Τρίτος νόμος

Ο τρίτος νόμος της θερμοδυναμικής λέει ότι η επιφανειακή βαρύτητα  $\kappa$  μίας μελανής οπής δεν μπορεί να μειωθεί στο μηδέν.

Οι τέσσερις αυτοί νόμοι, όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κάποιος, είναι σε αντιστοιχία με τους αντίστοιχους της θερμοδυναμικής. Πιο συγκεκριμένα το  $\kappa$  φαίνεται να αντιστοιχεί στην θερμοκρασία, το  $A$  στην εντροπία και το



$M$  στην εσωτερική ενέργεια ενός θερμοδυναμικού συστήματος. Ο Bekenstein πρότεινε ότι η ακριβής σχέση ανάμεσα στην εντροπία και την επιφάνεια της μελανής οπής δίνεται από την σχέση [36]

$$S = \frac{1}{4\hbar} A, \quad (2.46)$$

όπου έχουμε θέσει  $c = G = k_B = 1$ . Με βάση αυτήν την σχέση, τον πρώτο νόμο της σχέσης (2.43) και τον αντίστοιχο πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, βλέπουμε ότι στη μελανή οπή αντιστοιχεί μία θερμοκρασία

$$T = \frac{\hbar}{2\pi} \kappa. \quad (2.47)$$

## 2.5.2 Ακτινοβολία Hawking

Μέχρι το 1975 οι περισσότεροι φυσικοί δεν έδιναν πολύ βάση στον παραλληλισμό αυτό. Πράγματι, από την στιγμή που μία μελανή οπή συνεχώς απορροφάει μάζα και ενέργεια χωρίς να δίνει τίποτα πίσω, δεν είναι δυνατόν να έρθει ποτέ σε θερμική ισορροπία με ένα σύστημα ίδιας θερμοκρασίας. Επιπλέον, αν η αντιστοιχία ήταν σωστή, στην περίπτωση που τοποθετούσαμε την οπή σε θερμικό λουτρό μικρότερης θερμοκρασίας αυτή θα έπρεπε να προσφέρει ενέργεια, πράγμα που για να γίνει θα χρειαζόταν ένας άγνωστος, ως τότε, μηχανισμός. Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα την έδωσε ο Hawking [35], που απέδειξε ότι οι μελανές οπές ακτινοβολούν σωματίδια με θερμικό τρόπο, αντίστοιχο με αυτό ενός μέλανος σώματος θερμοκρασίας ίσης με αυτήν της έκφρασης (2.47).

Στην αρχική απόδειξή του στην εργασία [35], ο Hawking θεώρησε ένα κλασσικό χωρόχρονο που περιγράφει βαρυτική κατάρρευση σε μελανή οπή Schwarzschild, και ένα χβαντικό πεδίο που διαδίδεται στο υπόβαθρο του υπό κατάρρευση άστρου, και το οποίο αρχικά είναι σε μία κατάσταση κενού. Στην συνέχεια υπολόγισε το περιεχόμενο σε σωματίδια στο άπειρο για προχωρημένους χρόνους, βρίσκοντας ότι ο αναμενόμενος αριθμός σωματιδίων αντιστοιχεί σε αυτόν ενός μέλανος σώματος θερμοκρασίας ίσης με την (2.47). Ο αριθμός των σωματιδίων ενός συγκεκριμένου είδους, με συχνότητα  $\omega$  που αναμένεται να εκπέμψουν στο άπειρο δίνεται τότε από τον τύπο

$$\langle N \rangle = \frac{A}{e^{(\hbar\omega/k_B T)} \pm 1} \quad (2.48)$$

όπου το θετικό πρόσημο αναφέρεται στην περίπτωση εκπομπής φερμιονίων και το αρνητικό στην περίπτωση των μποζονίων. Ο παράγοντας  $A$  που εμφανίζεται στον αριθμητή της παραπάνω έκφρασης ονομάζεται πιθανότητα απορρόφησης, και είναι μία ποσότητα που εξαρτάται από το είδος του σωματιδίου που εξετάζουμε, καθώς και την συχνότητα  $\omega$ . Η ποσότητα αυτή είναι στην πραγματικότητα η πιθανότητα να διαφύγει στο άπειρο ένα σωματίδιο από την μελανή οπή,



λόγω όμως του θερμικού χαρακτήρα της εκπομπής, ισούται με την πιθανότητα ένα ίδιο σωματίδιο που έρχεται από το άπειρο, να απορροφηθεί τελικά από την οπή.

Ένας πιο εποπτικός τρόπος να κατανοήσει κανείς την ακτινοβολία Hawking, είναι να θεωρήσει τη δημιουργία ενός ζεύγους σωματιδίου - αντισωματιδίου λίγο έξω από τον ορίζοντα της οπής, σαν κβαντική διαχύμανση του κενού. Στην περίπτωση που το ένα από τα δύο απορροφηθεί από την οπή ενώ το άλλο καταφέρει να διαφύγει, για έναν εξωτερικό παρατηρητή, η μελανή οπή θα έχει εκπέμψει ένα σωματίδιο.

Η θερμοκρασία που αντιστοιχεί στην εκπομπή αυτή, είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας της οπής. Για μία μελανή οπή Schwarzschild δίνεται από τον τύπο

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \quad (2.49)$$

Για μία οπή με μάζα ίση με την ηλιακή η θερμοκρασία αυτή είναι  $10^{-7} K$ , πολύ μικρή σε σύγκριση με την ακτινοβολία υποβάθρου, που είναι περίπου  $3K$ . Αυτό σημαίνει ότι μία οπή με τη μάζα του ήλιου απορροφάει περισσότερη ενέργεια από αυτήν που εκπέμπει. Έτσι, για αστροφυσικά σώματα, το φαινόμενο της ακτινοβολίας Hawking είναι πραγματικά ασήμαντο. Αν αγνοήσουμε την ακτινοβολία υποβάθρου, ο χρόνος που χρειάζεται μία οπή για να ακτινοβολήσει θερμικά όλη της την μάζα, είναι ίσος με

$$\tau \sim 10^{10} \text{yr} \left( \frac{M}{10^{15} \text{gr}} \right)^3 \quad (2.50)$$

Έτσι, στην περίπτωση 'μίνι' μελανών οπών, τα πράγματα αλλάζουν, το φαινόμενο πλέον είναι πολύ σημαντικό. Για παράδειγμα μία μελανή οπή μάζας  $10^5 \text{kg}$  θα εξατμιστεί πλήρως σε μόλις  $1 \text{sec}$ , ενώ οπές με μάζα ίση με αυτήν ενός στοιχειώδους σωματιδίου, θα ζήσουν μερικά απειροελάχιστα κλάσματα του δευτερολέπτου, κατά τη διάρκεια των οποίων θα εκπέμπουν όλων των ειδών τα σωματίδια, σε όλο το φάσμα ενεργειών. Αυτό το γεγονός, σε σχέση και με το ότι, όπως θα δούμε παρακάτω, η ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων στο σύμπαν θα επιτρέψει την πιθανή δημιουργία μικρών μελανών οπών στους μελλοντικούς επιταχυντές, καθιστά την λεπτομερή μελέτη της ακτινοβολίας Hawking ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα, το οποίο έχει συγκεντρώσει την προσοχή ενός μεγάλου αριθμού επιστημόνων τα τελευταία χρόνια.



## 2.6 Μελανές Οπές Εντοπισμένες σε Μεμβράνες

Σε αντιστοιχία με την καθαρά τετραδιάστατη περίπτωση, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι αν καταρρεύσει βαρυτικά μια μάζα εντοπισμένη στην Μεμβράνη, ως αποτέλεσμα θα έχει τη δημιουργία μίας μελανής οπής πάνω στην Μεμβράνη, η οποία θα εκτείνεται και στις επιπλέον διαστάσεις. Αν ο ορίζοντας της οπής είναι πολύ μεγαλύτερος από το μέγεθος  $R$  των επιπλέον διαστάσεων,  $r_H \gg R$ , τότε η μελανή οπή ουσιαστικά δεν διαφέρει από την αντίστοιχη τετραδιάστατη. Αν όμως η μελανή οπή έχει αρκετά μικρή μάζα, ώστε να ισχύει  $r_H \ll R$ , τότε είναι ένα πραγματικά πολυδιάστατο αντικείμενο, εντοπισμένο μεν πάνω στην Μεμβράνη, εμβαπτισμένο δε στον χωρόχρονο των επιπλέον διαστάσεων. Όπως θα δούμε, αυτές οι μικρές μελανές οπές έχουν σημαντικά διαφορετικές ιδιότητες από τις αντίστοιχες τετραδιάστατες με ακριβώς την ίδια μάζα, για παράδειγμα έχουν πιο μεγάλη ακτίνα του ορίζοντα και πιο μικρή θερμοκρασία Hawking [37]. Η πιο σημαντική διαφορά όμως, και ο λόγος που το θέμα συγκέντρωσε το ενδιαφέρον πολλών επιστημόνων, έγκειται στο ότι η ύπαρξη των επιπλέον διαστάσεων και η μείωση της χαρακτηριστικής κλίμακας της βαρύτητας, ανοίγει το δρόμο για την παραγωγή μικροσκοπικών μελανών οπών κατά την σύγκρουση υποατομικών σωματιδίων στους μελλοντικούς επιταχυντές, με πρώτο αυτόν του LHC. Οι υπολογισμοί που έχουν γίνει προβλέπουν τεράστιους ρυθμούς παραγωγής μελανών οπών (π.χ. της τάξης του  $1\text{Hz}$ , αν  $M_* = 1\text{TeV}$ ) και το πείραμα θα δουλεύει ως εργοστάσιο παραγωγής μίνι μελανών οπών. Επίσης, παραγωγή μελανών οπών μπορούν να έχουν ως αποτέλεσμα συγκρούσεις σωματιδίων της κοσμικής ακτινοβολίας με πυρήνες της ατμόσφαιρας της γης.

Στην Γενική Σχετικότητα, οι μελανές οπές είναι καλά κατανοητές όταν η μάζα τους  $M_{BH}$  είναι πολύ μεγαλύτερη από την χαρακτηριστική κλίμακα της βαρύτητας. Έτσι λοιπόν, στα μοντέλα με επιπλέον χωρικές διαστάσεις, η Γενική Σχετικότητα θα δώσει σωστά αποτελέσματα για τις μελανές οπές όταν η μάζα τους είναι πολύ μεγαλύτερη της (πολυδιάστατης) μάζας Planck,  $M_*$ . Καθώς η μάζα μειώνεται και πλησιάζει το  $M_*$ , η μελανή οπή μετατρέπεται σε ένα αντικείμενο για την περιγραφή του οποίου χρειάζεται κβαντική βαρύτητα, και του οποίου οι ιδιότητες είναι άγνωστες και πιθανώς και αρκετά εξωτικές. Στην συνέχεια της παρούσας διατριβής, θα ασχοληθούμε με μελανές οπές με μάζα που θα θεωρούμε αρκετά μεγαλύτερη από την πολυδιάστατη μάζα Planck, ώστε να μπορέσουμε να τις μελετήσουμε σαν κλασικά αντικείμενα.



### 2.6.1 Παραγωγή Μελανών Οπών σε Συγκρούσεις Υποατομικών Σωματιδίων

Ας θεωρήσουμε την σύγκρουση δύο σωματιδίων με ενέργεια κέντρου μάζας ίση με  $E$ . Αν η παράμετρος κρούσης είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα Schwarzschild  $r_H$  που αντιστοιχεί σε μία μελανή οπή με μάζα ίση με την ενέργεια κέντρου μάζας, τότε θα έχουμε γενικά ελαστικές και μη ελαστικές διεργασίες, και ανταλλαγή βαρυτονίων. Αν όμως η παράμετρος κρούσης είναι μικρότερη από το  $r_H$ , τότε σύμφωνα με την Θεωρία της Γενικής Σχετικότητας και την ανάλυση του K.S. Thorne στην [38], οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις γίνονται αρκετά δυνατές ώστε να οδηγήσουν στην δημιουργία μελανής οπής. Σε αυτήν την περίπτωση η ενεργός διατομή για την δημιουργία της μελανής οπής θα δίνεται από τον καθαρά γεωμετρικό τύπο

$$\sigma \sim \pi b^2 \sim \pi r_H^2, \quad (2.51)$$

δηλαδή από την 'επιφάνεια' του στόχου.

Στις εργασίες [39, 40, 41] έγιναν υπολογισμοί για το κάτω όριο της μάζας της μελανής οπής που θα σχηματιστεί κατά την σύγκρουση. Όπως αναφέρεται εκεί, ο Penrose υπολόγισε ότι τουλάχιστον 71% της αρχικής ενέργειας του κέντρου μάζας των συγκρουόμενων σωματιδίων θα δεσμευτεί από την μελανή οπή που θα σχηματιστεί. Στην ανάλυση που έγινε στις προαναφερθείσες εργασίες βρέθηκε ότι το ποσό που σπαταλιέται σε βαρυτική ακτινοβολία κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης ανέρχεται στο 16% της ολικής ενέργειας, αφήνοντας το υπόλοιπο 84% του  $E$  διαθέσιμο για την μάζα της οπής. Το παραπάνω αποτέλεσμα αναφέρεται στην περίπτωση μίας καθαρά μετωπικής σύγκρουσης ( $b = 0$ ), στην τετραδιάστατη περίπτωση. Παρόμοια αποτελέσματα έδωσε και μία διαφορετική μελέτη [42], σύμφωνα με την οποία το 13% της αρχικής ενέργειας χάνεται στη μορφή βαρυτικών κυμάτων. Για την περίπτωση της περιστερόμενης μελανής οπής, το νούμερο αυτό μπορεί να φτάσει [43] μέχρι και 35%.

Όταν άρχισαν οι φυσικοί να ασχολούνται με τις θεωρίες που προβλέπουν επιπλέον διαστάσεις, έγινε φανερό ότι χρειαζόταν να ξαναγίνουν οι υπολογισμοί που περιγράψαμε παραπάνω, για αυθαίρετο αριθμό διαστάσεων. Στην εργασία [44] οι συγγραφείς έδειξαν ότι για την τετραδιάστατη περίπτωση, μελανή οπή σχηματίζεται για  $b < b_{max} \simeq 0.8r_H$ , που μειώνει την ενεργό διατομή σε  $\sigma \simeq 0.64\pi r_H^2$ , ενώ αντίστοιχα η μάζα της οπής παίρνει τιμές από 71% για  $b = 0$  μέχρι 45% για  $b = b_{max}$ . Η ανάλυση, στην ίδια εργασία, για την περίπτωση των  $n$  επιπλέον διαστάσεων, και της μετωπικής σύγκρουσης των σωματιδίων, έδειξε ότι το κάτω όριο για την μάζα της οπής μειώνεται καθώς αυξάνει το  $n$ , μέχρι να φτάσει το 58% του  $\sqrt{s}$  για την περίπτωση των έντεκα επιπλέον διαστάσεων. Στις εργασίες [45, 46] αποδείχτηκε ότι η τιμή του  $b_{max}$  που μπορεί



$n$	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma/(\pi r_H^2)$	1.54	2.15	2.52	2.77	2.95	3.09	3.20
$E/M_*$	5.76	8.03	9.49	10.36	10.86	11.12	11.23

Πίνακας 2.1: Ελάχιστη τιμή του λόγου  $E/M_*$  που οδηγεί σε δημιουργία μελανής οπής, και ενεργός διατομή της παραγωγής σε εξάρτηση με τον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων.

να δημιουργήσει μελανή οπή αυξάνει με τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων και άρα αυξάνει και η ενεργός διατομή για την δημιουργία μελανών οπών:

$$b_{\max} \sim 2^{-1/(n+1)} r_H. \quad (2.52)$$

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζουμε αποτελέσματα από την εργασία [46] για την ενεργό διατομή της παραγωγής μίας μελανής οπής σε συνάρτηση με τον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων. Η αριθμητική ανάλυση που έγινε στην εργασία [47], εξάλλου, δείχνει ότι ενώ η ενέργεια που χάνεται σε βαρυτική εκπομπή είναι 13% για  $n = 4$ , πέφτει στο 8% για  $n = 6$ .

Είναι όμως οι ενέργειες των σύγχρονων επιταχυντών ικανές να δημιουργήσουν μελανές οπές; Σύμφωνα με μία πρόσφατη εργασία [48], κριτήριο για τον σχηματισμό ή όχι μελανής οπής είναι το μήκος κύματος Compton  $\lambda_C$  των συγκρουόμενων σωματιδίων, ενέργειας  $E/2$ , να βρίσκεται εντός της ακτίνας Schwarzschild:

$$\lambda_C = \frac{4\pi}{E} < r_H \quad (2.53)$$

Με βάση αυτήν την σχέση και την ακριβή έκφραση της ακτίνας Schwarzschild παρουσία επιπλέον διαστάσεων, μπορεί κάποιος να υπολογίσει τον ελάχιστο λόγο  $E/M_*$  που μπορεί να οδηγήσει σε δημιουργία μελανής οπής. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Αν υποθέσουμε ότι η  $M_*$  είναι κοντά στο  $1\text{TeV}$ , τότε στο LHC, που θα συγκρούονται σωματίδια με ενέργειες κέντρου μάζας γύρω στα  $14\text{TeV}$  η συνθήκη (2.53) ικανοποιείται ακόμα και για μεγάλα  $n$ . Αν όμως το  $M_*$  είναι μεγαλύτερο, τότε, και σε συνάρτηση με την τιμή του  $n$ , πιθανώς να μην δούμε μελανές οπές στο LHC, αλλά να χρειάζονται μεγαλύτεροι επιταχυντές.

Βέβαια, σε μία ρεαλιστική σύγκρουση τα συγκρουόμενα σωματίδια μπορεί να μην είναι στοιχειώδη, αλλά να αποτελούνται από περισσότερα του ενός στοιχειώδους σωματιδίου, οπότε τα αποτελέσματα που αναφέραμε παραπάνω διαφοροποιούνται αρκετά. Στην περίπτωση λοιπόν που έχουμε δύο σύνθετα σωματίδια  $A, B$  που συγκρούονται για την δημιουργία μελανής οπής και αποτελούνται από  $i, j$  στοιχειώδη αντίστοιχα, η ενεργός διατομή για την πα-



ραγωγής παίρνει την ακόλουθη μορφή [49, 50, 51]

$$\sigma^{AB \rightarrow B.H.} = \sum_{ij} \int_{\tau_m}^1 d\tau \int \frac{dx}{x} f_i(x) f_j\left(\frac{\tau}{x}\right) \sigma^{ij \rightarrow B.H.}(\tau s) \quad (2.54)$$

όπου  $x_i$  είναι το ποσοστό της ολικής ορμής που κουβαλάει το  $i$ -οστό σωματίδιο,  $\sigma^{ij \rightarrow B.H.}$  η ενεργός διατομή για την δημιουργία μελανής οπής από τα  $i$  και  $j$ ,  $\tau = x_i x_j$ , και  $\sqrt{\tau_m E}$  η ελάχιστη ενέργεια κέντρου μάζας που χρειάζεται για την παραγωγή μελανής οπής. Σημαντικοί είναι οι παράγοντες  $f_i(x)$  που δίνουν την πιθανότητα να βρούμε το  $i$ -οστό σωματίδιο να κατέχει ποσοστό  $x$  της ολικής ενέργειας της σύγκρουσης, και ονομάζονται partons distribution functions.

Υπολογισμοί που έχουν γίνει δίνουν πολύ μεγάλες ενεργές διατομές για την παραγωγή μελανών οπών, είτε σε συγκρούσεις κοσμικών ακτίνων με σωματίδια της ατμόσφαιρας της Γης, είτε σε επίγειους επιταχυντές. Για παράδειγμα η σύγκρουση πολύ ενεργειακών νετρίνων στην ατμόσφαιρα, θα δώσει μία ενεργό διατομή παραγωγής για μελανή οπή μάζας  $M_{BH} = M_* = 1\text{TeV}$ , η οποία θα είναι δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από οποιαδήποτε διατομή από παρόμοια σύγκρουση στο Καθιερωμένο Μοντέλο [52]. Ομοίως, σε συγκρούσεις πρωτονίου - πρωτονίου στο LHC, αν υποτεθεί  $M_* = 1\text{TeV}$ , τότε η ενεργός διατομή για την παραγωγή μελανής οπής με μάζα μεγαλύτερη των  $10\text{TeV}$ , παρουσία 6 επιπλέον διαστάσεων, είναι  $10\text{fb}$ , και η συχνότητα παραγωγής τους θα είναι περίπου ίση με 3 ανά ημέρα, καθιστώντας το LHC ένα εργοστάσιο παραγωγής μελανών οπών [49].

## 2.6.2 Ιδιότητες των Πολυδιάστατων Μελανών Οπών

Αν δεν υπάρχουν επιπλέον χωρικές διαστάσεις στο σύμπαν, η παραγωγή μελανών οπών σε επιταχυντές απαιτεί τεράστιες ενέργειες κέντρου μάζας, από τις οποίες απέχουμε ακόμα πάρα πολύ. Μειώνοντας την μάζα αυτών των οπών σε ενεργειακά προσιτές κλίμακες, οδηγούμαστε σε πολύ μικρές τιμές για την ακτίνα Schwarzschild, που καθιστά την παραγωγή οπών εξαιρετικά απίθανη. Αν όμως οι θεωρίες που προβλέπουν επιπλέον διαστάσεις αποδειχτούν σωστές, θα ανοίξει ο δρόμος για την δημιουργία μίνι μελανών οπών, καθώς μειώνεται η κλίμακα της βαρύτητας, επιτρέποντας την παραγωγή τους σε χαμηλότερες ενέργειες, ενώ ταυτόχρονα αυξάνεται και η ακτίνα Schwarzschild που αντιστοιχεί σε δεδομένη ενέργεια κέντρου μάζας, μεγαλώνοντας έτσι το εύρος τιμών της παραμέτρου κρούσης που οδηγούν σε δημιουργία οπής.

Στην συγκεκριμένη διατριβή θα μας απασχολήσουν πολυδιάστατες μελανές οπές, με μέγεθος πολύ μικρότερο από το μέγεθος των  $n$  επιπλέον διαστάσεων,  $r_H \ll R$ . Σε αυτήν την περίπτωση, όπως είπαμε και παραπάνω, οι οπές αποτελούν στην ουσία αντικείμενα εμβαπτισμένα σε ένα χώρο  $(3+n)$  μη συμπαγο-





ποιημένων χωρικών διαστάσεων, συν μίας χρονικής. Αν τώρα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση μίας σφαιρικά συμμετρικής (δηλαδή μη περιστρεφόμενης) και αφόρτιστης μελανής οπής, το στοιχείο μήκους γύρω της θα δίνεται από την ακόλουθη έκφραση, που βρέθηκε από τους Myers και Perry [53]:

$$ds^2 = \left[1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n+1}\right] dt^2 - \left[1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n+1}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_{n+2}^2 \quad (2.55)$$

όπου  $d\Omega_{n+2}^2$  είναι το στοιχείο μήκους πάνω σε μία σφαίρα  $(n+2)$  διαστάσεων, με μοναδιαία ακτίνα, το οποίο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$d\Omega_{n+2}^2 = d\theta_{n+1}^2 + \sin^2 \theta_{n+1} (d\theta_n^2 + \sin^2 \theta_n (\dots + \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi) \dots)) \quad (2.56)$$

όπου  $0 < \phi < 2\pi$  και  $0 < \theta_i < \pi$  για  $i = 1, \dots, n+1$ . Το στοιχείο μήκους της εξίσωσης (2.55) μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι υπακούει στις εξισώσεις Einstein για το κενό, παρουσία  $(3+n)$  χωρικών διαστάσεων.

Στην εργασία [53] υπολογίζεται επίσης η σχέση μεταξύ της μάζας  $M_{BH}$  της οπής και της ακτίνας του ορίζοντα. Το αποτέλεσμα είναι η παρακάτω έκφραση

$$r_H = \frac{1}{\sqrt{\pi} M_*} \left(\frac{M_{BH}}{M_*}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{8\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.57)$$

Σε σύγκριση με την τετραδιάστατη έκφραση βλέπουμε εδώ ότι η σχέση ανάμεσα στον ορίζοντα της οπής και στην μάζα της δεν είναι πια γραμμική. Η ακτίνα  $r_{H(4D)}$  για την τετραδιάστατη περίπτωση είναι

$$r_{H(4D)} = 2GM_{BH} = 2\frac{M_{BH}}{M_P^2} \quad (2.58)$$

Αν τώρα θυμηθούμε από το πρώτο Κεφάλαιο ότι  $M_P^2 \sim M_*^{n+2} R^n$ , έχουμε

$$r_{H(4D)} \sim \frac{1}{M_*} \left(\frac{M_{BH}}{M_*}\right) \frac{1}{(M_* R)^n} \quad (2.59)$$

και έτσι παίρνουμε

$$\left(\frac{r_{H(4D)}}{r_H}\right) \sim \left(\frac{r_H}{R}\right)^n \quad (2.60)$$

Αμέσως βλέπουμε ότι για  $r_H < R$ , ισχύει

$$r_{H(4D)} < r_H < R, \quad (2.61)$$



$n$	1	2	3	4	5	6	7
$r_H(10^{-4} fm)$	4.06	2.63	2.22	2.07	2.00	1.99	1.99
$T_H(GeV)$	77	179	282	379	470	553	629

Πίνακας 2.2: Ακτίνα του ορίζοντα σε  $fermi$  και θερμοκρασία σε  $GeV$  για μελανή οπή μάζας  $5TeV$ , σε εξάρτηση με τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Έχει υποτεθεί  $M_* = 1TeV$

δηλαδή μία μίνι μελανή οπή, δεδομένης μάζας, θα έχει μεγαλύτερη ακτίνα αν υπάρχουν επιπλέον χωρικές διαστάσεις από ότι αν το σύμπαν είναι καθαρά τετραδιάστατο. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα θα διευκολύνει και την δημιουργία μελανών οπών στους μελλοντικούς επιταχυντές.

Πριν δώσουμε αριθμητικά στοιχεία, θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι για να μπορούμε με ασφάλεια να αγνοήσουμε τα χβαντικά φαινόμενα, και να μελετήσουμε την μελανή οπή χωρίς να έχουμε στα χέρια μας μία χβαντική θεωρία της βαρύτητας, η οπή θα πρέπει να έχει μάζα αρκετά μεγαλύτερη από την χαρακτηριστική κλίμακα της βαρύτητας. Έτσι αν θεωρήσουμε ότι  $M_* = 1TeV$ , για να είμαστε σίγουροι ότι θα παραχθεί μελανή οπή κατά τη διάρκεια μίας σύγκρουσης σωματιδίων, θα πρέπει να είναι τουλάχιστον  $M_{BH} = 5TeV$ . Αν δεν υπάρχουν επιπλέον διαστάσεις, για να είμαστε σίγουροι ότι θα παραχθεί μελανή οπή κατά τη διάρκεια μίας σύγκρουσης στοιχειωδών σωματιδίων, θα πρέπει να έχουμε ενέργειες κέντρου μάζας τουλάχιστον λίγο μεγαλύτερες από την κλασσική μάζα Planck, δηλαδή μεγαλύτερες από  $10^{18} GeV$ . Αυτή η κλίμακα ενεργειών είναι πολλές τάξεις μεγέθους πάνω από τις ικανότητες των σύγχρονων επιταχυντών.

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι  $M_* = 1TeV$ , τότε από την έκφραση (2.57) υπολογίζουμε ότι ο ορίζοντας για μία οπή μάζας  $M_{BH} = 5TeV$  είναι  $4.06 fm$  ενώ για  $n = 7$  είναι  $1.99 fm$ . Τα αποτελέσματα για τις ενδιάμεσες τιμές του  $n$  φαίνονται στην δεύτερη γραμμή του Πίνακα 2.2, [54]. Αν αγνοήσουμε προς στιγμήν το γεγονός ότι μία μελανή οπή μάζας  $M_{BH} = 5TeV$  στην περίπτωση του καθαρά τετραδιάστατου χωρόχρονου, στον οποίο η κλίμακα της βαρύτητας είναι ίση με την μάζα Planck, θα ήταν ένα καθαρά 'χβαντικό' αντικείμενο, μπορούμε να υπολογίσουμε κλασσικά την ακτίνα της. Έτσι λοιπόν μία τέτοια μελανή οπή στις τέσσερις διαστάσεις, θα είχε ακτίνα Schwarzschild της τάξης των  $10^{-50} m$ , που είναι 31 τάξεις μεγέθους μικρότερη από τις αντίστοιχες των πολυδιάστατων οπών.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε με τι τρόπο εξαρτάται η θερμοκρασία Hawking μίας μίνι μελανής οπής από τον ακριβή αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Η θερμοκρασία μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τον πρώτο νόμο της θερμο-



δυναμικής

$$T_H = \frac{dE}{dS} \sim \frac{dM_{BH}}{dA_H}, \quad (2.62)$$

όπου  $A_H$  είναι η επιφάνεια της μελανής οπής. Αυτήν μπορούμε να την υπολογίσουμε ως εξής [54]:

$$\begin{aligned} A_H &= r_H^{n+2} \int_0^{2\pi} d\phi \prod_{k=1}^{n+1} \int_0^\pi \sin^k \theta_{k+1} d\theta_{k+1} \\ &= r_H^{n+2} (2\pi) \prod_{k=1}^{n+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma[(k+2)/2]} \\ &= 2\pi r_H^{n+2} \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Η ακριβής έκφραση που προκύπτει για την θερμοκρασία Hawking είναι η ακόλουθη [37]

$$T_H = M_* \left(\frac{M_*}{M}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{(n+1)^{n+1}(n+2)}{2^{2n+5} \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma[(n+3)/2]}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.64)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (2.57) για το  $r_H$ , η θερμοκρασία εκφράζεται πιο απλά συναρτήσει της ακτίνας του ορίζοντα:

$$T_H = \frac{n+1}{4\pi r_H} \quad (2.65)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκφράσεις μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την θερμοκρασία Hawking συναρτήσει του  $n$ , και στον πίνακα Πίνακα 2.2 [54] παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για την θερμοκρασία στην περίπτωση πάλι που  $M_{BH} = 5TeV$  και  $M_* = 1TeV$ . Και εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε την θερμοκρασία που θα είχε μία μελανή οπή ίδιας μάζας στην καθαρά τετραδιάστατη περίπτωση, αν αγνοήσουμε το γεγονός ότι θα ήταν ένα χβαντικό αντικείμενο. Σε αυτήν την περίπτωση η θερμοκρασία της θα ήταν 30 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τις θερμοκρασίες του Πίνακα 2.2. Συνοψίζοντας λοιπόν, είδαμε ότι μία μίνι μελανή οπή που ζει σε ένα πολυδιάστατο σύμπαν, θα είναι πολύ μεγαλύτερη και πολύ πιο χρύα από την αντίστοιχη τετραδιάστατη οπή ίσης μάζας.

Όσο πιο μεγάλη είναι η θερμοκρασία μίας μελανής οπής, τόσο πιο γρήγορα θα ακτινοβολήσει όλη την μάζα της, τόσο μικρότερη θα είναι η διάρκεια ζωής της. Όπως είδαμε και σε προηγούμενο Υποκεφάλαιο, για την κλασική



τετραδιάστατη περίπτωση, ο χρόνος ζωής είναι ανάλογος της μάζας της οπής στον κύβο

$$\tau \sim \frac{1}{M_P} \left( \frac{M_{BH}}{M_P} \right)^3, \quad (2.66)$$

πράγμα που δίνει πολύ μεγάλους χρόνους ζωής για τις αστροφυσικές μελανές οπές και πολύ μικρούς χρόνους ζωής για τις μικροσκοπικές μελανές οπές, όπως αυτές που πιθανώς παρήχθησαν στα πρώτα στάδια της δημιουργίας του σύμπαντος. Όμως, για την περίπτωση των μίνι μελανών οπών, τυχόν ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων θα μεταβάλλει τον χρόνο ζωής τους [37]:

$$\tau \sim \frac{1}{M_*} \left( \frac{M_{BH}}{M_*} \right)^{\frac{n+3}{n+1}} \quad (2.67)$$

Η ύπαρξη του  $M_*$  αντί του  $M_P$  στην σχέση (2.67) έχει ως αποτέλεσμα οι πολυδιάστατες μικροσκοπικές μελανές οπές να ζουν πολύ περισσότερο από τις αντίστοιχες στις τέσσερις διαστάσεις. Παρόλα αυτά ο χρόνος ζωής παραμένει εξαιρετικά μικρός: αν εξετάσουμε και πάλι την περίπτωση μίας οπής με μάζα  $M_{BH} = 5 \text{TeV}$ , ο χρόνος ζωής είναι της τάξης των  $10^{-27} \text{sec}$ . Αν όντως παραχθούν μελανές οπές σε επιταχυντές, ο τόσο μικρός χρόνος ζωής τους δεν θα αποτελέσει εμπόδιο στο να ανιχνευτούν, καθώς αυτό θα γίνει μέσω της ακτινοβολίας Hawking που θα εκπέμψουν.

### 2.6.3 Ακτινοβολία Hawking από Μελανές Οπές Παρουσία Επιπλέον Χωρικών Διαστάσεων

Είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο ότι ο Hawking το 1975 απέδειξε ότι οι μελανές οπές δεν είναι απολύτως μελανές, αλλά στην πραγματικότητα ακτινοβολούν σωματίδια, με έναν σχεδόν θερμικό τρόπο, και ρυθμό αντιστρόφως αναλόγο της μάζας τους. Γενικεύοντας την τετραδιάστατη έκφραση [35] για την περίπτωση που στο σύμπαν υπάρχουν  $n$  στον αριθμό επιπλέον χωρικές διαστάσεις, παίρνουμε την παρακάτω έκφραση

$$\frac{dN^{(s)}(\omega)}{dt} = \sum_j \sigma_{j,n}^{(s)}(\omega) \frac{1}{e^{\omega/T_H} \pm 1} \frac{d^{n+3}k}{(2\pi)^{n+3}} \quad (2.68)$$

για τον αριθμό  $N$  των παραγόμενων σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου από μία σφαιρικά συμμετρική, αφόρτιστη μελανή οπή που περιγράφεται από την μετρική της σχέσης (2.55). Στην παραπάνω σχέση  $s$  είναι το σπιν του εκπεμπόμενου βαθμού ελευθερίας και  $j$  είναι ο χβαντικός αριθμός της στροφορμής. Το πρόσημο στον παρονομαστή είναι θετικό για φερμιόνια και αρνητικό για



μποζόνια. Για άμαξα σωματίδια είναι  $|k| = \omega$  και το ολοκλήρωμα στον χώρο φάσης γίνεται ολοκλήρωμα πάνω στην ενέργεια. Για σωματίδια με μάζα, είναι  $|k|^2 = \omega^2 - m^2$ , η ενέργεια στον παρονομαστή περιλαμβάνει και την μάζα του εκπεμπομένου σωματιδίου. Καθώς η μελανή οπή εκπέμπει σωματίδια, η μάζα της μειώνεται, η θερμοκρασία της μεγαλώνει, και η όλη διαδικασία επιταχύνεται. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε το φαινόμενο, θεωρούμε ότι η διαδικασία της εκπομπής γίνεται ημι-στατικά, δηλαδή η οπή φτάνει σε ισορροπία μετά από την εκπομπή ενός σωματιδίου, πριν εκπεμφθεί το επόμενο.

Ο ρυθμός με τον οποίον εκπέμπεται η ενέργεια από την μελανή οπή βρiσκειται από τον ρυθμό εκπομπής των σωματιδίων, πολλαπλασιασμένο με την ενέργεια  $\omega$  του κάθε σωματιδίου:

$$\frac{dE^{(s)}(\omega)}{dt} = \sum_j \sigma_{j,n}^{(s)}(\omega) \frac{\omega}{e^{(\omega/T_H)} \pm 1} \frac{d^{n+3}k}{(2\pi)^{n+3}} \quad (2.69)$$

Οι δύο εκφράσεις που παρουσιάσαμε για τους ρυθμούς εκπομπής είναι πανομοιότυπες με τις αντίστοιχες εκφράσεις ενός μέλανος σώματος στην θερμοδυναμική, εκτός από τον παράγοντα  $\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$ , ο οποίος δεν υπάρχει σε ένα τυπικό φάσμα εκπομπής από μέλαν σώμα. Ο παράγοντας αυτός εξαρτάται από την ενέργεια  $\omega$  του εκπεμπομένου σωματιδίου, τον κβαντικό αριθμό  $j$  της στροφορμής, από το spin του  $s$ , και από τον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων. Αυτή η εξάρτηση από το  $n$  είναι σημαντική, γιατί όπως θα δούμε και στα επόμενα Κεφάλαια, μπορεί να μας βοηθήσει να ανακαλύψουμε τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων μελετώντας το φάσμα της ακτινοβολίας Hawking μελανών οπών που πιθανώς να δημιουργηθούν στους μελλοντικούς επιταχυντές.

Ο παράγοντας αυτός συνήθως αποκαλείται "graybody factor" στη διεθνή βιβλιογραφία (παράγοντας φαιού σώματος), και ο λόγος που εμφανίζεται στους τύπους των ρυθμών εκπομπής είναι ο εξής: αν υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο δημιουργηθεί στην γειτονιά του οριζοντα της μελανής οπής, υπάρχει μεν η πιθανότητα να καταφέρει να διαφύγει μέχρι το άπειρο και να ανιχνευτεί από έναν παρατηρητή ως ακτινοβολία Hawking της οπής, λόγω όμως της βαρυτικής έλξης της μελανής οπής, υπάρχει η μη-μηδενική πιθανότητα να απορροφηθεί από αυτήν και να μην καταφέρει να διαφύγει. Ο παράγοντας  $\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$  λοιπόν, είναι ένα μέτρο αυτής ακριβώς της πιθανότητας διαφυγής του σωματιδίου από το βαρυτικό πεδίο της μελανής οπής. Αυτός είναι και ο λόγος που αυτός ο παράγοντας απουσιάζει από το φάσμα εκπομπής ενός κλασσικού μέλανος σώματος (για την ακρίβεια είναι σταθερός, και ίσως με την επιφάνειά του). Είναι επίσης λογικό ο  $\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$  να εξαρτάται από τις διάφορες παραμέτρους του σωματιδίου, από το είδός του, καθώς και από την μορφή του χωροχρόνου, π.χ. τυχόν περιστροφή της μελανής οπής θα επηρεάσει την τιμή του.

Ο τρόπος να υπολογιστεί αυτός ο παράγοντας είναι μέσω των εξισώσεων κί-



νησης του συγκεκριμένου σωματιδίου, στον καμπυλωμένο από την μελανή οπή χωρόχρονο. Ισούται με την ενεργό διατομή για την διαφυγή ενός σωματιδίου στο άπειρο, η οποία μπορεί να καθοριστεί μέσω της πιθανότητας απορρόφησης ενός σωματιδίου ίδιου τύπου, ίδιας ενέργειας, που έρχεται από το άπειρο.

Αν θεωρήσουμε το παράδειγμα ενός άμαζου βαθμωτού σωματιδίου που εκπέμπεται από μία μελανή οπή, σύμφωνα με την εργασία [55] ο παράγοντας  $\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$  συνδέεται με την πιθανότητα απορρόφησης  $|A_j^{(s)}|^2$  μέσω του τύπου

$$\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega) = \frac{2^n \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (2j+n+1)(j+n)!}{n! \omega^{n+2} j!} |A_j^{(s)}|^2. \quad (2.70)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση (2.63) για τον ορίζοντα, μπορούμε να απλοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση ως εξής:

$$\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega) = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)^2}{\pi} \frac{A_H}{(\omega r_H)^{n+2}} N_j |A_j^{(s)}|^2, \quad (2.71)$$

όπου  $N_j$  είναι η πολλαπλότητα των διαφορετικών καταστάσεων που αντιστοιχούν στον ίδιο κβαντικό αριθμό  $j$ , παρουσία  $n$  επιπλέον χωρικών διαστάσεων:

$$N_j = \frac{(2j+n+1)(j+n)!}{j!(n+1)!}. \quad (2.72)$$

Να θυμίσουμε εδώ ότι ο αντίστοιχος αριθμός στις τέσσερις διαστάσεις είναι  $(2j+1)$ , όπως εξάλλου προκύπτει από την προηγούμενη σχέση θέτωντας  $n=0$ .

Έτσι λοιπόν, ο υπολογισμός του παράγοντα φαιού σώματος για το παράδειγμα της εκπομπής ενός άμαζου βαθμωτού σωματιδίου από την μελανή οπή, θα γίνει μέσω της σχέσης (2.71). Η πιθανότητα απορρόφησης  $|A_j^{(s)}|^2$  που απομένει για να γίνει ο υπολογισμός, βρίσκεται από τις εξισώσεις κίνησης του πεδίου. Γράφουμε λοιπόν την εξίσωση που περιγράφει την διάδοση του συγκεκριμένου τύπου πεδίου στον καμπυλωμένο, γύρω από την μελανή οπή, χωρόχρονο (για την περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε, αυτή η εξίσωση θα είναι η Klein - Gordon στο βαρυτικό υπόβαθρο της μελανής οπής της εξίσωσης 2.55), την λύνουμε και υπολογίζουμε την πιθανότητα ένα εισερχόμενο σωματίδιο να απορροφηθεί από την οπή.

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι από την εξίσωση (2.71) για τον παράγοντα  $\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$  βλέπουμε ότι αυτός είναι ανάλογος της επιφάνειας της μελανής οπής, όπως και στην περίπτωση του κλασσικού μελανού σώματος. Εδώ όμως υπάρχει και η εξάρτηση από τις παραμέτρους του σωματιδίου και της γεωμετρίας του χώρου, συγκεκριμένα από τα  $\omega$ ,  $r_H$ ,  $j$  και  $n$ . Επίσης, ας σημειωθεί ότι ο  $\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$



έχει διαστάσεις επιφάνειας, πράγμα αναμενόμενο, καθώς ισούται με ενεργό διατομή απορρόφησης. Η διαστάσεις του όμως αλλάζουν, όπως είναι λογικό, καθώς αυξάνει το  $n$ .

Με την βοήθεια της σχέσης (2.71) μπορούμε να γράψουμε τον ρυθμό εκπομπής της ενέργειας (2.69) για το συγκεκριμένο παράδειγμα συναρτήσει της πιθανότητας απορρόφησης, ως εξής:

$$\frac{dE^{(s)}(\omega)}{dt} = \sum_j N_j |A_j^{(s)}|^2 \left( \frac{\omega}{e^{(\omega/\Gamma_H)} - 1} \right) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.73)$$

### Ασυμπτωτικό Όριο Στις Υψηλές Ενέργειες

Είπαμε και πριν, ότι ο παράγοντας φαιού σώματος εξαρτάται από την ενέργεια του σωματιδίου. Καθώς όμως η ενέργεια αυξάνει, η τιμή του  $\Sigma_j \sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$  προσεγγίζει μία σταθερή τιμή ανεξάρτητη του  $\omega$ , η οποία είναι ίδια για όλα τα σωματίδια. Αυτό το ασυμπτωτικό όριο έχει μελετηθεί στο παρελθόν για μελανές οπές τύπου Schwarzschild, τόσο στις τέσσερις διαστάσεις [22, 56, 57, 58, 59, 60], όσο και στην περίπτωση των περισσότερων από τέσσερις [61, 62]. Το ασυμπτωτικό αυτό όριο μπορούμε να το εξετάσουμε μελετώντας ένα σωματίδιο υψηλών ενεργειών με κλασικό τρόπο και, πιο συγκεκριμένα, θα βρούμε την ενεργό διατομή απορρόφησης ενός τέτοιου σωματιδίου από μία μελανή οπή. Ο παράγοντας  $\sigma_{j,n}^{(s)}(\omega)$  είναι, όπως είπαμε, ίσος με την διατομή αυτήν.

Η εξίσωση κίνησης  $p^\mu p_\mu = 0$  για ένα άμαζο, κλασικό σωματίδιο που κινείται στο βαρυτικό υπόβαθρο που προκαλεί η μελανή οπή της έκφρασης (2.55), παίρνει την μορφή

$$\left( \frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{f(r)}{r^2}, \quad (2.74)$$

όπου  $b$  η παράμετρος κρούσης που ισούται με τον λόγο της γωνιακής στροφορμής του σωματιδίου προς την ενέργειά του και  $f(r)$  η συνάρτηση της απόστασης που εμφανίζεται στην μετρική

$$f(r) = 1 - \frac{r_H}{r} \quad (2.75)$$

για την περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων, ενώ για την πολυδιάστατη

$$f(r) = 1 - \left( \frac{r_H}{r} \right)^{n+1}. \quad (2.76)$$

Η κλασικά επιτρεπόμενη περιοχή ορίζεται από την σχέση  $b < \min(r/\sqrt{f})$ , από όπου βρίσκουμε ότι, για την περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων, η



πιο κοντινή απόσταση που μπορεί να πλησιάσει το σωματίδιο στην μελανή οπή χωρίς να απορροφηθεί είναι η  $r_c = 3\sqrt{3}r_H/2$ , ενώ σε χώρο με  $(4+n)$  διαστάσεις η σχέση γενικεύεται ως εξής

$$r_c = \left(\frac{n+3}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{\frac{n+3}{n+1}} r_H. \quad (2.77)$$

Έτσι λοιπόν, ένα σωματίδιο υψηλής ενέργειας βλέπει την μελανή οπή σαν ένα πλήρως απορροφητικό σώμα ακτίνας  $r = r_c$ . Αν περάσει από απόσταση  $r < r_c$  από το κέντρο της οπής θα απορροφηθεί από αυτήν, ειδικά θα καταφέρει να διαφύγει στο άπειρο. Η αντίστοιχη τιμή του παράγοντα φαιού σώματος είναι ίση με  $\sigma_g = \pi r_c^2$ , ανεξάρτητη από τον τύπο του σωματιδίου ή την ενέργειά του, και έτσι η μελανή οπή περιγράφει ένα τέλειο μέλαν σώμα επιφάνειας ίσης με  $\sigma_g$ .

Αντίστοιχοι γενικοί τύποι δεν υπάρχουν για την περίπτωση των περιστρεφόμενων οπών, καθώς η μικρότερη απόσταση που μπορεί να πλησιάσει το σωματίδιο χωρίς να απορροφηθεί εξαρτάται και από την γωνία από την οποία πλησιάζει την οπή (δεν έχουμε σφαιρική συμμετρία), υπάρχουν όμως αναλυτικά αποτελέσματα για συγκεκριμένες περιπτώσεις πρόσπτωσης στις τέσσερις διαστάσεις. Πιο αναλυτικά θα δούμε αυτά τα αποτελέσματα στο Κεφάλαιο 4, καθώς και την γενίκευσή τους στην περίπτωση των  $(4+n)$  διαστάσεων.

Εξάλλου, στις πολύ χαμηλές ενέργειες, η κατάσταση είναι αρκετά διαφορετική, δεδομένου ότι η τιμή του παράγοντα φαιού σώματος έχει εξάρτηση τόσο από το είδος του σωματιδίου (πιο συγκεκριμένα το σπιν), όσο και από την ενέργειά του. Αυτό ισχύει τόσο στην τετραδιάστατη περίπτωση [56, 57, 58, 59, 60], όσο και σε χώρους με επιπλέον διαστάσεις [54, 61, 63, 64].

### Οι φάσεις της εξάτμισης μίας μελανής οπής

Εδώ θα περιγράψουμε τις φάσεις από τις οποίες θα περάσει μία μελανή οπή από την στιγμή που θα δημιουργηθεί στον επιταχυντή μέχρι να εξαϋλωθεί πλήρως μέσω της εκπομπής ακτινοβολίας Hawking τόσο στην Μεμβράνη όσο και στον Υπερχώρο.

Στην γενική περίπτωση της δημιουργίας μίας μελανής οπής στο εργαστήριο, αυτή θα έχει φορτίο που θα προέρχεται από τα φορτία των σωματιδίων που συγκρούστηκαν για να την δημιουργήσουν. Σύμφωνα με τις εργασίες των αναφορών [65, 66, 67], μία μελανή οπή θα χάσει το φορτίο της μέσω της δημιουργίας ζευγών σωματιδίων αντισωματιδίων (ζεύγη τύπου Schwinger) πολύ γρήγορα. Ακόμα, το φορτίο της μελανής οπής θα επηρεάσει την εκπομπή αφόρτιστων σωματιδίων μόνο για μάζα της οπής μεγαλύτερης των  $10^5$  ηλιακών μαζών. Βέβαια, για τόσο μεγάλη μάζα, η μελανή οπή δεν ακτινοβολεί σημα-





ντικά ούτως ή άλλως, οπότε μπορούμε γενικά να αγνοούμε το φορτίο της οπής όταν μελετάμε την εκπομπή αφόρτιστων σωματιδίων.

Επιπλέον, ο Page [68, 69] μελέτησε και την επίδραση της μάζας του σωματιδίου στους ρυθμούς με τους οποίους αυτό εκπέμπεται από την οπή. Βρήκε ότι η μάζα του σωματιδίου δυσκολεύει την εκπομπή του από την οπή, η μελανή οπή δηλαδή εκπέμπει κατά κύριο λόγο άμαζα σωματίδια.

Αν και τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε αναφέρονται στην περίπτωση του τετραδιάστατου χωρόχρονου, αναμένουμε η ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων να μην αλλάξει την γενική εικόνα. Με βάση τα παραπάνω λοιπόν, θα επικεντρωθούμε σε πρώτη προσέγγιση σε αφόρτιστες μελανές οπές, και στην εκπομπή άμαζων σωματιδίων από αυτές.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι μίνι πολυδιάστατες οπές δημιουργηθούν στους επιταχυντές του κοντινού ή μακρινού μέλλοντος, τότε αυτές θα περάσουν μέσα από κάποιες φάσεις πριν εξαφανιστούν τελείως, έχοντας ακτινοβολήσει πλήρως όλη τους την ενέργεια. Οι φάσεις αυτές είναι οι εξής [49, 50, 70]:

- Η φάση "balding"

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή αυτής της φάσης, θα ήταν σκόπιμο να κάνουμε εδώ μία παρένθεση για να αναφέρουμε ορισμένα πράγματα για το θεώρημα "no-hair". Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτό το θεώρημα, μία μελανή οπή η οποία αποτελεί λύση των εξισώσεων Einstein-Maxwell της βαρύτητας και του ηλεκτρομαγνητισμού στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας, καθορίζεται πλήρως από τρεις παραμέτρους οι οποίες και μπορούν να υπολογιστούν από παρατηρήτες στο εξωτερικό της οπής. Οι τρεις αυτοί παράμετροι είναι η μάζα  $M$ , το φορτίο  $Q$  και η στροφορμή  $J$  της μελανής οπής. Οποιαδήποτε άλλη πληροφορία για την μάζα η οποία δημιούργησε την οπή, ή για μάζα που περνάει τον ορίζοντα της οπής χάνεται για πάντα. Το θεώρημα αυτό αναπτύχθηκε την δεκαετία του 1970, και συνέβαλαν σε αυτό πολλοί φυσικοί, το όνομα όμως το πήρε από μία φράση του Wheeler [71] το 1971, ότι οι μελανές οπές 'δεν αφήνουν τρίχες', δηλαδή δεν υπάρχει καμία άλλη παράμετρος που να μπορεί να ανιχνευτεί από έναν παρατηρητή έξω από τον ορίζοντα εκτός από τις τρεις που αναφέραμε. Για παράδειγμα μία μελανή οπή φτιαγμένη από συνήθη ύλη θα προκαλεί ακριβώς την ίδια καμπύλωση στον χωρόχρονο με μία παρόμοια φτιαγμένη από αντιύλη. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι υπάρχουνε αντιπαράδειγματα, σε μοντέλα με επιπλέον διαστάσεις στα οποία το θεώρημα φαίνεται να μην ισχύει, και στα οποία υπάρχουν λύσεις μελανών οπών που χαρακτηρίζονται και από άλλους χβαντικούς αριθμούς, οι επονομαζόμενες 'τριχωτές' (hairy) μελανές οπές. Παρόλα αυτά, οι συγκεκριμένες λύσεις είναι κατά κανόνα ασταθείς ή οδηγούν σε μη διατηρούμενους χβαντικούς αριθμούς, πράγμα που σημαίνει ότι το θεώρημα "no-hair" ισχύει έστω και σε κάποια πιο γενικευμένη μορφή.



Πρέπει επίσης να πούμε ότι η απώλεια οποιασδήποτε πληροφορίας σχετικά με τη ύλη που πέφτει μέσα στην μελανή οπή που περιγράψαμε παραπάνω, εκτός από την μάζα, το φορτίο και τη στροφορμή, αποτελεί ένα ανοιχτό πρόβλημα για την φυσική, το λεγόμενο παράδοξο της απώλειας της πληροφορίας (information loss paradox). Έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες κατά καιρούς να βρεθεί μία ικανοποιητική απάντηση στο που βρίσκεται η χαμένη πληροφορία, παρόλα αυτά το ζήτημα ακόμα παραμένει ανοιχτό.

Έτσι λοιπόν, η πρώτη φάση στην ζωή μίας μελανής οπής που θα δημιουργηθεί στους επιταχυντές, θα είναι η φάση στην οποία αυτή θα χάσει όλες τις 'ρίγες'. Μέσα κυρίως από βαρυτική ακτινοβολία η σχηματιζόμενη μελανή οπή θα χάσει οποιαδήποτε ασυμμετρία που κληρονόμησε από τα σωματίδια, και οποιονδήποτε κβαντικό αριθμό εκτός από τις τρεις παραμέτρους που θα την χαρακτηρίζουν πλήρως. Στο τέλος αυτής της φάσης, στην θέση των αρχικών σωματιδίων που συγκρούονται, θα έχουμε πλέον μία μίνι μελανή οπή.

- Η φάση της απώλειας του σπιν

Τα συγκρουόμενα σωματίδια θα έχουν κατά κανόνα μία μη μηδενική παράμετρο κρούσης. Αυτό έχει ως συνέπεια η μελανή οπή που θα παραχθεί να έχει μία μη μηδενική στροφορμή σε έναν άξονα πάνω στην Μembrάνη, καθώς τα σωματίδια κινούνται πάνω σε αυτό. Πιο συγκεκριμένα, ο άξονας περιστροφής θα είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης των δύο σωματιδίων. Έτσι λοιπόν η μελανή οπή που παράγεται, αρχικά δεν είναι τύπου Schwarzschild, αλλά τύπου Kerr. Η μελανή οπή αυτή, θα αρχίσει να χάνει μάζα και στροφορμή μέσω του φαινομένου της ακτινοβολίας Hawking, μέχρις ότου χάσει πλήρως την στροφορμή της και περάσουμε στην επόμενη φάση, αυτήν της σφαιρικά συμμετρικής μελανής οπής.

Ένα άλλο φαινόμενο που παίζει ρόλο σε αυτήν την φάση είναι και το φαινόμενο της υπερακτινοβολήσης (superradiance). Αυτό το φαινόμενο συνίσταται στην ενίσχυση ενός εισερχομένου κύματος σε μία περιστρεφόμενη μελανή οπή και θα μας απασχολήσει στα επόμενα κεφάλαια.

- Η φάση Schwarzschild

Στην φάση αυτή η μελανή οπή έχει χάσει όλη την στροφορμή της και είναι πλέον σφαιρικά συμμετρική. Συνεχίζει δε να εκπέμπει ενέργεια μέσω της ακτινοβολίας Hawking. Αποτέλεσμα είναι με την πάροδο του χρόνου να μειώνεται η μάζα της, να θερμαίνεται και, άρα, να ακτινοβολεί όλο και πιο έντονα. Η φάση αυτή τελειώνει με την μάζα της μελανής οπής να προσεγγίζει την μάζα του Planck.

- Η φάση Planck



Σε αυτήν την φάση η μάζα της μελανής οπής έχει πλησιάσει την μάζα του Planck  $M_p$ . Πολύ λίγα πράγματα μπορούμε να πούμε για αυτήν την φάση. Τα κβαντικά φαινόμενα της βαρύτητας γίνονται πλέον σημαντικά και η θεωρία της κβαντικής βαρύτητας -η οποία προς το παρόν δεν υπάρχει- απαιτείται για τη περιγραφή αυτής της μελανής οπής. Να αναφέρουμε απλά ότι σύμφωνα με μερικούς επιστήμονες η μελανή οπή δεν θα εξαϋλωθεί πλήρως, αλλά θα μείνει ένα 'κβαντικό απομεινάρι', (quantum relic) με ένα ποσοστό της αρχικής της μάζας. Πολλοί ερευνητές προσπαθούν να συνδέσουν τα απομεινάρια αυτά με το πρόβλημα της απώλειας της πληροφορίας, ότι δηλαδή η πληροφορία της μάζας που πέρασε τον ορίζοντα της μελανής οπής δεν έχει χαθεί για πάντα αλλά παραμένει αποθηκευμένη στο απομεινάρι αυτό. Άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι τέτοια κβαντικά απομεινάρια από πρωτογενείς μίνι μελανές οπές (που δημιουργήθηκαν πιθανώς κατά το Big Bang), αποτελούν σοβαρούς υποψήφιους για την λύση του προβλήματος της σκοτεινής ύλης στην σύγχρονη κοσμολογία. Παρόλα αυτά τίποτα από τα δύο δεν έχει αποδειχτεί ακόμα.

Μία ερώτηση που γεννάται αμέσως είναι τι ποσοστό της αρχικής ενέργειας των δύο συγχρονόμενων σωματιδίων αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις φάσεις αυτές. Όπως είδαμε, κατά την φάση 'balding' χάνεται τουλάχιστον το 16% της αρχικής ενέργειας, ένα ποσοστό που μπορεί να φτάσει και μέχρι το 35%. Εκτιμήσεις που έγιναν για την περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων [49, 50, 70] δώσανε 25% για την φάση απώλειας σπιν, και 60% για την φάση Schwarzschild, Όμως οι η ύπαρξη περισσότερων χωρικών διαστάσεων είναι δεδομένο να αλλάξει αυτά τα ποσοστά. Έτσι για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων καθίσταται αναγκαία μία λεπτομερής μελέτη της εκπομπής ακτινοβολίας Hawking κατά την διάρκεια και των δύο αυτών φάσεων, για όλα τα είδη της εκπομπής (στον Υπερχώρο ή στην Μεμβράνη) και για όλα τα πιθανά σωματίδια που μπορεί να εκπεμφθούν.

Στο επόμενο Υποκεφάλαιο λοιπόν θα γράψουμε την μετρική μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής παρουσία  $n$  επιπλέον διαστάσεων, καθώς και την εξίσωση κίνησης για όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου (βαθμωτά πεδία, φερμιόνια, μποζόνια βαθμίδας) που διαδίδονται στο βαρυτικό υπόβαθρο που αυτή δημιουργεί.

#### 2.6.4 Πολυδιάστατες Περιστρεφόμενες Οπές και Εξισώσεις Κίνησης των Πεδίων

Η λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό, που περιγράφουν μία περιστρεφόμενη μελανή οπή, παρουσία  $n$  επιπλέον χωρικών διαστάσεων βρέθηκε από τους



Myers και Perry, και δίνεται στο ακόλουθο στοιχείο μήκους [53]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{\Sigma r^{n-1}}\right) dt^2 + \frac{2a\mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 \mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2, \quad (2.78)$$

όπου

$$\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{n-1}}, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.79)$$

και  $d\Omega_n^2$  το στοιχείο μήκους πάνω σε μία μοναδιαία σφαίρα  $n$  διαστάσεων, προκύπτει από την σχέση (2.56). Η περιστροφή της μελανής οπής γίνεται σε άξονα κάθετο στο επίπεδο  $r\varphi$ , ενώ η μάζα και η στροφορμή της δίνονται από τους τύπους

$$M_{BH} = \frac{(n+2)A_{n+2}}{16\pi G} \mu, \quad J = \frac{2}{n+2} M_{BH} a, \quad (2.80)$$

όπου  $G$  να είναι η σταθερά του Νεύτωνα στις  $(n+4)$  διαστάσεις, και  $A_{n+2}$  η επιφάνεια μιας σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας,  $(n+2)$  διαστάσεων, που ισούται με

$$A_{n+2} = \frac{2\pi^{(n+3)/2}}{\Gamma[(n+3)/2]}. \quad (2.81)$$

Η μετρική αυτή, περιγράφει την μελανή οπή στο δεύτερο στάδιο της ζωής της, στην φάση που περιστρέφεται ακτινοβολώντας ενέργεια και στροφορμή. Από την μετρική της σχέσης (2.78), παίρνοντας το όριο  $a \rightarrow 0$  μπορούμε να ανακτήσουμε την μετρική της σχέσης (2.55) που περιγράφει μία πολυδιάστατη μελανή οπή τύπου Schwarzschild. Έτσι λοιπόν οι σχέσεις που θα γράψουμε από εδώ και περα σε αυτό το Υποκεφάλαιο και οι οποίες αναφέρονται στην φάση απώλειας σπιν της μελανής οπής, εύκολα μετατρέπονται στις αντίστοιχες για την φάση Schwarzschild, απλά μηδενίζοντας την παράμετρο περιστροφής.

Με βάση λοιπόν αυτήν την μετρική, μπορούν να υπολογιστούν οι διάφοροι ρυθμοί εκπομπής ακτινοβολίας Hawking για την πολυδιάστατη μελανή οπή, για τα διάφορα είδη πεδίων, με τον τρόπο που περιγράψαμε και στα προηγούμενα Υποκεφάλαια: γράφουμε την εξίσωση κίνησης για κάθε είδος πεδίου, η οποία και περιγράφει το πώς διαδίδεται το πεδίο αυτό παρουσία της μελανής οπής. Στην συνέχεια οι εξισώσεις αυτές θα πρέπει να λυθούν αναλυτικά ή αν αυτό δεν είναι δυνατόν, αριθμητικά, και από τις λύσεις να υπολογιστεί η πιθανότητα απορρόφησης από την μελανή οπή, μία ποσότητα που όπως είδαμε συνδέεται με το graybody factor, και τελικά με τους διάφορους τύπους για την εκπομπή ακτινοβολίας Hawking με τη μορφή του συγκεκριμένου πεδίου.



Πολύ βολικό είναι το γεγονός ότι, όπως θα δούμε, αν γράψει κανείς τις εξισώσεις κίνησης για βαθμωτά, φερμιόνια και μποζόνια βαθμίδας, μπορεί να τις φέρει σε μία εννιαία μορφή και για τους τρεις τύπους πεδίου. Για να γίνει αυτό χρειάζεται η χρήση του λεγόμενου Newman-Penrose φορμαλισμού [33, 72], με την βοήθεια του οποίου μπορεί κάποιος να περιγράψει σωματίδια με σπιν στα πλαίσια της θεωρίας της βαρύτητας. Η μελέτη αυτή έγινε αρχικά για τις τέσσερις διαστάσεις από τον Teukolsky [73, 74] και γενικεύτηκε και για ανθαίρετο αριθμό διαστάσεων [75].

Οι εξισώσεις κίνησης που πρέπει να επιλύσουμε είναι η εξίσωση Klein-Gordon για την περίπτωση των βαθμωτών πεδίων, ( $s = 0$ ), η εξίσωση Dirac για την περίπτωση των φερμιονίων, ( $s = 1/2$ ), και οι εξισώσεις Yang-Mills για την περίπτωση των μποζονίων βαθμίδας, ( $s = 1$ ). Και για τις τρεις αυτές περιπτώσεις, θα δώσουμε τις εκφράσεις για την περίπτωση μηδενικής μάζας του εκπεμπόμενου σωματιδίου.

Επίσης πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη παραγοντοποίηση για τα πεδία, ώστε να χωριστεί το ακτινικό από το γωνιακό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης:

$$\Psi_s(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} e^{im\phi} R_s(r) S_{s,j}^m(\theta), \quad (2.82)$$

όπου  $S_{s,j}^m(\theta)$  είναι οι λεγόμενες ταξινομημένες κατά σπιν σφαιροειδείς αρμονικές συναρτήσεις [76], ενώ για  $a\omega = 0$  παίρνουν την μορφή των ταξινομημένων κατά σπιν σφαιρικών αρμονικών [77]. Οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν γενίκευση των γνωστών σφαιρικών αρμονικών, για σωματίδια με σπιν.

Η ενιαία εξίσωση που προκύπτει για το ακτινικό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης, και για τα τρία είδη σωματιδίων, είναι τότε [54]

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{s+1} \frac{dR_s}{dr} \right) + \left[ \frac{K^2 - isK\Delta'}{\Delta} + 4is\omega r + s(\Delta'' - 2)\delta_{s,|s|} - \Lambda_{sj} \right] R_s = 0, \quad (2.83)$$

όπου οι ποσότητες που εμφανίζονται δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am, \quad \Lambda_{sj} = \lambda_{sj} + a^2\omega^2 - 2am\omega. \quad (2.84)$$

Σε αυτήν την έκφραση, το  $\lambda_{sj}$  είναι η γωνιακή ιδιοτιμή, μία ποσότητα που εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση που ικανοποιούν οι συναρτήσεις  $S_{s,j}^m(\theta)$  και αποτελεί έναν σύνδεσμο ανάμεσα στο ακτινικό και το γωνιακό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης. Η εξίσωση που ικανοποιούν οι  $S_{s,j}^m(\theta)$  είναι

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dS_{s,j}^m}{d\theta} \right) + (a^2\omega^2 \cos^2\theta - 2a\omega s \cos\theta - \frac{(m + s \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \lambda_{sj} + s) S_{s,j}^m = 0. \quad (2.85)$$



Το  $\lambda_{sj}$  δεν μπορεί να γραφτεί σε μία κλειστή μορφή, μπορεί όμως να γραφτεί αναλυτικά σαν άθροισμα άπειρων όρων

$$\lambda_{sj} = -s(s+1) + \sum_k f_k^{jms} (a\omega)^k = j(j+1) - s(s+1) - \frac{2\pi s^2}{j(j+1)} a\omega + \dots \quad (2.86)$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις λοιπόν, καθορίζουν πλήρως την διάδοση σωματιδίων του Καθιερωμένου Μοντέλου πάνω στην Μembrάνη, γύρω από μία περιστρεφόμενη μελανή οπή. Στην εργασία της αναφοράς [54] υπάρχει μία πολύ καλή σύνοψη των αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας για την φάση Schwarzschild, τόσο των αναλυτικών, όσο και των αριθμητικών.

Εκτός όμως από την εκπομπή πάνω στην Μembrάνη, υπάρχει και εκπομπή ακτινοβολίας στον Υπερχώρο, με την μορφή βαρυτονίων, ή και βαθμωτών πεδίων. Για να καθοριστεί λοιπόν το ποιο είδος εκπομπής θα είναι το επικρατέστερο και για να μπορέσουν να εξαχθούν ακριβείς προβλέψεις για το τι θα δούμε στους μελλοντικούς ανιχνευτές στην περίπτωση που δημιουργήσουμε τελικά μελανές οπές, χρειάζεται να υπάρξει μία ολοκληρωμένη μελέτη της ακτινοβολίας Hawking για όλες τις περιπτώσεις εκπομπής.

Για την φάση απώλειας σπιν, οι μελέτες μέχρι πρόσφατα ήταν πολύ λιγότερες, καθώς η ανάλυση είναι αρκετά πιο δύσκολη από ότι στην σφαιρικά συμμετρική περίπτωση. Στο πλαίσιο αυτό κινείται εν μέρει και το ερευνητικό έργο που θα παρουσιάσουμε στα επόμενα Κεφάλαια. Ασχοληθήκαμε με ανοιχτά θέματα πάνω στην μελέτη της εξάτμισης των μελανών οπών, ξεκινώντας αρχικά από την περίπτωση της εκπομπής βαρυτονίων από σφαιρικά συμμετρικές μελανές οπές. Στην συνέχεια μελετήσαμε εκπομπή σωματιδίων από περιστρεφόμενες οπές, τόσο στην Μembrάνη όσο και στον Υπερχώρο, με την μορφή σωματιδίων του Καθιερωμένου Μοντέλου, προσπαθώντας να καλύψουμε το κενό που υπήρχε στην βιβλιογραφία στο συγκεκριμένο θέμα.



## Κεφάλαιο 3

# Εκπομπή βαρυτονίων από σφαιρικά συμμετρικές μελανές οπές

### 3.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην Εισαγωγή, μοντέλα που έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας τα τελευταία χρόνια [4, 5, 10, 11], προβλέπουν την ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων στο σύμπαν, πέρα από τις συνήθεις τρεις. Η ύπαρξη αυτών των επιπλέον διαστάσεων, όπως δείξαμε, ανοίγει την πιθανότητα παραγωγής μελανών οπών σε πειράματα σύγκρουσης υποατομικών σωματιδίων ή και σε συγκρούσεις ενεργειακών νετρίνων της κοσμικής ακτινοβολίας με σωματίδια της ατμόσφαιρας.

Το ενδεχόμενο αυτό ώθησε έναν μεγάλο αριθμό επιστημόνων να ασχοληθούν με την μελέτη των πολυδιάστατων μελανών οπών, και πιο συγκεκριμένα με την μελέτη της ακτινοβολίας Hawking που αυτές θα εκπέμπουν. Όπως εξάλλου θα δούμε και στο Κεφάλαιο αυτό, ο αριθμός  $n$  των επιπλέον χωρικών διαστάσεων θα αφήσει ξεκάθαρο αποτύπωμα στο ενεργειακό φάσμα της εκπομπής. Αν λοιπόν δημιουργηθεί μελανή οπή σε ένα από τα μελλοντικά πειράματα επιταχυντών, είναι σημαντικό να μπορέσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την φύση του χωροχρόνου, μελετώντας αυτό το φάσμα.

Οι πρώτες προσπάθειες σε αυτήν την κατεύθυνση έγιναν στην μελέτη της εκπομπής σωματιδίων του Καθιερωμένου Μοντέλου στην Μεμβράνη, τόσο με αναλυτικό τρόπο για τις χαμηλές ενέργειες, όσο και με αριθμητικό για όλο το εύρος των ενεργειών του εκπεμπόμενου σωματιδίου, για την φάση Schwarzschild της ζωής της μελανής οπής, ενώ ακολούθησαν λίγο αργότερα οι πρώτες μελέτες για την φάση απώλειας σπιν. Ο λόγος προφανώς είναι ότι η φάση Schwarzschild είναι ευκολότερο να μελετηθεί, καθώς όπως θα δού-



με και στα επόμενα Κεφάλαια, η ύπαρξη τροχιακής στροφορμής της μελανής οπής κατά την φάση απώλειας σπιν περιπλέκει αρκετά την ανάλυση. Στην εργασία της αναφοράς [54] υπάρχει μία περίληψη των αποτελεσμάτων, ενώ περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να βρει κάποιος στις εργασίες των αναφορών [61, 63, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85].

Ακόμα πιο δύσκολη ήταν η κατάσταση για την μελέτη της εκπομπής βαρυτονίων από την οπή. Ενώ για την περίπτωση της εκπομπής σωματιδίων του Καθιερωμένου Μοντέλου οι εξισώσεις κίνησης έχουν να κάνουν με πεδία που διαδίδονται σε ένα σταθερό βαρυτικό υπόβαθρο, στην περίπτωση των βαρυτονίων πρέπει να μελετήσουμε αλλαγές στην ίδια την μετρική. Οι εξισώσεις λοιπόν αυτές προκύπτουν από την διαταραχή της  $(4 + n)$ -διάστατης μετρικής του χώρου. Η ακριβής ανάλυση έγινε από τους Ishibashi και Kodama, οι οποίοι στις εργασίες των αναφορών [86, 87, 88], παρουσίασαν έναν -αρκετά περίπλοκο- φορμαλισμό για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Στις τέσσερις διαστάσεις προκύπτουν δύο ανεξάρτητες εξισώσεις που περιγράφουν τις διαταραχές της μετρικής, η εξίσωση Regge - Wheeler [89] που περιγράφει διαταραχή της μετρικής μέσω μικρής περιστροφής της μελανής οπής, και η εξίσωση Zerilli [90] που δεν περιλαμβάνει περιστροφή, ήδη γνωστές από το 1957 και το 1970 αντίστοιχα. Στην περίπτωση των περισσοτέρων από τέσσερις διαστάσεις όμως, οι Ishibashi και Kodama έδειξαν ότι οι ανεξάρτητες εξισώσεις που περιγράφουν τις βαρυτικές διαταραχές είναι τρεις. Τα αντίστοιχα είδη των διαταραχών ονομάζονται βαθμωτά, διανυσματικά, και τανυστικά.

Με βάση λοιπόν την ανάλυση αυτή, στην εργασία [91] μελετήσαμε την εκπομπή Hawking από μία σφαιρικά συμμετρική, αφόρτιστη μελανή οπή, με την μορφή βαρυτονίων στον Υπερχώρο, και τα αποτελέσματά της θα παρουσιάσουμε στο παρόν Κεφάλαιο. Χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις που περιγράφουν βαρυτικές διαταραχές από μία αφόρτιστη, σφαιρικά συμμετρική οπή, για να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης των βαρυτονίων από την οπή, μία ποσότητα που όπως είδαμε καθορίζει τους διάφορους ρυθμούς της εκπομπής.

Το Κεφάλαιο αυτό έχει την εξής δομή: στο Υποκεφάλαιο 3.2 θα γράψουμε την μετρική που περιγράφει μια μελανή οπή χωρίς φορτίο και στροφορμή, η οποία ζει σε ένα χώρο με επιπλέον των τεσσάρων χωρικές διαστάσεις. Επίσης θα δώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την διάδοση βαρυτονίων στον παραπάνω χώρο. Στην συνέχεια, στο Υποκεφάλαιο 3.3 θα επιλύσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις κίνησης και για τα τρία είδη βαρυτονίων, χρησιμοποιώντας μία μέθοδο που έχει χρησιμοποιηθεί συχνά στο παρελθόν για προβλήματα που σχετίζονται με υπολογισμό ακτινοβολίας Hawking, και συνίσταται στην επίλυση των εξισώσεων κίνησης πρώτα κοντά στον ορίζοντα, μετά μακριά από αυτόν, και κατόπιν στην ομαλή σύνδεση των δύο λύσεων στην ενδιάμεση περιοχή. Στο επόμενο Υποκεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε τα αναλυτικά αυτά αποτελέσματα για τον υπολογισμό της πιθανότητας απορρόφησης, που όπως





είπαμε καθορίζει τον ρυθμό εκπομπής ενέργειας μέσω ακτινοβολίας Hawking από την μελανή οπή, και επίσης θα παράγουμε μία απλοποιημένη έκφραση για αυτήν. Η πιθανότητα απορρόφησης θα παρασταθεί γραφικά για διάφορες τιμές των παραμέτρων και για τα τρία είδη των διαταραχών. Εν συνεχεία θα ασχοληθούμε με τον ρυθμό εκπομπής ενέργειας από την μελανή οπή με την μορφή βαρυτονίων, αφού πρώτα αντιμετωπίσουμε το θέμα της πολλαπλότητας των καταστάσεων. Τέλος θα δώσουμε γραφικές παραστάσεις του ρυθμού εκπομπής για διάφορες τιμές του αριθμού  $n$  των επιπλέον διαστάσεων, και θα κάνουμε και την σύγκριση μεταξύ της εκπομπής βαρυτονίων και της εκπομπής βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο.

### 3.2 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Είδαμε στην Εισαγωγή ότι, σύμφωνα με το σενάριο των μεγάλων επιπλέον διαστάσεων (Large Extra Dimensions Scenario) [10, 11], το σύμπαν στο οποίο ζούμε είναι φτιαγμένο από τις συνήθεις  $3+1$  διαστάσεις, ενώ υπάρχουν επιπλέον  $n$  τον αριθμό, συμπαγείς, χωροειδείς διαστάσεις. Ο χωρόχρονος γύρω από μία σφαιρικά συμμετρική, αφόρτιστη μελανή οπή, σχηματισμένη σε έναν τέτοιο  $(4+n)$ -διάστατο χώρο δίνεται εξάλλου από το στοιχείο μήκους της σχέσης (2.55), [53, 92], το οποίο για ευκολία ξαναγράφουμε και εδώ:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{2+n}^2, \quad (3.1)$$

όπου η συνάρτηση  $f(r)$  δίνεται από τον τύπο

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n+1}, \quad (3.2)$$

με  $r_H$  τον ορίζοντα γεγονότων της οπής και  $d\Omega_{2+n}^2$  το στοιχείο μήκους μιας  $(2+n)$ -διάστατης σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας. Η ανωτέρω μελανή οπή θα χαρακτηρίζεται από μια μη-μηδενική θερμοκρασία που θα δίνεται από την σχέση

$$T_H = \frac{(n+1)}{4\pi r_H} \quad (3.3)$$

και άρα θα εκπέμπει ακτινοβολία Hawking με ρυθμό εκπομπής ενέργειας που μοιάζει με αυτόν ενός μέλανος σώματος. Όπως είδαμε στην Εισαγωγή, το ισχυρό βαρυτικό πεδίο γύρω από την μελανή οπή θα μεταβάλλει το εκπεμπόμενο φάσμα εκπομπής μέσω της ποσότητας  $|A|^2$ , της πιθανότητας απορρόφησης, η οποία εξαρτάται από την ενέργεια  $\omega$  και το σπιν  $s$  του εκπεμπόμενου σωματιδίου, καθώς επίσης και από τον ακριβή αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων που υπάρχουν στο σύμπαν. Η πιθανότητα απορρόφησης μπορεί να υπολογιστεί,



όπως είδαμε, λύνοντας αναλυτικά την εξίσωση κίνησης για ένα συγκεκριμένο πεδίο που διαδίδεται στο βαρυτικό πεδίο που παράγει η μελανή οπή. Όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή του παρόντος Κεφαλαίου, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση της εκπομπής βαρυτονίων στον Υπερχώρο από μια  $(4+n)$ -διάστατη, τύπου Schwarzschild μελανή οπή.

Για την μελέτη βαρυτονίων που διαδίδονται σε ένα χώρο  $D$  διαστάσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της αναφοράς [87]. Στην εν λόγω εργασία οι συγγραφείς έδειξαν ότι ένα βαρυτόνιο που ζει σε χώρους περισσότερων των τεσσάρων διαστάσεων, μπορεί να αναλυθεί σε ένα συμμετρικό τανυστή μηδενικού ίχνους, καθώς και σε ένα διανυσματικό και ένα βαθμωτό κομμάτι. Αυτά μπορούν επιπλέον να αναπτυχθούν με την χρήση των ταξινομημένων κατά σπιν σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων (spin weighted spherical harmonics), συναρτήσεων που αποτελούν γενίκευση των γνωστών σφαιρικών αρμονικών για πεδία με σπιν. Το ακτινικό κομμάτι και των τριών ειδών των βαρυτικών διαταραχών μπορεί να γραφτεί στη μορφή μιας ενιαίας κυματικής εξίσωσης [87]

$$f \frac{d}{dr} \left( f \frac{d\Phi}{dr} \right) + (\omega^2 - V) \Phi = 0, \quad (3.4)$$

όπου το δυναμικό  $V$  έχει διαφορετική μορφή για το κάθε είδος της διαταραχής. Πιο συγκεκριμένα:

$$V_{T,V} = \frac{f(r)}{r^2} \left[ l(l+n+1) + \frac{n(n+2)}{4} - \frac{k(n+2)^2}{4} \left( \frac{r_H}{r} \right)^{n+1} \right], \quad (3.5)$$

όπου  $k = -1$  και  $k = 3$  για τις τανυστικές (T) και διανυσματικές (V) διαταραχές αντίστοιχα, και  $l$  ο αζιμουδιακός κβαντικός αριθμός.

Για τις διαταραχές βαθμωτού τύπου (S) το δυναμικό είναι αρκετά πιο πολύπλοκο, και δίνεται από τον εξής τύπο:

$$V_S = \frac{f(r)}{r^2} \frac{qx^3 + px^2 + wx + z}{4[2m + (n+2)(n+3)x]^2}, \quad (3.6)$$

όπου οι διάφορες ποσότητες που εμφανίζονται δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$m \equiv l(l+n+1) - n - 2, \quad x \equiv \left( \frac{r_H}{r} \right)^{n+1} = 1 - f, \quad (3.7)$$

και

$$\begin{aligned} q &\equiv (n+2)^4(n+3)^2, & z &\equiv 16m^3 + 4m^2(n+2)(n+4), \\ p &\equiv (n+2)(n+3) [4m(2n^2 + 5n + 6) + n(n+2)(n+3)(n-2)] \\ w &\equiv -12m(n+2) [m(n-2) + n(n+2)(n+3)]. \end{aligned} \quad (3.8)$$



### 3.3 Λύνοντας τις Εξισώσεις Κίνησης

Σε αυτό το Υποκεφάλαιο θα λύσουμε την εξίσωση (3.4) του ακτινικού μέρους των διαταραχών για βαρυτικές διαταραχές και των τριών τύπων, κοντά σε μια αφόρτιστη, σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή  $(4 + n)$  διαστάσεων.

Δυστυχώς οι εξισώσεις κίνησης είναι υπερβολικά πολύπλοκες για να λυθούν αναλυτικά. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μία προσεγγιστική τεχνική η οποία είναι ευρέως διαδεδομένη [56, 57, 58, 59, 93] για την λύση εξισώσεων κίνησης πεδίων, παρουσία μελανών οπών.

Η τεχνική αυτή συνίσταται στην επίλυση της ακτινικής εξίσωσης σε δύο ασυμπτωτικές περιοχές: πολύ κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής ( $r \simeq r_H$ ) και πολύ μακριά από αυτόν ( $r \gg r_H$ ). Στην συνέχεια οι δύο λύσεις επεκτείνονται αναλυτικά και συνδέονται μεταξύ τους στην ενδιάμεση περιοχή, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο μια αναλυτική λύση για όλες τις τιμές του  $r$ , από την οποία και μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα απορρόφησης.

#### 3.3.1 Η Περιοχή Κοντά στον Ορίζοντα

Εδώ θα λύσουμε την ακτινική εξίσωση (3.4) στην πρώτη ασυμπτωτική περιοχή, κοντά στον ορίζοντα της μαύρης τρύπας και για τα τρία είδη βαρυτικών διαταραχών. Λόγω της παρόμοιας μορφής των δυναμικών, οι ταυυστικές και διανυσματικές διαταραχές θα αντιμετωπιστούν ταυτόχρονα, ενώ οι βαθμωτές ξεχωριστά.

##### A. Ταυυστικές και Διανυσματικές Διαταραχές

Ξεκινάμε κάνοντας μία αλλαγή στην μεταβλητή  $r \rightarrow f(r)$ , με την βοήθεια της οποίας, η εξίσωση κίνησης για τις ταυυστικές και διανυσματικές διαταραχές μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(1-f) \frac{d^2\Phi}{df^2} + \left[ 1 - \frac{(2n+3)}{(n+1)} f \right] \frac{d\Phi}{df} + \left[ \frac{(\omega r_H)^2}{(n+1)^2 f(1-f)} - \frac{A}{(1-f)} + \frac{k(n+2)^2}{4(n+1)^2} \right] \Phi = 0. \quad (3.9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση έχουμε όπως και πριν  $k = -1$  για ταυυστικές διαταραχές και  $k = 3$  για διανυσματικές. Επίσης, για ευκολία, έχουμε εισάγει την ποσότητα

$$A \equiv \frac{l(l+n+1)}{(n+1)^2} + \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2}. \quad (3.10)$$

Για να μπορέσουμε να επιλύσουμε την παραπάνω εξίσωση (3.9), θα πρέπει να την φέρουμε στη μορφή μιας γνωστής διαφορικής εξίσωσης. Ο τρόπος να



το πετύχουμε αυτό είναι να θέσουμε  $\Phi(f) = f^\alpha(1-f)^\beta F(f)$ . Αυτό φέρνει την εξίσωση μας στη μορφή της, γνωστής από τα μαθηματικά, υπεργεωμετρικής διαφορικής εξίσωσης

$$f(1-f) \frac{d^2 F}{df^2} + [c - (1+a+b)f] \frac{dF}{df} - abF = 0, \quad (3.11)$$

αν ορίσουμε κατάλληλα τις σταθερές που εμφανίζονται:

$$a = \alpha + \beta + \frac{(n+2)}{2(n+1)} + G, \quad b = \alpha + \beta + \frac{(n+2)}{2(n+1)} - G, \quad (3.12)$$

$$c = 1 + 2\alpha \quad (3.13)$$

όπου  $G$  είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Απαιτώντας επιπλέον ο παράγοντας που πολλαπλασιάζει την  $F(f)$  να ισούται με  $-ab$  δίνει τρεις ακόμα εξισώσεις που καθορίζουν τις υπόλοιπες σταθερές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $G$ . Οι τιμές τους τότε είναι

$$G^{(T,V)} = \frac{(1+k)(n+2)}{4(n+1)}, \quad \alpha_{\pm} = \pm \frac{i\omega r_H}{n+1}, \quad (3.14)$$

και

$$\beta = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ -1 \pm \sqrt{(2l+n+1)^2 - 4\omega^2 r_H^2} \right\}. \quad (3.15)$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε φέρει την διαφορική εξίσωση (3.9) στην μορφή μιας υπεργεωμετρικής εξίσωσης (3.11) με σταθερές  $(a, b, c)$  που έχουν καθοριστεί πλήρως από τις παραμέτρους του προβλήματός μας. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε τις λύσεις της με την βοήθεια της υπεργεωμετρικής συνάρτησης  $F(a, b, c; f)$ , ως εξής:

$$\begin{aligned} \Phi_{NH}(f) = & A_1 f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f) \\ & + A_2 f^{-\alpha} (1-f)^\beta F(a-c+1, b-c+1, 2-c; f) \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου  $A_{1,2}$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Σε αυτό το σημείο, όμως, πρέπει να λάβουμε υπόψη την συνοριακή συνθήκη που υπακούει η γενική μας λύση: ακριβώς έξω από τον ορίζοντα της οπής δεν θα πρέπει να υπάρχουν εξερχόμενα κύματα, καθώς τίποτα δεν μπορεί να αποδράσει από τον ορίζοντα γεγονότων. Για να διασφαλίσουμε λοιπόν ότι η λύση μας αποτελείται από καθαρά εισερχόμενα κύματα πάνω στον ορίζοντα, παίρνουμε το όριο της για  $r \rightarrow r_H$ , ή ισοδύναμα  $f \rightarrow 0$ , και βρίσκουμε ότι

$$\Phi_{NH}(f) \simeq A_1 f^\alpha + A_2 f^{-\alpha} = A_1 e^{-i\omega v} + A_2 e^{i\omega v}, \quad (3.17)$$



όπου, στο τελευταίο κομμάτι της ανωτέρω εξίσωσης χρησιμοποιήσαμε την μεταβλητή  $y$ , η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$\frac{dy}{dr} = \frac{r_H^{n+2}}{f(r) r^{n+2}} \quad (3.18)$$

Έτσι, βλέπουμε ότι η ασυμπτωτική λύση κοντά στον ορίζοντα γράφεται συναρτήσει εισερχόμενων και εξερχόμενων κυμάτων, όπως εξάλλου θα περιμένα κανείς, μιας και το δυναμικό  $V$  για όλων των ειδών τις διαταραχές μηδενίζεται στο όριο  $r \rightarrow r_H$ . Αν λάβουμε, τώρα, υπόψη την συνοριακή συνθήκη που αναφέραμε πριν, είμαστε αναγκασμένοι να διώξουμε το εξερχόμενο κύμα, θέτοντας  $A_2 = 0$ . Κάνοντας αυτό, η λύση κοντά στον ορίζοντα παίρνει την τελική της μορφή

$$\Phi_{NH}(f) = A_1 f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f) \quad (3.19)$$

Η μόνη ανοιχτή εκκρεμότητα είναι να προσδιορίσουμε τα πρόσημα στις εκφράσεις των  $\alpha$  και  $\beta$ . Όπως μπορεί κάποιος να δει από την εξίσωση (3.17), η εναλλαγή  $\alpha_+ \leftrightarrow \alpha_-$  ισοδυναμεί με την εναλλαγή των σταθερών της ολοκλήρωσης,  $A_1 \leftrightarrow A_2$ , και άρα το πρόσημο του  $\alpha$  μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Εδώ θα επιλέξουμε  $\alpha = \alpha_-$ . Από την άλλη, για την επιλογή του προσήμου του  $\beta$ , θα πρέπει να πάρουμε υπόψη την συνθήκη σύγκλισης της υπεργεωμετρικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα χρειάζεται να ικανοποιείται η

$$\text{Re}(c - a - b) = -\frac{1}{n+1} - 2\beta > 0 \quad (3.20)$$

για να συγκλίνει η  $F(a, b, c; f)$ . Η παραπάνω εξίσωση μας επιβάλλει ξεκάθαρα την επιλογή  $\beta = \beta_-$ .

### B. Βαθμωτές Διαταραχές

Όπως και στην περίπτωση των τανυστικών και διανυσματικών διαταραχών ξεκινάμε με την αλλαγή μεταβλητής  $r \rightarrow f(r)$ , η οποία φέρνει την εξίσωση κίνησης για την περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών στη μορφή

$$f(1-f) \frac{d^2\Phi}{df^2} + \left[ 1 - \frac{(2n+3)}{(n+1)} f \right] \frac{d\Phi}{df} + \left[ \frac{(\omega r_H)^2}{(n+1)^2 f(1-f)} - \frac{z}{16(n+1)^2 m^2 (1-f)} - C \right] \Phi = 0 \quad (3.21)$$

όπου έχουμε ορίσει την ποσότητα  $C$  μέσω της σχέσης

$$C \equiv \frac{q(1-f)^2 + \tilde{p}(1-f) + \tilde{w}}{4(n+1)^2 [2m + (n+2)(n+3)(1-f)]^2}, \quad (3.22)$$



και

$$\bar{p} = p - \frac{z(n+2)^2(n+3)^2}{4m^2}, \quad \bar{w} = w - \frac{z(n+2)(n+3)}{m}. \quad (3.23)$$

Οι ποσότητες  $p, q, w, z$  έχουν οριστεί στις σχέσεις (3.8). Σε αυτή τη μορφή, η εξίσωση (3.21) έχει πόλους στα σημεία  $f = 0$  και  $f = 1$  (ή, στο  $r = r_H$  και  $r = +\infty$ , αντίστοιχα), ενώ υπάρχει και ένας επιπλέον πόλος στο σημείο που ο παρονομαστής της ποσότητας  $C$  μηδενίζεται. Όμως ο πόλος αυτός είναι σε αρνητικά  $r$ , και το  $C$  παίρνει πεπερασμένες τιμές στα όρια που μας ενδιαφέρουν ( $r = 0, +\infty$ ). Έτσι, για να βρούμε την λύση κοντά στον ορίζοντα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο  $C$  με την σταθερή τιμή που αυτός αποκτάει αν πάρουμε το όριο  $r \rightarrow 0$ . Έχοντας διώξει με αυτόν τον τρόπο τον επιπλέον πόλο, και ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με την περίπτωση των ταυσιτικών και διανυσματικών διαταραχών, μπορούμε να φέρουμε ξανά την εξίσωση (3.21) στη μορφή της υπεργεωμετρικής εξίσωσης, με τις ποσότητες  $(a, b, c)$  να δίνονται από τις εξισώσεις (3.12, 3.13), και τους εκθέτες  $(\alpha, \beta)$  από τις εξισώσεις (3.14)-(3.15). Η μόνη διαφορά προκύπτει στην τιμή της σταθεράς  $G$ , η οποία, στην περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών παίρνει την τιμή

$$G^{(S)} = \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{(n+2)^2 - \frac{q + \bar{p} + \bar{w}}{[2m + (n+2)(n+3)]^2}}. \quad (3.24)$$

Εφαρμόζοντας την ίδια συνοριακή συνθήκη όπως και πριν, για τη μη ύπαρξη εξερχόμενων κυμάτων στον ορίζοντα, η γενική λύση για τις βαθμωτές διαταραχές δίνεται πάλι από την εξίσωση (3.19), με  $\beta = \beta_-$  και  $\alpha = \alpha_-$ , όπως και πριν.

### 3.3.2 Η Απομακρυσμένη από τον Ορίζοντα περιοχή

Τώρα στρέφουμε το ενδιαφέρον μας στην περιοχή μακριά από τον ορίζοντα της μελανής οπής. Στο όριο  $r \gg r_H$ , παίρνουμε  $f \rightarrow 1$  και η εξίσωση (3.4) του ακτινικού κομματιού της λύσης και για τους τρεις τύπους βαρυτικών διαταραχών (ταυσιτικών, διανυσματικών και βαθμωτών) παίρνει την απλουστευμένη μορφή

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left( \omega^2 - \frac{(n+1)^2 A}{r^2} \right) \Phi = 0, \quad (3.25)$$

όπου το  $A$  έχει οριστεί στην εξίσωση (3.10). Θέτοντας επιπλέον  $\Phi = \sqrt{r} R$ , η καινούργια ακτινική συνάρτηση  $R$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση Bessel:

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) R = 0, \quad (3.26)$$



όπου  $z = \omega r$  και  $\nu = l + (n+1)/2$ . Με αυτόν τον τρόπο, βρίσκουμε την γενική λύση της εξίσωσης (3.25), η οποία είναι η αναλυτική λύση στην απομακρυσμένη από τον ορίζοντα περιοχή:

$$\Phi_{FF}(r) = B_1 \sqrt{r} J_{l+(n+1)/2}(\omega r) + B_2 \sqrt{r} Y_{l+(n+1)/2}(\omega r), \quad (3.27)$$

όπου  $J_\nu$  και  $Y_\nu$  είναι οι συναρτήσεις Bessel του πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, και  $B_{1,2}$  είναι αυθαίρετες σταθερές.

### 3.3.3 Κατασκευάζοντας την Ενιαία Λύση

Έχοντας βρει την αναλυτική μορφή της λύσης στις δύο ασυμπτωτικές περιοχές, κοντά στον ορίζοντα και μακριά από αυτόν, μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατασκευή μιας αναλυτικής λύσης με ισχύ σε όλο το χώρο, ενώνοντας ομαλά τις δύο ασυμπτωτικές λύσεις σε ένα ενδιάμεσο σημείο. Για το σκοπό αυτό θα πάρουμε το όριο της λύσης κοντά στον ορίζοντα (3.19) για μεγάλες τιμές του  $r$ , και της λύσης μακριά από τον ορίζοντα (3.27) για μικρές τιμές του  $r$ . Στόχος είναι να φέρουμε τις δύο ασυμπτωτικές λύσεις σε μορφή παρόμοια στην ενδιάμεση περιοχή και στην συνέχεια να απαιτήσουμε οι δύο εκφράσεις να ταυτίζονται, ώστε τελικά να βρούμε σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες αυθαίρετες σταθερές που έχουν εμφανιστεί.

Ας ξεκινήσουμε από το πρώτο. Πριν πάρουμε το όριο της έκφρασης (3.19) για μεγάλα  $r$ , θα χρειαστεί να την γράψουμε σε μία εναλλακτική, ισοδύναμη μορφή, στην οποία θα έχουμε αλλάξει το όρισμα της υπεργεωμετρικής συνάρτησης από  $f$  σε  $1 - f$ . Για να το πετύχουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε ένα γνωστό τύπο των υπεργεωμετρικών συναρτήσεων [94]

$$F(a, b, c; f) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)} F(a, b, a + b - c + 1; 1 - f) \quad (3.28)$$

$$+ (1 - f)^{c - a - b} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} F(c - a, c - b, c - a - b + 1; 1 - f)$$

στην εξίσωση (3.19), και εν συνεχεία θα πάρουμε το όριο  $r \gg r_H$ , ή ισοδύναμα  $f \rightarrow 1$ . Παίρνοντας λοιπόν το όριο αυτό, βρίσκουμε ότι

$$\Phi_{NH}(r) \simeq A_1 \left(\frac{r_H}{r}\right)^{\beta(n+1)} \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)} + A_1 \left(\frac{r_H}{r}\right)^{-1 - \beta(n+1)} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}. \quad (3.29)$$

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην απομακρυσμένη από τον ορίζοντα λύση, την οποία και επεκτείνουμε αναλυτικά στο αντίθετο όριο,  $r \rightarrow 0$ .



Θα χρησιμοποιήσουμε γνωστές ταυτότητες των συναρτήσεων Bessel και πιο συγκεκριμένα [94]

$$J_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \Gamma(\nu + 1)^{-1} \quad (3.30)$$

$$Y_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad (3.31)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο ταυτότητες στην εξίσωση (3.27) παίρνουμε

$$\Phi_{FF}(r) \simeq B_1 \left(\frac{\omega}{2}\right)^{l+\frac{n+1}{2}} \frac{r^{l+\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(l+\frac{n+3}{2})} - \frac{B_2}{\pi} \left(\frac{2}{\omega}\right)^{l+\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma(l+\frac{n+1}{2})}{r^{l+\frac{n}{2}}}. \quad (3.32)$$

Παρόλο που φέραμε και τις δυο ασυμπτωτικές λύσεις σε μορφή δυνάμεων ως προς την ακτινική συντεταγμένη  $r$ , οι δυνάμεις δεν είναι ίδιες. Ένας τρόπος να απλοποιηθεί η διαδικασία ένωσης των δύο λύσεων, είναι να πάρουμε το όριο χαμηλής ενέργειας  $\omega r_H \ll 1$  στην έκφραση για το  $\beta$  (3.15). Σε πρώτη τάξης προσέγγιση, ο όρος  $\omega r_H$  μπορεί να αγνοηθεί και οι εκθέτες του  $r$  στις εκφράσεις (3.29) και (3.32) γίνονται ταυτόσημοι. Σε αυτήν την περίπτωση επιτυγχάνεται μια ομαλή σύνδεση των δύο ασυμπτωτικών εκφράσεων και μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ενιαία λύση αν απαιτήσουμε τις εξής σχέσεις ανάμεσα στις αυθαίρετες σταθερές της λύσης κοντά στον ορίζοντα, και της απομακρυσμένης από αυτόν λύσης.

$$\frac{B_1}{A_1} = \left(\frac{2}{\omega r_H}\right)^{l+\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma(l+\frac{n+3}{2}) \Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b) \sqrt{r_H}}, \quad (3.33)$$

$$\frac{B_2}{A_1} = -\pi \left(\frac{\omega r_H}{2}\right)^{l+\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(l+\frac{n+1}{2}) \Gamma(a) \Gamma(b) \sqrt{r_H}}. \quad (3.34)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ολοκληρώνουν την αναλυτική επίλυση της ακτινικής εξίσωσης και για τα τρία είδη βαρυτικών διαταραχών γύρω από μια  $(4+n)$ -διάστατη μελανή οπή Schwarzschild. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την λύση για τον υπολογισμό της πιθανότητας απορρόφησης.

### 3.4 Η Πιθανότητα Απορρόφησης

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας απορρόφησης θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τη συμπεριφορά της λύσης που κατασκευάσαμε σε άπειρη απόσταση από την μελανή οπή. Η έκφραση που βρήκαμε για την περιοχή μακριά από τον ορίζοντα (3.27) μπορεί, λοιπόν, να επεκταθεί στο όριο  $r \rightarrow \infty$ , όπου το







αναπτύξουμε επιπλέον στο όριο  $\omega r_H \ll 1$ . Ας ξαναγράψουμε τις παραμέτρους της υπεργεωμετρικής συνάρτησης

$$a = \alpha + \beta + G_1, \quad b = \alpha + \beta + G_2, \quad c = 1 + 2\alpha, \quad (3.40)$$

όπου

$$G_1 \equiv \frac{n+2}{2(n+1)} + G, \quad G_2 \equiv \frac{n+2}{2(n+1)} - G. \quad (3.41)$$

Καθώς το  $G$  παίρνει διαφορετική τιμή για τις βαθμωτές, διανυσματικές και ταυσοτικές βαρυτικές διαταραχές, το  $G_{1,2}$  θα εξαρτάται επίσης από τον τύπο της διαταραχής που εξετάζεται. Η εξίσωση (3.38) γράφεται στη μορφή

$$|A_l|^2 = \frac{2i(B^* - B)}{BB^* + i(B^* - B) + 1}, \quad (3.42)$$

Στο όριο των χαμηλών ενεργειών έχουμε  $BB^* \gg i(B^* - B) \gg 1$ , όπως εύκολα φαίνεται από την εξίσωση (3.39). Έτσι, κρατώντας μόνο τον κυρίαρχο όρο στον παρονομαστή της προηγούμενης έκφρασης (3.42), παίρνουμε

$$|A_l|^2 = K(\omega r_H, \beta) [Z(\alpha, \beta) - Z^*(\alpha, \beta)], \quad (3.43)$$

όπου

$$K(\omega r_H, \beta) \equiv - \left( \frac{\omega r_H}{2} \right)^{2l+n+1} \frac{2i\pi \left( l + \frac{n+1}{2} \right) \Gamma(-1 + 2\beta + G_1 + G_2)}{\Gamma \left( l + \frac{n+3}{2} \right)^2 \Gamma(1 - 2\beta - G_1 - G_2)} \quad (3.44)$$

και

$$Z(\alpha, \beta) \equiv \frac{\Gamma(1 + \alpha - \beta - G_1) \Gamma(1 + \alpha - \beta - G_2)}{\Gamma(\alpha + \beta + G_1) \Gamma(\alpha + \beta + G_2)}. \quad (3.45)$$

Ας συγκεντρώσουμε την προσοχή μας καταρχάς στην έκφραση για το  $K(\omega r_H, \beta)$ . Χρησιμοποιώντας την παρακάτω ταυτότητα που ικανοποιούν οι Γάμμα συναρτήσεις [94]

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = -x \Gamma(-x) \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad (3.46)$$

κρατώντας τον κυρίαρχο όρο  $\beta^{(0)}$  στην ανάλυση κατά Taylor του  $\beta$  (εξίσωση 3.15) στο όριο  $\omega r_H \ll 1$ ,

$$\beta^{(0)} \equiv - \frac{(2l + n + 2)}{2(n + 1)}, \quad (3.47)$$

και χρησιμοποιώντας την (3.41), βρίσκουμε ότι

$$K(\omega r_H, \beta) = \frac{i\pi^2 (n+1) \left( \frac{\omega r_H}{2} \right)^{2l+n+1}}{\Gamma \left( l + \frac{n+3}{2} \right)^2 \Gamma \left( 1 + \frac{2l}{n+1} \right)^2 \sin [\pi(2\beta^{(0)} + G_1 + G_2)]}. \quad (3.48)$$



Η μόνη μιγαδική ποσότητα που εμφανίζεται στην έκφραση του  $Z(\alpha, \beta)$  είναι το  $\alpha$ , το οποίο όμως είναι καθαρά φανταστικό (εξίσωση 3.14), και άρα  $Z^*(\alpha, \beta) = Z(-\alpha, \beta)$ . Χρησιμοποιώντας ξανά την (3.46), έχουμε

$$Z - Z^* = \frac{\pi^2}{|\Gamma(\alpha + \beta + G_1)|^2 |\Gamma(\alpha + \beta + G_2)|^2} \quad (3.49)$$

$$\times \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta + G_1)] \sin[\pi(\alpha + \beta + G_2)] - \sin[\pi(\alpha - \beta - G_1)] \sin[\pi(\alpha - \beta - G_2)]}{|\sin[\pi(\alpha + \beta + G_1)]|^2 |\sin[\pi(\alpha + \beta + G_2)]|^2}$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor, στο όριο  $\omega r_H \ll 1$ , ή ισοδύναμα  $\alpha \rightarrow 0$ , παίρνουμε

$$Z - Z^* = \frac{2\alpha}{\pi} \sin[\pi(2\beta^{(0)} + G_1 + G_2)] \Gamma(1 - \beta^{(0)} - G_1)^2 \Gamma(1 - \beta^{(0)} - G_2)^2. \quad (3.50)$$

Από τις εξισώσεις (3.48) και (3.50), αντικαθιστώντας στην (3.43), παίρνουμε την τελική έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης στην περιοχή των χαμηλών ενεργειών των εκπεμπόμενων βαρυτονίων:

$$|A_l|^2 = 4\pi \left(\frac{\omega r_H}{2}\right)^{2l+n+2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{l}{n+1} - G\right)^2 \Gamma\left(1 + \frac{l}{n+1} + G\right)^2}{\Gamma\left(l + \frac{n+3}{2}\right)^2 \Gamma\left(1 + \frac{2l}{n+1}\right)^2}. \quad (3.51)$$

Για την παραγωγή της παραπάνω έκφρασης χρησιμοποιήσαμε ξανά την προσέγγιση πρώτης τάξης (3.47) για το  $\beta$ , καθώς και τους ορισμούς (3.41) για να ανακτήσουμε την εξάρτηση από το  $G$ . Σύμφωνα με την εξίσωση (3.14), η τιμή αυτής της παραμέτρου είναι μηδέν για ταυστικού τύπου διαταραχές και  $\frac{n+2}{n+1}$  για διανυσματικές, ενώ για τις βαθμωτού τύπου δίνονται από την εξίσωση (3.24).

Για την περίπτωση των ταυστικών διαταραχών, μπορεί ναδειχθεί ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ταυτίζεται με την πιθανότητα απορρόφησης για ένα βαθμωτό πεδίο που διαδίδεται στον Υπερχώρο [63]. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αν κοιτάξει κανείς την κυματική εξίσωση που ικανοποιούν οι διαταραχές ταυστικού τύπου και την συγκρίνει με αυτήν ενός βαθμωτού πεδίου στον Υπερχώρο. Ξεκινώντας από την εξίσωση (3.4) και θέτοντας  $\Phi^{(T)}(r) = \sqrt{r^{n+2}} \Phi(r)$ , η νέα ακτινική συνάρτηση  $\Phi(r)$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{f(r)}{r^{n+2}} \frac{d}{dr} \left[ f(r) r^{n+2} \frac{d\Phi}{dr} \right] + \left[ \omega^2 - \frac{f(r)}{r^2} l(l+n+1) \right] \Phi(r) = 0, \quad (3.52)$$

η οποία ταυτίζεται με την εξίσωση που περιγράφει την διάδοση ενός βαθμωτού πεδίου παρουσία μια μελανής οπής (3.1) [63].



$n$	$l$	$ \mathcal{A}_l^{(T)} ^2$	$ \mathcal{A}_l^{(V)} ^2$	$ \mathcal{A}_l^{(S)} ^2$
$n = 2$	$l = 2$	$1.7 \cdot 10^{-4} (\omega\tau_H)^8$	$7.4 \cdot 10^{-3} (\omega\tau_H)^8$	$2.7 \cdot 10^{-3} (\omega\tau_H)^8$
	$l = 3$	$1.1 \cdot 10^{-6} (\omega\tau_H)^{10}$	$1.6 \cdot 10^{-5} (\omega\tau_H)^{10}$	$1.8 \cdot 10^{-5} (\omega\tau_H)^{10}$
	$l = 4$	$4.6 \cdot 10^{-9} (\omega\tau_H)^{12}$	$3.7 \cdot 10^{-8} (\omega\tau_H)^{12}$	$5.5 \cdot 10^{-8} (\omega\tau_H)^{12}$
$n = 4$	$l = 2$	$3.2 \cdot 10^{-6} (\omega\tau_H)^{10}$	$2.2 \cdot 10^{-4} (\omega\tau_H)^{10}$	$3.4 \cdot 10^{-5} (\omega\tau_H)^{10}$
	$l = 3$	$1.9 \cdot 10^{-8} (\omega\tau_H)^{12}$	$4.2 \cdot 10^{-7} (\omega\tau_H)^{12}$	$3.1 \cdot 10^{-7} (\omega\tau_H)^{12}$
	$l = 4$	$8.1 \cdot 10^{-11} (\omega\tau_H)^{14}$	$9.5 \cdot 10^{-10} (\omega\tau_H)^{14}$	$1.3 \cdot 10^{-9} (\omega\tau_H)^{14}$
$n = 6$	$l = 2$	$3.1 \cdot 10^{-8} (\omega\tau_H)^{12}$	$3.2 \cdot 10^{-6} (\omega\tau_H)^{12}$	$2.2 \cdot 10^{-7} (\omega\tau_H)^{12}$
	$l = 3$	$1.5 \cdot 10^{-10} (\omega\tau_H)^{14}$	$4.7 \cdot 10^{-9} (\omega\tau_H)^{14}$	$1.9 \cdot 10^{-9} (\omega\tau_H)^{14}$
	$l = 4$	$5.4 \cdot 10^{-13} (\omega\tau_H)^{16}$	$8.9 \cdot 10^{-12} (\omega\tau_H)^{16}$	$8.4 \cdot 10^{-12} (\omega\tau_H)^{16}$

Πίνακας 3.1: Εξάρτηση της πιθανότητας απορρόφησης για ταυσιτικές, διανυσματικές και βαθμωτές βαρυτικές διαταραχές στον Ίπερχώρο από τις παραμέτρους  $n$  και  $l$ , στις χαμηλές ενέργειες,  $\omega\tau_H \rightarrow 0$ , όπως προκύπτει από την απλοποιημένη έκφραση (3.51).

Από την εξίσωση (3.51), κάποιος μπορεί να δει ότι η πιθανότητα απορρόφησης εξαρτάται τόσο από τον χβαντικό αριθμό της στροφορμής  $l$  όσο και από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων  $n$  μέσω των ορισμάτων των συναρτήσεων Γάμμα, καθώς και μέσω του εκθέτη του  $\omega\tau_H$ . Αν οποιαδήποτε από τα  $l$  και  $n$  αυξηθεί, ο εκθέτης αυξάνει επίσης, πράγμα που για  $\omega\tau_H \ll 1$ , προκαλεί μείωση στην τιμή του  $|\mathcal{A}_l|^2$ . Καθώς η επίδραση των υπολοίπων παραγόντων δεν είναι εξίσου προφανής, στον Πίνακα 3.1 παραθέτουμε τις τιμές του  $|\mathcal{A}_l|^2$  και για τα τρία είδη των διαταραχών, όπως αυτές προκύπτουν από την απλοποιημένη έκφραση (3.51), για τις ενδεικτικές τιμές  $n = 2, 4, 6$  και  $l = 2, 3, 4$ . Από τον Πίνακα αυτόν προκύπτει ότι η τιμή της πιθανότητας απορρόφησης για όλων των ειδών τις διαταραχές μειώνεται σημαντικά καθώς αυξάνει είτε το  $l$  είτε το  $n$ .

Σαν τελικό σχόλιο, ας σημειώσουμε ότι για τις ίδιες τιμές του  $l$  και του  $n$ , η πιθανότητα  $|\mathcal{A}_l|^2$  παίρνει διαφορετικές τιμές για διαφορετικά είδη διαταραχών. Από τον Πίνακα 3.1, μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κάποιος ότι η  $|\mathcal{A}_l|^2$  για τις ταυσιτικές διαταραχές είναι τάξεις μεγέθους μικρότερη σε σχέση με αυτήν για τις διανυσματικές και τις βαθμωτές, ενώ το σχετικό μέγεθος των πιθανοτήτων απορρόφησης για τις δύο τελευταίες εξαρτάται από τις τιμές του  $l$  και του  $n$ . Το γεγονός ότι οι ταυσιτικού τύπου διαταραχές έχουν την ίδια πιθανότητα



$\omega\tau_H$	$ A_l^{(T)} ^2$ (απλοποιημένη έκφραση)	$ A_l^{(T)} ^2$ (ακριβής έκφραση)
0.001	$1.6997 \times 10^{-28}$	$1.6997 \times 10^{-28}$
0.01	$1.6997 \times 10^{-20}$	$1.6999 \times 10^{-20}$
0.1	$1.6697 \times 10^{-12}$	$1.7112 \times 10^{-12}$
0.3	$1.1152 \times 10^{-8}$	$1.1839 \times 10^{-8}$
0.5	$6.6396 \times 10^{-7}$	$7.8001 \times 10^{-7}$

Πίνακας 3.2: Απόκλιση μεταξύ των τιμών της πιθανότητας απορρόφησης στην όπωσ δίνονται από την απλοποιημένη έκφραση (3.51) σε σύγκριση με την ακριβή (3.38)-(3.39) για  $n = 2$ ,  $l = 2$  και διάφορες τιμές του  $\omega\tau_H < 1$ .

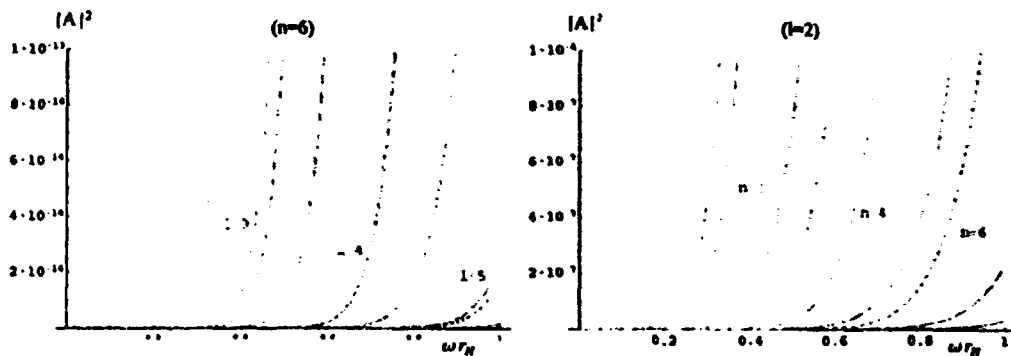
απορρόφησης με βαθμωτά πεδία που διαδίδονται στον Υπερχώρο, κάνει ενδιαφέρον το ερώτημα αν τα βαρυτόνια κυριαρχούν έναντι των βαθμωτών πεδίων, όσων αφορά την εκπομπή ακτινοβολίας Hawking στον Υπερχώρο.

### 3.4.2 Χρησιμοποιώντας το Αναλυτικό Αποτέλεσμα

Κατά την παραγωγή του αναλυτικού αποτελέσματος της πιθανότητας απορρόφησης για τις βαρυτικές διαταραχές στον Υπερχώρο -εξισώσεις (3.38), (3.39)- η χρήση της προσέγγισης χαμηλών ενεργειών έγινε μόνο μια φορά - κατά την διαδικαασία ένωσης των δύο ασυμπτωτικών λύσεων στην ενδιάμεση περιοχή. Παρόλα αυτά, αυτή είναι αρκετή για να περιορίσει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μας σε τιμές της παραμέτρου  $\omega\tau_H$  αρκετά κάτω από την μονάδα. Εξάλλου η απλοποιημένη έκφραση (3.51), ήταν το αποτέλεσμα ανάπτυξης σε σειρά των ορισμάτων των συναρτήσεων Γάμμα που εμφανίζονται στην εξίσωση (3.39) και, ως αποτέλεσμα, η εγκυρότητά της είναι ακόμα πιο περιορισμένη. Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζουμε τις τιμές της πιθανότητας απορρόφησης όπως προκύπτουν από τις δύο αναλυτικές εκφράσεις που παρουσιάσαμε -εξισώσεις (3.38), (3.39) και (3.51)- καθώς το  $\omega\tau_H$  παίρνει τιμές μεταξύ 0.001 και 0.5. Εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι για πολύ μικρές τιμές του  $\omega\tau_H$ , η συμφωνία των δύο συνόλων τιμών είναι εξαιρετική, καθώς όμως αυτή η τιμή αυξάνει, η συμφωνία αυτή χαλάει. Π.χ. για  $\omega\tau_H$  ίσο με 0.5 η απόκλιση μεταξύ των δύο τιμών της τελευταίας σειράς του Πίνακα 3.2 φτάνει το 15%.

Στο παρόν Υποκεφάλαιο θα επιστρέψουμε στο κύριο αναλυτικό αποτέλεσμα για την εκπομπή βαρυτονίων στον Υπερχώρο- εξισώσεις (3.38), (3.39). Όπως έχει δείχθει στο παρελθόν για την περίπτωση της εκπομπής σωματιδίων στην Μεμβράνη [54, 61], η αντίστοιχη αναλυτική έκφραση για το  $|A_l|^2$ , που προκύπτει με την χρήση της μεθόδου ένωσης των ασυμπτωτικών λύσεων, είναι





Σχήμα 3.1: Πιθανότητα απορρόφησης  $|A_l|^2$  για τανυστικές (συνεχείς γραμμές), διανυσματικές (πυκνά διακεκομμένες γραμμές) και βαθμωτές (αραιά διακεκομμένες γραμμές) βαρυτικές διαταραχές στον Υπερχώρο για (α)  $n = 6$ , και  $l = 2, 3, 4, 5$ , και (β)  $l = 2$ , και  $n = 0, 2, 4, 6$ .

σε εξαιρετική συμφωνία με τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα στην περιοχή χαμηλών ενεργειών, και σε καλή συμφωνία – τόσο ποιοτική όσο και ποσοτική – στην περιοχή ενδιάμεσων ενεργειών. Καθώς η ενέργεια αυξάνει, η εγκυρότητα των εκφράσεών μας είναι λογικό να μειώνεται. Στην περιοχή των πολύ υψηλών ενεργειών, όπως είδαμε και στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 2 της παρούσας διατριβής, η μελανή οπή συμπεριφέρεται σαν πλήρως απορροφητικό σώμα (μέλαν σώμα) με ακτίνα [54, 61]

$$r_c = \left( \frac{n+3}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{\frac{n+3}{n+1}} r_H, \quad (3.53)$$

Η παραπάνω έκφραση αναπαράγει σωστά, για  $n = 0$ , το γνωστό [22, 57, 58, 59] αποτέλεσμα στις τέσσερις διαστάσεις,  $r_c = 3\sqrt{3}r_H/2$ , και η ακτίνα  $r_c$  ορίζει την ακτίνα απορρόφησης της μελανής οπής.

Στο σχήμα (3.1.α) και (3.1.β) παρουσιάζουμε την πιθανότητα απορρόφησης και για τα τρία είδη των διαταραχών σαν συνάρτηση της αδιάστατης παραμέτρου της ενέργειας  $\omega r_H$  και για διάφορες τιμές του χβαντικού αριθμού  $l$  και του αριθμού των επιπλέον διαστάσεων  $n$  αντίστοιχα. Όπως είναι αναμενόμενο, η πιθανότητα απορρόφησης για όλα τα είδη των διαταραχών και για όλες τις τιμές των παραμέτρων μηδενίζεται όταν η ενέργεια του διαδομένου σωματιδίου τείνει στο μηδέν. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με την κλασική θεωρία σκέδασης: όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια, τόσο πιθανότερο είναι για το σωματίδιο να ξεφύγει από το βαρυτικό πεδίο της μελανής οπής και να διαφύγει στο άπειρο. Στο Σχήμα 3.1.α βλέπουμε ότι καθώς το  $l$  αυξάνει, η πιθανότη-



τα απορρόφησης για όλων των ειδών τις διαταραχές μειώνεται, σε συμφωνία με το σχόλιο που κάναμε παραπάνω για τις τιμές του Πίνακα 3.1. Αν και οι γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται είναι για την περίπτωση των  $n = 6$  επιπλέον διαστάσεων, η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται για όλες τις τιμές του  $n$ . Εξάλλου για σταθερό  $l$ , όπως μπορούμε να δούμε από το Σχήμα 3.1.β, η  $|A_l|^2$  μειώνεται σημαντικά καθώς αυξάνει το  $n$ , για όλων των ειδών τις διαταραχές, σε συμφωνία πάλι με τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.1. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται για τα δύο χαμηλότερα κύματα  $l = 2$  και  $l = 3$ , ενώ για μεγαλύτερες τιμές του  $l$ , το  $|A_l|^2$  εμφανίζει μια προσωρινή αύξηση καθώς το  $n$  αυξάνει από 0 σε 2, η οποία όμως παρόλα αυτά δίνει τη θέση της σε μεγάλη μείωση καθώς το  $n$  αυξάνει περαιτέρω.

Όπως σημειώσαμε όταν εξετάσαμε την ασυμπτωτική περιοχή των εξαιρετικά χαμηλών ενεργειών, η πιθανότητα απορρόφησης για τις διαταραχές ταυιστικού τύπου είναι σημαντικά μικρότερη από αυτήν των άλλων δύο τύπων. Αυτή η συμπεριφορά παρατηρείται επίσης και στις περιοχές των χαμηλών και ενδιάμεσων ενεργειών. Επιπλέον, οι διανυσματικές και βαθμωτές διαταραχές κυριαρχούν η μια της άλλης σε εξάρτηση από την τιμή του χβαντικού αριθμού  $l$ : όπως μπορεί να δει κάποιος από τα σχήματα, οι διανυσματικού τύπου κυριαρχούν για χαμηλές τιμές του  $l$ , ενώ οι βαθμωτές για μεγαλύτερες τιμές του  $l$ . Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα υψηλότερα κύματα (αυτά δηλαδή που αντιστοιχούν σε μεγαλύτερα  $l$ ) έχουν σημαντικά μικρότερο  $|A_l|^2$  από ότι τα χαμηλά, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι διαταραχές διανυσματικού τύπου θα είναι ο κυρίαρχος βαθμός ελευθερίας που θα εκπεμφθεί από μία μελανή οπή τύπου Schwarzschild, παρουσία επιπλέον διαστάσεων. Παρόλα αυτά, οι διαφορετικού είδους διαταραχές χαρακτηρίζονται από διαφορετικές πολλαπλότητες καταστάσεων για την ίδια τιμή του  $l$ , και αυτό το γεγονός πρέπει να ληφθεί υπόψη στα τελικά συμπεράσματα.

### 3.5 Ρυθμός Εκπομπής Ενέργειας

Σε αυτό το Υποκεφάλαιο θα στρέψουμε την προσοχή μας στον ρυθμό με τον οποίο ακτινοβολείται ενέργεια με τη μορφή βαρυτονίων από την πολυδιάστατη μελανή οπή τύπου Schwarzschild που εξετάζουμε. Πρώτα όμως θα πρέπει να ασχοληθούμε με το θέμα της πολλαπλότητας των καταστάσεων: σε κάθε τιμή του  $l$  αντιστοιχεί ένας διαφορετικός αριθμός καταστάσεων, ο οποίος εξαρτάται από το είδος των διαταραχών και τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Στις τέσσερις διαστάσεις, ως γνωστόν, για κάθε τιμή του  $l$  υπάρχουν  $2l + 1$  διαφορετικές τιμές του χβαντικού αριθμού  $m$ . Η τιμή αυτή διαφοροποιείται



	$N_l^{(T)}$		$N_l^{(V)}$		$N_l^{(S)}$	
	$n = 1$	$n = 6$	$n = 1$	$n = 6$	$n = 1$	$n = 6$
$l = 2$	10	495	16	231	9	44
$l = 3$	24	2574	30	910	16	156
$l = 4$	42	8748	48	2772	25	450
$l = 5$	64	23868	70	7140	36	1122

Πίνακας 3.3: Πολλαπλότητες των καταστάσεων που αντιστοιχούν στον ίδιο χβαντικό αριθμό  $l$  για τανυστικές, διανυσματικές και βαθμωτές διαταραχές για  $n = 1$  και  $n = 6$ .

παρουσία επιπλέον διαστάσεων, και δίνεται από τις εξής σχέσεις [95, 96]

$$N_l^{(T)} = \frac{n(n+3)(l+n+2)(l-1)(2l+n+1)(l+n-1)!}{2(l+1)!(n+1)!}, \quad (3.54)$$

$$N_l^{(V)} = \frac{l(l+n+1)(2l+n+1)(l+n-1)!}{(l+1)!n!}, \quad (3.55)$$

$$N_l^{(S)} = \frac{(2l+n+1)(l+n)!}{l!(n+1)!}, \quad (3.56)$$

για τανυστικές, διανυσματικές και βαθμωτές διαταραχές αντίστοιχα. Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζουμε τον αριθμό των πολλαπλοτήτων για όλα τα είδη διαταραχών, για ενδεικτικές τιμές των  $l$  και  $n$ . Αμέσως μπορούμε να παρατηρήσουμε τον πολλαπλασιασμό του αριθμού των καταστάσεων όταν οποιαδήποτε από τις δύο παραμέτρους αυξηθεί, κάτι που είναι πιο έντονο στην περίπτωση της αύξησης του  $n$ . Είναι λοιπόν προφανές ότι η πιθανότητα απορρόφησης από μόνη της δεν αρκεί για να καθορίσει την συνεισφορά κάθε είδους διαταραχής στον ολικό ρυθμό εκπομπής ενέργειας.

Έχοντας υπολογίσει τον αριθμό των πολλαπλοτήτων και τις τιμές της πιθανότητας απορρόφησης, μπορούμε να υπολογίσουμε τους αντίστοιχους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας στην περιοχή των χαμηλών ενεργειών.

Η συνεισφορά κάθε τύπου βαρυτικής διαταραχής στην συνολική ισχύ εκπομπής μέσω βαρυτονίων δίνεται από τον τύπο [54]

$$\frac{d^2 E^{(P)}}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_l N_l^{(P)} |A_l^{(P)}|^2 \frac{\omega}{\exp(\omega/T_H) - 1}, \quad (3.57)$$





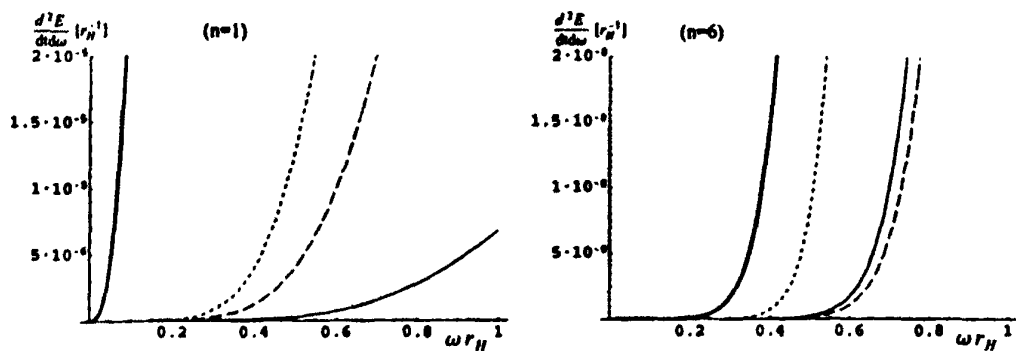
όπου ο δείκτης  $P = (T, V, S)$  δείχνει το είδος της διαταραχής (T τανυστική, V διανυσματική και S βαθμωτή) και η θερμοκρασία της μαύρης τρύπας δίνεται από τη σχέση (3.3). Προσθέτωντας και τις τρεις συνεισφορές, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική ποσότητα ενέργειας που ακτινοβολείται από την μελανή οπή στον Υπερχώρο στην μορφή βαρυτονίων. Καθώς το αποτέλεσμα αυτό θα ήταν πιο χρήσιμο στα πλαίσια μιας ακριβούς αριθμητικής ανάλυσης, εδώ θα συγκεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στις σχέσεις ανάμεσα στους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας για τα διαφορετικά είδη των βαρυτικών διαταραχών και την σχέση τους με τον αντίστοιχο ρυθμό για την περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου που διαδίδεται στον Υπερχώρο.

Ένας απλός υπολογισμός βασισμένος στην εξίσωση (3.57), μαζί με τα δεδομένα του Πίνακα 3.1 και τις σχέσεις (3.54, 3.55, 3.56), δείχνει ότι στην ασυμπτωτική περιοχή των εξαιρετικά χαμηλών ενεργειών, οι διανυσματικού τύπου διαταραχές είναι το κυρίαρχο είδος βαρυτικού βαθμού ελευθερίας που θα ακτινοβοληθεί στον Υπερχώρο από την μελανή οπή. Για παράδειγμα, για  $n = 2$  και  $l = 2$ , οι διανυσματικές διαταραχές αντιστοιχούν στο 85% της συνολικής ενέργειας που εκπέμπεται σε μορφή βαρυτονίων στις χαμηλές ενέργειες, ενώ βαθμωτές και τανυστικές στο 13% και 2% αντίστοιχα. Καθώς το  $n$  αυξάνει, ενισχύεται αυτή η υπεροχή των διανυσματικών διαταραχών. Για παράδειγμα, για  $n = 2$  και  $l = 2$  το ποσοστό φτάνει στο 97%. Αυτή η κυριαρχία ισχύει για όλες τις τιμές των παραμέτρων που ελέγξαμε, μπορεί όμως να μειωθεί σημαντικά καθώς πάμε σε υψηλότερα κύματα: για παράδειγμα, για  $n = 6$  και  $l = 4$ , οι διανυσματικές, βαθμωτές και τανυστικές διαταραχές αντιστοιχούν στο 74%, 12% και 14% της συνολικής ενέργειας που εκπέμπεται. Ένα άλλο στοιχείο που δείχνει η ανάλυση είναι ότι, λόγω της μεγάλης πολλαπλότητας των καταστάσεων τους, οι τανυστικές διαταραχές κυριαρχούν επί των βαθμωτών για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του  $n$  ή και του  $l$ .

Τα παραπάνω αποτελέσματα που περιγράψαμε είναι έγκυρα στις χαμηλές ενέργειες του φάσματος ακτινοβολίας, και μπορούν να ανατραπούν για υψηλότερες τιμές της ενέργειας. Για αυτό το λόγο στα Σχήματα 3.2.α και 3.2.β αναπαριστούμε τους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας για τους διαφορετικούς τύπους των βαρυτικών διαταραχών, για  $n = 1$  και  $n = 6$  αντίστοιχα, όπως αυτοί προκύπτουν από την ακριβή αναλυτική έκφραση (3.38)-(3.39), και για χαμηλές ενέργειες,  $\omega t_H < 1$ . Επίσης αναπαριστούμε και τον ρυθμό εκπομπής ενέργειας για ένα βαθμωτο πεδίο στον Υπερχώρο, για να μπορέσουμε να κάνουμε την σύγκριση με το συγκεκριμένο είδος εκπομπής. Στο άθροισμα πάνω στα  $l$  στην εξίσωση (3.57) έχουμε συμπεριλάβει κατά την σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων την συνεισφορά όλων των επιμέρους κυμάτων μέχρι το  $l = 12$ , αν και τα κύματα με  $l \geq 4$  έχουν τουλάχιστον τέσσερις τάξεις μεγέθους μικρότερη συνεισφορά από το  $l = 2$  για κάθε τιμή του  $n$ .

Τα αποτελέσματα που φαίνονται στο Σχήμα 3.2 είναι στην πραγματικότητα





Σχήμα 3.2: Ρυθμός εκπομπής ενέργειας για τανυστικές (λεπτές συνεχείς γραμμές), διανυσματικές (πυκνά διακεκομμένες γραμμές), βαθμωτές (αραιά διακεκομμένες γραμμές) βαρυτικές διαταραχές, και βαθμωτά πεδία (χοντρές συνεχείς γραμμές) στον Υπερχώρο για (α)  $n = 1$  και (β)  $n = 6$ .

σε εξαιρετική συμφωνία με τα συμπεράσματα που εξάγαμε χρησιμοποιώντας την απλουστευμένη έκφραση (3.51). Οι διανυσματικοί βαθμοί ελευθερίας αποτελούν όντως τον κυρίαρχο βαθμό ελευθερίας που εκπέμπεται από την μαύρη τρύπα στον Υπερχώρο, για κάθε τιμή του  $n$ . Αυτό που αλλάζει με τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων είναι η σχέση ανάμεσα στους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας για τις βαθμωτές και τανυστικές διαταραχές. Ενώ για χαμηλό  $n$ , οι βαθμωτού τύπου κυριαρχούν σε όλο το φάσμα χαμηλών ενεργειών, η κατάσταση ανατρέπεται όταν πάμε σε υψηλότερα  $n$ . Ένα άλλο στοιχείο είναι ότι ακόμα και αν προσθέσουμε τις συνεισφορές και από τα τρία είδη βαρυτικών διαταραχών, ο συνολικός ρυθμός εκπομπής της ενέργειας στον Υπερχώρο, είναι πολύ χαμηλότερος του αντίστοιχου ρυθμού για ένα βαθμωτό πεδίο στις χαμηλές ενέργειες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός εκπομπής για ένα βαθμωτό πεδίο ενισχύεται σημαντικά στο συγκεκριμένο φάσμα ενεργειών, από τα μερικά κύματα  $l = 0$  και  $l = 1$ , τα οποία απουσιάζουν από τις βαρυτικές διαταραχές. Καθώς όμως η ενέργεια αυξάνει, περιμένουμε τα υψηλότερα κύματα να αρχίσουν να κυριαρχούν, και πιθανώς να βοηθήσουν τα βαρυτόνια να κυριαρχήσουν πάνω στα βαθμωτά πεδία.

Τέλος, συγκρίνοντας τους κατακόρυφους άξονες των δύο γραφικών του Σχήματος 3.2, συμπεραίνουμε ότι σε χαμηλές τιμές της ενέργειας, η αύξηση του αριθμού των χωρικών διαστάσεων έχει ως αποτέλεσμα την μείωση του ρυθμού εκπομπής ενέργειας. Παρόλο που τόσο η θερμοκρασία της μελανής οπής, όσο και η πολλαπλότητα των καταστάσεων, έχουν μια σημαντική αύξηση καθώς αυξάνει το  $n$ , η εξίσου σημαντική μείωση της πιθανότητας απορρόφησης, που φαίνεται και στο Σχήμα 3.1.β υπερισχύει, έχοντας ως αποτέλεσμα την ελάττωση της εκπεμπόμενης ενέργειας. Αυτή η μείωση του ρυθμού εκπο-



μπής στις χαμηλές ενέργειες καθώς αυξάνει το  $n$  είχε πρωτοπαρατηρηθεί για την περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου στις εργασίες [61, 63], αλλά η ακριβής αριθμητική επίλυση του προβλήματος, που έγινε στην πρώτη, έδειξε ότι για υψηλότερες τιμές της ενέργειας το φάσμα εκπομπής ενισχύεται με την αύξηση των επιπλέον διαστάσεων. Αυτό οφείλεται στο ότι καθώς αυξάνει το  $n$ , αυξάνει και η θερμοκρασία  $T_H$  της μελανής οπής, και άρα, σύμφωνα και με την κλασσική θερμοδυναμική (νόμος του Wien), το φάσμα εκπομπής μετατοπίζεται προς την περιοχή των υψηλότερων ενεργειών. Λόγω των ομοιοτήτων που παρουσιάζουν οι συμπεριφορές των βαρυτικών και βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο, περιμένουμε η ίδια αύξηση να λάβει χώρα και για την περίπτωση των βαρυτονίων υψηλής ενέργειας.

Τον ίδιο περίπου καιρό που δημοσιεύτηκαν τα ανωτέρω αποτελέσματα [91], δημοσιεύτηκαν και κάποιες άλλες εργασίες [97, 98, 99, 100] που αντιμετώπιζαν το πρόβλημα της εκπομπής βαρυτονίων από σφαιρικά συμμετρικές μελανές οπές επιπλέον διαστάσεων. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα τους με τα αποτελέσματα της [91], καθώς και με τη βοήθεια αριθμητικού κώδικα, διαπιστώσαμε ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο παρόν κεφάλαιο, για την περίπτωση των τανυστικών και διανυσματικών διαταραχών είναι πάρα πολύ κοντά στα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα, τόσο στις χαμηλές όσο και στις ενδιάμεσες ενέργειες. Για την περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών όμως, η συμφωνία δεν ήταν τόσο καλή όσο στα άλλα δύο είδη, γεγονός που οφείλεται στο ότι στην εξίσωση (3.21) ο όρος  $C$  παίζει σημαντικότερο ρόλο από ότι εκτιμήθηκε. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει μια αδυναμία της μεθόδου σύνδεσης των ασυμπτωτικών λύσεων, το πρόβλημα όμως μπορεί να παρακαμφθεί αν εισάγουμε μία ενδιάμεση κλίμακα  $r_*$  στην οποία να 'δένει' η λύση κοντά στον ορίζοντα με αυτήν στο άπειρο.



## Κεφάλαιο 4

# Εκπομπή Βαθμωτών Πεδίων στην Μεμβράνη από Περιστρεφόμενες Μελανές Οπές

### 4.1 Εισαγωγή

Είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο έναν αναλυτικό τρόπο να επιλύσει κανείς το πρόβλημα της εκπομπής ακτινοβολίας Hawking με τη μορφή βαρυτονίων, από μία μελανή οπή που ζει σε χώρο με  $n$  επιπλέον διαστάσεις. Η μελέτη μας αυτή εστιάστηκε στην περίπτωση μιας σφαιρικά συμμετρικής, αφόρτιστης μελανής οπής - μιας μελανής οπής τύπου Schwarzschild παρουσία  $(4 + n)$  διαστάσεων. Σε συνδυασμό με κάποιες εργασίες που δημοσιεύτηκαν την ίδια εποχή [97, 98, 99, 100], ολοκληρώθηκε ουσιαστικά η μελέτη όλων των ειδών ακτινοβολίας Hawking από μια πολυδιάστατη μελανή οπή Schwarzschild, τόσο σε πεδία του Καθιερωμένου Μοντέλου (βαθμωτά πεδία, φερμιόνια, μποζόνια βαθμίδας), όσο και σε βαρυτόνια. Οι μελέτες αυτές περιελάμβαναν αναλυτική επίλυση των εξισώσεων κίνησης (όπως η δουλειά που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο), καθώς και αριθμητική επίλυση με την βοήθεια υπολογιστικού κώδικα.

Το επόμενο βήμα, λοιπόν, στην μελέτη των πολυδιάστατων οπών και πιο συγκεκριμένα της ακτινοβολίας Hawking που αυτές θα εκπέμπουν, είναι η μελέτη της φάσης απώλειας σπιν. Όπως είδαμε στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 2, η δεύτερη φάση στην ζωή μιας μελανής οπής είναι αυτή στην οποία η μελανή οπή περιστρέφεται χάνοντας ενέργεια και τροχιακή στροφορμή, μέσω ακτινοβολίας θερμικών σωματιδίων όλων των ειδών, καταλήγοντας στην επόμενη φάση της ζωής της, την φάση Schwarzschild.



Η ύπαρξη περιστροφής της μελανής οπής προσθέτει σε μεγάλο βαθμό στην πολυπλοκότητα των εξισώσεων κίνησης των πεδίων στο εν λόγω βαρυτικό υπόβαθρο, σε σχέση με τις αντίστοιχες εξισώσεις στην περίπτωση της σφαιρικά συμμετρικής οπής. Παρόλα αυτά, στην διεθνή βιβλιογραφία εμφανίστηκαν ορισμένες εργασίες που αντιμετώπισαν το πρόβλημα αριθμητικά [75, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110], ή και αναλυτικά για την συγκεκριμένη περίπτωση της πενταδιάστατης περιστρεφόμενης μελανής οπής [78, 111]. Αναλυτική αντιμετώπιση του προβλήματος για την γενική περίπτωση του χωρόχρονου με αυθαίρετο αριθμό χωρικών διαστάσεων δεν υπήρχε στην βιβλιογραφία, και αυτό ακριβώς το κενό προσπαθήσαμε να καλύψουμε.

Στο παρόν Κεφάλαιο, λοιπόν, θα παρουσιάσουμε την μελέτη της εκπομπής σακτινοβολίας Hawking από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή που ζει σε χώρο με αυθαίρετο αριθμό χωρικών διαστάσεων [112]. Θα εστιάσουμε καταρχάς την προσοχή μας στην εκπομπή βαθμωτών σωματιδίων πάνω στην Μεμβράνη, ενώ στα επόμενα δύο Κεφάλαια θα επεκταθούμε και σε άλλες περιπτώσεις εκπομπής. Στο Υποκεφάλαιο 4.2 θα δώσουμε την μετρική που περιγράφει μία περιστρεφόμενη μελανή που ζει σε χώρο  $(4 + n)$  διαστάσεων, θα γράψουμε τις εκφράσεις που δίνουν την μάζα και την τροχιακή της στροφορμή και θα δώσουμε την εξίσωση που ικανοποιεί ένα βαθμωτό πεδίο εντοπισμένο στην Μεμβράνη πάνω στην οποία έχουμε τοποθετήσει την μελανή οπή. Στην συνέχεια θα λύσουμε αναλυτικά αυτήν την εξίσωση και θα υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης για το συγκεκριμένο είδος εκπομπής, πρώτα για τις χαμηλές ενέργειες στο Υποκεφάλαιο 4.3 και κατόπιν για τις υψηλές στο Υποκεφάλαιο 4.4. Οι αναλυτικές εκφράσεις στις οποίες θα καταλήξουμε και για τις δύο περιοχές ενεργειών θα παρασταθούν γραφικά και θα συγκριθούν με την ακριβή αριθμητική λύση για να διαπιστωθεί το κατά πόσο η αναλυτική μέθοδος που ακολουθήσαμε δίνει σωστά αποτελέσματα. Επίσης θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ενεργού διατομής της απορρόφησης τόσο στις χαμηλές, όσο και στις υψηλές ενέργειες.

## 4.2 Βαρυτικό Υπόβαθρο και Εξισώσεις Κίνησης

Αν κάποιος αποδεχτεί την πιθανότητα της δημιουργίας μικροσκοπικών μελανών οπών κατά την διάρκεια συγκρούσεων υποατομικών σωματιδίων υψηλής ενέργειας, τότε λόγω της μη-μηδενικής τιμής της παραμέτρου κρούσης τους, μία περιστρεφόμενη μελανή οπή είναι το πιο φυσιολογικό αποτέλεσμα. Καθώς η μελανή οπή δημιουργείται στα πλαίσια μιας θεωρίας η οποία προβλέπει την ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων, η ίδια η οπή θα είναι ένα πολυδιάστατο αντικείμενο που 'νιώθει' τις επιπλέον διαστάσεις. Υπό τον όρο ότι ο ορίζοντας



$r_h$  της μελανής οπής είναι σημαντικά μικρότερος από το μέγεθος των επιπλέον συμπαγών διαστάσεων, ο χωρόχρονος γύρω της μπορεί να προσεγγιστεί από μία μόνο χρονοειδή διάσταση, και  $(3 + n)$  μη συμπαγείς, χωροειδείς διαστάσεις. Μία πολυδιάστατη μελανή οπή, είναι δυνατόν να χρειάζεται μέχρι και  $[(n + 3)/2]$  παραμέτρους για τον πλήρη καθορισμό της στροφορμής της. Παρόλα αυτά, εδώ θα υποθέσουμε ότι τα συγκρουόμενα σωματίδια διαδίδονται πάνω στην Μεμβράνη, με αποτέλεσμα η δημιουργούμενη μελανή οπή να χαρακτηρίζεται από μία μόνο παράμετρο στροφορμής, η οποία και θα είναι πάνω σε έναν άξονα στην Μεμβράνη. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι η μελανή οπή έχει μηδενική στροφορμή κατά μήκος των επιπλέον διαστάσεων. Το βαρυτικό υπόβαθρο γύρω από μία πολυδιάστατη μελανή οπή με μια παράμετρο στροφορμής δίνεται όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2 από την ακόλουθη λύση των Myers-Perry [53]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{\Sigma r^{n-1}}\right) dt^2 + \frac{2a\mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 \mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2, \quad (4.1)$$

όπου

$$\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{n-1}}; \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.2)$$

και  $d\Omega_n^2$  είναι το στοιχείο μήκους πάνω σε μία σφαίρα  $n$  διαστάσεων, με μοναδιαία ακτίνα. Η μάζα και η τροχιακή στροφορμή της μελανής οπής, όπως έχουμε δει, δίνονται από τις εκφράσεις

$$M_{BH} = \frac{(n+2)A_{n+2}}{16\pi G} \mu, \quad J = \frac{2}{n+2} M_{BH} a, \quad (4.3)$$

με το  $G$  να είναι η σταθερά του Νεύτωνα για τις  $(4 + n)$  διαστάσεις και  $A_{n+2}$  η επιφάνεια μιας μοναδιαίας σφαίρας  $(n + 2)$  διαστάσεων, που ισούται με

$$A_{n+2} = \frac{2\pi^{(n+3)/2}}{\Gamma[(n+3)/2]}. \quad (4.4)$$

Όπως βλέπουμε από την εξίσωση (4.3), η μάζα της οπής καθορίζεται από την παράμετρο μάζας  $\mu$ , ενώ η στροφορμή από την παράμετρο  $a$ , την παράμετρο περιστροφής της μελανής οπής.

Καθώς η δημιουργία της μελανής οπής έχει σημαντική εξάρτηση από την τιμή της παραμέτρου κρούσης μεταξύ των δύο σωματιδίων υψηλής ενέργειας [44, 45, 46, 47, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122], η οποία με τη σειρά της καθορίζει την τροχιακή στροφορμή της μελανής οπής, ένα



άνω όριο μπορεί να τεθεί στην παράμετρο περιστροφής  $a$  από την απαίτηση να δημιουργηθεί όντως μελανή οπή κατά την σύγκρουση. Η μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου χρούσης μεταξύ των δύο σωματιδίων η οποία μπορεί να οδηγήσει στην δημιουργία μιας μελανής οπής είναι [123]:

$$b_{\max} = 2 \left[ 1 + \left( \frac{n+2}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{(n+1)}} \mu^{\frac{1}{(n+1)}}, \quad (4.5)$$

μια αναλυτική έκφραση η οποία βρίσκεται σε καλή συμφωνία με τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην εργασία [114]. Αν τώρα θέσουμε  $J = bM_{BH}/2$  για την στροφορμή της μελανής οπής και γράψουμε την ακόλουθη έκφραση για τον ορίζοντα

$$r_h^{n+1} = \frac{\mu}{1+a^2}, \quad (4.6)$$

η οποία προκύπτει από την εξίσωση  $\Delta(r) = 0$ , και χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη από τις εξισώσεις (4.3), παίρνουμε

$$a_*^{\max} = \frac{n+2}{2}. \quad (4.7)$$

Στην παραπάνω έκφραση έχουμε ορίσει χάριν ευκολίας την ποσότητα  $a_* = a/r_h$ . Η εξίσωση (4.7), λοιπόν, θέτει ένα άνω όριο στην τιμή της τροχιακής στροφορμής της μελανής οπής που μπορούμε να πάρουμε από μια σύγκρουση. Χωρίς την σχέση αυτή, η τιμή της παραμέτρου περιστροφής για  $n > 1$  θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε τιμή, κάτι που δεν συμβαίνει στις διαστάσεις  $n = 0$  και  $n = 1$ , όπου και υπάρχει ένα όριο στην μέγιστη τιμή του  $a$ , το οποίο και διασφαλίζει την ύπαρξη ορίζοντα, λύση δηλαδή της εξίσωσης  $\Delta(r) = 0$ .

Στην συγκεκριμένη εργασία [112], επικεντρώσαμε την προσοχή μας στην περίπτωση διάδοσης βαθμωτών πεδίων στο βαρυτικό υπόβαθρο που προκαλείται από μία περιστρεφόμενη μελανή οπή στην Μεμβράνη (όπου έχει υποτεθεί ότι ζούνε όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου). Το 4-διάστατο στοιχείο μήκους στην Μεμβράνη θα είναι η προβολή του αντίστοιχου πολυδιάστατου και η ακριβής του έκφραση θα προκύψει καθορίζοντας τις τιμές των επιπλέον γωνιακών συντεταγμένων – οι οποίες εισήχθησαν για να περιγράψουν τις επιπλέον διαστάσεις – σε  $\theta_i = \pi/2$ , για  $i = 2, \dots, n+1$ . Τότε η προβολή του στοιχείου μήκους στην Μεμβράνη παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{\mu}{\Sigma r^{n-1}} \right) dt^2 + \frac{2a\mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left( r^2 + a^2 + \frac{a^2 \mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.8)$$



Ας σημειώσουμε εδώ, ότι, αν και το στοιχείο μήκους της παραπάνω σχέσης είναι παρόμοιο με το συνηθισμένο τετραδιάστατο στοιχείο μήκους της μετρικής Kerr όπως αυτό δίνεται από την σχέση (2.28), δεν είναι το ίδιο, λόγω της εξάρτησής του από τον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων. Αυτή ακριβώς η εξάρτηση είναι που θα κάνει τις διάφορες ποσότητες που θα υπολογιστούν πάνω στην Μembrάνη να εξαρτώνται από τις επιπλέον κάθετες σε αυτό διαστάσεις.

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη της διάδοσης των βαθμωτών πεδίων στο βαρυτικό υπόβαθρο που περιγράψαμε πριν, χρειάζεται να παράγουμε τις εξισώσεις κίνησης τους. Θα υποθέσουμε εδώ ότι τα πεδία έχουν ελάχιστη σύζευξη με την βαρύτητα και ότι δεν έχουν κάποιου άλλου είδους αλληλεπιδράσεις, επομένως, ικανοποιούν τις ελεύθερες εξισώσεις κίνησης. Οι τελευταίες, για σωματίδια με spin 0, 1/2 και 1, που διαδίδονται στο στοιχείο μήκους της εξίσωσης (4.8), έχουν βρεθεί στις εργασίες [54, 111]. Για την περίπτωση βαθμωτών σωματιδίων, η ακόλουθη ανάλυση του πεδίου

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} R_{\omega\ell m}(r) T_{\ell}^m(\theta, a\omega), \quad (4.9)$$

όπου  $T_{\ell}^m(\theta, a\omega)$  είναι οι επονομαζόμενες σφαιροειδείς αρμονικές [76, 77, 124], αποδείχτηκε ότι οδηγεί στο ακόλουθο ζεύγος αποσυζευγμένων ακτινικών και γωνιακών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d}{dr} \left( \Delta \frac{dR_{\omega\ell m}}{dr} \right) + \left( \frac{K^2}{\Delta} - \Lambda_{\ell}^m \right) R_{\omega\ell m} = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dT_{\ell}^m(\theta, a\omega)}{d\theta} \right) + \left( E_{\ell}^m - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + a^2 \omega^2 \cos^2 \theta \right) T_{\ell}^m(\theta, a\omega) = 0, \quad (4.11)$$

για το ακτινικό και το γωνιακό κομμάτι αντίστοιχα. Στα παραπάνω έχουμε ορίσει

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am, \quad \Lambda_{\ell}^m = E_{\ell}^m + a^2\omega^2 - 2am\omega. \quad (4.12)$$

Η γωνιακή ιδιοτιμή  $E_{\ell}^m(a\omega)$  αποτελεί τον σύνδεσμο ανάμεσα στην γωνιακή και την ακτινική εξίσωση. Η έκφραση της, γενικά, δεν μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή, εντούτοις, ένας αναλυτικός τύπος μπορεί να γραφτεί, στη μορφή δυναμοσειράς ως προς την παράμετρο  $a\omega$ . Θα επιστρέψουμε σε αυτό το σημείο στο Υποκεφάλαιο 4.3.

Λύνοντας την εξίσωση (4.10), βρίσκουμε το ακτινικό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης του πεδίου και από εκεί μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{\ell, m}|^2$  για την διάδοση ενός βαθμωτού πεδίου στο υπόβαθρο





της μετρικής που προβάλλεται πάνω στην Μεμβράνη. Η ποσότητα αυτή όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, εμφανίζεται στους διαφορικούς ρυθμούς εκπομπής ακτινοβολίας Hawking από την πολυδιάστατη μελανή οπή. Για παράδειγμα, ο αριθμός σωματιδίων  $N$  που εκπέμπονται ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα συχνότητας, έχει τη μορφή

$$\frac{d^2 N}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell, m} \frac{1}{\exp[k/T_H] - 1} |A_{\ell, m}|^2. \quad (4.13)$$

Παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να γραφτούν για τους ρυθμούς απώλειας ενέργειας και τρυχειακής στροφορμής από την μελανή οπή. Τα  $k$  και  $T_H$  της παραπάνω σχέσης δίνονται από

$$k \equiv \omega - m\Omega = \omega - \frac{ma}{r_h^2 + a^2}, \quad T_H = \frac{(n+1) + (n-1)a_*^2}{4\pi(1+a_*^2)r_h}. \quad (4.14)$$

Με  $\Omega$  έχουμε συμβολίσει την γωνιακή ταχύτητα της μελανής οπής και  $T_H$  την συσχετισμένη με ακτινοβολία Hawking θερμοκρασία της. Η πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{\ell, m}|^2$  εξαρτάται τόσο από τις ιδιότητες του σωματιδίου (την ενέργεια  $\omega$ , τους κβαντικούς αριθμούς  $\ell, m$ ), όσο και από τις παραμέτρους του βαρυτικού υποβάθρου (τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων  $n$ , την παράμετρο περιστροφής  $a$  της μελανής οπής). Όπως είδαμε, η ύπαρξη αυτής της ποσότητας μεταβάλλει τους διάφορους ρυθμούς εκπομπής σε σχέση με τους αντίστοιχους ενός ιδανικού μέλανος σώματος. Η εξίσωση (4.10) έχει λυθεί αναλυτικά μόνο για την περίπτωση μιας πενταδιάστατης ( $n=1$ ) περιστρεφόμενης μελανής οπής, μόνο στις χαμηλές ενέργειες [111], και αριθμητικά στις εργασίες [101, 103] για αυθαίρετο αριθμό επιπλέον διαστάσεων<sup>1</sup>. Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε αναλυτικές λύσεις της ακτινικής εξίσωσης, τόσο στις χαμηλές όσο και στις υψηλές ενέργειες, καθώς και εκφράσεις για την πιθανότητα απορρόφησης για βαθμωτά πεδία που διαδίδονται στον τετραδιάστατο χωρόχρονο μιας Μεμβράνης που είναι εμβαπτισμένη σε έναν αυθαίρετου αριθμού διαστάσεων χωρόχρονο, παρουσία μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής.

### 4.3 Πιθανότητα Απορρόφησης στις Χαμηλές Ενέργειες

Σε αυτό το Υποκεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε στον υπολογισμό της πιθανότητας απορρόφησης στις χαμηλές ενέργειες του φάσματος εκπομπής. Καταρχάς

<sup>1</sup> Η γωνιακή εξίσωση (4.11) επίσης λύθηκε αριθμητικά στην [103], και βρέθηκε η γωνιακή κατανομή του φάσματος.



θα παράγουμε μια αναλυτική έκφραση χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική μέθοδο που περιγράψαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Στην συνέχεια θα δείξουμε γραφικά την εξάρτηση της αναλυτικής έκφρασης από τις διάφορες παραμέτρους του προβλήματος, όπως τους χβαντικούς αριθμούς του σωματιδίου, τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων και την τροχιακή στροφορμή της μελανής οπής. Επίσης θα συγκριθούν τα αποτελέσματα αυτά με παλιότερα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Τέλος θα γράψουμε μια απλοποιημένη έκφραση για το αναλυτικό αποτέλεσμα, έγκυρη στο όριο  $\omega \rightarrow 0$ , και θα σχολιάσουμε τη μορφή της αντίστοιχης ενεργού διατομής της απορρόφησης, καθώς και τη σχέση της με την επιφάνεια του ορίζοντα της οπής.

### 4.3.1 Αναλυτική Επίλυση των Εξισώσεων Κίνησης

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα επιχειρήσουμε την αναλυτική επίλυση της εξίσωσης (4.10), χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε και για την περίπτωση της εκπομπής βαρυτονίων στον Υπερχώρο: θα λύσουμε πρώτα την εξίσωση κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής ( $r \simeq r_h$ ), κατόπιν μακριά από αυτήν ( $r \gg r_h$ ), και στη συνέχεια οι δύο επιμέρους λύσεις θα επεκταθούν και θα ενωθούν στην ενδιάμεση περιοχή, δημιουργώντας μία αναλυτική λύση με ισχύ σε όλο το πεδίο τιμών του  $r$ .

Ας ξεκινήσουμε, λοιπόν, από την περιοχή κοντά στον ορίζοντα, όπου και θα προσπαθήσουμε να φέρουμε την διαφορική μας εξίσωση στη μορφή μιας υπεργεωμετρικής διαφορικής εξίσωσης. Για το λόγο αυτό θα κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή στην μεταβλητή

$$r \rightarrow f(r) = \frac{\Delta(r)}{r^2 + a^2} \implies \frac{df}{dr} = (1-f)r \frac{A(r)}{r^2 + a^2}, \quad (4.15)$$

όπου, για ευκολία, έχουμε ορίσει την συνάρτηση  $A(r) \equiv (n+1) + (n-1)a^2/r^2$ . Τότε η εξίσωση (4.10), κοντά στον ορίζοντα ( $r \simeq r_h$ ), παίρνει τη μορφή

$$f(1-f) \frac{d^2 P}{df^2} + (1-D_* f) \frac{dP}{df} + \left[ \frac{K_*^2}{A_*^2 f(1-f)} - \frac{\Lambda_*^m (1+a_*^2)}{A_*^2 (1-f)} \right] P = 0, \quad (4.16)$$

όπου τώρα έχουμε θέσει

$$A_* = (n+1) + (n-1)a_*^2, \quad K_* = (1+a_*^2)\omega_* - a_* m, \quad (4.17)$$

με  $\omega_* \equiv \omega r_h$ . Επίσης έχουμε ορίσει την ποσότητα

$$D_* \equiv 1 + \frac{n(1+a_*^2)}{A_*} - \frac{4a_*^2}{A_*^2}. \quad (4.18)$$



Θέτοντας τώρα  $P(f) = f^\alpha(1-f)^\beta F(f)$ , η εξίσωση (4.16) παίρνει τη μορφή μιας υπεργεωμετρικής διαφορικής εξίσωσης [94]:

$$f(1-f) \frac{d^2 F}{df^2} + [c - (1+a+b)f] \frac{dF}{df} - abF = 0, \quad (4.19)$$

με

$$a = \alpha + \beta + D_* - 1, \quad b = \alpha + \beta, \quad c = 1 + 2\alpha. \quad (4.20)$$

Οι εκθέτες  $\alpha$  και  $\beta$  θα προσδιοριστούν από την απαίτηση ο παράγοντας μπροστά από την  $F(f)$  να ισούται  $-ab$ . Αυτή η απαίτηση οδηγεί στις παρακάτω δύο αλγεβρικές εξισώσεις:

$$\alpha^2 + \frac{K_*^2}{A_*^2} = 0, \quad (4.21)$$

και

$$\beta^2 + \beta(D_* - 2) + \frac{K_*^2}{A_*^2} - \frac{\Lambda_*^m(1+a_*^2)}{A_*^2} = 0. \quad (4.22)$$

Η γενική λύση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης (4.19), σε συνδυασμό με την σχέση ανάμεσα στα  $P(f)$  και  $F(f)$ , οδηγούν τελικά στην παρακάτω εξίσωση για την ακτινική συνάρτηση  $P(f)$ , στην περιοχή κοντά στον ορίζοντα

$$P_{NH}(f) = A_- f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f) + A_+ f^{-\alpha} (1-f)^\beta F(a-c+1, b-c+1, 2-c; f), \quad (4.23)$$

όπου τα  $A_\pm$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, έτσι και εδώ, με NH θα σημειώνουμε τις λύσεις κοντά στον ορίζοντα και με FF αυτές στην ασυμπτωτική περιοχή μακριά από αυτόν. Μένει τώρα να προσδιορίσουμε τους εκθέτες  $\alpha, \beta$ . Λύνοντας την εξίσωση (4.21), παίρνουμε ως λύσεις

$$\alpha_\pm = \pm \frac{iK_*}{A_*}. \quad (4.24)$$

Κοντά στον ορίζοντα έχουμε  $r \rightarrow r_h$  και  $f(r) \rightarrow 0$ . Τότε, η λύση μας στην περιοχή αυτή, εξίσωση (4.23) έχει όριο

$$P_{NH}(f) \simeq A_- f^{\pm iK_*/A_*} + A_+ f^{\mp iK_*/A_*} = A_- e^{\pm iky} + A_+ e^{\mp iky}, \quad (4.25)$$

όπου, στο δεύτερο σκέλος χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του  $k$  της εξίσωσης (4.14), και την μεταβλητή  $y = r_h(1+a_*^2) \ln(f)/A_*$ . Ας σημειωθεί εδώ ότι η μεταβλητή  $y$  δεν είναι ίδια με την συνηθισμένη μεταβλητή  $r_*$  (την λεγόμενη *tortoise coordinate*), που ορίζεται από τη σχέση  $dr_*/dr = (r^2 + a^2)/\Delta(r)$  και



που έχει χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση της τετραδιάστατης περιστρεφόμενης μελανής οπής Kerr [33]. Ισχύει

$$\frac{dy}{dr} = \left( \frac{A}{A_*} \right) \frac{(r_h^2 + a^2)^2}{(r^2 + a^2)^2} \left( \frac{r_h}{r} \right)^{n-2} \frac{dr_*}{dr}, \quad (4.26)$$

με αποτέλεσμα στο όριο  $r \rightarrow r_h$  οι δύο μεταβλητές να γίνονται ταυτόσημες και η λύση κοντά στον ορίζοντα παίρνει, όπως είναι αναμενόμενο, τη μορφή ελεύθερων κυμάτων ως προς την *tortoise coordinate*  $y$  [33, 101, 103]. Απαιτώντας να έχουμε μόνο εισερχόμενα κύματα πάνω στον ορίζοντα, είμαστε υποχρεωμένοι να θέσουμε  $A_- = 0$  ή  $A_+ = 0$ , ανάλογα με την επιλογή για το πρόσημο του  $\alpha$ . Καθώς οι δύο αυτές επιλογές είναι εμφανώς ισοδύναμες, επιλέγουμε  $\alpha = \alpha_-$ , και θέτουμε  $A_+ = 0$ . Αυτό φέρνει την λύση κοντά στον ορίζοντα στην τελική μορφή της:

$$P_{NH}(f) = A_- f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f). \quad (4.27)$$

Τέλος, στρέφουμε την προσοχή μας στην εξίσωση (4.22) για τον παράγοντα  $\beta$ . Αυτή έχει δύο λύσεις

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ (2 - D_*) \pm \sqrt{(D_* - 2)^2 - \frac{4K_*^2}{A_*^2} + \frac{4\Lambda_\ell^m (1 + a_*^2)}{A_*^2}} \right]. \quad (4.28)$$

Το πρόσημο μπροστά από την ρίζα θα επιλεγεί με γνώμονα την σύγκλιση της υπεργεωμετρικής συνάρτησης  $F(a, b, c; f)$  και πιο συγκεκριμένα θα πρέπει να έχουμε  $\text{Re}(c - a - b) > 0$  [94], πράγμα που μας αναγκάζει να διαλέξουμε την λύση  $\beta = \beta_-$ .

Στην συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την μορφή της λύσης μακριά από τον ορίζοντα. Υποθέτοντας ότι  $r \gg r_h$  και κρατώντας τους κυρίαρχους όρους στο ανάπτυγμα ως προς  $1/r$ , η ακτινική εξίσωση (4.10) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dP}{dr} + \left( \omega^2 - \frac{E_\ell^m + a^2 \omega^2}{r^2} \right) P(r) = 0, \quad (4.29)$$

όπου  $E_\ell^m$  είναι η γωνιακή ιδιοτιμή. Ο μετασχηματισμός  $P(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \tilde{P}(r)$  φέρνει την παραπάνω εξίσωση στη μορφή της εξίσωσης Bessel [94] ως προς το  $\tilde{P}(r)$  και, τελικά, η λύση στο όριο που εξετάζουμε μπορεί να εκφραστεί ως

$$P_{FF}(r) = \frac{B_1}{\sqrt{r}} J_\nu(\omega r) + \frac{B_2}{\sqrt{r}} Y_\nu(\omega r), \quad (4.30)$$

όπου  $J_\nu$  και  $Y_\nu$  είναι οι συναρτήσεις Bessel του πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, με  $\nu = \sqrt{E_\ell^m + a^2 \omega^2 + 1/4}$  και  $B_{1,2}$  αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης.



Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε μια ενιαία αναλυτική λύση για όλο τον χώρο, θα χρειαστεί να ενώσουμε ομαλά τις δύο ασυμπτωτικές λύσεις που βρήκαμε παραπάνω, σε κάποια ενδιάμεση περιοχή. Για αυτό το λόγο θα αλλάξουμε το όρισμα της υπεργεωμετρικής συνάρτησης από  $f$  σε  $1-f$ , όπως κάναμε και στην περίπτωση των βαρυτονίων, χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση [94]

$$P_{NH}(f) = A_- f^a (1-f)^\beta \left[ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1; 1-f) + (1-f)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-f) \right]. \quad (4.31)$$

Η συνάρτηση  $f(r)$  μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{n-1}} \frac{1}{r^2 + a^2} = 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^{n-1} \frac{(1+a_*^2)}{(r/r_h)^2 + a_*^2}, \quad (4.32)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την εξίσωση ορισμού του οριζοντα  $\Delta(r_h) = 0$ , για να διώξουμε το  $\mu$  από την παραπάνω σχέση. Στο όριο  $r \gg r_h$ , ο δεύτερος όρος τείνει στο μηδέν και η όλη έκφραση τείνει στην μονάδα για  $n \geq 0$ . Έτσι, στο όριο  $f \rightarrow 1$ , η λύση κοντά στον οριζοντα (4.31) παίρνει τη μορφή

$$P_{NH}(r) \simeq A_1 r^{-(n+1)\beta} + A_2 r^{(n+1)(\beta+D-2)}, \quad (4.33)$$

με

$$A_1 = A_- [(1+a_*^2) r_h^{n+1}]^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

$$A_2 = A_- [(1+a_*^2) r_h^{n+1}]^{-(\beta+D-2)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (4.34)$$

Στη συνέχεια χρειάζεται να πάρουμε το όριο της λύσης μακριά από τον οριζοντα (4.30) για μικρές τιμές της ακτινικής συντεταγμένης. Τότε, στο όριο  $\omega r \rightarrow 0$ , βρίσκουμε

$$P_{FF}(r) \simeq \frac{B_1 \left( \frac{\omega r}{2} \right) \sqrt{E_l^m + a^2 \omega^2 + 1/4}}{\sqrt{r} \Gamma \left( \sqrt{E_l^m + a^2 \omega^2 + 1/4} + 1 \right)} - \frac{B_2}{\pi \sqrt{r}} \Gamma \left( \sqrt{E_l^m + a^2 \omega^2 + 1/4} \right) \left( \frac{\omega r}{2} \right)^{-\sqrt{E_l^m + a^2 \omega^2 + 1/4}}. \quad (4.35)$$



Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι και οι δύο 'τεντωμένες' ασυμπτωτικές λύσεις (4.33) και (4.35) έχουν την μορφή δυνάμεων ως προς την ακτινική συντεταγμένη  $r$ . Όμως οι εκθέτες είναι διαφορετικοί, και το δέσιμο των λύσεων δεν μπορεί να γίνει ακριβώς. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, θα αναπτύξουμε αυτούς τους εκθέτες στα όρια  $(\omega r_h)^2 \ll 1$  και  $(a/r_h)^2 \ll 1$ . Αυτές οι προσεγγίσεις, θα περιορίσουν τα αποτελέσματά μας για την πιθανότητα απορρόφησης στην περιοχή χαμηλών ενεργειών και μικρής τροχιακής στροφομής της μελανής οπής. Για να προχωρήσουμε, λοιπόν, σε αυτές τις γραμμές, θα χρειαστεί να ξέρουμε τις αναλυτικές εκφράσεις για την γωνιακή ιδιοτιμή  $E_l^m$ . Σύμφωνα με τις αναφορές [125, 126, 127], αυτή μπορεί να γραφτεί σε δυναμοσειρά ως προς την παράμετρο  $(a\omega)$ , και πιο συγκεκριμένα

$$E_l^m = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{lm} (a\omega)^n. \quad (4.36)$$

Για τις ανάγκες της ανάλυσής μας, έχουμε υπολογίσει τους παράγοντες  $f_n^{lm}$ , στις πέντε πρώτες τάξεις:

$$\begin{aligned} E_l^m &= l(l+1) + (a\omega)^2 \frac{[2m^2 - 2l(l+1) + 1]}{(2l-1)(2l+3)} \\ &+ (a\omega)^4 \left\{ \frac{2[-3 + 17l(l+1) + l^2(l+1)^2(2l-3)(2l+5)]}{(2l-3)(2l+5)(2l+3)^3(2l-1)^3} \right. \\ &+ \frac{4m^2}{(2l-1)^2(2l+3)^2} \left[ \frac{1}{(2l-1)(2l+3)} - \frac{3l(l+1)}{(2l-3)(2l+5)} \right] \\ &\left. + \frac{2m^4[48 + 5(2l-1)(2l+3)]}{(2l-3)(2l+5)(2l-1)^3(2l+3)^3} \right\} + \dots, \quad (4.37) \end{aligned}$$

με  $f_1^{lm} = f_3^{lm} = f_5^{lm} = 0$ . Η παραπάνω έκφραση θα χρησιμοποιηθεί σε όλα τα σημεία που εμφανίζεται η  $E_l^m$  στις εξισώσεις (4.33) και (4.35). Η μόνη εξαίρεση θα είναι στους εκθέτες, όπου όροι τάξης  $(a\omega)^2$  ή υψηλότερης, θα αγνοηθούν με σκοπό να γίνει η ένωση των δύο ασυμπτωτικών λύσεων. Ακολουθώντας αυτές τις παραδοχές, οι δύο εκθέτες της εξίσωσης (4.33) παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} -(n+1)\beta &\simeq l + \mathcal{O}(\omega_*^2, a_*^2, a_*\omega_*), \\ (n+1)(\beta + D_* - 2) &\simeq -(l+1) + \mathcal{O}(\omega_*^2, a_*^2, a_*\omega_*). \quad (4.38) \end{aligned}$$

ενώ αυτός της εξίσωσης (4.35) γίνεται

$$\sqrt{E_l^m + a^2\omega^2 + 1/4} \simeq \left( l + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(a_*^2\omega_*^2). \quad (4.39)$$



Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορεί εύκολα να δείχτει ότι οι εξισώσεις (4.33) και (4.35) αποκτούν την ίδια μορφή δυνάμεων ως προς  $r$ , και πιο συγκεκριμένα εκφράζονται σαν άθροισμα δύο όρων με εξαρτήσεις  $r^l$  και  $r^{-(l+1)}$  ως προς την ακτινική συντεταγμένη. Θέτοντας τους αντίστοιχους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες ίσους, καθορίζουμε τις σταθερές  $B_{1,2}$  συναρτήσεως των υπολοίπων παραμέτρων του προβλήματος. Ο λόγος τους, ο οποίος όπως θα δούμε στην συνέχεια, εμφανίζεται στον υπολογισμό της πιθανότητας απορρόφησης  $|A_{l,m}|^2$ , βρίσκεται τότε ίσος με

$$B \equiv \frac{B_1}{B_2} = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\omega r_h (1 + a^2)^{\frac{l+1}{2}}} \right)^{2l+1} \sqrt{E_l^m + a^2 \omega^2 + 1/4} \\ \times \frac{\Gamma^2 \left( \sqrt{E_l^m + a^2 \omega^2 + 1/4} \right) \Gamma(\alpha + \beta + D_* - 1) \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(2 - 2\beta - D_*)}{\Gamma(2\beta + D_* - 2) \Gamma(2 + \alpha - \beta - D_*) \Gamma(1 + \alpha - \beta)}. \quad (4.40)$$

Το τελευταίο βήμα στον υπολογισμό της πιθανότητας απορρόφησης είναι να αναπτύξουμε την λύση μακριά από τον ορίζοντα (4.30) στο όριο που η ακτινική συνιστώσα τείνει στο άπειρο ( $r \rightarrow \infty$ ). Αν το κάνουμε αυτό, παίρνουμε

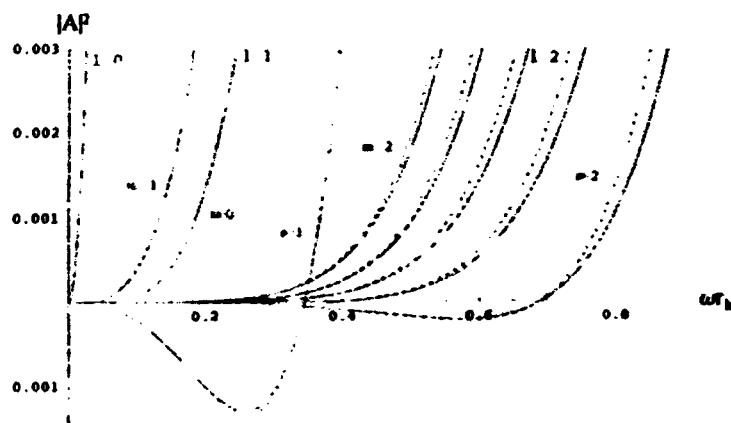
$$P_{FF}(r) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \left[ \frac{(B_1 + iB_2)}{r} e^{-i(\omega r - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \frac{(B_1 - iB_2)}{r} e^{i(\omega r - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \right] \\ = A_{in}^{(\infty)} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + A_{out}^{(\infty)} \frac{e^{i\omega r}}{r}. \quad (4.41)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, σε μεγάλες αποστάσεις από τον ορίζοντα της μελανής οπής, όπου η επίδραση της στροφορμής της μαύρης τρύπας γίνεται αμελητέα, η έκφραση για το βαθμωτό πεδίο παίρνει την μορφή σφαιρικών κυμάτων, όπως ακριβώς στην περίπτωση Schwarzschild [63, 101, 103]. Τότε, η πιθανότητα απορρόφησης ορίζεται μέσω της σχέσης

$$|A_{l,m}|^2 = 1 - \left| \frac{A_{out}^{(\infty)}}{A_{in}^{(\infty)}} \right|^2 = 1 - \left| \frac{B_1 - iB_2}{B_1 + iB_2} \right|^2 \\ = 1 - \left| \frac{B - i}{B + i} \right|^2 = \frac{2i(B^* - B)}{BB^* + i(B^* - B) + 1}. \quad (4.42)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα, μαζί με την έκφραση για το  $B$  της εξίσωσης (4.40), είναι το κύριο αναλυτικό μας αποτέλεσμα για την περίπτωση βαθμωτών πεδίων που διαδίδονται στην Μεμβράνη παρουσία μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής στο όριο των χαμηλών ενεργειών-μικρής τροχιακής στροφορμής για την οπή. Μπορεί επίσης να δείχτει ότι από την έκφραση αυτή, θέτοντας  $a = 0$ ,





Σχήμα 4.1: Πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{l,m}|^2$  για βαθμωτά πεδία στην Μembrάνη, για  $n = 2$ ,  $a_* = 0.4$ , και χβαντικούς αριθμούς (από αριστερά στα δεξιά)  $(l = m = 0)$ ,  $(l = 1, m = -1, 0, 1)$ , και  $(l = 2, m = -2, -1, 0, 1, 2)$ . Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στα αναλυτικά μας αποτελέσματα, και οι διακεκομμένες στα αντίστοιχα ακριβή αριθμητικά.

αναχτάται το γνωστό από την βιβλιογραφία [63] αποτέλεσμα για βαθμωτό πεδίο διαδιδόμενο στο βαρυτικό υπόβαθρο μιας πολυδιάστατης μελανής οπής Schwarzschild.

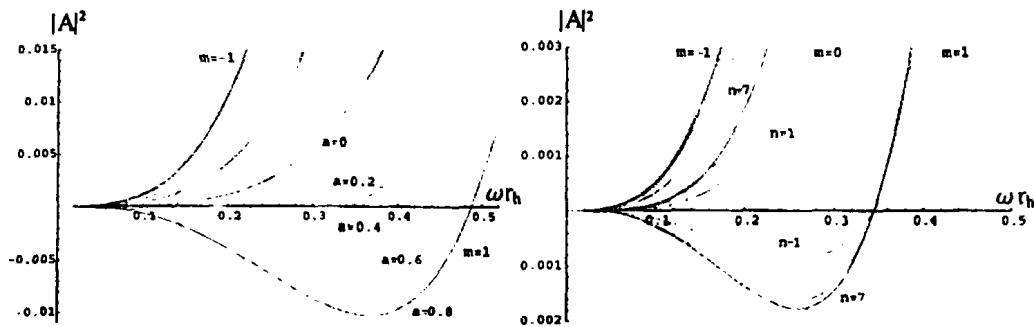
#### 4.3.2 Σύγκριση με την Ακριβή Αριθμητική Λύση

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα εξετάσουμε σε λεπτομέρεια τις ιδιότητες της πιθανότητας απορρόφησης  $|A_{l,m}|^2$  όπως αυτές προκύπτουν από τα αναλυτικά αποτελέσματα του προηγούμενου εδαφίου. Για αυτό το σκοπό θα σχεδιάσουμε την  $|A_{l,m}|^2$  με βάση τις εξισώσεις (4.40) και (4.42) σαν συνάρτηση της παραμέτρου ενέργειας  $\omega\tau_h$  για διάφορες τιμές των υπολοίπων παραμέτρων της θεωρίας, πιο συγκεκριμένα των χβαντικών αριθμών  $(l, m)$  του βαθμωτού σωματιδίου και των παραμέτρων  $(a_*, n)$  της τοπολογίας του χωρόχρονου. Την ίδια στιγμή, θα γίνει μια άμεση σύγκριση με την ακριβή τιμή της  $|A_{l,m}|^2$  που προκύπτει μετά από αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης, όπως αυτή παρουσιάστηκε στις εργασίες [101, 103, 123]. Με τον τρόπο αυτό θα εξετάσουμε την εμβέλεια των αποτελεσμάτων μας μέσα στα όρια τιμών των παραμέτρων.

Στο Σχήμα 4.1 έχουμε σχεδιάσει την πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{l,m}|^2$  για βαθμωτά πεδία, κρατώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου περιστροφής της μελανής οπής ( $a_* = 0.4$ ) και τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων ( $n = 2$ ),







Σχήμα 4.2: Πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{l,m}|^2$  για βαθμωτά σωματίδια στην Μembrάνη, (α) για  $(l = 1, m = -1, 1)$ ,  $n = 2$  και  $a_* = (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ , και (β) για  $(l = 1, m = -1, 0, 1)$ ,  $a_* = 0.4$  και  $n = (1, 2, 4, 7)$ . Ξανά, οι συνεχείς γραμμές αναπαριστούν τα αναλυτικά μας αποτελέσματα, ενώ οι διακεκομμένες τα ακριβή αριθμητικά.

για μια ποικιλία τιμών των παραμέτρων  $(l, m)$ . Στο παρόν κεφάλαιο, τα αναλυτικά μας αποτελέσματα σχεδιάζονται με συνεχείς γραμμές, ενώ τα αντίστοιχα αριθμητικά, όπως αυτά αναπαράγονται από τις εργασίες [101, 103, 123], παρουσιάζονται με διακεκομμένες. Στο Σχήμα 4.1, έχουν σχεδιαστεί και τα δύο σύνολα γραμμών για όλα τα μερικά κύματα και η συμφωνία ανάμεσά τους στις χαμηλές ενέργειες είναι πάρα πολύ καλή. Παρόλο που καθώς ξεφεύγουμε από το πεδίο των χαμηλών ενεργειών αρχίζουν να παρουσιάζονται μικρές αποκλίσεις, εξακολουθούν ποιοτικά να συμφωνούν σε εξαιρετικό βαθμό.

Αν συγκεντρώσουμε, τώρα, την προσοχή μας στην εξάρτηση της πιθανότητας απορρόφησης από τις παραμέτρους του σωματιδίου, παρατηρούμε ότι, όπως και στην περίπτωση Schwarzschild [61], είναι ξανά το χαμηλότερο κύμα  $l = 0$  που κυριαρχεί στις χαμηλές ενέργειες, με όλα τα υψηλότερα να συνεισφέρουν σημαντικά λιγότερο. Αυτή η συμπεριφορά ισχύει για όλες τις τιμές του  $a_*$  και  $n$ , αρκεί να παραμείνουμε συγκεντρωμένοι στις χαμηλές ενέργειες. Κοιτώντας στην συνέχεια την συμπεριφορά μερικών κυμάτων με τον ίδιο αριθμό  $l$  και διαφορετικό  $m$ , εύκολα παρατηρούμε ότι τα κύματα με  $m < 0$  είναι κυρίαρχα, ενώ αύξηση του  $m$  προκαλεί μείωση της πιθανότητας απορρόφησης. Παρατηρούμε επίσης ότι για τα μερικά κύματα με  $m \leq 0$  η πιθανότητα απορρόφησης μένει πάντα θετική, ενώ για εκείνα με  $m > 0$ , πάντα παρουσιάζεται στις χαμηλές ενέργειες μια περιοχή με αρνητικό  $|A_{l,m}|^2$ . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται στην βιβλιογραφία υπερακτινοβολία (superradiance) [128], έχει να κάνει με την ενίσχυση ενός εισερχόμενου κύματος από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα η πιθανότητα ανάκλασης να είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα, και άρα η πιθανότητα απορρόφησης να είναι αρνητική, σύμφωνα με

την σχέση  $|A_{l,m}|^2 = 1 - |R_{l,m}|^2$ . Θα πούμε λίγα περισσότερα για το φαινόμενο αυτό στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Ας εξετάσουμε τώρα την εξάρτηση της πιθανότητας απορρόφησης από τις παραμέτρους του χωρόχρονου. Στο Σχήμα 4.2. παρουσιάζουμε την συμπεριφορά της  $|A_{l,m}|^2$  σε σχέση με την παράμετρο τροχιακής στροφορμής  $a_*$  και τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων  $n$ . Έχουμε επιλέξει να κάνουμε γραφικές παραστάσεις για την ενδεικτική τιμή  $l = 1$ , και έτσι, στο Σχήμα 4.2.α δείχνουμε την συμπεριφορά για τα μερικά κύματα  $m = -1$  (από το κέντρο προς τα αριστερά) και  $m = 1$  (από το κέντρο προς τα δεξιά), για ένα εύρος τιμών της παραμέτρου  $a_*$ . Στο Σχήμα 4.2.β παρουσιάζουμε και τα τρία μερικά κύματα που αντιστοιχούν στο  $l = 1$ , δηλαδή τα  $m = 0, \pm 1$ , για διάφορες τιμές του  $n$ . Όπως και πριν, παρουσιάζονται τόσο τα αναλυτικά, όσο και τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα. Ξανά, η συμφωνία ανάμεσα στα δύο σύνολα γραμμών είναι πάρα πολλή καλή. Με μια προσεκτικότερη ματιά στις γραφικές αυτές παραστάσεις κάποιος μπορεί να παρατηρήσει ότι γενικά, η αύξηση στον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων έχει ως αποτέλεσμα την βελτίωση της συμφωνίας αυτής: αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, σύμφωνα με την εξίσωση (4.32), μία αύξηση στο  $n$  βελτιώνει την συμπεριφορά της συνάρτησης  $f(r)$  στο άπειρο σε σχέση με αυτά που υποθέσαμε, και πιο συγκεκριμένα την κάνει να τείνει πιο γρήγορα στην μονάδα, κάνοντας έτσι την προσέγγισή μας καλύτερη. Επιπλέον, όροι που αγνοήσαμε με σκοπό να επιτύχουμε την ένωση των δύο λύσεων όταν κάναμε την προσέγγιση της χαμηλής ενέργειας και του μικρού  $a_*$ , όπως ο  $K_*^2/A_*^2$  στην εξίσωση (4.28), γίνονται ακόμα μικρότεροι για μεγάλες τιμές του  $n$ , βελτιώνοντας έτσι την προσέγγισή μας.

Σύμφωνα με το Σχήμα 4.2.α, για σταθερή τιμή του  $n$ , τα μερικά κύματα που δεν παρουσιάζουν υπερακτινοβολία, με  $m \leq 0$  (παρόλο που δεν εμφανίζεται στο σχήμα, η συμπεριφορά για  $m = 0$  είναι παρόμοια αυτής με  $m = -1$ ) ενισχύονται με την αύξηση της τροχιακής στροφορμής της μελανής οπής στις χαμηλές ενέργειες, ενώ τα κύματα που παρουσιάζουν υπερακτινοβολία, με  $m > 0$ , μειώνονται, τόσο στην περιοχή του φάσματος που εμφανίζεται το εν λόγω φαινόμενο, όσο και στο υπόλοιπο φάσμα, πάντα στις χαμηλές ενέργειες. Στρέφοντας τώρα την προσοχή μας στο Σχήμα 4.2.β, παρατηρούμε ότι, για σταθερή τιμή του  $a_*$ , μια αύξηση στον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων  $n$  οδηγεί σε ενίσχυση της τιμής της πιθανότητας απορρόφησης για τα κύματα που δεν παρουσιάζουν υπερακτινοβολία. Για αυτά που παρουσιάζουν, η συμπεριφορά του  $|A_{l,m}|^2$  εξαρτάται από τις περιοχές ενεργειών που κοιτάμε: ενώ μειώνεται στις περιοχές ενεργειών που έχουμε υπερακτινοβολία, στις περιοχές που δεν έχουμε αυξάνεται. Από τα δύο σχήματα γίνεται εμφανές ότι το φαινόμενο αυτό είναι πιο σημαντικό όσο αυξάνει το  $a_*$  ή το  $n$ . Αυτή η ενίσχυση, για βαθμωτά πεδία περιορισμένα στην Μεμβράνη, τόσο σε σχέση με την στροφορμή, όσο και με τον αριθμό των διαστάσεων του σύμπαντος, έχει



σημειωθεί και σε παλαιότερες εργασίες της βιβλιογραφίας [101, 102, 107, 108].

### 4.3.3 Ασυμπτωτικό Όριο της Ενεργού Διατομής στις Χαμηλές Ενέργειες

Το τελευταίο κομμάτι της ανάλυσης μας σε σχέση με την συμπεριφορά της πιθανότητας απορρόφησης  $|A_{l,m}|^2$  στις χαμηλές ενέργειες, θα είναι η εξαγωγή, από τις εξισώσεις (4.40) και (4.42) μίας απλοποιημένης έκφρασης για το όριο που η ενέργεια τείνει στο μηδέν,  $\omega \rightarrow 0$ . Αυτή η έκφραση θα χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει κάποια από τα χαρακτηριστικά της  $|A_{l,m}|^2$  που συζητήθηκαν στο προηγούμενο εδάφιο. Επιπλέον, από την έκφραση αυτή, θα καθοριστεί και η ασυμπτωτική τιμή της αντίστοιχης ενεργού διατομής απορρόφησης, για βαθμωτά πεδία που διαδίδονται στην Μembrάνη, παρουσία μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής.

Ξεκινάμε την ανάλυσή μας σημειώνοντας ότι, σύμφωνα με την εξίσωση (4.40), στο όριο  $\omega \rightarrow 0$  είναι  $B \sim \omega^{-(2l+1)}$  και άρα  $BB^* \gg i(B^* - B) \gg 1$ . Τότε, η εξίσωση (4.42) απλοποιείται ως εξής:

$$|A_{l,m}|^2 \simeq \frac{2i(B^* - B)}{BB^*} = 2i \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B^*} \right). \quad (4.43)$$

Αντικαθιστώντας το  $B$  από την σχέση (4.40) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το  $\alpha$  είναι φανταστικός, παίρνουμε

$$\begin{aligned} |A_{l,m}|^2 &= \frac{-2i\pi (\omega r_h/2)^{2l+1}}{(l + \frac{1}{2}) \Gamma^2(l + \frac{1}{2}) (1 + a_*^2)^{-\frac{2l+1}{n+1}} \Gamma(2 - 2\beta - D_*)} \times \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta + D_* - 1) \Gamma(-\alpha + \beta + D_* - 1) \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(-\alpha + \beta)} \times \\ &\quad \left[ \Gamma(2 + \alpha - \beta - D_*) \Gamma(-\alpha + \beta + D_* - 1) \Gamma(1 + \alpha - \beta) \Gamma(-\alpha + \beta) - \right. \\ &\quad \left. \Gamma(2 - \alpha - \beta - D_*) \Gamma(\alpha + \beta + D_* - 1) \Gamma(1 - \alpha - \beta) \Gamma(\alpha + \beta) \right] \\ &= \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_3, \end{aligned} \quad (4.44)$$

όπου  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  ορίζονται από τις ποσότητες που χωρίζονται από το σύμβολο  $\times$  στην παραπάνω σχέση. Ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας καταρχήν στο  $\Sigma_3$ , το οποίο με την βοήθεια της ταυτότητας  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$  [94] για τις Γάμμα συναρτήσεις μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\Sigma_3 = \frac{-\pi^2 \sin(2\pi\alpha) \sin \pi(2\beta + D_*)}{\sin \pi(\alpha + \beta + D_*) \sin \pi(-\alpha + \beta + D_*) \sin \pi(\alpha + \beta) \sin \pi(-\alpha + \beta)} \quad (4.45)$$



Από την ύπαρξη του όρου  $\omega^{2l+1}$  στην εξίσωση (4.44), γίνεται φανερό ότι η έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης στις πολύ χαμηλές ενέργειες, κυριαρχείται από τα χαμηλότερα μερικά κύματα, μια ιδιότητα που βρίσκεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Τότε, υποθέτοντας ότι το  $m$  είναι μικρό και  $a_0 < 1$ , το όριο  $\omega \rightarrow 0$  είναι ισοδύναμο με  $\alpha \rightarrow 0$  όπως φαίνεται από τις σχέσεις (4.17, 4.24). Αναπτύσσοντας τους παράγοντες  $\Sigma_3$  και  $\Sigma_2$  ως προς το  $\alpha$  και κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους, παίρνουμε

$$\Sigma_3 = -\frac{2\pi^3 \alpha \sin \pi(2\beta + D_0)}{\sin^2 \pi(\beta + D_0) \sin^2 \pi\beta}, \quad \Sigma_2 = \frac{1}{\Gamma(\beta + D_0 - 1)^2 \Gamma(\beta)^2}. \quad (4.46)$$

Χρησιμοποιώντας, ακόμα, την σχέση  $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\pi/z \sin \pi z$  [94] μπορούμε να ξαναγράψουμε την συνολική έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης στις χαμηλές ενέργειες ως

$$|A_{l,m}|^2 = \frac{4\pi (\omega r_h/2)^{2l+1} K_0 \sin^2 \pi(2\beta + D_0) \Gamma^2(2\beta + D_0 - 2)}{A_0 (1 + a_0^2)^{-\frac{2l+1}{n+1}} (l + \frac{1}{2}) \Gamma^2(l + \frac{1}{2})} \times \frac{\Gamma^2(1 - \beta)(2 - D_0 - 2\beta)}{\Gamma^2(\beta + D_0 - 1) \sin^2 \pi(\beta + D_0)}, \quad (4.47)$$

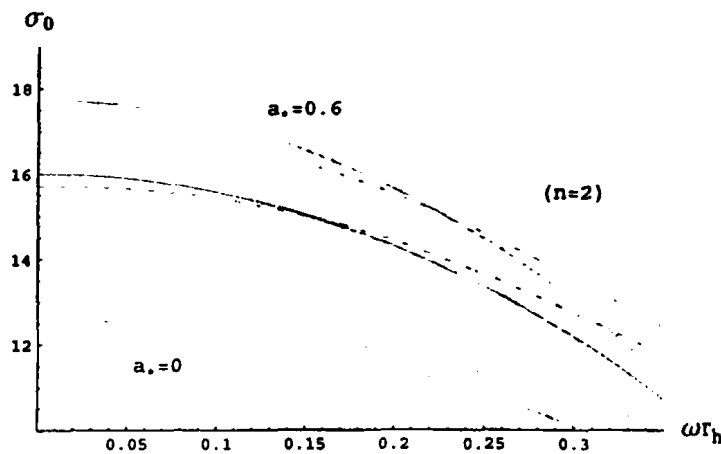
Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό  $\alpha \equiv -iK_0/A_0$ , όπου, από την εξίσωση (4.17) έχουμε

$$K_0 = (1 + a_0^2) \omega_0 - a_0 m = r_h (1 + a_0^2) (\omega - m \Omega). \quad (4.48)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.28) για το  $\beta$ , κάποιος μπορεί εύκολα να δει ότι η ποσότητα  $(2 - D_0 - 2\beta)$  είναι πάντα θετική, ενώ το ίδιο ισχύει για  $A_0 \equiv (n + 1) + (n - 1)a_0^2$ , για όλες τις τιμές του  $a_0$  και  $n > 0$ . Έτσι λοιπόν, το πρόσημο της τιμής του  $|A_{l,m}|^2$  καθορίζεται από το πρόσημο του  $K_0$  ή, ισοδύναμα, από το  $(\omega - m \Omega)$ . Αρνητικό πρόσημο για αυτόν τον όρο προκύπτει μόνο για  $m > 0$ , κάτι που σηματοδοτεί και την εμφάνιση της υπερακτινοβολίας, με την  $|A_{l,m}|^2$  να αποκτάει αρνητική τιμή. Το φαινόμενο της υπερακτινοβολίας ξεκινάει στις χαμηλές ενέργειες και εκτείνεται στο φάσμα ενεργειών  $0 < \omega < \omega_0 \equiv m \Omega$ . Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της παραμέτρου περιστροφής  $a_0$ , τόσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα περιστροφής  $\Omega$  της μελανής οπής και τόσο μεγαλώνει η περιοχή ενεργειών στις οποίες εμφανίζεται το φαινόμενο. Αυτή η παρατήρηση συμφωνεί και με τα αποτελέσματα του υποκεφαλαίου 4.3.2.

Στην συνέχεια θα εστιάσουμε στο κυρίαρχο κύμα, με κβαντικούς αριθμούς  $l = m = 0$ . Όπως θα δούμε, αυτό είναι το μόνο κύμα με μη-μηδενική τιμή της ενεργού διατομής στο όριο που η ενέργεια τείνει στο μηδέν. Για να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την σχέση (4.47), θα αναπτύξουμε την έκφραση





Σχήμα 4.3: Ενεργός διατομή απορρόφησης  $\sigma_0$  (σε μονάδες  $r_h^2$ ) για το χαμηλότερο κύμα  $l = 0$ , για  $n = 2$  και  $a_*$  να παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 0.6, για την περίπτωση βαθμωτού πεδίου στην Μembrάνη. Όπως και πριν οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στα αναλυτικά μας αποτελέσματα, και οι διακεκομμένες στα αριθμητικά

για το  $\beta$  στο όριο  $\omega \rightarrow 0$ . Είναι εύκολο να δείξουμε ότι  $\beta = 0 + \mathcal{O}(\omega^2)$ , κάτι που μας επιτρέπει να γράψουμε

$$|\mathcal{A}_0|^2 = \frac{4 (\omega r_h)^2 (1 + a_*^2)}{A_* (1 + a_*^2)^{-1/(n+1)} (2 - D_*)} + \dots \quad (4.49)$$

Η ενεργός διατομή σκέδασης που αντιστοιχεί στο κυρίαρχο πρώτο κύμα  $l = 0$ , είναι τότε [55, 129, 130]

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{\omega^2} |\mathcal{A}_0|^2 = 4\pi (r_h^2 + a^2) \frac{(1 + a_*^2)^{1/(n+1)}}{[(n+1) + (n-1)a_*^2] (2 - D_*)} + \dots \quad (4.50)$$

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η ενεργός διατομή για το χαμηλότερο κύμα δίνει μία μη-μηδενική ασυμπτωτική τιμή καθώς  $\omega \rightarrow 0$ . Μπορούμε ακόμα να δούμε από την εξίσωση (4.47) ότι η συμπεριφορά της πιθανότητας απορρόφησης για οποιοδήποτε από τα ανώτερα κύματα θα καθορίζεται στις χαμηλές ενέργειες από τον όρο  $\omega^{2l+2}$ , ο οποίος και οδηγεί σε ενεργό διατομή ανάλογη του  $\omega^{2l}$ . Έτσι, όλα τα κύματα με  $l \neq 0$  θα έχουν διατομή ίση με μηδέν στο όριο  $\omega \rightarrow 0$ .

Για την περίπτωση βαθμωτών σωματιδίων που διαδίδονται στο υπόβαθρο της προβεβλημένης μετρικής πάνω στην Μembrάνη μιας μελανής οπής τύπου Schwarzschild, έχειδειχθεί [61, 63] ότι η ασυμπτωτική τιμή της ενεργού διατομής απορρόφησης για το πρώτο, κυρίαρχο κύμα, είναι ίση με την επιφάνεια του



ορίζοντα της αντίστοιχης τετραδιάστατης μελανής οπής,  $4\pi r_h^2$  ανεξάρτητα από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Θα θέλαμε να δείξουμε ότι μία παρόμοια σχέση ισχύει και για την περίπτωση μιας περιστρεφόμενης οπής. Σύμφωνα με την εξίσωση (4.50), η  $\sigma_0$  είναι όντως ανάλογη της επιφάνειας μιας τετραδιάστατης περιστρεφόμενης μελανής οπής  $4\pi(r_h^2 + a^2)$ . Παρόλα αυτά, η ακριβής έκφραση περιλαμβάνει έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα, ο οποίος εξαρτάται τόσο από το  $a_*$ , όσο και από το  $n$ . Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζουμε το  $\sigma_0$ , για σταθερό  $n$  και διάφορες τιμές του  $a_*$ , χρησιμοποιώντας ξανά την αναλυτική έκφραση, καθώς και τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα. Οι γραμμές που αντιστοιχούν στα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι όντως η ασυμπτωτική τιμή της ενεργού διατομής στις χαμηλές ενέργειες είναι ίση με την επιφάνεια του ορίζοντα της οπής, ανεξαρτήτως του αριθμού των επιπλέον διαστάσεων. Για μικρές τιμές του  $a_*$ , ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας που εμφανίζεται στην σχέση (4.50) είναι πολύ κοντά στη μονάδα και το αναλυτικό μας αποτέλεσμα αναπαράγει το αριθμητικό με μεγάλη συμφωνία. Καθώς το  $a_*$  αυξάνει όμως, η εμβέλεια της αναλυτικής μας έκφρασης μειώνεται και, όπως είναι αναμενόμενο, αρχίζουν να παρουσιάζονται αποκλίσεις. Αντιστρόφως, αν κρατήσουμε το  $a_*$  σταθερό και μεταβάλλουμε το  $n$ , μία παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζεται, με τιμές  $n \leq 1$  να οδηγούν, γενικά, σε τιμή μικρότερη από την ακριβή και αντίστοιχα τιμές  $n \geq 2$  σε τιμή μεγαλύτερη από την ακριβή. Το μέγεθος της απόκλισης εξαρτάται πάλι από την τιμή του  $a_*$ . Το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνει την γενική συμπεριφορά του χαμηλότερου κύματος ενός βαθμωτού σωματιδίου, σύμφωνα με την οποία, η μερική ενεργός διατομή απορρόφησης είναι ίση με την επιφάνεια του ορίζοντα της μελανής οπής, στις χαμηλές ενέργειες. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει όχι μόνο για μια σφαιρικά συμμετρική μετρική στην Μεμβράνη αλλά και για μία αξονικά συμμετρική, και είναι ανεξάρτητο του αριθμού των χωροειδών διαστάσεων που είναι κάθετες στην Μεμβράνη. Αυτό το αποτέλεσμα έχει αναπαραχθεί επίσης για την ειδική περίπτωση του χωρόχρονου πέντε διαστάσεων στην εργασία [110].

#### 4.4 Πιθανότητα Απορρόφησης στις Υψηλές Ενέργειες

Σε αυτό το Υποκεφάλαιο θα στρέψουμε την προσοχή μας στην περιοχή των υψηλών ενεργειών, όπου και θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο υπολογισμού της πιθανότητας απορρόφησης χρησιμοποιώντας πάλι την τεχνική συγκόλλησης των λύσεων που περιγράψαμε και στο Κεφάλαιο 4.3. Για αυτό το σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε την λύση κοντά στον ορίζοντα που βρήκαμε στο Υποκεφάλαιο 4.3.1, και θα κατασκευάσουμε μια προσεγγιστική λύση μακριά από τον ορίζοντα, έγκυρη στις υψηλές ενέργειες, που θα μας επιτρέψει να κάνου-



με την ένωση των λύσεων στην εν λόγω περιοχή ενεργειών. Στην συνέχεια, θα συγκρίνουμε την πιθανότητα απορρόφησης που θα υπολογιστεί με την μέθοδο αυτή με τα ακριβή αναλυτικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Τέλος, γενικεύοντας παλαιότερα αποτελέσματα για μελανές οπές Schwarzschild, θα υπολογιστεί το όριο της γεωμετρικής οπτικής για την τιμή της ενεργού διατομής απορρόφησης, και θα διερευνηθεί η σχέση της με ασυμπτωτικές τιμές για τις υψηλές ενέργειες, όπως αυτές προκύπτουν από την ακριβή αριθμητική ανάλυση.

#### 4.4.1 Αναλυτική Κατασκευή της Λύσης

Για να κατασκευάσουμε μια λύση για όλο το χώρο, που να ισχύει υψηλές ενέργειες, είναι απαραίτητο να βρούμε ένα τρόπο να κάνουμε την σύνδεση των δύο λύσεων, της λύσης κοντά στον ορίζοντα και της λύσης μακριά από αυτόν, χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουμε στο όριο ( $\omega r_h \ll 1$ ) που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 4.3.1. Για αυτό το λόγο, θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια νέα ασυμπτωτική λύση μακριά από τον ορίζοντα, η οποία θα ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης μόνο στο όριο που οι ενέργειες είναι υψηλές. Επιπλέον, η μορφή της λύσης πρέπει να είναι τέτοια ώστε, όταν την επεκτείνουμε προς μικρές τιμές της ακτινικής συντεταγμένης να έχει ως όριο μια έκφραση σε μορφή δυνάμεων ως προς  $r$  με εκθέτες ίδιους με αυτούς που εμφανίζονται στην λύση κοντά στον ορίζοντα μετά την επέκταση. Αυτό το τελευταίο χαρακτηριστικό θα μας επιτρέψει να κάνουμε την σύνδεση των λύσεων στην ενδιάμεση περιοχή. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η λύση κοντά στον ορίζοντα, μετά την επέκταση, βρέθηκε να είναι της μορφής, εξίσωση (4.33)

$$P_{NH} \simeq A_1 r^{-(n+1)\beta} + A_2 r^{(n+1)(\beta+D.-2)} \equiv A_1 r^{\beta_1} + A_2 r^{\beta_2}. \quad (4.51)$$

Η διαφορική εξίσωση την οποία θα πρέπει να ικανοποιεί η λύση μας είναι η εξίσωση (4.10) στο όριο  $r \gg r_h$ , ή ισοδύναμα

$$\frac{d^2 P_{FF}}{dz^2} + \frac{2z}{z^2 + a_1^2} \frac{dP_{FF}}{dz} + \left(1 - \frac{E_l^m + a_1^2}{z^2 + a_1^2}\right) P_{FF}(z) = 0, \quad (4.52)$$

όπου έχουμε κάνει την αλλαγή της μεταβλητής  $z = \omega r$  και έχουμε ορίσει για ευκολία την ποσότητα  $a_1 = a\omega$ . Ας εξετάσουμε καταρχήν την εξής, δοκιμαστική λύση της παραπάνω εξίσωσης:

$$P_{FF} = e^{-i\omega r} r^{\beta_1} M(1 + \beta_1, 2 + 2\beta_1; 2i\omega r), \quad (4.53)$$

όπου  $M(\hat{a}, \hat{b}; w)$  είναι η συνάρτηση Kummer του πρώτου είδους [94]. Λύνοντας την (4.53) για  $M(\hat{a}, \hat{b}; w)$  και αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση που



ικανοποιούν οι συναρτήσεις Kummer [94],

$$\frac{d^2 M}{dw^2} + (\hat{b} - w) \frac{dM}{dw} - \hat{a} M(w) = 0, \quad (4.54)$$

με  $\hat{a} = 1 + \beta_1$ ,  $\hat{b} = 2 + 2\beta_1$  και  $w = 2i\omega r$  παίρνουμε τελικά την εξίσωση

$$\frac{d^2 P_{FF}}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dP_{FF}}{dz} + \left(1 - \frac{\beta_1(\beta_1 + 1)}{z^2}\right) P_{FF} = 0. \quad (4.55)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (4.55) από την (4.52), βρίσκουμε

$$2 \frac{dP_{FF}}{dz} \left( \frac{z}{z^2 + a_1^2} - \frac{1}{z} \right) + P_{FF} \left( \frac{\beta_1(\beta_1 + 1)}{z^2} - \frac{E_l^m + a_1^2}{z^2 + a_1^2} \right) = 0 + \mathcal{O}(1/z^2).$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, για μεγάλα  $z = \omega r$ , η λύση (4.53) που κατασκευάσαμε ικανοποιεί την εξίσωσή μας μακριά από τον ορίζοντα ( $r \gg r_h$ ), σχέση (4.52), (έως δεύτερη τάξη ως προς  $1/z$ ). Έτσι, στο όριο  $\omega \rightarrow \infty$ , η δοκιμαστική μας λύση (4.53) αποτελεί όντως μια καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης της εξίσωσης κίνησης στην απομακρυσμένη από τον ορίζοντα περιοχή.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε μία δεύτερη λύση της εξίσωσης (4.52) της μορφής

$$P_{FF} = e^{-i\omega r} r^{-\beta_2 - 1} U(-\beta_2, -2\beta_2; 2i\omega r), \quad (4.56)$$

με  $U(\hat{a}, \hat{b}; w)$  την συνάρτηση Kummer του δεύτερου είδους. Η δεύτερη αυτή λύση προκύπτει από την πρώτη με την εναλλαγή  $\beta_1 \rightarrow -1 - \beta_2$ , που διατηρεί την μορφή της εξίσωσης (4.55). Έτσι προκύπτει ότι και αυτή επίσης είναι μια καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης της εξίσωσης (4.52) στο όριο  $\omega \rightarrow \infty$ . Άρα, η γενική λύση στις περιοχές μακριά από τον ορίζοντα της οπής, για μεγάλες ενέργειες του πεδίου, παίρνει τη μορφή

$$P_{FF} = B_+ e^{-i\omega r} r^{\beta_1} M(\beta_1 + 1, 2\beta_1 + 2, 2i\omega r) + B_- e^{-i\omega r} r^{-\beta_2 - 1} U(-\beta_2, -2\beta_2, 2i\omega r). \quad (4.57)$$

Οι συναρτήσεις Kummer έχουν χρησιμοποιηθεί και στο παρελθόν για την εξεύρεση λύσεων στις απομακρυσμένες από τον ορίζοντα περιοχές για πεδία γενικού σπιν  $s$  [54, 64], όμως σε αυτές τις περιπτώσεις η μελανή οπή ήταν σφαιρικά συμμετρική, τύπου Schwarzschild. Μπορεί κάποιος εύκολα να ελέγξει ότι στο όριο  $a \rightarrow 0$ , η παραπάνω λύση ταυτίζεται με την λύση για ένα βαθμωτό πεδίο που διαδίδεται μακριά από τον ορίζοντα μιας σφαιρικά συμμετρικής μελανής οπής πάνω στην Μεμβράνη.





Ως έναν επιπλέον, ανεξάρτητο έλεγχο της ισχύος της ανάλυσης που παρουσιάσαμε, μπορούμε να απαιτήσουμε η εξίσωση (4.55) να ταυτίζεται ακριβώς με την εξίσωση (4.52). Τότε οδηγούμαστε στην συνθήκη

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{E_l^m + a^2\omega^2 + 1/4} = -\frac{1}{2} + \nu. \quad (4.58)$$

Αλλά τότε, δεδομένου ότι  $\hat{a} = \nu + 1/2$  και  $\hat{b} = 2\nu + 1$ , η συνάρτηση Kummer του πρώτου είδους, γίνεται  $M(\nu + 1/2, 2\nu + 1; 2i\omega r) \sim e^{i\omega r} r^{-\nu} J_\nu(r)$  [94]. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, όπως επίσης και ένα παρόμοιο για την συνάρτηση Kummer του δεύτερου είδους  $U$ , με την βοήθεια των εξισώσεων (4.53) και (4.56), μπορούμε να δούμε ότι αναχτάται η λύση μακριά από τον ορίζοντα (4.30) που βρήκαμε στο Υποκεφάλαιο 4.3.1, όπως ήταν αναμενόμενο.

Παρόλα αυτά, στο παρόν Υποκεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί η προσεγγιστική λύση (4.57), καθώς, όπως είπαμε και πριν, θα μας επιτρέψει να πετύχουμε μία ομαλή σύνδεση ανάμεσα στις αναλυτικά εκτεταμένες λύσεις, κοντά και μακριά από τον ορίζοντα, στις υψηλές ενέργειες, κάτι που όπως είδαμε δεν ήταν δυνατόν να γίνει αν αντί αυτής χρησιμοποιούσαμε την ασυμπτωτική λύση (4.30). Για αυτό το σκοπό, θα επεκτείνουμε την έκφραση (4.57) σε μικρές τιμές του  $\omega r$ , χρησιμοποιώντας τις εξής ταυτότητες για τις συναρτήσεις Kummer [94]:

$$M(a, b, z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1, \quad U(a, b, z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} \quad (4.59)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω δύο σχέσεις στην εξίσωση (4.57) βρίσκουμε

$$P_{FF} = B_+ r^{\beta_1} + B_- r^{\beta_2} \frac{\Gamma(-2\beta_2 - 1)}{\Gamma(-\beta_2)} (2i\omega)^{2\beta_2+1}. \quad (4.60)$$

Όπως είχαμε σχεδιάσει, η λύση μακριά από τον ορίζοντα περιέχει δυνάμεις του  $r$  οι οποίες ταιριάζουν απόλυτα με αυτές που εμφανίζονται στην λύση κοντά στον ορίζοντα μετά την επέκταση, (4.51). Ταυτοποιώντας επίσης και τους αντίστοιχους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες, βρίσκουμε εύκολα

$$\tilde{B} \equiv \frac{B_-}{B_+} = \frac{[(1 + a_*^2) r_h^{n+1}]^{2-2\beta-D_*}}{(2i\omega)^{2\beta_2+1}} \times \frac{\Gamma(2\beta + D_* - 2) \Gamma(2 + \alpha - \beta - D_*) \Gamma(1 + \alpha - \beta) \Gamma(-\beta_2)}{\Gamma(\alpha + \beta + D_* - 1) \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(2 - 2\beta - D_*) \Gamma(-2\beta_2 - 1)} \quad (4.61)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι συντελεστές  $D_*$ ,  $\alpha$  και  $\beta$  δίνονται στις εξισώσεις (4.18), (4.24) και (4.28), αντίστοιχα, ενώ τα  $\beta_{1,2}$  ορίζονται στη σχέση (4.51).

Για να μπορέσουμε τελικά να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης, θα χρειαστεί να πάρουμε το όριο της απομακρυσμένης λύσης (4.57) για μεγάλες



τιμές της ακτινικής παραμέτρου  $r \rightarrow \infty$ . Θα χρησιμοποιήσουμε ξανά γνωστές [94] ταυτότητες για τις συναρτήσεις Kummer. Συγκεκριμένα για μεγάλα  $|z|$  ισχύει

$$\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(b)} \simeq \frac{e^{i\pi a} z^{-a}}{\Gamma(b-a)} + \frac{e^z z^{a-b}}{\Gamma(a)} \quad (4.62)$$

$$U(a, b, z) \simeq z^{-a} \quad (4.63)$$

Με βάση αυτές τις δύο σχέσεις μπορούμε να γράψουμε το όριο της (4.57)

$$P_{FF} \simeq \frac{e^{-i\omega r}}{r} \left[ B_+ \frac{\Gamma(2+2\beta_1)}{\Gamma(1+\beta_1)} \frac{e^{i\pi(\beta_1+1)}}{(2i\omega)^{\beta_1+1}} + B_- (2i\omega)^{\beta_2} \right] + \frac{e^{i\omega r}}{r} \frac{B_+ \Gamma(2+2\beta_1)}{\Gamma(1+\beta_1) (2i\omega)^{\beta_1+1}} + \dots \equiv A_{in}^{(\infty)} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + A_{out}^{(\infty)} \frac{e^{i\omega r}}{r}. \quad (4.64)$$

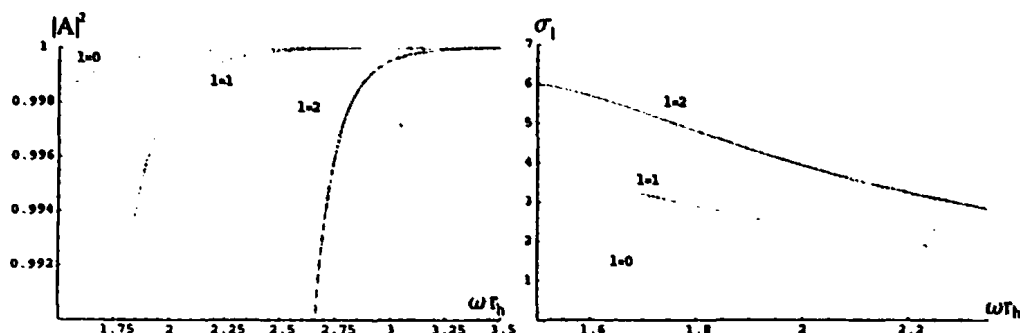
Όπως βλέπουμε, η λύση μακριά από τον ορίζοντα (4.57) εκφράζεται με τη μορφή σφαιρικών κυμάτων στο άπειρο. Μπορούμε λοιπόν πάλι να χρησιμοποιήσουμε τον συνήθη ορισμό για την πιθανότητα απορρόφησης για να βρούμε την τιμή της:

$$|A_{i,m}|^2 = 1 - \left| \frac{A_{out}^{(\infty)}}{A_{in}^{(\infty)}} \right|^2 = 1 - \left| \frac{\Gamma(2+2\beta_1)}{\Gamma(2+2\beta_1)e^{i\pi(\beta_1+1)} + B \Gamma(\beta_1+1)(2i\omega)^{\beta_1+\beta_2+1}} \right|^2. \quad (4.65)$$

Η σχέση αυτή, σε συνδυασμό με την εξίσωση (4.61), δίνει την πιθανότητα απορρόφησης για βαθμωτά πεδία και ισχύει μόνο στις υψηλές ενέργειες, χωρίς όμως περιορισμούς για την τιμή του  $a$ , εκτός από το άνω όριο που θέτει η εξίσωση (4.7). Η αντίστοιχη τιμή της ενεργού διατομής σχέδασης, έγκυρη στις υψηλές ενέργειες, βρίσκεται χρησιμοποιώντας τον τύπο  $\sigma_{i,m} = \pi |A_{i,m}|^2 / \omega^2$  και την εξίσωση (4.65).

Στα Σχήματα 4.4.α και 4.4.β παρουσιάζουμε την πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{i,m}|^2$  και την ενεργό διατομή  $\sigma_{i,m}$  αντίστοιχα, για βαθμωτά πεδία στην Μεμβράνη, στις υψηλές ενέργειες. Όπως και πριν, οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στα αναλυτικά μας αποτελέσματα που προκύπτουν από την εξίσωση (4.65), και οι διακεκομμένες γραμμές από την ακριβή αριθμητική ανάλυση του προβλήματος. Στο Σχήμα 4.4.α παριστάνεται η πιθανότητα απορρόφησης για την ενδεικτική περίπτωση των τριών χαμηλότερων μερικών κυμάτων. Παρατηρούμε ότι τα αναλυτικά μας αποτελέσματα ταιριάζουν απόλυτα με τα αντίστοιχα αριθμητικά, σε αρκετά μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $\omega$  της ενέργειας. Όσο μικρότερη είναι η τιμή του κβαντικού αριθμού  $l$ , τόσο πιο γρήγορα συμπίπτουν τα δύο αποτελέσματα. Καθώς η ενέργεια αυξάνει, η πιθανότητα απορρόφησης πηγαίνει γρήγορα στη μονάδα. Όπως είναι αναμενόμενο, σωματίδια πολύ





Σχήμα 4.4: (α) Πιθανότητα απορρόφησης  $|A_l|^2$  για βαθμωτά πεδία που διαδίδονται στην Μembrάνη, για τα κύματα με  $l = 0, 1, 2$  και  $m = 0$ , και για  $n = 2$  και  $a_* = 0.3$ , και (β) ενεργός διατομή απορρόφησης  $\sigma_l$  (σε μονάδες  $r_h^2$ ), για τα κύματα  $l = 0, 1, 2$  (αθροισμένα πάνω στο  $m$ ), και για τις ίδιες τιμές των  $n$  και  $a_*$  όπως πριν. Ξανά, οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στα αναλυτικά μας αποτελέσματα, ενώ οι διακεκομμένες ατα ακριβή αριθμητικά.

υψηλών ενεργειών μπορούν πάντα να ξεφεύγουν από το βαρυτικό πεδίο έξω από τον ορίζοντα της μελανής οπής. Αυτή η ασυμπτωτική συμπεριφορά, παρόλο που αναπαράγεται από τα αναλυτικά μας αποτελέσματα, δεν μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την ποιότητα της συμφωνίας των δύο συνόλων αποτελεσμάτων. Για αυτό το λόγο στο Σχήμα 4.4.β έχουμε σχεδιάσει την ενεργό διατομή της απορρόφησης για τα τρία χαμηλότερα μερικά κύματα, αθροισμένα ως προς το  $m$ . Η συμφωνία ανάμεσα στα αναλυτικά και τα αριθμητικά αποτελέσματα τώρα φαίνεται πολύ πιο ξεκάθαρα: για το  $l = 0$  τα δύο αποτελέσματα συμφωνούν πλήρως, ενώ για  $l = 1, 2$ , η συμφωνία γίνεται καλύτερη σε όλο και μεγαλύτερες ενέργειες. Από το σημείο που θα ταυτιστούν και έπειτα, τα δύο αποτελέσματα παραμένουν ταυτόσημα καθώς η ενέργεια  $\omega$  αυξάνει, μέχρι να φτάσουν ασυμπτωτικά στο μηδέν. Δεδομένης της αυξανόμενης δυσκολίας στο να παράγει κανείς την ακριβή αριθμητική λύση για μεγάλο εύρος ενεργειών (βλέπε για παράδειγμα [61, 103]), η παραπάνω λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκταθεί μια αριθμητική επίλυση σε αυθαίρετα μεγάλες τιμές της ενέργειας.

#### 4.4.2 Η Ασυμπτωτική Συμπεριφορά στις Υψηλές Ενέργειες και το Όριο της Γεωμετρικής Οπτικής

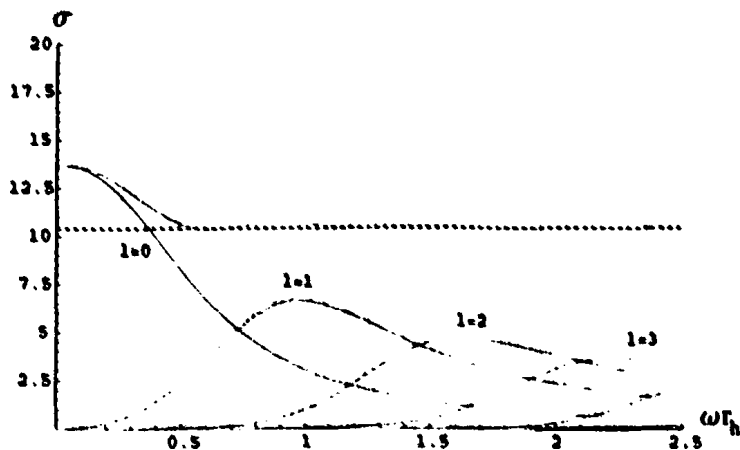
Καθώς η ενέργεια του σωματιδίου που εκπέμπεται από την μελανή οπή αυξάνει, η συνολική ενεργός διατομή  $\sigma_{\text{abs}} = \sum_{l,m} \sigma_{l,m}$  προσεγγίζει μία ασυμπτωτική τιμή. Παρόλο που η ενεργός διατομή που αντιστοιχεί σε καθένα από τα μερικά

κύματα τείνει στο μηδέν στις υψηλές ενέργειες, φτάνοντας στην μεγαλύτερη τιμή της σε ολοένα και μεγαλύτερες τιμές του  $\omega$  καθώς το  $l$  αυξάνει, η υπέρθεσή τους δημιουργεί μία σταθερή ασυμπτωτική τιμή. Αυτό το ασυμπτωτικό όριο έχει μελετηθεί στο παρελθόν για την περίπτωση μιας μελανής οπής Schwarzschild, τόσο στην τετραδιάστατη περίπτωση [22, 56, 57, 58, 59, 60], όσο και σε αυτήν των  $(4+n)$  διαστάσεων [61, 62]. Για την περίπτωση της περιστρεφόμενης μελανής οπής η αντίστοιχη μελέτη έγινε στις τέσσερις διαστάσεις στην [131] και στις πέντε διαστάσεις στην [110].

Εδώ θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια αναλυτική μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς στις υψηλές ενέργειες, για την ολική ενεργό διατομή απορρόφησης βαθμωτών πεδίων που διαδίδονται στην Μembrάνη γύρω από μία περιστρεφόμενη μελανή οπή, παρουσία  $(4+n)$  επιπλέον χωρικών διαστάσεων. Όπως θα δούμε, όπως και στην περίπτωση της μελανής οπής Schwarzschild, ο αριθμός των επιπλέον αυτών διαστάσεων, παρόλο που το πεδίο δεν διαδίδεται σε αυτές, επηρεάζει την τιμή της ασυμπτωτικής τιμής της ενεργού διατομής. Επίσης θαδειχθεί ότι η τιμή της παραμέτρου γωνιακής στροφορμής  $a_*$  της μελανής οπής επηρεάζει και αυτή την τιμή της  $\sigma_{\text{abs}}$ . Αν και τα αναλυτικά μας αποτελέσματα περιγράφουν με επιτυχία, όπως είδαμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια, την πιθανότητα απορρόφησης, τόσο στις χαμηλές, όσο και στις υψηλές ενέργειες, μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί αναλυτική λύση που να συνδέει τις δύο λύσεις ομαλά στην ενδιάμεση περιοχή ενεργειών. Η απόρροια της ασυμπτωτικής τιμής της ενεργού διατομής είναι αποτέλεσμα τόσο της συνεισφοράς από τις χαμηλές ενέργειες (όπου κυριαρχεί το κύμα  $l=0$ ), της συνεισφοράς από τις ενδιάμεσες ενέργειες (όπου όλα τα μερικά κύματα είναι σημαντικά), όσο και της συνεισφοράς από τις υψηλές ενέργειες (όπου κυριαρχούν τα υψηλότερα κύματα). Αυτό έχει ως συνέπεια, δεδομένης και της απουσίας αναλυτικής λύσης για όλο το φάσμα ενεργειών, αν κάποιος θέλει να μελετήσει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του  $\sigma_{\text{abs}}$ , να πρέπει να χρησιμοποιήσει ακριβή αριθμητική ανάλυση.

Στο Σχήμα 4.5, λοιπόν, παρουσιάζουμε τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα για την ενεργό διατομή απορρόφησης  $\sigma_l = \sum_m \sigma_{l,m}$ , για τα μερικά κύματα  $l=0, 1, 2, 3, 4$ , καθώς επίσης και την ολική ενεργό διατομή για την απορρόφηση ενός βαθμωτού πεδίου που διαδίδεται στην Μembrάνη στην περίπτωση  $n=2$  και  $a_* = 0.3$ . Η εμφάνιση μιας σταθερής ασυμπτωτικής τιμής για την ολική ενεργό διατομή είναι εμφανής. Για τις ανάγκες της ανάλυσης μας μελετήσαμε την συμπεριφορά της ενεργού διατομής για ένα φάσμα τιμών του  $n$  και  $a_*$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.1. Ας σημειωθεί εδώ ότι, ενώ για χαμηλές τιμές του  $n$  και του  $a_*$  χρειάζεται να αθροιστεί μικρός σχετικά αριθμός μερικών κυμάτων (για την περίπτωση του Σχήματος 4.5, μόνο κύματα μέχρι  $l=5$  συμπεριλήφθησαν στους υπολογισμούς), για μεγαλύτερες τιμές των  $a_*$  και  $n$  ένας αυξανόμενος αριθμός κυμάτων θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν.





Σχήμα 4.5: Μερική ενεργός διατομή απορρόφησης  $\sigma_l$ , για τα κύματα  $l = 0, 1, 2, 3, 4$  (το χαμηλότερο σείτ γραμμών), και η συνολική ενεργός διατομή απορρόφησης  $\sigma_{abs}$  (υψηλότερη καμπύλη) για  $n = 2$  και  $a_* = 0.3$ , σε μονάδες  $r_h^2$ . Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην τιμή που προκύπτει με τη χρήση της προσέγγισης της γεωμετρικής οπτικής (4.74).

Επιπλέον, όσο αυξάνει το  $a_*$  ή το  $n$ , η ασυμπτωτική τιμή της  $\sigma_{abs}$  εμφανίζεται σε ολοένα και υψηλότερες τιμές του  $\omega$ , πράγμα που αυξάνει σημαντικά τον χρόνο που χρειάζεται για τους υπολογισμούς.

Από τα στοιχεία που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1, μπορούμε να παρατηρήσουμε την ισχυρή εξάρτηση της ασυμπτωτικής τιμής της ενεργού διατομής απορρόφησης τόσο από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων όσο και από τη γωνιακή στροφορμή της μελανής οπής. Όπως και στην περίπτωση της μη περιστρεφόμενης οπής [61], η τιμή της  $\sigma_{abs}$  μειώνεται σημαντικά καθώς το  $n$  αυξάνει. Από την άλλη μεριά, μία αύξηση της τιμής του  $a_*$  σηματοδοτεί αύξηση και στην τιμή της  $\sigma_{abs}$ . Για  $a_* = 0$ , οι τιμές του  $\sigma_{abs}$  ταυτίζονται, όπως είναι αναμενόμενο με τις αντίστοιχες τιμές για ένα βαθμωτό σωματίδιο που διαδίδεται σε χώρο με γεωμετρία Schwarzschild [61]. Επίσης θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι κάτι που έμοιαζε να ισχύει στην πενταδιάστατη περίπτωση [110], ότι δηλαδή η ασυμπτωτική τιμή της  $\sigma_{abs}$  στις υψηλές ενέργειες είναι πολύ κοντά με την αντίστοιχη στις χαμηλές, δεν ισχύει στην περίπτωση γενικού  $n$ . Αυτό μπορεί να φανεί ξεκάθαρα στο Σχήμα 4.5, ή συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1 με την τιμή της  $\sigma_0$  από την εξίσωση (4.50), η οποία και ρυθμίζει σε μεγάλο βαθμό την τιμή της  $\sigma_{abs}$  στις χαμηλές ενέργειες. Για γενικό  $n$ , οι δύο τιμές είναι φανερά διαφορετικές.

Στην περίπτωση μιας μη περιστρεφόμενης μελανής οπής Schwarzschild το όριο της γεωμετρικής οπτικής χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία στο παρελθόν για

$a_* \setminus n$	1	2	3	4	5	6
0.0	12.6	9.6	8.2	7.3	6.7	6.2
0.3	13.6	10.4	8.6	7.6	7.0	6.5
0.5	15.7	11.5	9.5	8.4	7.6	7.1
0.7	18.7	13.2	10.7	9.4	8.5	7.9
1.0	25.1	16.6	13.2	11.4	10.3	9.5
1.5	40.7	24.1	18.6	15.8	14.0	12.9
2.0	62.8	33.6	25.2	21.1	18.7	17.2

Πίνακας 4.1: Ασυμπτωτικές τιμές στις υψηλές ενέργειες για την ολική ενεργό διατομή απορρόφησης  $\sigma_{abs}$ , σε μονάδες  $r_H^2$ , σαν συνάρτηση των  $n$  και  $a_*$ .

να περιγράψει την ασυμπτωτική τιμή της διατομής απορρόφησης στις υψηλές ενέργειες, τόσο την τετραδιάστατη περίπτωση [22, 56, 57, 58, 59, 60], όσο και στην περίπτωση των  $(4 + n)$  διαστάσεων [61, 62]. Για την πολυδιάστατη περίπτωση και για σωματίδια που ζουν στην Μεμβράνη η ανάλυση στο όριο της γεωμετρικής οπτικής έδειξε ότι η μελανή οπή Schwarzschild συμπεριφέρεται σαν τέλεια απορροφητικό σώμα με ακτίνα που δίνεται από την σχέση

$$r_c = r_H \left( \frac{n+3}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}. \quad (4.66)$$

Η αντίστοιχη ενεργός διατομή απορρόφησης δίνεται από την επιφάνεια του στόχου, είναι δηλαδή  $\sigma_{abs} = \pi r_c^2$ . Οι τιμές που προκύπτουν από αυτήν την έκφραση, για διάφορες τιμές του  $n$ , είναι σε τέλεια συμφωνία με τις τιμές που βρέθηκαν μέσω αριθμητικής ανάλυσης στην [61] και παρουσιάζονται και στον Πίνακα 4.1, στην στήλη που αντιστοιχεί στην τιμή  $a_* = 0$ .

Σε αυτά που ακολουθούν θα προσπαθήσουμε να κάνουμε μία παρόμοια μελέτη για την αξονικά συμμετρική γεωμετρία που προκύπτει από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή στην Μεμβράνη και θα διερευνήσουμε την πιθανή σχέση μεταξύ των αναλυτικών αποτελεσμάτων και των ακριβών αριθμητικών τιμών που εμφανίζονται στον Πίνακα 4.1 για  $a_* \neq 0$ . Για αυτό το σκοπό, θα ακολουθήσουμε πιστά την μέθοδο που περιγράφεται στην [131]. Αν και ο φορμαλισμός αυτός αναπτύχθηκε για την περίπτωση της τετραδιάστατης μελανής οπής τύπου Kerr, ισχύει και για την περίπτωση που εξετάζουμε εμείς, για την μετρική δηλαδή που προκύπτει από την προβολή στην Μεμβράνη της μετρικής μιας πολυδιάστατης μελανής οπής, με τη μόνη διαφορά την αλλαγή στη μορφή της συνάρτησης  $\Delta(r)$  που εμφανίζεται στην μετρική.

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση παρατηρώντας ότι η μετρική (4.8), στην οποία διαδίδονται τα σωματίδια που είναι περιορισμένα στην Μεμβράνη, μένει



αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς της μορφής  $t \rightarrow t + \Delta t$  και  $\phi \rightarrow \phi + \Delta\phi$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη δύο διανυσμάτων Killing, των  $\xi_{(t)}^\mu = \delta_t^\mu$  και  $\xi_{(\phi)}^\mu = \delta_\phi^\mu$  αντίστοιχα, τα οποία δίνουν και διατηρούμενες ορμές  $p_t \equiv -E$  και  $p_\phi \equiv -L_z$ . Η μετρική στην Μεμβράνη επίσης, έχει και έναν τανυστή Killing, ο οποίος οδηγεί στην ύπαρξη μιας επιπλέον διατηρούμενης ποσότητας, της  $Q = \xi_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - (Ea + L_z)^2$ . Συνδυάζοντας τα παραπάνω, η εξίσωση της κίνησης ενός σωματιδίου με μάζα  $m$ , δηλαδή η εξίσωση  $p_\mu p^\mu = m^2$ , και πιο συγκεκριμένα το ακτινικό της κομμάτι, παίρνει τη μορφή [131]

$$\Sigma \frac{dr}{d\lambda} = \pm \mathcal{R}^{1/2},$$

$$\mathcal{R} = [E(r^2 + a^2) + L_z a]^2 - \Delta [m^2 r^2 + (L_z + aE)^2 + Q], \quad (4.67)$$

όπου  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  και  $\lambda$  είναι μια ομοπαράλληλη (affine) παράμετρος της τροχιάς. Η διατηρούμενη ποσότητα  $Q$  παίρνει τότε την μορφή

$$Q = L^2 - L_z^2 - a^2(E^2 - m^2) \cos^2 \theta_\infty, \quad (4.68)$$

όπου  $\theta_\infty$  είναι η τιμή της αζιμουθιακής γωνίας στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων, καθώς το σωματίδιο πλησιάζει την μελανή οπή από το άπειρο, και  $L$  η ολική γωνιακή στροφορμή του σωματιδίου.

Ένα σωματίδιο που πλησιάζει μία περιστρεφόμενη μελανή οπή από το άπειρο, μπορεί να ακολουθήσει διαφορετικές πιθανές τροχιές. Λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων κίνησης, θα μελετήσουμε την περίπτωση που το σωματίδιο είναι άμαζο, ( $m = 0$ ), και πλησιάζει την μελανή οπή με αρχική διεύθυνση είτε κάθετη ( $\theta_\infty = \pi/2$ ), ή παράλληλη ( $\theta_\infty = 0, \pi$ ) στον άξονα περιστροφής της οπής.

Ξεκινώντας από την πρώτη περίπτωση, παρατηρούμε ότι για κίνηση αποκλειστικά στο ισημερινό επίπεδο της οπής έχουμε  $\cos \theta_\infty = 0$  και  $L = L_z$ . Τότε, από την εξίσωση (4.68) προκύπτει  $Q = 0$  και η εξίσωση (4.67) παίρνει τη μορφή

$$\left( \Sigma \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 \left[ b^2 (a^2 - \Delta) + 2b \frac{a\mu}{r^{n-1}} + (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \right]. \quad (4.69)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε ορίσει την ποσότητα  $L/E \equiv b$ , όπου  $b > 0$  είναι η παράμετρος κρούσης του σωματιδίου. Στην παραπάνω σχέση, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το δεξί μέλος πρέπει να είναι θετικά ορισμένο, καθώς το αριστερό μέλος είναι υψωμένο στο τετράγωνο. Αφού έχουμε θεωρήσει ένα σωματίδιο να πλησιάζει την μελανή οπή από μεγάλα  $r$ , θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας έξω από την εργόσφαιρα της οπής<sup>2</sup>, όπου ο συντελεστής

<sup>2</sup>Η ακτίνα της εργόσφαιρας ορίζεται από την σχέση  $g_{tt} = 0$ , η οποία δίνει  $r^2 + a^2 \cos^2 \theta - \mu r^{1-n} = 0$ , σε αναλογία και με την τετραδιάστατη περίπτωση που είδαμε στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 2.



$(a^2 - \Delta)$  μπροστά από το  $b^2$  μπορεί να δειχθεί ότι είναι αρνητικός. Το δεξί μέλος της σχέσης (4.69) είναι τριώνυμο ως προς  $b$ , και η απαίτηση να είναι θετικό, μεταφράζεται σαν απαίτηση το  $b$  να παίρνει τιμές μεταξύ των ριζών του τριωνύμου. Πρέπει δηλαδή  $b_2 < b < b_1$ , όπου  $b_{1,2}$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης που προκύπτει αν θέσουμε το δεξί μέρος της (4.69) ίσο με μηδέν.

$$b_{1,2} = \frac{a\mu \pm r^{n+1} \sqrt{a^2 + r^2 - \frac{\mu}{r^{n-1}}}}{r^{n+1} - \mu} \quad (4.70)$$

Εύκολα όμως μπορεί να δει κάποιος, ότι η μικρότερη ρίζα είναι αρνητική, ( $b_2 < 0$ ) και επομένως η κλασικά επιτρεπτή περιοχή ορίζεται από την σχέση  $0 < b < b_1$ . Αυτή η σχέση μας λέει ότι σωματίδια με παραμέτρους κρούσης μέσα στα όρια αυτά, έχουν πρόσβαση σε όλες τις τιμές της ακτινικής παραμέτρου, και άρα μπορούν να φτάσουν και στον ορίζοντα, όπου και θα απορροφηθούν. Σύμφωνα με το όριο της γεωμετρικής οπτικής, η κοντινότερη απόσταση που μπορεί να πλησιάσει το σωματίδιο στη μελανή οπή χωρίς να απορροφηθεί δίνεται από τη σχέση

$$r_c = \min(b_1) = \min \left( \frac{a\mu + r^{n+1} \sqrt{a^2 + r^2 - \frac{\mu}{r^{n-1}}}}{r^{n+1} - \mu} \right). \quad (4.71)$$

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να κάνουμε έναν έλεγχο. Θέτοντας  $a = 0$  στην παραπάνω έκφραση παίρνουμε  $r_c = \min(r/\sqrt{1 - \frac{\mu}{r^{n+1}}})$ , που δίνει απευθείας το γνωστό αποτέλεσμα (4.66) για μια μη περιστρεφόμενη μελανή οπή στην Μεμβράνη [61, 62]. Θέτοντας επιπλέον  $n = 0$  αναχτάμε το επίσης γνωστό αποτέλεσμα [22, 56, 57, 58, 59] για την περίπτωση της καθαρά τετραδιάστατης μελανής οπής, με  $r_c = 3\sqrt{3}r_h/2$ .

Για αυθαίρετες τιμές του  $n$  και  $a$ , μια αναλυτική έκφραση για την μικρότερη απόσταση  $r_c$  είναι δύσκολο να βρεθεί. Παρόλα αυτά, μία απλή αριθμητική ανάλυση μπορεί να μας δώσει την ακριβή τιμή του  $r_c$  σε μονάδες  $r_h$ , αφού πρώτα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (4.6) για να διώξουμε την παράμετρο μάζας  $\mu$  από την σχέση (4.71). Η μελανή οπή σε αυτό το όριο συμπεριφέρεται σαν ένα τέλειο απορροφητικό σώμα και η ενεργός διατομή της απορρόφησης μπορεί να βρεθεί από τη σχέση  $\sigma_{\text{abs}} = \pi r_c^2$ . Οι τιμές που προκύπτουν, για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $n$  και  $a$ , παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Οι δύο υποπίνακες αντιστοιχούν στους δύο πιθανούς διαφορετικούς προσανατολισμούς της γωνιακής στροφορμής  $L$  του σωματιδίου: καθώς πλησιάζει την μελανή οπή από το άπειρο, κινούμενο στο ισημερινό της επίπεδο, η γωνιακή του στροφορμή μπορεί να είναι είτε παράλληλη ( $aL > 0$ ) ή αντιπαράλληλη ( $aL < 0$ ) με την στροφορμή της μελανής οπής. Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε επιλέξει (συμβατικά) ότι  $L > 0$  πάντα, και έχουμε εξετάσει τις δύο περιπτώσεις για το πρόσημο της παραμέτρου γωνιακής στροφορμής της οπής, με  $a > 0$  και  $a < 0$  να αντιστοιχούν στο πρώτο και δεύτερο υποπίνακα του





$a_* \backslash n$	1	2	3	4	5	6
0.0	12.6	9.6	8.2	7.3	6.6	6.2
0.3	17.9	12.8	10.4	9.0	8.1	7.4
0.5	23.5	15.9	12.6	10.7	9.5	8.7
0.7	31.0	20.0	15.4	12.9	11.4	10.3
1.0	46.0	27.6	20.6	17.0	14.8	13.4
1.5	81.9	44.3	31.7	25.6	22.2	19.9
2.0	131.6	65.4	45.3	36.3	31.3	28.2

$a_* \backslash n$	1	2	3	4	5	6
0.0	12.6	9.6	8.2	7.3	6.6	6.2
0.3	10.0	8.2	7.3	6.6	6.2	5.9
0.5	9.5	8.1	7.3	6.8	6.4	6.1
0.7	9.5	8.4	7.7	7.3	6.9	6.7
1.0	10.5	9.6	9.0	8.6	8.4	8.1
1.5	13.4	13.2	12.7	12.3	12.1	11.9
2.0	19.2	18.5	18.1	17.8	17.5	17.4

Πίνακας 4.2: Ενεργός διατομή απορρόφησης  $\sigma_{\text{abs}}$  (σε μονάδες  $r_h^2$ ) για σωματίδια που κινούνται στο ισημερινό επίπεδο μιας αξονικά συμμετρικής μελανής οπής στην Μεμβράνη (4.8), για  $a > 0$  (άνω πίνακας) και  $a < 0$  (κάτω πίνακας).

Πίνακα 4.2. Για  $a < 0$ , το πρόσημο του όρου  $a\mu$  στον αριθμητή της εξίσωσης (4.71) αντιστρέφεται, μια αλλαγή που οδηγεί σε μικρότερη τιμή για το  $r_c$ , και τελικά και για την ενεργό διατομή.

Στην συνέχεια θα προχωρήσουμε στην μελέτη της περίπτωσης ενός άμαζου σωματιδίου που πλησιάζει την μελανή οπή από το άπειρο σε τροχιά παράλληλη με τον άξονα της μελανής οπής. Αυτό μεταφράζεται σε  $\cos^2 \theta_\infty = 1$  και  $L_z = 0$ . Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε ότι

$$\left( \Sigma \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2(r^2 + a^2)^2 - \Delta L^2. \quad (4.72)$$

Θέτοντας όπως και πριν  $b \equiv L/E$ , εύκολα βλέπουμε ότι πρέπει να απαιτήσουμε

$$b < \left( \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{\Delta}} \right). \quad (4.73)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την μικρότερη απόσταση που μπορεί να πλησιάσει



$a_n \backslash n$	1	2	3	4	5	6
0.0	12.6	9.6	8.2	7.3	6.6	6.2
0.3	13.7	10.4	8.7	7.8	7.1	6.6
0.5	15.7	11.6	9.7	8.6	7.9	7.3
0.7	18.7	13.5	11.2	9.8	9.0	8.4
1.0	25.1	17.2	14.0	12.3	11.3	10.5
1.5	40.9	25.7	20.5	18.0	16.5	15.4
2.0	62.8	36.5	28.9	25.3	23.3	22.0

Πίνακας 4.3: Ενεργός διατομή απορρόφησης  $\sigma_{abs}$ , σε μονάδες  $r_h^2$ , για σωματίδια που κινούνται παράλληλα προς τον άξονα μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής στην Μεμβράνη με μετρική που δίνεται στο στοιχείο μήκους (4.8).

το σωματίδιο την μελανή οπή χωρίς να απορροφηθεί:

$$r_c = \min \left( \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{a^2 + r^2 - \frac{a^2}{r^{n-1}}}} \right) \quad (4.74)$$

Για  $a = 0$ , η παραπάνω έκφραση δίνει επίσης το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την περίπτωση Schwarzschild (4.66), όπως είναι αναμενόμενο, αφού, στην απουσία περιστροφής της οπής, όλες οι κατευθύνσεις είναι ισοδύναμες, και άρα θα πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.74) βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της ενεργού διατομής  $\sigma_{abs}$ , σε μονάδες  $r_h^2$ , τις οποίες και παρουσιάζουμε στον Πίνακα 4.3.

Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε τις διάφορες αναλυτικές τιμές που βρήκαμε παραπάνω χρησιμοποιώντας το όριο της γεωμετρικής οπτικής με τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές τιμές στις υψηλές ενέργειες που βρήκαμε αριθμητικά για την ενεργό διατομή. Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, όμως, όταν κάνουμε μια άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων. Οι τιμές που παρουσιάζονται στους Πίνακες 4.2 και 4.3 αντιστοιχούν σε τροχίες με συγκεκριμένη αζιμουθιακή γωνία  $\theta_\infty$  στο άπειρο, ενώ αυτές του Πίνακα 4.1 είναι στην πραγματικότητα ολοκληρωμένες πάνω σε όλες τις γωνίες. Παρόλα αυτά, μια σύγκριση ανάμεσα στα δύο αυτά σύνολα τιμών, μπορεί να μας αποκαλύψει, αν βρεθεί συμφωνία, ποιο είδος τροχιάς μπορεί να αναπαράγει την ολική ενεργό διατομή με μεγαλύτερη ακρίβεια. Μια άμεση σύγκριση μεταξύ των στοιχείων των Πινάκων 4.1 και 4.3, μας δείχνει ότι η ολική ενεργός διατομή είναι μικρότερη από αυτήν που αντιστοιχεί σε τροχιά που βρίσκεται στο ισημερινό επίπεδο με  $aL > 0$  αλλά μεγαλύτερη από αυτήν με  $aL < 0$ . Από την άλλη, συγκρίνοντας τα στοιχεία των Πινάκων 4.1 και 4.3, βρίσκουμε μία σχεδόν τέλεια συμφωνία μεταξύ των δύο συνόλων των αποτελεσμάτων για χαμηλές τιμές είτε του  $a$  ή του  $n$ . Η



συμφωνία αυτή φαίνεται και για την περίπτωση του Σχήματος 4.5, όπου  $n = 2$  και  $a_* = 0.3$ . Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι οι τροχιές του σωματιδίου που είναι παράλληλες με τον άξονα περιστροφής, οδηγούν σε μία ενεργό διατομή σκέδασης η οποία είναι ουσιαστικά ίση με την ολική. Καθώς όμως αυξάνει η τιμή των παραμέτρων  $a$  και  $n$ , τα δύο σύνολα τιμών αρχίζουν να αποκλίνουν. Σε αυτήν την περιοχή τιμών των παραμέτρων, η συνεισφορά όλων των πιθανών τροχιών του σωματιδίου πρέπει να αθροιστεί για να μπορέσει κάποιος να δικαιολογήσει την ολική τιμή της ενεργού διατομής της απορρόφησης από την μελανή οπή. Η μελέτη αυτή απαιτεί την λύση των εξισώσεων κίνησης του σωματιδίου για τυχαία γωνία πρόσπτωσης και η ανάλυση είναι αρκετά πολύπλοκη. Εδώ θα αρκεστούμε στα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε.

Στο παρόν Κεφάλαιο μελετήσαμε εκτεταμένα την περίπτωση εκπομπής ενός άμαζου βαθμωτού πεδίου στην Μεμβράνη από μια περιστρεφόμενη, πολυδιάστατη μελανή οπή. Τα αναλυτικά μας αποτελέσματα, τόσο στις χαμηλές, όσο και στις υψηλές ενέργειες, βρέθηκαν να είναι σε πολύ καλή συμφωνία με την ακριβή αριθμητική λύση. Επίσης, βρήκαμε τα ασυμπτωτικά όρια της ενεργού διατομής της απορρόφησης στις πολύ χαμηλές και στις πολύ υψηλές ενέργειες και περιγράψαμε έναν τρόπο υπολογισμού της διατομής αυτής στο όριο  $\omega \rightarrow \infty$ , αναλύοντας την κίνηση του σωματιδίου κλασσικά, για τρεις συγκεκριμένους τρόπους πρόσπτωσης του σωματιδίου. Είδαμε τέλος, ότι, για την περίπτωση που η πρόσπτωση γίνεται από άξονα παράλληλο με τον άξονα περιστροφής της μελανής οπής και για μικρά  $a$  και  $n$ , η ενεργός διατομή της απορρόφησης, είναι πολύ κοντά στην ολική ενεργό διατομή για την απορρόφηση ενός βαθμωτού πεδίου από την οπή.



## Κεφάλαιο 5

# Εκπομπή Φερμιονίων και Μποζονίων Βαθμίδας στην Μembrάνη από Περιστρεφόμενες Μελανές Οπές

### 5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν Κεφάλαιο εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στην ακτινοβολία Hawking που εκπέμπεται από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή ( $4 + n$ ) διαστάσεων, με τη μορφή φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας στην Μembrάνη, συνεχίζοντας την μελέτη που κάναμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο για την εκπομπή βαθμωτών σωματιδίων [112]. Αριθμητικές μελέτες για την εκπομπή φερμιονίων και μποζονίων προϋπήρχαν στην βιβλιογραφία [75, 104, 106]. Σε αυτό το Κεφάλαιο, που βασίζεται στην εργασία [132], θα παρουσιάσουμε αναλυτικά αποτελέσματα για πεδία με μη μηδενικό σπιν, χρησιμοποιώντας μια αναλυτική προσέγγιση. Στο Υποκεφάλαιο 5.2 θα γράψουμε την μετρική που αντιστοιχεί σε μια περιστρεφόμενη μελανή οπή παρουσία επιπλέον χωρικών διαστάσεων και τις εξισώσεις που περιγράφουν την διάδοση φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας στην Μembrάνη υπό την μορφή μιας ενιαίας διαφορικής εξίσωσης. Στο υποκεφάλαιο 5.3 θα λύσουμε την διαφορική αυτή εξίσωση αναλυτικά, χρησιμοποιώντας την μέθοδο ένωσης των λύσεων που περιγράψαμε και στα προηγούμενα Κεφάλαια. Πρώτα θα βρούμε την λύση των εξισώσεων κοντά στον ορίζοντα της οπής και κατόπιν μακριά από αυτήν. Στην συνέχεια, οι δύο λύσεις θα επεκταθούν και θα ενωθούν αναλυτικά στην ενδιαμέση περιοχή, στο όριο που οι ενέργειες των



σωματιδίων και η περιστροφή της οπής παραμένουν μικρές, δημιουργώντας έτσι μια αναλυτική λύση για όλον τον χώρο. Η λύση που θα παραγάγουμε με αυτόν τον τρόπο θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης και για τα δύο είδη πεδίου. Η ποσότητα αυτή χαρακτηρίζει την ακτινοβολία Hawking και καθορίζει τους διάφορους ρυθμούς εκπομπής. Στο Υποκεφάλαιο 5.4 θα χρησιμοποιήσουμε τα αναλυτικά μας αποτελέσματα για να παραγάγουμε γραφικές παραστάσεις για την πιθανότητα απορρόφησης, τις οποίες θα συγκρίνουμε με τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Τέλος, στα Υποκεφάλαια 5.5 και 5.6 θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ενεργού διατομής απορρόφησης, και θα παραγάγουμε γραφικές παραστάσεις για τους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας.

## 5.2 Ενιαία Εξίσωση Κίνησης για Πεδία στην Μembrάνη, Παρουσία Περιστρεφόμενης Μελανής Οπής

Στην εξίσωση (4.1) του Κεφαλαίου 4 γράψαμε το στοιχείο μήκους που προβάλλεται στην Μembrάνη γύρω από μία πολυδιάστατη περιστρεφόμενη μελανή οπή, με άξονα περιστροφής πάνω στην Μembrάνη. Μία τέτοια μελανή οπή, όπως είδαμε, είναι το πιο φυσιολογικό αποτέλεσμα μιας σύγκρουσης ενεργειακών σωματιδίων πάνω στην Μembrάνη, αν βέβαια η θεωρία των Μεγάλων Επιπλέον Διαστάσεων (Large Extra Dimensions Theory) αποδειχθεί σωστή. Χάριν ευκολίας του αναγνώστη, θα ξεκινήσουμε ξαναγράφοντας την μετρική Myers-Perry [53], που δίνει το στοιχείο μήκους για μελανή οπή με μία παράμετρο περιστροφής  $a$ , η οποία βρίσκεται σε μια Μembrάνη εμβαπτισμένη σε έναν χωρόχρονο  $(4+n)$  διαστάσεων:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{\Sigma r^{n-1}}\right) dt^2 + \frac{2a\mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 \mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2, \quad (5.1)$$

όπου οι ποσότητες  $\Delta, \Sigma$  δίνονται από τους τύπους

$$\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{n-1}}, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (5.2)$$

και  $d\Omega_n^2$  είναι το στοιχείο μήκους πάνω σε μία σφαίρα  $n$  διαστάσεων, με μοναδιαία ακτίνα. Η μάζα και η τροχιακή στροφορμή της μελανής οπής καθορίζονται από τις παραμέτρους  $a$  (παράμετρο περιστροφής) και  $\mu$  (παράμετρο



μάζας) μέσα από τις εκφράσεις

$$M_{BH} = \frac{(n+2)A_{n+2}}{16\pi G} \mu, \quad J = \frac{2}{n+2} M_{BH} a, \quad (5.3)$$

όπου  $G$  είναι η σταθερά του Νεύτωνα για τις  $(4+n)$  διαστάσεις και  $A_{n+2}$  η επιφάνεια μιας μοναδιαίας σφαίρας στις  $(n+2)$  διαστάσεις, που ισούται με

$$A_{n+2} = \frac{2\pi^{(n+3)/2}}{\Gamma[(n+3)/2]}. \quad (5.4)$$

Επίσης είδαμε ότι η απαίτηση να παράγεται μελανή οπή κατά την σύγκρουση των σωματιδίων οδηγεί σε ένα άνω όριο στην τιμή της παραμέτρου περιστροφής (εξίσωση 4.7),

$$a_*^{\max} = \frac{n+2}{2}, \quad (5.5)$$

με  $a_* = a/r_h$ .

Το στοιχείο μήκους που νιώθουν τα πεδία που είναι αναγκασμένα να ζουν πάνω στην Μεμβράνη, είδαμε ότι μπορεί να βρεθεί αν προβάλουμε την  $(4+n)$ -διάστατη μετρική της έκφρασης (5.1) πάνω στον τετραδιάστατη Μεμβράνη. Αυτό γίνεται δίνοντας σταθερές τιμές για τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις επιπλέον διαστάσεις, και πιο συγκεκριμένα, θέτοντας  $\theta_i = \pi/2$ , για  $i = 2, \dots, n+1$ . Κάνοντας αυτό βρίσκουμε την προβολή του στοιχείου μήκους στην Μεμβράνη στη μορφή

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{\Sigma r^{n-1}}\right) dt^2 + \frac{2a\mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 \mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.6)$$

Στην εργασία [132], τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζουμε σε αυτό το Κεφάλαιο, μελετήσαμε την διάδοση φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας στο βαρυτικό υπόβαθρο που προαναφέραμε. Θα υποθέσουμε, όπως και για την περίπτωση του βαθμωτού πεδίου του Κεφαλαίου 4, ότι τα πεδία που θα μελετήσουμε έχουν ελάχιστη σύζευξη με την βαρύτητα και ότι δεν έχουν άλλες αλληλεπιδράσεις, οπότε και ικανοποιούν τις αντίστοιχες εξισώσεις ελεύθερης κίνησης. Θα χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο, περισσότερο γνωστή ως φορμαλισμός Newman-Penrose[33, 72]. Υποθέτοντας την παραγοντοποίηση

$$\Psi_s(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} R_s(r) S_{s,j}^m(\theta), \quad (5.7)$$

όπου  $S_{s,j}^m(\theta)$  συναρτήσεις που ονομάζονται ταξινομημένες κατά σπιν σφαιροειδείς αρμονικές [126, 133, 134, 135, 136, 137], οι εξισώσεις κίνησης για ένα



ελεύθερο σωματίδιο με σπιν  $s = 0, \frac{1}{2}$  και 1 αντιστοιχούν σε μία ενιαία διαφορική εξίσωση [75] για το ακτινικό κομμάτι των κυματοσυναρτήσεων

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{s+1} \frac{dR_s}{dr} \right) + \left[ \frac{K^2 - isK\Delta'}{\Delta} + 4is\omega r + s(\Delta'' - 2)\delta_{s,|s|} - \Lambda_{sj} \right] R_s = 0, \quad (5.8)$$

όπου

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am, \quad \Lambda_{sj} = \lambda_{sj} + a^2\omega^2 - 2am\omega. \quad (5.9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, το  $\lambda_{sj}$  είναι η γωνιακή ιδιοτιμή που εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση που ικανοποιούν οι σφαιροειδείς αρμονικές. Συγκεκριμένα,

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dS_{s,j}^m}{d\theta} \right) + (a^2\omega^2 \cos^2\theta - 2a\omega s \cos\theta - \frac{(m + s \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \lambda_{sj} + s) S_{s,j}^m = 0. \quad (5.10)$$

Η σχέση (5.8) αντιστοιχεί στην πραγματικότητα σε δύο εξισώσεις, μία για  $s = |s|$  και μία για  $s = -|s|$ . Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι ένα άμαζο φερμιόνιο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Το ίδιο ισχύει και για ένα μποζόνιο βαθμίδα. Έτσι λοιπόν χρειαζόμαστε τις δύο αυτές εξισώσεις για να περιγράψουμε τις δύο αυτές συνιστώσες του πεδίου. Είναι φανερό από την έκφραση (5.8) ότι οι δύο αυτές συνιστώσες υπακούουν σε διαφορετικές διαφορικές εξισώσεις, λόγω της ύπαρξης του όρου  $\delta_{s,|s|}$ . Μπορούμε παρόλα αυτά να τις φέρουμε σε ίδια μορφή, κάνοντας τον εξής ορισμό:

$$R_{+|s|} \equiv \Delta^{-|s|} P_{+|s|}, \quad R_{-|s|} \equiv P_{-|s|}. \quad (5.11)$$

Σε σχέση με τις καινούριες αυτές ακτινικές συναρτήσεις, η ακτινική διαφορική μας εξίσωση (5.8) στην Μεμβράνη μπορεί να γραφτεί σε μια κοινή μορφή και για τις δύο συνιστώσες του πεδίου

$$\Delta^{|s|} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{1-|s|} \frac{dP_s}{dr} \right) + \left( \frac{K^2 - isK\Delta'}{\Delta} + 4is\omega r - \tilde{\Lambda}_{sj} \right) P_s(r) = 0, \quad (5.12)$$

στην οποία, όπως βλέπουμε, ο όρος  $\Delta''$  έχει εξαφανιστεί, ενώ έχουμε ορίσει και  $\tilde{\Lambda}_{sj} = \Lambda_{|s|j} + 2|s|$ . Η γωνιακή ιδιοτιμή  $\lambda_{|s|j}$ , όπως εξάλλου είδαμε και σε προηγούμενα κεφάλαια, δεν μπορεί γενικά να εκφραστεί σε μία κλειστή μορφή, μπορεί όμως να γραφτεί σαν δυναμοσειρά ως προς το  $a\omega$ , [125, 126, 127, 133].

η



Συγκεκριμένα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \lambda_{|s|j} &= -|s|(|s| + 1) + \sum_k f_k (a\omega)^k \\ &= j(j + 1) - |s|(|s| + 1) - \frac{2ms^2}{j(j + 1)} a\omega + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

Λύνοντας την εξίσωση (5.12) μπορούμε να υπολογίσουμε κατά τα γνωστά, την πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{s,jm}|^2$  για την διάδοση των πεδίων στο συγκεκριμένο βαρυτικό υπόβαθρο. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ποσότητα, όπως είδαμε, μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτινοβολία Hawking που εκπέμπει η μελανή οπή στην Μεμβράνη. Για παράδειγμα, ο διαφορικός ρυθμός εκπομπής της ενέργειας δίνεται από την σχέση

$$\frac{d^2 E^{(s)}}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,m} \frac{\omega}{\exp[k/T_H] \pm 1} |A_{s,jm}|^2, \quad (5.14)$$

με  $k$  και  $T_H$  να δίνονται από τις εκφράσεις

$$k \equiv \omega - m\Omega = \omega - \frac{ma}{r_H^2 + a^2}, \quad T_H = \frac{(n+1) + (n-1)a^2}{4\pi(1+a^2)r_H}, \quad (5.15)$$

όπου  $\Omega$  η γωνιακή ταχύτητα της οπής,  $T_H$  η θερμοκρασία της, και  $r_H$  η ακτίνα του ορίζοντα, που, όπως είδαμε, βρίσκεται ως λύση της εξίσωσης  $\Delta(r_H) = 0$ .

## 5.3 Αναλυτική Επίλυση της Εξίσωσης Κίνησης

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία αναλυτική λύση για την ακτινική εξίσωση (5.12) στις δύο ασυμπτωτικές περιοχές, κοντά στον ορίζοντα της οπής, όπου  $r \simeq r_H$  και μακριά από αυτήν ( $r \gg r_H$ ). Όπως και στα προηγούμενα Κεφάλαια, θα συμβολίζουμε με NH (*near horizon*) την πρώτη περιοχή και με FF (*far field*) την δεύτερη. Στην συνέχεια θα απαιτήσουμε οι δύο αυτές λύσεις να ενώνονται ομαλά στην ενδιάμεση περιοχή, με αποτέλεσμα να κατασκευάζεται μία αναλυτική λύση για όλα τα  $r$ , και για πεδία με αυθαίρετο σπιν  $s$ .

### 5.3.1 Επίλυση Κοντά στον Ορίζοντα

Για να μπορέσουμε να φέρουμε την εξίσωση (5.12) στη μορφή μίας γνωστής διαφορικής εξίσωσης, και πιο συγκεκριμένα στην μορφή της υπεργεωμετρικής





εξίσωσης, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής, που χρησιμοποιήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$r \rightarrow f(r) = \frac{\Delta(r)}{r^2 + a^2} = \frac{r^2 + a^2 - \mu/r^{n-1}}{r^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dr} = (1-f)r \frac{A(r)}{r^2 + a^2}, \quad (5.16)$$

όπου  $A(r) = (n+1) + (n-1)a^2/r^2$ . Χρησιμοποιώντας αυτήν την αλλαγή, μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (5.12) κοντά στον ορίζοντα ( $r \simeq r_H$ ) - κρατώντας το  $s$  σαν αυθαίρετη παράμετρο - ως:

$$f(1-f) \frac{d^2 P}{df^2} + (1-|s| - B_* f) \frac{dP}{df} + \left[ \frac{K_*^2 - isK_* \Delta'_*}{A_*^2 f(1-f)} + \frac{(4is\omega_* - \bar{\Lambda}_{*,j})(1+a_*^2)}{A_*^2 (1-f)} \right] P_*(r) = 0, \quad (5.17)$$

όπου έχουμε ορίσει  $\omega_* = \omega r_H$ ,  $a_* = a/r_H$ . Επίσης  $\Delta'_* = \Delta'(r_H) = A_*$ . Το  $B_*$  δίνεται από την εξίσωση

$$B_* \equiv 1 - |s| + \frac{2|s| + n(1+a_*^2)}{A_*} - \frac{4a_*^2}{A_*^2}, \quad (5.18)$$

ενώ τα  $A_*$  και  $K_*$  από τις εκφράσεις

$$A_* = n+1 + (n-1)a_*^2, \quad (5.19)$$

$$K_* = (1+a_*^2)\omega_* - a_* m. \quad (5.20)$$

Αν, τέλος, εισάγουμε τον ορισμό  $P(f) = f^\alpha (1-f)^\beta F(f)$ , η (5.17) εξίσωση έρχεται στη μορφή της υπεργεωμετρικής εξίσωσης [94]

$$f(1-f) \frac{d^2 F}{df^2} + [c - (1+a+b)f] \frac{dF}{df} - abF = 0, \quad (5.21)$$

με

$$a = \alpha + \beta + B_* - 1, \quad b = \alpha + \beta, \quad c = 1 - |s| + 2\alpha. \quad (5.22)$$

Οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  μπορούν να προσδιοριστούν από τις ακόλουθες αλγεβρικές εξισώσεις

$$\alpha^2 - |s|\alpha + \frac{K_*^2}{A_*^2} - \frac{isK_*}{A_*} = 0, \quad (5.23)$$



και

$$\beta^2 + \beta(B_* + |s| - 2) + \frac{K_*^2}{A_*^2} - \frac{isK_*}{A_*} + \frac{(4is\omega_* - \tilde{\Lambda}_{sj})(1 + a_*^2)}{A_*^2} = 0, \quad (5.24)$$

αντίστοιχα. Η πρώτη από τις δύο οδηγεί στην ακόλουθη λύση για την παράμετρο  $\alpha$

$$a_{\pm} = \frac{|s|}{2} \pm \left( \frac{iK_*}{A_*} + \frac{s}{2} \right), \quad (5.25)$$

ενώ η δεύτερη για το  $\beta$  έχει ως λύσεις

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ (2 - |s| - B_*) \pm \sqrt{D} \right], \quad (5.26)$$

όπου  $D$  η σχετικά πολύπλοκη ποσότητα της παρακάτω έκφρασης

$$D = (B_* + |s| - 2)^2 - \frac{4K_*^2 - 4isK_*A_*}{A_*^2} - \frac{4(4is\omega_* - \tilde{\Lambda}_{sj})(1 + a_*^2)}{A_*^2}. \quad (5.27)$$

Η γενική λύση της ακτινικής εξίσωσης, λοιπόν, μπορεί να γραφτεί συναρτήσει υπεργεωμετρικών συναρτήσεων ως εξής

$$P_{NH}(f) = A_- f^{\alpha} (1 - f)^{\beta} F(a, b, c; f) + A_+ f^{-\alpha} (1 - f)^{\beta} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; f). \quad (5.28)$$

Όπως και στα προηγούμενα Κεφάλαια, θα πρέπει τώρα να επιβάλουμε την συνοριακή συνθήκη απουσίας εξερχομένων κυμάτων κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.28), στο όριο  $r \rightarrow r_H$ , ή ισοδύναμα  $f(r) \rightarrow 0$ , παίρνουμε είτε

$$P_{NH}(f) \simeq A_- f^{\frac{|s|+s}{2}} f^{iK_*/A_*} + A_+ f^{-\frac{|s|+s}{2}} f^{-iK_*/A_*}, \quad (5.29)$$

για  $\alpha = \alpha_+$ , ή

$$P_{NH}(f) \simeq A_- f^{\frac{|s|-s}{2}} f^{-iK_*/A_*} + A_+ f^{-\frac{|s|-s}{2}} f^{iK_*/A_*}, \quad (5.30)$$

για  $\alpha = \alpha_-$ . Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την μεταβλητή  $y = r_H(1 + a_*^2) \ln(f)/A_*$ , η οποία, όπως είδαμε, στο όριο  $r \rightarrow r_H$  γίνεται ίση με την συνθήκη tortoise συντεταγμένη  $r_*$  που ορίζεται από την σχέση  $dr_*/dr = (r^2 + a_*^2)/\Delta(r)$ . Τότε, οι παράγοντες  $f^{\pm iK_*/A_*}$  παίρνουν την μορφή  $e^{\pm iK_* y}$  και περιγράφουν ένα εισερχόμενο και ένα εξερχόμενο κύμα. Σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάζεται στην εργασία [74], η σωστή συνοριακή συνθήκη στον ορίζοντα της οπής, για ένα σωματίδιο με μη-μηδενικό σπιν, είναι της μορφής

$$R_s \sim \Delta^{-s} e^{-iK_* r_*}, \quad (5.31)$$



πράγμα που στην περίπτωση μας μεταφράζεται ως

$$P_{+|s|} \sim e^{-iK \cdot y} = f^{-iK \cdot /A_+}, \quad P_{-|s|} \sim f^{-|s|} e^{-iK \cdot y} = f^{-|s|} f^{-iK \cdot /A_+}. \quad (5.32)$$

Απαιτώντας η ασυμπτωτική μας λύση κοντά στον ορίζοντα να ικανοποιεί την παραπάνω συνοριακή συνθήκη, οδηγούμαστε στην επιλογή  $\alpha = \alpha_-$  και  $A_+ = 0$ , η οποία και φέρνει την λύση στη μορφή

$$P_{NH}(f) = A_- f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f). \quad (5.33)$$

Το κριτήριο της σύγκλισης της υπεργεωμετρικής συνάρτησης  $F(a, b, c; f)$ , που όπως είδαμε είναι το  $Re(c - a - b) > 0$ , μπορεί τώρα να εφαρμοστεί και να οδηγήσει στην επιλογή  $\beta = \beta_-$ . Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να απλοποιηθούν στα αντίστοιχα αποτελέσματα για μία μη περιστρεφόμενη μελανή οπή [54] θέτοντας  $a = 0$ .

Στην συνέχεια, για να μπορέσουμε να επιτύχουμε την ομαλή σύνδεση της λύσης κοντά στον ορίζοντα με αυτήν που θα παραγάγουμε για την περιοχή μακριά από αυτόν, θα πρέπει να επεκτείνουμε αναλυτικά την λύση (5.33) σε μεγάλες τιμές της ακτινικής συντεταγμένης  $r$ . Θα το κάνουμε αυτό χρησιμοποιώντας μία σχέση για τις υπεργεωμετρικές συναρτήσεις, που χρησιμοποιήσαμε και στα προηγούμενα Κεφάλαια, και την οποία για ευκολία του αναγνώστη θα γράψουμε ξανά

$$P_{NH}(f) = A_- f^\alpha (1-f)^\beta \left[ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1; 1-f) + (1-f)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-f) \right]. \quad (5.34)$$

Η παραπάνω σχέση θα μας επιτρέψει να αλλάξουμε το όρισμα της υπεργεωμετρικής συνάρτησης από  $f$  σε  $1-f$ . Η συνάρτηση  $f$  μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{n-1}} \frac{1}{r^2 + a^2} = 1 - \left( \frac{r_H}{r} \right)^{n-1} \frac{(1+a_*^2)}{(r/r_H)^2 + a_*^2}, \quad (5.35)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την εξίσωση ορισμού του ορίζοντα  $\Delta(r_H) = 0$  με σκοπό να διώξουμε την παράμετρο  $\mu$  από την παραπάνω σχέση. Στο όριο  $r \gg r_H$ , και για  $n \geq 1$ , η παραπάνω σχέση τείνει στην μονάδα.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, το όρισμα της αναλυτικά εκτεταμένης λύσης κοντά στον ορίζοντα πάει στο μηδέν, και η λύση σε αυτό το όριο παίρνει τη



μορφή

$$P_{NH}(f) \simeq A_- (1-f)^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + A_- (1-f)^{-\beta+2-B_- - |s|} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (5.36)$$

Για  $r \gg r_H$ , η ποσότητα  $(1-f)$  μπορεί να προσεγγιστεί από την

$$1-f \simeq (1+a_*^2) \left(\frac{r_H}{r}\right)^{n+1}, \quad (5.37)$$

φέρνοντας, έτσι, την εξίσωση (5.36) σε μορφή δυνάμεων ως προς το  $r$

$$P_{NH}(r) \simeq A_1 r^{-(n+1)\beta} + A_2 r^{(n+1)(\beta+|s|+B_- - 2)}, \quad (5.38)$$

με

$$A_1 = A_- [(1+a_*^2) r_H^{n+1}]^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (5.39)$$

$$A_2 = A_- [(1+a_*^2) r_H^{n+1}]^{-(\beta+|s|+B_- - 2)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (5.40)$$

### 5.3.2 Επίλυση Μακριά από τον Ορίζοντα

Το επόμενο βήμα στην ανάλυσή μας είναι να βρούμε την μορφή της λύσης στην ασυμπτωτική περιοχή μακριά από τον ορίζοντα, όπου η ακτινική μας εξίσωση (5.12) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{2(1-|s|)}{r} \frac{dP}{dr} + \left( \omega^2 + \frac{2is\omega}{r} - \frac{\lambda_{|s|j} + 2|s| + a^2\omega^2}{r^2} \right) P = 0. \quad (5.41)$$

Ορίζοντας  $P = e^{-i\omega r} r^{\frac{1}{2}(2|s|-1+Z)} \tilde{P}$  με

$$Z = \sqrt{(2|s|-1)^2 + 4(\lambda_{|s|j} + 2|s| + a^2\omega^2)}, \quad (5.42)$$

η εξίσωση (5.41) παίρνει την μορφή μιας υπεργεωμετρικής διαφορικής εξίσωσης Kummer [94], έρχεται δηλαδή στη μορφή

$$x^2 f''(x) + (b-x) f'(x) - a f(x) = 0 \quad (5.43)$$

και οι λύσεις τις μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια των συναρτήσεων Kummer  $M$  και  $U$  [94] ως

$$P_{FF}(r) = e^{-i\omega r} r^{\frac{1}{2}(2|s|-1+Z)} \times [B_1 M\left(\frac{1}{2} - s + \frac{Z}{2}, 1 + Z, 2i\omega r\right) + B_2 U\left(\frac{1}{2} - s + \frac{Z}{2}, 1 + Z, 2i\omega r\right)] \quad (5.44)$$



Όπως και στην περίπτωση της λύσης κοντά στον ορίζοντα, πρέπει να επεκτείνουμε την παραπάνω λύση, που αντιστοιχεί στις περιοχές μακριά από τον ορίζοντα, σε μικρές τιμές της ακτινικής συντεταγμένης  $r$ . Για να γίνει αυτό, θεωρούμε το όριο  $r \rightarrow 0$  στην εξίσωση (5.44) και παίρνουμε [94]

$$P_{FF}(r) \simeq B_1 r^{\frac{1}{2}(2|s|-1+Z)} + B_2 r^{\frac{1}{2}(2|s|-1-Z)} \frac{\Gamma(Z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s+\frac{Z}{2})} (2i\omega)^{-Z}. \quad (5.45)$$

Σε αντιστοιχία με την λύση κοντά στον ορίζοντα μετά την επέκταση (εξίσωση 5.38), η παραπάνω σχέση είναι επίσης σε μορφή δυνάμεων ως προς το  $r$ . Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε μία ενιαία λύση για όλες τις τιμές της ακτινικής συντεταγμένης θα πρέπει να ενώσουμε τις δύο αυτές λύσεις σε μία κοινή έκφραση για την ενδιάμεση περιοχή. Με το σκοπό αυτό κατά νου, παρατηρούμε ότι για  $\omega r_H \ll 1$  και  $a_* \ll 1$ , παίρνουμε από την εξίσωση (5.18)  $B_* \simeq 2 - |s| + \frac{2|s|-1}{n+1}$  και από την εξίσωση (5.24)

$$\beta \simeq \frac{1}{2(n+1)} \left( 1 - 2|s| - \sqrt{(2|s|-1)^2 + 4\tilde{\Lambda}_{sj}} \right). \quad (5.46)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η λύση κοντά στον ορίζοντα μετά την επέκταση (5.38) έρχεται στη μορφή

$$P_{NH}(r) = A_1 r^{\frac{1}{2} |2|s|-1+\sqrt{(2|s|-1)^2+4\tilde{\Lambda}_{sj}}} + A_2 r^{\frac{1}{2} |2|s|-1-\sqrt{(2|s|-1)^2+4\tilde{\Lambda}_{sj}}}. \quad (5.47)$$

Από τους ορισμούς (5.9) και (5.42) για τις σταθερές  $\Lambda_{|s|j}$  και  $Z$ , μπορούμε να δούμε ότι με την προσέγγιση που κάναμε, οι δυνάμεις του  $r$  στις εξισώσεις (5.45) και (5.47) είναι ταυτόσημες. Έτσι επιτυγχάνουμε την ομαλή σύνδεση των δύο ασυμπτωτικών λύσεων, αφού όμως πρώτα θέσουμε ίσους τους συντελεστές μπροστά από τις ίδιες δυνάμεις του  $r$ . Κάνοντας αυτό, παίρνουμε

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma(Z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s+\frac{Z}{2})} (2i\omega)^{-Z} \frac{A_1}{A_2}, \quad (5.48)$$

όπου ο λόγος  $A_1/A_2$  προκύπτει από την εξίσωση (5.40)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c)} [(1+a_*^2)r_H^{n+1}]^{2\beta+|s|+B_*-2}. \quad (5.49)$$

Η εξίσωση (5.48) διασφαλίζει την ομαλή ένωση των δύο λύσεων και την ύπαρξη μίας ενιαίας αναλυτικής λύσης στο ακτινικό κομμάτι της εξίσωσης κίνησης που περιγράφει την διάδοση ενός πεδίου με αυθαίρετο σπιν  $s$  στο στοιχείο μήκους που προβάλλεται στην Μεμβράνη.



### 5.3.3 Υπολογισμός της Πιθανότητας Απορρόφησης

Έχοντας βρει την αναλυτική λύση για την ακτινική συνάρτηση  $P_s(r)$  μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της πιθανότητας απορρόφησης  $|A_{sjm}|^2$ . Όπως έχουμε δει, η ποσότητα αυτή εμφανίζεται στους διάφορους ρυθμούς εκπομπής ακτινοβολίας Hawking στην Μεμβράνη. Για να υπολογίσουμε αυτήν την ποσότητα, παίρνουμε το όριο της λύσης μακριά από τον ορίζοντα, με το  $r$  να τείνει στο άπειρο, και η εξίσωση (5.44) γίνεται [94]

$$\begin{aligned} P_{FF}(r) &\simeq \left( \frac{B_1 e^{i\pi(\frac{1}{2}-s+\frac{\xi}{2})}}{(2i\omega)(\frac{1}{2}-s+\frac{\xi}{2})} \frac{\Gamma(1+Z)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s+\frac{\xi}{2})} + \frac{B_2}{(2i\omega)(\frac{1}{2}-s+\frac{\xi}{2})} \right) \frac{e^{-i\omega r}}{r^{1-s-|s|}} \\ &+ \frac{B_1}{(2i\omega)(\frac{1}{2}+s+\frac{\xi}{2})} \frac{\Gamma(1+Z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s+\frac{\xi}{2})} \frac{e^{i\omega r}}{r^{1+s-|s|}} \\ &\equiv Y_s^{(in)} \frac{e^{-i\omega r}}{r^{1-s-|s|}} + Y_s^{(out)} \frac{e^{i\omega r}}{r^{1+s-|s|}}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Ας συγκεντρώσουμε καταρχήν το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση των φερμιονίων, για τα οποία  $s = \frac{1}{2}$ . Από την ακτινική εξίσωση (5.12) κάποιος μπορεί εύκολα να δει ότι, παρόμοια με την καθαρά τετραδιάστατη περίπτωση [33, 138, 139, 140], ισχύει

$$\frac{d}{dr} \left( |P_{\frac{1}{2}}|^2 - |P_{-\frac{1}{2}}|^2 \right) = 0. \quad (5.51)$$

Η διατηρούμενη ποσότητα μέσα στις παρενθέσεις είναι ανάλογη του ακτινικού μέρους του διατηρούμενου ρεύματος πιθανότητας για τα σωματίδια που ακτινοβολεί η μελανή οπή. Τότε, η πιθανότητα απορρόφησης ορίζεται ως ο λόγος της έντασης στον ορίζοντα της οπής προς την αντίστοιχη στο άπειρο

$$|A_{\frac{1}{2}jm}|^2 = \frac{F_{in}^{(H)}}{F_{in}^{(\infty)}} = 1 - \frac{F_{out}^{(\infty)}}{F_{in}^{(\infty)}}, \quad (5.52)$$

όπου η ένταση είναι το χωρικό ολοκλήρωμα του ρεύματος πιθανότητας και στο δεύτερο σκέλος της εξίσωσης χρησιμοποιήσαμε την διατήρηση της έντασης. Η ένταση στο άπειρο βρίσκεται ολοκληρώνοντας την ακτινική συνιστώσα του διατηρούμενου ρεύματος. Κάνοντας αυτό, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.50), βρίσκουμε

$$|A_{\frac{1}{2}jm}|^2 = 1 + \frac{|P_{\frac{1}{2}}^{(out)}|^2 - |P_{-\frac{1}{2}}^{(out)}|^2}{|P_{\frac{1}{2}}^{(in)}|^2 - |P_{-\frac{1}{2}}^{(in)}|^2} = 1 - \frac{|Y_{-\frac{1}{2}}^{out}|^2}{|Y_{\frac{1}{2}}^{in}|^2}. \quad (5.53)$$



Χρησιμοποιώντας, τέλος, τις αναλυτικές εκφράσεις για τα  $Y_{\pm\frac{1}{2}}^{(out)}$ , όπως αυτές ορίζονται στην εξίσωση (5.50), βρίσκουμε ότι συνδέονται μέσω της σχέσης

$$Y_{-\frac{1}{2}}^{(out)} = \frac{2i\omega}{\sqrt{\lambda_{1/2j} + 1 + a^2\omega^2}} Y_{\frac{1}{2}}^{(out)}, \quad (5.54)$$

η οποία και οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης για τα φερμιόνια

$$|A_{\frac{1}{2}jm}|^2 = 1 - \frac{4\omega^2}{\lambda_{1/2j} + 1 + a^2\omega^2} \left| \frac{Y_{\frac{1}{2}}^{(out)}}{Y_{\frac{1}{2}}^{(in)}} \right|^2. \quad (5.55)$$

Για πεδία με σπιν  $s = 1$ , δεν υπάρχει διατηρούμενο ρεύμα σωματιδίων. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης θα ακολουθήσουμε μια τεχνική η οποία παρουσιάστηκε στην εργασία της αναφοράς [141] και στην οποία η ακτινική εξίσωση κίνησης μετατρέπεται, μέσω ενός μετασχηματισμού της ακτινικής συνάρτησης και της χρήσης μιας tortoise συντεταγμένης, σε μία άλλη εξίσωση με πραγματικό δυναμικό μικρής εμβέλειας. Τότε, η ασυμπτωτική λύση στο άπειρο για ένα πεδίο βαθμίδας δίνεται από την ακόλουθη έκφραση [141, 142]

$$X_{jm\omega} \sim e^{-i\omega r_*} + A_{jm\omega}^{(in)} e^{i\omega r_*}, \quad (5.56)$$

δηλαδή γράφεται σαν άθροισμα ενός εισερχόμενου και ενός εξερχόμενου επίπεδου κύματος με σταθερά πλάτη. Από την παραπάνω εξίσωση εύκολα προκύπτει η έκφραση για το την πιθανότητα απορρόφησης

$$|A_{1jm}|^2 = 1 - |A_{jm\omega}^{(in)}|^2. \quad (5.57)$$

Αν και η ακριβής ανάλυση είναι αρκετά πολύπλοκη [141, 142] δίνει σχέσεις που συνδέουν το πλάτος  $A_{jm\omega}^{(in)}$  της εξίσωσης (5.56) με τους παράγοντες  $Y_s^{(in,out)}$  που εμφανίζονται στην σχέση (5.50) και οδηγεί τελικά στην ακόλουθη έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης

$$|A_{1jm}|^2 = 1 - \frac{16\omega^4}{B_{jm\omega}^2} \left| \frac{Y_1^{(out)}}{Y_1^{(in)}} \right|^2. \quad (5.58)$$

Η σταθερά  $B_{jm\omega}$  ορίζεται ως ο παράγοντας που εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση [33]

$$\Delta D_0^\dagger D_0^\dagger P_{+1} = B_{jm\omega} P_{-1}, \quad (5.59)$$

όπου  $D_0^\dagger = \partial_r + iK/\Delta$ , ή, ισοδύναμα στη σχέση

$$Y_{-1}^{(out)} = -\frac{4\omega^2}{B_{jm\omega}} Y_1^{(out)} \quad (5.60)$$



που ισχύει για την ασυμπτωτική μας λύση (5.50) όταν αυτή αντικατασταθεί στην σχέση (5.59). Χρησιμοποιώντας τις ακριβείς εκφράσεις για τα  $Y_{\pm 1}^{(out)}$  από την εξίσωση (5.50), παίρνουμε

$$Y_{-1}^{(out)} = -\frac{4\omega^2}{\lambda_{1j} + 2 + a^2\omega^2} Y_1^{(out)}, \quad (5.61)$$

πράγμα που οδηγεί στην σχέση  $B_{jmw} = \lambda_{1j} + 2 + a^2\omega^2$  και στην συνέχεια στην ακόλουθη τελική έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης πεδίων με σπιν 1, που διαδίδονται στην Μεμβράνη

$$|A_{1jm}|^2 = 1 - \frac{16\omega^4}{(\lambda_{1j} + 2 + a^2\omega^2)^2} \left| \frac{Y_1^{(out)}}{Y_1^{(in)}} \right|^2. \quad (5.62)$$

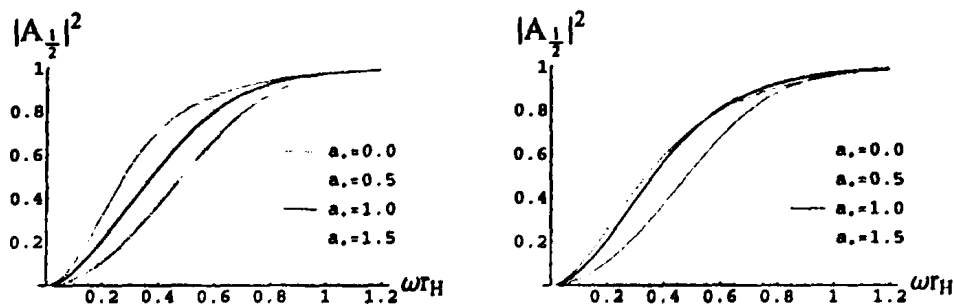
## 5.4 Αναπαριστώντας Γραφικά τα Αναλυτικά μας Αποτελέσματα

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (5.55) και (5.62) - τα κύρια αναλυτικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου - για να παραγάγουμε γραφικές παραστάσεις για την πιθανότητα απορρόφησης πεδίων με σπιν-1/2 και σπιν-1, αντίστοιχα, τα οποία να διαδίδονται στο προβεβλημένο υπόβαθρο (5.6) στην Μεμβράνη. Οι τιμές της  $|A_{s,jm}|^2$  θα παρασταθούν γραφικά για διάφορες τιμές των κβαντικών αριθμών ( $j, m$ ) του σωματιδίου, ως συνάρτηση της παραμέτρου ενέργειας  $\omega r_H$  και στην συνέχεια τα αποτελέσματα θα συγκριθούν με υπάρχοντα αριθμητικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας [75, 104, 106].

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι κατά την διαδικασία παραγωγής των αναλυτικών μας λύσεων για το ακτινικό κομμάτι των εξισώσεων κίνησης αναγκαστήκαμε να κάνουμε την προσέγγιση της χαμηλής ενέργειας  $\omega r_H \ll 1$  και μικρής παραμέτρου περιστροφής  $a_* \ll 1$ . Αυτή η προσέγγιση θα περιορίσει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μας στο συγκεκριμένο πεδίο ενεργειών του εκπεμπόμενου σωματιδίου και περιστροφής της μελανής οπής. Παρόλα αυτά, οι γραφικές μας παραστάσεις θα επεκταθούν πέρα από τα αυστηρά όρια της προσέγγισης αυτής, και θα βρεθεί ότι είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα ακόμα και στις περιοχές που είναι έξω από τα όρια των προσεγγίσεων που κάναμε. Ένα άλλο σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι ότι, γενικά, μία αύξηση στον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων, βελτιώνει την συμφωνία των αποτελεσμάτων μας με την ακριβή αριθμητική λύση, κάτι που είδαμε εξάλλου και στα προηγούμενα κεφάλαια. Καθώς το  $n$  αυξάνει, η συμπεριφορά που υποθέσαμε για την  $f(r)$  (ορίζεται στην εξίσωση 5.16) συμφωνεί καλύτερα με την προσέγγιση που κάναμε ότι δηλαδή τείνει στην μονάδα





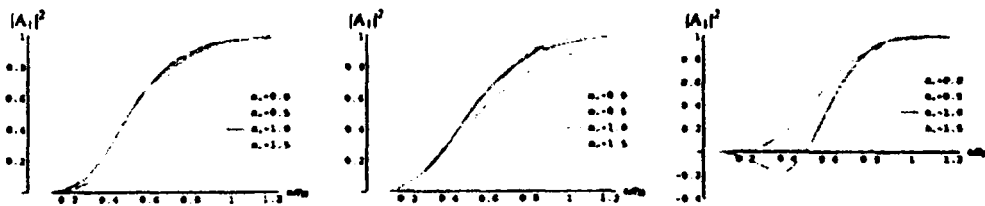


Σχήμα 5.1: Πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{1/2}|^2$  για φερμιόνια που διαδίδονται στην Μembrάνη, για  $j = 1/2$  και  $m = \pm 1/2$ , για την περίπτωση  $n = 6$  και  $a_* = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$ .

όταν το  $\tau$  τείνει στο άπειρο. Επίσης, όροι που παραλείψαμε κατά την ένωση των λύσεων, όπως ο  $K_*/A_*$ , γίνονται ακόμα μικρότεροι.

Στα Σχήματα 5.1 και 5.2, έχουμε σχεδιάσει την πιθανότητα απορρόφησης για φερμιόνια και μποζόνια βαθμίδας, για τα χαμηλότερα μερικά κύματα. Πιο συγκεκριμένα, τα  $(j = 1/2, m = \pm 1/2)$  και  $(j = 1, m = 0, -1, 1)$ , στην περίπτωση των  $n = 6$  επιπλέον διαστάσεων και για διάφορες τιμές του  $a_*$ . Από το Σχήμα 5.1 βλέπουμε ότι, για τα φερμιόνια με  $m > 0$  η πιθανότητα απορρόφησης αυξάνει μονότονα σε σχέση με την παράμετρο περιστροφής της μελανής οπής στο μεγαλύτερο κομμάτι του πεδίου ενεργειών, ενώ για  $m < 0$ , η  $|A_{1/2}|^2$  αυξάνει καθώς αυξάνει το  $a_*$  στις χαμηλές ενέργειες, αλλά μειώνεται στις υψηλές. Για τα μποζόνια βαθμίδας και για την περίπτωση  $m = 0$ , η πιθανότητα απορρόφησης αυξάνει με την παράμετρο περιστροφής της οπής, για μικρές τιμές του  $a_*$  αλλά αυτή η αύξηση φθίνει (και τελικά αντιστρέφεται) για μεγαλύτερες τιμές του  $a_*$ . Για  $m < 0$  η πιθανότητα απορρόφησης αυξάνει με το  $a_*$  στις χαμηλές ενέργειες, αλλά μειώνεται στις υψηλές. Τέλος, για  $m > 0$ , μια αύξηση στο  $a_*$  οδηγεί σε περισσότερο αρνητικές τιμές της  $|A_{1/2}|^2$  στην περιοχή που υπάρχει υπερακτινοβολία [128] (όπου η ποσότητα  $\omega - m\Omega$ , καθώς και η  $|A_1|^2$  γίνονται αρνητικές, σηματοδοτώντας την ενίσχυση του πλάτους του εισερχόμενου στην οπή κύματος), και σε περισσότερο θετικές τιμές στην περιοχή που δεν υπάρχει υπερακτινοβολία. Τα αποτελέσματά μας είναι σε πάρα πολύ καλή συμφωνία με τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας [75, 104, 106] στην περιοχή χαμηλών ενεργειών και μικρής παραμέτρου περιστροφής, και παραμένουν σε καλή συμφωνία ακόμα και όταν βγούμε από αυτήν την περιοχή τιμών. Απόκλιση από τα αριθμητικά αποτελέσματα αρχίζει να παρουσιάζεται μόνο για τιμές τις παραμέτρου περιστροφής που είναι μεγαλύτερες της μονάδας.

Παρόμοια συμφωνία με τα ακριβή αποτελέσματα παρατηρείται και όταν ε-



Σχήμα 5.2: Πιθανότητα απορρόφησης  $|A_1|^2$  για μποζόνια βαθμίδα που διαδίδονται στην Μεμβράνη, για  $j = 1$  και  $m = 0, -1, 1$ , για την περίπτωση  $n = 6$  και  $a_0 = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$ .

Ζετάσουμε την εξάρτηση των πιθανοτήτων απορρόφησης και για τα δύο είδη σωματιδίων από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Για να αποφύγουμε την επανάληψη αποτελεσμάτων που υπάρχουν ήδη στην βιβλιογραφία, δεν θα παρουσιάσουμε εδώ γραφικές παραστάσεις για την εξάρτηση της  $|A_{1/2}|^2$  και  $|A_1|^2$  από το  $n$  αλλά θα σχολιάσουμε μόνο την συμπεριφορά. Για την περίπτωση των φερμιονίων, μια μονοτονική μείωση παρατηρείται για  $m < 0$ , ενώ για  $m > 0$ , μια αύξηση στις χαμηλές ενέργειες δίνει τη θέση της σε μείωση στις υψηλές. Για τα μποζόνια βαθμίδα, μια μονοτονική αύξηση με το  $n$  βρίσκεται για τα κύματα που δεν παρουσιάζουν υπερακτινοβολία ( $m \leq 0$ ) για όλες τις ενέργειες, ενώ για αυτά που παρουσιάζουν ( $m > 0$ ), μια παρόμοια αύξηση στις περιοχές που δεν εμφανίζεται το φαινόμενο δίνει τη θέση της σε ενίσχυση (προς περισσότερο αρνητικές τιμές) στις περιοχές που εμφανίζεται.

## 5.5 Ασυμπτωτική Συμπεριφορά και Ενεργός Διατομή Απορρόφησης

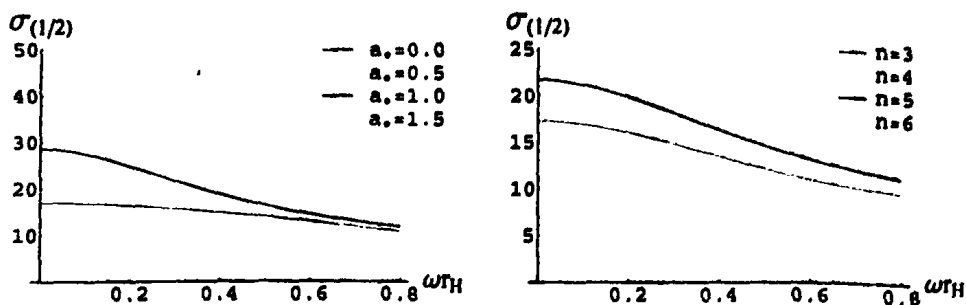
Επεκτείνοντας κι άλλο τις αναλυτικές μας εκφράσεις (5.55) και (5.62) για την πιθανότητα απορρόφησης για τα φερμιόνια και τα μποζόνια βαθμίδα αντίστοιχα, μπορούμε να παραγάγουμε απλοποιημένες εκφράσεις, από τις οποίες θα φαίνεται πιο καθαρά η ασυμπτωτική συμπεριφορά στις χαμηλές ενέργειες για κάθε περίπτωση, καθώς και πιθανές διαφορές στις ασυμπτωτικές τιμές της ενεργού διατομής απορρόφησης.

Στο όριο  $\omega \rightarrow 0$ , παίρνουμε από την εξίσωση (5.42)  $Z \simeq 2j + 1$ , και στη συνέχεια, από την έκφραση για το  $B_1/B_2$ , εξίσωση (5.48), το αποτέλεσμα

$$\frac{B_1}{B_2} \simeq \frac{\Gamma(2j+1)}{\Gamma(1+j-s)} (2i\omega)^{-2j-1} \left( \frac{A_1}{A_2} \right)_{\omega=0} \equiv M_{sjm} (2i\omega)^{-2j-1}, \quad (5.63)$$

με το  $M_{sjm}$  να είναι μιγαδική σταθερά, ανεξάρτητη από την παράμετρο ενέργειας  $\omega$ . Ξεκινώντας από την περίπτωση των φερμιονίων και την εξίσωση (5.55),





Σχήμα 5.3: Ολική ενεργός διατομή απορρόφησης για πεδία με σπιν 1/2, σε μονάδες  $\tau_H^2$ , για τις περιπτώσεις (α)  $n = 6$  και διάφορες τιμές του  $a_s$ , και (β)  $a_s = 0.5$  και διάφορες τιμές του  $n$ , στις χαμηλές ενέργειες.

θέτουμε  $s = 1/2$  και βρίσκουμε

$$|A_{\frac{1}{2}jm}|^2 \approx 1 - \left| \frac{M_{\frac{1}{2}jm} \Gamma(2j+2)}{M_{\frac{1}{2}jm} \Gamma(2j+2) e^{i\pi(j+1/2)} + \Gamma(j+3/2) (2i\omega)^{2j+1}} \right|^2$$

$$\approx \frac{(2\omega)^{2j+1} \Gamma(j+3/2)}{\Gamma(2j+2)} \left( \frac{1}{M_{\frac{1}{2}jm}} + \frac{1}{M_{\frac{1}{2}jm}^*} \right) + \dots \quad (5.64)$$

Η αντίστοιχη ενεργός διατομή απορρόφησης, που ορίζεται μέσω της σχέσης  $\sigma_{sjm} = \pi |A_{sjm}|^2 / \omega^2$  για το κάθε επιμέρους κύμα [55, 129, 130], θα είναι της μορφής

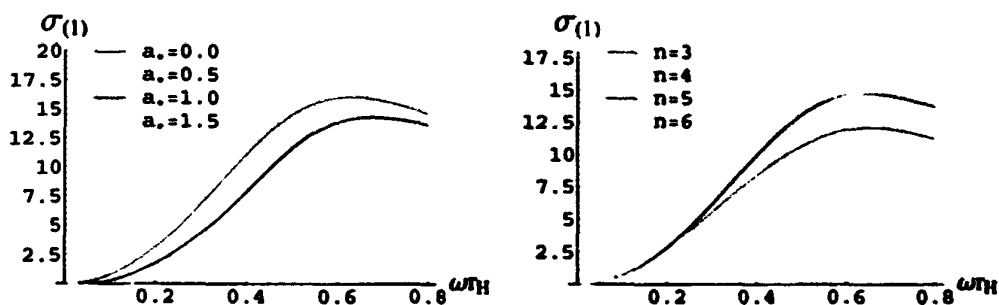
$$\sigma_{\frac{1}{2}jm} = \frac{2^{2j+1} \pi \omega^{2j-1} \Gamma(j+3/2)}{\Gamma(2j+2)} \left( \frac{1}{M_{\frac{1}{2}jm}} + \frac{1}{M_{\frac{1}{2}jm}^*} \right) + \dots \quad (5.65)$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα, εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι, όπως και στην περίπτωση μιας μη περιστρεφόμενης μελανής οπής παρουσία επιπλέον διαστάσεων [61, 64], η ενεργός διατομή για την απορρόφηση του χαμηλότερου φερμιονικού κύματος, με  $j = 1/2$ , παίρνει μία μη-μηδενική ασυμπτωτική τιμή, συγκεκριμένα

$$\sigma_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}m} = 2\pi \left( \frac{1}{M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}m}} + \frac{1}{M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}m}^*} \right), \quad (5.66)$$

ενώ όλα τα ανώτερα φερμιονικά επιμέρους κύματα με  $j > 1/2$ , θα έχουν μηδενική ενεργό διατομή όταν  $\omega \rightarrow 0$ . Η ποσότητα  $M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}m}$  εξαρτάται τόσο από τον





Σχήμα 5.4: Ολική ενεργός διατομή απορρόφησης για μποζόνια βαθμίδα, σε μονάδες  $\tau_H^2$ , για τις περιπτώσεις (α)  $n = 6$  και διάφορα  $a_s$ , και (β)  $a_s = 0.5$  διάφορα  $n$ , στις χαμηλές ενέργειες.

αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων, όσο και από την παράμετρο στροφορμής  $a_s$  της μελανής οπής. Στα Σχήματα 5.3.α και 5.3.β, παρουσιάζουμε την εξάρτηση της  $\sigma_{\frac{1}{2}}$  από το  $a_s$  και από το  $n$  αντίστοιχα - αφού πρώτα αθροίσουμε πάνω στα  $j$  και  $m$ , ώστε να πάρουμε την ολική ενεργό διατομή. Παρατηρούμε ότι η ασυμπτωτική τιμή της ενεργού διατομής για φερμιόνια στις χαμηλές ενέργειες αυξάνει, όταν αυξήσουμε την τιμή οποιασδήποτε από τις δύο παραμέτρους της τοπολογίας του χώρου, δηλαδή τα  $n$  και  $a_s$ .

Για τα μποζόνια βαθμίδα με  $s = 1$ , η εξίσωση (5.62) οδηγεί σε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα για την πιθανότητα απορρόφησης, συγκεκριμένα

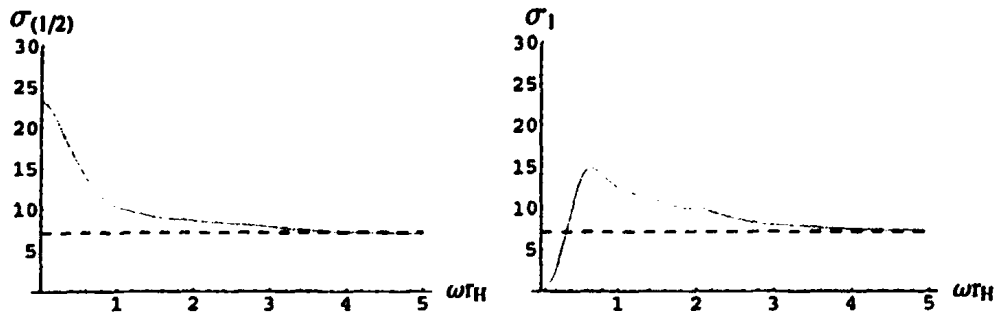
$$\begin{aligned}
 |A_{1jm}|^2 &\simeq 1 - \left| \frac{M_{1jm} \Gamma(2j+2)}{M_{1jm} \Gamma(2j+2) e^{i\pi j} + \Gamma(j+2) (2i\omega)^{2j+1}} \right|^2 \\
 &\simeq \frac{(2\omega)^{2j+1} \Gamma(j+2)}{\Gamma(2j+2)} \frac{i(M_{1jm}^* - M_{1jm})}{|M_{1jm}|^2} + \dots \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη ενεργός διατομή για την σκέδαση, θα έχει τότε την μορφή

$$\sigma_{1jm} = \frac{2^{2j+1} \pi \omega^{2j-1} \Gamma(j+2)}{\Gamma(2j+2)} \frac{i(M_{1jm}^* - M_{1jm})}{|M_{1jm}|^2} + \dots \quad (5.68)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, όλα τα μερικά κύματα του πεδίου βαθμίδα, συμπεριλαμβανομένου και του χαμηλότερου με  $j = 1$ , έχουν μηδενική ασυμπτωτική τιμή για την ενεργό διατομή απορρόφησης, κάτι που συμφωνεί και με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση της μη-περιστρεφόμενης, μελανής οπής Schwarzschild [61, 64]. Η εξάρτηση της  $\sigma_1$  - αθροισμένης πάλι πάνω στα  $j$  και  $m$  - από τα  $a_s$  και  $n$  παρουσιάζεται τώρα στα Σχήματα 5.4.α και 5.4.β.





Σχήμα 5.5: Ολική ενεργός διατομή απορρόφησης, σε μονάδες  $\tau_H^2$ , για πεδία με σπιν 1/2 και 1, για την περίπτωση  $n = 6$  και  $a_s = 0.5$ . Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην θεωρητική τιμή της  $\sigma$ , όπως αυτή υπολογίστηκε στο Κεφάλαιο 4 [112].

Σε αυτήν την περίπτωση, μια αύξηση στην παράμετρο περιστροφής της μελανής οπής προκαλεί μια μείωση στην τιμή της ενεργού διατομής απορρόφησης για τα πεδία βαθμίδας στις χαμηλές ενέργειες, ενώ αντίθετα μια αύξηση στον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων έχει ως αποτέλεσμα την αύξησή της.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο Υποκεφάλαιο, η πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{s,jm}|^2$  και για τα δύο είδη πεδίων, τόσο για τα φερμιόνια όσο και για τα μποζόνια βαθμίδας, τείνει στην μονάδα για μεγάλες τιμές της παραμέτρου ενέργειας  $\omega\tau_H$ . Έτσι λοιπόν, η ενεργός διατομή απορρόφησης  $\sigma_{s,jm} = \pi |A_{s,jm}|^2 / \omega^2$  για κάθε επιμέρους κύμα θα ξεκινάει είτε από μια μηδενική ή από μια μη-μηδενική τιμή στις χαμηλές ενέργειες σε συνάρτηση με το σπιν του πεδίου και τους κβαντικούς αριθμούς του κύματος, θα φτάνει σε μία μέγιστη τιμή και στην συνέχεια θα πηγαίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, συμπεριφερόμενη ως  $O(1/\omega^2)$ . Παρόλα αυτά, η συμπεριφορά της ολικής ενεργού διατομής  $\sigma_s$  - αθροισμένης πάνω στα  $j$  και  $m$  - αναμένεται να είναι εντελώς διαφορετική. Αναλύσεις για την περίπτωση της σφαιρικά συμμετρικής, μη-περιστρεφόμενης μελανής οπής [61, 62] έχουν δείξει ότι η ολική ενεργός διατομή για όλα τα σωματίδια που είναι εντοπισμένα πάνω στην Μembrάνη - βαθμωτά, φερμιόνια, μποζόνια βαθμίδας - τείνει σε μία ασυμπτωτική τιμή στις υψηλές ενέργειες, κοινή για όλα τα είδη, η οποία εξαρτάται μόνο από τον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων. Για την περίπτωση των περιστρεφόμενων μελανών οπών, έχει δείχτει παρομοίως τόσο στην πενταδιάστατη περίπτωση [110], όσο και στην γενική περίπτωση των  $(4 + n)$  διαστάσεων [112], όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, ότι, για τα βαθμωτά πεδία, μία παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται στις υψηλές ενέργειες, και ότι η ενεργός διατομή τείνει σε μία ασυμπτωτική τιμή. Υπενθυμίζουμε ότι στο Κεφάλαιο 4 δείξαμε με λεπτομέρεια ότι η ενεργός δια-



τομή απορρόφησης μπορεί να περιγραφεί στις υψηλές ενέργειες με την βοήθεια του ορίου της γεωμετρικής οπτικής και ότι η ακριβής ασυμπτωτική τιμή της  $\sigma_s = 0$  μπορεί να προσεγγιστεί από μία αναλυτική έκφραση που δίνει την ενεργό διατομή για ένα σωματίδιο που πλησιάζει την μελανή οπή από το άπειρο σε τροχιά παράλληλη με τον άξονα περιστροφής της οπής.

Έτσι, αυτό που μένει να δούμε είναι αν η ενεργός διατομή για την απορρόφηση των εναπομεινάντων τύπων πεδίου – φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας – τείνει ξανά στην ίδια ασυμπτωτική τιμή στις υψηλές ενέργειες, όπως και στην περίπτωση της μη-περιστρεφόμενης μελανής οπής. Χρησιμοποιώντας τα αναλυτικά μας αποτελέσματα (5.55) και (5.62) για τις πιθανότητες απορρόφησης, υπολογίσαμε τις ενεργούς διατομές για τα επιμέρους κύματα και, αθροίζοντας ως προς τα  $j$  και  $m$  σε κάθε περίπτωση, βρήκαμε την ολική πιθανότητα απορρόφησης για τα φερμιόνια και τα μποζόνια βαθμίδας αντίστοιχα. Η συμπεριφορά της ολικής ενεργού διατομής σε όλο το πεδίο ενεργειών απεικονίζεται στα Σχήματα 5.5.α και 5.5.α. Παρόλο που τα αποτελέσματα θα ανέμενε κανείς να συμφωνούν με τα ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα μόνο στις χαμηλές ενέργειες, και άρα να δίνουν λιγότερο αξιόπιστα αποτελέσματα στην περιοχή υψηλών ενεργειών, έχουμε υπολογίσει την ασυμπτωτική τιμή της  $\sigma_s$  στις υψηλές ενέργειες. Κάνοντας αυτό διαπιστώνει κανείς ότι τα αποτελέσματα μας δεν καταρρέουν στα υψηλά  $\omega r_H$ , αλλά αναπαράγουν με επιτυχία μία ασυμπτωτική τιμή για τις ενεργές διατομές σχέδασης  $\sigma_{1/2}$  και  $\sigma_1$ . Επιπλέον, αυτή η ασυμπτωτική τιμή είναι ταυτόσημη με την αντίστοιχη για τα βαθμωτά πεδία, όπως υπολογίστηκε στο Κεφάλαιο 4 και η οποία σημειώνεται στα Σχήματα 5.5.α και 5.5.α με διακεκομμένες γραμμές. Τα αποτελέσματά μας, λοιπόν, αποδεικνύουν ότι η συμπεριφορά των πεδίων στις υψηλές ενέργειες είναι ανεξάρτητη του σπιν τους και ότι η ενεργός διατομή απορρόφησης απορρόφησης εξαρτάται μόνο από τα τοπολογικά χαρακτηριστικά του χώρου, ακόμα και στην περίπτωση των πολυδιάστατων μελανών οπών.

## 5.6 Ρυθμοί Εκπομπής Ενέργειας

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, οι πιθανότητες απορρόφησης  $|A_{sjm}|^2$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε τους διάφορους ρυθμούς εκπομπής της ακτινοβολίας Hawking από την μελανή οπή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, οι αναλυτικές εκφράσεις που βρήκαμε (εξισώσεις 5.55 και 5.62), μαζί με την έκφραση για την θερμοκρασία (5.15), μπορούν να μας δώσουν τους ρυθμούς εκπομπής σωματιδίων στην Μembrάνη, για την περιστρεφόμενη πολυδιάστατη μελανή οπή που εξετάζουμε στη μορφή φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας. Για παράδειγμα, ο ρυθμός εκπομπής της ενέργειας, όπως είδαμε στο Υποκεφάλαιο 5.2, δίνεται από τον τύπο (5.14), τον οποίον και



Ξαναγράφουμε

$$\frac{d^2 E^{(s)}}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,m} \frac{\omega}{\exp[k/T_H] \pm 1} |A_{sjm}|^2 \quad (5.69)$$

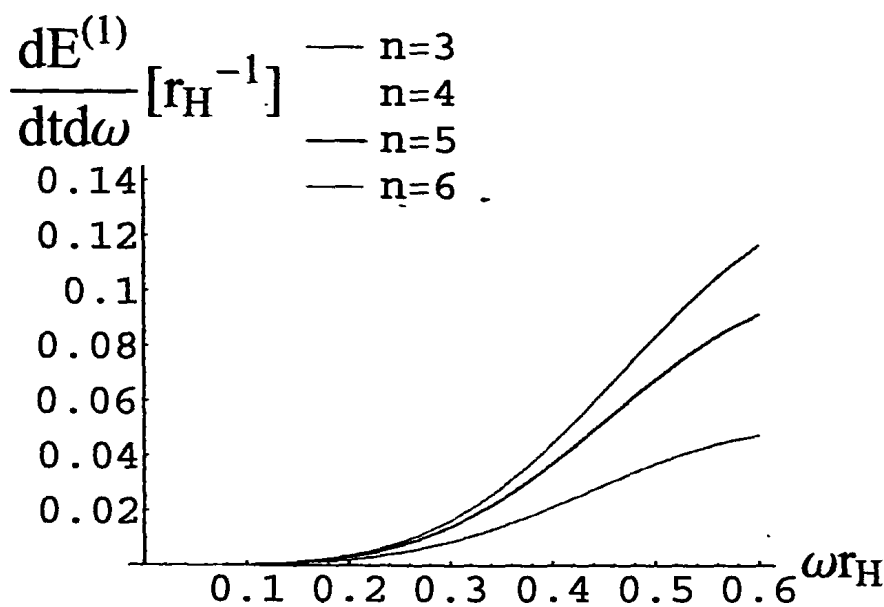
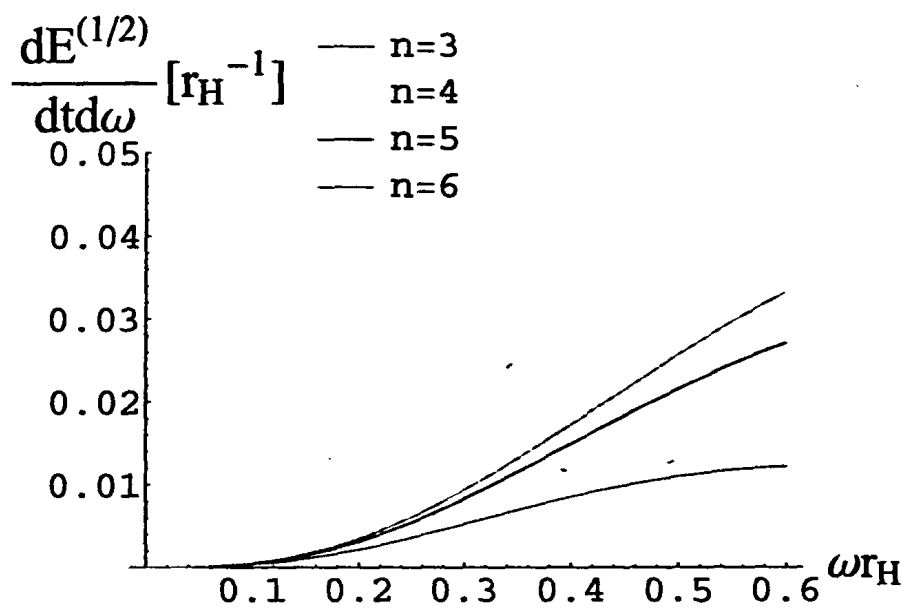
Καθώς τα αποτελέσματά μας είναι αυστηρά αξιόπιστα στις χαμηλές ενέργειες και για μικρές παραμέτρους περιστροφής της μελανής οπής, καταρχήν θα εξετάσουμε τι γίνεται για αυτή την περιοχή τιμών. Κατά την διάρκεια της ανάλυσης μας εξετάσαμε όλους τους ρυθμούς εκπομπής που έχουν σχέση με την ακτινοβολία Hawking και, πιο συγκεκριμένα, την ροή (αριθμός σωματιδίων), την ισχύ (απώλεια ενέργειας) και ρυθμό απώλειας τροχιακής στροφορμής, βρίσκοντάς τους όλους να παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά, σε σχέση με τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων  $n$  και την παράμετρο περιστροφής  $a_*$  της οπής. Για αυτό το λόγο, σαν ενδεικτικό παράδειγμα, θα παρουσιάσουμε εδώ μόνο τα αποτελέσματα για την περίπτωση του ρυθμού απώλειας της ενέργειας, όπως αυτός προκύπτει με βάση την εξίσωση (5.14). Στα Σχήματα 5.6 και 5.7, παρουσιάζουμε την ενέργεια που εκπέμπεται από την μελανή οπή, ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα συχνότητας, στην μορφή φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας, ως συνάρτηση του  $n$  και του  $a_*$ , αντίστοιχα. Εύκολα φαίνεται ότι η εκπομπή ενέργειας ενισχύεται όταν αυξηθεί οποιαδήποτε από τις παραμέτρους της τοπολογίας, σε συμφωνία με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα [75, 104, 106].

Ακόμα και αν εξετάσει κάποιος μόνο την περιοχή των υψηλών ενεργειών, μπορεί σωστά να συμπεράνει ότι η εκπομπή μποζονίων βαθμίδας είναι κυρίαρχη έναντι της αντίστοιχης εκπομπής φερμιονίων, για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων  $a_*$  και  $n$ . Το χαρακτηριστικό αυτό, συμφωνεί και με τα αποτελέσματα της ακριβούς αριθμητικής ανάλυσης. Επιπροσθέτως, πέρα από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των γραφικών παραστάσεων, και οι ακριβείς τιμές του ρυθμού εκπομπής αναπαράγονται σωστά από τα αναλυτικά μας αποτελέσματα. Με κίνητρο αυτήν την τελευταία διαπίστωση, στο Σχήμα 5.8 έχουμε σχεδιάσει τους ρυθμούς εκπομπής ενέργειας για φερμιόνια και μποζόνια βαθμίδας, μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου ενέργειας  $\omega T_H$ , και διάφορες τιμές του  $n$ , ενώ κρατάμε σταθερό το  $a_*$ . Η πεπερασμένη περιοχή ισχύος των αναλυτικών μας αποτελεσμάτων είναι σίγουρο ότι θα οδηγήσει σε αποκλίσεις από την ακριβή αριθμητική συμπεριφορά. Πράγματι, οι καμπύλες που παρουσιάζουμε έχουν την τάση να φτάνουν στο μέγιστο τους, και μετά να φθίνουν νωρίτερα από τις αντίστοιχες ακριβείς. Παρόλα αυτά, εκτός από το παραπάνω γεγονός, η συμφωνία ανάμεσα στα δύο σετ αποτελεσμάτων είναι σημαντική. Τα αναλυτικά μας αποτελέσματα κατορθώνουν να αναπαραγάγουν με επιτυχία, όχι μόνο τη γενική μορφή των καμπύλων και την εξάρτησή τους από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων, αλλά και την τιμή που αντιστοιχεί στην κορυφή



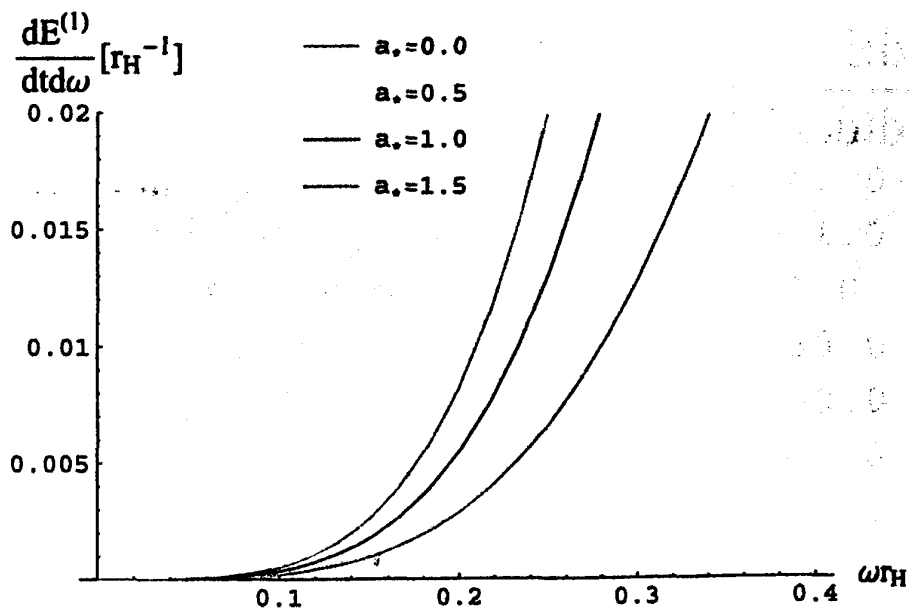
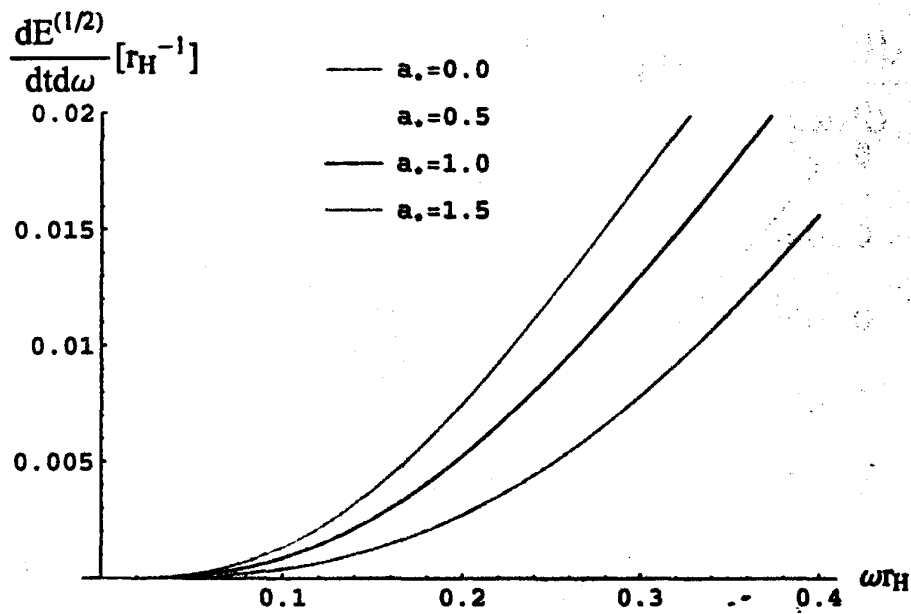






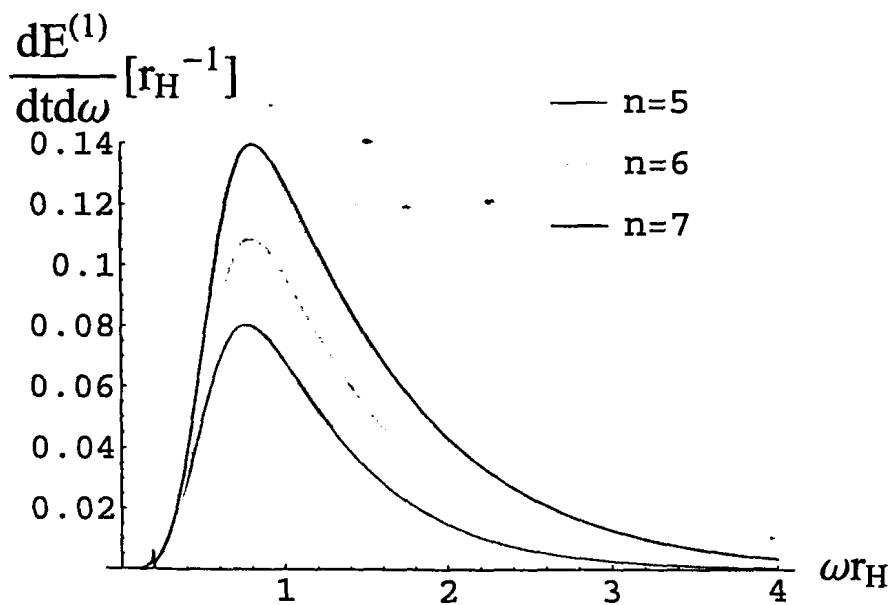
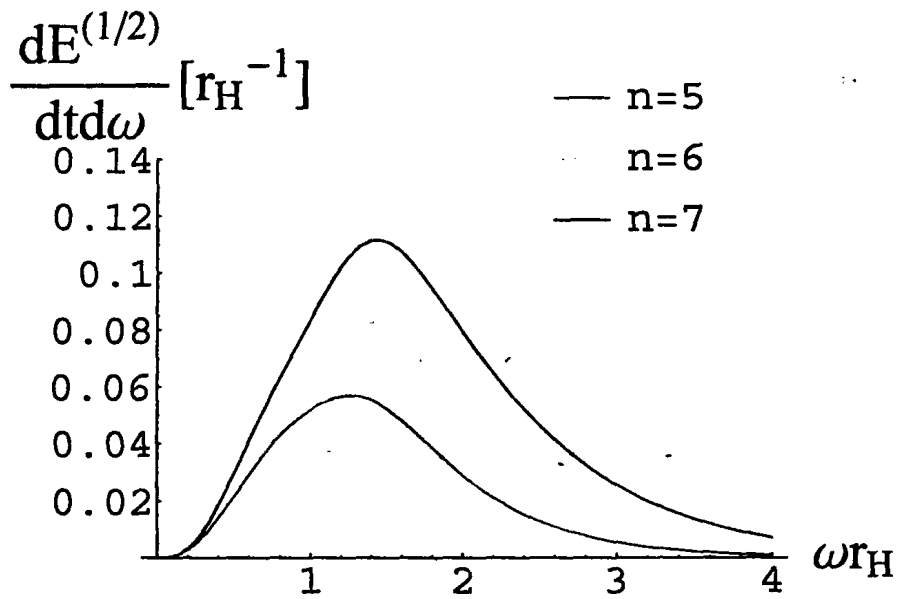
Σχήμα 5.6: Ρυθμός εκπομπής ενέργειας για πεδία με σπιν 1/2 και 1, για  $a_* = 0.5$  και διάφορες τιμές του  $n$ .





Σχήμα 5.7: Ρυθμός εκπομπής ενέργειας για πεδία με σπιν 1/2 και 1, για  $n = 6$  και διάφορες τιμές του  $a_*$ .





Σχήμα 5.8: Ρυθμός εκπομπής ενέργειας για πεδία με σπιν 1/2 και 1, για  $a_* = 0.2$  και διάφορες τιμές του  $n$ .

## Κεφάλαιο 6

# Εκπομπή Βαθμωτών Σωματιδίων στον Υπερχώρο από Περιστρεφόμενες Μελανές Οπές

### 6.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα δύο Κεφάλαια παρουσιάσαμε αναλυτικά αποτελέσματα για την εκπομπή ακτινοβολίας Hawking στην Μεμβράνη με τη μορφή βαθμωτών πεδίων, φερμιονίων, και μποζονίων βαθμίδας, από μια πολυδιάστατη περιστρεφόμενη μελανή οπή. Στο παρόν Κεφάλαιο θα συνεχίσουμε την μελέτη των περιστρεφόμενων οπών και θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση της εκπομπής άμαζων βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο.

Όπως είδαμε και στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 2, εκτός από την εκπομπή σωματιδίων στην Μεμβράνη, μία μελανή οπή, παρουσία επιπλέον χωρικών διαστάσεων, θα ακτινοβολήσει ενέργεια και στον Υπερχώρο με την μορφή βαρυτονίων και πιθανώς και βαθμωτών πεδίων. Η μελέτη της εκπομπής βαρυτονίων παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3 και η μελέτη της εκπομπής στην Μεμβράνη με την μορφή σωματιδίων του Καθιερωμένου μοντέλου έγινε στα Κεφάλαια 4 και 5. Το επόμενο λογικό βήμα, λοιπόν, είναι να μελετήσουμε τον ρυθμό εκπομπής ενέργειας με την μορφή βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο. Είναι σημαντικό να υπολογιστεί αυτός ο ρυθμός εκπομπής γιατί θα μας βοηθήσει να καθορίσουμε ποιο είναι το κυρίαρχο κανάλι εκπομπής: αυτό της Μεμβράνης ή αυτό του Υπερχώρου. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι ισχυρό κίνητρο για την μελέτη της ακτινοβολίας Hawking από πολυδιάστατες μελανές οπές, όπως εξάλλου είδαμε και στο Κεφάλαιο 2 της εισαγωγής, είναι το συναρπαστικό ενδεχόμενο να δημιουργηθούν μελανές οπές στους σύγχρονους επιταχυντές, με πρώτον



αυτόν του LHC. Αν όντως δημιουργηθούν μελανές οπές, η ποσότητα ενέργειας που θα ακτινοβολήσουν στην Μεμβράνη θα βρεθεί από τους ανιχνευτές μας, η ενέργεια όμως που θα ακτινοβοληθεί στον Υπερχώρο μπορεί μόνο έμμεσα να ανιχνευτεί ως ενεργειακό έλλειμμα. Έτσι λοιπόν, καθίσταται αναγκαία μία μελέτη της ακτινοβολίας Hawking με την μορφή βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο. Με αυτό το θέμα θα ασχοληθούμε στο παρόν Κεφάλαιο. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε, θα είναι ανάλογη με την μέθοδο που ακολουθήσαμε και στα προηγούμενα Κεφάλαια.

Θα αντιμετωπίσουμε, δηλαδή, το πρόβλημα αναλυτικά και θα προσπαθήσουμε να δώσουμε αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα απορρόφησης και εν συνεχεία για τον ρυθμό εκπομπής της ενέργειας. Η πολυπλοκότητα των εξισώσεων κίνησης θα μας αναγκάσει να χρησιμοποιήσουμε ξανά προσεγγιστική μέθοδο για την επίλυσή τους στις χαμηλές ενέργειες, που όμως, όπως είδαμε και στα προηγούμενα προβλήματα που αντιμετωπίσαμε, δίνει πολύ καλά αποτελέσματα ακόμα και στην περιοχή των ενδιάμεσων ενεργειών.

Το παρόν Κεφάλαιο έχει την ακόλουθη δομή: στο Υποκεφάλαιο 6.2 θα ξαναγράψουμε το στοιχείο μήκους που περιγράφει τον χωρόχρονο γύρω από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή παρουσία  $n$  επιπλέον χωρικών διαστάσεων, και θα παραγάγουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν ένα βαθμωτό πεδίο που περιγράφεται σε ένα τέτοιο χώρο. Στην συνέχεια, στο Υποκεφάλαιο 6.3 θα λύσουμε αναλυτικά την εξίσωση για το ακτινικό κομμάτι της λύσης χρησιμοποιώντας την μέθοδο που περιγράφηκε στα προηγούμενα Κεφάλαια: πρώτα θα παραγάγουμε την λύση της εξίσωσης στις περιοχές κοντά στον ορίζοντα, κατόπιν στην ασυμπτωτική περιοχή μακριά από αυτόν και τέλος θα 'προεκτείνουμε' και θα 'συγκολλήσουμε' τις δύο αυτές λύσεις στην ενδιάμεση περιοχή, δημιουργώντας έτσι μία αναλυτική λύση για όλο τον χώρο. Η λύση μας αυτή, θα είναι αυστηρά αξιόπιστη μόνο στις χαμηλές ενέργειες, και για μικρές παραμέτρους περιστροφής της μελανής οπής. Κατόπιν, στο Υποκεφάλαιο 6.4 θα χρησιμοποιήσουμε την λύση αυτή για να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης που χαρακτηρίζει την εκπεμπόμενη ακτινοβολία Hawking. Επίσης θα κάνουμε και μία αριθμητική ανάλυση, έγκυρη στο ίδιο πεδίο παραμέτρων, και θα συγκρίνουμε τα δύο σύνολα αποτελεσμάτων, βρίσκοντας μία πολλή καλή συμφωνία. Θα παρουσιάσουμε γραφικές παραστάσεις για χώρους διαφόρων διαστάσεων και για ένα εύρος τιμών της παραμέτρου περιστροφής. Στο Υποκεφάλαιο 6.5 θα υπολογίσουμε τον ρυθμό εκπομπής της ενέργειας, καθώς και τον λόγο αυτού του ρυθμού στην Μεμβράνη προς τον αντίστοιχο στον Υπερχώρο, και θα παρουσιάσουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



## 6.2 Στοιχείο Μήκους και Εξισώσεις Κίνησης

Είδαμε στα προηγούμενα Κεφάλαια ότι το βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από μια ηλεκτρικά αφόρτιστη, περιστρεφόμενη μελανή οπή, παρουσία  $(4 + n)$  διαστάσεων (μία χρονική, τρεις συνήθεις χωρικές και  $n$  επιπλέον χωρικές διαστάσεις), δίνεται από την λύση των Myers και Perry [53]. Όπως και προηγουμένως, θα υποθέσουμε ότι οι μελανές οπές θα δημιουργηθούν από συγχρούσεις υψηλά ενεργειακών σωματιδίων που κινούνται αποκλειστικά στην Μεμβράνη, με αποτέλεσμα η οπή, άρα και το αντίστοιχο στοιχείο μήκους, να χαρακτηρίζονται από μία μόνο μη-μηδενική συνιστώσα τροχιακής στροφορμής, η οποία και θα είναι παράλληλη με την Μεμβράνη. Το στοιχείο μήκους θα δίνεται σε αυτήν την περίπτωση από την ακόλουθη έκφραση, την οποία και σημειώνουμε ξανά για λόγους πληρότητας του παρόντος Κεφαλαίου

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{\mu}{\Sigma r^{n-1}} \right) dt^2 - \frac{2a\mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{a^2 \mu \sin^2 \theta}{\Sigma r^{n-1}} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2, \quad (6.1)$$

όπου

$$\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{n-1}}, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (6.2)$$

και  $d\Omega_n^2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \phi)$  είναι το στοιχείο μήκους πάνω σε μία σφαίρα  $n$  διαστάσεων με μοναδιαία ακτίνα. Όπως εξάλλου είδαμε, οι παράμετροι  $a$  και  $\mu$  που εμφανίζονται στην παραπάνω μετρική, συνδέονται με την μάζα  $M_{BH}$  και την τροχιακή στροφορμή  $J$  της μελανής οπής μέσω των σχέσεων

$$M_{BH} = \frac{(n+2)A_{n+2}}{16\pi G} \mu, \quad J = \frac{2}{n+2} M_{BH} a, \quad (6.3)$$

με το  $G$  να είναι η γενικευμένη σταθερά του Νεύτωνα για την περίπτωση ενός χωρόχρονου με  $(4 + n)$  διαστάσεις και  $A_{n+2}$  η επιφάνεια μίας σφαίρας  $(n + 2)$  διαστάσεων με μοναδιαία ακτίνα. Η τελευταία δίνεται από τον τύπο

$$A_{n+2} = \frac{2\pi^{(n+3)/2}}{\Gamma[(n+3)/2]}. \quad (6.4)$$

Τέλος, όπως έχουμε δει, η ακτίνα  $r_h$  του ορίζοντα της οπής βρίσκεται από την εξίσωση  $\Delta(r_h) = 0$ , η οποία και δίνει  $r_h^{n+1} = \mu/(1 + a_*^2)$ , με  $a_* = a/r_h$ .

Σε αυτό το Κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε τη δουλειά που δημοσιεύτηκε στην εργασία [143], στην οποία μελετήσαμε την εκπομπή ακτινοβολίας Hawking στον Υπερχώρο με τη μορφή βαθμωτών πεδίων. Σε αντίθεση με την μελέτη



που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 4, εδώ υποθέτουμε διάδοση σε όλον τον πολυδιάστατο χώρο και όχι μόνο πάνω στην Μεμβράνη. Θα ξεκινήσουμε, λοιπόν, την ανάλυσή μας δίνοντας την εξίσωση κίνησης για ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο που διαδίδεται στο βαρυτικό πεδίο που περιγράφει η εξίσωση (6.1). Αυτή δίνεται από την ακόλουθη έκφραση, η οποία αποτελεί την συναλλοίωτη εκδοχή της εξίσωσης Klein - Gordon σε καμπύλους χωροχρόνους:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0, \quad (6.5)$$

όπου

$$\sqrt{-g} = \Sigma \sin \theta r^n \cos^n \theta \prod_{i=1}^{n-1} \sin^i \theta_i. \quad (6.6)$$

Στην παραπάνω εξίσωση μπορούμε να αποσυζεύξουμε την ακτινική από την γωνιακή συνιστώσα, αν χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο ansatz

$$\Phi = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} R(r) S(\theta) Y_{jn}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \phi), \quad (6.7)$$

με  $Y_{jn}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \phi)$  τις λεγόμενες υπερσφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις (hyperspherical harmonics) που αποτελούν γενίκευση των γνωστών σφαιρικών αρμονικών σε μία σφαίρα  $n$  διαστάσεων. Αυτές ικανοποιούν την εξίσωση [144]

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} \sin^i \theta_i} \partial_{\theta_k} \left[ \left( \prod_{i=1}^{n-1} \sin^i \theta_i \right) \frac{\partial_{\theta_k} Y_{jn}}{\prod_{i>k}^{n-1} \sin^i \theta_i} \right] + \frac{\partial_{\phi\phi} Y_{jn}}{\prod_{i=1}^{n-1} \sin^i \theta_i} + j(j+n-1) Y_{jn} = 0. \quad (6.8)$$

Κάνοντας τα παραπάνω, βρίσκουμε ότι οι συναρτήσεις  $R(r)$  και  $S(\theta)$  ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r^n} \partial_r (r^n \Delta \partial_r R) + \left( \frac{K^2}{\Delta} - \frac{j(j+n-1)a^2}{r^2} - \Lambda_{j\ell m} \right) R = 0, \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos^n \theta} \partial_\theta (\sin \theta \cos^n \theta \partial_\theta S) + \left( \omega^2 a^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{j(j+n-1)}{\cos^2 \theta} + E_{j\ell m} \right) S = 0, \quad (6.10)$$

αντίστοιχα, οι οποίες παρουσιάστηκαν πρώτη φορά στην βιβλιογραφία στην εργασία [145]. Στα παραπάνω έχουμε θέσει

$$K = (r^2 + a^2) \omega - am, \quad \Lambda_{j\ell m} = E_{j\ell m} + a^2 \omega^2 - 2am\omega. \quad (6.11)$$



Η γωνιακή ιδιοτιμή  $E_{j\ell m}(a\omega)$ , όπως έχουμε δει και προηγουμένως, είναι ο σύνδεσμος ανάμεσα στην γωνιακή και ακτινική εξίσωση και όπως και στην περίπτωση της εκπομπής πάνω στην Μεμβράνη [101, 103, 105, 106, 111, 112], δεν υπάρχει κάποια κλειστή αναλυτική έκφραση για την τιμή της. Παρόλα αυτά, μπορεί να εκφραστεί σαν δυναμοσειρά ως προς την παράμετρο  $a\omega$  [146, 147]. Για τους σκοπούς της ανάλυσης μας, που είναι ιδιαίτερα αξιόπιστη στο όριο που το  $\omega$  και το  $a$  είναι χαμηλά, αρκεί να κρατήσουμε έναν πεπερασμένο αριθμό όρων. Επαρκεί να συμπεριλάβουμε όρους μέχρι και τον πέμπτο.<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 E_{mjl} = & \ell(\ell + n + 1) + (a\omega)^2 \left[ \frac{1 + 2m^2 - 2j(j - 1) - 2\ell(\ell + 1) - 2n(\ell + j) - n^2}{(2\ell + n - 1)(2\ell + n + 3)} \right] \\
 & + (a\omega)^4 \left[ \frac{(\ell - j - |m|)(\ell + j + n - |m| - 1)}{16(2\ell + n - 1)^2(2\ell + n - 3)} \left[ (\ell - j - |m| - 2)(\ell + j - |m| + n - 3) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{4(2\ell + n - 3)(1 + 2m^2 - 2j(j - 1) - 2\ell(\ell + 1) - 2n(\ell + j) - n^2)}{(2\ell + n - 1)(2\ell + n + 3)} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{(\ell - j - |m| + 2)(\ell + j + n - |m| + 1)}{16(2\ell + n + 3)^2(2\ell + n + 5)} \left[ (\ell - j - |m| + 4)(\ell + j - |m| + n + 3) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4(2\ell + n + 5)(1 + 2m^2 - 2j(j - 1) - 2\ell(\ell + 1) - 2n(\ell + j) - n^2)}{(2\ell + n - 1)(2\ell + n + 3)} \right] \right] + \dots \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

Για να συγκλίνει η δυναμοσειρά στο όριο  $a\omega \rightarrow 0$  και να τερματίζει σε κάποιο πεπερασμένο αριθμό όρων, ένας αριθμός περιορισμών θα πρέπει να τεθεί στις επιτρεπόμενες τιμές των ακεραίων παραμέτρων ( $j, \ell, m$ ) που καθορίζουν το κάθε επιμέρους κύμα για την εκπομπή. Γενικά, το  $m$  μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακεραία τιμή, και τα  $j$  και  $\ell$  οποιαδήποτε θετική ακεραία τιμή ή μηδέν αρκεί να ισχύουν [146]

$$\ell \geq j + |m| \quad \text{και} \quad \frac{\ell - (j + |m|)}{2} \in \{0, \mathbf{Z}^+\}. \quad (6.13)$$

Χρησιμοποιώντας τις γωνιακές ιδιοτιμές στην μορφή δυναμοσειράς, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση της (6.9) αναλυτικά. Η λύση για το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησης  $R(r)$  θα μας επιτρέψει να προσδιορίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{j\ell m}|^2$  για την διάδοση ενός άμαζου

<sup>1</sup> Η έκφραση (6.12) για το  $E_{j\ell m}$  βασίζεται στην ανάλυση της εργασίας [146], αλλά θα πρέπει να σημειώσουμε ότι διαφωνούμε με την έκφραση που δίνεται εκεί, καθώς το πρόσημο του δευτέρου όρου αντιστρέφεται. Αυτό είναι απαραίτητο να γίνει, ώστε στο όριο  $j, n \rightarrow 0$ , η έκφραση για το  $E_{j\ell m}$  να αναπαράγει σωστά τις ιδιοτιμές για εκπομπή πάνω στην Μεμβράνη όπως αυτές έχουν εμφανιστεί στην βιβλιογραφία.





βαθμωτού πεδίου στον Υπερχώρο, και με τη βοήθεια αυτής της ποσότητας, να μελετήσουμε τους ρυθμούς εκπομπής ακτινοβολίας Hawking από την μελανή οπή.

### 6.3 Αναλυτική Λύση

Για να καταφέρουμε να λύσουμε την εξίσωση (6.9) αναλυτικά, θα χρησιμοποιήσουμε ξανά την προσεγγιστική μέθοδο που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα Κεφάλαια. Στην αρχή θα λύσουμε την εξίσωση κοντά στον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής ( $r \simeq r_h$ ) και κατόπιν μακριά από αυτόν ( $r \gg r_h$ ). Στην συνέχεια οι δύο λύσεις θα επεκταθούν αναλυτικά και θα ενωθούν στην ενδιαίμεση περιοχή, δημιουργώντας μία αναλυτική λύση για όλο τον χώρο.

Ξεκινώντας από την περιοχή κοντά στον ορίζοντα, θα κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής, την οποία χρησιμοποιήσαμε και στα προηγούμενα δύο Κεφάλαια [112, 132]:

$$r \rightarrow f(r) = \frac{\Delta(r)}{r^2 + a^2} \Rightarrow \frac{df}{dr} = (1-f)r \frac{A(r)}{r^2 + a^2}, \quad (6.14)$$

όπου  $A(r) \equiv (n+1) + (n-1)a^2/r^2$ . Τότε, κοντά στον ορίζοντα είναι  $r \simeq r_h$ , και η εξίσωση (6.9) παίρνει τη μορφή

$$f(1-f) \frac{d^2 R}{df^2} + (1-D_* f) \frac{dR}{df} + \left[ \frac{K_*^2}{A_*^2 f(1-f)} - \frac{(j(j+n-1)a_*^2 + \Lambda_{j\ell m})(1+a_*^2)}{A_*^2 (1-f)} \right] R = 0 \quad (6.15)$$

με τα  $A_*$  και  $K_*$  να δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$A_* = (n+1) + (n-1)a_*^2, \quad K_* = (1+a_*^2)\omega_* - a_* m, \quad (6.16)$$

και

$$D_* \equiv 1 - \frac{4a_*^2}{A_*^2}. \quad (6.17)$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε τον συνήθη μετασχηματισμό

$$R_{NH}(f) = A_- f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f), \quad (6.18)$$

ο οποίος και θα φέρει την (6.15) στην μορφή μίας υπεργεωμετρικής διαφορικής εξίσωσης [94], με  $a = \alpha + \beta + D_* - 1$ ,  $b = \alpha + \beta$ , και  $c = 1 + 2\alpha$ . Επιπλέον,



οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$  δίνονται από τις εξισώσεις

$$\alpha = \pm \frac{iK_0}{A_0}, \quad (6.19)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ (2 - D_0) \pm \sqrt{W} \right], \quad (6.20)$$

όπου

$$W = (D_0 - 2)^2 - 4 \left[ \frac{K_0^2 - (j(j+n-1)a_0^2 + \Lambda_{jlm})(1+a_0^2)}{A_0^2} \right]. \quad (6.21)$$

Η γενική λύση της (6.15), μπορεί, τότε, να γραφτεί με τη βοήθεια της υπεργεωμετρικής συνάρτησης  $F$ , ως εξής:

$$R_{NH}(f) = A_- f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f) + A_+ f^{-\alpha} (1-f)^\beta F(a-c+1, b-c+1, 2-c; f). \quad (6.22)$$

Σε αυτήν την γενική λύση για τις περιοχές κοντά στον ορίζοντα, πρέπει να επιβάλλουμε την συνοριακή συνθήκη ότι δεν υπάρχουν εξερχόμενα κύματα πάνω στον ορίζοντα της μελανής οπής, όπως είδαμε και στα προηγούμενα Κεφάλαια. Έτσι λοιπόν, στο όριο  $r \rightarrow r_h$  παίρνουμε  $f(r) \rightarrow 0$ , και η λύση κοντά στον ορίζοντα, εξίσωση (6.22) γίνεται

$$R_{NH}(f) \simeq A_- f^{\pm iK_0/A_0} + A_+ f^{\mp iK_0/A_0} = A_- e^{\pm iky} + A_+ e^{\mp iky}, \quad (6.23)$$

όπου έχουμε θέσει

$$k \equiv \omega - m\Omega = \omega - \frac{ma}{r_h^2 + a^2}, \quad (6.24)$$

και το  $u$  είναι η συντεταγμένη *toroise* που ορίζεται από την σχέση  $y = r_h(1 + a_0^2) \ln(f)/A_0$ . Αν θέλουμε να επιβάλλουμε την προαναφερθείσα συνοριακή συνθήκη, θα πρέπει να θέσουμε είτε  $A_- = 0$  ή  $A_+ = 0$ , σε εξάρτηση με την επιλογή που θα κάνουμε για το  $\alpha$ . Είναι προφανές ότι οι δύο αυτές επιλογές είναι ισοδύναμες. Έτσι διαλέγουμε να θέσουμε  $\alpha = \alpha_-$ , που μας οδηγεί στην επιλογή  $A_+ = 0$ . Αυτό φέρνει την λύση κοντά στον ορίζοντα στην παρακάτω τελική μορφή

$$R_{NH}(f) = A_- f^\alpha (1-f)^\beta F(a, b, c; f). \quad (6.25)$$

Τέλος, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη το κριτήριο σύγκλισης της υπεργεωμετρικής συνάρτησης, το οποίο είναι το  $Re(c-a-b) > 0$  και το οποίο μας οδηγεί στην επιλογή  $\beta = \beta_-$ .

Έχοντας βρει την αναλυτική έκφραση της λύσης κοντά στον ορίζοντα, ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην περιοχή μακριά από αυτόν, στις



περιοχές τιμών τις ακτινικής συντεταγμένης με  $r \gg r_h$ . Σε αυτό το όριο, ο μετασχηματισμός  $R(r) = r^{-(\frac{n+1}{2})} \tilde{R}(r)$  φέρνει την εξίσωση (6.9) στην μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης Bessel [94], με όρισμα την παράμετρο  $z = \omega r$ ,

$$\frac{d^2 \tilde{R}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\tilde{R}}{dz} + \left( 1 - \frac{E_{jlm} + a^2 \omega^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{z^2} \right) \tilde{R} = 0. \quad (6.26)$$

Έτσι, η λύση μακριά από τον ορίζοντα μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$R_{FF}(r) = \frac{B_1}{r^{\frac{n+1}{2}}} J_\nu(\omega r) + \frac{B_2}{r^{\frac{n+1}{2}}} Y_\nu(\omega r), \quad (6.27)$$

με τις  $J_\nu$  και  $Y_\nu$  να είναι οι συναρτήσεις Bessel του πρώτου και δεύτερου είδους, αντίστοιχα, και  $\nu = \sqrt{E_{jlm} + a^2 \omega^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$ .

Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε μία ενιαία αναλυτική λύση για όλα τα  $r$ , θα πρέπει να ενώσουμε τις δύο ασυμπτωτικές λύσεις (6.25) και (6.27) στην ενδιάμεση περιοχή. Για αυτό το σκοπό, θα επικεντρώσουμε πρώτα το ενδιαφέρον μας στην λύση για περιοχές κοντά στον ορίζοντα (εξίσωση 6.25), και θα μετατρέψουμε το όρισμα της υπεργεωμετρικής συνάρτησης από  $f$  σε  $1-f$  χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση [94]

$$R_{NH}(f) = A_- f^a (1-f)^\beta \left[ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1; 1-f) + (1-f)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-f) \right]. \quad (6.28)$$

Η συνάρτηση  $f(r)$  μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$$f(r) = 1 - \frac{\mu}{r^{n-1}} \frac{1}{r^2 + a^2} = 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^{n-1} \frac{(1+a_*^2)}{(r/r_h)^2 + a_*^2}. \quad (6.29)$$

Στο όριο  $r \gg r_h$  που εξετάζουμε, το  $(r/r_h)^2$  που υπάρχει στον παρονομαστή του δεύτερου όρου είναι κυρίαρχο, και η  $f(r)$  τείνει στη μονάδα για  $n \geq 0$ . Τότε, η λύση κοντά στον ορίζοντα, εξίσωση (4.31) μπορεί να γραφτεί ως

$$R_{NH}(r) \simeq A_1 r^{-(n+1)\beta} + A_2 r^{(n+1)(\beta+D_*-2)}, \quad (6.30)$$

με  $A_1$  και  $A_2$  να ορίζονται ως

$$A_1 = A_- [(1+a_*^2)r_h^{n+1}]^\beta \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

$$A_2 = A_- [(1+a_*^2)r_h^{n+1}]^{-(\beta+D_*-2)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (6.31)$$



Στην συνέχεια, θα επεκτείνουμε αναλυτικά την λύση μακριά από τον ορίζοντα σε μικρές τιμές του  $r$ , παίρνοντας το όριο  $r \rightarrow 0$  στην εξίσωση (6.27):

$$R_{FF}(r) \simeq \frac{B_1 \left(\frac{\omega r}{2}\right)^\nu}{r^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\nu+1)} - \frac{B_2}{\pi r^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\Gamma(\nu)}{\left(\frac{\omega r}{2}\right)^\nu}. \quad (6.32)$$

Όπως και στην ανάλυση που κάναμε στα προηγούμενα Κεφάλαια, έτσι και εδώ, για να μπορέσουμε να κάνουμε την ένωση των δύο ασυμπτωτικών λύσεων στις ενδιαμέσες περιοχές, θα πρέπει να κάνουμε την προσέγγιση ότι τα  $a_*$  και  $\omega_*$  που παρουσιάζονται στους εκθέτες του  $r$  είναι μικρά, έτσι ώστε να αγνοήσουμε όρους όπως οι  $(\omega_*^2, a_*^2, a_*\omega_*)$ , ή και υψηλότερης τάξης. Σε αυτήν την περίπτωση, πετυχαίνουμε την ακριβή ένωση των λύσεων, καθώς

$$\begin{aligned} -(n+1)\beta &\simeq \ell + \mathcal{O}(\omega_*^2, a_*^2, a_*\omega_*), \\ (n+1)(\beta + D_* - 2) &\simeq -(\ell + n + 1) + \mathcal{O}(\omega_*^2, a_*^2, a_*\omega_*), \\ \nu &\simeq \ell + \frac{n+1}{2} + \mathcal{O}(a_*^2\omega_*^2). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ταυτοποιώντας δε τους συντελεστές που παρουσιάζονται μπροστά από ίδιες δυνάμεις του  $r$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} B \equiv \frac{B_1}{B_2} &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\omega r_h (1 + a_*^2)^{\frac{1}{n+1}}} \right)^{2\ell+n+1} \sqrt{E_{j\ell m} + a^2\omega^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \\ &\times \frac{\Gamma(\alpha + \beta + D_* - 1) \Gamma^2 \left( \sqrt{E_{j\ell m} + a^2\omega^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \right)}{\Gamma(2\beta + D_* - 2)} \\ &\times \frac{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(2 - 2\beta - D_*)}{\Gamma(2 + \alpha - \beta - D_*) \Gamma(1 + \alpha - \beta)} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Η παραπάνω σχέση εγγυάται την ύπαρξη μίας ομαλής, αναλυτικής λύσης για το ακτινικό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης για όλα τα  $r$ , αξιόπιστη στις χαμηλές ενέργειες και για μικρές τιμές της παραμέτρου περιστροφής της μελανής οπής.

## 6.4 Υπολογισμός της Πιθανότητας Απορρόφησης

Έχοντας υπολογίσει τη λύση της ακτινικής εξίσωσης (6.9), μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης. Για αυτό το σκοπό θα πάρουμε



στην λύση μακριά από τον ορίζοντα (εξίσωση 6.27) το όριο  $r \rightarrow \infty$ . Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (3.30,3.31) για τις συναρτήσεις Bessel [94], τις οποίες για ευκολία ξαναγράφουμε και εδώ:

$$J_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \Gamma(\nu + 1)^{-1} \quad (6.35)$$

$$Y_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad (6.36)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ταυτότητες, βρίσκουμε από την (6.27)

$$\begin{aligned} R_{FF}(r) &\simeq \frac{1}{r^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{2\pi\omega}} \left[ (B_1 + iB_2)e^{-i(\omega r - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + (B_1 - iB_2)e^{i(\omega r - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} \right] \\ &= A_{in}^{(\infty)} \frac{e^{-i\omega r}}{r^{\frac{n+2}{2}}} + A_{out}^{(\infty)} \frac{e^{i\omega r}}{r^{\frac{n+2}{2}}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

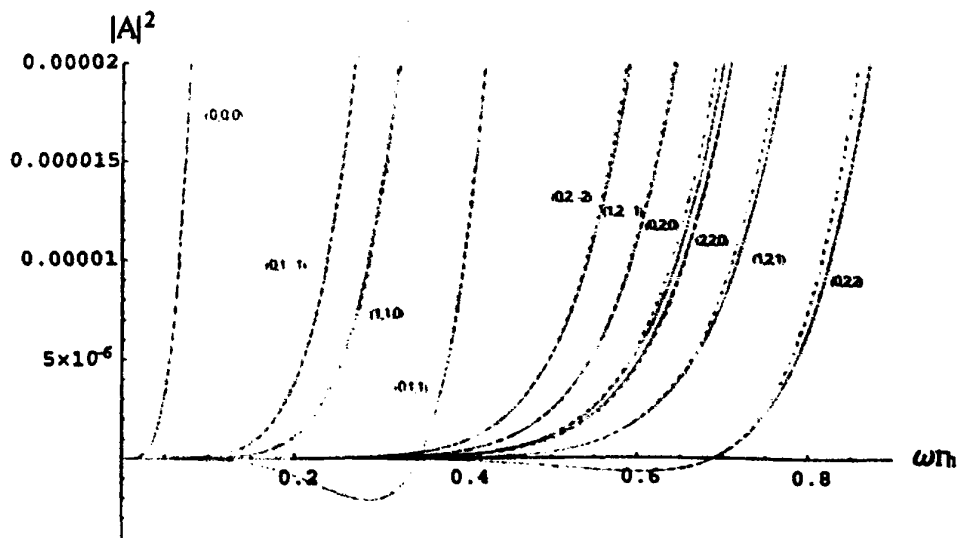
Όπως μπορεί κάποιος να δει από την παραπάνω έκφραση, σε μεγάλες αποστάσεις από την μελανή οπή, η λύση παίρνει τη μορφή ενός εισερχόμενου και ενός εξερχόμενου κύματος, το οποίο μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης από το λόγο των πλατών τους

$$|A_{j\ell m}|^2 = 1 - \left| \frac{A_{out}^{(\infty)}}{A_{in}^{(\infty)}} \right|^2 = 1 - \left| \frac{B_1 - iB_2}{B_1 + iB_2} \right|^2 = \frac{2i(B^* - B)}{BB^* + i(B^* - B) + 1} \quad (6.38)$$

Η παραπάνω σχέση, μαζί με την (6.34), αποτελούν τα κύρια αναλυτικά μας αποτελέσματα για την πιθανότητα απορρόφησης που σχετίζεται με την εκπομπή ενός άμαζου βαθμωτού σωματιδίου στον Υπερχώρο, από μία περιστρεφόμενη αφόρτιστη μελανή οπή, στο όριο που οι ενέργειες των εκπεμπόμενων σωματιδίων είναι χαμηλές, και η παράμετρος περιστροφής της οπής είναι μικρή.

Στο Σχήμα 6.1 έχουμε σχεδιάσει την πιθανότητα απορρόφησης για τα πρώτα μερικά κύματα, για την περίπτωση  $n = 2$ ,  $a_* = 0.4$ , και με τις τιμές για τα  $j, \ell, m$  να υπακούουν στις απαιτήσεις της εξίσωσης (6.13). Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι το πρώτο κύμα  $j = \ell = m = 0$  είναι κυρίαρχο απέναντι στα υπόλοιπα και ότι όσο τα  $j, \ell, m$  αυξάνουν, τόσο μειώνεται η πιθανότητα απορρόφησης. Στο Σχήμα αυτό βλέπουμε επίσης την εμφάνιση του φαινομένου της superradiance [128], για κύματα με θετικό  $m$ , όπου η πιθανότητα απορρόφησης παίρνει αρνητικές τιμές. Το Σχήμα 6.1 απεικονίζει δύο σύνολα γραμμών. Η πρώτη ομάδα, που αποτελείται από συνεχείς γραμμές, δίνει τις τιμές της πιθανότητας απορρόφησης  $|A_{j\ell m}|^2$  όπως αυτές προκύπτουν από το αναλυτικό μας αποτέλεσμα (6.38), ενώ η δεύτερη, σχεδιασμένη με διακεκομμένες γραμμές, δίνει το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα, όπως προκύπτει



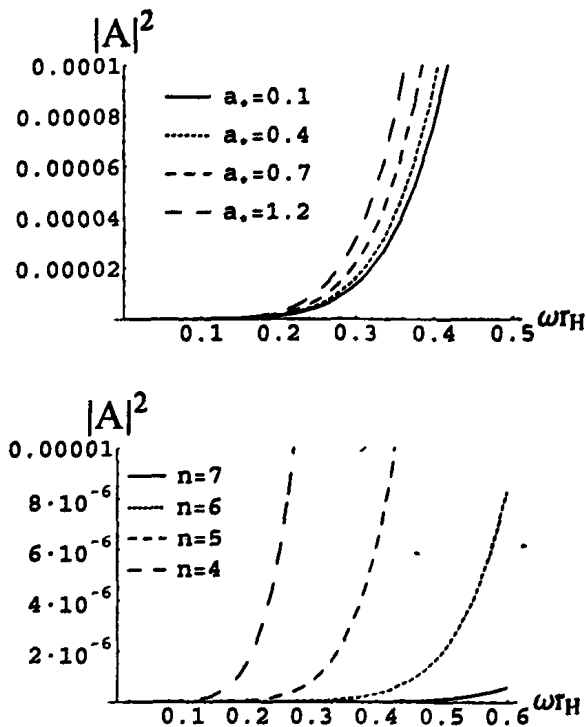


Σχήμα 6.1: Πιθανότητες απορρόφησης  $|A_{j\ell m}|^2$  για εκπομπή βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο, για  $n = 2$ ,  $a_* = 0.4$ , και διάφορους συνδυασμούς των χβαντικών αριθμών  $(j, \ell, m)$ .

από μετά από αριθμητική ολοκλήρωση<sup>2</sup> της ακτινικής εξίσωσης (6.9). Όπως και στην περίπτωση της εκπομπής βαρυτονίων στον Υπερχώρο του Κεφαλαίου 3, των βαθμωτών πεδίων στην Μembrάνη του Κεφαλαίου 4, καθώς και στην περίπτωση των πεδίων υψηλότερου σπιν στην Μembrάνη του Κεφαλαίου 5 [91, 112, 132], η προσεγγιστική μέθοδος που ακολουθούμε δίνει αποτελέσματα τα οποία είναι σε άριστη συμφωνία με τα ακριβή αριθμητικά, όχι μόνο στις χαμηλές ενέργειες, αλλά και στο πεδίο ενδιάμεσων ενεργειών.

Επικεντρώνοντας την προσοχή μας στο πρώτο κύμα, το οποίο όπως είδαμε είναι και το κυρίαρχο, στο Σχήμα 6.2.α παρουσιάζουμε την εξάρτηση της πιθανότητας απορρόφησης από την παράμετρο περιστροφής  $a_*$  για σταθερό  $n = 5$ . Από το Σχήμα αυτό φαίνεται ξεκάθαρα ότι μία αύξηση στην περιστροφής της μελανής οπής οδηγεί σε μία αύξηση στην τιμή της  $|A_{j\ell m}|^2$  στις χαμηλές και ενδιάμεσες ενέργειες. Αντιστρόφως, στο Σχήμα 6.2.β εξετάζουμε την εξάρτηση της πιθανότητας απορρόφησης από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων, κρατώντας σταθερή την τιμή της παραμέτρου περιστροφής  $a_* = 0.5$ . Είναι προφανές από την γραφική παράσταση ότι η τιμή της  $|A_{j\ell m}|^2$  μειώνεται στην περιοχή των χαμηλών ενεργειών καθώς το  $n$  αυξάνει. Η ίδια συμπεριφορά ως

<sup>2</sup>Κατά την αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης (6.9) χρησιμοποιήθηκε ξανά η ανάλυση της ιδιοτιμής  $E_{j\ell m}$  σε δυναμοσειρά, εξίσωση (6.12), μέχρι όρους 5ης τάξης, έγκυρη για μικρά  $a\omega$ .



Σχήμα 6.2: Πιθανότητα απορρόφησης για βαθμωτό πεδίο στον Υπερχώρο, για την περίπτωση που  $j = \ell = m = 0$ , και (α)  $n = 5$  και διάφορες τιμές του  $a_*$ , και (β)  $a_* = 0.5$  και διάφορες τιμές του  $n$ .

προς το  $n$  είχε παρατηρηθεί στο παρελθόν και για την περίπτωση της εκπομπής βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο από μία πολυδιάστατη σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή [61].

Ένα ενδιαφέρον σχόλιο που μπορεί να γίνει σε αυτό το σημείο αφορά το πώς συγκρίνονται οι πιθανότητες απορρόφησης για εκπομπή βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο, με την αντίστοιχη εκπομπή στην Μembrάνη, πάντα στο βαρυτικό υπόβαθρο μίας περιστρεφόμενης μελανής οπής. Εξετάζοντας τα αποτελέσματα του παρόντος Κεφαλαίου με τα αντίστοιχα του Κεφαλαίου 4, μπορούμε να δούμε ότι οι πιθανότητες απορρόφησης και για τα δύο είδη βαθμωτών πεδίων αυξάνονται όταν αυξηθεί η παράμετρος περιστροφής της μελανής οπής. Αντιθέτως, η τιμή της πιθανότητας απορρόφησης αυξάνει με το  $n$  για την περίπτωση εκπομπής στην Μembrάνη, ενώ μειώνεται για την εκπομπή στον Υπερχώρο. Σημαντικά συμπεράσματα μπορούν επίσης να εξαχθούν αν συγκρίνουμε το Σχήμα 6.1 με το αντίστοιχο Σχήμα 4.1 του Κεφαλαίου 4: για τις ίδιες τιμές των  $n$  και  $a_*$ , η πιθανότητα απορρόφησης για τα βαθμωτά σω-



ματίδια που εκπέμπονται στην Μεμβράνη είναι συνεχώς μεγαλύτερη από αυτήν για τα σωματίδια που εκπέμπονται στον Υπερχώρο κατά σχεδόν τρεις τάξεις μεγέθους, τόσο για τα κύματα που εμφανίζουν superradiance, όσο και για αυτά που δεν εμφανίζουν. Η ίδια παρατήρηση είχε γίνει στην εργασία [110] για την πενταδιάστατη περίπτωση - εδώ δείξαμε ότι αυτή η συμπεριφορά ισχύει και για υψηλότερο αριθμό επιπλέον διαστάσεων.

Μία απλή αναλυτική έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης μπορεί να εξαχθεί στο όριο που οι ενέργειες μένουν χαμηλές. Για  $\omega \rightarrow 0$ , παίρνουμε ότι  $B \propto 1/\omega^{2\ell+n+1}$  και άρα

$$|A_{j\ell m}|^2 \simeq 2i \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B^*} \right). \quad (6.39)$$

Αντικαθιστώντας το  $B$  από την εξίσωση (6.34), έχουμε

$$|A_{j\ell m}|^2 = \frac{-2i\pi (\omega r_h/2)^{2\ell+n+1}}{(\ell + \frac{n+1}{2}) \Gamma^2(\ell + \frac{n+1}{2}) (1+a_*^2)^{-\frac{2\ell+n+1}{n+1}} \Gamma(2-2\beta-D_*)} \times \left[ \frac{\Gamma(2+\alpha-\beta-D_*) \Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+D_*-1) \Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta-D_*) \Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha+\beta+D_*-1) \Gamma(-\alpha+\beta)} \right].$$

Αν επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση του πρώτου, κυρίαρχου κύματος  $j = \ell = m = 0$ , μετά από μία ανάλυση παρόμοια με αυτήν του Υποκεφαλαίου 4.3.3, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$|A_0|^2 = \frac{4\pi(1+a_*^2)^2(\omega r_h)^{n+2}}{A_* 2^n(n+1)\Gamma^2(\frac{n+1}{2})(2-D_*)} + \dots \quad (6.40)$$

Ας υπενθυμίσουμε εδώ ότι το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από ανάπτυξη κατά Taylor των συναρτήσεων Γάμμα, στο όριο που οι ενέργειες είναι μικρές. Το παραπάνω αποτέλεσμα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή απορρόφησης  $\sigma_0$  για το κυρίαρχο πρώτο κύμα για την περίπτωση της εκπομπής βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο, στην περιοχή των χαμηλών ενεργειών. Χρησιμοποιώντας την σχέση μεταξύ πιθανότητας απορρόφησης και ενεργού διατομής [55, 129, 130] μπορούμε να γράψουμε

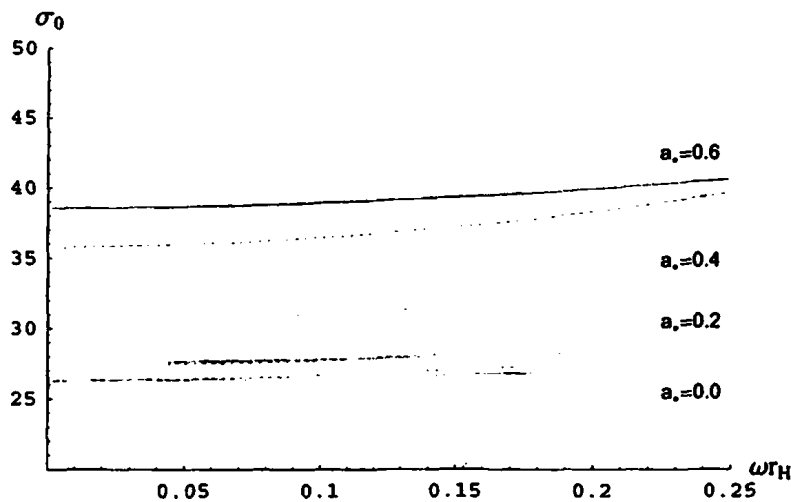
$$\sigma_{j\ell m}(\omega) = \frac{2^n}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{n+3}{2}\right) \frac{A_H}{(\omega r_h)^{n+2}} \frac{N_j}{(1+a_*^2)} |A_{j\ell m}|^2, \quad (6.41)$$

όπου τώρα

$$N_j = \frac{(2j+n-1)(j+n-2)!}{j!(n-1)!}, \quad A_H = \frac{2\pi^{\frac{n+3}{2}} r_h^n (r_h^2 + a^2)}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} \quad (6.42)$$







Σχήμα 6.3: Ενεργός διατομή απορρόφησης για εκπομπή βαθμωτού σωματιδίου στον Υπερχώρο, για την περίπτωση  $j = \ell = m = 0$ ,  $n = 2$  και διάφορες τιμές του  $a_*$ .

είναι αντίστοιχα ο αριθμός της πολλαπλότητας των καταστάσεων που αντιστοιχούν στο ίδιο  $j$  και η επιφάνεια του ορίζοντα μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής στις  $(4 + n)$  διαστάσεις. Αντικαθιστώντας την πιθανότητα απορρόφησης καταλήγουμε στη σχέση

$$\sigma_0(\omega) \simeq \frac{(n+1)(1+a_*^2)A_H}{A_*(2-D_*)} + \dots \quad (6.43)$$

Για  $a_* \rightarrow 0$ , το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται ίσο  $A_H$ , κάτι που είχε επίσης παρατηρηθεί και στην [61]. Για  $a_* \neq 0$ , τα αριθμητικά αποτελέσματα (διακεκομμένες γραμμές) που παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.3 επιβεβαιώνουν ότι και στην περίπτωση που εξετάζουμε, το όριο της ενεργού διατομής για την απορρόφηση τείνει στην επιφάνεια της αντίστοιχης περιστρεφόμενης μελανής οπής. Οι συνεχείς γραμμές παρουσιάζουν τα αναλυτικά μας αποτελέσματα, τα οποία και έρχονται σε συμφωνία με τα αντίστοιχα ακριβή αριθμητικά για μικρές τιμές του  $a_*$ . Η συμφωνία αυτή, όπως είναι αναμενόμενο, αρχίζει να γίνεται επισφαλής, όσο μεγαλώνει η παράμετρος περιστροφής της μελανής οπής.

## 6.5 Ο Ρυθμός Εκπομπής της Ενέργειας

Έχοντας βρει την πιθανότητα απορρόφησης στην εξίσωση (6.38), μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ρυθμού εκπομπής της ενέργειας για την



εκπομπή άμαζων βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο. Αυτός δίνεται από την έκφραση

$$\frac{d^2 E}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,\ell,m} \frac{\omega}{\exp[k/T_H] - 1} N_j |A_{j\ell m}|^2. \quad (6.44)$$

Η παραπάνω σχέση διαφέρει από την αντίστοιχη τετραδιάστατη [148] ως προς την ύπαρξη ενός επιπλέον αθροίσματος πάνω στον καινούργιο κβαντικό αριθμό τροχιακής στροφορμής  $j$ . Επίσης διαφέρει από την αντίστοιχη πενταδιάστατη περίπτωση [78] στην εισαγωγή της πολλαπλότητας των καταστάσεων  $N_j$  (εξίσωση 6.42) η οποία προκύπτει από την ανάπτυξη της κυματοσυνάρτησης σε υπερ-σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις πάνω σε σφαίρα  $n$  διαστάσεων. Η παράμετρος  $k$  ορίζεται στην εξίσωση (6.24), και η θερμοκρασία της πολυδιάστατης, περιστρεφόμενης μελανής οπής είναι

$$T_H = \frac{(n+1) + (n-1)a_*^2}{4\pi(1+a_*^2)r_h}. \quad (6.45)$$

Ένας χρήσιμος έλεγχος για την εγκυρότητα της παραπάνω-έκφρασης για τον ρυθμό εκπομπής, είναι να πάρουμε το όριο της όταν η παράμετρος περιστροφής τείνει στο μηδέν. Τότε, η εξίσωση (6.44) του ρυθμού εκπομπής της ενέργειας θα πρέπει να δίνει το γνωστό αποτέλεσμα για εκπομπή βαθμωτού πεδίου στον Υπερχώρο από μια μελανή οπή Schwarzschild ( $4+n$ ) διαστάσεων [61, 63]

$$\frac{d^2 E}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell} \frac{\omega}{\exp[\omega/T_H] - 1} N_{\ell} |A_{\ell}|^2, \quad (6.46)$$

όπου τώρα  $N_{\ell}$  είναι ο εκφυλισμός της  $\ell$ -οστής αρμονικής πάνω στην σφαίρα των  $(n+2)$  διαστάσεων.

$$N_{\ell} = \frac{(2\ell+n+1)(\ell+n)!}{\ell!(n+1)!}. \quad (6.47)$$

Στο όριο  $a \rightarrow 0$ , έχουμε  $k = \omega$  και η πιθανότητα απορρόφησης γίνεται ανεξάρτητη από τα  $m$  και  $j$ , διατηρεί δε, εξάρτηση μόνο από τον κύριο κβαντικό αριθμό  $\ell$ . Τότε, η εξίσωση (6.44) γίνεται ταυτόσημη με την εξίσωση (6.46) αρκεί να ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\sum_{j,m} N_j = \sum_{j=0}^{\ell} (\ell-j+1) \frac{(2j+n-1)(j+n-2)!}{j!(n-1)!} \equiv N_{\ell}. \quad (6.48)$$

Στο δεύτερο σκέλος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι, σύμφωνα με τους περιορισμούς που επιβάλλει η εξίσωση (6.13) στους



κβαντικούς αριθμούς, για κάθε ζεύγος τιμών των  $(j, \ell)$ , ο αριθμός  $m$  μπορεί να πάρει  $\ell - j + 1$  τιμές, και για κάθε τιμή του  $\ell$ , ο αριθμός  $j$  μπορεί να πάρει τις τιμές  $0 \leq j \leq \ell$ . Έτσι λοιπόν, θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$\sum_{j=0}^{\ell} (l-j+1)(2j+n-1) \frac{(j+n-2)!}{j!(n-1)!} = \frac{(2l+n+1)(l+n)!}{l!(n+1)!} \quad (6.49)$$

Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\sum_{i=r}^f (f-i+1)C(i, r) = C(f+2, r+2) \quad (6.50)$$

όπου  $C(f, r)$  η συνάρτηση συνδυασμών,  $C(s, r) = \frac{s!}{r!(s-r)!}$ . Παίρνουμε το πρώτο σκέλος της εξίσωσης (6.49), η οποία μας δίνει:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\ell} (l-j+1)(2j+n-1) \frac{(j+n-2)!}{j!(n-1)!} = \\ & \sum_{j=0}^{\ell} (l-j+1)(j+n-1) \frac{(j+n-2)!}{j!(n-1)!} + \sum_{j=0}^{\ell} (l-j+1)j \frac{(j+n-2)!}{j!(n-1)!} \end{aligned} \quad (6.51)$$

Το πρώτο άθροισμα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sum_{j=0}^{\ell} (l-j+1) \frac{(j+n-1)!}{j!(n-1)!} \quad (6.52)$$

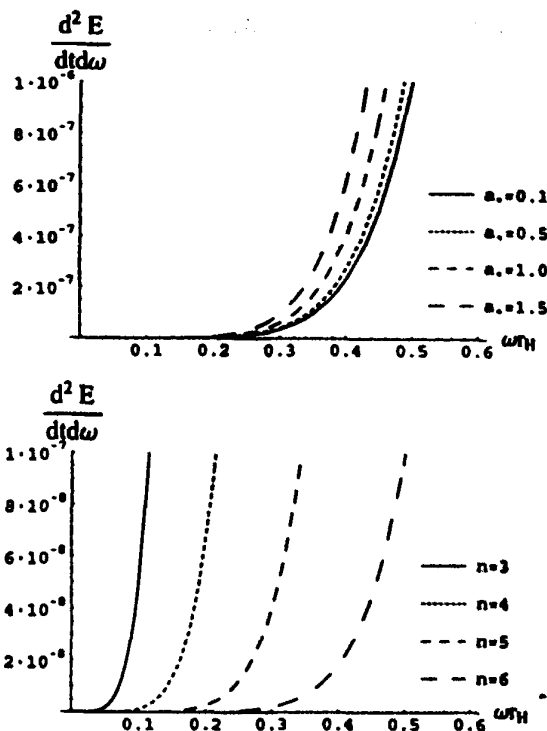
Θέτουμε  $j+n-1 = i \Rightarrow j = i-n+1$  και η παραπάνω έκφραση γίνεται ίση με

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n-1}^{l+n-1} (l+n-1-i+1) \frac{i!}{(i-n+1)!(n-1)!} = \\ & \sum_{i=n-1}^{l+n-1} (l+n-1-i+1)C(i, n-1), \end{aligned} \quad (6.53)$$

το δεύτερο σκέλος της οποίας, με την βοήθεια της εξίσωσης (6.51), για  $f = l+n-1, r = n-1$  γράφεται ίσο με  $C(l+n+1, n+1)$ . Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στο δεύτερο άθροισμα της εξίσωσης (6.51). Έχουμε

$$\sum_{j=0}^{\ell} (l-j+1)j \frac{(j+n-2)!}{j!(n-1)!} = \sum_{j=1}^{\ell} (l-j+1) \frac{(j+n-2)!}{(j-1)!(n-1)!} \quad (6.54)$$





Σχήμα 6.4: Ρυθμοί εκπομπής ενέργειας (α) για  $n = 5$  και διάφορες τιμές του  $a_*$ , και (β) για  $a_* = 0.5$  και διάφορες τιμές του  $n$ .

Ορίζοντας  $i = j + n - 2 \Rightarrow j = i - n + 2$ , το άθροισμα έρχεται στη μορφή

$$\sum_{i=n-1}^{l+n-2} (l+n-2-i+1) \frac{i!}{(i-n+1)!(n-1)!} = C(l+n, n+1) \quad (6.55)$$

Έτσι λοιπόν, το πρώτο σκέλος της (6.49) είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \frac{(l+n+1)!}{l!(n+1)!} + \frac{(l+n)!}{(l-1)!(n+1)!} &= \frac{(l+n)!}{l!(n+1)!} (l+n+1+l) = \\ \frac{(l+n)!}{l!(n+1)!} (2l+n+1), & \end{aligned} \quad (6.56)$$

το οποίο είναι ταυτόσημο με το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης (6.49). Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι στο όριο  $a \rightarrow 0$  ισχύει η εξίσωση (6.48) και, άρα, η εξίσωση (6.44) καταλήγει στη σωστή τετραδιάστατη έκφραση (6.46).

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.44), στα Σχήματα 6.4.α και 6.4.β έχουμε σχεδιάσει τους ρυθμούς εκπομπής ενέργειας στη μορφή βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο από μία περιστρεφόμενη μελανή οπή ως συνάρτηση της



παραμέτρου ενέργειας  $\omega\tau_h$  σε σχέση με την παράμετρο περιστροφής και τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων, αντίστοιχα. Η συμπεριφορά που παρατηρήθηκε για την πιθανότητα απορρόφησης εμφανίζεται και εδώ: ο ρυθμός εκπομπής ενισχύεται με την αύξηση του  $a_*$  στις χαμηλές ενέργειες σε αναλογία με τα αποτελέσματα για την εκπομπή βαθμωτών σωματιδίων, φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας στην Μεμβράνη [75, 101, 103, 104, 105, 106, 112, 132], ενώ μειώνεται σε σχέση με το  $n$ . Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα από προηγούμενες μελέτες, περιμένουμε η ενίσχυση σε σχέση με το  $a_*$  να επιμένει σε όλο το φάσμα ενεργειών ενώ αντιθέτως, είναι πολύ πιθανό, δεδομένης της ομοιότητας των αποτελεσμάτων μας με αυτών για την εκπομπή βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο από μία μη περιστρεφόμενη μελανή οπή [61], ότι η μείωση σε σχέση με το  $n$ , στις χαμηλές ενέργειες, θα δώσει τη θέση της σε μία ισχυρή αύξηση όταν περάσουμε στην περιοχή των υψηλών ενεργειών.

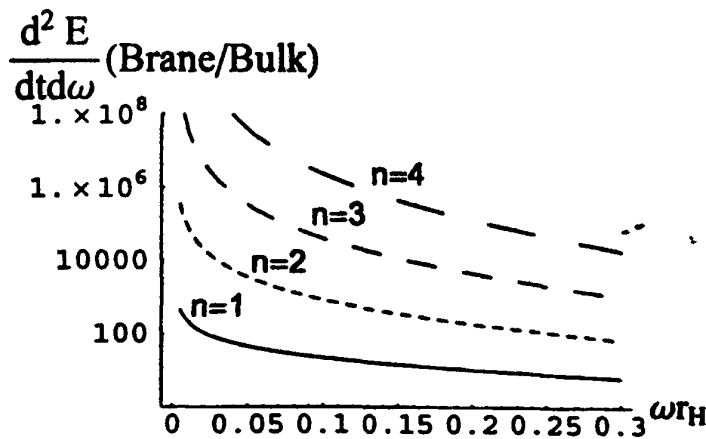
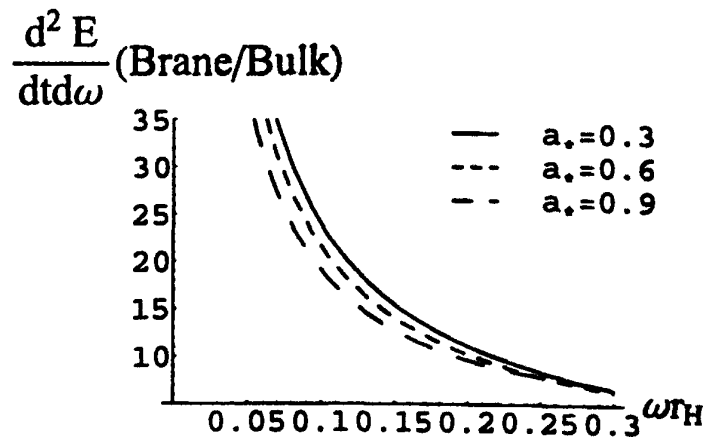
Θα πρέπει τέλος να απευθύνουμε το ερώτημα του αν η εκπομπή βαθμωτών σωματιδίων από την περιστρεφόμενη οπή που εξετάζουμε είναι μεγαλύτερη στην Μεμβράνη ή στον Υπερχώρο. Το θέμα αυτό είναι σημαντικό, γιατί καθορίζει το ποσοστό της ενέργειας της οπής που εκπέμπεται στο ορατό κανάλι (της Μεμβράνης). Ο ρυθμός εκπομπής βαθμωτών στον Υπερχώρο δίνεται από την εξίσωση (6.44), ενώ η αντίστοιχη σχέση για εκπομπή στην Μεμβράνη είναι [75, 101, 105, 111]

$$\frac{d^2 E}{dt d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell, m} \frac{\omega}{\exp[k/T_H] - 1} |A_{\ell m}|^2. \quad (6.57)$$

Η σύγκριση ανάμεσα στις πιθανότητες απορρόφησης για τις δύο περιπτώσεις, της εκπομπής στην Μεμβράνη και στον Υπερχώρο, έχει δώσει μία ξεκάθαρη ένδειξη για το ποια από τις δύο εκπομπές είναι η κυρίαρχη, παρόλα αυτά για να εξαχθεί το τελικό συμπέρασμα θα πρέπει να συγκριθούν οι ρυθμοί εκπομπής της ενέργειας παίρνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες των καταστάσεων. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6.44) και (6.57) υπολογίζουμε τον λόγο του ρυθμού εκπομπής στην μεμβράνη Μεμβράνη προς τον αντίστοιχο στον Υπερχώρο (*Brane* προς *Bulk*) και τον παρουσιάζουμε στο Σχήμα 6.5.α και 6.5.β, σε σχέση με τις παραμέτρους  $a_*$  και  $n$ . Μπορεί κάποιος εύκολα να παρατηρήσει ότι ενώ η ακριβής τιμή εξαρτάται τόσο από το  $a_*$  όσο και από το  $n$ , ο λόγος των ρυθμών εκπομπής Μεμβράνης προς Υπερχώρου παραμένει πάντα μεγαλύτερος της μονάδας, καθιστώντας κυρίαρχη την εκπομπή στο ορατό κανάλι, αυτό της Μεμβράνης. Ακόμα, πρέπει εδώ να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι παρόμοιο αποτέλεσμα είχε βρεθεί και για την περίπτωση μιας πολυδιάστατης μελανής οπής τύπου Schwarzschild [61].

Λίγους μήνες αργότερα από όταν δημοσιεύσαμε την εργασία [143] στην οποία έγινε η μελέτη που παρουσιάσαμε στο παρόν Κεφάλαιο, εμφανίστηκε





Σχήμα 6.5: Ρυθμός εκπομπής ενέργειας στην Μembrάνη προς τον αντίστοιχο ρυθμό στον Υπερχώρο για βαθμωτά πεδία (α) για  $n = 1$  και διάφορες τιμές του  $a_*$  και (β) για  $a_* = 0.5$  και διάφορες τιμές του  $n$ .

στην βιβλιογραφία η εργασία της αναφοράς [149]. Σε αυτήν την εργασία, οι συγγραφείς μελέτησαν επίσης την περίπτωση της εκπομπής βαθμωτού σωματιδίου στον Υπερχώρο από μία περιστρεφόμενη, πολυδιάστατη μελανή οπή, και πιο συγκεκριμένα έλυσαν το πρόβλημα αριθμητικά. Τα αποτελέσματά τους έρχονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν σε αυτό το Κεφάλαιο, και τα συμπληρώνουν στο πεδίο των υψηλών ενεργειών, όπου δεν υπάρχει μέχρι σήμερα γνωστός τρόπος να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αναλυτικά.

## Συμπεράσματα

Στο τελευταίο αυτό εδάφιο θα παρουσιάσουμε σύντομα τα κυριότερα σημεία και τα σημαντικότερα αποτελέσματα της διατριβής. Όπως είδαμε στα εισαγωγικά Κεφάλαια, οι θεωρίες που προβλέπουν την ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων στο σύμπαν και την ταυτόχρονη μείωση της χαρακτηριστικής κλίμακας της βαρύτητας, αν αποδειχτούν σωστές για την περιγραφή της φύσης ανοίγουν τον δρόμο για την δημιουργία μελανών οπών σε επιταχυντές του άμεσου μέλλοντος. Για να μπορέσουμε από αυτές να εξαγάγουμε πληροφορίες, χρειάζεται να μελετήσουμε το φάσμα της ακτινοβολίας Hawking που αυτές θα εκπέμπουν, στα ελάχιστα κλάσματα του δευτερολέπτου που θα ζήσουν.

Η ακτινοβολία αυτή γίνεται μέσω εκπομπής όλων των ειδών σωματιδίων και σε όλο το φάσμα των ενεργειών, ο ρυθμός δε της εκπομπής για κάθε είδος σωματιδίων εξαρτάται από το είδος αυτό και από τα χαρακτηριστικά του χωροχρόνου, δηλαδή τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων, την περιστροφή της μελανής οπής κτλ. Ο τρόπος για να υπολογίσουμε τον ακριβή ρυθμό της εκπομπής ενέργειας με την μορφή ενός είδους πεδίου, είναι να επιλύσουμε τις εξισώσεις κίνησης για το συγκεκριμένο πεδίο και να υπολογίσουμε από αυτές την πιθανότητα απορρόφησης, μία ποσότητα που όπως είδαμε εξαρτάται από την ενέργεια του εκπεμπόμενου σωματιδίου και τους κβαντικούς του αριθμούς. Από την πιθανότητα απορρόφησης μπορούμε στην συνέχεια να υπολογίσουμε τον ρυθμό με τον οποίο χάνει ενέργεια η μελανή οπή και να σχεδιάσουμε καμπύλες που θα δείχνουν την εξάρτηση αυτού του ρυθμού από την ενέργεια των σωματιδίων που εκπέμπονται, τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων και την παράμετρο περιστροφής της μελανής οπής. Η ανάλυση που κάναμε ήταν στην κατεύθυνση της αναλυτικής επίλυσης των εξισώσεων κίνησης για κάθε είδος πεδίων. Όμως, οι εξισώσεις κίνησης είναι αρκετά πολύπλοκες και δεν επιλύονται αναλυτικά σε όλο το πεδίο ενεργειών. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιήσαμε μία προσεγγιστική μέθοδο επίλυσης, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλά παλαιότερα άρθρα της διεθνούς βιβλιογραφίας για την μελέτη της ακτινοβολίας Hawking. Οι εξισώσεις κίνησης λύνονται καταρχάς λίγο έξω από τον ορίζοντα της μελανής οπής και στην λύση αυτή εφαρμόζουμε ως συνοριακή συνθήκη ότι η λύση θα πρέπει να αποτελείται αποκλειστικά από εξερχόμενα κύματα στο όριο  $r \rightarrow r_H$ . Στην συνέχεια, λύνουμε τις εξισώσεις σε πολύ μεγάλη απόσταση από την οπή, στο όριο  $r \rightarrow \infty$ . Οι δύο αυτές λύσεις ενώνονται στην ενδιάμεση περιοχή, για να δημιουργήσουν μια ενιαία λύση για όλα τα  $r$ . Η λύση αυτή επεκτείνεται στη μορφή εισερχόμενων και εξερχόμενων κυμάτων στο άπειρο και από εκεί υπολογίζουμε την πιθανότητα απορρόφησης μέσω του λόγου των πλατών των δύο κυμάτων.



Στο Κεφάλαιο 3, λοιπόν, μελετήσαμε την εκπομπή βαρυτονίων από μια πολυδιάστατη, αφόρτιστη, σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή. Οι Ishibashi και Kodama έδειξαν ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις που περιγράφουν τα εκπεμπόμενα βαρυτόνια, οι οποίες προκύπτουν διαταράσσοντας την μετρική που περιγράφει την μελανή οπή. Οι τρεις διαταραχές ονομάζονται ταυσιτικές, βαθμωτές και διανυσματικές αντίστοιχα. Επιλύσαμε αναλυτικά τις εξισώσεις αυτές κάνοντας την προσέγγιση των χαμηλών ενεργειών. Συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις που παραγάγαμε με αντίστοιχες εργασίες που εξέτασαν το πρόβλημα αριθμητικά είδαμε ότι δίνουν καλά αποτελέσματα ακόμα και στο πεδίο των ενδιαμέσων περιοχών, εκτός από την περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών, για τις οποίες η μέθοδος δεν δίνει τόσο καλά αποτελέσματα. Ο λόγος είναι η ύπαρξη ενός επιπλέον πόλου στην διαφορική εξίσωση των βαθμωτών διαταραχών, ο οποίος επηρεάζει την συμπεριφορά της λύσης και ο οποίος δεν συμπεριλαμβάνεται με την μέθοδό μας. Όμως αυτό δεν μας εμποδίζει από το να βγάλουμε κάποια ποιοτικά συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα, είδαμε ότι οι διαταραχές διανυσματικού τύπου αποτελούν το κυρίαρχο είδος των διαταραχών που θα εκπεμφθούν από την μελανή οπή, μια κυριαρχία που γίνεται πιο έντονη σε μεγαλύτερες τιμές του αριθμού  $n$  των επιπλέον διαστάσεων. Αυτό που αλλάζει καθώς αυξάνει το  $n$  είναι η σχετική ένταση των άλλων δύο τύπων διαταραχών, για μικρά  $n$  κυριαρχούν οι βαθμωτού τύπου ενώ για μεγάλα  $n$  οι ταυσιτικού.

Ένα άλλο στοιχείο που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 3 είναι η σύγκριση ανάμεσα στην εκπομπή βαρυτονίων στον Ύπερχώρο σε σχέση με την εκπομπή ενός βαθμωτού πεδίου. Είδαμε, λοιπόν, ότι επειδή τα κύματα με  $l = 0$  και  $l = 1$  απουσιάζουν στην περίπτωση της εκπομπής βαρυτονίων, ενώ υπάρχουν στην περίπτωση του βαθμωτού, ο ρυθμός εκπομπής ενέργειας από την μελανή οπή είναι πολύ μεγαλύτερος στην δεύτερη περίπτωση. Τέλος, βρήκαμε ότι καθώς αυξάνει ο αριθμός των επιπλέον διαστάσεων μειώνεται ο ρυθμός της εκπομπής στις χαμηλές ενέργειες, κάτι που όμως αναμένεται να αντιστραφεί στις υψηλότερες.

Στο Κεφάλαιο 4 εξετάσαμε την περίπτωση μίας περιστρεφόμενης, αφόρτιστης μελανής οπής παρουσία  $n$  επιπλέον διαστάσεων, και πιο συγκεκριμένα τον ρυθμό με τον οποίο αυτή χάνει ενέργεια μέσω της εκπομπής βαθμωτών πεδίων στην Μεμβράνη. Απουσία αναλυτικής λύσης σε όλο το πεδίο ενεργειών, εστίασαμε στα δύο ασυμπτωτικά άκρα: στις πολύ χαμηλές, και στις πολύ υψηλές ενέργειες. Τα αποτελέσματα ολόκληρου του Κεφαλαίου συγκρίνονται γραφικά με την ακριβή λύση, όπως αυτή προκύπτει μέσα από αριθμητική ανάλυση που έγινε με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και τα δύο σύνολα αποτελεσμάτων βρέθηκαν να είναι σε πολύ καλή συμφωνία, δικαιώνοντας με αυτόν τον τρόπο την χρήση της προσεγγιστικής μεθόδου.

Αρχικά, κάναμε την προσέγγιση της χαμηλής ενέργειας και υπολογίσαμε





την πιθανότητα απορρόφησης με την μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω. Η πιθανότητα απορρόφησης στην συνέχεια παραστάθηκε γραφικά για να εξετάσουμε την εξάρτησή της από τις διάφορες παραμέτρους του σωματιδίου και του χρωοχρόνου. Βρήκαμε, λοιπόν, ότι το χαμηλότερο κύμα, αυτό που αντιστοιχεί σε  $l = 0$ , είναι για όλες τις περιπτώσεις το κυρίαρχο, ενώ τα υπόλοιπα, ανώτερα κύματα συνεισφέρουν αρκετά λιγότερο. Εστιάζοντας μετά στην εξάρτηση από το  $m$ , βρήκαμε ότι για το ίδιο  $l$ , τα κύματα με  $m < 0$  κυριαρχούν, ενώ στα κύματα με θετικό  $m$  παρατηρήθηκε υπερακτινοβολία (superradiance), ένα φαινόμενο γνωστό από την βιβλιογραφία, κατά το οποίο η πιθανότητα απορρόφησης για ορισμένα κύματα παίρνει αρνητικές τιμές. Εν συνεχεία μελετήσαμε την εξάρτηση της  $|A|^2$  από τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν το βαρυτικό υπόβαθρο, δηλαδή το  $a_*$ , την παράμετρο στροφορμής, και το  $n$ , τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Είδαμε ότι για σταθερό  $n$ , τα κύματα με  $m \leq 0$  ενισχύονται με την αύξηση του  $a_*$  και αυτά με θετικό  $m$  μειώνονται. Κρατώντας, από την άλλη, σταθερό το  $a_*$ , είδαμε ότι αύξηση του  $n$  ενισχύει την  $|A|^2$  για αρνητικά  $m$ , την μειώνει για τα υπόλοιπα. Επίσης παραγάγαμε μία απλοποιημένη έκφραση για την ενεργό διατομή της απορρόφησης. Στο παρελθόν, για την περίπτωση της μελανής οπής τύπου Schwarzschild, έχει δειχτεί ότι το όριο τις διατομής αυτής στις χαμηλές ενέργειες ισούται με την επιφάνεια του ορίζοντα της οπής,  $4\pi r_H^2$ . Με την βοήθεια της απλοποιημένης σχέσης που παραγάγαμε, δείξαμε ότι όλα τα μερικά κύματα με  $l \neq 0$  δεν συνεισφέρουν στην ενεργό διατομή στο όριο  $\omega \rightarrow 0$ , και με την βοήθεια και της ακριβούς αριθμητικής ανάλυσης είδαμε ότι όντως η ενεργός διατομή τείνει στην επιφάνεια του ορίζοντα  $4\pi(r_H^2 + a^2)$  και για την περίπτωση των περιστρεφόμενων οπών. Επιπλέον, παρουσιάσαμε μία προσεγγιστική μέθοδο επίλυσης της ακτινικής εξίσωσης κίνησης στις υψηλές ενέργειες. Πιο συγκεκριμένα, η λύση μακριά από τον ορίζοντα κατασκευάστηκε με τρόπο κατάλληλο ώστε να μπορεί να ενωθεί με την λύση κοντά στον ορίζοντα στο όριο που οι ενέργειες είναι υψηλές. Με την βοήθεια αυτής, καταφέραμε να δώσουμε αναλυτικές εκφράσεις για την  $|A|^2$  στο όριο των υψηλών ενεργειών, και την συγκρίναμε γραφικά με την ακριβή αριθμητική λύση, βρίσκοντας πολύ καλή συμφωνία.

Στην συνέχεια προσπαθήσαμε να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ενεργού διατομής στις πολύ υψηλές ενέργειες. Είδαμε ότι στις χαμηλές ενέργειες αυτή τείνει στην επιφάνεια της μελανής οπής, όταν όμως αυξάνει η ενέργεια η εικόνα αλλάζει. Ενώ η ενεργός διατομή που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από τα μερικά κύματα τείνει στο μηδέν, η συνολική συνεισφορά όλων των μερικών κυμάτων τείνει σε έναν σταθερό αριθμό. Αυτό το διαπιστώσαμε εύκολα κάνοντας την γραφική παράσταση του αριθμητικού αποτελέσματος. Για την περίπτωση της μελανής οπής Schwarzschild, όπως είδαμε και στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 2, είναι αρκετά εύκολο να υπολογίσει κανείς θεωρητικά την τιμή αυτήν. Προσπαθήσαμε, λοιπόν, να κάνουμε το ίδιο και για την πε-



ρίπτωση μίας περιστρεφόμενης οπής. Χειριστήκαμε το σωματίδιο κλασικά, καθώς μας ενδιέφερε το όριο των υψηλών ενεργειών, και από την εξίσωση κίνησης του,  $p^\mu p_\mu = 0$  για το συγκεκριμένο βαρυτικό υπόβαθρο, καταφέραμε να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή της απορρόφησης για τρεις συγκεκριμένες περιπτώσεις πρόσπτωσης, καθώς για την γενική περίπτωση οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι αρκετά πολύπλοκες. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις ήταν πρόσπτωση από γωνία παράλληλη με τον άξονα περιστροφής της μελανής οπής, πρόσπτωση από το επίπεδο του ισημερινού και ομόρροπα με την περιστροφή της μελανής οπής και τέλος πρόσπτωση από το επίπεδο του ισημερινού και αντίρροπα από την περιστροφή της μελανής οπής. Συγκρίνοντας δε τις τιμές αυτές με τις αντίστοιχες τιμές για την ενεργό διατομή της απορρόφησης που πήραμε από τις γραφικές παραστάσεις της ακριβούς λύσης, διαπιστώσαμε ότι η τιμή για την πρώτη περίπτωση πρόσπτωσης πλησιάζει πολύ την ολική.

Στο Κεφάλαιο 5 συνεχίσαμε την μελέτη μίας περιστρεφόμενης μελανής οπής εξετάζοντας την περίπτωση εκπομπής φερμιονίων και μποζονίων στην Μεμβράνη. Για ακόμα μία φορά χρειάστηκε να κάνουμε την προσέγγιση των χαμηλών ενεργειών και της μικρής περιστροφής της οπής για να μπορέσουμε να πάρουμε αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα απορρόφησης, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ένωσης των δύο ασυμπτωτικών λύσεων που περιγράψαμε προηγουμένως. Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις όμως, έτσι και εδώ, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα ακριβή αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, βρίσκουμε πολύ καλή συμφωνία ακόμα και όταν επεκτείνουμε τις γραφικές μας για ενδιάμεσα  $\omega$  ή  $a_*$ , αυτή η συμφωνία γίνεται καλύτερη όσο αυξάνει το  $n$ .

Τα αποτελέσματά μας έδειξαν, καταρχάς για την περίπτωση των φερμιονίων και για την περίπτωση των κυμάτων με τον χαμηλότερο κβαντικό αριθμό  $j = 1/2$ , ότι, αύξηση της παραμέτρου στροφορμής της οπής ενισχύει την εκπομπή των μερικών κυμάτων με θετικό κβαντικό αριθμό  $m$ , ενώ για αυτά με αρνητικό η ενίσχυση στις χαμηλές ενέργειες δίνει τη θέση της σε μείωση στις υψηλές. Για τα μποζόνια βαθμίδας, και για το κύμα  $j = 1$  και  $m = 0$ , η  $|A|^2$  αυξάνει συναρτήσει του  $a_*$  αρχικά, αλλά αυτή η αύξηση αντιστρέφεται καθώς το  $a_*$  μεγαλώνει. Για  $m < 0$  η πιθανότητα απορρόφησης αυξάνει με το  $a_*$  στα μικρά  $\omega$ , αλλά μειώνεται στα μεγάλα. Τέλος στα κύματα με θετικό  $m$  παρουσιάστηκε το φαινόμενο της υπερακτινοβολίας, και αύξηση του  $a_*$  είχε ως αποτέλεσμα ενίσχυση του φαινομένου.

Σε σχέση τώρα με την εξάρτηση από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων, για τα φερμιόνια πρώτα, για  $m < 0$  η  $|A|^2$  μειώνεται μονοτονικά με το  $n$ , ενώ για τα θετικά  $m$  αυξάνεται στις χαμηλές ενέργειες αλλά μειώνεται στις υψηλές. Για τα μποζόνια βαθμίδας, και για τα κύματα που δεν παρουσιάζουν υπερακτινοβολία, σε όλο το ενεργειακό φάσμα παρουσιάζεται ενίσχυση καθώς αυξάνει το  $n$ . Για αυτά που παρουσιάζουν το φαινόμενο, αύξηση του  $n$  οδηγεί



σε αύξηση της πιθανότητας απορρόφησης στα πεδία που αυτή είναι θετική, και μείωση προς πιο αρνητικές τιμές στα πεδία που αυτή είναι μικρότερη του μηδενός.

Στην συνέχεια του Κεφαλαίου ερευνήσαμε το πώς συμπεριφέρεται η ενεργός διατομή της απορρόφησης στα δύο ασυμπτωτικά όρια: στις πολύ υψηλές, και στις πολύ χαμηλές ενέργειες. Καταρχάς, στο πρώτο όριο, αυτό του  $\omega \rightarrow 0$ , δώσαμε απλοποιημένες εκφράσεις για την πιθανότητα απορρόφησης και για τις δύο περιπτώσεις της εκπομπής. Από αυτές υπολογίσαμε την ενεργό διατομή και βρήκαμε ότι για τα φερμιόνια, στο όριο που η ενέργεια του εκπεμπόμενου σωματιδίου τείνει στο μηδέν, μόνο το πρώτο κύμα, με  $j = 1/2$  παίρνει μη-μηδενική τιμή, όλα τα άλλα ανώτερα φερμιονικά κύματα μηδενίζονται. Αντίθετως, για τα μποζόνια, η ενεργός διατομή στο όριο αυτό τείνει στο μηδέν για όλα τα κύματα. Έχοντας στα χέρια μας τις εκφράσεις για την ενεργό διατομή της απορρόφησης, είδαμε ότι στις χαμηλές ενέργειες, για τα φερμιόνια, οποιαδήποτε αύξηση στα  $a_+$  ή  $n$  οδηγεί σε αύξηση της ενεργού διατομής. Στα μποζόνια αυτό ισχύει μόνο για την εξάρτηση από το  $n$ , καθώς αύξηση της παραμέτρου στροφορμής μειώνει την ενεργό διατομή  $\sigma$ . Στις υψηλές ενέργειες, από την άλλη, είχαμε ήδη δείξει από το Κεφάλαιο 4 ότι η ενεργός διατομή της απορρόφησης τείνει σε μία ασυμπτωτική τιμή κοινή για όλα τα είδη πεδίου. Αυτό το αποτέλεσμα προσπαθήσαμε να αναπαράγουμε και στο Κεφάλαιο 5. Παρόλο που τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου αυτού έχουν παραχθεί για τις χαμηλές ενέργειες, καταφέρνουν ωστόσο να δώσουν το σωστό αποτέλεσμα για τις ασυμπτωτικές τιμές των ενεργών διατομών της απορρόφησης. Η ασυμπτωτική τιμή που προκύπτει γραφικά, είναι η ίδια και για τα δύο είδη πεδίων που εξετάστηκαν και επιπλέον είναι ίση με την τιμή που υπολογίστηκε κλασικά στο Κεφάλαιο 4. Τέλος, στο Κεφάλαιο αυτό, σχεδιάσαμε γραφικά και τους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας μέσω φερμιονίων και μποζονίων βαθμίδας και βρήκαμε ότι η εκπομπή στο μποζονικό κανάλι είναι κυρίαρχη απέναντι στο φερμιονικό για σταθερές τιμές των παραμέτρων  $n$  και  $a_+$ . Τα αποτελέσματα μας επεκτάθηκαν και σε μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας, όπου βρήκαμε ποιοτική αλλά και ποσοτική, ως ένα σημείο, συμφωνία με ακριβείς αριθμητικές μελέτες της βιβλιογραφίας.

Για να ολοκληρώσουμε την μελέτη της εκπομπής ακτινοβολίας Hawking από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή στο Κεφάλαιο 6 στρέψαμε την προσοχή μας στην εκπομπή βαθμωτών πεδίων στον Υπερχώρο. Η προσέγγιση των χαμηλών ενεργειών χρειάστηκε ξανά να γίνει ώστε να επιτύχουμε την ένωση των δύο ασυμπτωτικών λύσεων. Επίσης χρειάστηκε να γίνει ο υπολογισμός των γωνιακών ιδιοτιμών  $E_{jlm}$ , καθώς βρέθηκε ένα λάθος σε παλιότερη εργασία της βιβλιογραφίας. Έτσι, καταφέραμε να δώσουμε αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα απορρόφησης, τις οποίες και παραστήσαμε γραφικά. Ταυτόχρονα, με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή επιλύσαμε το πρόβλημα αριθμητικά



και συγκρίναμε τα δύο σύνολα αποτελεσμάτων βρίσκοντας για ακόμη μία φορά πολύ καλή συμφωνία. Τα αποτελέσματα μας έδειξαν ότι, όπως και σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν στα προηγούμενα Κεφάλαια, το χαμηλότερο κύμα,  $j = l = m = 0$ , είναι το κυρίαρχο στις χαμηλές ενέργειες, με αρκετή διαφορά από το δεύτερο. Στην συνέχεια εξετάστηκε η εξάρτηση της  $|A|^2$  από τις παραμέτρους τοπολογίας του χώρου, δηλαδή τον αριθμό  $n$  των επιπλέον διαστάσεων και την παράμετρο στροφορμής  $a$ , της μελανής οπής. Βρήκαμε ότι αύξηση στην στροφορμή της οπής οδηγεί σε ενίσχυση της εκπομπής στις χαμηλές και ενδιάμεσες ενέργειες, ενώ αντίθετα αύξηση του  $n$  οδηγεί σε μείωση της πιθανότητας απορρόφησης του βαθμωτού πεδίου στον Υπερχώρο. Επίσης δώσαμε μία απλοποιημένη έκφραση για την ενεργό διατομή της απορρόφησης στις χαμηλές ενέργειες, ενώ είδαμε και με την βοήθεια της ακριβούς αριθμητικής λύσης ότι για  $\omega \rightarrow 0$  αυτή τείνει στην επιφάνεια της οπής, όπως εξάλλου είδαμε και στο Κεφάλαιο 5. Με την βοήθεια της έκφρασης για την πιθανότητα απορρόφησης, εξάλλου, υπολογίσαμε τον ρυθμό εκπομπής ενέργειας από την μελανή οπή μέσω βαθμωτών σωματιδίων στον Υπερχώρο και είδαμε ότι συμπεριφέρεται σε σχέση με τα  $a$ , και  $n$  με τον ίδιο τρόπο με την πιθανότητα απορρόφησης. Παρόλα αυτά, αντλώντας εμπειρία από παρόμοιες περιπτώσεις που μελετήθηκαν παλαιότερα αναμένουμε η μείωση με το  $n$  στις χαμηλές ενέργειες να δώσει τη θέση της σε αύξηση στις υψηλές.

Στην συνέχεια του Κεφαλαίου αυτού, κάναμε την σύγκριση ανάμεσα στην εκπομπή στην Μembrάνη και στον Υπερχώρο. Η σύγκριση αυτή ήταν σημαντικό να γίνει, για να απαντηθεί το ερώτημα του πού θα καταλήξει η αρχική ενέργεια η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία της μελανής οπής: θα την δούμε ως θερμική ακτινοβολία στους ανιχνευτές μας, ή θα χαθεί στον Υπερχώρο; Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε ότι τα βαρυτόνια αντιστοιχούν σε αρκετά χαμηλότερους ρυθμούς εκπομπής από ότι τα βαθμωτά πεδία στον Υπερχώρο, για την περίπτωση της μελανής οπής τύπου Schwarzschild. Στο Κεφάλαιο 6 συγκρίναμε τους ρυθμούς εκπομπής της ενέργειας ανάμεσα στην εκπομπή βαθμωτών σωματιδίων στην Μembrάνη και στον Υπερχώρο. Βρήκαμε λοιπόν ότι ο λόγος ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις εκπομπής, Μembrάνης προς Υπερχώρου, παραμένει πάντα μεγαλύτερος της μονάδας, όσο μάλιστα μεγαλώνει το  $n$  τόσο πιο έντονη είναι η κυριαρχία της εκπομπής στο ορατό κανάλι της Μembrάνης. Επίσης, συγκρίνοντας τους ρυθμούς εκπομπής για τα διάφορα κανάλια εκπομπής στην Μembrάνη, των Κεφαλαίων 4 και 5, με τα αντίστοιχα στον Υπερχώρο των Κεφαλαίων 3 και 6, γίνεται ξεκάθαρο ότι η εκπομπή στην Μembrάνη είναι η κυρίαρχη. Επιπλέον, οι φερμιονικοί και μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας του Καθιερωμένου Μοντέλου είναι πολύ περισσότεροι από τους βαθμωτούς, πράγμα που σημαίνει ότι η εκπομπή στην Μembrάνη ενισχύεται κι άλλο. Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική, γιατί όσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό της εκπομπής στην Μembrάνη, τόσο ευκολότερο θα είναι να διαχω-



ριστεί στους ανιχνευτές το φάσμα της εκπομπής από τον θόρυβο και τόσο πιο εύκολα θα μπορέσουμε από αυτό να πάρουμε πληροφορίες για την φύση του χωροχρόνου. Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι αν τελικά δημιουργηθούν μελανές οπές στο εργαστήριο, το μεγαλύτερο κομμάτι της ενέργειας που θα δαπανηθεί για την παραγωγή τους θα το δούμε ξανά στους ανιχνευτές σαν ακτινοβολία Hawking από το ακριβές φάσμα της οποίας θα μπορέσουμε να μετρήσουμε το  $n$ . Ένα σχετικά μικρό κομμάτι της αρχικής ενέργειας, θα χαθεί για πάντα στον Υπερχώρο, με το ακριβές ποσοστό να εξαρτάται από το  $n$ .

Τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην διατριβή αυτή, πέραν της θεωρητικής τους αξίας μπορούν να αποδειχτούν ιδιαίτερος χρήσιμα, αν και έγκυρα σε συγκεκριμένα πεδία του φάσματος των ενεργειών, παρά την ύπαρξη μίας ακριβούς αριθμητικής ανάλυσης του προβλήματος. Ένας λόγος είναι ότι η ακριβής λύση, η οποία γίνεται με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, είναι αρκετά χρονοβόρα. Πέραν λοιπόν από την σημασία που έχει να δει κάποιος την συμφωνία ανάμεσα στην αριθμητική και την αναλυτική λύση, με τις αναλυτικές μας εκφράσεις θα μπορέσει να επιτευχθεί η ταυτοποίηση του φάσματος της εκπομπής των μελανών οπών, αν φυσικά αυτές παραχθούν σε μελλοντικούς επιταχυντές.



## Βιβλιογραφία

- [1] W.-M. Yao et al. (Particle Data Group). *J. Phys. G*, 33:1, 2006.
- [2] Carroll, Sean M. *Dark Energy and the Preposterous Universe*. 2001. astro-ph/0107571.
- [3] J. Wess and Bagger J. *Supersymmetry and supergravity*. Princeton University Press, 1992, ISBN 0-691-02530-4.
- [4] Lisa Randall and Raman Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370-3373, 1999.
- [5] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690-4693, 1999.
- [6] C. D. Hoyle et al. Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law. *Phys. Rev.*, D70:042004, 2004.
- [7] T. Kaluza. On the problem of unity in physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)*, pages 966-972, 1921.
- [8] O. Klein. Quantum theory and five dimensional theory of relativity. *Z. Phys.*, 37:895-906, 1926.
- [9] A. Zee. *Quantum field theory in a nutshell*. Princeton University Press (2003).
- [10] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429:263-272, 1998.
- [11] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and tev scale quantum gravity. *Phys. Rev.*, D59:086004, 1999.



- [12] Ignatios Antoniadis, Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV. *Phys. Lett.*, B436:257–263, 1998.
- [13] Schuyler Cullen and Maxim Perelstein. Sn1987a constraints on large compact dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 83:268–271, 1999.
- [14] Vernon D. Barger, Tao Han, C. Kao, and Ren-Jie Zhang. Astrophysical constraints on large extra dimensions. *Phys. Lett.*, B461:34–42, 1999.
- [15] Steen Hannestad and Georg Raffelt. New supernova limit on large extra dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 87:051301, 2001.
- [16] Prasanta Kumar Das, V. H. Satheesh Kumar, and P. K. Suresh. Plasmon annihilation into kaluza-klein graviton: New astrophysical constraints on large extra dimensions? 2008. arXiv:0801.1269 [hep-ph].
- [17] Christoph Hanhart, Daniel R. Phillips, Sanjay Reddy, and Martin J. Savage. Extra dimensions, sn1987a, and nucleon nucleon scattering data. *Nucl. Phys.*, B595:335–359, 2001.
- [18] Luis A. Anchordoqui, Jonathan L. Feng, Haim Goldberg, and Alfred D. Shapere. Black holes from cosmic rays: Probes of extra dimensions and new limits on tev-scale gravity. *Phys. Rev.*, D65:124027, 2002.
- [19] K. Schwarzschild. Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Eisnteinschen Theorie. *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, KI. Math.-Phys. Tech.*, page 189, 1916.
- [20] Oppenheimer J.R. and Volkoff G. M. On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.*, 55:374, 1939.
- [21] Oppenheimer J.R. and Snyder H. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–9, 1939.
- [22] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco 1973.
- [23] M.D. Kruskal. Maximal Extension of the Schwarzschild Metric . *Phys. Rev.*, 119:1743, 1960.
- [24] G. Szekeres. On the Singularities of a Riemannian Manifold . *Publ. Mat. Debrecen*, 7:285, 1960.



- [25] Roy P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11(5):237-238, Sep 1963.
- [26] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, 217:709-713, 1968.
- [27] Joris Gerssen et al. Hubble Space Telescope Evidence for an Intermediate-Mass Black Hole in the Globular Cluster M15: II. Kinematical Analysis and Dynamical Modeling. 2002; astro-ph/0209315.
- [28] Jorge Casares. Observational evidence for stellar-mass black holes. 2006; astro-ph/0612312.
- [29] R. Schodel et al. A Star in a 15.2 year orbit around the supermassive black hole at the center of the Milky Way. *Nature*, 419:694-696, 2002.
- [30] E. Poisson. A Relativist's Toolkit . *Cambridge University Press*, 2004.
- [31] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie . *Ann. Phys. (Germany)*, 50:106-20, 1916.
- [32] Καντή, Π. Μαύρες Οπές στα Πλαίσια της Τετραδιάστατης Ενεργού Θεωρίας των Ετεροτικών Υπερχορδών στις Χαμηλές Ενεργειες. Διδακτορική Διατριβή, 1998.
- [33] S. Chandrasekhar. The mathematical theory of black holes. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [34] James M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161-170, 1973.
- [35] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199-220, 1975.
- [36] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, D7:2333-2346, 1973.
- [37] Philip C. Argyres, Savas Dimopoulos, and John March-Russell. Black holes and sub-millimeter dimensions. *Phys. Lett.*, B441:96-104, 1998.
- [38] K. S. Thorne. NONSPHERICAL GRAVITATIONAL COLLAPSE: A SHORT REVIEW. In \*J R Klauder, Magic Without Magic\*, San Francisco 1972.





- [39] P. D. D'Eath and P. N. Payne. Gravitational radiation in high speed black hole collisions. 1. Perturbation treatment of the axisymmetric speed of light collision. *Phys. Rev.*, D46:658-674, 1992.
- [40] P. D. D'Eath and P. N. Payne. Gravitational radiation in high speed black hole collisions. 2. Reduction to two independent variables and calculation of the second order news function. *Phys. Rev.*, D46:675-693, 1992.
- [41] P. D. D'Eath and P. N. Payne. Gravitational radiation in high speed black hole collisions. 3. Results and conclusions. *Phys. Rev.*, D46:694-701, 1992.
- [42] Vitor Cardoso and Jose' P. S. Lemos. Gravitational radiation from collisions at the speed of light: A massless particle falling into a Schwarzschild black hole. *Phys. Lett.*, B538:1-5, 2002.
- [43] Vitor Cardoso and Jose P. S. Lemos. Gravitational radiation from the radial infall of highly relativistic point particles into Kerr black holes. *Phys. Rev.*, D67:084005, 2003.
- [44] Douglas M. Eardley and Steven B. Giddings. Classical black hole production in high-energy collisions. *Phys. Rev.*, D66:044011, 2002.
- [45] Hirotaka Yoshino and Yasusada Nambu. Black hole formation in the grazing collision of high-energy particles. *Phys. Rev.*, D67:024009, 2003.
- [46] Hirotaka Yoshino and Vyacheslav S. Rychkov. Improved analysis of black hole formation in high-energy particle collisions. *Phys. Rev.*, D71:104028, 2005.
- [47] Emanuele Berti, Marco Cavaglia, and Leonardo Gualtieri. Gravitational energy loss in high energy particle collisions: Ultrarelativistic plunge into a multidimensional black hole. *Phys. Rev.*, D69:124011, 2004.
- [48] Patrick Meade and Lisa Randall. Black Holes and Quantum Gravity at the LHC. 2007. arXiv:0708.3017 [hep-ph].
- [49] Steven B. Giddings and Scott D. Thomas. High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics. *Phys. Rev.*, D65:056010, 2002.



- [50] Savas Dimopoulos and Greg L. Landsberg. Black holes at the LHC. *Phys. Rev. Lett.*, 87:161602, 2001.
- [51] J. M. Campbell, J. W. Huston, and W. J. Stirling. Hard interactions of quarks and gluons: A primer for LHC physics. *Rept. Prog. Phys.*, 70:89, 2007.
- [52] Jonathan L. Feng and Alfred D. Shapere. Black hole production by cosmic rays. *Phys. Rev. Lett.*, 88:021303, 2002.
- [53] Robert C. Myers and M. J. Perry. Black holes in higher dimensional space-times. *Ann. Phys.*, 172:304, 1986.
- [54] Panagiota Kanti. Black holes in theories with large extra dimensions: A review. *Int. J. Mod. Phys.*, A19:4899-4951, 2004.
- [55] Steven S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Arkady A. Tseytlin. String theory and classical absorption by three-branes. *Nucl. Phys.*, B499:217-240, 1997.
- [56] Don N. Page. Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole. *Phys. Rev.*, D13:198-206, 1976.
- [57] Norma G. Sanchez. The wave scattering theory and the absorption problem for a black hole. *Phys. Rev.*, D16:937-945, 1977.
- [58] Norma G. Sanchez. Elastic scattering of waves by a black hole. *Phys. Rev.*, D18:1798, 1978.
- [59] Norma G. Sanchez. Absorption and emission spectra of a schwarzschild black hole. *Phys. Rev.*, D18:1030, 1978.
- [60] J. H. MacGibbon and B. R. Webber. Quark and gluon jet emission from primordial black holes: The instantaneous spectra. *Phys. Rev.*, D41:3052-3079, 1990.
- [61] Chris M. Harris and Panagiota Kanti. Hawking radiation from a  $(4+n)$ -dimensional black hole: Exact results for the schwarzschild phase. *JHEP*, 10:014, 2003.
- [62] Roberto Emparan, Gary T. Horowitz, and Robert C. Myers. Black holes radiate mainly on the brane. *Phys. Rev. Lett.*, 85:499-502, 2000.



- [63] Panagiota Kanti and John March-Russell. Calculable corrections to brane black hole decay. I: The scalar case. *Phys. Rev.*, D66:024023, 2002.
- [64] Panagiota Kanti and John March-Russell. Calculable corrections to brane black hole decay. ii: Greybody factors for spin 1/2 and 1. *Phys. Rev.*, D67:104019, 2003.
- [65] W. T. Zaumen. Upper bound on the electric charge of a black hole. *Nature*, 247:530, 1974.
- [66] G. W. Gibbons. Vacuum Polarization and the Spontaneous Loss of Charge by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 44:245-264, 1975.
- [67] B. Carter. Charge and particle conservation in black hole decay. *Phys. Rev. Lett.*, 33:558-561, 1974.
- [68] Don N. Page. Dirac Equation Around a Charged, Rotating Black Hole. *Phys. Rev.*, D14:1509-1510, 1976.
- [69] Don N. Page. Particle Emission Rates from a Black Hole. 3. Charged Leptons from a Nonrotating Hole. *Phys. Rev.*, D16:2402-2411, 1977.
- [70] Savas Dimopoulos and Roberto Emparan. String balls at the LHC and beyond. *Phys. Lett.*, B526:393-398, 2002.
- [71] Remo Ruffini and John Archibald Wheeler. Introducing the Black Hole. *Physics Today*, 24:30-41, 1971.
- [72] Ezra Newman and Roger Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 3:566-578, 1962.
- [73] D. R. Brill, P. L. Chrzanowski, C. Martin Pereira, E. D. Fackerell, and J. R. Ipser. Solution of the scalar wave equation in a Kerr background by separation of variables. *Phys. Rev.*, D5:1913-1915, 1972.
- [74] Saul A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. 1. fundamental equations for gravitational electromagnetic, and neutrino field perturbations. *Astrophys. J.*, 185:635-647, 1973.
- [75] M. Casals, S. R. Dolan, P. Kanti, and E. Winstanley. Brane decay of a  $(4+n)$ -dimensional rotating black hole. iii: Spin-1/2 particles. *JHEP*, 03:019, 2007.



- [76] C. Flammer. Spheroidal wave functions. Stanford University Press, 1957.
- [77] E.T. Newman F. Rohrlich J.N. Goldberg, A.J. MacFarlane and E.C. Sudarshan. *J. Math. Phys.*, 8:2155, 1967.
- [78] Valeri P. Frolov and Dejan Stojkovic. Quantum radiation from a 5-dimensional rotating black hole. *Phys. Rev.*, D67:084004, 2003.
- [79] Valeri P. Frolov and Dejan Stojkovic. Black hole radiation in the brane world and recoil effect. *Phys. Rev.*, D66:084002, 2002.
- [80] P. Kanti, J. Grain, and A. Barrau. Bulk and brane decay of a  $(4+n)$ -dimensional Schwarzschild- De-Sitter black hole: Scalar radiation. *Phys. Rev.*, D71:104002, 2005.
- [81] J. Grain, A. Barrau, and P. Kanti. Exact results for evaporating black holes in curvature- squared Lovelock gravity: Gauss-Bonnet greybody factors. *Phys. Rev.*, D72:104016, 2005.
- [82] A. Barrau, J. Grain, and S. O. Alexeyev. Gauss-Bonnet black holes at the LHC: Beyond the dimensionality of space. *Phys. Lett.*, B584:114, 2004.
- [83] Eylee Jung, SungHoon Kim, and D. K. Park. Low-energy absorption cross section for massive scalar and Dirac fermion by  $(4+n)$ -dimensional Schwarzschild black hole. *JHEP*, 09:005, 2004.
- [84] Eylee Jung, SungHoon Kim, and D. K. Park. Proof of universality for the absorption of massive scalar by the higher-dimensional Reissner-Nordstroem black holes. *Phys. Lett.*, B602:105-111, 2004.
- [85] Eylee Jung, SungHoon Kim, and D. K. Park. Ratio of absorption cross section for Dirac fermion to that for scalar in the higher-dimensional black hole background. *Phys. Lett.*, B614:78-84, 2005.
- [86] Hideo Kodama, Akihiro Ishibashi, and Osamu Seto. Brane world cosmology: Gauge-invariant formalism for perturbation. *Phys. Rev.*, D62:064022, 2000.
- [87] Hideo Kodama and Akihiro Ishibashi. A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions. *Prog. Theor. Phys.*, 110:701-722, 2003.



- [88] Hideo Kodama and Akihiro Ishibashi. Master equations for perturbations of generalized static black holes with charge in higher dimensions. *Prog. Theor. Phys.*, 111:29-73, 2004.
- [89] T. Regge and J. A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phus. Rev.*, 108, 1063.
- [90] F. Zerilli. Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Phus. Rev. Lett.*, 24, 737.
- [91] Creek, S. and Efthimiou, O. and Kanti, P. and Tamvakis, K. graviton emission in the bulk from a higher-dimensional schwarzschild black hole. *Phys. Lett.*, B635:39-49, 2006.
- [92] F. R. Tangherlini. Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem. *Nuovo Cim.*, 27:636-651, 1963.
- [93] W. G. Unruh. Absorption cross-section of small black holes. *Phys. Rev.*, D14:3251-3259, 1976.
- [94] M. Abramowitz and I. Stegun. Handbook of mathematical functions. Academic Press, New York, 1996.
- [95] Mark A. Rubin and Carlos R. Ordonez. Eigenvalues and degeneracies for n-dimensional tensor spherical harmonics. UTTG-10-83.
- [96] Mark A. Rubin and Carlos R. Ordonez. Symmetric tensor eigen spectrum of the laplacian on n spheres. *J. Math. Phys.*, 26:65, 1985.
- [97] D. K. Park. Hawking radiation of the brane-localized graviton from a  $(4+n)$ -dimensional black hole. *Class. Quant. Grav.*, 23:4101-4110, 2006.
- [98] Vitor Cardoso, Marco Cavaglia, and Leonardo Gualtieri. Black hole particle emission in higher-dimensional spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 96:071301, 2006.
- [99] Vitor Cardoso, Marco Cavaglia, and Leonardo Gualtieri. Hawking emission of gravitons in higher dimensions: Non-rotating black holes. *JHEP*, 02:021, 2006.
- [100] Alan S. Cornell, Wade Naylor, and Misao Sasaki. Graviton emission from a higher-dimensional black hole. *JHEP*, 02:012, 2006.
- [101] C. M. Harris and P. Kanti. Hawking radiation from a  $(4+n)$ -dimensional rotating black hole. *Phys. Lett.*, B633:106-110, 2006.



- [102] Daisuke Ida, Kin-ya Oda, and Seong Chan Park. Anisotropic scalar field emission from tev scale black hole. 2005. hep-ph/0501210.
- [103] G. Duffy, C. Harris, P. Kanti, and E. Winstanley. Brane decay of a  $(4+n)$ -dimensional rotating black hole: Spin-0 particles. *JHEP*, 09:049, 2005.
- [104] M. Casals, P. Kanti, and E. Winstanley. Brane decay of a  $(4+n)$ -dimensional rotating black hole. ii: Spin-1 particles. *JHEP*, 02:051, 2006.
- [105] Daisuke Ida, Kin-ya Oda, and Seong Chan Park. Rotating black holes at future colliders. ii: Anisotropic scalar field emission. *Phys. Rev.*, D71:124039, 2005.
- [106] Daisuke Ida, Kin-ya Oda, and Seong Chan Park. Rotating black holes at future colliders. iii: Determination of black hole evolution. *Phys. Rev.*, D73:124022, 2006.
- [107] Eylee Jung, SungHoon Kim, and D. K. Park. Condition for superradiance in higher-dimensional rotating black holes. *Phys. Lett.*, B615:273-276, 2005.
- [108] Eylee Jung, SungHoon Kim, and D. K. Park. Condition for the superradiance modes in higher-dimensional rotating black holes with multiple angular momentum parameters. *Phys. Lett.*, B619:347-351, 2005.
- [109] Hidefumi Nomura, Shijun Yoshida, Makoto Tanabe, and Kei-ichi Maeda. The fate of a five-dimensional rotating black hole via Hawking radiation. *Prog. Theor. Phys.*, 114:707-712, 2005.
- [110] Eylee Jung and D. K. Park. Bulk versus brane in the absorption and emission: 5d rotating black hole case. *Nucl. Phys.*, B731:171-187, 2005.
- [111] Daisuke Ida, Kin-ya Oda, and Seong Chan Park. Rotating black holes at future colliders: Greybody factors for brane fields. *Phys. Rev.*, D67:064025, 2003.
- [112] S. Creek, O. Efthimiou, P. Kanti, and K. Tamvakis. Greybody factors for brane scalar fields in a rotating black-hole background. *Phys. Rev.*, D75:084043, 2007.
- [113] Tom Banks and Willy Fischler. A model for high energy scattering in quantum gravity. 1999. hep-th/9906038.



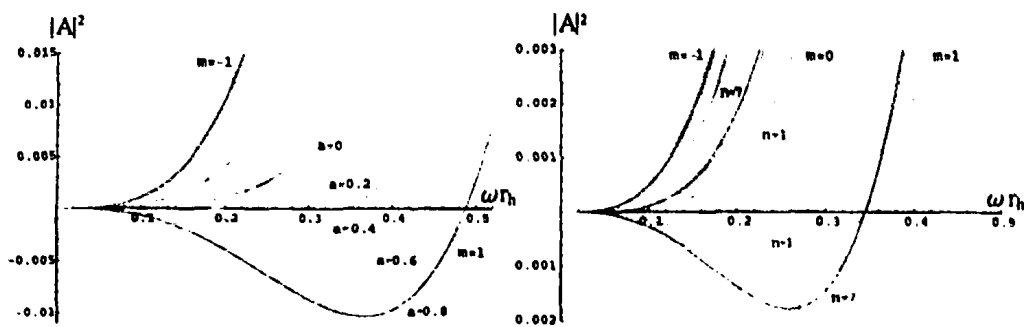
- [114] Hirotaka Yoshino and Yasusada Nambu. High-energy head-on collisions of particles and hoop conjecture. *Phys. Rev.*, D66:065004, 2002.
- [115] Emmanuel Kohlprath and Gabriele Veneziano. Black holes from high-energy beam-beam collisions. *JHEP*, 06:057, 2002.
- [116] Vitor Cardoso, Oscar J. C. Dias, and Jose P. S. Lemos. Gravitational radiation in d-dimensional spacetimes. *Phys. Rev.*, D67:064026, 2003.
- [117] Vyacheslav S. Rychkov. Black hole production in particle collisions and higher curvature gravity. *Phys. Rev.*, D70:044003, 2004.
- [118] Steven B. Giddings and Vyacheslav S. Rychkov. Black holes from colliding wavepackets. *Phys. Rev.*, D70:104026, 2004.
- [119] O. I. Vasilenko. Trap surface formation in high-energy black holes collision. 2003. hep-th/0305067.
- [120] De-Chang Dai, Glenn D. Starkman, and Dejan Stojkovic. Production of black holes and their angular momentum distribution in models with split fermions. *Phys. Rev.*, D73:104037, 2006.
- [121] Hirotaka Yoshino and Robert B. Mann. Black hole formation in the head-on collision of ultrarelativistic charges. *Phys. Rev.*, D74:044003, 2006.
- [122] Hirotaka Yoshino, Tetsuya Shiromizu, and Masaru Shibata. Close-slow analysis for head-on collision of two black holes in higher dimensions: Bowen-york initial data. *Phys. Rev.*, D74:124022, 2006.
- [123] Christopher Michael Harris. Physics beyond the standard model: Exotic leptons and black holes at future colliders (ph.d. thesis). 2004, hep-ph/0502005.
- [124] F.W. Schafke J. Meixner and G. Wolf. Mathieu functions and spheroidal functions and their mathematical foundations, further studies. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [125] A.A. Starobinskii and S.M. Churilov. *Sov. Phys.-JETP*, 38:1, 1974.
- [126] E.D. Fackerell and R.G. Grossman. *J. Math. Phys.*, 18:1849, 1977.
- [127] Edward Seidel. A comment on the eigenvalues of spin weighted spheroidal functions. *Class. Quant. Grav.*, 6:1057, 1989.



- [128] Y.B. Zeldovich. The generation of waves by a rotating body. *JETP*, 14:180, 1971.
- [129] Samir D. Mathur. Absorption of angular momentum by black holes and d- branes. *Nucl. Phys.*, B514:204-226, 1998.
- [130] Steven S. Gubser. Can the effective string see higher partial waves? *Phys. Rev.*, D56:4984-4993, 1997.
- [131] V. P. Frolov and I. D. Novikov. Black hole physics: Basic concepts and new developments. Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands, a998.
- [132] Creek, S. and Efthimiou, O. and Kanti, P. and Tamvakis, K. Greybody factors in a rotating black-hole background-ii : fermions and gauge bosons. *Phys. Rev.*, D76:104013, 2007.
- [133] William H. Press and Saul A Teukolsky. *Astrophys. J.*, 185:649, 1973.
- [134] S. M. Churilov and A. A. Starobinskii. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 65:3, 1973.
- [135] R. A. Breuer. Gravitational perturbation theory and synchrotron radiation. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 44, (Springer, Berlin, 1975).
- [136] M. J. Breuer, R. A. nad Ryan and S. Waller. *Proc. R. Soc. London A*, 358:71, 1977.
- [137] Marc Casals and Adrian C. Ottewill. High frequency asymptotics for the spin-weighted spheroidal equation. *Phys. Rev.*, D71:064025, 2005.
- [138] W. G. Unruh. Second quantization in the kerr metric. *Phys. Rev.*, D10:3194-3205, 1974.
- [139] Rahmi Güven. Wave mechanics of electrons in kerr geometry. *Phys. Rev. D*, 16(6):1706-1711, Sep 1977.
- [140] D. A. Leahy and W. G. Unruh. Angular dependence of neutrino emission from rotating black holes. *Phys. Rev.*, D19:3509-3515, 1979.
- [141] S. Detweiler. On the equations governing the electromagnetic perturbations of the kerr black hole. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A349:217, 1976.
- [142] Marc Casals and Adrian C. Ottewill. Canonical quantization of the electromagnetic field on the kerr background. *Phys. Rev.*, D71:124016, 2005.







Σχήμα 4.2: Πιθανότητα απορρόφησης  $|A_{l,m}|^2$  για βαθμωτά σωματίδια στην Μεμβράνη, (α) για  $(l = 1, m = -1, 1)$ ,  $n = 2$  και  $a_s = (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ , και (β) για  $(l = 1, m = -1, 0, 1)$ ,  $a_s = 0.4$  και  $n = (1, 2, 4, 7)$ . Ξανά, οι συνεχείς γραμμές αναπαριστούν τα αναλυτικά μας αποτελέσματα, ενώ οι διακεκομμένες τα ακριβή αριθμητικά.

για μια ποικιλία τιμών των παραμέτρων  $(l, m)$ . Στο παρόν κεφάλαιο, τα αναλυτικά μας αποτελέσματα σχεδιάζονται με συνεχείς γραμμές, ενώ τα αντίστοιχα αριθμητικά, όπως αυτά αναπαράγονται από τις εργασίες [101, 103, 123], παρουσιάζονται με διακεκομμένες. Στο Σχήμα 4.1, έχουν σχεδιαστεί και τα δύο σύνολα γραμμών για όλα τα μερικά κύματα και η συμφωνία ανάμεσά τους στις χαμηλές ενέργειες είναι πάρα πολύ καλή. Παρόλο που καθώς ξεφεύγουμε από το πεδίο των χαμηλών ενεργειών αρχίζουν να παρουσιάζονται μικρές αποκλίσεις, εξακολουθούν ποιοτικά να συμφωνούν σε εξαιρετικό βαθμό.

Αν συγκεντρώσουμε, τώρα, την προσοχή μας στην εξάρτηση της πιθανότητας απορρόφησης από τις παραμέτρους του σωματιδίου, παρατηρούμε ότι, όπως και στην περίπτωση Schwarzschild [61], είναι ξανά το χαμηλότερο κύμα  $l = 0$  που κυριαρχεί στις χαμηλές ενέργειες, με όλα τα υψηλότερα να συνεισφέρουν σημαντικά λιγότερο. Αυτή η συμπεριφορά ισχύει για όλες τις τιμές του  $a_s$  και  $n$ , αρκεί να παραμείνουμε συγκεντρωμένοι στις χαμηλές ενέργειες. Κοιτώντας στην συνέχεια την συμπεριφορά μερικών κυμάτων με τον ίδιο αριθμό  $l$  και διαφορετικό  $m$ , εύκολα παρατηρούμε ότι τα κύματα με  $m < 0$  είναι κυρίαρχα, ενώ αύξηση του  $m$  προκαλεί μείωση της πιθανότητας απορρόφησης. Παρατηρούμε επίσης ότι για τα μερικά κύματα με  $m \leq 0$  η πιθανότητα απορρόφησης μένει πάντα θετική, ενώ για εκείνα με  $m > 0$ , πάντα παρουσιάζεται στις χαμηλές ενέργειες μια περιοχή με αρνητικό  $|A_{l,m}|^2$ . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται στην βιβλιογραφία υπερακτινοβολία (superradiance) [128], έχει να κάνει με την ενίσχυση ενός εισερχόμενου κύματος από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα η πιθανότητα ανάκλασης να είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα, και άρα η πιθανότητα απορρόφησης να είναι αρνητική, σύμφωνα με

- [143] S. Creek, O. Efthimiou, P. Kanti, and K. Tamvakis. Scalar emission in the bulk in a rotating black hole background. *Phys. Lett.*, B656:102-111, 2007.
- [144] C. Muller. Lecture notes in mathematics: Spherical harmonics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966.
- [145] Daisuke Ida, Yuki Uchida, and Yoshiyuki Morisawa. The scalar perturbation of the higher-dimensional rotating black holes. *Phys. Rev.*, D67:084019, 2003.
- [146] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Marc Casals. Eigenvalues and eigenfunctions of spin-weighted spheroidal harmonics in four and higher dimensions. *Phys. Rev.*, D73:024013, 2006.
- [147] Vitor Cardoso, George Siopsis, and Shijun Yoshida. Scalar perturbations of higher dimensional rotating and ultra-spinning black holes. *Phys. Rev.*, D71:024019, 2005.
- [148] Adrian C. Ottewill and Elizabeth Winstanley. The renormalized stress tensor in kerr space-time: General results. *Phys. Rev.*, D62:084018, 2000.
- [149] M. Casals, S. R. Dolan, P. Kanti, and E. Winstanley. Bulk Emission of Scalars by a Rotating Black Hole. 2008. arXiv:0801.4910 [hep-th].

