

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



026000152831



Αρ. εισ.:...206...200...

Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης



Μελέτη Πλήθους Σκελετικών Δέντρων σε Κλάσεις Γραφημάτων

Χάρης Παπαδόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Σ. Δ. Νικολόπουλος

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ιωάννινα, Σεπτέμβριος 2001



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	1
1.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	1
1.2 Πράξεις μεταξύ Γραφημάτων.....	5
1.3 Σκελετικά Δέντρα	9
1.4 Κίνητρο Μελέτης Πλήθους Σκελετικών Δέντρων.....	10
1.5 Τεχνικές Εύρεσης Πλήθους Σκελετικών Δέντρων	11
2. Βασικές κλάσεις Γραφημάτων	14
2.1 Εισαγωγή.....	14
2.2 Εύρεση Αναλυτικού Τύπου για n -διαδρομές (P_n).....	14
2.3 Εύρεση Αναλυτικού Τύπου για n -κύκλους (C_n).....	20
2.4 Τύποι Βασικών Κατηγοριών Γραφημάτων.....	24
3. Αστεροειδή Γραφήματα	27
3.1 Εισαγωγή.....	27
3.2 <i>Multi-star</i> γράφημα.....	30
3.3 <i>Ice-star</i> γράφημα.....	32
4. Δεντροειδή Γραφήματα	40
4.1 Εισαγωγή.....	40
4.2 k -πλήρες Δέντρο.....	42
4.3 Δέντρο	47
5. Τέλεια Γραφήματα.....	53
5.1 Εισαγωγή στα <i>Quasi-Threshold</i> και <i>Split</i> γραφήματα.....	53
5.2 Αναλυτικός Τύπος για <i>Quasi-Threshold</i> γραφήματα	56
5.3 Αναλυτικός Τύπος για <i>k-split</i> γραφήματα	67
6. Πειραματική Μελέτη	73
6.1 Κατάταξη Γραφημάτων με βάση το Πλήθος των Σκελετικών Δέντρων	73
6.2 Περιπτώσεις Μεγιστοποίησης του Πλήθους των Σκελετικών Δέντρων	78
6.3 Μελέτη Δείκτη Σκελετικών Δέντρων.	85
6.4 Πειραματική Μελέτη Πλήθους Σκελετικών Δέντρων σε Μεταθετά Γραφήματα.....	89



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

-
- 1.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
 - 1.2 Πράξεις Μεταξύ Γραφημάτων
 - 1.3 Σκελετικά Δέντρα
 - 1.4 Κίνητρο μελέτης πλήθους Σκελετικών Δέντρων
 - 1.5 Τεχνικές Εύρεσης Πλήθους Σκελετικών Δέντρων
-

1.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Ένα γράφημα G είναι μια δομή που αποτελείται από ένα πεπερασμένο μη-κενό σύνολο $V(G)$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται κόμβοι (*vertices*) και ένα σύνολο $E(G)$ από διμελή υποσύνολα του συνόλου $V(G)$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται ακμές (*edges*). Το σύνολο $V(G)$ ονομάζεται *σύνολο κόμβων* (*vertex set*) του γραφήματος και το σύνολο $E(G)$ ονομάζεται *σύνολο ακμών* (*edge set*).

Ένα *δέντρο* είναι ένα συνδεδεμένο γράφημα που δεν περιέχει κύκλους. Ένα υπογράφημα H ενός γραφήματος G ονομάζεται *σκελετικό υπογράφημα* (*spanning subgraph*) του G εάν $V(H) = V(G)$. Ένα *σκελετικό δέντρο* (*spanning tree*) ενός γραφήματος G είναι ένα σκελετικό υπογράφημα του G που είναι δέντρο.

Είναι γνωστό ότι ένα γράφημα μπορεί να έχει περισσότερα από ένα διαφορετικά σκελετικά δέντρα. Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη του πλήθους *σκελετικών δέντρων* σε ορισμένες ειδικές κατηγορίες γραφημάτων.

Ειδικότερα, με βάση το πλήθος των σκελετικών δέντρων μελετήσαμε ορισμένες κλάσεις γραφημάτων και καταλήξαμε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Εύρεση αναλυτικού τύπου για n -διαδρομές (*path*).
- Εύρεση αναλυτικού τύπου για n -κύκλους (*circle*).
- Παρουσίαση γνωστού τύπου για *multi-star* γράφημα.



- Επέκταση του *multi-star* γραφήματος και εύρεση αναλυτικού τύπου για *ice-star* γράφημα.
- Εύρεση αναλυτικού τύπου για δεντροειδή γραφήματα (*k*-πλήρες Δέντρο).
- Αναλυτικός τύπος για *Quasi-Threshold* γραφήματα.
- Αναλυτικός τύπος για *k-split* γραφήματα.
- Πειραματική μελέτη για την κατάταξη κλάσεων γραφημάτων.
- Περιπτώσεις μεγιστοποίησης σε ορισμένες κλάσεις γραφημάτων.
- Μελέτη Δείκτη σκελετικών δέντρων σε κλάσεις γραφημάτων.
- Πειραματική μελέτη για την κατηγοριοποίηση των μεταθετικών γραφημάτων.

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στα εξής θέματα:

- ◆ Ορισμοί και έννοιες που σχετίζονται με την *Θεωρία Γραφημάτων*.
- ◆ Πράξεις μεταξύ Γραφημάτων που επιτρέπουν την *αφαίρεση ενός γραφήματος* από ένα μεγαλύτερο γράφημα.

Έστω G ένα γράφημα με σύνολο κόμβων $V(G)$ και σύνολο ακμών $E(G)$. Έστω $\{u, v\}$ μία ακμή του G . Επειδή $\{u, v\}$ είναι ένα διμελές σύνολο, μπορούμε να γράφουμε $\{v, u\}$ αντί για $\{u, v\}$. Συχνά διευκολύνει να γράφουμε (u, v) ή uv (ή (v, u) ή vu) για να αναφερόμαστε στο διμελές σύνολο $\{u, v\}$.

Εάν $e = (u, v)$ είναι μια ακμή του γραφήματος G , τότε λέμε ότι οι κόμβοι u και v είναι *γειτονικοί* (*adjacent*) στο G και ότι η e *συνδέει* (*join*) τους κόμβους u και v .

Εάν επιτρέψουμε σε περισσότερες από μια ακμές να συνδέουν ένα ζεύγος κόμβων σε ένα γράφημα G , τότε λέμε ότι το G είναι ένα *πολυγράφημα* (*multigraph*). Δύο ή περισσότερες ακμές που συνδέουν το ίδιο ζεύγος κόμβων ονομάζονται *παράλληλες ακμές* (*parallel edges*).

Ορίζουμε ως $N_G(u)$ το σύνολο όλων των κόμβων που είναι γειτονικοί με τον κόμβο u . Επίσης, η *κλειστή γειτονιά* (*closed neighborhood*) $N_G[u]$ περιέχει το σύνολο $N_G(u)$ και τον κόμβο u . Ο *βαθμός* $d_G(u)$ ενός κόμβου στο γράφημα G είναι ο αριθμός των ακμών που είναι προσκείμενες στον u ή το πλήθος $|N_G(u)|$.

Έστω G ένα γράφημα n κόμβων. Ο πίνακας γειτνίασης A του G είναι ένας $n \times n$ πίνακας τα στοιχεία του οποίου ορίζονται ως εξής:



$$a(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } (u, v) \in E(G) \\ 0, & \text{εάν } (u, v) \notin E(G) \end{cases}$$

Το στοιχείο της γραμμής i και της στήλης j του πίνακα A συμβολίζεται ως $A_{i,j}$.

Μια διαδρομή e_0, e_1, \dots, e_i σε ένα γράφημα είναι μια αλυσίδα (*chain*) με ακμές της μορφής $e_i = (u_i, u_{i+1}) \in E(G)$ μόνο. Στη θεωρία γραφημάτων χρησιμοποιούμε τον όρο *μονοπάτι* (*path*) ως συνώνυμο της αλυσίδας. Μια διαδρομή με όλους τους κόμβους διαφορετικούς μεταξύ τους ονομάζεται *απλό μονοπάτι* (*simple path*). Σε αυτή τη περίπτωση και οι ακμές είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Επίσης, το μονοπάτι $e_1, \dots, e_i, \dots, e_k$ όπου $e_1 = (u_0, u_1)$, $e_k = (u_k, u_0)$ και $e_i = (u_i, u_{i+1}) \in E(G)$, λέγεται *κύκλος* (*cycle*).

Ένα γράφημα ονομάζεται *συνδεδεμένο* εάν κάθε ζευγάρι κόμβων του γραφήματος μπορεί να ενωθεί με μια αλυσίδα. Ένα υπογράφημα H ενός γραφήματος G είναι ένα υπογράφημα με σύνολο κόμβων $V(H) \subseteq V(G)$ και σύνολο ακμών $E(H) \subseteq E(G)$.

Είναι, επίσης, δυνατόν οι κορυφές ενός γραφήματος να χαρακτηρίζονται από ένα μοναδικό όνομα που ονομάζεται *επιγραφή* (*label*). Δύο γράφοι με πανομοιότυπη γραφική αναπαράσταση αλλά διαφορετικές επιγραφές θεωρούνται διαφορετικοί.

Δύο γραφήματα G_1 και G_2 λέγονται *ισομορφικά* (*isomorphic*) εάν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία M μεταξύ των συνόλων $V(G_1)$ και $V(G_2)$, έτσι ώστε εάν οι κορυφές u και v είναι γειτονικές στο γράφημα G_1 , τότε και οι αντίστοιχες κορυφές $M(u)$ και $M(v)$ θα είναι γειτονικές στο γράφημα G_2 . Από τον ορισμό αυτό γίνεται αντιληπτό ότι δύο ισομορφικά γραφήματα μπορεί να έχουν διαφορετική μορφή και επιγραφές, αλλά έχουν ίδιες βασικές δομικές ιδιότητες. Για παράδειγμα τα γραφήματα του Σχήματος 1.1 είναι ισομορφικά.



Σχήμα 1.1 Δύο ισομορφικά γραφήματα.

Ακόμα, δύο γραφήματα ονομάζονται *ίσα* (*equal*) αν $V(G_1) = V(G_2)$ και $E(G_1) = E(G_2)$. Προφανώς, δύο ίσα γραφήματα είναι και ισομορφικά, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ένα γράφημα T λέγεται δέντρο εάν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

- T είναι συνδεδεμένο και δεν περιέχει κύκλους.

Η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες δύο:

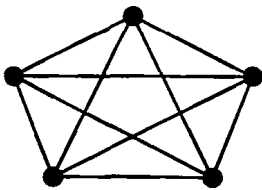
- T είναι συνδεδεμένο και ο αριθμός των ακμών του είναι ίσος με το πλήθος των κόμβων του πλην ένα.
- Κάθε ζευγάρι κόμβων του T συνδέονται με ένα ακριβώς μονοπάτι.

Όλοι οι κόμβοι με βαθμό 1 ενός δέντρου ονομάζονται φύλλα του δέντρου.

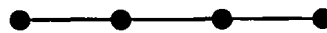
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει ορισμένες κατηγορίες γραφημάτων που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

Όνομα	Συμβολισμός	Εικόνα
Πλήρες (Complete)	K_n	Σχήμα 1.2 (α)
n -διαδρομές (Path)	P_n	Σχήμα 1.2 (β)
n -κύκλος (Cycle)	C_n	Σχήμα 1.2 (γ)
Πλήρες Διμερές (Complete Bipartite)	$K_{n,m}$	Σχήμα 1.2 (δ)
k -πλήρες δέντρο (k -Complete Tree)	$T_{k,h}$	Σχήμα 1.2 (ε)
Αστεροειδές (Star)	$S_{1,n}$	Σχήμα 1.2 (ζ)

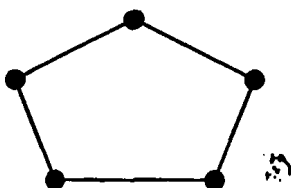
Πίνακας 1.1. Ορισμένες Κατηγορίες Γραφημάτων



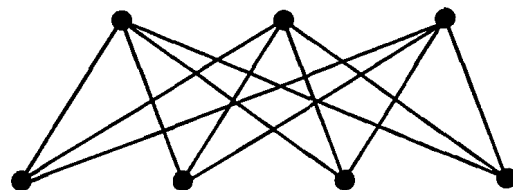
(α) Το Πλήρες γράφημα K_5



(β) Το Γράφημα μονοπάτι P_4

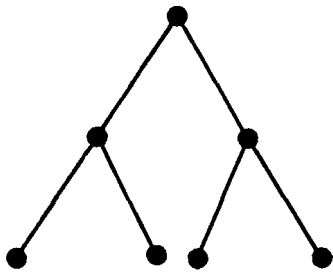


(γ) Το γράφημα κύκλος C_5

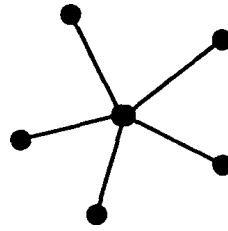


(δ) Το διμερές γράφημα $K_{3,4}$





(ε) Το k -πλήρες δέντρο $T_{2,2}$



(ζ) Το αστεροειδές γράφημα $S_{1,5}$

Σχήμα 1.2 Παραδείγματα γραφημάτων.

1.2 Πράξεις Μεταξύ Γραφημάτων

- Στη συνέχεια ορίζουμε μερικές πράξεις μεταξύ γραφημάτων οι οποίες επιτρέπουν την παραγωγή νέων γραφημάτων [8, 9].

Δοθέντος ενός συνόλου S ορίζουμε το συμπλήρωμα του υποσυνόλου S_1 πάνω στο σύνολο S ως $S_1^c = S - S_1$.

Ένωση (union) – Γινόμενο (product): Για δύο γραφήματα G και H με ίδιο σύνολο πλήθος κόμβων, δηλαδή $V(G) = V(H)$, ορίζουμε την ένωση $G + H$ και το γινόμενο $G \cdot H$ ως εξής:

Το σύνολο κόμβων της ένωσης είναι ίσο με το $V(G)$ ή το $V(H)$, ενώ το σύνολο των ακμών είναι:

$$E(G) \cup E(H)$$

Το σύνολο κόμβων του γινομένου είναι το καρτεσιανό γινόμενο των $V(G)$ και $V(H)$:

$$V(G) \times V(H),$$

ενώ το σύνολο ακμών του γινομένου:

$$\{(u, w) \mid (u, v) \in E(G) \text{ και } (v, w) \in E(H)\}$$

Συμπλήρωμα (complement): Το συμπλήρωμα ενός γραφήματος $G = (V, E)$ ορίζεται ως το γράφημα $\bar{G} = (V, \bar{E})$ όπου

$$\bar{E} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin E\}.$$

Περιορισμός (restriction) ως προς κόμβους:

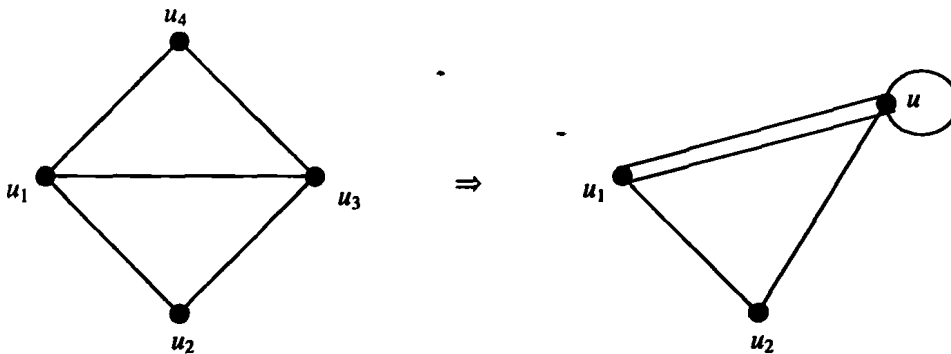
Για ένα σύνολο κόμβων $W \subseteq V(G)$ το επαγόμενο υπογράφημα (*induced*) ενός γραφήματος G έχει σύνολο κόμβων W και μια ακμή του G ανήκει σε αυτό, αν και μόνο αν έχει και τους δύο κόμβους της στο σύνολο W . Το υπογράφημα αυτό ονομάζεται και *περιορισμός* του G ως προς το σύνολο κόμβων W και συμβολίζεται με $G|_W$.

Περιορισμός (restriction) ως προς ακμές:

Για ένα σύνολο ακμών $\Delta \subseteq E(G)$ το σκελετικό υπογράφημα (*spanned*) ενός γραφήματος G έχει σύνολο ακμών Δ και το ελάχιστο δυνατό σύνολο κόμβων $W \subseteq V(G)$. Δηλαδή, ένας κόμβος του G είναι στο παραγόμενο υπογράφημα αν και μόνο αν φεύγει ή έρχεται από ή προς αυτόν κάποια ακμή από το σύνολο ακμών Δ . Αυτό το υπογράφημα είναι γνωστό ως *περιορισμός* του G ως προς το σύνολο ακμών Δ και συμβολίζεται με $G|_\Delta$.

Συρρίκνωση (contraction) ως προς κόμβους:

Η *συρρίκνωση* $G \bullet_V$ ενός γραφήματος G με βάση ένα σύνολο κόμβων $V \subseteq V(G)$ έχει σύνολο κόμβων όλους τους κόμβους του V συν έναν επιπλέον κόμβο r , που αναπαριστά τους κόμβους στο V . Δύο κόμβοι στο $G \bullet_V$ συνδέονται μεταξύ τους στο $G \bullet_V$ με όσες ακμές συνδέουν τους αντίστοιχους κόμβους στο γράφημα V και ένας κόμβος $u \in V$ είναι συνδεδεμένος με τον r με όσες ακμές υπάρχουν στο G που συνδέουν τον u με κάποιο κόμβο στο \bar{G} . Επίσης, ο κόμβος r έχει τόσες επαναληπτικές ακμές με τον εαυτό του, όσες είναι οι ακμές στο G που συνδέουν κόμβους του συνόλου V όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.

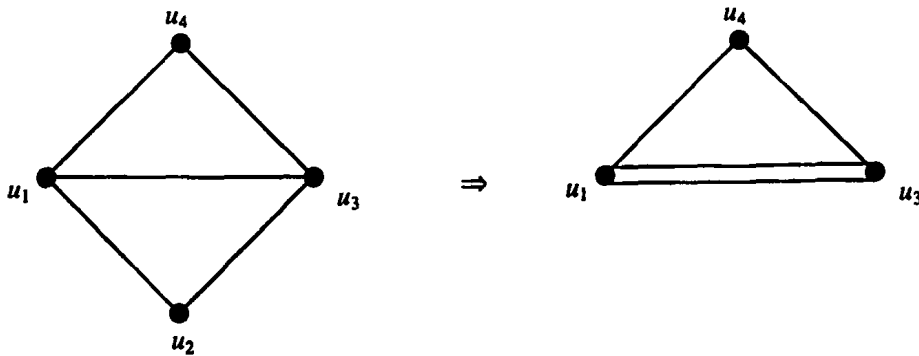


Σχήμα 1.3 Η συρρίκνωση (ως προς κόμβους) $G \bullet_V$, όπου $V = \{u_1, u_2\}$.

Συρρίκνωση (contraction) ως προς ακμές:

Η *συρρίκνωση* $G \bullet_E$ ενός γραφήματος G με βάση ένα σύνολο ακμών $E \subseteq E(G)$ έχει σύνολο κόμβων όλους τους κόμβους του G που δεν συνδέονται με ακμή από το σύνολο \bar{E} μαζί με έναν κόμβο του γραφήματος $G|_{\bar{E}}$. Δύο κόμβοι στο $G \bullet_E$ συνδέονται μεταξύ τους με όσες ακμές συνδέουν τους αντίστοιχους κόμβους στο γράφημα G , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.





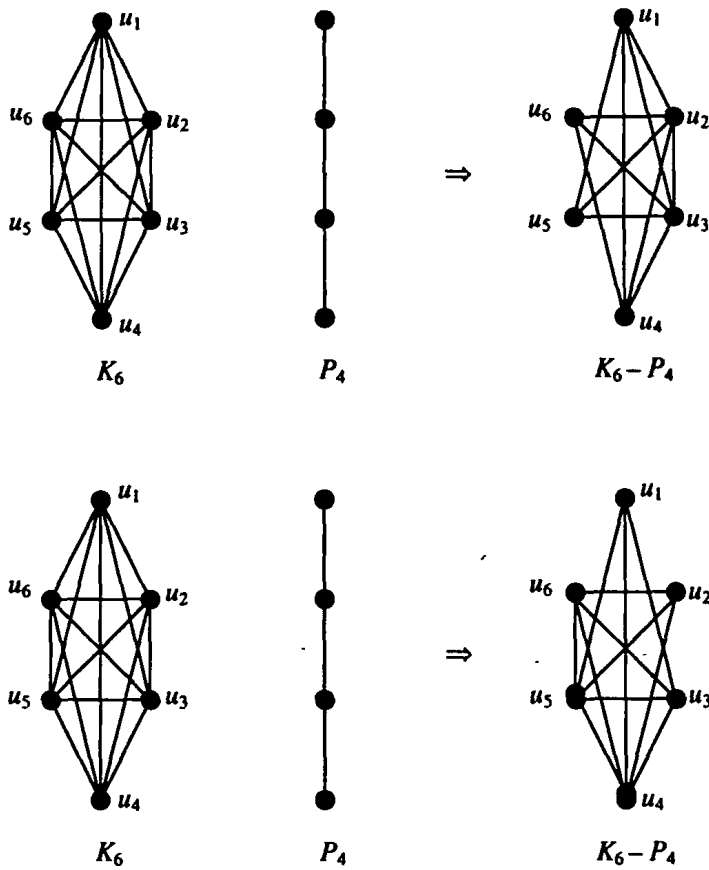
Σχήμα 1.4 Η συρρίκνωση (ως προς ακμές) $G \cdot_E$, όπου $E = \{(u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_1, u_4), (u_1, u_3)\}$.

Διαγραφή υπογραφήματος (subgraph deletion): Ένα υπογράφημα $H \subseteq G$ διαγράφεται από το G αφαιρώντας όλες τις ακμές του H . Δηλαδή:

$$V(G - H) = V(G) \text{ και} \\ E(G - H) = E(G) \setminus \{ (u, v) : u \in V(H) \text{ ή } v \in V(H) \}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι θα μπορούσε κάποιος να ορίσει και ολόκληρη τη διαγραφή του υπογραφήματος H από τον G διαγράφοντας και τους κόμβους του H . Σε αυτή την περίπτωση οι κόμβοι του επαγόμενου γραφήματος είναι οι εναπομείναντες του συνόλου $V(G) - V(H)$.

Στο υπόλοιπο κομμάτι της εργασίας όταν αναφερόμαστε στη διαγραφή υπογραφήματος θα εκφράζουμε μόνο την αφαίρεση των ακμών του υπογραφήματος από το μεγαλύτερο γράφημα. Στο Σχήμα 1.5 διακρίνουμε δύο περιπτώσεις διαγραφής του γραφήματος P_4 από το πλήρες γράφημα K_6 .



Σχήμα 1.5 Δύο περιπτώσεις διαγραφής του γραφήματος P_4 από το γράφημα K_6 .

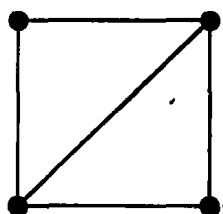
Όνομα	Σημειογραφία
Ένωση	$G + H$
Γινόμενο	$G \cdot H$
Συμπλήρωμα	\overline{G}
Περιορισμός ($V \subseteq V(G), E \subseteq E(G)$)	$G _V, G _E$
Συρρίκνωση ($V \subseteq V(G), E \subseteq E(G)$)	$G \cdot V, G \cdot E$
Διαγραφή Υπογραφήματος ($H \subseteq G$)	$G - H$

Πίνακας 1.2. Ορισμένες Πράξεις πάνω σε Γραφήματα

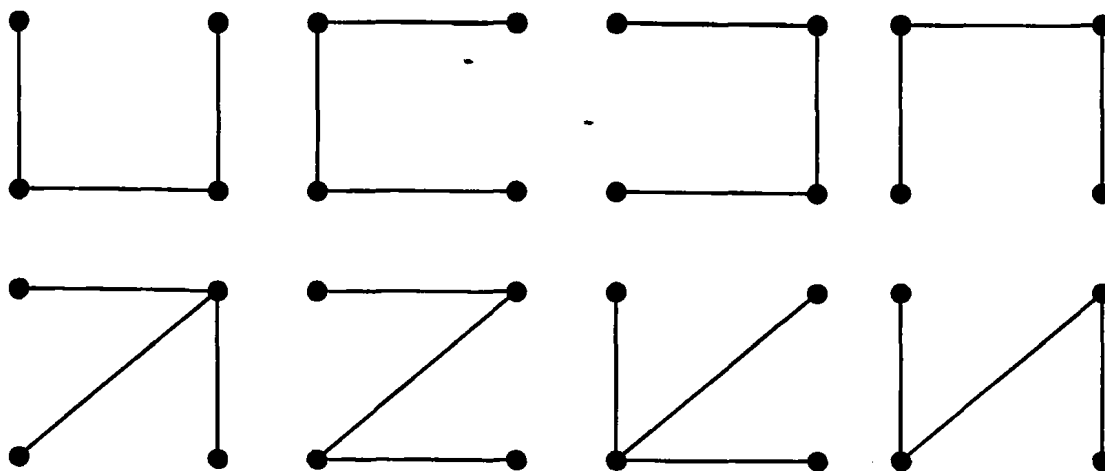
1.4 Σκελετικά Δέντρα

Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με σύνολο κόμβων $V(G)$ και σύνολο ακμών $E(G)$. Κάθε συνδεδεμένο γράφημα έχει τουλάχιστον ένα σκελετικό δέντρο [24]. Δοθέντος ενός γραφήματος G , μας ενδιαφέρει το πλήθος των διαφορετικών σκελετικών δέντρων του γραφήματος G .

Στο Σχήμα 1.6 (α) φαίνεται ένα συνδεδεμένο γράφημα και στο Σχήμα 1.6 (β) δείχνουμε τα οκτώ διαφορετικά σκελετικά δέντρα του γραφήματος αυτού.



(α)



(β)

Σχήμα 1.6 (α) Ένα γράφημα, και (β) όλα τα διαφορετικά σκελετικά του δέντρα.

1.5 Κίνητρο Μελέτης πλήθους Σκελετικών Δέντρων

Η ύπαρξη κλειστών τύπων για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων είναι χρήσιμη για την αναγνώριση εκείνων των γραφημάτων που περιέχουν τον μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων. Τέτοιου είδους μελέτη εκτός από το θεωρητικό ενδιαφέρον που έχει από μόνη της, έχει και πρακτικό ενδιαφέρον διότι σχετίζεται με την αξιοπιστία και την σταθερότητα των δικτύων υπολογιστών [2, 13, 17, 22]. Επομένως, γίνεται προφανή η ανάγκη ταξινόμησης γραφημάτων ως προς το πλήθος των σκελετικών δέντρων.

Έστω $G = (n, m)$ ένα γράφημα με σύνολο κόμβων $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ και σύνολο ακμών $E(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Με $\Omega(n, m)$ δηλώνουμε την κλάση των γραφημάτων με n κόμβους και m ακμές. Αν αναφερόμαστε σε περισσότερα από ένα γραφήματα τότε θα ορίζουμε το πλήθος των κόμβων και των ακμών του γραφήματος G με n_G και m_G αντίστοιχα για χάρη πληρότητας.

Έστω $G \in \Omega(n, m)$ και έστω $\tau(G)$ δηλώνει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του G . Τότε το γράφημα G θα λέγεται *τ-βέλτιστο* αν ισχύει $\tau(G) \geq \tau(G')$ για όλα τα $G' \in \Omega(n, m)$ [18].

Σκοπός μας είναι να ταξινομήσουμε διάφορες κλάσεις γραφημάτων ως προς το πλήθος των σκελετικών δέντρων. Δηλαδή, θα εξετάσουμε κάθε κατηγορία γραφημάτων όχι μόνο ως προς τον χαρακτηρισμό του τ-βέλτιστο αλλά και κατά πόσο διαφέρει ως προς το πλήθος των σκελετικών δέντρων από τις άλλες κατηγορίες γραφημάτων. Για κάθε γράφημα $H(n_H, m_H)$ από τις κατηγορίες γραφημάτων που μας ενδιαφέρουν παίρνουμε το γράφημα $G(n, m) = K_n - H(n_H, m_H)$, όπου n το πλήθος των κόμβων του G (αλλά και του K_n) και $m = (n(n-1)/2) - m_H$.

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ένα δίκτυο υπολογιστών με ένα γράφημα G . Οι κόμβοι του γραφήματος αναπαριστούν κέντρα επικοινωνίας και οι ακμές αναπαριστούν τις συνδέσεις μεταξύ τους. Οι ακμές (συνδέσεις) λειτουργούν ανεξάρτητα με πιθανότητα p . Επειδή η βλάβη των κόμβων (κέντρα επικοινωνιών) έχει ως αποτέλεσμα και αποτυχία του δικτύου, υποθέτουμε ότι οι κόμβοι λειτουργούν πάντα (η υπόθεση δεν στηρίζεται σε πραγματικά γεγονότα αλλά είναι εύκολο υπολογιστικά να συμπεριλάβουμε και την βλάβη των κόμβων, γνωρίζοντας όμως εκ των προτέρων, την αξιοπιστία ενός δικτύου με την υπόθεση ότι λειτουργούν πάντα). Ένα δίκτυο λέμε ότι *πέφτει* (αποτυχαίνει), εάν δεν είναι δυνατό όλοι οι κόμβοι να επικοινωνήσουν μεταξύ τους. Με άλλα λόγια το γράφημα G γίνεται μη συνδεδεμένο.

Έστω G ένα γράφημα, όπου n είναι το πλήθος των κόμβων και m το πλήθος των ακμών. Η *αξιοπιστία* ενός γραφήματος G , $Rel(G)$ εκφράζει την πιθανότητα το γράφημα G να είναι συνδεδεμένο [13]. Μια φορμαλιστική σχέση για την αξιοπιστία του G δίνεται από τον τύπο:

$$Rel(G) = \sum_{l=0}^m \tau_l(G) p^l (1-p)^{m-l},$$



όπου $\tau_i(G)$ δηλώνει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του G με i ακμές. Επομένως, το πιο αξιόπιστο γράφημα πρέπει να έχει μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων.

Έστω ένα δίκτυο με n κόμβους, όπου όλοι οι κόμβοι του επικοινωνούν μεταξύ τους. Το συγκεκριμένο δίκτυο μοντελοποιείται με το πλήρες γράφημα K_n . Έστω m_H ακμές από τις $(n(n-1)/2)$ ακμές του δικτύου να μην μπορούν να λειτουργήσουν κανονικά. Μας ενδιαφέρει ο τρόπος κατανομής των ακμών m_H στο συνολικό δίκτυο έτσι ώστε το γράφημα που μοντελοποιεί το δίκτυο να είναι το πιο αξιόπιστο. Ο τρόπος κατανομής των ακμών m_H μπορεί να μοντελοποιηθεί με ένα γράφημα $H(n_H, m_H)$. Επομένως, για να μην αποτύχει το δίκτυο θα πρέπει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G(n, m) = K_n - H(n_H, m_H)$ να είναι το μέγιστο δυνατό.

1.6 Τεχνικές Εύρεσης Πλήθους Σκελετικών Δέντρων

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε μερικές συνδυαστικές τεχνικές που μας επιτρέπουν να καθορίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος. Παρ' όλο που αυτές οι τεχνικές κυρίως εφαρμόζονται σε πολύ περιορισμένες κλάσεις γραφημάτων, μερικές φορές με απλούς υπολογισμούς είναι δυνατόν να ανακτήσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων από ορισμένα πολύπλοκα γραφήματα [3, 6, 26, 27].

Είναι φανερό ότι ένα σκελετικό δέντρο ενός γραφήματος μπορεί να περιέχει ή να μην περιέχει μια συγκεκριμένη ακμή e . Το πλήθος των σκελετικών δέντρων που περιέχουν μια συγκεκριμένη ακμή e είναι ίδιος με το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος που περιέχουν την e συν το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος που προκύπτει όταν οι κόμβους που είναι προσκείμενοι στην e να συρρικνώνονται σε έναν μοναδικό κόμβο [4]. Δηλαδή:

$$\tau(G) = \tau(G|_e) + \tau(G \bullet_e)$$

Πιο γενικά, έστω $E \subseteq E(G)$ να είναι το σύνολο των ακμών ενός συνδεδεμένου γραφήματος G . Έστω ότι τα υπογραφήματα $G|_E$ και $G|_{\bar{E}}$ έχουν ακριβώς δύο κοινούς κόμβους. Τότε:

$$\tau(G) = \tau(G|_{\bar{E}}) \cdot \tau(G \bullet_{\bar{E}}) + \tau(G|_E) \cdot \tau(G \bullet_E)$$

Για παράδειγμα έστω E να είναι το σύνολο από k παράλληλες ακμές. Τότε:

$$\tau(G) = \tau(G|_{\bar{E}}) + k\tau(G \bullet_{\bar{E}})$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις μπορούμε να πάρουμε αναδρομικούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων για αρκετές κατηγορίες γραφημάτων. Έστω για παράδειγμα την κατηγορία γραφημάτων που ορίζεται ως $G_n = K_2 \oplus P_n$. Για $n \geq 3$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\tau(G_n) &= \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \square \square \\ \vdots \end{array}\right) \\
&= \tau\left(\begin{array}{c} \triangle \\ \vdots \\ \dots \\ \square \\ \vdots \end{array}\right) \cdot \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \square \\ \vdots \end{array}\right) + \tau\left(\begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \dots \\ \triangle \\ \vdots \end{array}\right) \cdot \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \triangle \\ \vdots \end{array}\right) \\
&= 3 \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \square \\ \vdots \end{array}\right) + \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \triangle \\ \vdots \end{array}\right) - \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right) \\
&= 4 \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \square \\ \vdots \end{array}\right) - \tau\left(\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right) \\
&= 4 \tau(G_{n-1}) - \tau(G_{n-2})
\end{aligned}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\tau(G_1) = 1$ και $\tau(G_2) = 4$. Χρησιμοποιώντας μεθόδους που επιλύουν γραμμικές αναδρομικές εξισώσεις αποδεικνύεται το αποτέλεσμα [19]:

$$\tau(G_n) = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n]$$

Αξίζει να σημειώσουμε, πως εμάς μας ενδιαφέρουν γραφήματα που προκύπτουν από τη σχέση $G = K_n - H$, όπου $G = (V, E)$ και $H = (V_H, E_H)$. Για τα γραφήματα αυτά θα χρησιμοποιήσουμε έναν πιο γενικό τύπο που στηρίζεται στο βασικό *Θεώρημα Πινάκων-Δέντρων* [4, 5, 12, 21].

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα, όπου $n = |V|$ κόμβους και $m = |E|$ ακμές. Ο πίνακας των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων A του γραφήματος G ορίζεται ως:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 - \frac{d_i}{n} & \text{εαν } i = j, \\ \frac{1}{n} & \text{εαν } i \neq j, (i, j) \in \bar{E}, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου d_i είναι ο βαθμός του κόμβου u_i στο \bar{G} . Έχει αποδειχτεί [5] ότι ο αριθμός των σκελετικών δέντρων $\tau(G)$ του G δίνεται από τη σχέση:

$$\tau(G) = n^{n-2} \cdot \det(A) \quad (1.1)$$

Χρησιμοποιώντας των παραπάνω τύπο (1.1), μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων $G = K_n - H$. Ειδικότερα, μπορούμε να βγάλουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του G , όταν το γράφημα H ανήκει σε συγκεκριμένες κατηγορίες γραφημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

2.1 Εισαγωγή

2.2 Εύρεση Αναλυτικού Τύπου για n -διαδρομές (P_n)

2.3 Εύρεση Αναλυτικού Τύπου για n -κύκλους (C_n)

2.4 Τύποι Βασικών Κατηγοριών Γραφημάτων

2.1 Εισαγωγή

Στηριζόμενοι στο βασικό θεώρημα Πινάκων-Δέντρων, θέλουμε να εξάγουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος σκελετικών δέντρων γραφημάτων $G = K_n - H$. Η γενική ιδέα είναι να επιγράψουμε με κατάλληλο τρόπο τους κόμβους ενός γραφήματος, έτσι ώστε στη συνέχεια να απλουστευτεί ο υπολογισμός της ορίζουσας του πίνακα του γραφήματος που παίρνεται από το θεώρημα Πινάκων-Δέντρων.

Στη συνέχεια θα δείξουμε κλειστούς τύπους για τον υπολογισμό του αριθμού των σκελετικών δέντρων στις περιπτώσεις που το $H(n_H, m_H)$ είναι C_k και P_k [δηλαδή κύκλος (cycle) και μονοπάτι (path), όπου $n_H = k$ κόμβους, αντίστοιχα].

2.2 Εύρεση αναλυτικού τύπου για n -διαδρομές (P_n)

Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - P_k$, χρησιμοποιώντας τον πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων. Πρώτα επιγράψουμε τους κόμβους του γραφήματος έτσι ώστε οι κόμβοι με βαθμό $n-1$ να έχουν τις μικρότερες επιγραφές. Στη συνέχεια, διατάσσουμε τον πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων A του γραφήματος με την ακόλουθη δομή:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \dots & B & & & \\ & & & \dots & & & & \\ & & & 0 & & & & \end{bmatrix}$$

όπου ο υποπίνακας B περιέχει τους κόμβους του $K_n - P_k$ που έχουν βαθμό μικρότερο από $n-1$. Σημειώνουμε πως κενά στοιχεία του πίνακα ή της ορίζουσας αναπαριστούν μηδενικά. Συνεπώς $\det(A) = \det(B)$ όπου B είναι ένας πίνακας $k \times k$ με την ακόλουθη μορφή,

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b & & & & & & \\ b & a_2 & b & & & & & \\ & b & a_2 & b & & & & \\ & & b & \dots & \dots & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & a_2 & b & \\ & & & & & b & a_2 & b \\ & & & & & & b & a_2 & b \\ & & & & & & & b & a_1 \end{bmatrix}$$

όπου (από τον ορισμό του πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων) $a_1 = 1 - 1/n$, $a_2 = 1 - 2/n$, $b = 1/n$. Ξεκινώντας από πάνω αριστερά η κύρια διαγώνιος έχει a_1 , που ακολουθείται από $k-2$ το πλήθος a_2 και τελειώνει πάλι σε a_1 .

♣

Για παράδειγμα ο πίνακας B του γραφήματος του Σχήματος 2.1, όταν αφαιρείται από ένα γράφημα K_n , θα έχει την ακόλουθη μορφή:



$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & b & a_2 & b & \\ & & b & a_2 & b \\ & & & b & a_1 \end{vmatrix}$$



Σχήμα 2.1 Το γράφημα P_5 .

Για να υπολογίσουμε την παραπάνω ορίζουσα, αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή του πίνακα και έχουμε:

$$\det(B) = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & b & . & . & \\ & & . & . & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & b & a_1 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & b & & & \\ a_2 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & b & a_1 \end{vmatrix}$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως και οι δύο ορίζουσες είναι διάστασης $k-1 \times k-1$. Συνεχίζοντας την ανάπτυξη και των δύο οριζουσών ως προς τη τελευταία γραμμή και βγάζοντας το πρώτο στοιχείο της δεύτερης ορίζουσας θα έχουμε,

$$\det(B) = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b & & & & \\ b & a_2 & b & & & \\ & b & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & b \\ & & & & b & a_2 & b \\ & & & & & b & a_2 \end{vmatrix} + (-1)^{2k-3} b \begin{vmatrix} a_2 & b & & & & \\ b & a_2 & b & & & \\ & b & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & b \\ & & & & b & a_2 & 0 \\ & & & & & b & b \end{vmatrix}$$

$$-b^2 \begin{vmatrix} a_2 & b & & & & \\ b & a_2 & b & & & \\ & b & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & b \\ & & & & b & a_2 & b \\ & & & & & b & a_1 \end{vmatrix}$$

με τις διαστάσεις των οριζουσών να είναι $k-2 \times k-2$.

Έστω, L_k ο πίνακας με διαστάσεις $k \times k$ που έχει την μορφή:

$$L_k = \begin{bmatrix} a_2 & b & & & & \\ b & a_2 & b & & & \\ & b & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & b \\ & & & & b & a_2 & b \\ & & & & & b & a_2 \end{bmatrix}$$

Η παραπάνω ορίζουσα του πίνακα B μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση του πίνακα L_k και παράλληλα μπορούμε να αναπτύξουμε την τελευταία ορίζουσα με παρόμοιο τρόπο όπως και προηγουμένως (δηλαδή ως προς τη τελευταία γραμμή). Έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(B) &= a_1 (a_1 \det(L_{k-2}) - b^2 \det(L_{k-3})) - b^2 (a_1 \det(L_{k-3}) - b^2 \det(L_{k-4})) = \\ &= a_1^2 \det(L_{k-2}) - 2a_1 b^2 \det(L_{k-3}) + b^4 \det(L_{k-4}) \end{aligned}$$

(2.1)

Αρκεί κανείς να υπολογίσει την ορίζουσα του πίνακα L_k . Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του πίνακα L_k ως προς την πρώτη γραμμή και παίρνουμε

$$\det(L_k) = a_2 \begin{vmatrix} a_2 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & b & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & b & & & \\ 0 & a_2 & b & & \\ & b & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2 \det(L_{k-1}) - b^2 \begin{vmatrix} a_2 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & b & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2 \det(L_{k-1}) - b^2 \det(L_{k-2})$$

Από τον αναδρομικό τύπο της ορίζουσας του πίνακα L_k ισχύει:

$$\det(L_{k-1}) = a_2 \det(L_{k-2}) - b^2 \det(L_{k-3}), \text{ και}$$

$$\det(L_{k-2}) = a_2 \det(L_{k-3}) - b^2 \det(L_{k-4})$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο της ορίζουσας του πίνακα B (2.1) και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\det(B) = \det(L_{k-1})$$

Γνωρίζουμε ότι $a_2 = 1 - 2/n = 1 - 2b$, και $a_1 = 1 - 1/n = 1 - b$. Για να λύσουμε την παραπάνω γραμμική σχέση αναδρομής για $n \geq 4$, αρκεί να πάρουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$x^2 - \frac{n-2}{n}x + \frac{1}{n^2}$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$x_1 = \frac{n-2+\sqrt{n(n-4)}}{2n} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{n-2-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$$

Έτσι η πλήρης λύση της αναδρομικής σχέσης δίνεται από τον τύπο:

$$\det(L_k) = C_1 \left(\frac{n-2+\sqrt{n(n-4)}}{2n} \right)^k + C_2 \left(\frac{n-2-\sqrt{n(n-4)}}{2n} \right)^k$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές. Αυτές οι σταθερές υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες για $k=1$ και $k=2$ για τις οποίες ισχύει:

$$\det(L_1) = \frac{n-2}{n}$$

$$\det(L_2) = \frac{(n-2)^2 - 1}{n^2}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να βρούμε τις σταθερές:

$$C_1 = \frac{(n-2) + \sqrt{n(n-4)}}{2\sqrt{n(n-4)}}$$

$$C_2 = -\frac{(n-2) - \sqrt{n(n-4)}}{2\sqrt{n(n-4)}}$$

Οπότε η ορίζουσα γίνεται:

$$\det(L_k) = \frac{[(n-2) + \sqrt{n(n-4)}]^{k+1} + [(n-2) - \sqrt{n(n-4)}]^{k+1}}{2^{k+1} n^k \sqrt{n(n-4)}}$$

Τελικά, η ορίζουσα του πίνακα B γίνεται

$$\det(B) = 2^{-k} n^{-k+1} \frac{[(n-2+\gamma)^k + (n-2-\gamma)^k]}{\gamma}$$

όπου k η διάσταση του πίνακα B και $\gamma = \sqrt{n(n-4)}$.

Επομένως το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - P_k$, συναρτήσει του πλήθους των κόμβων του K_n και του P_k , δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\tau(K_n - P_k) = n^{n-k-1} 2^{-k} \frac{(n-2+\gamma)^k + (n-2-\gamma)^k}{\gamma} \quad (2.2)$$

όπου $\gamma = \sqrt{n(n-4)}$.

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν τεχνικές από τη γραμμική άλγεβρα και τη θεωρία πινάκων καταλήξαμε σε αναλυτικό τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - P_k$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παρόμοιες τεχνικές και σε περιπτώσεις που το αφαιρούμενο γράφημα είναι κύκλος αντί για διαδρομή.

2.3 Εύρεση αναλυτικού τύπου για n -κύκλους (C_n)

Θεωρούμε την περίπτωση του γραφήματος $K_n - C_k$. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων, υπολογίζουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - C_k$. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως, αρκεί να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα B , που στη συγκεκριμένη περίπτωση του κύκλου, έχει την μορφή:

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & b & & & & & & & & b \\ b & a_2 & b & & & & & & & \\ & b & a_2 & b & & & & & & \\ & & b & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & a_2 & b & & \\ & & & & & & b & a_2 & b & \\ & & & & & & & b & a_2 & b \\ b & & & & & & & & & b & a_2 \end{bmatrix}$$

όπου (από τον ορισμό του πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων) $a_2 = 1 - 2/n$, $b = 1/n$. Σε αυτό τον πίνακα, παρατηρούμε ότι η κύρια διαγώνιος έχει παντού a_2 .

Για παράδειγμα ο πίνακας B του γραφήματος του Σχήματος 2.2, όταν αφαιρείται από ένα γράφημα K_n , θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B = \begin{array}{ccccc|ccc} a_2 & b & & & b & & & & \\ b & a_2 & b & & & & & & \\ & b & a_2 & b & & & & & \\ & & b & a_2 & b & & & & \\ & & & b & a_2 & b & & & \\ b & & & & b & a_2 & & & \end{array}$$



Σχήμα 2.2 Το γράφημα C_5 .

Για να υπολογίσουμε την παραπάνω ορίζουσα, αρκεί να την αναπτύξουμε ως προς την πρώτη γραμμή του πίνακα, από όπου θα προκύψει,

$$\det(B) = a_2 \begin{vmatrix} a_2 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & b & & & \\ 0 & a_2 & b & & \\ & b & a_2 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{k+1} b \begin{vmatrix} b & a_2 & b & & \\ & b & a_2 & b & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_2 & b \\ & & & b & a_2 \\ b & & & & b \end{vmatrix}$$

Γνωρίζοντας πως όλες οι οριζουσες είναι διάστασης $k-1 \times k-1$ μπορούμε να συνεχίσουμε την ανάπτυξή τους, χρησιμοποιώντας και το τύπο της οριζουσας του πίνακα L_k . Επομένως, έχουμε

$$\det(B) = a_2 L_{k-1} - b(b \begin{vmatrix} a_2 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix} + (-1)^k b \begin{vmatrix} b & b & & & \\ a_2 & b & & & \\ b & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix})$$

$$+ (-1)^{k+1} b(b \begin{vmatrix} b & a_2 & b & & \\ & b & a_2 & b & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & a_2 & b \\ & & & b & a_2 \\ & & & & b \end{vmatrix} + (-1)^k b \begin{vmatrix} a_2 & b & & & \\ b & a_2 & b & & \\ & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & b \\ & & & b & a_2 & b \\ & & & & b & a_2 \end{vmatrix})$$



Εύκολα μπορεί κανείς να αναγνωρίσει πως οι δύο από τις τέσσερις παραπάνω ορίζουσες είναι κάτω και άνω τριγωνικές, διαστάσεων $k-2 \times k-2$ και οι δύο. Οπότε,

$$\begin{aligned} \det(B) &= a_2 \det(L_{k-1}) - b^2 \det(L_{k-2}) + (-1)^{k+1} b^k + (-1)^{k+1} b^k + (-1)^{2k+1} b^2 \det(L_{k-2}) \\ &= a_2 \det(L_{k-1}) - 2b^2 \det(L_{k-2}) + 2(-1)^{k+1} b^k \end{aligned}$$

Θυμίζοντας την αναδρομική σχέση που λύσαμε

$$\det(L_k) = a_2 \det(L_{k-1}) - b^2 \det(L_{k-2})$$

και αντικαθιστώντας στην ορίζουσα του $\det(B)$, έχουμε

$$\det(B) = 2 \det(L_k) - a_2 \det(L_{k-1}) + 2(-1)^{k+1} b^k.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $a_2 = 1 - 2/n$, $b = 1/n$ και τη τιμή της $\det(L_k)$. Επομένως με απλές πράξεις καταλήγουμε στη σχέση.

$$\begin{aligned} \det(B) &= n^{-k} \left[((n-2+\gamma)^k - (n-2-\gamma)^k) 2^{-k} + 2(-1)^{k+1} \right] \\ \text{όπου } \gamma &= \sqrt{n(n-4)} \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - C_k$, συναρτήσκει του πλήθους των κόμβων του K_n και του C_k , δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\tau(K_n - C_k) = n^{n-k-2} \left[((n-2+\gamma)^k - (n-2-\gamma)^k) 2^{-k} + 2(-1)^{k+1} \right] \quad (2.3)$$

$$\text{όπου } \gamma = \sqrt{n(n-4)}.$$

Οι τεχνικές, που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση αναλυτικού τύπου για το πλήθος των σκελετικών δέντρων, στις περιπτώσεις που έχουμε γραφήματα της μορφής $K_n - P_k$ και $K_n - C_k$, είναι παρόμοιες και όπως θα δούμε στη συνέχεια μπορούμε να τις εφαρμόσουμε και για άλλους τύπους γραφημάτων.

2.4 Τύποι Βασικών Κατηγοριών Γραφημάτων

Όπως δείξαμε στις προηγούμενες ενότητες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμπληρωματικό πίνακα των σκελετικών δέντρων ενός γραφήματος, όπως επίσης και βασικές τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα και την θεωρία πινάκων για την εύρεση κλειστού τύπου για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος.

Συμπερασματικά, οι τεχνικές που δείξαμε στηρίζονται στον υπολογισμό της ορίζουσας του συμπληρωματικού πίνακα των σκελετικών δέντρων, εξάγοντας μια ανταγωνιστική μέθοδο για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων για την κλάση των γραφημάτων της μορφής $K_n - G$, όπου το γράφημα G κατέχει κληρονομική συμμετρία.

Συγκεκριμένα, πολλά γνωστά αποτελέσματα [1, 3, 5] που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1, τα οποία έχουν προέλθει εφαρμόζοντας συνδυαστικά ορίσματα, μπορούν εύκολα να προκύψουν χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές με αυτές που παρουσιάσαμε.

Ο Moon (1967) [14] εξέφρασε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - P_m$ ως εξής:

$$\tau(G) = n^{n-2} \sum_{p=1}^m \binom{m+p-1}{m-p} \left(\frac{-1}{n}\right)^{m-p}$$

όπου m το πλήθος των κόμβων διαδρομής (*path*).

Για το συγκεκριμένο γράφημα $G = K_n - P_m$ οι Gilbert και Myrland (1997) [7] κατέληξαν στην σχέση:

$$\tau(G) = n^{n-2} \frac{1}{2^k n^{k-1} \sqrt{n^2 - 4n}} \left((n-2 + \sqrt{n^2 - 4n})^k - (n-2 - \sqrt{n^2 - 4n})^k \right)$$

Χρησιμοποιώντας παρόμοιους συλλογισμούς εξέφρασαν το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - C_m$ ως εξής:

$$\tau(G) = n^{n-2} \frac{1}{2^k n^k} \left((n-2 + \sqrt{n^2 - 4n})^k + (n-2 - \sqrt{n^2 - 4n})^k + (-2)^{k+1} \right)$$

Έστω $G = K_n - H$, όπου H είναι ένα σύνολο από q ανεξάρτητες ακμές μεταξύ τους. Η κλάση των γραφημάτων H ονομάζεται μη-συνεκτική (*disjoint*) και συμβολίζεται ως $H = D_q$. Για την κατηγορία αυτή των γραφημάτων ο Weinberg (1958) [26] απέδειξε ότι:

$$\tau(G) = n^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^q$$

Για την περίπτωση του $G = K_n - K_k$, ο Berge [1] κατέληξε στο συμπέρασμα ότι:

$$\tau(G) = n^{n-2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-1}$$

Επιπλέον, όταν $G = K_n - H$, όπου H είναι ένα σύνολο από q ακμές με ένα κοινό τελικό σημείο x_1 . Για την κλάση των γραφημάτων H , που ονομάζονται αστεροειδείς γραφήματα (*star*), ο O' Neil (1963) [21] υποστήριξε ότι:

$$\tau(G) = n^{n-2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{q-1} \left(1 - \frac{q+1}{n}\right)$$

Έστω ένα γράφημα $H = (X, E)$ που προκύπτει από την ένωση δύο ανεξάρτητων πλήρες γραφημάτων (S, V) και (T, W) με $|S| = s$ και $|T| = t$. Ο Scoin (1962) απέδειξε ότι για $G = K_n - H$, θα ισχύει:

$$\tau(G) = s^{s-1} t^{t-1}$$

Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου συνοψίζονται στον Πίνακα 2.1 που ακολουθεί.

Γράφημα G	$\tau(G)$	Αναφορά
$K_n - K_k$	$n^{n-2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-1}$	[1, 3, 5]
$K_n - P_k$	$n^{n-k-3} 2^{-k} \frac{(n-2+\gamma)^k + (n-2-\gamma)^k}{\gamma},$ $\gamma = \sqrt{n(n-4)}$	(2.2), [7]
$K_n - C_k$	$n^{n-k-2} (((n-2+\gamma)^k - (n-2-\gamma)^k) 2^{-k} + 2(-1)^{k+1}),$ $\gamma = \sqrt{n(n-4)}$	(2.3), [7]
$K_n - D_k$	$n^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2k}$	[26]
$K_n - S_k$	$n^{n-2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)$	[21]

Πίνακας 2.1. Πλήθος Σκελετικών Δέντρων για ορισμένες Κατηγορίες Γραφημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΣΤΕΡΟΕΙΔΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

3.1 Εισαγωγή

3.2 *Multi-star* γράφημα

3.3 *Ice-star* γράφημα

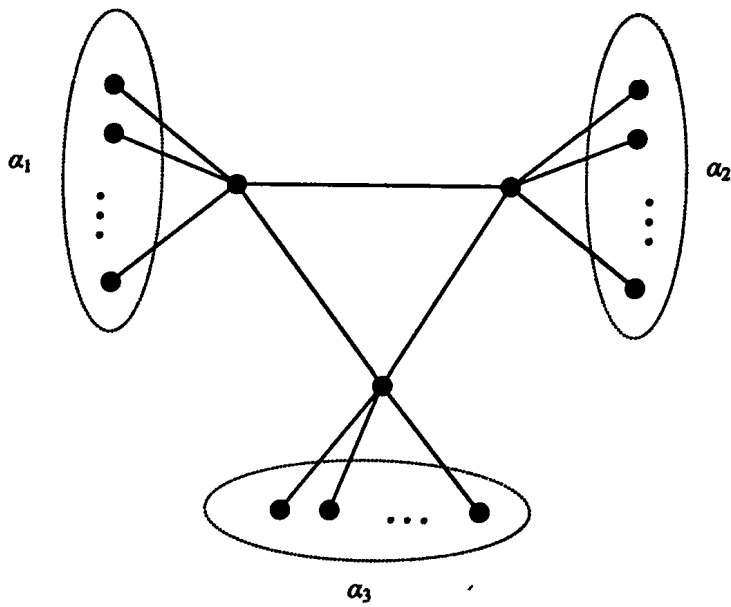
3.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με κατηγορίες γραφημάτων που έχουν *αστεροειδή* δομή, δηλαδή θα υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$, όταν το γράφημα G έχει *αστεροειδή* δομή. Θα παρουσιάσουμε κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων σε δύο κατηγορίες *αστεροειδών* γραφημάτων.

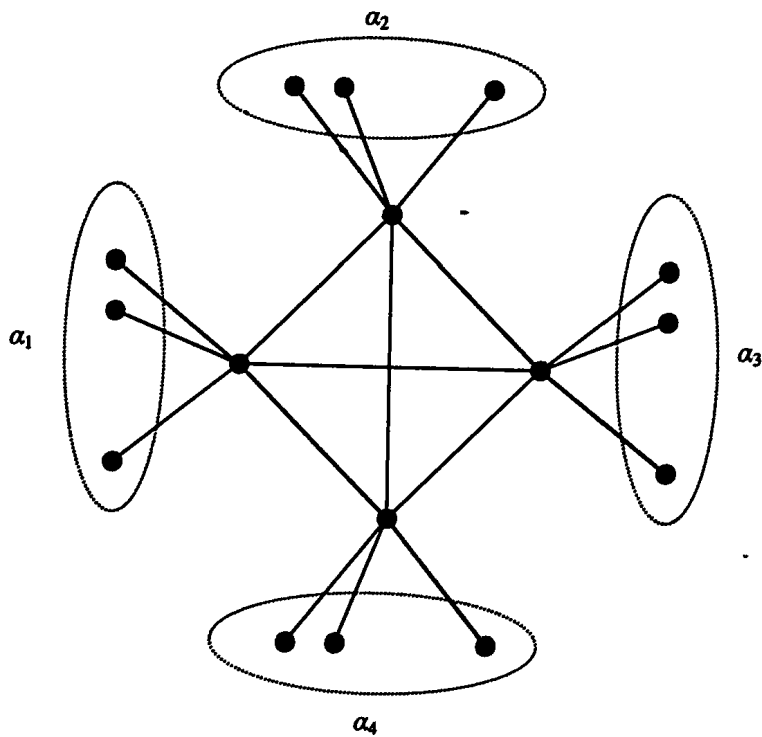
Η πρώτη κλάση γραφημάτων που εξετάζουμε είναι γραφήματα που ονομάζονται *multi-star* [16], συμβολίζονται $K_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ και έχουν την μορφή των γραφημάτων των Σχημάτων 3.1 και 3.2. Τα γραφήματα αυτά αποτελούνται από υποσύνολο κόμβων που επάγει ένα πλήρες υπογράφημα K_m και από ένα υποσύνολο κόμβων που επάγει ένα ανεξάρτητο υπογράφημα με $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ κόμβους και κάθε κόμβος του ανεξάρτητου υπογραφήματος συνδέεται με ακμή με μόνο ένα κόμβο του πλήρους υπογραφήματος K_m . Είναι φανερό ότι οι κόμβοι του K_m με επιγραφή u_1, u_2, \dots, u_m έχουν βαθμό $m - 1 + \alpha_i$ και οι υπόλοιποι κόμβοι α_i (φύλλα) έχουν βαθμό ένα. Στην ειδική περίπτωση όπου $m = 1$ έχουμε την περίπτωση του $K_1(\alpha_1)$ που είναι ισόμορφο με το *star* $S_{1,s}$ όπου $\alpha_1 = s$.

Με $K_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ συμβολίζουμε το *triple-star* όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Αντίστοιχα, στο Σχήμα 3.2 φαίνεται η περίπτωση του *quadruple-star* $K_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.



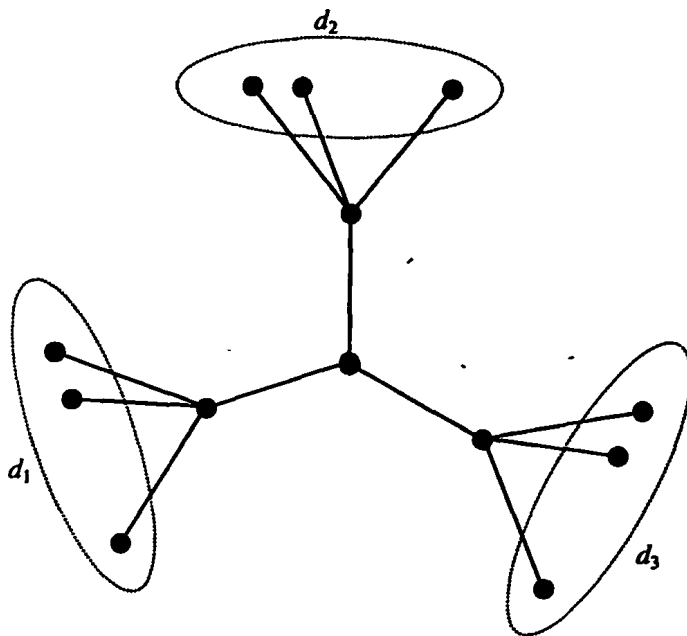


Σχήμα 3.1. Το *triple-star* γράφημα $K_3(a_1, a_2, a_3)$.

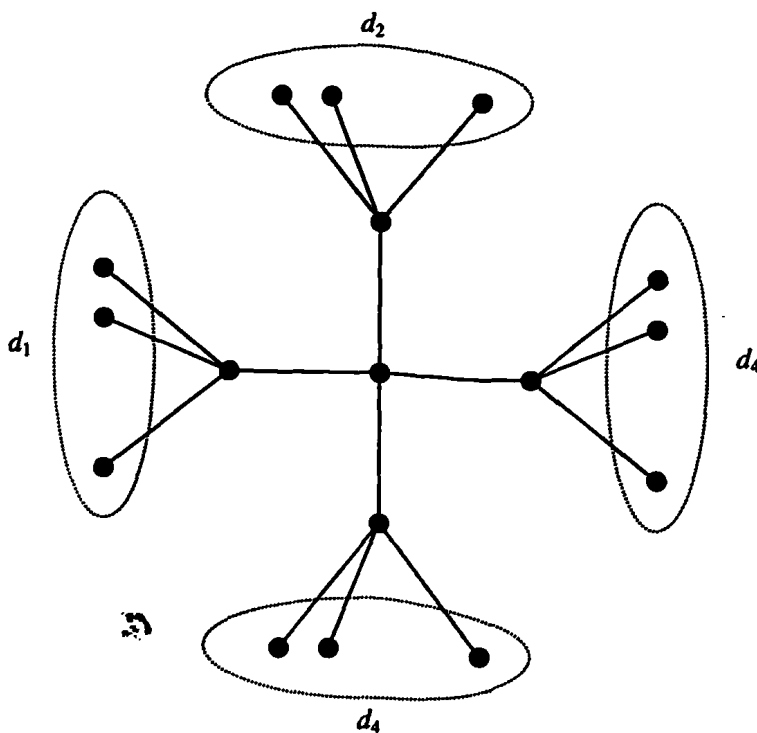


Σχήμα 3.2. Το *quadruple-star* γράφημα $K_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Η δεύτερη κλάση γραφημάτων αποτελείται από υποσύνολο κόμβων που επάγει ένα αστεροειδές υπογράφημα $S_{1,m}$ και από ένα υποσύνολο κόμβων που επάγει ένα ανεξάρτητο υπογράφημα με d_1, d_2, \dots, d_m κόμβους και κάθε κόμβος του ανεξάρτητου υπογραφήματος συνδέεται με ακμή με μόνο ένα κόμβο του αστεροειδούς υπογραφήματος $S_{1,m}$. Ένα γράφημα που ανήκει στην παραπάνω κλάση, το συμβολίζουμε με $S_m(d_1, d_2, \dots, d_{sm})$ (σε αντιστοιχία με το *multi-star*) και ονομάζεται *ice-star*. Το *ice-star* γράφημα είναι ισόμορφο με το με το *star* $S_{1,m}$ όταν όλα τα $d_i = 0$. Στα Σχήματα 3.3 και 3.4 δείχνονται τα $S_3(d_1, d_2, d_3)$ και $S_4(d_1, d_2, d_3, d_4)$ γραφήματα, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.3. Το $S_3(d_1, d_2, d_3)$ γράφημα.



Σχήμα 3.4. Το $S_4(d_1, d_2, d_3, d_4)$ γράφημα.

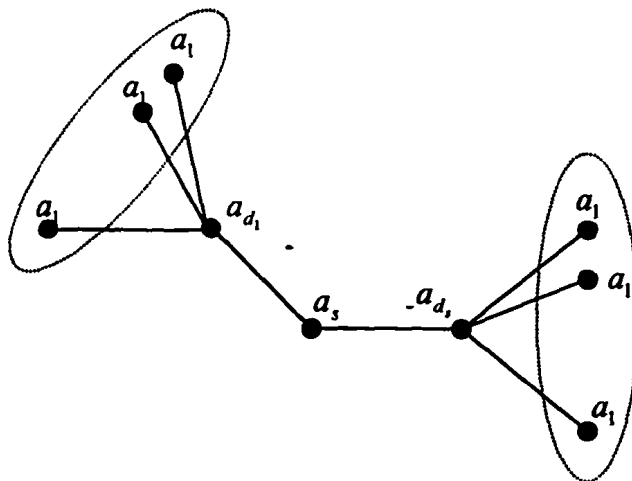
$$\tau(G) = n^{k-2} (n-1)^{a_1+a_2+\dots+a_m} (q_1-1)(q_2-1)\dots(q_m-1) \left(1 + \frac{1}{q_1-1} + \frac{1}{q_2-1} + \dots + \frac{1}{q_m-1}\right)$$

(3.1)

όπου $q_i = n - a_i - m + 1 - \frac{a_i}{n-1}$, και $k = n - m - a_1 - a_2 - \dots - a_m$.

3.3 Ice-star γράφημα

Για τον υπολογισμό του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - S_m(d_1, d_2, \dots, d_m)$, χρησιμοποιώντας τον πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως, αρκεί να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα B , που στη συγκεκριμένη περίπτωση, όμως, έχει διαφορετική μορφή.



Σχήμα 3.5. Ένα ice-star γράφημα με τους αντίστοιχους βαθμούς σε κάθε κόμβο.

Όπως δείξαμε και προηγουμένως, θα ασχοληθούμε μόνο με τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα B , αφού $\det(A) = \det(B)$. Στη συνέχεια, ορίζουμε τις ποσότητες $b = 1/n$ και $\alpha_i = 1 - (i \times b)$.

Η επιγραφή των κόμβων του γραφήματος ξεκινάει από όλα τα φύλλα του $S_m(d_1, d_2, \dots, d_m)$, δηλαδή από τους κόμβους με βαθμό 1. Στη συνέχεια, επιγράφονται όλοι οι κόμβοι με βαθμό $d_i + 1$ για $1 \leq i \leq m$. Τέλος, επιγράφουμε και τον κεντρικό κόμβο (ρίζα) του γραφήματος, δηλαδή τον κόμβο με βαθμό m . Έτσι καταλήγουμε στη ακόλουθη μορφή του πίνακα B :

Επομένως, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα B εκτελούμε d_m πράξεις:

- 1.: $RO(1, 2, 3, \dots, d_1)$,
- 2.: $RO(d_1 + 1, d_1 + 2, d_1 + 3, \dots, d_1 + d_2)$,
- ⋮
- d_s .: $RO(k - d_m + 1, k - d_m + 2, k - d_m + 3, \dots, k)$

που καταλήγουν στην ακόλουθη μορφή του πίνακα B :

$$\det(B) = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & & & & & & b \\ -a_1 & a_1 & & & & & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & & & \\ -a_1 & & & a_1 & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & a_1 & & & & & & \\ & & & & & & -a_1 & a_1 & & & & \\ & & & & & & \vdots & & \ddots & & & \\ & & & & & & & -a_1 & & a_1 & & \\ b & b & \dots & b & & & & & & & a_{d_1+1} & b \\ & & & & & \dots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & b & b & \dots & b & & a_{d_m+1} & b \\ & & & & & & & & & & b & \dots & b & a_m \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, εκτελούμε d_m πράξεις:

- 1.: $CO(1, 2, 3, \dots, d_1)$,
- 2.: $CO(d_1 + 1, d_1 + 2, d_1 + 3, \dots, d_1 + d_2)$,
- ⋮
- d_s .: $CO(k - d_m + 1, k - d_m + 2, k - d_m + 3, \dots, k)$

που αντίστοιχα καταλήγουν στην ακόλουθη μορφή του πίνακα B :



Οπότε, η ορίζουσα γίνεται:

$$\det(B) = a_1^{k-s} \begin{vmatrix} a_1^2 - d_1 b & & & & a_1 b \\ & a_1^2 - d_2 b & & & a_1 b \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_1^2 - d_m b & a_1 b \\ b & b & \dots & b & a_m \end{vmatrix}$$

έχοντας παραγοντοποιήσει ως προς την τιμή $1/a_1$ για τις s πρώτες γραμμές.

Όπως και προηγουμένως, εκτελούμε την πράξη $RO(1, 2, 3, \dots, s)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις στήλες από 2 έως m με $\frac{a_1^2 - d_1 b}{a_1^2 - d_i b}$ και τις προσθέτουμε στη πρώτη στήλη για $2 \leq i \leq m$. Τότε έχουμε:

$$\det(B) = a_1^{k-s} \begin{vmatrix} a_1^2 - d_1 b & & & & a_1 b \\ -a_1^2 + d_1 b & a_1^2 - d_2 b & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -a_1^2 + d_1 b & & & a_1^2 - d_m b & \\ b & b & \dots & b & a_m \end{vmatrix}$$

$$= a_1^{k-s} \begin{vmatrix} & a_1^2 - d_1 b & & & a_1 b \\ & & a_1^2 - d_2 b & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_1^2 - d_m b \\ b + (a_1^2 - d_1 b)b \left(\frac{1}{a_1^2 - d_2 b} + \dots + \frac{1}{a_1^2 - d_m b} \right) & b & \dots & b & a_m \end{vmatrix}$$

Το πρώτο στοιχείο της $m + 1$ γραμμής είναι ίσο με:

$$b + (a_1^2 - d_1 b) b \left(\frac{1}{a_1^2 - d_2 b} + \dots + \frac{1}{a_1^2 - d_m b} \right)$$

$$= (a_1^2 - d_1 b) b \left(\frac{1}{a_1^2 - d_1 b} + \frac{1}{a_1^2 - d_2 b} + \dots + \frac{1}{a_1^2 - d_m b} \right)$$

Για να μηδενίσουμε και το στοιχείο που βρίσκεται στη πρώτη γραμμή και στη τελευταία στήλη πολλαπλασιάζουμε με $-\frac{a_1 b}{a_1^2 - d_1 b}$ την πρώτη στήλη και τη προσθέτουμε στη τελευταία. Έτσι λοιπόν, η ορίζουσα του πίνακα B θα είναι:

$$\det(B) = a_1^{k-m} (a_1^2 - d_1 b) \dots (a_1^2 - d_m b) \left[a_m - a_1 b^2 \left(\frac{1}{a_1^2 - d_1 b} + \dots + \frac{1}{a_1^2 - d_m b} \right) \right],$$

με $k = d_1 + d_2 + \dots + d_m$, $b = 1/n$ και $a_i = 1 - (i \times b)$.

Οπότε, το πλήθος των σκελετικών δέντρων του *ice-star* γραφήματος $G = K_n - S_m(d_1, d_2, \dots, d_m)$, δίνεται από τον κλειστό τύπο:

$$\tau(G) = n^{n-m-k-3} (n-1)^{k-m} \left(n - m - (n-1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{(n-1)^2 - d_i n} \right) \prod_{i=1}^m ((n-1)^2 - d_i n) \quad (3.2)$$

όπου $k = d_1 + d_2 + \dots + d_m$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στη περίπτωση που $d = d_1 = d_2 = \dots = d_m$, δηλαδή οι κόμβοι που ενώνονται με τη ρίζα m έχουν τον ίδιο βαθμό, τότε ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$\tau(G) = n^{n-m(d+1)-3} (n-1)^{m(d-1)} \left(n - m - \frac{m(n-1)}{(n-1)^2 - dn} \right) ((n-1)^2 - dn)^m$$

Ειδικότερα, εάν $d = d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0$ τότε:

$$\tau(G) = n^{n-2} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{m-1} \left(1 - \frac{m+1}{n} \right),$$

που όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ο παραπάνω τύπος δίνει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του star γραφήματος $G = K_n - S_{1,s}$.

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΙΑ

- 4.1 Εισαγωγή
- 4.2 Παράδειγμα Δέντρου
- 4.3 Δέντρο

4.1 Εισαγωγή

Έστω $T_n = (V, E)$ ένα δέντρο με n κορυφές. Το δέντρο που παρουσιάζει ο παραπάνω τύπος είναι το δέντρο που προκύπτει από το T_n αν αφαιρέσουμε τις s ακμές που συνδέουν τις κορυφές $1, 2, \dots, s$ με τις κορυφές $1, 2, \dots, s$ αντίστοιχα.



Εικόνα 4.1: Το δέντρο T_n .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΕΝΔΡΟΕΙΔΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

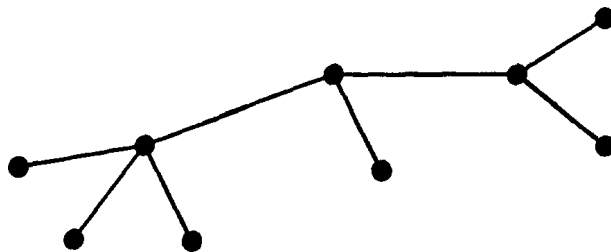
4.1 Εισαγωγή

4.2 k -πλήρες Δέντρο

4.3 Δέντρο

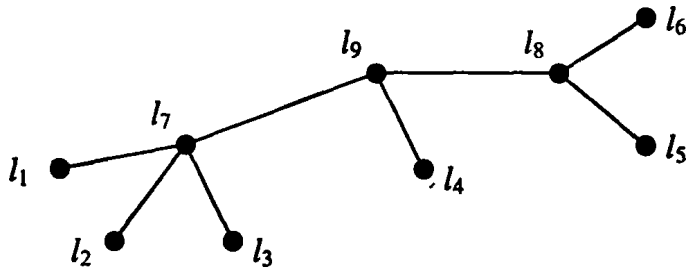
4.1 Εισαγωγή

Έστω $T_k = (V, E)$ να είναι ένα δέντρο με k κόμβους. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$, στην περίπτωση όπου το γράφημα G έχει δενδροειδή δομή. Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζουμε ένα δέντρο T_9 .



Σχήμα 4.1. Ένα δέντρο T_9 .

Επειδή θέλουμε να δώσουμε επιγραφές (l_i) στους κόμβους του δέντρου, θα καθορίσουμε πρώτα μια αρίθμηση των κόμβων του δέντρου. Ξεκινάμε από τους κόμβους που είναι φύλλα (δηλαδή στους κόμβους με βαθμό 1) και τους επιγράφουμε με τυχαία σειρά μεταξύ τους. Στη συνέχεια, θεωρούμε το υπογράφημα που προκύπτει από την διαγραφή των φύλλων, που επιγράψαμε προηγουμένως, και αριθμούμε τα νέα φύλλα του υπογραφήματος. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία έως ότου επιγράψουμε όλους τους κόμβους του δέντρου. Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζουμε μια αρίθμηση των κόμβων του δέντρου του Σχήματος 4.1.



Σχήμα 4.2. Μια αρίθμηση των κόμβων του δέντρου του Σχήματος 4.1.

Σημειώνουμε, ακόμη ότι η επιγραφή των φύλλων σε κάθε καινούριο υπογράφημα (όταν διαγράφουμε τα φύλλα) γίνεται με τυχαίο τρόπο, καθώς η συγκεκριμένη αρίθμηση δεν θα επηρεάσει τον συλλογισμό μας στη συνέχεια.

Έστω ένα δέντρο $T_k = (V, E)$. Ορίζουμε το σύνολο $child(i) \subseteq V$ για κάθε $i \in V$ ως εξής:

$$child(i) = \{ j \mid j \in N(i) \text{ και } l_i > l_j \}, \text{ για κάθε } i, j \in V.$$

Το σύνολο $child(i)$ για κάθε κόμβο i περιέχει όλους τους κόμβους που ενώνονται με τον κόμβο i και έχουν αριθμηθεί πριν από αυτόν (παιδιά του i).

Έστω d_j ο βαθμός του κόμβου j ενός δέντρου T_k . Για κάθε κόμβο j ορίζουμε την τιμή α_j (που θα την ονομάζουμε *επιγραφή βαθμού*). Για την τιμή αυτή ισχύει:

$$\alpha_j = 1 - d_j \cdot b \quad (4.1)$$

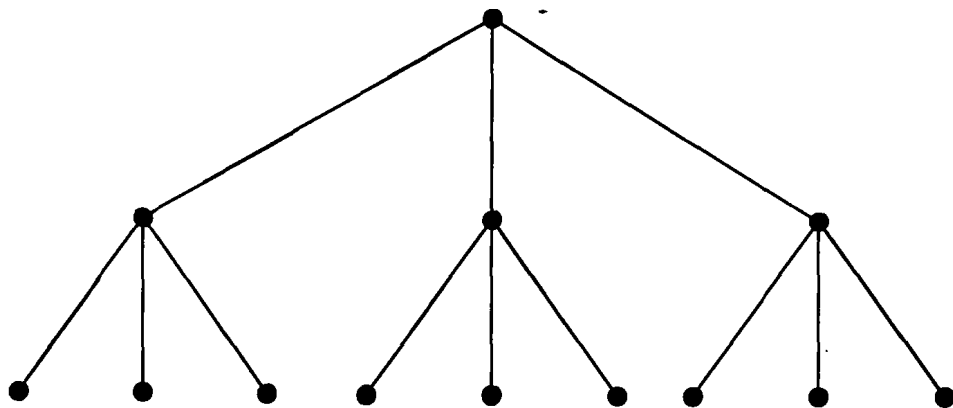
όπου $b = 1/n$ και $n > 0$. Ο δείκτης i της τιμής α_i είναι ίσος με τον βαθμό του κόμβου j ($i = d_j$).

Έτσι λοιπόν, αφού ορίσαμε τις παραπάνω ποσότητες, μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - T_k$ καθώς δομείται ο πίνακας των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων.

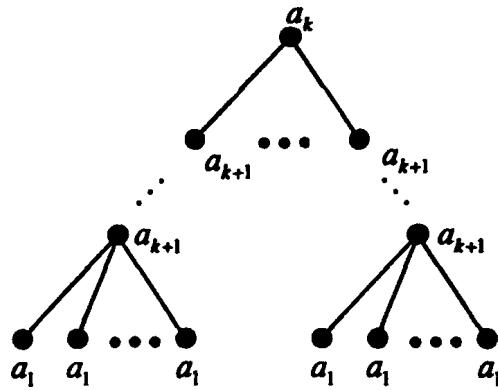
4.2 k -πλήρες Δέντρο

Ένα k -πλήρες δέντρο (ύψους h), που συμβολίζεται $T_{k,h}$, αποτελείται από $k^0 + k^1 + k^2 + \dots + k^h$ κόμβους, όπου κάθε κόμβος έχει βαθμό $k + 1$ ακριβώς εκτός από έναν κόμβο (ρίζα) που έχει βαθμό k και k^h κόμβους (φύλλα) με βαθμό 1. Συγκεκριμένα, σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το πλήθος όταν έχουμε γραφήματα της μορφής $K_n - T_{k,h}$. Θα παρουσιάσουμε πρώτα κλειστό τύπο για την παραπάνω περίπτωση και σε επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε την γενική περίπτωση δέντρου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η περίπτωση που εξετάζουμε είναι για ισοσταθμισμένο δέντρο, δηλαδή όλα τα φύλλα του δέντρου βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

- Με $T_{3,2}$ συμβολίζουμε το τριαδικό-πλήρες δέντρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3, που αποτελείται από 13 κόμβους, καθώς εξετάζουμε το δέντρο μέχρι το δεύτερο επίπεδο ($h = 2$). Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι η ρίζα έχει βαθμό ακριβώς k , τα φύλλα του δέντρου έχουν βαθμό 1, ενώ οι υπόλοιποι κόμβοι έχουν βαθμό $k + 1$.

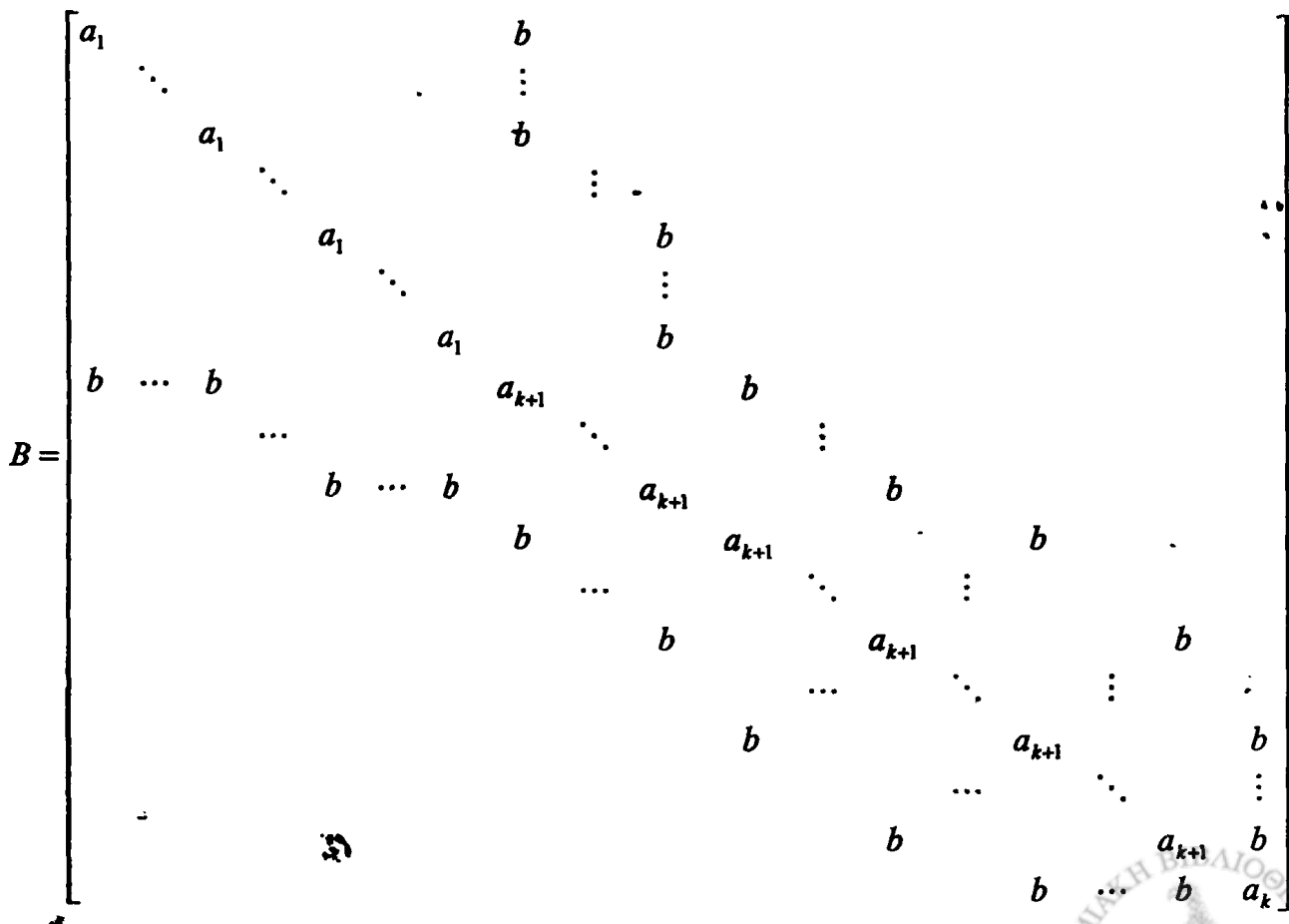


Σχήμα 4.3. Το τριαδικό-πλήρες δέντρο $T_{3,2}$.



Σχήμα 4.4. Ένα k -πλήρες δέντρο με επιγραφές βαθμών σε κάθε κόμβο.

Χρησιμοποιώντας πάλι τον πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων μπορούμε να υπολογίσουμε κλειστό τύπο για τη κλάση των γραφημάτων. Επιγράφοντας πρώτα τα φύλλα (κόμβοι με βαθμό 1) και συνεχίζοντας προς τη ρίζα ανά επίπεδο, έχουμε τη δομή του πίνακα B που εκφράζεται από τους κόμβους του $T_{k,b}$,



όπου $b = 1/n$ και $a_i = 1 - (i \times b)$ και το μέγεθος του πίνακα B να είναι:

$$\det(B) = a_1^{k^h}$$

$a_{k+1} - \frac{kb^2}{a_1}$	\dots	b	\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
b	$a_{k+1} - \frac{kb^2}{a_1}$	\dots	b	\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	b	a_{k+1}	\dots	b	\vdots	\dots	\dots	\dots
\dots	b	\dots	a_{k+1}	b	\vdots	\dots	\dots	\dots
\dots	b	b	\dots	b	\vdots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	b	\vdots	a_{k+1}	\dots	\dots	b
\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots	\dots	\dots	\dots	b
\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots	\dots	\dots	a_{k+1}	b
\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots	b	\dots	b	a_k

όπου η ορίζουσα έχει διάσταση $(\frac{k^h - 1}{k-1}) \times (\frac{k^h - 1}{k-1})$.

Εάν παραγοντοποιήσουμε ως προς $1/a_1$ θα έχουμε:

$$\det(B) = a_1^{k^{h-1}(k-1)}$$

$a_{k+1} a_1 - kb^2$	\dots	$a_1 b$	\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
b	$a_{k+1} a_1 - kb^2$	\dots	$a_1 b$	\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	b	a_{k+1}	\dots	b	\vdots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	b	\dots	b	\vdots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	b	\vdots	a_{k+1}	\dots	\dots	b
\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots	\dots	\dots	\dots	b
\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots	b	\dots	b	a_k

Θέτουμε $\Phi_2 = a_{k+1} - kb^2$. Εκτελώντας, με αντίστοιχο τρόπο όπως προηγουμένως, τις πράξεις RO και CO στις γραμμές και τις στήλες που βρίσκεται η ποσότητα Φ_2 (για το επίπεδο $h-1$) τότε θα έχουμε:

$$\det(B) = a_1^{k^{h-1}(k-1)} \Phi_2^{k^{h-2}(k-1)}$$

$a_{k+1} \Phi_2 - k b^2$		$\Phi_2 b$		
	\ddots		\ddots	
		$a_{k+1} \Phi_2 - k b^2$		$\Phi_2 b$
b		a_{k+1}		b
	\dots		\ddots	\vdots
		b		b
		b	\dots	b
				\ddots
				b
				a_k

Εάν ορίσουμε τον αναδρομικό τύπο:

$$\Phi_h = a_{k+1} \Phi_{h-1} - k b^2$$

με αρχική τιμή $\Phi_1 = 1$,

τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τις προηγούμενες πράξεις έως ότου καταλήξουμε στο τελευταίο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου. Έτσι η ορίζουσα του πίνακα B γίνεται:

$$\det(B) = (a_k \Phi_h - k b^2 \Phi_{h-1}) \prod_{i=1}^h \Phi_i^{k^{h-i}(k-1)}$$

(4.2)

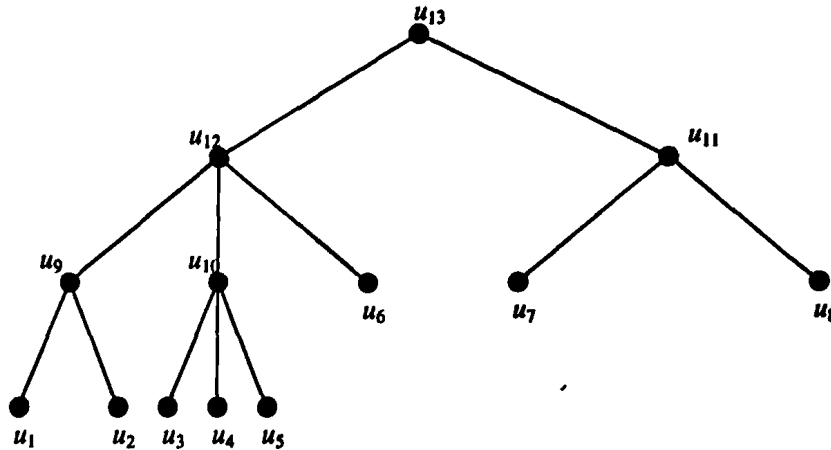
όπου $b = 1/n$ και $a_i = 1 - (i \times b)$.

4.3 Δέντρο

Στη γενική περίπτωση δέντρου με k κόμβους, που συμβολίζουμε με T_k , μπορούμε να διατάξουμε το δέντρο αριθμώντας τους κόμβους του από τα φύλλα μέχρι τη ρίζα. Ειδικότερα, η αρίθμηση των κόμβων γίνεται από τα φύλλα και στη συνέχεια επιλέγονται οι κόμβοι που γίνονται φύλλα όταν διαγράφονται τα αρχικά φύλλα μέχρι να φτάσουμε στον κεντρικό κόμβο (ρίζα).

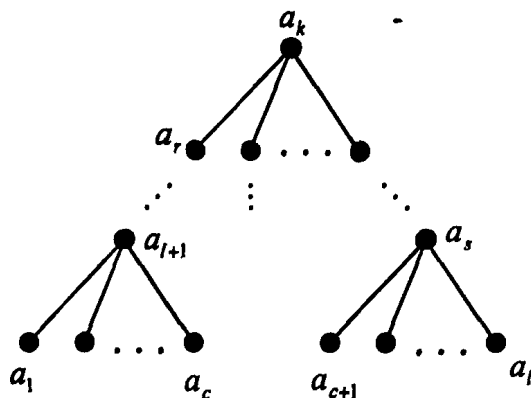


Στο Σχήμα 4.5 φαίνεται ένα δέντρο T_{13} , με επιγραφές σε κάθε κόμβο, σύμφωνα με την αριθμηση που εξηγήσαμε.



Σχήμα 4.5. Ένα δέντρο T_{13} .

Ορίζουμε ως νέα επιγραφή βαθμών την τιμή $a_i = 1 - (d_i \times b)$ για κάθε κόμβο i ενός δέντρου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο δείκτης i δεν εκφράζει πλέον τον βαθμό του κόμβου όπως στον ορισμό (4.1).



Σχήμα 4.6. Ένα δέντρο με επιγραφές βαθμών στους κόμβους.

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, την παραπάνω επιγραφή των κόμβων μπορούμε να δείξουμε την δομή του πίνακα B για την περίπτωση του δέντρου T_k .

$$B = \begin{bmatrix}
 a_1 & & & & & & & & & & & & & b \\
 & a_2 & & & & & & & & & & & & b \\
 & & a_3 & & & & & & & & & & & b \\
 & & & a_4 & & & & & & & & & & b \\
 & & & & a_5 & & & & & & & & & b \\
 & & & & & a_6 & & & & & & & & b \\
 & & & & & & a_7 & & & & & & & b \\
 & & & & & & & a_8 & & & & & & b \\
 b & b & & & & & & & a_9 & & & & & b \\
 & & b & b & b & & & & & a_{10} & & & & b \\
 & & & & & & b & b & & & a_{11} & & & b \\
 & & & & & & & & b & b & & & a_{12} & b \\
 & & & & & & & & & & b & b & & a_{13}
 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε την παραπάνω ορίζουσα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τις στήλες 1, 2, ..., l με $-b/a_i$, για $1 \leq i \leq l$, και να τις προσθέσουμε στις αντίστοιχες στήλες που βρίσκεται ο πατέρας κάθε κόμβου u_i .

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & a_l & & \\ b & & & a_{l+1} - b^2 \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_c} \right) & b \\ & & & & \\ & b & & & a_s - b^2 \left(\frac{1}{a_{c+1}} + \dots + \frac{1}{a_l} \right) & b \\ & & & & & \\ & & b & & b & a_r & b \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & b & a_k \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^l a_i \begin{vmatrix} a_{l+1} - b^2 \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_c} \right) & & & b \\ & \dots & & \\ & & a_s - b^2 \left(\frac{1}{a_{c+1}} + \dots + \frac{1}{a_l} \right) & b \\ & & & \\ b & & & -b & a_r & b \\ & & & & \dots & \\ & & & & & b & a_k \end{vmatrix}$$

Επειδή $a_i = 1 - b$ για $1 \leq i \leq l$, και

$$a_j - b^2 \sum \frac{1}{a_i} = a_j - b^2 \frac{d_j - 1}{1 - b}$$

θα ισχύει:

$$\det(B) = (1-b)^l \begin{vmatrix} a_{l+1} - b^2 \frac{d_{l+1}-1}{1-b} & & & & b \\ & \dots & & & \\ & & a_s - b^2 \frac{d_s-1}{1-b} & & b \\ & & & \dots & \\ & b & & b & a_r & b \\ & & & & & \dots \\ & & & & b & a_k \end{vmatrix}$$

Εκτελούμε με παρόμοιο τρόπο, όπως προηγουμένως, τις πράξεις που εφαρμόσαμε για τα φύλλα, με τη διαφορά όμως ότι πολλαπλασιάζουμε με τον παράγοντα

$$\frac{-b}{a_j - b \frac{d_j-1}{1-b}}$$

τις αντίστοιχες στήλες. Τότε, η ορίζουσα του πίνακα B θα είναι:

$$\det(B) = (1-b)^l (a_{l+1} - b^2 \frac{d_{l+1}-1}{1-b}) \dots (a_s - b^2 \frac{d_s-1}{1-b}) \begin{vmatrix} a_r - b^2 \left(\frac{1}{a_{l+1} - b^2 \frac{d_{l+1}-1}{1-b}} + \frac{1}{a_s - b^2 \frac{d_s-1}{1-b}} \right) & b \\ & \dots \\ & b & a_k \end{vmatrix}$$

Η παραπάνω ορίζουσα έχει παρόμοια δομή με την αρχική ορίζουσα (4.3) με τη διαφορά ότι έχει μικρότερη διάσταση και διαφορετικές τιμές στα στοιχεία της διαγώνιά της. Έτσι, εάν εφαρμόσουμε τις αντίστοιχες τεχνικές, όπως προηγουμένως, για τα υπόλοιπα στοιχεία της παραπάνω ορίζουσα, μπορούμε να την απλοποιήσουμε μέχρι το τελευταίο στοιχείο της που βρίσκεται στην τελευταία γραμμή.

Ορίζουμε την ποσότητα

$$L_i = \begin{cases} a_i & \text{εάν } i \text{ φύλλο} \\ a_i - b^2 \sum_{j \in \text{child}(i)} \frac{1}{L_j} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα B γίνεται:

$$\det(B) = \prod_{i=1}^k L_i,$$

όπου $a_i = 1 - (d_i b)$ και $b = 1/n$. Άρα για $G = K_n - T_k$ θα ισχύει:

$$\tau(G) = n^{n-2} \prod_{i=1}^k L_i$$

(4.4)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΕΛΕΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

5.1 Εισαγωγή στα *Quasi-Threshold* και *Split* Γραφήματα

5.2 Αναλυτικός τύπος για *Quasi-Threshold* Γραφήματα

5.3 Αναλυτικός τύπος για *k-split* Γραφήματα

5.1 Εισαγωγή στα *Quasi-Threshold* και *Split* Γραφήματα

Αρκετό ενδιαφέρον παρουσιάζει το πλήθος των σκελετικών δέντρων γραφημάτων της μορφής $K_n - G$, όταν το γράφημα G ανήκει σε κατηγορίες τέλειων γραφημάτων. Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε με τα *Quasi-Threshold* και *Split* γραφήματα που ανήκουν στην περιοχή των τέλειων γραφημάτων.

Ένα γράφημα G ονομάζεται *Quasi-Threshold* γράφημα, ή *QT*-γράφημα, εάν για κάθε ακμή (x, y) του G ισχύει $N[x] \subseteq N[y]$ ή $N[y] \subseteq N[x]$. Ισοδύναμα, G είναι *QT*-γράφημα, εάν και μόνο εάν το G δεν έχει επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο του P_4 ή C_4 [16, 17]. Η κλάση των *QT*-γραφημάτων είναι υποκλάση των *cographs* και περιέχει την κλάση των *threshold* γραφημάτων [1, 8, 9, 23].

Αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την μελέτη των *QT*-γραφημάτων. Ο *Wolk* [15] ονόμασε αυτά τα γραφήματα *comparability* γραφήματα δέντρων και μελέτησε αλγόριθμους αναγνώρισης τους. Οι *Ma*, *Wallis* και *Wu* [11] τα ονόμασαν *Quasi-Threshold* γραφήματα (*QT*-γραφήματα) και μελέτησαν αλγοριθμικές ιδιότητες.

Ο *Νικολόπουλος* [14] όρισε το *cent-tree* ενός *Quasi-Threshold* γραφήματος ως εξής:

$$\text{cent}(G) = \{x \in V(G) \mid N[x] = V(G)\}.$$



Εάν $G_1 = G$ και $V_1 = \text{cent}(G)$ τότε ισχύει $G - V_1 = G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_r$, όπου G_i είναι συνδεδεμένο υπογράφημα του $G - V_1$ και $r \geq 3$. Επομένως, μπορούμε να έχουμε την ακόλουθη διαμέριση του $V(G)$.

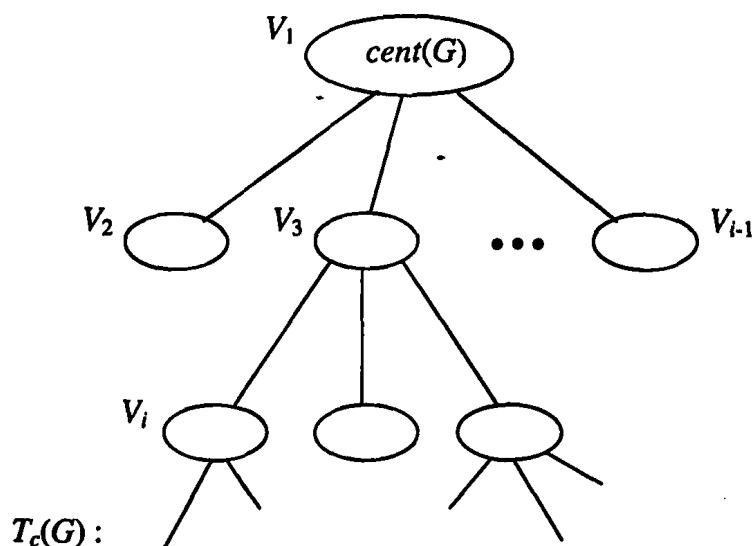
$$V(G) = V_1 + V_2 + \dots + V_k \text{ όπου } V_i = \text{cent}(G_i).$$

Επίσης ορίστηκε μια διάταξη \leq στο σύνολο $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ ως εξής:

$$V_i \leq V_j, \quad \text{εάν } V_i = \text{cent}(G_i) \text{ και } V_j \subseteq V(G_i).$$

Έχει αποδειχτεί [14] ότι ένα QT -γράφημα G έχει μια μοναδική δενδρική αναπαράσταση. Η δομή του δέντρου ακολουθεί τις ιδιότητες του G και αναφερόμαστε σε αυτό ως cent-tree του γραφήματος G και το συμβολίζουμε με $T_c(G)$. Στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζουμε μια τυπική δομή ενός $T_c(G)$. Τα V_i ονομάζονται και *πυρήνες* του γραφήματος G .

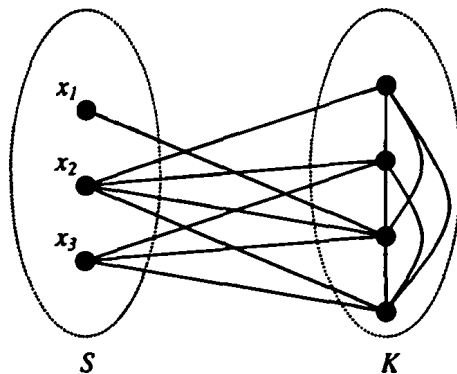
Το cent-tree είναι ένα δέντρο με κεντρικό κόμβο (ρίζα) τον κόμβο V_1 . Κάθε κόμβος V_i του $T_c(G)$, είναι είτε φύλλο, είτε έχει τουλάχιστον δύο παιδιά. Επίσης, από τις ιδιότητες που έχει το cent-tree ισχύει ότι $V_s \leq V_i$ εάν και μόνο εάν V_s είναι πρόγονος του V_i στο $T_c(G)$. Βασισμένοι στη δομή του cent-tree θέλουμε να καταλήξουμε σε κλειστό τύπο για το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - G$.



Σχήμα 5.1. Η τυπική δομή του $\text{cent-tree } T_c(G)$ ενός QT -γραφήματος.

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται *split* εάν υπάρχει μια διαμέριση $V = S + K$ των κόμβων του, με $s = |S|$ και $k = |K|$, σε ανεξάρτητο σύνολο S (*stable set*) και πλήρες σύνολο K (*complete set*). Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για τις ακμές μεταξύ των κόμβων από το S σύνολο και των κόμβων από το K σύνολο [7, 8].

Γενικά, η διαμέριση $V = S + K$ ενός *split* γραφήματος δεν είναι μοναδική. Δηλαδή, το σύνολο S (αντίστοιχα το σύνολο K) δεν είναι απαραίτητα το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο (αντίστοιχα κλίκα). Για παράδειγμα, το γράφημα G του Σχήματος 5.2 έχει δύο διαμερίσεις, μια από τις οποίες παρουσιάζουμε.

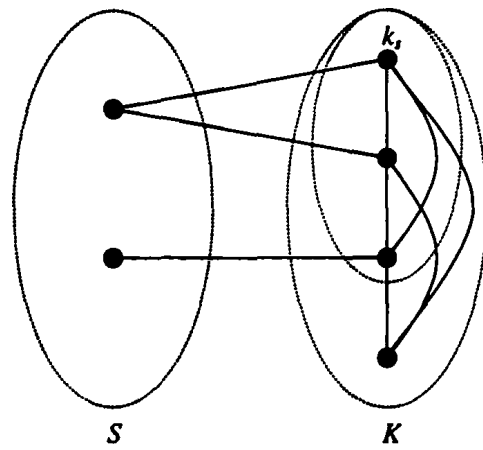


Σχήμα 5.2. Μια από τις δύο διαμερίσεις ενός *split* γραφήματος. Οι υπόλοιπες είναι $(S - \{x_i\}) + (K \cup \{x_i\})$ για $i = 2$.

Εφόσον, το ανεξάρτητο σύνολο του G είναι το πλήρες σύνολο στο συμπλήρωμα \bar{G} και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα. Ένα γράφημα G είναι *split* γράφημα εάν και μόνο εάν το συμπλήρωμά του \bar{G} είναι *split* γράφημα [1].

Θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε μια υποκατηγορία των *split* γραφημάτων από την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων. Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα, που οι κόμβοι του μπορούν να χωριστούν σε $V = S + K$. Το γράφημα G ονομάζεται *k-split* όταν όλοι οι κόμβοι από το σύνολο K έχουν το πολύ βαθμό k . Δηλαδή, κάθε κόμβος από το σύνολο K μπορεί να ενώνεται με έναν ή κανέναν κόμβο από το σύνολο S .

Ένα *k-split* γράφημα συμβολίζεται ως $k\text{-split}(d_1, d_2, \dots, d_s)$ όπου d_1, d_2, \dots, d_s δηλώνουν το βαθμό των κόμβων από το σύνολο S και $k_s = d_1 + d_2 + \dots + d_s$ κόμβοι από το σύνολο K ενώνονται με έναν κόμβο από το σύνολο S . Όπως είναι λογικό θα πρέπει $s \leq k_s \leq k$. Ένα *k-split* γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 5.3.

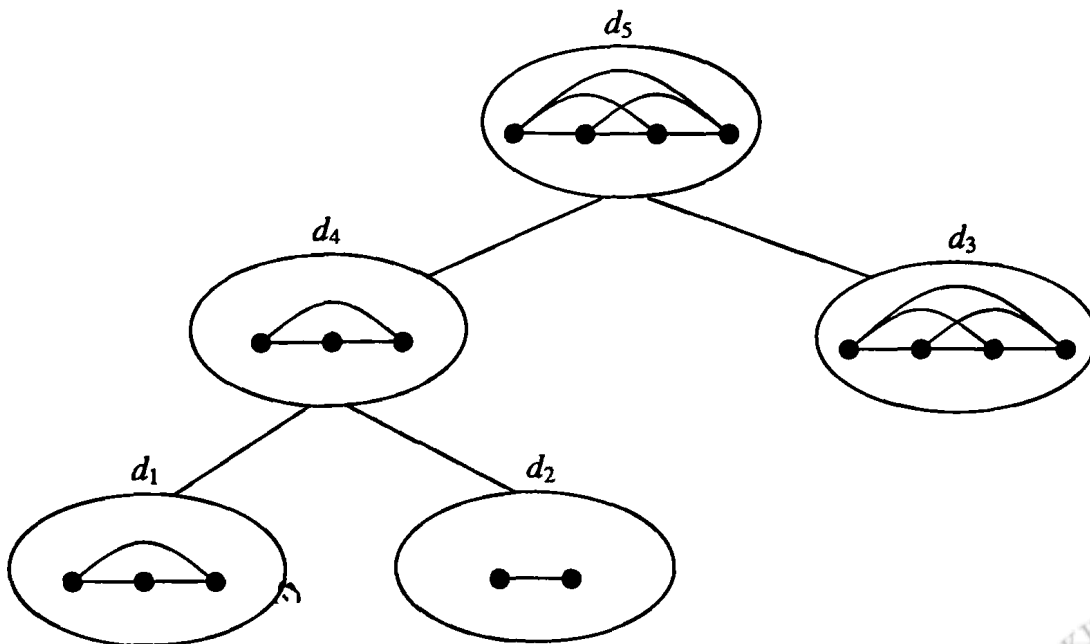


Σχήμα 5.3. Ένα k -split(d_1, d_2) γράφημα με $d_1 = 2, d_2 = 1$ και $k_s = 3$.

5.2 Αναλυτικός τύπος για *Quasi-Threshold* γραφήματα

Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - QT(d_1, d_2, \dots, d_k)$, όπου k το πλήθος των πυρήνων του QT , χρησιμοποιώντας τον πίνακα των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων.

Επιγράφουμε τους κόμβους του γραφήματος με τον τρόπο που εξηγήσαμε στην ενότητα 4.1 για την περίπτωση του δέντρου. Στο Σχήμα 5.4 διακρίνουμε ένα QT γράφημα με 5 πυρήνες και τις αντίστοιχες επιγραφές στους πυρήνες. Αξίζει να σημειώσουμε πως ο βαθμός των κόμβων που ανήκουν σε έναν πυρήνα είναι ο ίδιος (βαθμός του πυρήνα).



Σχήμα 5.4. Ένα QT γράφημα με επιγραφές στους πυρήνες του.

Γνωρίζοντας τον βαθμό d_i για κάθε πυρήνα (όλοι οι κόμβοι σε κάθε πυρήνα έχουν βαθμό d_i) και το πλήθος των κόμβων p_i που έχει κάθε πυρήνας μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα B , διάστασης $(\sum_{i=1}^k p_i) \times (\sum_{i=1}^k p_i)$, βασισμένοι στη δομή του *cent-Tree*, με την ακόλουθη μορφή,

$$B = \begin{bmatrix} a_{d_1} & b & \dots & b & & b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b \\ b & a_{d_1} & \dots & b & & b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a_{d_1} & & b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b \\ & & & & \ddots & & & & & & & & & \\ b & b & \dots & b & & a_{d_p} & b & \dots & b & & b & b & \dots & b \\ b & b & \dots & b & & b & a_{d_p} & \dots & b & & b & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & & b & b & \dots & a_{d_p} & & b & b & \dots & b \\ & & & & & & & & & \ddots & & & & \\ b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b & & a_{d_k} & b & \dots & b \\ b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b & & b & a_{d_k} & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b & & b & b & \dots & a_{d_1} \end{bmatrix}$$

όπου (από τον ορισμό του τον πίνακας των συμπληρωματικών σκελετικών δέντρων)
 $b = 1/n$ και $a_{d_i} = 1 - (d_i) b$.

Για παράδειγμα ο πίνακας B του γραφήματος του Σχήματος 5.4, όταν αφαιρείται από ένα γράφημα K_n , θα έχει την ακόλουθη μορφή:



$$B = \begin{bmatrix}
 a_{d_1} & b & b & & & & & & & b & b & b & b & b & b & b \\
 b & a_{d_1} & b & & & & & & & b & b & b & b & b & b & b \\
 b & b & a_{d_1} & & & & & & & b & b & b & b & b & b & b \\
 & & & a_{d_2} & b & & & & & b & b & b & b & b & b & b \\
 & & & b & a_{d_2} & & & & & b & b & b & b & b & b & b \\
 & & & & & a_{d_3} & b & b & b & & & & b & b & b & b \\
 & & & & & b & a_{d_3} & b & b & & & & b & b & b & b \\
 & & & & & b & b & a_{d_3} & b & & & & b & b & b & b \\
 & & & & & b & b & b & a_{d_3} & & & & b & b & b & b \\
 b & b & b & b & b & & & & & a_{d_4} & b & b & b & b & b & b \\
 b & b & b & b & b & & & & & b & a_{d_4} & b & b & b & b & b \\
 b & b & b & b & b & & & & & b & b & a_{d_4} & b & b & b & b \\
 b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & a_{d_5} & b & b & b \\
 b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & a_{d_5} & b & b \\
 b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & b & a_{d_5} & b
 \end{bmatrix}$$

Για να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα B μπορούμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία από κάθε πυρήνα, ως εξής:

πολλαπλασιάζουμε με -1 την πρώτη γραμμή από κάθε πυρήνα p_i και την προσθέτουμε μέχρι την γραμμή p_i , γνωρίζοντας ότι

$$a_{d_i} - b = 1 - d_i, \quad b - b = 1 - (d_i + 1)b = a_{d_{i+1}},$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{d_1} & b & \dots & b & & b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b \\ -a_{d_1+1} & a_{d_1+1} & & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & & & & & & \\ -a_{d_1+1} & & & a_{d_1+1} & & & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & & & \\ b & b & \dots & b & & a_{d_p} & b & \dots & b & & b & b & \dots & b \\ & & & & & -a_{d_p+1} & a_{d_p+1} & & & & & & & & \\ & & & & & \vdots & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & -a_{d_p+1} & & & a_{d_p+1} & & & & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ b & b & \dots & b & & b & b & \dots & b & & a_{d_k} & b & \dots & b \\ & & & & & & & & & & -a_{d_k+1} & a_{d_k+1} & & & \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & -a_{d_k+1} & & & a_{d_k+1} & \end{vmatrix}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με -1 κάθε στήλη p_i από κάθε πυρήνα και τις προσθέτουμε στις στήλες $1, 2, \dots, p_i - 1$. Οπότε,

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{d_1+1} & & b & & & & b & & & & b \\ -a_{d_1+1} & a_{d_1+1} & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ -2a_{d_1+1} & -a_{d_1+1} & \cdots & a_{d_1+1} & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & b & & a_{d_p+1} & & b & & & b \\ & & & & & -a_{d_p+1} & a_{d_p+1} & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & -2a_{d_p+1} & -a_{d_p+1} & \cdots & a_{d_p+1} & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & b & & & & & b & & a_{d_k+1} & & b \\ & & & & & & & & & & -a_{d_k+1} & a_{d_k+1} & \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & & & & & -2a_{d_k+1} & -a_{d_k+1} & \cdots & a_{d_k+1} \end{vmatrix}$$

Τώρα μπορούμε να προσθέσουμε τις στήλες 2, 3, ..., $p_i - 1$ στη πρώτη στήλη από κάθε πυρήνα με αποτέλεσμα,

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{d_1+1} & & b & & & & b & & & & b \\ & a_{d_1+1} & & & & & & & & & \\ -p_1 a_{d_1+1} & -a_{d_1+1} & \cdots & a_{d_1+1} & & & & & & & \\ & & & b & & a_{d_p+1} & & b & & & b \\ & & & & & a_{d_p+1} & & & & & \\ -p_p a_{d_p+1} & -a_{d_p+1} & \cdots & a_{d_p+1} & & & & & & & \\ & & & b & & & & & b & & a_{d_k+1} & & b \\ & & & & & & & & & & a_{d_k+1} & & \\ -p_k a_{d_k+1} & -a_{d_k+1} & \cdots & a_{d_k+1} & & & & & & & \end{vmatrix}$$

Για να μηδενίσουμε κάθε στοιχείο από τις πρώτες γραμμές κάθε πυρήνα, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη στήλη από κάθε πυρήνα με $-b / (a_{d_i} - b)$ και να τις



προσθέσουμε στη τελευταία στήλη του πυρήνα και σε όλες τις άλλες στήλες που δεν έχει μηδενικά στοιχεία (στη τελευταία στήλη από τους πυρήνες με τους οποίους συνδέεται). Επομένως,

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccccccc}
 & a_{d_1+1} & & & & & \\
 & & a_{d_1+1} & & & & \\
 & & & \dots & & & \\
 -p_1 a_{d_1+1} & -a_{d_1+1} & \dots & a_{d_1+1} + p_1 b & & p_1 b & p_1 b \\
 & & & & & & \\
 & & & & a_{d_p+1} & & \\
 & & & & & a_{d_p+1} & \\
 & & & & & & \dots \\
 p_p b & -p_p a_{d_p+1} & -a_{d_p+1} & \dots & a_{d_p+1} + p_p b & & p_p b \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & a_{d_k+1} \\
 & & & & & & & a_{d_k+1} \\
 & & & & & & & & \dots \\
 p_k b & & & & p_k b & -p_k a_{d_k+1} & -a_{d_k+1} & \dots & a_{d_k+1} + p_k b \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \dots
 \end{array} \\
 \\
 & = a_{d_1+1}^{p_1-1} \dots a_{d_p+1}^{p_p-1} \dots a_{d_k+1}^{p_k-1} \begin{vmatrix} a_{d_1+1} + p_1 b & p_1 b & p_1 b \\ p_p b & a_{d_p+1} + p_p b & p_p b \\ p_k b & p_k b & a_{d_k+1} + p_k b \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Η τελευταία ορίζουσα έχει διάσταση $k \times k$ (το πλήθος των πυρήνων). Εάν με r_i συμβολίσουμε το βαθμό που έχει κάθε πυρήνας, χωρίς να συμπεριλαμβάνει τους κόμβους που βρίσκονται στον ίδιο πυρήνα, τότε τα στοιχεία της κύρια διαγωνίου είναι:

$$a_{d_i} - b + p_i b = 1 - (r_i + p_i - 1)b - b + p_i b = 1 - r_i b = a_{r_i}$$

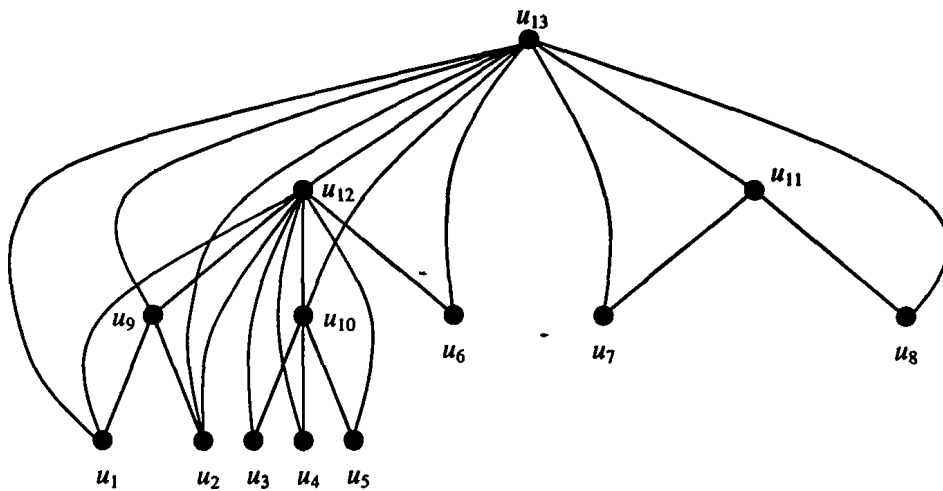
Έτσι λοιπόν, καταλήγουμε στην ορίζουσα του πίνακα B να είναι:



$$\det(B) = \prod_{i=1}^k p_i (a_{d_i} - b)^{p_i-1} M$$

$$= \prod_{i=1}^k p_i (a_{d_i} - b)^{p_i-1} M \quad (5.1)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και μια ειδική κατηγορία γραφημάτων, που ονομάζεται *Quasi-Threshold* δέντρο και συμβολίζεται $QT_k(d_1, d_2, \dots, d_k)$ [15]. Σε αυτή τη περίπτωση κάθε κόμβος του δέντρου ενώνεται με όλους τους απόγονους του και όχι μόνο με τα παιδιά του, όπως είδαμε στη γενική περίπτωση δέντρου. Η παραπάνω ορίζουσα M εκφράζει ένα *quasi-threshold* δέντρο διάστασης $k \times k$. Στο Σχήμα 5.5 διακρίνουμε ένα QT_{13} δέντρο.



Σχήμα 5.5. Το αντίστοιχο δέντρο QT_{13} του Σχήματος 4.5.

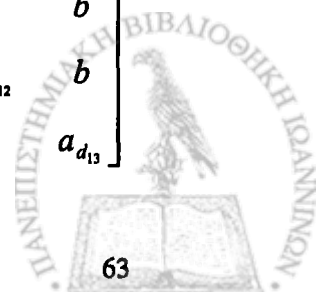
Μας ενδιαφέρει το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $K_n - QT_k(d_1, d_2, \dots, d_k)$. Θεωρώντας, την αρίθμηση των κόμβων που δείξαμε και στο δέντρο ο πίνακας B θα έχει την ακόλουθη δομή:

$$B = \begin{bmatrix} a_{d_1} & & & & & & b & & b & \dots & b \\ & a_{d_2} & & & & & b & & b & \dots & b \\ & & \dots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & a_{d_{i+1}} & & & b & b & \dots & b \\ & & & & a_{d_{i+2}} & & b & b & \dots & b \\ & & & & & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \dots & & & & a_{d_i} & & b & \dots & b \\ & & & b & b & \dots & a_{d_{i+1}} & & b & \dots & b \\ b & b & \dots & b & b & \dots & b & b & a_{d_{i+2}} & & b \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & b & \dots & b & b & b & \dots & a_{d_k} \end{bmatrix}$$

όπου $a_i = 1 - (i b)$ και $b = 1/n$ για $1 \leq i \leq k$.

Για παράδειγμα ο πίνακας B του γραφήματος του Σχήματος 5.5, όταν αφαιρείται από ένα γράφημα K_n , θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B = \begin{bmatrix} a_{d_1} & & & & & & & & & & b & & b & b \\ & a_{d_2} & & & & & & & & & b & & b & b \\ & & a_{d_3} & & & & & & & & b & & b & b \\ & & & a_{d_4} & & & & & & & b & & b & b \\ & & & & a_{d_5} & & & & & & b & & b & b \\ & & & & & a_{d_6} & & & & & b & & b & b \\ & & & & & & a_{d_7} & & & & b & & b & b \\ & & & & & & & a_{d_8} & & & b & & b & b \\ b & b & & & & & & & a_{d_9} & & & & b & b \\ & & b & b & b & & & & & & a_{d_{10}} & & & b & b \\ & & & b & & & & & & & & a_{d_{11}} & & & b \\ b & b & b & b & b & b & & & & & b & b & & & b \\ b & b & b & b & b & b & b & & & & b & b & & & b \\ b & b & b & b & b & b & b & b & & & b & b & & & b \\ & & & & & & & & & & & & a_{d_{12}} & & & b \\ & & & & & & & & & & & & & a_{d_{13}} & & & b \end{bmatrix}$$



Με σκοπό να υπολογίσουμε την ορίζουσα του παραπάνω πίνακα, πολλαπλασιάζουμε κάθε στήλη i , με $u_i \neq \text{φύλλο}$, και έστω r_i η γραμμή με το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης i και την προσθέτουμε στις επόμενες στήλες $i + j$, για $1 \leq j \leq k$ και στη γραμμή r_i υπάρχει μη-μηδενικό στοιχείο.

Εφαρμόζουμε τις παραπάνω πράξεις για τις στήλες που έχουν το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο στις γραμμές $1, 2, \dots, l$ με αποτέλεσμα:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{d_1} & & & & & & & & b \\ & a_{d_2} & & & & & & & b \\ & & \dots & & & & & & \vdots \\ & & & a_{d_{i+1}} & & & & & b \\ & & & & a_{d_{i+2}} & & & & b \\ & & & & & \dots & & & \vdots \\ b & b & \dots & & & & a_{d_i} & & b - a_{d_i} & \dots & b - a_{d_i} \\ & & & b & b & \dots & & a_{d_{i+1}} & b - a_{d_2} & \dots & b - a_{d_2} \\ b & b & \dots & b & b & \dots & b & b & (a_{d_{i+2}} - 2b) & & -b \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & b & \dots & b & b & -b & \dots & -(a_{d_i} - 2b) \end{vmatrix}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για τις επόμενες στήλες θα έχουμε:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{d_1} & & & & & & & & b \\ & a_{d_2} & & & & & & & b \\ & & \dots & & & & & & \vdots \\ & & & a_{d_{i+1}} & & & & & b \\ & & & & a_{d_{i+2}} & & & & b \\ & & & & & \dots & & & \vdots \\ b & b & \dots & & & & a_{d_i} & & b - a_{d_i} \\ & & & b & b & \dots & & a_{d_{i+1}} & b - a_{d_2} \\ b & b & \dots & b & b & \dots & b & b & (a_{d_{i+2}} - 2b) & & b - a_{d_3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b & b & \dots & b & b & -b & \dots & -(a_{d_i} - b) \end{vmatrix}$$

Εκτελώντας τις αντίστοιχες πράξεις, όπως προηγουμένως, για κάθε γραμμή $i + j$, για $1 \leq j \leq k - i$, της ορίζουσας του πίνακα B , καταλήγουμε:



$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{d_1} & & & & & & & & b \\ & a_{d_2} & & & & & & & b \\ & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & a_{d_{l+1}} & & & & & b \\ & & & & a_{d_{l+2}} & & & & b \\ & & & & & \ddots & & & \vdots \\ b & b & \dots & & & & & & b - a_{d_l} \\ & & b & b & \dots & & & & b - a_{d_{l+1}} \\ & & & & b - a_{d_l} & b - a_{d_{l+1}} & (a_{d_{l+2}} + a_{d_{l+1}} + a_{d_l} - 4b) & & b - a_{d_{l+2}} \\ & & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & b - a_{d_{l+2}} \\ & & & & & & & & \dots (a_{d_l} + a_{d_{l+2}} - 2b) \end{vmatrix}$$

Θεωρώντας τις ποσότητες σ_i για $i = 1, \dots, k$

$$\sigma_i = \begin{cases} 0, & \text{εάν } i \text{ φύλλο} \\ a_i, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\Gamma_i = \begin{cases} a_i, & \text{εάν } i \text{ φύλλο} \\ a_i + \sum_{j \in \text{child}(i)} (\sigma_j - 2b), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

η γενική μορφή της ορίζουσας του πίνακα B γίνεται:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & & & & & & & & b - \sigma_1 \\ & \Gamma_2 & & & & & & & b - \sigma_2 \\ & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & \Gamma_{l+1} & & & & & b - \sigma_{l+1} \\ & & & & \Gamma_{l+2} & & & & b - \sigma_{l+2} \\ & & & & & \ddots & & & \vdots \\ b - \sigma_1 & b - \sigma_2 & \dots & & & & & & b - \sigma_s \\ & & b - \sigma_{l+1} & b - \sigma_{l+2} & \dots & & & & \Gamma_s & b - \sigma_s \\ & & & & & & & & & \Gamma_{s+1} & b - \sigma_{s+1} \\ & & & & & & & & & & \Gamma_{s+2} & b - \sigma_{s+2} \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & b - \sigma_{s+2} \\ & & & & & & & & & & & \Gamma_k \end{vmatrix}$$

Η παραπάνω ορίζουσα έχει παρόμοια δομή με την ορίζουσα που διατυπώσαμε για το δέντρο $T_k(d_1, d_2, \dots, d_k)$ (παράγραφος 4.2). Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο, που εφαρμόσαμε και για το $T_k(d_1, d_2, \dots, d_k)$, στην περίπτωση του $G = K_n - QT_k(d_1, d_2, \dots, d_k)$ καταλήγουμε

$$\tau(G) = n^{n-2} \prod_{i=1}^k L_i \quad (5.2)$$

$$\text{με } L_i = \begin{cases} a_i & \text{εάν } i \text{ φύλλο} \\ a_i + \sum_{j \in \text{child}(i)} \sigma_j - 2b - \frac{(b - \sigma_j)^2}{L_j} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $a_i = 1 - (d_i b)$ και $b = 1/n$ για $1 \leq i \leq k$ και σ_i η ποσότητα που ορίσαμε προηγουμένως.

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, το προηγούμενο αποτέλεσμα στο τύπο (5.1) ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \text{ είναι φύλλο} \\ \frac{1 - r_i b}{p_i} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$L_i = \begin{cases} \frac{1 - r_i b}{p_i} & \text{εάν } i \text{ είναι φύλλο} \\ \frac{1 - r_i b}{p_i} + \sum_{j \in \text{child}(i)} \left(\sigma_j - 2b - \frac{b - \sigma_j}{L_j} \right) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για $1 \leq i \leq k$.

Έτσι καταλήγουμε στον αναδρομικό τύπο του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - QT(d_1, d_2, \dots, d_k)$:

$$\tau(G) = n^{n-2} \prod_{i=1}^k p_i [1 - (r_i + p_i)b]^{p_i-1} L_i \quad (5.3)$$

όπου $r_i = d_i - p_i + 1$, p_i εκφράζει το πλήθος των κόμβων σε κάθε πυρήνα και $b = 1/n$.



$$\det(B) = \prod_{i=1}^s (a_{d_i}) \begin{vmatrix} a_k - \frac{b^2}{a_{d_1}} & \dots & b - a_k & \dots & b & & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ b - \frac{b^2}{a_{d_1}} & & a_k - b & & b & & b & \dots & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ b & & & & a_k - \frac{b^2}{a_{d_2}} & \dots & b - a_k & b & \dots & b \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & & \vdots & \dots & \vdots \\ b & & & & b - \frac{b^2}{a_{d_2}} & & a_k - b & b & \dots & b \\ \vdots & & & & \vdots & & & a_{k-1} & \dots & b \\ b & & & & b & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & & & & b & & & b & \dots & a_{k-1} \end{vmatrix}$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε την ποσότητα l_i ως:

$$l_i = \frac{b^2}{a_{d_i}}, \text{ για } 1 \leq i \leq s.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή l_i στην παραπάνω ορίζουσα και εκτελούμε s πράξεις,

- 1: πρόσθεση των γραμμών 2, 3, ..., d_1 στη γραμμή 1,
- 2: πρόσθεση των γραμμών $d_1 + 2, d_1 + 3, \dots, d_1 + d_2$ στη γραμμή $d_1 + 1$,
- ⋮
- s : πρόσθεση των γραμμών $(d_1 + \dots + d_{s-1}) + 2, (d_1 + \dots + d_{s-1}) + 3, \dots, (d_1 + \dots + d_{s-1}) + d_s$ στη γραμμή s ,

με αποτέλεσμα:

$$\det(B) = \prod_{i=1}^s (a_{d_i}) \begin{vmatrix} a_k - l_1 + (d_1 - 1)(b - l_1) & & d_1 b & & d_1 b & d_1 b \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & b - l_1 & & a_k - b & & b & b \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ d_s b & & & a_k - l_s + (d_s - 1)(b - l_s) & & d_s b & d_s b \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & & & b - l & & a_k - b & b & b \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & b & & & a_{k-1} & \ddots & b \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & b & \cdots & a_{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^s (a_{d_i}) (a_k - b)^{(d_1-1)} \cdots (a_k - b)^{(d_s-1)} \begin{vmatrix} a_k - d_1 l_1 + (d_1 - 1)b \cdots & d_1 b & d_1 b \cdots d_1 b \\ & \ddots & \vdots \\ d_s b & & a_k - d_s l_s + (d_s - 1)b d_s b \cdots d_s b \\ \vdots & & \vdots \\ b & & b & & a_{k-1} \cdots b \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & b & & b \cdots a_{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^s a_{d_i} d_i (a_k - b)^{(k_s - s)} \begin{vmatrix} \frac{a_k - d_1 l_1 + (d_1 - 1)b}{d_1} \cdots & b & b \cdots b \\ & \ddots & \vdots \\ b & & \frac{a_k - d_s l_s + (d_s - 1)b}{d_s} b \cdots b \\ & & \vdots \\ b & & b & & a_{k-1} \cdots b \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & b & & b \cdots a_{k-1} \end{vmatrix}$$

Τώρα, η παραπάνω ορίζουσα έχει διάσταση $(s + k - k_s) \times (s + k - k_s)$. Ορίζουμε την ποσότητα $\Phi_i = (a_k - d_i l_i + (d_i - 1)b) / d_i$ και πολλαπλασιάζουμε με -1 την τελευταία στήλη και την προσθέτουμε στις υπόλοιπες. Τότε έχουμε



$$\det(B) = \prod_{i=1}^s a_{d_i} d_i (a_k - b)^{(k-s)}$$

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 - b & & & & b \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \Phi_s - b & & b \\ & & & a_{k-1} - b & b \\ & & & & \ddots \\ b - a_{k-1} & \cdots & b - a_{k-1} & b - a_{k-1} & \cdots & a_{k-1} \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την $s + 1$ γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στις υπόλοιπες $s + 2, s + 3, \dots, s + k - k_s$ γραμμές και στη συνέχεια προσθέτουμε τις στήλες $s + 2, s + 3, \dots, s + k - k_s$ στη στήλη $s + 1$.

$$\det(B) = \prod_{i=1}^s a_{d_i} d_i (a_k - b)^{(k-s)}$$

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 - b & & & & b \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \Phi_s - b & & b \\ & & & a_{k-1} - b & b \\ & & & & \ddots \\ b - a_{k-1} & \cdots & b - a_{k-1} & (k - k_s - 1)(b - a_{k-1}) & \cdots & a_{k-1} \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάσουμε την $s + 1$ στήλη με $-b / (a_{k-1} - b)$ και την προσθέτουμε στη τελευταία στήλη.

$$\det(B) = \prod_{i=1}^s a_{d_i} d_i (a_k - b)^{(k-s)} (a_{k-1} - b)^{k-k_s-1}$$

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 - b & & & & b \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \Phi_s - b & & b \\ b - a_{k-1} & \cdots & b - a_{k-1} & a_{k-1} + (k - k_s - 1)b \end{vmatrix}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τις στήλες $1, 2, \dots, s$ με $-b / (\Phi_i - b)$ για $1 \leq i \leq s$, και τις προσθέτουμε στη τελευταία στήλη.

Επίσης, έχουμε ότι ισχύει:

$$a_{k-1} - b = 1 - (k-1)b - b = a_k$$

και αντίστοιχα

$$a_k - b = 1 - kb - b = a_{k+1}$$



και, επομένως, έχουμε:

$$\det(B) = a_{k+1}^{k-s} a_k^{k-k_s-1} \left(a_{k-1} + (k-k_s-1)b + a_k b \left(\frac{1}{\Phi_1-b} + \dots + \frac{1}{\Phi_s-b} \right) \right) \prod_{i=1}^s a_{d_i} d_i (\Phi_i - b)$$

Επειδή,

$$\Phi_i - b = \frac{a_k - d_i l_i + (d_i - 1)b}{d_i} - b = \frac{a_k - d_i l_i - b}{d_i} = \frac{a_{k+1} - d_i l_i}{d_i}$$

η ορίζουσα του πίνακα B γίνεται:

$$\det(B) = a_{k+1}^{k-s} a_k^{k-k_s-1} \left(a_k + a_k b \left(\frac{d_1}{a_{k+1} - d_1 l_1} + \dots + \frac{d_s}{a_{k+1} - d_s l_s} \right) \right) \prod_{i=1}^s a_{d_i} (a_{k+1} - d_i l_i)$$

όπου $a_i = 1 - (i \times b)$, $b = 1/n$ και $l_i = b^2 / a_{d_i}$.

Έτσι λοιπόν το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - k\text{-Split}(d_1, d_2, \dots, d_s)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\tau(G) = n^{n-2} a_{k+1}^{k-s} a_k^{k-k_s-1} \left(a_k + a_k b \left(\frac{d_1}{a_{k+1} - d_1 l_1} + \dots + \frac{d_s}{a_{k+1} - d_s l_s} \right) \right) \prod_{i=1}^s a_{d_i} (a_{k+1} - d_i l_i)$$

(5.4)

Στην ειδική περίπτωση που όλοι οι κόμβοι του πλήρους συνόλου K ενώνονται ακριβώς με ένα κόμβο με το ανεξάρτητο σύνολο S , δηλαδή $k_s = k$, τότε:

$$\tau(G) = n^{n-2} a_{k+1}^{k-s} \left(1 + b \left(\frac{d_1}{a_{k+1} - d_1 l_1} + \dots + \frac{d_s}{a_{k+1} - d_s l_s} \right) \right) \prod_{i=1}^s a_{d_i} (a_{k+1} - d_i l_i)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

-
- 6.1 Κατάταξη Γραφημάτων με βάση το πλήθος των Σκελετικών Δέντρων
 - 6.2 Περιπτώσεις Μειστοποίησης του πλήθους των Σκελετικών Δέντρων
 - 6.3 Μελέτη Δείκτη Σκελετικών Δέντρων
 - 6.4 Πειραματική μελέτη πλήθους Σκελετικών Δέντρων σε Μεταθετά Γραφήματα
-

6.1 Κατάταξη Γραφημάτων με βάση το πλήθος των Σκελετικών Δέντρων

Υπολογίζοντας κλειστούς τύπους για το πλήθος των σκελετικών δέντρων γραφημάτων της μορφής $G = K_n - H$, όπου H είναι ένα γράφημα μιας κλάσης από το σύνολο των κλάσεων γραφημάτων που εξετάζουμε, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα γραφήματα που έχουν μέγιστο πλήθος $\tau(G)$ συναρτήσει των υπολοίπων γραφημάτων της ίδιας κλάσης. Τέτοια μελέτη έχει πρακτικές εφαρμογές στην ευστάθεια δικτύων υπολογιστών.

Καθώς γραφήματα με περισσότερα σκελετικά δέντρα είναι προτιμότερα από γραφήματα με λιγότερα, μας ενδιαφέρει η ταξινόμηση των γραφημάτων με βάση το πλήθος των σκελετικών δέντρων από κάθε κλάση γραφημάτων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στη συγκεκριμένη ενότητα θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στις βασικές κατηγορίες γραφημάτων.

Θεωρούμε ένα σύνολο μερικών κλάσεων γραφημάτων που μελετάμε. Έστω

$$L = \{ \text{Complete, Path, Cycle, Disjoint, Star} \}$$

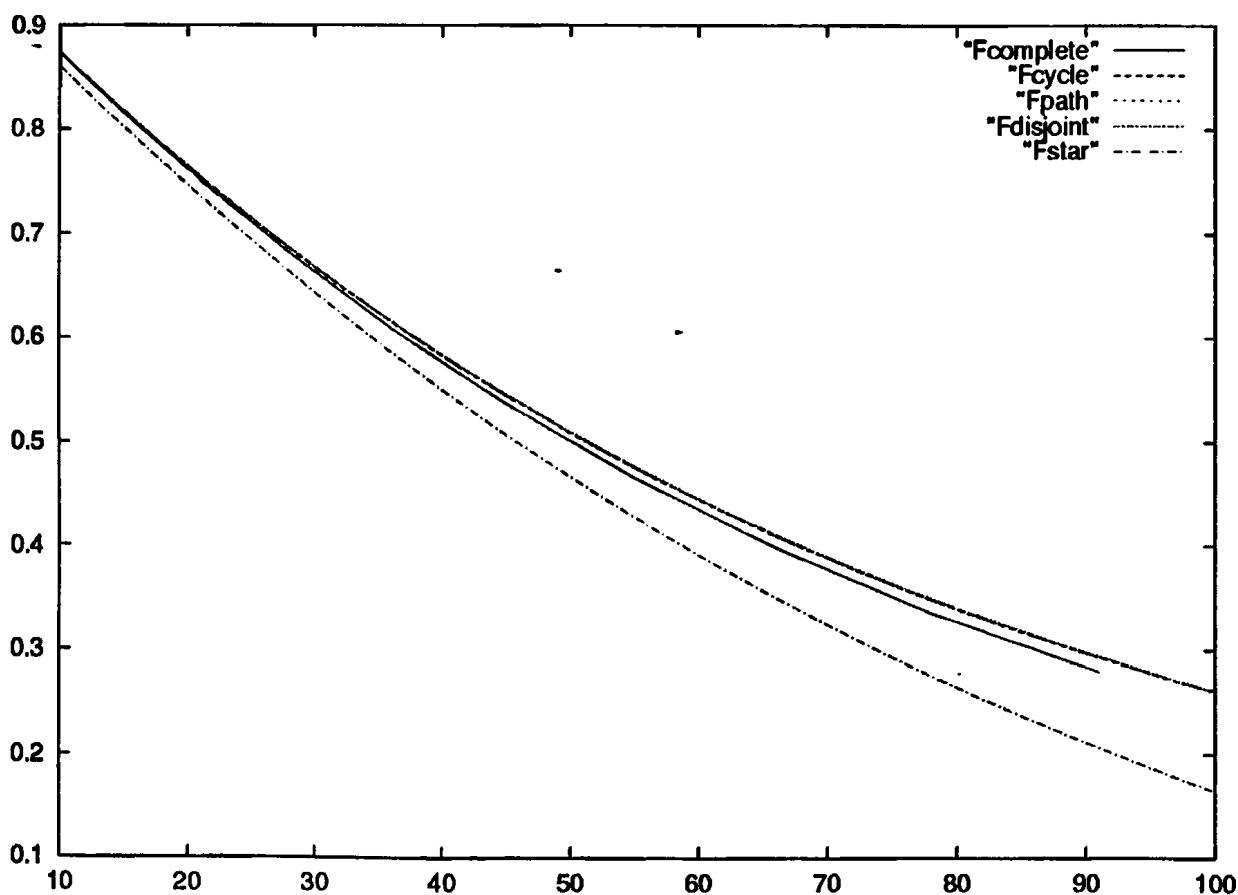
αυτό το σύνολο.

Για υπολογιστικούς λόγους, όταν αναφερόμαστε στο πλήθος των σκελετικών δέντρων $\tau(G)$, δεν θα συμπεριλαμβάνουμε τον παράγοντα n^{n-2} (Θεώρημα Πινάκων-Δέντρων), χωρίς αυτό να επηρεάζει την μελέτη μας, αφού ο παράγοντας αυτός



εμφανίζεται στις εκφράσεις του πλήθους σκελετικών δέντρων για όλες τις κλάσεις γραφημάτων. Επίσης, για την σύγκριση του πλήθους των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων για κάθε κλάση του συνόλου L , υποθέτουμε τα γραφήματα έχουν το ίδιο πλήθος ακμών. Δηλαδή, εξετάζοντας γραφήματα της μορφής $G_i = K_n - H_i$, όπου H_i ένα γράφημα από την L_i κλάση, τότε για διαφορετικές κλάσεις γραφημάτων θα πρέπει να ισχύει $|E(H_i)| = |E(H_j)|$ για κάθε $i \neq j$. Για παράδειγμα, για να συγκρίνουμε το πλήθος των σκελετικών δέντρων ενός πλήρους γραφήματος [$H_j \in (L_j \equiv Complete)$] και ενός κυκλικού γραφήματος [$H_i \in (L_i \equiv Cycle)$] απαιτούμε να έχουν τον ίδιο πλήθος ακμών.

Η πρώτη περίπτωση που θα ασχοληθούμε, είναι εκείνη κατά την οποία μεταβάλλουμε το πλήθος των ακμών από κάθε κλάση γραφημάτων, δημιουργώντας καινούρια H_i , χωρίς να επηρεάζουμε το πλήρες γράφημα K_n . Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζονται οι μεταβολές του πλήθους των σκελετικών δέντρων $\tau(G_i)$ από πέντε βασικά γραφήματα όταν παράγουμε γραφήματα της μορφής $G_i = K_{150} - H_i$. Στον οριζόντιο άξονα διακρίνουμε τις τιμές των ακμών από κάθε κλάση γραφημάτων, ενώ στον κατακόρυφο άξονα παρουσιάζονται οι μεταβολές του πλήθους των σκελετικών δέντρων.



Σχήμα 6.1. Το πλήθος $\tau(G)$ με $n = 150$ και $m_H = 10, \dots, 100$ στην αντίστοιχη κλάση γραφημάτων H .

H_i	m_H									
	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
<i>Complete</i>	0.873	0.815	0.750	0.681	0.609	0.537	0.466	0.399	0.336	0.279
<i>Cycle</i>	0.873	0.817	0.753	0.685	0.615	0.545	0.476	0.411	0.349	0.293
<i>Path</i>	0.874	0.817	0.753	0.685	0.615	0.545	0.476	0.411	0.349	0.293
<i>Disjoint</i>	0.874	0.817	0.754	0.686	0.616	0.546	0.477	0.412	0.350	0.294
<i>Star</i>	0.860	0.802	0.735	0.663	0.586	0.508	0.429	0.351	0.276	0.206

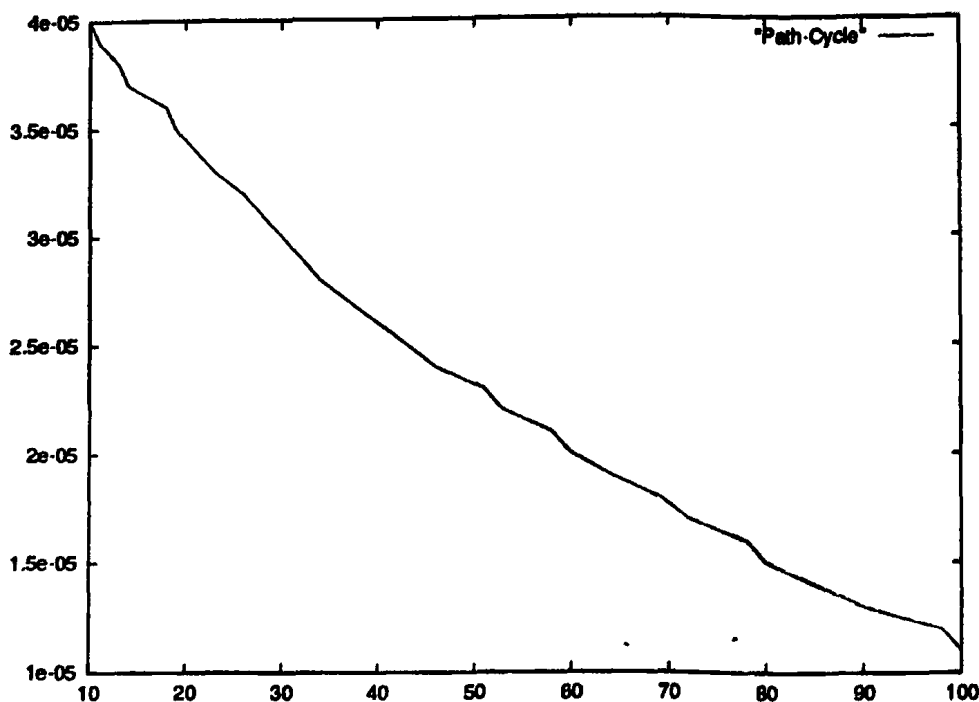
Πίνακας 6.1. Ενδεικτικές τιμές $\tau(G)$ του Σχήματος 6.1 για κάθε κατηγορία γραφημάτων.

Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι ένα γράφημα από την κλάση *star* έχει το μικρότερο πλήθος σκελετικών δέντρων $\tau(G)$ από κάθε γράφημα των υπολοίπων κλάσεων που μελετάμε. Σε ένα γράφημα που ανήκει στην κλάση των *star* οι βαθμοί των κόμβων του είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για το *complete* γράφημα δεν υπάρχουν τιμές για κάθε σημείο στον οριζόντιο άξονα, αφού δεν ορίζεται για οποιαδήποτε τιμή πλήθους ακμών. Παρ' όλα αυτά όμως, έχει αρκετά σαφή ένδειξη για την περιοχή στην οποία μεταβάλλονται οι τιμές $\tau(G)$ σε σχέση με τις υπόλοιπες κλάσεις γραφημάτων. Οι βαθμοί των κόμβων ενός *complete* γραφήματος είναι ίσοι αλλά η δομή του χαρακτηρίζεται από πολλές σε πλήθος ακμές (πυκνό γράφημα).

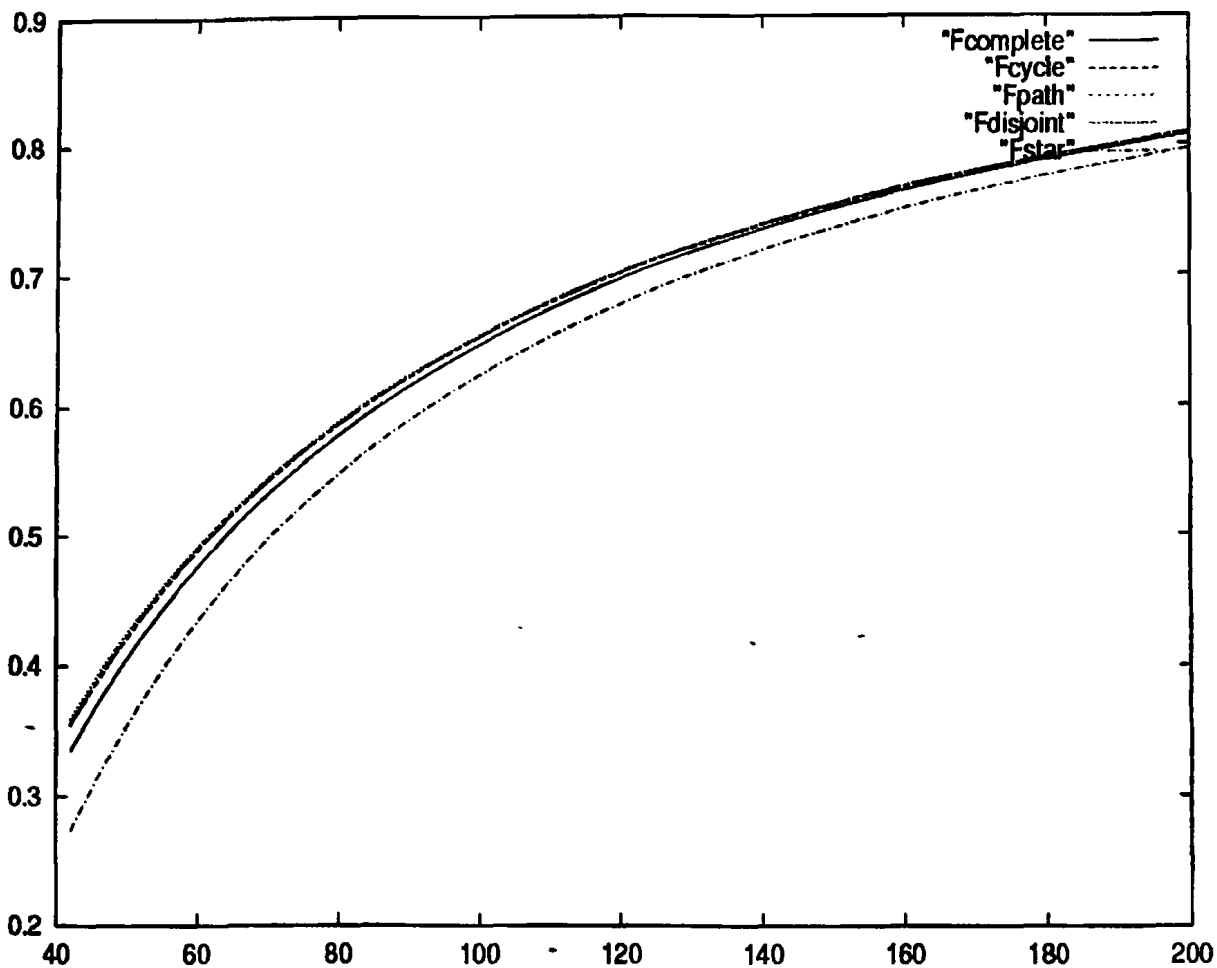
Το *disjoint* γράφημα παράγει τα περισσότερα σε πλήθος σκελετικά δέντρα για κάθε αριθμό ακμών. Ένα *disjoint* γράφημα έχει ίδιο βαθμό κόμβων (*τακτικό-regular*) και το πλήθος των ακμών του είναι αρκετά μικρό σε σχέση με το πλήθος των κόμβων του (αραιό γράφημα).

Το πλήθος των σκελετικών δέντρων που δημιουργείται από τις κλάσεις είτε των *path* είτε των *cycle* γραφημάτων σχεδόν ταυτίζεται. Όμως, με μια πιο προσεκτική παρατήρηση, διακρίνεται ότι το πλήθος σκελετικών δέντρων που παράγεται από την κλάση των *path* γραφημάτων είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο πλήθος των σκελετικών δέντρων που προέρχονται από την κλάση των *cycle*. Βέβαια η διαφορά τους παραμένει μικρή όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2, αλλά εφόσον είναι πάντοτε θετική τότε η κλάση των γραφημάτων $K_n - Path$ έχει περισσότερα σκελετικά δέντρα από την κλάση των γραφημάτων $K_n - Cycle$.



Σχήμα 6.2. Η διαφορά $\tau(K_{150} - P_{m+1}) - \tau(K_{150} - C_m)$
με $m = 10, \dots, 100$.

Θα μπορούσε κανείς να εξετάσει την συμπεριφορά των διαφορετικών κλάσεων γραφημάτων ως προς το πλήθος των σκελετικών δέντρων, μεταβάλλοντας το γράφημα K_n και κρατώντας σταθερά τα γραφήματα H_i . Βέβαια, για λόγους ομοιομορφίας στη σύγκριση των διαφορετικών κλάσεων γραφημάτων, όλες οι κλάσεις γραφημάτων H_i έχουν ίδιο πλήθος ακμών. Στο Σχήμα 6.3 ξεκινάμε από όλες τις κλάσεις γραφημάτων που παρουσιάζονται, με συγκεκριμένο πλήθος ακμών (21) και εξετάζουμε την συμπεριφορά των γραφημάτων, με διαφορετικά γραφήματα K_n , όπως φαίνεται στον οριζόντιο άξονα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αρχικοποιούμε την τιμή $n = 42$ έτσι ώστε να εξετάζουμε πάντα συνδεδεμένα γραφήματα $G = K_n - H$.



Σχήμα 6.3. Το πλήθος $\tau(G)$ με $n = 42, \dots, 200$ και $m_H = 21$ στην αντίστοιχη κλάση γραφημάτων H .

Εφόσον αυξάνουμε το πλήθος των κόμβων n , ενώ το αντίστοιχο γράφημα H από κάθε κλάση παραμένει σταθερό, είναι αναμενόμενο να παρατηρείται αύξουσα κλίση σε κάθε αντίστοιχη καμπύλη. Στο προηγούμενο πείραμα (Σχήμα 6.1) τα αποτελέσματα ήταν ακριβώς αντίστροφα (φθίνουσα κλίση) καθώς μειωνόταν το πλήθος των ακμών του γραφήματος $G = K_n - H$. Παρ' όλα αυτά όμως, κάθε κλάση γραφημάτων συμπεριφέρεται παρόμοια σε σχέση με τις υπόλοιπες και στις δύο περιπτώσεις, αφού δεν παρατηρείται καμία αλλαγή στην κατάταξη των κλάσεων με βάση το πλήθος των σκελετικών δέντρων.

6.2 Περιπτώσεις Μεγιστοποίησης του πλήθους των Σκελετικών Δέντρων

Έστω ένα γράφημα $G = K_n - H$, όπου H ένα γράφημα m ακμών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του πλήθους $\tau(G)$ όταν προσθέτουμε μια ακμή στο γράφημα H . Συγκεκριμένα, εάν θέλουμε να διατηρείται η δομή του γραφήματος H , τότε οι διαφορετικοί τρόποι που προσθέτουμε ακμή στο γράφημα H καθορίζουν και το πλήθος $\tau(G)$.

Έστω ότι υπάρχουν l διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσθέσουμε μια ακμή στο γράφημα H , διατηρώντας την δομή του γραφήματος H . Έτσι παράγουμε τα γραφήματα G_1, G_2, \dots, G_l και εξετάζουμε τα αντίστοιχα $\tau(G_i)$ που προκύπτουν από κάθε γράφημα για $i = 1, 2, \dots, l$. Έστω το γράφημα G_j για το οποίο ισχύει:

$$\tau(G_j) = \max_i \tau(G_i), \quad i = 1, 2, \dots, l$$

Το συγκεκριμένο γράφημα $G_j = K_n - H_j$ έχει τα περισσότερα σε πλήθος σκελετικά δέντρα από τα υπόλοιπα $l - 1$ γραφήματα. Μας ενδιαφέρει το γράφημα H_j και μελετάμε τον j -τρόπο που προσθέσαμε την ακμή στο H . Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις εκείνες, κατά τις οποίες το γράφημα H προέρχεται από τις κλάσεις των *multi-star* (Ενότητα 3.2), *ice-star* (Ενότητα 3.3) και *k-split* (Ενότητα 5.3) γραφημάτων.

Έστω $H = K_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ένα γράφημα που ανήκει στην κλάση των *multi-star* γραφημάτων. Όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσθέσουμε μια ακμή στο γράφημα H είναι m . Καθ' ένας από τους m τρόπους αντιστοιχεί στην προσθήκη ενός κόμβου στο γράφημα H που ενώνεται με τον κόμβο με βαθμό $m - 1 + \alpha_i$. Όταν προσθέτουμε την ακμή στο γράφημα τότε ο κόμβος που επηρεάζεται από την ακμή θα έχει βαθμό $m + \alpha_i$.

Δημιουργούμε 20 *multi-star* $K_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ γραφήματα με τυχαίο m στο διάστημα $[1, 10]$ και τυχαία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ στο διάστημα $[0, 20]$. Σε καθένα από αυτά τα γραφήματα προσθέτουμε μια ακμή με όλους τους m δυνατούς τρόπους που εξηγήσαμε παραπάνω και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα $\tau(G_i)$ για $i = 1, 2, \dots, m$. Επιλέγουμε την τιμή α_i' για την οποία όταν προσθέτουμε την ακμή στον κόμβο με βαθμό $m - 1 + \alpha_i'$, τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G_i είναι μεγαλύτερο από τις υπόλοιπες $m - 1$ περιπτώσεις. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.2 για τα 20 τυχαία γραφήματα. Στον πίνακα φαίνονται η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή των α_i για $i = 1, 2, \dots, m$ σε κάθε περίπτωση p , καθώς και η τιμή α_i' που επιλέγουμε.

p	m	$\min a_i$	$\max a_i$	a_i'
1	5	2	17	2
2	5	1	19	1
3	5	1	19	1
4	7	5	19	5
5	8	4	16	4
6	7	3	18	3
7	8	7	18	7
8	7	6	19	6
9	9	5	16	5
10	8	7	19	7
11	9	5	19	5
12	8	3	13	3
13	6	3	16	3
14	5	1	9	1
15	4	4	12	4
16	6	4	19	4
17	7	4	15	4
18	6	2	11	2
19	8	2	18	2
20	6	4	17	4

Πίνακας 6.2. Επιλογή της τιμής a_i' όταν προσθέτουμε ακμή σε γραφήματα $G = K_n - K_m(a_1, a_2, \dots, a_m)$, όπου $n = 150$.

Αξιοπρόσεκτο γεγονός αποτελεί, ότι σε όλες τις περιπτώσεις, η προσθήκη ακμής στο κόμβο με το μικρότερο βαθμό παράγει γράφημα G_i με τα περισσότερα σε πλήθος σκελετικά δέντρα. Επομένως, δεν πρέπει να είναι τυχαία η επιλογή της μικρότερης τιμής και μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι παρατηρείται επιλογή της τιμής a_i' με τέτοιο τρόπο ώστε να ταυτίζονται όλες οι τιμές a_1, a_2, \dots, a_m .

Επεκτείνουμε το παραπάνω πείραμα, και εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση που παράγουμε ένα τυχαίο *multi-star* γράφημα, τις τιμές των a_1, a_2, \dots, a_m όταν επιλέγουμε την τιμή a_i' που έχει την μεγαλύτερη τιμή. Βέβαια, για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, δεν προσθέτουμε μόνο μια ακμή σε κάθε γράφημα, αλλά κρατάμε το συγκεκριμένο γράφημα και συνεχίζουμε την διαδικασία αυτή έως ότου παρατηρηθεί πρόσθεση ακμής στον κόμβο με την μεγαλύτερη τιμή a_i . Στον Πίνακα 6.3 διακρίνουμε τους τρόπους πρόσθεσης ακμής στο γράφημα που παράγαμε από τον Πίνακα 6.2 για $p = 13$.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_i'
13	12	16	13	9	3	3
13	12	16	13	9	4	4
13	12	16	13	9	5	5
13	12	16	13	9	6	6
13	12	16	13	9	7	7
13	12	16	13	9	8	8
13	12	16	13	9	9	9
13	12	16	13	10	9	9
13	12	16	13	10	10	10
13	12	16	13	11	10	10
13	12	16	13	11	11	11
13	12	16	13	12	11	11
13	12	16	13	12	12	12
13	13	16	13	12	12	12
13	13	16	13	13	12	12
13	13	16	13	13	13	13
13	13	16	14	13	13	13
14	13	16	14	13	13	13
14	14	16	14	13	13	13
14	14	16	14	13	14	13
14	14	16	14	14	14	14
14	14	16	15	14	14	14
14	14	16	15	15	14	14
15	14	16	15	15	15	14
15	15	16	15	15	15	15
15	15	16	15	15	16	15
16	15	16	15	15	16	15
16	15	16	16	15	16	15
16	15	16	16	16	16	15
16	16	16	16	16	16	16

Πίνακας 6.3. Επιλογή της τιμής α_i' στην περίπτωση $p = 13$ του Πίνακα 6.2, όταν συνεχίζουμε να προσθέτουμε ακμή.

Ακόμα και στις άλλες περιπτώσεις εκτός από την συγκεκριμένη που δείχνουμε, παρατηρούμε ότι πάντα διαλέγεται η μικρότερη τιμή έως ότου καταλήξουν να εξισωθούν όλες οι τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Έτσι, όταν πρέπει να προσθέσουμε μια ακμή σε ένα γράφημα $G = K_n - K_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, όπου $K_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ένα *multi-star* γράφημα τότε παρατηρούμε ότι αυτή η ακμή πρέπει να προστεθεί στον κόμβο με την μικρότερη τιμή α_i για $1 \leq i \leq m$, έτσι ώστε να έχουμε μέγιστο πλήθος σκελετικών δέντρων $\tau(G)$.

Στην επόμενη περίπτωση, διαλέγουμε ένα γράφημα $H = Ice_s(d_1, d_2, \dots, d_s)$ που ανήκει στην κλάση των *ice-star* γραφημάτων. Τώρα, όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσθέσουμε μια ακμή στο γράφημα H είναι $s + 1$. Καθ' ένας από τους s τρόπους αντιστοιχεί στην προσθήκη ενός κόμβου στο γράφημα H που ενώνεται με τον κόμβο με βαθμό $d_i + 1$ και ο τελευταίος τρόπος αντιπροσωπεύει την περίπτωση εκείνη κατά την οποία προσθέτουμε έναν κόμβο που ενώνεται με τον κόμβο με



βαθμό s (κεντρικό κόμβο). Από την τελευταία περίπτωση προκύπτει το γράφημα $H = Ice_{s+1}(d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1})$, όπου $d_{s+1} = 0$.

Όπως και προηγουμένως, δημιουργούμε 20 $S_m(d_1, d_2, \dots, d_m)$ ice-star γραφήματα με τυχαίο m στο διάστημα $[1, 10]$ και d_1, d_2, \dots, d_m στο διάστημα $[0, 20]$. Σε καθένα από αυτά τα γραφήματα προσθέτουμε μια ακμή με όλους τους $m + 1$ τρόπους και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα $\pi(G_i)$ για $i = 1, 2, \dots, m + 1$. Επιλέγουμε την τιμή d_i' για την οποία όταν προσθέτουμε την ακμή στον κόμβο με βαθμό $d_i' + 1$, τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G_i είναι μεγαλύτερο από τις υπόλοιπες m περιπτώσεις. Για πληρότητα, στη περίπτωση που επιλεγεί γράφημα $S_{m+1}(d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1})$ τότε η τιμή d_i' θα είναι -1 . Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας για την κλάση των ice-star γραφημάτων παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.4.

p	m	$\min d_i$	$\text{Max } d_i$	d_i'
1	4	4	13	4
2	6	0	16	0
3	4	2	14	2
4	9	1	16	1
5	9	3	18	3
6	3	6	15	6
7	5	7	19	7
8	4	10	19	10
9	3	0	6	0
10	9	0	19	0
11	7	1	12	1
12	4	0	9	0
13	7	6	19	6
14	7	0	18	0
15	9	1	16	1
16	6	4	19	4
17	3	1	13	1
18	4	1	14	1
19	7	1	11	1
20	2	16	18	16

Πίνακας 6.4. Επιλογή της τιμής d_i' όταν προσθέτουμε ακμή σε γραφήματα $G = K_n - S_m(d_1, d_2, \dots, d_m)$, όπου $n = 150$.

Όπως και στη περίπτωση των multi-star γραφημάτων, η προσθήκη ακμής στο κόμβο με το μικρότερο βαθμό d_i παράγει γράφημα G_i με τα περισσότερα σε πλήθος σκελετικά δέντρα, σε όλα τα πειράματα.

Θέλοντας να επιβεβαιώσουμε την προηγούμενη παρατήρηση επεκτείνουμε το πείραμα που παρουσιάζουμε στο Πίνακα 6.2. Σε κάθε γράφημα που παράγουμε συνεχίζουμε να προσθέτουμε ακμή μέχρι να επιλέξουμε την μέγιστη τιμή από όλα τα



d_i . Στην Πίνακα 6.5 δείχνουμε την περίπτωση του γραφήματος για $p = 7$ του Πίνακα 6.4.

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_i'
10	9	19	8	7	7
10	9	19	8	8	8
10	9	19	9	8	8
10	9	19	9	9	9
10	10	19	9	9	9
10	10	19	10	9	9
10	10	19	10	10	10
11	10	19	10	10	10
11	11	19	10	10	10
11	11	19	10	11	10
11	11	19	11	11	11
12	11	19	11	11	11
12	12	19	11	11	11
12	12	19	11	12	11
12	12	19	12	12	12
13	12	19	12	12	12
13	12	19	12	13	12
13	13	19	12	13	12
13	13	19	13	13	13
14	13	19	13	13	13
14	13	19	13	14	13
14	14	19	13	14	13
14	14	19	14	14	14
15	14	19	14	14	14
15	15	19	14	14	14
15	15	19	14	15	14
15	15	19	15	15	15
16	15	19	15	15	15
16	15	19	15	16	15
16	16	19	15	16	15
16	16	19	16	16	16
17	16	19	16	16	16
17	16	19	16	17	16
17	17	19	16	17	16
17	17	19	17	17	17
18	17	19	17	17	17
18	18	19	17	17	17
18	18	19	18	17	17
18	18	19	18	18	18
19	18	19	18	18	18
19	19	19	18	18	18
19	19	19	19	18	18
19	19	19	19	19	19

Πίνακας 6.5. Επιλογή της τιμής d_i' στην περίπτωση $p = 7$ του Πίνακα 6.4, όταν συνεχίζουμε να προσθέτουμε ακμή.

Όμοια συμπεριφορά παρουσιάζουν και τα υπόλοιπα πειράματα εκτός από το συγκεκριμένο που δείχνουμε. Συμπερασματικά, παρατηρείται επιλογή της τιμής d_i' με τέτοιο τρόπο ώστε να ταυτίζονται όλες οι τιμές d_1, d_2, \dots, d_m . Βέβαια, σε καμία περίπτωση δεν παρατηρήθηκε επιλογή του γραφήματος $S_{m+1}(d_1, d_2, \dots, d_m, d_{m+1})$, αφού δεν θα μπορούσε να ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.



Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση των $k-split(d_1, d_2, \dots, d_s)$ γραφήματων. Για να προσθέσουμε μια ακμή σε ένα $k-split(d_1, d_2, \dots, d_s)$ γράφημα, διατηρώντας την δομή του, υπάρχουν $s + 1$ τρόποι. Καθ' ένας από τους s τρόπους αντιστοιχεί στην ένωση ενός κόμβου από το σύνολο S με βαθμό d_i με κάποιον κόμβο από το σύνολο $K - K_s$. Επίσης, υπάρχει η δυνατότητα ένας κόμβος από το σύνολο $K - K_s$ να ενωθεί με έναν νέο κόμβο του συνόλου με βαθμό $d_{s+1} = 1$, με αποτέλεσμα την παραγωγή ενός γραφήματος $k-split(d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1})$. Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις προσθήκης ακμής στο γράφημα $k-split(d_1, d_2, \dots, d_s)$, εκτός από τις $s + 1$ προηγούμενες δημιουργούν ισόμορφα γραφήματα με τις περιπτώσεις που αναφέραμε.

Εξετάζουμε 20 $k-split(d_1, d_2, \dots, d_s)$ γραφήματα με τυχαίο s στο διάστημα $[1, 10]$, τυχαία d_1, d_2, \dots, d_s στο διάστημα $[0, 10]$ με $k_s = d_1 + d_2 + \dots + d_s$, και τυχαίο k στο διάστημα $[k_s + 1, k_s + 6]$. Σε καθένα από τα παραπάνω γραφήματα προσθέτουμε μια ακμή με όλους τους $s + 1$ τρόπους και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα $\tau(G_i)$ για $i = 1, 2, \dots, s + 1$. Επιλέγουμε την τιμή d_i' για την οποία όταν προσθέτουμε την ακμή στον κόμβο με βαθμό $d_i' + 1$, τότε το πλήθος των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G_i γίνεται μεγαλύτερο από τις υπόλοιπες s περιπτώσεις. Στη περίπτωση που επιλεγεί γράφημα στο οποίο προσθέσαμε έναν καινούριο κόμβο στο σύνολο S τότε η τιμή d_i' θα είναι -1 . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.6.

p	K	s	k_s	$\min d_i$	$\max d_i$	d_i'
1	35	6	30	2	8	2
2	20	2	15	7	8	7
3	13	2	10	2	8	2
4	56	9	51	3	9	3
5	23	4	17	2	8	2
6	35	6	29	2	9	2
7	47	7	42	2	9	2
8	39	9	35	2	6	2
9	52	8	51	2	8	2
10	20	2	16	8	8	8
11	20	3	14	4	6	4
12	25	3	19	5	9	5
13	16	5	9	3	9	3
14	13	2	12	3	9	3
15	24	4	22	3	8	3
16	25	6	24	2	6	2
17	23	3	22	6	8	6
18	23	3	18	2	8	2
19	30	4	26	4	9	4
20	52	9	48	2	8	2

Πίνακας 6.6. Επιλογή της τιμής d_i' όταν προσθέτουμε ακμή σε γραφήματα $G \in K_n - k-split(d_1, d_2, \dots, d_s)$, όπου $n = 150$.

Σε κάθε περίπτωση, παρατηρείται ότι η προσθήκη ακμής στο κόμβο με το μικρότερο βαθμό d_i παράγει γράφημα G_i με τα περισσότερα σε πλήθος σκελετικά δέντρα.

Για μια ακόμη φορά επεκτείνουμε το παραπάνω πείραμα και προσθέτουμε ακμή σε κάθε γράφημα που παράγουμε μέχρι να προσθέσουμε ακμή στον κόμβο με τη μεγαλύτερη τιμή d_i , έτσι ώστε να παρατηρήσουμε την επιλογή των τιμών d_i . Στον Πίνακα 6.7 παρουσιάζουμε μια από τις 20 περιπτώσεις που δείξαμε στον Πίνακα 6.6, όταν $p = 8$.

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
4	3	6	2	4	4	4	2	6	2
4	3	6	3	4	4	4	2	6	2
4	3	6	3	4	4	4	3	6	3
4	4	6	3	4	4	4	3	6	3
4	4	6	4	4	4	4	3	6	3
4	4	6	4	4	4	4	4	6	4
5	4	6	4	4	4	4	4	6	4
5	5	6	4	4	4	4	4	6	4
5	5	6	5	4	4	4	4	6	4
5	5	6	5	5	4	5	4	6	4
5	5	6	5	5	5	5	5	6	5
6	5	6	5	5	5	5	5	6	5
6	6	6	5	5	5	5	5	6	5
6	6	6	6	5	5	5	5	6	5
6	6	6	6	6	5	5	6	6	5
6	6	6	6	6	6	5	6	6	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Πίνακας 6.7. Επιλογή της τιμής d_i' στην περίπτωση $p = 8$ του Πίνακα 6.6, όταν συνεχίζουμε να προσθέτουμε ακμή.

Σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από την συγκεκριμένη που δείχνουμε, παρατηρούμε ότι πάντα διαλέγεται η μικρότερη τιμή έως ότου καταλήξουν να εξισωθούν όλες οι τιμές d_1, d_2, \dots, d_s . Επομένως, και στη συγκεκριμένη περίπτωση η επιλογή της τιμής d_i' με την ιδιότητα να τείνει να εξισωθούν όλες οι τιμές d_1, d_2, \dots, d_s γίνεται ακόμα πιο ισχυρή.

6.3 Μελέτη Δείκτη Σκελετικών Δέντρων

Είδαμε προηγουμένως (Ενότητα 6.1) την συμπεριφορά των γραφημάτων $K_n - H$ ως προς το πλήθος των σκελετικών δέντρων όταν αυξάνουμε το πλήθος των κόμβων του γραφήματος K_n και όταν αυξάνουμε το πλήθος των ακμών του γραφήματος H . Αρκετό ενδιαφέρον, όμως, παρουσιάζει και η περίπτωση κατά την οποία αυξάνουμε και τους δύο παράγοντες με ένα σταθερό ρυθμό β .

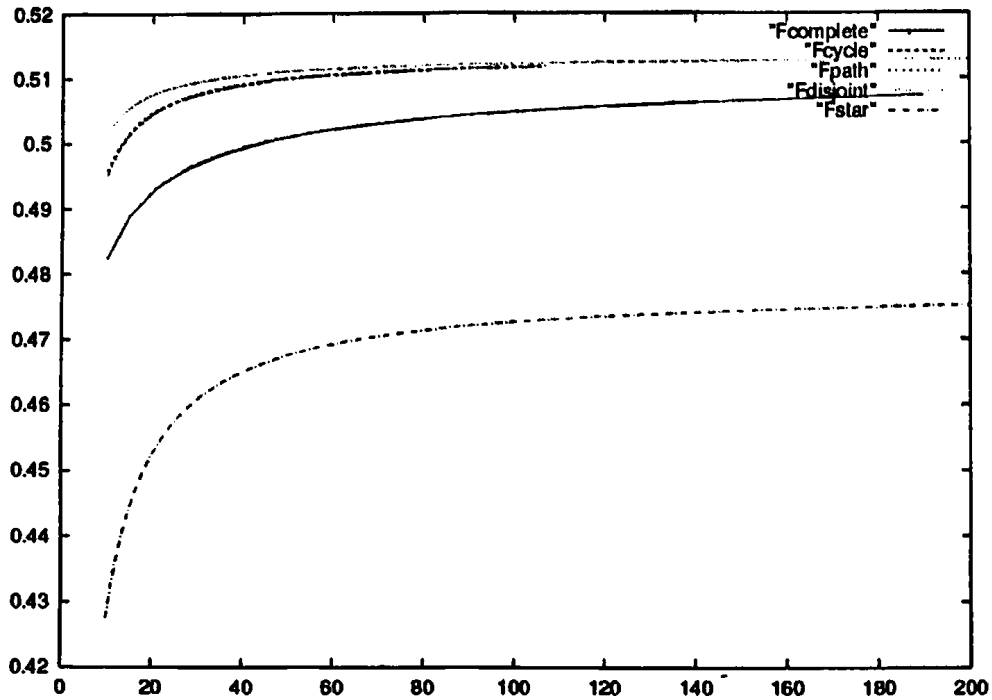
Έστω το γράφημα $G = K_n - H$. Ορίζουμε δείκτη σκελετικών δέντρων $a(H)$ το λόγο του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος G δια το πλήθος των σκελετικών δέντρων του πλήρες γραφήματος K_n . Δηλαδή,

$$a(H) = \frac{\tau(K_n - H)}{\tau(K_n)}$$

Ο δείκτης $a(H)$ χαρακτηρίζει την συμπεριφορά του πλήθους των σκελετικών δέντρων του γραφήματος $G = K_n - H$.

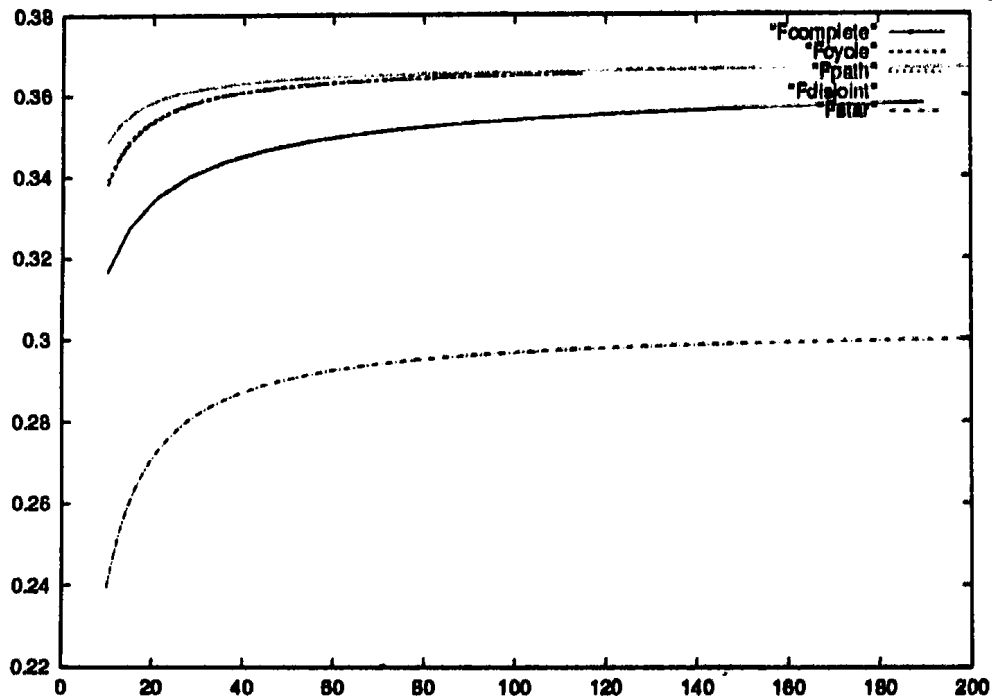
Έστω η ποσότητα $\beta = m_H / n$, όπου m_H συμβολίζουμε το πλήθος των ακμών του γραφήματος H και n το πλήθος των κόμβων του K_n . Είναι φανερό ότι $\beta \in (0,1)$. Θέλουμε να εξετάσουμε την συμπεριφορά των κλάσεων των γραφημάτων $G = K_n - H$ για ένα σταθερό β . Αυτό που αναμένει κανείς είναι να αυξάνεται ο δείκτης σκελετικών δέντρων $a(H)$ κάθε κλάσης γραφημάτων όταν αυξάνουμε το πλήθος των ακμών του γραφήματος H (και ταυτόχρονα το πλήθος των κόμβων του K_n) με σταθερό ρυθμό β .

Στο Σχήμα 6.4 αυξάνουμε το πλήθος m_H , όπως φαίνεται στον οριζόντιο άξονα, από κάθε κλάση γραφημάτων και υποχρεωτικά αυξάνουμε και το πλήθος των κόμβων του για να κρατήσουμε σταθερό ρυθμό $\beta = 0.33$. Πράγματι, παρατηρείται αύξηση $a(H)$, αλλά μέχρι κάποιο σημείο. Στη συνέχεια, φαίνεται πως όσο μεγαλώνει το γράφημα $G = K_n - H$, τόσο μειώνεται και ο ρυθμός αύξησης του δείκτη των σκελετικών δέντρων.



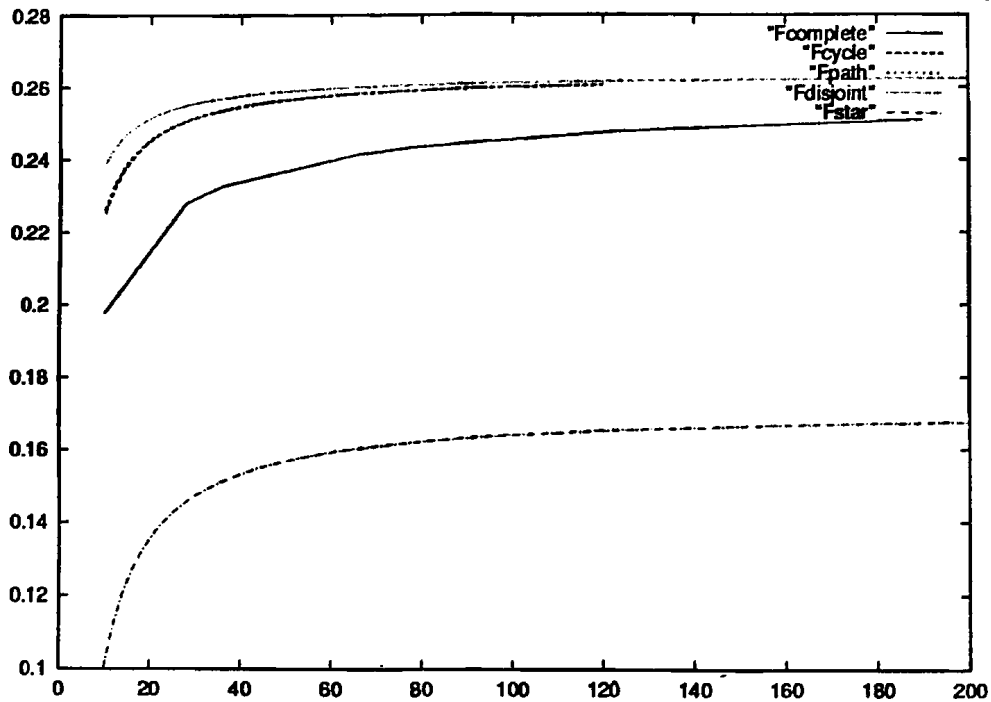
Σχήμα 6.4. Ο δείκτης $\alpha(H)$ με $\beta = 0.33$ και $m_H = 10, \dots, 200$ για την αντίστοιχη κλάση γραφημάτων H .

Βασιζόμενοι στην παραπάνω σημαντική παρατήρηση, συνεχίζουμε την πειραματική μελέτη για διαφορετική τιμή για τον ρυθμό β όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.5. Σε αυτή την περίπτωση το πλήθος των κόμβων n του γραφήματος K_n είναι διπλάσιο από το πλήθος των ακμών m_H του γραφήματος H . Η συμπεριφορά των γραφημάτων είναι ίδια όπως και προηγουμένως και φαίνεται πως δεν ήταν τυχαία η παρατήρηση. Ένα ακόμα στοιχείο που μπορεί κανείς να παρατηρήσει είναι ότι ο δείκτης $\alpha(H)$ κάθε κλάσης γραφημάτων φαίνεται πως συγκλίνει σε ένα σταθερό σημείο, βέβαια διαφορετικό μεταξύ τους, για μια συγκεκριμένη τιμή του β . Πράγματι, μετά από κάποια στιγμιαία αύξηση στις αρχικές τιμές του m_H (δηλαδή, για σχετικά μικρό σε πλήθος ακμών γράφημα $G = K_n - H$), παρατηρούμε μια εξομάλυνση (οριζόντια γραμμή) της συμπεριφοράς του $\alpha(H)$.



Σχήμα 6.5. Ο δείκτης $\alpha(H)$ με $\beta = 0.5$ και $m_H = 10, \dots, 200$ για την αντίστοιχη κλάση γραφημάτων H .

Για να επιβεβαιώσουμε την παραπάνω παρατήρηση παρουσιάζουμε και το Σχήμα 6.6 με διαφορετική τιμή του ρυθμού β . Τώρα που η τιμή β είναι μεγαλύτερη ($\beta = 0.67$) είναι φανερό ότι ο δείκτης $\alpha(H)$ μειώνεται σε σχέση με τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις ($\beta = 0.33$ και $\beta = 0.5$), αφού το πλήθος των ακμών του γραφήματος H αυξάνεται.



Σχήμα 6.6. Ο δείκτης $\alpha(H)$ με $\beta = 0.67$ και $m_H = 10, \dots, 200$ για την αντίστοιχη κλάση γραφημάτων H .

Σημαντικό πειραματικό αποτέλεσμα αποτελεί η σύγκλιση του δείκτη $\alpha(H)$ των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων $G = K_n - H$ για διάφορες κλάσεις γραφημάτων H όταν ο ρυθμός β παραμένει σταθερός. Μάλιστα, το σημείο στο οποίο συγκλίνει κάθε κλάση γραφημάτων παρατηρείται ότι εξαρτάται από την τιμή β και την κλάση των γραφημάτων H . Επομένως, είναι αρκετά ενδιαφέρον να καθορίσει κανείς το σημείο σύγκλισης κάθε κλάσης γραφημάτων $G = K_n - H$ σε σχέση με τον ρυθμό β .

6.4 Πειραματική μελέτη πλήθους Σκελετικών Δέντρων σε Μεταθετικά Γραφήματα

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη του πλήθους των σκελετικών δέντρων των γραφημάτων $G = K_n - H$, όταν το γράφημα H είναι μεταθετικό γράφημα (*permutation graph*). Στη συνέχεια ένα μεταθετικό γράφημα H θα συμβολίζεται $H[\pi]$ όπου π είναι η μετάθεση που το παράγει, και συμβολίζονται $H[\pi]$. Επειδή η αναπαράσταση των μεταθετικών γραφημάτων δεν διευκολύνει στην εύρεση αναλυτικού τύπου με την κλασική τεχνική που δείξαμε για άλλες κλάσεις γραφημάτων, θα ασχοληθούμε με την πειραματική τους μελέτη με στόχο τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς τους.

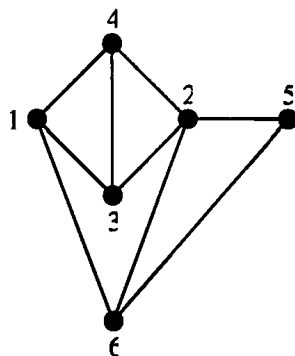
Έστω π μία μετάθεση των αριθμών $1, 2, \dots, n$. Τότε το γράφημα $G[\pi] = (V, E)$ ορίζεται ως:

$$V = \{1, 2, \dots, n\}$$

και

$$ij \in E \Leftrightarrow (i - j)(\pi_i^{-1} - \pi_j^{-1}) < 0.$$

Ένα γράφημα G ονομάζεται μεταθετικό γράφημα εάν υπάρχει μια μετάθεση π τέτοια ώστε $G \cong G[\pi]$ [7, 8]. Με άλλα λόγια δύο κόμβοι του γραφήματος $G[\pi]$ ενώνονται με μια ακμή εάν ο μεγαλύτερος από τους δύο αντίστοιχους αριθμούς βρίσκεται στα αριστερά του μικρότερου στη μετάθεση π . Στο Σχήμα 6.7 παρουσιάζουμε ένα μεταθετικό γράφημα.



Σχήμα 6.7. Το γράφημα $G[4, 3, 6, 1, 5, 2]$.

Όπως μπορεί να δει κανείς, είναι εύκολος ο τρόπος παραγωγής μεταθετικών γραφημάτων με n κόμβους. Αρκεί να κατασκευαστεί μια μετάθεση των αριθμών $1, 2, \dots, n$ [7]. Παρ' όλα αυτά όμως, θέλουμε να κατασκευάσουμε μεταθετικά γραφήματα με βάση το πλήθος των ακμών έτσι ώστε να συγκρίνουμε την επίδοση των γραφημάτων $G = K_n - H[\pi]$ ως προς το πλήθος των σκελετικών δέντρων με άλλες κλάσεις γραφημάτων H , όπως παρουσιάσαμε στην Ενότητα 6.1.

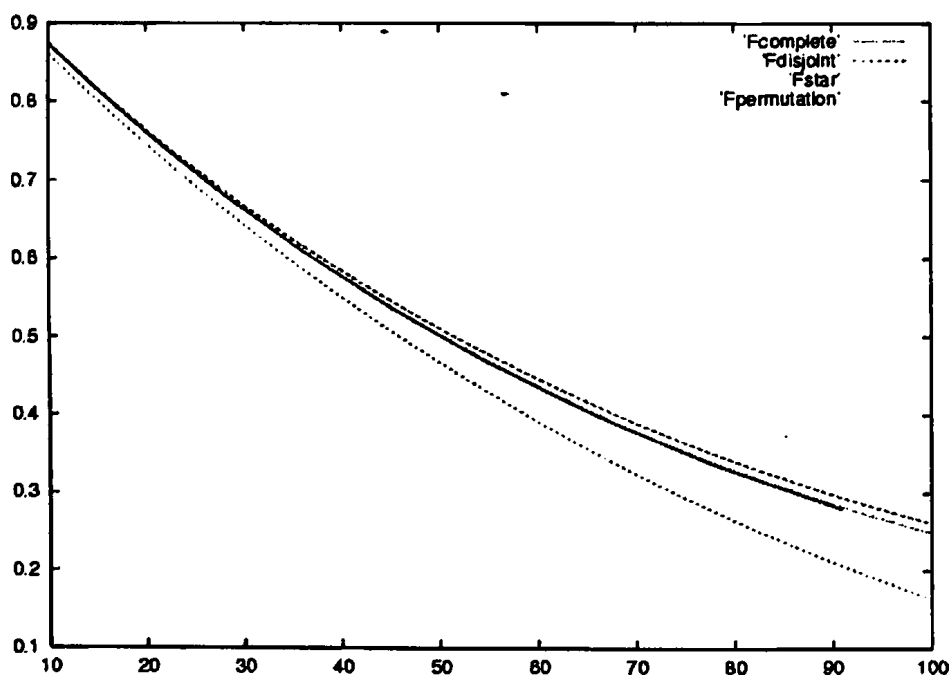
Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μεταθετικό γράφημα $H[\pi]$ με m σε πλήθος ακμές. Ένας τρόπος κατασκευής είναι ο εξής:

- παραγωγή μεταθέσεων π_i , όπου $i \in (m - c, m + c)$ και $c > 0$, έτσι ώστε από τις $2c$ μεταθέσεις το αντίστοιχο μεταθετικό γράφημα $H[\pi_i]$ να έχει m ακμές.

Δεν είμαστε, όμως, σίγουροι ότι θα παράγουμε τουλάχιστον ένα μεταθετικό γράφημα $H[\pi_i]$ με m ακμές. Γι' αυτό το λόγο, εφαρμόζουμε τον παραπάνω τρόπο κατασκευής s φορές.

Από την άλλη πλευρά, μπορεί να παράγουμε περισσότερα από ένα μεταθετικά γραφήματα με m ακμές. Έτσι, κάθε φορά που παράγουμε ένα μεταθετικό γράφημα $H[\pi_i]$ με m ακμές, δημιουργούμε το γράφημα $G_m = K_n - H[\pi_i]$ και υπολογίζουμε το αντίστοιχο $\tau[G_m]$. Στη συνέχεια, για την κλάση των γραφημάτων $G = K_n - H[\pi]$ όπου $H[\pi]$ ένα μεταθετικό γράφημα με m ακμές βρίσκουμε το μέσο όρο $\tau[G]$ από όλα τα $\tau[G_m]$ που υπολογίσαμε προηγουμένως. Αξίζει να τονίσουμε, ότι μας ενδιαφέρουν μόνο συνδεδεμένα μεταθετικά γραφήματα.

Επομένως, με τον παραπάνω τρόπο, μπορούμε να παράγουμε μεταθετικά γραφήματα με m_H ακμές και να υπολογίσουμε το αντίστοιχο $\tau(G)$. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.8 όπου μεταβάλλουμε το πλήθος των ακμών m_H των μεταθετικών γραφημάτων όπου $c = 10$ και $s = 10$ και μελετάμε το $\tau(K_n - H[\pi])$ σε σχέση με άλλες κλάσεις γραφημάτων.



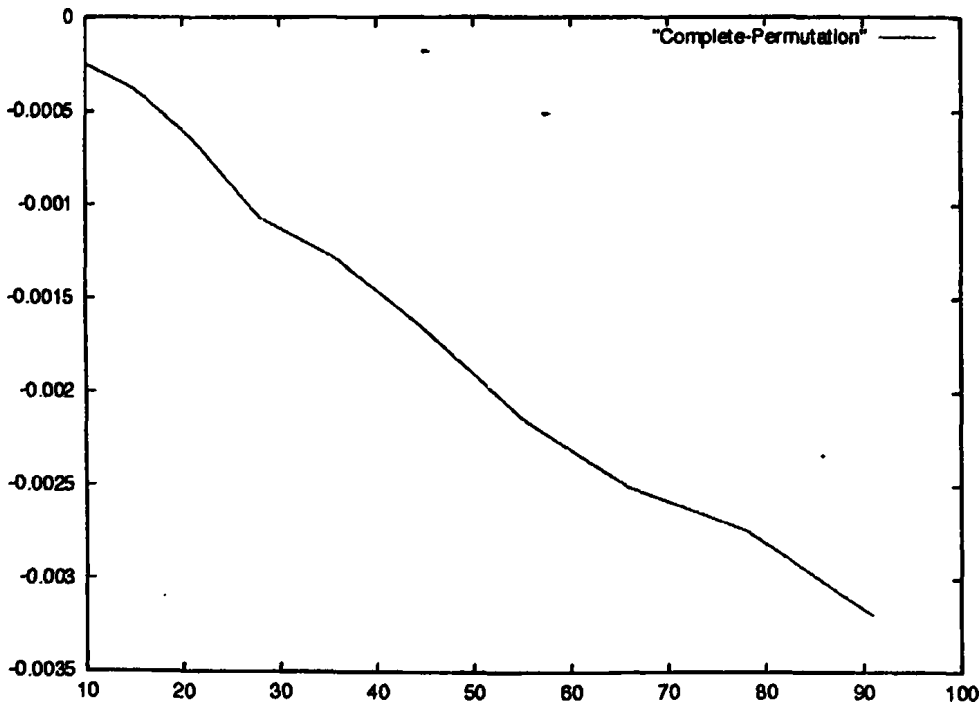
Σχήμα 6.8. Το πλήθος $\tau(G)$ όπου $n = 150$ και $m_H = 10, \dots, 100$ με την αντίστοιχη κλάση μεταθετικών γραφημάτων H , όπου $c = 10$ και $s = 10$.

H_i	m_H									
	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
<i>Complete</i>	0.873	0.815	0.750	0.681	0.609	0.537	0.466	0.399	0.336	0.279
<i>Disjoint</i>	0.874	0.817	0.754	0.686	0.616	0.546	0.477	0.412	0.350	0.294
<i>Star</i>	0.860	0.802	0.735	0.663	0.586	0.508	0.429	0.351	0.276	0.206
<i>Permutation</i>	0.873	0.815	0.751	0.682	0.610	0.539	0.469	0.402	0.339	0.282

Πίνακας 6.8. Ενδεικτικές τιμές $\tau(G)$ του Σχήματος 6.8 για κάθε κατηγορία γραφημάτων.

Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση του παραπάνω σχήματος είναι ότι το πλήθος $\tau(K_n - H[\pi])$ συμπεριφέρεται με παρόμοιο τρόπο με το πλήθος $\tau(K_n - K_k)$ που προέρχεται από την κλάση των πλήρων (*complete*) γραφημάτων. Παρ' όλα αυτά όμως, με πιο προσεκτική παρατήρηση το πλήθος $\tau(K_n - H[\pi])$ είναι πάντα μεγαλύτερο από το πλήθος $\tau(K_n - K_k)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.9 που παρουσιάζεται η διαφορά των δύο τιμών:

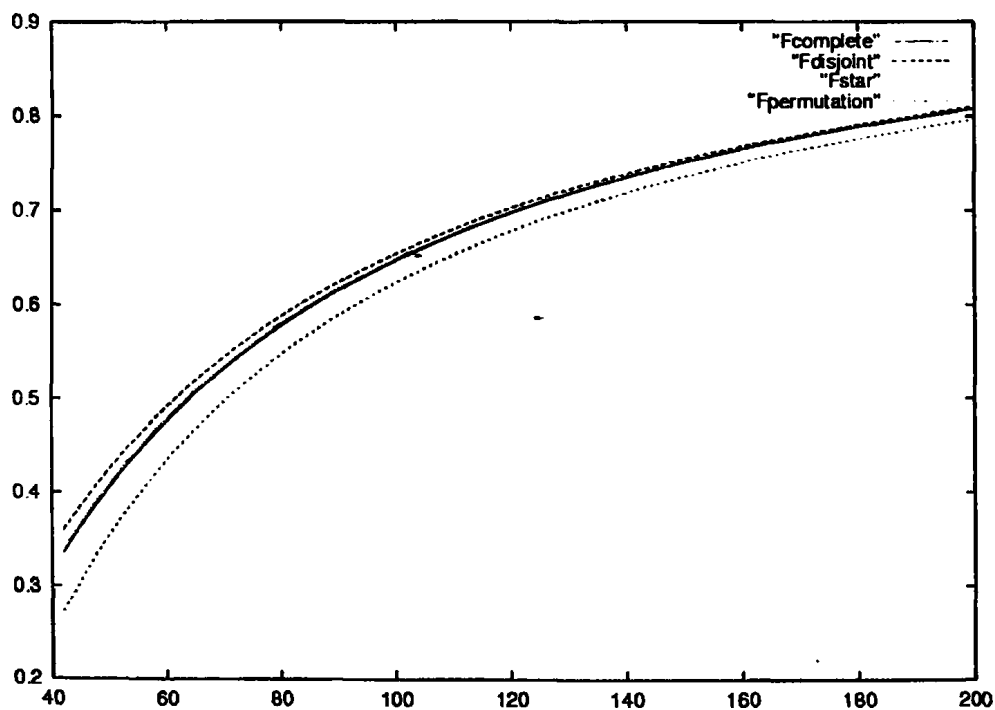
$$\tau(K_n - K_k) - \tau(K_n - H[\pi]).$$



Σχήμα 6.9. Η διαφορά $\tau(K_n - K_k) - \tau(K_n - H[\pi])$ όπου $n = 150$ και $m_H = 10, \dots, 91$ του Σχήματος 6.8.

Επειδή πάντα η τιμή της διαφοράς $\tau(K_n - K_k) - \tau(K_n - H[\pi])$ είναι αρνητική, το πλήθος $\tau(K_n - H[\pi])$ είναι πάντα μεγαλύτερο από το πλήθος $\tau(K_n - K_k)$. Μάλιστα από τη συμπεριφορά της παραπάνω διαφοράς, διακρίνουμε ότι το πλήθος $\tau(K_n - H[\pi])$ αποκλίνει από το $\tau(K_n - K_k)$, όσο αυξάνεται το πλήθος των ακμών των αντίστοιχων γραφημάτων.

Ένα ακόμα πείραμα που επιβεβαιώνει την παρόμοια συμπεριφορά των κλάσεων των μεταθετικών γραφημάτων με τις κλάσεις των πλήρων (*complete*) γραφημάτων, φαίνεται στο Σχήμα 6.10. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, υπολογίζουμε το πλήθος $\tau(G)$ του γραφήματος $G = K_n - H$ μεταβάλλοντας το πλήθος των κόμβων του K_n , ενώ κρατάμε σταθερή τιμή για το πλήθος των ακμών m_H του γραφήματος H .



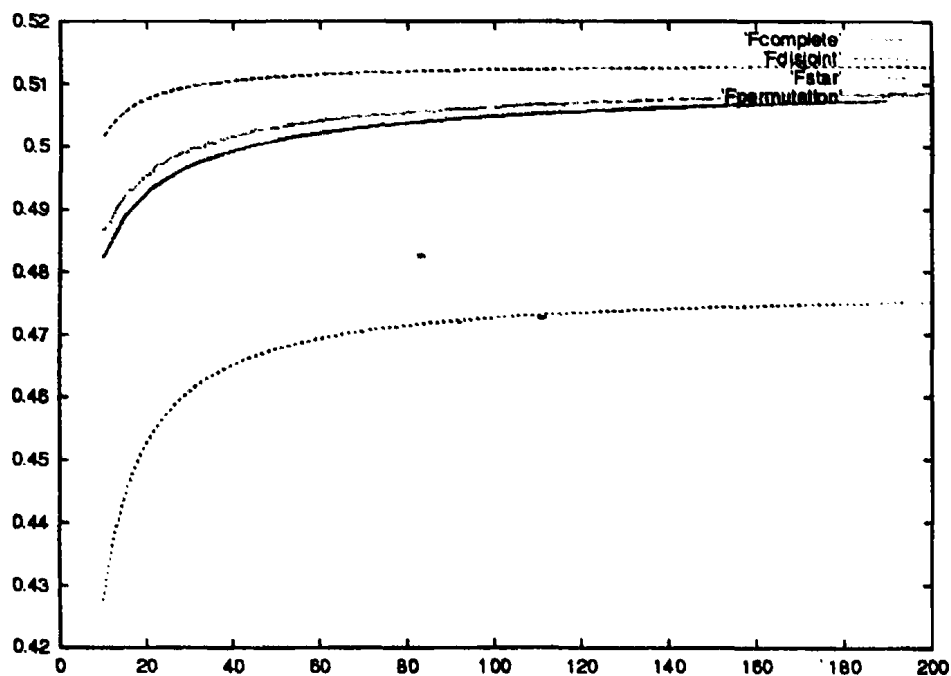
Σχήμα 6.10. Το πλήθος $\tau(G)$ όπου $n = 42, \dots, 200$ και $m_H = 21$ με την αντίστοιχη κλάση μεταθετικών γραφημάτων H , όπου $c = 10$ και $s = 10$.

Σε σχέση με τις υπόλοιπες κλάσεις γραφημάτων, τα γραφήματα $G = K_n - H[\pi]$ παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά με την προηγούμενη περίπτωση (Σχήμα 6.8).

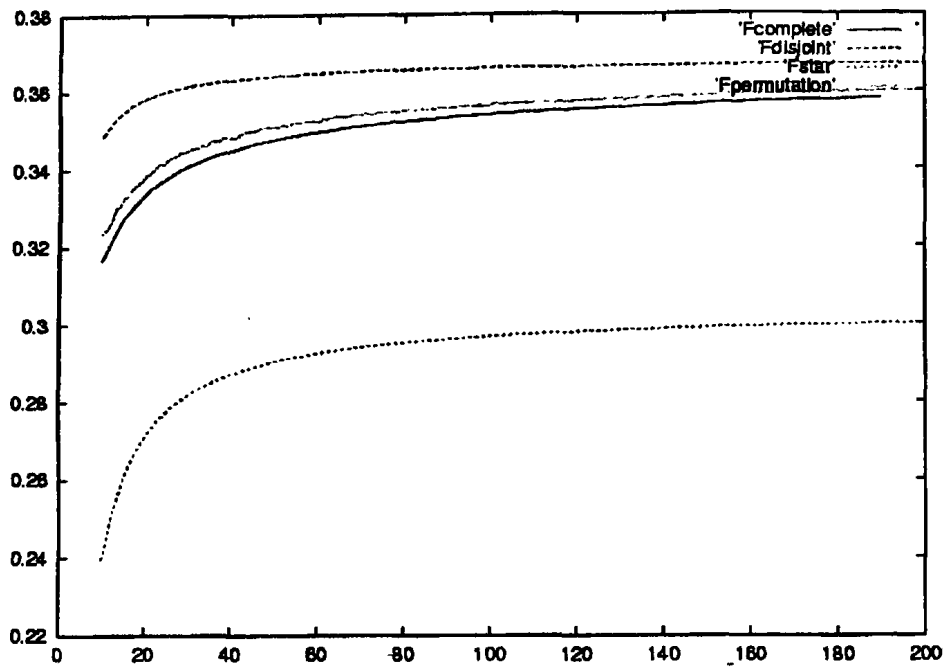
Πάλι βέβαια, διακρίνουμε σχεδόν ίσες τιμές των πλήθους των σκελετικών δέντρων για τις αντίστοιχες περιπτώσεις των γραφημάτων που προέρχονται από τις κλάσεις των μεταθετικών και πλήρων (*complete*) γραφημάτων.

Έστω G ένα γράφημα της μορφής $G = K_n - H[\pi]$, όπου $H[\pi]$ ένα μεταθετικό γράφημα. Εξετάζουμε, ακόμα και την περίπτωση σύγκλισης του δείκτη των σκελετικών δέντρων των μεταθετικών γραφημάτων με σταθερό ρυθμό $\beta = m_H / n$ όπως είδαμε και προηγουμένως για άλλες κλάσεις γραφημάτων στην Ενότητα 6.3. Ο τρόπος παραγωγής μεταθετικών γραφημάτων με συγκεκριμένο πλήθος ακμών m_H γίνεται με τον τρόπο που αναφέραμε προηγουμένως. Επομένως, η συνολική τιμή $a(H[\pi])$ που υπολογίζουμε για πλήθος ακμών m_H του γραφήματος $H[\pi]$, είναι προσεγγιστική, αφού αναπαριστάται από τον μέσο όρο των διαφορετικών τιμών $a(H[\pi])$, όπου το μεταθετικό γράφημα $H[\pi]$ κατασκευάζεται από διαφορετικές μεταθέσεις π .

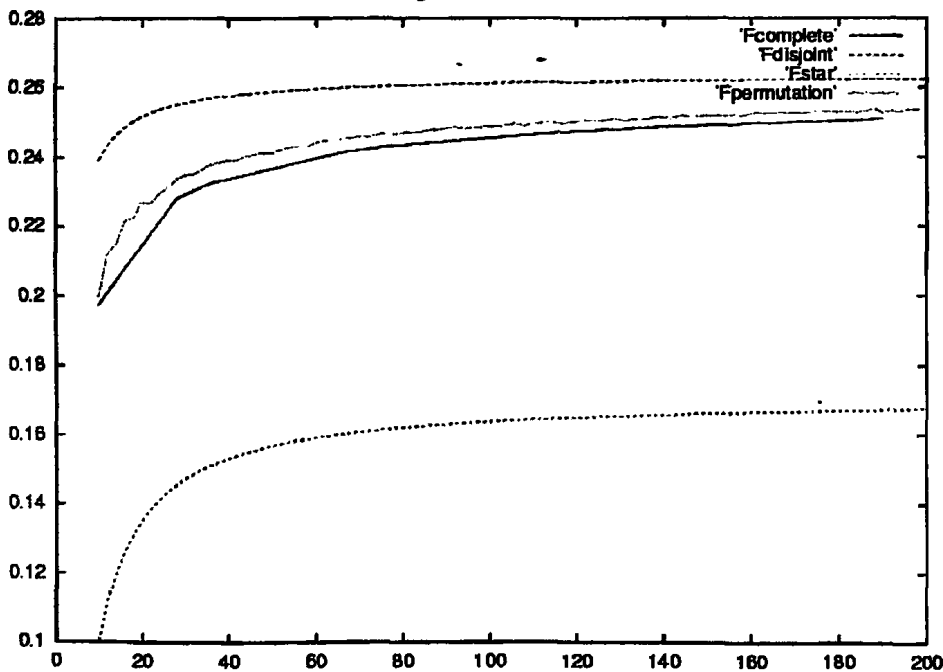
Στα Σχήματα 6.11, 6.12 και 6.13 παρουσιάζουμε για διαφορετικές τιμές του ρυθμού β την συμπεριφορά των τιμών $a(H)$ σε σχέση με τις υπόλοιπες κλάσεις γραφημάτων που εξετάσαμε. Στον οριζόντιο άξονα διακρίνουμε τις τιμές του αριθμού των ακμών m_H (και ανάλογα του αριθμού n) και στον κάθετο άξονα φαίνονται οι τιμές του $a(H)$.



Σχήμα 6.11. Ο δείκτης $a(H)$ με $\beta = 0.33$ και $m_H = 10, \dots, 200$ για την αντίστοιχη κλάση μεταθετικών γραφημάτων, όπου $c = 10$ και $s = 10$.



Σχήμα 6.12. Ο δείκτης $\alpha(H)$ με $\beta = 0.5$ και $m_H = 10, \dots, 200$ για την αντίστοιχη κλάση μεταθετικών γραφημάτων, όπου $c = 10$ και $s = 10$.



Σχήμα 6.13. Ο δείκτης $\alpha(H)$ με $\beta = 0.67$ και $m_H = 10, \dots, 200$ για την αντίστοιχη κλάση μεταθετικών γραφημάτων, όπου $c = 10$ και $s = 10$.

Αξιοσημείωτο γεγονός σε κάθε περίπτωση, αποτελεί η μείωση της αυξητικής τάσης της τιμής $a(H[\pi])$ όσο αυξάνεται το πλήθος των ακμών m_H (συγχρόνως και του πλήθους των κόμβων n). Για κάθε τιμή του β που παρουσιάσαμε, φαίνεται ότι η τιμή $a(H[\pi])$ συγκλίνει σε ένα σταθερό σημείο, που εξαρτάται από τον ρυθμό β . όπως συμβαίνει και για τις αντίστοιχες υπόλοιπες κλάσεις γραφημάτων. Ακόμα, διακρίνουμε την πολύ μικρή διαφορά που έχουν οι τιμές $a(H[\pi])$ και $a(K_k)$ μεταξύ τους, γεγονός που πιστοποιεί την αρχική μας παρατήρηση για τις κλάσεις των μεταθετών και πλήρεις γραφημάτων.

Συμπερασματικά, παρουσιάσαμε μια εκτίμηση της τιμής $\tau(K_n - H[\pi])$ και του δείκτη $a(H[\pi])$ σε σχέση με άλλες κλάσεις γραφημάτων για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων. Έτσι, με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, γνωρίζουμε την συμπεριφορά της τιμής $\tau(K_n - H[\pi])$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] C. Berge, "Graphs and Hypergraphs", North Holland, Amsterdam, 1973.
- [2] F.T. Boesch, "On unreability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis", *J. Graph Theory* 10 (1986) 339-352.
- [3] T.J. Brown, R.B. Mallion, P. Pollak, A. Roth, "Some methods for counting the spanning trees in labeled molecular graphs, exaxmained in relation to certain fullness", *Discrete Appl. Math.* 67 (1996) 51-66.
- [4] F. Buckley, F. Harary, "*Distance in Graphs*", Addison-Wesley., Reading, MA, 1990.
- [5] S. CheiKen, D.J. Kleitman, "Matrix Tree Theorem", *J. Comb. Theory*, pp. 377-381, 1978.
- [6] B. Gylbert, W. Myrnold, "Maximizing Spanning Trees in Almost Complete Graphs", *Networks*, 30 (1997) 23-30.
- [7] M.C. Golymbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, Inc., 1980.
- [8] M.C. Golumbic, "Trivially perfect graphs", *Discrete Math.* 24 (1978) 105-107.
- [9] P.L. Hammer, A.K. Kelmans, "Laplacian spectra and spanning trees of threshold graphs", *Discrete Appl. Math.* 65 (1996) 255-273.
- [10] Z. Huaxiao, Z. Fuji, H. Qiongxiang, "On the number of spanning trees and Eulerian tours in iterated line digraphs", *Discrete Appl. Math.* 73 (1997) 59-67.
- [11] S. Ma, W.D. Wallis, J. Wu, "Optimization problems on quasi-threshold graphs", *J. Comb. Inform. & Syst. Sciences.* 14 (1989) 105-110.
- [12] W. Moon, "Enumerating Labeled Trees, in: F. Harary (Ed.)", *Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press (1967) 261-271.
- [13] W. Myrvold, "Uniformly-most reliable graphs do not always exist", *Tech. Rept.*, Depart. of Computer Science, University of Victoria, 1989.
- [14] S.D. Nikolopoulos, "On Hamiltonian Quasi-Threshold Graphs", *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 8 (2001) 87-91.
- [15] S.D. Nikolopoulos, "Recognizing cographs and threshold graphs through a classification of their edges", *Inform. Process. Lett.* 75 (2000) 129-139.



- [16] S.D. Nikolopoulos, P. Rondogiannis, "On the number of Spanning Trees of multi-star related graphs", *Inform. Process. Lett.* 65 (1998) 183-188.
- [17] P.V. O'Neil, "The Number of Trees in Certain Network", *Notices Amer. Math. Soc.* 10 (1963) 569.
- [18] L. Petingi, F. Boesch, C. Suffel, "On the characterization of graphs with maximum number of spanning trees", *Discrete Appl. Math.* 179 (1998) 155-166.
- [19] R. Sedgewick, P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wisley, Inc., 1995.
- [20] H.N.V. Temperley, "On the mutual cancellation of cluster integrals in Mayer's fugacity series", *Proc. Phys. Soc.* 83 (1964) 3-16.
- [21] L. Weinberg, "Number of trees in a graph", *Proc. IRE.* 46 (1958) 1954-1955.
- [22] Xiaoming Li, "On the synthesis of reliable networks", *Ph.D Thesis*, Stevens Institute of Technology, 1987.
- [23] J-H. Yan, J-J. Chen, G.J. Chang, "Quasi-threshold graphs", *Discrete Appl. Math.* 69 (1996) 147-255.
- [24] W.M. Yan, W. Myrnold, K.L. Chung, "A formula for the number of spanning trees of a multi-star related graph", *Inform. Process. Lett.* 68 (1998) 295-298.
- [25] W.M. Yan, W. Myrnold, K.L. Chung, "On the number of spanning trees of a multi-complete/star related graph", *Inform. Process. Lett.* 76 (2000) 113-119.
- [26] X. Yong, Talip, Acenjjan, "The number of spanning trees of the cubic cycle and the quadruple cicle", *Discrete Appl. Math.* 169 (1997) 293-298.
- [27] Y. Zang, X. Yong, M.J. Golin, "The number of spanning trees in circulant graphs", *Discrete Appl. Math.* 223 (2000) 337-350.

