2

ΒΑΡΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ ΣΕ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕΜΒΡΑΝΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Χαράλαμπος Μπογδάνος

Τμήμα Φυσικής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2008

Επταμελής Επιτροπή

Η επταμελής επιτροπή που εξέτασε την παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελείται από υς:

- Κ. Ταμβάκης, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (επιβλέπων)
- Π. Καντή, Αναπλ. Καθηγήτρια Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Λ. Περιβολαρόπουλος, Αναπλ. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Κ. Βαγιονάκης, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Ι. Ρίζος, Αναπλ. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
- Α. Κεχαγιάς, Επικ. Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ
- Α. Λαχανάς, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ

Στους γονείς μου Σταύρο και Αγγελίνα

Ευχαριστίες

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντά μου στην παρούσα διδακτορική διατριβή, κ. Καθηγητή Κυριάκο Ταμβάκη. Είχα την καλή τύχη να τον γνωρίσω ως προπτυχιακός φοιτητής και από την πρώτη στιγμή υπήρξε υποστηρικτικός στην πορεία μου και προσέφερε απλόχερα τη βοήθειά του, τόσο στις προπτυχιακές μου σπουδές, όσο και μετέπειτα ως επιβλέπων μου. Είχα επίσης την ευκαιρία να μαθητεύσω δίπλα του και να διδαχθώ πολλά μέσα από τις συζητήσεις μας και την καθοδήγησή του στις σπουδές μου. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για τον χρόνο που αφιέρωσε σε μένα αυτά τα χρόνια, το ενδιαφέρον του για την πρόοδό μου και την ηθική και οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε σε εύκολες και λιγότερο εύκολες περιόδους.

Θα ήθελα στη συνέχεια να ευχαριστήσω τους συνεργάτες μου στις δημοσιεύσεις που παρουσιάζονται σε αυτή τη διδακτορική διατριβή. Συγκεκριμένα, τον Δρ. κ. Απόστολο Δημητριάδη, για την αρμονική συνεργασία μας κατά τα έτη 2005 - 2007 στις κοινές μας δημοσιεύσεις και τη βοήθεια και καθοδήγησή του. Ευχαριστώ επίσης τον Επίκ. Καθηγητή κ. Αλέξανδρο Κεχαγιά του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, με τον οποίο είχα τη χαρά να συνεργαστώ την άνοιξη και το καλοκαίρι του 2007 και για την φιλοξενία που μου παρείχε το ίδρυμα κατά τη διεξαγωγή της έρευνάς μας. Επίσης, τον υποψήφιο διδάκτορα και συνάδελφο Σάββα Νέσσερη και τον Αναπλ. Καθηγητή κ. Λέανδρο Περιβολλαρόπουλο, για την συνεργασία μας την άνοιξη του 2007.

Κατά τη διάρκεια της παραμονής μου στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων τα τελευταία χρόνια είχα τη χαρά να έχω συναδέλφους τους Ορέστη Ευθυμίου, Απόστολο Δημητριάδη, Σάββα Νέσσερη, και Αντρέα Ψαλλίδα. Οι μακρές μας συζητήσεις, η βοήθεια και η συμπαράστασή τους υπήρξαν πολύ σημαντικά όλον αυτό τον καιρό στη δουλειά και τη ζωή μου στο πανεπιστήμιο και τους ευχαριστώ ιδιαίτερα.

Επίσης θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στην τριμελή επιτροπή του διδακτορικού μου, Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Βαγιονάκη, Επίκ. Καθηγητή κ. Αλέξανδρο Κεχαγιά και Καθηγητή κ. Κυριάκο Ταμβάκη, για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην ανάγνωση και αξιολόγηση της διδακτορικής διατριβής.

Στην πρακτική πλευρά των πραγμάτων, είμαι ευγνώμων στο Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης, το οποίο υποστήριξε οικονομικά τις μεταπτυχιακές μου σπουδές κατά τα τελευταία τρία χρόνια.

Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω την Ευαγγελία Κίσσα, για τον χρόνο που διέθεσε στην ανάγνωση και διόρθωση του χειρογράφου της διατριβής. Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου, Σταύρο και Αγγελίνα, για την ηθική και οικονομική τους υποστήριξη όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου, προπτυχιακών και μεταπτυχιακών, για την υπομονή τους και για όσες χαρές και λύπες μοιράστηκαν μαζί μου σε αυτή τη μακρά πορεία.

Σύνοψη

Το αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η μελέτη μοντέλων μεμβρανών (brane models) με εφαρμογές στη θεωρία βαρύτητας και την κοσμολογία. Συγκεκριμένα, ασχολούμαστε με την κατασκευή νέων μοντέλων και εύρεση ακριβών αναλυτικών λύσεων, καθώς και με τη φαινομενολογία των λύσεων αυτών σε κοσμολογικό επίπεδο. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στηρίζονται σε εργασία που διεκπεραιώθηκε στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, στο διάστημα μεταξύ Σεπτεμβρίου 2005 και Σεπτεμβρίου 2007 και έχουν δημοσιευθεί στα ακόλουθα άρθρα:

1. "Pseudo-3-Branes in a Curved 6D Bulk", C. Bogdanos, A. Kehagias, K. Tamvakis, Sep 2007, Phys. Lett. B656 : 112-118

2. "Synergistic Gravity and the Role of Resonances in GRS-Inspired Brane-worlds", C. Bogdanos, A. Dimitriadis, K. Tamvakis, Jun 2007, Class. Quant. Grav. 25 : 045008

3. "Cosmic Acceleration Data and Bulk-Brane Energy Exchange", C. Bogdanos, S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, K. Tamvakis, May 2007, Phys. Rev. D76 : 083514

4. "Brane Cosmology with a Non-Minimally Coupled Bulk-Scalar Field", C. Bogdanos, A. Dimitriadis, K. Tamvakis, Nov 2006, Class. Quant. Grav. 24 : 3701-3712

5. "Dark energy from bulk matter", C. Bogdanos, A. Dimitriadis, K. Tamvakis, Nov 2006, Phys. Rev. D 75 : 087303

6. "Brane Cosmological Evolution With Bulk Matter", C. Bogdanos, K. Tamvakis, Sep 2006, Phys. Lett. B 646 : 39-46

7. "Brane Models with a Ricci-Coupled Scalar Field", C. Bogdanos, A. Dimitriadis, K. Tamvakis, April 2006, Phys. Rev. D 74 : 045003

Τα πρώτα τρία κεφάλαια είναι εισαγωγικά στη θεωρία των μοντέλων μεμβρανών. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται μία σύντομη ανασκόπηση των θεωριών επιπλέον διαστάσεων και του ρόλου που έχουν παίξει στη διαμόρφωση των σύγχρονων φυσικών θεωριών. Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο των πιο δημοφιλών μοντέλων μεμβρανών, στα οποία στηρίζεται η παρούσα διατριβή. Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με τη θεωρία Kaluza-Klein και τα μοντέλα μεμβρανών ADD και Randall-Sundrum-1 και 2, ενώ παρουσιάζεται επίσης το μοντέλο ημιεντοπισμένης βαρύτητας GRS. Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε κοσμολογικές συνέπειες των μοντέλων μεμβρανών. Μετά από μία σύντομη αναφορά στο Καθιερωμένο Κοσμολογικό Μοντέλο και τα πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα, αναλύεται η κοσμολογία μεμβρανών και ο ρόλος των μεμβρανών συνδιάστασης-2 στο πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς.

Τα κεφάλαια τέσσερα, πέντε, έξι και επτά περιέχουν την πρωτότυπη εργασία της διατριβής. Στο κεφάλαιο τέσσερα παρουσιάζουμε αναλυτικές λύσεις σε μοντέλα μεμβρανών του

τύπου Randall-Sundrum πέντε διαστάσεων, παρουσία μη-ελάχιστης σύζευξης με ένα πενταδιάστατο βαθμωτό πεδίο, ενώ στο κεφάλαιο πέντε εξετάζουμε την κοσμολογία των λύσεων αυτών. Το κεφάλαιο έξι ασχολείται με την κοσμολογία μεμβρανών παρουσία περιβάλλουσας ύλης και με ανταλλαγή ύλης και ενέργειας μεταξύ της μεμβράνης και του Υπερχώρου (bulk). Συζητάμε τη δυνατότητα του μοντέλου μας να αναπαράγει επιταχυνόμενη κοσμική διαστολή για μεγάλους χρόνους και καταστατική παράμετρο για τη σκοτεινή ενέργεια, η οποία να διασχίζει τη γραμμή $w = -1$. Τέλος, στο κεφάλαιο επτά εξετάζουμε το φαινόμενο του η-μιεντοπισμού της βαρύτητας σε παραλλαγές του μοντέλου GRS . Διακρίνουμε περιπτώσεις με συμπαγή πέμπτη διάσταση, ασυμμετρία και μεμβράνη πεπερασμένου πάχους. Επίσης παρουσιάζουμε ένα μοντέλο συνδιάστασης-2, στο οποίο μία ψευδο-3-μεμβράνη, εμβαπτισμένη σε έναν εξαδιάστατο, μη-συμπαγή Υπερχώρο μπορεί να οδηγήσει σε μηδενική τετραδιάστατη κοσμολογική σταθερά, χωρίς ανάγκη επιβολής λεπτών ρυθμίσεων.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή - Πολυδιάστατες Θεωρίες στη Σύγχρονη Φυσική

Κατά το δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα, η επιστήμη της φυσικής σημείωσε μία σειρά από εντυπωσιακές προόδους. Οι ιδέες των κβαντικών θεωριών βαθμίδας, που μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τους Yang και Mills [1] (1954), οδήγησαν σε σαφή θεωρητικά μοντέλα για τις τρεις από τις τέσσερις γνωστές θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις, ηλεκτρομαγνητική, ισχυρή και ασθενή πυρηνική, ενώ αποσαφηνίστηκε ο ρόλος των συμμετριών βαθμίδας στην ταξινόμηση των θεμελιωδών σωματιδίων και των αλληλεπιδράσεών τους [2]. Οι επιτυχίες της φυσικής υψηλών ενεργειών κορυφώθηκαν με τη διατύπωση της ηλεκτρασθενούς θεωρίας [3, 4, 5, 6, 7] από τους Weinberg και Salam (1967), της πρώτης θεωρίας ενοποίησης δυνάμεων από την εποχή του Maxwell, η οποία σηματοδοτεί και την εδραίωση του λεγόμενου Καθιερωμένου Μοντέλου της σωματιδιακής φυσικής. Όλες οι αλληλεπιδράσεις εκτός της βαρυτικής περιγράφονται από τη θεωρία αυτή, η οποία καθορίζει τη συμπεριφορά όλων των μέχρι σήμερα γνωστών σωματιδίων [8]. Η επιβεβαίωση της ηλεκτρασθενούς θεωρίας με την ανακάλυψη των μποζονίων βαθμίδας $W^{\pm}$ και Z^0 [9, 10] (1983) έθεσε το Καθιερωμένο Μοντέλο σε στέρεη βάση και δημιούργησε εμπιστοσύνη στην ικανότητα των κβαντικών θεωριών βαθμίδας και των συμμετριών που τις διέπουν να περιγράψουν τη φύση. Σημαντικές ανακαλύψεις συνεχίστηκαν μέχρι και τη δεκαετία του '90, με την ανακάλυψη του top quark [11, 12] (1995) και τη μέτρηση της παραβίασης της συμμετρίας CP στο σύστημα των σωματιδίων B [8]. Μετρήσεις των ηλεκτρασθενών παρατηρήσιμων ποσοτήτων στους επιταχυντές LEP-I και II [13] κατέδειξαν την ορθότητα του Καθιερωμένου Μοντέλου, σε επίπεδο ακρίβειας $\sim 1\%$.

Ταυτόχρονα με τη σωματιδιακή φυσική, το νεόκοπο πεδίο της κοσμολογίας προχωρούσε γοργά, επιδεικνύοντας αντίστοιχα σημαντικά επιτεύγματα. Η πρόβλεψη της σωστής αναλογίας ελαφρών στοιχείων στο σύμπαν [14], με βάση το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang) και η ανακάλυψη της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου [15, 16] (CMB, 1965) με την σωστή προβλεπόμενη θερμοκρασία και κατανομή, ανέδειξαν τη Μεγάλη Έκρηξη ως την πρώτη βιώσιμη κοσμολογική θεωρία για τη δημιουργία και εξέλιξη του σύμπαντος και οδήγησε στη θέσπιση ενός αντίστοιχου Καθιερωμένου Κοσμολογικού Μοντέλου. Η πρόταση από τον Guth [17] (1980) του πληθωριστικού μοντέλου και η ενσωμάτωσή του στο ήδη υπάρχον πλαίσιο [18, 19, 20, 21], ανέδειξε πιθανές εξηγήσεις σημαντικών ερωτημάτων που παρέμεναν αναπάντητα από τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης . Ακριβείς μετρήσεις των ανισοτροπιών της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου [22, 23] (COBE, 1992, WMAP, 2003) παρείχαν περαιτέρω επιβεβαίωση για την ορθότητα του πληθωριστικού μοντέλου.

Η κατάσταση στη φυσική στην αρχή του εικοστού πρώτου αιώνα θυμίζει αναμφισβήτητα την εικόνα που επικρατούσε και στην αρχή του εικοστού. Όπως τώρα, έτσι και τότε, οι διαθέσιμες φυσικές θεωρίες φαίνονταν σε θέση να εξηγήσουν πρακτικά κάθε φαινόμενο το οποίο ήταν προσβάσιμο μέσω παρατηρήσεων ή πειραμάτων. Υπήρχαν βέβαια μία-δύο ενοχλητικές ασυνέπειες, όπως η ακτινοβολία μέλανος σώματος ή η αδυναμία ανίχνευσης κίνησης της Γης δια μέσω του αιθέρα, για τις οποίες ακόμα εκκρεμούσαν εξηγήσεις, αλλά η γενική εικόνα που επικρατούσε ήταν ότι τα πιο σημαντικά προβλήματα είχαν επιλυθεί και η φυσική στεκόταν σε στέρεα θεμέλια, ενώ απαιτούνταν μερικές μικρές μόνο προσθήκες και διορθώσεις. Όπως τότε, έτσι και τώρα, υπάρχουν μία-δύο ενοχλητικές ασυνέπειες, οι οποίες δεν εξηγούνται ακόμα στα πλαίσια της υπάρχουσας, αναμφισβήτητα τρομερά επιτυχημένης σύγχρονης φυσικής. Τα μαθήματα του παρελθόντος ωστόσο έχουν κάνει τους σύγχρονους φυσικούς να υιοθετήσουν μία πιο νηφάλια στάση απέναντι στα επιτεύγματα του παρελθόντος και η γενική εικόνα που επικρατεί φαίνεται να αποδέχεται το γεγονός ότι μεγάλες ανακαλύψεις, οι οποίες ενδεχομένως να ανατρέψουν πολλές από τις κρατούσες αντιλήψεις μας, είναι πιθανόν επικείμενες, αν όχι αναπόφευκτες.

Στα τελευταία είκοσι χρόνια, ένα διαρκώς αυξανόμενο σύνολο από πειραματικά και παρατηρησιακά δεδομένα φαίνεται να προκαλεί τα δύο παραπάνω Καθιερωμένα Μοντέλα, στον ίδιο σχεδόν βαθμό με τον οποίο οι υπόλοιπες πειραματικές αποδείξεις που διαθέτουμε τα επιβεβαιώνουν πανηγυρικά. Στην αρένα της σωματιδιακής φυσικής, εκκρεμεί η ανακάλυψη του μποζονίου Higgs [8][1], το οποίο αποτελεί κύριο συστατικό της ηλεκτρασθενούς θεωρίας και του Καθιερωμένου Μοντέλου στο σύνολό του. Ταυτόχρονα, η επιβεβαίωση ταλαντώσεων σε ηλιακά και ατμοσφαιρικά νετρίνα [24] παρέχει την πρώτη πειραματική απόδειξη φυσικής πέραν του Καθιερωμένου Μοντέλου.

Στο μέτωπο της κοσμολογίας, οι εξελίξεις αυτή τη στιγμή είναι ακόμα πιο θεαματικές. Μέσα στα τελευταία είκοσι χρόνια, έχει πλέον επιβεβαιωθεί παρατηρησιακά η παρουσία σκοτεινής ύλης [25] σε μεγάλες ποσότητες (περίπου το 85% της ύλης στο σύμπαν ανήκει στην κατηγορία αυτή). Το 1997, μετρήσεις της απομάκρυνσης μακρινών supernova Ia [26] (Riess et al.) έδειξαν για πρώτη φορά ότι το σύμπαν βρίσκεται αυτή τη στιγμή σε φάση επιταχυνόμενης διαστολής, σε αντίθεση με ό,τι προβλέπει η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης. Η ανακάλυψη αυτή υποδεικνύει την ύπαρξη μίας άγνωστης ενεργειακής συνιστώσας του σύμπαντος, η οποία ονομάζεται σκοτεινή ενέργεια και είναι υπεύθυνη για την παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή. Ακόμα πιο εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι η συνιστώσα αυτή αποτελεί το μεγαλύτερο ποσοστό ύλης και ενέργειας στο γνωστό σύμπαν, $\sim 70\%$ [27]. Η πιθανή εξήγηση της σκοτεινής ενέργειας ως ένα είδος κοσμολογικής σταθεράς (ενέργεια κενού) είναι από μόνη της εξαιρετικά προβληματική, καθώς αποτυγχάνει να αναπαράγει από πρώτες αρχές της θεωρίας πεδίου την παρατηρούμενη πολύ μικρή τιμή της, οδηγώντας έτσι

[1] Αν και η γενική εικόνα είναι ότι το πρόβλημα αυτό πρόκειται να επιλυθεί πολύ σύντομα, με την έναρξη της λειτουργίας του επιταχυντή LHC.

στο ιδιαίτερα δύσκολο θεωρητικό *πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς* [28, 29].

Τα παραπάνω πειραματικά αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η εικόνα που έχουμε για την σωματιδιακή φυσική και την κοσμολογία απέχει ακόμα από το να είναι πλήρης και αυτοσυνεπής. Ταυτόχρονα, εκκρεμεί το θεωρητικό πρόβλημα ενοποίησης της βαρυτικής δύναμης με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις του Καθιερωμένου Μοντέλου της σωματιδιακής φυσικής. Η αδυναμία εύρεσης μίας ικανοποιητικής θεωρίας η οποία να περιγράφει την κβαντική βαρύτητα αποτελεί από μόνη της αρχετή απόδειξη ότι η ερμηνεία που διαθέτουμε για τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις και ειδικά για τη βαρύτητα είναι ελλιπής. Σημαντικά βήματα προόδου έχουν γίνει προς την κατεύθυνση αυτή κατά τα τελευταία χρόνια από τη Θεωρία Υπερχορδών/Θεωρία-Μ [30, 31, 32, 33], η οποία αποτελεί την πρώτη μέχρι στιγμής αυτοσυνεπή θεωρία η οποία επιτυγχάνει να ενοποιήσει τη βαρύτητα με τις υπόλοιπες δυνάμεις. Προς το παρόν όμως, τα αποτελέσματα της θεωρίας αυτής απέχουν ακόμα πολύ από το να την καθιερώσουν ως μία θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Αυτό οφείλεται κύρια στο γεγονός ότι η Θεωρία Υπερχορδών αφορά κλίμακες ενέργειας κοντά στην μάζα Planck$\sim 10^{18} GeV$, οι οποίες είναι απολύτως απροσπέλαστες για σημερινούς ή μελλοντικούς επιταχυντές σωματιδίων. Το δε χαμηλοενεργειακό όριο της θεωρίας δεν είναι εύκολο να εξαχθεί, οπότε δεν μπορούν προς το παρόν να γίνουν προβλέψεις από τη Θεωρία Υπερχορδών που να είναι πειραματικά ελέγξιμες. Παρά τα προβλήματα αυτά, υπάρχει γενική εμπιστοσύνη στην ορθότητα της θεωρίας και στις βασικές παραδοχές της, μία εκ των οποίων είναι ότι ο χωρόχρονος στον οποίο λαμβάνουν χώρα τα φυσικά φαινόμενα έχει περισσότερες από τέσσερις διαστάσεις.

Η ευρεία αποδοχή της Θεωρίας Υπερχορδών έχει οδηγήσει σε αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος γύρω από το ενδεχόμενο ύπαρξης νέων διαστάσεων στη φύση, μία ιδέα η οποία είναι αρκετά παλιά στη φυσική. Ήδη από το 1919, λίγα μόλις χρόνια μετά τη διατύπωση της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας, παρατηρήθηκε από τον Kaluza [34] ότι η θεωρία αυτή μπορεί να διατυπωθεί σε πέντε διαστάσεις, όπου η πέμπτη διάσταση είναι συμπαγής με μορφή κύκλου πολύ μικρής ακτίνας, έτσι ώστε σε συνήθεις τετραδιάστατους παρατηρητές να καθίσταται αόρατη. Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας παρήγαν τη συνήθη τετραδιάστατη θεωρία, συνοδευόμενη από ένα επιπλέον διανυσματικό πεδίο, το οποίο υπάκουε τις εξισώσεις Maxwell. Αυτή ήταν και η πρώτη απόπειρα γεωμετρικής ενοποίησης δυνάμεων, στην προκειμένη περίπτωση της βαρυτικής και της ηλεκτρομαγνητικής. Αργότερα, ο Klein [35] (1926) έδειξε ότι μία τέτοια μικρή συμπαγής διάσταση θα οδηγούσε στην ύπαρξη ενός "πύργου" από βαριά σωμάτια, τα οποία θα συνόδευαν τα ήδη γνωστά. Οι θεωρίες αυτού του είδους, όπου μικρές συμπαγείς διαστάσεις συνυπάρχουν με τις συνήθεις τέσσερις που γνωρίζουμε από την εμπειρία ονομάστηκαν θεωρίες Kaluza-Klein.

Οι ιδέες αυτές ωθούνται σήμερα στα όριά τους από την Θεωρία Υπερχορδών και τη Θεωρία-Μ. Σε αυτές, οι στοιχειώδεις οντότητες δεν είναι σημειακά σωμάτια, αλλά μικροσκοπικές χορδές (ή και μεμβράνες στην περίπτωση της θεωρίας-Μ). Οι χορδές θεωρείται ότι κινούνται μέσα σε έναν χωρόχρονο 10 διαστάσεων (11 για τη θεωρία-Μ). Προκειμένου να μην είναι προσβάσιμες σε παρατήρηση, οι επιπλέον 6 (7) διαστάσεις πρέπει να ακολουθούν την εικόνα Kaluza-Klein και να είναι συμπαγοποιημένες σε κάποια μικροσκοπική συμπαγή πολλαπλότητα, η οποία έχει ενδεχομένως μη-τετριμμένη τοπολογία (π.χ. πολλαπλότητες Calabi-Yau). Μία άλλη εκδοχή είναι ότι οι χορδές δεν είναι όλες ελεύθερες να κινηθούν σε ολόκληρο τον 10(11)-διάστατο χώρο, αλλά τα άκρα τους είναι περιορισμένα να κινούνται πάνω σε πολλαπλότητες χαμηλότερης διάστασης (D-Branes), σχηματίζοντας έτσι μεμβράνες πάνω στις οποίες βρίσκονται χωρικά εντοπισμένα τα πεδία ύλης και αλληλεπιδράσεων. Το δεύτερο σενάριο οδηγεί στην εικόνα των μοντέλων μεμβρανών, τα οποία έγιναν ιδιαίτερα δημοφιλή κατά την τελευταία δεκαετία και έχουν προσελκύσει μεγάλο ενδιαφέρον.

Η εικόνα στην οποία ο ορατός χωρόχρονος δεν είναι παρά μία μεμβράνη, εμβαπτισμένη μέσα σε ένα χώρο υψηλότερης διάστασης, έχει επίσης μελετηθεί στο παρελθόν, όταν το 1983, την ίδια περίπου εποχή που η Θεωρία Υπερχορδών σημείωνε σημαντικά βήματα και κέρδιζε σε αξιοπιστία, προτάθηκε από τον Akama [36] και από τους Rubakov και Shaposhnikov [37] ένα μοντέλο του σύμπαντός μας ως μία τοπολογική ανομοιομορφία, προχαλούμενη από ένα κατάλληλο βαθμωτό πεδίο μέσα σε έναν χώρο μεγαλύτερης χωρικής διάστασης. Με την ανακάλυψη μέσα στη δεκαετία του '90 του ρόλου που οι μεμβράνες παίζουν στη Θεωρία Υπερχορδών [32], το ενδιαφέρον πάνω στη φαινομενολογία των μοντέλων μεμβρανών έγινε ιδιαίτερα έντονο, και σύντομα παρουσιάστηκαν οι πρώτες εκδοχές που επιχειρούσαν να χρησιμοποιήσουν τα πλεονεκτήματα των κατασκευών αυτών για την αντιμετώπιση προβλημάτων της σωματιδιακής φυσικής και της κοσμολογίας.

Η πρώτη εκδοχή ενός τέτοιου μοντέλου παρουσιάστηκε από τους Arkani-Hamed, Δημόπουλο και Dvali [38] (1998) και επιχειρούσε να εξηγήσει το λεγόμενο *πρόβλημα της ιεραρχίας*, την τεράστια διαφορά ($\sim 10^{15}$) που υφίσταται μεταξύ της κλίμακας ενέργειας των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων και την κλίμακα Planck της βαρύτητας. Στο μοντέλο αυτό, ο τετραδιάστατος χωρόχρονος αποτελεί μία μεμβράνη, εμβαπτισμένη μέσα σε έναν χώρο με περισσότερες χωρικές διαστάσεις. Ενώ η ύλη του Καθιερωμένου Μοντέλου θεωρείται παγιδευμένη μέσα στον όγκο της μεμβράνης, η βαρύτητα είναι ελεύθερη να διαδίδεται σε ολόκληρο τον χώρο. Ο περιορισμός της ύλης πάνω στη μεμβράνη καθιστά την ανίχνευση των επιπλέον διαστάσεων αδύνατη, παρά μόνο μέσω βαρυτικών πειραμάτων, τα οποία έχουν μέχρι στιγμής διεξαχθεί μόνο σε πολύ χαμηλές ενέργειες και άρα δεν μπορούν να δώσουν σημαντικούς περιορισμούς για το μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων. Το μοντέλο ADD, όπως έγινε γνωστό, ήταν σε θέση να εξηγήσει την ιεραρχία μεταξύ της κλίμακας Planck και της ηλεκτρασθενούς κλίμακας, δεχόμενο ότι ο όγκος των επιπλέον διαστάσεων ήταν πολύ μεγαλύτερος, όχι μόνο από την κλίμακα Planck, αλλά και από την ηλεκτρασθενή κλίμακα αποστάσεων. Εξαιτίας της πολύ μεγαλύτερης ακτίνας συμπαγοποίησης που είναι επιτρεπτή στην περίπτωση αυτή σε σύγκριση με τις συνηθισμένες θεωρίες Kaluza-Klein και τις Θεωρίες Υπερχορδών, όπου οι επιπλέον διαστάσεις πρέπει να έχουν μεγέθη κοντά στην κλίμακα Planck, μοντέλα αυτού του είδους έχει επικρατήσει να ονομάζονται *μοντέλα μεγάλων επιπλέον διαστάσεων*.

Λίγο καιρό αργότερα, προτάθηκε από τους Randall και Sundrum [39] το ομώνυμο μοντέλο μεμβρανών (1999). Σε αυτό, ο χώρος εξωτερικά της μεμβράνης έχει πέντε διαστάσεις και διαθέτει τη γεωμετρία ενός χώρου anti-de Sitter, οπότε η επιπλέον διάσταση είναι καμπυλωμένη. Δύο μεμβράνες είναι τοποθετημένες στα σταθερά σημεία του εξωτερικού χώρου, που αποτελεί μία *σφαιρική πολλαπλότητα*, μία εκ των οποίων ταυτίζεται με το παρατηρήσιμο σύμπαν και φέρει τα πεδία του Καθιερωμένου Μοντέλου. Η γεωμετρία του μοντέλου Randall-Sundrum είναι μη-παραγοντοποιήσιμη λόγω του καμπυλωμένου εξωτερικού χώρου, και αυτό οδηγεί στην εισαγωγή μίας εκθετικής ιεραρχίας μεταξύ μεγεθών στις δύο μεμβράνες.

Κλίμακες ενέργειας κοντά στην M_{Pl} πάνω στη μία μεμβράνη υποβιβάζονται μέχρι την ηλεκτρασθενή κλίμακα πάνω στη δεύτερη. Με τον τρόπο αυτό επιλύεται και εδώ το πρόβλημα της ιεραρχίας με γεωμετρικό τρόπο. Η διαφορά σε σύγκριση με το μοντέλο ADD είναι η απουσία ανάγκης επανεισαγωγής μεγάλων διαφορών μεταξύ της χαρακτηριστικής κλίμακας μήκους (στην προκειμένη περίπτωση κλίμακα Planck, ηλεκτρασθενής κλίμακα για το ADD) και του μεγέθους της επιπλέον διάστασης. Μία ακόμα πιο εντυπωσιακή ιδιότητα του μοντέλου αυτού είναι ότι επιτρέπει την ύπαρξη, όχι μόνο μεγάλων συμπαγών διαστάσεων, αλλά ακόμα και μη-συμπαγών, άπειρων σε έκταση. Σε μία παραλλαγή, η οποία περιέχει μόνο μία μεμβράνη [40], αποδεικνύεται ότι η Νευτώνεια βαρύτητα μπορεί να αναπαραχθεί πάνω στη μεμβράνη ακόμα και για άπειρο όγκο του εξωτερικού χώρου. Η μεμβράνη είναι σε θέση να προκαλεί χωρικό εντοπισμό στις μηδενικές καταστάσεις των πενταδιάστατων γκραβιτονίων και να παγιδεύει ουσιαστικά την βαρύτητα πάνω της, κρύβοντας έτσι από τετραδιάστατους παρατηρητές την ύπαρξη της επιπλέον διάστασης.

Πέρα από τις ενδιαφέρουσες εφαρμογές των παραπάνω μοντέλων στο πρόβλημα της ιεραρχίας, το πιο ενδιαφέρον στοιχείο τους είναι ίσως το ότι επιτρέπουν το ενδεχόμενο ελέγχου τροποποιήσεων στη θεωρία βαρύτητας, σε κλίμακες ενέργειας που βρίσκονται μέσα στις δυνατότητες σύγχρονων και μελλοντικών επιταχυντών. Καθώς η θεμελιώδης κλίμακα βαρύτητας στα μοντέλα μεγάλων επιπλέον διαστάσεων επιτρέπεται να είναι χαμηλή μέχρι και $\sim 1TeV$, θα ήταν δυνατή η άμεση δοκιμή των προβλέψεων των θεωριών αυτών στα επερχόμενα πειράματα σε μεγάλους επιταχυντές όπως ο LHC. Στην περίπτωση που όντως οι επιπλέον διαστάσεις γίνονται ορατές σε τέτοιες ενέργειες, πειράματα σκέδασης θα ήταν σε θέση να ανιχνεύσουν την πλήρη κβαντική θεωρία βαρύτητας, όπως η Θεωρία Υπερχορδών. Μάλιστα, ένα πλήθος από πιθανά ίχνη των μοντέλων μεμβρανών σε επιταχυντές έχουν υπολογιστεί, και απομένει από το πείραμα να επαληθεύσει ή να διαψεύσει τις προβλέψεις αυτές [41, 42].

Ταυτόχρονα, η ιδέα της ύπαρξης επιπλέον διαστάσεων και μάλιστα μεγάλου μεγέθους έχει οδηγήσει σε νέα μοντέλα στον χώρο της κοσμολογίας, τα οποία προσπαθούν να εξηγήσουν την παρατηρούμενη κοσμική διαστολή. Όπως αποδεικνύεται, η κοσμολογία πάνω σε μεμβράνες μπορεί να οδηγήσει σε φαινομενολογία πολύ διαφορετική από αυτή που θα περιμέναμε για ένα συμβατικό τετραδιάστατο σύμπαν του τύπου Friedmann-Robertson-Walker [43, 44], και ορισμένα από τα μοντέλα τα οποία έχουν προταθεί μπορούν να αναπαράγουν επιταχυνόμενη διαστολή σε μεγάλους χρόνους. Μία σειρά από διαφορετικά μοντέλα, τα οποία εκμεταλλεύονται μεμβράνες συνδιάστασης-2 [45, 46, 47] ή βαθμωτά πεδία [48],προσπαθεί να επιλύσει το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς.

Όπως γίνεται προφανές από την παραπάνω ανασκόπηση, οι πολυδιάστατες θεωρίες, αν και σχετικά νέες ως σύλληψη, έχουν ήδη διαδραματίσει έναν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της σύγχρονης φυσικής και εξακολουθούν αυτή τη στιγμή να αποτελούν θέμα αιχμής για την έρευνα στον εικοστό πρώτο αιώνα. Τα τελευταία χρόνια μάλιστα, έχουν ωριμάσει πολύ πέρα από το επίπεδο της απλής εικασίας, φτάνοντας στο σημείο να παρέχουν σαφείς και ελέγξιμες προβλέψεις, όπως περιμένουμε από οποιαδήποτε σοβαρή υποψήφια φυσική θεωρία. Η ιδέα των επιπλέον χωρικών διαστάσεων βρίσκεται πλέον σε στέρεα θεωρητική βάση, και η πλειοψηφία των φυσικών μοντέλων που επιχειρούν να βαδίσουν πέρα από το Καθιερωμένο Μοντέλο της σωματιδιακής φυσικής ή της κοσμολογίας ενσωματώνει αυτή τη στιγμή, σε μεγαλύτερο ή μικρότερο ποσοστό, κάποιες από τις αρχές των πολυδιάστατων θεωριών.

Το κατά πόσον τελικά τα μοντέλα μεμβρανών μπορούν να αποτελέσουν χρήσιμες περιγραφές για τη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων και την κοσμολογία μένει να διαπιστωθεί μέσω πειραμάτων και παρατηρήσεων. Η ιδέα της ύπαρξης περισσότερων διαστάσεων απ' όσες μπορούμε να αντιληφθούμε είναι σίγουρα συναρπαστική και χαίρει σοβαρού θεωρητικού υποβάθρου. Η ενδεχόμενη επιβεβαίωση της ύπαρξης επιπλέον διαστάσεων θα βρίσκεται ουσιαστικά σε συμφωνία με τη γενικότερη πορεία της γνώσης μας για τον κόσμο τους τελευταίους αιώνες, η οποία σταδιακά έχει απομυθοποιήσει τη θέση του ανθρώπου και τη σημασία του μέσα στον ευρύτερο κόσμο. Ο χώρος, ο χρόνος και η ύλη με τα οποία είμαστε εξοικειωμένοι διαπιστώνουμε ολοένα ότι παίζουν έναν πολύ δευτερεύοντα ρόλο στην πορεία του σύμπαντος στο σύνολό του. Η ύλη που μας απαρτίζει δεν είναι παρά ένα μικρό τμήμα συγκρινόμενη με τις υπόλοιπες, μέχρι στιγμής άγνωστες, συνιστώσες ύλης και ενέργειας που φαινομενικά κυριαρχούν στο σύμπαν σε μεγάλες κλίμακες. Δε θα αποτελέσει λοιπόν έκπληξη αν όντως διαπιστώσουμε ότι ακόμα και ο χώρος στον οποίο κατοικούμε δεν αποτελεί παρά μία μικρή γωνιά ενός πολύ μεγαλύτερου χωροχρονικού οικοδομήματος, την ύπαρξη του οποίο μόλις τώρα έχουμε αρχίσει να αντιλαμβανόμαστε.

Κεφάλαιο 2

Πολυδιάστατες Θεωρίες και Μοντέλα Μεμβρανών

2.1 Θεωρία Kaluza-Klein

Η πρώτη και πιο απλή σύλληψη ενός φυσικού μοντέλου, το οποίο περιέχει περισσότερες από τις γνωστές τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις, είναι η επονομαζόμενη θεωρία Kaluza-Klein [34, 35]. Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι πέρα από την πιο απλή μορφή, την οποία θα παρουσιάσουμε συνοπτικά εδώ, την ίδια επωνυμία δανείζεται και μία πλειάδα από θεωρίες με επιπλέον χωρικές διαστάσεις, όπως οι θεωρίες υπερβαρύτητας και οι Θεωρίες Υπερχορδών. Αρχικά, η θεωρία Kaluza-Klein προτάθηκε από τους δημιουργούς της ως μία πιθανή οδός ενοποίησης της βαρυτικής και ηλεκτρομαγνητικής δύναμης. Η βασική ιδέα πίσω από την θεωρία είναι ότι ο χωρόχρονος διαθέτει στην πραγματικότητα πέντε χωροχρονικές διαστάσεις, υπάρχει δηλαδή μία επιπλέον διάσταση, η οποία είναι χωροειδής και με κάποιον τρόπο απροσπέλαστη σε άμεση παρατήρηση, αφού δε γίνεται αντιληπτή σε πειράματα, τα οποία εκτελούμε σε συνήθεις κλίμακες ενέργειας. Η εξήγηση που δίνεται για την αδυναμία παρατήρησης της πέμπτης διάστασης είναι στην ουσία πολύ απλή. Η διάσταση αυτή δεν έχει άπειρη έκταση, όπως συμβαίνει με τις συνήθεις τρεις χωρικές διαστάσεις με τις οποίες είμαστε εξοικειωμένοι. Αντίθετα, έχει πεπερασμένο μήκος και είναι περιοδική. Αν οπτικοποιήσουμε τις άπειρης έκτασης χωρικές διαστάσεις με μία ευθεία, η σωστή αναπαράσταση για την πέμπτη διάσταση θα είναι ένας κύκλος πεπερασμένης ακτίνας R, η οποία καθορίζει τη φυσική έκταση της διάστασης αυτής σε σύγκριση με τις υπόλοιπες.

Ακόμα και έτσι όμως, δεν εξηγείται επαρκώς ο τρόπος με τον οποίο η πέμπτη διάσταση παραμένει αόρατη. Η πιο απλή απάντηση είναι ότι η ακτίνα R είναι πολύ μικρότερη από τις κλίμακες μήκους τις οποίες παρατηρούμε εμείς. Ο αριθμός των διαστάσεων του χωρόχρονου που βιώνουμε εξαρτάται δηλαδή από το γεγονός ότι είμαστε δεσμευμένοι να παρακολουθούμε μία συγκεκριμένη κλίμακα χωρικών αποστάσεων. Αν και η περίπτωση αυτή φαίνεται ιδιαίτερα αντιδιαισθητική, είναι στην πραγματικότητα πολύ κοντά στην καθημερινή εμπειρία. Ένα αντικείμενο, το οποίο έχει σφαιρικό σχήμα, όπως μία μπάλα, φαίνεται τρισδιάστατο σε έναν παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται αρκετά κοντά, ώστε να διακρίνει τη δομή του. Ένας παρατηρητής όμως, ο οποίος είναι πολύ απομακρυσμένος, έτσι ώστε η απόστασή του να είναι πολύ μεγάλη σε σύγκριση με την ακτίνα του αντικειμένου, θα βλέπει ουσιαστικά ένα σημείο μηδενικής διάστασης. Η διαστατικότητα του αντικειμένου, όπως την αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, δεν εξαρτάται μόνο από την εσωτερική διαστατικότητά του, αλλά και από την απόσταση που χωρίζει αντικείμενο και παρατηρητή. Η ίδια ακριβώς διαπίστωση εξακολουθεί να ισχύει, όχι μόνο για υλικά αντικείμενα μέσα στον χωρόχρονο, αλλά και για τον ίδιο το χωρόχρονο. Η διαστατικότητα του χωρόχρονου που αντιλαμβανόμαστε εξαρτάται από τις κλίμακες μεγέθους στις οποίες τα πειράματα, τα οποία εκτελούμε για να εξακριβώσουμε τον αριθμό των διαστάσεων, λαμβάνουν χώρα.

Στην περίπτωση της θεωρίας Kaluza-Klein, η πιο ταιριαστή αναλογία είναι αυτή ενός κύκλου. Ο κύκλος αντιπροσωπεύει την πέμπτη, *συμπαγοποιημένη* διάσταση. Επειδή η ακτίνα του κύκλου είναι πολύ μικρή, δεν ήμαστε σε θέση να την αντιληφθούμε σε συμβατικά πειράματα. Η πέμπτη διάσταση παραμένει έτσι κρυμμένη από παρατηρητές, οι οποίοι δεν έχουν πρόσβαση σε κλίμακες μεγέθους συγκρίσιμες με την ακτίνα R. Ωστόσο, η ύπαρξη αυτής της μικρής επιπλέον διάστασης αποδεικνύεται ότι μπορεί να έχει πολύ σημαντικές επιπτώσεις στην φυσική του χωρόχρονου. Συνδυαζόμενη με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, η κεντρική ιδέα της θεωρίας Kaluza-Klein οδηγεί σε μία - όχι απόλυτα επιτυχημένη - ενοποίηση βαρύτητας και ηλεκτρομαγνητισμού. Σε συνδυασμό με την κβαντική θεωρία, οδηγεί στην ύπαρξη ενός πλήθους από νέα βαριά σωμάτια, τα οποία δε θα υπήρχαν αν ο χωρόχρονος είχε τη συνηθισμένη τοπολογία Minkowski. Τέτοιου είδους σωματίδια θα μπορούσαν όντως να παρατηρηθούν σε πειράματα φυσικής υψηλών ενεργειών και να επηρεάζουν μετρήσιμες φυσικές διεργασίες, όπως διαφορικές διατομές σκέδασης και ρυθμούς αποδιέγερσης.

Η μαθηματική διατύπωση των παραπάνω δεν συναντά ιδιαίτερες δυσκολίες. Μπορούμε να περιγράψουμε τον χωρόχρονο της θεωρίας Kaluza-Klein χρησιμοποιώντας συντεταγμένες $X^M = (x^\mu, z)$, όπου $\mu = 0, 1, 2, 3$ είναι οι συντεταγμένες του τετραδιάστατου χωρόχρονου και z η πέμπτη διάσταση (την οποία θα ονομάζουμε από εδώ και πέρα *διάσταση KK*). Η διάσταση αυτή είναι συμπαγής, με μία ορισμένη ακτίνα συμπαγοποίησης R και παίρνει τιμές από $z = 0$ έως $z = 2\pi R$, ενώ τα οριακά σημεία ταυτίζονται λόγω της περιοδικότητας της διάστασης KK. Με βάση το σύστημα συντεταγμένων που μόλις εισαγάγαμε, ο *χώρος* (χωρίς να περιλαμβάνουμε τον χρόνο) είναι ένας κύλινδρος, του οποίου οι τρεις διαστάσεις x^1, x^2, x^3, είναι άπειρες σε έκταση και η τέταρτη διάσταση z είναι ένας κύκλος ακτίνας R. Θεωρώντας ότι ο κύλινδρος αυτός είναι ομογενής και η μετρική επίπεδη, μπορούμε να γράψουμε ένα πλήρες σύνολο κυματοσυναρτήσεων στον χώρο αυτό για ένα ελεύθερο βαθμωτό κβαντικό σωμάτιο χωρίς μάζα, το οποίο υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon

$$\partial^M \partial_M \phi\, (x^\mu, z) = 0. \tag{2.1}$$

Οι λύσεις επιπέδου κύματος γράφονται στην περίπτωση αυτή ως

$$\phi_{\mathbf{p},n} = e^{ip_\mu x^\mu} e^{i\frac{nz}{R}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{2.2}$$

Στην παραπάνω σχέση, p_μ είναι η (3+1)-διάστατη ορμή, ενώ ο ακέραιος n είναι η ιδιοτιμή της στροφορμής του σωματιδίου κατά την πέμπτη διάσταση. Λόγω του ότι η λύση ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon, η τετραδιάστατη ορμή και η στροφορμή στη διάσταση KK για το σωματίδιο συνδέονται μέσω της σχέσης

$$p_\mu p^\mu + \frac{n^2}{R^2} = 0. \tag{2.3}$$

Για ένα σωματίδιο μάζας m στον τετραδιάστατο χωρόχρονο Minkowski, η εξίσωση Klein-Gordon θα έπαιρνε τη μορφή $p_\mu p^\mu + m^2 = 0$. Συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με την αντίστοιχη για τον πενταδιάστατο χώρο της θεωρίας Kaluza-Klein, βλέπουμε ότι ο όρος $\frac{n^2}{R^2}$ είναι ακριβώς ένας όρος μάζας. Καταστάσεις οι οποίες έχουν μηδενική στροφορμή κατά την πέμπτη διάσταση έχουν μηδενικό όρο μάζας και εμφανίζονται ακριβώς σαν τετραδιάστατα άμαζα σωματίδια. Σωματίδια με μη-μηδενική στροφορμή θα αντιμετωπίζονται από τετραδιάστατους παρατηρητές σαν μαζικά σωμάτια με μάζες, οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια του $1/R$. Κάθε μία από τις καταστάσεις στροφορμής n αποτελεί μία *κατάσταση Kaluza-Klein*, η οποία, από τη σκοπιά ενός (3+1)-διάστατου παρατηρητή, αντιστοιχεί σε ένα σωμάτιο μάζας $m_n = \frac{|n|}{R}$. Έτσι, κάθε πολυδιάστατο άμαζο πεδίο ισοδυναμεί με ένα άμαζο τετραδιάστατο σωμάτιο, συνοδευόμενο από έναν *πύργο καταστάσεων* με μάζες m_n. Σε χαμηλές ενέργειες, συγκρινόμενες με τη θεμελιώδη ενεργειακή κλίμακα $1/R$, μόνο άμαζα σωματίδια μπορούν να παραχθούν, ενώ για ενέργειες ίσες ή μεγαλύτερες από την τιμή αυτή, οι καταστάσεις KK χάνουν την εμφάνισή τους, και η πέμπτη διάσταση γίνεται πλέον προσβάσιμη σε παρατήρηση.

Καθώς οι έμμαζες καταστάσεις Kaluza-Klein, οι οποίες θα συνόδευαν συνηθισμένα σωματίδια, όπως το ηλεκτρόνιο ή το φωτόνιο, δεν έχουν ακόμα παρατηρηθεί, περιμένουμε ότι η ενεργειακή κλίμακα $1/R$ είναι τουλάχιστον της τάξεως των μερικών εκατοντάδων GeV. Αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα της πέμπτης διάστασης πρέπει να είναι μικροσκοπική, $R \leq 10^{-17} cm$. Οι ιδιότητες αυτές δεν περιορίζονται μόνο στην απλούστερη περίπτωση που μελετάμε, αλλά διακρίνουν όλα τα μοντέλα του τύπου Kaluza-Klein (με μεγαλύτερο αριθμό από επιπλέον διαστάσεις, με συμπαγοποίηση πάνω σε μη-τετριμμένες πολλαπλότητες ή σφαιρικές πολλαπλότητες αντί για κύκλο κλπ.).

Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιδιότητα των μοντέλων με επιπλέον διαστάσεις, την οποία μπορούμε εύκολα να μελετήσουμε στην περίπτωση της θεωρίας Kaluza-Klein, είναι η εξάρτηση ορισμένων ενεργών σταθερών σύζευξης από τον όγκο του πολυδιάστατου χώρου. Για να δούμε τον τρόπο με τον οποίο το φαινόμενο αυτό λαμβάνει χώρα, θεωρούμε ένα βαθμωτό πεδίο όπως και πριν και ξεκινώντας από την πενταδιάστατη δράση, επιχειρούμε να γράψουμε την ενεργό τετραδιάστατη θεωρία, γράφοντας το πεδίο ως άθροισμα πάνω στον πύργο των καταστάσεων KK. Η αρχική δράση για το μοντέλο αυτό είναι η

$$S^{(5)} = \int d^4x dz \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \lambda_{(5)} \phi^4 \right) , \tag{2.4}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ένα άμαζο βαθμωτό με όρο αλληλεπίδρασης ϕ^4. Γράφοντας το πεδίο ως άθροισμα ιδιοκαταστάσεων της στροφορμής κατά τη διάσταση KK, παίρνουμε το ανάπτυγμα

$$\phi(x, z) = \sum_n \phi_n(x) \, e^{i\frac{nz}{R}} . \tag{2.5}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην πενταδιάστατη δράση, μπορούμε να προβούμε σε ολοκλήρωση ως προς την συντεταγμένη z, οπότε παίρνουμε την έκφραση για την ενεργό δράση σε τέσσερις διαστάσεις,

$$S^{(4)} = V \int d^4x \left(\sum \frac{1}{2} \partial_M \phi_n \partial^M \phi_n + \lambda_{(5)} \phi_0^4 + \lambda_{(5)} \phi_0^2 \sum_{n \neq 0} \phi_n \phi_{-n} + \ldots \right) \tag{2.6}$$

όπου με $V = 2\pi R$ συμβολίζουμε τον όγκο της επιπλέον διάστασης. Εξαιτίας του παράγοντα αυτού, που πολλαπλασιάζει τον κινητικό όρο, η παραπάνω έκφραση δε βρίσκεται σε κανονική μορφή (όπου ο κινητικός όρος θα ήταν απλά της μορφής $\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$). Αυτό σημαίνει ότι τα πεδία ϕ_n δεν έχουν τη σωστή κανονικοποίηση και δεν αντιστοιχούν στα φυσικά τετραδιάστατα πεδία της θεωρίας. Αυτά ορίζονται ως

$$\phi_n^{can} = \sqrt{V} \phi_n . \tag{2.7}$$

Μόλις γράψουμε τη δράση με βάση τα κανονικοποιημένα πεδία, έχουμε την έκφραση

$$S^{(4)} = \int d^4x \left(\sum \frac{1}{2} \partial_M \phi_n^{can} \partial^M \phi_n^{can} \right. \tag{2.8}$$

$$\left. + \frac{\lambda_{(5)}}{V} (\phi_0^{can})^4 + \frac{\lambda_{(5)}}{V} (\phi_0^{can})^2 \sum_{n \neq 0} \phi_n \phi_{-n} + \ldots \right) . \tag{2.9}$$

Εξετάζοντας τους όρους αλληλεπίδρασης, βλέπουμε ότι η ενεργός τετραδιάστατη σταθερά σύζευξης συνδέεται με τη θεμελιώδη πενταδιάστατη σταθερά μέσω της σχέσης

$$\lambda_{(4)} = \frac{1}{V} \lambda_{(5)} . \tag{2.10}$$

Καθώς η σταθερά σύζευξης σε πέντε διαστάσεις, $\frac{\lambda_{(5)}}{V}$, έχει διαστάσεις M^{-1}, η πενταδιάστατη θεωρία και η ενεργός τετραδιάστατη εκδοχή της έχουν νόημα μέχρι ενέργειες $\mathrm{M} \sim \lambda_{(5)}^{-1}$, η M δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ως μία κλίμακα υπεριώδους αποκοπής (UV cutoff). Δεδομένου ότι η επιπλέον διάσταση είναι αρκετά μεγάλη σε σύγκριση με την κλίμακα αποκοπής, $R \gg M^{-1}$, η ενεργός τετραδιάστατη σταθερά ζεύξης είναι πολύ μικρότερη της μονάδας, και άρα η τετραδιάστατη θεωρία είναι ασθενώς συζευγμένη σε χαμηλές ενέργειες [49].

Κάτι το οποίο επίσης διαπιστώνουμε από την παραπάνω δράση είναι ότι η διατήρηση της στροφορμής κατά την πέμπτη διάσταση συνεπάγεται την διατήρηση του ολικού αριθμού των καταστάσεων KK, όπως φαίνεται από τον τελευταίο όρο με την εμφάνιση του γινομένου $\phi_n \phi_{-n}$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα καταστάσεις KK με μάζα να μπορούν να παραχθούν μόνο σε ζεύγη. Η στροφορμή διατηρείται, λόγω της συμμετρίας του χώρου κάτω από μετατοπίσεις κατά μήκος της συντεταγμένης z. Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει σε μοντέλα μεμβρανών τα οποία πρόκειται να εξετάσουμε στη συνέχεια. Εκεί, η μεμβράνη σπάει την συμμετρία μετατόπισης ως προς την επιπλέον διάσταση, και η στροφορμή δε διατηρείται πλέον.

2.2 Μεγάλες Επιπλέον Διάστασεις: Το Μοντέλο Μεμβρανών ADD

Το μοντέλο μεμβρανών *ADD* [38] προτάθηκε το 1998 από τους Arkani-Hamed, Δημόπουλο και Dvali και απετέλεσε το εφαλτήριο για την εντατική μελέτη ανάλογων μοντέλων μεμβρανών κατά την τελευταία δεκαετία. Σκοπός του μοντέλου είναι να εξηγήσει την μεγάλη διαφορά που υπάρχει μεταξύ της ηλεκτρασθενούς κλίμακας $m_{EW} \sim 10^3$ GeV, στην οποία έχουμε ενοποίηση της ηλεκτρομαγνητικής και της ασθενούς πυρηνικής δύναμης και της κλίμακας *Planck* $M_{Pl} = G_N^{-1/2} \sim 10^{18}$ GeV, η οποία υποθέτουμε ότι ορίζει την κλίμακα ενέργειας της κβαντικής βαρύτητας. Το πρόβλημα των δεκαπέντε τάξεων μεγέθους μεταξύ των δύο αυτών θεμελιωδών φυσικών κλιμάκων έχει δημιουργήσει έντονο ενδιαφέρον και είναι γνωστό ως *πρόβλημα της ιεραρχίας*.

Η λύση η οποία προτείνεται στο πρόβλημα της ιεραρχίας στα πλαίσια του μοντέλου *ADD* χρησιμοποιεί στοιχεία της θεωρίας Kaluza-Klein που είδαμε παραπάνω. Σύμφωνα με το μοντέλο, ο τετραδιάστατος χωρόχρονος τον οποίο αντιλαμβανόμαστε αποτελεί απλώς μία υπερεπιφάνεια μέσα σε έναν *Υπερχώρο* (bulk), ο οποίος διαθέτει περισσότερες χωροειδείς διαστάσεις. Τα συνήθη πεδία ύλης και τα πεδία βαθμίδας που μεταδίδουν τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις βρίσκονται εντοπισμένα πάνω στην υπερεπιφάνεια αυτή, σχηματίζοντας έτσι μία μεμβράνη (brane), πάνω στην οποία βρίσκεται περιορισμένο ολόκληρο το ενεργειακό περιεχόμενο του κόσμου μας. Το βασικό στοιχείο του μοντέλου αυτού είναι ότι, σε αντίθεση με τις αλληλεπιδράσεις του Καθιερωμένου Μοντέλου, οι οποίες διαδίδονται μέσω πεδίων βαθμίδας και είναι εξ υποθέσεως περιορισμένες πάνω στη μεμβράνη, η βαρυτική δύναμη, που συνδέεται με τη γεωμετρία ολόκληρου του χωρόχρονου, είναι ελεύθερη να διαδίδεται μέσα στον Υπερχώρο και άρα έχει μία πολύ μεγαλύτερη περιοχή επιρροής σε σύγκριση με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις. Όπως προκύπτει, η χαρακτηριστική κλίμακα της τετραδιάστατης βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη από την πραγματική θεμελιώδη βαρυτική σταθερά στον Υπερχώρο. Ο παράγοντας που προκαλεί την ενίσχυση αυτή σχετίζεται με τον όγκο των επιπλέον διαστάσεων του μοντέλου. Με τον τρόπο αυτό, η βαρύτητα μπορεί, σε τέσσερις διαστάσεις, να μοιάζει πολύ ασθενέστερη σε σύγκριση με τις υπόλοιπες δυνάμεις, ενώ έχει την ίδια θεμελιώδη κλίμακα με όλες τις αλληλεπιδράσεις.

Ένα σημαντικό σημείο το οποίο εκμεταλλεύεται το μοντέλο *ADD* είναι η υπόθεση ότι η βαρυτική δύναμη εξακολουθεί να παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά από την κλίμακα μεγέθους του ενός cm μέχρι την κλίμακα $\sim M_{Pl}^{-1}$. Τη στιγμή που διατυπώθηκε το μοντέλο για πρώτη φορά, η βαρυτική δύναμη είχε μετρηθεί με ακρίβεια μόνο σε αποστάσεις της τάξεως του cm , πολύ μεγαλύτερες δηλαδή σε σύγκριση με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις του Καθιερωμένου Μοντέλου, οι οποίες έχουν μετρηθεί με μεγάλη ακρίβεια σε πολύ μικρές αποστάσεις, μέσω των πειραμάτων σκέδασης υψηλής ενέργειας. Δεδομένου ότι η σημασία της κλίμακας Planck στηρίζεται στην παραπάνω υπόθεση και εξακολουθεί προς το παρόν να είναι μόνο μία εύλογη θεωρία, ενώ η m_{EW} έχει αναδειχθεί από το πείραμα σε θεμελιώδη φυσική σταθερά, το μοντέλο *ADD* ουσιαστικά αμφισβητεί τον ουσιώδη ρόλο που παίζει αυτή τη στιγμή η M_{Pl}, υποστηρίζοντας ότι η ηλεκτρασθενής κλίμακα είναι η θεμελιώδης, τόσο για τις ηλεκτρασθενείς όσο και για τις βαρυτικές δυνάμεις. Η υπόθεση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι φαινόμενα κβαντικής βαρύτητας θα μπορούσαν να εμφανίζονται κοντά στην κλίμακα m_{EW}, αντί για την M_{Pl}. Καθώς τα πειράματά μας δεν έχουν ακόμα ελέγξει την εγκυρότητα της τωρινής βαρυτικής θεωρίας στις ενέργειες αυτές, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η άγνοια αυτή είναι ο μόνος λόγος που έχει οδηγήσει στο να θεωρούμε την M_{Pl} σημαντική.

Στο μοντέλο ADD λοιπόν, λαμβάνουμε την m_{EW} ως τη μόνη θεμελιώδη φυσική σταθερά, η οποία καθορίζει, εκτός των άλλων, την ισχύ των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων. Το πρόβλημα τις ιεραρχίας λύνεται έτσι κατά γεωμετρικό τρόπο. Η κλίμακα Planck δεν είναι μία θεμελιώδης σταθερά, αλλά προκύπτει ως παραπροϊόν της μη-τετριμμένης γεωμετρίας του χωρόχρονου και της ύπαρξης της μεμβράνης, η οποία διαχωρίζει την ισχύ των δυνάμεων του Καθιερωμένου Μοντέλου από τη βαρύτητα σε τέσσερις διαστάσεις. Το φυσικό ερώτημα που αναχύπτει στην περίπτωση αυτή είναι βέβαια το πώς εμφανίζεται η συνήθης ισχύς ($1/M_{Pl}$) που γνωρίζουμε για την βαρύτητα από το πείραμα. Η πιο απλή εικόνα είναι να θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός n από επιπλέον χωροειδείς διαστάσεις τύπου Kaluza-Klein, δηλαδή συμπαγείς, με μία ακτίνα $\sim R$ (θεωρούμε εδώ για απλότητα ότι είναι περίπου ίδια για όλες τις επιπλέον διαστάσεις). Αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο σημειακές μάζες m_1, m_2, τοποθετημένες σε κάποια απόσταση $r \ll R$ μεταξύ τους, το βαρυτικό δυναμικό μεταξύ τους θα καθορίζεται από τον νόμο του Gauss για έναν $(4+n)$-διάστατο χώρο,

$$V(r) \sim \frac{m_1}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}}, \ (r \ll R) \ . \tag{2.11}$$

Αντίθετα, μόλις οι δύο μάζες τοποθετηθούν σε μία απόσταση $r \gg R$, ο νόμος του Gauss θα εφαρμόζεται πλέον σε έναν τετραδιάστατο χώρο, καθώς οι δυναμικές γραμμές του βαρυτικού πεδίου διαδίδονται πλέον πολύ λιγότερο κατά μήκος των επιπλέον διαστάσεων. Ανακτούμε έτσι το σύνηθες βαρυτικό δυναμικό $1/r$,

$$V(r) \sim \frac{m_1}{M_{Pl(4+n)}^{n+2} R^n} \frac{1}{r}, \ (r \gg R) \ . \tag{2.12}$$

Ο όρος R^n στον παρονομαστή έρχεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο νόμο του Gauss και δεν είναι άλλος από τον όγκο των διαστάσεων KK. Η σχέση αυτή καθορίζει την τιμή της ενεργού τετραδιάστατης σταθεράς Planck, η οποία σχετίζεται με την θεμελιώδη βαρυτική σταθερά στον $(4+n)$-διάστατο χώρο $M_{Pl(4+n)}$ μέσω της

$$M_{Pl}^2 \sim M_{Pl(4+n)}^{2+n} R^n. \tag{2.13}$$

Βλέπουμε ότι, αν η ακτίνα συμπαγοποίησης R είναι αρκετά μεγάλη σε σύγκριση με την $M_{Pl(4+n)}$, η τετραδιάστατη σταθερά Planck μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη. Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να κάνουμε προβλέψεις για το μέγιστο δυνατό μέγεθος που μπορεί να έχουν οι διαστάσεις KK του μοντέλου. Θέτοντας $M_{Pl(4+n)} \sim m_{EW}$, όπως συζητήσαμε παραπάνω και απαιτώντας η R να είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να αναπαράγεται η σωστή τιμή για την παρατηρούμενη M_{Pl}, παίρνουμε το άνω όριο

$$R \sim 10^{\frac{30}{n}-17} cm \times \left(\frac{1TeV}{m_{EW}}\right)^{1+\frac{2}{n}} . \tag{2.14}$$

Για μία μόνο επιπλέον έξτρα διάσταση, όπως στην περίπτωση της θεωρίας Kaluza-Klein, οπότε $n = 1$, παίρνουμε την τιμή $R \sim 10^{13}\, cm$. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε αποκλίσεις από τη Νευτώνεια βαρύτητα μέσα στο ηλιακό σύστημα, γεγονός που βρίσκεται σε αντίθεση με τις παρατηρήσεις, οπότε η περίπτωση της μίας επιπλέον διάστασης, στα πλαίσια του μοντέλου ADD, δεν φαίνεται πιθανή. Αν όμως επιτρέψουμε την ύπαρξη περισσοτέρων διαστάσεων KK, έτσι ώστε $n \geq 2$, οι κλίμακες μεγέθους στις οποίες έχουμε τροποποίηση της βαρυτικής θεωρίας γίνονται πολύ μικρότερες από αυτές που είναι αυτή τη στιγμή διαθέσιμες στο πείραμα. Το 1998, η περίπτωση $n = 2$ ή ($R \sim 100\mu m$ -1 mm) ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, καθώς έδινε αποκλίσεις, οι οποίες θα μπορούσαν σύντομα να μετρηθούν σε πειράματα βαρύτητας σε αυτές τις κλίμακες [50]. Η πιθανότητα αυτή δημιούργησε νέο ενδιαφέρον για έρευνα της βαρύτητας σε αποστάσεις κάτω από ένα mm. Αν και μέσα στην τελευταία δεκαετία μία σειρά από πειράματα έχει χαμηλώσει στο ανώτερο όριο για το μέγεθος της R σε περίπου ~ 100 nm [51, 52], δεν παύει να υπάρχει ακόμα μεγάλη απόσταση μέχρι την ηλεκτρασθενή κλίμακα, στην οποία θα ήταν πιθανό να παρατηρηθούν τροποποιήσεις στη Νευτώνεια βαρύτητα. Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή στην οποία υπάρχουν 6 επιπλέον διαστάσεις, όπως προβλέπεται από τη Θεωρία Υπερχορδών, όπου η ολική διάσταση του χώρου είναι $D = 10$. Για $n = 6$, παίρνουμε το όριο $R \sim 10^{-12}$ cm, ακτίνα η οποία είναι ακόμα πολύ μεγαλύτερη από την ηλεκτρασθενή κλίμακα, $(1TeV)^{-1} \sim 10^{-17}cm^1$. Τέλος, πρέπει να τονίσουμε ότι δεν είναι αναγκαστικό οι κλίμακες συμπαγοποίησης για όλες τις επιπλέον διαστάσεις να είναι οι ίδιες, ούτε καν της ίδιας τάξεως μεγέθους. Αν κάποιες από αυτές είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με τις υπόλοιπες, τότε η περίπτωση με $n > 2$ μπορεί να παρουσιάζει βαρυτικές τροποποιήσεις στις ίδιες κλίμακες μεγέθους με ένα μοντέλο όπου $n = 2$. Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι υπάρχει εκφυλισμός ως προς τον αριθμό των διαστάσεων KK και την ακτίνα τους.

Σε αντίθεση με τη βαρύτητα, όπου ο πειραματικός της έλεγχος κοντά σε ατομικές κλίμακες μεγέθους εμφανίζεται μάλλον ασθενικός, οι ηλεκτρασθενείς δυνάμεις του Καθιερωμένου Μοντέλου έχουν ελεγχθεί με μεγάλη ακρίβεια σε αποστάσεις της τάξεως της ηλεκτρασθενούς κλίμακας m_{EW}, όπου εξακολουθούν να βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με την εικόνα που έχουμε για μία τετραδιάστατη θεωρία πεδίου βαθμίδας. Τα σωματίδια και οι αλληλεπιδράσεις του Καθιερωμένου Μοντέλου φαίνεται να διαδίδονται σε έναν τετραδιάστατο χωρόχρονο και να μην έχουν πρόσβαση σε έναν Υπερχώρο μεγαλύτερης διάστασης, τουλάχιστο μέχρι την m_{EW}. Εδώ βρίσκεται και η κύρια διαφορά μεταξύ της θεωρίας Kaluza-Klein και του μοντέλου ADD. Οι επιπλέον διαστάσεις δεν είναι προσβάσιμες σε όλα τα σωματίδια της θεωρίας, αλλά μόνο σε αυτά που μεταδίδουν τη βαρυτική δύναμη, δηλαδή στα βαρυτόνια. Αυτό σημαίνει ότι η κυματοσυναρτήσεις των σωματιδίων του Καθιερωμένου Μοντέλου έχουν το προφίλ μίας συνάρτησης δέλτα κατά μήκος των επιπλέον διαστάσεων, σε αντίθεση με τις κυματοσυναρτήσεις των βαρυτονίων, οι οποίες είναι μη-μηδενικές μέσα στον Υπερχώρο. Το αποτέλεσμα είναι ότι μόνο τα βαρυτόνια έχουν καταστάσεις KK. Η μηδενική τους κατάσταση μεταδίδει τη συνηθισμένη τετραδιάστατη βαρύτητα, ενώ ο πύργος των έμμαζων καταστάσεων δίνει

[1] Στο φυσικό σύστημα μονάδων, όπου $\hbar = c = 1$, οι κλίμακες μήκους μπορούν να γραφούν με βάση κλίμακες ενέργειας. Δεδομένου ενός μήκους l, μπορούμε να φτιάξουμε μία μοναδική μάζα m, χρησιμοποιώντας μόνο τις σταθερές $\hbar$ και c. Η σχέση που συνδέει τις ποσότητες αυτές είναι $mc^2 = \frac{\hbar c}{l}$. Για να κάνουμε γρήγορες μετατροπές ανάμεσα σε ενέργειες και κλίμακες μήκους, χρησιμοποιούμε ότι $\hbar c \simeq 200MeV \times 10^{-15}m$.

διορθώσεις σε μικρές κλίμακες μήκους, συγκρίσιμες με το μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων. Τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου δεν έχουν καταστάσεις KK και βρίσκονται περιορισμένα πάνω στη μεμβράνη, που τους απαγορεύει να κινούνται κατά μήκος των διαστάσεων KK. Αυτό το σημείο σηματοδοτεί και μία επιπλέον διαφοροποίηση σε σύγκριση με τη θεωρία Kaluza-Klein. Εκεί είδαμε ότι η κλίμακα $1/R$ ορίζει τη μάζα των πρώτων έμμαζων καταστάσεων KK, τις οποίες θα βλέπαμε σε πειράματα σχέδασης ως νέα σωμάτια. Στο μοντέλο ADD, καθώς τέτοιες καταστάσεις δεν υπάρχουν εξ υποθέσεως, δεν υπάρχει σύγκρουση με το πείραμα, ακόμα και αν οι επιπλέον διαστάσεις έχουν ακτίνες συμπαγοποίησης πολύ μεγαλύτερες από $\sim 10^{-17}cm$. Αυτός είναι και ο λόγος που τα μοντέλα μεμβρανών όπως το ADD και τα παράγωγά του ονομάζονται θεωρίες *μεγάλων* επιπλέον διαστάσεων.

Σε πρώτη προσέγγιση και λαμβάνοντας υπόψιν την περίπτωση όπου έχουμε μόνο μία διάσταση KK, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεμβράνη έχει απειροστό πάχος ως προς τη διάσταση αυτή. Το Καθιερωμένο Μοντέλο παραμένει έτσι τετραδιάστατο μέχρι αυθαίρετα υψηλές ενέργειες: ανεξάρτητα από την ενέργεια στην οποία γίνονται τα πειράματα, δεν υπάρχει τρόπος να διώξουμε κάποιο σωματίδιο από τη μεμβράνη. Στην πράξη, θα περιμέναμε ότι ο χωρικός περιορισμός πάνω στη μεμβράνη δεν είναι απόλυτος. Αν θεωρήσουμε μάλιστα ότι η m_{EW} είναι η μόνη θεμελιώδης κλίμακα μικρού μήκους της θεωρίας, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι ο τετραδιάστατος χώρος μας δεν αποτελεί μία απειροστά λεπτή μεμβράνη, αλλά έχει ένα πεπερασμένο πάχος $\sim m_{EW}^{-1}$ κατά μήκος της επιπλέον διάστασης.

Το βασικότερο ερώτημα το οποίο καλούμαστε να απαντήσουμε σε ένα μοντέλο μεμβρανών είναι προφανώς ο τρόπος με τον οποίο σχηματίζεται η μεμβράνη και η φυσική εξήγηση του περιορισμού του Καθιερωμένου Μοντέλου πάνω σε αυτήν την υπερεπιφάνεια. Κατά καιρούς, έχουν προταθεί διάφορες θεωρίες για τον σχηματισμό τέτοιου είδους μεμβρανών, προτού καν τα μοντέλα αυτά αναδειχθούν ως υποψήφια για την απάντηση του προβλήματος της ιεραρχίας. Μία μέθοδος στηρίζεται στην ύπαρξη τοπολογικών ανομοιομορφιών [37] (topological defects), πάνω στις οποίες παγιδεύονται οι μηδενικές καταστάσεις των πεδίων. Η μεμβράνη στην περίπτωση αυτή αποτελεί ουσιαστικά μία διαχωριστική επιφάνεια (domain wall), η οποία χωρίζει δύο περιοχές του χώρου, που χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τιμές κάποιου φυσικού πεδίου, όπως ένα βαθμωτό πεδίο. Η εικόνα αυτή είναι ανάλογη με την συνήθη εμπειρία που έχουμε για φυσικές μεμβράνες ως διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ δύο διαφορετικών φάσεων της ύλης, π.χ. υγρή και αέρια. Στη Θεωρία Υπερχορδών επίσης, η ύπαρξη μεμβρανών ως φυσικών οντοτήτων φαίνεται απολύτως αναγκαία. Τέτοιες μεμβράνες (D-Branes) ορίζουν τα όρια πάνω στα οποία κινούνται τα άκρα ανοιχτών χορδών και μπορούν να έχουν εξίσου μεγάλη φυσική σημασία όσο και οι ίδιες οι χορδές, παρέχουν δε μία πιο θεμελιώδη εξήγηση για την ύπαρξη μεμβρανών και τον περιορισμό ύλης και ενέργειας πάνω σε αυτές [32].

Πέρα από την τροποποίηση της βαρυτικής δύναμης σε μικρές αποστάσεις, το μοντέλο ADD προβλέπει επίσης νέα και ενδιαφέρουσα φαινομενολογία για τη σωματιδιακή φυσική σε κλίμακες ενέργειας κοντά στην m_{EW}. Αν όντως αυτή είναι η κλίμακα που ορίζει την ισχύ των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων, θα περιμέναμε πειράματα σχέδασης στις ενέργειες αυτές, οι οποίες θα είναι προσβάσιμες από τους νέας γενιάς επιταχυντές όπως ο LHC (ο οποίος, καθώς γράφονται αυτές οι γραμμές, ετοιμάζεται να μπει σε λειτουργία) να μελετήσουν, όχι μόνο τη φαινομενολογία της ρήξεως της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, αλλά και την ίδια την κβαντική βαρύτητα! Πράγματι, εφόσον οι επιπλέον διαστάσεις στην εικόνα αυτή γίνονται διαθέσιμες σε παρατήρηση όταν φτάνουμε σε ενέργειες κοντά στην m_{EW}, και καθώς μόνο τα βαρυτόνια έχουν έμμαζες καταστάσεις KK, περιμένουμε να δούμε παραγωγή τέτοιων καταστάσεων σε πειράματα σκέδασης σωματιδίων. Καθώς τα βαρυτόνια KK τα οποία παράγονται δεν είναι ανιχνεύσιμα, φαίνονται στο πείραμα ως έλλειμμα ενέργειας. Όπως είπαμε και πριν, η παρουσία της μεμβράνης σπάει τη συμμετρία μετατόπισης κατά μήκος των επιπλέον διαστάσεων και άρα είναι δυνατή η παραγωγή καταστάσεων KK των βαρυτονίων μεμονωμένα και όχι σε ζεύγη. Επίσης, αν τα πεδία του Καθιερωμένου Μοντέλου είναι χωρικά περιορισμένα μέσα σε μία μεμβράνη πάχους m_{EW}^{-1} στις επιπλέον διαστάσεις, σε αρκετά ενεργειακές συγκρούσεις θα αποκτήσουν επαρκή ορμή κατά μήκος των επιπλέον διαστάσεων, ώστε να είναι σε θέση να αποδράσουν από τη μεμβράνη, δηλαδή από τον τετραδιάστατο χώρο μας, αν βέβαια αυτό δεν απαγορεύεται από συνθήκες διατήρησης κάποιου φορτίου βαθμίδας, όπως το ηλεκτρικό φορτίο [38] .

2.3 Το Μοντέλο Μεμβρανών Randall Sundrum-1

Μέχρι στιγμής, τα μοντέλα που θεωρήσαμε στηρίζονται στην βασική ιδέα της θεωρίας Kaluza-Klein ότι οι επιπλέον διαστάσεις είναι αρκετά μικρές, ώστε να διαφεύγουν ανίχνευσης σε συμβατικά πειράματα. Δεν λάβαμε επίσης καθόλου υπόψιν το γεγονός ότι μία μεμβράνη πρέπει να διαθέτει κάποια τάση, ενέργεια δηλαδή ανά μονάδα επιφάνειας, η οποία συνδέεται με την πυκνότητα ενέργειας του πεδίου που αρχικά τη δημιούργησε (αν θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι προκαλείται ως τοπολογική ανομοιομορφία ενός βαθμωτού πεδίου) και η οποία περιμένουμε να έχει επιπτώσεις στη βαρυτική συμπεριφορά του μοντέλου. Όπως θα δούμε στο εδάφιο αυτό, μία ιδιοβαρυτική (self-gravitating) μεμβράνη μπορεί να επάγει μία καινούργια γεωμετρία στον Υπερχώρο της και να οδηγήσει σε μία σειρά από αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά. Μάλιστα, κατασκευές αυτού του είδους, όχι μόνο επεκτείνουν το μοντέλο ADD, αλλά όπως θα δείξουμε στο επόμενο εδάφιο, ανοίγουν το δρόμο σε ακόμα πιο εντυπωσιακές θεωρίες, όπου οι επιπλέον διαστάσεις μπορούν να είναι, όχι μόνο μεγάλες, αλλά και άπειρες σε έκταση!

Στο μοντέλο ADD, η γεωμετρία του χώρου ήταν *παραγοντοποιήσιμη*, μπορούσε δηλαδή να γραφτεί ως το γινόμενο του συνήθους τετραδιάστατου χώρου και του χώρου που ήταν κάθετος σε αυτόν, απαρτιζόμενος από τις επιπλέον διαστάσεις KK. Μπορούμε όμως να φανταστούμε περιπτώσεις, όπου η γεωμετρία του Υπερχώρου δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο ανεξάρτητων γεωμετριών. Αντ' αυτού, υπάρχει ένας *παράγοντας στρέβλωσης* (warp factor) στη μετρική, ο οποίος εξαρτάται από τις επιπλέον διαστάσεις και πολλαπλασιάζει την μετρική του τετραδιάστατου χωρόχρονου. Αν ο παράγοντας στρέβλωσης αλλάζει αρκετά γρήγορα ως προς τις επιπλέον διαστάσεις, μπορεί να οδηγήσει, όπως θα δούμε, σε ενδιαφέρουσα φαινομενολογία, όσον αφορά το πρόβλημα της ιεραρχίας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μοντέλου μεμβρανών με την ιδιότητα αυτή είναι το μοντέλο Randall -

Sundrum [39] (ή $RS-1$). Σε αυτό, ο Υπερχώρος θεωρείται ότι είναι πενταδιάστατος, οπότε υπάρχει μία επιπλέον χωροειδής διάσταση, την οποία συμβολίζουμε χρησιμοποιώντας τη γωνιακή συντεταγμένη ϕ. Η διάσταση αυτή είναι περιοδική, με μία χαρακτηριστική ακτίνα r_c και εκτείνεται από 0 έως 2π. Η μετρική που περιγράφει την (μη-παραγοντοποιήσιμη) γεωμετρία του χωρόχρονου Randall - Sundrum είναι η

$$ds^2 = e^{-2kr_c\phi}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \tag{2.15}$$

Στην έκφραση αυτή, ο παράγοντας k είναι ένα μέτρο του πόσο καμπυλωμένος είναι ο χώρος κατά μήκος της πέμπτης διάστασης. Βλέπουμε ότι στο μοντέλο αυτό ο Υπερχώρος δεν είναι πια ένας πολυδιάστατος χώρος Minkowski με μη-τετριμμένη τοπολογία, αλλά έχει τη μορφή ενός πενταδιάστατου χώρου $anti-de\,Sitter$ (AdS_5). Μία γεωμετρία του παραπάνω τύπου προκύπτει ως λύση των εξισώσεων Einstein που παράγονται από την ακόλουθη δράση

$$\begin{aligned} S &= S_{gravity} + S_{vis} + S_{hid}\,, \\ S_{gravity} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi\sqrt{-G}\{-\Lambda + 2M^3 R\}\,, \\ S_{vis} &= \int d^4x\sqrt{-g_{vis}}\{\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}\}\,, \\ S_{hid} &= \int d^4x\sqrt{-g_{hid}}\{\mathcal{L}_{hid} - V_{hid}\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

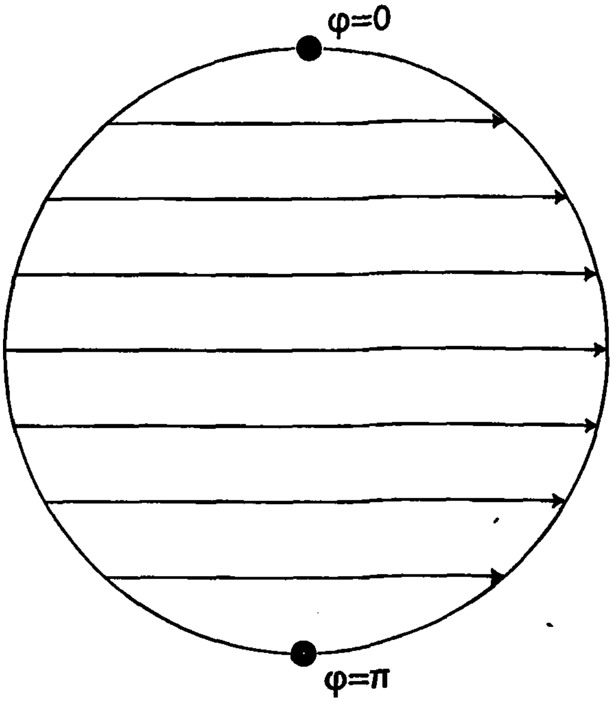
Βλέπουμε ότι η δράση αυτή περιέχει τρεις διαφορετικές συνεισφορές. Ο πρώτος όρος, $S_{gravity}$, περιέχει τον βαρυτικό όρο Einstein-Hilbert και την κοσμολογική σταθερά του πενταδιάστατου Υπερχώρου Λ. Με M συμβολίζουμε την πενταδιάστατη μάζα Planck, που ορίζει την ισχύ της βαρυτικής δύναμης στον Υπερχώρο. Ο δεύτερος και τρίτος όρος αντιπροσωπεύουν το ενεργειακό περιεχόμενο δύο μεμβρανών, τις οποίες ονομάζουμε *ορατή* (visible ή υπέρυθρη ή μεμβράνη TeV) και *κρυμμένη* (hidden ή υπεριώδης ή μεμβράνη Planck). Το περιεχόμενο κάθε μεμβράνης χωρίζεται σε ένα τμήμα $\mathcal{L}$, το οποίο αντιπροσωπεύει συνηθισμένη ύλη, όπως πεδία του Καθιερωμένου Μοντέλου και σε έναν όρο V, ο οποίος είναι η τάση της μεμβράνης και είναι παρών ακόμα και όταν δεν υπάρχει κανένα άλλο είδος ύλης πάνω της.

Καθώς ο χωρόχρονος τον οποίο θεωρούμε δεν γεμίζει ολόκληρη την πέμπτη διάσταση, πρέπει να ορίσουμε κάποιες συνοριακές συνθήκες. Αυτές είναι η περιοδικότητα της ϕ, καθώς και η ταύτιση των σημείων (x,ϕ) με τα $(x,-\phi)$, οπότε η πέμπτη διάσταση έχει την τοπολογία *σφαιρικής πολλαπλότητας* (orbifold), $S^1/\mathbf{Z}_2$. Τα *σταθερά σημεία* της σφαιρικής πολλαπλότητας, $\phi = 0$ και $\phi = \pi$, είναι οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται τοποθετημένες η χρυμμένη και η ορατή μεμβράνη αντίστοιχα. Οι επαγόμενες μετρικές πάνω σε αυτές είναι

$$g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi), \quad g_{\mu\nu}^{hid}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0). \tag{2.17}$$

Μετά την επιβολή της συμμετρίας $\mathbf{Z}_2$, το πεδίο τιμών της πέμπτης διάστασης είναι $0 \leq \phi \leq \pi$. Απουσία άλλης ύλης πάνω στις μεμβράνες, οι εξισώσεις Einstein στον Υπερχώρο γράφονται ως

$$\sqrt{-G}\left(R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R\right) =$$



Σχήμα 2.1: Ταυτοποίηση αρνητικών συντεταγμένων με θετικές πάνω σε μία σφαιρική πολλαπλότητα (orbifold).

$$-\frac{1}{4M^3}[\Lambda\sqrt{-G}\, G_{MN} + V_{vis}\sqrt{-g_{vis}}\, g^{vis}_{\mu\nu}\, \delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\, \delta(\phi-\pi)$$
$$+V_{hid}\sqrt{-g_{hid}}\, g^{hid}_{\mu\nu}\, \delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\, \delta(\phi)]. \tag{2.18}$$

Αναζητούμε λύσεις, οι οποίες να είναι αμετάβλητες κάτω από μετασχηματισμούς Poincare σε τέσσερις διαστάσεις. Η απαίτηση αυτή μας οδηγεί στην ακόλουθη προδιαγραφή για τη μορφή της λύσης της μετρικής

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + r_c^2 d\phi^2. \tag{2.19}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στις εξισώσεις Einstein, αυτές ανάγονται στις δύο ακόλουθες εξισώσεις

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = -\frac{\Lambda}{4M^3}, \tag{2.20}$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{hid}}{4M^3 r_c}\delta(\phi) + \frac{V_{vis}}{4M^3 r_c}\delta(\phi-\pi). \tag{2.21}$$

Από αυτές μπορούμε να λύσουμε για τη μορφή της συνάρτησης $\sigma(\phi)$, η οποία και καθορίζει τον παράγοντα στρέβλωσης. Λαμβάνοντας υπόψιν τη σφαιρική συμμετρία $\phi \to -\phi$, η λύση γράφεται ως

$$\sigma = r_c|\phi|\sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}, \tag{2.22}$$

όπου δεν έχουμε γράψει τη σταθερά ολοκλήρωσης, καθώς αυτή μπορεί να απορροφηθεί από μία αλλαγή των τετραδιάστατων συντεταγμένων. Όπως βλέπουμε, η λύση αυτή έχει νόημα μόνο για αρνητικές τιμές της κοσμολογικής σταθεράς Λ, και άρα ο χώρος ανάμεσα στις δύο μεμβράνες είναι AdS_5.

Από την εξίσωση (2.21) επίσης συνάγεται ότι η παραπάνω λύση είναι έγκυρη μόνο όταν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες, γνωστές και ως συνθήκες *λεπτής ρύθμισης* (fine-tunning)

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2. \tag{2.23}$$

Όπως βλέπουμε, οι δύο μεμβράνες πρέπει να έχουν αντίθετες τάσεις. Αν η τάση της κρυμμένης μεμβράνης είναι θετική, αυτή της ορατής μεμβράνης πρέπει να είναι αρνητική. Η παρουσία μίας μεμβράνης αρνητικής τάσεως σε αυτό το μοντέλο είναι δηλαδή επιβεβλημένη. Η τελική μορφή της λύσης είναι έτσι

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \tag{2.24}$$

Βλέπουμε ότι σε κάθε τιμή της ϕ αντιστοιχεί και μία τετραδιάστατη υπερεπιφάνεια, η οποία έχει τη γεωμετρία ενός χώρου Minkowski (με μετρική $\eta_{\mu\nu}$). Οι ίδιες οι μεμβράνες χαρακτηρίζονται επίσης από επίπεδους τετραδιάστατους χωρόχρονους.

Θα εξετάσουμε τώρα πώς η λύση αυτή αντιμετωπίζει το πρόβλημα της ιεραρχίας. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να γράψουμε την ενεργό τετραδιάστατη δράση για την βαρύτητα πάνω στις μεμβράνες και από αυτήν να εξαγάγουμε την ενεργό τιμή της σταθεράς *Planck*. Το πρώτο βήμα είναι να αναγνωρίσουμε τις άμαζες βαρυτικές διαταραχές γύρω από την κλασική λύση. Αυτές παίζουν το ρόλο των βαρυτονίων στην ενεργό θεωρία, μεταδίδοντας την τετραδιάστατη βαρύτητα και είναι οι μηδενικές καταστάσεις των διαταραχών της μετρικής της μορφής

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\phi|}[\eta_{\mu\nu} + \overline{h}_{\mu\nu}(x)]dx^\mu dx^\nu + T^2(x)d\phi^2. \tag{2.25}$$

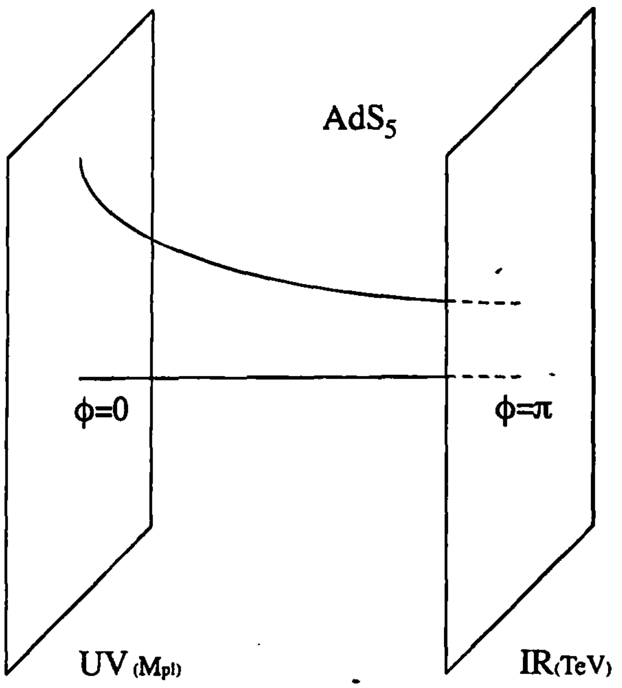
Στην έκφραση αυτή, το $\overline{h}_{\mu\nu}$ αντιπροσωπεύει τανυστικές διαταραχές γύρω από τον χώρο Minkowski και αντιστοιχεί στο τετραδιάστατο βαρυτόνιο. Θεωρούμε ότι το μέτρο της πέμπτης διάστασης $T(x)$ είναι σταθεροποιημένο στην μέση τιμή του για το κενό (vacuum expectation value) r_c, ενώ τυχόν διανυσματικές διαταραχές δεν είναι παρούσες λόγω της επιβολής της $\mathbf{Z}_2$ συμμετρίας. Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.25) για τη μετρική στη δράση, παίρνουμε την ενεργό τετραδιάστατη εκδοχή της. Ενδιαφερόμαστε μόνο για το τμήμα το οποίο καθορίζει την ενεργό σταθερά Planck,

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \; 2M^3 r_c e^{-2kr_c|\phi|}\sqrt{-\overline{g}}\;\overline{R} \;, \tag{2.26}$$

όπου $\overline{R}$ είναι το τετραδιάστατο βαθμωτό *Ricci*, παραγόμενο από τη μετρική $\overline{g}_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + \overline{h}_{\mu\nu}(x)$. Ο συντελεστής του ολοκληρώματος αυτού, μόλις εκτελέσουμε την ολοκλήρωση πάνω στην πέμπτη διάσταση, θα πρέπει να ισούται με $2M_{pl}^2$, οπότε έχουμε την έκφραση

$$M_{Pl}^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{M^3}{k}[1 - e^{-2kr_c\pi}]. \tag{2.27}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ένα από τα πιο βασικά αποτελέσματα του μοντέλου Randall - Sundrum, και θα επανέλθουμε σε αυτήν στο επόμενο εδάφιο. Όπως βλέπουμε, αν $kr_c \gg 1$, η M_{Pl} εξαρτάται πολύ ασθενώς από το μέγεθος της επιπλέον διάστασης. Αυτό επιτρέπει στην επιπλέον διάσταση να είναι μεγάλη σε έκταση, χωρίς όμως να επηρεάζει την κλίμακα ενέργειας της τετραδιάστατης βαρύτητας. Αν θεωρήσουμε $M \sim k \sim M_{Pl}$, η (2.27) αναπαράγει τη σωστή τιμή για την τετραδιάστατη σταθερά Planck.



Σχήμα 2.2: Η γεωμετρική δομή του μοντέλου $RS-1$. Ένας χώρος anti-de Sitter χωρίζει τις δύο μεμβράνες, τοποθετημένες στα σταθερά σημεία της σφαιρικής πολλαπλότητας ($\phi = 0$ και $\phi = \pi$).

Πιο πριν κάναμε έναν διαχωρισμό μεταξύ ορατής και χρυμμένης μεμβράνης. Θα δικαιολογήσουμε τώρα αυτή την επιλογή. Θεωρούμε ότι η ορατή μεμβράνη είναι αυτή που φέρει αρνητική τάση και έχει ως ενεργειακό περιεχόμενο το Καθιερωμένο Μοντέλο. Η κρυμμένη μεμβράνη έχει θετική τάση και δεν είναι προσβάσιμη σε παρατήρηση. Τετραδιάστατοι παρατηρητές βρίσκονται πάνω στην ορατή μεμβράνη, στο σημείο $\phi = \pi$. Παρατηρούμε ότι η επαγόμενη μετρική στην κρυμμένη μεμβράνη είναι $g_{hid} = \overline{g}_{\mu\nu}$, ενώ στην ορατή $g^{vis}_{\mu\nu} = e^{-2kr_c\pi}\overline{g}_{\mu\nu}$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα βαθμωτό πεδίο πάνω στην ορατή μεμβράνη, ανάλογο με ένα πεδίο Higgs. Το τμήμα της δράσης που αντιστοιχεί στο πεδίο αυτό είναι της μορφής

$$S_{vis} \supset \int d^4x\sqrt{-g_{vis}}\{g^{\mu\nu}_{vis}\partial_\mu\phi^\dagger\partial_\nu\phi - \lambda(|\phi|^2 - m_0^2)^2\}, \qquad (2.28)$$

όπου m_0 είναι η θεμελιώδης μάζα του πεδίου. Χρησιμοποιώντας την έκφραση για την επαγόμενη μετρική πάνω στη μεμβράνη, η δράση γίνεται

$$S_{vis} \supset \int d^4x\sqrt{-\overline{g}}e^{-4kr_c\pi}\{\overline{g}^{\mu\nu}e^{2kr_c\pi}\partial_\mu\phi^\dagger\partial_\nu\phi - \lambda(|\phi|^2 - m_0^2)^2\}, \qquad (2.29)$$

Απορροφώντας τώρα τους εκθετικούς παράγοντες στρέβλωσης στα πεδία, έτσι ώστε να φέρουμε τη δράση σε κανονική μορφή, παίρνουμε την τελική έκφραση για την ενεργό δράση στη μεμβράνη

$$S_{eff} \supset \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\{\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^\dagger\partial_\nu\phi - \lambda(|\phi|^2 - e^{-2kr_c\pi}m_0^2)^2\}. \tag{2.30}$$

Όπως βλέπουμε, η ενεργός μάζα του πεδίου είναι τώρα

$$m \equiv e^{-kr_c\pi}m_0. \tag{2.31}$$

Αν η μάζα του πεδίου είναι αρχικά της τάξεως M_{Pl} και $kr_c \gg 1$, ο παράγοντας στρέβλωσης παράγει μία πολύ μικρότερη ενεργό μάζα. Η ιδιότητα αυτή είναι γενική για οποιαδήποτε κλίμακα μάζας εμφανίζεται στη δράση. Έτσι, ξεκινώντας από μία θεωρία διατυπωμένη στην M_{Pl}, στην ίδια δηλαδή κλίμακα ενέργειας με αυτή της βαρύτητας, παίρνουμε μία ενεργό θεωρία με πολύ μικρότερες μάζες. Μάλιστα, εξαιτίας του εκθετικού παράγοντα, ο όρος kr_c δεν είναι ανάγκη να είναι υπερβολικά μεγάλος, για να προχαλέσει μία τεράστια ιεραρχία. Με $kr_c \sim 50$, μπορούμε να μεταβούμε από μάζες τάξεως M_{Pl} στο $1TeV$. Η εικόνα εδώ είναι η αντίστροφη από αυτήν του μοντέλου ADD. Εκεί, η m_{EW} ήταν η θεμελιώδης κλίμακα και η M_{Pl} παραγόταν από τη γεωμετρία. Εδώ, θεμελιώδης θεωρείται η M_{Pl}, ενώ η ηλεκτρασθενής κλίμακα παράγεται λόγω του εκθετικού παράγοντα στρέβλωσης.

Η εκθετική ιεραρχία του μοντέλου Randall - Sundrum παρουσιάζει ένα πλεονέκτημα απέναντι στο ADD. Είδαμε ότι στο δεύτερο μπορέσαμε να παραγάγουμε την κλίμακα Planck από την ηλεκτρασθενή, απαιτώντας όμως η ακτίνα συμπαγοποίησης να είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα που αντιστοιχεί στην ηλεκτρασθενή κλίμακα[2]. Αυτή η συνθήκη ουσιαστικά επανεισάγει ένα νέο πρόβλημα ιεραρχίας, καθώς καλούμαστε να εξηγήσουμε γιατί η ακτίνα συμπαγοποίησης πρέπει να είναι τόσο μεγάλη. Αντίθετα, στο μοντέλο Randall - Sundrum, με $kr_c \sim 50$ μπορούμε να επιτύχουμε την επιθυμητή ιεραρχία, οπότε η ακτίνα συμπαγοποίησης στην περίπτωση αυτή δεν απέχει πολύ από την κλίμακα Planck .

2.4 Άπειρες Επιπλέον Διαστάσεις: Randall Sundrum-2

Είδαμε πώς το μοντέλο Randall Sundrum μπορεί με βάση μία μη-παραγοντοποιήσιμη γεωμετρία να παράγει την παρατηρούμενη ιεραρχία μεταξύ της ηλεκτρασθενούς κλίμακας και της κλίμακας Planck. Όπως διαπιστώσαμε κατά την παραγωγή της έκφρασης (2.27), η ακτίνα συμπαγοποίησης r_c επηρεάζει κατά ασθενή τρόπο τη σχέση μεταξύ της θεμελιώδους πενταδιάστατης κλίμακας βαρύτητας και της τετραδιάστατης σταθεράς Planck . Δεν εκμεταλλευτήκαμε το χαρακτηριστικό αυτό παραπάνω, όπου προτεραιότητά μας ήταν να εξηγήσουμε το πρόβλημα της ιεραρχίας. Επανεξετάζοντας όμως τη σχέση που βρήκαμε, καταλαβαίνουμε ότι αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί με έναν διαφορετικό τρόπο, για να απαντήσει ένα άλλο

[2] $R \sim \frac{1}{m_{EW}}\left(\frac{M_{Pl}}{m_{EW}}\right)^{\frac{2}{n}}$.

ερώτημα: αυτό της ύπαρξης επιπλέον διαστάσεων, οι οποίες μπορούν να είναι μακροσκοπικής κλίμακας, ακόμα και άπειρες σε έκταση. Η αναζήτηση αυτή οδηγεί στο μοντέλο το οποίο είναι γνωστό ως Randall Sundrum-2 [40] ($RS-2$).

Η εικόνα που σχηματίσαμε για τις επιπλέον διαστάσεις στα προηγούμενα εδάφια ήταν ότι αυτές δε γίνονται αντιληπτές επειδή είναι συμπαγείς και πολύ μικρές σε μέγεθος. Στην περίπτωση της θεωρίας Kaluza-Klein, το μέγεθος των επιπλέον διαστάσεων περιορίζεται αυτομάτως από το γεγονός ότι δεν βλέπουμε καταστάσεις KK των γνωστών σωματιδίων στους επιταχυντές. Στο ADD, έχουμε ένα μέγιστο όριο, το οποίο είναι λιγότερο ισχυρό και έχει να κάνει με την κλίμακα αποστάσεων στην οποία η βαρυτική δύναμη έχει πειραματικά ελεγχθεί. Όλα τα συμπεράσματα αυτά στηρίχθηκαν σε μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούν παραγοντοποιήσιμες γεωμετρίες. Όπως θα δούμε, οι περιορισμοί αυτοί παύουν να ισχύουν στο μοντέλο Randall Sundrum-2 λόγω του χαμπυλωμένου Υπερχώρου. Ο εκθετικός παράγοντας στρέβλωσης παρέχει τη δυνατότητα στην επιπλέον διάσταση να είναι μη-συμπαγής και άπειρης έκτασης. Μία τέτοια εκτεταμένη πέμπτη διάσταση, προφανώς δε θα ήταν αντιληπτή από έναν τετραδιάστατο παρατηρητή μέσω των αλληλεπιδράσεων του Καθιερωμένου Μοντέλου, αφού αυτές θεωρούνται παγιδευμένες πάνω στη μεμβράνη. Η βαρύτητα όμως είναι σε θέση να μεταδίδεται σε όλες τις διαστάσεις. Αν όντως υπάρχει μία επιπλέον χωροειδής, μη-συμπαγής διάσταση πέρα από τις τρεις γνωστές, ο νόμος δύναμης της βαρύτητας θα περιμέναμε να είναι διαφορετικός από $1/r$. Όπως προκύπτει όμως, η μη-τετριμμένη γεωμετρία του Υπερχώρου οδηγεί τις μηδενικές καταστάσεις των βαρυτονίων να παγιδεύονται και αυτές κοντά στη μεμβράνη, αναπαράγοντας έτσι σε χαμηλές ενέργειες μία ενεργό τετραδιάστατη βαρύτητα.

Επιστρέφοντας στη σχέση (2.27), βλέπουμε ότι η τετραδιάστατη μάζα Planck εξακολουθεί να είναι καλά ορισμένη ακόμα και στο όριο $r_c \to \infty$. Η θεωρία αυτή φαίνεται να έχει σωστή τετραδιάστατη συμπεριφορά για μεγάλη ακτίνα συμπαγοποίησης, ακόμα και άπειρη, περίπτωση που αντιστοιχεί ουσιαστικά στην μετακίνηση της μίας από τις μεμβράνες σε πολύ μεγάλη απόσταση. Αντίθετα, στην περίπτωση μίας παραγοντοποιήσιμης γεωμετρίας, θα περιμέναμε μία εξάρτηση της σταθεράς Planck από την πέμπτη διάσταση της μορφής $M_{Pl}^2 = M^3 r_c \pi$, η οποία προκύπτει από τη σχέση (2.13) για $n = 1$. Η έκφραση αυτή αποκλείει το ενδεχόμενο να υπάρχουν μη-συμπαγείς διαστάσεις σε τέτοιου είδους μοντέλα.

Παρά το γεγονός ότι έχουμε μία καλά ορισμένη τετραδιάστατη σταθερά για τη βαρύτητα στη μεμβράνη, στο όριο άπειρης έκτασης της επιπλέον διάστασης, αυτό δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη τετραδιάστατης βαρύτητας με τη σωστή συμπεριφορά. Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο, θα πρέπει η θεωρία να διαθέτει μηδενικές καταστάσεις για τα βαρυτόνια, οι οποίες να είναι εντοπισμένες πάνω σε μία από τις μεμβράνες. Θα συμβολίσουμε την πέμπτη διάσταση με y, προκειμένου να δηλώσουμε με πιο προφανή τρόπο τη μη-συμπαγή της φύση[3]. Από εδώ και πέρα, θα θεωρήσουμε ότι απομακρύνουμε τη μεμβράνη, που στο μοντέλο $RS-1$ ονομάσαμε ορατή, στο άπειρο, έτσι ώστε μόνο η προηγούμενα κρυμμένη μεμβράνη θετικής τάσεως παραμένει. Στο μοντέλο αυτό, θα θεωρήσουμε ότι τα πεδία του Καθιερωμένου Μοντέλου είναι περιορισμένα πάνω στην θετική μεμβράνη, οπότε η προηγούμενα κρυμμένη μεμβράνη γίνεται στην περίπτωση αυτή ορατή και ταυτίζεται με το γνωστό τετραδιάστατο

[3] Η αλλαγή συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε είναι $y = r_c\phi$, στο όριο $r_c \to \infty$.

σύμπαν μας. Θυμίζουμε ότι στο $RS-1$, αυτή ήταν η μεμβράνη πάνω στην οποία η θεμελιώδης κλίμακα των αλληλεπιδράσεων ήταν η M_{Pl} (υπεριώδης μεμβράνη). Καθώς δεν υπάρχει πια η υπέρυθρη μεμβράνη, δεν υπάρχει τρόπος να αναπαράγουμε την ηλεκτρασθενή κλίμακα, και άρα το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα της ιεραρχίας.

Οι καταστάσεις KK των βαρυτονίων βρίσκονται γράφοντας την εξίσωση κίνησης για τις τανυστικές διαταραχές της μετρικής. Για το μοντέλο που εξετάζουμε, μπορούμε να γράψουμε $G_{\mu\nu} = e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x,y)$, όπου οι διαταραχές $h_{\mu\nu}(x,y)$ αντιπροσωπεύουν τα βαρυτόνια στην ενεργό τετραδιάστατη θεωρία. Αντικαθιστώντας τη μορφή αυτή για τη μετρική στις εξισώσεις Einstein, παίρνουμε την εξίσωση κίνησης για τα $h_{\mu\nu}(x,y)$,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4k^2 + 4k\delta(y) + e^{-2k|y|}\partial_\mu\partial^\mu\right] h_{\mu\nu}^{TT} = 0. \tag{2.32}$$

Οι δείκτες TT υποδηλώνουν ότι επιλέγουμε την εγκάρσια βαθμίδα μηδενικού ίχνους (transvere-traceless gauge), στην οποία $\partial^\mu h_{\mu\nu}^{TT} = h_\mu^{TT\mu} = 0$. Στη βαθμίδα αυτή, οι δείκτες μ, ν υπακούουν στην ίδια εξίσωση, οπότε μπορούμε να γράψουμε $h(x,y) = \psi(y)e^{ip\cdot x}$, όπου $p^2 = -m^2$. Η εξίσωση που προκύπτει για την κυματοσυνάρτηση των βαρυτονίων κατά μήκος της πέμπτης διάστασης είναι

$$\left[-\frac{m^2}{2}e^{2k|y|} - \frac{1}{2}\partial_y^2 - 2k\delta(y) + 2k^2\right]\psi(y) = 0, \tag{2.33}$$

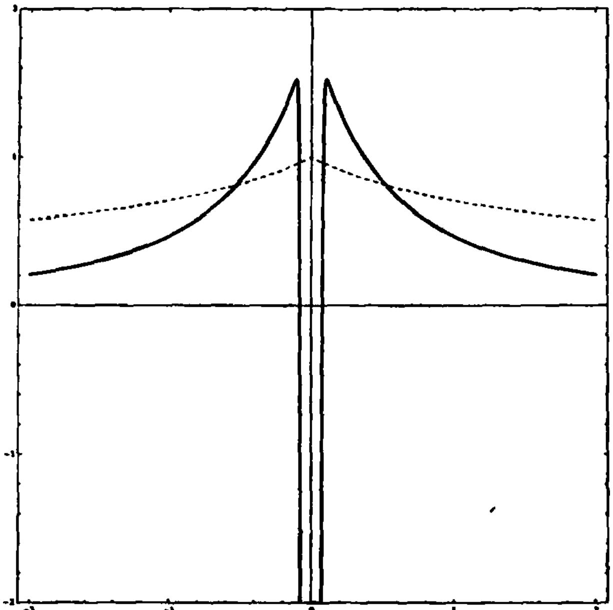
Μέσω της αλλαγής συντεταγμένων $z \equiv sgn(y)\left(e^{k|y|} - 1\right)/k$ και τον μετασχηματισμό των κυματοσυναρτήσεων $\hat{\psi}(z) \equiv \psi(y)e^{k|y|/2}$, $\hat{h}(x,z) \equiv h(x,y)e^{k|y|/2}$, είναι δυνατό να ξαναγράψουμε τη σχέση αυτή στη μορφή μίας μονοδιάστατης εξίσωσης τύπου Schrödinger

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z)\right]\hat{\psi}(z) = m^2\hat{\psi}, \tag{2.34}$$

όπου το δυναμικό δίνεται από τη σχέση

$$V(z) = \frac{15k^2}{8(k|z|+1)^2} - \frac{3k}{2}\delta(z). \tag{2.35}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής παρέχουν την μηδενική κατάσταση ($m = 0$) και τις καταστάσεις KK ($m \neq 0$), οι οποίες μεταδίδουν την βαρυτική δύναμη πάνω στη μεμβράνη. Η μηδενική κατάσταση είναι υπεύθυνη για την αναπαραγωγή της συμβατικής τετραδιάστατης συμπεριφοράς, ενώ οι καταστάσεις KK θα παρέχουν διορθώσεις στο νόμο δύναμης. Το δυναμικό (2.35) είναι αυτό το οποίο καθορίζει το προφίλ των διαφόρων καταστάσεων κατά μήκος της πέμπτης διάστασης. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3, έχει τη μορφή ηφαιστείου, με ένα άπειρο πηγάδι στην αρχή των αξόνων λόγω της ελκτικής συνάρτησης δέλτα, η οποία αντιπροσωπεύει την επίδραση της μεμβράνης. Η συμπεριφορά των λύσεων γίνεται πολύ εύχολα κατανοητή με βάση την μη-σχετικιστική κβαντομηχανική εικόνα. Για $m = 0$, το οποίο στην ισοδύναμη εξίσωση Schrödinger αντιστοιχεί σε σωμάτιο μηδενικής ενέργειας, η μηδενική κατάσταση βρίσκεται ακριβώς στο ενεργειακό κατώφλι για να δώσει ένα ελεύθερο σωμάτιο. Επειδή το δυναμικό τείνει στο μηδέν σε άπειρη απόσταση, η κατάσταση αυτή δεν



Σχήμα 2.3: Το δυναμικό περιορισμού για το μοντέλο $RS-1$ και η μηδενική κατάσταση.

μπορεί να ξεφύγει από το πηγάδι και δίνει έτσι μία δέσμια κατάσταση, η οποία είναι χωρικά εντοπισμένη στη θέση της μεμβράνης ($y=0$). Όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις KK, ακόμα και αυτές με $m \to 0$, έχουν πια αρκετή ενέργεια ώστε να μπορούν να διαφύγουν από το ελκτικό δυναμικό, δίνοντας έτσι καταστάσεις σκέδασης. Περιμένουμε λοιπόν να βρούμε μία δέσμια μηδενική κατάσταση, ακολουθούμενη από ένα συνεχές φάσμα έμμαζων καταστάσεων σκέδασης, το οποίο ξεκινά από το μηδέν (δεν υπάρχει δηλαδή χάσμα στις μάζες του φάσματος).

Η διαισθητική αυτή εικόνα πράγματι επιβεβαιώνεται. Είναι εύκολο να λύσουμε την εξίσωση κίνησης για την μηδενική κατάσταση, η οποία προκύπτει να είναι $\hat{\psi}_0(z) = \sqrt{k}/(k|z|+1)^{1/2}$. Το προφίλ της φαίνεται επίσης στο Σχήμα 2.3, όπου ο χωρικός εντοπισμός πάνω στη μεμβράνη γίνεται προφανής. Αυτό είναι και το βασικό αποτέλεσμα το οποίο ξεκινήσαμε να αποδείξουμε. Η μεμβράνη παγιδεύει την μηδενική κατάσταση του βαρυτονίου πάνω της, προκαλώντας έτσι ενεργό τετραδιάστατη βαρύτητα[4]. Ένας τετραδιάστατος παρατηρητής πάνω στη μεμβράνη δεν είναι σε θέση να ανιχνεύσει την επιπλέον διάσταση μέσω π.χ. ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, καθώς αυτά είναι παγιδευμένα μέσα σε αυτήν και δεν μπορούν να διαδοθούν στον Υπερχώρο. Δεν μπορεί μάλιστα να αντιληφθεί την ύπαρξη του Υπερχώρο, ούτε καν μέσω της βαρύτητας, της οποίας τα σωμάτια μπορούν να διαδίδονται σε πέντε διαστάσεις! Η μεμβράνη έχει παγιδεύσει την ίδια τη βαρύτητα, κρύβοντας εξολοκλήρου την ύπαρξη της πέμπτης διάστασης.

Δεν είναι επίσης δύσκολο να λύσουμε την εξίσωση κίνησης για τις έμμαζες καταστάσεις

[4]Το γεγονός ότι η μηδενική κατάσταση έχει κανονικοποιήσιμη κυματοσυνάρτηση ως προς την πέμπτη διάσταση είναι πολύ σημαντικό. Εάν κάτι τέτοιο δεν συνέβαινε, δεν θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε τη μηδενική κατάσταση ως ένα άμαζο τετραδιάστατο βαρυτόνιο. Η παρατήρηση αυτή αποτελεί το σημείο εκκίνησης στα μοντέλα ημιεντοπισμένης βαρύτητας που θα μελετήσουμε στο επόμενο εδάφιο.

KK. Με κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων, μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε σε μία εξίσωση τύπου *Bessel*, με λύσεις

$$\hat{\psi}_m \sim N_m(|z| + 1/k)^{1/2} \left[Y_2(m(|z| + 1/k)) + \frac{4k^2}{\pi m^2} J_2(m(|z| + 1/k)) \right], \tag{2.36}$$

όπου N_m είναι μία σταθερά κανονικοποίησης. Από την έκφραση αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τροποποιήσεις που υπεισάγουν οι καταστάσεις αυτές στην τετραδιάστατη βαρύτητα στη μεμβράνη. Χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Bessel για μικρά και μεγάλα ορίσματα, μπορούμε να δείξουμε ότι η τιμή της κυματοσυνάρτησης για τις καταστάσεις KK πάνω στη μεμβράνη ($z = 0$) έχει τη μορφή

$$\psi_m(0) \sim const.\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{2.37}$$

Η ισχύς τον κυματοσυναρτήσεων στην αρχή των συντεταγμένων είναι αρκετή για να γνωρίζουμε ποια είναι η συνεισφορά τους πάνω στη μεμβράνη. Κάθε μία από τις έμμαζες καταστάσεις παράγει ένα δυναμικό τύπου Yukawa

$$\psi_m \to V(r) \sim |\psi_m(0)|^2 \frac{e^{-mr}}{r}. \tag{2.38}$$

Επειδή το φάσμα των καταστάσεων είναι συνεχές, πρέπει να ολοκληρώσουμε πάνω σε όλες τις μάζες στο διάστημα $[0, \infty]$. Η διόρθωση στο Νευτώνειο δυναμικό θα είναι λοιπόν[5]

$$\begin{aligned} \Delta V_{KK}(r) &= -G_5 \int_0^\infty dm\, |\psi_m(0)|^2 \frac{e^{-mr}}{r} = -\frac{G_4}{kr} const. \int_0^\infty \frac{m dm}{k} e^{-mr} \\ &= -\frac{G_4}{r} \frac{const}{k^2 r^2}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Το βαρυτικό δυναμικό που παίρνουμε τελικά πάνω στη μεμβράνη είναι ο συνδυασμός των συνεισφορών της μηδενικής κατάστασης και των καταστάσεων KK,

$$V(r) = -\frac{G_4}{r}\left(1 + \frac{const}{k^2 r^2}\right). \tag{2.40}$$

Όπως διαπιστώνουμε, οι διορθώσεις στο νόμο του Νεύτωνα λόγω των έμμαζων καταστάσεων KK είναι πολύ ασθενείς. Ο ρόλος τους γίνεται σημαντικός μόνο σε πολύ μικρές αποστάσεις, όπου $r \sim k^{-1}$, όταν δηλαδή οι αποστάσεις μεταξύ βαρυτικά αλληλεπιδρώντων σωμάτων είναι συγκρίσιμες με την ακτίνα του Υπερχώρου AdS, k^{-1}. Πρέπει ωστόσο να τονίσουμε ότι οι διορθώσεις στο μοντέλο $RS-2$ λόγω των καταστάσεων KK ακολουθούν έναν νόμο δύναμης $1/r^3$, ενώ σε ένα μοντέλο με συμπαγείς επιπλέον διαστάσεις συναντάμε εκθετική απόσβεση των διορθώσεων σε μεγάλες αποστάσεις.

[5]Η σχέση μεταξύ μάζας Planck και σταθεράς του Νεύτωνα είναι $2M_{Pl}^2 = \frac{1}{16\pi G}$.

2.5 Ημιεντοπισμένη Βαρύτητα - Μοντέλο *GRS*

Η ιδέα της ύπαρξης επιπλέον διαστάσεων, οι οποίες να είναι μη-συμπαγείς και να έχουν άπειρη έκταση, αποδεικνύεται εξαιρετικά γόνιμη για τη δημιουργία μίας σειράς από μοντέλα βαρύτητας με πλούσια φαινομενολογία, η οποία μπορεί να έχει εφαρμογές σε σύγχρονα κοσμολογικά προβλήματα. Στο μοντέλο $RS-2$, είδαμε ότι διορθώσεις στη Νευτώνεια βαρύτητα πάνω στη μεμβράνη εμφανίζονται μόνο σε αποστάσεις συγκρίσιμες με την ακτίνα του χώρου AdS_5, k^{-1}. Καθώς θεωρούμε ότι $k \sim M_{Pl}$, η επιπλέον διάσταση ουσιαστικά επανεμφανίζεται μόνο σε πολύ μικρές αποστάσεις, ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις η βαρύτητα πάνω στη μεμβράνη είναι πρακτικά τετραδιάστατη. Η κλίμακα μήκους $1/k^{-1}$ ορίζει έτσι το κατώφλι ανάμεσα στις δύο αυτές περιοχές ενεργού βαρύτητας. Όπως θα δούμε τώρα, είναι δυνατό να κατασκευαστούν παραλλαγές του $RS-2$, στις οποίες η πέμπτη διάσταση γίνεται ορατή από βαρυτικής απόψεως τόσο σε πολύ μικρές, όσο και σε πολύ μεγάλες κλίμαχες μήκους. Τα μοντέλα αυτά στηρίζονται στο φαινόμενο του ημιεντοπισμού [53] (quasi-localization).

Ημιεντοπισμός της βαρύτητας υφίσταται σε χώρους όπου δεν υπάρχει μία κανονικοποιήσιμη μηδενική κατάσταση για το βαρυτόνιο, η οποία να μπορεί να αναπαράγει το τετραδιάστατο βαρυτικό δυναμικό πάνω στη μεμβράνη. Αντί αυτής όμως, συναντάμε έναν *συντονισμό*, ένα σωματίδιο δηλαδή, το οποίο εμφανίζεται από την συνδυασμένη δράση μίας σειράς από έμμαζες καταστάσεις KK με μάζα κοντά στο μηδέν. Ο συντονισμός δεν αποτελεί ένα σταθερό βαρυτόνιο, αλλά διαθέτει έναν πεπερασμένο χρόνο ζωής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, αφού το σωματίδιο συντονισμού διανύσει μεγάλη απόσταση ως προς το χρόνο ζωής του, να αποδιεγείρεται, εγκαταλείποντας ουσιαστικά τη μεμβράνη. Έτσι, σωματίδια τα οποία βρίσκονται πάνω στη μεμβράνη και ανταλλάσσουν μεταξύ τους τέτοια σωμάτια συντονισμού, αλληλεπιδρούν βαρυτικά με μία τετραδιάστατη δύναμη της μορφής $1/r$, δεδομένου ότι η μεταξύ τους απόσταση είναι μικρή σε σχέση με το χρόνο ζωής του συντονισμού. Αν όμως απέχουν αρκετά, τότε ο συντονισμός αποδιεγείρεται, και η βαρύτητα ακολουθεί πλέον τον πενταδιάστατο νόμο Gauss, με το δυναμικό της να είναι πλέον $1/r^2$. Σε μεγάλες δηλαδή κλίμακες μήκους (ή ισοδύναμα χρόνου) η βαρύτητα περνά από τετραδιάστατη σε πενταδιάστατη συμπεριφορά, μειούμενη έτσι σε ισχύ.

Το φαινόμενο αυτό μπορεί να είναι σε θέση να εξηγήσει πρόσφατες παρατηρήσεις, οι οποίες φαίνεται να υποδεικνύουν ότι το σύμπαν μας βρίσκεται σε φάση επιταχυνόμενης διαστολής. Δεδομένου ότι η ύλη και η ενέργεια που περιέχεται στον χώρο τείνει με την ιδιοβαρύτητά της να επιβραδύνει την κοσμική διαστολή, η παρουσία επιτάχυνσης είναι δηλωτική είτε της ύπαρξης κάποιας άγνωστης μορφής δύναμης ή ενεργειακού περιεχομένου, το οποίο δρα απωστικά, είτε της τροποποίησης της Νευτώνειας βαρύτητας σε κοσμολογικές κλίμακες. Ακριβώς μία τέτοια είδους τροποποίηση προτείνουν τα μοντέλα ημιεντοπισμένης βαρύτητας. Σε κοσμολογικές κλίμακες μεγέθους, η βαρύτητα εξασθενεί επειδή η κρυμμένη πέμπτη διάσταση επανεμφανίζεται, και η αλληλεπίδραση περνά από τέσσερις σε πέντε διαστάσεις.

Θα εξετάσουμε ένα παράδειγμα μοντέλου ημιεντοπισμένης βαρύτητας, που προτάθηκε από τους Gregory, Rubakov και Sibiryakov [54, 55] (γνωστό και ως μοντέλο GRS). Το μοντέλο αυτό στηρίζεται στο $RS-2$. Όπως και στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε την ύπαρξη μίας μη-συμπαγούς, άπειρης σε έκταση πέμπτης διάστασης, την οποία θα συμβολίσουμε εδώ με z. Μία μεμβράνη με θετική τάση σ βρίσκεται τοποθετημένη στο σημείο $z=0$. Το νέο στοιχείο στο GRS είναι η παρουσία δύο νέων μεμβρανών, με ίσες και αρνητικές τάσεις $-\sigma/2$, τοποθετημένες συμμετρικά γύρω από την κεντρική, στα σημεία $z = \pm z_c$. Στο χώρο μεταξύ της θετικής και των δύο αρνητικών μεμβρανών, υπάρχει όπως και πριν μία κοσμολογική σταθερά Λ στον Υπερχώρο. Πέρα από τις θέσεις των δύο μεμβρανών αρνητικής τάσεως έχουμε $\Lambda = 0$. Η κατασκευή διαθέτει συμμετρία $\mathbf{Z_2}$, όπως και το $RS-2$, λόγω της συμμετρικής τοποθέτησης των μεμβρανών και των ίδιων τάσεων που φέρουν. Ως εκ τούτου, αρκεί να ασχοληθούμε με τη μορφή της λύσης μόνο για θετικά z, αφού για αρνητικές τιμές της συντεταγμένης έχουμε απλώς μία κατοπτρική εικόνα.

Μπορούμε σχετικά εύκολα να καταλάβουμε ποια πρέπει να είναι η μορφή της λύσης. Στο χώρο ανάμεσα στις μεμβράνες, το μοντέλο είναι πρακτικά το ίδιο με το $RS-2$. Περιμένουμε να βρούμε ένα τμήμα ενός χώρου AdS_5. Εκτός των μεμβρανών, μπορούμε επίσης να καταλάβουμε ποια πρέπει να είναι η λύση, θεωρώντας το σύστημα των μεμβρανών όπως φαίνεται από πολύ μεγάλη απόσταση. Όταν $z \gg z_c$, οι τρεις μεμβράνες φαίνονται πρακτικά να συμπίπτουν και εξαιτίας της μηδενικής ολικής τους τάσεως, πρακτικά αλληλοεξουδετερώνονται. Για μεγάλα z, ο χώρος πρέπει να είναι Minkowski. Με βάση αυτή την εικόνα, μπορούμε να προσπαθήσουμε να ενώσουμε έναν χώρο AdS_5 για $0 \leq z \leq z_c$ με έναν Minkowski για $z > z_c$ και να βρούμε ποιες συνοριακές συνθήκες πρέπει να ισχύουν πάνω στη μεμβράνη στο $z = z_c$. Η λύση για τη μετρική του χώρου είναι [6]

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2, \tag{2.41}$$

όπου ο παράγοντας στρέβλωσης είναι

$$a(z) = \begin{cases} e^{-kz} & 0 < z < z_c \\ e^{-kz_c} \equiv a_- & z > z_c \end{cases}. \tag{2.42}$$

Βλέπουμε ότι, για $z > z_c$, ο παράγοντας στρέβλωσης είναι σταθερός, και άρα έχουμε όντως έναν χώρο Minkowski. Οι διάφορες φυσικές σταθερές του μοντέλου συνδέονται μεταξύ τους με τις συνήθεις συνθήκες λεπτής ρύθμισης $\sigma = \frac{3k}{4\pi G_5}$, $\Lambda = -\sigma k$. Στις εκφράσεις αυτές, G_5 είναι η πενταδιάστατη σταθερά του Νεύτωνα. Για να βρούμε τη συμπεριφορά της βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη, αναλύουμε τη μορφή των τανυστικών διαταραχών της μετρικής, όπως ακριβώς και στην περίπτωση του $RS-2$. Θεωρούμε ότι η απόσταση μεταξύ των μεμβρανών είναι σταθεροποιημένη με κάποιο κατάλληλο μηχανισμό, οπότε δεν ασχολούμαστε με διαταραχές τύπου *radion*[7]. Οι τανυστικές διαταραχές της μετρικής γύρω από την παραπάνω λύση μπορούν να γραφούν ως

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + h_{\mu\nu}(x,z)dx^\mu dx^\nu - dz^2. \tag{2.43}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε όπως και στο προηγούμενο εδάφιο την εγκάρσια βαθμίδα μηδενικού ίχνους, όπου $\partial^\nu h^{TT}_{\mu\nu} = h^{TT\mu}_\mu = 0$. Η εξίσωση που προκύπτει είναι η ίδια για όλους τους τανυστικούς δείκτες μ, ν, οπότε μπορούμε να τους παραλείψουμε, καταλήγοντας στις εξισώσεις

[6] Η μετρική αυτή έχει αντίθετη υπογραφή, $(+,-,-,-,-)$, σε σύγκριση με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα εδάφια

[7] Η υπόθεση αυτή είναι μη-τετριμμένη. Ο συνυπολογισμός της συνεισφοράς του *radion*, σε περίπτωση που η απόσταση των μεμβρανών δεν είναι σταθεροποιημένη, μπορεί να επηρεάσει δραστικά την ανάλυση για την ενεργό τετραδιάστατη βαρύτητα. Η ίδια η διαδικασία σταθεροποίησης είναι επίσης μη-τετριμμένη [56].

για την κυματοσυνάρτηση των βαρυτονίων

$$\begin{cases} h'' - 4k^2 h - \frac{1}{a^2}\Box^{(4)} h = 0 & 0 < z < z_c \\ h'' - \frac{1}{a_-^2}\Box^{(4)} h = 0 & z > z_c \end{cases} . \tag{2.44}$$

Αυτές συνοδεύονται από τις Συνθήκες Συνέχειας πάνω στη μεμβράνη αρνητικής τάσεως

$$\begin{cases} h' + 2kh = 0 & z = 0 \\ [h'] - 2kh = 0 & z = z_c \end{cases} . \tag{2.45}$$

Στις Συνθήκες Συνέχειας συμβολίζουμε με $[h']$ την ασυνέχεια της παραγώγου ως προς z των διαταραχών της μετρικής, στο $z = z_c$. Προχωρούμε τώρα στην παραγωγή της εξίσωσης κίνησης για την κυματοσυνάρτηση ως προς z. Γράφουμε τις καταστάσεις των βαρυτονίων με βάση τις λύσεις τετραδιάστατων επίπεδων κυμάτων, $h = \psi(z)e^{ip_\mu x^\mu}$, όπου $p^2 = m^2$ (βλέπουμε την αντιστροφή του προσήμου στην τελευταία σχέση, σε σύγκριση με την πραγμάτευση του μοντέλου Randall-Sundrum λόγω της διαφορετικής υπογραφής της μετρικής). Οι εξισώσεις για τις καταστάσεις KK στις δύο περιοχές του χώρου είναι τότε

$$\begin{cases} \psi'' - 4k^2\psi + \frac{m^2}{a^2}\psi = 0 & 0 < z < z_c \\ \psi'' + \frac{m^2}{a_-^2}\psi = 0 & z > z_c \end{cases} . \tag{2.46}$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις είναι πρακτικά ισοδύναμη με την (2.33) για τις καταστάσεις KK στο μοντέλο $RS-2$. Εφαρμόζοντας μία αντίστοιχη αλλαγή μεταβλητών, $\zeta = \frac{1}{k}e^{kz}$, αυτή μετατρέπεται σε μία εξίσωση Bessel, με λύσεις

$$\psi_m = C_m \left[N_1\left(\frac{m}{k}\right) J_2(m\zeta) - J_1\left(\frac{m}{k}\right) N_2(m\zeta) \right], \quad 0 < z < z_c, \tag{2.47}$$

όπου $\zeta_c \equiv k^{-1}e^{kz_c}$. Η δεύτερη εξίσωση είναι μία συνήθης δευτεροτάξια διαφορική, αφού ο παράγοντας στρέβλωσης a_- είναι σταθερός για $z > z_c$ και οι λύσεις της είναι ημίτονα και συνημίτονα,

$$\psi_m = A_m \cos\left(\frac{m}{a_-}(z - z_c)\right) + B_m \sin\left(\frac{m}{a_-}(z - z_c)\right), \quad z > z_c. \tag{2.48}$$

Τονίζουμε εδώ ότι, αν και οι παραπάνω εξισώσεις έχουν λύση ακόμα και για $m = 0$, η μηδενική αυτή κατάσταση δεν αντιστοιχεί σε ένα φυσικό άμαζο βαρυτόνιο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{a^2(z)} |\psi_0(z)|^2, \tag{2.49}$$

το οποίο καθορίζει τη σταθερά κανονικοποίησης της κυματοσυνάρτησης, αποκλίνει στον χώρο Minkowski. Αυτό είναι και διαισθητικά προφανές. Όπως φαίνεται από την (2.48), για $m = 0$ η μηδενική κατάσταση είναι σταθερή για $z > z_c$. Καθώς το ολοκλήρωμα εκτείνεται μέχρι το άπειρο, και ο παράγοντας στρέβλωσης είναι επίσης σταθερός, παίρνουμε $const. \int_{-\infty}^{\infty} dz = \infty$. Η μηδενική κατάσταση είναι δηλαδή μη-κανονικοποιήσιμη και δεν παίζει κανένα ρόλο στο μοντέλο αυτό. Οποιουδήποτε είδους ενεργός βαρύτητα πάνω στη μεμβράνη θα οφείλεται στις έμμαζες καταστάσεις KK.

Απομένει τώρα να προσδιορίσουμε τον σταθερό συντελεστή C_m στις παραπάνω εκφράσεις, ώστε να εξαγάγουμε την ισχύ των κυματοσυναρτήσεων αυτών στο μηδέν, πράγμα που θα καθορίσει τη συμπεριφορά της βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη. Με βάση τη συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int \psi_m^*(z)\psi_{m'}(z)\frac{dz}{a^2(z)} = \delta(m-m'), \tag{2.50}$$

για τις κυματοσυναρτήσεις των βαρυτονίων και χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική μορφή των συναρτήσεων Bessel για μικρά ορίσματα[8] προκύπτει ότι

$$C_m^2 = \frac{\pi}{(k\zeta_c)^3}\left(1 + \frac{4}{(m\zeta_c)^2(k\zeta_c)^4}\right)^{-1}. \tag{2.51}$$

Η έκφραση αυτή για τη σταθερά κανονικοποίησης οδηγεί στην ακόλουθη μορφή για την ισχύ των κυματοσυναρτήσεων στη θέση της μεμβράνης,

$$\psi_m(0)^2 = \frac{A}{m^2 + \Delta m^2} + \mathcal{O}(m^4)\ , \tag{2.52}$$

την οποία αναγνωρίζουμε ως ένα πλάτος συντονισμού, τύπου Breit-Wigner. Το πλάτος αυτό αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο συντονισμού με μηδενική μάζα και ρυθμό αποδιέγερσης $\Gamma \sim \Delta m$. Ισοδύναμα, ο χρόνος ζωής του συντονισμού είναι $\tau = r_c \sim 1/\Delta m$. Με $r_c = \zeta_c(k\zeta_c)^2$ συμβολίζουμε την απόσταση την οποία μπορεί να διανύσει το σωμάτιο συντονισμού προτού διασπαστεί. Η απόσταση αυτή όπως θα δούμε, καθορίζει το κατώφλι μεταξύ τετραδιάστατης και πενταδιάστατης βαρύτητας.

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη ενός συντονισμού μηδενικής μάζας, ο οποίος μπορεί να παίξει το ρόλο ενός άμαζου τετραδιάστατου βαρυτονίου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, για να εξαγάγουμε το βαρυτικό δυναμικό πάνω στη μεμβράνη. Εδώ, το δυναμικό παράγεται αποκλειστικά από τις έμμαζες καταστάσεις, αφού δεν υπάρχει κανονικοποιήσιμη μηδενική κατάσταση. Βρίσκουμε έτσι

$$\begin{aligned} V(r) &= -G_5 \int_0^{\infty} dm \frac{e^{-mr}}{r}\frac{A}{m^2+\Delta m^2} \\ &= -\frac{G_5 A r_c}{r}\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x\frac{r}{r_c}}}{x^2+1}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

[8] Θα θεωρήσουμε εδώ ότι $\zeta_c \ll 1$. Επίσης θα απαιτήσουμε $\zeta_c \gg k^{-1}$, η νέα κλίμακα μήκους δηλαδή να είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα του χώρου AdS_5. Οι δύο αυτές συνθήκες συνεπάγονται την $m/k \ll 1$.

Για $r \ll r_c$, ο εκθετικός παράγοντας γίνεται ίσως με τη μονάδα και αναχτάμε το Νευτώνειο δυναμικό $V(r) = -\frac{G_N}{r}$, όπου $G_N = \frac{\pi G_5 A r_c}{2}$. Για αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες της r_c, το ολοκλήρωμα είναι ουσιαστικά αμελητέο. Όλη η συνεισφορά έρχεται από το διάστημα $[0, r_c]$, στο οποίο ο παρονομαστής είναι πρακτικά ίσος με τη μονάδα (αφού $x \ll 1$ σε αυτό το διάστημα). Παίρνουμε έτσι το τροποποιημένη δυναμικό,

$$V(r) = -\frac{G_N r_c}{2\pi r^2} \tag{2.54}$$

Η τελευταία δεν είναι παρά η σχέση για το Νευτώνειο δυναμικό σε πενταδιάστατο χώρο. Σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από την r_c, ο συντονισμός από τις καταστάσεις KK αποδιεγείρεται, και η επιπλέον διάσταση γίνεται πλέον ορατή, μέσω του πενταδιάστατου νόμου του Gauss. Το μοντέλο GRS παρουσιάζει ημιεντοπισμένη βαρύτητα πάνω στη μεμβράνη. Η διαστατικότητα της βαρύτητας που βιώνει ένας παρατηρητής πάνω στη μεμβράνη εξαρτάται από την κλίμακα αποστάσεων που εξετάζει. Σε πολύ μικρές αποστάσεις, κοντά στην k^{-1}, παρατηρούμε τις ίδιες διορθώσεις $1/r^3$ όπως και στο $RS-2$ λόγω των έμμαζων καταστάσεων KK. Σε ενδιάμεσες κλίμακες, στο διάστημα $k^{-1} \ll r \ll r_c$, η βαρύτητα είναι πρακτικά τετραδιάστατη λόγω της ύπαρξης του συντονισμού. Για $r > r_c$, ο συντονισμός παύει να υφίσταται, και η βαρύτητα γίνεται πενταδιάστατη. Με την επιλογή που έχουμε κάνει ($\zeta_c \gg k^{-1}$), οι δύο χαρακτηριστικές κλίμακες μεγέθους στις οποίες έχουμε αλλαγή της βαρυτικής συμπεριφοράς είναι σαφώς διαχωρισμένες μεταξύ τους. Είναι μάλιστα ενδιαφέρον ότι μπορούμε να κάνουμε την r_c συγκρίσιμη με κοσμολογικές κλίμακες μήκους, πράγμα το οποίο θα ήταν συνεπές με την εικόνα που αναφέραμε παραπάνω για την επιταχυνόμενη κοσμική διαστολή, χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουμε σε λεπτή ρύθμιση παραμέτρων. Πράγματι, αν $k \sim M_{Pl}$, αρχεί να απαιτήσουμε $z_c \sim 50 l_{Pl}$ ώστε να έχουμε $r_c \sim 10^{28}\, cm$, ίση δηλαδή με την τωρινή τιμή του ορίζοντα του σύμπαντος.

Κεφάλαιο 3

Κοσμολογία Μεμβρανών

3.1 Το Καθιερωμένο Κοσμολογικό Μοντέλο

Από την εποχή της ανακάλυψης από τον *Hubble* [57] της κοσμικής διαστολής, το 1929, και την μαθηματική εξήγηση του φαινομένου αυτού στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας, η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang) έχει εξελιχθεί στο πέρασμα των δεκαετιών σε ακρογωνιαίο λίθο της εικόνας που έχουμε για την ιστορία του σύμπαντος και τη δυναμική του εξέλιξη. Αντιμετωπίζοντας αρχικά αρκετή αμφισβήτηση, η θεωρία αυτή κατόρθωσε να χαίρει ευρείας αποδοχής, εξαιτίας τριών βασικών προβλέψεων, οι οποίες επιβεβαιώθηκαν από τις παρατηρήσεις. Αυτές είναι

- η ύπαρξη κοσμικής διαστολής (οι πρώτες διατυπώσεις της θεωρίας ουσιαστικά προηγήθηκαν της παρατήρησης της διαστολής [58])
- η ποσοστιαία κατανομή σε ελαφρών στοιχείων στο σύμπαν, υδρογόνο και ήλιο (πυρηνοσύνθεση) [14]
- η παρουσία κοσμολογικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB) με την σωστή παρατηρούμενη θερμοκρασία [15, 16]

Σήμερα, η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, συμπληρωνόμενη από το Πληθωριστικό Μοντέλο [17], θεωρείται η επικρατέστερη εκδοχή για την εξέλιξη του σύμπαντος. Η μαθηματική περιγραφή της γίνεται στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας. Σύμφωνα με αυτήν, το σύμπαν αποτελεί έναν τετραδιάστατο χωρόχρονο με μετρική τύπου Robertson-Walker [59]. Ο χωρόχρονος αυτός δηλαδή μπορεί να χωριστεί σε ένα σύνολο από τρισδιάστατες υπερεπιφάνειες, όπου όλες είναι μέγιστα-συμμετρικές ως προς τις τρεις διαστάσεις. Οι υπερεπιφάνειες αυτές μπορούν να έχουν θετική, αρνητική ή μηδενική καμπυλότητα, οπότε αντιστοιχούν στο τρισδιάστατο ισοδύναμο μίας σφαίρας, ενός υπερβολοειδούς ή ενός επιπέδου. Η τοπολογία τους είναι της μορφής $R \times \Sigma$, όπου R είναι ο χρόνος και Σ ο μέγιστα συμμετρικός 3-χώρος. Η ύπαρξη ενός μέγιστα συμμετρικού 3-χώρου είναι η μαθηματική διατύπωση της αρχής ότι το σύμπαν είναι ομογενές στον χώρο και ισότροπο, φαίνεται δηλαδή το ίδιο για όλους τους παρατηρητές μέσα σε αυτό σε μία δοσμένη χρονική στιγμή, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση παρατήρησης. Η εικόνα αυτή μπορεί εν πρώτοις να φαίνεται αντιδιαισθητική. Είναι προφανές ότι στην περιοχή του ηλιακού μας συστήματος για παράδειγμα, το σύμπαν κάθε άλλο παρά ομογενές και ισότροπο είναι, όσον αφορά την κατανομή της ύλης μέσα στον χώρο. Το ίδιο φαίνεται να εξακολουθεί να ισχύει και όταν πάμε σε ακόμα μεγαλύτερες κλίμακες, όπου η ύλη φαίνεται συγκεντρωμένη στους γαλαξίες, με μεγάλα διαστήματα ουσιαστικά κενού χώρου μεταξύ τους. Μόνο όταν πηγαίνουμε σε πραγματικά μεγάλες κλίμακες, όπου παρατηρούμε πλέον την κατανομή των γαλαξιακών σμηνών, η ύλη αρχίζει να πλησιάζει μία ομογενή και ισότροπη κατανομή. Όπως και να έχει, η υπόθεση αυτή είναι καταρχήν εύλογη και κατά δεύτερον οδηγεί σε σημαντικές απλουστεύσεις των κοσμολογικών μοντέλων. Η θεώρηση ενός μέγιστα συμμετρικού *χωρόχρονου* προφανώς δεν έχει νόημα, καθώς αντικρούεται από τις παρατηρήσεις. Το σύμπαν δεν έχει την ίδια μορφή καθώς ο χρόνος περνά, αλλά εξελίσσεται.

Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των μέγιστα συμμετρικών χώρων, μπορούμε να εξαγάγουμε την μετρική ενός χωρόχρονου Robertson-Walker, η οποία είναι της μορφής

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \tag{3.1}$$

Η μετρική αυτή είναι γραμμένη με βάση ένα συν-κινούμενο (comoving) σύστημα αναφοράς. Ένας παρατηρητής, ο οποίος παραμένει σε σταθερές τιμές των χωρικών συντεταγμένων ενός τέτοιου συστήματος αναφοράς, ουσιαστικά "συμπαρασύρεται" από την κοσμική διαστολή και είναι αυτός για τον οποίο το σύμπαν φαίνεται ισότροπο[1]. Η ποσότητα $a(t)$ ονομάζεται *παράγοντας κλίμακας* και καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο η φυσική απόσταση μεταξύ δύο ακίνητων σημείων σε συν-κινούμενες συντεταγμένες, αλλάζει με τον χρόνο. Ο παράγοντας κλίμακας κωδικοποιεί το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας για την κοσμολογία ενός χώρου Robertson-Walker. Γνωρίζοντας το χρονικό προφίλ του $a(t)$, μπορούμε να αποφανθούμε για την ιστορία και το μέλλον του σύμπαντος. Επίσης σημαντική για τον καθορισμό της κοσμολογίας είναι η ποσότητα k, ή *παράμετρος καμπυλότητας*. Στις συντεταγμένες που έχουμε χρησιμοποιήσει, αυτή παίρνει τις τιμές $-1, 0, 1$, ανάλογα με το αν ο 3-χώρος έχει αρνητική, μηδενική ή θετική καμπυλότητα αντίστοιχα. Ένας χώρος με $k = 1$ ονομάζεται κλειστός, με $k = 0$ επίπεδος και με $k = -1$ ανοιχτός. Οι όροι αυτοί χαρακτηρίζουν την τοπολογία του χώρου. Όπως θα δούμε, η παράμετρος k είναι στενά συνδεδεμένη με το ενεργειακό περιεχόμενο του σύμπαντος.

Εισάγοντας την παραπάνω έκφραση για τη μετρική του χώρου στις εξισώσεις Einstein και θεωρώντας ένα ενεργειακό περιεχόμενο με τον τανυστή ορμής-ενέργειας της μορφής ενός ιδανικού ρευστού,

$$T^\nu_\mu = diag(-\rho, p, p, p), \tag{3.2}$$

προκύπτουν οι δύο εξισώσεις Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{3.3}$$

[1] Η Γη δεν αποτελεί ένα τέτοιο συν-κινούμενο σύστημα αναφοράς, λόγω των τοπικών της κινήσεων μέσα στο ηλιακό σύστημα και τον γαλαξία, οι οποίες είναι ανεξάρτητες της κοσμικής διαστολής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου να εμφανίζει διπολική ανισοτροπία λόγω φαινομένου Doppler.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{3.4}$$

Από αυτές, η πρώτη έχει επικρατήσει να ονομάζεται ως *η* εξίσωση Friedmann. Λύσεις $a(t)$ των εξισώσεων αυτών λέμε ότι περιγράφουν ένα σύμπαν Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Οι εξισώσεις Friedmann συνοδεύονται επίσης από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \tag{3.5}$$

Ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος περιγράφεται από την *παράμετρο Hubble*,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{3.6}$$

Η τιμή τις παραμέτρου Hubble *σήμερα*, δίνεται από τη σχέση

$$H_0 = 100h\frac{km}{\sec .Mpc} \tag{3.7}$$

όπου οι πιο σύγχρονες μετρήσεις δίνουν την τιμή $h \sim 0.72$. Από την παράμετρο αυτή προκύπτουν επίσης το μήκος Hubble, $d_H = cH_0^{-1}$ και ο χρόνος Hubble, $t_H = H_0^{-1}$. Ο τελευταίος είναι ενδεικτικός του χρόνου ζωής του σύμπαντος από τη στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης μέχρι σήμερα, ~ 13.5 δισεκατομμύρια έτη. Ο ρυθμός επιβράδυνσης της διαστολής (κάτι το οποίο θα αναμέναμε να συμβαίνει, καθώς η βαρύτητα αντιτίθεται στη διαστολή) δίνεται από την *παράμετρο επιβράδυνσης*,

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \tag{3.8}$$

Είναι βολικό να ορίσουμε την *κρίσιμη πυκνότητα*,

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \tag{3.9}$$

Με βάση αυτήν, η εξίσωση Friedmann δίνει για το σύμπαν σήμερα ($H = H_0$) την έκφραση

$$\frac{k}{a_0^2 H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - 1. \tag{3.10}$$

Όπως βλέπουμε, αν η τωρινή τιμή της πυκνότητας ενέργειας ρ είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή, η παράμετρος k είναι θετική, και η γεωμετρία του σύμπαντος είναι κλειστή. Αντίστοιχα παίρνουμε ένα ανοιχτό σύμπαν για $\rho < \rho_c$ και ένα επίπεδο σύμπαν για $\rho = \rho_c$. Η ποσότητα ενέργειας που περιέχει το σύμπαν ορίζει δηλαδή μονοσήμαντα την τρισδιάστατη γεωμετρία του. Η τιμή της κρίσιμης πυκνότητας είναι $\rho_c = 1.9 \times 10^{-26} h_0^2\, kgr/m^3$, η οποία αντιστοιχεί σε περίπου έναν γαλαξία ανά Mpc^3 ή 5 πρωτόνια ανά m^3.

Το ενεργειακό περιεχόμενο του σύμπαντος μπορεί να θεωρηθεί ότι χωρίζεται σε δύο βασικές κατηγορίες, ύλη και ακτινοβολία. Η διάκριση ανάμεσα στις δύο αυτές συνιστώσες γίνεται με βάση την καταστατική τους εξίσωση, $p = w\rho$, όπου w είναι η *καταστατική παράμετρος*, με τιμές

- $w = 0$ για ύλη (κονιορτός)
- $w = \frac{1}{3}$ για ακτινοβολία

Αντικαθιστώντας τις καταστατικές αυτές εξισώσεις στην εξίσωση διατήρησης ενέργειας (3.5), βρίσκουμε ότι η χρονική συμπεριφορά της πυκνότητας ενέργειας με βάση τον παράγοντας κλίμακας είναι

- $\rho_M = \frac{\rho_{M0}}{a^3}$ για ύλη
- $\rho_R = \frac{\rho_{R0}}{a^4}$ για ακτινοβολία

Καθώς το σύμπαν εξελίσσεται, και οι δύο πυκνότητες μειώνονται, αφού η ίδια ποσότητα ενέργειας διαμοιράζεται σε μεγαλύτερο χώρο επειδή το σύμπαν διαστέλλεται. Η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας όμως πέφτει γρηγορότερα, λόγω της βαρυτικής μετατόπισης Doppler στο φως, η οποία αυξάνει το μήκος κύματος της ακτινοβολίας καθώς αυτή ταξιδεύει μέσα στον χώρο, μειώνοντας έτσι την ενέργειά της.

Μπορούμε να εκφράσουμε όλες τις συνεισφορές στην εξίσωση Friedmann με διαστάσεις πυκνότητας ενέργειας ως προς την ρ_c. Εφόσον $\rho = \rho_M + \rho_R$, ορίζουμε τις αδιάστατες παραμέτρους πυκνότητας Ω ως

$$\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_c}, \quad \Omega_R = \frac{\rho_R}{\rho_c}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}. \tag{3.11}$$

Η τρίτη ποσότητα αντιπροσωπεύει την ενεργό πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στην καμπυλότητα του χώρου. Βλέπουμε ότι αυτή μειώνεται πιο αργά απ' ότι οι παράμετροι πυκνότητας της ύλης και της ακτινοβολίας. Με βάση τις παραμέτρους αυτές, η εξίσωση Friedmann μπορεί να γραφεί στη μορφή [49]

$$H(t)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_R \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right], \tag{3.12}$$

ή με βάση την ερυθρά μετατόπιση, $a = \frac{a_0}{1+z}$,

$$H(z)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_R (1+z)^4 + \Omega_k (1+z)^2 \right]. \tag{3.13}$$

Ανάλογα με το ποιο συστατικό είναι το πιο σημαντικό σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, διαχωρίζουμε μεταξύ σύμπαντος κυριαρχούμενου από ύλη και σύμπαντος κυριαρχούμενου από ακτινοβολία. Η εξίσωση Friedmann μπορεί εύκολα να λυθεί ξεχωριστά για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις, δίνοντας τους παράγοντες κλίμακας

- $a \propto t^{2/3}$, σύμπαν κυριαρχούμενο από ύλη
- $a \propto t^{1/2}$, σύμπαν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία

Από σημερινές παρατηρήσεις διαπιστώνουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας είναι αμελητέα, οπότε σε αυτή τη φάση η ύλη είναι το κύριο ενεργειακό συστατικό στην εξίσωση Friedmann . Στο παρελθόν όμως, δεδομένου ότι η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας αυξάνει πιο γρήγορα σε σύγκριση με την ύλη (a^{-4} και a^{-3} αντίστοιχα), το σύμπαν σε πρώιμες φάσεις της ιστορίας του θα ήταν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία.

3.2 Πέρα Από το Καθιερωμένο Μοντέλο

Μέσα στην τελευταία δεκαετία, θεαματικές ανακαλύψεις στο χώρο της παρατηρησιακής κοσμολογίας έχουν οδηγήσει σε ανάγκη δραστικών αναθεωρήσεων στο κοσμολογικό μοντέλο που μόλις περιγράψαμε. Μετρήσεις της ταχύτητας απομάκρυνσης σε supernova Ia [26] με ερυθρές μετατοπίσεις πάνω από $z = 0.2$ οδηγούν στο απροσδόκητο συμπέρασμα ότι το σύμπαν μας, όχι μόνο δεν υφίσταται επιβράδυνση στη διαστολή του λόγω της ιδιοβαρύτητας της ύλης που περιέχει, αλλά αντίθετα διαστέλλεται με επιταχυνόμενο ρυθμό! Το φαινόμενο αυτό αποδίδεται σε μία άγνωστη ενεργειακή συνιστώσα του σύμπαντος, την οποία ονομάζουμε *σκοτεινή ενέργεια*. Η ανακάλυψη αυτή αποτελεί την πρώτη άμεση ένδειξη για την ύπαρξη της κοσμολογικής σταθεράς, η οποία προϋπήρχε ως θεωρητική επινόηση. Η κοσμολογική σταθερά, που συμβολίζεται με Λ, μπορεί να ερμηνευθεί ως η ενέργεια του κενού χώρου λόγω κβαντικών διακυμάνσεων των θεμελιωδών πεδίων που περιέχει. Η καταστατική της εξίσωση είναι της μορφής $p = -\rho$, χαρακτηρίζεται δηλαδή από $w = -1$ και παρουσιάζει αρνητική πίεση, σε αντίθεση με την ύλη και την ακτινοβολία που έχουν πάντοτε θετικές πιέσεις. Στις εξισώσεις Einstein εμφανίζεται ως πολλαπλασιαστική σταθερά της μετρικής,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{3.14}$$

Αν θέσουμε $T_{\mu\nu} = 0$, η λύση των εξισώσεων Einstein είναι ανάλογα με την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς είτε ένας χώρος de Sitter ($\Lambda > 0$) είτε ένας χώρος anti-de Sitter ($\Lambda < 0$). Προφανώς για $\Lambda = 0$ αναχτούμε τον χώρο Minkowski. Ένα τέτοιο σύμπαν ονομάζεται και κυριαρχούμενο από ενέργεια κενού. Η μετρική του χώρου de Sitter είναι

$$ds^2 = -dt^2 + e^{Ht} \left(dx^2 + dy^2 + dz^2 \right) , \tag{3.15}$$

όπου H η παράμετρος Hubble, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι σταθερή. Σε ένα σύμπαν κυριαρχούμενο από ενέργεια κενού, ο παράγοντας κλίμακας παρουσιάζει εκθετική αύξηση σε σύγκριση με τους νόμους δύναμης που είδαμε για ύλη και ακτινοβολία.

Η πυκνότητα ενέργειας της κοσμολογικής σταθεράς είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο. Συμπεριλαμβάνοντας την στην εξίσωση Friedmann παίρνουμε

$$H(t)^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_R \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right] . \tag{3.16}$$

Γράφοντας την παράμετρο επιβράδυνσης για την παραπάνω εξίσωση, βρίσκουμε ότι η τωρινή τιμή της είναι

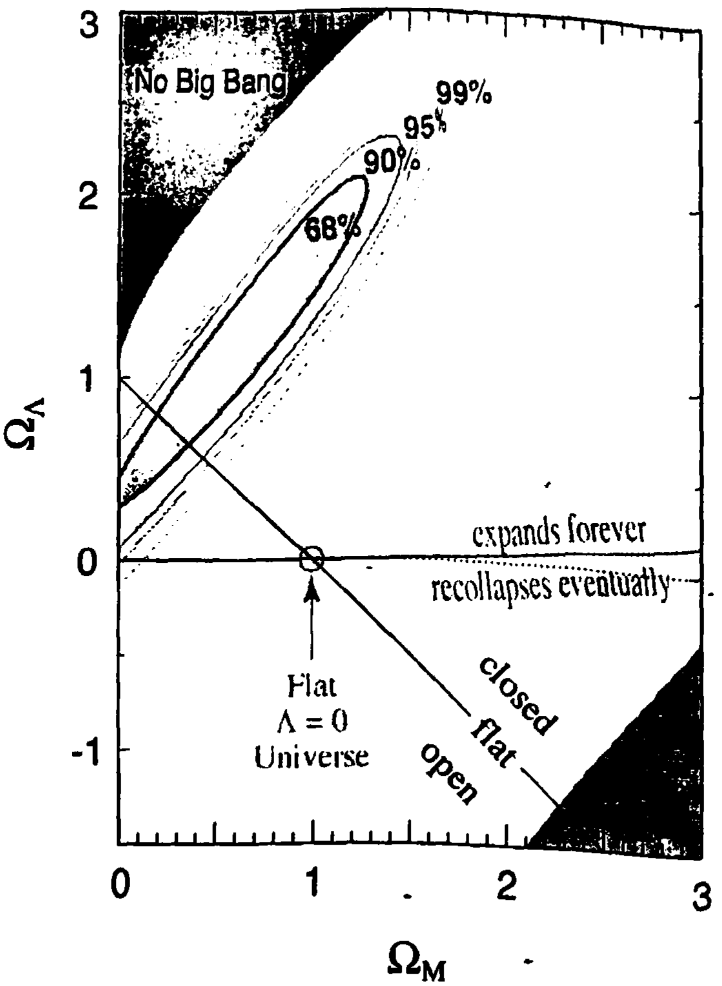
$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_M + \Omega_R - \Omega_\Lambda. \tag{3.17}$$

Για τιμή της Ω_Λ θετική και αρκετά μεγάλη σε σύγκριση με την ύλη και την ακτινοβολία, η κοσμολογική σταθερά μπορεί να οδηγήσει σε επιταχυνόμενη διαστολή. Σύμφωνα με τα δεδομένα από τις παρατηρήσεις supernova Ia, η κοσμολογική σταθερά αναλογεί στο 70% περίπου του ενεργειακού περιεχομένου του σύμπαντος, με το υπόλοιπο 30% να προέρχεται από ύλη [27]. Παρατηρήσεις από την κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου οδηγούν επίσης στο συμπέρασμα ότι το σύμπαν είναι χωρικά επίπεδο, με $\Omega_k < 0.1$, παρέχοντας έτσι ανεξάρτητη επιβεβαίωση για την παραπάνω αναλογία ύλης-κοσμολογικής σταθεράς.

Η κοσμολογική σταθερά αποτελεί έναν σημαντικό υποψήφιο για την εξήγηση της σκοτεινής ενέργειας και της επιταχυνόμενης κοσμικής διαστολής. Δεν είναι όμως ο μοναδικός. Μία σειρά από θεωρίες έχουν παρουσιαστεί τα τελευταία χρόνια, οι οποίες ανταγωνίζονται να εξηγήσουν, με τρόπο πιο φυσικό, το εντυπωσιακό αυτό φαινόμενο. Τέτοιες είναι η θεωρία της *πεμπτουσίας* (quintessence [60, 61, 62, 63, 64]), θεωρίες με βαθμωτά πεδία-φαντάσματα [65, 66, 67], συνδυασμοί των δύο τελευταίων (*εκτουσία*, hessence [68]), το αέριο Chaplygin [69], θεωρίες τροποποιημένης βαρύτητας κλπ. Η καθεμία παρουσιάζει τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα από θεωρητικής και πρακτικής απόψεως. Υπάρχουν δύο βασικοί λόγοι για την εμφάνιση των θεωριών αυτών. Ο πρώτος έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι θεωρίες πεδίου προβλέπουν μία τιμή της κοσμολογικής σταθεράς πολύ μεγαλύτερη από αυτήν που παρατηρούμε. Ο δεύτερος στηρίζεται σε πρόσφατες αναλύσεις δεδομένων supernova Ia, σχετικά με το χρονικό προφίλ της κοσμικής διαστολής.

Σύμφωνα με τις τελευταίες, ορισμένα σύνολα δεδομένων φαίνεται να ευνοούν την εικόνα μίας κοσμολογικής σταθεράς, με καταστατική παράμετρο που δεν μεταβάλλεται με το χρόνο ($w = -1$, βλέπε για παράδειγμα αναλύσεις του συνόλου δεδομένων SNLS [70]), ενώ άλλα (π.χ. το σύνολο SnIa Gold) δίνουν ενδείξεις για την ύπαρξη κοσμικής διαστολής με μεταβαλλόμενο χρονικό προφίλ [71]. Μάλιστα, υποδεικνύεται ότι, σε σχετικά πρόσφατους χρόνους (σε ερυθρά μετατόπιση $z \sim 0.2$), είχαμε μία μετάβαση από αρχικά επιβραδυνόμενη στην επιταχυνόμενη διαστολή που παρατηρούμε τώρα. Τέτοιου είδους μεταβολές στο χρονικό προφίλ της διαστολής δεν μπορούν να εξηγηθούν από μία απλή κοσμολογική σταθερά, και καθίσταται αναγκαία η θεώρηση μίας ενεργειακής συνιστώσας με χρονικά μεταβαλλόμενη καταστατική παράμετρο, της μορφής $p = w(t)\,\rho$. Ακόμα πιο εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι οι ίδιες αναλύσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι, στην τωρινή εποχή, η τιμή της $w(t_0)$ είναι μικρότερη από -1, ενώ σε παλαιότερες φάσεις υπήρξε μεγαλύτερη από την τιμή αυτή. Το φαινόμενο αυτό (w=-1 crossing) δεν μπορεί να εξηγηθεί με απλό τρόπο, π.χ. θεωρώντας μηκανονικά βαθμωτά πεδία (*πεδία-φαντάσματα*) ως πηγή μίας σκοτεινής ενέργειας με μεταβλητή καταστατική παράμετρο. Οι διαπιστώσεις αυτές έχουν προκαλέσει έντονη κινητικότητα στο χώρο της κατασκευής κοσμολογικών μοντέλων, τα οποία να διαθέτουν τα επιθυμητά χαρακτηριστικά μίας συνιστώσας σκοτεινής ενέργειας με μεταβλητό w, το οποίο τέμνει τη γραμμή $w = -1$. Προς το παρόν, οι παρατηρήσεις δε φαίνεται να αποκλείουν το ενδεχόμενο της απλής κοσμολογικής σταθεράς [72], καθώς το περιθώριο σφάλματος είναι ακόμα πολύ μεγάλο για να αποκλείσει ανταγωνιστικά μοντέλα σκοτεινής ενέργειας. Περαιτέρω παρατηρήσεις και ανάλυση των δεδομένων αναμένεται να διασαφηνίσουν τα σημεία αυτά στο άμεσο μέλλον.

Το μέγεθος της ενεργού κοσμολογικής σταθεράς είναι στην πράξη πιο δύσκολο να εξηγηθεί, και αν όντως οι παρατηρήσεις αναδείξουν την κοσμολογική σταθερά ως το επικρατές μοντέλο σκοτεινής ενέργειας, η ανάγκη επίλυσης του προβλήματος αυτού θα γίνει ακόμα πιο πιεστική [28, 29]. Στην κβαντική θεωρία πεδίου, κάθε πεδίο χαρακτηρίζεται από μία ενέργεια μηδενικού σημείου, όπως ένας αρμονικός ταλαντωτής στην κβαντική μηχανική. Η ενέργεια ενός κενού χώρου, που περιέχει κβαντικά πεδία, είναι έτσι το άθροισμα πάνω στις



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα των παραμέτρων πυκνότητας Ω_M και Ω_Λ. Οι ελλείψεις αντιστοιχούν στην παρατηρησιακά ευνοούμενη περιοχή (Perlmutter et al., 1999 [27]).

ενέργειες μηδενικού σημείου για όλους τους τρόπους ταλάντωσης. Ένα τέτοιο άθροισμα οδηγεί προφανώς σε απειρισμό, αν επιτρέψουμε αυθαίρετα υψηλές ενέργειες για τις κβαντικές διακυμάνσεις του κενού. Δεν περιμένουμε οι θεωρίες πεδίου που διαθέτουμε να έχουν ισχύ μέχρι αυτές τις κλίμακες και στην πράξη τις αντιμετωπίζουμε σαν ενεργές θεωρίες, έγκυρες μέχρι κάποια κλίμακα ενέργειας, στην οποία αντικαθίστανται από μία πιο θεμελιώδη περιγραφή. Συνήθως, θεωρούμε ότι η κλίμακα αποκοπής ταυτίζεται με την κλίμακα Planck, M_{Pl}, στην οποία περιμένουμε την εμφάνιση μίας κβαντικής θεωρίας βαρύτητας. Αυτό περιορίζει αυτομάτως αθροίσματα ενέργειας μηδενικού σημείου μέχρι την M_{Pl}. Η πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την πυκνότητα ενέργειας του κενού χώρου στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι στην περίπτωση αυτή

$$\rho_{QFT} = \int_0^{M_{Pl}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2}\sqrt{k^2+m^2} \sim \frac{M_{Pl}^4}{16\pi^2}\,. \tag{3.18}$$

Η προβλεπόμενη τιμή είναι ανάλογη της τετάρτης δύναμης της μάζας Planck. Αντικαθιστώντας την τιμή της $M_{Pl} \sim 10^{18}\,GeV$ και συγκρίνοντας με την μετρούμενη από παρατηρήσεις τιμή της, έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα

- Θεωρητική πρόβλεψη: $\rho_{vacuum} \sim 10^{71}\ GeV^4$
- Παρατηρησιακά εκτιμώμενη τιμή: $\rho_{vacuum} \sim 10^{-47}\ GeV^4$

Όπως φαίνεται, υπάρχει μία ασυμφωνία της τάξεως $\sim 10^{118}$, μεταξύ των δύο τιμών, 120 δηλαδή τάξεις μεγέθους περίπου! Αυτή είναι μία από τις μεγαλύτερες ασυνέπειες που έχουν παρατηρηθεί μεταξύ θεωρίας και πειράματος. Η κοσμολογική σταθερά που παρατηρούμε είναι πολύ μικρότερη απ' ότι θα περιμέναμε. Η ασυμφωνία αυτή έχει γίνει γνωστή ως το *πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς* και αποτελεί ένα από τα πιο φλέγοντα ερωτήματα αυτή τη στιγμή στη θεωρητική φυσική. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που οδηγεί σε σκεπτικισμό απέναντι στην ύπαρξη της κοσμολογικής σταθεράς και σε αναζήτηση εναλλακτικών θεωριών.

Θα κλείσουμε το εδάφιο αυτό, αναφερόμενοι σε άλλη μία εξέλιξη, η οποία μας πηγαίνει πέρα από το Καθιερωμένο Κοσμολογικό Μοντέλο και έχει να κάνει με την ύπαρξη της σκοτεινής ύλης. Όπως έχει παρατηρηθεί, η καμπύλη περιστροφής των γαλαξιών φαίνεται να γίνεται σχεδόν σταθερή καθώς κινούμαστε σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το κέντρο [73]. Το φαινόμενο αυτό έρχεται σε αντίθεση με ό,τι θα περιμέναμε από την απλή Νευτώνεια βαρύτητα, όπου σώματα πιο απομακρυσμένα από το βαρυτικό κέντρο περιστρέφονται πιο αργά. Η εξήγηση που δίδεται είναι ότι υπάρχει ένα είδος αόρατης ύλης, η οποία δεν ακτινοβολεί και άρα δεν είναι ορατή μέσω τηλεσκοπίων, αλλά γίνεται αντιληπτή από τη βαρυτική της αλληλεπίδραση με την ορατή ύλη στα αστέρια του γαλαξία, των οποίων επιταχύνει την περιστροφή. Περαιτέρω, όταν εξετάζουμε την εμφάνιση δομής σε πολύ μεγάλη κλίμακα στο σύμπαν (γαλαξιακά σμήνη), προκύπτει ότι είναι αδύνατη η αναπαραγωγή της παρατηρούμενης συμπεριφοράς, χωρίς να θεωρήσουμε την ύπαρξη μεγάλων ποσοτήτων αόρατης ύλης. Το φάσμα κατανομής των γαλαξιών είναι ευαίσθητο στην ποσότητα $\Omega_m h$. Δεδομένου ότι $\Omega_m h \sim 0.2$ από τις περισσότερες παρατηρήσεις γαλαξιακών σμηνών και με $h \sim 0.72$, βρίσκουμε ότι $\Omega_m \sim 0.3$. Αντίστοιχα, οι ανισοτροπίες της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου εξαρτώνται από την $\Omega_m h^2$ και δίνουν επίσης τιμές συνεπείς με αυτές που προκύπτουν από την κατανομή γαλαξιών. Στην Ω_m, μόλις το 16% είναι ορατή, βαρυονική ύλη. Το υπόλοιπο ονομάζεται συλλογικά *σκοτεινή ύλη*.

Όπως και με την σκοτεινή ενέργεια, η κινητικότητα στην κατασκευή υποψήφιων θεωριών για την ύλη αυτή είναι πολύ έντονη. Πολλές επεκτάσεις του Καθιερωμένου Σωματιδιακού Μοντέλου, όπως οι υπερσυμμετρικές θεωρίες, προβλέπουν την ύπαρξη πλήθους νέων σωματιδίων, ορισμένα από τα οποία θα μπορούσαν να παίζουν το ρόλο της σκοτεινής ύλης. Αν θεωρίες αυτού του είδους επιβεβαιωθούν σε πειράματα υψηλών ενεργειών, η εκδοχή αυτή θα πρέπει να ληφθεί πολύ σοβαρά υπόψιν. Ταυτόχρονα, αρκετά πειράματα διεξάγονται ή σχεδιάζονται, με σκοπό την ανίχνευσης σκοτεινής ύλης στη Γη. Ωστόσο, μέχρι στιγμής, δεν έχουν δώσει κάποιο αποτέλεσμα. Παράλληλα με την ερμηνεία της σκοτεινής ύλης μέσω σωματιδιακής φυσικής, έχουν επίσης προταθεί θεωρίες, όπου επιφαινόμενα ανάλογα με αυτά της σκοτεινής ύλης προχαλούνται από τροποποιήσεις της βαρυτικής θεωρίας.

Το πιο σαφές συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι η συνήθης ύλη, από την οποία αποτελούνται τα αστέρια, οι πλανήτες και οι γαλαξίες, δεν παίζει τον πρώτο ρόλο στην εξέλιξη του σύμπαντος, αν θεωρήσουμε ότι η εξίσωση Friedmann περιγράφει σωστά την χρονική του συμπεριφορά για δοσμένο υπόθεμα ενέργειας. Το σύνολο των παρατηρήσεων που παίρνουμε από το κοσμολογικό μέτωπο καταδεικνύει την ανεπάρκεια των θεωριών που έχουμε στη διάθεσή μας να δώσουν μία επαρκή εξήγηση στο πρόβλημα της δομής και εξέλιξης του σύμπαντος, και είναι η πρώτη φορά εδώ και αρκετές δεκαετίες όπου έχουμε τέτοιου είδους ασυμφωνίες μεταξύ θεωρίας και πειράματος[2]. Ενδεχομένως, τα αποτελέσματα αυτά θα οδηγήσουν σε ανάγκη αναθεώρησης κάποιων από τις επικρατούσες θεωρίες στη σωματιδιακή φυσική και τη θεωρία βαρύτητας.

3.3 Κοσμολογία Πάνω στη Μεμβράνη

Όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η παρατήρηση της κοσμικής διαστολής και η ύπαρξη της σκοτεινής ενέργειας έχουν οδηγήσει σε πλούσια παραγωγή κοσμολογικών μοντέλων. Μία από τις κύριες μεθόδους αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η θεώρηση τροποποιήσεων στις εξισώσεις Einstein της τετραδιάστατης Θεωρίας Σχετικότητας. Τέτοιου είδους τροποποιήσεις θα οδηγούσαν σε διαφορετική δυναμική εξέλιξη του σύμπαντος, όχι λόγω νέων ενεργειακών συνιστωσών στην εξίσωση Friedmann, αλλά επειδή η ίδια η μορφή της εξίσωσης θα άλλαζε. Τα μοντέλα μεμβρανών έχουν χρησιμοποιηθεί κατά τα τελευταία χρόνια για την παραγωγή μη-συμβατικών κοσμολογιών πάνω σε μία τετραδιάστατη μεμβράνη, οι οποίες παρουσιάζουν συμπεριφορά διαφορετική από αυτή ενός αντίστοιχου μοντέλου τύπου FRW [44, 43].

Για την μαθηματική περιγραφή ενός τέτοιου κοσμολογικού μοντέλου, θεωρούμε μία μεμβράνη πέντε διαστάσεων, εμβαπτισμένη σε έναν Υπερχώρο, του οποίου η μετρική γράφεται κατά τα γνωστά ως

$$ds^2 = \tilde{g}_{MN}dx^M dx^N = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2, \tag{3.19}$$

όπου y είναι η πέμπτη διάσταση, η οποία θεωρούμε ότι είναι μη-συμπαγής και άπειρης έκτασης, στο πνεύμα του μοντέλου $RS-2$. Η μεμβράνη βρίσκεται τοποθετημένη στη θέση $y=0$. Καθώς ενδιαφερόμαστε για την κοσμολογική εξέλιξη της μεμβράνη, είναι πρέπον να γράψουμε τη μετρική σε μία μορφή τύπου FRW,

$$ds^2 = -n^2(\tau,y)d\tau^2 + a^2(\tau,y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(\tau,y)dy^2, \tag{3.20}$$

[2] Σε αντιδιαστολή, η σωματιδιακή φυσική υψηλών ενεργειών "υποφέρει" από έλλειψη τέτοιων ασυνεπειών, οι οποίες είναι απαραίτητες για την πρόοδο της έρευνας, ενώ οι προβλέψεις των νέων θεωριών, όπως οι Θεωρίες Υπερχορδών, βρίσκονται πολύ μακριά από τις τεχνικές δυνατότητες για να ελεγχθούν άμεσα. Το κατά πόσον η εικόνα αυτή πρόκειται να αλλάξει, αναμένεται να φανεί με την έναρξη της λειτουργίας του επιταχυντή LHC.

όπου η γ_{ij} είναι η μετρική του εσωτερικού, μέγιστα συμμετρικού 3-χώρου της μεμβράνης, του οποίου η γεωμετρία χαρακτηρίζεται από την παράμετρο καμπυλότητας $k = -1, 0, 1$. Οι εξισώσεις Einstein στον Υπερχώρο γράφονται ως

$$\tilde{G}_{MN} \equiv \tilde{R}_{MN} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{MN} = \kappa^2 \tilde{T}_{MN}{}^3. \tag{3.21}$$

Ένα νέο χαρακτηριστικό των εξισώσεων αυτών για την περίπτωση που εξετάζουμε είναι η δυνατότητα ύπαρξης πενταδιάστατης ύλης στον Υπερχώρο, η οποία να συνυπάρχει με τη συνήθη τετραδιάστατη ύλη της μεμβράνης και να συμμετέχει στη διαμόρφωση της κοσμολογίας της. Μπορούμε έτσι να γράψουμε τον τανυστή ορμής-ενέργειας ως

$$\tilde{T}^M{}_N = \tilde{T}^M{}_N\big|_{\text{bulk}} + T^M{}_M\big|_{\text{brane}}, \tag{3.22}$$

όπου έχουμε διαχωρίσει τις δύο συνεισφορές από τον Υπερχώρο (bulk) και τη μεμβράνη (brane). Θα θεωρήσουμε ότι τόσο ο Υπερχώρος, όσο και η μεμβράνη φέρουν ένα ενεργειακό περιεχόμενο, το οποίο μπορεί να περιγραφεί ως ιδανικό ρευστό, οπότε χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες εκφράσεις για τους τανυστές ορμής-ενέργειας (τονίζουμε ότι το ιδανικό ρευστό είναι ποιοτικά διαφορετικό σε κάθε χώρο, υπακούοντας στη δική του καταστατική εξίσωση)

$$\tilde{T}^M{}_N\big|_{\text{bulk}} = \text{diag}\,(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T)\,, \tag{3.23}$$

$$T^M{}_N\big|_{\text{brane}} = \frac{\delta(y)}{b}\text{diag}\,(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0)\,. \tag{3.24}$$

Βλέπουμε ότι ο τανυστής ορμής-ενέργειας της μεμβράνης είναι μηδενικός στο πέμπτο στοιχείο του, καθώς δεν ασκούνται πιέσεις κατά μήκος της πέμπτης διάστασης. Αντίθετα, ο τανυστής του Υπερχώρου φέρει μία πέμπτη συνιστώσα P_T, η οποία μπορεί να είναι διαφορετική από τις άλλες τρεις, να διαθέτει δηλαδή μη-ισοτροπική πίεση. Πρέπει να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι, με βάση τις αρχές της ομογένειας και ισοτροπίας, τόσο στον Υπερχώρο όσο και στη μεμβράνη, οι συνιστώσες των τανυστών ορμής-ενέργειας είναι ανεξάρτητες των χωρικών συντεταγμένων και εξαρτώνται μόνο από τον χρόνο. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι $\tilde{T}_{05} = 0$. Ο όρος αυτός αντιπροσωπεύει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ μεμβράνης και Υπερχώρου. Ο μηδενισμός του συνεπάγεται τη διατήρηση της ενέργειας πάνω στη μεμβράνη, όπως ακριβώς και στη συνήθη κοσμολογία FRW, δεν έχουμε δηλαδή εισροή ή εκροή ενέργειας προς τον Υπερχώρο.

Έχοντας διασαφηνίσει τη δομή του ενεργειακού περιεχομένου, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein για τη συγκεκριμένη μετρική. Τα στοιχεία του τανυστή Einstein είναι

$$\tilde{G}_{00} = 3\left\{\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right) - \frac{n^2}{b^2}\left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\right) + k\frac{n^2}{a^2}\right\}, \tag{3.25}$$

[3] Η σταθερά κ σχετίζεται με την πενταδιάστατη σταθερά του Νεύτωνα και την πενταδιάστατη μάζα Planck M ως $\kappa^2 = 8\pi G_{(5)} = \frac{1}{4M^3}$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_{ij} &= \frac{a^2}{b^2}\gamma_{ij}\left\{\frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a}+2\frac{n'}{n}\right)-\frac{b'}{b}\left(\frac{n'}{n}+2\frac{a'}{a}\right)+2\frac{a''}{a}+\frac{n''}{n}\right\} \\
&+\frac{a^2}{n^2}\gamma_{ij}\left\{\frac{\dot{a}}{a}\left(-\frac{\dot{a}}{a}+2\frac{\dot{n}}{n}\right)-2\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}\left(-2\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{n}}{n}\right)-\frac{\ddot{b}}{b}\right\} \qquad (3.26)\\
&-k\gamma_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{G}_{05} = 3\left(\frac{n'}{n}\frac{\dot{a}}{a}+\frac{a'}{a}\frac{\dot{b}}{b}-\frac{\dot{a}'}{a}\right), \qquad (3.27)
$$

$$
\tilde{G}_{55} = 3\left\{\frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a}+\frac{n'}{n}\right)-\frac{b^2}{n^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a}-\frac{\dot{n}}{n}\right)+\frac{\ddot{a}}{a}\right)-k\frac{b^2}{a^2}\right\}, \qquad (3.28)
$$

όπου ο τόνος δηλώνει παράγωγο ως προς την y και η τελεία χρονική παράγωγο. Από τις εκφράσεις αυτές και τις αντίστοιχες σχέσεις για τον τανυστή ορμής-ενέργειας, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein σε όλο τον χώρο. Επειδή ενδιαφερόμαστε για την κοσμολογία πάνω στη μεμβράνη, θέλουμε να παραγάγουμε εξισώσεις στο $y = 0$, οι οποίες να εξαρτώνται μόνο από τετραδιάστατες ποσότητες, οπότε πρέπει να απαλείψουμε παραγώγους συναρτήσεων ως προς την πέμπτη διάσταση. Χρησιμοποιώντας τις Συνθήκες Συνέχειας πάνω στη μεμβράνη

$$
\begin{aligned}
\frac{[a']}{a_0 b_0} &= -\frac{\kappa^2}{3}\rho_b, \qquad (3.29)\\
\frac{[n']}{n_0 b_0} &= \frac{\kappa^2}{3}\left(3p_b+2\rho_b\right), \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

μπορούμε να εκφράσουμε την ασυνέχεια των συναρτήσεων a' και n' ($[f] = f\left(0^+\right) - f\left(0^-\right)$) με βάση τον τανυστή ορμής-ενέργειας στη μεμβράνη. Ποσότητες με τον δείκτη 0 υπολογίζονται στη θέση της μεμβράνης. Μία απλοποιητική υπόθεση την οποία κάνουμε είναι ότι έχουμε συμμετρία $\mathbf{Z_2}$, $y \leftrightarrow -y$, ενώ με κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων μπορούμε να επιλέξουμε $n_0 = 1$. Παίρνοντας τότε την μέση τιμή της εξίσωσης Einstein 55 γύρω από το μηδέν και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υποθέσεις, οδηγούμαστε στην ενεργό εξίσωση Friedmann στη μεμβράνη

$$
\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = \frac{\kappa^2}{6}\rho_B + \frac{\kappa^4}{36}\rho_b^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2}. \qquad (3.31)
$$

Όπως διαπιστώνουμε, η εξίσωση αυτή διαφέρει σημαντικά από τη συνήθη εξίσωση Friedmann για κοσμολογίες τύπου FRW. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους αντιστοιχεί στη συνεισφορά της ύλης του Υπερχώρου. Ο δεύτερος βλέπουμε ότι παρουσιάζει δευτεροβάθμια εξάρτηση από την πυκνότητα ενέργειας της συνήθους ύλης (στην εξίσωση Friedmann είχαμε γραμμική εξάρτηση). Ο τρίτος όρος συμπεριφέρεται σαν όρος ακτινοβολίας, καθώς έχει εξάρτηση της μορφής $\sim 1/a^4$. Η σταθερά C είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης και εκφράζει την ύπαρξη της πέμπτης διάστασης. Όπως θα δούμε στο επόμενο εδάφιο, ο όρος αυτός, γνωστός και ως όρος *σκοτεινής ακτινοβολίας*, σχετίζεται με τον τανυστή Weil του Υπερχώρου.

Η παραπάνω εξίσωση είναι αρκετή για να μελετήσουμε την κοσμολογία πάνω στη μεμβράνη, ανεξάρτητα από τη μετρική του Υπερχώρου και την χρονική εξάρτηση της συνάρτησης

b. Για να διερευνήσουμε την χρονική εξέλιξη του τετραδιάστατου χώρου, θα θεωρήσουμε ότι το περιεχόμενο ενέργειας της μεμβράνης χωρίζεται σε δύο μέρη,

$$\rho_b = \sigma + \rho, \tag{3.32}$$

εκ των οποίων το δεύτερο αντιπροσωπεύει συνήθη ύλη, ενώ το πρώτο είναι η τάση της μεμβράνης, ή ισοδύναμα, η κοσμολογική σταθερά σε τέσσερις διαστάσεις. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην ενεργό εξίσωση Friedmann (3.31), βρίσκουμε

$$\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = \frac{\kappa^2}{6}\rho_B + \frac{\kappa^4}{36}\sigma^2 + \frac{\kappa^4}{18}\sigma\rho + \frac{\kappa^4}{36}\rho^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2}. \tag{3.33}$$

Οι ομοιότητες και οι διαφορές σε σύγκριση με την συνήθη εξίσωση Friedmann είναι τώρα πιο εύκολα διακριτές. Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος εξαρτάται αποκλειστικά από την τάση της μεμβράνης, ενώ ο τρίτος περιέχει το γινόμενο $\sigma\rho$ και ταυτίζεται με τον συνήθη γραμμικό όρο, αν κάνουμε την ταυτοποίηση $8\pi G = \frac{\kappa^4\sigma}{6}$. Ο τέταρτος όρος είναι τετραγωνικός ως προς την ρ και αποτελεί τη νέα προσθήκη στην κοσμολογική εξίσωση λόγω της μη-συμβατικής γεωμετρίας. Σε πρώιμους χρόνους, ο όρος αυτός υπερισχύει του γραμμικού, και η εξέλιξη που παίρνουμε είναι σημαντικά διαφορετική από αυτήν ενός σύμπαντος FRW. Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την περίπτωση με $\rho_B = \sigma = 0$. Επιλέγοντας μία καταστατική εξίσωση για το ρευστό στη μεμβράνη της μορφής $p = w\rho$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (3.5), βρίσκουμε ότι η χρονική συμπεριφορά του παράγοντα κλίμακας είναι

- $a \propto t^{1/3}$ για ύλη
- $a \propto t^{1/4}$ για ακτινοβολία

Και στις δύο περιπτώσεις, ο παράγοντας κλίμακας αυξάνει πιο αργά απ' ότι στη συμβατική κοσμολογία. Όπως προκύπτει, οι συμπεριφορές αυτές δεν είναι συνεπείς με τους περιορισμούς που παίρνουμε από την εποχή της πυρηνοσύνθεσης. Ωστόσο, μπορούμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα αυτό, αν θεωρήσουμε την ύπαρξη μίας κοσμολογικής σταθεράς στον Υπερχώρο, οπότε $\rho_B = \Lambda$, και μη-μηδενικής τάσεως στην μεμβράνη. Σε αυτό το σενάριο, διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να έχουμε μία κοσμολογία σε πρόσφατους χρόνους, όπου ο όρος ρ^2 και ο όρος σκοτεινής ακτινοβολίας είναι αμελητέοι σε σύγκριση με τον γραμμικό όρο πυκνότητας ενέργειας, η οποία να είναι ίδια με αυτήν που παίρνουμε από μία συνήθη κοσμολογία FRW, εφόσον επιβάλουμε τη συνθήκη

$$\frac{\kappa^2}{6}\Lambda + \frac{\kappa^4}{36}\sigma^2 = 0. \tag{3.34}$$

Η παραπάνω δεν είναι άλλη από τη συνθήκη λεπτής ρύθμισης του μοντέλου Randall-Sundrum. Ο συνδυασμός $\lambda = \sqrt{\frac{\rho_B}{6\kappa^2} + \frac{\sigma^2}{36}}$ παίζει το ρόλο μίας ενεργού τετραδιάστατης κοσμολογικής σταθεράς. Για $\lambda = 0$, η λύση που παίρνουμε για τον παράγοντα κλίμακας, θέτοντας $C = k = 0$, έχει τη μορφή

$$a_0(t) = a_* \left(\kappa^2\rho_*\right)^{1/q} \left(\frac{q^2}{72}\kappa^2\rho_\Lambda t^2 + \frac{q}{6}t\right)^{1/q}, \tag{3.35}$$

όπου ρ_* και a_* σταθερές και $q = 3(1+w)$. Για μικρούς χρόνους, ο γραμμικός όρος στην παρένθεση είναι κυρίαρχος, και παίρνουμε συμπεριφορά $a(t) \sim t^{1/q}$, ενώ για μεγάλους χρόνους, υπερισχύει ο τετραγωνικός όρος, και αναχτούμε έτσι την γνωστή συμπεριφορά $a(t) \sim t^{2/q}$. Ο παράγοντας κλίμακας ανταναχλά με άμεσο τρόπο το γεγονός ότι σε πρώιμους χρόνους η χοσμολογία καθορίζεται από τον όρο ρ^2, ενώ σε μεγάλους χρόνους τον κύριο ρόλο παίζει ο γραμμικός όρος ως προς ρ. Όλα αυτά ισχύουν αν η ενεργός χοσμολογική σταθερά στη μεμβράνη είναι μηδενική. Αν κάτι τέτοιο δεν ισχύει και έχουμε $\lambda > 0$, παίρνουμε τη λύση

$$a_0 = a_* \rho_*^{1/q} \left\{ \frac{\rho_\Lambda}{36\lambda^2} \left[\cosh\left(q\kappa^2\lambda t\right) - 1\right] + \frac{1}{6\lambda} \sinh\left(q\kappa^2\lambda t\right) \right\}^{1/q}. \tag{3.36}$$

Η έκφραση αυτή οδηγεί σε τρεις διακριτές φάσεις στην πορεία εξέλιξης του σύμπαντος. Για μικρούς χρόνους, έχουμε όπως και πριν κυριαρχία του όρου ρ^2, στη συνέχεια ο γραμμικός όρος υπερισχύει και τελικά έχουμε επικράτηση της ενεργού κοσμολογικής σταθεράς, η οποία προκαλεί επιταχυνόμενη διαστολή σε μεγάλους χρόνους. Εφόσον η ενεργός κοσμολογική σταθερά πρέπει να συμπίπτει με την παρατηρούμενη τετραδιάστατη τιμή, η οποία όπως σχολιάσαμε πριν είναι πολύ μικρή, καταλαβαίνουμε ότι η ασυμφωνία μεταξύ της κοσμολογικής σταθεράς του Υπερχώρου και της αντίστοιχης συνεισφοράς από την τάση της μεμβράνης πρέπει επίσης να είναι πολύ μικρή. Η απαίτηση αυτή αποτελεί ουσιαστικά μία συνθήκη λεπτής ρύθμισης, και είναι η εκδοχή του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς στην κοσμολογία μεμβρανών. Ωστόσο δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι υπάρχουν ακόμα διάφορα ανοιχτά ενδεχόμενα για τους όρους της πενταδιάστατης ύλης και της σκοτεινής ακτινοβολίας που μπορούν να επηρεάσουν την κοσμολογία. Όπως θα δούμε σε μετέπειτα κεφάλαια, αν οι όροι αυτοί διαθέτουν κατάλληλη μορφή, μπορούν να οδηγήσουν σε ενδιαφέροντα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας.

3.4 Εξισώσεις Shiromizu-Maeda-Sasaki

Ένας ενδιαφέρων τρόπος αντιμετώπισης προβλημάτων στην κοσμολογία μεμβρανών είναι η χρήση των εξισώσεων Gauss-Codazzi [74]. Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν τη γεωμετρία μίας πολλαπλότητας διάστασης D με την εσωτερική γεωμετρία μίας υπερεπιφάνειας διάστασης $D-1$, εμβαπτισμένης μέσα σε αυτή. Για τη διατύπωσή τους, χρειαζόμαστε τον *προβολικό τανυστή* (ή πρώτη θεμελιώδη μορφή της υπερεπιφάνειας) $q_{\mu\nu}$ και την *εξωτερική καμπυλότητα* $K_{\mu\nu}$ (δεύτερη θεμελιώδης μορφή). Ο προβολικός τελεστή ορίζεται ως

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu, \tag{3.37}$$

όπου n^μ είναι το κάθετο διάνυσμα στην υπερεπιφάνεια και, όπως δηλώνει και το όνομά του, προβάλλει άλλα τανυστικά μεγέθη πάνω στην υπερεπιφάνεια. Ουσιαστικά η ποσότητα $q_{\mu\nu}$ δεν είναι τίποτα περισσότερο από την επαγόμενη μετρική της υπερεπιφάνειας. Η εξωτερική καμπυλότητα ορίζεται ως η *παράγωγος Lie* του προβολικού τανυστή κατά μήκος του πεδίου του κάθετου διανύσματος n^μ,

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n q_{\mu\nu}. \tag{3.38}$$

Από φυσικής απόψεως, η εξωτερική καμπυλότητα μετρά απλώς το ρυθμό μεταβολής της επαγόμενης μετρικής της υπερεπιφάνειας, καθώς κινούμαστε κατά μήκος του κάθετου πεδίου της. Για ένα κάθετο πεδίο το οποίο δεν είναι παντού γεωδαισιακό[4], η εξωτερική καμπυλότητα μπορεί να γραφεί ως

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu - n_\mu a_\nu, \tag{3.39}$$

όπου $a_\mu = n_\nu \nabla^\nu n_\mu$ είναι η επιτάχυνση του πεδίου. Για γεωδαισιακά πεδία η επιτάχυνση μηδενίζεται. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αυτούς, μπορούμε να γράψουμε τώρα τις εξισώσεις Gauss-Codazzi. Η εξίσωση Gauss εκφράζει τον τανυστή Riemann της υπερεπιφάνειας συναρτήσει του τανυστή Riemann του D-διάστατου χώρου και της εξωτερικής καμπυλότητας. Καθώς μας ενδιαφέρει η εφαρμογή της εξίσωσης αυτής σε μοντέλα μεμβρανών με πέντε διαστάσεις στον Υπερχώρο και μία τετραδιάστατη μεμβράνη (υπερεπιφάνεια), θα γράψουμε την έκφραση για $D = 5$,

$$^{(4)}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = {}^{(5)}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} q_\mu{}^{\alpha} q_\beta{}^{\nu} q_\gamma{}^{\rho} q_\delta{}^{\sigma} + K^{\alpha}{}_{\gamma} K_{\beta\delta} - K^{\alpha}{}_{\delta} K_{\beta\gamma}. \tag{3.40}$$

Η εξίσωση Codazzi είναι η

$$D_\nu K_\mu{}^{\nu} - D_\mu K = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\sigma q_\mu{}^{\rho}, \tag{3.41}$$

όπου έχουμε ορίσει την συναλλοίωτη παράγωγο ως προς την επαγόμενη μετρική στην μεμβράνη, D_μ. Επίσης, $K = K^\mu_\mu$ είναι το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας. Συστέλλοντας τον πρώτο και τρίτο δείκτη της εξίσωσης Gauss, παίρνουμε την έκφραση για τον τανυστή Ricci της μεμβράνης, με βάση τον οποίο μπορούμε να γράψουμε τον τετραδιάστατο τανυστή Einstein,

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} &= \left[{}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} {}^{(5)}R\right] q_\mu{}^{\rho} q_\nu{}^{\sigma} + {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma q_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} \\ &- K_\mu{}^{\rho} K_{\nu\rho} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu}(K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) - \tilde{E}_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

όπου

$$\tilde{E}_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}R^{\alpha}{}_{\beta\rho\sigma} n_\alpha n^\rho q_\mu{}^{\beta} q_\nu{}^{\sigma}. \tag{3.43}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την έκφραση

$$^{(5)}R_{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{2}{3}(g_{\mu[\nu} {}^{(5)}R_{\beta]\alpha} - g_{\alpha[\nu} {}^{(5)}R_{\beta]\mu}) - \frac{1}{6} g_{\mu[\nu} g_{\beta]\alpha} {}^{(5)}R + {}^{(5)}C_{\mu\alpha\nu\beta}, \tag{3.44}$$

η οποία αποτελεί την ανάλυση του τανυστή Riemann ως προς του τανυστές Ricci και Weil, εξάγουμε την ακόλουθη έκφραση για τις εξισώσεις Einstein στη μεμβράνη

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} &= \frac{2\kappa^2}{3}\left(T_{\rho\sigma} q_\mu{}^{\rho} q_\nu{}^{\sigma} + \left(T_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma - \frac{1}{4} T^\rho{}_\rho\right) q_{\mu\nu}\right) + K K_{\mu\nu} \\ &- K_\mu{}^{\sigma} K_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu}\left(K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}\right) - E_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

[4]Ένα πεδίο είναι γεωδαισιακό όταν μεταφέρει παράλληλα το εφαπτόμενο διάνυσμά του, δηλαδή $n_\nu \nabla^\nu n_\mu = 0$.

με τον ορισμό

$$E_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C^{\alpha}{}_{\beta\rho\sigma} n_{\alpha} n^{\rho} q_{\mu}{}^{\beta} q_{\nu}{}^{\sigma} . \tag{3.46}$$

Η ποσότητα $E_{\mu\nu}$ αποτελεί ουσιαστικά μία προβολή του τανυστή Weil του Υπερχώρου πάνω στη μεμβράνη. Από αυτήν προέρχεται ο παράγοντας σκοτεινής ακτινοβολίας, που συναντήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Η εξίσωση Codazzi γράφεται με βάση τον τανυστή ορμής-ενέργειας ως

$$D_{\nu} K_{\mu}{}^{\nu} - D_{\mu} K = \kappa^2 T_{\rho\sigma} n^{\sigma} q_{\mu}{}^{\rho} . \tag{3.47}$$

Οι εξισώσεις Gauss-Codazzi είναι πολύ χρήσιμες σε προβλήματα όπου έχουμε ενεργειακό περιεχόμενο (όπως ένα ιδανικό ρευστό) περιορισμένο μέσα σε μία υπερεπιφάνεια. Το φαινόμενο αυτό συναντάμε επίσης στην περίπτωση των μοντέλων μεμβρανών, όπου συχνά θεωρούμε ότι η κύρια ενεργειακή συνεισφορά βρίσκεται μέσα στον χώρο της μεμβράνης. Μπορούμε έτσι να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Gauss-Codazzi, προκειμένου να εξαγάγουμε κοσμολογικές εξισώσεις πάνω στη μεμβράνη, χωρίς να χρειαστεί να αντιμετωπίσουμε το πλήρες πρόβλημα της επίλυσης της γεωμετρίας στον Υπερχώρο.

Επιλέγουμε τώρα κάθετες συντεταγμένες Gauss, με συνέπεια η πενταδιάστατη μετρική να παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = d\chi^2 + q_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} , \tag{3.48}$$

όπου θεωρούμε ότι η μεμβράνη βρίσκεται τοποθετημένη στη θέση $\chi = 0$. Στις συντεταγμένες που χρησιμοποιούμε, το κάθετο πεδίο στην μεμβράνη είναι γεωδαισιακό.

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας του Υπερχώρου θεωρούμε ότι αποτελείται από μία πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά και το ενεργειακό περιεχόμενο της μεμβράνης, περιορισμένο στη θέση $\chi = 0$,

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \delta(\chi), \tag{3.49}$$

όπου ο τανυστής για τη μεμβράνη αναλύεται περαιτέρω σε μία τετραδιάστατη κοσμολογική σταθερά ή τάση μεμβράνης και στη συνεισφορά της συνήθους ύλης,

$$S_{\mu\nu} = -\lambda q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} . \tag{3.50}$$

Ο τανυστής $\tau_{\mu\nu}$ μπορεί να έχει τη μορφή ενός τανυστή ιδανικού ρευστού, $\tau_{\mu\nu} = diag(\rho, p, p, p)$.

Σκοπός μας είναι τώρα να εκφράσουμε τις συνιστώσες της εξωτερικής καμπυλότητας ως προς τον τανυστή ορμής-ενέργειας του Υπερχώρου και της μεμβράνης. Για να το επιτύχουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τις Συνθήκες Συνέχειας Israel

$$\begin{aligned} [q_{\mu\nu}] &= 0 , \\ [K_{\mu\nu}] &= -\kappa^2 \Big(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \Big), \end{aligned} \tag{3.51}$$

όπου $[X] := \lim_{\chi \to +0} X - \lim_{\chi \to -0} X = X^{+} - X^{-}$ είναι η ασυνέχεια της συνάρτησης στη θέση της μεμβράνης. Με την επιβολή συμμετρίας $\mathbf{Z_2}$, η εξωτερική καμπυλότητα ορίζεται μονοσήμαντα ως

$$K^{+}_{\mu\nu} = -K^{-}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \kappa^2 \Big(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \Big) . \tag{3.52}$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την τελική μορφή των εξισώσεων Einstein πάνω στη μεμβράνη ως

$$^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} + \kappa_5^4\,\pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}\,. \tag{3.53}$$

Η τετραδιάστατη ενεργός κοσμολογική σταθερά ορίζεται ως

$$\Lambda_4 \;=\; \frac{1}{2}\kappa^2\left(\Lambda + \frac{1}{6}\kappa^2\,\lambda^2\right) \tag{3.54}$$

και η τετραδιάστατη σταθερά του Νεύτωνα, $G_N = \frac{\kappa_5^4\lambda}{48\pi}$. Οι εκφράσεις αυτές είναι ισοδύναμες με αυτές που είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Το ενεργειακό υπόθεμα της μεμβράνης περιέχεται στον τανυστή

$$\pi_{\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{4}\tau_{\mu\alpha}\tau_\nu{}^\alpha + \frac{1}{12}\tau\tau_{\mu\nu} + \frac{1}{8}q_{\mu\nu}\tau_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}q_{\mu\nu}\tau^2\,. \tag{3.55}$$

Με αντικατάσταση του τανυστή $\tau_{\mu\nu}$ στην παραπάνω έκφραση, επιβεβαιώνουμε την ύπαρξη τριών όρων, ενός τετραγωνικού ως προς ρ, ενός γραμμικού και ενός εξαρτώμενου από τη λ^2.

3.5 Μεμβράνες Συνδιάστασης-2

Ένα διαφορετικό σενάριο αντιμετώπισης του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς εμφανίζεται στα μοντέλα με μεμβράνες συνδιάστασης-2. Με τον όρο συνδιάσταση (codimension) εννοούμε τη διαφορά $D - d$, μεταξύ της συνολικής διάστασης του Υπερχώρο και της μεμβράνης. Μεμβράνες συνδιάστασης-2 έχουν μία πολύ σημαντική ιδιότητα, η οποία απλοποιεί εξαιρετικά την μελέτη τέτοιων μοντέλων: δεν επάγουν καμπύλωση στον Υπερχώρο, πέρα από μία κωνική ανωμαλία στο σημείο το οποίο βρίσκονται. Αυτό το γεγονός είναι ήδη γνωστό από την συνήθη τετραδιάστατη Γενική Σχετικότητα, όπου κοσμικές χορδές προκαλούν τέτοιου είδους κωνικές ανωμαλίες στον χωρόχρονο [75]. Αντίστοιχα, στη $(2+1)$-βαρύτητα, σημειακά σωματίδια δεν ασκούν καμία βαρυτική δύναμη σε άλλα γειτονικά σώματα, αλλά επάγουν επίσης κωνικές ανωμαλίες [76]. Η διαπίστωση αυτή είναι απολύτως γενική. Αντικείμενα συνδιάστασης-2 δεν επηρεάζουν τον χώρο μακριά από αυτά (και άρα δεν ασκούν βαρυτικές δυνάμεις). Η ιδιότητα αυτή, όπως θα δούμε, είναι ουσιώδης για την αντιμετώπιση του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς.

Όπως παρουσιάστηκε στην [45], είναι δυνατόν να κατασκευαστούν στατικές λύσεις με δύο τετραδιάστατες μεμβράνες, τοποθετημένες μέσα σε έναν Υπερχώρο 6 διαστάσεων. Στο μοντέλο αυτό, ο εγκάρσιος δισδιάστατος χώρος είναι συμπαγής, με την τοπολογία μίας σφαίρας ακτίνας a_0, στο πνεύμα των θεωριών Kaluza-Klein. Η μετρική για τον χώρο αυτό, ο οποίος περιγράφεται από τις συντεταγμένες y^i που είναι κάθετες στη μεμβράνη, έχει τη μορφή

$$\gamma_{ij}(y)dy^i dy^j = a_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \tag{3.56}$$

Θα θεωρήσουμε περιπτώσεις όπου ο εσωτερικός χώρος της μεμβράνης είναι επίπεδος (Minkowski). Στην περίπτωση αυτή, η πλήρης μετρική στον εξαδιάστατο Υπερχώρο γράφεται ως

$$ds^2 = G_{ab}\, dX^a dX^b = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + \gamma_{ij}(y) dy^i dy^j \; . \tag{3.57}$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που δεν υπάρχουν στο χώρο μεμβράνες. Ένα σημαντικό ζήτημα σε μοντέλα αυτού του είδους είναι η εξασφάλιση της ύπαρξης συμπαγούς γεωμετρίας για τον εγκάρσιο χώρο. Η συμπαγοποίηση των δύο επιπλέον διαστάσεων μπορεί να επιτευχθεί συμπεριλαμβάνοντας ένα πεδίο βαθμίδας $U(1)$ στον εγκάρσιο χώρο, το οποίο να έχει τη μορφή ενός μαγνητικού πεδίου, προερχόμενου από μαγνητικό μονόπολο. Θα θεωρήσουμε επίσης την παρουσία εξαδιάστατης κοσμολογικής σταθεράς λ. Η δράση του μοντέλου έχει τη μορφή

$$S_6 = \int d^6X \sqrt{|G|} \left(\frac{1}{2} M_6^4 R - \lambda - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right) \; . \tag{3.58}$$

Ο πρώτος όρος, ο οποίος πολλαπλασιάζεται από την εξαδιάστατη μάζα Planck, είναι η συνήθης βαρυτική δράση, ο δεύτερος είναι η κοσμολογική σταθερά του Υπερχώρου, ενώ ο τρίτος αντιπροσωπεύει το μαγνητικό πεδίο. Η λύση των εξισώσεων Maxwell για το μαγνητικό πεδίο είναι

$$F_{ij} = \sqrt{\gamma} B_0 \epsilon_{ij} \; , \tag{3.59}$$

όπου B_0 σταθερά. Οι τανυστές ορμής-ενέργειας που οφείλονται στην κοσμολογική σταθερά και το μαγνητικό πεδίο είναι αντίστοιχα

$$T^\lambda_{ab} = -\lambda \begin{pmatrix} n_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix} , \tag{3.60}$$

$$T^F_{ab} = -\frac{1}{2} B_0^2 \begin{pmatrix} n_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -\gamma_{ij} \end{pmatrix} . \tag{3.61}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις αυτές μπορούμε να δείξουμε ότι η μετρική (3.56) είναι συμβατή με έναν τετραδιάστατο χώρο σε τέσσερις διαστάσεις, επιβάλοντας τις ακόλουθες συνθήκες λεπτής ρύθμισης

$$B_0^2 = 2\lambda \; , \qquad a_0^2 = \frac{M_6^4}{2\lambda} \; . \tag{3.62}$$

Οι συνθήκες αυτές εγγυώνται τη συμπαγοποίηση των επιπλέον διαστάσεων σε σφαίρα ακτίνας a_0 με στατική γεωμετρία.

Προχωρούμε τώρα στην εισαγωγή των μεμβρανών στην παραπάνω λύση. Τοποθετούμε συμμετρικά δύο μεμβράνες, ίδιας τάσεως σ, στους δύο πόλους της σφαίρας του εγκαρσίου χώρου, έτσι ώστε ο τανυστής ορμής-ενέργειάς τους να γράφεται συνολικά ως

$$T^{branes}_{ab} = -\frac{\sigma}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} n_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_n \delta^2(y_n) \, , \tag{3.63}$$

όπου y_n είναι οι θέσεις των πόλων. Σκοπός μας είναι να έχουμε πάλι έναν τετραδιάστατο επίπεδο χώρο Minkowski, ο οποίος θα ταυτίζεται με τη γεωμετρία μέσα στις μεμβράνες, περιμένουμε όμως, σύμφωνα με την παραπάνω συζήτηση, την εμφάνιση κωνικών ανωμαλιών στον εγκάρσιο χώρο. Για να μελετήσουμε τη γεωμετρία του εγκάρσιου χώρου, γράφουμε την μετρική του χρησιμοποιώντας σύμμορφα επίπεδη παραμετροποίηση,

$$\gamma_{ij}dy^i dy^j = \psi(r)(dr^2 + r^2 d\phi^2) \ . \tag{3.64}$$

Ο σύμμορφος παράγοντας $\psi(r)$ εξαρτάται μόνο από την ακτινική συντεταγμένη των επιπλέον διαστάσεων και καθορίζει τη γεωμετρία του χώρου. Οι εξισώσεις Einstein γράφονται ως

$$0 = -\lambda + \frac{1}{2}B_0^2 \ , \tag{3.65}$$

για τις κατευθύνσεις παράλληλα στη μεμβράνη και

$$\frac{M_6^4}{2\psi}\nabla^2 \ln\psi = -\lambda - \frac{1}{2}B_0^2 - \frac{\sigma}{2\pi\psi}\nabla^2 \ln r \tag{3.66}$$

για τις κάθετες συντεταγμένες. Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις είναι η ίδια συνθήκη λεπτής ρύθμισης μεταξύ μαγνητικού πεδίου και κοσμολογικής σταθεράς που είδαμε και στο μοντέλο χωρίς μεμβράνες. Η δεύτερη καθορίζει τη μορφή του σύμμορφου παράγοντα. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη λεπτής ρύθμισης, η δεύτερη εξίσωση απλοποιείται στη μορφή

$$M_6^4\nabla^2 \ln\psi = -4\lambda\psi - \frac{\sigma}{\pi}\nabla^2 \ln r \ , \tag{3.67}$$

η οποία επιλύεται, δίνοντας τον σύμμορφο παράγοντα

$$\psi(r) = \frac{4\alpha^2 a_0^2}{r^2[(r/r_0)^{\alpha} + (r/r_0)^{-\alpha}]^2} \ . \tag{3.68}$$

Οι παράμετροι α και a_0 δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha = 1 - \frac{\sigma}{2\pi M_6^4} \ , \qquad a_0^2 = \frac{M_6^4}{2\lambda} \ , \tag{3.69}$$

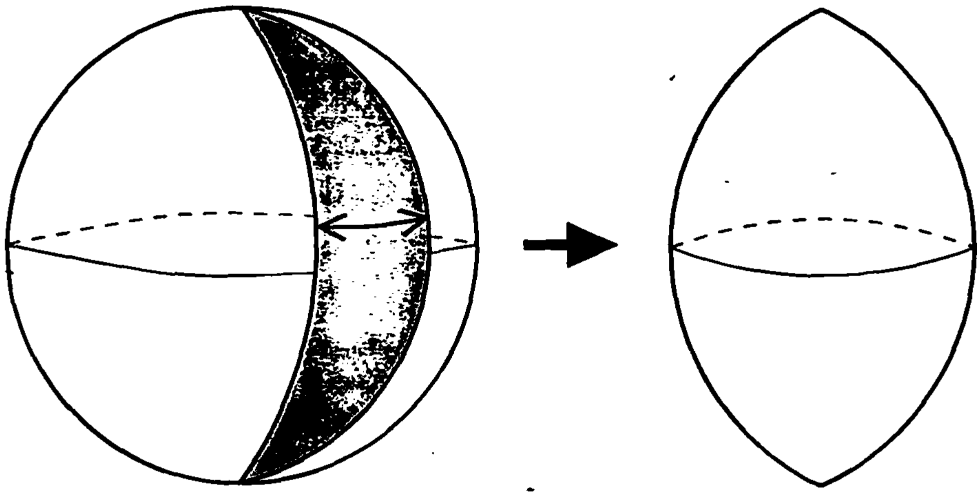
ενώ η ποσότητα r_0 εξαρτάται από την επιλογή συντεταγμένων που έχουμε κάνει. Όπως βλέπουμε, η ακτίνα καμπυλότητας της σφαίρας στον εγκάρσιο χώρο είναι η ίδια με πριν. Το γεγονός αυτό είναι συνεπές με την προσδοκία μας ότι η γεωμετρία μακριά από τη θέση των μεμβρανών στον εγκάρσιο χώρο θα παραμένει ανεπηρέαστη. Όλη η συνεισφορά των μεμβρανών έρχεται μέσω του όρου α, ο οποίος περιέχει την τάση σ. Για $\sigma = 0$ (απουσία μεμβρανών), ανακτούμε την αρχική λύση. Με κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων, η μετρική του εγκάρσιου χώρου γράφεται ως

$$\gamma_{ij}dy^i dy^j = a_0^2(d\theta^2 + \alpha^2 \sin^2\theta \, d\phi^2) \ . \tag{3.70}$$

Η μετρική αυτή θα αντιστοιχούσε σε ένα συνηθισμένο δισδιάστατο επίπεδο για $\alpha = 1$. Επειδή όμως στην προκειμένη περίπτωση αυτό δεν ισχύει, βλέπουμε ότι ένα πλήρες γωνιακό ολοκλήρωμα γύρω από την αρχή των αξόνων δίνει

$$\int_0^{2\pi} \alpha a_0 \sin\theta d\phi = 2\pi\alpha a_0 \sin\theta \ . \tag{3.71}$$

Εφόσον $\alpha < 1$, βλέπουμε ότι η παραπάνω ποσότητα ισοδυναμεί με ολοκλήρωση στο γωνιακό διάστημα $[0, 2\pi\alpha]$, έχουμε δηλαδή μία ελλειμματική γωνία $\delta = 2\pi(1-\alpha)$. Συγκρίνοντας με την έκφραση που έχουμε εξαγάγει για την παράμετρο α, βλέπουμε ότι $\delta = \frac{\sigma}{M_6^2}$, η ελλειμματική γωνία δηλαδή καθορίζεται από την τάση της μεμβράνης. Η ύπαρξη της γωνίας δ σηματοδοτεί την παρουσία κωνικής ανωμαλίας στον χώρο. Για μηδενική τάση της μεμβράνης, η κωνική ανωμαλία εξαφανίζεται. Η γεωμετρία του χώρου μοιάζει με αυτή του Σχήματος 3.2, έχει δηλαδή τη μορφή μία μπάλας του ράγκμπι. Η ελλειμματική γωνία αντιστοιχεί στον τομέα που αφαιρούμε από τη σφαίρα για να ενώσουμε τους δύο μεσημβρινούς. Πρέπει ωστόσο να τονίσουμε ότι η εικόνα αυτή δεν απόλυτα ακριβής, από την άποψη ότι μία μπάλα του ράγκμπι δεν έχει παντού την ίδια καμπυλότητα, ενώ ο χώρος που εξετάζουμε είναι παντού σφαιρικός, με εξαίρεση τους πόλους του.



Σχήμα 3.2: Η γεωμετρία του εγκάρσιου χώρου έχει τη μορφή μπάλας του ράγκμπι. Οι μεμβράνες βρίσκονται τοποθετημένες στους δύο πόλους (Carroll and Guica, 2003).

Όπως διαπιστώσαμε παραπάνω, το μοντέλο αυτό επιτυγχάνει την αναπαραγωγή ενός τετραδιάστατου χωρόχρονου πάνω στις μεμβράνες, ο οποίος είναι επίπεδος, άρα δεν υπάρχει ενεργός τετραδιάστατη κοσμολογική σταθερά. Η τάση της μεμβράνης (κοσμολογική σταθερά) καθίσταται αόρατη πρακτικά για τετραδιάστατους παρατηρητές. Το μόνο το οποίο προκαλεί, είναι μία κωνική ανωμαλία στον εγκάρσιο χώρο, μέσω της εμφάνισης της ελλειμματικής γωνίας δ.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ωστόσο ότι το μοντέλο αυτό δεν αποτελεί μία πλήρη λύση στο πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς. Αυτό οφείλεται στη σχέση (3.65), η οποία καθορίζει την πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά απέναντι στο μαγνητικό πεδίο. Η έκφραση αυτή είναι μία συνθήκη λεπτής ρύθμισης, άρα το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς επανεμφανίζεται μέσω της απαίτησης μίας πολύ συγκεκριμένης σχέσης μεταξύ λ και B_0. Αξίζει όμως να σημειώσουμε ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της λύσης αυτής: μόλις η συνθήκη λεπτής ρύθμισης εφαρμοστεί, η μεμβράνη παραμένει επίπεδη, ακόμα και αν έχουμε μεταβολές στην τάση σ. Αυτό σημαίνει ότι φαινόμενα όπως η παραβίαση συμμετρίας, η οποία μπορεί να προκαλέσει αλλαγές στην σ, δεν επηρεάζουν καθόλου την τετραδιάστατη γεωμετρία, επάγοντας απλώς μία διαφορετική ελλειμματική γωνία δ. Με τον τρόπο αυτό, η φαινομενολογία λόγω της τάσεως της μεμβράνης απωθείται εξολοκλήρου στον εγκάρσιο χώρο. Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα δούμε πώς μπορούν μοντέλα αυτού του είδους να επεκταθούν με θεώρηση εγκαρσίων χώρων, οι οποίοι δεν είναι συμπαγείς και παρέχουν τρόπους αποφυγής συνθηκών λεπτής ρύθμισης.

Κεφάλαιο 4

Μοντέλα Μεμβρανών Παρουσία Ενός Μη-Ελάχιστα Συζευγμένου στην Βαρύτητα Βαθμωτού Πεδίου

4.1 Εισαγωγή

Η ιδέα της ύπαρξης του σύμπαντός μας ως μίας *ατέλειας* μέσα σε έναν χωρόχρονο υψηλότερης διάστασης, αν και όχι καινούργια [36, 37], έχει προκαλέσει έντονο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια στο πλαίσιο της Θεωρίας Χορδών, όπου *D-Μεμβράνες* [32], δηλαδή μεμβράνες, πάνω στις οποίες τα θεμελιώδη πεδία της χορδής ικανοποιούν συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, παίζουν σημαντικό ρόλο. Στα πλαίσια των Θεωριών Χορδών/Θεωρίας-M [33, 77] ή της αντιστοιχίας AdS/CFT [78, 79, 80], μοντέλα μεμβρανών [81, 38, 82, 39] έχουν αποκαλύψει νέες δυνατότητες για την επίλυση του προβλήματος της ιεραρχίας στη σωματιδιακή φυσική, καθώς και για τη σχέση μεταξύ της βαρυτικής δύναμης και των υπολοίπων θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων. Σε μοντέλα D-Μεμβρανών, τα πεδία του Καθιερωμένου Μοντέλου βρίσκονται παγιδευμένα πάνω στην μεμβράνη, ενώ τα βαρυτόνια διαδίδονται σε ολόκληρο τον υψηλότερης διάστασης χώρο (*Υπερχώρος*). Σε μία ενδιαφέρουσα περίπτωση μοντέλων μεμβρανών με μία επιπλέον διάσταση άπειρης έκτασης, τα βαρυτόνια είναι χωρικά εντοπισμένα πάνω στην μεμβράνη λόγω της καμπυλότητας της επιπλέον διάστασης [40, 83]. Υπάρχει λύση των εξισώσεων Einstein με επίπεδη μετρική πάνω στη μεμβράνη και γεωμετρία AdS_5 στον Υπερχώρο υπό τον όρο ότι η μεμβράνη θετικής τάσεως είναι κατάλληλα ρυθμισμένη απέναντι σε μία αρνητική κοσμολογική σταθερά του Υπερχώρου.

Αν και τα πεδία του Καθιερωμένου Μοντέλου θεωρούνται χωρικά εντοπισμένα στη θέση της μεμβράνης, η βαρύτητα δεν είναι απαραίτητα το μόνο πεδίο το οποίο έχει την ιδιότητα να διαδίδεται στον Υπερχώρο. Μοντέλα μεμβρανών με βαθμωτά πεδία στον Υπερχώρο έχουν ήδη κατασκευαστεί [84] [85], είτε από θεωρητική είτε από φαινομενολογική σκοπιά [86, 87]. Μάλιστα, η ίδια η μεμβράνη μπορεί να είναι μία ατέλεια, προκαλούμενη από ένα Περιβάλλον βαθμωτό πεδίο (βαθμωτό πεδίο το οποίο ορίζεται στον Υπερχώρο) συγκεκριμένης διαμόρφωσης (μία *"κάμψη"*, kink) [88, 89]. Η ύπαρξη ενός Περιβάλλοντος βαθμωτού πεδίου ανοίγει τον δρόμο στην πιθανότητα της ύπαρξης άμεσης σύζευξης του πεδίου αυτού με τη βαθμωτή καμπυλότητα του χωρόχρονου. Μία συγκεκριμένη μορφή αυτής της σύζευξης αντιστοιχεί στον βαρυτικό όρο, ο οποίος εμφανίζεται στις αποκαλούμενες τανυστικές-βαθμωτές θεωρίες βαρύτητας [90, 91]. Ένα Περιβάλλον βαθμωτό πεδίο με μη-ελάχιστη σύζευξη με την βαρυτική δύναμη, μέσω ενός όρου της μορφής $\phi^2 R$, έχει ήδη εξεταστεί, στα πλαίσια του μοντέλου Randall-Sundrum, και αριθμητικές λύσεις έχουν συζητηθεί [92, 93].

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε μία 3-μεμβράνη, εμβαπτισμένη σε έναν πενταδιάστατο χώρο, ο οποίος διαθέτει ένα Περιβάλλον βαθμωτό πεδίο ϕ, μη-ελάχιστα συζευγμένο με την βαρύτητα μέσω ενός όρου της μορφής $-\xi\,\phi^2 R$ [94]. Μελετάμε, χρησιμοποιώντας αναλυτικές μεθόδους, την ύπαρξη λύσεων στο πεπλεγμένο σύστημα εξισώσεων κίνησης για τη μετρική και το βαθμωτό πεδίο, υιοθετώντας για την μετρική την προδιαγραφή $diag\,(e^{A(x_5)}\eta_{\mu\nu}, 1)$. Για μετρική της μορφής Randall-Sundrum, παράγουμε αναλυτικά ένα πλήρες σύνολο από ακριβείς λύσεις για ένα πεδίο τιμών της σταθεράς μη-ελάχιστης σύζευξης ξ, οι οποίες αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιλογές για το βαθμωτό δυναμικό. Βαθμωτά πεδία, με ή χωρίς μη-ελάχιστη σύζευξη, εισάγονται συχνά μέσα σε ένα προϋπάρχον υπόβαθρο Randall-Sundrum, υπό την προϋπόθεση ότι οι επιπτώσεις τους στην γεωμετρία του υποβάθρου δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Όντως, βρίσκουμε ακριβείς λύσεις για το βαθμωτό πεδίο, χωρίς ύπαρξη ανωμαλιών, συμβατές με μία γεωμετρία υποβάθρου, η οποία είναι ακριβώς της μορφής Randall-Sundrum, λαμβάνοντας υπόψη την ανάδραση από την ύπαρξη του βαθμωτού πεδίου.

Επιδεικνύουμε την ύπαρξη μίας κλάσης λύσεων για μία πιο γενική συνάρτηση στρέβλωσης με μία ασυμπτωτική συμπεριφορά της μορφής Randall-Sundrum AdS_5. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις λαμβάνουμε υπόψη την πιθανότητα εξάρτησης της τάσεως πάνω στην μεμβράνη από την τιμή του βαθμωτού πεδίου εκεί. Επιπλέον, συζητάμε την ύπαρξη ομαλών λύσεων του τύπου AdS_5, στις οποίες το ρόλο της μεμβράνης παίζει μία "κάμψη" του ίδιου του Περιβάλλοντος βαθμωτού πεδίου. Προχωρούμε σε μία αριθμητική αντιμετώπιση του πλήρους προβλήματος, όσο και σε προσεγγιστική αναλυτική πραγμάτευση. Εν προκειμένω, υπολογίζουμε τις συναρτήσεις στρέβλωσης για ομαλές γεωμετρίες παρουσία μίας κάμψης του βαθμωτού πεδίου για διαφορετικές συνοριακές τιμές στην αρχή (θέση της μεμβράνης) και εξάγουμε μία σειρά από λύσεις. Αν και επικεντρωνόμαστε σε λύσεις που διαθέτουν συμμετρία Z_2, ομαλές ασυμμετρικές λύσεις είναι επίσης δυνατές. Μέσω αναλυτικών μεθόδων, επιβεβαιώνουμε την ύπαρξη παραγόντων στρέβλωσης, οι οποίοι μειώνονται εκθετικά με την απόσταση από την μεμβράνη για ένα μεγάλο εύρος τιμών των παραμέτρων του μοντέλου, παρέχοντας έτσι πεπερασμένες γεωμετρίες. Βρίσκουμε επίσης αναλυτικές λύσεις για μερικές ειδικές τιμές των παραμέτρων και διαφορετικά πεδία τιμών του ξ. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, μελετάμε τον περιορισμό των βαρυτονίων στο μοντέλο που εξετάζουμε και ελέγχουμε την μορφή του περιοριστικού δυναμικού για τα βαρυτόνια, με την χαρακτηριστική μορφή τύπου "ηφαιστείου". Διαπιστώνουμε ότι, για ξ μεγαλύτερο από μία ορισμένη τιμή, το δυναμικό αναπτύσσει ένα τοπικό μέγιστο στην αρχή, το οποίο σταδιακά αυξάνει, καθώς κινούμαστε προς μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου σύζευξης.

4.2 Δράση και Εξισώσεις Κίνησης

Θεωρούμε μία γενική πενταδιάστατη θεωρία ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου, συζευγμένου με την βαρύτητα. Επιτρέποντας μόνο όρους γραμμικούς ως προς το βαθμωτό Ricci, μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη γενική έκφραση για τη δράση του συστήματος

$$S = \int d^5x\,\sqrt{-G}\left\{ f(\phi)R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \mathcal{L}_m \right\}, \tag{4.1}$$

όπου $f(\phi)$ είναι, προς το παρόν, μία γενική, ομαλή, θετικά ορισμένη συνάρτηση του βαθμωτού πεδίου ϕ. G_{MN} είναι η πενταδιάστατη μετρική, η οποία δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον τανυστή Einstein. Στην περίπτωση μίας σταθερής f, παίρνουμε την δράση Einstein. Ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί σε ύλη ανεξάρτητη από το ϕ. Τονίζουμε ότι η παραπάνω δράση μπορεί πάντα να μετασχηματιστεί μέσω ενός *σύμμορφου μετασχηματισμού* $G_{MN} \to G_{MN}f(\phi)/2M^3$ σε μία δράση στην οποία το βαθμωτό Ricci εισέρχεται κατά τον συνηθισμένο τρόπο $(2M^3)\,R$, όπως ακριβώς στη δράση Einstein. Ωστόσο, η εξάρτηση από το ϕ θα εμφανιστεί τότε στον όρο που αντιπροσωπεύει την ύλη πάνω στη μεμβράνη, δίνοντας έτσι μία θεωρία διαφορετική από αυτή που θα έπαιρνε κανείς απουσία της $f(\phi)$.

Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την (4.1) είναι

$$f(\phi)\left(R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R \right) - \nabla_M\nabla_N f(\phi) + G_{MN}\nabla^2 f(\phi) = \frac{1}{2}T^{(\phi)}_{MN} + \frac{1}{2}T^{(m)}_{MN}, \tag{4.2}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{dV}{d\phi} + R\frac{df}{d\phi} = 0, \tag{4.3}$$

όπου

$$T^{(\phi)}_{MN} = \nabla_M\phi\nabla_N\phi - G_{MN}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right), \tag{4.4}$$

είναι ο τανυστής ορμής-ενέργειας του βαθμωτού πεδίου ϕ και $T^{(m)}_{MN}$ ο τανυστής ορμής-ενέργειας της (επιπλέον) ύλης.

Σε αυτό το σημείο θα περιορίσουμε την μετρική G_{MN} εισάγοντας την *προδιαγραφή στρέβλωσης*

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} e^{A(y)}\eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

όπου $x^M = (x^\mu, x^5) \equiv (x^\mu, y)$ και $\eta_{\mu\nu}$ είναι η τετραδιάστατη μετρική Minkowski, με υπογραφή $(-1, 1, 1, 1)$. Μπορούμε πάντοτε να διαλέξουμε $A(0) = 0$.

Η παρουσία της *μεμβράνης* εισάγει έναν επιπλέον όρο

$$-\int d^5x\,\sqrt{-G}\,\sigma(\phi)\,\delta(y) = -\int d^4x\,\sigma(\phi)\,\delta(y)\,, \tag{4.6}$$

όπου η *τάση της Μεμβράνης* $\sigma(\phi)$ είναι, γενικά, συνάρτηση του ϕ. Η εισαγωγή του όρου αυτού στη δράση τροποποιεί τον T_{MN} στις εξισώσεις Einstein ως

$$\delta T_{MN} = -G_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\,\sigma(\phi)\,\delta(y) = -\eta_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\,\sigma(\phi)\,\delta(y)\,.$$

Στη συζήτηση που ακολουθεί, θα αγνοήσουμε την ύπαρξη (επιπλέον) ύλης, πέρα από το Περιβάλλον βαθμωτό πεδίο. Αντικαθιστώντας την παραπάνω προδιαγραφή για τη μετρική στις εξισώσεις κίνησης και υποθέτοντας ότι το βαθμωτό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο της πέμπτης διάστασης, δηλαδή $\phi = \phi(y)$, έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{3}{2}f(\dot{A})^2 + 2\dot{A}\dot{f} = \frac{1}{4}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}V\,, \tag{4.7}$$

$$\frac{3}{2}f\ddot{A} + \frac{3}{2}f(\dot{A})^2 + \frac{3}{2}\dot{f}\dot{A} + \ddot{f} = -\frac{1}{4}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}\sigma(\phi)\,\delta(y)\,, \tag{4.8}$$

$$\ddot{\phi} + 2\dot{A}\dot{\phi} - \frac{dV}{d\phi} + \frac{df}{d\phi}\left(-4\ddot{A} - 5(\dot{A})^2\right) - \frac{d\sigma}{d\phi}\delta(y) = 0\,. \tag{4.9}$$

Στις εξισώσεις αυτές, η τελεία σηματοδοτεί παραγώγιση ως προς την πέμπτη συντεταγμένη y.

Οι *Συνθήκες Συνέχειας* στο σημείο $y = 0$, όπου είναι τοποθετημένη η μεμβράνη, γράφονται ως

$$\Delta\dot{\phi}(0) \equiv \dot{\phi}(+0) - \dot{\phi}(-0) = \frac{f\sigma' - \frac{4}{3}\sigma f'}{f + \frac{8}{3}(f')^2}\,, \tag{4.10}$$

$$\Delta\dot{A}(0) \equiv \dot{A}(+0) - \dot{A}(-0) = -\left(\frac{\frac{1}{3}\sigma + \frac{2}{3}f'\sigma'}{f + \frac{8}{3}(f')^2}\right)\,. \tag{4.11}$$

Ο τόνος σηματοδοτεί παραγώγιση ως προς το βαθμωτό πεδίο ϕ. Με σ και σ' δηλώνουμε τις τιμές της τάσεως της μεμβράνης και της πρώτης της παραγώγου ως προς το βαθμωτό πεδίο, υπολογισμένες στο $\phi(0)$.

Μεταξύ των παραπάνω τριών εξισώσεων κίνησης στον *Υπερχώρο*, μόνο δύο είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μπορούν να γραφούν ως

$$V(\phi) = -3f\dot{A}^2 - \frac{3}{2}f\ddot{A} - \frac{7}{2}\dot{A}\dot{f} - \ddot{f}\,, \tag{4.12}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{3}{2}f\ddot{A} + \frac{1}{2}\dot{A}\dot{f} - \ddot{f}\,. \tag{4.13}$$

Θα περιορίσουμε τώρα την συνάρτηση σύζευξης $f(\phi)$ σε μία μορφή δευτεροβάθμια[1] ως προς το πεδίο ϕ. Εισάγοντας μία αδιάστατη παράμετρο ξ και κανονικοποιώντας την κατάλληλα, μπορούμε να γράψουμε

$$f(\phi) = 2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2\,. \tag{4.14}$$

Η κλίμακα μάζας M σχετίζεται με την πενταδιάστατη σταθερά του Νεύτωνα $\tilde{G}$ μέσω της σχέσης $2M^3 = (16\pi\tilde{G})^{-1}$. Με την επιλογή αυτή, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\dot{f} = -\xi\phi\dot{\phi}\,, \quad \ddot{f} = -\xi\dot{\phi}^2 - \xi\phi\ddot{\phi}$$

[1] Ακόμα και για μία γενική συνάρτηση σύζευξης, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ανάπτυγμά της σε άρτιες δυνάμεις του πεδίου $f(\phi) \approx f(0) + \frac{1}{2}f'(0)\phi^2 + \cdots$ και να κρατήσουμε τους χαμηλότερους μη-τετριμμένους όρους. Ένα τέτοιο ανάπτυγμα θα ήταν έγκυρο για μικρές τιμές του πεδίου ($\phi \ll (|2f(0)/f'(0)|)^{1/2}$).

και οι εξισώσεις κίνησης στον Υπερχώρο παίρνουν τη μορφή

$$V(\phi) = -\frac{3}{2}\left(2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2\right)\left(2\dot{A}^2 + \ddot{A}\right) + \frac{7\xi}{2}\dot{A}\phi\dot{\phi} + \xi\ddot{\phi}\phi + \xi\dot{\phi}^2\,, \tag{4.15}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{3}{2}\left(2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2\right)\ddot{A} - \frac{\xi}{2}\dot{A}\phi\dot{\phi} + \xi\ddot{\phi}\phi + \xi\dot{\phi}^2\,. \tag{4.16}$$

Οι Συνθήκες Συνέχειας, αντίστοιχα, γράφονται ως

$$\Delta\dot{\phi}(0) = \frac{\left(2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2(0)\right)\sigma' + \frac{4\xi}{3}\sigma\phi(0)}{2M^3 - \frac{\xi}{2}\left(1 - \frac{16}{3}\xi\right)\phi^2(0)}\,, \tag{4.17}$$

$$\Delta\dot{A}(0) = -\left(\frac{\frac{1}{3}\sigma - \frac{2\xi}{3}\phi(0)\sigma'}{2M^3 - \frac{\xi}{2}\left(1 - \frac{16}{3}\xi\right)\phi^2(0)}\right)\,. \tag{4.18}$$

Και πάλι, σ και σ' είναι οι αντίστοιχες τιμές για $\phi = \phi(0)$. Σημειώνουμε την απλοποίηση, η οποία λαμβάνει χώρα στον παρονομαστή για την *σύμμορφη τιμή*, που σε χώρο διάστασης $D = 5$ [2] είναι $\xi_c = 3/16$.

4.3 Μετρική Randall-Sundrum

Στο εδάφιο αυτό θα κάνουμε μία συγκεκριμένη επιλογή για την συνάρτηση στρέβλωσης $A(y)$, η οποία τίθεται ίση προς τη συνήθη συνάρτηση στρέβλωσης του μοντέλου Randall-Sundrum, $A(y) = -\kappa|y|$. Επιπλέον, θα επιβάλουμε συμμετρία $\mathbf{Z_2}$ στο βαθμωτό πεδίο ($\phi(-y) = \phi(y)$, $\dot{\phi}(+0) = -\dot{\phi}(-0)$). Αντικαθιστώντας, παίρνουμε την εξίσωση για το $\phi(y)$ στον Υπερχώρο με $y > 0$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \kappa\frac{\xi}{2}\phi\dot{\phi} + \xi\ddot{\phi}\phi + \xi\dot{\phi}^2\,. \tag{4.19}$$

Οι τιμές πάνω στην μεμβράνη πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $(1-2\xi)\dot{\phi}^2(0) = \xi\phi(0)\left(\kappa\dot{\phi}(0) + 2\ddot{\phi}(0)\right)\phi(0)$. Έτσι, η συνοριακή τιμή $\phi(0) = 0$ είναι επιτρεπτή μόνο για $\xi = 1/2$. Προχωρούμε διακρίνοντας τις δύο περιπτώσεις ($\phi(0) = 0$ και $\phi(0) \neq 0$).

4.3.1 Ειδική περίπτωση με $\phi(0) = 0$

Στην περίπτωση αυτή, δυνατή μόνο για $\xi = 1/2$, έχουμε τη λύση

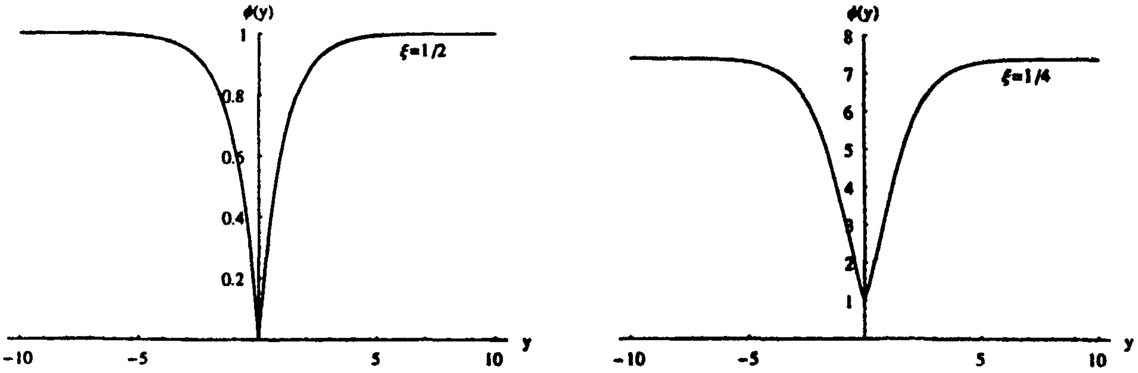
$$\phi(y) = \frac{2\dot{\phi}(+0)}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa|y|/2}\right)\,. \tag{4.20}$$

Οι Συνθήκες Συνέχειας δίνουν

$$\sigma = 12\kappa M^3\,,\quad \sigma' = 2\dot{\phi}(+0)\,. \tag{4.21}$$

[2] Η σύμμορφη τιμή σε D διαστάσεις είναι $\xi_c^{(D)} = \frac{(D-2)}{4(D-1)}$. Βλέπε [95].

Βλέπουμε ότι αυτή η λύση είναι εφικτή μόνο για τάση της μεμβράνης, η οποία εξαρτάται από το πεδίο. Διαπιστώνουμε επίσης ότι η πρώτη από τις δύο σχέσεις στην (4.21) είναι η συνήθης συνθήκη Randall-Sundrum. Αυτή η ειδική λύση έχει το σχήμα *συμμετρικής εσοχής*, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Πέρα από μία μικρή περιοχή γύρω από τη μεμβράνη, αποκτά μία σταθερή τιμή $\phi(\pm\infty) = 2\kappa^{-1}\dot{\phi}(+0)$ (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Λύσεις για τάση της μεμβράνης εξαρτώμενη από το πεδίο και διαφορετικές τιμές του ξ.

Η απαιτούμενη θετικότητα της συνάρτησης σύζευξης

$$f(\phi) = 2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2(y) = 2M^3 - 2\left(\dot{\phi}(0)/\kappa\right)^2\left(1 - e^{-\kappa|y|/2}\right)^2 > 0, \tag{4.22}$$

επιβάλλει τον ακόλουθο περιορισμό στη συνοριακή τιμή

$$(\dot{\phi}(0))^2 < \kappa^2 M^3 \Longrightarrow (\sigma')^2 < \frac{1}{3}\kappa\sigma. \tag{4.23}$$

Το βαθμωτό δυναμικό που αντιστοιχεί στη λύση αυτή προκύπτει να είναι

$$V(\phi) = -2\kappa\sigma - \frac{1}{8}\sigma'^2 + \frac{1}{4}(\kappa\phi + \sigma')^2. \tag{4.24}$$

Στην παραπάνω έκφραση, έχουμε χρησιμοποιήσει τις Συνθήκες Συνέχειας. Αν θεωρούσαμε αρχικά ένα γενικό δευτεροβάθμιο δυναμικό, της μορφής $V(\phi) = \Lambda + C_1\phi + C_2\phi^2$, η λύση (4.20) και $A(y) = -\kappa|y|$ είναι δυνατή για $\Lambda = -2\kappa\sigma + \sigma'^2/8$, $C_1 = \kappa\sigma'/2$ και $C_2 = \kappa^2/4$.

4.3.2 Γενική Περίπτωση

Στην γενική περίπτωση $\phi(0) \neq 0$, η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{1}{2}(1 - 2\xi)\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \kappa\frac{\xi}{2} - \xi\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = 0 \tag{4.25}$$

και οδηγεί στη λύση

$$\phi(y) = \phi(0)\left[1 + \alpha(4 - \xi^{-1})\left(1 - e^{-\kappa|y|/2}\right)\right]^{\frac{2\xi}{4\xi - 1}}\,, \qquad (4.26)$$

όπου

$$\alpha \equiv \frac{\dot{\phi}(+0)}{\kappa\phi(0)}\,. \qquad (4.27)$$

Οι Συνθήκες Συνέχειας παίρνουν τη μορφή

$$2\kappa\alpha\phi(0) = \frac{\left(2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2(0)\right)\sigma' + \frac{4\xi}{3}\sigma\phi(0)}{2M^3 - \frac{\xi}{2}\left(1 - \frac{16}{3}\xi\right)\phi^2(0)}\,, \quad 2\kappa = \frac{\frac{1}{3}\sigma - \frac{2\xi}{3}\phi(0)\sigma'}{2M^3 - \frac{\xi}{2}\left(1 - \frac{16}{3}\xi\right)\phi^2(0)}\,. \qquad (4.28)$$

Αυτοί οι δύο περιορισμοί μπορούν να ξαναγραφτούν ως

$$\sigma' = 2\kappa\phi(0)(\alpha - 4\xi)\,, \quad \sigma = 6\kappa\left(2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2(0)\right) + 4\xi\kappa\alpha\phi^2(0)\,. \qquad (4.29)$$

Προκειμένου να μελετήσουμε αν η θετικότητα της συνάρτησης σύζευξης και η απαίτηση για θετική τάση στη μεμβράνη ($\sigma > 0$) μπορούν ταυτόχρονα να ικανοποιηθούν, θεωρούμε τις τέσσερις δυνατές τιμές του προσήμου για την παράμετρο μη-ελάχιστης σύζευξης ξ και την παράμετρο συνοριακών τιμών α.

Ικανοποιούνται[3]

1) Αν $\xi > 0$, $\alpha > 0$, πάντοτε.

2) Αν $\xi < 0$, $\alpha < 0$, πάντοτε.

3) Αν $\xi < 0$, $\alpha > 0$, μόνο αν

$$0 < \alpha < \frac{3}{4} + \frac{3M^3}{|\xi|\phi^2(0)}\,. \qquad (4.30)$$

4) Αν $\xi > 0$, $\alpha < 0$, μόνο αν

$$\alpha > -\frac{3}{4} + \frac{3M^3}{\xi\phi^2(0)}\,. \qquad (4.31)$$

Τάση Μεμβράνης ανεξάρτητη του πεδίου ($\sigma' = 0$)

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας, μπορούμε να θεωρήσουμε ξεχωριστά την περίπτωση μίας τάσεως ανεξάρτητης του πεδίου ($\sigma' = 0$). Στην περίπτωση αυτή, οι Συνθήκες Συνέχειας απλοποιούνται στη μορφή

$$6\kappa = \frac{\sigma}{\left[2M^3 - \frac{\xi}{2}\left(1 - \frac{16}{3}\xi\right)\phi^2(0)\right]}\,, \qquad (4.32)$$

και

$$\alpha = 4\xi\,. \qquad (4.33)$$

[3] Επιλέγουμε $\phi(0) > 0$.

Διαπιστώνουμε ότι η θετικότητα της τάσεως στη μεμβράνη ικανοποιείται πάντοτε, αφού η ποσότητα $2M^3 - \xi\phi^2(0)/2 + 8\xi^2\phi^2(0)/3$ είναι θετική, εφόσον η συνάρτηση σύζευξης είναι θετική $(2M^3 - \xi\phi^2/2 > 0)$.

Η σχέση $\alpha = 4\xi$ απλοποιεί τη λύση (4.26) στη μορφή

$$\phi(y) = \phi(0)\left[1 + 4(4\xi - 1)\left(1 - e^{-\kappa|y|/2}\right)\right]^{\frac{2\xi}{4\xi-1}} . \tag{4.34}$$

Για $\xi > \xi_c = 3/16$, η ποσότητα στην παρένθεση $16(\xi - \xi_c) - 16(\xi - \xi_c - 1/4)e^{-\kappa|y|/2}$ είναι θετική.

Σημειώνουμε ότι, για την ειδική τιμή $\xi = 1/2$, αν $\phi(y)$ είναι μία λύση, το ίδιο ισχύει και για την $\phi(y) + const.$. Επίσης, για την ειδική περίπτωση $\xi = 1/4$, η λύση παίρνει τη μορφή

$$\phi(y) = \phi(0)\, e^{2(1-e^{-\kappa|y|/2})} . \tag{4.35}$$

Η λύση αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1.

Η απαίτηση για την θετικότητα της συνάρτησης σύζευξης, στο επιτρεπτό πεδίο τιμών $\xi_c < \xi$, αντιστοιχεί στην ανισότητα $2M^3 \geq \frac{\xi}{2}\phi^2(0)\left[1 + 4(4\xi - 1)\right]^{\frac{4\xi}{4\xi-1}}$. Για την ειδική τιμή $\xi = 1/4$, αυτή αντιστοιχεί σε $2M^3 \geq \frac{e^4}{8}\phi^2(0)$.

Για τη σύμμορφη τιμή $\xi_c = 3/16$, η λύση ανάγεται σε ένα αύξον εκθετικό,

$$\phi_c(y) = \phi(0)e^{\frac{3}{4}\kappa|y|} . \tag{4.36}$$

Για τιμές της παραμέτρου σύζευξης στο διάστημα $0 < \xi < \xi_c$, η ποσότητα στην παρένθεση μηδενίζεται στην τιμή $y_0 = \pm\frac{2}{\kappa}\ln\left[1 + (\xi_c - \xi)^{-1}\right]$, ενώ ο εκθέτης είναι αρνητικός, δηλαδή $\frac{2\xi}{4\xi-1} = -\frac{2\xi}{4(\xi_c-\xi)+\frac{1}{4}} < 0$. Έτσι, σε αυτό το διάστημα τιμών, η λύση παρουσιάζει ανωμαλία.

Για ξ αρνητικό, η λύση

$$\phi(y) = \phi(0)\left[4(1 + 4|\xi|)e^{-\kappa|y|/2} - (3 + 16|\xi|)\right]^{\frac{2|\xi|}{4|\xi|+1}} , \tag{4.37}$$

χαρακτηρίζεται από έναν εκθέτη μεταξύ 0 και 1, ενώ η έκφραση μέσα στην παρένθεση μηδενίζεται για $y_0 = \pm\frac{2}{\kappa}\ln\left[1 + (3 + 16|\xi|)^{-1}\right]$. Τονίζουμε ότι $\dot{\phi}(y_0) = -\infty$. Όπως θα δούμε σύντομα, αυτές οι "λύσεις" δεν είναι αποδεκτές, καθώς το βαθμωτό δυναμικό, το οποίο διαθέτει αρνητικές δυνάμεις του πεδίου, παρουσιάζει ανωμαλία.

Το βαθμωτό δυναμικό που αντιστοιχεί στις λύσεις που μόλις παρουσιάσαμε μπορεί να εξαχθεί άμεσα από την εξίσωση (4.15). Προκειμένου να κάνουμε κάτι τέτοιο, είναι χρήσιμο να εξαγάγουμε πρώτα τις εκφράσεις για τις παραγώγους της λύσης. Αυτές έχουν τη μορφή

$$\dot{\phi}(y) = \phi(y)\left(\frac{\xi\kappa}{4\xi - 1}\right)\left[(1 + 4(4\xi - 1))\left(\frac{\phi(y)}{\phi(0)}\right)^{\frac{1-4\xi}{2\xi}} - 1\right] \tag{4.38}$$

και

$$\ddot{\phi}(y) = -\dot{\phi}(y)\left(\frac{\xi\kappa}{4\xi - 1}\right)\left[\frac{(2\xi - 1)}{2\xi}(1 + 4(4\xi - 1))\left(\frac{\phi(y)}{\phi(0)}\right)^{\frac{1-4\xi}{2\xi}} + 1\right] . \tag{4.39}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (4.15), προκύπτει ότι

$$V(\phi) = -6\kappa^2 M^3 + \phi^2 \left(C_1 + C_2 \left(\frac{\phi}{\phi(0)} \right)^{\frac{1-4\xi}{2\xi}} + C_3 \left(\frac{\phi}{\phi(0)} \right)^{\frac{1-4\xi}{\xi}} \right), \tag{4.40}$$

όπου

$$C_1 = \frac{\xi\kappa^2}{2} \left(3 + 7\frac{\xi}{4\xi - 1} + 4 \left(\frac{\xi}{4\xi - 1} \right)^2 \right), \tag{4.41}$$

$$C_2 = -4\xi\kappa^2 \left(1 + 4(4\xi - 1)\right) \left(\frac{\xi}{4\xi - 1} \right), \quad C_3 = \frac{C_2^2}{32\xi^2\kappa^2}. \tag{4.42}$$

Όλες οι δυνάμεις είναι θετικές στο διάστημα $0 < \xi < \frac{1}{2}$. Για την ειδική τιμή $\xi = 1/4$, το βαθμωτό δυναμικό περιλαμβάνει λογαριθμικούς όρους. Η έκφρασή του είναι

$$V(\phi) = -6\kappa^2 M^3 + \xi\kappa^2 \phi^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\ln(\phi/\phi(0)) + \frac{1}{8}\left(\ln(\phi/\phi(0))\right)^2 \right]. \tag{4.43}$$

Για την ειδική τιμή $\xi = 1/2$, το βαθμωτό δυναμικό έχει την δευτεροβάθμια μορφή

$$V(\phi) = -6\kappa^2 M^3 + \frac{5}{8}\kappa^2 \left(3\phi^2 - 8\phi\phi(0) + 25\phi^2(0)\right). \tag{4.44}$$

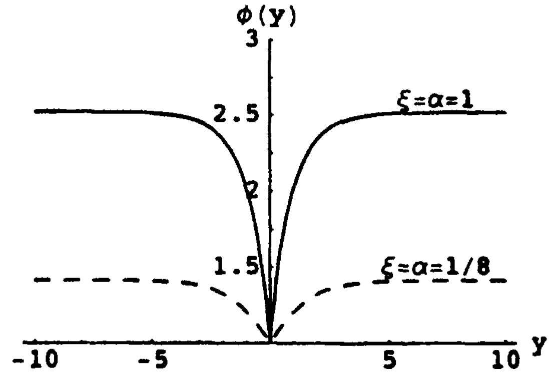
Για την οριακή σύμμορφη τιμή $\xi_c = 3/16$, όλοι οι παραπάνω συντελεστές μηδενίζονται και παίρνουμε έτσι ένα σταθερό δυναμικό $V = -6\kappa^2 M^3$. Για αρνητικές τιμές της παραμέτρου σύζευξης, οι εμφανιζόμενες δυνάμεις του πεδίου $\phi^{\frac{1}{2\xi}}$ και $\phi^{\frac{1}{\xi}-2}$ είναι αρνητικές, και αφού η λύση $\phi(y)$ μηδενίζεται σε πεπερασμένη απόσταση, το δυναμικό παρουσιάζει ανωμαλία.

Γενική περίπτωση με τάση Μεμβράνης εξαρτώμενη από το πεδίο ($\sigma' \neq 0$)

Προκειμένου να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης για το βαθμωτό πεδίο (4.26), εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\alpha > 0$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε μία λύση, η οποία αυξάνει κοντά στην αρχή των αξόνων, καθώς $\kappa\alpha = \phi(+0)/\phi(0) > 0$. Η ποσότητα στην παρένθεση είναι θετική, δεδομένου ότι $\alpha(4 - \xi^{-1}) > -(1 - e^{-\kappa|y|/2})^{-1}$. Το κάτω όριο του δεξιού μέλους της ανισότητας αυτής είναι -1, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $\xi > \frac{1}{4+\alpha^{-1}}$. Για παράδειγμα, θεωρούμε τις περιπτώσεις $\xi = \alpha = 1$ και $\xi = \alpha = 1/8$. Η πρώτη αντιστοιχεί σε έναν θετικό εκθέτη $2/3$, ενώ η δεύτερη στον εκθέτη $-1/2$. Και οι δύο λύσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 4.2.

Για τιμές του ξ κάτω από αυτό το όριο, υπάρχει ένα σημείο, για το οποίο η έκφραση μέσα στην παρένθεση μηδενίζεται, και εφόσον ο εκθέτης είναι αρνητικός, υπάρχει στο σημείο αυτό ανωμαλία. Αυτό συμβαίνει στο σημείο $y_0 = -\frac{2}{\kappa}\ln\left[1 - \xi/\alpha(1 - 4\xi)\right]$. Για την ειδική τιμή $\xi = \frac{\alpha}{4\alpha+1}$, το ανώμαλο σημείο απωθείται στο άπειρο, και παίρνουμε έτσι μία καθαρά εκθετικής μορφής λύση,

$$\phi(y) = \phi(0)\, e^{\kappa\alpha|y|}. \tag{4.45}$$



Σχήμα 4.2: Προφίλ των λύσεων για τάση μεμβράνης εξαρτώμενη από το πεδίο.

Προτού προχωρήσουμε στη θεώρηση αρνητικών τιμών, θα αναφέρουμε πάλι την ειδική τιμή $\xi = 1/4$, η οποία αντιστοιχεί στη λύση

$$\phi(y) = \phi(0)\, e^{2\alpha(1-e^{-\kappa|y|/2})} \,. \tag{4.46}$$

Όπως έχουμε σχολιάσει νωρίτερα, για $\xi > 0$ και $\alpha > 0$, η θετικότητα της τάσεως της μεμβράνης ($\sigma > 0$) είναι πάντοτε αληθής. Ωστόσο, η απαίτηση για θετική συνάρτηση σύζευξης εισάγει έναν επιπλέον περιορισμό στις παραμέτρους. Είναι αρκετό να έχουμε $2M^3 > \frac{\xi}{2}\phi^2(0)\left[1+\alpha(4-\xi^{-1})\right]^{\frac{4\xi}{4\xi-1}}$. Για την ειδική τιμή $\xi = 1/4$, ο περιορισμός αυτός έχει τη μορφή $2M^3 > \frac{e^{4\alpha}}{8}\phi^2(0)$.

Για αρνητικές τιμές $\xi < 0$ (και πάλι $\alpha > 0$), η λύση παίρνει τη μορφή

$$\phi(y) = \phi(0)\left[1+\alpha(4+|\xi|^{-1})(1-e^{-\kappa|y|/2})\right]^{\frac{2|\xi|}{4|\xi|+1}} \,. \tag{4.47}$$

Τονίζουμε ότι, ενώ το βαθμωτό δυναμικό έχει αρνητικές δυνάμεις ($\phi^{-1/2|\xi|}$ και $\phi^{-2-1/|\xi|}$), δεν υπάρχει ανώμαλο σημείο, καθώς το βαθμωτό πεδίο δεν μηδενίζεται πουθενά. Σημειώνουμε επίσης ότι, για $\xi < 0$ και $\alpha > 0$, η θετικότητα της τάσεως της μεμβράνης εισάγει τον περιορισμό $\alpha < \frac{3}{4} + \frac{3M^3}{|\xi|\phi^2(0)}$.

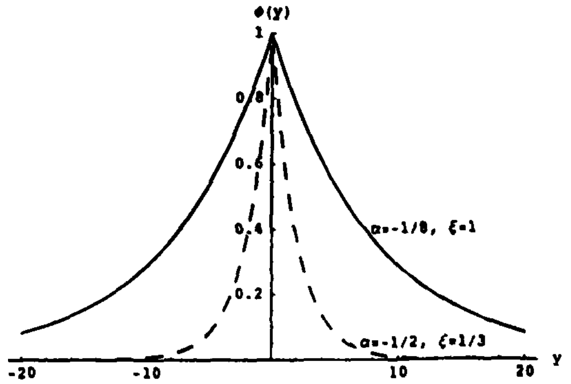
Προχωρούμε τώρα στην εξέταση της περίπτωσης $\alpha < 0$. Γράφοντας τη λύση ως

$$\phi(y) = \phi(0)\left[1-|\alpha|(4-\xi^{-1})(1-e^{-\kappa|y|/2})\right]^{\frac{2\xi}{4\xi-1}} \,, \tag{4.48}$$

βλέπουμε ότι, για $\xi > 1/4$, ο εκθέτης είναι θετικός. Για $|\alpha| < \frac{1}{4}$, η ποσότητα στην παρένθεση παραμένει θετική. Ωστόσο, για $|\alpha| > \frac{1}{4}$, είναι απαραίτητο να περιορίσουμε το πεδίο τιμών του ξ σε $\xi < \frac{1}{4-\frac{1}{|\alpha|}}$. Για την κρίσιμη τιμή $\overline{\xi} = \frac{|\alpha|}{4|\alpha|-1}$, η λύση ανάγεται σε ένα μειούμενο εκθετικό,

$$\overline{\phi}(y) = \phi(0)\, e^{-\kappa|\alpha||y|} \,. \tag{4.49}$$

Ως παραδείγματα της λύσης στο παραπάνω διάστημα τιμών, θεωρούμε τις τιμές $\alpha = -1/8$, $\xi = 1$ και $\alpha = -1/2$, $\xi = 1/3$, με τις αντίστοιχες λύσεις στο Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3: Λύσεις για τάση μεμβράνης εξαρτώμενη από το πεδίο και αρνητικό α.

Για $|\alpha| > 1/4$ και ξ εκτός του παραπάνω διαστήματος, δηλαδή $\xi > \frac{1}{4-\frac{1}{|\alpha|}}$, έχουμε λύσεις οι οποίες μηδενίζονται σε πεπερασμένη απόσταση από τη μεμβράνη, πιο συγκεκριμένα στο σημείο $|y_0| = -\frac{2}{\kappa}\ln\left[1-\xi/|\alpha|(4\xi-1)\right]$. Αυτό και πάλι αντιστοιχεί στην ύπαρξη ανώμαλου βαθμωτού δυναμικού εξαιτίας της αρνητικής τιμής $\phi^{1/\xi-2}$ που εμφανίζεται σε αυτό.

Για τιμές του ξ μικρότερες από 1/4 αλλά θετικές, η λύση έχει τη μορφή

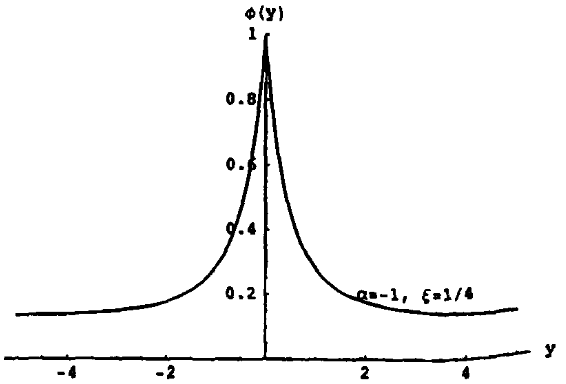
$$\phi(y) = \phi(0)\left[1+|\alpha|(\xi^{-1}-4)(1-e^{-\kappa|y|/2})\right]^{-\frac{2\xi}{1-4\xi}} \tag{4.50}$$

και δίνει ένα ομαλό, φθίνον προφίλ, όπως φαίνεται παραπάνω.

Προτού θεωρήσουμε αρνητικές τιμές του ξ, εξετάζουμε πρώτα την ειδική τιμή $\xi = 1/4$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε

$$\phi(y) = \phi(0)\, e^{-2|\alpha|(1-e^{-\kappa|y|/2})}, \tag{4.51}$$

η οποία απεικονίζεται για $\alpha = -1$ στο Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.4: Προφίλ της λύσης για την ειδική τιμή $\xi = \frac{1}{4}$.

Η θετικότητα της τάσεως της μεμβράνης, για $\xi > 0$ και $\alpha < 0$, όπως βρέθηκε πιο πριν, εισάγει τον περιορισμό

$$-\alpha > -\frac{3}{4} + \frac{3M^3}{\xi\phi^2(0)}\,. \tag{4.52}$$

Από την άλλη, η θετικότητα της συνάρτησης σύζευξης, αφού το $\phi(y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, καλύπτεται απαιτώντας $2M^3 > \frac{\xi}{2}\phi^2(0)$.

Για αρνητικές τιμές $\xi < 0$, η λύση μπορεί να γραφεί ως

$$\phi(y) = \phi(0) = \left[1 - |\alpha|(|\xi|^{-1} + 4)(1 - e^{-\kappa|y|/2})\right]^{\frac{2|\xi|}{4|\xi|+1}} . \qquad (4.53)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, για $|\alpha| > 1/4$, το βαθμωτό πεδίο μηδενίζεται σε πεπερασμένη απόσταση από την μεμβράνη, συγκεχριμένα στο

$$|y_0| = -\frac{2}{\kappa}\ln\left[1 - |\xi|/|\alpha|(4|\xi| + 1)\right] .$$

Και πάλι, αυτό αντιστοιχεί στην ύπαρξη ανώμαλου σημείου στο βαθμωτό δυναμικό λόγω των αρνητικών δυνάμεων $\phi^{-1/|\xi|}$ και $\phi^{-(1/|\xi|+2)}$.

Το βαθμωτό δυναμικό έχει αχριβώς την ίδια μορφή όπως και στην περίπτωση για $\sigma' = 0$ ($\alpha = 4\xi$), η μόνη διαφορά είναι μία μικρή αλλαγή στους συντελεστές C_2 και C_3, οι οποίοι είναι στην περίπτωση αυτή

$$C_2 = -4\xi\kappa^2\left(1 + \frac{\alpha}{\xi}(4\xi - 1)\right)\left(\frac{\xi}{4\xi - 1}\right), \quad C_3 = \frac{C_2^2}{32\xi^2\kappa^2} . \qquad (4.54)$$

4.4 Πέρα Από τη Γεωμετρία Randall-Sundrum

Ας θεωρήσουμε πάλι το αρχικό σύστημα των δύο ανεξάρτητων εξισώσεων (4.12), (4.13) για την ειδική επιλογή της συνάρτησης σύζευξης $f(\phi) = 2M^3 - \xi\phi^2/2$. Αν δεν επιβάλουμε κάποιον περιορισμό στο βαθμωτό δυναμικό $V(\phi)$, μπορούμε να θεωρήσουμε την πρώτη εξίσωση ως μία εξίσωση η οποία *ορίζει* το βαθμωτό δυναμικό με βάση τις συναρτήσεις $\phi(y)$ και $A(y)$. Επικεντρωνόμενοι στη δεύτερη εξίσωση, μπορούμε να τη θεωρήσουμε σαν μία εξίσωση για τον καθορισμό του παράγοντα στρέβλωσης, η οποία δίνει ένα διαφορετικό $A(y)$ για κάθε διαφορετική *επιλογή* της κατανομής του $\phi(y)$. Εφορμούμενοι από τη μορφή των λύσεων που πήραμε στην περίπτωση της γεωμετρίας Randall-Sundrum, μπορούμε να ξεκινήσουμε θεωρώντας μία μορφή του βαθμωτού πεδίου, η οποία έχει το σχήμα *εσοχής* με συμμετρία Z_2[4]

$$\phi(y) = \phi_0 \tanh(a|y|) , \qquad (4.55)$$

όπου $\phi_0 \equiv a^{-1}\dot\phi(+0)$. Για τη θετικότητα της συνάρτησης σύζευξης, θα ήταν αρκετό να απαιτήσουμε $\dot\phi^2(0) < 4M^3a^2/\xi$.

Αντικαθιστώντας την (4.55) στις Συνθήκες Συνέχειας, δεδομένου ότι $\phi(0) = 0$, παίρνουμε τις σχέσεις

$$\dot A(+0) = -\frac{\sigma}{12M^3}, \quad \dot\phi(+0) = \frac{\sigma'}{2} . \qquad (4.56)$$

[4] $\dot A(+0) = -\dot A(-0)$, $\dot\phi(+0) = -\dot\phi(-0)$.

Σημειώνουμε ότι η θετικότητα της τάσεως της μεμβράνης απαιτεί τη συνθήκη $\dot{A}(+0) < 0$.

Στην περιοχή $y > 0$ στον Υπερχώρο, έχουμε $\dot{\phi} = a\phi_0(1-\phi^2/\phi_0^2)$, $\ddot{\phi} = -2a^2\phi(1-\phi^2/\phi_0^2)$. Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην εξίσωση κίνησης, μπορούμε να την γράψουμε στη μορφή

$$\frac{3}{2}\phi_0\left(2M^3 - \frac{\xi}{2}\phi^2\right)X'(\phi) + \frac{\xi}{2}\phi_0\phi X(\phi) + 2a\xi\phi^2 + a\phi_0^2\left(\frac{1}{2} - \xi\right)\left(1 - \frac{\phi^2}{\phi_0^2}\right) = 0\,, \quad (4.57)$$

όπου $X \equiv \dot{A}(y)$ και $\ddot{A} = \dot{X} = \dot{\phi}X'(\phi)$. Η διαφορική αυτή εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί άμεσα, δίνοντας

$$\begin{aligned} X(\phi) &= \phi\left\{C_1\left(1 - \frac{\xi\phi^2}{4M^3}\right)^{1/3} {}_2F_1(1/2, 1/3, 3/2, \xi\phi^2/4M^3) + C_2\right\} \\ &+ C_0\left(1 - \frac{\xi\phi^2}{4M^3}\right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

όπου οι συντελεστές C_1 και C_2 δίνονται από τις εκφράσεις

$$C_1 = -\frac{a}{\phi_0}\left[\xi^{-1} - 6 + \frac{\phi_0^2}{12M^3}(2\xi - 1)\right],$$

$$C_2 = \frac{a}{\phi_0}\left[\xi^{-1} - 6 + \frac{\phi_0^2}{4M^3}(2\xi - 1)\right] \quad (4.59)$$

και η σταθερά ολοκλήρωσης $C_0 = \dot{A}(+0) = -\sigma/12M^3$ πρέπει να είναι αρνητική, προκειμένου να έχουμε μία θετική τάση μεμβράνης.

Ο παράγοντας στρέβλωσης προκύπτει από τη σχέση $e^{A(y)} = \exp\left[\int dy\, X(\phi)\right]$. Κοντά στη μεμβράνη, δηλαδή για $y \to 0$ ή $\phi \to 0$, έχουμε

$$e^{A(y)} \approx \exp\left[-\frac{\sigma}{12M^3}y + O(y^2)\right], \quad (4.60)$$

η οποία αντιπροσωπεύει μία συνήθη συμπεριφορά του τύπου Randall-Sundrum.

Στην ασυμπτωτική περιοχή ($y \to \infty \implies \phi \sim \phi_0 = a^{-1}\dot{\phi}(0)$), έχουμε

$$e^{A(y)} = \exp\left[(a\phi_0)^{-1}\int \frac{d\phi}{(1 - \phi^2/\phi_0^2)}X(\phi)\right] \approx$$

$$\exp\left[\frac{1}{2a\phi_0}\int \frac{d\phi}{(1 - \phi/\phi_0)}\left(X(\phi_0) + (\phi - \phi_0)X'(\phi_0) + \cdots\right)\right] \approx e^{-\overline{\kappa}y}\, g(y)\,, \quad (4.61)$$

με $\overline{\kappa} \equiv -X(\phi_0)$ και

$$g(y) \equiv 2^{-\frac{1}{2a}X(\phi_0)}\exp\left[-\frac{\phi_0}{2a}X'(\phi_0) + \frac{1}{2a}\left(X(\phi_0) + 2\phi_0X'(\phi_0)\right)e^{-2ay} + \cdots\right]. \quad (4.62)$$

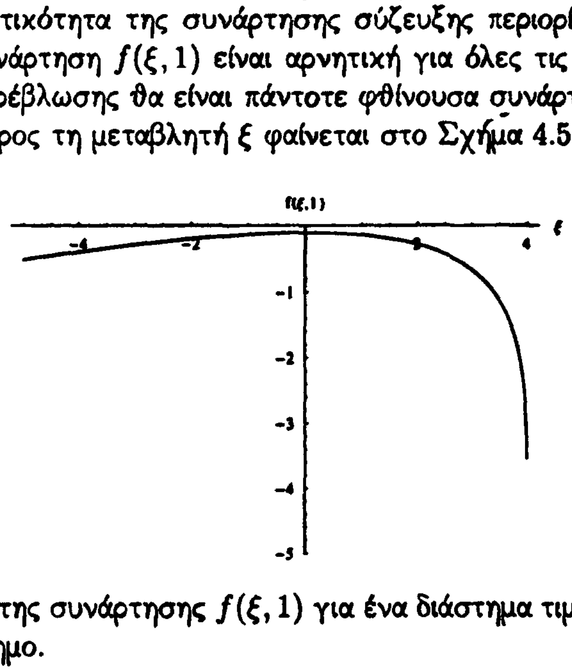
Έτσι, στην ασυμπτωτική περιοχή, έχουμε μία συμπεριφορά, η οποία είναι εχθετικά κοντά στη συμπεριφορά Randall-Sundrum, δεδομένου ότι η παράμετρος $\overline{\kappa}$ είναι θετική. Η παράμετρος αυτή είναι

$$\overline{\kappa} = \frac{\sigma}{2M^3}\left(1 - \frac{\xi\phi_0^2}{4M^3}\right)^{1/3} - a\, f(\xi,\, \phi_0^2/M^3)\,, \tag{4.63}$$

όπου έχουμε εισαγάγει τη συνάρτηση $f(\xi,\, x)$, η οποία ορίζεται ως

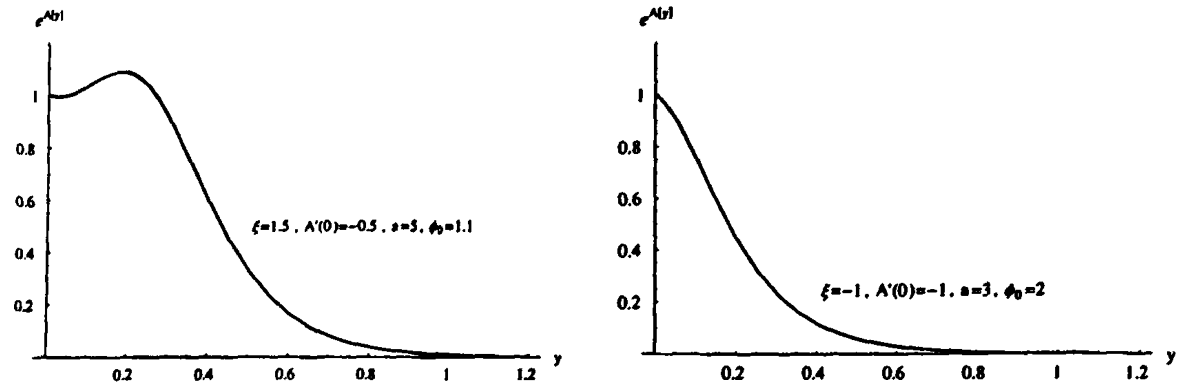
$$f(\xi,\, x) \equiv \left(6 - \xi^{-1} - \frac{x^2}{12}(2\xi - 1)\right)\left(1 - x^2/4\right)^{1/3} {}_2F_1(1/2,\, 1/3,\, 3/2,\, \xi x^2/4)$$
$$+\ \xi^{-1} - 6 + \frac{x^2}{4}(2\xi - 1)\ . \tag{4.64}$$

Η συνάρτηση σύζευξης είναι θετική αν $\xi\phi_0^2 < 4M^3$. Η θετικότητα της $\overline{\kappa}$ μπορεί πάντοτε να διασφαλιστεί για αρκετά μεγάλη τιμή της τάσεως της μεμβράνης σ. Ωστόσο, μπορούμε να είμαστε πιο συνεπείς, χάνοντας μία επιλογή για την $\phi(+0)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε $\phi_0^2 = M^3$. Τότε, η θετικότητα της συνάρτησης σύζευξης περιορίζει τις τιμές του ξ στο διάστημα $\xi < 4$. Η συνάρτηση $f(\xi, 1)$ είναι αρνητική για όλες τις επιτρεπτές τιμές του ξ. Έτσι, ο παράγοντας στρέβλωσης θα είναι πάντοτε φθίνουσα συνάρτηση. Το διάγραμμα της συνάρτησης αυτής ως προς τη μεταβλητή ξ φαίνεται στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα της συνάρτησης $f(\xi, 1)$ για ένα διάστημα τιμών του ξ. Η συνάρτηση διατηρεί αρνητικό πρόσημο.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε αριθμητικές λύσεις για τη συνάρτηση $A(y)$ και να μελετήσουμε το προφίλ του παράγοντα στρέβλωσης $e^{A(y)}$ για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου. Στην περίπτωση αυτή, η τάση της μεμβράνης καθορίζει την τιμή της παραγώγου της $A(y)$ στο $y = 0$ και έτσι προσδιορίζει την τιμή της μίας από τις δύο αρχικές συνθήκες, που χρειάζονται για την αριθμητική επίλυση. Η παράγωγος της τάσεως της μεμβράνης ως προς το βαθμωτό πεδίο, σ', είναι ανάλογη του $a\phi_0$. Έτσι, αλλάζοντάς την, έχουμε μία νέα τιμή για την $\dot{\phi}(0)$. Τονίζουμε ότι, αν και έχουμε περιορίσει την μελέτη μας σε Z_2-συμμετρικές λύσεις, ασυμμετρικές λύσεις είναι επίσης δυνατές. Το προφίλ αντιπροσωπευτικών λύσεων απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6: Ο παράγοντας στρέβλωσης για διαφορετικές επιλογές των $A'(0)$, a, ξ και ϕ_0 σε μονάδες $2M^3$.

Διαπιστώνουμε ότι, γενικά, ο παράγοντας στρέβλωσης έχει ανάλογη μορφή με το φθίνον εκθετικό του μοντέλου Randall-Sundrum . Ωστόσο, για ένα διάστημα τιμών στον παραμετρικό χώρο, παίρνουμε λύσεις οι οποίες αποκλίνουν ελαφρά από τη μορφή αυτή. Καθώς η τάση της μεμβράνης γίνεται μικρότερη και το ξ παίρνει μεγαλύτερες θετικές τιμές, ο παράγοντας στρέβλωσης παρουσιάζει μία κορυφή κοντά στην μεμβράνη, προτού αρχίσει να μειώνεται και πάλι. Η κορυφή αυτή ενισχύεται καθώς πλησιάζουμε την τιμή του ξ για την οποία η συνάρτηση σύζευξης $f(\phi)$ τείνει στο μηδέν.

4.5 Ομαλοί Χώροι

Όπως είδαμε στο τελευταίο παράδειγμα, η παρουσία της μεμβράνης δεν ήταν απαραίτητη, προκειμένου να έχουμε έναν χωρικά εντοπισμένο παράγοντα στρέβλωσης. Στο εδάφιο αυτό θα θεωρήσουμε λύσεις $A(y)$ όταν η *"μεμβράνη"* είναι η ίδια η κατανομή του βαθμωτού περιβάλλοντος πεδίου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ήδη γνωστό στην περίπτωση που $\xi = 0$. Εισάγοντας ένα βαθμωτό πεδίο με το τυπικό προφίλ κάμψης ($\phi = \phi_0 \tanh(ay)$) στην εξίσωση κίνησης με $\xi = 0$, παίρνουμε στην $\mathbf{Z_2}$-συμμετρική περίπτωση ($\dot{A}(0) = 0$)

$$e^{A(y)} = (\cosh(ay))^{-\gamma} \, e^{-\frac{\gamma}{4}\tanh^2(ay)} , \tag{4.65}$$

όπου $\gamma = \phi_0^2/9M^3$.

Ομαλές λύσεις των εξισώσεων κίνησης είναι επίσης δυνατές και για $\xi \neq 0$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η επιλογή της μετρικής

$$e^{A(y)} = (\cosh(ay))^{-\gamma} , \tag{4.66}$$

αντιστοιχεί στην ίδια λύση για το βαθμωτό πεδίο, $\phi(y) = \phi_0 \tanh(ay)$ με

$$\gamma = 2\left(\xi^{-1} - 6\right) , \quad \phi_0 = a^{-1}\dot{\phi}(0) = (2M^3)^{1/2}\sqrt{\frac{6(1-6\xi)}{\xi(1-2\xi)}} . \tag{4.67}$$

Η λύση αυτή υπάρχει για $0 < \xi < 1/6$ και μόνο για την παραπάνω ειδικά επιλεγμένη τιμή του ϕ_0. Η βαθμωτή καμπυλότητα του χώρου αυτού είναι $R = 4a^2\gamma\left(1-(1+5\gamma/4)\frac{\phi^2}{\phi_0^2}\right)$. Σημειώνουμε ότι για τον χώρο AdS η ασυμπτωτική τιμή του R είναι $R(\infty) = -20a^2(\xi^{-1}-6)^2$.Το βαθμωτό δυναμικό το οποίο αντιστοιχεί στη λύση αυτή είναι μία τεταρτοβάθμια συνάρτηση του πεδίου, με ειδικά ρυθμισμένους συντελεστές εξαρτώμενους από το ξ. Η λύση αυτή είναι μία ειδική περίπτωση της (4.58). Η παραπάνω επιλογή για το ϕ_0, μαζί με την επιλογή $C_0 = 0$, αντιστοιχεί στους συντελεστές

$$C_1 = 0\,,\; C_2 = -\frac{2a}{\sqrt{12M^3}}\sqrt{\xi^{-1}(1-2\xi)(1-6\xi)}\,. \tag{4.68}$$

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η ίδια μετρική αντιστοιχεί επίσης στη λύση

$$\phi(y) = \phi(0)\,(\cosh(ay))^{-1}\,, \tag{4.69}$$

με $\phi^2(0) = 12M^3(\xi^{-1}-6)/(3-16\xi)$, ορισμένη στο ίδιο διάστημα τιμών του ξ όπως πριν.

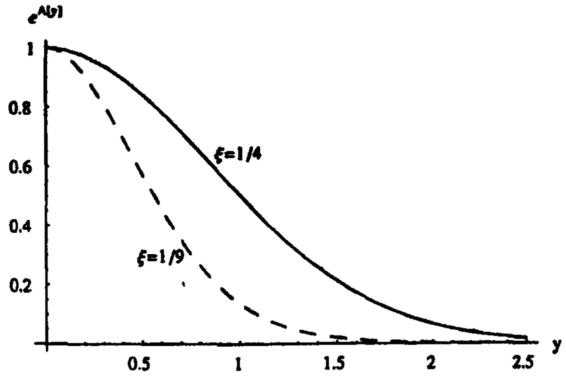
Μία άλλη ενδιαφέρουσα λύση για τη μετρική μπορεί να οριστεί από την επιλογή $\phi_0 = 2\sqrt{\xi^{-1}M^3}$, για την οποία η (4.58) δίνει

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \frac{2}{3}a\tanh(ay)(8-\xi^{-1})\cosh^{-2/3}(ay)\,{}_2F_1(1/2, 1/3, 3/2, \tanh^2(ay)) \\ &- 4a\tanh(ay)\,.\end{aligned} \tag{4.70}$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή, παίρνουμε

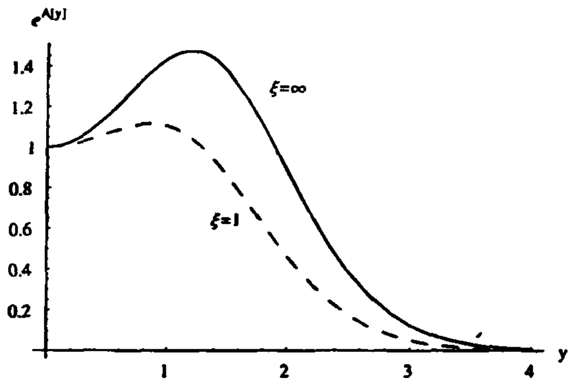
$$\begin{aligned}A(y) &= \frac{1}{3}(8-\xi^{-1})\tanh^2(ay)\,F_{PFQ}\left(\{1,1,7/6\},\{3/2,2\},\tanh^2(ay)\right) \\ &- 4\ln(\cosh(ay)),\end{aligned} \tag{4.71}$$

Ο παράγοντας στρέβλωσης e^A απεικονίζεται στο Σχήμα 4.7, για $\xi = 1/4$ και για $\xi = 1/9$.



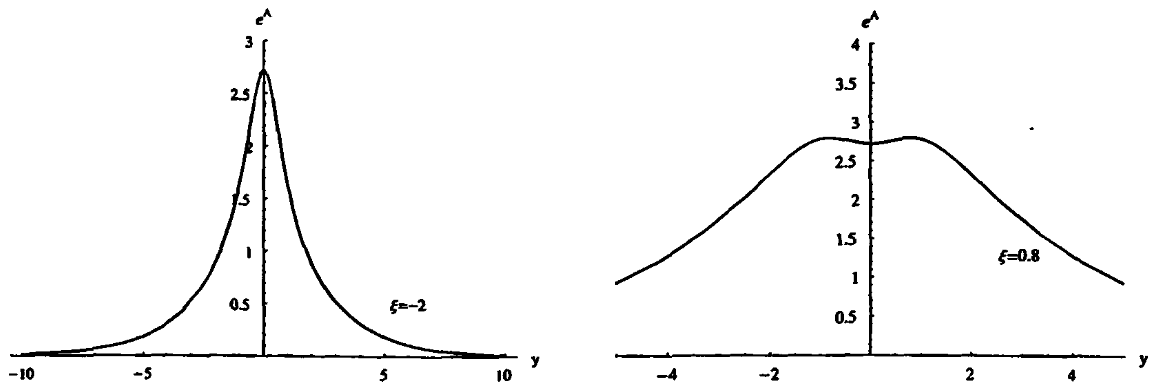
Σχήμα 4.7: Παράγοντες στρέβλωσης για $\phi(y) = \phi(0)\,(\cosh(ay))^{-1}$, $\xi < 1/2$.

Για μεγαλύτερα ξ, η συμπεριφορά δεν αλλάζει δραστικά. Παρατηρούμε όμως ότι για τιμές $\xi > 1/2$, ο παράγοντας στρέβλωσης αναπτύσσει ένα μέγιστο μακριά από την αρχή. Στο Σχήμα 4.8 σχεδιάζουμε τις περιπτώσεις $\xi = 1$ και $\xi = \infty$.



Σχήμα 4.8: Παράγοντες στρέβλωσης $\phi(y) = \phi(0)\,(\cosh(ay))^{-1}$; $\xi > 1/2$.

Όπως έχουμε ήδη δει, η εξίσωση κίνησης για ένα βαθμωτό πεδίο με προφίλ σχήματος κάμψης δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά για γενικές συνοριακές συνθήκες. Είναι ωστόσο δυνατό να εξαγάγουμε αριθμητικές λύσεις. Αναμένουμε να βρούμε ένα σύνολο λύσεων με συμμετρία $\mathbf{Z_2}$ για το $e^{A(y)}$, το οποίο ανάγεται στη γνωστή λύση για $\xi = 0$, που αναφέρεται στις [88, 89]. Ως παράδειγμα, θεωρούμε αριθμητικές λύσεις για την εξίσωση του παράγοντα στρέβλωσης, επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες $A(0) = 1$, $A'(0) = 0$ και θέτοντας διαφορετικές τιμές για το ϕ_0. Οι παράγοντες στρέβλωσης που προκύπτουν για $\xi = -2$ και $\xi = 0.8$ απεικονίζονται στο Σχήμα 4.9. Έχουμε χρησιμοποιήσει $\phi_0 = a = 1$ σε μονάδες $2M^3$. Γι' αυτή την επιλογή συνοριακών συνθηκών και μονάδων, η τιμή $\xi = 2$ αντιστοιχεί στην οριακή τιμή για την οποία η συνάρτηση $f(\phi)$ μηδενίζεται στην αρχή των αξόνων, οπότε μεγαλύτερες τιμές του ξ είναι απαγορευμένες. Παρατηρούμε την ύπαρξη κορυφής πέρα από την αρχή των αξόνων στο δεύτερο γράφημα.



Σχήμα 4.9: Ομαλές αριθμητικές λύσεις.

4.6 Χωρικός Εντοπισμός των Βαρυτονίων

Είναι ενδιαφέρον να ελέγξουμε εάν η βαρύτητα υφίσταται χωρικό εντοπισμό - όσον αφορά την πέμπτη διάσταση - στις γεωμετρίες τις οποίες εξετάσαμε και ιδιαίτερα σε αυτές που αποκλίνουν από την αρχική γεωμετρία Randall-Sundrum. Θα δώσουμε αρχικά ένα σύντομο γενικό επιχείρημα προτού μελετήσουμε ορισμένα συγκεκριμένα παραδείγματα. Θεωρούμε μία διαταραχή της μορφής

$$\delta G_{MN} = \delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}h_{\mu\nu}(x,y)\,, \qquad \delta\phi = 0\,, \tag{4.72}$$

για τη βαθμίδα $h_{5M} = 0$. Επιβάλλοντας εγκάρσια βαθμίδα ($h^{\mu}_{\mu} = \partial_{\mu}h^{\mu\nu} = 0$), προκύπτει ότι, σε πρώτη τάξη,

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} - e^{-A(y)}\partial^2 + \ddot{A}(y) + \dot{A}^2(y)\right)h_{\mu\nu} = 0\,, \tag{4.73}$$

όπου $\partial^2 = \eta_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu}$. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τη συνάρτηση σύζευξης $f(\phi)$. Αν εισάγουμε μία δοκιμαστική λύση με τη μορφή ενός γινομένου $h_{\mu\nu} \propto e^{ip\cdot x}\psi(y)$, παίρνουμε μία εξίσωση τύπου Schrödinger

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \ddot{A}(y) + \dot{A}^2(y)\right)\psi(y) = m^2e^{-A(y)}\psi(y)\,, \tag{4.74}$$

όπου έχουμε εισάγει τη μάζα $m^2 = -p^2$. Προκειμένου να μελετήσουμε το φάσμα αυτής της εξίσωσης, είναι πιο βολικό να την μετασχηματίσουμε σε μία συνηθισμένη εξίσωση τύπου Schrödinger. Για να εξαλείψουμε τον εκθετικό παράγοντα, μπορούμε να εισάγουμε τον μετασχηματισμό

$$\frac{d}{dy} = e^{-A/2}\frac{d}{dz}\,, \qquad \psi(y) = e^{A/4}\overline{\psi}\,. \tag{4.75}$$

Η προκύπτουσα εξίσωση είναι η

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + U(z)\right)\overline{\psi} = m^2\overline{\psi}\,, \tag{4.76}$$

με το δυναμικό

$$U(z) = \frac{3}{4}\frac{d^2A}{dz^2} + \frac{9}{16}\left(\frac{dA}{dz}\right)^2\,. \tag{4.77}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\left(-\frac{d}{dz} - \frac{3}{4}\frac{dA}{dz}\right)\left(\frac{d}{dz} - \frac{3}{4}\frac{dA}{dz}\right)\overline{\psi} = m^2\overline{\psi}\,. \tag{4.78}$$

Αυτή είναι αντίστοιχη με την εξίσωση Schrödinger που συναντάμε στην υπερσυμμετρική κβαντική μηχανική, και η μετασχηματισμένη κυματοσυνάρτηση για το βαρυτόνιο (μηδενική στάθμη) αντιστοιχεί στην θεμελιώδη στάθμη. Η μορφή αυτή αποκλείει επίσης την ύπαρξη ταχυονικών καταστάσεων. Η μηδενική στάθμη είναι απλά $\psi_0(y) = Ne^{A(y)}$ και είναι κανονικοποιήσιμη. Πρέπει επίσης να γνωρίζουμε αν υπάρχει χάσμα μεταξύ της μηδενικής στάθμης και του συνεχούς φάσματος ιδιοτιμών. Για το λόγο αυτό, πρέπει να ξέρουμε την συμπεριφορά του δυναμικού $U(z)$. Αν και στις περισσότερες από τις περιπτώσεις που συναντήσαμε παραπάνω, η αλλαγή μεταβλητής $z = \int dy\, e^{-A(y)/2}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη με αναλυτικό τρόπο, μπορούμε να εξάγουμε μερικά συμπεράσματα εξετάζοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά (4.61). Αφού για $y \to \infty$ μπορούμε να έχουμε

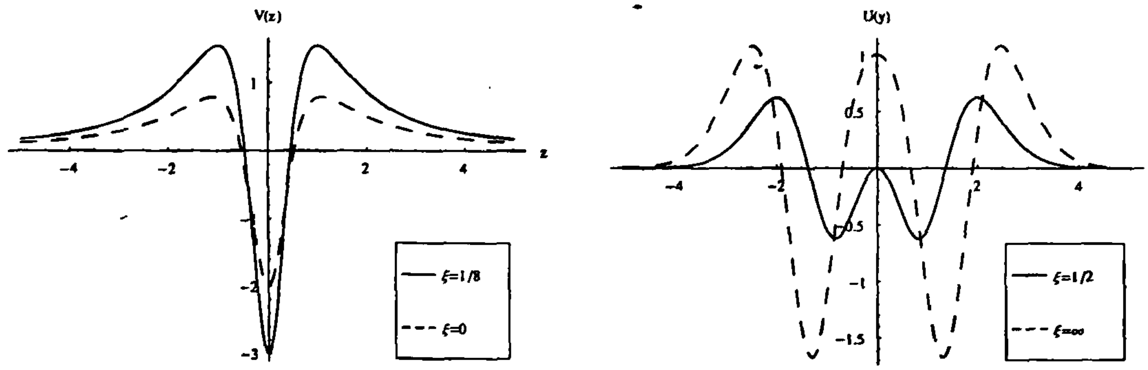
$$z = \int dy\, e^{-A/2} \approx \int dy\, e^{\bar{\kappa} y/2} \left(g(y)\right)^{-1/2} \tag{4.79}$$

ή $z \propto e^{\bar{\kappa} y/2}$. Ως αποτέλεσμα

$$\lim_{y \to \infty} U(z) \propto e^{A} \to 0\,. \tag{4.80}$$

Έτσι, το συνεχές φάσμα αρχίζει από την τιμή $m = 0$ (μηδενική μάζα) και δεν υπάρχει χάσμα.

Στη συνέχεια, μπορούμε να ελέγξουμε το προφίλ του δυναμικού περιορισμού $U(z)$ για διάφορες τιμές του ξ. Για $\xi = \frac{1}{8}$, έχουμε $A(y) = -4ln(cosh(ay))$. Στην περίπτωση αυτή, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει αναλυτικά και η μετασχηματισμένη συντεταγμένη είναι $z = \frac{1}{4a}\sinh(2ay) + \frac{y}{2}$. Για $\xi = 0$, η συνάρτηση στρέβλωσης γίνεται $A(y) = -\frac{4}{9}\left(4\ln(\cosh(ay)) + \tanh^2(ay)\right)$. Μπορούμε να προχωρήσουμε στην αλλαγή μεταβλητής και τον υπολογισμό του δυναμικού μόνο με αριθμητικό τρόπο. Τα προφίλ που προκύπτουν εικονίζονται στο Σχήμα 4.10. Το δυναμικό περιορισμού έχει το γνωστό σχήμα τύπου ηφαιστείου, το οποίο συναντάμε επίσης και στο συνηθισμένο μοντέλο Randall-Sundrum.



Σχήμα 4.10: Δυναμικά περιορισμού για διάφορες τιμές του ξ.

Διαπιστώνουμε ότι το σχήμα ηφαιστείου του δυναμικού δεν μπορεί να διατηρηθεί για όλες τις τιμές του ξ. Για τις επιλογές συνοριακών τιμών και μονάδων που κάναμε στις ομαλές αριθμητικές λύσεις του εδαφίου 5, εικονιζόμενες στο Σχήμα 4.9, βρίσκουμε ότι στην τιμή $\xi = (\sqrt{193} - 9)/16 \approx 0.306$ το ολικό ελάχιστο στην αρχή των αξόνων $y = 0$ αλλάζει σε τοπικό μέγιστο. Έτσι, καθώς κινούμαστε προς υψηλότερες τιμές του ξ, μία κεντρική κορυφή αναπτύσσεται. Για $\xi = 1/2$, το δυναμικό μηδενίζεται πάνω στη μεμβράνη, ενώ καθώς το ξ τείνει στο άπειρο, το δυναμικό στο σημείο αυτό τείνει στην μονάδα. Τα αντίστοιχα διαγράμματα φαίνονται στο Σχήμα 4.10.

4.7 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την ύπαρξη λύσεων στην περίπτωση ενός Περιβάλλοντος βαθμωτού πεδίου, παρουσία μη-ελάχιστης σύζευξης, στα πλαίσια μοντέλων μεμβρανών σε χαμπυλωμένο χώρο. Για μία συνάρτηση σύζευξης της βαρύτητας με το βαθμωτό πεδίο της μορφής $-\frac{1}{2}\xi\phi^2 R$, εξαγάγαμε ένα σύνολο ομαλών λύσεων για ένα μεγάλο εύρος τιμών της παραμέτρου σύζευξης ξ. Επιβεβαιώσαμε την συμβατότητα του συνηθισμένου παράγοντα στρέβλωσης Randall-Sundrum με την ύπαρξη ενός μη-τετριμμένου βαθμωτού πεδίου, για μία κατάλληλη επιλογή του βαθμωτού δυναμικού. Αυτό έγινε για τάση της μεμβράνης εξαρτώμενη ή όχι από το βαθμωτό πεδίο. Το προφίλ του βαθμωτού πεδίου ως προς την πέμπτη διάσταση, στην περίπτωση που η τάση δεν εξαρτάται από το πεδίο, έχει τη μορφή μίας *εσοχής* ($\tanh(a|y|)$).Το βαθμωτό πεδίο φτάνει τη μέγιστη τιμή του στη θέση της μεμβράνης, πλησιάζοντας μία σταθερή τιμή, καθώς κινούμαστε προς το άπειρο κατά μήκος της κατεύθυνσης y. Η *σύμμορφη τιμή* της παραμέτρου σύζευξης ξ_c ξεχωρίζει τις λύσεις αυτές από *"λύσεις"* οι οποίες παρουσιάζουν ανώμαλη συμπεριφορά. Έτσι, για τον παράγοντα στρέβλωσης Randall-Sundrum, ομαλές λύσεις του βαθμωτού πεδίου υπάρχουν μόνο για $\xi > \xi_c$ και έχουν, γενικά, το προαναφερθέν προφίλ τύπου εσοχής. Για αρνητικές τιμές της παραμέτρου σύζευξης ξ, οι *"λύσεις"* που βρίσχουμε αντιστοιχούν σε βαθμωτό δυναμικό, το οποίο περιέχει αρνητικές δυνάμεις του πεδίου και έχει για το λόγο αυτό ανώμαλη συμπεριφορά. Μία τάση μεμβράνης που εξαρτάται από το πεδίο επιτρέπει ένα πιο ευρύ φάσμα συμπεριφορών στις λύσεις, περιλαμβάνοντας βαθμωτά πεδία τα οποία μειώνονται εκθετικά στο άπειρο.

Οδηγούμενοι από το σύνολο λύσεων που εξαγάγαμε με το χαρακτηριστικό προφίλ τύπου εσοχής, εξετάσαμε στη συνέχεια την ύπαρξη γενικών λύσεων για τον παράγοντα στρέβλωσης, οι οποίες να διαφέρουν από τον παράγοντα στρέβλωσης Randall-Sundrum, αλλά να οδηγούν σε πεπερασμένες γεωμετρίες. Έτσι, θεωρώντας ένα βαθμωτό πεδίο του τύπου $\tanh(a|y|)$, βρήκαμε λύσεις, οι οποίες εξετάστηκαν με ημιαναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους. Η αναλυτική μας μελέτη έδειξε περαιτέρω ότι, για ένα μεγάλο πεδίο τιμών στον παραμετρικό χώρο του μοντέλου, παίρνουμε πεπερασμένες γεωμετρίες, οι οποίες έχουν καλή συμπεριφορά για μεγάλο y, δεδομένου ότι η τάση την οποία εισάγουμε είναι αρκετά μεγάλη. Επιπλέον, θεωρήσαμε ομαλές λύσεις για τον παράγοντα στρέβλωσης, στις οποίες τον ρόλο της μεμβράνης τον παίζει το ίδιο το βαθμωτό πεδίο. Σε αυτού του είδους την κατασκευή, θεωρήσαμε μερικές ειδικές λύσεις και προχωρήσαμε στην αριθμητική εξέταση γενικότερων πεπερασμένων γεωμετριών. Συγκεντρωθήκαμε στην περίπτωση λύσεων, οι οποίες παρουσιάζουν συμμετρία $\mathbf{Z_2}$, αν και μη-συμμετρικές λύσεις είναι επίσης εφικτές. Βρήκαμε μία κλάση λύσεων, οι οποίες ανάγονται σε μειούμενα εκθετικά σε μεγάλες αποστάσεις από τη μεμβράνη, του τύπου Randall-Sundrum. Οι λύσεις αυτές υπάρχουν για παράμετρο σύζευξης ξ εντός ενός διαστήματος τιμών. Για ένα υποσύνολο αυτών των χωρικά εντοπισμένων λύσεων, ο παράγοντας στρέβλωσης δεν είναι μία μονότονη φθίνουσα συνάρτηση, αλλά παρουσιάζει ένα δεύτερο μέγιστο κοντά στη θέση της μεμβράνης και στη συνέχεια μειώνεται. Εξαγάγαμε επίσης με αναλυτικές μεθόδους ειδικές ακριβείς λύσεις, έγκυρες για ειδικές επιλογές των συνοριακών συνθηκών και για ένα πεδίο τιμών της παραμέτρου σύζευξης. Για τις λύσεις αυτές, ο ίδιος παράγοντας στρέβλωσης αντιστοιχεί είτε σε μία λύση για το βαθμωτό πεδίο με σχήμα κάμψης, είτε στη λύση $\phi = \phi(0)\,(\cosh(ay))^{-1}$.

Τέλος, μελετήσαμε τον χωρικό περιορισμό των βαρυτονίων κοντά στη μεμβράνη. Αν και η εξίσωση κίνησης (τύπου Schröedinger) για τις βαρυτικές διαταραχές είναι η ίδια όπως και στην περίπτωση ελάχιστης σύζευξης, το προφίλ του παράγοντα στρέβλωσης εξαρτάται από την παράμετρο σύζευξης, και οι λεπτομέρειες του φάσματος πρέπει να εξαρτώνται επίσης από αυτήν. Βεβαίως, το φάσμα και πάλι δεν έχει χάσμα και είναι ελεύθερο από ταχυονικές καταστάσεις. Η μορφή του περιοριστικού δυναμικού εξαρτάται από το ακριβές προφίλ του παράγοντα στρέβλωσης. Αυτή μελετήθηκε αριθμητικά σε έναν αριθμό περιπτώσεων, αλλά και αναλυτικά σε ειδικές περιπτώσεις. Για μία συγκεκριμένη επιλογή συνοριακών συνθηκών για το βαθμωτό πεδίο και την ειδική τιμή $\xi = \frac{1}{8}$, το περιοριστικό δυναμικό έχει την τυπική μορφή "ηφαιστείου" όπως και για $\xi = 0$. Ωστόσο, για τιμές του ξ μεγαλύτερες από μία ορισμένη τιμή, το δυναμικό αναπτύσσει μία κορυφή στην αρχή των αξόνων, η οποία μεγαλώνει παράλληλα με την παράμετρο σύζευξης. Για $\xi = \frac{1}{2}$, η κορυφή φτάνει την τιμή μηδέν, ενώ πλησιάζει τη μονάδα για πολύ μεγάλες τιμές του ξ.

Κεφάλαιο 5

Κοσμολογία Παρουσία Μη-Ελάχιστα Συζευγμένου Βαθμωτού Πεδίου

5.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, ένας διαρκώς αυξανόμενος αριθμός από κοσμολογικά δεδομένα [23, 26, 27, 96] δείχνει ότι το σύμπαν υφίσταται επιταχυνόμενη διαστολή, η οποία αποδίδεται σε μία ενεργειακή συνιστώσα, αναφερόμενη ως *"σκοτεινή ενέργεια"* . Η σκοτεινή αυτή ενέργεια είναι ένα σημαντικό ποσοστό του ολικού ενεργειακού περιεχομένου του σύμπαντος. Αν και η θεωρία της ύπαρξης μίας κοσμολογικής σταθεράς είναι παραδεδεγμένα το απλούστερο μοντέλο για την σκοτεινή ενέργεια, η πολύ λεπτή ρύθμιση που απαιτείται για την τιμή της αποτελεί προφανές μειονέκτημα [28, 29, 97, 98, 99]. Άλλες επιχειρούμενες εξηγήσεις για την προέλευση της σκοτεινής ενέργειας αποτελούν τα πεδία-φαντάσματα [65, 66, 67] και η πεμπτουσία [60, 61, 62, 63, 64], όπως και οι τροποποιήσεις της ίδιας της βαρυτικής θεωρίας [100, 101]. Ανεξάρτητα από το αίνιγμα της σκοτεινής ενέργειας, θεωρίες με επιπλέον χωρικές διαστάσεις, στις οποίες το παρατηρούμενο σύμπαν είναι εμβαπτισμένο σε έναν χώρο υψηλότερης διάστασης (*Υπερχώρος*), έχουν συγκεντρώσει αρκετή προσοχή τα τελευταία χρόνια. Στα πλαίσια των θεωριών αυτών, η συνηθισμένη ύλη είναι παγιδευμένη πάνω σε μία μεμβράνη, αλλά η βαρύτητα διαδίδεται μέσα σε ολόκληρο τον χωρόχρονο [38, 39, 40, 81, 82]. Η κοσμολογική εξέλιξη πάνω στη μεμβράνη περιγράφεται από μία ενεργό εξίσωση Friedmann, [74, 43, 44], η οποία εμπεριέχει με μη-τετριμμένο τρόπο τα φαινόμενα του Υπερχώρου. Τα μοντέλα μεμβρανών μας παρέχουν νέες προοπτικές για την κατανόηση ανοιχτών κοσμολογικών ερωτημάτων, όπως η παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή. Η ύπαρξη ενός χώρου εμβάπτισης υψηλότερης διάστασης επιτρέπει την παρουσία πενταδιάστατης περιβάλλουσας ύλης, η οποία θα μπορούσε βέβαια να επηρεάσει την κοσμολογική εξέλιξη πάνω στη μεμβράνη και να λειτουργήσει ως μία σημαντική συνιστώσα αυτού που αποκαλούμε σκοτεινή ενέργεια. Μία συγκεχριμένη μορφή περιβάλλουσας ύλης είναι ένα πενταδιάστατο βαθμωτό πεδίο [102, 103, 104]. Η παρουσία ενός περιβάλλοντος βαθμωτού πεδίου ανοίγει τη δυνατότητα για απευθείας σύζευξή του με την βαθμωτή καμπυλότητα. Μία συγκεκριμένη μορφή αυτής της σύζευξης αντιστοιχεί στον βαρυτικό όρο που εμφανίζεται στις αποκαλούμενες τανυστικές-βαθμωτές θεωρίες βαρύτητας [90, 91]. Ένα Περιβάλλον βαθμωτό πεδίο, μη-ελάχιστα συζευγμένο με την βαρύτητα, μέσω ενός όρου της μορφής $f(\phi)R$, εξετάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο πλαίσιο της γεωμετρίας Randall-Sundrum και μία κλάση από αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις έχει μελετηθεί [94, 93, 105, 106, 107].

Στο παρόν κεφάλαιο, μελετάμε την κοσμολογική εξέλιξη πάνω στη μεμβράνη, παρουσία ενός Περιβάλλοντος βαθμωτού πεδίου, μη-ελάχιστα συζευγμένου με το βαθμωτό Ricci [108] [1]. Εξάγουμε την εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της γεωμετρίας της μεμβράνης, καθώς και την αντίστοιχη εξίσωση για τη συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου. Σε ό,τι ακολουθεί, επιτρέπουμε την ύπαρξη ενός γενικού βαθμωτού δυναμικού. Εκτός από το δυναμικό, οι εξισώσεις αυτές περιέχουν την απροσδιόριστη συνάρτηση $\hat{\phi}''(t)$, η οποία αντιπροσωπεύει το μέρος της δεύτερης παραγώγου του πεδίου ως προς την πέμπτη διάσταση, το οποίο δεν έχει συμπεριφορά κατανομής. Επικεντρωνόμαστε σε μία επιλογή για τον όρο σύζευξης με το βαθμωτό Ricci, η οποία είναι δευτεροβάθμια ως προς το πεδίο, της μορφής $f(\phi) = 2M^3(1 - \xi\phi^2/2)$. Θεωρώντας μία απλή, επίσης δευτεροβάθμια μορφή για το βαθμωτό δυναμικό πάνω στη μεμβράνη και χρησιμοποιώντας διάφορες προδιαγραφές για την ποσότητα $\hat{\phi}''(t)$, εξάγουμε μία κλάση από προσεγγιστικές λύσεις, έγκυρες για μεγάλους χρόνους. Οι λύσεις αυτές παρουσιάζουν επιταχυνόμενη διαστολή για ένα διάστημα τιμών της παραμέτρου σύζευξης ξ. Το πλάνο του κεφαλαίου είναι το ακόλουθο: στο εδάφιο 5.2, εισάγουμε το γενικό πλαίσιο του μοντέλου και παράγουμε τις εξισώσεις Einstein για αυθαίρετο περιεχόμενο ύλης στη μεμβράνη και τον Υπερχώρο. Στο εδάφιο 5.3, υπολογίζουμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης στη μεμβράνη για μία γενική συνάρτηση σύζευξης. Επικεντρωνόμαστε στην ειδική περίπτωση ενός δευτεροβάθμιου όρου σύζευξης $-\xi\phi^2 R$ και γράφουμε τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό της "μεταβλητής σκοτεινής ενέργειας". Στο Εδάφιο 5.4, συζητάμε την κοσμολογία σε μεγάλους χρόνους, απουσία ύλης. Κατάλληλες επιλογές για την ποσότητα $\hat{\phi}''$ και το βαθμωτό δυναμικό δίνουν επιταχυνόμενη διαστολή, ωθούμενη από μία κοσμολογική σταθερά, και ένα βαθμωτό πεδίο, το οποίο πέφτει εκθετικά με τον χρόνο. Τέλος, στο εδάφιο 5.5, παρουσιάζουμε δύο προσεγγιστικές λύσεις για μεγάλους χρόνους για δύο διαφορετικές προδιαγραφές του $\hat{\phi}''$, οι οποίες παρουσιάζουν επιταχυνόμενη διαστολή για ένα περιορισμένο σύνολο τιμών της παραμέτρου σύζευξης ξ.

5.2 Γενικό Πλαίσιο του Μοντέλου

Θεωρούμε τη δράση

$$\begin{aligned} S = & \int d^5x\sqrt{-G}\left\{ f(\phi)\mathcal{R} - \Lambda - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \mathcal{L}_B^{(m)} \right\} \\ + & \int d^4x\sqrt{-g}\left\{ -\sigma + \mathcal{L}_b^{(m)} \right\}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

[1] Μία παρόμοια περίπτωση με ένα τετραδιάστατο βαθμωτό πεδίο, μη-ελάχιστα συζευγμένο με την καμπυλότητα Ricci είχε συζητηθεί στην [109].

η οποία περιγράφει πενταδιάστατη βαρύτητα, παρουσία ενός βαθμωτού πεδίου ϕ, το οποίο βρίσκεται σε μη-ελάχιστη σύζευξη με το πενταδιάστατο βαθμωτό Ricci R, μέσω μίας γενικής συνάρτησης σύζευξης $f(\phi)$. Η ύλη του Καθιερωμένου Μοντέλου, περιγραφόμενη από τον όρο $\mathcal{L}_b^{(m)}$, βρίσκεται περιορισμένη πάνω σε μία *μεμβράνη*, τοποθετημένη στη θέση $x_5 \equiv y = 0$. Επιπλέον ύλη του Υπερχώρου, ξεχωριστή από το περιβάλλον βαθμωτό πεδίο ϕ, περιγράφεται από την $\mathcal{L}_B^{(m)}$. Η πενταδιάστατη μετρική G_{MN} έχει την υπογραφή $(-,+,+,+,+)$. Με $g_{\mu\nu}$ υποδηλώνουμε την τετραδιάστατη μετρική πάνω στη μεμβράνη. Τέλος, σ είναι η (θετική) τάση της μεμβράνης και Λ είναι η πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά. Μεταβάλλοντας τη δράση ως προς τη μετρική, παίρνουμε τις εξισώσεις *Einstein*

$$f(\phi)\left(\mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}\mathcal{R}\right) - \nabla_M\nabla_N f(\phi) + G_{MN}\nabla^2 f(\phi) = \frac{1}{2}T_{MN}\,, \tag{5.2}$$

όπου T_{MN} είναι ο ολικός τανυστής ορμής-ενέργειας

$$T_{MN} = T^{(\phi)}_{MN} + T^{(B)}_{MN} + T^{(b)}_{MN} - G_{MN}\Lambda - G_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\sigma\,\delta(y)\,. \tag{5.3}$$

$T^{(\phi)}_{MN}$ είναι το τμήμα του τανυστή ορμής-ενέργειας T_{MN} που αντιστοιχεί στο βαθμωτό πεδίο, συγκεκριμένα,

$$T^{(\phi)}_{MN} = \nabla_M\phi\nabla_N\phi - G_{MN}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right), \tag{5.4}$$

ενώ η εξίσωση κίνησης για το βαθμωτό πεδίο είναι η

$$\nabla^2\phi - \frac{dV}{d\phi} + \mathcal{R}\frac{df}{d\phi} - \frac{d\sigma}{d\phi}\delta(y) = 0\,. \tag{5.5}$$

Ας εισάγουμε τώρα την προδιαγραφή για την μετρική [43, 44]

$$ds^2 = -n^2(y,t)dt^2 + a^2(y,t)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(y,t)dy^2 \tag{5.6}$$

ή

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} -n^2(y,t) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(y,t)\gamma_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & b^2(y,t) \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Η μετρική αυτή αντιστοιχεί σε μία γεωμετρία τύπου Friedmann-Robertson-Walker πάνω στη μεμβράνη, με μία μέγιστα συμμετρική τρισδιάστατη γεωμετρία, γ_{ij}. Θεωρούμε συμμετρία $\mathbf{Z_2}$, ενώ η y παίρνει τιμές στο διάστημα $[-\infty, +\infty]$. Οι συναρτήσεις $n(y,t)$, $a(y,t)$ και $b(y,t)$ είναι συνεχείς ως προς την y, αλλά μπορούν να έχουν ασυνεχείς πρώτες παραγώγους στη θέση της μεμβράνης.

Για την προδιαγραφή της μετρικής (5.7), ο τανυστής ορμής-ενέργειας του βαθμωτού πεδίου είναι

$$
\begin{aligned}
T_{00}^{(\phi)} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{n^2}{2b^2}\phi' \,, \\
T_{ij}^{(\phi)} &= -a^2\gamma_{ij}\left[-\frac{1}{2n^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2b^2}\phi'^2 + V\right] , \\
T_{55}^{(\phi)} &= \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{b^2}{2n^2}\dot{\phi}^2 - b^2 V \,, \\
T_{05}^{(\phi)} &= \dot{\phi}\phi' \,,
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

όπου θεωρούμε ότι το βαθμωτό πεδίο εξαρτάται μόνο από την πέμπτη διάσταση και σημειώνουμε με ϕ' την παράγωγό του ως προς αυτήν και με $\dot{\phi}$ την παράγωγό του ως προς το χρόνο. Οι συνιστώσες του τανυστή ορμής-ενέργειας από τον Υπερχώρο και τη μεμβράνη μπορούν να παραμετροποιηθούν ως

$$
T_{MN}^{(B)} = \begin{pmatrix} \rho_B n^2 & 0 & -n^2 P_5 \\ 0 & P_B a^2 \gamma_{ij} & 0 \\ -n^2 P_5 & 0 & \overline{P}_B b^2 \end{pmatrix} ,
$$

$$
T_{MN}^{(b)} = \frac{\delta(y)}{b}\begin{pmatrix} \rho n^2 & 0 & 0 \\ 0 & p a^2 \gamma_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{5.9}
$$

όπου η περιβάλλουσα πυκνότητα ενέργειας και ορμής και οι πιέσεις, ρ_B, P_B, $\overline{P}_B$, όπως και η *συνάρτηση ανταλλαγής ενέργειας* P_5, είναι συναρτήσεις του χρόνου και της y, ενώ η πυκνότητα ενέργειας της μεμβράνης, ρ και η πυκνότητα ορμής p, είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω προδιαγραφή και επιλέγοντας *κάθετες συντεταγμένες Gauss* $(b(y,t) = 1)$, παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης στην ακόλουθη μορφή

$$
3\left\{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - n^2\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) + k\frac{n^2}{a^2}\right\} f \; - n^2\left\{f'' + 3\frac{a'}{a}f'\right\} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{f}
$$

$$
= \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{n^2}{4}\phi'^2 + \frac{n^2}{2}V(\phi) + \frac{n^2}{2}\rho_B + \frac{n^2}{2}\delta(y)\rho + \frac{n^2}{2}\delta(y)\sigma(\phi) + \frac{n^2}{2}\Lambda \,, \tag{5.10}
$$

$$
3\left(\frac{n'}{n}\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}'}{a}\right) f - \dot{f}' + \frac{n'}{n}\dot{f} = \frac{1}{2}\dot{\phi}\phi' - \frac{n^2}{2}P_5 \,, \tag{5.11}
$$

$$
3\left\{\frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n}\right) + \frac{\ddot{a}}{a}\right) - \frac{k}{a^2}\right\} f
$$

$$
\begin{aligned}
& - \frac{1}{n^2}\left\{\ddot f + \left(3\frac{\dot a}{a} - \frac{\dot n}{n}\right)\dot f\right\} + \left(3\frac{a'}{a}+\frac{n'}{n}\right) f' \\
& = \frac{1}{4}\phi'^2 + \frac{1}{4n^2}\dot\phi^2 - \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{2}\Lambda + \frac{1}{2}\overline{P}_B ,
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

$$
\begin{aligned}
& a^2\gamma_{ij}\left\{\frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a}+2\frac{n'}{n}\right)+2\frac{a''}{a}+\frac{n''}{n}\right\} f + \frac{a^2}{n^2}\gamma_{ij}\left\{\frac{\dot a}{a}\left(-\frac{\dot a}{a}+2\frac{\dot n}{n}\right)-2\frac{\ddot a}{a}\right\} f \\
& -kf\gamma_{ij} + \gamma_{ij}\left\{-\frac{a^2}{n^2}\left[\ddot f + \left(2\frac{\dot a}{a}-\frac{\dot n}{n}\right)\dot f\right] + a^2\left[f'' + \left(2\frac{a'}{a}+\frac{n'}{n}\right)f'\right]\right\} \\
= & -\frac{a^2}{2}\gamma_{ij}\left[-\frac{1}{2n^2}\dot\phi^2 + \phi'^2 + V(\phi)\right] + \frac{a^2}{2}\gamma_{ij}(P_B-\Lambda) + \frac{a^2}{2}\gamma_{ij}\delta(y)\left(p-\sigma(\phi)\right) ,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

$$
\ddot\phi + \left(3\frac{\dot a}{a}-\frac{\dot n}{n}\right)\dot\phi - n^2\left\{\phi'' + \left(\frac{n'}{n}+3\frac{a'}{a}\right)\phi'\right\} + n^2V' - n^2\mathcal{R}f' + n^2\sigma'\delta(y) = 0 . \tag{5.14}
$$

Το βαθμωτό Ricci $\mathcal{R}$, το οποίο εμφανίζεται στην εξίσωση για το βαθμωτό πεδίο είναι

$$
\mathcal{R} = 3\frac{k}{a^2} + \frac{1}{n^2}\left\{6\frac{\ddot a}{a} + 6\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 - 6\frac{\dot a\,\dot n}{a\,n}\right\} - 6\frac{a''}{a} - 2\frac{n''}{n} - 6\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 6\frac{a'\,n'}{a\,n} .
$$

Έχουμε σημειώσει με τελείες τις παραγώγους ως προς τον χρόνο και με τόνους τις παραγώγους ως προς την πέμπτη διάσταση. Σημειώστε ωστόσο ότι η V' δηλώνει παράγωγο ως προς το βαθμωτό πεδίο ϕ. Έχουμε επίσης επιτρέψει την ύπαρξη εξάρτησης από το ϕ της τάσεως στην μεμβράνη σ και δηλώσαμε με σ' την παράγωγό της ως προς το πεδίο.

Θεωρώντας συμμετρία $\mathbf{Z_2}$ και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $a'(t) \equiv a'(+0,t)$, $n'(t) \equiv n'(+0,t)$ και $\phi'(t) \equiv \phi'(+0,t)$, μπορούμε να προχωρήσουμε και να εξαγάγουμε από τις εξισώσεις κίνησης τις *Συνθήκες Συνέχειας* στο $y = 0$. Έτσι, από τις (5.10), (5.13) και (5.14) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
-6f\frac{a'}{a} - 2f'\phi' &= \frac{1}{2}(\rho+\sigma) , \\
4f\frac{a'}{a} + 2n'f + 2f'\phi' &= \frac{1}{2}(p-\sigma) , \\
-2\phi' + 4f'\left(n' + 3\frac{a'}{a}\right) &= -\sigma' .
\end{aligned}
$$

Σημειώνουμε ότι, από εδώ και πέρα, f' *σημαίνει παράγωγος ως προς το* ϕ. Έχουμε επίσης διαλέξει $n(0,t) = 1$. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να έρθουν στη μορφή

$$
\frac{a'}{a} = -\frac{1}{2}\frac{(\sigma+2f'\sigma')}{u} + \frac{1}{8}\frac{(3p-\rho)}{u} - \frac{1}{16}\frac{(\rho+p)}{f} , \tag{5.15}
$$

$$
n' = -\frac{1}{2}\frac{(\sigma+2f'\sigma')}{u} + \frac{1}{8}\frac{(3p-\rho)}{u} + \frac{3}{16}\frac{(\rho+p)}{f} , \tag{5.16}
$$

$$\phi' = f'\frac{(3p-\rho)}{u} + \frac{(3f\sigma' - 4\sigma f')}{u}, \tag{5.17}$$

όπου έχουμε εισαγάγει τον συμβολισμό

$$u \equiv 2\left[3f + 8(f')^2\right]. \tag{5.18}$$

Στην περίπτωση που η τάση της μεμβράνης δεν εξαρτάται από το $\phi(t)$, οι σχέσεις αυτές απλοποιούνται στις

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{8}\frac{(3p-\rho-4\sigma)}{u} - \frac{1}{16}\frac{(\rho+p)}{f}, \tag{5.19}$$

$$n' = \frac{1}{8}\frac{(3p-\rho-4\sigma)}{u} + \frac{3}{16}\frac{(\rho+p)}{f}, \tag{5.20}$$

$$\phi' = f'\frac{(3p-\rho-4\sigma)}{u}. \tag{5.21}$$

5.3 Εξισώσεις Χρονικής Εξέλιξης στη Μεμβράνη

Από την εξίσωση (5.11), παίρνουμε πάνω στη μεμβράνη μία *γενικευμένη εξίσωση συνέχειας*

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) + 2P_5 = 0 \ , \tag{5.22}$$

η οποία εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας. Βλέπουμε ότι η εξίσωση αυτή εξαρτάται από την f. Από την εξίσωση (5.12) μπορούμε να εξαγάγουμε μία *δευτεροτάξια* ή *γενικευμένη εξίσωση Friedmann*

$$3f\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] + \ddot{f} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{f} + \frac{1}{4}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(V + \Lambda) = \frac{1}{64u}(3p - \rho - 4\sigma)^2$$
$$-\frac{6}{(16)^2}\frac{(\rho + p)^2}{f} - \frac{1}{2}\overline{P}_B - \frac{f'\sigma'}{4u}(3p - \rho - 4\sigma) - \frac{3f}{8u}(\sigma')^2 \ , \tag{5.23}$$

η οποία εκφράζει τη χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας $a(t)$. Έχουμε θεωρήσει $k = 0$. Τέλος, η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου (5.14) δίνει πάνω στη μεμβράνη

$$\ddot{\phi} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} - 6f'\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] - \phi'\left(n' + 3\frac{a'}{a}\right)$$
$$+6f'\left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{a'}{a} + n'\right) = \hat{\phi}'' - 2f'\left(3\frac{\hat{a}''}{a} + \hat{n}''\right) \ , \tag{5.24}$$

όπου οι ποσότητες $\hat{\phi}''(t)$, $\hat{a}''(t)$, $\hat{n}''(t)$, αντιπροσωπεύουν το μέρος αυτών των παραγώγων που δεν έχει συμπεριφορά κατανομής. Οι ποσότητες $\hat{a}''$ και $\hat{n}''$ εμφανίζονται στις εξισώσεις (5.10), (5.13), θεωρούμενες πάνω στη μεμβράνη και μπορούν να εκφραστούν με βάση την $\hat{\phi}''$ και συνηθισμένες ποσοτήτες, όπως οι $a(t)$, $\phi(t)$, οι χρονικές τους παράγωγοι και οι διάφορες πυκνότητες ύλης. Κάνοντας αυτό[2], παίρνουμε ένα σύνολο από τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις, συγκεκριμένα την (5.22) και τις

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{\sigma^2}{12fu} + \frac{\sigma}{24fu}(\rho - 3p) - \frac{1}{6f}\overline{P}_B$$
$$+\frac{1}{6f}(V + \Lambda) - \frac{\dot{\phi}^2}{12f}(1 + 4f'') - \frac{f'}{3f}\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right) \ , \tag{5.25}$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \hat{\phi}'' + \frac{u'}{2u}\dot{\phi}^2 \approx -\frac{6f}{u}V'(\phi) - \frac{2f'}{u}\left(3P_B + \overline{P}_B - \rho_B\right)$$
$$+10\frac{f'}{u}(V + \Lambda) + 4\frac{f'(u + f'u')\sigma}{u^3}(\rho - 3p) + \frac{8f'(u + f'u')\sigma^2}{u^3} \ . \tag{5.26}$$

[2]Για απλότητα, έχουμε θεωρήσει $\sigma' = 0$.

Έχουμε επιβάλει την *προσέγγιση χαμηλής πυκνότητας*, όπου αγνοούμε όρους της μορφής ρ^2. Διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση εξέλιξης του βαθμωτού πεδίου περιέχει την άγνωστη ποσότητα $\hat{\phi}''$. Αν και, μέχρι στιγμής, έχουμε δουλέψει στα πλαίσια μίας γενικής συνάρτησης σύζευξης $f(\phi)$, ξέρουμε ότι, αφού $\phi = \phi(t)$, αυτή δεν μπορεί να διαφέρει πολύ από μία σταθερά για μεγάλους χρόνους (βαρύτητα Einstein). Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε μία δευτεροβάθμια συνάρτηση σύζευξης

$$f(\phi) = 2M^3\left(1 - \frac{\xi}{2}\phi^2\right), \tag{5.27}$$

όπου ξ είναι μία κατάλληλη παράμετρος σύζευξης [90, 91, 94, 93, 105]. Τονίζουμε ότι η (5.27) μπορεί να είναι μία καλή προσέγγιση για μία γενική συνάρτηση σύζευξης $f(\phi) \approx f(0) + f''(0)\phi^2/2 + \cdots$ για μικρό $\phi \ll (2f(0)/f''(0))^{1/2}$.

Προκειμένου να πάρουμε την εξίσωση (5.25) για τον παράγοντα κλίμακας στην γνωστή πρωτοτάξια μορφή τύπου Friedmann, μπορούμε να εισαγάγουμε μία βοηθητική μεταβλητή $\chi(t)$, το επονομαζόμενο *πεδίο σκοτεινής ακτινοβολίας*. Χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό που παρουσιάζεται στις [110, 111, 112, 113], η εξίσωση (5.25) αντικαθίσταται από ένα ζεύγος πρωτοτάξιων εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 2\gamma\rho + \chi + \lambda, \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left\{\chi + \frac{1}{12f}\left[\overline{P}_B + \frac{1}{2}(1-4\xi)\dot{\phi}^2 - V - 2\xi\phi\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right)\right]\right\} \\ = 4\gamma P_5 - 2\dot{\gamma}\rho - \dot{\lambda}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε περιορίσει τη συζήτησή μας στη μορφή (5.27) για τη συνάρτηση σύζευξης f, αν και δεν έχουμε αντικαταστήσει αυτή την έκφραση παντού. Οι συναρτήσεις β, γ και λ, που εμφανίζονται στις (5.28) και (5.29), ορίζονται ως

$$\beta \equiv \frac{1}{24fu}, \; \gamma \equiv \sigma\beta, \; \lambda \equiv \frac{1}{12f}\left(\Lambda + \frac{\sigma^2}{2u}\right). \tag{5.30}$$

Η αρχική δευτεροτάξια διαφορική εξίσωση (5.25) μπορεί να αναχτηθεί παραγωγίζοντας την (5.28), εισάγοντας την (5.29) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (5.22), η οποία υποθέτουμε ότι ισχύει πάντοτε. Μία εξίσωση που σχετίζει τον λόγο $\ddot{a}/a$ με το πεδίο σκοτεινής ακτινοβολίας μπορεί επίσης να γραφεί, συγκεκριμένα

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\gamma(\rho + 3p) + \frac{1}{6f}\left[V - \overline{P}_B - \frac{1}{2}(1-4\xi)\dot{\phi}^2 + 2\xi\phi\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right)\right] - \chi + \lambda. \tag{5.31}$$

Η συνάρτηση λ είναι η ενεργός κοσμολογική σταθερά πάνω στη μεμβράνη και στην περίπτωση ελάχιστης σύζευξης ($f = 2M^3$), η συνθήκη

$$\lambda = \Lambda + \frac{\sigma^2}{24M^3} = 0$$

αντιστοιχεί στη γνωστή συνθήκη του συνήθους μοντέλου Randall-Sundrum για *μηδενική κοσμολογική σταθερά στη μεμβράνη*, απουσία ύλης.

5.4 Συμπεριφορά Μεγάλων Χρόνων Απουσία Ύλης

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση της απουσίας κάθε υποθέματος ύλης. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα εξισώσεών μας γίνεται

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \chi + \lambda, \tag{5.32}$$

$$\dot{\chi} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left\{\chi + \frac{1}{12f}\left[\frac{1}{2}(1-4\xi)\dot{\phi}^2 - V - 2\xi\phi\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right)\right]\right\} = -\dot{\lambda}, \tag{5.33}$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \hat{\phi}'' + \frac{u'}{2u}\dot{\phi}^2 = -\frac{6f}{u}V'(\phi) + 10\frac{f'}{u}(V+\Lambda) + \frac{8f'(u+f'u')\sigma^2}{u^3}. \tag{5.34}$$

Βλέπουμε ότι, στην περίπτωση ελάχιστης σύζευξης ($f' = 0$), η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου μπορεί να ικανοποιηθεί από μία χρονικά ανεξάρτητη λύση ϕ_0 με $V'(\phi_0) = \hat{\phi}''$, δεδομένου ότι η $\hat{\phi}''$ είναι επίσης χρονικά ανεξάρτητη. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση σκοτεινής ακτινοβολίας (5.33) είναι απλώς ($V_0 \equiv V(\phi_0)$)

$$\dot{\chi} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left(\chi - \frac{V_0}{24M^3}\right) = 0, \tag{5.35}$$

με λύση της μορφής

$$\chi = \frac{\mathcal{C}}{a^4} + \frac{V_0}{24M^3}. \tag{5.36}$$

Τέλος, η ενεργός εξίσωση Friedmann είναι

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \chi + \lambda = \frac{\mathcal{C}}{a^4} + \frac{V_0}{24M^3} + \frac{1}{24M^3}\left(\Lambda + \frac{\sigma^2}{24M^3}\right). \tag{5.37}$$

Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε $V_0 = 0$. Τότε, η συνθήκη για μηδενική κοσμολογική σταθερά πάνω στην μεμβράνη παίρνει την γνωστή μορφή της σχέσης λεπτής ρύθμισης του μοντέλου Randall-Sundrum, $\Lambda + \sigma^2/24M^3 = 0$. Στην περίπτωση μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς, η προκύπτουσα διαστολή, κυριαρχούμενη από *σκοτεινή ακτινοβολία*, είναι επιβραδυνόμενη ως $a(t) \propto t^{1/2}$. Μάλιστα, μία σταθερή λύση είναι δυνατή παρουσία της μη-ελάχιστης σύζευξης και η παραπάνω συμπεριφορά δεν τροποποιείται. Απλά, η συνθήκη στην σταθερά $\hat{\phi}''$ αντικαθίσταται από μία πιο σύνθετη συνθήκη $\hat{\phi}'' = 6fV'(\phi)/u - 10f'(V+\Lambda)/u - 8f'(u + f'u')\sigma^2/u^3$. Το πεδίο σκοτεινής ενέργειας είναι τώρα $\chi = \mathcal{C}/a^4 + V_0/12f$, ενώ η εξίσωση Friedmann διατηρεί την ίδια μορφή, όπου το λ ορίζεται από την (5.30). Ανάλογα με την συνθήκη λεπτής ρύθμισης την οποία επιβάλλουμε, έχουμε είτε μία εκθετική διαστολή κυριαρχούμενη από μία κοσμολογική σταθερά είτε μία διαστολή με χρονική συμπεριφορά $a(t) \propto t^{1/2}$ κυριαρχούμενη από σκοτεινή ακτινοβολία, όπως στην περίπτωση ελάχιστης σύζευξης. Αφού η ενεργός κοσμολογική σταθερά λ εξαρτάται από τις f και u, η τιμή της σε μεγάλους χρόνους θα περιέχει την παράμετρο σύζευξης ξ. Μία εναπομένουσα κοσμολογική σταθερά θα είναι έτσι παρούσα, ακόμα και αν επιβάλουμε τη λεπτή ρύθμιση Randall-Sundrum εξαιτίας της μη-ελάχιστης σύζευξης, όπως μπορεί να δει κανείς από την ανεπτυγμένη εξίσωση Friedmann

$$H^2 = \frac{C}{a^4} + \frac{V_0}{24M^3} + \xi\frac{\phi^2}{48M^3}\left(V_0 + \frac{\sigma^2}{24M^3}\left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)\right), \tag{5.38}$$

όπου κρατήσαμε μόνο όρους μέχρι ϕ^2 και επιβάλαμε τη συνθήκη λεπτής ρύθμισης. Προφανώς, η παρουσία του όρου V_0 δεν είναι απαραίτητη, προχειμένου να πάρουμε μη-τετριμμένα αποτελέσματα, εκτός από την περίπτωση σύμμορφης σύζευξης, $\xi = \xi_c = 3/32M^3$.

Αντί να αντιμετωπίζουμε την εξίσωση του βαθμωτού πεδίου (5.34) ως μία εξίσωση που μας παρέχει μία λύση για το $\phi(t)$ για δεδομένη συνάρτηση $\hat{\phi}''$, μπορούμε εναλλακτικά να την δούμε ως μία εξίσωση που καθορίζει την άγνωστη συνάρτηση $\hat{\phi}''$ για μία επιλεγμένη κατανομή $\phi(t)$. Έτσι, μπορούμε να διαλέξουμε ένα εκθετικά μειούμενο πεδίο

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\kappa t}, \tag{5.39}$$

και να υποθέσουμε ότι είναι λύση της (5.34) για μία κατάλληλη συνάρτηση $\hat{\phi}''$. Αντικαθιστώντας το στην (5.33), παίρνουμε

$$\dot{\chi} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left\{\chi + \frac{1}{12f}\left[\frac{\kappa^2}{2}(1-4\xi)\phi^2 - V - 2\xi\phi^2\left(\kappa^2 - 3\kappa\frac{\dot{a}}{a}\right)\right]\right\} = -\dot{\lambda}, \tag{5.40}$$

ή, χρησιμοποιώντας την (5.32),

$$\dot{\chi} + \dot{\lambda} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left\{\chi + \frac{\kappa^2(1-8\xi)}{24f}\phi^2 - \frac{V}{12f}\right\} + 2\frac{\kappa\xi}{f}(\chi+\lambda)\phi^2 = 0. \tag{5.41}$$

Για μεγάλους χρόνους, μπορούμε να αναπτύξουμε το βαθμωτό δυναμικό σε δυνάμεις του $\phi = \phi_0 e^{-\kappa t}$ ως

$$V(\phi) \approx V(0) + \frac{1}{2}V''(0)\phi^2 + \dots,$$

θεωρώντας το ως συνάρτηση του ϕ^2. Έτσι, κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξεως ως προς ϕ^2, παίρνουμε

$$\dot{\overline{\chi}} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left\{\overline{\chi} + \frac{\phi^2}{48M^3}\left[-\xi\Lambda - \frac{\xi(1-\xi/2\xi_c)\sigma^2}{12M^3} + \kappa^2(1-8\xi) - V''(0) - \xi V(0)\right]\right.$$
$$\left. -\lambda(0) - \frac{V(0)}{24M^3}\right\} + \frac{\kappa\xi}{M^3}\phi^2\overline{\chi} \approx 0, \tag{5.42}$$

όπου $\overline{\chi} = \chi + \lambda$ και $\lambda(0) = (\Lambda + \sigma^2/24M^3)/24M^3$. Σε μηδενική τάξη, έχουμε

$$\dot{\overline{\chi}} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left(\overline{\chi} - \lambda(0) - \frac{V(0)}{24M^3}\right) \approx 0,$$

με μία λύση ίδια με την (5.36). Η προκύπτουσα εξίσωση Friedmann είναι απλώς η (5.37). Έτσι, σε μεγάλους χρόνους, ανάλογα με την συνθήκη λεπτής ρύθμισης που έχουμε επιβάλει, έχουμε είτε εκθετική διαστολή ωθούμενη από κοσμολογική σταθερά ή επιβραδυνόμενη διαστολή λόγω της σκοτεινής ακτινοβολίας. Η μη-ελάχιστη σύζευξη δεν παίζει κάποιο ρόλο σε αυτήν την τάξη. Διορθώσεις που εξαρτώνται από το ξ εμφανίζονται μόλις συμπεριλάβουμε όρους τάξεως ϕ^2. Σε κάθε περίπτωση, η ύπαρξη της εκθετικής λύσης (5.39) εξαρτάται από την εξίσωση του βαθμωτού πεδίου και κατ' επέκταση από την $\hat{\phi}''$. Αναπτύσσοντάς την σε δυνάμεις του ϕ και αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$\left[\kappa^2 - 3\kappa H(0) - \{\hat{\phi}''(0)\}_1 + V''(0) + \frac{5\xi}{3}(V(0)+\Lambda) + \frac{\xi}{9M^3}\sigma^2\right]\phi$$

$$-\hat{\phi}''(0) + \left[-3\kappa H'(0) - \frac{1}{2}\{\hat{\phi}''(0)\}_2\right]\phi^2 + \ldots \approx 0\,, \tag{5.43}$$

όπου έχουμε εισαγάγει την παράμετρο Hubble $H = \dot{a}/a$. Έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει τα αναπτύγματα

$$H \approx H(0) + H'(0)\phi + \ldots$$

και

$$\hat{\phi}'' \approx \hat{\phi}''(0) + \{\hat{\phi}''(0)\}_1\phi + \frac{1}{2}\{\hat{\phi}''(0)\}_2\phi^2 + \ldots .$$

Η εξίσωση (5.43) ικανοποιείται για $\hat{\phi}''(0) = 0$,

$$\{\hat{\phi}''(0)\}_1 = \kappa^2 - 3\kappa H(0) + V''(0) + \frac{5\xi}{3}(V(0)+\Lambda) + \frac{\xi}{9M^3}\sigma^2$$

και

$$\{\hat{\phi}''(0)\}_2 = -6\kappa H'(0)\,.$$

Αν περιορίζαμε επιπλέον την επιτρεπτή μορφή των $\hat{\phi}''$ και V, θα ήμασταν υποχρεωμένοι να επιβάλουμε λεπτή ρύθμιση στις παραμέτρους κ, $H(0)$ και $H'(0)$. Για $\hat{\phi}'' = 0$ και $V = 0$, η εξίσωση (5.43) ανάγεται στην

$$H'(0) = 0,\ H(0) = \frac{1}{3\kappa}\left(\kappa^2 + \frac{5\xi}{3}\Lambda + \frac{\xi}{9M^3}\sigma^2\right)\,, \tag{5.44}$$

η οποία παρέχει μία προσεγγιστική λύση για την σταθερά H, που εξαρτάται από το ξ.

5.5 Μία Κλάση Προσεγγιστικών Λύσεων

Ας θεωρήσουμε τώρα τις εξισώσεις μας για την κοσμολογική εξέλιξη, παρουσία ύλης πάνω στη μεμβράνη, αλλά απουσία ύλης στο Υπερχώρο, εκτός από το βαθμωτό πεδίο. Για τη συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου σε μεγάλους χρόνους, θα υιοθετήσουμε μία προδιαγραφή, η οποία να έχει τη μορφή αρνητικής δύναμης του χρόνου με έναν, προς το παρόν, απροσδιόριστο εκθέτη α, συγκεκριμένα

$$\phi(t) \approx \frac{C_1}{t^{\alpha}} \,. \tag{5.45}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχική δευτεροτάξια εξίσωση για τον παράγοντα κλίμακας αντί για τον φορμαλισμό του πεδίου σκοτεινής ακτινοβολίας, αφού και οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες. Για την ύλη στη μεμβράνη θα θεωρήσουμε την καταστατική εξίσωση $p = wp$. Με αυτή την καταστατική εξίσωση, η εξίσωση συνέχειας (5.22) δίνει

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\rho = 0 \implies \rho \propto a^{-3(1+w)} \,. \tag{5.46}$$

Για την παραπάνω προδιαγραφή, το ζεύγος εξισώσεων εξέλιξης δίνει

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{\sigma^2}{12fu} + \frac{\sigma}{24fu}\rho(1-3w)$$
$$+\frac{1}{6f}(V+\Lambda) - \frac{\dot{\phi}^2}{12f}(1+4f'') - \frac{f'}{3f}\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right) , \tag{5.47}$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \hat{\phi}'' + \frac{u'}{2u}\dot{\phi}^2 \approx -\frac{6f}{u}V'(\phi)$$
$$+10\frac{f'}{u}(V+\Lambda) + 4\frac{f'(u+f'u')\sigma}{u^3}\rho(1-3w) + \frac{8f'(u+f'u')\sigma^2}{u^3} \,. \tag{5.48}$$

Για την επιλεγμένη δευτεροβάθμια μορφή της συνάρτησης σύζευξης (5.27), η u μετατρέπεται στην απλή έκφραση $u = 12M^3\left[1 - \xi\left(1 - \xi/\xi_c\right)\phi^2/2\right]$, όπου $\xi_c \equiv 3/32M^3$ είναι η σύμμορφη τιμή της παραμέτρου σύζευξης [3]. Οι παράγωγοι της συνάρτησης σύζευξης που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση είναι $f' = -(2M^3)\xi\phi$ και $u' = -12M^3(1-\xi/\xi_c)\xi\phi$. Θα θεωρήσουμε επίσης ένα απλό δευτεροβάθμιο βαθμωτό δυναμικό και χωρίς απώλεια γενικότητας θα επιβάλουμε να μηδενίζεται στην αρχή, $V(\phi) = \mu^2\phi^2/2$.

Στη συνέχεια, εισάγουμε μία προδιαγραφή για τον παράγοντα κλίμακας με τη μορφή

$$a(t) \approx C_3\, t^{\nu} , \tag{5.49}$$

έγκυρη για μεγάλους χρόνους, με βάση έναν εκθέτη ν, ο οποίος μένει να προσδιοριστεί. Εισάγοντας την προδιαγραφή (5.49) για τον παράγοντα κλίμακας, το βαθμωτό πεδίο (5.45) και αντικαθιστώντας την πυκνότητα ενέργειας (5.46) ως

$$\rho = C_4\, t^{-3\nu(1+w)} \tag{5.50}$$

[3] Η ενεργός κοσμολογική "σταθερά" πάνω στη μεμβράνη είναι $\lambda = \left(\Lambda + \sigma^2/2u\right)/12f$. Για τη σύμμορφη τιμή της παραμέτρου σύζευξης $\xi = \xi_c$, έχουμε $u = 12M^3$ για όλα τα ϕ, και η συνήθης συνθήκη λεπτής ρύθμισης Randall-Sundrum δίνει $\lambda = 0$, όπως και στην περίπτωση ελάχιστης σύζευξης.

στην εξίσωση Friedmann παίρνουμε

$$\frac{\nu(2\nu-1)}{t^2} \approx \frac{1}{48M^3}\left\{\frac{\sigma^2}{6M^3}+4\Lambda+\left(\frac{\sigma(1-3w)C_4}{12M^3}\right)\frac{1}{t^{3\nu(1+w)}}\right.$$
$$+\frac{C_1^2}{t^{2\alpha}}\left[2\mu^2+2\xi\left(\Lambda+\frac{4(2\xi_c-\xi)\sigma^2}{9}\right)+\frac{4\xi C_4(1-3w)(2\xi_c-\xi)\sigma}{9}\frac{1}{t^{3\nu(1+w)}}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2\alpha}{t^2}\left[\alpha(1-16M^3\xi)+8M^3\xi(3\nu-1)\right]\right]\right\}. \qquad (5.51)$$

Θεωρούμε ότι $\alpha > 1$. Κρατώντας μόνο όρους μέχρι δεύτερης τάξεως, φτάνουμε στις συνθήκες

$$\nu = \frac{2}{3(1+w)}, \qquad (5.52)$$

$$\Lambda + \frac{\sigma^2}{24M^3} = 0, \qquad (5.53)$$

$$\nu(2\nu-1) = \frac{\sigma(1-3w)}{144(2M^3)^2}C_4. \qquad (5.54)$$

Διαπιστώνουμε ότι η (5.53) είναι η συνήθης λεπτή ρύθμιση για μηδενική κοσμολογική σταθερά πάνω στη μεμβράνη.

Με αντίστοιχο τρόπο, η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου δίνει

$$\alpha\left[\alpha+1-3\nu\right]\frac{C_1}{t^{\alpha+2}} - \hat{\phi}'' + O(t^{-(3\alpha+2)}) \approx -\frac{\mu^2 C_1}{t^\alpha}\left[1-\frac{\xi^2}{2\xi_c}\frac{C_1^2}{t^{2\alpha}}\right]$$
$$-\frac{5\xi}{3}\frac{C_1}{t^\alpha}\left[\Lambda+\left(\frac{\mu^2}{2}+\frac{\xi}{2}\left(1-\frac{\xi}{\xi_c}\right)\Lambda\right)\frac{C_1^2}{t^{2\alpha}}\right]$$
$$-\frac{\xi\sigma}{18M^3}\left(2\sigma+\frac{C_4}{t^2}(1-3w)\right)\frac{C_1}{t^\alpha}\left[1+\xi\left(1-\frac{\xi}{\xi_c}\right)(1+2M^3\xi)\frac{C_1^2}{t^{2\alpha}}\right]. \qquad (5.55)$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την εξίσωση (5.52). Στο σημείο αυτό πρέπει επίσης να επιλέξουμε μία προδιαγραφή για την άγνωστη συνάρτηση $\hat{\phi}''$.

Προδιαγραφή 1 : $\hat{\phi}'' \propto \ddot{\phi}$

Αυτή αντιστοιχεί σε μία συμπεριφορά για μεγάλους χρόνους

$$\hat{\phi}'' = \frac{C_2}{t^{\alpha+2}}. \qquad (5.56)$$

Αντικαθιστώντας αυτήν στην εξίσωση (5.55), παίρνουμε τις δύο σχέσεις

$$C_2 - \frac{(1-3w)\xi\sigma}{18M^3}C_1C_4 = C_1\alpha(\alpha+1-3\nu), \quad \mu^2 = -\frac{\xi\sigma^2}{24M^3}. \qquad (5.57)$$

Έχουμε θεωρήσει μόνο όρους μέχρι δεύτερης τάξεως και αγνοήσαμε όρους της μορφής $O(t^{-3\alpha})$.

Από τις εξισώσεις (5.52), (5.54), (5.57), μπορούμε να καθορίσουμε τις τιμές των Λ, μ^2 και C_4, οπότε βρίσκουμε

$$\alpha = \frac{3\nu - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(3\nu-1)^2}{2} + \frac{C_2}{C_1} - 3\frac{\xi}{\xi_c}\nu\,(2\nu - 1)}\,. \tag{5.58}$$

Σημειώνουμε ότι το ν δίνεται από την (5.52). Για $\nu < 1$, ή ισοδύναμα, $w > -1/3$, ο εκθέτης α είναι πραγματικός για κάθε τιμή του ξ. Αντίθετα, για $\nu > 1$, ή ισοδύναμα, $-1 < w < -1/3$, ο εκθέτης α είναι πραγματικός και θετικός για

$$\xi \le \xi_c \frac{\left[(3\nu-1)^2 + 4\frac{C_2}{C_1}\right]}{12\nu(\nu-1)}\,.$$

Η ανισότητα αυτή περιορίζει τις τιμές που το ξ επιτρέπεται να πάρει, προκειμένου να έχουμε πραγματικές τιμές του α και μία τιμή του ν η οποία να αντιστοιχεί σε επιταχυνόμενη διαστολή. Η παρουσία της ελεύθερης παραμέτρου $\frac{C_2}{C_1}$ επιτρέπει έναν βαθμό ευελιξίας στην επιλογή του ξ για μικρές τιμές του ν.

Προδιαγραφή 2 : $\hat{\phi}'' \propto \phi$

Η επιλογή αυτή αντιστοιχεί, για μεγάλους χρόνους, σε συμπεριφορά της μορφής

$$\hat{\phi}'' = \frac{C_2}{t^\alpha}\,, \tag{5.59}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του βαθμωτού πεδίου (5.55), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\alpha\left[\alpha + 1 - 3\nu\right]\frac{C_1}{t^{\alpha+2}} - \frac{C_2}{t^\alpha} + O(t^{-(3\alpha+2)}) &\approx -\frac{\mu^2 C_1}{t^\alpha}\left[1 - \frac{\xi^2}{2\xi_c}\frac{C_1^2}{t^{2\alpha}}\right] \\
&\quad -\frac{5\xi}{3}\frac{C_1}{t^\alpha}\left[\Lambda + \left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{\xi}{2}\left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)\Lambda\right)\frac{C_1^2}{t^{2\alpha}}\right] \\
&\quad -\frac{\xi\sigma}{18M^3}\left(2\sigma + \frac{C_4}{t^2}(1-3w)\right)\frac{C_1}{t^\alpha}\left[1 + \xi\left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)(1 + 2M^3\xi)\frac{C_1^2}{t^{2\alpha}}\right].
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Αγνοώντας όρους $O(t^{-3\alpha})$, εξάγουμε τις σχέσεις

$$\frac{C_2}{C_1} = \mu^2 + \frac{5\xi}{3}\Lambda + \frac{\xi\sigma^2}{9M^3}\,, \tag{5.61}$$

$$\alpha(\alpha + 1 - 3\nu) = -\frac{(1-3w)\xi\sigma}{18M^3}C_4\,. \tag{5.62}$$

Από αυτές, παίρνουμε μία σχεδόν ταυτόσημη έκφραση για τον εκθέτη α, όπως στην περίπτωση της προηγούμενης προδιαγραφής. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο όρος C_2/C_1 απουσιάζει. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\alpha = \frac{3\nu - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(3\nu-1)^2}{4} - 3\frac{\xi}{\xi_c}\nu(2\nu - 1)}\,. \tag{5.63}$$

Το ν δίνεται από την (5.52). Για $\nu < 1$ ή $w > -1/3$, ο εκθέτης α είναι πραγματικός για κάθε τιμή του ξ. Αντίθετα, για $\nu > 1$ ή $-1 < w < -1/3$, ο εκθέτης είναι πραγματικός και θετικός για

$$\xi \leq \xi_c \frac{(3\nu - 1)^2}{12\nu(\nu - 1)} . \tag{5.64}$$

Συγκριτικά με την προηγούμενη προδιαγραφή, το εύρος επιτρεπόμενων τιμών για το ξ είναι μικρότερο εδώ. Στην περίπτωση αυτή, η ελεύθερη παράμετρος $\frac{C_2}{C_1}$ είναι παρούσα στην έκφραση για το μ^2, η οποία παράγεται από την (5.61), συγκεκριμένα

$$\mu^2 = \frac{C_2}{C_1} - \frac{\xi\sigma^2}{24M^3} .$$

5.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την κοσμολογική εξέλιξη πάνω σε μία τετραδιάστατη μεμβράνη εμβαπτισμένη σε έναν πενταδιάστατο Υπερχώρο, παρουσία ενός Περιβάλλοντος βαθμωτού πεδίου, μη-ελάχιστα συζευγμένου με τη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci, μέσω ενός όρου $f(\phi)R$. Εξαγάγαμε τις κοσμολογικές εξισώσεις χρονικής εξέλιξης πάνω στη μεμβράνη, παρουσία αυθαίρετου περιεχομένου ύλης στην μεμβράνη και τον Υπερχώρο. Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης για το βαθμωτό πεδίο στην μεμβράνη περιέχει το μέρος της δεύτερης παραγώγου του πεδίου που δεν διαθέτει συμπεριφορά κατανομής ($\hat{\phi}''$), μία άγνωστη ποσότητα που απαιτεί γνώση της εξάρτησης του πεδίου από την πέμπτη διάσταση. Προχωρήσαμε στη μελέτη μας θεωρώντας την ποσότητα αυτή ως μία συνάρτηση που εξαρτάται από τη δομή του Υπερχώρου και εισαγάγαμε διάφορες προδιαγραφές για αυτήν. Αν και παραγάγαμε τις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για μία γενική συνάρτηση σύζευξης, επικεντρωθήκαμε σε μία δευτεροβάθμια μορφή αυτής, συγκεκριμένα την $f(\phi) = 2M^3(1 - \xi\phi^2/2)$. Χρησιμοποιήσαμε τον φορμαλισμό πεδίου σκοτεινής ενέργειας για τις εξισώσεις του παράγοντα κλίμακας, στα πλαίσια του οποίου η δευτεροτάξια διαφορική εξίσωση για τον παράγοντα κλίμακας αντικαθίσταται από μία ενεργό πρωτοτάξια εξίσωση Friedmann και μία εξίσωση για την βοηθητική μεταβλητή. Εξετάσαμε πρώτα την περίπτωση όπου δεν υπάρχει καθόλου ύλη στη μεμβράνη ή τον Υπερχώρο. Δείξαμε ότι υπάρχουν λύσεις για μεγάλους χρόνους, με ένα σταθερό ή εκθετικά μειούμενο βαθμωτό πεδίο, στις οποίες η εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας οφείλεται είτε σε μία ενεργό κοσμολογική σταθερά είτε σε σκοτεινή ακτινοβολία. Η τιμή της ενεργού κοσμολογικής σταθεράς μπορεί και στις δύο περιπτώσεις να εξαρτάται από την παράμετρο σύζευξης. Αν και οι λύσεις αυτές δεν επιβάλλουν κάποιου είδους περιορισμό στην παράμετρο σύζευξης, εξαρτώνται από τη συμπεριφορά του $\hat{\phi}''$. Στη συνέχεια, θεωρήσαμε την περίπτωση όπου, εκτός από το βαθμωτό πεδίο, υπάρχει επιπλέον ύλη πάνω στη μεμβράνη. Χρησιμοποιήσαμε μία προδιαγραφή για τον παράγοντα κλίμακας με μορφή νόμου δύναμης ($a \sim t^\nu$) και θεωρήσαμε ένα βαθμωτό πεδίο που μειώνεται με το χρόνο, ακολουθώντας επίσης έναν νόμο δύναμης για μεγάλους χρόνους ($\phi \sim t^{-\alpha}$). Οι προκύπτοντες περιορισμοί εξαρτώνται από τις υποθέσεις για τη συμπεριφορά της $\hat{\phi}''$. Εξετάζοντας πρώτα την περίπτωση $\hat{\phi}'' \propto \ddot{\phi}$, είδαμε ότι όντως παίρνουμε τέτοιου είδους λύση για μεγάλους χρόνους μόνο για ύλη στη μεμβράνη με καταστατική παράμετρο $-1 < w < -1/3$ και παράμετρο σύζευξης $\xi < \xi_c[(3\nu-1)^2 + 4C_2/C_1]/12\nu(\nu-1)$. Ο λόγος C_2/C_1 είναι ο λόγος των συντελεστών $\hat{\phi}''/\phi$. Κατόπιν, θεωρήσαμε την περίπτωση όπου $\hat{\phi}'' \propto \phi$ και βρήκαμε ότι, ξανά, τέτοιου είδους λύσεις είναι δυνατές μόνο για ύλη μεμβράνης με καταστατική παράμετρο $-1 < w < -1/3$ και παράμετρο σύζευξης $\xi < \xi_c(3\nu-1)^2/12\nu(\nu-1)$. Τα αποτελέσματα αυτά αντιστοιχούν σε ένα απλό δευτεροβάθμιο βαθμωτό δυναμικό, αλλά δεν περιμένουμε να τροποποιούνται από υψηλότερες δυνάμεις στο δυναμικό για μεγάλους χρόνους. Ωστόσο, θα μπορούσαν να αλλάξουν από την παρουσία ύλης στον Υπερχώρο, η οποία να αλληλεπιδρά με την μεμβράνη.

Κεφάλαιο 6

Κοσμολογία Μοντέλων Μεβρανών και Περιβάλλουσα Ύλη

6.1 Κοσμολογική Εξέλιξη στη Μεμβράνη με Περιβάλλουσα Ύλη

6.1.1 Εισαγωγή

Τα πρόσφατα κοσμολογικά δεδομένα [23, 26, 27, 96] παρέχουν ενδείξεις για το γεγονός ότι ένα σημαντικό ποσοστό της ολικής ενέργειας του σύμπαντος μπορεί να αποδοθεί σε ένα συστατικό, το οποίο αναφέρεται συχνά ως *"σκοτεινή ενέργεια"*. Η σκοτεινή ενέργεια είναι η κινητήριος δύναμη πίσω από την παρατηρούμενη επιταχυνόμενη κοσμική διαστολή. Η φυσική της προέλευση είναι, κατά το μεγαλύτερο μέρος της, άγνωστη μέχρι στιγμής και αποτελεί το αντικείμενο έντονων θεωρητικών υποθέσεων και επίπονων ερευνών. Ανάμεσα στα πολυάριθμα κοσμολογικά μοντέλα της σκοτεινής ενέργειας, συναντάμε την κοσμολογική σταθερά, εξωτικές μορφές ύλης, οι οποίες παραβιάζουν τις ενεργειακές συνθήκες, όπως τα πεδία-φαντάσματα [65, 66, 67], την πεμπτουσία [60, 61, 62, 63, 64], καθώς και μοντέλα τα οποία προσφεύγουν σε τροποποιήσεις της ίδιας της βαρυτικής θεωρίας [100, 101]. Η κοσμολογική σταθερά αποτελεί αναμφισβήτητα το απλούστερο ανάμεσα σε αυτά τα εγχειρήματα εξήγησης, αν και η τεράστια λεπτή ρύθμιση η οποία απαιτείται προκειμένου να εξηγηθεί η σημερινή, πολύ μικρή της τιμή φαντάζει ιδιαίτερα δυσάρεστη για την πλειοψηφία των θεωρητικών φυσικών [97, 98, 28, 29]. Ανεξάρτητα από τις προκλήσεις που θέτει το αίνιγμα της σκοτεινής ενέργειας, κατά τα τελευταία χρόνια, θεωρίες με επιπλέον χωρικές διαστάσεις, στις οποίες το παρατηρούμενο σύμπαν βρίσκεται εμβαπτισμένο εν είδει *μεμβράνης* μέσα σε έναν χώρο υψηλότερης διάστασης (*Περιβάλλων*), έχουν συγκεντρώσει μεγάλο ενδιαφέρον. Η συνηθισμένη ύλη βρίσκεται περιορισμένη πάνω στην μεμβράνη, αλλά η βαρύτητα είναι ελεύθερη να διαδίδεται μέσα σε ολόκληρο τον χωρόχρονο [81, 38, 82, 39, 40]. Στις θεωρίες αυτές, η κοσμολογική εξέλιξη πάνω στη μεμβράνη περιγράφεται από μία ενεργό εξίσωση Friedmann [74], η οποία ενσωματώνει μη-τετριμμένες συνεισφορές εξαιτίας της ύπαρξης του Υπερχώρου. Τα μοντέλα μεμβρανών ανοίγουν έτσι νέες προοπτικές για την αντιμετώπιση σύγχρονων προβλημάτων της κοσμολογίας, όπως η επιταχυνόμενη κοσμική διαστολή [43, 44].

Η ύπαρξη ενός Υπερχώρου υψηλότερης διάστασης επιτρέπει επίσης το ενδεχόμενο της παρουσίας περιβάλλουσας ύλης. Η ύλη αυτή, καθώς μπορεί να επηρεάσει την κοσμολογική εξέλιξη πάνω στη μεμβράνη, θα μπορούσε να είναι ένα σημαντικό συστατικό αυτού που αποκαλούμε σκοτεινή ενέργεια. Καθώς εξ υποθέσεως δεν μπορούμε να ανιχνεύσουμε άμεσα τον Υπερχώρο και την ύλη που ενδεχομένως περιέχει, η κοσμολογική εξέλιξη της μεμβράνης, τροποποιημένη από τα φαινόμενα που οφείλονται στις βαρυτικές ιδιότητες της σκοτεινής ενέργειας, παρέχει έναν έμμεσο τρόπο για να μελετήσουμε τις ιδιότητες του Υπερχώρου και την δυναμική του. Είναι επίσης δυνατό οι φαινόμενες ιδιότητες της σκοτεινής ενέργειας, οι οποίες αποδίδονται σε πεδία-φαντάσματα, να είναι αποτέλεσμα της επίδρασης της περιβάλλουσας ύλης στην κοσμολογία της μεμβράνης, παρόλο που καμία από τις δύο συνιστώσες ύλης στον Υπερχώρο και την μεμβράνη δεν φέρει τέτοιου είδους εξωτικά χαρακτηριστικά [114, 115].

Προκύπτει ότι, τόσο η πίεση της περιβάλλουσας ύλης, όσο και η μη-διαγώνια 05 συνιστώσα του τανυστή ορμής-ενέργειας του Υπερχώρου, μπορούν να εισέρχονται στις κοσμολογικές εξισώσεις της μεμβράνης και να έχουν σημαντικές επιπτώσεις στην εξέλιξη του τετραδιάστατου σύμπαντος. Μοντέλα όπου παρατηρείται ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του Υπερχώρου και της μεμβράνης έχουν ήδη κατασκευαστεί [116, 117, 118, 119, 111] και αυτού του είδους η αλληλεπίδραση φαίνεται ικανή να δράσει ως κινητήριος δύναμη για την επιταχυνόμενη διαστολή, υπό ορισμένες συνθήκες. Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμε την κοσμολογική εξέλιξη της μεμβράνης, παρουσία περιβάλλουσας ύλης. Υιοθετούμε μία φαινομενολογική περιγραφή για την περιβάλλουσα ύλη, την οποία μοντελοποιούμε ως κλασικό ρευστό και παράγουμε ακριβείς λύσεις της ενεργού εξίσωσης Friedmann με χρονικό προφίλ που αντιστοιχεί σε επιταχυνόμενη διαστολή [112]. Βρίσκουμε ότι, αν και η καταστατική παράμετρος του περιβάλλοντος ρευστού δεν παρουσιάζει κάποια μη-κανονική συμπεριφορά, για κατάλληλες τιμές της περιβάλλουσας πίεσης και της σταθεράς σκοτεινής ακτινοβολίας, η ενεργός καταστατική παράμετρος για τη σκοτεινή ενέργεια μπορεί να τέμνει την γραμμή $w = -1$.

6.1.2 Γενικό Πλαίσιο του Μοντέλου

Θεωρούμε μία δράση της γενικής μορφής

$$S = \int d^5x\sqrt{-G}\left(2M^3R - \Lambda + \mathcal{L}_B^{(m)}\right) + \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\sigma + \mathcal{L}_b^{(m)}\right). \tag{6.1}$$

G_{MN} είναι η πενταδιάστατη μετρική με υπογραφή $(-,+,+,+,+)$ και $g_{\mu\nu}$ η αντίστοιχη τετραδιάστατη μετρική πάνω στη μεμβράνη. R είναι το πενταδιάστατο βαθμωτό Ricci , ενώ Λ είναι η περιβάλλουσα κοσμολογική σταθερά και σ η θετική τάση της μεμβράνης. Έχουμε συμπεριλάβει αυθαίρετο περιεχόμενο ύλης, τόσο στη μεμβράνη όσο και στον Υπερχώρο, μέσω των όρων $\mathcal{L}_B^{(m)}$ και $\mathcal{L}_b^{(m)}$ αντίστοιχα. Με M δηλώνουμε την πενταδιάστατη μάζα Planck. Μεταβάλλοντας τη δράση ως προς τη μετρική, παίρνουμε τις εξισώσεις Einstein

$$\mathcal{G}_{MN} \equiv R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R = \frac{1}{4M^3}T_{MN}. \tag{6.2}$$

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας T_{MN}, ο οποίος προκύπτει από την παραπάνω δράση, είναι της μορφής

$$T_{MN} = T^{(B)}_{MN} + T^{(b)}_{MN} - G_{MN}\Lambda - g_{\mu\nu}\,\sigma\,\delta(y)\,\delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\,, \tag{6.3}$$

όπου ο $T^{(B)}_{MN}$ προέρχεται από τον όρο $\mathcal{L}^{(m)}_{B}$ και ο $T^{(b)}_{MN}$ από τον $\mathcal{L}^{(m)}_{b}$.

Η προδιαγραφή που θα χρησιμοποιήσουμε για τη μετρική είναι της μορφής που συναντάμε στις αναφορές [43, 44]

$$ds^2 = -n^2(y,t)dt^2 + a^2(y,t)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(y,t)dy^2 \tag{6.4}$$

ή

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} -n^2(y,t) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(y,t)\gamma_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & b^2(y,t) \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

έτσι ώστε να έχουμε μία μεμβράνη γεωμετρίας Friedmann-Robertson-Walker, με μία μέγιστα-συμμετρική τρισδιάστατη μετρική γ_{ij}. Η πέμπτη διάσταση σημειώνεται με y, και η μεμβράνη βρίσκεται τοποθετημένη στη θέση $y=0$. Θεωρούμε συμμετρία $\mathbf{Z}_2$ και η y παίρνει τιμές στο διάστημα $[-\infty, +\infty]$. Οι συναρτήσεις της μετρικής $n(y,t)$, $a(y,t)$ και $b(y,t)$ είναι συνεχείς ως προς την y, αλλά μπορούν να έχουν ασυνεχείς πρώτες παραγώγους στη θέση της μεμβράνης.

Ως περιβάλλοντα τανυστή ορμής-ενέργειας $T^{(B)}_{MN}$ θα θεωρήσουμε τον πίνακα

$$T^{(B)M}{}_{N} = \begin{pmatrix} -\rho_B & 0 & P_5 \\ 0 & P_B\delta^{i}{}_{j} & 0 \\ -\frac{n^2}{b^2}P_5 & 0 & \overline{P}_B \end{pmatrix},$$

$$T^{(B)}_{MN} = \begin{pmatrix} \rho_B n^2 & 0 & -n^2 P_5 \\ 0 & P_B a^2\gamma_{ij} & 0 \\ -n^2 P_5 & 0 & \overline{P}_B b^2 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Τονίζουμε την ύπαρξη του μη-διαγώνιου στοιχείου $T^0_5 = P_5$, το οποίο αντιπροσωπεύει τη ροή ενέργειας προς (ή από) τη μεμβράνη. Παρατηρούμε επίσης ότι έχουμε κάνει μία ανισοτροπική επιλογή για την πίεση στον Υπερχώρο, $\overline{P}_B \neq P_B$, εν γένει.

Ως τανυστή ορμής-ενέργειας της μεμβράνης $T^{(b)}_{MN}$ θα θεωρήσουμε αντίστοιχα τον πίνακα

$$T^{(b)M}{}_{N} = \frac{\delta(y)}{b}\begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & p\delta^{i}{}_{j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(b)}_{MN} = \frac{\delta(y)}{b}\begin{pmatrix} \rho n^2 & 0 & 0 \\ 0 & p a^2\gamma_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω προδιαγραφές για την μετρική (6.5) και τον τανυστή ορμής-ενέργειας (6.6), (6.7) στις εξισώσεις κίνησης (6.2), παράγουμε τις εξισώσεις

$$3\left\{ \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right) - \frac{n^2}{b^2}\left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\right) + k\frac{n^2}{a^2} \right\}$$

$$= \frac{n^2}{4M^3}\left\{ \Lambda + \rho_B + \frac{\delta(y)}{b}(\sigma + \rho) \right\}, \tag{6.8}$$

$$\frac{a^2}{b^2}\gamma_{ij}\left\{ \frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a} + 2\frac{n'}{n}\right) - \frac{b'}{b}\left(\frac{n'}{n} + 2\frac{a'}{a}\right) + 2\frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\}$$

$$+\frac{a^2}{n^2}\gamma_{ij}\left\{ \frac{\dot a}{a}\left(-\frac{\dot a}{a} + 2\frac{\dot n}{n}\right) - 2\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot b}{b}\left(-2\frac{\dot a}{a} + \frac{\dot n}{n}\right) - \frac{\ddot b}{b} \right\} - k\gamma_{ij}$$

$$= \frac{a^2}{4M^3}\left\{ -\Lambda + P_B + \frac{\delta(y)}{b}(p - \sigma) \right\}\gamma_{ij}, \tag{6.9}$$

$$3\left(\frac{n'}{n}\frac{\dot a}{a} + \frac{a'}{a}\frac{\dot b}{b} - \frac{\dot a'}{a}\right) = -\frac{n^2}{4M^3}P_5, \tag{6.10}$$

$$3\left\{ \frac{a'}{a}\left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n}\right) - \frac{b^2}{n^2}\left(\frac{\dot a}{a}\left(\frac{\dot a}{a} - \frac{\dot n}{n}\right) + \frac{\ddot a}{a}\right) - k\frac{b^2}{a^2} \right\} = \frac{b^2}{4M^3}\left(-\Lambda + \overline{P}_B\right), \tag{6.11}$$

όπου τελείες δηλώνουν χρονικές παραγώγους και τόνοι παραγώγους ως προς y. Η καμπυλότητα του εσωτερικού, μέγιστα συμμετρικού χώρου, παραμετροποιείται από την ποσότητα $k = -1, 0, 1$.

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να επιλέξουμε *κάθετες συντεταγμένες Gauss*, έτσι ώστε $b(t, y) = 1$. Επιπλέον, έχουμε την ελευθερία να θέσουμε $n(0, t) = n_0(t) = 1$. Μετά από αυτές τις απλοποιήσεις, οι *Συνθήκες Συνέχειας* στη μεμβράνη, οι οποίες προκύπτουν από τις (6.8) και (6.9), είναι

$$a'(+0, t) = -\frac{a_0}{24M^3}(\sigma + \rho), \quad n'(+0, t) = -\frac{1}{24M^3}(\sigma - 2\rho - 3p), \tag{6.12}$$

όπου $a_0(t) \equiv a(0, t)$ και $n_0(t) \equiv n(0, t)$. Έχουμε χρησιμοποιήσει συμμετρία $\mathbf{Z_2}$, θεωρώντας $a'(-0, t) = -a(+0, t)$ και $n'(-0, t) = -n'(+0, t)$.

Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις κίνησης πάνω στη μεμβράνη και επιστρατεύοντας τις Συνθήκες Συνέχειας, παίρνουμε

$$\dot\rho + 3(\rho + p)\frac{\dot a_0}{a_0} = -2P_5, \tag{6.13}$$

$$\frac{\ddot a_0}{a_0} + \left(\frac{\dot a_0}{a_0}\right)^2 + \frac{k}{a_0^2} = \frac{1}{(24M^3)^2}(\sigma + \rho)(2\sigma - \rho - 3p) + \frac{1}{12M^3}\left(\Lambda - \overline{P}_B\right). \tag{6.14}$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις αυτές εκφράζει την διατήρηση ενέργειας στη μεμβράνη. Για μη μηδενική P_5, υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της μεμβράνης και του Υπερχώρου και η πυκνότητα ενέργειας ρ στη μεμβράνη προφανώς δε διατηρείται. Η δεύτερη εξίσωση θα μας δώσει την τροποποιημένη εξίσωση Friedmann στη μεμβράνη. Διαπιστώνουμε ότι η συνιστώσα "55" της περιβάλλουσας πίεσης εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (6.14), επηρεάζοντας έτσι την κοσμολογική εξέλιξη.

6.1.3 Εξίσωση Friedmann και Διατήρηση Ενέργειας

Συνεχίζουμε θεωρώντας την εξίσωση (6.14), η οποία καθορίζει την χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας της μεμβράνης. Θα υποθέσουμε ότι ισχύει μία καταστατική εξίσωση $p = w\rho$ μεταξύ της πυκνότητας ενέργειας και της πίεσης της ύλης στη μεμβράνη. Παραλείποντας τον δείκτη "o" και ορίζοντας $\beta \equiv (24M^3)^{-2}$ και $\gamma \equiv \sigma\beta$, παίρνουμε [111, 116, 117, 118, 119]

$$\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \gamma\rho(1-3w) - \beta\rho^2(1+3w) - \frac{\overline{P}_B}{12M^3} + \frac{\lambda}{12M^3}, \qquad (6.15)$$

όπου

$$\lambda \equiv \Lambda + \frac{\sigma^2}{24M^3}. \qquad (6.16)$$

Θα κάνουμε την υπόθεση ότι η ενεργός κοσμολογική σταθερά σε τέσσερις διαστάσεις λ μηδενίζεται. Έτσι, θα προχωρήσουμε θέτοντας $\lambda = 0$. Ενδιαφερόμαστε κύρια για την περίπτωση *χαμηλής πυκνότητας*, δηλαδή

$$(1+3w)\rho^2 \ll (1-3w)\rho\sigma. \qquad (6.17)$$

Η δευτεροτάξια εξίσωση χρονικής εξέλιξης (6.15), με $\lambda = 0$, μπορεί να γραφτεί στη μορφή δύο πρωτοτάξιων εξισώσεων, μία εκ των οποίων είναι ανάλογη με την εξίσωση Friedmann της συνηθισμένης κοσμολογίας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εισάγοντας την *μεταβλητή σκοτεινής ακτινοβολίας* $\chi(t)$. Το νέο σύνολο εξισώσεων είναι

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = 2\gamma\rho + \beta\rho^2 + \chi - \frac{\overline{P}_B}{12M^3}, \qquad (6.18)$$

$$\dot\chi + 4\frac{\dot a}{a}\left(\chi - \frac{\overline{P}_B}{24M^3}\right) - \frac{\dot{\overline{P}}_B}{12M^3} - 4P_5(\gamma + \beta\rho) = 0. \qquad (6.19)$$

Το ζεύγος αυτό[1] είναι ισοδύναμο με την (6.15).

Μαζί με τις δύο αυτές εξισώσεις, έχουμε επίσης την έκφραση για τη διατήρηση ενέργειας (6.13). Θεωρώντας την προσέγγιση χαμηλής πυκνότητας, το σύνολο αυτό των εξισώσεων ανάγεται στις

$$\dot\rho + 3\rho\frac{\dot a}{a}(1+w) = -2P_5, \qquad (6.20)$$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = 2\gamma\rho + \chi - \frac{\overline{P}_B}{12M^3}, \qquad (6.21)$$

$$\dot\chi + 4\frac{\dot a}{a}\left(\chi - \frac{\overline{P}_B}{24M^3}\right) = \frac{\dot{\overline{P}}_B}{12M^3} + 4P_5\gamma. \qquad (6.22)$$

[1]Συγκρίνοντας την πρώτη από τις εξισώσεις αυτές με την αρχική μας εξίσωση χρονικής εξέλιξης (6.15), έχουμε

$$\frac{\ddot a}{a} = -\chi - (3w+2)\beta\rho^2 - (3w+1).$$

Διαφορίζοντας την (6.18) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση αυτή αποδεικνύεται η (6.19).

Η εξίσωση (6.21) είναι η *εξίσωση Friedmann*, που περιγράφει την κοσμολογική εξέλιξη στην μεμβράνη. Το βοηθητικό πεδίο χ ενσωματώνει τις μη-συμβατικές συνεισφορές (*σκοτεινή ακτινοβολία*), πέρα από το σύνηθες ενεργειακό περιεχόμενο της μεμβράνης. Η περιβάλλουσα ύλη συνεισφέρει στην ενέργεια της μεμβράνης, μέσω του όρου περιβάλλουσας πίεσης ($\overline{P}_B = T_{55}^{(B)}$), ο οποίος εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης Friedmann . Εκτός από αυτό, η περιβάλλουσα ύλη συνεισφέρει στην εξίσωση διατήρησης ενέργειας (6.20), μέσω της $P_5 = T_5^0$, η οποία περιγράφει ενέργεια που κινείται από την μεμβράνη προς τον Υπερχώρο ή αντίστροφα. Οι συναρτήσεις $\overline{P}_B$, P_5, είναι συναρτήσεις του χρόνου, που αντιστοιχούν στις τιμές των $\overline{P}_B(y,t)$ και $P_5(y,t)$, υπολογισμένων πάνω στη μεμβράνη. Η διατήρηση ορμής-ενέργειας, $\nabla_M T^M_N = 0$, δεν μπορεί να ορίσει πλήρως τις $\overline{P}_B$ και P_5, και για το λόγο αυτό πρέπει να επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο μοντέλο για την περιβάλλουσα ύλη. Σε ό,τι ακολουθεί, θα μοντελοποιήσουμε την περιβάλλουσα ύλη μέσω ενός φαινομενολογικού ιδανικού περιβάλλοντος ρευστού, πράγμα που μπορεί να μας οδηγήσει σε αναλυτικές λύσεις.

6.1.4 Ιδιότητες της Περιβάλλουσας Ύλης

Στο εδάφιο αυτό θα παραγάγουμε τις εξισώσεις διατήρησης για τις συνιστώσες του περιβάλλοντος τανυστή ορμής-ενέργειας και θα μελετήσουμε τους περιορισμούς που υφίστανται τα P_5 και $\overline{P}_B$ πάνω στη μεμβράνη για διάφορες προδιαγραφές και για το συγκεκριμένο μοντέλο ενός περιβάλλοντος ρευστού. Θεωρούμε την διατήρηση του τανυστή ορμής-ενέργειας

$$\nabla_M T^M_N = 0 \implies \partial_M T^M_N + \Gamma^M_{MR} T^R_N - \Gamma^R_{MN} T^M_R = 0 . \qquad (6.23)$$

Η συνιστώσα "0" της (6.23) είναι

$$\dot{\rho}_B + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_B + P_B) + 3n^2 P_5 \left(\frac{n'}{n} + \frac{a'}{a}\right) + n^2 P_5' + \delta(y)\left\{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)\right\} = 0 . \qquad (6.24)$$

Ολοκληρώνοντας γύρω από το $y = 0$ και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία $\mathbf{Z_2}$ ($P_5(+0,t) = -P_5(-0,t) \equiv P_5(t)$), αναπαράγουμε την εξίσωση κίνησης "05" πάνω στη μεμβράνη

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = -2P_5,$$

και στον Υπερχώρο την εξίσωση

$$\dot{\rho}_B + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_B + P_B) + 3n^2 P_5 \left(\frac{n'}{n} + \frac{a'}{a}\right) + n^2 P_5' = 0 . \qquad (6.25)$$

Αντίστοιχα, η συνιστώσα "5" της (6.23) δίνει

$$\overline{P}_B' + \dot{P}_5 + P_5 \left(\frac{\dot{n}}{n} + 3\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{n'}{n}\left(\overline{P}_B + \rho_B\right) = 0 . \qquad (6.26)$$

Στο όριο $y \to +0$, οι εξισώσεις αυτές γίνονται

$$\dot{\rho}_B + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_B + P_B) + P_5' = \frac{1}{8M^3}(2\sigma - \rho - 3p)P_5, \qquad (6.27)$$

$$\dot{P}_5 + 3\frac{\dot{a}}{a}P_5 + \overline{P}'_B = \frac{1}{24M^3}(\sigma - 2\rho - 3p)(\rho_B + \overline{P}_B). \tag{6.28}$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις, όπως έχουν, δεν μπορούν να περιορίσουν την ελευθερία που έχουμε στην επιλογή των $\overline{P}_B(t)$ και $P_5(t)$, αφού οι άγνωστες συναρτήσεις P'_5 και $\overline{P}'_B$ εμφανίζονται σε αυτές. Ωστόσο, συγκεκριμένα μοντέλα περιβάλλουσας ύλης θα περιορίσουν σε μεγάλο βαθμό την επιτρεπτή μορφή των συναρτήσεων αυτών.

Ως ένα συγκεκριμένο μοντέλο, θα θεωρήσουμε τον τανυστή ορμής-ενέργειας για ένα κλασικό ρευστό σε κίνηση, κινούμενο με ταχύτητα v κατά μήκος της πέμπτης διάστασης

$$T^M_N = P^{(0)}_B\,\delta^M_N + (\rho^{(0)}_B + P^{(0)}_B)\,U^M U_N\,, \tag{6.29}$$

με

$$U^0 = (1 - v^2)^{-1/2},\ U^i = 0,\ U^5 = v(1 - v^2)^{-1/2}.$$

Θεωρώντας μία καταστατική εξίσωση της μορφής

$$P^{(0)}_B = \omega\rho^{(0)}_B\,, \tag{6.30}$$

(ρευστό), παίρνουμε

$$T^M_N \approx \rho^{(0)}_B \begin{pmatrix} \omega - n^2(1+\omega) & 0 & v(1+\omega) \\ 0 & \omega\delta^i_j & 0 \\ -n^2 v(1+\omega) & 0 & \omega + v(1+\omega) \end{pmatrix} + O(v^2)\,. \tag{6.31}$$

Με βάση τις συνήθεις μεταβλητές των προηγούμενων εδαφίων, έχουμε

$$T^0_0 = -\rho_B = -\rho^{(0)}_B\left[n^2(1+\omega) - \omega\right]\,,\ T^0_5 = P_5 = \rho^{(0)}_B v(1+\omega)\,, \tag{6.32}$$

$$T^5_0 = -n^2 P_5 = -n^2 v(1+\omega)\rho^{(0)}_B\,,\ T^i{}_j = \delta^i{}_j P_B = \omega\rho^{(0)}_B\delta^i{}_j\,, \tag{6.33}$$

$$T^5_5 = \overline{P}_B = \rho^{(0)}_B\left[\omega + v(1+\omega)\right]. \tag{6.34}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στις εξισώσεις (6.27) και (6.28), παίρνουμε δύο εξισώσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν τις $\dot{\rho}^{(0)}_B$ και $\rho^{(0)\prime}_B$. Απαλείφοντας την χωρική παράγωγο μεταξύ τους, εξάγουμε μία πρωτοτάξια εξίσωση για το $\rho^{(0)}_B(0,t)$, συγκεκριμένα

$$\dot{\rho}^{(0)}_B\left[\omega + v(1+\omega)\right] + \rho^{(0)}_B\left\{3\frac{\dot{a}}{a}\omega(1+\omega) + 3\frac{\dot{a}}{a}v(1+\omega)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{v}{24M^3}\left[3\omega(1+\omega)(\rho + 3p - 2\sigma) + (1+\omega)^2(\sigma - 2\rho - 3p)\right]\right\} = 0\,. \tag{6.35}$$

Η λύση αυτής στην χαμηλότερη προσέγγιση είναι

$$\rho^{(0)}_B \approx \frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\left(1 + O(v\sigma/M^3) + O(v^2)\right). \tag{6.36}$$

Αυτή αντιστοιχεί σε

$$\rho_B = \frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\,(1 + \ldots)\,,\ P_B = \omega\frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\,(1 + \ldots)\,, \tag{6.37}$$

$$P_5 = v(1+\omega)\frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\,(1 + O(v^2))\,,\ \overline{P}_B = \omega\frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\,(1 + \ldots)\,. \tag{6.38}$$

Οι τελείες δηλώνουν όρους $O(v\sigma/M^3)$ και $O(v^2)$.

Από φαινομενολογικής απόψεως, είναι δυνατόν να γενικεύσουμε την προδιαγραφή αυτή, αποκλίνοντας από την ερμηνεία της με βάση το κλασικό ρευστό. Για παράδειγμα, εισαγωγή χρονικής εξάρτησης στην παράμετρο v θα προκαλούσε την εμφάνιση ενός επιπλέον όρου $\dot{v}$ στην (6.35), αλλά η χαμηλότερης τάξεως προσέγγιση (6.36) δεν θα επηρεαζόταν από την αλλαγή αυτή.

6.1.5 Ακριβείς Λύσεις και Επιτάχυνση σε Μεγάλους Χρόνους

Ας επιστρέψουμε τώρα στο σύνολο των κοσμολογικών εξισώσεων στην προσέγγιση χαμηλής πυκνότητας $\beta\rho \ll \gamma$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \beta\rho^2 + 2\gamma\rho - \frac{k}{a^2} + \chi - \frac{\overline{P}_B}{12M^3} \approx 2\gamma\rho - \frac{k}{a^2} + \chi - \frac{\overline{P}_B}{12M^3}\,, \tag{6.39}$$

$$\dot{\chi} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left(\chi - \frac{\overline{P}_B}{24M^3}\right) = 4\beta\left(\rho + \frac{\gamma}{\beta}\right)P_5 + \frac{\dot{\overline{P}}_B}{12M^3} \approx 4\gamma P_5 + \frac{\dot{\overline{P}}_B}{12M^3}\,, \tag{6.40}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho\,(1+w) = -2P_5 \quad . \tag{6.41}$$

Χρησιμοποιώντας την σχετική εξίσωση

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\,(3w+2)\,\beta\rho^2 - (3w+1)\,\gamma\rho - \chi \approx -\,(3w+1)\,\gamma\rho - \chi\,, \tag{6.42}$$

μπορούμε να γράψουμε μία γενική έκφραση για την *παράμετρο επιβράδυνσης* q, η οποία, για $k = 0$, είναι

$$q \equiv -\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{-2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \frac{\chi + (1+3w)\gamma\rho}{\chi + 2\gamma\rho - \frac{\overline{P}_B}{12M^3}}\,. \tag{6.43}$$

Συναντάμε επιταχυνόμενη συμπεριφορά όταν $q < 0$.

Η χρονική εξάρτηση του παράγοντα κλίμακας $a(t)$ καθορίζεται από την εξίσωση Friedmann (6.39), η οποία τελικά θα έχει τη γενική μορφή

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = C_0 + \sum_{n=1}^{N} C_n a^n + \sum_{n=1}^{\overline{N}} C_{-n} a^{-n}\,. \tag{6.44}$$

Θεωρώντας ότι έχουμε κοσμική διαστολή, σε μεγάλους χρόνους το δεξί μέλος θα κυριαρχείται από έναν όρο, οπότε

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx C_\nu a^\nu \,. \tag{6.45}$$

Ο προκύπτων παράγοντας κλίμακας για μεγάλους χρόνους είναι είτε

$$a(t) = a(t_0)\left[1 - \frac{\nu}{2}\sqrt{C_\nu}\,(a(t_0))^{2/\nu}\,(t-t_0)\right]^{-\frac{2}{\nu}} ,$$

για $\nu < 0$, ή

$$a(t) = a(t_0)\left(\frac{t_r - t}{t_r - t_0}\right)^{-\frac{2}{\nu}} ,$$

για $\nu > 0$. Ο χρόνος t_r είναι ο χρόνος *"μεγάλης σχάσης"* (big rip), στον οποίο ο παράγοντας κλίμακας αποκλίνει. Επιταχυνόμενη διαστολή μπορεί να επιτευχθεί με τετριμμένο τρόπο, όταν ο κυρίαρχος όρος είναι μία σταθερά. Γενικά, η επιταχυνόμενη διαστολή απαιτεί $q = -1-\nu/2 < 0$. Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε εάν η περιβάλλουσα ύλη μπορεί να προκαλέσει επιταχυνόμενη διαστολή, όταν δεν υπάρχει όρος κοσμολογικής σταθεράς ($\lambda = 0$) και η συνηθισμένη ύλη είναι σε μία τυπική φάση $w = 0$ ή $w = 1/3$.

Το σύνολο των κοσμολογικών εξισώσεων (6.39), (6.40), (6.41) μπορεί να λυθεί επακριβώς για την ακόλουθη γενική προδιαγραφή για την περιβάλλουσα πίεση πάνω στη μεμβράνη (βλέπε επίσης [114, 115])

$$\overline{P}_B = D\,a^\nu \,, \quad P_5 = F\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) a^\mu . \tag{6.46}$$

Θα προχωρήσουμε στην εξαγωγή της ακριβούς λύσεως, αλλά θα δικαιολογήσουμε την επιλογή μας για τη συγκεκριμένη προδιαγραφή στη συνέχεια. Αντικαθιστώντας την (6.46) στην εξίσωση (6.40), παίρνουμε

$$\dot{\chi} + 4\frac{\dot{a}}{a}\left(\chi - \delta a^\nu - \frac{\nu}{2}\delta a^\nu - \gamma F a^\mu\right) = 0$$

ή

$$\chi = \frac{\mathcal{C}}{a^4} + 2\delta\frac{(\nu+2)}{(\nu+4)}a^\nu + \frac{4F\gamma}{(\mu+4)}a^\mu , \tag{6.47}$$

όπου έχουμε ορίσει $\delta \equiv D/24M^3$. Αντίστοιχα, μπορούμε να προχωρήσουμε σε ολοκλήρωση της (6.41), οπότε παίρνουμε

$$\rho = \frac{\tilde{C}}{a^{3(1+w)}} - \frac{2F}{[3(1+w)+\mu]}a^\mu . \tag{6.48}$$

Αντικαθιστώντας τις (6.47) και (6.48) στην εξίσωση Friedmann (6.39), μπορούμε να τη γράψουμε σε συμβατική μορφή ως

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G_N\,\rho_{eff} , \tag{6.49}$$

όπου $G_N = 3\gamma/4\pi = 3\sigma/4\pi(24M^3)^2$ είναι η τετραδιάστατη σταθερά του Νεύ-τωνα και η *ενεργός πυκνότητα ενέργειας* ρ_{eff} αντιστοιχεί στην

$$\rho_{eff} = \frac{\tilde{C}}{a^{3(1+w)}} + \frac{C/2\gamma}{a^4} - \frac{2\delta}{\gamma(\nu+4)}a^{\nu} + \frac{2(3w-1)F}{(\mu+4)\left[3(1+w)+\mu\right]}a^{\mu}\,. \tag{6.50}$$

Παρατηρούμε ότι, για $w = 1/3$, η συνιστώσα T^0_5 δε συνεισφέρει στην ρ_{eff}.

Η επιταχυνόμενη συμπεριφορά μπορεί να εξαχθεί από τη σχέση

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\gamma(1+3w)\tilde{C}}{a^{3(1+w)}} - \frac{C}{a^4} - 2\delta\frac{(\nu+2)}{(\nu+4)}a^{\nu} - \frac{2F\gamma(1-3w)(\mu+2)}{(\mu+4)\left[3(1+w)+\mu\right]}a^{\mu}\,. \tag{6.51}$$

Για ν και μ μεγαλύτερα από τον συνηθισμένο εκθέτη που αντιστοιχεί σε ύλη, $-3(1+w)$, οι όροι που οφείλονται στην παρουσία της περιβάλλουσας ύλης θα υπερισχύσουν για μεγάλους χρόνους. Η σχετική παράμετρος επιβράδυνσης για μεγάλους χρόνους προκύπτει να είναι

$$q = \begin{cases} \nu > \mu & -1-\frac{\nu}{2} \\ \mu = \nu & -1-\frac{\nu}{2} \\ \mu > \nu & -1-\frac{\mu}{2} \end{cases}\,. \tag{6.52}$$

Βλέπουμε ότι ο παράγοντας επιβράδυνσης είναι ανεξάρτητος του λόγου των παραμέτρων της προδιαγραφής D/F. Αυτό σημαίνει ότι, ακόμη και αν μία από τις δύο περιβάλλουσες πιέσεις μηδενίζεται, η επιβράδυνση για μεγάλους χρόνους θα είναι η ίδια. Το ίδιο δεν αληθεύει βέβαια για την ρ_{eff}, η οποία είναι ανάλογη του $-4\delta + \frac{4\gamma(3w-1)F}{[3(1+w)+\nu]}$.

Μία δικαιολόγηση της προδιαγραφής (6.46) που χρησιμοποιήσαμε μπορεί να δοθεί στο πλαίσιο του απλού μοντέλου ρευστού, το οποίο αναλύσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Εκεί είδαμε ότι η προσεγγιστική λύση για έναν διατηρούμενο τανυστή ορμής-ενέργειας της περιβάλλουσας ύλης οδηγεί στις (6.37) και (6.38). Η δεύτερη από αυτές είναι

$$P_5 = v(1+\omega)\frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\,,\quad \overline{P}_B = \omega\frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\,.$$

Όπως αναφέραμε πριν, μπορούμε να υιοθετήσουμε μία φαινομενολογική άποψη και να θεωρήσουμε μία παράμετρο ταχύτητας που να εξαρτάται από τον χρόνο. Ένα μέτρο του ρυθμού χρονικής εξέλιξης πάνω στη μεμβράνη δίδεται από την παράμετρο Hubble $H = \dot{a}/a$, οπότε είναι εύλογο να θέσουμε $v = \zeta H$, όπου ζ είναι μία φαινομενολογική παράμετρος. Με την επιλογή αυτή, η παραπάνω προσεγγιστική λύση παίρνει τη μορφή

$$\overline{P}_B = \omega\frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\,,\quad P_5 = \zeta(1+\omega)\frac{C_B}{a^{3(1+\omega)}}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\,. \tag{6.53}$$

Έτσι, για το φαινομενολογικό μας περιβάλλον ρευστό, παίρνουμε την ενεργό πυκνότητα ενέργειας [2]

$$\rho_{eff} = \frac{\tilde{C}}{a^{3(1+w)}} + \frac{C/2\gamma}{a^4} - \frac{2\omega}{\gamma(1-3\omega)}\frac{\overline{C}_B}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{2\overline{\zeta}(3w-1)(1+\omega)}{(1-3\omega)\left[3(w-\omega)\right]}\frac{\overline{C}_B}{a^{3(1+\omega)}} \tag{6.54}$$

[2] Όπου $\overline{C}_B \equiv \frac{C_B}{24M^3}$ και $\overline{\zeta} = 24M^3\zeta$.

και

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\gamma(1+3w)\tilde{C}}{a^{3(1+w)}} - \frac{C}{a^4} + 2\omega\frac{(1+3\omega)}{(1-3\omega)}\frac{\overline{C}_B}{a^{3(1+\omega)}} + \frac{2\overline{\zeta}\gamma(1+\omega)(1-3w)(1+3\omega)}{(1-3\omega)\left[3(w-\omega)\right]}\frac{\overline{C}_B}{a^{3(1+\omega)}}. \tag{6.55}$$

Για $\omega < 0$, ο όρος που οφείλεται στην περιβάλλουσα ύλη είναι κυρίαρχος για μεγάλους χρόνους και δίνει τον παράγοντα επιβράδυνσης

$$q = \frac{1}{2} + 3\frac{\omega}{2}. \tag{6.56}$$

Το αντίστοιχο πεδίο τιμών για επιταχυνόμενη διαστολή είναι

$$q < 0 \Longrightarrow -1 \leq \omega < -\frac{1}{3}. \tag{6.57}$$

Και οι δύο συνεισφορές στην εξίσωση Friedmann πέραν του περιεχομένου ύλης της μεμβράνης, ήτοι ο όρος σκοτεινής ακτινοβολίας C/a^4 και οι όροι της περιβάλλουσας ύλης, μπορούν να ερμηνευθούν ως *σκοτεινή ενέργεια*. Η ενεργός καταστατική παράμετρος για την σκοτεινή ενέργεια, $w_{eff}^{(D)}$, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την έκφραση [120]

$$w_{eff}^{(D)} = -1 - \frac{1}{3}\frac{d\ln(\delta H^2)}{d\ln a}, \tag{6.58}$$

όπου η ποσότητα $\delta H^2 = H^2/H_0^2 - \Omega_m a^{-3}$ περιλαμβάνει όλους τους όρους στην εξίσωση Friedmann, οι οποίοι δε συνδέονται με ύλη της μεμβράνης, για την οποία έχουμε θέσει $w = 0$. Στην περίπτωσή μας, η εξίσωση (6.58) γίνεται

$$w_{eff}^{(D)} = -1 + \frac{1}{3}\frac{\left\{4C + 3\frac{(1+\omega)}{(1-3\omega)}\left[-4\omega + \frac{4}{3}\overline{\zeta}\gamma\frac{(1+\omega)}{\omega}\right]\overline{C}_B(1+z)^{3\omega-1}\right\}}{\left\{C + \frac{1}{(1-3\omega)}\left[-4\omega + \frac{4}{3}\overline{\zeta}\gamma\frac{(1+\omega)}{\omega}\right]\overline{C}_B(1+z)^{3\omega-1}\right\}}. \tag{6.59}$$

Ο παρονομαστής είναι ανάλογος της ενεργού πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας και πρέπει να είναι θετικός. Προκειμένου να έχουμε $w_{eff}^{(D)} < -1$, χρειαζόμαστε

$$4C + 3\frac{(1+\omega)}{(1-3\omega)}\left[-4\omega + \frac{4}{3}\overline{\zeta}\gamma\frac{(1+\omega)}{\omega}\right]\overline{C}_B(1+z)^{3\omega-1} < 0. \tag{6.60}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο παρονομαστής είναι θετικός, παίρνουμε το ακόλουθο χαμηλότερο φράγμα για την παραπάνω έκφραση:

$$4C + 3\frac{(1+\omega)}{(1-3\omega)}\left[-4\omega + \frac{4}{3}\overline{\zeta}\gamma\frac{(1+\omega)}{\omega}\right]\overline{C}_B(1+z)^{3\omega-1} > (1-3\omega)C. \tag{6.61}$$

Θέλουμε το κατώτερο φράγμα να είναι αρνητικό. Όπως αναφέραμε ήδη, προκειμένου να έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή, το ω πρέπει να βρίσκεται εντός του διαστήματος $-1 \leq \omega < -\frac{1}{3}$. Γι' αυτό το εύρος τιμών, παίρνουμε $1-3\omega > 0$. Έτσι, για να έχουμε ένα αρνητικό κατώτερο φράγμα, πρέπει να θεωρήσουμε $\mathcal{C} < 0$. Προφανώς, η ύπαρξη ενός τέτοιου κατώτερου φράγματος είναι μία αναγκαία, αλλά όχι και ικανή συνθήκη, για να έχουμε διάσχιση της γραμμής $w = -1$ για την καταστατική παράμετρο. Ωστόσο, με κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους $\overline{\zeta}$ και $\overline{C}_B$ του περιβάλλοντος ρευστού, το αριστερό μέλος της (6.61) μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές, καθώς η ερυθρά μετατόπιση z μεταβάλλεται.

Συνοψίζοντας, παρουσιάσαμε μία μελέτη της κοσμολογικής εξέλιξης μοντέλων μεμβρανών, τα οποία περιέχουν ένα γενικό περιεχόμενο περιβάλλουσας ύλης. Στο πλαίσιο του μοντέλου μας, η περιβάλλουσα πίεση και ο όρος ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ Υπερχώρου και μεμβράνης είναι συγκρίσιμα με την πυκνότητα ενέργειας της μεμβράνης. Υιοθετήσαμε μία φαινομενολογική περιγραφή της περιβάλλουσας ύλης ως ρευστού και χρησιμοποιώντας την προδιαγραφή ${T_B}^5_5 \sim a^{-3(1+\omega)}$, ${T_B}^0_5 \sim Ha^{-3(1+\omega)}$, βρήκαμε ακριβείς λύσεις της εξίσωσης Friedmann, οι οποίες παρουσιάζουν επιταχυνόμενη διαστολή για μεγάλους χρόνους. Βρήκαμε ότι η ενεργός καταστατική παράμετρος της σκοτεινής ενέργειας μπορεί να διασχίσει τη γραμμή $w = -1$, χωρίς τη χρήση υποθέματος ύλης, το οποίο να παραβιάζει τις ενεργειακές συνθήκες, τόσο στη μεμβράνη όσο και στον Υπερχώρο.

6.2 Σκοτεινή Ενέργεια από Περιβάλλουσα Ύλη

6.2.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο [112], μία κατανομή περιβάλλουσας ύλης, η οποία προσομοιάζει ένα ιδανικό ρευστό που κινείται κατά μήκος της πέμπτης διάστασης, είναι ικανή να παράγει επιταχυνόμενη διαστολή και να δώσει μία ενεργό καταστατική παράμετρο για την σκοτεινή ενέργεια, η οποία να τέμνει τη γραμμή $w = -1$. Ωστόσο, προκειμένου να συμβεί αυτό, είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός μεγάλου και μάλιστα αρνητικού όρου σκοτεινής ακτινοβολίας. Η παρουσία ενός τέτοιου όρου μπορεί να προκαλέσει προβλήματα για πρώιμους χρόνους της ιστορίας του σύμπαντος, καθώς μπορεί να οδηγήσει σε αρνητική ενεργό πυκνότητα ενέργειας (αν και η εγκυρότητα της ενεργού εξίσωσης Friedmann για μεγάλες ερυθρές μετατοπίσεις είναι υπό αμφισβήτηση). Ο στόχος μας εδώ είναι να αναπαράγουμε τα φαινόμενα αυτά, αγνοώντας τον όρο σκοτεινής ακτινοβολίας και θεωρώντας μόνο την περιβάλλουσα ύλη ως το κυρίαρχο συστατικό του σύμπαντος για μεγάλους χρόνους [113]. Ενδιαφερόμαστε επίσης όχι μόνο για τον προσδιορισμό των συνθηκών υπό τις οποίες μπορούμε να έχουμε $w_{eff} < -1$, αλλά επίσης για το αν μπορούμε να έχουμε ένα χρονικό προφίλ της διάσχισης της γραμμής αυτής το οποίο να είναι (τουλάχιστον ποιοτικά) σε συμφωνία με τις πρόσφατες παρατηρήσεις για $0 \leq z \leq 1$. Όπως θα δούμε, οι απαιτήσεις αυτές μπορούν να ικανοποιηθούν, στα πλαίσια μίας συγκεκριμένης προδιαγραφής για την περιβάλλουσα ύλη, όπου οι παράμετροι του μοντέλου έχουν κατάλληλα ρυθμιστεί. Θα καταδείξουμε επίσης την ισοδυναμία αυτού του είδους περιβάλλουσας ύλης με ένα αέριο Chaplygin.

6.2.2 Περιορισμοί στις Παραμέτρους του Μοντέλου

Κύριο αρχικό μέλημά μας είναι η γραφή της ενεργού καταστατικής παραμέτρου σε κατάλληλη μορφή, η οποία να διευκολύνει τη διερεύνηση που θα ακολουθήσει. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο εδάφιο, χρησιμοποιώντας την σχέση για την ενεργό πυκνότητα ενέργειας, μπορούμε να παραγάγουμε μία έκφραση για την *ενεργό καταστατική παράμετρο*, χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.58). Λαμβάνοντας υπόψιν τις υποθέσεις που έχουμε κάνει για τη μορφή των όρων πίεσης και ανταλλαγής ενέργειας για την περιβάλλουσα ύλη και χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή την ερυθρά μετατόπιση $z = \frac{a_0}{a(t)} - 1$, η w_{eff} προκύπτει να έχει τη γενική μορφή

$$w_{eff} = -1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\nu A + \mu B\,(z+1)^{\nu-\mu}}{-A - B\,(z+1)^{\nu-\mu}}\right), \qquad (6.62)$$

όπου οι παράμετροι A και B εξαρτώνται από τις πιέσεις της περιβάλλουσας ύλης βάσει των σχέσεων

$$A \equiv \frac{2\delta}{\gamma\,(\nu+4)} = \frac{48DM^3}{(\nu+4)\,\sigma}, \quad B \equiv \frac{2F}{(\mu+3)\,(\mu+4)}. \qquad (6.63)$$

Έχουμε θεωρήσει εδώ, σε αντίθεση με το προηγούμενο εδάφιο, ότι η παράμετρος που περιγράφει την συνεισφορά της σκοτεινής ακτινοβολίας C είναι μικρή και ότι, για μεγάλους χρόνους, ο όρος σκοτεινής ακτινοβολίας $\sim \frac{C/2\gamma}{a^4}$ είναι αμελητέος σε σχέση με τις συνεισφορές που έχουμε από τις πιέσεις $\bar{P}_B$ και P_5. Έτσι, δεν έχουμε λάβει υπόψη τη σκοτεινή ακτινοβολία στην παραγωγή της (6.62), ούτε θα τη χρησιμοποιήσουμε σε ό,τι ακολουθεί.

Η εξίσωση (6.62) μας επιτρέπει να εξετάσουμε υπό ποιες συνθήκες μπορούμε να έχουμε μία ενεργό καταστατική εξίσωση, η οποία να παρουσιάζει διάσχιση (crossing) της γραμμής $w_{eff} = -1$, φαινόμενο για το οποίο υπάρχουν ενδείξεις με βάση πρόσφατες κοσμολογικές παρατηρήσεις. Πιο συγκεκριμένα, θέλουμε να βρούμε ποιες είναι οι απαιτήσεις που οι παράμετροι του μοντέλου μας πρέπει να ικανοποιούν, προκειμένου να έχουμε μία ποιοτικά σωστή συμπεριφορά για την χρονική εξέλιξη της w_{eff} σε πρόσφατους χρόνους. Τα τωρινά παρατηρησιακά δεδομένα δείχνουν ότι αυτή τη στιγμή ($z = 0$) βρισκόμαστε σε μία φάση επιταχυνόμενης διαστολής με παράμετρο επιβράδυνσης μέτρου $|q|$ της τάξεως της μονάδας και ενεργό καταστατική παράμετρο με τιμή $w_{eff} = -1.21$. Η διάσχιση της γραμμής $w_{eff} = -1$, αν όντως υφίσταται ως φαινόμενο, φαίνεται να έχει συμβεί σε ερυθρές μετατοπίσεις $z = 0.2$. Έτσι, η w_{eff} φαίνεται να αυξάνει με το z, ξεκινώντας από μία τιμή περίπου -1.21 σε $z = 0$ και τέμνοντας την γραμμή $w_{eff} = -1$ περίπου στο $z = 0.2$. Ο στόχος μας είναι να παραγάγουμε περιορισμούς στις τιμές των παραμέτρων μας A, B, μ και ν και να δούμε για ποιους συνδυασμούς μπορούμε να έχουμε μία w_{eff} με το επιθυμητό χρονικό προφίλ, ενώ παράλληλα να λαμβάνει χώρα επιταχυνόμενη κοσμική διαστολή. Η αντίστοιχη παράμετρος επιβράδυνσης για μεγάλους χρόνους (όπου έχουμε αγνοήσει την συνεισφορά από την ύλη της μεμβράνης, καθώς και τη σκοτεινή ακτινοβολία) είναι

$$q \equiv -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(\nu+2)\,A + (\mu+2)\,B\,(z+1)^{\nu-\mu}}{2A + 2B\,(z+1)^{\nu-\mu}}. \qquad (6.64)$$

Εξετάζοντας την εξίσωση (6.62), παρατηρούμε καταρχήν ότι ο παρονομαστής είναι η ενεργός πυκνότητα ενέργειας για μεγάλους χρόνους και άρα πρέπει να είναι θετικός στο διάστημα του z για το οποίο ενδιαφερόμαστε (στη συζήτηση αυτή επικεντρωνόμαστε στο διάστημα $0 \leq z \leq 1$). Για $z = 0$, η συνθήκη αυτή ανάγεται στην ανισότητα $A + B < 0$. Είναι έτσι προφανές ότι τα A και B δεν μπορούν να είναι και τα δύο θετικά. Παραγωγίζοντας την (6.62), παίρνουμε

$$\frac{dw_{eff}}{dz} = AB\frac{(\nu-\mu)^2(z+1)^{\nu-\mu-1}}{\left(A + B(z+1)^{\nu-\mu}\right)^2}. \tag{6.65}$$

Όλοι οι όροι στο δεξί μέλος της (6.65) είναι θετικοί στο διάστημα $0 \leq z \leq 1$, εκτός από το γινόμενο AB. Προκειμένου να έχουμε μία αυξανόμενη w_{eff}, τα A και B πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημα, άρα πρέπει να είναι και τα δύο αρνητικά ($A, B < 0$). Στη συνέχεια, θέλουμε η w_{eff} να παίρνει τιμή μικρότερη από -1 στο $z = 0$. Για να το πετύχουμε, πρέπει να έχουμε $\nu A + \mu B < 0$. Υπάρχουν τέσσερις πιθανοί συνδυασμοί:

1) $\mu, \nu > 0$: Ο περιορισμός ικανοποιείται.

2) $\mu > 0$, $\nu < 0$: $\nu A + \mu B < 0$ όταν $\frac{\nu}{\mu} > -\frac{B}{A}$.

3) $\mu < 0$, $\nu > 0$: $\nu A + \mu B < 0$ όταν $\frac{\nu}{\mu} < -\frac{B}{A}$.

4) $\mu, \nu < 0$: Ο περιορισμός δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για A και B αρνητικά.

Έτσι, οι τρεις πρώτες περιπτώσεις φαίνεται καταρχήν να επιτρέπονται. Ωστόσο, ένας επιπλέον περιορισμός έρχεται από το γεγονός ότι θέλουμε $w_{eff} = -1$ για $z = 0.2$. Αυτός ανάγεται στη σχέση

$$\frac{\nu}{\mu} = -\frac{B}{A}(1.2)^{\nu-\mu}. \tag{6.66}$$

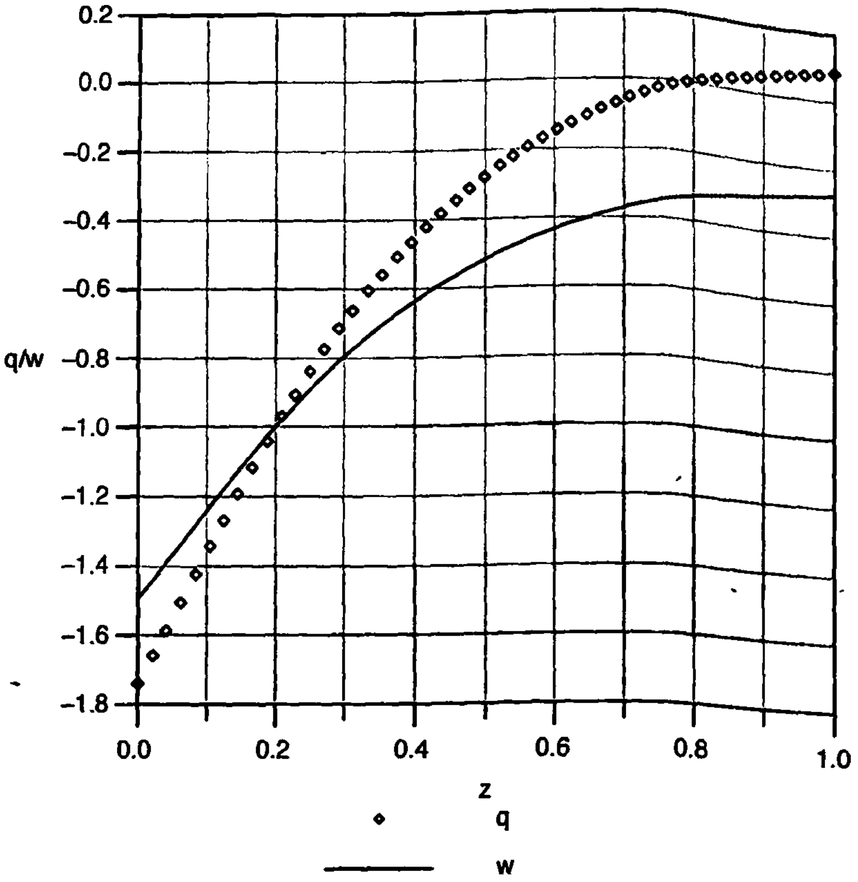
Στην περίπτωση (1), με μ και ν θετικά, το αριστερό μέλος της (6.66) είναι θετικό, ενώ το δεξί μέλος είναι αρνητικό και έτσι η περίπτωση αυτή αποκλείεται. Οι περιπτώσεις (2) και (3) μπορούν να ικανοποιήσουν την εξίσωση αυτή χωρίς να δίνουν επιπλέον περιορισμούς για τις δυνάμεις μ και ν. Συμπεραίνουμε ότι οι μόνες επιλογές παραμέτρων, οι οποίες είναι σε συμφωνία με το γενικό προφίλ για την χρονική εξέλιξη της w_{eff} για $0 \leq z \leq 1$ είναι:

1) $A, B < 0$ με $\mu > 0$, $\nu < 0$ και $\frac{\nu}{\mu} > -\frac{B}{A}$.

2) $A, B < 0$ με $\mu < 0$, $\nu > 0$ και $\frac{\nu}{\mu} < -\frac{B}{A}$.

Αφού μία από τις δυνάμεις πρέπει να είναι θετική, η συνθήκη $max(\mu, \nu) > -2$ ικανοποιείται πάντοτε, δίνοντας έτσι την επιθυμητή επιταχυνόμενη διαστολή για μεγάλους χρόνους. Βλέπουμε επίσης ότι ο λόγος των δύο παραμέτρων πίεσης της περιβάλλουσας ύλης A και B καθορίζει τον λόγο των δύο δυνάμεων. Μία μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις αρχικές πιέσεις D και F θα οδηγούσε σε μία αντίστοιχα μεγάλη απόκλιση μεταξύ των μ και ν. Αυτό καταδεικνύεται στο Σχήμα 6.1, όπου έχουμε σχεδιάσει την παράμετρο επιβράδυνσης (q) και την ενεργό καταστατική παράμετρο w_{eff}, για μία επιλογή τιμών των παραμέτρων που ικανοποιεί τους παραπάνω περιορισμούς. Για τις τιμές αυτές, βλέπουμε ότι υπάρχει επιταχυνόμενη διαστολή σε πρόσφατους χρόνους και η w_{eff} έχει ένα ρεαλιστικό χρονικό προφίλ, συνεπές με αυτό που παίρνουμε από παρατηρήσεις.

Η απαίτηση να είναι τα A και B αρνητικά έχει προφανώς άμεσες επιπτώσεις στο πρόσημο των παραμέτρων D και F και στην αντίστοιχη συμπεριφορά του υποθέματος περιβάλλουσας ύλης που περιγράφουν. Προκειμένου να έχουμε $B < 0$ με $\mu < -4$ ή $\mu > -3$, πρέπει να ισχύει $P_5 < 0$, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε ροή ενέργειας από τον Υπερχώρο προς την



Σχήμα 6.1: Γραφική παράσταση της παραμέτρου επιβράδυνσης q και της ενεργού καταστατικής παραμέτρου w_{eff} για την επιλογή $A = -1$, $B = -2$, $\mu = 2$, $\nu = -2$.

μεμβράνη. Όταν $-4 < \mu < -3$, παίρνουμε $P_5 > 0$ και ροή ενέργειας από την μεμβράνη προς τον Υπερχώρο. Κατά παρόμοιο τρόπο, για $A < 0$, παίρνουμε $\bar{P}_B < 0$ αν $\nu > -4$. Αυτό σημαίνει ότι η περιβάλλουσα ύλη πρέπει να έχει αρνητική πίεση. Η κατάσταση αυτή θυμίζει ένα είδος πενταδιάστατου πεδίου πεμπτουσίας (όπως ένα βαθμωτό πεδίο). Για $\nu < -4$, η πίεση $\bar{P}_B$ γίνεται θετική, και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η περιβάλλουσα ύλη συμπεριφέρεται σαν ένα συνηθισμένο ρευστό. Προφανώς δεν μπορούν να είναι και οι δύο πιέσεις θετικές, αφού τότε θα είχαμε δύο αρνητικές δυνάμεις, πράγμα που αποκλείεται από τους παραπάνω περιορισμούς. Βλέπουμε επίσης ότι έχουμε καταφέρει να επιτύχουμε διάσχιση της γραμμής $w_{eff} = -1$, χωρίς τη χρήση περιβάλλουσας ύλης, η οποία να παραβιάζει ενεργειακές συνθήκες, όπως πεδία-φαντάσματα. Η παρουσία του όρου σκοτεινής ακτινοβολίας επίσης δεν ήταν αναγκαία για να αναπαράγουμε το επιθυμητό φαινόμενο, το οποίο υλοποιείται ως αποτέλεσμα της συνέργειας της περιβάλλουσας πίεσης και του όρου ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ Υπερχώρου και μεμβράνης. Έχουμε έτσι επιτύχει μία περιγραφή της σκοτεινής ενέργειας βάσει ενός τανυστή ορμής-ενέργειας για την περιβάλλουσα ύλη, ο οποίος μπορεί να προχαλέσει την επιταχυνόμενη διαστολή στην τωρινή εποχή του σύμπαντος, ενώ παράλληλα παρέχει μία ποιοτικά σωστή εικόνα για την εξέλιξη της καταστατικής εξίσωσης της σκοτεινής ενέργειας σε πρόσφατους χρόνους.

6.2.3 Αέριο Chaplygin και Περιβάλλουσα Ύλη

Ως μία περαιτέρω εφαρμογή του μοντέλου μας, μπορούμε να δείξουμε ότι, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων για τις περιβάλλουσες πιέσεις, μπορούμε να εξομοιώσουμε τη συμπεριφορά ενός αερίου Chaplygin, το οποίο είναι επίσης ένα υποψήφιο μοντέλο για την πεμπτουσία. Ένα αέριο Chaplygin είναι ένα ιδανικό τετραδιάστατο ρευστό, το οποίο υπακούει την καταστατική εξίσωση

$$p = -\frac{A}{\rho}. \tag{6.67}$$

Θεωρώντας διατήρηση ενέργειας στη μορφή

$$d\left(\rho a^3\right) = -pd\left(a^3\right), \tag{6.68}$$

είναι εύκολο να δείξουμε ότι για μικρά a, δηλαδή μικρούς χρόνους, $\rho \propto a^{-3}$. Αυτή είναι η συμπεριφορά που περιμένουμε από ύλη που έχει τη μορφή κονιορτού με $w = 0$ (μηδενική πίεση). Για μεγάλα a ή μεγάλους χρόνους, έχουμε $\rho = -p$. Αυτή είναι η καταστατική εξίσωση για την κοσμολογική σταθερά. Το αέριο Chaplygin δηλαδή συμπεριφέρεται ως σκοτεινή ύλη σε πρώιμους χρόνους και ως σκοτεινή ενέργεια (κοσμολογική σταθερά) σε μεγάλους χρόνους και είναι ένα απλό παράδειγμα ενοποιημένης αντιμετώπισης και των δύο αυτών συστατικών. Είναι εύκολο να δούμε ότι η w_{eff} στην (6.62) μπορεί να αναπαραγάγει αυτήν την συμπεριφορά, και έτσι η περιβάλλουσα ύλη να παίξει ένα ρόλο ανάλογο με αυτόν του αερίου Chaplygin. Καταρχήν, θέλουμε η ενεργός καταστατική παράμετρος να είναι ίση προς -1 σε πρόσφατους χρόνους ($z = 0$). Αυτή η απαίτηση μπορεί να ικανοποιηθεί για $\nu A + \mu B = 0$, ή

$$\frac{\nu}{\mu} = -\frac{\mathrm{B}}{A}. \tag{6.69}$$

Επιπλέον, θέλουμε $w_{eff} = 0$ για $z \ll 1$. Ανάλογα με το ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη, πρέπει να έχουμε είτε $\mu = -3$ για $\nu - \mu > 0$ ή $\nu = -3$ για $\nu - \mu < 0$. Οι αντίστοιχες συνθήκες είναι τότε:

1) $\mu = -3$, $\nu = 3\frac{B}{A}$.
2) $\nu = -3$, $\mu = 3\frac{A}{B}$.

Για τις παραπάνω επιλογές παραμέτρων, μπορούμε να αναπαραγάγουμε τη συμπεριφορά ενός αερίου Chaplygin, χρησιμοποιώντας μόνο περιβάλλουσα ύλη.

Συνοψίζοντας, πραγματευθήκαμε στο εδάφιο αυτό το πρόβλημα της αναπαραγωγής των ιδιοτήτων της σκοτεινής ενέργειας, στο πλαίσιο της κοσμολογίας μεμβρανών. Δείξαμε ότι, θεωρώντας την ύπαρξη μίας επιπλέον διάστασης και περιβάλλουσας ύλης, της οποίας ο τανυστής ορμής-ενέργειας έχει τη μορφή (6.46), μπορούμε να αναπαραγάγουμε την παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος, καθώς και την καταστατική εξίσωση της σκοτεινής ενέργειας. Αναλύσαμε σε λεπτομέρεια τους περιορισμούς που οι παράμετροι του μοντέλου μας πρέπει να ικανοποιούν, προκειμένου να έχουμε ένα ρεαλιστικό προφίλ για τη χρονική εξέλιξη της w_{eff} για μικρά z. Η διάσχιση της γραμμής $w_{eff} = -1$ λαμβάνει χώρα με φυσικό τρόπο, χωρίς να χρειάζεται η ύπαρξη εξωτικών μορφών ύλης στον Υπερχώρο ή την μεμβράνη, οι οποίες να παραβιάζουν τις ενεργειακές συνθήκες. Τα αποτελέσματά μας έχουν επίσης το πλεονέκτημα να μην εξαρτώνται από τον όρο σκοτεινής ακτινοβολίας και κατ' επέκταση δεν καθορίζουν το πρόσημο της σταθεράς C. Δείξαμε επίσης ότι το μοντέλο αυτό μπορεί να παράγει προβλέψεις ανάλογες με αυτές που δίνουν άλλες υποψήφιες θεωρίες σκοτεινής ενέργειας, όπως εν προκειμένω το αέριο Chaplygin. Δεν μπορούμε, προς το παρόν, να δικαιολογήσουμε πλήρως την προδιαγραφή (6.46) βάσει ενός φαινομενολογικού περιβάλλοντος ρευστού. Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, αυτό οφείλεται στις άγνωστες χωρικές παραγώγους της περιβάλλουσας πίεσης και του όρου ανταλλαγής ενέργειας, οι οποίες εμφανίζονται στην εξίσωση διατήρησης για τον τανυστή ορμής-ενέργειας του περιβάλλοντος ρευστού. Ένα συγκεκριμένο μοντέλο για την περιβάλλουσα ύλη είναι απαραίτητο, προκειμένου να εξαλείψουμε την ελευθερία αυτή. Στο επόμενο εδάφιο θα μετατρέψουμε την μέχρι τώρα ποιοτική συμφωνία μεταξύ του μοντέλου μας και των παρατηρήσεων σε ποσοτική, χρησιμοποιώντας απευθείας κοσμολογικά δεδομένα για να προβλέψουμε τις προτιμώμενες τιμές για τις διάφορες παραμέτρους. Η ανάλυση αυτή πρόκειται να μας δώσει περαιτέρω ενδείξεις για την πιθανή μορφή του περιεχομένου ύλης στον Υπερχώρο.

6.3 Περιβάλλουσα Ύλη και Παρατηρήσεις της Κοσμικής Διαστολής

6.3.1 Εισαγωγή

Πρόσφατες παρατηρήσεις [121] μακρινών supernova τύπου Ia (SnIa) παρέχουν ισχυρές ενδείξεις για ένα ιδιαίτερα αντισυμβατικό προφίλ κοσμικής διαστολής για το σύμπαν μας σε πρόσφατους χρόνους. Όπως φαίνεται, βρισκόμαστε αυτή τη στιγμή σε μία φάση επιταχυνόμενης διαστολής [121, 70], αντίθετα με ό,τι θα περιμέναμε σε ένα σύμπαν κυριαρχούμενο από ύλη, όπου η βαρύτητα τείνει να επιβραδύνει τη διαστολή. Το αποτέλεσμα αυτό είχε δραματικές επιπτώσεις στα κοσμολογικά μοντέλα, οδηγώντας στην υπόθεση της ύπαρξης *σκοτεινής ενέργειας*, ένα άγνωστο συστατικό του ενεργειακού περιεχομένου του σύμπαντος, το οποίο είναι υπεύθυνο για την παρατηρούμενη επιτάχυνση. Πέρα από την επιβεβαίωση της ύπαρξης σκοτεινής ενέργειας, τα δεδομένα SnIa παρέχουν επίσης πολύτιμες πληροφορίες γύρω από τα χαρακτηριστικά της, συγκεκριμένα την καταστατική εξίσωση την οποία υπακούει. Λεπτομερής ανάλυση διάφορων διαθέσιμων συνόλων δεδομένων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μία καταστατική παράμετρος, η οποία τέμνει τη γραμμή $w = -1$, είναι συνεπής με τα δεδομένα [99, 122] και φαίνεται μάλιστα να ευνοείται ως εκδοχή από ορισμένα από αυτά τα σύνολα. Αν αυτού του είδους η συμπεριφορά επαληθευτεί, θα καταστήσει μία σειρά από κοσμολογικά μοντέλα μη-βιώσιμα ως υποψήφιες εξηγήσεις της σκοτεινής ενέργειας, όπως συμβαίνει με μοντέλα που στηρίζονται αποκλειστικά σε πεδία-φαντάσματα ή σε βαθμωτά πεδία πεμπτουσίας. Η κατασκευή μοντέλων, τα οποία να μπορούν να εξηγήσουν, τόσο την επιταχυνόμενη διαστολή σε μεγάλους χρόνους, όσο και τη διάσχιση της γραμμής $w = -1$

για την καταστατική παράμετρο, ανάγεται έτσι σε υψηλή προτεραιότητα.

Στα προηγούμενα δύο εδάφια, παρουσιάσαμε ένα μοντέλο, το οποίο βασιζόμενο στην κοσμολογία μεμβρανών, μπορούσε να παράγει φαινόμενα αντίστοιχα με αυτά που αποδίδονται στην σκοτεινή ενέργεια εξαιτίας της ύπαρξης ύλης στον Υπερχώρο, καθώς και λόγω της ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ μεμβράνης και Υπερχώρου. Το μοντέλο δίνει επιταχυνόμενη διαστολή για μεγάλους χρόνους, καθώς και μία καταστατική παράμετρο w_{eff}, η οποία διασχίζει τη γραμμή $w_{eff} = -1$. Μοντελοποιώντας την περιβάλλουσα ύλη ως ένα αργά κινούμενο ιδανικό ρευστό, δείξαμε ότι η διάσχιση αυτή μπορεί να συμβεί χωρίς να χρειάζεται η ύπαρξη ύλης, η οποία να παραβιάζει τις ενεργειακές συνθήκες, όπως συνήθως συμβαίνει σε τέτοια μοντέλα. Στη συνέχεια, αποκλίνοντας από την ερμηνεία μας με βάση το ιδανικό ρευστό, εξαγάγαμε περιορισμούς, τους οποίους πρέπει να υπακούουν οι παράμετροι του μοντέλου, ώστε να έχουμε το σωστό χρονικό προφίλ για την καταστατική παράμετρο [123, 124, 125, 68]. Στόχος μας στο εδάφιο αυτό είναι να διεκπεραιώσουμε μία πιο λεπτομερή ανάλυση γύρω από το επιτρεπόμενο εύρος παραμέτρων, κάνοντας άμεσα fit στο σύνολο δεδομένων supernova Ia Gold και εξετάζοντας αν οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων που εξάγουμε από τη διαδικασία αυτή υποδηλώνουν επιταχυνόμενη διαστολή και διάσχιση της γραμμής $w = -1$, αντί να απαιτούμε τέτοια συμπεριφορά a priori [126]. Επίσης, θα κρατήσουμε κατά τη διερεύνηση αυτή τον όρο σκοτεινής ακτινοβολίας και θα εξετάσουμε αν υπάρχουν λύσεις οι οποίες να ευνοούν θετικό πρόσημο γι' αυτόν.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η ανάδραση από τις κοσμολογικές διαταραχές σε μεγάλες κλίμακες μπορεί να μιμηθεί την επιταχυνόμενη διαστολή [127], και έτσι να διαφοροποιήσει τα αποτελέσματα οποιασδήποτε ανάλυσης η οποία επικεντρώνεται μόνο στην χρονική εξέλιξη του υποβάθρου. Επιλέξαμε να μην συμπεριλάβουμε τα φαινόμενα λόγω διαταραχών στην περίπτωσή μας για δύο λόγους:

- Το σύνολο των εξισώσεων για κοσμολογικές διαταραχές είναι γνωστό ότι δεν είναι κλειστό πάνω στη μεμβράνη [128], δηλαδή πληροφορία σχετικά με την πλήρη δυναμική και χρονική εξέλιξη του Υπερχώρου είναι απαραίτητη προκειμένου να βρεθεί λύση. Καθώς το μοντέλο που εξετάζουμε εδώ δεν προέρχεται από κάποια ακριβή λύση για τον πλήρη Υπερχώρο, αλλά από μία εύλογη προδιαγραφή για την περιβάλλουσα ύλη, μία διαταραχτική ανάλυση δεν μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

- Προκύπτει ότι σε μεγάλους χρόνους, όταν η ακτίνα Hubble είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα καμπυλότητας του Υπερχώρου, τα αποτελέσματα των διαταραχών φαίνεται να είναι ισοδύναμα με αυτά που εξάγουμε εξετάζοντας μία συνήθη τετραδιάστατη κοσμολογία [129].

6.3.2 Παραμετροποίηση του Μοντέλου

Στο προηγούμενο εδάφιο, πραγματοποιήσαμε μία ανάλυση στο επιτρεπόμενο πεδίο τιμών για τις τέσσερις βασικές παραμέτρους του μοντέλου, απαιτώντας μία κοσμολογική εξέλιξη η οποία να είναι σύμφωνη προς το γενικό προφίλ που υποδεικνύεται από τις παρατηρήσεις και θεωρώντας ότι ο όρος σκοτεινής ακτινοβολίας είναι αμελητέος για μεγάλους χρόνους. Εδώ, θα εκτελέσουμε μία γενική ανάλυση, κρατώντας επίσης τον όρο σκοτεινής ακτινοβολίας και κάνοντας fit στο σύνολο δεδομένων Gold , έτσι ώστε να πάρουμε καλύτερες τιμές για τις πέντε διαθέσιμες παραμέτρους (η νέα παράμετρος έρχεται από την σκοτεινή ακτινοβολία). Προκειμένου να απλοποιήσουμε τη διαδικασία, θα ξαναγράψουμε την ενεργό εξίσωση Friedmann με βάση παραμέτρους πυκνότητας ενέργειας, θεωρώντας επίσης έναν επίπεδο χώρο ($k = 0$). Πρέπει να τονίσουμε ότι στην πραγματικότητα υπάρχει ένας ενδιαφέρων εκφυλισμός μεταξύ χωρικής καμπυλότητας και χρονικά μεταβαλλόμενης σκοτεινής ενέργειας, όπως περιγράφεται στις αναφορές [130, 131]. Έτσι, μία μικρή χωρική καμπυλότητα θα μπορούσε να εξαλείψει εντελώς την ελαφρά τάση για διάσχιση της γραμμής $w = -1$, η οποία καταδεικνύεται από το σετ Gold06 όταν θεωρούμε ένα επίπεδο σύμπαν. Ωστόσο, επιλέξαμε να μην ασχοληθούμε με την πιθανότητα μίας μη-μηδενικής χωρικής καμπυλότητας για δύο λόγους.

- Υπάρχουν σοβαρά θεωρητικά κίνητρα, προερχόμενα από την θεωρία του πληθωρισμού, για να θεωρήσουμε ότι $k = 0$ με πολύ μεγάλο ποσοστό ακρίβειας. Η πιθανότητα μίας μη-μηδενικής χωρικής καμπυλότητας πρακτικά θα αναιρούσε την επίλυση του προβλήματος της επιπεδότητας, την οποία παρέχει ο πληθωρισμός.

- Επιτρέποντας μία μη-μηδενική καμπυλότητα του χώρου, θα εισαγάγαμε μία επιπλέον παράμετρο, η οποία θα έμενε να προσδιοριστεί από το σύνολο δεδομένων SnIa . Ωστόσο, ο αριθμός παραμέτρων που ενέχεται στο μοντέλο μας είναι ήδη μεγάλος και αυτό υποδηλώνει μία μεγάλη περιοχή σφάλματος (βλέπε Σχήμα 6.2). Η εισαγωγή μίας επιπλέον παραμέτρου θα επέκτεινε περαιτέρω την περιοχή αυτή, καθιστώντας την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της ανάλυσής μας ιδιαίτερα δυσχερή.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_b\, a^{-3(1+w)} + \Omega_{DR}\, a^{-4} + \Omega_B\, a^{\nu} + \Omega_5\, a^{\mu}, \tag{6.70}$$

όπου έχουμε ορίσει τις παραμέτρους πυκνότητας ενέργειας για την ύλη της μεμβράνης, την σκοτεινή ακτινοβολία και τις συνιστώσες της περιβάλλουσας ύλης ως

$$\Omega_m\left(\tilde{C}\right) \equiv \frac{8\pi G_N}{3H_0^2}\tilde{C}, \quad \Omega_{DR}\,(C) \equiv \frac{C}{H_0^2}, \tag{6.71}$$

$$\Omega_B\,(D,\nu) \equiv -\frac{4D}{24M^3H_0^2\,(\nu+4)}, \tag{6.72}$$

και

$$\Omega_5\,(F,\mu) \equiv \frac{8\pi G_N}{3H_0^2}\frac{2\,(3w-1)\,F}{(3\,(1+w)+\mu)\,(\mu+4)}. \tag{6.73}$$

Η παράμετρος πυκνότητας ενέργειας της μεμβράνης, Ω_m, αντιστοιχεί στην παρατηρούμενη πυκνότητα ύλης. Έχει τιμή περίπου $\Omega_m \simeq 0.27$ [23]. Καθώς το ενεργειακό περιεχόμενο της μεμβράνης είναι κυριαρχούμενο από ύλη, θα θεωρήσουμε την τιμή $w = 0$ στις παραπάνω εκφράσεις. Οι τέσσερις παράμετροι πυκνότητας είναι στην πραγματικότητα σχετιζόμενες, μέσω της απαίτησης επιπεδότητας, η οποία δίνει

$$\Omega_5 = 1 - \Omega_m - \Omega_{DR} - \Omega_B \,. \tag{6.74}$$

Έτσι, μπορούμε να εξαλείψουμε τον όρο Ω_5, εκφράζοντάς τον με βάση τον Ω_B. Βλέπουμε ότι αυτός εξαρτάται, τόσο από τον συντελεστή D, ο οποίος χαραχτηρίζει την πίεση της περιβάλλουσας ύλης, όσο και από τη δύναμη ν. Προχειμένου να καταστήσουμε την εξάρτηση από το ν εκπεφρασμένη, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παράμετρο ως $\Omega_B = \frac{\tilde{\Omega}_B}{\nu+4}$.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραμετροποίηση, είμαστε τώρα σε θέση να κάνουμε fit το μοντέλο μας στα δεδομένα των supernova Ia . Υπάρχουν τέσσερις παράμετροι που πρέπει να προσδιοριστούν, Ω_{DR}, $\tilde{\Omega}_B$, ν και μ. Έχοντας προσδιορίσει τις καλύτερες τιμές για τις παραμέτρους αυτές, μπορούμε να εξαγάγουμε την χρονική συμπεριφορά της παραμέτρου επιβράδυνσης q, όπως και το προφίλ της ενεργού καταστατικής παραμέτρου w_{eff}. Αναφερόμαστε σε αυτήν ως ενεργό παράμετρο, αφού δεν είναι άμεσα συνδεδεμένη με ένα συγχεχριμένο είδος ύλης, αλλά είναι αντιπροσωπευτική των συσσωρευμένων συνεισφορών της περιβάλλουσας ύλης και ανταλλαγής ενέργειας και της σχοτεινής αχτινοβολίας λόγω της ύπαρξης της επιπλέον διάστασης. Η παράμετρος w_{eff} δίνεται από την (6.58), από την οποία, αντιχαθιστώντας την νέα παραμετροποίηση, παίρνουμε την έκφραση

$$w_{eff}(a) = -1 - \frac{1}{3}\left(\frac{-4\Omega_{DR} + \nu\,\Omega_B\, a^{\nu+4} + \mu\,\Omega_5\, a^{\mu+4}}{\Omega_{DR} + \Omega_B\, a^{\nu+4} + \Omega_5\, a^{\mu+4}}\right), \tag{6.75}$$

από την οποία μπορούμε να καθορίσουμε την μεταβολή της w_{eff} με τον χρόνο. Όπως βλέπουμε, όλη η χρονική εξάρτηση έρχεται από τους όρους του Υπερχώρου. Η *παράμετρος επιβράδυνσης* q δίδεται από την

$$q \equiv -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Omega_m a^{-3} + 2\Omega_{DR} a^{-4} - (\nu+2)\,\Omega_B a^{\nu} - (\mu+2)\,\Omega_5 a^{\mu}}{2\,(\Omega_m a^{-3} + \Omega_{DR} a^{-4} + \Omega_B a^{\nu} + \Omega_5 a^{\mu})} \,. \tag{6.76}$$

Στη συζήτηση που ακολουθεί, θα επανεκφράσουμε την q και την w_{eff} ως προς την ερυθρά μετατόπιση z, αντί για τον παράγοντα κλίμακας a. Οι δύο αυτές ποσότητες συνδέονται μέσω της γνωστής σχέσης $a = \frac{a_0}{1+z}$, όπου a_0 είναι η τωρινή τιμή του παράγοντα κλίμακας στο τετραδιάστατό μας σύμπαν.

6.3.3 Ανάλυση του Συνόλου Δεδομένων Gold

Πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε το ανανεωμένο σύνολο δεδομένων Gold από τους Riess et al. [121] (Gold06), απαρτιζόμενο από συνολικά 182 SnIa, ευρισκόμενα σε αποστάσεις, οι οποίες κυμαίνονται στο διάστημα $0.024 \leq z \leq 1.755$. Το σετ αυτό επιτρέπει μία αρχετά αχριβή αναχατασχευή της ιστορίας της χοσμιχής διαστολής του σύμπαντος σε πρόσφατους χρόνους.

Το σύνολο Gold συγχροτείται από διάφορες πηγές, οι οποίες αναλύονται κατά αυτοσυνεπή και συμπαγή τρόπο, με μειωμένα σφάλματα βαθμονόμησης, τα οποία προέρχονται από συστηματικά σφάλματα. Περιέχει 119 πειραματικά σημεία από προηγούμενα δημοσιευμένα δεδομένα συν 16 σημεία με $0.46 < z < 1.39$, τα οποία ανακαλύφθηκαν πρόσφατα από το Διαστημικό Τηλεσκόπιο Hubble (HST). Περιλαμβάνει επίσης 47 σημεία ($0.25 < z < 1$) από την πρώτη χρονιά του συνόλου δεδομένων SNLS [70] από ένα σύνολο 73 μακρινών SnIa. Μερικά supernova αποκλείστηκαν [121], εξαιτίας μεγάλων αβεβαιοτήτων στις μετρήσεις χρώματος ή υψηλό ρυθμό εξαφάνισης, $A_V > 0.5$, δηλαδή μείωση των μεγεθών των supernova, η οποία προέρχεται από την μεσοαστρική σχόνη. Ένα κατώτερο όριο στην ερυθρά μετατόπιση επιβλήθηκε στην τιμή $cz < 7000km/s$ ή $z < 0.0233$, προκειμένου να αποφύγουμε την επίδραση μίας τοπικής "Φυσαλίδας Hubble" , δηλαδή μίας περιοχής με μεγαλύτερη παράμετρο Hubble εξαιτίας της ύπαρξης ενός μεγάλου τοπικού χενού [132]. Έτσι, ορίζεται ένα υποσύνολο υψηλής εμπιστοσύνης.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις δίνουν το φαινόμενο μέγεθος $m(z)$ των supernova σε μέγιστη λαμπρότητα, αφού πρώτα έχουν εφαρμοστεί διορθώσεις για γαλαξιακή εξαφάνιση, K-διορθώσεις και διόρθωση πλάτους καμπύλης φωτός-φωτεινότητας. Το προκύπτον φαινόμενο μέγεθος $m(z)$ σχετίζεται με την απόσταση φωτεινότητας (luminosity distance), $d_L(z)$, μέσω της σχέσης

$$m_{th}(z) = \bar{M}(M, H_0) + 5log_{10}(D_L(z)), \tag{6.77}$$

όπου σε ένα επίπεδο κοσμολογικό μοντέλο

$$D_L(z) = (1+z)\int_0^z dz' \frac{H_0}{H(z'; a_1, ..., a_n)}, \tag{6.78}$$

είναι η ανεξάρτητη της σταθεράς Hubble απόσταση φωτεινότητας ($H_0 d_L/c$). Οι παράμετροι $a_1, ..., a_n$ είναι παράμετροι του θεωρητικού μοντέλου και $\bar{M}$ είναι η μετατόπιση μηδενός για το μέγεθος, εξαρτώμενη από το απόλυτο μέγεθος M και την τωρινή παράμετρο Hubble H_0 ως

$$\begin{aligned} \bar{M} &= M + 5log_{10}(\frac{c\,H_0^{-1}}{Mpc}) + 25 = \\ &= M - 5log_{10}h + 42.38\,. \end{aligned} \tag{6.79}$$

Η παράμετρος M είναι το απόλυτο μέγεθος και θεωρούμε ότι είναι σταθερό αφού έχουν εφαρμοστεί οι παραπάνω διορθώσεις στο $m(z)$.

Τα πειραματικά σημεία του συνόλου Gold06, αφού έχουν εφαρμοστεί οι διορθώσεις, δίνονται με βάση το μέτρο απόστασης

$$\mu_{obs}(z_i) \equiv m_{obs}(z_i) - M\,. \tag{6.80}$$

Οι παράμετροι του θεωρητικού μοντέλου καθορίζονται ελαχιστοποιώντας την ποσότητα

$$\chi^2(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i))^2}{\sigma_{\mu\,i}^2 + \sigma_{v\,i}^2}, \tag{6.81}$$

όπου $\sigma^2_{\mu\, i}$ και $\sigma^2_{v\, i}$ είναι τα σφάλματα λόγω αβεβαιοτήτων στη ροή ακτινοβολίας και η διασπορά στις ταχύτητες ιδίας κίνησης αντίστοιχα. Τα σφάλματα αυτά θεωρούνται Γκαουσσιανά και μη-συσχετισμένα (uncorrelated). Το θεωρητικό μέτρο αποστάσεως ορίζεται ως

$$\mu_{th}(z_i) \equiv m_{th}(z_i) - M = 5log_{10}(D_L(z)) + \mu_0\,, \qquad (6.82)$$

όπου

$$\mu_0 = 42.38 - 5log_{10}h\,. \qquad (6.83)$$

Το $\mu_{th}(z_i)$ εξαρτάται επίσης από τις παραμέτρους $a_1, ..., a_n$ που χρησιμοποιούνται για την παραμετροποίηση του $H(z)$ στην εξίσωση (6.78).

Για να βρούμε τις καλύτερες τιμές των παραμέτρων με βάση την (6.70), χρησιμοποιούμε την υπόθεση $\Omega_{0m} = 0.27$ και ακολουθούμε τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις, τις οποίες ονομάζουμε *ελαχιστοποίηση* (minimization), *περιθωριοποίηση-ελαχιστοποίηση* (magninalization-minimization)και *περιθωριοποίηση μέσης τιμής* (marginalization-average), με αποτελέσματα τα οποία είναι συνεπή μεταξύ των τριών μεθόδων. Οι προσεγγίσεις αυτές μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

- **Ελαχιστοποίηση:** ελαχιστοποιούμε την εξίσωση (6.81) και ως προς τις τέσσερις παραμέτρους (Ω_{DR}, $\tilde{\Omega}_B$, ν και μ). Τα βήματα που ακολουθούμε για την ελαχιστοποίηση αναφέρονται με λεπτομέρεια στην [72]. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι αντιμετωπίζει και τις τέσσερις παραμέτρους ισότιμα και δίνει για όλες άμεσες πληροφορίες. Από την άλλη, υπεισάγει σημαντικό εκφυλισμό, οδηγώντας έτσι σε μεγάλα σφάλματα για τις καλύτερες τιμές των παραμέτρων.

- **Περιθωριοποίηση-ελαχιστοποίηση:** στην προσέγγιση αυτή περιθωριοποιούμε ως προς τα $\Omega_{DR} \in [-1.5, 5]$ και $\tilde{\Omega}_B \in [-10, 2]$ και προβαίνουμε κατόπιν σε ελαχιστοποίηση ως προς τις εναπομένουσες δύο παραμέτρους ν και μ. Για να επιλέξουμε το διάστημα στο οποίο θα γίνει η περιθωριοποίηση, ελαχιστοποιούμε το χ^2 για αρκετά ζεύγη λογικών τιμών των ν και μ και βρίσκουμε ένα αρκετά μεγάλο διάστημα, το οποίο να περιέχει όλες τις καλύτερες τιμές για τα Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$. Επίσης, ελέγχουμε ότι τα αποτελέσματά μας δεν επηρεάζονται αν επιλέξουμε ένα μεγαλύτερο διάστημα από αυτό που χρησιμοποιήσαμε για την περιθωριοποίηση. Το περιθωριοποιημένο $\tilde{\chi}^2$ ορίζεται ως:

$$\tilde{\chi}^2(\nu, \mu) = -2\, ln \int e^{-\chi^2/2}\, d\Omega_{DR}\, d\tilde{\Omega}_B\,. \qquad (6.84)$$

  Αυτό με τη σειρά του ελαχιστοποιείται ως προς τις παραμέτρους ν και μ. Παίρνουμε έτσι τις καλύτερες τιμές για τους εκθέτες ν και μ, οι οποίοι είναι άμεσα σχετικοί με τις φυσικές ιδιότητες των δύο συνιστωσών $\bar{P}_B$ και P_5. Η μέθοδος αυτή έχει μικρότερο εκφυλισμό στο ελάχιστο, συγκρινόμενη με την προηγούμενη στρατηγική της απευθείας ελαχιστοποίησης, αλλά δεν παρέχει μία εκτίμηση για τις παραμέτρους Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$. Μία τέτοια εκτίμηση είναι απαραίτητη, προκειμένου να κατασκευάσουμε την ενεργό καταστατική εξίσωση που βρίσκεται σε συμφωνία με τα δεδομένα, $w_{eff}(z)$, η οποία έχει οριστεί στην (6.58). Προκειμένου να πάρουμε την εκτίμηση αυτή, θέτουμε τα ν και μ ίσα με τις καλύτερες τιμές τις οποίες αναφέραμε και ελαχιστοποιούμε το χ^2 ως προς τα Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$.

- **Περιθωριοποίηση μέσης τιμής:** οι καλύτερες τιμές των Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$ που παίρνουμε μετά την περιθωριοποίηση, όπως περιγράψαμε παραπάνω, επιβεβαιώνονται επίσης θεωρώντας τις *μέσες* τιμές αυτών των παραμέτρων αντί για τις τιμές τους που ελαχιστοποιούν το χ^2. Ορίζουμε έτσι τις μέσες τιμές των δύο παραμέτρων ως

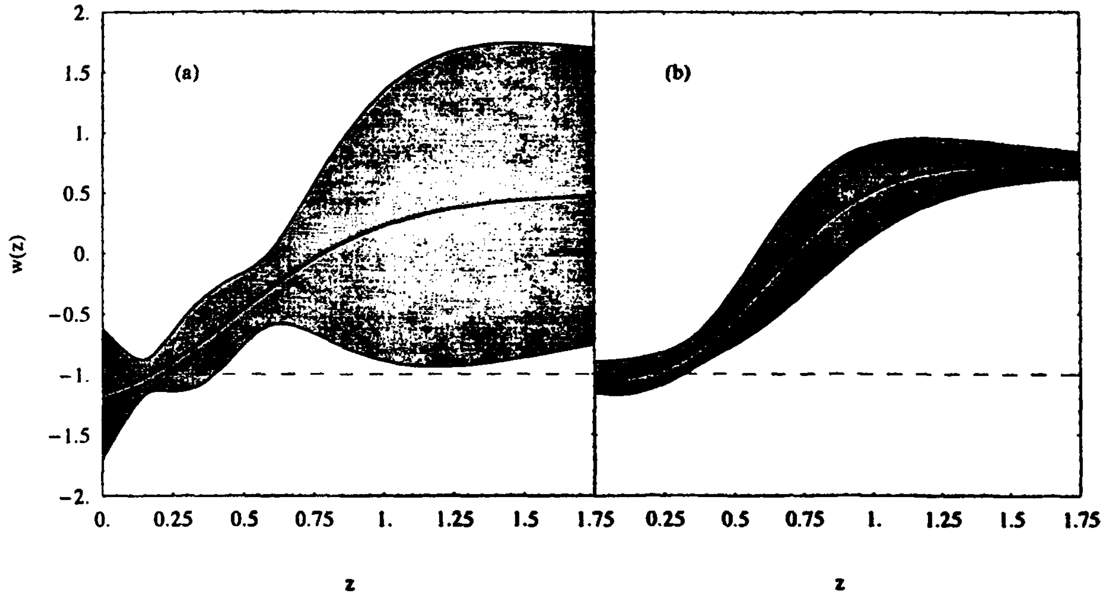
$$< \Omega_{par} >= \frac{\int \Omega_{par} e^{-\chi^2/2}\, d\Omega_{DR}\, d\tilde{\Omega}_B}{\int e^{-\chi^2/2}\, d\Omega_{DR}\, d\tilde{\Omega}_B}, \tag{6.85}$$

όπου $par = \{DR, B\}$.

Πίνακας 6.1: Οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων που παίρνουμε με καθεμία από τις τρεις μεθόδους. Σημειώνουμε ότι για τις ποσότητες που υπολογίζονται με την διαδικασία *Μέση Τιμή* της (6.85) δεν αναφέρουμε κάποιο αντίστοιχο σφάλμα λόγω της φύσεως της μεθόδου.

Παράμετρος	Ελαχιστοποίηση	Περ.-Ελαχ.	Περ. Μεσ. Τιμής
ν	0.75 ± 5.09	-3.0 ± 1.1	-3.0 ± 1.1
μ	-3.55 ± 5.77	-0.8 ± 0.3	-3.55 ± 5.77
Ω_{DR}	0.29 ± 2.45	0.49 ± 0.25	0.52
$\tilde{\Omega}_B$	3.39 ± 0.76	-1.00 ± 0.49	-1.05
Ω_5	-0.27 ± 2.57	1.24 ± 1.23	1.26

Οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων με καθεμία από τις παραπάνω μεθόδους φαίνονται στον Πίνακα 1. Η πρώτη προσέγγιση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με το υπό εξέταση μοντέλο, εξαιτίας των μεγάλων σφαλμάτων για τις καλύτερες τιμές. Από την άλλη, η μέθοδος της περιθωριοποίησης φαίνεται να ευνοεί μία ερμηνεία του $\nu \sim -3$ και αρνητική $\tilde{\Omega}_B$, που αντιστοιχεί σε μία θετική περιβάλλουσα πίεση $\overline{P}_B$ (βλέπε τις εξισώσεις (6.46) και (6.71)). Επίσης, μία θετική Ω_5 αντιστοιχεί σε $P_5 < 0$, το οποίο σημαίνει ότι ενέργεια ρέει προς τη Μεμβράνη από τον Υπερχώρο. Αυτό είναι ένα διαισθητικά λογικό αποτέλεσμα, το οποίο ενδεχομένως υποδεικνύει την ύπαρξη μίας συνιστώσας ύλης, η οποία διαδίδεται στον Υπερχώρο και κινείται με μία ταχύτητα v κατά μήκος της πέμπτης διάστασης [112, 113]. Έχει δειχθεί ότι ο όρος σκοτεινής ακτινοβολίας σχετίζεται με την γενικευμένη συν-κινούμενη μάζα $\mathcal{M}$ του περιβάλλοντος ρευστού και στην προκειμένη περίπτωση, η καλύτερη τιμή της Ω_{DR} είναι θετική [117]. Αυτό είναι ένα θετικό χαρακτηριστικό του μοντέλου, αφού μία αρνητική τιμή θα αντιστοιχούσε σε αρνητική μάζα $\mathcal{M}$. Εξασφαλίζει επίσης μία σωστή συμπεριφορά για την κοσμολογία σε πρώιμους χρόνους, αν και η εγκυρότητα της ενεργού εξίσωσης Friedmann σε αυτά τα χρονικά διαστήματα είναι



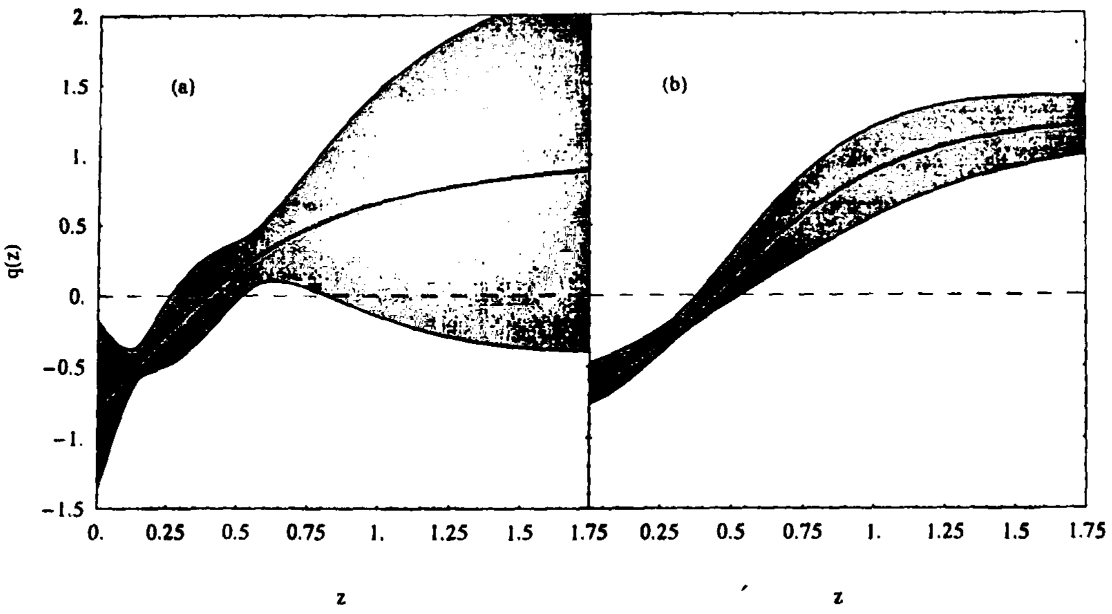
Σχήμα 6.2: Η ενεργός καταστατική παράμετρος w_{eff} για την μέθοδο "Ελαχιστοποίηση" (Σχ. 6.2α) και την μέθοδο "Περιθωριοποίηση-Ελαχιστοποίηση" (Σχ. 6.2β). Η μεγάλη περιοχή σφάλματος του Σχ. 6.2α οφείλεται στο σημαντικό εκφυλισμό του μοντέλου, ενώ το γεγονός ότι η αντίστοιχη περιοχή σφάλματος είναι μικρότερη στο Σχήμα 6.2β οφείλεται στο ότι οι τιμές των ν και μ θεωρήθηκαν σταθερές κατά τη φάση της ελαχιστοποίησης ως προς Ω_{DR} και $\tilde{\Omega}_B$.

από μόνη της υπό αμφισβήτηση. Τέλος, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 1, οι δύο προσεγγίσεις "Περιθωριοποίηση-Ελαχιστοποίηση" και "Περιθωριοποίηση Μέσης Τιμής" βρίσκονται σε καλή συμφωνία μεταξύ τους.

Τα αντίστοιχα χρονικά προφίλ της ενεργού καταστατικής παραμέτρου $w_{eff}(z)$ και της παραμέτρου επιβράδυνσης $q(z)$ φαίνονται στα Σχήματα 6.2 και 6.3 για τις δύο πρώτες μεθόδους ("Ελαχιστοποίηση" και "Περιθωριοποίηση-Ελαχιστοποίηση"). Παρά τα μεγάλα σφάλματα, οι καλύτερες καμπύλες των $w_{eff}(z)$ και $q(z)$ βρίσκονται σε αρκετά καλή συμφωνία για τις δύο διαδικασίες. Τα διαγράμματα που αντιστοιχούν στην τρίτη προσέγγιση ("Περιθωριοποίηση Μέσης Τιμής") είναι πρακτικά ίδια με τα Σχήματα 6.2β και 6.3β της μεθόδου "Περιθωριοποίηση-Ελαχιστοποίηση" (βλέπε επίσης τον Πίνακα 1).

Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό των Σχημάτων 6.2α και 6.2β είναι η ύπαρξη "ευνοϊκών σημείων" στα $z \sim 0.2$ και $z \sim 0.55$. Η ύπαρξη αυτών των "ευνοϊκών σημείων" σε διαφορετικές ερυθρές μετατοπίσεις για διαφορετικές παραμετροποιήσεις, συνήθως πολυωνυμικές, είναι ένα γνωστό φαινόμενο το οποίο έχει ήδη μελετηθεί (βλέπε [71]) και είναι συνέπεια της προδιαγραφής που χρησιμοποιείται. Ωστόσο, εφαρμόζοντας την περιθωριοποίηση, η περιοχή σφάλματος στο Σχ. 6.2β είναι σημαντικά πιο ομαλή από αυτή του Σχ. 6.2α.

Χρησιμοποιήσαμε τα πιο πρόσφατα δεδομένα SnIa που περιλαμβάνονται στο σύνολο δε-



Σχήμα 6.3: Η παράμετρος επιβράδυνσης q για τη μέθοδο "Ελαχιστοποίηση" (Σχ. 6.3α) και την μέθοδο "Περιθωριοποίηση-Ελαχιστοποίηση" (Σχ. 6.3β). Η μεγάλη περιοχή σφάλματος του Σχ. 6.3α οφείλεται και πάλι στο σημαντικό εκφυλισμό του μοντέλου, ενώ η αντίστοιχη περιοχή σφάλματος είναι μικρότερη στο Σχήμα 6.3β λόγω της εφαρμογής της περιθωριοποίησης, πριν την ελαχιστοποίηση ως προς Ω_{DR} και Ω_B.

δομένων Gold06 [23, 26, 27, 96] για να κάνουμε μία εκτίμηση των προτιμητέων τιμών των παραμέτρων του μοντέλου. Το πλεονέκτημα του μοντέλου μας είναι η ύπαρξη φυσικής αιτιολόγησης, προερχόμενης από θεμελιώδη φυσική. Αν και ο μεγάλος αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου υπεισάγει μεγάλα σφάλματα, ο συνδυασμός διαφορετικών τρόπων ανάλυσης των δεδομένων μας έδωσε ενδιαφέρουσες πληροφορίες γύρω από τις προτιμητέες τιμές τους.

Εξαιτίας της ύπαρξης σημαντικού εκφυλισμού, η πρώτη μέθοδος ανάλυσης μας έδωσε τιμές με μεγάλα σφάλματα (βλέπε Πίνακα 1) και δεν επιτρέπει την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Από την άλλη, η μέθοδος της περιθωριοποίησης υποδεικνύει μία συνιστώσα της περιβάλλουσας ύλης που συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό, κινούμενο με ταχύτητα v κατά μήκος της πέμπτης διάστασης, ενώ ο όρος ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ μεμβράνης και Υπερχώρου αντιστοιχεί σε αρνητική πίεση, που σημαίνει ότι ενέργεια ρέει από τον Υπερχώρο πάνω στη μεμβράνη. Παρά τις *φυσικές τιμές* των παραμέτρων, η χαλύτερη *ενεργός* καταστατική παράμετρος w_{eff} τέμνει οριακά την γραμμή $w = -1$. Αναπαράγει επίσης την παρατηρούμενη κοσμική διαστολή σε πρόσφατους χρόνους, με μία μετάβαση από επιταχυνόμενη σε επιβραδυνόμενη φάση για $z \approx 0.5$, σε συμφωνία με προηγούμενες αναλύσεις [70, 121].

6.4 Συμπεράσματα

Σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό υπήρξε η μελέτη της κοσμολογίας των μοντέλων μεμβρανών, παρουσία περιβάλλουσας ύλης και ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ του Υπερχώρου και της μεμβράνης. Κατασκευάζοντας ένα συγκεκριμένο μοντέλο σε πέντε διαστάσεις, δείξαμε ότι είναι δυνατόν να πάρουμε μία ενδιαφέρουσα κοσμολογική συμπεριφορά για μεγάλους χρόνους, η οποία να είναι σε συμφωνία με τις πρόσφατες παρατηρήσεις. Τόσο οι πιέσεις της περιβάλλουσας ύλης, όσο και ο όρος σκοτεινής ακτινοβολίας, παίζουν σημαντικό ρόλο στην αναπαραγωγή ενός χρονικού προφίλ για την ενεργό καταστατική παράμετρο της σκοτεινής ενέργειας, το οποίο να παρουσιάζει διάσχιση της γραμμής $w = -1$, καθώς και στην εμφάνιση επιταχυνόμενης διαστολής. Είδαμε δε ότι το πρόσημο του όρου σκοτεινής ακτινοβολίας πρέπει να είναι αρνητικό, γεγονός το οποίο μπορεί να προκαλέσει επιπλοκές σε πρώιμους χρόνους. Το ενεργειακό περιεχόμενο του Υπερχώρου επιδέχεται μία ικανοποιητική περιγραφή ως ιδανικό ρευστό. Αυτό είναι ένα από τα κύρια αποτελέσματα του κεφαλαίου, καθώς επιτυγχάνεται η αναπαραγωγή της διάσχισης της γραμμής $w = -1$, χωρίς να καταφύγουμε σε μορφές ύλης οι οποίες παραβιάζουν ενεργειακές συνθήκες. Το φαινόμενο αυτό έχει δηλαδή στα πλαίσια του μοντέλου που εξετάζουμε μία καθαρά γεωμετρική εξήγηση.

Στη συνέχεια, εξετάσαμε κατά πόσον με επιβολή κατάλληλων περιορισμών στις παραμέτρους του μοντέλου μας μπορούμε να πάρουμε ένα προφίλ εξέλιξης για την ενεργό καταστατική παράμετρο, το οποίο να βρίσκεται σε ποιοτική συμφωνία με τα κοσμολογικά δεδομένα, παρακάμπτοντας ταυτόχρονα το πρόβλημα του αρνητικού όρου σκοτεινής ενέργειας. Μελετήσαμε τα επιτρεπτά πεδία τιμών για τις παραμέτρους και διαπιστώσαμε ότι η επιθυμητή συμπεριφορά απαιτεί διαφορετικές δυνάμεις για τις δύο συνιστώσες πίεσης. Αυτό μας εξαναγκάζει να εγκαταλείψουμε την αρχική μας ερμηνεία με βάση ένα φαινομενολογικό ρευστό, καθώς μία τέτοια εξήγηση θα απαιτούσε αυτομάτως οι δυνάμεις να είναι ίσες. Ωστόσο, μία ερμηνεία της περιβάλλουσας ύλης ως σύνθεσης τουλάχιστον δύο διαφορετικών ρευστών συνιστωσών είναι επιτρεπτή.

Τέλος, χρησιμοποιώντας το σύνολο δεδομένων SnIa Gold06, προχωρήσαμε σε μία άμεση αντιπαραβολή του μοντέλου με τις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Διαπιστώσαμε ότι η ανάλυση των δεδομένων δίνει καλύτερες τιμές για τις παραμέτρους οι οποίες υποστηρίζουν την ερμηνεία του περιεχομένου του Υπερχώρου ως κονιορτού (καθώς η τιμή $\nu = -3$ ευνοείται). Ταυτόχρονα, ο όρος σκοτεινής ακτινοβολίας έχει μία καλύτερη τιμή, η οποία είναι θετική. Οι καμπύλες που παίρνουμε για τη χρονική εξέλιξη της παραμέτρου επιβράδυνσης και της ενεργού καταστατικής παραμέτρου βρίσκονται σε συμφωνία με άλλες πρόσφατες μελέτες γύρω από τη συμπεριφορά της σκοτεινής ενέργειας και το προφίλ της κοσμικής διαστολής σε πρόσφατους χρόνους. Εν κατακλείδι, η πραγμάτευση του μοντέλου αυτού, ξεκινώντας από πρώτες αρχές και φτάνοντας μέχρι την απευθείας σύγκρισή του με τα παρατηρησιακά δεδομένα αποτελεί ένα ενδιαφέρον παράδειγμα των εφαρμογών που τα μοντέλα μεμβρανών μπορούν να έχουν στην προσπάθεια εξήγησης σύγχρονων προβλημάτων της κοσμολογίας, όπως η επιταχυνόμενη κοσμική διαστολή και η φυσική της προέλευση.

Κεφάλαιο 7

Κοσμολογική Σταθερά και Φαινομενολογία Μοντέλων Μεμβρανών

7.1 Συνεργατική Βαρύτητα και Συντονισμός σε Παραλλαγές του Μοντέλου GRS

7.1.1 Εισαγωγή

Εδώ και αρκετό καιρό, οι θεωρίες με επιπλέον χωρικές διαστάσεις, έχοντας θεωρητική υποστήριξη από την Θεωρία Χορδών/Θεωρία-Μ, έχουν αναδειχτεί σε μία από τις πιο σημαντικές μεθόδους προσέγγισης στις προσπάθειες να προχωρήσουμε πέρα από το Καθιερωμένο Μοντέλο της φυσικής. Σε φαινομενολογικά βιώσιμα μοντέλα, οι επιπλέον διαστάσεις εμφανίζονται μόνο σε πολύ μικρές κλίμακες μήκους, ενώ πάνω από μία ορισμένη κλίμακα απόστασης, η φυσική περιγράφεται από μία ενεργό τετραδιάστατη θεωρία. Κεντρικό ρόλο σε αυτές τις θεωρήσεις παίζει το φαινόμενο της χωρικά εντοπισμένης βαρύτητας [39, 40], το οποίο εμφανίζεται στην περίπτωση του μοντέλου Randall-Sundrum, όπου μία 3-μεμβράνη είναι εμβαπτισμένη σε έναν πενταδιάστατο Υπερχώρο με αρνητική κοσμολογική σταθερά και μία άπειρη πέμπτη διάσταση. Σε αυτό το πλαίσιο, η τετραδιάστατη βαρύτητα αναπαράγεται σε μεγάλες αποστάσεις, ενώ τα επιφαινόμενα από το συνεχές φάσμα των μαζικών καταστάσεων Kaluza-Klein (KK) είναι αμελητέα σε χαμηλές ενέργειες. Ωστόσο, έχει δειχθεί από τους Gregory, Rubakov και Sibiryakov ότι είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένα μοντέλο, στο οποίο οι επιπλέον διαστάσεις εμφανίζονται ξανά, τόσο σε πολύ μικρές, όσο και σε πολύ μεγάλες αποστάσεις [54, 55]. Στην περίπτωση αυτή, η τετραδιάστατη βαρύτητα αναπαράγεται μόνο σε ενδιάμεσες αποστάσεις. Σε πολύ μικρές αποστάσεις, εμφανίζονται οι τυπικές διορθώσεις τύπου Randall-Sundrum, ενώ σε πολύ μεγάλες κλίμακες, η βαρύτητα τροποποιείται και πάλι και έχει συμπεριφορά υψηλότερης διάστασης. Η αιτία του φαινομένου αυτού, επονομαζομένου *"ημιεντοπισμός"* (quasi-localization), είναι η απουσία της μηδενικής κατάστασης και η αντικατάστασή της από έναν συντονισμό μηδενικής μάζας του συνεχούς φάσματος. Το εύρος αποστάσεων, στο οποίο είναι έγκυρη η Νευτώνια βαρύτητα, εξαρτάται από τον χρόνο ζωής αυτού του συντονισμού. Διεξοδική ανάλυση των συνθηκών υπό τις οποίες ο ημιεντοπισμός λαμβάνει χώρα έχει ήδη ολοκληρωθεί στις [53, 133, 134] για την περίπτωση ασυμπτωτικά επίπεδων χώρων και για χώρους μελανών οπών [135, 136, 137]. Παρόμοια φαινόμενα εμφανίζονται επίσης σε μοντέλα τύπου DGP [138]. Το μη αναμενόμενο φαινόμενο του ημιεντοπισμού σε ορισμένους χωρόχρονους που δεν παρουσιάζουν ασυμπτωτική επιπεδότητα αναλύθηκε στην [139].

Στο παρόν εδάφιο, εξετάζουμε τα φαινόμενα του ημιεντοπισμού της βαρύτητας, στο πλαίσιο πενταδιάστατων μοντέλων μεμβρανών, τα οποία παρουσιάζουν ασυμπτωτικά επίπεδη γεωμετρία [140]. Θα περιοριστούμε σε χώρους, οι οποίοι μοιάζουν με έναν συνηθισμένο χώρο Minkowski μακριά από την αρχή των αξόνων της πέμπτης διάστασης. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για την αλληλεπίδραση μεταξύ της μηδενικής κατάστασης των μοντέλων αυτών [141] (όποτε αυτή η μηδενική κατάσταση είναι κανονικοποιήσιμη) και των φαινομένων πιθανών άμαζων συντονισμών, οι οποίοι προέρχονται από τις συνεισφορές των μαζικών καταστάσεων KK του φάσματος. Αρχικά, θεωρούμε μία συμπαγοποιημένη εκδοχή του μοντέλου GRS. Οι μάζες του φάσματος KK, το οποίο προκαλεί τον συντονισμό και την εμφάνιση ενεργού τετραδιάστατης βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη, εξαρτώνται από την ακτίνα συμπαγοποίησης και παρουσιάζουν την σωστή συμπεριφορά στο όριο άπειρης ακτίνας, αναπαράγοντας τις προβλέψεις του μοντέλου GRS. Αφού θεωρούμε ότι η επιπλέον διάσταση είναι πεπερασμένη, υπάρχει πάντα μία κανονικοποιήσιμη μηδενική κατάσταση, αντίθετα με ό,τι συναντάμε στο σύνηθες GRS. Δείχνουμε ότι, καθώς ο συντονισμός ενισχύεται, η ισχύς της μηδενικής κατάστασης πάνω στη μεμβράνη μειώνεται. Η κλίμακα μήκους της ημιεντοπισμένης βαρύτητας του μοντέλου GRS δεν είναι πλέον το κατώφλι μεταξύ τετραδιάστατης και πενταδιάστατης βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη, αλλά καθορίζει την απόσταση για την οποία, τόσο ο συντονισμός, όσο και η μηδενική κατάσταση έχουν σημαντική συνεισφορά στην τετραδιάστατη βαρύτητα. Πάνω από την κλίμακα αυτή, η βαρύτητα διαδίδεται κύρια από την μηδενική κατάσταση, και ο συντονισμός προκαλεί μόνο υψηλότερης τάξεως διορθώσεις. Η κατάσταση αυτή είναι παρόμοια με τα μοντέλα διβαρύτητας και πολυβαρύτητας [142, 143, 144], αλλά στη δική μας περίπτωση η επιπλέον συνεισφορά στο βαρυτικό δυναμικό δεν οφείλεται σε μία ασυνήθιστα ελαφριά κατάσταση KK, αλλά στη συσσωρευμένη επίδραση μίας πλειάδας από έμμαζες καταστάσεις. Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα ασυμμετρικό μοντέλο GRS, το οποίο δεν είναι συμπαγές και έχει διαφορετικές κοσμολογικές σταθερές σε κάθε πλευρά μίας μεμβράνης θετικής τάσεως. Καθώς το μοντέλο είναι μη-συμπαγές και ασυμπτωτικά επίπεδο, δεν υπάρχει σε αυτή την κατασκευή μηδενική κατάσταση. Όποια τετραδιάστατα βαρυτικά φαινόμενα παίρνουμε θα είναι τότε αποκλειστικά λόγω της ύπαρξης συντονισμού. Παράγουμε το φάσμα των καταστάσεων KK στην περίπτωση αυτή και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά του συμμετρικού μοντέλου. Δείχνουμε ότι ένας συντονισμός είναι πράγματι παρών, αλλά το ασυμμετρικό δυναμικό περιορισμού τον αποδυναμώνει, οδηγώντας σε μικρότερο χρόνο ζωής και κατ' επέκταση μικρότερες αποστάσεις πάνω στη μεμβράνη, στις οποίες παίρνουμε τετραδιάστατη βαρύτητα (βλέπε επίσης [145, 146]). Τέλος, ως ένα τρίτο παράδειγμα μοντέλου που παρουσιάζει ημιεντοπισμό, παρουσιάζουμε μία μη-συμπαγή κατασκευή, όπου η κεντρική μεμβράνη αντικαθίσταται από μία κατάλληλη ανομοιομορφία ενός βαθμωτού πεδίου.

7.1.2 Συμπαγοποιημένο GRS

Βασική Δομή του Μοντέλου

Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας μία μετρική της γενικής μορφής

$$ds^2 = e^{-A(y)} n_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 , \tag{7.1}$$

όπου $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ είναι τετραδιάστατοι δείκτες και υιοθετούμε μία υπογραφή της μορφής $(+, -, -, -, -)$. Η διαμόρφωση του μοντέλου στον πενταδιάστατο χώρο εικονίζεται στο σχήμα 1. Θεωρούμε ότι η πέμπτη διάσταση, y, είναι συμπαγοποιημένη σε έναν κύκλο α-κτίνας R, έτσι ώστε $-\pi R \leq y \leq \pi R$ και επίσης υποθέτουμε ότι έχουμε συμμετρία τύπου σφαιρικής πολλαπλότητας για τον χώρο μας, οπότε μπορούμε να περιορίσουμε την μελέτη μας μόνο στην περιοχή τιμών $0 \leq y \leq \pi R$. Για αρνητικές τιμές του y, το σύστημα είναι απλώς μία κατοπτρική εικόνα του χώρου των θετικών y. Όπως και στο σύνηθες μοντέλο GRS, τοποθετούμε μία μεμβράνη θετικής τάσεως σ σε ένα δοσμένο σημείο της σφαιρικής πολλαπλότητας $y = 0$ και δύο μεμβράνες αρνητικής τάσεως $-\sigma/2$ σε κάποιο σημείο y_0 (εφόσον ο χώρος είναι κατοπτρικά συμμετρικός, τοποθέτηση μίας μεμβράνης ορισμένης τάσεως στο θετικό σημείο y_0 συνεπάγεται ταυτόχρονη τοποθέτηση μίας δεύτερης μεμβράνης ίδιας τάσεως στο σημείο $-y_0$). Παρατηρούμε ότι το ολικό φορτίο στη σφαιρική πολλαπλότητα, αν ερμηνεύσουμε την τάση των μεμβρανών ως φορτίο, είναι μηδενικό [144]. Υποθέτουμε ότι μεταξύ της μεμβράνης θετικής τάσεως και των αρνητικά φορτισμένων μεμβρανών υπάρχει μία αρνητική κοσμολογική σταθερά Λ, έτσι ώστε ο χώρος για $|y| \leq y_0$ να έχει γεωμετρία AdS_5 (πενταδιάστατος anti-de Sitter). Για $|y| > y_0$, η κεντρική μεμβράνη θωρακίζεται από τις δύο μεμβράνες αρνητικής τάσεως και παίρνουμε έτσι, εξωτερικά του συστήματος των μεμβρανών, έναν χώρο Minkowski. Για να μελετήσουμε την κατασκευή αυτή, είναι βολικό να κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητών. Αντί για την προηγούμενη μετρική, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη προδιαγραφή

$$ds^2 = e^{-A(z)} \left(n_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2 \right) , \tag{7.2}$$

με την ίδια υπογραφή. Τα δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται, μέσω της σχέσης $\frac{dy}{dz} = e^{-A/2}$. Προκειμένου να προχωρήσουμε στη διερεύνησή μας, πρέπει πρώτα να επανεκφράσουμε τη δράση των μεμβρανών με βάση την νέα συντεταγμένη z, αφού ο ορισμός του μοντέλου έγινε αρχικά με βάση την συντεταγμένη y. Η δράση του μοντέλου ως προς την πρώτη μετρική μπορεί να γραφεί ως

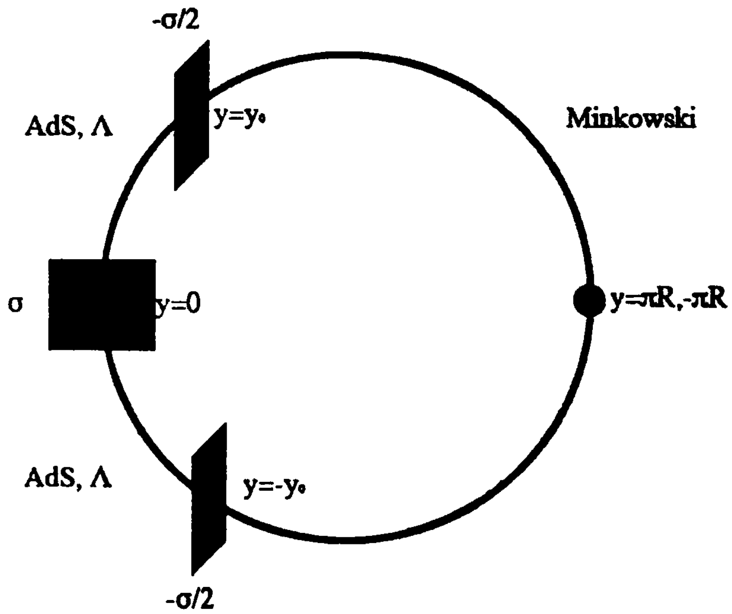
$$S = S_{gravity} + S_{branes} ,$$

όπου το βαρυτικό μέρος είναι

$$S_{gravity} = 2M^3 \int d^5x \sqrt{G}\, R - \int d^5x \sqrt{G}\, \Lambda \tag{7.3}$$

και η δράση της κάθε μεμβράνης είναι

$$S^{(i)}_{brane} = - \int d^4x\, \sigma^{(i)} \sqrt{-g\,(y)} = - \int d^4x \int dy\, \sigma^{(i)} \delta\,(y - y_i) \sqrt{-g\,(y_i)} \,. \tag{7.4}$$



Σχήμα 7.1: Η βασική δομή της σφαιρικής πολλαπλότητας, με μία μεμβράνη θετικής τάσεως τοποθετημένη στο $y=0$ και δύο αρνητικής τάσεως μεμβράνες στα σημεία $y=\pm y_0$.

Στις σχέσεις αυτές, $\sigma^{(i)}$ είναι η τάση της μεμβράνης i, τοποθετημένης στο σημείο y_i. G_{MN} είναι η πενταδιάστατη μετρική και $g_{\mu\nu}$ είναι η επαγόμενη μετρική πάνω σε κάθε μεμβράνη. Συμβολίζουμε την ορίζουσα της επαγόμενης μετρικής ως $g(y)$, για να καταστήσουμε εκπεφρασμένη την εξάρτηση από την συντεταγμένη y. Τονίζουμε ότι, εξαιτίας της επιλογής που κάναμε για την υπογραφή της μετρικής, η ορίζουσα της τετραδιάστατης μετρικής G ενέχει ένα γινόμενο τεσσάρων αρνητικών προσήμων και άρα είναι θετική. Ωστόσο, η επαγόμενη μετρική κληρονομεί μία υπογραφή της μορφής $(+,-,-,-)$ σε τέσσερις διαστάσεις και έτσι η ορίζουσά της είναι αρνητική. Έτσι, γράφουμε $\sqrt{G}$ και $\sqrt{-g}$ αντίστοιχα. Εκτελούμε τώρα τον μετασχηματισμό στην συντεταγμένη z και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
S_{brane}^{(i)} &= -\int d^4x \int dy\, \sigma^{(i)} \delta\left(y-y_i\right) \sqrt{-g\left(y_i\right)} \\
&= -\int d^4x \int dz\, \frac{dy}{dz} \sigma^{(i)} \delta\left(y-y_i\right) \sqrt{-g\left(y_i\right)} \\
&= -\int d^4x \int dz\, \sigma^{(i)}\, \delta\left(z-z_i\right) \sqrt{-g\left(y_i\right)}\,. \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για τις επαγόμενες μετρικές, έχουμε, $g_{\mu\nu}\left(y_i\right)=e^{-A(y_i)}\eta_{\mu\nu}=e^{-A(z_i)}\eta_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\left(z\right)$, έτσι ώστε $\sqrt{-g\left(y_i\right)}=\sqrt{-g\left(z_i\right)}$. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας για κάθε μεμβράνη $T_{br}^{(i)}$ παράγεται μεταβάλλοντας τη δράση ως προς ολόκληρη την πενταδιάστατη μετρική, αλλά πρέπει να θυμόμαστε ότι η δράση της ίδιας της μεμβράνης εξαρτάται μόνο από τις συνιστώσες της επαγόμενης μετρικής. Παίρνουμε έτσι

$$T^{(i)}_{br_{MN}} = -\frac{2}{\sqrt{G(z)}}\frac{\delta S^{(i)}_{brane}}{\delta G^{MN}(z)} = -\sigma^{(i)}\delta(z-z_i)\frac{\sqrt{-g(z_i)}}{\sqrt{G(z_i)}}g_{\mu\nu}(z_i)\,\delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\,. \quad (7.6)$$

Αφού $\sqrt{-g(z_i)}/\sqrt{G(z_i)} = e^{A(z_i)/2}$, η τελική έκφραση για τον τανυστή ορμής-ενέργειας της μεμβράνης είναι

$$T^{(i)}_{br_{MN}} = -\sigma^{(i)}\delta(z-z_i)\,e^{\frac{A(z_i)}{2}}\,g(z_i)_{\mu\nu}\,\delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\,. \quad (7.7)$$

Βλέπουμε τώρα ότι η τάση της μεμβράνης υφίσταται κλιμάκωση με βάση τον παράγοντα στρέβλωσης της επιπλέον διάστασης. Αυτός είναι ο λόγος που μας εμπόδισε να εκφράσουμε αρχικά το μοντέλο μας ως προς τη συντεταγμένη z. Τώρα που γνωρίζουμε τις συνεισφορές από τους τανυστές ορμής-ενέργειας των μεμβρανών, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein . Η κατασκευή μας είναι τώρα πλήρως εκπεφρασμένη ως προς την συντεταγμένη z. Θα παραγάγουμε σύντομα την ακριβή σχέση η οποία απεικονίζει σημεία y στα ομόλογά τους σημεία z. Το $y = 0$ προκύπτει ότι απεικονίζεται επίσης στο $z = 0$, ενώ υπάρχει ένα z_0, το οποίο αντιστοιχεί στο y_0, όπου βρίσκεται η μεμβράνη αρνητικής τάσεως. Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με z_1 τη θέση που είναι ομόλογη της $y = \pi R$. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε επίσης μία κοσμολογική σταθερά Λ για $|z| \leq z_0$. Οι εξισώσεις Einstein είναι

$$\mathcal{G}_{MN} = -\frac{T_{MN}}{4M^3}\,, \quad (7.8)$$

όπου $\mathcal{G}_{MN}$ είναι ο τανυστής Einstein. Το πρόσημο μείον έρχεται από την επιλογή μας για την υπογραφή της μετρικής. Έχοντας λάβει όλα τα παραπάνω σημεία υπόψιν, οι εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο μας προκύπτουν να είναι

$$R_{MN} - \frac{1}{2}RG_{MN} =$$

$$\frac{1}{4M^3}\left\{\Lambda\,\Theta(z_0 - z)\,G_{MN} + \left(\sigma\,\delta(z)\,e^{\frac{A(0)}{2}} - \frac{\sigma}{2}\,\delta(z-z_0)\,e^{\frac{A(z_0)}{2}}\right)g_{\mu\nu}\,\delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\right\}. \quad (7.9)$$

Ο πρώτος όρος μέσα σε παρένθεση είναι η κοσμολογική σταθερά, ο δεύτερος έρχεται από τη μεμβράνη θετικής τάσεως στο $z = 0$, ενώ ο τρίτος είναι η συνεισφορά της αρνητικά φορτισμένης μεμβράνης στο $z = z_0$. Προχωρούμε σε επίλυση μόνο για θετικές τιμές του z. Χρησιμοποιώντας την προδιαγραφή μας για τη μετρική, καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\frac{3}{2}A'(z)^2 = -\frac{\Lambda}{4M^3}e^{-A(z)}\Theta(z_0 - z)\,, \quad (7.10)$$

$$\frac{3}{4}\left(A'(z)^2 - 2A''(z)\right) =$$

$$-\frac{1}{4M^3}e^{-A(z)}\Lambda\,\Theta(z_0 - z) - \frac{1}{4M^3}\sigma\,\delta(z)\,e^{-\frac{A(0)}{2}} + \frac{1}{8M^3}\sigma\,\delta(z-z_0)\,e^{-\frac{A(z_0)}{2}}\,. \quad (7.11)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η λύση στις εξισώσεις αυτές για $|z| \leq z_0$ είναι η μετρική Randall-Sundrum, $A(z) = 2\ln(|k|z+1)$, μαζί με τις συνθήκες λεπτής ρύθμισης

$$\Lambda = -24M^3k^2, \quad \sigma = 24M^3k \ .$$

Για τον υπόλοιπο χώρο, η λύση είναι απλώς η μετρική Minkowski, $A(z) = A(z_0) = 2\ln(|k|z_0+1)$, όπου η τιμή του A καθορίζεται από την συνέχεια της μετρικής στο σημείοz_0. Έχοντας βρει τη λύση για τον παράγοντα στρέβλωσης, είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι για $|z| \leq z_0$, η σχέση που συνδέει τις δύο συντεταγμένες y και z είναι $z = sign(y)\frac{e^{k|y|}-1}{k}$, ενώ για $|z| > z_0$, $z = (k|z_0|+1)y$. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις αυτές μπορούμε να απεικονίσουμε τα σημεία που μας ενδιαφέρουν από φυσικής απόψεως,

$$y = 0 \to z = 0, \quad y = y_0 \to z_0 = \frac{e^{ky_0}-1}{k}, \quad y = \pi R \to z_1 = (k|z_0|+1)\pi R \ .$$

Μηδενική Στάθμη και Φάσμα Kaluza - Klein

Είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε τις διαταραχές γύρω από τη λύση που πήραμε και να παραγάγουμε το δυναμικό περιορισμού και το φάσμα των διαταραχών. Περιμένουμε να βρούμε μία μηδενική κατάσταση και έναν πύργο από καταστάσεις Kaluza-Klein, εξαιτίας της συμπαγούς φύσεως της επιπλέον χωρικής διάστασης. Με βάση τη συντεταγμένη z, θεωρούμε διαταραχές γύρω από την τετραδιάστατη μετρική Minkowski, της μορφής $h_{\mu\nu}(x,z) = e^{3A(z)/4}\psi(z)\bar{h}_{\mu\nu}(x)$, με $n^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -m^2\bar{h}_{\mu\nu}(x)$, όπου m είναι η μάζα Kaluza-Klein των διαταραχών. Η εξίσωση τύπου Schröedinger για την εγκάρσια χυματοσυνάρτηση $\psi(z)$ είναι

$$-\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + V(z)\psi(z) = m^2\psi(z) \ , \tag{7.12}$$

όπου

$$V(z) = \frac{9}{16}A'(z)^2 - \frac{3}{4}A''(z) \tag{7.13}$$

είναι το δυναμικό περιορισμού για το μοντέλο μας. Αντικαθιστώντας τη λύση για τον παράγοντα στρέβλωσης, έχουμε

$$V(z) = \frac{15k^2}{4(k|z|+1)^2}\Theta(|z_0 - z|) - 3k\delta(z) + \frac{3k}{2}\frac{1}{k|z_0|+1}\delta(z - z_0) \ . \tag{7.14}$$

Η λύση της (7.12) για $m = 0$ (μηδενική κατάσταση) είναι της μορφής

$$\psi_0(z) = Ne^{-\frac{3}{4}A(z)} = N\begin{cases} \frac{1}{(k|z|+1)^{3/2}} & (|z| \leq z_0) \\ \frac{1}{(k|z_0|+1)^{3/2}} & (|z| > z_0) \end{cases} \ , \tag{7.15}$$

όπου N είναι η σταθερά κανονικοποίησης. Η συνθήκη κανονικοποίησης για την $\psi_0(z)$

$$\int_{-z_1}^{z_1} dz\,\psi_0^2(z) = 2\int_0^{z_0} dz\,\psi_0^2(z) + 2\int_{z_0}^{z_1} dz\,\psi_0^2(z) = 1 \ ,$$

καθορίζει την τιμή του N να είναι

$$N^2 = k\left[1 - \frac{1}{(kz_0+1)^2} + 2\frac{k(z_1-z_0)}{(kz_0+1)^3}\right]^{-1}. \tag{7.16}$$

Η παραπάνω ποσότητα καθορίζει την ισχύ με την οποία η μηδενική κατάσταση μεταδίδει την τετραδιάστατη βαρύτητα πάνω στη μεμβράνη και θα συζητηθεί στη συνέχεια διεξοδικότερα. Στρεφόμαστε τώρα στο φάσμα των μαζικών καταστάσεων KK. Για $m \neq 0$, η εξίσωση κίνησης έχει τη γενική λύση

- $|z| \leq z_0$:

$$\begin{aligned}\psi_m(z) &= A(m)\sqrt{1+k|z|}\,J_2\left(m(k^{-1}+|z|)\right)\\ &+ B(m)\sqrt{1+k|z|}Y_2\left(m(k^{-1}+|z|)\right)\end{aligned} \tag{7.17}$$

- $|z| > z_0$:

$$\psi_m(z) = C(m)\cos m|z| + D(m)\sin m|z| \tag{7.18}$$

Η λύση αυτή είναι συνεχής στο $z=0$ και διαθέτει συμμετρία $\mathbf{Z_2}$. Πρέπει επίσης να επιβάλουμε συνέχεια της κυματοσυνάρτησης στο $z = z_0$, καθώς και συνθήκες ασυνέχειας για τις πρώτες παραγώγους στα $z=0$ και $z=z_0$. Τέλος, απαιτούμε συνέχεια της κυματοσυνάρτησης (η οποία ικανοποιείται αυτομάτως λόγω της συμμετρίας $\mathbf{Z_2}$) στο $z = z_1$. Αφού δεν υπάρχει μεμβράνη στη θέση αυτή και κρατάμε μόνο συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις, προκειμένου οι λύσεις μας να είναι ομαλές στο $z = z_1$, πρέπει να απαιτήσουμε η παράγωγος να μηδενίζεται εκεί. Έχουμε έτσι τέσσερις εξισώσεις, που περιορίζουν τις τέσσερις σταθερές κανονικοποίησης, οι οποίες κωδικοποιούνται συνολικά στην ορίζουσα

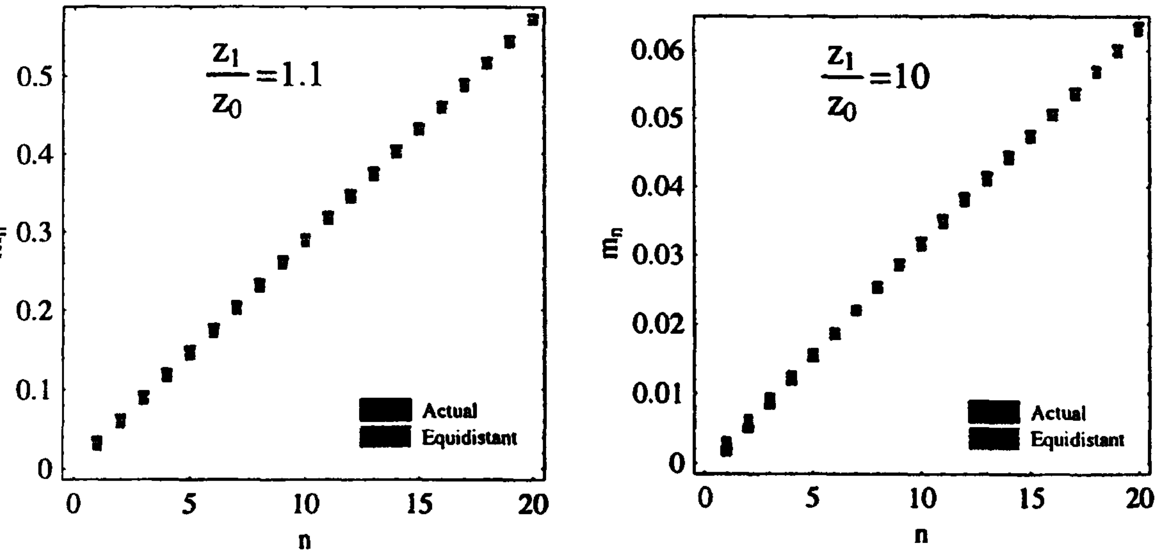
$$\begin{vmatrix} J_1\left(\frac{m}{k}\right) & Y_1\left(\frac{m}{k}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin mz_1 & \cos mz_1 \\ \sqrt{\lambda}J_2\left(\frac{m}{k}\lambda\right) & \sqrt{\lambda}Y_2\left(\frac{m}{k}\lambda\right) & -\cos mz_0 & -\sin mz_0 \\ \sqrt{\lambda}J_1\left(\frac{m}{k}\lambda\right) & \sqrt{\lambda}Y_1\left(\frac{m}{k}\lambda\right) & \sin mz_0 & -\cos mz_0 \end{vmatrix} = 0 \ , \tag{7.19}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την συντόμευση $\lambda = 1 + kz_0$. Η εξίσωση αυτή μας δίνει το φάσμα μαζών για τις καταστάσεις KK. Η συνθήκη κβάντωσης είναι προφανώς μη-τετριμμένη. Στο όριο που $z_0 \to z_1$, όπου οι δύο μεμβράνες αρνητικής τάσεως συγχωνεύονται σε μία, με ολικό φορτίο ίσο και αντίθετο με αυτό της θετικά φορτισμένης μεμβράνης, αναπαράγουμε το σύνηθες μοντέλο RS-1 και παίρνουμε το φάσμα μαζών για τις καταστάσεις KK στην περίπτωση αυτή. Για την γενική περίπτωση, οι ιδιοτιμές μαζών μπορούν να βρεθούν αριθμητικά, λύνοντας την ισοδύναμη εξίσωση

$$\tan mz_1 = \frac{\alpha + \beta\tan mz_0}{\beta - \alpha\tan mz_0}, \tag{7.20}$$

όπου έχουμε ορίσει τους συντελεστές που ενέχουν συναρτήσεις Bessel

$$\alpha = J_1\left(\frac{m}{k}\right)Y_1\left(\frac{m}{k}\lambda\right) - J_1\left(\frac{m}{k}\lambda\right)Y_1\left(\frac{m}{k}\right), \tag{7.21}$$



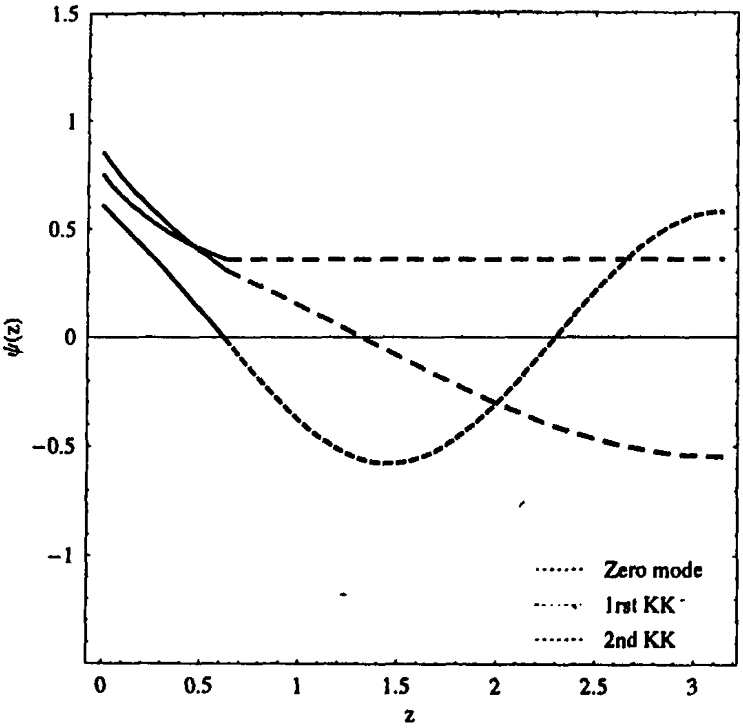
Σχήμα 7.2: Διάγραμμα των πρώτων 20 ιδιοτιμών μάζας για τις καταστάσεις Kaluza-Klein, σε αντιπαραβολή με τις αντίστοιχες ισαπέχουσες ιδιοτιμές που εξάγονται από τη σχέση (7.23), σε μονάδες του k. Για μεγάλες τιμές του λόγου $\frac{z_1}{z_0}$, το ισαπέχον φάσμα δίνει μία έγκυρη προσέγγιση.

$$\beta = J_1\left(\frac{m}{k}\right) Y_2\left(\frac{m}{k}\lambda\right) - J_2\left(\frac{m}{k}\lambda\right) Y_1\left(\frac{m}{k}\right). \tag{7.22}$$

Σε ό,τι ακολουθεί, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου $z_1 \gg z_0$, όταν δηλαδή η απόσταση μεταξύ των μεμβρανών είναι πολύ μικρότερη από το μέγεθος της συμπαγοποιημένης διάστασης. Διαισθητικά περιμένουμε, αφού στην περίπτωση αυτή οι τρεις μεμβράνες σχεδόν συνενώνονται και εξαφανίζονται εξαιτίας των αντίθετων φορτίων τους, ότι οι καταστάσεις KK θα είναι ημίτονα και συνημίτονα, καθώς ο χώρος γίνεται ομαλός, χωρίς ασυνέχειες και οι ιδιοτιμές μάζας θα δίνονται από την απλή σχέση

$$m_n = n\frac{\pi}{z_1} \qquad n = 1, 2, 3\ldots, \tag{7.23}$$

η οποία αντιστοιχεί στο σύνηθες, ισαπέχον φάσμα των μαζών KK του Λαπλασιανού τελεστή. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το δεξί μέλος της (7.20) τείνει στο μηδέν όταν $z_0 \to 0$, και έτσι αναπαράγουμε τη σωστή σχέση (7.23) για μικρή απόσταση μεταξύ των μεμβρανών. Στη συζήτηση που ακολουθεί, θα εργαστούμε στην περιοχή $z_1 \gg z_0$, $kz_0 \gg 1$ και κατ' επέκταση τα ορίσματα των συναρτήσεων Bessel θα είναι όλα αρκετά μικρά για να επιτρέπουν ασυμπτωτική ανάπτυξη. Υπό τις προϋποθέσεις αυτές, το φάσμα (7.23) είναι μία καλή και ταυτόχρονα βολική προσέγγιση για τις πραγματικές ιδιοτιμές, και θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση αυτή από εδώ και πέρα. Η επιλογή αυτή επαληθεύεται και από αριθμητικά αποτελέσματα (βλέπε Σχήμα 7.2).



Σχήμα 7.3: Διάγραμμα των πρώτων τριών ιδιοσυναρτήσεων (μηδενική κατάσταση, 1η και 2η κατάσταση KK) για την περίπτωση του συμπαγοποιημένου μοντέλου GRS.

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες συνέχειας, μπορούμε να εκφράσουμε τώρα τους τρεις από τους τέσσερις συντελεστές KK με βάση τον συντελεστή $A(m)$

$$B\left(n\right)=-\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}A\left(n\right)\ , \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned}C\left(n\right)=\sqrt{\lambda}A\left(n\right)\Bigg\{&\cos m_n z_0\left(J_2\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)-\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}Y_2\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)\right)\\&-\sin m_n z_0\left(J_1\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)-\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}Y_1\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)\right)\Bigg\}\ ,\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}D\left(n\right)=\sqrt{\lambda}A\left(n\right)\Bigg\{&\sin m_n z_0\left(J_2\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)-\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}Y_2\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)\right)\\&+\cos m_n z_0\left(J_1\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)-\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}Y_1\left(\frac{m_n}{k}\lambda\right)\right)\Bigg\}\ .\end{aligned} \tag{7.26}$$

Η εναπομένουσα σταθερά $A(n)$ θα καθοριστεί από τη συνθήκη κανονικοποίησης για την $\psi_n(z)$

$$\int_{-z_1}^{z_1} dz\,\psi_n^2(z) = 2\int_0^{z_0} dz\,\psi_n^2(z) + 2\int_{z_0}^{z_1} dz\,\psi_n^2(z) = 1\,.$$

Το πρώτο από τα δύο ολοκληρώματα ενέχει συναρτήσεις Bessel και δεν μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Ωστόσο, ενδιαφερόμαστε κύρια για το όριο, στο οποίο η ακτίνα συμπαγοποίησης R είναι πολύ μεγάλη, έτσι ώστε $z_1 \gg z_0$, δηλαδή η απόσταση μεταξύ της θετικά φορτισμένης μεμβράνης και των δύο μεμβρανών αρνητικής τάσεως παραμένει πεπερασμένη και πολύ μικρότερη από την έκταση της επιπλέον διάστασης. Στο όριο αυτό, μόνο το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι σημαντικό, και μπορούμε να το επεκτείνουμε, ώστε να ξεκινά από το μηδέν, αφού θεωρούμε ότι το z_0 είναι αρκετά μικρό. Καταλήγουμε έτσι εύκολα στη συνθήκη κανονικοποίησης,

$$C(n)^2 + D(n)^2 = \frac{1}{z_1}\,, \tag{7.27}$$

η οποία και καθορίζει την τιμή της $A(n)$. Για να εξαγάγουμε μία έκφραση για την $A(n)$, θα κάνουμε μερικές επιπλέον απλουστευτικές υποθέσεις. Θα θεωρήσουμε ότι $kz_0 \gg 1$, δηλαδή η απόσταση μεταξύ των μεμβρανών είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα de Sitter. Η υπόθεση αυτή είναι εύλογη, καθώς θέλουμε η κλίμακα μήκους της πενταδιάστατης βαρύτητας μικρής κλίμακας ($\frac{1}{k}$) να είναι σαφώς διαχωρισμένη από την κλίμακα επιρροής της τετραδιάστατης ημιεντοπισμένης βαρύτητας, η οποία εξαρτάται από το z_0. Με τις προϋποθέσεις αυτές, τόσο το $m_n z_0$ και το $\frac{m_n}{k}$ είναι πολύ μικρότερα από τη μονάδα, ενώ $\lambda = 1 + kz_0 \sim kz_0$. Στην περίπτωση αυτή όλα τα ορίσματα των συναρτήσεων Bessel θα είναι πολύ μικρά, και μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις με τους πρώτους όρους στην ανάπτυξή τους σε δυναμοσειρά. Φτάνουμε έτσι στην ακόλουθη έκφραση

$$A(m)^2 \sim \frac{\mathcal{A}}{m^2 + \frac{4}{z_0^2 (kz_0)^4}}\,, \tag{7.28}$$

όπου $\mathcal{A} \sim \frac{1}{z_1 z_0^2}\left(\frac{kz_0}{4} + \frac{9}{4}\frac{1}{(kz_0)^3}\right)^{-1}$. Έτσι, η ισχύς των καταστάσεων KK στην αρχή των αξόνων είναι στο όριο αυτό

$$\psi_m(0)^2 \sim A(m)^2 \left(\frac{1}{64}\left(\frac{m}{k}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{m}{k}\right)^2 + 1\right) \sim A(m)^2\,. \tag{7.29}$$

όπως μπορεί να εξαχθεί από την (7.17) εφαρμόζοντας τις προσεγγίσεις. Βλέπουμε ότι η ποσότητα $A(m)^2$ έχει τη γνωστή μορφή ενός συντονισμού γύρω από την τιμή μάζας $m = 0$, με ένα εύρος συντονισμού $\Delta m \sim 2/z_0(kz_0)^2$. Η χαρακτηριστική κλίμακα μήκους στην οποία ο συντονισμός διασπάται μακριά από τη μεμβράνη είναι $r_2 \sim (\Delta m)^{-1} \sim z_0(kz_0)^2/2$. Αυτό ακριβώς θα περιμέναμε από το συνηθισμένο μοντέλο GRS. Έτσι, το φάσμα διεγέρσεων KK μας δίνει έναν συντονισμό στο όριο άπειρης ακτίνας συμπαγοποίησης, $z_1 \to \infty$. Ωστόσο, μία άπειρη επιπλέον διάσταση δεν είναι απαραίτητη για να πάρουμε τον συντονισμό, ο οποίος εμφανίζεται μόλις ο διαχωρισμός μεταξύ των καταστάσεων KK γίνει αρκετά μικρός, οπότε το φάσμα μοιάζει σχεδόν συνεχές. Στην περίπτωση αυτή, το ελάχιστο των μαζών KK πλησιάζει το μηδέν και παίρνουμε μία συνεισφορά στο βαρυτικό δυναμικό από την ζώνη των καταστάσεων χαμηλότερης μάζας, η οποία αναπαράγει βαρύτητα της μορφής r^{-1}.

Στατικό Βαρυτικό Δυναμικό στην Μεμβράνη και Συνεργατική Βαρύτητα

Είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε το ενεργό τετραδιάστατο δυναμικό πάνω στη μεμβράνη, εξαιτίας του φάσματος καταστάσεων KK και της μηδενικής κατάστασης. Όπως εξηγήσαμε αναλυτικά στο προηγούμενο εδάφιο, το φάσμα μαζικών καταστάσεων KK, το οποίο υπακούει την (7.23), προκαλεί την εμφάνιση του συντονισμού μόλις πάρουμε το όριο $z_1 \gg z_0$. Η ύπαρξη του συντονισμού είναι εξέχουσας σημασίας για την αναπαραγωγή της τετραδιάστατης βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη από τις καταστάσεις KK, αλλιώς το δυναμικό τους θα υφίσταται εκθετική εξασθένιση και θα δίνει μία πιο ασθενή συμπεριφορά, η οποία θα επισκιάζεται από την ισχύ τύπου r^{-1}, που οφείλεται στη μηδενική κατάσταση. Για το ολικό στατικό δυναμικό ανάμεσα σε δύο σημειακά σωματίδια πάνω στη μεμβράνη έχουμε

$$V(r) = V_0(r) + \sum_m V_m(r) = \frac{1}{M^3}\frac{\psi_0^2(0)}{r} + \frac{1}{M^3}\sum_n \psi_{m_n}^2(0)\,\frac{e^{-m_n r}}{r}, \tag{7.30}$$

όπου ο πρώτος όρος έρχεται από τη μηδενική κατάσταση και ο δεύτερος από το σύνολο των καταστάσεων KK. Χρησιμοποιώντας την έκφραση που εξαγάγαμε πριν για την ισχύ της μηδενικής κατάστασης στην αρχή, παίρνουμε για το δυναμικό της

$$V_0(r) \sim \frac{1}{M^3\left[1+2\frac{kz_1}{(kz_0)^3}\right]}\frac{k}{r} = \frac{1}{M^3\left(1+\frac{z_1}{r_2}\right)}\frac{k}{r}\,, \tag{7.31}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $kz_0 \gg 1$. Βλέπουμε ότι μόλις η κλίμακα συμπαγοποίησης γίνεται πολύ μεγαλύτερη από την χαρακτηριστική κλίμακα μήκους του συντονισμού, η συνεισφορά της μηδενικής κατάστασης γίνεται πολύ μικρή και πρακτικά ο συντονισμός παίζει τον κυρίαρχο ρόλο όσον αφορά την ενεργό τετραδιάστατη βαρύτητα. Στο όριο $z_1 \to \infty$, η μηδενική κατάσταση γίνεται μη-κανονικοποιήσιμη και τότε, ο συντονισμός είναι η μοναδική πηγή τετραδιάστατης βαρύτητας, οπότε βρισκόμαστε στην περιοχή του μοντέλου GRS. Τα φαινόμενα των καταστάσεων KK από την άλλη, αναπαριστώνται από τον δεύτερο όρο στο δυναμικό, ο οποίος αντιστοιχεί ουσιαστικά στο άθροισμα πάνω σε δυναμικά τύπου Yukawa για όλες τις δυνατές μάζες των καταστάσεων KK. Αφού ο διαχωρισμός ανάμεσα σε καταστάσεις εξαρτάται από το $\frac{1}{z_1}$, καθώς το z_1 γίνεται πολύ μεγάλο, η απόσταση μεταξύ των καταστάσεων γίνεται αρκετά μικρή για να μετατρέψει το άθροισμα σε ένα ολοκλήρωμα πάνω στο m. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι, προκειμένου να κάνουμε αυτή την αντικατάσταση, θα πρέπει να έχουμε υπόψιν το γεγονός ότι αρχικά αθροίζαμε πάνω στις καταστάσεις KK, δηλαδή πάνω στη μεταβλητή n, ενώ το ολοκλήρωμα είναι πάνω στη μάζα και οι δύο μεταβλητές σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της $m_n = n\frac{\pi}{z_1} \Rightarrow dm = \frac{\pi}{z_1}dn$. Παίρνουμε έτσι

$$V_{KK}(r) \sim \frac{z_1}{\pi M^3}\int_0^\infty dm\, e^{-mr}\frac{\psi_m(0)^2}{r}$$

$$= \frac{z_1}{\pi M^3} \int_0^\infty dm \, \frac{e^{-mr}}{r} \left(\frac{\mathcal{A}}{m^2 + \Delta m^2} \right) = \frac{\mathcal{A} z_1 r_2}{\pi M^3 r} \int_0^\infty dx \, \frac{e^{-\frac{r}{r_2}x}}{x^2+1} \,. \tag{7.32}$$

Βλέπουμε ότι, αν και η έκφραση που αντικαταστήσαμε για το $\psi_m^2(0)$ είναι έγκυρη μόνο για μικρές μάζες, το ολοκλήρωμα υφίσταται γρήγορα κορεσμό για μεγάλα m, εξαιτίας του εκθετικού. Είναι έτσι επιτρεπτό να κρατήσουμε το όριο ολοκλήρωσης στο άπειρο. Για $r \ll r_2 \sim (kz_0)^2 z_0$, δηλαδή πολύ μικρότερο από την χαρακτηριστική κλίμακα στην οποία ο συντονισμός διασπάται, παίρνουμε

$$V_{KK}(r) \sim \frac{\mathcal{A} z_1 r_2}{\pi M^3 r} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\mathcal{A} z_1 r_2}{2 M^3 r} \,. \tag{7.33}$$

Όπως φαίνεται, ο συντονισμός δίνει μία συμπεριφορά r^{-1} στο στατικό δυναμικό. Έτσι, για κλίμακες μήκους στο εύρος τιμών $\frac{1}{k} \ll r \ll r_2$, η ενεργός τετραδιάστατη βαρύτητα αναπαράγεται, τόσο από τη μηδενική κατάσταση, όσο και από τον συντονισμό που οφείλεται στο μαζικό φάσμα καταστάσεων KK. Το ολικό δυναμικό είναι

$$V(r) \sim \frac{1}{r M^3} \left(\frac{k}{1 + \frac{z_1}{r_2}} + \frac{\mathcal{A}}{2} z_1 r_2 \right) . \tag{7.34}$$

Όπως προκύπτει από την έκφραση αυτή, για $z_1 \gg r_2$, ο συντονισμός υπερισχύει. Για κλίμακες $r \gg r_2$, η μόνη συνεισφορά στην τετραδιάστατη βαρύτητα θα είναι μόνο από τη μηδενική κατάσταση, καθώς ο συντονισμός υφίσταται διάσπαση και δίνει πενταδιάστατες διορθώσεις τάξεως r^{-2}. Στο όριο GRS, η συνεισφορά της μηδενικής κατάστασης εξαφανίζεται, και το τετραδιάστατο δυναμικό στη μεμβράνη υπάρχει μόνο εξαιτίας του συντονισμού. Βλέπουμε ότι, ενώ ο δεύτερος όρος στο δυναμικό είναι γραμμικός ως προς το z_1, αυτός ακυρώνεται από τον $\mathcal{A}$, ο οποίος φέρει μία εξάρτηση z_1^{-1}. Θα πρέπει επίσης να καταδείξουμε ότι στο όριο GRS, οι μαζικές καταστάσεις KK θα πρέπει να αλλάξουν σε μία συνεχή κανονικοποίηση, η οποία να μην περιλαμβάνει το z_1. Η συμπεριφορά του δυναμικού αυτού μπορεί να γίνει περαιτέρω κατανοητή αν το μετασχηματίσουμε στη μορφή

$$V(r) \sim \frac{(G_{N_0} + G_{N_R})}{r} \,, \tag{7.35}$$

με τους ορισμούς για την τετραδιάστατη σταθερά του Νεύτωνα

$$G_{N_0} \sim \frac{k}{M^3 \left(1 + \frac{z_1}{r_2}\right)} , \qquad G_{N_R} \sim \frac{k}{M^3} \,, \tag{7.36}$$

όπου οι συνεισφορές αυτές προέρχονται από τη μηδενική κατάσταση και τον συντονισμό αντίστοιχα. Στην παραγωγή του G_{N_R}, χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathcal{A} r_2 \sim 2k/z_1$. Ο λόγος των δύο βαρυτικών σταθερών στην περιοχή τιμών $k^{-1} \ll r \ll r_2$ είναι

$$\frac{G_{N_R}}{G_{N_0}} \sim 1 + \frac{z_1}{r_2} \,. \tag{7.37}$$

Από τη σχέση αυτή διαπιστώνουμε ότι ο συντονισμός υπερισχύει της μηδενικής καταστάσεως σε αυτή την κλίμακα μήκους. Μόνο για $r > r_2$, όπου ο συντονισμός διασπάται και η σχέση δεν ισχύει πλέον, η μηδενική κατάσταση γίνεται κυρίαρχη στην μετάδοση της τετραδιάστατης βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη.

7.1.3 Ένα Ασυμμετρικό Μοντέλο GRS

Στο εδάφιο αυτό θα κατασκευάσουμε και θα μελετήσουμε μία ασυμμετρική επέκταση του μη-συμπαγούς μοντέλου GRS. Με τον όρο ασυμμετρικό, εννοούμε ότι οι δύο τομές του χώρου AdS_5 γύρω από την κεντρική, θετικής τάσεως μεμβράνη, έχουν διαφορετικές κοσμολογικές σταθερές, τις οποίες συμβολίζουμε με Λ_+ και Λ_-. Το μοντέλο απεικονίζεται στο Σχήμα 7.4 και η τοποθέτηση των μεμβρανών γίνεται με βάση τη μετρική, γραμμένη ως προς την συντεταγμένη y (7.1). Οι μεμβράνες αρνητικής τάσεως είναι τοποθετημένες συμμετρικά γύρω από τη θέση $y = 0$, σε κάποια απόσταση y_0. Η δράση κάθε μεμβράνης δίνεται από την (7.4) όπως πριν. Θα μεταβούμε σε νέες συντεταγμένες z και τη μετρική (7.2) για λόγους ευκολίας στην εξέταση του δυναμικού περιορισμού. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας της μεμβράνης παίρνει τη μορφή (7.7). Το τμήμα της δράσης το οποίο οφείλεται στην κοσμολογική σταθερά είναι $S_\Lambda = -\int d^5x\,\sqrt{G}\,\Lambda$, όπου

$$\Lambda = \begin{cases} \Lambda_- & (-z_0 \leq z \leq 0) \\ \Lambda_+ & (0 < z \leq z_0) \\ 0 & (|z| > z_0) \end{cases} , \tag{7.38}$$

με

$$z_0 = \frac{1}{k}\left(e^{ky_0} - 1\right) .$$

Οι εξισώσεις Einstein για το μοντέλο αυτό είναι

$$R_{MN} - \frac{1}{2}RG_{MN} = \frac{\Lambda}{4M^3}G_{MN} +$$

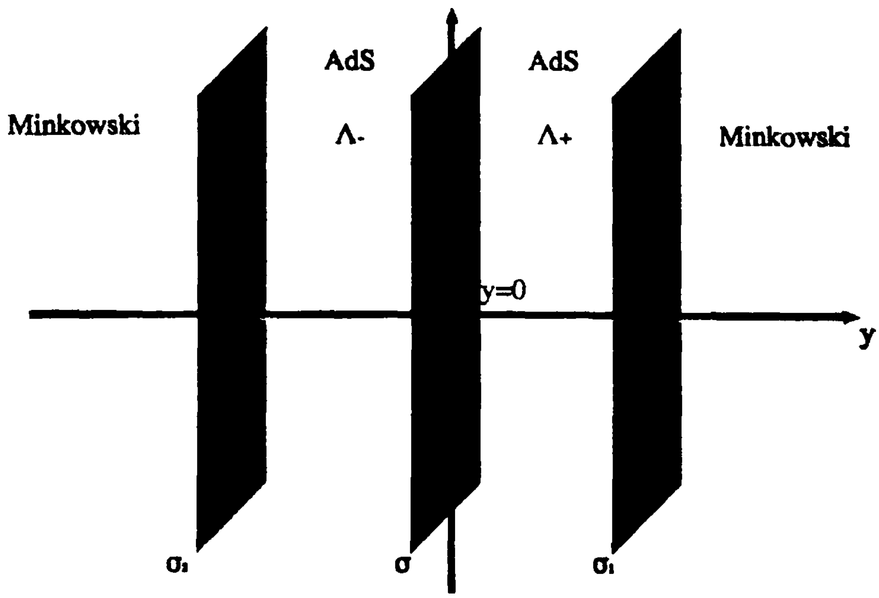
$$\frac{1}{4M^3}\left(\sigma_2\delta\left(z+z_0\right)e^{\frac{A(-z_0)}{2}} + \sigma\delta\left(z\right)e^{\frac{A(0)}{2}} + \sigma_1\delta\left(z-z_0\right)e^{\frac{A(z_0)}{2}}\right) g_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N , \tag{7.39}$$

με την κοσμολογική σταθερά Λ να παίρνει την κατάλληλη τιμή σε κάθε διάστημα. Αντικαθιστώντας την προδιαγραφή για τη μετρική (7.2) στις εξισώσεις αυτές, παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{3}{2}A'\left(z\right)^2 = -\frac{\Lambda}{4M^3}e^{-A(z)} , \tag{7.40}$$

$$\frac{3}{4}\left(A'\left(z\right)^2 - 2A''\left(z\right)\right) = -\frac{\Lambda}{4M^3}e^{-A(z)}$$

$$-\frac{1}{4M^3}\left(\sigma_2\delta\left(z+z_0\right)e^{-\frac{A(-z_0)}{2}} + \sigma\delta\left(z\right)e^{-\frac{A(0)}{2}} + \sigma_1\delta\left(z-z_0\right)e^{-\frac{A(z_0)}{2}}\right) . \tag{7.41}$$



Σχήμα 7.4: Το ασυμμετρικό μοντέλο GRS.

Θα θεωρήσουμε μία λύση της μορφής

$$A(z) = \begin{cases} 2\ln(-k_- z_0 + 1) & (z \le -z_0) \\ 2\ln(-k_- z + 1) & (-z_0 < z \le 0) \\ 2\ln(k_+ z + 1) & (0 < z \le z_0) \\ 2\ln(k_+ z_0 + 1) & (z > z_0) \end{cases} . \tag{7.42}$$

Εισάγοντάς την στις εξισώσεις κίνησης, διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω αποτελεί όντως λύση, εάν οι ακόλουθες συνθήκες (λεπτή ρύθμιση) ισχύουν για τις τάσεις των μεμβρανών

$$\sigma_1 = -12M^3 k_+, \quad \sigma_2 = -12M^3 k_-, \quad \sigma = 12M^3 (k_+ + k_-) \tag{7.43}$$

και τις κοσμολογικές σταθερές

$$\Lambda_+ = -24M^3 k_+^2, \quad \Lambda_- = -24M^3 k_-^2 . \tag{7.44}$$

Έχοντας παραγάγει τη λύση για τον παράγοντα στρέβλωσης, προχωρούμε στη γραφή του φάσματος διεγέρσεων για τη δεδομένη κατασκευή. Αυτό επιτυγχάνεται ενώνοντας μεταξύ τους τις αρχικές λύσεις για το μοντέλο GRS για διαφορετικά k, οπότε οι κυματοσυναρτήσεις για τις καταστάσεις KK θα είναι

- $|z| \leq z_0$

$$\begin{aligned}\psi_m(z) &= A_\pm(m)\,\sqrt{1\pm k_\pm z}\,J_2\left(m(k_\pm^{-1}\pm z)\right)\\ &+ B_\pm(m)\,\sqrt{1\pm k_\pm z}\,Y_2\left(m(k_\pm^{-1}\pm z)\right)\end{aligned} \tag{7.45}$$

- $|z| > z_0$

$$\psi_m(z) = C_\pm(m)\cos mz \pm D_\pm(m)\sin mz \tag{7.46}$$

Τονίζουμε την ύπαρξη του προσήμου $\pm$ στον όρο D, το οποίο έχει προστεθεί για κατοπινή διευκόλυνση. Το μοντέλο δεν διαθέτει κανονικοποιήσιμη μηδενική κατάσταση. Θα χρησιμοποιήσουμε τις Συνθήκες Συνέχειας, προκειμένου να καθορίσουμε τις διάφορες σταθερές των κυματοσυναρτήσεων. Υπάρχουν τρεις συνθήκες συνέχειας (στα $y=0$ και $y=\pm y_0$) και άλλες τρεις εξισώσεις από τις ασυνέχειες των πρώτων παραγώγων στα ίδια σημεία. Έτσι, στο σύνολό τους, υπάρχουν έξι εξισώσεις συνέχειας/ασυνέχειας και οχτώ απροσδιόριστες σταθερές. Εφαρμόζοντας τις Συνθήκες Συνέχειας μπορούμε να γράψουμε όλες τις άλλες σταθερές ως προς τις $A_\pm$

$$\begin{aligned}C_\pm &= A_\pm\sqrt{\lambda_\pm}\left[\cos mz_0 J_2(u_\pm) - \sin mz_0 J_1(u_\pm)\right]\\ &+ B_\pm\sqrt{\lambda_\pm}\left[\cos mz_0 Y_2(u_\pm) - \sin mz_0 Y_1(u_\pm)\right]\ ,\end{aligned} \tag{7.47}$$

$$\begin{aligned}D_\pm &= A_\pm\sqrt{\lambda_\pm}\left[\sin mz_0 J_2(u_\pm) + \cos mz_0 J_1(u_\pm)\right]\\ &+ B_\pm\sqrt{\lambda_\pm}\left[\sin mz_0 Y_2(u_\pm) + \cos z_0 Y_1(u_\pm)\right]\ ,\end{aligned} \tag{7.48}$$

με

$$\begin{aligned}B_\pm &= \pm\frac{Y_1\left(\frac{m}{k_\mp}\right)\left[A_- J_2\left(\frac{m}{k_-}\right) - A_+ J_2\left(\frac{m}{k_+}\right)\right]}{\left[Y_2\left(\frac{m}{k_+}\right)Y_1\left(\frac{m}{k_-}\right) + Y_2\left(\frac{m}{k_-}\right)Y_1\left(\frac{m}{k_+}\right)\right]}\\ &- \frac{Y_2\left(\frac{m}{k_\mp}\right)\left[A_- J_1\left(\frac{m}{k_-}\right) + A_+ J_1\left(\frac{m}{k_+}\right)\right]}{\left[Y_2\left(\frac{m}{k_+}\right)Y_1\left(\frac{m}{k_-}\right) + Y_2\left(\frac{m}{k_-}\right)Y_1\left(\frac{m}{k_+}\right)\right]}\ .\end{aligned} \tag{7.49}$$

Σημειώνουμε τους ορισμούς $u_\pm = \frac{m}{k_\pm}\lambda_\pm$ και $\lambda_\pm = 1 + k_\pm z_0$.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να υιοθετήσουμε μία συνθήκη κανονικοποίησης η οποία, στην περίπτωση $\Lambda_+ = \Lambda_-$, θα αναγόταν στην συνήθη. Η συνθήκη αυτή προκύπτει να είναι

$$\pi\left(C_+^2 + D_+^2\right) = \pi\left(C_-^2 + D_-^2\right) = 1\,.$$

Οι δύο αυτές σχέσεις επαρκούν για να προσδιοριστούν όλοι οι συντελεστές.

Όπως και πριν, ενδιαφερόμαστε για την κλίμακα r_2, στην οποία ο συντονισμός αποδιεγείρεται, ή ισοδύναμα, τη μάζα του συντονισμού Δm. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να υπολογίσουμε την ισχύ $\psi_m^2(0)$ των καταστάσεων KK στην αρχή των αξόνων. Θα κάνουμε προσεγγίσεις για τα ορίσματα των συναρτήσεων Bessel. Συγκεκριμένα, θεωρούμε $k_{\pm}z_0 \gg 1$, δηλαδή η απόσταση μεταξύ των θετικά και αρνητικά φορτισμένων μεμβρανών να είναι πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα AdS και στις δύο πλευρές. Επίσης θεωρούμε $mz_0 \ll 1 \Rightarrow \frac{m}{k_{\pm}} \ll 1$. Εδώ μπορούμε να εισαγάγουμε την *παράμετρο ασυμμετρίας* $\eta \equiv \frac{k_+}{k_-}$. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγίσεις, καταλήγουμε στην έκφραση για την μάζα συντονισμού, στο όριο που το η είναι κοντά στη μονάδα

$$\Delta m^2 \sim \frac{8\left(2-\eta^3\left(1-\eta^3\right)\right)}{(\eta+1)^2\left(k_+z_0\right)^2 z_0^2} \sim \frac{2\left(2-\eta^3\left(1-\eta^3\right)\right)}{(\eta+1)^2}\Delta m_{GRS}^2 \,. \tag{7.50}$$

Είναι προφανές ότι η κλίμακα του συντονισμού εξαρτάται έντονα από την παράμετρο ασυμμετρίας η. Καθώς το η αυξάνεται, το πλάτος του συντονισμού αυξάνει και κατ' επέκταση, η απόσταση r_2 στην οποία ο συντονισμός διασπάται μειώνεται. Σημειώνουμε ότι η κλίμακα αποδιέγερσης είναι ανάλογη του αντιστρόφου της μάζας συντονισμού. Έτσι, ο συντονισμός γίνεται πιο ασθενής, καθώς η ασυμμετρία του μοντέλου μεγαλώνει, ενώ η μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα αποδιέγερσης επιτυγχάνεται στην περίπτωση του συμμετρικού μοντέλου. Βλέπουμε από την (7.50) ότι η μάζα συντονισμού του μοντέλου GRS αναπαράγεται στη συμμετρική περίπτωση, $\eta = 1$.

7.1.4 Ημιεντοπισμένη Βαρύτητα σε Πεπερασμένου Πάχους Μεμβράνη

Στο εδάφιο αυτό, θα θεωρήσουμε μία παραλλαγή του $\mathbf{Z}_2$-συμμετρικού μοντέλου GRS, στην οποία η κεντρική μεμβράνη έχει αντικατασταθεί από μία κατάλληλη κατανομή ενός περιβάλλοντος βαθμωτού πεδίου [88] [89] [147]. Όπως και στην περίπτωση του GRS, ο χώρος AdS περιορίζεται από τις δύο συμμετρικά τοποθετημένες μεμβράνες, ενώ η πέμπτη διάσταση είναι άπειρη σε έκταση και σε μεγάλες αποστάσεις από την αρχή των αξόνων ο χώρος γίνεται Minkowski. Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας μία δράση της μορφής

$$S = \int d^5x\sqrt{G}\left\{2M^3R + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V\left(\phi\right)\right\} - \int d^4x\sqrt{-g}\,\sigma\left(\phi\right), \tag{7.51}$$

όπου συμβολίζουμε την πενταδιάστατη μετρική με G_{MN} και την τετραδιάστατη μετρική πάνω στη μεμβράνη με $g_{\mu\nu}$. Το πρώτο μέρος της δράσης περιέχει τον βαρυτικό και βαθμωτό τομέα, ενώ το δεύτερο είναι η συνεισφορά από μία *λεπτή μεμβράνη* (με τον όρο λεπτή μεμβράνη δηλώνουμε μεμβράνη απειροστού πάχους κατά την πέμπτη διάσταση, σε αντιδιαστολή με την μεμβράνη πεπερασμένου πάχους, που σχηματίζεται λόγω του βαθμωτού πεδίου). Η τάση της μεμβράνης εξαρτάται από το βαθμωτό πεδίο, δηλαδή υπάρχει ένα βαθμωτό δυναμικό πάνω στη μεμβράνη. Η δράση γράφεται με βάση τη μετρική (7.1), η οποία έχει μία υπογραφή $(+,-,-,-,-)$. Θα θεωρήσουμε ότι $y_0 \neq 0$ είναι η θέση αυτής της λεπτής μεμβράνης. Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, ξαναγράφουμε τη δράση της μεμβράνης και τις εξισώσεις κίνησης ως προς τη μετρική (7.2) της ίδιας υπογραφής, η οποία είναι πιο βολική για τη μελέτη του φάσματος. Οι εξισώσεις Einstein παίρνουν τη μορφή

$$R_{MN} - \frac{1}{2}RG_{MN} = \frac{1}{4M^3}\left[\nabla_M\phi\nabla_N\phi - G_{MN}\left(\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V\left(\phi\right)\right)\right.$$

$$+G_{MN}\Lambda + \sigma\delta\left(z-z_0\right)e^{\frac{A(z_0)}{2}}g_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{M}\delta^{\nu}_{N}\Big] . \tag{7.52}$$

Η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου είναι

$$\nabla^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 . \tag{7.53}$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο αλλάζει λόγω της επιλογής μας για την υπογραφή της μετρικής. Αντικαθιστώντας την προδιαγραφή της μετρικής στις εξισώσεις αυτές, έχουμε το σύστημα

$$A'(z)^2 - 2A''(z) = -\frac{e^{-A(z)}}{3M^3}\left(\Lambda + V\right) - \frac{e^{-\frac{A(z_0)}{2}}}{3M^3}\sigma\delta\left(z-z_0\right) - \frac{1}{6M^3}\phi'^2 , \tag{7.54}$$

$$A'(z)^2 = -\frac{e^{-A(z)}}{6M^3}\left(\Lambda + V\right) + \frac{1}{12M^3}\phi'^2 , \tag{7.55}$$

$$\frac{1}{2}e^{A(z)}\left(3A'(z)\,\phi'(z) - 2\phi''(z)\right) + \frac{dV}{d\phi} = -e^{-A(z_0)/2}\,\sigma'(\phi)\,\delta(z-z_0) , \tag{7.56}$$

όπου $\sigma'(\phi)$ είναι η παράγωγος της τάσεως της μεμβράνης ως προς το βαθμωτό πεδίο στο $z = z_0$. Μόνο δύο από αυτές τις εξισώσεις είναι ανεξάρτητες. Μπορούν να τεθούν στη μορφή

$$\phi'^2 = 3M^3\left(A'^2 + 2A''\right) - \sigma\delta\left(z-z_0\right)e^{-\frac{A(z_0)}{2}} \tag{7.57}$$

και

$$V = \frac{3}{2}M^3e^{A}\left(2A'' - 3A'^2\right) - \Lambda - \frac{\sigma}{2}\delta\left(z-z_0\right)e^{\frac{A(z_0)}{2}} . \tag{7.58}$$

Οι Συνθήκες Συνέχειας στο $z = z_0$ είναι

$$A'\left(z_0+\right) - A'\left(z_0-\right) = \frac{\sigma}{6M^3}e^{-\frac{A(z_0)}{2}} , \tag{7.59}$$

$$\phi'\left(z_0+\right) - \phi'\left(z_0-\right) = \sigma'\,e^{-A(z_0)/2} . \tag{7.60}$$

Θα εισαγάγουμε τώρα μία δοκιμαστική λύση για τον παράγοντα στρέβλωσης $A(z)$, της μορφής $A(z) = -\ln\frac{b}{[1+(kz)^2]}$. Η λύση στον περιβάλλοντα για το μοντέλο αυτό είναι

$$\phi(z) = \sqrt{12}M^{3/2}\arctan(kz) , \tag{7.61}$$

$$V = \frac{6k^2M^3}{b}\left(\frac{4\tan^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{12}M^{3/2}}\right) - 1}{\tan^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{12}M^{3/2}}\right) + 1}\right) - \Lambda . \tag{7.62}$$

Η λύση αυτή είναι έγκυρη για ολόκληρο τον χώρο, ακόμα και στην περίπτωση μίας απόλυτα ομαλής κατασκευής, όπου απουσιάζουν οι λεπτές μεμβράνες. Οι Συνθήκες Συνέχειας στο $z = z_0$ γίνονται

$$\sigma = -\frac{12M^3k^2z_0}{\sqrt{b\left(1+(kz_0)^2\right)}} , \quad \sigma' = -\frac{\sqrt{12}kM^{3/2}}{\sqrt{b\left(1+(kz_0)^2\right)}} . \tag{7.63}$$

τρόπο, η απλή παρατήρηση ότι μία μεμβράνη, η οποία διαθέτει συνδιάσταση-2, είναι πάντοτε επίπεδη ως προς την χαμπυλότητα Ricci(Ricci-flat), παρέχει μία νέα δυνατότητα για την ακύρωση της κοσμολογικής σταθεράς. Όπως έχει ήδη δειχθεί [45], μία τετραδιάστατη μεμβράνη, η οποία βρίσκεται εμβαπτισμένη μέσα σε έναν εξαδιάστατο Υπερχώρο, όπου ο εγκάρσιος στη μεμβράνη χώρος είναι συμπαγοποιημένος χρησιμοποιώντας μαγνητικές ροές, επάγει μία κωνική ανωμαλία μέσα στον Υπερχώρο, παραμορφώνοντας τον χώρο σε ένα σχήμα με μορφή μπάλας του ράγκμπι. Με τον τρόπο αυτό, η κοσμολογική σταθερά της μεμβράνης (τάση) μετατίθεται εξολοκλήρου στον Υπερχώρο, όπου καθορίζει την ελλειμματική γωνία της επαγόμενης κωνικής ανωμαλίας. Αν και η κατασκευή αυτή λύνει το πρόβλημα μόνο μερικώς, καθώς είναι απαραίτητη λεπτή ρύθμιση για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη μίας επίπεδης μεμβράνης [46, 149, 150], παρέχει παρόλα αυτά ενδείξεις ότι οι επιπλέον διαστάσεις μπορεί να παίζουν κάποιον ρόλο στην επίλυση του αινίγματος της κοσμολογικής σταθεράς. Επεκτάσεις και εναλλακτικές προσεγγίσεις μελετήθηκαν στη συνέχεια από διάφορους συγγραφείς (βλέπε [46, 47, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163] και αναφορές).

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάμε ένα μοντέλο όπου μία μεμβράνη με ενεργό συνδιάσταση-2 είναι εμβαπτισμένη σε έναν εξαδιάστατο Υπερχώρο [164]. Πρόκειται για μία *ψευδο-3 μεμβράνη*, με την έννοια ότι, ενώ η υποπολλαπλότητα, μέσα στην οποία η συνηθισμένη ύλη και τα πεδία βρίσκονται περιορισμένα, έχει στην πραγματικότητα πέντε διαστάσεις, είναι δηλαδή μία 4-μεμβράνη, ο τανυστής ορμής-ενέργειας των πεδίων αυτών επιλέγεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να προσομοιάζει την τανυστική δομή μίας 3-μεμβράνης. Η παρουσία της μίας επιπλέον διάστασης της μεμβράνης είναι κρυμμένη κατ' αυτό τον τρόπο από τον εξωτερικό χώρο, και μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γνωστό αποτέλεσμα ότι μεμβράνες συνδιάστασης-2 προκαλούν μόνο κωνικές ανωμαλίες στους Περιβάλλοντες χώρους τους [75, 76, 165, 166, 167]. Προκειμένου να παραγάγουμε τον απαραίτητο τανυστή ορμής-ενέργειας, θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική που παρουσιάζεται στις αναφορές [168, 169]. Ωστόσο, δεν θα θεωρήσουμε έναν κενό Υπερχώρο, αλλά έναν ο οποίος περιέχει τα πεδία ενός $O(3)$ σίγμα-μοντέλου (βλέπε [156, 159, 170]), σε αντίθεση με την πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη περίπτωση της συμπαγοποίησης μέσω μαγνητικής ροής, η οποία χρησιμοποιεί πεδία $U(1)$ [171, 172]. Ο εγκάρσιος χώρος μακριά από τη μεμβράνη θα είναι έτσι χαμπυλωμένος, αλλά η χαμπυλότητά του θα οφείλεται μόνο στα πεδία του σίγμα-μοντέλου, καθώς η μεμβράνη δεν μπορεί να συνεισφέρει τίποτα περισσότερο από μία κωνική ανωμαλία στη θέση στην οποία βρίσκεται. Αυτή η κατασκευή είναι παρόμοια με αυτήν που εξετάζεται στην [156], η δε κύρια διαφορά έγκειται στην ύπαρξη της ψευδο-3 μεμβράνης, αντί μίας μεμβράνης η οποία έχει καθαρά συνδιάσταση-2.

Ο σκοπός ενός τέτοιου μοντέλου είναι να δώσει μία μέθοδο επίλυσης του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς. Θα δούμε ότι έχοντας ένα κατάλληλο ενεργειακό περιεχόμενο, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία επίπεδη τετραδιάστατη γεωμετρία πάνω στη μεμβράνη, με όλη την χαμπυλότητα του χώρου να εκτοπίζεται προς τον εγκάρσιο χώρο. Για να αποφύγουμε την επιβολή ανεπιθύμητων λεπτών ρυθμίσεων, θα επιτρέψουμε σενάρια, στα οποία ο χώρος δεν είναι συμπαγής. Έχουμε έτσι μία διάσταση κάθετη στην 4-μεμβράνη, η οποία δεν είναι συμπαγής, αλλά είναι ολοκληρώσιμη σε πεπερασμένο όγκο, και μία η οποία είναι συμπαγοποιημένη στο πνεύμα των θεωριών τύπου Kaluza-Klein. Όπως προκύπτει, για ένα εύρος παραμέτρων του μοντέλου, ο δισδιάστατος εγκάρσιος χώρος είναι κανονικοποιήσιμος, και άρα περιμένουμε μία συμβατική φαινομενολογία Kaluza-Klein, με μία μηδενική κατάσταση να μεταδίδει τις συνήθεις τετραδιάστατες βαρυτικές αλληλεπιδράσεις πάνω στη μεμβράνη και ένα φάσμα από μαζικές καταστάσεις KK ως διορθώσεις. Η κοσμολογική σταθερά πάνω στην 3-μεμβράνη μπορεί να γίνει ίση με μηδέν με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων, η οποία επάγει μία αντίστοιχη ελλειμματική γωνία στον Υπερχώρο. Μόλις γίνει η επιλογή αυτή, οποιαδήποτε μεταβολή σε μία από τις παραμέτρους του μοντέλου, για παράδειγμα στην κοσμολογική σταθερά της μεμβράνης, οδηγεί σε νέα τιμή της ελλειμματικής γωνίας, χωρίς καμία επιπλέον λεπτή ρύθμιση. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, παράγουμε τις εξισώσεις Einstein πάνω στην 4-μεμβράνη, χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό Gauss-Codazzi. Με βάση τις εξισώσεις αυτές, συζητάμε γενικά χαρακτηριστικά τέτοιων μοντέλων, καθώς και την επίδραση επιπλέον ύλης πάνω στη μεμβράνη, η οποία θα δράσει ως πηγή της συμβατικής τετραδιάστατης βαρύτητας μόλις επιτελεστεί η αναγωγή KK ως προς την συμπαγή διάσταση.

7.2.2 Γενική Μορφή του Μοντέλου

Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας τη δράση του μοντέλου μας. Αυτή περιλαμβάνει ένα μη-γραμμικό-σίγμα-μοντέλο, πάνω σε μία πολλαπλότητα Kähler, μέσα σε έναν εξαδιάστατο Υπερχώρο χώρο. Η κοσμολογική σταθερά στον Υπερχώρο θεωρούμε ότι είναι μηδενική. Υποθέτουμε επίσης την ύπαρξη μίας 4-μεμβράνης, η οποία φέρει μία τάση σ και ένα αξιονικό πεδίο (axion) Σ. Το αξιονικό πεδίο χρησιμοποιείται για να αντισταθμίσουμε την τάση της μεμβράνης κατά την αζιμουθιακή κατεύθυνση φ και να εξασφαλίσουμε ότι ο τανυστής ορμής-ενέργειας πάνω στην 4-μεμβράνη μιμείται αυτόν μίας 3-μεμβράνης, έτσι ώστε να πάρουμε μία μεμβράνη με ενεργό συνδιάσταση-2 [169]. Η μετρική του Υπερχώρου θεωρούμε ότι έχει τη μορφή

$$ds_6^2 = n_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\rho^2 + g_{\varphi\varphi}(\rho)d\varphi^2 \ , \tag{7.71}$$

σε κάθετες συντεταγμένες Gauss. Βλέπουμε ότι μόνο η ρ είναι η κατεύθυνση που είναι κάθετη στην 4-μεμβράνη, ενώ φ είναι η συμπαγής διάσταση. Η μεμβράνη βρίσκεται τοποθετημένη σε μία απόσταση ρ_0 μακριά από την αρχή των αξόνων του εγκάρσιου χώρου, κατά την ακτινική κατεύθυνση. Η δράση του μοντέλου έχει έτσι τη μορφή

$$\begin{aligned} S = &\int d^6x\sqrt{-g}\left(M^4R - \frac{1}{2\lambda^2}h_{\alpha\beta}\left(\phi\right)\nabla^M\phi^\alpha\nabla_M\phi^\beta\right) \\ &- \int d^5xd\rho\delta\left(\rho-\rho_0\right)\sqrt{-\gamma}\left(\sigma + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Sigma\partial_\beta\Sigma\right) . \end{aligned} \tag{7.72}$$

Κεφαλαίοι ελληνικοί χαρακτήρες παίρνουν τιμές από 0 έως 5, ενώ μικροί χαρακτήρες είναι δείκτες πάνω στην 4-μεμβράνη, οι οποίοι δεν περιλαμβάνουν την συντεταγμένη ρ, και α, β είναι δείκτες στην πολλαπλότητα Kähler. Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει τις συνεισφορές του Υπερχώρου από τον βαρυτικό τομέα και τα πεδία του σίγμα-μοντέλου ϕ^α, ενώ ο δεύτερος περιέχει τις συνεισφορές της μεμβράνης για την τάση και το αξιονικό πεδίο. Προς το παρόν θα θεωρήσουμε μηδενικό ενεργειακό περιεχόμενο από συνήθη ύλη πάνω στη μεμβράνη. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας της μεμβράνης μπορεί να γραφεί ως

$$T^{(br)}_{MN} = \delta\left(\rho - \rho_0\right) \frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-g}} \delta^{\mu}_{M} \delta^{\nu}_{N} \left(-\sigma \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Sigma \partial_\beta \Sigma + \partial_\mu \Sigma \partial_\nu \Sigma \right) . \tag{7.73}$$

Έχουμε επίσης έναν τανυστή ορμής-ενέργειας για τα πεδία ϕ^α

$$T^{(\phi)}_{MN} = \frac{h_{\alpha\beta}}{\lambda^2} \left(\nabla_M \phi^\alpha \nabla_N \phi^\beta - \frac{1}{2} g_{MN} \nabla^\Lambda \phi^\alpha \nabla_\Lambda \phi^\beta \right) . \tag{7.74}$$

Οι εξισώσεις Einstein γίνονται στην περίπτωση αυτή

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \frac{1}{2M^4} \left(T^{(\phi)}_{MN} + T^{(br)}_{MN} \right) \tag{7.75}$$

ή

$$R_{MN} = \frac{1}{2M^4} \left(T^{(\phi)}_{MN} - \frac{1}{N-2} T^{(\phi)} g_{MN} \right) + \frac{1}{2M^4} \left(T^{(br)}_{MN} - \frac{1}{N-2} T^{(br)} g_{MN} \right) , \tag{7.76}$$

όπου συμβολίζουμε με N την ολική διάσταση του Υπερχώρου και χρησιμοποιούμε το n για τον αριθμό διαστάσεων της μεμβράνης (στην περίπτωση που εξετάζουμε, $N = 6$ και $n = 5$). Ο τανυστής ορμής-ενέργειας περιέχει συνεισφορές, τόσο από το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, όσο και από το περιεχόμενο της μεμβράνης. Οι εξισώσεις του αξιονικού πεδίου λύνονται για

$$\Sigma = q\varphi ,$$

έτσι ώστε το Σ να παρουσιάζει άλματα κατά $2\pi q$, καθώς συμπληρώνουμε πλήρεις περιστροφές στην κατεύθυνση φ. Αν επιπλέον η παράμετρος q (το φορτίο του αξιονίου) είναι τέτοια, ώστε

$$q^2 = 2\sigma g_{\varphi\varphi} , \tag{7.77}$$

η συνεισφορά από το αξιόνιο εξαλείφει απολύτως οποιαδήποτε τάση κατά την αζιμουθιακή κατεύθυνση φ. Σημειώνουμε ότι η παραπάνω συνθήκη δεν αποτελεί λεπτή ρύθμιση μεταξύ των q και σ με τη συνηθισμένη έννοια, καθώς οι συνιστώσες της μετρικής φέρουν σταθερές ολοκλήρωσης, οι οποίες δεν έχουν καθοριστεί ακόμα από άλλους περιορισμούς. Έτσι, η τιμή του q δεν είναι δεδομένη για δοσμένη τάση της μεμβράνης. Με την επιλογή αυτή παίρνουμε

$$\begin{aligned} T^{(br)}_{MN} - \frac{1}{N-2} g_{MN} T^{(br)} = \delta\left(\rho - \rho_0\right) \frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-g}} \Bigg[\sigma \left(-\gamma_{\mu\nu} \delta^\mu_M \delta^\nu_N + \frac{n}{N-2} g_{MN} \right) \\ + \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Sigma \partial_\beta \Sigma \left(-\gamma_{\mu\nu} \delta^\mu_M \delta^\nu_N + \frac{n-2}{N-2} g_{MN} \right) + \delta^\mu_M \delta^\nu_N \partial_\mu \Sigma \partial_\nu \Sigma \Bigg] \end{aligned} \tag{7.78}$$

και αντίστοιχα για τα βαθμωτά πεδία

$$T^{(\phi)}_{MN} - \frac{1}{N-2} g_{MN} T^{(\phi)} = \frac{h_{\alpha\beta}}{\lambda^2} \nabla_M \phi^\alpha \nabla_N \phi^\beta . \tag{7.79}$$

Καθώς χρησιμοποιούμε κάθετες συντεταγμένες Gauss, οι ορίζουσες του Υπερχώρου και της επαγόμενης μετρικής είναι οι ίδιες και ο λόγος τους είναι μονάδα. Έχουμε επίσης την εξίσωση κίνησης για τα βαθμωτά πεδία, η οποία είναι

$$\nabla^M \nabla_M \phi^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \nabla^\Gamma \phi^\beta \nabla_\Gamma \phi^\gamma = 0 . \tag{7.80}$$

7.2.3 Λύσεις με Μία και Δύο Μεμβράνες

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην επίλυση των εξισώσεων στον Υπερχώρο, πρέπει να επιλέξουμε μία προδιαγραφή για τα πεδία στον Υπερχώρο και για την εγκάρσια μετρική. Θα θεωρήσουμε ένα σίγμα-μοντέλο τύπου $O(3)$ και μία μετρική για την πολλαπλότητα Kähler, η οποία είναι τώρα μία σφαίρα S^2, της μορφής

$$h_{\alpha\beta} = \frac{4}{(1+\phi^2)^2}\delta_{\alpha\beta} \, , \tag{7.81}$$

όπου $\phi^2 = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2$. Η συγκεκριμένη επιλογή για το σίγμα-μοντέλο είναι εντελώς *ad hoc* και έχει χρησιμοποιηθεί ως ένα απλό παράδειγμα. Μία άλλη επιλογή του χώρου του σίγμα-μοντέλου της μορφής $SL(2)/U(1)$, η οποία εμφανίζεται στις θεωρίες υπερβαρύτητας, θα ήταν εξίσου καλή. Προκειμένου να μελετήσουμε την προκύπτουσα γεωμετρία του εγκάρσιου δισδιάστατου χώρου, θα τον αναπαραμετροποιήσουμε σε μία σύμμορφα επίπεδη μορφή ως

$$ds_2^2 = d\rho^2 + g_{\phi\phi}d\varphi^2 = \psi(r)\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right) = \psi(r)\,\delta_{mn}dy^m dy^n \, . \tag{7.82}$$

Αυτή η αλλαγή συντεταγμένων υποδηλώνει ότι $d\rho^2 = \psi(r)\,dr^2$, πράγμα που οδηγεί στην

$$\Rightarrow \delta(\rho - \rho_0) = \frac{1}{\sqrt{\psi(r)}}\delta(r - r_0) \, ,$$

για τον μετασχηματισμό της δέλτα συνάρτησης, όπου r_0 είναι η θέση που αντιστοιχεί στο ρ_0 στις νέες σύμμορφες συντεταγμένες. Θα υιοθετήσουμε τώρα μία προδιαγραφή για τα πεδία του σίγμα-μοντέλου της μορφής $\phi^\alpha = y^\alpha$, έτσι ώστε $\phi^2 = r^2$. Η προδιαγραφή αυτή λύνει τις εξισώσεις για τα βαθμωτά πεδία, χωρίς επιπλέον περιορισμούς, και από τις εκφράσεις για για τον βαθμωτό τανυστή ορμής-ενέργειας βλέπουμε ότι μόνο οι συνιστώσες $T^{(\phi)}_{\mu\nu}$ παραμένουν. Οι εξισώσεις Einstein ανάγονται στις

$$R_{\mu\nu} = 0 \, , \tag{7.83}$$

$$R_{mn} = \frac{2}{M^4\lambda^2(1+r^2)^2}\delta_{\alpha\beta}\nabla_m\phi^\alpha\nabla_n\phi^\beta + \frac{2\sigma}{M^4}\frac{g^{(2)}_{mn}}{\sqrt{\psi(r)}}\delta(r - r_0) \, , \tag{7.84}$$

όπου $\mu, \nu = 0,1,2,3$, είναι συντεταγμένες πάνω στην ενεργό 3-μεμβράνη και m, n, είναι συντεταγμένες του δισδιάστατου εγκάρσιου χώρου. Σημειώνουμε και πάλι ότι μόνο η συντεταγμένη r είναι πραγματικά εγκάρσια στη μεμβράνη. Η πρώτη ομάδα εξισώσεων εξασφαλίζει έναν επίπεδο τετραδιάστατο χώρο. Ο εγκάρσιος δισδιάστατος χώρος θα είναι καμπυλωμένος. Παίρνοντας το ίχνος της τελευταίας εξίσωσης, έχουμε

$$R^{(2)} = \frac{4}{M^4\lambda^2}\frac{1}{\psi(r)(1+r^2)^2} + \frac{4\sigma}{M^4}\frac{1}{\sqrt{\psi(r)}}\delta(r - r_0) \, , \tag{7.85}$$

όπου $R^{(2)} = -\frac{1}{\psi}\nabla^2 \ln\psi$ είναι το βαθμωτό Ricci του δισδιάστατου εγκάρσιου χώρου. Καθώς ο σύμμορφος παράγοντας $\psi(r)$ εξαρτάται μόνο από την ακτινική κατεύθυνση, όταν πολλαπλασιάζει τη συνάρτηση δέλτα, γίνεται απλώς μία σταθερά $\psi(r_0)$. Απουσία της μεμβράνης, η λύση είναι γνωστή και έχει τη μορφή

$$\psi(r) = C_2 \frac{r^{\frac{2}{M^4\lambda^2}+C_1}}{(1+r^2)^{\frac{1}{M^4\lambda^2}}} . \tag{7.86}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον όρο της συνάρτησης δέλτα, βρίσκουμε τη λύση

$$\psi(r) = C_2 \frac{r^{\frac{2}{M^4\lambda^2}+C_1}}{(1+r^2)^{\frac{1}{M^4\lambda^2}}} e^{-4\frac{\sigma r_0}{M^4}\sqrt{\psi(r_0)}\Theta(r-r_0)\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} , \tag{7.87}$$

που προφανώς ανάγεται στην ομαλή περίπτωση, όταν παίρνουμε το όριο $r_0 \to 0$. Τονίζουμε ότι η τιμή $\psi(r_0)$, η οποία υπεισέρχεται στον εκθέτη, είναι απλώς ένας σταθερός παράγοντας. Ο παράγοντας αυτός εισέρχεται επίσης στην (7.77) και έτσι η σταθερά ολοκλήρωσης C_2 αποτρέπει οποιαδήποτε λεπτή ρύθμιση. Βλέπουμε επίσης ότι ο εγκάρσιος χώρος διατηρεί μία μη-μηδενική καμπυλότητα μέσα στον πυρήνα της μεμβράνης. Υπάρχουν επίσης, εν γένει, κωνικές ανωμαλίες στα σημεία $r = 0$ και $r \to \infty$. Ωστόσο, μπορούμε να εξαλείψουμε την ανωμαλία στην αρχή των αξόνων, εφαρμόζοντας τη συνθήκη $C_1 = -\frac{2}{M^4\lambda^2}$. Στην περίπτωση αυτή, η δισδιάστατη μετρική είναι κανονική στο σημείο $r = 0$, και έχουμε μόνο μία κωνική ανωμαλία στο άπειρο, η οποία σηματοδοτεί την ύπαρξη μίας μη-συμπαγούς γεωμετρίας. Μπορούμε επίσης να επαληθεύσουμε την ύπαρξη μίας ελλειμματικής γωνίας στο άπειρο και να επιδείξουμε ότι δεν υπάρχει καμία ανωμαλία καθώς περνάμε το όριο της μεμβράνης. Για να απλουστεύσουμε τη συζήτησή μας, θα ορίσουμε τις ποσότητες $b = 4\sigma r_0 M^{-4}\sqrt{\psi(r_0)}$ και $c = M^{-4}\lambda^{-2}$. Αναπτύσσοντας τον σύμμορφο παράγοντα γύρω από το $r = r_0$, παίρνουμε

$$\psi(r) \sim \frac{C_2}{(1+r_0^2)^c} , \tag{7.88}$$

οπότε οι δύο ακτινικές συντεταγμένες ρ και r είναι ανάλογες κοντά στη μεμβράνη, και δεν εμπλέκεται κάποια ελλειμματική γωνία. Ωστόσο, για $r \to \infty$ βρίσκουμε

$$\psi(r) \sim r^{-2c}\left(\frac{r_0}{r}\right)^b \tag{7.89}$$

και ο μετασχηματισμός συντεταγμένων οδηγεί σε μία μετρική για τον εγκάρσιο χώρο της μορφής

$$ds_2^2 = d\rho^2 + k^2\rho^2 d\varphi^2 , \tag{7.90}$$

όπου

$$k = 1 - c - \frac{b}{2} . \tag{7.91}$$

Η σχετική ελλειμματική γωνία είναι

$$\delta = 2\pi(1-k) = 2\pi\left(c + \frac{b}{2}\right) . \tag{7.92}$$

Ο συνδυασμός $c + \frac{b}{2}$, ο οποίος υπεισέρχεται στην έκφραση για την ελλειμματική γωνία, δεν είναι άλλος από τον αριθμό Euler του εγκάρσιου χώρου, όπως μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{4\pi}\int dr\, r \int d\varphi\, \psi(r)\, R^{(2)} \\ &= \frac{1}{2}\int dr\, r\left(\frac{4}{M^4\lambda^2}\frac{1}{(1+r^2)^2} + \frac{4\sigma}{M^4}\sqrt{\psi(r_0)}\delta(r-r_0)\right) \\ &= \frac{1}{M^4\lambda^2} + \frac{2\sigma r_0\sqrt{\psi(r_0)}}{M^4} = c + \frac{b}{2} = \frac{\delta}{2\pi}. \end{aligned} \tag{7.93}$$

Προκειμένου ο χώρος να έχει πεπερασμένο όγκο, πρέπει να έχουμε

$$\frac{1}{M^4\lambda^2} + \frac{2\sigma r_0}{M^4}\sqrt{\psi(r_0)} > 1, \tag{7.94}$$

η οποία, δεδομένης της (7.93), είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\chi > 1$. Ο πεπερασμένος όγκος του δισδιάστατου χώρου προκύπτει να είναι

$$V_2 = \pi C_2 \frac{(1+r_0^2)^{1-c}}{c-1} - i^{-b-2c}\pi C_2 r_0^b B\left(-\frac{1}{r_0^2}, c+\frac{b}{2}-1, 1-c\right). \tag{7.95}$$

B είναι η ελλιπής συνάρτηση Βήτα. Ως αποτέλεσμα της θετικότητας των παραμέτρων και του περιορισμού (7.94), ο όγκος είναι πραγματικός και θετικός. Δεδομένου του πεπερασμένου όγκου του εγκάρσιου χώρου [173, 174, 175], η κατασκευή αυτή παρουσιάζει μία τετραδιάστατη βαρυτική συμπεριφορά σε χαμηλές ενέργειες, συγκρινόμενες με την ακτίνα συμπαγοποίησης, οι οποίες μεταδίδονται από μία μηδενική κατάσταση του βαρυτονίου πάνω στη μεμβράνη, ακολουθούμενη από έναν πύργο από μαζικές καταστάσεις KK σε υψηλότερες ενεργειακές κλίμακες. Προφανώς, ο χώρος παραμένει μη-συμπαγής για ολόκληρο το εύρος παραμέτρων για το οποίο η σχέση $1 < \frac{1}{M^4\lambda^2} + \frac{2\sigma r_0}{M^4}\sqrt{\psi(r_0)} < 2$ ικανοποιείται. Τελικά, για κατάλληλες τιμές, ο αριθμός Euler του εγκάρσιου χώρου φτάνει την τιμή $\chi = 2$ και ο χώρος συμπαγοποιείται σε μία σφαίρα.

Θα μπορούσαμε επίσης να τοποθετήσουμε δύο μεμβράνες στο μοντέλο μας, οι οποίες θα εγγυόνταν εξαρχής μία συμπαγή εγκάρσια γεωμετρία. Για να συμπεριλάβουμε τη δεύτερη μεμβράνη στην κατασκευή μας, τάσεως σ' και τοποθετημένη σε κάποια θέση $\rho_1 > \rho_0$ μακριά από την αρχή των αξόνων, προσθέτουμε στη δράση τον όρο

$$\int d^5x d\rho\, \delta(\rho-\rho_1)\sqrt{-\gamma}\left(\sigma' + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\Sigma}\partial_\beta\bar{\Sigma}\right), \tag{7.96}$$

όπου η επαγόμενη μετρική γ πρέπει τώρα να υπολογιστεί στο σημείο $\rho = \rho_1$. Με την προσθήκη αυτή, και οι δύο μεμβράνες παραμένουν επίπεδες, εφόσον ισχύει η συνθήκη

$$\sigma' = \frac{\bar{q}^2}{2}g^{\phi\phi}, \tag{7.97}$$

η οποία συσχετίζει την τάση της μεμβράνης σ' και το φορτίο του αξιονίου $\bar{q}$ πάνω στη δεύτερη μεμβράνη. Το στοιχείο της μετρικής $g^{\phi\phi}$ υπολογίζεται στο σημείο $\rho = \rho_1$. Η εξίσωση (7.85) γίνεται τώρα

$$R^{(2)} = \frac{4}{M^4\lambda^2}\frac{1}{\psi(r)\left(1+r^2\right)^2} + \frac{4\sigma}{M^4}\frac{1}{\sqrt{\psi(r)}}\delta(r-r_0) + \frac{4\sigma'}{M^4}\frac{1}{\sqrt{\psi(r)}}\delta(r-r_1) \qquad (7.98)$$

και η αντίστοιχη λύση για τον σύμμορφο παράγοντα είναι

$$\psi(r) = C_2\frac{r^{2c+C_1}}{\left(1+r^2\right)^c}e^{-b\Theta(r-r_0)\ln\frac{r}{r_0}\;-b_1\Theta(r-r_1)\ln\frac{r}{r_1}}\,, \qquad (7.99)$$

όπου, επιπλέον, έχουμε ορίσει $b_1 = 4M^{-4}\sigma' r_1\sqrt{\psi(r_1)}$. Ξανά, η μετρική είναι ομαλή στην αρχή των αξόνων, αν θέσουμε $C_1 = -2c$. Δε συναντάμε κάποια ελλειμματική γωνία γύρω από το $r = 0$, ή καθώς διασχίζουμε καθεμία από τις δύο μεμβράνες. Η ολική ελλειμματική γωνία του χώρου προκύπτει ελέγχοντας τη μετρική στο άπειρο,

$$\psi(r) \sim r_0^b r_1^{b_1} r^{2-2c-b-b_1}\,, \qquad (7.100)$$

από την οποία η αντίστοιχη ελλειμματική γωνία

$$\delta = 2\pi(1-k) = 2\pi\left(c + \frac{b+b_1}{2}\right)\,, \qquad (7.101)$$

μπορεί να εξαχθεί άμεσα. Για να διασφαλίσουμε ότι ο χώρος έχει την τοπολογία της σφαίρας, πρέπει να επιβάλουμε την συνθήκη

$$\chi = c + \frac{b+b_1}{2} = 2\,, \qquad (7.102)$$

η οποία συσχετίζει τις τάσεις με τις θέσεις των δύο μεμβρανών.

Θα αφιερώσουμε λίγο χρόνο για να συζητήσουμε τον τρόπο με τον οποίο το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς αντιμετωπίζεται στα πλαίσια του μοντέλου που μόλις περιγράψαμε. Όπως αναφέραμε ήδη, η ενεργός 3-μεμβράνη εμφανίζεται επίπεδη ως προς την καμπυλότητα Ricci, με την τάση της να επάγει μία ελλειμματική γωνία στον μη-συμπαγή εγκάρσιο χώρο. Οι σχέσεις που συνδέουν τις διάφορες φυσικές σταθερές στην περίπτωση της κατασκευής με μία μεμβράνη είναι οι (7.77) και (7.92). Ο πιθανός κίνδυνος ανεπιθύμητων λεπτών ρυθμίσεων μπορεί να προέλθει από τις εξισώσεις αυτές. Για να εξετάσουμε αν όντως κάτι τέτοιο συμβαίνει, φανταζόμαστε μία κατάσταση, στην οποία μία λύση με επίπεδη μεμβράνη έχει βρεθεί για μία συγκεκριμένη τιμή τάσεως σ. Αλλάζουμε τότε την τιμή της τάσεως και εξετάζουμε αν η αλλαγή αυτή προκαλεί μία μεταβολή στην ελλειμματική γωνία, η οποία για έναν τετραδιάστατο παρατηρητή είναι μη-παρατηρήσιμο μέγεθος, ενώ παράλληλα να αφήνει άλλες φυσικές σταθερές αμετάβλητες. Βλέπουμε ότι μία τέτοια μεταβολή μπορεί να επηρεάσει μέσω της (7.77) την τιμή του φορτίου του αξιονικού πεδίου q. Ωστόσο, όπως τονίσαμε και πιο πριν, το στοιχείο της μετρικής $g^{\varphi\varphi}$ φέρει την απροσδιόριστη σταθερά ολοκλήρωσης

C_2, η οποία με τη σειρά της εισέρχεται στην σταθερά $\psi(r_0)$ και κατ' επέκταση στην b. Έτσι, αλλάζοντας την τάση της μεμβράνης, το αξιονικό φορτίο παραμένει αμετάβλητο, ενώ μόνο η ελλειμματική γωνία επηρεάζεται μέσω της (7.92), η οποία ενέχει την ποσότητα b. Με τον τρόπο αυτό, η λεπτή ρύθμιση φυσικών σταθερών σε αυτό το μοντέλο αποφεύγεται. Η νέα τάση της μεμβράνης θα μπορούσε επίσης να οδηγήσει σε μία επιπλέον αλλαγή της ακτίνας της 4-μεμβράνης.

Όπως έχει ήδη υποδειχθεί στην αναφορά [156], η ύπαρξη ενός μη-συμπαγούς εγκάρσιου χώρου είναι θεμελιώδους σημασίας για την επίτευξη λύσεως. Στην περίπτωσή μας, όπου η απειροστού πάχους 3-μεμβράνη έχει αντικατασταθεί από μία ενεργό 3-μεμβράνη, η οποία περιέχει μία συμπαγή διάσταση μικρού μήκους, υπάρχει ακόμα δυνατότητα εύρεσης λύσεων που δεν απαιτούν παραπάνω από μία ελαφρά λεπτή ρύθμιση, παρά το γεγονός ότι ο Υπερχώρος έχει αναγκαστικά την τοπολογία της σφαίρας. Αυτό οφείλεται στη σχέση (7.102), η οποία καθορίζει την τιμή της μέχρι πρότινος απροσδιόριστης σταθεράς C_2. Θεωρώντας τον λόγο των σχέσεων (7.77) και (7.97), βλέπουμε ότι μεταβάλλοντας την τιμή της σ ή της σ', επάγουμε μία αλλαγή στον λόγο των αντίστοιχων αξιονικών πεδίων. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί αν η αλλαγή στην τάση της μεμβράνης αντισταθμίζεται από μία ανάλογη μεταβολή στον λόγο των στοιχείων της μετρικής $g^{\varphi\varphi}$ στο r_0 και στο r_1. Καθώς και τα δύο φέρουν την ίδια ολική σταθερά C_2, η οποία απαλείφεται, ο μόνος τρόπος να ικανοποιηθεί η απαίτηση αυτή είναι να μεταβληθούν οι ακτίνες των μεμβρανών. Έτσι, είναι απαραίτητη η επιβολή μίας λεπτής ρύθμισης στις ακτίνες των μεμβρανών, προκειμένου να έχουμε επίπεδες μεμβράνες για αυθαίρετες, μεταβαλλόμενες τιμές τάσεως. Η τετραδιάστατη κοσμολογική σταθερά επηρεάζει και πάλι την τιμή της ελλειμματικής γωνίας μέσω της (7.101).

7.2.4 Φορμαλισμός Gauss-Codazzi

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την ανάλυση του προβλήματος που μας απασχόλησε παραπάνω είναι η χρήση του φορμαλισμού Gauss-Codazzi, όπως αυτός παρουσιάζεται στην [74]. Οι εξισώσεις πάνω σε μία μεμβράνη συνδιάστασης-1, όταν ο Υπερχώρος είναι n-διάστατος, προκύπτουν να είναι

$$
\begin{aligned}
{}^{(n-1)}G_{\mu\nu} &= \frac{n-3}{n-2}\kappa_n^2\left(T_{\rho\sigma}q^\rho_\mu q^\sigma_\nu + T_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma q_{\mu\nu} - \frac{1}{n-1}T q_{\mu\nu}\right) \\
&+KK_{\mu\nu} - K^\sigma_\mu K_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}q_{\mu\nu}\left(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}\right) - E_{\mu\nu}\,, \qquad (7.103)
\end{aligned}
$$

όπου $E_{\mu\nu}$ είναι η προβολή του τανυστή Weyl του Υπερχώρου,

$$E_{\mu\nu} = {}^{(n)}C^\alpha_{\beta\rho\sigma}n_\alpha n^\rho q^\beta_\mu q^\sigma_\mu \qquad (7.104)$$

και $K_{\mu\nu}$ η εξωτερική καμπυλότητα της μεμβράνης. Η σταθερά κ_n σχετίζεται με την n-διάστατη μάζα Planck της θεωρίας. Θα θεωρήσουμε κάθετες συντεταγμένες Gauss, όπου η συντεταγμένη που είναι κάθετη στη μεμβράνη συμβολίζεται με ρ και έναν τανυστή ορμής-ενέργειας της μορφής

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + T^{(B)}_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}\delta(\rho)\,, \qquad (7.105)$$

όπου $T^{(B)}_{MN}$ είναι ο τανυστής ορμής-ενέργειας του Υπερχώρου, χωρίς να περιλαμβάνουμε την περιβάλλουσα κοσμολογική σταθερά. $S_{\mu\nu}$ είναι το ενεργειακό περιεχόμενο της μεμβράνης και μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω στην περίπτωσή μας, με βάση τη σχέση

$$S_{\mu\nu} = -\sigma q_{\mu\nu} + \tilde{\tau}_{\mu\nu} + \bar{\tau}_{\mu\nu} \,. \tag{7.106}$$

Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει την τάση της μεμβράνης, ο δεύτερος είναι ο τανυστής ορμής-ενέργειας του αξιονίου και ο τρίτος περιγράφει συνεισφορές από επιπλέον ενεργειακό περιεχόμενο πάνω στη μεμβράνη. Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε επίσης να πραγματευτούμε περιπτώσεις με αυθαίρετο ενεργειακό περιεχόμενο στη μεμβράνη, επιπλέον του αξιονικού πεδίου, το οποίο χρησιμοποιείται μόνο για να εξαλειφθεί η αζιμουθιακή πίεση της μεμβράνης και ουσιαστικά παραμένει μη-ορατό. Προχωρούμε υποθέτοντας επιπλέον μία συμμετρία $\mathbf{Z_2}$ στην κατεύθυνση ρ. Από τις Συνθήκες Συνέχειας Israel, ο περιορισμός αυτός καθορίζει κατά τρόπο μονοσήμαντο την εξωτερική καμπυλότητα της μεμβράνης με βάση το ενεργειακό της περιεχόμενο. Η προκύπτουσα σχέση είναι η

$$K_{\mu\nu} = -\frac{\kappa_n^2}{2}\left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{n-2}q_{\mu\nu}S\right) \,. \tag{7.107}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην (7.103) και χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τανυστές ορμής-ενέργειας παίρνουμε τις ενεργές εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη

$$\begin{aligned} {}^{(n-1)}G_{\mu\nu} \;&=\; -\Lambda_{(n-1)}q_{\mu\nu} + 8\pi\bar{G}_{(n-1)}\bar{T}_{\mu\nu} + 8\pi G_{(n-1)}\left(\tilde{\tau}_{\mu\nu} + \bar{\tau}_{\mu\nu}\right) \\ &\quad +\kappa_n^4\left(\tilde{\pi}_{\mu\nu} + \bar{\pi}_{\mu\nu} + \kappa_{\mu\nu}\right) - E_{\mu\nu} \,. \end{aligned} \tag{7.108}$$

Ποσότητες με περισπωμένη αναφέρονται σε συνεισφορές από το αξιονικό πεδίο, ενώ οι ποσότητες με παύλα προέρχονται από την ύλη της μεμβράνης, με εξαίρεση τον δεύτερο όρο, ο οποίος οφείλεται στο περιεχόμενο του Υπερχώρου. Οι ορισμοί που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθοι

$$\Lambda_{(n-1)} = \left(\frac{n-3}{n-1}\right)\kappa_n^2\left(\Lambda + \frac{n-1}{8\,(n-2)}\kappa_n^2\sigma^2\right) \,, \tag{7.109}$$

$$G_{(n-1)} = \left(\frac{n-3}{n-2}\right)\frac{\kappa_n^4\sigma}{32\pi} \,, \tag{7.110}$$

$$\bar{G}_{(n-1)} = \left(\frac{n-3}{n-2}\right)\frac{\kappa_n^2}{8\pi} \,, \tag{7.111}$$

$$\bar{T}_{\mu\nu} = T^{(B)}_{\rho\sigma}q^{\rho}_{\mu}q^{\sigma}_{\nu} + T^{(B)}_{\rho\sigma}n^{\rho}n^{\sigma}q_{\mu\nu} - \frac{1}{n-1}T^{(B)}q_{\mu\nu} \,, \tag{7.112}$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tau^{\rho}_{\mu}\tau_{\nu\rho} + \frac{1}{4\,(n-2)}\tau\tau_{\mu\nu} + \frac{1}{8}\tau^{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{8\,(n-2)}\tau^2 q_{\mu\nu} \,, \tag{7.113}$$

$$\kappa_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\tilde{\tau}^{\rho}_{(\mu}\bar{\tau}_{\nu)\rho} + \frac{1}{4\,(n-2)}\left(\tilde{\tau}\bar{\tau}_{\mu\nu} + \bar{\tau}\tilde{\tau}_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{4}\tilde{\tau}^{\alpha\beta}\bar{\tau}_{\alpha\beta}q_{\mu\nu} - \frac{1}{4\,(n-2)}\tilde{\tau}\bar{\tau}q_{\mu\nu} \,. \tag{7.114}$$

Ως έλεγχο των παραπάνω σχέσεων, βλέπουμε ότι θέτοντας $n = 5$ και $\bar{T}_{\mu\nu} = \tilde{\tau}_{\mu\nu} = 0$, αναχτούμε την ίδια εξίσωση που παρουσιάζεται στην αναφορά [74]. Η εξίσωση (7.108) συμπληρώνεται από την εξίσωση του Codazzi

$$D_\nu K^\nu_\mu - D_\mu K = \kappa_n^2 T_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma q^\rho_\mu \,. \tag{7.115}$$

Χρησιμοποιώντας την (7.108), μπορούμε να ερευνήσουμε την χρονική εξέλιξη πάνω σε μία υπερεπιφάνεια διάστασης $n-1$, εκμεταλλευόμενοι τον φορμαλισμό που παρουσιάσαμε παραπάνω. Θεωρούμε πρώτα το μοντέλο το οποίο παρουσιάστηκε στην [168], όπου έχουμε μία μεμβράνη με ενεργό συνδιάσταση-2, η οποία βρίσκεται τοποθετημένη μέσα σε έναν εξαδιάστατο Υπερχώρο. Υπάρχει μία 4-μεμβράνη και το αντίστοιχο αξιονικό πεδίο, χωρίς κανένα επιπλέον ενεργειακό περιεχόμενο στον Υπερχώρο ή τη μεμβράνη και θεωρούμε επίσης την ύπαρξη συμμετρίας $\mathbf{Z_2}$. Ο προκύπτον χώρος είναι παντού επίπεδος, εκτός από τη θέση της μεμβράνης, όπου η τάση προκαλεί μία ελλειμματική γωνία στον Υπερχώρο. Κατά ενδιαφέροντα τρόπο, προκύπτει ότι η επιβαλλόμενη συνθήκη (7.77), η οποία σχετίζει το φορτίο του αξιονίου με την τάση της μεμβράνης, εξαναγκάζει όλους τους όρους να είναι δευτεροβάθμιοι ως προς την σ, έτσι ώστε οι όροι της κοσμολογικής σταθεράς και ο $\bar{\tau}_{\mu\nu}$ να απαλείφονται από τον όρο $\bar{\pi}_{\mu\nu}$. Η εξίσωση κίνησης (7.108) ανάγεται στην περίπτωση αυτή στις εξισώσεις Einstein σε πέντε διαστάσεις, χωρίς ενεργειακό περιεχόμενο,

$$^{(5)}G_{\mu\nu} = 0 \,. \tag{7.116}$$

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι ο $E_{\mu\nu}$ υπολογίζεται κοντά στη μεμβράνη και όχι πάνω σε αυτήν, έτσι ώστε στον χώρο που μόλις περιγράψαμε, ο οποίος είναι επίπεδος μακριά από τη θέση της μεμβράνης, παίρνουμε $E_{\mu\nu} = 0$. Εξετάζοντας την εξίσωση αυτή και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι η γωνιακή συντεταγμένη είναι συμπαγοποιημένη, μπορεί να οδηγηθούμε στο πρώιμο συμπέρασμα ότι το μοντέλο αυτό διαθέτει τη συνήθη φαινομενολογία μίας θεωρίας Kaluza-Klein, με μία μηδενική κατάσταση για το βαρυτόνιο, συνοδευόμενη από έναν πύργο από μαζικές καταστάσεις. Αυτό είναι ωστόσο παραπλανητικό, αφού η (7.116) δεν περιέχει καμία πληροφορία για το γεγονός ότι έχουμε ήδη εκτελέσει μία διαστατική αναγωγή από έξι σε πέντε διαστάσεις πάνω στην μη-συμπαγή διάσταση. Παρουσία ύλης η προκύπτουσα εξίσωση είναι

$$^{(5)}G_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \bar{\tau}_{\mu\nu} + \kappa_6^4 \bar{\pi}_{\mu\nu} + \kappa_6^4 \kappa_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \,. \tag{7.117}$$

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση αυτή η λύση για τον κενό χώρο δεν ισχύει πλέον, οπότε ο Υπερχώρος θα είναι εν γένει καμπυλωμένος και δεν μπορούμε πλέον να αγνοήσουμε τον όρο $E_{\mu\nu}$, ο οποίος εξαρτάται από την καμπυλότητα του Υπερχώρου.

Επανερχόμαστε τώρα στο μοντέλο που εξετάσαμε παραπάνω, όπου έχουμε τα πεδίου του σίγμα-μοντέλου στον Υπερχώρο. Εξετάζοντας τον τανυστή ορμής-ενέργειας των πεδίων αυτών, βλέπουμε ότι οι συνιστώσες $T^{(B)}_{mn}$ είναι μηδενικές στο σύστημα συντεταγμένων (7.82). Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες αυτές δεν αποτελούν κάθετες συντεταγμένες Gauss, αλλά σχετίζονται με αυτές μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού. Αφού ο μετασχηματισμός αυτός δεν αναμιγνύει τις συνιστώσες $T^{(B)}_{mn}$ και $T^{(B)}_{\mu\nu}$, οι πρώτες θα εξακολουθούν να είναι μηδέν όταν επανέλθουμε σε κάθετες συντεταγμένες Gauss, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή της εξίσωσης(7.108). Από την άλλη, ο μετασχηματισμός αυτός δεν επηρεάζει τη δεύτερη ομάδα συνιστωσών, οι οποίες θα είναι οι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει επιπλέον ύλη στον Υπερχώρο ή τη μεμβράνη, πέρα από το αξιονικό πεδίο και τα πεδία ϕ^a, οι εξισώσεις πάνω στη μεμβράνη δίνουν

$$
{}^{(5)}G_{\alpha\beta} = \frac{3\kappa_6^2}{4}\left(\frac{16}{5\lambda^2\left(1+r^2\right)^2\psi}q_{\alpha\beta} - \frac{4}{\lambda^2\left(1+r^2\right)^2\psi}n_{\mu\nu}\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu\right) - E_{\alpha\beta}\,. \tag{7.118}
$$

Εδώ, οι δείκτες α, β υποδηλώνουν συντεταγμένες πάνω στην 4-μεμβράνη, ενώ οι μ, ν είναι συντεταγμένες πάνω στην 3-μεμβράνη. Οι συνιστώσες του τανυστή ορμής-ενέργειας του Υπερχώρου λαμβάνονται ως οι οριακές τιμές τους κοντά στη θέση της μεμβράνης. Από την έκφραση αυτή συνάγεται άμεσα ότι ${}^{(5)}R = 0$, το οποίο σημαίνει ότι η 4-μεμβράνη εμφανίζεται επίπεδη ως προς την τιμή του βαθμωτού Ricci, αλλά όχι όσον αφορά τον τανυστή Ricci. Μάλιστα, τα πεδία ϕ^a δρουν στη μεμβράνη σαν ένα είδος ιδανικού ρευστού με ανισοτροπική πίεση, καθώς βλέπουμε ότι η πέμπτη διαγώνια συνιστώσα του τανυστή ορμής-ενέργειας είναι διαφορετική. Ωστόσο, έχουμε ακόμα συνεισφορές από τον τανυστή Weyl του Υπερχώρου, ο οποίος για την μετρική (7.82) παίρνει τη μορφή

$$
E_{\alpha\beta} = \frac{3\kappa_6^2}{5\lambda^2}\frac{1}{\psi\left(1+r^2\right)^2}Diag\left(1,-1,-1,-1,4\psi r^2\right)\,. \tag{7.119}
$$

Μόλις λάβουμε υπόψιν την παραπάνω σχέση, βρίσκουμε ότι η συνεισφορά από τον Υπερχώρο απαλείφεται από τον προβεβλημένο τανυστή Weyl και η 4-μεμβράνη έχει

$$
{}^{(5)}R_{\mu\nu} = 0\,, \tag{7.120}
$$

οπότε είναι Ricci-επίπεδη σε πέντε διαστάσεις.

Στο μοντέλο αυτό μπορούμε να συμπεριλάβουμε ύλη πάνω στη μεμβράνη χωρίς ιδιαίτερες περιπλοκές. Μάλιστα, η μόνη επιπλέον συνεισφορά, σε σύγκριση με το προηγούμενο μοντέλο στον κενό Υπερχώρο, έρχεται από τα πεδία του σίγμα-μοντέλου. Η προκύπτουσα εξίσωση είναι η

$$
\begin{aligned}
{}^{(5)}G_{\alpha\beta} &= \frac{3\kappa_6^2}{4}\left(\frac{16}{5\lambda^2\left(1+r^2\right)\psi}q_{\alpha\beta} - \frac{4}{\lambda^2\left(1+r^2\right)\psi}n_{\mu\nu}\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu\right) \\
&\quad +8\pi G_5\bar{\tau}_{\alpha\beta} + \kappa_6^4\bar{\pi}_{\alpha\beta} + \kappa_6^4\kappa_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}\,.
\end{aligned} \tag{7.121}
$$

Σε πρώτη τάξη, περιμένουμε ο πρώτος και τελευταίος όρος να απαλείφονται όπως και πριν. Επιπλέον, θα έχουμε εναπομένουσες συνεισφορές στον τανυστή $E_{\alpha\beta}$ εξαιτίας του περιεχομένου της μεμβράνης.

7.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρήσαμε πενταδιάστατα μοντέλα μεμβρανών, τα οποία παρουσιάζουν το φαινόμενο τους ημιεντοπισμού της βαρύτητας. Τα μοντέλα αυτά είναι ασυμπτωτικά επίπεδα, και μοιάζουν με χώρους Minkowski σε πολύ μεγάλες αποστάσεις. Περιορίσαμε την έρευνά μας στη μελέτη μόνο τανυστικών διαταραχών της μετρικής. Επικεντρωθήκαμε στην αλληλεπίδραση μεταξύ της μηδενικής κατάστασης των μοντέλων αυτών (όποτε η κατάσταση αυτή ήταν κανονικοποιήσιμη) και των φαινομένων των πιθανών συντονισμών, οι οποίοι προέρχονται από τις συνεισφορές των μαζικών καταστάσεων Kaluza-Klein του φάσματος. Ως πρώτο παράδειγμα, θεωρήσαμε μία συμπαγοποιημένη εκδοχή του μοντέλου GRS. Στην περίπτωση αυτή, όπως και στο σύνηθες GRS, το μαζικό φάσμα καταστάσεων KK προκαλεί την εμφάνιση ενός συντονισμού μηδενικής μάζας και ενεργού τετραδιάστατης βαρύτητας r^{-1} πάνω στη μεμβράνη, η οποία εξαρτάται από το μέγεθος της ακτίνας συμπαγοποίησης. Τα φαινόμενα του GRS αναπαράγονται στο όριο άπειρης ακτίνας. Όσο όμως η επιπλέον διάσταση παραμένει πεπερασμένη, υπάρχει πάντα μία κανονικοποιήσιμη μηδενική κατάσταση. Δείξαμε ότι, καθώς ο συντονισμός γίνεται πιο ισχυρός, η ισχύς της μηδενικής κατάστασης πάνω στη μεμβράνη μειώνεται. Το φαινόμενο αυτό είναι αντίστοιχο με αυτό που περιγράφεται στην [141] για το ασυμμετρικό μοντέλο Randall-Sundrum. Η κλίμακα της ημιεντοπισμένης βαρύτητας του μοντέλου GRS δεν είναι πλέον το κατώφλι μεταξύ τετραδιάστατης και πενταδιάστατης βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη, αλλά ορίζει την κλίμακα μήκους, για την οποία, τόσο ο συντονισμός, όσο και η μηδενική κατάσταση έχουν σημαντική συνεισφορά στη μετάδοση τετραδιάστατης βαρυτικής δύναμης. Πάνω από την κλίμακα αυτή, η βαρύτητα μεταδίδεται κύρια από τη μηδενική κατάσταση και ο συντονισμός δίνει μόνο υψηλότερης τάξεως διορθώσεις. Για κλίμακες απόστασης στο πεδίο τιμών $\frac{1}{k} \ll r \ll r_2 \sim (kz_0)^2 z_0$, η ενεργός τετραδιάστατη βαρύτητα μεταδίδεται ταυτόχρονα από τον συντονισμό και από τη μηδενική κατάσταση. Το ολικό δυναμικό είναι

$$V(r) \sim \frac{1}{rM^3}\left(\frac{k}{1+\frac{z_1}{r_2}} + \frac{\mathcal{A}}{2} z_1 r_2\right).$$

Όπως μπορούμε να δούμε από την έκφραση αυτή, για $z_1 \gg r_2$, ο συντονισμός υπερισχύει. Για κλίμακες $r \gg r_2$, η μόνη συνεισφορά στην τετραδιάστατη βαρύτητα θα έρχεται από τη μηδενική κατάσταση, αφού ο συντονισμός διασπάται και δίνει πενταδιάστατες διορθώσεις τάξεως r^{-2}. Ο λόγος των δύο βαρυτικών σταθερών στην περιοχή $k^{-1} \ll r \ll r_2$ είναι

$$\frac{G_{N_R}}{G_{N_0}} \sim 1 + \frac{z_1}{r_2}.$$

Στη συνέχεια, εξετάσαμε μία ασυμμετρική παραλλαγή του μοντέλου GRS, στην οποία οι δύο τομείς γεωμετρίας AdS έχουν διαφορετικές κοσμολογικές σταθερές $\Lambda_+ \neq \Lambda_-$. Το μοντέλο είναι μη-συμπαγές και επίπεδο σε μεγάλες αποστάσεις. Έτσι, δεν υπάρχει μηδενική κατάσταση στην κατασκευή αυτή. Τα όποια τετραδιάστατα βαρυτικά φαινόμενα οφείλονται αποκλειστικά στην ύπαρξη ενός συντονισμού. Βρήκαμε το φάσμα των μαζικών καταστάσεων KK, το οποίο, αν και πιο πολύπλοκο απ' ότι στη συμμετρική περίπτωση, παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά και προκαλεί την εμφάνιση συντονισμού. Δείξαμε ότι τα φαινόμενα του συντονισμού, αν και είναι πάντοτε παρόντα, μπορούν να εξασθενίσουν εξαιτίας της ασυμμετρίας. Η συμπεριφορά αυτή γίνεται φανερή στο δυναμικό περιορισμού και μπορεί να οδηγήσει σε μικρότερο χρόνο ζωής του συντονισμού και κατ' επέκταση μικρότερη απόσταση στην οποία έχουμε ημιεντοπισμένη τετραδιάστατη βαρύτητα. Τέλος, ως ένα τρίτο παράδειγμα ενός μοντέλου που παρουσιάζει ημιεντοπισμό, θεωρήσαμε μία μη-συμπαγή κατασκευή, όπου η κεντρική μεμβράνη αντικαθίσταται από ένα κατάλληλο βαθμωτό πεδίο. Όπως αναφέρεται στην [53], ένα υπόβαθρο τύπου GRS δεν μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας μόνο ένα περιβάλλον βαθμωτό πεδίο. Η παρουσία των μεμβρανών αρνητικής τάσεως είναι έτσι αναγκαία και οι ίδιες παθολογίες που εμφανίζονται στο σύνηθες GRS [55] παραμένουν και εδώ. Ωστόσο, το μοντέλο της μεμβράνης πεπερασμένου πάχους εμφανίζεται βιώσιμο και είναι σίγουρα πιο ρεαλιστικό, συγκρινόμενο με την απλοποιημένη περίπτωση της λεπτής μεμβράνης. Θα πρέπει τέλος να σημειώσουμε ότι το συμπαγοποιημένο μοντέλο GRS είναι ενδεχομένως επιρρεπές σε προβλήματα που έχουν να κάνουν με την ύπαρξη φαντασματικών βαθμών ελευθερίας (ghosts), εξαιτίας της ύπαρξης μεμβρανών αρνητικής τάσεως, όπως αναφέρεται στις [143, 176] (αλλά βλέπε επίσης [177]). Μία πιο διεξοδική ανάλυση των βαθμωτών διαταραχών στο πλαίσιο αυτό θα ήταν απαραίτητη, προκειμένου να απαντηθούν τα ερωτήματα αυτά.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, παρουσιάσαμε ένα μοντέλο, όπου μεμβράνες ενεργού συνδιάστασης-2 βρίσκονται εμβαπτισμένες μέσα σε έναν εξαδιάστατο Υπερχώρο χώρο, ο οποίος διαθέτει ένα σίγμα-μοντέλο συμμετρίας $O(3)$. Η εισαγωγή μεμβρανών, οι οποίες έχουν χυλινδρική δομή σε έξι διαστάσεις μέσα σε ένα τέτοιο υπόβαθρο, επιτρέπει μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση σε σύγκριση με καθαρές μεμβράνες συνδιάστασης-2, οι οποίες είναι γνωστό ότι αντιμετωπίζουν τεχνικά προβλήματα [155]. Παρουσιάσαμε λύσεις στην περίπτωση μίας μεμβράνης και μη-συμπαγούς εγκάρσιας γεωμετρίας, καθώς και στην περίπτωση δύο μεμβρανών μέσα σε έναν συμπαγή εγκάρσιο χώρο με τοπολογία σφαίρας. Όπως προκύπτει, το μοντέλο με μία μόνο μεμβράνη μπορεί να δώσει μία επίπεδη 3-μεμβράνη, χωρίς να απαιτείται λεπτή ρύθμιση των παρατηρήσιμων φυσικών παραμέτρων του μοντέλου. Έχουμε έτσι μία μέθοδο επίλυσης του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς με ταυτόχρονη αποφυγή επιβολής λεπτών ρυθμίσεων, οι οποίες είναι συνήθως αναγκαίες σε παρόμοιες κατασκευές με 3-μεμβράνες. Στην εκδοχή με δύο μεμβράνες, μία ελαφρά λεπτή ρύθμιση είναι απαραίτητη μεταξύ των ακτίνων των μεμβρανών. Βρήκαμε επίσης τις εξισώσεις Einstein πάνω στην ψευδο-3-μεμβράνη για αυθαίρετο αριθμό διαστάσεων και τις εφαρμόσαμε στο μοντέλο μας, προκειμένου να εξετάσουμε τη δυναμική πάνω στην υπερεπιφάνεια. Το μοντέλο φαίνεται να επιδέχεται μία συνεπή ερμηνεία, μετά τη διαστατική αναγωγή *Kaluza – Klein* της συμπαγοποιημένης διάστασης.

Αγγλική Ορολογία

B
βαρυτόνιο, graviton

Δ
διβαρύτητα, bigravity

E
εγκάρσια βαθμίδα μηδενικού ίχνους, transverse-traceless gauge
εκτουσία, hessence
ελάχιστη σύζευξη, minimal coupling
ελαχιστοποίηση, minimization
επιταχυνόμενη διαστολή, accelerating expansion
ερυθρά μετατόπιση, redshift

H
ημιεντοπισμός, quasi-localization

Θ
θεωρία βαθμίδας, gauge theory
θεωρία-M, M-theory
θεωρία μεγάλης έκρηξης, big bang theory
θεωρία υπερχορδών, superstring theory

K
καμπυλότητα, curvature
κάμψη, kink
κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου, cosmic microwave background
κοσμική διαστολή, cosmic expansion

M
μεγάλη σχάση, big rip
μέγιστα-συμμετρικός χώρος, maximally symmetric space
D-μεμβράνη, D-brane
μεμβράνη, brane
μηδενική κατάσταση, zero mode
μη-ελάχιστη σύζευξη, non-minimal coupling
μη-παραγοντοποιήσιμη γεωμετρία, non-factorizable geometry
μη-συμπαγής, non-compact

Π
παραγοντοποιήσιμη γεωμετρία, factorizable geometry

παράμετρος επιβράδυνσης, deceleration parameter
πύργος καταστάσεων, tower of states
πεδία-φαντάσματα, phantom fields
πεμπτουσία, quintessence
περιθωριοποίηση, marginalization
πληθωρισμός, inflation
πολλαπλότητα, manifold
πολυβαρύτητα, multigravity

Σ
σκοτεινή ενέργεια, dark energy
σκοτεινή ύλη, dark matter
συμπαγής, compact
συνδιάσταση, codimension
συν-κινούμενος, comoving
σφαιρική πολλαπλότητα, orbifold

Τ
ταχυόνιο, tachyon
τοπολογική ανομοιομορφία, topological defect
τροποποιημένη βαρύτητα, modified gravity

Υ
Υπερχώρος, bulk

Χ
χωρικός εντοπισμός, localization

Ψ
ψευδο-μεμβράνη, pseudo-brane

Βιβλιογραφία

[1] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.

[2] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys.*, B44:189–213, 1972.

[3] Peter W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, 12:132–133, 1964.

[4] Peter W. Higgs. Spontaneous Symmetry Breakdown Without Massless Bosons. *Phys. Rev.*, 145:1156–1163, 1966.

[5] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.

[6] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.

[7] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. Originally printed in *Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden*, Stockholm 1968, 367-377.

[8] W. M. Yao et al. Review of particle physics. *J. Phys.*, G33:1–1232, 2006.

[9] G. Arnison et al. Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at s**(1/2) = 540-GeV. *Phys. Lett.*, B122:103–116, 1983.

[10] G. Arnison et al. Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around 95-GeV/c**2 at the CERN SPS collider. *Phys. Lett.*, B126:398–410, 1983.

[11] V. M. Abazov et al. Evidence for production of single top quarks and first direct measurement of —V(tb)—. *Phys. Rev. Lett.*, 98:181802, 2007.

[12] F. Abe et al. Observation of top quark production in $\bar{p}p$ collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 74:2626–2631, 1995.

[13] J. Alcaraz et al. A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model. *hep-ex/0612034*, 2006.

[14] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. The origin of chemical elements. *Phys. Rev.*, 73:803–804, 1948.

[15] Arno A. Penzias and Robert Woodrow Wilson. A Measurement of excess antenna temperature at 4080- Mc/s. *Astrophys. J.*, 142:419–421, 1965.

[16] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson. Cosmic Black-Body Radiation. *Astrophys. J.*, 142:414, 1965.

[17] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23:347–356, 1981.

[18] Andreas Albrecht and Paul J. Steinhardt. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223, 1982.

[19] Andrei D. Linde. THE NEW INFLATIONARY UNIVERSE SCENARIO. In *Cambridge 1982, Proceedings, The Very Early Universe*, 205-249.

[20] Alexei A. Starobinsky. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations. *Phys. Lett.*, B117:175–178, 1982.

[21] James M. Bardeen, Paul J. Steinhardt, and Michael S. Turner. Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe. *Phys. Rev.*, D28:679, 1983.

[22] George F. Smoot et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps. *Astrophys. J.*, 396:L1–L5, 1992.

[23] D. N. Spergel et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology. *Astrophys. J. Suppl.*, 170:377, 2007.

[24] Y. Ashie et al. Evidence for an oscillatory signature in atmospheric neutrino oscillation. *Phys. Rev. Lett.*, 93:101801, 2004.

[25] Douglas Clowe et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophys. J.*, 648:L109–L113, 2006.

[26] Adam G. Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.

[27] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586, 1999.

[28] Sean M. Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, 4:1, 2001.

[29] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989.

[30] Michael B. Green and John H. Schwarz. Infinity Cancellations in SO(32) Superstring Theory. *Phys. Lett.*, B151:21–25, 1985.

[31] Michael B. Green and John H. Schwarz. Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory. *Phys. Lett.*, B149:117–122, 1984.

[32] Joseph Polchinski. Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4724–4727, 1995.

[33] Petr Horava and Edward Witten. Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions. *Nucl. Phys.*, B460:506–524, 1996.

[34] Theodor Kaluza. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921:966–972, 1921.

[35] O. Klein. Quantum theory and five-dimensional theory of relativity. *Z. Phys.*, 37:895–906, 1926.

[36] K. Akama. An early proposal of 'brane world'. *Lect.. Notes Phys.*, 176:267–271, 1982.

[37] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Do we live inside a domain wall? *Phys. Lett.*, B125:136–138, 1983.

[38] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429:263–272, 1998.

[39] Lisa Randall and Raman Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370–3373, 1999.

[40] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999.

[41] Gian F. Giudice, Riccardo Rattazzi, and James D. Wells. Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders. *Nucl. Phys.*, B544:3–38, 1999.

[42] H. Davoudiasl, J. L. Hewett, and T. G. Rizzo. Experimental probes of localized gravity: On and off the wall. *Phys. Rev.*, D63:075004, 2001.

[43] Pierre Binetruy, Cedric Deffayet, and David Langlois. Non-conventional cosmology from a brane-universe. *Nucl. Phys.*, B565:269–287, 2000.

[44] Pierre Binetruy, Cedric Deffayet, Ulrich Ellwanger, and David Langlois. Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant. *Phys. Lett.*, B477:285–291, 2000.

[45] Sean M. Carroll and Monica M. Guica. Sidestepping the cosmological constant with football- shaped extra dimensions. 2003.

[46] Ignacio Navarro. Codimension two compactifications and the cosmological constant problem. *JCAP*, 0309:004, 2003.

[47] Y. Aghababaie, C. P. Burgess, S. L. Parameswaran, and F. Quevedo. Towards a naturally small cosmological constant from branes in 6D supergravity. *Nucl. Phys.*, B680:389–414, 2004.

[48] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, Nemanja Kaloper, and Raman Sundrum. A small cosmological constant from a large extra dimension. *Phys. Lett.*, B480:193–199, 2000.

[49] (ed.) Kazakov, D., (ed.) Lavignac, S., and (ed.) Dalibard, J. Particle physics beyond the standard model. Proceedings, Summer School on Theoretical Physics, 84th Session, Les Houches, France, August 1-26, 2005. Prepared for Les Houches Summer School on Theoretical Physics: Session 84: Particle Physics Beyond the Standard Model, Les Houches, France, 1-26 Aug 2005.

[50] J. C. Price and P.F. (ed.) Michelson. 53, 1988. in proc. Int. Symp. on Experimental Gravitational Physics, ed. P.F. Michelson, Guangzhou, China (World Scientific, Singapore 1988).

[51] J. C. Long, A. B. Churnside, and J. C. Price. *hep-ph/0009062*, 2000.

[52] E. G. Adelberger, B. R. Heckel, and A. E. Nelson. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 53:77, 2003.

[53] Csaba Csaki, Joshua Erlich, and Timothy J. Hollowood. Quasi-localization of gravity by resonant modes. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5932–5935, 2000.

[54] Ruth Gregory, V. A. Rubakov, and Sergei M. Sibiryakov. Opening up extra dimensions at ultra-large scales. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5928–5931, 2000.

[55] Ruth Gregory, V. A. Rubakov, and Sergei M. Sibiryakov. Gravity and antigravity in a brane world with metastable gravitons. *Phys. Lett.*, B489:203–206, 2000.

[56] Walter D. Goldberger and Mark B. Wise. Phenomenology of a stabilized modulus. *Phys. Lett.*, B475:275–279, 2000.

[57] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra–galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173, 1929.

[58] A. Friedmann. On the possibility of a world with constant negative curvature of space. *Z. Phys.*, 21:326–332, 1924.

[59] S. Carroll. Spacetime And Geometry : An Introduction to General Relativity. *Addison Wesley*, 2004.

[60] R. R. Caldwell, Rahul Dave, and Paul J. Steinhardt. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1582–1585, 1998.

[61] P. J. E. Peebles and A. Vilenkin. Quintessential inflation. *Phys. Rev.*, D59:063505, 1999.

[62] Paul J. Steinhardt, Li-Min Wang, and Ivaylo Zlatev. Cosmological tracking solutions. *Phys. Rev.*, D59:123504, 1999.

[63] Michael Doran and Joerg Jaeckel. Loop corrections to scalar quintessence potentials. *Phys. Rev.*, D66:043519, 2002.

[64] Andrew R. Liddle, Paul Parsons, and John D. Barrow. Formalizing the slow roll approximation in inflation. *Phys. Rev.*, D50:7222–7232, 1994.

[65] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski, and Nevin N. Weinberg. Phantom Energy and Cosmic Doomsday. *Phys. Rev. Lett.*, 91:071301, 2003.

[66] Latham A. Boyle, Robert R. Caldwell, and Marc Kamionkowski. Spintessence! New models for dark matter and dark energy. *Phys. Lett.*, B545:17–22, 2002.

[67] James M. Cline, Sangyong Jeon, and Guy D. Moore. The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts. *Phys. Rev.*, D70:043543, 2004.

[68] Hao Wei, Rong-Gen Cai, and Ding-Fang Zeng. Hessence: A new view of quintom dark energy. *Class. Quant. Grav.*, 22:3189–3202, 2005.

[69] Neven Bilic, Gary B. Tupper, and Raoul D. Viollier. Dark matter, dark energy and the Chaplygin gas. 2002.

[70] Pierre Astier et al. The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M, Ω_Λ and w from the First Year Data Set. *Astron. Astrophys.*, 447:31–48, 2006.

[71] Ujjaini Alam, Varun Sahni, Tarun Deep Saini, and A. A. Starobinsky. Rejoinder to No Evidence of Dark Energy Metamorphosis, astro-ph/0404468. 2004.

[72] S. Nesseris and Leandros Perivolaropoulos. Comparison of the Legacy and Gold SnIa Dataset Constraints on Dark Energy Models. *Phys. Rev.*, D72:123519, 2005.

[73] W. J. G. de Blok and A. Bosma. H alpha rotation curves of Low Surface Brightness galaxies. *Astron. Astrophys.*, 385:816, 2002.

[74] Tetsuya Shiromizu, Kei-ichi Maeda, and Misao Sasaki. The Einstein equations on the 3-brane world. *Phys. Rev.*, D62:024012, 2000.

[75] A. Vilenkin. Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings. *Phys. Rev.*, D23:852–857, 1981.

[76] S. Deser, R. Jackiw, and Gerard 't Hooft. Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space. *Ann. Phys.*, 152:220, 1984.

[77] Petr Horava and Edward Witten. Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary. *Nucl. Phys.*, B475:94–114, 1996.

[78] Juan Martin Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.

[79] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998.

[80] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.

[81] Ignatios Antoniadis. A Possible new dimension at a few TeV. *Phys. Lett.*, B246:377–384, 1990.

[82] Ignatios Antoniadis, Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV. *Phys. Lett.*, B436:257–263, 1998.

[83] Merab Gogberashvili. Four dimensionality in non-compact Kaluza-Klein model. *Mod. Phys. Lett.*, A14:2025–2032, 1999.

[84] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. *Phys. Rev.*, D62:046008, 2000.

[85] G. R. Dvali and Mikhail A. Shifman. Domain walls in strongly coupled theories. *Phys. Lett.*, B396:64–69, 1997.

[86] Alex Kehagias and Kyriakos Tamvakis. Bulk Higgs with 4D gauge interactions. *Phys. Lett.*, B628:262–274, 2005.

[87] Hooman Davoudiasl, Ben Lillie, and Thomas G. Rizzo. Off-the-Wall Higgs in the Universal Randall-Sundrum Model. *JHEP*, 08:042, 2006.

[88] A. Kehagias and K. Tamvakis. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett.*, B504:38–46, 2001.

[89] A. Kehagias and K. Tamvakis. A self-tuning solution of the cosmological constant problem. *Mod. Phys. Lett.*, A17:1767–1774, 2002.

[90] Luis E. Mendes and Anupam Mazumdar. Brans-Dicke brane cosmology. *Phys. Lett.*, B501:249–256, 2001.

[91] L. Perivolaropoulos. Equation of state of oscillating Brans-Dicke scalar and extra dimensions. *Phys. Rev.*, D67:123516, 2003.

[92] K. Farakos and P. Pasipoularides. Gravity-induced instability and gauge field localization. *Phys. Lett.*, B621:224–232, 2005.

[93] K. Farakos and P. Pasipoularides. RS2-brane world scenario with a nonminimally coupled bulk scalar field. *Phys. Rev.*, D73:084012, 2006.

[94] C. Bogdanos, A. Dimitriadis, and K. Tamvakis. Brane models with a Ricci-coupled scalar field. *Phys. Rev.*, D74:045003, 2006.

[95] B. C. Xanthopoulos and T. E. Dialynas. Einstein gravity coupled to a massless conformal scalar field in arbitrary space-time dimensions. *J. Math. Phys.*, 33:1463–1471, 1992.

[96] Adam G. Riess et al. Type Ia Supernova Discoveries at z¿1 From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *Astrophys. J.*, 607:665–687, 2004.

[97] T. Padmanabhan. Cosmological constant: The weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320, 2003.

[98] Varun Sahni and Alexei A. Starobinsky. The Case for a Positive Cosmological Lambda-term. *Int. J. Mod. Phys.*, D9:373–444, 2000.

[99] S. Nesseris and Leandros Perivolaropoulos. Crossing the phantom divide: Theoretical implications and observational status. *JCAP*, 0701:018, 2007.

[100] G. R. Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. *Phys. Lett.*, B485:208–214, 2000.

[101] G. R. Dvali, Gregory Gabadadze, Marko Kolanovic, and F. Nitti. The power of brane-induced gravity. *Phys. Rev.*, D64:084004, 2001.

[102] David Langlois and Maria Rodriguez-Martinez. Brane cosmology with a bulk scalar field. *Phys. Rev.*, D64:123507, 2001.

[103] K. E. Kunze and M. A. Vazquez-Mozo. Quintessential brane cosmology. *Phys. Rev.*, D65:044002, 2002.

[104] Stephen C. Davis. Brane cosmology solutions with bulk scalar fields. *JHEP*, 03:058, 2002.

[105] K. Farakos and P. Pasipoularides. Gauss-Bonnet gravity, brane world models, and non-minimal coupling. *Phys. Rev.*, D75:024018, 2007.

[106] Nandinii Barbosa-Cendejas and Alfredo Herrera-Aguilar. Localization of 4D gravity on pure geometrical Thick branes. *Phys. Rev.*, D73:084022, 2006.

[107] Nandinii Barbosa-Cendejas and Alfredo Herrera-Aguilar. 4D gravity localized in non Z(2)-symmetric thick branes. *JHEP*, 10:101, 2005.

[108] C. Bogdanos, A. Dimitriadis, and K. Tamvakis. Brane cosmology with a non-minimally coupled bulk-scalar field. *Class. Quant. Grav.*, 24:3701–3712, 2007.

[109] Mariam Bouhmadi-Lopez and David Wands. Induced gravity with a non-minimally coupled scalar field on the brane. *Phys. Rev.*, D71:024010, 2005.

[110] E. Kiritsis, G. Kofinas, N. Tetradis, T. N. Tomaras, and V. Zarikas. Cosmological evolution with brane-bulk energy exchange. *JHEP*, 02:035, 2003.

[111] Ken-ichi Umezu et al. Observational constraints on accelerating brane cosmology with exchange between the bulk and brane. *Phys. Rev.*, D73:063527, 2006.

[112] C. Bogdanos and K. Tamvakis. Brane cosmological evolution with bulk matter. *Phys. Lett.*, B646:39–46, 2007.

[113] C. Bogdanos, A. Dimitriadis, and K. Tamvakis. Dark energy from bulk matter. *Phys. Rev.*, D75:087303, 2007.

[114] Rong-Gen Cai, Yun-gui Gong, and Bin Wang. Super-acceleration on the brane by energy flow from the bulk. *JCAP*, 0603:006, 2006.

[115] Pantelis S. Apostolopoulos and Nikolaos Tetradis. Late acceleration and w = -1 crossing in induced gravity. *Phys. Rev.*, D74:064021, 2006.

[116] E. Kiritsis, N. Tetradis, and T. N. Tomaras. Induced gravity on RS branes. *JHEP*, 03:019, 2002.

[117] Pantelis S. Apostolopoulos and Nikolaos Tetradis. Brane cosmological evolution with a general bulk matter configuration. *Phys. Rev.*, D71:043506, 2005.

[118] Pantelis S. Apostolopoulos and Nikolaos Tetradis. The generalized dark radiation and accelerated expansion in brane cosmology. *Phys. Lett.*, B633:409–414, 2006.

[119] Elias Kiritsis. Holography and brane-bulk energy exchange. *JCAP*, 0510:014, 2005.

[120] Eric V. Linder and Adrian Jenkins. Cosmic Structure and Dark Energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 346:573, 2003.

[121] Adam G. Riess et al. New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy. 2006.

[122] S. Nesseris and Leandros Perivolaropoulos. A comparison of cosmological models using recent supernova data. *Phys. Rev.*, D70:043531, 2004.

[123] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.

[124] Varun Sahni and Alexei Starobinsky. Reconstructing dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:2105–2132, 2006.

[125] Bo Feng, Xiu-Lian Wang, and Xin-Min Zhang. Dark Energy Constraints from the Cosmic Age and Supernova. *Phys. Lett.*, B607:35–41, 2005.

[126] C. Bogdanos, S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, and K. Tamvakis. Cosmic Acceleration Data and Bulk-Brane Energy Exchange. *Phys. Rev.*, D76:083514, 2007.

[127] Edward W. Kolb, S. Matarrese, and A. Riotto. On cosmic acceleration without dark energy. *New J. Phys.*, 8:322, 2006.

[128] Roy Maartens. Cosmological dynamics on the brane. *Phys. Rev.*, D62:084023, 2000.

[129] Kazuya Koyama and Jiro Soda. Evolution of cosmological perturbations in the brane world. *Phys. Rev.*, D62:123502, 2000.

[130] Takashi Nakamura and Takeshi Chiba. Determining the equation of state of the expanding universe: Inverse problem in cosmology. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 306:696–700, 1999.

[131] Chris Clarkson, Marina Cortes, and Bruce A. Bassett. Dynamical dark energy or simply cosmic curvature? *JCAP*, 0708:011, 2007.

[132] Saurabh Jha, Adam G. Riess, and Robert P. Kirshner. Improved Distances to Type Ia Supernovae with Multicolor Light Curve Shapes: MLCS2k2. *Astrophys. J.*, 659:122–148, 2007.

[133] Csaba Csaki, Joshua Erlich, and Timothy J. Hollowood. Graviton propagators, brane bending and bending of light in theories with quasi-localized gravity. *Phys. Lett.*, B481:107–113, 2000.

[134] Csaba Csaki, Joshua Erlich, Timothy J. Hollowood, and Yuri Shirman. Universal aspects of gravity localized on thick branes. *Nucl. Phys.*, B581:309–338, 2000.

[135] Sanjeev S. Seahra. Ringing the Randall-Sundrum braneworld. *Phys. Rev.*, D72:066002, 2005.

[136] Sanjeev S. Seahra, Chris Clarkson, and Roy Maartens. Delocalization of brane gravity by a bulk black hole. *Class. Quant. Grav.*, 22:L91–L102, 2005.

[137] Chris Clarkson and Sanjeev S. Seahra. Braneworld resonances. *Class. Quant. Grav.*, 22:3653–3688, 2005.

[138] G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati. Metastable gravitons and infinite volume extra dimensions. *Phys. Lett.*, B484:112–118, 2000.

[139] M. Shaposhnikov, P. Tinyakov, and K. Zuleta. Quasilocalized gravity without asymptotic flatness. *Phys. Rev.*, D70:104019, 2004.

[140] C. Bogdanos, A. Dimitriadis, and K. Tamvakis. Synergistic Gravity and the Role of Resonances in GRS- Inspired Braneworlds. *Class. Quant. Grav.*, 25:045008, 2008.

[141] Gregory Gabadadze, Luca Grisa, and Yanwen Shang. Resonance in asymmetric warped geometry. *JHEP*, 08:033, 2006.

[142] Ian I. Kogan, Stavros Mouslopoulos, Antonios Papazoglou, Graham G. Ross, and Jose Santiago. A three three-brane universe: New phenomenology for the new millennium? *Nucl. Phys.*, B584:313–328, 2000.

[143] Ian I. Kogan, Stavros Mouslopoulos, Antonios Papazoglou, and Graham G. Ross. Multi-brane worlds and modification of gravity at large scales. *Nucl. Phys.*, B595:225–249, 2001.

[144] Antonios Papazoglou. Brane-world multigravity. 2001.

[145] Antonio Padilla. Infra-red modification of gravity from asymmetric branes. *Class. Quant. Grav.*, 22:1087–1104, 2005.

[146] Christos Charmousis, Ruth Gregory, and Antonio Padilla. Stealth Acceleration and Modified Gravity. *JCAP*, 0710:006, 2007.

[147] Massimo Giovannini. Gravitating multidefects from higher dimensions. *Phys. Rev.*, D75:064023, 2007.

[148] Gia Dvali, Gregory Gabadadze, and M. Shifman. Diluting cosmological constant in infinite volume extra dimensions. *Phys. Rev.*, D67:044020, 2003.

[149] Csaba Csaki, Joshua Erlich, Christophe Grojean, and Timothy J. Hollowood. General properties of the self-tuning domain wall approach to the cosmological constant problem. *Nucl. Phys.*, B584:359–386, 2000.

[150] Jeremie Vinet and James M. Cline. Can codimension-two branes solve the cosmological constant problem? *Phys. Rev.*, D70:083514, 2004.

[151] Marco Peloso, Lorenzo Sorbo, and Gianmassimo Tasinato. Standard 4d gravity on a brane in six dimensional flux compactifications. *Phys. Rev.*, D73:104025, 2006.

[152] Y. Aghababaie et al. Warped brane worlds in six dimensional supergravity. *JHEP*, 09:037, 2003.

[153] C. P. Burgess. Supersymmetric large extra dimensions and the cosmological constant: An update. *Ann. Phys.*, 313:283–401, 2004.

[154] C. P. Burgess. Extra Dimensions and the Cosmological Constant Problem. *arXiv - 0708.0911*, 2007.

[155] James M. Cline, Julie Descheneau, Massimo Giovannini, and Jeremie Vinet. Cosmology of codimension-two braneworlds. *JHEP*, 06:048, 2003.

[156] Alex Kehagias. A conical tear drop as a vacuum-energy drain for the solution of the cosmological constant problem. *Phys. Lett.*, B600:133–141, 2004.

[157] V. P. Nair and S. Randjbar-Daemi. Nonsingular 4d-flat branes in six-dimensional supergravities. *JHEP*, 03:049, 2005.

[158] S. L. Parameswaran, S. Randjbar-Daemi, and A. Salvio. Stability and Negative Tensions in 6D Brane Worlds. *JHEP*, 01:051, 2008.

[159] S. Randjbar-Daemi and V. A. Rubakov. 4d-flat compactifications with brane vorticities. *JHEP*, 10:054, 2004.

[160] Hyun Min Lee and Antonios Papazoglou. Brane solutions of a spherical sigma model in six dimensions. *Nucl. Phys.*, B705:152–166, 2005.

[161] Eleftherios Papantonopoulos, Antonios Papazoglou, and Vassilios Zamarias. Induced cosmology on a regularized brane in six- dimensional flux compactification. *arXiv - 0707.1396*, 2007.

[162] Tsutomu Kobayashi and Yu-ichi Takamizu. Hybrid compactifications and brane gravity in six dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 25, 2007.

[163] Ignacio Navarro. Spheres, deficit angles and the cosmological constant. *Class. Quant. Grav.*, 20:3603–3612, 2003.

[164] C. Bogdanos, A. Kehagias, and K. Tamvakis. Pseudo-3-Branes in a Curved 6D Bulk. *Phys. Lett.*, B656:112–118, 2007.

[165] W. A. Hiscock. Exact Gravitational Field of a String. *Phys. Rev.*, D31:3288–3290, 1985.

[166] III Gott, J. Richard. Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions. *Astrophys. J.*, 288:422–427, 1985.

[167] Igor R. Klebanov and Arvind Murugan. Gauge / gravity duality and warped resolved conifold. *JHEP*, 03:042, 2007.

[168] Nemanja Kaloper. A new dimension hidden in the shadow of a wall. *Phys. Lett.*, B652:92–96, 2007.

[169] Nemanja Kaloper and Derrick Kiley. Charting the Landscape of Modified Gra
JHEP, 05:045, 2007.

[170] Murray Gell-Mann and Barton Zwiebach. CURLING UP TWO SPATIAL DIM
SIONS WITH SU(1,1) / U(1). *Phys. Lett.*, B147:111–114, 1984.

[171] Abdus Salam and E. Sezgin. Chiral Compactification on Minkowski x S**2 of
Einstein-Maxwell Supergravity in Six-Dimensions. *Phys. Lett.*, B147:47, 1984.

[172] Raman Sundrum. Compactification for a three-brane universe. *Phys.*
D59:085010, 1999.

[173] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Extra Space-Time Dimensions: Tow
a Solution to the Cosmological Constant Problem. *Phys. Lett.*, B125:139, 1983

[174] A. Kehagias. On non-compact compactifications with brane worlds. *hep-th/9911*
1999.

[175] A. Kehagias. Exponential and power-law hierarchies from supergravity. *Phys. L*
B469:123–128, 1999.

[176] L. Pilo, R. Rattazzi, and A. Zaffaroni. The fate of the radion in models
metastable graviton. *JHEP*, 07:056, 2000.

[177] Ishwaree P. Neupane. Gravitational potential correction with Gauss-Bonnet in
action. *Phys. Lett.*, B512:137–145, 2001.

[169] Nemanja Kaloper and Derrick Kiley. Charting the Landscape of Modified Gravity. *JHEP*, 05:045, 2007.

[170] Murray Gell-Mann and Barton Zwiebach. CURLING UP TWO SPATIAL DIMENSIONS WITH SU(1,1) / U(1). *Phys. Lett.*, B147:111–114, 1984.

[171] Abdus Salam and E. Sezgin. Chiral Compactification on Minkowski x S**2 of N=2 Einstein-Maxwell Supergravity in Six-Dimensions. *Phys. Lett.*, B147:47, 1984.

[172] Raman Sundrum. Compactification for a three-brane universe. *Phys. Rev.*, D59:085010, 1999.

[173] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem. *Phys. Lett.*, B125:139, 1983.

[174] A. Kehagias. On non-compact compactifications with brane worlds. *hep-th/9911134*, 1999.

[175] A. Kehagias. Exponential and power-law hierarchies from supergravity. *Phys. Lett.*, B469:123–128, 1999.

[176] L. Pilo, R. Rattazzi, and A. Zaffaroni. The fate of the radion in models with metastable graviton. *JHEP*, 07:056, 2000.

[177] Ishwaree P. Neupane. Gravitational potential correction with Gauss-Bonnet interaction. *Phys. Lett.*, B512:137–145, 2001.