ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ HAMILTON ΣΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

ΓΛΥΚΕΡΙΑ ΡΙΖΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ Δ. ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η θεωρία των γραφημάτων είναι αντικείμενο μελέτης που προϋπήρξε της Πληροφορικής. Η ανάγκη για αντιμετώπιση διαφόρων προβλημάτων οδήγησε τους επιστήμονες στη χρήση διαφόρων δομών, αλλά και στη διατύπωση προβλημάτων που χρησιμοποιεί η Θεωρία Γράφων. Οι επιστήμονες της Πληροφορικής ασχολούνται με τη Θεωρία Γράφων γιατί πέρα από το ότι προκαλεί το γενικό επιστημονικό ενδιαφέρον, χρησιμοποιείται για την επίλυση πολλών ειδικών πρακτικών αλγοριθμικών προβλημάτων διαφόρων επιστημονικών κλάδων.

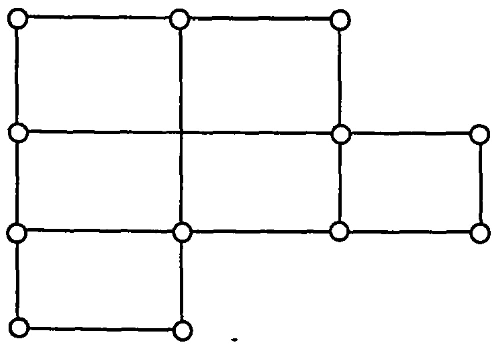
Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι να εξετάσουμε μονοπάτια και κύκλους Hamilton, αφού πρώτα δώσουμε βασικούς ορισμούς που αφορούν τα προβλήματα αυτά. Στη συνέχεια εξετάζουμε συγκεκριμένα μια κατηγορία τέλειων γραφημάτων, τα Συμπληρωματικά Παραγόμενα Γραφήματα. Σε αυτά τα γραφήματα σχεδιάζουμε αλγορίθμους για την εύρεση διαδρομών Hamilton. Στη περίπτωση που δεν υπάρχει κάποια διαδρομή τότε τροποποιούμε τα γράφημα, χωρίς όμως να χάνει την ιδιότητα του co-γραφήματος, έτσι ώστε να υπάρχει τελικά κύκλος ή μονοπάτι Hamilton.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στο Πρόβλημα

Έστω ότι έχουμε ένα γράφημα, όπου οι κόμβοι αναπαριστούν τα γραμματοκιβώτια μιας πόλης. Ο ταχυδρόμος πρέπει να βρει μια διαδρομή έτσι ώστε να μοιράσει τα γράμματα που έχει για όλα τα γραμματοκιβώτια, περνώντας, όμως από το καθένα μόνο μια φορά.



Σχήμα 1.1 Γράφημα.

Το παραπάνω είναι ένα γνωστό πρόβλημα με ιδιαίτερο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον. Ο κύκλος Euler θα μπορούσε να είναι μια λύση, όχι όμως η ιδανική.

Ένας κύκλος Euler δε μπορεί να προσφέρει μια καλή λύση εφόσον ο στόχος είναι μια απλή και μόνο μία επίσκεψη κάθε κόμβου. Σε αυτό το πρόβλημα θα ήταν αρκετά ανεπαρκής να ζητάμε μόνο να επισκεφτούμε κάθε ακμή, γιατί αυτό θα σήμαινε ότι μπορεί να επισκεφτούμε τον ίδιο κόμβο περισσότερες από μια φορά, πράγμα που είναι αντίθετο από αυτό που ζητάμε.

Γενικά οι κύκλοι ή τα μονοπάτια Euler δεν είναι κατάλληλα εργαλεία για την ανάλυση προβλημάτων όπου το σημαντικό είναι η επίσκεψη κάθε κόμβου. Για προβλήματα αυτού του τύπου η επίσκεψη μιας ακμής δεν είναι πλέον τόσο σημαντικό (οι κύκλοι ή τα μονοπάτια Euler έχουν να κάνουν με καταστάσεις όπου η διάσχιση ακμών είναι το πιο σημαντικό).

Είναι σημαντικό επομένως να εισάγουμε τον ορισμό ενός άλλου «κύκλου» ο οποίος θα μας δώσει την επιθυμητή λύση στο πρόβλημα. Αυτό ο κύκλος δεν είναι άλλος από τον κύκλο Hamilton[1]

[1] Οι κύκλοι Hamilton ονομάστηκαν έτσι μετά τον διάσημο Ιρλανδό μαθηματικό (και αστρονόμο) Sir William Rowan Hamilton ο οποίος έζησε από το 1805 έως το 1865. Ο Hamilton ήταν ένα παιδί θαύμα. Μπορούσε να διαβάζει Αγγλικά, Εβραϊκά, Ελληνικά και Λατινικά ενώ ήταν μόλις τεσσάρων χρονών. Επιπρόσθετα έγραφε ποίηση και διατηρούσε στενή φιλία με τον Wordsworth και τον Coleridge. Ο Hamilton έγινε Καθηγητής Αστρονομίας στο Κολέγιο Trinity στο Δουβλίνο της Ιρλανδίας όταν ήταν είκοσι-τρία χρονών.

1.2 Βασικοί Όροι

Είναι φυσικό γύρω από ένα τέτοιο πρόβλημα να υπάρχει μια σειρά από όρους και ειδικούς συμβολισμούς. Στη συνέχεια δίνουμε τους όρους και την ορολογία που χρησιμοποιείται σε όλη την εργασία.

Κύκλος Hamilton (Hamilton Circuit): είναι ο κύκλος ο οποίος ξεκινά από έναν κόμβο του γραφήματος και περνά από κάθε κόμβο ακριβώς μια φορά και καταλήγει πάλι στον κόμβο από όπου ξεκίνησε. Αν από αυτό τον κύκλο διαγραφεί μια ακμή τότε απομένει ένα Hamilton μονοπάτι. Και παράλληλα όταν ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton τότε το ονομάζουμε ***Hamiltonian***.

Πλήρες Γράφημα (Complete Graph): είναι το γράφημα στο οποίο κάθε κόμβος συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους με ακριβώς μία ακμή.

Γράφημα Βαρών (Weighted Graph): είναι το γράφημα όπου η κάθε ακμή χαρακτηρίζεται από κάποιον «βάρος». Το «βάρος» αυτό είναι ένας αριθμός που μπορεί να αναπαριστά την απόσταση, το κόστος ή κάποια άλλη ποσότητα.

Βάρος Μονοπατιού (Weight of a Path): το βάρος ενός μονοπατιού (ή κύκλου) είναι το άθροισμα των βαρών από την κάθε ακμή του μονοπατιού (ή του κύκλου).

Βέλτιστος κύκλος Hamilton (Optimal Hamilton Circuit) : ένας βέλτιστος κύκλος Hamilton ενός γραφήματος είναι ένας με το μικρότερο δυνατό βάρος. Μπορεί να είναι περισσότεροι από έναν.

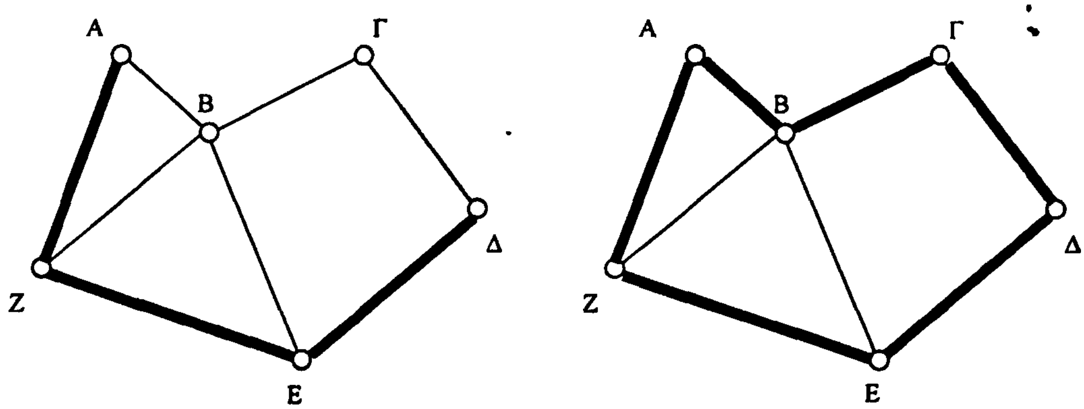
Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή (Traveling Salesman Problem) : το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου κύκλου Hamilton σε ένα πλήρες γράφημα, το οποίο για συντομία το συμβολίζουμε ως TSP.

Γράφημα (Graph): είναι μια δομή που φτιάχνεται από ακμές και κόμβους. Οι ακμές εξυπηρετούν για τη σχέση που τελικά θα υπάρχει ανάμεσα στους κόμβους.

Γειτονικοί κόμβοι (Adjacent vertices): δύο κόμβοι είναι γείτονες εάν υπάρχει μια ακμή που να τους συνδέει. Συμβολισμός: adj(x)

Βαθμός (Degree) : ενός κόμβου λέγεται ο συνολικός αριθμός των ακμών προσπίπτουν σε αυτόν. Συμβολισμός : deg(x).

Μονοπάτι (Path) : σε ένα γράφημα είναι μια διαδρομή μεταξύ κόμβων διά μέσου ακμών έτσι ώστε καμιά ακμή δε χρησιμοποιείται παραπάνω από μια φορά.



Σχήμα 1.2 Μονοπάτι και κύκλος Hamilton.

Κύκλος (Cycle): λέγεται το μονοπάτι που ξεκινά και καταλήγει στον ίδιο κόμβο.

Συνδεδεμένο Γράφημα (Connected Graph): είναι αυτό στο όπου οποιοιδήποτε δύο κόμβοι αυτού συνδέονται μεταξύ τους με ένα μονοπάτι. Διαφορετικά είναι ***ένα μη-συνδεδεμένο (Disconnected)*** γράφημα, σε ένα τέτοιο γράφημα κάθε κομμάτι του λέγεται ***.συνιστώσα (Components)*** του γραφήματος

Εάν διαγράψουμε μια ακμή ενός συνδεδεμένου γραφήματος και το μετατρέπουμε έτσι σε ένα μη-συνδεδεμένο γράφημα, τότε αυτή η ακμή ονομάζεται ***γέφυρα (Bridge).***

Μονοπάτι Euler (Euler Path) : είναι το μονοπάτι που περιέχει κάθε ακμή του συνδεδεμένου γραφήματος μια μόνο φορά.

Κύκλος Euler (Euler Circuit) : είναι το μονοπάτι Euler το οποία ξεκινά και καταλήγει στον ίδιο κόμβο

1.3 Ιδιότητες Γραφημάτων Hamilton

Δυστυχώς δεν υπάρχει καμιά αντιστοιχία με τα Euler θεωρήματα έτσι ώστε να μας λένε αν υπάρχει ή όχι κύκλος Hamilton ένα γράφημα.

Υπάρχουν κάποιες φορές καταστάσεις όπου τα παρακάτω θεωρήματα μας βοηθούν να συμπεράνουμε αν ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Θεώρημα 1.1 (Dirac [12]). Αν G ένα απλό γράφημα με $n \geq 3$ κόμβους και ισχύει ότι για κάθε τέτοιο κόμβο ο βαθμός του είναι μεγαλύτερος ή ίσος με $n/2$ τότε αυτό το γράφημα έχει κύκλο Hamilton

Πρόταση 1.1. Ένα πλήρες γράφημα πάντοτε πληρεί πάντοτε τις συνθήκες του θεωρήματος του Dirac. Έτσι όλα τα πλήρες γραφήματα έχουν κύκλους Hamilton.

Περισσότερες ***ιδιότητες*** των πλήρων γραφημάτων N-κόμβων:

- Έχουν πολλούς κύκλους Hamilton.
- Κάθε κόμβος έχει βαθμό N-1.
- Ο συνολικός αριθμός ακμών είναι $N(N$-1) / 2.
- Ο συνολικός αριθμός των κύκλων Hamilton είναι (N-1)! Από τους οποίου οι μισοί είναι οι αντίστροφοι των άλλων μισών.

Πόρισμα 1.1. Αν G είναι ένα απλό γράφημα με $n \geq 3$ κόμβους και ισχύει ο βαθμός του κάθε ένα κόμβου είναι μεγαλύτερος ή ίσος με (n-1) / 2 τότε το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton.

Θεώρημα 1.2 (Ore [13]). Αν G ένα απλό γράφημα με $n \geq 3$ κόμβους και για όλους τους μη γειτονικούς κόμβους, έστω x και y δύο τυχαίοι, ισχύει $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Θεώρημα 1.3 (Bondy and Chvatal [13]). Έστω G ένα απλό γράφημα, όπου για δύο διακριτούς μη γειτονικούς κόμβους x και y ισχύει η σχέση $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. Τότε το γράφημα G είναι Hamiltonian αν και μόνο αν είναι Hamiltonian και το γράφημα $G + (x, y)$.

Τα προβλήματα τα οποία εμπλέκουν του κύκλους Hamilton είναι συχνά ισοδύναμα με προβλήματα διαδρομής. Η πιο σημαντική κλάση των προβλημάτων αυτών είναι όταν οι ακμές του γραφήματος έχουν βάρη διαφορετικά μεταξύ τους.

1.4 Αλγόριθμοι Εύρεσης Κύκλων Hamilton

- ***Brute Force Αλγόριθμος***

1. Λίστα όλων των πιθανών κύκλων Hamilton .
2. Εύρεση των βαρών όλων των παραπάνω κύκλων.
3. Διαλέγουμε αυτόν με το μικρότερο βάρος.

Θετικά: Πάντα δουλεύει (αν έχουμε αρκετό χρόνο)

Αρνητικά: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για σχετικά μικρά γραφήματα. Για έναν υπολογιστή που εκτελεί 10000 κύκλους/sec μπορεί να χρειαστεί 18 δευτερόλεπτα για γράφημα με 10 κόμβους, 50 μέρες για γράφημα με 15 κόμβους, 2 χρόνια για γράφημα με 16 κόμβους, 193000 χρόνια γιά γράφημα με 20 κόμβους.

Δυστυχώς ο Brute Force Αλγόριθμος είναι η μόνη μέθοδος που γνωρίζουμε η οποία με επιτυχία μας δίνει την βέλτιστη λύση. Οι μαθηματικοί δεν έχουν αποδείξει να υπάρχει άλλη τέτοια μέθοδος. Αυτό είναι το πιο σημαντικό και διάσημο μη-επιλύσιμο πρόβλημα στα μαθηματικά. «Εάν μπορέσεις να βρεις μια αποδοτική λύση για το TSP τότε θα γίνεις και πλούσιος και διάσημος».

Μπορεί να μην έχουμε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για τη λύση του TSP, αλλά έχουμε αρκετούς αλγορίθμους που προτείνουν λύσεις που μπορεί να μην είναι βέλτιστοι, αλλά μας δίνουν μια βέλτιστη λύση για τον χρόνο που διαθέτουμε και για ακρίβεια μας δίνουν μια «καλή λύση που μπορεί να μην είναι και η βέλτιστη. Αυτή η κλάση αλγορίθμων είναι γνωστή ως «προσεγγιστικοί» αλγόριθμοι.

- ***Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι (Approximate Algorithms)***

Έχουν δοθεί πολλές λύσεις. Το πρόβλημα λόγω της σπουδαιότητας του έχει μελετηθεί εκτενέστατα με σκοπό τη δημιουργία προσεγγιστικών αλγορίθμων για την εύρεση κάποιας μη βέλτιστης λύσης που όμως θα προσεγγίζει τη βέλτιστη ικανοποιητικά.

- ***Αλγόριθμος 1:***

  Cheapest Link Algorithm (CLA)

  1. Διάλεξε μια ακμή με το μικρότερο βάρος (τη «φθηνότερη» ακμή), (Αν υπάρχουν μονοπάτια με ίδιο ακριβώς βάρος τότε επιλέγουμε ένα τυχαία).
  2. Συνέχιζε να διαλέγεις τη φθηνότερη ακμή εκτός εάν
     (α) αυτή η ακμή κλείνει έναν μικρό κύκλο ή
     (β) αυτή η ακμή έχει ως αποτέλεσμα 3 επιλεγμένες ακμές που ξεκινούν από τον ίδιο κόμβο.
  3. Συνέχισε με τον ίδιο τρόπο μέχρι ο κύκλος Hamilton να συμπληρωθεί.

  Το αποτέλεσμα είναι κύκλος Hamilton.

- ***Αλγόριθμος 2:***

  Κοντινότερος γείτονας - Nearest Neighbor Algorithm (NNA)

  1. Ξεκινάμε από έναν κόμβο. (το θεωρούμε ως τη πόλη μας)
  2. Ταξιδεύουμε σε έναν άλλο κόμβο (το θεωρούμε ως μια άλλη πόλη) τον οποίο δεν έχουμε επιλέξει ακόμα και το μονοπάτι αυτό έχει το μικρότερο βάρος (θα λέγαμε ότι διαλέγουμε την κοντινότερη πόλη) (Αν υπάρχουν μονοπάτια με ίδιο ακριβώς βάρος τότε επιλέγουμε ένα τυχαία).
  3. Συνεχίζουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μέχρι να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους (πόλεις).

4. Και καταλήγουμε πάλι στον κόμβο από όπου ξεκινήσαμε (στη δική μας πόλη).

Το αποτέλεσμα είναι κύκλος Hamilton.

- ***Αλγόριθμος 3:***

  Επαναληπτικός NNA (Repetitive Nearest Neighbor Algorithm - RNNA)

  1. Εκτελούμε τον NNA για κάθε κόμβο (πόλη).
  2. Διαλέγουμε την καλύτερη από όλες τις λύσεις (αυτή με το μικρότερο βάρος).
  3. Εάν είναι απαραίτητα ξαναγράφουμε τη λύση με τον συγκεκριμένο αρχικό κόμβο.

  Το αποτέλεσμα είναι κύκλος Hamilton.

Το σχετικό σφάλμα ενός προσεγγιστικού αλγορίθμου (The Relative Error of an Approximate Algorithm)

Για τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους λέμε ότι ενδιαφέρον παρουσιάζει η ποσότητα που καλούμε **σχετικό σφάλμα (relative Error):**

$$\text{ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ} = \frac{\text{Διαφορά από τη Βέλτιστη λύση}}{\text{Βέλτιστη λύση}}$$

ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ αρχικά ήταν σημαντικό για θεωρητικούς λόγους, μόνο αν μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη (optimal) λύση, δηλαδή μόνο για απλές περιπτώσεις. Γενικά δεν υπάρχει δυνατότητα να καταλήξουμε σε μια πλήρη άποψη για την εκτίμηση της εκτέλεσης ενός προσεγγιστικού αλγορίθμου. ΑΛΛΑ μπορούμε να υπολογίσουμε δυο πολύ σημαντικές παραμέτρους :

(1) Η χειρότερη περίπτωση (worst-case performance) και

(2) Η μέση περίπτωση (average performance).

1.5 Αντιμετώπιση του Προβλήματος σε Τέλεια Γραφήματα

Το πρόβλημα εύρεσης του κύκλου Hamilton σε ένα γράφημα είναι ένα NP-πλήρες πρόβλήμα. Θα δούμε πως αντιμετωπίζεται όμως με σχετικά μικρούς χρόνους στην ειδική κατηγορία γραφημάτων, ***τέλεια γραφήματα.***

Πριν όμως δώσουμε το όρο του τέλειου γραφήματος πρέπει να δώσουμε μια σειρά από ορισμούς για να καταλήξουμε στο επιθυμητό. Έτσι έχουμε τα εξής:

Ένα γράφημα $G = (V, E)$, όπως έχουμε προαναφέρει λέγεται **πλήρες** (complete) εάν τα μέλη κάθε ζεύγους κόμβων γειτνιάζουν, δηλαδή εάν για κάθε $x, y \in V$ ισχύει $(x, y) \in E$.

Ένα υποσύνολο $S \in V$ λέγεται **ευσταθές** (stable) εάν για κάθε ζεύγος κόμβων $x, y \in V$ ισχύει $(x, y) \notin E$.

Ένα σύνολο $W \subseteq V$, το οποίο επάγει ένα **πλήρες** γράφημα $G(W)$ λέγεται **κλίκα** (clique).

Εάν δεν υπάρχει κλίκα W' στο γράφημα G τέτοια ώστε $W \subset W'$, τότε η κλίκα W λέγεται **μείζονα κλίκα** (maximal clique). Εάν δεν υπάρχει κλίκα W' στο γράφημα G τέτοια ώστε $|W| < |W'|$, τότε η κλίκα W λέγεται **μέγιστη κλίκα** (maximum clique).

Ένα σύνολο κλικών $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ του γραφήματος $G = (V, E)$ λέγεται **σύνολο κλικών επικάλυψης** (clique cover) μεγέθους $k \geq 1$, εάν $V = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$.

Ένα σύνολο $W \subseteq V$, το οποίο επάγει ένα ευσταθές γράφημα G / W λέγεται **ευσταθές σύνολο επικάλυψης** (stable set).Εάν δεν υπάρχει ευσταθές σύνολο W'

στο γράφημα G τέτοια ώστε $|W| < |W'|$, τότε το σύνολο W λέγεται **μέγιστο ευσταθές σύνολο**.

Ένα σύνολο ευσταθών συνόλων $\{X_1, X_2, \ldots, X_c\}$ του γραφήματος $G = (V, E)$ λέγεται **σύνολο ευσταθών συνόλων επικάλυψης** μεγέθους $c \geq 1$, εάν $V = X_1 + X_2 + \ldots + X_c$.

Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$ αντιστοιχούν τέσσερις χαρακτηριστικοί αριθμοί $\omega(G)$, $\kappa(G)$, $\alpha(G)$ και $\chi(G)$.

$\omega(G)$, **αριθμός κλίκας** (clique number) : Ο πληθικός αριθμός της μέγιστης κλίκας του γραφήματος $G = (V, E)$.
$\kappa(G)$, **αριθμός κλικών επικάλυψης** (clique cover number) : Το μέγεθος του μικρότερου συνόλου κλικών επικάλυψης, δηλαδή ο μικρότερος αριθμός από κλίκες που απαιτείται για να καλυφθούν όλοι οι κόμβοι του $G = (V, E)$.
$\alpha(G)$ **ευσταθής αριθμός** (stable number) : Ο πληθικός αριθμός του μέγιστου ευσταθούς συνόλου του γραφήματος $G = (V, E)$.
$\chi(G)$ **χρωματικός αριθμός** (chromatic number) : Το μέγεθος του μικρότερου συνόλου ευσταθών συνόλων επικάλυψης, δηλαδή ο μικρότερος αριθμός από ευσταθή σύνολα που απαιτείται για να καλυφθούν όλοι οι κόμβοι του $G = (V, E)$

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται ***τέλειο γράφημα*** (perfect) εάν ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες :

$$\text{(P1)} \quad \omega(G_A) = \chi(G_A) \quad (\forall\, A \subseteq V)$$

$$\text{(P1)} \quad \alpha(G_A) = \kappa(G_A) \quad (\forall\, A \subseteq V)$$

Παρακάτω θα δούμε σε γενικές γραμμές πως αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα του κύκλου Hamilton σε κάποια χαρακτηριστικά τέλεια γραφήματα. Και τελικά θα δώσουμε με λεπτομέρεια την αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος για τα τέλεια συμπληρωματικά παραγόμενα γραφήματα

Ας δούμε όμως μερικά από αυτά τα τέλεια γραφήματα

- *Διμερή γραφήματα (Bipartite graphs)*

Ορισμός : Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται Διμερές γράφημα όταν υπάρχουν δύο υποσύνολα του V, Χκαι Υ για τα οποία ισχύει: α) τα σύνολα αυτά είναι ευσταθή και β) $|X| + |Y| = |V|$.

Είναι φανερό πως αν $|X| \neq |Y|$ τότε σίγουρα δεν έχουμε κύκλο Hamilton. Σε γενικές γραμμές όμως θα μπορούσαμε να πούμε πως αφού το σύνολο X και αντίστοιχα το Υ είναι δύο ευσταθή σύνολα επικάλυψης του γραφήματος και έστω $|X| < |Y|$ τότε στη καλύτερη περίπτωση θα μπορούσαμε να φτιάξουμε έναν κύκλο Hamilton με τους $|X|$ κόμβους του μικρότερου συνόλου X και με $|X|$ κόμβους από το σύνολο $|Y|$. Έτσι καταλήγουμε στο ότι πρέπει να ισχύει: $|X| = |Y|$

Και επιπλέον θα πρέπει στο γράφημα G να ισχύει ότι για κάθε ζεύγος κόμβων που δεν είναι γειτονικοί $(x, y) \in V(X) \times V(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ είναι το σύνολο των κόμβων του X και του Υ αντίστοιχα, ότι $d(x) + d(y) \geq n + 1$, όπου $d(u)$ ο βαθμός του κόμβου u.

- *Μεταθετικά γραφήματα (Permutation graphs)*

Για τα μεταθετικά τέλεια γραφήματα δεν έχει αναπτυχθεί αποτελεσματικός αλγόριθμος. Για την κατηγορία αυτή γραφημάτων θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιον από τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους ή τον Brute Force Αλγόριθμος.

- *QT-γραφήματα (Quasi – threshold graphs)*

Ορισμός 1 : Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **Quasi - threshold** γράφημα αν κάθε ακμή του G είναι είτε free (η ακμή (x, y) είναι free αν $N[x] = N[y]$, ;έχουν τους ίδιους γειτονικούς κόμβους), είτε semi-free (η ακμή (x, y) είναι semi-free αν $N[x] \subset N[y]$ ή $N[x] \subset N[y]$).

Ορισμός 2 : Ισοδύναμα ένα γράφημα G είναι **Quasi – threshold** αν και μόνο αν το G δεν έχει επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο με P_4 ή C_4.

Η κλάση των QT-γραφημάτων είναι υποκλάση των co-γραφημάτων, και περιέχει τη κλάση των threshold γραφημάτων

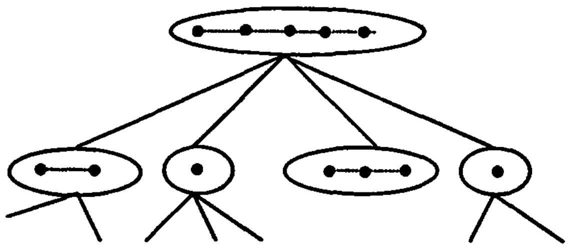
Η δομή που χρησιμοποιούμε είναι αυτή του cent-tree T_c [4]. Πρόκειται για ένα ριζωμένο δέντρο με ρίζα V_1, κάθε κόμβος στο $T_c(G)$ είναι είτε φύλλο ή έχει τουλάχιστον δύο παιδιά. Επιπλέον, $V_s \leq V_t$ αν και μόνο αν V_s είναι πρόγονος του V_t. Για το V_1 ισχύει ότι είναι μια κλίκα και κάθε κόμβος του συνδέεται με όλους τους κόμβους του γραφήματος. Το ίδιο ισχύει για κάθε υποδέντρο. Επιπλέον δύο κόμβοι του ίδιου επιπέδου είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους.

Έστω $V_1, V_2, \ldots, V_k$ οι κόμβοι του cent-tree $T_C(G)$ ενός QT-γραφήματος G με ρίζα $r_c = V_1$, και έστω $V_{i1}, V_{i2}, \ldots, V_{ip}$ τα παιδία του κόμβου V_i $(1 \leq i \leq k)$, σημειώστε ότι $p \geq 2$ αν το V_i δεν είναι ένα φύλλο του cent-tree. Αναθέτουμε μια ετικέτα H-label(V_i) σε κάθε κόμβο V_i του cent-tree $T_c(G)$ η οποία υπολογίζεται με τον παρακάτω τρόπο [4]:

$$\text{H-label}(V_i) = \begin{cases} |V_i| - p, & \text{αν } V_i \text{ είναι η ρίζα του δέντρου,} \\ |V_i| - p + 1, & \text{αν } V_i \text{ είναι ένας εσωτερικός κόμβος, και} \\ 0 & \text{αν } V_i \text{ είναι φύλλο,} \end{cases}$$

όπου p είναι ο αριθμός των παιδιών του κόμβου V_i $(1 \leq i \leq k)$.

Το Σχήμα 1.3 αναπαριστά έναν κόμβο V_i ενός cent-tree μαζί με τα τέσσερα παιδιά του V_{i1}, V_{i2}, V_{i3}, και V_{i4}. Εδώ έχουμε H-label(V_i) = 2 αν το V_i είναι εσωτερικός κόμβος ή H-label(V_i) = 1 αν το V_i είναι η ρίζα του δέντρου, H-label(V_{i1}) = 1, H-label(V_{i2}) = -1, H-label(V_{i3}) = 0 και H-label(V_{i4}) = 0. Τότε το G είναι ένα Hamiltonian QT-γράφημα αν H-label(V_i) ≥ 0 για κάθε κόμβο $V_i \in T_c(G)$.



Λήμμα 1.1 (Nikolopoulos [4]). Ένα QT-γράφημα G είναι Hamiltonian αν H-label(V_i) ≥ 0 για κάθε κόμβο $V_i \in T_c(G)$.

1.6 Ορισμός των Προβλημάτων Μελέτης

Σε αυτή την εργασία το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι ο κύκλος Hamilton σε μια άλλη κατηγορία τέλειων γραφημάτων. Αυτά είναι τα **Συμπληρωματικά Παραγόμενα Γραφήματα** (co-graphs) τον οποίων τον ορισμό θα δώσουμε παρακάτω.

Πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Εάν έχει ένα co-γράφημα G κύκλο Hamilton.
   Αν όχι τότε ποιο είναι το completion number αυτού (HCN(G)).

2. Σε ένα co-γράφημα G που δεν έχει κύκλο Hamilton τότε ποιο το μέγιστο υπογράφημα που έχει κύκλο Hamilton και ταυτόχρονα διατηρεί την ιδιότητα του co-γραφήματος;
   - Διαγράφοντας κόμβους.

3. Σε ένα co-γράφημα G που δεν έχει κύκλο Hamilton τότε ποιο το ελάχιστο υπεργράφημα που έχει κύκλο Hamilton και ταυτόχρονα διατηρεί την ιδιότητα του co-γραφήματος;
   - Προσθέτοντας νέους κόμβους (και ακμές).
   - Προσθέτοντας νέες ακμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συμπληρωματικά Παραγόμενα Γραφήματα

2.1 Ορισμός

Τα **επαγόμενα συμπληρωματικά γραφήματα (complement reducible graphs)** λέγονται επίσης και **co-γραφήματα (cographs)** ορίζονται ως ακολούθως:

(1) Ένα γράφημα που αποτελείται από έναν μόνο κόμβο είναι ένα co-γράφημα.

(2) Αν G_1, G_2, ... G_k είναι co-γραφήματα τότε και η ένωση τους $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$ είναι co-γράφημα.

(3) Αν το G είναι co-γράφημα τότε και το complement αυτού είναι co-γράφημα.

Τα co-γραφήματα αναπτύχθηκαν στην περιοχή της επιστήμης των υπολογιστών και έχουν μελετηθεί από διάφορους ερευνητές. Ονόματα συνώνυμα του co-γραφήματος είναι D^*-*graphs*, P_4 *restricted graphs* , *Hereditary Dacey graphs*, και άλλα. Χαρακτηρισμοί για τα co-γραφήματα έχουν δοθεί πολλοί. Για παράδειγμα αποδεικνύεται στην αναφορά [6] ότι το G είναι co-γράφημα αν και μόνο αν δεν περιέχει P_4 (ένα μονοπάτι που αποτελείται από 4 κορυφές) σαν επαγόμενο υπογράφημα.

Η πιο σημαντική ιδιότητα των co-γραφήματα που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο κατασκευής τους είναι ότι ένα γράφημα *G* είναι co-γράφημα εάν και μόνο εάν το *G* μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα co-δέντρο (cotree), ο ορισμός του co-δέντρου δίνεται στην επόμενη παράγραφο. Οι περισσότεροι αλγόριθμοι επίλυσης διαφόρων προβλημάτων σε co-γραφημάτων χρησιμοποιούν το co-δέντρο ως είσοδο. Το κεντρικό πρόβλημα σε αυτούς τους αλγορίθμους είναι : *Καθορισμός του εάν ένα δοθέν γράφημα G είναι co-γράφημα ή όχι, και αν ναι τότε κατασκευή του αντίστοιχου co-δέντρου.*

2.2 Ιδιότητες Co-Γραφημάτων και Co-Δέντρων

Πριν δώσουμε όμως το γραμμικό αλγόριθμο αναγνώρισης ενός co-γραφήματος και την κατασκευή του αντίστοιχου co-δέντρου, ας δούμε μερικές ιδιότητες αυτών των γραφημάτων. Αυτές θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση του αλγορίθμου.

Έστω $G=(V, E)$ ένα γράφημα.

Για $V_1 \subset V$, το G-V_1 δηλώνει το υπογράφημα που παράγεται από το G διαγράφοντας τους κόμβους του V_1.

Για κάθε $v \in V$, ορίζουμε $N(v)=\{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ και το $\Gamma(v)= N(v) \cup \{v\}$.

Εάν $N(u)=N(v)$, τότε οι κορυφές u και v ονομάζονται ***false twin*** και συμβολίζεται $u \sim_f v$. Εάν $\Gamma(u)=\Gamma(v)$, τότε οι κορυφές u και v ονομάζονται ***true twin*** και συμβολίζεται $u \sim_t v$.

Σημειώνουμε ότι η σχέση $u \sim_f v$ ορίζει ότι $(u, v) \notin E$ και η σχέση $u \sim_t v$ ορίζει ότι $(u, v) \in E$. Οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες. Οι κλάσεις ισοδυναμίας του V κάτω από τη σχέση $\sim_t$ ($\sim_f$ αντίστοιχα) καλούνται ***κλάσεις*** $\sim_t$ ***(***$\sim_f$ ***αντίστοιχα)***.

Έστω T ριζωμένο δέντρο.

Οι κόμβοι του T που δεν έχουν παιδιά καλούνται ***leaf nodes (κόμβοι φύλλα)***. Οι υπόλοιποι κόμβοι καλούνται ***internal nodes (εσωτερικοί κόμβοι)***.

Ένας εσωτερικός κόμβος καλείται ***tip node*** αν και μόνο αν όλα τα παιδιά του είναι κόμβοι φύλλα.

$L(T)$ δηλώνει το σύνολο όλων των κόμβων του Τ που είναι φύλλα.

Για κάθε κόμβο x, το $p_T(x)$ είναι ο πατέρας του κόμβου x στο T.

$T(x)$ είναι το υποδέντρο του T με ρίζα τον κόμβο x.

Leaf(x) είναι το σύνολο των παιδιών του x που είναι φύλλα.

Αν ένας κόμβος y βρίσκεται στο μονοπάτι από τον κόμβο x στη ρίζα r του T, τότε ο y είναι ένα ***ancestor (πρόγονος) του x*** και ο x είναι ένας ***descendent (απόγονος) του y*** και λέμε ότι οι κόμβοι x και y ***related (σχετίζονται)***.

Ο πρώτος κοινός κόμβος των μονοπατιών από τους x και y. προς τη ρίζα r ονομάζεται ***lowest common ancestor (ελάχιστος κοινός προκάτοχος)*** των x και y και συμβολίζεται $lca_T(x, y)$. Αν ο y είναι ένας ancestor του x τότε $\mathrm{lca}_T(x, y) = y$.

Ορισμός : Ένα co-δέντρο είναι ένα ριζωμένο δέντρο T με τις ακόλουθες ιδιότητες :

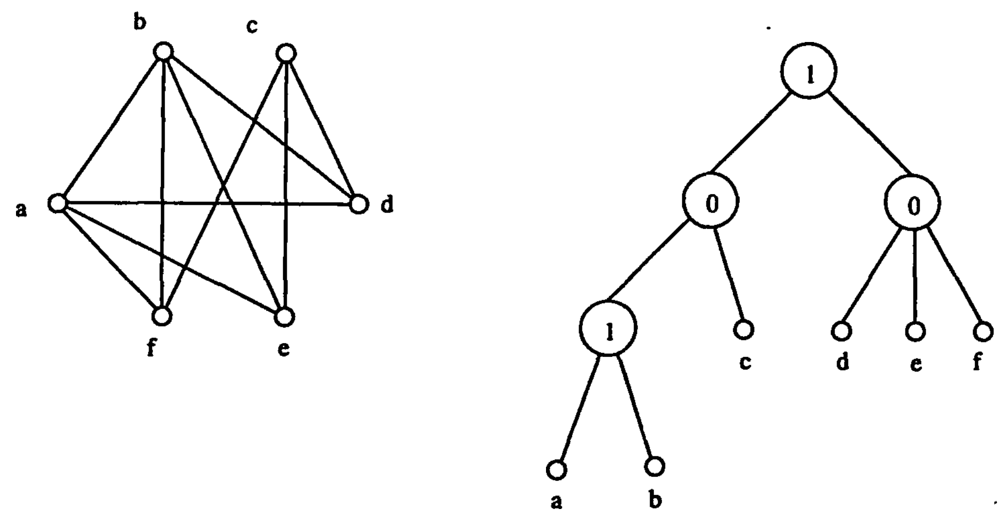
(α) Οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν τιμές 0 ή 1, η ρίζα του T είναι ένας κόμβος Τύπου 1, τα παιδιά ενός κόμβου Τύπου 1 είναι κόμβοι Τύπου 0, τα παιδιά ενός κόμβου Τύπου 0 είναι κόμβο Τύπου 1.

(β) Κάθε εσωτερικός κόμβος έχει τουλάχιστον 2 παιδιά εκτός από τη ρίζα r που μπορεί να έχει και μόνο ένα παιδί.

Ένα co-γράφημα G μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα ριζωμένο δέντρο $T(G)$ ως ακολούθως: Οι κόμβοι φύλλα του T αναπαριστούν τους κόμβους του G. Κάθε εσωτερικός κόμβος του T αναπαριστά είτε έναν "union", είτε έναν "complement" τελεστή. Ένας κόμβος "union" έχει τουλάχιστον δύο παιδιά. Ένας κόμβος "complement" έχει ακριβώς έναν κόμβο παιδί το οποίο είναι ένας κόμβος "union". Μπορούμε να τροποποιήσουμε το T ώστε να είναι ένα co-δέντρο με τον ακόλουθο τρόπο: εάν η ρίζα r του T είναι ένας κόμβος "union" , προσθέτουμε δύο νέους "complement" κόμβους r_1 και r_2 στο T και κάνουμε το r παιδί του r_1 και το r_1 παιδί του r_2 έτσι ώστε το r_2 να είναι η νέα ρίζα του δέντρου. (Εάν το r είναι ένας κόμβος "complement", παραλείπουμε αυτό το βήμα.) Στη συνέχεια, συγχωνεύουμε κάθε κόμβο "union" και τον πατέρα αυτού (ο οποίος είναι ένας κόμβος "complement") σε έναν μοναδικό κόμβο. Τελικά, το label των κόμβων καθορίζεται από τον ορισμό 1(α). Η πιο σημαντική ιδιότητα αυτής της αναπαράστασης είναι η παρακάτω [6]:

Ιδιότητα του co-δέντρου: Έστω $G = (V, E)$ ένα co-γράφημα και $T(G)$ είναι η co-δεντρική αναπαράστασή του, όπως αυτή δόθηκε παραπάνω. Για οποιαδήποτε $x, y \in V$, το $(x, y) \in E$ αν και μόνο αν $\mathrm{lca}_T(x, y)$ είναι κόμβος Τύπου 1.

Η Σχήμα 2.2 δείχνει ένα co-γράφημα G και το co-δέντρο του $T(G)$.



Σχήμα 2.2 : Co-γράφημα και Co-δέντρο.

Εάν η ρίζα r του $T(G)$ έχει τουλάχιστον δύο παιδιά τότε το G είναι συνδεδεμένο. Εάν η ρίζα r έχει μόνο ένα παιδί κόμβο Τύπου 0, τότε το G είναι μη συνδεδεμένο. Εάν η ρίζα r έχει μόνο ένα φύλλο παιδί x, τότε το G αποτελείται από έναν μόνο κόμβο, τον x.

Θεώρημα 2.3. Το G είναι ένα co-γράφημα αν και μόνο αν έχει μία co-δεντρική αναπαράσταση $T(G)$. Επιπλέον, η co-δεντρική αναπαράσταση είναι μοναδική ως προς τη μετάθεση των παιδιών των εσωτερικών κόμβων του $T(G)$ [1, 6].

2.3 Γραμμικός Αλγόριθμος Αναγνώρισης Co-γραφημάτων και Κατασκευής Co-δέντρου

Ο αλγόριθμος που ακολουθεί είναι αυξητικός ως προς τους κόμβους. Σε κάθε βήμα προστίθεται και ένας κόμβος μέχρι να ολοκληρωθεί το γράφημα. Καθώς τα co-γραφήματα έχουν την ιδιότητα πως κάθε επαγόμενο γράφημα είναι επίσης co-γράφημα, θεωρούμε ότι έχουμε co-γράφημα G με το co-δέντρο $T(G)$ και έναν αλγόριθμο που αποφασίζει αν το $(G + x)$ γράφημα είναι επίσης co-γράφημα, αν η απάντηση στο ερώτημα είναι θετική τότε ο αλγόριθμος αυτός δημιουργεί μορφοποιεί το T για να αναπαραστήσει το νέο γράφημα $(G + x)$.

Δίνεται μια λίστα από κόμβους του G γειτονικούς με το επιπλέον κόμβο x, και φιλτράρουμε αυτή τη γειτονικότητα πάνω στο δέντρο από τα φύλλα προς τη ρίζα χρησιμοποιώντας ένα είδος μαρκαρίσματος.

Για έναν κόμβο w του $T(G)$ (με ρίζα το R) ισχύουν οι παρακάτω ορισμοί:
d(w) συμβολίζει τον αριθμό των παιδιών του w στο $T(G)$ και
md(w) συμβολίζει τον αριθμό των παιδιών του w που έχουν περάσει από τις καταστάσεις "marked" και "unmarked".
Για όλους τους κόμβους w, η τιμή του md(w) είναι αρχικά πάντα μηδέν (0) και ξαναγίνεται μηδέν όταν είναι σε κατάσταση "unmarked".

Η ακόλουθη συνάρτηση χρησιμοποιεί τη πληροφορία τις γειτονικότητας του νέου κόμβου x σε "mark" και μετά σε "unmark", όπου είναι κατάλληλο στους κόμβους στο $T(G)$.

MARK(x)

Mark όλα τα φύλλα του *T(G)* τα όποια είναι γειτονικά στο x

Για κάθε marked κόμβο u του *T(G)* με d(u) = md(u)

Κάνε unmark(u);

md(u) $\leftarrow$ 0;

εάν $u \neq R$ τότε mark(w) όπου w είναι πατέρας του u

md(w) $\leftarrow$ md(w) + 1

εισήγαγε τον u στη κεφαλή της λίστας των μαρκαρισμένων κόμβων

και ξεμαρκάριστων παιδιών του w

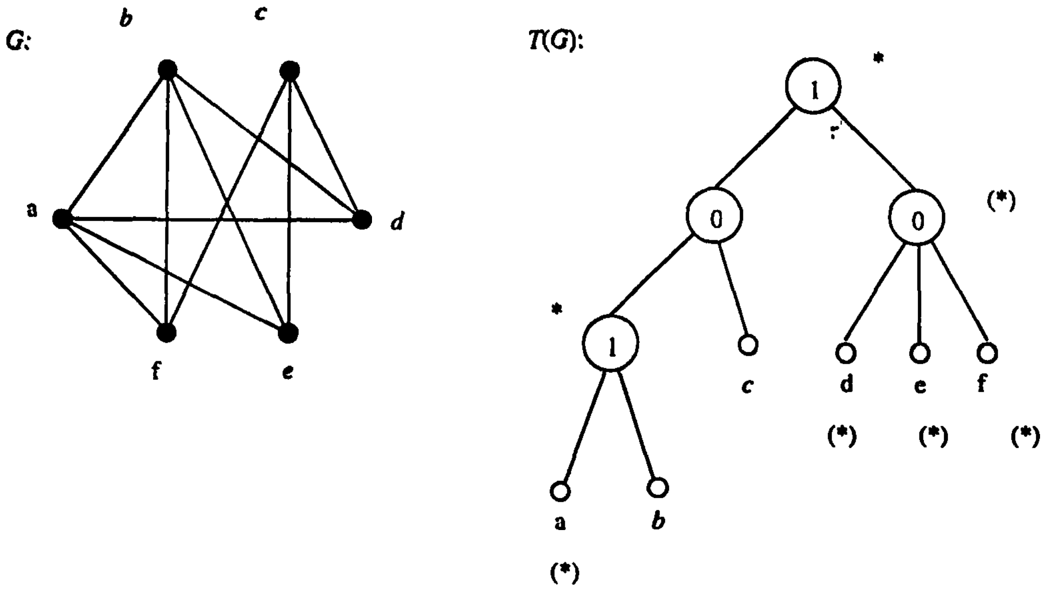
Τέλος του "για κάθε"

Αν κάποιος κόμβος παραμένει μαρκαρισμένος και d(R) – 1 τότε μαρκάρισε τον R

Τέλος της MARK

Έστω M είναι το σύνολο των εσωτερικών κόμβων του *T(G)* οι οποίοι παραμένουν μαρκαρισμένοι και μετά την εφαρμογή της συνάρτησης MARK και έστω α ένας κόμβος στο M στο χαμηλότερο επίπεδο στο δέντρο *T(G)* και β ο κόμβος στο σύνολο M\{α} επίσης στο χαμηλότερο επίπεδο στο *T*. Θα λέμε ότι ένας μαρκαρισμένος κόμβος Τύπου 1 γ είναι properly marked (κατάλληλα μαρκαρισμένος) αν και μόνο αν md(γ) = d(γ) – 1.
Legitimate alternating path (Γνήσιο εναλλακτικό μονοπάτι) σε ένα μαρκαρισμένο co-δέντρο είναι εκείνο το μονοπάτι που αποτελείται από γειτονικούς κόμβους που εναλλάσσονται με κατάλληλα μαρκαρισμένους κόμβους Τύπου 1 και μη-μαρκαρισμένους κόμβους Τύπου 0. Οι ακρινοί κόμβοι του μονοπατιού είναι πάντοτε μαρκαρισμένοι κόμβοι Τύπου 1.

Η συνάρτηση MARK απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. όπου οι γειτονικοί κόμβοι στον κόμβο x που θα προστεθεί είναι οι a, *d*, *e*, και *f*. Με το σύμβολο * σημειώνουμε τους μαρκαρισμένους κόμβους και με (*) τους κόμβους που είναι διαδοχικά μη-μαρκαρισμένοι. Στο ίδιο σχήμα το σύνολο $M = \{R, \text{πατέρα(a)}\}$, α = πατέρας(a) και $\beta = R$.



Σχήμα 2.1 Ένα co-γράφημα G και το co-δέντρο του. Τα σύμβολα * και (*) αναφέρονται στη συνάρτηση MARK.

Τώρα βλέπουμε ότι το μαρκαρισμένο σύνολο M αποφασίζει αν το $G + x$ είναι ή δεν είναι co-γράφημα. Αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα όπου βασίζεται ο γραμμικός αλγόριθμος

Θεώρημα 2.1. Αν G είναι ένα co-γράφημα με co-δέντρο T τότε και το $G + x$ είναι co-γράφημα αν και μόνο αν

1. M είναι το κενό σύνολο ή
2. (i) $M \setminus \{\alpha\}$ αποτελείται από ακριβώς κόμβους Τύπου 1 από ένα (προφανώς άδειο) γνήσιο εναλλακτικό μονοπάτι το οποίο καταλήγει στο R και

   (ii) α είναι είτε ένας κόμβος Τύπου 0 του οποίου πατέρας είναι β ή α είναι ένας κόμβος-1 του οποίου ο παππούς, αν υπάρχει είναι β.

Απόδειξη:

Α) Μόνο αν.

Αν οι συνθήκες του θεωρήματος δε διατηρούνται τότε έχουμε ένα από τα παρακάτω:

(i) $M\backslash\{\alpha\}$ περιέχει έναν κόμβο Τύπου 0.

(ii) Υπάρχει ένας κόμβος Τύπου 1 στο $M\backslash\{\alpha\}$ που δεν είναι κατάλληλα μαρκαρισμένος.

(iii) Υπάρχει $\gamma \neq R$ στο $M\backslash\{\alpha\}$, ο παππούς του γ δεν ανήκει στο $M\backslash\{\alpha\}$.

(iv) Οι κόμβοι του $M\backslash\{\alpha\}$ δε βρίσκονται σε ένα μονοπάτι προς το R.

(v) α είναι ένας κόμβος Τύπου 0 του οποίου πατέρας δεν είναι β.

(vi) α είναι ένας κόμβος Τύπου 1 ο οποίος έχει παππού που δεν είναι β.

Από ορισμού κάθε κόμβος στο M είναι μαρκαρισμένος και όχι μη-μαρκαρισμένος, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα απόγονος φύλλο γείτονας του x και τουλάχιστον ένα φύλλο που δεν είναι γείτονας του x. Χρησιμοποιώντας αυτό είναι αρκετά ισχυρό στο να δείξουμε ότι κάθε μια από τις παραπάνω έξι (6) καταστάσεις δείχνουν ότι υπάρχει ένα επαγόμενο P_4 στο $G + x$. Όπως για παράδειγμα, δείχνουμε ένα επαγόμενο P_4 στο γράφημα $G + x$ εάν η συνθήκη (i) βρούμε ότι είναι αληθής.

Χρησιμοποιείται και η ακόλουθη σημείωση: για κάθε εσωτερικό κόμβο θ του T, με το des(θ) ορίζουμε το σύνολο απογόνων φύλλα του θ, δηλαδή τα φύλλα του υποδέντρου του T με ρίζα τον θ. Έστω γ είναι ένας κόμβος Τύπου 0 στο $M\backslash\{\alpha\}$ και έστω δ είναι ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος των α και γ στο T. Σημειώνουμε την πιθανότητα δ = γ. Υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις που πρέπει να ελέγξουμε, για τις ταμπέλες 0 ή 1 των κόμβων α και δ.

Περίπτωση 1: α και δ είναι και οι δύο κόμβοι Τύπου 0:

Απόδειξή:

Υπάρχει ένα επαγόμενο P_4 με τους κόμβους (b, c, x, d) αν x και c είναι γείτονες στο $G + x$, ή με τους κόμβους (b, c, a, x) αν x και γ δεν είναι γείτονες, όπου $\mathrm{a} \in$ des(α) και είναι γείτονας με το x και $b \in$ des(α) και δεν είναι γείτονας με το x

και $c \in$ des(πατέρας(α))\des(α) και $d \in$ des(γ) και είναι γείτονας του x. Αn $\delta = \gamma$, τότε $d \in$ des(γ)\des(θ), όπου θ είναι παιδί του γ στο α-γ μονοπάτι.

Περιπτώσεις 2, 3 και 4

Απόδειξη:

Όμοια με περίπτωση 1.

B) Αν.

Ολοκληρώνουμε αυτό το τμήμα αποδεικνύοντας με τη κατασκευή του T, το co-δέντρο που αναπαριστά το $G + x$.

1. Αν M είναι κενό σύνολο, τότε x μπορεί να προστεθεί ως παιδί της ρίζας αν το $G + x$ είναι συνδεδεμένο γράφημα ή ως παιδί από το μοναδικό της ρίζας στη περίπτωση όπου το $G + x$ και το G είναι μη συνδεδεμένα. Αν $G + x$ είναι μη συνδεδεμένο ενώ το G είναι συνδεδεμένο η ρίζα του δέντρου $T(G)$ και x γίνονται παιδιά από το μοναδικό παιδί σε μια νέα ρίζα.

2. Υπάρχει ένας ελάχιστος μαρκαρισμένος κόμβος $\alpha \in M$. Έστω A είναι τα παιδιά του α που είναι διαδοχικά μαρκαρισμένα και μη μαρκαρισμένα από τη συνάρτηση MARK. Όμοια, έστω B είναι τα παιδιά του α τα οποία δεν είναι μαρκαρισμένα από τη συνάρτηση MARK. Οπότε το $\alpha \in$ M υποδηλώνει ότι $|A| \geq 1$ και $|B| \geq 1$. Για να κατασκευάσουμε το T' υπάρχουν περιπτώσεις που πρέπει να μελετήσουμε.

Περίπτωση (i) : ο κόμβος α είναι κόμβος Τύπου 0

Σε αυτή τη περίπτωση τα στοιχεία των συνόλων A και B είναι είτε φύλλα ή κόμβοι Τύπου 1.

Εάν $|A| = 1$ και $\alpha \in A$ είναι φύλλο τότε προσθέτουμε έναν νέο κόμβο Τύπου 1 στη θέση του α και κάνουμε τον α και τον x παιδιά αυτού του κόμβου.

Εάν $|A| = 1$ και $\alpha \in A$ είναι κόμβος Τύπου 1 τότε απλά προσθέτουμε τον x ως ένα νέο παιδί του α.

Εάν $|A| > 1$ τότε διαγράφουμε όλα τα στοιχεία του A από τον α και προσθέτουμε έναν νέο κόμβο Τύπου 1 στη θέση τους. Παιδιά του νέου αυτού κόμβου είναι ο x και ένας νέος κόμβος Τύπου 0 με στοιχεία του A ως παιδιά

Περίπτωση (ii): ο κόμβος α είναι κόμβος Τύπου 1

Η απόδειξη αυτής της περίπτωσης είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση (i), εκτός του ότι το B εξετάζεται αντί του A και οι ρόλοι των κόμβων Τύπου 0 ισχύουν αντίστροφα για κόμβους Τύπου 1.

Για να δείξουμε ότι το T' είναι η ακριβής αναπαράσταση του $G + x$, παρατηρούμε ότι οι αλλαγές στο $T(G)$ ανακλούνται σωστά οι γείτονες του x με κόμβους στο υπογράφημα με ρίζα τον α και είναι γεγονός έχουμε ένα γνήσιο εναλλακτικό μονοπάτι από τον α στη ρίζα R, υπόσχονται ότι όλοι οι άλλοι γείτονες του x αναπαριστώνται σωστά. Οι γείτονες ανάμεσα στους κόμβους του G παραμένουν χωρίς να αλλάζουν όπως απαιτείται.

Είναι φανερό πως η απόδειξη του παραπάνω αλγορίθμου συνθέτει αλγόριθμο που αναγνωρίζει και κατασκευάζει το co-δέντρο του co-γραφήματος G, ξεκινώντας από το co-δέντρο δύο κόμβων και προσθέτοντας έναν-έναν τους κόμβους.

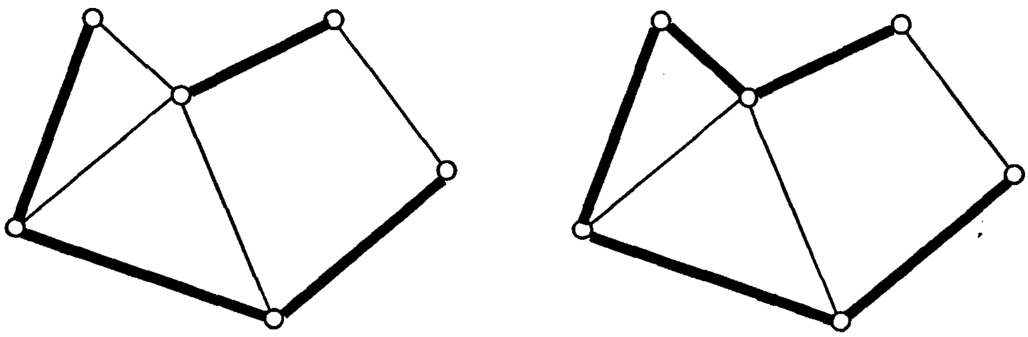
Θεώρημα 2.2. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης και κατασκευής του co-δέντρου απαιτεί γραμμικό χρόνο στο πλήθος των m ακμών και των n κόμβων του γραφήματος: $O(m + n)$ [1].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ελάχιστο Σύνολο Μονοπατιών Επικάλυψης σε Co-γράφημα

3.1 Ορισμός

Το σύνολο μονοπατιών επικάλυψης (path cover) σε ένα γράφημα G είναι ένα σύνολο P από μονοπάτια στο G τα οποία περιέχουν όλους τους κόμβους του G. Ένα path cover ορίζεται ως ελάχιστο (minimum path cover) αν αποτελείται από το μικρότερο δυνατό πλήθος μονοπατιών. Στο σχήμα 3.1(α) απεικονίζεται ένα πιθανό path cover, ενώ στο σχήμα 3.1(β) βλέπουμε το minimum.



Σχήμα 3.1 (α) path cover. (β)minimum path cover.

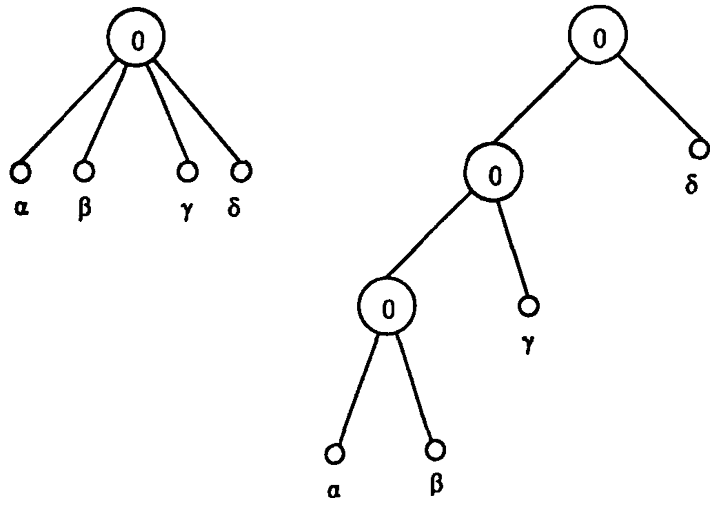
3.2 Αλγόριθμος Εύρεσης Ελάχιστου Συνόλου Μονοπατιών Επικάλυψης

Το πρόβλημα της εύρεσης του minimum path cover είναι από τις σημαντικότερες εφαρμογές στον προγραμματισμό, VLSI, λειτουργικών συστημάτων. Είναι φανερό πως ένα γράφημα με path cover μεγέθους ένα μπορεί να χαρακτηριστεί ως Hamiltonian. Είναι γνωστό άλλωστε ότι το πρόβλημα της εύρεσης κύκλου ή μονοπατιού Hamilton σε ένα γράφημα *G* είναι από τα πιο δύσκολα προβλήματα στη θεωρία γραφημάτων.

Ο αλγόριθμος που παρουσιάζουμε σε αυτή την ενότητα επιστρέφει το minimum path cover ενός co-γραφήματος *G*.

Αρχικά πρέπει να θεωρήσουμε ότι έχει υπολογισθεί το co-δέντρο του αντίστοιχου co-γραφήματος. Με τη βοήθεια αυτής της δομής θα αναπτύξουμε τους παρακάτω αλγορίθμων.

Από το co-δέντρο δημιουργούμε το αριστεροβαρές δυαδικό **co-δέντρο (Leftist Binarized Co-tree)**. Είναι το δέντρο που προκύπτει αν κάθε εσωτερικό κόμβο του αρχικού co–δέντρου ο οποίος έχει περισσότερα από δύο παιδιά τον αναλύουμε όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2:



Σχήμα 3.2 : Μετατροπή σε δυαδικό δέντρο.

Ποιο συγκεκριμένα, έστω u ένας εσωτερικός κόμβος,
Παιδιά του κόμβου u είναι οι κόμβοι $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $(k \geq 3)$.
Αντικαθιστούμε τον κόμβο u από k-1 κόμβους $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$, τέτοιους ώστε ο u_1 έχει παιδιά του τα v_1 και v_2, και κάθε u_i $(2 \leq i \leq k\text{-}1)$ έχει παιδιά τους u_{i-1} και v_{i+1}.
Έτσι θα αναφερόμαστε στη δυαδική αναπαράσταση του $T(G)$ σαν $T_b(G)$.
Σημειώνουμε ότι το $T_b(G)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες που έχουμε ήδη αναφέρει για την co-δεντρική αναπαράσταση: κάθε εσωτερικός κόμβος στο $T(G)$ έχει δύο παιδιά τουλάχιστον, και κάθε κόμβος φύλλο του $T(G)$ αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του V τέτοιος ώστε $(x, y) \in E$ εάν και μόνο αν ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος $\mathrm{LCA}_T(x, y)$ είναι κόμβος Τύπου 1.

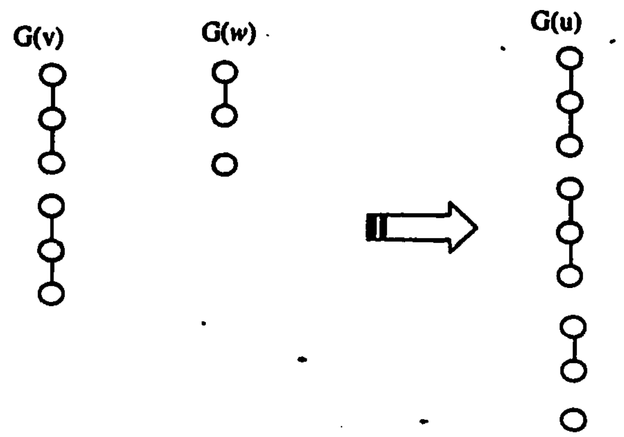
Επιπλέον του δίνουμε την ιδιότητα Leftist δηλαδή σε κάθε εσωτερικό κόμβο το αριστερό υποδέντρο έχει περισσότερους κόμβους φύλλα από το δεξί. Λέμε ότι το $T_b(G)$ **είναι αριστεροβαρές (leftist),** αν για κάθε εσωτερικό κόμβο u ικανοποιείται η συνθήκη $\mathrm{L}(v) \geq \mathrm{L}(w)$.

Το $T_{bl}(G)$ **είναι το αριστεροβαρές δυαδικό co-δέντρο (leftist binarized cotree)** του G.

Σημειώνουμε ότι το p(*u*) είναι ο αριθμός των μονοπατιών σε ένα minimum path cover του *G*(*u*).

Υποθέτουμε ότι είναι γνωστά τα minimum path covers του *G*(*v*) και του *G*(*w*). Οι *v*, *w* είναι το αριστερό και το δεξί, αντίστοιχα παιδί του εσωτερικού κόμβου *u*. Ενώ τα *G*(*v*) και *G*(*w*) είναι τα υποδέντρα με ρίζα τους αντίστοιχους κόμβους.

Εάν ο κόμβος *u* είναι κόμβος Τύπου 0, τότε καμία ακμή στο *G*(*u*) δε συνδέει κόμβους από το *G*(*v*) και το *G*(*w*). Έτσι, ένα minimum path cover για το *G* είναι η ένωση των minimum path covers των *G*(*v*) και *G*(*w*). Γίνεται ένωση των συνόλων των μονοπατιών των δύο συνόλων σε ένα, με οποιαδήποτε διάταξη.



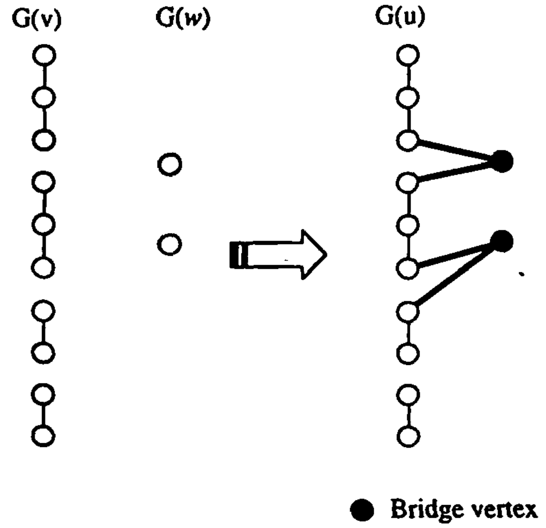
Σχήμα 3.3 : Ένωση μονοπατιών σε κόμβο Τύπου 0.

Εάν ο κόμβος *u* είναι κόμβος Τύπου 1, τότε κάθε κόμβος *G*(*v*) συνδέεται με κάθε κόμβο του *G*(*w*). Έτσι, ένα minimum path cover για το *G*(*u*) προκύπτει σύμφωνα με τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις που διακρίνουμε παρακάτω.

Περίπτωση 1: p(*v*) > L(*w*).

Χρησιμοποιούμε τους κόμβους του L(*w*) του *G*(*w*) για να γεφυρώσουμε ;ή να συγχωνεύσουμε τα L(*w*) + 1 μονοπάτια του minimum path cover του *G*(v) και έτσι προκύπτει ένα μονοπάτι, ενώ περισσεύουν p(*v*) - (L(*w* + 1)) μονοπάτια, τα οποία φυσικά ανήκουν στο path cover του κόμβου *u*.

bridge vertex : ένας κόμβος που γεφυρώνει μονοπάτια σε έναν κόμβο Τύπου 1

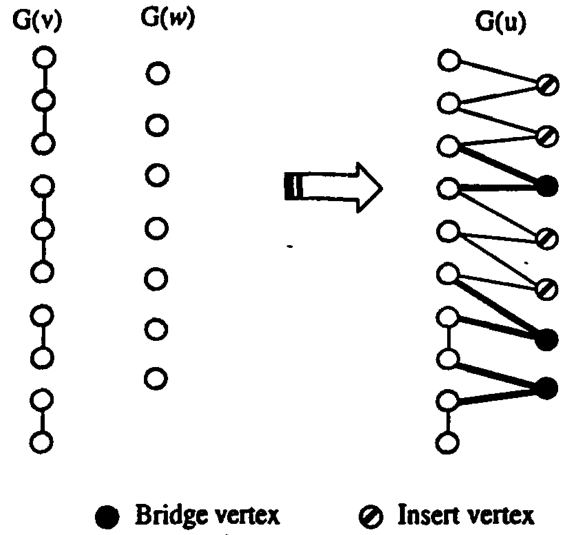


Σχήμα 3.4 : Οι κόμβοι του G(*w*) είναι λιγότεροι από τα μονοπάτια του G(v) και γίνονται bridges.

Περίπτωση 2: p(*v*) ≤ L(*w*).

Σε αυτή τη περίπτωση, p(*v*) – 1 κόμβοι του *G*(*w*) χρησιμοποιούνται για να γεφυρώσουν τα p(*v*) μονοπάτια ενός minimum path cover του *G*(*v*) σε ένα μονοπάτι, είναι οι **bridge vertices** που αναφέραμε και στη προηγούμενη περίπτωση. Οι εναπομείναντες κόμβοι, οι οποίοι καλούνται **insert vertices** , εισάγονται στο μονοπάτι που λαμβάνεται με οποιονδήποτε τρόπο, και αυτό μπορεί να γίνει γιατί όλοι τους συνδέονται με όλους τους κόμβους του *G*(*v*) και επιπλέον ισχύει ότι L(*v*) > L(*w*), άρα σίγουρα θα μπορούν να συγχωνευτούν σε κάποιο από τα p(*v*) μονοπάτια. Το minimum path cover που παίρνουμε σαν αποτέλεσμα είναι ένα Hamiltonian path.

Ως τελικό αποτέλεσμα παίρνουμε ότι όλα τα μονοπάτια στο minimum path cover του G λαμβάνονται με bottom-up διάσχιση του $T_{bl}(G)$ από το φύλλα προς τη ρίζα. Μια προσεκτική εφαρμογή εγγυάται ότι ο αντίστοιχος αλγόριθμος εκτελείται σε γραμμικό ως προς το μέγεθος του $T_{bl}(G)$ χρόνο. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.



Σχήμα 3.5 : Ένωση μονοπατιών και εισαγωγή επιπλέον κόμβων.

Θεώρημα 3.1. Δοθέντος του co-δέντρου $T(G)$ ενός co-γράφημα G n κόμβων, ένα minimum path cover μπορεί να ληφθεί σε γραμμικό χρόνο [1].

Σημειώνουμε ότι ένας primary vertex αντιστοιχεί σε ένα φύλλο του $T_{bl}(G)$ τέτοιο ώστε κάθε εσωτερικός κόμβος κατά μήκος ενός μονοπατιού από τη ρίζα στο φύλλο δεν είναι το δεξί παιδί ενός κόμβου Τύπου 1. Συμπερασματικά ένας bridge ή insert vertex ανήκει σε ένα υποδέντρο με ρίζα έναν εσωτερικό κόμβο που είναι το δεξί παιδί ενός κόμβου Τύπου 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αναγνώριση Hamiltonian Co-γραφημάτων

4.1 Εύρεση Κύκλου Hamilton σε Co-γραφήματα

Για να ξεκινήσουμε την ανάλυση οποιουδήποτε προβλήματος σχετικά με τα co-γραφήματα και το κύκλο Hamilton, θα πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε εάν το γράφημα που εξετάζουμε έχουν ή όχι κύκλο Hamilton.
Εάν έχει τέτοιο κύκλο, τότε ένα άλλο πρόβλημα είναι να βρούμε αυτόν τον κύκλο.
Εάν δε έχει κύκλο Hamilton, τότε ένα πρόβλημα που γεννάτε είναι το πως μπορούμε να τροποποιήσουμε το γράφημα μας ώστε τελικά να έχει κύκλο Hamilton;

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως χρησιμοποιώντας τη βασική ιδέα του αλγορίθμου εύρεσης των επικαλυπτικών μονοπατιών (path cover) μπορούμε να αποφασίσουμε αν το γράφημα μας έχει ή όχι κύκλο Hamilton χωρίς να χρειάζεται να καθορίσουμε ποιος ακριβώς είναι αυτός ο κύκλος. Αυτό θα το πετύχουμε κάνοντας απλά καταμέτρηση των ελάχιστων δυνατών μονοπατιών που μπορούν να προκύψουν από κάθε εσωτερικό κόμβο, έτσι με μια διάσχιση του δέντρου μας από κάτω προς τα πάνω φτάνουμε τελικά στη ρίζα όπου υπολογίζεται και το τελικό πλήθος μονοπατιών όλου του γραφήματος. Το πλήθος τελικά αυτό των μονοπατιών θα μας δώσει τη λύση στο πρόβλημα για το αν υπάρχει κύκλος ή μονοπάτι Hamilton στο co-γράφημα.

Έστω co-γράφημα G. Από το γράφημα αυτό υπολογίζουμε το co-δέντρο T, και στη συνέχεια από αυτό το δέντρο υπολογίζουμε το Αριστεροβαρές Δυαδικό Co-δέντρο (Leftist Binarized Cotree) T_{lb}.

Εδώ και πάλι θα τονίσουμε ότι αυτή η μορφή του δέντρου δεν επιφέρει καμία δομική αλλαγή στο γράφημα, αλλά μόνο μας βοηθά στο ότι έχουμε μόνο δύο παιδιά σε κάθε εσωτερικό κόμβο, επομένως ευκολία διαχείρισης και επιπλέον ξέρουμε κάθε στιγμή ότι στο αριστερό υποδέντρο έχει περισσότερα φύλλα από ότι το δεξί.

Σε αυτό το δέντρο εφαρμόζουμε τον παρακάτω "bottom – up" αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 4.1.

Έστω u ένας εσωτερικός κόμβος του T_{lb}.

Συμβολίζουμε με $p(u)$ το πλήθος των επικαλυπτικών μονοπατιών του υποδέντρου με ρίζα τον u.

Αντίστοιχα έχουμε $p(u_\ell)$, $p(u_r)$ το πλήθος των μονοπατιών του αριστερού και δεξιού παιδιού του u.

Συμβολίζουμε με $L(u)$ το πλήθος των κόμβων του υποδέντρου με ρίζα τον u.

Αντίστοιχα έχουμε $L(u_\ell)$, $L(u_r)$ πλήθος των κόμβων του αριστερού και δεξιού παιδιού του u.

Σχεδιάζουμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

1. Εάν ο κόμβος u είναι ένας εσωτερικός κόμβος και τα δύο του παιδιά είναι φύλλα του δέντρου.

   1.1. Εάν ο κόμβος u είναι κόμβος Τύπου 0, τότε

   $p(u) = 2$ και $L(u) = 2$.

1.2. Εάν ο κόμβος u είναι κόμβος Τύπου 1, τότε

$$p(u) = 1 \text{ και } L(u) = 2.$$

2. Εάν ο κόμβος u είναι ένας εσωτερικός κόμβος και το δεξί του παιδί είναι φύλλο του δέντρου.

2.1. Εάν ο κόμβος u είναι κόμβος Τύπου 0, τότε

$$p(u) = p(u_\ell) + 1 \text{ και } L(u)=L(u_\ell) + 1.$$

2.2. Εάν ο κόμβος u είναι κόμβος Τύπου 1, τότε

εάν $p(u_\ell) = 1$ τότε

$$p(u) = 1 \text{ και } L(u) = L(u_\ell) + 1,$$

αλλιώς

$$p(u) = p(u_\ell) - 1 \text{ και } L(u) = L(u_\ell) + 1.$$

3. Εάν ο κόμβος u είναι ένας εσωτερικός κόμβος και κανένα από τα παιδιά του δεν είναι φύλλα του δέντρου

3.1. Εάν ο κόμβος u: κόμβος Τύπου 0, τότε

$$p(u) = p(u_\ell) + p(u_r) \text{ και } L(u) = L(u_\ell) + L(u_r).$$

3.2. Εάν ο κόμβος u: κόμβος Τύπου 1,

τότε

εάν $p(u_\ell) > L(u_r)$ τότε

$$p(u) = p(u_\ell) - L(u_r) \text{ και } L(u) = L(u_\ell) + L(u_r).$$

αλλιώς

$$p(u) = 1 \text{ και } L(u) = L(u_\ell) + L(u_r).$$

Σημείωση: Αν το αποτέλεσμα του πλήθος των μονοπατιών σε έναν κόμβο u είναι αρνητικός αριθμός ή 0 τότε για αυτόν τον εσωτερικό κόμβο έχουμε μόνο ένα μονοπάτι.

Όταν τελικά φτάσουμε στη ρίζα τότε θα υπολογίσουμε τα μονοπάτια αυτού του κόμβου με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και μπορούμε σε αυτό το σημείο να πούμε αν έχει κύκλο ή μονοπάτι Hamilton το συγκεκριμένο γράφημα. Έτσι λοιπόν διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $p(u_\ell) \leq L(u_r)$ τότε έχουμε κύκλο Hamilton.
- Αν $p(u_\ell) = L(u_r) + 1$ τότε έχουμε μονοπάτι Hamilton.
- Αν $p(u_\ell) > L(u_r)+1$ τότε δεν έχουμε τίποτα από τα παραπάνω.

Τέλος αλγορίθμου 4.1.

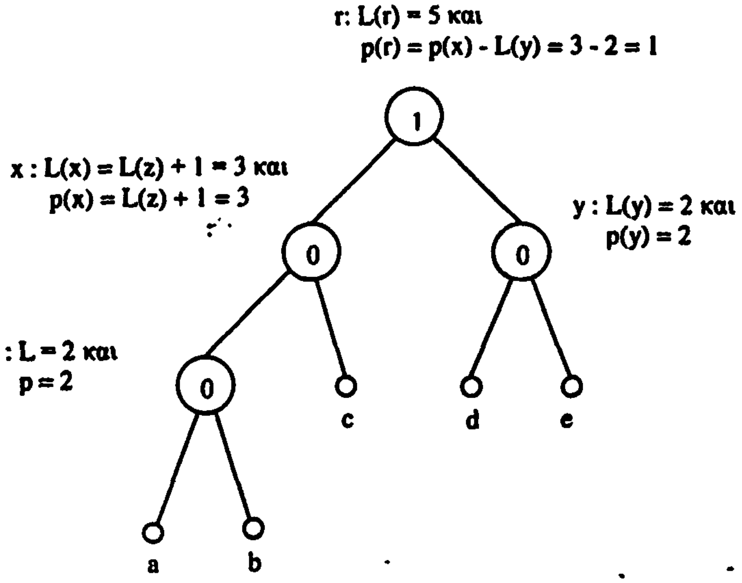
Πρόταση 4.1. Ο αλγόριθμος 4.1 υπολογίζει το μέγεθος του ελάχιστου συνόλου μονοπατιών επικάλυψης.

Απόδειξη: Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις ανάλογα με τον κόμβο του co-δέντρου που εξετάζουμε κάθε φορά.
Είναι φανερό πως σε έναν κόμβο Τύπου 0 παίρνουμε το άθροισμα των μονοπατιών γιατί δεν υπάρχει καμιά πιθανότητα ένωσης δύο μονοπατιών μεταξύ τους.
Σε έναν κόμβο Τύπου 1 οι κόμβοι-φύλλα του δεξιού παιδιού ενώνουν το μέγιστο δυνατό πλήθος μονοπατιών του ελάχιστου path cover του αριστερού παιδιού, οπότε προκύπτει και πάλι το ελάχιστο.

Θεώρημα 4.1. Για ένα co-γράφημα G με n-κόμβους και με το αντίστοιχο co-δέντρο ως είσοδο, ο αλγόριθμος απόφασης για το αν το G έχει ή όχι κύκλο Hamilton απαιτείται γραμμικός χρόνος.

Απόδειξη: Οι υπολογισμοί του πλήθους των μονοπατιών για τα υποδέντρα κάθε εσωτερικού κόμβου γίνεται σε O(1) χρόνο. Ενώ για τη bottom-up διάσχιση του δυαδικού αριστεροβαρούς υποδέντρου απαιτεί χρόνο γραμμικό στο πλήθος των κόμβων του γραφήματος.

Παράδειγμα 4.1:



Στο δέντρο αυτό, το οποίο είναι ένα Leftist Binarized Co-δέντρο, εκτελείται ο αλγόριθμος ως εξής:

- Αρχικά κάνω τους υπολογισμούς στο πιο χαμηλό επίπεδο.
  Σε αυτό ανήκει μόνο ο κόμβος *z*, ο οποίος είναι κόμβος Τύπου 0 και έχει και τα δυο παιδιά φύλλα : 1.1 περίπτωση του αλγορίθμου.

- Στο επόμενο επίπεδο έχουμε δύο κόμβους.
  x: κόμβος Τύπου 0, με αριστερό παιδί τον *z* και το δεξί του παιδί είναι φύλλο : 2.1 περίπτωση του αλγορίθμου.
  y: κόμβος Τύπου 0 με τα δυο παιδιά φύλλα : 1.1 περίπτωση του αλγορίθμου.

- Τέλος φτάνουμε στη ρίζα.
  r: περίπτωση 3.2 του αλγορίθμου και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το γράφημα μας έχει μονοπάτι Hamilton.

4.2 Αριθμός Συμπλήρωσης Hamilton

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να υπολογίσουμε τον **αριθμό συμπλήρωσης Hamilton (Hamiltonian completion number)** του co-γραφήματος το οποίο γενικά για κάθε γράφημα το συμβολίζουμε ως HCN(*G*). Πρόκειται για το πρόβλημα στο οποίο θέλουμε να βρούμε τον ελάχιστο πλήθος ακμών που χρειάζεται να προσθέσουμε στο γράφημα ώστε να έχει μονοπάτι Hamilton.

Στο γράφημα μας εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 4.1 ο οποίος τελικά υπολογίζει το πλήθος των μονοπατιών του path cover του γραφήματος.

Είναι φανερό πως αν έχω κύκλο ή μονοπάτι Hamilton τότε δε χρειάζομαι καμιά ακμή, διαφορετικά, για να έχω μονοπάτι χρειάζομαι τόσες ακμές όσα είναι και τα μονοπάτια πλην ένα.
Γενικά αν το πλήθος των μονοπατιών είναι ένας αριθμός x τότε HCN(*G*) = *x*-1.

Εύκολα τώρα μπορούμε να επεκτείνουμε το πρόβλημα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος κόμβων που χρειάζεται να προσθέσουμε στο γράφημα ώστε να έχει κύκλο Hamilton. Έτσι αν και πάλι το πλήθος των μονοπατιών του path cover είναι ένας αριθμός *x* τότε το ελάχιστο πλήθος των κόμβων που πρέπει να προσθέσουμε θα είναι ίσος με τα μονοπάτια, δηλαδή *x*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μελέτη Υπογραφημάτων Hamilton σε Co-γραφήματα

Έστω G ένα co-γράφημα, το οποίο δεν έχει κύκλο Hamilton. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε ένα υπογράφημα αυτού το οποίο να έχει κύκλο Hamilton. Έτσι έχουμε τα εξής δύο προβλήματα:

1° πρόβλημα – Υπογράφημα μέγιστης τάξης (order).

Βρες υποσύνολο κόμβων $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ώστε:

(i) Το πλήθος των κόμβων του S, $|V(G[S])|$, να είναι μέγιστο,

(ii) Το επαγόμενο υπογράφημα $G[S]$ να έχει κύκλο, και

(iii) Το $G[S]$ να είναι co-γράφημα.

2° πρόβλημα – Υπογράφημα μέγιστου μεγέθους (size)

Βρες υποσύνολο κόμβων $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ώστε:

(i) Το πλήθος των ακμών του S, $|E(G[S])|$, να είναι μέγιστο,

(ii) Το επαγόμενο υπογράφημα $G[S]$ να έχει κύκλο, και

(iii) Το $G[S]$ να είναι co-γράφημα.

5.1 Μέγιστο Hamiltonian Υπογράφημα – Μέγιστο Πλήθος Κόμβων

Εδώ θα δώσουμε την ανάλυση του πρώτου προβλήματος για υπογραφήματα με κύκλο Hamilton. Ο αλγόριθμος που προτείνουμε περιγράφεται με τα παρακάτω βήματα:

Αλγόριθμος 5.1 :

Υπολογισμός υπογραφήματος μέγιστης τάξης (order)

Εφαρμόζουμε τα βήματα του αλγορίθμου εύρεσης του path cover με κάποιες παραλλαγές ώστε να πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Θεωρούμε ότι έχει γίνει η προεργασία κατασκευής του co-δέντρου καθώς και του T_{lb}.

Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε και τους ίδιους συμβολισμούς:

u: ο εσωτερικός κόμβος που εξετάζουμε με $p(u)$ το πλήθος των μονοπατιών,

$L(u)$: το πλήθος των κόμβων φύλλα και με αριστερό παιδί τον κόμβο v και δεξιό παιδί τον κόμβο w.

Αντίστοιχα έχουμε τους συμβολισμούς $p(v)$ και $p(w)$ για το πλήθος των μονοπατιών και $L(v)$ και $L(w)$ για το πλήθος των κόμβων των παιδιών του κόμβου u.

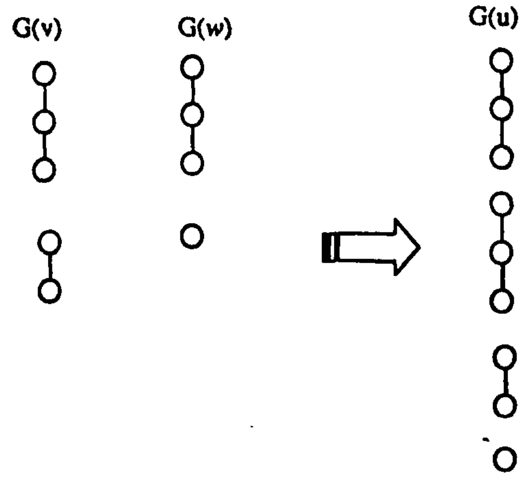
Για κάθε εσωτερικό κόμβο u από κάτω προς τα πάνω, ελέγχουμε:

1. Εάν εσωτερικός κόμβος u είναι κόμβος Τύπου 0:

   Θεωρούμε ότι έχει υπολογιστεί το path cover τόσο του αριστερού, όσο και του δεξιού παιδιού του κόμβου u.

   Επίσης θεωρούμε ότι τα μονοπάτια που προέκυψαν από προηγούμενο βήμα είναι ταξινομημένα κατά φθίνον πλήθος κόμβων. Δηλαδή, στη λίστα των μονοπατιών το πρώτο το μονοπάτι με το μεγαλύτερο πλήθος κόμβων.

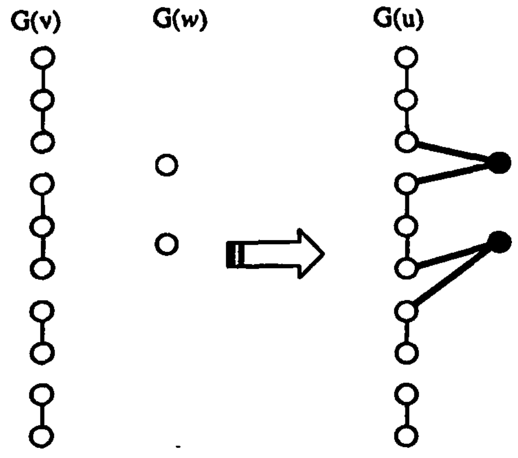
Έτσι, το σύνολο των μονοπατιών του κόμβου Τύπου 0 u ισούται με την ένωση των συνόλων των μονοπατιών των κόμβων παιδιών v και w ταξινομημένα και αυτά κατά φθίνον πλήθος κόμβων τους.



Σχήμα 5.1 : Υπολογισμός συνόλου μονοπατιών σε κόμβο Τύπου 0.

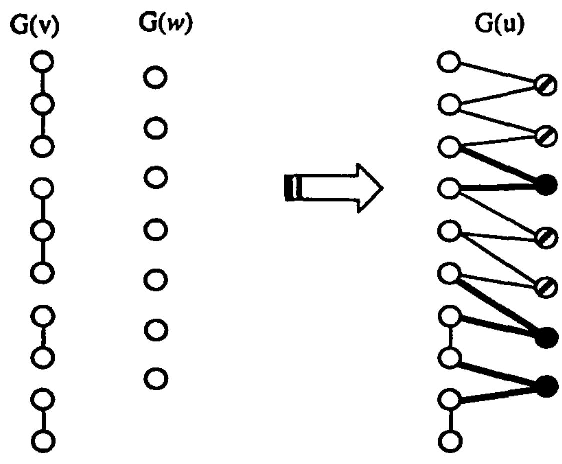
2. Εάν ο εσωτερικός κόμβος *u* είναι κόμβος Τύπου 1:
Όμοια με τη προηγούμενη περίπτωση θεωρούμε ότι ισχύουν τα ίδια.
Τα μονοπάτια του αριστερού παιδιού έχουν υπολογιστεί και είναι ταξινομημένα κατά φθίνον πλήθος κόμβων.
Ενώ για το δεξί παιδί του *u*, αρκεί να γνωρίζουμε το πλήθος των κόμβων φύλλα .

Περίπτωση $1^{η}$ *:* Εάν p(*v*) > L(*w*), τότε οι L(*w*) κόμβοι γεφυρώνουν τα πρώτα L(*w*) + 1, που κατ' επέκταση είναι τα μεγαλύτερα ως προς το πλήθος κόμβων μονοπάτια του *G*(*v*). Έτσι προκύπτει ένα μονοπάτι με πλήθος κόμβων όσο είναι το άθροισμα των κόμβων των L(*w*) + 1 μεγαλύτερων μονοπατιών του *G*(*v*) και του L(*w*) που είναι οι κόμβοι του *G*(*w*). Φυσικά ακολουθούν τα υπόλοιπα μονοπάτια του *G*(*v*). Στο σχήμα 5.2 το πλήθος των κόμβων του μεγαλύτερου μονοπατιού είναι ίσο με το πλήθος κόμβων των τριών μεγαλύτερων μονοπατιών (το δεξί παιδί έχει 2 κόμβους) και επιπλέον τους 2 κόμβους του δεξιού παιδιού, δηλαδή, $3 + 3 + 2 = 8$, ενώ απομένει 1 μονοπάτι.



Σχήμα 5.2 : Γεφύρωσης μονοπατιών σε κόμβο. Τύπου 1.

Περίπτωση 2: Εάν $p(v) \leq L(w)$.τότε προκύπτει ένα μονοπάτι, λόγω της κατασκευής του δέντρου όπου οι κόμβοι του δεξιού παιδιού είναι λιγότεροι από αυτούς του αριστερού, με πλήθος κόμβων $L(v) + L(w)$, όπου είναι καί το μέγιστο δυνατό πλήθος. Ενώνονται δηλαδή όλοι οι κόμβοι μεταξύ τους.



Σχήμα 5.3 : 2η περίπτωση γεφύρωση μονοπατιών σε κόμβο Τύπου 1.

Στη ρίζα θα χρησιμοποιήσω τους $L(w)$ - 1 κόμβους για να φτιάξω το μέγιστο μονοπάτι, και με τον τελευταίο κόμβο θα ενώσω τις άκρες του μονοπατιού για να δημιουργήσω τελικά τον μέγιστο κύκλο Hamilton.

Τέλος αλγορίθμου 5.1

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τελευταίο κόμβο για να δημιουργήσουμε το μεγαλύτερο Hamiltonian μονοπάτι.

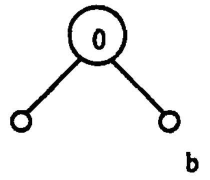
Θεώρημα 5.1. Ο αλγόριθμος εύρεσης του μέγιστου, ως προς τους κόμβους, επαγόμενου Hamiltonian υπογραφήματος ενός co-γραφήματος παράγει το μέγιστο δυνατό co-γράφημα με κύκλο Hamilton.

Απόδειξη: Έστω ένα co-γράφημα G το οποίο δεν έχει κύκλο Hamilton.
Σύμφωνα με τη διαδικασία εύρεσης του μέγιστου ως προς τους κόμβους, επαγόμενου Hamiltonian υπογραφήματος ενός co-γραφήματος θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή ξεκινώντας από το χαμηλότερο επίπεδο και έπειτα θα δούμε τη συμπεριφορά του αλγορίθμου σε κάποιο τυχαίο επίπεδο. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι σε κάθε βήμα παράγεται ένα σύνολο μονοπατιών, τα οποία υπάρχουν στο σύνολο ταξινομημένα με φθίνουσα σειρά και τελικά στη ρίζα παίρνω έναν κύκλο (ή μονοπάτι) Hamilton που είναι και ο μεγαλύτερος που μπορεί να προκύψει.

Γενικά, σε περίπτωση υποδέντρου με ρίζα κόμβο Τύπου 0 δε δημιουργούνται νέα μονοπάτια.
Σύνολα μονοπατιών, που έχουν ήδη υπολογιστεί σε προηγούμενα βήματα στο δεξί και αριστερό παιδί, ενώνονται φτιάχνοντας ένα νέο ενιαίο σύνολο.
Αυτό πετυχαίνεται με την εφαρμογή της συνάρτησης MERGE, η οποία συνενώνει και ταυτόχρονα ταξινομεί τα μονοπάτια. Είναι προφανές, λοιπόν ότι προκύπτει ένα μοναδικό αποτέλεσμα (με εξαίρεση την περίπτωση μονοπατιών ίδιου μεγέθους, άλλα μας ενδιαφέρει μόνο το πλήθος των κόμβων και όχι το όνομα των κόμβων).

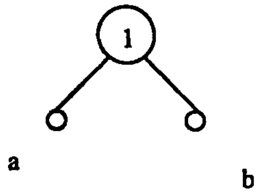
Ενδιαφέρον έχει η περίπτωση κόμβου Τύπου 1 όπου εκεί πράγματι δημιουργούνται νέα μονοπάτια.

- *Βάση : Στο χαμηλότερο επίπεδο του co-δέντρου*
  - Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 0

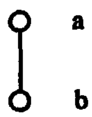


τότε το ταξινομημένο path cover θα είναι το παρακάτω για το οποίο ισχύει ο αλγόριθμος

  - Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 1



τότε το ταξινομημένο path cover θα είναι το παρακάτω για το οποίο ισχύει ο αλγόριθμος



♦ *Υπόθεση: Τυχαίο επίπεδο k του co-δέντρου*

Υποθέτουμε ότι στο επίπεδο *k*, για κάθε κόμβου αυτού έχουμε υπολογίσει το path cover. Πρόκειται για σύνολα μονοπατιών ταξινομημένα κατά φθίνουσα με κριτήριο το πλήθος των κόμβων.

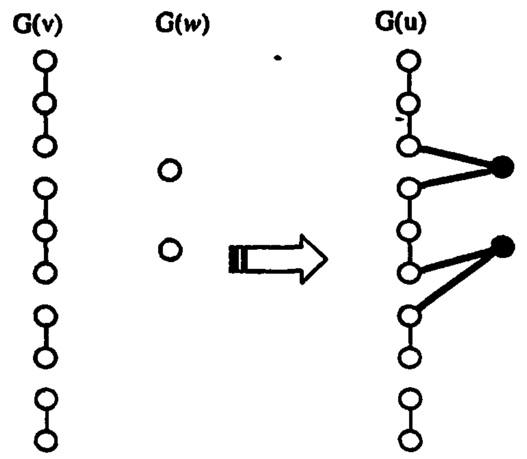
♦ *Επαγωγή: Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για το k-1 επίπεδο του co-δέντρου.*

- Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 0

Η συνάρτηση *MERGE* συνενώνει και ταυτόχρονα ταξινομεί τα μονοπάτια. Όπως αναφέραμε και αρχικά δε δημιουργούνται νέα μονοπάτια. Από το path cover του δεξιού και αντίστοιχα του αριστερού παιδιού το μεγαλύτερο μονοπάτι θα είναι το πρώτο στο νέο path cover και θα έπονται τα υπόλοιπα με φθίνουσα σειρά.

- Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 1

Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.4 : Γεφύρωση μονοπατιών σε κόμβο Τύπου 1.

Στο αριστερό και δεξί έχουμε υπολογίσει τα αντίστοιχα path covers. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι στο αριστερό path cover έχουμε ταξινομημένα τα μονοπάτια κατά φθίνουσα τάξη. Όμοια και για το δεξί παιδί. Στη πραγματικότητα όμως για το δεξί παιδί κόμβου Τύπου 1 δε μας ενδιαφέρει τόσο το path cover, όσο το πλήθος, απλά των κόμβων. Σύμφωνα λοιπόν με τον αλγόριθμο οι κόμβοι του δεξιού παιδιού θα γεφυρώσουν τα μονοπάτια του αριστερού.

Είναι προφανές πως όλοι οι κόμβοι του δεξιού παιδιού θα αξιοποιηθούν όλοι γιατί είναι λιγότεροι από αυτούς του αριστερού. Το ζητούμενο είναι να αξιοποιηθούν όσο το δυνατό περισσότεροι κόμβοι του αριστερού παιδιού.

Αν $L(w) > p(u)$ τότε προκύπτει ένα μονοπάτι. Το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Άρα ο αλγόριθμος λειτουργεί βέλτιστα.

Αν $L(w) < p(u)$ τότε από τη στιγμή που στο αριστερό παιδί έχουμε ένα ταξινομημένο path cover τότε με μοναδικό τρόπο συνδέουμε τους $L(w)$ κόμβους με τα $L(w) + 1$ πρώτα και μεγαλύτερα μονοπάτια από το $G(u)$. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε το μεγαλύτερο δυνατό μονοπάτι.

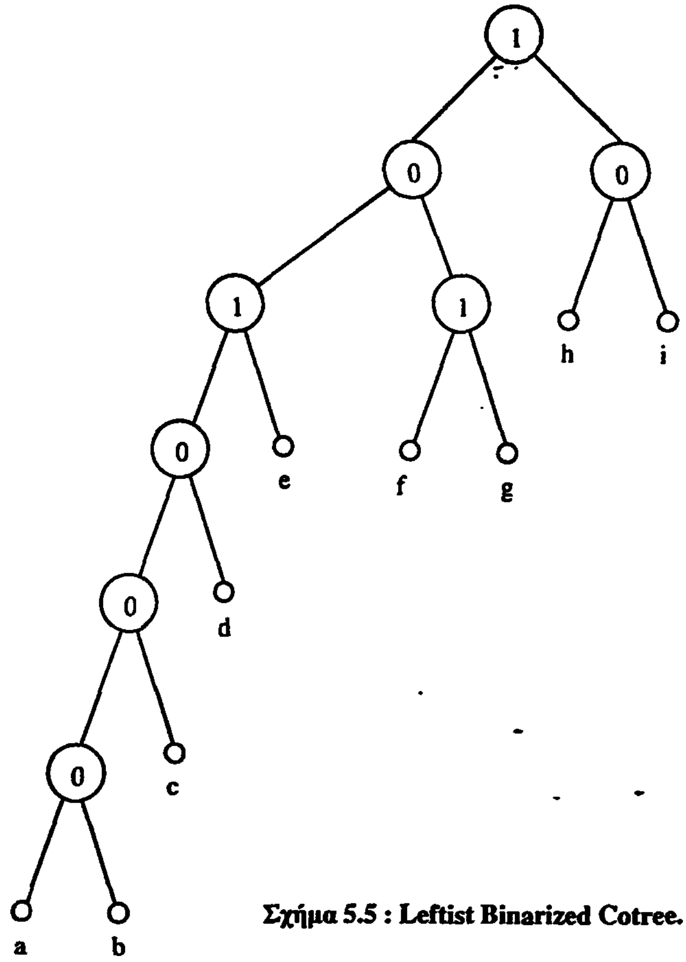
Θεώρημα 5.2. Η εύρεση του μέγιστου Hamiltonian επαγόμενου υπογραφήματος με το μέγιστο πλήθος κόμβων απαιτεί $O(n \log n)$ χρόνο.

Απόδειξη: Ο χρόνος για τη προεργασία δηλαδή τη κατασκευή του co-δέντρου είναι γραμμικός.
Ο χρόνος που απαιτείται για τη εξέταση όλου του γραφήματος είναι αυτός της δημιουργίας του path cover $O(n)$
Επιπλέον απαιτείται ο χρόνος εκτέλεσης της συνάρτησης MERGE στους κόμβους Τύπου 0. Κάθε φορά εκτελείται τα ταξινομημένα μονοπάτια του ενός παιδιού του συγχωνεύονται στα επίσης ταξινομημένα μονοπάτια του άλλου παιδιού. Συνολικά απαιτεί $O(n \log n)$ χρόνο.

Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένα παράδειγμα όπου φαίνονται καθαρά τα βήματα του αλγορίθμου.

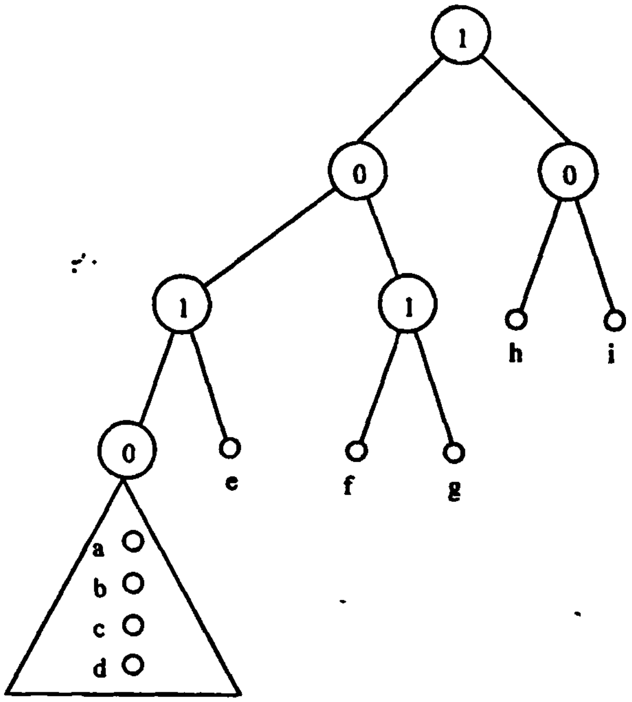
Παράδειγμα 5.1:

Αρχικά θεωρούμε ότι έχουμε το αριστεροβαρές δυαδικό co-δέντρο και φυσικά έχουμε αποφανθεί ότι δεν υπάρχει κύκλος Hamilton, γιατί διαφορετικά δεν υπάρχει λόγος να συνεχίσουμε.



Σχήμα 5.5 : Leftist Binarized Cotree.

Έχουμε την δεντρική αναπαράσταση του co-γραφήματος στο οποίο αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο απόφασης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι προκύπτει path cover μεγέθους 2, όποτε απαιτείται η διαγραφή κάποιων κόμβων για την δημιουργία υπογραφήματος με κύκλο Hamilton. Πιο συγκεκριμένα οι κόμβοι αυτοί θα ανήκουν σε μονοπάτια του path cover. Το σημαντικό είναι να βρούμε το μεγαλύτερο μονοπάτι ώστε να διαγράψουμε αυτά με τους λιγότερους κόμβους.

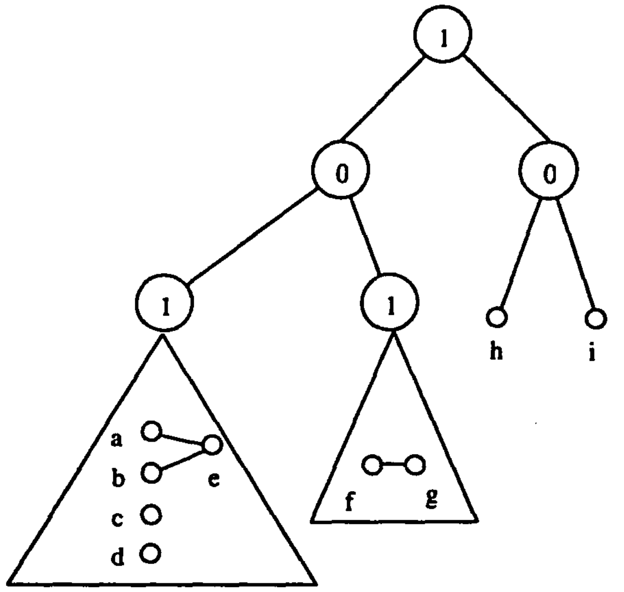


Σχήμα 5.6 : Στάδιο υπολογισμού path cover.

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου του υπολογισμού του επικαλυπτικού μονοπατιού όταν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 0 τότε αρκεί να ενώσω τα μονοπάτια του δεξιού και αριστερού μονοπατιού. Όμως τα μονοπάτια αυτά πρέπει να είναι ταξινομημένα με βάση το πλήθος των κόμβων που τα απαρτίζουν.

Όταν ο κόμβος αυτός έχει παιδιά φύλλα τότε δεν υπάρχει σύγκριση, έτσι τα τοποθετούμε με συγκεκριμένη σειρά.

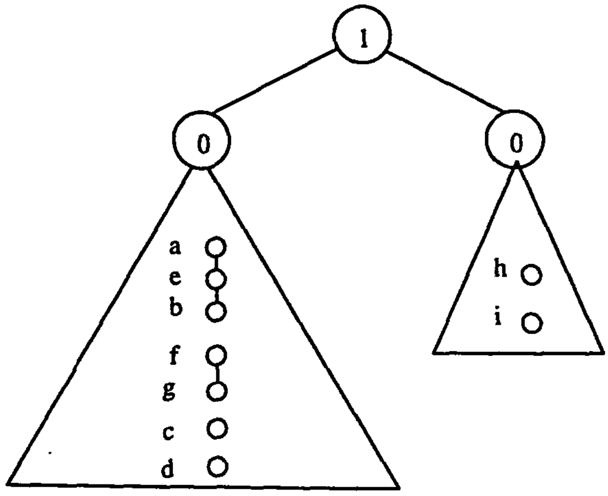
Σε κάθε άλλον κόμβο Τύπου 0 θεωρούμε ότι τα μονοπάτια δεξιά και αριστερά είναι ήδη ταξινομημένα και εφαρμόζουμε τη συνάρτηση *MERGE* για να ενώσουμε τα μονοπάτια διατηρώντας τα ταξινομημένα.



Σχήμα 5.7 : Περίπτωση εσωτερικού κόμβου-1.

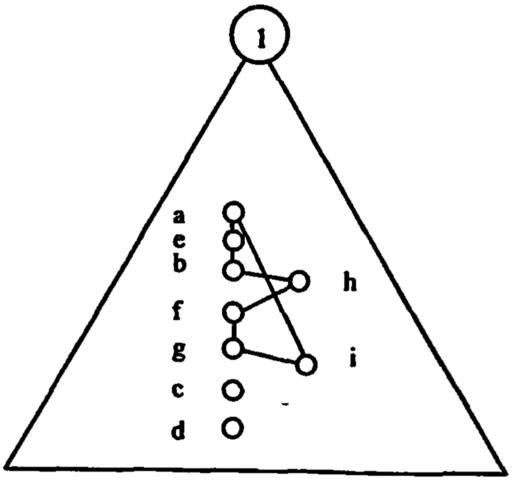
Όταν βρισκόμαστε σε κόμβο **Τύπου 1** τότε όλοι οι κόμβοι του δεξιού παιδιού θα μπουν σε κάποιο μονοπάτι. Για να έχουμε όμως το καλύτερο αποτέλεσμα θα πρέπει όλοι τους να ενώσουν μεταξύ τους τα μεγαλύτερα μονοπάτια.
Έτσι ή θα προκύψει ένα μόνο μονοπάτι μεγέθους όσο το άθροισμα των κόμβων ή αν οι κόμβοι του δεξιού παιδιού είναι x, τότε θα ενωθούν μεταξύ τους τα x + 1 μεγαλύτερα μονοπάτια του αριστερού παιδιού.

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε μέχρι τη ρίζα.



Σχήμα 5.8 : Merge σε κόμβο Τύπου 0.

Στη ρίζα όπως άλλωστε και προαναφέρθηκε τον έναν κόμβο του δεξιού παιδιού τον χρησιμοποιούμε για να κλείσουμε τον κύκλο ή απλά φτιάχνουμε ένα μονοπάτι. Ενώ τα μονοπάτια που δε χρησιμοποιώ τα διαγράφω από το γράφημα (κόμβοι και ακμές).



Σχήμα 5.9 : Το αποτέλεσμα στη ρίζα.

5.2 Μέγιστο Hamiltonian υπογράφημα - Μέγιστο Πλήθος Ακμών

Το πρόβλημα τώρα διαφοροποιείται. Δε μας αρκεί να έχουμε το μεγαλύτερο πλήθος κόμβων, θέλουμε να αξιοποιούμε όσο το δυνατό περισσότερες ακμές του αρχικού γραφήματος. Έτσι καταλήγουμε στον παρακάτω αλγόριθμο:

Αλγόριθμος 5.2 :

Υπολογισμός Υπογραφήματος μέγιστου μεγέθους (size)

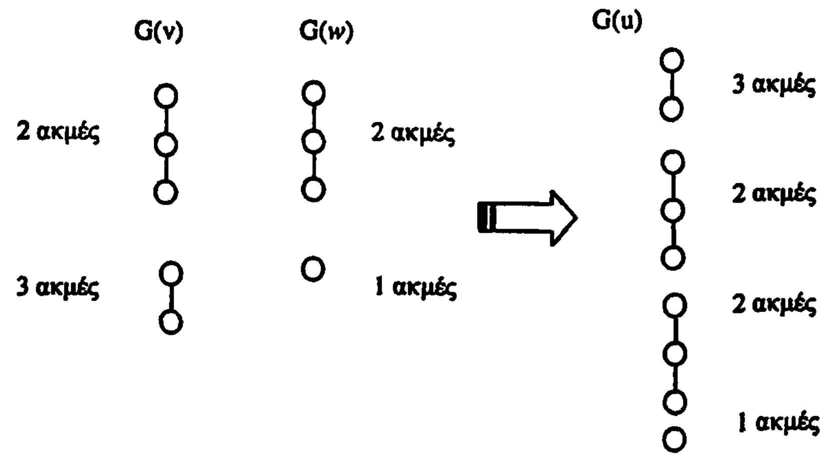
Βασική ιδέα: η ταξινόμηση των μονοπατιών, όπως και προηγούμενα, μόνο που εδώ η ταξινόμηση αυτή των μονοπατιών γίνεται με βάση το πλήθος των ακμών που φέρει μαζί του ένα μονοπάτι. Το πλήθος αυτό είναι οι ακμές του επαγόμενου υπογραφήματος με κόμβους τους κόμβους του μονοπατιού και επιπλέον το πλήθος των κόμβων. Προσθέτουμε επιπλέον τους κόμβους γιατί το πλήθος τους είναι ίσο με το πλήθος των ακμών που θα δημιουργηθούν αν προσθέσουμε έναν ακόμα κόμβο στο μονοπάτι.

1. Όταν ο εσωτερικός κόμβος *u* είναι κόμβος Τύπου 0:

   Θεωρούμε ότι έχει υπολογιστεί το path cover τόσο του αριστερού, όσο και του δεξιού παιδιού του κόμβου *u*.

   Επίσης θεωρούμε ότι τα μονοπάτια που προέκυψαν από προηγούμενο βήμα είναι ταξινομημένα κατά φθίνον μέγεθος (πλήθος ακμών).

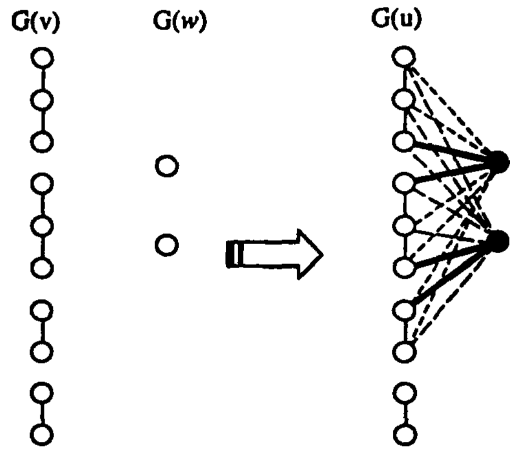
   Έτσι, το σύνολο των μονοπατιών του κόμβου Τύπου 0 u ισούται με την ένωση των συνόλων των μονοπατιών των κόμβων παιδιών v και w ταξινομημένα και η ένωση αυτή γίνεται και πάλι κατά το φθίνον πλήθος των ακμών τους.



Σχήμα 5.10 : Υπολογισμός συνόλου μονοπατιών σε κόμβο Τύπου 0.

2. Όταν ο εσωτερικός κόμβος *u* είναι κόμβος Τύπου 1:

Περίπτωση 1η : Εάν p(*v*) > L(*w*) τότε οι L(*w*) κόμβοι γεφυρώνουν τα πρώτα L(*w*) + 1, που κατ' επέκταση είναι τα μεγαλύτερα ως προς το πλήθος των ακμών που φέρουν τα μονοπάτια του *G*(*v*), έτσι όπως το ορίσαμε στη περίπτωση του κόμβου Τύπου 0. Έτσι προκύπτει ένα μονοπάτι με πλήθος ακμών τις ακμές του αντίστοιχου υπογραφήματος. Και φυσικά έπονται τα υπόλοιπα μονοπάτια του *G*(*v*).



Σχήμα 5.11 : Υπολογισμός συνόλων μονοπατιών σε κόμβο Τύπου 1.

Περίπτωση 2: Εάν $p(v) \leq L(w)$, τότε προκύπτει ένα μονοπάτι με πλήθος ακμών αυτό του υπογραφήματος με όλους τους κόμβους που και πάλι είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος.

Στη ρίζα ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα.

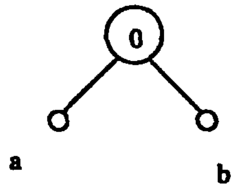
Τέλος αλγορίθμου 5.2.

Θεώρημα 5.3. Ο αλγόριθμος εύρεσης του μέγιστου ως προς τις ακμές, επαγόμενου Hamiltonian υπογραφήματος ενός co-γραφήματος, παράγει το μέγιστο δυνατό, επίσης co-γράφημα με κύκλο Hamilton.

Απόδειξη: Έστω ένα co-γράφημα *G* το οποίο δεν έχει κύκλο Hamilton.
Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για την απόδειξη του ζητούμενου είναι ίδια με το πρόβλημα εύρεσης μέγιστού, ως προς τους κόμβου, επαγόμενου Hamiltonian υπογραφήματος ενός co-γραφήματος.

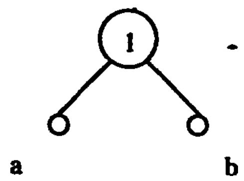
Βάση : Στο χαμηλότερο επίπεδο του co-δέντρου

- Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο-0

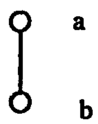


τότε το ταξινομημένο path cover θα είναι το παρακάτω για το οποίο ισχύει ο αλγόριθμος

- Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 1



τότε το ταξινομημένο path cover θα είναι το παρακάτω για το οποίο ισχύει ο αλγόριθμος



- ***Υπόθεση: Τυχαίο επίπεδο k του co-δέντρου***

Υποθέτουμε ότι στο επίπεδο *k*, για κάθε κόμβου αυτού έχουμε υπολογίσει το path cover. Πρόκειται για σύνολα μονοπατιών ταξινομημένα κατά φθίνουσα με κριτήριο το πλήθος των κόμβων και το πλήθος των ακμών του (άθροισμα δύο αριθμών).

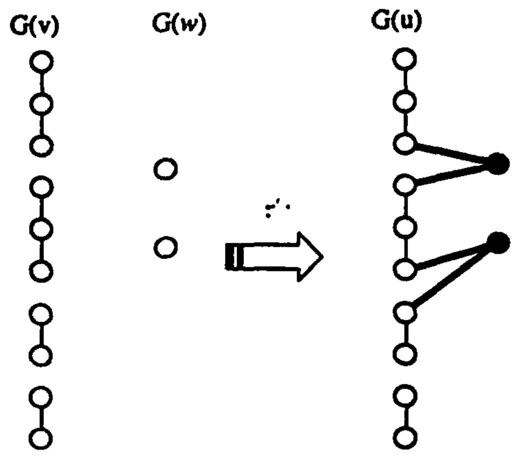
- ***Επαγωγή: Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για το k-1 επίπεδο του co-δέντρου.***

  - Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 0

Η συνάρτηση *MERGE* συνενώνει και ταυτόχρονα ταξινομεί τα μονοπάτια. Δε δημιουργούνται νέα μονοπάτια. Από το path cover του δεξιού και αντίστοιχα του αριστερού παιδιού το μεγαλύτερο, όπως έχει οριστεί, μονοπάτι θα είναι το πρώτο στο νέο path cover και θα έπονται τα υπόλοιπα με φθίνουσα σειρά.

  - Εάν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 1

Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.12 : Γεφύρωση μονοπατιών σε κόμβο Τύπου 1.

Στο αριστερό και δεξί έχουμε υπολογίσει τα αντίστοιχα path covers. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι στο αριστερό path cover έχουμε ταξινομημένα τα μονοπάτια κατά φθίνουσα τάξη. Όμοια και για το δεξί παιδί. Σύμφωνα λοιπόν με τον αλγόριθμο οι κόμβοι του δεξιού παιδιού θα γεφυρώσουν τα μονοπάτια του αριστερού.

Οι κόμβοι του δεξιού παιδιού θα αξιοποιηθούν όλοι γιατί είναι λιγότεροι από αυτούς του αριστερού. Το ζητούμενο είναι το μονοπάτι που θα προκύψει να έχει τις περισσότερες ακμές. Για αυτόν ακριβώς των λόγο η ταξινόμηση γίνεται με βάση το άθροισμα των κόμβων και των ακμών του μονοπατιού. Οι κόμβοι του δεξιού παιδιού όχι απλά θα ενώσουν τα μεγαλύτερα ως προς τις ακμές μονοπάτια αλλά θα δημιουργήσουν ακμές με κάθε κόμβο από τα μονοπάτια που ενώνουν. Στον κόμβο Τύπου 1 κάθε κόμβος του δεξιού παιδιού γειτονεύει με κάθε κόμβο του αριστερού.

Αν $L(w) > p(u)$ τότε προκύπτει ένα μονοπάτι. Το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Άρα ο αλγόριθμος λειτουργεί βέλτιστα.

Αν $L(w) < p(u)$ τότε από τη στιγμή που στο αριστερό παιδί έχουμε ένα ταξινομημένο path cover τότε με μοναδικό τρόπο συνδέουμε τους $L(w)$ κόμβους με τα $L(w) + 1$ πρώτα και μεγαλύτερα μονοπάτια από το $G(u)$. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε το μεγαλύτερο δυνατό μονοπάτι.

Θεώρημα 5.4. Η εύρεση του μέγιστου Hamiltonian υπογραφήματος με το μέγιστο πλήθος ακμών απαιτεί $O(n \log n)$ χρόνο.

Απόδειξη: Όμοια με το επαγόμενο υπογράφημα με τη διαφορά ότι η συνάρτηση MERGE έχει ως παράμετρο όχι το πλήθος των κόμβων, αλλά των ακμών που φέρουν μαζί τους τα μονοπάτια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μελέτη Υπεργραφημάτων Hamilton σε Co-γραφήματα

Έστω G ένα co-γράφημα, το οποίο δεν έχει κύκλο Hamilton, και έστω HCN(G) ο αριθμός πληρότητας Hamilton αυτού. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε ένα υπεργράφημα αυτού, έστω G^* τέτοιο ώστε το G^* να έχει κύκλο Hamilton. Έτσι έχουμε τα εξής δύο προβλήματα:

1º πρόβλημα:

Πρόσθεσε HCN(G) κόμβους και το ελάχιστο πλήθος ακμών στο co-γράφημα G έτσι ώστε το προκύπτον γράφημα G^* να έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) να είναι co-γράφημα,
- (ii) G επαγόμενο υπογράφημα του G^*, και
- (iii) G^* έχει κύκλο Hamilton.

2º πρόβλημα

Πρόσθεσε το ελάχιστο πλήθος ακμών στο γράφημα G έτσι ώστε το γράφημα G^* που προκύπτει να έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) να είναι co-γράφημα,
- (ii) G υπογράφημα του G^*, και
- (iii) G^* έχει κύκλο Hamilton.

6.1 Ελάχιστο Hamiltonian Υπεργράφημα – Ελάχιστο Πλήθος Κόμβων και Ακμών

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως είναι εύκολο να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος ακμών ή το ελάχιστο πλήθος κόμβων για να προκύψει κύκλος Hamilton ή αντίστοιχα μονοπάτι Hamilton. Αρκεί λοιπόν αφού υπολογίσουμε το ελάχιστο σύνολο επικαλυπτικών μονοπατιών να ενώσουμε τα μονοπάτια αυτά μεταξύ τους. Στους αλγορίθμους που θα παρουσιάσουμε δε μας αρκεί αυτό. Θέλουμε το υπεργράφημα που θα κατασκευάσουμε να έχει την επιπλέον ιδιότητα του co-γραφήματος. Σε αυτό θα μας βοηθήσει η co-δεντρική αναπαράσταση του αρχικού μας co-γραφήματος.

Εδώ θα δώσουμε την ανάλυση του πρώτου προβλήματος για υπεργραφήματα με κύκλο Hamilton προσθέτοντας το ελάχιστο πλήθος κόμβων. Το πλήθος αυτών των κόμβων είναι συγκεκριμένο, από το Completion Number, θέλουμε όμως να πετύχουμε και το ελάχιστο πλήθος των ακμών που θα προστεθούν μαζί με αυτούς τους κόμβους.

Προεργασία:

Έστω G το αρχικό μας co-γράφημα το οποίο δεν έχει κύκλο Hamilton.

Με γνωστούς αλγορίθμους και τεχνικές υπολογίζουμε το co-δέντρο $T(G)$ του G και αντίστοιχα τα $T_b(G)$ και$T_{bl}(G)$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 1 της ενότητας 3.1. Με αυτόν υπολογίζουμε το μέγεθος των ελάχιστων επικαλυπτικών μονοπατιών σε κάθε κόμβο και στη ρίζα. Έτσι σε κάθε εσωτερικό κόμβο γνωρίζουμε πόσοι κόμβοι λείπουν έτσι ώστε το συγκεκριμένο υπογράφημα να έχει κύκλο Hamilton.

Σημείωση. Για να προκύψει Hamiltonian γράφημα, το οποίο είναι υπεργράφημα του αρχικού μας γραφήματος και να έχει την ιδιότητα του co-γραφήματος μια εύκολη λύση θα ήταν να προσθέσουμε αυτούς τους κόμβους στη ρίζα. Τότε όμως θα είχαμε το μεγαλύτερο πλήθος νέων ακμών, σε αντίθεση με τον αρχικό μας σκοπό. Για να μειωθούν αυτές οι ακμές αρκεί να τοποθετήσουμε τους κόμβους αυτούς όσο είναι δυνατό σε χαμηλότερα επίπεδο στο co-δέντρο.

Αλγόριθμος 6.1.

Κατασκευή ελάχιστου υπεργραφήματος ενός co-γραφήματος με προσθήκη νέων κόμβων

Για αυτό θα βασιστούμε στον αλγόριθμο κατασκευής του path cover.

Σε κάθε βήμα κατασκευής του path cover, σε κάθε επίπεδο του T_{M} είτε βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 0, είτε σε κόμβο Τύπου 1 για το συγκεκριμένο υποδέντρο, αρά και για το υπογράφημα, που εξετάζουμε κάθε φορά θέλουμε να έχουμε κύκλο. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε βάζοντας «ψεύτικους» κόμβους σε κατάλληλα σημεία στο co-δέντρο και έτσι να διατηρούμε την ιδιότητα του co-γραφήματος. Όσους από αυτούς τους «ψεύτικους» κόμβους δε τους χρειαζόμαστε τους διαγράφουμε στη πορεία του αλγορίθμου για να καταλήξουμε στους ελάχιστους που θα μας φτιάξουν το επιθυμητό υπεργράφημα.

1. **Ο κόμβος *u* είναι εσωτερικός κόμβος Τύπου 0:**

   Σε έναν τέτοιο κόμβο όπως γνωρίζουμε από τον αλγόριθμο του path cover παίρνουμε ένωση μονοπατιών από το δεξί και αριστερό παιδί. Όμως τώρα δημιουργούμε σε κάθε βήμα κύκλους, άρα από την αναδρομή στα δύο παιδιά του κόμβου Τύπου 0 θα έχουμε από έναν κύκλο.

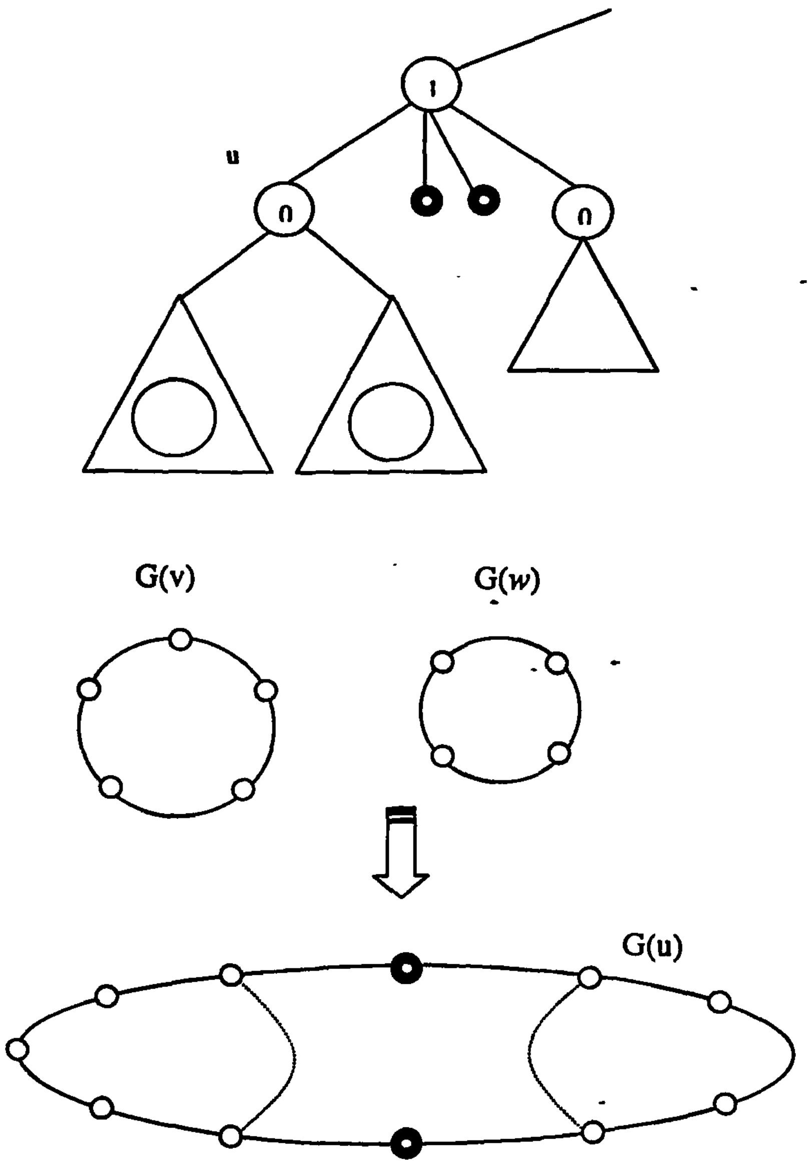
   ***Περίπτωση Ι*:**

   Οι δύο κύκλοι (μονοπάτια) του δεξιού και αριστερού παιδιού του κομβου Τύπου 0 κατασκευάστηκαν από πραγματικούς κόμβους.

   Προθέτουμε τους δύο «ψεύτικους» κόμβους στον πρώτο κόμβο Τύπου 1 που συναντάμε στο μονοπάτι από τον κόμβο *u* που ελέγχουμε προς τη ρίζα. Με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε τη μετάβασης από τον έναν κύκλο στον άλλον και αντίστροφα, άρα δημιουργήσαμε έναν νέο κύκλο Hamilton σε αυτό το υπογράφημα.

Ο κόμβος Τύπου 1 υπάρχει πάντα, λόγω κατασκευής του co-δέντρου.

Για να έχουμε τις λιγότερες ακμές, οι νέοι κόμβοι θα έπρεπε να ενώνονται στο δεξί παιδί του κόμβου Τύπου 1 αν είναι κόμβος Τύπου 0. Αν είναι φύλλο τότε δημιουργούμε έναν κόμβο Τύπου 0. Αύτος όμως είναι ένας έλεγχος ή μια βελτίωση που θα γίνει στο επόμενο βήμα όπου θα συναντήσουμε των κόμβο Τύπου 1 όπου ενώθηκαν οι δύο «ψεύτικου» κόμβοι προσωρινά.



Σχήμα 6.1 : 1η περίπτωση ένωσης μονοπατιών σε κόμβο. Τύπου 0

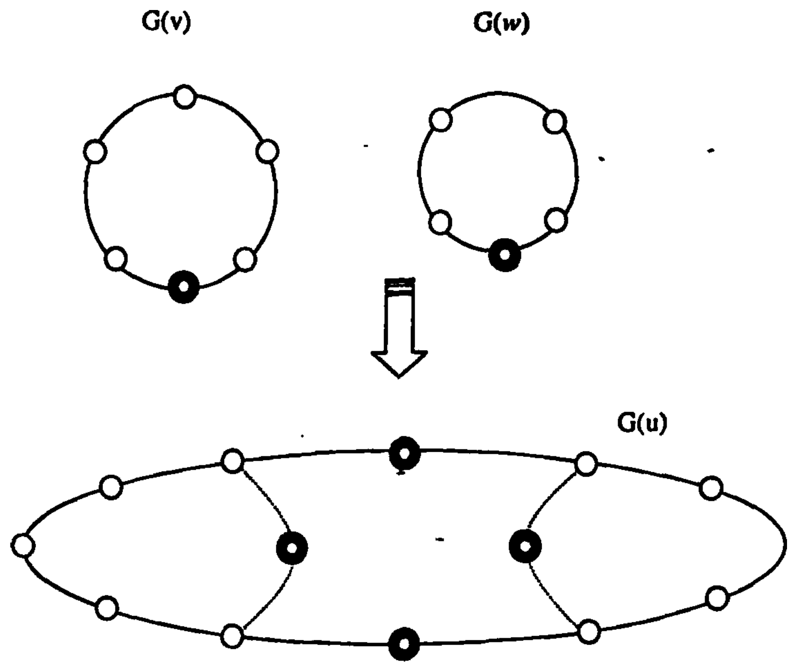
«ψεύτικος» κόμβος.

Περίπτωση 2η:

Οι δύο κύκλοι (μονοπάτια) του δεξιού και αριστερού παιδιού του κομβου Τύπου 0 περιέχουν «ψεύτικους» κόμβους.

Ενεργούμε όμοια με πριν ως προς τη τοποθέτηση των νέων κόμβων.

Επιπλέον διαγράφουμε από έναν «ψεύτικο» κόμβο, από κάθε κύκλο. Συγκεκριμένα διαγράφουμε αυτόν που συμβάλει με τις περισσότερες ακμές (με το μέγιστο βαθμό-degree). Αυτοί οι κόμβοι είναι οι τελευταίοι που εισήχθησαν στον κάθε κύκλο σύμφωνα με τη πρόταση 1 .



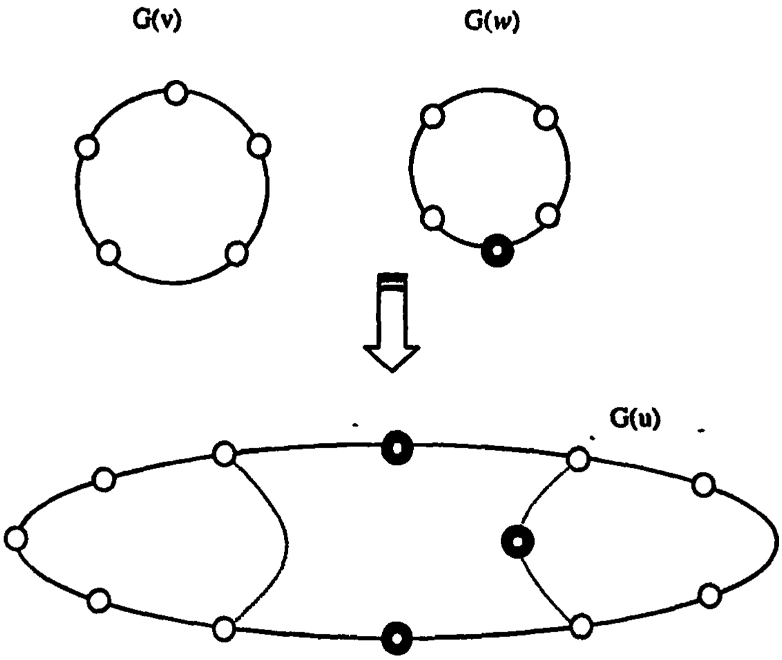
Σχήμα 6.2 : 2η περίπτωση ένωσης μονοπατιών σε κόμβο. Τύπου 0

«ψεύτικος» κόμβος.

Περίπτωση 3η:

Αν ένας από τους δύο κύκλους (μονοπάτια) περιέχει «ψεύτικους» κόμβους.

Πρόκειται για ένα συνδυασμό των προηγούμενων περιπτώσεων.



Σχήμα 6.3 : 3η περίπτωση ένωσης μονοπατιών σε κόμβο. Τύπου 0
«ψεύτικος» κόμβος.

Και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε υπολογίσει αναδρομικά τους κύκλους Hamilton είτε χρησιμοποιώντας «ψεύτικους» κόμβους είτε όχι. Παρακάτω θα δούμε πως συμπεριφέρονται τελικά οι «ψεύτικοι» κόμβοι, ποια δηλαδή είναι η βέλτιστη θέση τους μέσα στο co-δέντρο.

2. Ο κόμβος *u* είναι εσωτερικός κόμβος Τύπου 1:

Σε έναν τέτοιο κόμβο πραγματοποιείται συγχώνευση μονοπατιών κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου path cover. Σκοπός είναι μετά το πέρασμα από έναν κόμβο Τύπου 1 να έχουμε ως αποτέλεσμα έναν μόνο κύκλο (ή μονοπάτι αντίστοιχα).

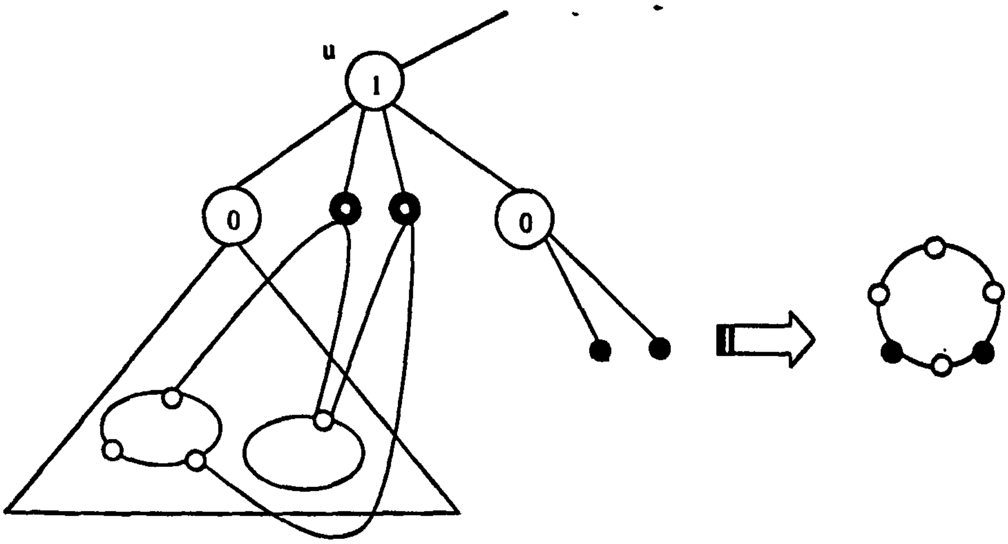
Σε αυτό το επίπεδο του co-δέντρου αν τα παιδιά του κόμβου-1 είναι φύλλα τότε προκύπτει ο κύκλος των δύο κόμβων. Σε κάθε άλλη περίπτωση από το προηγούμενο επίπεδο (κόμβος Τύπου 0) έχουν προστεθεί δύο τουλάχιστον «ψεύτικου» στον κόμβο Τύπου 1 *u*.

Περίπτωση 1η:

Τα φύλλα του δεξιού παιδιού του κόμβου Τύπου 1 είναι σε πλήθος τουλάχιστον όσα οι «ψεύτικοι» κόμβοι.

- Σε αυτή τη περίπτωση δεν υπάρχει λόγος να υπάρχουν «ψεύτικου» κόμβοι. Αυτό σημαίνει ότι το υποδέντρο με ρίζα αυτόν τον κόμβο Τύπου 1 ήδη έχει κύκλο Hamilton.

  Οπότε αντικαθιστούμε τους «ψεύτικους» με πραγματικούς κόμβους και φυσικά όσοι απομένουν συγχωνεύονται στο κύκλο που ήδη δημιουργήθηκε.

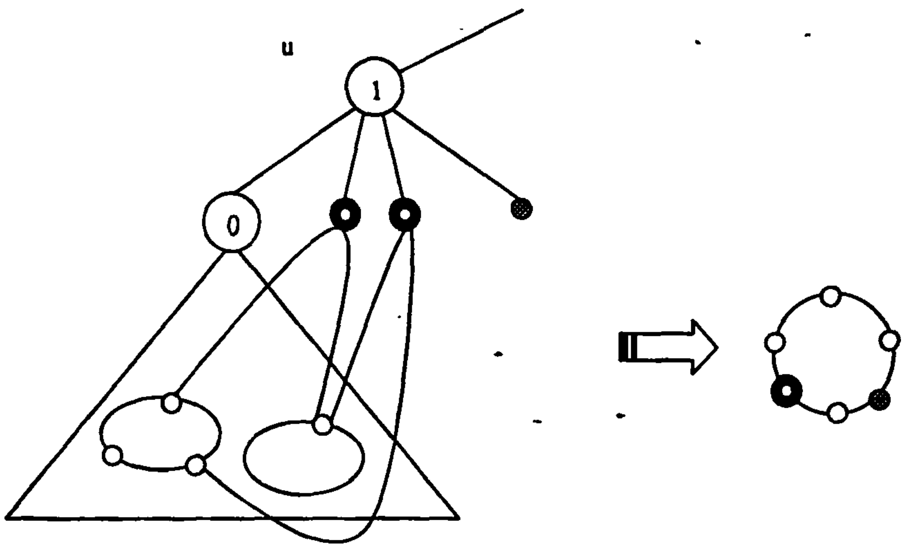


Σχήμα 6.4: 1η περίπτωση αντικατάστασης ψεύτικων κόμβων με πραγματικούς

Περίπτωση 2η:

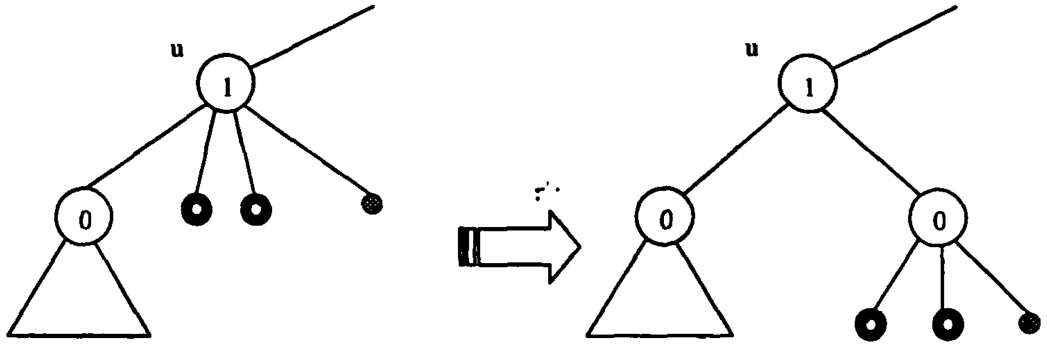
Τα φύλλα του δεξιού παιδιού του κόμβου Τύπου 1 είναι λιγότερα σε πλήθος από τους «ψευτικούς» κόμβους

Αντίθετα από την περίπτωση 1, διαγράφουμε τόσους ψεύτικους κόμβους όσα και τα φύλλα του ίδιου υποδέντρου, κάνοντας αντικατάσταση τους. Προφανώς, οι κόμβοι που θα αντικαθιστούν ειναι αυτοί που θα αφαιρέσουν τις περισσότερες ακμές, όπως δείξαμε και στις περίπτωσεις 2 και 3 του κόμβου Τύπου 0. Οι «ψεύτικοι» κόμβοι που συνεισφέρουν με τις περισσότερες ακμές είναι αυτοί που εισήχθησαν τελευταίοι στο δέντρο, σε επίπεδα πιο κοντά στη ρίζα (Πρόταση 1).



Σχήμα 6.5: 2η περίπτωση αντικατάστασης ψεύτικων κόμβων με πραγματικούς.

Οι «ψεύτικοι» κόμβοι που θα απομείνουν δε δίνουν το καλύτερο αποτέλεσμα ως προς το πλήθος των ακμών. Για να βελτιώσουμε τη λύση θα πρέπει οι κόμβοι αυτοί να γίνουν παιδιά του δεξιού παιδιού του κόμβου *u*, αν αυτός είναι κόμβος Τύπου 0. Αν όμως το δεξί παιδί του κόμβου u είναι φύλλο, τότε δημιουργούμε έναν κόμβο Τύπου 0 ως δεξιό παιδί του κόμβου u, και θέτουμε παιδιά αυτού τον πραγματικό και «ψεύτικο» κόμβο που απέμεινε (βλέπε Σχ. 6.6).

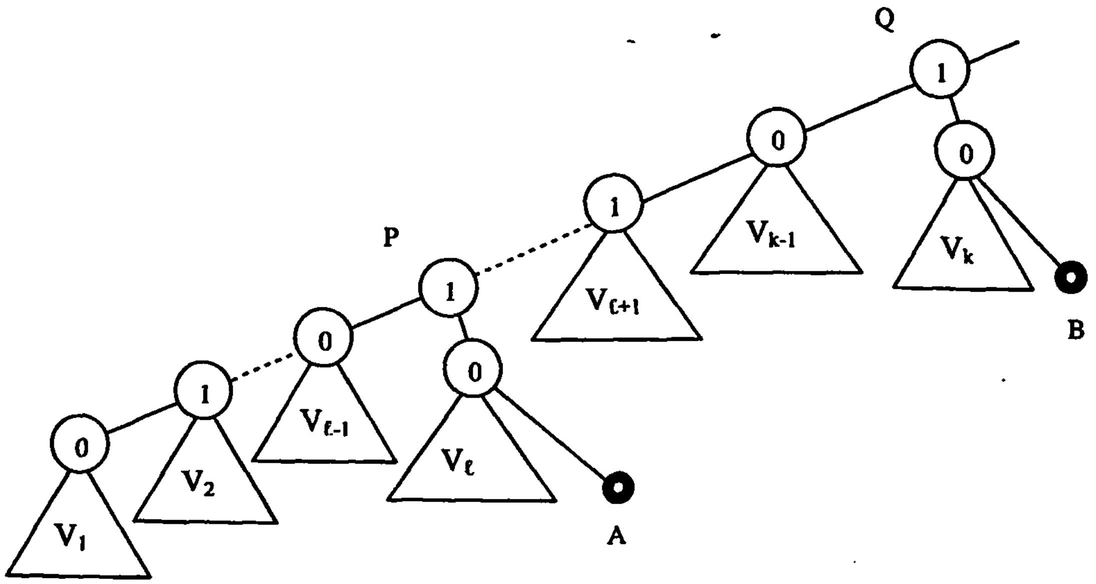


Σχήμα 6.6 : Μετακίνηση «ψεύτικων» κόμβων στο δεξί παιδί του u.

Πρόταση 6.1. Έστω το αριστεροβαρές δυαδικό co-δέντρο $T_{bl}(G)$ ενός co-γραφήματος G, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.7, και έστω V_1, V_2, $\dots V_k$ τα σύνολα των τερματικών κόμβων k υποδέντρων του $T_{bl}(G)$.

Έστω ότι τα υπογραφήματα των αντίστοιχων υποδέντρων με ρίζες τους κόμβους P και Q δεν έχουν κύκλο Hamilton και έστω ότι για να συμπληρωθούν οι κύκλοι Hamilton στα υποδέντρα P και Q απαιτούνται μόνο οι κόμβοι A και B.

Τότε ο κόμβος B έχει μεγαλύτερο βαθμό από τον κόμβο A.



Σχήμα 6.7 : Αριστεροβαρές δυαδικό co-δέντρο.

Απόδειξη: Ο βαθμός του κόμβου A είναι

$$d(A) = |V_1| + |V_2| + \ldots |V_{\ell-1}| + |V_{\ell+1}| + |V_k| + K$$

Αντίστοιχα ο βαθμός του B είναι :

$$d(B) = |V_1| + |V_2| + \ldots |V_{\ell-1}| + |V_\ell| + |V_{\ell+1}| + |V_{k-1}| + K,$$

όπου K είναι τα φύλλα των κόμβων-1 από τον Q ως τη ρίζα.

Για να συγκρίνουμε τα $d(A)$ και $d(B)$ ουσιαστικά πρέπει να συγκρίνουμε το

$$d_a = |V_k|$$

με το άθροισμα

$$d_b = |V_\ell| + |V_{k-1}|.$$

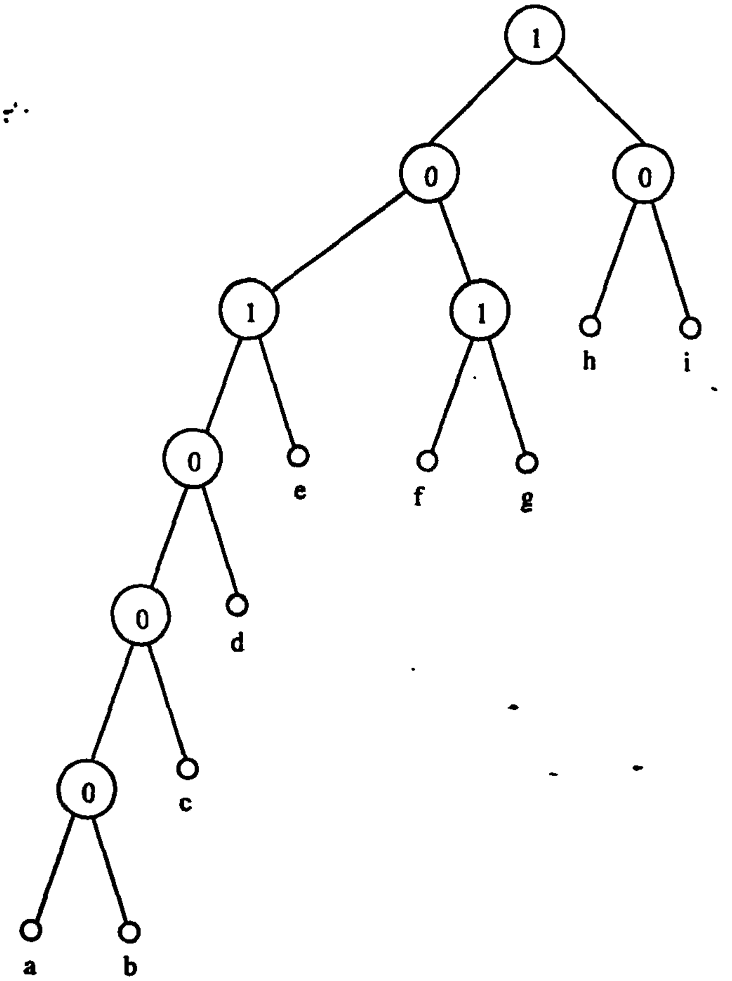
Για το υπογράφημα του υποδέντρου μέχρι τον κόμβο P υπάρχει κύκλος Hamilton μετά την εισαγωγή του «ψεύτικου» κόμβου A. Επιπλέον μέχρι τον κόμβο Q και πριν την εισαγωγή του B δεν υπάρχει κύκλος Hamilton.

Επομένως από τον αλγόριθμο της ευρεσης του ελάχιστου συνόλου μονοπατιών επικάλυψης το πλήθος των κόμβων του V_k είναι μικρότερο από $1 + |V_{k-1}|$ στη χειρότερη περίπτωση όπου στο V_{k-1} έχουμε τόσα μονοπάτια όσα και οι κόμβοι φύλλα. Το ένα (1) αντιστοιχεί στο ένα μονοπάτι μέχρι τον κόμβο P.

Επομένως $|V_k| < |V_{\ell+1}| + 1$ άρα και $|V_k| \leq |V_{k-1}| + |V_\ell|$.

Παράδειγμα 6.1:

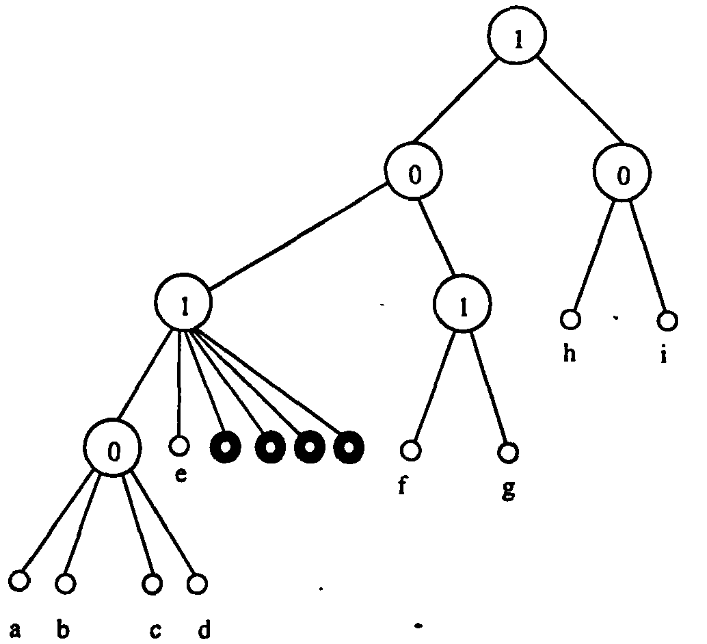
Αρχικά θεωρούμε ότι έχουμε το αριστεροβαρές δυαδικό co-δέντρο και φυσικά έχουμε αποφανθεί για το αν υπάρχει κύκλος Hamilton.



Σχήμα 6.8 : Leftist Binarized Cotree.

Έχουμε την δεντρική αναπαράσταση του co-γραφήματος και υπολογίσαμε ότι το path cover έχει μέγεθος 2, όποτε απαιτείται να προσθέσουμε δύο κόμβους για να προκύψει co-γράφημα με κύκλο Hamilton.

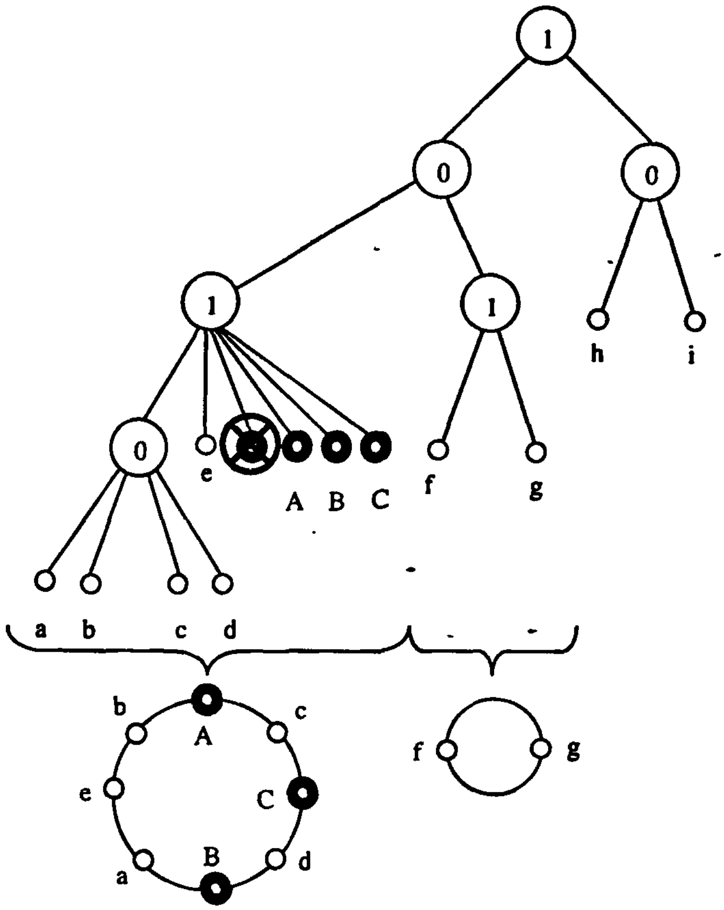
Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το κύκλο που έχει δημιουργηθεί σε έναν κόμβο-0 του αρχικού co-δέντρου ή από μια σειρά κόμβων Τύπου 0 όταν πρόκειται για το αριστεροβαρές δυαδικό co-δέντρο. Συγκεκριμένα βλέπουμε πως οι «ψεύτικοι» κόμβοι συνθέτουν τον κύκλο και ταυτόχρονα πως συνδέονται αυτοί στον πρώτο κόμβο Τύπου 1 που συναντάμε στο μονοπάτι προς τη ρίζα.



Σχήμα 6.9 : Στάδιο υπολογισμού path cover με προσθήκη «ψεύτικων» κόμβων.

Κατόπιν, συνεχίζουμε σε επίπεδο με κόμβο Τύπου 1. Σε αυτό το βήμα θα διαγράψουμε «ψεύτικους» κόμβους που δε χρειαζόμαστε, αντικαθιστώντας τους με τα φύλλα του δεξιού παιδιού του κόμβου Τύπου 1 έτσι ώστε κάθε φορά να παίρνουμε και το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα όπως αυτό το παίρνουμε από την εκτέλεση του αλγορίθμου για το path cover.

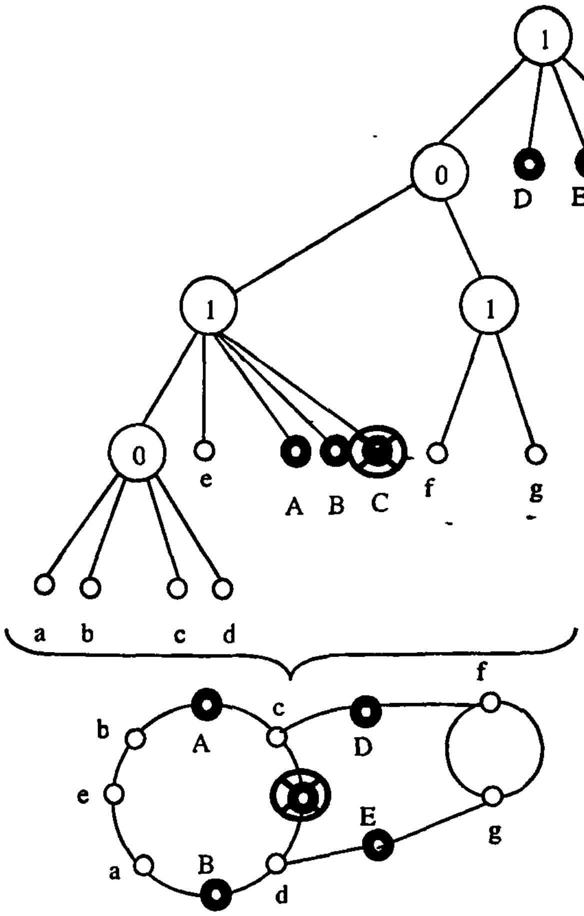
Στο παράδειγμα μας οι πραγματικοί κόμβοι στο δεξί παιδί του κόμβοι Τύπου 1 είναι μόνο ένας οπότε και θα αντικαταστήσει έναν από τους «ψεύτικους», αυτόν που προκαλεί και τις περισσότερες ακμές. Εδώ όλοι οι «ψεύτικου» κόμβοι είναι ισοδύναμοι και έτσι διαγράφουμε κάποιον τυχαία. Ενώ στον άλλον κόμβο Τύπου 1 του ίδιου επιπέδου δημιουργείται ένας κύκλος δύο κόμβων, αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένας τέτοιος.



Σχήμα 6.10 : Δημιουργία κύκλων με «ψεύτικους» και πραγματικούς κόμβους.

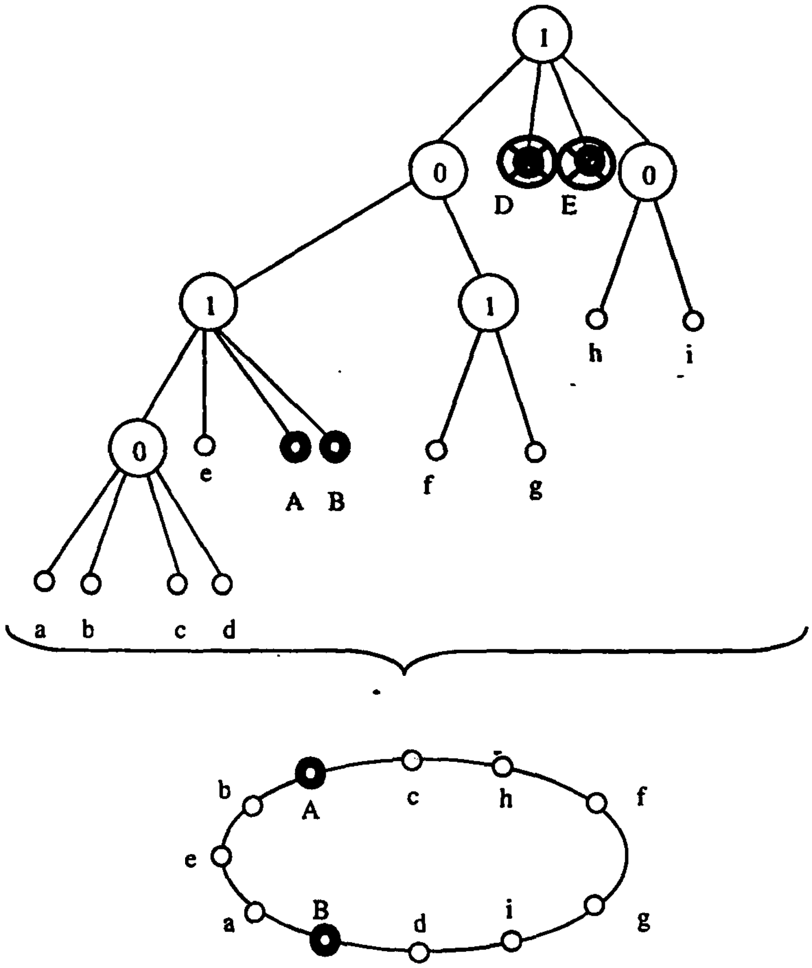
Και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι τη ρίζα.

Για τον επόμενο κόμβο Τύπου 0 χρειαζόμαστε δύο «ψεύτικους» κόμβους για να ενώσουμε τους δύο κύκλους. Ο κύκλος του αριστερού παιδιού έχει «ψεύτικους» κόμβους οπότε θα διαγράψουμε έναν από αυτούς, αυτόν που έχει προστεθεί σε υψηλότερο επίπεδο, λόγω της Πρότασης 1, και για να ακολουθούμε τα βήματα του αλγορίθμου (Εδώ τυχαίνει όλοι οι κόμβοι να είναι ίδιου βαθμού οπότε ο βαθμός δεν έχει σημασία). Ενώ ο κύκλος του δεξιού παιδιού αποτελείται μόνο από πραγματικούς κόμβους, οπότε θα παραλείψουμε μια ακμή.



Σχήμα 6.11 : Δημιουργία κύκλων με «ψεύτικου»ς και πραγματικούς κόμβους.

Τέλος αντικαθιστούμε δύο «ψεύτικους» κόμβου με τους δύο πραγματικούς κόμβους του δεξιού παιδιού της ρίζας και συγκεκριμένα αυτούς που θα προσθέσουν τις περισσότερες νέες ακμές. Και τελικά έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.



Σχήμα 6.12 : Δημιουργία κύκλων με «ψεύτικου»ς και πραγματικούς κόμβους.

Όπως αποδείξαμε στη Πρόταση 1 οι κόμβοι που θα διαγράψουμε είναι οι D και E διότι συμβάλλουν με τις περισσότερες ακμές στο γράφημα. Έτσι παίρνουμε ένα γράφημα με δύο «ψεύτικους» κόμβους.

Θεώρημα 6.1. Ο αλγόριθμος εύρεσης του μικρότερου ως προς τους κόμβους και ακμές, επαγόμενου Hamiltonian υπεργραφήματος ενός co-γραφήματος *G* πράγματι παράγει το μικρότερο δυνατό co-γράφημα *G** με κύκλο Hamilton.

Απόδειξη: Έστω ένα co-γράφημα *G* το οποίο δεν έχει κύκλο Hamilton.

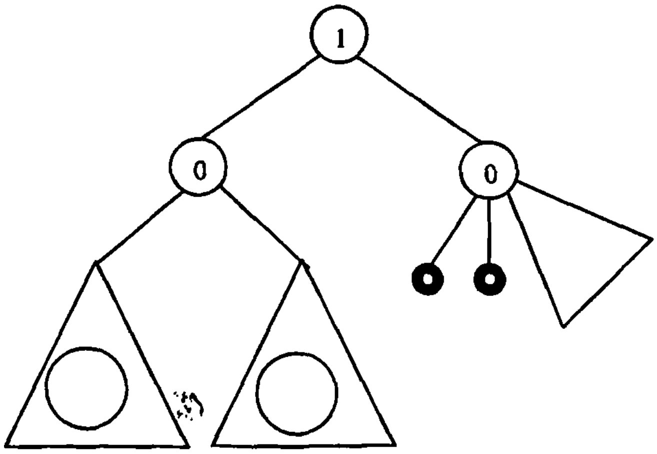
1. Όταν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 1:

   Κάθε φορά διαγράφουμε «ψεύτικους» κόμβους οι οποίοι προσθέτουν τις περισσότερες νέες ακμές στο γράφημα. Είναι προφανές, λοιπόν πως με κάθε τέτοια αντικατάσταση παίρνουμε ένα καλύτερο αποτέλεσμα. Η τοπική αυτή συνθήκη εγγυάται και βέλτιστη ολική συμπεριφορά λόγω της ορθότητας του αλγορίθμου εύρεσης του ελάχιστου πλήθους επικαλυπτικών μονοπατιών του γραφήματος.

2. Όταν βρισκόμαστε σε κόμβο Τύπου 0:

   Σε αυτή τη περίπτωση προσθέτουμε «ψεύτικους» κόμβους. Για κάθε υποδέντρο που γίνεται η συμπλήρωση αυτή το πλήθος των νέων κόμβων είναι συγκεκριμένο και μάλιστα το completion number του, που είναι και το ελάχιστο δυνατό από ορισμού.

   Όσο για τις ακμές, πετυχαίνουμε το ελάχιστο πλήθος νέων ακμών με το να προσθέτουμε τους κόμβους αυτούς στο δεξί παιδί του αμέσως επόμενου κόμβου Τύπου 1. Οι νέες ακμές είναι τόσες όσα και τα φύλλα του αριστερού παιδιού. □



6.2 Ελάχιστο Hamiltonian Υπεργράφημα – Ελάχιστο Πλήθος Ακμών

Με την εκτέλεση του αλγορίθμου της προηγούμενης ενότητας έχουμε υπολογίσει τις θέσεις των νέων κόμβων που πρέπει να προσθέσουμε στο co-δέντρο ώστε να προκύψει κύκλος Hamilton και ταυτόχρονα το γράφημα να έχει το ελάχιστο πλήθος νέων ακμών. Για να προκύψει επομένως υπεργράφημα G^*, το οποίο να έχει υπογράφημα το αρχικό G, αρκεί οι «ψεύτικοι» κόμβοι του κύκλου Hamilton να αντικατασταθούν με ακμές.

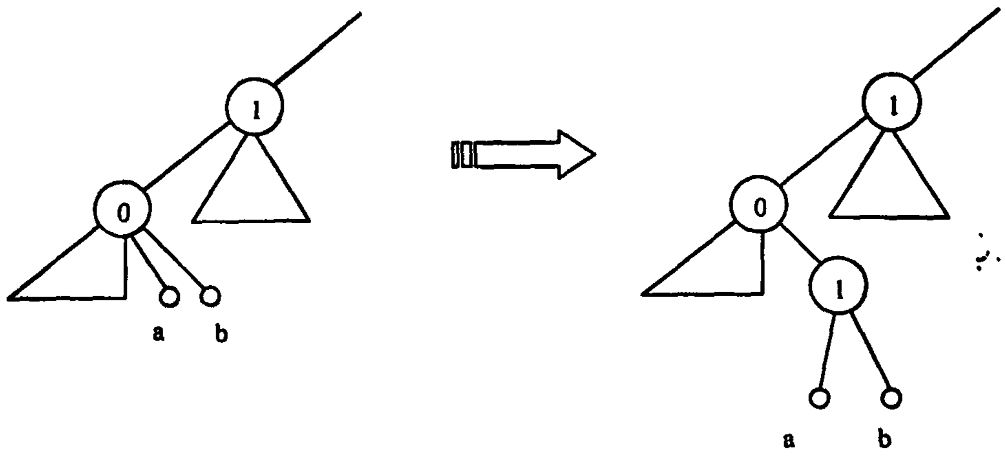
Η επιπλέον παράμετρος του προβλήματος μας είναι το νέο γράφημα G^* να είναι επίσης co-γράφημα. Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη δεντρική αναπαράσταση του co-γραφήματος. Οι πραγματικοί κόμβοι που συνδέονται με τον «ψεύτικο» δε συνδέονται μεταξύ τους, επομένως ο ελάχιστος κοινός προκάτοχός τους στο co-δέντρο είναι ένας κόμβος Τύπου 0. Για να δημιουργήσω τελικά αυτή την ακμή αρκεί να μετακινήσω έναν από τους δυο κόμβους ή και τους δύο μέσα στο co-δέντρο ώστε τελικά να αποκτήσουν κοινό προκάτοχο κόμβο Τύπου 1. Σημειώνεται ότι αυτή η μετακίνηση θα μας δώσει και άλλες ακμές περάν της επιθυμητής. Με τις παρακάτω περιπτώσεις θα δείξουμε πως παίρνουμε αυτή την ακμή, αλλά και οι επιπλέον που δημιουργούνται είναι οι ελάχιστες.

Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για δύο κόμβους a και b που θέλουμε να ενώσουμε με ακμή:

1η Περίπτωση:

Έστω οι κόμβοι a και b που θέλουμε να ενωθούν με ακμή για να προκύψει κύκλος Hamilton είναι παιδιά του ίδιου κόμβου Τύπου 0 τότε εκτελείται η εξής μετακίνηση:

> Δημιουργούμε νέο κόμβο Τύπου 1 ως παιδί του κόμβου Τύπου 0 και παιδιά αυτού οι a και b.



Σχήμα 6.13 Περίπρωση 1η

Έτσι έχουμε συνολικά μία νέα ακμή.

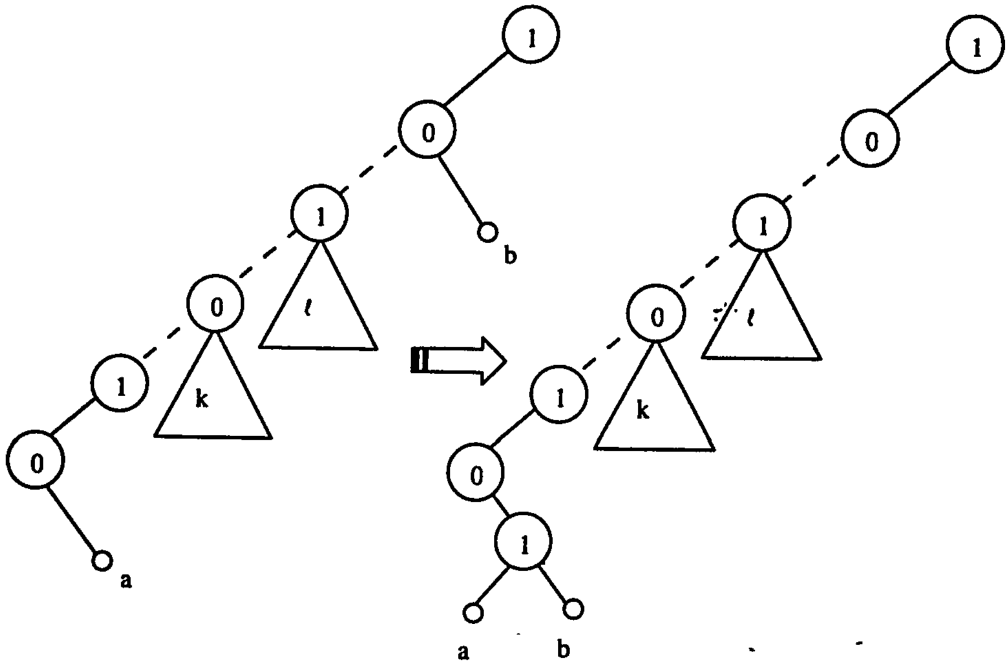
2η Περίπτωση:

Έστω ότι ο b συνδέεται απευθείας με τον κόμβο Τύπου 0, ο ελάχιστος κοινός προκάτοχος, ενώ ο a είναι κόμβος του αριστερού υποδέντρου.

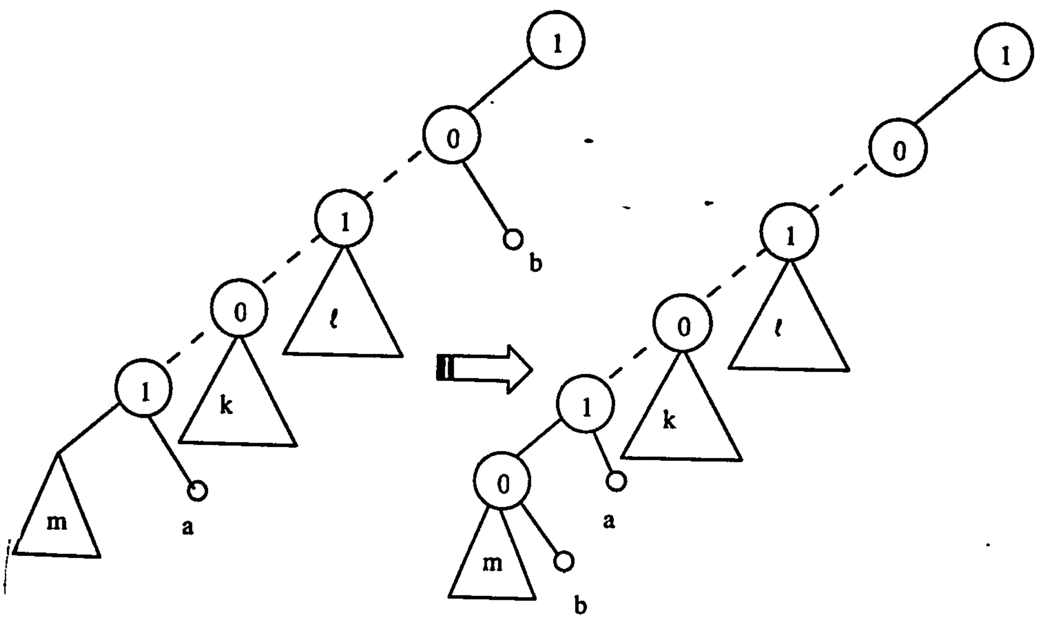
Δύο προφανείς λύσεις θα ήταν:

(α) να μετακινήσουμε τον b στον κόμβο με τον οποίο συνδέεται ο a.

Στην περίπτωση που ο a συνδέεται με κόμβο Τύπου 0, τότε εφαρμόζουμε την *1η περίπτωση*. Στην περίπτωση που ο κόμβος a συνδέεται με κόμβο Τύπου 1, τότε δημιουργούμε ένα κόμβο Τύπου 0, έστω w, και θέτουμε τον w παιδί του πατέρα του κόμβου a, και στη συνέχεια κάνουμε τα παιδιά του πατέρα του a (εκτός από το a) παιδιά του w.



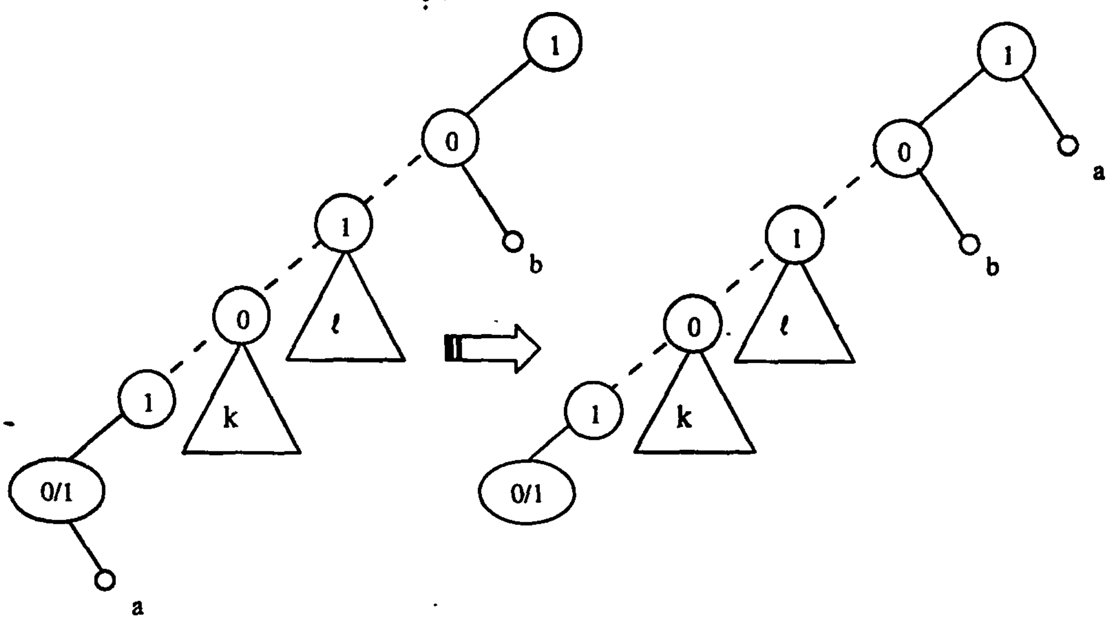
Σχήμα 6.14: Περίπτωση 2η (α) Όταν ο πατέρας του a είναι κόμβος Τύπου 0.



Σχήμα 6.15: Περίπτωση 2η (a) Όταν ο πατέρας του a είναι κόμβος Τύπου 1.

Αν θεωρήσουμε ότι k και ℓ είναι οι κόμβοι φύλλα όλων των κόμβων Τύπου 0 και κόμβων Τύπου 1 αντίστοιχα τότε οι νέες ακμές που θα έχουμε από αυτή τη μετακίνηση είναι ℓ και

(β) αντίστοιχα να μετακινήσουμε τον a επίσης στον πρώτο κόμβο Τύπου 1 από τον b προς τη ρίζα.



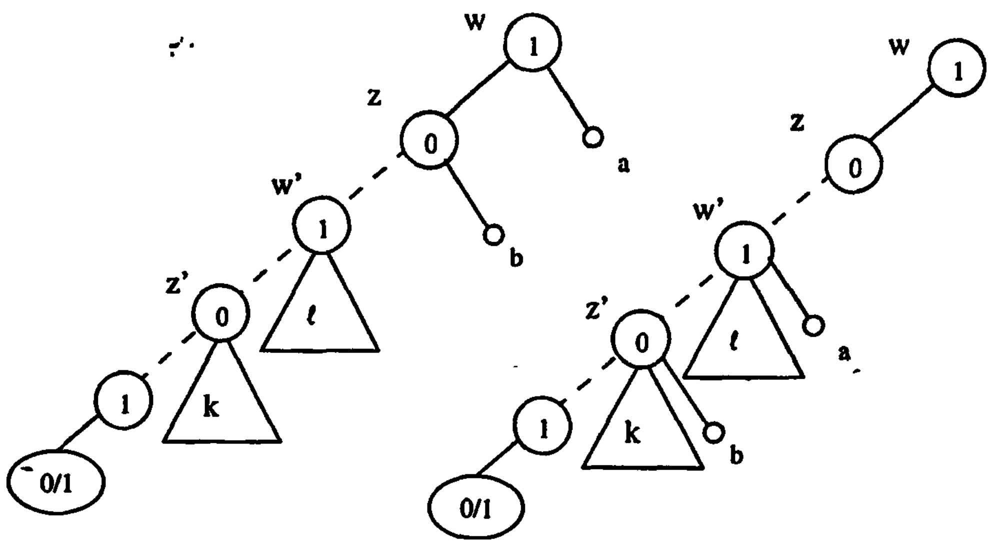
Σχήμα 6.16: Περίπτωση 2η (b).

Σε αυτή τη περίπτωση οι νέες ακμές είναι *k*.

Εκτός από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις θα πρέπει να ελεγχθούν και οι εξής:

(γ) βρισκόμενοι στην περίπτωση (β) όπου ο κόμβος a έχει πατέρα τον κόμβο w Τύπου 1 και ο κόμβος b έχει πατέρα τον κόμβο z Τύπου 0 και w είναι πατέρας του z, θα πρέπει να ελέγξουμε επίσης όλα τα ζεύγη κόμβων z', w' στο αρχικό μονοπάτι a-b, όπου z' πατέρας του b και w' πατέρας του a και w' είναι πατέρας του z'.

Σε αυτή τη γενική περίπτωση οι νέες ακμές θα είναι το άθροισμα των φύλλων των κόμβων Τύπου 0 που διέσχισε ο κόμβος a και των φύλλων των κόμβων Τύπου 1 που διέσχισε ο κόμβος β.

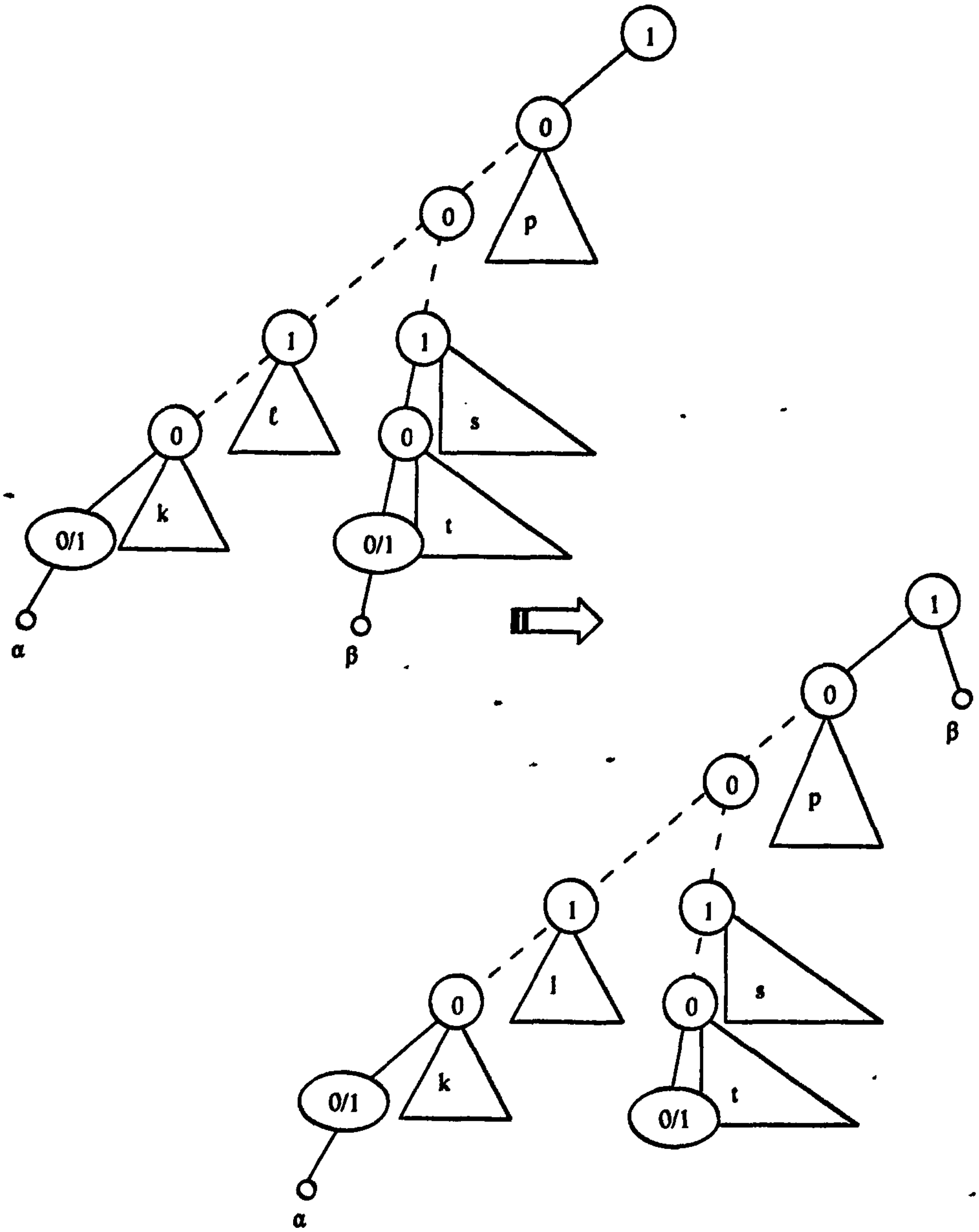


Σχήμα 6.17: Περίπτωση 2^{η} (γ).

Οπότε επιλέγουμε κάθε φορά το καλύτερο αποτέλεσμα προς το πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται.

3η Περίπτωση:

Τέλος έχουμε τη γενική περίπτωση, όπου οι α και β ανήκουν σε δυο διαφορετικά υποδέντρα κάτω από τον κόμβο Τύπου 0, ελάχιστο κοινό προκάτοχο.

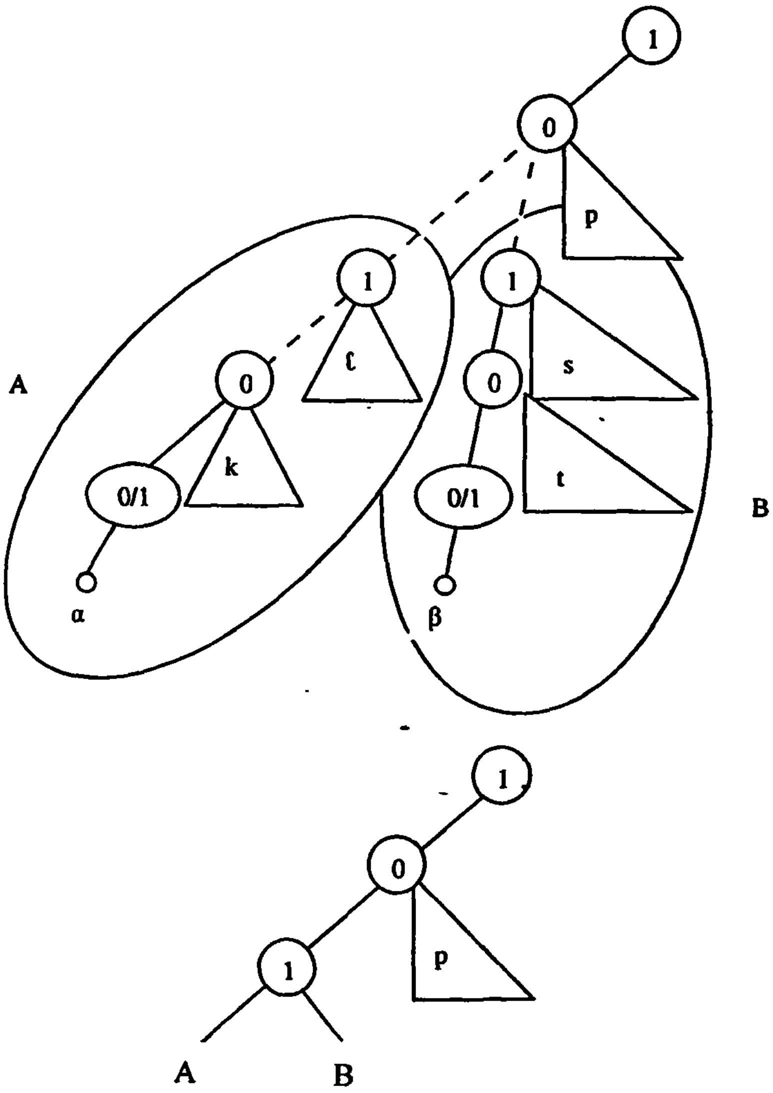


Σχήμα 6.18: Περίπτωση 3η

Τότε μετακινούμε είτε τον έναν, είτε τον άλλον στο αμέσως επόμενο κόμβο Τύπου 1 μετά τον ελάχιστο κοινό προκάτοχο τους και επιλέγουμε το καλύτερο αποτέλεσμα ως προς το πλήθος των νέων ακμών που δημιουργούνται.

Αν υποθέσουμε ότι το καλύτερο αποτέλεσμα το παίρνουμε μετακινώντας τον β τότε το πλήθος των νέων ακμών θα είναι $k + \ell + t + p$
Αντίστοιχα αν μετακινούσαμε τον α τότε θα είχαμε $k + t + s + p$ νέες ακμές.

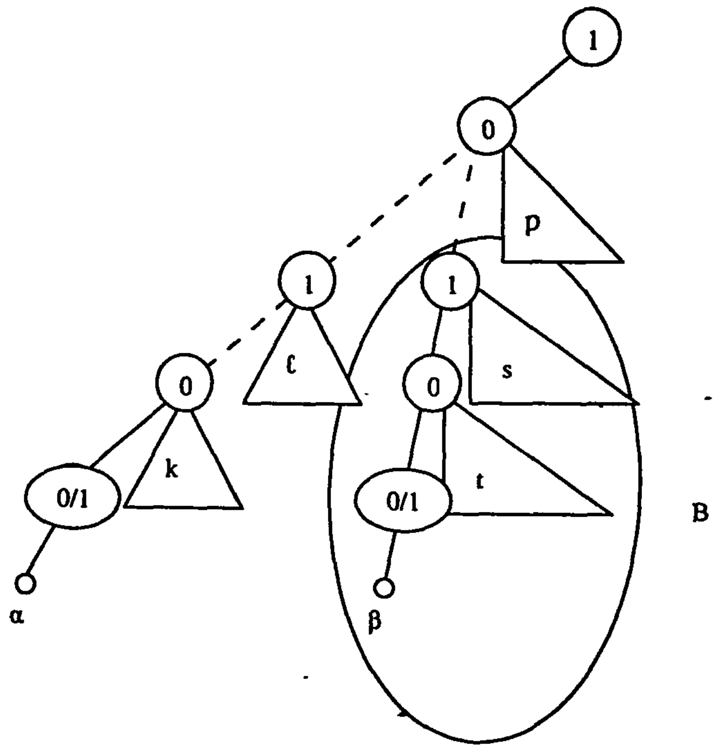
Στην ίδια περίπτωση θα μπορούσαμε να έχουμε και μια λύση όπου θεωρούμε τα δύο υποδέντρα στα οποία ανήκουν οι a και b κόμβοι ως δύο υπερκόμβους A και B, τότε εφαρμόζουμε την *1η περίπτωση* τους δύο υπερκόμβους.



Σχήμα 6.19. 3η περίπτωση σε συνδυασμό με την 1η

Τότε το πλήθος των νέων ακμών θα είναι : *(k + ℓ)*(s + t).*

Τέλος, και πάλι στην ίδια περίπτωση θα μπορούσαμε να έχουμε και μια λύση όπου θεωρούμε το υποδέντρο στο οποίο ανήκει ο b κόμβος ως έναν υπερκόμβο B, τότε εφαρμόζουμε την *2η περίπτωση* με τις υποπεριπτώσεις της.



Σχήμα 6.19. 3η περίπτωση σε συνδυασμό με την 2η

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν αλγόριθμοι για την επίλυση προβλημάτων γύρω από το βασικό πρόβλημα του κύκλου Hamilton στην κατηγορία των Συμπληρωματικά Παραγόμενων Γραφημάτων. Έτσι δημιουργήσαμε υπογραφήματα και υπεργραφήματα ώστε τελικά να λυθεί το πρόβλημα.

Μια ενδιαφέρουσα επέκταση του προβλήματος αυτού θα ήταν η ίδια μελέτη σε μια άλλη κατηγορία γραφημάτων, Edge-clique co-γραφημάτων.

Έστω *G* ένα γράφημα. Το clique γράφημα του *G*, *K(G)*, είναι το παραγόμενο από την οικογένεια όλων των maximal κλικών του *G*. Το Edge-clique γράφημα *Ke(G)*, του γραφήματος *G*, είναι αυτό του οποίου οι κορυφές είναι οι ακμές του *G*, δύο κορυφές είναι γειτονικές στο *Ke(G)*, όταν οι αντίστοιχες ακμές του *G* ανήκουν στην ίδια κλίκα.

Έχει αποδειχθεί ότι το Edge-clique γράφημα ενός co-γραφήματος είναι επίσης co-γράφημα. Με βάση επομένως αυτή τη παρατήρηση γεννιούνται νέα ερωτήματα όπως το ποία η σχέση των co-δέντρων του Edge-clique γραφήματος σε σχέση με το co-δέντρο του αρχικού γραφήματος και φυσικά τι γίνεται με τους κύκλους Hamilton.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] D. G. Cornely, Y. Perl and L. K Stewart, A linear recognition algorithm for cographs, *SIAM J. Comput.* 14, pp. 926-934, 1985.

[2] R. Lin, S. Olariu, G. Pruesse, An optimal path cover algorithm for cographs, *Computers Math. Applic.* 30, pp. 75-83, 1995.

[3] X. He, Parallel Algorithm fop cograph recognition with applications, *J. Algorithms*, 15, 2, pp. 284-313, 1993.

[4] S.D. Nikolopoulos, Parallel algorithms for Hamiltonian problems on quasi-threshold graphs, *J. Parallel and Distributed Computing*, to appear.

[5] D. G. Corneil, H. Lerchs and L. Stewart Burlinham, Complement reducible graphs, *Disc. Appl. Math.* 3, pp. 163 – 174, 1981.

[6] G. Adhar and S. Peng, Parallel algorithms for cographs and parity graphs with applications, *J. Algorithms* 11, pp. 252--284, 1990.

[7] S. De Agostino and R. Petreschi, Parallel recognition algorithms for graphs with restricted neighbourhoods, *Proc. Foundations of Computer Science*, pp.123-130, 1990.

[8] E. Dahlhaus, Efficient parallel recognition algorithms of cographs and distance hereditary graphs, *Discrete Appl. Math.* 57, pp. 29-44, 1995.

[9] R. Lin and S. Olariu, An NC recognition algorithm for cographs, *Parallel and Distributed Comput* 13, pp. 76-90, 1991.

[10] M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, Inc., 1980.

[11] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[12] G. Chartrand and O. R. Oellermann, Applied and Algorithmic Graph Theory, *McGraw-Hill, International Edition* 1993.

[13] A. Gibbons, *Algorithmic graph theory*, Cambridge University Press 1985.

[14] F. Buckley, F. Harary, *Distance in Graphs*, Addison-Wesley, Publishing Company, 1990.